Analysis 1 und 2 *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, Sonderprogramm TUM twoinone, 4.5.2011 – 30.9.2011

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Aussagen, Mengen, Abbildungen

Wahre und falsche Aussagen. Die Mathematik befasst sich mit Aussagen, von denen man wissen will, ob sie wahr oder falsch sind. Ziel der Mathematik ist es, wahre Aussagen über vermutete Zusammenhänge zu machen. Eine Aussage ist "etwas, was entweder wahr oder falsch ist". Je nachdem, was zutrifft, ordnen wir ihr den Wahrheitswert W oder F zu. Beispiel:

4 ist größer als 3. (Wahrheitswert W.)

Es gibt eine größte natürliche Zahl. (Wahrheitswert F.)

Mengen. Die Gegenstände, Begriffe und Objekte, mit denen in der Mathematik hantiert wird, existieren im Denken. Sie können unmittelbare Entsprechungen im Alltagsbereich haben (etwa die Zahl 2), aber auch sehr weit von sinnlichen Erfahrungen entfernt sein. Über das Verhältnis von Mathematik und Realität lässt sich viel sagen und kontrovers diskutieren. Das wollen wir hier nicht tun. Mathematische Objekte, wie immer man sie auch interpretieren will, werden seit geraumer Zeit in der Sprache der Mengenlehre formuliert. G. Cantor hat im Jahre 1895 den Begriff einer Menge so definiert:

> Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten (welche "Elemente der Menge" heißen) zu einem Ganzen.

Ist M eine Menge, so schreiben wir

$$x \in M \qquad (\text{“}x \text{ ist Element von } M\text{”}) \ ,$$

falls x Element von M ist, andernfalls

$$x \notin M \qquad (\text{“}x \text{ ist nicht Element von } M\text{”}) \ .$$

Eine Menge lässt sich z.B. dadurch angeben, dass man ihre Elemente einzeln aufschreibt. Beispiel: $\{1, 3, 5, 7\}$. Es kann aber sein, dass man das nicht will oder kann (z.B. weil die Menge unendlich viele Elemente hat), etwa bei

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}\,. \tag{1.2}$$

Mit den Punkten unterstellt man, dass es "klar ist, wie es weitergeht". Eine andere Möglichkeit, neue Mengen zu erhalten, ist die Bildung von Teilmengen bereits bekannter Mengen. Eine Menge N heißt Teilmenge einer Menge M, geschrieben

$$N \subset M \ ,$$

wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Man kann Teilmengen dadurch angeben, dass man eine "definierende Eigenschaft" formuliert. Beispiel:

$$G = \{n : n \in \mathbb{N}, \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2m\} \tag{1.3}$$

definiert die Menge der geraden Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{N}$. Eine solche Beschreibung hat die Form

$$N = \{x : x \in M, \ A(x) \text{ ist wahr}\} \tag{1.4}$$

wobei $A(x)$ eine Aussage ist, die die Variable x enthält.

Zwei Mengen M und N heißen gleich, geschrieben $M = N$, wenn sowohl $N \subset M$ als auch $M \subset N$ gelten, das heißt, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Beispiel:

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 5, 7, 3\} = \{1, 3, 5, 1, 7, 5\}\,.$$

Bei einer so expliziten Auflistung wird man normalerweise kein Element doppelt angeben. Bei der Beschreibung der rationalen Zahlen durch

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\} \tag{1.5}$$

tauchen aber alle rationalen Zahlen mehrfach (und zwar unendlich oft) auf; es wäre sehr unzweckmäßig, würde man nur solche Beschreibungen von Mengen zulassen, in denen jedes Element genau einmal auftaucht.

Falls $N \subset M$ und $N \neq M$, so gibt es (mindestens) ein Element von M, welches nicht in N liegt. Wir sagen dann, dass N eine echte Teilmenge von M ist, und schreiben

$$N \subsetneqq M\,.$$

Sind M und N Mengen, so definieren wir

$$M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\} \qquad \text{(Vereinigung)}\,,$$

$$M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\} \qquad \text{(Durchschnitt oder Schnitt)}\,.$$

Der Begriff des Durchschnitts zweier Mengen legt nahe, die leere Menge

$$\emptyset\,,$$

welche kein Element enthält, ebenfalls als Menge zuzulassen. Dadurch erreicht man, daß der Durchschnitt zweier Mengen immer eine Menge ist. Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn

$$M \cap N = \emptyset\,,$$

das heißt, wenn M und N kein gemeinsames Element haben. Die leere Menge spielt unter den Mengen eine ähnlich zentrale Rolle wie die Null bei den Zahlen.

Sind M und N Mengen, so definieren wir das Komplement von N in M durch

$$M \setminus N = \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}\,.$$

Sätze und Beweise. Verknüpfung von Aussagen. Ein mathematischer Satz enthält Voraussetzungen und Behauptungen. Er ist wahr, wenn die Behauptungen wahr sind, falls die Voraussetzungen wahr sind. Beispiel eines Satzes:

Voraussetzung: n ist eine durch 6 teilbare natürliche Zahl.
Behauptung: n ist durch 3 teilbar.

Dieser Satz ist wahr, da jede Zahl, die durch 6 teilbar ist, auch durch 3 teilbar ist. Noch ein Beispiel:

Voraussetzung: wie eben
Behauptung: n ist durch 5 teilbar.

Dieser Satz ist falsch, da es eine Zahl gibt, die durch 6, aber nicht durch 5 teilbar ist. (Es gibt sogar unendlich viele solcher Zahlen, ebenso gibt es unendlich viele Zahlen, die sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind; dieser Sachverhalt ist aber unerheblich für die Frage, ob der Satz wahr ist.)

Ein Beweis besteht darin, durch "schrittweises logisches Schließen" von den Voraussetzungen zu den Behauptungen zu gelangen. Für den ersten der beiden oben angeführten Sätze kann das so aussehen:

> Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige durch 6 teilbare Zahl. Es gibt dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 6m$. Da $6m = 3 \cdot 2m$ ist, ist $n = 3 \cdot 2m$, also ist n durch 3 teilbar.

Beim Hantieren mit Aussagen wird eine Reihe von logischen Verknüpfungen verwendet. Der Wahrheitswert der durch die Verknüpfung erzeugten Aussage ist durch den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen eindeutig festgelegt. Man kann dies in Form einer sogenannten Wahrheitstafel aufschreiben. Für uns sind folgende Verknüpfungen wesentlich:

1. Negation einer Aussage A ("nicht A", $\neg$ A):

A	$\neg$ A
W	F
F	W

2. Konjunktion zweier Aussagen A und B ("A und B", A $\wedge$ B):

A	B	A $\wedge$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

"A und B" ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

3. Adjunktion zweier Aussagen A und B ("A oder B", A $\vee$ B):

A	B	A $\vee$ B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

"A oder B" ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. "Oder" bedeutet in der Mathematik immer das einschließende "oder". Meint man "entweder – oder, aber nicht beides", so muß man das explizit sagen.

4. Implikation ("Aus A folgt B", "A impliziert B", A $\Rightarrow$ B):

A	B	A $\Rightarrow$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Beispiel: Die Aussage

"Für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $n < 3$ folgt $n < 5$"

will man als wahr ansehen. Das erklärt die Zeilen 1,3 und 4 in der Tabelle (setze $n = 2, 4, 6$). Man beachte: Ist A falsch, so ist A $\Rightarrow$ B wahr, egal ob B wahr oder falsch ist. Aus einer falschen Aussage läßt sich also alles folgern! Zur Notation: Statt A $\Rightarrow$ B schreibt man auch B $\Leftarrow$ A.

Mathematische Sätze sind Aussagen der Form "A $\Rightarrow$ B". A heißt die Voraussetzung, B die Folgerung (oder Behauptung) der Aussage A $\Rightarrow$ B. Ist A $\Rightarrow$ B wahr, so sagt man auch: A ist hinreichende Bedingung für B, B ist notwendige Bedingung für A.

5. Äquivalenz ("A gilt genau dann, wenn B gilt", "A und B sind äquivalent", A $\Leftrightarrow$ B):

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Durch Aufstellen der Wahrheitstafeln sieht man: "A $\Leftrightarrow$ B" ist wahr genau dann, wenn "A $\Rightarrow$ B" und "B $\Rightarrow$ A" wahr sind, oder:

$$(A \Leftrightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))\,. \tag{1.6}$$

Es gilt nämlich:

A	B	A $\Leftrightarrow$ B	A $\Rightarrow$ B	B $\Rightarrow$ A	(A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A)	(1.6)
W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W

Die Aussage (1.6) ist wahr, egal welche Wahrheitswerte A und B haben. Eine solche Aussage nennt man Tautologie. Regeln für das äquivalente Umformen verknüpfter Aussagen haben die Form von Tautologien. Neben (1.6) ist ein weiteres Beispiel

$$(\neg(A \wedge B)) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((\neg A) \vee (\neg B)) \tag{1.7}$$

In Worten: Die Negation von "A und B" erhält man, indem man A und B einzeln negiert und die negierten Aussagen anschließend mit "oder" verknüpft. Beispiel: Die Negation von

"$n \in \mathbb{N}$ ist gerade und durch 7 teilbar"

ist

"$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade oder nicht durch 7 teilbar",

aber nicht

"$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade und nicht durch 7 teilbar".

Dass (1.7) tatsächlich eine Tautologie ist, prüft man wie für (1.6) nach, indem man die zugehörigen Wahrheitstafeln vergleicht.

Quantoren. Sie liefern weitere Bausteine zur Formulierung mathematischer Aussagen. Es handelt sich dabei um den Existenzquantor

$$\exists \qquad (\text{"es gibt"})$$

und den Allquantor

$$\forall \qquad (\text{"für alle"})\,.$$

Beispiel: Die Aussage

"es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als 1000"

ist wahr. Man kann sie auch schreiben als

"$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1000$"

oder noch kürzer als

"$\exists n \in \mathbb{N}$: $n > 1000$" .

$\exists$ und $\forall$ gehen bei Negation ineinander über. Die Negation der eben formulierten Aussage ist

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq 1000$", "$\forall n \in \mathbb{N}$: $n \leq 1000$" .

Eine mehr umgangssprachliche Formulierung wäre: Alle natürlichen Zahlen sind kleiner oder gleich 1000. Zwei Beispiele für eine falsche Bildung der Negation sind

"es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 1000$" ,

"alle natürlichen Zahlen sind größer als 1000" .

Mit "es gibt" ist in der Mathematik immer gemeint "es gibt mindestens ein". Will man ausdrücken, dass es auch nicht mehr als eins geben kann, sagt man "es gibt genau ein", Symbol "$\exists|$".
Aussagen können mehrere Quantoren enthalten. Beispiel:

"$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}$: $p > n$ und p Primzahl"

In Worten: "Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl p, welche größer als n und Primzahl ist". Die Negation dieser Aussage ist

"$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}$: $p \leq n$ oder p ist nicht Primzahl", oder

"es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für alle natürlichen Zahlen p gilt, daß p kleiner als n oder gleich n oder dass p nicht Primzahl ist". Man könnte die ursprüngliche Aussage auch so schreiben:

"$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p > n$: p ist Primzahl".

Allerdings muss dann zwischen Schreiber und Leser (oder Sprecher und Zuhörer) klar sein, dass für p nur natürliche Zahlen in Frage kommen. Entsprechend lässt sich die Negation schreiben als

"$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p > n$: p ist nicht Primzahl".

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich. Die Aussage

"$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $p > n$ und p Primzahl"

ist eine andere (im Gegensatz zur ursprünglichen Aussage falsche) Aussage. Noch ein Beispiel:

"In jeder deutschen Stadt gibt es einen Bürger, der ein Haus besitzt"

ist eine (wohl wahre) Aussage, während

"es gibt einen Bürger, der in jeder deutschen Stadt ein Haus besitzt"

eine andere (vermutlich falsche) Aussage ist.

Rechenregeln für Mengen. Indexmengen. Seien M, N, P Mengen. Dann gilt: Aus $M \subset N$ und $N \subset P$ folgt $M \subset P$. (Beweis: Ist $x \in M$, so ist $x \in N$ wegen $M \subset N$ und weiter $x \in P$ wegen $N \subset P$.) Hieraus folgt: Ist $M = N$ und $N = P$, so ist $M = P$. Für die Vereinigung gilt das Assoziativgesetz

$$(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)\,. \tag{1.8}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} x \in (M \cup N) \cup P \quad &\Leftrightarrow \quad x \in M \cup N \text{ oder } x \in P \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in M \text{ oder } x \in N) \text{ oder } x \in P \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \text{ oder } (x \in N \text{ oder } x \in P) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \text{ oder } x \in N \cup P \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \cup (N \cup P)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurde eine Tautologie benutzt, nämlich das Assoziativgesetz für die logische Verknüpfung "oder". (Dieses wird wie gehabt durch Vergleich der Wahrheitstafeln bewiesen.) Analog zeigt man das Assoziativgesetz für den Durchschnitt

$$(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P) .$$

Man kann daher die Klammern weglassen und einfach

$$M \cup N \cup P , \quad M \cap N \cap P$$

schreiben. Weiter gelten die Kommutativgesetze

$$M \cup N = N \cup M , \quad M \cap N = N \cap M .$$

Sei nun I eine Menge, sei für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben. In diesem Kontext heißt i der Index von M_i und I eine Indexmenge. Wir definieren

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x : \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\} , \tag{1.10}$$

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x : \text{ für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\} . \tag{1.11}$$

Beispiel: Sei $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei für $n \in I$

$$M_n = \{\frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z}\} .$$

Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{Q} .$$

Ein häufig vorkommender Spezialfall ist $I = \{1, \ldots, n\} = \{i : i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$. Dann schreibt man statt

$$\bigcup_{i \in I} M_i$$

auch

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i .$$

Die in (1.10) und (1.11) eingeführten Begriffe der Vereinigung bzw. des Durchschnitts bezüglich einer Indexmenge stimmen im Fall $I = \{1, 2\}$ mit den anfangs definierten Begriffen der Vereinigung bzw. des Durchschnitts zweier Mengen überein (Beweis weggelassen.) Als weitere Rechenregeln gelten die Distributivgesetze

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P) , \quad M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P) .$$

Für Vereinigung bzw. Durchschnitt bezüglich Indexmengen haben sie die Form

$$N \cup \bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} N \cup M_i , \quad N \cap \bigcup_{i \in I} M_i = \bigcup_{i \in I} N \cap M_i .$$

Eine Vereinigung $M \cup N$ zweier Mengen heißt disjunkt, wenn M und N disjunkt sind, also $M \cap N = \emptyset$. Eine Vereinigung $\cup_{i \in I} M_i$ heißt disjunkt, wenn alle beteiligten Mengen paarweise disjunkt sind, das heißt wenn $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Mengen von Mengen. Die Elemente einer Menge können ohne weiteres selbst wieder Mengen sein. Beispiel:

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\} = \{\{1,n\} : n \in \mathbb{N},\, 2 \leq n \leq 4\}$$

ist eine Menge mit drei Elementen, die selbst zweielementige Mengen sind. Anderes Beispiel: $\{\emptyset\}$ ist nicht etwa die leere Menge, sondern die Menge, welche als einziges Element die leere Menge enthält. Ist M eine Menge, so heißt die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M,

$$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\} \tag{1.12}$$

die Potenzmenge von M. Wir verabreden, dass $\emptyset \subset M$ gilt für jede Menge M, also $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. (Die Negation von

$$\forall x \in \emptyset \text{ gilt } x \in M$$

liefert die Aussage

$$\exists x \in \emptyset \text{ mit } x \notin M \ ,$$

welche wir als falsch ansehen wollen.) Die Potenzmengenbildung lässt sich wiederholen: So sind auch

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))\,, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))\,, \quad \ldots$$

Mengen. Beispiel: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\{n, n+1\} \subset \mathbb{N}\,, \quad \text{also} \quad \{n, n+1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,,$$

und

$$\{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})\,, \quad \text{also} \quad \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,.$$

In der Definition von Cantor wird unterstellt, dass sich für jede Menge M und jedes mathematische Objekt x eindeutig sagen lässt, ob x Element von M ist oder nicht, dass also "$x \in M$" eine Aussage ist, die entweder wahr oder falsch ist. Es hat sich aber sehr bald herausgestellt, daß der schrankenlose Umgang mit dem Mengenbegriff damit nicht verträglich ist. So ist es z.B. zunächst nicht ausgeschlossen, dass eine Menge sich selbst als Element enthält (obwohl das zugegebenermaßen etwas merkwürdig klingt). Daraus hat B. Russell das folgende Beispiel konstruiert:

> Wir nennen eine Menge M normal, falls sie sich nicht selbst als Element enthält, also falls $M \notin M$ gilt. Sei nun
>
> $$\mathcal{M} = \{M : M \text{ ist eine normale Menge}\}\,.$$
>
> Frage: Ist $\mathcal{M}$ normal? Falls ja, so gilt $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ nach Definition des Begriffs 'normal', aber andererseits $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ nach Definition von $\mathcal{M}$. Falls nein, so gilt $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ nach Definition des Begriffs 'nicht normal', aber andererseits $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ nach Definition von $\mathcal{M}$.

Der Versuch, solche sogenannte Antinomien (es gibt noch mehr davon) in den Griff zu kriegen, führte zu schwierigen Grundlagenproblemen der Mathematik und hat in der Tat zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine Grundlagenkrise der Mathematik ausgelöst. Wir werden uns aber mit diesen Problemen nicht weiter beschäftigen.

Geordnete Paare. Das Produkt zweier Mengen. Bilden wir eine Menge $\{x, y\}$ aus zwei Elementen x und y, so ist durch den Mengenbegriff keine Reihenfolge von x und y festgelegt, es gilt $\{x, y\} = \{y, x\}$. Will man nun ein Paar aus x und y bilden und dabei x als erstes und y als zweites Element auszeichnen, so spricht man von einem geordneten Paar, geschrieben

$$(x, y)\,.$$

Es ist dann verabredungsgemäß $(x, y) = (u, v)$ genau dann, wenn $x = u$ und $y = v$ ist, also insbesondere $(x, y) \neq (y, x)$ wenn $x \neq y$. Seien nun M und N zwei Mengen. Wir definieren das Produkt (oder die Produktmenge) $M \times N$ durch

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M,\, y \in N\}\,, \tag{1.13}$$

also als Menge aller geordneten Paare, für die die erste Komponente ein Element von M und die zweite Komponente ein Element von N ist. Die Mengen M und N heißen die Faktoren von $M \times N$. Stellt man sich $\mathbb{R}$ als die reelle Zahlengerade vor, so kann man sich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als die (zweidimensionale) Ebene vorstellen, und darin $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. (Die mit diesem Beispiel verbundene Vorstellung eines rechten Winkels zwischen den Faktoren gehört aber nicht zur allgemeinen Definition (1.13)!) Wenn man will, kann man den Begriff des geordneten Paares auf den Mengenbegriff zurückführen, indem man setzt

$$(x, y) = \{\{x\}\,,\, \{x, y\}\}\,.$$

Relationen, Abbildungen, Funktionen. Sind M, N Mengen, so heißt jede Teilmenge R von $M \times N$ eine Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch xRy. Beispiel: Die "Diagonale"

$$R = \{(x, x) : x \in M\}$$

definiert die Gleichheitsrelation in $M \times M$, es gilt offensichtlich xRy genau dann, wenn $x = y$. Sei nun $R \subset M \times N$ eine Relation mit der Eigenschaft

$$\text{Zu jedem } x \in M \text{ gibt es genau ein } y \in N \text{ mit } xRy. \tag{1.14}$$

In diesem Fall spricht man davon, dass durch R eine Abbildung f von M nach N definiert wird, und schreibt

$$f : M \to N\,.$$

Ist $x \in M$, so bezeichnet man das gemäß (1.14) eindeutig bestimmte $y \in N$ mit $f(x)$ und nennt $f(x)$ das Bild von x unter f, oder auch den Wert von f an der Stelle x. Beispiele: Durch $f(n) = n + 1$ wird eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, ebenso durch $f(n) = n^2$. Hingegen wird durch $f(n) = n - 1$ keine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (da $f(0) = -1 \notin \mathbb{N}$), wohl aber eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert. Charakteristisch für diese Beispiele ist, dass sich eine ziemlich einfach formulierbare und ausführbare Vorschrift angeben lässt, wie man das Bild $f(x)$ aus x erhält. Das muss aber nicht so sein. So ist etwa die Vorschrift

$$f(n) = \text{Anzahl der Ziffern (im Dezimalsystem) des größten Primfaktors von } n$$

einfach formulierbar und liefert eine wohldefinierte Abbildung $f : \mathbb{N}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{N}$, aber den Wert $f(n)$ zu berechnen ist für große n nicht so einfach. Darüber hinaus sieht man, dass die meisten Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sich nicht durch eine einfache Vorschrift ausdrücken lassen. So ist die Anzahl der Abbildungen, deren Vorschrift sich eindeutig auf 100 Seiten niederlegen lässt, endlich (wenn man unterstellt, dass man nur eine gewisse endliche Anzahl verschiedener Zeichen zur Beschreibung verwendet und jede Seite nur eine gewisse endliche Anzahl von Zeichen fasst), aber es gibt unendlich viele verschiedene Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Auch wenn Abbildungen – wie geschehen – formal auf Relationen, also Teilmengen von Produktmengen zurückgeführt werden, so ist es doch in vielen Fällen am zweckmäßigsten, eine Abbildung $f : M \to N$ durch Angabe einer Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto f(x)$$

festzulegen. Ihre definierende Relation R läßt sich zurückgewinnen durch die Darstellung

$$R = \{(x, f(x)) : x \in M\} .$$

Man bezeichnet R auch als den Graph von f.

Im Zusammenhang mit dem Abbildungsbegriff führt man eine Reihe von weiteren Bezeichnungen ein. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

- M heißt der Definitionsbereich von f, N heißt der Wertebereich (oder Bildbereich) von f.
- Die durch
  $$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$$
  definierte Teilmenge $f(M)$ von N heißt das Bild von M unter f. Ist $M_0 \subset M$, so setzen wir
  $$f(M_0) = \{f(x) : x \in M_0\} .$$
  Offensichtlich gilt $f(\emptyset) = \emptyset$.
- Ist $M_0 \subset M$, so wird durch
  $$f_0(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in M_0$$
  eine Abbildung $f_0 : M_0 \to N$ definiert. f_0 heißt die Restriktion von f auf M_0, geschrieben auch $f|M_0$.
- Ist $N_0 \subset N$, so definieren wir
  $$f^{-1}(N_0) = \{x : x \in M,\, f(x) \in N_0\}$$
  und bezeichnen $f^{-1}(N_0)$ als die Urbildmenge von N_0 unter der Abbildung f. Im Spezialfall einer einpunktigen Menge $N_0 = \{y\}$, $y \in N$, schreiben wir auch
  $$f^{-1}(y) = \{x : x \in M,\, f(x) = y\} ,$$
  und nennen jedes $x \in f^{-1}(y)$ ein Urbild von y. Offensichtlich gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Beispiele:

- Ist M Menge, so heißt die durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ definierte Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identität auf M oder die identische Abbildung von M nach M. Ihre Restriktion auf eine Teilmenge M_0 von M ist dann die Identität auf M_0.

- Durch $f(x) = |x|$ wird eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert. Es gilt $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, $f|\mathbb{N}$ ist die Identität auf $\mathbb{N}$, $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$.

- Ist M eine Menge und $M_0 \subset M$, so wird durch $f(N) = N \cap M_0$ eine Abbildung $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ definiert, welche im Falle $M_0 = M$ die Identität auf $\mathcal{P}(M)$ ist.

- Ist M eine Menge, so wird durch $f(x) = \{x\}$ eine Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ definiert. Das Bild $f(M)$ von M unter f besteht dann aus allen einelementigen Teilmengen von M.

Statt des Begriffs "Abbildung" verwendet man auch die Begriffe "Funktion", "Operator" oder "Funktional". Ihre formale Bedeutung ist identisch (es handelt sich um Relationen mit der Eigenschaft (1.14)); dass und wann diese alternativen Begriffe verwendet werden, hängt hauptsächlich mit der historischen Entwicklung der einzelnen Teildisziplinen der Mathematik zusammen. In dieser Vorlesung werden wir hauptsächlich den Begriff "Funktion" verwenden.

Für Bild- und Urbildmengen gelten ebenfalls eine Reihe von Rechenregeln. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Sind $A, B \subset M$, so gilt

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,, \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)\,.$$

Sind $C, D \subset N$, so gilt

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)\,, \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\,.$$

Wir beweisen $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A) \cup f(B) &= \{y : y \in f(A) \text{ oder } y \in f(B)\} \\ &= \{y : (\exists x \in A \text{ mit } y = f(x)) \text{ oder } (\exists x \in B \text{ mit } y = f(x))\} \\ &= \{y : \exists x \in A \cup B \text{ mit } y = f(x)\} \\ &= f(A \cup B)\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

- surjektiv, wenn $f(M) = N$. Äquivalent dazu ist: Für alle $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

- injektiv, wenn jedes $y \in N$ höchstens ein Urbild hat. Äquivalent dazu ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ beliebig mit $x_1 \neq x_2$, so muss auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gelten. Ebenfalls äquivalent ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$, so muß $x_1 = x_2$ gelten.

- bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Beispiele:

- Die durch $f(n) = n + 1$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv (0 hat kein Urbild). Die durch dieselbe Vorschrift definierte Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv.

- Die durch $f(n) = n^2$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv; die durch dieselbe Vorschrift definierte Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so hat jedes $y \in N$ genau ein Urbild $x \in M$. Durch

$$f^{-1}(y) = \text{ dasjenige } x \in M, \text{ für welches } f(x) = y$$

wird in diesem Fall also eine Abbildung $f^{-1} : N \to M$ definiert, welche die Umkehrabbildung von f heißt. Die Abbildung f^{-1} ist ebenfalls bijektiv. Beispiel: Ist $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$, so ist $f^{-1}(n) = n - 1$.

Zwei Abbildungen $f_1, f_2 : M \to N$ heißen gleich, wenn $f_1(x) = f_2(x)$ gilt für alle $x \in M$.

Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen, so wird durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

eine Abbildung $g \circ f : M \to P$ definiert, welche die Komposition von f und g heißt. (Man beachte: Zuerst wird f, dann g ausgeführt.) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv. Dasselbe gilt, wenn man "injektiv" durch "surjektiv" oder "bijektiv" ersetzt. Ist $M = P$, so sind sowohl $g \circ f : M \to M$ als auch $f \circ g : N \to N$ definiert; falls außerdem $M = N$, können sie gleich sein, müssen es aber nicht. Beispiel: $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$, $g(n) = n + 2$, dann ist $(g \circ f)(n) = n^2 + 2$ und $(f \circ g)(n) = (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$.

Ist $f : M \to N$ bijektiv und $f^{-1} : N \to M$ die Umkehrabbildung, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M\,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N\,.$$

Direkte Beweise und Widerspruchsbeweise. Ein Beweis der Wahrheit des Satzes (oder kürzer: "ein Beweis des Satzes")

$$A \Rightarrow B$$

kann dadurch geführt werden, daß man eine Kette von wahren Implikationen

$$A \Rightarrow C_1\,, \quad C_1 \Rightarrow C_2\,, \quad \ldots\,, \quad C_{n-1} \Rightarrow C_n\,, \quad C_n \Rightarrow B$$

findet. So etwas nennt man einen "direkten Beweis". Äquivalent dazu (siehe Übungsaufgabe) ist der Beweis der Aussage

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

durch Auffinden einer Kette von wahren Implikationen

$$\neg B \Rightarrow D_1\,, \quad D_1 \Rightarrow D_2\,, \quad \ldots\,, \quad D_{m-1} \Rightarrow D_m\,, \quad D_m \Rightarrow \neg A\,.$$

Ein solches Vorgehen nennt man "Kontraposition". Eine dritte Variante ist der sogenannte Widerspruchsbeweis. Dieser läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass A und ¬ B nicht gleichzeitig wahr sein können. Zu diesem Zweck zeigt man zwei Ketten von wahren Implikationen, an deren Anfang die Aussage A ∧ ¬ B und an deren Enden eine weitere Aussage C bzw. deren Gegenteil ¬ C steht,

$$A \wedge (\neg B) \Rightarrow E_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow E_k \Rightarrow C\,,$$

$$A \wedge (\neg B) \Rightarrow F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_l \Rightarrow \neg C\,.$$

Man hat dann gezeigt, daß die Aussage

$$A \wedge (\neg B) \quad \Rightarrow \quad C \wedge (\neg C)$$

wahr ist. Da aber C ∧ (¬ C) immer falsch ist (egal was C ist), muß die Aussage A ∧ (¬ B) falsch sein, also muß deren Negation

$$\neg(A \wedge (\neg B)) = (\neg A) \vee B$$

wahr sein. Da die Aussagen (¬ A) ∨ B und A ⇒ B äquivalent sind, ist der Satz "A ⇒ B" damit bewiesen.

Beispiel: Der Beweis von Euklid für den Satz

$$\sqrt{2} \text{ ist irrational.} \tag{1.16}$$

Hier fällt zunächst auf, dass keine Voraussetzung explizit genannt ist. Implizit wird aber unterstellt, dass die üblichen Rechenregeln für $\mathbb{Q}$ gelten; sie übernehmen die Rolle der Voraussetzung A. Die Aussage (1.16) entspricht der Behauptung B. Der Beweis geht so:

> Sei $\sqrt{2}$ rational (es gelte also ¬ B). Dann gibt es Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = p/q$. Nach Auskürzen des Bruchs erhalten wir Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = r/s$, und für diese Zahlen gilt
>
> r und s sind teilerfremd. (Aussage C)
>
> Es folgt $2s^2 = r^2$, also ist 2 ein Teiler von r^2 und damit auch von r, also gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit $r = 2t$. Es folgt weiter $2s^2 = 4t^2$, also $s^2 = 2t^2$, also ist 2 auch ein Teiler von s und damit gilt
>
> r und s sind nicht teilerfremd. (Aussage ¬ C)
>
> Wir haben "einen Widerspruch hergestellt". Also ist wie oben beschrieben der behauptete Satz (1.16) wahr.

2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

So wie wir sie uns vorstellen, sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Menge mit einem "Anfang"

$$0 \in \mathbb{N} . \tag{2.1}$$

Der Zählprozess wird beschrieben durch eine Funktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, genannt Nachfolgerfunktion, mit den Eigenschaften

$$0 \notin S(\mathbb{N}) . \tag{2.2}$$

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist injektiv.} \tag{2.3}$$

$$\text{Ist } M \subset \mathbb{N} \text{ und gelten } 0 \in M,\ S(M) \subset M, \text{ so ist } M = \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Zur Interpretation: Eigenschaft (2.2) drückt aus, dass 0 der Anfang ist. Man kann aus (2.2) – (2.4) schließen, dass durch sukzessive Nachfolgerbildung immer neue Zahlen erzeugt werden und dass dadurch außerdem alle Zahlen erfasst werden.

Axiom 2.1 *Es existieren eine Menge* $\mathbb{N}$ *mit einem Element* $0 \in \mathbb{N}$ *sowie eine Funktion* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, so dass die Eigenschaften (2.2) – (2.4) erfüllt sind.*

Wir kehren zur gewohnten Schreibweise zurück, indem wir setzen

$$1 = S(0) , \quad 2 = S(1) , \quad 3 = S(2) , \quad 4 = S(3) , \dots \tag{2.5}$$

Die Zahl n ist also diejenige Zahl, die entsteht, wenn wir die Abbildung

$$S^n = \underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ mal}}$$

auf 0 anwenden, $n = S^n(0)$.

Man kann die arithmetischen Operationen auf die Bildung von Nachfolgern zurückführen, etwa für die Addition: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$n + 0 = n , \tag{2.6}$$

für $n, k \in \mathbb{N}$

$$n + S(k) = S(n + k) . \tag{2.7}$$

Man kann dann die anderen arithmetischen Operationen definieren und – unter Zuhilfenahme von (2.2) - (2.4) – die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetz usw.) beweisen. Das wollen wir hier nicht tun. Wir wollen aber ein dabei wesentlich benötigtes Beweisprinzip erläutern.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. "Vollständige Induktion" ist eine Methode, um Aussagen zu beweisen, die sich auf alle natürlichen Zahlen beziehen. Das geht folgendermaßen: Sei A(n) eine Aussage, die $n \in \mathbb{N}$ als Variable enthält.

1. Man findet ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und beweist, daß A(n_0) wahr ist. ("Induktionsverankerung".)

2. Man beweist, daß aus der Gültigkeit von A(n) auch die Gültigkeit von A($n + 1$) folgt. ("Induktionsschritt")

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion besagt: Hat man diese beiden Schritte erfolgreich ausgeführt, so hat man damit bewiesen

A(n) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Die Richtigkeit dieses Beweisprinzips folgt aus der Eigenschaft (2.4):

Satz 2.2 *Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Die Aussage $A(n_0)$ sei wahr, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sei die Aussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr. Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq n_0$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall $n_0 = 0$. Sei

$$M = \{n : n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}(n) \text{ ist wahr}\}\,. \tag{2.8}$$

Dann hat M die Eigenschaft (2.4), also gilt $M = \mathbb{N}$. Zum Beweis des allgemeinen Falls betrachten wir die Aussage $\mathrm{A}'(n) = \mathrm{A}(n + n_0)$. Dann sind $\mathrm{A}'(0)$ und die Implikation $\mathrm{A}'(n) \Rightarrow \mathrm{A}'(n+1)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem eben Bewiesenen folgt, daß $\mathrm{A}'(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$, das ist aber gerade die Behauptung. □

Wir wenden das Beweisprinzip der vollständigen Induktion an. Zunächst zur Notation: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, so schreiben wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n\,, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n\,, \tag{2.9}$$

und verabreden die Konvention

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0\,, \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1\,, \qquad \text{falls } m > n\,. \tag{2.10}$$

Satz 2.3 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{2.11}$$

Beweis: Durch vollständige Induktion. Die Formel (2.11) entspricht der Behauptung A(n). Wir setzen $n_0 = 1$. Induktionsanfang: Es ist

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}\,,$$

also ist A(1) wahr. Wir führen den Induktionsschritt aus: Sei A(n) wahr, es gelte also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,, \tag{2.12}$$

also ist $\mathrm{A}(n+1)$ wahr. (Beim mittleren Gleichheitszeichen wurde verwendet, dass $\mathrm{A}(n)$ gilt.) Nach Induktionsprinzip ist also $A(n)$ wahr für $n \geq 1$. Für $n = 0$ gilt (2.11) gemäß Konvention (2.10). $\square$

Die axiomatische Methode. Ist $1+1 = 2$ und wenn ja, warum? In der Mathematik hat sich seit einiger Zeit die sogenannte axiomatische Methode weltweit durchgesetzt. Dabei geht man folgendermaßen vor. Gewisse Grundaussagen werden einfach für wahr erklärt, indem man sie als **Axiome** bezeichnet. Die Wahrheit weiterer Aussagen wird dadurch festgestellt, daß man sie aus den Axiomen und aus schon als wahr erkannten Aussagen beweist. Die Wahrheit – im Sinne der Mathematik – eines mathematischen Satzes ist daher immer zu verstehen als bezogen auf ein explizit zu nennendes (oder implizit gemeintes) Axiomensystem. Der mathematische Wahrheitsbegriff ist also zunächst vollkommen relativ, da jeder Mathematiker die Freiheit hat, beliebige Axiomensysteme als Ausgangspunkt festzulegen. Es ist in der Tat so, dass je nach Gegenstand unterschiedliche Axiomensysteme sinnvoll sind; diese brauchen durchaus nicht miteinander vereinbar zu sein. Auf der anderen Seite gibt es mathematische Strukturen, etwa Zahlbereiche wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, den Begriff des Vektorraums, den Begriff des metrischen Raums oder den Begriff eines Graphen (= Gebilde mit Ecken und Kanten), die, mit einer fest umrissenen und allgemein anerkannten Bedeutung versehen, eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen. Auch solche Begriffe werden axiomatisch formuliert oder auf Axiome zurückgeführt. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. So kann man anstelle von Axiom 2.1 sehr wohl auch andere Axiomensysteme formulieren als Grundlage für $\mathbb{N}$ und hat das auch getan. Die Frage, welches Axiomensystem nach welchen Kriterien auch immer man bevorzugen sollte, ist für manche Mathematiker mehr, für andere weniger interessant; im Falle von $\mathbb{N}$ etwa ist sie sicher zweitrangig, verglichen mit der Wichtigkeit von $\mathbb{N}$ als Objekt und Werkzeug mathematischer Untersuchungen. Beispielsweise kann man $\mathbb{N}$ auf den Mengenbegriff zurückführen, indem man die Zahlen folgendermaßen als Mengen definiert (nach John von Neumann)

$$0 = \emptyset\,, \quad 1 = \{\emptyset\}\,, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,, \ldots \tag{2.13}$$

mit der Nachfolgerfunktion

$$S(n) = n \cup \{n\}\,. \tag{2.14}$$

Axiom 2.1 wird dann zu einem Satz, der mit Hilfe von Axiomen und Sätzen der Mengenlehre (u.a. dem Axiom, dass eine unendliche Menge existiert) bewiesen wird. Die Definition (2.14) ist insofern aufschlussreich, als der ganze Reichtum der Phänomene der Zahlenwelt aus einem einzigen mathematischen Objekt konstruiert wird, und es sich bei diesem Objekt auch noch um die leere Menge handelt. Andererseits: Verwendet man 2.1 für die Untersuchung der Eigenschaften von $\mathbb{N}$, also für den Beweis von Sätzen, die von natürlichen Zahlen handeln, so ist es gleichgültig, ob man 2.1 als Axiom oder als Folgerung aus Axiomen der Mengenlehre betrachtet.

3 Die reellen Zahlen

Setzt man die Existenz von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften aus Axiom 2.1 voraus, so lassen sich daraus sukzessive die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ herleiten. Dieser Konstruktionsprozess ist einerseits ganz interessant, und man kann ihn dazu benutzen, einige grundlegende mathematische Sachverhalte kennenzulernen; andererseits ist er aber auch recht langwierig und für das Verständnis der modernen Analysis nicht so wesentlich, wir behandeln ihn daher nicht im Detail.

Die Alternative ist, die reellen Zahlen axiomatisch als Menge mit gewissen Eigenschaften einzuführen. Dieses Vorgehen geht auf David Hilbert zurück.

Die axiomatisch verlangten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ zerfallen in drei Gruppen. Die erste Gruppe enthält die sogenannten Körpereigenschaften: Es gibt eine Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper ist, das heißt:

(1) Für die Addition gilt das Assoziativgesetz

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \qquad \text{für alle } x,y,z \in \mathbb{R}\,, \tag{3.1}$$

das Kommutativgesetz

$$x+y = y+x\,, \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit

$$x+0 = x\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.3}$$

und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein Element von $\mathbb{R}$, bezeichnet mit $(-x)$, mit

$$x+(-x) = 0\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.4}$$

(das additiv inverse Element).

(2) Für die Multiplikation gilt das Assoziativgesetz

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,, \qquad \text{für alle } x,y,z \in \mathbb{R}\,, \tag{3.5}$$

das Kommutativgesetz

$$x \cdot y = y \cdot x\,, \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.6}$$

es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$ und

$$1 \cdot x = x\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.7}$$

und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert genau ein Element in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit x^{-1}, mit

$$x \cdot x^{-1} = 1\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.8}$$

(das multiplikativ inverse Element).

(3) Es gilt das Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,, \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\,. \tag{3.9}$$

Die zweite Gruppe bezieht sich auf die Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$. Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$ (die "positiven Zahlen") mit den Eigenschaften

(4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden drei Aussagen wahr:

$$x \in P\,, \quad x = 0\,, \quad -x \in P\,. \tag{3.10}$$

(5) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Wir definieren auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vier Relationen, indem wir setzen

$$x > y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x - y \in P\,, \tag{3.11}$$

$$x \geq y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x > y \text{ oder } x = y\,, \tag{3.12}$$

$$x < y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad y - x \in P\,, \tag{3.13}$$

$$x \leq y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x < y \text{ oder } x = y\,. \tag{3.14}$$

Die bisher formulierten Eigenschaften treffen auch auf $\mathbb{Q}$ zu. Um die Existenz der irrationalen Zahlen zu erzwingen, brauchen wir noch eine weitere Eigenschaft.

Definition 3.1 (Obere und untere Schranke, Supremum und Infimum)
Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt

- *obere Schranke für M, wenn $y \leq x$ für alle $y \in M$,*
- *untere Schranke für M, wenn $y \geq x$ für alle $y \in M$.*

M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es eine obere (untere) Schranke für M gibt. Ein $z \in \mathbb{R}$ heißt

- *Supremum von M, wenn z eine obere Schranke für M ist mit $z \leq y$ für alle oberen Schranken y von M,*
- *Infimum von M, wenn z eine untere Schranke für M ist mit $z \geq y$ für alle unteren Schranken y von M.*

Weiter unten werden wir diese Definition erläutern.

Die noch fehlende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist:

$$\boxed{\text{Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von } \mathbb{R} \text{ besitzt ein Supremum.}} \tag{3.15}$$

Diese Eigenschaft wird auch als **Supremumsaxiom** bezeichnet.

Axiom 3.2 *Es existieren eine Menge $\mathbb{R}$, eine Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ und Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften* (1) *bis* (5) *sowie (3.15).*

Die reellen Zahlen werden durch die in 3.2 genannten Eigenschaften eindeutig charakterisiert. Man kann beweisen (wir tun das hier nicht), dass die reellen Zahlen

$$0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ \ldots$$

"dasselbe sind wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$", d.h. eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ bilden, welche die in Axiom 2.1 verlangten Eigenschaften hat.

Folgerungen aus den Körpereigenschaften. Wir verwenden Subtraktion und Division, indem wir definieren

$$x - y = x + (-y)\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \qquad \frac{x}{y} = xy^{-1}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \neq 0\,. \tag{3.16}$$

Aus den Axiomen folgen unmittelbar die Rechenregeln

$$-(-x) = x\,, \quad x \cdot 0 = 0\,, \quad (-x)y = -(xy)\,, \quad -(x+y) = -x - y\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.17}$$

$$(x^{-1})^{-1} = x\,, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{3.18}$$

$$xy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oder } y = 0\,. \tag{3.19}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $x = b - a$ die eindeutige Lösung der Gleichung $a + x = b$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist $x = b/a$ die eindeutige Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$. Aus dem Assoziativgesetz folgt (wie schon im vorigen Kapitel bemerkt) die Unabhängigkeit von der Klammerung bei endlichen Summen und Produkten und damit die Wohldefiniertheit von

$$\sum_{k=m}^{n} x_k\,, \quad \prod_{k=m}^{n} x_k\,, \quad x_k \in \mathbb{R} \text{ für } m \leq k \leq n\,. \tag{3.20}$$

Aus dem Kommutativgesetz folgt die Unabhängigkeit von der Reihenfolge bei endlichen Summen und Produkten. Dies wird formalisiert über den Begriff der Permutation. Eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$; sie beschreibt eine Umordnung der Reihenfolge. Man kann eine Permutation in der Form $(i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_k = \sigma(k)$ aufschreiben. Es gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\,, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_{i_k}\,, \quad x_k \in \mathbb{R}\,, \, 1 \leq k \leq n\,. \tag{3.21}$$

Aus (3.21) folgt als Spezialfall die Vertauschbarkeit der Summenzeichen bei Doppelsummen und -produkten,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\,, \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{ij}\,, \tag{3.22}$$

für alle $x_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Das Distributivgesetz für endliche Summen lautet

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j\,. \tag{3.23}$$

Die Formeln (3.20) – (3.23) werden mit vollständiger Induktion bewiesen. Wir definieren die ganzzahligen Potenzen durch

$$x^0 = 1\,, \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ mal}}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.24}$$

$$x^{-n} = (x^{-1})^n\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0,\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.25}$$

Aus den Eigenschaften der Multiplikation folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ (bei negativen Exponenten wird natürlich $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ verlangt)

$$x^n x^m = x^{n+m}\,, \quad (x^n)^m = x^{nm}\,, \quad x^n y^n = (xy)^n\,. \tag{3.26}$$

Ferner wird "n Fakultät" definiert durch

$$0! = 1\,, \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.27}$$

Definition 3.3 (Binomialkoeffizient) *Für $k, n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}\,, \textit{falls } k \geq 1. \tag{3.28}$$

Direkt aus der Definition folgt

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ falls } k > n\,, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\,, \quad 0 \leq k \leq n\,. \tag{3.29}$$

Lemma 3.4 *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\,. \tag{3.30}$$

Beweis: Siehe Übungsaufgabe. □

Satz 3.5 (Binomische Formel) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,. \tag{3.31}$$

Beweis: Mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = 1 = (x+y)^0\,. \tag{3.32}$$

Die Behauptung sei richtig für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen ihre Richtigkeit für $n+1$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0}y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\,. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

□

Folgerungen aus den Ordnungseigenschaften. Es gilt offensichtlich $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.6 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x > 0 \text{ und } y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0\,, \qquad (3.34)$$

$$x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 0\,. \qquad (3.35)$$

Beweis: Falls $y > 0$, folgt (3.34) direkt aus Eigenschaft (5), falls $y = 0$, so gilt $x + y = x > 0$. Falls $x = y = 0$, so ist auch $x + y = 0$. □

Lemma 3.7 *Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \text{ und } x' \leq y' \quad \Rightarrow \quad x + x' < y + y'\,, \qquad (3.36)$$

$$x \leq y \text{ und } x' \leq y' \quad \Rightarrow \quad x + x' \leq y + y'\,. \qquad (3.37)$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3.6, angewendet auf $y - x$ und $y' - x'$. □

Lemma 3.8 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y\,. \qquad (3.38)$$

Beweis: Aus $x \neq y$ folgt $x - y \neq 0$, also $x - y \in P$ oder $y - x \in P$. Damit haben wir die Kontraposition von (3.38) bewiesen, nämlich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x < y \text{ oder } y < x\,. \qquad (3.39)$$

□

Lemma 3.9 *Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \text{ und } y < z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.40}$$

$$x \le y \text{ und } y < z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.41}$$

$$x < y \text{ und } y \le z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.42}$$

$$x \le y \text{ und } y \le z \quad \Rightarrow \quad x \le z\,. \tag{3.43}$$

Beweis: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $y - x \in P$ und $z - y \in P$, also auch

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in P\,,$$

und damit $x < z$. Die anderen Aussagen ergeben sich aus Betrachtung der Fälle $x = y$ bzw. $y = z$. □

Definition 3.10 *Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M (d.h. $R \subset M \times M$) heißt Ordnungsrelation, wenn gilt*

(i) *xRx für alle $x \in M$ (Reflexivität),*

(ii) *aus xRy und yRx folgt $x = y$ (Antisymmetrie),*

(iii) *aus xRy und yRz folgt xRz (Transitivität).*

Die oben bewiesenen Eigenschaften zeigen, dass "$\le$" und "$\ge$" Ordnungsrelationen auf $\mathbb{R}$ definieren. Es gilt außerdem:

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $x \le y$ oder $y \le x$.

Diese Eigenschaft wird von einer Ordnungsrelation gemäß Definition 3.10 nicht verlangt, es kann also für gewisse $x, y \in M$ sehr wohl sein, dass weder xRy noch yRx gilt. In den beiden folgenden Beispielen ist das so.

Beispiel 3.11

1. Sei M Menge. Durch "$\subset$" wird eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$ definiert.
2. Sei M Menge. Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen, so definieren wir

$$f \le g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le g(x) \text{ für alle } x \in M\,. \tag{3.44}$$

   Durch (3.44) wird eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathrm{Abb}(M;\mathbb{R})$ aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$ definiert.

