



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik

Automatisierte Trajektorienplanung für die Nadelwickeltechnik

Patrick Ludwig Herrmann

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende/-r: Prof. Dr. rer. nat. Thomas Hamacher

Prüfende/-r der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Ralph Kennel
2. Prof. Dr.-Ing. Christian Endisch

Die Dissertation wurde am 01.10.2020 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 28.04.2021 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Forschungsgruppe Elektromobilität und Lernfähige Systeme an der Technischen Hochschule Ingolstadt und in Kooperation mit der Technologieplanung E-Antriebe der AUDI AG.

Zunächst möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Ralph Kennel danken, der ohne Zögern die Betreuung seitens der Technischen Universität München sowie das Erstgutachten übernommen hat und mich stets mit Rat und Tat unterstützte. Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Endisch, für das entgegengebrachte Vertrauen, die wissenschaftliche Freiheit bei der Gestaltung meiner Forschungsschwerpunkte, für die vielen Impulse und wissenschaftlichen Diskussionen im Laufe meiner Doktorandenzeit, der Schaffung der technischen und organisatorischen Rahmenbedingungen und nicht zuletzt für die Übernahme des Zweitgutachtens. All dies hatte erheblichen Einfluss auf das Gelingen dieser Arbeit.

Weiterhin gilt mein Dank den Kollegen aus der Technologieplanung E-Antriebe der AUDI AG, bei der ich als Kooperationsdoktorand tätig war. Besonders hervorheben möchte ich hier Dr.-Ing. Christian Westermaier, Dr.-Ing. Peer Stenzel, Dr.-Ing. Jan Richnow und Philipp Uhlmann für den Einblick in die industrielle Praxis, die Vorarbeit auf dem Gebiet der Nadelwickeltechnik und den fachlichen Input.

Dankeschön sagen möchte ich auch meinen Wegbegleitern in der Forschungsgruppe Elektromobilität und Lernfähige Systeme für zahllose fachliche und überfachliche Gespräche und die vielen gemeinsam verbrachten Stunden. Das tolle Arbeitsklima und die große Hilfsbereitschaft in der Gruppe werden mir immer in guter Erinnerung bleiben. Insbesondere bedanke ich mich bei Dr.-Ing. Tino Müller, Michael Pfäffl, Dr.-Ing. Simon Beyer, Dr.-Ing. Lukas Leitner, Ulrich Vögele, Johannes Ziegmann und Dr.-Ing. Martin Gerngroß für die immer guten Ratschläge.

Außerdem danke ich allen meinen Studenten, die in kleinen und großen studentischen Arbeiten ihren Anteil für dieses Forschungsprojekt geleistet haben.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Mutter, die mich all die Jahre mit voller Kraft unterstützt und gefördert hat. Ohne diesen Einsatz würde ich heute nicht diese Zeilen schreiben können. Schließlich gilt mein letzter und größter Dank meiner Freundin Irina, die mir die letzten Jahre den Rücken freigehalten hat und oft auf mich verzichten musste. Dir möchte ich diese Arbeit widmen.

Pfaffenhofen a. d. Ilm, Juni 2021

Patrick Herrmann

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Trajektorienplanung in der Nadelwickeltechnik. Gegenwärtige Verfahren zur Programmierung von Nadelwicklern zeigen sich wenig flexibel bei Änderungen im Produkt oder in der Anlagentechnik, benötigen ein aufwändig zu erzeugendes Volumenmodell der Spulen oder bedürfen vieler Iterationen, bis ein zufriedenstellendes Wicklungsergebnis erzielt ist. Das vorgestellte mehrstufige Verfahren erlaubt das automatisierte Berechnen einer Nadelwickeltrajektorie. Neben der Automation bietet es eine hohe Flexibilität in der Anwendung und ermöglicht die Maximierung des Kupferfüllfaktors. Resultat der Füllfaktoroptimierung ist ein produzierbares Wickelbild, das als Basis für die Bahnplanung dient. Mit Hilfe von Beta-Bedingungen entsteht eine stetig verbundene Bahn aus einzelnen Spline-Segmenten, die durch eine Vorschuboptimierung in einen wirtschaftlichen Nadelwickelprozess mündet. Die Evaluation des Verfahrens erfolgt an den aktiven Komponenten Stator und Rotor einer elektrischen Maschine, die für den Einsatz in einem Elektrofahrzeug geeignet sind.

Abstract

This work deals with the task of trajectory planning for the needle-winding technology. Current methods used to program needle-winding machines arise to be inflexible about changes of the product or the winding kinematics. Furthermore, they require an extensive modeling of coil solids and numerous iterations until reaching a sufficient winding. The presented multi-step procedure allows a needle-winding trajectory to be defined in an automated fashion. Besides this, it features great flexibility in the application and provides maximum copper filling factors. The filling factor optimization results in a winding layout, which is verified to be producible and provides the basis for the subsequent path planning phase. By utilizing beta-constraints, a continuous path is built up with single spline segments. The feed rate optimization step ensures an economic winding process. The procedure is evaluated using the active components stator and rotor of an electric machine designed for the use in an electric car.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
Notation und Symbole	xiii
Abkürzungen	xxi
1 Einführung	1
1.1 Die Nadelwickeltechnik und ihr Potential	2
1.2 Inhalte der Arbeit im Überblick	3
1.3 Beiträge und Einordnung der Arbeit	3
1.3.1 Die Beiträge der Arbeit im Überblick	5
1.3.2 Die Einordnung der Arbeit im Umfeld der rechnergestützten Herstellung von Wickelprodukten	6
2 Wickeltechnologien für elektrische Traktionsantriebe	7
2.1 Wicklungen und ihre Eigenschaften	7
2.1.1 Leiter einer Wicklung	7
2.1.2 Elektrische und mechanische Eigenschaften einer Wicklung	8
2.1.3 Wicklungstypen und ihr Einsatzgebiet	10
2.2 Herstellungsprozess einer elektrischen Maschine	12
2.2.1 Herstellung eines Stators mit verteilten Wicklungen	12
2.2.2 Rotorfertigung für unterschiedliche Maschinentypen	18
2.3 Anlagenkonzepte von Nadelwickelmaschinen	20
2.3.1 Vertikale Wickelkinematik	21
2.3.2 Horizontale Wickelkinematik	22
2.3.3 Roboterwickler	23
2.3.4 Programmierung der Nadelwickelanlagen	25
2.4 Zusammenfassung	25
3 Grundlagen der Robotik und Trajektorienplanung	27
3.1 Robotik	27
3.1.1 Position und Orientierung	27
3.1.2 Berechnung der Vorwärtskinematik nach Denavit-Hartenberg	29
3.1.3 Inverse Kinematik	33
3.1.4 Differentielle Kinematik	36
3.2 Interpolation von Bewegungen	37
3.2.1 Abgrenzung von Bahn und Trajektorie	37
3.2.2 Einfache Bahninterpolationsverfahren	38

3.2.3	Splineinterpolation	41
3.2.4	B-Splines	43
3.2.5	Non-uniform rational B-Splines	55
3.2.6	Parametrisierung nach der Bogenlänge	59
3.3	Von der Bahn zur Trajektorie	62
3.3.1	Vorschubplanung	63
3.3.2	Aktuelle Verfahren in der Trajektorienplanung	68
3.3.3	Trajektorieninterpolation	76
3.4	Zusammenfassung	78
4	Automatisierte Trajektorienplanung für Nadelwickler	79
4.1	Rechnergestützte Verfahren im Elektromaschinenbau	79
4.1.1	Rechnergestützte Herstellung von Wicklungen	80
4.1.2	Rahmenbedingungen für eine durchgängig virtuelle Produktentstehung elektrischer Maschinen	83
4.2	Füllfaktoroptimierung und Stützpunktberechnung	84
4.2.1	Orthozyklisches Wickelbild bei technisch realen Nuten	86
4.2.2	Heuristische Abschätzung des Füllfaktors einer Wildwicklung	92
4.2.3	Bestimmung des maximalen Füllgrades technisch realistischer Nuten	94
4.2.4	Nadelwickel-Simulationsalgorithmus	103
4.2.5	Eignung der Verfahren für eine automatisierte Trajektorienplanung	109
4.2.6	Stützpunktberechnung	112
4.3	NURBS-basierte Bahnplanung	118
4.3.1	Lineare Interpolation zweier Punkte	121
4.3.2	Verbindung zweier Punkte mit einem Kreisbogen	122
4.3.3	Stetige Verknüpfung der Bahnsegmente	128
4.3.4	Numerische Bahnoptimierung	140
4.4	Vorschubplanung und -optimierung	145
4.4.1	Konstanter Vorschub und Interpolator	149
4.4.2	Kritische-Punkte-Heuristik mit einer nach der Bogenlänge parametrisierten Nadelwickelbahn	152
4.4.3	Numerische Vorschuboptimierung	159
4.5	Evaluation in Wickelversuchen	167
4.5.1	Versuchsaufbauten	167
4.5.2	Wickelversuche	170
4.6	Zusammenfassung	170
5	Zusammenfassung und Ausblick	173
5.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	174
5.2	Ausblick	175
A	Kinematik der Wickelanlagen	177
B	Koeffizienten des Polynominterpolators	183
	Literaturverzeichnis	185

Abbildungsverzeichnis

1.1	Technologien im Zusammenspiel für eine automatisierte Trajektorienplanung	4
1.2	Schematischer Ablauf der automatisierten Trajektorienplanung	4
2.1	Schematische Darstellung zur Berechnung der Füllfaktoren	9
2.2	Verschiedene Wicklungsmuster und ihre Packungsdichten	10
2.3	Einsatzort verschiedener Wicklungstypen in einer elektrischen Maschine . . .	11
2.4	Schematische Abbildung des Nadelwickelvorgangs	14
2.5	Nadelwickeln verteilter Wicklungen mit Wickelwerkzeug	15
2.6	Automatisiertes Einbringen der Phasenisolierung durch Verwendung von Formteilen	15
2.7	Schaltring für verteilte Wicklungen	16
2.8	Vereinfachte Prozessabfolge der Herstellung einer Hairpin-Wicklung	17
2.9	Schematische Abbildung des Vertikalwicklers	21
2.10	Schematische Abbildung des Horizontalwicklers	22
2.11	Schematische Abbildung des Roboterwicklers	24
3.1	Raumvektoren und Koordinatentransformation	28
3.2	Definition der Standard-DH-Parameter	30
3.3	Geometrische Methode zur Bestimmung der inversen Kinematik	35
3.4	Interpolation von Punkten	39
3.5	Polynominterpolation und Runge-Phänomen	41
3.6	Basisfunktionen eines B-Splines	50
3.7	Mehrdimensionale Interpolation mit Polynomen und B-Splines	55
3.8	NURBS mit unterschiedlichen Gewichten w_i	57
3.9	Projektion eines NURBS durch homogene Koordinaten auf eine Hyperebene	58
3.10	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf eines Trapezprofils	64
3.11	Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Ruckverlauf eines Doppel-S-Profils	65
3.12	Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Ruckverlauf eines trigonometrischen Profils	68
3.13	Überblick über Verfahren zur Vorschubplanung	69
4.1	Parametersätze zur Erzeugung der Nutpolygonzüge	86
4.2	Füllfaktoren für orthozyklische Wickelbilder	90
4.3	Orthozyklische Wickelbilder für Beispielnuten	91
4.4	Füllfaktoren für Wickelbilder durch heuristische Abschätzung	94
4.5	Optimales Wickelbild durch heuristische Abschätzung	95
4.6	Theoretisch optimale Füllfaktoren unterschiedlicher Drahtdurchmesser	100
4.7	Wickelbild bei theoretisch optimalem Füllfaktor	102
4.8	Vektorzerlegung der Drahtzugkräfte	105
4.9	Graphische Darstellung des Optimierungsproblems	107

4.10	Globale Kostenfunktion einer Beispielkonfiguration	108
4.11	Füllgrade bei Verwendung des Nadelwickel-Simulationsalgorithmus	110
4.12	Optimales Wickelbild mit Nadelwickel-Simulationsalgorithmus	110
4.13	Vergleich der elektrischen Füllgrade der einzelnen Algorithmen	111
4.14	Dreidimensionale Ansicht der Statorgeometrie	113
4.15	Dreidimensionale Ansicht der Rotorgeometrie	113
4.16	Nutzugänglichkeit im Stator bei Verwendung der DPVS	116
4.17	Grundform der Bahn und deren Segmente	120
4.18	Lineare Splineinterpolation einer Nadelwickelbahn	123
4.19	Beispieldarstellung eines Kreisbogens	124
4.20	Splineinterpolation eines Kreisbogens einer Nadelwickelbahn	128
4.21	Parametrische Stetigkeit von Kurven	129
4.22	Koordinatenverläufe von Kurven verschiedener parametrischer Stetigkeiten	131
4.23	Splines mit unterschiedlichen Stetigkeiten	138
4.24	Koordinatenverläufe einer geometrisch stetigen Nadelwickelbahn	139
4.25	Krümmungsverhalten verschiedener Splines zur Verbindung der Rotorbahn	141
4.26	Splines mit unterschiedlichen Gewichten	143
4.27	Verbindungsspline der Statorbahn	146
4.28	Berechnung der Schrittlänge bei Überschreiten von Knotenspannen	151
4.29	Trajektorie mit konstantem Vorschub	152
4.30	Interpolationspunkte der adaptiven Simpsonregel	156
4.31	Bogenlänge und Fehler durch die Approximation	157
4.32	Ergebnis des variablen Vorschubplaners	158
4.33	Parametrische Ableitungen der Nadelwickelbahn nach der Bogenlänge	162
4.34	Abschnittsweises Optimieren des Vorschubs	166
4.35	Achs- und Vorschubprofile bei numerischer Optimierung des Vorschubs	168
4.36	Aufbau der Steuerung des Roboterwicklers	169
4.37	Wickelergebnisse für die Statoranwendung; Bildquelle [34]	170
4.38	Orthozyklischer Wicklungsaufbau am Beispiel einer Rotorwicklung	171

Tabellenverzeichnis

3.1	DH-Parameter des RWs	31
4.1	Paramtersatz der Beispielstatornut	87
4.2	Paramtersatz der Beispielrotornut	87
4.3	3D-Paramtersatz für den Beispielstator	114
4.4	3D-Paramtersatz für den Beispielrotor	114
A.1	DH-Parameter des VWs	177
A.2	DH-Parameter des HWs	180

Notation und Symbole

Notation

\mathbf{A}	Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Inverse einer Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Pseudo-Inverse einer Matrix \mathbf{A}
\mathbf{A}^T	Transponierte einer Matrix \mathbf{A}
a_{ij}	Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte einer Matrix \mathbf{A}
\mathbf{r}	Vektor \mathbf{r}
${}_B(\cdot)$	Vektor dargestellt im Koordinatensystem B
$(\cdot)'(u)$	Erste parametrische Ableitung $\frac{\partial}{\partial u}$
$(\dot{\cdot})(t)$	Erste zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$
$(\cdot)^{(k)}(u)$	k -te Ableitung $\frac{\partial^k}{\partial u^k}$
$u_{[i]}$	Wert von u am diskreten Zeitpunkt i
$\tilde{(\cdot)}$	Homogen transformierte Größe
$(\cdot)^*$	Optimale Größe
$\check{(\cdot)}$	Umparametrisierte Größe
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\ \mathbf{a}\ $	Zwei-Norm eines Vektors
i, j, ℓ, n	Indizes

Allgemein

$\mathbf{0}_{a \times b}$	$a \times b$ -dimensionaler Nullvektor oder Nullmatrix
$\mathbf{I}_{a \times b}$	$a \times b$ -dimensionale Einheitsmatrix
\mathbb{N}	Menge aller natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge aller reellen Zahlen
\mathcal{S}_{N_r}	Raum aller Polynome vom Grad N_r
$\mathcal{S}_{p, \mu}$	Spliner Raum vom Grad p , definiert auf dem Knotenvektor $\boldsymbol{\mu}$
t	Zeit

Koordinatensysteme

A	Generisches Koordinatensystem
A'	Zweites generisches Koordinatensystem
B	Bauteil-/Arbeitsraumkoordinatensystem
i	Denavit-Hartenberg-Koordinatensysteme, $i \in \{1, \dots, \nu\}$
j	Zweidimensionale Nutkoordinatensysteme am Bauteil, $j \in \{1, \dots, 4\}$
N	Allgemeines Nutkoordinatensystem
O	Basiskoordinatensystem
OB	Koordinatensystem der oberen Basis des Vertikalwicklers
Sp	Spindel-Koordinatensystem des Horizontalwicklers
TCP	Tool-Center-Point-Koordinatensystem
UB	Koordinatensystem der unteren Basis des Vertikalwicklers
W	Weltkoordinatensystem

Robotik

θ_i	Erste Denavit-Hartenberg-Koordinate der i -ten Achse eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine
d_i	Zweite Denavit-Hartenberg-Koordinate der i -ten Achse eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine
a_i	Dritte Denavit-Hartenberg-Koordinate der i -ten Achse eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine
α_i	Vierte Denavit-Hartenberg-Koordinate der i -ten Achse eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine
e_x	Einheitsvektor in x Richtung
r_{geo}	Geometrischer Punkt zur Bestimmung der inversen Kinematik nach der geometrischen Methode
f_{kin}	Vektorfunktion der Vorwärtskinematik
F_q	Erste komponentenweise parametrische Ableitung der Jacobimatrix
G_q	Zweite komponentenweise parametrische Ableitung der Jacobimatrix
i_{kin}	Vektorfunktion der inversen Maschinenkinematik
J	Jacobimatrix der Vorwärtskinematik
J_r	Jacobimatrix der Translation
J_ξ	Jacobimatrix der Rotation
$L_x(d)$	Elementartranslation der Länge d entlang der Achse x
$\tilde{L}_x(d)$	Homogene Elementartranslation der Länge d entlang der Achse x
ν	Freiheitsgrad der Kinematik

\mathbf{q}	Achskoordinaten
${}^{A'}\tilde{\mathbf{T}}_A$	Homogene Transformationsmatrix von A nach A'
R	Generischer Raumpunkt
${}^{A'}\mathbf{R}_A(\boldsymbol{\xi})$	Rotation von A nach A' mit Elementarrotationen der Euler-Winkel $\boldsymbol{\xi}$
O \mathbf{r}	Beliebiger Punkt im Ursprungskoordinatensystem O
$\mathbf{R}_x(\theta)$	Rotationsmatrix einer Elementarrotation θ um die Achse x
$\tilde{\mathbf{R}}_x(\theta)$	Homogene Rotationsmatrix einer Elementarrotation θ um die Achse x
$\mathbf{R}_{2D}(\theta)$	Zweidimensionale Rotationsmatrix um θ
\mathbf{s}	Arbeitsraumkoordinaten, Bahn
${}^A\mathbf{t}_{A'}$	Translation von A nach A'
$\boldsymbol{\xi}$	Euler-Winkel $\boldsymbol{\xi} = [\phi, \vartheta, \psi]^T$ der Z - X - Z -Sequenz

Zählvariablen

k	Ableitung der Ordnung k
N_a	Zählvariable bei der Definition eines Kreisbogens
N_D	Anzahl der Leiter in einer Nut
N_H	Häufigkeit eines inneren Knotenelementes von \mathbf{u}_{knot}
N_n	Anzahl der einzelnen Splines einer Nadelwickelbahn
$N_p + 1$	Anzahl der Kontrollpunkte bzw. Anzahl der Basisfunktionen eines Splines
$N_{\hat{p}} + 1$	Anzahl der Kontrollpunkte des Vorschubsplines
$N_r + 1$	Anzahl der zu interpolierenden Punkte \mathbf{r}_i
$N_u + 1$	Anzahl der Knoten eines Knotenvektors

Splines

a_0, \dots, a_{N_r}	Parameter eines Polynoms von Grad $\psi_S = N_r$ in monomialer Basis
S_i	i -te Polynom-Basisfunktion des Polynomraums \mathcal{S}_{N_r}
$N_{i,p}$	i -te B-Spline-Basisfunktion des Splineraums $\mathbb{S}_{p, \mathbf{u}_{\text{knot}}}$ vom Grad p
$B_{i,p}$	i -te Beziér-Spline-Basisfunktion vom Grad p
$R_{i,p}$	i -te rationale NURBS-Basisfunktion vom Grad p
β_i	i -te Bedingung des Beta-Parametervektors $\boldsymbol{\beta}$
\mathbf{F}	Faà di Bruno Formel zur Bestimmung der Ableitung parametrischer Funktionen
\mathcal{D}^k	k -fach stetige Differenzierbarkeit
\mathcal{C}^k	k -fach parametrische Stetigkeit
\mathcal{G}^k	k -fach geometrische Stetigkeit

c_0, \dots, c_{N_r}	Parameter eines Polynoms von Grad $\psi_S = N_r$ in Newton-Basis
d	Dimension eines Punktes
\mathcal{H}	Homogene Transformation eines NURBS
κ	Krümmung einer parametrischen Kurve
\mathcal{N}	Nennerpolynom eines NURBS
\mathbf{Z}	Zählerpolynom eines NURBS
p	Grad eines Splines
ψ_S	Grad eines Polynoms
\mathbf{P}	Kontrollpunktematrix $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{N_p}] \in \mathbb{R}^{d \times N_p + 1}$
\mathbf{N}	Basisfunktionsmatrix $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N_r + p \times N_p + 1}$
\mathbf{R}	Interpolationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_r + p \times d}$
\mathbf{p}_i	Kontrollpunkt i der Dimension \mathbb{R}^d
w_i	Gewicht i
σ	Parametrisierung nach der Bogenlänge
Σ_l	Bogenlänge einer parametrischen Kurve
iS	i -tes Splinesegment eines Splines $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{p, \mu}$ mit $iS \in \mathcal{S}_p$
\mathbf{u}_{knot}	Knotenvektor
u	Splineparameter einer parametrischen Kurve oder eines Splines
u_{\min}	Untere Schranke des Definitionsbereichs eines Splines
u_{\max}	Obere Schranke des Definitionsbereichs eines Splines
(μ_i, \mathbf{r}_i)	i -tes zu interpolierendes Tupel von Punkt \mathbf{r}_i am Splinewert μ_i
$(\mu_{i, \text{zus}}, \mathbf{r}_{i, \text{zus}})$	Zusätzlich eingeführtes zu interpolierendes Tupel
$(\mu_{i, \text{Abl}}, \mathbf{d}_{i, k})$	Zu interpolierendes k -tes Ableitungstupel
\bar{u}_i	i -tes Element des Knotenvektors \mathbf{u}_{knot}
v_n	Splineparameter eines Teilstücks \mathbf{s}_n
$\varphi_{i, p}$	Funktional bei Verwendung der Marsden's-Identität
$\mathbf{V}_{N_r + 1}$	Vandermonde-Matrix vom Grad $N_r + 1$
$\zeta_{i, j}$	Parameter zur Bestimmung der Ableitungen der B-Spline-Basisfunktionen

Nadelwickeln und Trajektorienplanung

A_{Sp}	Eingeschlossener Querschnitt einer Spule
A_{Cu}	Kupferquerschnitt einer Spule
a_{fr}	Beschleunigung, erste zeitliche Ableitung des Vorschubs
a_{max}	Maximale zulässige Beschleunigung
$A_{\text{N, Iso}}$	Nutquerschnitt der isolierten Nut
A_{N}	Nutquerschnitt

$\mathbf{a}_{q,\max}$	Maximale Achsbeschleunigungen einer Nadelwickelkinematik
ϵ_s	Bahnfehler durch Interpolation der Trajektorie
ϵ_D	Maximaler Toleranzwert des Drahtaußendurchmessers
j_{fr}	Ruck, zweite zeitliche Ableitung des Vorschubs
j_{\max}	Maximaler zulässiger Ruck
$\dot{\mathbf{j}}_{q,\max}$	Maximale Achsrücke einer Nadelwickelkinematik
k_e	Elektrischer Füllfaktor, Kupferfüllfaktor
k_m	Mechanischer Füllfaktor
\hat{k}_m	Geschätzter mechanischer Füllfaktor
$\hat{\kappa}$	Parameter zur Reduzierung der Geschwindigkeit bei zu großer Krümmung
l	Tatsächliche Schrittlänge bei der Trajektorieninterpolation
l_1	Länge von Arm 1 des Roboterwicklers
l_2	Länge von Arm 2 des Roboterwicklers
\hat{l}	Soll-Schrittlänge bei der Trajektorieninterpolation
l_{Cu}	Leiterlänge
L_{Sp}	Induktivität einer Spule
l_{Tool}	Länge der Nadel
n_{Hub}	Hubzahl
o_{Tool}	Länge des Auslegers der Nadelwickelanlagen
r_D	Drahtradius mit Lackisolierung
$r_{D,Cu}$	Drahtradius ohne Lackisolierung
ρ_{Cu}	Spezifischer Widerstand von Kupfer
\mathbf{R}_{Nut}	Polygonzug der mechanischen Nut
$\mathbf{R}_{Nut,Iso}$	Polygonzug der isolierten Nut
R_{Sp}	Elektrischer Widerstand einer Spule
\mathbf{R}_{Wk}	Polygonzug des Wickelwerkzeugs (Stator) bzw. der Endkappe (Rotor)
$S(a, b)$	Simpson-Regel zur numerischen Integration
ϵ	Genauigkeitsparameter der numerischen Integration mit der Simpson-Regel
T	Maximale Trajektoriendauer
τ_i	i -te Zeitkonstante eines analytischen Geschwindigkeitsprofils
t_{Hub}	Zeit für einen Hub
T_s	Taktrate eines digitalen Systems
v_0	Startgeschwindigkeit
v_{end}	Endgeschwindigkeit
v_{ϵ_s}	Geschwindigkeitsgrenze zur Vermeidung eines zu großen Bahnfehlers
v_{fr}	Vorschub
$v_{\hat{\kappa}}$	Geschwindigkeitsbegrenzung bei zu hohen Krümmungen

v_{\max}	Maximale zulässige Geschwindigkeit
$\mathbf{v}_{q,\max}$	Maximale Achsgeschwindigkeiten einer Nadelwickelkinematik
z_p	Anzahl paralleler Windungen pro Spule
$z_{p,\text{Hub}}$	Anzahl gleichzeitiger gewickelter paralleler Leiter
z_s	Anzahl serieller Windungen pro Spule

