

LABORATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BERICHTE
zur
ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE DER BAUWERKE

Theoretische Grundlagen für die Bestimmung des
Bemessungswertes von Bauteilwiderständen aus Versuchen

von
R. Rackwitz

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 96

LABORARATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BERICHTE
ZUR
ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE DER BAUWERKE

Heft 38/1979

THEORETISCHE GRUNDLAGEN FÜR DIE BESTIMMUNG DES
BEMESSUNGSWERTES VON BAUTEILWIDERSTÄNDEN AUS VERSUCHEN

R. Rackwitz

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 96 (SFB 96)

Der SFB 96 "Zuverlässigkeit von Bauwerken" ist eine Einrichtung der Technischen Universität München und der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Der SFB hat sich die Entwicklung baustoff- und bauartenübergreifender Sicherheitssysteme auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage zum Ziel gesetzt.

LABORATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)

Am LKI beteiligte Institute:

Institut für Bauingenieurwesen I

Baumechanik
Baustatik

Prof. Dr.-Ing. Grundmann
Prof. Dr.-Ong. Knittel

Institut für Bauingenieurwesen III

Baukonstruktion und Holzbau
Baustoffkunde und Werkstoff-
prüfung

Prof. Dr.-Ing. Heimeshoff
Prof. Dr.-techn. Springenschmid

Institut für Bauingenieurwesen III

Massivbau
Stahlbau

Prof. Dr.-Ing. Kupfer
Prof. Dipl.-Ing. Nather

Der Verfasser des vorliegenden Berichtes ist Angehöriger des Instituts für Bauingenieurwesen III, Lehrstuhl Massivbau

V O R W O R T

Der SFB 96 hat sich bisher nur am Rande mit der Frage von statistischen Unsicherheiten über Parameter der verwendeten stochastischen Modelle beschäftigt. Da ihr Einfluß auf Zuverlässigkeitsaussagen in manchen Fällen so bedeutend werden kann, daß er nicht vernachlässigt werden darf, widmet sich seit kurzem ein neues Teilprojekt D 14: "Zuverlässigkeitsorientierte Prüf- und Kontrollvorschriften" ausschließlich diesem Thema. Dies ergab sich auch aus der Tatsache, daß die klassischen Hilfsmittel der Schätz- und Testtheorie nur bedingt anwendbar sind; vor allem liefert die klassische Statistik kaum jene Modelle, die in Zuverlässigkeitsuntersuchungen direkt Verwendung finden können.

Der folgende Beitrag versucht, die Theorie der Prediktorverteilungen auf die Bestimmung sogenannter Bemessungswerte anzuwenden und für gewisse, baupraktisch interessante Fälle zu erweitern. Unmittelbarer Anlaß der Studie war das Fehlen entsprechend aufbereiteter Unterlagen für die endgültige Ausarbeitung des Abschnittes 8 der "Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen". Die folgenden Ausführungen sind daher auch als eine Art Erläuterung zu entsprechenden Textvorschlägen für das genannte Dokument gedacht.

Der Verfasser möchte sich bei Frau Dipl.-Ing. M. Kersken-Bradley und Herrn Dipl.-Math. K. Breitung für einige wertvolle Hinweise, bei Herrn cand.-ing. B. Peintinger für die Durchführung von Vergleichsrechnungen sowie die Berechnung der Tabellen des Anhanges C bedanken.

München, April 1979

Der Verfasser

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkung	1
2. Der Bayessche Satz, a priori und a posteriori Wahrscheinlichkeiten, Prediktorverteilungen	5
3. Gestutzte oder zensierte Beobachtungen	9
4. Anwendungen auf normalverteilte Größen X	14
4.1 Bekannte Standardabweichung	14
4.2 Mittelwert und Standardabweichung unbekannt	18
5. Grenzbetrachtungen für Systeme von Bauteilen	21
6. Diskussion	25
7. Beispiel	29
8. Zusammenfassung	31
Literaturverzeichnis	32
Anhang A: Formeln zur Normalverteilung	37
Anhang B: Formeln zur Studentschen-t-Verteilung	38
Anhang C: Invertierung von Gl.(24)	41

1. Vorbemerkung

In vielen baupraktisch wichtigen Fällen kann die Festigkeit von Bauteilen bzw. deren Streuung nicht durch die Kenntnis des stochastischen Verhaltens der unsicheren "Basisvariablen" wie der Werkstofffestigkeiten und der geometrischen Abmessung und ein wirklichkeitsnahes, mechanisches Modell über ihr Zusammenwirken bestimmt werden. Beispiele sind bestimmte Gitterträger, Spanngliedverankerungen, Bodenanker oder Dübel. Dann sind Versuche erforderlich. In den Baubestimmungen spricht man von Grundsatz- oder Zulassungsprüfungen, die Grundlage für die Festlegung zulässiger Traglasten sind. Die Praxis führt Versuche gelegentlich durch, um sich von der Eignung gewisser Bauteile zu überzeugen und daraus eine rechnerische Tragfähigkeit mehr oder weniger vorsichtig abzuleiten. Solche Versuche sind in aller Regel teuer. Ihre Zahl ist möglichst gering zu halten. Bei den üblichen kleinen Stichproben kommt man nicht umhin, statistische Unsicherheiten über die Parameter der Verteilung der Bauteilfestigkeit in die Überlegungen zur Festlegung der Bemessungswerte x^* oder zulässigen Werte x_{zul} einzubeziehen. Die folgenden Erörterungen sollen ein Konzept für die statistisch einwandfreie Berücksichtigung dieser Unsicherheiten und einige Anwendungen vorstellen. Es kommt hierbei vor allem darauf an, jede verfügbare Information - auch solche, die Kenntnisse über das betreffende Bauteil noch vor dem Versuch vermitteln - geeignet zu quantifizieren und zu verwenden. Einige Hilfsmittel für die praktische Anwendung werden bereitgestellt.

Eindeutige Regeln für die Festlegung zulässiger Werte x_{zul} liegen bislang auch im Rahmen deterministischer Betrachtungen nicht vor. Im allgemeinen wurde so vorgegangen, daß sich x_{zul} durch Division mit einem Sicherheitsbeiwert ν aus dem Mittel, manchmal auch dem kleinsten Wert oder einer Fraktile der Stichprobe, ergab. Die Größe des jeweils angesetzten Sicherheitsbeiwertes lag weitgehend im Ermessen des entscheidenden Ingenieurs, des Gutachters oder einem Ausschuß, welche damit die verbliebenen Unsicherheiten aufgrund der Erfahrung und

der speziellen Einschätzung der Gegebenheiten global abzudecken versuchten. Häufig blieben dabei einmal getroffene Entscheidungen nicht nachvollziehbar. Bei statistischer Betrachtungsweise kann aber ein wesentlicher Teil der Informationsverarbeitung objektiviert werden. Zur Vereinfachung wird vorausgesetzt, daß der Produktionsprozeß, dessen Ergebnis beurteilt werden soll, Bauteile erzeugt, deren Festigkeiten statistisch als unabhängige Folge aufgefaßt werden können. Ferner wird in den Anwendungen angenommen, daß die Folge eine Gauß'sche Folge ist. Damit ist durch einfache Transformation auch der Fall log-normaler Folgen erfaßt. Die Wahl normaler Folgen erfolgt zum einen deswegen, weil für sie analytische Ergebnisse wenigstens streckenweise gewonnen werden können. Zum anderen gibt es gewisse physikalische Gründe, der normalen oder log-normalen Verteilung vor anderen Verteilungen den Vorzug zu geben. Darauf wird noch eingegangen. Andere Annahmen sind im Prinzip möglich, doch kann dann der numerische Aufwand stark wachsen. Schließlich ist unterstellt, daß die zu untersuchende Stichprobe eine unabhängige und zufällige Stichprobe ist. Dies ist insbesondere bei der Auslegung der Versuche zu berücksichtigen - also z.B. durch Zufallsauswahl der zu untersuchenden Parameter, die in Verdacht stehen, die Bauteilfestigkeit zu beeinflussen. Desgleichen ist bei der Herstellung der Bauteile auf praxisgerechte Bedingungen zu achten.

Die Anwendung der Methoden der klassischen frequentistischen Statistik auf die vorliegende Aufgabe führt bekanntlich vor allem bei kleinem Stichprobenumfang zu Aussagen, die sehr konservativ erscheinen. Der Grad der Konservativität hängt von der willkürlichen Wahl einer "Sicherheitswahrscheinlichkeit" ab. Besagte Konservativität folgt in erster Linie aus dem Umstand, daß der allgemeine Erfahrungsschatz der Baupraxis nicht in die Betrachtung eingeht und, von der methodischen Seite her, grundsätzlich auch gar nicht berücksichtigt werden kann. Als Vorinformation oder a priori Information begriffen hat aber dieser Erfahrungsschatz den Ingenieur bislang - sozusagen gegen die

Statistik - auch bei kleinem Stichprobenumfang instand gesetzt, auf intuitivem Wege realistische Aussagen über den anzusetzenden Bemessungswert zu machen.

Die Kombination von Erfahrung und objektiven Informationen kann man jedoch formalisieren. Die Bayessche Statistik liefert hierzu das Instrumentarium, welches im folgenden ausführlich genutzt werden soll. Es wird insbesondere dazu verwendet, aus gegebenen a priori und aktuellen Informationen die Verteilung zukünftiger Ausprägungen der Bauteilkenngrößen zu bestimmen. Die konsequente Anwendung Bayesscher Ideen bietet darüber hinaus die Möglichkeit, auf die Festlegung von Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu verzichten.

In vielen Situationen werden neben den "Eignungs- oder Grundsatzversuchen" zur Bestimmung der Bemessungswerte eines Bauteiles systematisch "Probebelastungen" oder attributive "Abnahmeprüfungen" auf einem bestimmten Niveau gefordert, und zwar vor allem dann, wenn die Eignungsversuche nicht so angelegt werden können, daß alle bei der späteren Verwendung auftretenden Unsicherheiten berücksichtigt werden können (z.B. bei Erdankern). Auch diese praktisch interessante Variante soll mit Hilfe Bayesscher Überlegungen behandelt werden. Damit ist gleichzeitig auch der Fall erfaßt, daß Vorinformationen in Form von zensierten Beobachtungen vorliegen, also beispielsweise als Kenntnis, daß von r hergestellten und eingebauten Bauteilen mit der zul. Tragfähigkeit a alle den Anforderungen im bisherigen Gebrauch genügten.

Die Anwendung des Bayesschen Satzes der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die vorliegende Aufgabe erfordert die Quantifizierung der Vorinformationen in bestimmter Form; genauer, die möglicherweise subjektive, intuitive Schätzung der erwarteten Ergebnisse vor dem Versuch bzw. von gewissen statistischen Kennzahlen wie Mittelwert und Standardabweichung. Das Vertrauen, welches der Schätzer in diese Werte hat, kann durch

die ebenfalls subjektive Festlegung eines "stellvertretenden" Stichprobenumfanges ausgedrückt werden. Obwohl die folgenden Überlegungen auch für den Grenzfall "keine Vorinformation" gelten, wird man sie doch nur dann mit wirklichem Erfolg einsetzen können, wenn Vorinformationen berücksichtigt werden. Damit haftet den Ergebnissen häufig ein Rest von Subjektivem an. Vorinformationen sind deshalb sehr sorgfältig und nur vom Fachmann zu quantifizieren. Es muß den Anwendern oder gegebenenfalls Ausschüssen überlassen bleiben, solche für den Einzelfall oder allgemein gültig in Zahlen auszudrücken. Die nachstehenden Ausführungen enthalten daher auch nur die Konzepte die Informationen in Übereinstimmung mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre weiterzuverarbeiten. Die vorgegebenen Methoden schaffen nicht selbst neue Information.

Das angebotene Material enthält vom statistischen Standpunkt aus wenig, wenn überhaupt Neues. Die wesentlichen statistischen Arbeiten fallen in die 60iger Jahre. Einige von ihnen werden hier genannt. Das Problem statistischer Unsicherheiten bzw. nichtobjektiver Information im Bereich der Bauwerkszuverlässigkeit erfährt, obwohl seit langem erkannt, erst in neuerer Zeit verstärkte Beachtung. Anstoß gaben hierfür ohne Zweifel die engagiert geschriebenen Kapitel über Bayessche Statistik in dem Buch von Benjamin/Cornell [1] sowie die Zuwendung einiger angewandter Statistiker auf praktische Probleme. Hier seien als Beispiele die Bücher von Lindley [2], Zellner [3], Raiffa/Schlaifer [4] und Box/Tiao [5] genannt. Abgesehen von einigen früheren Autoren wendete Veneziano in [6] die theoretischen Ergebnisse wohl erstmals streng auf Fragen bei der Bestimmung der Bauwerkszuverlässigkeit an. In [7] sind weitere grundsätzliche Erörterungen angestellt, die aus den spezielleren Überlegungen in [8] hervorgegangen sind. Kürzlich zeigte sich, daß man unter Anwendung des Bayesschen Theorems auch den nachstehend besprochenen Prediktorverteilungen in ihrer Aussage ähnliche Verteilungen ableiten kann, die die filternde Wirkung von Abnahmekontrollen berücksichtigen [9, 10]. Damit ist der Nachweis erbracht, daß die Theorie der Prediktorver-

teilungen auf nahezu alle Probleme der Datenerfassung und Kontrolle im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie angewandt werden kann. Allerdings sind noch viele Details zu lösen.

