DK 621.372.5:621.372.6:621.391.822

Rauschanalyse von linearen Netzwerken

Peter Russer und Herbert Hillbrand

Einleitung und Zusammenfassung

Bei einer Vielzahl von linearen elektrischen Netzwerken besteht der Wunsch, das Rauschverhalten mit hoher Genauigkeit vorhersagen zu können. Beispiele dafür sind lineare, monolithisch integrierte Breitband-Verstärker. Bei ihnen wird zur Linearisierung des Frequenzganges hauptsächlich von der *Widerstandsgegenkopplung* und der frequenzabhängigen *Fehlanpassung* Gebrauch gemacht, da Kapazitäten und Induktivitäten in dieser Technologie schwer realisierbar sind [1]. Da Widerstandsgegenkopplung und Fehlanpassung zu beträchtlicher Verschlechterung des Rauschverhaltens führen können, ist diesbezüglich eine möglichst genaue theoretische Vorhersage wünschenswert.

Den Ausgangspunkt für solche Rechnungen liefert dabei die vollständige Kenntnis des Rauschverhaltens der *einzelnen Bauelemente*, die entweder durch theoretische oder meßtechnische Methoden gewonnen wird. Bei der Berechnung der Rauschzahl eines Transistorverstärkers ist es beispielweise sinnvoll, von den gemessenen Rauschkenngrößen der Transistoren und den theoretischen Werten für das thermische Rauschen der Widerstände auszugehen. Das Rauschverhalten einzelner Bauelemente kann durch Anwendung von Rauschanalyseverfahren auf ein physikalisches *Ersatzschaltbild* bestimmt werden, sofern den einzelnen Elementen des physikalischen Ersatzschaltbildes bekannte Rauschquellen zugeordnet werden können und die Abhängigkeit der Rauschquellen voneinander bekannt ist [2, 3]. Oft reichen die Kenntnisse über Bauelemente aber nur dazu aus, aufgrund theoretischer Überlegungen die *Struktur* eines physikalischen Ersatzschaltbildes festzulegen. Die Parameter der Elemente des Ersatzschaltbildes müssen dann aus Messungen an dem Bauelement gewonnen werden. So können etwa bei Transistoren die Elementparameter auch komplexer physikalischer Ersatzschaltbilder durch Messung der Kleinsignal-Vierpolparameter bei verschiedenen Arbeitspunkten und verschiedenen Frequenzen festgestellt werden. In dem physikalischen Transistor-Ersatzschaltbild können aufgrund allgemeiner theoretischer Kenntnis über die Rauschmechanismen im Transistor die Rauschstromquellen und deren Korrelationen angegeben werden. Mit Hilfe der linearen Rauschanalyse lassen sich daraus die Rauschkenngrößen des Transistors berechnen. Mögliche Anwendungen der Rauschanalyse an genauen physikalischen Ersatzschaltbildern von Bauelementen liegen in der Optimierung des Rauschverhaltens von Bauelementen durch Variation der Bauelementparameter (deren Zusammenhang mit den Elementen des Ersatzschaltbildes dabei bekannt sein muß) und in der Vorhersage des Rauschverhaltens aus Messungen des Kleinsignal-Übertragungsverhaltens.

Die üblichen Methoden der *linearen Netzwerkanalyse* sind zur Behandlung rauschender Netzwerke wegen des stochastischen Charakters der Rauschsignale nicht geeignet. Der prinzipielle Unterschied zwischen einem *determinierten* Signal und einem *Rauschsignal* liegt in mangelnder Kenntnis des zeitlichen Verlaufs oder des Spektrums des letzteren. Von einem Rauschsignal lassen sich weder Amplitudenspektrum, noch Leistungsspektrum angeben, sondern nur mittlere spektrale *Leistungsdichten* [2 bis 7]. Statistische Momente höherer Ordnung lassen sich zwar auch bestimmen, im allgemeinen reicht aber die Kenntnis der mittleren spektralen *Leistungsdichten* aus. Zu ihrer Berechnung kann man verschiedene Wege beschreiten: Zunächst kann man formal mit Amplitudenspektren rechnen und nach einer algebraischen Lösung des Problems den algebraischen Ausdruck für die gesuchte spektrale Leistungsdichte bestimmen und nur die dabei gewonnene Endformel numerisch auswerten. Dabei lassen sich zwar die üblichen Methoden der *linearen* Netzwerkanalyse anwenden, man erhält aber bereits bei einfachen Netzwerken sehr komplizierte algebraische Ausdrücke. Des Weiteren ist das Verfahren für die rechnerunterstützte numerische Netzwerkanalyse ungeeignet. Prinzipiell besteht auch die Möglichkeit, numerisch mit Amplituden von Signalen, deren spektrale Leistungsdichte der mittleren spektralen Leistungsdichte des Rauschsignales entspricht, zu rechnen. Die Berücksichtigung der Korrelation der einzelnen Rauschquellen führt dabei aber zu erheblichen Schwierigkeiten.

Wesentliche Vorteile bietet das Rechnen mit *Korrelationsspektren* [2, 4 bis 7]. Sie sind in einfacher Weise physikalisch interpretierbar, denn der Bezug zu meßbaren Größen ist leicht herstellbar. Der auf der Anwendung von Korrelationsspektren aufbauende mathematische Apparat zur Rauschanalyse linearer Netzwerke ist einfach zu handhaben, kann aus den entsprechenden Methoden zur Analyse linearer Netzwerke leicht hergeleitet werden, ermöglicht die numerische Behandlung der Probleme und gestattet dabei in einfacher Weise die Berücksichtigung beliebiger Korrelationen zwischen den im Netzwerk vorhandenen Rauschquellen.

Der in früheren Arbeiten bereits dargestellte Formalismus für das Zusammenschalten von rauschenden Vierpolen [8, 9] wird hier auf das Zusammenschalten von rauschenden n-Toren verallgemeinert. Diese Arbeit behandelt ausschließlich lineare rauschende Netzwerke. Im ersten Abschnitt werden die Korrelationsspektren, deren Bezug zu meßbaren Größen und deren Bezug zu anderen zur Beschreibung des Rauschverhaltens von Netzwerken gebräuchlichen Größen diskutiert. In den folgenden Abschnitten werden der allgemeine Formalismus der Analyse linearer rauschender Netzwerke mit *Korrelationsmatrizen*, die Beschreibung des Rauschverhaltens von n-Toren durch Korrelationsmatrizen, die Transformationen beim Übergang zwischen verschiedenen n-Tor-Darstellungen und das Zusammenschalten von n-Toren behandelt. Zuletzt wird als praktisches Beispiel für die Anwendung der Theorie die Berechnung der Rauschzahl eines mehrstufigen Transistorverstärkers skizziert.

1. Beschreibung linearer rauschender Netzwerke mit Korrelationsspektren

Die Analyse linearer Netzwerke mit *determinierten* Signalquellen wird gewöhnlich im Frequenzbereich durchgeführt und läuft auf die Aufstellung und Auflösung eines linearen komplexen Gleichungssystems hinaus [10]. Dabei hängen die Koeffizienten des Gleichungssystems von den Netzwerkelementen ab, und die Variablen stellen komplexe Signalamplituden dar. Bei der Betrachtung *rauschender* Netzwerke ist aber zu berücksichtigen, daß Rauschsignale *stochastische* Größen sind, über deren zeitlichen Verlauf und über deren Amplitudenspektrum sich keine

Voraussage machen läßt. Über *Mittelwerte* lassen sich hingegen auch bei stochastischen Größen Aussagen machen. Von besonderem Interesse sind dabei die *quadratischen Mittelwerte* und die *mittleren spektralen Leistungsdichten*. Aus *linearen* Mittelwerten und gemittelten Amplitudenspektren lassen sich nämlich keine Aussagen über die Schwankungsanteile von Signalen ableiten, da dabei eben diese herausgemittelt werden, während Mittelwerte höherer Ordnung keine zusätzliche Information bieten, wenn die quadratischen Mittelwerte und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Amplitudenwerte bereits bekannt sind.

Wir setzen in der gesamten Arbeit voraus, daß wir es mit stationären und ergodischen Rauschsignalen zu tun haben, daß also die Mittelwerte Grenzwerten zustreben, die gegenüber zeitlichen Translationen invariant sind, und daß die *zeitlichen Mittelwerte* mit den unten behandelten *Scharmittelwerten* identisch sind [2, 6, 7].