Geometrische Größen

b_N	Breite der Rotornut
b_{Gr}	Breite der Rillen der Rotornut
r_{Gr}	Radius der Rillen der Rotornut
l_b	Länge der Flanke am Nutgrund der Rotornut
ϕ_b	Winkel der Flanke am Nutgrund der Rotornut
l_t	Länge der Flanke am Pol der Rotornut
ϕ_t	Winkel der Flanke am Pol der Rotornut
r_t	Radius am Übergang zum Pol der Rotornut
h_t	Höhe des Pols der Rotornut
h_E	Höhe der Endkappe
h_{EN}	Höhe der Endkappe am Nutgrund
ϕ_P	Polteilung
b_Z	Zahnbreite des Rotors
r_Z	Innenradius des Rotorzahns
d_{DS}	Dicke des Deckschiebers der Statornut
b_{DS}	Breite des Deckschiebers der Statornut
d_{Iso}	Dicke der Nutgrundisolation der Statornut
r_b	Radius des Nutgrunds der Statornut
r_{eb}	Radius der Ecke am Nutgrund der Statornut
r_{et}	Radius der Ecke am Zahnsteg der Statornut
b_b	Breite der Statornut am Nutgrund
b_t	Breite der Statornut am Zahnsteg
h_N	Höhe der Statornut
ϕ_{et}	Winkel der konischen Statornut
h_{WK}	Höhe des Wickelkopfes
r_{NG}	Innenradius des Nutgrunds
b_{WK}	Breite des Wickelkopfes
r_{WK}	Innenradius des Wickelkopfs
ϕ_Z	Nutteilung

h_{BP} Höhe des Blechpaketes

Optimierung

α_{init}	Startwinkel zur Optimierung beim NWSA
$b_{\hat{p}_{v_{\text{fr}}},i}$	Breite des Optimierungsfensters beim i -ten Schritt der Vorschuboptimierung
$\Delta b_{\hat{p}_{v_{\text{fr}}},i}$	Überlapp des Optimierungsfensters beim i -ten Schritt der Vorschuboptimierung
c_{D}	Nebenbedingung: Drähte überschneiden sich nicht
c_0	Nebenbedingung: Stillstand am Anfang und Ende der Trajektorie
c_{Nut}	Nebenbedingung: Draht ist innerhalb der Nut
c_q	Nebenbedingung: Begrenzung durch die Achsantriebe
c_t	Nebenbedingung: Begrenzung der tangentialen Größen der Trajektorie
$\delta(\cdot, \cdot)$	Deltafunktion zur Berechnung der euklidischen Distanz der beiden Eingänge
\mathbf{f}	Drahtzugkraftvektor zur Füllfaktoroptimierung
J_i	Kostenfunktion
\mathbf{n}_{RV}	Richtungsvektor zur Bestimmung eines orthozyklischen Wickelbildes
Φ	Parametervektor für die numerische Trajektorienoptimierung

Abkürzungen

ASM	Asynchronmaschine
BEF	Batterie-elektrisches Fahrzeug
BPP	Behälter-Packungsproblem, Bin Packing Problem
CAD	Computer-Aided Design
CAM	Computer-Aided Manufacturing
CAQ	Computer-Aided Quality
CAx	Computer-Aided x
CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff, auch carbon-faserverstärkter Kunststoff
CNC	Computerized Numerical Control
DH	Denavit-Hartenberg
DPVS	Drehpunktverschiebung
EF	Elektrofahrzeug
EFF	Elektrischer Füllfaktor
FEM	Finite-Elemente-Methode
FSM	Fremderregte Synchronmaschine
GA	Genetischer Algorithmus
GSM	Gleichstrommaschine
HW	Horizontalwickler
IDK	Inverse differentielle Kinematik
KOS	Koordinatensystem
KVS	Konstanter Vorschub, constant feed rate
LGS	Lineares Gleichungssystem
MFF	Mechanischer Füllfaktor
NLP	Nichtlineares Programmierungsproblem
NP	Nicht-deterministische Polynomialzeit
NURBS	Non-uniform Rational B-Spline
NWSA	Nadelwickel-Simulationsalgorithmus
PBL	Parametrisierung nach der Bogenlänge
PFFH	Potentialbasierte Füllfaktor-Heuristik
PSM	Permanenterregte Synchronmaschine
RW	Roboterwickler
SA	Simuliertes Abkühlen
SCARA	Selective Compliance Assembly Robot Arm
SPP	Sphären-Packungsproblem
SPS	Speicherprogrammierbare Steuerung
SQP	Sequentielle quadratische Programmierung

TCP	Tool-Center-Point
VW	Vertikalwickler
VWK	Vorwärtskinematik

1 Einführung

Bereits zum Ende des 19. Jahrhunderts war der Einsatz von Elektromobilen verbreitet, so waren Anfang des 20. Jahrhunderts 38 % der zugelassenen Fahrzeuge in den USA elektrisch angetrieben, im Jahr 1901 erreichte die Elektrifizierungsquote in New York sogar die 50 %-Marke [1, S. 6 f.]. Weiterentwicklungen der Verbrennerantriebe führten jedoch dazu, dass im Laufe des 20. Jahrhunderts das Elektrofahrzeug (EF) fast vollständig vom Markt verdrängt wurde.

Die Mobilität befindet sich nun jedoch im Wandel. Nach nunmehr ca. 100 Jahren der Vorherrschaft der Verbrennungsmaschinen tritt die elektrische Maschine wieder in den Wettbewerb beim Antrieb von Kraftfahrzeugen. Grund dafür sind mehrere Trends, die ineinandergreifend zu einer Renaissance der Elektromobilität führen. Die Verknappung fossiler Brennstoffe führt zu einer Teuerung des Kraftstoffes, gleichzeitig steigt das Umweltbewusstsein der Verbraucher. Darüber hinaus erlässt die Politik weltweit immer strengere Emissionsvorschriften, um die Auswirkungen des Klimawandels zu beschränken. Bisher ließen sich die Emissionsziele durch Verbesserungen in der Effizienz und der Abgasaufbereitung der Verbrennerantriebe einhalten, eine weitere Reduktion erfordert jedoch den Einsatz emissionsfreier Antriebstechnologien [1, S. 15]. Nicht zuletzt forciert durch die Dieselkrise erlassen immer mehr Kommunen in Deutschland lokale Fahrverbote, um die geltenden Vorschriften zur Luftverschmutzung einzuhalten.

Aus diesen Gründen profitiert insbesondere die urbane Mobilität von elektrifizierten Fahrzeugantrieben. Verbrennungsmaschinen weisen in diesem Bereich einen besonders hohen Kraftstoffverbrauch und damit hohe Emissionswerte auf. Die für Stadtgebiete typischen Kurzstrecken und häufigen Standzeiten der Fahrzeuge, gepaart mit den hohen Schadstoffbelastungen in den Städten, macht die Elektromobilität im urbanen Bereich attraktiv, da sie keine lokalen Emissionen erzeugt.

Ungeachtet dieser Vorteile spielen EF trotz ihrer hohen medialen Präsenz noch eine untergeordnete Rolle. So weisen elektrifizierte Fahrzeuge zwar hohe Zuwachsraten in den Zulassungsstatistiken von 47 % in 2018 aus, in absoluten Zahlen wurden in Deutschland in diesem Jahr jedoch nur rund 36 000 batterie-elektrische Fahrzeuge (BEF) zugelassen, was einen Marktanteil von lediglich 1 % ausmacht. Hinzu kamen 2018 noch rund 161 000 Fahrzeuge mit einem Hybrid- oder Plug-In-Hybrid-Antrieb, was 4,7 % Marktanteil bedeutet [2]. Brennstoffzellenfahrzeuge, die die zweite wesentliche Technologie von EF darstellen, besitzen mit einem Fahrzeugbestand von weniger als 400 Stück keine Relevanz in Deutschland [3].

Die Gründe für diese geringe Marktdurchdringung elektrifizierter Fahrzeuge, trotz der genannten Vorteile, sind eine mangelnde Infrastruktur in Bezug auf Ladestationen, ein begrenztes Angebot der Hersteller, aber vor allem Vorbehalte der Kunden in Bezug auf zu hohe Fahrzeugpreise und die begrenzte Reichweite [4, S. 26]. Auf die beiden letztgenannten Punkte kann eine Optimierung des elektrischen Antriebsstranges einwirken.

Die zwei Kernkomponenten, die in einem BEF für den Vortrieb sorgen, sind die Batterie und die elektrische Maschine. Auf letztere fokussiert sich diese Arbeit. Je nach geforderter Systemleistung können auch mehrere Maschinen im Fahrzeug zum Einsatz kommen. Um die Kundenakzeptanz zu erhöhen, sind Optimierungen am Antriebsstrang notwendig, da dieser einen erheblichen Einfluss auf Reichweite und Kosten eines EFs hat. Im Design der elektrischen Maschine sind durch jahrzehntelange Forschung und Entwicklung nur noch geringe Verbesserungen zu erwarten. Im Gegensatz dazu wurde der Produktion der elektrischen Maschine bisher wenig Beachtung geschenkt, sodass eine Optimierung der eingesetzten Produktionstechnologien deutlich größere Fortschritte verspricht. Nicht zuletzt entstehen bis zu 10 % der Kosten eines BEF durch den Elektromotor [1, S. 47]. Herzstücke der elektrischen Maschine sind die Komponenten Stator und Rotor. Diese Bauteile führen die magnetischen Felder, die zur Bildung des Drehmoments notwendig sind und von stromdurchflossenen Leitern, der sogenannten Wicklung, erzeugt werden. Abhängig vom Typ der elektrischen Maschine kommt eine Wicklung im Stator oder auch im Rotor zum Einsatz.

Aus diesem Grund ist die Wicklung eine der Kernkomponenten der elektrischen Maschine, die über Effizienz, Leistungsdichte und Produktionskosten entscheidet. Die vorliegende Arbeit befasst sich daher im Hinblick auf dieses Spannungsfeld mit der Produktion von Wicklungen für elektrische Traktionsantriebe.

1.1 Die Nadelwickeltechnik und ihr Potential

Untersucht wird dazu die Nadelwickeltechnik, die eine flexible Alternative zu herkömmlichen Wickelverfahren darstellt. Sie bietet das Potential, effiziente und kostengünstige Antriebe durch den Vorteil der exakten Drahtablage herstellen zu können. Laut Jordan [5, S. 52 f.] stellt sie ein Hub-Schwenk-Verfahren mit einer bahngesteuerten Düse dar. Die Düse, oder auch Wickelnadel, ist dabei namensgebend für die Nadelwickeltechnik. Da der Draht bei diesem Verfahren direkt in das Bauteil gewickelt wird, ist dessen genaue Positionierung möglich. Dies erlaubt zur Reduzierung von Produktionskosten eine Automatisierung der Fertigungsprozesse, die dem Wickeln zwischen- und nachgelagert sind, aber auch das Erhöhen des elektrischen Füllfaktors (EFFs) und eine höhere Produktqualität [6].

Um diesen Vorteil zu nutzen, ist eine intelligente Programmierung der bahngesteuerten Düse notwendig. Die industriell angewandten Methoden zur Programmierung von Wickelroutinen beruhen auf aufwendigen manuellen Verfahren, die sich iterativ an ein ausreichend

gutes Programm annähern. Daher ist das Ziel dieser Arbeit ein rechnergestütztes Verfahren, das automatisiert eine Trajektorie für die Drahtdüse erzeugt. Dabei soll die Flexibilität der Nadelwickeltechnik berücksichtigt und das Potential der exakten Drahtablage genutzt werden.

1.2 Inhalte der Arbeit im Überblick

Zunächst erfolgt in Kapitel 2 eine Einführung in die Wickeltechnik im Allgemeinen und die Nadelwickeltechnik im Speziellen, indem verschiedene Wicklungstypen mit ihren Eigenschaften und ihrem Einsatzgebiet in elektrischen Maschinen diskutiert werden. Neben dem Wickeln wird zudem der Herstellprozess einer elektrischen Maschine dargestellt. Grundsätzlich kommen in der Nadelwickeltechnik drei verschiedene Typen von Wicklern zum Einsatz, die im Anschluss kurz eingeführt werden.

Kapitel 3 umfasst die wesentlichen Grundlagen zum Thema Robotik, der Interpolation mit Splines und der Trajektorienplanung. Es erfolgt die Einführung der notwendigen mathematischen Konzepte, die im weiteren Teil der Arbeit Anwendung finden.

Das anschließende Kapitel 4 stellt das rechnergestützte Verfahren zur automatisierten Planung von Nadelwickeltrajektorien vor. Zunächst erfolgt die Beschreibung der gegenwärtigen Methoden zur rechnergestützten Herstellung von Wickelprodukten. Im Anschluss werden die Prämissen für die untersuchten Algorithmen definiert. Basis für den Algorithmus bildet die Betrachtung, wie die einzelnen Windungen der Wicklung in der elektrischen Maschine abgelegt werden müssen, damit eine optimale und produzierbare Wicklung entsteht. Dabei wird unter anderem ein Algorithmus vorgestellt, der das theoretische Optimum in Bezug auf den EFF berechnen kann. Die entstehenden Drahtpositionen lassen sich über ein drahtzugkraftbasiertes Modell in die Stützpunkte für die Bahnplanung transformieren. Mit einer numerischen Bahnoptimierung entsteht im Anschluss die Bahn, die Beta-Bedingungen in Bezug auf Stetigkeit einhält. Verschiedene Vorschubplaner, die einen Kompromiss zwischen Wickelgeschwindigkeit und Wickelqualität darstellen, definieren die Trajektorie. Deren Umsetzbarkeit wird an industriellen Nadelwicklern evaluiert.

Abschließend gibt Kapitel 5 eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie einen Ausblick über künftige Forschungsfragen, die sich aus den Beiträgen dieser Arbeit ableiten lassen.

1.3 Beiträge und Einordnung der Arbeit

Um ein rechnergestütztes Herstellen von Wicklungen zu ermöglichen, das die volle Flexibilität der Nadelwickeltechnik ausschöpft und ein optimales Wicklergebnis erzeugt, müssen verschiedene Technologien zusammenwirken, wie Abbildung 1.1 zeigt. Ziel ist eine intelligente Anlagenprogrammierung in Anlehnung an existierende Verfahren aus der Computerized

Numerical Control (CNC)-Technik. Zur kinematischen Beschreibung und Modellierung von Nadelwickelanlagen werden Methoden und Verfahren aus dem Bereich der Robotik angewendet. Mit dem Einsatz nichtlinearer numerischer Optimierungsverfahren wie sequentieller quadratischer Programmierung (SQP) und Optimierungsheuristiken wie dem simulierten Abkühlen (SA) in den verschiedenen Phasen der Trajektorienplanung soll ein möglichst optimales Wickelprogramm entstehen. Dabei sind die speziellen Anforderungen, die sich durch die Nadelwickeltechnik ergeben, zu berücksichtigen.

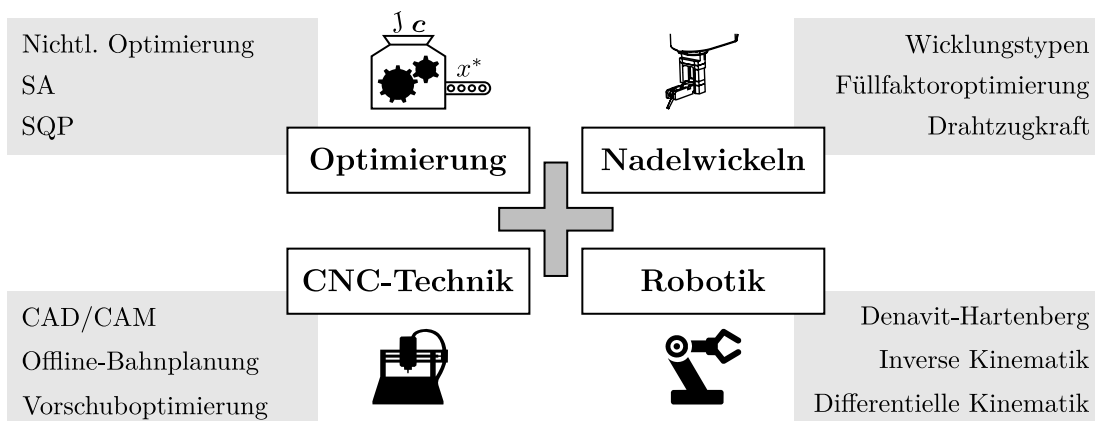


Abbildung 1.1: Technologien im Zusammenspiel für eine automatisierte Trajektorienplanung

Die Aufgabe der automatisierten Trajektorienplanung folgt im Wesentlichen den in Abbildung 1.2 gezeigten Schritten. Als Basis für den Algorithmus dient das herzustellende Produkt. Mithilfe des Computer-Aided Design (CAD)-Modells des Produkts und des gewünschten Wickelschemas wird durch eine Füllfaktoroptimierung eine produzierbare Wicklung mit maximalem EFF erzeugt. Mit einem Drahtmodell, der Vorgabe von Stetigkeitsbedingungen und einer Krümmungsoptimierung lässt sich daraus die Bahn für die Drahtdüse berechnen. In der Vorschubplanung und der Trajektorieninterpolation erfolgt die Berechnung der Referenzpositionen für die Wickelanlage. Durch die kinematische Beschreibung der Wickelanlage mit ihrer inversen Kinematik lässt sich die berechnete Trajektorie flexibel auf verschiedenen Anlagen einsetzen. Zum Abschluss kann über einen Wickelversuch die berechnete Trajektorie validiert werden.



Abbildung 1.2: Schematischer Ablauf der automatisierten Trajektorienplanung

1.3.1 Die Beiträge der Arbeit im Überblick

Global gesehen ist der wesentliche Beitrag dieser Arbeit ein automatisiertes rechnergestütztes Verfahren für das Erzeugen von Wicklungen durch die Nadelwickeltechnik. Es hebt sich von derzeitigen Verfahren ab, da seine Flexibilität den Einsatz auf unterschiedlichen Wickelanlagen und bei unterschiedlichen Wicklungstypen erlaubt. Die Daten des herzustellenden Produktes stellen den Eingang des Algorithmus dar. Damit ist das Herstellen verschiedenster Wicklungen in kurzer Zeit möglich, ohne dass in aufwändiger Weise ein CAD-Modell einer Wicklung notwendig ist.

Lokal gesehen ergibt sich ein Mehrwert in verschiedenen Bereichen der Produktionstechnik. So werden zwei Algorithmen vorgestellt, die das für die Produktionstechnik typische Problem der dichten Packung zweidimensionaler Objekte auf gegebenem Raum lösen. Eine exakte Lösung eines solchen Problems ist im Allgemeinen nur ineffizient zu finden. Im Rahmen der Forschung auf dem Gebiet der Füllfaktoroptimierung entstand eine Heuristik, die mit hoher Wahrscheinlichkeit Drahtpositionen findet, die das theoretische Optimum in Bezug auf den EFF für eine beliebige technisch realistische Nut darstellen. Ein weiterer Algorithmus erlaubt das Erzeugen eines Wickelbildes, das in Bezug auf die Nadelwickeltechnik produzierbar ist und dabei den EFF berücksichtigt.

Aus diesem Wickelbild werden durch ein Drahtmodell die Stützpunkte für die Bahnplanung bestimmt. Die Beschreibung der Bahn basiert auf einem non-uniform rational B-Spline (NURBS). Mit dem Einführen von Bahnprimitiven lassen sich die geometrisch durch das Bauteil begrenzten Abschnitte der Bahn definieren. Im weiteren Verlauf der Bahnplanung wird ein Verfahren gezeigt, das basierend auf den Beta-Bedingungen der geometrischen Stetigkeit das Erzeugen beliebig glatter NURBS-Bahnen aus einzelnen Segmenten ermöglicht. Mithilfe eines numerischen Optimierers lässt sich die resultierende Bahn nach Wunsch anpassen. Für das Erzeugen einer Nadelwickelbahn wird eine krümmungsbasierte Kostenfunktion angesetzt, in anderen Szenarien ist aber auch der Einsatz einer abweichenden Kostenfunktion denkbar.

Wegen der extremen Länge einer Nadelwickelbahn ist in der abschließenden Vorschubplanung großer Wert auf rechnerisch effiziente Algorithmen zu legen. Weiterhin ist eine Abwägung zwischen Wickelgeschwindigkeit und Wicklungsqualität notwendig. Die drei untersuchten Vorschubplaner ermöglichen es, unterschiedliche Ziele zu verfolgen. Ein konstanter Vorschub (KVS) erlaubt das Herstellen einer Wicklung, bei der der Nadelwickler die minimale Auswirkung auf die Wicklungseigenschaften besitzt. Durch den vorgestellten numerischen Vorschuboptimierer kann auf Basis der Wickelanlage die maximale Wickelgeschwindigkeit für eine gegebene Wicklungsqualität berechnet werden. Abschließend wird eine Heuristik präsentiert, die ein dynamisches Anpassen des Vorschubs erlaubt und dabei zwar Vorgaben in Bezug auf den Drahtzug einhält, jedoch keine Optimalität besitzt. Sie stellt damit eine Mischform zwischen konstantem und numerisch optimiertem Vorschub mit erhöhter Re-

cheneffizienz dar. Bei dieser Heuristik wird die NURBS-basierte Bahn nach der Bogenlänge durch die Verwendung eines B-Splines umparametrisiert.

1.3.2 Die Einordnung der Arbeit im Umfeld der rechnergestützten Herstellung von Wickelprodukten

Gegenwärtige Verfahren zur rechnergestützten Herstellung von Wicklungen sind entweder auf den einfachen Fall des Linearwickelns begrenzt und erlauben entweder keine Herstellung hochwertiger Wicklungen [7][8][9, S. 133–153] oder benötigen ein CAD-Modell der Wicklung [10, S. 107–120]. Auch der Versuch einer automatischen Herstellung von Volumenmodellen der Wicklung besitzt eine geringe Flexibilität [11, S. 149–160] und beschränkt sich auf das Linearwickeln.

Für konzentrierte Wicklungen existieren Verfahren, die zwar das automatische Erzeugen von Wicklungen auf Basis von Parametern ermöglichen, bei denen die Eingabe dieser Parameter jedoch manuell erfolgt, sodass die Qualität der Wicklung vom Anwender abhängt [12][13].

Für das rechnergestützte Herstellen verteilter Wicklungen existieren lediglich zwei Ansätze. Der eine zeigt sich als sehr unflexibel in Bezug auf das herzustellende Produkt [14], der zweite benötigt wiederum ein Volumenmodell der verteilten Wicklung, welches sehr aufwändig herzustellen ist. Zudem besitzt dieses Verfahren den Nachteil, dass es lediglich eine lineare Bahninterpolation erlaubt [15].

Die in dieser Arbeit erforschten Algorithmen erlauben das automatisierte Herstellen sowohl konzentrierter als auch verteilter Wicklungen. Auch der Einsatz beim Linearwickeln ist möglich, wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter untersucht. Dabei ist kein Volumenmodell der Wicklung notwendig. Dennoch referenziert das Verfahren auf das CAD-Modell des Produktes, sodass unterschiedliche Produkte flexibel bewickelt werden können. Durch den entkoppelten Ansatz in der Trajektorienplanung ist es möglich, dieselbe Trajektorie auf unterschiedlichen Wicklern einzusetzen. Weiterhin nutzt der Algorithmus erstmalig das Potential der exakten Drahtablage der Nadelwickeltechnik.

Die Arbeit bietet damit einen wesentlichen Beitrag in der automatisierten Herstellung von Wickelprodukten und ermöglicht einen kosteneffizienteren Einsatz der Nadelwickeltechnik bei gleichzeitiger Verbesserung der hergestellten Produkte. Die Evaluation der Algorithmen erfolgt durch das Herstellen von Wicklungen einer elektrischen Maschine, die als Traktionsantrieb in einem EF einsetzbar ist.

2 Wickeltechnologien für elektrische Traktionsantriebe

Nach DIN 8580 zählt das Spulenwickeln zur Fertigungshauptgruppe Fügen und wird in die Unterkategorie Fügen durch Umformen drahtförmiger Körper eingeordnet [16]. Hagedorn et al. [17, S. 12] definieren die Spulenwickeltechnik als die Aufgabe, einen elektrischen Leiter zu einer kompakten Struktur, der Spule, aufzuwickeln. Sie kommt im Wesentlichen in Aktoren und in Sensoren zum Einsatz. In der elektrischen Maschine finden Spulen im Stator und, abhängig vom Typ der elektrischen Maschine, auch im Rotor Einsatz. Die Spule ist Hagedorn et al. zufolge eine geometrische Struktur, die aus Leitern besteht. Werden diese Leiter von einem elektrischen Strom durchflossen, entsteht ein magnetisches Feld. Die geometrische Struktur wird auch Wicklung genannt [17, S. 19].

Die Leistungsfähigkeit einer Spule bemisst sich neben ihren elektrischen, mechanischen und thermischen Eigenschaften auch an produktionstechnischen Merkmalen wie dem Grad der Automatisierung in der Herstellung [17, S. 42]. Aus diesem Grund werden zunächst die wesentlichen Eigenschaften einer Spule eingeführt.