□

Lemma 3.12 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) *Aus $x \ge 0$ und $y \ge 0$ folgt $xy \ge 0$.*

(ii) *Es ist $xy > 0$ genau dann, wenn*

$$(x > 0 \text{ und } y > 0) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } y < 0).$$

Beweis: Zu (i): Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $xy > 0$ nach Eigenschaft (5). Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist auch $xy = 0$. □

Lemma 3.13 *Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \text{ und } z > 0 \quad \Rightarrow \quad xz < yz\,, \tag{3.45}$$

$$x \le y \text{ und } z \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xz \le yz\,, \tag{3.46}$$

$$x < y \text{ und } z < 0 \quad \Rightarrow \quad xz > yz\,, \tag{3.47}$$

$$x \le y \text{ und } z \le 0 \quad \Rightarrow \quad xz \ge yz\,. \tag{3.48}$$

Beweis: Nur die erste Ungleichung. Aus $x < y$ folgt $0 < y - x$, also $0 < (y-x)z = yz - xz$, also $xz < yz$. □

Lemma 3.14 *Es gilt $x^2 \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Aus Lemma 3.12 folgt: Ist $x \ge 0$, so ist $x^2 = x \cdot x \ge 0$; ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$. □

Folgerung 3.15 *Es ist $1 > 0$.*

Beweis: $1 = 1^2 \ge 0$, und aus $1 \ne 0$ folgt $1 > 0$. □

Lemma 3.16 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$, aus $x < 0$ folgt $x^{-1} < 0$.*

Beweis: Sei $x > 0$. Dann ist $(x^{-1})^2 > 0$, also $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$. Der andere Fall wird analog bewiesen. □

Lemma 3.17 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.*

Beweis: Es ist $0 < xy$, also auch $0 < (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Es folgt weiter

$$y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}\,.$$

□

Definition 3.18 (Betrag, Maximum und Minimum zweier Zahlen)
Ist $x \in \mathbb{R}$, so heißt

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \ge 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

der Betrag von x. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x\,, & x \ge y\,, \\ y\,, & y > x\,, \end{cases} \qquad \min\{x, y\} = \begin{cases} x\,, & x \le y\,, \\ y\,, & y < x\,. \end{cases} \tag{3.50}$$

Es gilt offensichtlich

$$\min\{x,y\} \le x \le \max\{x,y\}\,, \quad \min\{x,y\} \le y \le \max\{x,y\}\,, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.51}$$

$$|x| = \max\{x,-x\} = |-x|\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.52}$$

Das Maximum endlich vieler reller Zahlen wird per Induktion auf den Fall zweier Zahlen zurückgeführt,

$$\max\{x_1,\ldots,x_n\} = \max\{\max\{x_1,\ldots,x_{n-1}\},x_n\}\,. \tag{3.53}$$

Lemma 3.19 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x| \ge 0\,, \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,, \tag{3.54}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|\,, \tag{3.55}$$

$$|x+y| \le |x| + |y|\,. \tag{3.56}$$

*Die Ungleichung (3.56) heißt **Dreiecksungleichung**[1].*

Beweis: Zu (3.54): Aus der Definition folgt $|x| \ge 0$ und $|0| = 0$. Ist $x \ne 0$, so ist $|x| = \max\{x,-x\} > 0$.
Zu (3.55): Man unterscheidet die verschiedenen Fälle im Vorzeichen von x und y. Ist etwa $x \ge 0$ und $y \le 0$, so ist $xy \le 0$ und

$$|xy| = -(xy) = x(-y) = |x| \cdot |y|\,,$$

analog für die anderen Fälle.
Zu (3.56): Es gilt

$$x + y \le |x| + |y|\,, \quad -(x+y) = (-x) + (-y) \le |x| + |y|\,,$$

also

$$|x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\} \le |x| + |y|\,.$$

□

Aus (3.55) erhält man wegen

$$|x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$$

die Regel

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,, \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \ne 0\,. \tag{3.57}$$

Satz 3.20 (Bernoullische Ungleichung) *Es gilt*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \tag{3.58}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \ge -1$.

[1] Warum, werden wir sehen, wenn wir die komplexen Zahlen bzw. den mehrdimensionalen Raum behandeln.

Beweis: Sei $x \geq -1$ beliebig. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass (3.58) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 0$ klar. Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\
&\qquad \text{(richtig nach Induktionsvoraussetzung und wegen } x \geq -1) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \,.
\end{aligned}$$

□

Eigenschaften von Supremum und Infimum. Wir erinnern an Definition 3.1 und an das Supremumsaxiom (3.15). Zur Veranschaulichung der Begriffe in 3.1 betrachten wir die Menge

$$M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \tag{3.59}$$

Es gilt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ ist obere Schranke von M, 1 ist Supremum von M, und $1 \in M$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$ ist untere Schranke von M, 0 ist Infimum von M (Beweis weiter unten), aber $0 \notin M$.

Lemma 3.21 *Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. Dann hat M höchstens ein Supremum.*

Beweis: Sind z_1, z_2 Suprema von M, so gilt $z_1 \leq z_2$ (da z_2 obere Schranke von M) und $z_2 \leq z_1$ (da z_1 obere Schranke von M), also $z_1 = z_2$. □

Es macht daher Sinn, von "dem Supremum" von M zu sprechen, wir bezeichnen es mit

$$\sup M \,. \tag{3.60}$$

Definition 3.22 (Maximum, Minimum)
Sei $M \subset \mathbb{R}$. Gilt $\sup M \in M$, so heißt die Zahl $\sup M$ das Maximum von M. Gilt $\inf M \in M$, so heißt die Zahl $\inf M$ das Minimum von M.

In Beispiel (3.59) ist also 1 Maximum von M, aber 0 nicht Minimum von M. In der Tat hat diese Menge M zwar ein Infimum, aber kein Minimum. Eine endliche nichtleere Menge hingegen hat immer ein Maximum und ein Minimum, welches durch (3.52) bzw. die analoge Formel fürs Minimum erhalten werden kann (hier ohne Beweis).

Ein weiteres Beispiel: Die Menge

$$M = \{x : x \in \mathbb{R},\, x^2 \leq 2\}$$

ist nichtleer, nach oben beschränkt (z.B. ist 2 obere Schranke), und hat daher ein eindeutig bestimmtes Supremum $\sup M \in \mathbb{R}$. (Diese reelle Zahl werden wir später als $\sqrt{2}$ identifizieren.)

Wir vereinbaren

$$\sup M = +\infty \,, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \tag{3.61}$$

$$\sup \emptyset = -\infty \,. \tag{3.62}$$

Damit haben wir für alle $M \subset \mathbb{R}$

$$\sup M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \,. \tag{3.63}$$

Wir setzen die auf $\mathbb{R}$ bereits definierte Ordnungsrelation "$\leq$" fort auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, indem wir setzen

$$-\infty < x < +\infty\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.64}$$

Man prüft leicht nach, dass wir auf diese Weise tatsächlich eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ erhalten. Es gilt

Lemma 3.23 *Sind $M, N \subset \mathbb{R}$ mit $M \subset N$, so gilt*

$$\sup M \leq \sup N\,. \tag{3.65}$$

Beweis: Falls $\sup N \in \mathbb{R}$, so ist $\sup N$ obere Schranke für N und wegen $M \subset N$ auch obere Schranke für M, also gilt (3.65) nach Definition von $\sup M$ (falls $M = \emptyset$, verwenden wir (3.62)). Falls $\sup N = -\infty$, so ist $N = \emptyset$, also auch $M = \emptyset$, also auch $\sup M = -\infty$. Falls $\sup N = +\infty$, ist (3.65) erfüllt, egal was M ist. □

Auch das Infimum einer Menge ist eindeutig bestimmt, falls es existiert, wie man analog zu Lemma 3.21 beweist. Wir bezeichnen es mit

$$\inf M\,, \tag{3.66}$$

und vereinbaren

$$\inf M = -\infty\,, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach unten beschränkt ist,} \tag{3.67}$$

$$\inf \emptyset = +\infty\,. \tag{3.68}$$

Analog zu Lemma 3.23 gilt für das Infimum, falls $M \subset N$,

$$\inf M \geq \inf N\,.$$

Ist $M \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, so definieren wir die Menge $aM \subset \mathbb{R}$ durch

$$aM = \{ax : x \in M\}\,. \tag{3.69}$$

Für $a = -1$ schreiben wir auch $-M$ statt $(-1)M$. Wir vereinbaren weiter

$$-(+\infty) = -\infty\,, \quad -(-\infty) = +\infty\,. \tag{3.70}$$

Satz 3.24 *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\inf M = -\sup(-M)\,. \tag{3.71}$$

Beweis: Ist $M = \emptyset$, so steht auf beiden Seiten $+\infty$. Sei nun $M \neq \emptyset$. Wir behaupten, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \text{ ist untere Schranke von } M \quad \Leftrightarrow \quad -x \text{ ist obere Schranke von } -M\,. \tag{3.72}$$

In der Tat gilt

$$x \leq y \;\; \forall\, y \in M \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -y \;\; \forall\, y \in M \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq z \;\; \forall\, z \in -M\,.$$

Wegen (3.72) ist M nach unten beschränkt genau dann wenn $-M$ nach oben beschränkt ist. Falls M nicht nach unten beschränkt ist, steht also $-\infty$ auf beiden Seiten von (3.71). Ist M nach unten beschränkt, so hat $-M$ nach Supremumsaxiom ein Supremum $\sup(-M) \in \mathbb{R}$, und wegen (3.72) ist $-\sup(-M)$ eine untere Schranke von M. Ist x eine beliebige untere Schranke von M, so gilt wegen (3.72) auch $\sup(-M) \leq -x$, also auch $-\sup(-M) \geq x$, und damit folgt (3.71) wegen der Eindeutigkeit des Infimums. □

Satz 3.25 $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt, d.h. für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > x$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Dann hat $\mathbb{N}$ nach Supremumsaxiom ein Supremum $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Wegen $s-1 < s$ ist $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Es folgt weiter $s < n+1 \in \mathbb{N}$, also ist auch s keine obere Schranke. Widerspruch. □

Folgerung 3.26 *Für alle* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *mit* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\,. \tag{3.73}$$

Beweis: Wende Satz 3.25 an mit $x = \varepsilon^{-1}$. □

Aus Folgerung 3.26 können wir schließen, dass

$$\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0\,.$$

Folgerung 3.27 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $nx > y$. *("$\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.")*

Beweis: Falls $y > 0$, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y/x$. Andernfalls $n = 1$. □

Folgerung 3.28 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 1$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $x^n > y$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

4 Folgen

Definition 4.1 (Folge)
Sei M Menge. Eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M heißt Folge in M. Eine Folge in $\mathbb{R}$ heißt auch reelle Folge oder reelle Zahlenfolge.

Beispiel: Die Vorschrift $f(n) = 2n$ definiert die Folge der geraden Zahlen $0, 2, 4, \ldots$.

In der Analysis wird eine Folge in der Regel nicht in der Form

$$f : \mathbb{N} \to M$$

aufgeschrieben, sondern mit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.1}$$

oder so ähnlich bezeichnet. Mit (4.1) ist diejenige Folge gemeint, die durch die Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) = x_n$ definiert wird. Das Element $x_n \in M$ heißt dann das n-te Glied der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oft kommt es vor, dass die Nummerierung der Folgenglieder nicht bei 0 anfängt, sondern bei 1 oder irgendeiner anderen ganzen Zahl. Die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

wird durch die Vorschrift $f(n) = 1/n$ erzeugt mit $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Um eine Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$ als Anfang festzulegen, können wir schreiben

$$(x_n)_{n\geq n_0} \tag{4.2}$$

und meinen damit die Abbildung $f : N \to M$, $N = \{n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}$. In Erweiterung von Definition 4.1 spricht man auch in diesem Fall von Folgen.

Weitere Beispiele für Folgen sind:

$$x_n = c \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad c \in \mathbb{R} \text{ fest,} \qquad \text{(konstante Folge)} \tag{4.3}$$

$$x_n = n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.4}$$

$$x_n = x^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad x \in \mathbb{R} \text{ fest.} \tag{4.5}$$

Definition 4.2 (Grenzwert einer Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (oder Limes) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } n \geq n_0. \tag{4.6}$$

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert a hat, so sagt man auch: "(x_n) konvergiert gegen a" oder "(x_n) ist konvergent". Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, so sagt man: "(x_n) divergiert" oder "(x_n) ist divergent".

Beispiel 4.3

1. Die konstante Folge $x_n = c$ konvergiert gegen c: Es gilt $|x_n - c| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wir können daher für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahl $n_0 = 1$ wählen, und (4.6) ist erfüllt.

2. Die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert gegen 0: Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass
$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \,.$$
Es gilt dann für alle $n \geq n_0$
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \,,$$
damit erfüllt 0 die in Definition 4.2 verlangte Bedingung.

3. Die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert: Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Grenzwert der Folge. Für $\varepsilon = 1$ finden wir daher gemäß Definition ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt
$$2 = |x_{n_0+1} - x_{n_0}| \leq |x_{n_0+1} - a| + |x_{n_0} - a| < 1 + 1 = 2 \,,$$
ein Widerspruch. Also kann es ein solches a nicht geben.

Eine zu Definition 4.2 äquivalente Definition des Grenzwerts erhält man, wenn man in (4.6) "$<$" durch "$\leq$" ersetzt, es also heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0.$$

Satz 4.4 *Jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Seien a und b Grenzwerte von (x_n) mit $a \neq b$. Wir definieren
$$\varepsilon = \frac{|b - a|}{2} \,.$$
Dann ist $\varepsilon > 0$. Wähle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_n - a| < \varepsilon \,, \qquad \text{für alle } n \geq n_1 \,, \tag{4.7}$$
$$|x_n - b| < \varepsilon \,, \qquad \text{für alle } n \geq n_2 \,. \tag{4.8}$$
Dies ist möglich, da a und b Grenzwerte sind. Für ein beliebiges $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ folgt nun
$$|a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |b - a| \,.$$
Wir haben einen Widerspruch erhalten. Also kann $a \neq b$ nicht richtig sein. □

Satz 4.4 macht es sinnvoll, von "dem Grenzwert" einer Folge zu sprechen. Ist eine Folge (x_n) konvergent, so bezeichnet
$$\lim_{n\to\infty} x_n \tag{4.9}$$
ihren Grenzwert. Konvergiert (x_n) gegen a, so gilt also
$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \,. \tag{4.10}$$
Wir schreiben auch
$$x_n \to a \,.$$
Die Gleichung (4.10) beinhaltet zwei Aussagen: Erstens, der Grenzwert von (x_n) existiert, und zweitens, er ist gleich a.

Definition 4.5 (Beschränkte Menge, beschränkte Folge)
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Lemma 4.6 *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $|x| \leq C$ für alle $x \in M$.*

Beweis: Es gilt $|x| \leq C$ für alle $x \in M$ genau dann, wenn C obere und $-C$ untere Schranke für M ist. □

Satz 4.7 *Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei (x_n) reelle Folge mit $x_n \to a$. Wähle ein n_0 mit $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Setze

$$C = \max\{|x_0|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |a| + 1\}\,,$$

dann gilt $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Eine beschränkte Folge braucht nicht konvergent zu sein, wie man am Beispiel $x_n = (-1)^n$ sieht.

Satz 4.8 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$. Dann ist auch die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b\,. \tag{4.11}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{für alle } n \geq n_1\,,$$

sowie $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{für alle } n \geq n_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Die Aussage von Satz 4.8 läßt sich auch als Rechenregel

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{4.12}$$

schreiben. Sie ist allerdings nur anwendbar, wenn beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1\,.$$

Satz 4.9 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$. Dann ist auch die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab\,. \tag{4.13}$$

Beweis: Siehe Übung. □

Aus Satz 4.9 folgt: Ist $c \in \mathbb{R}$ und (x_n) reelle Folge mit $x_n \to a$, so gilt $cx_n \to ca$.

Satz 4.10 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge mit $x_n \to a$, $a \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}\,. \tag{4.14}$$

Beweis: Siehe Übung. □

Folgerung 4.11 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$, es gelte $b \neq 0$. Dann ist auch die Folge $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\,. \tag{4.15}$$

Beweis: Aus Satz 4.9 und Satz 4.10 folgt

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\,.$$

□

Die vorstehenden Sätze lassen sich zur Berechnung von Grenzwerten algebraischer Ausdrücke verwenden, z.B. gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0^k = 0\,,$$

und

$$\frac{18n^3 - 4n^2 + 8}{7n^3 + 4n} = \frac{18 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^3}}{7 + \frac{4}{n^2}} \to \frac{18}{7}\,.$$

Satz 4.12 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$, es gelte $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a \leq b$.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $a > b$. Wir wählen n_0 so, dass

$$|x_n - a| < \frac{a-b}{2}\,, \quad |y_n - b| < \frac{a-b}{2}\,,$$

gilt für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für alle solche n, dass

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= (y_n - b) + (b - a) + (a - x_n) \\ &< \frac{a-b}{2} + (b-a) + \frac{a-b}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $x_n \leq y_n$. □

Definition 4.13 (Monoton wachsende Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. (x_n) heißt monoton wachsend, wenn $x_n \le x_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. (x_n) heißt streng monoton wachsend, wenn $x_n < x_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. (x_n) heißt (streng) monoton fallend, wenn $(-x_n)$ (streng) monoton wachsend ist. (x_n) heißt (streng) monoton, wenn x_n (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Zur Notation: Statt

$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

schreiben wir auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \,.$$

Satz 4.14 *Jede beschränkte monoton wachsende reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \,. \tag{4.16}$$

Jede beschränkte monoton fallende reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \,. \tag{4.17}$$

Beweis: Sei $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß Übungsaufgabe können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le a \,.$$

Da (x_n) monoton wachsend ist, gilt für alle $n \ge n_0$

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le a \,,$$

also folgt $x_n \to a$ und damit (4.16). Zum Beweis von (4.17) wenden wir (4.16) auf die Folge $(-x_n)$ an und erhalten

$$\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

woraus (4.17) folgt. □

Beispiel 4.15
Wir können die Quadratwurzel einer positiven Zahl als Limes einer monoton fallenden Iteration auf folgende Weise erhalten. Sei $b > 0$. Wir betrachten die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) \,, \quad x_0 = b \,, \tag{4.18}$$

definierte reelle Folge. Es gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Beweis mit Induktion), und

$$\begin{aligned} x_n^2 - b &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right)^2 - b = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2b + \frac{b^2}{x_{n-1}^2}\right) - b \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2b + \frac{b^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{b}{x_{n-1}}\right)^2 \\ &\ge 0 \,, \end{aligned}$$

also $x_n^2 \geq b$ für alle $n \geq 1$, und weiter

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - b) \geq 0$$

für alle $n \geq 1$, also ist (x_n) ab dem zweiten Folgenglied x_1 monoton fallend. Nach Satz 4.14 konvergiert (x_n) gegen $a = \inf x_n$. Aus Satz 4.12 folgt $a \geq 0$ und $a^2 \geq b > 0$, also $a > 0$. Gehen wir auf beiden Seiten von (4.18) zum Grenzwert über, so folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right) .$$

Es folgt

$$a^2 = b \,. \tag{4.19}$$

Ist $c \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl mit $c^2 = b$ und $c > 0$, so folgt wegen

$$0 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c)$$

auch $a - c = 0$, also $a = c$. Wir haben also bewiesen, dass die Iteration (4.18) gegen die eindeutig bestimmte positive Zahl a mit $a^2 = b$ konvergiert.

Definition 4.16 (Quadratwurzel)
Sei $b > 0$. Die gemäß Beispiel 4.15 eindeutig bestimmte positive Zahl a mit $a^2 = b$ heißt die Quadratwurzel von b, geschrieben

$$a = \sqrt{b} \,. \tag{4.20}$$

Wir definieren außerdem $\sqrt{0} = 0$.

Die Konvergenz in Beispiel 4.15 ist sehr schnell, so ist etwa für $b = 2$ nach dem vierten Schritt

$$x_4 = 1.414213562$$

eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-9}. Im Gegensatz dazu ist die Konvergenz der Folge $1/n$ gegen 0 sehr langsam (Fehler 10^{-3} nach 1000 Schritten).

Es gilt offensichtlich für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a^2} = |a| \,. \tag{4.21}$$

Für $a, b \geq 0$ folgt aus $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$, dass

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \,. \tag{4.22}$$

Da für $x, y \geq 0$ gilt, dass

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2 \,,$$

gilt auch

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \tag{4.23}$$

für alle $a, b \geq 0$.

Teilfolgen. Oft ist man daran interessiert, zu einer gegebenen Folge, etwa

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

eine Teilfolge, etwa

$$0, 2, 4, 6, 8, \dots$$

zu betrachten. Formal sieht das so aus: Ist M Menge, $f : \mathbb{N} \to M$ eine Folge, und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung (d.h. $n < m \Rightarrow g(n) < g(m)$), so beschreibt $f \circ g$ eine Teilfolge von f. In obigem Beispiel ist

$$f(n) = n\,, \quad g(n) = 2n\,, \quad (f \circ g)(n) = 2n\,.$$

Äquivalent dazu ist die folgende Definition, die die in der Analysis übliche Schreibweise verwendet.

Definition 4.17 (Teilfolge)
Sei M Menge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Im obigen Beispiel ist $n_k = 2k$.

Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst (setze $n_k = k$). Für jede streng monoton wachsende Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ gilt

$$k \le n_k\,. \tag{4.24}$$

Beweis mit Induktion: $0 \le n_0$, $k \le n_k \Rightarrow k + 1 \le n_k + 1 \le n_{k+1}$. (Aus $n > m$ in $\mathbb{N}$ folgt $n \ge m + 1$.)

Satz 4.18 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann ist jede Teilfolge (x_{n_k}) konvergent, und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n\,. \tag{4.25}$$

Beweis: Sei $x_n \to a$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$, dann gilt wegen $n_k \ge k$ auch

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } k \ge n_0\,.$$

□

Satz 4.19 *Jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Wir definieren

$$M = \{n : n \in \mathbb{N},\, x_n \ge x_k \text{ für alle } k \ge n\}\,.$$

Fall 1: M ist beschränkt. Sei m das größte Element von M (falls $M = \emptyset$, setzen wir $m = -1$.). Wir setzen $n_0 = m + 1$. Ist n_k bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. Die hierdurch definierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.
Fall 2: M ist unbeschränkt. Wir wählen $n_0 \in M$ beliebig. Ist $n_k \in M$ bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} \in M$ mit $n_{k+1} > n_k$. Nach Definition von M gilt $x_{n_k} \ge x_{n_{k+1}}$. Die hierdurch definierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. □

Satz 4.20 (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach Satz 4.19 hat (x_n) eine monotone Teilfolge (x_{n_k}), welche ebenfalls beschränkt ist. Nach Satz 4.14 ist (x_{n_k}) konvergent. □

Definition 4.21 (Häufungspunkt)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (x_n), wenn es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) gibt mit $x_{n_k} \to a$.

Aus Satz 4.20 folgt also, dass jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Eine konvergente Folge hat wegen (4.25) genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert. Die divergente Folge

$$x_n = (-1)^n$$

besitzt die beiden Häufungspunkte

$$1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k}\,, \quad -1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\,.$$

Definition 4.22 (Cauchyfolge)
Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon\,, \quad \textit{für alle } n, m \geq n_0\,. \tag{4.26}$$

Satz 4.23 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge.*

Beweis: Sei $x_n \to a$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

also ist (x_n) Cauchyfolge. □

Satz 4.24 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge. Dann ist (x_n) konvergent.*

Beweis: Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$ und setzen

$$C = \max\{|x_0|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}\,.$$

Dann gilt $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (x_n) beschränkt. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge – eine solche existiert nach Satz 4.20 – sei $x_{n_k} \to a$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{für alle } k \geq m_1\,,$$

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } n, m \geq m_2 .$$

Wir setzen $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Dann gilt für alle $k \geq m_3$ wegen $n_k \geq k$

$$|x_k - a| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

also folgt $x_n \to a$. □

Um die Konvergenz einer reellen Folge (x_n) nachzuprüfen, genügt es also festzustellen, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Den Grenzwert brauchen wir dabei nicht zu kennen.

Uneigentliche Konvergenz. Die Folgen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \tag{4.27}$$

und

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \ldots \tag{4.28}$$

sind beide divergent und nach oben unbeschränkt. Im Falle der Folge (4.27) möchte man aber irgendwie ausdrücken, dass sie "gegen $+\infty$ strebt".

Definition 4.25 (Uneigentliche Konvergenz)
Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $C > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq C , \qquad \textit{für alle } n \geq n_0 . \tag{4.29}$$

Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent gegen $-\infty$, wenn $(-x_n)$ uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ ist. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent, wenn sie uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$ ist.

Für die uneigentliche Konvergenz einer Folge (x_n) verwendet man in der Analysis ebenfalls die Notation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty , \quad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty .$$

Satz 4.26 *Jede monotone reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist entweder konvergent oder uneigentlich konvergent.*

Beweis: Sei (x_n) monoton wachsend. Ist (x_n) nach oben beschränkt, so ist sie nach Satz 4.14 konvergent. Sei nun (x_n) nach oben unbeschränkt, sei $C > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \geq C$, dann gilt $x_n \geq x_{n_0} \geq C$ für alle $n \geq n_0$, also ist (x_n) uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Ist (x_n) monoton fallend, so wenden wir das eben Bewiesene auf die Folge $(-x_n)$ an. □

Beispiel 4.27
Wir untersuchen die Konvergenz der durch

$$x_n = x^n \tag{4.30}$$

definierten Folge (x_n), wobei $x \in \mathbb{R}$ fest ist. Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.
Fall 1: $x > 1$. Wegen $x^{n+1} = x \cdot x^n > 1 \cdot x^n = x^n$ ist (x_n) streng monoton wachsend, wegen

Folgerung 3.28 ist (x_n) unbeschränkt, wegen Satz 4.26 ist (x_n) uneigentlich konvergent gegen $+\infty$.
Fall 2: $0 < x < 1$. Wegen $0 < x^{n+1} = x \cdot x^n < 1 \cdot x^n = x^n$ ist (x_n) streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also ist (x_n) konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \, .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < \varepsilon$ (wähle n mit $(x^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$), also ist

$$0 \le \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \le 0 \, ,$$

und damit folgt $x_n \to 0$.
Fall 3: $-1 < x < 0$. Nach Fall 2 gilt $|x_n| \to 0$, also auch $x_n \to 0$ nach Übungsaufgabe.
Fall 4: $x < -1$. Dann ist $x_n = (-1)^n |x|^n$ divergent.
Fall 5: $x = 0$ oder $x = 1$. (x_n) ist konstant.
Fall 6: $x = -1$. $x_n = (-1)^n$ ist divergent.

Limes superior und Limes inferior. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Ist (x_n) nach oben beschränkt, so ist

$$y_n = \sup_{k\ge n} x_k \in \mathbb{R} \tag{4.31}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$y_n = \sup_{k\ge n} x_k = \max\{x_n, \sup_{k\ge n+1} x_k\} = \max\{x_n, y_{n+1}\} \tag{4.32}$$

ist (y_n) eine monoton fallende Folge, also nach Satz 4.26 entweder konvergent oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$. Wir definieren den Limes superior der Folge (x_n) durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k \, . \tag{4.33}$$

Ist (x_n) nach oben unbeschränkt, so gilt $y_n = +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir verabreden in diesem Fall, dass

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty \, . \tag{4.34}$$

Auf diese Weise erreichen wir, dass für jede beliebige reelle Folge (x_n) der Limes superior definiert ist, und

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \, .$$

Auf analoge Weise sehen wir, dass, falls (x_n) nach unten beschränkt ist, durch

$$z_n = \inf_{k\ge n} x_k$$

eine monoton wachsende reelle Folge (z_n) definiert ist, und wir definieren den Limes inferior von (x_n) durch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k \, . \tag{4.35}$$

Mit der Konvention $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$, falls (x_n) nach unten unbeschränkt ist, erhalten wir ebenfalls

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

für jede beliebige reelle Folge (x_n).

Beispiel: Für $x_n = (-1)^n$ gilt $y_n = 1$ und $z_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1\,, \quad \liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1\,. \tag{4.36}$$

Die Folge

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots$$

hat die drei Häufungspunkte -1, 0 und 1; ihr Limes superior ist 1, ihr Limes inferior ist -1.

Die Folge

$$0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

hat unendlich viele Häufungspunkte (jede natürliche Zahl ist Häufungspunkt), ihr Limes superior ist $+\infty$, ihr Limes inferior ist 0.

5 Die komplexen Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \tag{5.1}$$

hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$. Sie lösen zu wollen führt auf die einfachste Situation, in der komplexe Zahlen benötigt werden. Allerdings hat man zunächst kein Motiv, (5.1) zu lösen, da der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ die x-Achse nicht schneidet. Betrachten wir jedoch die Gleichung $x^3 = 15x + 4$, so hat sie die reelle Lösung $x = 4$. Diese kann man mit einer allgemeinen (hier nicht behandelten) Lösungsformel von Cardano aus dem 18. Jahrhundert für kubische Gleichungen erhalten. In der sich dabei ergebenden Rechnung tauchen aber komplexe Zahlen auf, die nicht reell sind.

Seit dem 19. Jahrhundert sind die komplexen Zahlen zu einem Werkzeug geworden, welches in den verschiedensten Teilgebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen umfangreich verwendet wird.

Definition 5.1 (Komplexe Zahlen)
Wir definieren

$$\mathbb{C} = \{z : z = (x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \tag{5.2}$$

als die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Wir definieren eine Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{5.3}$$

und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \tag{5.4}$$

Im Sinne der Gleichheit von Mengen ist also $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der üblichen Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.

Wir definieren eine Einbettung $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$j(x) = (x, 0)\,.$$

Offensichtlich ist j injektiv, und es gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} j(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = j(x_1) + j(x_2)\,, \\ j(x_1 x_2) &= (x_1 x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = j(x_1) \cdot j(x_2)\,. \end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden den Buchstaben "j" weglassen, d.h. für eine reelle Zahl x werden wir auch dann "x" schreiben, wenn wir sie als komplexe Zahl auffassen.

Man rechnet direkt nach, daß gilt:

Satz 5.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Körper, d.h. die Eigenschaften (3.1) – (3.9) gelten, wenn man überall* $\mathbb{R}$ *durch* $\mathbb{C}$ *ersetzt.*

Das Nullelement in $\mathbb{C}$ ist $(0, 0)$, das Einselement $(1, 0)$. Das multiplikative Inverse z^{-1} von $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hat die Form

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\,,\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)\,. \tag{5.5}$$

Die komplexe Zahl $(0,1)$ heißt imaginäre Einheit und wird mit i bezeichnet. Ein $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ können wir also schreiben als

$$z = (x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) = x + iy\,.$$

Es ist

$$i^2 = -1\,, \quad i^3 = -i\,, \quad i^4 = 1\,, \quad i^{n+4} = i^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Definition 5.3 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$. Wir definieren den Realteil* $\mathrm{Re}\,(z)$ *und den Imaginärteil* $\mathrm{Im}\,(z)$ *durch*

$$\mathrm{Re}\,(z) = x\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = y\,, \tag{5.6}$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} \in \mathbb{C}$ durch

$$\overline{z} = x - iy\,, \tag{5.7}$$

und den Betrag $|z|$ von z durch

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{5.8}$$

Der Betrag $|z|$ einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist reell und nichtnegativ, er liefert den Abstand des Punktes z vom Nullpunkt in der komplexen Ebene.

Es folgen unmittelbar die Rechenregeln

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

sowie

$$\overline{\overline{z}} = z\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Ist $z = (x,0) \in \mathbb{C}$, so ist $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, und es gilt

$$\mathrm{Re}\,(z) \le |z|\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) \le |z|\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

sowie

$$|\overline{z}| = |z|\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Die Eigenschaften der Betragsfunktion aus Lemma 3.19 gelten auch in $\mathbb{C}$:

Lemma 5.4 *Es gilt*

$$|z| \ge 0\,, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \tag{5.9}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \tag{5.10}$$

sowie die Dreiecksungleichung[2]

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{5.11}$$

[2] Man kann sich deren geometrische Bedeutung klarmachen, indem man das aus den Punkten 0, z_1 und $z_1 + z_2$ in der komplexen Ebene gebildete Dreieck betrachtet.

Beweis: (5.9) ist klar wegen $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ für $z = (x,y)$.
Zu (5.10): Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \,,$$

also folgt

$$|z_1 z_2| = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2}\sqrt{|z_2|^2} = |z_1||z_2| \,.$$

Zu (5.11): Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z}_2) \le |z_1 \overline{z}_2| = |z_1||z_2| \,,$$

also

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \,, \end{aligned}$$

also folgt (5.11) wieder durch Wurzelziehen. □

Entsprechend unserer allgemeinen Definition 4.1 definiert jede Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen.

Definition 5.5 *Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$|z_n - z| < \varepsilon \,, \qquad \text{für alle } n \ge n_0 \,. \tag{5.12}$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \,, \quad z_n \to z \,.$$

Lemma 5.6 *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \,. \tag{5.13}$$

Beweis: Übung. □

Lemma 5.7 *Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \le x_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, es gelte $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Dann ist auch (x_n) konvergent, und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Beweis: Übung. □

Satz 5.8 *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*
(1) Die Folge (z_n) ist konvergent (in $\mathbb{C}$).
(2) Die Folgen $(\mathrm{Re}\,z_n)$ und $(\mathrm{Im}\,z_n)$ sind konvergent (in $\mathbb{R}$).
Ist (z_n) konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,z_n + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,z_n \,. \tag{5.14}$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Es ist

$$0 \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \leq |z_n - z|\,, \quad 0 \leq |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq |z_n - z|\,.$$

Hieraus und aus den Lemmata 5.6, 5.7 schließen wir

$$z_n \to z \quad \Rightarrow \quad |z_n - z| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0 \text{ und } |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0 \tag{5.15}$$

und weiter

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z\,, \quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z\,. \tag{5.16}$$

Hieraus folgt (5.14) wegen

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = z = \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\operatorname{Re} z_n \to a$, $\operatorname{Im} z_n \to b$, setze $z = a + ib$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq |z_n - z| = |(\operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n) - (a + i\,b)| \\ &\leq |\operatorname{Re} z_n - a| + |\operatorname{Im} z_n - b|\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

und weiter geht es analog zum Beweis von "(1)$\Rightarrow$(2)". □

Beispiel:

$$z_n = \frac{1}{n} + i\frac{n+1}{n} \to 0 + i \cdot 1 = i\,.$$

Satz 5.9 *Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Dann sind auch $(z_n + w_n)$ und $(z_n w_n)$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n\,, \tag{5.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = (\lim_{n\to\infty} z_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} w_n)\,. \tag{5.19}$$

Ist außerdem $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, so ist auch (z_n/w_n) konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}\,. \tag{5.20}$$

Außerdem ist auch $(\overline{z}_n)$ konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}\,. \tag{5.21}$$

Beweis: Für (5.18) – (5.20) lassen sich die Beweise für den reellen Fall wörtlich übertragen. Ist $z_n \to z$, so folgt (5.21) aus

$$\overline{z}_n = \operatorname{Re} z_n - i \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = \overline{z}\,.$$

□

Definition 5.10 *Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon\,, \quad \textit{für alle } n, m \geq n_0\,. \tag{5.22}$$

Lemma 5.11 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist Cauchyfolge genau dann, wenn die Folgen* $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Cauchyfolgen sind.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 5.8. □

Satz 5.12 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist konvergent genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Beweis: Nach den Sätzen 4.23 und 4.24 sind die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolgen sind. Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.8. □

6 Reihen

Aus einer Folge, etwa

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

bilden wir durch Summation eine neue Folge

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \dots$$

also

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots$$

Definition 6.1 (Reihe) *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren*

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \quad n \geq n_0 \,. \tag{6.1}$$

Die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ heißt unendliche Reihe, s_n heißt die n-te Partialsumme. Wir bezeichnen die Reihe mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.2}$$

Die Reihe (6.2) heißt konvergent, falls die Folge (s_n) konvergent ist, andernfalls heißt sie divergent. Der Grenzwert der Reihe ist definiert als der Grenzwert der Folge (s_n). Wir bezeichnen ihn ebenfalls mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.3}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$z^0 = 1 \,.$$

Beispiel 6.2 (Geometrische Reihe)
Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \,. \tag{6.4}$$

Für die Partialsummen gilt

$$(1-z)s_n = (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = (1-z) + (z - z^2) + \ldots + (z^n - z^{n+1}) = 1 - z^{n+1} \,,$$

also

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \,. \tag{6.5}$$

Für $|z| < 1$ gilt $|z|^{n+1} \to 0$, also auch $z^{n+1} \to 0$, also ist die Reihe (6.4) konvergent für $|z| < 1$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \,. \tag{6.6}$$

□

Für die Konvergenz einer Reihe ist, genau wie bei einer Folge, das "Verhalten am Anfang" gleichgültig: Für beliebiges $m \geq n_0$ gilt, dass

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

konvergent ist genau dann, wenn

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

konvergent ist. (Beweis: Übung.)

Satz 6.3 *Seien $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, sei $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=n_0}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} ca_k$ konvergent, und für die Grenzwerte gilt*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k \,, \qquad \sum_{k=n_0}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.7}$$

Beweis: Folgt aus Satz 5.9, angewandt auf die Folgen der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \quad \sigma_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k \,.$$

□

Beispiel: Umwandlung einer rationalen Zahl von periodischer Dezimaldarstellung in eine Bruchdarstellung, etwa

$$\begin{aligned} 0.01\overline{7} &= 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + \ldots = 10^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 7 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{1}{100} + \frac{7}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{225} \,. \end{aligned}$$

Satz 6.4 (Cauchy-Kriterium) *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*
(1) $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \geq m \geq N \,. \tag{6.8}$$

Beweis: Für die Partialsummen gilt nach Definition

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k \,. \tag{6.9}$$

Die Bedingung (2) ist also äquivalent dazu, dass (s_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Nach Satz 5.12 ist das äquivalent dazu, dass (s_n) konvergiert. □

Beispiel 6.5 (Harmonische Reihe)
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{6.10}$$

heißt die harmonische Reihe. Sie ist divergent: Es gilt nämlich für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} = m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\,.$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich also kein N finden, so dass die Bedingung (6.8) erfüllt ist, also ist (6.10) divergent.

Folgerung 6.6 *Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,. \tag{6.11}$$

Beweis: Nach Satz 6.4 finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$|a_m| = \left|\sum_{k=m}^{m} a_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq N\,,$$

also gilt $|a_k| \to 0$ und damit auch $a_k \to 0$. □

Die Umkehrung von Folgerung 6.6 gilt nicht, d.h. aus Bedingung (6.11) folgt nicht, dass die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. (Beispiel: Die harmonische Reihe.)

Definition 6.7 (Absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiel: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

ist absolut konvergent für $|z| < 1$ (da dann $\big||z|\big| = |z| < 1$), und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|}\,.$$

Satz 6.8 *Ist eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent, und*

$$\left|\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|\,. \tag{6.12}$$

Beweis: Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ absolut konvergent. Dann gibt es nach Satz 6.4 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N\,,$$

also gilt auch

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N\,,$$

also erfüllt auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ das Cauchy-Kriterium und ist nach Satz 6.4 konvergent. Da

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|$$

für alle $n \geq n_0$ gilt, folgt (6.12) mit Grenzübergang $n \to \infty$. □

Die Umkehrung von Satz 6.8 gilt nicht: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

ist nicht absolut konvergent (da die harmonische Reihe divergiert), aber, wie wir später sehen werden, konvergent.

Satz 6.9 *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*
(1) $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
(2) Die reelle Folge (s_n) der Partialsummen von $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$,

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|\,, \quad n \geq n_0\,,$$

ist beschränkt.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): (s_n) ist konvergent, also beschränkt.
(2) $\Rightarrow$ (1): (s_n) ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. □

Definition 6.10 (Majorante)
Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Eine reelle Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Satz 6.11 (Majorantenkriterium)
Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, welche eine konvergente Majorante $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ besitzt. Dann ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Da $b_k \geq 0$ für alle k, ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, also gibt es nach Satz 6.9 ein $C > 0$ mit

$$C \geq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \geq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|$$

für alle $n \geq n_0$, also ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach Satz 6.9. □

Beispiel 6.12
(1) Wir betrachten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+k}{k^3-2} z^k\,, \quad |z| < 1\,. \tag{6.13}$$

Für die durch

$$y_k = \frac{k^3+k}{k^3-2}$$

definierte Folge gilt $y_k \to 1$, also ist sie beschränkt, also gibt es $C > 0$ mit

$$|a_k| \le C|z|^k$$

für alle k, und $b_k = C|z|^k$ definiert eine konvergente Majorante der Reihe (6.13).
(2) Wir betrachten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,. \tag{6.14}$$

Hilfsbehauptung: Die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} \tag{6.15}$$

ist eine konvergente Majorante von

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,. \tag{6.16}$$

Für die Partialsummen von (6.15) gilt nämlich

$$s_n = \frac{n-1}{n}\,. \tag{6.17}$$

Beweis von (6.17) mit Induktion: $s_2 = \frac{1}{2}$,

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

Wegen $s_n \to 1$ ist (6.15) konvergent, also auch (6.16) und damit auch (6.14).
(3) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{6.18}$$

ist für festes $n \ge 2$ ebenfalls konvergent, da sie die konvergente Majorante (6.14) hat. □

Folgerung 6.13 (Divergente Minorante) *Seien $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ Reihen in $\mathbb{R}$ mit $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \ge n_0$. Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ divergent, so ist auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ divergent.*

Beweis: Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist nach Satz 6.11 auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent. □

In der Situation von Folgerung 6.13 heißt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$.

Satz 6.14 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$ und*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q\,, \qquad \text{für alle } k \geq n_0\,. \tag{6.19}$$

Dann ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Folgt aus dem Majorantenkriterium, da $|a_k| \leq |a_{n_0}|q^{k-n_0}$ für $k \geq n_0$ und daher die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{n_0}|q^{k-n_0}$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist. □

Beispiel 6.15 (Exponentialreihe)
Wir betrachten die sogenannte Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \tag{6.20}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ eine feste komplexe Zahl ist. Mit $a_k = z^k/k!$ gilt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1}\,,$$

also

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \frac{1}{2}\,, \qquad \text{für alle } k \geq 2|z| - 1\,,$$

also ist (6.20) absolut konvergent.

Definition 6.16 (Exponentialfunktion)
Die durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{6.21}$$

definierte Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

heißt Exponentialfunktion. Wir definieren die Zahl e durch

$$e = \exp(1)\,. \tag{6.22}$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $\exp(z) \in \mathbb{R}$, falls $z \in \mathbb{R}$, und

$$\exp(0) = 1\,.$$

(Bild im Reellen.) Es ist

$$e = 2.718281828459045235\ldots$$

Die Exponentialreihe (6.20) ist Beispiel einer Potenzreihe. Die allgemeine Form einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \,, \tag{6.23}$$

wobei $c_k \in \mathbb{C}$ gegebene Koeffizienten sind. Für die Exponentialreihe ist

$$a = 0\,, \quad c_k = \frac{1}{k!}\,.$$

Es stellt sich die Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist (6.23) konvergent, oder anders formuliert, was ist der Definitionsbereich der durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{6.24}$$

definierten Funktion? Hier hilft ein weiteres Konvergenzkriterium für Reihen, das Wurzelkriterium.

Satz 6.17 (Wurzelkriterium)
Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ Reihe in $\mathbb{C}$, sei

$$w = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,. \tag{6.25}$$

Ist $w < 1$, so konvergiert die Reihe absolut; ist $w > 1$, so divergiert sie.

Beweis: Ist $w > 1$, so gibt es unendlich viele k mit $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, also auch $|a_k| > 1$ für diese k, also ist (a_k) keine Nullfolge (d.h. (a_k) konvergiert nicht gegen Null) und daher divergent, siehe Folgerung 6.6. Sei nun $w < 1$. Wähle q mit $w < q < 1$, dann gibt es N mit $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ für alle $k \ge N$, also auch $|a_k| \le q^k$ für alle $k \ge N$. Daher konvergiert die Reihe absolut, nach dem Majorantenkriterium. □

Hier haben wir bereits die k-te Wurzel (für $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$) verwendet. Sie kann analog zur Quadratwurzel als Grenzwert einer Iteration konstruiert werden. Wir werden sie später als Spezialfall der allgemeinen Potenzfunktion behandeln.

Definition 6.18 (Konvergenzradius) *Die Zahl*

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \tag{6.26}$$

heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe (6.24).

Der folgende Satz rechtfertigt die Bezeichnung 'Konvergenzradius'.

Satz 6.19 *Sei (c_k) Folge in $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, sei r die in (6.26) definierte Zahl. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$*

$$\textit{konvergiert absolut, falls } |z-a| < r\,,$$
$$\textit{divergiert, falls } |z-a| > r\,.$$

Beweis: Wir wenden Satz 6.17 an mit $a_k = c_k(z-a)^k$. Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z-a|$, also $w = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |z-a| \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, also

$$w < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-a| < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}\,, \tag{6.27}$$

$$w > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-a| > \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}\,, \tag{6.28}$$

also folgen die Behauptungen. □

Mit Potenzreihen werden wir uns in einem späteren Kapitel ausführlicher beschäftigen.

Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, wenn die Folgenglieder a_k abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben.

Satz 6.20 (Leibnizkriterium)
Sei $(a_n)_{n\ge n_0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k\,, \tag{6.29}$$

und es gilt für alle $n \ge n_0$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n\right| = \left|\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{n} (-1)^k a_k\right| \le a_{n+1}\,. \tag{6.30}$$

Beweis: Sei zunächst $n_0 = 0$. Für $k \ge 1$ ist $a_{2k} - a_{2k-1} \le 0$, also

$$s_{2k} = s_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k} \le s_{2k-2}\,,$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \ge s_{2k-1}\,,$$

also ist $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Es gilt

$$s_1 \le s_{2k-1} = s_{2k} - a_{2k} \le s_{2k} \le s_0 \tag{6.31}$$

für alle k, und weiter für alle $m \ge k$

$$s_1 \le s_{2k-1} \le s_{2m-1} \le s_{2m} \le s_{2k} \le s_0\,. \tag{6.32}$$

Also sind beide Teilfolgen (s_{2k}) und (s_{2k-1}) beschränkt, also konvergent nach Satz 4.14, und

$$s_{2k-1} \le \underbrace{\lim_{m\to\infty} s_{2m-1}}_{=:b} \le s_{2k}\,, \qquad s_{2k-1} \le \underbrace{\lim_{m\to\infty} s_{2m}}_{=:c} \le s_{2k} \tag{6.33}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus (6.32) folgt

$$0 \le |c-b| \le a_{2k}\,,$$

und wegen $a_{2k} \to 0$ gilt $c = b$. Da für alle n entweder $s_n \le b \le s_{n+1}$ oder $s_n \ge b \ge s_{n+1}$ gilt, folgt

$$0 \le |b - s_n| \le |s_n - s_{n+1}| = a_{n+1} \to 0\,,$$

also $|b - s_n| \to 0$ wegen Lemma 5.7. Der allgemeine Fall $n_0 \in \mathbb{Z}$ kann durch Umnummerieren und Multiplikation mit -1 darauf zurückgeführt werden. $\square$

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \tag{6.34}$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. (Ihr Grenzwert ist, wie sich später herausstellen wird, die Zahl $\ln 2$.) Sie ist aber nicht absolut konvergent, wie wir bereits gesehen haben. Wir betrachten (6.34) etwas näher. Die aus den Glieder mit geraden Indizes gebildete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2k} \tag{6.35}$$

ist divergent (andernfalls wäre die harmonische Reihe konvergent), die aus den Glieder mit ungeraden Indizes gebildete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \tag{6.36}$$

ist ebenfalls divergent (das Negative der Reihe (6.35) ist eine divergente Minorante). Geben wir nun eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$ vor, so können wir durch Umordnen erreichen, dass die umgeordnete Reihe gegen a konvergiert, z.B. für $a = 1$ können wir betrachten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \dots$$

(wir nehmen negative Glieder so lange, bis die Partialsumme kleiner als 1 ist, dann positive Glieder so lange, bis die Partialsumme größer als 1 ist, usw.). Dieses Phänomen kann bei absolut konvergenten Reihen nicht auftreten.

Definition 6.21 (Umordnung)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau(j)}$$

eine Umordnung von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 6.22 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau(j)}$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.37}$$

Beweis: Wir setzen

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,, \quad \tilde{s} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \,,$$

und definieren für $m \in \mathbb{N}$

$$M(m) = \max\{\tau(j) : 0 \leq j \leq m\}\,.$$

Da τ injektiv ist, gilt für alle m

$$\sum_{j=0}^{m} |a_{\tau(j)}| \leq \sum_{k=0}^{M(m)} |a_k| \leq \tilde{s}\,,$$

also ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\tau(j)}$ absolut konvergent nach Satz 6.9. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{\tau(j)} - s\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{m} a_k - s\right|\,. \tag{6.38}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen m so, dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| = \tilde{s} - \sum_{k=0}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{6.39}$$

dann ist auch (nach Satz 6.8)

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{6.40}$$

also

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - s\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.41}$$

Wähle n_0 so, dass

$$\{0, \ldots, m\} \subset \{\tau(j) : 0 \leq j \leq n_0\}\,.$$

Das ist möglich, da τ surjektiv ist. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ wegen (6.39)

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{M(n)} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.42}$$

Aus (6.38) – (6.42) folgt also

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{\tau(j)} - s\right| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } n \geq n_0\,. \tag{6.43}$$

□

Sind p, q Polynome,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k\,, \tag{6.44}$$

so hat deren Produkt die Form

$$(pq)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k\,, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j\,. \tag{6.45}$$

Der Wunsch, diese Formel auf Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

zu übertragen, führt auf das sogenannte Cauchy-Produkt von Reihen.

