

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

TUM School of Engineering and Design

Getriebemodelle für Ähnlichkeitsbetrachtungen

Simon Korbinian Laudahn

Vollständiger Abdruck der von der TUM School of Engineering and Design der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitz: Prof. Dr.-Ing. Michael W. Gee

Prüfer der Dissertation: 1. Prof. Dr. rer. nat. Tim C. Lüth
2. Prof. Dr.-Ing. Mathias Hüsing

Die Dissertation wurde am 20.09.2022 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die TUM School of Engineering and Design am 27.02.2023 angenommen.

Für Moritz, Elisabeth und Otmar

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik der Technischen Universität München im Rahmen eines durch die Bayerische Forschungsförderung geförderten Projekts (AZ-1181-15). Dieses Projekt mit dem Titel „*Zeit- und kosteneffiziente Entwurfsprozesse für Gelenkstrukturen durch Integration von softwaregestütztem Kinematik-Design und Rapid Prototyping*“ erfolgte in Kooperation mit den Firmen Webasto Convertibles GmbH und BMW Group von März 2016 bis November 2019. Neben denen in der vorliegenden Arbeit und in Laudahn *et al.* (2019) beschriebenen Ähnlichkeitsuntersuchungen an Getriebemodellen, wurde im Projekt auch ein CAD-integriertes Auslegungswerkzeug für die Synthese und Analyse von ebenen Gelenkgetrieben entwickelt, das in Laudahn *et al.* (2017) und Laudahn *et al.* (2020) beschrieben wird. Der Aufbau des skalierten Getriebemodells und die Messungen aus Kapitel 5 fanden bei Webasto Convertibles GmbH in Hengersberg mit tatkräftiger Unterstützung von Herrn Franz Haberl statt.

Ich bedanke mich bei den Projektmitarbeitern der Industriepartner, allen voran Franz Haberl und Richard Haslauer, sowie Magnus Sviberg, Lukas Wiesenfeld, Johannes Haidl, Michael Buchner, Johann Minatti, Michael Antreich, Thomas Schnauffer und Dr. Florian Tesch.

Für die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bei der Prüfungskommission bestehend aus Herrn Prof. Dr. rer. nat. Tim C. Lüth, Herrn Prof. Dr.-Ing. Mathias Hüsing sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael W. Gee bedanken.

Besonders möchte ich mich bei meinen Kolleginnen und Kollegen Kassim Abdul-Sater, Valentin Ameres, Lukas Artman, Sandra Brecht, Suat Cömert, Samuel Detzel, Christian Dietz, Christina Hein, Markus Huber, Julian Ilg, Joachim Kreuzer, Yannick Krieger, Alexandra Mercader, Felix Pancheri, Christoph Parhofer, Christoph Rehekampff, Samuel Reimer, Dominik Rumschöttel, Andreas Schröfer, Simon Schiele, Konstantin Strübig, und Dingzhi Zhang für die wundervolle Gemeinschaft am Lehrstuhl, die ausgezeichnete Zusammenarbeit und den regen Austausch bedanken. Ganz besonderer Dank gilt hierfür auch Herrn Dr.-Ing. Franz Irlinger. Weiterhin bedanke ich mich sehr bei Renate Heuser sowie Gerhard Ribnitzky und Markus Wörl.

Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für ihren Rückhalt und dafür, dass sie immer für mich da sind.

Garching bei München, März 2023

Simon Laudahn

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Methode zum Aufbau von Modellen von Gelenkgetrieben beschrieben. Die betrachteten Getriebemodelle zeichnen sich dadurch aus, dass sie nicht nur die Bewegung des originalen Getriebes nachbilden, sondern auch ähnliche Verformungen und Antriebskräfte gegenüber dem Original aufweisen. Bei den Modellen werden sowohl Reibmomente in den Gelenken, externe Lasten auf das Getriebe als auch Eigengewicht der Getriebeglieder berücksichtigt.

Für die Skalierung der Getriebeglieder werden die Werkstoffeigenschaften von Modell und Original berücksichtigt, um die für die gewünschte Ähnlichkeit notwendige Kompatibilität zwischen elastischen Kräften und Gewichtskräften herzustellen. Zur Realisierung der skalierten Reibmomente in den Gelenken des Modells werden einheitliche Gelenkmodule verwendet, deren Reibmoment sich individuell auf den notwendigen Wert einstellen lässt.

Wie im Experiment gezeigt wird, soll es mit einem nach dieser Methode aufgebauten Getriebemodell möglich sein, bestimmte Messungen für die ein Aufbau des originalen Getriebes notwendig wäre, durch Messungen am Getriebemodell zu ersetzen.

Abstract

In this thesis a method for building models of linkages is described. The linkage models considered are characterized by the fact that they not only reproduce the motion of the original linkage, but also exhibit similar deformations and driving forces compared to the original. The models take frictional torques in the joints, external loads on the linkage as well as weight of the links into account.

In order to establish the compatibility between elastic forces and weight forces required for the desired similarity, the material properties of the model and the original are taken into account when scaling the links. Uniform joint modules are used to provide the scaled frictional torque in the joints of the model which can be adjusted individually to the required value.

As will be shown in the experiment, with a linkage model built according to this method it shall be possible to substitute certain measurements for which a setup of the original linkage would be necessary by measurements on the linkage model.

SIC PARVIS COMPONERE MAGNA SOLEBAM

– Vergil, ca. 40 v. Chr.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	III
Kurzfassung	IV
Abstract	V
Inhaltsverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
1.1 Getriebetechnik	2
1.1.1 Begriffsdefinition Getriebe	2
1.1.2 Einordnung der Getriebetechnik	3
1.1.3 Auslegung von Gelenkgetrieben	3
1.2 Ähnlichkeitsmechanik und Modellbau	5
1.2.1 Begriffsdefinition Modell	5
1.2.2 Begriffsdefinition Ähnlichkeit	6
1.2.3 Historische Ursprünge des technischen Modellbaus unter dem Gesichtspunkt der Ähnlichkeit	7
1.2.4 Systematische Generierung von dimensionslosen Kennzahlen	9
1.2.5 Modellbau und Ähnlichkeit in der Elastostatik und Festigkeitslehre	9
1.3 Stand der Technik des Getriebemodellbaus	12
1.3.1 Aufgaben des Getriebemodellbaus	12
1.3.2 Historische Entwicklung des Getriebemodellbaus	13
1.3.3 Werkstoffe und Fertigung von Getriebemodellen	14
1.3.4 Ähnlichkeitsmechanik und Getriebemodellbau	18
1.4 Nachteile des Stands der Technik	21
2 Der Aufbau von Getriebemodellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen	23
2.1 Aufgabenstellung	23
2.2 Eigener Ansatz	23
2.3 Abgrenzung	24
2.4 Erwartete Vorteile	24
3 Konzept	25
3.1 Strukturbeschreibung	25
3.1.1 Skalierungsvorschriften für das Modell	25
3.1.2 Prüfstand zur Vermessung des Reibmoments von Drehgelenken	26
3.1.3 Standardisierte Drehgelenke mit einstellbarem Drehmoment	27

3.2	Prozessbeschreibung	28
4	Realisierung	31
4.1	Analytische Ermittlung des Skalierungsfaktors	31
4.1.1	Maßstäbe	31
4.1.2	Betrachtungen am schubstarrten Biegebalken	32
4.1.3	Allgemein linear-elastischer Ansatz	43
4.2	Drehmomentprüfstand zur Vermessung von Drehgelenken	55
4.2.1	Auslegung des Drehmomentprüfstands	56
4.2.2	Realisierung des Drehmomentprüfstands	57
4.2.3	Messung mit dem Drehmomentprüfstand	59
4.3	Skalierung der Drehgelenke	62
5	Experimente	66
5.1	Versuchsaufbau und -vorbereitung	66
5.1.1	Anwendungsfall	66
5.1.2	Wahl des notwendigen Skalierungsfaktors	67
5.1.3	Vermessung der originalen Drehgelenke	68
5.1.4	Einstellen der skalierten Drehgelenke	70
5.1.5	Aufbau des skalierten Getriebemodells	70
5.2	Messungen	72
5.2.1	Messung des erforderlichen Antriebsmoments	72
5.2.2	Messung der Verformung unter statischer Last	77
5.2.3	Diskussion der Ergebnisse	80
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
6.1	Zusammenfassung	81
6.2	Ausblick	82
6.2.1	Einfluss der Querkontraktionszahl	83
6.2.2	Weiterentwicklung der Gelenkmodule	83
6.2.3	Ähnlichkeitsbetrachtungen an schnell bewegten Getriebe- modellen	83
6.2.4	Getriebemodelle mit formlabilen Komponenten	83
	Literatur	84
	Symbolverzeichnis	90
	Abkürzungsverzeichnis	92
A	Anhang	93

1 Einleitung

In einer Vielzahl von technischen Bereichen findet die Getriebetechnik Anwendung für die Erfüllung von Bewegungsaufgaben. Kerle *et al.* (2015, S. 3) nennen als Anwendungsbeispiele die „Feingerätetechnik, Fahrzeugtechnik, Textiltechnik, Verpackungsmaschinen, Land-, Druck-, Schneid-, Stanz- und Handhabungstechnik.“ In Abbildung 1.1 sind exemplarisch einige Beispielanwendungen gezeigt.

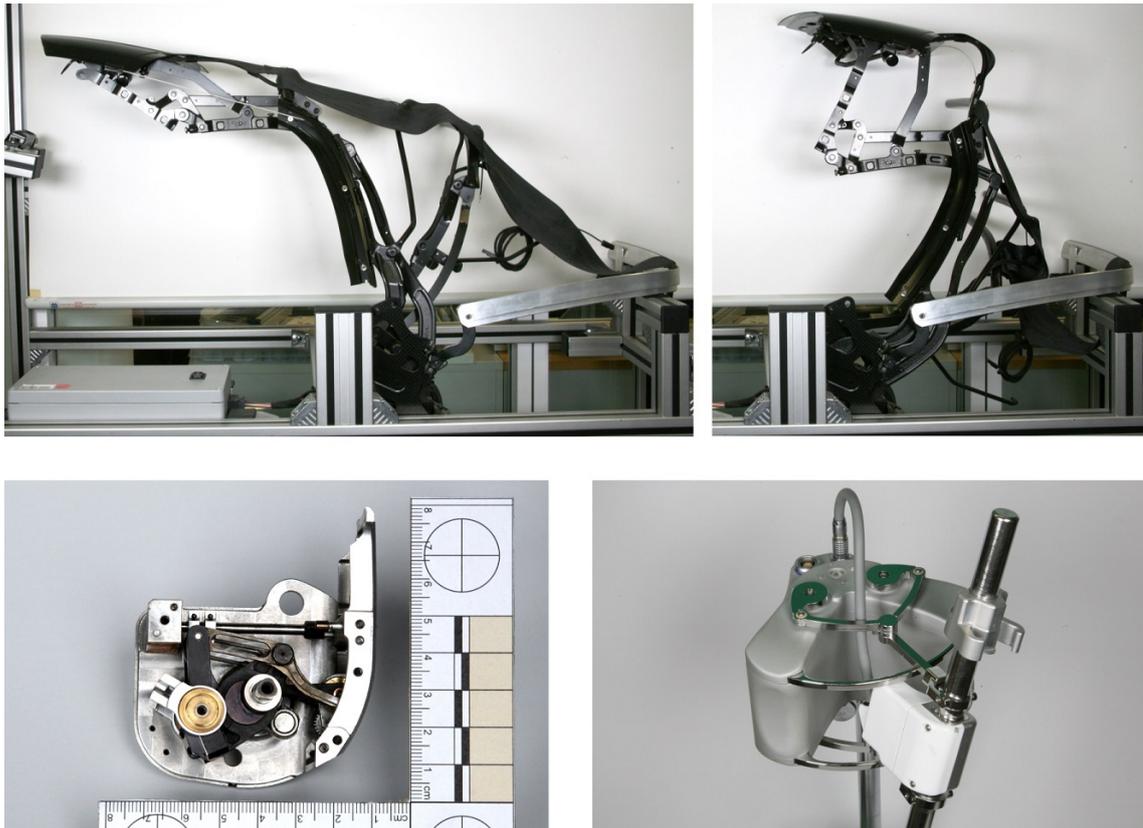


Abb. 1.1: Beispielanwendungen für Gelenkgetriebe. Oben: Cabrioüberdeckkinematik in zwei Stellungen der Bewegung. Unten links: Filmschaltwerk einer 35-mm-Kamera, beschrieben von Heinzl (1992). Unten rechts: Mechanismus einer Endoskopführung, beschrieben von Krinninger (2011).

Das Gelenkgetriebe eines Cabrioüberdecks ist der Fahrzeugtechnik zuzurechnen. Die Aufgabe dieses Getriebes ist es die Dachschalen und/oder Verdeckstoffe von der offenen in die geschlossene Konfiguration des Daches und zurück zu bewegen. Beispielhaft für eine Anwendung aus der Feingerätetechnik ist ein Filmschaltwerk einer 35-mm-Filmkamera gezeigt. Dieses hat die Aufgabe, den Film während der Belichtung eines Bildes festzuhalten und dann um ein Bild weiterzubewegen. Dieser Vorgang wiederholt sich üblicherweise mit einer Frequenz von 25 und mehr

Bildern pro Sekunde (Heinzl, 1992). Aus der Medizintechnik ist ein Mechanismus zum Positionieren und Orientieren eines Endoskops für die HNO-Chirurgie dargestellt, dessen Kinematik aus zwei ebenen Fünfgelenken und einer Linearführung besteht (Krinninger, 2011).

In diesem Kapitel wird zunächst in Abschnitt 1.1 auf den Begriff *Getriebe* im Sinne der vorliegenden Arbeit eingegangen und die ingenieurtechnische Disziplin der Getriebetechnik im Zusammenhang mit der Auslegung von Getrieben beschrieben. Es folgt in Abschnitt 1.2 die Definition der Begriffe *Modell* und *Ähnlichkeit*, wie diese in der Arbeit Verwendung finden. Außerdem wird in Abschnitt 1.2 der historische Ursprung des technischen Modellbaus im Zusammenhang mit Ähnlichkeit geschildert. Abschnitt 1.3 stellt den Stand der Technik des Getriebe-modellbaus dar. Hier wird auf die Aufgaben des Getriebe-modellbaus, dessen Entwicklungsgeschichte und die verwendeten Werkstoffe und Fertigungsverfahren eingegangen. Die Einleitung schließt mit den Nachteilen des Stands der Technik in Abschnitt 1.4.

1.1 Getriebetechnik

1.1.1 Begriffsdefinition Getriebe

Wie Kerle *et al.* (2009) anführen, kam der Begriff *Getriebe* als solcher erst im 19. Jahrhundert auf und wurde maßgeblich durch den Ingenieur Franz Reuleaux (1829 – 1905) geprägt. Weiter stellen Kerle *et al.* (2009) fest, dass der Begriff *Getriebe* im Deutschen nicht eindeutig ist, weil er in seiner Bedeutung die im Englischen verwendeten Begriffe „gears“ und „mechanisms“ umfasst.

Nach VDI-Richtlinie 2127 sind *Getriebe* „*Einrichtungen zum Umformen oder Übertragen von Bewegungen und Kräften und damit auch von Energie. Ein Getriebe besteht aus wenigstens drei gegeneinander beweglichen Gliedern*“. Weithin wird in der VDI 2127 angeführt, dass ein „*Getriebe (...) aus einer kinematischen Kette durch starre oder drehbewegliche Verbindung eines ihrer Glieder mit dem ruhenden Bezugssystem (...) entsteht*“. Ein Mechanismus wiederum ist nach VDI 2127 „*ein mechanisches System aus gelenkig verbundenen Gliedern, die ihre Lage relativ zueinander unter der Einwirkung von Kräften zur Erfüllung einer Funktion verändern können*“. In der Richtlinie wird allerdings angemerkt, dass die Begriffe *Mechanismus* und *Getriebe* häufig synonym verwendet werden, wobei der Begriff *Getriebe* eher bevorzugt wird, wenn das Durchsetzen von Energie im Vordergrund steht, und der Begriff *Mechanismus*, wenn es um das Erfüllen bestimmter Bewegungsbahnen oder Übertragungsfunktionen geht (VDI 2127, 1993).

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Gelenkgetrieben, die sich nach VDI 2127 dadurch auszeichnen, dass sie „*nur flächenförmig berührende oder darauf zurückführbare Dreh- oder Dreh- und Schubgelenke (haben)*“. Wird in der vorliegenden Arbeit verkürzt von Getrieben gesprochen, so sind damit Gelenkgetriebe gemeint.

1.1.2 Einordnung der Getriebetechnik

Kerle *et al.* (2015) ordnen die Getriebetechnik als eine grundlegende Ingenieurwissenschaft zwischen der Mechanik und der Konstruktion ein. Aufgabe der Getriebetechnik ist es laut Kerle *et al.* (2015) „die vielfältigen Erscheinungsformen der Getriebe zusammenzufassen, systematisch zu ordnen und Gesetzmäßigkeiten herauszuarbeiten“. Grob unterteilen lässt sich die Getriebetechnik in die Felder Getriebesystematik, Getriebeanalyse und Getriebesynthese.

Der strukturelle Aufbau von Getrieben ist Gegenstand der Getriebesystematik. So können Getriebe beispielsweise nach der Lage ihrer Gelenkachsen in ebene, sphärische und räumliche Getriebe eingeteilt werden. Weitere Charakteristika von Getrieben, die in der Getriebesystematik betrachtet werden, sind u. a. die Anzahl der Körper und Gelenke, die Art der Gelenke (Drehgelenk, Schubgelenk, etc.), die Struktur der kinematischen Kette des Getriebes und der Getriebefreiheitsgrad. (Kerle *et al.*, 2015)

Innerhalb der Getriebeanalyse geht es darum, Getriebe zu untersuchen, die in ihrem Aufbau und ihren Abmessungen bereits vorliegen. Eine weitere Unterteilung der Getriebeanalyse ist möglich in die Getriebekinematik (Bewegungen stehen im Vordergrund) und die Getriebedynamik (wirkende Kräfte stehen im Vordergrund). Insbesondere für ebene Getriebe können die vektoriellen Zusammenhänge zwischen Lagen, Krümmungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auch sehr anschaulich graphisch analysiert werden. Hierfür können neben den Längenabmessungen auch für die physikalischen Größen Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung Maßstäbe definiert werden. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Punkten des Getriebes können als Vektorpfeile graphisch konstruiert werden. Bei der computerunterstützten Getriebeanalyse kommen auch numerische Verfahren zum Lösen der kinematischen Zusammenhänge zum Einsatz.

Der Getriebesynthese liegt die Aufgabe zu Grunde aus den Anforderungen für eine Bewegung, sowohl die notwendige Getriebestruktur (Typsynthese und Struktursynthese) festzulegen, als auch die notwendigen kinematischen Abmessungen (Maßsynthese). Weiter lässt sich hier die konstruktive Auslegung von Gliedern und Gelenken für auftretende Beanspruchungen einordnen. (Kerle *et al.*, 2015)

1.1.3 Auslegung von Gelenkgetrieben

Computergestützte Hilfsmittel, die bei der Entwicklung von Gelenkgetrieben eingesetzt werden können, sind Programme zum rechnergestützten Konstruieren (CAD), Programme für Festigkeits- und Verformungsuntersuchungen mittels Finite-Elemente-Methode (FEM) oder Programme zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens mittels Mehrkörpersimulation (MKS).

Neben den vielseitig einsetzbaren Computerprogrammen für CAD, FEM und MKS, gibt es auch Softwarewerkzeuge, die den Konstrukteur speziell in den Auslegungsprozessen von Gelenkstrukturen unterstützen sollen. Diese Werkzeuge können bereits in CAD-Umgebungen integriert sein oder liegen als mehr oder we-

niger unabhängige *Stand-Alone*-Anwendungen vor, die über Datenaustauschmöglichkeiten zu anderer Software verfügen.

Der Auslegungsprozess von Gelenkgetrieben beginnt nach Abdul-Sater (2016) mit der Definition und Klassifikation der Bewegungsaufgabe. Basierend hierauf wird in der Struktursynthese eine geeignete Getriebestruktur ausgewählt. Im Anschluss werden die kinematischen Abmessungen der Getriebestruktur synthetisiert. Das Getriebe wird dann kinematisch analysiert und bewertet. Kriterien für die Bewertung während der Analyse können beispielsweise das Erreichen von geforderten Posen der Körper oder das Übertragungsverhalten des Getriebes sein. Falls die gefundene GetriebeLösung laut Analyse unzureichend ist, wird der Auslegungsprozess iterativ angepasst und wiederholt. Der Auslegungsprozess und seine Iterationen können durch computergestützte Methoden beschleunigt werden. Sobald das Ergebnis der Analyse hinreichend gut ist, kann mit dem Musterbau des Getriebes begonnen werden. Dieser Prozess von Abdul-Sater (2016) ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

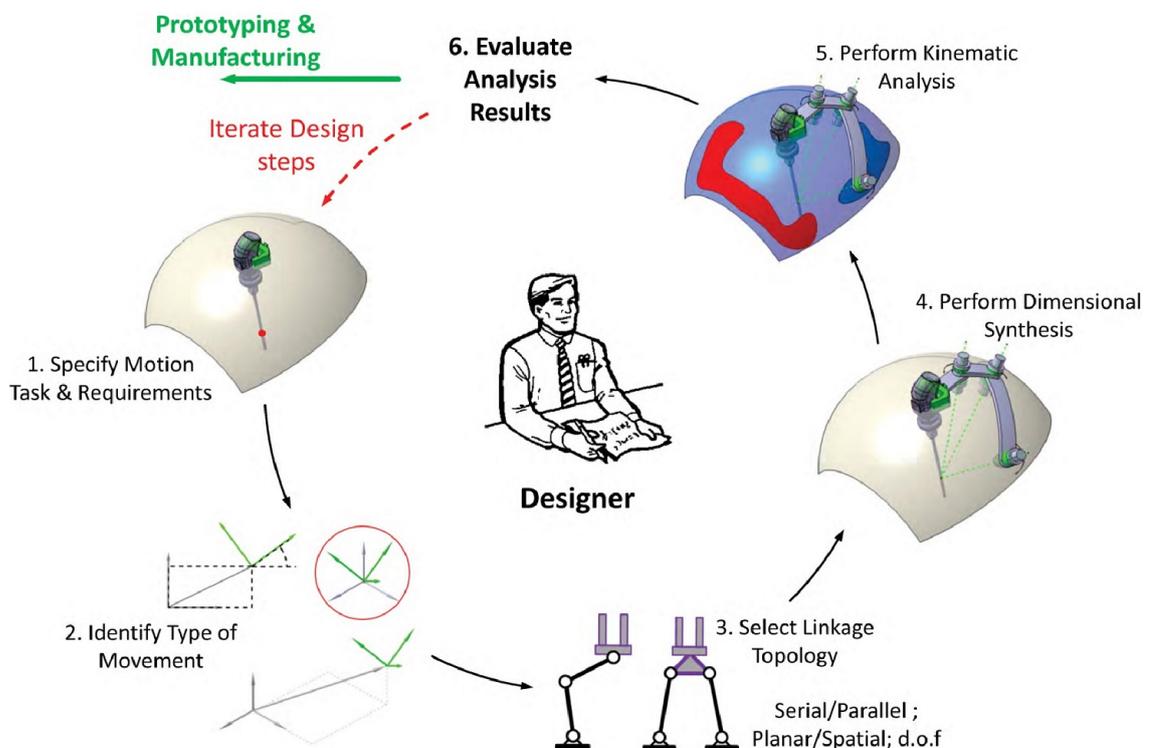


Abb. 1.2: Eine qualitative Darstellung des kinematischen Auslegungsprozesses für Gelenkstrukturen basierend auf einer Bewegungsaufgabe. Entnommen aus Abdul-Sater (2016, S. 5)

Bevor auf Basis der virtuellen Auslegung ein Prototyp der Kinematik aufgebaut wird, können physische Modelle dazu dienen, die theoretischen und simulativen Untersuchungen abzusichern und zu bewerten. Modellbau kann auch schon in frühen Phasen des Auslegungsprozesses erfolgen. Am Beispiel der Auslegung der

Kinematik eines Cabriooverdecks beschreibt Gebhardt (2016) ein Vorgehen, das die Verwendung unterschiedlicher additiv gefertigter Modelle für verschiedene Entwicklungsschritte vorsieht:

1. Die Abstimmung des konzeptionellen Ansatzes und der gestalterisch-technischen Lösung durch ein Konzeptmodell
2. Die Evaluierung der Daten durch ein Datenkontrollmodell
3. Die Absicherung der Kinematik durch ein Funktionsmodell
4. Gegebenenfalls Detailabsicherungen durch zusätzlich definierte Modelle
5. Der Bau und der Test eines seriennahen Prototyps zur Freigabe der Produktion.

(Gebhardt, 2016, S. 384)

Das dreidimensionale Konzept- und Datenkontrollmodell in Gebhardts Beispiel ist im Maßstab 1:50 aus Polyamid lasergesintert und nicht beweglich. Es soll in erster Linie zur Kommunikation des gestalterischen und konstruktiven Ansatzes mit den anderen Entwicklern, Designern und Zulieferern dienen und ist in der Regel aussagekräftiger als ein zweidimensionales Bild. Das bewegliche Funktionsmodell in diesem Beispiel ist im Maßstab 1:1 und ebenfalls aus Polyamid lasergesintert, wobei Bolzen, Scheiben und Schrauben aus Metall für den Aufbau der Gelenke verwendet werden. Auch wenn das Gewicht und die Steifigkeiten noch nicht dem späteren Prototypen entsprechen, kann das Funktionsmodell ein Gefühl für die Bewegung vermitteln und das bisherige Konzept absichern. (Gebhardt, 2016, S. 384f.)

1.2 Ähnlichkeitsmechanik und Modellbau

In diesem Abschnitt wird anhand einiger Beispiele gezeigt, in welchen Bereichen Ähnlichkeitsbetrachtungen und Modellbau für technische Anwendungen im Einsatz sind. Zum einen zeigt sich hier, anhand der Breite von unterschiedlichen Anwendungsgebieten die Universalität dieser Methoden und zum anderen aus historischer Sicht die kontinuierliche Bedeutung dieser Disziplin, stets eng verwachsen mit dem technischen Fortschritt, bis in die Gegenwart.

Zunächst wird in Abschnitt 1.2.1 der Begriff des *Modells* und in Abschnitt 1.2.2 der Begriff *Ähnlichkeit* definiert, wie diese im Weiteren Verwendung finden. Es folgt eine Schilderung der historischen Ursprünge des technischen Modellbaus für die Verwendung von Ähnlichkeitsbetrachtungen in Abschnitt 1.2.3 und die Beschreibung einer theoretischen, allgemeinen Methode zur Generierung von dimensionslosen Kennzahlen für Ähnlichkeit in Abschnitt 1.2.4. Der Abschnitt 1.2.5 beschränkt sich auf Beispiele für Ähnlichkeitsbetrachtungen an Modellen aus dem Bereich der Elastostatik und Festigkeitslehre, da die Betrachtungen im Hauptteil der vorliegende Arbeit auch in dieses Themengebiet einzuordnen sind.

1.2.1 Begriffsdefinition Modell

Im Sprachgebrauch ist *Modell* ein facettenreicher Begriff der in verschiedenen Kontexten unterschiedliche Verwendung findet. Das Magazin *Kunst & Kultur* des

Deutschen Museums beschäftigte sich in der zweiten Ausgabe 2021 mit Modellen und ihrer Bedeutung. In ihrem dortigen Beitrag stellt Henning (2021) dar, dass der Begriff *Modell* für vieles verwendet wird. Exemplarisch werden hier einige Arten von Modellen genannt wie das Gipsmodell in der Bildhauerei, Eisenbahnmodelle, Klimamodelle, Atommodelle, Modelle von Modeschauen oder Modelle in der Psychologie. Die Autorin führt aus, dass Modelle zum einen physische Gegenstände, aber auch virtueller/theoretischer Natur sein können.

Nach Stachowiak (1973, S. 131–133) zeichnet sich der allgemeine Begriff des *Modells* durch drei Hauptmerkmale aus. So sind Modelle stets eine Abbildung oder Repräsentation eines Originals. Des Weiteren müssen Modelle nicht alle Eigenschaften des Originals aufweisen. Außerdem ist eine eindeutige Zuordnung von Modell zu Original unter Umständen nur für bestimmte Personen, innerhalb bestimmter Zeitintervalle oder für bestimmte Anwendungen gegeben.

In Ludwig *et al.* (2014b) werden 32 Beiträge zusammengestellt, die die Verwendung von *materiellen Modellen* aus Universitäts-sammlungen in unterschiedlichen fachlichen Disziplinen und zeitlichen Zusammenhängen darstellen. Als *materielles Objekt* bezeichnen die Herausgeber in ihrem einleitenden Beitrag etwas, das ein physisch dreidimensionales, greifbares oder stoffliches Objekt ist. Zum *materiellen Modell* wird ein materielles Objekt durch seine Verwendung als Modell. Die materiellen Modelle können dabei unterschiedlichen Zwecken dienen, wie beispielsweise der Dokumentation von Forschungsergebnissen, dem Experimentieren, zur Ausbildung in der Lehre oder zur Präsentation in der Öffentlichkeit. (Ludwig *et al.*, 2014a)

Die im Hauptteil der vorliegenden Arbeit behandelten Modelle lassen sich in die obigen Definitionen einordnen. Zum einen sind die Modelle der Getriebe physische Objekte und können somit als *materielle Modelle* bezeichnet werden. An den Modellen sollen Messungen durchgeführt werden, die auf das Original übertragen werden können. Sie dienen somit dem Experimentieren. Zum anderen sind sie ein Abbild eines Originals, das aber nicht alle Eigenschaften dessen aufweist. Die Modelle können größer oder kleiner als die jeweiligen Originale sein und aus anderen Werkstoffen bestehen. Auch werden die Gelenke der Modelle im Allgemeinen zwar in ihrer Funktion (z. B. Drehgelenk), aber nicht im Detail in ihrem konstruktiven Aufbau von den Originalen übernommen.

1.2.2 Begriffsdefinition Ähnlichkeit

So wie der Begriff *Modell* ist auch der Begriff *Ähnlichkeit* im Sprachgebrauch kontextabhängig. Eine anschauliche Beschreibung des Begriffs *Ähnlichkeit* findet sich bei Matz (1954, S. 2 f.). So ist mit dem Wort *Ähnlichkeit* umgangssprachlich meistens die geometrische Ähnlichkeit gemeint. Als Beispiel nennt er unter anderem zwei Schränke, die ähnlich zueinander sind, wenn alle Verhältnisse entsprechender Kantenlängen gleich sind. Auch alle Kreise mit beliebigen Durchmessern sind zueinander (geometrisch) ähnlich. Diese geometrische Ähnlichkeit zwischen zwei Objekten kann über das dimensionslose Verhältnis von zwei Längen ausgedrückt werden. Die alleinige Betrachtung der geometrischen Ähnlichkeit ist laut Matz nicht

ausreichend, wenn sich Modellausführung und Hauptausführung einer Apparatur im Gesamten ähnlich verhalten sollen. Dann sind auch physikalische und chemische Ähnlichkeiten notwendig und es müssen auch Verhältnisse zwischen anderen physikalischen Größen betrachtet werden.

Eine formale Definition von *physikalisch ähnlichen Systemen* („*physically similar systems*“) findet sich bei Buckingham (1914). Nach Buckingham sind zwei Systeme, die jeweils durch eine Anzahl von physikalischen Größen beschrieben sind, dann zueinander physikalisch ähnlich, wenn die Beziehungen zwischen diesen Größen in jedem der beiden Systeme die gleiche Form aufweisen und durch die selben Gleichungen beschreibbar sind. In Abschnitt 1.2.4 wird auf eine Methode eingegangen, mit der dimensionslose Verhältnisse, sogenannte Kennzahlen, bestimmt werden können, die diese physikalischen Ähnlichkeiten zwischen zwei Systemen ausdrücken.

1.2.3 Historische Ursprünge des technischen Modellbaus unter dem Gesichtspunkt der Ähnlichkeit

In diesem Abschnitt soll anhand historischer Beispiele und der Entwicklungsgeschichte der Ähnlichkeitsmechanik die technische Anwendung der *Ähnlichkeit* im Zusammenhang mit materiellen Modellen erläutert werden.

In einem Artikel der Zeitschrift *Nature* von 1915 stellt John Strutt (Rayleigh) die These auf, dass die Bedeutung der Prinzipien der Ähnlichkeit in der Physik häufig zu wenig Beachtung findet. Er führt an, dass viele Ergebnisse, die in Form von Gesetzmäßigkeiten aus aufwendigen Experimenten gewonnen werden, auch durch wenige Minuten des Überlegens hätten vorausgesagt werden können. Er belegt dies mit einige Beispielen von solchen physikalischen Gesetzmäßigkeiten aus unterschiedlichen Fachgebieten. (Strutt, John 3. Baron Rayleigh, 1915)

Weber (1918, S. 12) schreibt in seinem Manuskript im Abschnitt über die geschichtliche Entwicklung der Ähnlichkeitsmechanik, dass bereits in den *Mechanica problemata* von Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) die Biegung an geometrisch ähnlichen Holzstäben beschrieben wurde. Ebenso befasste sich nach Weber (1918, S. 12) auch Galilei 1638 in seinen *Discorsi* mit Ähnlichkeitsbetrachtungen und stellte fest, dass sich Festigkeit und Abmessungen eines Bauteils beim Skalieren nicht im gleichen Verhältnis verändern. Isaac Newton verwendete laut Weber (1918, S. 12) den Begriff „mechanische Ähnlichkeit“ 1687 in seinen *Principia* und stellte Bedingungen und Gesetzmäßigkeit dazu auf. Newton beschrieb, dass sich die vier Größen Länge, Zeit, Kraft und Masse für die Betrachtung der Ähnlichkeit zweier Vorgänge in entsprechenden Verhältnissen befinden müssen, beschäftigte sich aber nicht damit, ob und wie diese Bedingungen auch für praktische Anwendungsfälle realisierbar seien. Weiter führt Weber (1918, S. 12) aus, dass Cauchy 1829 basierend auf den Arbeiten von Savart zeigte, dass sich Schwingungen von elastischen Gefäßen an geometrisch ähnlichen Modellen auch mechanisch ähnlich nachbilden lassen. Joseph Bertrand baute 1847 auf Newtons Gesetzmäßigkeiten und Cauchys Arbeit auf und hob die praktische Bedeutung der Modellgesetze für die Anwendung hervor. Weiterhin nennt Weber (1918, S. 13 f.) William Froude,

Hermann von Helmholtz und Osborne Reynolds, die jeweils Beiträge zur Ähnlichkeitsmechanik geliefert haben. (Weber, 1918, S. 12 ff.)

Wie in einem zweiteiligen Nachruf auf den britischen Ingenieur William Froude in einem Artikel („William Froude“ 1879) in der Zeitschrift *Nature* zu lesen ist, gelang es Froude als Erstem, nach erfolglosen Versuchen durch (Daniel) Bernoulli, Euler, Moseley und anderen, die Bewegungsgesetze von Schiffen auf See erfolgreich zu beschreiben. Zunächst beschäftigte sich Froude mit der Rollbewegung von Schiffen bei Seegang (Froude, 1862). Bevor diese Gesetzmäßigkeiten beschrieben wurden, mussten Schiffsbauer viele ihrer Entscheidungen beim Bau eines neuen Schiffs auf Vermutungen und unbelegte Behauptungen stützen. Das tatsächliche Verhalten und die Sicherheit eines neuen Schiffs offenbarte sich erst nach dessen Stapellauf. Im zweiten Teil des Nachrufs in *Nature* („William Froude“ 1879) wird auf Froudes Beschreibung des Strömungswiderstands eingegangen, den ein Körper bei der Bewegung durch Wasser erfährt (siehe Ergebnisse zusammengefasst in Froude und Froude (1888)). Froude führte eine Vielzahl von Schleppversuchen an unterschiedlichen verkleinerten Modellschiffsrümpfen und 1871 auch mit einem realen Schiff durch. Mit diesen Versuchen konnte er zeigen, dass der maßgebliche Widerstand, den ein Schiff bei höheren Geschwindigkeiten erfährt, neben Reibung und Wirbelbildung, nicht durch die notwendige Arbeit für das Verdrängen des Wassers vor dem Schiff, sondern durch die Erzeugung von Wellen durch das Schiff verursacht wird. Laut Froude erzeugen zwei unterschiedlich große, aber geometrisch ähnliche Schiffsrümpfe ein ähnliches Wellenbild und erfahren somit einen ähnlichen Widerstand, wenn das Verhältnis der Wurzeln ihrer Längenabmessungen zu ihren Geschwindigkeiten gleich groß ist. („William Froude“ 1879)

Die dimensionslose Kennzahl, die diese Ähnlichkeit ausdrückt wird heute als Froude-Zahl Fr bezeichnet. Sie beschreibt das Verhältnis von Trägheitskraft zu Gravitationskraft und es finden sich in der Literatur zwei äquivalente Definitionen für ihre Berechnung:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}} \quad (1.1)$$

und

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l} \quad (1.2)$$

wobei v die Geschwindigkeit, l eine charakteristische Längenabmessung und g die Erdbeschleunigung sind. Teilweise wird diese Kennzahl auch nach Frédéric Reech benannt und als Reech-Zahl bezeichnet. (Hall, 2000, S. 174)

In einem Artikel legt Normand (1888) dar, dass die theoretischen Ähnlichkeitsbetrachtungen, die von Froude beschrieben und durch dessen Experimente bestätigt wurden, schon einige Jahre vorher vom französischen Ingenieur Frédéric Reech gezeigt wurden.

In seinem Lehrbuch *Cours De Mécanique* beschreibt Reech (1852, S. 265 ff.) im letzten Kapitel allgemeine Ähnlichkeitsgesetze der Statik und Dynamik für geo-

metrisch ähnliche Modelle. Reech kommt, so wie Froude durch seine Experimente einige Jahre später, zu dem Schluss, dass für Ähnlichkeitsbetrachtungen an einem Schiffsmodell, das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Original und Modell gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Längenabmessungen von Original und Modell sein muss.