In dieser Arbeit sollen zur Beschreibung der Rauschgrößen in linearen rauschenden Netzwerken *Korrelationsspektren* verwendet werden [2, 4 bis 8]. Für ein anschauliches Verständnis des Korrelationsspektrums ist es sinnvoll, auf den engen Zusammenhang zwischen dem praktischen *Meßprozeß* bei der Bestimmung mittlerer Rauschleistungspektren und der mathematischen Definition des Korrelationsspektrums hinzuweisen: In Bild 1 ist das Blockschaltbild einer realen Meßanordnung zur Messung eines mittleren Rauschleistungsspektrums dargestellt [2]. Das vom Meßobjekt abgegebene Rauschsignal wird zunächst verstärkt. Dann folgt ein Filter, das aus dem verstärkten Rauschsignal einen schmalen spektralen Bereich aussiebt. Bei einem unendlich schmalbandigen Filter wäre die Amplitude des Filter-Ausgangssignals dem Betrag des Signalspektrums bei der Durchlaßfrequenz des Filters proportional. Bei realisierbaren Filtern jedoch ist die Impulsantwort nur für $t \geq 0$ von Null verschieden und geht aus Stabilitätsgründen für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null. Das Ausgangssignal des Filters entsteht durch *Faltung* des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Filters [7]. Zerlegt man die Impulsantwort in einen mit der Mittenfrequenz des Filters oszillierenden Faktor und einen Faktor, der für $t < 0$ verschwindet und für $t > 0$ abklingt, so kann das *Faltungsintegral als Fouriertransformation interpretiert* werden, wobei die Zeitfunktion im Fourierintegral das Produkt aus der Zeitfunktion des Eingangssignals und dem nicht oszillierenden Faktor der Impulsantwort des Filters ist. Das Eingangssignal wird also, bevor es der Fouriertransformation unterzogen wird, für alle Zeiten die größer als der Zeitpunkt der Messung sind, mit Null gewichtet und für Zeiten vor dem Meßzeitpunkt mit der Einschwingzeitkonstanten des Filters exponentiell abklingend gewichtet: Durch das Filter wird nicht die Fouriertransformierte des *Eingangssignals* ermittelt, sondern die Fouriertransformierte eines begrenzten *zeitlichen Abschnitts des Eingangssignals*. Während man bei *determinierten* Signalen aus der Fouriertransformierten eines zeitlich begrenzten Ausschnitts des Signales im allgemeinen Rückschlüsse auf das Fourierspektrum des *vollständigen* Signales machen kann, ist das bei Rauschsignalen (also stochastischen Signalen) grundsätzlich unmöglich. Das hat die folgenden Gründe: Bei determinierten Signalen hat man es im allgemeinen entweder mit zeitlich *begrenzten* Signalen oder mit zeitlich *nicht begrenzten* Signalen zu tun, deren Fouriertransformierte eine endliche Anzahl von Singularitäten enthält. Das Fourierspektrum eines zeitlich begrenzten Signales kann in trivialer Weise durch eine zeitlich begrenzte Messung ermittelt werden. Bei zeitlich nicht begrenzten Signalen, deren Fouriertransformierte eine endliche Anzahl von Singularitäten enthält, kann das Fourierspektrum mit beliebiger Genauigkeit rekonstruiert werden, wenn die spektrale Auflösung bei der Messung klein gegenüber dem Abstand der Singularitäten im Fourierspektrum des Signales ist (dabei wird davon ausgegangen, daß nach dem Filter *Amplitude* und *Phase* des Signales bestimmt werden). Bei einem *stochastischen Signal* ist eine derartige Rekonstruktion aus der in einem *endlichen* Zeitintervall durchgeführten Messung nicht möglich: Bei der *Rauschmessung* besteht kein Zusammenhang zwischen Amplitude oder Phase des Ausgangssignals des Filters zu zwei Zeitpunkten, deren Abstand groß im Vergleich zur Einschwingzeitkonstanten des Filters ist. Ebenso würde zwischen den Filter-Ausgangssignalen, die mit zwei Filtern zum gleichen Zeitpunkt aus dem Rauschsignal ausgesiebt werden, keine feste Phasenbeziehung bestehen, wenn der Abstand der Mittenfrequenzen der beiden Filter groß gegenüber der Bandbreite der Filter wäre. Läßt man die Einschwingzeit des Filters gegen ∞ gehen, so folgt daraus, daß man zur genauen Beschreibung des Amplitudenspektrums des Rauschsignals in einem beliebig kleinen Frequenzintervall die Anzahl der Stützstellen gegen Unendlich gehen lassen muß. Das Amplitudenspektrum des *Rauschvorgangs* ist folglich prinzipiell *meßtechnisch nicht erfaßbar*.

Meßtechnisch erfaßbar sind lediglich die Fourierspektren *endlicher* zeitlicher *Abschnitte von Rauschsignalen*. Zerlegt man ein Rauschsignal in endliche zeitliche Abschnitte, so besteht die Möglichkeit von jedem dieser Abschnitte ein Fourierspektrum zu bestimmen. Über die *Schar* dieser Fourierspektren können *Mittelwerte* gebildet werden. Wegen der Gleichverteilung der Phasenwinkel der komplexen Amplituden verschwinden dabei die *linearen* Mittelwerte. Die *Absolutquadrate* der komplexen Amplituden dagegen geben (bis auf einen Normierungsfaktor) die spektrale Leistungsdichte der Signale an und erlauben eine sinnvolle Mittelwertbildung. Diese Mittelwertbildung wird von der Meßanordnung nach Bild 1 im Prinzip vorgenommen: Am Ausgang des Filters liegt ein Signal, dessen Amplitude dem Betrag der Fouriertransformierten (bei der Mittenfrequenz des Bandfilters) eines endlichen Zeitintervalls des Eingangssignals proportional ist. Ob man dabei ein endliches Zeitintervall des Eingangssignals herangezogen hat oder das Eingangssignal mit einem für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell gegen Null gehenden Faktor bewichtet, ist hier belanglos. Bei einer bestimmten Einschwingzeit des Filters kann man etwa davon ausgehen, daß man die Fouriertransformation über einen zeitlichen Ausschnitt dieser Länge erstreckt hat. Das Ausgangssignal des Filters wird in der Anordnung nach Bild 1 zunächst verstärkt und dann quadriert. Am Ausgang des Quadrierers entsteht ein Signal, das ebenfalls stochastisch ist. Es hat spektrale Anteile in der Umgebung der Frequenz Null und in der Umgebung der doppelten Mittenfrequenz des Filters. Letztere werden im nachfolgenden Tiefpaß in jedem Fall abgeschnitten. Darüberhinaus ist es aber notwendig, die Bandbreite des Tiefpasses wesentlich kleiner zu machen als die Bandbreite des Filters. Das Zeitintervall, das zur Mittelung des momentanen Leistungsspektrums dient, ist dann groß im Vergleich zum Zeitintervall, wo dem Rauschsignal eine Probe für die Fouriertransformation entnommen wird. Auf diese Weise kann eine mittlere spektrale Leistungsdichte überhaupt erst bestimmt werden. Sie kann mathematisch in folgender Weise

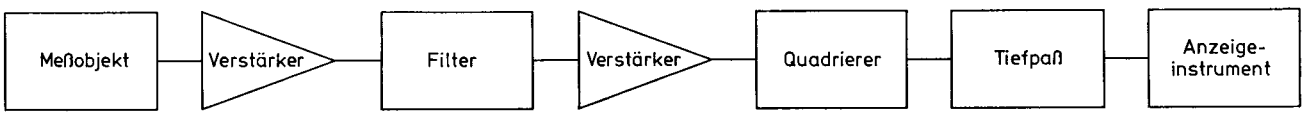

Bild 1: Anordnung zur Messung der spektralen Rauschleistungsdichte

definiert werden: Von einem stochastischen Signal $s(t)$ wird der Ausschnitt

$$s_T(t) = \begin{cases} s(t) \text{ für } |t| \leq T \\ 0 \quad \text{ für } |t| > T \end{cases} \tag{1}$$

gewählt. Seine Fouriertransformierte ist das Amplitudenspektrum

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t) \cdot e^{-2\pi i f t} \, dt \tag{2}$$

Wenn im folgenden die Amplitudenspektren stochastischer Signale verwendet werden, so sind das immer die durch den Index T gekennzeichneten *Fouriertransformierten eines zeitlichen Ausschnitts der Länge 2T* des an *einem Element* des Ensembles gemessenen Rauschsignals. Mit diesem auf ein bestimmtes Zeitintervall bezogenen Amplitudenspektrum $S_T(f)$ darf *formal* gerechnet werden, solange nicht vergessen wird, daß es als Repräsentant einer *Schar vieler Spektren* angesehen werden muß, die in dem endlichen Zeitintervall $-T$ bis $+T$ gemessen wurden. Aus diesem Grunde ist jedoch keine numerische Rechnung möglich. Man kann mit Amplitudenspektren nur algebraisch rechnen und darf erst nach Übergang zu mittleren Leistungsdichten numerische Werte einsetzen.

Der Zahlenwert der $S_T(f)$ selbst gibt aber nur im entsprechenden Zeitintervall (und bei einem ganz bestimmten Meßobjekt aus dem Ensemble gleichartiger Meßobjekte) Auskunft über den zeitlichen Verlauf von $s(t)$ und gibt keinen Aufschluß über die statistischen Eigenschaften des *Ensembles* zu beliebigen Zeitpunkten.

Die spektrale Leistungsdichte ist (bis auf einen dimensionsbehafteten Faktor) durch $(1/2\,T)\,S_T(f) \cdot S_T^*(f)$ gegeben. Werden mehrere derartige endliche Zeitintervalle der Länge $2T$ herausgegriffen, oder im gleichen Zeitintervall Messungen an Elementen aus einem Ensemble physikalisch gleichartiger Objekte durchgeführt, so führen diese Messungen zu einer *Schar* von spektralen Leistungsdichten. Über diese Schar kann der *Mittelwert* $(1/2T) < S_T(f) \cdot S_T^*(f) >$ gebildet werden. Die Symbole $< \ldots >$ werden im folgenden zur Bezeichnung des *Scharmittelwertes*[1]) verwendet. Erst wenn er gebildet wurde, ist der Grenzübergang $T \to \infty$ sinnvoll. Die Funktion

$$C(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} < S_T(f) \cdot S_T^*(f) > \tag{3}$$

wird als *Autokorrelationsspektrum* bezeichnet. Durch sie wird jene Meßgröße mathematisch repräsentiert, die man durch die in Bild 1 gezeigte Meßapparatur mit beliebiger Genauigkeit bestimmen kann[2]).

Als einfaches Beispiel sei das Autokorrelationsspektrum eines thermisch rauschenden Leitwertes *angegeben*. Das Autokorrelationsspektrum der Ersatzrauschstromquelle eines linearen Leitwertes $Y(f)$ im thermodynamischen Gleichgewicht ist bekanntlich [2]

$$C^Y(f) = 2kT_0 \cdot \text{Re}\left\{Y(f)\right\} \tag{4}$$

Das mittlere Schwankungsquadrat in einem Frequenzintervall erhält man durch Integration des Autokorrelationsspektrums über die positiven und negativen Frequenzen dieses Intervalls. In einem kleinen Frequenzintervall, in dem $Y(f)$ näherungsweise als konstant angenommen werden kann, ist

$$\langle i_R^2 \rangle = 2\,\Delta f \cdot C^Y(f) = 4kT_0 \,\text{Re}\left\{Y(f)\right\} \Delta f \tag{5}$$

der quadratische Mittelwert des eingeprägten Rauschstroms. Das ist die bekannte Formel für das thermische Rauschen. Kann man das Amplitudenspektrum $S_T(f)$ als Linearkombination mehrerer Amplitudenspektren $S_{iT}(f)$

$$S_T(f) = \sum_i \lambda_i(f)\, S_{iT}(f) \tag{6}$$

schreiben[3]) (wobei die komplexen Koeffizienten $\lambda_i(f)$ ebenfalls von der Frequenz abhängig sind), so gilt nach Gl. (3)

$$C(f) = \sum_{i,k} \lambda_i(f)\, \lambda_k^*(f)\, C_{ik}(f) \tag{7}$$

mit

$$C_{ik}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \langle S_{iT}(f) \cdot S_{kT}^*(f) \rangle \tag{8}$$

Die $C_{ii}(f)$ sind die *Autokorrelationsspektren*. Die $C_{ik}(f)$ mit $i \neq k$ werden als *Kreuzkorrelationsspektren* bezeichnet. Sie sind, wie man aus Gl. (7) ersieht, neben den C_{ii} zur Darstellung des Autokorrelationsspektrums C nötig. Sind die stochastischen Signale $s_i(t)$ und $s_k(t)$ statistisch unabhängig, so gilt $C_{ik} = 0$. Allgemein ist aber

$$C_{ik}(f) = C_{ki}^*(f) \tag{9}$$

und

$$|C_{ik}(f)|^2 \leq C_{ii}(f) \cdot C_{kk}(f) \tag{10}$$

Gilt in Gl. (10) das Gleichheitszeichen, so sind die Signale mit den Indizes i und k vollständig korreliert. Determinierte Signale sind, wie man aus Gl. (8) leicht erkennt, grundsätzlich vollständig korreliert, da bei ihnen die Scharmittelwertbildung in Gl. (8) weggelassen werden kann, und dann in Gl. (10) das *Gleichheitszeichen* gilt.