Satz 6.23 *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{C}$, *sei für* $k \in \mathbb{N}$

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \,. \tag{6.46}$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \,. \tag{6.47}$$

Beweis: Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \,, \tag{6.48}$$

$$s_n^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) \,, \quad p_n^* = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| \right) \,. \tag{6.49}$$

Nach Satz 4.9 gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \,, \quad \lim_{n\to\infty} p_n^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) \,.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_n^*) = 0 \,. \tag{6.50}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|p_n^* - p_m^*| < \varepsilon \,, \qquad \text{für alle } n \geq m \,. \tag{6.51}$$

Sei $n \geq m$, dann gilt

$$|p_n^* - p_m^*| = \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} |a_i b_j| \,, \tag{6.52}$$

mit

$$\Gamma_n = \{(i,j) : 0 \leq i,j \leq n,\, i > m \text{ oder } j > m\} \,. \tag{6.53}$$

Weiter ist

$$s_n^* = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j \,, \quad s_n = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\leq n}}^{n} a_i b_j \,, \tag{6.54}$$

also

$$|s_n^* - s_n| \le \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_i b_j| \,, \tag{6.55}$$

mit

$$\Delta_n = \{(i,j) : 0 \le i,j \le n,\; i+j > n\} \,. \tag{6.56}$$

Für $n \ge 2m$ gilt $\Delta_n \subset \Gamma_n$, also

$$|s_n^* - s_n| \le \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_i b_j| \le \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} |a_i b_j| = |p_n^* - p_m^*| < \varepsilon \,,$$

Damit ist gezeigt, dass (6.50) gilt. Die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^\infty c_k$ folgt wegen

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \le \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\le n}}^n |a_i b_j| \le p_n^* \le \lim_{l\to\infty} p_l^*$$

aus Satz 6.9. □

Satz 6.24 *Es gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \tag{6.57}$$

für alle $z,w \in \mathbb{C}$.

Beweis: Mit

$$a_k = \frac{z^k}{k!}\,, \quad b_k = \frac{w^k}{k!}\,, \quad c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$$

gilt wegen Satz 6.23 und Satz 3.5 (letzterer gilt auch in $\mathbb{C}$ mit demselben Beweis wie in $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^{k-j} w^j \\
&= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^\infty c_k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{w^k}{k!}\right) = \exp(z)\exp(w) \,.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

□

Folgerung 6.25 *Es gelten*

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \,, \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \,, \tag{6.59}$$

$$\exp(z) \neq 0 \,, \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \,, \tag{6.60}$$

$$\exp(x) > 0 \,, \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R} \,, \tag{6.61}$$

$$\exp(n) = e^n \,, \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \,. \tag{6.62}$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \,, \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \,, \tag{6.63}$$

Beweis: Aus

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z) \tag{6.64}$$

folgen (6.59) und (6.60). Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(x) \geq 1 > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, also wegen (6.64) auch $\exp(x) > 0$ für $x < 0$. Aus

$$\exp(n) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(1)$$

folgt (6.62). Schließlich ergibt sich (6.63) aus

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}\,.$$

□

7 Unendliche Mengen

Definition 7.1 *Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.*

Lemma 7.2 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $\{0, \dots, m\}$ und $\{0, \dots, n\}$ sind gleichmächtig genau dann, wenn $m = n$.*

Beweis: Ist $m = n$, so können wir für f die Identität wählen. Sei nun $m \neq n$. Wir zeigen mit Induktion über n die Behauptung:

> Ist $m > n$, so gibt es keine bijektive Abbildung $f : \{0, \dots, m\} \to \{0, \dots, n\}$.

Induktionsanfang $n = 0$: Die einzige Abbildung $f : \{0, \dots, m\} \to \{0\}$ ist gegeben durch $f(k) = 0$ für alle k, und diese Abbildung ist für $m > 0$ nicht bijektiv.
Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Es genügt zu zeigen:

> Ist $m > n$ und $f : \{0, \dots, m\} \to \{0, \dots, n\}$ bijektiv, so gibt es eine bijektive Abbildung $g : \{0, \dots, m-1\} \to \{0, \dots, n-1\}$.

Die Abbildung g wird aus f wie folgt konstruiert. Zunächst ist die Restriktion

$$\tilde{f} : \{0, \dots, m-1\} \to \{0, \dots, n\} \setminus \{f(m)\}$$

von f auf $\{0, \dots, m-1\}$ bijektiv. Wir definieren eine Abbildung

$$h : \{0, \dots, n\} \setminus \{f(m)\} \to \{0, \dots, n-1\}$$

durch

$$h(i) = \begin{cases} i\,, & \text{falls } i < f(m)\,, \\ i-1\,, & \text{falls } i > f(m)\,. \end{cases}$$

Dann ist h ebenfalls bijektiv, und $g = h \circ \tilde{f}$ ist die gesuchte Bijektion. □

Definition 7.3 *Sei M Menge. Ist $n \geq 1$ und sind M und $\{0, \dots, n-1\}$ gleichmächtig, so definieren wir die Anzahl der Elemente von M als n, geschrieben*

$$\#M = n\,.$$

Wir setzen $\#\emptyset = 0$. M heißt endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\#M = n$, andernfalls heißt M unendlich, und wir schreiben $\#M = \infty$.

Definition 7.4 (Abzählbare Menge)
Eine nichtleere Menge M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to M$ gibt.

"M ist abzählbar" bedeutet also, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gibt, in der jedes Element von M mindestens einmal auftaucht. Beispiele: Jede endliche nichtleere Menge ist abzählbar, $\mathbb{N}$ ist abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: Die Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\,, & n \text{ gerade }\,, \\ -\frac{n+1}{2}\,, & n \text{ ungerade }\,, \end{cases}$$

ist surjektiv. Sie ist sogar bijektiv, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind also gleichmächtig. (Andererseits ist $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$.)

Lemma 7.5 *Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ Abbildung. Ist M abzählbar und f surjektiv, so ist auch N abzählbar.*

Beweis: Ist $\tau : \mathbb{N} \to M$ surjektiv, so ist auch $f \circ \tau : \mathbb{N} \to N$ surjektiv. □

Folgerung 7.6 *Sei M abzählbar, $N \subset M$. Dann ist N abzählbar.*

Beweis: Wähle als $f : M \to N$ irgendeine Fortsetzung der Identität auf N. □

Satz 7.7 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis: In der Folge

$$(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3) \ldots$$

taucht jedes Element von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mindestens einmal (sogar genau einmal) auf. In Formeln können wir die entsprechende Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beschreiben durch

$$\tau(k) = (k - s_n, s_{n+1} - k - 1)\,, \quad \text{falls } s_n \le k < s_{n+1}\,,$$

wobei

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad s_0 = 0\,.$$

Man rechnet nach, dass τ surjektiv ist. □

Folgerung 7.8 *Sind M und N abzählbare Mengen, so ist auch $M \times N$ abzählbar.*

Beweis: Seien $\tau_M : \mathbb{N} \to M$ und $\tau_N : \mathbb{N} \to N$ surjektiv. Dann ist auch

$$\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M \times N\,, \quad \tau(j,k) = (\tau_M(j), \tau_N(k))$$

surjektiv, also $M \times N$ abzählbar wegen Folgerung 7.5 und Satz 7.7. □

Folgerung 7.9 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis: Die Abbildung

$$\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\,, \quad \tau(k,n) = \frac{k}{n+1}\,,$$

ist surjektiv. □

Folgerung 7.10 *Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Dann ist auch*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

abzählbar.

Beweis: Sei $\tau_n : \mathbb{N} \to M_n$ surjektiv für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\,, \quad \tau(n,k) = \tau_n(k)\,,$$

surjektiv. □

Definition 7.11 (Überabzählbare Menge)
Eine unendliche Menge M heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

Wir wollen beweisen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Wegen Folgerung 7.6 genügt es zu zeigen, dass

$$[0,1) = \{x : x \in \mathbb{R},\ 0 \le x < 1\}$$

überabzählbar ist. Zu diesem Zweck betrachten wir für $x \in [0,1)$ die Dezimalbruchentwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}\,, \quad a_k \in \{0,\ldots,9\}\,, \tag{7.1}$$

wobei zu gegebenem x die a_k folgendermaßen konstruiert werden: Sei $s_0 = 0$. Sind $a_1,\ldots,a_{n-1}$ und damit

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot 10^{-k} \tag{7.2}$$

bereits konstruiert, so wählen wir $a_n \in \{0,\ldots,9\}$ so, dass

$$s_{n-1} + a_n 10^{-n} \le x < s_{n-1} + (a_n+1)10^{-n}\,. \tag{7.3}$$

Satz 7.12 *Die Menge $[0,1)$ ist überabzählbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to [0,1)$ gibt. Sei $\tau : \mathbb{N} \to [0,1)$ eine beliebige Abbildung. Sei

$$\tau(j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \cdot 10^{-k}\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

die gemäß (7.1) – (7.3) konstruierte Dezimalbruchentwicklung von $\tau(j)$. Wir definieren ein $x \in [0,1)$ durch

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k}\,, \tag{7.4}$$

wobei wir $b_k \in \{0, \ldots, 8\}$ so wählen, dass $b_k \neq a_{kk}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Man prüft nach, dass wegen

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k} < 10^{-n}$$

(hier geht $b_k \leq 8$ ein) die Darstellung (7.4) mit der gemäß (7.1) – (7.3) konstruierten Dezimalbruchentwicklung von x übereinstimmt. Es folgt, dass $x \neq \tau(j)$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$. Also ist τ nicht surjektiv. □

Folgerung 7.13 *Sei M eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R} \setminus M$ überabzählbar. Insbesondere ist die Menge aller irrationalen Zahlen überabzählbar.*

Beweis: Wäre $\mathbb{R} \setminus M$ abzählbar, so wäre auch $\mathbb{R}$ abzählbar nach Satz 7.10, im Widerspruch zu Satz 7.12. □

Bemerkung 7.14 (Kontinuumshypothese)
Nach dem eben Bewiesenen sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig. Man kann sich fragen, ob es "zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ noch etwas gibt", d.h. ob es eine Menge M und surjektive Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to M\,, \quad g : M \to \mathbb{N}$$

gibt, so dass M weder zu $\mathbb{N}$ noch zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist. Die sogenannte Kontinuumshypothese besagt, dass es eine solche Menge M nicht gibt. Es ist mit Methoden der Mathematischen Logik bewiesen worden, dass die Kontinuumshypothese von einer Reihe üblicher Axiomensysteme der Mengenlehre unabhängig ist, das heißt, dass sowohl die Annahme, sie sei wahr, als auch die Annahme, sie sei falsch, mit diesen Axiomensystemen verträglich ist.

8 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad D \subset \mathbb{R}\,.$$

Typische Definitionsgebiete D sind Intervalle. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so definieren wir das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch

$$[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\, a \leq x \leq b\}\,.$$

Ist $a < b$, so definieren wir das offene Intervall (a, b) und die halboffenen Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ durch

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x : x \in \mathbb{R},\, a < x < b\}\,, \\ (a, b] &= \{x : x \in \mathbb{R},\, a < x \leq b\}\,, \\ [a, b) &= \{x : x \in \mathbb{R},\, a \leq x < b\}\,. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir die uneigentlichen Intervalle

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x : x \in \mathbb{R},\, x \geq a\}\,, & (a, \infty) &= \{x : x \in \mathbb{R},\, x > a\}\,, \\ (-\infty, a] &= \{x : x \in \mathbb{R},\, x \leq a\}\,, & (-\infty, a) &= \{x : x \in \mathbb{R},\, x < a\}\,. \end{aligned}$$

Definition 8.1 (Abschluss)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Wir definieren den Abschluss $\overline{D}$ von D durch

$$\overline{D} = \{a : a \in \mathbb{R},\, \textit{es gibt eine Folge } (x_n) \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to a\}\,. \tag{8.1}$$

Es gilt offensichtlich

$$D \subset \overline{D}\,. \tag{8.2}$$

Beispiele:

$$\overline{(a, b)} = [a, b]\,, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\,.$$

Definition 8.2 (Grenzwert einer Funktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Die Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f an der Stelle a (oder: in a), falls

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \tag{8.3}$$

gilt für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$.

Lemma 8.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Dann hat f höchstens einen Grenzwert in a.*

Beweis: Da Grenzwerte von Folgen eindeutig bestimmt sind, kann es keine zwei verschiedenen Zahlen geben, welche die Bedingung für c in Definition 8.2 erfüllen. □

Notation 8.4
Ist c der Grenzwert von $f : D \to \mathbb{R}$ in a, so schreiben wir

$$\lim_{x \to a} f(x) = c\,, \quad \text{oder auch} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = c\,.$$

Beispiel 8.5
(1) Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1\,. \tag{8.4}$$

Beweis: Nach Übungsaufgabe gilt

$$|\exp(x_n) - 1| \le 2|x_n|\,, \qquad \text{falls } |x_n| \le 1\,,$$

woraus die Behauptung folgt.
(2) Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1\,. \tag{8.5}$$

Beweis: Durch

$$f(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

wird eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Es ist $0 \in \overline{D} = \mathbb{R}$. Nach Übungsaufgabe gilt

$$|\exp(x_n) - (1 + x_n)| \le 2\frac{|x_n|^2}{2!} = |x_n|^2\,, \qquad \text{falls } |x_n| \le 1\,.$$

Division durch $|x_n|$ ergibt, falls $x_n \neq 0$,

$$\left| \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} - 1 \right| \le |x_n|\,, \qquad \text{falls } |x_n| \le 1\,.$$

Ist also (x_n) Folge in D mit $x_n \to 0$, so gilt $f(x_n) \to 1$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Definition 8.6 (Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ist $a \in D$, so heißt f stetig in a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,. \tag{8.6}$$

f heißt stetig (oder deutlicher: stetig in D), falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist. Wir definieren

$$C(D) = \{f | \quad f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig in } D\}\,. \tag{8.7}$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist also genau dann stetig in $a \in D$, falls

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \tag{8.8}$$

gilt für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \to a$. f ist genau dann stetig in (oder: auf) D, falls

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \tag{8.9}$$

gilt für jede Folge (x_n) in D, welche in D konvergiert.

Beispiel 8.7
(1) Die Identität, also die durch $f(x) = x$ definierte Funktion, ist stetig in $\mathbb{R}$.
(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Beweis: Nach Beispiel 8.5 ist

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 = \exp(0)\,,$$

also ist exp stetig im Punkt 0. Ist $a \neq 0$ und (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to a$, so gilt

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - a + a) = \exp(a)\exp(x_n - a)\,,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(0) = 1\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)\,.$$

(3) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x \le 0\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig in 0, aber stetig in allen anderen Punkten $a \neq 0$.
(4) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig. □

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind

$$f + g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,,$$

und

$$\frac{f}{g} : D \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Satz 8.8 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sind f und g stetig in a, so sind auch $f + g$, fg und λf stetig in a; ist $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in a.*

Beweis: Folgt aus den entsprechenden Sätzen für Grenzwerte von Folgen. Ist etwa (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$, so gilt

$$(fg)(a) = f(a)g(a) = \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n)g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (fg)(x_n)\,.$$

□

Folgerung 8.9 *Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist $C(D)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.* $\square$

Folgerung 8.10 *Alle rationalen Funktionen, d.h. alle Funktionen der Form*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind, sind auf ihrem Definitionsbereich $\{x : x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$ stetig.

Beweis: Folgt aus Satz 8.8 und der Stetigkeit der Identität. $\square$

Satz 8.11 *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und $f(D) \subset E$. Sind f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis: Sei (x_n) eine beliebige Folge in D mit $x_n \to a$. Da f stetig ist in a, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Da $f(x_n) \in E$ für alle n, und da g stetig ist in $f(a)$, folgt weiter

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)).$$

$\square$

Definition 8.12 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in D$. f heißt nach unten beschränkt, wenn $-f$ nach oben beschränkt ist. f heißt beschränkt, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Satz 8.13 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in [a, b]$ mit*

$$f(p) = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(q) = \min_{x\in[a,b]} f(x). \tag{8.10}$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, f sei nach oben unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $f(x_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge, sei etwa $x_{n_k} \to c$. Da f stetig ist, ist $f(x_{n_k})$ ebenfalls konvergent, also beschränkt im Widerspruch zu $f(x_{n_k}) \geq n_k$. Also ist f nach oben beschränkt. Sei

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Zu $n \geq 1$ wählen wir nun ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Dann gilt $f(x_n) \to M$. Sei wieder (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, sei $x_{n_k} \to p$. Dann gilt $f(x_{n_k}) \to f(p)$, also $f(p) = M$ und damit

$$f(p) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Anwendung des eben Bewiesenen auf $-f$ ergibt, dass f auch nach unten beschränkt ist und das Minimum annimmt. $\square$

Satz 8.14 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann sind äquivalent:*
(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt: Für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Beweis:
$\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$: Die Negation von (2) ist: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Wir wählen ein solches ε und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon .$$

Dann gilt $x_n \to a$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. Also ist f nicht stetig in a.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$. Wir wollen zeigen, dass $f(x_n) \to f(a)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $\delta > 0$, so dass

$$x \in D, \quad |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Wir wählen n_0, so dass $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

Folgerung 8.15 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Ist f stetig in a und gilt $f(a) > 0$ (bzw. $f(a) < 0$), so gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$ (bzw. $f(x) < 0$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$).*

Beweis: Sei $f(a) > 0$ (andernfalls betrachte $-f$). Wir wählen gemäß Satz 8.14 ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < f(a)$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$. Dann gilt für alle solche x

$$f(x) = f(a) - (f(a) - f(x)) \geq f(a) - |f(a) - f(x)| > 0 .$$

□

Satz 8.16 (Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, es gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis: Sei $f(a) < 0$. (Andernfalls betrachten wir $-f$.) Wir setzen

$$G = \{t : t \in [a, b],\ f(t) < 0\} .$$

Es ist $a \in G$, also $\emptyset \neq G \subset [a, b]$. Wir setzen

$$x = \sup G . \tag{8.11}$$

Wir wählen eine Folge (x_n) in G mit $x_n \to x$, dann ist

$$f(x_n) < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) ,$$

also $f(x) \leq 0$. Wir nehmen an, dass $f(x) < 0$. Dann ist $x < b$, und es gibt nach Folgerung 8.15 ein $\delta > 0$ mit $[a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \subset G$, also

$$\sup G \geq x + \delta$$

im Widerspruch zu (8.11). Also ist die Annahme $f(x) < 0$ falsch und damit bewiesen, dass $f(x) = 0$. □

Folgerung 8.17 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, sei $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis: Wir wenden Satz 8.16 auf die durch $g(x) = f(x) - y$ definierte Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ an. □

Definition 8.18 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt gleichmäßig stetig in D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt: Sind $x, \tilde{x} \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$, so ist auch $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

Lemma 8.19 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ist f gleichmäßig stetig in D, so ist f auch stetig in D.*

Beweis: Für jedes $a \in D$ ist das Kriterium (2) in Satz 8.14 erfüllt. Wir brauchen nur Definition 8.18 mit $\tilde{x} = a$ anzuwenden. □

Nicht jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. Beispiel:

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Für $0 < x \leq 2^{-1}$, $\tilde{x} = 2x$ ist nämlich

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{2x}\,.$$

Ist $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig, und setzen wir

$$x = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\delta}{2} \right\}, \quad \tilde{x} = 2x\,,$$

so gilt $|x - \tilde{x}| < \delta$, aber $|f(x) - f(\tilde{x})| \geq 1$.

Satz 8.20 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig in $[a,b]$.*

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Wir können dann ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, \tilde{x}_n \in [a,b]$ finden mit

$$|x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n}\,, \quad |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{8.12}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge x_{n_k}, sei $x_{n_k} \to p$. Da

$$0 \leq |\tilde{x}_{n_k} - p| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - p|\,,$$

gilt auch $\tilde{x}_{n_k} \to p$, also

$$\lim_{k \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})) = f(p) - f(p) = 0$$

im Widerspruch zu (8.12). □

9 Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen

Definition 9.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt monoton wachsend, falls $f(x) \leq f(\tilde{x})$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ mit $x \leq \tilde{x}$. f heißt streng monoton wachsend, falls $f(x) < f(\tilde{x})$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ mit $x < \tilde{x}$. f heißt (streng) monoton fallend, falls $-f$ (streng) monoton wachsend ist. f heißt (streng) monoton, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Satz 9.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann ist $f : D \to f(D)$ bijektiv, und $f^{-1} : f(D) \to D$ ist streng monoton wachsend.*

Beweis: Sind $x, \tilde{x} \in D$ mit $x \neq \tilde{x}$, so ist $x < \tilde{x}$ oder $\tilde{x} < x$. Es folgt $f(x) < f(\tilde{x})$ bzw. $f(\tilde{x}) < f(x)$, also $f(x) \neq f(\tilde{x})$, also ist f injektiv und damit $f : D \to f(D)$ bijektiv. Seien $y, \tilde{y} \in f(D)$ mit $y < \tilde{y}$. Wäre $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y})$, so wäre auch

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(\tilde{y})) = \tilde{y}\,.$$

Also ist $f^{-1}(y) < f^{-1}(\tilde{y})$. □

Folgerung 9.3
Satz 9.2 gilt auch, wenn "streng monoton wachsend" überall durch "streng monoton fallend" ersetzt wird.

Beweis: Nach Satz 9.2 ist $-f : D \to -f(D)$ bijektiv und $(-f)^{-1} : -f(D) \to D$ streng monoton wachsend. Sind $y, \tilde{y} \in f(D)$ mit $y < \tilde{y}$, so ist $-y > -\tilde{y}$ und

$$f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y) > (-f)^{-1}(-\tilde{y}) = f^{-1}(\tilde{y})\,.$$

□

Satz 9.4 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]\,, \tag{9.1}$$

und

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b] \tag{9.2}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Aus $a \leq x \leq b$ folgt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; ist $y \in [f(a), f(b)]$, so gibt es wegen Folgerung 8.17 ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Damit ist (9.1) bewiesen. Nach Satz 9.2 ist f^{-1} streng monoton wachsend. Wir nehmen nun an, f^{-1} sei nicht stetig. Dann gibt es ein $y \in [f(a), f(b)]$ und eine Folge (y_n) in $[f(a), f(b)]$ mit $y_n \to y$, so dass $f^{-1}(y_n) \not\to f^{-1}(y)$. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (y_{n_k}) mit

$$|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,. \tag{9.3}$$

Da $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ und also beschränkt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge, sei

$$f^{-1}(y_{n_{k_l}}) \to x\,, \quad x \in [a, b]\,.$$

Es gilt

$$f(x) = f(\lim_{l\to\infty} f^{-1}(y_{n_{k_l}})) = \lim_{l\to\infty} f(f^{-1}(y_{n_{k_l}})) = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = y\,,$$

also

$$f^{-1}(y_{n_{k_l}}) \to x = f^{-1}(y)$$

im Widerspruch zu (9.3). Also war die Annahme falsch, d.h. f^{-1} ist stetig. □

Folgerung 9.5
Satz 9.4 gilt auch, wenn "streng monoton wachsend" überall durch "streng monoton fallend" ersetzt wird.

Beweis: Folgt aus Folgerung 9.3, da aus der Stetigkeit von $(-f)^{-1}$ auch die Stetigkeit von f^{-1} folgt. □

Satz 9.6 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ *ab.*

Beweis: Ist $x > \tilde{x}$, so ist $x - \tilde{x} > 0$ und $\exp(x-\tilde{x}) > 1$, also

$$\exp(x) = \exp(x-\tilde{x})\exp(\tilde{x}) > \exp(\tilde{x})\,.$$

Nach Satz 9.2 ist $\exp : \mathbb{R} \to \exp(\mathbb{R})$ bijektiv. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(n) \geq 1+n\,, \quad \exp(-n) \leq \frac{1}{1+n}\,,$$

also

$$\exp(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \exp([-n,n]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\exp(-n), \exp(n)] \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{1+n}, 1+n\right] = (0,\infty)\,,$$

und wegen $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$ auch $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. □

Definition 9.7 (Logarithmus)
Wir definieren den (natürlichen) Logarithmus

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

als die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

Wir erinnern an die Definition

$$x^k = \prod_{i=1}^{k} x\,, \quad x^0 = 1\,, \quad x^{-k} = \prod_{i=1}^{k} x^{-1}\,, \quad \text{falls } k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Satz 9.8 *Für den natürlichen Logarithmus* $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\ln(1) = 0\,, \quad \ln(e) = 1\,, \tag{9.4}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y\,, \quad \textit{für alle } x,y > 0\,, \tag{9.5}$$

$$\ln x^k = k \ln x\,, \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z},\ x > 0\,, \tag{9.6}$$

Beweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) = xy\,,$$
$$\ln(xy) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln x + \ln y\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(k \ln x) = \exp(\sum_{i=1}^{k} \ln x) = \prod_{i=1}^{k} \exp(\ln x) = x^k\,.$$

Weiter

$$0 = \ln 1 = \ln(xx^{-1}) = \ln x + \ln x^{-1}\,,$$

also

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\,,$$

also für $k \in \mathbb{N}$

$$-k \ln x = k \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^k\right) = \ln x^{-k}\,.$$

□

Satz 9.9 *Der Logarithmus* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis: Folgt aus Satz 9.4. □

Definition 9.10 (Allgemeine Potenzfunktion)
Für $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *definieren wir die* a*-te Potenz von* x *durch*

$$x^a = \exp(a \ln x)\,. \tag{9.7}$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ *setzen wir*

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}\,. \tag{9.8}$$

Für $a \in \mathbb{Z}$ stimmt diese Definition wegen $a \ln x = \ln x^a$ mit der bisherigen überein.

Satz 9.11 *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Die durch*

$$f(x) = x^a$$

definierte Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *ist stetig, für* $a \neq 0$ *bijektiv, für* $a > 0$ *streng monoton wachsend und für* $a < 0$ *streng monoton fallend.*

Beweis: f entsteht als Komposition

$$(0, \infty) \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{p_a} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} (0, \infty)\,,$$

wobei p_a definiert ist durch $p_a(y) = ay$. Die Behauptungen folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von exp und ln. □

Für die allgemeine Potenzfunktion gelten die üblichen Rechenregeln. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$, dann ist

$$x^{a+b} = \exp((a + b) \ln x) = \exp(a \ln x) \cdot \exp(b \ln x) = x^a x^b\,,$$
$$(x^a)^b = \exp(b \ln x^a) = \exp(b \ln(\exp(a \ln x))) = \exp(ba \ln x) = x^{ab}\,,$$
$$(xy)^a = x^a y^a\,.$$

10 Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

Definition 10.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$. Wir sagen, dass*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty\,, \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,, \tag{10.1}$$

falls zu jedem $C > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$x \in D\,,\ |x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > C \quad (\textit{bzw.} \quad f(x) < -C)\,. \tag{10.2}$$

Wie gehabt schreiben wir

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = \infty\,,$$

falls wir D explizit angeben wollen.

Beispiel 10.2
Wir betrachten

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Für $D = (0,\infty)$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} = \infty\,,$$

für $D = (-\infty,0)$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} = -\infty\,,$$

für $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} \qquad \text{existiert nicht.}$$

Definition 10.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, es gelte $D \cap (M,\infty) \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathbb{R}$.*

(i) *Wir sagen, dass für $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c\,, \tag{10.3}$$

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ existiert mit

$$x \in D\,,\ x > M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{10.4}$$

(ii) *Wir sagen, dass gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,, \tag{10.5}$$

falls zu jedem $C > 0$ ein $M > 0$ existiert mit

$$x \in D\,, x > M \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > C\,. \tag{10.6}$$

Analog werden definiert

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Beispiel 10.4
Ist p ein Polynom der Form

$$p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \,,$$

so gilt (Übungsaufgabe)

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\infty\,, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Lemma 10.5 *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty\,. \tag{10.7}$$

Beweis: Für $x > 0$ gilt

$$e^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,,$$

also

$$\frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \quad \text{für } x \to \infty\,.$$

□

Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz von x.

Satz 10.6 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, es gelte $D \cap (M, \infty) \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathbb{R}$. Gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,,$$

so gilt auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0\,.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M > 0$ so, dass

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

für alle $x \in D$ mit $x > M$. Dann gilt für alle solche x

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon\,.$$

Beispiel 10.7

(1) Wenden wir Satz 10.6 auf (10.7) an, so ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0\,. \tag{10.8}$$

(2) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty\,, \tag{10.9}$$

da $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und daher $\ln x > C$ gilt, falls $x > \exp(C)$. Wegen

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

folgt auf $D = (0,\infty)$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty\,. \tag{10.10}$$

(3) Auf $D = (0,\infty)$ gilt für $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} x^a = 0\,. \tag{10.11}$$

Für $x \to 0$, $x > 0$ gilt nämlich $a \ln x \to -\infty$, also $x^a = \exp(a \ln x) \to 0$. Für $a > 0$ können wir also durch

$$0^a = 0$$

die durch $f(x) = x^a$ auf $(0,\infty)$ definierte Funktion f stetig zu einer (ebenfalls mit f bezeichneten) Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Es gilt weiter für $a > 0$, da $x^{-a} = (x^a)^{-1}$,

$$\lim_{x\to 0} x^{-a} = \infty\,. \tag{10.12}$$

(4) Für $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0\,. \tag{10.13}$$

Beweis: Für $x \to \infty$ gilt $\ln x \to \infty$, also

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a}(a \ln x) \exp(-a \ln x) \to 0$$

wegen (10.8).

(5) Auf $D = (0,\infty)$ gilt für $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0\,. \tag{10.14}$$

Das folgt aus (10.13) wegen

$$x^a \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^a}\,.$$

11 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die komplexe Zahl e^{ix}. Es gilt $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, also

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1\,, \tag{11.1}$$

also $|e^{ix}| = 1$, d.h. e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene.

Definition 11.1 *Wir definieren die Funktionen* $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}\,, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}\,. \tag{11.2}$$

Unmittelbar aus der Definition und aus den elementaren Eigenschaften komplexer Zahlen folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x\,, \tag{11.3}$$

sowie

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\,, \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,, \tag{11.4}$$

$$\cos(-x) = \cos x\,, \quad \sin(-x) = -\sin x\,, \tag{11.5}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,, \tag{11.6}$$

$$\cos 0 = 1\,, \quad \sin 0 = 0\,. \tag{11.7}$$

Lemma 11.2 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,, \tag{11.8}$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,, \tag{11.9}$$

Beweis: Es ist

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\,,$$

also

$$\cos(x + y) + i\,\sin(x + y) = (\cos x + i\,\sin x)(\cos y + i\,\sin y)\,.$$

Ausmultiplizieren und Vergleich der Real- und Imaginärteile liefert die Behauptung. □

Definition 11.3 *Sei* $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f *heißt stetig in* $a \in D$, *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) \tag{11.10}$$

für alle Folgen (z_n) *in* D *mit* $z_n \to a$. f *heißt stetig in* D, *falls* f *in jedem Punkt* a *von* D *stetig ist.*

Lemma 11.4 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig in* $\mathbb{C}$.

Beweis: Wie im Reellen. □

Lemma 11.5 *Die Funktionen* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig in* $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to a$, dann gilt $ix_n \to ia$ in $\mathbb{C}$, also $\exp(ix_n) \to \exp(ia)$ in $\mathbb{C}$ nach Lemma 11.4, also

$$\cos x_n = \mathrm{Re}\,(\exp ix_n) \to \mathrm{Re}\,(\exp ia) = \cos a\,,$$

$$\sin x_n = \mathrm{Im}\,(\exp ix_n) \to \mathrm{Im}\,(\exp ia) = \sin a\,.$$

□

Satz 11.6 *Es gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\,, \tag{11.11}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\,, \tag{11.12}$$

und die Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die absolute Konvergenz der beiden Reihen folgt mit dem Majorantenkriterium aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Es gilt weiter für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{2m} \frac{(ix)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

also

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

□

Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sind die Folgen

$$a_k = \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{bzw.} \qquad b_k = \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

monoton fallende Nullfolgen für $k \geq n$, falls

$$|x| \leq 2n+1 \qquad \text{bzw.} \qquad |x| \leq 2n+2\,.$$

Aus dem Leibniz-Kriterium 6.20 folgt daher

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x)\,, \tag{11.13}$$

wobei

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,, \qquad \text{falls } |x| \leq 2n+1\,, \tag{11.14}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x)\,, \tag{11.15}$$

wobei

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\,, \qquad \text{falls } |x| \leq 2n+2\,. \tag{11.16}$$

Insbesondere ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x)\,, \quad |R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{4!}\,, \quad \text{falls } |x| \leq 3\,, \tag{11.17}$$

also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{2} + \frac{R_4(x)}{x} \right) = 0\,, \tag{11.18}$$

und

$$\cos 2 = 1 - 2 + R_4(x) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\,. \tag{11.19}$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass cos eine Nullstelle in $[0,2]$ hat.

Definition 11.7 *Wir definieren*

$$\pi = 2 \cdot \inf\{x : x \in (0,2),\ \cos x = 0\}\,. \tag{11.20}$$

Die Zahl π wird hier also definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus. Aus dessen Stetigkeit folgt

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0\,, \tag{11.21}$$

also

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1\,. \tag{11.22}$$

In ähnlicher Weise zeigt man (Übungsaufgabe)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \quad \sin x > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, \frac{\pi}{2})\,. \tag{11.23}$$

Aus (11.21) und (11.22) folgt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i\,, \tag{11.24}$$

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi\,, \tag{11.25}$$

also

$$\cos \pi = -1\,, \quad \sin \pi = 0\,, \tag{11.26}$$

und weiter

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\,, \quad e^{2\pi i} = 1\,. \tag{11.27}$$

Aus Lemma 11.2 folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos x\,, \tag{11.28}$$

analog

$$\sin(x+\pi) = -\sin x\,, \tag{11.29}$$

und hieraus die Periodizitätseigenschaften

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\,, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,. \tag{11.30}$$

Wegen

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)\,, \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \tag{11.31}$$

und (11.28), (11.29) sind die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereits durch ihre Werte auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ bestimmt, insbesondere sind ihre Nullstellen gegeben durch

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.32}$$

Definition 11.8 *Wir definieren die Funktionen*

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \tag{11.33}$$

durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\,. \tag{11.34}$$

Es gilt wegen (11.28), (11.29)

$$\tan(x + \pi) = \tan x\,, \quad \cot(x + \pi) = \cot x\,. \tag{11.35}$$

12 Differenzierbarkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ gegeben. Wir wollen f in der Nähe von a durch eine Gerade approximieren. Einen naheliegenden Kandidaten für eine gute Approximation stellt die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(a, f(a))$ dar. Diese erhalten wir geometrisch-anschaulich aus der Sekante an f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(a + h, f(a+h))$, gegeben durch

$$g_h(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a)\,, \tag{12.1}$$

indem wir den Grenzübergang $h \to 0$ vornehmen. Genauer gesagt: Wir betrachten den sogenannten Differenzenquotienten

$$d_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,, \tag{12.2}$$

welcher die Steigung der Sekante g_h angibt, und wollen den Differenzialquotienten (welcher die Steigung der Tangente angibt) als den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.3}$$

erhalten. Dieser Grenzwert macht Sinn, wenn 0 im Abschluss des Definitionsgebietes

$$D_a = \{h : h \in \mathbb{R},\, h \neq 0,\, a + h \in D\} \tag{12.4}$$

des Differenzenquotienten liegt; äquivalent dazu ist die Bedingung

$$a \in \overline{D \setminus \{a\}}\,. \tag{12.5}$$

Diese Bedingung ist zum Beispiel immer dann erfüllt, wenn

$$(a - \delta, a + \delta) \subset D$$

gilt für irgendein $\delta > 0$.

Definition 12.1 (Differenzierbare Funktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f differenzierbar in $a \in D$ ist, falls (12.5) gilt und falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.6}$$

existiert. In diesem Fall definieren wir die Ableitung $f'(a)$ von f in a durch

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,. \tag{12.7}$$

f heißt in D differenzierbar, falls f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist.

Beispiel 12.2

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fest. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0\,,$$
also
$$f'(a) = 0\,.$$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1\,,$$
also
$$f'(a) = 1\,.$$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h\,,$$
also
$$f'(a) = 2a\,.$$
4. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-1}{(a+h)a}\,,$$
also
$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}\,.$$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} = \exp(a)\frac{\exp(h) - 1}{h}\,,$$
also (siehe Beispiel 8.5)
$$f'(a) = \exp(a)\,.$$
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} \\ &= \sin(a)\frac{\cos h - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$
also (siehe (11.18), (11.23))
$$f'(a) = \cos a\,.$$
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt (Beweis analog wie beim Sinus)
$$f'(a) = -\sin a\,.$$

Die durch $f(x) = |x|$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in allen Punkten $a \neq 0$, und

$$f'(a) = \begin{cases} 1\,, & a > 0\,, \\ -1\,, & a < 0\,. \end{cases} \tag{12.8}$$

In $a = 0$ ist f nicht differenzierbar, denn für die Folge

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

gilt

$$\frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = (-1)^n\,,$$

also existiert der in Definition 12.1 verlangte Grenzwert nicht. Schränkt man aber das Definitionsgebiet des Differenzenquotienten ein, indem man setzt

$$D_a^+ = \{h : h > 0,\, a + h \in D\}\,,$$

so existiert für $f(x) = |x|$ und $a = 0$ der Grenzwert

$$f'_+(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in D_a^+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.9}$$

und ist gleich 1. Er wird als die *rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle a* bezeichnet. Analog definiert man die linksseitige Ableitung durch

$$f'_-(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in D_a^-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,, \quad D_a^- = \{h : h < 0,\, a + h \in D\}\,. \tag{12.10}$$

Für $f(x) = |x|$ ist

$$f'_-(0) = -1\,, \quad f'_+(0) = 1\,.$$

Satz 12.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann gilt*

(1) *Ist f differenzierbar in a und setzen wir*

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h\,, \tag{12.11}$$

so gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,. \tag{12.12}$$

(2) *Ist $c \in \mathbb{R}$ und gilt (12.12) für die durch*

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - ch \tag{12.13}$$

definierte Funktion r, so ist f differenzierbar in a und $f'(a) = c$.

Beweis: Ist r durch (12.13) definiert, so gilt

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c\,. \tag{12.14}$$

Da der Limes auf der rechten Seite existiert und gleich Null ist genau dann, wenn f in a differenzierbar ist und $f'(a) = c$ gilt, folgen beide Behauptungen. □

Wir können die Aussage von Satz 12.3 auch so interpretieren: Die Differenz

$$r(x-a) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]$$

zwischen den Werten der Funktion f und ihrer *Linearisierung* geht für $x \to a$ schneller gegen 0 als die Differenz $x - a$. Für die Differenz

$$f(x) - [f(a) + c(x-a)]$$

ist dies aber nicht der Fall, wenn $c \neq f'(a)$. Wir können also die Linearisierung

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

interpretieren als die beste affin-lineare Approximation von f in der Nähe von a.

Satz 12.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann gilt: Ist f differenzierbar in a, so ist f stetig in a.*

Beweis: Nach Satz 12.3 gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,,$$

also auch

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0\,.$$

Grenzübergang $h \to 0$ auf beiden Seiten von

$$f(a) + f'(a)h + r(h) = f(a+h)$$

liefert also

$$f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

□

Satz 12.5 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Sind f und g differenzierbar in a, so sind auch $f+g$, λf und fg differenzierbar in a, und es gelten*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,, \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,, \tag{12.15}$$

sowie die Produktregel

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,. \tag{12.16}$$

Ist außerdem $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g in a differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,. \tag{12.17}$$

Beweis: Wegen

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h},$$

$$\frac{(\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)}{h} = \lambda\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

folgt (12.15) aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Folgen. Zum Beweis der Produktregel betrachten wir

$$\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{12.18}$$

Da $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ nach Satz 12.4, folgt (12.16) durch Grenzübergang $h \to 0$ in (12.18). Zum Beweis der Quotientenregel bemerken wir zunächst, dass wegen Satz 12.4 und Folgerung 8.15 für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt

$$g(x) \neq 0$$

für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$. Wir betrachten nun den Spezialfall $f = 1$. Ist $|h| < \delta$ und $a+h \in D$, so gilt

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}\right) = -\frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot \frac{g(a+h)-g(a)}{h}. \tag{12.19}$$

Grenzübergang $h \to 0$ liefert

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}. \tag{12.20}$$

Ist nun f beliebig, so folgt aus (12.20) und der Produktregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\frac{-g'(a)}{(g(a))^2} = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

□

Beispiel 12.6

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

   $$f_n'(a) = na^{n-1}. \tag{12.21}$$

   Induktion. $n = 1$ klar, $n \to n+1$:

   $$f_{n+1}'(a) = (f_1 f_n)'(a) = f_1'(a)f_n(a) + f_1(a)f_n'(a) = 1 \cdot a^n + a \cdot na^{n-1} = (n+1)a^n.$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

   $$f'(a) = -na^{-n-1}.$$

   Aus (12.21) und der Quotientenregel folgt nämlich

   $$f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}.$$

3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dann gilt

$$f'(a) = \frac{\cos a \cos a - \sin a \cdot (-\sin a)}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}\,.$$

Satz 12.7 *Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, sei f differenzierbar in $x \in [a,b]$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ in $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \tag{12.22}$$

Beweis: Sei (h_n) eine beliebige Folge mit $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ und $y + h_n \in f([a,b])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$x_n = f^{-1}(y + h_n)\,.$$

Da f^{-1} stetig und streng monoton ist nach Satz 9.4, gilt

$$x_n = f^{-1}(y + h_n) \to f^{-1}(y) = x\,, \quad x_n \neq x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

und

$$\frac{f^{-1}(y + h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y + h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

□

Beispiel: Für $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgt aus Satz 12.7

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{(\exp)'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}\,. \tag{12.23}$$

Folgerung 12.8 *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{12.24}$$

Beweis: Es ist

$$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}}\,,$$

also

$$1 = (\ln)'(1) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right],$$

also

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

□

Satz 12.9 *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Sind f in a und g in $f(a)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in a differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) . \tag{12.25}$$

Beweis: Das naheliegende Argument,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

zu betrachten und in den beiden Brüchen auf der rechten Seite einzeln zum Grenzwert überzugehen, bereitet Schwierigkeiten, wenn $f(x) = f(a)$ ist. Wir umgehen dieses Problem, indem wir definieren

$$d(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} , & y \neq f(a) , \\ g'(f(a)) , & y = f(a) . \end{cases}$$

Es gilt dann für alle $x \in D$ mit $x \neq a$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = d(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . \tag{12.26}$$

Nach Definition von d gilt, da g in $f(a)$ differenzierbar ist,

$$\lim_{y \to f(a)} d(y) = g'(f(a)) ,$$

also folgt, da f stetig ist in a,

$$\lim_{x \to a} d(f(x)) = g'(f(a)) ,$$

also folgt die Behauptung durch Grenzübergang $x \to a$ in (12.26). □

Beispiel 12.10

1. Wir betrachten $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$ fest. Es ist

   $$f(x) = \exp(\alpha \ln x) ,$$

   also

   $$f'(x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

2. Wir betrachten $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ fest. Es ist

   $$f(x) = \exp(x \ln \alpha) ,$$

   also

   $$f'(x) = \exp(x \ln \alpha) \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha .$$

□

Definition 12.11 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Wir setzen $f^{(0)} = f$. f heißt n-mal differenzierbar in $a \in D$, wenn für die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} \tag{12.27}$$

im Sinne von Definition 12.1 existiert; in diesem Falle definieren wir die n-te Ableitung von f in a als

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} \,. \tag{12.28}$$

f heißt n-mal differenzierbar in D, wenn f n-mal differenzierbar ist in jedem Punkt a von D. f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ stetig in D ist. Wir definieren $C^0(D) = C(D)$ und für $n \geq 1$

$$C^n(D) = \{f | f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar in } D\} \,, \tag{12.29}$$

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(D) \,. \tag{12.30}$$

Die Funktionen in $C^\infty(D)$ nennen wir unendlich oft differenzierbar.

Wir behandeln nun einige Sätze über differenzierbare Funktionen.

Definition 12.12 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ein $x \in D$ heißt lokales Maximum (bzw. Minimum) von f in D, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$f(x) = \max_{\substack{y \in D \\ |y-x| < \varepsilon}} f(y) \tag{12.31}$$

bzw.

$$f(x) = \min_{\substack{y \in D \\ |y-x| < \varepsilon}} f(y) \,. \tag{12.32}$$

Ein $x \in D$ heißt lokales Extremum von f in D, wenn x lokales Maximum oder lokales Minimum von f in D ist.

Satz 12.13 *Sei $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Ist $x \in (a,b)$ lokales Extremum von f in (a,b), und ist f differenzierbar in x, so gilt*

$$f'(x) = 0 \,. \tag{12.33}$$

Beweis: Sei x lokales Maximum, sei ε so gewählt, dass (12.31) gilt mit $D = (a,b)$ und dass $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$. Dann gilt für alle $n > \varepsilon^{-1}$

$$\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \,, \tag{12.34}$$

$$\frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \geq 0 \,. \tag{12.35}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $f'(x) \leq 0$ und $f'(x) \geq 0$, also $f'(x) = 0$. Analog für ein lokales Minimum. $\square$

Die Umkehrung von Satz 12.13 gilt nicht. Beispiel: Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokales Extremum.

Satz 12.14 (Satz von Rolle) *Seien $a < b$, $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.*

Beweis: Nach Satz 8.13 nimmt f sein Maximum und sein Minimum in $[a,b]$ an; ist f nicht konstant (andernfalls ist die Behauptung trivialerweise richtig), so muß mindestens eines davon in (a,b) liegen, wir nennen es x. Nach Satz 12.13 ist $f'(x) = 0$. □

Satz 12.15 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g \in C[a,b]$, f, g differenzierbar in (a,b), sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \,. \tag{12.36}$$

Beweis: Aus $g(a) = g(b)$ folgt $g'(x) = 0$ für mindestens ein $x \in (a,b)$ nach Satz 12.14, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist also $g(a) \neq g(b)$. Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \,. \tag{12.37}$$

Es ist $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) \,,$$

woraus Satz 12.15 folgt. □

Folgerung 12.16 (Mittelwertsatz) *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \,. \tag{12.38}$$

Beweis: Anwendung von Satz 12.15 mit $g(x) = x$. □

Folgerung 12.17 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b), sei*

$$m = \inf_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) \,, \quad M = \sup_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) \,. \tag{12.39}$$

Dann gilt

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x) \tag{12.40}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x \leq y$.