1.2.4 Systematische Generierung von dimensionslosen Kennzahlen

Eine Methode mit der systematisch dimensionslose Kennzahlen, wie beispielsweise die Froude-Zahl, für einen physikalische Vorgang gewonnen werden können, ist *Buckinghams Π -Theorem*, welches von Buckingham (1914) formalisiert wurde. Basierend auf der Anzahl m der relevanten physikalischen Größen (beispielsweise Länge, Dichte, Kraft, Druck, ...) für einen betrachteten Vorgang und der Anzahl k der in diesen Größen enthaltenen, voneinander unabhängigen Basisgrößen, können mit der Methode $i = m - k$ unabhängige dimensionslose Kennzahlen für diesen Vorgang aufgestellt werden.

Wie Buckingham (1914) am Beispiel einer Schiffsschraube zeigt, können diese dimensionslosen Kennzahlen ohne Experimente anhand der sieben für dieses Beispielproblem relevanten physikalischen Größen (Schubkraft F , Drehzahl n und Durchmesser D der Schraube, Fluidichte ρ und -viskosität μ , Geschwindigkeit über Grund S und Erdbeschleunigung g) bestimmt werden. Unter Verwendung von ρ , D und S als unabhängige Basisgrößen, erhält Buckingham mit seiner Methode die vier dimensionslosen Kennzahlen $\Pi_1 = (\rho \cdot D^2 \cdot S^2)/F$, $\Pi_2 = (D \cdot n)/S$, $\Pi_3 = (\rho \cdot D \cdot S)/\mu$ und $\Pi_4 = (D \cdot g)/S^2$ (Anmerkung: Π_4 entspricht der inversen Froude-Zahl aus Gleichung (1.2)). Für das genaue Vorgehen bei dieser formalen Methode sei auf Buckingham (1914) verwiesen.

Werden in Buckinghams Beispiel mit der Schiffsschraube beliebige der sieben physikalischen Größen variiert, aber in einer Art und Weise, dass alle dimensionslosen Kennzahlen Π_1 bis Π_4 unverändert bleiben, so verhält sich das neue System nach wie vor ähnlich zum ursprünglichen System. Gegebenenfalls müssen noch weitere Relationen, wie beispielsweise die geometrische Ähnlichkeit der Schiffsschraube, gewahrt werden. Das heißt, dass alle übrigen Längenabmessungen der Schiffsschraube gleich skaliert werden, wie ihr Durchmessers D . Buckingham zeigt am gleichen Beispiel auch, wie die gewonnenen Kennzahlen für Untersuchungen an einem skalierten Modell der Schiffsschraube verwendet werden können, die Rückschlüsse auf das Original zulassen. Weiter wendet Buckingham (1914) seine Methode auf Beispiele aus den Bereichen Elektrodynamik, Teilchenphysik und Wärmetransport an.

1.2.5 Modellbau und Ähnlichkeit in der Elastostatik und Festigkeitslehre

Nachdem in den vorhergehenden beiden Abschnitten allgemein auf die historischen Ursprünge und frühe Anwendungen von Ähnlichkeitsbetrachtungen und Modellbau eingegangen wurde, soll im Folgenden eine Beschränkung auf Anwendungsbeispiele im Bereich der Elastostatik und Festigkeitslehre erfolgen. Die Beispiele des Abschnitts sind chronologisch geordnet.

Ein frühes Beispiel findet sich bei Weber (1918, S. 96 ff.) anhand einer theoretischen Betrachtung einer Eisenbahnbrücke, die von einer Lokomotive überquert wird. Berücksichtigt werden Gravitationskräfte und elastische Kräfte. Die Brücke soll als prismatischer Balken modelliert sein. Verwendung finden dabei das Froude'sche Modellgesetz (Ähnlichkeit von Trägheitskräften und Schwerkraften, vgl. Weber (1918, S. 34 ff.)):

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l} \quad (1.3)$$

und das Cauchy'sche Modellgesetz (Ähnlichkeit von Trägheitskräften und Elastizitätskräften, vgl. Weber (1918, S. 54 ff.)):

$$Ca = \frac{v^2 \cdot \rho}{E} \quad (1.4)$$

Die von Weber verwendeten Formelzeichen wurden in die Notation der vorliegenden Arbeit überführt. Hierbei sind v die Geschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung, l ein charakteristisches Längenmaß, ρ die Werkstoffdichte und E der Elastizitätsmodul.

Für den geometrischen Maßstab zum Aufbau des Modells, ausgedrückt als das Verhältnis der Längenabmessungen von originaler Hauptausführung (Index H) zu skaliertem Modell (Index S), ergibt sich daraus laut Weber (1918, S. 96 ff.), dass dieses von den Kennwerten der verwendeten Werkstoffe abhängt und

$$\frac{l_H}{l_S} = \frac{E_H \cdot \rho_S}{E_S \cdot \rho_H} \quad (1.5)$$

betragen muss. Für die Beispielrechnung werden als Werkstoffe für die Hauptausführung der Brücke und der Lokomotive Stahl ($E_H = 2050 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2$, $\rho_H = 7850 \text{ kg/m}^3$)¹ und für das Modell Aluminium ($E_S = 683 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2$, $\rho_S = 2560 \text{ kg/m}^3$) verwendet. Es ergibt sich, dass für diese gewählte Werkstoffkombination das Verhältnis der Längenabmessungen zwischen Hauptausführung und Modell bei ungefähr 1 liegen muss:

$$\frac{l_H}{l_S} = \frac{E_H}{E_S} \cdot \frac{\rho_S}{\rho_H} = \frac{2050 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2}{683 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2} \cdot \frac{2560 \text{ kg/m}^3}{7850 \text{ kg/m}^3} \approx 3 \cdot \frac{1}{3} \approx 1 \quad (1.6)$$

Somit muss das Modell zur Erfüllung der geforderten Ähnlichkeit in seinen Abmessungen ungefähr gleich groß sein wie das Original. Weber (1918, S. 97) schließt das Beispiel mit der Aussage, dass man durch Verwendung eines anderen Modellwerkstoffs ein anderes Verhältnis von ungefähr 2 erzwingen könne, dies aber keine brauchbare Lösung der Aufgabe sei. Statt dieser „strengen mechanisch ähnlichen Nachbildung“ verweist Weber (1918, S. 97) auf das Verfahren der „unvollständigen

¹Die Einheit kg/m^2 für den Elastizitätsmodul wird so von Weber (1918) verwendet.

mechanischen Ähnlichkeit“, das im Lehrbuch von Routh (1897, S. 294), ebenfalls am Beispiel an einer von einer Lokomotive überfahrenen Eisenbahnbrücke, zu finden ist.

In diesem Beispiel werden die Länge l und die Masse m der originalen Brücke und des Brückenmodells vorgegeben. Weber (1918, S. 112) betrachtet die Brücke bei der Erörterung des Beispiels von Routh als Balken. Die maximale Durchbiegung der Brücke im Modell soll um den gleichen Faktor skaliert sein, wie die Länge des Brückenmodells gegenüber der originalen Brücke. Dies ist allgemein nur möglich, wenn die Querschnittsabmessungen der Brücke mit einem anderen Faktor als die Länge der Brücke skaliert werden. Dadurch sind die originale Brücke und ihr Modell nicht mehr geometrisch ähnlich. Vielmehr muss die Biegesteifigkeit $E_S \cdot I_S$ (E : Elastizitätsmodul, I : Flächenträgheitsmoment) der Modellbrücke derart eingestellt werden, dass dieses zur vorgegebenen Skalierung der Gewichtskräfte bzw. Massen und Skalierung der Brückenlänge passt:

$$\frac{E_H \cdot I_H}{E_S \cdot I_S} = \frac{m_H}{m_S} \cdot \left(\frac{l_H}{l_S}\right)^2 \quad (1.7)$$

Somit kann ein Brückenmodell mit beliebig skaliertem Länge aufgebaut werden, das zwar geometrisch nicht mehr ähnlich zum Original ist, aber eine im Bezug auf die Brückenlänge geometrisch ähnliche Durchbiegung unter Last wie das Original aufweist.

Im Bereich des Bauingenieurwesens finden sich weitere Anwendungen von Modellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen. Fumagalli (1960) beschreibt, wie bei der Konstruktion von Bauwerken verschiedene Arten von Modellen für unterschiedliche Betrachtungen verwendet werden können. So ergänzen sich diese unterschiedlichen Arten von Modellen für die Untersuchung von rein elastischen Verformungen hin zu den plastischen Verformungen und weiter bis zum Werkstoffversagen. Je nachdem was mit dem konkreten Modell untersucht werden soll, wird neben eines Skalierungsmaßstabs für die Längenabmessungen (z. B. geometrische Abmessungen, Verschiebungen) auch ein Skalierungsmaßstabs für mechanische Spannungen (z. B. Normalspannungen, Elastizitätsmodule, Zugfestigkeiten) verwendet. Die Modelle können hierbei auch aus anderen Materialien als das Original bestehen. (Fumagalli, 1960)

Im Lehrbuch von Fumagalli (1973) finden sich Beispiele von Modellen von großen Betonbauwerken, wie beispielsweise Dämmen, Brücken und Hochhäusern, aber auch historischen Steinbauwerken wie Kathedralen. Für den Originalwerkstoff Beton werden für die Modelle beispielsweise Werkstoffe wie Zelluloid, Gummi und verschiedene Thermo- und Duroplaste vorgeschlagen, wobei laut Fumagalli (1973, S. 15) die größte Einschränkung dieser Modellwerkstoffe, die abweichende Querkontraktionszahl (Bereich 0,35 – 0,48) gegenüber der von Beton (0,2) ist. Weiterhin können die Werkstoffeigenschaften der Modelle durch Füllstoffe gezielt beeinflusst werden (Fumagalli, 1973, S. 18).

Weitere Anwendungen in denen Ähnlichkeitsbetrachtungen an Modellen im Be-

reich der Elastostatik verwendet werden, finden sich beispielsweise für Tragluft-hallen (Gerhardt *et al.*, 1977), laminierte Platten- und Schalenelemente für Luft-fahrtanwendungen (Simitzes *et al.*, 2001), Modellflugzeugtragflächen (Gang *et al.*, 2010), große Strukturbauteilen von Bohrinseln (Shehadeh *et al.*, 2015) oder I-Träger aus Verbundwerkstoff für Windkraftanlagen (Eydani Asl *et al.*, 2017).

1.3 Stand der Technik des Getriebemodellbaus

In den folgenden Abschnitten wird der Stand der Technik des Getriebemodellbaus beschrieben. Zunächst wird in Abschnitt 1.3.1 auf den Zweck von Getriebemodel-len eingegangen. In Abschnitt 1.3.2 folgt die historische Entwicklungsgeschichte des Getriebemodellbaus. Anhand einiger Beispiele wird in Abschnitt 1.3.3 gezeigt, welche Werkstoffe beim Aufbau von Getriebemodellen zum Einsatz kommen. Der Abschnitt 1.3.4 hat den Modellbau von Getrieben mit Ähnlichkeitsbetrachtungen zum Inhalt.

1.3.1 Aufgaben des Getriebemodellbaus

Im Abschnitt 1.2.1 wird allgemein der Begriff des *Modells* für die vorliegende Ar-beit definiert. Speziell für *technische Modelle* fassen Kerle *et al.* (2009) aus Eugene Fergusons Buch *Engineering and the Mind's Eye* zusammen, dass diese vor allem zwei Zwecken dienen: Zum einen werden technische Modelle verwendet, um Informationen an diejenigen Personen zu übermitteln, die mit dem Aufbau und dem Betrieb der Maschine im Originalmaßstab betraut sind. Zum anderen sollen technische Modelle Ideen und Prinzipien vermitteln und den Betrachter an für ihn neue Zusammenhänge heranzuführen. Modelle leisten dies durch taktile und visuelle Übertragung von Informationen.

Bezogen auf Modelle von Getrieben fassen Kerle *et al.* (2009) aus der Literatur zu-sammen, dass ein Getriebemodell „die Hauptfunktion(en) bei der Übertragung einer Bewegung vom Antrieb zum Abtrieb (Bewegungswandlung) eines Originals erkennen lassen (soll)“. Dies kann erreicht werden, wenn Original und Modell geometrisch ähnlich zueinander sind. Das Modell muss dafür aber nicht notwendigerweise im Maßstab 1:1 vorliegen. Steht die Bewegungsübertragung und nicht die Kraft-übertragung im Vordergrund und die Glieder und Gelenke des Modells werden weniger beansprucht, so können auch andere Materialien für das Modell verwen-dete werden, als jene beim Original.

Bezüglich des Einsatzzweckes unterscheiden Kerle *et al.* (2009) die Getriebemodel-le in die *Lehr- und Anschauungsmodelle*, die in der Regel einfach und kostengünstig herstellbar sind, und die *Versuchs- und technologischen Modelle*, die dem Original bis auf den Maßstab sehr nahe kommen. *Versuchs- und technologische Modelle* können das Original bei bestimmten messtechnischen Versuchen ersetzen. Eine weitere Möglichkeit der Einteilung von Getriebemodellen, die Kerle *et al.* (2009) vorneh-men, ist in die Kategorien *virtuelle Modelle (Skizzen und Zeichnungen/Abbildungen)*, *reale physische Modelle (Lehr- und Versuchsmodelle)* und *künstliche physische Modelle (Rapid-Prototyping-Modelle)*.

1.3.2 Historische Entwicklung des Getriebemodellbaus

Eine Zusammenfassung zur Entwicklungsgeschichte der Getriebemodelle findet sich bei Kerle *et al.* (2009), die sich maßgeblich an historischen Schilderungen von Klaus Mauersberger und Eugene Ferguson orientiert. Wie Kerle *et al.* (2009) anführen, dienten vor dem Aufkommen von physischen Modellen sogenannte „Maschinenbücher“ mit teils aufwendigen Abbildungen von Maschinen zur Sammlung und Weitergabe des technischen Wissens. Genannt werden die Werke von Georgius Agricola (1494 – 1555), Jacques Besson (1540 – ca. 1576) und Agostino Ramelli (1531 – 1600), Heinrich Zeising (? – ca. 1613), Georg Andreas Böckler (ca. 1620 – ca. 1687) und Jacob Leupold (1674 – 1727).

Den Ursprung von physischen Getriebemodellen sehen Kerle *et al.* (2009), mit Verweis auf das Buch *Engineering and the Mind's Eye* von Eugene Ferguson, im 17. Jahrhundert mit dem verstärkten Einsatz von Maschinen im Bergbau. Wie Ferguson (1993, S. 135) schildert, wurden „Wasserwerke“ benötigt, um Grundwasser aus den immer tieferen Bergwerksschächten zu fördern. Modelle von diesen Maschinen dienten zur Ausbildung und Belehrung von Montanteknikern. Es erfolgten auch öffentliche Ausstellungen dieser bis zu 3 m hohen funktionsfähigen Modelle. Teilweise waren diese Modelle Realisierungen von Abbildungen aus Maschinenbüchern von Besson, Ramelli, Böckler und anderen. Gegen Ende des 17. Jahrhunderts wurde der Bau von Modellen stellenweise standardisiert und Ausstellungen der Modelle wurden gefördert. Beispielsweise stellte die *Académie des sciences* in Paris nach ihrer Gründung im Jahr 1666 Modellbauer an, um ein umfangreiches Modellkabinett aufzubauen.

Eine von Mauersberger (1996, S. 9) genannte Sammlung von Getriebemodellen war Christopher Polhems „mechanisches Alphabet“, welches die damals gängigen Mechanismen und Maschinenelemente enthielt und der Didaktik dienen sollte. Pelhem gründete 1695 in Stockholm das „Laboratorium Mechanicum“, das eine Versuchs-, Forschungs-, und Ausbildungsanstalt für das Metallgewerbe war. Wie Ferguson (1993, S. 137) berichtet, wurde Polhems Sammlung später Teil der Königlichen Modellkammer, die 1756 in Stockholm gegründet wurde und mit etwa 200 Modellen unter anderem aus den Bereichen Landwirtschaft, Bergbau und Textilverarbeitung aufwarten konnte. Aufgabe dieser Sammlungen waren neben dem Begeistern von jungen Menschen für die Mechanik auch das Anregen von Erfindern zu wirtschaftlich nützlichen Verbesserungen. Des Weiteren sollten die Modelle der Nachwelt hinterlassen werden, um die Leistungen der damaligen Zeit in die geschichtliche Entwicklung einordnen zu können.

Nach Kerle *et al.* (2009) führte die Industrialisierung im 19. Jahrhundert zur Einrichtung von Getriebesammlungen. Wie unter anderen von Ferguson (1977) und Ferguson (1993) geschildert wird, mussten Erfinder in den USA von 1790 bis 1880 zusätzlich ein Funktionsmodell mit ihrem Patentantrag einreichen. Diese Patentmodelle wuchsen zu einer sehr großen Sammlung und wurden im *Patent Office* öffentlich ausgestellt.

Kerle *et al.* (2009) beschreiben, wie technische Zeichnungen und Modelle ein

wichtiges Element der Lehre an den neugegründeten polytechnischen Schulen wurden. In diesem Zusammenhang werden José María Lanz (1764 – 1839) und Agustín de Betancourt (1758 – 1824), Schüler von Gaspard Monge (1746 – 1818) an der Pariser *École polytechnique*, genannt, die Mechanismen in ihrem Buch *Essai sur la composition des machines* beschrieben und klassifizierten. Weiter gehörte Robert Willis (1800 – 1875), Professor an der Universität Cambridge (England), zu den Ersten, die physische Lehrmodelle von Getrieben entwarfen und bauten. Laut Kerle *et al.* (2009) legte Ferdinand Redtenbacher (1809 – 1863) am Polytechnikum in Karlsruhe eine umfassende Getriebemodellsammlung, geordnet nach der Art der Bewegungswandlung, in Anlehnung an das System der *École polytechnique*, an. Wie Mauersberger (1996) berichtet, enthielt diese Sammlung nicht nur sinnvolle Maschinenelemente, sondern auch solche die falsches Konstruieren veranschaulichen sollten. Des Weiteren erstellte Johann Andreas Schubert (1808 – 1870) an der Königlich Technischen Bildungsanstalt in Dresden eine Sammlung von Getriebemodellen aus Zedernholz, von denen noch neun Stück an der TU Dresden erhalten sind (Kerle *et al.*, 2009). Einer der Schüler Redtenbachers war Franz Reuleaux (1829 – 1905), der wiederum Ende des 19. Jahrhunderts an der TH Berlin-Charlottenburg eine Getriebemodellsammlung begründete, die einer strengen Strukturanalyse folgte (Mauersberger, 1996). Diese, laut Moon (2003) aus 800 bzw. laut Kerle *et al.* (2009) mit Bezug auf die Begleitbüchern von Getriebemodellschauen in den Jahren 1928/29 aus 2000 Getriebemodellen bestehende Reuleaux-Sammlung, diente als Vorbild für weitere solcher Sammlungen. Diese Modelle nach Franz Reuleaux wurden von der Modellbaufirma *Gustav Voigt* hergestellt und vertrieben. Auf Grund der Zerstörung im 2. Weltkrieg ist die ursprüngliche Reuleaux-Sammlung nicht mehr existent (Kerle *et al.*, 2009). Einige Reuleaux-Modelle finden sich aber noch in Getriebesammlungen an mehreren Hochschulen in Deutschland, im Archiv des Deutschen Museums in München, aber auch an Universitäten in Porto, Moskau, Kyoto, Tainan und eine der größten Sammlungen an der Cornell University in Ithaca (Kerle *et al.*, 2009).

1.3.3 Werkstoffe und Fertigung von Getriebemodellen

Als Werkstoffe für die frühen Getriebemodelle nach Johann Schubert aus den 1830er Jahren wurden Zederholz, Eisen und Messing verwendet. Die Getriebemodelle von Reuleaux gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden vorwiegend aus metallischen Werkstoffen wie Gusseisen, Messing und Stahl gefertigt. Weiterhin wurde auch Glas als Werkstoff genutzt und nach dem 2. Weltkrieg auch Pertinax und Aluminium. Ab der 1980er Jahre wurden für Vorlesungen farbige, transparente Getriebemodelle aus Acrylglas (PMMA) eingesetzt, die mittels Overhead-Projektoren an die Wand projiziert werden können. (Mauersberger, 2014, S. 130–133)

In den folgenden Abbildungen ist eine Auswahl von Getriebemodellen aus der Getriebesammlung des Lehrstuhls für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik der Technischen Universität München dargestellt. In Abbildung 1.3 sind einige historische Getriebemodelle aus Holz abgebildet. Abbildung 1.4 zeigt ein origi-

nales Reuleaux-Getriebemodell aus Messing. Bei den Getriebemodellen in Abbildung 1.5 handelt es sich um eines aus Acrylglas und eines aus Aluminium.



Abb. 1.3: Historische Getriebemodelle aus Holz aus der Getriebesammlung des Lehrstuhls für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik der TU München



Abb. 1.4: Historisches Reuleaux-Getriebemodell aus Messing aus der Getriebesammlung des Lehrstuhls für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik der TU München

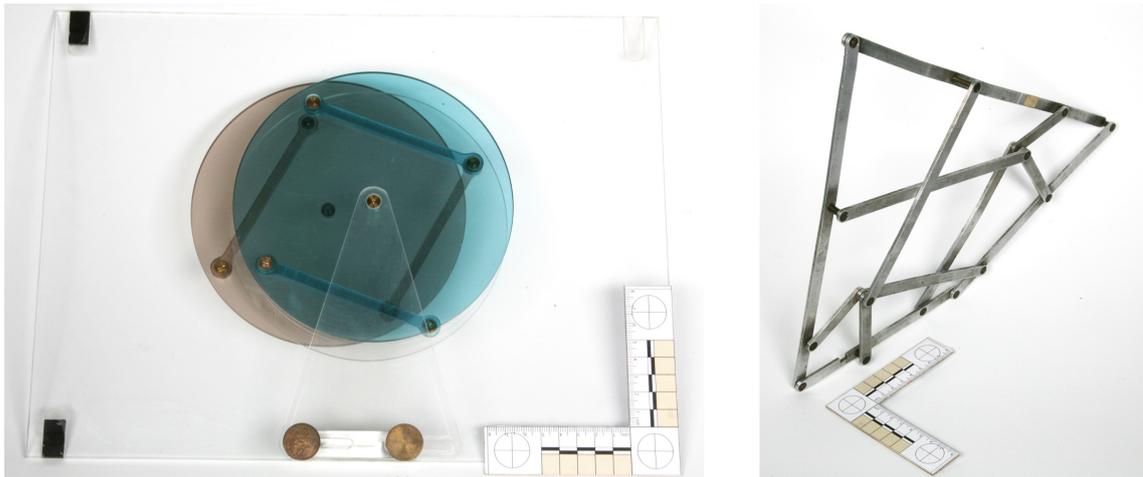


Abb. 1.5: Getriebemodell aus Acrylglas (links) und aus Aluminium (rechts) aus der Getriebesammlung des Lehrstuhls für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik der TU München

Die Getriebemodelle der jüngeren Zeit werden häufig mit Mitteln des Rapid-Prototypings gefertigt. Der Artikel von Ebert-Uphoff *et al.* (2005) beschäftigt sich mit der Herstellung von robotischen Gelenkstrukturen mittels Verfahren des Rapid-Prototypings aus Polymeren. Die Autoren erhoffen sich dadurch schneller und günstiger als mit klassischen Verfahren ein physisches Modell aufzubauen. Dadurch sollen mögliche Schwachstellen eines Mechanismus früher erkannt werden und es soll während des Entwicklungsprozesses eine größere Anzahl an Iterationen mit physischen Modellen möglich sein. Zum Einsatz kommen das Fused Deposition Modeling (FDM) und die Stereolithographie (SL). Der Fokus der Arbeit liegt vor allem auf der Herstellbarkeit und der Fertigung von einzelnen Gelenken mit den beiden genannten Verfahren, aber es werden auch eine Reihe von kompletten, additiv gefertigten Getriebemodellen gezeigt. Für FDM mit dem Werkstoff ABS befinden sich unter den Beispielen, ein Bennett-Mechanismus (räumliches Viereck), die *Agile-Eye*-Kinematik von Gosselin und Hamel (1994), eine Gough-Stewart-Plattform und ein Planetengetriebe. Bei weiteren Modellen werden die mittels FDM hergestellten Getriebeglieder mit Bauteilen aus Metall (Schrauben, Muttern, Federn), Lagern und Antrieben kombiniert. Für die Modelle, die mittels SL gefertigt wurden, kommen spezielle Harze zum Einsatz. Gezeigt werden eine serielle Roboterstruktur und eine robotische Hand, jeweils als nachgiebige Strukturen bzw. mit Festkörpergelenken. (Ebert-Uphoff *et al.*, 2005)

Eine große Sammlung von ca. 250 originalen Reuleaux-Modellen befindet sich an der Cornell University in Ithaca. In Lipson *et al.* (2005) beschreiben die Autoren die Digitalisierung und Reproduktion einiger dieser Reuleaux-Modelle mittels des FDM-Verfahrens aus ABS. Fokus der Arbeit lag darauf, die Modelle zusammengebaut und funktionsfähig zu drucken. Verfahrensbedingt mussten die Geometrien der Bauteile teilweise angepasst werden, um die Funktion der Getriebemodelle zu gewährleisten. Diese nachkonstruierten Modelle sind im STL-Dateiformat

auf der archivierten Website der Kinematic Models for Design Digital Library (KMODDL) der Cornell University abrufbar.

Bei Gebhardt (2007, S. 280 f.) finden sich für ein Cabrioverdeck ein *Konzeptmodell* im Maßstab 1:50 und ein *Funktionsmodell* im Maßstab 1:1, die jeweils aus Polyamid mittels selektiven Lasersinterns hergestellt wurden. Die eigentliche Kinematik des Getriebes kann mit dem 1:50-Konzeptmodell nicht untersucht werden, es dient vor allem der Bewertung des Designs. Für das 1:1-Modell wurden die Polyamidteile nachbearbeitet und außerdem Bolzen, Scheiben und Schrauben aus Metall verwendet. Das 1:1-Funktionsmodell aus Polyamid soll, auch wenn dessen Steifigkeit und Gewicht nicht dem späteren Original entsprechen, die Bewegung des Getriebes greifbar und fühlbar machen, was durch eine reine Computersimulation nicht möglich wäre. (Gebhardt, 2007, S. 280 f.)

D'Angelo *et al.* (2015) zeigen einen Rollstuhl mit einem federunterstützten Gelenkgetriebe, das einen Menschen von einer erhöhten, liegenden Position in eine normale Sitzposition überführen kann. Dieser soll Pfleger beim Transfer von Menschen zwischen Bett und Rollstuhl unterstützen. Bei der Entwicklung des Getriebes verwenden die Autoren ein Modell, das mittels selektiven Lasersinterns aus Polyamid im Maßstab 1:4 hergestellt wurde. In das Modell wurde eine Gasdruckfeder integriert. Die Bohrungen für die Gelenkstellen in den Getriebegliedern wurden nach der Fertigung aufgerieben. Als Gelenkbolzen werden ebenfalls mittels selektiven Lasersinterns aus Polyamid hergestellte Stifte mit Schnappverbindung verwendet. Das Modell ist in Abbildung 1.6 gezeigt. Am Modell wurden die Kräfte untersucht, die über den Verlauf der Bewegung von der Feder auf die Sitzfläche übertragen werden. Weiter beschreiben die Autoren einen Rollstuhl mit einer anderen Kinematik, die beim Übergang von einer Sitz- in eine Stehposition unterstützen soll. Hierfür wurde ein Modell im Maßstab 1:1 aufgebaut, dessen Getriebeglieder aus Multiplex-Platten mittels Laserstrahlschneidens hergestellt wurden. (D'Angelo *et al.*, 2015)



Abb. 1.6: Aus Polyamid mittels selektiven Lasersinterns gefertigtes Getriebemodell im Maßstab 1:4, das von D'Angelo *et al.* (2015) beschrieben wird.

Abdul-Sater *et al.* (2016) synthetisieren für drei Posen einer Fahrzeugtür ein Gelenkgetriebe mit Bewegungsfreiheitsgrad 1 bestehend aus sieben Drehgelenken. Zur Bewertung des Übertragungsverhaltens von Bewegung und Kräften wurde mittels selektiven Lasersinterns aus Polyamid ein Funktionsmodell im Maßstab 1:5 aufgebaut. An diesem Modell wurde ein Defizit des synthetisierten Getriebes deutlich: Auf Grund einer Singularität in der geschlossenen Stellung des Getriebes kippt die Tür trotz festgehaltenem Antriebsgelenk nach außen. In der Folgearbeit von Laudahn *et al.* (2016) wurde ein Funktionsmodell einer hinsichtlich dieses Defizits optimierten Türkinematik im Maßstab 1:1 aufgebaut. Ein Teil der Strukturteile wurde mittels klassischer Fertigung aus Stahl gefertigt und der andere Teil mittels selektiven Lasersinterns aus Polyamid hergestellt. Für die Gelenke wurden einheitliche Lagersitze aus Stahl mit Wälzlagern verwendet. Die Verbindung der Lagersitze mit den lasergesinterten Bauteile erfolgte über Verschraubungen. Das 1:5-Modell von Abdul-Sater *et al.* (2016) und das 1:1-Modell von Laudahn *et al.* (2016) der Fahrzeugtürkinematik sind in Abbildung 1.7 zu sehen.



Abb. 1.7: Links das aus Polyamid mittels selektiven Lasersinterns gefertigte Getriebemodell im Maßstab 1:5 der Fahrzeugtürkinematik, das von Abdul-Sater *et al.* (2016) beschrieben wird. Rechts das Getriebemodell im Maßstab 1:1 mit teils klassisch gefertigten Bauteilen und aus Polyamid lasergesinterten Bauteilen, entnommen aus Laudahn *et al.* (2016).

1.3.4 Ähnlichkeitsmechanik und Getriebemodellbau

In den Beiträgen von Kerle (2005) und Kerle (2006) werden theoretische Herleitungen für den Bau von Getriebemodellen unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsmechanik durchgeführt. Es werden Skalierungsvorschriften für Modelle von sogenannten Schnellläufer- und Langsamläufergetrieben und von Leistungsübertragungsgetrieben gezeigt. Vorausgesetzt wird, dass bei den Modellen die geometrische Ähnlichkeit immer beibehalten wird. Das heißt, dass bei der Erstellung eines Modells alle geometrischen Abmessungen mit dem gleichen Faktor skaliert werden. Für den Entwurf eines Modells werden mehrere dimensionslose Kenn-

zahlen herangezogen. Diese sind die Hooke-Kennzahl H_0 , die Newton-Kennzahl N_e , die Cauchy-Kennzahl Ca , die Froude-Kennzahl Fr sowie eine Kennzahl die von Kerle (2005) und Kerle (2006) als Π bezeichnet wird. Wenn bestimmte dieser Kennzahlen für die Hauptausführung eines Getriebes und für ein Modell dieses Getriebes gleich sind, dann sind bestimmte Eigenschaften der beiden Getriebe ähnlich und Betrachtungen am Modell lassen sich auf die Hauptausführung übertragen.

Von Kerle (2005) und Kerle (2006) wird für Formelzeichen der Hauptausführung der Index H verwendet und für Formelzeichen des Modells der Index M . In der vorliegenden Arbeit soll für die originale Hauptausführung ebenfalls der Index H verwendet werden, für das Modell allerdings der Index S (skaliertes Modell), um eine Verwechslung mit dem Formelzeichen M des Drehmoments zu vermeiden. Im Folgenden finden sich die Kennzahlen, wie diese von Kerle bezeichnet werden. Die Hooke-Kennzahl H_0 stellt die Ähnlichkeit bezüglich der elastischen Kräfte und Verformungen dar und ist gleichbedeutend damit, dass die Dehnungen im Modell und in der Hauptausführung gleich sein sollen. Die Hooke-Kennzahl berechnet sich zu

$$H_0 = \frac{F}{E \cdot l^2} \quad (1.8)$$

wobei F eine Kraft, E der Elastizitätsmodul des Werkstoffs und l eine Längenabmessung sind. Dehnungen in der Hauptausführung (H) und im Modell (S) sind demnach gleich, wenn gilt:

$$\frac{F_H}{E_H \cdot l_H^2} = \frac{F_S}{E_S \cdot l_S^2} \quad (1.9)$$

Anmerkung: Von Hall (2000, S. 219) wird die Bezeichnung *Hooke-Zahl* als Synonym für die Cauchy-Zahl (siehe unten) verwendet.

Um eine Ähnlichkeit bei der Kopplung von Gewichtskräften und elastischen Kräften zu erhalten, muss die Kennzahl Π von Modell und Original gleich sein.

$$\Pi = \frac{\rho \cdot g \cdot l}{E} \quad (1.10)$$

Hierbei sind ρ die Dichte des Werkstoffs und g die Erdbeschleunigung, die im Regelfall beim betrachteten Modell und Original gleich sein wird ($g_H = g_S = 9,81 \text{ m/s}^2$). Wie Kerle (2006) anmerkt, ist dies eine Ähnlichkeit statischer Art, die auch für unbewegte Getriebe gilt.

Über die Newton-Kennzahl N_e kann das Verhältnis von aufgebrauchten Kräften und Trägheitskräfte vom Modell auf die Hauptausführung übertragen werden (Hall, 2000, S. 319). Die Newton-Kennzahl berechnet sich zu

$$N_e = \frac{F}{\rho \cdot v^2 \cdot l^2} \quad (1.11)$$

wobei v die Geschwindigkeit ist.

Die Cauchy-Kennzahl Ca wird für Modelle schnell laufender Getriebe herangezogen, indem sie die elastische Energie und die kinetische Energie koppelt. Es werden bei dieser Ähnlichkeit Trägheitskräfte und elastische Kräfte vom Modell auf die Hauptausführung übertragbar.

$$Ca = \frac{v \cdot \sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \quad (1.12)$$

Im Gegensatz dazu eignet sich für langsam laufende Getriebe die Froude-Kennzahl Fr . Sie ermöglicht ein ähnliches Modell unter der Berücksichtigung von Trägheitskräften und Gewichtskräften. Die Froude-Kennzahl berechnet sich zu

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l}. \quad (1.13)$$

Hier findet eine Kopplung der schwerkraftbedingten Lageenergie mit der kinetischen Energie statt.

Die Unterscheidung zwischen langsam und schnell laufender Getriebe kann nach Kerle (2006) über das Verhältnis von Antriebswinkelgeschwindigkeit Ω zur niedrigsten Eigenfrequenz ω des Getriebes für Längsbewegung, Biegung und Torsion getroffen werden. Für schnell laufende Getriebe gilt:

$$\frac{\Omega}{\omega} > 0,1 \quad (1.14)$$

Eine Gleichheit aller Kennzahlen zwischen Hauptausführung und Modell lässt sich für ein einziges Modell in der Regel nicht gleichzeitig einstellen. Je nach Aufgabe des Getriebes bzw. dessen Eigenschaften, die betrachtet werden sollen, können so nach Kerle (2006) eines oder mehrere physische Modelle für Ähnlichkeitsbetrachtungen aufgebaut werden. Die jeweilige Ähnlichkeit entsprechender Kennzahlen wird zum einen über die geometrische Skalierung des Getriebes, über die Auswahl eines Werkstoffs für das Modell (Wahl von Elastizitätsmodul und Dichte) und über die angepasste Antriebswinkelgeschwindigkeit realisiert.

1.4 Nachteile des Stands der Technik

Wie der Stand der Technik zeigt, dienen physische Getriebemodelle dazu, die Bewegung des originalen Getriebes abzubilden. Ähnlichkeitsbetrachtungen von Kräften und Verformungen lassen diese Modell nicht zu:

- Kraftmessungen an einem aus Polyamid mittels selektiven Lasersinterns im Maßstab 1:4 gefertigten Getriebemodells zeigten nach D'Angelo *et al.* (2015) einen qualitativ ähnlichen Kraftverlauf über die Bewegung wie eine Computersimulation, die Größe der Kraft wich aber zahlenmäßig von der Simulation ab. Die Autoren führen diese Abweichung auf das Gewicht der Bauteile und Reibung zurück, die in der Simulation vernachlässigt wurden. (D'Angelo *et al.*, 2015)
- Das 1:1-Funktionsmodell einer Cabrioverdeckkinematik, das aus Polyamid mittels selektiven Lasersinterns erstellt wurde, kann zwar im Gegensatz zu einer Computersimulation ein Gefühl für die Bewegung des Getriebes geben, stellt aber laut Gebhardt (2007, S. 280 f.) nicht die Steifigkeit und das Gewicht des späteren Originals dar.
- Wie Ebert-Uphoff *et al.* (2005) anführen, eignen sich Verfahren wie das additive Fertigen mit Polymeren zwar, um auch sehr komplexe Geometrien von bewegten Bauteilen zu fertigen, die Nachgiebigkeit des Werkstoffs schränkt aber die Leistungsfähigkeit solcher Modelle ein. (Ebert-Uphoff *et al.*, 2005, S. 30)
- Für die mittels additiven Fertigungsverfahren von Polymeren angefertigten Kopien im 1:1-Maßstab von originalen Reuleaux-Getriebemodellen merken Lipson *et al.* (2005) an, dass sich die Werkstoffe auf Grund ihrer Elastizität prinzipiell gut für die Herstellung von nachgiebigen Bauteilen wie Federn eignen, aber diese nachgiebigen Bauteile in ihrer Gestalt verändert werden müssen, um das geforderte Bewegungsverhalten des Getriebemodells zu ermöglichen. Des Weiteren stellt der Gewichtsunterschied zwischen dem kopierten und dem originalen Getriebemodell dann ein Problem dar, wenn dynamisches Verhalten von Bedeutung ist. So müsse das Pendel eines Uhrwerks für die Kopie vergrößert oder aus einem anderen Werkstoff gefertigt werden, um die Funktionalität zu ermöglichen. Die niedrigere Festigkeit des Modellwerkstoffes wird auch als nachteilig gesehen, da viele der originalen Messing-Strukturteile in der Kopie aus ABS zu fragil sind. (Lipson *et al.*, 2005)

Der Betrachter kann diese Getriebemodell bewegen und daraus Einsichten in das Bewegungsverhaltens des Originals gewinnen. Rückschlüsse auf die zur Bewegung des Originals tatsächlich aufzuwendenden Antriebskräfte oder vorhandene Nachgiebigkeiten lassen sich aus diesen Modellen nicht ableiten. Ähnlichkeiten der Verformung durch Last oder der zur Bewegung notwendigen Antriebskräfte

werden bei diesen Modellen vernachlässigt. Aus diesem Grund spielt bei den verwendeten Werkstoffen für die bisherigen skalierten Modelle die Steifigkeit oder das Eigengewicht eine untergeordnete Rolle. Weiterhin wird bei den Gelenken dieser Getriebemodelle zwar die Art der Gelenkbeweglichkeit (beispielsweise Drehgelenk, Schubgelenk, etc.) berücksichtigt, allerdings werden quantitative Größen, wie beispielsweise das Drehmoment bzw. die Kraft die zur Bewegung jedes Gelenks notwendig ist, in der Regel nicht näher betrachtet.

