

Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb - Effiziente Steigerung der Prognosegenauigkeit -

Andreas Beinstingel

Vollständiger Abdruck der von der TUM School of Engineering and Design der
Technischen Universität München zur Erlangung eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitz: Prof. dr. ir. Daniel J. Rixen

Prüfer der Dissertation: 1. Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg
2. Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl

Die Dissertation wurde am 30.11.2022 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die TUM School of Engineering and Design am 15.05.2023
angenommen.

Kurzfassung

Die Anforderungen an Getriebe steigen aufgrund zunehmender gesellschaftlicher Erwartungen und erhöhter gesetzlicher Vorgaben mit dem Fortschritt der Technik und den Bemühungen zur Energiewende unentwegt an. So rückt beispielsweise das Schwingungs- und Geräuschverhalten eines Zahnradgetriebes im Zuge der Elektromobilität verstärkt in den Fokus, da die Maskierung durch einen Verbrennungsmotor oder durch eine ähnliche Antriebsmaschine fortschreitend entfällt. Infolgedessen wächst allgemein der Bedarf, das technische Potential bezüglich der Getriebedynamik und der Getriebeakustik vollumfänglich auszuschöpfen. Ein tiefes Verständnis des dynamischen Systemverhaltens ist hierfür erforderlich. Das untermauert sinngemäß die These, dass eine angenehme Laufruhe in der Verzahnung ein wesentliches Qualitätsmerkmal darstellt.

Aus wirtschaftlicher und ökologischer Sicht unterstützt eine effiziente und vertrauenswürdige Simulationsmethodik gezielt die Produktentwicklung. Analog zu den technischen Anforderungen an das Endprodukt, steigen hier ebenfalls die Ansprüche an die zugehörigen Berechnungsstrategien. So wird vor allem eine hohe Berechnungsgüte gefordert, um Effekte und Einflüsse in der Konstruktionsphase möglichst frühzeitig fundiert einschätzen und entsprechend beeinflussen zu können. Zudem ist eine kurze Rechenzeit nicht nur wünschenswert, sondern auch vorteilhaft im Sinne von Parameterstudien und Optimierungsprozessen. Üblicherweise stehen sich diese beiden Anforderungen allerdings konträr gegenüber. Aus diesem Grund sind spezielle Vorgehensweisen notwendig, um den Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit bestmöglich umzusetzen.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur effizienten Steigerung der Prognosegenauigkeit für das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb. Hierfür wird zunächst die Geräuschenstehung in der Verzahnung näher betrachtet, bevor die Berechnung der entstehenden Schwingungen im Getriebe tiefer fokussiert wird. Die Zahnkontaktanalyse erfolgt dabei mithilfe der Isogeometrischen Analyse durch eine hybride Kombination aus Numerik und Analytik. Neben der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit, ist die Ermittlung der auftretenden Zahnfußspannungen Gegenstand dieser Arbeit. Für die Berechnung des dynamischen Systemverhaltens wird maßgeblich die Methode der harmonischen Balance eingesetzt. Sowohl in der zeitvarianten linearen Fassung als auch in der vollständig nichtlinearen Formulierung. Die Anwendung erfolgt zum einen qualitativ für ein Planetengetriebe und zum anderen quantitativ für ein zweistufiges Stirnradgetriebe. Beide Untersuchungen befassen sich konkret mit der Geräuschprognose für ein Getriebe. Die vorgestellten Verfahren werden mithilfe von etablierten Berechnungsansätzen verifiziert und an geeigneter Stelle zusätzlich durch Messdaten validiert.

Abstract

Due to increasing social expectations and stricter legal requirements, the demands placed on drive trains are continuously rising as technology progresses and efforts are made to achieve the energy transition. For example, in the course of electromobility, the vibration and noise behavior of a gearbox is increasingly coming into focus since masking by an internal combustion engine or by a similar driving engine is being progressively eliminated. As a result, there is a general raise in the need to fully exploit the technical potential with regard to gear dynamics and gear acoustics. A deep understanding of the dynamic behavior of the underlying system is required for this purpose. This also may confirm the statement, that a quiet running gearbox represents an essential quality feature.

From an economic and ecological point of view, an efficient and reliable simulation methodology highly supports product development. In line to the technical requirements for the final product, the demands on the associated calculation strategies are also increasing here. For instance, a high level of calculation quality is required in order to be able to assess effects and influences in the design phase as early as possible to influence them accordingly. In addition, a low computation time is not only desirable, but also advantageous in terms of parameter studies and optimization processes. Usually, however, these two requirements are contradictory. For this reason, special procedures are necessary in order to implement the compromise between accuracy and computing time in the best possible manner.

This study contributes to an efficient increase of the prediction accuracy for the vibration and noise behavior of gearboxes in steady-state operation. For this purpose, the noise generation in the gearing is first considered in more detail, before the calculation of the resulting vibrations in the gearbox is focused more deeply. Tooth contact analysis is performed with the assistance of the Isogeometric Analysis using a hybrid combination of numerics and analytics. In addition to the time-varying gear mesh stiffness, the determination of the occurring tooth root stresses is also a concern of the present work. For the calculation of the dynamic system behavior, the harmonic balance method is primarily used. Both in the time-variant linear version and in the completely nonlinear formulation. The application is done qualitatively for a planetary gearbox on the one hand and quantitatively for a two-stage double-helical gearbox on the other hand. Both investigations deal specifically with noise prediction for a gearbox. The presented methods are verified by established calculation approaches and additionally validated by measurement data at convenient locations.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit bei RENK in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme der Technischen Universität München. Auf meinem Weg haben mich viele Persönlichkeiten begleitet, denen ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen möchte. Insbesondere gilt ein riesen Dankeschön ...

... meinem Doktorvater Prof. Dr. Steffen Marburg, der es mir ermöglicht hat in Kooperation mit der Industrie zu promovieren. Ohne dein Vertrauen und ohne deine Expertise würden all die schönen und lehrreichen Stunden in der Forschungswelt nicht zu meinem Erfahrungsschatz gehören.

... meinem Zweitgutachter Prof. Dr. Karsten Stahl für die Übernahme des Koreferats, sowie meinem Vorsitz der Prüfungskommission Prof. Dr. Daniel J. Rixen für die angenehme Prüfungsatmosphäre.

... meinem Mentor Dr. Burkhard Pinnekamp und meinem Vorgesetzten Dr. Michael Heider. Ihr habt mich ab Sekunde eins bei meinem Vorhaben unterstützt und mir ein fantastisches Doppelleben als Berechnungsingenieur und Wissenschaftler ermöglicht. Die inhaltlichen Freiheiten, die ich dabei genießen durfte, weiß ich sehr zu schätzen wie auch eure Erfahrungen und Ratschläge.

... Prof. Robert G. Parker, Ph.D.: A huge „thank you“ for our amazing time together. I have greatly enjoyed working with you, both professionally and personally. This will forever be a treasured and favorite part of my memories.

... meinen beiden weiteren Koautoren. Ohne Michael Keller würde ich womöglich heute noch vorverzahnen und ohne Sebastian Schabert würde ich wahrscheinlich noch immer verzweifelt vor der Vernetzung der unzähligen Vergleichsmodelle sitzen.

... allen Kollegen und Kolleginnen der Abteilung Z beim RENK und allen Kollegen und Kolleginnen am Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme für die gute und ausgelassene Stimmung im Arbeitsalltag. Jeder einzelne von euch hat dazu beigetragen, dass ich mit viel Freude lernen und forschen durfte. Egal an welchem Punkt ich mich in meiner Arbeit befand, mit euch hatte ich immer mehr als einen Grund zum Lachen.

... meiner Familie, die in dieser abenteuerlichen Phase meines Lebens stets hinter stand und mir unermüdlich den Rücken freigehalten hat. Ohne euch würde diese Arbeit jetzt nicht existieren.

Königsbrunn, im November 2023

Eingebundene Veröffentlichungen

- [1] A. Beinstingel, M. Keller, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 160:104291, 2021

- [2] A. Beinstingel, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Gear mesh excitation and non-uniform Rational B-Splines. *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research*, 86:331–336, 2021

- [3] A. Beinstingel, R. G. Parker, und S. Marburg. Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox. *Journal of Sound and Vibration*, 536:117160, 2022

- [4] A. Beinstingel, S. Schabert, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Computational prediction of structure-borne noise in a two-stage double-helical gearbox using harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 189:110112, 2023

Anmerkung:

Zum Zeitpunkt der Einreichung der hier vorliegenden Dissertation befand sich die eingebundene Veröffentlichung [4] noch im *Peer-Review-Prozess*. Entsprechend ist die beim Verlag eingereichte Version des Artikels - der *Preprint* - beigelegt. Im Einklang mit den Richtlinien des Verlags wird dem Wunsch nachgekommen, die offizielle Veröffentlichung zu referenzieren.

Tagungsberichte

- [5] M. Heider, B. Pinnekamp, und A. Beinstingel. Planetary gears: modes, noise and modifications. In *International Conference on Gears 2019*. VDI, 2019

- [6] B. Pinnekamp, M. Heider, und A. Beinstingel. Specific dynamic behavior of planetary gears. In *AGMA Fall Technical Meeting 2019:19FTM06*. AGMA, 2019

- [7] A. Beinstingel, B. Pinnekamp, M. Heider, und S. Marburg. Methoden zur Steifigkeitsmodellierung von Evolventenverzahnungen. In *Fortschritte der Akustik-DAGA: 45. Jahrestagung für Akustik*. DEGA e.V., 2019

- [8] A. Beinstingel, B. Pinnekamp, M. Heider, D. Stierli, und S. Marburg. A comparison of an analytical and fea approach in determining thermal lead correction for high speed gears. In *AGMA Fall Technical Meeting 2020:20FTM02*. AGMA, 2020

- [9] A. Beinstingel, S. Schabert, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Simulation des Anreizungsverhaltens von Zahnradgetrieben. In *Fortschritte der Akustik-DAGA: 48. Jahrestagung für Akustik*. DEGA e.V., 2022

Abkürzungsverzeichnis

ALE	Arbitrary-Lagrangian-Eulerian
AFT	Alternating-Frequency/Time-Methode
ERP	Equivalent Radiated Power
FHG	Freiheitsgrad
FDM	Finite Differenzen Methode
FEM	Finite Elemente Methode
FFT	schnelle FOURIER-Transformation
iFFT	inverse schnelle FOURIER-Transformation
FVM	Finite Volumen Methode
FSI	Fluid-Struktur-Interaktion
HBM	Harmonische Balance Methode
IGA	Isogeometrische Analyse
JFO	JAKOBSSON-FLOBERG-OLSSON
MAC	Modal Assurance Criterion
MKS	Mehrkörpersystem
MOR	Modell-Ordnungs-Reduktion
NURBS	nicht-uniforme rationale B-Splines

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	ii
Abstract	iii
Danksagung	iv
Eingebundene Veröffentlichungen	v
Tagungsberichte	vi
Abkürzungsverzeichnis	vii
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Technik	3
1.1.1 Anregungsmechanismus und Kontaktverhalten	4
1.1.2 Körperschallausbreitung und Geräuschprognose	7
1.2 Wissenschaftlicher Beitrag der vorliegenden Arbeit	12
2 Methodisches Vorgehen	15
2.1 Aufstellung der Bewegungsgleichung	15
2.1.1 Rotierendes Mehrkörpersystem	18
2.1.2 Elastisches Gesamtsystem	19
2.2 Implementierung der Verzahnungsanregung	34
2.3 Reduktion der Freiheitsgrade	41
2.4 Berücksichtigung der Dämpfung	43
2.5 Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung	44
2.5.1 Zeitbereich	45

2.5.2	Frequenzbereich	48
2.6	Abgestrahlte Schalleistung	52
3	Zusammenfassung der eingebundenen Veröffentlichungen	53
3.1	Veröffentlichung [1]	54
3.2	Veröffentlichung [2]	56
3.3	Veröffentlichung [3]	58
3.4	Veröffentlichung [4]	60
4	Diskussion der Ergebnisse	63
5	Zusammenfassung und Ausblick	69
	Literaturverzeichnis	73
	Appendix: Eingebundene Veröffentlichungen	93

Kapitel 1

Einleitung

Die Anforderungen an Antriebsanlagen steigen allgemein stetig an, zum einen motiviert durch zunehmende Komfortansprüche und zum anderen gefordert durch gesetzliche Vorgaben. Neben der Zuverlässigkeit, der Leistungsdichte und dem Wirkungsgrad gewinnt dabei die Akustik verstärkt an Bedeutung. Beispielsweise erfolgt im Zuge der Elektromobilität eine Demaskierung von Schallquellen im Antriebsstrang, die vorher im Vergleich zur Geräuscentwicklung eines Verbrennungsmotors oder einer ähnlichen Antriebsmaschine eine eher untergeordnete Rolle eingenommen haben. Entsprechend wächst der Optimierungsanspruch an das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben fortschreitend an, da Getriebe als zentrales Schlüsselement der Kraftübertragung weiterhin einen wesentlichen Bestandteil im Antriebsstrang ausmachen. Zudem steht eine angenehme Laufruhe im Getriebe für eine hohe Qualität und stärkt damit das Vertrauen und die Zufriedenheit der Betreiber.

Es ist bekannt, dass die maßgebliche Anregung in einem Zahnradgetriebe durch die wechselnden Kontaktverhältnisse im Kraftübertragungsprozess hervorgerufen wird [10]. Anschließend erfolgt die Weiterleitung der erzwungenen Schwingungen über das Welle-Lager-System in die Gehäusestruktur. Während der Körperschall an den Lagerstellen des Gehäuses in das Fundament eingeleitet wird, bedingen die oszillierenden Gehäuseoberflächen letztendlich eine Luftschallemission im hörbaren Frequenzbereich. Eine Optimierung der Zahneingriffsbedingungen ist demnach eine primäre Maßnahme, um die grundsätzliche Geräuscentstehung in einem Getriebe wesentlich zu reduzieren [11–13]. Sekundäre Maßnahmen zielen darauf ab, die Körperschallausbreitung im Getriebe akustisch ideal zu beeinflussen [14–17]. Bei geräuschsensiblen Anwendungen ist folglich eine Kombination der primären und sekundären Maßnahmen empfehlenswert und fordert entsprechend ein tiefes Verständnis des Anregungsmechanismus und der Transferpfadeigenschaften.

Gerade im Sondermaschinenbau für Großgetriebe ist für diesen Zweck eine grundsätzliche Anfertigung von Prototypen sowohl aus ökologischer Sicht als auch aus wirtschaftlicher Sicht wenig zielführend. Eine experimentelle Untersuchung findet daher überwiegend am Endprodukt statt. Allerdings ist eine Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf andere Getriebetypen in der Regel nur bedingt möglich. Darüber hinaus sind etwaige Anpassungen am finalen Produkt nur eingeschränkt umsetzbar und zusätzlich mit einem hohen Kostenaufwand verbunden, sollte es akustisch zu unerwünschten Auffälligkeiten im Betrieb kommen. Ein nachträglicher Optimierungsprozess auf der Basis von Messdaten gestaltet sich daher schwierig und scheint nicht das volle Potential der akustisch möglichen Performance auszuschöpfen. In diesem Sinne ist eine effiziente und vertrauenswürdige Berechnungsmethodik äußerst wertvoll, um den Produktentwicklungszyklus von Beginn an sinnvoll und erfolgreich zu unterstützen.

Die Beurteilung der Akustikeigenschaften erfolgt für derartige Anforderungen und Anwendungen üblicherweise für definierte Betriebszustände bei konstanten Drehmomenten und konstanten Drehzahlen und selten für Beschleunigungs- und Abbremsvorgänge. Im Betrieb entsteht für jede Wälzposition eine zeitlich wechselnde Lastverteilung auf den aktiven Zahnflanken. Dementsprechend sind die Getriebezähne während der Kraftübertragung allgemein unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt. Bei einer akustischen Optimierung gilt es, diese Beanspruchungen aufmerksam zu beobachten, um auch potentielle Einbußen bezüglich der Festigkeit kontrolliert einordnen zu können. Als Maß für die Festigkeit werden hier exemplarisch die auftretenden Zahnfußspannungen während des Betriebs herangezogen.

Entsprechend motiviert liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit auf der rechnergestützten Simulation des Schwingungs- und Geräuschverhaltens von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb. Neben einer hohen Berechnungsqualität steht vor allem die Recheneffizienz im Vordergrund, um in der zeitlich meist sehr anspruchsvollen Konstruktionsphase einen praktikablen Optimierungsprozess gewährleisten zu können. Hierfür leistet die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur effizienten Steigerung der rechnergestützten Prognosegenauigkeit für das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb. Es wird zum einen ein neuer, hybrider Berechnungsansatz vorgestellt, der den Zahneingriff und dessen Kontaktverhältnisse geometrisch exakt im dreidimensionalen Raum durch die Isogeometrische Analyse (IGA) beschreibt und zusätzlich mittels Analytik die Möglichkeit bietet, in dynamisch nichtlinearen Simulationen effizient implementiert zu werden. Des Weiteren wird die Auswirkung der Zahnkraftanregung auf das Gesamtsystem in Wechselwirkung näher untersucht. Hierbei wird die Harmonische Balance Methode (HBM) ge-

nutzt, die sowohl in linearen als auch in nichtlinearen Anwendungsfällen eine äußerst effiziente Berechnungsstrategie im Frequenzbereich darstellt. Der Einsatz der HBM ist in der Getriebedynamik verhältnismäßig selten und in der Getriebeakustik augenscheinlich neu.

Sowohl die zugrundeliegenden Berechnungsansätze als auch deren Verwendung und Gültigkeit sind in den entstandenen Artikeln [1–4] zu finden und werden im Rahmen dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert. Aus diesem Grund existieren inhaltliche Zusammenhänge zwischen den eingebundenen Veröffentlichungen [1–4] und diesem Dokument.

Aufbau der Arbeit

Im ersten Teil dieser Arbeit wird zunächst ein Überblick über den Stand der Technik mit Bezug auf den Anregungsmechanismus und die Körperschallausbreitung in Getrieben gegeben. Dieses Kapitel 1 endet mit einer expliziten Erläuterung des wissenschaftlichen Beitrags dieser Arbeit. Im folgenden Kapitel 2 wird in Form eines Modellaufbaus die eingesetzte Methodik in den eingebundenen Veröffentlichungen erläutert. Eine Zusammenfassung der eingebundenen Veröffentlichungen ist Gegenstand von Kapitel 3. Die entstandenen Ergebnisse dieser Forschungsarbeiten werden im nachfolgenden Kapitel 4 diskutiert und wissenschaftlich eingeordnet. Abschließend enthält Kapitel 5 eine finale Zusammenfassung und zusätzlich einen Ausblick für weiterführende Untersuchungen. Alle eingebundenen Veröffentlichungen sind im Anhang anzufinden.

1.1 Stand der Technik

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit verschiedenen Aspekten im Bereich der Getriebedynamik und Getriebeakustik. Unter anderem wird eine neue Methodik zur Berechnung der Kontaktverhältnisse im Zahneingriff vorgestellt. Darüber hinaus wird dieses Verzahnungsmodell mithilfe der HBM in dynamische Simulationen eingebaut, die darauf abzielen das akustische Verhalten eines Getriebes verlässlich und effizient zu prognostizieren. Entsprechend gliedert sich der Stand der Technik in einen ersten Teil, der den Anregungsmechanismus und das Kontaktverhalten betrifft und in einen zweiten Abschnitt, der sich mit der Körperschallausbreitung und der Geräuschprognose auseinandersetzt.

1.1.1 Anregungsmechanismus und Kontaktverhalten

Die maßgebliche Anregung in einem Getriebe wird bekanntlich während der Kraftübertragung durch die wechselnden Kontaktverhältnisse im Zahneingriff hervorgerufen, siehe Küçükay [10]. Im Zahnkontakt beeinflussen gemäß Heider [18] und Kohn [13] folgende Faktoren und Eigenschaften die Ausprägung der Geräuschanregung in der Laufverzahnung:

- Veränderliche Verzahnungssteifigkeit bezüglich der Wälzstellungen [10, 18, 19],
- Abweichung von der idealen Evolventengeometrie [11, 13],
- Veränderliche Überdeckung durch vor- und nachzeitigen Zahneingriff [20, 21],
- Mechanische Verformung und Verlagerung der Zahnräder und Zahnkörper [22–24],
- Thermische Verformung schnelllaufender Zahnräder [8],
- Reibkraftumkehr am Wälzkreis [19, 25],
- Flankenrauheit und Oberflächenstruktur [26].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Einflüsse der ersten vier Punkte berücksichtigt. Die Punkte zwei bis vier beeinflussen als mikro-geometrische Kontaktbedingungen die auftretenden Eingriffsverhältnisse und damit den Verlauf und die Beschaffenheit der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit aus Punkt eins. Diese macht sich schließlich als Parametererregung im dynamischen System bemerkbar. Daher ist die Bestimmung der Kontaktverhältnisse pro Wälzstellung im Sinne der Verzahnungssteifigkeit ein essentieller Bestandteil in akustisch motivierten Getriebeberechnungen.

Die Bestimmung dieser Verzahnungssteifigkeit ist seit vielen Jahren Gegenstand der Forschung. Aus diesem Grund gibt es hierfür eine hohe Anzahl an verfügbaren Berechnungsansätzen und entsprechenden Variationen. Eine sehr umfangreiche und dennoch detaillierte Zusammenfassung ist beispielsweise im Übersichtsartikel von Marafona et al. [27] zu finden. Hier werden die verschiedenen Vorgehensweisen in analytische, numerische und hybride Verfahren eingeteilt. Ein weiterer Übersichtsartikel entstand durch Natali et al. [28]. Dieser behandelt ausschließlich Berechnungsstrategien auf Basis der Finite Elemente Methode (FEM).

Zu den analytischen Ansätzen zählen beispielsweise die aktuellen Arbeiten von Lei et al. [29] und Dai et al. [30]. Beide Vorgehensweisen basieren auf der potentiellen Energiemethode für einen einseitig eingespannten Kragarm mit veränderlichem Querschnitt. Eine ähnliche Balkentheorie in

Integraldarstellung existiert bereits seit 1953 durch die Arbeit von Weber und Banaschek [31]. Dieser Ansatz hat sich seither stark etabliert und findet unter anderem durch die Vereinfachungen von Schäfer [32] bis heute Anwendung in der internationale Norm ISO 6336-1 [33]. Darüber hinaus ist diese Balkentheorie fester Bestandteil zahlreicher Variationen und Weiterentwicklungen. Beispielsweise schlagen Cornell [34] und Sainsot et al. [35] bei der Berechnung der Verzahnungssteifigkeit nach Weber und Banaschek [31] eine alternative Betrachtung der Einspannstelle am Zahnfußkreis vor. Die Arbeit von Sainsot und Vexex [36] erweitert die Formeln zur lokalen Kontaktdeformation. Erst kürzlich verallgemeinern Hochrein et al. [37] die Formulierungen von Weber und Banaschek [31] und erlauben so deren Anwendbarkeit auf beliebig linear-elastische Materialien. Die Gültigkeit wird durch vollständig numerische Vergleichsmodelle bestätigt. Dementsprechend kommt der Ansatz von Weber und Banaschek [31] auch weiterhin in aktuellen Forschungsaufgaben als bewährtes Zahnkontaktmodell zur Anwendung, um statische und dynamische Untersuchungen durchzuführen, siehe Guilbert et al. [38, 39]. Eine allgemein übliche Erweiterung zielt bei der Anwendung darauf ab, die Zahnbreite zusätzlich in mehrere Einzelsegmente zu unterteilen. Auf diese Weise ist es möglich, eine höhere Auflösung in Breitenrichtung zu erhalten, da Weber und Banaschek [31] die Biegung eines Zahnes zunächst als konstant über die gesamte Zahnbreite annehmen. Die einzelnen Zahnscheiben bleiben dabei entweder vollständig unabhängig voneinander oder werden über empirische Kopplungsbedingungen miteinander verknüpft, siehe zum Beispiel Börner [40–42]. Eine physikalische Ableitung dieser Kreuzeinflüsse entsteht analytisch durch die Anwendung der Plattentheorie nach Hayashi [43, 44] im zweidimensionalen Raum und bildet entsprechend die Grundlage für komplexere analytische Berechnungsmodelle wie beispielsweise Umezawa [45–47], Conry und Seireg [48] und Schmidt [49].

Nachdem zur Beschreibung im dreidimensionalen Raum allgemein keine analytische Lösung vorliegt, ist für diesen Zweck der Einsatz von numerischen Werkzeugen erforderlich. Diese vollständig numerisch basierten Verfahren setzen hauptsächlich auf die FEM, siehe zum Beispiel Cooley et al. [50], Kiebusch et al. [51] und Ihlenburg et al. [52]. Ein wesentlicher Vorteil hierbei ist, dass der Modellgenauigkeit zunächst keine Grenzen gesetzt sind und im Gegensatz zu den analytischen Verfahren daher keine grundlegenden und eventuell einschränkenden Annahmen, zum Beispiel in Bezug auf den Schrägungswinkel und die Profilverschiebung, getroffen werden müssen. Neben der Biegung ist es daher auch ohne Weiteres möglich, Schub und Stauchung im Zahnkontakt angemessen zu berücksichtigen. Allerdings sind, vor allem zur genauen Beschreibung der lokalen Kontaktdeformation, aufwendige Berechnungsmodelle notwendig [28]. Als Folge steigt die Rechenzeit im Vergleich zu den analytischen Methoden drastisch an. Aus diesem Grund existieren Bemühungen, um die Effizienz der numerischen Methoden für die Zahnkontaktanalyse zu steigern. Zum

Beispiel nutzt Vijayakar [53] eine verhältnismäßig grobe Vernetzung der Zähne. Zur Auflösung des Zahnkontakts und der HERTZ'SCHEN Kontaktdeformation wird iterativ für jede Wälzstellung ein weitaus feineres Oberflächennetz an den Zahnflanken eingeführt, das mittels der Randelementmethode aufgelöst wird und folglich zur gewünschten Berechnungsgenauigkeit führt. Ziegler [54] hingegen setzt auf eine modale Reduktion, deren Definition für jede Wälzstellung aktualisiert wird. Liu et al. [55] bedienen sich zusätzlich zu einer Modell-Ordnungs-Reduktion (MOR) nach Craig und Bampton [56] noch eines weiteren numerischen Vorteils, indem sie die geltenden Gleichungen der Dynamik durch eine Arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) Formulierung lösen.

Die grundsätzliche Motivation der hybriden Verfahren ist es, die Genauigkeit der numerischen Methoden mit der Effizienz der analytischen Ansätze zu vereinen. Der Übergang zwischen Numerik und Analytik erfolgt hierbei vorzugsweise mittels der Ableitung von Einflusszahlen für jeden potentiellen Berührungspunkt auf den beteiligten Zahnflanken. Dieses Vorgehen kommt unter anderem bereits bei Schmidt [49] in Verbindung mit der Plattentheorie zur Anwendung und wird von Neupert [57] und Bong [58] auf die FEM übertragen. Diese Methode wird von Chang et al. [59] und Feng et al. [60] aufgegriffen und durch eine statische Kondensation nach Guyan [61] weiter beschleunigt. Zhang et al. [62] setzen abermals auf diesen Ansatz und erhöhen die Genauigkeit durch eine iterative Netzverfeinerung an den Kontaktlinien, um den Einfluss der HERTZ'SCHEN Pressung genauer abzubilden.

Ein zusätzlicher Vorteil der numerischen und hybriden Verfahren besteht darin, dass das jeweilige zugrundeliegende Modell bereits ein Kontinuum im dreidimensionalen Raum beschreibt. Dementsprechend ist es möglich, den Spannungszustand in einem Zahn vollständig und genau zu bestimmen. Im Gegensatz zur analytischen Berechnung im Sinne der internationalen Norm ISO 6336-3 [63] können somit die Grenzen der Beanspruchung besser ausgenutzt werden, da die Grenzwerte in der Norm grundsätzlich sehr konservativ ausfallen, siehe hierzu auch Paucker [64]. In Analogie zu den Methoden der Zahnkontaktanalyse wird neben der Randelementmethode [65, 66] auch hier überwiegend die FEM zur Spannungsanalyse herangezogen. Ein Beispiel hierfür ist sowohl die Arbeit von Frühe [67] als auch die von Dai et al. [68]. Eine von der tatsächlichen Lastverteilung unabhängige Spannungsberechnung in dieser Form erstellt Cheng et al. [69] und Yusuf et al. [70] durch die IGA. Hier erfolgt die Belastung am Zahnkopf auf Basis der nominellen Tangentialkraft.

1.1.2 Körperschallausbreitung und Geräuschprognose

Die Berechnung der dynamischen und akustischen Eigenschaften eines Zahnradgetriebes im stationären Betrieb erfolgt im Rahmen dieser Arbeit vorzugsweise mit der HBM. Die theoretischen Grundlagen sind von Nayfeh [71] und von Krack und Gross [72] erläutert. Diese Art der Betrachtung im Frequenzbereich erfährt durch die stetig ansteigenden Anforderungen an Maschinenbaukomponenten aktuell einen rapiden Aufschwung [72]. Immerhin stellt die HBM eine effiziente Alternative zur numerischen Zeitintegration dar, um parametererregte und/oder nichtlineare Systeme zu berechnen und erlaubt daher praktikable Parameterstudien und Optimierungsprozesse.

Bezugnehmend auf Krack und Gross [72] ist die HBM bereits in elektrotechnischen Problemstellungen [73], in der Strömungsdynamik [74] und in allgemeinen Maschinenbaudisziplinen [75–77] gut etabliert. Vor allem im Bereich der Rotordynamik erfreut sich die HBM, im Hinblick auf die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Rotor und Stator, eines großen Anwenderkreises [78–80]. Die HBM ist ebenso beliebt für die Berechnung von Gas- und Dampfturbinen [81] wie von Magnetschwebbahnen [82]. Eine aktuelle Akustikuntersuchung mit der HBM zeigen beispielsweise Weisheit [83] und Utzig et al. [84, 85]. Sie fokussieren die Vorhersage von Knarz- und Klappergeräuschen im Fahrzeuginnenraum und setzen dabei die HBM zur Analyse ein.

In der Getriebedynamik scheint die HBM jedoch nicht so häufig angewandt zu werden. Insgesamt existieren weitaus mehr Forschungsarbeiten zur grundlegenden Getriebedynamik, bei denen die HBM nicht verwendet wurde. Viele dieser Untersuchungen reichen über Jahrzehnte zurück, wie beispielsweise die Arbeiten von Benton und Seireg [86], Kahraman und Singh [87] und Velez und Flamand [88], bis hin zu neueren Veröffentlichungen von Ambrisha und Parker [89], Cooley et al. [90], Velez [91] und Zhang et al. [92]. Obwohl die Forschung auf dem Gebiet der Getriebedynamik durch Arbeiten wie Dai et al. [93], Kang und Kahraman [94], Chimanpure et al. [95] und Shin und Palazzolo [96] fortschreitend weitergeht, ist die Anwendung der HBM hier noch nicht merklich angestiegen.

Nichtsdestotrotz existieren Forschungsarbeiten, die die HBM als numerisches Werkzeug für die dynamische Lösung der Bewegungsgleichung in Getriebeanwendungen einsetzen. Zum Beispiel wird sowohl bei Kahraman und Singh [97] als auch bei Shen et al. [98] die grundlegende nichtlineare Dynamik eines Stirnradgetriebes mit der HBM untersucht. Eine Räderkette wird von Liu und Parker [99] berücksichtigt, und die nichtlineare Dynamik eines zweistufigen Getriebes ist bei Alshyyab und Kahraman [100] von Interesse. Beide Studien werden mit der HBM durchgeführt.

Das gleiche gilt bei Sun und Hu [101]: Hier steht die nichtlineare Dynamik eines Planetengetriebes mit Rückflankenkontakt im Fokus und wird entsprechend mit der HBM analysiert. Die Arbeit von Yang et al. [102] befasst sich mithilfe der HBM mit dem dynamischen Verhalten von Kegelrädern. Die Implementierung der HBM für Parameterstudien bezüglich eines zusammengesetzten Planetengetriebes wird von Zhu et al. [103] vorgestellt. Li et al. [104] generieren Ergebnisse bezüglich des Verhaltens einer Stirnradstufe bei kombinierter Anregung, sowohl intern als auch extern, ebenfalls mit der HBM. Darüber hinaus wurde erst kürzlich von Dong et al. [105] eine nichtlineare Frequenzganganalyse im Sinne der HBM auf ein einstufiges Getriebe mit einer Doppelschrägverzahnung angewandt, um unter anderem das Auftreten von superharmonischen Resonanzstellen zu simulieren.

Die vorliegende Arbeit nutzt die HBM zum einen in der linearen Fassung mit zeitvarianten Koeffizienten, um das dynamische Verhalten eines Planetengetriebes zu beschreiben. Ziel ist die Detektion von Instabilitäten während des Betriebs, da das Auftreten dieses parametererregten Effekts ein unangenehmes Geräusch auslösen kann. Zum anderen wird die HBM auch in der nichtlinearen Form eingesetzt, um den Transferpfad in einem Getriebesystem, bestehend aus Verzahnung, Welle, Lager und Gehäuse, zu berechnen. Im Fokus steht die Quantifizierung des resultierenden Körperschalls an der Gehäuseoberfläche. Losgelöst von der Anwendung der HBM ist der Stand der Technik nachfolgend in zwei weitere Unterkategorien eingeteilt: Stabilitätsverhalten und Transferpfadanalyse.

Stabilitätsverhalten

Das parametrische Anregungsverhalten von Getrieben und die daraus resultierenden Instabilitäten sind seit vielen Jahren Gegenstand der Forschung, siehe zum Beispiel den Übersichtsartikel von Cooley und Parker [106] in Bezug auf Planetengetriebe. Bereits Benton und Seireg [86] weisen den Effekt der Parametererregung und das damit verbundene Risiko der Instabilität für ein Modell eines einstufigen Getriebesystems, sowohl in der Theorie als auch in der Praxis, nach. In der zugehörigen Folgearbeit [107] werden Einflussfaktoren, wie zum Beispiel die zeitlich veränderliche Zahneingriffssteifigkeit, im Hinblick auf das dynamische Verhalten eines einstufigen Getriebes theoretisch von Benton und Seireg abgeleitet. Messungen bezüglich parametrischer Instabilitäten sind beispielsweise auch in der aktuellen Arbeit von Celikay et al. [108] für eine Stirnradstufe zu finden. Küçükay [10] gibt unter anderem eine vereinfachte Näherungslösung zur Abschätzung von Instabilitäten aufgrund von Parametererregung an. Diese Approximation wird unter anderem von Bihr [22] für Stabilitätsaussagen herangezogen.

Das grundsätzliche Schwingungsverhalten und die dynamische Charakteristik eines Planetengetriebes wird intensiv von Heider [18] thematisiert, siehe hierzu auch Heider et al. [5, 6, 109]. Speziell die Eigenschaften bezüglich Parametererregung und Instabilität eines Planetengetriebes werden auch von August und Kasuba [110], Vexel und Flamand [88] und Lin und Parker [111] aufgegriffen und untersucht. Der Einfluss der Planeteneingriffsfolge auf parametrische Instabilitäten wird von Parker [112] und Weng et al. [113] diskutiert. Ähnliche Arbeiten existieren in Bezug auf eine gleichmäßige und ungleichmäßige Anordnung der beteiligten Planeten von Ambarisha et al. [114] aber auch von Lin und Parker [115]. Darüber hinaus wird von Parker und Wu [116] das elastische Verformungspotential des Hohlrades und dessen Einfluss auf die Parametererregung untersucht, sowohl für symmetrisch als auch für sequentiell eingreifende Planeten [18]. Die modalen Eigenschaften und die parametrische Instabilität von schnelllaufenden Planetengetrieben mit einem elastisch verformbaren Hohlrad werden in einer weiteren Arbeit von Wang und Parker [117] fokussiert und sie zeigen, dass die Kreiselwirkung zu komplexen Schwingungsphänomenen führen kann. Der Einfluss von Drehzahlschwankungen im Antriebsstrang auf die parametrische Instabilität eines Planetengetriebes wird von Qiu et al. [118, 119] analysiert. Das nichtlineare dynamische Verhalten durch das Abheben der Zahnflanken, einschließlich Sprungphänomenen, chaotischen Bewegungen und Bifurkation, wird intensiv von Ambarisha und Parker [89] untersucht. Neufond et al. [120] stellen ein vollständiges Verfahren zur Vorhersage von unangenehmen Geräuschen in einem Planetengetriebe vor. Dieser Ansatz setzt auf ein dreidimensionales Modell auf Basis der FEM und nutzt eine linear iterative Spektralmethode [121]. Ähnliche Untersuchungen mit komplexen Modellen auf Basis der FEM sind in den Arbeiten von Higl und Beinstingel [122, 123] sowie Puchele [124] zu finden. Allerdings nutzen diese die numerische Zeitintegration anstatt einer Spektralmethode. Darüber hinaus wird auf Basis der HBM von Bahk und Parker [125] eine analytische Lösung abgeleitet, die Aussagen über die Stabilitätseigenschaften von Planetengetrieben erlaubt. Nichtsdestotrotz wird in praktischen Anwendungen zur Identifizierung von Instabilitäten in Planetengetrieben vorzugsweise die Theorie nach FLOQUET [126] eingesetzt oder direkt der Verlauf der Schwingungsamplituden durch Zeitintegration berechnet und anschließend bewertet.

Für die Untersuchungen zu den parametrischen Instabilitäten von Planetengetrieben sind bisher wenige bis keine Experimente zugänglich, die dieses Phänomen eindeutig bestätigen oder ausreichend genau beschreiben. Insbesondere für schnelllaufende Planetengetriebe mit hoher Leistungsdichte, hoher Übersetzung und vergleichsweise großen Bauteilabmessungen ist die öffentliche Datenlage spärlich. Aus diesem Grund sind die wenigen Messdaten in [120, 127–129] nicht direkt übertragbar auf den Getriebetyp, der im Rahmen dieser Arbeit näher untersucht wird.

Transferpfadanalyse

Das allgemeine Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben ist ein intensiver und weitläufiger Bestandteil der Forschung. Allein für die mathematische Modellbildung bis zum Jahr 1988 existiert ein Übersichtsartikel von Özgüven und Houser [130], der 188 Arbeiten zu diesem Thema berücksichtigt. Darüber hinaus beinhaltet sowohl die Arbeit von Küçükay [10] als auch die von Börner [40] eine umfangreiche Zusammenfassung der relevanten Literatur für diesen Zeitraum. Ein weiterer Übersichtsartikel aus dem Jahr 2020, der ausschließlich das Anregungsverhalten und die dynamische Modellbildung von Stirnrädern thematisiert, entstand durch Bruzzone und Rosso [131]. Dieser umfasst insgesamt 160 Forschungsarbeiten von denen mehr als 120 nach 1988 entstanden sind. Nicht zuletzt sind in den Arbeiten von Heider [18], Bihr [22], Kohn [13] und Utakapan [23] ebenfalls detaillierte Zusammenstellungen bis in das Jahr 2020 verfügbar.

Eine umfangreiche Entwicklung im Sinne der Transferpfadanalyse stößt Gerber [25] im Jahr 1984 durch die Untersuchung einer Stirnradstufe mit einem Torsionsmodell in Verbindung mit dem Zahnkontakt nach Weber und Banaschek [31] an. Diese Vorgehensweise wurde zunächst von Müller [19] aufgegriffen und dabei qualitativ durch die Einbringung der zweidimensionalen Platten-theorie nach Schmidt [49] gesteigert. Anschließend wurde diese Berechnungsstrategie im Laufe der Zeit durch die Untersuchungen von Placzek [132], Sattelberger [133], Geiser [134], Raddev [135] und Griggel [11] sukzessive weiterentwickelt, um auch den Einfluss des Welle-Lager-Systems bei der Bestimmung der Verzahnungssteifigkeit in Form eines Übertragungsmatrizenverfahrens zu erhalten. Otto [136] steigert sowohl die Effizienz als auch die Qualität der Berechnungen im Zahnkontakt und der damit verbundenen Lastverteilung. Der Effekt des vor- und nachzeitigen Zahneingriffs findet, basierend auf Baethge [20], durch Thoma [21] Berücksichtigung. Heider [18] erweitert das Torsionsmodell in Bezug auf Planetengetriebe und überarbeitet außerdem die von Müller [19] vorgeschlagene Zeitschrittsimulation samt Parametererregung. Bihr [22], Kohn [13] und Utakapan [23] steigern schließlich den Modellumfang, indem sie sowohl die Wellen als auch die Lagerstellen elastisch im dreidimensionalen Raum abbilden und so in Wechselwirkung mit dem Zahneingriff bringen. Die Beschreibung der Wellen erfolgt hierbei grundsätzlich in Form von Balkenelementen und die der Lagerstellen durch Feder-Dämpfer-Systeme. Zusätzlich implementiert Bihr [22] eine lineare Betrachtungsmöglichkeit im Frequenzbereich auf Basis der Störungsrechnung und erlaubt eine Abschätzung des Stabilitätsverhaltens nach Küçükay [10]. Außerdem optimiert Utakapan [23] die numerische Zeitintegration und die spektrale Auswertungsstrategie. Entsprechende Anpassungen für statische Untersuchungen von Planetengetrieben entstanden zeitnah durch Neubauer [24] und Weinberger [137]. Insgesamt ist es mit dieser Simulationethodik

inzwischen möglich, den Transferpfad, ausgehend von der Verzahnung bis hin zur Lagerstelle, für komplexe Getriebesysteme genau im Zeitbereich zu berechnen und zu analysieren.

In der Literatur sind weitere Methoden und Modelle vorhanden, die ebenfalls darauf abzielen, die Lagerreaktion zu bestimmen. So nutzt beispielsweise Falkenberger [16] eine dynamische Mehrkörpersimulation, um die Lagerkraftanregung für eine nachträgliche Akustikuntersuchung der Gehäusestruktur abzuleiten. Hierbei werden die Wellen ebenfalls als Balkenelemente modelliert. Die Ableitung der Zahnsteifigkeit basiert grundsätzlich auf der internationalen Norm ISO 6336-1 [33], und die Wälzlager werden analytisch über ein Kontaktmodell beschrieben. Die Berechnung erfolgt im Zeitbereich. Eine reine Optimierung des dynamischen Gehäuseverhaltens im Frequenzbereich ist Gegenstand der zugehörigen Arbeiten von Graf [14] und Neher [15]. Die Berechnung der schallabstrahlenden Gehäuseoberflächen erfolgt mithilfe der Randelementmethode.

Troge et al. [138] nutzen ein komplexes Modell auf Basis der FEM zur Ermittlung der Lagerreaktionskräfte in einem Zuggetriebe. Diese Reaktionskräfte werden nachträglich eingesetzt um sowohl die Gehäuseschwingungen als auch deren produzierte Schallabstrahlung in Folgesimulationen zu berechnen. Eine Studie im Sinne primärer und sekundärer Maßnahmen wird aufgezeigt.

Eine derartige Systemgrenze an der Lagerstelle für eine akustisch motivierte Betrachtung existiert ebenfalls bei Han et al. [139] und Guo et al. [140]. Während bei Han et al. [139] das zugrundeliegende Modell eine überschaubare Starrkörpersimulation für Torsion und Biegung darstellt, basiert bei Guo et al. [140] die Ableitung der Lagerreaktionskräfte auf einem komplexen Volumenmodell, das mittels der FEM und einer effizienten Kontaktmechanik im Zeitbereich gelöst wird. Beide Untersuchungen betreffen ein Getriebe mit einer Wälzlagerung und nutzen die Randelementmethode für die anschließende entkoppelte Untersuchung der Schallabstrahlung an der Gehäusestruktur.

Sanzenbacher [17] nutzt eine gekoppelte Mehrkörpersimulation mit flexiblen Strukturen, um Körperschallminderungsmaßnahmen in Theorie und Praxis zu untersuchen. Sowohl die Wellen als auch die gesamte Gehäusestruktur werden mittels der FEM abgebildet und über das Verfahren nach Craig und Bampton [56] in die Simulation eingebunden. Die Berechnung des Zahnkontakts erfolgt nach Weber und Banaschek [31]. Die Lösung der Bewegungsgleichung findet im Zeitbereich statt und die Auswertung der Beschleunigungen an der wälzgelagerten Gehäuseoberfläche geschieht direkt an der Sensorposition.

1.2 Wissenschaftlicher Beitrag der vorliegenden Arbeit

Die vorliegende wissenschaftliche Arbeit leistet einen Beitrag zur effizienten Berechnung des Schwingungs- und Geräuschverhaltens von Zahnradgetrieben, die sich im stationären Betrieb befinden. Folgende motivierende Forschungsfragen werden mithilfe dieser Arbeit beantwortet:

- Gibt es im Vergleich zur Finiten Elemente Methode (FEM) eine effiziente Möglichkeit die Zahneingriffsbedingungen samt Verzahnungssteifigkeit im dreidimensionalen Raum ohne Einbußen in der geometrischen Genauigkeit zu berechnen (siehe eingebundene Veröffentlichung [1])?
- Ist die Isogeometrische Analyse (IGA) in der Lage, die Zahnfußspannungen unter statischer und dynamischer Last in praktikabler Rechenzeit numerisch genau zu bestimmen, und wie ordnet sich dieses Verfahren gegenüber etablierten Methoden ein (siehe eingebundene Veröffentlichung [2])?
- Eignet sich die homogene Lösung der zeitvarianten Bewegungsgleichung für ein einfaches Torsionsmodell, um Messdaten bezüglich dem Auftreten von parametererregten Instabilitäten in einem Planetengetriebe zu erklären (siehe eingebundene Veröffentlichung [3])?
- Erlaubt die Harmonische Balance Methode (HBM) eine effiziente Akustikuntersuchung von einem mehrstufigen Stirnradgetriebe im stationären Betrieb in Form einer gekoppelten Systemanalyse, die die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse zuverlässig berücksichtigt (siehe eingebundene Veröffentlichung [4])?

Eingebundene Veröffentlichung [1]:

Die IGA ist ein numerisches Verfahren, das grundsätzlich sehr ähnlich zur etablierten FEM ist. Der wesentliche Unterschied liegt in der Definition der beschreibenden Ansatzfunktionen. Während die FEM üblicherweise Polynome nach LAGRANGE einsetzt, so basiert die IGA auf nicht-uniformen rationalen B-Splines (NURBS). Diese Wahl der Basisfunktionen erlaubt die numerisch genaue Beschreibung komplexer Geometrien und fordert im Vergleich zur bekannten FEM insgesamt weniger Freiheitsgrade (FHGs). Dementsprechend verspricht die IGA einen Anstieg der Modellgüte und zugleich eine höhere Effizienz. Aus diesem Grund wird die IGA in der eingebundenen Veröffentlichung [1] herangezogen und erstmals für die Ermittlung der periodisch veränderlichen Verzahnungssteifigkeit eingesetzt. Zur Verifizierung der hybriden Simulationsmethodik und zur Untersuchung der praktikablen Anwendbarkeit wird dieses neue Verfahren für verschiedene Szenarien mit etablierten Berechnungsansätzen unter statischen Bedingungen verglichen.

Eingebundene Veröffentlichung [2]:

In Anlehnung an die eingebundene Veröffentlichung [1] wird in der eingebundenen Veröffentlichung [2] untersucht, ob die IGA ebenfalls in der Lage ist, die im Abwälzvorgang auftretenden Zahnfußspannungen effizient und genau zu berechnen. Hierfür wird das vorgestellte hybride Verfahren aus der eingebundenen Veröffentlichung [1] genutzt, um neben der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit auch die statische Lastverteilung auf den jeweiligen Zahnflanken zu berechnen. Anschließend dient diese als Belastung für die numerisch exakten Zahnkonturen im dreidimensionalen Kontinuum. Die grundsätzliche Eignung wird durch den Vergleich der statischen Ergebnisse mit etablierten Berechnungsansätzen verifiziert. Zudem wird die Anwendbarkeit in einer dynamischen Analyse exemplarisch für ein eindimensionales Torsionsmodell demonstriert.

Eingebundene Veröffentlichung [3]:

An einem Planetengetriebe wurden zwei verschiedene Messungen vorgenommen. Der Unterschied liegt hauptsächlich in den ausgeführten Profilkorrekturen am Sonnenritzel. Eine Variante ist akustisch optimiert und die andere Version besitzt bewusst ein starkes Anregungspotential. Dieses Verhalten wird mit der vorgestellten Methodik aus der eingebundenen Veröffentlichung [1] in Form der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit nachgewiesen. Während eines Hochlaufs treten nur bei der zweiten Ausführung komplexe Schwingungsphänomene auf, die zudem ein unangenehmes Geräusch auslösen. Zur Erklärung dieses Effekts wird ein Torsionsmodell herangezogen, das mithilfe der linearen HBM im Frequenzbereich gelöst wird. Die homogene Lösung identifiziert eindeutig das unangenehme Geräusch als Resultat einer parametererregten Instabilität.

Eingebundene Veröffentlichung [4]:

Die nichtlineare Formulierung der HBM wird zunächst für Getriebeanwendungen effizient angepasst, um allgemein eine praktikable Analyse der nichtlinearen dynamischen Wechselwirkungen in Zahnradgetrieben zu ermöglichen. Anschließend wird diese HBM zur dynamischen Berechnung eines einstufigen Stirnradgetriebes angewendet. Ziel ist es, die Methodik grundsätzlich im Vergleich zur etablierten Zeitschrittsimulation zu verifizieren. Der Zahneingriff wird hierbei in Anlehnung an die eingebundene Veröffentlichung [1] nichtlinear abgebildet. Die Reaktionen der Gleitlager finden als nichtlineare Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) Berücksichtigung. Des Weiteren steht ein zweistufiges Getriebe mit Doppelschrägverzahnung im Fokus der Untersuchungen. Eine getrennte Betrachtung der nichtlinearen Zahneingriffsverhältnisse wird zudem vorgestellt, die explizit für die HBM einen weiteren Vorteil bezüglich der Rechenzeit darstellt. Abschließend wird dieses Getriebe als gekoppeltes Gesamtsystem, bestehend aus Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse, analysiert und gegenüber einer Messung validiert.

Kapitel 2

Methodisches Vorgehen

Die eingebundenen Veröffentlichungen [1–4] bedienen sich diverser Verfahren der numerischen Mathematik zur Abbildung und Erforschung von strukturmechanischen Sachverhalten in der Getriebedynamik und in der Getriebeakustik. Nachfolgend werden die wesentlichen Inhalte anhand der zugrundeliegenden Theorien detailliert erläutert. Der Bezug zur vorliegenden Arbeit und die gewählte Umsetzung wird jeweils an geeigneter Stelle explizit hervorgehoben und ausführlich beschrieben. Die eingesetzten Algorithmen sind in der Programmiersprache FORTRAN verfasst, wobei die numerische Lösung mathematischer Grundprobleme (z.B. Zerlegung von Gleichungssystemen) hauptsächlich mithilfe der INTEL MATH KERNEL LIBRARY [141] erfolgt.

2.1 Aufstellung der Bewegungsgleichung

Die LAGRANGE-Gleichung zweiter Art beschreibt die Dynamik eines mechanischen Systems durch eine einzige skalare Funktion wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{\text{nk}}. \quad (2.1)$$

Hierbei kennzeichnet die Variable t die Zeit. Der Vektor \mathbf{q} vereint die generalisierten Koordinaten q_i , wobei die zugehörigen Zeitableitungen im Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ verankert sind. Im hier vorliegenden Fall definieren i FHGs eine holonome Mechanik. Die Komponente T beinhaltet die kinetischen Energien des dynamischen Systems. Adäquat bündelt V die potentiellen Energien. Nicht-konservative Kräfte (z.B. dissipative Reibkräfte) können in \mathbf{f}_{nk} berücksichtigt werden. Eine passende Herleitung der dargestellten LAGRANGE-Gleichung ist beispielsweise in den Büchern von Woernle [142] und Schwertassek et al. [143] für Mehrkörpersysteme (MKS) zu finden.

Das Auflösen des totalen Differentials nach der Zeit t liefert nach Umstellung:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}}_{\mathbf{M}(\mathbf{q},t)} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{q}} - \underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T + \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{f}_{\text{nk}} \right]}_{\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Die Ableitung einer Massenmatrix \mathbf{M} ist hierdurch ersichtlich, sowie deren Proportionalität zu den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}$. Im Vektor \mathbf{h} addieren sich die verbleibenden Kraftkomponenten. Am Beispiel einer rotierenden Getriebewelle wird der Einsatz des LAGRANGE-Formalismus im Rahmen dieser Arbeit verdeutlicht.

In Abbildung 1 ist schematisch eine rotierende Getriebewelle dargestellt sowie die Lage eines ortsfesten Koordinatensystems \mathcal{I} mit den beschreibenden Koordinaten (X, Y, Z) . Die Welle rotiert stationär mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi n/60$ rad/s, wobei n die Drehzahl in Umdrehungen pro Minute repräsentiert. Die translatorischen Verschiebungen im Inertialsystem \mathcal{I} werden entsprechend mit u_x , u_y und u_z gekennzeichnet. Die rotatorischen Auslenkungen um die Hauptachsen sind in Anlehnung durch θ_x , θ_y und θ_z mittels der Rechten-Hand-Regel definiert.

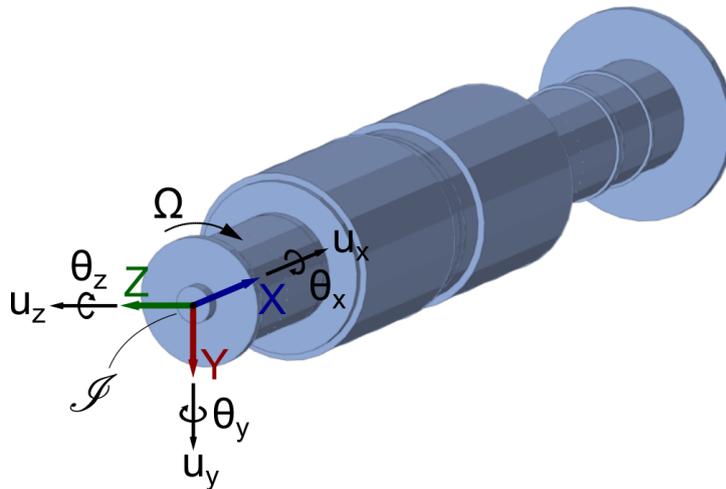


Abbildung 1: Rotierende Getriebewelle und Lage des ortsfesten Inertialsystems.

Am Schwerpunkt der starren Getriebewelle greifen bei dieser Betrachtungsweise die Kräfte an. Die Masse m agiert in alle Raumrichtungen gleichermaßen. Die Definition des polaren Trägheitsmoments J_x um die Rotationsachse und auch die der diametralen Trägheitsmomente $J_y = J_z$ um die beiden radialen Achsen bleiben von der Rotationsbewegung aufgrund der geometrischen Symmetrieeigenschaften unberührt.

In Anlehnung an Gasch et al. [126, 144], Nelson und McVaugh [145] und Rao [146] setzt sich die kinetische Energie in einem ortsfesten Koordinatensystem wie folgt zusammen:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}_x^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_y^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_z^2 + \frac{1}{2}J_x\dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}_y^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}_z^2 - \frac{1}{2}J_x\dot{\theta}_x(\dot{\theta}_z\theta_y - \dot{\theta}_y\theta_z). \quad (2.3)$$

Die ersten sechs Terme entsprechen geläufigen Bedingungen der klassischen Mechanik [147]. Der letzte Term ist für den gyroskopischen Effekt verantwortlich und erzeugt im linearen Fall die Kreiselmatrix \mathbf{G} . Für den stationären Betrieb existiert die etablierte Annahme, dass diese Kreiselwirkung maßgeblich durch den mittleren Anteil der konstanten Drehzahl ausgelöst wird, siehe hierzu auch Gasch et al. [126] und Kiesel [148]. Mit anderen Worten bedeutet das, dass im gyroskopischen Anteil $\dot{\theta}_x \approx \Omega$ als bekannt gesetzt wird und somit die nichtlineare Wechselwirkung mit der relativen Torsionsschwingung aufgegeben wird. Dementsprechend gilt die nachfolgende Gleichung nur bedingt für Berechnungen, die dieses Kriterium wesentlich verletzen - wie beispielsweise eine instationäre Simulation mit einer hohen Drehzahländerung.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\Omega}_{-\mathbf{h} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +J_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_x & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

In den eingebundenen Veröffentlichungen [2] und [3] werden die rotierenden Bauteile als starre Torsionsschwinger angenommen, während in der eingebundenen Veröffentlichung [4] die räumlich vollständige Elastizität berücksichtigt wird. Dementsprechend wird nachfolgend die Anwendung des LAGRANGE-Formalismus für beide Modellierungsansätze exemplarisch aufgezeigt.

2.1.1 Rotierendes Mehrkörpersystem

Nachdem in einem Stirnradgetriebe die Rotation einen ungefesselten FHG darstellt, ist eine reine Torsionsschwingungsanalyse zielführend, um das grundsätzliche Schwingungs- und Anregungsverhalten des Antriebsstrangs zu untersuchen. Diese Betrachtungsweise wird unter anderem in den eingebundenen Veröffentlichungen [2] und [3] eingesetzt.