Zum Abschluß dieser Vorbemerkungen sei die Definition des Bemessungswertes x^* im Sinne von [14] wiederholt. Bemessungswerte sind Werte einer zufälligen Größe, die eine gegebene Grenzzustandsfunktion in der Form $g(\underline{x}) = 0$ (\underline{x} ist der das betreffende mechanische Problem beschreibende Zufallsvektor der unsicheren Basisvariablen) so erfüllen, daß eine bestimmte Zuverlässigkeit erzielt wird. Der Vektor der Bemessungswerte beschreibt insbesondere jenen Bereich im Raum der unsicheren Basisvariablen, für den Versagen am wahrscheinlichsten ist, sofern es auftritt. Nach [14] kann der Bemessungswert durch

$$x^* = \phi^{-1}[\phi(-\alpha_X \cdot \beta)] = \phi^{-1}(p^*) = -\alpha_X \cdot \beta \quad (\text{A})$$

beschrieben werden. Es bezeichnet $\phi(\cdot)$ das Normalverteilungintegral und $\phi^{-1}(\cdot)$ die zugehörige Inverse. β ist der anzuzielende Sicherheitsindex und α_X der sogenannte Empfindlichkeitsbeiwert. Dieser hängt primär vom jeweils betrachteten mechanischen Problem ab. Aufgrund der Angaben in [14] kann α_X jedoch häufig näherungsweise konstant zu $0,8 \div 0,9$ genommen werden.

Die Vorgehensweise läßt sich auch auf andere Verteilungen übertragen. Man bestimmt zunächst die zum Wert $-\alpha_X \cdot \beta$ der standardisierten Normalverteilung gehörende Wahrscheinlichkeit

$$p^* = \phi(-\alpha_X \cdot \beta) \quad (\text{B})$$

Der Bemessungswert einer beliebig verteilten Größe, also auch der zukünftigen Beobachtungen bei unsicheren Verteilungsparametern, ergibt sich dann aus

$$x^* = G_X^{-1}(p^* | \underline{x}) \quad (\text{C})$$

Darin ist $G^{-1}(\dots)$ die Inverse der nachstehend abzuleitenden Prediktorverteilung.

2. Der Bayessche Satz, a priori und a posteriori Wahrscheinlichkeiten, Prediktorverteilungen

Der Bayessche Satz ist in vielen statistischen Werken allgemein abgeleitet. Er soll hier in einer speziellen Form angegeben und im Hinblick auf die folgenden Untersuchungen interpretiert werden (siehe z.B. [1, 2]).

Es bezeichne θ_i einen möglichen Zustand der Natur. Der "wahre" Zustand sei jedoch unbekannt. Jedem der möglichen Zustände θ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ weisen wir a priori, d.h. noch ohne weiteres "Experiment", welches genaueren Aufschluß über den wahren Zustand geben kann, eine Wahrscheinlichkeit $P'(\theta_i)$ zu. Diese wird daher als a priori Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Führt man nun ein Experiment e , z.B. eine Prüfung, durch mit dem Ergebnis z_k , so interessiert, in welcher Weise die vorgenannten Wahrscheinlichkeiten aufgrund der hinzugewonnenen Kenntnisse zu ändern sind. Die neuen Wahrscheinlichkeiten $P''(\theta_i)$ für die Zustände der Natur werden mit dem Attribut "a posteriori" versehen. Wir schreiben zunächst zwei alternative Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses z_k bei Vorliegen von θ_i an. Es ist nach dem Satz der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(z_k | \theta_i) \cdot P'(\theta_i) = P(\theta_i | z_k) \cdot P(z_k) \quad (1)$$

Offensichtlich ist der Ausdruck $P(\theta_i | z_k)$ bereits die gesuchte a posteriori Wahrscheinlichkeit. Auflösen nach $P(\theta_i | z_k)$ ergibt daher

$$P''(\theta_i) = P(\theta_i | z_k) = \frac{P(z_k | \theta_i) P'(\theta_i)}{P(z_k)} \quad (2)$$

Der Nenner kann unter Verwendung des Satzes von den totalen Wahrscheinlichkeiten noch durch

$$P(z_k) = \sum_{j=1}^n P(z_k | \theta_j) \cdot P'(\theta_j) \quad (3)$$

ersetzt werden, womit der Bayessche Satz die folgende Gestalt erhält:

$$P''(\theta_i) = \frac{P(z_k | \theta_i) \cdot P'(\theta_i)}{\sum_{j=1}^n P(z_k | \theta_j) \cdot P'(\theta_j)}$$

$= N \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Likelihood der} \\ \text{Stichprobe } z_k \\ \text{wenn } \theta = \theta_i \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{a priori Wahrschein-} \\ \text{lichkeit} \\ \text{für } \theta = \theta_i \end{array} \right\}$

(4)

Somit ist die a posteriori Wahrscheinlichkeit das Produkt eines normalisierenden Faktors N (der Nenner von (4)), der Wahrscheinlichkeit von z_k unter der Bedingung, daß der Zustand θ_i ist (oder Likelihood $l(z_k | \theta_i)$ von z_k) und der a priori Wahrscheinlichkeit von θ_i . Es sei nun θ_i der stetige Parameter einer Verteilung $F(x; \theta)$ der Zufallsgröße X und z_k die (erschöpfende) Schätzfunktion für diesen Parameter bei Vorliegen einer Stichprobe mit den Elementen $\underline{x} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$. Auf die nunmehr stetige Dichte des Parameters θ angewandt, lautet dann der Bayessche Satz (4):

$$f''(\theta | \underline{x}) = N \cdot l(\underline{x} | \theta) \cdot f'(\theta) \quad (5)$$

Die Auswertung von (5) wird besonders dann einfach, wenn die a priori Verteilung als zur Likelihoodfunktion konjugierte Verteilung vorliegt, d.h. bis auf die Parameter die gleiche Form besitzt. In [1 bis 3] sind die als klassisch geltende Resultate ausführlich diskutiert, weshalb hier zunächst darauf verwiesen werden kann. Man sieht aber sofort, daß klassische Aufgaben, wie etwa die Bestimmung von Konfidenzbereichen, im Rahmen der Bayesschen Betrachtung möglich sind.

Meist ist man jedoch nur mittelbar an der Verteilung des Parameters θ interessiert. Die Aufgabe ist vielmehr die Voraussage einer nicht sofort oder bei zerstörender Prüfung niemals zu beobachtenden, zukünftigen Realisation der Größe X . Eine verallgemeinerte Fragestellung umfaßt die Voraussage ganzer Folgen von zukünftigen Realisationen. Die Formulierung der zugehörigen statistischen Aufgabe gaben Proschan [11] und Chew [12] bzw. Guttman [13] zunächst im Rahmen der Bestimmung von Toleranzintervallen für zukünftige Beobachtungen an.

Über die zukünftige Größe X kann man natürlich wiederum nur Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen. Hierzu schreiben wir die gemeinsame Dichte der zukünftigen Größe X und des Parameters θ unter der Bedingung des Beobachtungsvektors \underline{x} wie folgt

$$f(x, \theta | \underline{x}) = f_X(x | \theta) \cdot f''_{\theta}(\theta | \underline{x}) \quad (6)$$

Die Dichte der Größe X unter der Bedingung \underline{x} erhält man durch Bildung der Randverteilungsdichte, also Integration über alle θ [2].

$$g_X(x | \underline{x}) = \int_{(\theta)} f_X(x | \theta) \cdot f''_{\theta}(\theta | \underline{x}) d\theta \quad (6a)$$

Daraus entsteht durch Integration die Prediktorverteilung von X , oder als "gewichtetes" Mittel direkt

$$G_X(x | \underline{x}) = \int_{(\theta)} F_X(x | \theta) \cdot f''_{\theta}(\theta | \underline{x}) d\theta \quad (6b)$$

Der Parameter θ wird wie eine gewöhnliche Zufallsgröße behandelt. Die Prediktorverteilung enthält nunmehr, etwas ungenau gesprochen, auch die Unsicherheiten über den Verteilungsparameter und ist nur noch bedingt durch das Ergebnis der Stichprobe und gegebenenfalls durch die mittels $f'(\theta)$ eingebrachte a priori Information. Diese darf, wie man noch sehen wird, durchaus "diffus" ausfallen, d.h. etwa jeden Zustand θ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegen und somit a priori

keinerlei Präferenzen bezüglich der Größe von θ erkennbar machen. Es erübrigt sich zu erwähnen, daß die vorstehenden Überlegungen leicht auf Parametervektoren $\underline{\theta}$ verallgemeinert werden können.

3. Gestutzte oder zensierte Beobachtungen

Man kann Prediktorverteilungen auch für zensierte Beobachtungen ableiten. Die Stichprobe bestehe nun aus m Elementen, von denen n Elemente $\underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ kleiner als eine vorgegebene Prüfgrenze a sind, während für den Rest von $r = m - n$ Elementen nur gesagt werden kann, daß die Ergebnisse der Bedingung $x_i > a$ genügen. Für $r = 0$ Elemente $x_i < a$ geht man natürlich wie im vorigen Abschnitt beschrieben vor und erhält eine neue a posteriori Verteilung mit der Dichte $f''(\theta | \underline{x}, \underline{x}')$ und die Prediktorverteilung $G_X'(x | \underline{x}, \underline{x}')$. Für die Berücksichtigung von $r = n$ Elementen der Stichprobe lautet der Bayessche Satz wie folgt (siehe auch [15]).

$$\begin{aligned} f''_{\theta}(\theta | \underline{x}, \underline{x}', r, a) &= f'_{\theta}(\theta | \underline{x}) \cdot \frac{(P(X > a | \theta))^r}{N} \\ &= f'_{\theta}(\theta | \underline{x}) \cdot \frac{(1 - F(a | \theta))^r}{N} \end{aligned} \quad (7)$$

mit $N = \int_{(\theta)} [1 - F(a | \theta)]^r f'_{\theta}(\theta | \underline{x}) d\theta$

Der Zähler ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit (Likelihood) bei Vorliegen des Parameters θ $r = n$ Beobachtungen $x_i > a$ zu machen. Der normalisierende Nenner erfaßt die gleiche Wahrscheinlichkeit, jedoch für alle möglichen Werte von θ .

Damit wird die endgültige Prediktorverteilung entsprechend Gl. (6b) zu:

$$\begin{aligned} G_X(x | \underline{x}, \underline{x}', r, a) &= \int_{(\theta)} F_X(x | \theta) \cdot f''(\theta | \underline{x}, \underline{x}', r) d\theta \\ &= \frac{\int_{(\theta)} F_X(x | \theta) \cdot f'(\theta | \underline{x}) \cdot [1 - F_X(a | \theta)]^r d\theta}{\int_{(\theta)} f'_{\theta}(\theta | \underline{x}) \cdot [1 - F_X(a | \theta)]^r d\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

Um die Dichte zu erhalten, ist im Zähler der erste Faktor durch $f_X(x|\theta)$ zu ersetzen.

Im allgemeinen Fall $r \neq n$ kann man weiter berücksichtigen, das von n Versuchen genau r der Bedingung $X > a$ genügten. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ergibt sich, da voraussetzungsgemäß das Bernouillische Versuchsschema vorliegt, zu

$$\binom{n}{r} P^r(X > a|\theta) P(X \leq a|\theta)^{n-r}$$

Mithin gilt für die a posteriori Dichte

$$\begin{aligned} f''_{\theta}(\theta|\underline{x}, \underline{x}', r) &\propto f'_{\theta}(\theta|\underline{x}') \cdot \binom{n}{r} \cdot P^r(X > a|\theta) \cdot P^{n-r}(X \leq a|\theta) \cdot \prod_{i=1}^{n-r} f_X(x_i|\theta) \\ &= f'_{\theta}(\theta|\underline{x}', \underline{x}, n-r) \binom{n}{r} [1-F_X(a|\theta)]^r F_X^{n-r}(a|\theta) \quad (9) \end{aligned}$$

Anstelle von (8) erhält man

$$G_X(x|\underline{x}, \underline{x}', r, a) = \frac{\int_{(\theta)} F_X(x|\theta) \cdot f'_{\theta}(\theta|\underline{x}', \underline{x}, n-r) [1-F_X(a|\theta)]^r F_X^{n-r}(a|\theta) d\theta}{\int_{(\theta)} f'_{\theta}(\theta|\underline{x}', \underline{x}, n-r) \cdot [1-F_X(a|\theta)]^r F_X^{n-r}(a|\theta) d\theta} \quad (10)$$

worin entsprechend Gl. (5) $f'_{\theta}(\theta|\underline{x}', \underline{x}, n-r) = N \cdot l(\underline{x}|\theta, n-r) \cdot f'_{\theta}(\theta|\underline{x}')$

Wie man sieht, ist die endgültige Prediktorverteilung recht unhandlich und es wird sich zeigen, daß die auftretenden Integrale numerisch ausgewertet werden müssen. Immerhin sind in (10) alle bei der Grundsatzprüfung (Stichprobe \underline{x}) und im "Abnahmeversuch" (Stichprobe \underline{x}' mit r Elementen $X_1 > a$) erworbenen Informationen enthalten. In vielen Fällen ist nun tatsächlich $r = n$ und somit $f''_{\theta}(\theta|\underline{x}, \underline{x}', r) = f''_{\theta}(\theta|\underline{x})$, d.h. besteht

ein Bauteil den Abnahmeversuch nicht, so wird es weiteren Untersuchungen unterzogen um seine Eignung dennoch festzustellen oder aber ersetzt. Die erstgenannten Bauteile werden in dieser Untersuchung jedoch nicht weiter betrachtet. Für jedes $r < m$ wirkt der Abnahmeversuch in bezug auf die ursprüngliche Prediktorverteilung in ungünstiger Richtung, da ja nur die ungünstigen Stichprobenelemente $X_i \leq a$ für die Statistik \underline{x}' verwendet werden. Einige numerische Rechnungen legen aber den Schluß nahe, daß ihr Einfluß erst bei relativ kleinem r spürbar wird. Man wird daher in der Regel mit der Vereinfachung (8) auskommen.