Beweis: Anwendung von Satz 12.16 auf das Teilintervall $[x,y]$ von $[a,b]$. □

Folgerung 12.18 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b), sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Folgt aus (12.40) wegen $m = M = 0$. □

Satz 12.19 (Satz von de l'Hospital) *Seien $f, g \in C[a,b]$, f, g differenzierbar in (a,b), sei $x \in [a,b]$ mit $f(x) = g(x) = 0$, sei $g'(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in (a,b)$ mit $\xi \neq x$. Dann gilt: Falls der Grenzwert*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{12.41}$$

existiert, so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \tag{12.42}$$

und

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)}. \tag{12.43}$$

Beweis: Sei (x_n) eine beliebige Folge in $[a,b]$ mit $x_n \to x$ und $x_n \neq x$ für alle n. Wie im Beweis von Satz 12.15 folgt $g(x_n) \neq 0$ für alle n. Nach Satz 12.15 gibt es für alle n ein ξ_n zwischen x und x_n mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x)}{g(x_n) - g(x)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{12.44}$$

Aus $x_n \to x$ folgt $\xi_n \to x$ und damit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Da die Folge (x_n) beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 12.20

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1. \tag{12.45}$$

2. Wir berechnen

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right). \tag{12.46}$$

Es ist

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{12.47}$$

mit

$$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = x \sin x, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{12.48}$$

Es gilt

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}, \quad f'(0) = g'(0) = 0, \tag{12.49}$$

und weiter

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x}, \quad f''(0) = 0, \quad g''(0) = 2. \tag{12.50}$$

Wir können Satz 12.19 zweimal anwenden und erhalten

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{12.51}$$

Satz 12.21 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Dann gilt:*

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend}$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist monoton fallend}$$

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend}$$

Beweis: Nur die erste Behauptung. Sei $x < y$, dann existiert nach Satz 12.16 ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \leq 0 \,.$$

□

Beispiel 12.22 (Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

1. Es ist

$$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \,, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \,, \quad \sin'(x) = \cos(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \,.$$

Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Sinus,

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \,, \tag{12.52}$$

und ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Die Ableitung des Arcus-Sinus errechnet sich als

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,. \tag{12.53}$$

2. Analog erhält man, dass $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend ist; die Umkehrfunktion heißt Arcus-Cosinus,

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \,, \tag{12.54}$$

sie ist ebenfalls stetig und streng monoton fallend. Ihre Ableitung ist

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,. \tag{12.55}$$

3. Wegen

$$(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \,, \quad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

erhalten wir, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \tag{12.56}$$

heißt Arcus-Tangens, und wegen

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \tan^2 y + 1$$

gilt

$$(\arctan)'(x) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\,. \tag{12.57}$$

13 Gleichmäßige Konvergenz, normierte Räume

Für diesen Abschnitt vereinbaren wir: $\mathbb{K}$ steht für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. eine Aussage, in der $\mathbb{K}$ auftaucht, steht als Abkürzung für die beiden entsprechenden Aussagen mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seien M, N Mengen. Wir definieren

$$\mathrm{Abb}(M; N) = \{f | f : M \to N \text{ Abbildung}\} . \tag{13.1}$$

Definition 13.1 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Sei D Menge, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathrm{Abb}(D; \mathbb{K})$.

(1) *(f_n) heißt punktweise konvergent gegen $f \in \mathrm{Abb}(D; \mathbb{K})$, falls*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) , \qquad \textit{für alle } x \in D, \tag{13.2}$$

also falls zu jedem $x \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \geq n_0. \tag{13.3}$$

(2) *(f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen $f \in \mathrm{Abb}(D; \mathbb{K})$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in D \textit{ und alle } n \geq n_0. \tag{13.4}$$

Der Unterschied der beiden Konvergenzbegriffe besteht darin, dass im Falle der gleichmäßigen Konvergenz n_0 nicht von x abhängen darf.

Offensichtlich ist jede gleichmäßig konvergente Folge (f_n) auch punktweise konvergent.

Beispiel 13.2
Wir betrachten die durch

$$f_n(x) = x^n$$

definierte Folge (f_n) in $\mathrm{Abb}([0, 1]; \mathbb{R})$. Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) , \quad f(x) = \begin{cases} 0 , & 0 \leq x < 1 , \\ 1 , & x = 1 . \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig. Ist etwa $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und $\xi_n \in [0, 1]$ so gewählt, dass $f_n(\xi_n) = \frac{1}{2}$ (Zwischenwertsatz), so gilt

$$|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon ,$$

also kann (13.4) nicht erfüllt sein, egal wie man n_0 wählt.

In Quantorenschreibweise drückt sich der Unterschied von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz folgendermaßen aus:

$$f_n \to f \text{ punktweise:} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig:} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Satz 13.3 *Sei $D \subset \mathbb{K}$, sei (f_n) Folge in $C(D;\mathbb{K})$, sei $f : D \to \mathbb{K}$ und es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann ist f auf D stetig.*

Beweis: Wir zeigen, dass für die Funktion f das ε-δ-Kriterium aus Satz 8.14 in jedem Punkt $a \in D$ erfüllt ist. Sei $a \in D$, $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Wegen Satz 8.14 können wir ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aus Satz 8.14 folgt nun die Behauptung. □

Definition 13.4 (Norm, normierter Raum)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm auf X, falls gilt

$$\|x\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0, \tag{13.5}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{13.6}$$

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \textit{für alle } x, y \in X. \tag{13.7}$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Beispiele: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Definieren wir für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \tag{13.8}$$

so ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (Beweis später).

Definition 13.5 *Wir definieren die Maximumnorm von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ durch*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|. \tag{13.9}$$

Lemma 13.6 *$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist normierter Raum.*

Beweis:

$$\|x\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1\le i\le n} |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_i| = 0 \text{ für alle } i \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max_{1 \le i \le n} |x_i| = |\lambda| \, \|x\|_\infty \, .$$

Für $x, y \in \mathbb{K}$ und alle i, $1 \le i \le n$, gilt

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \, ,$$

also

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i + y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \, .$$

□

Definition 13.7 (Supremumsnorm)
Sei D Menge. Wir definieren durch

$$B(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K}, \ f \ \textit{ist beschränkt}\} \tag{13.10}$$

den Raum aller beschränkten Funktionen auf D mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $f \in B(D; \mathbb{K})$ definieren wir die Supremumsnorm von f durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)| \, . \tag{13.11}$$

Satz 13.8 *Sei D Menge. Dann ist $(B(D; \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ ein normierter Raum.*

Beweis: $B(D; \mathbb{K})$ ist ein Vektorraum, da Summen und skalare Vielfache beschränkter Funktionen ebenfalls beschränkte Funktionen sind. Für $f, g \in B(D; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$f \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in D \text{ mit } |f(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_\infty > 0 \, ,$$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in D} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in D} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty \, ,$$

$$|(f + g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, , \qquad \text{für alle } x \in D,$$

also

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$

□

Lemma 13.9 *Sei $(X, \| \cdot \|)$ normierter Raum, Y Unterraum von X. Dann ist auch $(Y, \| \cdot \|_Y)$ normierter Raum, wobei $\| \cdot \|_Y$ die Restriktion von $\| \cdot \|$ auf Y bezeichnet.*

Beweis: Klar. □

Definition 13.10 (Konvergenz im normierten Raum)
Sei $(X, \| \cdot \|)$ normierter Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$ (bezüglich $\| \cdot \|$), falls gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0 \, . \tag{13.12}$$

In diesem Falle schreiben wir wie bisher $x_n \to x$ und

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \, . \tag{13.13}$$

Offensichtlich stimmt für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ dieser Konvergenzbegriff mit unserem bisherigen überein.

Lemma 13.11 *Sei $D \subset \mathbb{K}$, sei (f_n) Folge in $B(D;\mathbb{K})$. Dann sind äquivalent:*

(1) *$f_n \to f$ gleichmäßig.*

(2) *$f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } x \in D, \tag{13.14}$$

genau dann, wenn

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\,. \tag{13.15}$$

Die Aussage (1) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass (13.14) gilt für alle } n \ge n_0,$$

die Aussage (2) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass (13.15) gilt für alle } n \ge n_0.$$

□

Satz 13.12 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum, und*

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,. \tag{13.16}$$

Beweis: Ist $f \in C[a,b]$, so ist auch $|f| \in C[a,b]$. Nach Satz 8.13 nimmt $|f|$ auf $[a,b]$ das Maximum an. Also ist $C[a,b]$ Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$, also auch normierter Raum nach Lemma 13.9, und

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

□

14 Das Integral

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir wollen eine Zahl $I(f)$ – das Integral von f – definieren, welche für nichtnegative Funktionen der anschaulichen Vorstellung "Flächeninhalt unterhalb des Graphen von f" entspricht. Die zugehörige Abbildung I sollte auf einer möglichst großen Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen definiert sein, und

$$I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

sollte möglichst viele "gute mathematische Eigenschaften" haben. Der Versuch, diesen beiden Forderungen gerecht zu werden, hat in den letzten 150 Jahren zu einer ganzen Reihe unterschiedlicher Definitionen des Integrals geführt. In der heutigen Analysis wird überwiegend das sogenannte Lebesgue-Integral verwendet.

In dieser einführenden Vorlesung befassen wir uns mit einem etwas einfacheren Integralbegriff.

Im folgenden ist $[a, b]$ immer ein abgeschlossenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definition 14.1 (Zerlegung)
Eine endliche Menge $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $n \geq 1$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ heißt Zerlegung von $[a, b]$. Die Intervalle (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq n$, heißen Teilintervalle von Z. Eine Zerlegung Z' heißt Verfeinerung der Zerlegung Z, wenn $Z' \supset Z$.

Definition 14.2 (Treppenfunktion)
Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung Z gibt, so dass φ auf allen Teilintervallen von Z konstant ist, d.h. für alle i gibt es $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Eine solche Zerlegung Z heißt zugehörig zu φ. (Über das Verhalten von φ in den Teilpunkten x_i wird nichts vorausgesetzt.) Wir setzen

$$T[a, b] = \{\varphi | \varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion}\} . \tag{14.1}$$

Lemma 14.3 *$T[a, b]$ ist ein Unterraum von $B([a, b]; \mathbb{R})$.*

Beweis: Sind $f, g \in T[a, b]$ mit zugehörigen Zerlegungen Z_f und Z_g, so ist $Z_f \cup Z_g$ zugehörige Zerlegung zu $\alpha f + \beta g$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, so wollen wir das Integral von φ durch

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) \tag{14.2}$$

definieren, wobei $J_i = (x_{i-1}, x_i)$ Teilintervalle einer zu φ zugehörigen Zerlegung Z sind und φ auf J_i den konstanten Wert c_i hat.

Lemma 14.4 *Ist $\varphi \in T[a, b]$, und sind $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ und $Z' = \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ zu φ zugehörige Zerlegungen mit $\varphi = c_i$ auf (x_{i-1}, x_i) und $\varphi = c'_i$ auf (x'_{i-1}, x'_i), so ist*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} c'_i (x'_i - x'_{i-1}) . \tag{14.3}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass Z' aus Z durch Hinzunahme eines Teilpunktes $x \in (x_{k-1}, x_k)$ entsteht. Dann ist $m = n + 1$ und

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} c_i'(x_i' - x_{i-1}') &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_k(x - x_{k-1}) + c_k(x_k - x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})\,.\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall wird darauf zurückgeführt: Jede Verfeinerung Z' von Z entsteht, indem wir von Z ausgehend endlich oft einen einzelnen Teilpunkt hinzunehmen. Zwei beliebige Zerlegungen Z und Z' besitzen $Z \cup Z'$ als gemeinsame Verfeinerung. □

Lemma 14.4 zeigt, dass der Wert der rechten Seite von (14.2) nicht davon abhängt, welche der zu φ zugehörigen Zerlegungen Z zugrundegelegt wird. Die folgende Definition ist daher sinnvoll.

Definition 14.5 (Integral einer Treppenfunktion)
Ist $\varphi \in T[a,b]$, so definieren wir das Integral $I(\varphi)$ von φ über $[a,b]$ durch (14.2). Statt $I(\varphi)$ schreiben wir auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\,. \tag{14.4}$$

Lemma 14.6 *Für alle $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(x)\,dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)\,dx + \beta \int_a^b \psi(x)\,dx\,, \tag{14.5}$$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\varphi(x)|\,dx \le (b-a)\|\varphi\|_\infty\,. \tag{14.6}$$

Ist $\varphi \le \psi$ (d.h. $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$), so gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx\,. \tag{14.7}$$

Beweis: Die Aussagen (14.5) und (14.7) werden mit Definition 14.5 auf die entsprechenden Eigenschaften von endlichen Summen zurückgeführt. (14.6) folgt aus (14.7). □

Definition 14.7 (Regelfunktion)
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen in $T[a,b]$ gibt, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren

$$R[a,b] = \{f \,|\, f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ ist Regelfunktion}\}\,. \tag{14.8}$$

Regelfunktionen brauchen nicht stetig zu sein (jede Treppenfunktion ist eine Regelfunktion), aber jede Regelfunktion f ist beschränkt: Ist φ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty \le 1$, so gilt

$$|f(x)| \le |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x)| \le 1 + \|\varphi\|_\infty$$

für alle $x \in [a,b]$. (Jede Treppenfunktion ist beschränkt, da sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.)

Lemma 14.8 *Sei $f \in R[a,b]$, seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to f$ gleichmäßig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx\,. \tag{14.9}$$

Beweis: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 14.6

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_m(x)\,dx \right| &\leq (b-a)\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \\ &\leq (b-a)(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\varphi_m\|_\infty)\,. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Die durch

$$I_n = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

definierte Folge ist also eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent. Da (φ_n) und (ψ_n) Teilfolgen der ebenfalls gegen f gleichmäßig konvergenten, durch $(\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots)$ definierten Folge sind, gilt (14.9). □

Lemma 14.8 zeigt, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 14.9 (Integral einer Regelfunktion)
Sei $f \in R[a,b]$. Ist (φ_n) eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so definieren wir das Integral von f über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx\,. \tag{14.11}$$

Lemma 14.10 *$R[a,b]$ ist ein Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$. Für alle $f, g \in R[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,, \tag{14.12}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\|f\|_\infty\,. \tag{14.13}$$

Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{14.14}$$

Beweis: Seien (φ_n), (ψ_n) Folgen in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to g$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) - (\alpha f + \beta g)\|_\infty \leq \alpha\|\varphi_n - f\|_\infty + \beta\|\psi_n - g\|_\infty\,,$$

also gilt $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n \to \alpha f + \beta g$ gleichmäßig. Daher ist $R[a,b]$ Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)\,dx \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (14.14) definieren wir

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \|f - \varphi_n\|_\infty , \quad \tilde{\psi}_n = \psi_n + \|g - \psi_n\|_\infty .$$

Dann gilt $\tilde{\varphi}_n \le f$ und $g \le \tilde{\psi}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\tilde{\varphi}_n \to f$ und $\tilde{\psi}_n \to g$ gleichmäßig, also

$$\int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)\, dx \le \int_a^b \tilde{\psi}_n(x)\, dx ,$$

und Grenzübergang $n \to \infty$ liefert (14.14). (14.13) folgt aus (14.14). □

Bemerkung 14.11
Die Aussagen von Lemma 14.10 lassen sich zusammenfassen in dem Satz: Das Integral $I : (R[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare, stetige und monotone Abbildung. Die Linearität steht in (14.12). Aus (14.13) folgt, dass $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ die Konvergenz $I(f_n) \to I(f)$ zur Folge hat. Die Monotonie von I in (14.14) bezieht sich auf die durch den punktweisen Vergleich definierte Ordnungsrelation in $R[a,b]$.

Satz 14.12 *Es gilt $C[a,b] \subset R[a,b]$, d.h. jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

Beweis: Sei $f \in C[a,b]$, sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $N = (b-a)/\delta \in \mathbb{N}$ und

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta$ gelten. (Das ist möglich, weil f gleichmäßig stetig ist nach Satz 8.20.) Wir definieren $\varphi_n \in T[a,b]$ durch $\varphi_n(b) = f(b)$ und

$$\varphi_n(x) = f(k\delta) , \quad \text{falls } x \in [k\delta, (k+1)\delta) , \quad k \in \{1, \ldots, N-1\} .$$

Dann ist

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(k\delta)| < \frac{1}{n} ,$$

falls $x \in [k\delta, (k+1)\delta)$, also

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$$

und damit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig. □

Lemma 14.13 *Sei $a < b < c$, sei $f \in R[a,c]$. Dann sind $f|[a,b] \in R[a,b]$ und $f|[b,c] \in R[b,c]$, und es gilt*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx . \tag{14.15}$$

Beweis: Sei (φ_n) Folge in $T[a,c]$ mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig, dann gilt $\varphi_n|[a,b] \in T[a,b]$ und $\varphi_n|[a,b] \to f|[a,b]$ gleichmäßig. Also ist $f|[a,b] \in R[a,b]$. Ebenso für $[b,c]$. Ist Z_n zugehörige Zerlegung zu $\varphi_n|[a,b]$ und Z_n' zugehörige Zerlegung zu $\varphi_n|[b,c]$, so ist $Z_n \cup Z_n'$ zugehörige Zerlegung zu φ_n, und aus Definition 14.5 folgt unmittelbar

$$\int_a^c \varphi_n(x)\, dx = \int_a^b (\varphi_n|[a,b])(x)\, dx + \int_b^c (\varphi_n|[b,c])(x)\, dx .$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung. □

Definition 14.14 *Ist $f \in R[a,b]$, so definieren wir*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \textit{sowie} \quad \int_c^c f(x)\,dx = 0 \tag{14.16}$$

für alle $c \in [a,b]$.

Die in Lemma 14.10 und Lemma 14.13 formulierten Eigenschaften lassen sich entsprechend auf den Fall $b < a$ übertragen, insbesondere gilt (14.15) für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz 14.15 *Seien $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$. Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,. \tag{14.17}$$

Ist $x \in [a,b]$ und f stetig in x, so ist F differenzierbar in x und

$$F'(x) = f(x)\,. \tag{14.18}$$

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ und $x + h \in [a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,dt\,. \end{aligned} \tag{14.19}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{falls } |t - x| < \delta,\ t \in [a,b].$$

Dann gilt für alle $h > 0$ mit $|h| < \delta$, $x + h \in [a,b]$,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,, \tag{14.20}$$

analog für $h < 0$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,, \tag{14.21}$$

Also ist F differenzierbar in x, und

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

□

Definition 14.16 (Stammfunktion)
Seien $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$, sei F differenzierbar auf $[a,b]$. Gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so heißt F Stammfunktion von f.

Aus Satz 14.15 folgt nun: Ist $f \in C[a,b]$, so ist die durch (14.17) definierte Funktion F eine Stammfunktion von f.

Lemma 14.17 *Seien $F, G \in C[a,b]$, sei F Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist G genau dann Stammfunktion von f, wenn $G - F$ konstant ist.*

Beweis: Ist $G - F$ konstant, so ist mit F auch G auf $[a,b]$ differenzierbar, und $G' = (G-F)' + F' = F' = f$. Ist umgekehrt G Stammfunktion von f, so gilt $G' = f = F'$, also $(G-F)' = 0$ und damit $G - F$ konstant nach Folgerung 12.18. □

Satz 14.18 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f \in C[a,b]$, sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,. \tag{14.22}$$

Beweis: Nach Satz 14.12 ist $f \in R[a,b]$, nach Satz 14.15 wird durch

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

eine in allen Punkten $x \in [a,b]$ differenzierbare Funktion $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F_a'(x) = f(x)$, also eine Stammfunktion von f definiert, und es gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a)\,.$$

Aus Lemma 14.17 folgt

$$F(b) - F_a(b) = F(a) - F_a(a)\,,$$

also gilt (14.22). □

Wir schreiben auch

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Bemerkung 14.19
Oft werden die Aussagen von Satz 14.15, Lemma 14.17 und Satz 14.18 zusammengenommen als “Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung” bezeichnet. □

Aus jeder Formel für die Differentiation erhalten wir eine Formel für die Integration. Beispiel: Es ist

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0\,,$$

also

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,.$$

Entsprechend erhalten wir aus jeder Rechenregel für die Differentiation eine Rechenregel für die Integration.

Satz 14.20 (Substitutionsregel)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, es gelte $g([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,. \tag{14.23}$$

Beweis: Sei F Stammfunktion von f auf dem (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall $J = g([a,b])$. Dann ist $F \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ differenzierbar, und aus der Kettenregel folgt

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)\,, \quad t \in [a,b]\,.$$

Zweimalige Anwendung des Hauptsatzes liefert nun

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,.$$

□

Beispiel 14.21

1. $$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx\,,$$
   falls $f : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $c \in \mathbb{R}$. (Substitution $g(t) = t + c$.)

2. $$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx\,,$$
   falls $f : [ac, bc] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $c \neq 0$. (Substitution $g(t) = ct$.)

3. Ist $g \in C^1[a,b]$ mit $g(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$, so liefert Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) = 1/x$
   $$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln(g(t))\Big|_{t=a}^{t=b}\,.$$
   Für $g(t) = \cos t$ ergibt sich, falls $[a,b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$,
   $$\int_a^b \tan t\,dt = -\ln(\cos t)\Big|_{t=a}^{t=b}\,.$$

4. Die Substitution
   $$g(t) = 2\arctan t\,, \quad g'(t) = \frac{2}{1+t^2}\,,$$
   führt vermittels der Identität
   $$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

auf

$$\sin(g(t)) = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

Hieraus ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int_a^b \frac{1}{\sin(g(t))} g'(t)\,dt = \int_a^b \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_a^b \frac{1}{t}\,dt \\ &= \ln(b) - \ln(a)\,,\end{aligned}$$

falls etwa $0 < a < b$, und damit

$$\int_c^d \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=c}^{x=d}, \quad 0 < c < d < \pi\,.$$

Satz 14.22 (Partielle Integration)
Seien $f, g \in C^1[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,. \tag{14.24}$$

Beweis: Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = f(x)g(x)$. Dann folgt aus der Produktregel

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$

also ist F Stammfunktion von $f'g + fg'$, und nach dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

woraus (14.24) folgt. □

Beispiel 14.23

1. Für $0 < a < b$ gilt

$$\int_a^b \ln x\,dx = \int_a^b 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b 1\,dx = (x\ln x - x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

und

$$G(x) = x\ln(x) - x$$

ist eine Stammfunktion des Logarithmus.

2. Wir finden eine Rekursionsformel für

$$I_m = \int_a^b (\sin x)^m\,dx\,. \tag{14.25}$$

Es ist

$$I_0 = b - a\,, \quad I_1 = \cos a - \cos b\,.$$

Für $m \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_a^b (\sin x)^m \, dx = -\int_a^b (\sin x)^{(m-1)} (\cos)'(x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (m-1) \int_a^b (\sin x)^{(m-2)} (\cos x)^2 \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (m-1) \int_a^b (\sin x)^{(m-2)} (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (1-m) I_m + (m-1) I_{m-2} \, , \qquad (14.26)
\end{aligned}$$

also

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} - \frac{1}{m} (\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} .$$

Lemma 14.24 *Sind $f, g \in R[a,b]$, so ist auch $fg \in R[a,b]$.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 14.25 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ mit $g \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx \, . \qquad (14.27)$$

Beweis: Mit

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \, , \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x) \, ,$$

gilt wegen $g \geq 0$

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx \, .$$

Wähle $y \in [m, M]$ mit

$$y \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) g(x) \, dx \, .$$

Wähle (Zwischenwertsatz) $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$, dann gilt (14.27). □

Folgerung 14.26 *Sei $f \in C[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(\xi) \, . \qquad (14.28)$$

Beweis: Anwendung von Satz 14.25 mit $g = 1$. □

Satz 14.27 *Sei $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$, $f \neq 0$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0 \, . \qquad (14.29)$$

Beweis: Sei $t \in [a,b]$ mit $f(t) > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(t)| \le \frac{f(t)}{2} =: \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-t| < \delta$. Definiere $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varepsilon\,, & |x-t| < \delta\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi(x) \le f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und also

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b \varphi(x)\,dx \ge \delta\varepsilon > 0\,.$$

□

Satz 14.28 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $f \in R[a,b]$.

(2) *Für alle $x \in [a,b)$ existiert*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi)\,, \tag{14.30}$$

und für alle $x \in (a,b]$ existiert

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi)\,. \tag{14.31}$$

Beweis:
"(1) ⇒ (2)": Übungsaufgabe.
"(2) ⇒ (1)": Es gelte (2). Wir nehmen an, f sei keine Regelfunktion. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|f - \varphi\|_\infty > \varepsilon\,, \quad \text{für alle } \varphi \in T[a,b]. \tag{14.32}$$

Wir definieren eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, indem wir $I_0 = [a,b]$ setzen und, falls I_n bereits konstruiert ist,

$$I_{n+1} = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \quad \text{oder } I_{n+1} = \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] \tag{14.33}$$

setzen. Die Wahl wird dabei so getroffen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f|I_n - \varphi\|_\infty > \varepsilon\,, \quad \text{für alle } \varphi \in T(I_n) \tag{14.34}$$

gilt. Das ist möglich: Für $n = 0$ gilt (14.34) wegen (14.32); gäbe es für beide Wahlmöglichkeiten von I_{n+1} ein $\varphi \in T(I_{n+1})$ mit $\|f|I_{n+1} - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$, so gäbe es auch ein $\varphi \in T(I_n)$ mit $\|f|I_n - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$. Es ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}\,, \quad x = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n\,.$$

Wir setzen (falls $a < x < b$, andernfalls wird nur einer der Grenzwerte betrachtet)

$$y_l = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi)\,, \quad y_r = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi)\,,$$

und wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$
\begin{aligned}
&|f(t) - y_l| \le \varepsilon \text{ für alle } t \in [a_n, x), \\
&|f(t) - y_r| \le \varepsilon \text{ für alle } t \in (x, b_n].
\end{aligned}
$$

Für $\varphi \in T(I_n)$, definiert durch $\varphi(x) = f(x)$ und

$$
\varphi(t) = \begin{cases} y_l\,, & t < x\,, \\ y_r\,, & t > x\,, \end{cases}
$$

gilt dann $\|f|I_n - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$ im Widerspruch zu (14.34). □

Aus Satz 14.28 folgt beispielsweise, dass die durch

$$
f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}
$$

keine Regelfunktion ist.

Folgerung 14.29 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Regelfunktion.*

Beweis: Nach Übungsaufgabe erfüllt jede monotone Funktion die Bedingung (2) aus Satz 14.28. □

Satz 14.30 *Sei (f_n) Folge in $R[a,b]$, sei $f_n \to f$ gleichmäßig, $f \in R[a,b]$. Dann gilt*

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,. \tag{14.35}
$$

Beweis: Es gilt

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\le \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \int_a^b \|f - f_n\|_\infty\,dx \\
&= \quad (b-a)\|f - f_n\|_\infty \to 0\,.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 14.31

1. Die Voraussetzung "$f \in R[a,b]$" in Satz 14.30 ist überflüssig, da sie bereits aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ und $f_n \in R[a,b]$ folgt. (Man zeigt, dass f die in Satz 14.28 verlangten rechts- und linksseitigen Grenzwerte besitzt.)

2. Ersetzt man in Satz 14.30 die gleichmäßige Konvergenz durch die punktweise, so gilt (14.35) im allgemeinen nicht. Beispiel:

   $$
   f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x\,, & x \in [0, \frac{1}{n}]\,, \\ 2n - n^2 x\,, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}
   $$

   Es gilt $f_n \to 0$ punktweise in $[0,1]$, aber

   $$
   \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1
   $$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 14.32 *Sei (f_n) Folge in $C^1[a,b]$, seien die Ableitungen $f_n' \in C[a,b]$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Es gebe ein $x_0 \in [a,b]$, so dass $(f_n(x_0))$ konvergent ist. Dann gibt es ein $f \in C^1[a,b]$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig und $f' = g$.*

Beweis: Zunächst ist g stetig nach Satz 13.3. Aus dem Hauptsatz folgt

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt$$

für alle $x \in [a,b]$. Wir setzen

$$c = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\,, \quad f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\,.$$

Dann ist $f \in C^1[a,b]$ und $f' = g$ nach dem Hauptsatz, und es gilt für alle $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \right| \\ &\le |c - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |g(t) - f_n'(t)|\, dt \\ &\le |c - f_n(x_0)| + |x_0 - x|\, \|g - f_n'\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also

$$0 \le \|f - f_n\|_\infty \le |c - f_n(x_0)| + (b-a)\|g - f_n'\|_\infty\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 14.33 (Uneigentliche Integrale)
Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f \in R[a,M]$ für alle $M > a$. Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\, dx\,, \tag{14.36}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Analog wird

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^a f(x)\, dx$$

definiert. Solche Integrale heißen uneigentliche Integrale.

Beispiel 14.34
Wir betrachten

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx\,, \quad \alpha > 1\,.$$

Es ist

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}\,,$$

also

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\,.$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \ln(M) \to \infty\,, \quad \text{falls } M \to \infty\,,$$

also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Definition 14.35 *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a+\varepsilon, b]$ für alle $\varepsilon > 0$. Wir definieren*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,, \tag{14.37}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beispiel 14.36
Wir betrachten

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \quad \alpha < 1\,.$$

Es ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

also

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln(\varepsilon) \to \infty\,, \quad \text{falls } \varepsilon \to 0\,,$$

also existiert $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Die eben beschriebenen Situationen können an beiden Integrationsgrenzen auftreten. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f \in R[a,b]$ für alle Intervalle $[a,b]$, so definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\,, \tag{14.38}$$

falls für ein $c \in \mathbb{R}$ beide Integrale auf der rechten Seite existieren. (Sie existieren dann für alle $c \in \mathbb{R}$, und die Summe hängt nicht von der Wahl von c ab.)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty} (-\arctan M) + \lim_{M\to\infty} \arctan M \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,.
\end{aligned} \tag{14.39}$$

Vorsicht! Die Existenz von

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M f(x)\,dx$$

ist **nicht** hinreichend für die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ im Sinne von (14.38), so ist etwa

$$\int_{-M}^{M} x\,dx = 0$$

für alle M, aber

$$\int_{0}^{M} x\,dx = \frac{1}{2}M^2 \to \infty \quad \text{für } M \to \infty.$$

Satz 14.37 (Integralvergleichskriterium)
Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{existiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \textit{ist konvergent}. \tag{14.40}$$

Beweis: Nach Folgerung 14.29 ist $f \in R[1,M]$ für alle $M > 1$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [k, k+1]$ gilt

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)\,,$$

also auch

$$f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

für alle k, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k)\,. \tag{14.41}$$

Aus der rechten Ungleichung folgt: Existiert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)\,dx\,,$$

so ist wegen $f \geq 0$ die Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{1}^{n} f(x)\,dx$$

eine obere Schranke für $\sum_{k=2}^{n} f(k)$, also ist die Reihe konvergent. Aus der linken Ungleichung in (14.41) folgt: Ist die Reihe konvergent, so ist die monoton wachsende Folge

$$a_n = \int_{1}^{n} f(x)\,dx$$

beschränkt, also konvergent, und wegen

$$a_n \leq \int_{1}^{M} f(x)\,dx \leq a_{n+1} \quad \text{für alle } M \in [n, n+1]$$

folgt auch die Existenz von $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ im Sinne von Definition 14.33. □

Beispiel 14.38
Wir betrachten für $s > 1$ die Funktion

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^s}\,.$$

Nach Beispiel 14.34 existiert $\int_1^\infty f(x)\,dx$, also ist nach Satz 14.37 die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

konvergent für $s > 1$. Die Funktion $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\,,$$

heißt die Riemannsche Zetafunktion.

15 Potenzreihen, Taylorreihen

Für diesen Abschnitt vereinbaren wir wieder: $\mathbb{K}$ steht für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. eine Aussage, in der $\mathbb{K}$ auftaucht, steht als Abkürzung für die beiden entsprechenden Aussagen mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Potenzreihen. Wir haben Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ und Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ in Kapitel 6 kennengelernt als Funktionen der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \,. \tag{15.1}$$

Notation 15.1 *Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann heißt*

$$B(a,r) = \{z : z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\}$$

die offene Kugel um a mit Radius r, und

$$K(a,r) = \{z : z \in \mathbb{C},\ |z-a| \leq r\}$$

die abgeschlossene Kugel um a mit Radius r.

Wir wissen bereits, dass eine Potenzreihe (15.1) für jedes $z \in B(a,r)$ absolut konvergiert, wenn $r \geq 0$ der Konvergenzradius von (15.1) ist (Satz 6.19). Wir stellen uns nun die Frage, ob diese Konvergenz gleichmäßig ist.

Satz 15.2 (Weierstraß-Kriterium)
Sei $D \subset \mathbb{K}$, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $B(D;\mathbb{K})$, es gelte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty \,. \tag{15.2}$$

Dann ist für alle $x \in D$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{15.3}$$

absolut konvergent, und die Partialsummen $s_n : D \to \mathbb{K}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \,, \tag{15.4}$$

konvergieren gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \,. \tag{15.5}$$

Beweis: Für alle $x \in D$ gilt $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$, also auch

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty \,,$$

also ist (15.3) absolut konvergent für alle $x \in D$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Aus (15.2) folgt, daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$

$$|s_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Also konvergiert s_n gleichmäßig gegen f. □

Beispiel: Für $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \frac{\cos kx}{k^2}\,,$$

gilt

$$\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k^2}\,,$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty\,,$$

also ist Satz 15.2 anwendbar und damit die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

absolut und in $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.

Satz 15.3 *Sei (c_k) Folge in $\mathbb{C}$, sei $a \in \mathbb{C}$, sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann konvergieren für jedes $\rho < r$ die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k \tag{15.6}$$

auf $K(a, \rho)$ gleichmäßig gegen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,. \tag{15.7}$$

Die Funktion f ist stetig auf $B(a, r)$.

Beweis: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| = \rho$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\, |z-a|^k < \infty\,, \tag{15.8}$$

da die Potenzreihe nach Satz 6.19 dort absolut konvergiert. Wir setzen

$$f_k(z) = c_k(z-a)^k ,$$

dann gilt für alle z mit $|z-a| \le \rho$

$$|f_k(z)| \le |c_k|\rho^k ,$$

also wegen (15.8)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \le \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\rho^k < \infty ,$$

wobei die Supremumsnorm auf $D = K(a,\rho)$ betrachtet wird. Aus dem Weierstraß-Kriterium Satz 15.2 folgt, dass $s_n \to f$ gleichmäßig auf $K(a,\rho)$. Da alle s_n stetig sind, ist nach Satz 13.3 auch f stetig auf $K(a,\rho)$ und damit auch auf

$$B(a,r) = \bigcup_{0<\rho<r} K(a,\rho) .$$

□

Als nächstes wollen wir zeigen, dass eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzintervalls differenzierbar ist und dass wir ihre Ableitung durch gliedweises Differenzieren erhalten können.

Satz 15.4 *Sei (c_k) Folge in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{15.9}$$

Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{15.10}$$

definierte Funktion $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $(a-r, a+r)$, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1} . \tag{15.11}$$

Diese Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius r, sie konvergiert absolut in $(a-r, a+r)$, und für jedes $\rho < r$ konvergieren die Partialsummen gleichmäßig auf $[a-\rho, a+\rho]$.

Beweis: Variante 1: Wir definieren für $k \ge 1$

$$g_k(x) = kc_k(x-a)^{k-1} .$$

Ist $\rho < r$, so gilt für die Supremumsnorm auf $[a-\rho, a+\rho]$

$$\|g_k\|_\infty \le k|c_k|\rho^{k-1} . \tag{15.12}$$

Sei x gewählt mit $\rho := |x-a| < r$, Sei weiter $\tilde{x}$ gewählt mit $\rho < |\tilde{x}-a| < r$. Es gibt $M > 0$ mit
$$|c_k|\,|\tilde{x}-a|^k \le M\,,$$
da die Reihe (15.9) in $\tilde{x}$ konvergiert. Aus (15.12) folgt

$$|g_k(x)| = k|c_k|\rho^{k-1} = \frac{k}{\rho}\left(\frac{\rho}{|\tilde{x}-a|}\right)^k |c_k|\,|\tilde{x}-a|^k \le \frac{k}{\rho}\left(\frac{\rho}{|\tilde{x}-a|}\right)^k M\,.$$

Es folgt weiter
$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{\rho} k \left(\frac{\rho}{|\tilde{x}-a|}\right)^k < \infty\,,$$
da die rechts stehende Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent ist. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1} \tag{15.13}$$

ist also für jedes x mit $|x-a| < r$ konvergent und hat daher Konvergenzradius $\ge r$. Ein analoges Argument zeigt die Divergenz für $|x-a| > r$, also ist der Konvergenzradius von (15.13) gleich r. Aus Satz 15.3 folgt die absolute Konvergenz auf $(a-r, a+r)$ und die gleichmäßige Konvergenz auf $[a-\rho, a+\rho]$ für jedes $\rho < r$. Wir wenden nun Satz 14.32 auf die Partialsummen der Reihen in (15.10) und (15.11) an und erhalten, dass f differenzierbar und f' durch (15.11) gegeben ist, und zwar auf jedem solchen Intervall $[a-\rho, a+\rho]$ und damit auf $(a-r, a+r)$.

Variante 2: Wir zeigen, dass für $0 < |x-a| < r$ und

$$\tilde{c_k} = \frac{k}{|x-a|} c_k$$

gilt, dass
$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{c}_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = r\,. \tag{15.14}$$
Aus (15.14) folgt, dass die Potenzreihe (15.13) ebenfalls den Konvergenzradius r hat, und der Beweis geht weiter wie bei Variante 1. Um (15.14) zu beweisen, verwendet man

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x-a|} = 1\,, \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1\,,$$

letzteres gilt wegen $\ln(\sqrt[k]{k}) = (\ln k)/k \to 0$ für $k \to \infty$. Es ergibt sich dann

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{c}_k|} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x-a|}} \cdot \big(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\big) \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\,.$$

□

Beispiel 15.5
Die die Funktion
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

definierende Potenzreihe ist konvergent für $|x| < 1$, divergent für $|x| > 1$, hat also Konvergenzradius $r = 1$. Für $|x| < 1$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,,$$

also nach Satz 15.4

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Hieraus erhalten wir die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

□

Satz 15.6 *Sei (c_k) Folge in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{15.15}$$

Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{15.16}$$

definierte Funktion $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar in $(a-r, a+r)$, und es gilt

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \tag{15.17}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir zeigen mit Induktion über k: f ist k-mal differenzierbar in $(a-r, a+r)$, und $f^{(k)}$ ist gegeben durch die in $(a-r, a+r)$ konvergente Potenzreihe

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1)c_m(x-a)^{m-k}\,. \tag{15.18}$$

Für $k = 1$ gilt (15.18) nach Satz 15.4. Gilt die Behauptung für k, so können wir Satz 15.4 auf $f^{(k)}$ anwenden und erhalten die Formel (15.18) für $k + 1$ durch gliedweises Differenzieren. Die Formel (15.17) folgt, indem wir $x = a$ in (15.18) setzen. □

Für Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{15.19}$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ gilt also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k\,, \quad x \in (a-r, a+r)\,. \tag{15.20}$$

Taylorreihen. Ausgangspunkt ist die Formel (15.20), welche es (jedenfalls für Potenzreihen) erlaubt, den Wert $f(x)$ einer Funktion durch die Werte von f und ihren Ableitungen im Punkt a darzustellen.

Definition 15.7 (Taylorreihe)
Sei $a \in \mathbb{R}$, sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $a \in I$, sei $f \in C^\infty(I)$. Ist $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,, \tag{15.21}$$

so heißt die durch

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{15.22}$$

definierte Funktion $T_f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt a.

Bemerkung 15.8

1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe (15.21) kann 0 sein. (In diesem Fall können wir $T_f(x)$ lediglich für $x = a$ definieren, $T_f(a) = f(a)$.)
2. Ist f durch eine Potenzreihe definiert, so gilt nach Satz 15.6
$$f = T_f \,.$$
So ist etwa
$$\exp(x) = T_{\exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \,.$$
3. Für $f \in C^\infty(I)$ ist es möglich, daß $f \neq T_f$. Beispiel:
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \,, & x > 0 \,, \\ 0 \,, & x \leq 0 \,. \end{cases}$$
Es ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe Übungsaufgabe), also ist $T_f = 0$ im Entwicklungspunkt $a = 0$.

□

Die Approximation einer Funktion f durch die Partialsummen ihrer Taylorreihe

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \tag{15.23}$$

mit einem Restglied R_{n+1} ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis. Sie ist bereits dann sinnvoll, wenn nur die ersten n bzw. $n+1$ Ableitungen von f existieren.

Definition 15.9 (Taylorpolynom)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^n(I)$ und $a \in I$. Dann heißt das durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{15.24}$$

definierte Polynom das n-te Taylorpolynom von f in a.

Satz 15.10 (Taylorentwicklung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \tag{15.25}$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{15.26}$$

Beweis: Induktion über n. Für $n = 0$ wird die Behauptung zu

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

was nach dem Hauptsatz richtig ist. Zum Beweis von $n-1 \to n$ sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)\,, \tag{15.27}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt\,. \tag{15.28}$$

Es gilt dann mit partieller Integration

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{1}{n}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x -\frac{1}{n}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in (15.27) liefert die Behauptung. □

Satz 15.11 *Seien die Voraussetzungen von Satz 15.10 erfüllt. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein ξ zwischen a und x mit*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \tag{15.29}$$

Beweis: Da $f^{(n+1)}$ stetig ist und die durch

$$g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

definierte Funktion zwischen a und x nicht das Vorzeichen wechselt, können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 14.25) anwenden und erhalten, daß es ein ξ zwischen a und x gibt mit

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n\,dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

□

Folgerung 15.12 *Seien die Voraussetzungen von Satz 15.10 erfüllt. Gilt dann zusätzlich* $f^{(n+1)} = 0$ *in* I*, so ist* f *ein Polynom vom Grad* $\leq n$*.*

Beweis: In diesem Fall ist $R_{n+1} = 0$ in I. □

Folgerung 15.13 *Seien die Voraussetzungen von Satz 15.10 erfüllt. Dann gibt es eine Funktion* $\eta : I \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \eta(x)(x-a)^{n+1} \tag{15.30}$$

und

$$\lim_{x \to a} \eta(x) = 0\,. \tag{15.31}$$

Beweis: Nach Satz 15.11 finden wir zu jedem $x \in I$ ein $\xi(x)$ mit $|\xi(x) - a| \leq |x - a|$ und

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x)) - f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Wir definieren

$$\eta(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x)) - f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,,$$

dann gilt (15.31), da $f^{(n+1)}$ stetig ist und $\lim_{x\to a} \xi(x) = a$. □

Ist also $f \in C^n(I)$ und T_n das n-te Taylorpolynom von f in a, so geht der Fehler $|f(x) - T_n(x)|$ für $x \to a$ schneller gegen 0 als $(x-a)^n$.

Definition 15.14 (Klein-O und Groß-O)
Sei $\delta > 0$*,* $I = (-\delta, \delta)$ *und* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Wir sagen*

$$f(h) = O(g(h))\,, \tag{15.32}$$

falls es ein $C > 0$ *gibt mit*

$$|f(h)| \leq C|g(h)|\,, \quad \text{für alle } h \in I. \tag{15.33}$$

Wir sagen

$$f(h) = o(g(h))\,, \tag{15.34}$$

falls $g(h) \neq 0$ *für alle* $h \neq 0$ *und*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h)}{g(h)} = 0\,. \tag{15.35}$$

Beispiel 15.15
Sei T_n das n-te Taylorpolynom von f in $a \in I$, I Intervall, sei

$$r(h) = f(a+h) - T_n(a+h)\,.$$

Dann gilt nach Folgerung 15.13

$$r(h) = o(h^n)\,, \quad \text{falls } f \in C^n(I),$$

und

$$r(h) = O(h^{n+1})\,, \quad \text{falls } f \in C^{n+1}(I),$$

da für eine geeignete Zwischenstelle ξ

$$r(h) = R_{n+1}(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}\,,$$

also für $|h| \le h_0$, $h_0 > 0$ fest,

$$|r(h)| \le C|h|^{n+1}\,, \quad C = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{|\xi - a| \le |h_0|} |f^{(n+1)}(\xi)|\,.$$

Beispiel 15.16

1. Die Taylorreihe des Sinus mit Entwicklungspunkt $a = 0$ ist

$$T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \tag{15.36}$$

   und für das Restglied folgt, da alle Ableitungen des Sinus durch 1 beschränkt sind, aus Satz 15.11

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^n}{n!}\,, \tag{15.37}$$

   also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,,$$

   und damit auch

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{15.38}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Analog folgt für den Cosinus mit Entwicklungspunkt $a = 0$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{15.39}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$.

16 Konvexe Funktionen

Definition 16.1 (Konvexe Menge)
Sei X Vektorraum, $D \subset X$. D heißt konvex, wenn

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in D \tag{16.1}$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$.

Definition 16.2 (Konvexe Funktion)
Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt konvex, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{16.2}$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$. f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Lemma 16.3 *Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Seien $x_i \in D$, $\lambda_i \in [0,1]$ für $1 \le i \le n$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,. \tag{16.3}$$

Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,. \tag{16.4}$$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 16.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Das ist bereits in Satz 12.21 bewiesen worden.
"$\Rightarrow$": Sei $x \in D$ mit $f'(x) < 0$. Dann ist für hinreichend kleines $h > 0$ auch

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0\,,$$

also $f(x+h) < f(x)$, also f nicht monoton wachsend. □

Satz 16.5 *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$. Dann ist nach Satz 16.4 die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien nun $x_1, x_2 \in D$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $x_1 < x_2$, sei

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\,.$$

Dann gibt es nach Mittelwertsatz $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\,.$$

Es ist

$$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)\,, \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)\,,$$

also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}\,.$$

Multiplikation mit $\lambda(1-\lambda)$ und Umsortieren liefert

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,.$$

"$\Rightarrow$": Sei $x \in D$. Seien außerdem $y \in D$, $y > x$ und $\lambda \in (0,1)$ beliebig, dann gilt

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \le \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)\,,$$

also

$$f(x + \lambda(y-x)) - f(x) \le \lambda(f(y) - f(x))\,,$$

und weiter

$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,.$$

Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ liefert

$$f'(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

für alle $y > x$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_n > x$ für alle n und $x_n \to x$. Dann gibt es $\xi_n \in (x, x_n)$ mit

$$f'(x) \le \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(\xi_n)\,,$$

also

$$0 \le \frac{f'(\xi_n) - f'(x)}{\xi_n - x}\,,$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $\xi_n \to x$, also $f''(x) \ge 0$. □

Satz 16.6 *Seien $x_i > 0$, $\lambda_i \in [0,1]$ für $1 \le i \le n$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,. \tag{16.5}$$

Beweis: Die Funktion $-\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 16.5 konvex. Wir wenden Lemma 16.3 an mit $f = -\ln$, dann gilt

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)\,,$$

also (da die Exponentialfunktion monoton ist)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ge \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i \ln x_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\,.$$

□

Satz 16.7 (Youngsche Ungleichung)
Seien $p, q \in (1, \infty)$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{16.6}$$

Dann gilt für alle $x, y \geq 0$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\,. \tag{16.7}$$

Beweis: Anwendung von Satz 16.6 mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q}\,, \quad x_1 = x^p\,, \quad x_2 = y^q\,.$$

□

Definition 16.8 (p-Norm)
Sei $1 \leq p < \infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. *Dann definieren wir*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{16.8}$$

Wir erinnern an die Definition der Maximumsnorm für $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,.$$

Satz 16.9 (Höldersche Ungleichung)
Seien $p, q \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *oder sei* $p = 1$, $q = \infty$, *oder sei* $p = \infty$, $q = 1$. *Dann gilt für alle* $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q\,. \tag{16.9}$$

Beweis: Für $p = 1$, $q = \infty$ (analog $p = \infty$, $q = 1$) gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$, beide von Null verschieden. (Andernfalls ist (16.9) trivialerweise erfüllt.) Dann ist $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$. Aus der Youngschen Ungleichung folgt für alle i, $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^p}{q\|y\|_q^q}\,,$$

also (Summation über i)

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

$\square$

Wir betrachten nun das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \,. \tag{16.10}$$

Aus der Hölderschen Ungleichung, angewendet mit $p = q = 2$, erhalten wir

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2 \,.$$

Die resultierende Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2 \,, \quad x, y \in \mathbb{C}^n \,, \tag{16.11}$$

heißt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Satz 16.10 (Minkowskische Ungleichung)
Sei $1 \le p \le \infty$. *Dann gilt für alle* $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \,. \tag{16.12}$$

Beweis: Für $p = \infty$: Siehe Lemma 13.6. Für $p = 1$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1 \,.$$

Sei nun $1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$. Dann ist $1 < q < \infty$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \,.$$

Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$. Wir definieren $z \in \mathbb{C}^n$ durch

$$z_i = |x_i + y_i|^{p-1} \,, \quad 1 \le i \le n \,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \, |z_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i z_i| \\ &\le \|x\|_p \, \|z\|_q + \|y\|_p \, \|z\|_q \end{aligned}$$

wegen der Hölderschen Ungleichung, und

$$\begin{aligned} \|z\|_q &= \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|x + y\|_p^{p-1} \,, \end{aligned}$$

also

$$\|x + y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1} \,.$$

Division durch $\|x + y\|_p^{p-1}$ liefert die Behauptung. $\square$

Folgerung 16.11 *Sei* $p \in [1, \infty)$. *Mit*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{16.13}$$

sind $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_p)$ *und* $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_p)$ *normierte Räume.*

Beweis: Die Minkowskische Ungleichung liefert gerade die Dreiecksungleichung. Die anderen verlangten Eigenschaften einer Norm folgen unmittelbar aus der Definition. $\square$

17 Metrische Räume

In einem normierten Raum X wird der Abstand $d(x,y)$ zweier Vektoren $x, y \in X$ definiert durch

$$d(x,y) = \|x - y\| \,.$$

Wir führen nun einen Abstandsbegriff für allgemeine Mengen X ein.