Exemplarisch ist eine Getriebestufe in Abbildung 2 skizziert. Diese besteht aus zwei starren Wellen, die entlang der Eingriffsstrecke \overline{AE} über eine konstante Verzahnungssteifigkeit $k_{z\gamma}$ miteinander gekoppelt sind. Die Anbindung am jeweiligen Radkörper erfolgt an den beiden Tangentialpunkten T_1 und T_2 , die auf den entsprechenden Grundkreisradien $r_{b,1}$ und $r_{b,2}$ liegen. Die Geometrie einer Evolventenverzahnung stellt hierbei sicher, dass die Richtung der Kraftübertragung über alle Wälzstellungen hinweg unverändert bleibt [149]. Eine neue Methode zur effizienten Ermittlung der zeitvarianten Verzahnungssteifigkeit ist Gegenstand der eingebundenen Veröffentlichung [1] und wird im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 2.2 reflektiert. Der Einbau als Parametererregung in eine dynamische Analyse im Frequenzbereich erfolgt in Kapitel 2.5.2 sowie in der eingebundenen Veröffentlichung [3] für das rotatorische MKS.

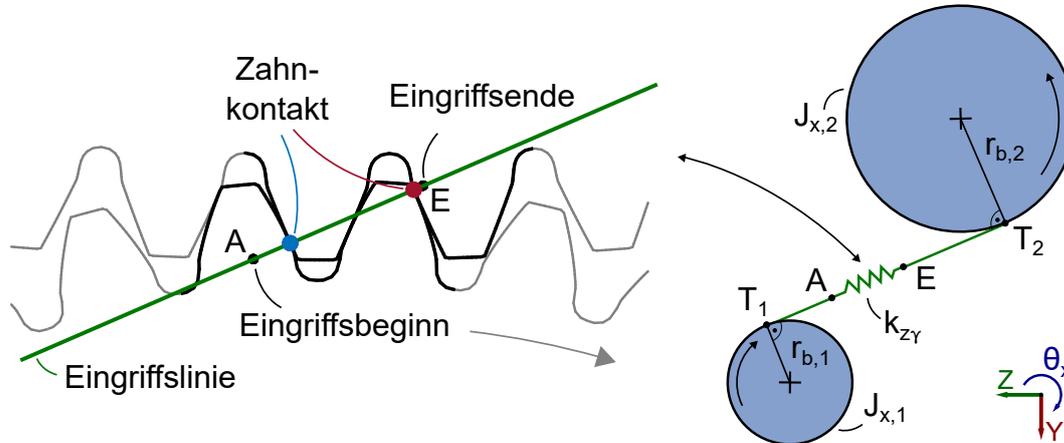


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines rotatorischen Ersatzsystems für eine Stirnradstufe.

Die Massenträgheit der ersten Welle ist $J_{x,1}$ und die der zweiten Welle ist $J_{x,2}$. Äquivalent bezeichnen die Drehwinkel $\theta_{x,1}$ und $\theta_{x,2}$ die jeweiligen Radkörperbewegungen im positiven Drehsinn. In Übereinstimmung mit Kahraman et al. [150], entspricht die kinetische und potentielle Energie der Stirnradstufe

$$T = \frac{1}{2}J_{x,1}\dot{\theta}_{x,1}^2 + \frac{1}{2}J_{x,2}\dot{\theta}_{x,2}^2, \quad V = \frac{1}{2}k_{z\gamma}(r_{b,1}\theta_{x,1} + r_{b,2}\theta_{x,2})^2. \quad (2.5)$$

Die Anwendung der LAGRANGE-Gleichung zweiter Art liefert die folgende Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{x,1} & 0 \\ 0 & J_{x,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{x,1} \\ \ddot{\theta}_{x,2} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{z\gamma}r_{b,1}r_{b,1} & k_{z\gamma}r_{b,1}r_{b,2} \\ k_{z\gamma}r_{b,2}r_{b,1} & k_{z\gamma}r_{b,2}r_{b,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{x,1} \\ \theta_{x,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{h} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\right)^T}. \quad (2.6)$$

Die Massenmatrix \mathbf{M} enthält ausschließlich Diagonaleinträge. Der Vektor \mathbf{h} setzt sich aus dem Produkt der symmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und dem Verschiebungsvektor \mathbf{q} der generalisierten Koordinaten zusammen. Eine Erweiterung um zusätzliche Komponenten des Antriebsstrangs ist ohne Einschränkung möglich. Eine passende Beschreibung ist beispielsweise bei Heider [18] und auch bei Dresig und Holzweißig [151] zu finden.

2.1.2 Elastisches Gesamtsystem

Eine Torsionsschwingungsanalyse ist aussagekräftig im Bezug auf das grundsätzliche Schwingungsverhalten im Antriebsstrang. Für eine korrekte Abbildung der Zahneingriffsbedingungen allerdings ist zusätzlich zur Torsionsbewegung auch die longitudinale und laterale Nachgiebigkeit und damit das gesamte Verformungsverhalten der umgebenden Anbaukomponenten von ausgeprägter Bedeutung [24]. Aus diesem Grund ist es ratsam, bei der Ermittlung der zeitvarianten Verzahnungssteifigkeit die Elastizität der rotierenden Getriebewellen im dreidimensionalen Raum angemessen zu berücksichtigen. Auf diese Weise ist es möglich, zielsicher Flankenlinien- und Profilmodifikationen abzuleiten, die das Anregungsverhalten auf ein Minimum reduzieren. Passend hierzu sei an dieser Stelle exemplarisch auf die Arbeit von Hoppe und Pinnekamp [12] sowie auf die Arbeit von Kohn [13] verwiesen. Als primäre Maßnahme optimiert das die Geräusentwicklung in einem Zahnradgetriebe wesentlich. Die dynamischen Wechselwirkungen zwischen dem Zahnkontakt und dem Welle-Lager-System sind beispielsweise Gegenstand der Arbeiten von Bihr [22] und von Utakapan [23].

Darüber hinaus verbleibt die Tatsache, dass die Quantifikation der Körperschallübertragung eine adäquate Betrachtung erfordert. Nach Küçükay [10] stellen die wechselnden Kontaktbedingung

im Zahneingriff den Ursprung der maßgeblichen Geräuschanregung in einem Getriebe dar. Eine Schrägverzahnung erzeugt im Einklang zur Kraftübertragung oszillierende Schwingungen in axialer, radialer und tangentialer Richtung [149]. Dementsprechend erfolgt auch die Weiterleitung dieser Vibrationen in Form von Körperschall in allen Raumrichtungen. Aus diesem Grund ist es notwendig, die elastische Beweglichkeit im dreidimensionalen Raum dynamisch korrekt zu erfassen, um später zuverlässig Aussagen über die abgestrahlte Schalleistung an der Gehäuseoberfläche treffen zu können. Eine derartige Untersuchung des gesamten elastischen Transferpfades ist Gegenstand der eingebundenen Veröffentlichung [4]. Hier wird in dynamischer Wechselwirkung mit dem Zahneingriff sowohl das elastischen Verhalten der rotierenden Getriebewellen als auch das der angebundenen Gehäusestruktur erfasst. Nachdem im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich hydrodynamische Radialgleitlager in Betracht kommen, erfolgt die Kopplung zwischen den rotierenden Getriebewellen und der Gehäusestruktur pro Lagerstelle über eine FSI. Nachfolgend sind die einzelnen Komponenten und deren relevante Modellbildung näher beschrieben, bevor in Kapitel 2.2 die Anregung des Zahneingriffs detaillierter fokussiert wird.

Rotierende Getriebewelle

Nachdem Getriebewellen hauptsächlich aus aneinandergereihten Zylindern bestehen, erscheint die Anwendung der Balkentheorie [152, 153] entlang der einzelnen Wellenabschnitte sinnvoll. Eine Approximation durch Volumenkörper im Sinne der FEM [154] lässt die Anzahl der FHGs rasant ansteigen und erhöht sowohl die Rechenzeit als auch den Speicherbedarf. Der potentielle Mehrwert in der Modellgenauigkeit ist im Rahmen dieser Arbeit von weniger Bedeutung als die Effizienz des Berechnungsalgorithmus, siehe hierzu unter anderem eine passende Modellstudie von Papies [155]. Daher wird nachfolgend die gewählte Abbildungsvorschrift in der eingebundenen Veröffentlichung [4] nach TIMOSHENKO [156] aufgezeigt. Die eingesetzte Formulierung basiert maßgeblich auf der Arbeit von Nelson [157]. Ein aktuelles Anwendungsbeispiel dieser Balkentheorie in Form einer modalen Untersuchung unter Berücksichtigung des gyroskopischen Effekts in einer Getriebestufe zeigen Chen et al. [158].

In Abbildung 3 ist ein willkürlich gewählter Absatz einer exemplarischen Ritzelwelle hervorgehoben. Sowohl die Massendichte ρ , als auch der Elastizitätsmodul E , die Querkontraktion ν und folglich der resultierende Schubmodul G werden abschnittsweise konstant angenommen. Ein Zylinder definiert sich geometrisch vollständig durch die charakteristischen Größen: Länge L , Au-

ßendurchmesser D_A und Innendurchmesser D_I . Weitere Geometriedaten wie die Fläche A und das Flächenmoment zweiten Grades I können mithilfe der Kreiszahl π entsprechend

$$A = \frac{\pi(D_A^2 - D_I^2)}{4}, \quad I = \frac{\pi(D_A^4 - D_I^4)}{64} \quad (2.7)$$

ausgerechnet werden.

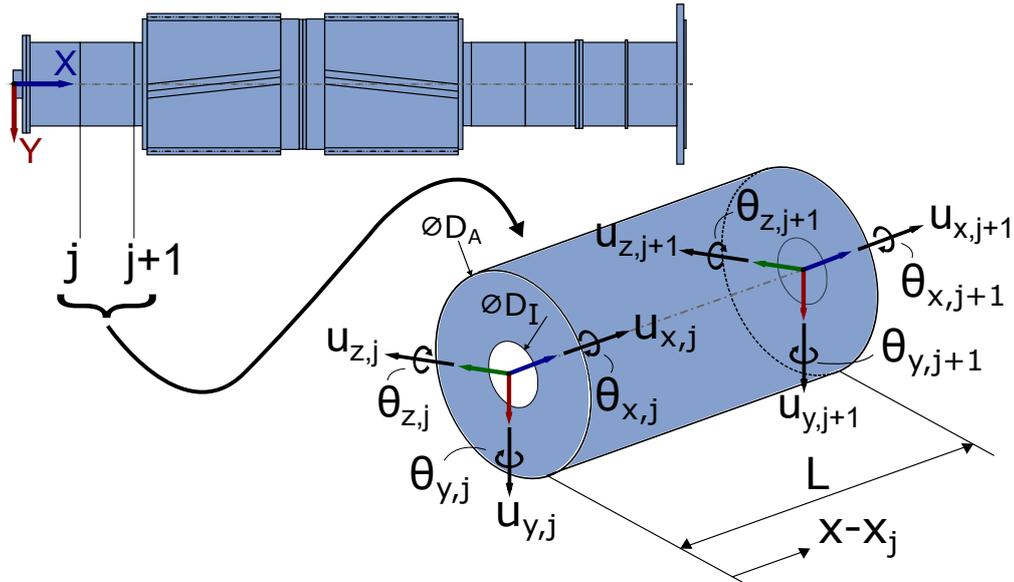


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Diskretisierung eines rotierenden Wellenabsatzes.

An dieser Stelle wird die normierte Laufvariable ξ als Quotient der relativen Laufkoordinate $x - x_j$ und der Absatzlänge L zur Steigerung der Lesbarkeit eingeführt. Die Massenbelegung μ , das polare Massenträgheitsmoment j_P sowie das diametrale Massenträgheitsmoment j_D sind gleichermaßen auf die Länge bezogen. So verbleibt die mathematische Formulierung allgemein und gilt daher auch für konisch verlaufende Wellenabsätze [159].

$$\xi = \frac{x - x_j}{L}, \quad \mu = \rho A, \quad j_P = 2\rho I, \quad j_D = \frac{j_P}{2}, \quad \Phi = \frac{12EI}{\kappa GAL^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.8)$$

Die Hilfsvariable Φ enthält den Schubkorrekturfaktor κ . Eine hohe Schubsteifigkeit ($\Phi \ll 1$) bewirkt, dass der Querschnitt auch im verformten Zustand senkrecht zur Balkenachse orientiert ist. In der eingebundenen Veröffentlichung [4] wird κ für jeden Abschnitt nach Cowper [160] berechnet:

$$\kappa = \frac{6(1 + \nu)(1 + m_f^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m_f^2)^2 + (20 + 12\nu)m_f^2}, \quad m_f = \frac{D_A}{D_I}. \quad (2.9)$$

Zur kontinuierlichen Beschreibung der Verformungen entlang eines Wellenabschnittes zwischen den Knotenpunkten j und $j+1$ dienen folgende Polynome als Formfunktionen [161]:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1-\xi \\ L/2(\xi-\xi^2) \\ \xi \\ L/2(-\xi+\xi^2) \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1/L(6\xi^2-6\xi) \\ 1-4\xi+3\xi^2 \\ 1/L(-6\xi^2+6\xi) \\ 3\xi^2-2\xi \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\xi \\ 0 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

$$\Psi = \frac{1}{1+\Phi} (\alpha + \Phi\beta), \quad \Theta = \frac{1}{1+\Phi} (\gamma + \Phi\delta). \quad (2.11)$$

Die zugehörige Linearkombination mit den generalisierten Koordinaten an den Enden des Wellenabsatzes als Koeffizienten definiert schließlich die axiale, radiale und tangential Verschiebungsbeziehung entlang der Laufkoordinate x :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 & 0 & \Psi_4 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & -\Psi_2 & 0 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & -\Psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Theta_1 & 0 & \Theta_2 & 0 & 0 & 0 & -\Theta_3 & 0 & \Theta_4 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 & 0 & 0 & \Theta_2 & 0 & \Theta_3 & 0 & 0 & 0 & \Theta_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x,j} \\ u_{y,j} \\ u_{z,j} \\ \theta_{x,j} \\ \theta_{y,j} \\ \theta_{z,j} \\ u_{x,j+1} \\ u_{y,j+1} \\ u_{z,j+1} \\ \theta_{x,j+1} \\ \theta_{y,j+1} \\ \theta_{z,j+1} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Abgesehen von der zusätzlichen Integration über die Länge L eines Wellenabsatzes, entspricht die kinetische Energie der Definition aus Gleichung (2.3) für die starre Getriebewelle:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \mu (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L j_P \dot{\theta}_x^2 + j_D (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^L j_P \Omega (\dot{\theta}_z \theta_y - \dot{\theta}_y \theta_z) dx. \quad (2.13)$$

Die potentielle Energie hingegen ist nun von Null verschieden. Die Berücksichtigung der Wellenelastizität liefert:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \kappa GA \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta_z \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L 2GI \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + EI \left[\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L F_x \left[\frac{\partial}{\partial x} (u'_x + u'_y + u'_z) \right]^2 dx + F_x \frac{2I}{A} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.14)$$

Die Anwendung des LAGRANGE Formalismus führt letztendlich zur ungedämpften Bewegungsgleichung eines einzelnen Wellenabsatzes

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma]\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Zur Beschreibung der gesamten Welle ist es notwendig, die Matrizen der einzelnen Wellenabschnitte e im Sinne der FEM zu kombinieren. Dieser Assemblierungsprozess ist beispielsweise in den Büchern von Klein [153], Rieg et al. [162] und Bathe [154] erklärt. In der vorliegenden Arbeit wird das für N_{ele} Wellenabsätze formell wie folgt indiziert:

$$\mathbf{M} \leftarrow \mathbf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \mathbf{M}^{(e)}, \quad \mathbf{G} \leftarrow \mathbf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \mathbf{G}^{(e)}, \quad \mathbf{K} \leftarrow \mathbf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \mathbf{K}^{(e)}, \quad \mathbf{K}_\sigma \leftarrow \mathbf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \mathbf{K}_\sigma^{(e)}. \quad (2.16)$$

Im Gegensatz zur starren Getriebewelle sind die auftretenden Matrizen auch neben der Diagonalen mit koppelnden Einträgen besetzt. Neben der rein-symmetrischen Massenmatrix \mathbf{M} , erweitert die schief-symmetrische Kreiselmatrix \mathbf{G} das Gleichungssystem um eine dynamische Komponente. Die rein-symmetrische (Anfangs-)Spannungsmatrix \mathbf{K}_σ berücksichtigt den Einfluss einer anliegenden Axialkraft F_x auf die rein-symmetrische Systemsteifigkeit \mathbf{K} .

Gehäusestruktur

Die Geräuschenstehung in der Verzahnung wird in Form von Körperschall über das Welle-Lager-System in die Gehäusestruktur eingeleitet. Eine korrekte Abbildung des dynamischen Gehäuserverhaltens bedingt daher ebenfalls die Qualität der prognostizierten Akustikeigenschaften eines Zahnradgetriebes. Der Transferpfad wird durch die komplexe Geometrie der elastischen Gehäusestruktur und dem zugehörigen Resonanzverhalten maßgeblich beeinflusst. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit dient die FEM [154] der numerischen Modellbildung des Gehäuses.

Aus Gewichts- und Kostengründen sind Gehäusegeometrien großer Getriebe meist dadurch charakterisiert, dass vorzugsweise großflächige und dünne Gehäusewände zur Einhausung der rotierenden Getriebewellen herangezogen werden. Eine ausreichende Stabilität wird durch zusätzliche Streben und Rippen gewährleistet. Aus Sicht der Simulation kann demnach ein wesentlicher Anteil der Gehäusestruktur als Blechkonstruktion angesehen werden. Im Sinne der FEM erlauben hier Scheibenelemente gemäß Abbildung 4 eine effiziente Betrachtung. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine vollständige Modellierung durch Scheibenelemente meist nicht möglich ist. Für die Beschreibung einer angebauten Verrohrung erscheinen Balkenelemente sinnvoller, während beispielsweise Lagerschalen und -brammen oftmals den Einsatz von Volumenelementen fordern.

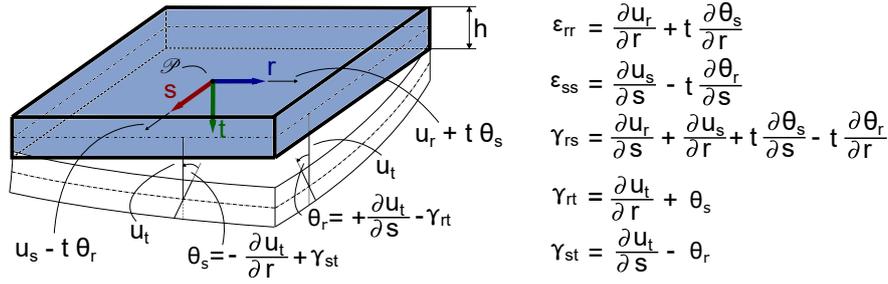


Abbildung 4: Zusammenhang der Dehnungen und Verschiebungen im überlagerten Scheibenelement als Kombination aus Membran und MINDLIN-REISSNER-Platte.

Die kinetische und potentielle Energie für das Scheibenelement in Abbildung 4 ist:

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dA, \quad V = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_p \boldsymbol{\varepsilon} dA. \quad (2.17)$$

Hier bezeichnet ρ ebenfalls die Massendichte. Die Materialmatrizen \mathbf{E}_m und \mathbf{E}_p definieren die Verhältnisse des HOOKESCHEN Gesetzes im ebenen Spannungszustand für den Membran- und Plattenanteil, siehe zum Beispiel Rieg et al. [162]. Der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ beinhaltet die zugehörigen Dehnungen in VOIGT-Notation [162]. Der Zusammenhang zu den Verschiebungen $\mathbf{u} = [u_r \ u_s \ u_t \ \theta_r \ \theta_s]^T$ im zugehörigen Elementkoordinatensystem \mathcal{P} erfolgt gemäß Abbildung 4 über die angegebenen Differentiationen. Im Sinne der FEM werden diese Verschiebungen \mathbf{u} als Linearkombination in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}_j = [u_{r,j} \ u_{s,j} \ u_{t,j} \ \theta_{r,j} \ \theta_{s,j}]^T$ ausgedrückt. Im linearen Fall existieren vier Eckknoten und entsprechend die Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{j=1}^4 u_{r,j} g_j(r, s), & u_s &= \sum_{j=1}^4 u_{s,j} g_j(r, s), & u_t &= \sum_{j=1}^4 u_{t,j} g_j(r, s), \\ \theta_r &= \sum_{j=1}^4 \theta_{r,j} g_j(r, s), & \theta_s &= \sum_{j=1}^4 \theta_{s,j} g_j(r, s). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Einführung der Ansatzfunktionen $g_j(r, s)$ bringt die kinetische und potentielle Energie für ein einzelnes Scheibenelement e in die Form:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (2.19)$$

Die Anwendung des LAGRANGE-Formalismus ergibt für ein dynamisches System, das aus mehreren Scheibenelementen N_{ele} zusammengesetzt ist, folgende Bewegungsgleichung [162]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{M}^{(e)}, \quad \mathbf{K} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{K}^{(e)}. \quad (2.20)$$

Im Detail sind die Materialmatrizen \mathbf{E}_m und \mathbf{E}_p für ein Element wie folgt definiert:

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} M & M\nu & 0 & 0 & 0 \\ M\nu & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} B & B\nu & 0 & 0 & 0 \\ B\nu & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} M &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \\ B &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ S &= Gh\kappa. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Hierbei beschreiben M , B und S die Membran-, Biege- und Schubsteifigkeit des gegebenen Scheibenelements. Neben der Scheibendicke h und den gewohnten Materialparametern Elastizitätsmodul E , Querkontraktion ν und Schubmodul G definiert κ hier abermals einen Schubkorrekturfaktor. In der vorliegenden Arbeit wird dieser stets auf den Wert $\frac{5}{6}$ gesetzt [154, 162].

Darauf aufbauend kann in Anlehnung an Sinambari und Sentpali [163] die Wellenlänge λ des Körperschalls in Abhängigkeit der Frequenz f mithilfe der auftretenden Schallgeschwindigkeit c im Festkörper berechnet werden. Die zugehörige Schallgeschwindigkeit c ist jeweils für Membran-, Biege- und Schubwellen entsprechend den Indizes M , B und S wie folgt definiert:

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad c_M = \sqrt{\frac{M}{\rho h}}, \quad c_B = \sqrt{2\pi f} \sqrt[4]{\frac{B}{\rho h}}, \quad c_S = \sqrt{\frac{S}{\rho h}}. \quad (2.22)$$

Nachdem Biegeschwingungen als senkrechte Komponente zur Oberfläche den maßgeblichen Anteil der Schallabstrahlung bestimmen, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit versucht, die folgende Vorschrift zur Definition der Kantenlänge (Elementgröße) e_{\boxplus} einzuhalten. Diese Diskretisierung basiert auf den Untersuchungen und Ergebnissen von Langer et al. [164].

$$\frac{e_{\boxplus}}{[\text{mm}]} = 100 \cdot \underbrace{\sqrt[4]{\frac{\frac{E}{[\text{N/mm}^2]} \pi^2}{192(1-\nu^2) \frac{\rho}{[\text{kg/m}^3]}}}}_{\text{f. Stahl: } \approx 110} \cdot \sqrt{\frac{\frac{h}{[\text{mm}]}}{\frac{f_0}{[\text{Hz}]}}}. \quad (2.23)$$

Zur Verifikation dieser Abschätzung wird hier exemplarisch das Eigenverhalten einer rechteckigen

Platte in Abhängigkeit der Elementgröße untersucht. Die fokussierte Platte ist auf der linken und rechten Seite entlang der gesamten Breite gelenkig gelagert, siehe Abbildung 5. Die obere Längsseite ist fest eingespannt. Die geometrischen Daten sowie die Materialparameter sind in Tabelle 1 zusammengetragen. Bei der Diskretisierung kommen hier im Sinne der FEM Scheibenelemente nach [165–167] zum Einsatz. Das passende Eigenwertproblem lautet [126]:

$$\left[\mathbf{K} - (2\pi f_{0,i})^2 \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Hier beschreibt $\boldsymbol{\psi}_i$ den zugehörigen Eigenvektor zur Eigenfrequenz $f_{0,i}$. Für die verschiedenen Diskretisierungsstufen dient der relative Fehler ε_r als Bewertungsmaß für die resultierenden Eigenfrequenzen $f_{0,i}$. Für die Form und Ausprägung der senkrechten Eigenmoden stellt das Modal Assurance Criterion (MAC) den Indikator für die Netzqualität dar:

$$\varepsilon_{r,i} = \frac{f_{0,A,i} - f_{0,B,i}}{f_{0,B,i}}, \quad \text{MAC}_i = \frac{|\boldsymbol{\psi}_{A,i}^T \boldsymbol{\psi}_{B,i}|^2}{\left(\boldsymbol{\psi}_{A,i}^T \boldsymbol{\psi}_{A,i} \right) \left(\boldsymbol{\psi}_{B,i}^T \boldsymbol{\psi}_{B,i} \right)}. \quad (2.25)$$

Das Modell B entspricht dem gewünschten Referenzsystem. Dieses Modell B ist hier entlang der Länge und Breite gleichmäßig in 75 Elemente unterteilt. Die Elementanzahl im Modell A wird, beginnend bei fünf, sukzessiv um eins erhöht. Länge und Breite werden hierbei simultan angepasst. Untersucht werden die ersten vier Eigenmoden, deren Eigenfrequenzen und Bewegungsformen in Abbildung 5 für das Modell B dargestellt sind. Die Ergebnisse der Netzstudie sind in Abbildung 6 zusammengefasst.

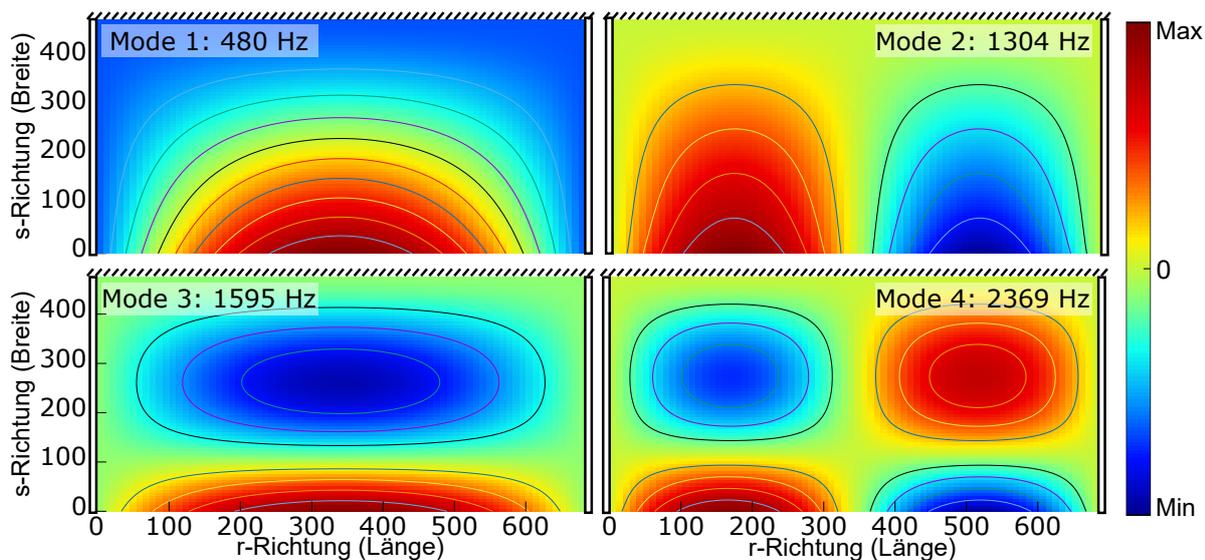


Abbildung 5: Darstellung der ersten vier Biegemoden der untersuchten Platte.

Beschreibung	Zeichen	Einheit	Wert
Breite	B	mm	475.0
Länge	L	mm	685.0
Dicke	h	mm	60.0
Elastizitätsmodul	E	N/mm ²	206000.0
Querkontraktion	ν	-	0.29
Massendichte	ρ	kg/m ³	7850.0

Tabelle 1: Technische Daten der untersuchten Platte.

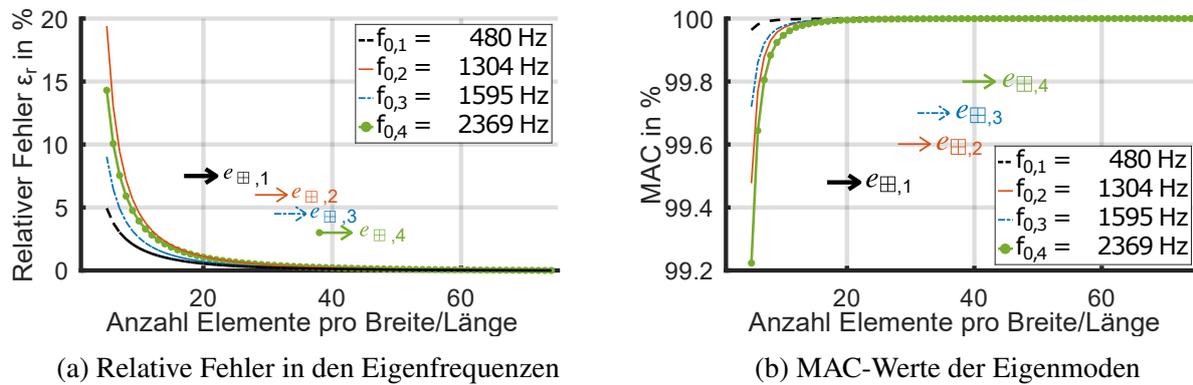


Abbildung 6: Einfluss der Netzqualität auf die Ergebnisse der Modalanalyse.

Die Ergebnisse zeigen, dass für die rechteckige Platte knapp 20 Elemente genügen, um die erste Eigenfrequenz bei 480 Hz ordnungsgemäß abzubilden. Eine Erhöhung des zu betrachtenden Frequenzbereichs fordert sinngemäß eine feinere Netzauflösung. Die Abschätzung der maximal zulässigen Elementgröße nach Gleichung (2.23) entspricht dieser Anforderung angemessen. Aus diesem Grund stellt Gleichung (2.23) im Rahmen dieser Arbeit eine allgemeine Richtlinie für die Netzerstellung der Gehäusestruktur dar.

Hydrodynamisches Radialgleitlager

Lager stellen allgemein ein Bindeglied zwischen den Getriebewellen und der Gehäusestruktur dar. Neben der mittleren statischen Belastung sind die Lager den oszillierenden Vibrationen der Wellenstruktur ausgesetzt, die durch die dynamische Kraftanregung der Verzahnung erzwungen werden. Dementsprechend ergibt sich eine fluktuierende Lagerreaktionskraft. Rückwirkend beeinflusst diese wiederum die Kontaktbedingungen im Zahneingriff [22, 23]. Darüber hinaus, gemäß dem Prinzip von Actio und Reactio, wird diese Rückstellkraft als Anregung in die Gehäusestruktur eingeleitet. Aus diesem Grund ist eine korrekte Abbildung des Lagerübertragungsverhaltens

unerlässlich für die Quantifikation der Körperschallausbreitung im Gesamtsystem Verzahnung-Welle-Lager-Gehäuse.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich hydrodynamische Radialgleitlager betrachtet. Diese zeichnen sich grundsätzlich durch ein anregungsarmes und ruhiges Laufverhalten aus, das für die Getriebeakustik von Vorteil ist [168]. Ein erfolgreicher Betrieb fordert, dass die Relativbewegung zwischen der rotierenden Getriebewelle und der ruhenden Lagerschale einen hydrodynamischen Schmierfilm aufbaut, der die beiden Oberflächen vorzugsweise durch eine Vollschrägung (Flüssigkeitsreibung) verschleißfrei voneinander trennt. Der entstehende Druck im eingesetzten Schmiermittel (z.B. Öl) muss hierbei ausreichend hoch sein, um den statischen und dynamischen Betriebslasten entgegenzuwirken. Aus diesem Grund ist an dieser Stelle eine Berücksichtigung der FSI zielführend.

Zur Beschreibung der hydrodynamischen Druckverteilung hat sich aufgrund des geringen Spaltmaßes die REYNOLDS-Gleichung [169] in der Tribologie und Schmierungstechnik etabliert. Folgende Annahmen vereinfachen die allgemeingültigen NAVIER-STOKES-Gleichungen [170] der Strömungsmechanik im Rahmen der vorliegenden Arbeit:

- Das Fluid verhält sich wie ein NEWTON'SCHES-Fluid. Das bedeutet, die Scherkräfte sind proportional zum Geschwindigkeitsgradient.
- Die Trägheitskräfte des Fluids sind gegenüber den viskosen Kräften vernachlässigbar.
- Die Schmierfilmhöhe ist im Vergleich zu den beiden anderen Raumrichtungen klein, sodass der Druck über die Höhe konstant angenommen werden kann.
- Es existiert kein Schlupf zwischen Festkörper und Fluid, sodass die Geschwindigkeiten an dieser Systemgrenze zusammenfallen.
- Das Fluid verhält sich isotherm.

In Abbildung 7 ist schematisch der Betrieb einer mit Ω rotierenden Getriebewelle in einem hydrodynamischen Radialgleitlager dargestellt. Darüber hinaus definiert ein vergrößerter Auszug des Schmierspalt das Kräftegleichgewicht an einem infinitesimal kleinem Fluidelement, das zwischen der rotierenden Welle (Körper 1) und der stehenden Lagerschale (Körper 2) als Schmiermittel fungiert. Der Druck p und die jeweiligen Scherkräfte τ werden hier in einem zusätzlichen lokalen Hilfskoordinatensystem \mathcal{L} bezüglich (χ, ψ, ζ) zu Zwecken der Übersichtlichkeit dargestellt. Dementsprechend ist die Schmierspalthöhe h entlang der Hochachse ζ gegeben. Die Lagerbreite b_L erstreckt sich entlang der Achse ψ und die Raumrichtung χ beschreibt folglich die Umfangs-

koordinate ϕ im abgewickelten Zustand.

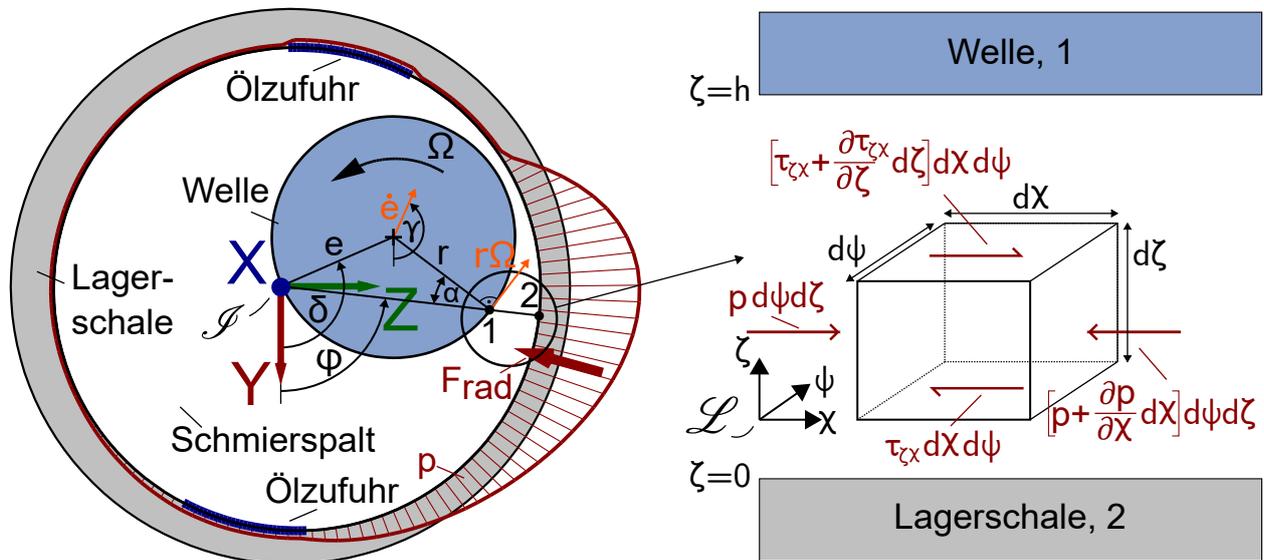


Abbildung 7: Rotierende Getriebewelle in einem hydrodynamischen Gleitlager (links) und lokale Definition der Impulserhaltung an einem infinitesimal kleinen Fluidelement.

Die passende REYNOLDS-Gleichung zur Beschreibung des hydrodynamischen Sachverhalts ist in Gleichung (2.26) angegeben. Eine detaillierte Herleitung zeigt beispielsweise Hamrock [171].

$$\nabla_{\circ} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{-\rho_S h^3}{12\eta_S} \right) \frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{h}{2} (\dot{u}_{\chi,1} + \dot{u}_{\chi,2}) \rho_S \\ \left(\frac{-\rho_S h^3}{12\eta_S} \right) \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{h}{2} (\dot{u}_{\psi,1} + \dot{u}_{\psi,2}) \rho_S \end{array} \right] + \frac{\partial (\rho_S h)}{\partial t} = 0. \quad (2.26)$$

Als Materialparameter des Schmiermittels beeinflussen die Dichte ρ_S und die dynamische Viskosität η_S die Druckverteilung. Der NABLA-Operator ∇ wird hier als Skalarprodukt auf ein zweidimensionales Vektorfeld angewandt und stellt daher die Divergenz dar. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erfolgt in der eingebundenen Veröffentlichung [4] mittels der FEM in Anlehnung an die Arbeiten von Reddi [172] und von Argyris und Scharpf [173].

Neben der Rotationsgeschwindigkeit Ω der Getriebewelle zählt noch die Spalthöhe h und die dynamische Spalthöhenänderungsgeschwindigkeit \dot{h} zu den kinematischen Randbedingungen. Unter der Annahme, dass die Lagerschale keinerlei Bewegungen ausführt ($\dot{u}_{\chi,2} = \dot{u}_{\psi,2} = 0$) und in axialer Richtung ebenfalls keine Relativbewegung stattfindet ($\dot{u}_{\psi,1} = 0$), ergeben sich die gesuchten Größen nur in Abhängigkeit der radialen Zapfenverschiebung e und der radialen Zapfengeschwindigkeit \dot{e} . Der Zapfenradius $r = \frac{D_A}{2}$ ist bereits durch die Definition der Wellengeometrie bekannt.

Es sei angemerkt, dass eine allgemeine Beziehung der kinematischen Zusammenhänge sowie deren explizite Herleitung unter anderem der Arbeit von Krinner [174] entnommen werden kann.

Im Inertialsystem \mathcal{I} ergeben sich folgende Auslenkungen:

$$\begin{aligned} u_y &= e \cdot \cos(\delta), & u_z &= e \cdot \sin(\delta), \\ \dot{u}_y &= \dot{e} \cdot \cos(\gamma), & \dot{u}_z &= \dot{e} \cdot \sin(\gamma). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die anfängliche Spalthöhe h_0 erfährt demnach folgende Änderung in Abhängigkeit der Umfangskoordinate ϕ :

$$h = h_0 - u_y \cdot \cos(\phi) - u_z \cdot \sin(\phi). \quad (2.28)$$

Die Fluidgeschwindigkeiten ergeben sich äquivalent in tangentialer Richtung zu

$$\dot{u}_{\chi,1} = r\Omega \underbrace{\cos(\alpha)}_{\approx 1} + \dot{u}_z \cdot \cos(\phi) - \dot{u}_y \cdot \sin(\phi) \quad (2.29)$$

und in Höhenrichtung für den Quetscheffekt entsprechend zu

$$\dot{h} = -\dot{u}_y \cdot \cos(\phi) - \dot{u}_z \cdot \sin(\phi) - (\dot{u}_z \cdot \cos(\phi) - \dot{u}_y \cdot \sin(\phi)) \frac{1}{r} (u_y \cdot \sin(\phi) - u_z \cdot \cos(\phi)). \quad (2.30)$$

Als hydrodynamische Randbedingungen für den Druck p kommen im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich DIRICHLET-Bedingungen zum Einsatz. Im Einklang mit Abbildung 8 wird der Druck p am (longitudinal) vorderen und hinteren Ende des Gleitlagers dem Umgebungsdruck p_{umg} gleichgesetzt. In den Taschenbereichen wird der Druck auf den Zuführdruck p_{zu} eingestellt. Zusätzlich ist es notwendig, bei der Betrachtung im abgewickelten Zustand den Zylinder numerisch an der Stelle 2π über die gesamte Breite wieder sukzessiv mit dem zugehörigen Beginn zu verbinden.

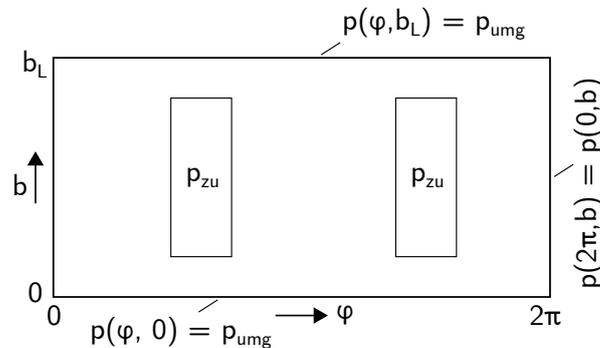


Abbildung 8: Hydrodynamische Randbedingungen für den Druck p .

Bei der Berechnung können, entgegen der Realität, negative Drücke in der mathematischen Lösung entstehen. Das indiziert aus physikalischer Sicht eine Kavitation. Üblicherweise wird in der Simulation angenommen [175], dass das Schmiermittel unterhalb des Umgebungsdruckes p_{umg} zu kavitieren beginnt und sich dort lokale Dampfblasen bilden, die das Potential zum Kollabieren haben. Die Berücksichtigung dieses Effektes erfordert eine angemessene Anpassung in der numerischen Behandlung. Ein effizientes und vor allem stabiles Kavitationsmodell existiert bereits seit 1914 als GÜMBEL-Bedingung [176]:

$$p(\phi, b) = \begin{cases} p(\phi, b) & \text{wenn } p(\phi, b) > p_{\text{umg}} \\ p_{\text{umg}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.31)$$

Die Anwendung der GÜMBEL-Bedingung verletzt allerdings den Massenerhaltungssatz, da die REYNOLDS-Gleichung durch diese nachträgliche und radikale Anpassung nicht mehr erfüllt ist. Ein weiterverbreitetes Berechnungsmodell, das dieser Tatsache entgegenwirkt, ist der Ansatz von JAKOBSSON-FLOBERG-OLSSON (JFO) [177–179]. Im Druckgebiet wird hier analog zur gegebenen Gleichung (2.31) dieselbe Bedingung gefordert. Aufgrund des konstant gesetzten Druckes $p(\phi, b) = p_{\text{umg}}$ im Kavitationsgebiet erlischt hierdurch der erste, gradientenbasierte Term in der REYNOLDS-Gleichung (2.26). Die Idee ist es nun, die Dichte des Schmiermittels als unbekannte Größe in der verbleibenden REYNOLDS-Gleichung für das Kavitationsgebiet anzusehen, sodass dieser Teil der Gleichung wieder seine Gültigkeit erhält. Folglich bedarf es einer zusätzlichen Iteration, um das Kavitationsgebiet im Einklang mit dem Druckgebiet entsprechend aufzulösen. Mathematisch stellt das ein lineares Komplementaritätsproblem dar, siehe Lengiewicz et al. [180]. Bei der Lösung mit der Finite Differenzen Methode (FDM) [181] ist der ELROD-Algorithmus [175], der hierfür den Füllgrad $F = \rho_S / \rho_{S,0}$ einführt, weitverbreitet [182]. Eine effiziente und robuste Steigerung dieser Lösungsmethodik zeigen beispielsweise Miraskari et al. [183]. Nichtsdestotrotz reagiert das hydrodynamische System numerisch sensibel auf diese Nebenbedingung und spezielle Definitionen unterstützen an dieser Stelle zielführend [174, 184, 185]. Das gilt sowohl für die FDM als auch für die FEM. Eine numerische Alternative ist die Finite Volumen Methode (FVM) [170, 181], die in der Strömungsmechanik allgemein sehr etabliert ist und dementsprechend auch für Radialgleitlagerberechnungen zum Einsatz kommt [186].

Im Rahmen dieser Arbeit wird die FEM in Verbindung mit dem Kavitationsmodell nach GÜMBEL als numerisches Werkzeug gewählt. Die Stabilität und vor allem die Effizienz des eingesetzten Algorithmus überwiegen in den auftretenden Anwendungsfällen erfahrungsgemäß die hochwertigeren Ergebnisse, die mit dem JFO-Modell produziert werden. Exemplarisch sei hierfür in Abbil-

2 Methodisches Vorgehen

Abbildung 9 zeigt den Druckverlauf entlang der Lagermitte bei $b_L/2$ über den Umfang ϕ für ein typisches Kreislager im Getriebebau für Schiffsanwendungen angegeben. Die zugehörigen technischen Daten des Radialgleitlagers sowie die hydrodynamischen Randbedingungen sind vorab in Tabelle 2 aufgelistet.

Beschreibung	Zeichen	Einheit	Wert
Lagerbreite	b_L	mm	140.0
Wellendurchmesser	D_A	mm	280.0
Relatives Lagerspiel	ψ_{rel}	%	1.35
Zapfenversatz	e	μm	121.66
Zapfengeschwindigkeit	\dot{e}	mm/s	0.0
Drehzahl	n	1/min	600
Öl	-	-	ISO-VG-100
Umgebungsdruck	p_{umg}	bar	1.0
Relativer Zuführdruck	p_{zu}	bar	1.5
Öleinspritztemperatur	T_L	$^{\circ}\text{C}$	50.0

Tabelle 2: Technische Daten und Randbedingungen des Kreislagers.

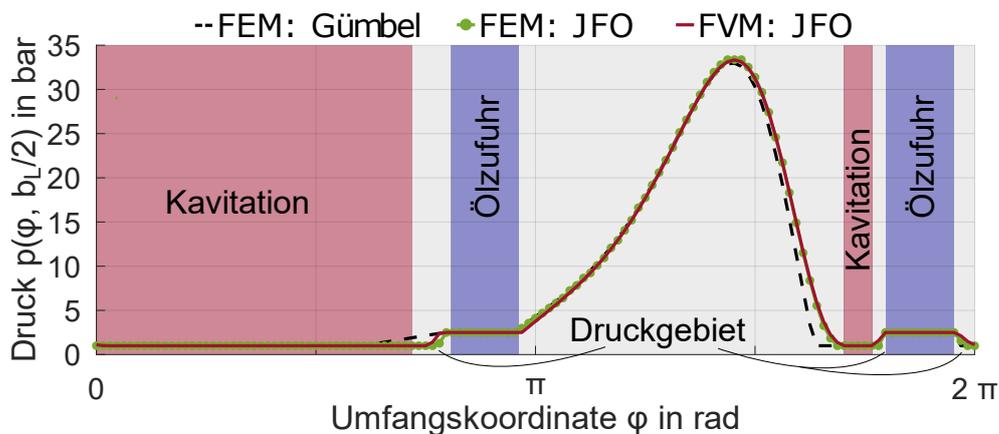


Abbildung 9: Berechneter Druckverlauf p eines stationär betriebenen Kreislagers mit zwei Ölzuführungen.

Die Berechnung wurde hierfür insgesamt dreimal durchgeführt, davon zweimal mit der FEM: Eine Berechnung verfolgt den GÜMBEL-Ansatz und die andere berücksichtigt das JFO-Modell. Die dritte Lösung entstammt einem externen Radialgleitlagerprogramm [186] auf Basis der FVM, das ebenfalls das JFO-Modell heranzieht. Die Ergebnisse zeigen lediglich leichte Unterschiede im Druckverlauf. In der anschließenden Bestimmung der resultierenden Lagerreaktionskraft

$$F_{rad} = \int_A p(\phi, b) dA \quad (2.32)$$

bleibt der Fehler für die fokussierten Anwendungsfälle im Sinne der FSI nahezu unbemerkt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in der vorliegenden Arbeit die Ermittlung der Lagerreaktionskräfte für die rotierende Getriebewelle und auch für die ruhende Lagerschale vollständig zusammenfallen. Der Versatz des Wellenmittelpunktes wird hier wie üblich vernachlässigt. Details hierzu sind unter anderem bei Krinner [174] zu finden.

Für das fokussierte Anwendungsgebiet ist die Berechnung mit der GÜMBEL-Bedingung sehr effizient und zusätzlich hochwertig im Informationsgehalt. Die Simulationsdauer liegt erfahrungsgemäß weit unter einer Sekunde. Im Gegensatz dazu kann das Auflösen der JFO-Bedingung bis zu eine Minute in Anspruch nehmen. Darüber hinaus erschwert der JFO-Ansatz die praktische Implementierung in transienten Vorgängen. Immerhin wird der Füllgrad F im Bezug auf die Dichte des Schmiermittels im Kavitationsgebiet zeitabhängig und bedarf somit einer besonderen Behandlung im Lösungsalgorithmus, siehe hierzu zum Beispiel die passende Untersuchung von Nitzschke et al. [187]. Diese Tatsache und die uneingeschränkte Stabilität stützen die Entscheidungsfindung für die vorliegende Arbeit.

In der eingebunden Veröffentlichung [4] wird die koppelnde Lagerkraft zwischen rotierender Getriebewelle und stehender Gehäusestruktur sowohl nichtlinear als auch linear berücksichtigt. Im linearen Fall wird die nichtlineare Lagerkraft $\mathbf{f}_{nl,L}$, die sich aus der Integration des Druckgebiets im Inertialsystem \mathcal{I} ergibt, in Anlehnung an die Arbeiten [188–192] über eine Störungsrechnung mit kleinen Auslenkungen \mathbf{q} am Referenzpunkt \mathbf{q}_0 wie folgt linearisiert:

$$\mathbf{f}_{nl,L}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0 + \dot{\mathbf{q}}, t) \approx \mathbf{f}_{nl,L}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, t) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{nl,L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}}}_{\mathbf{D}} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_0} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{nl,L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}}}_{\mathbf{K}} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_0} \mathbf{q} \quad (2.33)$$

Die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} sowie die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} besitzen koppelnde Einträge, sodass radiale Auslenkungen und Kippbewegungen in Wechselwirkung stehen. Die Matrizen sind hierfür vollständig besetzt und aufgrund der Hydrodynamik des Schmierfilms nicht symmetrisch. Die numerische Ermittlung der Koeffizienten erfolgt mittels der FDM. Terme höhere Ordnung gemäß der vorgeschlagenen Methode von Vetter et al. [193] werden im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, um an dieser Stelle den linearen Vorteil vollumfänglich nutzen zu können.

2.2 Implementierung der Verzahnungsanregung

Obwohl die Rechenleistung der Datenverarbeitungssysteme in den letzten Jahren enorme Fortschritte zu verzeichnen hat, ist eine dreidimensionale Dynamiksimulation des Zahneingriffs im Sinne der FEM weiterhin zu anspruchsvoll, um effizient sinnvolle Ergebnisse bereitstellen zu können. Aus diesem Grund ist für die rechnerischen Ermittlung der Zahneingriffsbedingungen eine spezielle Betrachtungsweise erforderlich. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit kommt eine neue Lösungsmethode zum Einsatz, die in der eingebundenen Veröffentlichung [1] vorgestellt wird. Hierbei handelt es sich um ein hybrides Verfahren, das die Kontaktbedingungen effizient über ein Feder-Ersatzmodell analytisch auswertet, während die benötigten Federkennwerte an den beteiligten Zahnflanken einmalig aus einem dreidimensionalen Kontinuum [194] abgeleitet werden. Nachfolgend ist die implementierte Lösungsstrategie erläutert.

Zu jedem diskreten Zeitpunkt (\sim Wälzstellung) ist es möglich, über die eingesetzten Formfunktionen [161] der gewählten Balkentheorie nach TIMOSHENKO einen kontinuierlichen und dreidimensionalen Deformationszustand entlang des Wellenabsatzes L (der Zahnbreite b) zu bestimmen. Die geometrischen Beziehungen einer Evolventenverzahnung erlauben die Transformation dieser Wellenauslenkungen in die Eingriffsebene [24, 195]. Auf diese Weise kann für einzelne diskrete Berührungspunkte, entlang der Berührlinien, ein aktueller Verschiebungswert ermittelt werden. Diese Verformungen sind entsprechend in einem lokalen Koordinatensystem \mathcal{L} einmal für das treibende Rad $u(\xi)_{\eta,1}$ und ein weiteres mal für das getriebene Rad $u(\xi)_{\eta,2}$ gegeben, siehe Abbildung 10.

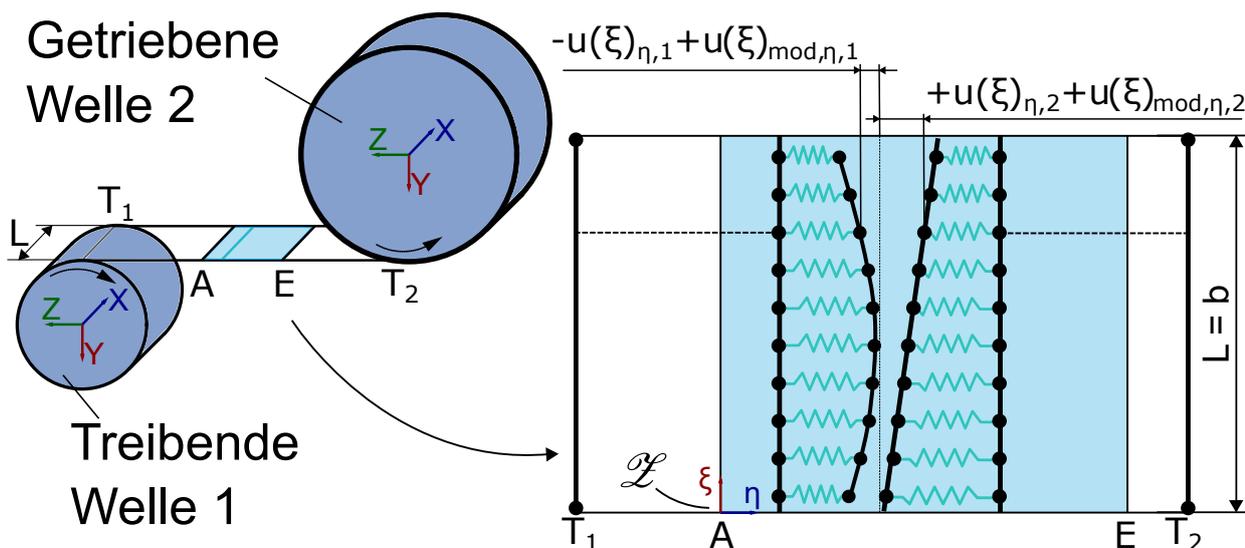


Abbildung 10: Momentaufnahme für ein schematisches Ersatzmodell des Zahnkontakts am Beispiel einer Geradverzahnung im Einzeleingriff.

Darüber hinaus existiert für jeden Berührungspunkt auf den beiden Zahnflanken zur gegebenen Eingriffsstellung eine konstante Komponente $u(\xi)_{\text{mod},\eta,1}$ und $u(\xi)_{\text{mod},\eta,2}$. Hier finden Profilmodifikationen [195], Fertigungsabweichungen und der Effekt des vor- und nachzeitigen Zahneingriffs nach Baethge [20] und Thoma [21] Berücksichtigung. Entsprechend bündelt der Vektor \mathbf{d} die jeweiligen Kontaktabstände Δ_i am Berührungspunkt i für alle vorhandenen Berührungspunkte N_{bp} :

$$[d]_i = \Delta_i = -u(\xi_i)_{\eta,1} + u_{\text{mod}}(\xi_i)_{\eta,1} + u(\xi_i)_{\eta,2} + u_{\text{mod}}(\xi_i)_{\eta,2}. \quad (2.34)$$

Die Bestimmung der einzelnen Kontaktkräfte im Vektor \mathbf{f}_{tb} erfolgt über das Gleichungssystem:

$$\mathbf{f}_{\text{tb}} = \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{d}. \quad (2.35)$$

Die Inverse der Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{N} entspricht hierbei der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Eine negativer Kontaktabstand Δ_i resultiert in einer Durchdringung (Kontaktdeformation) der beteiligten Zahnflanken. Nachdem keine Zugkräfte übertragen werden können, ist es notwendig, die folgende Kontaktbedingung iterativ einzubinden bis eine reine Druckbeanspruchung vorliegt. Ein Abheben der Zahnflanken ist demnach numerisch abbildbar. Die Ermittlung des Gleichgewichts erfolgt hier durch eine Fixpunktiteration [181].

$$[f_{\text{tb}}]_i = f_{\text{tb},i} = \begin{cases} f_{\text{tb},i} & \text{wenn } \Delta_i \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.36)$$

Die berechneten Kontaktkräfte $f_{\text{tb},i}$ werden anschließend mit der gleichen Abbildungsvorschrift, gemäß dem Prinzip von Actio und Reactio, wieder auf die beiden beteiligten Wellenabsätze des treibenden und getriebenen Radkörpers übertragen. Aus numerischer Sicht entsteht an dieser Stelle ein MORTAR-Kontakt [196, 197].

Die Einträge in der Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{N} setzen sich aus einem linearen Anteil bezüglich α und einem nichtlinearen Anteil als Resultat der HERTZ'SCHEN Pressung $u_{\text{Hertz},\eta,12}(f_{\text{tb},i})$ wie folgt zusammen:*

$$[N]_{ij} = -\alpha_{ij} - \delta_{ij} \frac{u_{\text{Hertz},\eta,12}(f_{\text{tb},i})}{f_{\text{tb},i}}. \quad (2.37)$$

Die HERTZ'SCHE Pressung wird innerhalb der Fixpunktiteration nach Sainsot und Vex [36] aktualisierend eingebunden. Die Arbeit von Sainsot und Vex [36] stellt eine Erweiterung der

*Kronecker-Delta: δ_{ij}

etablierten Formulierung von Weber und Banaschek [31] dar, indem zusätzlich die tatsächlichen Zahndicken bei der Berechnung der HERTZ'SCHEN Pressung berücksichtigt werden. Die linearen Koeffizienten α basieren auf einem dreidimensionalen Kontinuumsmodell. Ähnlich wie bei Chang et al. [59] wird hierfür ein Zahn entlang seiner Berührlinie an jedem potentiell möglichen Berührungspunkt j mit einer Einheitskraft belastet. Das jeweilige Verformungsergebnis an der Position i definiert den Koeffizienten α_{ij} . Eine schematische Darstellung des Sachverhalts ist in Abbildung 11 für ein Zahnpaar bezüglich einer diskreten Eingriffsstellung gegeben.