2.1 Wicklungen und ihre Eigenschaften

Um die Qualität einer Wicklung bewerten zu können, ist zunächst zu definieren, wie Spulen aufgebaut sind. Eine Spule besteht in ihrer Grundform aus zwei Teilen, dem Spulenkörper und der Wicklung selbst. Der Spulenkörper fungiert als Aufnahme der Spule und gibt die mechanische Form vor. Wird der Spulenkörper nach dem Erstellen der Wicklung entfernt, spricht man auch von einem Wickelwerkzeug und einer Luftspule [17, S. 19]. Die Wicklung setzt sich aus einzelnen Windungen zusammen.

2.1.1 Leiter einer Wicklung

Diese Leiter bestehen dabei aus einem elektrisch leitfähigen Material, meist Kupfer, das nach außen durch eine elektrisch isolierende Schicht abgeschirmt ist. Die Isolation wird zumeist durch eine Lackschicht realisiert, ein entsprechender Leiter heißt daher auch Lackdraht. Zur Herstellung der Lackschicht wird der blanke Kupferleiter mehrmals mit einer dünnen Harzschicht benetzt und anschließend ausgehärtet, bis die gewünschte Schichtdicke der Isolation

erreicht ist [17, S. 127–129]. Aus dieser Schichtdicke leitet sich auch die Isolationsfestigkeit der Leiter ab [18].

Grundsätzlich kann zwischen runden und rechteckigen Leitern unterschieden werden. Da in der Nadelwickeltechnik lediglich Runddrähte verarbeitet werden, liegt der Fokus im Folgenden auf diesem Leitertyp. Die DIN EN 60317-0-1 beschreibt die Anforderungen, die an einen lackisolierten Runddraht gestellt werden [18]. In der Norm sind die Größen sowie die elektrischen, mechanischen und chemischen Eigenschaften standardisiert. Die Prüfverfahren zur Verifikation dieser Eigenschaften für Leiter aller Art leiten sich aus der DIN EN 60851-1 mit ihren Teilen 2 bis 6 ab [19].

Während die chemische Beständigkeit hauptsächlich durch die Materialwahl definiert ist, sind die elektrischen und mechanischen Eigenschaften in erheblichem Maße von der Wickeltechnik abhängig.

2.1.2 Elektrische und mechanische Eigenschaften einer Wicklung

Die wesentlichen elektrischen Eigenschaften einer Spule sind ihr elektrischer Widerstand R_{Sp} und ihre Induktivität L_{Sp} . Der elektrische Widerstand einer Rundleiterspule lässt sich über den temperaturabhängigen spezifischen Widerstand von Kupfer ρ_{Cu} , der Leiterlänge l_{Cu} und dem Kupfer-Leiterradius $r_{D,Cu}$ durch

$$R_{Sp} = \rho_{Cu} \frac{l_{Cu}}{r_{D,Cu}^2 \cdot \pi} \quad (2.1)$$

bestimmen. Die Induktivität L_{Sp} einer Spule ist von der geometrischen Form der Spule und der magnetischen Permeabilität des Spulenkörpers abhängig. Sie ist quadratisch proportional zur seriellen Leiterzahl z_s mit

$$L_{Sp} \propto z_s^2.$$

Für eine maximal effiziente Spule wird der zur Verfügung stehende Bauraum durch den größtmöglichen Kupferquerschnitt A_{Cu} ausgefüllt, was den elektrischen Widerstand minimiert. Um den Effekt der Stromverdrängung zu vermeiden, sind Spulen, speziell in elektrischen Maschinen, oft statt mit einem einzelnen dicken Leiter durch z_p parallel geschaltete Teilspulen ausgeführt [20, S. 388 f.]. Die gesamte Drahtzahl ergibt sich damit zu $N_D = z_s z_p$. Für den Kupferquerschnitt zur Widerstandsberechnung resultiert $z_p r_{D,Cu}^2 \pi$. Ein geringerer elektrischer Widerstand erlaubt es, bei gleichbleibenden ohmschen Verlusten höhere Stromdichten zuzulassen, was zu einer höheren Leistungsdichte führt. Bei gleichbleibender Leistung entstehen geringere ohmsche Verluste und damit eine gesteigerte Effizienz im System.

Eine wichtige Designgröße, der EFF, leitet sich aus diesem Zusammenhang ab. Der EFF k_e setzt den zur Verfügung stehenden Bauraum der Spule zum kompletten Kupferquerschnitt

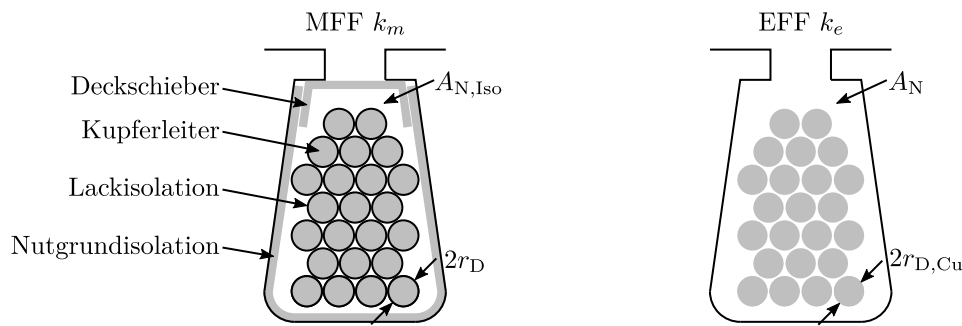


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung zur Berechnung der Füllfaktoren nach [21, S. 57]

A_{Cu} ins Verhältnis. In einer elektrischen Maschine ist der für die Spule zur Verfügung stehende Bauraum durch die Nutquerschnittsfläche A_N begrenzt. Für eine Rundleiterspule berechnet er sich zu

$$k_e = \frac{A_{Cu}}{A_N} = \frac{N_D r_{D,Cu}^2 \pi}{A_N}. \quad (2.2)$$

Ziel der Wickeltechnik ist es, den EFF zu maximieren [17, S. 140 f.]. Dabei besitzt er eine obere Schranke. Durch die Lackisolation, sowie zusätzlichen Sekundärisolationen wie der Nutgrundisolation oder dem Deckschieber verkleinert sich der tatsächlich zur Verfügung stehende Nutquerschnitt. Bei der Verwendung von Rundleitern verbleiben prinzipbedingt zusätzliche Hohlräume zwischen den Leitern und den sogenannten Zwickelräumen, welche die Lücken zwischen der Nut und den Leitern bezeichnen. Ein Maß dafür, wie gut der zur Verfügung stehende Raum insgesamt ausgenutzt wird, ist der mechanische Füllfaktor (MFF), der den kompletten Leiterquerschnitt A_{Sp} auf den Nutquerschnitt abzüglich den Sekundärisolationen $A_{N, Iso}$ bezieht. Dieser ist für einen Leiter, der inklusive der Lackisolation den Radius r_D besitzt, analog zu (2.2) definiert durch

$$k_m = \frac{A_{Sp}}{A_{N, Iso}} = \frac{N_D r_D^2 \pi}{A_{N, Iso}}. \quad (2.3)$$

Die schematischen Nutskizzen in Abbildung 2.1 zeigen, wie sich MFF und EFF unterscheiden. Bei der Berechnung von k_m erfolgt die Berücksichtigung sämtlicher Isolation, während beim EFF die komplette Nutfläche lediglich auf den Kupferquerschnitt der Leiter bezogen wird.

Der erreichbare MFF hängt von der realisierbaren Wicklung ab. Abbildung 2.2 zeigt die am häufigsten vorkommenden Wicklungsmuster. Die einfachste ist die Wildwicklung, die einen MFF von ca. 65 – 75 % besitzt. Lässt sich ein definierter Wicklungsaufbau realisieren, ist die orthozyklische Wicklung der geordneten Wicklung gegenüber vorzuziehen, da diese die maximal mögliche Packungsdichte der Leiter darstellt.

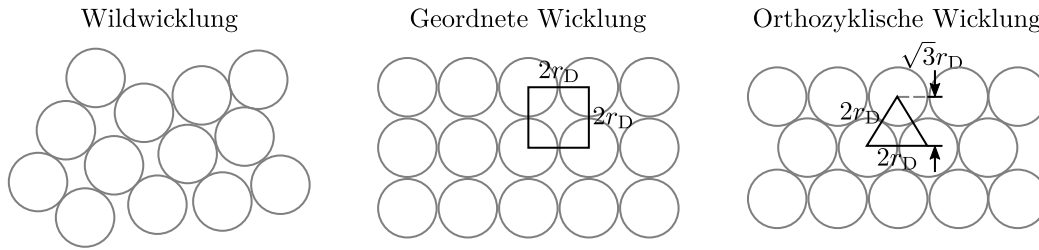


Abbildung 2.2: Verschiedene Wicklungsmuster und ihre Packungsdichten

Die Packungsdichte einer geordneten Wicklung bestimmt sich zu

$$k_m = \frac{4 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot r_D^2 \pi}{4r_D^2} = \frac{\pi}{4} \approx 78,54 \%,$$

und ist damit deutlich kleiner als die Packungsdichte

$$k_m = \frac{3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot r_D^2 \pi}{\frac{1}{2} \cdot 2r_D \cdot \sqrt{3}r_D} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,69 \%$$

einer orthozyklischen Wicklung.

2.1.3 Wicklungstypen und ihr Einsatzgebiet

Wicklungen können in Statoren und teilweise auch in Rotoren Anwendung finden. Grundsätzlich existieren zwei Typen von Wicklungen in elektrischen Maschinen, die konzentrierte und die verteilte Wicklung. Die verteilte Wicklung besitzt den Vorteil, dass mit ihr ein sinusförmiges Luftspaltfeld resultiert [22, S. 505]. Wie Abbildung 2.3 andeutet, vergrößert sich bei diesem Wicklungstyp aber auch die axiale Baulänge und der große Wickelkopf führt zu erhöhten Kupferkosten und ohmschen Verlusten. Die konzentrierte Wicklung besitzt minimale Wickelköpfe, erzeugt aber auch einen hohen Anteil von harmonischen Schwingungen im Luftspaltfeld [23].

Soll eine verteilte Wicklung zum Einsatz kommen, sind stets der vergrößerte axiale Bauraum und die Kupferverluste mit dem Vorteil des geringeren Oberwellengehalts im Luftspaltfeld abzuwägen. BEF besitzen mindestens eine größere elektrische Maschine, um den Leistungsanforderungen gerecht zu werden. In einer solchen Maschine sinkt der Anteil der Wickelköpfe am gesamten Bauraumbedarf [24], während sich eine verteilte Wicklung positiv auf den Antriebsstrang auswirkt. Neben einer höheren Effizienz und damit Reichweite sinkt auch die Drehmomentwelligkeit, was Auswirkungen auf Fahrkomfort und Akustik des Antriebes hat. In hybrid-elektrischen Fahrzeugen hingegen stammt der Hauptanteil der Antriebsleistung von der Verbrennungsmaschine, weshalb auch die Reichweite und Akustik zweitrangig sind. Durch den Platzbedarf des Verbrenners hingegen spielt der Bauraum ei-

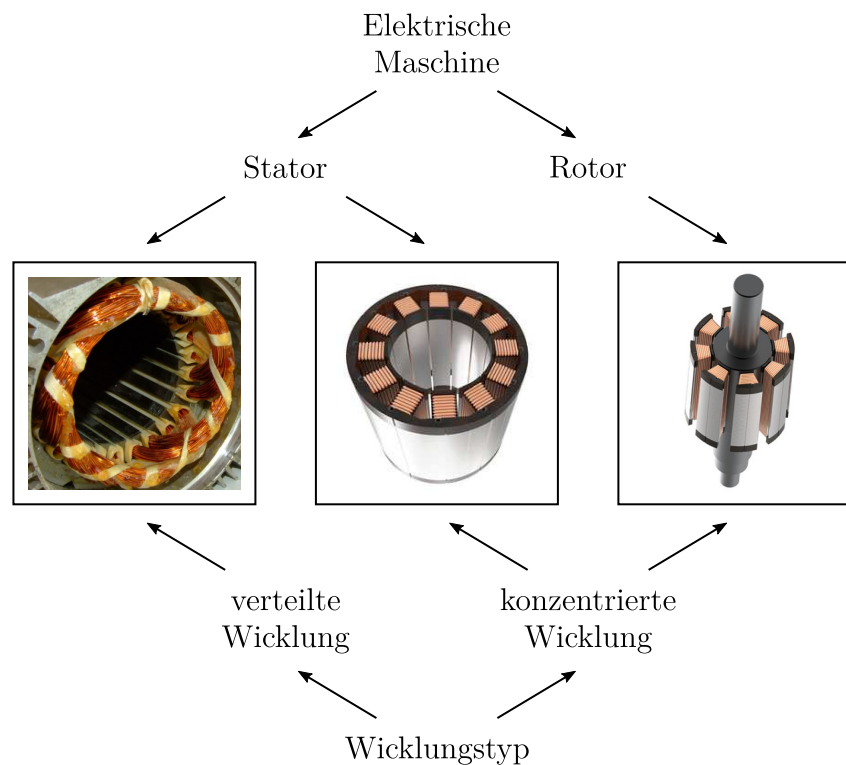


Abbildung 2.3: Einsatzort verschiedener Wicklungstypen in einer elektrischen Maschine; Bildquellen: verteilte Wicklung [23], konzentrierte Wicklungen [17, S. 86 f.]

ne größere Rolle und die größere Masse des Hauptantriebs dämpft die Vibration durch die Oberwellen im Moment. Aus diesem Grund haben sich für BEF verteilte Statorwicklungen etabliert, während Hybrid-Fahrzeuge meist Statoren mit konzentrierten Wicklungen besitzen.

Rotoren mit Kupferwicklungen finden sich im Wesentlichen in einer Gleichstrommaschine (GSM), in einer Asynchronmaschine (ASM) mit Schleifringläufer und in einer fremderregten Synchronmaschine (FSM). Die GSM spielt in BEF keine Rolle, ebenso kommt eine ASM in einem BEF aufgrund der geringeren Effizienz, der erhöhten Fertigungskosten und dem Wartungsaufwand durch die Verwendung eines Schleifringes nur mit Kurzschlussläufer zum Einsatz [25, S. 270–273]. Damit existiert als realistische Anwendung einer Wicklung im Rotor eines Traktionsantriebs lediglich die FSM, die eine magnetlose Alternative zu einer permanenterregten Synchronmaschine (PSM) verkörpert. Beim Einsatz einer FSM sind die Nachteile eines Schleifrings mit den Kosten der Magnete einer PSM abzuwägen. In den Magneten werden seltene Erden eingesetzt, die hohe Kosten und eine gewisse Marktvolatilität mit sich bringen. Die Volksrepublik China besitzt derzeit eine Monopolstellung im Bezug auf das weltweite Angebot von seltenen Erden. Naturkatastrophen, politische Unruhen oder künstliche Verknappung können die Versorgungs- und Kostensicherheit gefährden [26, S. 158–165]. Die Wicklungen im Rotor einer FSM bilden das magnetische Feld der Permanentmagnete

einer PSM nach. Daher besitzt die FSM konzentrierte Einzelzahnwicklungen.

Zusammenfassend finden sich in elektrifizierten Fahrzeugen sowohl verteilte als auch konzentrierte Wicklungen im Stator. Im Anwendungsfall FSM kommt zudem im Rotor eine konzentrierte Wicklung zum Einsatz. Neben der Herstellung der Wicklungen sind noch weitere dem Wickeln vor-, zwischen- und nachgelagerte Fertigungsprozesse zu beachten, da diese wiederum Einfluss auf die Wicklung haben.

2.2 Herstellungsprozess einer elektrischen Maschine

Der allgemeine Herstellungsprozess einer elektrischen Maschine lässt sich nicht in einem normalen Flussdiagramm darstellen, da unterschiedliche Maschinentypen, Wicklungstypen, Wickeltechnologien und Isolierungsformen erheblichen Einfluss auf die Fertigung haben [27, S. 29].

Alle Prozesse beginnen jedoch immer mit dem Erzeugen der Stator- und Rotorblechpakete. Sie haben die Aufgabe, die Isolatoren und die Wicklung mechanisch aufzunehmen und das Magnetfeld zu führen. Deshalb bestehen sie aus siliziumlegiertem Eisen, welches besondere magnetische Eigenschaften hat [28, S. 142]. Durch die geblechte Bauweise werden Wirbelströme, die durch das Drehfeld induziert werden, reduziert und damit die Effizienz der Maschine erhöht. In der Großserienproduktion werden die Elektrobleche aus dem Kaltband ausgestanzt und anschließend paketierte. Zur Vermeidung von Verschnitt bietet es sich an, Stator und Rotor gleichzeitig aus demselben Band auszustanzen. Um aus den Einzelblechen nach dem Paketieren eine kompakte Einheit zu schaffen, werden die Bleche durch Niete, Verkleben oder Verschweißen miteinander verbunden [5, S. 11–14]. Die Blechpakete nehmen die Wicklung auf und dienen damit als Spulenkörper. Mit ihnen ist die Nutform und die Geometrie der Spule definiert.

Nach dem Herstellen der Blechpakete divergieren die Prozesse in Bezug auf verschiedene Maschinentypen. Unter der Annahme, dass die elektrische Maschine in einem BEF als Antrieb eingesetzt wird, besitzt deren Stator stets eine verteilte Wicklung.

2.2.1 Herstellung eines Stators mit verteilten Wicklungen

Nach der Fertigstellung der Blechpakete wird die Nutgrundisolation in das Statorblechpaket eingebracht. Diese Sekundärinsulation soll die Isolationsfestigkeit bei Fehlstellen des Lackdrahtes gewährleisten und gleichzeitig die Wicklung vor den scharfkantigen Ecken des Blechpakets schützen. Sie besteht aus einer dünnen Folie oder Papier [5, S. 30]. Je nach geforderten Eigenschaften können verschiedene Materialien auch als Laminat verbunden sein. Da die Nutgrundisolation den nicht-isolierten Nutquerschnitt $A_{N, Iso}$ reduziert, ist die Dicke der Nutgrundisolation so gering wie möglich zu halten.

Der so vorbereitete Stator wird nun dem Wickelprozess zugeführt. Je nach Wickeltechnologie differieren die Fertigungsschritte ab diesem Punkt erheblich. Stand der Technik für das Erzeugen von verteilten Wicklungen ist die Einziehtechnik.

Wicklungserzeugung mit der Einziehtechnik

In der Einziehtechnik werden auf einem Linear- oder Flyerwickler zunächst Luftspulen gewickelt und anschließend in das Einziehwerkzeug abgestreift. Dieses besteht aus je einem Satz innerer und äußerer Nadeln und dem Einziehpilz [17, S. 212]. Zum Einbringen der Wicklung fahren zunächst die Nadeln in die jeweilige Nut ein. Der nachfolgende Einziehpilz drückt die Leiter anschließend in die Nut. Mit dem Einziehen der Wicklungen werden üblicherweise gleichzeitig die Deckschieber gesetzt, um ein Herausfallen der Leiter zu verhindern [17, S. 213]. Der Deckschieber, analog zur Nutgrundisolation, stellt ebenfalls eine Sekundärisolation dar und besteht aus Papier oder Laminat. Je nach Wickelschema können unterschiedlich viele Spulen gleichzeitig eingezogen werden. Durch die Trennung von Spulenerzeugung und -einbringung ist das Einziehen der zeiteffizienteste Prozess zum Erzeugen von verteilten Runddrahtspulen [29, S. 336 f.].

Zwischen den einzelnen Einziehschritten kann in den Wickelköpfen noch eine zusätzliche Phasenisolation eingebracht werden. Diese Sekundärisolation trennt die Spulen unterschiedlicher Phasen voneinander. Mögliche Ausprägungen sind selbstklebende Papiere oder Folien, aber auch Kunststoffformteile sind denkbar. Bevor die nächsten Spulen eingezogen werden können, sind die Nuten durch Zwischenformen von den überhängenden Wickelköpfen freizuräumen. Dazu wird ein kegelförmiger Formdorn eingesetzt, der axial auf die Wickelköpfe fährt und diese dadurch radial nach außen hin verdrängt [29, S. 366].

Durch den getrennten Vorgang von Spulenerzeugung und -einbringung beim Einziehen ergeben sich aber auch Nachteile. Das Abstreifen der Spulen in das Einziehwerkzeug bedingt undefinierte Drahtpositionen. Konzeptbedingt resultiert beim Einziehen damit eine Wildwicklung, was den erreichbaren EFF begrenzt. Zudem müssen beim Einziehen die losen Phasenenden beachtet werden. Diese biegeschlaffen Drahtbündel stellen die Verbindung der einzelnen Spulen zur Spannungsversorgung dar und müssen nach der Wicklungserzeugung in nachgelagerten Prozessen verarbeitet werden. Zunächst erfolgt beim Verschlauchen das Isolieren der Phasenenden gegen die anderen Leiter im Wickelkopf, anschließend werden sie im Wickelkopf an die Zielposition verlegt. Dort findet in einem Fügeverfahren die Kontaktierung der Phasenenden statt.

Sind alle Spulen und notwendigen Isolatoren eingebracht, wird anschließend in Formprozessen der Wickelkopf verdichtet, um den benötigten Bauraum und die mechanische Stabilität zu optimieren. Zunächst wird der Wickelkopf durch ein axiales Verpressen verdichtet. Diesem Ziel folgt auch der anschließende Bandagierprozess, bei dem die Fixierung des Wickelkopfes samt Phasenenden durch ein Band oder eine Kordel erfolgt [29, S. 366–368].

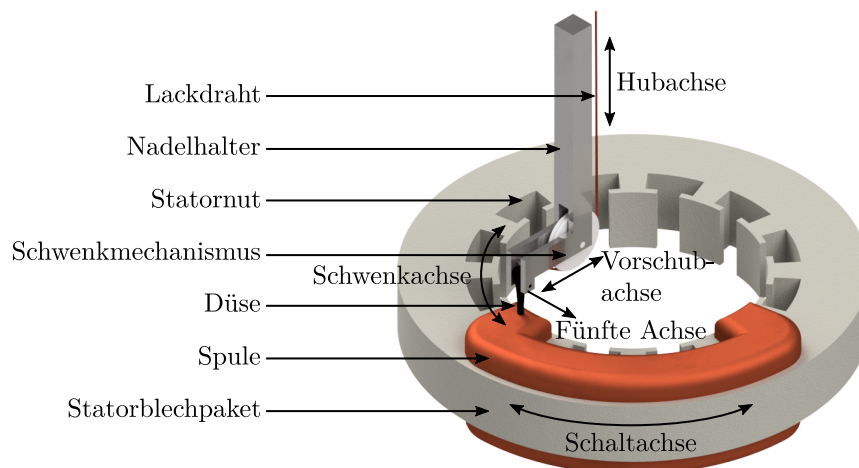


Abbildung 2.4: Schematische Abbildung des Nadelwickelvorgangs

Eine detaillierte Prozessbeschreibung zur Herstellung eines verteilt gewickelten Stators mit der Einziehtechnik findet sich in der Arbeit von Stenzel [21, S. 50].

Wicklungserzeugung mit der Nadelwickeltechnik

Im Gegensatz zum Einziehen findet bei der Nadelwickeltechnik ein direktes Bewickeln des Stators statt. Durch überlagerte Hub- und Schwenkbewegungen wird der Lackdraht mit einer Düse geführt und direkt im Bauteil abgelegt. Dabei kann die Wickelnadel in die Nuten eintauchen, um eine bessere Platzierung der Lackdrähte zu erreichen. Eine Nadelwickelanlage muss mindestens drei translatorische und zwei rotatorische Freiheitsgrade besitzen, um eine verteilte Wicklung umsetzen zu können. Eine detailliertere Beschreibung der Anforderungen an eine Nadelwickelkinematik zum Erzeugen verteilter Wicklungen geben Gerngroß et al. [30]. Parallel geschaltete Spulengruppen lassen sich wirtschaftlich effizient erzeugen, indem statt einem einzelnen Draht mehrere Windungen gleichzeitig geführt und abgelegt werden [31][32, S. 27].

Abbildung 2.4 zeigt eine schematische Skizze eines Nadelwicklers. Der Nadelhalter nimmt den Schwenkmechanismus und die Düse auf und ermöglicht die Bewegung dieser Bauteile. Über den Schwenkmechanismus wird der Draht in die Düse geführt, welche diesen in Statornuten ablegt.

Auch beim Nadelwickeln ist ein Freihalten der Nuten für die später einzubringenden Spulen zu gewährleisten. Bei der Nadelwickeltechnik lassen sich dazu Endscheiben einsetzen, die als Spulenkörper im Stator verbleiben [17, S. 50–52]. Diese führen jedoch zu einem erheblichen axialen Bauraumbedarf [24].