Zur Bestimmung der Kreuzkorrelationsspektren zweier Signale kann man im Prinzip so vorgehen, daß man mit identischen Bandfiltern aus beiden Signalen schmale spektrale Bereiche herausfiltert, aus den beiden so gewonnenen Signalen das *Produkt* und davon dann den Mittelwert bildet[4]). Praktisch fällt es jedoch insbesondere bei hohen Frequenzen leichter, das Autokorrelationsspektrum einer *Superposition* mehrerer stochastischer Signale zu messen und durch Variation der bekannten Koeffizienten der Superposition die Autokorrelations- und Kreuzkorrelationsspektren zu ermitteln. Dieses Verfahren wird auch im *folgenden* Beispiel erläutert: Bild 2 zeigt das Blockschaltbild eines rauschenden Vierpols, dessen Eingang mit einer rauschenden Quelle mit der komplexen Admittanz $Y_s(f)$ und mit einer idealen Rauschstromquelle $I_{sT}^Y(f)$ verbunden ist.

Das Rauschverhalten eines linearen Vierpols kann nun grundsätzlich durch zwei miteinander korrelierte Rauschquellen beschrieben werden [2, 3, 5]. In Bild 2 wurde die Beschreibung durch eine Stromquelle $I_T^A(f)$ und eine Spannungsquelle $U_T^A(f)$

1) $\langle x_i \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
wobei die x_i Parameter sind, die an einem Ensemble von N physikalisch gleichartigen Objekten gemessen werden.

2) Eine mathematische Analyse des Meßprozesses wird in [2], Abschnitt 6.1.3 durchgeführt.

3) In der linearen Netzwerkanalyse hat man es stets mit Gleichungen dieser Struktur zu tun.

4) Die Messung muß zur Bestimmung von Real- und Imaginärteil des Kreuzkorrelationsspektrums bei diesem Verfahren zweimal durchgeführt werden, wobei eines der beiden Signale einmal über einen 90°-Phasenschieber zu führen ist (siehe auch [2], Abschnitt 6.2).

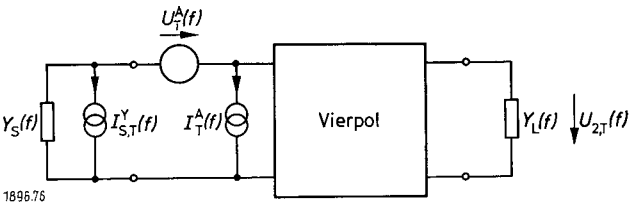

Bild 2: Rauschender Vierpol, eingangsseitig mit rauschender Quelle abgeschlossen

am Eingang gewählt. In Abschnitt 3 wird gezeigt, daß dies die bei der Darstellung des Vierpols durch die Kettenmatrix gebräuchlichen Ersatz-Rauschquellen sind. Die Indizierung der Rauschquellen und Korrelationsspektren erfolgt hier bereits in Übereinstimmung mit dem dort gewählten Bezeichnungsschema. Das Autokorrelationsspektrum der Rauschstromquelle I_{sT}^Y ist bei thermisch rauschenden Quellen durch Gl. (4) gegeben. Weiters ist $I_{sT}^Y(f)$ nicht mit den Rauschquellen des Vierpols korreliert. Das Rauschverhalten des Vierpols wird durch Angabe der Rauschzahl F in Abhängigkeit von der Frequenz f und der komplexen Quelladmittanz Y_s vollständig beschrieben. Die Rauschzahl F ist das Verhältnis der spektralen Rauschleistungsdichte, die vom Ausgang des Vierpols an die Lastadmittanz Y_L abgegeben wird (wenn sowohl Quelle als auch Vierpol rauschen), zur spektralen Rauschleistungsdichte, die an Y_L abgegeben wird wenn nur die Quelle rauscht.

Zur meßtechnischen Bestimmung der Rauschzahl eines Vierpols sei auf die Literatur verwiesen [2, 3]. Hier soll die Bestimmung der Autokorrelations- und Kreuzkorrelationsfunktionen der Rauschquellen $U_T^A(f)$ und $I_T^A(f)$ aus der Rauschzahl bzw. aus den zur Beschreibung des Rauschverhaltens von Vierpolen gebräuchlichen Parametern diskutiert werden. Entsprechend Gl. (8) erhält man das Autokorrelationsspektrum von $U_T^A(f)$ als

$$C_{11}^A(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \langle U_T^A(f) \cdot U_T^{A*}(f) \rangle \tag{11}$$

und von $I_T^A(f)$ zu

$$C_{22}^A(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \langle I_T^A(f) \cdot I_T^{A*}(f) \rangle \tag{12}$$

und die Kreuzkorrelationsspektren

$$C_{12}^A(f) = C_{21}^{A*}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \langle U_T^A(f) \cdot I_T^{A*}(f) \rangle \tag{13}$$

In gleicher Weise kann für die Ausgangsspannung $U_{2T}(f)$ des Vierpols das zugehörige Autokorrelationsspektrum $C_{22}(f)$ definiert werden. Zur Bestimmung des Autokorrelationsspektrums der Rauschspannung am Ausgang des Vierpols kann zunächst formal mit komplexen Amplituden gerechnet werden. Aus der so gewonnenen Gleichung für $U_{2T}(f)$ folgt nach Multiplikation mit der konjugiert komplexen Gleichung, Bildung des Scharmittelwertes und Grenzübergang $T \to \infty$

$$C_{22}(f) = \frac{|V(f)|^2}{|Y_e(f) + Y_s(f)|^2} \left[2kT_0 \cdot \mathrm{Re}\{Y_s(f)\} + C_{22}^A(f) + \right.$$
$$\left. + |Y_s(f)|^2 C_{11}^A(f) + 2\,\mathrm{Re}\{Y_s(f)\, C_{12}^A(f)\}\right] \tag{14}$$

wobei $V(f)$ die komplexe Spannungsverstärkung und $Y_e(f)$ die Eingangsadmittanz des Vierpols sind. Wird der Vierpol als nicht rauschend angenommen, so ist das Autokorrelationsspektrum der Ausgangsspannung[5])

$$C'_{22}(f) = \frac{|V(f)|^2}{|Y_e(f) + Y_s(f)|^2} \cdot 2kT_0\, \mathrm{Re}\{Y_s(f)\} \tag{15}$$

Da sich die an Y_L des Bildes 2 in beiden Fällen abgegebenen spektralen Rauschleistungsdichten wie die Autokorrelationsspektren der Ausgangsspannung verhalten, gilt aufgrund der oben gegebenen Definition der Rauschzahl

$$F = 1 + \frac{C_{22}^A(f) + |Y_s(f)|^2 C_{11}^A(f) + 2\,\mathrm{Re}\{Y_s(f)\, C_{12}^A(f)\}}{2kT_0 \cdot \mathrm{Re}\{Y_s(f)\}} \tag{16}$$

Diese Gleichung zeigt, daß sich die Autokorrelations- und Kreuzkorrelations-Spektren von $U_T^A(f)$ und $I_T^A(f)$ bestimmen lassen, wenn die Rauschzahl als Funktion der komplexen Quelladmittanz $Y_s(f)$ bekannt ist. Zur vollständigen Beschreibung des Rauschverhaltens eines Vierpols werden bei jeder Frequenz vier Zahlenwerte benötigt, und zwar die der reellen und positiven Größen C_{11}^A und C_{22}^A und Real- und Imaginärteil von $C_{12}^A = C_{21}^{A*}$. Gebräuchlich ist die Charakterisierung eines rauschenden Vierpols durch die minimale Rauschzahl F_{min}, den äquivalenten Rauschwiderstand R_n und die optimale Quelladmittanz Y_{opt} [3]. Auch dabei sind zur vollständigen Charakterisierung des Vierpols bei jeder Frequenz vier reelle Zahlenwerte erforderlich. Die Rauschzahl in Abhängigkeit von $Y_s(f)$ wird nach

$$F(f) = F_{min}(f) + \frac{R_n(f)\, |Y_{opt}(f) - Y_s(f)|^2}{\mathrm{Re}\{Y_s(f)\}} \tag{17}$$

berechnet. Zwischen den in Gl. (17) verwendeten Größen und den Korrelationsspektren der Gl. (16) bestehen folgende Beziehungen:

$$C_{11}^A(f) = 2kT_0\, R_n(f) \tag{18}$$

$$C_{22}^A(f) = 2kT_0\, R_n(f)\, |Y_{opt}(f)|^2 \tag{19}$$

$$C_{12}^A(f) = 2kT_0 \left[\frac{1}{2}(F_{min}(f) - 1) - R_n(f)\, Y_{opt}^*(f)\right] \tag{20}$$

2. Der Formalismus der Analyse linearer rauschender Netzwerke mit Korrelationsmatrizen

Die Autokorrelations- und Kreuzkorrelationsspektren der Rauschquellen eines linearen Netzwerkes werden in der quadratischen (und wegen Gl. (9) hermiteschen) Korrelationsmatrix

$$\mathbf{C}(f) = (C_{ik}(f)) \tag{21}$$

zusammengefaßt [4, 5]. Des Weiteren kann man die $S_{i,T}(f)$ durch einen *Spaltenvektor*

$$\boldsymbol{S}_T(f) = \begin{pmatrix} S_{1,T}(f) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n,T}(f) \end{pmatrix} \tag{22}$$

darstellen. $\boldsymbol{S}_T^+(f)$ ist der zu $\boldsymbol{S}_T(f)$ hermitesch konjugierte *Zeilenvektor.* Gl. (8) läßt sich dann in Matrizenschreibweise durch

$$\mathbf{C}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \langle \boldsymbol{S}_T(f) \cdot \boldsymbol{S}_T^+(f) \rangle \tag{23}$$

angeben. Die Anwendung der Klammersymbole für die Scharmittelwertbildung $\langle \ldots \rangle$ auf die Matrix $\boldsymbol{S}_T(f) \cdot \boldsymbol{S}_T^+(f)$ bedeutet