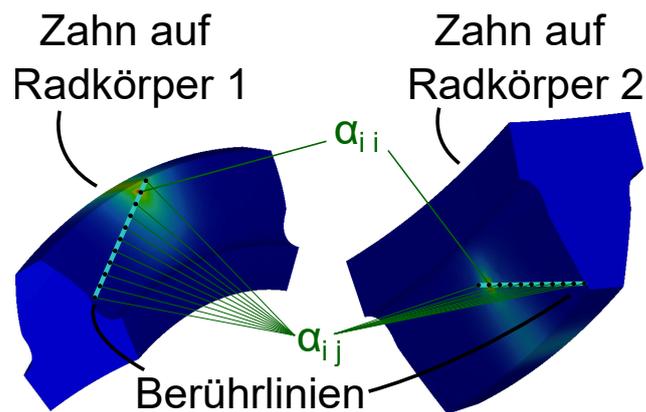


Abbildung 11: Ableitung der linearen Nachgiebigkeitskoeffizienten für ein Zahnpaar entlang der Berührlinien.

Die Basis des zugrundeliegenden dreidimensionalen Berechnungsmodells der beiden Zähne bildet die IGA [198]. Diese kann hier als effiziente Erweiterung der FEM angesehen werden: Während bei der FEM üblicherweise Polynome nach LAGRANGE eingesetzt werden, setzt die IGA in ihrer Beschreibung auf NURBS [199, 200]. In Abbildung 12 sind exemplarisch quadratische Formfunktionen $g(r)$ für die FEM und für die IGA dargestellt.

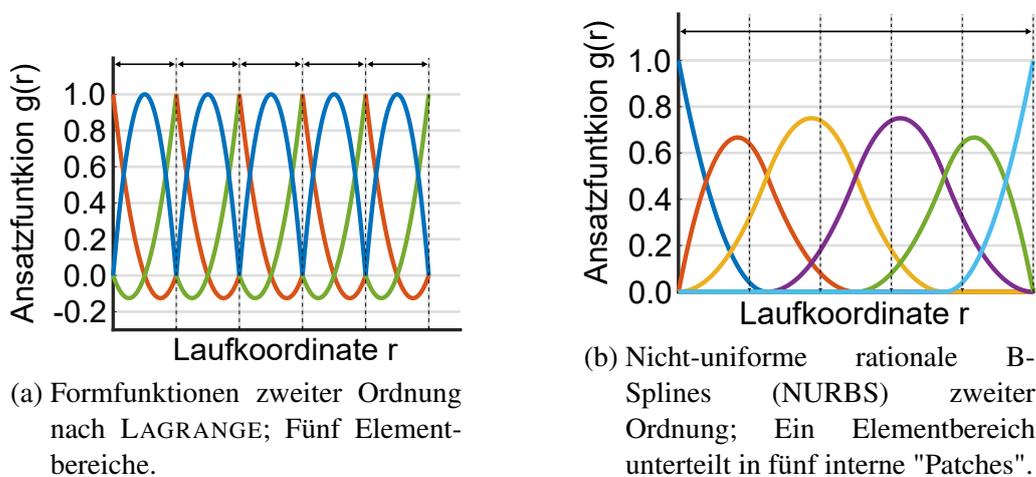


Abbildung 12: Vergleich: Finite-Elemente-Methode (FEM) und Isogeometrische Analyse (IGA).

Entlang der eindimensionalen Koordinate r wird hier ein willkürliches Berechnungsgebiet jeweils in fünf Einzelbereiche unterteilt. Bei der FEM entspricht das den Elementen. Die IGA hingegen beschreibt hier das gesamte Berechnungsgebiet als ein Element. Die fünf internen Teilbereiche sind sogenannte Patches. Es ist ersichtlich, dass die Formfunktionen $g(r)$ für die IGA über mehrere Patches hinweg ungleich Null sind. Diese Art der Definition ermöglicht eine elegante Modellierung komplexer Geometrien bei einer insgesamt geringeren Anzahl an FHGs [198]. Dieser Vorteil spiegelt sich sowohl in der Betrachtung der Ausgangskonfiguration als auch in der Beschreibung des verformten Zustandes wider. Bei der Implementierung ist lediglich darauf zu achten, dass im Gegensatz zur FEM keine gewohnten Knotenpunkte als unbekannte Kenngrößen auftreten, sondern sogenannte Kontrollpunkte. Diese Kontrollpunkte befinden sich nicht zwangsläufig auf der Struktur selbst. Aus diesem Grund können deren berechneten Positionsänderungen nicht direkt als mechanische Auslenkung der Struktur interpretiert werden.

Die zu vernetzende Referenzkontur der Fertigverzahnung wird vorab durch eine Simulation des angewandten Herstellungsprozesses (z.B. Wälzfräsen) zur Verfügung gestellt. Die optimale Position der Kontrollpunkte wird mittels der Methode der kleinsten Quadrate [201] für das numerische Modell festgelegt. Aus diesem Grund wird sowohl die Geometrie der Evolvente als auch die erzeugte Kontur des Zahnfußes numerisch exakt abgebildet. Dementsprechend stellt die IGA hier eine äußerst effiziente und dennoch sehr genaue Berechnungsmethodik dar.

Für die Berechnung, Auslegung und Bewertung der auftretenden Zahneingriffsbedingungen werden an dieser Stelle nachfolgende Kenngrößen definiert. Hierzu zählt der Drehwegfehler x_{TE} , die tangentielle Kraft am Grundkreis F_{tb} , die Sekantensteifigkeit der Verzahnung c_S und die Tangentensteifigkeit der Verzahnung c_T am definierten Betriebspunkt.

$$x_{TE} = |\Delta(\xi = b/2)|, \quad F_{tb} = \sum_{i=1}^{N_{bp}} f_{tb,i}, \quad c_S = \frac{F_{tb}}{\max(|\Delta_i|)}, \quad c_T = \sum_{i=1}^{N_{bp}} \frac{f_{tb,i}}{|\Delta_i|}. \quad (2.38)$$

In Tabelle 3 sind die technischen Daten einer beispielhaften Geradverzahnung zusammengetragen. Die zugehörige Stirnradstufe ist exemplarisch in Abbildung 13 skizziert. Das Ritzel treibt hierbei das einstufige Getriebe an, und die Abnahme des Drehmoments erfolgt auf der gegenüberliegenden Seite an der Radwelle. Die Lager in Tabelle 4 werden bei dieser Betrachtung als Feder-Dämpfer-Systeme abgebildet. Eine genaue Definition dieser Kenngrößen sowie die exakten Dimensionen der Wellengeometrie liefern an dieser Stelle keinen konkreten Mehrwert und werden daher nicht näher spezifiziert. Die Verzahnung wird während der Simulation im Bezug auf die mittlere Zahnsteifigkeit nach der internationalen Norm ISO 6336-1 [33] in Anlehnung an Gerber [25] gedämpft.

Beschreibung	Zeichen	Einheit	Ritzel	Rad
Modul	m_n	mm		4.5
Normaleingriffswinkel	α_n	$^\circ$		20.0
Schrägungswinkel	β	$^\circ$		0.0
Zähnezahl	z	-	25	94
Kopfkreisdurchmesser	d_a	mm	124.6	431.5
Fußkreisdurchmesser	d_f	mm	101.2	408.2
Zahnbreite	b	mm		150.0
Achsabstand	a	mm		270.0

Tabelle 3: Technische Daten der Geradverzahnung.

Beschreibung	Zeichen	Einheit	Lager L1/L2	Lager L3/L4
Typ	-	-	Kreislager	Kreislager
Lagerbreite	b_L	mm	70.0	65.0
Außendurchmesser	D_{La}	mm	110.0	140.0
Innendurchmesser	D_{Li}	mm	70.0	90.0
Relatives Lagerspiel	ψ	‰	2.2	1.9
Ölklasse	-	-	ISO-VG-46	ISO-VG-46
Öleinspritztemperatur	T_L	$^\circ\text{C}$	55.0	55.0

Tabelle 4: Technische Daten der Lager L1, L2, L3, und L4.

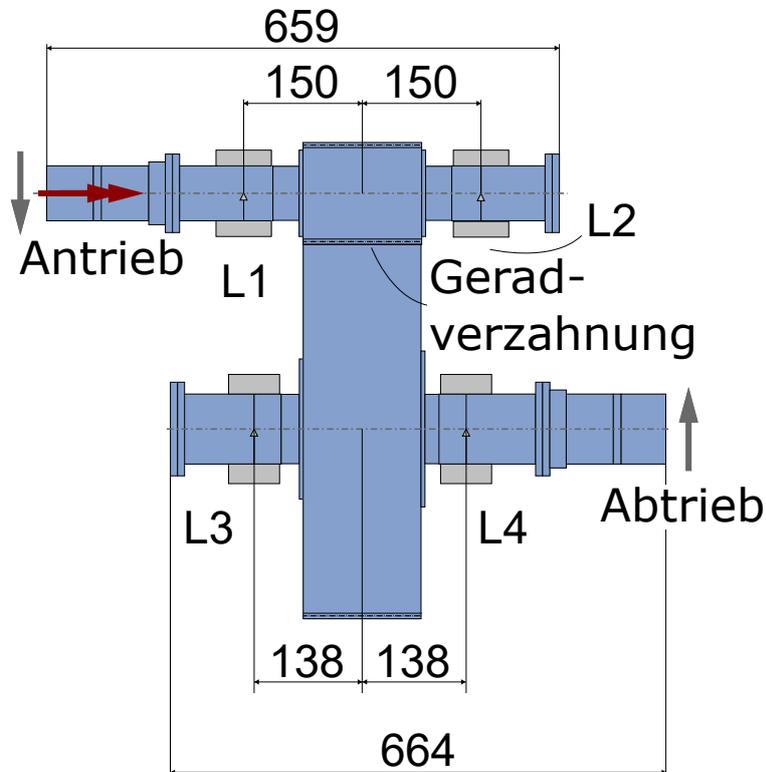


Abbildung 13: Einstufiges Getriebe mit einer Geradverzahnung.

Nachfolgend ist in Abbildung 14 das zugehörige Ergebnis in Form der definierten Kenngrößen bezüglich Gleichung (2.38) für insgesamt fünf Betriebspunkte gegeben. In allen Simulationen liegt das gleiche Antriebsmoment an. Es variiert ausschließlich die Antriebsdrehzahl n im System. Die Ergebnisse sind jeweils für eine Eingriffsperiode dargestellt.

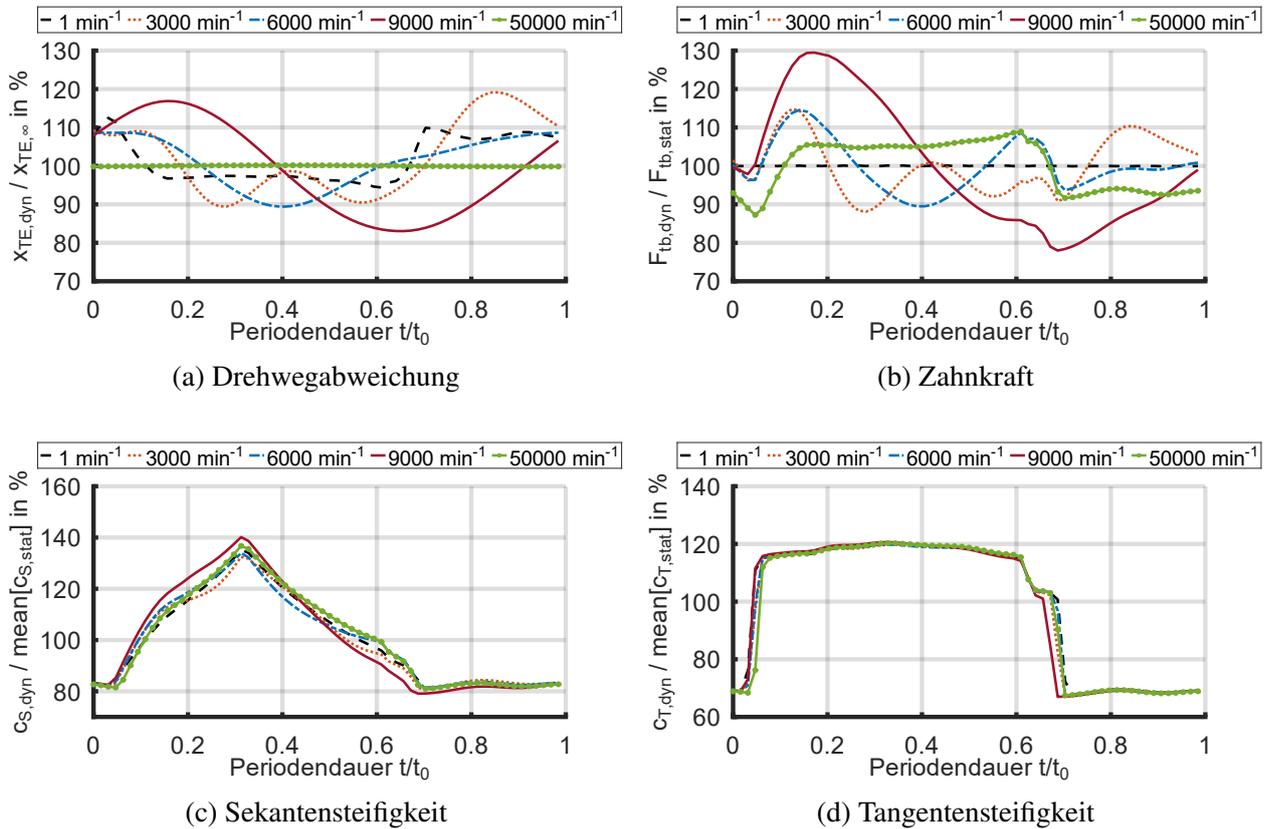


Abbildung 14: Dynamischen Verhalten im Zahnkontakt über eine Eingriffsperiode.

Nachdem die Beschleunigungskräfte im ersten Fall ($n = 1 \text{ min}^{-1}$) in den Hintergrund rücken, kann dieser als statischer Grenzfall $n \rightarrow 0$ angesehen werden. Die entstehende Zahnkraft F_{tb} bleibt daher konstant und es entsteht keine innere Anregung im System. Im Gegensatz dazu stellt der letzte Betriebspunkt ($n = 50000 \text{ min}^{-1}$) den dynamischen Grenzfall $n \rightarrow \infty$ dar. Die Beschleunigungskräfte dominieren im System und die Zähne sind nicht mehr in der Lage, eine wechselnde Verformung zuzulassen. Entsprechend bleibt hier die Drehwegabweichung x_{TE} über die gesamte Periode konstant und die Zahnkraft F_{tb} reagiert dynamisch auf diese Bedingung. An allen anderen Zwischenpunkten stellt sich das Kraft/Weg-Verhältnis in Abhängigkeit der vorliegenden Massenverteilung und dem Elastizitätsverhalten der Zahnräder, Wellen, Lager und Gehäusestruktur ein. Darüber hinaus ist ersichtlich, dass über alle Betriebspunkte hinweg die berechneten Verzahnungssteifigkeiten ein nahezu identisches Verhalten aufweisen. Aus diesem Grund ist eine Implementierung der Ver-

zahnungsanregung als Parametererregung im linearen Fall gegenüber einer reinen Kraftanregung zunächst vorzuziehen. Eine hierzu passende Implementierung für statische und dynamische Zwecke wird beispielsweise von Cooley et al. [50] näher untersucht. Die lineare Form lautet:

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_S(t)\mathbf{q}_0 + \mathbf{K}_T(t)\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} wird in der vorliegenden Arbeit als konstant angesehen und inhaltlich nach Gerber [25] ausgelegt. Die zeitvariante Sekantensteifigkeit $\mathbf{K}_S(t)$ bezieht sich hier auf eine angemessen definierte Referenzposition \mathbf{q}_0 , an der eine entsprechende Linearisierung erfolgt. Die zeitvariante Tangentensteifigkeit $\mathbf{K}_T(t)$ interagiert daher mit den Auslenkungen \mathbf{q} um den genannten Referenzpunkt \mathbf{q}_0 . In den eingebundenen Veröffentlichungen [2] und [3] wird diese lineare Form als Parametererregung für dynamische Untersuchungen herangezogen. In der eingebundenen Veröffentlichung [4] wird unter anderem der Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Formulierung aufgegriffen und an einem Beispiel untersucht. Das Ergebnis zeigt, dass die nichtlineare Betrachtung für die Quantifizierung des Körperschalls zielführend ist.

Neben der effizienten und zusätzlich präzisen Beschreibung der Elastizität eines Zahnes, bietet die IGA einen weiteren Vorteil: Aus jeder berechneten Lastverteilung kann der Spannungszustand im dreidimensionalen Kontinuum [194, 202] detailliert aufgelöst werden [162]. Auf diese Weise entsteht eine vollständig dreidimensionale Beschreibung des Spannungszustandes innerhalb eines belasteten Zahnes. Entsprechend ist es möglich, neben dem Anregungsverhalten auch die Festigkeit im Bezug auf die auftretenden Zahnfußspannungen hochauflösend zu bewerten. Die eingebundene Veröffentlichung [2] fokussiert diese Thematik. Nachdem durch die IGA zunächst ein dreidimensionaler Spannungstensor im Inertialsystem berechnet wird, dienen hier zur Auswertung und zum Vergleich mit etablierten Methoden zwei skalare Referenzwerte: Die erste Hauptspannung σ_I und die Vergleichsspannung (VON-MISES) σ_v . Die drei Hauptspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} ergeben sich als Eigenwerte des berechneten Spannungstensors und stehen paarweise zueinander orthogonal. Zusätzlich erfüllen sie die Bedingung $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Demnach stellt die erste Hauptspannung den maximalen Spannungswert dar. Üblicherweise ist die erste Hauptspannung im Zahnfußbereich lokalisiert und dabei stets parallel zum Normalschnitt orientiert. Die maximale Schubspannung ergibt sich allgemein durch $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ und die Vergleichsspannung schließlich wie folgt:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}. \quad (2.40)$$

2.3 Reduktion der Freiheitsgrade

Vor allem bei der Erstellung des numerischen Modells für die Beschreibung der Gehäusestruktur ergeben sich durch die Anwendung der FEM zahlreiche FHGs im Gesamtsystem. Aus diesem Grund ist eine Modell-Ordnungs-Reduktion (MOR) ratsam. Eine in der Strukturmechanik etablierte und in vielen kommerziellen Berechnungsprogrammen verfügbare Reduktionsmethode ist das Verfahren nach Craig und Bampton [56], das bereits Hurty [203] initiiert. Es stellt eine Kombination aus statischer [61] und modaler Kondensation [154] dar. Die Idee hierbei ist es, die vorhandenen FHGs in zwei Kategorien einzuteilen. Eine Gruppe enthält FHGs, deren physikalische Präsenz im weiteren Berechnungsablauf notwendig ist. Die andere Gruppe besteht folglich aus den übrigen und daher vernachlässigbaren FHGs. Zur ersten Kategorie zählen FHGs, die beispielsweise an nichtlinearen Wechselwirkungen beteiligt sind, die zur Anbindung an eine weitere Struktur benötigt werden oder die lediglich für die Ergebnisauswertung als physikalische Kenngröße im Gesamtsystem behalten werden sollen. Alle übrigen FHGs werden als physikalische Kenngröße vom eigentlichen Berechnungsprozess ausgeschlossen. Nach Umsortierung des Gesamtsystems kann die anfängliche Beschaffenheit einer allgemeinen Massenmatrix \mathbf{M} und die einer allgemeinen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} formell wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{MM} & \mathbf{M}_{MS} \\ \mathbf{M}_{SM} & \mathbf{M}_{SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MS} \\ \mathbf{K}_{SM} & \mathbf{K}_{SS} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Die beiden Indizes M und S beschreiben zum einen die verbleibenden (M) und zum anderen die zu kondensierenden FHGs (S) im Gesamtsystem. Passend dazu kennzeichnen die Vektoren \mathbf{q}_M und \mathbf{q}_S die adäquate Zugehörigkeit innerhalb der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} . Für die Reduktion wird der Vektor \mathbf{q}_S mathematisch in einen modalen Raum (Q) überführt und dabei entsprechend komprimiert, sodass eine Minimierung der FHGs stattfindet ($Q \leq S$). Diese entstehenden modalen FHGs \mathbf{q}_Q besitzen zunächst keine physikalische Bedeutung. Der physikalische Informationsgehalt kann nur durch eine Rücktransformation wiedergewonnen werden. Die zugehörige Transformati-

onsmatrix \mathbf{T}_{cb} und die passende Transformationsvorschrift lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{MM} & \mathbf{0}_{MQ} \\ \Gamma_{SM} & \Psi_{SQ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{cb}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_Q \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^{\text{red}}}. \quad (2.42)$$

Während \mathbf{I}_{MM} eine Einheitsmatrix ist, werden die Beziehungen für Γ_{SM} wie folgt abgeleitet:

$$\Gamma_{SM} = -\mathbf{K}_{SS}^{-1} \mathbf{K}_{SM}. \quad (2.43)$$

Die Modalmatrix Ψ_{SQ} enthält eine reduzierte Anzahl Q an Eigenvektoren, die sich aus der Lösung des Eigenwertproblems gemäß Gleichung (2.44) des Untersystems S ergeben. Die Anzahl an eingebundenen Eigenvektoren ist frei wählbar und hängt vom gewünschten Frequenzbereich und damit von den Eigenwerten λ_Q ab.

$$\mathbf{K}_{SS} \Psi_{SQ} = \lambda_Q \mathbf{M}_{SS} \Psi_{SQ}. \quad (2.44)$$

Im Falle, dass die Eigenvektoren Ψ_{SQ} auf ihre Massen normiert sind, entsteht formell folgende Beschaffenheit des reduzierten Systems, siehe hierfür auch Gasch et al. [126]:

$$\mathbf{M}^{\text{red}} = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{MM}^{\text{red}} & \mathbf{M}_{MQ}^{\text{red}} \\ \mathbf{M}_{QM}^{\text{red}} & \mathbf{I}_{QQ} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{red}} = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{MM}^{\text{red}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{QQ} \lambda_Q \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Die Nebendiagonalelemente der reduzierten Massenmatrix $\mathbf{M}_{MQ}^{\text{red}}$ repräsentieren die dynamische Kopplung zwischen \mathbf{q}_M und \mathbf{q}_Q . Mit einem Anstieg des zu betrachtenden Frequenzbereichs ($Q \uparrow$) oder durch eine Erhöhung der Anzahl an verbleibenden FHGs ($M \uparrow$) wächst der Speicherbedarf für das reduzierte System rasant an, nachdem die Koppelinträge an Komplexität zunehmen und die Matrix $\mathbf{M}_{MQ}^{\text{red}}$ hierdurch voller besetzt werden muss. Nachdem beide Bedingungen in der Getriebeakustik zutreffen, bedarf es bei der Lösung im Frequenzbereich (siehe Kapitel 2.5.2) einer besonderen Behandlung. Diese Thematik wird in der eingebundenen Veröffentlichung [4] abermals aufgegriffen und anschließend für Getriebeanwendungen erfolgreich umgangen.

2.4 Berücksichtigung der Dämpfung

Neben der äußeren Dämpfung an den Gleitlagern durch die Hydrodynamik des Schmierfilms und der dämpfenden Wirkung im geschmierten Zahnkontakt, wird im Rahmen dieser Arbeit die innere Materialdämpfung der Struktur als RAYLEIGH-Dämpfung [126, 204, 205] erfasst. Im Bezug auf den nicht-konservativen Kraftanteil in der LAGRANGE-Gleichung zweiter Art ist die äußere und innere Dämpfung hier folgendermaßen definiert[†]:

$$\mathbf{f}_{\text{nk}} = \overbrace{\left[\mathbf{D}_A + \underbrace{(\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K})}_{\mathbf{D}_I} \right]}^{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.46)$$

Die RAYLEIGH-Koeffizienten α_1 und α_2 skalieren demnach die zugehörige Massenmatrix \mathbf{M} und entsprechend die beteiligte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Ein mathematischer Vorteil dieser Beschreibungsweise ist, dass die Möglichkeit der modalen Entkopplung im System zunächst erhalten bleibt [126]. Auch wenn diese letztendlich durch den äußeren Dämpfungsanteil entfällt, kann die RAYLEIGH-Dämpfung selbst und der Einfluss der Koeffizienten am Einmassenschwinger als LEHR'SCHES Dämpfungsmaß D_{Lehr} in Abhängigkeit der Eigenkreisfrequenz ω_0 interpretiert und visualisiert werden:

$$D_{\text{Lehr}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{\omega_0} + \alpha_2 \omega_0 \right). \quad (2.47)$$

Eine konventionelle Ableitung der Koeffizienten adressiert beispielsweise die Arbeit von Geraschenko et al. [206]:

$$\alpha_1 = 2D_{\text{Lehr}} \frac{(2\pi)^2 f_{\min} f_{\max}}{2\pi (f_{\min} + f_{\max})}, \quad \alpha_2 = 2D_{\text{Lehr}} \frac{1}{2\pi (f_{\min} + f_{\max})}. \quad (2.48)$$

Diese Formulierung zielt darauf ab, diese viskose Dämpfung in einem gewissen Frequenzbereich, beispielsweise zwischen f_{\min} und f_{\max} , nahezu konstant zu halten. In Abbildung 15 ist exemplarisch der Verlauf des LEHR'SCHEN Dämpfungsmaßes D_{Lehr} nach RAYLEIGH dargestellt. Die Koeffizienten α_1 und α_2 sind so ausgelegt, dass zwischen 300 Hz und 750 Hz ein LEHR'SCHES Dämpfungsmaß von einem Prozent angenähert wird.

[†]Die formelle Einteilung in *äußere* und *innere* Dämpfung geschieht hier in Anlehnung an Bezeichnungen der Rotordynamik. Exemplarisch sei Gasch et al. [126] und Kiesel [148] genannt.

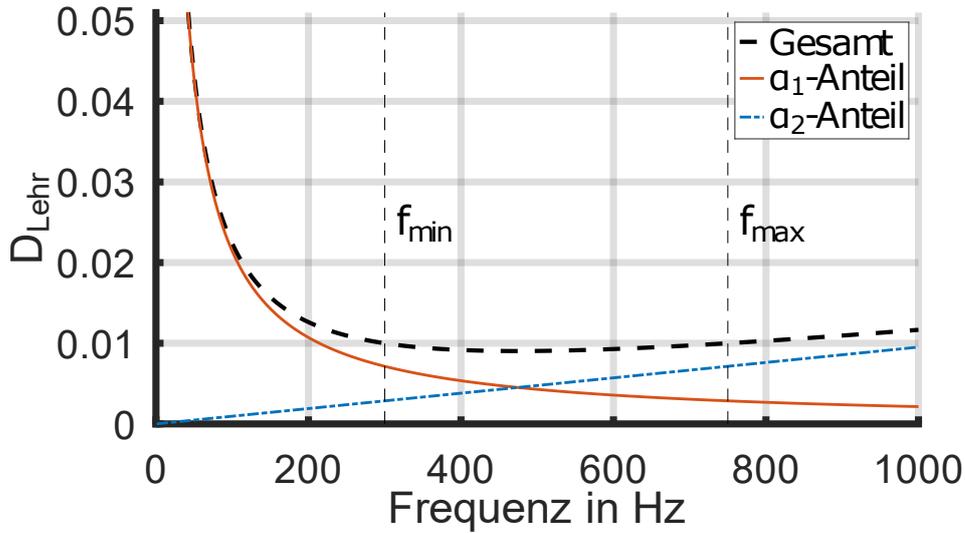


Abbildung 15: Verlauf des LEHR'SCHEN Dämpfungsmaßes D_{Lehr} nach RAYLEIGH.

Für die rotierenden Getriebewellen aus Kapitel 2.1 ist es notwendig, den mitbewegten inneren Dämpfungsanteil zurück in das Inertialsystem \mathcal{I} zu transformieren [144]. Entsprechend gilt für den inneren Dämpfungsanteil der mit Ω rotierenden Getriebewellen:

$$\mathbf{f}_{\text{nk,I}} = \underbrace{\mathbf{R}_x(\Omega t)^T \mathbf{D}_I \mathbf{R}_x(\Omega t)}_{\mathbf{D}_I} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{R}_x(\Omega t)^T \mathbf{D}_I \dot{\mathbf{R}}_x(\Omega t)}_{\Omega \mathbf{C}} \mathbf{q}, \quad \mathbf{R}_x(\Omega t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ 0 & -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

2.5 Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung

Im Rahmen dieser Arbeit entsteht schließlich die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{[\Omega \mathbf{G} + \mathbf{D}_A + \mathbf{D}_I]}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{[\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma + \Omega \mathbf{C}]}_{\mathbf{K}} \mathbf{q} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (2.50)$$

deren Lösung das dynamische Getriebeverhalten widerspiegelt. Eine zusammenfassende Beschreibung der einzelnen Komponenten ist in Tabelle 5 gegeben. Zu Zwecken der Übersichtlichkeit werden in den nachfolgenden Kapiteln die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen teilweise zusammengefasst. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die gyroskopische Kreiselmatrix \mathbf{G} dem dynamischen

System keine Energie entzieht und daher die Zugehörigkeit zur klassischen Dämpfungsmatrix \mathbf{D} lediglich als formelle Notation korrekt ist.

Term	Beschreibung	Term	Beschreibung
\mathbf{M}	Massenbelegung	\mathbf{G}	Gyroskopischer Kreiseffekt
\mathbf{D}_A	Explizite/Äußere Dämpfung	\mathbf{D}_I	Innere Materialdämpfung
\mathbf{K}	Struktursteifigkeit	\mathbf{K}_σ	Anfangsspannungszustand
\mathbf{C}	Mitbewegte Materialdämpfung	\mathbf{f}_{nl}	Nichtlineare Systemkräfte
\mathbf{f}_{ext}	Externe Kräfte	\mathbf{q}	Verschiebungen
$\dot{\mathbf{q}}$	Geschwindigkeiten	$\ddot{\mathbf{q}}$	Beschleunigungen
Ω	Rotationsgeschwindigkeit		

Tabelle 5: Beschreibung der beteiligten Einzelterme in der Bewegungsgleichung.

Obwohl stationäre Betriebspunkte im Fokus der Getriebeakustik stehen, erfolgt die Berechnung der erzwungenen Schwingungen aufgrund der Parametererregung und/oder der Nichtlinearitäten üblicherweise im Zeitbereich, siehe zum Beispiel die eingebundene Veröffentlichung [2]. Die Anwendung des Frequenzbereichs hat sich vielmehr für lineare und zeitinvariante Systeme etabliert. Nichtsdestotrotz liegt der Fokus in den eingebundenen Veröffentlichungen [3] und [4] auf der zeitvarianten und nichtlinearen Behandlung im Frequenzbereich. Diese Betrachtungsweise ist in der Getriebedynamik eher selten und in der Getriebeakustik augenscheinlich neu. Entsprechend dient der Zeitbereich in den eingebundenen Veröffentlichungen [3] und [4] lediglich der Vergleichbarkeit und Verifizierung der implementierten Algorithmen. Nachfolgend werden die gewählten Lösungsansätze im Zeit- und Frequenzbereich aufgezeigt und deren explizite Umsetzung erläutert.

2.5.1 Zeitbereich

Bei Zeitintegrationsverfahren wird allgemein das zu betrachtende Zeitintervall in diskrete Abschnitte unterteilt [181]. Die Berechnung erfolgt anschließend sequentiell von Zeitpunkt zu Zeitpunkt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind diese Stützpunkte durch einen konstanten Zeitschritt Δt äquidistant eingeteilt, sodass sich folgendes Muster ergibt:

$$\dots \rightarrow t - 2\Delta t \rightarrow t - \Delta t \rightarrow t \rightarrow t + \Delta t \rightarrow t + 2\Delta t \rightarrow \dots$$

Während der Berechnung wird hier die Information des aktuellen Zeitpunktes t genutzt um das Gleichgewicht am nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu bestimmen. Als zeitlicher Indikator ermöglicht

der Index n nachfolgend eine übersichtliche Darstellung der Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n &:= \mathbf{q}(t), & \dot{\mathbf{q}}_n &:= \dot{\mathbf{q}}(t), & \ddot{\mathbf{q}}_n &:= \ddot{\mathbf{q}}(t), \\ \mathbf{q}_{n+1} &:= \mathbf{q}(t + \Delta t), & \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &:= \dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t), & \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &:= \ddot{\mathbf{q}}(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die gen- α -Methode [207] ist ein implizites Zeitintegrationsverfahren, das in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung kommt. Hier wird sowohl die unbekannte Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ als auch die unbekannte Beschleunigung $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ am nächsten Zeitschritt in Abhängigkeit der zu bestimmenden Verschiebung \mathbf{q}_{n+1} ausgedrückt. Alle anderen Variablen sind bereits bekannt.

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{q}}_n - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n, \quad (2.52)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{q}}_n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (2.53)$$

Die benötigten Koeffizienten sind wie folgt definiert:

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f. \quad (2.54)$$

Für $\alpha_m = \alpha_f = 0$ entsteht als Spezialfall der klassische NEWMARK-Algorithmus [208], der für ein lineares, aber dennoch zeitvariantes, System bedingungslos stabil ist [154]. Diese Tatsache begründet unter anderem den Einsatz in der eingebundenen Veröffentlichung [3], da hier die Untersuchung von physikalischen Stabilitätseigenschaften im Vordergrund steht und eine Fehlinterpretation aufgrund numerischer Instabilitäten vermieden werden soll. In der eingebundenen Veröffentlichung [2] werden die Koeffizienten ebenfalls auf $\alpha_m = \alpha_f = 0$ gesetzt, und in der eingebundenen Veröffentlichung [4] auf $\alpha_m = 0$ und $\alpha_f = 0.05$.

Letztendlich fordert die gen- α -Methode das Gleichgewicht an einem Zwischenzeitpunkt gemäß:

$$\mathbf{q}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{q}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{q}_n, \quad (2.55)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_f \dot{\mathbf{q}}_n, \quad (2.56)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_m \ddot{\mathbf{q}}_n, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ext},n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{\text{ext},n+1} + \alpha_f \mathbf{f}_{\text{ext},n}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{f}_{\text{nl},n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_{n+1}) + \alpha_f \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_n). \quad (2.59)$$

So entsteht durch Einsetzen dieser Definitionen in die Bewegungsgleichung (2.50) das zu minimierende Residuum \mathbf{r} in Abhängigkeit von \mathbf{q}_{n+1} :

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{f}_{\text{nl},n+1-\alpha_f} - \mathbf{f}_{\text{ext},n+1-\alpha_f}}_{\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1})} = \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Zur Bestimmung der Lösung ist aufgrund der nichtlinearen Zusammenhänge in $\mathbf{f}_{\text{nl},n+1-\alpha_f}$ eine Iteration über den Index k erforderlich. So ergibt sich, motiviert durch eine nach dem ersten Glied abgebrochene TAYLOR-Reihe [209] der Form

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{q}_{n+1}^k) \approx \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k) + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \right|_k}_{\mathbf{K}_{\text{T,dyn}}^k = \mathbf{S} + \mathbf{K}_{\text{T}}^k} \Delta\mathbf{q}_{n+1}^k \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (2.61)$$

die folgende Iterationsvorschrift nach NEWTON, siehe hierzu beispielsweise die historische Einordnung von Tjalling [210]:

$$\mathbf{K}_{\text{T,dyn}}^k(\mathbf{q}_{n+1}^k) \Delta\mathbf{q}_{n+1}^k = -\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k). \quad (2.62)$$

Mithilfe der Tangentenmatrix $\mathbf{K}_{\text{T,dyn}}^k$ wird am Iterationsschritt k eine Verbesserung $\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k$ in Bezug auf die aktuelle Lösung \mathbf{q}_{n+1}^k bestimmt. Diese Suchmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{T,dyn}}^k(\mathbf{q}_{n+1}^k) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \right|_k \quad (2.63)$$

$$= \underbrace{\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} + (1 - \alpha_f) \mathbf{K} + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{\text{T}}^k}_{\mathbf{S}} \quad (2.64)$$

setzt sich hierbei aus einem konstanten Anteil \mathbf{S} und einem veränderlichen Anteil

$$\mathbf{K}_{\text{T}}^k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \right|_k \quad (2.65)$$

zusammen. Das NEWTON-Verfahren konvergiert in der Nähe der aktuellen Lösung äußerst effizient. Fern davon können allerdings numerische Probleme auftreten. Das drückt sich beispielsweise dadurch aus, dass das Residuum \mathbf{r} iterativ zum Oszillieren neigt. Für diesen Fall ist im Algorithmus ein Liniensuchverfahren [201] implementiert, das in einem NEWTON-Schritt aktiv wird, sollte das Residuum \mathbf{r} einen vorgegebenen Toleranzwert überschreiten. Die Idee hierbei ist es, den berechneten Lösungsschritt $\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k$ mit einem Skalierungsfaktor ν ($0 < \nu \leq 1$) möglichst vorteilhaft

ezuzudammen, um sicher in die Näher der Lösung zu gelangen:

$$\mathbf{q}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{q}_{n+1}^k + v\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k. \quad (2.66)$$

Ist kein Liniensuchverfahren notwendig, so wird $v = 1$ gesetzt. Andernfalls wird v intern bestimmt, sodass sich für die Gleichung

$$s(v) = (\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k)^T \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^k + v\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k) \quad (2.67)$$

ein Minimum einstellt. Dieses Minimum in Abhängigkeit von v wird hier durch eine Regula-Falsi [181] ermittelt. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass die Liniensuche im Rahmen dieser Arbeit selten benötigt wurde. Daher wird davon ausgegangen, dass der Einsatz einer Liniensuche für derartige Problemstellungen nicht zwingend erforderlich ist.

In den eingebundenen Veröffentlichungen [2–4] wird die vollständige Auflösung der Nichtlinearität im Zahnkontakt mithilfe der zeitlich veränderlichen Verzahnungssteifigkeit $\mathbf{K}_{VZ}(t)$ unter anderem auch als Parametererregung wie folgt in der Simulation approximiert:

$$\mathbf{f}_{nl}^k(\mathbf{q}_{n+1}^k) \approx \mathbf{K}_{VZ,n+1}^k \mathbf{q}_{n+1}^k. \quad (2.68)$$

Durch diese Annahme ist nur ein einziger Iterationschritt k im NEWTON-Verfahren notwendig, um das dynamische Gleichgewicht im System bestimmen zu können. Entsprechend steigt die Recheneffizienz in diesem Fall.

2.5.2 Frequenzbereich

Ein Nachteil bei der Berechnung von stationären Betriebszuständen mit einem Zeitintegrationsverfahren ist, dass zunächst die komplette Einschwingphase in Anlehnung an Abbildung 16 ermittelt werden muss, bevor das dynamische System den Zeitpunkt erreicht, an dem es seine Bewegungen wiederholend ausführt. Im Gegensatz dazu zielt der Ansatz im Frequenzbereich darauf ab, direkt den eingeschwungenen Systemzustand für eine Periodendauer zu bestimmen. Aus diesem Grund ergibt sich hier ein effizienter mathematischer Vorteil in der Berechnung. Eine Formulierung für allgemein periodische Anregungen und Systemantworten bündelt sich als HBM. Die zugrundeliegende Theorie ist in Nayfeh et al. [71], Gasch et al. [126] und bei Krack und Gross [72] erklärt.

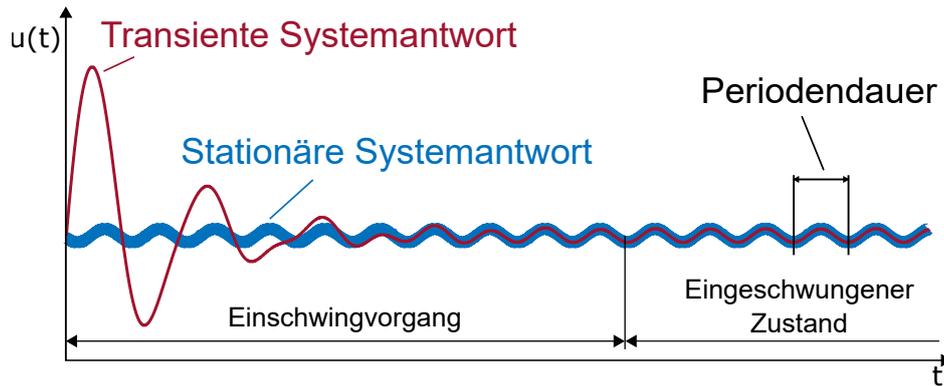


Abbildung 16: Exemplarischer Verlauf einer dynamischen Systemantwort auf eine periodische Anregung.

Die HBM kann im Sinne der Methode der gewichteten Residuen auch als FOURIER-GALERKIN-Methode [211, 212] aufgefasst werden. Im Grunde ist die Idee, für alle beteiligten Systemgrößen in der Bewegungsgleichung (2.50) ein periodisches Verhalten vorauszusetzen. Für das gesamte Zeitsignal einer Periode wird hierfür eine gemeinsame Grundfrequenz Ω gewählt. Diese Grundfrequenz Ω kann beispielsweise die Rotationsgeschwindigkeit einer Getriebewelle sein. Entsprechend kann das Anregungsverhalten der äußeren Kräfte über eine endliche FOURIER-Reihe spezifiziert werden:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \sum_{h=-H}^{+H} \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h} e^{ih\Omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.69)$$

Die Anzahl an FOURIER-Koeffizienten h ist hierbei mit H begrenzt, um eine numerische Umsetzung zu ermöglichen. An dieser Stelle sei zusätzlich angemerkt, dass diese Formulierung allgemein gültig ist. Sollten beispielsweise ausschließlich konstante äußere Kräfte am System anliegen (z.B. das mittlere Antriebsmoment), so entsteht der Sonderfall, dass alle harmonischen Beiträge $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h}$, mit Ausnahme von $h = 0$, verschwinden. Darauf aufbauend gilt eine ähnliche Definition für die Systemverschiebungen und deren Ableitungen nach der Zeit t :

$$\mathbf{q} = \sum_{h=-H}^{+H} \hat{\mathbf{q}}_h e^{ih\Omega t}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \sum_{h=-H}^{+H} (ih\Omega) \hat{\mathbf{q}}_h e^{ih\Omega t}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \sum_{h=-H}^{+H} (ih\Omega)^2 \hat{\mathbf{q}}_h e^{ih\Omega t}. \quad (2.70)$$

Abschließend wird diese Annahme auch für den nichtlinearen Kraftvektor definiert:

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=-H}^{+H} \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}(\hat{\mathbf{q}}) e^{ih\Omega t}. \quad (2.71)$$

Nach Einsetzen dieser Definitionen in die Bewegungsgleichung (2.50) wird das zu minimierende

Residuum $\hat{\mathbf{r}}$ in Abhängigkeit der FOURIER-Koeffizienten für die Verschiebungen $\hat{\mathbf{q}}$ im Frequenzbereich ersichtlich. Demnach gilt für einen harmonischen Schwingungsanteil h :

$$\underbrace{\left[-(h\Omega)^2 \mathbf{M} + (ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K} \right]}_{\hat{\mathbf{r}}_h(\hat{\mathbf{q}})} \hat{\mathbf{q}}_h + \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}(\hat{\mathbf{q}}) - \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h} = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

In Analogie zum Zeitintegrationsverfahren in Kapitel 2.5.1 ergibt sich auch hier ein nichtlineares Gleichungssystem, das in der vorliegenden Arbeit ebenfalls mit dem NEWTON-Verfahren aufgelöst wird. Die passende Entwicklung der zugrundeliegenden TAYLOR-Reihe ist wie folgt gegeben:

$$\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{q}}^{k+1}) = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{q}}^k + \Delta \hat{\mathbf{q}}^k) \approx \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{q}}^k) + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \right|_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^k = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T}}^k}}_{\Delta \hat{\mathbf{q}}^k} \Delta \hat{\mathbf{q}}^k \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (2.73)$$

Entsprechend lautet die Iterationsvorschrift für einen NEWTON-Schritt über k :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \hat{\mathbf{S}}_{-2} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-4}^k & \dots \\ \dots & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},1}^k & \hat{\mathbf{S}}_{-1} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-3}^k & \dots \\ \dots & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},1}^k & \hat{\mathbf{S}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-2}^k & \dots \\ \dots & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},1}^k & \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},-1}^k & \dots \\ \dots & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},4}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},1}^k & \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T},0}^k & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^k} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{q}}_{-2}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{q}}_{-1}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{q}}_0^k \\ \Delta \hat{\mathbf{q}}_{+1}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{q}}_{+2}^k \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\Delta \hat{\mathbf{q}}^k} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{-2}(\hat{\mathbf{q}}^k) \\ \hat{\mathbf{r}}_{-1}(\hat{\mathbf{q}}^k) \\ \hat{\mathbf{r}}_0(\hat{\mathbf{q}}^k) \\ \hat{\mathbf{r}}_{+1}(\hat{\mathbf{q}}^k) \\ \hat{\mathbf{r}}_{+2}(\hat{\mathbf{q}}^k) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}^k)}. \quad (2.74)$$

Auch hier setzt sich die Tangentenmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^k$ aus einem konstanten Anteil $\hat{\mathbf{S}}$ und einem veränderlichen Anteil $\hat{\mathbf{K}}_{\text{T}}^k$ zusammen. Allerdings steigen hierbei der Speicherbedarf und die numerische Sensitivität stark an, nachdem mehrere harmonische Schwingungsanteile h am Gesamtsignal beteiligt sind und simultan in die Berechnung einfließen. Zwischen den FHGs des Ausgangssystems und den FHGs dieses Hypersystems liegt der Faktor: $(2H + 1)$. Mithilfe der internationalen Norm ISO 6336-1 [33] wird diese Herausforderung in der eingebundenen Veröffentlichung [4] umgangen und ein angepasstes JACOBI-Verfahren zur iterativen Lösung dieses Gleichungssystems vorgeschlagen. Hierdurch wird die Berechnungsmethode für Getriebeanwendungen effizient und einsatzfähig.

In jedem NEWTON-Schritt k ist es unter anderem erforderlich, die nichtlinearen Kräfte $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^k(\hat{\mathbf{q}})$ im Frequenzbereich zu bestimmen. In der eingebundenen Veröffentlichung [4] geschieht das mithilfe

der Alternating-Frequency/Time-Methode (AFT) nach Cameron und Griffin [213]. Das bedeutet, die Nichtlinearitäten werden in gewohnter Form im Zeitbereich aufgelöst. Hierfür ist es vorab notwendig, das Zeitsignal entsprechend der gewählten FOURIER-Reihen zu rekonstruieren. Anschließend wird das zeitliche Ergebnis $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ einer Spektralzerlegung unterworfen und so wieder in den Frequenzbereich überführt. Formell kann diese Vorgehensweise wie folgt zusammengefasst werden [72]:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}^k = \text{FFT}[\mathbf{f}_{\text{nl}}(\text{iFFT}[\hat{\mathbf{q}}], t)]_h^k. \quad (2.75)$$

Sowohl die inverse schnelle FOURIER-Transformation (iFFT) in den Zeitbereich, die schnelle FOURIER-Transformation (FFT) in den Frequenzbereich als auch die explizite Berechnung der Nichtlinearitäten kann hierbei äußerst attraktiv mit OPENMP parallelisiert werden, da das Zeitsignal der gesamten Periode, im Gegensatz zur Zeitintegration, in jedem NEWTON-Schritt k vollständig vorliegt. Hierdurch entsteht ein weiterer Vorteil im Bezug auf die Effizienz des implementierten Algorithmus.

In der eingebundenen Veröffentlichung [3] wird der nichtlineare Effekt des Zahneingriffs linearisiert und entsprechend als Parametererregung definiert. Die Einführung der zeitvarianten Verzahnungssteifigkeit, ausgedrückt durch die zugehörigen FOURIER-Koeffizienten $\hat{\mathbf{K}}_{\text{vz},n}$, fordert einen weiteren FOURIER-Index n . Die entsprechende Beziehung lautet hier:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}^k = \sum_{n=h-H}^{h+H} \hat{\mathbf{K}}_{\text{vz},n} \mathbf{q}_{h-n}, \quad n \neq 0. \quad (2.76)$$

Hierdurch wird das Differentialgleichungssystem vollständig linear, und die NEWTON-Iteration kann entfallen, da $\Delta \hat{\mathbf{q}}^0$ bereits nach dem ersten Schritt der Lösung entspricht. Darüber hinaus wird in der eingebundenen Veröffentlichung [3] das quadratische Eigenwertproblem

$$[\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}] \hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0} \quad (2.77)$$

für ein parametererregtes Planetengetriebe aufgestellt. Die zugehörigen Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} sind hierbei ausschließlich diagonal besetzt. Die Matrix \mathbf{C} entspricht der Tangentensteifigkeit $\hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^0$. Im Detail gilt allgemein:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{D} + 2ih\Omega\mathbf{M}), \quad \mathbf{C} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^0. \quad (2.78)$$

Die zugehörigen Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ liefern eine Aussage über das dynamische

Eigenverhalten des zeitvarianten Systems und bilden daher das Fundament für die Untersuchungen in der eingebundenen Veröffentlichung [3]. Das Gesamtsystem zeigt für einen Betriebspunkt bezüglich Ω ein instabiles Verhalten, sobald mindestens ein Eigenwert die Bedingung $\Re(\lambda) > 0$ erfüllt. Die zugehörigen Frequenzen

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2\pi} \Im(\lambda) \quad (2.79)$$

setzen sich entsprechend der Ordnung h aus den Eigenfrequenzen des linearen zeitinvarianten Systems f_0 und der Anregungsfrequenz Ω zusammen.

2.6 Abgestrahlte Schalleistung

Das Ziel der eingebundenen Veröffentlichung [4] ist die quantitative Prognose der auftretenden Schallentstehung. Hierfür wird an der Gehäuseoberfläche die zu erwartende abgestrahlte Schallleistung als Equivalent Radiated Power (ERP) bestimmt, siehe hierzu auch Fritze et al. [214]. Die erzwungenen Schwingungen an der Gehäusestruktur in Normalenrichtung werden dabei mit der Schallschnelle $\dot{u}_n = v_n$ des umgebenden Mediums gleichgesetzt:

$$P_{\text{ERP}} = \frac{1}{2} \sigma \rho_L c_L \int_A |\dot{u}_n|^2 dA. \quad (2.80)$$

Die Massendichte $\rho_L = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$ und die Schallgeschwindigkeit $c_L = 343 \text{ ms}^{-1}$ entsprechen den üblichen Materialeigenschaften der umgebenden Luft und liegen daher als konstante Werte vor. Der Abstrahlgrad σ wird von Lügmaier und Münch [215] vorgeschlagen, um tiefere Frequenzen realitätsnäher abschätzen zu können. Dementsprechend liefert $\sigma = 1$ zunächst eine konservative Betrachtung für die Bewertung der prognostizierten Schallabstrahlung.

Nachdem in der vorliegenden Arbeit die Gehäuseoberfläche mittels der FEM in diskrete Einzelbereiche eingeteilt wird, erfolgt die Integration numerisch über die einzelnen Elementflächen:

$$P_{\text{ERP}} \approx \frac{1}{2} \sigma \rho_L c_L \sum_{i=1}^{N_{\text{ele}}} \int_{A_i} \sum_{j=1}^{N_{\text{pkt},i}} |g_{i,j}(r,s) \dot{q}_{n,i,j}|^2 dA_i. \quad (2.81)$$

Hier beschreibt A_i die zugehörige Elementfläche und N_{ele} die Gesamtanzahl an relevanten Elementen i . Die Anzahl an Knotenpunkten j und somit die Anzahl an Ansatzfunktionen $g_j(r,s)$ pro Elementfläche i ist hier mit N_{pkt} gekennzeichnet.

Kapitel 3

Zusammenfassung der eingebundenen Veröffentlichungen

In diesem Kapitel werden die Inhalte der eingebundenen Veröffentlichungen [1–4] jeweils einzeln zusammengefasst. Dabei erfolgt unter anderem eine Beantwortung der gestellten Forschungsfragen aus Kapitel 1.2. Zusätzlich existiert für jede eingebundene Veröffentlichung eine Angabe bezüglich dem jeweiligen Leistungsbeitrag der beteiligten Autoren.

3.1 Veröffentlichung [1]

A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness

Die praktikable Ermittlung der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit fordert trotz der steigenden Rechnerkapazitäten weiterhin den Einsatz spezieller Algorithmen oder alternativer Berechnungsstrategien [50]. Aus diesem Grund ist diese Herausforderung noch immer ein fester Bestandteil der aktuellen Forschung [27]. Hybride Methoden zielen hierbei darauf ab, die Genauigkeit numerischer Berechnungsansätze mit der Effizienz der analytischen Verfahren zu vereinen. Vorzugsweise kommt die FEM für den numerischen Berechnungsanteil zur Anwendung [57, 58]. Dennoch zeigen aktuelle Bemühungen [59, 60, 62], dass die hybriden Verfahren mit der FEM weiterhin einen Optimierungsbedarf aufweisen. In der eingebundenen Veröffentlichung [1] wird eine neue Methodik vorgestellt, die eine Steigerung der Genauigkeit der geometrischen Abbildung ermöglicht und zusätzlich die Rechenzeit verkürzt. Den Schlüssel hierfür liefert die IGA.

Entsprechend wird in der eingebundenen Veröffentlichung [1] ein hybrides Verfahren vorgestellt, das die IGA für den numerischen Berechnungsanteil einsetzt. Die numerisch exakte Zahngeometrie wird vorab durch eine Simulation des Herstellungsprozesses zur Verfügung gestellt. Die Vernetzung durch die IGA erfolgt anschließend für jeweils einen Zahn am treibenden und getriebenen Rad. Die Randbedingungen werden dabei so gewählt, als würde das jeweilige Modell eine Genauigkeit von drei benachbarten Zähnen vorweisen. Anschließend wird für jeden potentiellen Berührungspunkt auf den aktiven Flanken eine Nachgiebigkeit als Maß für die globale Steifigkeit abgeleitet. In einem analytischen Ersatzsystem werden diese Informationen entsprechend für jede Wälzposition zusammengetragen und im Arbeitsspeicher abgelegt. Anschließend erfolgt eine Iteration für die einzelnen Eingriffsstellungen, um die Kontaktbedingungen aufzulösen und damit die tragenden Bereiche und deren Lastverteilung zu ermitteln. Die Berücksichtigung der HERTZ'SCHEN Pressung erfolgt analytisch [31]. Das Ergebnis ist die veränderliche Verzahnungssteifigkeit.

Das vorgestellte Verfahren wird zunächst auf eine unkorrigierte Geradverzahnung angewandt, um vorab den Einfluss der Netzqualität zu untersuchen. Anschließend erfolgen weitere Berechnungen, die sowohl diese Geradverzahnung als auch eine passende Schrägverzahnung fokussieren. Hierbei wird neben einer Profilkorrektur auch ein Fertigungsfehler im Form eines Achsversatzes berücksichtigt. Alle Betrachtungen unterliegen hier statischen Bedingungen, und die beteiligten Radkörper werden als Starrkörper angenommen. Etablierte Verfahren verifizieren die Methodik.

Leistungsbeiträge der Autoren:

- **Andreas Beinstingel**
Definition der Forschungsfrage; Konzeptentwicklung; Methodik; Projektmanagement; Implementierung der Berechnungsmethodik; Aufbau Simulationsmodelle; Definition der Lastfälle; Durchführung der Simulationen; Auswertung der Simulationsergebnisse; Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Verfassen des Artikels
- **Michael Keller**
Unterstützung bei der Implementierung der Berechnungsmethodik; Unterstützung beim Aufbau der Simulationsmodelle; Fachliche Diskussion der Arbeit
- **Michael Heider**
Unterstützung bei der Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit
- **Burkhard Pinnekamp**
Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit
- **Steffen Marburg**
Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit

3.2 Veröffentlichung [2]

Gear mesh excitation and non-uniform Rational B-Splines

Während der Kraftübertragung sind die Zähne unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt. Aus diesem Grund ist es wichtig bei der Verzahnungsauslegung, die zu erwartenden Zahnfußspannungen zu ermitteln, um auf diese Weise die Sicherheit gegen einen Zahnbruch zuverlässig gewährleisten zu können. Die analytische Berechnung nach der internationalen Norm ISO 6336-3 [63] neigt dazu diese Spannungswerte zu überschätzen [66]. Daher ist es möglich, dass bei erhöhten Anforderungen an das Zahnradgetriebe das Optimierungspotential nicht vollständig ausgeschöpft wird. Eine allgemeine Berechnung der Zahnfußspannungen mit der FEM liefert numerisch präzise Ergebnisse [67], allerdings nimmt das eine hohe Rechenzeit in Anspruch.