Aus diesem Grund befassen sich jüngere Forschungsarbeiten mit dem Einsatz von Wickelwerkzeugen bei der Erzeugung von verteilten Wicklungen mit der Nadelwickeltechnik [24][31][33][34]. Abbildung 2.5 zeigt den Nadelwickelvorgang bei der Verwendung der in [24]

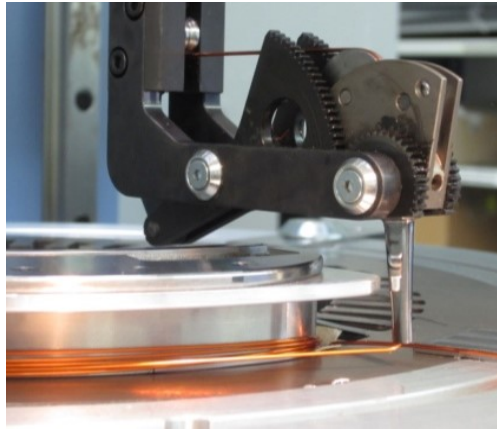
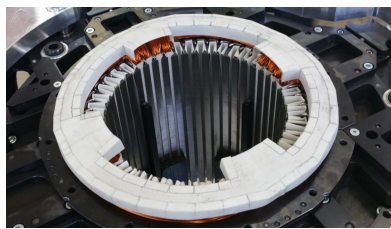
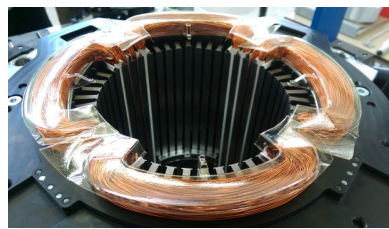


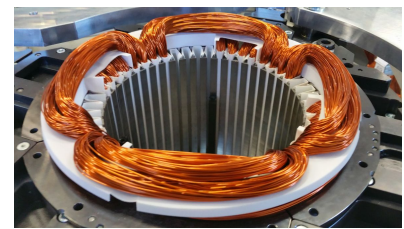
Abbildung 2.5: Nadelwickeln verteilter Wicklungen mit Wickelwerkzeug; Bildquelle [21, S. 159]



(a) Formteil aus Isolationspapier



(b) Formteil aus Isolationsfolie



(c) Formteil aus Kunststoff

Abbildung 2.6: Automatisiertes Einbringen der Phasenisolierung durch Verwendung von Formteilen

vorgestellten Wickelwerkzeuge. Diese nehmen während des Wickelvorgangs die Wicklungen auf und verhindern ein Bedecken der freizuhaltenden Nuten. Nach dem Bewickeln können sie jedoch entfernt werden, was ein Verdichten des Wickelkopfes erlaubt und damit einen deutlich reduzierten Bauraumbedarf ermöglicht [24]. Da die Nutzugänglichkeit beim Nadelwickeln jederzeit gewährleistet sein muss, lassen sich die Deckschieber erst nach dem Bewickeln des Stators setzen.

Ist eine Phasenisolierung im Wickelkopf einzubringen, ist der Stator, abhängig vom Werkzeugkonzept und dem Wickelschema, nach dem Wickeln einer oder mehrerer Spulen aus der Wickelmaschine auszuschleusen. Durch die definierte Wickelkopfform beim Nadelwickeln ist ein automatisiertes Einbringen der Phasenisolierung beim Nadelwickeln denkbar [35]. Mögliche Konzepte umfassen ein Formteil aus Isolationspapier, aus Isolationsfolie oder einem spritzgegossenen Kunststoffformteil, wie Abbildung 2.6 zeigt.

Ebenso erlaubt die definierte Wickelkopfform das Verwenden eines Schaltringes. Dieser stellt eine Mischform von Endscheibe und Wickelwerkzeugen dar [36]. Im Schaltring sind Kupferschienen verlegt, die die Verschaltung der einzelnen Phasen ermöglichen. Indem in Schweißbahnen, die im Schaltring integriert sind, gewickelt wird, ist der Kontaktierprozess vereinfacht und automatisierbar [6]. Die mehrteilige Bauweise erlaubt ein Pressen des Wickelkopfes und garantiert so deutlich geringere Bauraumbedarfe als bei der Verwendung von Endscheiben. Ebenso kann durch Schnapphaken, welche die einzelnen Ebenen des Schaltrings

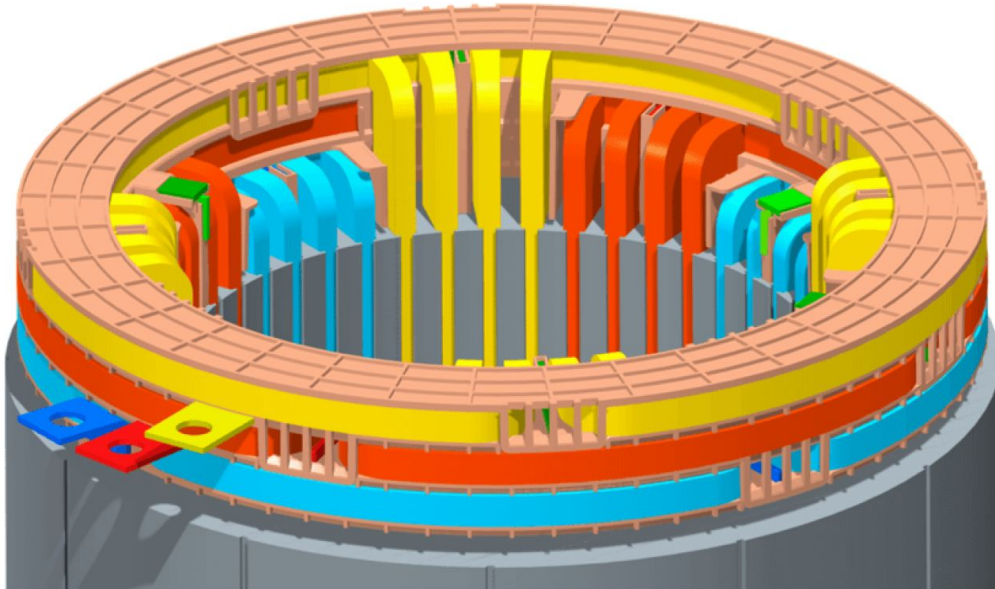


Abbildung 2.7: Schaltring für verteilte Wicklungen

mechanisch verbinden, der Bandagierprozess entfallen. In Abbildung 2.7 ist eine mögliche Ausprägung eines solchen Schaltringes dargestellt.

Er basiert auf einer Drei-Etagen-Wicklung, in der jede Phase innerhalb einer Ebene liegt [34]. Der Schaltring selbst ist ebenfalls dreiteilig aufgebaut. Jede Schaltringebene verbindet die entsprechenden Spulengruppen miteinander. Im Schaltring ist die Phasenisolation und das Bandagieren integriert. Da die einzelnen Ebenen in axialer Richtung zueinander flexibel gestaltet sind, können die Wickelköpfe im Gegensatz zu Endscheiben durch Formprozesse komprimiert werden.

Unabhängig davon, ob Wickelwerkzeuge mit oder ohne Schaltring zum Einsatz kommen, kann durch einen Zwischenformprozess jede Etage des Wickelkopfes verdichtet werden. Dadurch reduziert sich die axiale Spulenlänge der folgenden Spulen und damit auch der elektrische Widerstand.

Analog zur Einziehtechnik sind nach dem Herstellen der Wicklung verschiedene nachgelagerte Prozesse zur Fertigstellung des Stators notwendig. Das Verschlauchen und Verlegen der Phasenenden lässt sich bei der Anwendung der Nadelwickeltechnik jedoch ebenfalls automatisieren, da die Phasenenden beim Nadelwickeln in definierte Positionen abgelegt werden können [37]. Dadurch sind sie durch eine entsprechende Vorrichtung leichter zu greifen und zu bearbeiten. Bei Verwendung des Schaltrings entfallen diese Prozessschritte. Zur mechanischen Stabilisierung und Bauraumminimierung findet abschließend ebenfalls ein Endform- und Bandagierprozess statt.

Eine detaillierte Prozessbeschreibung zur Herstellung eines nadelgewickelten Stators findet sich in [21, S. 52].

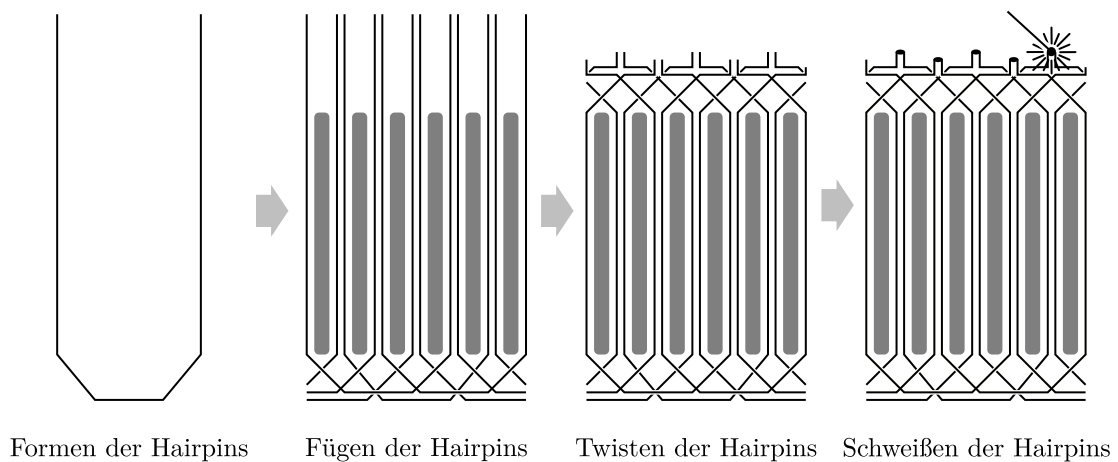


Abbildung 2.8: Vereinfachte Prozessabfolge der Herstellung einer Hairpin-Wicklung

Verteile Wicklungen mit Rechteckleitern

Neben Statoren mit Runddraht rücken seit kurzem Anwendungen mit Rechteckleitern in BEFs in den Fokus. Großer Vorteil dieses Wicklungstyps ist, dass der Einsatz eines Rechteckleiters einen deutlich höheren EFF ermöglicht [38]. Die zwei wesentlichen Methoden für eine Herstellung einer verteilten Wicklung mit Rechteckdrähten sind die Hairpin-Wicklung und die Wellenwicklung.

Die Herstellung eines Hairpin-Stators ist in Abbildung 2.8 schematisch dargestellt. Zunächst werden aus dem Rechteckleiter entsprechend der Bauteilmaße des Stators und des Wickelschemas U-förmige Drahtgeometrien, die sogenannten Hairpins, geformt. Durch diese einseitig-offene Form lassen sich die Hairpins axial in die Nuten des Statorschiebers schieben. Um eine Wicklung zu erzeugen, werden die offenen Drahtenden in einem Twist-Prozess zueinander verschränkt. Die Twist-Weite ergibt sich wiederum aus dem gewünschten Wickelschema. Die nun zueinander ausgerichteten Pins sind abschließend durch eine Laser- oder Elektronenstrahl-Schweißung zu kontaktieren und bilden damit eine verteilte Wicklung. Eine detaillierte Prozessbeschreibung findet sich bei Richnow [27, S. 36].

Statt einer Auftrennung, wie bei der Hairpin-Wicklung, werden bei der Wellenwicklung die geformten Leiter dem Stator als langes, zusammenhängendes Band zugeführt [17, S. 89–91]. Der Wickelprozess selbst stellt sich anschließend als ein umlaufender, radialer Fügevorgang in die offenen Statornuten dar [32, S. 17–19]. Zum Abschluss sind parallel geschaltete Spulengruppen zu kontaktieren.

Die Hairpin- und die Wellenwicklung produzieren ähnliche Statoren in stark differierenden Prozessen. Bei der Hairpin-Technologie wird die gewünschte verteilte Wicklung symbolisch aufgeschnitten, was eine leichtere Montage der Leiter ermöglicht, aber den Twist-Prozess und eine hohe Zahl an Schweißstellen benötigt, um die offene Wicklung wieder zu schließen. Bei der Wellenwicklung hingegen werden komplette, geschlossene Spulengruppen montiert.

Nachteilig erweist sich hier der komplexe Montagevorgang und die Notwendigkeit offener Nuten.

Fertigstellung der Statoren

Allen genannten Wickelverfahren ist stets noch ein Imprägnierprozess nachgelagert. Das Imprägnieren stellt einen Füllprozess dar. Dazu wird in die Wicklung ein Harz eingebracht und anschließend ausgehärtet. Beim Imprägnieren werden mehrere Ziele verfolgt. Das Harz als zusätzlicher Isolator erhöht die Isolationsfestigkeit des Systems und kompensiert Fehlstellen in den vorhandenen Isolierstoffen. Gleichzeitig schützt es die Primärisolation, den Lackdraht, vor Umwelteinflüssen. Nicht zuletzt verdrängt es Lufteinschlüsse in der Wicklung, was aufgrund der höheren thermischen Leitfähigkeit des Harzes im Vergleich zu Luft zu einer besseren Entwärmung des Systems führt und die mechanische Festigkeit der Wicklung erhöht [27, S. 48 f.].

Den Abschluss der Statorfertigung bildet eine Prüfung, in der elektrische Parameter wie Spulenwiderstand und -induktivität oder die Isolationsfestigkeit der Wicklung gemessen werden.

Obwohl sich die betrachteten Maschinentypen ASM, PSM und FSM in der physikalischen Wirkungsweise deutlich unterscheiden, lassen sich die Statoren praktisch als Gleichteil für die unterschiedlichen Typen einsetzen. Gravierender wirkt sich die Diskrepanz in der Funktionsweise auf den Rotor aus.

2.2.2 Rotorfertigung für unterschiedliche Maschinentypen

Die Rotoren der betrachteten Maschinentypen unterscheiden sich erheblich voneinander.

Die ASM mit Kurzschlussläufer besitzt im Rotor einen Kurzschlusskäfig. Dazu wird über ein Druckgussverfahren Aluminium in die Rotornuten gegossen. Für höhere Wirkungsgrade ist auch das Verwenden von Kupfer möglich, das sich jedoch deutlich schlechter vergießen lässt und durch die höhere Masse die Trägheit des Rotors steigert. Als Alternative zum Druckguss besteht auch die Möglichkeit, Stäbe aus Vollmaterial in die Rotornuten einzubringen und diese mit stirnseitig angebrachten Kurzschlussringen zu einem Kurzschlusskäfig zu verbinden [22, S. 484].

Bei einer PSM erfolgt die Erzeugung des Magnetfelds im Rotor durch Permanentmagnete. Diese können entweder an der Oberfläche angebracht sein, was eine Bandagierung erfordert und den Luftspalt vergrößert, oder im Rotor vergraben werden [22, S. 598 f.]. Die Magnete lassen sich in magnetisiertem oder unmagnetisiertem Zustand verbauen. Im ersten Fall ist die Magnetmontage aufgrund der Anziehungskräfte komplex, in zweiterem ist der komplette Rotor im Anschluss an die Magnetmontage aufzumagnetisieren. Die Motormontage ist durch die Magnetisierung des PSM-Rotors auch im weiteren Verlauf herausfordernd.

Die FSM besitzt im Rotor eine konzentrierte Wicklung. Nach der Paketierung erfolgt zunächst die Isolierung der Nut, wozu sich neben einem Papier auch ein Kunststoffkörper verwenden lässt, der den Spulenkörper darstellt [5, S. 38–41]. Eine Rillierung unterstützt einen definierten Lagenaufbau beim Wickeln.

Bei konzentrierten Statorwicklungen finden sich oft segmentierte Magnetkörper, was die Zugänglichkeit zum Bewickeln deutlich erhöht [5, S. 20–26]. Dadurch lässt sich für die Spulenerzeugung in diesem Fall auch das Linearwickeln verwenden. Die Verwendung von segmentierten Statorn erlaubt einen deutlich höheren EFF, da im Vergleich zu einem Vollblechschnitt keine Freiräume für das Einbringen der Wicklung verbleiben müssen [17, S. 49 f.].

Im Gegensatz zum Stator wird beim Rotor für Antriebe mit hoher Leistungsdichte keine segmentierte Bauweise angewendet. Um hohe Leistungsdichten zu erreichen, sind hohe Drehzahlen notwendig, sodass die Steckverbindung eines Segmentes eine zu geringe mechanische Stabilität aufweist.

Ein FSM-Rotor stellt ein außengenutetes Bauteil dar, was eine gute Zugänglichkeit zur Folge hat. Dies erlaubt es, neben der Nadelwickeltechnik zur Herstellung der konzentrierten Wicklung auch das Flyerwickelverfahren zu verwenden. Aufgrund der einfachen Spulenform und der guten Zugänglichkeit lässt sich eine orthozyklische Wicklung beim Rotorwickeln realisieren.

Analog zum Bewickeln eines Stators mit der Nadelwickeltechnik wird auch beim Rotor der Wickeldraht direkt abgelegt, indem die Düse in die Rotornuten eintaucht. Die Rotorwicklung besteht oft aus einem einzelnen, seriell verwickelten Draht, sodass der komplette Rotor in einem Arbeitsgang zu bewickeln ist. Beim Wechsel zwischen den einzelnen Polen des Rotors ist der Draht auf einer der beiden Stirnseiten zu verlegen. Zu Beginn und Ende des Wicklungsprozesses erfolgt das Einwickeln des Lackdrahtes in Schweißhaken, mit denen die Verbindung zum Schleifringübertrager durch einen nachgelagerten Schweißvorgang hergestellt wird.

Beim Flyerwickelverfahren werden die Varianten einer rotierenden Düse oder eines rotierenden Bauteils unterschieden, das Funktionsprinzip bleibt jedoch unverändert. Die Flyerdüse sitzt bei diesem Verfahren auf einer Spindel und beschreibt beim Wickeln eine kreisförmige Flugbahn um die zu bewickelnde Nut. Geführt wird der Draht durch je einen Satz innerer und äußerer Leitbleche, die auf das zu bewickelnde Bauteil angepasst sein müssen. Sie definieren die Position, an dem der Wickeldraht abgelegt wird und müssen entsprechend ansteuerbar sein. Die Bleche tauchen dabei ebenfalls in die Nut ein, weshalb eine gute Zugänglichkeit für die Anwendung der Flyerwickeltechnik notwendig ist. Durch den Drahtzug zieht sich die entstehende Windung zusammen und gleitet über die Leitbleche in die Nut [5, S. 48 f.]. Funktionsbedingt ist ein Polwechsel oder das Verschalten aufwändig und benötigt in einer automatisierten Lösung, falls überhaupt möglich, zumindest zusätzliche Mechanismen.

Da die Geschwindigkeit des Flyerwickelverfahrens durch hohe Umdrehungszahlen der Flyerdüse hoch ist, besitzt es, verglichen mit der Nadelwickeltechnik, wirtschaftliche Vorteile bei Anwendungen mit hohen Windungszahlen. Bei kleinen und mittleren Windungszahlen

dominiert jedoch der erhöhte Aufwand beim Verschalten. Zudem müssen die Leitbleche stets exakt auf das Bauteil angepasst sein, was zu einer unflexiblen Produktion führt, während Nadelwickelanlagen unabhängig vom Spulenkörper durch ihren kinematischen Aufbau das flexible Bewickeln verschiedener Bauteile ermöglichen.

Wie der kinematische Aufbau einer Nadelwickelanlage auszusehen hat, um volle Flexibilität gewährleisten zu können, wird im folgenden Abschnitt detailliert. Ebenso erfolgt die Vorstellung verschiedener Anlagenkonzepte.

2.3 Anlagenkonzepte von Nadelwickelmaschinen

Nadelwickelanlagen bewickeln Bauteile durch überlagerte Hub- und Schwenkbewegungen. Umlenkrollen führen den Wickeldraht vom Vorratsspeicher bis zur Düse. Um einen ausreichend hohen EFF erreichen zu können, muss der Wickeldraht dabei stets unter Spannung, dem sogenannten Drahtzug, gehalten werden [39]. Der Drahtzug wird auf den Leiter durch eine Drahtzugbremse eingebracht. Sell-Le Blanc et al. [40] beschreiben gängige Drahtzugbremsen. Der am häufigsten verwendete Bremstyp ist eine servogetriebene Rolle, mit der über ein Gegenmoment die Drahtzugkraft aufgebracht wird [40].

Die Wirtschaftlichkeit eines Nadelwicklers hängt erheblich von der Wickelgeschwindigkeit ab. Ein Maß, um die Wickelgeschwindigkeit verschiedener Anlagen zu vergleichen, ist die Hubzahl

$$n_{\text{Hub}} = \frac{z_{p,\text{Hub}}}{t_{\text{Hub}}},$$

die die Anzahl gleichzeitig gewickelter paralleler Windungen $z_{p,\text{Hub}}$ mit der Zeit für einen Umlauf t_{Hub} ins Verhältnis setzt. Um bei hohen Geschwindigkeiten und bei der Belastung durch den Drahtzug eine genaue Positionierung der Wickelnadel zu ermöglichen, sind Nadelwickler entsprechend steif auszuführen.

Die Bewegung der Düse übernimmt die eigentliche Wickelkinematik. Für das Bewickeln von Statoren und Rotoren muss sie über mindestens drei, bei einer verteilten Wicklung über mindestens vier Freiheitsgrade verfügen. Die resultierenden Bewegungen lassen sich relativ gesehen auf das Bauteil beziehen. Die Bezeichnungen der einzelnen Bewegungsfreiheitsgrade finden sich in Abbildung 2.4. Die Hubachse ermöglicht das axiale Verfahren entlang der Symmetrieachse des Bauteils. Die Vorschubachse bewirkt, auf das Bauteil bezogen, eine radiale Positionsänderung senkrecht zur Hubachse. Ein Bewegen der Schaltachse führt zu einer Rotation um die Hubachse. Den vierten Freiheitsgrad beschreibt die Schwenkachse, die ein Nadelschwenken ermöglicht. Um beim Wickeln die volle Flexibilität zu besitzen, verfügen moderne Nadelwickelanlagen als zweite Vorschubachse noch über eine fünfte Achse, die ebenso ein radiales Verfahren umfasst. Die Bewegungsrichtung der fünften Achse steht dabei senkrecht auf der Hub- und Vorschubachse.

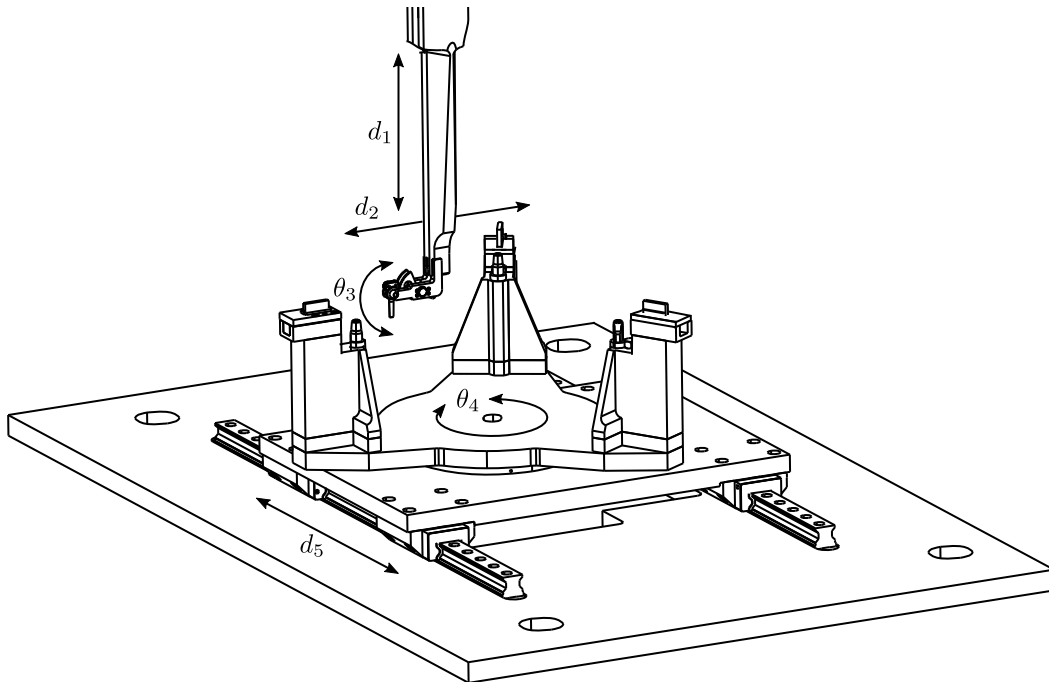


Abbildung 2.9: Schematische Abbildung des VWs

Aktuelle industrielle Nadelwickler stellen eine entkoppelte Kinematik mit CNC-Achsen dar. Der Nadelhalter, gezeigt in Abbildung 2.4, führt üblicherweise die Hub-, Vorschub- und Schwenkbewegung aus, während das Schalten durch ein Verdrehen des Bauteils in der Anlage umgesetzt ist. Die Bewegung der fünften Achse kann sowohl durch den Nadelhalter als auch durch das Bauteil ausgeführt werden. Das Entkoppeln des Nadelhalters von der Schaltachse ermöglicht eine deutlich einfachere Ausführung des Nadelhalters, da dieser nicht drehbar gelagert sein muss. Ein weiterer Vorteil einer entkoppelten Kinematik ist, dass sich die Positionstoleranzen der einzelnen Achsen auf zwei kinematische Ketten aufteilen.

Abhängig von der Einbaulage der Hubachse kann zwischen einem Vertikalwickler (VW) und einem Horizontalwickler (HW) unterschieden werden. Zusätzlich gibt es Bestrebungen in der Forschung, Industrieroboter als Nadelwickelanlagen einzusetzen, um einen kostengünstigeren Anlagenbau zu ermöglichen. Im Folgenden werden zwei Standard-Anlagen und ein roboterbasierter Wickler kurz vorgestellt, die zur Evaluierung der Ergebnisse dieser Arbeit zur Verfügung stehen.

2.3.1 Vertikale Wickelkinematik

Der VW besitzt, wie der Name andeutet, eine vertikal verlaufende Hubachse. Abbildung 2.9 zeigt eine schematische Skizze des VWs. Mit jeder Achse wird ein Freiheitsgrad der Nadelwickelkinematik bedient. Die Achse d_1 entspricht der Hubachse, d_2 der Vorschubachse, θ_3 der Schwenkachse und θ_4 der Schaltachse. Bei dieser Nadelwickelkinematik ist die fünfte Achse als Linearachse d_5 im Drehteller integriert.