Für größere aber nicht zu große $r = n$ kann man eine die weitere Rechnung ganz wesentlich vereinfachende Näherung treffen. Extremwertverteilungen, also auch der Ausdruck $[1 - F_X(a|\theta)]^r$, streuen mit wachsendem r zunehmend weniger, gleichzeitig wachsen jedoch die zentralen Lageparameter, z.B. der Zentralwert $\check{\theta}_r$. Näherungsweise kann man daher annehmen, daß

$$[1 - F_X(a|\theta)]^r = \begin{cases} \approx 0 & \text{für } \theta \leq \theta^* = \check{\theta}_r \\ \approx 1 & \text{für } \theta > \theta^* = \check{\theta}_r \end{cases}$$

Die Grenze θ^* errechnet sich aus

$$[1 - F_X(a|\theta)]^r = 0,5$$

$$\theta^* = F_X^{-1}(1 - 0,5^{1/r} | a) \quad (12)$$

Damit hat man für (8) die Näherung

$$G_X(x | \underline{x}, \underline{x}', r, a) \approx \frac{\int_{\theta^*}^{\infty} F_X(x|\theta) \cdot f'''(\theta | \underline{x}, \underline{x}') \cdot d\theta}{1 - F_{\theta}'''(\theta | \underline{x}, \underline{x}')} \quad (8)$$

Die Abnahmeprüfung in der vorausgesetzten Form wirkt schließlich wie eine ideale Stützung von (8) bei einem Wert $X = a$, d.h.

$$G_X''(x|\underline{x},\underline{x}',r,a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{G_X''(x,\underline{x},\underline{x}',r,a) - G_X''(a|\underline{x},\underline{x}',r,a)}{1 - G_X''(a|\underline{x},\underline{x}',r,a)} & \text{für } x > a \end{cases} \quad (13)$$

Dabei wird davon ausgegangen, daß die Ergebnisse der Abnahmeprüfung keinen Einfluß mehr auf die Dimensionierung der Bauteile haben.

Abnahmeprüfungen der skizzierten Art sind bei vielen Anwendungen nicht unproblematisch, da die Prüfung selbst, vor allem bei hohem Prüfniveau a , Schäden am Bauteil verursachen kann. Auch kann die Zahl der Ausfälle bei der Abnahmeprüfung unwirtschaftlich hoch werden. In gewissen Fällen ist es dann zweckmäßig, nur einen Teil der Bauteile auf dem Niveau a zu prüfen und den im allgemeinen größeren Rest auf einem niedrigeren Niveau b . Beziehung (13) bleibt dann gültig. Die Stützung in a ist in ihr jedoch durch eine bei b zu ersetzen, während $G_X''(x|\dots)$ nach Gl. (8) zu nehmen ist. Die Festlegung der Prüfniveaus a bzw. b sowie der Probenanzahl ist ein typisches Problem der Optimierung. Gegeneinander aufzurechnen sind die Kosten der Prüfungen auf den Niveaus a bzw. b , die erwarteten Kosten für den Ersatz der Ausfälle bzw. für Schädigungen bei diesen Prüfungen und die erwarteten Kosten für Versagen der eingebauten Bauteile. Hierauf kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter eingegangen werden.

und

Ergänzlich Formel (8) sind noch zwei weitere wichtige Verallgemeinerungen zu nennen. Zum einen kann die Messung der Größe X gar indirekt über eine oder mehrere andere Größen Y vorgenommen werden. Die Messung dieser oder der ursprünglichen Größe mag gar Meßfehlern behaftet sein. Beide Fälle können mit Hilfe der Methoden der Bayesschen Regressionstheorie erfaßt werden. Es würde wiederum den Rahmen dieser Studie sprengen, auch die dort erarbeiteten Ergebnisse anzuführen und aufzubereiten. Für unzensierte normalverteilte Beobachtungen stellt Zellner [3]

aber fast alle interessierenden Ansätze zusammen. Ihre Anwendung folgt exakt dem bereits bekannten Schema.

Zum anderen sei der Fall zensierter Beobachtungen noch näher betrachtet, da er eine praktisch wichtige Deutung zuläßt. Häufig besitzt man nämlich außer einer Stichprobe \underline{x} nur noch die Kenntnis, daß r Bauelemente gleicher oder vergleichbarer Bauart bei ihrer Verwendung zufriedenstellend funktionierten. Die Bauelemente sind jedoch ganz verschieden beansprucht. Die Grenze a ist ihrerseits eine Zufallsvariable. Es scheint, daß Vorinformationen oft gerade in dieser recht unqualifizierten Form vorliegen. Die meisten Beanspruchungen sind darüber hinaus noch zufällige Funktionen der Zeit. Es kommt also auch auf den Zeitraum, für den die genannten positiven Erfahrungen gemacht wurden, an. Diesen Sachverhalt kann man wie folgt näherungsweise erfassen.

Die Beanspruchung sei eine Folge $\{S_i\}$ $i = 1, 2, \dots, q$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $G_S(x)$. Versagen tritt gegebenenfalls bei der maximalen Beanspruchung $\max \{S_i\}$ ein. Man bildet demnach die Extremwertverteilung. Ihre Dichte ist mit $H_{S,q}(x) = H_S^q(x)$

$$h_{S,q}(x) = (q-1) \cdot H_S^{q-1}(x) \cdot h_S(x) \quad (14)$$

Positive Erfahrungen konnten nur für $S \leq a$ bei allen r Bauteilen gemacht werden. Also wird aus Gl. (8) bei Verwendung der Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$G_X(x|\underline{x}, \underline{x}', r, q) = \int_0^{\infty} G_X(x|\underline{x}, \underline{x}', r, a) \cdot h_{S,q}(a) da \quad (15)$$

Die Auswirkung dieser Art von zensierter Vorinformation auf $G_X(x|.)$ wird in Abschnitt 6 näher diskutiert.

4. Anwendungen auf normalverteilte Größen X

4.1 Bekannte Standardabweichung

Bei einigen Problemen der Bautechnik kann man annehmen, daß die beobachtete Streuung einer Größe auf das Wirken einzeln genommen an sich kleiner Einflüsse zurückzuführen ist. Die Einflüsse wirken in manchen Fällen additiv, in anderen Fällen multiplikativ zusammen. Es ist daher physikalisch sinnvoll, im ersten Fall von einer Normalverteilung, im zweiten Fall von einer log-normalen Verteilung auszugehen [1]. Letztere ist - wie erwähnt - durch die Transformation $Y = \ln X$ in eine Normalverteilung für Y überführbar. Daher soll im folgenden nur das Modell normalverteilter Werte behandelt werden.

Zunächst sei einschränkend angenommen, daß ein Parameter der Normalverteilung, die Standardabweichung σ , aus früheren Beobachtungen bekannt ist. Die Dichte der Normalverteilung ist dann bei gegebenem Mittelwert μ :

$$\varphi(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \quad (16)$$

wobei $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} u^2 \right]$ die Dichte der standardisierten Normalverteilung ist. Im Hinblick auf die weiter unten verwendete Bezeichnungsweise ist ihre Verteilungsfunktion

$$\Phi(x|\mu) = \Phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du \quad (17)$$

Anhang A beschreibt einige Formeln zur Berechnung von Gl. (17).

Der Mittelwert sei jedoch unbekannt und z.B. aus einer Stichprobe $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ über den Stichprobenmittelwert $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$ zu schätzen. Weiter sei als Vorinformation, z.B. aus früheren Versuchen ähnlicher Art, bekannt, daß μ normalverteilt ist mit dem Mittelwert μ_0 und der Standardabweichung σ_0 . Zweck-

mäßigerweise setzt man daher $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{n_0}$, wobei n_0 als Umfang der "a priori" Stichprobe aufzufassen ist. Die a posteriori Dichte für μ wird dann mit der Likelihoodfunktion der Stichprobe (siehe z.B. [2])

$$\begin{aligned}
 l(\mu | \underline{x}) &= \prod_{i=1}^m \varphi(x_i | \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^m \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
 &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{m}}\right)^2\right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

nach Gl.(5) zu:

$$\begin{aligned}
 f''(\mu | \underline{x}, \mu_0, n_0) &= N \cdot \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{m}}\right)^2\right] \cdot \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right)^2\right] \\
 &= \frac{m+n_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \frac{m\bar{x} + n_0\mu_0}{m+n_0}}{\sigma/\sqrt{m+n_0}}\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{\sigma''} \cdot \varphi\left(\frac{\mu - \mu''}{\sigma''}\right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

Darin ist:

$$\mu'' = \frac{m\bar{x}' + n_0\mu_0}{m+n_0} \quad \text{und} \quad \sigma'' = \sigma/(m+n_0)^{1/2} \quad (20)$$

Die Prediktordichte nach Gl.(6) wird durch Ausintegrieren gefunden und ist ebenfalls wieder normal (siehe [3], S. 29 - 30)

$$\begin{aligned}
 g(x | \underline{x}, \mu_0, n_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \cdot f''(\mu | \underline{x}, \mu_0, n_0) d\mu \\
 &= \frac{1}{\sigma'} \cdot \varphi\left(\frac{x - \mu'}{\sigma'}\right) \quad (21)
 \end{aligned}$$

mit

$$\mu' = \mu'' \text{ und } \sigma' = \sigma \cdot \left(\frac{m+n_0+1}{m+n_0} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Man beachte, daß (21) auch dann existiert, wenn $n_0 = 0$, d.h. eine "diffuse" a priori Verteilung vorliegt. In diesem Fall ist die Prediktorverteilung direkt proportional zur Likelihoodfunktion.

Wir gehen nun zu den vom Abnahmeversuch gelieferten Daten über.

Für die Stichprobe vom Umfang m' mit dem Ergebnis

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, d.h. mit n Elementen mit $X_i \leq a$ und $r = m' - n$ Elementen $X_i > a$ ermittelt man bei Berücksichtigung von $\bar{x}' = \sum_{i=1}^n x_i$

eine neue a posteriori Verteilung für den Parameter μ und entsprechend die zugehörige Prediktordichte. Insbesondere hat die a posteriori Verteilung für μ den Mittelwert $((m+n_0) \cdot \mu' + n \cdot \bar{x}) / (m'+n_0+n)$ und die Standardabweichung $\sigma / \sqrt{m+n_0+n}$, wogegen die Prediktorverteilung die Parameter μ'' und $\sigma'' = \sigma \left(\frac{m+n_0+n+1}{m+n_0+n} \right)^{1/2}$ hat. X

Wir wollen diese "allgemeinere" Variante jedoch nicht weiter verfolgen und stattdessen den Fall $r = m'$ ausführlicher durchziehen. Gl. (7) wird zu

$$f_{\mu}^{IV}(\mu | \mu_0, n_0, \underline{x}, r) = f'''(\mu | \mu_0, n_0, \underline{x}) \cdot \left(\frac{1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}{1 - G\left(a | \mu_0, n_0, \underline{x}\right)} \right)^r \quad (23)$$

und für Gl. (8) wird unter Berücksichtigung von (19) und (20) geschrieben:

$$G_X(x | \mu_0, n_0, \underline{x}, r, a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma''} \phi\left(\frac{\mu-\mu''}{\sigma''}\right) \cdot [1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)]^r d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma''} \phi\left(\frac{\mu-\mu''}{\sigma''}\right) \cdot [1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)]^r d\mu} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma''} \phi\left(\frac{\mu-\mu''}{\sigma''}\right) \cdot \phi^r\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right) d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma''} \phi\left(\frac{\mu-\mu''}{\sigma''}\right) \cdot \phi^r\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right) d\mu} \quad (24)$$

Es scheint, daß der Zähler in (24) nur noch unwesentlich vereinfacht werden kann. Er muß numerisch berechnet werden.

Die Verwendung der Näherung (8) ergibt:

$$G_X(x|\mu_0, n_0, \underline{x}, r, a) \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^n} \phi\left(\frac{\mu-\mu^*}{\sigma}\right) \cdot d\mu}{\phi\left[\frac{\mu^*-\mu^*}{\sigma}\right]}$$

und nach einer Reihe von Umformungen (siehe auch [9])

$$G_X(x|\mu_0, n_0, \underline{x}, r, a) \approx 1 - \frac{L\left(\frac{\mu^*-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{x-\mu^*}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}; \sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)}{\phi\left(\frac{\mu^*-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right)} \quad (24a)$$

worin

$$L(h, k; \rho) = \int_h^\infty \int_k^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{1-\rho^2}\right)\right] du dv \quad (25)$$

das zweidimensionale Normalverteilungsintegral (siehe [16] und [17]), $n = m + n_0$ und $\mu^* = a + \phi^{-1}(0,5^{1/r}) \cdot \sigma$. Allerdings erweist sich (24a) nicht immer als gut brauchbar.