Untersuchungen bezüglich der Antriebskräfte und Verformungen müssen folglich an einem Getriebemodell im Maßstab 1:1 aus dem originalen Werkstoff erfolgen, das dem endgültigen Prototypen schon sehr nahe kommt. Unter Umständen ist der Aufbau solcher aufwendigen 1:1-Modelle in mehreren Iterationsschritten der Entwicklung notwendig.

Theoretische Überlegungen für Ähnlichkeitsbetrachtungen an Getriebemodellen, die auch Kräfte, Trägheit, Elastizitäten und Reibung in den Gelenken berücksichtigen, werden von Kerle (2005) und Kerle (2006) gezeigt. Eine reale Umsetzung in physischen Getriebemodellen beschreibt der Autor in diesen Beiträgen allerdings nicht.

2 Der Aufbau von Getriebemodellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Aufbau und der Verwendung von physischen Getriebemodellen für experimentelle Messungen, die direkt auf das originale Getriebe übertragen werden können. Die übergeordnete Fragestellung ist hierbei, wie Getriebemodelle aufgebaut werden können, die für mehr als die reine Betrachtung der Bewegung geeignet sind, indem auch Steifigkeiten, Massen und Lasten miteinbezogen werden.

2.1 Aufgabenstellung

Im Rahmen dieser Arbeit soll eine Vorgehensweise zum Aufbau von Getriebemodellen entwickelt werden, deren Aussagekraft über das bloße Abbilden der eigentlichen Bewegung herkömmlicher Getriebemodelle hinausgeht. Neben der Bewegung sollen die Getriebemodelle auch die Verformung der Getriebeglieder und die zur Bewegung erforderlichen Antriebskräfte abbilden. Hierbei sollen sowohl das Eigengewicht der Getriebeglieder, das Reibmoment in den Gelenken als auch von außen auf das Getriebe aufgebraachte Lasten berücksichtigt werden.

2.2 Eigener Ansatz

Die Getriebemodelle aus der Aufgabenstellungen müssen bestimmte *Ähnlichkeiten* zu ihren Originalen aufweisen. *Ähnlichkeit* definiert sich für die vorliegende Arbeit wie folgt:

Ein Modell und sein Original werden dann als *ähnlich* bzgl. einer (gemessenen) physikalischen Größe (beispielsweise Kraft, Drehmoment, Länge, Spannung, etc.) bezeichnet, wenn sich diese Größe zwischen Modell und Original in jeder Stellung des Getriebes und unabhängig von der Belastung des Getriebes stets durch die Skalierung mit einem für die physikalische Größe spezifischen Maßstab vom Modell auf das Original übertragen lässt.

Das heißt beispielsweise es gibt für ein Modell und sein Original immer genau einen Skalierungsmaßstab für alle Kräfte, genau einen Skalierungsmaßstab für alle Drehmomente, genau einen Skalierungsmaßstab für alle Längen, usw.

Die angestrebten Ähnlichkeiten der Getriebemodelle gegenüber ihren Originalen sind im Folgenden aufgezählt und genauer beschrieben:

- **Ähnlichkeit der Bewegung des Originals:** Das Modell soll sich geometrisch ähnlich zum Original bewegen. Dies bedeutet, dass für jede beliebige Stellung des Getriebes bei Modell und Original die Verdrehungen aller Getriebeglieder stets gleich sein sollen und Translationen entsprechend des

geometrischen Maßstabes skaliert sein sollen. Das Getriebemodell soll dazu dienen, wie bei den klassischen Getriebemodellen, die Bewegung des Getriebes greifbar zu machen.

- **Ähnlichkeit der Antriebskraft / des Antriebsmoments:** Das zur Bewegung des Getriebemodells erforderliche Antriebsmoment (bzw. Antriebskraft) soll sich ähnlich verhalten wie beim Original des Getriebes. Das heißt, unabhängig von der Belastung und der momentanen Stellung des Getriebes, soll das jeweils zur Bewegung erforderliche Antriebsmoment (bzw. Antriebskraft) des Originals aus einer Messung am Modell durch Multiplikation mit einem für das Getriebemodell spezifischen Skalierungsfaktor berechnet werden können.
- **Ähnlichkeit der Verformung der Getriebeglieder:** Die durch Belastung auftretenden Verformungen des Getriebemodells sollen ähnlich sein zu den Verformungen des Originals. Das heißt, unabhängig von der Belastung und der momentanen Stellung des Getriebes, sollen verformungsbedingte Verschiebungen eines beliebigen Punktes des Getriebemodells und des entsprechenden Punktes des Originalgetriebes mit dem gleichen Maßstab skaliert sein, wie die Längenabmessungen des Modells gegenüber des Originals.

2.3 Abgrenzung

Als GelenkbaufORMen bei den Getrieben der vorliegenden Arbeit sollen nur Drehgelenke betrachtet werden. Modelle mit andere GelenkbaufORMen wie beispielsweise Schubgelenke, Drehschubgelenke oder Kugelgelenke werden nicht untersucht.

Alle Verformungen der Bauteile sollen als elastisch angenommen werden. Plastische Verformung der Getriebeglieder sowie Schadensereignisse wie Werkstoffversagen und Bruch, wie sie bei Überlastung des Getriebes auftreten können, werden nicht betrachtet. Ebenfalls sind formlabile Textilien und Stoffe, wie sie beispielsweise bei Cabriooverdecken zum Einsatz kommen, nicht Teil der Betrachtung.

Bei den Ähnlichkeitsuntersuchungen der Getriebe sollen nur langsame (quasistatische) Bewegungen erfolgen. Dynamische Effekte wie Schwingungen und Eigenfrequenzen des Getriebes und seiner Komponenten sind ebenfalls nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

2.4 Erwartete Vorteile

Verkleinerte Getriebemodelle können in der Regel schneller und kostengünstiger hergestellt werden, als Getriebe in Originalgröße aus dem Originalwerkstoff. Wenn kleinere Getriebemodell die Eigenschaften aus der Aufgabenstellung aufweisen, können Iterationsschritte mit Getrieben in Originalgröße durch äquivalente Betrachtungen an einem verkleinerten Modell ersetzt werden. Dadurch kann der Getriebeauslegungsprozess beschleunigt werden.

3 Konzept

3.1 Strukturbeschreibung

Im Folgenden werden die einzelnen Themenfelder beschrieben, die zur Entwicklung der Methode zum Aufbau skaliertes Getriebemodelle in der vorliegenden Arbeit behandelt werden. Diese setzen sich zusammen aus der Herleitung der Skalierungsmaßstäbe für das Modell in Abschnitt 3.1.1, der Auslegung und dem Aufbau eines Prüfstands zum Vermessen der Reibmomente von Drehgelenken in Abschnitt 3.1.2 und der Entwicklung von standardisierte Drehgelenken mit einstellbarem Drehmoment in Abschnitt 3.1.3.

3.1.1 Skalierungsvorschriften für das Modell

Zur Bestimmung des geometrischen Maßstabs der Längenabmessungen des Getriebemodells und zur Bestimmung der Maßstäbe der von außen auf das Getriebemodell aufgebrachten Kräfte und Momente werden formelmäßige Skalierungsvorschriften benötigt. In diese Skalierungsvorschriften finden die Werkstoffeigenschaften von Modell und Original Eingang. Der Werkstoff des Modells unterscheidet sich hierbei im Allgemeinen vom Werkstoff des Originals. Dies ist schematisch in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

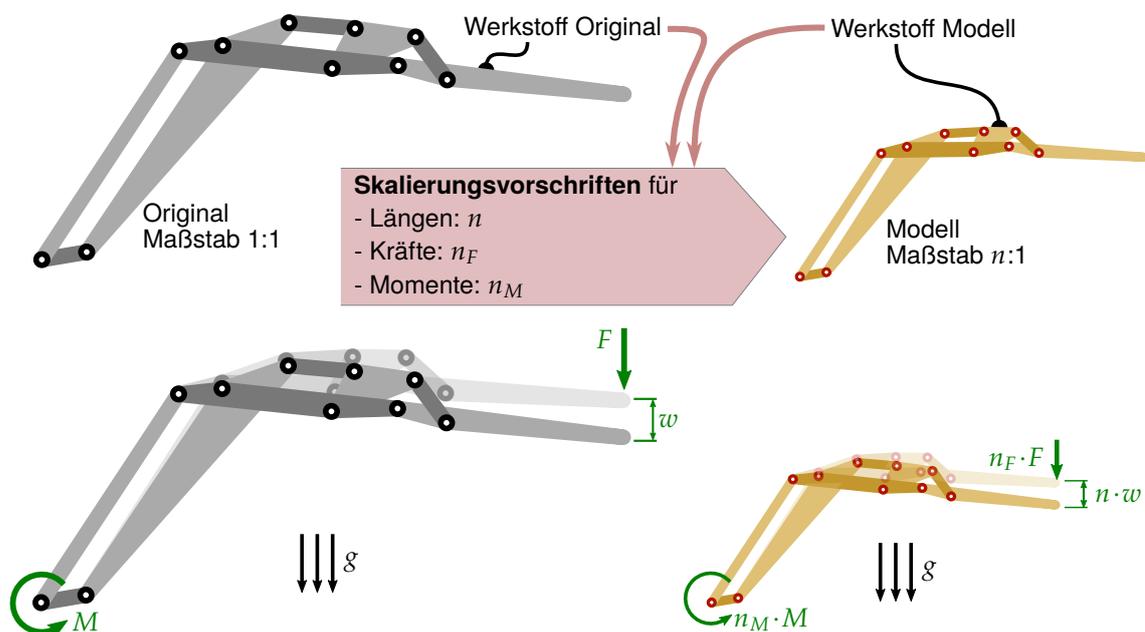


Abb. 3.1: Die Skalierungsvorschriften geben, basierend auf den Werkstoffen von Original (grau) und Modell (gelb) an, mit welchen Maßstäben (n , n_F , n_M) Längen, Kräfte und Momente vom Original auf das Modell (und zurück) übertragen werden können.

Aus der Vorschrift muss hervorgehen, in welchem Maßstab die Getriebeglieder des Modells gefertigt werden müssen, damit sich dieses ähnlich zum Original verhält. Die Skalierungsmaßstäbe des Modells müssen sich unter Berücksichtigung der Materialsteifigkeiten und -dichten so ergeben, dass die Belastung aus Eigengewicht kompatibel ist mit den von außen eingepägten Lasten auf das Getriebe. Während die eingepägten Lasten auf das Getriebe Modell bei Messversuchen beliebig in ihrer Größe angepasst werden können, skaliert das Eigengewicht der Getriebeglieder mit deren Volumen und somit in der dritten Potenz der Skalierung der Längenabmessungen.

Die von außen aufgebraachten Lasten, die auf das zu untersuchende Getriebe wirken, müssen für die Messungen im Modellversuch entsprechend skaliert werden. Dies muss derart geschehen, dass die eingepägten Lasten zum Eigengewicht des Getriebes passen und so dass die Verschiebungen beim Modell stets geometrisch ähnlich sind zu den Verschiebungen, wie sie am Original unter den entsprechenden Lasten zu erwarten sind.

3.1.2 Prüfstand zur Vermessung des Reibmoments von Drehgelenken

Als weiterer Bestandteil dieser Arbeit soll ein Prüfstand für die Vermessung des erforderlichen Drehmoments zur Bewegung von Drehgelenken aufgebaut werden. Der Einsatz des Drehmomentprüfstand ist konzeptuell in Abbildung 3.2 dargestellt.

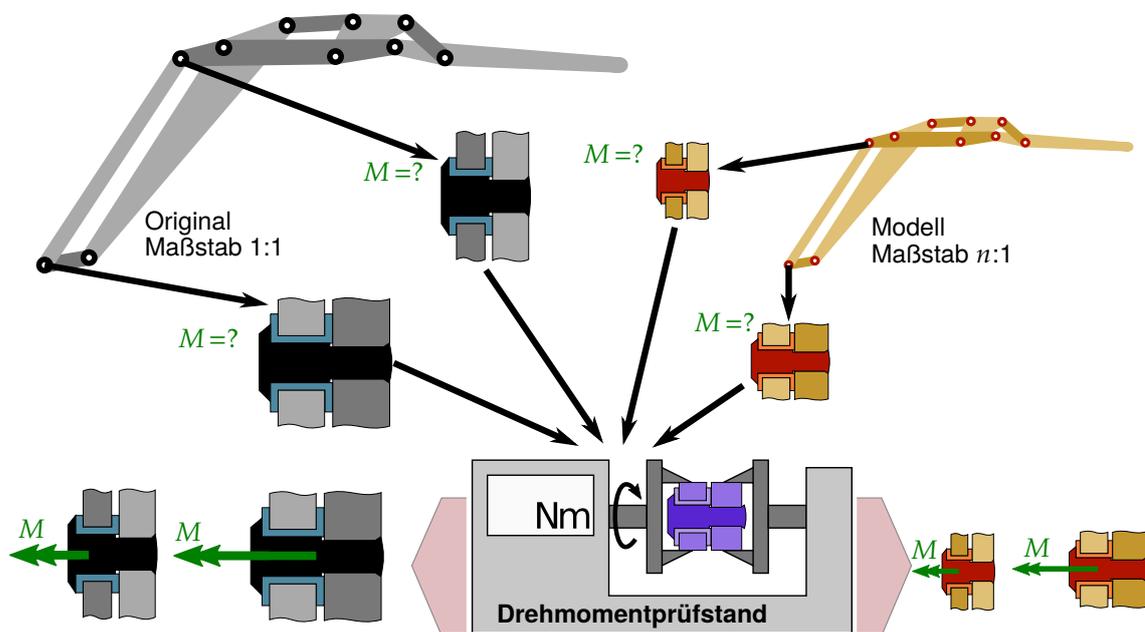


Abb. 3.2: Die Reibmomente in den Gelenken des Originals und des Modells sollen mittels eines Drehmomentprüfstands vermessen werden.

Um die Gelenke des Modells in ihren Reibeigenschaften gegenüber dem Original skalieren zu können, muss Kenntnis über die Reibmomente der originalen Gelenke bestehen. Sollten diese Reibmomente des Originals nicht bereits bekannt sein, so können sie mittels eines Drehmomentprüfstands gemessen werden. Über die oben beschriebenen Skalierungsvorschriften kann ermittelt werden, wie groß das Reibmoment für das entsprechende Gelenk im Modell sein muss. Neben der Vermessung der Gelenke des Originals, kann der Prüfstand auch verwendet werden, um die Drehgelenke des Modells zu überprüfen bzw. einzustellen.

3.1.3 Standardisierte Drehgelenke mit einstellbarem Drehmoment

Für den Aufbau der Getriebemodelle sollen standardisierte Drehgelenke mit einstellbarem Drehmoment entwickelt werden. Das Konzept dieser standardisierten Drehgelenke, im Folgenden auch als *Gelenkmodule* bezeichnet, ist in Abbildung 3.3 veranschaulicht.

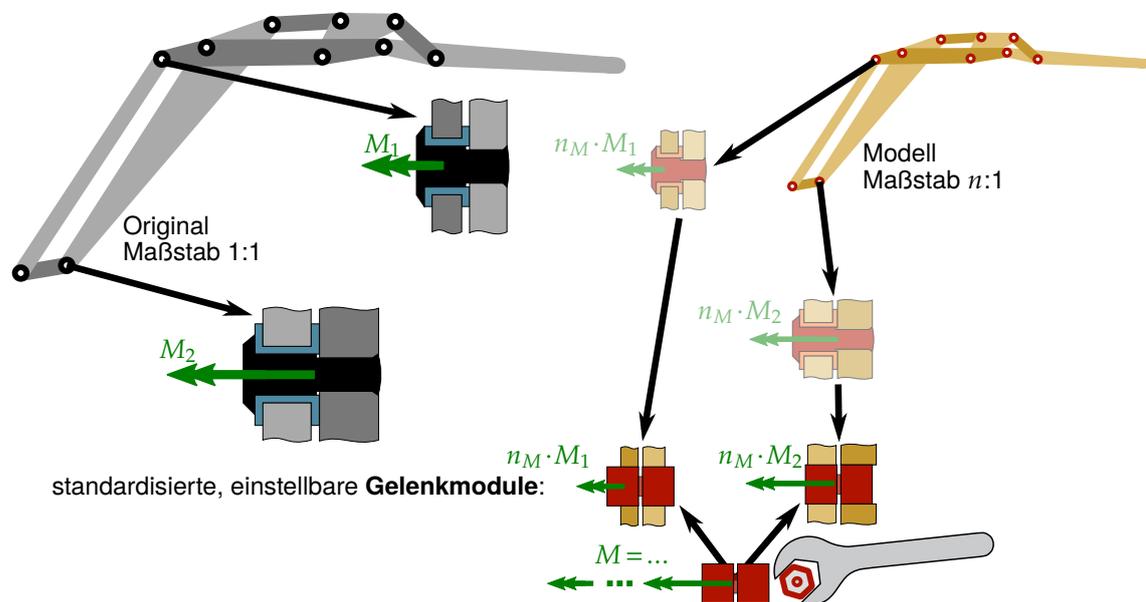


Abb. 3.3: Die Gelenke des Modells werden durch einheitliche standardisierte Gelenkmodule ersetzt, deren Reibmoment individuell eingestellt werden kann.

Eine direkte Skalierung der geometrischen Abmessungen der Bauteile der Gelenke kann sich im Einzelfall als schwierig darstellen. Zum einen lassen sich Normteile, wie beispielsweise Gleitlagerbuchsen, nicht in beliebigen Größen erwerben. Zum anderen stellt die Skalierung weiterer Größen, wie beispielsweise Rauigkeiten, Reibungskoeffizient, Passungen und Fertigungstoleranzen, die relevante Eigenschaften der Gelenke direkt beeinflussen, eine große Herausforderung dar. Auch ohne diese Schwierigkeiten kann im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass eine direkte Skalierung aller Komponenten der Gelenke mit dem Skalierungsmaßstab der Längenabmessungen des Getriebes automa-

tisch zu einem Modellgelenk führt, das die für die Ähnlichkeitsbetrachtungen am Modellgetriebe erforderlichen Eigenschaften aufweist. Aus diesem Grund sollen standardisierte Gelenkmodule verwendet werden, die alle Bauteile (Lager, Bolzen, etc.) des eigentlichen Gelenks enthalten und deren Reibmoment eingestellt werden kann. Hierfür werden die Gelenkstellen der Getriebeglieder des Modells mit Bohrungen versehen, in welche die Gelenkmodule bei der Montage eingepresst werden können. Diese Gelenkmodule sollten möglichst in einheitlicher Größe verwendet werden, um deren Herstellung in höherer Stückzahl zu vereinfachen. Je nach betrachtetem Getriebe und vorliegenden Dicken der Getriebeglieder kann es erforderlich sein Gelenkmodule in unterschiedlichen Größen einzusetzen. In diesem Fall bietet sich die Festlegung auf möglichst wenige abgestufte Größen an.

3.2 Prozessbeschreibung

Ein Überblick des Prozesses zum Aufbau von Getriebemodellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen ist in Abbildung 3.4 veranschaulicht. Im Folgenden sind die einzelnen Schritte des Prozesses näher beschrieben.

Nach Synthese und Analyse der Gelenkstruktur des Getriebes, kann die Konstruktion der Komponenten des Getriebes im CAD erfolgen. In diesem Schritt wird für das Getriebe, das bisher nur als eine zweidimensionale Strichkinematik vorliegt, eine dreidimensionale Konstruktion angefertigt. Hierfür werden die Formen und Ausdehnungen der einzelnen Getriebeglieder festgelegt und die Gelenke auskonstruiert, sodass sich ein Zusammenbau des Getriebes ergibt, der die geforderte Bewegung kollisionsfrei durchlaufen kann.

Die Bestimmung des geometrischen Maßstabs n , in dem das Getriebemodell aufgebaut werden soll, erfolgt in Abhängigkeit der Werkstoffe, die für das originale Getriebe und das Modell vorgesehen werden. Der Modell- und der Originalwerkstoff sind im Allgemeinen nicht gleich. Während der Originalwerkstoff in der Regel bereits feststeht, kann der Werkstoff für das Modell prinzipiell frei gewählt werden. Die Wahl des Modellwerkstoff beeinflusst den geometrischen Maßstab n und kann somit gezielt getroffen werden, um ein Modell in einem gewünschten Maßstabsbereich zu erreichen. Relevant sind bei den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit dabei die Werkstoffkennwerte Dichte, Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl. Werden auf das Getriebe externe Lasten aufgebracht, die im Modellversuch untersucht werden sollen, so müssen diese Lasten vor der Aufbringung auf das Getriebemodell entsprechend skaliert werden. Hierfür wird aus den Werkstoffkennwerten ein Skalierungsmaßstab n_F für Kräfte und ein Skalierungsmaßstab n_M für Momente berechnet.

Die Getriebeglieder des Modells werden basierend auf den mit n skalierten CAD-Daten des Originals aus dem Modellwerkstoff hergestellt. Die Konstruktion der Getriebeglieder wird für das Modell an den Gelenkstellen angepasst und mit Bohrungen für die einstellbaren Gelenkmodule versehen.

Um die Reibmomente in den Gelenkmodulen des Modells entsprechend skaliert einstellen zu können, müssen diese Größen zunächst für die Gelenke des Originals

vorliegen. Dazu können die Reibmomente der originalen Gelenke beispielsweise von vergangenen Messungen bekannt sein oder mit einem Drehmomentprüfstand gemessen werden, sofern originale Drehgelenke in geeigneter Form vorliegen. Anschließend werden die originalen Reibmomente mit dem entsprechenden Skalierungsmaßstab n_M in die notwendigen Größen für das Modell umgerechnet und in den Gelenkmodulen mit Hilfe des Drehmomentprüfstands individuell eingestellt.

Anschließend kann das Getriebemodell montiert werden. Ein so aufgebautes Getriebemodell kann belastet und bewegt werden. Am Modell gemessene Verschiebungen sowie Antriebskräfte und -momente können über die Faktoren n bzw. n_F bzw. n_M in das Original zurückgerechnet werden.

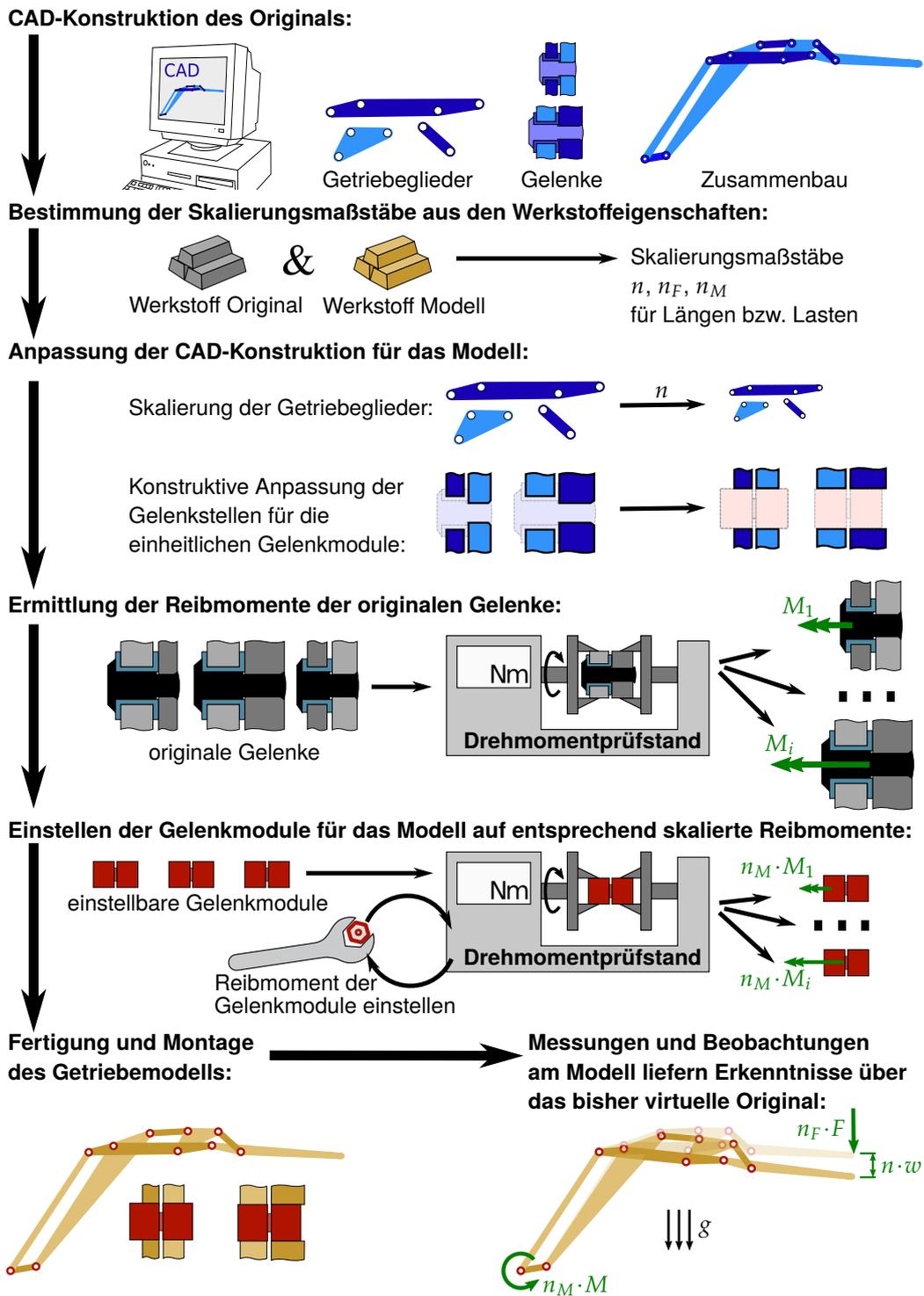


Abb. 3.4: Lösungsprozess der Methode für den Aufbau von skalierten Getriebemodellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen

4 Realisierung

Im Folgenden wird zunächst in Abschnitt 4.1 auf die theoretische Herleitung der Skalierungsvorschriften für die geometrischen Abmessungen und die eingepprägten Lasten des Modells eingegangen. Darauf folgt die Beschreibung des Prüfstands zur Vermessung der Drehgelenke in Abschnitt 4.2. Das Kapitel schließt mit der Skalierung der Drehgelenke durch die Verwendung von standardisierten Gelenkmodulen in Abschnitt 4.3.

4.1 Analytische Ermittlung des Skalierungsfaktors

In diesem Abschnitt werden basierend auf den Gleichungen der Elastostatik Skalierungsvorschriften für die Erstellung von Modellen hergeleitet. Nach der Definition des Begriffs *Maßstab* in Abschnitt 4.1.1 erfolgt die Herleitung der Skalierungsvorschriften über zwei verschiedene Ansätze. Zunächst wird in Abschnitt 4.1.2 gezeigt, wie die Skalierungsvorschriften durch Betrachtungen an einem schubstarreren Biegebalken unter Vernachlässigung der Querkontraktion erhalten werden können. In Abschnitt 4.1.3 wird ein allgemein linear-elastischer Ansatz verfolgt, der auch auftretende Querkontraktion berücksichtigt. Diese beiden Ansätze wurden in kompakterer Form bereits in Laudahn *et al.* (2019) publiziert. Vorarbeiten dazu erfolgten in der Studienarbeit von Kapfenberger (2017).

4.1.1 Maßstäbe

In den folgenden Betrachtungen werden unterschiedliche Maßstäbe zur Skalierung von physikalischen Größen vom Original in das Modell verwendet. Dabei zeigt der Index H („Hauptausführung“) Formelzeichen der physikalischen Größen des Originals und der Index S („skaliertes Modell“) jene des Modells an. Somit ist beispielsweise E_H der Elastizitätsmodul des Werkstoffs des originalen Getriebes und E_S dementsprechend der Elastizitätsmodul des Werkstoff des Getriebemodells.

Der Maßstab n_X einer beliebigen physikalischen Größe X sei definiert als das Verhältnis der Größe vom Modell zum Original:

$$n_X = \frac{X_S}{X_H} \quad (4.1)$$

Der Index X des Maßstabs n_X gibt die physikalische Größe an. Beispielsweise ist der Maßstab des Elastizitätsmoduls dann

$$n_E = \frac{E_S}{E_H}. \quad (4.2)$$

4.1.2 Betrachtungen am schubstarrten Biegebalken

In diesem Abschnitt werden die Skalierungsgesetzmäßigkeiten für einen schubstarrten Balken mit Hilfe der Balkentheorie hergeleitet. Alle Betrachtungen erfolgen an einem einseitig fest eingespannten Balken, wie dieser in Abbildung 4.1 dargestellt ist.

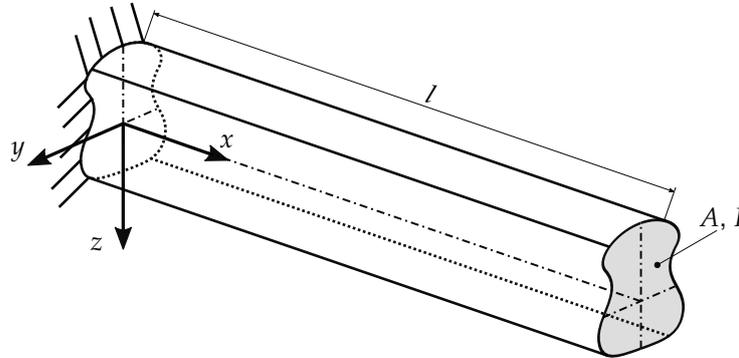


Abb. 4.1: Der betrachtete Balken der Länge l ist waagrecht und einseitig fest eingespannt. Die Querschnitt hat die Fläche A und das Flächenträgheitsmoment I um die y -Achse. Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2021, S. 78, 81).

Hierbei werden die folgenden Annahmen der Balkentheorie herangezogen:

- Die y - und z -Achse des Balkens sind die Hauptachsen des Querschnitts. Die Biegung des Balkens erfolgt einachsrig, d. h. dass aus eingepprägten Lasten im Balken resultierende Querkräfte nur in z -Richtung und resultierende Momente nur um die y -Achse auftreten (Gross *et al.*, 2021, S. 96)
- Im Vergleich zur Länge des Balkens sind die Abmessungen seines Querschnitts sehr viel kleiner (schlanker Balken) (Gross *et al.*, 2021, S. 78)
- Bernoulli'sche Annahmen: Der Balken ist schubstarr, d. h. dass alle Balkenquerschnitte, die senkrecht auf der Balkenachse stehen, auch unter Verformung des Balkens senkrecht auf der Balkenachse stehen werden (Gross *et al.*, 2021, S. 104). Alle ebenen Querschnitte des Balkens bleiben auch bei Deformation eben (Gross *et al.*, 2021, S. 98).
- Die Verschiebung ist für alle Punkte innerhalb eines Querschnitts des Balkens gleich groß (Gross *et al.*, 2021, S. 98)
- Der Werkstoff des Balkens ist homogen und isotrop mit konstantem Elastizitätsmodul E und konstanter Massendichte ρ
- Hooke'sches Gesetz: Der Werkstoff verhält sich linear-elastisch.

Die physikalischen Größen aus Tabelle 4.1 sind für die folgende Betrachtung des Biegebalkens von Relevanz:

Tabelle 4.1: Physikalische Größen beim betrachteten Biegebalken

Formelzeichen	Maßeinheit	Beschreibung
l	m	Länge des Balkens
a	m	Abmessungen des Balkenquerschnitts
A	m ²	Flächeninhalt des Balkenquerschnitts
I	m ⁴	Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der y -Achse
w, w_g, w_F, w_M	m	max. Verschiebung des Balkenendes
w', w'_g, w'_F, w'_M	rad	max. Verdrehwinkel des Balkenendes
E	N·m ⁻²	Elastizitätsmodul
ρ	kg·m ⁻³	Massendichte
F	N	von außen eingeprägte Kraft
M	N·m	von außen eingeprägtes Drehmoment
g	m·s ⁻²	Fallbeschleunigung

Es werden die folgenden Maßstäbe für physikalische Größen wie in Tabelle 4.2 eingeführt:

Tabelle 4.2: Verwendete Maßstäbe beim betrachteten Biegebalken

Formelzeichen	Beschreibung
$n_l := l_s/l_H$	Maßstab der Balkenlänge
$n_a := a_s/a_H$	Maßstab aller Längenmaße des Balkenquerschnitts
$n_w := w_s/w_H$	Maßstab des Verschiebungsfeldes
$n_{w'} := w'_s/w'_H$	Maßstab der Verdrehungen
$n_A := A_s/A_H$	Maßstab der Querschnittsfläche
$n_I := I_s/I_H$	Maßstab des Flächenträgheitsmoments
$n_E := E_s/E_H$	Maßstab des Elastizitätsmoduls
$n_\rho := \rho_s/\rho_H$	Maßstab der Massendichte
$n_F := F_s/F_H$	Maßstab der eingepägten Kräfte
$n_M := M_s/M_H$	Maßstab der eingepägten Drehmomente

Auf eine Skalierung der Fallbeschleunigung g wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit verzichtet, da dies für die geplante Anwendung der Methode nicht in Betracht kommt.

Die Maßstäbe n_l , n_a und n_w für die Balkenlänge, die Balkenquerschnittsabmessungen und das Verschiebungsfeld sollen zunächst unabhängig voneinander sein. Die Maßstäbe n_a , n_A und n_I für die Balkenquerschnittsabmessungen, den Querschnittsflächeninhalt und das Flächenträgheitsmoment sind allerdings nicht unabhängig voneinander, sondern es muss gelten:

$$n_A = n_a^2 \quad (4.3)$$

$$n_I = n_a^4 \quad (4.4)$$

Es wird nun repräsentativ für alle Verschiebungen und Verdrehwinkel des verformten Balkens die maximale Verschiebung w_{max} sowie der maximale Verdrehwinkel w'_{max} des Balkenendes betrachtet. Im Folgenden wird zu Gunsten der Übersichtlichkeit auf den Subskript max verzichtet und w für die maximale Verschiebung und w' für den maximalen Verdrehwinkel verwendet.

Um sowohl die Gewichtskraft, als auch eingeprägte Kräfte und Momente in den Skalierungsvorschriften zu berücksichtigen, werden für die folgenden drei Lastfälle die Verschiebung und der Verdrehwinkel betrachtet:

1. Belastung des Balkens unter Eigengewicht (w_g, w'_g)
2. Belastung des Balkens durch eine von außen eingeprägte Kraft F in z -Richtung am Balkenende (w_F, w'_F)
3. Belastung des Balkens durch ein von außen eingeprägtes Moment M um die y -Achse am Balkenende (w_M, w'_M)

Lastfall 1: Maximale Verschiebung durch Eigengewicht

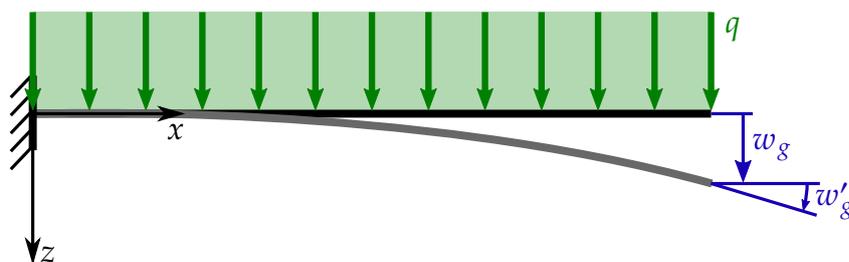


Abb. 4.2: Maximale Verschiebung w_g und maximaler Verdrehwinkel w'_g bei der Balkenbiegung unter Eigengewicht in Form einer Streckenlast q (Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2021, S. 107f))

Die Belastung unter Eigengewicht kann bei konstanter Werkstoffdichte und konstantem Querschnitt des Balkens über dessen Länge als eine konstante Streckenlast q aufgefasst werden, die auf den Balken wirkt. Für die maximale Verschiebung

w_g unter einer konstanten Streckenlast gilt (Gross *et al.*, 2021, S. 126):

$$w_g = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \quad (4.5)$$

Der maximale Verdrehwinkel, der am Balkenende auftritt ist:

$$w'_g = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \quad (4.6)$$

Hierbei ist l die Länge des Balkens, E dessen Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der y -Achse.