Definition 17.1 (Metrik)
Sei X Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Metrik auf X, falls gilt

$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad \text{(Definitheit)} \tag{17.1}$$

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \text{für alle } x, y \in X \qquad \text{(Symmetrie)} \tag{17.2}$$

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{17.3}$$

(X,d) heißt metrischer Raum. □

Dass $d(x,y) \ge 0$ gelten muss, folgt bereits aus (17.1) – (17.3) wegen

$$0 = d(x,x) \le d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y) \,.$$

Satz 17.2 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann definiert*

$$d(x,y) = \|x - y\| \tag{17.4}$$

eine Metrik d auf X. Sie heißt die durch $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik.

Beweis: Definitheit:

$$d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x-y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \,, \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Symmetrie:

$$d(y,x) = \|y - x\| = \|-(y-x)\| = \|x - y\| = d(x,y) \,, \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dreiecksungleichung:

$$d(x,z) = \|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z) \,, \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

□

Lemma 17.3 *Sei (X,d) metrischer Raum, sei $A \subset X$. Schränken wir die Metrik auf A ein, $d_A = d|(A \times A)$, so ist (A, d_A) metrischer Raum.*

Beweis: Klar. □

Ist $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, so können wir auf diese Weise jedes $A \subset X$ zu einem metrischen Raum machen. (Um durch Restriktion der Norm auf A wieder einen normierten Raum zu erhalten, muss A Unterraum sein.)

Beispiel 17.4
Sei S die Oberfläche der Erdkugel. Wir können eine Metrik auf S definieren, indem wir die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ als Metrik auffassen und auf S einschränken. Eine andere Metrik erhalten wir, wenn wir als Abstand zweier Punkte auf S die Länge der kürzesten auf S verlaufenden Verbindungsstrecke definieren. Sei nun X die Menge aller Städte in Europa, die mit München durch einen Straßenzug verbunden sind. Wir erhalten eine dritte Metrik, indem wir als Abstand zweier Städte die Länge des kürzesten verbindenden Straßenzugs definieren. Keine Metrik ergibt sich, wenn wir als Abstand die kürzeste Fahrzeit laut Bahnfahrplan definieren (dabei betrachten wir nur die Städte, zu denen eine Bahnverbindung existiert).

Definition 17.5 (offene Kugel, Umgebung)
Sei (X,d) metrischer Raum. Für $a \in X$ und $r > 0$ heißt

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\} \tag{17.5}$$

die offene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r. Sei nun $x \in X$. Ein $U \subset X$ heißt Umgebung von x, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$x \in B(x,\varepsilon) \subset U\,. \tag{17.6}$$

Die offene Kugel $B(x,\varepsilon)$ heißt auch die ε-Umgebung von x. □

In einem normierten Raum gilt für die Kugeln (bezüglich der erzeugten Metrik)

$$B(a,r) = a + rB(0,1)\,,$$

"alle Kugeln sehen gleich aus".

In $(\mathbb{R},d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$ (Betragsmetrik) ist $B(a,r)$ das offene Intervall $(a-r, a+r)$. In $\mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik ist $B(a,r)$ das "Innere" des Kreises mit Mittelpunkt a und Radius r.

Satz 17.6 (Hausdorffsche Trennungseigenschaft)
Sei (X,d) metrischer Raum. Dann haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen, das heißt: Für alle $x,y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es Umgebungen U von x und V von y mit

$$U \cap V = \emptyset\,. \tag{17.7}$$

Beweis: Seien $x,y \in X$ mit $x \neq y$. Wir setzen

$$\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)\,, \quad U = B(x,\varepsilon)\,, \quad V = B(y,\varepsilon)\,.$$

Für beliebiges $z \in U$ gilt

$$2\varepsilon = d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + d(z,y)\,,$$

also ist $d(z,y) > \varepsilon$ und damit $z \notin V$. □

Definition 17.7 (Offene Menge)
Sei (X, d) metrischer Raum. Ein $U \subset X$ heißt offen, falls U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ ist, d.h. falls gilt: Für alle $x \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset U \tag{17.8}$$

□

Jedes offene Intervall (a, b) in $\mathbb{R}$ ist offen (bezüglich der Betragsmetrik). Jede offene Kugel $B(a, r)$ eines metrischen Raums ist offen: Ist $x \in B(a, r)$, so ist $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$, falls $\varepsilon < r - d(a, x)$.

Ob eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) offen ist oder nicht, hängt von der Wahl der Metrik d ab. Andererseits wird es sich noch herausstellen, dass im $\mathbb{R}^n$ alle Metriken, die von Normen erzeugt werden, zu denselben offenen Mengen führen.

Man beachte, dass der Begriff "offen" für Teilmengen eines metrischen Raumes X relativ zu X definiert ist. So ist etwa $[0, 1]$ nicht offen in $\mathbb{R}$ (d.h. aufgefaßt als Teilmenge von $\mathbb{R}$), wohl aber offen in sich selbst (d.h. aufgefaßt als Teilmenge des metrischen Raums $([0, 1], d_{[0,1]})$.

Satz 17.8 *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt:*

(i) $\emptyset$ und X sind offen.

(ii) Sind U und V offene Teilmengen, so ist auch $U \cap V$ offen.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

Beweis: (i) ist klar. (ii): Seien U, V offen, sei $x \in U \cap V$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x, \varepsilon_1) \subset U$ und $B(x, \varepsilon_2) \subset V$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist dann $B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$.
(iii): Ist $x \in \cup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$ und weiter ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U_i$, also $x \in B(x, \varepsilon) \subset \cup_{i \in I} U_i$. □

Folgerung 17.9 *Sind U_i, $1 \leq i \leq n$, offene Teilmengen eines metrischen Raums (X, d), so ist auch*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

offen.

Beweis: Folgt direkt aus Teil (ii) des Satzes. □

Ein unendlicher Durchschnitt offener Mengen braucht nicht offen zu sein, so ist etwa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n}) = \{x\},$$

und einpunktige Mengen sind "normalerweise" nicht offen.

Bemerkung 17.10 (Topologie)
Satz 17.8 ist ein Ausgangspunkt, um den Begriff des metrischen Raumes weiter zu verallgemeinern, und zwar zum Begriff des *topologischen Raumes*. Statt des Abstandsbegriffs wird hier der Begriff der offenen Menge axiomatisiert: Sei X Menge. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt Topologie auf X, falls gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; U \cap V \in \mathcal{T}$,

(iii) $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen in $(X, \mathcal{T})$.

□

Definition 17.11 (Abgeschlossene Menge)
Sei (X, d) metrischer Raum. Ein $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

□

Definition 17.12 (Abgeschlossene Kugel)
Sei (X, d) metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann heißt

$$K(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\} \tag{17.9}$$

die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r.

□

Jede abgeschlossene Kugel $K(a, r)$ ist abgeschlossen (siehe Übung). Jedes abgeschlossene Intervall in $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

Satz 17.13 *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt*

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(ii) Sind $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ abgeschlossen, so ist auch

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

abgeschlossen.

(iii) Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen, so ist auch

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

abgeschlossen.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 17.8 und Folgerung 17.9. $\square$

Beispiel 17.14 (Cantorsches Diskontinuum)
Sei $C_0 = [0,1]$. Wir setzen $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3)$. C_1 besteht aus den beiden abgeschlossenen Intervalle $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$. Wir entfernen nun jeweils deren offenes mittleres Drittel $(1/9,2/9)$ bzw. $(7/9,8/9)$, um C_2 zu erhalten. Entsprechend erhalten wir C_{n+1} aus C_n. Die Menge

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \tag{17.10}$$

heißt *Cantorsches Diskontinuum*. C ist abgeschlossen. Es ist

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0,2\} \text{ für alle } i \right\}. \tag{17.11}$$

Definition 17.15 (Rand, Inneres, Abschluss)
Sei (X,d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Ein $x \in X$ heißt Randpunkt von Y, falls jede ε-Umgebung von x sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt von $X \setminus Y$ enthält. Die Menge

$$\partial Y = \{x : x \in X,\ x \textit{ ist Randpunkt von } Y\} \tag{17.12}$$

heißt Rand von Y (in X). Die Menge

$$\operatorname{int}(Y) = Y \setminus \partial Y \tag{17.13}$$

heißt das Innere von Y. Die Menge

$$\overline{Y} = Y \cup \partial Y \tag{17.14}$$

heißt der Abschluss von Y.

$\square$

Lemma 17.16 *Sei (X,d) metrischer Raum, $Y \subset X$. Dann gilt*

$$\operatorname{int}(Y) \subset Y \subset \overline{Y}, \quad \partial Y = \overline{Y} \setminus \operatorname{int}(Y). \tag{17.15}$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition. $\square$

In $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik gilt: Ist Y eine Teilmenge mit $(a,b) \subset Y \subset [a,b]$, so ist

$$\partial Y = \{a,b\}, \quad \operatorname{int}(Y) = (a,b), \quad \overline{Y} = [a,b].$$

Ebenso gilt in $\mathbb{R}$: $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Definieren wir in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Sphäre durch

$$S(a,r) = \{x : x \in X,\ \|x-a\| = r\}, \tag{17.16}$$

so ist

$$S(a,r) = \partial K(a,r) = \partial B(a,r) = K(a,r) \setminus B(a,r).$$

Man beachte: Für beliebige Teilmengen Y eines metrischen Raumes gilt im allgemeinen **nicht**

$$\overline{Y} = \overline{\operatorname{int}(Y)}. \tag{17.17}$$

In einem normierten Raum gilt (17.17), falls Y konvex ist und $\operatorname{int}(Y) \neq \emptyset$.

Satz 17.17 *Sei (X,d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann gilt*

(i) $\mathrm{int}\,(Y)$ *ist offen.*

(ii) $\overline{Y}$ *ist abgeschlossen.*

(iii) ∂Y *ist abgeschlossen.*

Beweis: (i): Sei $a \in \mathrm{int}\,(Y) = Y \setminus \partial Y$. Da $a \notin \partial Y$, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(a,\varepsilon)$ keinen Punkt von $X \setminus Y$ enthält, also $B(a,\varepsilon) \subset Y$. Sei nun $y \in B(a,\varepsilon)$ beliebig. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt $B(y,\delta) \subset B(a,\varepsilon) \subset Y$, also ist $y \notin \partial Y$. Da y beliebig war, folgt $B(a,\varepsilon) \subset Y \setminus \partial Y = \mathrm{int}\,(Y)$.
(ii): Für $Z = X \setminus Y$ gilt $\partial Z = \partial Y$ nach Definition. Es folgt

$$\overline{Y} = Y \cup \partial Y = (X \setminus Z) \cup \partial Z = X \setminus (Z \setminus \partial Z) = X \setminus \mathrm{int}\,(Z)\,.$$

Nach (i) ist $\mathrm{int}\,(Z)$ offen, also ist $\overline{Y}$ abgeschlossen.
(iii) Es ist

$$\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathrm{int}\,(Y) = \overline{Y} \cap (X \setminus \mathrm{int}\,(Y))\,,$$

und damit abgeschlossen als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\overline{Y}$ und $X \setminus \mathrm{int}\,(Y)$.
□

Satz 17.18 (Produktmetrik)
Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume. Dann wird durch

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} \tag{17.18}$$

eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ definiert, die sogenannte Produktmetrik. Es gilt

$$B((x_1,x_2),\varepsilon) = B(x_1,\varepsilon) \times B(x_2,\varepsilon)\,, \tag{17.19}$$
$$K((x_1,x_2),\varepsilon) = K(x_1,\varepsilon) \times K(x_2,\varepsilon)\,, \tag{17.20}$$

für alle $x_i \in X_i$, $\varepsilon > 0$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 17.19 (Offene und abgeschlossene Mengen im Produktraum)
Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume. Sind $U_i \subset X_i$ offen in X_i, $i = 1,2$, so ist $U_1 \times U_2$ offen in $X_1 \times X_2$, versehen mit der Produktmetrik. Ebenso ist $A_1 \times A_2$ abgeschlossen in $X_1 \times X_2$, falls $A_i \subset X_i$ abgeschlossen sind für $i = 1,2$.

Beweis: Seien U_i offen, sei $(x_1,x_2) \in U_1 \times U_2$. Wähle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x_i,\varepsilon_i) \subset U_i$ $(i = 1,2)$, dann ist $B((x_1,x_2),\varepsilon) \subset U_1 \times U_2$ für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Seien $A_i \subset X_i$ abgeschlossen. Es ist

$$(X_1 \times X_2) \setminus (A_1 \times A_2) = ((X_1 \setminus A_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (X_2 \setminus A_2))\,,$$

und die rechte Seite ist offen als Vereinigung zweier offener Mengen. □

Folgerung 17.20 *Seien (X_i, d_i) metrische Räume, $1 \le i \le n$. Dann wird auf*

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

eine Metrik d definiert durch

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i) \tag{17.21}$$

für $x, y \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Sind U_i offen in X_i bzw. A_i abgeschlossen in X_i, so sind auch

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \,, \quad \prod_{i=1}^{n} A_i \,,$$

offen bzw. abgeschlossen in (X, d).

Beweis: Folgt mit vollständiger Induktion aus den Sätzen 17.18 und 17.19. $\square$

Setzen wir $X_i = \mathbb{K}$ und wählen wir für d_i die Betragsmetrik, so ist $X = \mathbb{K}^n$, und die Produktmetrik

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

entspricht der von der Maximumnorm auf $\mathbb{K}^n$ erzeugten Metrik. Aus Satz 17.20 ergibt sich dann für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass alle achsenparallelen Quader

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \,, \quad \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

offen bzw. abgeschlossen sind in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Betrachten wir ein Produkt

$$X_1 \times X_2 \times X_3$$

dreier metrischer Räume (X_i, d_i), und konstruieren wir eine Metrik durch zweimalige Produktbildung gemäß

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 \,, \quad \text{oder} \quad X_1 \times (X_2 \times X_3) \,,$$

so erhalten wir in beiden Fällen dieselbe Metrik, nämlich die in (17.21) definierte.

18 Metrische Räume: Konvergenz, Stetigkeit

Hier steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ wie gehabt.

Definition 18.1 (Konvergenz)
Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in X$, falls

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0\,. \tag{18.1}$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \text{(in } (X, d)\text{)}\,,$$

oder einfach "$x_k \to a$".

□

Falls d von einer Norm erzeugt wird, $d(x, y) = \|x - y\|$, so erhalten wir die Definition der Konvergenz im normierten Raum (siehe Kapitel 13).

Satz 18.2 *Seien (X_i, d_i) metrische Räume, $1 \leq i \leq n$, sei $X = \prod_{i=1}^n X_i$ versehen mit der Produktmetrik d. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i \quad \text{für alle } i,\ 1 \leq i \leq n. \tag{18.2}$$

Beweis: Nach Definition der Produktmetrik d gilt

$$d(x_k, a) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_{k,i}, a_i) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_i(x_{k,i}, a_i) \to 0 \quad \text{für alle } i.$$

□

Folgerung 18.3 *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$, sei $a \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i$$

für alle i, $1 \leq i \leq n$.

Folgt aus Satz 18.2 mit $(X_i, d_i) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. □

Lemma 18.4 (Konvergenz und Umgebung)
Seien (X, d) metrischer Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$. Dann gilt $x_k \to a$ genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k \in U$ für alle $k \geq N$.

Beweis: Nach Definition 18.1 gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq N : \quad x_k \in B(a,\varepsilon)$$

"$\Leftarrow$": Klar, da $B(a,\varepsilon)$ Umgebung von a ist.
"$\Rightarrow$": Sei U Umgebung von a. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $a \in B(a,\varepsilon) \subset U$, wähle N mit $x_k \in B(a,\varepsilon)$ für alle $k \geq N$, dann ist $x_k \in U$ für alle $k \geq N$. □

Es kommt also für die Frage, ob eine gegebene Folge konvergiert oder nicht, nur darauf an, wie die Umgebungen (oder äquivalent: die offenen Mengen) in (X,d) aussehen. Sind d_1 und d_2 Metriken auf X, die auf dieselben offenen Mengen führen, so gilt

$$x_k \to a \text{ in } (X,d_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_k \to a \text{ in } (X,d_2)\,.$$

Lemma 18.5 *Sei (X,d) metrischer Raum, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ihn.*

Beweis: Sind a,b Grenzwerte von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$0 \leq d(a,b) \leq d(a,x_k) + d(x_k,b) \to 0$$

für $k \to \infty$, also $a = b$. Aus $d(a,x_k) \to 0$ folgt dasselbe für jede Teilfolge. □

Satz 18.6 (Konvergenz und Abschluss)
Sei (X,d) metrischer Raum, sei $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) *A ist abgeschlossen in X.*

(ii) *$A = \overline{A}$.*

(iii) *Für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X gilt: Ist $x_k \in A$ für alle k, so ist auch*

$$\lim_{k\to\infty} x_k \in A\,.$$

Beweis: "(ii)$\Rightarrow$(i)": Satz 17.15.
"(iii)$\Rightarrow$(ii)": Kontraposition. Sei $A \neq \overline{A}$. Wähle $a \in \partial A$ mit $a \notin A$. Nach Definition des Randes gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$ mit

$$x_k \in B(a, \frac{1}{k})$$

also $d(a,x_k) \to 0$, $x_k \to a \notin A$, (iii) gilt also nicht.
"(i)$\Rightarrow$(iii)": Sei A abgeschlossen, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_k \to a$. Wäre $a \notin A$, also $a \in X \setminus A$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(a,\varepsilon) \subset X \setminus A$ (da $X \setminus A$ offen), im Widerspruch zu $x_k \in A$ und $x_k \to a$. □

Definition 18.7 (Beschränktheit)
Sei (X,d) metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt beschränkt, falls

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup_{x,y\in Y} d(x,y) < \infty \tag{18.3}$$

gilt. $\operatorname{diam}(Y)$ *heißt der Durchmesser von Y.*

□

Lemma 18.8 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in Y$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": $\mathrm{diam}\,(Y) \leq 2C$.
"$\Rightarrow$": Kontraposition. Gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Y mit $\|x_k\| \to \infty$, so gilt

$$\|x_k - x_1\| \geq \|x_k\| - \|x_1\| \to \infty\,,$$

also $\mathrm{diam}\,(Y) = +\infty$. □

Definition 18.9 (Cauchyfolge, Vollständigkeit)
Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon\,, \quad \textit{für alle } k, m \geq N.$$

(X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Definition 18.10 (Banachraum)
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, wenn er vollständig ist.

Lemma 18.11 *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt:*

(i) Jede konvergente Folge in X ist eine Cauchyfolge.

(ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Beweis: (i): Sei (x_k) Folge mit $x_k \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $d(x_k, a) < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Dann gilt für $k, m \geq N$

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, a) + d(a, x_m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

(ii): Sei (x_k) Cauchyfolge. Wähle N so, dass gilt $d(x_m, x_N) < 1$ für alle $m \geq N$. Dann gilt für beliebige $x_i, x_j \in Y := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_N) + d(x_N, x_j) \leq 2\max\{1\,,\ \max_{1\leq k\leq N} d(x_k, x_N)\} =: C\,,$$

also

$$\mathrm{diam}\,(Y) = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} d(x_i, x_j) \leq C\,.$$

□

Satz 18.12 (Vollständigkeit von $\mathbb{K}^n$)
Der Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Wegen $|x_{k,i} - x_{m,i}| \leq \|x_k - x_m\|_\infty$ ist auch jede Komponentenfolge eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, gilt $x_{k,i} \to a_i$ für ein $a_i \in \mathbb{K}$. Nach Satz 18.3 gilt $x_k \to a = (a_1, \ldots, a_n)$. □

Wir erinnern an die Definition des Raums $B(D;\mathbb{K})$ der beschränkten Funktionen auf einer beliebigen Menge D mit Werten in $\mathbb{K}$ und daran, dass er mit der Supremumsnorm zu einem normierten Raum wird.

Satz 18.13 (Vollständigkeit des Raums der beschränkten Funktionen)
Sei D Menge. Der Raum $(B(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(B(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.
(1) Wegen
$$|f_k(t) - f_m(t)| \leq \|f_k - f_m\|_\infty = \sup_{s\in D} |f_k(s) - f_m(s)|$$
ist $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $t \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, können wir also definieren
$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)\,.$$
(2) f ist eine beschränkte Funktion: Nach Satz 18.11 ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $B(D;\mathbb{K})$, also existiert $C > 0$ mit
$$|f_k(t)| \leq \|f_k\|_\infty \leq C$$
für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in D$, also ist auch $|f(t)| \leq C$ für alle $t \in D$.
(3): Wir zeigen $\|f_k - f\|_\infty \to 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N, so dass
$$\|f_k - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } k, m \geq N.$$
Sei nun $t \in D$. Wähle $m \geq N$ so, dass
$$|f(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
Dann gilt für alle $k \geq N$
$$|f(t) - f_k(t)| \leq |f(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$
Da $t \in D$ beliebig war, folgt
$$\|f - f_k\|_\infty = \sup_{t\in D} |f(t) - f_k(t)| \leq \varepsilon$$
für alle $k \geq N$. □

Satz 18.14 *Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) Y ist abgeschlossen in X.

(ii) Der metrische Raum (Y, d_Y) ist vollständig.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei (x_k) Cauchyfolge in Y. Da X vollständig ist, gilt $x_k \to a$, $a \in X$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $a \in Y$ nach Satz 18.6.
"(ii)⇒(i)": Sei (x_k) Folge in Y mit $x_k \to a$, $a \in X$. Dann ist (x_k) Cauchyfolge in (X, d), also auch Cauchyfolge in (Y, d_Y). Da (Y, d_Y) vollständig ist, gilt $x_k \to b \in Y$. Da der Grenzwert eindeutig ist, gilt $a = b \in Y$. Also ist Y abgeschlossen nach Satz 18.6. □

Folgerung 18.15 *Der Raum $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Nach Satz 18.13 ist $(B([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $C[a,b]$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig in $B([a,b])$. Nach Satz 13.3 ist f stetig. Also ist $C[a,b]$ abgeschlossen und nach Satz 18.14 vollständig. □

Definition 18.16 (Stetigkeit)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $D \subset X$, $f : D \to Y$. Ein $c \in Y$ heißt Grenzwert von f in $a \in \overline{D}$, falls $c = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$ gilt für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim x_k = a$. Wir schreiben

$$c = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)\,, \quad c = \lim_{x\to a} f(x)\,, \qquad \text{oder} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c\,.$$

f heißt stetig in $a \in D$, falls gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

f heißt stetig auf $M \subset D$, falls f in jedem Punkt $a \in M$ stetig ist. Wir definieren

$$C(X;Y) = \{f | f : X \to Y,\ f \text{ stetig}\}\,, \quad C(X) = C(X;\mathbb{R})\,.$$

□

Satz 18.17 *Seien (X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3) metrische Räume, seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Ist f stetig in $a \in X$ und g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to a$, dann folgt $f(x_k) \to f(a)$, da f stetig in a, und weiter $g(f(x_k)) \to g(f(a))$. □

Satz 18.18 *Sei (X, d) metrischer Raum, sei $f : X \to \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $a \in X$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : X \to \mathbb{K}$ in a stetig sind.*

Beweis: Aus Satz 18.3 folgt, dass $f(x_k) \to f(a)$ gilt genau dann, wenn $f_i(x_k) \to f_i(a)$ für alle i. □

Satz 18.19 *Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definieren stetige Funktionen von $(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ (die Division $(x_1, x_2) \mapsto x_1/x_2$ auf $D = \{(x_1, x_2) : x_2 \neq 0\}$).*

Beweis: Sei $f(x) = x_1 + x_2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in $\mathbb{K}^2$, $x_k = (x_{k,1}, x_{k_2})$, dann gilt

$$f(\lim x_k) = f((\lim x_{k,1}, \lim x_{k,2})) = \lim x_{k,1} + \lim x_{k,2} \tag{18.4}$$
$$= \lim(x_{k,1} + x_{k,2}) = \lim f(x_k)\,. \tag{18.5}$$

Analog für die anderen Operationen. □

Satz 18.20 *Sei (X, d) metrischer Raum, seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g stetig in a (letzteres, falls $g(a) \neq 0$).*

Beweis: $f + g : X \to \mathbb{K}$ läßt sich schreiben als Komposition

$$X \underset{(f,g)}{\longrightarrow} \mathbb{K}^2 \underset{+}{\longrightarrow} \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt aus den Sätzen 18.18, 18.19 und 18.20. Analog für die anderen Operationen. □

Beispiel 18.21

(i) Jede konstante Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist stetig.

(ii) Die Abbildungen $p_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, sind stetig.

(iii) Ein $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}\,,$$

heißt Monom. Monome sind stetig.

(iv) Sei I eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$. Ein $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

heißt Polynom vom Grad N, wobei

$$N = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in I \right\}.$$

Polynome sind stetig.

(v) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stetig: Die Komponentenfunktionen f_i haben die Form

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die Matrix ist, welche f in der kanonischen Basis darstellt.

Satz 18.22 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$, $a \in X$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ so dass gilt: } d_1(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon\,. \tag{18.6}$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei (x_k) Folge in X mit $x_k \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ gemäß (18.6) und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d_1(x_k, a) < \delta$ für alle $k \geq N$. Dann gilt $d_2(f(x_k), f(a)) < \varepsilon$. Also ist f stetig in a.
"$\Rightarrow$": Kontraposition. Gilt (18.6) nicht, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_k) mit

$$d_1(x_k, a) < \frac{1}{k}\,, \quad d_2(f(x_k), f(a)) \geq \varepsilon\,,$$

also $x_k \to a$, aber $f(x_k) \not\to f(a)$. □

Ist (X, d) metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = d(x, x_0)\,,$$

so ist f stetig wegen

$$|f(x) - f(a)| = |d(x, x_0) - d(a, x_0)| \leq d(x, a)\,.$$

Insbesondere ist in jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Norm

$$f(x) = \|x\|$$

stetig.

Satz 18.23 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $f : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig auf X.

(ii) f ist stetig in 0.

(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{18.7}$$

Beweis: "(iii)$\Rightarrow$(i)": Sei $a \in X$, (x_k) Folge in X mit $x_k \to a$. Dann gilt

$$0 \leq \|f(x_k) - f(a)\|_Y = \|f(x_k - a)\|_Y \leq C\|x_k - a\|_X \to 0\,,$$

also $\|f(x_k) - f(a)\|_Y \to 0$, also $f(x_k) \to f(a)$.
"(i)$\Rightarrow$(ii)": klar.
"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Wir wenden (18.6) an mit $\varepsilon = 1$ und $a = 0$ (also $f(a) = 0$). Wähle $\delta > 0$ mit $\|f(x)\|_Y < 1$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$. Sei nun $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$. Dann ist

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta\,,$$

also

$$\|f(x)\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X\,.$$

□

Beispiel 18.24
Wir betrachten $X = C[a,b]$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le t\le b} |f(t)|\,, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \to \mathbb{R}\,, \quad T(f) = \int_a^b f(t)\,dt\,, \tag{18.8}$$

ist stetig bezüglich beider Normen, da

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt = \|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty\,.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \to \mathbb{R}\,, \quad T(f) = f(a)\,, \tag{18.9}$$

ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da $|T(f)| = |f(a)| \le \|f\|_\infty$, aber nicht stetig bezüglich $\|\cdot\|_1$, da für

$$f_n(t) = \max\{1 - n(t-a)\,,\, 0\}$$

gilt

$$|T(f_n)| = |f_n(a)| = 1\,,$$

aber (für $n \ge \frac{1}{b-a}$)

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \to 0\,,$$

und somit (18.7) für kein $C > 0$ erfüllt ist.

Satz 18.25 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig auf X.

(ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ ist offen in X.

(iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ ist abgeschlossen in X.

Beweis: "(i)⇒(iii)": Sei $A \subset Y$ abgeschlossen, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $f^{-1}(A)$ mit $x_k \to x$, $x \in X$. Dann ist $f(x_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(x_k) \to f(x)$ (da f stetig), also ist $f(x) \in A$ nach Satz 18.6, also $x \in f^{-1}(A)$. Wiederum nach Satz 18.6 ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
"(iii)⇒(ii)": Ist V offen in Y, so ist $Y \setminus V$ abgeschlossen, also auch $f^{-1}(Y \setminus V)$, und damit $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ offen in X.
"(ii)⇒(i)": Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $U = f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Dann ist $a \in U$ und U offen in x. Nach Lemma 18.4 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \ge N$, also $f(x_k) \in B(f(a), \varepsilon)$ für alle $k \ge N$. Es folgt $f(x_k) \to f(a)$. □

Folgerung 18.26 *Seien (X, d) metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind*

$$\{x : x \in X,\ f(x) < c\}\,, \quad \{x : x \in X,\ f(x) > c\}\,,$$

offen in X, und

$$\{x : x \in X,\ f(x) \leq c\}\,, \quad \{x : x \in X,\ f(x) \geq c\}\,,$$

sowie die Niveaumenge von f zum Niveau c,

$$N_c(f) = \{x : x \in X,\ f(x) = c\}\,,$$

abgeschlossen in X.

Beweis: Folgt aus Satz 18.25, da die Mengen $(-\infty, c)$ und (c, ∞) offen in $\mathbb{R}$ und die Mengen $(-\infty, c]$, $[c, \infty)$ und $\{c\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind. $\square$

19 Metrische Räume: Kompaktheit

Definition 19.1 (Kompakte Menge)
Sei (X,d) metrischer Raum. (X,d) heißt kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt. □

Ist Y Teilmenge eines metrischen Raums (X,d), so sagen wir abkürzend "Y ist kompakt" statt "(Y,d_Y) ist kompakt". Für eine Teilmenge Y von (X,d) bedeutet also "Y ist kompakt":

> Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Y besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert ebenfalls ein Y liegt.

Kompaktheit ist also immer eine Eigenschaft eines metrischen Raums und hängt nur von der Metrik ab. Offenheit und Abgeschlossenheit sind Eigenschaften von Teilmengen eines metrischen Raums und hängen nicht nur von der Metrik ab, sondern u.U. auch davon, wie groß der umfassende metrische Raum gewählt wird.

Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $[a,b]$ ist kompakt in der Betragsmetrik (Analysis I).

In allgemeinen topologischen Räumen $(X,\mathcal{T})$ wird Kompaktheit anders definiert, nämlich über die sogenannte "endliche Überdeckungseigenschaft". In metrischen Räumen sind beide Definitionen äquivalent.

Satz 19.2 *Seien (X_1,d_1), (X_2,d_2) kompakte metrische Räume. Dann ist $(X_1\times X_2,d)$, d Produktmetrik, kompakt.*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k=(x_{k,1},x_{k,2})$ Folge in $X=X_1\times X_2$. Wähle eine in X_1 konvergente Teilfolge $(x_{k_j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k,1})$, wähle eine in X_2 konvergente Teilfolge $(x_{k_{j_m},2})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k_j,2})_{j\in\mathbb{N}}$. Dann ist auch $(x_{k_{j_m},1})_{m\in\mathbb{N}}$ in X_1 konvergent, also auch $(x_{k_{j_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent in X. □

Folgerung 19.3 *Seien (X_i,d_i), $1\le i\le n$, kompakte metrische Räume. Dann ist auch $(\prod_{i=1}^n X_i,d)$, d Produktmetrik, kompakt.*

Beweis: Mit Induktion aus Satz 19.2. □

Folgerung 19.4 *Jeder abgeschlossene achsenparallele Quader*

$$Q=\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$$

mit $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $a_i\le b_i$, ist kompakt in $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: Folgt aus Folgerung 19.3, da alle $[a_i,b_i]$ kompakt sind. □

Satz 19.5 *Sei (X,d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann gilt:*

$$X \text{ kompakt, } Y \text{ abgeschlossen in } X \quad \Rightarrow \quad Y \text{ kompakt}, \tag{19.1}$$

$$Y \text{ kompakt} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ beschränkt und abgeschlossen in } X\,. \tag{19.2}$$

Beweis: Zu (19.1): Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in Y, dann gibt es eine in X konvergente Teilfolge, $x_{k_m} \to a$, $a \in X$. Da Y abgeschlossen ist, ist $a \in Y$.
Zu (19.2): Y ist abgeschlossen: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in Y mit $x_k \to a$, $a \in X$. Da Y kompakt, gibt es Teilfolge (x_{k_m}) und $b \in Y$ mit $x_{k_m} \to b$. Es folgt $a = b$, also $a \in Y$.
Y ist beschränkt: Kontraposition. Sei Y unbeschränkt. Wir zeigen

$$\text{es gibt eine Folge } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } Y \text{ mit } d(x_k, x_m) > 1 \text{ für alle } k \neq m. \tag{19.3}$$

(Dann sind wir fertig, da keine Teilfolge einer solchen Folge eine Cauchyfolge sein kann.) Die Folge (x_k) wird rekursiv konstruiert. Wähle $x_1 \in Y$ beliebig. Seien $x_1, \ldots, x_k$ bereits konstruiert. Für alle $y, z \in Y$ und alle $1 \le i, j \le k$ gilt dann

$$d(y,z) \le d(y,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,z) \le d(y,x_i) + d(x_j,z) + M\,,$$

wobei $M = \max_{1\le i,j\le k} d(x_i,x_j)$. Es folgt für alle $y, z \in Y$

$$d(y,z) - M \le \min_{1\le i\le k} d(y,x_i) + \min_{1\le j\le k} d(z,x_j)\,.$$

Wähle nun $y, z \in Y$ mit $d(y,z) > M + 2$ (möglich, da Y unbeschränkt), dann ist

$$\min_{1\le i\le k} d(y,x_i) > 1 \qquad \text{oder} \qquad \min_{1\le j\le k} d(z,x_j) > 1\,.$$

Im ersteren Fall setzen wir $x_{k+1} = y$, andernfalls $x_{k+1} = z$. □

Satz 19.6 (Bolzano-Weierstraß)
Sei Y Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann gilt

$$Y \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad Y \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}^n \text{ und beschränkt.}$$

Beweis: "⇒": Satz 19.5.
"⇐": Für hinreichend großes $C > 0$ gilt

$$Y \subset Q = \prod_{i=1}^{n} [-C, C]\,.$$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in Y. Da Q kompakt ist nach Folgerung 19.4, hat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergente Teilfolge, deren Limes auch in Y liegt, da Y abgeschlossen ist. □

Die Implikation "⇐" aus Satz 19.6 gilt in **keinem** unendlichdimensionalen normierten Raum.

Satz 19.7 *Seien (X,d_1), (Y,d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Dann ist auch $f(X)$ kompakt.*

Beweis: Sei (y_k) Folge in $f(X)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ wähle $x_k \in X$ mit $f(x_k) = y_k$. Da X kompakt, gibt es eine Teilfolge (x_{k_m}) und ein $a \in X$ mit $x_{k_m} \to a$, also auch $y_{k_m} = f(x_{k_m}) \to f(a) \in f(X)$, da f stetig. □

Satz 19.8 *Sei (X, d) metrischer Raum, sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt, $X \neq \emptyset$. Dann ist $f(X)$ beschränkt, und f nimmt auf X sein Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in X$ mit*

$$f(p) = \sup_{x\in X} f(x)\,, \quad f(q) = \inf_{x\in X} f(x)\,.$$

Beweis: Nach Satz 19.7 ist $f(X)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$ nach Satz 19.5. Aus der Beschränktheit folgt $\sup f(X) < \infty$, aus der Abgeschlossenheit folgt $\sup f(X) \in f(X)$, es gibt also ein $p \in X$ mit $f(p) = \sup_{x\in X} f(x)$. Analog für das Minimum. □

Satz 19.9 *Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit*

$$c_1\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_\infty\,, \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{19.4}$$

Beweis: Konstruktion von c_2: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\,,$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Es folgt

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right) \max_{1\leq j\leq n} |x_j| = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right)}_{=:c_2} \|x\|_\infty\,.$$

Existenz von c_1: Wir definieren $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ durch

$$f(x) = \|x\|\,.$$

f ist stetig, da für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ mit $x_k \to a$ gilt

$$0 \leq |f(x_k) - f(a)| = |\,\|x_k\| - \|a\|\,| \leq \|x_k - a\| \leq c_2\|x_k - a\|_\infty\,,$$

also auch $f(x_k) \to f(a)$. Wir definieren

$$Y = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = 1\}\,.$$

Y ist abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, also kompakt nach Satz 19.6, also gibt es nach Satz 19.8 ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und

$$0 < \|y\| = \min_{x\in Y} \|x\|\,.$$

Wir setzen $c_1 = \|y\|$. Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$, dass

$$c_1 \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|\,,$$

also gilt die linke Ungleichung in (19.4) für alle $x \in \mathbb{R}^n$. □

Aus Satz 19.9 folgt: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$, so hängt die Richtigkeit der Aussagen

(x_k) ist konvergent in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$
(x_k) ist Cauchyfolge bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

nicht von der Wahl der Norm $\|\cdot\|$ ab, "in allen Normen sind die gleichen Folgen konvergent". Ebenso gilt: Ist $Y \subset \mathbb{R}^n$, so hängen die Mengen $\operatorname{int}(Y)$, $\overline{Y}$, ∂Y sowie die Eigenschaften "offen", "abgeschlossen", "kompakt" und "beschränkt" ebenfalls nicht davon ab, aus welcher Norm man die Metrik erzeugt. Siehe Übung.

Definition 19.10 (Äquivalenz von Normen)
Sei X Vektorraum, seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Die beiden Normen heißen äquivalent, falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

für alle $x \in X$. □

Satz 19.9 erhält somit die prägnante Form:

"Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent."

Definition 19.11 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$. Dann heißt f gleichmäßig stetig auf X, falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in X : \quad \text{Aus } d_1(x,y) < \delta \text{ folgt } d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{19.5}$$

□

Offensichtlich ist jede auf X gleichmäßig stetige Funktion auch stetig auf X.

Satz 19.12 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$. Dann gilt: Ist f stetig auf X und ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig auf X.*

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ Elemente $x_k, y_k \in X$ mit

$$d_1(x_k, y_k) < \frac{1}{k}, \quad \text{aber} \quad d_2(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon\,. \tag{19.6}$$

Sei (x_{k_m}) konvergente Teilfolge von (x_k) mit $x_{k_m} \to a \in X$. Aus

$$d_1(y_{k_m}, a) \leq d_1(y_{k_m}, x_{k_m}) + d_1(x_{k_m}, a) < \frac{1}{k_m} + d_1(x_{k_m}, a)$$

folgt auch $y_{k_m} \to a$. Es gilt

$$0 \leq d_2(f(y_{k_m}), f(x_{k_m})) \leq d_2(f(x_{k_m}), f(a)) + d_2(f(y_{k_m}), f(a)) \to 0\,,$$

da f stetig in a, im Widerspruch zu (19.6). □

20 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 20.1 (Kurve)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, (X, d) metrischer Raum.

(i) Jede stetige Funktion $f : I \to X$ heißt Kurve (in X). Die Bildmenge $f(I)$ heißt Spur der Kurve f. Die Elemente $f(t)$ der Spur von f heißen Kurvenpunkte.

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Ein $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls alle $f_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. Die durch

$$f'(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n \tag{20.1}$$

definierte Ableitung von f in $t \in I$ heißt Tangentialvektor an f in t. Falls $f'(t) \neq 0$, so heißt

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$$

der Tangenteneinheitsvektor an f in t.

□

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Für $a, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, wird durch

$$f(t) = a + tv$$

eine Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert, nämlich die Gerade durch a mit Richtung v. Es gilt

$$f'(t) = v\,, \quad \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2} = \frac{v}{\|v\|_2}\,.$$

Weiter:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \quad r > 0\,,$$

definiert eine Kurve, deren Spur der Kreis um 0 mit Radius r ist. Es ist

$$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t)\,, \quad \|f'(t)\|_2 = r\,, \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2} = (-\sin t, \cos t)\,.$$

Eine Schraubenlinie erhalten wir durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)\,, \quad r > 0\,, c > 0\,.$$

Es ist

$$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)\,.$$

Für eine beliebige Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ können wir $\operatorname{graph}(\varphi)$ als Kurve im $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen gemäß $f(t) = (t, \varphi(t))$.

Verschiedene Kurven können dieselbe Spur haben, beispielsweise

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \tag{20.2}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \tag{20.3}$$
$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos 2t, r\sin 2t)\,. \tag{20.4}$$

Eine Kurve muss nicht injektiv sein.

Definition 20.2 (Doppelpunkt)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, (X, d) metrischer Raum, $f : I \to X$ Kurve. Ein $x \in X$ heißt Doppelpunkt von f, falls es $t, s \in I$ gibt mit $t \neq s$ und $x = f(t) = f(s)$. □

Für die Kurve (20.3) gilt etwa, dass jeder Kurvenpunkt ein Doppelpunkt ist. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)\,,$$

hat den Doppelpunkt $(0, 0) = f(1) = f(-1)$.

Die Ordnungsrelation "$\leq$" auf I definiert eine Orientierung für eine Kurve $f : I \to X$. Sind $t, s \in I$ mit $t < s$, so sagen wir, dass $f(t)$ vor $f(s)$ liegt. Ist $I = [a, b]$, so heißt $f(a)$ der Anfangspunkt und $f(b)$ der Endpunkt der Kurve. Die gleiche Spur kann in verschiedene Richtungen durchlaufen werden, etwa

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r \cos t, r \sin t)\,, \tag{20.5}$$

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r \cos t, -r \sin t)\,. \tag{20.6}$$

Definition 20.3 (Reguläre Kurve)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve. f heißt regulär, falls f stetig differenzierbar auf I ist und $f'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in I$. Ein $t \in I$ mit $f'(t) = 0$ heißt singuläre Stelle von f. Ist $I = [a, b]$, so heißt f stückweise regulär, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass $f|[t_j, t_{j+1}]$ regulär ist für alle j. □

Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)\,,$$

ist regulär. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2, t^3)\,,$$

ist nicht regulär; sie hat die singuläre Stelle 0. Die Kurve

$$f : [0, \sqrt{2\pi}] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (r \cos(t^2), r \sin(t^2))\,,$$

hat ebenfalls die singuläre Stelle 0; ihre Spur ist der Kreis um 0 mit Radius r. (Dieselbe Spur kann also durch reguläre und nicht reguläre Kurven erzeugt werden.) Der Rand eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ ist Spur einer stückweise regulären Kurve $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

Definition 20.4 (Schnittpunkt, Schnittwinkel)
Seien $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven. Gibt es $t \in I$, $\tau \in J$ mit $x = f(t) = g(\tau)$, so heißt x Schnittpunkt von f und g. Der Winkel θ zwischen den Tangentialvektoren $f'(t)$ und $g'(\tau)$ heißt Schnittwinkel von f und g in x. θ ist definiert durch

$$\cos \theta = \frac{\langle f'(t), g'(\tau) \rangle}{\|f'(t)\|_2 \|g'(\tau)\|_2}\,. \tag{20.7}$$

□

Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve, sind $f(t_0), \ldots, f(t_N)$ Kurvenpunkte, so ist die Länge des Polygonzugs, der diese Kurvenpunkte nacheinander verbindet, gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{N} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|\,.$$

Definition 20.5 (Länge einer Kurve)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $f : [a,b] \to X$ Kurve. Für eine Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ von $[a,b]$, also $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, definieren wir deren Feinheit

$$|Z| = \max_{1 \le j \le N} (t_j - t_{j-1}), \tag{20.8}$$

sowie

$$L(f, Z) = \sum_{j=1}^{N} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|. \tag{20.9}$$

Dann heißt

$$L(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z), \quad \mathcal{Z} = \{Z : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}, \tag{20.10}$$

die Länge der Kurve f in $(X, \|\cdot\|)$. Die Kurve f heißt rektifizierbar, falls $L(f) < \infty$. □

Für Kurven $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hängt die Antwort auf die Frage, ob f rektifizierbar ist, nicht von der Wahl der Norm ab (da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind), wohl aber die Länge $L(f)$. Für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ erhalten wir das, was wir uns üblicherweise als Länge vorstellen.

Definition 20.6 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Wir definieren*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\, dt \right). \tag{20.11}$$

□

Satz 20.7 *Sei $f : [a,b] \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist f rektifizierbar, und*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ |Z| \le \delta, Z \in \mathcal{Z}}} L(f, Z), \tag{20.12}$$

das heißt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit $|Z| \le \delta$ gilt

$$|L(f) - L(f, Z)| < \varepsilon.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst die rechte Gleichung in (20.12): Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit $|Z| \le \delta$ gilt

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\|\, dt - L(f, Z) \right| < \varepsilon. \tag{20.13}$$

Sei $Z = (t_j)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist die Abbildung $t \mapsto \|f'(t)\|$ stetig, und es gilt für alle j, $1 \le j \le N$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right| &= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| - \frac{\|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}}\, dt \right| \\
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \|f'(t)\| - \frac{\|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}} \right| dt \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| f'(t) - \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| dt \\
&= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) f'(t)\|\, dt.
\end{aligned} \tag{20.14}$$

Wir schätzen den Integranden ab durch

$$
\begin{aligned}
\|f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1})f'(t)\| &= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(s)\, ds - (t_j - t_{j-1})f'(t) \right\| \\
&= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(s) - f'(t)\, ds \right\| \le c \max_{1 \le i \le n} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_i'(s) - f_i'(t)\, ds \right| \qquad (20.15) \\
&\le c(t_j - t_{j-1}) \max_{1 \le i \le n} \max_{s \in [t_{j-1}, t_j]} |f_i'(s) - f_i'(t)|\,.
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung in der mittleren Zeile von (20.15) gilt wegen der Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$, mit einer von Z und von j unabhängigen Konstante c. Wir setzen nun für $\delta > 0$

$$
\alpha(\delta) = \max_{1 \le i \le n} \max_{\substack{|s-t| \le \delta \\ a \le s, t \le b}} |f_i'(s) - f_i'(t)|\,.
$$

Dann ist $\alpha(\delta) < \infty$, da alle f_i' stetig sind und $[a, b]$ kompakt ist, und es gilt

$$
\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0\,, \tag{20.16}
$$

da alle f_i' gleichmäßig stetig sind auf $[a, b]$ nach Satz 8.20. Aus (20.14), (20.15) folgt also

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right| &\le \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(t_j - t_{j-1})\alpha(|Z|)\, dt \\
&= c(t_j - t_{j-1})\alpha(|Z|)\,,
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b \|f'(t)\|\, dt - L(f, Z) \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right] \right| \\
&\le \sum_{j=1}^N c(t_j - t_{j-1})\alpha(|Z|) = c(b-a)\alpha(|Z|)\,.
\end{aligned} \tag{20.17}
$$

Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass

$$
\alpha(\delta) < \frac{\varepsilon}{c(b-a)}\,,
$$

das ist möglich wegen (20.16), und hieraus folgt die rechte Gleichung in (20.12). Sind nun Z, Z' Zerlegungen, und ist Z' Verfeinerung von Z, so folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$
L(f, Z) \le L(f, Z')\,.
$$

Hieraus folgt

$$
L(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z) = \sup_{\substack{Z \in \mathcal{Z} \\ |Z| \le \delta}} L(f, Z)
$$

für alle $\delta > 0$, und nach dem oben Bewiesenen auch die erste Gleichung in (20.12). □

Die Länge eines Kreisbogens (gemessen in der euklidischen Norm)

$$
f : [0, \varphi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (\cos t, \sin t)\,,
$$

errechnet sich also wegen

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t)\,, \quad \|f'(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

zu

$$L(f) = \int_0^{\varphi} \|f'(t)\|_2 \, dt = \varphi\,.$$

Die Länge des Graphen einer Funktion können wir ebenfalls berechnen. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so setzen wir

$$\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{f}(t) = (t, f(t))\,,$$

also

$$L(\tilde{f}) = \int_a^b \|\tilde{f}'(t)\|_2 \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt\,.$$

Definition 20.8 (Parametertransformation)
Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ Parametertransformation von $[a, b]$ auf $[\alpha, \beta]$. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve, so sagen wir, dass

$$g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n\,, \quad g = f \circ \varphi\,,$$

aus f durch die Parametertransformation φ hervorgeht. Falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind, heißt φ eine C^1-Parametertransformation; falls zusätzlich $\varphi'(t) > 0$ ($\varphi'(t) < 0$) gilt für alle $t \in [\alpha, \beta]$, so heißt φ orientierungstreu (orientierungsumkehrend). □

Die Parametertransformation

$$\varphi : [a, b] \to [a, b]\,, \quad \varphi(t) = a + b - t\,,$$

kehrt die Orientierung einer Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um,

$$(f \circ \varphi)(t) = f(a + b - t)\,, \quad (f \circ \varphi)(b) = f(a)\,, \quad (f \circ \varphi)(a) = f(b)\,.$$

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt für $g = f \circ \varphi$

$$g'(\tau) = f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,, \quad \tau \in [\alpha, \beta]\,,$$

das heißt: Die Tangentialvektoren von g in τ und von f in $\varphi(\tau)$ sind parallel, die Tangenteneinheitsvektoren sind entweder gleich oder einander entgegengesetzt.