Um zu zeigen, in welcher Weise zensierte Beobachtungen die Prediktorverteilung von X beeinflussen, untersuchen wir ihr Verhalten für $r \rightarrow \infty$ genauer. Für Gl. (7) an der Stelle $\theta = \theta_0$ kann man unter Weglassung aller unwichtigen Parameter schreiben:

$$f_{\theta_0}^{IV}(\theta_0 | \cdot) = \varphi(\theta_0 | \cdot) \cdot \frac{\phi^r(a-\theta_0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) \cdot \phi^r(a-\theta) d\theta} \quad (7)$$

Für die Größe $1/f_{\theta}^{\text{IV}}(.|.)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 1/f_{\theta}^{\text{IV}}(.|.) &= \frac{1}{\varphi(\theta_o|..)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) \cdot \left\{ \frac{\phi(a-\theta)}{\phi(a-\theta_o)} \right\}^r d\theta \\
 &= \frac{1}{\varphi(\theta_o|..)} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\theta_o} \varphi(\theta) \cdot \left\{ \frac{\phi(a-\theta)}{\phi(a-\theta_o)} \right\}^r d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\theta_o}^{\infty} \varphi(\theta) \cdot \left\{ \frac{\phi(a-\theta)}{\phi(a-\theta_o)} \right\}^r d\theta \right]
 \end{aligned}$$

Mit wachsendem r geht nun das erste Integral gegen Null, während das zweite Integral gegen unendlich strebt. Also strebt der Ausdruck (7) und entsprechend die Verteilungsfunktion (24) für jedes endliche x (nach erneuter Stürzung) gegen Null, wie es auch die Anschauung nahe legt. Andererseits widerspricht das Ergebnis der Erfahrung, daß die Versagensrate bei Bauteilen eben ungleich Null ist. Das kann daran liegen, daß r in der Praxis endlich bleibt. Gleichwohl verbleibt die Tatsache, daß viele unzensierte Beobachtungen die Prediktorverteilung von X spürbar und zwar zur günstigen Seite hin verschoben.

4.2 Mittelwert und Standardabweichung unbekannt

Ähnliche Ergebnisse kann man auch für den Fall unbekannter Standardabweichung erhalten. Die geringen Stichprobenumfänge der Grundsatz- bzw. Eignungsprüfungen und die bei verschiedenen Anwendungen beobachteten recht unterschiedlichen Streuungen lassen es in der Tat geraten erscheinen, generell von einer unbekanntem Standardabweichung auszugehen. Der Kürze halber werden im folgenden nur die wichtigsten Ergebnisse aufgeführt und im übrigen auf [3] und bezüglich der Prediktorverteilung auf [13] bzw. [15] verwiesen.

Mit den Stichprobenstatistiken

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m'} x_i \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{m'-1} \sum_{i=1}^{m'} (x_i - \bar{x})^2 \quad (26)$$

se)

erhält man die Likelihoodfunktion der unbekannt Parameter und σ zu

ia₅]

$$l(\mu, \sigma | \underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{m'} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^{m'} (x_i - \mu)^2\right] \quad (27)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{m'} \exp \left[-\{(m'-1) s + m'(\bar{x} - \mu)^2\} / 2\sigma^2\right]$$

Die Funktion ist offensichtlich ein Produkt der Dichten einer gammaverteilten und einer normalverteilten Größe. Die a posteriori Verteilung für μ, σ läßt sich in der gleichen Weise darstellen, wenn zusätzlich eine Stichprobe mit den Kenngrößen \bar{x}, s^2 und m_0 gezogen wird.

Man hat [4]:

$$f''(\mu, \sigma | \underline{x}', \underline{x},) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma / \sqrt{m''}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \bar{x}''}{\sigma / \sqrt{m''}} \right)^2 \right] \right\} \times \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{\left(\frac{m''-1}{2}\right)^{\frac{m''+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m''+1}{2}\right)} \left(\frac{s''^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{m''-1}{2}} \exp\left(-\frac{m''-1}{2} \frac{s''^2}{\sigma^2}\right) \right\}$$

worin

$$m'' = m' + m_0 \quad (29a)$$

$$\bar{x}'' = (m' \bar{x}' + m_0 \cdot \bar{x}) / m'' \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} q = s''^2 (m''-1) &= (m'-1) s'^2 + (m_0-1) s_0^2 + m' m_0 (\bar{x} - \bar{x}')^2 / m'' \\ &= [(m'-1) s'^2 + m' x'^2] + [(m_0-1) s^2 + m_0 \cdot \bar{x}^2] \\ &\quad - m'' \bar{x}''^2 \end{aligned} \quad (29c)$$

Die Prediktordichte wird durch Ausintegrieren auf dem bekannten Wege gefungen. Es zeigt sich [15], daß die Größe

$$t = \left(\frac{m''}{m''+1}\right)^{1/2} \frac{x - \bar{x}''}{[q/(m''-1)]^{1/2}} \quad (30)$$

einer Studentschen t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad $\nu = (m''-1)$ folgt. Sie werde mit $F_T(\cdot;)$ bezeichnet. Deren standardisierte Dichte ist bekanntlich (z.B. [3])

$$f_T(t|\nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\nu}\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \quad (31)$$

und die Verteilungsfunktion

$$F_T(T \leq t|\nu) = \int_{-\infty}^t f_T(u|\nu) du \quad (32)$$

Die standardisierte Größe geht dabei aus der Transformation $t = \sqrt{h}(x-\theta)$ hervor. Im vorliegenden Fall heißen die Parameter $\theta = \bar{x}''$ und $h = m''/[(m''+1)s''^2]$. Einige Formeln zur Berechnung der zentralen t-Verteilung, die für die Bestimmung des Bemessungswertes x^* benötigt werden, sind in Anhang B aufgeführt. Unter sonst gleichen Voraussetzungen wie im vorigen Abschnitt heißt dann die Prediktorverteilung unter Beachtung von genau r Beobachtungen $X > a$:

$$G(x | \underline{x}', \underline{x}, r, a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot f''(\mu, \sigma | \underline{x}', \underline{x}) \cdot \phi^r\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right) d\sigma d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} f''(\mu, \sigma | \underline{x}', \underline{x}) \cdot \phi^r\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right) d\sigma d\mu} \quad (33)$$

Es wurde darauf verzichtet, die a posteriori Dichte nach Gl. (28) voll auszuschreiben. In Gl. (33) muß sowohl über μ als auch über σ numerisch integriert werden. Weder für die Verteilung (24) noch für (33) ist es wegen der Vielzahl der Parameter sinnvoll, umfassende Tabellen oder ähnliches zu erstellen. Einige Spezialfälle werden in Abschnitt 7 noch näher erläutert. Es muß dem Anwender überlassen bleiben, ob sich die Auswertung von (24) bzw. (33) und damit die Berücksichtigung der günstig wirkenden Abnahmeprüfungen, insbesondere aber auch die daraus zu bildende Inverse nach Gl. (C), im Einzelfall lohnt. Hierfür wird man in der Regel elektronische Datenverarbeitungsanlagen verwenden müssen^{*)}. Andererseits genügen bei Vernachlässigung der Abnahmeprüfung die in Anhang A bzw. B gegebenen Hilfsmittel für die Bestimmung der Bemessungswerte.

5. Grenzbetrachtungen für Systeme von Bauteilen

In der Praxis reicht es häufig nicht aus, nur die Verteilungsfunktion der Festigkeit des einzelnen Bauteiles zu kennen. Tatsächlich wird die durch den Sicherheitsindex ausgedrückte Zuverlässigkeit oft auf ganze Systeme bezogen. Hierbei sind als Grenzfälle die Serien- und die ideale Parallelanordnung von Bauteilen noch einer weitgehend analytischen Behandlung zugänglich. Dabei sei angenommen, daß das betrachtete System (Gruppe von Bauteilen, Gruppe von Bodenankern, usw.) aus k Elementen besteht. Es ist dann notwendig, den Bemessungswert y^* aus der Verteilung der Systemfestigkeit $Y = h(X_1, X_2, \dots, X_k)$ zu entnehmen. Dabei ist $h(\cdot)$ die Funktion, welche die Systemfestigkeit aus den Festigkeiten der Elemente ermitteln läßt. Es sei davon ausgegangen, daß die Einzelbauteile bezüglich ihres Tragverhaltens (Last-Verformungs-Verhaltens) wenigstens annähernd als zäh eingestuft werden können. Liegt sprödes Verhalten vor, so gelten für Parallelsysteme die in [18] dargelegten, wesentlich aufwendigeren Erörterungen. Unter den genannten Einschränkungen gilt dann für das Seriensystem

^{*)} Entsprechend ausgetestete Programme in Fortran IV stehen auf Anfrage zur Verfügung.

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_k\} \quad (34)$$

und für das Parallelsystem

$$Y = \sum_{j=1}^k X_j \quad (35a)$$

bzw. bei Bezug auf das Element

$$Y = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k X_j \quad (35b)$$

Näherungsweise nehmen wir auch an, daß die k Ausprägungen, die gleichzeitig vorausgesagt werden müssen, stochastisch voneinander unabhängig sind. Auf das Problem der Abhängigkeit wird noch eingegangen.

Die Verteilungsfunktion für (34) ist bekanntlich

$$G_Y(y) = 1 - [1 - G_X(y)]^k \quad (36)$$

Mit $p^* = G_Y(y^*) = \phi^{-1}(-\alpha \cdot \beta)$ erhält man daraus durch Umformung

$$y^* = G_X^{-1}\{1 - [1 - p^*]^{1/k}\} \quad (37)$$

Es ist klar, daß immer $y^* \leq x^*$ ist. Die Vorgehensweise erfordert die Kenntnis der Elementanzahl k . Ist daher y^* wesentlich von x^* verschieden, so dürfte sich bei praktischen Anwendungen eine an der Elementzahl k orientierte Klassifizierung der Anwendungsbereiche der Bauteile empfehlen.

Unmittelbar einsichtig ist, daß bei parallel angeordneten Elementen durch die nach Gl. (35) vorgenommene Mittelung immer $y^* \geq x^*$ wird. Für unabhängige normalverteilte Werte x_j gilt bekanntlich ein Summensatz. Man hat [1]:

$$G_Y(y) \geq \phi \left[\frac{y - \mu'}{\sigma' / \sqrt{k}} \right] \quad (38)$$

und kann mit Gl.(35b) und (22) durch Setzen von $p^* = G_y(y^*) = \phi^{-1}(-\alpha \cdot \beta)$ ohne Schwierigkeit den Bemessungswert y^* für das einzelne Bauteil berechnen. Das Gleichheitszeichen gilt bei vollständiger Unabhängigkeit der X_j . Auch für t-verteilte Werte X gilt, wie aus der Ableitung für diese Verteilung sofort erkenntlich ist, ein ähnlicher Sattensatz wie für die Normalverteilung [3]. Man kann zeigen, daß die Größe nach Gl.(35b) wieder t-verteilt ist, allerdings mit dem Freiheitsgrad $(k+m"-1)$. Das übrige folgt dem bereits bekannten Schema.

Strenggenommen handelte es sich in den vorstehend beschriebenen Fällen um ein Problem der gleichzeitigen Voraussage aufgrund einer einzigen Versuchsserie. Da jeweils auf die gleiche Information zurückgegriffen wird, ist unmittelbar einsichtig, daß die k Voraussagen voneinander abhängig sind. Hierauf machte Liebermann [19] aufmerksam. Nachstehend werden zuerst einige für bekannte Standardabweichung geltende Ergebnisse angegeben [11]. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Information über die Folge $\{X_j\}$ in Form einer a posteriori Statistik $\bar{x}'' = \frac{1}{n''} \sum_{i=1}^{n''} X_i$ vorliegt. Aufgabe ist, die gemeinsame Verteilung der Folge $\{X_{n''+1}, X_{n''+2}, \dots, X_{n''+k}\}$ vorauszusagen. Entsprechend Gl.(22) ist für jedes Glied der Folge $E[X_j] = \bar{x}''$ und $\text{Var}[X_j] = \sigma^2 \cdot \frac{n''+1}{n''}$. Die Elemente der Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$ erhält man aus $E[(X_{n''+i} - \bar{x}'')(X_{n''+j} - \bar{x}'')] = \sigma^2 \cdot \frac{n''+1}{n''} \cdot \frac{1}{n''+1}$ wie eine leichte Rechnung zeigt. Der Korrelationskoeffizient ist mithin $\rho_{ij} = 1/(1+n'')$ für alle $i \neq j$. Für Seriensysteme ist also die Minimaverteilung einer Folge, deren Elemente mit $\rho = 1/(1+n'')$ voneinander abhängen, zu bestimmen. Man bildet zunächst die standardisierte Folge $\{\xi_j\}$ mit $\xi_j = (X_j - \bar{x}'') / (\sigma \cdot \sqrt{(n''+1)/n''})$ und erhält das bekannte Resultat [20, S. 800]

$$\begin{aligned}
 F(y) &= F(y \cdot \sigma \sqrt{(n''+1)/n''} + \bar{x}'') \\
 &= P[\min_{(k)}\{\xi_j\} \leq y] \\
 &= 1 - P[\max_{(k)}\{\xi_j\} \leq y] \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^k \left| \frac{y + \sqrt{\rho} t}{\sqrt{1-\rho}} \right| \varphi(t) dt \quad (39)
 \end{aligned}$$

Das Integral in (39) muß numerisch ausgewertet werden. Es zeigt sich jedoch, daß das Ergebnis nur dann wesentlich von Gl.(36) bzw. (37) abweicht, wenn ρ groß ist (vergl. z.B. [21]).