Die hybride Simulationsmethodik aus der eingebundenen Veröffentlichung [1] erlaubt neben der Ermittlung der Zahnsteifigkeit eine Berechnung der Lastverteilung für jede Eingriffsstellung. Nachdem die IGA bereits ein dreidimensionales Kontinuum der Zahnkonturen beschreibt, bietet sich dieses neue Verfahren an, um zusätzlich die Zahnfußspannungen zu berechnen. Entsprechend wird die Lastverteilung für jede Wälzposition bestimmt und nachträglich als Belastung auf die Zähne aufgegeben, um anschließend den dreidimensionalen Spannungszustand im gesamten Zahn für das treibende und getriebene Rad zu berechnen [194, 198]. Die Auswertung der Spannungszustände erfolgt an den Integrationspunkten nach GAUSS-LEGENDRE, da diese die numerische Grundlage für das Aufstellen des Gleichungssystems darstellen [162]. Um bei der Auswertung des dreidimensionalen Spannungstensors einen skalaren Referenzwert ableiten zu können, wird sowohl die Vergleichsspannung (VON-MISES) als auch die maximale Hauptspannung im System ermittelt. Die höchsten Spannungswerte entstehen erwartungsgemäß an der Fußrundung der unbelasteten Zahnflanke. Die erste Hauptspannung ist hierbei üblicherweise parallel zum Normalschnitt orientiert und liegt grundsätzlich über dem der Vergleichsspannung. Die erste Hauptspannung erlaubt daher unter Berücksichtigung des Härtezustands eine vertrauenswürdige und kritische Betrachtung der Festigkeit gegenüber einem Zahnbruch.

Bevor die Ergebnisse für eine exemplarische Geradverzahnung mit etablierten Methoden unter statischen Bedingungen verglichen und verifiziert wird, steht zunächst der Einfluss der Netzqualität und dessen Konvergenzverhalten bezüglich der quantitativen Spannungsauswertung im Vordergrund. Abschließend wird die effiziente Anwendung für ein einfaches Torsionsmodell im Zeitbereich demonstriert. Das Ergebnis zeigt den dynamische Verlauf der Zahnfußspannungen.

Leistungsbeiträge der Autoren:

- **Andreas Beinstingel**
Definition der Forschungsfrage; Konzeptentwicklung; Methodik; Projektmanagement; Implementierung der Berechnungsmethodik; Aufbau Simulationsmodelle; Definition der Lastfälle; Durchführung der Simulationen; Auswertung der Simulationsergebnisse; Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Verfassen des Artikels
- **Michael Heider**
Unterstützung beim Aufbau der Simulationsmodelle; Unterstützung bei der Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit
- **Burkhard Pinnekamp**
Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit
- **Steffen Marburg**
Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit

3.3 Veröffentlichung [3]

Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox

Planetengetriebe stellen aufgrund ihrer kompakten Bauweise und der effizienten Leistungsver-zweigung unter anderem eine attraktive und beliebte Konstruktion für Industrieanwendungen dar. Nachdem eine Schrägverzahnung hierbei unerwünschte Kippmomente an den Planetenrädern aus-löst, sind Geradverzahnungen trotz des höheren Anregungsverhaltens eine bevorzugte Variante [12]. In Bezug auf das Geräuschverhalten fordert der Einsatz einer Geradverzahnung allerdings eine besondere Berücksichtigung, da bei Planetengetrieben mehrere Zahneingriffe simultan mit der gleichen Anregungsfrequenz stattfinden [18]. Das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Planetengetrieben ist demnach ein fester Bestandteil der Forschung [106]. Es sind theoretische Ar-beiten vorhanden, die auf Basis der FLOQUET-Theorie oder durch eine direkte Zeitintegration zei-gen, dass bei Planetengetrieben grundsätzlich instabile Betriebsbereiche auftreten können [111]. In der Literatur sind dem Anschein nach keine Experimente vorhanden, die diese These für ein schnelllaufendes Planetengetriebe mit großen Bauteildimensionen und einer hohen Leistungsdich-te stützen [106].

Bei einer praktischen Studie wurde ein Planetengetriebe mit zwei unterschiedlichen Profilkorrektu-ren am Sonnenritzel untersucht. Eine Variante ist im Bezug auf die Akustik optimiert und die ande-re besitzt bewusst ein erhöhtes Anregungsverhalten. Die zugehörigen Messdaten eines Hochlaufs zeigen, dass die anregende Version in drei Betriebsbereichen zu komplexen Schwingungsphäno-men führt, während die geräuscharme Ausführung keine Auffälligkeiten erzeugt. Die Spektralzer-legung des Zeitsignals liefert an diesen Punkten wiederholend ein breitbandiges Frequenzmuster und deutet entsprechend auf ein instabiles Verhalten hin. Während des Experiments wurde an diesen Betriebspunkten ein unangenehmes Geräusch von den beteiligten Prüfstandsingenieuren wahrgenommen, das erfahrungsgemäß nicht zu einem typischen Resonanzverhalten passt.

Ein Torsionsmodell des gesamten Antriebsstrangs dient zur dynamischen Analyse und Aufklä-rung der fokussierten Schwingungsphänomene. Die lineare HBM wurde hierbei als numerische Lösungsstrategie gewählt. Der Einsatz der homogenen Lösung des zeitvarianten Systems ist für diesen Anwendungsfall augenscheinlich neu. Diese Art der Betrachtung schließt numerische In-stabilitäten und stabile, parametererregte Resonanzstellen eindeutig aus und erlaubt daher eine effiziente und vor allem eindeutige Detektion von parametererregten Instabilitäten.

Leistungsbeiträge der Autoren:

- **Andreas Beinstingel**
Definition der Forschungsfrage; Konzeptentwicklung; Methodik; Projektmanagement; Implementierung der Berechnungsmethodik; Aufbau des Simulationsmodells; Durchführung der Simulationen; Auswertung der Simulationsergebnisse; Bereitstellung und Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Verfassen des Artikels
- **Robert G. Parker**
Unterstützung bei der Definition der Forschungsfrage; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Unterstützung beim Verfassen des Artikels
- **Steffen Marburg**
Projektmanagement; Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit

3.4 Veröffentlichung [4]

Computational prediction of structure-borne noise in a two-stage double-helical gearbox using harmonic balance method

Gerade im Sondermaschinenbau für Großgetriebe ist eine effiziente und verlässliche Simulationstechnik sinnvoll, die die Körperschallausbreitung im Gesamtsystem nachvollziehbar berechnet. Auf diese Weise entsteht während der Konstruktionsphase ein Systemverständnis, um die Wechselwirkungen zwischen Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse akustisch optimal zu beeinflussen. Bisher existieren überwiegend Arbeiten, die darauf abzielen, die erzwungenen Schwingungen bis zur Lagerstelle genau zu verfolgen [16, 22, 23]. Eine Untersuchung der akustischen Auswirkungen an den Gehäuseoberflächen erfolgt meistens nachträglich in einer gesonderten Analyse und dementsprechend entkoppelt von der Zahnkraftanregung [16, 139, 140]. Ein gekoppeltes nichtlineares Gesamtsystem ist üblicherweise nur in rechenintensiven (Mehrkörper-) Simulationen zu finden [17], die die Bewegungsgleichungen durch eine numerische (Vorwärts-) Integration sequentiell im Zeitbereich lösen. In Anlehnung an den Ausblick von Bihr [22] und Utakapan [23] vervollständigt eine gekoppelte Berücksichtigung des dynamischen Gehäuseverhaltens unter anderem die akustische Geräuschprognose eines Zahnradgetriebes.

Neben der Einbindung der Gehäusestruktur ist es das Bestreben, die Effizienz einer derartigen Simulation zu steigern. Die nichtlineare Formulierung der HBM stellt hierfür augenscheinlich ein geeignetes numerisches Werkzeug für die Untersuchung stationärer Betriebspunkte dar. Aus diesem Grund wird in der eingebundenen Veröffentlichung [4] zunächst eine praktikable Implementierung der HBM für Getriebeanwendungen vorgestellt. Anschließend wird diese Berechnungsstrategie an einem einfachen Stirnradgetriebe gegenüber einer Zeitbereichsformulierung verifiziert. Des Weiteren wird eine getrennte Betrachtung der nichtlinearen Zahnkraftanregungen für ein zweistufiges Getriebe vorgeschlagen, die explizit für die Anwendung der HBM einen weiteren Vorteil bezüglich der Rechenzeit liefert. Abschließend wird das zweistufige Zahnradgetriebe im gekoppelten Gesamtsystem, bestehend aus Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse, im Frequenzbereich nichtlinear analysiert. Die Beschleunigung am Gehäuse wird mit einer Messung quantitativ validiert. Der Zahneingriff wird während der dynamischen Berechnung durch die neue Methodik der eingebundenen Veröffentlichung [1] abgebildet. Die Wellen werden als Balkenelemente nach TIMOSHENKO modelliert und berücksichtigen den gyroskopischen Effekt. Die Gleitlager werden sowohl linear als auch nichtlinear über eine FSI in die Simulation eingebunden. Die abgestrahlte Schallleistung wird schließlich an einer Gehäuseoberfläche ermittelt und erklärt das Messergebnis.

Leistungsbeiträge der Autoren:

- **Andreas Beinstingel**
Definition der Forschungsfrage; Konzeptentwicklung; Methodik; Projektmanagement; Implementierung der Berechnungsmethodik; Aufbau Simulationsmodelle; Definition der Lastfälle; Durchführung der Simulationen; Auswertung der Simulationsergebnisse; Unterstützung beim Versuchsaufbau; Interpretation der Daten; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit; Verfassen des Artikels
- **Sebastian Schabert**
Unterstützung beim Aufbau der Simulationsmodelle; Unterstützung beim Versuchsaufbau; Diskussion der Daten; Fachliche Diskussion der Arbeit
- **Michael Heider**
Unterstützung bei der Definition der Forschungsfrage; Unterstützung bei der Konzeptentwicklung; Unterstützung beim Projektmanagement; Unterstützung zur Definition der Lastfälle; Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit
- **Burkhard Pinnekamp**
Unterstützung bei der Definition der Forschungsfrage; Unterstützung beim Versuchsaufbau; Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit
- **Steffen Marburg**
Fachliche Diskussion der Arbeit; Betreuung der Arbeit

Kapitel 4

Diskussion der Ergebnisse

Im vorangehenden Kapitel 3 wurden die Inhalte der eingebundenen Veröffentlichungen [1–4] zusammengefasst und das jeweilige Ziel und Ergebnis hervorgehoben. Nachfolgend werden diese Ergebnisse nochmals aufgegriffen und im Detail erläutert und diskutiert. An geeigneter Stelle erfolgt eine wissenschaftliche Einordnung der gewonnenen Erkenntnisse.

Bei der Ermittlung der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit wird nach Marafona et al. [27] in drei Kategorien unterschieden: Analytische, numerische und hybride Verfahren. Während die analytischen Methoden eine sehr kurze Berechnungszeit in Anspruch nehmen, ermöglichen die numerischen Verfahren eine hohe Abbildungsgenauigkeit der tatsächlichen Zahnkontur und berücksichtigen neben der Biegung auch automatisch Stauchung und Schub im Verformungsprozess. Diese Deformationsanteile gewinnen beispielsweise bei großen Schrägungswinkeln an Bedeutung. Die vorgestellte Methodik in der eingebundenen Veröffentlichung [1] gehört zu den hybriden Berechnungsansätzen und nutzt die IGA für den numerischen Berechnungsteil. Nachdem die IGA grundsätzlich ein numerisches Verfahren ist, wird in der eingebundenen Veröffentlichung [1] zunächst eine Netzstudie angestellt. Ein Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass mit zunehmender Diskretisierung der Verlauf der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit schließlich einen Endzustand annimmt. Entsprechend konvergiert die IGA erwartungsgemäß und stärkt zunächst das Vertrauen in den Algorithmus. Zusätzlich unterstreicht eine zugehörige Spektralanalyse der Zeitverläufe, dass bereits ein sehr grobes Netz genügt, um das grundsätzliche Anregungsverhalten der Verzahnung abschätzen zu können. Die verschiedenen Diskretisierungsstufen weisen nur eine Verschiebung im Absolutwert auf und zeigen ansonsten den gleichen Verlauf. Das bekräftigt abermals die Berechnungsstärke dieser hybriden Methode. Eine Netzqualität, die den besten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Effizienz darstellt, wird anschließend ausgewählt und dient zu Zwecken

der Verifikation als Referenz gegenüber etablierten Berechnungsansätzen. Zum Vergleich werden neben der internationalen Norm ISO 6336-1 [33] unter anderem die beiden analytischen Methoden nach Weber und Banaschek [31] und Schmidt [49] herangezogen. Darüber hinaus stützt eine vollständig numerische Simulation auf Basis der FEM diesen Abgleich. Außerdem ist ein hybrides Verfahren, das die FEM nutzt, in Anlehnung an Neupert und Bong [57, 58] ebenfalls Teil der folgenden Untersuchungen. Als Grundlage für die Studien stehen exemplarisch eine Geradverzahnung und eine Schrägverzahnung im Fokus. Die erste Untersuchung an der unkorrigierten Geradverzahnung zeigt, dass alle Methoden grundsätzlich das gleiche Absolutniveau erreichen. Im Einzelgebiet ist ersichtlich, dass das vollständig numerische Verfahren nicht in der Lage ist, die HERTZ'SCHE Pressung vollumfänglich abzubilden, da die Steifigkeit an dieser Stelle etwas zu hoch ausfällt. Im Übergangsbereich zwischen Einzel- und Doppeleingriff gibt es bei allen Varianten leichte Unterschiede, die sich auch im Anregungsverhalten bemerkbar machen. Unter anderem beginnt der Doppeleingriff bei der vorgestellten Methodik, aber auch bei der vollständig numerischen Variante, vorzeitiger als bei den anderen Verfahren. Das liegt vor allem an der Tatsache, dass die Beispielverzahnung an der Fußrundung einen Unterschnitt aufweist. Sowohl die Norm als auch die analytischen Methoden haben keinerlei Kenntnis über die exakte Zahngeometrie und können diesen Effekt daher nicht abbilden. An dieser Stelle wäre eine manuelle Anpassung in Form einer Profilmodifikation notwendig. Das hybride Verfahren von Neupert und Bong [57, 58] berücksichtigt hier keinen vor- und nachzeitigen Zahneingriff und berechnet entsprechend einen sprunghaften Übergang zwischen Einzel- und Doppeleingriff. Dieser Effekt geht zurück, sobald passende Profilkorrekturen zur Anwendung kommen. Das zeigt sich in einem zweiten Berechnungsvorgang, der eine Kopfrücknahme an den beteiligten Zähnen berücksichtigt. Das Anregungsverhalten reduziert sich bei allen Verfahren, und der Übergangsbereich fällt dabei weniger ins Gewicht. Die nächsten beiden Untersuchungen an der Schrägverzahnung zeigen grundsätzlich, dass die analytischen Verfahren den Absolutwert der Verzahnungssteifigkeit etwas überschätzen. Das bekräftigt die These bezüglich des Einflusses von Stauchung und Schub während der Verformung, da hier auch Axialkräfte kompensiert werden müssen. Die untersuchte Verzahnung besitzt einen Schrägungswinkel von 30° . Zumindest in der Norm wird eine Gültigkeit des Berechnungsansatzes bis zu diesem Winkel angegeben. Nachdem die Norm auf der Arbeit von Schäfer [32] und dem Ansatz von Weber und Banaschek [31] beruht, wird an dieser Stelle eine äquivalente Gültigkeit für die herangezogenen analytischen Modelle angenommen und als Grund für diese Abweichung angesehen. Nichtsdestotrotz liefern alle Verfahren ein vertrauenswürdiges und sinnvolles Ergebnis. Die vorgestellte Methodik ist damit verifiziert und erlaubt durch einen neuen Berechnungsansatz eine numerisch exakte Abbildung der Zahndeformation im dreidimensionalen Raum bei geringen Rechenzeiten, siehe hierzu auch die Einordnung bei Marafona et al. [27].

Durch die IGA erweitert das neue Verfahren den aktuellen Stand der Technik um eine hochwertige Berechnungsstrategie für die Bestimmung der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit [27]. Die Anwendung von NURBS scheint für Getriebeanwendungen und die Zahnkontaktanalyse ein vielversprechendes numerisches Werkzeug zu sein, das allgemein einen neuen Forschungsbereich im Getriebebau eröffnet. Zum Beispiel nutzen Müller et al. [216] aktuell ebenfalls NURBS, um die Zahnflanken auf einem Kegelrad mathematisch zu beschreiben. Des Weiteren ziehen Cheng et al. [69] und Yusuf et al. [70] die IGA zur Berechnung der Zahnfußspannungen unter Nennlast heran und vergleichen das Ergebnis jeweils mit einer Simulation auf Basis der FEM. In der eingebundenen Veröffentlichung [2] wird diese Thematik ebenfalls aufgegriffen. Hier wird die tatsächliche Lastverteilung während der Kraftübertragung als Belastung auf die Zähne aufgegeben. Auf diese Weise erfolgt eine sehr intensive Einordnung gegenüber etablierten Verfahren, da die IGA hier die gesamte Berechnungskette (Zahnsteifigkeit, Kontakt, Lastverteilung und Spannungsauswertung) beständig begleitet und beeinflusst. Exemplarisch stellt eine unkorrigierte Geradzahnung die Grundlage dieser Untersuchungen dar. Zunächst zeigt eine Netzstudie, dass die neue Berechnungsstrategie auch für die Zahnfußspannungen vertrauenswürdig konvergiert und dabei einen Endzustand annimmt, der qualitativ bereits mit einem groben Netz erreicht wird. Nichtsdestotrotz erfüllt das gleiche Netz, das in der eingebundenen Veröffentlichung [1] den besten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Effizienz darstellt, abermals diese Kriterien. Entsprechend kann mit dieser Diskretisierung eine flüssige Berechnung stattfinden, um sie mit bewährten Methoden vergleichen zu können. Insgesamt erfolgt dieser Abgleich mit der internationalen Norm ISO 6336-3 [63], dem analytischen Verfahren nach Weber und Banaschek [31] in Verbindung mit der Randelementmethode nach Paucker [66], dem hybriden Verfahren nach Neupert und Bong [57, 58], das die FEM für den numerischen Berechnungsteil nutzt, und einem vollständig numerischen Berechnungsablauf auf Basis der FEM. Die Ergebnisse unterstreichen die Berechnungsgüte der vorgestellten Methodik. Die IGA liefert in Bezug auf das vollständig numerische Verfahren vergleichbare Spannungswerte. Beide Methoden liegen unter dem Referenzwert der internationalen Norm ISO 6336-3 [63]. Die analytische Berechnung und auch das hybride Verfahren auf Basis der FEM zeigen einen qualitativ ähnlichen Verlauf, überschätzen aber die Spannungswerte und bewerten die Auslastung entsprechend konservativer. Aus diesem Grund stellt das neue Verfahren eine effiziente und vor allem genaue Berechnungsmöglichkeit dar, die im Entwicklungsprozess beständig eingebracht werden kann.

Die eingebundene Veröffentlichung [3] fokussiert das experimentelle Auftreten von parametererregten Instabilitäten in einem schnelllaufenden Planetengetriebe mit verhältnismäßig großen Bauteildimensionen und einer hohen Leistungsdichte. Derartige Messungen, die dieses Phänomen ein-

deutig bestätigen, sind in der öffentlichen Literatur augenscheinlich nicht vorhanden [106]. Hierzu passend zeigt die Untersuchung an einem derartigen Planetengetriebe ein auffälliges Schwingungsverhalten an drei Betriebspunkten. Zusätzlich entsteht während des zugrundeliegenden Hochlaufs in diesen drei Bereichen ein unangenehmes Geräusch. Diese Erscheinung tritt nur bei einer bewusst anregenden Auslegung der Profilkorrekturen auf. Eine akustisch optimierte Ausführung der Profilmodifikationen unterdrückt diese Effekte. Um die insgesamt drei gemessenen Schwingungsphänomene an einem derartigen Planetengetriebe rechnerisch erklären zu können, wird die lineare Fassung der HBM auf ein zeitvariantes Torsionsmodell angewandt. Aus numerischer Sicht hat die Linearität zunächst den Vorteil, dass keine numerischen Konvergenz- und Stabilitätsprobleme auftreten und damit eine eindeutige mathematische Lösung garantiert ist. Des Weiteren wird hier die lineare HBM in Bezug auf ihre zwei mathematischen Lösungsanteile, individuell betrachtet. Im Detail sind das die homogene Lösung und die partikuläre Lösung. Üblicherweise ist die partikuläre Lösung in der technischen Anwendung von Interesse, da hier direkt die erzwungenen Schwingungen im stationären Zustand ermittelt werden. Die Information über das Stabilitätsverhalten ist allerdings im homogenen Anteil der Gesamtlösung verankert [126]. Entsprechend ist die partikuläre Betrachtung in der Lage stabile parametererregte Resonanzstellen zu erfassen und zu quantifizieren. Die homogene Lösung hingegen gibt Aufschluss über das Auftreten von instabilen parametererregten Resonanzstellen. Eine konkrete Ermittlung des instabilen Verhaltens ist allerdings nicht möglich, da die Auslenkungen hier aufgrund der linearen Theorie gegen Unendlich ansteigen. Nichtsdestotrotz gelingt durch diese mathematische Trennung eine eindeutige Identifikation von parametererregten Instabilitäten. Eine numerische Zeitintegration dient hierbei zur Validierung des implementierten Berechnungsansatzes. Die Zeitbereichsrechnung enthält sinngemäß alle Resonanzstellen, sowohl die stabilen als auch die instabilen. Die partikuläre Lösung berechnet in stabilen Bereichen das gleiche dynamische Verhalten wie die Zeitbereichsrechnung. An den drei besagten Betriebspunkten tritt in der partikulären Lösung allerdings keine erkennbare Erhöhung auf. Hier detektiert die homogene Lösung drei Instabilitäten. Entsprechend erklärt das Simulationsmodell und die Berechnungsstrategie eindeutig das Schwingungsphänomen und identifiziert die drei Betriebspunkte als parametererregte Instabilität. Diese Art der Berechnung ist in diesem Kontext dem Anschein nach neu, da zur Stabilitätsuntersuchung üblicherweise eine direkte Zeitintegration oder die FLOQUET-Theorie eingesetzt wird [118, 119]. Die vorgestellte Methodik ist allgemein ein verlässliches und effizientes Verfahren zur eindeutigen Stabilitätsuntersuchung.

Die nichtlineare Formulierung der HBM wird in der eingebundenen Veröffentlichung [4] zur Berechnung des dynamischen Verhaltens von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb herangezogen. Sie zeigt in dieser speziellen Form augenscheinlich erstmalig die akustische und nichtlineare Be-

trachtung eines gekoppelten Gesamtsystems [22, 23, 140] im Frequenzbereich. Die größten Herausforderungen bei der Anwendung der HBM sind das Konvergenzverhalten, der Speicherbedarf und die Implementierung der auftretenden Nichtlinearitäten. Die Auflösung der Nichtlinearitäten erfolgt hierbei nach Cameron und Griffin [213] im Zeitbereich. Um die Stabilität im Iterationsprozess gewährleisten zu können wird in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen, zunächst eine statische Analyse mit einer konstanten Verzahnungssteifigkeit gemäß der internationalen Norm ISO 6336-1 [33] durchzuführen, um den Startwert der Berechnung anschließend durch dieses Ergebnis angemessen zu definieren. Erfahrungsgemäß treten bei dieser Herangehensweise keine Probleme auf. Darüber hinaus wird im Algorithmus vorgeschlagen, dass in der Suchmatrix nur der Gleichanteil der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit in die Berechnung eingebunden wird. Dieser dominiert im Vergleich zu den harmonischen Anteilen und beeinflusst damit maßgeblich die Konvergenz. Eine entsprechende Vernachlässigung der fluktuierenden Anteile ermöglicht eine effiziente iterative Lösung des speicherintensiven Hypersystems. Des Weiteren kann hier die komplex konjugierte Beschaffenheit der Lösung zusätzlich ausgenutzt werden. Auf diese Weise entsteht ein Algorithmus, der im Vergleich zur Zeitintegration nur einen Bruchteil der Rechenzeit in Anspruch nimmt, aber dennoch keinen merkbaren Anstieg in der Speicherauslastung hervorruft. Die Verifikation des implementierten Algorithmus erfolgt in der eingebundenen Veröffentlichung [4] an einem einstufigen Stirnradgetriebe gegenüber einer Zeitbereichssimulation [207]. An diesem Stirnradgetriebe wird zudem ein Abgleich zwischen linearer Formulierung und nichtlinearer Formulierung durchgeführt. Das Ergebnis zeigt, dass eine lineare Betrachtung grundsätzlich in der Lage ist, das dynamische Verhalten zu beschreiben. Dennoch, für eine Quantifikation der Schwingungsamplituden ist eine nichtlineare Betrachtung empfehlenswert. In einer weiteren Voruntersuchung wird ein zweistufiges Getriebe mit der HBM analysiert. Nachdem durch den zweiten Zahneingriff die gemeinsame Periodendauer im Gesamtsystem entsprechend wächst, steigt zunächst die Rechenzeit an. Eine getrennte Betrachtung der Zahneingriffe zeigt, dass das grundsätzliche nichtlineare Verhalten der dynamischen Zahnkräfte sowohl qualitativ als auch quantitativ abgebildet wird. Eine Wechselwirkung der Zahneingriffe findet hier nur bedingt statt und steht damit im Einklang zu den Betrachtungen von Liu und Parker [99]. Aus diesem Grund wird diese neue und effiziente Berechnungsvariante abschließend auf das zweistufige Getriebe im gekoppelten Gesamtsystem angewandt. Das dynamische System ist folglich in der Lage, die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse angemessen zu berechnen. Die Beschleunigungen an der Gehäuseoberfläche werden für einen Betriebspunkt an jeder Ordnung im Frequenzbereich ausgewertet und mit einer Messung bis 1000 Hz validiert. Eine zusätzliche Betrachtung der abgestrahlten Schallleistung (ERP) erklärt zudem das Messergebnis und erlaubt eine Interpretation der prognostizierten Akustikeigenschaften. Entsprechend gilt die Methode als validiert.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur effizienten Steigerung der Prognosegenauigkeit für das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb. Aus numerischer Sicht liegt der Schlüssel hierfür hauptsächlich in der Anwendung der IGA und der HBM. Beide Verfahren gewinnen aktuell an allgemeiner Relevanz und wurden im Rahmen dieser Arbeit speziell auf die fokussierten Getriebeanwendungen angepasst und angewandt.

Konkret wurde zunächst eine neue hybride Simulationsmethodik zur Bestimmung der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit vorgestellt, die die IGA zur Ermittlung der Nachgiebigkeiten auf den Zahnflanken einsetzt. Diese Art der Berechnung steigert sowohl die geometrische Abbildungsgenauigkeit als auch die Effizienz bezüglich der Rechenzeit. Das liegt unter anderem daran, dass die IGA im Gegensatz zur FEM auf NURBS bei der Formulierung der zugrundeliegenden Ansatzfunktionen setzt. Durch NURBS ist es möglich, komplexe Geometrien numerisch exakt zu beschreiben. Darüber hinaus reduziert deren Anwendung im Vergleich zur FEM insgesamt die Zahl der FHGs. Ein Abgleich mit etablierten Methoden bestätigt die Qualität der berechneten Ergebnisse.

Des Weiteren wurde diese neue Methodik dahingehend untersucht, ob sie in der Lage ist, die auftretenden Zahnfußspannungen während des Kraftübertragungsprozesses angemessen genau zu ermitteln. Für eine Beispielverzahnung wurde die Lastverteilung für jede Eingriffsstellung bestimmt und anschließend als Belastung auf den Zahnflanken definiert. Der dreidimensionale Spannungszustand wurde skalar auf die maximale Hauptspannung reduziert um die Ergebnisse quantitativ mit bewährten Verfahren vergleichen zu können. Es zeigt sich, dass die IGA sinnvolle Spannungswerte berechnet und damit eine geeignete Alternative für die Festigkeitsberechnung darstellt.

Die lineare HBM wurde zunächst auf ein zeitvariantes System angewandt, das die Dynamik eines Planetengetriebes abbildet. Diese mathematische Formulierung erlaubt neben einer effizienten Berechnung auch eine eindeutige Unterscheidung in stabile und instabile Resonanzstellen, die unter anderem durch Parametererregung ausgelöst werden. Diese Eigenschaft erlaubt es, die Messergebnisse bezüglich eines Planetengetriebes eindeutig zu erklären und bestätigt damit experimentell das Auftreten von parametererregten Instabilitäten in schnelllaufenden Planetengetrieben mit großen Bauteildimensionen und hohen Leistungsdichten.

Abschließend wurde die nichtlineare Formulierung der HBM eingesetzt, um den Körperschall in einem Zahnradgetriebe, ausgehend von der Verzahnung bis hin zur Gehäuseoberfläche, zu verfolgen. Dieser Transferpfad besteht aus einem gekoppelten Gesamtsystem, das die nichtlinearen, dynamischen Wechselwirkungen zwischen Verzahnung, Welle, Gleitlager und Gehäuse angemessen berücksichtigt. Eine individuelle Betrachtung der Zahneingriffe bringt bei mehrstufigen Getrieben speziell für die HBM einen zusätzlichen Gewinn in der Rechenzeit. Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass die Anwendung der HBM eine effiziente und praktikable Lösungsstrategie für Dynamik- und Akustikuntersuchungen von Zahnradgetrieben im stationären Betrieb darstellt.

Eine weiterführende Arbeit im Bezug auf die IGA und den Zahnkontakt könnte beispielsweise die Erweiterung auf andere Zahnpaarungen sein. Hierzu zählt unter anderem eine Innenverzahnung, ein asymmetrisches Zahnprofil oder gar eine Kegelradstufe. Des Weiteren ist es mit diesem dreidimensionalen Kontinuum der Zähne möglich, den Temperatureinfluss auf die Verformungen und Spannungen näher zu untersuchen. Aus mechanischer Sicht, könnte in der Zahnkontaktanalyse der Effekt der Reibung und/oder ein elastohydrodynamischer Kontakt implementiert werden. Außerdem ist grundsätzlich eine numerische Optimierung des Algorithmus denkbar. Höhere Ordnungen in den NURBS führen zwar zu einer besseren Abbildungsgenauigkeit, aber auch zu einer erhöhten Kondition in den assemblierten Matrizen. Eine entsprechende Anpassung und Stabilisierung im Gleichungssystem könnte die Effizienz der IGA weiter steigern. Des Weiteren besitzt der Algorithmus zur Kontaktsuche noch Optimierungspotential, da dieser bisher, in Form einer Bisektion, bei der Ableitung der Nachgiebigkeiten allgemein die meiste Rechenzeit in Anspruch nimmt.

Die lineare Fassung der HBM im Sinne der Stabilitätsuntersuchung weckt weiteres Interesse bei der Interpretation der homogenen Lösung. Hier geben die Eigenwerte Aufschluss darüber, welche Betriebspunkte instabil sind und welche Eigenfrequenzen an dieser Instabilität beteiligt sind. Eine zusätzliche Bewertung und Erklärung der zugehörigen Eigenmoden und deren Anteilnahme bedarf intensiverer Untersuchung.

Aus numerischer Sicht könnte die nichtlineare HBM dahingehend weiter untersucht werden, ob eine merdimensionale Formulierung oder die Einbringung einer Homotopiebeziehung zu einer zusätzlichen Beschleunigung während der Iteration führt [72]. Das ist vor allem für mehrstufige Getriebe interessant. Darüber hinaus ist eine Berechnung des akustischen Schallfeldes sinngemäß der nächste sinnvolle Schritt im Bezug auf die Akustik. Aus Sicht der Anwendung hingegen stellt die entwickelte Berechnungsmethodik auf Basis der HBM bereits ein praktikables Verfahren dar, das allgemein, z.B. in Parameterstudien und Unsicherheitsquantifizierungen, intensiver zur Anwendung kommen kann, um Einflüsse und Auswirkungen im Transferpfad zu identifizieren. In diesem Kontext können gezielt sekundäre Maßnahmen zur Geräuschreduzierung abgeleitet, entwickelt und eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Beinstingel, M. Keller, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 160:104291, 2021.
- [2] A. Beinstingel, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Gear mesh excitation and non-uniform Rational B-Splines. *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research*, 86:331–336, 2021.
- [3] A. Beinstingel, R. G. Parker, und S. Marburg. Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox. *Journal of Sound and Vibration*, 536:117160, 2022.
- [4] A. Beinstingel, S. Schabert, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Computational prediction of structure-borne noise in a two-stage double-helical gearbox using harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 189:110112, 2023.
- [5] M. Heider, B. Pinnekamp, und A. Beinstingel. Planetary gears: modes, noise and modifications. In *International Conference on Gears 2019*. VDI, 2019.
- [6] B. Pinnekamp, M. Heider, und A. Beinstingel. Specific dynamic behavior of planetary gears. In *AGMA Fall Technical Meeting 2019:19FTM06*. AGMA, 2019.
- [7] A. Beinstingel, B. Pinnekamp, M. Heider, und S. Marburg. Methoden zur Steifigkeitsmodellierung von Evolventenverzahnungen. In *Fortschritte der Akustik-DAGA: 45. Jahrestagung für Akustik*. DEGA e.V., 2019.
- [8] A. Beinstingel, B. Pinnekamp, M. Heider, D. Stierli, und S. Marburg. A comparison of an analytical and fea approach in determining thermal lead correction for high speed gears. In *AGMA Fall Technical Meeting 2020:20FTM02*. AGMA, 2020.

- [9] A. Beinstingel, S. Schabert, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Simulation des Anregungsverhaltens von Zahnradgetrieben. In *Fortschritte der Akustik-DAGA: 48. Jahrestagung für Akustik*. DEGA e.V., 2022.
- [10] F. Küçükay. *Dynamik der Zahnradgetriebe - Modelle Verfahren Verhalten*. Habilitation, Technische Universität München, München, 1985.
- [11] T. Griggel. *Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2010.
- [12] F. Hoppe und B. Pinnekamp. Gear noise - challenge and success based on optimized gear geometries. In *AGMA Fall Technical Meeting 2004:04FTM01*. AGMA, 2004.
- [13] B. Kohn. *Topologische Flankenkorrektur zur Anregungsoptimierung von Stirnradgetrieben*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2019.
- [14] B. Graf. *Validierung von Methoden zur Berechnung und Reduzierung der Schallabstrahlung von Getriebegehäusen*. Dissertation, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, 2007.
- [15] J. Neher. *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen der Schallabstrahlung bei Fahrzeuggetrieben*. Dissertation, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, 2011.
- [16] S. Falkenberger. *Optimierung der Berechnung der Schallabstrahlung von Getriebegehäusen*. Dissertation, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, 2018.
- [17] S. Sanzenbacher. *Reduzierung von Getriebeegeräuschen durch Körperschallminderungsmaßnahmen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2016.
- [18] M. Heider. *Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2012.
- [19] R. Müller. *Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben*. Dissertation, Technische Universität München, München, 1991.
- [20] J. Baethge. *Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern*. Dissertation, Technische Hochschule München, München, 1969.
- [21] F. A. Thoma. *Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2012.

- [22] J. H. Bihr. *Untersuchung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung des Welle-Lager-Systems*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2016.
- [23] T. Utakapan. *Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2020.
- [24] B. Neubauer. *Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2015.
- [25] H. Gerber. *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben - Modellbildung, Innere Anregung und Dämpfung*. Dissertation, Technische Universität München, München, 1984.
- [26] H. Winter, A. Seifried, und M. Seifried. Einfluß von Verzahnungsgenauigkeit und Oberflächenstruktur der Zahnflanken auf das Geräuschverhalten von Stirnrädern. *VDI-Z*, 107, 1965.
- [27] J. D. Marafona, P. M. Marques, R. C. Martins, und J. H. Seabra. Mesh stiffness models for cylindrical gears: A detailed review. *Mechanism and Machine Theory*, 166:104472, 2021.
- [28] C. Natali, M. Battarra, G. Dalpiaz, und E. Mucchi. A critical review on fe-based methods for mesh stiffness estimation in spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 161:104319, 2021.
- [29] Y. Lei, D. Wang, Z. Liu, und X. Yang. A new model for calculating time-varying gearmesh stiffness. *Vibroengineering (procedia)*, 14:334–339, 2017.
- [30] H. Dai, X. Long, F. Chen, und C. Xun. An improved analytical model for gear mesh stiffness calculation. *Mechanism and Machine Theory*, 159:104262, 2021.
- [31] C. Weber und K. Banaschek. Schriftenreihe Antriebstechnik - Heft 11: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. Seiten 1–88, Braunschweig, 1953. Fachgemeinschaft Getriebe und Antriebselemente im Verein Deutscher Maschinenbau-Anstalten e.V.
- [32] W. Schäfer. *Ein Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1971.

- [33] Calculation of load capacity of spur and helical gears - part 1: basic principles, introduction and general influence factors. Norm: ISO 6336-1:2019-11, International Organization for Standardization, Vernier, Geneva, 2019.
- [34] R. W. Cornell. Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth. *Journal of Mechanical Design*, 103(2):447–459, 1981.
- [35] Sainsot, P. , P. Velex, und O. Duverger. Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula . *Journal of Mechanical Design*, 126(4):748–752, 2004.
- [36] P. Sainsot und P. Velex. On contact deflection and stiffness in spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*, 154:104049, 2020.
- [37] J.-F. Hochrein, M. Otto, und K. Stahl. Fast tooth deflection calculation method and its validation. *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research*, 2022.
- [38] B. Guilbert, P. Velex, D. Dureisseix, und P. Cutuli. A mortar-based mesh interface for hybrid finite-element/lumped-parameter gear dynamic models—applications to thin-rimmed geared systems. *Journal of Mechanical Design*, 138(12):11, 2016.
- [39] B. Guilbert, P. Velex, D. Dureisseix, und P. Cutuli. Modular hybrid models to simulate the static and dynamic behaviour of high-speed thin-rimmed gears. *Journal of Sound and Vibration*, 438:353–380, 2019.
- [40] A. Klein. *Modellreduktion für Antriebssysteme mit Zahnradgetrieben zur vereinfachten Berechnung der inneren dynamischen Zahnkräfte*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Dresden, 1988.
- [41] J. Börner und M. Senf. Verzahnungsbeanspruchung im Eingriffsfeld – effektiv berechnet. *Antriebstechnik*, 34:59–63, 1995.
- [42] J. Börner, N. Kurz, und F. Joachim. Effective analysis of gears with the program LVR. In *International Conference on Gears 2002*, Seiten 721–735. VDI, 2002.
- [43] K. Hayashi. Load distribution on the contact line of helical gear teeth : Part 1 fundamental concept. *Bulletin of JSME*, 6(22):336–343, 1963.
- [44] K. Hayashi und T. Sayama. Load distribution on the contact line of helical gear teeth : Part 2 gears of large tooth width. *Bulletin of JSME*, 6(22):344–353, 1963.

- [45] K. Umezawa. The meshing test on helical gears under load transmission: 1st report, the approximate formula for deflections of gear tooth. *Bulletin of JSME*, 15(90):1632–1639, 1972.
- [46] K. Umezawa. The meshing test on helical gears under load transmission: 2nd report, the approximate formula for bending-moment distribution of gear tooth. *Bulletin of JSME*, 16(92):407–413, 1972.
- [47] K. Umezawa. The meshing test on helical gears under load transmission: 3rd report, the static behaviours of driven gear. *Bulletin of JSME*, 17(112):1348–1355, 1974.
- [48] T. F. Conry und A. Seireg. A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. *Journal of Engineering for Industry*, 95(4):1115–1122, 1973.
- [49] G. Schmidt. *Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung*. Dissertation, Technische Universität München, München, 1972.
- [50] C. G. Cooley, C. Liu, X. Dai, und R. G. Parker. Gear tooth mesh stiffness: A comparison of calculation approaches. *Mechanism and Machine Theory*, 105:540 – 553, 2016.
- [51] T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, und I. Howard. Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two-and three-dimensional parametrical fe models. *Strojniski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, 57(11), 2011.
- [52] F. Ihlenburg, M. Zarnekow, und T. Grätsch. Simulation of vibrational sources and vibroacoustic transfer in wind turbine drivetrains. *PAMM*, 19, 2019.
- [53] S. Vijayakar. A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3):525–545, 1991.
- [54] P. Ziegler. *Dynamische Simulation von Zahnradkontakten mit elastischen Modellen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2012.
- [55] J.-P. Liu, X.-B. Shu, H. Kanazawa, K. Imaoka, A. Mikkola, und G.-X. Ren. A model order reduction method for the simulation of gear contacts based on arbitrary lagrangian eulerian formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 338:68–96, 2018.
- [56] R. R. Craig Jr und M. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7):1313–1319, 1968.

- [57] B. Neupert. *Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelaradgetrieben*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Düsseldorf, 1983.
- [58] H.-B. Bong. *Erweiterte Verfahren zur Berechnung von Stirnradgetrieben auf der Basis numerischer Simulationen*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Aachen, 1990.
- [59] L. Chang, G. Liu, und L. Wu. A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears. *Mechanism and Machine Theory*, 87:93–114, 2015.
- [60] S. Feng, L. Chang, und Z. He. A hybrid finite element and analytical model for determining the mesh stiffness of internal gear pairs. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34(6):2477–2485, 2020.
- [61] R. J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380–380, 1965.
- [62] C. Zhang, H. Dong, D. Wang, und B. Dong. A new effective mesh stiffness calculation method with accurate contact deformation model for spur and helical gear pairs. *Mechanism and Machine Theory*, 171:104762, 2022.
- [63] Calculation of load capacity of spur and helical gears - part 3: Calculation of tooth bending strength. Norm: ISO 6336-3:2019-11, International Organization for Standardization, Vernier, Geneva, 2019.
- [64] T. Paucker und W. Wagner. FVA - Heft 492: Weiterentwicklung der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung durch genauere Erfassung der Spannungskonzentration mit Analyse der AGMA-Methode. Frankfurt/Main, 1996. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.
- [65] T. Paucker und W. Wagner. FVA - Heft 1246: Erstellung und Einbindung eines Programmmoduls zur schnellen numerischen Spannungsanalyse beliebiger Zahnquerschnitte in RIKOR. Frankfurt/Main, 2017. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.
- [66] T. Paucker, M. Otto, und K. Stahl. A precise prediction of the tooth root stresses for involute external gears with any fillet geometry under consideration of the exact meshing condition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(21-22):7318–7327, 2019.
- [67] T. Frühe. *Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnun*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2012.

- [68] X. Dai, C. G. Cooley, und R. G. Parker. Dynamic tooth root strains and experimental correlations in spur gear pairs. *Mechanism and Machine Theory*, 101:60–74, 2016.
- [69] Q. Cheng, G. Yang, und J. Lu. An analysis of gear based on isogeometric analysis. *Vibro-engineering. Vibroengineering procedia.*, 2:17–22, 2013.
- [70] O. T. Yusuf, G. Zhao, W. Wang, und S. Onuh. Simulation based on trivariate nurbs and Isogeometric Analysis of a spur gear. *Strength of Materials*, 47:19–28, 2015.
- [71] A. H. Nayfeh und D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1. Auflage, 1995.
- [72] M. Krack und J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1. Auflage, 2019.
- [73] R. J. Gilmore und M. B. Steer. Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance— a review of the art. part i. introductory concepts. *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, 1(1):22–37, 1991.
- [74] K. C. Hall, J. P. Thomas, und W. S. Clark. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 40(5):879–886, 2002.
- [75] E. Sarrouy und J.-J. Sinou. *Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - on the use of the harmonic balance methods*, Seiten 419–434. Advances in Vibration Analysis Research, Farzad Ebrahimi, IntechOpen, 2011.
- [76] M. Krack, L. Panning-von Scheidt, und J. Wallaschek. On the computation of the slow dynamics of nonlinear modes of mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 42(1):71–87, 2014.
- [77] M. Krack. Nonlinear modal analysis of nonconservative systems: extension of the periodic motion concept. *Computers and Structures*, 154:59–71, 2015.
- [78] M. Guskov, J.-J. Sinou, und F. Thouverez. Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications*, 35(8):537–545, 2008.
- [79] J.-J. Sinou. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9):1713–1732, 2009.

- [80] P. Bonello und H. Pham. A receptance harmonic balance technique for the computation of the vibration of a whole aero-engine model with nonlinear bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 324:221–242, 2009.
- [81] C. Berthold, J. Gross, C. Frey, und M. Krack. Development of a fully-coupled harmonic balance method and a refined energy method for the computation of flutter-induced limit cycle oscillations of bladed disks with nonlinear friction contacts. *Journal of Fluids and Structures*, 102:103233, 2021.
- [82] Z. Wang, H. Feng, H. Ding, und L. Chen. Parametric influence on energy harvesting of magnetic levitation using harmonic balance method. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 7:543–549, 2019.
- [83] K. Weisheit. *Analyse von Störgeräuschen im Automobil*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2020.
- [84] L. Utzig, A. Fuchs, K. Weisheit, und S. Marburg. Squeak noise prediction of a door trim panel using harmonic balance method. *SAE International Journal of Advances and Current Practices in Mobility*, 3(2):1108–1118, 2020.
- [85] L. Utzig, K. Weisheit, M. Maeder, und S. Marburg. Quantitative prediction of rattle noise: an experimentally validated approach using the harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 167(B):108592, 2022.
- [86] M. Benton und A. Seireg. Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems. *Journal of Mechanical Design*, 100(1):26–32, 1978.
- [87] A. Kahraman und R. Singh. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system. *Journal of Sound and Vibration*, 146(1):135–156, 1991.
- [88] P. Velex und L. Flamand. Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 118(1):7–14, 1996.
- [89] V. K. Ambarisha und R. G. Parker. Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3):577–595, 2007.
- [90] C. G. Cooley, R. G. Parker, und S. M. Vijayakar. A frequency domain finite element approach for three-dimensional gear dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133(4), 2011.

- [91] P. Velex. *On the modelling of spur and helical gear dynamic behaviour*, Seiten 75–106. Mechanical Engineering, Murat Gokcek, IntechOpen, 2012.
- [92] Y. Zhang, Q. Wang, H. Ma, J. Huang, und C. Zhao. Dynamic analysis of three-dimensional helical geared rotor system with geometric eccentricity. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27:3231–3242, 2013.
- [93] X. Dai, C. G. Cooley, und R. G. Parker. An efficient hybrid analytical-computational method for nonlinear vibration of spur gear pairs. *Journal of Vibration and Acoustics*, 141(1):011006, 2019.
- [94] M. Kang und A. Kahraman. An experimental and theoretical study of quasi-static behavior of double-helical gear sets. *Journal of Mechanical Design*, 143(4):14, 2020.
- [95] A. S. Chimanpure, A. Kahraman, und D. Talbot. A transient mixed elastohydrodynamic lubrication model for helical gear contacts. *Journal of Tribology*, 143(6):15, 2020.
- [96] D. Shin und A. Palazzolo. Nonlinear analysis of a geared rotor system supported by fluid film journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 475:115269, 2020.
- [97] A. Kahraman und R. Singh. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 142(1):49–75, 1990.
- [98] Y. Shen, S. Yang, und X. Liu. Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(11):1256–1263, 2006.
- [99] G. Liu und R. Parker. Nonlinear dynamics of idler gear systems. *Nonlinear Dynamics*, 53:345–367, 2008.
- [100] A. Alshyyab und A. Kahraman. Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions. *Journal of Sound and Vibration*, 284(1):151–172, 2005.
- [101] T. Sun und H. Hu. Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances. *Mechanism and Machine Theory*, 38(12):1371–1390, 2003.
- [102] J. Yang, T. Peng, und T. C. Lim. An enhanced multi-term harmonic balance solution for nonlinear period-one dynamic motions in right-angle gear pairs. *Nonlinear Dynamics*, 67:1053–1065, 2012.

- [103] W. Zhu, S. Wu, X. Wang, und Z. Peng. Harmonic balance method implementation of nonlinear dynamic characteristics for compound planetary gear sets. *Nonlinear Dynamics*, 81:1511–1522, 2015.
- [104] Y. Li, T. Chen, und X. Wang. Non-linear dynamics of gear pair with dynamic backlash subjected to combined internal and external periodic excitations. *Journal of Vibration and Control*, 22(6):1693–1703, 2016.
- [105] H. Dong, L. Wang, H. Zhang, und X. long Zhao. Nonlinear frequency response analysis of double-helical gear pair based on the incremental harmonic balance method. *Shock and Vibration*, 2021(6687467):20, 2021.
- [106] C. Cooley und R. Parker. A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibrations research. *Applied Mechanics Reviews*, 66:040804, 2014.
- [107] M. Benton und A. Seireg. Factors influencing instability and resonances in geared systems. *Journal of Mechanical Design*, 103(2):372–378, 1981.
- [108] A. Celikay, A. Donmez, und A. Kahraman. An experimental and theoretical study of sub-harmonic resonances of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 515:116421, 2021.
- [109] M. Heider, J. Bihr, M. Otto, M. Hoehn, und K. Stahl. Vibration excitation of a planetary gear stage. In *International Conference on Gears 2013*, Band 2, Seiten 1091–1100. VDI, 2013.
- [110] R. August und R. Kasuba. Torsional vibrations and dynamic loads in a basic planetary gear system. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 108(3):348–353, 1986.
- [111] J. Lin und R. Parker. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation. *Journal of Sound and Vibration*, 249(1):129–145, 2002.
- [112] R. G. Parker. A physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration. *Journal of sound and vibration*, 236(4):561–573, 2000.
- [113] C. Wang, B. Dong, und R. G. Parker. Impact of planet mesh phasing on the vibration of three-dimensional planetary/epicyclic gears. *Mechanism and Machine Theory*, 164:104422, 2021.

- [114] V. K. Ambarisha und R. G. Parker. Suppression of Planet Mode Response in Planetary Gear Dynamics Through Mesh Phasing. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(2):133–142, 2005.
- [115] J. Lin und R. G. Parker. Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets. *Journal of Sound and Vibration*, 233(5):921–928, 2000.
- [116] R. Parker und X. Wu. Parametric instability of planetary gears having elastic continuum ring gears. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134:041011, 2012.
- [117] C. Wang und R. G. Parker. Modal properties and parametrically excited vibrations of spinning epicyclic/planetary gears with a deformable ring. *Journal of Sound and Vibration*, 494:115828, 2021.
- [118] X. Qiu, Q. Han, und F. Chu. Parametric instability in planetary gears with frequency-modulated time-varying mesh stiffness. *Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 26th Conference on Mechanical Vibration and Noise (Buffalo, New York, USA)*, 8(2014), 2014.
- [119] X. Qiu, Q. Han, und F. Chu. Investigation of parametric instability of the planetary gear under speed fluctuations. *Shock and Vibration*, 2017:6851903 (14), 2017.
- [120] J. Neufond, E. Denimal, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, und A. Carbonelli. Whining noise computation of a planetary gear set induced by the multi-mesh excitations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(21-22):7236–7245, 2019.
- [121] J. Perret-Liaudet. An original method for computing the response of a parametrically excited forced system. *Journal of Sound and Vibration*, 196(2):165–177, 1996.
- [122] K. Higl. *Dynamische Untersuchung schnelllaufender Planetengetriebe*. Masterarbeit, Hochschule München, München, 2016.
- [123] A. Beinstingel. *Dynamische Untersuchung schnelllaufender Planetengetriebe*. Masterarbeit, Hochschule München, München, 2016.
- [124] B. Puchele. *Stabilitätsuntersuchungen parametererregter Planetengetriebe*. Masterarbeit, Hochschule Kempten, Kempten, 2018.

- [125] C.-J. Bahk und R. Parker. Analytical solution for the nonlinear dynamics of planetary gears. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6:021007, 2011.
- [126] R. Gasch, K. Knothe, und R. Liebich. *Strukturodynamik - Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer Vieweg, Berlin, 3. Auflage, 2021.
- [127] M. Botman. Vibration measurements on planetary gears of aircraft turbine engines. *Journal of Aircraft*, 17(5):351–357, 1980.
- [128] D. Ploeger, P. Zech, und S. Rinderknecht. Experimental identification of high-frequency gear mesh vibrations in a planetary gearbox. *Proceedings of ISMA2016 International Conference on Noise and Vibration Engineering (Leuven, Belgium)*, ISMA2016:911–924, 2016.
- [129] F. Concli, L. Cortese, R. Vidoni, F. Nalli, und G. Carabin. A mixed fem and lumped-parameter dynamic model for evaluating the modal properties of planetary gearboxes. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 32(7):3047–3056, 2018.
- [130] H. Nevzat Özgüven und D. Houser. Mathematical models used in gear dynamics — A review. *Journal of Sound and Vibration*, 121(3):383–411, 1988.
- [131] F. Bruzzone und C. Rosso. Sources of excitation and models for cylindrical gear dynamics: A review. *Machines*, 8(3):37, 2020.
- [132] T. Placzek. *Lastverteilung und Flankenkorrektur*. Dissertation, Technische Universität München, München, 1988.
- [133] K. Sattelberger. *Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 1997.
- [134] H. Geiser. *Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2002.
- [135] S. Radev. *Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad - und schrägverzahnter Stirnradpaarungen*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2007.
- [136] M. Otto. *Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2009.

- [137] U. Weinberger. *Berechnung der Lastverhältnisse in Planetenradlagerungen unter Berücksichtigung der Planetenradverformung im komplexen Getriebeumfeld*. Diplomarbeit, Technische Universität München, Garching bei München, 2014.
- [138] J. Troge, W.-G. Drossel, E. Hensel, S. Zumach, und J. Bräunig. Acoustical optimization of a train gearbox based on overall system simulation. In *45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering INTER-NOISE 2016 Hamburg, Germany, August 21-24*. DEGA e.V., 2016.
- [139] J. Han, Y. Liu, S. Yu, S. Zhao, und H. Ma. Acoustic-vibration analysis of the gear-bearing-housing coupled system. *Applied Acoustics*, 178(108024):13, 2021.
- [140] Y. Guo, T. Eritenel, T. M. Ericson, und R. G. Parker. Vibro-acoustic propagation of gear dynamics in a gear-bearing-housing system. *Journal of Sound and Vibration*, 333(22):5762–5785, 2014.
- [141] Intel Corporation. *Intel Math Kernel Library - Developer Reference*. MKL 2020 - Revision 098 (2019).
- [142] C. Woernle. *Mehrkörpersysteme - Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Springer-Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York, 1. Auflage, 2011.
- [143] R. Schwertassek und O. Wallrapp. *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme - Methoden der Mechanik zum rechnergestützten Entwurf und zur Analyse mechatronischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage, 2017.
- [144] R. Gasch, R. Nordmann, und H. Pfützner. *Rotordynamik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2005.
- [145] H. D. Nelson und J. M. McVaugh. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2):593–600, 1976.
- [146] J. Rao. *History of Rotating Machinery Dynamics*. Springer Science and Business Media, Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2011.
- [147] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, und J. Schröder. *Technische Mechanik 3 - Kinetik*. Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 11. Auflage, 2006.
- [148] T. Kiesel. *Flexible Multi-Body Simulation of a Complex Rotor System Using 3D Solid Finite Elements*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2017.

- [149] G. Niemann und H. Winter. *Maschinenelemente - Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe - Grundlagen, Stirnradgetriebe*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 2. Auflage, 1983.
- [150] A. Kahraman, H. Özgüven, D. Houser, und J. Zakrajsek. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements. *Journal of Mechanical Design*, 114:507–514, 1992.
- [151] H. Dresig und F. Holzweißig. *Maschinendynamik*. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg, 11. Auflage, 2013.
- [152] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, und J. Schröder. *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 8. Auflage, 2005.
- [153] B. Klein. *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Springer-Vieweg, Berlin Heidelberg New York, 10. Auflage, 2014.
- [154] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden - Aus dem Englischen von Peter Zimmermann*. Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Hongkong London mailand Paris Tokio, 2. Auflage, 2002.
- [155] J. Papies. *Methodik zur systematischen Analyse und Optimierung dynamischer Kraft- u. Weganregungen in Planetengetrieben*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 2014.
- [156] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245):744–746, 1921.
- [157] H. D. Nelson. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. *Journal of Mechanical Design*, 102(4):793–803, 1980.
- [158] S. Chen, J. Tang, Y. Li, und Z. Hu. Rotordynamics analysis of a double-helical gear transmission system. *Meccanica*, 51:18, 2015.
- [159] L. M. Greenhill, W. B. Bickford, und H. D. Nelson. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107(4):421–430, 1985.
- [160] G. R. Cowper. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 33(2):335–340, 1966.

- [161] A. Bazoune, Y. Khulief, und N. Stephen. Shape functions of three-dimensional timoshenko beam element. *Journal of Sound and Vibration*, 259(2):473–480, 2003.
- [162] F. Rieg, R. Hackenschmidt, und B. Alber-Laukant. *Finite Elemente Analyse für Ingenieure - Grundlagen und praktische Anwendungen mit Z88 Aurora*. Carl Hanser GmbH, München, Wien, 5. Auflage, 2014.
- [163] G. R. Sinambari und S. Sentpali. *Ingenieurakustik - Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 5. Auflage, 2014.
- [164] P. Langer, M. Maeder, C. Guist, M. Krause, und S. Marburg. More than six elements per wavelength: the practical use of structural finite element models and their accuracy in comparison with experimental results. *Journal of Computational Acoustics*, 25(04):1750025, 2017.
- [165] E. L. Wilson und A. Ibrahimbegovic. Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7(3):229–241, 1990.
- [166] K.-J. Bathe und E. N. Dvorkin. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):367–383, 1985.
- [167] F. Brezzi, K.-J. Bathe, und M. Fortin. Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(8):1787–1801, 1989.
- [168] R. Kruk. FVA - Heft 945: Körperschallübertragung Wälzlager / Gleitlager - Dynamisches Übertragungsverhalten von Lagern im akustischen relevanten Frequenzbereich. Frankfurt/Main, 2010. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.
- [169] O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower’s experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 177:157–234, 1886.
- [170] S. Lecheler. *Numerische Strömungsberechnung - Schneller Einstieg in ANSYS CFX 18 durch einfache Beispiele*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 3. Auflage, 2014.
- [171] B. J. Hamrock. *Fundamentals of Fluid Lubrication*. National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical Information Program, New York, 1. Auflage, 1991.