Die Streckenlast q berechnet sich zu

$$q = g \cdot \rho \cdot A \quad (4.7)$$

wobei g die Erdbeschleunigung in z -Richtung, ρ die Massendichte des Werkstoffs und A die Querschnittsfläche des Balkens ist. Für die maximale Verschiebung w_g unter Gewichtskraft gilt dann:

$$w_g = \frac{g \cdot \rho \cdot A \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} \quad (4.8)$$

Für den maximalen Verdrehwinkel w'_g gilt:

$$w'_g = \frac{g \cdot \rho \cdot A \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \quad (4.9)$$

Wird der Zusammenhang aus Gleichung (4.8) für das Original und das Modell aufgestellt und über den Maßstab n_w verknüpft, ergibt sich:

$$n_w \cdot w_{g,H} = w_{g,S} \quad (4.10)$$

$$n_w \cdot \frac{g \cdot \rho_H \cdot A_H \cdot l_H^4}{8 \cdot E_H \cdot I_H} = \frac{g \cdot \rho_S \cdot A_S \cdot l_S^4}{8 \cdot E_S \cdot I_S} \quad (4.11)$$

Alle Größen des Modells (Index S) in Gleichung (4.11) werden mittels der Maßstäbe aus Tabelle 4.2 durch die Größen des Originals (Index H) ersetzt:

$$n_w \cdot \frac{g \cdot \rho \cdot A_H \cdot l_H^4}{8 \cdot E_H \cdot I_H} = \frac{g \cdot n_\rho \cdot \rho_H \cdot n_A \cdot A_H \cdot n_l^4 \cdot l_H^4}{8 \cdot n_E \cdot E_H \cdot n_I \cdot I_H} \quad (4.12)$$

Isolieren aller Maßstäbe in Gleichung (4.12):

$$n_w \cdot \frac{g \cdot \rho \cdot A_H \cdot l_H^4}{8 \cdot E_H \cdot I_H} = \frac{n_\rho \cdot n_A \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_I} \cdot \frac{g \cdot \rho \cdot A_H \cdot l_H^4}{8 \cdot E_H \cdot I_H} \quad (4.13)$$

Der rechte Bruch auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in Gleichung (4.13) ist identisch und somit verbleibt:

$$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_A \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_I} \quad (4.14)$$

Mit den Zusammenhängen $n_A = n_a^2$ und $n_I = n_a^4$ aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) vereinfacht sich weiter:

$$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_a^2 \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.15)$$

$$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_a^2} \quad (4.16)$$

Gleichung (4.16) gibt an, wie der Maßstab n_w für die Verschiebung von den Maßstäben der geometrischen Größen des Balkens (n_l, n_a) sowie den Maßstäben der Werkstoffparameter (n_E, n_ρ) abhängt.

Analog kann mit dem Verdrehwinkel w'_g verfahren werden. Wird Gleichung (4.9) für das Modell und das Original aufgestellt und die Verdrehwinkel über den Maßstab $n_{w'}$ verknüpft, ergibt sich:

$$n_{w'} \cdot w'_{q,H} = w'_{q,S} \quad (4.17)$$

$$n_{w'} \cdot \frac{g \cdot \rho_H \cdot A_H \cdot l_H^3}{6 \cdot E_H \cdot I_H} = \frac{g \cdot \rho_S \cdot A_S \cdot l_S^3}{6 \cdot E_S \cdot I_S} \quad (4.18)$$

Über das gleiche Vorgehen wie in den Gleichungen (4.12) bis (4.16) für die Verschiebung gelangt man von Gleichung (4.18) für den Verdrehwinkel zu:

$$n_{w'} = \frac{n_\rho \cdot n_l^3}{n_E \cdot n_a^2} \quad (4.19)$$

Lastfall 2: Maximale Verschiebung durch von außen eingeprägte Kraft



Abb. 4.3: Maximale Verschiebung w_F und maximaler Verdrehwinkel w'_F bei der Balkenbiegung unter eingepprägter Kraft F (Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2021, S. 107))

Für eine eingeprägte Kraft F am Balkenende berechnet sich nach Gross *et al.* (2021, S. 126) die maximale Verschiebung w_F zu

$$w_F = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (4.20)$$

und der maximale Verdrehwinkel am Balkenende zu

$$w'_F = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}. \quad (4.21)$$

Aufstellen der Gleichungen (4.20) und (4.21) für Modell und Original und analoges Umformen wie in den Gleichungen (4.10) bis (4.19), liefert für die Zusammenhänge der Maßstäbe bei Belastung durch eine Kraft F am Balkenende

$$n_w = \frac{n_F \cdot n_l^3}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.22)$$

und

$$n_{w'} = \frac{n_F \cdot n_l^2}{n_E \cdot n_a^4}. \quad (4.23)$$

Lastfall 3: Maximale Verschiebung durch von außen eingeprägtes Moment

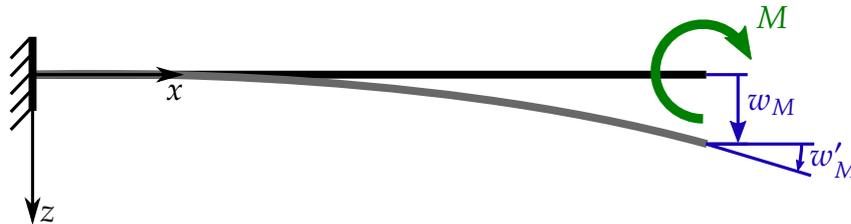


Abb. 4.4: Maximale Verschiebung w_M und maximaler Verdrehwinkel w'_M bei der Balkenbiegung unter eingeprägtem Moment M (Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2021, S. 107, S. 126))

Die maximale Verschiebung w_M , die durch ein von außen eingeprägtes Moment M am Balkenende hervorgerufen wird, ist nach Gross *et al.* (2021, S. 126)

$$w_M = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (4.24)$$

und der maximale Verdrehwinkel ist

$$w'_M = \frac{M \cdot l}{E \cdot I}. \quad (4.25)$$

Wie bei der Belastung unter Eigengewicht und bei Belastung unter einer eingepprägten Kraft, lassen sich aus den Gleichungen (4.24) und (4.25) die Zusammenhänge der Maßstäbe bei Belastung unter einem eingepprägten Moment aufstellen:

$$n_w = \frac{n_M \cdot n_l^2}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.26)$$

$$n_{w'} = \frac{n_M \cdot n_l}{n_E \cdot n_a^4}. \quad (4.27)$$

Zusammenfassend ergeben sich aus den drei obigen Lastfällen die folgenden Zusammenhänge für die Maßstäbe, wie sie in Tabelle 4.3 aufgeführt sind:

Tabelle 4.3: Zusammenfassung der formelmäßigen Zusammenhänge der Maßstäbe für die drei betrachteten Lastfälle

Lastfall	Verschiebung w	Verdrehwinkel w'
Eigengewicht	$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_a^2} \quad (4.16)$	$n_{w'} = \frac{n_\rho \cdot n_l^3}{n_E \cdot n_a^2} \quad (4.19)$
eingepprägte Kraft	$n_w = \frac{n_F \cdot n_l^3}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.22)$	$n_{w'} = \frac{n_F \cdot n_l^2}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.23)$
eingepprägtes Moment	$n_w = \frac{n_M \cdot n_l^2}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.26)$	$n_{w'} = \frac{n_M \cdot n_l}{n_E \cdot n_a^4} \quad (4.27)$

Für den Zusammenhang zwischen n_F und n_M ergibt sich durch Gleichsetzen der Gleichungen (4.22) und (4.26) oder der Gleichungen (4.23) und (4.27):

$$n_M = n_F \cdot n_l \quad (4.28)$$

Gleichsetzen von Gleichungen (4.16) und (4.22) oder Gleichungen (4.19) und (4.23) führt für den Maßstab der Kräfte n_F zu:

$$n_F = n_\rho \cdot n_l \cdot n_a^2 \quad (4.29)$$

Einsetzen von Gleichung (4.29) in Gleichung (4.28) liefert analog für den Maßstab der Momente n_M :

$$n_M = n_\rho \cdot n_l^2 \cdot n_a^2 \quad (4.30)$$

Für den Maßstab des Verdrehwinkels lässt sich aus den Gleichungen (4.16) und (4.19) oder den Gleichungen (4.22) und (4.23) oder den Gleichungen (4.26) und (4.27) der folgende Zusammenhang zwischen n_w und $n_{w'}$ ermitteln:

$$n_{w'} = \frac{n_w}{n_l} \quad (4.31)$$

Die Maßstäbe für Dichte und Elastizitätsmodul n_ρ und n_E sind von der Materialkombination Original–Modell abhängig. Auf diese besteht nur begrenzt Einfluss, da die Kennwerte E und ρ eines Werkstoffs nicht beliebig und unabhängig voneinander gewählt werden können. Die Zahlenwerte für die Maßstäbe der eingepprägten Lasten n_F und n_M ergeben sich bei den folgenden Betrachtungen in Abhängigkeit der anderen Maßstäbe. Aus Anwendersicht ist diese Einschränkung nebensächlich, da die eingepprägten Lasten bei Experimenten am Modell in der Regel in beliebiger Größe erzeugt werden können. Der Maßstab für den Verdrehwinkel $n_{w'}$ ergibt sich nach Gleichung (4.31) direkt aus dem Maßstab der Verschiebung n_w . Drei Varianten mit bestimmte Vorgaben für die Maßstäbe n_l , n_a und n_w werden im Folgenden betrachtet.

Variante 1: Die Querschnittsabmessungen werden gleich skaliert wie die Balkenlänge

Das bedeutet $n_a \stackrel{!}{=} n_l$. Dies eingesetzt in Gleichung (4.19) ergibt für den Maßstab n_w der Verschiebungen:

$$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_a^2} = \frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_l^2} = \frac{n_\rho \cdot n_l^2}{n_E} \Rightarrow n_w(n_l, n_\rho, n_E) \quad (4.32)$$

Daraus folgt, dass der geometrische Maßstab n_l des Modells zwar frei gewählt werden kann, aber der Maßstab der Verschiebung abhängig ist von n_l , n_ρ und n_E .

Weiter ergibt sich für den Maßstab $n_{w'}$ der Verdrehungen:

$$n_{w'}(n_l, n_\rho, n_E) = \frac{n_\rho \cdot n_l}{n_E} \quad (4.33)$$

Eingepprägte Lasten auf das Modell müssen skaliert werden mit

$$n_F(n_l, n_\rho, n_E) = n_\rho \cdot n_l^3 \quad (4.34)$$

beziehungsweise

$$n_M(n_l, n_\rho, n_E) = n_\rho \cdot n_l^4. \quad (4.35)$$

Bei dieser Variante ist der geometrische Maßstab des Modells prinzipiell frei wählbar, aber das Verschiebungsfeld des Modells ist im Allgemeinen nicht geometrisch ähnlich zu dem des Originals. Nach Gleichung (4.32) verhält sich die Skalierung der Verschiebungen im Modell quadratisch gegenüber der Skalierung der übrigen Längenabmessungen. Für bestimmte Modelle, deren Größe nicht zu stark vom Original abweicht, könnte diese Einschränkung aber vernachlässigbar sein. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird diese Variante nicht näher betrachtet.

Variante 2: Die Verschiebung wird gleich skaliert wie die Balkenlänge

Das bedeutet $n_w \stackrel{!}{=} n_l$. Da der Maßstab der Verschiebung vorgeschrieben wird, muss dementsprechend der Maßstab für die Querschnittsabmessungen n_a angepasst werden. Gleichung (4.19) aufgelöst nach dem Maßstab für die Querschnittsabmessungen ergibt:

$$n_a(n_l, n_\rho, n_E) = \sqrt{\frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_w}} = \sqrt{\frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_l}} = \sqrt{\frac{n_\rho \cdot n_l^3}{n_E}} \quad (4.36)$$

Für die übrigen Maßstäbe ergibt sich aus den Gleichungen (4.29) bis (4.31):

$$n_w(n_l, n_\rho, n_E) = 1 \quad (4.37)$$

$$n_F(n_l, n_\rho, n_E) = \frac{n_\rho^2 \cdot n_l^4}{n_E} \quad (4.38)$$

$$n_M(n_l, n_\rho, n_E) = \frac{n_\rho^2 \cdot n_l^5}{n_E} \quad (4.39)$$

Auch bei dieser Variante kann der geometrische Maßstab n_l des Modells frei gewählt werden. Nach der Forderung dieser Variante ist das Verschiebungsfeld des Modells geometrisch ähnlich zum Original mit der Einschränkung, dass der Balkenquerschnitt gestaucht bzw. gestreckt ist gegenüber der Balkenlänge. Das Modell ist somit nicht mehr geometrisch ähnlich zum Original. Für Objekte, die nicht balkenförmig sind und nicht über eine ausgezeichneten Längsrichtung verfügen, ist diese Variante nur sehr begrenzt bzw. nicht anwendbar. Für Getriebe, deren Glieder aber balkenförmig sind, könnte diese Variante eine Option darstellen. Diese Variante entspricht der „unvollständigen mechanischen Ähnlichkeit“, wie diese in Weber (1918, S. 97) mit Bezug auf Routh (1897, S. 294) anhand des Modells einer Eisenbahnbrücke veranschaulicht wurde (vgl. Abschnitt 1.2.5).

Variante 3: Die Verschiebungen und die Querschnittsabmessungen werden gleich skaliert wie die Balkenlänge

Dies bedeutet $n_w \stackrel{!}{=} n_a \stackrel{!}{=} n_l =: n$. Da nun alle Längenmaße mit dem gleichen Maßstab skaliert werden, wird dieser geometrische Maßstab nun mit n bezeichnet. Aus Gleichung (4.19) ergibt sich mit dieser Forderung:

$$n_w = \frac{n_\rho \cdot n_l^4}{n_E \cdot n_a^2} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{n_\rho \cdot n^4}{n_E \cdot n^2} \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow n = \frac{n_E}{n_\rho} \quad (4.41)$$

Dies ist äquivalent zur Aussage der dimensionslosen Kennzahl $\Pi = \rho \cdot g \cdot l / E$ von Kerle (2006). Der Maßstab n für alle Längenmaße ist nicht mehr frei wählbar,

sondern ist abhängig vom Verhältnis der Werkstoffkennwerte der gewählten Materialkombination Original–Modell: $n(n_\rho, n_E)$

Für die übrigen Maßstäbe ergibt sich aus den Gleichungen (4.29) bis (4.31):

$$n_{w'} = 1 \quad (4.42)$$

$$n_F(n_\rho, n_E) = \frac{n_E^3}{n_\rho^2} \quad (4.43)$$

$$n_M(n_\rho, n_E) = \frac{n_E^4}{n_\rho^3} \quad (4.44)$$

Bei dieser Variante ist gegenüber Variante 1 und 2 sowohl das Modell geometrisch ähnlich zum Original, als auch dessen Verschiebungsfeld. Die Verdrehungen bei Modell und Original sind gleich. Dies entspricht der „strengen mechanisch ähnlichen Nachbildung“ nach Weber (1918, S. 97). Nachteilig ist, dass der Maßstab n der Längenmaße nicht mehr frei gewählt werden kann, sondern eine Werkstoffkombination Original–Modell gefunden werden muss, die den Aufbau eines Modells in einem praktisch nutzbaren Maßstab zulässt.

Im Folgenden wird der sich ergebende Skalierungsmaßstab $n(n_\rho, n_E)$ für einige Werkstoffkombinationen betrachtet. Die exemplarisch betrachteten Werkstoffe und ihre Dichte ρ und Elastizitätsmodul E sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

Tabelle 4.4: Ausgewählte Werkstoffe und ihre Kennwerte

Werkstoff	E in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Referenz
Baustahl E355	210 000	7 850	(Niemann <i>et al.</i> , 2001, S. 235)
Gusseisen EN-GJL-150	100 000	7 250	(Niemann <i>et al.</i> , 2001, S. 235)
Aluminiumlegierung AlCuMg2F44	72 000	2 770	(Niemann <i>et al.</i> , 2001, S. 235)
Magnesiumlegierung MgMn2F20	45 000	1 800	(Niemann <i>et al.</i> , 2001, S. 235)
Titanlegierung Ti2Pd	110 000	4 505	(Niemann <i>et al.</i> , 2001, S. 235)
Messinglegierung CuZn40	102 000	8 400	(Deutsches Kupferinstitut Berufsverband e.V., 2007)
Acrylnitril-Butadien-Styrol (ABS)	2 300	1 050	(Bonnet, 2016, S. 223)
Polyetheretherketon (PEEK)	3 650	1 320	(Bonnet, 2016, S. 223)
Polyamid PA 6	1 400	1 130	(Bonnet, 2016, S. 223)
Polyamid PA 12	1 600	1 020	(Bonnet, 2016, S. 223)
Polyamid PA 12/PA 2200 (selektiv lasergesintert)	1 700	930	(EOS GmbH, 2010)

Werden die Werkstoffe aus Tabelle 4.4 paarweise miteinander kombiniert, wobei immer einer der Originalwerkstoff und der andere der Modellwerkstoff ist, so ergeben sich die Maßstäbe der Längenabmessungen nach Gleichung (4.41), wie sie in Tabelle 4.5 eingetragen sind.

Tabelle 4.5: Maßstäbe n für verschiedene Werkstoffkombinationen unter der Vorgabe $n = n_w = n_a = n_l$. Bei Maßstab $n < 1$ ist das Modell kleiner als das Original.

	Originalwerkstoff										
	E355	EN-GJL-150	AlCuMg2F44	MgMn2F20	Ti2Pd	CuZn40	ABS	PEEK	PA 6	PA 12	PA 12/PA 2200
E355	1	1,94	1,03	1,07	1,10	2,20	12,2	9,67	21,6	17,1	14,6
EN-GJL-150	0,52	1	0,53	0,55	0,56	1,14	6,30	4,99	11,1	8,79	7,55
AlCuMg2F44	0,97	1,88	1	1,04	1,06	2,14	11,9	9,40	21,0	16,6	14,2
MgMn2F20	0,93	1,81	0,96	1	1,02	2,06	11,4	9,04	20,2	15,9	13,7
Ti2Pd	0,91	1,77	0,94	0,98	1	2,01	11,2	8,83	19,7	15,6	13,4
CuZn40	0,45	0,88	0,47	0,49	0,50	1	5,54	4,39	9,80	7,74	6,64
ABS	0,08	0,16	0,08	0,09	0,09	0,18	1	0,79	1,77	1,40	1,20
PEEK	0,10	0,20	0,11	0,11	0,11	0,23	1,26	1	2,23	1,76	1,51
PA 6	0,05	0,09	0,05	0,05	0,05	0,10	0,57	0,45	1	0,79	0,68
PA 12	0,06	0,11	0,06	0,06	0,06	0,13	0,72	0,57	1,27	1	0,86
PA 12/PA 2200	0,07	0,13	0,07	0,07	0,07	0,15	0,83	0,66	1,48	1,17	1

Aus den Werten in Tabelle 4.5 ist ersichtlich, dass, wenn der gleiche Werkstoff für Original und Modell eingesetzt werden soll, das Modell im Maßstab $n = 1$ aufgebaut werden muss. Unter der Forderung $n_w = n_a = n_l$ für die Ähnlichkeit ist es somit nicht möglich ein skaliertes Modell aus dem Originalwerkstoff aufzubauen. Ebenfalls bei der Kombination Stahl–Aluminiumlegierung für Original–Modell ergibt sich ein Maßstab des Modells von $n = 0,97 \approx 1$, wie auch Weber (1918, S. 97) am Beispiel des Eisenbahnbrückenmodells feststellte. Das Modell ist somit in etwa gleich groß wie das Original, hätte aber den Vorteil, dass dieses auf Grund der leichteren Zerspanbarkeit von Aluminium schneller und kostengünstiger gefertigt werden könnte, als aus Stahl.

Ist beispielsweise das Original aus Stahl E355 vorliegend und soll dessen Modell aus lasergesintertem PA 12/PA 2200 aufgebaut werden, so muss das Modell in einem Maßstab $n = 0,07 = 1/14,6$ aufgebaut werden, wenn $n_w = n_a = n_l$ gelten soll. Für das Beispiel Cabrioüberdeckkinematik, deren Getriebeglieder aus Stahl durchaus nur Dicken im einstelligen Millimeterbereich aufweisen können, sind Modelle im Maßstab $n = 0,07$ aus Polyamid nicht handhabbar.

Materialkombinationen wie beispielsweise Stahl für das Original und Messing für das Modell liefern einen Maßstab von $n = 0,45 = 1/2,2$, der für die Anwendung Cabrioüberdeckkinematik ein Modell in einer kleinen aber noch praktikablen Größe verspricht.

4.1.3 Allgemein linear-elastischer Ansatz

Im vorhergehenden Abschnitt wird die Querkontraktion der Werkstoffe vernachlässigt. Im Folgenden wird der Einfluss der Querkontraktionszahlen auf den benötigten geometrischen Maßstab für das Modell untersucht.

Die Kontinuumsmechanik liefert Methoden, die zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Materie bei unterschiedlichen Lastzuständen herangezogen werden können. (Altenbach, 2015, S. 7; Lai *et al.*, 2010, S. 1)

Materie, die in der Realität diskret aus Atomen und Molekülen aufgebaut ist, wird in dieser Disziplin als ein kontinuierliches Materiemodell betrachtet, dessen Eigenschaften sich aus phänomenologischen Betrachtungen des Materialverhaltens ableiten. (Altenbach, 2015, S. 8)

Eine Einteilung der Kontinuumsmechanik kann nach Lai *et al.* (2010, S. 1 f.) in zwei Hauptgebiete erfolgen. Dies sind zum einen allgemeine Grundsätze („general principles“), die für alle Medien gültig sind und zum anderen Stoffgleichungen („constitutive equations“) d. h. Modelle für idealisierte Materialien. Zu den allgemeinen Grundsätzen werden die Axiome für Massen-, Impuls-, Drall- und Energieerhaltung sowie die Entropiezunahme irreversibler Prozesse gezählt. Die Stoffgleichungen für idealisierte Materialien bilden bestimmte Eigenschaften realer Materialien ab.

Die Zusammenhänge der Kontinuumsmechanik können mathematisch mittels der Tensoralgebra beschrieben werden. Für alle folgenden Betrachtungen dieser Arbeit können mehrere Einschränkungen getroffen werden, die gegenüber der allgemeinen Theorie einige Vereinfachungen zulassen. Insbesondere können die mathematischen Zusammenhänge für diese Spezialfälle auch mittels Vektor-Matrix-Algebra dargestellt werden (Altenbach, 2015, S. 325).

Die in der Arbeit betrachteten Werkstoffe werden als homogene und isotrope Festkörper betrachtet. Homogen bedeutet, dass die Materialeigenschaften, wie beispielsweise die Dichte oder der Elastizitätsmodul, innerhalb eines Körpers ortsunabhängig sind, d. h. an allen Punkten im Körper gleich sind. Isotrop bedeutet, dass die Materialeigenschaften unabhängig von der Richtung sind. (Altenbach, 2015, S. 14; Gross *et al.*, 2018, S. 105)

Weiterhin wird angenommen, dass sich die Werkstoffe im Bereich der angewendeten Belastungen linear-elastisch verhalten. Dies bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den auftretenden Verzerrungen linear ist. (Gross *et al.*, 2018, S. 105)

Des Weiteren wird angenommen, dass die auftretenden Verzerrungen klein sind und dass alle Vorgänge quasi-statisch und unter Vernachlässigung thermischer Effekte ablaufen.

Die Notation der Formelzeichen orientiert sich im Folgenden an Gross *et al.* (2018) und Gross *et al.* (2021). Der Spannungszustand an einem Punkt innerhalb eines Bauteils kann über den Cauchy'schen Spannungstensor ausgedrückt werden, der sich als Vektor σ mit sechs Einträge aufschreiben lässt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Die Spannungen σ_x , σ_y und σ_z werden als Normalspannungen bezeichnet. Sie stehen senkrecht auf den Schnittflächen eines infinitesimal kleinen, freigeschnittenen Würfels um den betrachteten Punkt, wie er in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Die Würfel­flächen sind hierbei parallel zu den Koordinatenebenen des beschreibenden Koordinatensystems. Der Index der Normalspannungen entspricht der Richtung der Koordinatenachse, die senkrecht auf der entsprechenden Ebene steht.

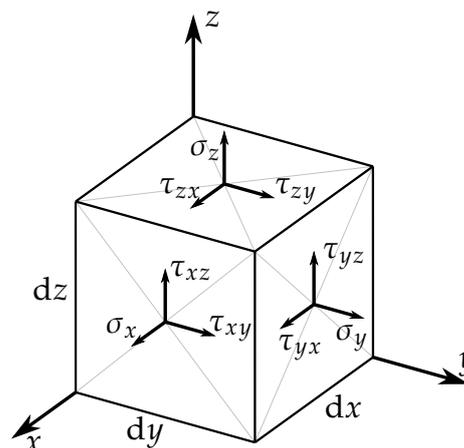


Abb. 4.5: Die Komponenten des Spannungstensors an einem infinitesimal kleinen Würfel (Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2018, S. 70))

Die Spannungen τ_{yz} , τ_{zx} und τ_{xy} (bzw. τ_{zy} , τ_{xz} und τ_{yx}) sind die Schubspannungen. Sie liegen in den Schnittflächen des freigeschnittenen Würfels. Der erste Index gibt, wie bei den Indizes der Normalspannungen, die zugehörige Ebene an. Der zweite Index gibt die Richtung an, in welche die entsprechende Schubspannung zeigt. Über ein Momentengleichgewicht an dem freigeschnittenen Würfel lässt sich zeigen, dass gelten muss $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wodurch insgesamt sechs Größen zur Beschreibung des Spannungszustands an einem Punkt verbleiben. (Gross *et al.*, 2018, S. 70)

Die Verformung, die an einem Punkt innerhalb eines Körpers auftritt, kann im linear-elastischen Fall über den infinitesimalen (Euler'schen) Verzerrungstensor ε an diesem Punkt beschrieben werden (Gross *et al.*, 2018, S. 97; Lai *et al.*, 2010, S. 204; Altenbach, 2015, S. 155). Der Verzerrungstensor ε lässt sich wie der Spannungstensor ebenfalls als Vektor mit sechs Einträgen notieren:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Die Größen ε_x , ε_y und ε_z beschreiben die Dehnung eines infinitesimalen Volumens entlang der Koordinatenachsen. Die Scherung/Gleitung am betrachteten Punkt wird über die Winkeländerungen γ_{yz} , γ_{zx} und γ_{xy} charakterisiert. Diese werden auch über die halben Winkeländerungen $\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$, $\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx}/2$ und $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$ ausgedrückt (Gross *et al.*, 2021, S. 64).

In Abbildung 4.6 sind exemplarisch die Dehnung ε_x und die Scherung ε_{xy} in einer Koordinatenebene des infinitesimal kleinen Würfels dargestellt.

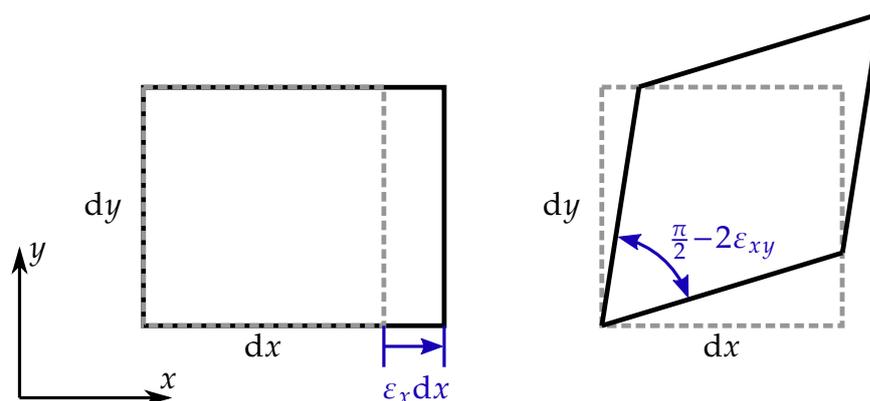


Abb. 4.6: Die Dehnung ε_x und die Scherung ε_{xy} . Gestrichelt ist jeweils der undeformierte Körper dargestellt. Für die anderen Koordinatenrichtungen verhält es sich analog. (Abbildung angelehnt an Gross *et al.* (2018, S. 97))

Durch die Annahme des linear-elastischen Werkstoffverhaltens findet das Hooke'sche Gesetz Anwendung. Dadurch lässt sich der Zusammenhang zwischen der Spannung und der Verzerrungen an einem Punkt für kleine Verformungen in der folgenden Matrixform aufstellen (Altenbach, 2015, S. 325; Gross *et al.*, 2018, S. 115):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.47)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Die 6×6 -Matrix \mathbf{E} in Gleichung (4.48) wird als Elastizitätstensor bezeichnet. Bei allgemeiner Anisotropie ist der Elastizitätstensor \mathbf{E} symmetrisch ($a_{ij} = a_{ji}$) und hat somit 21 unabhängige Parameter. (Altenbach, 2015, S. 326; Gross *et al.*, 2018, S. 106) Bei isotropen Materialverhalten reduziert sich die Anzahl der von 0 verschiedenen Einträgen von \mathbf{E} auf zwölf (Altenbach, 2015, S. 331):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Die zwölf Einträge a_{ij} in Gleichung (4.49) sind lediglich von zwei Materialparametern des verwendeten Werkstoffs abhängig (Gross *et al.*, 2018, S. 487):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Diese zwei Materialparameter λ und μ in Gleichung (4.50) werden als Lamé-Konstanten bezeichnet und haben beide die Einheit der mechanischen Spannung („Kraft pro Fläche“) (Gross *et al.*, 2018, S. 488; Lai *et al.*, 2010, S. 208). Die Parameter λ und μ können auch über jeweils zwei der im Ingenieurwesen gebräuchlicheren Materialkennwerte Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν , Schubmodul G oder Kompressionsmodul k ausgedrückt werden (Lai *et al.*, 2010, S. 212). Die Lamé-Konstante μ entspricht direkt dem Schubmodul G (Gross *et al.*, 2018, S. 107; Lai *et al.*, 2010, S. 211). Sie berechnet sich aus Elastizitätsmodul E und Querkon-

traktionszahl ν zu (Lai *et al.*, 2010, S. 212):

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.51)$$

Für die Umrechnung des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν in die Lamé-Konstante λ gilt der folgende Zusammenhang (Lai *et al.*, 2010, S. 212):

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.52)$$

Diese Zusammenhänge aus den Gleichungen (4.51) und (4.52) eingesetzt in Gleichung (4.50) ergeben (Altenbach, 2015, S. 332):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Die Einträge des so definierten Spannungstensors und des Dehnungstensors für einen Punkt im Körper hängen von der Orientierung des Koordinatensystems ab, das zur Beschreibung verwendet wird. Über eine Koordinatentransformation können die Komponenten der Tensoren im Bezug auf ein beliebiges anderes Koordinatensystem ausgedrückt werden. (Gross *et al.*, 2018, S. 74)

Hierbei ist es für jeden Spannungszustand möglich den Spannungstensor in einem sogenannten Hauptachsensystem anzugeben. Im Hauptachsensystem werden die Schubspannungen zu Null. Die Normalspannungen zeigen dann entlang der Koordinatenachsen des Hauptachsensystems und werden als Hauptspannungen bezeichnet. (Gross *et al.*, 2018, S. 77)

Analog zum Spannungstensor, kann der Dehnungstensor in einem Hauptachsensystem beschrieben werden, sodass die Scherungen verschwinden und nur Dehnungen entlang der Hauptachsenrichtungen erhalten bleiben. Für ein isotropes elastisches Material sind die Hauptrichtungen der Spannungen und der Dehnungen gleich. (Gross *et al.*, 2021, S. 69)

Die drei Hauptspannungen werden im Folgenden mit σ_1 , σ_2 und σ_3 bezeichnet. Die drei Hauptdehnungen mit ε_1 , ε_2 und ε_3 . Bei Verwendung der Hauptspannungen und -dehnungen zur Beschreibung des Spannungszustands an einem Punkt

vereinfacht sich der Zusammenhang aus Gleichung (4.53) zu:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Gleichung (4.54) nach den Hauptdehnungen aufgelöst, ergibt

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{-E\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)} & \frac{E(\nu-1)}{(2\nu-1)(\nu+1)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

und weiter vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Ausgehend von diesem Zusammenhang aus Gleichung (4.56) werden im Folgenden die Skalierungsgesetzmäßigkeiten zwischen originaler Hauptausführung (Index H) und skaliertem Modell (Index S) hergeleitet. Dazu werden die folgenden Maßstäbe aus Tabelle 4.6 für physikalische Größen verwendet.

Tabelle 4.6: Verwendete Maßstäbe der allgemein linear-elastischen Betrachtung

Maßstab	Beschreibung
$n := l_S/l_H$	Maßstab aller Längenmaße
$n_E := E_S/E_H$	Maßstab des Elastizitätsmoduls
$n_\nu := \nu_S/\nu_H$	Maßstab der Querkontraktionszahl
$n_\sigma := \sigma_S/\sigma_H$	Maßstab der Spannungen
$n_\varepsilon := \varepsilon_S/\varepsilon_H$	Maßstab der Dehnungen
$n_\rho := \rho_S/\rho_H$	Maßstab der Massendichte
$n_F := F_S/F_H$	Maßstab der eingprägten Kräfte
$n_M := M_S/M_H$	Maßstab der eingprägten Drehmomente

Für ein geometrisch ähnliches Verformungsverhalten müssen dabei die Hauptdehnungen für Modell (Index S) und Original (Index H) gleich sein. Für den

Maßstab der Dehnungen bedeutet dies:

$$n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{1,S}}{\varepsilon_{1,H}} = \frac{\varepsilon_{2,S}}{\varepsilon_{2,H}} = \frac{\varepsilon_{3,S}}{\varepsilon_{3,H}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (4.57)$$

Das Gleichungssystem aus Gleichung (4.56) kann nun für das Modell und das Original aufgestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,S} \\ \varepsilon_{2,S} \\ \varepsilon_{3,S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,H} \\ \varepsilon_{2,H} \\ \varepsilon_{3,H} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_S} & \frac{-\nu_S}{E_S} & \frac{-\nu_S}{E_S} \\ \frac{-\nu_S}{E_S} & \frac{1}{E_S} & \frac{-\nu_S}{E_S} \\ \frac{-\nu_S}{E_S} & \frac{-\nu_S}{E_S} & \frac{1}{E_S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{1,S} \\ \sigma_{2,S} \\ \sigma_{3,S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_H} & \frac{-\nu_H}{E_H} & \frac{-\nu_H}{E_H} \\ \frac{-\nu_H}{E_H} & \frac{1}{E_H} & \frac{-\nu_H}{E_H} \\ \frac{-\nu_H}{E_H} & \frac{-\nu_H}{E_H} & \frac{1}{E_H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{1,H} \\ \sigma_{2,H} \\ \sigma_{3,H} \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Die ausmultiplizierte Matrixgleichung (4.59) liefert die folgenden drei Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{1,S} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{2,S} + \sigma_{3,S}) = \frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{1,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{2,H} + \sigma_{3,H}) \quad (4.60)$$

$$\text{II. } \frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{2,S} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{1,S} + \sigma_{3,S}) = \frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{2,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{3,H}) \quad (4.61)$$

$$\text{III. } \frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{3,S} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{1,S} + \sigma_{2,S}) = \frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{3,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{2,H}) \quad (4.62)$$

Unter der Voraussetzung, dass von außen eingeprägte Kräfte gleich skalieren sollen wie Gewichtskräfte, muss gelten:

$$n_F = n_\rho \cdot n_g \cdot n^3 \quad (4.63)$$

Mit einem geforderten Maßstab der Fallbeschleunigung $n_g = 1$ ergibt sich für den Maßstab der mechanischen Spannung dann:

$$n_\sigma = \frac{n_F}{n^2} = \frac{n_\rho \cdot n_g \cdot n^3}{n^2} = n_\rho \cdot n \quad (4.64)$$

Die Spannungen für das Modell lassen sich damit durch die Spannungen der Hauptausführung ausdrücken und das Gleichungssystem (4.60) – (4.62) lautet:

$$\text{I. } \underbrace{\left(\frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{1,H} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{2,H} + \sigma_{3,H}) \right)}_{\mathcal{A}_1} \cdot n_\rho \cdot n = \underbrace{\left(\frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{1,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{2,H} + \sigma_{3,H}) \right)}_{\mathcal{B}_1} \quad (4.65)$$

$$\text{II. } \underbrace{\left(\frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{2,H} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{3,H}) \right)}_{\mathcal{A}_2} \cdot n_\rho \cdot n = \underbrace{\left(\frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{2,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{3,H}) \right)}_{\mathcal{B}_2} \quad (4.66)$$

$$\text{III. } \underbrace{\left(\frac{1}{E_S} \cdot \sigma_{3,H} - \frac{\nu_S}{E_S} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{2,H}) \right)}_{\mathcal{A}_3} \cdot n_\rho \cdot n = \underbrace{\left(\frac{1}{E_H} \cdot \sigma_{3,H} - \frac{\nu_H}{E_H} \cdot (\sigma_{1,H} + \sigma_{2,H}) \right)}_{\mathcal{B}_3} \quad (4.67)$$

Das Gleichungssystem (4.65) – (4.67) mit dem unbekanntem Maßstab n für die Längenabmessungen ist überbestimmt. Des Weiteren sind die Gleichungen zusätzlich vom Spannungszustand $(\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}, \sigma_{3,H})^T$ abhängig, der im Allgemeinen an jedem Ort im Bauteil unterschiedlich ist.