Man bekommt aber schon für $n'' = 1, 2, 3, 4, 5$ die Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,5, 0,33, 0,25, 0,20, 0,17$. Somit läßt sich Gl.(37) näherungsweise wie folgt angeben:

$$y^* \leq \phi^{-1} [1 - (1-\rho^*)^{1/k}] \cdot \sigma \cdot \frac{n''+1}{n''} + \bar{x}'' \quad (39a)$$

Für das Parallelsystem entsprechend Gl.(35b) berechnet sich der Mittelwert zu $E[Y] = \bar{x}''$ und die Varianz zu $\text{Var}[Y] = \text{Var}[X_j] \cdot 1/k \cdot (1 + (k-1)/(n''+1))^{1/2}$. Der Bemessungswert ist, da die Summe normalverteilter Größen wieder normal ist:

$$y^* = \phi^{-1} [-\alpha \cdot \beta] \cdot \sigma \cdot \frac{n''+1}{n''} \left(1 + \frac{(k-1)}{(n''+1)}\right) / k + \bar{x}'' \quad (40)$$

Bei größeren Werten n'' strebt das Ergebnis von (40) schnell dem Ergebnis von Gl.(38) zu. Allerdings erbringt Gl.(38) auf der unsicheren Seite liegende Werte y .

Die Rechnung wird nur unwesentlich komplizierter, wenn die Standardabweichung unbekannt ist. Mit den a posteriori Statistiken n'' , \bar{x}'' , s''^2 ermittelte Liebermann [19] für den Vektor $\underline{d} = \underline{x} - \bar{x}''$ eine mehrdimensionale t-Verteilung mit der Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$ mit den Elementen $\Sigma_{ij} = \{[(k''^2-1)/k''^2-3n'']\} s''^2$ für $i=j$ und $\Sigma_{ij} = \{[(k''^2-1)/(k''^2-3k'')]\} \cdot s''^2 / (k''+1)$ für $i \neq j$ und

$k'' > 3$. Wie man sieht, wird der Korrelationskoeffizient ebenfalls $\rho_{ij} = 1/(k''+1)$ und mag für nicht zu kleine n'' vernachlässigt werden. Daher ist Ausdruck (37) mit $G_x(.|.)$ nach Gl.(32) bzw. (30) wie schon bei Gl.(39a) eine gute, und wie man ebenfalls zeigen kann, konservative Näherung. Hinsichtlich genauer Ergebnisse wird auf [12] und [22] verwiesen.

Zellner [3, S. 388] zeigte, daß Linearkombinationen von mehrdimensional t-verteilten Variablen wieder t-verteilt sind. Deshalb kann das System nach Gl.(35b) auch in diesem Fall exakt gelöst werden. Man findet, daß die Größe

$$t = \left[\frac{n''+k-1}{n''+k-3} \cdot \frac{n''(n''-3)}{(n''^2-1)} \cdot \frac{1}{1+\frac{k-1}{n''-1}} \cdot \frac{1}{s''^2} \right]^{1/2} \cdot (x-\bar{x}'') \quad (41)$$

standard-t-verteilt mit dem Freiheitsgrad $v = n'' + k - 1$ ist ($n'' > 3, k > 1$).

6. Diskussion

Bild 1 veranschaulicht zunächst den Wert der eingebrachten Information, gemessen am Stichprobenumfang n'' , für die Verteilungsfunktionen (21) bzw. (32). Aufgetragen wurde der normalisierte Wert $(x - \bar{x}'') (s'' \cdot \phi^{-1}(p^*))^{-1}$ über v . Die für bekannte Standardabweichung geltende Kurve ist gestrichelt. Dann gilt $v = m + n_0$ und $\bar{x}'' = \mu$ bzw. $s''^2 = \sigma^2 (m+n_0+1)/(m+n_0)$. Für unbekannte Standardabweichung gelten die Bezeichnungen der Gl.(29). Man erkennt deutlich, daß besonders die extremen Bereiche der Verteilungen spürbar von der Größe der Stichprobe abhängen. Das ist besonders ausgeprägt bei unbekannter Standardabweichung.

In den Bilder 2 und 3 ist Formel (24) für verschiedene r und a unter sonst gleichen Voraussetzungen ausgewertet. Bild 2 ist für $a = \bar{x}''$ und $\sigma' = 1$ mit einem entsprechend der Normalverteilung verzerrten Ordinatenmaßstab gezeichnet. Es ist nur der untere Teil der Verteilungsfunktion angegeben. Die neuen Verteilungsfunktionen stellen sich fast als Gerade dar und sind daher in sehr guter Näherung wieder normal. Es hat den An-

schein, als ob die Berücksichtigung zensierter Beobachtungen sich im wesentlichen nur in einer Verschiebung des Mittelwertes in positiver Richtung äußert.

Die Standardabweichung nimmt mit r geringfügig ab. Bild 3 offenbart aber, daß das Niveau a relativ hoch ausfallen muß, um Vorinformationen in der Form zensierter Beobachtungen wirksam werden zu lassen. Das gilt selbst für recht große Werte r - wie leicht gezeigt werden kann. Deshalb wurde Abstand davon genommen, Formel (15) im einzelnen auszuwerten, da die "Gebrauchsbeanspruchungen" im allgemeinen so niedrig liegen, daß keine merkliche Verbesserung zu erwarten ist. Das besagt aber, daß die Information "bisher habe ja alles gehalten" Informationen aus messender Prüfung oder Probelastungen auf nicht zu niedrigem Niveau aufbessert.

Man wird bei genaueren Schätzungen der Versagenswahrscheinlichkeit bestimmter Bemessungssituationen prüfen müssen, ob dieser meist kleine, aber günstige Einfluß, vor allem in Anbetracht der zuverlässigen Quantifizierung der anderen maßgeblichen Unsicherheiten des Problems, vernachlässigt werden kann. Anhang C enthält für die Inverse der Formel (15) einige Rechenergebnisse, die die Entscheidung über den Nutzen aufwendiger Betrachtungen erleichtern mögen.

Die Berechnung der Bilder 1 bis 3 erwies, daß die Berücksichtigung unzensierter Beobachtungen bei der Bestimmung von Bemessungswerten x^* oder auch y^* sowohl bei bekannter als auch bei unbekannter Standardabweichung allenfalls einen programmierbaren Taschenrechner erfordert. Erwähnt sei hier, daß bei der Annahme log-normal verteilter Werte X die Berechnung von y^* nach den Formeln (40) bzw. (41) nur eine Näherung ist, die jedoch mit wachsendem k an Güte zunimmt. Die Einbeziehung zensierter Beobachtungen macht einen leistungsfähigen Rechner erforderlich.

Aus Bild 1 wird deutlich, daß die Lage einer gegebenenfalls als Bemessungswert zu definierenden Fraktile doch bemerkenswert vom Stichprobenumfang abhängt. Der Einfluß ist besonders bei kleinen Stichproben und bei kleinen Fraktile ausgeprägt. Gerade solche Verhältnisse dürften aber in der Praxis herrschen. Es erscheint deshalb zweckmäßig, diese Resultate noch einmal mit Blick auf die ursprüngliche Fragestellung, die Bestimmung von Bemessungswerten aus wenigen Versuchen, zu interpretieren. Die vorgeschlagenen Prediktorverteilungen enthalten - wie ausgeführt - auch alle Parameterunsicherheiten. Andererseits folgt aus dem Prinzip der maximalen Likelihood, daß die beobachteten Schätzer \bar{x} bzw. s^2 für die unbekannt Parameter μ , σ^2 die wahrscheinlichsten sind. Ein erwartungstreuer Bemessungswert ermittelt sich daher auch aus $x^* = \bar{x} + \phi^{-1}(p^*) \cdot s$. Er ist immer größer als der aus der Prediktorverteilung ermittelte Wert. Man könnte daraus den Schluß ziehen, daß mangelnde Information mit systematischer Vorhaltung, d.h. höherem Aufwand in der zukünftigen Produktion, kompensiert werden muß. Diese Deutung ist in der Tat zulässig, wenn man sich darauf beschränkt, für die den Versuchen unterworfenen Bauteilarten nur die Einhaltung einer Versagenswahrscheinlichkeit p^* im Mittel vorzuschreiben (es genügt, hier nur den Fall einer deterministischen Beanspruchung $s = x^*$ zu betrachten). Je nach zufälligem Stichprobenergebnis \bar{x} , s^2 wird die tatsächliche Versagenswahrscheinlichkeit je mehr oder weniger vom Zielwert p^* abweichen. Die Abweichungen sind umso größer, je kleiner der Stichprobenumfang ist. Dieser Tatbestand war in der Vergangenheit Anlaß, den erforderlichen Stichprobenumfang nach unten zu begrenzen. Dann wurden Aussagen der Form "die Abweichungen von x^* bzw. der Versagenswahrscheinlichkeit von den jeweiligen Zielwerten fallen mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ ($\alpha =$ Sicherheitswahrscheinlichkeit) in ein bestimmtes (von α und n abhängiges) Intervall" möglich. Die Verwendung der Prediktorverteilungen ermöglicht nun den Zielwert p^* für jede Bauteilart und Versuchsserie einzuhalten. Und genau diese Eigenschaft der in dieser Studie vorgeschlagenen Methode hält der Verfasser für einen wesentlichen Vorteil. Andererseits wird die Schätzung p^* bei endlichem Stichproben-

umfang nicht erwartungstreu, sondern bleibt konservativ. Das ist offensichtlich der für mangelnde Kenntnis aufzuwendende Preis, der auch bei klassischer, statistischer Betrachtungsweise, allerdings dann in etwas anderer Höhe, zu zahlen ist. Mit Hilfe des Bayesschen Satzes kann Information jedoch schrittweise akkumuliert werden. Die Anpassung der Größe der Sicherheitswahrscheinlichkeit α an den jeweiligen Kenntnisstand, die in der klassischen Betrachtung nötig wäre, um asymptotisch erwartungstreue Resultate zu erzielen, entfällt.

7. Beispiel: zul. Biegemoment von Gitterträgern im Montagezustand (Mittelwert und Standardabweichung u

Im Rahmen von Zulassungsversuchen wurden für eine bestimmte art von Gitterträgern folgende Werte für die Bruchmomente gestellt: $\underline{X}'_{(4)} = \{29,1, 29,1, 18,5, 20,8\}$ in [kNm]. Hier errechnet sich ein Mittelwert von $\bar{x}' = 24,4$ kNm und eine Standardabweichung $s'_x = 5,5$ kNm. In Übereinstimmung mit auch derzeit noch üblichen Gepflogenheiten ergab sich da seinerzeit ein zulässiges Moment von $zul\ x = (\bar{x}' - 1,645 \cdot s') / 1,75 = 8,7$ kNm.

Geringfügige konstruktive Änderungen machten weitere Versuche erforderlich mit dem Ergebnis: $\underline{X}_{(6)} = \{22,1, 23,9, 26,1, 24,9, 22,2, 20,0\}$ in [kNm]. Unter Zuhilfenahme der Stichprobenvektoren \underline{X}' und \underline{X} als objektive Information sei nun die neue zulässige Beanspruchung ermittelt. Dabei wird zunächst von der sicher realistischeren Annahme log-normalverteilter Werte ausgegangen, d.h. es werden zunächst die transformierten Vektoren $\underline{y}' = \ln \underline{X}'$ bzw. $\underline{y} = \ln \underline{X}$ gebildet. Man erhält die Parameter $\bar{y}' = 3,17$, $s_{y'} = 0,23$, $\bar{y} = 3,14$, $s_y = 0,10$. Wegen der Annahme unbekannter Standardabweichung ist Abschnitt 4.2 gültig. Die neuen Parameter sind nach Gl. (29a) bis (29c) $n'' = n' + n = 10$, $\bar{y}'' = 3,15$, $q = 0,34$. Da es sich um die Bemessung eines Montagezustandes handelt, wird die nach [12] vorgesehene niedrigste Sicherheitsklasse, d.h. $\beta = 4,2$ gewählt. Demnach ist unter Benützung von (8) die $p^* = \phi(-\beta \cdot \alpha) = \phi(-3,78) = 7,8 \cdot 10^{-5}$ -Fraktile der t-Verteilung nach (B.2) zu bestimmen. Man erhält $t = -6,22$ bzw. aus (B.4) $y'' = 1,88$ und nach dem Delogarithmieren $x_1^* = 6,5$. Im vorliegenden Fall besteht kein Grund, diesen Wert nicht als zulässiges Moment zu nehmen.

Hätte man die statistischen Unsicherheiten vernachlässigt und z.B. den Wert y^* aus $y^* = -\beta \cdot \alpha \cdot s_{y''} + \bar{y}''$, also der Normalteilung mit den gewichteten Parametern \underline{y} und $s_{y''}$ ermittelt, so bekommt man $x_2^* = 15,5$. Andererseits resultiert die Berücksich-

2
tigung nur der zweiten Stichprobe mit $n = 6$, also bei der Annahme einer "diffusen" a priori Verteilung, in einem Wert $x_3^* = 0,7$. Eine ähnliche Rechnung für die ursprüngliche Probe mit $n' = 4$ ergibt $x_4^* \approx 0$. Schließlich sei noch der fiktive Fall einer großen Stichprobe, z.B. mit $n'' = 30$, $\bar{x}'' = 3,15$ und $q = 0,34$ angegeben. Man berechnet $x_5^* = 14,5$.