- [172] M. M. Reddi. Finite-element solution of the incompressible lubrication problem. *Journal of Lubrication Technology*, 91(3):524–533, 1969.
- [173] J. Argyris und D. Scharpf. Finite element formulation of the incompressible lubrication problem. *Nuclear Engineering and Design*, 11(2):225–229, 1970.
- [174] A. L. Krinner. *Multibody systems with lubricated contacts: Cavitation, interface coupling, reduction and quasi-Newton techniques*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2018.
- [175] H. G. Elrod. A cavitation algorithm. *Journal of Lubrication Technology*, 103(3):350–354, 1981.
- [176] L. Gümbel. Das Problem der Lagerreibung. *Merkblatt Bezirksverband deutscher Ingenieure VDI*, 5:87–104, 1914.
- [177] L. Floberg. On hydrodynamic lubrication with special reference to sub-cavity pressures and number of streamers in cavitation regions (Hydrodynamic bearing lubrication of rotating cylinder with reference to sub-cavity pressure and cavitation regions). Seiten 1–35. *Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series*, 1965.
- [178] B. Jakobsson und L. Floberg. The finite journal bearing, considering vaporization (Das Gleitlager von endlicher Breite mit Verdampfung). Göteborg: Gumperts Förlag, 1957.
- [179] K.-O. Olsson. Cavitation in dynamically loaded bearings. Göteborg: Scandinavian University Books, 1965.
- [180] J. Lengiewicz, M. Wichrowski, und S. Stupkiewicz. Mixed formulation and finite element treatment of the mass-conserving cavitation model. *Tribology International*, 72:143–155, 2014.
- [181] C.-D. Munz und T. Westermann. *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen - Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure*. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2012.
- [182] T. Drapatow. FVV - Vorhaben 1291: Quetschöldämpfer - Optimierte Lagerabstützung - Verbesserte Modellierung des transienten Verhaltens von Quetschöldämpfern für die nicht-lineare Rotordynamiksimulation. Frankfurt/Main, 2020. Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V.

- [183] M. Miraskari, F. Hemmati, A. Jalali, M. Y. Alqaradawi, und M. S. Gadala. A robust modification to the universal cavitation algorithm in journal bearings. *Journal of Tribology*, 139(3):17, 2016.
- [184] A. N. Brooks und T. J. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1):199–259, 1982.
- [185] A. Russo. Streamline-upwind Petrov/Galerkin method (SUPG) vs residual-free bubbles (RFB). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(13):1608–1620, 2006. A Tribute to Thomas J.R. Hughes on the Occasion of his 60th Birthday.
- [186] T. Hagemann und D. Vetter. *Dokumentation Radialgleitlagerberechnungsprogramm COMBROS R - Teil 1: Theoretische Beschreibung, Modellierungsgrundlagen und weiterführende Hinweise*. Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen (FVV) e.V., Forschungsvereinigung Antriebstechnik (FVA) e.V., ITR Clausthal, Version 2.0.0, 2021.
- [187] S. Nitzschke, E. Woschke, C. Daniel, und J. Strackeljan. Einfluss der masseerhaltenden Kavitation auf gleitgelagerte Rotoren unter instationärer Belastung. In *10. Internationale Tagung Schwingungen in rotierenden Maschinen, 25. – 27. Februar*, Nummer 210. SIRM, 2013.
- [188] J. W. Lund und K. K. Thomsen. A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. *Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization*, Seiten 1–28, 1978.
- [189] D. W. Parkins. Theoretical and experimental determination of the dynamic characteristics of a hydrodynamic journal bearing. *Journal of Lubrication Technology*, 101(2):129–137, 1979.
- [190] J. W. Lund. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. *Journal of Tribology*, 109(1):37–41, 1987.
- [191] O. Ebrat, Z. P. Mourelatos, N. Vlahopoulos, und K. Vaidyanathan. Calculation of journal bearing dynamic characteristics including journal misalignment and bearing structural deformation. *Tribology Transactions*, 47(1):94–102, 2004.
- [192] A. Mukherjee und J. Rao. Stiffness and damping coefficients of an inclined journal bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 12(4):339–355, 1977. Special Issue: Dynamics of Rotors.

- [193] D. Vetter, T. Hagemann, und H. Schwarze. Potentials and limitations of an extended approximation method for nonlinear dynamic journal and thrust bearing forces. *Proceedings of the ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air (Oslo, Norway)*, Volume 7B: Structures and Dynamics (2018) 12, 2018.
- [194] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2012.
- [195] Zahnräder - Zylinderräder und Zylinderradpaare mit Evolventenverzahnung - Begriffe und Geometrie (ISO 21771:2007). Norm: DIN ISO 21771:2014-08, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, 2014.
- [196] B. Wohlmuth. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38:989–1012, 2000.
- [197] A. Popp. *Mortar methods for computational contact mechanics and general interface problems*. Dissertation, Technische Universität München, Garching bei München, 2012.
- [198] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, und Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. John Wiley and Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO198SQ, United Kingdom, 1. Auflage, 2009.
- [199] M. G. Cox. The numerical evaluation of B-splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10(2):134–149, 1972.
- [200] C. De Boor. On calculating with B-splines. *Journal of Approximation theory*, 6(1):50–62, 1972.
- [201] M. Papageorgiou, M. Leibold, und M. Buss. *Optimierung - Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2012.
- [202] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage, 2001.
- [203] W. C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4):678–685, 1965.
- [204] J. W. Strutt und B. Rayleigh. *The Theory of Sound - Volume II*. Macmillan and Co., London, 1. Auflage, 1878.

- [205] T. K. Caughey und M. E. J. O’Kelly. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 32(3):583–588, 1965.
- [206] V. S. Geraschenko, A. S. Grishin, und N. I. Gartung. Approaches for the calculation of Rayleigh damping coefficients for a time - History analysis. *Structures Under Shock and Impact XV*, 180:227–237, 2018.
- [207] J. Chung und G. M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-alpha method. *Journal of Applied Mechanics*, 60(2):371–375, 1993.
- [208] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3):67–94, 1959.
- [209] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 11. Auflage, 2014.
- [210] T. J. Ypma. Historical development of the newton–raphson method. *SIAM Review*, 37(4):531–551, 1995.
- [211] W. J. Duncan. Galerkin’s method in mechanics and differential equations. *Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda*, 1798:484–516, 1937.
- [212] W.-J. Kim und N. Perkins. Harmonic balance/galerkin method for non-smooth dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 261(2):213–224, 2003.
- [213] T. M. Cameron und J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, 1989.
- [214] D. Fritze, S. Marburg, und H.-J. Hardtke. Estimation of radiated sound power: a case study on common approximation methods. *Acta Acustica united with Acustica*, 95:833–842, 2009.
- [215] M. Luegmair und H. Muench. Advanced equivalent radiated power (erp) calculation for early vibro-acoustic product optimization. *International Conference on Sound and Vibration (Florence, Italy)*, ICSV22:8, 2015.
- [216] F. Müller, S. Schumann, und B. Schlecht. Innovative tooth contact analysis with non-uniform rational b-spline surfaces. *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research*, 86:273–281, 2021.

Appendix: Eingebundene Veröffentlichungen

Veröffentlichung [1]

- [1] A. Beinstingel, M. Keller, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 160:104291, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104291>.

Copyright © 2021 Elsevier. Reprinted with permission.

AB ? 🔍



A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness

Author: Andreas Beinstingel, Michael Keller, Michael Heider, Burkhard Pinnekamp, Steffen Marburg

Publication: Mechanism and Machine Theory

Publisher: Elsevier

Date: June 2021

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Journal Author Rights

Please note that, as the author of this Elsevier article, you retain the right to include it in a thesis or dissertation, provided it is not published commercially. Permission is not required, but please ensure that you reference the journal as the original source. For more information on this and on your other retained rights, please visit: <https://www.elsevier.com/about/our-business/policies/copyright#Author-rights>

BACK

CLOSE WINDOW

© 2023 Copyright - All Rights Reserved | [Copyright Clearance Center, Inc.](#) | [Privacy statement](#) | [Data Security and Privacy](#)
| [For California Residents](#) | [Terms and Conditions](#) Comments? We would like to hear from you. E-mail us at customer@copyright.com



Research paper

A hybrid analytical-numerical method based on Isogeometric Analysis for determination of time varying gear mesh stiffness



Andreas Beinstingel^{a,b,*}, Michael Keller^b, Michael Heider^b,
Burkhard Pinnekamp^b, Steffen Marburg^a

^a Technical University of Munich, Chair of Vibroacoustics of Vehicles and Machines, 85748 Garching, Germany

^b RENK AG, Goegginger Str. 73, Augsburg 86159, Germany

ARTICLE INFO

Article history:

Received 3 November 2020

Revised 21 December 2020

Accepted 12 February 2021

Keywords:

Gear mesh stiffness

Isogeometric Analysis

Compliance matrix

ABSTRACT

As an essential part of a drive-train system, a gearbox is one of the most widely used machinery devices. The characteristic transmission process of an involute gear is a major source of excitation for noise generation. Thus, a suitable simulation technique heavily supports a systematic optimization of the overall performance from the first development stage. But getting the best fit between accuracy and computation time for total system analyses is still a great challenge due to the complex contact conditions during power transmission. Therefore, the initial aim of this paper is to present an efficient and accurate method for evaluating the current state of the gear mesh stiffness. The calculation is based on the Isogeometric Analysis and for performance reasons combined with an analytical approach. The exact tooth design is derived from a gear shaping simulation. A possible mesh interference under load is considered as well as profile modifications. In a second step, the developed methodology is tested and validated against established research and software tools. On this basis, a comparison and discussion of some modeling details is finally given.

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

In addition to power density, reliability and efficiency, noise is always a major factor for a successful gear design. The time varying gear mesh stiffness along the path of contact leads to oscillating forces on the shafts and bearings. These vibrations are finally transmitted to the casing and radiate air borne noise, see Fig. 1. As a result, the technical design of the actual gear mesh is well known as the most decisive criterion for noise generation in a gearbox.

Even with today's computer power, a complete elastic simulation of this dynamic rolling process - e. g. with a standard finite element solver - is still extremely inefficient. Therefore, the computational determination of the fluctuating gear mesh stiffness and its subsequent implementation into a total system analysis is highly relevant. Finding an appropriate methodology sufficiently compromising accuracy and computation time is quite challenging and has been a research topic for decades.

First analytical investigations go back to Weber and Banaschek [1] initiating that the total tooth contact deformation in load direction consists of three independent components: tooth deflection due to bending under load, bending deflection of the gear blank or gear rim and deflection of the contact surfaces under Hertzian pressure. The ratio between the force

* Corresponding author at: Technical University of Munich, Chair of Vibroacoustics of Vehicles and Machines, 85748 Garching, Germany.

E-mail address: andreas.beinstingel@tum.de (A. Beinstingel).

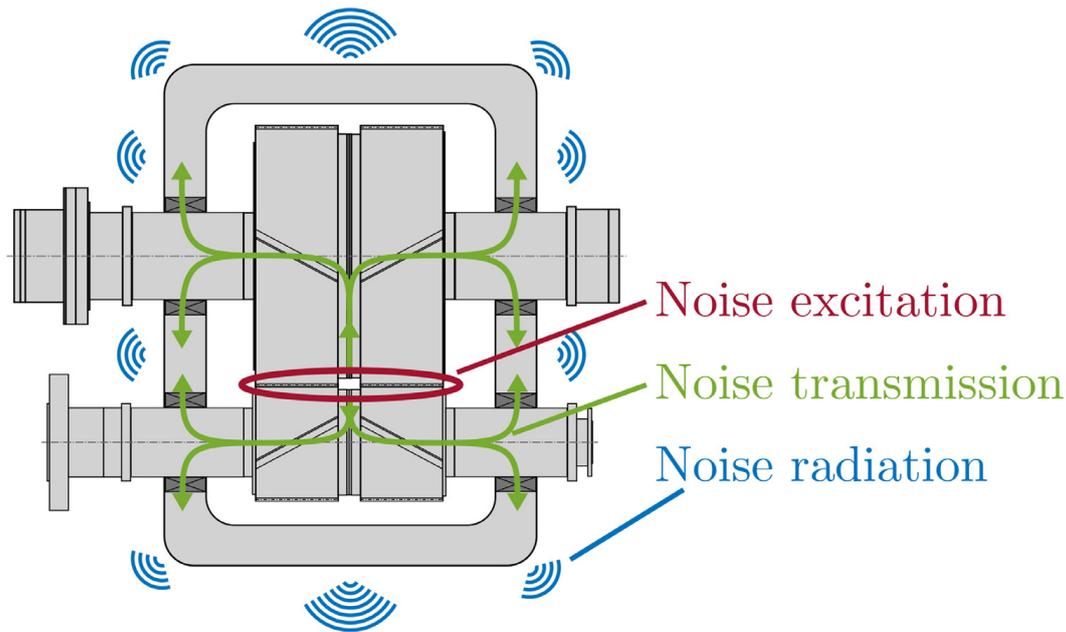


Fig. 1. Noise: Generation, transmission and radiation .

to be transmitted and the resulting total deformation then provides the desired stiffness value at the respective rolling position. A simplified formula of Weber and Banaschek [1] was later derived by Schäfer [2] and is still used in international standards like ISO 6336-1 [3]. A further analytical approach for the determination of the time varying gear mesh stiffness is fundamentally presented by Yang and Lin [4] and successfully enhanced and implemented in present research topics, e. g. Lei et al. [5] and Rezaei et al. [6]. These computational strategies additionally include the influence of axial and shear deflections of the mating gear teeth. However, many commercial software packages for multibody dynamics offer a force element for gears which is basically build upon the findings of Weber and Banaschek [1]. A common extension here is to divide the gear face width theoretically in multiple independent slices. This enables a better modeling of the load distribution as well as the consideration of profile modifications along the face width. As a result, it can be determined iteratively which parts of the tooth flanks are actually involved in the process of power transmission. A technique to implement this strategy also in finite element analyses is presented by Guilbert et al. in [7] and [8].

As beam theory is the underlying approach of Weber and Banaschek [1], normally no coupling or just an empiric one exists between these single slices. An analytical way to quantify these cross influences is given by Conry and Seireg [9] and by Schmidt [10]. Both works are based on the theory of an infinite cantilever plate and extend the computational approach of Weber and Banaschek [1] by deriving a compliance matrix of all potential contact positions for the final computation of the total deflections. A similar procedure is described by Neupert [11] and by Chang et al. [12]. But instead of plate theory the finite element method is used to determine the flexibility of the involved gear wheels. The methodology of Chang et al. [12] is enhanced to internal gearings by Feng et al. [13].

A complete numerical approach was initially proposed by Vijayakar [14]. The key for efficiency is here a relatively coarse mesh of solid finite elements, which represents both the wheel body and the gear teeth. When contact is detected, a much finer surface mesh is then inserted onto the corresponding tooth flanks to describe the local contact state by a surface integral method. Then, the total deformation state is iteratively determined by establishing the equilibrium between the global and local deformations. This method was successfully applied in many subsequent investigations of the dynamic behavior of gearboxes, e. g. Parker et al. [15].

Liu et al. [16] presents a numerical simulation technique based on an arbitrary lagrangian Eulerian formulation. The calculation speeds up since the Eulerian approach has a mathematical advantage for the representation of the plane of contact, which is usually fixed in space from a global point of view. Nevertheless, to detect the current state of contact as accurate as possible the gear teeth must be described by a relatively fine mesh of solid finite elements. For this reason, a model order reduction regarding to Craig and Bampton [17] is here applied to minimize the degrees of freedom.

Finally, there are also researchers such as Kiekbusch et al. [18] who rely on commercial finite element solvers despite the high computing times. Here, the usual way is to calculate in a preceding step a static deflection curve for one meshing sequence with respect to the nonlinear contact conditions during power transmission. The subsequent determination of the desired gear mesh stiffness is done afterwards in an independent process. Cooley et al. [19] compares appropriate derivation strategies, while Ihlenburg and Zarnekow [20] and Cooley et al. [21] present methodologies to consider these results in dynamic excitation calculations of gearboxes.

In this paper, a general, fast and efficient calculation algorithm for the determination of the mesh stiffness of arbitrary cylindrical involute gears is proposed. To speed up computation time by still maintaining the underlying geometry in a

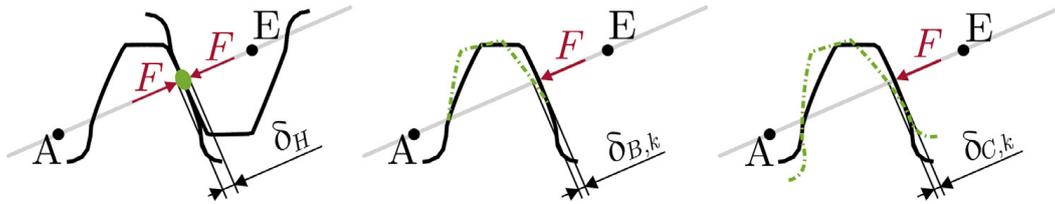


Fig. 2. Components for the computation of the total tooth contact deformation according to Weber and Banaschek [1].

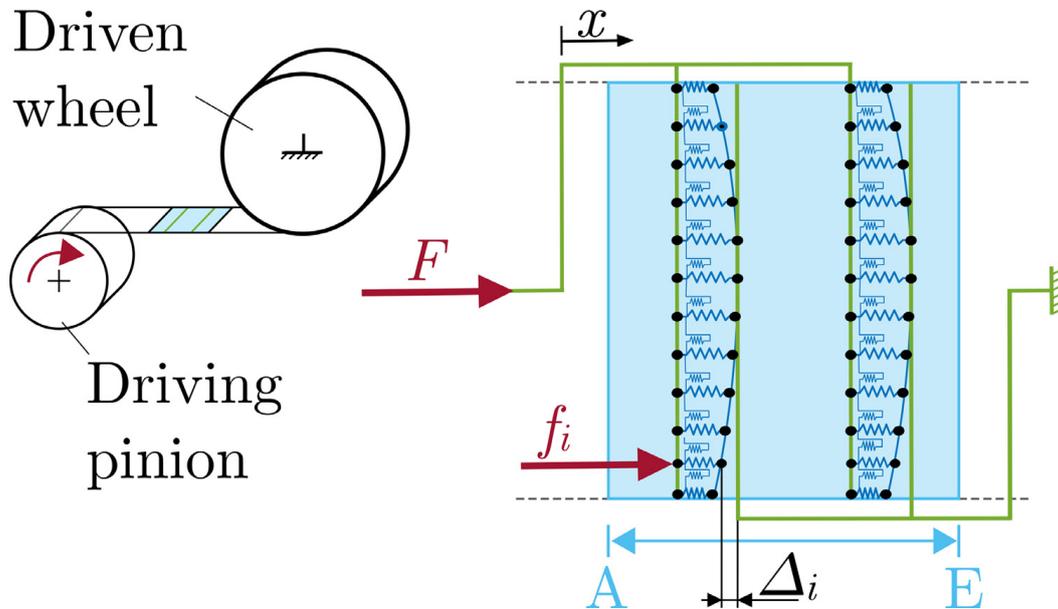


Fig. 3. Schematic illustration of one discrete rolling position in the form of a simplified system of springs.

highly accurate manner, the approach combines analytical and numerical methods by applying the influence coefficient method in a similar way to Schmidt [10], Neupert [11] and Chang et al. [12]. The exact tooth geometry is derived by a shaping simulation to finally consider also the correct tooth root contour within its flexibility characteristics in all computations by means of the Isogeometric Analysis [22] in three-dimensional space. Consequently, all global deformation components like axial, shear, bending and foundation deflections of the gear blank or gear rim are included appropriately by this numerical procedure. The local deformation due to the Hertzian pressure is described analytically in accordance to Weber and Banaschek [1]. Moreover, the influence of manufacturing errors, profile modifications as well as operating conditions can be taken into account. The impact of gears getting into mesh with the previous mesh being deflected under load resulting in premature mesh begin and/or mesh interference is also implemented in the algorithm. In the end, the present approach is applied to a spur gear and to a helical gear. The validity of the algorithm is tested against existing research and commercial software tools resulting in a discussion about the various gear meshing effects during power transmission.

2. Calculation method

The basic idea of determining the current gear mesh stiffness is to compute the actual tooth contact deformation for a discrete rolling position. At this explicit meshing state, the ratio of the applied force F and the calculated deformation x delivers the desired stiffness value c . In accordance to Weber and Banaschek [1], this total tooth contact deformation consists of three independent components, see Fig. 2 and Fig. 3: Hertzian contact deformation δ_H , tooth bending deformation $\delta_{B,k}$ and deformation $\delta_{C,k}$ due to the flexibility of the area between gear tooth and wheel body. The index k means 1 for the pinion and 2 for the wheel, respectively.

While the determination of the local deformation δ_H caused by the Hertzian pressure stays equal to the findings of Weber and Banaschek [1], the present approach computes directly the sum of the two global latter ones - bending deformation $\delta_{B,k}$ and clamping deformation $\delta_{C,k}$ - by means of the Isogeometric Analysis [22] in three-dimensional space. As a result, the cross influences along the face width of a single gear tooth are automatically considered by the underlying physics of three-dimensional continuum mechanics. On top, additional deformation components, like axial and shear deflections, are consequently also included by this numerical procedure. Therefore, the present approach describes the elastic behavior of the solid gear teeth always completely in theory. In the sense of a compliance matrix according to Schmidt [10] and Neupert

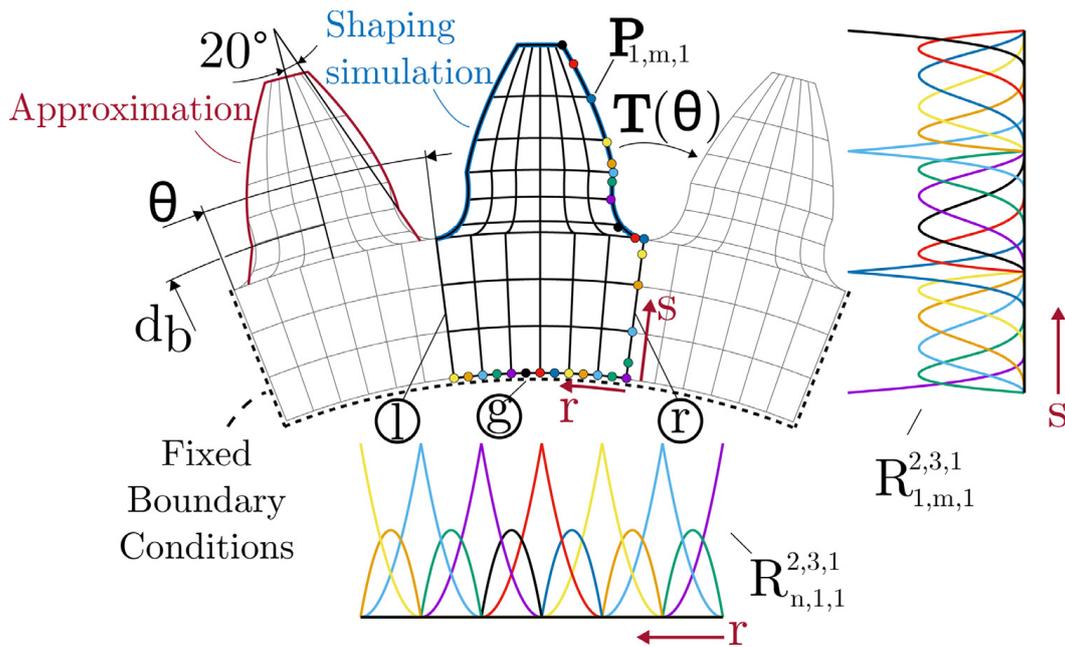


Fig. 4. A two-dimensional model of a gear tooth (described by NURBS) and its boundary conditions for the computation with the Isogeometric Analysis.

[11], these relations can be basically expressed as follows

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{i,j} - \frac{\delta_H(f_i)}{f_i} & \dots & -\alpha_{i,N} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{N,j} & \dots & -\alpha_{N,N} - \frac{\delta_H(f_N)}{f_N} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_N \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_N \\ F \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Here, the matrix entry $\alpha_{i,j}$ holds the sum of all deformation values in normal direction at the contact point i of both the pinion and the wheel when a uniform normal load is applied at the respective contact point j . The total number of discrete points along all contact lines is N . A parameter Δ_i defines a theoretical distance in meshing direction between pinion and wheel at the corresponding contact point i . So, the influence of manufacturing errors, profile modifications, mesh interference and/or deformations due to the operating conditions can be considered here by suitable geometry operations. The resulting load distribution f_i along the involved contact lines is also used in the calculation of the Hertzian pressure deformation δ_H and hence makes Eq. (1) nonlinear.

The simplified system of springs in Fig. 3 is a schematic illustration of Eq. (1). In detail, it shows a snapshot of the tooth engagement where the driving pinion presses against a constrained wheel. It also clearly indicates that the number of tooth pairs being in mesh and their corresponding contact conditions vary on their way from the beginning of the gear meshing at point A to the end at point E. However, as all gear teeth on the respective wheel body have the same underlying geometry and hence the same stiffness characteristics, only a single pair of teeth is used for the determination of all compliance factors $\alpha_{i,j}$ in Eq. (1). The superposition of the individual contact conditions - single pair and multiple pair contact zone - to the total situation of the current rolling state then takes place in a subsequent organization step. Therefore, the influence of the cross coupling effects between different gear teeth on a wheel body is neglected in all calculations. This assumption is reasonable in view of the fact that these effects would change the final result only insignificantly, while the computation time is drastically decreased.

As the determination of all possible compliance factors $\alpha_{i,j}$ is carried out with the Isogeometric Analysis in three-dimensional space, the geometry of the gear teeth is needed for the numerical meshing process. For involute gears, the contour of a tooth flank is clearly defined by basic design parameters. The shape of the tooth root area, in contrast, depends on the applied manufacturing process and hence is complex to determine. Therefore, adequate approximations of the tooth root contour are usual practice for the computation of the gear mesh stiffness. However, as gear hobbing is the most common method for gear cutting, a shaping simulation based on gear hobbing is used here to determine the exact tooth contour. Fig. 4 illustrates the exact tooth geometry as a result of this shaping simulation as well as an approximated tooth root contour according to Weber and Banaschek [1].

This exact tooth contour and a part of the wheel body form the basis for the numerical meshing process of the cross-sectional area in two-dimensional space, which is then extruded along the face width into three-dimensional space, taking into account the helix angle β . Here, the additional portion of the wheel body allows the determination of the deformation component $\delta_{C,k}$ in the same solution run as the axial, shear and bending deformation.

In the sense of the Isogeometric Analysis, the solid volume \mathbf{V} of such a gear tooth is described by means of Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), leading to the numerical representation

$$\mathbf{V}(r, s, t) = \sum_{n=1}^{N_n} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_l} R_{n,m,l}^{p,q,d}(r, s, t) \cdot \mathbf{P}_{n,m,l}, \quad (2)$$

where N_n , N_m and N_l are the finite numbers of control points $\mathbf{P}_{n,m,l}$ inside the three-dimensional parametric space r , s and t , respectively. Here, each associated shape function

$$R_{n,m,l}^{p,q,d}(r, s, t) = \frac{B_{n,p}(r) \cdot B_{m,q}(s) \cdot B_{l,d}(t) \cdot w_{n,m,l}}{\sum_{\hat{n}=1}^{N_n} \sum_{\hat{m}=1}^{N_m} \sum_{\hat{l}=1}^{N_l} B_{\hat{n},p}(r) \cdot B_{\hat{m},q}(s) \cdot B_{\hat{l},d}(t) \cdot w_{\hat{n},\hat{m},\hat{l}}} \quad (3)$$

depends on a weighting factor $w_{n,m,l}$ and on the B-Spline basis functions $B_{n,p}(r)$, $B_{m,q}(s)$ and $B_{l,d}(t)$ according to Cox [23] and de Boor [24], where p , q and d hold their polynomial orders. In the present approach a quadratic-, cubic- and linear definition is used for the r -, s - and t -direction, respectively. The weighting factors $w_{n,m,l}$ and the distribution of the control points in the two-dimensional transverse sections are chosen in a way to represent a regular mesh of element patches in the form of concentric circles, see Fig. 4. Moreover, the final position of the control points along the s -direction is optimized by minimizing the error ϵ of the least squares problem in Eq. (4), where \mathbf{x}_h holds the exact shape of the active tooth flank contour derived by the shaping simulation

$$\min_{\mathbf{P}_{1,m,1}} \underbrace{\sum_{h=1}^{N_h} \left[\sum_{m=1}^{N_m} R_{1,m,1}^{p,q,d}(0, s_h, 0) \cdot \mathbf{P}_{1,m,1} - \mathbf{x}_h \right]^2}_{\epsilon}. \quad (4)$$

Then, the following linear system of equations for the static behavior of one gear tooth results by taking the same definitions of the solid Volume \mathbf{V} in Eq. (2) also for the representation of the desired global displacements \mathbf{u}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{zl} & \mathbf{K}_{zr} & \mathbf{K}_{zg} \\ & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lr} & \mathbf{K}_{lg} \\ & & \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rg} \\ \text{sym.} & & & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_z \\ \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where the vector \mathbf{u}_g holds all degrees of freedom of the bottom surface of one gear tooth as illustrated in Fig. 4. In accordance, the vectors \mathbf{u}_l and \mathbf{u}_r include all degrees of freedom of the left and right connection surface to the adjacent gear teeth, respectively. All remaining degrees of freedom are finally placed in \mathbf{u}_z in sync with the uniform normal loads on the active tooth flank in \mathbf{f}_z . With the matrix operations in Eqs. (6)–(8) a reduced system of linear equations is then derived that describes mathematically the stiffness of three adjacent gear teeth. So, the accuracy of the underlying model of one gear tooth is improved to a model of three gear teeth, where the bottom surfaces of all three gear teeth are constrained as well as the outermost connecting surfaces on the right and left side, see the dashed lines in Fig. 4. The transformation matrices \mathbf{G}_l and \mathbf{G}_r are based on the static condensation strategy of Guyan [25] and contain the transformation matrix \mathbf{T} , which describes the geometric rotation of a single gear tooth with respect to the pitch angle θ

$$\mathbf{G}_l = -\mathbf{K}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{zl} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{G}_r = -\mathbf{K}_{zz}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{zr} \cdot \mathbf{T}^T, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_l & \mathbf{G}_r \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{zl} & \mathbf{K}_{zr} \\ & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lr} \\ & & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G}_l & \mathbf{G}_r \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll}^* & \mathbf{K}_{lr}^* \\ \mathbf{K}_{rl}^* & \mathbf{K}_{rr}^* \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{zl} & \mathbf{K}_{zr} \\ & \mathbf{K}_{ll} + \mathbf{K}_{rr}^* & \mathbf{K}_{lr} \\ \text{sym.} & & \mathbf{K}_{rr} + \mathbf{K}_{ll}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_z \\ \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Finally, the system in Eq. (8) is assembled once for the pinion and once for the wheel and then used to determine the desired compliance factors $\alpha_{i,j}$ for Eq. (1) as schematically illustrated in Fig. 5 for one discrete rolling position.

3. Calculation algorithm

As illustrated in Fig. 6, the structure of the proposed algorithm is basically divided into two sections:

- initialization step
- update procedure

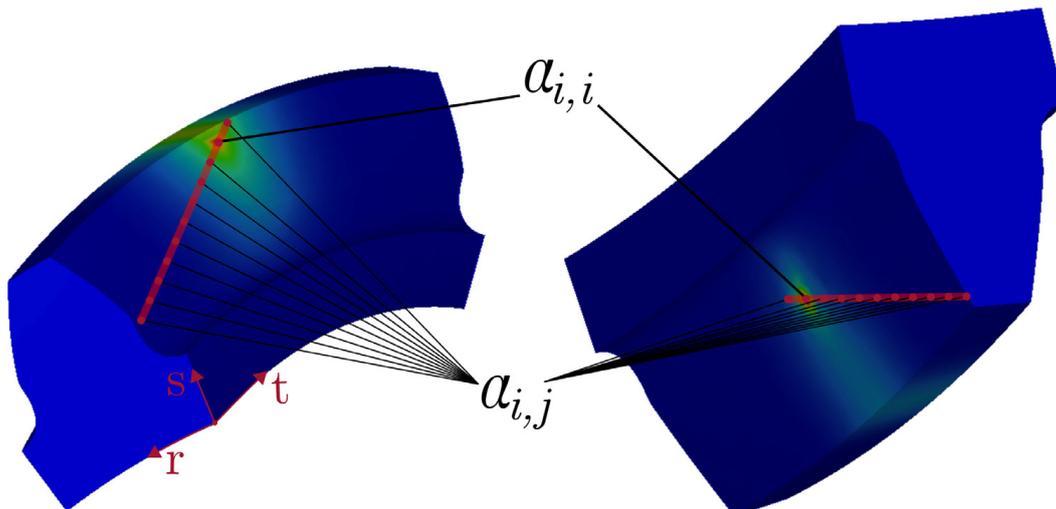


Fig. 5. Deformation result in case of a uniform load applied in normal direction at one specific contact point for the determination of the compliance factors $\alpha_{i,j}$ along one contact line.

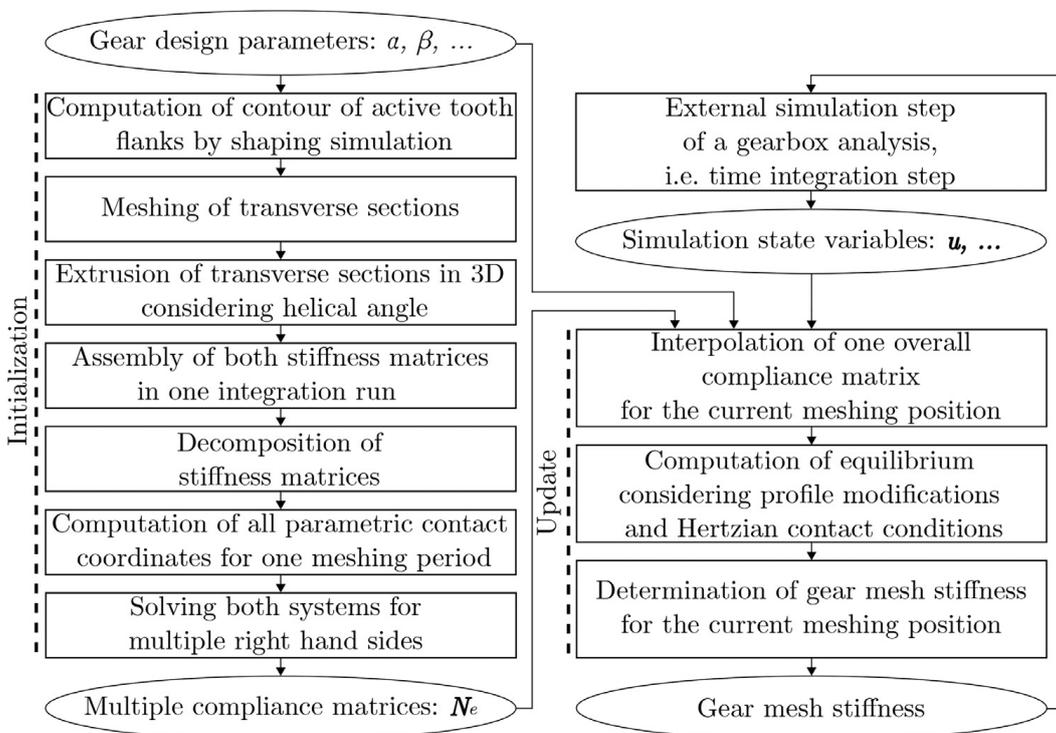


Fig. 6. Overview of the proposed computational algorithm.

Although the first one requires much more computational capacity than the second one, it only needs to be performed once at the beginning of a potential system analysis. In this preceding step, the basic design parameters of the gearing to be examined within its corresponding data of the planned manufacturing tool lead to the exact geometry of the tooth flank contours. With this information the stiffness matrix \mathbf{K} in Eq. (8) can be assembled and decomposed in a subsequent step for pinion and wheel. This is done in one integration run to speed up computation time by using the same numerical discretization for both pinion and wheel. Then, for one single pair of teeth the compliance factors $\alpha_{i,j}$ are determined for a discrete number e along one meshing sequence. The gained results are finally stored in multiple compliance matrices $\mathbf{N}_e = [\alpha_{i,j}]_e$. If the contact conditions during the virtual engagement process will deviate significantly from the ideal contact positions in theory due to heavy operating conditions \mathbf{u} , the derivation of the compliance matrices \mathbf{N}_e can be shifted into the update procedure.

Anyway, the information of the stored compliance matrices \mathbf{N}_e is then taken as input for the updating step next to the basic design parameters and the current operating conditions \mathbf{u} . Here, an organization algorithm interpolates the global situation that describes the actual meshing state in the sense of Eq. (1) with respect to single tooth pair and multiple tooth

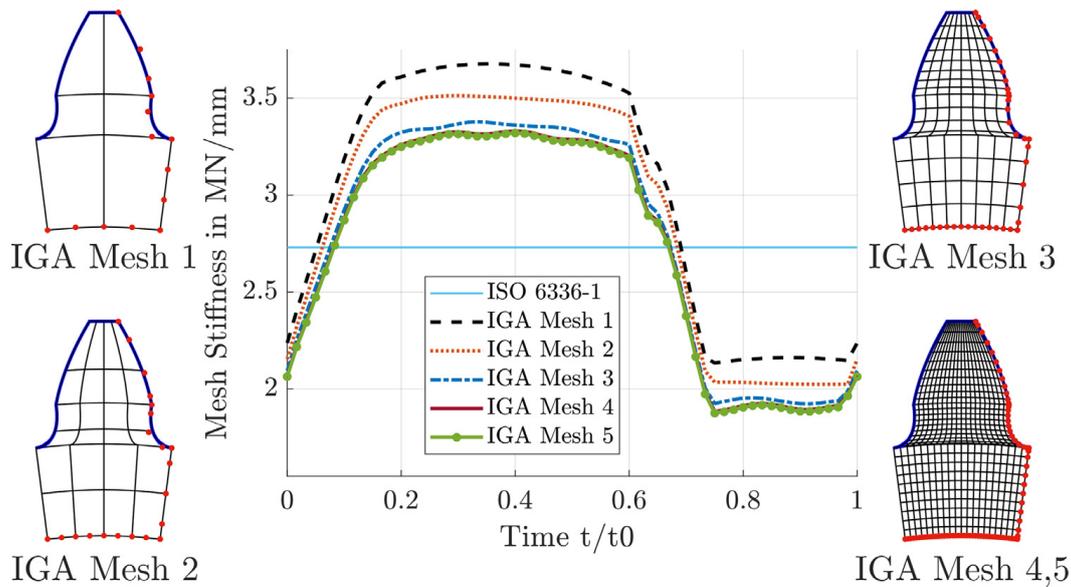


Fig. 7. Influence of IGA mesh density on gear mesh stiffness.

Table 1

Technical data of spur gear and helical gear.

Description	Unit	Spur gear		Helical gear		
		Pinion	Wheel	Pinion	Wheel	
Module	m_n	mm	4.5		4.5	
Pressure angle	α_n	°	20.0		20.0	
Helical angle	β	°	0.0		30.0	
Number of teeth	z	-	25	94	25	94
Tip diameter	d_a	mm	124.6	431.5	140.8	495.3
Root diameter	d_f	mm	101.2	408.2	117.3	471.9
Gear width	b	mm	150.0		2×75.0	
Center distance	a	mm	270.0		310.0	

pair contact zones. Finally, this system is used to iteratively establish the static equilibrium with regard to the nonlinear Hertzian contact pressure, while the effects of profile modifications, possible mesh interference as well as manufacturing errors are considered. In the end, the actual gear mesh stiffness of the converged system is the desired output.

4. Results and comparison

The proposed calculation algorithm of the gear mesh stiffness is validated and compared against existing research and established software tools - once for a spur gear and once again for a similar helical gear. The underlying gear data for these investigations are listed in Table 1.

To focus only on the stiffness behavior of the isolated gear meshing process itself and to not exceed the scope of this paper, neither effects of the surrounding components are taken into account nor changing operating conditions or effects due to inertia forces. These restrictions enable the necessary simple and direct comparability between the various modeling techniques of the gearing meshing process.

The reference approaches are:

- ISO 6336-1: international standard - based on Schäfer [2]
- Simpack: commercial solver for multibody dynamics by Dassault Systems - based on Weber and Banaschek [1]
- DZP: research software tool by TU Munich (FZG) - based on Schmidt [10]
- STIRAK: research software tool by RWTH Aachen (WZL) - based on Neupert [11]
- Optistruct; commercial finite element solver by Altair Hyperworks - nonlinear statics with solid elements

In a preceding step, the influence and robustness of the numerical mesh density of the present approach ("IGA") is checked by using the data of the spur gear in Table 1. The tested discretizations and their corresponding results are graphi-

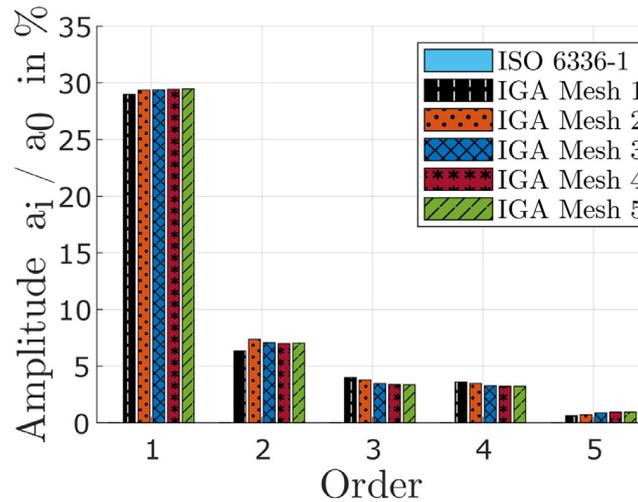


Fig. 8. Influence of IGA mesh density on FFT spectrum of gear mesh stiffness.

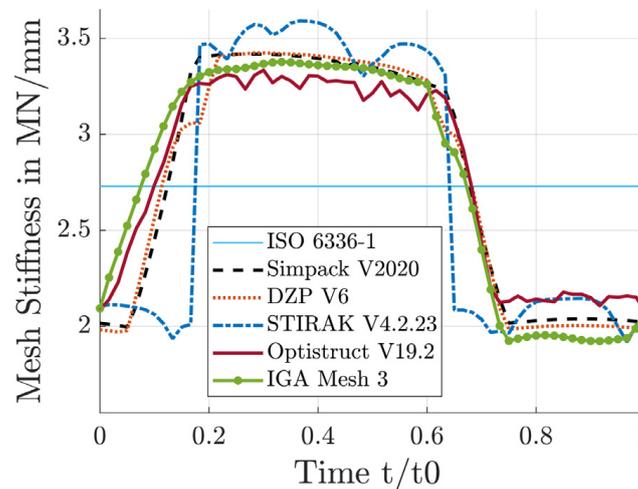


Fig. 9. Gear mesh stiffness of spur gear without profile modifications.

Table 2

Influence of IGA mesh density on the computation and results of the gear mesh stiffness in numbers.

	IGA Mesh 1	IGA Mesh 2	IGA Mesh 3	IGA Mesh 4	IGA Mesh 5
Mean value [MN/mm]	3.03	2.90	2.77	2.73	2.73
Min value [MN/mm]	2.13	2.02	1.92	1.92	1.88
Max value [MN/mm]	3.68	3.51	3.38	3.32	3.32
Pk-Pk value [MN/mm]	1.54	1.49	1.45	1.45	1.44
Error value ϵ	1.8e-2	1.4e-3	2.9e-4	1.8e-6	1.8e-6
No. patches (t-direction)	5	10	10	20	50
No. DOF	≈2k	≈10k	≈30k	≈200k	≈450k
Initialization time	3s	8s	18s	235s	0.5h
Update time	<1s	<1s	<1s	<1s	<1s
Total time	3s	8s	18s	235s	0.5h

cally illustrated in Fig. 7 and numerically printed in Table 2. Here, the number of patches in t-direction describes the mesh density along the gear face width with respect to Fig. 5. The application of Method B of the international standard ISO 6336-1 delivers here a mean value of 2.73 MN/mm as the gear mesh stiffness for this setup.

The small error values ϵ of the least squares problem in Eq. (4) demonstrate the power of the Isogeometric Analysis. So, even with the coarse modeling technique ("IGA Mesh1") the exact geometry of the gear teeth is captured well and so is the basic behavior of the gear mesh stiffness over one meshing period t/t_0 . Therefore, the h-refinement process results only in small deviations. In detail: the maximum, minimum and mean values in Table 2 show some deviations, but the peak-to-peak amplitudes differ only in a small range along the various mesh densities. As a result, the gained gear mesh stiffness of the coarse discretization model is interpreted to be mainly shifted in total due to a global stiffer behavior of

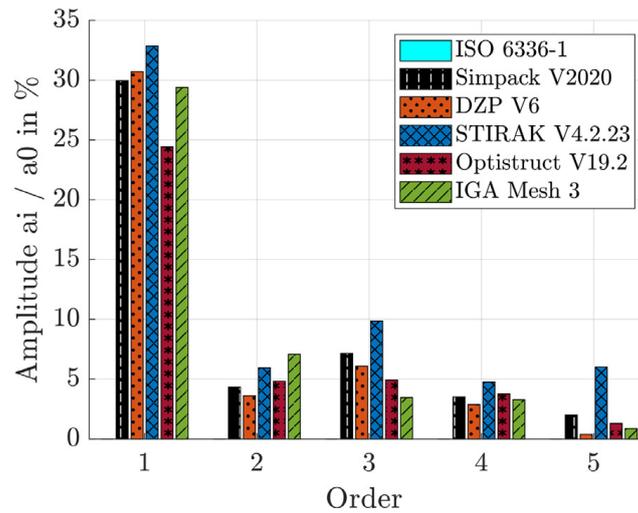


Fig. 10. FFT spectrum of gear mesh stiffness of spur gear without profile modifications.

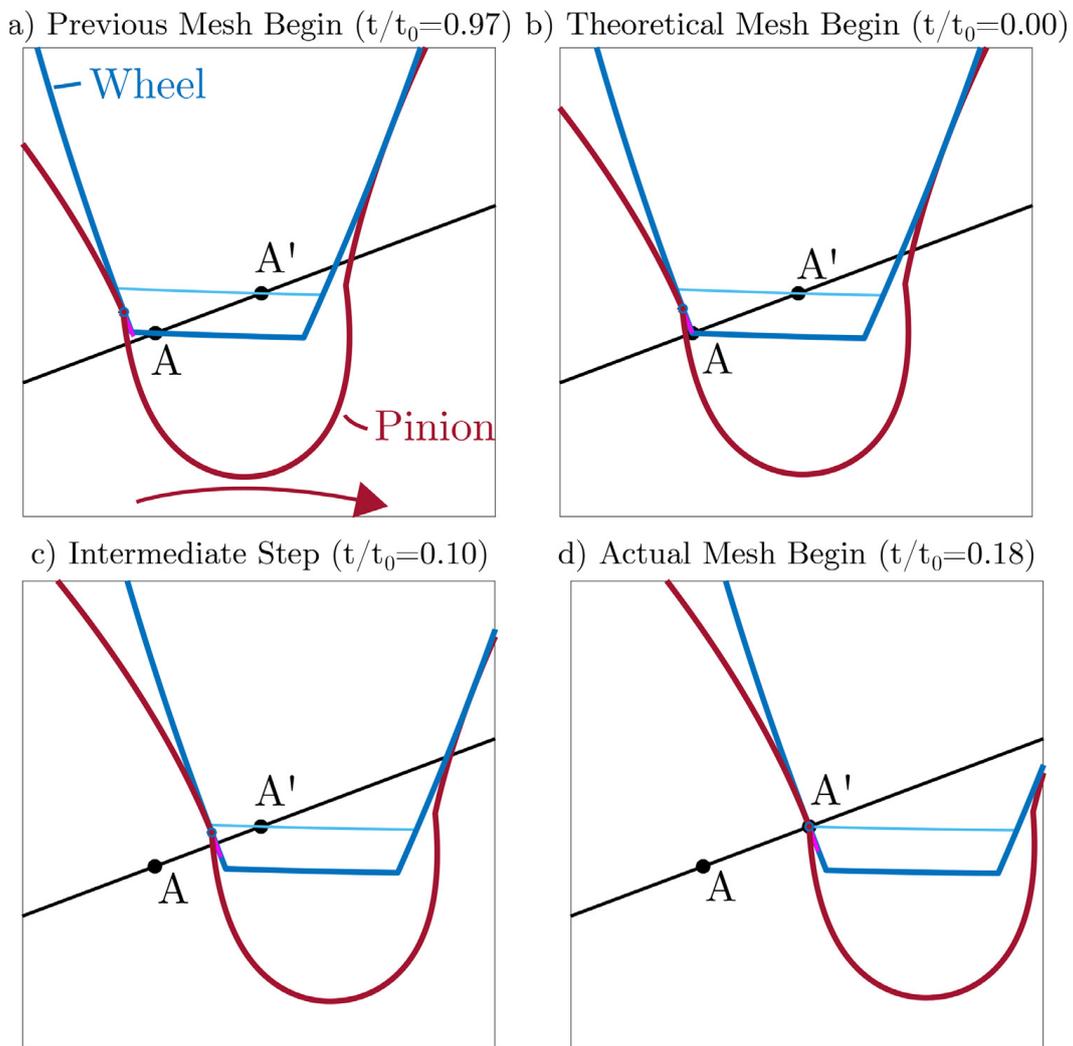


Fig. 11. Premature mesh begin in case of undercut.

the numerical mesh. This assumption is confirmed in Fig. 8 by illustrating the first five orders of the cyclic spectrum of the gear mesh stiffness of each model. Here, the outputs of the respective fast fourier transformation (FFT) are scaled to their corresponding mean value. A comparison of the results in Fig. 8 shows that all models have almost the same underlying signal information and hence nearly the same relevant excitation effect on a gearbox. The fluctuating orders of the ISO 6336-1 are consequently zero as Method B of this international standard is not able to provide any information or any insight

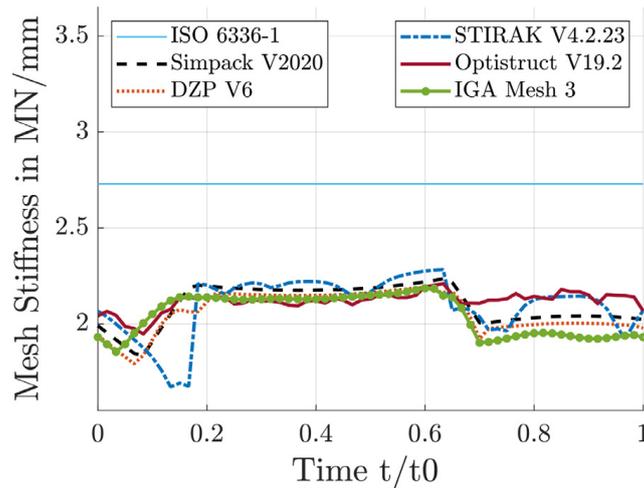


Fig. 12. Gear mesh stiffness of spur gear with tip relief.

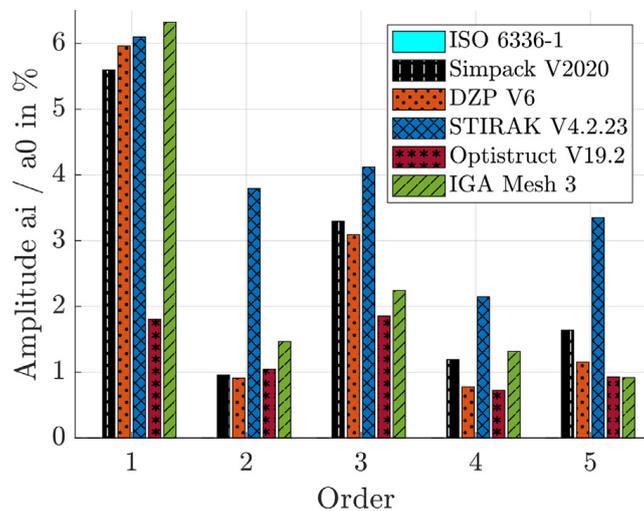


Fig. 13. FFT spectrum of gear mesh stiffness of spur gear with tip relief.

into the dynamic excitation level of the time varying gear mesh stiffness. The mention in all following spectral illustrations still remains to be complete in content.

Nevertheless, the medium mesh density "IGA Mesh3" is here the discretization of choice for the following investigations as it seems to be the best fit between computation time and accuracy. Moreover, the memory allocation for about 30,000 degrees of freedom (DOF) remains within a reasonable range.

Finally, the result of the chosen mesh density "IGA Mesh3" is shown in Figs. 9 and 10 in comparison to the previously mentioned research and software tools for the parameters of the spur gear in Table 1.

Here, the zones of single tooth pair contact and double tooth pair contact are clearly visible in all simulation strategies. However, the transition areas between these two engagement zones differ from method to method. This is mainly caused by the fact that a part of the involute of the pinion - which would actually carry load - is removed by the applied manufacturing process. So, the sample gearing here is undercut. Since both Simpack and DZP do not require any information about the manufacturing process by approximating the tooth root contour as suggested by Weber and Banaschek [1], the knowledge of the undercut is here given to the programs by reducing the tip diameter of the wheel gear appropriately. As a result, physical contact points of the engagement process are unreachable from a numerical point of view and hence the gear mesh begin is slightly delayed. This situation is described in more detail in Fig. 11. Here, the actual mesh begin starts normally in point A and a possible mesh interference under load is already detected at $t/t_0 = 0.97 = -0.03$. In contrast, the adapted tip diameter of the wheel tooth in Simpack and DZP results in a theoretical mesh begin at point A' and a previous mesh begin under load is then only recognized in the area around $t/t_0 = 0.10$ at a different contact location with regard to the present approach. The research tool STIRAK also models the exact geometry of the gear teeth but does not consider possible mesh interference. Consequently, that fact results in an abrupt change of the contact conditions between single tooth pair contact zone and double tooth pair contact zone.

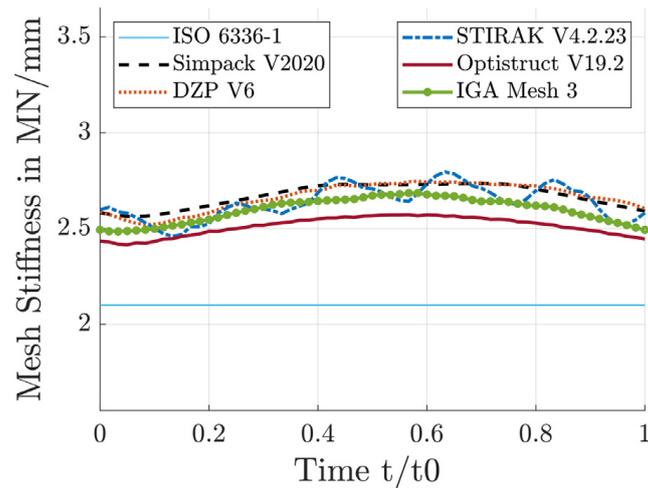


Fig. 14. Gear mesh stiffness of helical gear without profile modifications.

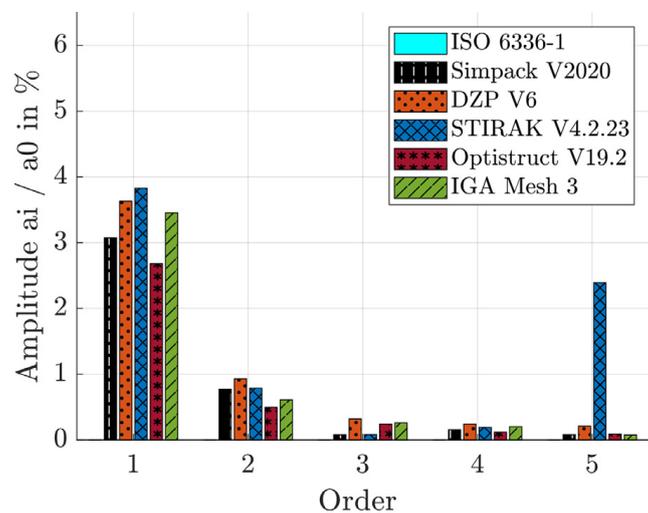


Fig. 15. FFT spectrum of gear mesh stiffness of helical gear without profile modifications.

The finite element model in Optistruct also covers the exact tooth geometry. The minor offset at the mesh begin is here attributed to the search algorithm and to the complex geometry of the gear teeth in the finite element program. Moreover, in the single tooth pair contact zone, the finite element mesh seems to be too coarse to represent the Hertzian effect. With respect to their own size, the solid finite elements allow less flattening in this area as they should and hence they are numerically somewhat stiffer. However, as the nonlinear solution with nearly four million degrees of freedom takes several hours of computation time by reaching the limits of the storage capacity, a finer mesh does not seem to be useful as a practical determination strategy for this purpose.

In contrast, the present approach is in general able to represent all contact conditions over one meshing period in an accurate and smooth manner along with a reasonable computation time. In detail: single tooth pair contact zone and double tooth pair contact zone, local and nonlinear Hertzian pressure and the possibility of premature mesh begin under load in the transition areas considering also the exact geometry of the gear teeth with respect to potential undercut scenarios.

The time domain curves in Fig. 9 do not indicate any further major differences of the excitation behavior of the various approaches at a first glance, but the spectrum nevertheless shows certain deviations. For example, the amplitude of the first order of the research tool STIRAK is the most conservative one, while the supposedly most accurate finite element method seems to calculate a little too harmlessly for noise prediction. However, the proposed method agrees well with Simpack and DZP. For the second order - which is gladly and often seen in measurements next to the first order and hence is also a representative criterion for the global excitation characteristics - the present "IGA" approach shows the highest value of amplitude.