Zur Wahrung der Übersichtlichkeit werden die von n unabhängigen Terme mit den Symbolen \mathcal{A}_i und \mathcal{B}_i bezeichnet wodurch sich das Gleichungssystem notieren lässt als:

$$\text{I. } \mathcal{A}_1 \cdot n = \mathcal{B}_1 \quad (4.68)$$

$$\text{II. } \mathcal{A}_2 \cdot n = \mathcal{B}_2 \quad (4.69)$$

$$\text{III. } \mathcal{A}_3 \cdot n = \mathcal{B}_3 \quad (4.70)$$

Um ein optimales n für alle drei Gleichungen zu finden, wird die Gütefunktion $r(n)$ aufgestellt, die dann minimiert wird.

$$r(n) = (\mathcal{A}_1 \cdot n - \mathcal{B}_1)^2 + (\mathcal{A}_2 \cdot n - \mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{A}_3 \cdot n - \mathcal{B}_3)^2 \stackrel{!}{=} \min \quad (4.71)$$

Zur Berechnung des lokalen Extremums der quadratischen Funktion $r(n)$ wird die erste Ableitung dieser nach n gleich null gesetzt:

$$\frac{\partial}{\partial n} r(n) = 2 \cdot (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2) \cdot n - 2 \cdot (\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{B}_3) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.72)$$

Da die zweite Ableitung von $r(n)$ nach n für alle reellen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ stets größer gleich null ist, liegt ein lokales Minimum vor:

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} r(n) = 2 \cdot (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2) \geq 0 \quad \forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in \mathbb{R} \quad (4.73)$$

Somit berechnet sich der optimale Maßstab $n = n_{opt}$ für die Längenabmessungen des Bauteils in Abhängigkeit eines lokalen Spannungszustands $(\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}, \sigma_{3,H})^T$ nach der umgestellten Gleichung (4.72) zu:

$$n_{opt} = \frac{\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{B}_3}{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2} \quad (4.74)$$

Im Folgenden wird untersucht, welchen Einfluss der lokale Spannungszustand $(\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}, \sigma_{3,H})^T$ auf den optimalen Maßstab n_{opt} hat. Hierfür wird beispielhaft die Materialkombination Stahl–Messing mit den Stoffwerten aus Tabelle 4.4 verwendet und um die Querkontraktionszahl ergänzt. Für Stahl liegt die Querkontraktionszahl laut Niemann *et al.* (2001, S. 550) bei 0,3. Für Messing CuZn40 liegt das Schubmodul laut Deutsches Kupferinstitut Berufsverband e.V. (2007) bei $37\,000 \text{ N/mm}^2$, woraus sich mit dem Elastizitätsmodul von $102\,000 \text{ N/mm}^2$ nach Gleichung (4.51) eine Querkontraktionszahl von 0,38 ergibt. Die Werkstoffkennwerte sind in Tabelle 4.7 zusammengefasst.

Tabelle 4.7: Verwendete Werkstoffe für die originale Hauptausführung H und das skalierte Modell S

	Original	Modell
Werkstoff	Stahl	Messing CuZn40
Dichte	$\rho_H = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\rho_S = 8400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Elastizitätsmodul	$E_H = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$E_S = 102\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Querkontraktionszahl	$\nu_H = 0,3$	$\nu_S = 0,38$

Für 4674 zufällige Spannungszustände $(\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}, \sigma_{3,H})^T$ wird jeweils mit Gleichung (4.74) der optimale Maßstab n_{opt} berechnet. Zur Erzeugung der zufälligen Hauptspannungen werden den drei Werten $\sigma_{i,H}$ jeweils ein zufälliger Wert zwischen -1 und 1 zugeordnet. Da nur das Verhältnis der Hauptspannungen $\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}$ und $\sigma_{3,H}$ untereinander von Bedeutung ist und nicht deren absolute Werte, ist beispielsweise eine Normierung des Vektors $(\sigma_{1,H}, \sigma_{2,H}, \sigma_{3,H})^T$ nicht notwendig. Im folgenden Diagramm in Abbildung 4.7 sind für jeden der 4674 zufälligen Spannungszustände der optimale Maßstab n_{opt} , berechnet nach Gleichung (4.74), eingetragen. Die Spannungszustände wurden hierfür nach der Größe des jeweils berechneten n_{opt} auf der Abszisse angeordnet.

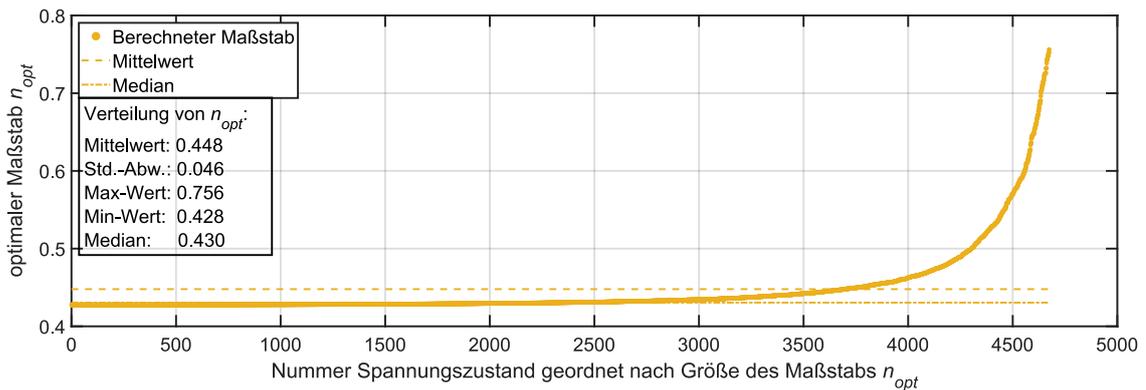


Abb. 4.7: Darstellung der berechneten optimalen Maßstäbe n_{opt} für das Modell für 4674 zufällige Spannungswerte. Die Lastfälle sind für die Darstellung nach Größe ihrer zugehörigen Maßstäbe geordnet.

Bei Vernachlässigung der Querkontraktion berechnet sich der Maßstab der Längenabmessungen nach Gleichung (4.41) zu:

$$n = \frac{n_E}{n_\rho} = \frac{E_S \cdot \rho_H}{E_H \cdot \rho_S} = 0,45 = \frac{1}{2,2} \quad (4.75)$$

Aus Abbildung 4.7 lässt sich eine Verteilung für den optimalen Maßstab n_{opt} herauslesen. Für über die Hälfte der 4674 zufälligen Spannungszustände liegt der optimale Maßstab bei ca. 0,43. Andere Spannungszustände zeigen aber größere Abweichungen von diesem Wert bis zu einem Maximalwert von ca. 0,76. Die Verteilung zeigt einen Mittelwert von 0,448 mit einer Standardabweichung von 0,046.

Für eine realitätsnähere Abschätzung des optimalen Maßstabs werden nicht zufällige Spannungszustände verwendet, sondern solche, wie sie in einem repräsentativen Bauteil unter Belastung tatsächlich auftreten können. Dafür wird ein eingespanntes und belastetes gekröpftes Getriebeglied einer Verdeckkinematik verwendet, wie dieses in Abbildung 4.8 gezeigt ist, und dessen Spannungszustand mittels einer FEM-Simulation betrachtet. Das Bauteil ist an zwei Bohrungen fest eingespannt und an der dritten Bohrung mit einer Kraft von 100 N in jede der drei Koordinatenrichtungen belastet. Die daraus resultierende Kraft von ca. 173 N ist in der Abbildung 4.8 als gelber Pfeil in allen drei Ansichten dargestellt. Zusätzlich wirkt die Gewichtskraft in Richtung des blauen Pfeils. Die Gewichtskraft des Getriebegliedes liegt in Summe bei ca. 37 N.

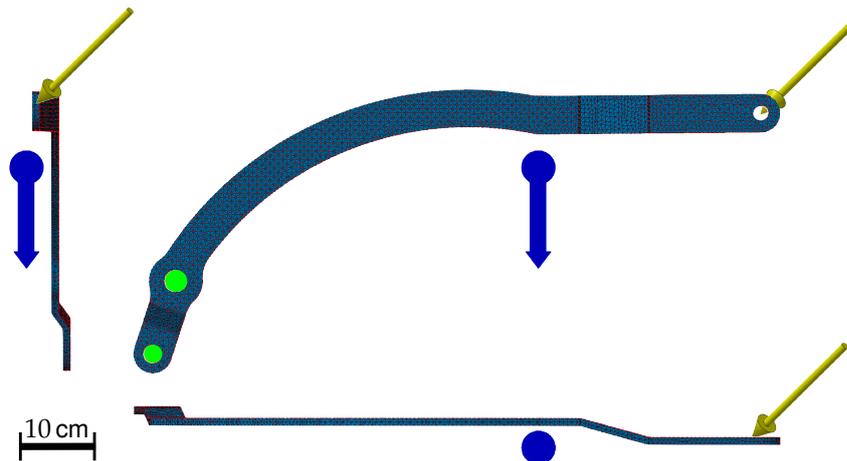


Abb. 4.8: Das betrachtete Getriebeglied zur Gewinnung von Spannungszuständen mittels FEM in drei Ansichten. Es wirkt eine eingeprägte Kraft in Richtung des gelben Pfeils und die Gewichtskraft in Richtung des blauen Pfeils. Eine feste Einspannung befindet sich in den beiden grün markierten Bohrungen links unten in der Hauptansicht.

Die FEM-Berechnung liefert die Hauptspannungen an 4674 gleichmäßig im Bauteil verteilten Punkten. Für jeden dieser Spannungszustände wird der optimale Maßstab n_{opt} nach Gleichung (4.74) berechnet. Aus Abbildung 4.9 ist hierfür die Verteilung des optimalen Maßstab n_{opt} ersichtlich.

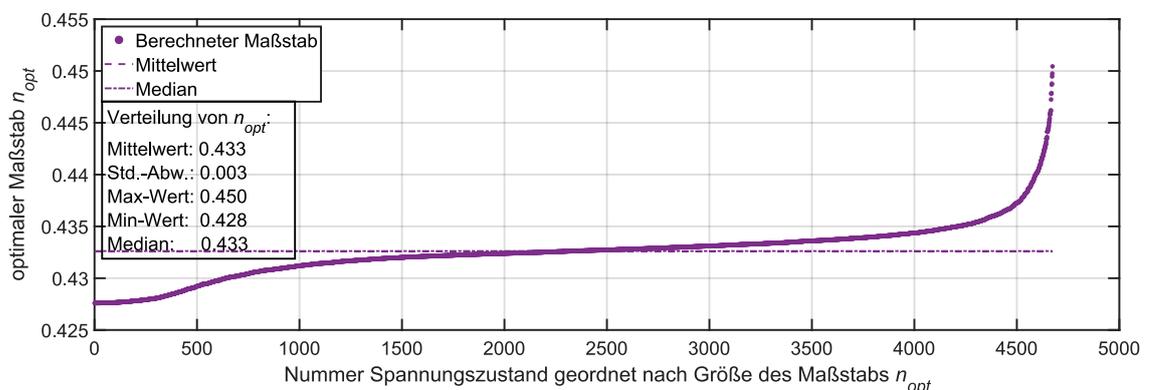


Abb. 4.9: Darstellung der berechneten optimalen Maßstäbe n_{opt} für das Modell für 4674 FEM-Knoten-Spannungswerte eines Beispielbauteils aus einer FEM-Berechnung. Die Lastfälle sind für die Darstellung nach Größe ihrer zugehörigen Maßstäbe geordnet.

Für diese Spannungszustände liegt der Mittelwert für den Maßstab bei 0,433. Die Standardabweichung von 0,003 ist deutlich geringer als bei den zufälligen Spannungszuständen in Abbildung 4.7. Dies wird bei einem direkten Vergleich der beiden Graphen deutlich, wie er in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Bestimmte zufällige Spannungszustände, die zu großer Varianz für den optimalen Maßstab

führen, tauchen bei den mit der FEM ermittelten Spannungszuständen praktisch nicht auf.

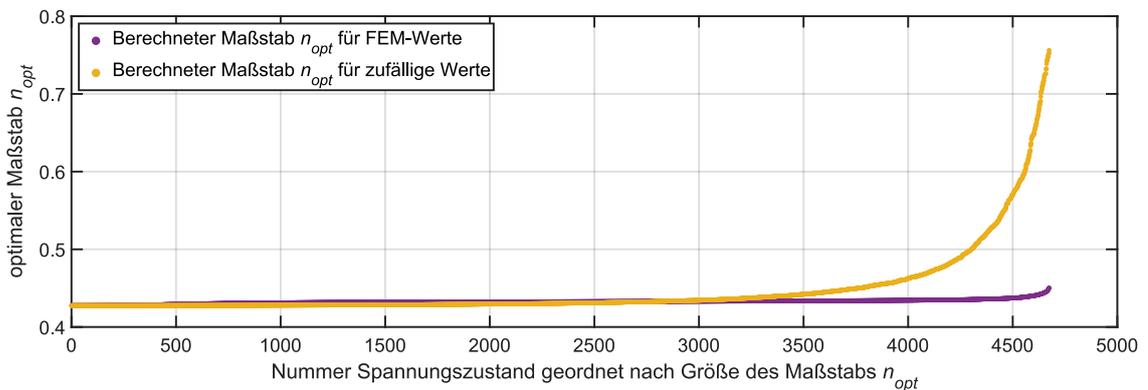


Abb. 4.10: Vergleich der Verteilung der berechneten optimalen Maßstäbe n_{opt} für das Modell bei Spannungswerten aus einer FEM-Berechnung (violett) und zufälligen Spannungswerten (gelb)

Sollten der Original- und der Modellwerkstoff die gleiche Querkontraktionszahl aufweisen ($\nu_H = \nu_S$), so ergibt sich für jeden beliebigen Spannungszustand der optimale Maßstab nach Gleichung (4.75). Perfekte geometrische Ähnlichkeit für das Verschiebungsfeld lässt sich für ein Modell in der Theorie im Allgemeinen nur erreichen, wenn die Querkontraktionszahlen gleich sind. Bei Vernachlässigung der Querkontraktionszahl lag der Maßstab im Beispiel bei 0,45. Dieser unterscheidet sich nicht stark von dem optimalen Maßstab, der für die Spannungswerte aus der FEM-Berechnung ermittelt wurde, und im Mittel bei 0,43 liegt. Da beim Aufbau eines physischen Modells fertigungsbedingt mit Abweichungen zu rechnen ist, können Abweichungen des Modells basierend auf geringe Verschiedenheiten bei den Querkontraktionszahlen von Original- und Modellwerkstoff wie im Beispiel in vielen Fällen vernachlässigt werden.

Nach Festlegung des geometrischen Maßstabs n gilt für Versuche am Modell nach Gleichung (4.63) für die Skalierung der eingepprägten Kräfte:

$$F_S = n_F \cdot F_H = n_\rho \cdot n^3 \cdot F_H \quad (4.76)$$

Für die Skalierung der eingepprägten Momente („Kraft mal Weg“) gilt:

$$M_S = n_M \cdot M_H = n_F \cdot n \cdot M_H = n_\rho \cdot n^4 \cdot M_H. \quad (4.77)$$

4.2 Drehmomentprüfstand zur Vermessung von Drehgelenken

Ein mögliches Kriterium bei der Auslegung von Drehgelenken ist, dass diese möglichst spielfrei sind. Speziell bei Fahrzeugverdecken erfolgt die Lagerung in den Gelenken über Gleitlagerbuchsen. Bei der Montage werden die Gelenke auf einer Presse vernietet, wobei der Niet als Gelenkbolzen dient. Auf Grund von Reibung und der Flächenpressung, die sich hierbei im Gelenk einstellt, wird bereits allein für die Bewegung des Gelenks ein bestimmtes Antriebsdrehmoment benötigt. Die in dieser Arbeit betrachteten Drehgelenke, wie sie im Verdeckbau in der Serienfertigung verwendet werden, wurden für die Versuche speziell gefertigt. Dafür wurden zylindrische Gelenkhälften, deren Höhe der Dicke der originalen Getriebeglieder entspricht, verwendet. Die Gelenke wurden auf den Anlagen der Serienfertigung mit originalen Gleitlagerbuchsen und Nieten verpresst. Die eigens gefertigten Gelenke mit den zylindrischen Gelenkhälften werden im Folgenden als (*originale*) *Gelenkmodule* bezeichnet. Eine Auswahl solcher Gelenkmodule unterschiedlicher Größe ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Bei Vorversuchen im Rahmen dieser Arbeit wurden bei diesen Gelenkmodulen zur Bewegung notwendige Drehmomente von bis zu 7,4 Nm gemessen.



Abb. 4.11: Gelenkmodule von Drehgelenken einer Fahrzeugverdeckkinematik. Das größte abgebildete Gelenkmodul hat einen Durchmesser von 30 mm und eine Länge von 36 mm.

Messergebnisse einer experimentellen Ermittlung dieser Reibmomente von realen Drehgelenken können zum einen verwendet werden, um virtuelle Modelle von Getrieben zu parametrisieren. Dadurch kann die Aussagekraft von computergestützten Simulationen von Getrieben gestärkt werden. Zum anderen können die experimentell ermittelten Werte verwendet werden, um damit die notwendigen Reibmomente für ein skaliertes Getriebemodell mit ähnlichen Eigenschaften zu ermitteln. Eine Überprüfung der geforderten Reibmomente für die skalierten Gelenke kann ebenfalls experimentell erfolgen.

Zur Ermittlung der Reibmomente, die zur Bewegung von Drehgelenken aufgebracht werden müssen, wird ein Prüfstand verwendet. Mit diesem Prüfstand

werden sowohl die Reibmomente der originalen Drehgelenke gemessen, als auch die eingestellten Reibmomente der Drehgelenke für das Modell. Der Aufbau eines solchen Prüfstands entstand im Rahmen der Studienarbeiten von Stifter (2017) und von Gritsch (2018).

4.2.1 Auslegung des Drehmomentprüfstands

Die für die Vorversuche zur Verfügung stehenden originalen Gelenkmodule aus einem Fahrzeugverdeck hatten Durchmesser von 20 bis 30 mm und Längen von 14 bis 36 mm. Der Prüfstand soll in seiner Größe so dimensioniert sein, dass diese Gelenkmodule in diesen eingespannt werden können. Das messbare Drehmoment soll auf Grund der Vorversuche bei mindestens 8 Nm liegen. Das Konzept des Prüfstands und seine relevanten Komponenten sind schematisch in Abbildung 4.12 gezeigt.

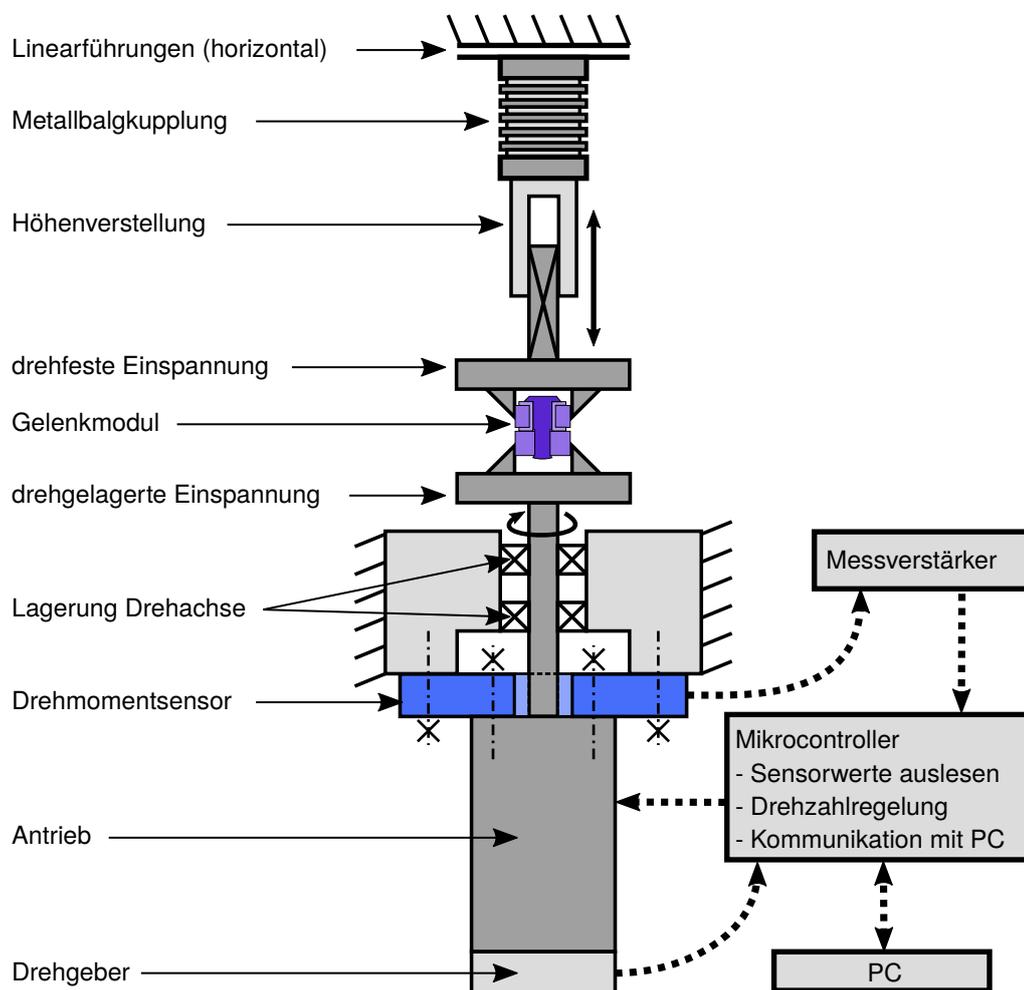


Abb. 4.12: Schematische Darstellung der Komponenten des Drehmomentprüfstands und der Signalflüsse (gestrichelte Pfeile). Die Energieversorgung ist nicht dargestellt.

Beide Gelenkhälften eines Gelenkmoduls werden in den Prüfstand eingespannt. Die eine Einspannung ist drehfest mit dem Gestell verbunden. Um während der Messung ein mögliches Verspannen des Gelenkmoduls durch mögliche Fertigungsungenauigkeiten oder durch ein nicht perfekt koaxiales Einspannen zu verhindern, ist diese Einspannung in den fünf verbliebenen Bewegungsfreiheitsgraden (drei Translationen und zwei Rotationen) nicht beschränkt. Die zweite Einspannung ist drehbar gegenüber dem Gestell gelagert. Der Antrieb kann die zweite Einspannung in Rotation versetzen und stützt sich dabei über einen Drehmomentsensor am Gestell ab. Das Reaktionsmoment des Antriebs kann somit gemessen werden. Ein Drehgeber an der Antriebsachse des Motors ermöglicht die Erfassung und somit über einen Regler die Regelung der Antriebswinkelgeschwindigkeit. Über ein PC-Programm kann die Winkelgeschwindigkeit vorgegeben werden und die Werte des Drehmomentsensors ausgelesen werden.

4.2.2 Realisierung des Drehmomentprüfstands

Der gesamte Aufbau ist in einem Rahmen aus Aluminiumprofilen angeordnet. Mittels der beiden Dreibackenfutter (Typ: DBF63, Koch Maschinenbau GmbH & Co. KG (2016)) können Drehgelenke mit einem Außendurchmesser von maximal 56 mm eingespannt werden. Das drehfeste Dreibackenfutter befindet sich oben im Prüfstand und ist über eine Metallbalgkupplung biegemomentfrei. Die Metallbalgkupplung bietet auch einen geringen Ausgleich in axialer Richtung. Die übrigen beiden translatorischen Freiheitsgrade der drehfesten Einspannung sind über einen Schlitten freigegeben, der auf Linearführungen in der Horizontalen beweglich ist. Ein Einstellen des Prüfstands zur Vermessung von Drehgelenkmodulen unterschiedlicher Länge ist mittels einer teleskopartigen Höhenverstellung im Bereich von etwa 45 mm durch Verschiebung der oberen Einspannung möglich. Gegenüber des drehfesten Dreibackenfutters ist koaxial das zweite Dreibackenfutter angeordnet, das drehbar gegenüber dem Gestell gelagert ist und über einen Elektromotor angetrieben werden kann. Bei dem Elektromotor handelt es sich um einen Planetengetriebemotor (Typ: DSMP523, Drive-System Europe Ltd. (2018)) mit 24 V Betriebsspannung. Das Nenndrehmoment an der Abtriebsachse des integrierten Planetengetriebes (4-stufig, Übersetzung 1:150) beträgt 9,7 Nm bei einer Nenndrehzahl von 23,5 U/min. Der ebenfalls in den Motor integrierte Drehgeber gibt fünf Impulse pro Umdrehung der Motorachse und mit der Übersetzung des Planetengetriebes somit $5 \cdot 150 = 750$ Impulse pro Umdrehung der Prüfstandswelle.

Das Abstützmoment des Elektromotors gegenüber dem Gestell wird mittels eines Drehmomentsensors erfasst. Hierfür stehen zwei Sensoren mit gleichem Formfaktor zur Verfügung, die je nach erwartetem Messbereich in den Prüfstand eingebaut werden können. Die verwendeten Drehmomentsensoren (Typ: TS70, ME-Meßsysteme GmbH (2016b)) haben ein Nennmoment von 2 Nm bzw. 10 Nm. Die Genauigkeit der Sensoren liegt bei einer relativen Linearitätsabweichung von $< 0,1\%$ des Endwerts. Die Auswertung des Drehmomentsensors und die Digitalisierung des Messsignals erfolgt über einen Messverstärker (Typ: GSV-2AS -

5+5/250/2, ME-Meßsysteme GmbH (2016a)) mit 24 Bit Auflösung.

Alle Komponenten sind in maßstablicher Darstellung in der Schnittansicht in Abbildung 4.13 gezeigt. Der Prüfstand hat eine Gesamthöhe von 850 mm.

Die Steuerung des Motors erfolgt über Pulsweitenmodulation durch einen Mikrocontroller (Arduino Mega 2560). Auf dem Mikrocontroller ist ein PI-Regler implementiert, der über eine Erfassung der Impulse des Drehgebers die Motordrehzahl regelt. Zusätzlich liest der Mikrocontroller über eine RS-232-Schnittstelle zum Messverstärker die Messwerte des Drehmomentsensors aus.

Über eine serielle Schnittstelle kommuniziert der Mikrocontroller mit einem PC. Hierbei können über ein PC-Programm Drehzahlen für den Motor vorgegeben werden und die Messwerte des Drehmomentsensors empfangen werden. Abbildung 4.13 zeigt neben der Schnittansicht ein Foto des gesamten Prüfstands.

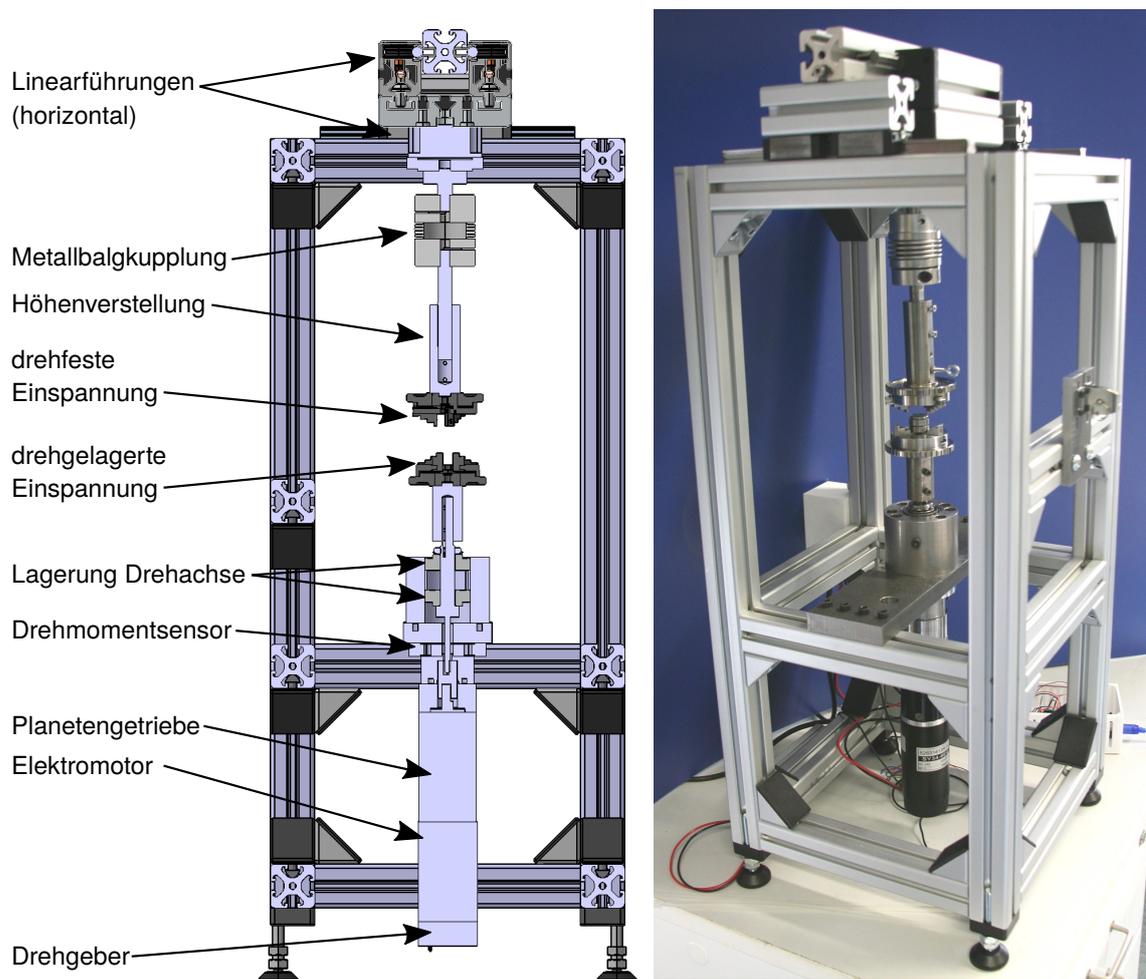


Abb. 4.13: Links: CAD-Schnittzeichnung durch den Drehmomentprüfstand mit dessen beschrifteten Komponenten. Rechts: Foto des aufgebauten Drehmomentprüfstands.

4.2.3 Messung mit dem Drehmomentprüfstand

Der Drehmomentsensor im Prüfstand gibt auch im Leerlauf ohne eingespanntes Gelenkmodul einen mit jeder vollen Umdrehung periodisch ändernden Messwert aus. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich der Sensor zwischen Motor und Gestell befindet und dadurch das Reaktionsmoment misst, mit dem sich der Motor gegenüber dem Gestell abstützt. Dadurch wird vom Sensor auch das Reibmoment im Getriebe und in der Lagerung der Prüfstandswelle erfasst. Die periodische Änderung über eine Umdrehung des Prüfstands ist auf Fertigungsungenauigkeiten zurückzuführen, die sich auf die Lagerung der Prüfstandswelle auswirken. In Abbildung 4.14 ist dieses periodische Leerlaufdrehmoment des Prüfstands über etwa fünf Umdrehungen bei einer Drehzahl von 20 U/min dargestellt.

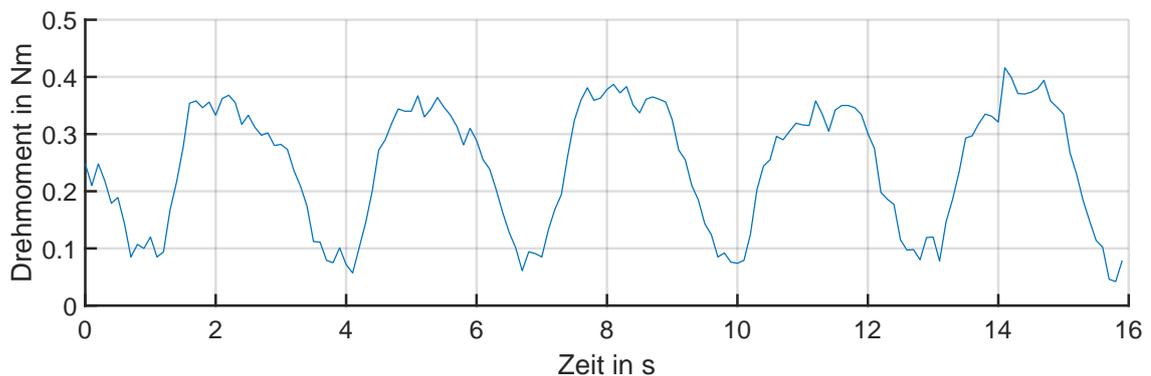


Abb. 4.14: Gemessenes Drehmoment im Leerlauf des Prüfstands bei einer Drehzahl der Prüfstandswelle von 20 U/min

Da das Leerlaufdrehmoment systematisch auftritt, kann dieses bei den späteren Messungen von Gelenkmodulen herausgerechnet werden, um das tatsächliche Reibmoment des Gelenkmoduls zu erhalten.

Ein Effekt, der mit dem Prüfstand beobachtet werden kann, ist das Einlaufverhalten der originalen Gelenkmodule. Der Verlauf des Drehmoments eines neuen Gelenkmoduls aus dem Verdeckbau ist in Abbildung 4.15 über 100 Umdrehungen innerhalb von fünf Minuten bei einer konstanten Drehzahl von 20 U/min gezeigt. Bei dem gezeigten Graphen wurde das Leerlaufdrehmoment des Prüfstands bereits herausgerechnet.

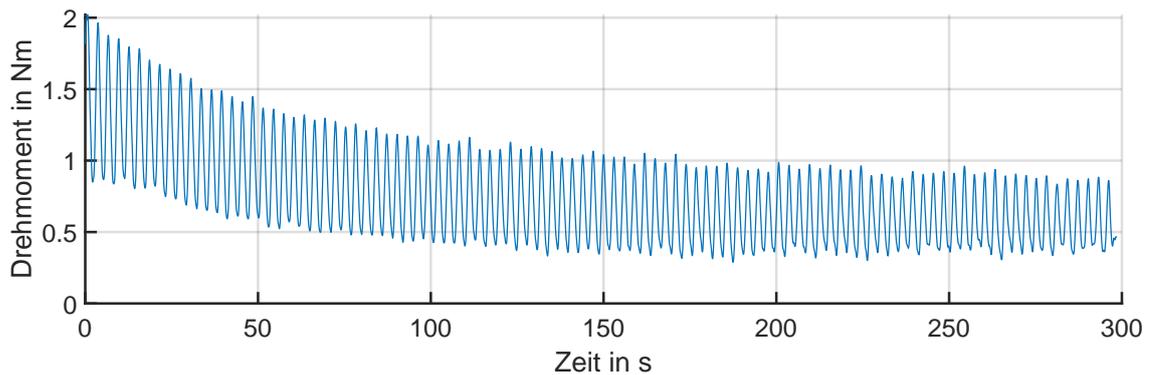


Abb. 4.15: Einlaufverhalten eines neuen originalen Gelenkmoduls über 100 Umdrehungen bei $20 \text{ U}/\text{min}$

Auch das Reibmoment in den Gelenkmodulen verhält sich periodisch über eine volle Umdrehung. Es ist erkennbar, dass der Verlauf des Drehmoments nach etwa 180 Sekunden bzw. 80 Umdrehungen nicht mehr als Ganzes abnimmt, sondern nur noch periodisch mit jeder Umdrehung schwankt. Der Mittelwert des Reibmoments läuft sich im betrachtete Zeitraum von etwa $1,4 \text{ Nm}$ auf etwa $0,6 \text{ Nm}$ ein.

Der Zyklus für die Messung eines Gelenkmoduls kann folgendermaßen ablaufen:

1. Einspannen des Gelenkmoduls in die beiden Dreibackenfutter
2. Einlaufen des Gelenkmoduls für einige Minuten, bis sich der Mittelwert des gemessenen Drehmoments nicht mehr ändert
3. Messung 1 des Drehmoments für eine ganzzahlige Anzahl von ≥ 3 Umdrehungen bei konstanter Drehzahl des Antriebs (\rightarrow Messung der Summe von Gelenkmoduldrehmoment und Leerlaufdrehmoment des Prüfstands, blauer Graph in Abbildung 4.16)
4. Lösen des oberen Dreibackenfutters
5. Messung 2 des Drehmoments für die gleiche Anzahl von Umdrehungen bei gleicher Drehzahl des Antriebs wie bei Messung 1 (\rightarrow Messung des Leerlaufdrehmoments des Prüfstands, roter Graph in Abbildung 4.16)
6. Abschneiden der ersten und der letzten Umdrehung der beiden Messungen, um Einflüsse der Beschleunigung und des Abbremsens des Prüfstands auf die Messung auszuschließen
7. Subtraktion des Messwertverlaufs von Messung 2 von Messung 1 um den Verlauf des Reibmoments des Gelenkmoduls zu erhalten (grüner Graph in Abbildung 4.16)
8. Lösen des zweiten Dreibackenfutters und Entnahme des Gelenkmoduls

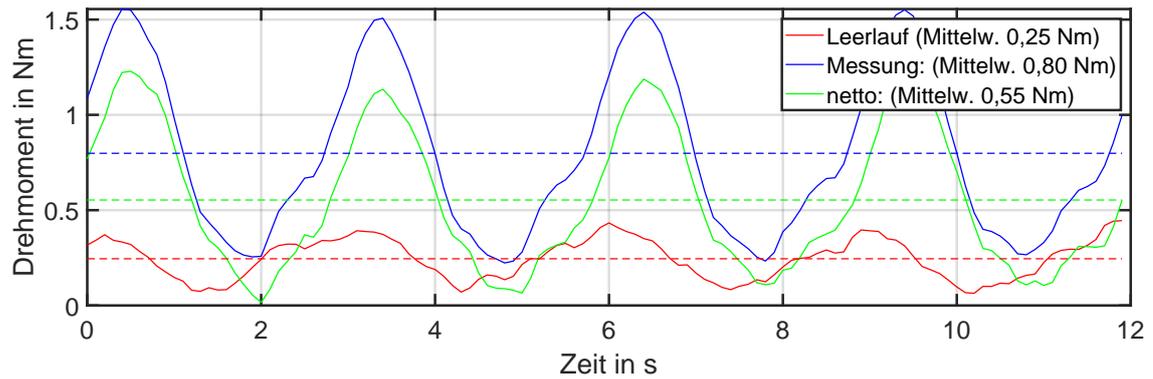


Abb. 4.16: Drehmomentmessung von einem originalen Gelenkmodul über 4 Umdrehungen bei 20 U/min

Dadurch, dass eine ganzzahlige Anzahl von Umdrehungen bei der Messung ausgeführt wird, ist sichergestellt, dass die beiden Verläufe von Messung 1 und Messung 2 direkt voneinander abgezogen werden können, um den Verlauf des tatsächlichen Reibmoments des Gelenkmoduls zu erhalten. Durch Bildung des Mittelwerts über diesen Verlauf kann ein mittleres Reibmoment ermittelt werden, das zum Bewegen des Gelenkmoduls notwendig ist.

4.3 Skalierung der Drehgelenke

Im Abschnitt 4.1 wird die Skalierung der Getriebeglieder für Ähnlichkeitsbetrachtungen an einem Getriebemodell unter Last und Eigengewicht betrachtet. Die Drehgelenke des Modells sollen, wie in Abschnitt 3.1 geschildert, nicht durch eine direkte Skalierung der originalen Gelenke realisiert werden. Stattdessen sollen für den Aufbau des Getriebemodells einheitliche Drehgelenkmodule verwendet werden, deren zur Drehung erforderliches Reibmoment, auf den nach Gleichung (4.77) geforderten Wert, individuell eingestellt werden kann.