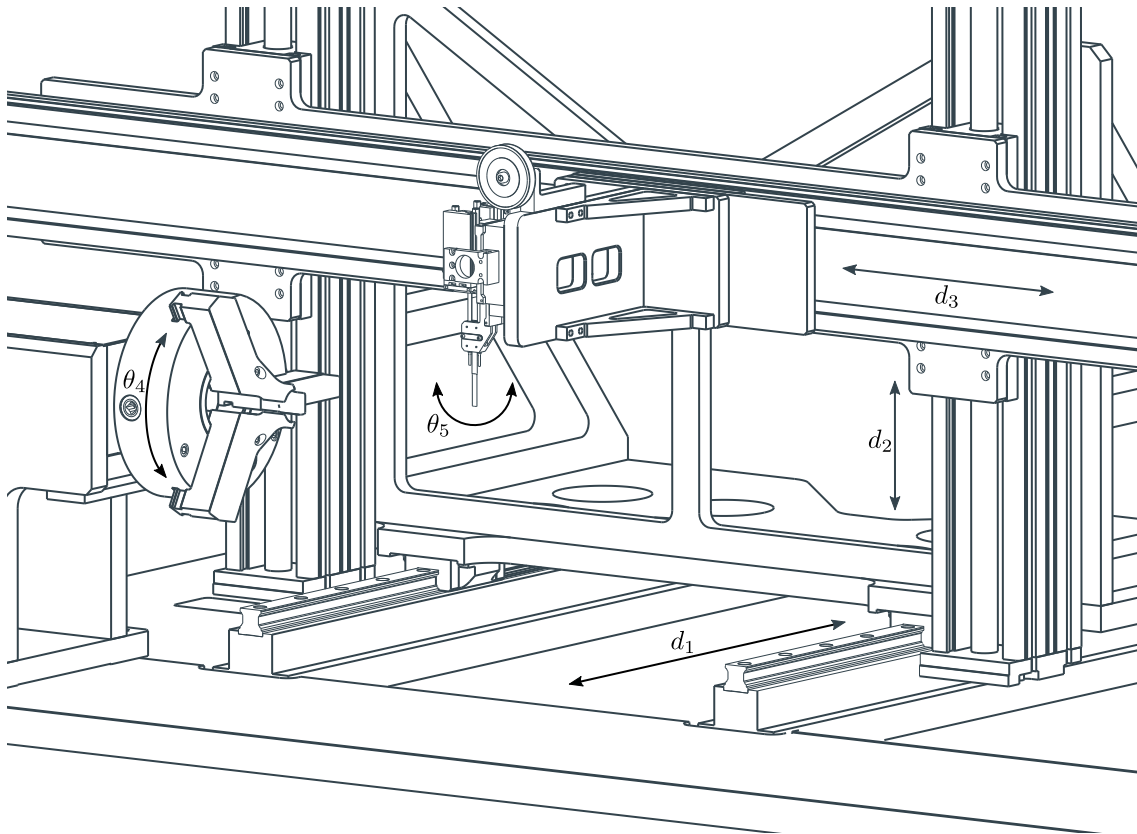


Abbildung 2.10: Schematische Abbildung des HWs

Durch den getrennten Aufbau der Kinematik in zwei separierten Ketten kann dieses Anlagenkonzept eine hohe Genauigkeit erreichen. Der Drahtzug wirkt am relativ langen Nadelhalter, sodass dieser steif auszuführen ist, um eine Verwindung zu verhindern. Aus diesem Grund ist auch die Anzahl gleichzeitig wickelbarer paralleler Leiter $z_{p,\text{Hub}}$ begrenzt. Die Hubachse muss zudem die Schwerkraft überwinden. Um dennoch hohe Hubzahlen zu erreichen, sind die Aktoren mit einer Momentenreserve auszuliegen. Dies gilt besonders für θ_4 und θ_5 im Drehteller, da diese mit einem Stator- bzw. Rotorblechpaket bestückt sind und folglich hohe Massen beschleunigen müssen.

2.3.2 Horizontale Wickelkinematik

Der HW ist ähnlich zum VW aufgebaut, wie Abbildung 2.10 zeigt. Im Gegensatz zum VW liegt in diesem Konzept die Hubachse jedoch horizontal. Die Achsen d_1 , d_2 und d_3 lassen sich der fünften Achse, der Vorschubachse bzw. der Hubachse zuordnen. Die beiden rotatorischen Achsen θ_4 und θ_5 entsprechen der Schalt- bzw. Schwenkachse. In der gezeigten Darstellung ist die Nadel nicht schwenkbar. Der Wickler kann aber durch einen Umbau mit einem schwenkbaren Nadelhalter ausgestattet werden.

Bei diesem Konzept ist lediglich die Schaltachse von der restlichen kinematischen Kette entkoppelt. Auffällig ist zudem der mechanisch robuste Aufbau der Anlage. Dieser führt zu

einer hohen Steifigkeit, aber auch, bedingt durch die hohen Massen, zu einer niedrigeren Hubfrequenz t_{Hub}^{-1} als beim VW. Um dennoch konkurrenzfähige Hubzahlen zu erreichen, können beim HW dank der hohen Steifigkeit viele parallele Spulen $z_{p,\text{Hub}}$ gleichzeitig gewickelt werden. Zu beachten ist, dass die Anzahl der parallelen Leiter z_p prinzipbedingt ein ganzzahliges Vielfaches von $z_{p,\text{Hub}}$ sein muss.

2.3.3 Roboterwickler

Sowohl der VW als auch der HW stellen Spezialmaschinen dar, die einen komplexen Aufbau besitzen und in geringen Stückzahlen gefertigt werden. Daher sind sie entsprechend kostenintensiv [30]. Aus diesem Grund werden Konzepte erforscht, die den Einsatz eines Standard-Industrieroboters als Nadelwickler zum Ziel haben. Ein solcher Roboterwickler (RW) besitzt den Vorteil, dass dessen Kinematik keine Sondermaschine und dadurch deutlich kostengünstiger ist.

Dobroschke [11, S. 132–147] untersucht den Einsatz eines Delta-Roboters als Wickler. Als Vorteil weist er eine hohe Dynamik auf, die jedoch von einem kleinen Arbeitsraum konterkariert wird [11, S. 134]. Bewickelt werden mit der Parallelkinematik außengenutete Bauteile mit konzentrierten Wicklungen. Stenzel [21, S. 110 f.] erweitert den Delta-Roboter um einen Vertikalträger, mit der er die Parallelkinematik zum Wickeln verteilter Wicklungen befähigt.

Im Rahmen der Untersuchungen von Dobroschke zeigt sich, dass die Steifigkeit eine wesentliche Rolle beim Einsatz eines Industrieroboters als Nadelwickler spielt, da die Drahtzugkraft als Prozesskraft an der Nadelspitze zu einer Abweichung von der Sollposition führt [11, S. 142]. Als statische Steifigkeit für den Delta-Roboter ergibt sich Dobroschke zufolge ein Wert von 24 N/mm. Gerngroß et al. [39] identifizieren als wirkende Drahtzugkraft für eine Standard-Nadelwickelanwendung mit einem Lackdraht, der den Durchmesser $2r_D = 0,884$ mm besitzt, eine Kraft von über 30 N. Damit resultiert eine statische Abweichung von mindestens 1,25 mm oder dem 1,4-fachen des Drahtdurchmessers. Die Steifigkeit eines Delta-Roboters kann damit für eine genaue Positionierung der Wicklung als nicht ausreichend angesehen werden. Mit der Erweiterung von Stenzel steigt die statische Abweichung durch den verlängerten Hebelarm nochmals erheblich.

Zu dem Ergebnis, dass eine Delta-Kinematik nur bedingt als Nadelwickler geeignet ist, kommen auch Gerngroß et al. [30]. Aus diesem Grund bevorzugen sie einen Selective Compliance Assembly Robot Arm (SCARA) anstelle eines Delta-Roboters, da dieser keinen zusätzlichen Vertikalträger benötigt, um durch die Statorinnenbohrung greifen zu können. Weil ein SCARA lediglich den Freiheitsgrad $\nu = 4$ besitzt, erweitern Gerngroß et al. den Roboter noch um einen Schwenkmechanismus als Endeffektor, wie Abbildung 2.11 zeigt. Der Schwenkmechanismus dient als Endeffektor des Roboters. Er ist über eine Gewindestange, die im Inneren der Pinole verläuft, mit dem Servoantrieb am oberen Ende der Spindel

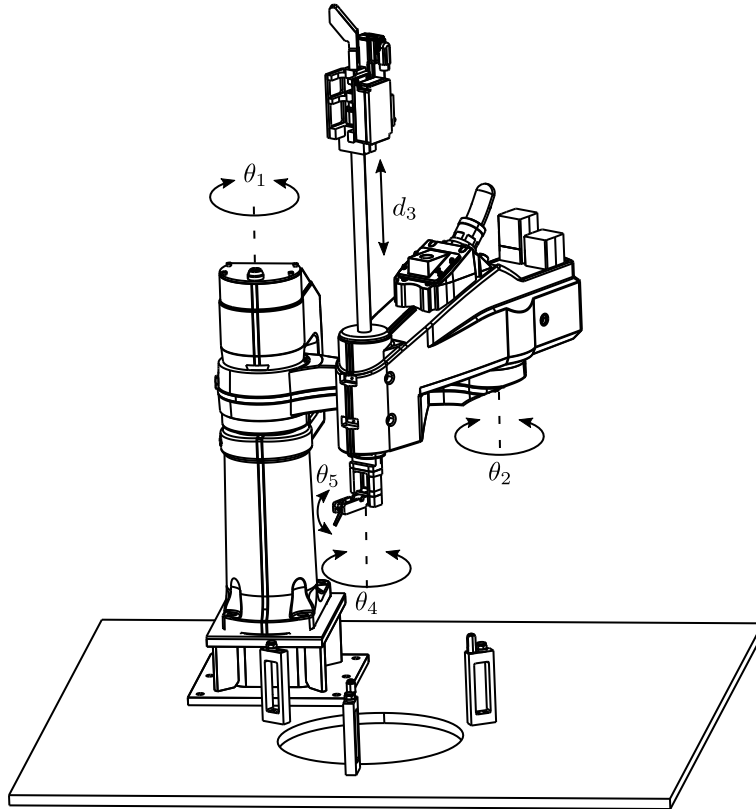


Abbildung 2.11: Schematische Abbildung des RWs

verbunden [30]. Der Lackdraht wird ebenfalls im Inneren der Pinole geführt. Der Schwenkmechanismus selbst besteht aus einer Kombination aus Schneckengetriebe und Zahnrädern, die die rotatorische Bewegung des Antriebs in ein Schwenken der Nadel übersetzen [41].

Die Steifigkeit dieses RWs wird durch eine Simulation der Pinole mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) untersucht. Für eine Prozesskraft von 32 N berichten Gerngroß et al. [30] von einer maximalen Abweichung von ca. 0,72 mm. Diese Abweichung ist noch akzeptabel, verhindert aber das Erhöhen der Hubzahl durch eine Erhöhung der parallelen Leiterzahl $z_{p,Hub}$, da sich die Drahtzugkräfte in diesem Fall ebenfalls vervielfachen. Das wirtschaftliche Potential ergibt sich bei diesem Konzept durch geringere Investitionskosten für einen RW. Abbildung 2.11 zeigt den zum Nadelwickler erweiterten SCARA.

Im Gegensatz zum VW und HW besitzt der RW keine entkoppelte kinematische Kette. Zudem lassen sich die kinematischen Achsen nicht mehr eindeutig den Freiheitsgraden einer Nadelwickelkinematik zuordnen. Zwar entsprechen die Achsen d_3 und θ_5 der Hubachse bzw. der Schwenkachse, die Bewegungen der Schaltachse und der beiden Vorschubachsen ergeben sich jedoch als Überlagerung aus den Achspositionen von θ_1 , θ_2 und θ_4 .

Bei der Verwendung eines Industrieroboters gilt es stets, Singularitäten zu beachten. Diese stellen spezielle Positionen dar, in denen der Zusammenhang zwischen Achspositionen und Endeffektorlage nicht mehr ein-eindeutig ist. Singularitäten lassen sich in Rand-

Singularitäten und interne Singularitäten unterscheiden [42, S. 116]. Rand-Singularitäten treten dann auf, wenn die Kinematik am Rand des Arbeitsraumes operiert. Interne Singularitäten bedeuten, dass mindestens zwei Gelenkrotationen um dieselbe Achse stattfinden. Dieser Typ ist beim Planen einer Bewegung deutlich kritischer, da diese Singularitäten auch innerhalb des Arbeitsraumes auftreten.

Singularitäten sind deshalb problematisch, da in diesem Fall die Achspositionen keinen eindeutigen Zusammenhang mehr mit der Werkzeugposition bilden. Weiterhin ist keine beliebige Bewegung aus einer Singularität heraus möglich und eine Bewegung in der Nähe einer Singularität kann unendlich hohe Achsgeschwindigkeiten bedeuten [42, S. 116].

Bei einem SCARA existieren lediglich Randsingularitäten an den Grenzen der Bewegungsfreiheit der Achsen. Die kritischste Rand-Singularität tritt bei $\theta_2 = 0$ auf, was einem maximal ausgestreckten Arm entspricht. In diesem Fall findet ein Konfigurationswechsel statt und die Bewegungsfreiheit ist deutlich eingeschränkt.

2.3.4 Programmierung der Nadelwickelanlagen

Obwohl Standard-Nadelwickler im Grunde CNC-Maschinen darstellen, erfolgt deren Programmierung oft in manuellen Verfahren. Mit dieser Programmierweise geht einer der wesentlichen Vorteile der Nadelwickeltechnik, die exakte Drahtablage, verloren. Für normale CNC-Maschinen, aber auch für Industrieroboter, existieren jedoch intelligente Programmierkonzepte, die ein effizientes Erstellen eines Programms gewährleisten.

Ziel dieser Arbeit ist daher ein rechnergestütztes Verfahren, das in Anlehnung an bestehende Konzepte für Werkzeugmaschinen eine automatisierte Trajektorienplanung ermöglicht. Mit einer solchen Programmierung lässt sich der Wickelprozess digitalisieren, was den Einsatz weiterer Systeme und Modelle zur Verbesserung der Wicklungsqualität erlaubt.

Aus diesem Grund werden im folgenden Kapitel zunächst die theoretischen und mathematischen Grundlagen der Robotik und Trajektorienplanung erläutert, die im weiteren Verlauf der Arbeit zum Einsatz kommen.

2.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel umfasst die Definition einiger grundlegender Begriffe der Wickeltechnik wie dem Füllfaktor. Zudem werden konzentrierte und verteilte Wicklungen und ihre Relevanz in elektrischen Antrieben für elektrifizierte Fahrzeuge vorgestellt. Es zeigt sich, dass im Antrieb eines BEFs beide Wicklungstypen zum Einsatz kommen können. Daher werden die Fertigungsprozesse der relevanten Bauteile einer elektrischen Maschine, Stator und Rotor, erläutert. Hauptaugenmerk liegt dabei bei der Herstellung der Wicklungen, da diese Arbeit diesen Prozess betrachtet.

Untersucht wird dabei die Nadelwickeltechnik, die sich jüngst einem gesteigerten Interesse in der Forschung erfreut. Sie erlaubt ein flexibles Herstellen verschiedener Wicklungsprodukte und eine höhere Automatisierung und lässt sich sowohl für konzentrierte als auch für verteilte Wicklungen einsetzen.

Den Abschluss des Kapitels bildet die Vorstellung verschiedener Nadelwickelkinematiken, die zur Durchführung von Wickelversuchen für diese Arbeit zur Verfügung stehen.

3 Grundlagen der Robotik und Trajektorienplanung

Die Robotik beschreibt Siciliano und Khatib [43, S. 2] zufolge die Wissenschaft, die sich mit der intelligenten Verknüpfung von Wahrnehmung und Bewegung bei Maschinen beschäftigt. Die vorgestellten Nadelwickler lassen sich mit den Methoden der Robotik mathematisch modellieren. Diese Methoden werden zunächst vorgestellt und anschließend auf die Nadelwickelanlagen angewendet. Zur Beschreibung der Nadelwickelbahn stehen im zweiten Teil dieses Kapitels parametrische Funktionen und Splines im Fokus. Den Abschluss des Kapitels bildet das Gebiet der Trajektorienplanung.

3.1 Robotik

Die kinematische Kette eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine lässt sich durch Koordinatensysteme und Transformationen darstellen. In diesem Abschnitt wird deren systematische Beschreibung erläutert.

3.1.1 Position und Orientierung

Die Position eines Punktes R im Raum beschreibt dessen Ortsvektor. Der Ortsvektor \mathbf{r} ist jedoch abhängig vom referenzierten Koordinatensystem (KOS). Wie Abbildung 3.1 zeigt, differieren die Vektoren ${}_W\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ und ${}_A\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, da sich KOS W von KOS A unterscheidet, obwohl sie den selben Punkt beschreiben. Die Abbildung, mit der sich R von einem KOS in ein anderes überführen lässt, heißt Koordinatentransformation. Eine solche Transformation erfolgt im kartesischen Fall in zwei Schritten.

Zunächst ist das Ziel-KOS so zu rotieren, dass dessen Achsen parallel zum Ausgangs-KOS ausgerichtet sind. Üblicherweise werden dazu die Elementarrotationen $\mathbf{R}_x(\theta)$, $\mathbf{R}_y(\theta)$ und $\mathbf{R}_z(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ verwendet [44, S. 34], die das KOS um die im Index stehende Achse rotieren. Diese Matrizen sind im dreidimensionalen Raum gegeben durch:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.1a)$$

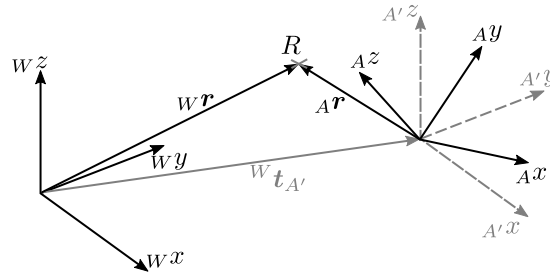


Abbildung 3.1: Raumvektoren und Koordinatentransformation

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1c)$$

Durch sequenzielles Ausführen von Rotationen lässt sich A in A' überführen, dessen Achsen alle parallel zu W ausgerichtet sind. Eulers Theorem zur Rotation besagt, dass maximal drei Elementarrotationen notwendig sind, um eine beliebige Drehung zu realisieren, wenn zwei aufeinanderfolgende Drehungen nicht um dieselbe Achse erfolgen [45]. Die Winkel, die einen solchen minimalen Satz bilden, nennen sich Euler-Winkel [46, S. 491]. Es gibt insgesamt zwölf Möglichkeiten, Euler-Drehungen auszuführen [47, S. 14]. Beim Nadelwickeln kommt die Euler-Sequenz Z - X - Z mit den Drehwinkeln $\boldsymbol{\xi} = [\phi, \vartheta, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ zum Einsatz. Damit lässt sich eine beliebige Gesamtrotaion durch das sequenzielle Aneinanderreihen der Elementarrotationen darstellen [44, S. 36 f.]:

$${}^{A'}\mathbf{R}_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_x(\vartheta)\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} {}_A\mathbf{e}_{x'} & {}_A\mathbf{e}_{y'} & {}_A\mathbf{e}_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Zu beachten ist hierbei, dass sich durch eine Rotation die Achsenorientierung für die weiteren Drehungen ändert. Die drei Spalten der Rotationsmatrix ${}_A\mathbf{e}_{x'}$, ${}_A\mathbf{e}_{y'}$ und ${}_A\mathbf{e}_{z'}$ stellen die Einheitsvektoren dar, die die Richtung der Achsen von A' im Koordinatensystem A angeben [42, S. 59].

Der zweite Schritt ist die Translation ${}^W\mathbf{t}_{A'} \in \mathbb{R}^3$ zwischen dem Ursprung von W und A' . Diese kann durch einfache Vektoraddition dargestellt werden. Damit ergibt sich die Transformation

$${}^W\mathbf{r} = {}^W\mathbf{t}_{A'} + {}^{A'}\mathbf{R}_A(\boldsymbol{\xi}) \cdot {}^{A'}\mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Die Rotation ${}^{A'}\mathbf{R}_A(\boldsymbol{\xi})$ und Translation ${}^W\mathbf{t}_{A'}$ lassen sich durch die Verwendung von homogenen Koordinaten zusammenfassen [44, S. 46 f.], indem die Skalierung Eins gesetzt wird.

Die daraus resultierende homogene Transformationsmatrix ${}^W\tilde{\mathbf{T}}_A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, die den homogenen Vektor ${}_A\tilde{\mathbf{r}} = [{}^A\mathbf{r}^T, 1]^T \in \mathbb{R}^4$ von KOS A ins Ursprungs-KOS W transformiert, ist gegeben durch

$${}^W\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} {}^{A'}\mathbf{R}_A(\boldsymbol{\xi}) & {}^W\mathbf{t}_{A'} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} {}_A\tilde{\mathbf{r}} = {}^W\tilde{\mathbf{T}}_A \cdot {}_A\tilde{\mathbf{r}}. \quad (3.4)$$

Die Lage eines starren Körpers ist durch dessen Position und Orientierung im Bezug auf ein Referenz-KOS komplett bestimmt [42, S. 39]. Dadurch lässt sich die Position der Gelenke eines Roboters oder einer Werkzeugmaschine beschreiben, wenn diese als starr angenommen werden. Die Transformation (3.4) bildet die Basis für eine solche kinematische Beschreibung.

3.1.2 Berechnung der Vorwärtskinematik nach Denavit-Hartenberg

Um die Bewegung eines Roboters beschreiben zu können, ist es notwendig, den Zusammenhang zwischen den einzelnen Achspositionen und der Lage des Endeffektors zu kennen. Dieser Zusammenhang heißt direkte Kinematik oder Vorwärtskinematik (VWK). Der Endeffektor beschreibt das Werkzeug der Anlage. Referenzpunkt für diese Beschreibung stellt üblicherweise der Werkzeugmittelpunkt des Endeffektors dar, besser bekannt als Tool-Center-Point (TCP).

Abhängig von der kinematischen Kette der Anlage kann der Endeffektor nur gewisse Positionen und Orientierungen erreichen. Diese Menge an möglichen Lagen bezeichnet man als Arbeitsraum. Industrielle Anlagen können im Allgemeinen nicht an jeder erreichbaren Position eine beliebige Orientierung annehmen. Bei einer zusammenhängenden kinematischen Kette, wie sie ein Roboter besitzt, ist ein Ende der Kette mit der Basis, das andere Ende mit dem Endeffektor verbunden [42, S. 58]. Bei einem entkoppelten Aufbau, der oft bei Werkzeugmaschinen zum Einsatz kommt, wirken mehrere kinematische Ketten zusammen. Die kinematischen Ketten bestehen aus einer beliebigen Anordnung von linearen und rotatorischen Gelenken bzw. Achsen.

Über die VWK wird mit den Positionen der einzelnen Glieder die Lage des Endeffektors im Basis-KOS bestimmt. Das Standardverfahren für die Bestimmung der VWK ist die Transformation nach Denavit-Hartenberg (DH), die auf der DH-Konvention aus dem Jahr 1955 basiert [48]. Durch die Bestimmung von DH-Parametern, die vom kinematischen und geometrischen Aufbau der Anlage abhängen, können Transformationsmatrizen von einem Gelenk zum nächsten aufgestellt werden. Das Aneinanderreihen dieser Matrizen ergibt die homogene VWK [42, S. 61–65]. Besitzt die kinematische Kette insgesamt ν Gelenke, dann

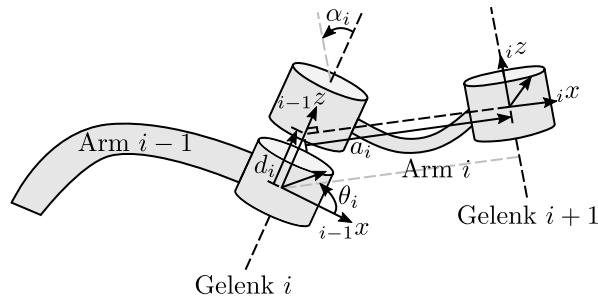


Abbildung 3.2: Definition der Standard-DH-Parameter nach [44, S. 197]

lautet die homogene VWK allgemein

$${}^W\tilde{\mathbf{T}}_\nu = {}^W\tilde{\mathbf{T}}_O \cdot {}^O\tilde{\mathbf{T}}_1 \cdot \prod_{i=2}^{\nu} {}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i. \quad (3.5)$$

Üblicherweise legt man das Welt-KOS W in die Basis des Roboters O , sodass ${}^W\tilde{\mathbf{T}}_O = \mathbf{I}_{4 \times 4}$ gilt. In Abbildung 3.2 sind beispielhaft zwei Gelenke mit den zugehörigen KOS und den Standard DH-Parametern gezeigt. Die DH-Parameter bilden die Basis für die Beschreibung der VWK. Die Parameter θ und d bezeichnen die Gelenkposition einer rotatorischen oder prismatischen Achse, a und α indizieren eine statische Verschiebung und Rotation zweier einzelner Gelenke durch den Arm [44, S. 197 f.]. Der Gelenkwinkel θ_i ergibt sich durch den Drehwinkel von Achse ${}_{i-1}x$ nach ${}_ix$ um die Achse ${}_{i-1}z$, während d_i die Gelenkverschiebung vom Ursprung von KOS $i-1$ zur ${}_ix$ -Achse entlang der ${}_{i-1}z$ -Achse umfasst. Die Armlänge a_i bemisst den Abstand zwischen ${}_{i-1}z$ und ${}_iz$ entlang der ${}_ix$ -Achse. Die statische Verdrehung durch Arm i wird durch den Drehwinkel α_i , gemessen von ${}_{i-1}z$ nach ${}_iz$ um ${}_ix$, beschrieben.

Im Folgenden soll die VWK des RWs beispielhaft abgeleitet werden, die DH-Parameter und Transformationen der anderen untersuchten Nadelwickler sind im Anhang A gegeben.