Die Ergebnisse zeigen ganz deutlich den Wert von Information, der a priori Information wie der aktuellen Stichprobeninformation. Die erste Stichprobe \underline{x}' ist offensichtlich einfach zu klein, um zuverlässige Schlußfolgerungen ziehen zu können (vergl. das Ergebnis $x_4^* \approx 0$). Auch die zweite Stichprobe \underline{x} fällt noch zu klein aus; der Bemessungswert erscheint noch unbrauchbar. Beide zusammen ergeben jedoch einen Wert x^* , der in der Größenordnung des nach bisherigen Vorgehen ermittelten zulässigen Wertes liegt. Falsch wäre es aber, bei Anwendung der probabilistischen Methode die statistischen Unsicherheiten nicht zu berücksichtigen (vergl. den Wert x_2^*). Dessen Größe wird erst bei relativ hoher Probenzahl $n'' > 30$ erreicht, wie der Wert x_5^* ausweist. Die vorstehenden Rechnungen besagen mithin, daß die bisher üblichen Regeln zur Bestimmung von zulässigen Werten implizit einen hohen Grad von nicht objektiven Vorinformationen voraussetzten. Diese könnten im Prinzip auch im vorliegenden Fall angesetzt werden. Insbesondere könnte man der a priori Stichprobe \underline{x}' , aus der ja ursprünglich der Wert x allein abgeleitet worden war, bei Vorhandensein positiver Erfahrungen bei der praktischen Anwendung von Gitterträgern der untersuchten Art ein wesentlich größeres Gewicht, z.B. durch Setzen von $n' = 50$, verleihen. Damit ergeben sich die neuen a posteriori Parameter zu $n'' = 56$, $\bar{x}'' = 3,17$ und $q = 2,78$ bzw. $x_6^* = 9,5$. Dieser Wert ist natürlich kleiner als x_2^* und auch kleiner als x_5^* . Als Ursache ist die für die Stichprobe \underline{x}' geltende größere Standardabweichung $s_{y'} = 0,23 > s_y = 0,10$ zu nennen, die nunmehr mit rund zehnfachem "Gewicht" eingeht. Die neue Stichprobe \underline{x} hat sich jedoch insgesamt günstig ausgewirkt, denn für die Stichprobe $\underline{x}'(50)$ allein ermittelt man $x_7^* = 9,2$.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Methoden aus Versuchen, Bemessungswerte für normalverteilte Bauteilwiderstände zu bestimmen. Diese sind als p^* -Fraktilen in der sogenannten Prediktorverteilung festzulegen. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei den Ansätzen gewidmet, Vorinformationen, auch als zensierte Beobachtungen, zu berücksichtigen. Grundlage hierzu ist der Bayessche Satz. Die wichtigsten numerischen Ergebnisse wurden zu Tabellen zusammengefaßt und in Bildern dargestellt.

[1] G. A. B. ...
[2] ...
[3] ...
[4] ...
[5] ...
[6] ...
[7] ...
[8] ...
[9] ...
[10] ...
[11] ...
[12] ...

Literaturverzeichnis

- [1] Benjamin, J.A.; Cornell, C.A.: Probability, statistics and decision theory of civil engineers, McGraw-Hill, 1971
- [2] Lindley, D.V.: Introduction to probability and statistics from a bayesian viewpoint, Cambridge University Press, 1965
- [3] Zellner, A.: An introduction to bayesian inference in econometrics, Wiley & Sons, 1971
- [4] Raiffa, H.; Schlaifer, R.: Applied statistical decision theory, Harvard University Press, 1961
- [5] Box, G.E.P.; Tiao, G.C.: Bayesian inference in statistical analysis, Addison-Wesley, 1973
- [6] Veneziano, D.: A theory of reliability which includes statistical uncertainty, Proc. of the 2nd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soils and Structural Engineering, Aachen 1975
- [7] Rackwitz, R.: Statistische Beobachtungen, stochastische Modelle und Zuverlässigkeitstheorien für Bauwerke, in: Neuere Ergebnisse aus der Theorie der Normung, 43. SFB-Kolloquium, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, SFB 96, TU München, Heft 25, 1978
- [8] Rackwitz, R.: Die Anwendung der Bayesschen statistischen Entscheidungstheorie auf Probleme der Qualitätskontrolle von Beton, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, SFB 96, TU München, Heft 15, 1976
- [9] Rackwitz, R.: Über die Wirkung von Abnahmekontrollen auf das Verteilungsgesetz von normalen Produktionsprozessen bei bekannter Standardabweichung, Materialprüfung 21, 1979, S. 122
- [10] Rackwitz, R.; Breitung, K.: The effect of compliance control on the distribution of gaussian production processes, wird veröffentlicht in: Proceedings of the 3rd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soils and Structural Engineering, Sidney, Jan 29 - Febr. 2, 1979, Vol. 3
- [11] Proschan, F.: Confidence and tolerance interval for the normal distribution, Journal of the American Statistical Association, 48, 1953, pp. 550
- [12] Chew, V.: Simultaneous prediction intervals, Technometrics, 10, 1968, pp. 323

- [13] Guttman, J.: Statistical tolerance regions - classical and bayesian, Griffin's Statistical Monographs, No. 26, Hafner Publ. 1970
- [14] Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen, Entwurf 1977, Institut für Bautechnik, Berlin
- [15] Aitchison, J.; Sculthorpe, D.: Some problems in statistical prediction, *Biometrika*, 52, 3+4, 1965, pp. 469
- [16] Owen, D.B.: Tables for computing bivariate normal probabilities, *Annals of Math. Statistics*, 27, 1956, pp.
- [17] Zelen, M.; Severo, N.C.: Probability functions, in: ^aHandbook of Mathematical Functions (Ed. Abramowitz, M. and Stegun I.A.), Dover Publ., 1970
- [18] Rackwitz, R.: First-order reliability theories and ^astochastic models, in: Proc. of the 2nd International Conference on Structural Safety and Reliability, München 1977, Werner-Verlag, 1977
- [19] Liebermann, G.J.: Prediction regions for several predictions from a single regression line, *Technometrics*, 3, 1961, pp. 21
- [20] Gupta, S.S.: Probability integrals of multivariate normal and multivariate t, *Annals of Math. Statistics*, 34, 1963, pp. 792
- [21] Rackwitz, R.: Close bounds for the reliability of structural systems, in: Non-normal vectors, quadratic limit state criteria, systems and extreme loads in first order reliability theory, *Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke*, SFB 96, TU München, Heft 29, 1978
- [22] Hahn, G.J.: Additional factors for calculating prediction intervals for samples from a normal distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1970, pp. 1667

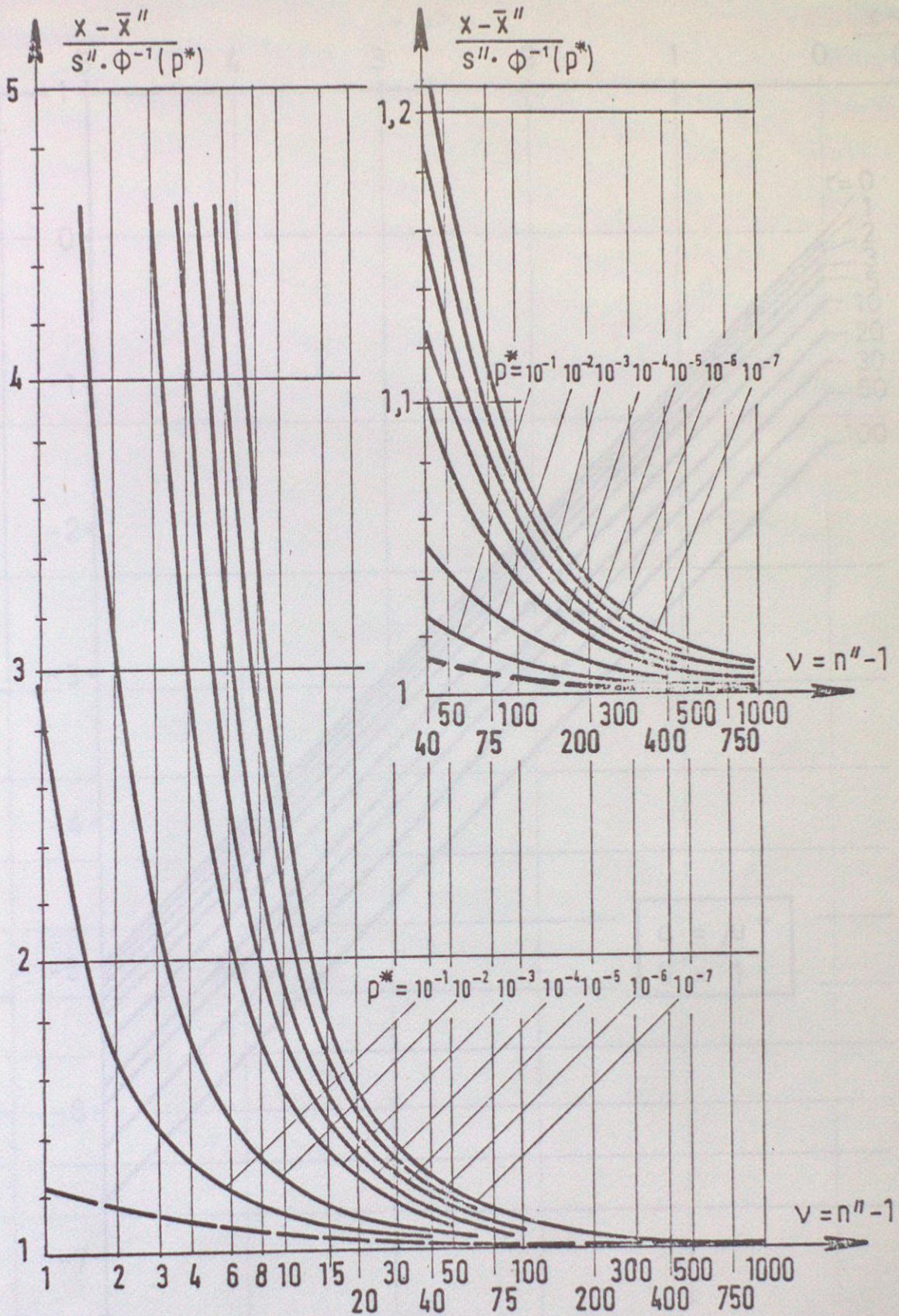


Bild 1: Inverse der Prediktorverteilung einer Gauß'schen Folge bei bekannter (gestrichelt) und unbekannter Standardabweichung

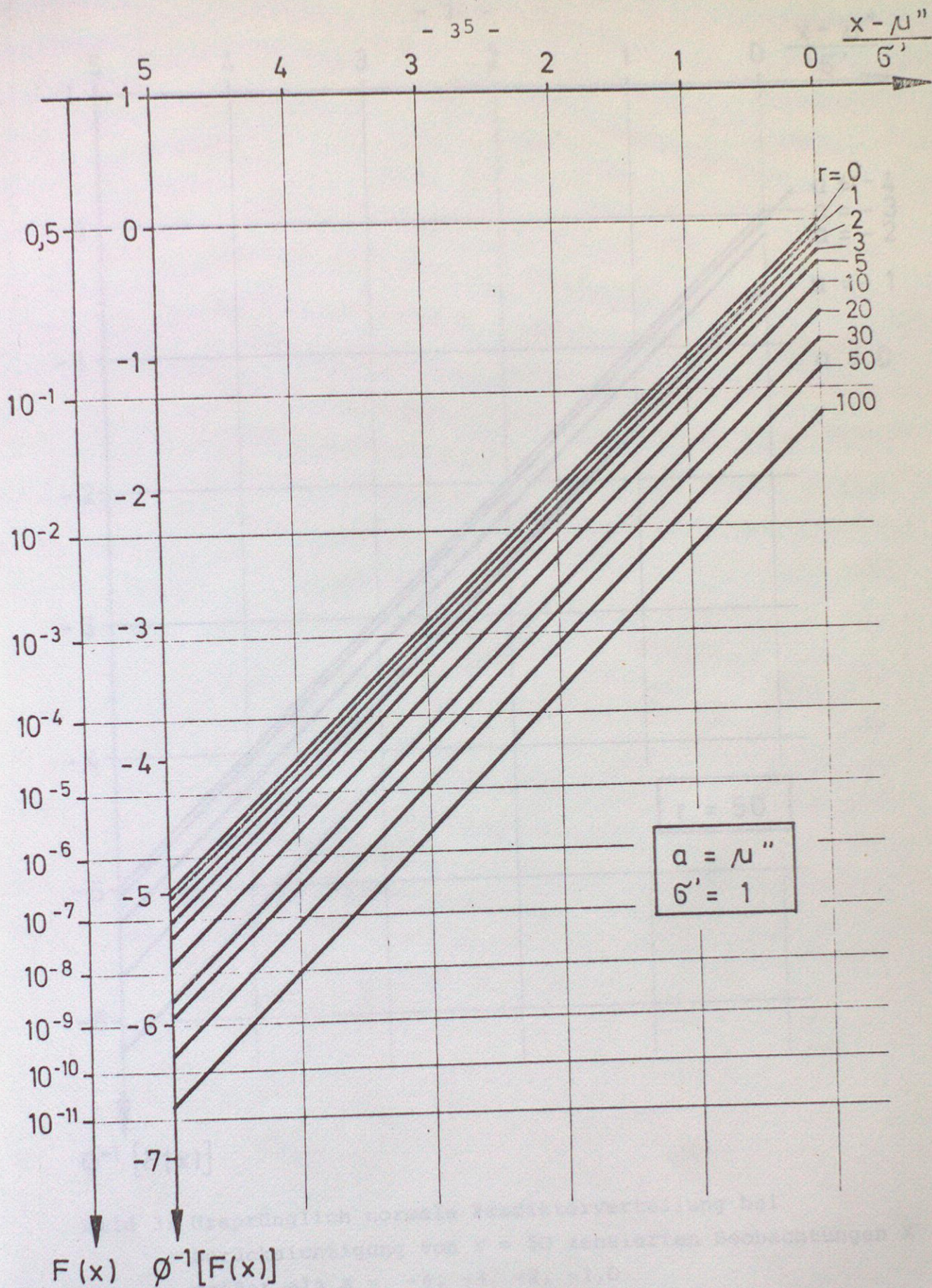


Bild 2: Ursprünglich normale Prediktorverteilung bei Berücksichtigung von r zensierten Beobachtungen $x > a$