Die Gelenkmodule werden in die Getriebeglieder des Modells eingepresst. Deswegen darf die Konstruktion der Getriebeglieder vom Original zum Modell im Allgemeinen nicht nur skaliert werden, sondern an den Orten der Gelenke müssen für das Modell Bohrungen in den Getriebegliedern mit den Durchmessern der Gelenkmodule vorgesehen werden. Dieses Konzept ist in Abbildung 4.17 veranschaulicht.

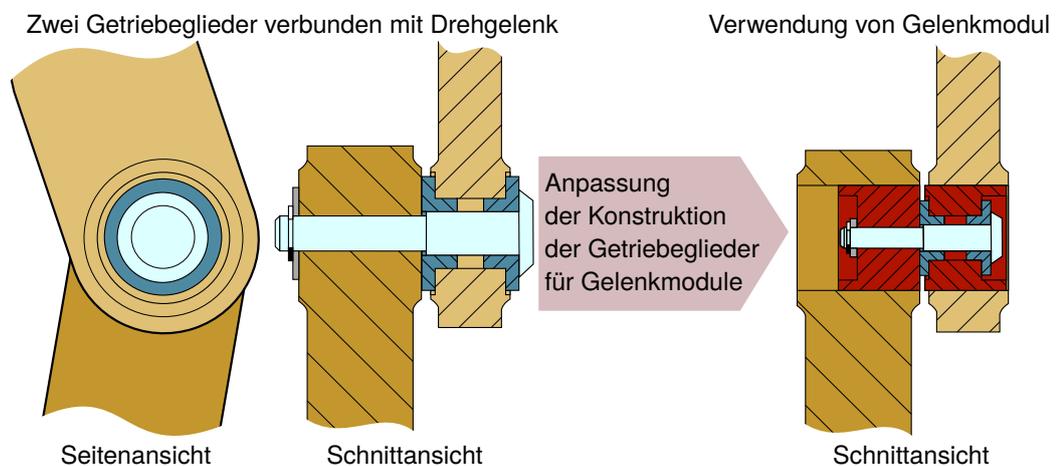


Abb. 4.17: Konzept der Gelenkmodule zum Ersetzen maßstablicher Gelenke im Modell. Anstatt die Komponenten (Lager, Bolzen, etc.) des Originalgelenks maßstäblich zu skalieren, werden die Gelenkstellen in den Getriebegliedern des Modells, so wie rechts dargestellt, mit einheitlichen Bohrungen versehen und in diese fertig montierte Gelenkmodule eingepresst, die die Lagerung, Bolzen, etc. enthalten.

Je nach Größe, in welcher das skalierte Modell aufgebaut wird, müssen die Gelenkmodule in ihrer Größe entsprechend angepasst sein, sodass sie in das Modell integriert werden können. In Abbildung 4.18 sind Gelenkmodule in drei unterschiedlichen Größen abgebildet. Die abgebildeten Gelenkmodule bestehen aus den zwei Gelenkhälften, einem Gewindebolzen mit Mutter sowie zwei Kunststoffgleitlagerbuchsen, die in eine Gelenkhälfte eingepresst sind. Das Drehmoment dieser Gelenkmodule einer frühen Entwicklungsstufe ist nicht einstellbar und ergibt sich durch die Passung zwischen Bolzen und Gleitlagern.



Abb. 4.18: Gelenkmodule für den Modellbau in drei verschiedenen Größen: Durchmesser×Länge in mm, 22×21, 16×15 und 12×10,5

Um eine schnelle und flexible Wahl des Reibmoments der Gelenkmodule zu ermöglichen, werden Gelenkmodule entwickelt, deren Reibmoment sich nach der Fertigung und vor dem Einsatz gewünscht einstellen lässt. Durch die nachträgliche Einstellbarkeit des Reibmoments müssen keine Kenntnisse über Reibwerte, Pressungen, Rauheiten, Materialkennwerte etc. vorliegen, die bei der Fertigung berücksichtigt werden müssten, um gezielt ein bestimmtes Reibmoment zu erreichen. Für die weitere Entwicklung der Gelenkmodule im Rahmen dieser Arbeit wurde ein einheitlicher Außendurchmesser von 9 mm festgelegt, da dieser für den geplanten Modellbau einer Verdeckkinematik im angestrebten Maßstab von 1:4 bis 1:2 als praktikabel angenommen wurde.

Zur Einstellbarkeit des gewünschten Drehmoments werden in die Konstruktion Tellerfedern integriert, die über ein Gewinde zwischen Bolzen und fester Gelenkhälfte gespannt werden können. Über die Stärke dieser Kompression wird das Reibmoment eingestellt. Die Tellerfedern drücken in axialer Richtung gegen die bewegte Gelenkhälfte und erhöhen so das Gesamtreibmoment des Gelenks. Ein selbsttätiges Verstellen des Drehmoments wird über das Kontern einer Mutter gegen die feste Gelenkhälfte unterbunden. Eine CAD-Zeichnung der Gelenkmodule ist in Abbildung 4.19 und ein Foto in Abbildung 4.20 gezeigt.

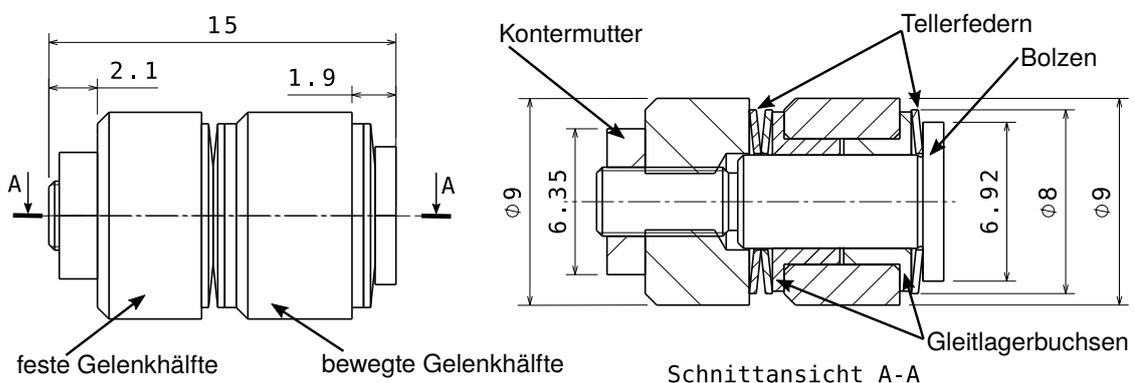


Abb. 4.19: CAD-Zeichnung eines Gelenkmoduls mit einstellbarem Reibmoment

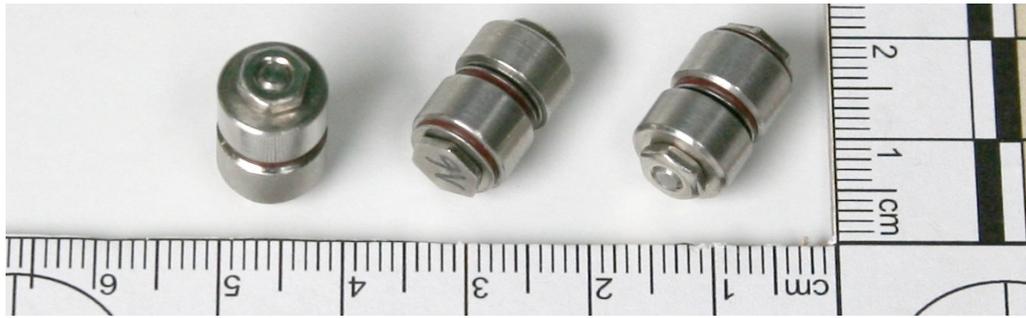


Abb. 4.20: Gelenkmodule mit 9 mm Außendurchmesser und einstellbarem Reibmoment

Die Montage in die Getriebeglieder erfolgt über Einpressen (Passung: $\varnothing 9_{k6}^{H7}$). Um ein Gelenkmodul auf ein bestimmtes Reibmoment einzustellen, kann der Prüfstand aus Abschnitt 4.2 verwendet werden (siehe Abbildung 4.21). Die Einstellung erfolgt hierbei iterativ. Zunächst wird das Reibmoment des montierten Gelenkmoduls, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, vermessen. Je nachdem ob das gewünschte Reibmoment oberhalb oder unterhalb des gemessenen Werts liegt, wird die Kompression der Tellerfedern im Gelenkmodule durch Anziehen bzw. Lösen der festen Gelenkhälfte erhöht oder verringert. Anschließend wird die feste Gelenkhälfte wieder mit der Mutter gekontert. Dieser Ablauf von Messen und Nachjustieren wird solange wiederholt, bis das gemessene Reibmoment in einem tolerablen Bereich liegt. Beim Justieren des Gelenkmoduls sollte systematisch vorgegangen werden, indem die feste Gelenkhälfte beispielsweise immer nur in bestimmten Winkelgradinkrementen angezogen bzw. gelöst wird.

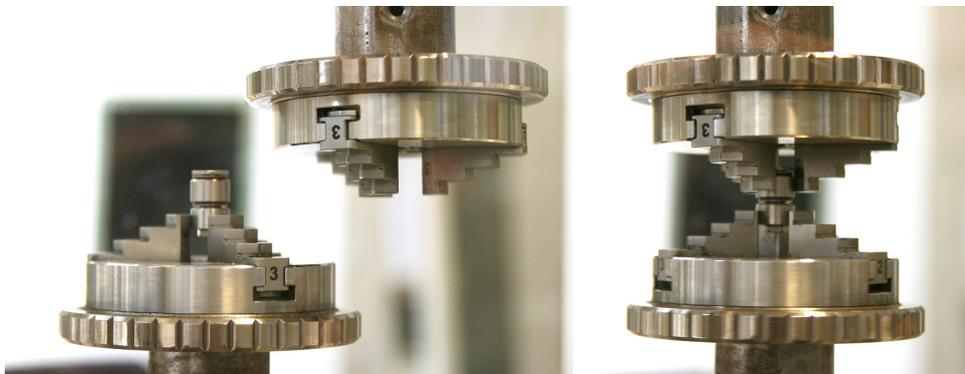


Abb. 4.21: Einstellbares Gelenkmodul mit 9 mm Außendurchmesser, das in den Drehmomentprüfstand aus Abschnitt 4.2 eingespannt wird.

Eine weitere Variante mit Außensechskant (Umkreisdurchmesser 9 mm), die form- und kraftschlüssig mit den Getriebegliedern verbunden werden kann, besteht ebenfalls. Diese ist in Abbildung 4.22 zu sehen. Die Gelenkmodule können beispielsweise auch eingesetzt werden, um schnell 3D-gedruckte Getriebemodelle aufzubauen, wie in Abbildung 4.23 gezeigt.

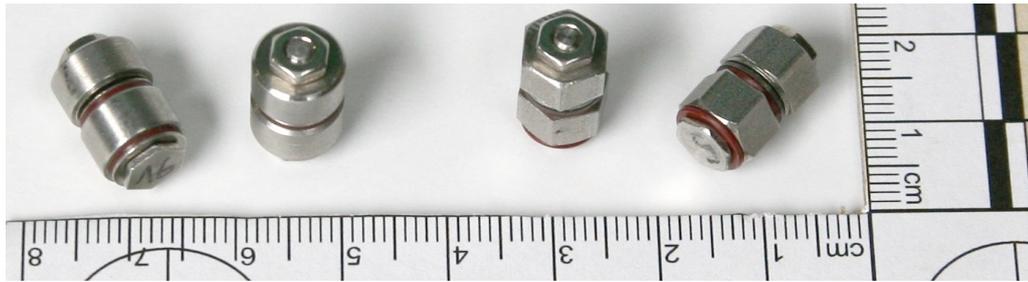


Abb. 4.22: Vergleich von Gelenkmodulen mit 9 mm Außendurchmesser (links) und Gelenkmodulvariante mit Außensechskant für formschlüssige Verbindung zum Getriebeglied (rechts)



Abb. 4.23: Gelenkmodulvariante mit Außensechskant beispielhaft verwendet in einem Viergelenk mit 3D-gedruckten Getriebegliedern

5 Experimente

Für die Experimente wird ein Teilgetriebe einer Cabriovertdeckkinematik aus dem Automobilbereich herangezogen. Dieses liegt bereits im Original vor. Die Experimente sollen zeigen, ob Messungen des Antriebsmoments und des Verformungsverhaltens unter statischer Last am Original und am skalierten Modell ähnlich verlaufen, und so die Messungen am Modell die Messungen am Original ersetzen können. Die Skalierung und der Aufbau des Modells soll mit den im Verlauf dieser Arbeit beschriebenen Verfahren erfolgen.

5.1 Versuchsaufbau und -vorbereitung

5.1.1 Anwendungsfall

Bei dem betrachteten Getriebe handelt es sich um zwei Viergelenke, die in gespiegelter Ausführung (linke und rechte Fahrzeugseite) vorliegen. Die Gelenke der beiden Viergelenke sind koaxial zueinander und eine Kopplung zwischen rechter und linker Seite erfolgt über insgesamt drei Verbindungsstangen. In Abbildung 5.1 sind die Seitenansicht und Vorderansicht des Getriebes in einer mittleren Stellung der Bewegung dargestellt. In der Seitenansicht ist die Viergelenkstruktur erkennbar. Das Gestell ist grau, die vorderen Schwingen sind orange, die hinteren Schwingen sind hellgrün und die Koppeln blau dargestellt. Der Antrieb erfolgt für die Versuche über ein Windeisen (dunkelgrün), das starr über einen Drehmomentsensor und einen Drehwinkelsensor (rote Komponenten rechts unten in Abbildung 5.1) mit der hinteren Schwinge (hellgrün) des Getriebes verbunden ist. Die beiden hinteren Schwingen der Viergelenke sind über zwei Stangen (hellgrün, in der Vorderansicht sichtbar) miteinander starr verbunden. Die beiden Koppeln sind an ihren vorderen Enden starr über eine Stange (blau, in der Vorderansicht sichtbar) verbunden, auf die zur Belastung Gewichtsscheiben (braun) aufgebracht werden können.

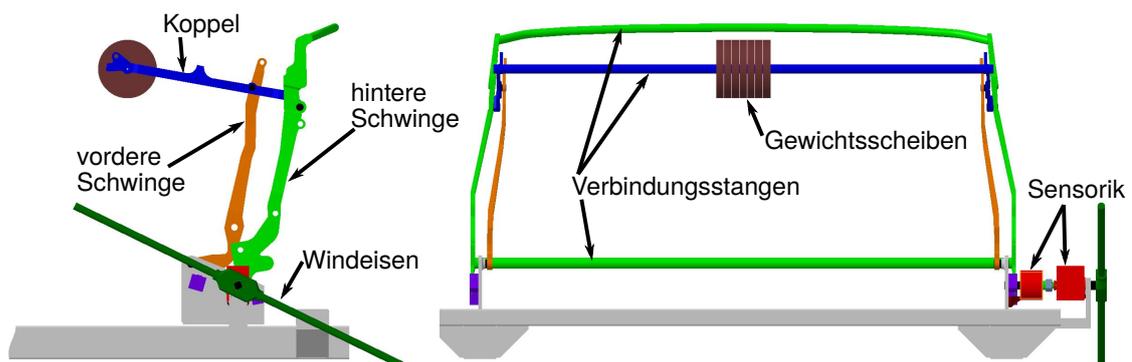


Abb. 5.1: Seiten- und Vorderansicht der Verdeckkinematik. Der Abstand der beiden Viergelenke des originalen Getriebes liegt an der Basis bei etwa 1,5 m.

Der Aufbau der Hauptausführung erfolgt aus Originalteilen. Dieser ist auf einen stabilen Rahmen aus Aluminiumprofilen befestigt. Die Aktuierung des Getriebes erfolgt manuell über ein Windeisen. Das aufgebrachte Drehmoment und der momentane Verdrehwinkel werden sensorisch erfasst. Der Aufbau der Hauptausführung ist in Abbildung 5.2 gezeigt.

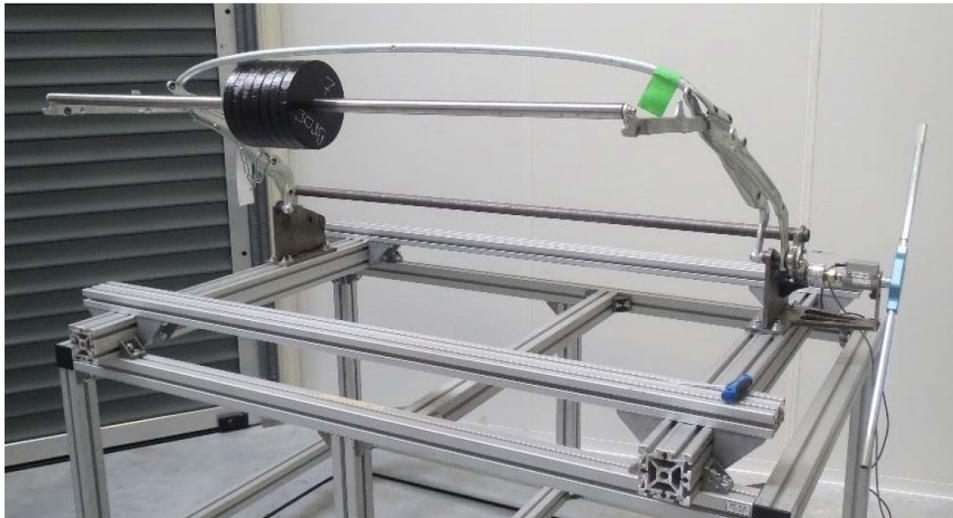


Abb. 5.2: Die Hauptausführung der betrachteten Verdeckkinematik aufgebaut aus Originalteilen. Erkennbar sind die schwarzen Gewichtsscheiben zur Belastung auf der oberen Querstange sowie auf der rechten Bildseite das Windeisen zum Antrieb.

5.1.2 Wahl des notwendigen Skalierungsfaktors

Die Getriebeglieder der Hauptausführung der Verdeckkinematik bestehen aus einer Stahllegierung ($E_H = 210 \text{ GPa}$, $\nu_H = 0,324$, $\rho_H = 7860 \text{ kg/m}^3$). Da die Vorüberlegungen zu den Materialkombinationen einen für das Modell zweckmäßigen und realisierbaren Skalierungsmaßstab von ca. $n = 1 : 2,5$ für die Kombination von Stahl–Messing erwarten lassen, soll für den Aufbau des skalierten Modells ein Messingwerkstoff (CuZn39Pb3, $E_S = 92,8 \text{ GPa}$, $\nu_S = 0,33$, $\rho_S = 8470 \text{ kg/m}^3$) verwendet werden.

Für die Maßstabsberechnung liegt zu Grunde, dass Verschiebungen hervorgerufen durch Gewichtskräfte und hervorgerufen durch eingeprägte Kräfte gleich skalieren sollen. Die Verschiebungen sollen gleich skalieren wie die Längenabmessungen des Getriebes. Unter Vernachlässigung der Querkontraktions ergibt sich nach Gleichung (4.41) ein Skalierungsfaktor von:

$$n = \frac{n_E}{n_\rho} = \frac{E_S \cdot \rho_H}{E_H \cdot \rho_S} = \frac{1}{2,44} = 0,41 \quad (5.1)$$

Aus einer FEM-Berechnung des betrachteten Getriebes für einen statischen Lastfall liegen für 294 081 Knoten die auftretenden Hauptspannungen vor. Für diese Spannungszustände wird eine Betrachtung nach Abschnitt 4.1.3 unter Berücksichtigung der Querkontraktionszahlen durchgeführt. Die sich ergebende Verteilung der optimalen Skalierungsmaßstäbe für jeden Spannungszustand ist aus Abbildung 5.3 ersichtlich.

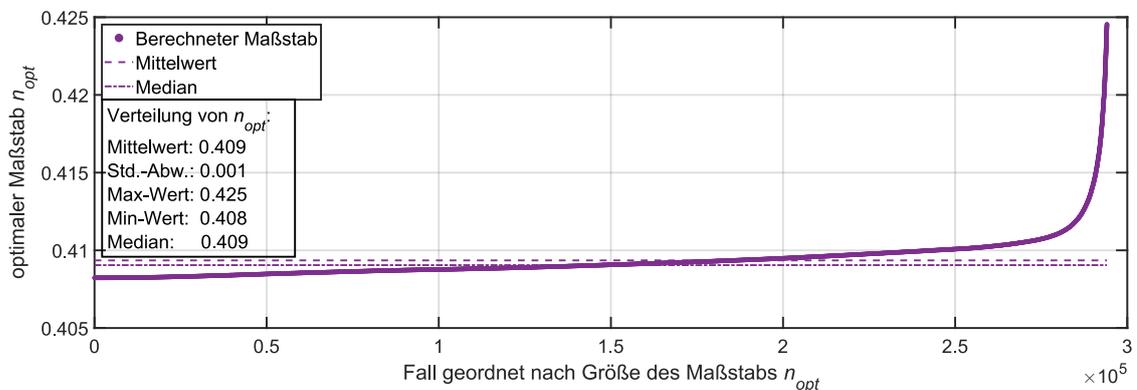


Abb. 5.3: Verteilung des Auftretens des optimalen Skalierungsmaßstabs n für 294 081 Knotenwerten für den Spannungszustand aus einer FEM-Berechnung des Getriebes.

Der Mittelwert der Verteilung liegt bei $n = 0,409 (= 1/2,44)$ mit einer geringen Standardabweichung von 0,001. Dieser Wert für n entspricht der Berechnung nach Gleichung (5.1) unter Vernachlässigung der Querkontraktion. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Querkontraktionszahlen der beiden verwendeten Werkstoffe fast gleich sind. Die Getriebeglieder des Modells sollen im Maßstab $n = 1/2,44 = 0,41$ aus der Messinglegierung CuZn39Pb3 gefertigt werden.

5.1.3 Vermessung der originalen Drehgelenke

Für die acht Drehgelenke der betrachteten Verdeckkinematik werden konstruktiv drei verschiedene Varianten (im Folgenden bezeichnet mit A, B und C) mit unterschiedlichen Abmessungen verwendet. Um das zur Bewegung erforderliche Drehmoment dieser drei Gelenkvarianten bestimmen zu können, müssen diese Gelenke in den Drehmomentprüfstand eingespannt werden. Dafür werden von jeder Gelenkvariante einzelne Prüfstücke verwendet. Diese enthalten die originalen Gleitlagerbuchsen und Niete wie im vorliegenden Getriebe. Statt der Getriebeglieder werden allerdings nur zylindrische Körper entsprechender Dicke verwendet. Die Gelenkmodule zur Vermessung sind in Abbildung 5.4 gezeigt. Die Montage dieser Gelenke erfolgt mit den gleichen Presswerkzeugen, die zur Montage der Verdeckkinematik verwendet werden.



Abb. 5.4: Gelenkvarianten A, B und C der Hauptausführung der betrachteten Verdeckkinematik.

Zur Vermessung des zur Drehung erforderlichen Drehmoments stehen von jeder Gelenkvariante elf Exemplare zur Verfügung. Für die Messung wird, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, vorgegangen. Vor Beginn der Messung werden die fabrikneuen Drehgelenke vom Prüfstand angetrieben, damit sie sich einlaufen. Für die Messung wird das Drehgelenke mit 20 Umdrehungen pro Minute angetrieben. Die Messung erfolgt über vier Umdrehungen. Anschließend wird die obere Einspannung im Prüfstands geöffnet und die Messung ohne Drehgelenk wiederholt, um das Lehrlaufdrehmoment des Prüfstands zu erfassen. Aus der Differenz der beiden Messungen wird der Mittelwert des Drehmoments gebildet. Dies erfolgt für jedes der elf Gelenke von jeder Variante. Die Mittelwerte der Drehmomente, die zur Bewegung der einzelnen Drehgelenke notwendig sind, sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Tabelle 5.1: Messergebnisse für das Reibmoment der originalen Drehgelenke. A, B und C bezeichnen die Gelenkvariante, die Zahlen 1 bis 11 hinter den Buchstaben dienen zur Unterscheidung der Exemplare innerhalb einer Variante.

Modul	Moment in Nm	Modul	Moment in Nm	Modul	Moment in Nm
A01	0,26	B01	0,76	C01	0,05
A02	0,12	B02	0,32	C02	0,20
A03	0,37	B03	0,99	C03	0,27
A04	0,19	B04	0,32	C04	0,40
A05	0,83	B05	0,02	C05	0,34
A06	0,36	B06	0,66	C06	0,29
A07	0,01	B07	0,31	C07	0,30
A08	0,14	B08	0,51	C08	0,25
A09	0,11	B09	0,17	C09	0,33
A10	0,31	B10	0,24	C10	0,19
A11	0,06	B11	0,25	C11	0,49
Mittelwert: 0,25 ±0,23		Mittelwert: 0,41 ±0,29		Mittelwert: 0,28 ±0,12	

Durch Bildung des Mittelwerts über alle elf Gelenke einer Variante wird für jede der drei Varianten A, B und C ein Drehmomentwert bestimmt, der als Grundlage für die einzustellenden Werte der entsprechenden Gelenkmodule des Getriebe-modells dient.

5.1.4 Einstellen der skalierten Drehgelenke

Aus dem verwendeten Skalierungsmaßstab $n = 0,41$ für die geometrischen Abmessungen berechnet sich der Skalierungsmaßstab für die Drehmomente der Modellgelenkmodule nach Gleichung (4.77) zu

$$n_M = n_\rho \cdot n^4 = \frac{\rho_S}{\rho_H} \cdot n^4 = \frac{8470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 0,41^4 = 0,030. \quad (5.2)$$

Das zur Drehung notwendige Drehmoment der Modellgelenkmodule muss somit auf das 0,03-fache der entsprechenden Originaldrehgelenke eingestellt werden. Dies bedeutet für Variante A:

$$M_{A,S} = n_M \cdot M_{A,H} = 0,03 \cdot (0,25 \pm 0,23 \text{ Nm}) = 0,0076 \pm 0,0069 \text{ Nm} \quad (5.3)$$

Für Variante B:

$$M_{B,S} = n_M \cdot M_{B,H} = 0,03 \cdot (0,41 \pm 0,29 \text{ Nm}) = 0,013 \pm 0,0088 \text{ Nm} \quad (5.4)$$

Für Variante C:

$$M_{C,S} = n_M \cdot M_{C,H} = 0,03 \cdot (0,28 \pm 0,12 \text{ Nm}) = 0,0086 \pm 0,0035 \text{ Nm} \quad (5.5)$$

Die im Abschnitt 4.3 beschriebenen einstellbaren Gelenkmodule werden unter Verwendung des Drehmomentprüfstands auf die entsprechenden Drehmomente eingestellt. Für alle Gelenke werden die gleichen Gelenkmodule verwendet, die sich nur im eingestellten Drehmoment unterscheiden. Um während der Montage Ersatz zu haben, wird die doppelte Menge an Gelenkmodulen vorbereitet. Nach dem Einstellen ergeben sich für die Modellgelenkmodule im Mittel die folgenden Reibmomente:

Variante A (vier Stück): 0,0061 Nm.

Variante B (vier Stück): 0,013 Nm.

Variante C (acht Stück): 0,0095 Nm.

5.1.5 Aufbau des skalierten Getriebemodells

Die Fertigung der Getriebeglieder für das skalierte Modell im Maßstab $n = 0,41$ erfolgt mittels CNC-FräSENS aus dem Messingwerkstoff CuZn39Pb3. Die Konstruktion der Getriebeglieder muss vorher im Bereich der Gelenke angepasst werden, da für die Montage des Getriebes die standardisierten Gelenkmodule mit 9 mm Außendurchmesser verwendet werden sollen. Das zusammengebau-

te skalierte Modell ist in Abbildung 5.15 gezeigt. Der Aufbau wurde auf einen starren Rahmen aus Aluminiumprofilen geschraubt.

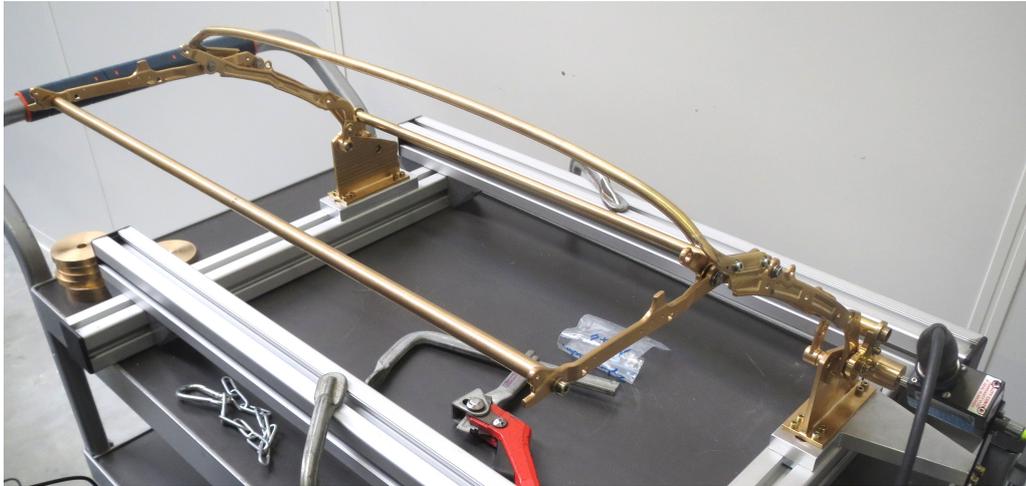


Abb. 5.5: Skaliertes Getriebemodell aus Messingwerkstoff CuZn39Pb3 im Maßstab $n = 0,41$

Die Detailaufnahme in Abbildung 5.6 zeigt ein in das Getriebemodell eingepresstes Gelenkmodul. In den Getriebegliedern des Modells ist hierfür eine Durchgangsbohrung vorgesehen.



Abb. 5.6: Detailansicht des Getriebemodells mit einem eingepressten Gelenkmodul

Wie auch beim Originalgetriebe erfolgt der Antrieb des Modells manuell über ein Windeisen dessen Verdrehwinkel und aufgebracht Drehmoment sensorisch erfasst werden.

5.2 Messungen

Im Folgenden soll die Ähnlichkeit zwischen originalem Getriebe und skaliertem Modell bezüglich des zur Bewegung erforderlichen Antriebsmoments und der Verformung unter statischer Last untersucht werden. In Abbildung 5.7 sind zur Veranschaulichung der Größenverhältnisse das Original und das Modell nebeneinander aufgestellt.



Abb. 5.7: Aufbau des Originals und des Modells im Maßstab $n = 0,41$.

5.2.1 Messung des erforderlichen Antriebsmoments

Es soll das zur Bewegung erforderliche Antriebsmoment des skalierten Modells mit dem der originalen Hauptausführung verglichen werden. Lasten auf das Getriebe sind hierbei das Eigengewicht sowie eine zusätzliche in ihrer Größe variable Last F_{ext} auf der vorderen Querstange. Der Antrieb erfolgt händisch über ein Windeisen. Der Verdrehwinkel des Antriebs und das übertragene Antriebsdrehmoment M_{antr} werden sensorisch erfasst. Die relevanten Größen sind in Abbildung 5.8 gezeigt.

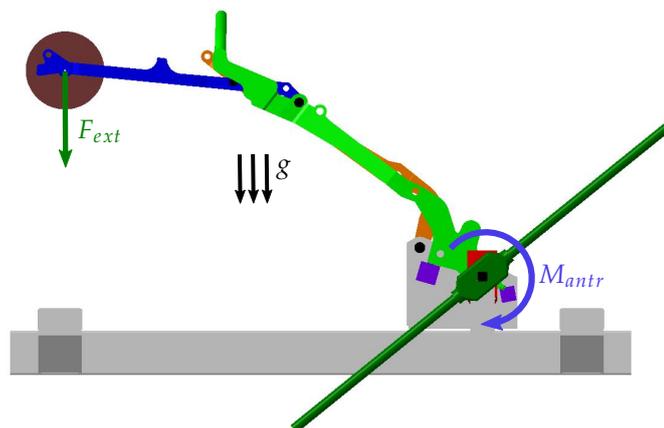


Abb. 5.8: Messung des Antriebsdrehmoments M_{antr} bei unterschiedlichen eingepprägten Lasten F_{ext}

Es wird sowohl die Öffnungsbewegung als auch die Schließbewegung betrachtet. Eine Messung erfolgt für das Original mit acht verschiedenen Lasten von F_{ext} . Für das Modell erfolgt die Messung analog mit acht nach Gleichung (4.76) skalierten Lasten:

$$F_{ext,S} = n_F \cdot F_{ext,H} = n_\rho \cdot n^3 \cdot F_{ext,H} = 0,0743 \cdot F_{ext,H} \quad (5.6)$$

Die verwendeten von außen eingepprägten Lasten für das skalierte Modell und die originale Hauptausführung sind in Tabelle 5.2 aufgeföhrt.

Tabelle 5.2: Eingepprägte Kräfte F_{ext} für die acht Lastfälle

Lastfall:	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{ext,H}$:	0 N	38,6 N	67,8 N	97,1 N	126 N	156 N	185 N	214 N
$F_{ext,S}$:	0 N	2,86 N	5,03 N	7,21 N	9,38 N	11,6 N	13,7 N	15,9 N

In allen Fällen erfolgt die händische Bewegung des Getriebes möglichst langsam, da alle Herleitungen dieser Arbeit auf einer (quasi-)statischen Betrachtung basieren. Die Bewegung ist in Abbildung 5.9 für drei Stellungen gezeigt.

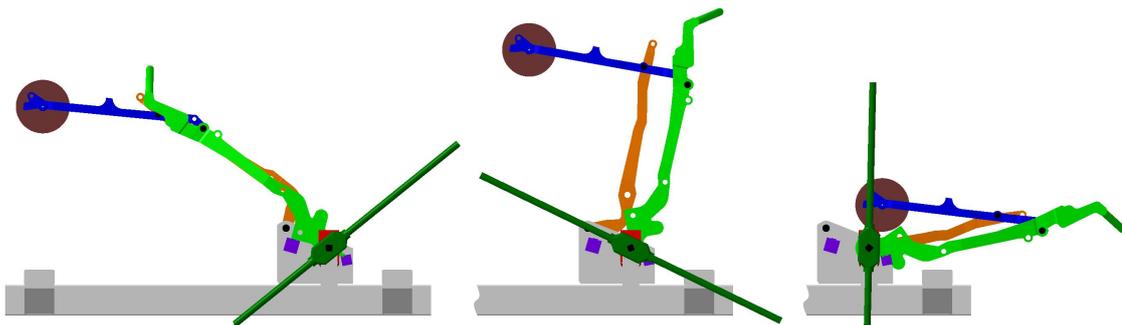


Abb. 5.9: Das Getriebe zu drei Stellungen des Antriebs. Links: 0° („geschlossen“), Mitte: -65° und rechts: -130° („geöffnet“)

Die gemessenen Verläufe des Antriebsmoments für das Öffnen der originalen Hauptausführung und des skalierten Modells sind für die acht Lastfälle in Abbildung 5.10 gezeigt.

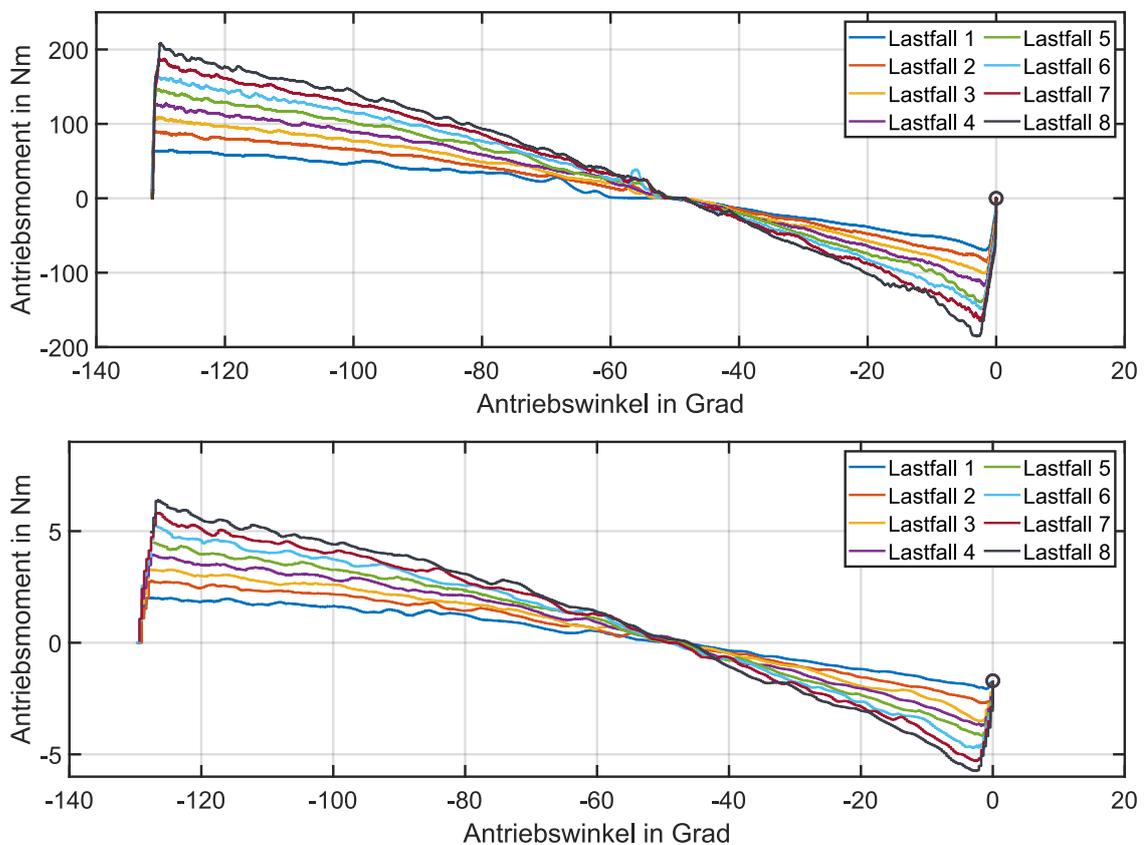


Abb. 5.10: Verläufe des gemessenen Antriebsmoments über die Öffnungsbewegung der Verdeckkinematik für die acht Lastfälle. Oben sind die Verläufe für die Hauptausführung und unten die Verläufe für das skalierte Modell. Das Symbol \circ an den Graphen markiert den Beginn der Bewegung.