5) $V(f)$ hängt von Y_L ab.

die Bildung des Scharmittelwerts bei *jedem einzelnen* Matrixelement. Formal lassen sich für die komplexen Amplituden zeitlich begrenzter Ausschnitte der Rauschsignale die Netzwerkgleichungen nach den üblichen Methoden der Netzwerkanalyse herleiten. Die Netzwerkgleichungen haben dann in Matrizenschreibweise die allgemeine Form

$$\boldsymbol{S}'_{\mathrm{T}}(f) = \mathbf{M}(f) \cdot \boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}(f) \tag{24}$$

Die Matrix **M** verknüpft die beiden komplexen Amplitudenvektoren. Durch Multiplikation von rechts mit der hermitesch konjugierten Gleichung erhält man

$$\boldsymbol{S}'_{\mathrm{T}}(f) \cdot \boldsymbol{S}'^{+}_{\mathrm{T}}(f) = \mathbf{M}(f) \cdot \boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}(f) \cdot \boldsymbol{S}^{+}_{\mathrm{T}}(f) \cdot \mathbf{M}^{+}(f) \tag{25}$$

$\mathbf{M}^{+}(f)$ ist wieder die zu $\mathbf{M}(f)$ hermitesch konjugierte Matrix. Nach Durchführung der Scharmittelwertbildung und des Grenzübergangs $T \to \infty$ entsprechend Gl. (23) folgt

$$\mathbf{C}'(f) = \mathbf{M}(f) \cdot \mathbf{C}(f) \cdot \mathbf{M}^{+}(f) \tag{26}$$

da die durch $\mathbf{M}(f)$ dargestellten Netzwerkparameter determinierte Größen sind und $\mathbf{M}(f)$ und $\mathbf{M}^{+}(f)$ aus der Scharmittelwertbildung herausgezogen werden können. Der allgemeine Zusammenhang zwischen den Gln. (24) und (26) gibt das Verfahren an, wie aus den Netzwerkgleichungen für komplexe Amplituden die Netzwerkgleichungen für die Korrelationsmatrizen gewonnen werden können, da zur Transformation der Korrelationsmatrix in Gl. (26) die gleiche Transformationsmatrix **M** verwendet wird wie zur Transformation des Vektors der Amplituden $\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}(f)$.

3. Die Darstellung linearer rauschender n-Tore durch Korrelationsmatrizen

In Erweiterung der früheren Arbeiten [8, 9] wird in diesem Abschnitt die Charakterisierung linearer *rauschender n*-Tore durch Korrelationsmatrizen behandelt, wobei auf der Theorie linearer, *nichtrauschender n*-Tore aufgebaut wird [10]. Sowohl $2n$-Pole mit paarweise entgegengesetzt gleichen Klemmenströmen als auch $(n+1)$-Pole, bei denen alle Tore eine gemeinsame Masse haben, lassen sich durch n-Tore darstellen. Zur vollständigen Beschreibung des Rauschverhaltens eines n-Tores sind maximal n Rauschquellen erforderlich [5]. Die mathematische Beschreibung der n Rauschquellen erfolgt durch eine n-dimensionale *quadratische* Korrelationsmatrix. In der mathematischen Formulierung besteht zwischen $(n+1)$-Pol und $2n$-Pol kein Unterschied. Es ist nur beim Zusammenschalten von $2n$-Polen darauf zu achten, daß die Klemmenströme paarweise entgegengesetzt gleich groß bleiben und bei $(n+1)$-Polen darauf, daß die Masseknoten der n-Tore miteinander verbunden werden. Die Bilder 3 und 4 zeigen rauschende n-Tore, wobei es sich in Bild 3 um einen $2n$-Pol und in Bild 4 um einen $(n+1)$-Pol handelt. Die Beschreibung durch Strom- oder Spannungsquellen hängt von der gewählten Matrixdarstellung ab. Im Folgenden werden die verschiedenen n-Tor-Darstellungen behandelt. Eine Unterscheidung zwischen $2n$-Polen und $(n+1)$-Polen ist hierbei nicht nötig.

3.1. *Admittanzmatrix (Y-Darstellung)*

Bei der Darstellung des n-Tores durch die *Admittanzmatrix* $\mathbf{Y}(f)$ werden die Rauschquellen durch ideale Rauschstromquellen $\boldsymbol{I}^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{T}}(f)$ parallel zu den Toren dargestellt (Bild 5). Die Klemmenspannungen und Klemmenströme werden in den Vektoren $\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}(f)$ und $\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}(f)$ zusammengefaßt. Für die komplexen Amplituden gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}(f) = \mathbf{Y}(f) \cdot \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}(f) + \boldsymbol{I}^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{T}}(f) \tag{27}$$

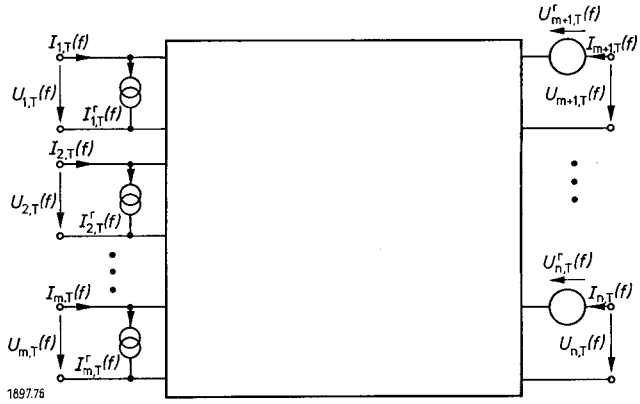

Bild 3: Allgemeine Darstellung eines rauschenden $2n$-Pols

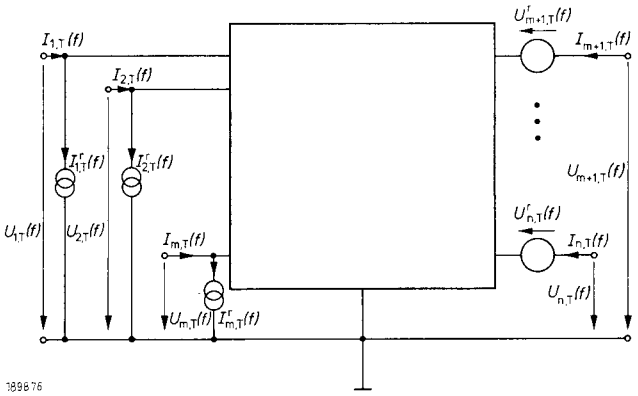

Bild 4: Allgemeine Darstellung eines rauschenden $(n+1)$-Pols

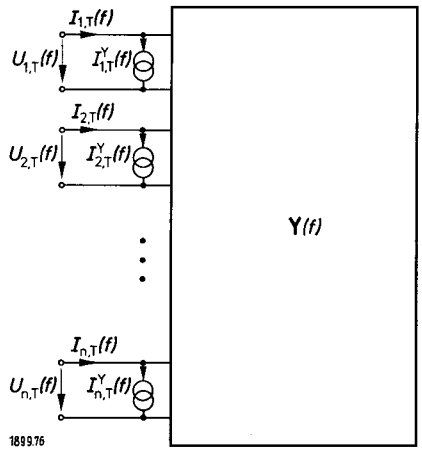

Bild 5: Y-Darstellung eines rauschenden n-Tores

Die Rauschstromquellen werden durch die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{C}^{\mathrm{Y}}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \langle \boldsymbol{I}^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{T}}(f) \cdot \boldsymbol{I}^{\mathrm{Y}+}_{\mathrm{T}}(f) \rangle \tag{28}$$

beschrieben.

3.2. *Impedanzmatrix (Z-Darstellung)*

Wird die *Impedanzmatrix* $\mathbf{Z}(f)$ verwendet, so werden die Rauschquellen durch Rauschspannungsquellen $\boldsymbol{U}^{\mathrm{Z}}_{\mathrm{T}}(f)$ in Serie mit den Toren dargestellt (Bild 6). Es gilt

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}(f) = \mathbf{Z}(f) \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}(f) + \boldsymbol{U}^{\mathrm{Z}}_{\mathrm{T}}(f) \tag{29}$$

und

$$\mathbf{C}^{\mathrm{Z}}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \langle \boldsymbol{U}^{\mathrm{Z}}_{\mathrm{T}}(f) \cdot \boldsymbol{U}^{\mathrm{Z}+}_{\mathrm{T}}(f) \rangle \tag{30}$$

3.3. *Hybridmatrix (H-Darstellung)*

Bei der *Hybridmatrix* oder Serienparallelmatrix $\mathbf{H}(f)$ werden die Tore des n-Tores in zwei Gruppen unterteilt. Bei der ersten Torgruppe werden die Klemmenspannungen und Klemmenströme durch die Vektoren $\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)$ und $\boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)$, bei der zweiten Torgruppe durch $\boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)$ und $\boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)$ beschrieben. Die Rauschquellen werden bei der ersten Torgruppe durch eingeprägte Rauschspannungsquellen in *Serie* zu den Toren (dargestellt durch den Vektor $\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)$), bei der zweiten Torgruppe durch Rauschstromquellen *parallel* zu den Toren (dargestellt durch den Vektor $\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)$) repräsentiert. Die Zählpfeile stimmen für die erste Torgruppe mit denen in Bild 6, für die zweite Torgruppe mit denen in Bild 5 überein. Es gilt

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} = \mathbf{H}(f)\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)\end{pmatrix} \tag{31}$$

und

$$\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_{11}(f) & \mathbf{H}_{12}(f)\\ \mathbf{H}_{21}(f) & \mathbf{H}_{22}(f)\end{pmatrix} \tag{32}$$

Von den vier Teilmatrizen der Hybridmatrix $\mathbf{H}(f)$ müssen nur $\mathbf{H}_{11}$ und $\mathbf{H}_{22}$ quadratisch sein. Die Korrelationsmatrix der Rauschquellen in Hybriddarstellung ist

$$\mathbf{C}^{\mathrm{H}}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\langle\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)\end{pmatrix}\cdot\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}+}(f)\quad \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}+}(f)\right)\right\rangle \tag{33}$$