Tabelle 3.1 zeigt die DH-Parameter für den RW. Die einzelnen DH-KOS zur Bestimmung der Parameter analog zu Abbildung 3.2 finden sich in [30]. Die Größen o_{Tool} , l_{Tool} , l_1 und l_2 sind die geometrischen Abmaße der einzelnen Arme des RWs und finden sich in Abbildung 3.3. Die Transformationsmatrix zwischen den Gelenken i und $i-1$ ist mit den DH-Parametern allgemein gegeben durch

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i &= \tilde{\mathbf{R}}_{{}_{i-1}z}(\theta_i) \tilde{\mathbf{L}}_{{}_{i-1}z}(d_i) \tilde{\mathbf{L}}_{{}_ix}(a_i) \tilde{\mathbf{R}}_{{}_ix}(\alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Matrixfunktion $\tilde{\mathbf{L}}_i(\cdot)$ stellt eine homogene Transformationsmatrix mit einer Translation

Tabelle 3.1: DH-Parameter des RWs

DH-Parameter	θ in rad	d in mm	a in mm	α in rad
Basis	0	40	0	0
Achse 1	q_1	0	l_1	0
Achse 2	q_2	0	l_2	0
Achse 3	0	$q_3 - 40$	0	0
Achse 4	q_4	0	o_{Tool}	$-\pi/2$
Achse 5	q_5	0	l_{Tool}	0

entlang der Koordinatenachse i dar, bei der keine Rotation erfolgt, sodass die Rotationsmatrix der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ entspricht. Die homogene VWK des RWs ist damit analog zu (3.5) gegeben durch

$${}^W \tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} = \tilde{\mathbf{L}}_{Wz}(d_0) \prod_{i=1}^5 {}^{i-1} \tilde{\mathbf{T}}_i = \begin{bmatrix} \cos_{124} \cos_5 & -\cos_{124} \sin_5 & -\sin_{124} & & p_x \\ \sin_{124} \cos_5 & -\sin_{124} \sin_5 & \cos_{124} & & p_y \\ & -\sin_5 & -\cos_5 & 0 & q_3 - l_{\text{Tool}} \sin_5 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

mit

$$p_x = l_2 \cos_{12} + l_1 \cos_1 + o_{\text{Tool}} \cos_{12} \cos_4 - o_{\text{Tool}} \sin_{12} \sin_4 + l_{\text{Tool}} \cos_5 (\cos_{12} \cos_4 - \sin_{12} \sin_4)$$

$$p_y = l_2 \sin_{12} + l_1 \sin_1 + o_{\text{Tool}} \cos_{12} \sin_4 - o_{\text{Tool}} \sin_{12} \cos_4 + l_{\text{Tool}} \cos_5 (\cos_{12} \sin_4 - \sin_{12} \cos_4).$$

Die Größen p_x und p_y entsprechen der kartesischen Position des TCPs in der x - y -Ebene des Basis-KOSs. In Gleichung (3.7) finden die Abkürzungen \sin_i und \cos_i für die Sinus- bzw. Kosinusfunktion Anwendung. Deren Index gibt dabei das Argument der Winkelfunktion als Summe der Achswinkel wieder, beispielsweise gilt $\sin_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

Die VWK beschreibt der Konvention nach die kinematische Kette bis zum TCP. Durch den Vergleich von (3.5) mit der allgemeinen homogenen Transformation (3.4) lassen sich die Translation ${}^W \mathbf{t}_{\text{TCP}}$ und die Rotation ${}^W \mathbf{R}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\xi})$ des TCPs bestimmen. Die Translation des TCPs entspricht der Transformation des Ursprungs des Endeffektor-KOS in das Welt-KOS, wobei ${}_{\text{TCP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}$ dem homogenen Nullvektor entspricht.

$${}^W \tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} = {}^W \tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} \cdot {}_{\text{TCP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} = {}^W \tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} \cdot [\mathbf{0}_{1 \times 3}, 1]^T \quad (3.8)$$

Die Einträge in der Rotationsmatrix entsprechen analog zu (3.2) der Orientierung des Endeffektor-KOS. Zur Beschreibung der TCP-Orientierung ist das Verwenden der Euler-Winkel jedoch sinnvoller, da diese aus nur drei statt neun Parametern bestehen. Aus den Einträgen der Rotationsmatrix r_{ij} sind die Euler-Winkel in Abhängigkeit von der gewählten

Sequenz bestimmbar [49, S. 31 f.]. Für die Z - X - Z Sequenz lauten sie

$$\phi = \text{atan2}(r_{13}, -r_{23}), \quad (3.9a)$$

$$\vartheta = \text{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right), \quad (3.9b)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{31}, r_{32}). \quad (3.9c)$$

In dieser Gleichung findet die $\text{atan2}(y, x)$ -Funktion¹ Anwendung, die ein Berechnen des Arkustangens in allen vier Quadranten erlaubt. Die Position ${}^w\mathbf{r}_{\text{TCP}}$ und Orientierung $\boldsymbol{\xi}_{\text{TCP}}$ des TCPs lassen sich damit jeweils als Funktionen in Abhängigkeit der Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\nu$ darstellen. Zusammen ergeben sie die VWK als allgemeine Vektorfunktion $\mathbf{f}_{\text{kin}} : \mathbb{R}^\nu \mapsto \mathbb{R}^6$.

$${}^w\mathbf{s} = \mathbf{f}_{\text{kin}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^w\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\xi}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Die Variable ${}^w\mathbf{s}$ stellt die Lage des TCPs dar und besteht aus Position und Orientierung des Endeffektors.

Für den Anwendungsfall Nadelwickeln ist zu beachten, dass die untersuchten Anlagen einen Freiheitsgrad $\nu = 5$ besitzen und damit nicht jede beliebige Lage innerhalb des Arbeitsraumes einnehmbar ist. Konkret ist die zweite Drehung in der Euler-Sequenz Z - X - Z durch den kinematischen Aufbau fest vorgegeben, sodass stets $\vartheta = \pi/2$ gilt. Das Vektorfeld \mathbf{f}_{kin} lässt sich dadurch auf eine fünfdimensionale Größe reduzieren.

Die Funktion \mathbf{f}_{kin} ermöglicht das Transformieren von Positionen im Gelenkraum in Lagen im Arbeitsraum. Der Gelenkraum umfasst die Menge aller Achspositionen \mathbf{q} , die die Kinematik einnehmen kann. Ein Punkt im Gelenkraum wird dabei als Vektor der Gelenkpositionen beschrieben, während er im Arbeitsraum über die kartesische Position und Orientierung ${}^w\mathbf{s}$ gegeben ist.

¹Die atan2 -Funktion ist durch folgende Fallunterscheidung gegeben:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & x > 0 \\ \text{atan}(y/x) + \pi & x < 0, y > 0 \\ \pm\pi & x < 0, y = 0 \\ \text{atan}(y/x) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

3.1.3 Inverse Kinematik

Die entsprechende Rücktransformation heißt inverse Kinematik und bildet vom Arbeitsraum in den Gelenkraum ab:

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}_{\text{kin}}(W\mathbf{s}). \quad (3.11)$$

Zur Bestimmung der inversen Kinematik muss die nichtlineare Vektorfunktion \mathbf{f}_{kin} invertiert werden. Zu beachten ist dabei, dass \mathbf{f}_{kin} im Allgemeinen keine bijektive Abbildung ist. Abhängig von der beschriebenen Kinematik und der zu bestimmenden Position ist es daher möglich, dass zum Teil keine Lösung für \mathbf{i}_{kin} , oder aber auch mehrere Lösungen existieren können [47, S. 29].

Koordinaten oder Bewegungen sind normalerweise im Arbeitsraum definiert, da die zu bearbeitenden Werkstücke in Arbeitsraumkoordinaten leichter zu beschreiben sind. Daher ist die inverse Kinematik elementar in der Beschreibung einer Roboterbewegung, da sie notwendig ist, um die Referenzpositionen \mathbf{q} der Gelenke für eine definierte Lage zu bestimmen.

Die inverse Kinematik ist auf verschiedene Arten bestimmbar. Die wünschenswerteste Form ist eine geschlossene Lösung [47, S. 29 f.]. Sie kann entweder analytisch oder geometrisch bestimmt werden. Die analytische Bestimmung der inversen Kinematik erfolgt durch das Auflösen von \mathbf{f}_{kin} , was allerdings nur für vereinfachte Kinematiken möglich ist [47, S. 29]. Für die geometrische Bestimmung sind Punkte zu identifizieren, die eine Beschreibung der Lage des Endeffektors durch einen reduzierten Satz an Gelenkvariablen ermöglicht. Damit lässt sich die Problemdimension reduzieren, sodass eine analytische Bestimmung möglich wird.

Sollte keine analytische Lösung existieren, sind numerische Methoden eine Alternative. Diese bieten den Vorteil, dass sie im Gegensatz zu einer analytischen Lösung unabhängig von der eigentlich Kinematik sind, während mit ihnen jedoch ein höherer Rechenaufwand einhergeht. Einen kurzen Überblick über die gängigen numerischen Verfahren geben Waldron und Schmiedeler [47, S. 30 f.].

Für die Nadelwickelanlagen aus Abschnitt 2.3 lassen sich die inversen Kinematiken durch die geometrische Methode in geschlossener Form angeben. Im Folgenden wird die inverse Kinematik des RWs definiert. Die inverse Kinematik für die Standardanlagen VW und HW findet sich in Anhang A.

Für die betrachtete Kinematik setzt sich der Positionsvektor im Gelenkraum aus vier rotatorischen θ_1 , θ_2 , θ_4 und θ_5 sowie einer translatorischen Achse d_3 zusammen:

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_5]^T = [\theta_1, \theta_2, d_3 - 40 \text{ mm}, \theta_4, \theta_5]^T \quad (3.12)$$

Eine Eigenheit der RW-Kinematik ist, dass die dritte Euler-Drehung um z'' allein durch

Achse θ_5 ausführbar ist. Bei entsprechender Wahl der Nullposition gilt somit

$$q_5 = {}_W s_5. \quad (3.13)$$

Aus der homogenen VWK in (3.7) ist die Achsposition $q_3({}_W \mathbf{s})$ direkt durch analytisches Auflösen bestimmbar:

$$\begin{aligned} {}_W s_3 &= q_3 - l_{\text{Tool}} \sin({}_W s_5) \\ \Rightarrow q_3 &= {}_W s_3 + l_{\text{Tool}} \sin({}_W s_5) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ebenso lässt sich mit (3.9) feststellen, dass die erste Euler-Drehung um die z -Achse zusammen von den Achsen θ_1 , θ_2 und θ_4 erfolgt. Damit gilt bei entsprechender Wahl von Nullposition und Drehrichtung:

$$\begin{aligned} {}_W s_4 &= q_1 + q_2 + q_4 \\ \Rightarrow q_4 &= {}_W s_4 - q_1 - q_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Position von θ_4 hängt also vom Euler-Drehwinkel θ und den Positionen der beiden Achsen θ_1 und θ_2 ab. Zur Bestimmung von q_1 und q_2 lässt sich nun die geometrische Methode einsetzen. Mögliche Punkte, die beim RW ein Aufteilen der Kinematik erlauben, befinden sich auf der Mittelachse der Pinole, die der Drehachse von θ_4 entspricht. Eine sinnvolle Wahl zur Aufteilung der Kinematik ist der Schnittpunkt der Achsen d_3 und θ_4 , da dessen Position allein durch die ersten drei Achsen beschreibbar ist. Zunächst ist diese Position in Abhängigkeit des gegebenen TCPs zu bestimmen. Mit den Maßen l_{Tool} und o_{Tool} aus Tabelle 3.1 ist der Punkt bestimmt durch

$${}_W \mathbf{r}_{\text{geo}} = \begin{bmatrix} {}_W r_{\text{geo},x} \\ {}_W r_{\text{geo},y} \\ {}_W r_{\text{geo},z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_W s_1 - \cos({}_W s_4)(o_{\text{Tool}} + l_{\text{Tool}} \cos({}_W s_5)) \\ {}_W s_2 - \sin({}_W s_4)(o_{\text{Tool}} + l_{\text{Tool}} \cos({}_W s_5)) \\ {}_W s_3 + l_{\text{Tool}} \sin({}_W s_5) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Projiziert man diese reduzierte Kinematik in die ${}_W x$ - ${}_W y$ -Ebene des W -KOS, ergibt sich eine planare Zwei-Arm-Kinematik, wie Abbildung 3.3 zeigt. Mit dem Kosinussatz und den Armlängen l_1 und l_2 kann die Position q_2 bestimmt werden

$$\cos(q_2) = -\cos(\pi - q_2) = \frac{{}_W r_{\text{geo},x}^2 + {}_W r_{\text{geo},y}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}. \quad (3.17)$$

Das Berechnen der Position q_2 über die Arkuskosinus-Funktion würde nur Winkel im Wertebereich $q_2 \in [0, \pi]$ ergeben. Um den Winkel über den vollen Wertebereich zu erhalten, bietet sich die bereits in (3.9) verwendete $\text{atan2}(x, y)$ Funktion an, die das Berechnen der Winkel in

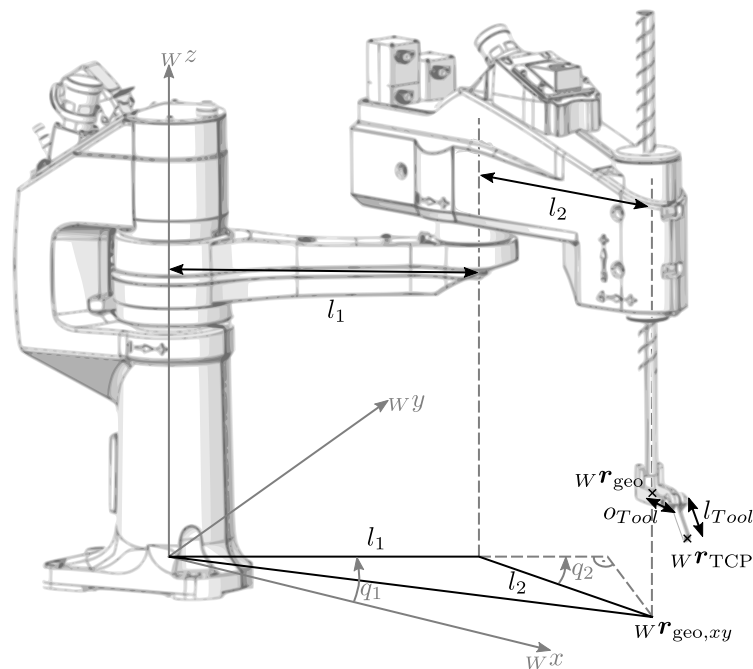


Abbildung 3.3: Geometrische Methode zur Bestimmung der inversen Kinematik des RWs; Bildquelle [30]

allen vier Quadranten durch die Analyse der Vorzeichen der beiden Argumente ermöglicht.

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)) = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \cos(q_2)^2}, \cos(q_2)\right) \quad (3.18)$$

Für das erste Argument in (3.18) ist das Vorzeichen nicht eindeutig bestimmt. Ein SCARA kann zwei mögliche Konfigurationen, righty (+) oder lefty (-), einnehmen. Da der RW durch seine Positionierung in der Roboterzelle in linkshändiger Stellung eine größere Bewegungsfreiheit besitzt, ist diese Konfiguration vorzuziehen und die Funktion besitzt beim RW ein negatives Vorzeichen. Diese Konfiguration ist auch in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Gleichungen (3.16)-(3.18) ergeben zusammen die Achsposition $q_2({}_W\mathbf{s})$.

Die verbleibende Position q_1 kann ebenfalls über trigonometrische Betrachtungen bestimmt werden. Dazu wird l_2 auf l_1 projiziert. Die Differenz der Winkel von ${}_W\mathbf{r}_{\text{geo}}$ und des von der planaren Kinematik aufgespannten Dreiecks ergibt den gesuchten Wert.

$$q_1 = \text{atan2}({}_W r_{\text{geo},y}, {}_W r_{\text{geo},x}) - (\pm \text{atan2}(l_2 \sin(q_2), l_1 + l_2 \cos(q_2))) \quad (3.19)$$

Auch hier gilt analog zu (3.18), dass das Vorzeichen abhängig von der Konfiguration des Roboters ist. Mit (3.18) und (3.19) ist (3.15) bestimmbar. Zusammen mit (3.13), (3.14) und (3.17) ergibt sich damit eine analytische Definition $\mathbf{q}({}_W\mathbf{s}) = \mathbf{i}_{\text{kin}}({}_W\mathbf{s})$ der inversen Maschinenkinematik des RWs.

Mit der VWK und der inversen Kinematik können damit Punkte zwischen Arbeitsraum und Gelenkraum transformiert werden.

3.1.4 Differentielle Kinematik

Die differentielle Kinematik erlaubt es, statt der Position im Falle der direkten bzw. inversen Kinematik, die Geschwindigkeiten zwischen Arbeits- und Gelenkraum zu transformieren. Die Geschwindigkeit im Arbeitsraum besteht, analog zur Lage, aus einer translatorischen Geschwindigkeitskomponente ${}_W\dot{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} \in \mathbb{R}^3$ und einer Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{TCP}} \in \mathbb{R}^3$. Der Punktoperator ($\dot{\cdot}$) bezeichnet in dieser Arbeit die zeitliche Ableitung. Die Geschwindigkeit der Lage ergibt sich damit zu [42, S. 106]

$${}_W\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} {}_W\dot{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{TCP}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\xi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.20)$$

Die Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times \nu}$ besteht aus den Teilmatrizen für die Translation $\mathbf{J}_r(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times \nu}$ und Rotation $\mathbf{J}_\xi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times \nu}$. Sie stellt die Jacobimatrix der VWK dar und ist definiert als [42, S. 128].

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\text{kin},1}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{\text{kin},1}}{\partial q_\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\text{kin},6}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{\text{kin},6}}{\partial q_\nu} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

In (3.20) ist die Lage auf das Bezugssystem W bezogen. Die Geschwindigkeit des Endeffektors lässt sich in einem von W verschiedenen KOS A durch die Transformation

$${}^A\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_W & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & {}^A\mathbf{R}_W \end{bmatrix} {}_W\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_W & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & {}^A\mathbf{R}_W \end{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = {}^A\mathbf{J}_W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.22)$$

der Jacobimatrix angeben [42, S. 113].

Die Inversion der Jacobimatrix ergibt die inverse differentielle Kinematik (IDK), die das Berechnen der Achsgeschwindigkeiten aus der TCP-Geschwindigkeit ermöglicht.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} {}_W\dot{\mathbf{s}}. \quad (3.23)$$

Dabei gilt es zu beachten, dass $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ nur invertierbar ist, wenn sie vollen Rang besitzt. Dies ist nicht der Fall, wenn sich die Kinematik in einer Singularität befindet, da dann die differentielle VWK (3.20) linear abhängige Gleichungen beinhaltet [42, S. 127]. Bei der Z - X - Z -Sequenz, wie sie bei Nadelwicklern zum Einsatz kommt, treten Singularitäten auf, wenn die Drehung ϑ den Wert 0 oder π besitzt, da dann die beiden Achsen z und z'' identisch sind [47, S. 14]. Beim RW heißt dies, dass q_4 und q_5 um dieselbe Achse drehen und nicht mehr unterscheidbar sind. Durch $\vartheta = \pi/2$ kann, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, der RW lediglich Rand-Singularitäten annehmen. Die kritischste Singularität bei $\theta_2 = 0$ ist durch die Positionierung in der Roboterzelle jedoch nicht einnehmbar, sodass kein Rangverlust in

den Anwendungsfällen dieser Arbeit auftritt. Nicht quadratische Jacobimatrizen, also für $\nu \neq 6$, sind ebenfalls nicht invertierbar. Hier lässt sich eine Pseudoinverse $\mathbf{J}(\mathbf{q})^\dagger$ bilden [50, S. 227 f.]. Für die Nadelwickler gilt zwar $\nu = 5$, allerdings ist die zweite Euler-Drehung konstant, sodass $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ eine Nullzeile besitzt und sich zu einer invertierbaren 5×5 Matrix reduzieren lässt.

Die Berechnung der IDK kann ebenfalls entweder analytisch oder numerisch erfolgen. Für die analytische Lösung ist $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ nach \mathbf{q} aufzulösen, was abhängig von der Kinematik aufwändig sein kann. Für eine ausreichend genaue numerische Lösung darf $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ nicht schlecht konditioniert sein. Grundsätzlich ist eine analytische Lösung vorzuziehen, da die IDK von den Gelenkpositionen \mathbf{q} abhängt und damit die Inverse für jede Position neu zu berechnen ist.

3.2 Interpolation von Bewegungen

Im Grunde lassen sich alle Aufgaben eines Roboters darauf zurückführen, dass er mit seinem Endeffektor eine gegebene Lage zu einer gegebenen Zeit einnimmt. Dies erfordert eine definierte Bewegung der Kinematik. Es existieren verschiedene Methoden, wie Bewegungen ermittelt, beschrieben und ausgeführt werden können, die sich unter anderem im Aufwand und Einsatzgebiet unterscheiden. Die Aufgabe des Nadelwickelns findet in einer definierten, statischen Umgebung statt. Dadurch kann die Berechnung der Bewegung komplett offline erfolgen. Online-Technologien aus der mobilen Robotik, wie Umgebungserkennung, Navigationsplanung und Mensch-Roboter-Kollaboration sind in dieser Anwendung nicht notwendig [51, S. 2 f.]. Damit reduziert sich die Aufgabe darauf, vorab eine möglichst optimale Bewegung zu definieren.

3.2.1 Abgrenzung von Bahn und Trajektorie

Bevor jedoch die Suche nach einer optimalen Bewegung beginnt, stellt sich zunächst die Frage, wie eine solche Bewegung sinnvollerweise dargestellt werden kann. Die Aufgabe, ein Bewegungsprofil für eine Werkzeugmaschine oder einen Roboter zu generieren, wird Trajektorienplanung genannt. Ezair et al. [52] beschreiben das Problem der Trajektorienplanung im Kontext der Robotik damit, eine glatte und optimale Trajektorie mit Anfangs- und Endbedingung zu finden, die einen Satz an Nebenbedingungen erfüllt. Die Trajektorienplanung lässt sich also global als eine Art Optimierungsproblem auffassen.

Um eine Trajektorie zu planen, existieren direkte Verfahren, welche die Trajektorie direkt in einem Schritt definieren. Durchgesetzt haben sich jedoch entkoppelte Verfahren, die zur Lösung des Problems die Aufgabe der Trajektorienplanung in mehrere Teilbereiche aufteilen, was sich auch in den mathematischen Formulierungen widerspiegelt [53, S. 373 f., 384 f.]. Durch die Aufteilung in Teilprobleme ist eine effizientere Lösungsfindung möglich.

Üblicherweise wird die Trajektorie als Komposition einer parametrischen Bahn $\mathbf{s}(u)$ und eines Bewegungsgesetzes $u(t)$ beschrieben [46, S. 6 f.]. Die Bahn \mathbf{s} definiert geometrisch den Verlauf des TCPs, dem die Anlage folgen soll, in einem beliebigen KOS. Das Bewegungsgesetz $u(t)$ hingegen stellt dar, wie der Bahn zeitlich gefolgt werden soll. Die Begrifflichkeiten in diesem Bereich sind in der Literatur teilweise nicht eindeutig, in dieser Arbeit wird der Benennung von Biagotti gefolgt [46, S. 415].

Dieser Abschnitt beschäftigt sich zunächst damit, wie eine Bahn beschrieben werden kann. Im darauffolgenden Abschnitt 3.3 werden die verbleibenden Schritte von der geometrischen Beschreibung bis zu einer von einer Maschine verarbeitbaren Trajektorie behandelt. Da die hier beschriebenen Zusammenhänge unabhängig vom verwendeten KOS sind, wird dieses zunächst nicht definiert.

Die Benennung der Bahn als \mathbf{s} impliziert, wie in (3.10) bereits dargestellt, dass sie sich aus Position und Orientierung des Endeffektors zusammensetzt. Um dessen geometrischen Pfad darzustellen, wird die Bahn als parametrische Funktion $\mathbf{s}(u)$ aufgefasst [46, S. 341 f.]. Der Parameter $u \in \mathbb{R}$ lässt sich frei wählen, üblicherweise fällt die Wahl jedoch auf den Wertebereich $u \in [0, 1]$. Dieser Wertebereich gilt, falls nicht anderweitig spezifiziert, ebenso für die restliche Arbeit. Im Bereich der bearbeitenden Prozesse ist es üblich, dass die Anlage einer vom Anwender spezifizierten Bahn, also sowohl Position als auch Orientierung, exakt folgen soll.

3.2.2 Einfache Bahninterpolationsverfahren

Bei der manuellen Programmierung einer solchen Bahn, dem sogenannte Teaching, erfolgt die Vorgabe von $N_r + 1$ Punkten $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^6$, $i \in \{0, \dots, N_r\}$, die von der Anlage einzunehmen sind. Die Aufgabe, eine mathematische Beschreibung für die Positionen zwischen diesen Punkten zu finden, heißt Interpolation.