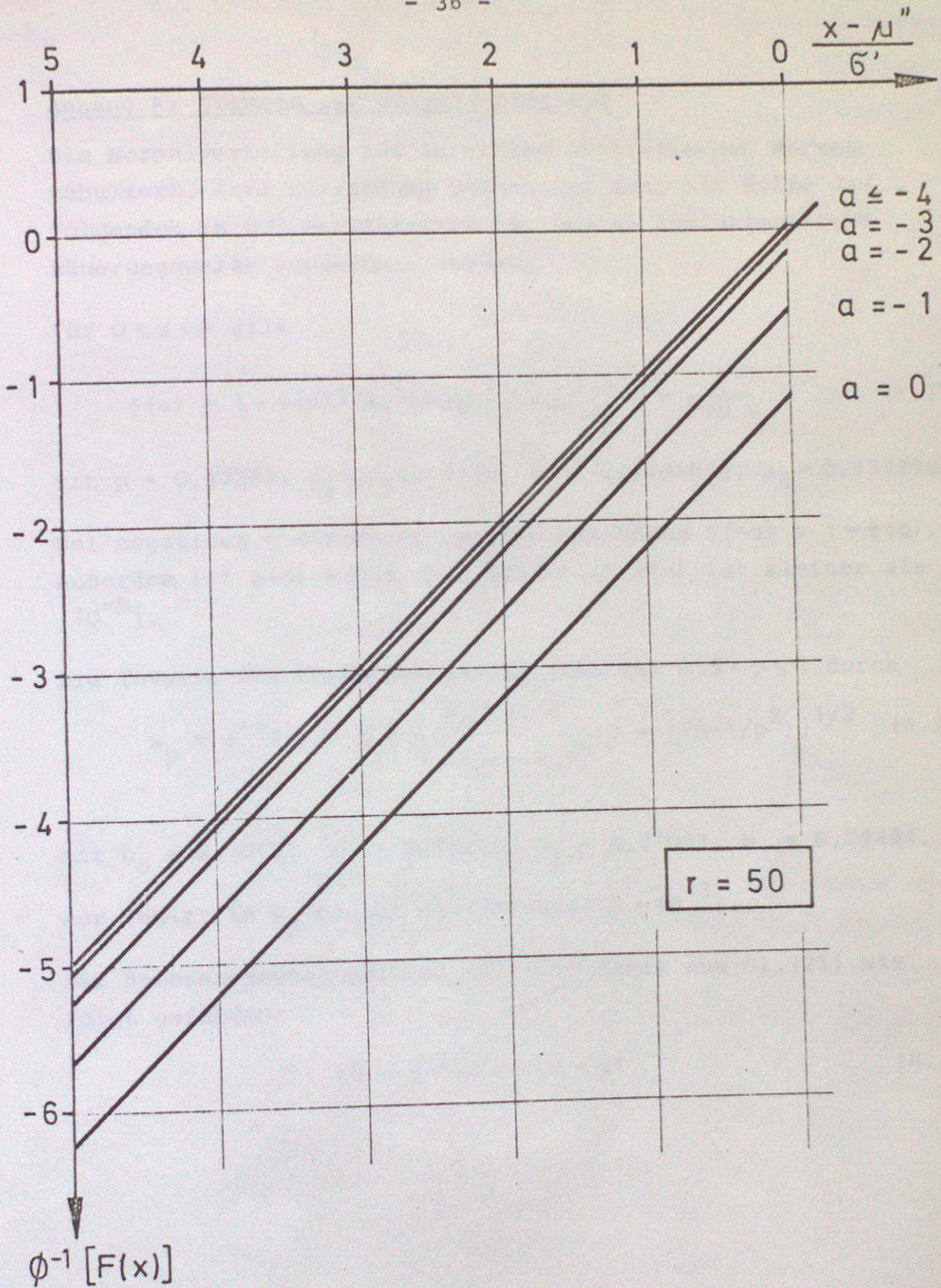


Bild 3: Ursprünglich normale Prediktorverteilung bei Berücksichtigung von $r = 50$ zensierten Beobachtungen X größer als $a = -4, -3, -2, -1, 0$

Anhang A: Formeln zur Normalverteilung

Die Normalverteilung ist in vielen statistischen Werten tabuliert. Ihre numerische Berechnung kann mit Hilfe der folgenden in [17] entwickelten rationalen Approximationen näherungsweise ausgeführt werden.

Für $0 < u < \infty$ gilt

$$\phi(u) = 1 - \varphi(u) \cdot (a_1 \cdot t + a_2 t^2 + a_3 t^3); \quad t = \frac{1}{1+p} u \quad (\text{A.1})$$

mit $p = 0,33267$, $a_1 = 0,4361836$, $a_2 = -0,1201676$, $a_3 = 0,9372980$.

Bei negativen u verwendet man die Beziehung $\phi(-u) = 1 - \phi(u)$. Außerdem ist $\phi(0) = 0,5$. Der Fehler in $\phi(u)$ ist kleiner als $|10^{-5}|$.

Die Inverse der Normalverteilung kann für $0,5 < p \leq 1$ durch

$$x_p = \phi^{-1}(p) = s - \frac{b_0 + b_1 s}{1 + b_2 s + b_3 s^2}; \quad s = [\ln(1/p^2)]^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

mit $b_0 = 2,30753$, $b_1 = 0,99229$, $b_2 = 0,27061$, $b_3 = 0,04481$.

Der Fehler in x_p bleibt kleiner als $|3 \cdot 10^{-3}|$.

Der Bemessungswert nach Gl.(C) wird damit aus Gl.(21) wie folgt gefunden:

$$x^* = \phi^{-1}(p^*) \cdot \sigma' + \mu' \quad (\text{A.3})$$

Anhang B: Formeln zur Student'schen-t-Verteilung

Die Student'sche-t-Verteilung ist in den meisten statistischen Handbüchern für $P(T \leq |t| | v) = \alpha$ für mehrere α tabuliert. Für numerische Rechnungen empfiehlt sich [17]:

$$F_T(t|v) = P(T \leq t | v) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2}) (1 + \frac{x^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}}{\sqrt{\pi \cdot v} \cdot \Gamma(\frac{v}{2})} dx$$

$$= \begin{cases} \sin \theta \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cos^4 \theta + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (v-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (v-2)} \cos^{v-2} \theta \right\} \\ \quad \text{für geradzahliges } v \geq 2 \\ \frac{2}{\pi} \theta + \frac{2}{\pi} \cos \theta \left\{ \sin \theta \left[1 + \frac{2}{3} \cos^2 \theta + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (v-3)}{1 \cdot 3 \dots (v-2)} \cos^{v-3} \theta \right] \right\} \\ \quad \text{für ungeradzahliges } v > 1 \\ \frac{2}{\pi} \theta \quad \text{für } v = 1 \end{cases} \quad (B1)$$

mit $\theta = \tan^{-1}(t/\sqrt{v})$

Für die Inverse der t-Verteilung sind keine analytischen Lösungen bekannt. Sehr gute Ergebnisse werden durch Entwicklung in Cornish-Fisher Reihen [17] erhalten. Es sei

$$x_\varphi = \phi^{-1}(p^*) \quad (B.2)$$

Dann ist

$$t_{p,v} = F_T^{-1}(p^* | v) = \left(x_\varphi + \frac{h_1(x_\varphi)}{v} + \frac{h_2(x_\varphi)}{v^2} + \frac{h_3(x_\varphi)}{v^3} + \dots \right) \quad (B.3)$$

mit

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{1}{4} (z^3 + z) \\ h_2(z) &= \frac{1}{96} (5z^5 + 16z^3 + 3z) \\ h_3(z) &= \frac{1}{384} (3z^7 + 19z^5 + 17z^3 - 15z) \\ h_4(z) &= \frac{1}{92160} (79z^9 + 776z^7 + 1482z^5 - 1920z^3 - 945z) \end{aligned}$$

Anwendung von (B.2) empfiehlt sich nur für $v \geq 5$.

Der Bemessungswert x^* nach Gl.(C) ergibt sich dann durch Auflösen von (30) zu

$$x^* = t_{p^*} \left(\frac{q/(m^v-1)}{(m^v+1)/m^v} \right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

mit $v = (m^v-1)$ in (A.2).

Für große v , etwa $v \geq 50$ kann (B.3) durch $t_{p,v} = \phi^{-1}(p^*)$ ersetzt werden. Dabei darf p^* jedoch nicht zu klein werden.

Tabelle B1 enthält eine Reihe von häufig benutzten Werten $t_{p,v}$ die, nach Kenntnis des Autors, für die benötigten kleinen Wahrscheinlichkeiten p^* im Schrifttum noch nicht tabuliert sind. Ihre Berechnung erfolgte durch iterative Auflösung von $p^* = F_T(t|v)$.

Tab. B1: Inverse Stütz wahrscheinl. mit pannung für kleine Wahrscheinlichkeiten p

BETA	3,090		3,719		4,265		4,754		5,200	
ALPHA+BFETA	3,090	2,627	3,719	3,161	4,265	3,625	4,754	4,041	5,200	4,420
P	1,00E+03	4,31E+03	1,00E+04	7,86E+04	1,00E+05	1,44E+04	1,00E+06	2,67E+05	1,00E+07	4,95E+06
1	3,18E+02	7,38E+01	3,18E+03	4,05E+02	3,18E+04	2,21E+03	3,18E+05	1,19E+04	3,18E+06	6,44E+04
2	2,23E+01	1,07E+01	7,07E+01	2,52E+01	2,24E+02	5,88E+01	7,07E+02	1,37E+02	2,24E+03	3,18E+02
3	1,02E+01	6,16E+00	2,22E+01	1,11E+01	4,79E+01	1,96E+01	1,03E+02	3,65E+01	2,23E+02	6,06E+01
4	7,17E+00	4,80E+00	1,30E+01	7,65E+00	2,33E+01	1,19E+01	6,16E+01	1,82E+01	7,60E+01	2,78E+01
5	5,89E+00	4,18E+00	9,68E+00	6,22E+00	1,55E+01	8,96E+00	2,48E+01	1,27E+01	3,93E+01	1,79E+01
6	5,21E+00	3,83E+00	8,02E+00	5,46E+00	1,20E+01	7,51E+00	1,78E+01	1,01E+01	1,36E+01	1,36E+01
7	4,79E+00	3,61E+00	7,06E+00	5,00E+00	1,01E+01	6,66E+00	1,42E+01	8,70E+00	1,99E+01	1,12E+01
8	4,50E+00	3,46E+00	6,44E+00	4,69E+00	8,91E+00	6,10E+00	1,21E+01	7,78E+00	1,63E+01	9,80E+00
9	4,30E+00	3,34E+00	6,01E+00	4,46E+00	8,10E+00	5,72E+00	1,07E+01	7,16E+00	1,60E+01	8,84E+00
10	4,14E+00	3,26E+00	5,69E+00	4,30E+00	7,53E+00	5,43E+00	9,75E+00	6,70E+00	1,25E+01	8,16E+00
11	4,02E+00	3,19E+00	5,45E+00	4,17E+00	7,10E+00	5,21E+00	9,04E+00	6,36E+00	1,14E+01	7,66E+00
12	3,93E+00	3,13E+00	5,26E+00	4,06E+00	6,77E+00	5,04E+00	8,50E+00	6,10E+00	1,06E+01	7,27E+00
13	3,85E+00	3,09E+00	5,11E+00	3,98E+00	6,50E+00	4,90E+00	8,08E+00	5,89E+00	9,91E+00	6,96E+00
14	3,79E+00	3,05E+00	4,99E+00	3,91E+00	6,29E+00	4,79E+00	7,74E+00	5,72E+00	9,40E+00	6,71E+00
15	3,73E+00	3,02E+00	4,88E+00	3,85E+00	6,11E+00	4,69E+00	7,46E+00	5,57E+00	8,99E+00	6,51E+00
16	3,69E+00	2,99E+00	4,79E+00	3,80E+00	5,96E+00	4,61E+00	7,23E+00	5,45E+00	8,64E+00	6,34E+00
17	3,65E+00	2,97E+00	4,71E+00	3,76E+00	5,83E+00	4,54E+00	7,04E+00	5,35E+00	8,36E+00	6,19E+00
18	3,61E+00	2,93E+00	4,65E+00	3,72E+00	5,72E+00	4,48E+00	6,87E+00	5,26E+00	8,11E+00	6,06E+00
19	3,58E+00	2,93E+00	4,59E+00	3,69E+00	5,63E+00	4,43E+00	6,72E+00	5,18E+00	7,91E+00	5,95E+00
20	3,55E+00	2,91E+00	4,54E+00	3,66E+00	5,54E+00	4,38E+00	6,60E+00	5,11E+00	7,72E+00	5,86E+00
22	3,50E+00	2,88E+00	4,45E+00	3,61E+00	5,40E+00	4,30E+00	6,39E+00	4,99E+00	7,62E+00	5,70E+00
24	3,47E+00	2,86E+00	4,38E+00	3,56E+00	5,29E+00	4,24E+00	6,22E+00	4,90E+00	7,19E+00	5,57E+00
26	3,43E+00	2,84E+00	4,32E+00	3,53E+00	5,20E+00	4,18E+00	6,08E+00	4,83E+00	6,99E+00	5,47E+00
28	3,41E+00	2,82E+00	4,28E+00	3,50E+00	5,12E+00	4,12E+00	5,97E+00	4,76E+00	6,83E+00	5,38E+00
30	3,39E+00	2,81E+00	4,23E+00	3,48E+00	5,05E+00	4,10E+00	5,87E+00	4,71E+00	6,70E+00	5,30E+00
35	3,34E+00	2,78E+00	4,15E+00	3,43E+00	4,93E+00	4,03E+00	5,69E+00	4,60E+00	6,45E+00	5,16E+00
40	3,31E+00	2,76E+00	4,09E+00	3,39E+00	4,84E+00	3,97E+00	5,55E+00	4,52E+00	6,27E+00	5,06E+00
45	3,28E+00	2,75E+00	4,05E+00	3,37E+00	4,78E+00	3,93E+00	5,45E+00	4,46E+00	6,13E+00	4,98E+00
50	3,26E+00	2,73E+00	4,01E+00	3,34E+00	4,71E+00	3,90E+00	5,38E+00	4,42E+00	6,03E+00	4,92E+00
75	3,20E+00	2,70E+00	3,91E+00	3,28E+00	4,55E+00	3,80E+00	5,15E+00	4,29E+00	5,73E+00	4,74E+00
100	3,17E+00	2,68E+00	3,86E+00	3,25E+00	4,48E+00	3,76E+00	5,05E+00	4,22E+00	5,59E+00	4,66E+00
200	3,13E+00	2,65E+00	3,79E+00	3,21E+00	4,37E+00	3,69E+00	4,90E+00	4,13E+00	5,39E+00	4,54E+00
300	3,12E+00	2,64E+00	3,77E+00	3,19E+00	4,33E+00	3,67E+00	4,85E+00	4,10E+00	5,32E+00	4,50E+00
400	3,11E+00	2,64E+00	3,75E+00	3,18E+00	4,32E+00	3,66E+00	4,82E+00	4,08E+00	5,29E+00	4,48E+00
500	3,11E+00	2,64E+00	3,75E+00	3,18E+00	4,31E+00	3,65E+00	4,81E+00	4,08E+00	5,27E+00	4,47E+00
750	3,10E+00	2,63E+00	3,74E+00	3,17E+00	4,29E+00	3,64E+00	4,79E+00	4,06E+00	5,25E+00	4,45E+00
1000	3,10E+00	2,63E+00	3,73E+00	3,17E+00	4,29E+00	3,64E+00	4,78E+00	4,06E+00	5,24E+00	4,44E+00
9999	3,09E+00	2,63E+00	3,72E+00	3,16E+00	4,27E+00	3,63E+00	4,76E+00	4,04E+00	5,20E+00	4,42E+00