3.4. *Inverse Hybridmatrix (P-Darstellung)*

Bei der *inversen Hybridmatrix* oder Parallelserienmatrix $\mathbf{P}(f)$ werden die Rauschquellen der ersten Torgruppe durch Rauschstromquellen *parallel* zu den Toren (zusammengefaßt in $\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)$), die Rauschquellen der zweiten Torgruppe durch Rauschspannungsquellen in *Serie* mit den Toren (zusammengefaßt in $\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)$) beschrieben. Es gilt

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} = \mathbf{P}(f)\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)\end{pmatrix} \tag{34}$$

mit

$$\mathbf{P}(f) = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_{11}(f) & \mathbf{P}_{12}(f)\\ \mathbf{P}_{21}(f) & \mathbf{P}_{22}(f)\end{pmatrix} \tag{35}$$

Die zugehörige Korrelationsmatrix ist

$$\mathbf{C}^{\mathrm{P}}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\langle\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}}(f)\end{pmatrix}\cdot\left(\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}+}(f)\quad \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{P}+}(f)\right)\right\rangle \tag{36}$$

3.5. *Kettenmatrix (A-Darstellung)*

Mit der *Kettenmatrix* $\mathbf{A}(f)$ werden die Spannungen und Ströme einer Torgruppe 1 als Funktion der Spannungen und Ströme einer Torgruppe 2 dargestellt. Im Gegensatz zur Hybridmatrix muß hier die Anzahl der Tore bei den Torgruppen 1 und 2 gleich groß sein. Die zur Gruppe 1 gehörigen Tore werden häufig als Eingangstore, die zur Gruppe 2 gehörigen als Ausgangstore bezeichnet. Die Rauschquellen werden bei der Kettenmatrix durch Rauschstromquellen parallel zu den Eingangstoren und Rauschspannungsquellen in Serie zu den Eingangstoren dargestellt (Bild 7). Die Klemmenspannungen und Klemmenströme der ersten Torgruppe sind in $\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)$, $\boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)$, die der zweiten Torgruppe in $\boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)$, $\boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)$ zusammengefaßt, die Rauschquellen der ersten Torgruppe werden durch die in den Vektoren $\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)$ und $\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)$ zusammengefaßten Rauschspannungs- und Stromquellen beschrieben. Es gilt

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} = \mathbf{A}(f)\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)\\ -\boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)\end{pmatrix} \tag{37}$$

mit

$$\mathbf{A}(f) = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}(f) & \mathbf{A}_{12}(f)\\ \mathbf{A}_{21}(f) & \mathbf{A}_{22}(f)\end{pmatrix} \tag{38}$$

Die Korrelationsmatrix der Kettendarstellung ist

$$\mathbf{C}^{\mathrm{A}}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\langle\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}(f)\end{pmatrix}\cdot\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}+}(f)\quad \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}+}(f)\right)\right\rangle \tag{39}$$

Die Korrelationsmatrix des Zweitors in der Kettendarstellung wurde bereits in den Gln. (11) bis (14) verwendet.

3.6. *Inverse Kettenmatrix (B-Darstellung)*

Bei der *inversen Kettenmatrix* $\mathbf{B}(f)$ werden die Ausgangsströme und Ausgangsspannungen in Abhängigkeit von den Eingangsströmen und Eingangsspannungen angegeben. Die Rauschquellen werden durch Rauschspannungsquellen in *Serie* zu den Ausgangstoren (dargestellt durch $\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}(f)$) und Rauschstromquellen *parallel* zu den Ausgangstoren (dargestellt durch $\boldsymbol{I}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(f)$) beschrieben. Es gilt

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{2,\mathrm{T}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{2,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} = \mathbf{B}(f)\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{T}}(f)\\ -\boldsymbol{I}_{1,\mathrm{T}}(f)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}(f)\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}(f)\end{pmatrix} \tag{40}$$

mit

$$\mathbf{B}(f) = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11}(f) & \mathbf{B}_{12}(f)\\ \mathbf{B}_{21}(f) & \mathbf{B}_{22}(f)\end{pmatrix} \tag{41}$$

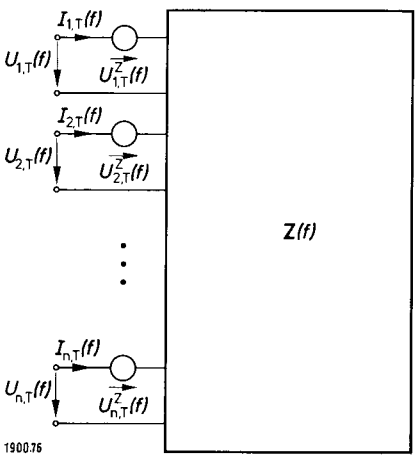

Bild 6: Z-Darstellung eines rauschenden n-Tores

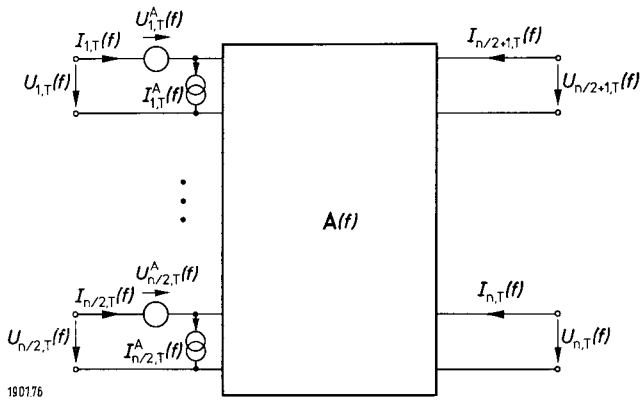

Bild 7: Kettendarstellung eines rauschenden n-Tores

und mit der Korrelationsmatrix

$$\mathbf{C}^{\mathrm{B}}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left\langle \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}(f) \\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}(f) \end{pmatrix} \cdot \left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}+}(f) \quad \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}+}(f) \right) \right\rangle \tag{42}$$

3.7. Umrechnung von Signalübertragungsmatrizen und Korrelationsmatrizen in die verschiedenen Darstellungen

In *Tabelle 1* sind die Umrechnungsformeln der *Signalübertragungsmatrizen* für den Übergang von einer der sechs n-Tor-Darstellungen zu einer anderen angegeben. Wir führen hier den Begriff *Signalübertragungsmatrix* für die üblichen, zur Charakterisierung linearer n-Tore verwendeten Matrizen ein, um im folgenden die Verwechslung mit den *Korrelationsmatrizen* auszuschließen.

Für die Korrelationsmatrizen existieren ähnlich einfache Umrechnungsformeln wie für die Signalübertragungsmatrizen. Ist die zu einer der sechs n-Tor-Darstellungen gehörende Korrelationsmatrix $\mathbf{C}$ bekannt, so folgt der Übergang zur neuen Darstellung $\mathbf{C}'(f)$ durch die Transformation

$$\mathbf{C}'(f) = \mathbf{M}(f) \cdot \mathbf{C}(f) \cdot \mathbf{M}^{+}(f) \tag{43}$$

Die Transformationsmatrizen $\mathbf{M}(f)$ sind in *Tabelle 2* angegeben.

4. Die Zusammenschaltung von linearen rauschenden n-Toren[6])

Beim Zusammenschalten zweier oder mehrerer n-Tore zu einem neuen n-Tor kann die Signalübertragungsmatrix des neuen n-Tores aus den Signalübertragungsmatrizen der ursprünglichen n-Tore berechnet werden. Die Berechnung gestaltet sich bei bestimmten Arten der Zusammenschaltung besonders einfach, wenn man die dafür günstige Darstellung der Signalübertragungsmatrizen wählt. Ebenso kann aus den Korrelationsmatrizen, die das Rauschverhalten der ursprünglichen n-Tore beschreiben, die neue Korrelationsmatrix gewonnen werden, die das Rauschverhalten des zusammengeschalteten n-Tores beschreibt. Die Zusammenschaltung von n-Toren muß, wie bereits gesagt, so erfolgen, daß bei $2n$-Polen die paarweise entgegengesetzte Gleichheit der Klemmenströme gewährleistet bleibt; und bei $(n + 1)$-Polen so, daß die Bezugsknoten der einzelnen $(n + 1)$-Pole miteinander verbunden werden. Um die letztere Bedingung zu erfüllen, muß man unter Umständen die Darstellung der Signalübertragungs- und Korrelationsmatrix auf einen anderen Bezugsknoten transformieren. Im folgenden wird grundsätzlich davon ausgegangen, daß nur die zum gleichen n-Tor gehörigen Rauschquellen miteinander korreliert sind und daß die Rauschquellen verschiedener n-Tore nicht miteinander korreliert sind. Das ist der praktisch meist vorliegende Fall.

4.1. Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung von zwei n-Toren werden die Y-Matrizen der beiden n-Tore addiert. Bild 8 und Bild 9 zeigen die Parallelschaltung zweier $2n$-Pole und zweier $(n + 1)$-Pole. Das neu entstandene n-Tor hat die *Admittanzmatrix*

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{Y}^{(1)}(f) + \mathbf{Y}^{(2)}(f) \tag{44}$$

Sind $\mathbf{C}^{\mathrm{Y}(1)}(f)$ und $\mathbf{C}^{\mathrm{Y}(2)}(f)$ die Korrelationsmatrizen der beiden ursprünglichen n-Tore, so hat das neu entstandene n-Tor die *Korrelationsmatrix*

$$\mathbf{C}^{\mathrm{Y}}(f) = \mathbf{C}^{\mathrm{Y}(1)}(f) + \mathbf{C}^{\mathrm{Y}(2)}(f) \tag{45}$$

[6]) Es gilt: $2n$-Pol $\equiv$ n-Tor unter der Voraussetzung, daß bei den n Polpaaren die Ströme immer entgegengesetzt gleich sind. Wo nicht, muß durch Übertrager dafür gesorgt werden.
Weiter gilt: $(n + 1)$-Pol = n-Tor, wenn der $(n + 1)$-te Pol der gemeinsame Erdungspunkt für alle übrigen Pole ist.