Die einfachste Form ist die lineare Interpolation

$$\mathbf{s}_i(u) = (1 - u) \cdot \mathbf{r}_i + u \cdot \mathbf{r}_{i+1} \quad (3.24)$$

mit $u \in [0, 1]$, die die beiden Punkte \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} direkt miteinander verbindet. Damit besteht die Bahn aus insgesamt N_r Segmenten. Der Vorteil dieses Verfahrens ist die einfache Umsetzung. Nachteilig wirkt sich jedoch aus, dass die Bahn an den Verbindungspunkten Ecken besitzt, wie Abbildung 3.4 zeigt. Um der Bahn exakt zu folgen, muss die Anlage daher an diesen Stellen stoppen, da ansonsten unendlich hohe Beschleunigungen für eine instantane Richtungsänderung notwendig wären. Um das Anhalten zu vermeiden, bieten Anlagensteuerungen Routinen an, die die Bahn an Ecken verschleift. Diese, in der Literatur als Blending bezeichneten Verfahren, verlassen die lineare Interpolation in einem Bereich $\delta_i \in \mathbb{R}$ um den zu interpolierenden Punkt \mathbf{r}_i . In Abbildung 3.4 ist die Verschleifung durch einen

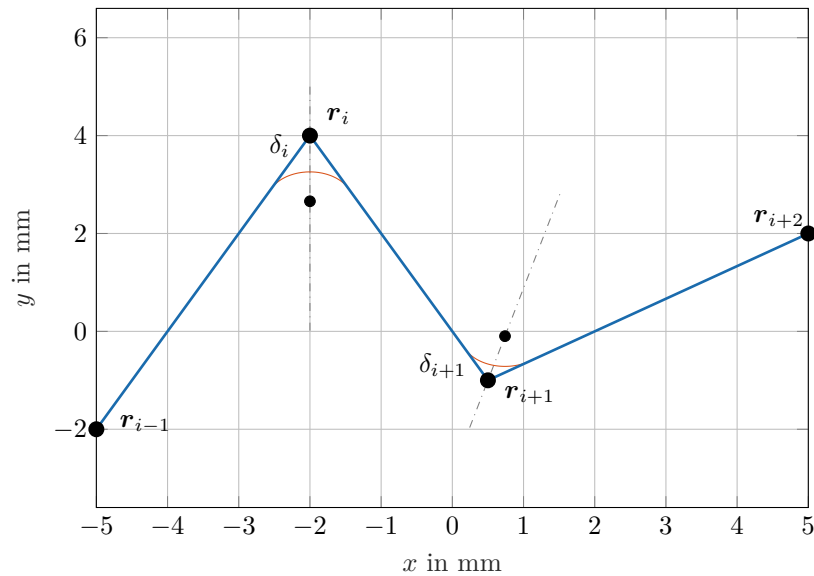


Abbildung 3.4: Interpolation von Punkten r_i mit einer linearen Interpolation (—) und einer linearen Interpolation mit zirkularem Verschleifen(—).

Kreisbogen realisiert, als Alternative lässt sich das Blending mittels Polynome durchführen [46, S. 406–414].

Im eindimensionalen Fall bietet sich für die Interpolation von $N_r + 1$ Tupeln (μ_i, r_i) , $i \in \{0, \dots, N_r\}$ zudem ein Polynom

$$s(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{N_r} u^{N_r} \quad (3.25)$$

mit den Parametern a_i , $i \in [0, \dots, N_r]$ vom Grad $\psi_S = N_r$ an. Ein entsprechendes Beispiel ist in Abbildung 3.5 gegeben. Mathematisch betrachtet resultiert durch das Einsetzen der Interpolationsbedingungen $s(\mu_i) = r_i$, $i \in \{0, \dots, N_r\}$ stets ein $N_r + 1$ -dimensionales lineares Gleichungssystem (LGS) [46, S. 151 f.]. Wie dieses LGS im Detail aussieht und mit welchem Rechenaufwand es lösbar ist, hängt erheblich von der Wahl der Basis ab, mit der das Polynom (3.25) beschrieben wird.

Sei \mathcal{S}_{N_r} der Raum aller Polynome vom Grad N_r . Eine Basis dieses Raumes ist genau dann durch einen Satz an Polynomfunktionen $\{S_0(u), \dots, S_{N_r}(u)\}$ gegeben, wenn sich ein beliebiges Polynom vom Grad $\psi_S = N_r$ durch eine Linearkombination dieser Basis darstellen lässt [54, S. 352].

$$s(u) = \sum_{i=0}^{N_r} a_i S_i(u). \quad (3.26)$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die $N_r + 1$ Funktionen $S_i(u)$ linear unabhängig sind.

Der Splineraum stellt sich dann als Spanne dieser Polynomfunktionen dar.

$$\mathcal{S}_{N_r} = \text{span}\{S_i(u), i \in \{0, \dots, N_r\}\} \quad (3.27)$$

Das allgemeine Polynom (3.25) ist bereits in der Form von (3.26) angegeben, das heißt die Funktionen $S_0(u) = 1$, $S_1(u) = u, \dots, S_{N_r}(u) = u^{N_r}$ stellen bereits eine Basis für \mathcal{S}_{N_r} , die sogenannte monomiale Basis, dar [55, S. 319 f.]. Mit dem Einsetzen der Interpolationsbedingungen $s(\mu_i) = r_i$, $i \in \{0, \dots, N_r\}$ ergibt das aufgestellte LGS für diese Basis die Vandermonde-Matrix $\mathbf{V}_{N_r+1} \in \mathbb{R}^{(N_r+1) \times (N_r+1)}$.

$$\mathbf{V}_{N_r+1} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & \cdots & \mu_0^{N_r} \\ 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_1^{N_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_{N_r} & \cdots & \mu_{N_r}^{N_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{N_r} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Vor allem für eine hohe Anzahl an zu interpolierenden Punkten $N_r + 1$ steigt der Rechenaufwand zur Lösung des LGS (3.28) deutlich an. Aus diesem Grund wird in numerischen Verfahren oft die Newton-Basis

$$\begin{aligned} S_0(u) &= 1 \\ S_1(u) &= (u - \mu_0) \\ &\vdots \\ S_{N_r}(u) &= \prod_{j=0}^{N_r-1} (u - \mu_j) \end{aligned} \quad (3.29)$$

verwendet [56, S. 275–278]. Das resultierende Polynom lautet bei Verwendung der Newtonbasis (3.29)

$$s(u) = \sum_{i=0}^{N_r} c_i S_i = c_0 + c_1(u - \mu_0) + c_2(u - \mu_0)(u - \mu_1) + \dots + c_{N_r} \prod_{i=0}^{N_r-1} (u - \mu_i), \quad (3.30)$$

wobei die Polynomparameter c_i von den Parametern a_i aus (3.25) verschieden sind. Beim Einsetzen eines Interpolationstupels (μ_i, r_i) in (3.29) fällt auf, dass die Basispolynome $S_j(\mu_i)$, $j > i$ Null sind, da stets einer der j Faktoren $(u - \mu_i)$ Null ist. Für das LGS ergibt sich damit

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (\mu_1 - \mu_0) & & & \\ 1 & (\mu_2 - \mu_0) & (\mu_2 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (\mu_{N_r} - \mu_0) & (\mu_{N_r} - \mu_0)(\mu_{N_r} - \mu_1) & \cdots & \prod_{i=0}^{N_r-1} (\mu_{N_r} - \mu_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N_r} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

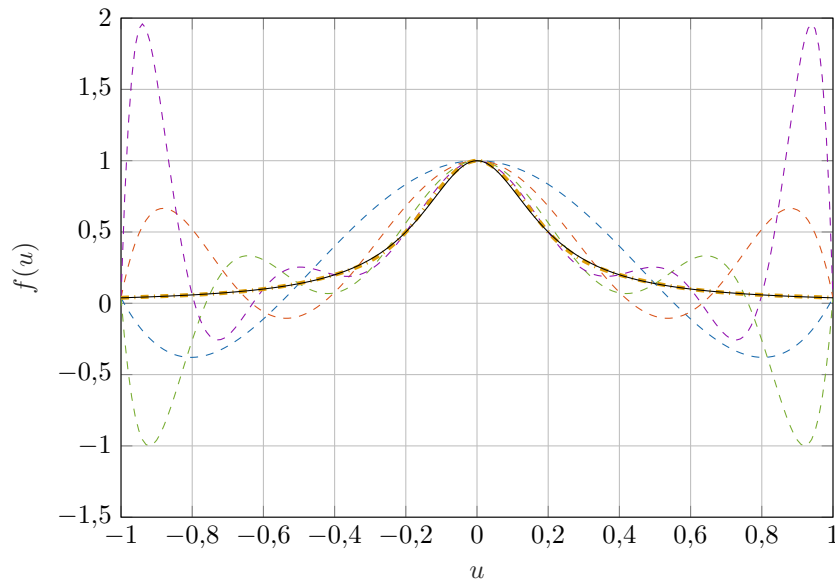


Abbildung 3.5: Funktion $f(u) = \frac{1}{25u^2+1}$ (—) und deren Polynominterpolation nach [54, S. 378]; Polynom vom Grad $\psi_S = 4$ (- - -), Grad $\psi_S = 6$ (- - -), Grad $\psi_S = 8$ (- - -) und Grad $\psi_S = 10$ (- - -), sowie eine kubische Splineinterpolation (- - -) durch 10 Segmente.

Diese Matrix stellt eine untere Dreiecksmatrix dar und ist numerisch durch die Methode der dividierten Differenzen deutlich effizienter zu lösen als die Vandermonde-Matrix [56, S. 278 f.]. Mathematisch gesehen sind beide Lösungen jedoch identisch, da sie dasselbe Polynom $s(u)$ beschreiben.

Mit steigender Anzahl zu interpolierender Punkte $N_r + 1$ steigt nicht nur der Rechenaufwand, sondern auch der Grad des Polynoms ψ_S , was zum Runge-Phänomen, also zu großen Schwingungen im Randbereich der Interpolation führen kann [54, S. 377–379]. Der große Vorteil von Polynomen indes ist, dass sie stetig differenzierbar sind und damit die gewünschte Glätte aufweisen. In Abbildung 3.5 ist eine Interpolation mit Polynomen unterschiedlichen Grades gezeigt. Als Referenzpunkte dienen $N_r + 1 = \psi_S + 1$ Werte der Funktion $f(u) = \frac{1}{25u^2+1}$. Die Punkte μ_i sind äquidistant auf den Wertebereich $u \in [-1, 1]$ verteilt. Das Interpolationspolynom von Grad $\psi_S = 10$ schmiegt sich zwar im Zentrum am besten an die ursprüngliche Funktion an, zeigt im Randbereich jedoch ein stark schwingendes Verhalten.

3.2.3 Splineinterpolation

Um den Vorteil der Glattheit von Polynomen zu nutzen, jedoch das schwingende Verhalten zu reduzieren, bieten sich gestückelte Polynome an. Stückweise, glatt miteinander verbundene Polynome heißen Splines [57, S. 5]. Glattheit bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die resultierende Kurve global stetig differenzierbar ist. Eine k -mal stetig differenzierbare Funktion s ist Teil des Raums \mathcal{D}^k , der aus allen k -fach stetig differenzierbaren Funktionen besteht. Neben der Glattheit und guter Interpolationseigenschaften sind Splines bei einer geeigneten Wahl der Basis zudem effizient in der Speicherung und Auswertung auf digita-

len Rechnern. Daher sind sie häufig in den Bereichen der numerischen Approximation und Interpolation anzutreffen.

Statt ein Polynom vom Grad $\psi_{\mathcal{S}} = N_r$ zur Interpolation von $N_r + 1$ Tupeln (μ_i, r_i) zu nutzen, ist es also möglich, N_r Segmente ${}_i s$ mit einem Grad $p < N_r$, zu verwenden [46, S. 166]. Die zu interpolierenden Punkte stellen die Verbindungsstellen der Polynomsegmente dar. Die Parameterwerte der Stützstellen μ_i werden auch Knoten genannt. Die gesamte Knotenmenge sei auf dem Intervall $I = [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ gegeben durch

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N_r}\}, \quad \mu_{\min} = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{N_r} = \mu_{\max}. \quad (3.32)$$

Der Splineraum umfasst alle Splines von Grad p und ist auf der Knotenmenge $\boldsymbol{\mu}$ nach [56, S. 324] definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{0, \boldsymbol{\mu}} &= \text{span}\{s : [\mu_{\min}, \mu_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^1 \mid {}_i s \in \mathcal{S}_0, i \in \{0, \dots, N_r - 1\}\}, \quad p = 0 \\ \mathbb{S}_{p, \boldsymbol{\mu}} &= \text{span}\{s \in \mathcal{D}^{p-1}([\mu_{\min}, \mu_{\max}]) \mid {}_i s \in \mathcal{S}_p, i \in \{0, \dots, N_r - 1\}\}, \quad p \geq 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Splinesegmente ${}_i s$ sind dabei auf den Teilabschnitten $[\mu_i, \mu_{i+1})$ definiert. Für die gewünschte Glattheit wird nach (3.33) gefordert, dass ein Spline von Grad $p \geq 1$ mindestens $p - 1$ -mal stetig differenzierbar ist. Der Grad eines Splines p ist also ein Maß für die Glattheit der resultierenden Kurve. Ein einzelnes Polynomsegment ist analog zu (3.26) gegeben durch

$${}_i s(u) = \sum_{j=0}^p a_{i,j} S_j(u) \quad (3.34)$$

mit einer geeigneten Basis $S_j(u)$, $j \in \{0, \dots, p\}$. Jedes der N_r Segmente ${}_i s$ besitzt jeweils $p + 1$ Parameter $a_{i,j}$ $i \in \{1, \dots, N_r\}$, $j \in \{0, \dots, p\}$. Damit ergeben sich zur Bestimmung eines Splines $N_r(p + 1) = N_r + 1 + N_r p - 1$ freie Parameter. Insgesamt $N_r + 1$ der zu bestimmenden Parameter sind durch die Interpolationsbedingungen

$$s(\mu_i) = r_i, \quad i \in \{0, \dots, N_r\} \quad (3.35)$$

gegeben. Polynome sind auf ihrem gesamten Wertebereich unendlich oft stetig differenzierbar. Daher bestimmen ausschließlich die Verbindungsstellen über die Glattheit der resultierenden Kurve. Um der Forderung nach $p - 1$ -mal stetiger Differenzierbarkeit nachzukommen, sind weitere $p(N_r - 1)$ Bedingungen in Bezug auf die Ableitungen an den Verbindungsstellen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} {}_{i-1} s(\mu_i) &= {}_i s(\mu_i), \quad i \in \{1, \dots, N_r - 1\} \\ {}_{i-1} s^{(1)}(\mu_i) &= {}_i s^{(1)}(\mu_i), \quad i \in \{1, \dots, N_r - 1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$${}_{i-1}s^{(p-1)}(\mu_i) = {}_i s^{(p-1)}(\mu_i), \quad i \in \{1, \dots, N_r - 1\}. \quad (3.36)$$

Für eine eindeutige Bestimmung der Polynome müssen also neben den Interpolationsgleichungen und der Stetigkeit noch $p - 1$ weitere Bedingungen aufgestellt werden. Es lassen sich zusätzliche Ableitungen an den Rändern, ein zusätzlicher zu interpolierender Punkt oder Periodizitätsbedingungen, das heißt $s^{(k)}(\mu_0) = s^{(k)}(\mu_{N_r})$, $k \in \{1, \dots, p - 1\}$, angeben. In Abbildung 3.5 ist ein natürlicher kubischer Spline ($p = 3$) abgebildet, der dieselben Interpolationspunkte wie das Polynom vom Grad $\psi_S = 10$ besitzt. Diese Eigenschaft bedeutet, dass die zweiten Ableitungen an den Rändern den Wert Null besitzen. Es zeigt sich, dass durch einen Spline eine deutlich verbesserte Annäherung ohne schwingendes Verhalten am Randbereich der Interpolation erreicht werden kann.

Die Darstellung, Berechnung und Auswertung von Splines nach (3.34)-(3.36) ist aufwendig und speicherintensiv. Ziel sollte es daher sein, analog zur Berechnung von Polynomen eine Basis für den Splineraum $\mathbb{S}_{p,\mu}$ zu verwenden, die einen effizienteren Umgang mit Splines ermöglicht. Die am weitesten verbreiteten Splinebasen sind der B-Spline, der Bézier-Spline und der NURBS [58].

3.2.4 B-Splines

B-Splines bilden eine Basis von $\mathbb{S}_{p,\mu}$ mit minimalen Trägern, womit sich alle nicht-rationalen Splinefunktionen durch ihre Linearkombination darstellen lassen [59, S. 3–7]. Diese Basis ist namensgebend für den B(asis)-Spline. Die Herleitung des B-Splines folgt im Wesentlichen Neundorf [55, S. 375–399] und Dahmen und Reusken [56, S. 323–331].

B-Spline-Basisfunktionen

Ein Satz an $N_p + 1$ Funktionen $N_{i,p}(u)$, $i \in \{0, \dots, N_p\}$ bildet genau dann eine Basis für einen Splineraum $\mathbb{S}_{p,\mu}$, wenn die Funktionen maximal linear unabhängig sind [56, S. 327]. Dies ist genau dann der Fall, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind. Zunächst müssen die Basisfunktionen linear unabhängig sein, was gleichbedeutend damit ist, dass die Linearkombination der Basisfunktionen nur Null ist, wenn alle Parameter c_i Null sind:

$$\sum_{i=0}^{N_p} c_i N_{i,p}(u) = 0 \Leftrightarrow c_i = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, N_p\}. \quad (3.37)$$

Des Weiteren muss jede Basisfunktion Teil des aufgespannten Vektorraums, im vorliegenden Fall $\mathbb{S}_{p,\mu}$, sein:

$$N_{i,p} \in \mathbb{S}_{p,\mu}, \quad \forall i \in \{0, \dots, N_p\}. \quad (3.38)$$

Zuletzt hat die Anzahl der linear unabhängigen Basisfunktionen der Dimension des Vektorraums

$$\dim(\mathbb{S}_{p,\mu}) = N_p + 1. \quad (3.39)$$

zu entsprechen.

Zu klären ist zunächst, wie groß $\dim(\mathbb{S}_{p,\mu})$ in (3.39) ist. Für den Fall $p = 0$ besteht der Splineraum $\mathbb{S}_{0,\mu}$ nach (3.33) aus allen stückweise konstanten Funktionen auf den N_r Teilintervallen $[\mu_i, \mu_{i+1})$. Jedes dieser Teilintervalle besitzt exakt einen Freiheitsgrad (der Wert der Funktion auf dem Teilstück), sodass für den Splineraum also insgesamt N_r freie Parameter existieren und damit gilt

$$\dim(\mathbb{S}_{0,\mu}) = N_r. \quad (3.40)$$

Für einen Splineraum $\mathbb{S}_{p,\mu}$ mit Grad $p > 0$ ist jedes Teilpolynom ${}_i s \in \mathcal{S}_p$, besitzt also nach (3.25) $p+1$ freie Parameter. Das heißt, ein solcher Spline besitzt $N_r(p+1)$ Freiheitsgrade. Aus der Forderung (3.33) ergibt sich, dass an jeder der $N_r - 1$ Verbindungsstellen μ_i der Spline $p-1$ mal stetig differenzierbar sein muss. Daraus folgen pro Verbindungsstelle p Forderungen ${}_i s^{(k)}(\mu_i) = {}_{i+1} s^{(k)}(\mu_i)$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Damit resultieren insgesamt

$$N_r(p+1) - p(N_r - 1) = N_r + p$$

Freiheitsgrade, und für die Dimension eines allgemeinen Splineraums $\mathbb{S}_{p,\mu}$ gilt [56, S. 324]

$$\dim(\mathbb{S}_{p,\mu}) = N_r + p. \quad (3.41)$$

Der Splineraum nullten Grades $\mathbb{S}_{0,\mu}$ besteht nach (3.33) aus stückweisen Konstanten. Wie sich zeigen wird, bilden die Indikatorfunktionen

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [\mu_i, \mu_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad i \in \{0, \dots, N_p\} \quad (3.42)$$

eine Basis für den Splineraum $\mathbb{S}_{0,\mu}$, notiert mit $\text{span}\{N_{i,0}(u), i \in \{0, \dots, N_p\}\} = \mathbb{S}_{0,\mu}$. Dazu ist ihre maximal lineare Unabhängigkeit im Raum $\mathbb{S}_{0,\mu}$ zu zeigen.

Da auf jedem Intervall $[\mu_i, \mu_{i+1})$ die zugehörige Basisfunktion $N_{i,0}(u) = 1$ ist, muss zum Erfüllen von (3.37) jedes $c_i = 0$ sein und die Indikatorfunktionen sind entsprechend linear unabhängig. Dass die Indikatorfunktionen Teil des Splineraums $\mathbb{S}_{0,\mu}$ sind, der stückweise konstante Funktionen enthält, ist offensichtlich. Für die Dimension des Splineraums ergibt sich nach (3.40) $\dim(\mathbb{S}_{0,\mu}) = N_r$. Da die Indikatorfunktionen insgesamt N_r Intervalle umspannen, beschreibt (3.42) $N_p + 1 = N_r$ Funktionen, und (3.39) ist erfüllt. Damit bilden die Indikatorfunktionen eine Basis für den Splineraum $\mathbb{S}_{0,\mu}$.

Um eine Basis für einen Splineraum mit $p > 0$ zu finden, wird zunächst die in (3.32) definierte Knotenmenge um jeweils p Knoten links und rechts von $\boldsymbol{\mu}$ zum sogenannten Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} mit den streng monoton steigenden Elementen \bar{u}_i , $i \in \{0, \dots, N_u\}$ erweitert:

$$\mathbf{u}_{\text{knot}} = \{\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{N_u}\} = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}, & p = 0 \\ \{\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{p-1}, \mu_0, \dots, \mu_{N_r}, \bar{u}_{N_r+1+p}, \dots, \bar{u}_{N_u}\}, & p > 0 \end{cases}. \quad (3.43)$$

Auf diesem Knotenvektor werden die B-Splines definiert, entsprechend wird auch der Splineraum mit $\mathbb{S}_{0, \mathbf{u}_{\text{knot}}}$ bezeichnet. Das Intervall $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ heißt in der Literatur auch i -te Spanne des Knotenvektors.

Weiterhin sei der Träger einer Funktion als die abgeschlossene Menge der Nicht-Nullstellen

$$\text{supp } f(u) := \{u \in \mathbb{R} \mid f(u) \neq 0\} \quad (3.44)$$

definiert. Der Träger der Indikatorfunktionen in (3.42) lautet mit dieser Definition

$$\text{supp } N_{i,0}(u) \subset [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}]. \quad (3.45)$$

Da B-Splines eine Basis für den Splineraum mit minimalen Trägern darstellen, verkörpern die Indikatorfunktionen aus (3.42) definitionsgemäß die B-Spline-Basisfunktionen vom Grad $p = 0$. Im Folgenden wird gezeigt, dass die B-Spline-Basisfunktionen höheren Grades rekursiv durch den Cox-de Boor Algorithmus bestimmbar sind [60][61]:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \bar{u}_i \leq u < \bar{u}_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.46)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{\bar{u}_{i+p+1} - u}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u).$$

Für die Basisfunktion $p = 1$ folgt aus (3.46) direkt $\text{supp } N_{i,1}(u) \subset [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+2}]$, da die beiden Funktionen $N_{i,0}(u)$ und $N_{i+1,0}(u)$ auf den Intervallen $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ bzw. $[\bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2})$ gleich Eins sind. Generell ergibt sich damit für eine Basisfunktion von Grad p

$$\text{supp } N_{i,p}(u) \subset [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+p+1}]. \quad (3.47)$$

Die Funktionen $N_{i,p}(u)$ bilden eine Basis, wenn maximal-lineare Unabhängigkeit auf $\mathbb{S}_{0, \mathbf{u}_{\text{knot}}}$ vorliegt, das heißt, wenn die Bedingungen (3.37)-(3.39) erfüllt sind. Der erweiterte Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} aus (3.43) besitzt insgesamt $N_u + 1 = N_r + 2p + 1$ Elemente. Der Träger der Basisfunktion $N_{0,p}(u)$ umfasst nach (3.47) die Knoten \bar{u}_0 bis \bar{u}_{p+1} und damit das untere Ende von \mathbf{u}_{knot} , während $N_{N_r+p-1,p}(u)$ das obere Ende des Intervalls (die Knoten \bar{u}_{N_r+p-1} bis \bar{u}_{N_r+2p}) umspannt. Damit existieren insgesamt $N_r + p$ Funktionen $N_{i,p}(u)$, $i \in \{0, \dots, N_r + p - 1\}$ und die Forderung, dass die Anzahl der Basisfunktionen der Dimension des aufzuspannen-

den Raums (3.39) entspricht, ist erfüllt. Für die Anzahl der Basisfunktionen $N_{i,p}$ gilt damit $N_p + 1 = N_r + p$.

Um Forderung (3.38) zu erfüllen, ist nach (3.33) zu zeigen, dass jede Basisfunktion $N_{i,p} \in \mathbb{S}_{p, \mathbf{u}_{\text{knot}}}$ ist, was gleichbedeutend damit ist, dass sie ein Polynom von Grad p darstellen und $p-1$ -mal stetig differenzierbar sind. Es muss also $N_{i,p}(u) \in \mathcal{S}_p$ und $N_{i,p}(u) \in \mathcal{D}^{p-1}$ gelten. Jede Basisfunktion nullten Grades $N_{i,0}(u)$ ist Teil von \mathcal{S}_0 . Es gelte nun, dass alle Basisfunktionen von Grad $l < p$ Teil des jeweiligen Polynomraums \mathcal{S}_l seien. Da eine Basisfunktion $N_{i,p}(u)$ mit Grad p aus (3.46) eine Linearkombination zweier Basisfunktionen von Grad $p-1$ darstellt, verkörpert sie wiederum ein Polynom und es resultiert $N_{i,p}(u) \in \mathcal{S}_p$. Damit gilt der erste Teil der Forderung aus (3.33). Aus der ursprünglichen Definition der B-Splines mit Hilfe von dividierten Differenzen lässt sich zudem ableiten, dass die Basisfunktionen $N_{i,p}(u) \in \mathcal{D}^{p-1}$ sind [59, S. 49 f.]. Damit erfüllen die Basisfunktionen die zweite Bedingung aus (3.33), sind Teil des Splineraums

$$N_{i,p}(u) \in \mathbb{S}_{p, \mathbf{u}_{\text{knot}}}, \quad i \in \{0, \dots, N_p\} \quad (3.48)$$

und genügen Bedingung (3.38).