Die Bewegung beginnt in Abbildung 5.10 jeweils am rechten Ende der Graphen bei der \circ -Markierung bei einem Verdrehwinkel von 0° . Die Drehung des Antriebs erfolgt in mathematisch negativer Richtung. Bedingt durch die verwendete Sensorik wird die Drehmomentmessung beim Modellaufbau erst bei einem auftretenden Drehmoment von $\pm 1,7 \text{ Nm}$ getriggert. Dies hat bei diesen Messungen aber einen vernachlässigbaren Einfluss, da das Drehmoment am Anfang der Bewegung, sowohl für die Öffnungsbewegung, als auch für die Schließbewegung, schnell ansteigt und das zum Beginn der Messung erforderliche Drehmoment somit bereits für einen kleinen Verdrehwinkel vorliegt. Bei einem Verdrehwinkel von ca. -50° erfolgt ein Vorzeichenwechsel des aufzubringenden Drehmoments, da der Mechanismus ab dieser Stellung durch den Antrieb gegen die Erdbeschleunigung abgebremst werden muss.

Für die Schließbewegung der Verdeckkinematik sind die Verläufe der acht Lastfälle in Abbildung 5.11 gezeigt.

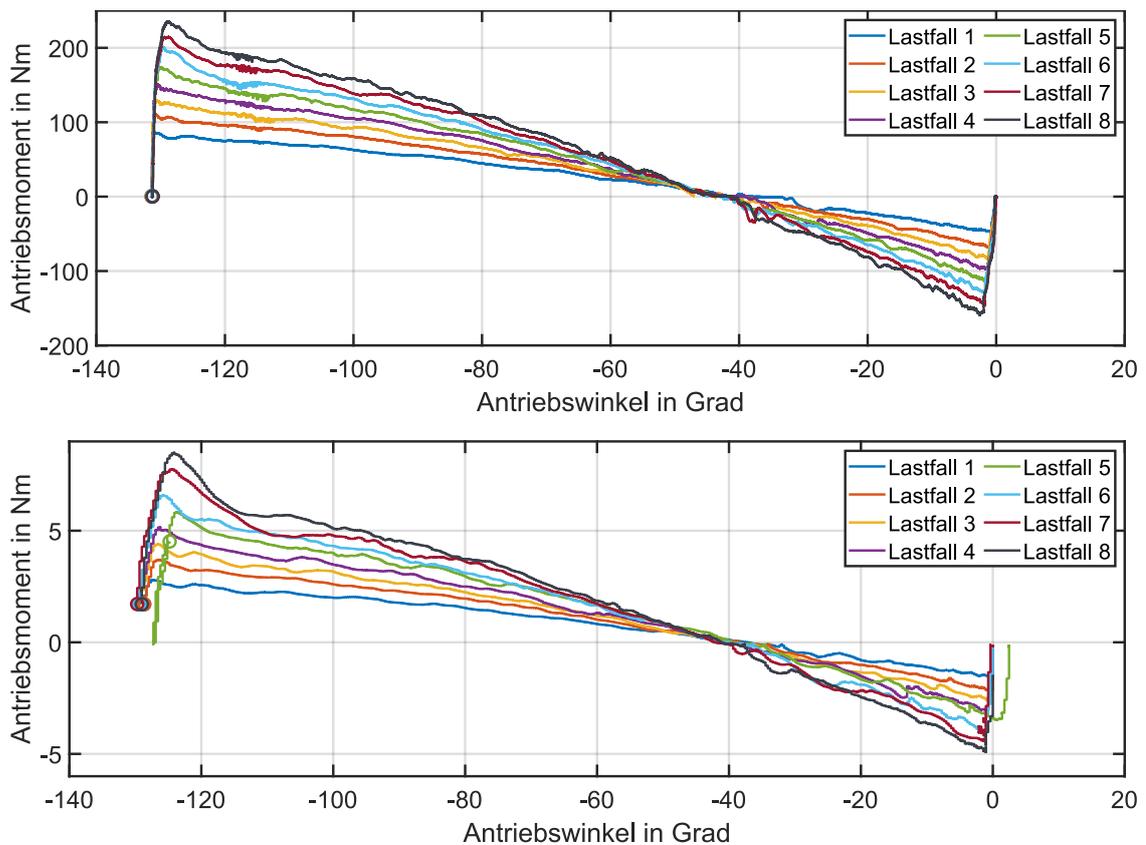


Abb. 5.11: Verläufe des gemessenen Antriebsmoments über die Schließbewegung der Verdeckkinematik für die acht Lastfälle. Oben sind die Verläufe für die Hauptausführung und unten die Verläufe für das skalierte Modell. Das Symbol \circ an den Graphen markiert den Beginn der Bewegung.

Die Bewegung beginnt hier bei ca. -131° . Der Vorzeichenwechsel des Drehmoments äußert sich bei etwa -40° etwas später als bei der Öffnungsbewegung.

Um die Drehmomentverläufe des skalierten Modells direkt mit denen der Hauptausführung zu vergleichen, werden die Drehmomentwerte des skalierten Modells zunächst mit Gleichung (4.77) auf den Originalmaßstab zurückgerechnet:

$$M_H = \frac{M_S}{n_M} = \frac{M_S}{n_\rho \cdot n^4} = \frac{M_S}{0,03} \quad (5.7)$$

In Abbildung 5.12 ist der so zurückgerechnete Drehmomentverlauf zusammen mit dem Drehmomentverlauf der Hauptausführung für die Öffnungsbewegung beispielhaft für Lastfall 2 dargestellt.

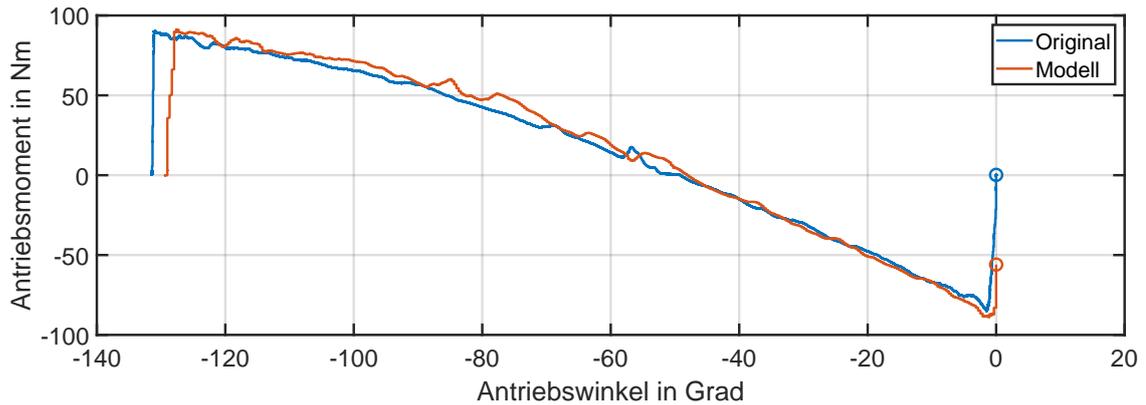


Abb. 5.12: Direkter Vergleich der Drehmomentverläufe von skaliertem Modell und originaler Hauptausführung für die Öffnungsbewegung unter Lastfall 2.

Die beiden Graphen von Original und Modell in Abbildung 5.12 sind sehr ähnlich. Auf der linken Seite der Graphen ist erkennbar, dass sich das Modell nicht ganz so weit öffnen ließ wie das Original. Dies war unabhängig vom Lastfall und deutet darauf hin, dass der physische Endanschlag beim Modell leicht früher erfolgte. Für die Schließbewegung ist der Vergleich der Drehmomentverläufe für Lastfall 2 in Abbildung 5.13 dargestellt.

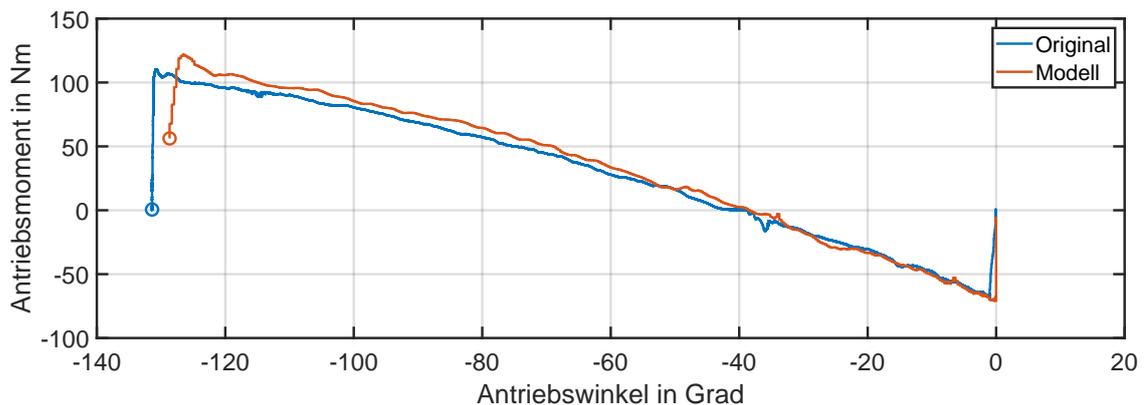


Abb. 5.13: Direkter Vergleich der Drehmomentverläufe von skaliertem Modell und originaler Hauptausführung für die Schließbewegung unter Lastfall 2.

Auch für die Schließbewegung sind die Verläufe in Abbildung 5.13 sehr ähnlich. Allerdings ist hier zu Beginn der Bewegung auf der linken Seite des Graphen ein deutlich höherer Ausschlag für das Modell gegeben. Dieses Überschwingen wird mit höheren eingepprägten Lasten tendenziell größer (siehe Graphen aller Lastfälle im Anhang A) und liegt vermutlich am manuellen Antrieb des Getriebes während der Messung und der Schwierigkeit dabei das aufgebraachte Drehmoment dynamisch genug zu dosieren.

5.2.2 Messung der Verformung unter statischer Last

Es soll die vertikale Verschiebung w_l und w_r an zwei äußeren Punkten (siehe Abbildung 5.14) des skalierten Modells mit dem der originalen Hauptausführung verglichen werden. Lasten auf das Getriebe sind, wie bei der Messung der Antriebsmomente im vorhergehenden Abschnitt, das Eigengewicht sowie eine in ihrer Größe variable zusätzliche Last F_{ext} auf der vorderen Querstange des Getriebes. Die Verdeckkinematik wird bei dieser Betrachtung nicht bewegt, sondern befindet sich am Endanschlag in geschlossener Stellung.

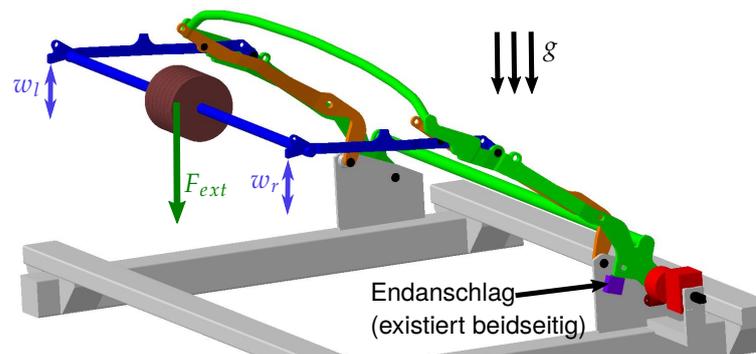


Abb. 5.14: Messung der vertikalen Verschiebungen w_l und w_r bei unterschiedlichen eingepprägten Lasten F_{ext}

Die vertikalen Verschiebungen der beiden betrachteten Punkte werden durch zwei Messuhren erfasst, wie in Abbildung 5.15 für das skalierte Modell zu sehen ist. Es werden die gleichen acht Lastfälle für die eingepprägte Kraft verwendet, wie bei den Messungen des Antriebsdrehmoments in Abschnitt 5.2.1.



Abb. 5.15: Das Getriebemodell während der Messung. Zu sehen sind die beiden digitalen Messuhren zur Ermittlung der Verschiebung.

Zu Beginn der Messungen sind die beiden Getriebe nur durch ihr Eigengewicht (Lastfall 1) belastet. Die Messuhren werden in dieser Stellung genullt. Anschließend wird Lastfall 8 mit der größten Kraft aufgebracht. Die Kraft wird sukzessive

von Lastfall 8 zu Lastfall 1 reduziert und jeweils die linke und rechte Verschiebung gemessen. Beim skalierten Modell zeigen die Messuhren bei der Rückkehr zu Lastfall 1 einen deutlich von null verschiedenen Wert an, was auf eine Setzung des Getriebes hindeutet, die sich bei der Belastung eingestellt hat. Bei der originalen Hauptausführung tritt dieser Effekt im Vergleich kaum auf. Die abgelesenen Messwerte für das Original und Modell sind in Tabelle 5.3 aufgeführt.

Tabelle 5.3: Verschiebungen links (w_l) und rechts (w_r) der originalen Hauptausführung (Index H) und des skalierten Modells (Index S) für die eingepprägten Kräfte F_{ext} der acht Lastfälle

Lastfall:	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{ext,H}$ in N:	0	38,6	67,8	97,1	126	156	185	214
$w_{l,H}$ in mm:	0,08	-1,38	-2,49	-3,46	-4,56	-5,53	-6,61	-7,65
$w_{r,H}$ in mm:	0,03	-0,94	-2,05	-3,09	-3,98	-4,89	-5,84	-6,81
$F_{ext,S}$ in N:	0	2,86	5,03	7,21	9,38	11,6	13,7	15,9
$w_{l,S}$ in mm:	-0,12	-0,70	-1,22	-1,77	-2,33	-2,90	-3,38	-3,93
$w_{r,S}$ in mm:	-0,17	-0,74	-1,30	-1,85	-2,43	-2,89	-3,51	-4,10

Ein graphischer Vergleich der Verschiebungen zwischen Original und Modell ist in Abbildung 5.16 gezeigt. Die Verschiebungen des Modells werden über den Skalierungsmaßstab $n = 0,41$ in den Originalmaßstab zurückgerechnet. Für diese Darstellung werden von den Verschiebungswerten jeweils die verbleibenden Verschiebung von Lastfall 1 nach Entfernung der eingepprägten Last abgezogen. Dadurch beginnen alle Verschiebungs-Kraft-Verläufe im Ursprung und ein visueller Vergleich der Graphen wird erleichtert.

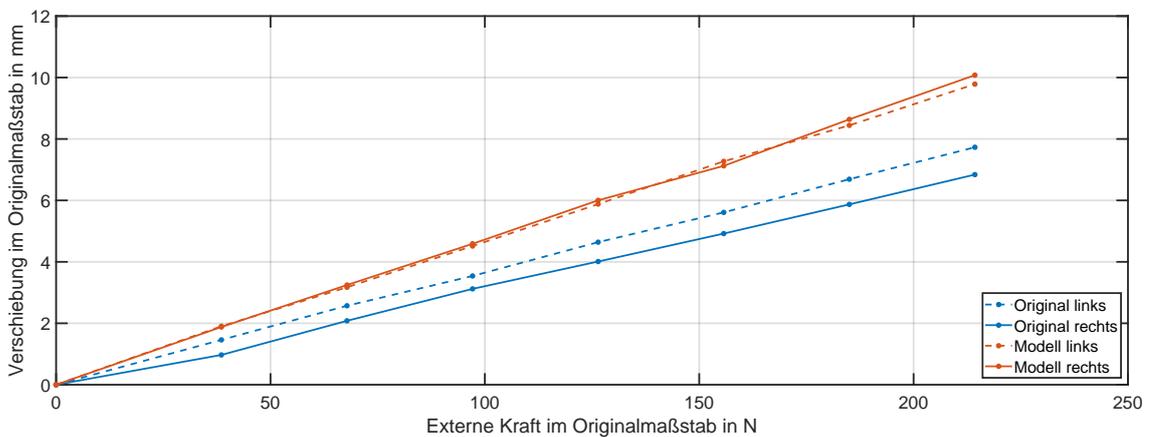


Abb. 5.16: In blau ist die Verschiebung über die eingepprägte Kraft für die originale Hauptausführung gezeigt, in orange die in den Originalmaßstab gerechnete Verschiebung des skalierten Modells. Gestrichelt ist jeweils die Verschiebung der linken Seite und mit durchgezogener Linie die der rechten Seite dargestellt.

Mit steigender eingepprägter Last zeigt sich, dass die Verschiebung im Modell deutlich stärker ansteigt als beim Original. Das Getriebemodell weist im Vergleich zum Original eine zu geringe Steifigkeit auf. Bei weiteren Beobachtungen am Modell zeigt sich eine geringe aber wahrnehmbare Beweglichkeit in den für das Modell verwendeten einstellbaren Gelenkmodulen bezüglich Biegemomenten. Auf Grund der Vermutung, dass diese Beweglichkeit durch die Tellerfedern in den Gelenkmodulen ermöglicht wird, werden die Gelenke für eine weitere Messreihe modifiziert. Die Einstellbarkeit der Reibmomente in den Gelenken ist für die Messung der Verformung unter statischer Last nicht von Relevanz. Deswegen werden die Tellerfedern, die der Einstellbarkeit des Reibmoments dienen, aus den Gelenkmodulen entfernt. Die geringe Beweglichkeit ist nun optisch nicht mehr wahrnehmbar. Die Messwerte dieser Messreihe sind in Tabelle 5.4 aufgelistet.

Tabelle 5.4: Verschiebungen links (w_l) und rechts (w_r) des skalierten Modells mit modifizierten Drehgelenken (Index S') für die eingepprägten Kräfte F_{ext} der acht Lastfälle

Lastfall:	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{ext,S'}$ in N:	0	2,86	5,03	7,21	9,38	11,6	13,7	15,9
$w_{l,S'}$ in mm:	-0,17	-0,61	-1,04	-1,37	-1,81	-2,38	-2,67	-3,04
$w_{r,S'}$ in mm:	-0,25	-0,64	-1,07	-1,45	-1,91	-2,42	-2,76	-3,10

Ein Vergleich dieser Messwerte mit dem Original führt zu den Verläufen aus Abbildung 5.17.

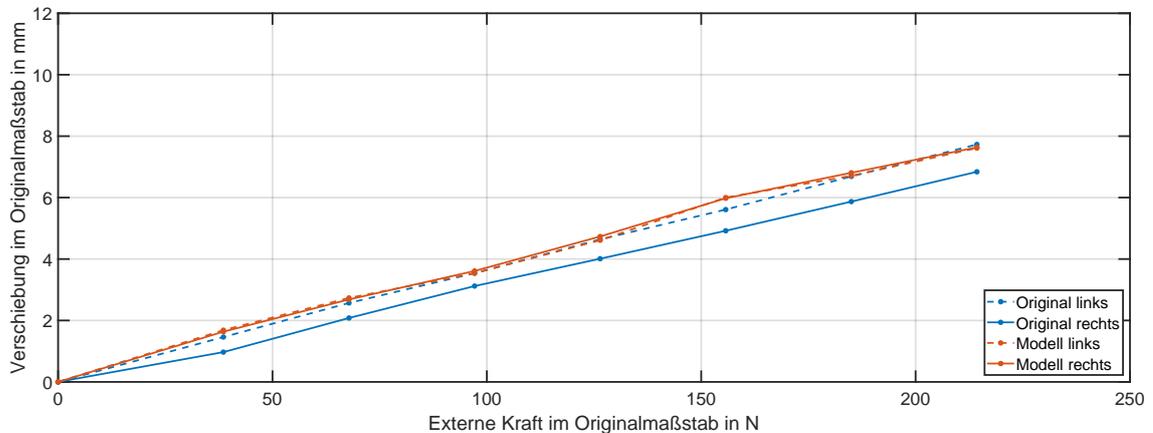


Abb. 5.17: Vergleich der Verschiebungen für das skalierte Modell mit modifizierten Drehgelenken.

Durch das Entfernen der Tellerfedern in den modifizierten Gelenkmodulen, ist das skalierte Modell in der Lage die Verschiebungen des Originals deutlich besser abzubilden. Die Tellerfedern in den Gelenken setzen die Steifigkeit gegenüber Biegemomenten in den Gelenken deutlich herab, wodurch die Abweichungen der Verschiebungen aus Abbildung 5.16 zu erklären sind.

5.2.3 Diskussion der Ergebnisse

Die Experimente sollten zeigen, ob Modell und Original mechanisch derart ähnlich sind, dass die Ergebnisse der Messungen am Modell äquivalent zu den Messungen am Original sind. Betrachtet wurden in den Experimenten das zur Bewegung erforderliche Antriebsmoment und die statische Verformung des Getriebes. Berücksichtigt wurden hierbei die Belastung durch Eigengewicht, unterschiedliche von außen eingeprägte Lasten sowie Reibmomente in den Gelenken.

Es wurden Messungen an einem Getriebe im Original und an einem verkleinerten Modell im Maßstab $n = 1/2,44 = 0,41$ durchgeführt. Der Aufbau des Getriebemodells erfolgte nach der in dieser Arbeit beschriebenen Methode. Der für die Ähnlichkeit erforderliche Skalierungsmaßstab ergab sich aus der Materialkombination von Originalwerkstoff zu Modellwerkstoff. Bei den Gelenken des Modells lag der Fokus darauf die Bewegungseigenschaften der Gelenke geeignet zu skalieren. Aus diesem Grund wurden für das skalierte Modell Gelenkmodule verwendet, deren zur Bewegung erforderliches Drehmoment vorab eingestellt werden kann.

Die Messungen des Antriebsmoments, das zur Bewegung des Getriebes benötigt wird, lassen sich sehr gut vom Modell auf das Original übertragen. Lediglich die manuelle Dosierung des Antriebsmoments gestaltete sich bei den Messungen am Modell mit zunehmender aufgeprägter Last teilweise schwierig, was sich in den Messkurven der Schließbewegung zeigte.

Bei den Messungen der statischen Verschiebung führte der konstruktive Aufbau der verwendeten Gelenkmodule zu einer mangelhaften Biegesteifigkeit innerhalb der Gelenke, die Abweichungen zwischen Modell und Original bewirkten. Das Entfernen der Tellerfedern in den Gelenkmodulen des Modells führte zu einer Verbesserung des skalierten Modells für die Ähnlichkeit der statischen Verschiebung.

Für den betrachteten Anwendungsfall standen den in den Gelenken auftretenden Reibmomenten von 0,25 Nm bis 0,41 Nm Antriebsdrehmomente in der Größenordnung von bis zu ca. 200 Nm gegenüber. Darüber hinaus wurden diese Drehmomente für das skalierte Modell bei der hier verwendeten Materialkombination von Stahl–Messing um einen Faktor von 33,2 verkleinert, was zu sehr kleinen erforderlichen Reibmomenten in den Modellgelenken führte. Unter diesem Gesichtspunkt wäre eine ausreichende Biegesteifigkeit in den Gelenkmodulen wichtiger gewesen, als die Einstellbarkeit der Drehmomente in den Gelenken.

Abgesehen von der mangelnden Steifigkeit in den Gelenken, zeigen die Experimente, dass die Messergebnisse des Antriebsmoments und der statischen Verformung zwischen Modell und Original ähnlich sind, sodass das Modell das Original für diese Messungen hätte ersetzen können.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit stellt einen Beitrag im Bereich des Modellbaus von Gelenkgetrieben dar. Es wurde eine Methode für den Aufbau von skalierten Getriebemodellen beschrieben, die die Möglichkeiten klassischer Getriebemodelle erweitern, indem diese neben der Wiedergabe der Bewegung des Originals, auch die Untersuchung von Verformungen unter Eigengewicht und eingeprägten Lasten sowie der zur Bewegung notwendigen Antriebskräfte ermöglichen.

Vor dem Aufbau eines Prototyps bietet es sich im Auslegungsprozess von Gelenkgetrieben an, ein verkleinertes Getriebemodell aufzubauen, um haptische Einblicke in die Bewegung des Getriebes zu bekommen, die man aus einer Computersimulation nicht gewinnen kann. Der Fokus steht bei diesen Modellen auf der eigentlichen Bewegung. Beobachtungen von Steifigkeiten und Kräfte können an diesen Modellen nicht direkt auf das Original übertragen werden.

Methoden der Ähnlichkeitsmechanik sind in vielen technischen Disziplinen etabliert und werden hier verwendet, um Experimente im Maßstab 1:1 durch Experimente an skalierten Modellen zu ersetzen.

Zur Herleitung der Skalierungsgesetzmäßigkeiten, die für den Aufbau von mechanisch ähnlichen, skalierten Getriebemodellen verwendet werden können, wurden in dieser Arbeit zwei Ansätze verwendet. Zum einen erfolgte dies auf Basis von Betrachtungen am elastisch verformten Biegebalken, wobei hierbei die Elastizitätsmodule und Dichten der Werkstoffe von Original und Modell berücksichtigt wurden. Es ließ sich hier ableiten, dass der notwendige Skalierungsfaktor für den Aufbau eines Modells mit der geforderten Ähnlichkeit nicht frei wählbar ist, sondern direkt von den Werkstoffparametern von Original und Modell abhängig ist. Zum anderen basierte eine weitere Herleitung auf den Gesetzmäßigkeiten aus der Kontinuumsmechanik, die neben der Elastizitätsmodule und Dichte der Werkstoffe von Original und Modell auch deren Querkontraktionszahlen verwendet. Hierbei zeigte sich, dass es keinen eindeutigen Skalierungsfaktor in Abhängigkeit der Werkstoffparameter mehr gibt, sondern dieser auf Grund der unterschiedlichen Querkontraktionszahlen der Werkstoffe auch vom lokalen Spannungszustand abhängt. Eine vollkommene Ähnlichkeit bezüglich der Verformung unter Last lässt sich dadurch in der Theorie im Allgemeinen nur erreichen, wenn das Modell in einem bestimmten geometrischen Maßstab aufgebaut wird, der von den Werkstoffkennwerten von Original und Modell abhängig ist und die beiden Werkstoffe die gleiche Querkontraktionszahl aufweisen.

Bei einem realen Aufbau eines solchen Modells ist damit zu rechnen, dass es zu Abweichungen vom theoretischen Modell kommt, die beispielsweise auf Fertigungsungenauigkeiten zurückzuführen sind. Vor diesem Hintergrund könnten geringe Abweichungen von den theoretischen Forderungen wie beispielsweise

der gleichen Querkontraktionszahl von Original- und Modellwerkstoff für viele Anwendungen akzeptabel sein.

Während die Getriebeglieder des Modells eine direkte Skalierung des Originals darstellen, wurden die Gelenke in der Methode dieser Arbeit nicht einfach skaliert, sondern durch einheitliche Gelenkmodule ersetzt, die alle Komponenten des Gelenks enthalten und bei der Montage des Getriebemodells in dessen Getriebeglieder eingepresst werden. Das Reibmoment, das in diesen Gelenkmodulen zur Bewegung überwunden werden muss, ließ sich individuell einstellen. Dadurch konnte jedes Gelenk auf das für die Ähnlichkeit zum Originalgelenk notwendige Reibmoment eingestellt werden. Zur Ermittlung dieser Reibmomente wurde im Rahmen der Arbeit ein Prüfstand für die Vermessung von Drehgelenken aufgebaut.

Als experimentelles Beispiel für die entwickelte Methode wurde ein Originalgetriebe aus Stahl betrachtet und von diesem ein skaliertes Modell aus einer Messinglegierung aufgebaut. Die verwendeten Werkstoffe besitzen eine annähernd gleiche Querkontraktionszahl. Der für die oben beschriebene Ähnlichkeit notwendige Maßstab zum Aufbau des Modells beträgt für die gewählte Werkstoffkombination 0,41. Für die Drehgelenke des skalierten Modells wurden die im Rahmen der Arbeit entwickelten Gelenkmodule verwendet, deren Reibmoment eingestellt werden kann.

Messungen der Verformung des Getriebes und des erforderlichen Antriebsmoments für unterschiedliche Lasten am Modell zeigten mechanische Ähnlichkeit mit den Messungen am Original. Somit können diese Messungen an einem Getriebe im Originalmaßstab aus dem Originalwerkstoff prinzipiell durch Messungen an einem skalierten Modell ersetzt werden.

Als ungünstig erwies sich die gewählte Konstruktion der verwendeten Gelenkmodule mit einstellbaren Reibmomenten. Diese Gelenkmodule wiesen eine zu geringe Biegesteifigkeit auf, wie sich im Laufe der Experimente zeigte.

Mit Behebung der zu niedrigen Biegesteifigkeit der verwendeten Gelenkmodule, eignet sich die vorgestellte Methodik für den Aufbau von skalierten Getriebemodellen, die sowohl die Bewegungseigenschaften, die Antriebskräfte als auch das Verformungsverhalten der originalen Hauptausführung des Getriebes unter Eigengewicht und eingepprägten Lasten wiedergeben. Nicht betrachtet werden allerdings andere Komponenten, wie zum Beispiel Textilien wie sie im Verdeckbau im Automobilbereich vorkommen. Dennoch eignet sich die Methodik für Richtungsentscheidungen in frühen Entwicklungsphasen. Die kleineren Getriebemodellen für Ähnlichkeitsbetrachtungen können hier Iterationsschritte mit Aufbauten im Maßstab 1:1 ersetzen.

6.2 Ausblick

Mögliche weitere Themenfelder, die in der vorliegenden Arbeit nicht vertieft oder nicht betrachtet werden, aber Potential für weitere Untersuchungen bieten, sollen im Folgenden genannt werden.

6.2.1 Einfluss der Querkontraktionszahl

Unterschiedliche Querkontraktionszahlen bei Original- und Modellwerkstoff bewirken, dass es keinen eindeutigen Skalierungsmaßstab zum Aufbau des Modells gibt, der nicht mit dem lokalen Spannungszustand variiert. Durch eine systematische Untersuchung von Werkstoffkombinationen von Modell und Original mit unterschiedlichen Querkontraktionszahlen kann ermittelt werden, inwieweit dieser Werkstoffkennwert die Aussagekraft des Modells bezüglich der Verformungen einschränkt.

6.2.2 Weiterentwicklung der Gelenkmodule

Das Konzept standardisierter Gelenkmodule erleichtert den schnellen und einfachen Aufbau von Getriebemodellen. Zum einen sind an den Gelenkstellen der Getriebegliedern nur einfache Bohrungen notwendig. Zum anderen wird die Montage erleichtert, da die eigentlichen Gelenke schon vormontiert in den Gelenkmodulen vorliegen. Soll bei den Gelenkmodule auch das Reibmoment einstellbar sein, so muss die Konstruktion der in dieser Arbeit verwendeten Gelenkmodule überarbeitet werden, um deren Biegesteifigkeit zu erhöhen.

Durch die Entwicklung ähnlicher Gelenkmodule beispielsweise für Schubgelenke, Drehschubgelenke oder Kugelgelenke mit einfachen Verbindungsmöglichkeiten zu Getriebegliedern, könnten die Betrachtungen dieser Arbeit auf andere Getriebetypen ausgeweitet werden.

6.2.3 Ähnlichkeitsbetrachtungen an schnell bewegten Getriebemodellen

Die Methode dieser Arbeit beschränkt sich auf langsam bewegte Getriebe. Untersuchungen zur Ähnlichkeit für die Entwicklung von realen Getriebemodellen für schnelle hochdynamische Bewegungen oder für Schwingungen fanden im Rahmen dieser Arbeit nicht statt. Eine Erweiterung der Methode und eine Weiterentwicklung der Gelenkmodule, könnte den Bau von Modellen ermöglichen, an denen Ähnlichkeitsuntersuchungen von schnell bewegten Getrieben möglich sind.

6.2.4 Getriebemodelle mit formlabilen Komponenten

In dieser Arbeit wurden nur Getriebe betrachtet, die aus formstabilen Körpern bestehen. Gerade im Bereich des Verdeckbaus finden sich häufig Stoffe und Textilien, die über Elastizitäten verfügen und Kräfte auf das Getriebe ausüben. Eine Skalierung der Eigenschaften dieser Textilien für den Aufbau von Getriebemodellen wurde in dieser Arbeit nicht betrachtet. Weitere Untersuchungen hierzu, könnte den Bau von Getriebemodellen ermöglichen, deren Aussagekraft sich auch über Getriebe mit formlabilen Komponenten erstreckt.

Literatur

- Abdul-Sater, Kassim (2016): „Task-Based, Computer-Aided Kinematic Design of Spherically Constrained Kinematic Chains“. Dissertation. München: Technische Universität München.
- Abdul-Sater, Kassim; Winkler, Manuel M.; Irlinger, Franz und Lueth, Tim C. (2016): „Three-Position Synthesis of Origami-Evolved, Spherically Constrained Spatial Revolute–Revolute Chains“. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 8.1. ISSN: 1942-4302. DOI: 10.1115/1.4030370.
- Altenbach, Holm (2015): *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 3. Auflage. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg. ISBN: 3662470691.
- Bonnet, Martin (2016): *Kunststofftechnik: Grundlagen, Verarbeitung, Werkstoffauswahl und Fallbeispiele*. 3. Auflage. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-658-13827-1. DOI: 10.1007/978-3-658-13828-8.
- Buckingham, Edgar (1914): „On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations“. In: *Physical Review* 4.4, S. 345–376. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.4.345.
- D’Angelo, Lorenzo T.; Abdul-Sater, Kassim; Pfluegl, Florian und Lueth, Tim C. (2015): „Wheelchair Models With Integrated Transfer Support Mechanisms and Passive Actuation“. In: *Journal of Medical Devices* 9.1. ISSN: 1932-6181. DOI: 10.1115/1.4029507.
- Deutsches Kupferinstitut Berufsverband e.V., Hrsg. (2007): *Kupfer-Zink-Legierungen (Messing und Sondermessing): Informationsdruck i.5*. Düsseldorf.
- Drive-System Europe Ltd. (2018): *Planetengetriebemotor DSMP523 (Datenblatt)*.
- Ebert-Uphoff, Imme; Gosselin, Clement M.; Rosen, David W. und Laliberte, Thierry (2005): „Rapid Prototyping for Robotics“. In: *Invited Contribution to the “Cutting Edge Robotics Book”*, S. 17–46.
- EOS GmbH (2010): *PA 2200 Performance 1.0 Material Datasheet*.
- Eydani Asl, Mohamad; Niezrecki, Christopher; Sherwood, James und Avitabile, Peter (2017): „Vibration prediction of thin-walled composite I-beams using scaled models“. In: *Thin-Walled Structures* 113, S. 151–161. ISSN: 02638231. DOI: 10.1016/j.tws.2017.01.020.
- Ferguson, Eugene S. (1977): „The Mind’s Eye: Nonverbal Thought in Technology“. In: *Science* 197.4306, S. 827–836.

- Ferguson, Eugene S. (1993): *Engineering and the mind's eye*. 2. print. Cambridge, Mass.: MIT Press. ISBN: 0262061473.
- Froude, William (1862): *On the rolling of ships. Read at the second session of the institution of naval architects, and repr. from the Transactions*. London: Parker, Son, And Bourn.
- Froude, William und Froude, Robert Edmund (1888): *The Resistance of Ships: Professional Papers.-No. 23*. Washington D.C.: Government Printing Office.
- Fumagalli, Emanuele (1960): „The use of models of reinforced concrete structures“. In: *Magazine of Concrete Research* 12.35, S. 63–72. ISSN: 0024-9831. DOI: 10.1680/macr.1960.12.35.63.
- Fumagalli, Emanuele (1973): *Statical and geomechanical models*. Wien: Springer.
- Gang, Xian Yue; Wang, Deng Feng und Su, Xue Jun (2010): „A New Similitude Analysis Method for a Scale Model Test“. In: *Key Engineering Materials* 439-440, S. 704–709. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.439-440.704.
- Gebhardt, Andreas (2007): *Generative Fertigungsverfahren: Rapid Prototyping - Rapid Tooling - Rapid Manufacturing*. 3. Auflage. München: Hanser. ISBN: 978-3-446-22666-1.
- Gebhardt, Andreas (2016): *Additive Fertigungsverfahren: Additive Manufacturing und 3D-Drucken für Prototyping - Tooling - Produktion*. 5. Auflage. München: Hanser. ISBN: 3446444017. URL: <http://www.hanser-fachbuch.de/9783446444010>.
- Gerhardt, Hans Joachim; Kramer, Carl und Jansen, Hubert (1977): *Tragluftthalten unter Windbelastung*. Bd. 2650. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Fachgruppe Bau / Steine/Erden. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. ISBN: 978-3-663-05302-6. DOI: 10.1007/978-3-663-05301-9.
- Gosselin, Clément M. und Hamel, Jean-François (1994): „The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device“. In: *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE Comput. Soc. Press, S. 781–786. ISBN: 0-8186-5330-2. DOI: 10.1109/ROBOT.1994.351393.
- Gritsch, Stefan (2018): „Weiterentwicklung eines Prüfstands zur Vermessung von Drehgelenken“. Semesterarbeit. München: Technische Universität München.
- Gross, Dietmar; Hauger, Werner; Schröder, Jörg und Wall, Wolfgang A. (2021): *Elastostatik*. 14. Auflage. Lehrbuch. Berlin: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-662-61861-5. DOI: 10.1007/978-3-662-61862-2.
- Gross, Dietmar; Hauger, Werner und Wriggers, Peter (2018): *Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, numerische Methoden*. 10. Auflage. Berlin: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-662-55693-1. DOI: 10.1007/978-3-662-55694-8.