The progression of the gear mesh stiffness over one meshing cycle t/t_0 is calculated once again for the spur gear data in Table 1 with the difference that a profile modification in the form of a tip relief is considered on both pinion and wheel. The results are illustrated in Figs. 12 and 13 and show a good agreement. The corresponding spectrum confirms a significant

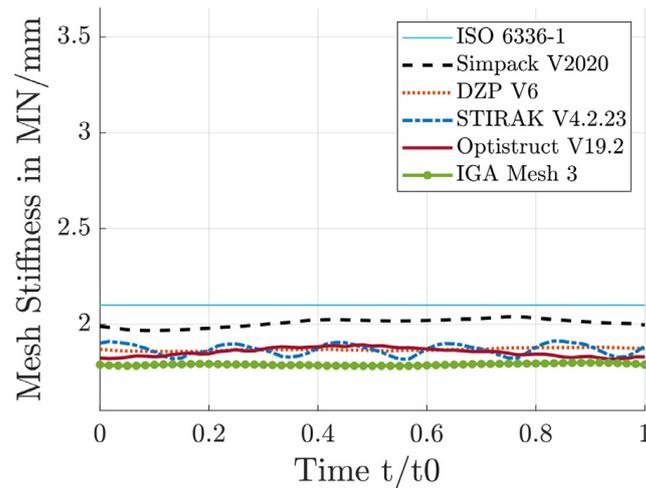


Fig. 16. Gear mesh stiffness of helical gear with tip relief.

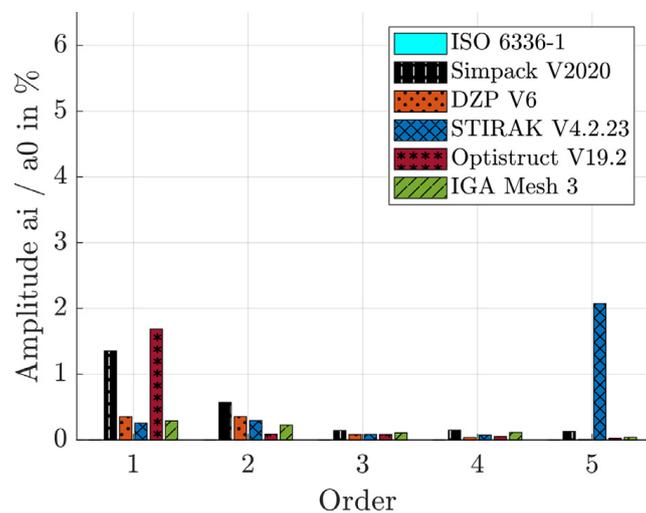


Fig. 17. FFT spectrum of gear mesh stiffness of helical gear with tip relief.

decrease of the excitation behavior in total. So, the tip relief has basically the same influence on all approaches with the side effect of reducing the initial deviations as previously stated in Figs. 9 and 10 without profile modifications. Nevertheless, the finite element method shows again the smallest amplitude for the first order excitation level since the effect of the Hertzian pressure is numerically still represented only with difficulty. As a consequence, no significant change of the gear mesh stiffness is calculated in the transition areas between single tooth pair contact and double tooth pair contact leading to a lower excitation level. Figs. 14 and 15 and Figs. 16 and 17 represent the corresponding plots of the gear mesh stiffness of the helical sample gear in Table 1 without profile modifications and with tip relief, respectively. The results generally show a much smoother behavior and hence a lower excitation level. This is known to be due to the overlap ratio since the abruptly change of tooth pair contact zones is balanced by a number of simultaneously active tooth pairs along the face width. Therefore, the unmodified helical gear setup already shows a similar behavior of the time domain and spectral gear mesh stiffness as the sample spur gear with tip relief. Consequently, all approaches - except the ISO 6336-1 - align best in case of the helical gear with tip relief having also the lowest excitation characteristics. The deviation of the ISO 6336-1 is due to the fact, that Method B of this international standard is based on the elastic behavior of solid disc spur gears and hence loses accuracy by reaching its limits of application to helical gears.

Finally, a further comparison analysis is done for the sample spur gear setup without profile modifications but with a constant center distance deviation of about 0.75% over one meshing period t/t_0 . Therefore, the undercut of the pinion is not influencing the theoretical path of contact as the missing area of the involute is not intended to carry load in this scenario. Figs. 18 and 19 illustrates the corresponding results. Here, the temporal curve of Simpack and DZP are in a good agreement with the present approach. The research tool STIRAK also represents a similar contact behavior, but neglects further on the occurrence of mesh interference in the transition areas. The finite element method, in contrast, shows a slight shift of the mean stiffness value, but also shows in general an equal course of the time varying gear mesh stiffness along one meshing

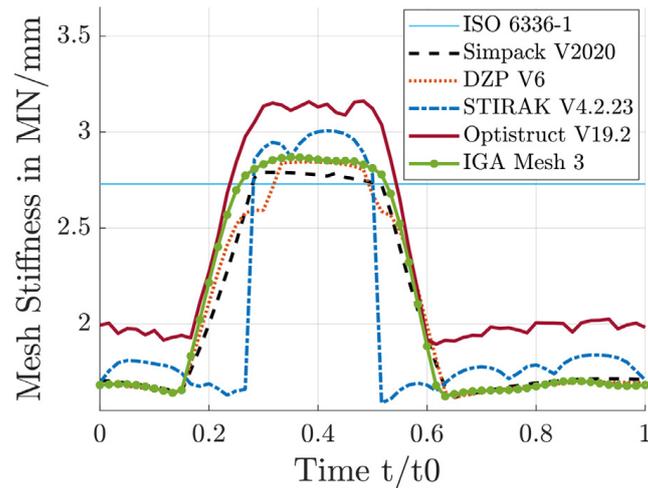


Fig. 18. Gear mesh stiffness of spur gear without profile modifications but with constant center distance deviation.

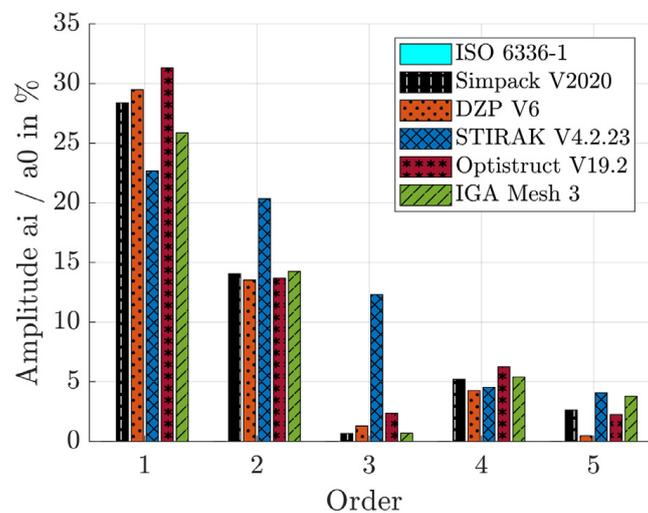


Fig. 19. FFT spectrum of gear mesh stiffness of spur gear without profile modifications but with constant center distance deviation.

period t/t_0 . In summary, the results of all test cases state that the proposed method is always able to consider all significant effects occurring during the gear engagement process combined with a reasonable computation time at best.

5. Conclusion

A reliable and efficient algorithm for the determination of the time varying gear mesh stiffness of arbitrary cylindrical involute gears on the basis of an Isogeometric Analysis is proposed in this paper. The exact tooth geometry is derived by a shaping simulation and then serves as the only basis for the optimized numerical meshing process by means of Non-Uniform Rational B-Splines. As a result, the determination of the elastic behavior of the gear teeth does not rely on any structural-analytical comparative models which may be based on specific gear geometry assumptions and limitations. Despite of high accuracy, the computing time is still short since the executable program code also makes use of more general gearbox-specific advantages enabling the ability of being implemented in total system analyses. The corresponding robustness and stability of the present approach is demonstrated with respect to the numerical mesh density. In addition, the mentioned quality and accuracy is also successfully validated and tested against existing research and established software tools with the examples shown. All effects that usually influence the current contact conditions, like manufacturing errors, profile modifications and mesh interference under load, are considered. The local flattening on the corresponding active tooth flanks due to the Hertzian pressure situation is also taken into account analytically.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

References

- [1] C. Weber, K. Banaschek, Formänderung und Profiltrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern, Schriftenreihe Antriebstechnik (11) (1953) 1–88.
- [2] W. Schäfer, Ein Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung, Technical University of Darmstadt, Darmstadt, 1971 Ph.D. thesis.
- [3] ISO-6336-1:2019-11(EN), Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 1: basic principles, introduction and general influence factors, Standard, International Organization for Standardization, Vernier, Geneva, 2019.
- [4] D.C.H. Yang, J.Y. Lin, Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics, J. Mech. Trans. Autom. Des. 109 (2) (1987) 189–196, doi:10.1115/1.3267437.
- [5] Y. Lei, D. Wang, Z. Liu, X. Yang, A new model for calculating time-varying gearmesh stiffness, Vibroengineering (PROCEDIA) 14 (2017) 334–339, doi:10.21595/vp.2017.19139.
- [6] M. Rezaei, M. Poursina, S.H. Jazi, F.H. Aboutalebi, Calculation of time dependent mesh stiffness of helical planetary gear system using analytical approach, J. Mech. Sci. Technol. 32 (8) (2018) 3537–3545, doi:10.1007/s12206-018-0704-9.
- [7] B. Guilbert, P. Velex, D. Dureisseix, P. Cutuli, A mortar-based mesh interface for hybrid finite-element/lumped-parameter gear dynamic models-applications to thin-rimmed geared systems, J. Mech. Des. 138 (12) (2016), doi:10.1115/1.4034220.
- [8] B. Guilbert, P. Velex, D. Dureisseix, P. Cutuli, Modular hybrid models to simulate the static and dynamic behaviour of high-speed thin-rimmed gears, J. Sound Vib. 438 (2019) 353–380, doi:10.1016/j.jsv.2018.09.003.
- [9] T.F. Conry, A. Seireg, A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems, J. Eng. Ind. 95 (4) (1973) 1115–1122, doi:10.1115/1.3438259.
- [10] G. Schmidt, Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung, Technical University of Munich, Munich, 1972 Ph.D. thesis.
- [11] B. Neupert, Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben, RWTH Aachen, Düsseldorf, 1983 Ph.D. thesis.
- [12] L. Chang, G. Liu, L. Wu, A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears, Mech. Mach. Theory 87 (2015) 93–114, doi:10.1016/j.mechmachtheory.2014.11.019.
- [13] S. Feng, L. Chang, Z. He, A hybrid finite element and analytical model for determining the mesh stiffness of internal gear pairs, J. Mech. Sci. Technol. 34 (6) (2020) 2477–2485., doi:10.1007/s12206-020-0523-7.
- [14] S. Vijayakar, A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem, Int. J. Numer. Methods Eng. 31 (3) (1991) 525–545, doi:10.1002/nme.1620310308.
- [15] R. Parker, S. Vijayakar, T. Imajo, Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons, J. Sound Vib. 237 (3) (2000) 435–455, doi:10.1006/jsvi.2000.3067.
- [16] J.-P. Liu, X.-B. Shu, H. Kanazawa, K. Imaoka, A. Mikkola, G.-X. Ren, A model order reduction method for the simulation of gear contacts based on arbitrary Lagrangian Eulerian formulation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 338 (2018) 68–96, doi:10.1016/j.cma.2018.03.039.
- [17] R.R. Craig Jr, M.C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analyses., AIAA J. 6 (7) (1968) 1313–1319, doi:10.2514/3.4741.
- [18] T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, I. Howard, Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical fe models, Strojniški vestnik - J. Mech. Eng. 57 (11) (2011) 810–818, doi:10.5545/sv-jme.2010.248.
- [19] C.G. Cooley, C. Liu, X. Dai, R.G. Parker, Gear tooth mesh stiffness: a comparison of calculation approaches, Mech. Mach. Theory 105 (2016) 540–553, doi:10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021.
- [20] F. Ihlenburg, M. Zarnekow, T. Grätsch, Simulation of vibrational sources and vibroacoustic transfer in wind turbine drivetrains, PAMM 19 (2019), doi:10.1002/pamm.201900101.
- [21] C.G. Cooley, R.G. Parker, S.M. Vijayakar, A frequency domain finite element approach for three-dimensional gear dynamics, J. Vib. Acoust. 133 (4) (2011), doi:10.1115/DETC2009-87525.
- [22] J.A. Cottrell, T.J. Hughes, Y. Bazilevs, Isogeometric Analysis: tOward iNtegration of CAD and FEA, John Wiley and Sons, 2009.
- [23] M.G. Cox, The numerical evaluation of b-splines, IMA J. Appl. Math. 10 (2) (1972) 134–149, doi:10.1093/imamat/10.2.134.
- [24] C. De Boor, On calculating with b-splines, J. Approx. Theory 6 (1) (1972) 50–62, doi:10.1016/0021-9045(72)90080-9.
- [25] R.J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices, AIAA J. 3 (2) (1965), doi:10.2514/3.2874. 380–380

Veröffentlichung [2]

- [2] A. Beinstingel, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Gear mesh excitation and non-uniform Rational B-Splines. *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research*, 86:331–336, 2021, <https://doi.org/10.1007/s10010-021-00524-4>.

Anmerkung:

Zu Prüfungszwecken der eingereichten Version dieser Dissertation wird die eingebundenen Veröffentlichung [2] vollständig beigelegt. Auf dem Medien- und Publikationsserver der Technischen Universität München erscheint jedoch lediglich der zugehörige Verweis zum jeweiligen Verlag in dem die Arbeit publiziert wurde.

Veröffentlichung [3]

- [3] A. Beinstingel, R. G. Parker, und S. Marburg. Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox. *Journal of Sound and Vibration*, 536:117160, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117160>.
Copyright © 2022 Elsevier. Reprinted with permission.

AB ? 🔍



Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox

Author: Andreas Beinstingel, Robert G. Parker, Steffen Marburg

Publication: Journal of Sound and Vibration

Publisher: Elsevier

Date: 13 October 2022

© 2022 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Journal Author Rights

Please note that, as the author of this Elsevier article, you retain the right to include it in a thesis or dissertation, provided it is not published commercially. Permission is not required, but please ensure that you reference the journal as the original source. For more information on this and on your other retained rights, please visit: <https://www.elsevier.com/about/our-business/policies/copyright#Author-rights>

BACK

CLOSE WINDOW

© 2023 Copyright - All Rights Reserved | [Copyright Clearance Center, Inc.](#) | [Privacy statement](#) | [Data Security and Privacy](#)
| [For California Residents](#) | [Terms and Conditions](#) Comments? We would like to hear from you. E-mail us at customer@copyright.com



Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox

Andreas Beinstingel^{a,*}, Robert G. Parker^b, Steffen Marburg^a

^a Technical University of Munich, Chair of Vibroacoustics of Vehicles and Machines, 85748 Garching, Germany

^b University of Utah, Department of Mechanical Engineering, Salt Lake City, UT, 84112, USA

ARTICLE INFO

Keywords:

Planetary gear
Parametric instability
Experiments
Harmonic balance method

ABSTRACT

This article experimentally and numerically investigates the vibration behavior of a high-speed planetary gearbox. The subject planetary gear is a system in practical use. The focus is on parametrically excited vibrations and parametric instabilities that arise from time-varying gear mesh stiffness and may lead to gear whine. An example gearbox is deliberately subjected to poor profile modification in order to increase the dynamic excitation. Experiments reveal that this non-optimized version generates gear whine, where the same system with appropriate profile modifications does not. The measurements show a broadband frequency spectrum at certain operating conditions. A rotational lumped-parameter model with a linear implementation of the time-varying gear mesh stiffnesses is used to investigate the instability phenomena from a theoretical point of view. The model is analyzed in the time (numerical integration) and frequency (harmonic balance) domains. The computational approach clearly identifies that the large vibration results from parametric instability. The calculations explain the measurements and confirm the occurrence of parametric instabilities in a planetary gearbox by experiments.

1. Introduction

Gear noise is an important aspect of the overall performance of power transmission systems. The gear mesh at the contacting teeth is the major source of excitation and leads to oscillating forces on the shafts and bearings [1]. These vibrations are transmitted to the housing and finally radiate airborne noise [2–4]. A schematic transfer path is illustrated in Fig. 1.

The importance of a large overlap ratio, achieved by a large helix angle, is described in [5] as the most important factor for reducing the excitation and hence the gear noise. In planetary gear systems of high power density and high gear ratio, helical gears create additional and undesirable tilting moments on the planet gears [6] as well as axial thrust forces. Therefore, spur gears are still preferred for planetary gears, which results in a special challenge with respect to noise.

The high number of simultaneously acting spur gear meshes amplifies the effects of parametric excitation from fluctuating tooth mesh stiffnesses. Hence, an additional investigation of the parametric instability characteristics is appropriate. In theory, running a gearbox in unstable regions (that is, mesh frequency ranges where parametric instability occurs) causes the amplitudes of oscillations to build up infinitely. In practice, these theoretically infinite amplitudes are prevented by the nonlinear effects of contact loss where the tooth flanks separate during power transmission. With such contact loss, the amplitudes settle at large steady state values (i.e., limit cycles). This large steady state vibration can produce undesirable noise. This kind of internal noise generation is known as ‘gear whine’.

* Corresponding author.

E-mail address: andreas.beinstingel@tum.de (A. Beinstingel).

Nomenclature

Roman symbols

A	Point of gear mesh begin
\mathbf{A}_h	Mass matrix of harmonic h
\mathbf{A}	Mass matrix of harmonic balanced hypersystem
\mathbf{b}	External force vector of harmonic balanced hypersystem
\mathbf{B}	Dynamic damping matrix of harmonic balanced hypersystem
\mathbf{B}_h	Dynamic damping matrix of harmonic h
c	Constant scalar value depending on initial conditions
\mathbf{C}_h	Dynamic stiffness matrix of harmonic h
\mathbf{C}	Dynamic stiffness matrix of harmonic balanced hypersystem
\mathbf{D}	Damping matrix
E	Point of gear mesh end; Kinetic and potential Energy
f_0	Natural frequency in Hz
\mathbf{f}_{ext}	External force vector
\mathbf{f}_{int}	Internal force vector
H	Number of harmonics to approximate solution space
J	General scalar inertia value
k	General scalar stiffness value
$k_{ze}(t)$	Time-varying stiffness of a single pair of gear teeth
k_{zy}	Mean stiffness of gear meshing
$k_z(t)$	Time-varying stiffness of gear meshing
K	Number of degrees of freedom
\mathbf{K}_0	Constant stiffness matrix
$\mathbf{K}_1(t)$	Time-varying stiffness matrix
$\mathbf{K}_{1,n}$	Amplitude stiffness matrix of harmonic n to approximate $\mathbf{K}_1(t)$
\mathbf{M}	Mass matrix
N	Number of harmonics to approximate time-varying gear mesh stiffness
\mathbf{u}	Displacement vector
$\mathbf{u}_{c,h}$	Displacement vector of harmonic h (complementary solution)
$\mathbf{u}_{p,h}$	Displacement vector of harmonic h (particular solution)
\mathbf{u}_c	Displacement vector consisting of all harmonics $\mathbf{u}_{c,h}$
\mathbf{u}_p	Displacement vector consisting of all harmonics $\mathbf{u}_{p,h}$
S	Number of degrees of freedom of harmonic balanced hypersystem
t	Time

Greek symbols

α	Newmark time integration constant; Real part of eigenvalue λ
β	Imaginary part of eigenvalue λ
δ	Newmark time integration constant
Δt	Time step size in Newmark time integration
ϵ	Relative amplitude of harmonic gear mesh stiffness with respect to k_{zy}
λ	Eigenvalue of harmonic balanced hypersystem
ϕ	Eigenvector
τ	Shift angle to describe mesh phasing of planets

The parametric excitation behavior of gearboxes and resulting instabilities have been investigated for decades [7]. For example, the parametric excitation effect and its risk of instability are demonstrated for a model of a single-stage gear system in theory and practice [8]. In a subsequent work [9], some influencing factors, like the time-varying gear mesh stiffness, are derived on a theoretical basis with respect to the dynamic behavior of a single-stage gearbox. The impact of clearance nonlinearity on parametric excitation is investigated in [10–12] for single-stage gear models. In [13,14], the same two-stage gearbox, subjected to parametric excitation, is analyzed but conflicts occur in their conclusions. The contradictory statement is clarified in [15], concluding that parametric interactions in a two-stage gear are more complex compared to those acting in a single-stage gear. The special dynamic behavior due

ω_0	Natural frequency in rad/s
Ω	Gear mesh frequency ; Base frequency of solution space
Subscripts and superscripts	
$(\cdot)_c$	Complementary component
$(\cdot)_{c,h}$	Complementary component of harmonic h
$(\cdot)_{\text{ext}}$	External
$(\cdot)_h$	Series index for harmonics H
$(\cdot)_{\text{int}}$	Internal
$(\cdot)_k$	Series index for degrees of freedom K
$(\cdot)_n$	Series index for harmonics N
$(\cdot)_p$	Particular component
$(\cdot)_{p,h}$	Particular component of harmonic h
$(\cdot)_s$	Series index for degrees of freedom S
Operators	
$(\cdot)^T$	Transpose of a vector or matrix
$(\cdot)^{-1}$	Inverse of a matrix
$(\dot{\cdot})$	First derivative with respect to time t
$(\ddot{\cdot})$	Second derivative with respect to time t
$(\bar{\cdot})$	Complex conjugate

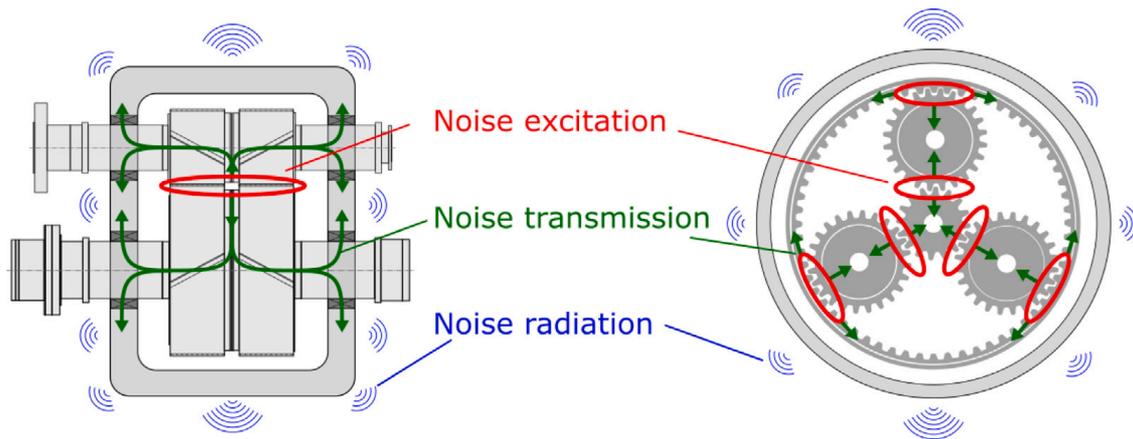


Fig. 1. Schematic illustration of noise characteristics in a gearbox: gear mesh excitation as major source of noise generation and its associated transmission and noise radiation.

to parametric excitation and instability inside a planetary gearbox is studied in [16–18]. Free vibration characteristics of a planetary gear including gyroscopic effects, which are mainly induced by the rotations of the carrier, are examined in [19]. The effectiveness of planet phasing and planet spacing to neutralize resonance and parametric instability is discussed in [20–23], respectively. On top of that, the elastic deformation potential of the ring gear and its influence on parametric excitation is studied in [24] for both in-phase and sequentially phased planets with an elastic-discrete model. Analytical rules are derived in [21] to specify the impact of planet mesh phasing on the vibrations of three-dimensional planetary/epicyclic gears, including those where high-speed gyroscopic effects are modeled. The modal properties and parametric instability of high-speed spur epicyclic and planetary gears with an elastically deformable ring are investigated in [25] showing that the Coriolis and centripetal accelerations may lead to complex traveling-wave modes. The impact of speed fluctuations inside the drivetrain on parametric instability of a planetary gearbox is analyzed in [26,27]. The nonlinear dynamic behavior in case of tooth separation and large vibrations, including jump phenomena, chaotic motions and bifurcation, is investigated in [28] where a computational approach in the time domain, conducted with a two-dimensional lumped-parameter model, is validated against a complex finite element analysis due to scarcity of experimental data. The results demonstrate the power of the lumped-parameter model. A three-dimensional hybrid combination in the time domain of finite elements and lumped-parameters is used in [29,30] for dynamic investigations. A complete procedure to predict ‘gear whine’ in a planetary gearbox is introduced in [31]. This approach is mainly based on a three-dimensional finite element model and makes use of a linear iterative spectral method by means of [32]. A nonlinear harmonic balance method is applied to a lateral-torsional lumped-parameter model in [33] to investigate the effect of multiple clearances. Furthermore, an analytical closed-form solution,

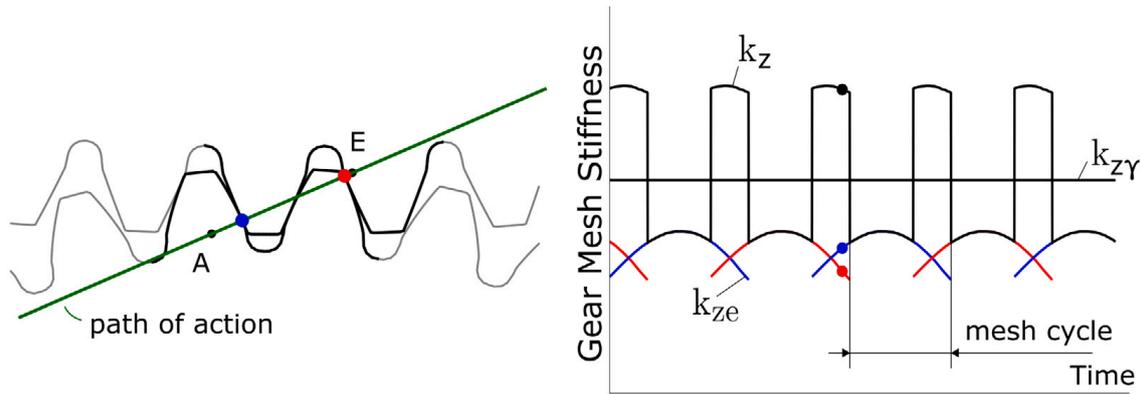


Fig. 2. Schematic illustration of time-varying gear mesh stiffness of a spur gear.

also based on the harmonic balancing method, is derived in [34] for a lumped-parameter model which also establishes statements regarding the parametric instability characteristics in the frequency domain.

Additionally, there is research that does not focus specifically on parametric instabilities but deals with the fundamental dynamics of planetary gear sets, e. g. [35–39] and [40]. In summary, the literature and its related research affirms that the dynamic behavior in a planetary gearbox shows complex effects resulting in uncomfortable sound. Hence, special consideration of the parametric excitation and its associated dynamic response is recommended throughout the design process. The primary objective is to avoid operating within a mesh frequency range where parametric instability occurs. As a result, a reliable simulation methodology to detect such operating conditions is advisable to optimize the overall performance from early in the design process. Based on this motivation, the present paper investigates the suitability of a linear torsional vibration model for the identification of parametric instabilities. As the current state of the art [7] has shortcomings in terms of experimental data with respect to parametric instability inside planetary gearboxes, appropriate measurements are conducted. Especially for high-speed planetary gears of high power density, high gear ratio and comparatively large component dimensions, the sparse data available, e. g. [31,41–43], cannot be directly referred to. As a result, this paper contributes measurement data for planetary gear parametric instability and thus fills a gap in the literature. Moreover, a linear model is able to describe the vibration by a novel harmonic balance approach that includes the complementary (or transient) solution of the differential equations, whose application to gearboxes in this form is quite rare or perhaps new to the authors' current knowledge.

The computational model is analyzed in the frequency and time domains. Both approaches consider the parametric excitation. The analysis in the time domain by means of the Newmark integration scheme [44] mainly serves as the basis for validation. The analysis in the frequency domain uses a harmonic balance [45] approach and allows an elegant identification of parametric instabilities. Hence, the occurrence and detection of internal noise generation due to parametric excitation is explained by means of a combination of theory and experiments. Moreover, a comparison of the two calculation approaches in terms of their possibilities and usability is given. In addition, the vibration behavior of optimized and non-optimized profile modifications is checked for the sample planetary gearbox in theory and practice with respect to parametric instability.

The article is structured as follows. At first, some background regarding the time-varying gear mesh stiffness is given to implement the resulting parametric excitation into the equations of motion. The subsequent section describes the experimental setup and the underlying torsional vibration model. Additionally, the cyclic excitation level of the gears is examined with respect to profile modifications. A further section presents the solution strategies in the time and frequency domains, before the corresponding results are illustrated and discussed in a separate section explaining the experiments. All investigations and results are compiled and contrasted in a final section.

2. Gear mesh as parametric excitation

Even if a constant force is transmitted by a gear mesh, the continuously changing contact conditions have the consequence that a tooth is subjected to different load cases on its way from the start of meshing at point A to the end of meshing at point E, see Fig. 2. Each angular orientation leads to an individual deflection of the gear teeth, which mainly relates to quantities like Hertzian pressure, axial, shear, bending and foundation deflections of the gear blank or gear rim [46]. The ratio of the force to be transmitted and the actual total deflection delivers for each meshing state the stiffness value k_{ze} of a single pair of teeth. The mesh stiffness of a single pair of teeth varies over one gear meshing sequence as indicated on the right-hand side in Fig. 2. The total gear mesh stiffness k_z is the superposition of all single pairs of teeth currently in contact.

In reality, the dynamic deflections $\mathbf{u}(t)$ of the gear teeth, shafts, bearings and housing influence the current contact conditions. As a result, the gear mesh stiffness is actually a nonlinear stiffness term in the equation of motion. However, the cyclical nature of the tooth contact permits a common approximation that the mesh stiffness varies in time t , which makes a linear investigation in the frequency and time domains possible.

Having Ω as the gear meshing frequency, τ as a phase shift angle that describes the current rolling position, and ϵ_n as a measure of the cyclic stiffness fluctuations $\frac{k_{z,n}}{k_{z\gamma}} e^{i\tau}$, the following assumption in form of a Fourier series is achieved for a single gear meshing

$$\begin{aligned} k_z(\mathbf{u}) &\approx k_z(t) = k_{z\gamma} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_{z,n} e^{i(n\Omega t + \tau)} \\ &= k_{z\gamma} \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n e^{in\Omega t} \right), \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $k_{z,-n} = \bar{k}_{z,n}$ and $\epsilon_{-n} = \bar{\epsilon}_n$ and the overbar denotes complex conjugate. This representation applies to both the sun-planet and ring-planet meshes, but with different values of $k_{z\gamma}$ and ϵ_n . The relative phase between the various sun-planet meshes is captured with different $\epsilon_n(\tau)$ at the different sun-planet meshes (and similarly for the ring-planet meshes) [47].

The matrix equation of motion is

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{K}_{1,n} e^{in\Omega t} + \bar{\mathbf{K}}_{1,n} e^{-in\Omega t})}_{\mathbf{K}_1(t)}] \mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (2)$$

where \mathbf{M} is a mass matrix, \mathbf{D} is a damping matrix, \mathbf{f}_{ext} contains the constant external torques, and \mathbf{u} contains the rotational degrees of freedom. The stiffness matrix is split into constant (\mathbf{K}_0) and periodically varying ($\mathbf{K}_1(t)$) parts based on the gear mesh stiffnesses in Eq. (1). The fluctuating parts in Eq. (1) and therefore also $\mathbf{K}_1(t)$ are assumed to depend only on time t and not on the dynamic response \mathbf{u} . The periodic stiffness matrix $\mathbf{K}_1(t)$ is thus known in advance and so are the complex-valued matrices $\mathbf{K}_{1,n}$ in the Fourier series for $\mathbf{K}_1(t)$ shown in Eq. (2). The overbar in $\bar{\mathbf{K}}_{1,n}$ denotes the complex conjugate. A change of form yields

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}, t) \quad \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{K}_1(t) \mathbf{u}. \quad (3)$$

The dynamic response of the linear, undamped, time-invariant system where $\mathbf{K}_1(t)$ is neglected in Eq. (3), because it is small compared to \mathbf{K}_0 , is

$$\mathbf{u}(t) \approx \sum_{k=1}^K (c_k e^{i\omega_{0,k} t} + \bar{c}_k e^{-i\omega_{0,k} t}) \phi_k + \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (4)$$

where K represents the total number of degrees of freedom, ϕ_k denotes the real-valued vibration mode with natural frequency $\omega_{0,k} > 0$ of the eigenvalue problem for the undamped system in Eq. (3), and the complex-valued c_k depend on the initial conditions and capture the transient vibration alongside that from \mathbf{f}_{ext} . With this approximation for \mathbf{u} , the internal excitation term in Eq. (3) is approximated from a basic theoretical point of view as

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}, t) \approx \mathbf{f}_{\text{int}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{K}_{1,n} e^{i(\omega_{0,k} + n\Omega)t} + \bar{\mathbf{K}}_{1,n} e^{i(\omega_{0,k} - n\Omega)t}) c_k \phi_k \right. \\ \left. + \mathbf{K}_{1,n} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f}_{\text{ext}} e^{in\Omega t} \right] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (5)$$

where c.c. denotes the complex conjugate of the preceding expression. When this $\mathbf{f}_{\text{int}}(t)$ is viewed as an excitation on the right-hand side of Eq. (3), it is evident that large amplitude vibration results whenever the mesh frequency is such that $n\Omega \approx \omega_{0,i}$ (which we describe as resonance) and whenever $\omega_{0,k} + n\Omega \approx \pm\omega_{0,i}$ or $\omega_{0,k} - n\Omega \approx \pm\omega_{0,i}$ (which we describe as parametric instability because it originates from the parametric excitation, occurs in the complementary part of the solution that is independent of the torque input, and leads to unbounded response in the absence of nonlinearity). These four parametric instability conditions reduce to two conditions. The first is

$$n\Omega \approx \omega_{0,i} + \omega_{0,k}, \quad (6)$$

which is known as a sum-type parametric instability and of primary importance in what follows. The second condition is $n\Omega \approx \omega_{0,k} - \omega_{0,i}$, which is known as a difference-type parametric instability. Difference-type instability do not occur in systems with symmetric mass and stiffness matrices [48] and do not arise in what follows. Some initial mathematics determine the mesh frequencies at which parametric instability can occur; later results more fully characterize these instabilities by solving Eq. (3) without the simplifications used in Eqs. (4) and (5), as described in Section 4.

3. Experimental setup and calculation model

A planetary gearbox that is directly attached to the housing of a generator is the basis for the following investigations. The gear unit is designed for a 6 MW power plant application where the driving sun rotates at 11 000 rpm and runs a generator at 1500 rpm. Three equally spaced planets with sequential mesh phasing τ (i. e., $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ for the sun-planet meshes as well as for the ring-planet meshes) transmit the power to the driven ring gear which has a diameter of about 800 mm. The underlying torsional vibration model is illustrated in Fig. 3 and at the same time gives an overview of the complete experimental setup.

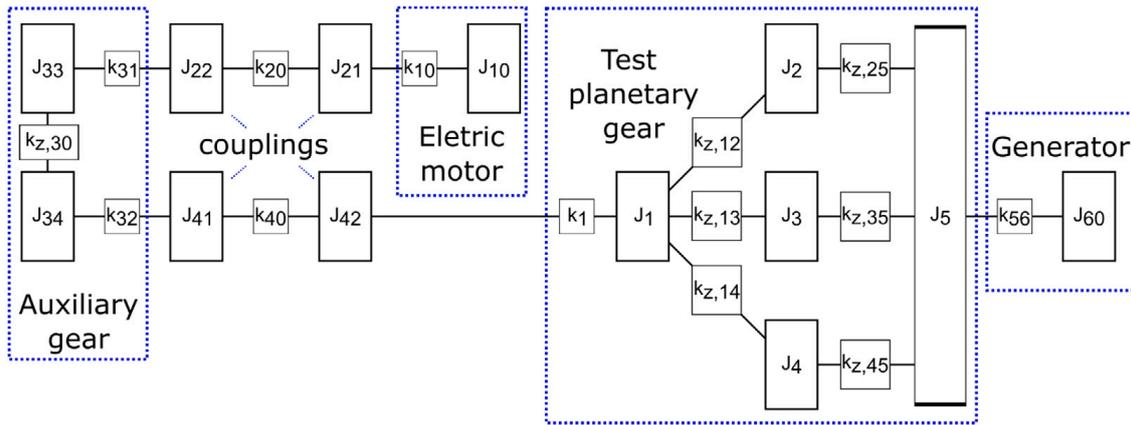


Fig. 3. Torsional vibration model representing the test setup with 13 degrees of freedom. The electric motor drives the generator via an auxiliary gear and the test planetary gear.

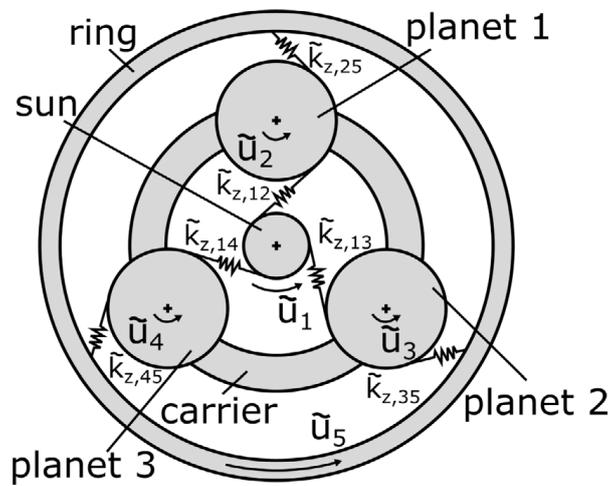


Fig. 4. Torsional vibration definitions inside planetary gearbox.

In the following simulations, all rotational degrees of freedom u_k are described by rigid body rotations with a respective moment of inertia J_k . The driving electric motor J_{10} with its output shaft stiffness k_{10} is attached to an auxiliary gear unit via a cardan shaft. This coupling element is split into two inertias J_{21} and J_{22} . The torsional spring k_{20} represents the stiffness of this connection. The slower turning wheel J_{33} of the intermediate gearbox is connected to this cardan shaft by its torsional shaft stiffness k_{31} . The rotational speed of 1300 rpm of the electric motor is transmitted to the rated input speed of 11 000 rpm. In all upcoming simulations, no additional excitation behavior is taken into account for the tooth meshing $k_{z,30}$ of this auxiliary gearbox. The high-speed pinion gear J_{34} is finally attached via its shaft stiffness k_{32} to the focused planetary gearbox by another connection element. This second coupling component is again split into two inertias J_{41} and J_{42} . The torsional spring k_{40} describes the associated flexibility. The driven ring gear J_5 of the planetary gearbox is directly mounted onto the generator J_{60} by the generator shaft stiffness k_{56} .

Fig. 4 shows the schematic of the planetary gear portion of the model. As the planet carrier is held fixed, no degree of freedom is attached to this component. The high-speed sun pinion J_1 of about 0.02 kg m^2 drives the ring gear J_5 with about 38 kg m^2 by three evenly spaced planets J_2, J_3 and J_4 , each having about 1.5 kg m^2 . The corresponding gear meshes $k_{z,12}, k_{z,13}$ and $k_{z,14}$ between the sun pinion J_1 and each planet J_2, J_3 and J_4 as well as the gear meshes $k_{z,25}, k_{z,35}$ and $k_{z,45}$ between each planet J_2, J_3 and J_4 and the ring gear J_5 are expressed by means of Eq. (1) and hence parametrically excite this dynamic model. The attached generator J_{60} is about 290 kg m^2 , while the remaining equipment of the test bench has a total inertia of 50 kg m^2 .

During measurement, the speed is slowly ramped up from zero to 105% of nominal speed over more than 700 s to achieve almost steady state operating conditions throughout the run-up. No electrical load is applied to the generator as the generator is technically not able to provide a consistent load through a speed sweep. The position of the high resolution sensor (Bruel&Kjaer Type 4514-B-001), which tracks the casing acceleration at a 65 kHz sample rate, is shown in Fig. 5. The measuring system Bruel&Kjaer Pulse 3050-A-060 is used to examine and post-process the data, i. e. Fast Fourier Transformations (FFT) with a Hanning Window of 250 ms and an overlap ratio of 95%.

Two tests were performed on the test-bench consisting of two different sets of sun pinion and planet gears. One run-up was conducted with gears having an optimized and appropriate profile modification and the other one was conducted with tooth

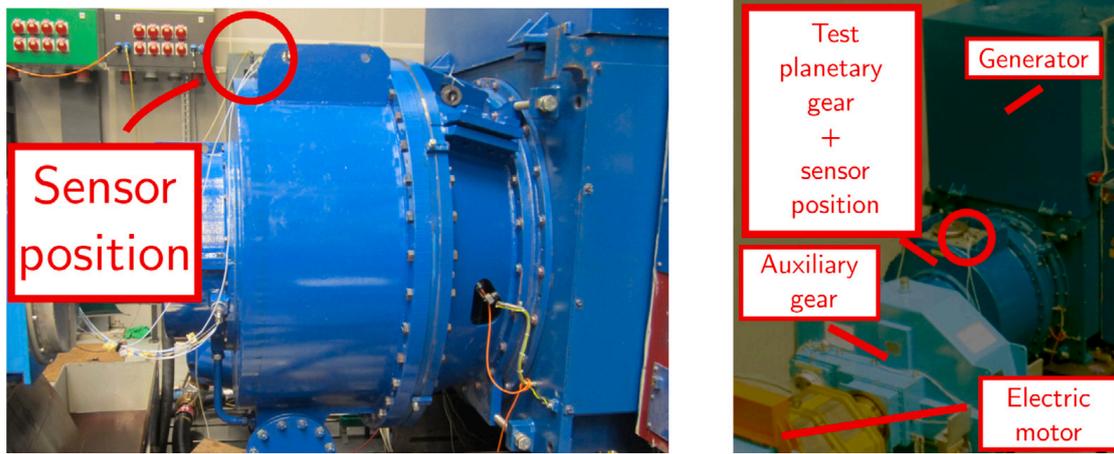


Fig. 5. Sensor position for measurement of casing acceleration.

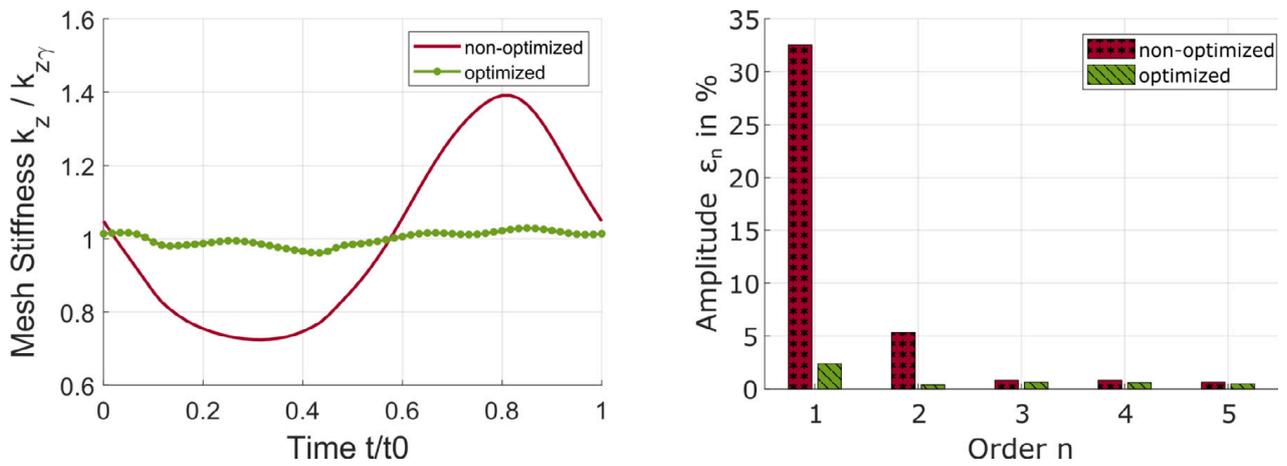


Fig. 6. Gear mesh stiffness (left) and corresponding spectrum (right) of sun-planet gear mesh in case of non-optimized and optimized profile modification at 50% of nominal load.

profile modifications designed to intentionally increase the excitation level, which leads to an expected quality drop. In Fig. 6 the corresponding result of the time-varying gear mesh stiffness between the sun pinion and one planet gear is illustrated for both the non-optimized and optimized designs. This stiffness behavior within the influence of the applied profile modifications serves as the basis for all upcoming simulations. The determination is done in a preceding step as described in [46] in accordance to ISO6336-1 [49], but could also have been performed with similar approaches like [50–54].

The frequency spectrum of the time-varying gear mesh stiffness on the right-hand side in Fig. 6 demonstrates the effectiveness of appropriate profile modifications. Here, the non-optimized gear design has a stiffness fluctuation level of more than 30% of the average mesh stiffness for the first order, while the optimized design indicates a variation of about 3%.

As the main parametric excitation is located in the first order, only the $n = \pm 1$ harmonic coefficients in Eq. (1) for the time-varying gear mesh stiffness are taken into account for all upcoming simulations. Hence, the values for ϵ_{-1} and ϵ_1 lead to an excitation value of 30% for each sun-planet gear mesh. Additionally, the first excitation order between each planet gear and the driven ring gear is set to a value of 5% as it is the maximum error to be expected for this design case.

Table 1 lists the natural frequencies ($f_{0,k} = \omega_{0,k}/2\pi$) of the torsional vibration model where the planetary gearbox has significant contribution. This implies that natural frequencies whose mode shape predominantly oscillates within the adjacent components (e. g., auxiliary gear) are not mentioned, since they do not add any value to the following investigations. The natural frequencies are calculated from the time-invariant model where damping as well as the right-hand side of Eq. (3) are omitted. The corresponding modes shapes ϕ_k (given as angular amplitudes) of the planetary gear components are given, as are the relative distributions of modal kinetic energy E_k among the planetary gear components and modal potential energy E_k among the three most important planetary gear stiffnesses. Each mode shape ϕ_k is normalized such that its largest angular rotation is unity. The largest angular rotation can be at a degree of freedom in Fig. 3 that is not part of the planetary gear and so not shown in Table 1. The energies E_k in Table 1 are given as fractions of the total kinetic ($\omega_{0,k}^2 \phi_k^T \mathbf{M} \phi_k / 2$) or potential ($\phi_k^T \mathbf{K}_0 \phi_k / 2$) modal energy for the complete 13-dof dynamic system in Fig. 3. Not all energies of the complete system are included in Table 1, so the ratios do not necessarily add to unity. The highest natural frequency of the total system is at 7400 Hz. At nominal speed and with 23 teeth on the sun gear the tooth mesh

Table 1

Natural frequencies and mode shapes acting in planetary gearbox at the inertias, shafts and gear meshings (GM).

Description	Inertia			Stiffness		
	Sun	Planets	Ring	Sun shaft	GM (S-P)	GM (P-R)
$f_{0,1}$	in Hz			1327		
ϕ_1	0.65	0.12	0.05	–	–	–
E_1	0.03	0.27	0.37	0.10	0.09	0.77
$f_{0,2}$	in Hz			1594		
ϕ_2	0.00	1.00	0.00	–	–	–
E_2	0.00	1.00	0.00	0.00	0.47	0.53
$f_{0,3}$	in Hz			1928		
ϕ_3	0.21	0.10	0.00	–	–	–
E_3	0.01	0.36	0.05	0.44	0.32	0.22
$f_{0,4}$	in Hz			7039		
ϕ_4	1.00	0.01	0.00	–	–	–
E_4	0.95	0.02	0.00	0.43	0.57	0.00

frequency Ω is 4217 Hz for the planet carrier being stationary. Neither this mesh frequency Ω nor any of its harmonics $n\Omega$ are close to any of these natural frequencies $\omega_{0,k}$ at nominal speed ($n\Omega \neq \omega_{0,k}$), so a usual resonance is not expected in the speed range of interest.

4. Solution strategy in frequency and time domain

The equation of motion in Eq. (2) is solved in the frequency domain and in the time domain. To have clear comparability, all investigations take the same linear excitation behavior of the gear meshing into account. The first harmonic coefficients ϵ_n for $n = \pm 1$ in Eq. (1) are set appropriately to 30% for the gear meshes between the sun pinion and the planet gears. For the gear meshes between the planet gears and the ring gear this value is adjusted to 5%. Additionally, the phase shift angles τ for the mesh conditions between the three planets are implemented suitably [47].

In the time domain, an unconditionally stable integration method is used since the internal forces in Eq. (3) may lead to physical instabilities. As the analysis in the time domain will mainly be used for validation purposes, confusion between numerical and physical instability should be avoided. The Newmark time integration scheme [44] is based on the assumptions

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + [(1 - \delta){}^t\ddot{\mathbf{u}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}] \Delta t \quad (7)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right] \Delta t^2 \quad (8)$$

and meets this requirement for the parameters $\delta = \frac{1}{2}$ and $\alpha = \frac{1}{4}$. So, the time-varying matrix $\mathbf{K}_1(t)$ is simply updated in each implicit integration time step $t + \Delta t$ in accordance with Eq. (1).

The computational approach in the frequency domain is based on the findings of [55] and explained in [45,56]. It is a variation on the harmonic balance method. While harmonic balance is often used to find periodic responses to periodic external excitation, typically for nonlinear systems, the present method adjusts the approach to yield approximate solutions for linear, parametrically excited systems such as Eq. (2). In order to clarify the applied approach of Section 5 within its linear implementation, the procedure is subsequently outlined in more detail. For the dynamic displacements \mathbf{u} without parametric excitation the response is shown in Eq. (4) and consists of a linear superposition of a complementary solution and a particular solution. The complementary solution represents the free vibrations of the system in the given form that depends on the known natural frequencies $\omega_{0,k}$ and vibration modes ϕ_k of the system without damping and without parametric excitation. For constant input torques, the particular solution is the constant vector $\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}}$.

This complementary and particular solution form motivates the assumed solution in the present approach as

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{\mathbf{u}_{c,h} e^{\lambda t}}_{\text{complementary}} + \underbrace{\mathbf{u}_{p,h}}_{\text{particular}} \right) e^{jh\Omega t}. \quad (9)$$

The first term in the brackets has a form similar to the complementary solution in Eq. (4) except that here both $\mathbf{u}_{c,h}$ and λ are unknown and to be determined. The second term is analogous to the particular solution in Eq. (4) except that $\mathbf{u}_{p,h}$ is unknown and to be determined. The $\mathbf{u}_{c,h}$ and $\mathbf{u}_{p,h}$ are constant and have dimension equal to the total number of degrees of freedom K . Because the gear mesh stiffness changes periodically in accordance with Eqs. (1) and (2), the total response contains additional frequency content associated with the periodic parametric excitation having base frequency Ω and harmonic multiples $h\Omega$. Insertion of the complementary and particular solution terms within the Fourier series in Eq. (9) seeks to capture this additional frequency content.

The assumed response \mathbf{u} in Eq. (9) and its derivatives are

$$\mathbf{u} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{u}_{c,h} e^{(\lambda+ih\Omega)t} + \mathbf{u}_{p,h} e^{ih\Omega t}], \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} [(\lambda + ih\Omega) \mathbf{u}_{c,h} e^{(\lambda+ih\Omega)t} + (ih\Omega) \mathbf{u}_{p,h} e^{ih\Omega t}], \quad (11)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} [(\lambda + ih\Omega)^2 \mathbf{u}_{c,h} e^{(\lambda+ih\Omega)t} + (ih\Omega)^2 \mathbf{u}_{p,h} e^{ih\Omega t}]. \quad (12)$$

Insertion of these into Eq. (2) yields

$$\begin{aligned} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[(\lambda + ih\Omega)^2 \mathbf{M} + (\lambda + ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K}_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{1,n} e^{in\Omega t} \right] \mathbf{u}_{c,h} e^{(\lambda+ih\Omega)t} \right. \\ \left. + \left[(ih\Omega)^2 \mathbf{M} + (ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K}_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{1,n} e^{in\Omega t} \right] \mathbf{u}_{p,h} e^{ih\Omega t} \right\} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where we adopt the notation $\mathbf{K}_{1,-n} = \bar{\mathbf{K}}_{1,n}$. Of the two infinite sums, the one with harmonics $n\Omega$ relates to the internal parametric excitation, while the other with harmonics $h\Omega$ relates to the assumed frequency spectrum of the response \mathbf{u} in Eq. (9). Truncating these infinite sums over h and n by H and N , respectively, the double summations are written as

$$\begin{aligned} \sum_{h=-H}^H \sum_{n=-N}^N \mathbf{u}_{c,h} e^{[\lambda+i(h+n)\Omega]t} &= \sum_{h=-H}^H \sum_{n=h-H}^{h+H} \mathbf{u}_{c,h-n} e^{(\lambda+ih\Omega)t}, \quad n \neq 0, \\ \sum_{h=-H}^H \sum_{n=-N}^N \mathbf{u}_{p,h} e^{[i(h+n)\Omega]t} &= \sum_{h=-H}^H \sum_{n=h-H}^{h+H} \mathbf{u}_{p,h-n} e^{(ih\Omega)t}, \quad n \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

In addition, Eq. (13) decouples into separate equations for the $\mathbf{u}_{c,h}$ associated with the complementary solution and equations for the $\mathbf{u}_{p,h}$ associated with the particular solution. Thus, Eq. (13) yields

$$\begin{aligned} \sum_{h=-H}^H \left\{ \left[(\lambda + ih\Omega)^2 \mathbf{M} + (\lambda + ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K}_0 \right] \mathbf{u}_{c,h} \right. \\ \left. + \underbrace{\sum_{n=h-H}^{h+H} \mathbf{K}_{1,n} \mathbf{u}_{c,h-n}}_{\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{c,h-n,t})} \right\} e^{ih\Omega t} = \mathbf{0}, \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=-H}^H \left\{ \left[(ih\Omega)^2 \mathbf{M} + (ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K}_0 \right] \mathbf{u}_{p,h} \right. \\ \left. + \underbrace{\sum_{n=h-H}^{h+H} \mathbf{K}_{1,n} \mathbf{u}_{p,h-n}}_{\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{p,h-n,t})} \right\} e^{ih\Omega t} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

where the factor $e^{\lambda t}$ has been canceled from Eq. (15). In contrast to Eq. (5), which is based on the approximation of \mathbf{u} in Eq. (4) in terms of known $\omega_{0,k}$ and ϕ_k , no further approximation of $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}, t)$ is performed here beyond the assumed solution in Eq. (10). Hence this internal excitation is still located on the left-hand side as $\mathbf{u}_{c,h}$ and $\mathbf{u}_{p,h}$ are unknown and to be determined.

The $2H + 1$ quantities in the curly brackets of Eq. (15) associated with the harmonics h must all vanish for Eq. (15) to hold. The same is true for Eq. (16) where the term \mathbf{f}_{ext} must be included in the curly brackets for $h = 0$. With use of the vectors

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{c,-2} \\ \mathbf{u}_{c,-1} \\ \mathbf{u}_{c,0} \\ \mathbf{u}_{c,+1} \\ \mathbf{u}_{c,+2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{p,-2} \\ \mathbf{u}_{p,-1} \\ \mathbf{u}_{p,0} \\ \mathbf{u}_{p,+1} \\ \mathbf{u}_{p,+2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (17)$$

this process yields two decoupled systems of equations

$$[\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}] \mathbf{u}_c = \mathbf{0}, \quad (18)$$

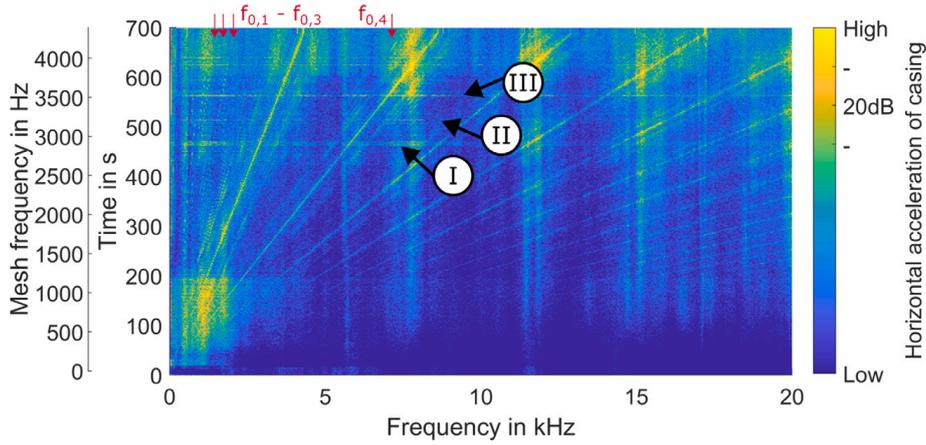


Fig. 7. Speed ramp; measurement of casing vibrations (non-optimized design).