Satz 20.9 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation. Dann gilt*

$$L(f) = L(f \circ \varphi)\,. \tag{20.18}$$

Beweis: Aus Satz 20.7 folgt mit der Kettenregel (komponentenweise angewendet) und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
L(f \circ \varphi) &= \int_\alpha^\beta \|(f \circ \varphi)'(\tau)\| \, d\tau = \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\| \, d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\| \, |\varphi'(\tau)| \, d\tau = \operatorname{sign}(\varphi') \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\| \, \varphi'(\tau) \, d\tau \\
&= \operatorname{sign}(\varphi') \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|f'(t)\| \, dt = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt \\
&= L(f) \, .
\end{aligned} \tag{20.19}$$

□

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann ist

$$l(t) = \int_a^t \|f'(s)\| \, ds$$

die Länge des Kurvenstücks vom Anfangspunkt $f(a)$ bis zum Punkt $f(t)$. Es ist $l \in C^1[a, b]$ und, da f regulär,

$$l'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

für alle $t \in [a, b]$, also ist

$$l^{-1} : [0, L(f)] \to [a, b]$$

eine C^1-Parametertransformation. Die Kurve

$$g = f \circ l^{-1}$$

entsteht aus f durch "Parametrisierung mit der Bogenlänge". Es gilt

$$g'(\tau) = f'(l^{-1}(\tau))(l^{-1})'(\tau) = \frac{f'(l^{-1}(\tau))}{l'(l^{-1}(\tau))} = \frac{f'(l^{-1}(\tau))}{\|f'(l^{-1}(\tau))\|} \, ,$$

also ist $\|g'(\tau)\| = 1$ für alle τ und

$$\int_0^\tau \|g'(s)\| \, ds = \tau \, .$$

21 Partielle Ableitungen, Skalar- und Vektorfelder

Definition 21.1 (Skalarfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt skalares Feld, oder Skalarfeld, auf Ω. □

Skalarfelder kann man sich durch ihre Niveaumengen

$$N_c(f) = \{x : x \in \Omega,\ f(x) = c\}$$

veranschaulichen, besonders gut dann, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir betrachten f "längs einer Geraden", d.h. für einen gegebenen Punkt $x \in \Omega$ und eine gegebene "Richtung" $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$g(t) = f(x + tv)\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad D_g = \{t : t \in \mathbb{R},\ x + tv \in \Omega\}\,.$$

Falls $g'(0)$ existiert, gibt diese Zahl die "Ableitung von f in die Richtung v" an. Ist x innerer Punkt von Ω, so ist 0 innerer Punkt von D_g für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, d.h. $g(t)$ ist für hinreichend kleine Werte von $|t|$ definiert.

Definition 21.2 (Richtungsableitung, partielle Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ist $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \tag{21.1}$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v, falls der Grenzwert existiert. Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so sprechen wir von der i-ten partiellen Ableitung von f an der Stelle x, wir bezeichnen sie mit

$$\partial_i f(x)\,.$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\partial_i f(x)$ sind

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,, \quad D_i f(x)\,.$$

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in Ω, falls $\partial_i f(x)$ existiert für alle $x \in \Omega$ und alle i, $1 \leq i \leq n$. Eine in Ω partiell differenzierbare Funktion f heißt stetig differenzierbar in Ω, falls die Funktionen

$$\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}$$

stetig sind für alle i. □

Wir können die i-te partielle Ableitung auch definieren als

$$\partial_i f(x) = g_i'(x_i)\,, \quad g_i(\xi) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,,$$

diese Definition ist äquivalent zur obigen.

Beispiel 21.3 (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sin x_3 + x_1^2 x_2^2 \exp(x_2 x_3)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) &= \sin x_3 + 2x_1 x_2^2 \exp(x_2 x_3) \\
\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 x_2 \exp(x_2 x_3) + x_1^2 x_2^2 \exp(x_2 x_3) x_3 \\
\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cos x_3 + x_1^2 x_2^2 \exp(x_2 x_3) x_2 \,.
\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten

$$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad r(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

r ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\partial_i r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r(x)}\,. \tag{21.2}$$

(iii) Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar, sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = g(r(x))\,. \tag{21.3}$$

Dann ist auch f (stetig) differenzierbar, und

$$\partial_i f(x) = g'(r(x))\partial_i r(x) = g'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)}\,. \tag{21.4}$$

□

Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen einer Funktion f folgt noch nicht die Stetigkeit von f! Beispiel dazu: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, definiert durch

$$f(0) = 0\,, \quad f(x) = \frac{x_1 \cdots x_n}{\|x\|_2^{2n}}\,,\ x \neq 0\,.$$

In $x = 0$ existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind gleich Null, da

$$\frac{f(0 + te_i) - f(0)}{t} = \frac{0 - 0}{t} = 0\,.$$

f ist aber nicht stetig in 0: Betrachten wir

$$a_k = \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right)\,,$$

so ist

$$\|a_k\|_2 = \frac{\sqrt{n}}{k}\,, \quad f(a_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^n \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \frac{k^n}{n^n}\,,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,, \quad \lim_{k\to\infty} f(a_k) = \infty\,, \quad f(0) = 0\,.$$

(Die partiellen Ableitungen werten nur das Verhalten von f entlang der Koordinatenachsen aus.)

Definition 21.4 (Höhere partielle Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. f heißt $(k+1)$-mal partiell differenzierbar in Ω, falls f k-mal partiell differenzierbar in Ω ist und alle k-ten partiellen Ableitungen der Form

$$\partial_{i_k}\partial_{i_{k-1}}\dots\partial_{i_1} f\,, \quad 1 \le i_j \le n\,, \quad 1 \le j \le k\,,$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig differenzierbar, falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\le k$ existieren und stetig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} C^0(\Omega) &= C(\Omega)\,, \\ C^k(\Omega) &= \{f \mid f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}\,, \\ C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{21.5}$$

Funktionen in $C^\infty(\Omega)$ heißen unendlich oft differenzierbar. □

Satz 21.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt*

$$\partial_j\partial_i f(a) = \partial_i\partial_j f(a)\,, \tag{21.6}$$

für alle $a \in \Omega$ und alle $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$, $a = 0 \in \Omega$. Wir wählen $\delta > 0$ mit $B(0,\delta) \subset \Omega$ (Kugel bezüglich der Maximumnorm). Sei $(x_1, x_2) \in B(0,\delta)$. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an auf

$$g(t) = f(t, x_2) - f(t, 0)$$

und erhalten die Existenz eines $\xi \in (0, x_1)$ mit

$$g(x_1) = g(0) + x_1 g'(\xi)\,,$$

also

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) = f(0, x_2) - f(0, 0) + x_1(\partial_1 f(\xi, x_2) - \partial_1 f(\xi, 0))\,. \tag{21.7}$$

Wir wenden nun den Mittelwertsatz an auf $h(t) = \partial_1 f(\xi, t)$ und erhalten die Existenz eines $\eta \in (0, x_2)$ mit

$$h(x_2) = h(0) + x_2 h'(\eta)\,,$$

also aus (21.7)

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, 0) = f(0, x_2) - f(0, 0) + x_1 x_2 \partial_2\partial_1 f(\xi, \eta)\,. \tag{21.8}$$

Vertauschen der Rollen von x_1 und x_2 liefert $\tilde{\xi} \in (0, x_1)$, $\tilde{\eta} \in (0, x_2)$ mit

$$f(x_1, x_2) - f(0, x_2) = f(x_1, 0) - f(0, 0) + x_2 x_1 \partial_1\partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\,, \tag{21.9}$$

also

$$\partial_2\partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1\partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\,.$$

Grenzübergang $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ ergibt $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \to (0, 0)$, also wegen der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_2\partial_1 f(0, 0) = \partial_1\partial_2 f(0, 0)\,.$$

□

Folgerung 21.6 *Für $f \in C^n(\Omega)$ können wir die Reihenfolge von bis zu n partiellen Ableitungen beliebig vertauschen.* □

Insbesondere können wir partielle Ableitungen sortieren, z.B.:

$$\partial_1\partial_4\partial_1\partial_2\partial_4\partial_1 f = \partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_4\partial_4 f = \partial_1^3\partial_2\partial_4^2 f \,.$$

Wir verwenden dabei die Schreibweise

$$\partial_i^k f = \underbrace{\partial_i\partial_i \dots \partial_i}_{k \text{ mal}} f \,.$$

Definition 21.7 (Gradient)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \tag{21.10}$$

der Gradient von f in x. □

Für radialsymmetrische Funktionen $f(x) = g(\|x\|_2)$ haben wir in (21.4) berechnet

$$\partial_i f(x) = g'(\|x\|_2)\frac{x_i}{\|x\|_2} \,,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = g'(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2} \,. \tag{21.11}$$

Für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln

$$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g \,, \quad \operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f \,, \tag{21.12}$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \,. \tag{21.13}$$

(Folgt aus der Definition und den Rechenregeln für die Ableitung im Eindimensionalen.)

Definition 21.8 (Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf Ω. F heißt (stetig) partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfelder $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ es sind. □

Definition 21.9 (Rotation)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{rot} F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \,, \tag{21.14}$$

$$\operatorname{rot} F(x) = (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)) \tag{21.15}$$

die Rotation von F. □

Definition 21.10 (Gradientenfeld)
Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, heißt Gradientenfeld, falls es ein skalares Feld $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F = \operatorname{grad} f \,. \tag{21.16}$$

f heißt ein Potential von F. □

Definition 21.11 (Divergenz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}\,, \tag{21.17}$$

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i(x)\,, \tag{21.18}$$

die Divergenz von F. □

Beispiel 21.12

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fF) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i(fF_i) = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i f \cdot F_i + f \cdot \partial_i F_i) \\ &= \langle \operatorname{grad} f, F\rangle + f \cdot \operatorname{div} F\,. \end{aligned} \tag{21.19}$$

(ii) Wir betrachten $G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

$$G(x) = \frac{x}{\|x\|_2}\,. \tag{21.20}$$

Wir setzen

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad F(x) = x\,,$$

Dann ist

$$\partial_i f(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{\|x\|_2^3}\,,$$
$$\operatorname{div} F(x) = n\,,$$

also erhalten wir aus (21.19)

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} G)(x) &= \langle (\operatorname{grad} f)(x), F(x)\rangle + f(x) \cdot (\operatorname{div} F)(x) \\ &= \left\langle -\frac{x}{\|x\|_2^3}, x\right\rangle + \frac{1}{\|x\|_2} n = -\frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^3} + \frac{1}{\|x\|_2} n \\ &= \frac{n-1}{\|x\|_2}\,.\end{aligned}$$

□

Definition 21.13 (Laplace-Operator)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i (\operatorname{grad} f)_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x)\,.\end{aligned} \tag{21.21}$$

Der Operator $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ heißt der Laplace-Operator. □

Die Gleichung

$$-\Delta f(x) = 0\,, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{21.22}$$

heißt Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, heißt

$$\partial_t^2 f(x,t) - c^2 \Delta f(x,t) = 0\,, \tag{21.23}$$

die Wellengleichung (∂_t partielle Ableitung nach t, Δ bezogen auf die ersten n Komponenten x von (x,t)). Die Zahl $c > 0$ beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Gleichung

$$\partial_t f(x,t) - k\Delta f(x,t) = 0\,, \tag{21.24}$$

heißt die Wärmeleitungsgleichung oder die Diffusionsgleichung, k heißt der Diffusionskoeffizient (oder Wärmeleitkoeffizient).

Wir wenden den Laplace-Operator auf eine radialsymmetrische Funktion an. Sei $f(x) = g(\|x\|_2)$. Dann gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(x) = \operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|_2} g'(\|x\|_2)\right) \\
&= \left\langle \operatorname{grad}(g'(\|x\|_2)), \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle + g'(\|x\|_2) \operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \\
&= \left\langle g''(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}, \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle + g'(\|x\|_2)\frac{n-1}{\|x\|_2} \\
&= g''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} g'(\|x\|_2)\,.
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $n = 2$, $g(r) = \ln r$, gilt

$$g''(r) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r} g'(r)\,,$$

also für $n = 2$

$$\Delta \ln(\|x\|_2) = 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

Im Fall $n \geq 3$, $g(r) = r^{2-n}$, gilt

$$g'(r) = (2-n)r^{1-n}\,, \quad g''(r) = (1-n)(2-n)r^{-n} = \frac{1-n}{r} g'(r)\,,$$

also wieder

$$\Delta(\|x\|_2^{2-n}) = 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

22 Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so können wir die partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden und damit rechnen. Was uns aber noch fehlt, ist ein allgemeiner Begriff der Differenzierbarkeit von f. Die Formel

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und deren Interpretation (Tangentensteigung = Grenzwert der Sekantensteigungen) sind hierfür nicht geeignet. Was sich aber verallgemeinern läßt, ist die Vorstellung, f "lokal durch eine lineare Abbildung zu approximieren", also die Darstellung

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)\,, \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0\,.$$

Definition 22.1 (Differenzierbarkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$. f heißt differenzierbar in x, falls eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x+h)-f(x)-T(h)\|}{\|h\|} = 0\,. \tag{22.1}$$

Statt "differenzierbar" sagt man auch "Fréchet-differenzierbar" oder "total differenzierbar". Die Abbildung T heißt Ableitung (oder Fréchet-Ableitung oder totale Ableitung) von f in x. Wir bezeichnen die Ableitung von f in x mit $Df(x)$. □

In Satz 22.3 werden wir mitbeweisen, dass es höchstens eine solche Abbildung T gibt (dadurch wird die Bezeichnung $Df(x)$ gerechtfertigt).

Wegen der Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$ ist es gleichgültig, welche Norm man in Definition 22.1 zugrundelegt.

Bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, so ist also $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, falls f in x differenzierbar ist. Ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f in Ω eine Abbildung

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\,.$$

Verallgemeinert man Definition 22.1 auf Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen beliebigen normierten Räumen X, Y, so verlangt man zusätzlich, dass T stetig ist (im Endlichdimensionalen ist jede lineare Abbildung stetig).

Beispiel 22.2

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$f(x+h) - f(x) - f(h) = f(x) + f(h) - f(x) - f(h) = 0\,,$$

also ist f differenzierbar in x, und $Df(x) = f$ (Gleichheit im Sinn von Abbildungen, wie f ist auch $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und $(Df(x))(h) = f(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$). Die Ableitung einer linearen Abbildung hängt also nicht von x ab,

$$Df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ist eine konstante Abbildung (hier bezeichnet $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$).

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$f(x) = Ax + b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(m,n)}\,, \, b \in \mathbb{R}^m\,,$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$f(x+h) - f(x) - Ah = A(x+h) + b - Ax - b - Ah = 0\,,$$

also ist f differenzierbar in x, und $Df(x)(h) = Ah$.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle = \frac{1}{2} x^T Ax = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j\,.$$

In diesem Fall ist $m = 1$ und wir können im Bildraum $\mathbb{R}$ als Norm den Betrag nehmen. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2} \langle x+h, A(x+h) \rangle - \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle & (22.2) \\ &= \frac{1}{2} \langle h, Ax \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Ah \rangle + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle & (22.3) \\ &= \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle\,. & (22.4) \end{aligned}$$

Mit $T(h) = \langle Ax, h \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - T(h)| &= |\frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle | \le \frac{1}{2} \|h\|_2 \|Ah\|_2 \\ &\le \frac{1}{2} \|h\|_2 C \|h\|_2\,, & (22.5) \end{aligned}$$

wobei C eine von A, aber nicht von h abhängende Konstante ist (die durch A definierte lineare Abbildung ist stetig !), also

$$0 \le \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{\|h\|_2} \le \frac{1}{2} C \|h\|_2 \to 0$$

für $h \to 0$, also ist f differenzierbar in x und

$$(Df(x))(h) = T(h) = \langle Ax, h \rangle\,.$$

$\square$

Satz 22.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, f in $x \in \Omega$ differenzierbar. Dann ist f stetig in x und partiell differenzierbar in x, und*

$$(Df(x))(h) = (J_f(x))h\,, \quad J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}. \tag{22.6}$$

Die Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt Jacobi-Matrix, oder auch Funktionalmatrix, von f in x.

Zur Bedeutung der linken Gleichung in (22.6): Auf ihrer linken Seite wenden wir die Abbildung $Df(x)$ auf den Vektor h an und erhalten den Vektor $(Df(x))(h)$. Auf ihrer rechten Seite multiplizieren wir die Matrix $J_f(x)$ mit dem Vektor h und erhalten den Vektor $J_f(x)h$.

Beweis: Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, welche (22.1) erfüllt.
f ist stetig in x: Mit $r(h) = f(x+h) - f(x) - T(h)$ gilt

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|r(h) + T(h)\| \le \|r(h)\| + \|T(h)\| \le \|r(h)\| + C\|h\|\,,$$

wobei C eine von h unabhängige Konstante ist, also

$$\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0\,.$$

f ist partiell differenzierbar in x: Sei $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ die Matrix, welche die lineare Abbildung T bezüglich der kanonischen Basis darstellt, also

$$T(h) = Ah\,, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - Ah\,,$$

also

$$r_i(h) = f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{k=1}^n a_{ik} h_k\,, \quad 1 \le i \le m\,.$$

Für $h = te_j$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, e_j der j-te Einheitsvektor, gilt

$$r_i(te_j) = f_i(x+te_j) - f_i(x) - ta_{ij}\,,$$

also

$$\frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} = a_{ij} + \frac{r_i(te_j)}{t}\,,$$

und

$$\left|\frac{r_i(te_j)}{t}\right| = \frac{|r_i(te_j)|}{\|te_j\|_2} \le \frac{\|r(te_j)\|_2}{\|te_j\|_2} \to 0$$

für $t \to 0$, da $\|r(h)\|_2 / \|h\|_2 \to 0$ für $h \to 0$. Also

$$\partial_j f_i(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} = a_{ij} \,.$$

□

Der soeben gegebene Beweis zeigt außerdem, dass die lineare Abbildung T in Definition 22.1 eindeutig bestimmt ist, also ist die Definition von $Df(x)$ als "die" Ableitung von f in x sinnvoll.

Definition 22.4 (Stetige Differenzierbarkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar in Ω, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ existieren und in Ω stetig sind.

Satz 22.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in Ω. Dann ist f differenzierbar in allen Punkten x von Ω.*

Beweis: Wir setzen

$$r(h) = f(x + h) - f(x) - J_f(x)h \,,$$

also

$$r_i(h) = f_i(x + h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x) h_j \,, \quad 1 \leq i \leq m \,.$$

Es genügt zu zeigen, dass für alle i gilt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|r_i(h)|}{\|h\|_\infty} = 0 \,. \tag{22.7}$$

Sei $x \in \Omega$. Wähle zunächst $\delta > 0$ so, dass $x + h \in \Omega$ gilt für alle h mit $\|h\|_\infty \leq \delta$ (Ω ist offen). Sei nun $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_\infty \leq \delta$. Wir definieren

$$z^j = x + \sum_{k=1}^{j} h_k e_k \,, \quad z^0 = x \,.$$

Wir wenden den Mittelwertsatz im $\mathbb{R}$ an auf

$$g_{ij}(t) = f_i(z^{j-1} + te_j) \,.$$

Es gibt also τ_{ij} zwischen 0 und h_j mit

$$g_{ij}(h_j) = g_{ij}(0) + g'_{ij}(\tau_{ij}) h_j \,,$$

also

$$f_i(z^j) = f_i(z^{j-1}) + \partial_j f_i(\eta_{ij}) h_j \,, \quad \eta_{ij} = z^{j-1} + \tau_{ij} e_j \,.$$

Weiter folgt

$$f_i(x + h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (f_i(z^j) - f_i(z^{j-1})) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\eta_{ij}) h_j \,,$$

also

$$r_i(h) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\eta_{ij}) h_j - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x) h_j \,,$$

also

$$|r_i(h)| \le \|h\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\eta_{ij}) - \partial_j f_i(x)| \,.$$

Es ist $\|\eta_{ij} - x\|_\infty \le \|h\|_\infty$, also folgt aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$\lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\eta_{ij}) - \partial_j f_i(x)| = 0 \,.$$

und damit die Behauptung (22.7). □

In den beiden vorangehenden Sätzen haben wir die Implikationen bewiesen:

f stetig differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f partiell differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f stetig in Ω

Alle anderen (außer die sich durch Transitivität ergebenden) möglichen Implikationen zwischen diesen 4 Begriffen gelten nicht !

Beispiel 22.6 (Polarkoordinaten in der Ebene)
Die Abbildung

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,, \quad f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \tag{22.8}$$

repräsentiert die Transformation von Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten. Es gilt

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \,. \tag{22.9}$$

Alle $\partial_j f_i$ existieren und sind stetig, also ist f differenzierbar.

Satz 22.7 (Kettenregel im Mehrdimensionalen)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ mit $f(U) \subset V$. Ist f differenzierbar in $x \in U$ und g differenzierbar in $f(x)$, so ist auch $g \circ f$ differenzierbar in x, und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \,, \quad J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) \,. \tag{22.10}$$

Beweis: Wir betrachten die Restglieder

$$r_f(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) \,, \quad r_g(\eta) = g(f(x) + \eta) - g(f(x)) - Dg(f(x))(\eta) \,.$$

Es gilt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} = 0 \,, \quad \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \neq 0}} \frac{\|r_g(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0 \,.$$

Wir definieren nun

$$\eta(h) = f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + r_f(h) \,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x) + \eta(h)) - g(f(x)) \\ &= (Dg(f(x)))(\eta(h)) + r_g(\eta(h)) = (Dg(f(x)))((Df(x))(h) + r_f(h)) + r_g(\eta(h)) \,,\end{aligned}$$

also

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))(h) = r_g(\eta(h)) + Dg(f(x))(r_f(h)) \,. \quad (22.11)$$

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite von (22.11) schneller gegen 0 geht als $\|h\|$. Zunächst gilt (C_1 von h unabhängig)

$$\frac{\|Dg(f(x))(r_f(h))\|}{\|h\|} \le \frac{C_1 \|r_f(h)\|}{\|h\|} \to 0$$

für $h \to 0$. Falls $\eta(h) = 0$, so ist auch $r_g(\eta(h)) = 0$. Falls $\eta(h) \neq 0$, so gilt

$$\frac{\|r_g(\eta(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|r_g(\eta(h))\|}{\|\eta(h)\|} \cdot \frac{\|\eta(h)\|}{\|h\|} \,. \quad (22.12)$$

Der zweite Bruch auf der rechten Seite ist wegen

$$\|\eta(h)\| \le \|Df(x)(h)\| + \|r_f(h)\| \le C_2 \|h\| + \|r_f(h)\|$$

beschränkt, der erste Bruch auf der rechten Seite von (22.12) konvergiert gegen 0 für $h \to 0$, da $\eta(h) \to 0$ für $h \to 0$. Insgesamt folgt also aus (22.11)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))(h)\|}{\|h\|} = 0 \,, \quad (22.13)$$

und damit die erste Gleichung in (22.10). Die zweite ergibt sich, da beim Übergang von linearen Abbildungen zu Matrizen die Komposition in die Matrixmultiplikation übergeht. $\square$

Schreibt man die Gleichung

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$$

elementweise auf, so ergibt sich

$$\partial_j (g \circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} (\partial_k g_i)(f(x)) \cdot \partial_j f_k(x) \,. \quad (22.14)$$

Im Spezialfall $n = l = 1$, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ Kurve, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ skalares Feld, ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$(g \circ f)'(t) = \sum_{k=1}^{m} (\partial_k g)(f(t)) f_k'(t) = \langle (\operatorname{grad} g)(f(t)), f'(t) \rangle \,. \quad (22.15)$$

Verläuft die Spur der Kurve f ganz in einer Niveaufläche $N_c(g) = \{x : g(x) = c\}$ von g, dann ist
$$g(f(t)) = c$$
für alle t, also folgt aus (22.15)
$$0 = (g \circ f)'(t) = \langle (\operatorname{grad} g)(f(t)), f'(t) \rangle \ ,$$
das heißt, der Gradient von g in $f(t)$ steht senkrecht auf den Tangentialvektor $f'(t)$ von f in t. Da dies für jede Kurve gilt, deren Spur ganz in $N_c(g)$ verläuft, steht also der Gradient senkrecht auf der von allen möglichen Tangentialvektoren gebildeten tangentialen Hyperebene der Niveaufläche.

Definition 22.8 (Tangentialvektor an eine Niveaufläche)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in \Omega$ mit $f(x) = c$ und $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$. *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an $N_c(f)$ in x, falls*
$$\langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle = 0 \,. \tag{22.16}$$
□

Satz 22.9 *In der Situation von Definition 22.8 gilt:*
$$T(x) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } N_c(f) \text{ in } x\} \tag{22.17}$$
ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. $T(x)$ heißt der Tangentialraum von $N_c(f)$ in x. Der affine Unterraum $x + T(x)$ heißt Tangentialebene an $N_c(f)$ in x.

Beweis: Siehe Lineare Algebra. □

Als Beispiel für Satz 22.9 betrachten wir $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \,.$$
$N_1(f)$ ist der Rand der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Für $x \in N_1(f)$ gilt
$$(\operatorname{grad} f)(x) = 2x \,, \quad T(x) = \{v : v \in \mathbb{R}^3, \, \langle v, x \rangle = 0\} \,,$$
das heißt, $T(x)$ ist der auf x senkrecht stehende zweidimensionale Unterraum.

Satz 22.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in \Omega$. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$, und es gilt*
$$\partial_v f(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle \ . \tag{22.18}$$

Beweis: Wir betrachten $h : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$, $h(t) = x + tv$. Für hinreichend kleines δ ist $h((-\delta, \delta)) \subset \Omega$, also existiert nach der Kettenregel $(f \circ h)'(0)$,
$$(f \circ h)'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \partial_v f(x) \,,$$

und aus Formel (22.15) folgt

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), h'(0) \rangle = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle \ .$$

□

Wir können die Formel (22.18) interpretieren: Ist $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$, so ist

$$\partial_v f(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle = \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2 \cdot \cos\varphi \,,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\operatorname{grad} f(x)$ und v ist. Die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ wird also maximal, wenn $\cos\varphi = 1$ ist, also wenn v in dieselbe Richtung wie $\operatorname{grad} f(x)$ zeigt. Der Gradient von f zeigt also in die Richtung des steilsten Anstiegs von f.

Definition 22.11 (Verbindungsstrecke)
Ist X Vektorraum, so bezeichnen wir die Verbindungsstrecke zweier Punkte x und y in X mit

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\} \,. \tag{22.19}$$

□

Satz 22.12 (Mittelwertsatz für skalare Felder)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann gibt es ein $\xi \in [x, y]$ mit

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), y - x \rangle \ . \tag{22.20}$$

Beweis: Wir definieren $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(ty + (1-t)x)$, dann ist g stetig in $[0, 1]$ und differenzierbar in $(0, 1)$. Aus dem Mittelwertsatz im $\mathbb{R}$ folgt, dass ein $t \in (0, 1)$ existiert mit

$$g(1) - g(0) = g'(t) \,,$$

also

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(ty + (1-t)x), y - x \rangle \ .$$

□

Für vektorwertige Funktionen gilt eine zu (22.20) analoge Formel nicht, nicht einmal für Kurven. Als Beispiel betrachten wir den durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrisierten Einheitskreis. Es gilt $f'(t) \neq 0$ für alle t, also auch

$$0 = f(2\pi) - f(0) \neq (2\pi - 0) f'(t) \,, \quad \text{für alle } t.$$

Im vektorwertigen Fall nimmt der Mittelwertsatz die Form einer Ungleichung an. Für Kurven $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ kann man beweisen (was wir hier nicht tun werden), dass

$$\|f(t) - f(s)\| \leq (t - s) \sup_{s \leq \tau \leq t} \|f'(\tau)\|$$

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt eine analoge Ungleichung, wobei die Norm des Tangentialvektors durch die Norm der Jacobimatrix (also eine Matrixnorm) ersetzt wird. Für unsere Zwecke genügt die folgende (schwächere) Form.

Satz 22.13 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \le L\|y - x\|_1 \le nL\|y - x\|_\infty \,, \tag{22.21}$$

wobei

$$L = \max\{|\partial_j f_i(\xi)| : 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n,\, \xi \in [x, y]\} \,. \tag{22.22}$$

Beweis: Das Maximum in (22.22) existiert, da alle partiellen Ableitungen stetig sind und $[x, y]$ kompakt ist. Für alle i gibt es nach Satz 22.12 ein $\xi_i \in [x, y]$ mit

$$f_i(y) - f_i(x) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi_i), y - x\rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(\xi_i)(y_j - x_j) \,,$$

also gilt für alle i

$$|f_i(y) - f_i(x)| \le L \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \le nL \max_{1\le j\le n} |y_j - x_j| \,.$$

□

23 Taylorentwicklung im Mehrdimensionalen

Zur Erinnerung: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ kennen wir die Taylorentwicklung

$$f(x+h) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}\,, \tag{23.1}$$

wobei ξ zwischen x und $x+h$ liegt. Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Um $f(x+h)$ durch Ableitungen von f in x zu approximieren, betrachten wir

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(t) = f(x+th)\,.$$

Ist g hinreichend oft differenzierbar, so gilt gemäß (23.1), angewendet auf g,

$$f(x+h) = g(1) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}\,.$$

Die Ableitungen von g lassen sich durch Ableitungen von f ausdrücken,

$$g'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x+th), h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x+th) h_i\,,$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle (\operatorname{grad}(\partial_i f))(x+th), h\rangle\, h_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x+th) h_j \right) h_i\,,$$

entsprechend die höheren Ableitungen.

Notation 23.1 (Multiindex) *Ein $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ heißt Multiindex. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definieren wir*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!\,. \tag{23.2}$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, setzen wir

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\,.$$

Lemma 23.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$, $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$. Dann wird durch*

$$g(t) = f(x+th)$$

eine Funktion $g \in C^k([0,1])$ definiert, und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) h^\alpha\,. \tag{23.3}$$

Beweis: Mit vollständiger Induktion folgt aus der Kettenregel die Existenz von $g^{(k)}$ und die Formel

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_k} \cdots h_{i_2} h_{i_1} \,. \tag{23.4}$$

Jede der auftretenden partiellen Ableitungen $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f$ entspricht nach Umsortieren und Zusammenfassen einer Ableitung der Form $\partial^\alpha f$ mit einem Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Jeder solche Multiindex kommt in der k-fachen Summe (23.4) mit der Anzahl

$$\binom{k}{\alpha_1} \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

vor, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 23.3 (Taylorformel für Skalarfelder)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(\Omega)$, $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$. Dann gibt es ein $\xi \in [x, x+h]$ mit

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha \,. \tag{23.5}$$

(Summiert wird über die Multiindizes.)

Beweis: Für $g(t) = f(x + th)$ gilt mit geeignetem $\tau \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(x+h) = g(1) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left(\sum_{|\alpha| = j} \frac{j!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha \right) + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \tau h) h^\alpha \,. \end{aligned} \tag{23.6}$$

□

Folgerung 23.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$, $x \in \Omega$ mit $K_\delta(x) \subset \Omega$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| \le \delta$*

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h) \,, \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \ne 0}} \frac{R_{k+1}(h)}{\|h\|_\infty^k} = 0 \,. \tag{23.7}$$

Beweis: Es gilt nach Satz 23.3 für geeignetes $\xi \in [x, x+h]$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha| = k} \frac{\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha}_{=: R_{k+1}(h)} \,, \end{aligned} \tag{23.8}$$

und

$$|R_{k+1}(h)| \le \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)|}{\alpha!} |h^\alpha| \le \|h\|_\infty^k \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)|}{\alpha!}}_{\to 0 \text{ für } h \to 0}, \tag{23.9}$$

da $\|\xi - x\|_\infty \le \|h\|_\infty$. $\square$

Für $k = 2$ erhalten wir

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + R_3(h)\,. \tag{23.10}$$

Der quadratische Term läßt sich schreiben als

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j = \langle h, H_f(x) h \rangle = h^T H_f(x) h\,, \tag{23.11}$$

wobei die Matrix $H_f(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gegeben ist durch

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \partial_2 \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n \partial_1 f(x) \\ \partial_1 \partial_2 f(x) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(x) & \cdots & \cdots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix}. \tag{23.12}$$

Definition 23.5 (Hesse-Matrix)
Die Matrix $H_f(x)$ in (23.12) heißt Hesse-Matrix von f in x. $\square$

Die Hesse-Matrix ist symmetrisch nach Satz 21.5, wenn $f \in C^2(\Omega)$.

Definition 23.6 (Lokales Maximum, Minimum, Extremum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ein $x \in \Omega$ heißt lokales Minimum (Maximum) von f, falls es eine Umgebung U von x gibt mit

$$f(x) \le f(y) \qquad (\textit{bzw. } f(x) \ge f(y)) \qquad \textit{für alle } y \in U \cap \Omega.$$

Ein $x \in \Omega$ heißt lokales Extremum, falls x lokales Minimum oder lokales Maximum ist. Ein lokales Extremum heißt strikt, falls außerdem

$$f(y) \ne f(x)$$

gilt für alle $y \in U \cap \Omega$ mit $y \ne x$. $\square$

Satz 23.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ist $x \in \Omega$ lokales Extremum von f, so gilt $\partial_v f(x) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ sowie* $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mit $[x - \delta v, x + \delta v] \subset \Omega$. Dann hat $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + tv)$, ein lokales Extremum in 0. Es gilt daher $0 = g'(0) = \partial_v f(x)$. Für $v = e_j$ gilt also $\partial_j f(x) = 0$, es folgt $\operatorname{grad} f(x) = 0$. $\square$

Definition 23.8 *Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. A heißt*

positiv definit, falls $h^T A h > 0$ gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$,
positiv semidefinit, falls $h^T A h \geq 0$ gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$,
negativ (semi)definit, falls $-A$ positiv (semi)definit ist,
indefinit, falls A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

□

Satz 23.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} x \text{ lokales Minimum} \quad &\Rightarrow \quad H_f(x) \text{ positiv semidefinit,} \\ x \text{ lokales Maximum} \quad &\Rightarrow \quad H_f(x) \text{ negativ semidefinit.} \end{aligned}$$

Ist außerdem $\operatorname{grad} f(x) = 0$*, so gilt*

$$\begin{aligned} H_f(x) \text{ positiv definit} \quad &\Rightarrow \quad x \text{ striktes lokales Minimum,} \\ H_f(x) \text{ negativ definit} \quad &\Rightarrow \quad x \text{ striktes lokales Maximum.} \end{aligned}$$

Beweis: Sei x lokales Minimum. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $g(t) = f(x + th)$. Dann ist $g \in C^2((-\delta, \delta))$ für hinreichend kleines $\delta > 0$, und es gilt

$$g'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x + th), h \rangle \ ,$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x + th) h_i h_j = h^T H_f(x + th) h \, .$$

Da 0 ein lokales Minimum ist für g, gilt

$$0 \leq g''(0) = h^T H_f(x) h \, .$$

Da h beliebig war, folgt die Behauptung. Ist x lokales Maximum von f, so wenden wir das eben Bewiesene auf $-f$ an.
Sei nun $\operatorname{grad} f(x) = 0$, $H_f(x)$ positiv definit. Aus (23.10) folgt, falls $\|h\|$ hinreichend klein ist,

$$f(x + h) = f(x) + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + R_3(h) \, , \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} = 0 \, .$$

Sei

$$Q(h) = h^T H_f(x) h \, , \quad \alpha = \min_{\|h\|=1} Q(h)$$

Das Minimum existiert, da Q stetig ist und die Einheitssphäre kompakt ist. Es ist $\alpha > 0$, da $H_f(x)$ positiv definit ist. Daher gilt für alle $h \neq 0$ mit $x + h \in \Omega$

$$f(x + h) - f(x) = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} Q\Big(\frac{h}{\|h\|}\Big) + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right) \geq \|h\|^2 \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right) \, .$$

Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{1}{2}\alpha > \frac{|R_3(h)|}{\|h\|^2}$$

für alle $\|h\| < \delta$, dann gilt $f(x+h) > f(x)$ für alle $\|h\| < \delta$. $\square$

In der Linearen Algebra wird bewiesen: Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch, so gilt

$$\begin{aligned} A \text{ positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } > 0, \\ A \text{ positiv semidefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \geq 0, \\ A \text{ negativ (semi)definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } < 0 \ (\leq 0). \end{aligned}$$

Wir betrachten als Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\,, \quad a, b > 0\,.$$

Die Niveaumengen $N_c(f)$ sind die Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = c\,, \quad c > 0\,.$$

Der Graph von f stellt ein elliptisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$ dar. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}\,, \frac{2x_2}{b^2} \right)\,, \quad \operatorname{grad} f(0) = 0\,,$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}\,.$$

Die Eigenwerte von $H_f(x)$ sind $2/a^2$ und $2/b^2$, also ist $H_f(0)$ positiv definit und damit 0 ein striktes lokales Minimum von f (in diesem Fall sogar ein globales Minimum, d.h. ein Minimum bezüglich des gesamten Definitionsbereichs von f). Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\,, \quad a, b > 0\,.$$

Die Niveaumengen $N_c(f)$ sind die Hyperbeln

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Der Graph von f stellt ein hyperbolisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$ dar. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}\,, -\frac{2x_2}{b^2} \right)\,, \quad \operatorname{grad} f(0) = 0\,,$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}\,.$$

Die Eigenwerte von $H_f(x)$ sind $2/a^2$ und $-2/b^2$, also ist $H_f(0)$ indefinit und daher 0 kein lokales Extremum.

Im semidefiniten Fall kann man an der Hessematrix nicht erkennen, ob ein Extremum vorliegt oder nicht: Für die Funktionen

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4\,, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2\,, \quad h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$$

gilt $\operatorname{grad} f(0) = \operatorname{grad} g(0) = \operatorname{grad} h(0) = 0$,

$$H_f(0) = H_g(0) = H_h(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aber f hat in 0 ein striktes, lokales Minimum; g hat in 0 ein nicht striktes, lokales Minimum; h hat kein lokales Extremum in 0.

Definition 23.10 (Sattelpunkt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $x \in \Omega$. Ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$, *aber x kein lokales Extremum von f, so heißt x Sattelpunkt von f.* □

In jeder Umgebung eines Sattelpunktes x gibt es also Punkte y und z mit $f(y) > f(x)$ und $f(z) < f(x)$.

Wir können Taylorentwicklungen höherer Ordnung für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, komponentenweise erhalten. Nach Satz 23.3 gilt für alle i, falls $f_i \in C^{k+1}(\Omega)$,

$$f_i(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f_i(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f_i(\xi_i)}{\alpha!} h^\alpha . \tag{23.13}$$

Führen wir die Notation

$$\partial^\alpha f(x) = (\partial^\alpha f_1(x), \ldots, \partial^\alpha f_m(x))$$

ein, so erhalten wir wie in Folgerung 23.4, falls f k-mal stetig differenzierbar ist,

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h) , \tag{23.14}$$

wobei $R_{k+1}(h) \in \mathbb{R}^m$ und

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|R_{k+1}(h)\|}{\|h\|^k} = 0 .$$

Ohne hier in nähere Einzelheiten einzusteigen, bemerken wir, dass wir auch “totale” Ableitungen höherer Ordnung definieren können. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung für jedes $x \in \Omega$, also

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{\varphi |\, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}\} .$$

Wir können die zweite Ableitung $D^2 f$ definieren als Ableitung von Df, das heißt für jedes $x \in \Omega$ ist

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

eine lineare Abbildung, welche Df im Sinne der Definition der totalen Ableitung lokal approximiert. Insgesamt ist

$$D^2 f : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) .$$

In der Linearen Algebra ergibt es sich, dass der Raum $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ kanonisch isomorph ist zum Raum $\operatorname{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der bilinearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Im Falle $m = 1$ handelt es sich gerade um die Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$, darstellbar durch quadratische Matrizen, und es ergibt sich

$$(D^2 f(x))(u, v) = u^T H_f(x) v$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$, wenn man die Matrixdarstellung in der kanonischen Basis wählt. Diese Überlegungen kann man induktiv fortsetzen und für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ eine k-te Ableitung $D^k f$ als multilineare Abbildung vom Grad k definieren.

24 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition 24.1 (Fixpunkt)
Sei X Menge, $f : X \to X$. Ein $x \in X$ mit

$$x = f(x) \tag{24.1}$$

heißt Fixpunkt von f. Die Iteration

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad x_0 \in X \text{ gegeben,} \tag{24.2}$$

heißt Fixpunktiteration. □

"Fixpunktsätze" machen Aussagen über Lösungen der Fixpunktgleichung $x = f(x)$, etwa über Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten, unter gewissen Voraussetzungen an X und f. Fixpunktsätze stellen ein zentrales Werkzeug der Analysis dar. Als Beispiel betrachten wir ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung,

$$x'(t) = \sin(tx(t))\,, \quad x(0) = 1\,. \tag{24.3}$$

Wir können (24.3) durch Integration umformen zu

$$x(t) = 1 + \int_0^t \sin(\tau x(\tau))\, d\tau\,. \tag{24.4}$$

Wir können (24.4) als Fixpunktgleichung der Form (24.1) interpretieren, wenn wir $X = C[0,1]$ setzen und $f : C[0,1] \to C[0,1]$ definieren durch

$$(f(x))(t) = 1 + \int_0^t \sin(\tau x(\tau))\, d\tau\,.$$

(Veranschaulichung der Fixpunktiteration für $X = \mathbb{R}$, siehe Bilder in der Vorlesung.)

Definition 24.2 (Lipschitz-Stetigkeit)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Ein $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante L, falls gilt

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \le L d_1(x_1, x_2)\,, \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X\,. \tag{24.5}$$

Falls $Y = X$, $d_1 = d_2$ und $L < 1$, so heißt f Kontraktion. □

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig (das folgt unmittelbar aus den Definitionen).

Satz 24.3 (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz)
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ Kontraktion. Dann gilt:

(i) f hat genau einen Fixpunkt x.

(ii) Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ definierte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x.

(iii) Ist $L < 1$ eine Lipschitz-Konstante für f, so gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_k, x) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)\,. \tag{24.6}$$

Beweis: Sei $x_0 \in X$ beliebig, sei $L < 1$ Lipschitz-Konstante für f. Dann gilt für die durch die Fixpunktiteration definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \le L d(x_{k-1}, x_k)\,, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also (mit Induktion)

$$d(x_k, x_{k+1}) \le L^k d(x_0, x_1)\,, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+m}) &\le d(x_k, x_{k+1}) + \ldots + d(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \\ &\le L^k d(x_0, x_1) + \ldots + L^{k+m-1} d(x_0, x_1) = L^k \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1) \qquad \text{da } L < 1. \end{aligned}$$

Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge, welche wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f(x_{k-1}) = f(x)\,.$$

Ist y ebenfalls Fixpunkt von x, so gilt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le L d(x, y)\,,$$

also $(1-L) d(x, y) \le 0$, also $d(x, y) = 0$ und damit $x = y$. Zum Beweis von (24.6) zeigen wir wie oben

$$d(x_k, x_{k+m}) \le L \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_{k-1}, x_k) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)\,,$$

also

$$d(x_k, x) = \lim_{m\to\infty} d(x_k, x_{k+m}) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)\,.$$

$\square$

25 Inverse Funktionen im Mehrdimensionalen

Zur Motivation eine Wiederholung aus dem Eindimensionalen: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $x \in (a, b)$ mit $f'(x) \neq 0$, so ist die Einschränkung $f : I_\delta \to \mathbb{R}$, $I_\delta = (x - \delta, x + \delta)$, für hinreichend kleines $\delta > 0$ streng monoton und damit, aufgefasst als Abbildung

$$f : I_\delta \to f(I_\delta)$$

bijektiv. Die Bildmenge $f(I_\delta)$ ist ebenfalls ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$, und die Umkehrung $f^{-1} : f(I_\delta) \to I_\delta$ ist stetig differenzierbar. Aus der Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ folgt also, dass f "lokal invertierbar" und die Inverse ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Wir können auch einen globalen Satz formulieren: Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f invertierbar, und $f^{-1} : f((a, b)) \to (a, b)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt beweisen wir einen Satz über die lokale Invertierbarkeit von f. Aussagen über globale Invertierbarkeit sind i.a. schwieriger und nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

Falls die Inverse f^{-1} auf irgendeinem Teilgebiet existiert und differenzierbar ist, können wir ihre Ableitung sofort aus der Kettenregel berechnen. Aus $f^{-1} \circ f = id$ folgt

$$(D(f^{-1} \circ f))(x) = (D(id))(x) = id\,,$$

und weiter aus der Kettenregel

$$id = (D(f^{-1} \circ f))(x) = (Df^{-1})(f(x)) \circ (Df)(x)$$

beziehungsweise

$$I = J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x)\,.$$

Eine differenzierbare Inverse von f kann also nur dann existieren, wenn die Ableitung bzw. die Funktionalmatrix von f invertierbar ist.

Ist f eine lineare Abbildung, also $f(x) = Ax$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so ist $J_f(x) = A$ in allen Punkten x, und $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn A invertierbar ist; in diesem Fall ist f^{-1} auch differenzierbar mit $J_{f^{-1}}(y) = A^{-1}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Ist A nicht invertierbar, so ist die noch nicht einmal die Einschränkung von f auf eine offene Kugel $B_\delta(x)$ nicht invertierbar, egal wie klein δ ist und wo x liegt. Damit ist für lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen die Frage der Invertierbarkeit geklärt. In der Linearen Algebra wird weiter bewiesen, dass gilt

$$A \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Satz 25.1 *Die Determinante, aufgefasst als Funktion*

$$\det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R} \tag{25.1}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar. Die Menge

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A : \; A \in \mathbb{R}^{(n,n)},\; A \text{ invertierbar}\} \tag{25.2}$$

ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{(n,n)}$.

Beweis: In der Linearen Algebra wird die folgende Formel bewiesen:

$$\det(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} \,,$$

wobei die Summe über alle Permutationen π der Indexmenge $\{1,\ldots,n\}$ gebildet wird. Die Determinante, aufgefasst als Funktion der Matrixelemente, ist also ein Polynom und damit beliebig oft stetig differenzierbar. Die zweite Behauptung folgt aus der Darstellung

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \det(A) \neq 0\} \,,$$

d.h. $GL(n,\mathbb{R})$ ist das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung "det". □

Folgerung 25.2 *Die Abbildung*

$$T : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{(n,n)} \,, \quad T(A) = A^{-1} \,, \tag{25.3}$$

ist stetig differenzierbar.

Beweis: Folgt aus Satz 25.1, da sich die Inverse mit einer Formel darstellen lässt, in der nur Determinanten vorkommen, nämlich (siehe Lineare Algebra)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)^T \,,$$

wobei $\operatorname{adj} A$ diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist, deren (i,j)-tes Element gegeben ist durch

$$(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}) \,,$$

und $\tilde{A}_{ij}$ diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$ ist, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Elemente von A^{-1} lassen sich also schreiben als rationale Funktionen der Elemente von A. □

Satz 25.3 (Satz über inverse Funktionen, Spezialfall)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in \Omega$, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, es gelte $f(0) = 0$ und $Df(0) = id$, d.h. $J_f(0) = I$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist differenzierbar in* 0, $Df^{-1}(0) = id$.