Freiheitsgrad v = n - 1

Anhang C: Invertierung von Gl.(24)

Es ist nach Gl.(24)

$$p^* = G_X(u^* | \alpha, \beta, r) \quad (C.1)$$

mit

$$u^* = \frac{x^* - \mu''}{(\sigma''^2 + \sigma^2)^{1/2}} \quad (C.2)$$

$$\alpha = a(1 + 1/\beta^2)^{-1/2} \quad (C.3)$$

$$\beta = \sigma/\sigma'' \quad (C.4)$$

$$\sigma'' =$$

Die Tabellen C.1-6 enthalten für $p^* = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-6}$ die Werte u^* für $\alpha = 0, -1, -2, -3$ und $\beta = 0,1, 0,2, 0,5, 1,0, 2,0, 5,0, 10,0$ bei $r = 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50, \text{ und } 100$. Sie wurden durch Lösung von (C.1) auf dem Wege numerischer Integration gewonnen und haben einen maximalen Fehler von $\epsilon \leq |0,01|$.

Tab. C2: Inverse u^* zur Prediktorverteilung $G_X(\cdot | \cdot)$ mit zensierten Beobachtungen $X > a$.
 $u^* = (a - \mu) (\sigma^2 + \sigma^2)^{-1/2}$; $\alpha = a(1 + 1/\beta^2)^{-1/2}$; $\beta = \sigma/\sigma^*$;
 $p = .1E=01$

ALPHA	BETA	R	1	2	3	5	10	20	30	50	100
0	.1		.136	.65	.31	.06	.48	.84	1.03	1.24	1.51
0	.2		.184	.12	.77	.40	.02	.38	.57	.79	1.06
0	.5		.230	.67	.135	.99	.57	.21	.02	.20	.67
0	1.0		.242	.02	.177	.66	.06	.70	.50	.28	.01
0	2.0		.239	.23	.210	.90	.58	.25	.05	.81	.50
0	5.0		.234	.31	.228	.22	.11	.92	.78	1.58	1.28
0	10.0		.233	.32	.231	.30	.26	.19	.13	.203	1.83
.1	.1		.1033	.92	.963	.30	.92	.60	.62	.822	.797
.1	.2		.611	.54	.525	.93	.56	.24	.07	.387	.362
.1	.5		.566	.24	.300	.73	.39	.08	.92	1.73	1.69
.1	1.0		.209	.66	.251	.31	.03	.75	.60	1.41	1.17
.1	2.0		.232	.64	.238	.28	.11	.89	.76	1.58	1.34
.1	5.0		.236	.35	.234	.32	.27	.18	.12	.201	1.83
.1	10.0		.234	.33	.233	.32	.31	.28	.26	.221	.212
.2	.1		.1864	.24	.1803	.79	.50	.25	.10	.1694	16.74
.2	.2		.971	.35	.915	.93	.65	.40	.27	.811	.790
.2	.5		.467	.65	.432	.615	.92	.70	.58	.563	.324
.2	1.0		.317	.09	.303	.94	.78	.62	.51	.238	.220
.2	2.0		.258	.56	.255	.52	.45	.36	.30	.220	.205
.2	5.0		.237	.37	.237	.36	.35	.33	.31	.228	.221
.2	10.0		.234	.34	.234	.34	.33	.33	.32	.231	.229
.3	.1		.2290	.82	.2278	.72	.65	.58	.54	.2249	.2262
.3	.2		.1162	.54	.1149	.63	.54	.25	.19	.1112	11.03
.3	.5		.513	.08	.504	.99	.91	.81	.75	.468	.457
.3	1.0		.328	.26	.325	.23	.19	.13	.09	.304	.295
.3	2.0		.260	.60	.260	.60	.58	.57	.55	.253	.248
.3	5.0		.237	.37	.237	.37	.37	.37	.37	.236	.235
.3	10.0		.234	.34	.234	.34	.34	.34	.34	.234	.233

In der Berichtsreihe sind bisher erschienen:

Heft 1/1972	Mathematische Hilfsmittel zur Sicherheitstheorie	(7 Beiträge)
Heft 2/1973	Seminarvorträge zur Sicherheitstheorie	(7 Beiträge)
Heft 3/1973	Beiträge zur Zuverlässigkeit von Betonbauwerken	(11 Beiträge)
Heft 4/1973	Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der Knicksicherheit von schlanken Stahlbetonstützen	O. Knappe R. Rackwitz
Heft 5/1974	Zur Sicherheitstheorie im konstruktiven Stahlbau	Chr. Petersen R. Hawranek
Heft 6/1975	Monte Carlo-Studie zur Zuverlässigkeit von durchlaufenden Stahlbetondecken in Bürogebäuden	U. Kraemer R. Rackwitz E. Grasser
Heft 7/1973	Festigkeitsverhalten von Fichtenbrettschichtholz; Teil 1: Versuchseinrichtung für Kurzzeit-Druckversuche	P. Glos W. Maier U. Weigle
Heft 8/1975	Sicherheit gedrückter Stahlstützen, Teil I: Grundlagenvergleich mit den Versuchen der Europäischen Konvention der Stahlbauverbände am Profil IPE 160	R. Hawranek Chr. Petersen
Heft 9/1975	Zur Sicherheit von statisch beanspruchten HV-Verbindungen unter besonderem Bezug auf die DAST-Richtlinien der Jahre 1956, 1963 und 1974	R. Hawranek
Heft 10/1975	Deterministische und stochastische Analyse des Tragverhaltens von Stahlbetonbauteilen unter Last- und Zwangbeanspruchungen	G. Thielen
Heft 11/1976	Statistische Untersuchungen von geometrischen Abweichungen an ausgeführten Stahlbetonbauteilen, Teil 1: Geometrische Imperfektionen bei Stahlbetonstützen	G. Maaß R. Rackwitz
Heft 12/1976	Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Lebensdauervertelung nach Freudenthal et al.	B. Krzykacz M. Kersken-Bradley
Heft 13/1976	Studien für ein stochastisches Modell der Betondruckfestigkeit, Teil 1: Untersuchung zur Betondruckfestigkeit im Bauwerk sowie zum Qualitätsangebot von Beton	R. Rackwitz K.F. Müller G. Maaß
Heft 14/1976	Numerische Methoden probabilistischer Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise	B. Fießler H. Hawranek R. Rackwitz

Heft 15/1976	Die Anwendung der Bayesschen statistischen Entscheidungstheorie auf Probleme der Qualitätskontrolle von Beton	R. Rackwitz
Heft 16/1977	Zur Ermittlung optimaler Sortiermethoden bei der Herstellung von Brettschichtbauteilen	M. Kersken-Bradley W. Maier
Heft 17/1977	Zwei Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie erster Ordnung bei zeitlich veränderlichen Lasten	R. Rackwitz B. Fießler
Heft 18/1977	Zuverlässigkeitsuntersuchungen an Brettschichtträgern, bemessen nach DIN 1052	M. Kersken-Bradley
Heft 19/1977	Zur Untersuchung stationärer Lastwirkungsprozesse von statisch reagierenden Straßen- und Eisenbahnbrücken mit der Spektralmethode	T. Geidner
Heft 20/1977	Zur Verteilung der Parameter der Wöhlerlinie für St 37 und St 52	R. Quel
Heft 21/1977	Einige Beiträge zur Zuverlässigkeit von Bauwerken	R. Rackwitz
Heft 22/1977	Die genäherte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe rotationssymmetrischer Grenzzustandsflächen 2. Ordnung	B. Fießler H.-J. Neumann R. Rackwitz
Heft 23/1978	Zur Statistik der Lage und Größe der Vorspannbewehrung	G. Maaß
Heft 24/1978	Beiträge zur Risiko- und Zuverlässigkeitsbeurteilung von Tragwerken	J. Bauer, H.S.Choi H.Kappler, O.W.Knappe H.-J.Melzer H.Panggabean K.-H.Reichmann G.I.Schuëller R.F.Schwarz
Heft 25/1978	Neuere Ergebnisse aus der Theorie der Normung, Beiträge zum 43. SFB-Kolloquium, München, 1.März 1978	
Heft 26/1978	Statistische Methoden und ihre Anwendungen im Ingenieurbau - Teil I: Grundlagen	H. Kappler O.W.Knappe K.-H.Reichmann G.I.Schuëller R.F.Schwarz
Heft 27/1978	Statistische Methoden und ihre Anwendungen im Ingenieurbau - Teil II: Anwendungen	H.-J.Melzer H.-J.Niemann G.I.Schuëller
Heft 28/1978	Statistische Untersuchungen von geometrischen Abweichungen an ausgeführten Stahlbetonbauteilen, Teil II: Meßergebnisse geometrischer Abweichungen bei Stützen, Wänden, Balken und Decken des Stahlbetonhochbaus	G. Maaß

Heft 29/1978	Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung und nichtnormale Vektoren, quadratische Grenzzustandsflächen, Tragsysteme bzw. außergewöhnliche Einwirkungen	B. B. H. R. WSTEL
Heft 30/1978	Beitrag zu einem Zuverlässigkeitsmodell für Dackbalken aus Brettschichtholz unter besonderer Berücksichtigung seines Festigkeitsverhaltens	W. Maier
Heft 31/1978	Darstellung und Auswertung von Schneehöhenmessungen in der Bundesrepublik Deutschland	H. Luy R. Rackwitz
Heft 32/1978	Niveauüberschreitungen von Summen von Zufallsprozessen, deren Pfade Sprungfunktionen sind	K. Breitung
Heft 33/1978	Sicherheitstheoretische Untersuchungen zum Nachweis der tiefen Gleitfuge für einfach verankerte Baugrubenumschließungen	D. Meyer P. v. Soos
Heft 34/1978	Optimierung von Sicherheitsnachweisen mit besonderem Bezug auf den Tragsicherheitsnachweis von Stützen aus Formstahl	R. Hawranek
Heft 35/1978	Zur Bestimmung von Festigkeitsverhalten von Brettschichtholz bei Druckbeanspruchung aus Werkstoff- und Einwirkungskenngrößen	P. Glos
Heft 36/1978	Zur Zuverlässigkeit von ermüdungsbeanspruchten Konstruktionselementen in Stahl	R. Quel
Heft 37/1978	Zur Anwendung der Spektralmethode auf Lasten und Beanspruchungen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken	T. Geidner