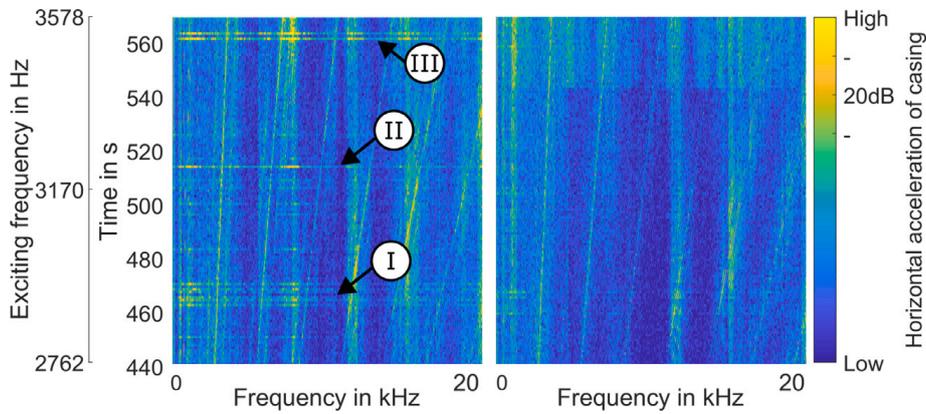


Fig. 8. Speed ramp; measurement of casing vibrations of non-optimized design (left) and optimized design (right).

between the stiffness of the planetary bearing and the stiffness of the gear meshing is in a transition range (i. e., between one and ten) that indicates whether a pure torsional model is sufficiently accurate (i. e., above ten) or whether a transverse–torsional model is recommended (i. e., below one). However, a detailed explanation is not within the scope of this paper and does not influence the upcoming investigations [35].

Next to the vertical time axis of Fig. 7, the actual excitation (or mesh) frequency Ω of the planetary gearbox is shown. Referring to this axis, three ranges between 2500 Hz and 3700 Hz stand out as horizontal lines exhibiting vibration across the entire audible frequency band. These indicate significant oscillations that were audibly heard during the experiments and interpreted as ‘gear whine’. From now on, the addressed lines will be denoted with I, II, and III and are highlighted accordingly at the corresponding mesh frequencies 2944 Hz, 3175 Hz and 3566 Hz.

Comparison of the optimized profile modifications with the deliberately non-optimized test case modifications, as shown in Fig. 8, confirms the effectiveness of the optimized profile modifications. Although a slight increase in oscillations starts at 550 s, the optimized gears have much quieter operation and one could not hear any uncomfortable sound. Therefore, the assumption is justified that the non-optimized gearing is strong enough to excite further oscillations and provoke ‘gear whine’ driven by parametric excitation that does not occur with optimized modifications.

Fig. 9 shows the dynamic run-up simulation for the time domain and frequency domain solutions. Damping is applied as Rayleigh damping with $\mathbf{D} = (300 \text{ s}^{-1})\mathbf{M} + (1.85 \times 10^{-6} \text{ s})\mathbf{K}$ to the components of the planetary gearbox. The relative rotational acceleration of the sun pinion (normalized with respect to its highest finite acceleration value during the complete run-up) serves as a representative value to investigate the dynamics. During the transient simulation run, the exciting gear mesh frequency is increased from zero to 105% of nominal operation in 700 s in accordance with the measurement conditions. This enables comparison against the frequency domain solution that delivers the amplitudes of the steady state conditions for each excitation frequency Ω based on the formulations in Eq. (19). We use $H = 5$ for simulations in the frequency domain. Thus, the parametric excitation in $\mathbf{K}_1(t)$ includes only the first order $n = \pm 1$ (because the second and higher orders are small according to Fig. 6), but the response is mapped up to the fifth order ($h = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$) referring to equation Eq. (20).

The simulations show that the particular solution denoted by the dashed red lines agrees closely with the numerical time integration and thus confirms the mathematical implementation in the frequency domain. Only the mentioned locations I, II, and III, where the amplitudes increase to infinity in the time domain, because nonlinearity from tooth contact loss is not modeled in

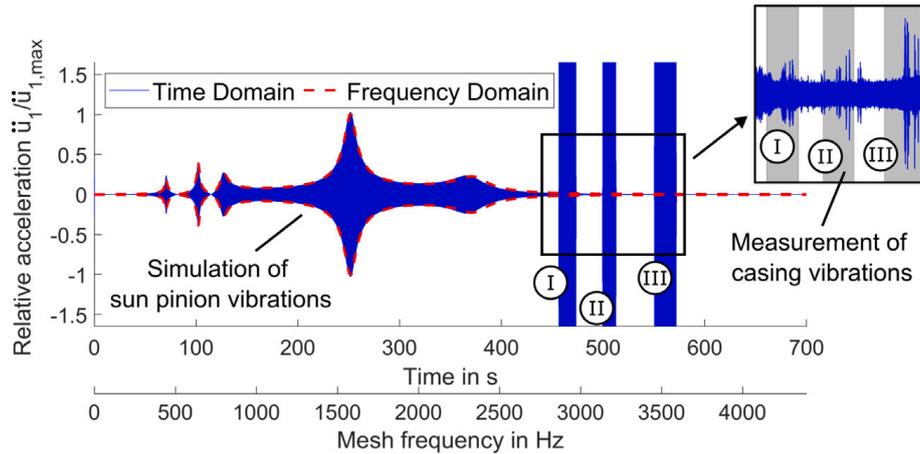


Fig. 9. Speed ramp (non-optimized); simulated signal of the sun pinion vibrations in frequency and time domain; measurement of casing vibrations at locations I, II, and III. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

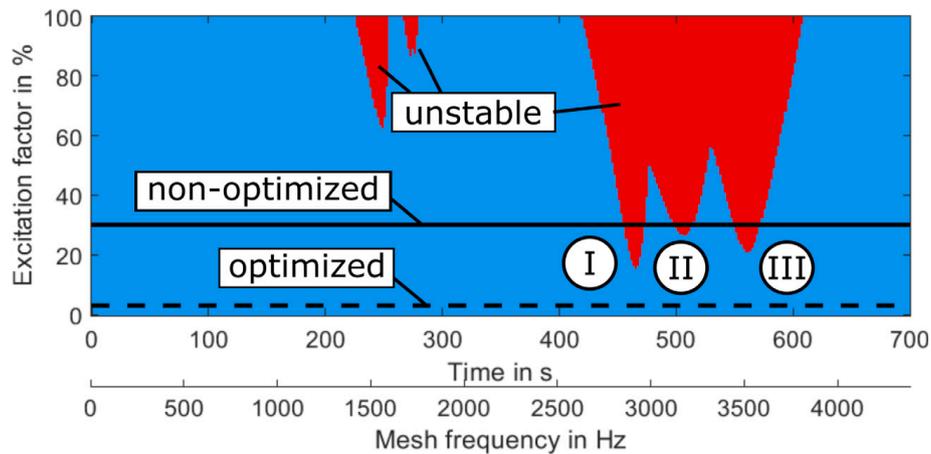


Fig. 10. Stability behavior of torsional vibration model for a slow speed ramp with different values of the excitation factor of the time-varying gear mesh stiffness between the sun pinion and the planets. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

the simulation and thus the system does not settle down as in the measurement, are not captured by the particular solution in the frequency domain. This is expected because the instability arises in the complementary solution portion in accordance with Eqs. (18), (21), and (22). As discussed previously, this complementary solution component is neglected when calculating the response in Fig. 9; it is only used to predict unstable operating conditions.

To compare the frequency and time domain predictions of instability, one must examine the eigenvalues from Eq. (18). A further simulation is conducted where Eq. (18) is solved for each excitation frequency Ω and additionally for different values of the parameter $\epsilon_{n=\pm 1}$ in Eq. (1). Only the harmonic factors of the tooth meshings between the sun pinion and each planet gear are adjusted. The parameters for the meshes between the planet gears and ring gear remain unchanged.

From these results all eigenvalue extractions are drawn together in a stability map in Fig. 10. In accordance with Eq. (21), a solution having at least one unstable eigenvalue λ_s (that is, a positive value of α_s) is colored red/dark and otherwise blue/light. Furthermore, a straight horizontal line at $\epsilon_{n=\pm 1} = 30\%$ marks the excitation amplitude of the non-optimized gear design of the present planetary gearbox. The optimized gear design at $\epsilon_{n=\pm 1} = 3\%$ is also highlighted.

After all, the three remarkable vibration phenomena in the experiment and in the simulation fit together closely in terms of mesh frequency. By comparison to Fig. 7 or Fig. 8 and also to Fig. 9, the stability map in Fig. 10 clearly identifies the three oscillation phenomena I, II and III as parametric instabilities. Therefore, these measurements, and the undesirable noise what is audible when conducting the experiments, are clearly understood to be ‘gear whine’ as a result of parametric instability.

Moreover, the effectiveness of the optimized profile modification is confirmed again in the simulation, as it was earlier in the experiments (Fig. 8). An optimized excitation factor of $\epsilon_{n=\pm 1} = 3\%$ in accordance with Fig. 6 and Eq. (1) is not sufficient to trigger the parametric instabilities observed in the non-optimized gears — neither in theory (Fig. 10) nor in practice (Fig. 8). Therefore and with respect to linear theory, the optimized gear design shows a similar course of the relative (not absolute) acceleration of the sun pinion as the non-optimized variant in Fig. 9, only without instabilities. As a result, particular solution and numerical time integration match perfectly in Fig. 11 for the optimized gear unit.

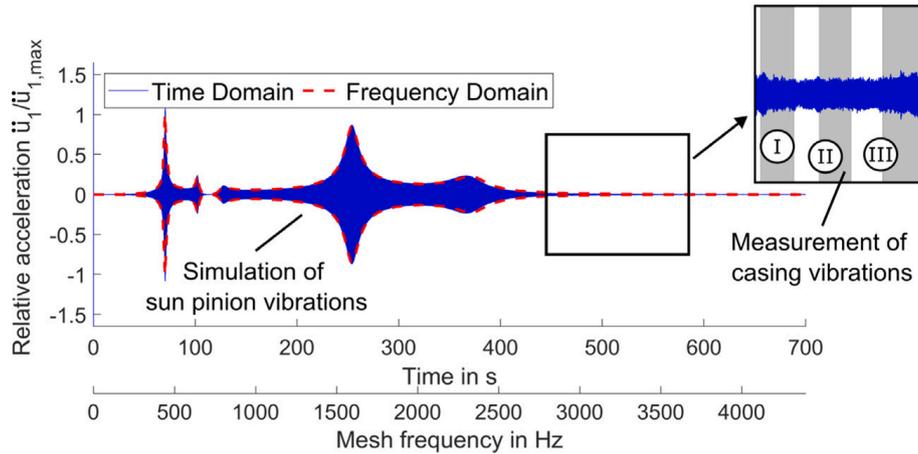


Fig. 11. Speed ramp (optimized); simulated signal of the sun pinion vibrations in frequency and time domain; measurement of casing vibrations at locations I, II, and III.

Table 2

Unstable eigenvalues $\lambda_s = \alpha_s \pm i\beta_s$ consist of natural frequency (1587 Hz) and exciting mesh frequency (3175 Hz).

No.	Real part α_s	Imaginary part (Unstable frequency) $\frac{1}{2\pi}(\beta_s)$	Natural frequency $\frac{1}{2\pi}(\beta_s - h\Omega)$	Order (h)
1	39.1	1587	1587	0
2	39.1	4762	1587	1
3	39.1	7937	1587	2
4	40.6	11 112	1587	3
5	40.8	14 283	1587	4

We consider case II of the non-optimized design corresponding to the mesh frequency $\Omega = 3175$ Hz in more detail. For this case and considering only the non-optimized gears with $\epsilon_{n=\pm 1} = 30\%$, Eq. (18) yields five unstable eigenvalues λ_s having a positive real part α_s . Table 2 gives the corresponding imaginary parts β_s of these five unstable eigenvalues.

Motivated by Eq. (6) and Ref. [48,56], it is assumed that there is physical content located in the unstable frequencies β_s and therefore the unstable frequencies β_s are interpreted as sums and differences of the excitation $h\Omega$ and natural frequencies $\omega_{0,k}$. In this context, it is seen that the parametric instability II consists of this gear mesh excitation frequency Ω and its multiples h in combination with the derived natural frequency $\frac{1}{2\pi}(\beta_s - h\Omega)$ at 1587 Hz, which almost coincides with the undamped eigenfrequency $f_{0,2}$ of 1594 Hz in Table 1. The corresponding mode shape ϕ_2 as well as the kinetic and potential energy levels E_2 are concentrated inside the planetary gearbox such that the mode is susceptible to mesh excitation. Hence the dynamic behavior also makes sense from a physical point of view. The same physical meaning applies in a similar manner to the instability regions I and III. Further research seems appropriate to elaborate correlations that provide more insight into the dynamic behavior of planetary gears and their design parameters.

6. Conclusion

The parametric instability characteristics of this representative planetary gearbox are identified by two simulation approaches that match the measurement results. Consequently, the appearance of ‘gear whine’ driven by parametric instability in a planetary gearbox is experimentally confirmed and mathematically explained. The experimental measurement of this high-speed parametric instability phenomenon in a planetary gear fills a gap in literature.

The two solutions in the frequency and time domains confirm the ability of a purely rotational degree of freedom model to capture the parametric instabilities and match the experiments. The time domain solution is a simple and reliable approach to detect all occurring oscillations, that is, the stable and hence finite vibratory amplitudes that occur at resonance as well as the unbounded oscillations (for a linear model without tooth contact loss) from parametric instability. The run-up needs to be simulated appropriately slowly to allow enough time for the amplitudes to settle to almost stationary. Furthermore, the time step must be chosen sufficiently small to be able to map the high excitation frequencies of the gearing. This leads to a high number of integration steps that can increase computation time.

In contrast, the complementary component of the frequency domain solution delivers a reliable statement regarding the occurrence, or not, of parametric instability for this linear torsional vibration model. Further, an unstable eigenvalue also provides information regarding the corresponding natural frequencies, mode shapes and excitation frequency that cause this instability. In the time domain, this would require a subsequent spectral analysis. The particular solution component in the frequency domain approach gives a system of algebraic equations that supply the vibration amplitudes in stable regions. The drawback of the applied

approach in the frequency domain is the prerequisite of linear modeling. Nevertheless, the results demonstrate that the methodology is suitable for good gearbox design and hence for modern power transmission tasks.

Finally, the influence and effectiveness of appropriate profile modifications of the gears are investigated in theory and practice. The study demonstrates that an optimized profile modification reduces noise generation because the excitation level is reduced sufficiently to stabilize the dynamic system.

CRedit authorship contribution statement

Andreas Beinstingel: Conceptualization, Methodology, Software, Validation, Formal analysis, Investigation, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Robert G. Parker:** Formal analysis, Writing – review & editing. **Steffen Marburg:** Writing – review & editing, Supervision.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgment

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

- [1] M. Heider, J. Bihl, M. Otto, M. Hoehn, K. Stahl, Vibration excitation of a planetary gear stage, in: VDI - The Association of German Engineers: International Conference on Gears (Garching Near Munich, Germany), Vol. 2, VDI, 2013, pp. 1091–1100.
- [2] Y. Zhang, Q. Wang, H. Ma, J. Huang, C. Zhao, Dynamic analysis of three-dimensional helical geared rotor system with geometric eccentricity, *J. Mech. Sci. Technol.* 27 (2013) 3231–3242, <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-013-0846-8>.
- [3] Y. Guo, T. Eritenel, T.M. Ericson, R.G. Parker, Vibro-acoustic propagation of gear dynamics in a gear-bearing-housing system, *J. Sound Vib.* 333 (22) (2014) 5762–5785, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2014.05.055>.
- [4] J. Han, Y. Liu, S. Yu, S. Zhao, H. Ma, Acoustic-vibration analysis of the gear-bearing-housing coupled system, *Appl. Acoust.* 178 (108024) (2021) 13, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108024>.
- [5] F. Hoppe, B. Pinnekamp, Challenge and success based on optimized gear geometries, in: American Gear Manufacturers Association: Fall Technical Meeting (Milwaukee, Wisconsin, USA), Vol. 2004FTM, American Gear Manufacturers Association, 2004, p. 14, (1).
- [6] A. Tatar, C.W. Schwingshackl, M.I. Friswell, Dynamic behaviour of three-dimensional planetary geared rotor systems, *Mech. Mach. Theory* 134 (2019) 39–56, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.12.023>.
- [7] C. Cooley, R. Parker, A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibrations research, *Appl. Mech. Rev.* 66 (2014) 040804, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4027812>.
- [8] M. Benton, A. Seireg, Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems, *J. Mech. Des.* 100 (1) (1978) 26–32, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3453888>.
- [9] M. Benton, A. Seireg, Factors influencing instability and resonances in geared systems, *J. Mech. Des.* 103 (2) (1981) 372–378, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3254917>.
- [10] A. Kahraman, R. Singh, Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system, *J. Sound Vib.* 146 (1) (1991) 135–156, [http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90527-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X(91)90527-Q).
- [11] A. Kahraman, G. Blankenship, Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters, *J. Appl. Mech.* 64 (1) (1997) 217–226, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2787276>.
- [12] G. Blankenship, A. Kahraman, Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity, *J. Sound Vib.* 185 (5) (1995) 743–765, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1995.0416>.
- [13] G. Tordion, R. Gauvin, Dynamic stability of a two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffnesses, *J. Eng. Ind.* 99 (3) (1977) 785–791, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3439314>.
- [14] M. Benton, A. Seireg, Normal mode uncoupling of systems with time varying stiffness, *J. Mech. Des.* 102 (2) (1980) 379–383, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3254754>.
- [15] J. Lin, R. Parker, Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear, *J. Vib. Acoust.* 124 (1) (2002) 68–76, <http://dx.doi.org/10.1115/1.1424889>.
- [16] R. August, R. Kasuba, Torsional vibrations and dynamic loads in a basic planetary gear system, *J. Vib. Acoust. Trans. ASME* 108 (3) (1986) 348–353, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3269349>.
- [17] P. Velex, L. Flamand, Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations, *Trans. ASME, J. Mech. Des.* 118 (1) (1996) 7–14, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2826860>.
- [18] J. Lin, R. Parker, Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation, *J. Sound Vib.* 249 (1) (2002) 129–145, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.2001.3848>.
- [19] J. Lin, R. Parker, Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration, *J. Vib. Acoust.* 121 (1999) 316–321, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2893982>.
- [20] R.G. Parker, A physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration, *J. Sound Vib.* 236 (4) (2000) 561–573, <http://dx.doi.org/10.1006/JSVI.1999.2859>.
- [21] C. Wang, B. Dong, R.G. Parker, Impact of planet mesh phasing on the vibration of three-dimensional planetary/epicyclic gears, *Mech. Mach. Theory* 164 (2021) 104422, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104422>.
- [22] V.K. Ambarisha, R.G. Parker, Suppression of planet mode response in planetary gear dynamics through mesh phasing, *J. Vib. Acoust.* 128 (2) (2005) 133–142, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2171712>.
- [23] J. Lin, R.G. Parker, Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets, *J. Sound Vib.* 233 (5) (2000) 921–928, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2581>.
- [24] R. Parker, X. Wu, Parametric instability of planetary gears having elastic continuum ring gears, *J. Vib. Acoust.* 134 (2012) 041011, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4005836>.

- [25] C. Wang, R.G. Parker, Modal properties and parametrically excited vibrations of spinning epicyclic/planetary gears with a deformable ring, *J. Sound Vib.* 494 (2021) 115828, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115828>.
- [26] X. Qiu, Q. Han, F. Chu, Parametric instability in planetary gears with frequency-modulated time-varying mesh stiffness, in: Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 26th Conference on Mechanical Vibration and Noise (Buffalo, New York, USA), in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, vol. 8 (2014) <http://dx.doi.org/10.1115/DETC2014-34143>.
- [27] X. Qiu, Q. Han, F. Chu, Investigation of parametric instability of the planetary gear under speed fluctuations, *Shock Vib.* 2017 (2017) 6851903, <http://dx.doi.org/10.1155/2017/6851903>, (14 pages).
- [28] V.K. Ambarisha, R.G. Parker, Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *J. Sound Vib.* 302 (3) (2007) 577–595, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.028>.
- [29] V. Abusleiman, P. Velex, A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets, *Mech. Mach. Theory* 41 (6) (2006) 725–748, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2005.09.005>.
- [30] V. Abusleiman, P. Velex, S. Becquerelle, Modeling of spur and helical gear planetary drives with flexible ring gears and planet carriers, *J. Mech. Des.* 129 (1) (2007) 95–106, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2359468>.
- [31] J. Neufond, E. Denimal, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, A. Carbonelli, Whining noise computation of a planetary gear set induced by the multi-mesh excitations, *Proc. Inst. Mech. Eng. C* 233 (21–22) (2019) 7236–7245, <http://dx.doi.org/10.1177/0954406219853313>.
- [32] J. Perret-Liaudet, An original method for computing the response of a parametrically excited forced system, *J. Sound Vib.* 196 (2) (1996) 165–177, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1996.0474>.
- [33] T. Sun, H. Hu, Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances, *Mech. Mach. Theory* 38 (12) (2003) 1371–1390, [http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(03\)00093-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00093-4).
- [34] C.-J. Bahk, R. Parker, Analytical solution for the nonlinear dynamics of planetary gears, *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 6 (2011) 021007, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4002392>.
- [35] A. Kahraman, Natural modes of planetary gear trains, *J. Sound Vib.* 173 (1) (1994) 125–130, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1994.1222>.
- [36] A. Kahraman, Planetary gear train dynamics, *J. Mech. Des.* 116 (3) (1994) 713–720, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2919441>.
- [37] M. Inalpolat, A. Kahraman, A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets, *J. Sound Vib.* 323 (3–5) (2009) 677–696, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2009.01.004>.
- [38] A. Saada, P. Velex, An extended model for the analysis of the dynamic behavior of planetary trains, *J. Mech. Des.* 117 (2A) (1995) 241–247, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2826129>.
- [39] M. Chapron, P. Velex, J. Bruyère, S. Becquerelle, Optimization of profile modifications with regard to dynamic tooth loads in single and double-helical planetary gears with flexible ring-gears, *Trans. ASME, J. Mech. Des.* 138 (2) (2016) 023301, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4031939>, (11 pages).
- [40] C. Zhang, J. Wei, F. Wang, S. Hou, A. Zhang, T.C. Lim, Dynamic model and load sharing performance of planetary gear system with journal bearing, *Mech. Mach. Theory* 151 (2020) 103898, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103898>.
- [41] M. Botman, Vibration measurements on planetary gears of aircraft turbine engines, *J. Aircr.* 17 (5) (1980) 351–357, <http://dx.doi.org/10.2514/3.57912>.
- [42] D. Ploeger, P. Zech, S. Rinderknecht, Experimental identification of high-frequency gear mesh vibrations in a planetary gearbox, in: Proceedings of ISMA2016 International Conference on Noise and Vibration Engineering (Leuven, Belgium), Vol. ISMA2016, 2016, pp. 911–924.
- [43] F. Concli, L. Cortese, R. Vidoni, F. Nalli, G. Carabin, A mixed fem and lumped-parameter dynamic model for evaluating the modal properties of planetary gearboxes, *J. Mech. Sci. Technol.* 32 (7) (2018) 3047–3056, <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-018-0607-9>.
- [44] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *J. Eng. Mech. Div.* 85 (3) (1959) 67–94, <http://dx.doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>.
- [45] M. Krack, J. Gross, *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*, first ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2019, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.
- [46] A. Beinstingel, M. Keller, M. Heider, B. Pinnekamp, S. Marburg, A hybrid analytical-numerical method based on isogeometric analysis for determination of time varying gear mesh stiffness, *Mech. Mach. Theory* 160 (2021) 104291, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104291>.
- [47] R.G. Parker, J. Lin, Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears, *J. Mech. Des.* 126 (2) (2004) 365–370, <http://dx.doi.org/10.1115/1.1667892>.
- [48] C.S. Hsu, On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom, *J. Appl. Mech.* 30 (3) (1963) 367–372, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3636563>.
- [49] Calculation of load capacity of spur and helical gears - part I: basic principles, introduction and general influence factors, 2019.
- [50] C. Weber, K. Banaschek, *The Deformation of Loaded Gears and the Effect on Their Load-Carrying Capacity*, Department of Scientific and Industrial Research: Sponsored Research, 1953, pp. 1–88, (11).
- [51] T.F. Conry, A. Seireg, A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems, *J. Eng. Ind.* 95 (4) (1973) 1115–1122, <http://dx.doi.org/10.1115/1.3438259>.
- [52] L. Chang, G. Liu, L. Wu, A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears, *Mech. Mach. Theory* 87 (2015) 93–114, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.11.019>.
- [53] Z. Chen, Y. Shao, Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack, *Mech. Mach. Theory* 62 (2013) 63–74, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.012>.
- [54] H. Ma, X. Pang, R. Feng, B. Wen, Evaluation of optimum profile modification curves of profile shifted spur gears based on vibration responses, *Mech. Syst. Signal Process.* 70–71 (2016) 1131–1149, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.09.019>.
- [55] G.W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Math.* 8 (1886) 1–36, <http://dx.doi.org/10.1007/BF02417081>.
- [56] R. Gasch, K. Knothe, R. Liebich, *Structural Dynamics - Discrete Systems and Continua*, second ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2012.
- [57] A. Raghohama, S. Narayanan, Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method, *J. Sound Vib.* 226 (3) (1999) 469–492, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2264>.
- [58] K. Weisheit, S. Marburg, Calculation of the response of a periodically excited beam with frictional contact using harmonic balance method, *Procedia IUTAM* 19 (2016) 282–288, <http://dx.doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.035>.
- [59] L. Utzig, A. Fuchs, K. Weisheit, S. Marburg, Squeak noise prediction of a door trim panel using harmonic balance method, *SAE Int. J. Adv. Curr. Pract. Mobil.* 3 (2) (2020) 1108–1118, <http://dx.doi.org/10.4271/2020-01-1577>.

Veröffentlichung [4]

- [4] A. Beinstingel, S. Schabert, M. Heider, B. Pinnekamp, und S. Marburg. Computational prediction of structure-borne noise in a two-stage double-helical gearbox using harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 189:110112, 2023, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110112>.

Anmerkung:

Zum Zeitpunkt der Einreichung der hier vorliegenden Dissertation befand sich die eingebundene Veröffentlichung [4] noch im *Peer-Review-Prozess*. Entsprechend ist die beim Verlag eingereichte Version des Artikels - der *Preprint* - beigelegt. Im Einklang mit den Richtlinien des Verlags wird dem Wunsch nachgekommen, die offizielle Veröffentlichung zu referenzieren.

Computational prediction of structure-borne noise in a two-stage double-helical gearbox using harmonic balance method

Andreas Beinstingel^{a,b,*}, Sebastian Schabert^b, Michael Heider^b, Burkhard Pinnekamp^b, Steffen Marburg^a

^a*Technical University of Munich, Chair of Vibroacoustics of Vehicles and Machines,
85748 Garching, Germany*

^b*RENK GmbH, Goegginger Str. 73, 86159 Augsburg, Germany*

Abstract

The acoustics of gearboxes contribute to the success of a gear design. Particularly in special machine engineering, ensuring quiet operation is a challenging task because the production and testing of a prototype is usually not a feasible option. A suitable calculation methodology is thus crucial for finding the optimal design. Unfortunately, an increase in accuracy most often results in high simulation times and thus complicates a continuous design support. A promising approach regarding computational efficiency for nonlinear periodic systems is the harmonic balance method (HBM). However, its application to gearboxes is still quite rare or even non-existent in terms of this acoustic motivation. Convergence behavior and memory requirements are ambitious aspects for the HBM. Consequently, tracking the vibration propagation from the gear mesh to the housing in one simulation run requires special treatment. This article examines appropriate implementation recommendations and further investigates the applicability of the HBM for gear acoustics from a practical point of view. Experimental data serves as the basis for validation purposes.

Keywords: Gear mesh excitation, Structure-borne noise, Total system analysis, Harmonic balance method, Experimental validation

*Corresponding author

Email address: andreas.beinstingel@tum.de (Andreas Beinstingel)

1. Introduction

With the progress of technology, the requirements for gear units are increasingly becoming more demanding. This also applies to the acoustic behavior in various operation modes, where the main noise originates from the gear mesh [1]. This excitation is transmitted subsequently as structure-borne sound through the shafts and bearings to the housing, which finally radiates airborne noise and also forwards the vibrations into the supporting foundation, see Fig. 1. Consequently, a pleasant and smooth-running gear system indicates quality and also enhances the comfort of the final product with respect to its surrounding environment. Optimizing the dynamic performance is therefore an important aspect for modern transmission designs.

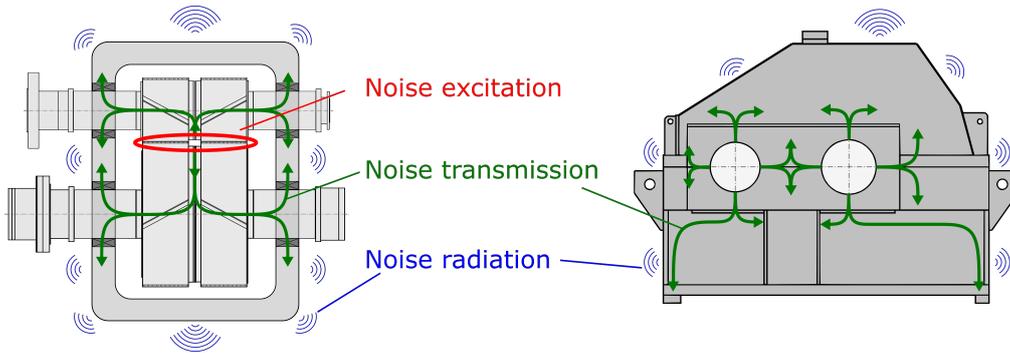


Figure 1: Noise characteristics of a gear unit: mating gear teeth enforce vibrations and produce noise during the power transmission process.

An efficient and reliable simulation strategy highly supports the development of silent gearboxes from the early design stages and in addition avoids costly prototyping. But the stringent requirements also challenge the applicability of such virtual methodologies, since computation time may become unacceptably high when increasing the predictive power due to a rise in the model accuracy to the desired specification (e.g., the change from linear assumptions to nonlinear definitions).

The harmonic balance method (HBM) [2, 3] speeds up simulation time to determine steady-state equilibrium in case of nonlinear periodic systems. With respect to numerical precision, the HBM provides identical results compared to popular and well-established approaches of numerical forward integration

(NFI) [4, 5]. This is in part due to the fact that the NFI requires the calculation of the transient phase in advance before reaching the desired steady-state behavior in accordance with Fig. 2. In contrast, the HBM directly determines this final operating condition. As steady-state vibrations are usually of major interest in gear acoustics, the HBM provides a suitable simulation alternative for this purpose.

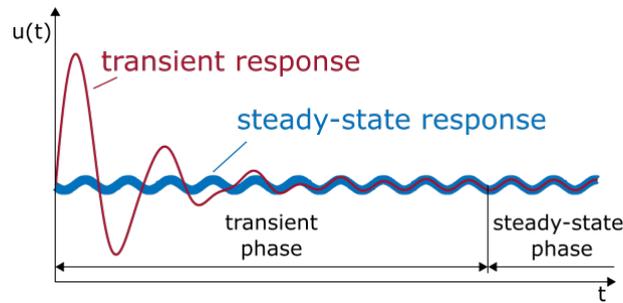


Figure 2: Dynamic response $u(t)$ of a mechanical system along time t , which schematically illustrates the transition from the transient phase to the steady-state phase.

Referring to [3], the HBM is already well established for electrical circuits [6], in fluid dynamics [7], as well as in mechanical engineering disciplines [8–10]. Especially in the field of rotor dynamics, the HBM is used by a large community with respect to nonlinear interactions between rotor and stator [11–13]. It is just as popular for gas and steam turbines [14] and magnetic levitation trains [15]. Recent application of the HBM to squeak and rattle prediction in a car’s interior is shown in [16, 17]. In gear dynamics, however, the HBM does not appear to be applied quite as much, but is still used to a certain extent. For example, basic nonlinear dynamics of a spur gear are examined with the HBM in [18]. An idler gear system is taken into account in [19] and the nonlinear dynamics of a two-stage gear train are of certain interest in [20]. Both studies are conducted with the HBM. The same applies for [21], where the nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances are focused and analyzed with the HBM. The implementation of the HBM for a lumped parameter model of a compound planetary gearbox is presented in [22]. The findings in [23], where a gear pair is subjected to combined internal and external periodic excitation, are also established by the HBM. Finally, a nonlinear frequency response analysis in terms of the HBM has been applied more recently to a single-stage double-helical gear pair in [24], showing superharmonics.

Overall, however, much more research has been conducted on fundamental gear dynamics that has not used the HBM. Many of these works even date back over decades [25–27] up to more recent publications [28–31]. Although the research on gear dynamics is still being done [32–35], there has not been a noticeable increase in the application of the HBM.

In addition, all these investigations basically have in common that the non-linear effects themselves are in the spotlight, but focus less on the impact of these forced vibrations on the adjacent components. In particular, the vibro-acoustic propagation is not tracked in more detail with the HBM. Indeed, the literature is in general quite sparse with respect to computational prediction of structure-borne noise in gearboxes [36–39]. A detailed survey is conducted in [40]. In that survey, the dynamic behavior of a spur gear pair within its shafts, bearings, and housing is studied in theory and practice. A similar analysis is available in [41]. From a theoretical point of view, both approaches are split into two individual simulation steps as shown in Fig. 3. First, a coupled dynamic model of the gear-rotor-bearing system is analyzed in the time domain to determine the dynamic excitation forces at the bearings. Then, an independent harmonic analysis of the housing, which is subjected to those previously derived dynamic bearing forces, is examined using the finite element method (FEM) in combination with the boundary element method (BEM) to quantify structure-borne sound as well as airborne noise.

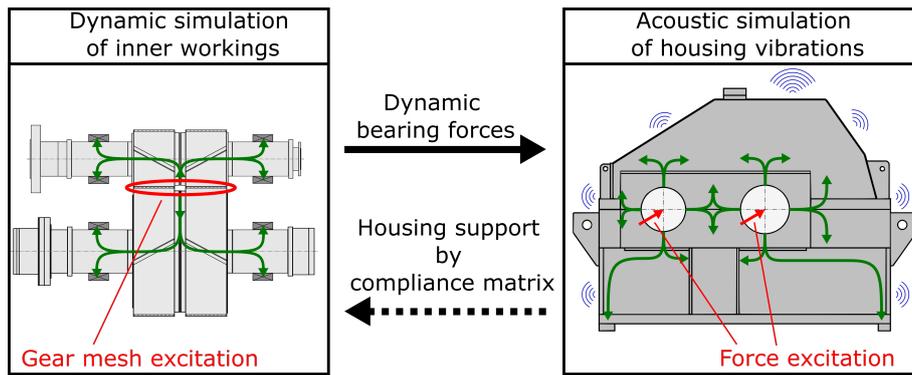


Figure 3: Flowchart of existing decoupled simulation approach to determine vibro-acoustic propagation in a gearbox: First, dynamic calculation of dynamic bearing forces due to gear mesh excitation. Second, acoustic computation of housing vibration (excited by dynamic bearing forces) to determine structure-borne sound as well as airborne noise.

This split is elegant, given that the initial computation of the inner workings (i. e., the gear-shaft-bearing system) usually takes place in the time domain and thus simply allows for the consideration of nonlinearities in terms of standard NFI, e.g., interaction of mating gear teeth with respect to dynamic rotor-bearing deflections. Excluding the housing saves degrees of freedom and thus enables calculation within an acceptable simulation time. The subsequent analysis of the housing in the frequency domain is evident because the dynamic bearing forces are finally approximated as linear periodic excitations. However, the transition from the first model to the second one is a complicated but crucial step because the boundary conditions at the interface locations (the connection between bearing and housing) must be transferred in a physically meaningful way. In [40] and [41], for example, the housing elasticity is approximated by a static linear compliance matrix approach for the preceding computation run with regard to the inner workings. As a result, this connection is just a weak coupling because the dynamic cross influences act only in one direction. Additional information may consequently be suppressed. In addition, a linear behavior of the housing is mandatory for such a simulation strategy. To overcome these issues, a nonlinear cross-coupled computation of the dynamic gear-rotor-bearing-housing system is required. However, there seems to be a gap in the literature when it comes to using such coupled simulations with respect to the vibro-acoustic propagation of structure-borne noise in a gearbox, especially because applying the HBM to gearboxes is quite new in this acoustic context.

Based on this motivation, the applicability of the HBM to gear acoustics is investigated in this article. Based on the authors' knowledge, this is the first time this is done on this level of complexity. One challenge is managing the sensitive convergence performance to achieve any results at all. Furthermore, the memory requirements increase drastically with the number of degrees of freedom and hence limit the use of the HBM to large models as they usually arise in industrial applications. On top of this, including more than one gear stage once again results in a negative impact on computation time. As a result, a coupled nonlinear multi-mesh gear-rotor-bearing-housing analysis in three-dimensional space requires special treatment. Accordingly, appropriate implementation recommendations from the solution algorithm for gear acoustics are established and a novel way of modeling is presented for multi-mesh designs. An experimental measurement serves as the basis for validation purposes. Here, the gearbox of interest consists of a two-stage

double-helical gearing with rotating shafts supported in the housing by slide bearings. Both the power transmission process of the mating gear teeth and the fluid-structure-interaction (FSI) at the bearing locations are initially considered as nonlinear contacts. The component dimensions of this gear unit are comparatively large (e.g., the total center distance is about 1.6 m) as the target group of products comprises power plant and marine propulsion systems in special machine engineering applications. However, an efficient estimation of the resulting sound radiation is possible with the derived simulation strategy by determining the equivalent radiated power (ERP) [42, 43] at the housing surface.

The article is structured as follows: First, the underlying numerical representation of the gears, shafts, bearings, and housing is explained in the form of a model setup. Then, the mathematical solution strategy of the HBM is revisited to highlight implementation recommendations from the computational algorithm to ensure an efficient execution. Following that, preliminary studies are conducted on a simple spur gear to verify the HBM numerically against NFI by also exposing further modeling insights. The treatment of multistage gearboxes is investigated subsequently with respect to a two-stage double-helical gear unit. In a following section, the developed methodology is finally applied to this two-stage double-helical gearing. The simulation results are quantitatively compared to the experimental measurement. The oscillating accelerations at the housing surface are used here as reference. The conclusion provides a discussion of the presented findings as well as an outlook on the promising opportunities of the HBM in gear acoustics.

2. Modeling of shafts, bearings, housing and gear meshing

The equation of motion for a nonlinear mechanical system reads as follows

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{f}_{ext}. \quad (1)$$

Here, the matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} , and \mathbf{K} represent the mass, damping, and stiffness terms, respectively. The associated definitions of \mathbf{u} and its corresponding time derivatives contain the degrees of freedom in three-dimensional space,

i. e. the displacements \mathbf{u} , the velocities $\dot{\mathbf{u}}$, and the accelerations $\ddot{\mathbf{u}}$. The vector \mathbf{f}_{ext} holds external loads and $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$ is a compilation of internal forces with respect to nonlinear relations. In the present case and thus in all upcoming simulations, the gearbox is externally subjected to only constant and linear loads such as gravity forces and applied torques which match a specific steady-state operating condition inside the drive train. As a result, the entire excitation of the dynamic system originates internally only from the mating gear teeth due to its continuously changing contact conditions.

The matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} , and \mathbf{K} are assigned for the shafts on the basis of rotating beam elements [44–46]. The corresponding shear coefficient in terms of the underlying Timoshenko beam theory is derived in accordance with [47]. A suitable application to gears within a detailed explanation of those beam elements is also demonstrated in [48].

The complex structure of common housing designs promotes the employment of the FEM. Due to the high frequency level of the periodic excitation at the mating gear teeth, an appropriate FE mesh quality is necessary to substantially reproduce the vibro-acoustic propagation of structure-borne noise in a simulation. With respect to [49], a structured quad-dominant meshing with elements of a second-order shape function is preferred throughout this acoustic motivation. Furthermore, the number of elements per bending structural wave is properly selected to be about 20. The fundamentals of bending Kirchhoff plates [50] are the basis for approximating the desired mesh size for the housing in this context [51]. Finally, this FEM meshing guideline results in a very high number of degrees of freedom - only for the casing vibrations. Therefore, using a model order reduction (MOR) technique is advisable in order to reduce the size of the corresponding matrices.

In most commercial FEM software packages, a MOR feature, namely a component mode synthesis (CMS) [52, 53], is implemented. To ensure practicable application in an industrial context, this methodology is employed in this study. The reduction strategy is a combination of static condensation [54] and modal truncation [5]. Here, the idea is to define "master nodes" whose physical presence is necessary for the further calculation process. This includes interface nodes (e.g., connection points of the housing to the slide bearings), nonlinear locations (e.g., material behavior of attached rubber elements), and nodes for post-processing purposes (e.g., sensor positions for

simulation evaluations). Accordingly, the initial submatrices related to the casing, sorted by master ($\mathbf{u}_{c,M}$) and slave ($\mathbf{u}_{c,S}$) nodes, appear for the mass \mathbf{M}_c and the stiffness \mathbf{K}_c as follows

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{c,MM} & \mathbf{M}_{c,MS} \\ \mathbf{M}_{c,SM} & \mathbf{M}_{c,SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,MM} & \mathbf{K}_{c,MS} \\ \mathbf{K}_{c,SM} & \mathbf{K}_{c,SS} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

While the index c symbolizes the association to the casing, the labels M and S denote the allocation to the groups of master and slave nodes, respectively. However, all remaining slave nodes get compressed mathematically to a dynamic modal space $\mathbf{u}_{c,Q}$ of reduced size ($Q \leq S$) but without a clear physical meaning (at least as long as a reverse transformation does not take place). The related mapping matrix \mathbf{T}_{cb} is constructed as below

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{c,M} \\ \mathbf{u}_{c,S} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{MM} & \mathbf{0}_{MQ} \\ \mathbf{\Gamma}_{SM} & \mathbf{\Psi}_{SQ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{cb}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{c,M} \\ \mathbf{u}_{c,Q} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

While \mathbf{I}_{MM} is an identity matrix, the relations in $\mathbf{\Gamma}_{SM}$ are determined by

$$\mathbf{\Gamma}_{SM} = -\mathbf{K}_{c,SS}^{-1} \mathbf{K}_{c,SM}. \quad (4)$$

The modal matrix $\mathbf{\Psi}_{SQ}$ holds a truncated number Q of eigenvectors with respect to the generalized eigenvalue problem in Eq. (5) of the slave system S. Here, the number of involved eigenvectors depends on the desired frequency range with respect to its eigenvalues λ_Q .

$$\mathbf{K}_{c,SS} \mathbf{\Psi}_{SQ} = \lambda_Q \mathbf{M}_{c,SS} \mathbf{\Psi}_{SQ} \quad (5)$$

In the case of mass-normalized eigenvectors $\mathbf{\Psi}_{SQ}$, the structure of the reduced submatrices finally corresponds to

$$\mathbf{M}_c^{\text{red}} = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{M}_c \mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{c,MM}^{\text{red}} & \mathbf{M}_{c,MQ}^{\text{red}} \\ \mathbf{M}_{c,QM}^{\text{red}} & \mathbf{I}_{QQ} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_c^{\text{red}} = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,MM}^{\text{red}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{QQ} \lambda_Q \end{bmatrix}.$$

With a rise of the highest frequency of interest ($Q \uparrow$) as well as an increase in the number of master nodes ($M \uparrow$), the reduced mass matrix $\mathbf{M}_c^{\text{red}}$ becomes

more and more dense as the kinematic coupling ($\mathbf{M}_{c,MQ}^{\text{red}}$) between master nodes and modal space gains in complexity, see Fig. 4.

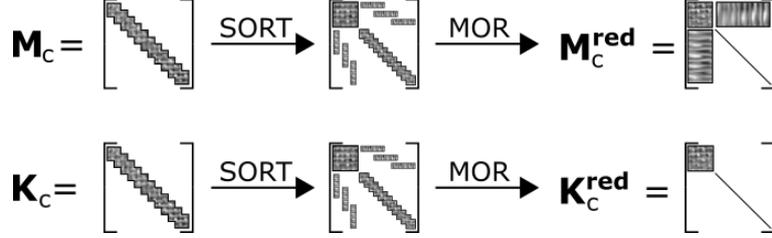


Figure 4: Sparsity of reduced mass matrix and reduced stiffness matrix due to a model order reduction (MOR) in terms of a component mode synthesis (CMS).

Unfortunately, both criteria rapidly approach extremely high values in an acoustic simulation. As a result, the memory requirements become ambitious even before the memory-intensive HBM is applied. The implementation of the solution algorithm with respect to sparse matrices [55] is of minor significance as the sparsity reduces in total and hence the compression rate decreases. A suitable treatment to deal with this situation in terms of the HBM is proposed in the next section.

However, a single-stage gearbox in its simplest design consists of two rotating shafts mounted into a housing. So, the corresponding nature of the matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} , and \mathbf{K} in Eq. (1) combines with the selected definitions to a block-diagonal format in accordance with

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & & \\ & \mathbf{M}_w & \\ & & \mathbf{M}_c^{\text{red}} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & & \\ & \mathbf{D}_w & \\ & & \mathbf{D}_c^{\text{red}} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & & \\ & -\frac{z_p}{z_w} \mathbf{G}_w & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & & \\ & \mathbf{K}_w & \\ & & \mathbf{K}_c^{\text{red}} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & & \\ & -\frac{z_p}{z_w} \mathbf{C}_w & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

The indexing of the submatrices with p, w, and c refers to the components pinion, wheel, and casing, respectively. The additional term \mathbf{G} that contributes to \mathbf{D} is associated proportional to the rotational speed Ω of the

pinion shaft. This expression arises from gyroscopic effects and thus considers the rotor dynamics of the shafts in terms of second-order theory [56]. The number of teeth ratio $\frac{z_p}{z_w}$ scales the speed properly for the wheel shaft. Similar conditions occur in the stiffness matrix \mathbf{K} with respect to \mathbf{C} . This additional matrix results from the rotating portion of the internal shaft damping, although it is proportional to the displacements \mathbf{u} . However, no additional expressions are defined for the housing because there is no equivalent movement.

The support of the rotating beam elements against the housing and vice versa is established in $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$ by means of an FSI, as slide bearings are built-in. In this case, small deflections may lead to significant impacts on the dynamic properties of the sliding layer. For this purpose, the current relative movements between a shaft and a bearing shell are transferred in each iteration into a subsystem that defines a geometric lubrication gap on the basis of Reynolds lubrication theory [57, 58].

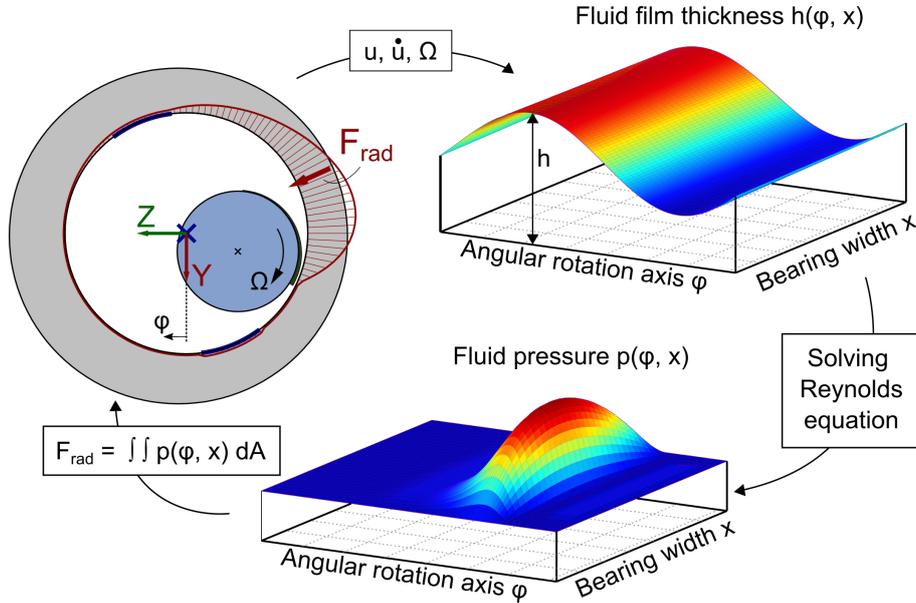


Figure 5: Evaluation of nonlinear contact forces in a slide bearing.

This mechanical submodel is solved under constant temperature conditions with the FEM in accordance with [59, 60] to determine the pressure distribu-

tion in the fluid. With respect to computational stability and efficiency, cavitation is considered through the Gumbel condition [61], although it predicts slightly too high pressures in relation to [62]. Detailed information regarding this topic is available in [63]. However, a surface integration along the bearing face delivers a substitute contact force F_{rad} of the supporting power of the oil film. This update strategy is schematically illustrated in Fig. 5. The numerical link between a beam element and a solid housing structure is achieved by a multi-point constraint (MPC) in the sense of Fig. 6 for simplicity reasons. As a result, local relative deformations of the bearing shell are neglected in this approach and hence may provide inspiration for future work.

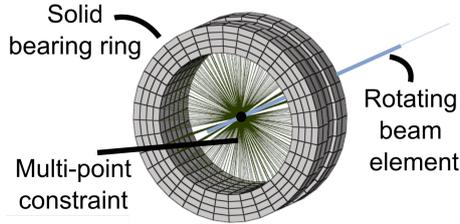


Figure 6: Numerical binding between a rotating beam element and a solid casing via a multi-point constraint (MPC).

The determination of the nonlinear contact force F_{tb} between the mating gear teeth is also established in an iterative manner. The appropriate evaluation strategy is pictured in Fig. 7.

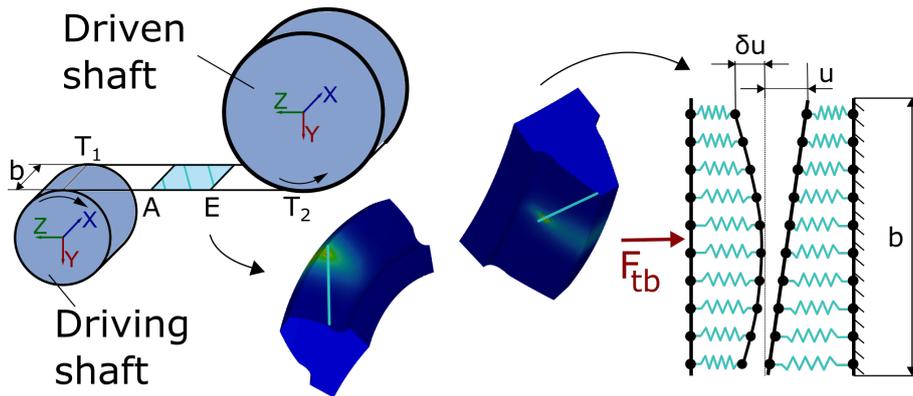


Figure 7: Evaluation of nonlinear contact forces during power transmission.

Here, the dynamic deflections \mathbf{u} of the rotating beam elements are transferred to the contact zone under consideration of basic gear geometry relations. Along the geared shaft sections of face width b , the displacements are generated with respect to their underlying shape functions [64], resulting in a kind of mortar coupling [65–67]. So, for each rolling position, the micro-geometry is accurately available across the path of action for each gear tooth on its way from the start of the mesh in point A to the mesh end in point E. Furthermore, constant distances by means of profile modifications and/or manufacturing deviations are present in $\delta\mathbf{u}$. The superposition of \mathbf{u} and $\delta\mathbf{u}$ therefore identifies which portions of the gear teeth contribute to the power transmission process. The desired contact force F_{tb} is finally determined with respect to the underlying tooth compliances. A reverse mapping of this force onto the beam elements is implemented likewise. The stiffness characteristics are established once in a preceding simulation run in accordance with [68]. Here, the three-dimensional elastic properties of a gear tooth are derived on the basis of an Isogeometric Analysis (IGA). Similar or alternative approaches are provided in [69–73]. A general and more detailed review of gear mesh stiffness determination procedures is available in [74]. However, as Hertzian pressure is also considered in the contact zone with respect to [75], a second internal iteration loop for this nonlinearity is needed here.

3. Implementation of the harmonic balance method

The underlying mathematical theory of the HBM is well explained in [3]. Basically, the focused approach to determine steady-state operation is in its fundamentals a Fourier-Galerkin method [76, 77]. Accordingly, the idea is to assume periodic behavior for all portions in Eq. (1) with respect to a common base frequency Ω . This constant base frequency Ω is selected to be the rotational speed of a rotating beam element such as the pinion wheel. Consequently, the external force vector is expressed in terms of an infinite Fourier series as

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h} e^{ih\Omega t}. \quad (8)$$

It is noteworthy to mention that this formulation is generally valid. The consideration of purely constant external loads, as it is the case here, is only a special situation where all harmonic coefficients $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h}$ disappear except the

one which is associated to $h = 0$. However, the same Fourier formulation applies in accordance with the displacements and properly to the time derivatives velocity and acceleration

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}_h e^{ih\Omega t}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (ih\Omega) \hat{\mathbf{u}}_h e^{ih\Omega t}, \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (ih\Omega)^2 \hat{\mathbf{u}}_h e^{ih\Omega t},\end{aligned}\tag{9}$$

as well as to the nonlinear force vector

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}(\hat{\mathbf{u}}) e^{ih\Omega t}.\tag{10}$$

As a result, the equation of motion in Eq. (1) is rewritten in the frequency domain with respect to the series index h as follows

$$\underbrace{\left[\overbrace{-(h\Omega)^2 \mathbf{M} + (ih\Omega) \mathbf{D} + \mathbf{K}}^{\mathbf{S}_h} \right]}_{\mathbf{r}_h(\hat{\mathbf{u}})} \hat{\mathbf{u}}_h + \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext},h} = \mathbf{0}.\tag{11}$$

The dynamic stiffness matrix \mathbf{S}_h represents the linear portion of the dynamic tangent stiffness. However, the relationships in Eq. (11) in general form a nonlinear system with respect to $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}(\hat{\mathbf{u}})$. Equilibrium is satisfied when the residual force vector $\mathbf{r}_h(\hat{\mathbf{u}})$ vanishes. The solution is searched numerically in an iterative manner across the index k related to Newton's method, see [78], for example. Here, the idea is to find an improvement $\Delta \hat{\mathbf{u}}^k$ to the current solution $\hat{\mathbf{u}}^k$ by means of a linear truncated Taylor expansion in a way that the upcoming residual $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^{k+1})$ converges towards zero. This motivation is expressed as follows

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^{k+1}) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k + \Delta \hat{\mathbf{u}}^k) \approx \mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k) + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}})}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \right|_{\hat{\mathbf{u}}^k}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{T,dyn}}^k = \mathbf{S} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{T}}^k} \Delta \hat{\mathbf{u}}^k \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.\tag{12}$$

The derivation of the dynamic tangent stiffness $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ is noticeable as the derivative of the current residual $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k)$ with respect to the present displacements $\hat{\mathbf{u}}^k$. As a result, this dynamic tangent matrix $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ consists of the constant component \mathbf{S} and an iteratively changing portion $\hat{\mathbf{K}}_T^k$ due to the nonlinear relations in $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$. However, an appropriate determination of a promising search direction $\Delta\hat{\mathbf{u}}^k$ is finally gained by solving the following linear system of equations

$$\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k \Delta\hat{\mathbf{u}}^k = -\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k). \quad (13)$$

Newton's method efficiently converges when the iteration is close to the actual solution. But unfortunately, the applied approach runs into stability issues if this is not the case. Since the high number of Fourier coefficients makes this iteration process even more sensitive, a suitable initial guess is mandatory for success of the HBM. To overcome this situation, the iteration starts with the result of a preceding static analysis where the nonlinear terms are approximated linearly as mean stiffness values across one periodic cycle. For example, the determination of the gear mesh stiffness in terms of the international standard ISO-6336-1 [79] seems appropriate. Based on the authors' experience, convergence is reliably ensured with this preconditioning technique.

The evaluation of the nonlinear terms $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$ as well as the derivation of the dynamic tangent stiffness $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ is established by means of the alternating frequency/time (AFT) scheme [80]. So, in each iteration loop k , the time signal of the displacements \mathbf{u}^k is derived from the corresponding Fourier coefficients $\hat{\mathbf{u}}^k$ in the sense of Eq. (9). Then, the nonlinear relations are resolved in the time domain in a conventional manner to calculate the desired contact forces in $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$. A subsequent reverse transformation to the frequency domain makes the internal force vector $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$ available to the next iteration loop $k + 1$. This relation is formally expressed as

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl},h}^k = \text{FFT} [\mathbf{f}_{\text{nl}} (\text{iFFT} [\hat{\mathbf{u}}], t)]_h^k \quad (14)$$

and is also shown in Fig. 8. The Fourier transformations in forward (FFT) and backward (iFFT) direction involve minor computational effort. This is because only the nodal quantities that are relevant to the evaluation of the nonlinear interactions require a transformation. Furthermore, the entire time signal of the addressed locations is present at once for the current iteration

step k . This enables extensive parallelization opportunities for discrete time instants with respect to numerical implementation of the solution algorithm. Therefore, the treatment of the entire periodic time signal is possible on several processors simultaneously. In contrast, the approach of a NFI progresses sequentially from time step to time step and prohibits an adequate parallelization. Obviously and in addition to the mathematical concept, this is another numerical advantage of the HBM simulation time.