Beweis: In diesem Beweis steht $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|_\infty$. Zur Konstruktion der lokalen Inverse wird der Banachsche Fixpunktsatz herangezogen. Zu diesem Zweck definieren wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $T_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T_y(x) = x + y - f(x) \,. \tag{25.4}$$

Es gilt dann

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ ist Fixpunkt von } T_y$$

und weiter ist $T_y \in C^1(\Omega)$,

$$J_{T_y}(x) = J_{T_0}(x) = I - J_f(x)\,, \quad J_{T_y}(0) = 0\,.$$

Wir wählen ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\|T_y(x) - T_y(\xi)\| \le \frac{1}{2}\|x - \xi\|\,, \qquad \text{für alle } x, \xi \in K_\delta(0),\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{25.5}$$

(Dass das möglich ist, folgt aus dem Mittelwertsatz 22.13 und der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto J_{T_0}(x)$.) Für $x \in K_\delta$ gilt also, da $T(0) = 0$,

$$\|T_y(x)\| = \|x + y - f(x)\| \le \|T_0(x) - T_0(0)\| + \|y\| \le \frac{1}{2}\|x\| + \|y\|\,. \tag{25.6}$$

Aus (25.5) und (25.6) folgt:

$$T_y : K_\delta \to K_\delta \text{ ist Kontraktion, falls } \|y\| \le \frac{\delta}{2}\,. \tag{25.7}$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun, dass alle solchen T_y einen eindeutigen Fixpunkt $x \in K_\delta$ haben, also gilt

$$\text{zu jedem } y \in K_{\frac{\delta}{2}} \text{ gibt es genau ein } x \in K_\delta \text{ mit } f(x) = y\,, \tag{25.8}$$

und für dieses x gilt wegen (25.6) und $x = T_y(x)$, dass

$$\|x\| \le 2\|y\|\,. \tag{25.9}$$

Wir definieren ($B_\delta = B_\delta(0)$ offene Kugel)

$$V = B_{\frac{\delta}{2}}\,, \quad U = f^{-1}(V) \cap B_\delta\,.$$

Es ist $0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subset V$, und wegen (25.8) ist $f|U$ injektiv. Es ist auch $V \subset f(U)$ wegen (25.9), also ist (i) bewiesen. Zum Beweis von (ii) genügt es zu zeigen: Für jede Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_{\frac{\delta}{2}}$ mit $y_k \to 0$, $y_k \ne 0$ für alle k, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} = 0\,. \tag{25.10}$$

Sei (y_k) eine solche Folge, sei $x_k = f^{-1}(y_k)$, dann ist $x_k \ne 0$ für alle k, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} &= \frac{\|f^{-1}(y_k) - y_k\|}{\|y_k\|} \\
&= \frac{\|x_k - f(x_k)\|}{\|x_k\|} \cdot \frac{\|x_k\|}{\|y_k\|} \\
&\le \frac{\|f(x_k) - f(0) - I(x_k - 0)\|}{\|x_k\|} \cdot 2\,,
\end{aligned}$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen 0 für $k \to \infty$, da $J_f(0) = I$. Damit ist (25.10) bewiesen. □

Satz 25.4 (Satz über inverse Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $x_* \in \Omega$, sei $Df(x_*)$ invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_* \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist stetig differenzierbar in* V*, und für alle* $x \in U$ *gilt*

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}\,. \tag{25.11}$$

Beweis: Die Menge

$$\begin{aligned}\tilde\Omega &= \{x : x \in \Omega,\ Df(x) \text{ ist invertierbar}\}\\ &= \Omega \cap \{x : J_f(x) \in GL(n,\mathbb{R})\} = \Omega \cap (J_f)^{-1}(GL(n,\mathbb{R}))\end{aligned}$$

ist offen nach Satz 25.1, da J_f stetig von x abhängt. Da es genügt, den Beweis für $\tilde\Omega$ statt Ω zu führen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \Omega$. Wir setzen $\Omega_* = \Omega - x_*$ und definieren $f_* : \Omega_* \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_*(h) = (Df(x_*))^{-1}(f(x_* + h) - f(x_*))\,. \tag{25.12}$$

Für f_* sind alle Voraussetzungen von Satz 25.3 erfüllt, da $f_*(0) = 0$ und $Df_*(0) = Df(x_*)^{-1} \circ Df(x_*) = id$, also gibt es $U_*, V_* \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U_* \subset \Omega_*$, $f_* : U_* \to V_*$ bijektiv, f_*^{-1} differenzierbar in 0 mit $Df_*^{-1}(0) = id$. Wir setzen

$$U = U_* + x_*\,.$$

Aus (25.12) folgt, dass für alle $x \in U$ gilt (wir setzen $h = x - x_*$ in (25.12))

$$f(x) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(x - x_*))\,. \tag{25.13}$$

Da f_* auf U_* bijektiv und $Df(x_*)$ invertierbar, ist f auf U injektiv. Wir setzen

$$V = f(U) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(U_*)) = f(x_*) + Df(x_*)(V_*)\,.$$

Mit V_* ist auch V offen, und $f|U : U \to V$ bijektiv. Nach (25.12) gilt für alle $x \in U$

$$f_*(x - x_*) = Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*))\,,$$

also

$$x = x_* + f_*^{-1}[Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*))]\,,$$

also für alle $y \in V$

$$f^{-1}(y) = x_* + f_*^{-1}[Df(x_*)^{-1}(y - f(x_*))]\,.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$(Df^{-1})(f(x_*)) = (Df_*^{-1})(0) \circ (Df(x_*))^{-1} = (Df(x_*))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x_*)) = J_f(x_*)^{-1}\,.$$

Da für jedes $x \in U$ die Voraussetzungen des Satzes (mit x statt x_*) erfüllt sind, ist f^{-1} auf ganz V differenzierbar, und (25.11) gilt. Es ist außerdem f^{-1} stetig auf V nach Satz 22.3, und wegen Folgerung 25.2 auch die Abbildung

$$y \mapsto (J_f(f^{-1}(y)))^{-1}\,.$$

□

Wir kommen auf die Polarkoordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

zurück. Es ist

$$\det(J_f(r,\varphi)) = r\,,$$

also ist f lokal invertierbar in allen Punkten (r,φ) mit $r \neq 0$. Es gilt darüber hinaus, dass $f : U \to V$ bijektiv ist für

$$U = \{(r,\varphi) : r > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi\}\,, \quad V = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ oder } x < 0\}\,.$$

26 Implizite Funktionen

Im einfachsten Fall wollen wir eine Gleichung der Form

$$f(x,y) = 0\,, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

nach y auflösen. Beispiel:

$$xy - 1 = 0\,,$$

Lösung:

$$y = \frac{1}{x}\,.$$

Wir haben also eine Funktion g gefunden, nämlich $g(x) = 1/x$, so dass gilt

$$f(x, g(x)) = 0\,. \tag{26.1}$$

Im allgemeinen ist das nicht in einer so explizit angebbaren Form möglich, oder vielleicht auch nicht sinnvoll. Es stellt sich dann u.a. die Frage, unter welchen Voraussetzungen an f ein solches g existiert. Weiteres Beispiel: Der Einheitskreis

$$0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 1\,. \tag{26.2}$$

Hier liefern

$$g(x) = +\sqrt{1-x^2}\,, \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2}\,,$$

Lösungen von (26.1). Hier ist also die Lösung "global" mehrdeutig, aber "lokal" (d.h. in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes (x,y) mit $f(x,y) = 0$) eindeutig für $|x| < 1$; lokal mehrdeutig für $|x| = 1$, dort ist g nicht differenzierbar; nicht definiert für $|x| > 1$. Existiert eine differenzierbare Funktion g, so dass (26.1) gilt, so erhält man aus der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x)\,,$$

also

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}\,,$$

jedenfalls dann, wenn $\partial_y f(x, g(x)) \neq 0$. Andernfalls kann es Probleme geben. Für (26.2) haben wir

$$\partial_x f(x,y) = 2x\,, \quad \partial_y f(x,y) = 2y\,.$$

Die allgemeine Situation im Endlichdimensionalen sieht so aus: Wir haben m Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten, von denen wir mit Hilfe der Gleichungen m Unbekannte eliminieren wollen, indem wir sie als Funktionen der anderen n Unbekannten ausdrücken.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0\,, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0\,, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0\,. \end{aligned}$$

Gesucht sind Funktionen g_i, "$y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$", für $1 \le i \le m$, mit

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0\,, \quad 1 \le j \le m\,.$$

Erheblich übersichtlicher ist die vektorielle Schreibweise: Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\,,$$

gesucht ist

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{mit} \qquad f(x, g(x)) = 0$$

für alle (oder doch möglichst viele) $x \in \mathbb{R}^n$. In einem solchen Fall empfiehlt es sich, auch für die Jacobi-Matrix eine Block-Notation einzuführen. Ist $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar, und schreiben wir $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ für die Elemente in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so definieren wir

$$\partial_x f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_k(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n)}\,, \tag{26.3}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_k(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_k(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,m)}\,. \tag{26.4}$$

Die gesamte Jacobi-Matrix setzt sich aus zwei nebeneinanderstehenden Blöcken zusammen,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n+m)}\,.$$

Satz 26.1 (Implizite Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei $(x_*, y_*) \in \Omega$ mit $f(x_*, y_*) = 0$. Ist $\partial_y f(x_*, y_*)$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung W von x_* und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $y_* = g(x_*)$ und

$$f(x, g(x)) = 0\,, \quad (x, g(x)) \in \Omega\,, \quad \textit{für alle } x \in W, \tag{26.5}$$

und es gilt

$$J_g(x) = -\partial_y f(x, g(x))^{-1} \partial_x f(x, g(x)) \tag{26.6}$$

für alle $x \in W$.

Beweis: Wir definieren

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\,, \quad F(x,y) = (x, f(x,y))\,.$$

Wir zeigen, dass F in (x_*, y_*) die Voraussetzungen des Satzes 25.4 über inverse Funktionen erfüllt. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Funktionalmatrix

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

für $(x, y) = (x_*, y_*)$ invertierbar ist. In der Tat, die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B(x,y) & (\partial_y f(x,y))^{-1} \end{pmatrix}, \quad B(x,y) = -(\partial_y f(x,y))^{-1} \partial_x f(x,y),$$

ist für $(x, y) = (x_*, y_*)$ die Inverse von $J_F(x, y)$. Aus Satz 25.4 folgt nun: Es gibt offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $(x_*, y_*) \in U \subset \Omega$, so dass $F : U \to V$ bijektiv und $F^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Wir zerlegen F^{-1} in zwei Blöcke,

$$F^{-1}(x, y) = (\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)),$$

mit $\varphi_x : V \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_y : V \to \mathbb{R}^m$. Für $(x, y) \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} (x, y) &= F(F^{-1}(x, y)) = F(\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)) \\ &= (\varphi_x(x, y), f(\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y))), \end{aligned}$$

also

$$x = \varphi_x(x, y), \quad y = f(x, \varphi_y(x, y)). \tag{26.7}$$

Wir wählen nun offene Mengen $W \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, mit

$$F(x_*, y_*) = (x_*, 0) \in W \times Y \subset V,$$

und definieren $g : W \to U$ durch

$$g(x) = \varphi_y(x, 0). \tag{26.8}$$

Außerdem verlangen wir, dass $\partial_y f(x, g(x))$ invertierbar ist für alle $x \in W$ (das können wir immer durch Verkleinern von W erreichen). Es gilt dann wegen (26.7)

$$f(x, g(x)) = f(x, \varphi_y(x, 0)) = 0, \quad \text{für alle } x \in W,$$

und

$$(x_*, y_*) = F^{-1}(x_*, 0) = (x_*, \varphi_y(x_*, 0)) = (x_*, g(x_*)),$$

also

$$y_* = g(x_*).$$

Da F^{-1} stetig differenzierbar ist, ist auch g stetig differenzierbar. Die Formel (26.6) für J_g folgt aus der Kettenregel, angewendet auf

$$x \mapsto (x, g(x)) \mapsto f(x, g(x)) = 0,$$

da wir durch Differenzieren erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x, g(x)) & \partial_y f(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ J_g(x) \end{pmatrix} \\ &= \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) J_g(x). \end{aligned}$$

□

Als Beispiel betrachten wir die Niveaulinien einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $(x_*, y_*) \in \Omega$, $f(x_*, y_*) = c$, also $(x_*, y_*) \in N_c(f)$. Die Frage ist: Wie sieht $N_c(f)$ in der Nähe von (x_*, y_*) aus? Wir betrachten zunächst den regulären Fall

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) \neq 0\,. \tag{26.9}$$

In diesem Fall ist mindestens eine der beiden partiellen Ableitungen nicht Null. Ist $\partial_y f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 26.1 ein offenes Intervall $I = (x_* - \delta, x_* + \delta)$ und ein $g \in C^1(I)$ mit $g(x_*) = y_*$ und $f(x, g(x)) = 0$, d.h. y lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach x auflösen. Ist $\partial_x f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 26.1 ein offenes Intervall $J = (y_* - \delta, y_* + \delta)$ und ein $h \in C^1(J)$ mit $h(y_*) = x_*$ und $f(h(y), y) = 0$, d.h. x lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach y auflösen. Das ist der Fall in Beispiel (26.2), in dem

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &\neq 0\,, \quad \text{außer in } (0,1),\ (0,-1),\\ \partial_y f(x,y) &\neq 0\,, \quad \text{außer in } (1,0),\ (-1,0). \end{aligned}$$

Man kann außerdem zeigen, dass es im regulären Fall (26.9) in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_*, y_*) keine anderen Punkte von $N_c(f)$ geben kann.

Der singuläre Fall ist charakterisiert durch

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) = 0\,. \tag{26.10}$$

Hier kann alles mögliche passieren. Sei etwa

$$f(x,y) = x^2 - y^3 = 0\,, \tag{26.11}$$

dann ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -3y^2)\,, \quad \operatorname{grad} f(0,0) = 0\,.$$

Wir können y nach x auflösen,

$$y = g(x) = \sqrt[3]{x^2}\,,$$

aber g ist nicht differenzierbar in 0, und $N_0(f)$ hat eine Spitze in 0. Für

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = 0\,, \tag{26.12}$$

gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y)\,, \quad \operatorname{grad} f(0,0) = 0\,,$$

und $N_0(f)$ besteht aus den beiden Winkelhalbierenden (die sich im Nullpunkt schneiden). Eine kompliziertere Situation liegt vor bei

$$f(x,y) = r^6 \sin\frac{1}{r^2}\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad f(0,0) = 0\,. \tag{26.13}$$

Hier ist ebenfalls $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$, und $N_0(f)$ besteht aus unendlich vielen Kreisen um 0 mit den Radien r, wobei

$$\frac{1}{r^2} = \pi n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

sowie den Nullpunkt selbst. Es gilt allgemein (ohne Beweis):

Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $A = N_0(f)$.

Wir wenden den Satz über implizite Funktionen an auf das Problem, das Minimum einer Funktion "unter einer Nebenbedingung" zu bestimmen.

Problem 26.2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $J : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\min J(x)\,, \quad \text{wobei} \quad x \in \Omega,\ f(x) = 0\,. \tag{26.14}$$

Die Bedingung "$f(x) = 0$" heißt Nebenbedingung (genauer: Gleichungsnebenbedingung). Ein $x_* \in \Omega$ heißt lokale Lösung von (26.14), falls es eine Umgebung U von x_* gibt, so dass

$$J(x_*) \le J(x)\,, \quad \text{für alle } x \in U \cap \Omega \text{ mit } f(x) = 0.$$

Satz 26.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, J \in C^1(\Omega)$, sei x_* lokale Lösung von (26.14), es gelte* $\operatorname{grad} f(x_*) \neq 0$. *Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{grad} J(x_*) = \lambda \operatorname{grad} f(x_*)\,. \tag{26.15}$$

Die Zahl λ heißt Lagrange-Multiplikator.

Beweis: Sei o.B.d.A $\partial_n f(x_*) \neq 0$ (lässt sich durch Umnummerieren der Unbekannten immer erreichen). Wir schreiben

$$x_* = (x'_*, x_{*n})\,, \quad x'_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n-1})\,.$$

Nach Satz 26.1 gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen mit $x'_* \in W$, so dass

$$f(x', g(x')) = 0\,, \quad (x', g(x')) \in \Omega\,, \quad \text{für alle } x' \in W.$$

Wenn wir die durch

$$h(x'_i) = f(x', g(x'))\,, \quad x' = (x'_1, \ldots, x'_{n-1})\,,$$

definierte Abbildung h_i in $x' = x'_*$ differenzieren, erhalten wir

$$\partial_i f(x_*) + \partial_n f(x_*) \partial_i g(x'_*) = 0\,, \quad 1 \le i \le n-1\,. \tag{26.16}$$

Wir betrachten

$$\tilde{J} : W \to \mathbb{R}\,, \quad \tilde{J}(x') = J(x', g(x'))\,.$$

x'_* ist lokales Minimum von $\tilde{J}$, also gilt

$$0 = \partial_i \tilde{J}(x'_*) = \partial_i J(x_*) + \partial_n J(x_*) \partial_i g(x'_*)\,, \quad 1 \le i \le n-1\,. \tag{26.17}$$

Wir multiplizieren (26.17) mit $\partial_n f(x_*)$, (26.16) mit $\partial_n J(x_*)$ und subtrahieren die resultierenden Gleichungen. Es ergibt sich

$$\partial_i J(x_*) \partial_n f(x_*) - \partial_i f(x_*) \partial_n J(x_*) = 0\,, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{26.18}$$

Wir setzen

$$\lambda = \frac{\partial_n J(x_*)}{\partial_n f(x_*)}$$

und erhalten

$$\partial_i J(x_*) = \lambda \partial_i f(x_*) \,, \quad 1 \le i \le n \,.$$

$\square$

Als erstes Beispiel betrachten wir

$$\min J(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \,, \quad \text{wobei} \quad e^{xy} = x+y \,. \tag{26.19}$$

Hier ist

$$f(x,y) = e^{xy} - x - y \,,$$
$$\operatorname{grad} J(x,y) = (x,y) \,, \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (ye^{xy}-1, xe^{xy}-1) \,.$$

Gemäß Satz 26.3 suchen wir Kandidaten $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$, welche die Gleichungen

$$x = \lambda(ye^{xy}-1) \,, \tag{26.20}$$
$$y = \lambda(xe^{xy}-1) \,. \tag{26.21}$$

sowie

$$e^{xy} = x+y \,. \tag{26.22}$$

erfüllen. Wir haben also das Optimierungsproblem darauf zurückgeführt, das System (26.20) - (26.22) von 3 nichtlinearen Gleichungen mit den 3 Unbekannten (x,y,λ) zu lösen – was im allgemeinen nicht durch explizite Angabe einer Lösung möglich ist.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Problem, die Extrema einer quadratischen Funktion auf dem Rand der Einheitskugel zu bestimmen. Sei $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(x) = x^T A x \,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ symmetrisch,} \tag{26.23}$$

die Nebenbedingung sei

$$0 = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \,.$$

Es ist

$$\operatorname{grad} J(x) = 2Ax \,, \quad \operatorname{grad} f(x) = 2x \,.$$

Die Funktion J nimmt auf dem Rand der Einheitskugel ihr Maximum und ihr Minimum an, in beiden Fällen folgt aus Satz 26.3, im Falle des Maximums angewendet auf $-f$, die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} J(x) = \lambda \operatorname{grad} f(x)$, also

$$Ax = \lambda x \,, \tag{26.24}$$

das heißt, λ ist Eigenwert von A zum Eigenvektor x. Aus (26.24) folgt

$$J(x) = x^T A x = x^T \lambda x = \lambda \|x\|_2^2 = \lambda \,. \tag{26.25}$$

Da diese Formel für jeden Eigenwert gilt, wenn wir einen zugehörigen Eigenvektor auf 1 normieren, haben wir das folgende Ergebnis erhalten:

$$\max_{\|x\|_2=1} J(x) = \lambda_{max} \,, \quad \min_{\|x\|_2=1} J(x) = \lambda_{min} \,, \tag{26.26}$$

wobei λ_{max} und λ_{min} der größte bzw. kleinste Eigenwert von A sind.

27 Parameterabhängige Integrale

Satz 27.1 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der Produktmetrik d. Dann wird durch*

$$(F(y))(x) = f(x, y) \tag{27.1}$$

für jedes $y \in Y$ eine stetige Funktion $F(y) : X \to \mathbb{R}$ definiert. Ist X kompakt, so ist

$$F : Y \to (C(X), \|\cdot\|_\infty) \tag{27.2}$$

stetig.

Beweis: Sei $y \in Y$ beliebig, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to x$. Dann gilt

$$d((x_k, y), (x, y)) = d_1(x_k, x) \to 0\,,$$

also $(x_k, y) \to (x, y)$ in $X \times Y$ und damit

$$(F(y))(x_k) = f(x_k, y) \to f(x, y) = (F(y))(x)\,,$$

also ist $F(y)$ eine stetige Funktion. Sei nun X kompakt, sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in Y mit $y_k \to y$. Zu zeigen ist

$$\|F(y_k) - F(y)\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x, y_k) - f(x, y)| \to 0 \tag{27.3}$$

für $k \to \infty$. Wir definieren $K \subset Y$ durch

$$K = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}\,.$$

Dann ist $(K, d_2|K)$ kompakt (Übung). Nach Satz 19.2 ist $X \times K$ kompakt, nach Satz 19.12 ist $f|(X \times K)$ gleichmäßig stetig. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $\delta > 0$ gemäß der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit gewählt. Sei N gewählt mit $d_2(y_k, y) < \delta$ für alle $k \geq N$. Dann gilt

$$d((x, y_k), (x, y)) = d_2(y_k, y) < \delta\,, \quad \text{für alle } k \geq N \text{ und alle } x \in X,$$

also

$$|(f(x, y_k) - f(x, y)| < \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \geq N \text{ und alle } x \in X,$$

also

$$\sup_{x\in X} |f(x, y_k) - f(x, y)| \leq \varepsilon\,.$$

Damit ist (27.3) bewiesen. □

Satz 27.2 *Sei (Y, d_2) metrischer Raum, sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, sei $f : [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{27.4}$$

eine stetige Funktion $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ definiert.

Beweis: Es ist $\varphi = I \circ F$, F wie in Satz 27.1,

$$I : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}, \quad I(g) = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

F ist stetig nach Satz 27.1, I ist stetig nach Beispiel 18.24. $\square$

Satz 27.3 (Differenzieren unter dem Integral)
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $\partial_2 f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ existiere und sei stetig. Dann ist $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\,, \tag{27.5}$$

stetig differenzierbar, und

$$\varphi'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x,y)\,dx\,. \tag{27.6}$$

Beweis: Sei $y \in [c,d]$, (y_k) Folge in $[c,d]$ mit $y_k \to y$, $y_k \neq y$. Wir setzen

$$g_k(x) = \frac{f(x,y_k) - f(x,y)}{y_k - y} - \partial_2 f(x,y)\,.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt die Existenz von $\eta_k(x) \in [y, y_k]$ mit

$$g_k(x) = \partial_2 f(x, \eta_k(x)) - \partial_2 f(x,y)\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass gilt

$$|y - z| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\partial_2 f(x,y) - \partial_2 f(x,z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

(Das ist möglich, da $\partial_2 f$ gleichmäßig stetig ist auf $[a,b] \times [c,d]$.) Wähle N so, dass

$$|y_k - y| < \delta\,, \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Dann gilt $|\eta_k(x) - y| < \delta$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$\|g_k\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g_k(x)| \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \geq N,$$

also gilt $g_k \to 0$ gleichmäßig, und es folgt

$$\begin{aligned}\left| \frac{\varphi(y_k) - \varphi(y)}{y_k - y} - \int_a^b \partial_2 f(x,y)\,dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x,y_k) - f(x,y)}{y_k - y} - \partial_2 f(x,y) \right| dx \\ &\leq \int_a^b \|g_k\|_\infty\,dx \to 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. $\square$

In Satz 27.3 ist vorausgesetzt, dass f stetig nicht nur bezüglich y, sondern auch bezüglich x ist. Diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden, so dass (27.6) auch gilt für eine geeignete Klasse von Funktionen, die unstetig bezüglich x ist. Dazu verwendet man einen anderen Integralbegriff, zweckmäßig ist das Lebesgue-Integral.

28 Kurvenintegrale und Potentiale

Zur Motivation: Ein konstantes Kraftfeld, repräsentiert durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^3$, leistet entlang der Strecke, welche einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ verbindet, die Arbeit

$$W = \langle F, x_1 - x_0 \rangle = \|F\|_2 \|x_1 - x_0\|_2 \cos\varphi$$

wobei φ der von den Vektoren F und $x_1 - x_0$ eingeschlossene Winkel ist. Betrachten wir den Streckenzug, welcher nacheinander die Punkte $x_0, x_1, \ldots x_N$ verbindet, und nehmen wir an, dass längs der Verbindung von x_{i-1} nach x_i die Kraft F_i wirkt, so ergibt sich die Gesamtarbeit zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \langle F_i, x_i - x_{i-1} \rangle \ . \tag{28.1}$$

Wenn wir diesen Streckenzug als Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $x(t_i) = x_i$ zu einer geeigneten Zerlegung auffassen und $F(x_i) = F_i$ setzen, so wird (28.1) zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \left\langle F(x(t_i)), \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle (t_i - t_{i-1}) \,, \tag{28.2}$$

Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so ist die längs x verrichtete Arbeit gleich

$$\int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \,.$$

Definition 28.1 (Kurvenintegral)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $C = x([a, b]) \subset \Omega$. Dann heißt

$$\int_C F \cdot dx := \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \tag{28.3}$$

das Kurvenintegral von F entlang C von $x(a)$ nach $x(b)$. □

Diese Definition ist sinnvoll, da das Kurvenintegral sich nicht ändert, wenn wir eine andere Parametrisierung von C wählen, die die Orientierung erhält. Ist etwa $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \langle F((x \circ \varphi)(\tau)), (x \circ \varphi)'(\tau) \rangle \ d\tau &= \int_\alpha^\beta \langle F(x(\varphi(\tau))), x'(\varphi(\tau)) \rangle \, \varphi'(\tau) \, d\tau \\ = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt &= \pm \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \,, \end{aligned}$$

je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\int_C F \cdot dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} F \cdot dx \,, \tag{28.4}$$

falls $x|[t_{i-1}, t_i]$ stetig differenzierbar ist und $C_i = x([t_{i-1}, t_i])$. (Man zeigt, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zerlegung.) Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar

$$\int_C (F+G) \cdot dx = \int_C F \cdot dx + \int_C G \cdot dx\,, \quad \int_C \lambda F \cdot dx = \lambda \int_C F \cdot dx\,, \tag{28.5}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 28.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar, sei $C = x([a,b]) \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = f(x(b)) - f(x(a))\,. \tag{28.6}$$

Beweis: Sei zunächst $x \in C^1([a,b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t)\rangle \; dt = \int_a^b (f \circ x)'(t)\, dt \\ &= f(x(b)) - f(x(a))\end{aligned}$$

nach Kettenregel und Hauptsatz. Ist x stückweise stetig differenzierbar und (t_i) eine entsprechende Zerlegung von $[a,b]$, so folgt

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k (f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))) = f(x(b)) - f(x(a))\,.$$

□

Aus Satz 28.2 folgt: Ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld auf Ω (das heißt, es gibt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} f$), so ist das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ unabhängig davon, wie die Kurve von P nach Q verläuft. Insbesondere ist dann

$$\int_C F \cdot dx = 0$$

für jede geschlossene Kurve C.

Lemma 28.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist F ein Gradientenfeld auf Ω, so gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{28.7}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j mit $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} f$, so gilt

$$\partial_i F_j(x) = \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) = \partial_j F_i(x)\,.$$

□

Definition 28.4 *Sei X Vektorraum, sei $Y \subset X$. Y heißt sternförmig, falls es ein $y \in Y$ gibt mit $[x, y] \subset Y$ für alle $x \in Y$.* $\square$

Satz 28.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{28.8}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j, $1 \le i, j \le n$, so ist F ein Gradientenfeld auf Ω, es gibt $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$F = \operatorname{grad} f\,. \tag{28.9}$$

Beweis: Sei $y \in \Omega$ mit $[y, x] \subset \Omega$ für alle $x \in \Omega$. Wir definieren f als das Kurvenintegral von F entlang der Strecke von y nach x, wir setzen also

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(y + t(x - y)), x - y\rangle \, dt\,.$$

Nach Satz 27.3 existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_i f$ und sind stetig. Für

$$\tilde{f}(x) = \langle F(y + t(x - y)), x - y\rangle$$

gilt

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \langle t\partial_i F(y + t(x - y)), x - y\rangle + \langle F(y + t(x - y)), e_i\rangle\ ,$$

also

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \langle t\partial_i F(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\, dt\,.$$

Für

$$g_i(t) = tF_i(y + t(x - y))$$

gilt

$$g_i'(t) = \langle t(\operatorname{grad} F_i)(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\,,$$

und mit $z = y + t(x - y)$

$$\begin{aligned}\langle(\operatorname{grad} F_i)(z), x - y\rangle &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(z)(x_j - y_j) = \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(z)(x_j - y_j)\\ &= \langle \partial_i F(z), x - y\rangle\ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$g_i'(t) = \langle t(\partial_i F)(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\,,$$

und damit

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 g_i'(t)\, dt = g_i(1) - g_i(0) = F_i(x)\,.$$

$\square$

Folgerung 28.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist F ein Gradientenfeld auf Ω genau dann, wenn $\operatorname{rot} F = 0$ in Ω.*

Definition 28.7 (Wegzusammenhang)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x_a, x_b \in X$ eine Kurve $r : [0,1] \to X$ gibt mit $r(0) = x_a$ und $r(1) = x_b$. □

Definition 28.8 (Konservatives Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ auf Ω, falls "das Kurvenintegral wegunabhängig ist", d.h. falls für alle Punkte $x_a, x_b \in \Omega$ und alle stückweise C^1-Kurven C_1, C_2 von x_a nach x_b, welche in Ω verlaufen, gilt

$$\int_{C_1} F \cdot dx = \int_{C_2} F \cdot dx\,. \tag{28.10}$$

□

Satz 28.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$F \text{ ist Gradientenfeld auf } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ ist konservativ auf } \Omega\ .$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt aus Satz 28.2.
"$\Leftarrow$": Seien $x, y \in \Omega$ beliebig. Wir beweisen zunächst

$$\text{Es gibt eine stückweise } C^1\text{-Kurve von } y \text{ nach } x. \tag{28.11}$$

Sei $r : [0,1] \to \Omega$ stetig mit $r(0) = y$, $r(1) = x$. Sei

$$U_\varepsilon = \{z : z \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}\,(z, r([0,1])) < \varepsilon\}\,.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon \subset \Omega$ gilt (das ist möglich, da $\mathrm{dist}\,(\partial\Omega, r([0,1]) > 0$ falls $\partial\Omega \neq \emptyset$, was gleichbedeutend ist mit $\Omega \neq \mathbb{R}^n$). Für eine hinreichend feine Unterteilung (t_i) von $[0,1]$ gilt, dass der Polygonzug, welcher $r(0), r(t_1), \ldots, r(1)$ verbindet, ganz in U_ε und damit auch in Ω liegt. Damit ist (28.11) bewiesen. Wir wählen nun $x_* \in \Omega$ und definieren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_C F \cdot\, dx\,, \tag{28.12}$$

wobei C eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x ist (eine solche gibt es nach (28.11), und nach Voraussetzung hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von C ab). Zu zeigen ist noch $F = \mathrm{grad}\, f$. Sei $x \in \Omega$ beliebig, sei $h > 0$ so gewählt, dass $[x, x + he_i] \subset \Omega$ gilt. Sei C_* eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x, sei $C(h)$ definiert durch

$$r_h : [0,h] \to \Omega\,, \quad r_h(t) = x + te_i\,.$$

Dann gilt

$$f(x + he_i) = \int_{C_*} F \cdot\, dx + \int_{C(h)} F \cdot\, dx = f(x) + \int_{C(h)} F \cdot\, dx\,.$$

Für

$$g(h) = f(x + he_i) - f(x)$$

gilt also

$$g(h) = \int_{C(h)} F \cdot dx = \int_0^h \langle F(r_h(t)), r_h'(t) \rangle \; dt = \int_0^h F_i(x + te_i) \, dt \,,$$

also ist g rechtsseitig differenzierbar in 0 und $g'_+(0) = F_i(x)$. Dasselbe Argument mit $-e_i$ statt e_i liefert die Existenz von $\partial_i f(x)$ und die Formel $\partial_i f(x) = F_i(x)$. $\square$

Als Beispiel betrachten wir

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,, \quad F : \Omega \to \mathbb{R} \,, \quad F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \,, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) . \tag{28.13}$$

Es gilt für alle $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\partial_1 F_2(x,y) = \partial_2 F_1(x,y) \,.$$

Für jede sternförmige Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω gibt es also nach Satz 28.5 ein $f \in C^2(\tilde{\Omega})$ mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega} \,.$$

Aber andererseits gilt, wenn wir den Einheitskreis als eine geschlossene Kurve C auffassen, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_C F \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \; dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi \,,$$

also ist F nicht konservativ auf Ω. Aus Satz 28.9 (bzw. schon Satz 28.2) folgt, dass es kein $f \in C^2(\Omega)$ geben kann mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \Omega \,.$$

29 Fourierreihen

Mit Fourierreihen oder trigonometrischen Reihen verfolgt man das Ziel, periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome darzustellen bzw. zu approximieren.

Definition 29.1 (Periodische Funktion)
Sei S Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to S$ heißt periodisch mit Periode p, oder p-periodisch, falls

$$f(x+p) = f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{29.1}$$

Hierbei ist $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. □

Ist p eine Periode für f, so auch kp für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. Die Funktionen

$$f_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,\, k \neq 0\,, \tag{29.2}$$

sind periodisch mit Periode $2\pi/|k|$, also auch 2π-periodisch. Konstante Funktionen sind p-periodisch für jedes $p > 0$.

Eine p-periodische Funktion ist durch ihre Restriktion auf ein Intervall der Form $[a, a+p)$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, eindeutig bestimmt. Umgekehrt definiert jede Funktion $f : [a, a+p) \to S$ vermittels wiederholter Anwendung von (29.1) eine p-periodische Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to S$, diese heißt die periodische Fortsetzung von f. Im Folgenden werden wir die Funktionen f und $\tilde{f}$ beide mit f bezeichnen.

Anstelle eines Intervalls $[a, a+p)$ kann man (im Fall $p = 2\pi$) den Einheitskreis $\mathcal{T} = \{e^{ix} : 0 \le x < 2\pi\}$ als Definitionsgebiet von f betrachten und erhält damit eine "kanonische" Darstellung der Menge aller 2π-periodischen Funktionen mit Werten in S als die Menge aller Abbildungen von $\mathcal{T}$ nach S.

Definition 29.2 (Trigonometrisches Polynom)
Ein trigonometrisches Polynom ist definiert als eine Funktion $t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,, \tag{29.3}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die Zahl n heißt der Grad von t, falls $c_n \neq 0$ oder $c_{-n} \neq 0$. □

Interpretieren wir ein trigonometrisches Polynom als Funktion $t : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, so erhalten wir vermittels (29.3) die Darstellung

$$t(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k\,, \quad z = e^{ix}\,.$$

Um komplexwertige Funktionen differenzieren und integrieren zu können, übertragen wir die relevanten Sachverhalte aus dem Reellen, indem wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Für $f : I \to \mathbb{C}$ definieren wir $f' : I \to \mathbb{C}$ durch

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)\,, \tag{29.4}$$

falls Real- und Imaginärteil von f auf (a, b) differenzierbar sind. Vermittels der Identifikation von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ stimmt die Definition in (29.4) mit der Definition der Ableitung einer Kurve überein. Man kann unmittelbar nachprüfen, dass

$$(f+g)' = f' + g' \,, \quad (cf)' = cf' \tag{29.5}$$

gelten für differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ und Konstante $c \in \mathbb{C}$. Für

$$f(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

ergibt sich

$$f'(x) = -k \sin kx + ik \cos kx = ike^{ikx} \,.$$

Daraus erhalten wir die Ableitung eines trigonometrischen Polynoms,

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \,, \quad t'(x) = \sum_{k=-n}^{n} ikc_k e^{ikx} \,.$$

Definition 29.3 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ mit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls Real- und Imaginärteil von f Regelfunktionen sind. In diesem Fall definieren wir*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dx \,, \tag{29.6}$$

□

Es gilt

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \,, \quad \int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx \,, \tag{29.7}$$

für Regelfunktionen f, g und für $c \in \mathbb{C}$, sowie

$$\overline{\int_a^b f(x)\, dx} = \int_a^b \overline{f(x)}\, dx \,. \tag{29.8}$$

Ist f periodisch mit Periode p, so ist das Integral von f über ein Intervall der Länge p unabhängig von der Lage des Intervalls,

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{a}+p} f(x)\, dx$$

für alle $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt der Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \,, \tag{29.9}$$

falls $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $F'(x) = f(x)$ für alle x, und weiter die sich aus dem Hauptsatz ergebenden Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution). Wir erhalten also

$$\int_a^b e^{ikx}\, dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_a^b = -\frac{i}{k} e^{ikx} \Big|_a^b \,.$$

Insbesondere ergibt sich, da $x \mapsto e^{ikx}$ eine 2π-periodische Funktion ist,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 0\,, & k \in \mathbb{Z}\,,\ k \neq 0\,, \\ 2\pi\,, & k = 0\,. \end{cases} \tag{29.10}$$

Wir können trigonometrische Polynome auch durch Sinus und Cosinus darstellen. Es ist

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = (c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx\,. \tag{29.11}$$

Die Form

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{29.12}$$

wird als **reelle Form** des trigonometrischen Polynoms

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{29.13}$$

bezeichnet. Wegen (29.11) stimmen die Funktionen in (29.12) und (29.13) überein, falls wir

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \tag{29.14}$$

oder umgekehrt

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \tag{29.15}$$

setzen. Aus (29.10) erhalten wir unmittelbar, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(x) e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{i(j-k)x}\,dx = 2\pi c_k \tag{29.16}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 29.4 *Für ein trigonometrisches Polynom t sind äquivalent:*

(i) t ist reellwertig, d.h. $t(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\overline{c_k} = c_{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(iii) $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Aus (29.16) folgt wegen $\overline{t(x)} = t(x)$

$$2\pi \overline{c_k} = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} t(x) e^{-ikx}\,dx} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{t(x)} e^{ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} t(x) e^{-i(-k)x}\,dx = 2\pi c_{-k}\,.$$

"(ii)⇒(iii)": Aus (29.14) folgt wegen $\overline{c_k} = c_{-k}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} a_k &= \operatorname{Im} c_k + \operatorname{Im} c_{-k} = \operatorname{Im} c_k - \operatorname{Im} c_k = 0\,, \\ \operatorname{Im} b_k &= \operatorname{Re} c_k - \operatorname{Re} c_{-k} = \operatorname{Re} c_k - \operatorname{Re} c_k = 0\,. \end{aligned}$$

"(iii)⇒(ii)": klar wegen (29.12). □

Auch im reellen Fall wird die Darstellung (29.13) meistens bevorzugt, da sie strukturell klarer und oft einfacher zu handhaben ist.

Definition 29.5 (Fourierkoeffizient)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \tag{29.17}$$

der k-te Fourierkoeffizient von f. Das trigonometrische Polynom

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{29.18}$$

heißt das n-te Fourierpolynom von f. Die zugehörige Reihe

$$(S_\infty f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{29.19}$$

heißt die Fourierreihe von f. □

Das Integral in (29.17) existiert, da der Integrand ebenfalls eine Regelfunktion ist. Aus (29.16) folgt, dass $S_n f = f$, falls f ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Wegen (29.14) gelten für die zugehörigen Koeffizienten a_k und b_k die Formeln

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx\,, \quad k \geq 1\,. \tag{29.20}$$

Hieraus erkennt man sofort, dass

$a_k = 0$ für alle k, falls f eine ungerade Funktion ist (d.h. $f(-x) = -f(x)\ \forall x$),
$b_k = 0$ für alle k, falls f eine gerade Funktion ist (d.h. $f(-x) = f(x)\ \forall x$).

Wir betrachten einige Beispiele. Da die Fourierkoeffizienten von f durch Integration entstehen, ist es für ihre Berechnung gleichgültig, ob wir f an einzelnen (endlich vielen) Punkten undefiniert lassen oder umdefinieren.

Beispiel 29.6 (i) $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle k. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\, dx = 2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ (S_\infty f)(x) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = 2\Big(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \Big) \end{aligned} \tag{29.21}$$

(ii) $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$. Da f gerade ist, gilt $b_k = 0$ für alle k. Partielle Integration ergibt

$$a_0 = \pi\,, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx\, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$(S_\infty f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \Big)$$

(iii) $f(x) = (\pi - x)/2$, $0 < x < 2\pi$. Die 2π-periodische Fortsetzung von f ist ungerade, also gilt $a_k = 0$ für alle k. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{k}\,, \\ (S_\infty f)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \end{aligned} \tag{29.22}$$

(iv)

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -1\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle k. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}\,, & k \text{ ungerade,} \\ 0\,, & k \text{ gerade,} \end{cases} \\ (S_\infty f)(x) &= \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots \Big) \end{aligned}$$

Wir befassen uns nun mit der Konvergenz der Fourierreihe. Für eine gegebene Funktion f stellen sich die Fragen:

- Für welche x ist die Fourierreihe $(S_\infty f)(x)$ konvergent ?
- Konvergiert $(S_\infty f)(x)$ gegen $f(x)$, bzw. wogegen konvergiert $(S_\infty f)(x)$?
- In welchem Sinn (punktweise, gleichmäßig ...) ist $(S_\infty f)(x)$ konvergent ?

Mit "Konvergenz der Fourierreihe $(S_\infty f)(x)$" ist gemeint der Limes

$$(S_\infty f)(x) = \lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}\,. \tag{29.23}$$

Die Bemühungen zur Beantwortung dieser Fragen haben wesentlich beigetragen zur Klärung der Grundlagen der Analysis (Funktionsbegriff, Konvergenz, Stetigkeit) im 19. Jahrhundert.

Lemma 29.7 (Riemann-Lebesgue)
Für jede Regelfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin tx \, dx = 0\,. \tag{29.24}$$

Beweis: Sei φ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$, sei $\varphi = c_j$ auf den Intervallen (x_{j-1}, x_j) einer Zerlegung von $[a,b]$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$. Für $t > 0$ gilt

$$0 \le \left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{t} (-\cos tx_j + \cos tx_{j-1}) \right| \le \frac{2}{t} \sum_{j=1}^{n} |c_j| \to 0$$

für $t \to \infty$, also gilt (29.24) für Treppenfunktionen. Sei nun f beliebige Regelfunktion, sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ und ein $C > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| \leq \varepsilon \,, \quad \text{für alle } t \geq C.$$

Dann gilt für alle $t \geq C$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin tx \, dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin tx \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| \\ &\leq (b-a)\|f - \varphi\|_\infty + \varepsilon \leq (b-a)\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir befassen uns nun mit der punktweisen Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion f. Wir schreiben das Fourierpolynom $S_n f$ um,

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \, dy \cdot e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} \, dy \,. \end{aligned} \tag{29.25}$$

Definition 29.8 (Dirichlet-Kern)
Die Funktion

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \Big(1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kx\Big) \tag{29.26}$$

heißt Dirichlet-Kern (vom Grad n). □

Direkt aus der Definition folgt, dass D_n eine gerade, 2π-periodische Funktion ist mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \, dx = 1 \,. \tag{29.27}$$

Wir können nun (29.25) umschreiben zu

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) \, dy \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) D_n(-\tau) \, d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau) \, d\tau \,. \end{aligned} \tag{29.28}$$

Lemma 29.9 *Es gilt*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot (2n+1) && \text{falls } x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ D_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} && \text{andernfalls.} \end{aligned}$$

Beweis: Übung. $\square$

Notation 29.10 Aus Satz 14.28 wissen wir, dass eine Regelfunktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ in jedem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ rechts- und linksseitige Grenzwerte

$$f(x+) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi)\,, \quad f(x-) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi) \tag{29.29}$$

besitzt. (Für die Randpunkte ist ggf. die periodische Fortsetzung zu verwenden.) Analog definieren wir die rechts- und linksseitigen Ableitungen, falls sie existieren, als

$$f'(x+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h}\,, \quad f'(x-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x-)}{h}\,. \tag{29.30}$$

Satz 29.11 *Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, die in einem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ eine rechts- und eine linksseitige Ableitung besitzt. Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\,. \tag{29.31}$$

Ist f außerdem stetig in x, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} (S_n f)(x) = f(x)\,. \tag{29.32}$$

Beweis: Aus (29.28) wissen wir, dass

$$(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{29.33}$$

Aus den oben erhaltenen Eigenschaften von D_n folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau - \frac{f(x+)}{2} &= \int_0^{\pi} (f(x+\tau) - f(x+)) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau\right)}{\sin\frac{\tau}{2}}\, d\tau \\ &= \int_0^{\pi} g(\tau) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau\right) d\tau\,, \end{aligned} \tag{29.34}$$

wobei

$$g(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{f(x+\tau) - f(x+)}{\tau} \cdot \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\,.$$

Auf $[0, \pi]$ ist g eine Regelfunktion, da der Grenzwert $g(0+)$ existiert. Aus Lemma 29.7 folgt nun

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau = \frac{f(x+)}{2}\,.$$

Analog zeigt man

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{0} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau = \frac{f(x-)}{2}\,.$$

Zusammen mit (29.34) ergibt sich (29.31). $\square$

Bemerkung 29.12 1. Auf die Voraussetzung an die Ableitung von f kann nicht ersatzlos verzichtet werden. Die Fourierreihe der Funktion f,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{k^3+1}x)}{k^2} \cdot \sum_{l=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin lx}{l}\,,$$

ist in $x = 0$ divergent, obwohl f stetig ist (Beispiel von Fejér). Es gibt sogar stetige Funktionen, deren Fourierreihe in allen rationalen Punkten ihres Definitionsintervalls divergiert.

2. Es gibt eine (im Sinne von Lebesgue) integrierbare Funktion, deren Fourierreihe in jedem Punkt divergiert (Beispiel von Kolmogorov). □

In der Nähe eines Unstetigkeitspunktes x von f verhalten sich die Fourierpolynome $S_n f$ oszillatorisch. Für wachsendes n lokalisieren sich diese Schwingungen immer stärker bei x, ihre Amplitude nimmt aber nicht ab. Dieses Phänomen ist nach Gibbs benannt. Wir analysieren es am Beispiel der Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}\,. \tag{29.35}$$

Es gilt

$$f(0-) = f(2\pi-) = -\frac{\pi}{2}\,, \quad f(0+) = \frac{\pi}{2}\,, \quad (S_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\,. \tag{29.36}$$

Mit (29.26) erhalten wir

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \cos kt\, dt = \int_0^x \left(\pi D_n(t) - \frac{1}{2}\right) dt\,, \tag{29.37}$$

also

$$(S_n f)(x) - f(x) = \int_0^x \pi D_n(t)\, dt - \frac{\pi}{2}\,. \tag{29.38}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^x \pi D_n(t)\, dt &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{\sin \frac{t}{2}}\, dt && \text{(nach Lemma 29.9)} \\ &\geq \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{t}\, dt && \text{(da } 0 \leq \sin y \leq y \text{ für } y \geq 0) \\ &= \int_0^{\frac{2n+1}{2}x} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau && \text{(Substitution } \tau = \frac{2n+1}{2} t) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$x_n = \frac{2\pi}{2n+1}\,,$$

dann gilt $x_n \to 0$ und nach (29.38)

$$(S_n f)(x_n) - f(x_n) \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau - \frac{\pi}{2} \quad \approx \quad 0.089\pi\,.$$

Der Approximationsfehler im Punkt x_n beträgt also ungefähr 10 Prozent der Sprunghöhe im Unstetigkeitspunkt $x = 0$ von f, unabhängig davon, wie groß n ist (Gibbs-Phänomen).

Will man eine beliebige stetige Funktion als gleichmäßigen Grenzwert von trigonometrischen Polynomen erhalten, so kann man dafür nicht in allen Fällen die Fourierpolynome nehmen (siehe Bemerkung 29.12). Wie Fejér gezeigt hat, erreicht man aber Konvergenz, wenn man zu den arithmetischen Mitteln

$$T_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f \tag{29.39}$$

der Fourierpolynome übergeht. Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$ gemäß (29.28)

$$\begin{aligned}(T_N f)(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (S_n f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y)\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y)\, dy\,,\end{aligned} \tag{29.40}$$

also

$$(T_N f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_N(x-y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) K_N(s)\, ds \tag{29.41}$$

wegen Periodizität, wobei

$$K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \tag{29.42}$$

der sogenannte **Fejér-Kern** ist. Aus den entsprechenden Eigenschaften des Dirichlet-Kerns in (29.26) und (29.27) folgt unmittelbar, dass K_N eine gerade 2π-periodische Funktion ist mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\, dx = 1\,, \quad K_N(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) = \frac{N}{2\pi}\,. \tag{29.43}$$

Eine explizite Rechnung (Übung) zeigt, dass

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,, \quad \text{für alle } x \neq 0, \tag{29.44}$$

also ist insbesondere $K_N \geq 0$.