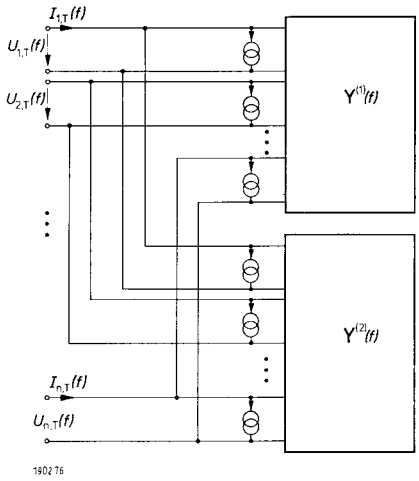

Bild 8: Parallelschaltung zweier $2n$-Pole

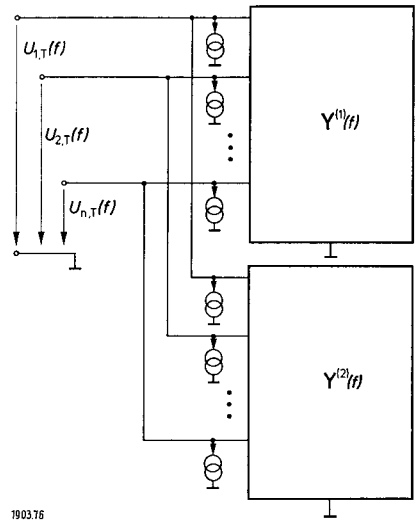

Bild 9: Parallelschaltung zweier $(n + 1)$-Tore

Werden von zwei n-Toren mit den Torzahlen n_1 und n_2 je m Tore parallel geschaltet, so teilt man die Tore beider n-Tore in je zwei Torgruppen ein, und zwar beim n-Tor 1 in zwei Gruppen mit m und n_1-m Toren und beim n-Tor 2 in zwei Gruppen mit m und n_2-m Toren. Die Admittanzmatrizen $\mathbf{Y}^{(1)}$ und $\mathbf{Y}^{(2)}$ der beiden n-Tore werden in

$$\mathbf{Y}^{(1)}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{(1)}(f) & \mathbf{Y}_{12}^{(1)}(f) \\ \mathbf{Y}_{21}^{(1)}(f) & \mathbf{Y}_{22}^{(1)}(f) \end{pmatrix} \tag{46}$$

und

$$\mathbf{Y}^{(2)}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{(2)}(f) & \mathbf{Y}_{12}^{(2)}(f) \\ \mathbf{Y}_{21}^{(2)}(f) & \mathbf{Y}_{22}^{(2)}(f) \end{pmatrix} \tag{47}$$

zerlegt. $\mathbf{Y}_{11}^{(1)}(f)$ und $\mathbf{Y}_{11}^{(2)}(f)$ sind m-dimensionale quadratische Matrizen. Die Matrizen $\mathbf{Y}^{(1)}(f)$ und $\mathbf{Y}^{(2)}(f)$ sind von 1 bis m so indiziert, daß die Tore 1 bis m, die parallelgeschaltet werden, gleiche Indizes haben. $\mathbf{Y}_{22}^{(1)}(f)$ und $\mathbf{Y}_{22}^{(2)}(f)$ sind $(n_1$-$m)$- bzw. $(n_2$-$m)$-dimensionale quadratische Matrizen. Nach Parallelschaltung der jeweils m Tore entsteht ein n-Tor mit der Admittanzmatrix

$$\mathbf{Y}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{(1)}(f) + \mathbf{Y}_{11}^{(2)}(f) & \mathbf{Y}_{12}^{(1)}(f) & \mathbf{Y}_{12}^{(2)}(f) \\ \mathbf{Y}_{21}^{(1)}(f) & \mathbf{Y}_{22}^{(1)}(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{21}^{(2)}(f) & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{22}^{(2)}(f) \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$Y = Y = Z^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1} H_{12} \\ H_{21} H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21} H_{11}^{-1} H_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21} & P_{12} P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1} P_{21} & P_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} A_{12}^{-1} & A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} \\ -A_{12}^{-1} & A_{12}^{-1} A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{12}^{-1} B_{11} & -B_{12}^{-1} \\ B_{21} - B_{22} B_{12}^{-1} B_{11} & B_{22} B_{12}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Z = Y^{-1} = Z = \begin{pmatrix} H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21} & H_{12} H_{22}^{-1} \\ -H_{22}^{-1} H_{21} & H_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & -P_{11}^{-1} P_{12} \\ P_{21} P_{11}^{-1} & P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} A_{21}^{-1} & A_{11} A_{21}^{-1} A_{22} - A_{12} \\ A_{21}^{-1} & A_{21}^{-1} A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{21}^{-1} B_{22} & B_{21}^{-1} \\ B_{11} B_{21}^{-1} B_{22} - B_{12} & B_{11} B_{21}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} Y_{11}^{-1} & -Y_{11}^{-1} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{11}^{-1} & Y_{22} - Y_{21} Y_{11}^{-1} Y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21} & Z_{12} Z_{22}^{-1} \\ -Z_{22}^{-1} Z_{21} & Z_{22}^{-1} \end{pmatrix} = H = P^{-1} = \begin{pmatrix} A_{12} A_{22}^{-1} & A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \\ -A_{22}^{-1} & A_{22}^{-1} A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} B_{12} & B_{11}^{-1} \\ B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} - B_{22} & B_{21} B_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} & Y_{12} Y_{22}^{-1} \\ -Y_{22}^{-1} Y_{21} & Y_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{-1} & -Z_{11}^{-1} Z_{12} \\ Z_{21} Z_{11}^{-1} & Z_{22} - Z_{21} Z_{11}^{-1} Z_{12} \end{pmatrix} = H^{-1} = P = \begin{pmatrix} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} - A_{22} \\ A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{22}^{-1} B_{21} & -B_{22}^{-1} \\ B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} & B_{12} B_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -Y_{21}^{-1} Y_{22} & -Y_{21}^{-1} \\ Y_{12} - Y_{11} Y_{21}^{-1} Y_{22} & -Y_{11} Y_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} Z_{21}^{-1} & Z_{11} Z_{21}^{-1} Z_{22} - Z_{12} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1} Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{12} - H_{11} H_{21}^{-1} H_{22} & -H_{11} H_{21}^{-1} \\ -H_{21}^{-1} H_{22} & -H_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{21}^{-1} & P_{21}^{-1} P_{22} \\ P_{11} P_{21}^{-1} & P_{11} P_{21}^{-1} P_{22} - P_{12} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} (B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21})^{-1} & (B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21})^{-1} B_{12} B_{22}^{-1} \\ (B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12})^{-1} B_{21} B_{11}^{-1} & (B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -Y_{12}^{-1} Y_{11} & -Y_{12}^{-1} \\ Y_{21} - Y_{22} Y_{12}^{-1} Y_{11} & -Y_{22} Y_{12}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{22} Z_{12}^{-1} & Z_{22} Z_{12}^{-1} Z_{11} - Z_{21} \\ Z_{12}^{-1} & Z_{12}^{-1} Z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{12}^{-1} & H_{12}^{-1} H_{11} \\ H_{22} H_{12}^{-1} & H_{22} H_{12}^{-1} H_{11} - H_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{21} - P_{22} P_{12}^{-1} P_{11} & -P_{22} P_{12}^{-1} \\ -P_{12}^{-1} P_{11} & -P_{12}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{pmatrix} = B$$

1971.76

Tabelle 1. Umrechnungsformeln der Signalübertragungsmatrizen für den Übergang von *einer* der sechs *n*-Tor-Darstellungen zu einer *anderen*. Für $n > 2$ sind die Matrix*elemente* der Tabelle wieder Matrizen.

$M \searrow$	C^{Y}	C^{Z}	C^{H}	C^{P}	C^{A}	C^{B}
$C^{Y'}$	1	$-Y$	$\begin{pmatrix} -Y_{11} & 0 \\ -Y_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -Y_{12} \\ 0 & -Y_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -Y_{11} & 1 \\ -Y_{21} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -Y_{12} & 0 \\ -Y_{22} & 1 \end{pmatrix}$
$C^{Z'}$	$-Z$	1	$\begin{pmatrix} 1 & -Z_{12} \\ 0 & -Z_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -Z_{11} & 0 \\ -Z_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -Z_{12} \\ 1 & -Z_{22} \end{pmatrix}$
$C^{H'}$	$\begin{pmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{12} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -H_{12} \\ 0 & -H_{22} \end{pmatrix}$	1	$-H$	$\begin{pmatrix} 1 & -H_{11} \\ 0 & -H_{21} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -H_{12} & 0 \\ -H_{22} & 1 \end{pmatrix}$
$C^{P'}$	$\begin{pmatrix} 1 & -P_{12} \\ 0 & -P_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -P_{11} & 0 \\ -P_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$-P$	1	$\begin{pmatrix} -P_{11} & 1 \\ -P_{21} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -P_{12} \\ 1 & -P_{22} \end{pmatrix}$
$C^{A'}$	$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 1 & A_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -A_{11} \\ 0 & -A_{21} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -A_{11} \\ 1 & -A_{21} \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} -A_{11} & A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$
$C^{B'}$	$\begin{pmatrix} B_{12} & 0 \\ B_{22} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -B_{11} & 1 \\ -B_{21} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -B_{11} & 0 \\ -B_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B_{12} & 1 \\ B_{22} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -B_{11} & B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$	1

1972.76

Tabelle 2. Transformationsmatrizen M für den Übergang von der Korrelationsmatrix C zu der (zu einer anderen *n*-Tor-Darstellung gehörenden) Korrelationsmatrix C′. Für $n > 2$ sind die Matrixelemente von M wieder Matrizen.

und der Torzahl $n_1 + n_2 - m$. In gleicher Weise wird eine Aufteilung der Korrelationsmatrizen in

$$\mathbf{C}^{Y(1)}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}^{Y(1)}(f) & \mathbf{C}_{12}^{Y(1)}(f) \\ \mathbf{C}_{21}^{Y(1)}(f) & \mathbf{C}_{22}^{Y(1)}(f) \end{pmatrix} \tag{49}$$

und

$$\mathbf{C}^{Y(2)}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}^{Y(2)}(f) & \mathbf{C}_{12}^{Y(2)}(f) \\ \mathbf{C}_{21}^{Y(2)}(f) & \mathbf{C}_{22}^{Y(2)}(f) \end{pmatrix} \tag{50}$$

vorgenommen. Die *Korrelationsmatrix* des zusammengeschalteten n-Tores ist dann

$$\mathbf{C}^{Y}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}^{Y(1)}(f) + \mathbf{C}_{11}^{Y(2)}(f) & \mathbf{C}_{12}^{Y(1)}(f) & \mathbf{C}_{12}^{Y(2)}(f) \\ \mathbf{C}_{21}^{Y(1)}(f) & \mathbf{C}_{22}^{Y(1)}(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{21}^{Y(2)}(f) & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}^{Y(2)}(f) \end{pmatrix} \tag{51}$$