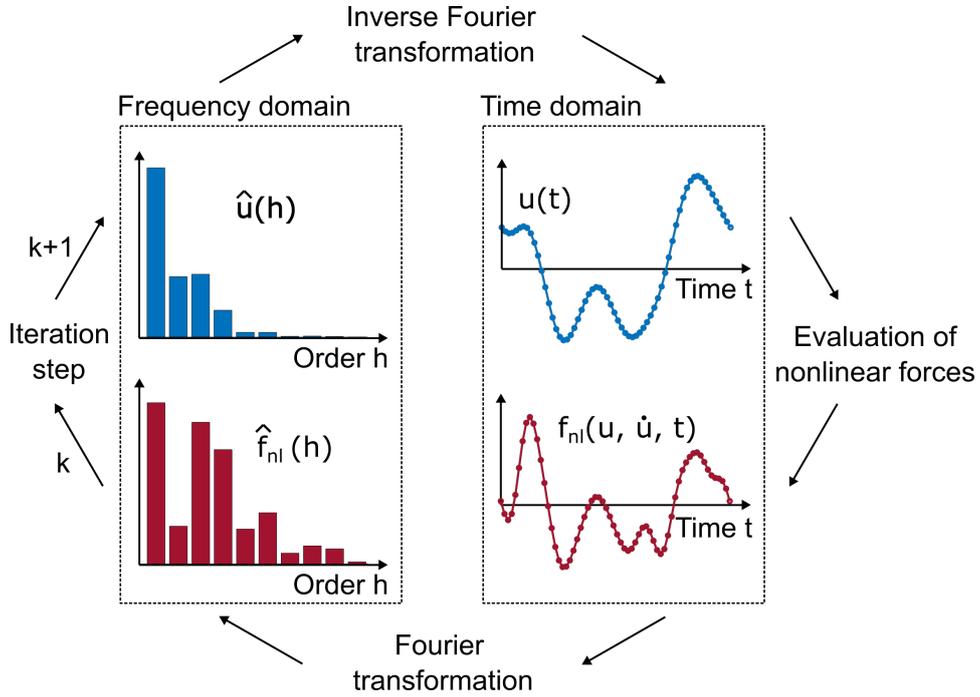


Figure 8: Evaluation of nonlinear forces during a single iteration step k when applying the alternating frequency/time (AFT) scheme to the harmonic balance method (HBM).

Finally, the infinite number of Fourier coefficients h needs to be truncated to a finite value of H for numerical feasibility purposes. Regarding Eq. (13), the contents of the corresponding vectors during Newton iteration compose

to

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^k = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_{-2}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_{-1}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_0^k \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_{+1}^k \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_{+2}^k \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{r}_{-2}(\hat{\mathbf{u}}^k) \\ \mathbf{r}_{-1}(\hat{\mathbf{u}}^k) \\ \mathbf{r}_0(\hat{\mathbf{u}}^k) \\ \mathbf{r}_{+1}(\hat{\mathbf{u}}^k) \\ \mathbf{r}_{+2}(\hat{\mathbf{u}}^k) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (15)$$

The dynamic tangent stiffness $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ has a Toeplitz structure [3, 81]

$$\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots \\ \cdots & \mathbf{s}_{-2} + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-4}^k & \cdots & \cdots \\ \cdots & \hat{\mathbf{K}}_{T,1}^k & \mathbf{s}_{-1} + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-3}^k & \cdots & \cdots \\ \cdots & \hat{\mathbf{K}}_{T,2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,1}^k & \mathbf{s}_0 + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-1}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-2}^k & \cdots & \cdots \\ \cdots & \hat{\mathbf{K}}_{T,3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,1}^k & \mathbf{s}_1 + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,-1}^k & \cdots & \cdots \\ \cdots & \hat{\mathbf{K}}_{T,4}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,3}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,2}^k & \hat{\mathbf{K}}_{T,1}^k & \mathbf{s}_2 + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (16)$$

The cross coupling between all harmonics h is clearly perceived with respect to the harmonic contributions of $\hat{\mathbf{K}}_{T,h}^k$ which arise from nonlinear interactions. The total number of degrees of freedom S of this established hypersystem depends on $S = (2H + 1)D$, where D represents the initial number of degrees of freedom of the conventional system in Eq. (1). With respect to the numerical implementation of typical FFT algorithms, the upper limit of all harmonics H is selected to be a power of two. Depending on the tooth profile design, a gear mesh excitation approximately has a frequency content up to the order of ten. To avoid possible convergence issues, a value of $2^5 = 32$ is used in all upcoming simulations to ensure a smooth Fourier representation of the dynamic response. A value of $2^4 = 16$ might be too rough to reliably cover a wide range of gear applications. As a result, the dimensions of this complex-valued square matrix are 65 times higher than in the original model. As soon as the number of D reaches values of large models, the complete storage of this matrix may become impossible even with today's computer power. As mentioned in the previous section, this is almost the case here. The numerical modeling with the FEM of the housing structure results in a high number of degrees of freedom D . Although in advance a MOR technique is applied to the casing assembly, the memory requirements

for \mathbf{S}_h are still ambitious. This is due to the fact that the reduced matrices of the housing structure become more and more dense with an increase in the required model properties, as explained in the previous section. Therefore, a direct decomposition of this matrix $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ does not seem to be practical and an iterative procedure is necessary. For this purpose, the matrix relations in Eq. (13) are rewritten for a single row with respect to the harmonics h by inserting an additional series index n

$$\left(\mathbf{S}_h + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k\right) \Delta \hat{\mathbf{u}}_h^k + \sum_{n=h-H}^{h+H} \hat{\mathbf{K}}_{T,n}^k \Delta \hat{\mathbf{u}}_{h-n}^k = -\mathbf{r}_h(\hat{\mathbf{u}}^k), \quad n \neq 0. \quad (17)$$

A rearrangement of these conditions by also considering the fundamentals of a fixed-point iteration across the index m regarding an arbitrary variable x subjected to an arbitrary function $\phi(x)$

$$x^{m+1} = \phi(x^m) \quad (18)$$

leads to

$$\left(\Delta \hat{\mathbf{u}}_h^k\right)^{m+1} = -\left(\mathbf{S}_h + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k\right)^{-1} \left[\mathbf{r}_h(\hat{\mathbf{u}}^k) + \sum_{n=h-H}^{h+H} \hat{\mathbf{K}}_{T,n}^k \left(\Delta \hat{\mathbf{u}}_{h-n}^k\right)^m \right], n \neq 0. \quad (19)$$

This iteration scheme for linear systems of equations is known as the Jacobi method. A quite simple improvement is the Gauss-Seidel method. Anyway, based on the authors' experience, both strategies require almost ten refinement loops over m until the solution of this linear system is reliably extracted for each global Newton step k . This leads to significantly more effort in computing time because a high number of internal matrix decompositions is required.

The idea to overcome this issue is to neglect the off-diagonal elements in Eq. (16), namely all matrices $\hat{\mathbf{K}}_{T,h}^k$ where $h \neq 0$. In detail, this corresponds to setting all matrices $\hat{\mathbf{K}}_{T,n}^k$ to zero in the sum of Eq. (19). This assumption is valid as the fluctuating characteristics of the gear mesh stiffness normally satisfy the relationship $\hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k \gg \hat{\mathbf{K}}_{T,n}^k$ for $n \neq 0$. Accordingly, the equations decouple and thus the iteration over m is omitted as demonstrated below

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_h^k = -\left(\mathbf{S}_h + \hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k\right)^{-1} \mathbf{r}_h(\hat{\mathbf{u}}^k). \quad (20)$$

In addition, it is enough to derive these solutions only for $h \geq 0$ as the results for $h < 0$ are just complex conjugate [3]. To the authors' experience, the total number of iterations k by means of Newton's method remains the same, regardless of whether or not the off-diagonals are taken into account. This confirms the assumption that the average stiffness $\hat{\mathbf{K}}_{T,0}^k$ contributes most to the search direction in gear dynamics.

In total, this implementation technique is highly successful. Despite the application of the HBM, the memory requirements remain the same compared to conventional analyses - without any loss in computational efficiency or stability. On top of this, the exclusive possibilities for parallelization accelerate the simulation even more, although the mathematics are quite fast anyway. Finally, by setting the solution of a preceding static analysis as the initial guess for Newton's method, convergence ($\|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^k)\|_2 < 1$) is almost guaranteed within about ten refinement loops over k for these kind of gear simulations.

4. Numerical verification and preliminary investigations

Before the derived HBM strategy is applied to an industrial gearbox, the implementation of the solution algorithm is checked. These preliminary analyses are conducted on a simple and straightforward gear design A, see Fig. 9. For reasons of computational efficiency regarding the NFI reference approach, the housing structure is not considered for the moment.

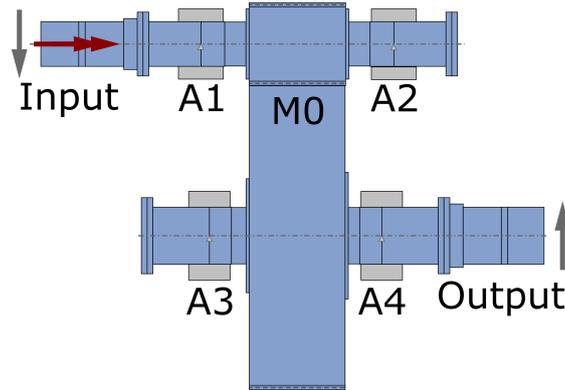


Figure 9: Top view and labeling of single-stage gearbox A.

The underlying data describing the basic design of the spur gear M0 are listed in Table 1. The same holds for the built-in slide bearings A1, A2, A3, and A4 with respect to the definitions in Table 2.

Table 1: Technical data of gearing M0.

Description		Unit	Gear M0	
			Pinion	Wheel
Module	m_n	mm	4.5	
Pressure angle	α_n	$^\circ$	20.0	
Helical angle	β	$^\circ$	0.0	
Number of teeth	z	-	25	94
Tip diameter	d_a	mm	124.6	431.5
Root diameter	d_f	mm	101.2	408.2
Face width	b	mm	150.0	
Center distance	a	mm	270.0	

In total, five nonlinearities are present in this simulation model: one gear mesh and four slide bearings. However, gearbox A is driven through the pinion gear and the output is located on the other side at the wheel shaft. The driving pinion gear rotates stationary with 6000 rpm which results in a gear mesh excitation frequency of 2500 Hz. This frequency in reverse, stands for a repetitive time period of 4.0e-4 s under steady-state operating conditions. The transmitted power is constant and approx. 1 MW. The deadweight of the components involved is considered as well.

Table 2: Technical data of slide bearings A1, A2, A3, and A4.

Description		Unit	Bearing A1/A2	Bearing A3/A4
Type	-	mm	Radial bearing	Radial bearing
Bearing width	b_L	mm	70.0	65.0
Outer diameter	D_{La}	mm	110.0	140.0
Inner diameter	D_{Li}	mm	70.0	90.0
Rel. clearance	ψ	‰	2.2	1.9
Oil	-		ISO-VG-46	ISO-VG-46
Temperature	T_L	$^\circ C$	55.0	55.0

A reference simulation in terms of NFI is conducted for verification purposes using the gen- α approach [82]. Both solution algorithms are implemented in FORTRAN and access the same subroutines for the evaluation of the nonlinear contact forces. The dynamic NFI run starts from a preceding static analysis as well as the HBM. In total, the NFI signal is sampled by 3400 time steps evenly spaced at every 1.0e-5 s. For the NFI method, the simulation time for this mechanical system of approx. 300 degrees of freedom is about 30 h and 32 min on a *AMD Ryzen Threadripper 3990X 64-Core Processor*. In fact, the time step simulation already shows numerically a complete steady-state operation after half the computing time. Nevertheless, the moment of this transition point in time is not known in advance and consequently complicates a prior and reliable estimation of the simulation settings within the NFI. In Fig. 10, the computed result of the transmitted contact force F_{tb} in the gearing is plotted as a reference value.

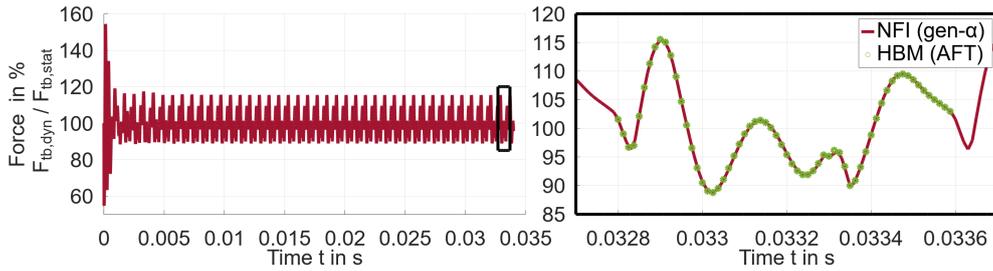


Figure 10: Transmitted contact force F_{tb} in the spur gear M0. Once derived by numerical forward integration (NFI) and once again with the harmonic balance method (HBM).

Obviously, the HBM is in a good agreement with the well-established NFI method. As a result, the numerical implementation is successfully verified. Furthermore, the simulation time using the identical processor reduces to 2 min and 2 s with the HBM and hence the extreme numerical advantage is confirmed as well. Here, it is again noteworthy to emphasize that the HBM computes only one final mesh cycle with respect to its repetitive time period, while in this example, the NFI simulates in total 85 mesh cycles to finally reach a completely steady-state behavior.

However, in a further step, the influence of the computational intensive evaluation of the nonlinearities on the model accuracy is reviewed in more detail. In other words, the behavior of the gear mesh as well as the behavior of the

slide bearings are approximated linearly by their stiffness values as it is usually done in many practical approaches. While the fluctuating gear mesh stiffness is implemented as parametric excitation similarly to [81, 83], the constant bearing coefficients are derived in accordance to [84–87] and do also include portions for the tilting moments, such as [88]. To stay linear, no higher order terms are considered, as presented more recently in [89].

As a reference value, the radial magnitudes of the dynamic bearing forces F_{rad} at the slide bearings are taken into account since these forces are actually transmitted to the (not modeled) housing. Finally, the calculation was performed two more times. Once with a nonlinear gear mesh but a linear support of all slide bearings and once again with all components (gear mesh and all slide bearings) linear. The results are presented in Fig. 11.

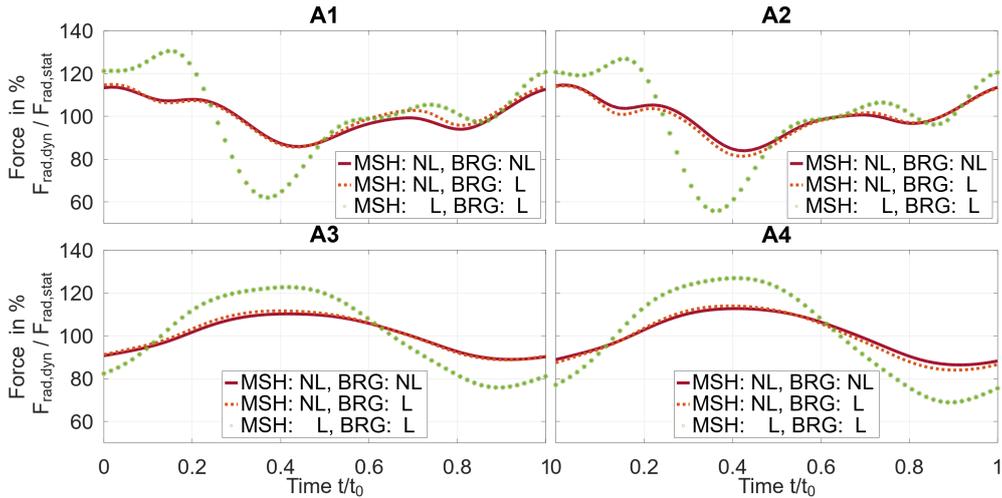


Figure 11: Periodic behavior of slide bearing forces F_{rad} of gearbox A with respect to linear (L) and nonlinear (NL) implementation of the gear mesh excitation (MSH) and of the slide bearing behavior (BRG).

The characteristics of the supporting bearing forces indicate that the evaluations of the FSI at the bearing are avoidable for a symmetric design. Apparently, small excitation amplitudes at this frequency level are less significant in this acoustic context. Nevertheless, the detailed description of the mating gear teeth is highly recommended and thus makes a nonlinear analysis essential. As a result, from now on the slide bearings are considered by means

of linear dynamic coefficients and the gear mesh as nonlinear contact.

5. Numerical handling of a two-stage double-helical gearbox

The actual gearbox of interest consists of a two-stage double-helical gearing with a horizontal split line as illustrated in Fig. 12. The fundamental data of the gear teeth is listed in Table 3 and the installed slide bearings are defined in Table 4. The gearbox is driven via the wheel shaft and the output is located on the other side at the pinion shaft. The pinion gear rotates with about 644 rpm. The transmitted power is approx. 2 MW and deadweight is taken into account as well. The gear mesh frequencies correspond to 75 Hz for gear stage one (M1/M2) and 290 Hz for gear stage two (M3/M4).

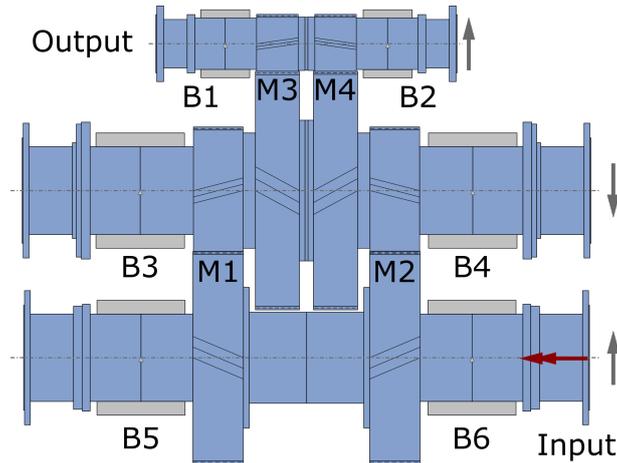


Figure 12: Top view and labeling of two-stage double-helical gearbox B.

Since the number of gear teeth on the intermediate shaft are not integer dividable, the common repetitive time period in this dynamic system is one complete rotation of this intermediate shaft. As a result, the HBM requires calculating 28 mesh cycles in the case of gear stage one (M1/M2) and simultaneously 109 mesh cycles for gear stage two (M3/M4). With respect to the single-stage spur gear of the previous section, the computation time with the HBM increases from a few seconds to 20 min and 54 s due to this multi-mesh gearbox design. Nevertheless, a comparable simulation by NFI still takes several hours (12 h and 32 min) despite the linear modeling of the bearings, and thus once again emphasizes the efficiency of the HBM.

Table 3: Technical data of gearings M1, M2, M3, and M4.

Description		Unit	Gear M1/M2		Gear M3/M4	
			Pinion	Wheel	Pinion	Wheel
Module	m_n	mm	20.0		10.0	
Pressure angle	α_n	$^\circ$	20.0		20.0	
Helical angle	β	$^\circ$	± 30.8		± 26.8	
Number of teeth	z	-	28	47	27	109
Tip diameter	d_a	mm	693.9	1126.1	326.2	1233.8
Root diameter	d_f	mm	598.4	1028.4	278.6	1185.6
Face width	b	mm	2 x 247.5		2 x 212.5	
Center distance	a	mm	870.0		760.0	

Table 4: Technical data of slide bearings B1, B2, B3, B4, B5, and B6.

Description		Unit	Bearing B1/B2	Bearings B3-B6
Type	-	mm	4-lobe bearing	4-lobe bearing
Bearing width	b_L	mm	250.0	450.0
Outer diameter	D_{La}	mm	350.0	590.0
Inner diameter	D_{Li}	mm	265.0	450.0
Rel. clearance	ψ	$\%_o$	1.3	1.2
Oil	-		ISO-VG-100	ISO-VG-100
Temperature	T_L	$^\circ C$	55.0	55.0

The computed result of the transmitted contact force F_{tb} of gear mesh M1 in gearbox B is plotted on the left-hand side in Fig. 13, whereby the time axis is normalized to the local repetitive time period of this gear stage one. Obviously, all 28 mesh cycles are not completely identical but still behave in a relatively similar manner. This statement becomes more clear with respect to the right display in Fig. 13. There, all 28 mesh cycles are drawn once again, but in regard to the same normalized time axis, which corresponds to the underlying rolling position of the mating gear teeth.

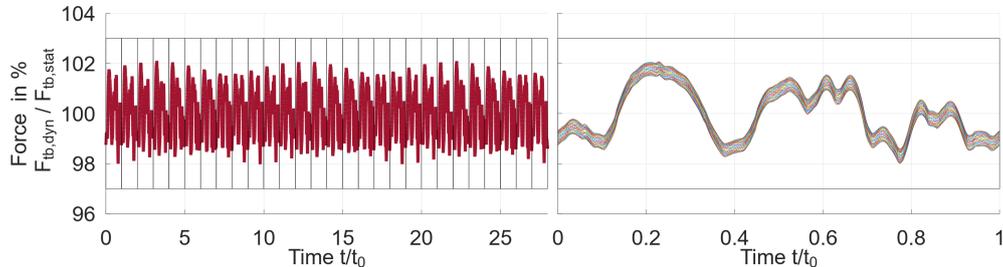


Figure 13: Computed result of the transmitted contact force F_{tb} of gear mesh M1 in gearbox B over the global (total) time period with respect to its 28 mesh cycles and once again on the right-hand side with respect to a local (common) time axis.

This illustration indicates a low level of interaction behavior between gear stage one and gear stage two and thus conforms with the observations in [19]. This is apparently due to the fact that a substantial modulation of the partial signals, regarding gear stage one and gear stage two, is not possible in time because the peaks and valleys of the sine waves (in terms of rolling positions) always interfere differently.

On that note, a second computation of the dynamics in gearbox B is conducted where the nonlinearities of the two gear stages are investigated separately. The combined simulation is thus now split into two independent calculation steps. But both models still form a coupled nonlinear gear-rotor-bearing-housing system by themselves. In detail, one calculation is performed where gear stage one (M1/M2) is represented as a nonlinear contact and gear stage two (M3/M4) as a constant linear stiffness in accordance with ISO-6336-1 [79] - as was done in the preceding static analysis. Similar conditions then apply for the simulation run for gear stage two, but with reversed definitions.

The number of mesh cycles reduces again to one for each simulation run and hence computation time decreases drastically from 20 min and 54 s to only 11 s for a single gear stage. Parallel and independent execution on two different desktop computers is possible without any restriction. The corresponding results of all transmitted contact forces F_{tb} regarding the gear meshes M1, M2, M3, and M4 are presented in Fig. 14. In the figure, the gray area describes a reference range, as it is the envelope over all mesh cycles derived by the combined simulation in the sense of Fig. 13.

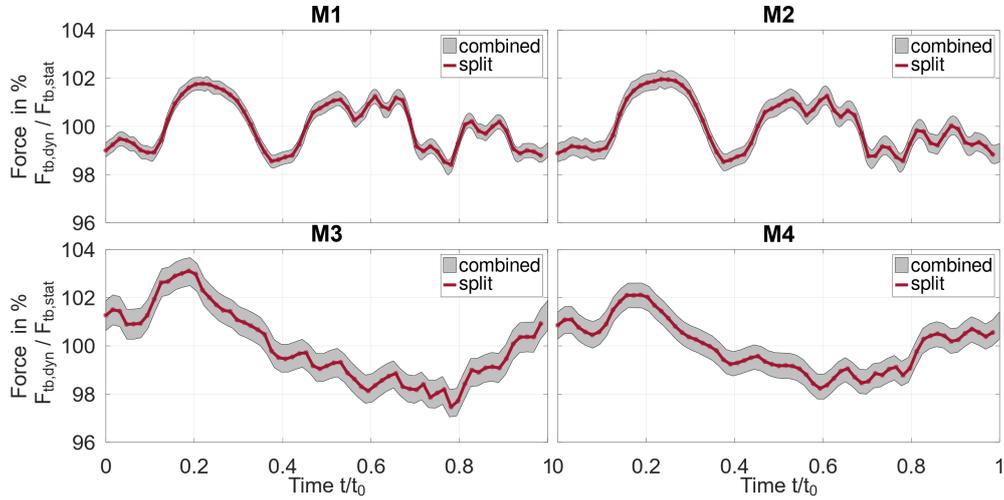


Figure 14: Comparison of resulting contact forces F_{ib} in the gear meshes M1, M2, M3, and M4 in gearbox B between combined approach (gray area) and split version (red line).

Obviously, this novel split approach is in a good agreement with the combined reference solution and thus elegantly allows an efficient investigation of the dynamics of gearbox B with the HBM. In summary, an appropriate NFI solution run requires several hours (≈ 12 h) while the HBM in split version takes only a few seconds ($= 11$ s). It is assumed that such a decoupling is not suitable if the number of gear teeth on the intermediate shaft are integer dividable because with regard to gear stage one and gear stage two, modulation of the contributing excitation signals may occur. But in this case, the common repetitive time period decreases and thus reduces computation time anyway. Consequently, the applicability of the HBM is supposed to be reasonable again. However, future research on this modulation topic seems appropriate, but exceeds the scope of this paper.

6. Acoustic survey of an industrial application

The derived HBM in split version is now applied to the two-stage double-helical gearbox B of the previous section within its housing as a basis for validation with experimental data. The test setup with the highlighted sensor position is shown in Fig. 15.

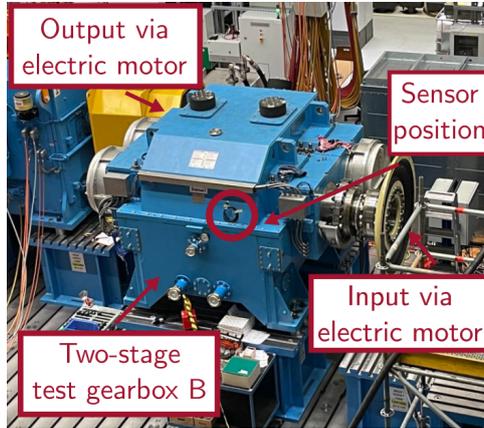


Figure 15: Test setup of two-stage double-helical gearbox B and sensor position.

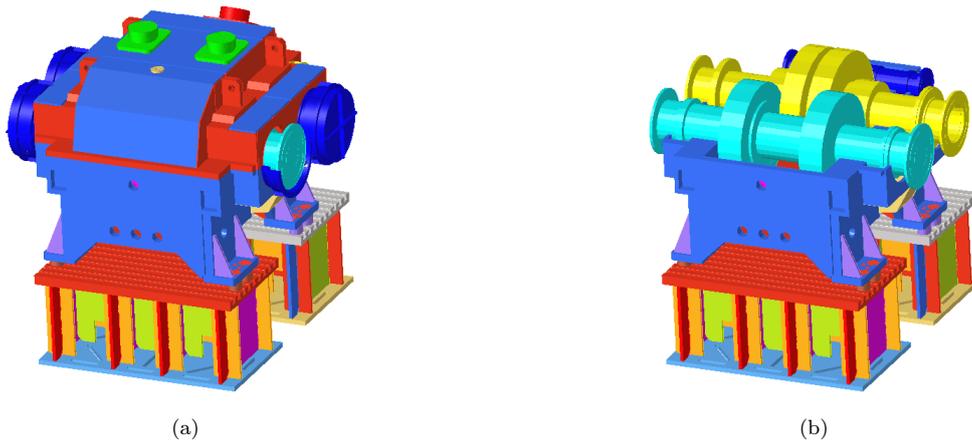


Figure 16: Finite element model of gearbox B within housing and foundation support (a). The housing cover is hidden on the right-hand (b) side to show the arrangement of the rotating shafts.

A finite element model of the housing and its foundation support is created with approximately 13 million degrees of freedom, see Fig. 16. A CMS reduces the number of degrees of freedom to 2500. The reduced housing structure includes vibration modes up to 2.5 kHz and hence accurately describes the frequency range between zero and 1 kHz. At first, master nodes are only defined for connectivity reasons (between the housing and all six bearings) and for post-processing purposes (sensor position). Consequently,

seven master nodes are selected. At this point, a basic memory management tries to allocate more than 375 GB in terms of the HBM. As explained in Section 3, this is mainly the consequence of the fact that the dimension of the tangent matrix $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$ in Eq.(16) is 65 times the initial model size due to the consideration of multiple harmonic orders. In contrast, the present iterative implementation strategy, which neglects the off-diagonal entries in the formulation of the search matrix $\hat{\mathbf{K}}_{T,\text{dyn}}^k$, compresses the total memory requirements to approximately 10 MB. Furthermore, computation time is highly efficient as the solution is delivered after 1 min and 11 s and 1 min and 8 s for each submodel of the split version, respectively. Therefore, the consideration of the housing structure slightly increases simulation time from a few seconds to about one minute compared to the analysis of the previous section.

In Fig. 17 the calculated casing vibrations are compared to the experiment. For this purpose, a high resolution sensor (Swiveler ICP Industrial Accelerometer, model 607A11) records the casing accelerations up to 10 kHz in normal direction to the housing surface with a sensitivity of 100 mV/g to Siemens' LMS Labshop. A subsequent spectral analysis from zero to 1 kHz of this measured steady-state operation (2 MW at 644 rpm pinion speed) is derived by a Fourier transformation (2^{15} samples on a 2 s Hanning window).

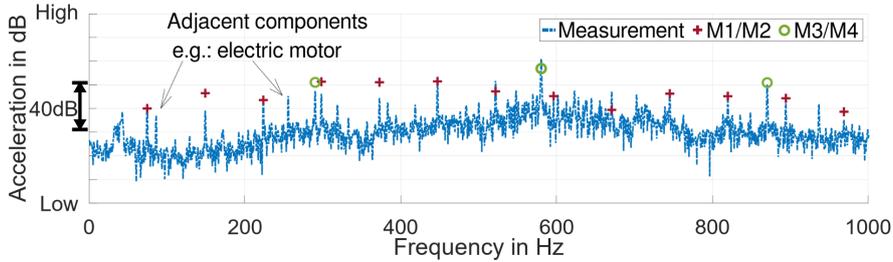


Figure 17: Housing acceleration at the sensor position (gained by simulation and experiment, respectively) between zero and 1 kHz. Simulation is conducted with the HBM in split version for gear stage one (M1/M2) and gear stage two (M3/M4).

In addition to the mesh frequencies and its harmonics, the measurement shows further peaks which refer to additional excitations of adjacent components, e.g. the electric motors. In general, the simulation is in a good agreement with the experiment. Therefore, the model accuracy is assumed

to be appropriate for this acoustic survey. The highest vibration amplitude relates to the first harmonic of gear stage two located at about 580 Hz. Thus, the gear mesh is most critical in this context - in the simulation as well as in the experiment.

To gain further insight into the vibro-acoustic propagation of the structure-borne sound at the highest amplitude, the number of master nodes is increased to approx. 1400 for post-processing purposes. The new master nodes belong to the focused surface area around the sensor position, see Fig. 15 and Fig. 18. The present memory allocation is about 1 GB and thus is still acceptable within a simulation time of 2 h 37 min 16 s and 2 h 37 min 41 s for each split version, respectively. In comparison, a basic memory storage for the HBM would require more than 7000 GB and is not feasible - even with today's computer power. However, the consideration of many additional master nodes (that is, a higher number of sensor positions) finally increases the computation time from one minute to about three hours compared to the solution run with only a single sensor definition. Nevertheless, a similar simulation run in terms of NFI is not practicable as computing time gets specified in days. As a result, the presented HBM in split version enables meaningful investigations during the product development process, in particular in special machine engineering applications where production times are often very tight.

It is worth noting that a reverse transformation of the physical meaning of the slave nodes results seems to be more challenging than increasing the number of master nodes. Unfortunately, the required transformation matrix is not accessible in commercial software tools. Furthermore, the memory requirements of such a transformation matrix may also be unacceptably high and thus need additional special internal treatment.

Finally, the displacement mode shape of the forced vibration response in Fig. 18 explains the increase of the addressed amplitude at 580 Hz. The first harmonic of gear stage two excites a local mode shape of the surrounding housing structure next to the sensor position. As a result, the complex tracking of the vibro-acoustic propagation indicates a local shortcoming in the housing design for this specific operating condition, although the gear mesh excitation is optimized to a minimum and located on the other (output) side.

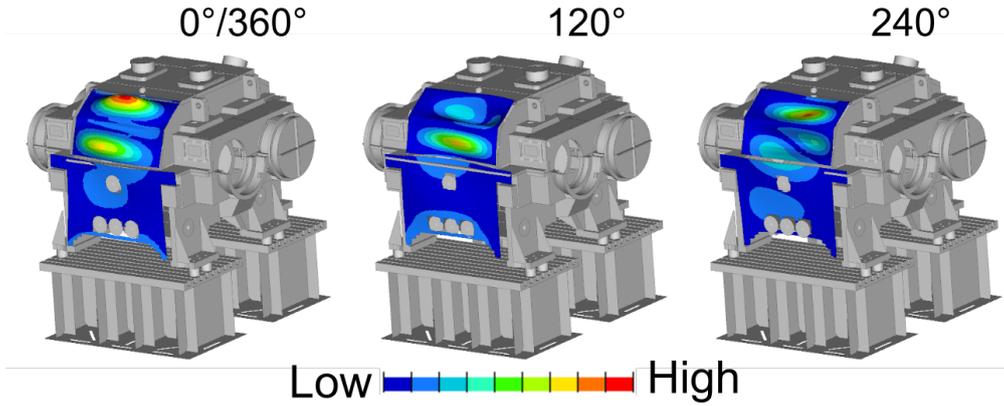


Figure 18: Forced vibration response (as harmonic displacement magnitudes) of the housing structure at 580 Hz excited by the first harmonic of gear stage two in gearbox B. Three specific time positions of the animation are displayed with respect to the phase angle between 0° and 360° of this periodic motion.

A first measure to estimate and evaluate the potential sound radiation due to this vibration response is given by the ERP value as defined below [42, 43]

$$P_{\text{ERP}} = \frac{1}{2} \sigma \rho_{\text{F}} c_{\text{F}} \int_A |\dot{u}_{\text{n}}|^2 \text{d}A. \quad (21)$$

Here, the material properties of the surrounding fluid are considered, specifically, the density ρ_{F} of air and its sound velocity c_{F} . The potential noise radiation is finally estimated on the basis of the corresponding surface velocities \dot{u}_{n} in normal direction as they stimulate the air to vibrate and thus cause noise radiation. A local surface integration across the finite elements allows an area-based evaluation. The factor σ refers to [43], and in the case of low frequencies slightly scales the ERP estimation to a more meaningful approximation. At 580 Hz, the factor σ already corresponds to almost one and thus is, specifically, of minor significance here. However, for reasons of simplicity, the condition $\sigma = 1$ is chosen for the complete spectrum. To acknowledge human perception of sound, an A-weighting is applied to the computed ERP values. The result is subsequently shown in Fig. 19.

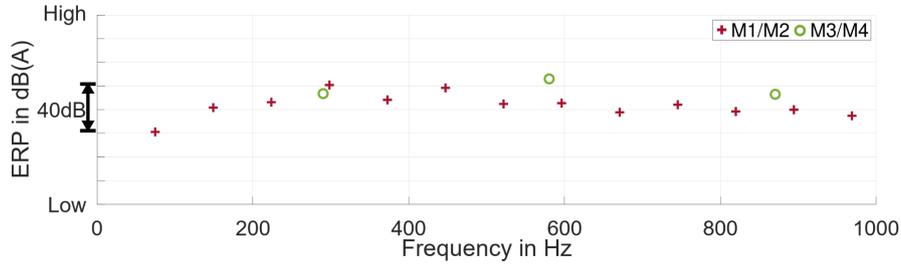


Figure 19: Equivalent radiated power (ERP) in db(A). Simulation is conducted with the HBM in split version for gear stage one (M1/M2) and gear stage two (M3/M4).

The ERP observation in Fig. 19 also indicates that the oscillations at 580 Hz are acoustically most relevant. With respect to Fig. 20, a deeper insight into the composition of the ERP value at 580 Hz is given.

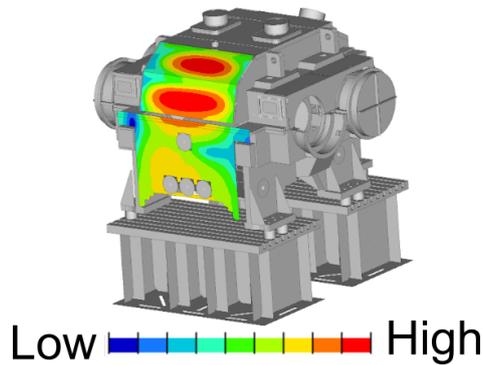


Figure 20: Distribution of equivalent radiated power (ERP) density at a housing surface at 580 Hz excited by the first harmonic of gear stage two in gearbox B.

In line with the oscillating mode shape in Fig. 18, the housing surface near the sensor shows increased and widespread ERP densities with respect to Fig. 20. Thus, the vibro-acoustic investigation successfully identifies this oscillating area as potentially critical and hence effectively supports a design review through an estimation of the radiated sound power. The preceding comparison between simulation and experiment indicates a reliable and meaningful judgment of the derived results. Consequently, the observations in [17] in terms of the validity between HBM and ERP are also confirmed in general for gear applications and thus the predictive power of the underlying model is successfully demonstrated.

At this point, a final summary of all calculations made in this article allows a detailed discussion about the recent findings. In this context, the first investigations in Section 4 on a simple spur gear (gearbox A) basically verify the accuracy and efficiency of the HBM compared to well-established solutions in the time domain in terms of NFI. Furthermore, the relevance of the consideration of the nonlinear interactions between the mating gear teeth is highlighted with respect to the resulting influence on the computed bearing forces. The implementation of the FSI at these slide bearings demonstrates that the solution strategy is simply expandable for additional nonlinearities without restrictions. A novel modeling approach of multi-mesh gearboxes with the HBM is presented in Section 5 by preliminary investigations on the focused two-stage double-helical gear (gearbox B). The proposed split version features an alternative modeling technique to accurately account for all nonlinear interactions in a physically coupled gear-rotor-bearing-housing system with a further increase in efficiency. The elegant benefit of this simulation strategy is rather exclusive within the HBM for gear dynamics. The fundamental validity is based on a theoretical study and is finally confirmed in the current section by the experiment. A quantitative comparison of the resulting surface accelerations of the housing at the sensor position shows a good agreement between measurement and calculation. So, the gear mesh excitation due to the continuously changing contact conditions is reliably tracked to the casing vibrations in a cross-coupled simulation model. The actual simulation time for a few sensor positions is only minutes and therefore even permits parameter studies such as [90]. Although a detailed survey of the oscillation portions with respect to an ERP analysis increases the numerical effort, a computation time of two to three hours is still acceptable within various design stages during the development of special machine applications. The applicability of the entire approach to practicable gear acoustics is therefore clearly demonstrated.

7. Conclusion

This article presents an efficient implementation strategy of the harmonic balance method (HBM) to track the vibro-acoustic propagation of structure-borne noise in gearboxes under steady-state operating conditions. The subsequent application of this adapted HBM to a multi-mesh coupled nonlinear gear-rotor-bearing-housing system in three-dimensional space contributes a

new modeling approach to the research community with respect to this acoustic motivation. This novel model setup enables a highly precise calculation of the exciting gear mesh as well as its resulting impact on the housing vibrations without the need to separate its physical connections for numerical handling purposes. The addition of further nonlinearities at any position in the complete transfer path is possible without restrictions. Despite this increase in the model accuracy, the computation time decreases drastically with respect to well-established solutions in the time domain. Furthermore, the memory requirements of the introduced solution algorithm do not significantly differ in relation to usual industrial demands and thus make its practicable application extremely valuable.

An experimental measurement of the casing vibrations confirms the validity of the calculated results. The referring gearbox consists of a two-stage double-helical gear with comparatively large component dimensions, e.g. the total center distance is about 1.6 m. A determination of the equivalent radiated power (ERP) densities using the presented HBM strategy around the sensor position reasonably explains the highest peak in the measurements and hence confirms the predictive power of the established approach.

Overall, the presented methodology enables efficient simulation approaches, e.g. parameter studies in gear acoustics to track the vibro-acoustic propagation of structure-borne sound. Therefore, this solution strategy represents a powerful tool in modern transmission designs and provides significant support in meeting the continuously increasing demands.

CRedit authorship contribution statement

Andreas Beinstingel: Conceptualization, Methodology, Software, Validation, Formal analysis, Investigation, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Sebastian Schabert:** Validation, Writing – review & editing. **Michael Heider:** Project administration, Writing – review & editing, Supervision. **Burkhard Pinnekamp:** Resources, Writing – review & editing, Supervision. **Steffen Marburg:** Writing – review & editing, Supervision.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgement

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

- [1] F. Hoppe, B. Pinnekamp, Gear noise - challenge and success based on optimized gear geometries, American Gear Manufacturers Association: Fall Technical Meeting (Milwaukee, Wisconsin, USA) 2004FTM (1) (2004) 14 pages.
- [2] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, 1st Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995. doi:10.1002/9783527617586.
- [3] M. Krack, J. Gross, Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems, 1st Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 2019. doi:10.1007/978-3-030-14023-6.
- [4] J. C. Butcher, Numerical methods for ordinary differential equations, 3rd Edition, John Wiley and Sons, Ltd, The Atrium Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, England, 2016. doi:10.1002/9781119121534.
- [5] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, 2nd Edition, Prentice Hall, 2006.
- [6] R. J. Gilmore, M. B. Steer, Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance - A review of the art. Part i. Introductory concepts, International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering 1 (1) (1991) 22–37. doi:10.1002/mmce.4570010104.

- [7] K. C. Hall, J. P. Thomas, W. S. Clark, Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique, *AIAA Journal* 40 (5) (2002) 879–886. doi:10.2514/2.1754.
- [8] E. Sarrouy, J.-J. Sinou, Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - On the use of the harmonic balance methods, *Advances in Vibration Analysis Research*, Edited by Farzad Ebrahimi, IntechOpen, 2011, pp. 419–434. doi:10.5772/15638.
- [9] M. Krack, L. Panning-von Scheidt, J. Wallaschek, On the computation of the slow dynamics of nonlinear modes of mechanical systems, *Mechanical Systems and Signal Processing* 42 (1) (2014) 71–87. doi:10.1016/j.ymsp.2013.08.031.
- [10] M. Krack, Nonlinear modal analysis of nonconservative systems: extension of the periodic motion concept, *Computers and Structures* 154 (2015) 59–71. doi:10.1016/j.compstruc.2015.03.008.
- [11] M. Guskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics, *Mechanics Research Communications* 35 (8) (2008) 537–545. doi:10.1016/j.mechrescom.2008.05.002.
- [12] J.-J. Sinou, Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings, *Mechanism and Machine Theory* 44 (9) (2009) 1713–1732. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2009.02.004.
- [13] P. Bonello, H. Pham, A receptance harmonic balance technique for the computation of the vibration of a whole aero-engine model with nonlinear bearings, *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 221–242. doi:10.1016/j.jsv.2009.01.039.
- [14] C. Berthold, J. Gross, C. Frey, M. Krack, Development of a fully-coupled harmonic balance method and a refined energy method for the computation of flutter-induced limit cycle oscillations of bladed disks with nonlinear friction contacts, *Journal of Fluids and Structures* 102 (2021) 103233. doi:10.1016/j.jfluidstructs.2021.103233.
- [15] Z. Wang, H. Feng, H. Ding, L. Chen, Parametric influence on energy harvesting of magnetic levitation using harmonic balance method, *Journal of Vibration Engineering and Technologies* 7 (2019) 543–549. doi:10.1007/s42417-019-00148-7.

- [16] L. Utzig, A. Fuchs, K. Weisheit, S. Marburg, Squeak noise prediction of a door trim panel using harmonic balance method, *SAE International Journal of Advances and Current Practices in Mobility* 3 (2) (2020) 1108–1118. doi:10.4271/2020-01-1577.
- [17] L. Utzig, K. Weisheit, M. Maeder, S. Marburg, Quantitative prediction of rattle noise: An experimentally validated approach using the harmonic balance method, *Mechanical Systems and Signal Processing* 167 (2022) 108592. doi:10.1016/j.ymssp.2021.108592.
- [18] Y. Shen, S. Yang, X. Liu, Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method, *International Journal of Mechanical Sciences* 48 (11) (2006) 1256–1263. doi:10.1016/j.ijmecsci.2006.06.003.
- [19] G. Liu, R. Parker, Nonlinear dynamics of idler gear systems, *Nonlinear Dynamics* 53 (2008) 345–367. doi:10.1007/s11071-007-9317-z.
- [20] A. Alshyyab, A. Kahraman, Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions, *Journal of Sound and Vibration* 284 (1) (2005) 151–172. doi:10.1016/j.jsv.2004.06.010.
- [21] T. Sun, H. Hu, Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances, *Mechanism and Machine Theory* 38 (12) (2003) 1371–1390. doi:10.1016/S0094-114X(03)00093-4.
- [22] W. Zhu, S. Wu, X. Wang, Z. Peng, Harmonic balance method implementation of nonlinear dynamic characteristics for compound planetary gear sets, *Nonlinear Dynamics* 81 (2015) 1511–1522. doi:10.1007/s11071-015-2084-3.
- [23] Y. Li, T. Chen, X. Wang, Non-linear dynamics of gear pair with dynamic backlash subjected to combined internal and external periodic excitations, *Journal of Vibration and Control* 22 (6) (2016) 1693–1703. doi:10.1177/1077546314544350.
- [24] H. Dong, L. Wang, H. Zhang, X. Zhao, Nonlinear frequency response analysis of double-helical gear pair based on the incremental harmonic balance method, *Shock and Vibration* 2021 (6687467) (2021) 20 pages. doi:10.1155/2021/6687467.

- [25] M. Benton, A. Seireg, Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems, *Journal of Mechanical Design* 100 (1) (1978) 26–32. doi:10.1115/1.3453888.
- [26] A. Kahraman, R. Singh, Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system, *Journal of Sound and Vibration* 146 (1) (1991) 135–156. doi:10.1016/0022-460X(91)90527-Q.
- [27] P. Velex, L. Flamaud, Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations, *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 118 (1) (1996) 7–14.
- [28] V. K. Ambarisha, R. G. Parker, Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *Journal of Sound and Vibration* 302 (3) (2007) 577–595. doi:10.1016/j.jsv.2006.11.028.
- [29] C. G. Cooley, R. G. Parker, S. M. Vijayakar, A frequency domain finite element approach for three-dimensional gear dynamics, *Journal of Vibration and Acoustics* 133 (4). doi:10.1115/1.4003399.
- [30] P. Velex, On the modelling of spur and helical gear dynamic behaviour, *Mechanical Engineering*, Edited by Murat Gokcek, IntechOpen, 2012, pp. 75–106. doi:10.5772/36157.
- [31] Y. Zhang, Q. Wang, H. Ma, J. Huang, C. Zhao, Dynamic analysis of three-dimensional helical geared rotor system with geometric eccentricity, *Journal of Mechanical Science and Technology* 27 (2013) 3231–3242. doi:10.1007/s12206-013-0846-8.
- [32] X. Dai, C. G. Cooley, R. G. Parker, An efficient hybrid analytical-computational method for nonlinear vibration of spur gear pairs, *Journal of Vibration and Acoustics* 141 (1) (2019) 011006. doi:10.1115/1.4040674.
- [33] M. Kang, A. Kahraman, An experimental and theoretical study of quasi-static behavior of double-helical gear sets, *Journal of Mechanical Design* 143 (4) (2020) 14 pages. doi:10.1115/1.4047906.

- [34] A. S. Chimanpure, A. Kahraman, D. Talbot, A transient mixed elasto-hydrodynamic lubrication model for helical gear contacts, *Journal of Tribology* 143 (6) (2020) 15 pages. doi:10.1115/1.4048499.
- [35] D. Shin, A. Palazzolo, Nonlinear analysis of a geared rotor system supported by fluid film journal bearings, *Journal of Sound and Vibration* 475 (2020) 115269. doi:10.1016/j.jsv.2020.115269.
- [36] R. Singh, H. Xie, R. Comparin, Analysis of automotive neutral gear rattle, *Journal of Sound and Vibration* 131 (2) (1989) 177–196. doi:10.1016/0022-460X(89)90485-9.
- [37] S. He, R. Singh, G. Pavic, Effect of sliding friction on gear noise based on a refined vibro-acoustic formulation, *Noise Control Engineering Journal* 56 (3) (2008) 164–175. doi:10.3397/1.2938737.
- [38] R. Brancati, E. Rocca, D. Siano, M. Viscardi, Experimental vibro-acoustic analysis of the gear rattle induced by multi-harmonic excitation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 232 (6) (2018) 785–796. doi:10.1177/0954407017707670.
- [39] C. I. Park, Transfer matrix of parametric excited system for noise and vibration analyses of helical gear system, *Journal of Mechanical Science and Technology* 35 (11) (2021) 8 pages. doi:10.1007/s12206-021-1007-0.
- [40] Y. Guo, T. Eritenel, T. M. Ericson, R. G. Parker, Vibro-acoustic propagation of gear dynamics in a gear-bearing-housing system, *Journal of Sound and Vibration* 333 (22) (2014) 5762–5785. doi:10.1016/j.jsv.2014.05.055.
- [41] J. Han, Y. Liu, S. Yu, S. Zhao, H. Ma, Acoustic-vibration analysis of the gear-bearing-housing coupled system, *Applied Acoustics* 178 (108024) (2021) 13 pages. doi:10.1016/j.apacoust.2021.108024.
- [42] D. Fritze, S. Marburg, H.-J. Hardtke, Estimation of radiated sound power: A case study on common approximation methods, *Acta Acustica united with Acustica* 95 (2009) 833–842. doi:10.3813/AAA.918214.
- [43] M. Luegmair, H. Muench, Advanced equivalent radiated power (ERP) calculation for early vibro-acoustic product optimization, *International*

- Conference on Sound and Vibration (Florence, Italy) ICSV22 (2015) 8 pages.
- [44] H. D. Nelson, J. M. McVaugh, The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements, *Journal of Engineering for Industry* 98 (2) (1976) 593–600. doi:10.1115/1.3438942.
- [45] H. D. Nelson, A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory, *Journal of Mechanical Design* 102 (4) (1980) 793–803. doi:10.1115/1.3254824.
- [46] L. M. Greenhill, W. B. Bickford, H. D. Nelson, A conical beam finite element for rotor dynamics analysis, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 107 (4) (1985) 421–430. doi:10.1115/1.3269283.
- [47] G. R. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory, *Journal of Applied Mechanics* 33 (2) (1966) 335–340. doi:10.1115/1.3625046.
- [48] S. Chen, J. Tang, Y. Li, Z. Hu, Rotordynamics analysis of a double-helical gear transmission system, *Meccanica* 51 (2015) 18 pages. doi:10.1007/s11012-015-0194-0.
- [49] P. Langer, M. Maeder, C. Guist, M. Krause, S. Marburg, More than six elements per wavelength: The practical use of structural finite element models and their accuracy in comparison with experimental results, *Journal of Computational Acoustics* 25 (04) (2017) 1750025. doi:10.1142/S0218396X17500254.
- [50] E. H. Love, The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 179 (A) (1888) 491–546. doi:10.1098/rsta.1888.0016.
- [51] G. R. Sinambari, S. Sentpali, *Ingenieurakustik - Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele [Engineering Acoustics - Physical Basics and Application Examples]*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2020.
- [52] R. R. Craig Jr, M. C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA journal* 6 (7) (1968) 1313–1319. doi:10.2514/3.4741.

- [53] W. C. Hurty, Dynamic analysis of structural systems using component modes, *AIAA Journal* 3 (4) (1965) 678–685. doi:10.2514/3.2947.
- [54] R. J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA journal* 3 (2) (1965) 380–380. doi:10.2514/3.2874.
- [55] Intel Corporation, Intel Math Kernel Library - Developer Reference, MKL 2020 - Revision 098 (2019).
- [56] M. Géradin, N. Kill, A new approach to finite element modelling of flexible rotors, *Engineering Computations* 1 (1984) 52–64. doi:10.1108/EB023560.
- [57] O. Reynolds, On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower’s experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 177 (1886) 157–234. doi:10.1098/rstl.1886.0005.
- [58] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Lubrication*, 1st Edition, National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical Information Program, New York, 1991.
- [59] M. M. Reddi, Finite-element solution of the incompressible lubrication problem, *Journal of Lubrication Technology* 91 (3) (1969) 524–533. doi:10.1115/1.3554977.
- [60] J. Argyris, D. Scharpf, Finite element formulation of the incompressible lubrication problem, *Nuclear Engineering and Design* 11 (2) (1970) 225–229. doi:10.1016/0029-5493(70)90146-9.
- [61] L. Gümbel, Das Problem der Lagerreibung [The problem of bearing friction], *Merkblatt Bezirksverband deutscher Ingenieure VDI 5* (1914) 87–104.
- [62] H. G. Elrod, A cavitation algorithm, *Journal of Lubrication Technology* 103 (3) (1981) 350–354. doi:10.1115/1.3251669.
- [63] A. L. Krinner, *Multibody systems with lubricated contacts: Cavitation, interface coupling, reduction and quasi-newton techniques*, PhD thesis, Technical University of Munich, Chair of Applied Mechanics, Munich, Germany (2018).

- [64] A. Bazoune, Y. Khulief, N. Stephen, Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element, *Journal of Sound and Vibration* 259 (2) (2003) 473–480. doi:10.1006/jsvi.2002.5122.
- [65] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera, A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method, In H. Brezis and J. Lions (eds.), *Nonlinear partial differential equations and their applications*, pages 13-51, Pitman/Wiley: London/New York, 1994.
- [66] B. Wohlmuth, A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38 (2000) 989–1012. doi:10.1137/S0036142999350929.
- [67] A. Popp, Mortar methods for computational contact mechanics and general interface problems, PhD thesis, Technical University of Munich, Chair of Numerical Mechanics, Munich, Germany (2012).
- [68] A. Beinstingel, M. Keller, M. Heider, B. Pinnekamp, S. Marburg, A hybrid analytical-numerical method based on isogeometric analysis for determination of time varying gear mesh stiffness, *Mechanism and Machine Theory* 160 (2021) 104291. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2021.104291.
- [69] C. Weber, K. Banaschek, Formänderung und Profilirücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern [The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity], Department of Scientific and Industrial Research: Sponsored research (11) (1953) 1–88.
- [70] T. F. Conry, A. Seireg, A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems, *Journal of Engineering for Industry* 95 (4) (1973) 1115–1122. doi:10.1115/1.3438259.
- [71] L. Chang, G. Liu, L. Wu, A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears, *Mechanism and Machine Theory* 87 (2015) 93–114. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2014.11.019.
- [72] Z. Chen, Y. Shao, Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack, *Mechanism and Machine Theory* 62 (2013) 63–74. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.012.

- [73] H. Ma, X. Pang, R. Feng, B. Wen, Evaluation of optimum profile modification curves of profile shifted spur gears based on vibration responses, *Mechanical Systems and Signal Processing* 70-71 (2016) 1131–1149. doi:10.1016/j.ymsp.2015.09.019.
- [74] J. D. Marafona, P. M. Marques, R. C. Martins, J. H. Seabra, Mesh stiffness models for cylindrical gears: A detailed review, *Mechanism and Machine Theory* 166 (2021) 104472. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2021.104472.
- [75] P. Sainsot, P. Velex, On contact deflection and stiffness in spur and helical gears, *Mechanism and Machine Theory* 154 (2020) 104049. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2020.104049.
- [76] W. J. Duncan, Galerkin’s method in mechanics and differential equations, *Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda* 1798 (1937) 484–516.
- [77] W.-J. Kim, N. Perkins, Harmonic balance/Galerkin method for non-smooth dynamic systems, *Journal of Sound and Vibration* 261 (2) (2003) 213–224. doi:10.1016/S0022-460X(02)00949-5.
- [78] T. J. Ypma, Historical development of the Newton–Raphson method, *SIAM Review* 37 (4) (1995) 531–551. doi:10.1137/1037125.
- [79] ISO-6336-1:2019-11(EN), Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors, Standard, International Organization for Standardization, Vernier, Geneva (Nov. 2019).
- [80] T. M. Cameron, J. H. Griffin, An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics* 56 (1) (1989) 149–154. doi:10.1115/1.3176036.
- [81] A. Beinstingel, R. G. Parker, S. Marburg, Experimental measurement and numerical computation of parametric instabilities in a planetary gearbox, *Journal of Sound and Vibration* 536 (2022) 117160. doi:10.1016/j.jsv.2022.117160.

- [82] J. Chung, G. M. Hulbert, A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-alpha method, *Journal of Applied Mechanics* 60 (2) (1993) 371–375. doi:10.1115/1.2900803.
- [83] C. G. Cooley, C. Liu, X. Dai, R. G. Parker, Gear tooth mesh stiffness: a comparison of calculation approaches, *Mechanism and Machine Theory* 105 (2016) 540 – 553. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021.
- [84] J. W. Lund, K. K. Thomsen, A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings, *Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization* (1978) 1–28.
- [85] D. W. Parkins, Theoretical and experimental determination of the dynamic characteristics of a hydrodynamic journal bearing, *Journal of Lubrication Technology* 101 (2) (1979) 129–137. doi:10.1115/1.3453289.
- [86] J. W. Lund, Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings, *Journal of Tribology* 109 (1) (1987) 37–41. doi:10.1115/1.3261324.
- [87] O. Ebrat, Z. P. Mourelatos, N. Vlahopoulos, K. Vaidyanathan, Calculation of journal bearing dynamic characteristics including journal misalignment and bearing structural deformation, *Tribology Transactions* 47 (1) (2004) 94–102. doi:10.1080/05698190490278994.
- [88] A. Mukherjee, J. Rao, Stiffness and damping coefficients of an inclined journal bearing, *Mechanism and Machine Theory* 12 (4) (1977) 339–355, dynamics of Rotors. doi:10.1016/0094-114X(77)90010-6.
- [89] D. Vetter, T. Hagemann, H. Schwarze, Potentials and limitations of an extended approximation method for nonlinear dynamic journal and thrust bearing forces, *Proceedings of the ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air (Oslo, Norway) Volume 7B: Structures and Dynamics* (2018) 12 pages. doi:10.1115/GT2018-75662.
- [90] J. D. Schmid, M. Luegmair, K. K. Sepahvand, S. Marburg, Uncertainty quantification in vibroacoustic analysis of a vehicle body using generalized polynomial chaos expansion, *SAE Technical Paper 2020-01-1572* (2020) 9 pages. doi:10.4271/2020-01-1572.