Satz 29.13 *Sei $f \in C[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt*

$$\lim_{N \to \infty} \|f - T_N f\|_\infty = 0\,, \tag{29.45}$$

das heißt, die gemittelten Fourierpolynome $T_N f$ konvergieren gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist auf $[-\pi, \pi]$ (und damit die periodische Fortsetzung von f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist), finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x-s)| \leq \varepsilon$ für alle $x, s \in \mathbb{R}$ mit $|s| \leq \delta$. Gemäß (29.44) gilt für alle s mit $\delta \leq |s| \leq \pi$

$$2\pi K_N(s) \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} =: c(N, \delta)\,. \tag{29.46}$$

Sei $N_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $c(N_0, \delta) < \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und $N \geq N_0$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - (T_N f)(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-s)) K_N(s)\, ds \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-s)| K_N(s)\, ds \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-s)| K_N(s)\, ds + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) 2\|f\|_\infty K_N(s)\, ds \\
&\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s)\, ds + 2\|f\|_\infty c(N, \delta) \leq (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist (29.45) bewiesen. □

Zusätzlich zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz betrachten wir nun die Konvergenz hinsichtlich einer Integralnorm. Für Regelfunktionen $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$
\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx\,. \tag{29.47}
$$

Es gelten die Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
&\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle\,, \quad \langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle\,, \\
&\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle = \langle f, \overline{\lambda} g \rangle\,, \quad \langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}\,, \quad \langle f, f \rangle \geq 0
\end{aligned} \tag{29.48}
$$

für alle Funktionen f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 und alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$
\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{29.49}
$$

Bemerkung 29.14 Wir wissen bereits: Ist f stetig, so kann $\|f\|_2 = 0$ nur gelten wenn $f = 0$. Diese Eigenschaft der Definitheit bleibt erhalten (mit dem im wesentlichen gleichen Beweis), falls f eine Regelfunktion ist, für die in jedem Punkt x gilt, dass entweder $f(x) = f(x+)$ oder $f(x) = f(x-)$. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (hier nicht behandelt). Damit ergibt sich insgesamt, dass durch (29.49) eine Norm definiert wird auf dem Funktionenraum $C[-\pi, \pi]$ bzw. dem Raum der entsprechend eingeschränkten Regelfunktionen. □

Wir stellen den Zusammenhang zu Fourierpolynomen her. Wir definieren die Funktionen e_k durch

$$
e_k(x) = e^{ikx}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{29.50}
$$

Es gilt

$$
\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ijx}\, dx = \begin{cases} 1\,, & k = j\,, \\ 0\,, & k \neq j\,. \end{cases} \tag{29.51}
$$

Die Funktionen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden also ein Orthonormalsystem im Sinne der Linearen Algebra. Für die Fourierkoeffizienten einer Funktion f gilt

$$
\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \langle f, e_k \rangle\,, \tag{29.52}
$$

Das Fourierpolynom

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

lässt sich also schreiben als

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \,. \tag{29.53}$$

Satz 29.15 (Minimaleigenschaft)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann gilt

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - p\|_2 \tag{29.54}$$

für jedes trigonometrische Polynom p vom Grad $\leq n$, sowie

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \,. \tag{29.55}$$

Beweis: Sei $p = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k$ mit $\gamma_k \in \mathbb{C}$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$. Wir setzen $c_k = \langle f, e_k \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f - p, f - p \rangle &= \langle f, f \rangle - \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k \rangle - \langle \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k, f \rangle + \langle \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k, \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\gamma_k} \langle f, e_k \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\langle f, e_k \rangle} + \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_k} \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_k} \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \gamma_k|^2 \,,
\end{aligned}$$

also

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \gamma_k|^2 \,. \tag{29.56}$$

Die rechte Seite wird minimal genau dann, wenn $\gamma_k = c_k$ für alle k, das heißt, wenn $p = S_n f$. Hieraus ergeben sich beide Behauptungen. □

Folgerung 29.16 (Besselsche Ungleichung)
Es gilt

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \,. \tag{29.57}$$

Beweis: Die Ungleichung folgt, da die linke Seite in (29.55) nichtnegativ ist. Die Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned}\langle S_n f, S_n f\rangle &= \Big\langle \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k, \sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_j\rangle e_j \Big\rangle = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle \overline{\langle f, e_j\rangle} \langle e_k, e_j\rangle \\ &= \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 .\end{aligned}$$

□

Satz 29.17 (Parsevalsche Gleichung)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0 \tag{29.58}$$

und

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 . \tag{29.59}$$

Beweis: Sei $T_n f$ das gemittelte Fourierpolynom aus (29.39). Dann gilt nach Satz 29.15

$$0 \le \|f - S_n f\|_2^2 \le \|f - T_n f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (T_n f)(x)|^2 \, dx \le \|f - T_n f\|_\infty^2 .$$

Wegen Satz 29.13 konvergiert der rechts stehende Ausdruck gegen 0 für $n \to \infty$, also folgt (29.58). Führen wir nun in (29.55),

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 ,$$

den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so erhalten wir (29.59). □

Die Einschränkung auf stetige periodische Funktionen ist überflüssig, Satz 29.17 gilt für "beliebige" Funktionen f, deren Quadrat $|f|^2$ ein endliches Integral hat. Dieser Sachverhalt wird in der Funktionalanalysis im Zusammenhang mit dem Lebesgue-Integral allgemein und übersichtlich behandelt.

30 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y' = f(t, y)\,, \tag{30.1}$$

sowie das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.2}$$

Definition 30.1
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen, $f : D \to \mathbb{K}$. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}$ heißt Lösung von (30.1) in I, falls y in I differenzierbar ist und für alle $t \in I$ gilt, dass $(t, y(t)) \in D$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{30.3}$$

Falls außerdem $(t_0, y_0) \in D$ gegeben ist mit $y(t_0) = y_0$, so heißt y Lösung des Anfangswertproblems (30.2) in I. $\square$

Hängt f nicht von y ab, so ist

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (30.2), falls f stetig ist (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Nicht jedes Anfangswertproblem hat eine Lösung. Beispiel: $I = [0, 1]$,

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1\,, & y > 0\,, \\ 1\,, & y \le 0\,, \end{cases} \quad y(0) = 0\,. \tag{30.4}$$

Beweis: Ist y Lösung in I, so ist y stetig in I. y kann keine weitere Nullstelle in $(0, 1]$ haben, da andernfalls (Satz von Rolle) $y'(\tau) = 0$ für ein $\tau \in (0, 1)$. Ist $y(t) > 0$ für alle $t > 0$, dann ist $y'(t) = -1$ für $t > 0$, also y streng monoton fallend im Widerspruch zu $y(0) = 0$. Für den Fall $y(t) < 0$ ergibt sich ein analoger Widerspruch.

Man beachte, dass (30.4) auf $I = [-1, 0]$ eine Lösung hat, nämlich $y(t) = t$. Auf $I = [0, 1]$ erhalten wir eine Lösung, nämlich $y = 0$, falls wir die Definition von f modifizieren zu

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1\,, & y > 0\,, \\ 0\,, & y = 0\,, \\ 1\,, & y \le 0\,. \end{cases} \tag{30.5}$$

Manche Anfangswertprobleme haben mehrere Lösungen. Beispiel:

$$y' = \sqrt{|y|}\,, \quad y(0) = 0\,. \tag{30.6}$$

Außer der Funktion $y = 0$ ist beispielsweise auch

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \tag{30.7}$$

eine Lösung. In diesem Fall ist die rechte Seite f stetig, aber im Punkt $t = 0$ nicht differenzierbar, und die Lösung (30.7) ist stetig differenzierbar, aber im Punkt $t = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

Satz 30.2 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen, sei $f \in C^m(D; \mathbb{K})$, sei $(t_0, y_0) \in D$. Sei y Lösung des AWP (30.2) auf einem Intervall I. Dann ist $y \in C^{m+1}(I; \mathbb{K})$.*

Beweis: Mit Induktion. Ist f stetig, so ist y' stetig wegen $y'(t) = f(t, y(t))$. Ist $y \in C^k$ und $f \in C^k$, so ist auch $y' \in C^k$ nach Kettenregel, also $y \in C^{k+1}$. □

Satz 30.2 ist ein typischer Regularitätssatz der Analysis: Die Regularität der Daten (hier $f \in C^m$) sorgt für eine entsprechende Regularität der Lösung (hier $y \in C^{m+1}$), die im Lösungsbegriff selbst noch nicht enthalten ist.

Wir betrachten einige Situationen, bei denen wir Lösungen mehr oder weniger explizit berechnen können.

Trennung der Variablen. Das AWP habe die Form

$$y' = f(t)g(y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.8}$$

Sei y eine Lösung, wir formen um (zunächst ohne uns darum zu kümmern, ob "wir das dürfen")

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)\,, \quad \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\,,$$

und weiter (Substitution)

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\,.$$

Können wir Stammfunktionen von $\frac{1}{g}$ und von f explizit angeben, so können wir hoffen, dass die aus dem Hauptsatz resultierende Gleichung sich nach $y(t)$ auflösen lässt. Für die hierdurch erhaltene explizite Lösung können wir unmittelbar nachprüfen, ob sie eine Lösung von (30.8) ist. (Ob die dazu führende Rechnung "mathematisch korrekt" war, ist dann eine zweitrangige Frage.) Beispiel:

$$y' = -y^2\,, \quad y(0) = y_0\,. \tag{30.9}$$

Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung. Sei $y_0 \neq 0$. Der Ansatz

$$\int_{y_0}^{y} -\frac{1}{\eta^2}\,d\eta = \int_0^t 1\,ds$$

führt auf

$$\left.\frac{1}{\eta}\right|_{y_0}^{y} = t\,, \quad \frac{1}{y} = t + \frac{1}{y_0}\,,$$

also erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}\,. \tag{30.10}$$

Diese Funktion ist eine Lösung von (30.9) auf dem Intervall $(-\infty, -\frac{1}{y_0})$, falls $y_0 < 0$, beziehungsweise $(-\frac{1}{y_0}, \infty)$, falls $y_0 > 0$. Sie hat in $-\frac{1}{y_0}$ eine Singularität und läßt sich nicht über diesen Punkt hinaus fortsetzen.

Wir lösen dasselbe Beispiel nochmal, in Form eines oft verwendeten Kalküls. Wir schreiben die Differentialgleichung

$$y' = -y^2$$

in der Form

$$\frac{dy}{dt} = -y^2$$

und rechnen

$$\frac{dy}{-y^2} = dt\,, \qquad \int -\frac{dy}{y^2} = \int 1dt\,, \qquad \frac{1}{y} = t + c\,.$$

Wir erhalten als Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t+c}$$

mit einer Konstanten c, welche aus der Anfangsbedingung bestimmt wird zu

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{0+c}\,, \qquad c = \frac{1}{y_0}\,.$$

Man kann sich fragen, was die während der Rechnung verwendeten Symbole “dy” und “dt” mathematisch bedeuten. Diese Frage hat im Zuge der Begründung der Analysis im 19. Jahrhundert eine große Rolle gespielt, man sprach von “infinitesimalen Größen”. In der heutigen Grundlegung der Differential- und Integralrechnung, wie wir sie in den vergangenen Monaten behandelt haben, kommen sie nicht mehr vor. Es gibt eine alternative Grundlegung der Analysis (“nonstandard analysis”), die infinitesimale Größen in einer intuitiv naheliegenden Weise verwendet, aber um den Preis einer deutlich aufwendigeren Anbindung an Mengenlehre und Logik. Mathematisch etabliert ist weiterhin die Verwendung der Symbole “dy” etc. in der Differentialgeometrie und -topologie für sogenannte 1-Formen, die bei der Integration auf “Mannigfaltigkeiten” (als Verallgemeinerung von Kurven in der Ebene bzw. gekrümmten Flächen im Raum) Verwendung finden.

Ein weiteres Beispiel ist die logistische Differentialgleichung, von Verhulst 1838 zur Modellierung des Bevölkerungswachstums vorgeschlagen.

$$y' = (a - by)y\,, \qquad a, b > 0\,. \tag{30.11}$$

Die Wachstumsrate ist nicht konstant, sondern sinkt mit wachsender Bevölkerung. Für $y_0 = a/b$ ist $y' = 0$, also ist in diesem Fall die konstante Funktion $y(t) = a/b$ eine Lösung. Durch Trennung der Variablen können wir die Lösung für einen allgemeinen Anfangswert $y_0 > 0$ berechnen (Übung), es ergibt sich

$$y(t) = \frac{a}{b}\frac{1}{1 + ce^{-at}}\,, \qquad c = \frac{\frac{a}{b} - y_0}{y_0}\,. \tag{30.12}$$

Die lineare Differentialgleichung. Wir betrachten

$$y' + a(t)y = b(t)\,, \qquad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.13}$$

Im Fall $b = 0$ finden wir die Lösung durch Trennung der Variablen:

$$y' = -a(t)y\,, \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} -a(s)\,ds\,,$$

also

$$\ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,.$$

Die gesuchte Lösung ist also im Falle $b = 0$

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\,. \tag{30.14}$$

Wir betrachten den allgemeinen Fall $b \neq 0$. Setzen wir

$$\tilde{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,, \tag{30.15}$$

so gilt, falls y eine Lösung von (30.13) ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(y(t)e^{\tilde{a}(t)}\right) = e^{\tilde{a}(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = e^{\tilde{a}(t)}b(t)\,.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$y(t)e^{\tilde{a}(t)} - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{\tilde{a}(s)}b(s)\,ds\,.$$

Wir erhalten also als Lösung der Anfangswertaufgabe (30.13)

$$y(t) = e^{-\tilde{a}(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\tilde{a}(s)}b(s)\,ds\right)\,. \tag{30.16}$$

Die Bernoulli-Differentialgleichung. Sie lautet

$$y' + g(t)y + h(t)y^{\alpha} = 0\,, \tag{30.17}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$ vorausgesetzt wird und g, h gegebene Funktionen sind. Wir können sie durch Substitution auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen. Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ führt auf

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(t)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(t) = 0\,. \tag{30.18}$$

Wir substituieren

$$z = y^{1-\alpha} \tag{30.19}$$

und erhalten die lineare Differentialgleichung

$$z' + (1-\alpha)g(t)z + (1-\alpha)h(t) = 0\,. \tag{30.20}$$

Aus einer Lösung z von (30.20) erhalten wir durch Rücksubstitution

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{30.21}$$

eine Lösung von (30.17). Ist ein Anfangswert $y(t_0) = y_0$ gegeben, so hat man (30.20) mit dem Anfangswert $z(t_0) = y_0^{1-\alpha}$ zu lösen. Für eine genauere Untersuchung (abhängig vom Vorzeichen von α und davon, ob α ganzzahlig ist), verweisen wir auf das Buch von Walter.

Die Riccati-Differentialgleichung. Sie lautet

$$y' + g(t)y + h(t)y^2 = k(t)\,, \tag{30.22}$$

wobei g, h, k gegebene Funktionen sind. Wir nehmen an, dass wir eine Lösung y von (30.22) kennen, etwa die zu einem bestimmten Anfangswert $y(t_0) = y_0$. Weitere Lösungen $\tilde{y}$ können wir berechnen, indem wir eine Differentialgleichung für die Differenz

$$w = \tilde{y} - y \tag{30.23}$$

lösen. Aus (30.23) und

$$\tilde{y}' + g(t)\tilde{y} + h(t)\tilde{y}^2 = k(t) \tag{30.24}$$

folgt

$$w' + g(t)w + h(t)(\tilde{y}^2 - y^2) = 0\,, \tag{30.25}$$

und wegen

$$\tilde{y}^2 - y^2 = (\tilde{y} - y)(\tilde{y} + y) = w(w + 2y)$$

wird (30.25) zu

$$w' + (g(t) + 2y(t)h(t))w + h(t)w^2 = 0\,, \tag{30.26}$$

eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Gemäß (30.20) löst $z = w^{-1}$ die lineare Differentialgleichung

$$z' - (g(t) + 2y(t)h(t))z - h(t) = 0\,. \tag{30.27}$$

Aus z erhalten wir w und damit $\tilde{y}$.

Systeme von Differentialgleichungen. Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, in Vektornotation geschrieben als

$$y' = f(t, y)\,, \tag{30.28}$$

sowie das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.29}$$

In Komponenten geschrieben hat (30.28) die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Die Definition einer Lösung ist völlig analog zum Fall einer einzelnen Gleichung, also $n = 1$.

Definition 30.3 (Lösung eines Systems erster Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $f : D \to \mathbb{K}^n$. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$ heißt Lösung von (30.1) in I, falls y in I differenzierbar ist und für alle $t \in I$ gilt, dass $(t, y(t)) \in D$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{30.30}$$

Falls außerdem $(t_0, y_0) \in D$ gegeben ist mit $y(t_0) = y_0$, so heißt y Lösung des Anfangswertproblems (30.29) in I. □

Hängt f nicht von y ab, so ist (wie im Fall einer einzelnen Differentialgleichung)

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (30.29), falls f stetig ist.

Differentialgleichungen höherer Ordnung (d.h. solche, in denen auch Ableitungen höherer Ordnung der unbekannten Funktion auftreten), können auf die Form (30.28) zurückgeführt werden. Ist etwa gesucht eine Funktion $z : I \to \mathbb{R}$ als Lösung von

$$z^{(n)} = g(t, z, z', \dots, z^{(n-1)}), \tag{30.31}$$

so führen wir die neuen Variablen

$$y_1 = z, \quad y_2 = z', \dots, y_n = z^{(n-1)}$$

ein und erhalten die Form (30.28), indem wir setzen

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \dots, y_n' = g(t, y_1, \dots, y_n).$$

Als Anfangswerte sind Werte für $z(t_0), \dots, z^{(n-1)}(t_0)$ vorzuschreiben.

Als Beispiel betrachten wir den gedämpften harmonischen Oszillator. Er wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$my'' + dy' + ky = 0. \tag{30.32}$$

Hierbei sind $m, d, k > 0$ Konstante. Zur Berechnung einer Lösung dividieren wir (30.32) durch m und setzen

$$b = \frac{d}{2m}, \quad c = \frac{k}{m},$$

dann wird (30.32) zu

$$y'' + 2by' + cy = 0. \tag{30.33}$$

Wie wir bereits wissen, hat die noch einfachere Differentialgleichung

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{30.34}$$

die Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t}. \tag{30.35}$$

Wir fragen uns, ob (30.35) auch eine Lösung von (30.33) ist. Dazu setzen wir (30.35) in (30.33) ein und erhalten

$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0. \tag{30.36}$$

Diese Gleichung ist (unabhängig davon, welchen Wert t hat) genau dann erfüllt, wenn λ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{30.37}$$

ist. Gleichung (30.37) hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}\,. \tag{30.38}$$

Fall 1, $\mathbf{b^2 > c}$. Beide Lösungen von (30.37) sind reell, und

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \tag{30.39}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist Lösung von (30.33), andere gibt es nicht.

Fall 2, $\mathbf{b^2 = c}$. Es ist $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda = -b$. Neben $y(t) = e^{\lambda t}$ ist auch

$$y(t) = te^{\lambda t}$$

eine Lösung von (30.33), und damit auch

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\lambda t} \tag{30.40}$$

für beliebige $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Fall 3, $\mathbf{b^2 < c}$. Die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i\omega\,, \quad \omega = \sqrt{c - b^2}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

sind konjugiert komplex, die zugehörigen komplexen Lösungen von (30.33) sind

$$y(t) = e^{-bt \pm i\omega t} = e^{-bt} e^{\pm i\omega t} = e^{-bt}(\cos\omega t \pm i \sin\omega t)\,,$$

und die entsprechenden reellen Lösungen sind

$$y(t) = e^{-bt}(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t)\,, \tag{30.41}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Fall $b = d = 0$ und $c > 0$ entspricht dem ungedämpften harmonischen Oszillator, dessen Lösung die Form eines (verschobenen) Sinus mit Periode $p = 2\pi/\omega$ hat. Die Frequenz $\omega = 2\pi/p$ heißt Kreisfrequenz der Schwingung.

Bereits dieses einfache Beispiel zeigt, dass es Sinn macht, sich mit komplexen Lösungen zu beschäftigen, auch wenn man im Endeffekt reelle Lösungen erhalten möchte.

Schreiben wir (30.33) als System erster Ordnung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2\,, \\ y_2' &= -cy_1 - 2by_2\,, \end{aligned}$$

oder in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,,$$

beziehungsweise

$$y' = Ay\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}. \tag{30.42}$$

Man spricht hier von einem linearen System mit konstanten Koeffizienten, da die rechte Seite $f(t, y) = Ay$ eine lineare Funktion des Vektors y ist und die Matrix A nicht von t abhängt.

Der Satz von Picard-Lindelöf. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.43}$$

Lemma 30.4 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei I Intervall in $\mathbb{R}$ und $y : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, sei $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist y eine Lösung des Anfangswertproblems (30.43) genau dann, wenn gilt $(t, y(t)) \in D$ für alle $t \in I$ und*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,, \quad \text{für alle } t \in I. \tag{30.44}$$

Beweis: Ist y Lösung des AWP, so ist $y' : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, also folgt aus dem Hauptsatz

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,.$$

Gilt umgekehrt (30.44), so folgt zunächst $y(t_0) = y_0$. Da der Integrand auf der rechten Seite von (30.44) stetig ist als Funktion von s, ist nach dem Hauptsatz y differenzierbar in I, und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$. □

Definition 30.5 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig bezüglich y in D, falls es ein $L > 0$ gibt mit

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \le L\|y - z\|_\infty\,, \tag{30.45}$$

für alle $(t, y), (t, z) \in D$. Die Zahl L heißt Lipschitz-Konstante von f in D.

f heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich y in D, falls es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $(t_0, y_0) \in U$ gibt, so dass f in $D \cap U$ Lipschitz-stetig bezüglich y ist. □

Bemerkung. Wir können die Lipschitz-Stetigkeit von f hinsichtlich einer beliebigen Norm im $\mathbb{R}^n$ definieren. Da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, hängt die Eigenschaft von f, Lipschitz-stetig zu sein, nicht von der Wahl der Norm ab (wohl aber die Größe der Lipschitz-Konstante).

Wir setzen nun

$$K(y_0, r) = \{y : y \in \mathbb{R}^n,\ \|y - y_0\|_\infty \le r\}\,, \quad r > 0,\ y_0 \in \mathbb{R}^n\,.$$

Satz 30.6 *Seien $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a, r > 0$, sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y Lipschitz-stetig, wobei $D = [t_0, t_0 + a] \times K(y_0, r)$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass das AWP (30.43) in $[t_0, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung hat.*

Beweis: Sei L Lipschitz-Konstante für f. Wir setzen

$$M = \sup_{(t,\eta)\in D} \|f(t,\eta)\|_\infty\,, \quad \delta = \min\left\{\frac{r}{M}\,,\,\frac{1}{2L}\right\}\,. \tag{30.46}$$

Wir definieren $I = [t_0, t_0 + \delta]$ und

$$Y = \{y :\, y \in C(I;\mathbb{R}^n),\, \|y - y_0\|_\infty \le r\}\,, \tag{30.47}$$

wobei y_0 als ein Element von $C(I;\mathbb{R}^n)$ (nämlich als eine konstante Funktion) aufgefasst wird und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm in $C(I;\mathbb{R}^n)$ bedeutet, also

$$\|y - y_0\|_\infty = \max_{t\in I} \|y(t) - y_0\|_\infty\,. \tag{30.48}$$

Mit der durch die Maximumnorm induzierten Metrik ist Y ein vollständiger metrischer Raum, da Y abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $C(I;\mathbb{R}^n)$ ist. Für $y \in Y$ definieren wir eine Funktion $Ty : I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds\,. \tag{30.49}$$

Es gilt $Ty \in C(I;\mathbb{R}^n)$, da f stetig ist, und $T(Y) \subset Y$, da

$$\|(Ty)(t) - y_0\|_\infty \le \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\|_\infty\, ds \le (t - t_0)M \le \delta M \le r \tag{30.50}$$

gilt für $t \in I$ und $y \in Y$. Aus Lemma 30.4 und (30.50) folgt, dass ein $y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ genau dann Lösung des AWP ist, wenn $y \in Y$ und

$$y = Ty\,. \tag{30.51}$$

Wir zeigen, dass T eine Kontraktion auf Y ist. Seien $y, z \in Y$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}\|(Ty)(t) - (Tz)(t)\|_\infty &= \left\|\int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds\right\|_\infty \\ &\le \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|_\infty\, ds \le \int_{t_0}^t L\|y(s) - z(s)\|_\infty\, ds \\ &\le L\delta\|y - z\|_\infty \le \frac{1}{2}\|y - z\|_\infty\,,\end{aligned}$$

also

$$\|Ty - Tz\|_\infty \le \frac{1}{2}\|y - z\|_\infty\,.$$

Also ist T eine Kontraktion auf Y. Aus dem Fixpunktsatz von Banach folgt, dass (30.51) genau eine Lösung $y \in Y$ hat. □

Bemerkung. Die Wahl der Norm im Raum Y im Beweis von Satz 30.6 ist nicht beliebig, sondern dadurch eingeschränkt, dass wir einen vollständigen Raum erhalten müssen.

Satz 30.7 *Es liege die Situation aus Satz 30.6 vor mit $D = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$, sei außerdem f auf D beschränkt. Dann hat das AWP (30.43) eine eindeutige Lösung im ganzen Intervall $[t_0, t_0 + a]$.*

Beweis: Wir wählen $r = M/2L$ im Beweis von Satz 30.6 und erhalten eine eindeutige Lösung y auf $[t_0, t_0 + \delta]$, wobei $\delta = 1/(2L)$ nur von L abhängt. Wir betrachten nunmehr das AWP mit dem neuen Anfangswert $(t_0 + \delta, y(t_0 + \delta))$. Wir erhalten eine eindeutige Lösung auf $[t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$ und damit auch auf $[t_0, t_0 + 2\delta]$, wie wir an der äquivalenten Formulierung als Integralgleichung erkennen. Mit Induktion ergibt sich die Behauptung. □

Folgerung 30.8 *Seien die Voraussetzungen von Satz 30.6 erfüllt mit* $D = [t_0 - a, t_0] \times K(y_0, r)$. *Dann gibt es ein* $\delta > 0$, *so dass das AWP (30.43) in* $[t_0 - \delta, t_0]$ *eine eindeutige Lösung hat.*

Beweis: Wir wenden Satz 30.6 an auf

$$y' = \tilde{f}(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad \tilde{f}(t, y) = -f(2t_0 - t, y). \tag{30.52}$$

Ist $\tilde{y} : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (30.52), so ist $y : [t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}^n$,

$$y(t) = \tilde{y}(2t_0 - t), \tag{30.53}$$

wegen

$$y'(t) = -\tilde{y}'(2t_0 - t) = -\tilde{f}(2t_0 - t, \tilde{y}(2t_0 - t)) = f(t, y(t))$$

Lösung von (30.43). Da (30.53) eine bijektive Abbildung der Lösungen des Vorwärts- und des Rückwärtsproblems aufeinander definiert, ist mit $\tilde{y}$ auch y eindeutig. □

Folgerung 30.9 (Lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich* y. *Dann gibt es zu jedem* $(t_0, y_0) \in D$ *ein* $\delta > 0$, *so dass das AWP (30.43) in* $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *eine eindeutige Lösung hat.*

Beweis: Wir wenden Satz 30.6 und Folgerung 30.8 an mit hinreichend kleinen $a, r > 0$. □

Folgerung 30.10 *Sei* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig und bezüglich* y *stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem* $(t_0, y_0) \in D$ *ein* $\delta > 0$, *so dass das AWP (30.43) in* $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *eine eindeutige Lösung hat.*

Stetige Differenzierbarkeit impliziert die lokale Lipschitz-Stetigkeit (das folgt aus dem Mittelwertsatz). □

Lemma 30.11 *Sei* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig und bezüglich* y *lokal Lipschitz-stetig. Dann hat das AWP (30.43) für jedes kompakte Intervall* $J = [a, b]$ *mit* $t_0 \in J$ *höchstens eine Lösung.*

Beweis: Seien $y, z : J \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des AWP. Wir setzen

$$t^* = \sup\{t : t \in J,\, y|[t_0, t] = z|[t_0, t]\}.$$

Es ist $y(t^*) = z(t^*) =: y^*$, da y, z stetig sind. Wäre nun $t^* < b$, so hätte für jedes $\delta \in (0, b - t^*]$ das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t^*) = y^*,$$

zwei verschiedene Lösungen in $[t^*, t^* + \delta]$ im Widerspruch zu Folgerung 30.9. Analog zeigt man, dass y und z auf $[a, t_0]$ übereinstimmen. □

Satz 30.12 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein offenes Intervall I und eine Lösung y des AWP (30.43) in I, so dass für jedes Intervall J mit $t_0 \in J$ und jede Lösung z von (30.43) in J gilt*

$$J \subset I\,, \quad z = y|J\,. \tag{30.54}$$

Das Intervall I heißt das maximale Existenzintervall der Lösung von (30.43).

Beweis: Wir definieren

$$t^* = \sup\{t :\ t \geq t_0,\ \text{(30.43) hat eine Lösung in } [t_0, t]\}\,, \tag{30.55}$$

$$t_* = \inf\{t :\ t \leq t_0,\ \text{(30.43) hat eine Lösung in } [t, t_0]\}\,. \tag{30.56}$$

Wir setzen $I = (t_*, t^*)$. Sei $t \in I$, sei $y_t : [t_0, t] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (30.43). Wir definieren $y : I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$y(t) = y_t(t)\,, \quad t \in I\,. \tag{30.57}$$

Für jedes $s \in [t_0, t]$ gilt $y_s(s) = y_t(s)$ nach Lemma 30.11, also auch $y(s) = y_t(s)$. Es folgt

$$y(t) = y_t(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_t(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds\,,$$

für alle $t \in I$, also ist y Lösung von (30.43) in I. Ist z eine Lösung auf einem Intervall J, so ist z Lösung auf $[t_0, t]$ für jedes $t \in J$, also $t \in I$ und $z(t) = y(t)$ nach Lemma 30.11. □

Das maximale Existenzintervall kann die Form $(-\infty, b)$, (a, b), (a, ∞) oder $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ haben.

Beispiele: Das AWP

$$y' = y^2 + 1\,, \quad y(0) = 0\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \tan t\,, \quad I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Das AWP

$$y' = y^2\,, \quad y(0) = 1\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \frac{1}{1-t}\,, \quad I = (-\infty, 1)\,.$$

Das AWP

$$y' = y^2 - 1\,, \quad y(0) = 0\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \tanh t\,, \quad I = \mathbb{R}\,.$$

In allen diesen drei Beispielen ist die rechte Seite stetig differenzierbar, aber nicht Lipschitz-stetig auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Etwas anders gelagert ist die Situation für das AWP

$$y' = \frac{1}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Hier ist $D = \{(t, y) : y \neq 0\} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, die Lösung ist

$$y(t) = \sqrt{2t+1}, \quad \text{und } I = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

ist das maximale Existenzintervall. Es gilt hier

$$\lim_{t \downarrow -\frac{1}{2}} (t, y(t)) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in \partial D.$$

Es sind also drei verschiedene Fälle für das Verhalten der Lösung für $t > t_0$ (analog $t < t_0$) erkennbar.

1. Die Lösung existiert für alle $t > t_0$.
2. Es gibt ein $b > t_0$ mit
$$\lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \|y(t)\|_\infty = \infty.$$
3. Es gibt ein $b > t_0$ mit
$$\lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial D) = 0.$$

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten ein System der Form

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{K}^{(n,n)}. \tag{30.58}$$

Es wird sich herausstellen, dass Lösungen von (30.58) die Form

$$y(t) = \exp(tA) y_0 \tag{30.59}$$

haben, wobei $y_0 \in \mathbb{K}^n$ ein fester Vektor und exp die sogenannte Matrixexponentialfunktion ist. Letztere soll definiert werden durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{30.60}$$

Definition 30.13 (Reihe im normierten Raum)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $(x_k)_{k \geq 0}$ Folge in X. Falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \tag{30.61}$$

gegen ein $s \in X$ konvergiert, so sagen wir, dass die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert, und definieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s. \tag{30.62}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *heißt absolut konvergent, falls*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty\,. \tag{30.63}$$

□

Aus der Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation im normierten Raum folgen die Rechenregeln

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} x_k\,, \tag{30.64}$$

$\lambda \in \mathbb{K}$, die jeweils gültig sind, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Satz 30.14 *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *Banachraum. Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|\,. \tag{30.65}$$

Beweis: Sei

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|\,,$$

dann gilt für die in (30.61) definierten Partialsummen für $n > m$

$$\|s_n - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m|\,.$$

Da (σ_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist (s_n) Cauchyfolge in X, also konvergent. Wegen $\|s_n\| \le |\sigma_n|$ folgt (30.65) aus

$$\|s\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|\,,$$

wobei die Stetigkeit der Norm verwendet wurde. □

Definition 30.15 (Operatornorm)
Sei $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$. *Für* $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *definieren wir*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|\,. \tag{30.66}$$

□

Lemma 30.16 *Durch (30.66) wird eine Norm auf* $\mathbb{K}^{(n,n)}$ *definiert. Sie heißt die (zur ursprünglichen Norm auf* $\mathbb{K}^n$ *zugehörige) Operatornorm oder Matrixnorm.*

Beweis: Übung. □

Lemma 30.17 *Sei* $(\|\cdot\|)$ *Norm auf* $\mathbb{K}^n$*. Für die zugehörige Operatornorm gilt*

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|\,, \tag{30.67}$$

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|\,, \tag{30.68}$$

für alle $A, B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$*,* $x \in \mathbb{K}^n$*.*

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt

$$\|Ax\| = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\| \le \|A\|\|x\|\,,$$

$$\|ABx\| \le \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|\|x\|\,,$$

also

$$\sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \le \|A\|\|B\|\,.$$

□

Satz 30.18 *Für jedes* $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *wird durch*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{30.69}$$

eine Matrix $\exp(A) \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *definiert, und es gilt*

$$\|\exp(A)\| \le \exp(\|A\|)\,. \tag{30.70}$$

Wir schreiben auch

$$e^A$$

für $\exp(A)$.

Beweis: Folgt aus Satz 30.14, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|)\,.$$

□

Wir sehen unmittelbar, dass

$$e^0 = I\,.$$

Folgerung 30.19 *Ist* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{(n,n)}$*,* $\lambda_i \in \mathbb{K}$*, so gilt*

$$e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\,. \tag{30.71}$$

Ist A *nilpotent, das heißt* $A^n = 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$*, so ist*

$$e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}\,. \tag{30.72}$$

Beweis: Folgt direkt aus (30.69), da

$$D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\,.$$

□

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = 0\,, \quad e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 30.20 *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, es gelte $AB = BA$. Dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A e^B\,. \tag{30.73}$$

Insbesondere ist e^A invertierbar für alle $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, und

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}\,. \tag{30.74}$$

Beweis: Indem wir $B = -A$ in (30.73) setzen, erhalten wir (30.74). Es bleibt also (30.73) zu zeigen. Wir setzen

$$R_m = \left(\sum_{j=0}^m \frac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{0\le j,k\le m} \frac{1}{j!k!} A^j B^k\,. \tag{30.75}$$

Da die Matrizenmultiplikation stetig ist, gilt

$$\lim_{m\to\infty} R_m = e^A e^B\,.$$

Wir setzen

$$S_m = \sum_{l=0}^m \frac{(A+B)^l}{l!}\,, \qquad \text{also} \quad \lim_{m\to\infty} S_m = e^{A+B}\,. \tag{30.76}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty} (R_m - S_m) = 0\,. \tag{30.77}$$

Wegen $AB = BA$ gilt (binomische Formel)

$$S_m = \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} A^{l-k} B^k = \sum_{l=0}^m \sum_{\substack{0\le j,k\le m \\ j+k=l}} \frac{1}{j!k!} A^j B^k\,, \tag{30.78}$$

also

$$R_m - S_m = \sum_{\substack{0\le j,k\le m \\ j+k>m}} \frac{1}{j!k!} A^j B^k\,. \tag{30.79}$$

Es folgt

$$\|R_m - S_m\| \le \sum_{\substack{0\le j,k\le m \\ j+k>m}} \frac{1}{j!k!} \|A\|^j \|B\|^k \le \sum_{l=m+1}^{2m} \sum_{\substack{j,k\ge 0 \\ j+k=l}} \frac{1}{j!k!} \|A\|^j \|B\|^k \tag{30.80}$$

$$= \sum_{l=m+1}^{2m} \frac{(\|A\| + \|B\|)^l}{l!} \le \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{(\|A\| + \|B\|)^l}{l!} \tag{30.81}$$

$$\to 0 \tag{30.82}$$

für $m \to \infty$, da die letzte Summe in der Ungleichungskette gerade das Restglied der (konvergenten) Exponentialreihe in $\mathbb{R}$ darstellt. $\square$

Satz 30.21 *Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$,*

$$f(t) = e^{tA}\,, \tag{30.83}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A\,. \tag{30.84}$$

Beweis: Sei zunächst $t = 0$. Für $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|e^{hA} - I - hA\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!}\,.$$

Mit

$$g(h) = e^{h\|A\|}$$

ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = g(|h|) - g(0) - |h|g'(0)\,,$$

also folgt

$$\|e^{hA} - e^0 - hA\| \le g(|h|) - g(0) - |h|g'(0) \le \frac{h^2}{2} \max_{0 \le \xi \le |h|} |g''(\xi)| = \frac{h^2}{2} g''(|h|) \tag{30.85}$$

$$= \frac{h^2}{2}\|A\|^2 e^{\|hA\|} \tag{30.86}$$

und damit

$$\lim_{\substack{h \to 0\\ h \neq 0}} \frac{1}{h}\|e^{hA} - e^0 - hA\| = 0\,,$$

also

$$\lim_{\substack{h \to 0\\ h \neq 0}} \frac{1}{h}(e^{hA} - e^0) = A\,,$$

und damit die Behauptung für $t = 0$. Für beliebiges t folgt die Differenzierbarkeit und die erste Gleichung in (30.84) wegen

$$e^{(t+h)A} = e^{hA}e^{tA}$$

aus

$$\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) - Ae^{tA} = \left[\frac{1}{h}(e^{hA} - e^0) - A\right] e^{tA} \to 0$$

für $h \to 0$. Außerdem gilt

$$A \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}\right) A\,.$$

Hieraus folgt mit Grenzübergang $m \to \infty$ die zweite Gleichung in (30.84), da die Matrizenmultiplikation stetig ist. □

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$y' = Ay\,, \quad y(0) = y_0\,, \tag{30.87}$$

wobei $y_0 \in \mathbb{K}^n$ gegeben ist.

Satz 30.22 (Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems)
Seien $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann ist die durch

$$y(t) = e^{tA} y_0 \tag{30.88}$$

definierte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (30.87).

Beweis: Aus Satz 30.21 folgt

$$y'(t) = Ae^{tA}y_0 = Ay(t)\,, \quad y(0) = e^0 y_0 = y_0\,.$$

Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems. Für $z = y - \tilde{y}$ gilt dann

$$z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = Ay(t) - A\tilde{y}(t) = Az(t)\,, \quad z(0) = 0\,.$$

Wir definieren

$$w(t) = e^{-tA} z(t)\,.$$

Dann ist

$$w'(t) = \left[e^{-tA}(-A)\right] z(t) + e^{-tA}[Az(t)] = 0\,, \quad w(0) = 0\,.$$

Hieraus folgt $w(t) = 0$ für alle t (folgt aus dem Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung, komponentenweise angewendet), also

$$0 = e^{tA} w(t) = e^{tA} e^{-tA} z(t) = z(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und damit $y = \tilde{y}$.

Alternativ können wir die Eindeutigkeit der Lösung auch aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhalten (er gilt für komplexwertige Funktionen genauso wie für reellwertige, man muss lediglich $\mathbb{R}^n$ im durch $\mathbb{K}^n$ ersetzen), da die rechte Seite $f(t, y) = Ay$ wegen

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| = \|Ay - Az\| = \|A(y - z)\| \le \|A\| \|y - z\|$$

Lipschitz-stetig ist bzgl. y mit der Lipschitzkonstante $\|A\|$. □

Betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{30.89}$$

so ist deren eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0\,, \tag{30.90}$$

wie wir erkennen, wenn wir Satz 30.22 auf $z(t) = y(t + t_0)$ anwenden.

Als Beispiel betrachten wir das System

$$y_1' = y_1 + 2y_2\,, \qquad y_1(0) = 2\,, \tag{30.91}$$
$$y_2' = y_2\,, \qquad y_2(0) = 3\,. \tag{30.92}$$

Es ist $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N\,, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $IN = NI = N$, $N^2 = 0$, also

$$e^{tA} = e^{tI+tN} = e^{tI}e^{tN} = e^{tI}(I + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30.93}$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \tag{30.94}$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+6t)e^t \\ 3e^t \end{pmatrix}. \tag{30.95}$$

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay + b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{30.96}$$

Satz 30.23 *Seien $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ stetig, $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Die eindeutige Lösung von (30.96) ist gegeben durch*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}\left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A}b(s)\,ds\right). \tag{30.97}$$

Beweis: Es ist

$$y'(t) = Ay(t) + e^{(t-t_0)A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A}b(s)\,ds = Ay(t) + e^{(t-t_0)A}e^{-(t-t_0)A}b(t) \tag{30.98}$$
$$= Ay(t) + b(t)\,. \tag{30.99}$$

Seien nun $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen, sei $z = y - \tilde{y}$. Dann gilt

$$z'(t) = Ay(t) + b(t) - A\tilde{y}(t) - b(t) = Az(t)\,, \quad z(t_0) = 0\,.$$

Nach Satz 30.22 ist $z = 0$ die eindeutige Lösung dieser Anfangswertaufgabe. □

Wir kehren zurück zum homogenen System $y' = Ay$. Die Menge seiner Lösungen ist nach Satz 30.22 gegeben durch

$$L = \{y \mid y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n\,,\ y(t) = e^{tA}y_0\,,\ y_0 \in \mathbb{K}^n\}\,. \tag{30.100}$$

Satz 30.24 (Lösungsraum des homogenen Systems)
Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Die Menge L der Lösungen des linearen Systems $y' = Ay$ ist ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{K}$. Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis von L.

Beweis: Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{K}^n \to \operatorname{Abb}(\mathbb{R}; \mathbb{K}^n)$ durch

$$(\Phi\eta)(t) = e^{tA}\eta \,.$$

Offensichtlich ist Φ linear, und es gilt für Bild und Kern

$$\operatorname{im}(\Phi) = L \,, \quad \ker(\Phi) = \{0\} \,,$$

also $\dim(L) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$. Die Spalten von e^{tA} sind gerade die Bilder $\Phi(e_i)$ der Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{K}^n$. □

Wir erhalten also die allgemeine Lösung des homogenen Systems $y' = Ay$ als Linearkombination der Spalten von e^{tA}. In einfachen Fällen haben wir e^{tA} bereits berechnet, etwa wenn A eine Diagonalmatrix ist. (Diesen Fall können wir aber ohne weiteres direkt lösen, da dann das System $y' = Ay$ in die skalaren Differentialgleichungen $y_i' = \lambda_i y_i$ mit den Lösungen $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ zerfällt.) Im allgemeinen Fall zieht man die Normalformen aus der Linearen Algebra heran, genauer gesagt, man verwendet die Jordansche Normalform. Das werden wir hier nicht darstellen. Wir skizzieren aber das Ergebnis für den Spezialfall einer einzelnen Differentialgleichung n-ter Ordnung, bei dem eine Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ gesucht wird als Lösung von

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)} = 0 \,, \quad a_k \in \mathbb{K} \,. \tag{30.101}$$

Schreibt man diese Gleichung in ein System erster Ordnung um, so hat die entstehende Matrix A das charakteristische Polynom (im Sinne der Eigenwerttheorie)

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \,. \tag{30.102}$$

Sei $N(p)$ die Menge der Nullstellen von p. Ist λ eine Nullstelle von p, so bezeichnen wir ihre Vielfachheit mit n_λ, es gilt

$$\sum_{\lambda \in N(p)} n_\lambda = n \,.$$

Zu jedem solchen λ liefert

$$t^l e^{\lambda t} \,, \quad 0 \le l < n_\lambda \,,$$

eine Lösung von (30.101). Es stellt sich heraus, dass die allgemeine Lösung die Form einer Linearkombination Form

$$z(t) = \sum_{\lambda \in N(p)} \sum_{0 \le l < n_\lambda} c_{\lambda,l} t^l e^{\lambda t} \tag{30.103}$$

hat. Da die Nullstellen von p im allgemeinen komplex sind, erkennen wir, dass komplexwertige Lösungen sich in natürlicher Weise auch dann ergeben, wenn die Koeffizienten a_k alle reell sind und wir nur an reellen Lösungen interessiert sind.

Das zugehörige Anfangswertproblem lautet

$$z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)} = 0 \,, \qquad z(0) = z_0 \,, \quad z'(0) = z_1 \,, \, \ldots \,, \, z^{(n-1)}(0) = z_{n-1} \,, \tag{30.104}$$

mit gegebenen Anfangswerten $z_i \in \mathbb{K}$. Diese Anfangswertaufgabe hat nach Satz 30.22, angewendet auf das zugehörige System $y' = Ay$, eine eindeutige Lösung. Die n Anfangsbedingungen in (30.104) legen daher die n Freiheitsgrade $c_{\lambda,l}$ in (30.103) eindeutig fest.

Im reellen Fall (wenn wir die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ als reell voraussetzen) können wir relle Lösungen wie folgt erhalten. Für das charakteristische Polynom gilt in diesem Fall

$$\overline{p(\mu)} = \overline{\mu^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mu^k} = p(\overline{\mu}) \,, \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{C} \,, \tag{30.105}$$

also ist

$$\lambda \in N(p) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\lambda} \in N(p) \,. \tag{30.106}$$

Nach einem grundlegenden Satz der Algebra existiert in $\mathbb{C}$ eine Faktorisierung

$$p(\mu) = \prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \lambda)^{n_\lambda} \,, \tag{30.107}$$

welche außerdem eindeutig bestimmt ist. Aus

$$\prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \lambda)^{n_\lambda} = p(\mu) = \overline{p(\overline{\mu})} = \prod_{\lambda \in N(p)} (\mu - \overline{\lambda})^{n_\lambda} \,, \tag{30.108}$$

folgt also, dass

$$n_\lambda = n_{\overline{\lambda}} \,. \tag{30.109}$$

Wir bilden eine Menge B, welche besteht aus den Funktionen

$$t^l e^{\lambda t} \,, \quad 0 \le l < n_\lambda \tag{30.110}$$

für alle reellen $\lambda \in N(p)$, und den Funktionen

$$t^l e^{at} \cos \omega t \,, \; t^l e^{at} \sin \omega t \,, \quad 0 \le l < n_\lambda \,, \tag{30.111}$$

für alle Paare $(\lambda, \overline{\lambda}) = (a + i\omega, a - i\omega)$ konjugiert komplexer Nullstellen von p. Die reelle Form der allgemeinen Lösung von (30.101) ergibt sich als (reelle) Linearkombination der Funktionen aus (30.110) und (30.111).

Die Lösungen von $y' = Ay$ für beliebiges A setzen sich ebenfalls aus Exponentialfunktionen (bzw. Sinus und Kosinus) zusammen, mit Polynomen als Vorfaktoren. Die Komponentenfunktionen y_i einer Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

sind Linearkombinationen von Funktionen der Form

$$t^l e^{\lambda t} \,.$$

Hierbei ist λ Eigenwert von A. Ist A diagonalisierbar, so treten keine Exponenten $l > 0$ auf, und die Lösungen haben die Form

$$y(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} c_\lambda e^{\lambda t} \,, \quad c_\lambda = \begin{pmatrix} c_{\lambda,1} \\ \vdots \\ c_{\lambda,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \,,$$

wobei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte von A bezeichnet und die Koeffizientenvektoren c_λ durch die Eigenvektoren von A und die Anfangsbedingung y_0 festgelegt sind.