Sollen zwei $(n + 1)$-Pole so parallel geschaltet werden, daß der Bezugsknoten des zusammengeschalteten $(n + 1)$-Pols identisch mit dem Bezugsknoten des ersten $(n + 1)$-Pols ist, der Bezugsknoten des zweiten $(n + 1)$-Pols aber nicht mit dem Bezugsknoten des ersten $(n + 1)$-Pols verbunden wird, so führt man beim zweiten $(n + 1)$-Pol einen *isolierten Bezugsknoten* ein, wodurch die Torzahl von n auf $n + 1$ erhöht wird. Bild 10 zeigt den Übergang vom n-Tor **Y** mit der Torzahl n zum n-Tor **Y′** mit der Torzahl $n + 1$. Der Bezugspunkt des n-Tors **Y** wird zur erdfreien Klemme des Tors $(n + 1)$ von **Y′**. Der Bezugsknoten von **Y′** ist vom Netzwerk isoliert. Es gelten die Beziehungen

$$I'_{k,T}(f) = I_{k,T}(f) \qquad \text{für} \quad k = 1 \ldots n \tag{52}$$

$$I'_{n+1,T}(f) = -\sum_{k=1}^{n} I_{k,T}(f) \tag{53}$$

$$U'_{k,T}(f) = U_{k,T}(f) + U'_{n+1,T}(f) \qquad \text{für} \quad k = 1 \ldots n \tag{54}$$

$U'_{n+1,T}(f)$ ist unbestimmt. Die Ströme $I'_{k,T}(f)$ sind voneinander linear abhängig. Aus den Gln. (52) bis (54) folgt

$$Y'_{k,l}(f) = Y_{k,l}(f) \qquad \text{für } k, l = 1 \ldots n \tag{55a}$$

$$Y'_{k,n+1}(f) = -\sum_{l=1}^{n} Y_{k,l}(f) \qquad \text{für} \quad k = 1 \ldots n \tag{55b}$$

$$Y'_{n+1,l}(f) = -\sum_{k=1}^{n} Y_{k,l}(f) \qquad \text{für} \quad l = 1 \ldots n \tag{55c}$$

$$Y'_{n+1,n+1}(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} Y_{k,l}(f) \tag{55d}$$

Die Gln. (52) und (53) gelten auch für die eingeprägten Rauschstromquellen, und so folgt

$$C^{Y'}_{k,l}(f) = C^{Y}_{k,l}(f) \qquad \text{für } k, l = 1 \ldots n \tag{56a}$$

$$C^{Y'}_{k,n+1}(f) = -\sum_{l=1}^{n} C^{Y}_{k,l}(f) \qquad \text{für} \quad k = 1 \ldots n \tag{56b}$$

$$C^{Y'}_{n+1,l}(f) = -\sum_{k=1}^{n} C^{Y}_{k,l}(f) \qquad \text{für} \quad l = 1 \ldots n \tag{56c}$$

$$C^{Y'}_{n+1,n+1}(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} C^{Y}_{k,l}(f) \tag{56d}$$

Bei der Parallelschaltung des durch **Y′** dargestellten n-Tors wird der isolierte Bezugspunkt von **Y′** mit dem Bezugspunkt des anderen Netzwerkes verbunden, während die übrigen Klemmen beliebig mit Klemmen des anderen $(n + 1)$-Pols verbunden werden können. Durch die Parallelschaltung wird die Unbestimmtheit von $U_{n+1,T}(f)$ im allgemeinen aufgehoben. Beim Übergang von $\mathbf{Y}(f)$ auf $\mathbf{Y}'(f)$ wird die Dimension der Matrix um 1 erhöht, ohne daß der Rang erhöht wird, so daß die Determinante von $\mathbf{Y}'(f)$ gleich Null ist und die inverse Matrix nicht existiert.

Die Einführung des isolierten Bezugsknotens kann auch dazu benutzt werden, den Bezugsknoten zu *wechseln*. Soll der ursprüngliche Knoten k der neue Bezugsknoten sein, so wird dieser Knoten k mit dem isolierten Bezugsknoten verbunden. Dadurch wird $U'_{k,T}(f) = 0$ und dann können (wegen der linearen Abhängigkeit der Ströme $I'_{k,T}(f)$ und $I^{Y'}_{k,T}(f)$ von den übrigen jeweils n Strömen) die dem ursprünglichen k-ten Knoten zugeordneten Zeilen und Spalten in $\mathbf{Y}'(f)$ und $\mathbf{C}^{Y'}(f)$ gestrichen werden. Wird durch Kurzschließen eines oder mehrerer Tore die Torzahl reduziert, so werden allgemein die zu den kurzgeschlossenen Toren gehörenden Zeilen und Spalten der Signalübertragungsmatrix und der Korrelationsmatrix in Y-Darstellung gestrichen.

4.2. *Serienschaltung von n-Toren und Torzahl-Reduktion*

Werden zwei n-Tore in Serie geschaltet (Bild 11), so werden sowohl die Signalübertragungsmatrizen als auch die Korrelationsmatrizen in **Z**-Darstellung (Abschnitt 3.2) addiert:

$$\mathbf{Z}(f) = \mathbf{Z}^{(1)}(f) + \mathbf{Z}^{(2)}(f) \tag{57}$$

$$\mathbf{C}^{Z}(f) = \mathbf{C}^{Z(1)}(f) + \mathbf{C}^{Z(2)}(f) \tag{58}$$

Die Gleichungen für die teilweise Serienschaltung haben in der **Z**-Darstellung die gleiche Struktur wie die Gln. (48) und (51) für die teilweise Parallelschaltung in der **Y**-Darstellung. Die **Z**-Darstellung ist des weiteren von Bedeutung für die Torzahl-Reduktion durch Eliminierung nicht abgeschlossener Tore: Sind ein oder mehrere Tore eines n-Tores nicht abgeschlossen und sind die an

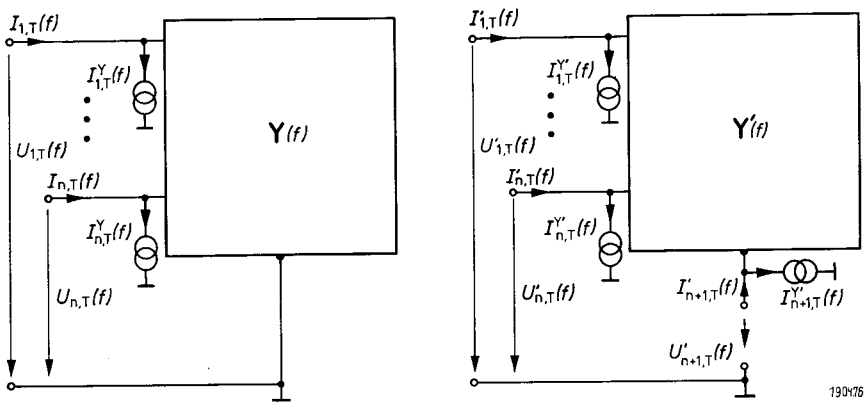

Bild 10: Einführung eines isolierten Bezugsknotens im Bild rechts

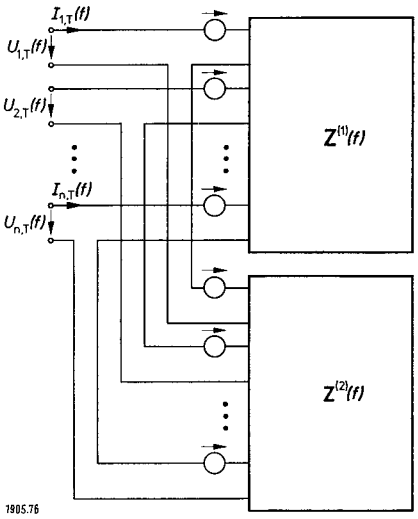

Bild 11: Serienschaltung zweier n-Tore

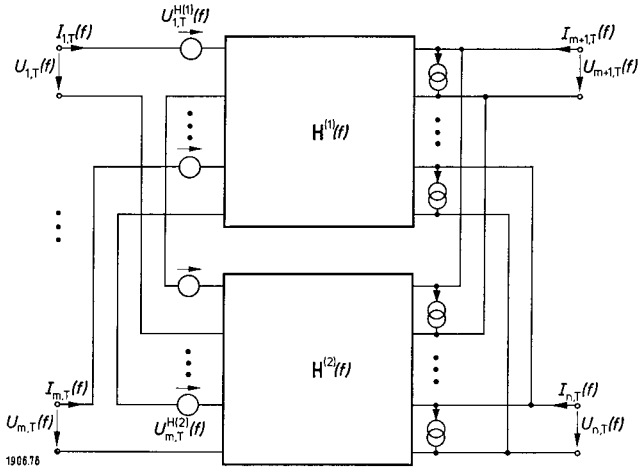

Bild 12: Serienparallelschaltung von n-Toren

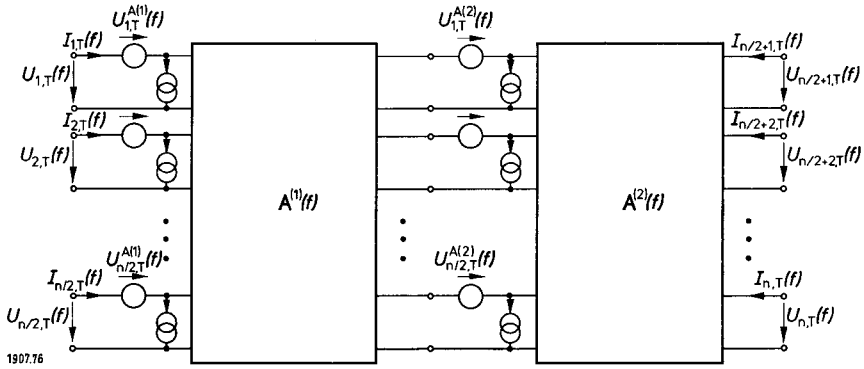

Bild 13: Kettenschaltung zweier n-Tore

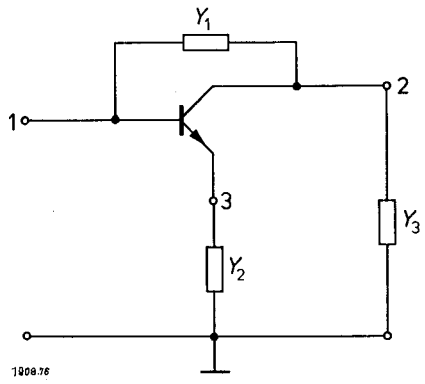

Bild 14: Gegengekoppelte Transistorverstärkerstufe

diesen Toren auftretenden Spannungen nicht von Interesse, so können die zu diesen Toren gehörenden Zeilen und Spalten sowohl in $\mathbf{Z}(f)$ als auch in $\mathbf{C}^{Z}(f)$ gestrichen werden.