- Hall, Carl W. (2000): *Laws and models: Science, engineering, and technology*. Boca Raton, Fla.: CRC Press. ISBN: 0-8493-2018-6.
- Heinzl, Joachim (1992): „Synthese des Schaltwerks einer 35-mm-Filmkamera“. In: *Neue Methoden und Konzepte zur Lösung getriebetechnischer Bewegungsaufgaben*. Hrsg. von Verein Deutscher Ingenieure. VDI-Berichte. Düsseldorf: VDI-Verl., S. 153–162. ISBN: 3180909587.
- Henning, Wiebke (2021): „Dimensionen eines Begriffs: Eine kurze Betrachtung der Nutzung und Bedeutung von »Modellen« in unterschiedlichen Kontexten.“ In: *Kunst & Kultur*. Hrsg. von Deutsches Museum München. C.H.Beck oHG, S. 10–14.
- Kapfenberger, Marco (2017): „Ermittlung des Verformungsverhaltens skaliertes Kinematikmodelle mit FEM“. Semesterarbeit. München: Technische Universität München.
- Kerle, Hanfried (2005): „Die Anwendung ähnlichkeitsmechanischer Modellgesetze bei der Auswahl und Auslegung von Getrieben“. In: *6. Kolloquium Getriebetechnik Aachen 2005*, S. 235–247.
- Kerle, Hanfried (2006): „Zur Entwicklung von Baureihen für Getriebe und von belastbaren Getriebemodellen auf der Grundlage der Ähnlichkeitsmechanik“. In: *VDI-Getriebetagung 2006, Tagung Fulda, 19. und 20. September 2006*, S. 221–240.
- Kerle, Hanfried; Corves, Burkhard und Hüsing, Mathias (2015): *Getriebetechnik: Grundlagen, Entwicklung und Anwendung ungleichmäßig übersetzender Getriebe*. 5. Auflage. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-658-10056-8. DOI: 10.1007/978-3-658-10057-5.
- Kerle, Hanfried; Corves, Burkhard; Mauersberger, Klaus und Modler, Karl-Heinz (2009): „Zur Entwicklungsgeschichte der Getriebemodelle - Über die technikgeschichtliche Bedeutung der Getriebe-Prototypen“. In: *8. Kolloquium Getriebetechnik Aachen 2009*, S. 3–14.
- Kinematic Models for Design Digital Library (2003). URL: <http://wayback.archive-it.org/2566/20180418122523/http://kmoddl.library.cornell.edu/resources.php?t=15>.
- Koch Maschinenbau GmbH & Co. KG (2016): *Präzisions-Spannfutter (Datenblatt)*.
- Krinninger, Maximilian (2011): „Ein System zur Endoskopführung in der HNO-Chirurgie“. Dissertation. München: Technische Universität München.
- Lai, W. Michael; Rubin, David und Krempl, Erhard (2010): *Introduction to continuum mechanics*. 4. ed. Amsterdam: Elsevier. ISBN: 9780750685603.

- Laudahn, Simon; Haslauer, Richard; Abdul-Sater, Kassim; Irlinger, Franz und Lüth, Tim (2020): „Bausteinbasierte Mechanismensynthese mit CAD-integriertem Pre- und Postprocessing“. In: *Sechste IFToMM D-A-CH Konferenz 2020: 27./28. Februar 2020, Campus Technik Lienz*. Hrsg. von IFToMM D-A-CH und Universität Duisburg-Essen. DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany. ISBN: 9783110924992. DOI: 10.17185/duepublico/71207.
- Laudahn, Simon; Irlinger, Franz und Abdul-Sater, Kassim (2017): „A Flexible Discrete Building Block Synthesis Approach As Basis for the Design of Planar Linkages“. In: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - 2017*. New York, N.Y.: The American Society of Mechanical Engineers. ISBN: 978-0-7918-5817-2. DOI: 10.1115/DETC2017-67832.
- Laudahn, Simon; Irlinger, Franz; Lüth, Tim C. und Abdul-Sater, Kassim (2016): „Auslegung und Rapid Prototyping einer räumlichen Fahrzeugtürkinematik unter Berücksichtigung von Singularitätsbetrachtungen sphärischer 4-Gelenke“. In: *Bewegungstechnik 2016*. VDI Verlag, S. 37–50. ISBN: 9783181022863. DOI: 10.51202/9783181022863-37.
- Laudahn, Simon; Sviberg, Magnus; Wiesenfeld, Lukas; Haberl, Franz; Haidl, Johannes; Abdul-Sater, Kassim und Irlinger, Franz (2019): „Similitude of Scaled and Full Scale Linkages“. In: *EuCoMeS 2018*. Hrsg. von Burkhard Corves; Philippe Wenger und Mathias Hüsing. Bd. 59. Mechanisms and machine science. Cham: Springer International Publishing, S. 256–264. ISBN: 978-3-319-98019-5. DOI: 10.1007/978-3-319-98020-1_30.
- Lipson, Hod; Moon, Francis C.; Hai, Jimmy und Paventi, Carlo (2005): „3-D Printing the History of Mechanisms“. In: *Journal of Mechanical Design* 127.5, S. 1029–1033. ISSN: 1050-0472. DOI: 10.1115/1.1902999.
- Ludwig, David; Weber, Cornelia und Zauzig, Oliver, Hrsg. (2014a): *Das materielle Modell: Objektgeschichten aus der wissenschaftlichen Praxis*. Paderborn: Wilhelm Fink. ISBN: 978-3-7705-5696-0. DOI: 10.30965/9783846756966.
- Ludwig, David; Weber, Cornelia und Zauzig, Oliver (2014b): „Materielle Modelle in wissenschaftlicher Praxis“. In: *Das materielle Modell*. Hrsg. von David Ludwig; Cornelia Weber und Oliver Zauzig. Paderborn: Wilhelm Fink, S. 9–15. ISBN: 978-3-7705-5696-0. DOI: 10.30965/9783846756966_002.
- Matz, Werner (1954): *Anwendung des Ähnlichkeitsgrundsatzes in der Verfahrenstechnik*. Bd. 3. Verfahrenstechnik in Einzeldarstellungen. Berlin und Heidelberg: Springer. ISBN: 978-3-540-01848-3. DOI: 10.1007/978-3-642-45824-8.
- Mauersberger, Klaus (1996): *Sammlungen und Kunstbesitz der Technischen Universität Dresden*. Leipzig: UniMedia. ISBN: 3-932019-01-6.

- Mauersberger, Klaus (2014): „Getriebemodelle in der Entwicklung der Maschinenwissenschaften am Beispiel von Sammlungsexponaten der Technischen Universität Dresden“. In: *Das materielle Modell*. Hrsg. von David Ludwig; Cornelia Weber und Oliver Zauzig. Paderborn: Wilhelm Fink, S. 127–136. ISBN: 978-3-7705-5696-0. DOI: 10.30965/9783846756966_014.
- ME-Meßsysteme GmbH (2016a): *DMS Messverstärker GSV-2 (Datenblatt)*.
- ME-Meßsysteme GmbH (2016b): *Drehmomentsensor TS70 (Datenblatt)*.
- Moon, Francis C. (2003): „Franz Reuleaux: Contributions to 19th century kinematics and theory of machines“. In: *Applied Mechanics Reviews* 56.2, S. 261–285. ISSN: 0003-6900. DOI: 10.1115/1.1523427.
- Niemann, Gustav; Winter, Hans und Höhn, Bernd-Robert (2001): *Maschinenelemente: Band 1: Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg und s.l.: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-08521-9. DOI: 10.1007/978-3-662-08520-2.
- Normand, Jacques-Augustin (1888): „On the Fineness of vessels in relation to size and speed“. In: *Transactions of the Institution of Naval Architects* 29, S. 257–261.
- Reech, Frédéric (1852): *Cours de mécanique: d'après la nature généralement flexible et élastique du corps*. Paris: Carilian-Goeury et V. Dalmont. URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62135293>.
- Routh, John Edward (1897): *Dynamics of a system of rigid bodies: being part I. of a treatise on the whole subject*. New York, London, Sydney: Macmillan and Co., Limited. DOI: 10.5040/9781350983120.
- Shehadeh, M.; Shennawy, Y. und El-Gamal, H. (2015): „Similitude and scaling of large structural elements: Case study“. In: *Alexandria Engineering Journal* 54.2, S. 147–154. ISSN: 11100168. DOI: 10.1016/j.aej.2015.01.005.
- Simitses, G. J.; Starnes, J. H. und Rezaeepazhand, J. (2001): „Structural Similitude and Scaling Laws for Plates and Shells: A Review“. In: *Advances in the mechanics of plates and shells*. Hrsg. von D. Durban; Dan Givoli und James G. Simmonds. Bd. 88. Solid Mechanics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, S. 295–310. ISBN: 978-0-7923-6785-7. DOI: 10.1007/0-306-46954-5_19.
- Stachowiak, Herbert (1973): *Allgemeine Modelltheorie*. Wien: Springer. ISBN: 321181-1060. URL: <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz003857557cov.htm>.
- Stifter, Lukas (2017): „Konzeptionierung und Aufbau eines Prüfstands zur Messung der Reibeigenschaften von Gelenkmodulen“. Bachelorarbeit. München: Technische Universität München.
- Strutt, John 3. Baron Rayleigh (1915): „The Principle of Similitude“. In: *Nature* 95.2368, S. 66–68. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/095066c0.

VDI 2127 (1993): *Getriebetechnische Grundlagen: Getriebetechnische Grundlagen Begriffsbestimmungen der Getriebe*. Berlin.

Weber, Moritz (1918): *Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen, unter besonderer Berücksichtigung schiffbautechnischer Anwendungen*. Berlin, Heidelberg und s.l.: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-662-42255-7. DOI: 10.1007/978-3-662-42524-4.

„William Froude“ (1879). In: *Nature* 20.503, S. 169–173. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/020169f0.

„William Froude“ (1879). In: *Nature* 20.502, S. 148–150. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/020148a0.

Symbolverzeichnis

A	Flächeninhalt des Balkenquerschnitts
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$	Zusammengefasster Term
a	Längenabmessung des Balkenquerschnitts
a_{ij}	Eintrag des Elastizitätstensors
$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$	Zusammengefasster Term
Ca	Cauchy-Zahl
D	Durchmesser der Schiffsschraube bei Buckingham (1914)
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}	Elastizitätstensor
ε	Dehnungstensor
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Hauptdehnung
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Dehnung
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$	Scherung
F	Kraft
Fr	Froude-Zahl
G	Schubmodul
g	Erdbeschleunigung
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Scherwinkel
H	Index der physikalischen Größen der originalen Hauptausführung
H_0	Hooke-Zahl
I	Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts
i	Anzahl der dimensionslosen Kennzahlen bei Buckingham (1914)
l	charakteristische Längenabmessungen, Länge des Balkens
k	Kompressionsmodul
k	Anzahl der unabhängigen Basisgrößen bei Buckingham (1914)
λ	Lamé-Konstante
M	Drehmoment
m	Anzahl der physikalischen Größen bei Buckingham (1914)
μ	Lamé-Konstante
μ	Fluidviskosität bei Buckingham (1914)
n	Skalierungsmaßstab der geometrischen Abmessungen
Ne	Newton-Zahl

n_X	Skalierungsmaßstab einer physikalischen Größe X
ν	Querkontraktionszahl
Ω	Antriebswinkelgeschwindigkeit bei Kerle (2006)
ω	niedrigste Getriebe-Eigenfrequenz bei Kerle (2006)
Π	dimensionslose Kennzahl bei Kerle (2006)
Π_1	dimensionslose Kennzahl bei Buckingham (1914)
Π_2	dimensionslose Kennzahl bei Buckingham (1914)
Π_3	dimensionslose Kennzahl bei Buckingham (1914)
Π_4	dimensionslose Kennzahl bei Buckingham (1914)
ρ	Werkstoffdichte
ρ	Fluiddichte bei Buckingham (1914)
S	Index der physikalischen Größen des skalierten Modells
S	Geschwindigkeit über Grund bei Buckingham (1914)
σ	Cauchy'scher Spannungstensor
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannung
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannung
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx},$ $\tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$	Schubspannung
v	Geschwindigkeit
w	maximale Verschiebung des Balkens
w'	maximale Verdrehung des Balkens
X	Platzhalter für beliebige physikalische Größe

Abkürzungsverzeichnis

ABS	Acrylnitril-Butadien-Styrol
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
CAD	Computer Aided Design
d. h.	das heißt
et al.	et alii
etc.	et cetera
f.	folgende Seite
ff.	folgende Seiten
FDM	Fused Deposition Modeling
FEM	Finite-Elemente-Methode
MKS	Mehrkörpersimulation
PA	Polyamid
PEEK	Polyetheretherketon
S.	Seite(n)
SL	Stereolithographie
STL	Standard Tessellation Language
u. a.	unter anderem
usw.	und so weiter
v. Chr.	vor Christus
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel

A Anhang

Drehmomentverläufe der Antriebsmomentmessung

Im Folgenden sind die Vergleiche der Drehmomentverläufe von skaliertem Modell und originaler Hauptausführung für die Öffnungs- und die Schließbewegung für die acht betrachteten Lastfälle aus Abschnitt 5.2.1 gezeigt. Die Verläufe für das skalierte Modell wurden für die Vergleichbarkeit mit dem Original jeweils mit dem Skalierungsmaßstab für Drehmomente in den Originalmaßstab zurückgerechnet. Das Symbol \circ an den Graphen markiert jeweils den Beginn der Bewegung

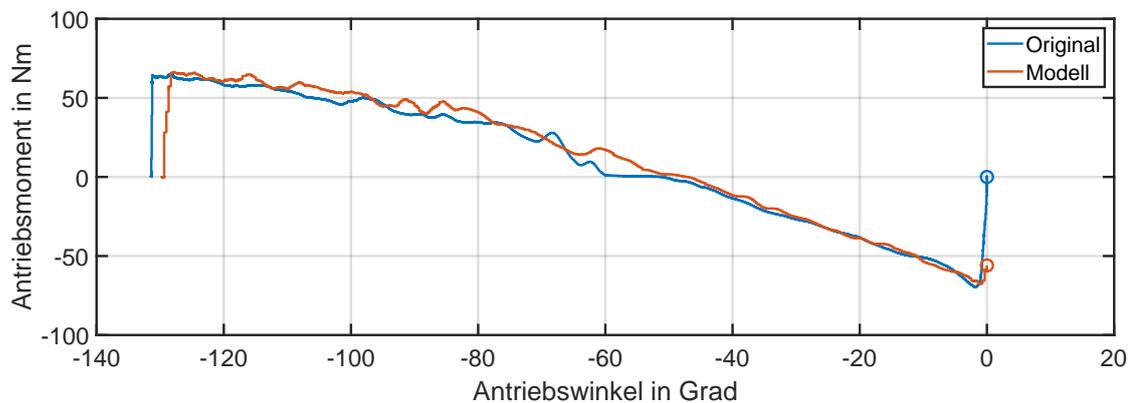


Abb. A.1: Öffnungsbewegung unter Lastfall 1

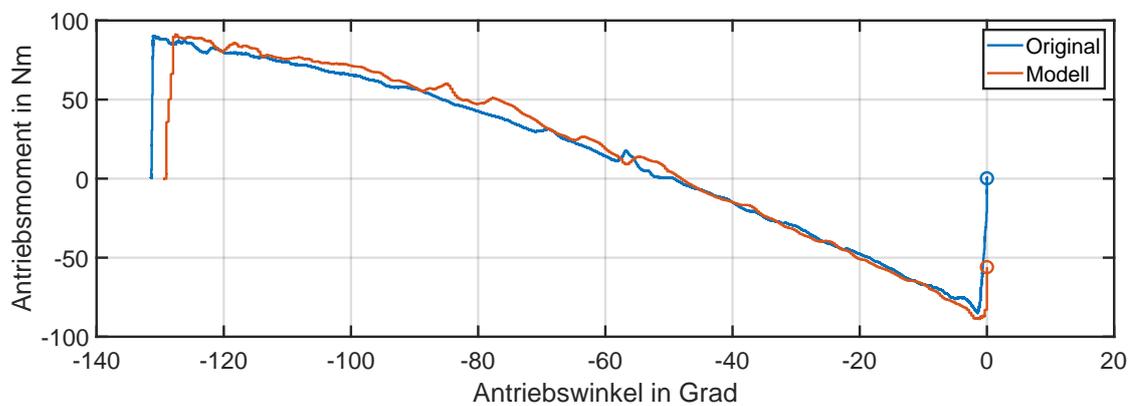


Abb. A.2: Öffnungsbewegung unter Lastfall 2

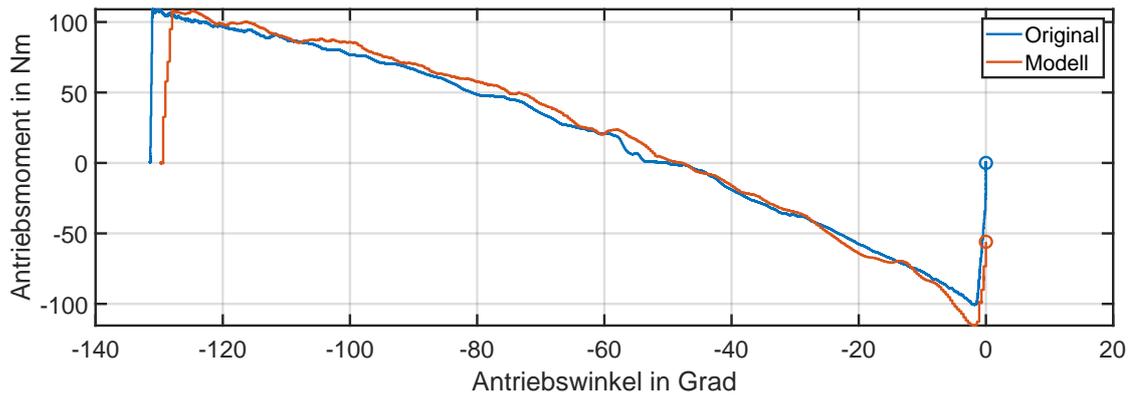


Abb. A.3: Öffnungsbewegung unter Lastfall 3

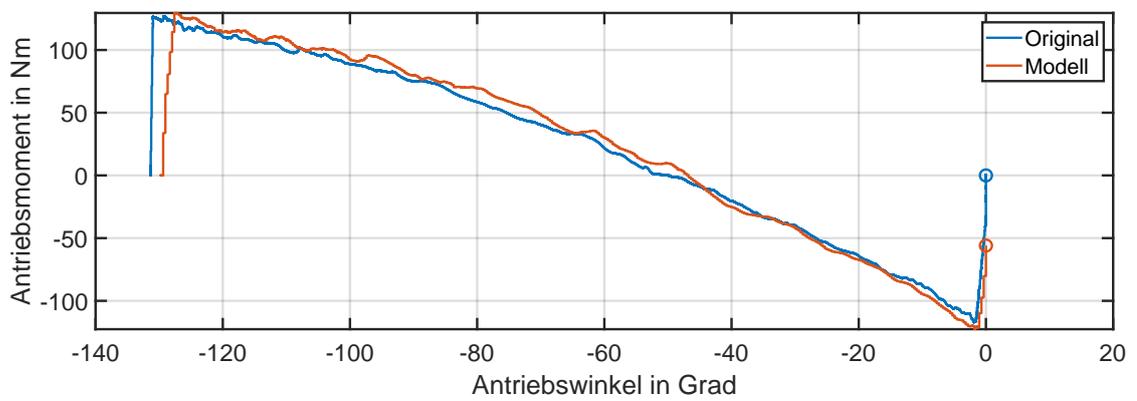


Abb. A.4: Öffnungsbewegung unter Lastfall 4

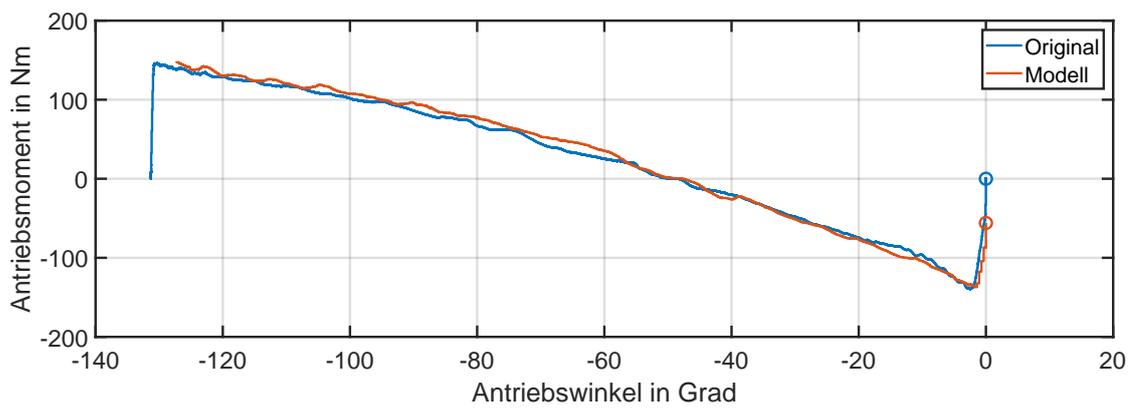


Abb. A.5: Öffnungsbewegung unter Lastfall 5

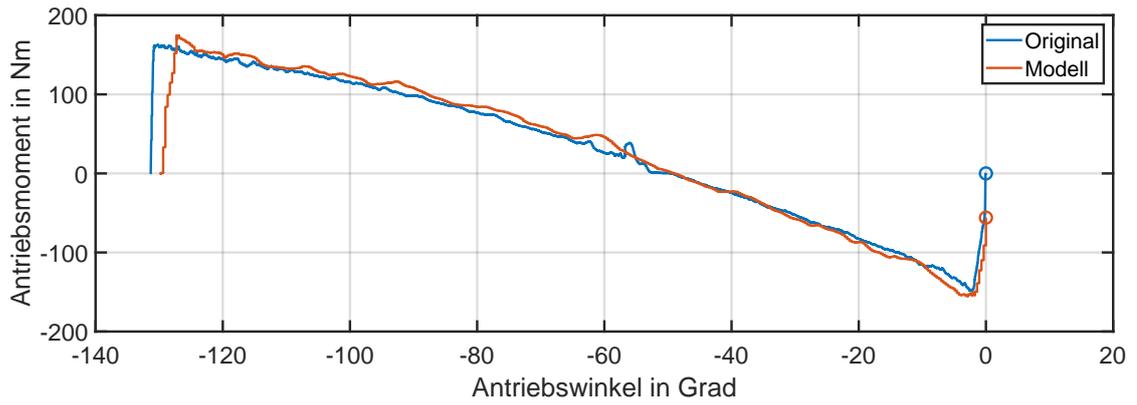


Abb. A.6: Öffnungsbewegung unter Lastfall 6

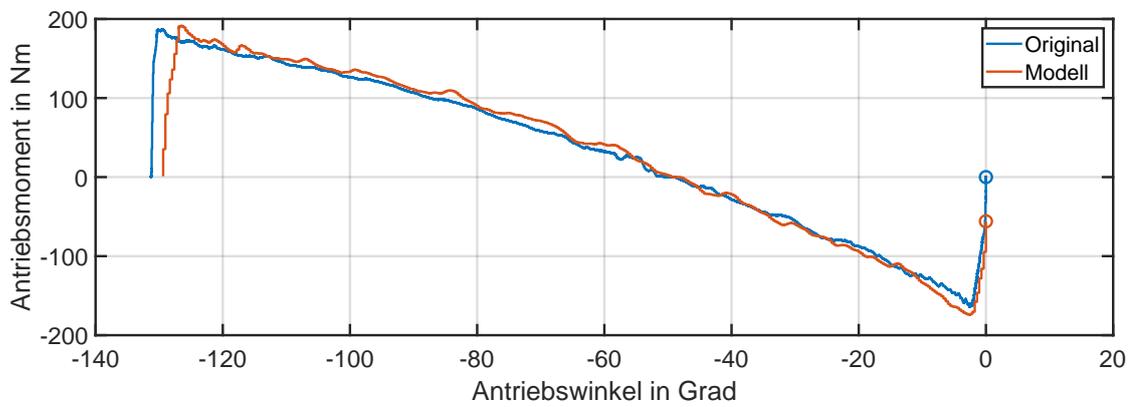


Abb. A.7: Öffnungsbewegung unter Lastfall 7

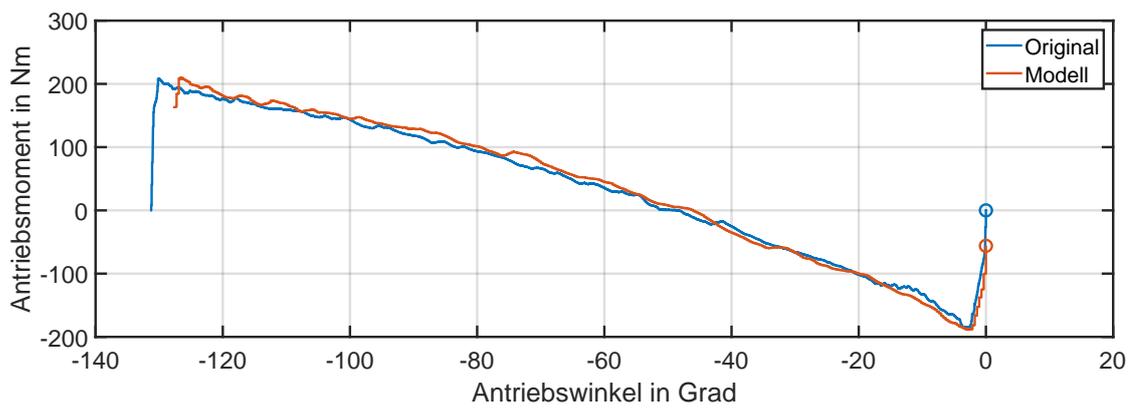


Abb. A.8: Öffnungsbewegung unter Lastfall 8

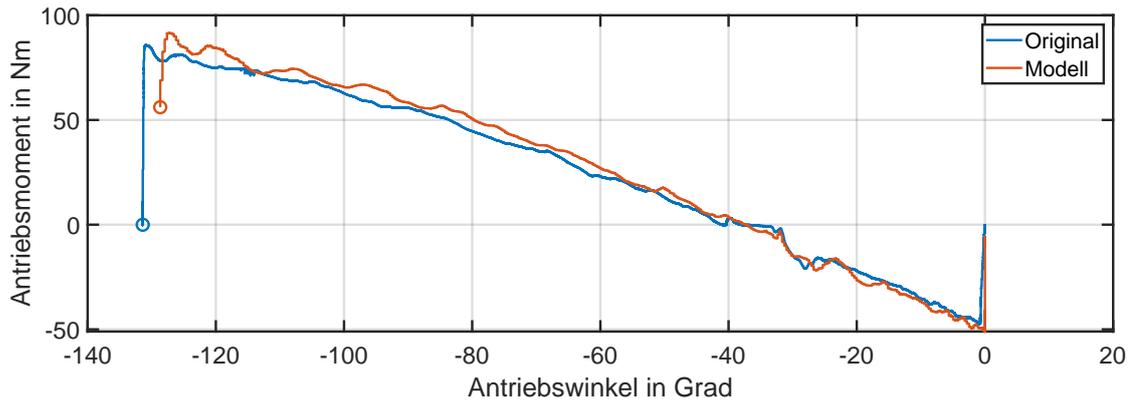


Abb. A.9: Schließbewegung unter Lastfall 1

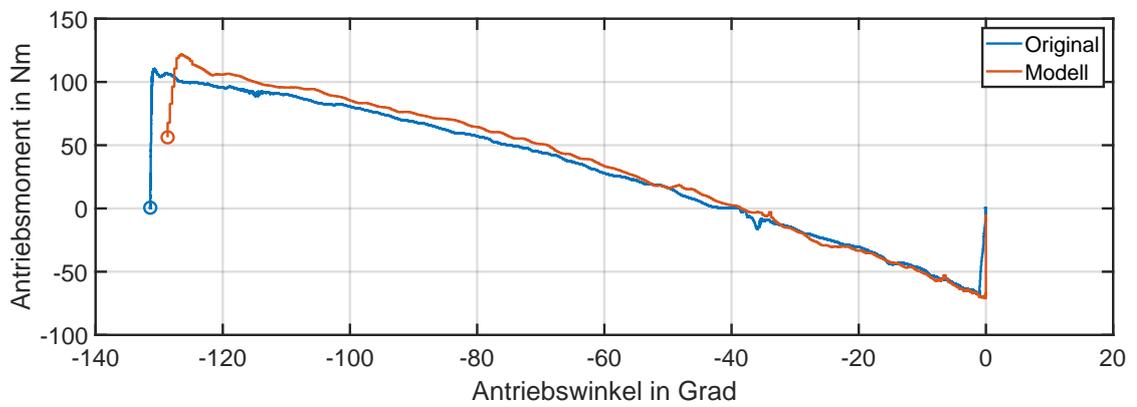


Abb. A.10: Schließbewegung unter Lastfall 2

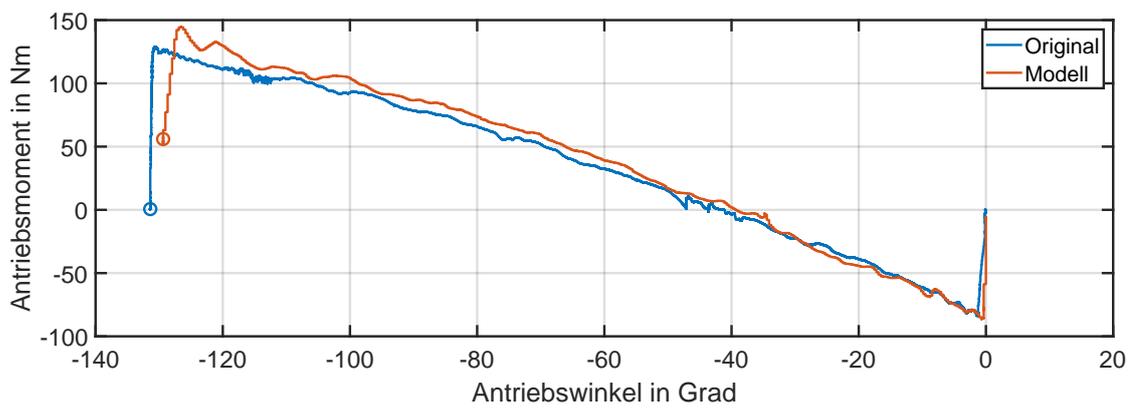


Abb. A.11: Schließbewegung unter Lastfall 3

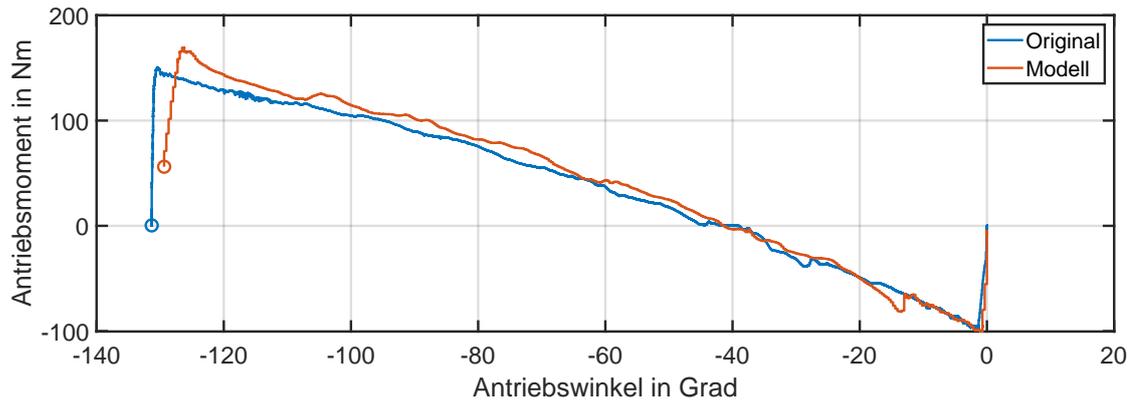


Abb. A.12: Schließbewegung unter Lastfall 4

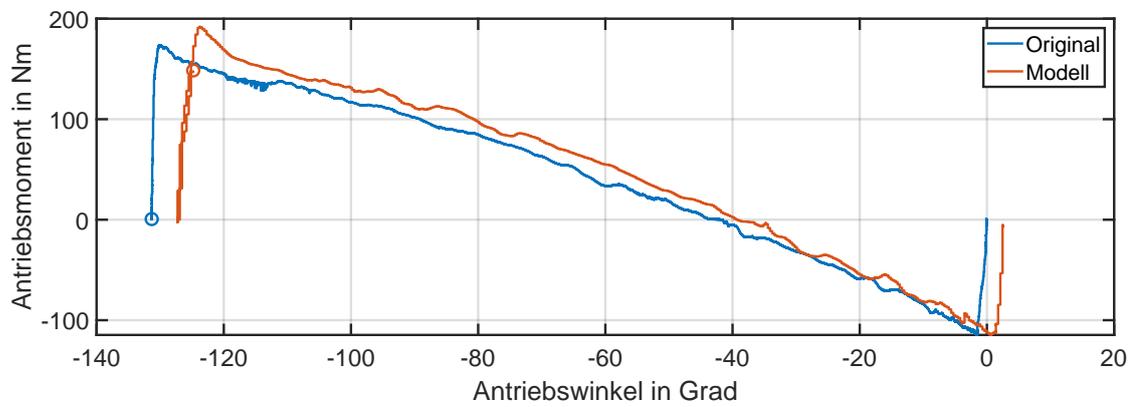


Abb. A.13: Schließbewegung unter Lastfall 5

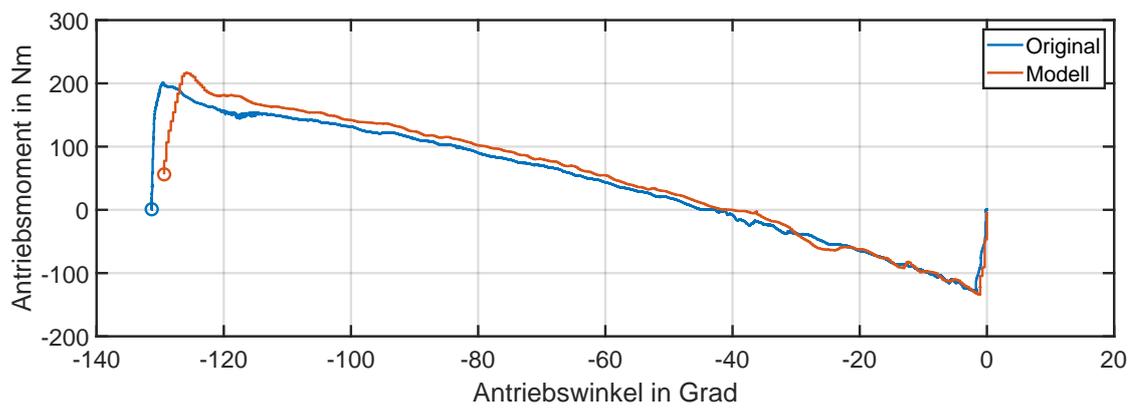


Abb. A.14: Schließbewegung unter Lastfall 6

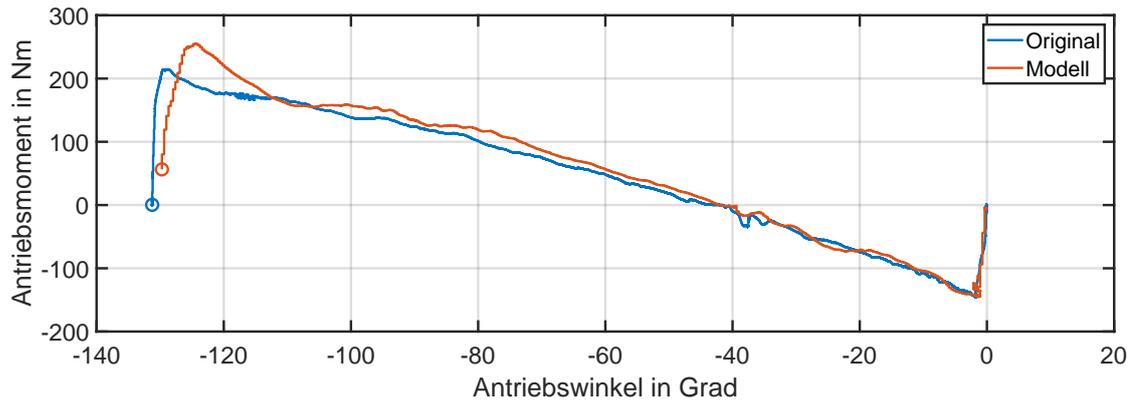


Abb. A.15: Schließbewegung unter Lastfall 7

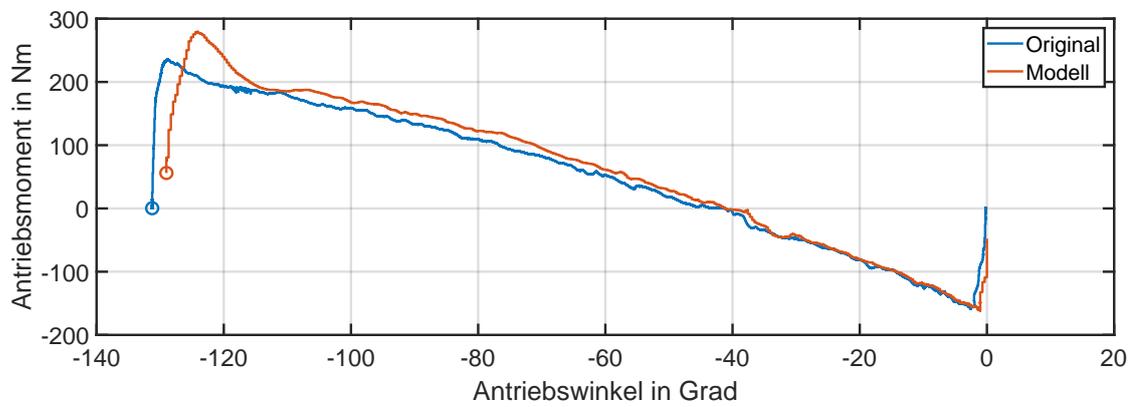


Abb. A.16: Schließbewegung unter Lastfall 8