4.3. *Serienparallelschaltung*

Bei der Serienparallelschaltung zweier n-Tore (Bild 12) werden die Tore der ersten Torgruppen beider n-Tore in *Serie*, die Tore der zweiten Torgruppen beider n-Tore *parallel* geschaltet. Die Signalübertragungsmatrix und die Korrelationsmatrix in der **H**-Darstellung (Abschnitt 3.3.) werden dabei addiert:

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{H}^{(1)}(f) + \mathbf{H}^{(2)}(f) \tag{59}$$

$$\mathbf{C}^{H}(f) = \mathbf{C}^{H(1)}(f) + \mathbf{C}^{H(2)}(f) \tag{60}$$

4.4. *Parallelserienschaltung*

Bei der Parallelreihenschaltung werden die Tore der ersten Torgruppen beider n-Tore *parallel*, die Tore der zweiten Torgruppen beider n-Tore in *Serie* geschaltet. Es gelten die Gleichungen

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{P}^{(1)}(f) + \mathbf{P}^{(2)}(f) \tag{61}$$

$$\mathbf{C}^{P}(f) = \mathbf{C}^{P(1)}(f) + \mathbf{C}^{P(2)}(f) \tag{62}$$

4.5. *Kettenschaltung*

Bei der in Bild 13 dargestellten Kettenschaltung zweier n-Tore 1 und 2 gilt

$$\mathbf{A}(f) = \mathbf{A}^{(1)}(f) \cdot \mathbf{A}^{(2)}(f) \tag{63}$$

Die Korrelationsmatrix der Kettenschaltung in **A**-Darstellung ist

$$\mathbf{C}^{A}(f) = \mathbf{C}^{A(1)}(f) + \mathbf{A}^{(1)}(f)\,\mathbf{C}^{A(2)}(f)\,\mathbf{A}^{(1)+}(f) \tag{64}$$

Bei Anwendung der inversen Kettenmatrix **B** und der zugehörigen Korrelationsmatrix gilt für die Zusammenschaltung nach Bild 13

$$\mathbf{B}(f) = \mathbf{B}^{(2)}(f) \cdot \mathbf{B}^{(1)}(f) \tag{65}$$

und

$$\mathbf{C}^{B}(f) = \mathbf{B}^{(2)}(f)\,\mathbf{C}^{B(1)}(f)\,\mathbf{B}^{(2)+}(f) + \mathbf{C}^{B(2)}(f) \tag{66}$$

5. Die Rauschanalyse eines mehrstufigen gegengekoppelten Transistorverstärkers

Um ein praktisches Beispiel für die Anwendung der Theorie zu geben, wird der Rechnungsgang zur Rauschanalyse eines mehrstufigen gegengekoppelten Transistorverstärkers skizziert. In einer früheren Arbeit wurde bereits an einem derartigen Beispiel die Rauschanalyse durch Zusammenschalten elementarer Vierpole gezeigt [8, 9]. Hier soll ein anderer Weg beschritten werden. Bild 14 zeigt eine Stufe des Transistorverstärkers. Die Stufe ist mit Y_1 *parallel*, mit Y_2 in *Serie gegengekoppelt* und mit Y_3 *abgeschlossen*. Die drei Admittanzen Y_1, Y_2, Y_3 weisen thermisches Rauschen auf, so daß ihre Autokorrelationsspektren $C_{I1}(f)$, $C_{I2}(f)$ und $C_{I3}(f)$ durch Gl. (4) gegeben sind. Die **Y**-Matrix des Transistors in Emitterschaltung ist

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \tag{67}$$

und seine aus Messungen bestimmte Korrelationsmatrix in **Y**-Darstellung

$$\mathbf{C}^{Y} = \begin{pmatrix} C_{11}^{Y} & C_{12}^{Y} \\ C_{21}^{Y} & C_{22}^{Y} \end{pmatrix} \tag{68}$$

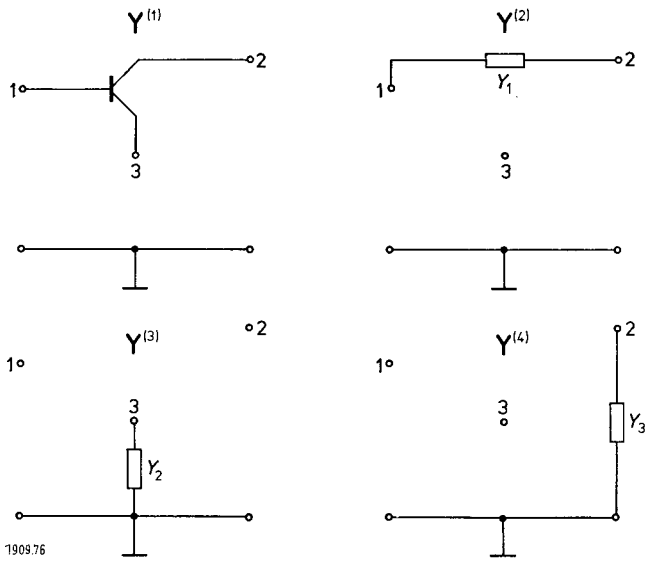

Bild 15: Zerlegung der gegengekoppelten Transistorverstärkerstufe von Bild 14

Die Transistorverstärkerstufe kann als Parallelschaltung der vier in Bild 15 dargestellten Dreitore aufgefaßt werden. Die vier Dreitore haben die Admittanzmatrizen

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & -Y_{11}-Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} & -Y_{21}-Y_{22} \\ -Y_{11}-Y_{21} & -Y_{12}-Y_{22} & Y_{11}+Y_{12}+Y_{21}+Y_{22} \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_2 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{Y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Die zugehörigen Korrelationsmatrizen sind

$$\mathbf{C}^{Y(1)} = \begin{pmatrix} C^Y_{11} & C^Y_{12} & -C^Y_{11}-C^Y_{12} \\ C^Y_{21} & C^Y_{22} & -C^Y_{21}-C^Y_{22} \\ -C^Y_{11}-C^Y_{21} & -C^Y_{12}-C^Y_{22} & C^Y_{11}+C^Y_{12}+C^Y_{21}+C^Y_{22} \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\mathbf{C}^{Y(2)} = \begin{pmatrix} C_{I1} & -C_{I1} & 0 \\ -C_{I1} & C_{I1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$\mathbf{C}^{Y(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{I2} \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\mathbf{C}^{Y(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{I3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Bei der Aufstellung der Gln. (69), (70), (71) und (73) wurde von den Gln. (55) und (56) Gebrauch gemacht. Die vier parallel geschalteten Dreitore werden durch die Signalübertragungsmatrix

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11}+Y_1 & Y_{12}-Y_1 & -Y_{11}-Y_{22} \\ Y_{21}-Y_1 & Y_{22}+Y_1+Y_3 & -Y_{21}-Y_{22} \\ -Y_{11}-Y_{21} & -Y_{12}-Y_{22} & Y_{11}+Y_{12}+Y_{21}+Y_{22}+Y_2 \end{pmatrix} \tag{77}$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{C}^{Y} = \begin{pmatrix} C^Y_{11}+C_{I1} & C^Y_{12}-C_{I1} & -C^Y_{11}-C^Y_{22} \\ C^Y_{21}-C_{I1} & C^Y_{22}+C_{I1}+C_{I3} & -C^Y_{21}-C^Y_{22} \\ -C^Y_{11}-C^Y_{21} & -C^Y_{12}-C^Y_{22} & C^Y_{11}+C^Y_{12}+C^Y_{21}+C^Y_{22}+C_{I2} \end{pmatrix} \tag{78}$$

beschrieben. Zur Eliminierung von Tor 3 werden Signalübertragungs- und Korrelationsmatrix in die **Z**-Darstellung transformiert (Tabelle 2) und dann die dritte Zeile und dritte Spalte beider Matrizen gestrichen. Die Zwei-Tor-Matrizen werden dann in die Kettendarstellung transformiert. Durch Anwendung der Gln. (63) und (64) können die Signalübertragungsmatrix und Korrelationsmatrix der Kettenschaltung mehrerer Verstärkerstufen berechnet werden und daraus mit Hilfe von Gl. (16) die Rauschzahl des mehrstufigen Verstärkers.

Wir danken Herrn J. Gruber für die kritische Durchsicht der Arbeit und eine Reihe wertvoller Hinweise.

Die diesem Bericht zugrunde liegenden Arbeiten wurden mit Mitteln des Bundesministers für Forschung und Technologie gefördert. Der Bundesminister für Forschung und Technologie übernimmt keine Gewähr für die Richtigkeit, die Genauigkeit und Vollständigkeit der Angaben sowie für die Beachtung privater Rechte Dritter.

ZE/FI-UL

Schrifttum

[1] H. Hillbrand, J. Gruber, K. Wörner and P. Russer: Computer optimization of a monolithic integrated broadband amplifier. Erscheint demnächst.
[2] H. Bittel und L. Storm: Rauschen. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1971)
[3] H. Beneking: Praxis des elektronischen Rauschens. Bibliographisches Institut, Mannheim–Zürich (1971)
[4] H. W. König und H. Pötzl: Schwankungsvorgänge in Elektronenstrahlen. Fortschritte der Hochfrequenztechnik, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt (1959), Bd. 4, S. 195–239
[5] H. A. Haus and R. B. Adler: Circuit theory of linear noisy networks. John Wiley & Sons, New York (1959)
[6] W. B. Davenport and W. L. Root: An introduction to the theory of random signals. McGraw-Hill, New York (1958)
[7] F. A. Fischer: Einführung in die statistische Übertragungstheorie. Bibliographisches Institut, Mannheim–Zürich (1969)
[8] H. Hillbrand und P. Russer: Rauschanalyse von linearen Verstärkernetzwerken. NTG-Fachberichte Bd. 51, VDE-Verlag GmbH, Berlin (1975)
[9] H. Hillbrand and P. Russer: An efficient method for computer aided noise analysis of linear amplifier networks. IEEE Trans. Circuits and Systems 23 (April 1976), S. 235–238
[10] W. Klein: Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen, Teil 1 Mehrtortheorie. Akademie-Verlag, Berlin (1970)