Nun ist noch zu zeigen, dass die Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$ linear unabhängig sind. Dieser Beweis erfolgt mit der Marsden's-Identität [62], die zunächst eingeführt wird. Für $u \in [\mu_0, \mu_{N_r}]$, einem beliebigen $\hat{u} \in \mathbb{R}$ und der Knotenfolge \mathbf{u}_{knot} gilt [63]

$$(u - \hat{u})^p = \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) N_{i,p}(u) \quad (3.49)$$

mit

$$\varphi_{i,p}(\hat{u}) = \prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}). \quad (3.50)$$

Die Gültigkeit dieser Identität kann durch Induktion gezeigt werden. Für den Fall $p = 0$ ist die linke Seite von (3.49) gleich Eins. Die Funktionen $\varphi_{i,0}(\hat{u})$ sind ebenfalls gleich Eins, da sie ein leeres Produkt darstellen [64, S. 13]. Zudem ist $\sum_{i=1}^{N_p} N_{i,0}(u) = 1$, da je nur eine der Basisfunktionen vom Grad $p = 0$ nach (3.42) für ein $u \in [\mu_0, \mu_{N_r}]$ ungleich Null ist, sodass (3.49) für den Fall $p = 0$ stimmt.

Nun sei $p > 0$ und die Identität (3.49) sei für alle $l \in \{0, \dots, p-1\}$ erfüllt. Durch Einsetzen der Rekursion (3.46) resultiert

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) N_{i,p}(u) &= \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) \left[\frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{\bar{u}_{i+p+1} - u}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} N_{i,p-1}(u) + \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) \frac{\bar{u}_{i+p+1} - u}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}(\hat{u}) \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} N_{i,p-1}(u) + \sum_{i=1}^{N_p+1} \varphi_{i-1,p}(\hat{u}) \frac{\bar{u}_{i+p} - u}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} N_{i,p-1}(u) \\
&= \varphi_{0,p}(\hat{u}) \frac{u - \bar{u}_0}{\bar{u}_p - \bar{u}_0} N_{0,p-1}(u) + \sum_{i=1}^{N_p} \left[\varphi_{i,p}(\hat{u}) \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} + \varphi_{i-1,p}(\hat{u}) \frac{\bar{u}_{i+p} - u}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} \right] N_{i,p-1}(u) \\
&\quad + \varphi_{N_p,p}(\hat{u}) \frac{\bar{u}_{N_p} - u}{\bar{u}_{N_p} - \bar{u}_{N_p}} N_{N_p,p-1}(u). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Für beide Basisfunktionen aus dem ersten und letzten Summanden mit dem reduzierten Grad $p-1$ gilt $N_{0,p-1}(u) = N_{N_p,p-1}(u) = 0$, $\forall u \in [\mu_0, \mu_{N_r}]$. Durch Einsetzen des Funktionals (3.50) folgt damit weiter

$$\begin{aligned}
(3.51) &= \sum_{i=1}^{N_p} \left[\prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} + \prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i-1+j} - \hat{u}) \frac{\bar{u}_{i+p} - u}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} \right] N_{i,p-1}(u) \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \left[\prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} + \prod_{j=0}^{p-1} (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) \frac{\bar{u}_{i+p} - u}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} \right] N_{i,p-1}(u) \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \prod_{j=1}^{p-1} (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) N_{i,p-1}(u) \left[\frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} (\bar{u}_{i+p} - \hat{u}) + \frac{\bar{u}_{i+p} - u}{\bar{u}_{i+p} - \bar{u}_i} (\bar{u}_i - \hat{u}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \varphi_{i,p-1}(\hat{u}) N_{i,p-1}(u) (u - \hat{u}) = (u - \hat{u})^{p-1} (u - \hat{u}) = (u - \hat{u})^p, \tag{3.52}
\end{aligned}$$

womit (3.49) gezeigt ist. Durch k -faches Ableiten von (3.49) nach \hat{u} an der Stelle $\hat{u} = 0$ ergibt sich [55, S. 389 f.]

$$\binom{p}{p-k} \cdot (-1)^k u^{p-k} = \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}^{(k)}(0) N_{i,p}(u) \tag{3.53}$$

und umgestellt mit $l = p - k$

$$u^l = \frac{(-1)^{p-l}}{\binom{p}{l}} \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}^{(p-l)}(0) N_{i,p}(u). \tag{3.54}$$

Nach (3.54) lässt sich also ein beliebiges Monom u^l durch eine Linearkombination von B-Splines darstellen. Da $l \leq p$ gilt, ist der Polynomraum vom Grad p

$$\mathcal{S}_p \subseteq \text{span}\{N_{i,p}(u), u \in [\mu_0, \mu_{N_r}], i \in \{0, \dots, N_p\}\}. \tag{3.55}$$

Betrachtet man jetzt ein einzelnes Intervall $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}]$, so sind auf diesem Intervall nach (3.47) höchstens $p+1$ Basisfunktionen ungleich Null. Für das Splinesegment gilt auf diesem Intervall nach (3.33) $i_s \in \mathcal{S}_p$, da es ein Polynom darstellt. Nach (3.55) müssen die B-Spline Basisfunktionen auf diesem Teilintervall also bereits eine Basis für den Raum \mathcal{S}_p der Dimension $p+1$ darstellen, also sind alle $p+1$ Basisfunktionen lokal linear unabhängig. Da dieser

Zusammenhang für alle Intervalle $i \in \{0, \dots, N_p\}$ gilt, sind die B-Splines auf $u \in [\mu_0, \mu_{N_r}]$ linear unabhängig und bilden entsprechend eine Basis für den Polynomraum $\mathbb{S}_{p, \mathbf{u}_{\text{knot}}}$.

Damit kann jede Splinefunktion durch eine Linearkombination von B-Splines dargestellt werden. Ein B-Spline ist definiert als

$$s(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) p_i, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (3.56)$$

Die $N_p + 1$ Punkte p_i heißen Kontrollpunkte und stimmen für $p > 1$ nicht mit den Interpolationspunkten r_i überein. Die Funktionen $N_{i,p}(u)$ stellen die Basisfunktionen dar und sind in Abhängigkeit des Splinegrades p und dem Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} definiert [46, S. 467].

Eigenschaften der B-Spline-Basisfunktionen

Die Anzahl der Knoten $N_u + 1$, die Anzahl der Basisfunktionen $N_p + 1$ und der Grad des Splines p bilden mit (3.43) den Zusammenhang [65, S. 82]

$$N_u + 1 = N_p + p + 2 = N_r + 2p + 1. \quad (3.57)$$

Die Basisfunktionen besitzen einige wesentliche Eigenschaften [46, S. 467 f.]. Aus (3.47) ist bekannt, dass sie einen begrenzten Träger haben. Dies führt zur Eigenschaft der Lokalität, in der ein Kontrollpunkt p_i nur Einfluss auf das Intervall $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+p+1})$ nimmt [65, S. 84]. Gleichzeitig sind auf einem Intervall $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ maximal $p + 1$ Basisfunktionen ungleich Null. Weiterhin folgt aus (3.54) für den Fall $l = 0$ [55, S. 390]

$$\begin{aligned} 1 = u^0 &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{i=0}^{N_p} \varphi_{i,p}^{(p)}(0) N_{i,p}(u) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{i=0}^{N_p} \left[\prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) \right] \Big|_{\hat{u}=0}^{(p)} \cdot N_{i,p}(u) = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{i=0}^{N_p} \left[\prod_{j=1}^p (\bar{u}_{i+j} - \hat{u}) \right] \Big|_{\hat{u}=0}^{(p)} \cdot N_{i,p}(u) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{i=0}^{N_p} (-1)^p p! N_{i,p}(u) = (-1)^{2p} \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u). \end{aligned}$$

Die Basisfunktionen bilden also eine Zerlegung der Einheit $\forall u \in [u_{\min}, u_{\max}]$:

$$\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) = 1. \quad (3.58)$$

Aus dem Cox-de Boor Algorithmus lässt sich die Eigenschaft der Nicht-Negativität

$$N_{i,p}(u) \geq 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, N_p\} \quad (3.59)$$

der Basisfunktionen identifizieren. Für den Fall $p = 0$ ist (3.59) offensichtlich erfüllt. Für $p > 0$ können die Vorzeichen der einzelnen Terme der Rekursion untersucht werden. Die i -te Basisfunktion ist nur auf dem Intervall $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+p+1})$ ungleich Null. Innerhalb dieses Intervalls sind die beiden Zähler stets nicht-negativ, da $\bar{u}_i \leq u < \bar{u}_{i+p+1}$ gilt. Weiterhin besteht der Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} aus einer steigenden Zahlenfolge, sodass die Nenner der beiden Terme ebenfalls nur nicht-negativ werden können. Damit sind beide Summanden nicht-negativ und (3.59) gilt.

In (3.43) wurde der erweiterte Knotenvektor der B-Spline-Basisfunktionen eingeführt. Im Gegensatz zur Definition in (3.43) muss der Knotenvektor keine streng monoton steigende, sondern nur eine monoton steigende Folge darstellen. Die ursprüngliche Definition (3.43) ist allerdings aus Sicht der Interpolationsaufgabe sinnvoll, da ansonsten an einem Funktionswert μ_i zwei Punkte r_i interpoliert werden müssten. Eine lediglich monoton steigende Zahlenfolge erlaubt, dass Knoten zusammenfallen können. Die Anzahl der zusammenfallenden inneren Knoten heißt Knotenhäufigkeit N_H . An Knoten \bar{u}_i mit einer Häufigkeit $N_H > 1$ reduziert sich die stetige Differenzierbarkeit auf $s(\bar{u}_i) \in \mathcal{D}^{p-N_H}$ [65, S. 57 f.]. Für den Knoten i mit Häufigkeit N_H gilt $\bar{u}_i = \dots = \bar{u}_{i+N_H-1}$. Wie aus (3.47) bekannt, besitzt die Basisfunktion $N_{i,p}(u)$ den Träger $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+p+1}]$. Damit folgt für diesen Knoten i

$$\text{supp } N_{i,0}(u) = \dots = \text{supp } N_{i,N_H-2}(u) = \emptyset, \quad N_H > 1, \quad (3.60)$$

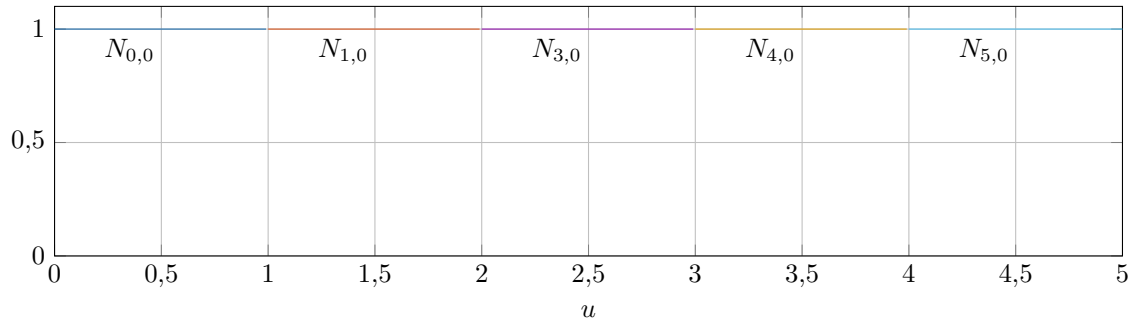
was bedeutet, dass diese Basisfunktionen stets Null sind. Entsprechend besitzt auch die i -te Spanne die Länge Null. Für monoton steigende Knotenvektoren tritt der Fall auf, dass einer der Quotienten in der Rekursion (3.46) den undefinierten Zustand $0/0$ ergibt, der konventionsgemäß in der Rekursion Null gesetzt wird [65, S. 51].

Besonders bei der Anwendung des B-Splines in der Bahninterpolation ist es wichtig, dass die Anfangs- und Endposition exakt definiert sind. Die beiden Enden werden durch die Wahl der erweiternden Elemente \bar{u}_0 bis \bar{u}_{p-1} sowie \bar{u}_{N_p+1} bis \bar{u}_{N_u} beeinflusst. Um diese Position exakt zu bestimmen, erfolgt die Erweiterung üblicherweise durch

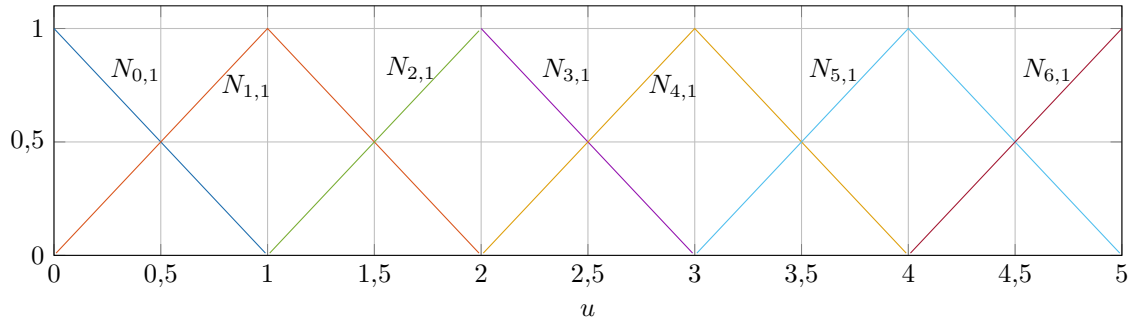
$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \dots = \bar{u}_{p-1} = u_{\min} = \mu_0, \\ \bar{u}_{N_p+1} &= \dots = \bar{u}_{N_u} = u_{\max} = \mu_{N_r}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Damit besitzen die Knoten $i = 0$ und $i = N_p$ jeweils die Häufigkeit $N_H = p + 1$ und nach (3.60) gilt für die Basisfunktionen $N_{0,j}(u) = N_{N_p,j}(u) = 0$, $j \in \{0, \dots, p-1\}$. Nach (3.46) sind an der Stelle $u = u_{\min}$ bzw. $u = u_{\max}$ nur die Basisfunktionen $N_{0,p}(u)$ bzw. $N_{N_p,p}(u)$ ungleich Null. Nach (3.58) haben sie dort den Funktionswert Eins. Eingesetzt in (3.56) ergibt sich damit $s(u_{\min}) = p_0$ bzw. $s(u_{\max}) = p_{N_p}$, womit beide Kontrollpunkte exakt interpoliert werden.

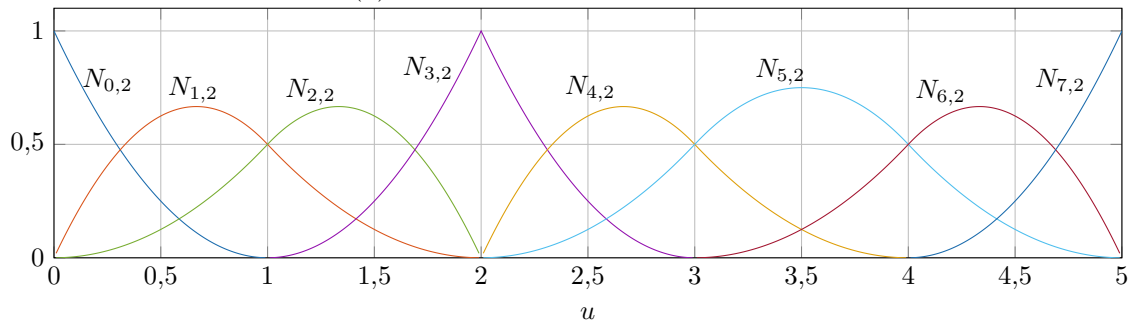
Knotenvektoren lassen sich zudem noch in gleichverteilt (uniform) und nicht-gleichverteilt



(a) Basisfunktionen nullten Grades



(b) Basisfunktionen ersten Grades



(c) Basisfunktionen zweiten Grades

Abbildung 3.6: Basisfunktionen definiert mit dem Knotenvektor $\mathbf{u}_{\text{knot}} = [0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5]$

(non-uniform) einteilen. Sie sind genau dann gleichverteilt, wenn alle inneren Knoten denselben Abstand besitzen, also wenn ein $\delta \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + \delta, \forall i \in \{p, \dots, N_p - 1\}$ gilt [65, S. 66].

Abbildung 3.6 zeigt die Basisfunktionen 0-ten bis 2-ten Grades, die auf dem Knotenvektor $\mathbf{u}_{\text{knot}} = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$ definiert sind. Die Zahl der Kontrollpunkte für einen B-Spline mit Grad $p = 2$ ergibt sich nach (3.57) zu $N_p + 1 = 8$. Der Knotenvektor weist einen Knoten mit der Häufigkeit $N_H = 2$ an der Stelle $\bar{u}_4 = \bar{u}_5 = 2$ auf. Damit ist die Basisfunktion $N_{2,0}(u) = 0 \forall u$, da die Spanne $i = 4$ die Länge Null besitzt. Dies führt dazu, dass an der Stelle $u = 2$ nur die Basisfunktion $N_{3,2}$ ungleich Null ist, was im Umkehrschluss nach (3.56) bedeutet, dass neben p_0 und p_7 auch p_3 exakt interpoliert wird.

Ein- und Mehrdimensionale Interpolation mit B-Splines

Auch bei der Interpolation von Tupeln (μ_j, r_j) , $j \in \{0, \dots, N_r\}$ lassen sich Interpolationsbedingungen analog zu (3.35) aufstellen:

$$s(\mu_j) = r_j = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(\mu_j) p_i. \quad (3.62)$$

Nach (3.39) besitzt ein B-Spline nach Berücksichtigung von (3.62) noch $N_r + p - (N_r + 1) = p - 1$ freie Bedingungen. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.2.3 können die restlichen Freiheitsgrade zum Beispiel durch die Vorgabe von Ableitungen an den Rändern bestimmt werden.

Abgesehen von der linearen Interpolation (3.24) erfolgte bisher ausschließlich die Betrachtung der eindimensionalen Interpolation. Eine Roboterbahn ist jedoch üblicherweise ein mehrdimensionales Problem. Die d -dimensionalen Interpolationsbedingungen sind gegeben durch

$$\mathbf{s}(\mu_i) = \mathbf{r}_i, \quad i \in \{0, \dots, N_r\}, \quad (3.63)$$

mit $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$. Eine mehrdimensionale Interpolation nach Abschnitt 3.2.2 durch Polynome lässt sich durchführen, indem für jede Dimension des Problems eine eigene Interpolation erfolgt. Die einzelnen Polynome sind synchronisiert, da der Splineparameter u durch die Interpolationsbedingungen vorgegeben ist. Auch eine mehrdimensionale Polynominterpolation besitzt dieselben Vor- und Nachteile des eindimensionalen Problems, sprich Glattheit und Schwingungen.

Aus diesem Grund ist auch im Mehrdimensionalen eine Anwendung von Splines sinnvoll. Dazu wird der Spline durch d -dimensionale Kontrollpunkte $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{0, \dots, N_p\}$ ergänzt und ergibt sich zu [46, S. 467]

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \mathbf{p}_i, \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}]. \quad (3.64)$$

Die Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$ für mehrdimensionale Splines in (3.64) entsprechen denen aus (3.46). Während bei der Polynom- oder Splineinterpolation der Aufwand zur Berechnung von mehrdimensionalen Problemen steigt, da die Lösungen für jede einzelne Dimension gefunden werden müssen, bleibt er bei der Anwendung von B-Splines durch die weiterhin skalaren Basisfunktionen beinahe konstant.

In der Interpolation von mehrdimensionalen Kurven ist der Wert des Splineparameters μ_i , an dem der zu interpolierende Punkt \mathbf{r}_i durchlaufen wird, meist zweitrangig und nicht explizit gegeben, hat jedoch Einfluss auf die resultierende Interpolierende. Das Intervall $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$, auf dem der B-Spline definiert ist, ist üblicherweise durch $u_{\min} = 0$, $u_{\max} =$

1 gegeben. Für die Wahl der inneren Knoten gibt es drei gängige Verfahren [46, S. 360]. Entweder werden sie auf dem Intervall $u \in [0, 1]$ gleichverteilt durch

$$\mu_i = \frac{i}{N_u}, \quad (3.65)$$

anhand der Sekantenlänge gewichtet mit

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \mu_i &= \mu_{i-1} + \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|}{\sum_{j=1}^{N_r} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}\|} \end{aligned} \quad (3.66)$$

oder sie folgen der Zentripetal-Verteilung

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \mu_i &= \mu_{i-1} + \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|^\mu}{\sum_{j=1}^{N_r} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}\|^\mu}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Diese Verteilung, bei der oft $\mu = 0,5$ gesetzt wird, liefert nach Biagiotti [46, S. 360] besonders bei Bahnen mit hoher Krümmung gute Ergebnisse. Knotenvektoren, die mit (3.65) erzeugt werden, sind stets uniform. Abhängig von einer gewünschten Stetigkeit, die den Grad p des Splines festlegt, lässt sich durch die Erweiterung (3.61) der Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} ableiten, womit die Basisfunktionen des B-Splines gegeben sind. Um den B-Spline vollständig zu definieren, sind nach (3.57) noch insgesamt $N_p + 1 = N_r + p$ Kontrollpunkte zu bestimmen. Aus den Interpolationsbedingungen lassen sich $N_r + 1$ Bedingungen der Form

$$\mathbf{s}(\mu_i) = \mathbf{r}_i = \sum_{j=0}^{N_p} N_{j,p}(\mu_i) \mathbf{p}_j, \quad i \in \{0, \dots, N_r\} \quad (3.68)$$

angeben, sodass $p - 1$ freie Bedingungen übrig bleiben [46, S. 377]. Übliche zusätzliche Bedingungen sind die Interpolation weiterer Tupel $(\mu_{i,\text{zus}}, \mathbf{r}_{i,\text{zus}})$ durch

$$\mathbf{s}(\mu_{i,\text{zus}}) = \sum_{j=0}^{N_p} N_{j,p}(\mu_{i,\text{zus}}) \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_{i,\text{zus}}, \quad (3.69)$$

die Angabe von beliebigen Ableitungswerten $\mathbf{d}_{i,k} \in \mathbb{R}^d$ an Stellen $\mu_{i,\text{Abl}}$ in der Form [46, S. 378]

$$\mathbf{s}^{(k)}(\mu_{i,\text{Abl}}) = \sum_{j=0}^{N_p} N_{j,p}^{(k)}(\mu_{i,\text{Abl}}) \mathbf{p}_j = \mathbf{d}_{i,k}, \quad (3.70)$$

oder eine Kombination der Bedingungen (3.69) und (3.70). Insgesamt müssen für die ein-

deutige Bestimmung der Kontrollpunkte $p - 1$ dieser Bedingungen vorliegen. Alternativ ist auch die Forderung nach Periodizität möglich, bei der die ersten $p - 1$ Ableitungen an beiden Enden gleich gesetzt werden.

$$\mathbf{s}^{(k)}(\mu_0) = \mathbf{s}^{(k)}(\mu_{N_r}) \Rightarrow \sum_{i=0}^{N_p} [N_{i,p}^{(k)}(\mu_0) - N_{i,p}^{(k)}(\mu_{N_r})] \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad k \in \{1, \dots, p - 1\} \quad (3.71)$$

Sollten der erste und der letzte Interpolationspunkt gleich sein, ergibt sich eine tatsächlich geschlossene Kurve $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^{p-1}$.

In (3.70) und (3.71) ist die Berechnung der parametrischen Ableitung eines B-Splines notwendig. Die Ableitung eines B-Splines wird durch die Ableitung der Basisfunktionen gebildet [46, S. 475–477]. Im Allgemeinen gilt für die k -te Ableitung

$$\mathbf{s}^{(k)}(u) = \frac{\partial^k \mathbf{s}(u)}{\partial u^k} = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}^{(k)}(u) \mathbf{p}_i, \quad k < p. \quad (3.72)$$

Die Ableitung einer Basisfunktion lässt sich wiederum aus der Linearkombination von Basisfunktionen bilden [46, S. 476]:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \zeta_{k,j} N_{i+j,p-k}, \quad (3.73)$$

mit

$$\zeta_{0,0} = 1 \quad (3.73a)$$

$$\zeta_{k,0} = \frac{\zeta_{k-1,0}}{\bar{u}_{i+p-k+1} - \bar{u}_i} \quad (3.73b)$$

$$\zeta_{k,j} = \frac{\zeta_{k-1,j} - \zeta_{k-1,j-1}}{\bar{u}_{i+p+j-k+1} - \bar{u}_{i+j}}, \quad j \in \{1, \dots, k-1\} \quad (3.73c)$$

$$\zeta_{k,k} = \frac{-\zeta_{k-1,k-1}}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_{i+k}}. \quad (3.73d)$$

Geometrisch gesehen ergibt die erste Ableitung $k = 1$ an der Stelle u einen Vektor, der tangential an $\mathbf{s}(u)$ anliegt und die parametrische Geschwindigkeit darstellt. Die zweite Ableitung steht senkrecht auf der ersten Ableitung, zeigt in das Innere des Krümmungskreises und spiegelt die parametrische Beschleunigung wider.

Aus den Bedingungen (3.68)-(3.71) lässt sich ein LGS ableiten, mit dem die Kontrollpunkte berechnet werden können. Wären beispielsweise nur zusätzliche Bedingungen durch (3.70)

für Anfang und Ende von $\mathbf{s}(u)$ gegeben, wäre dieses LGS definiert durch [46, S. 379 f.]

$$\begin{bmatrix} N_{0,p}(0) & \cdots & N_{N_p,p}(0) \\ N_{0,p}^{(1)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(0) \\ N_{0,p}(\mu_1) & \cdots & N_{N_p,p}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{0,p}(\mu_{N_r-1}) & \cdots & N_{N_p,p}(\mu_{N_r-1}) \\ N_{0,p}^{(k)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{0,p}^{(1)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(1) \\ N_{0,p}(1) & \cdots & N_{N_p,p}(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{N_p}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0^T \\ \mathbf{d}_{0,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{0,k}^T \\ \mathbf{r}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_r-1}^T \\ \mathbf{d}_{N_r,k}^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{N_r,1}^T \\ \mathbf{r}_{N_r}^T \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{R}$$

mit der quadratischen Basisfunktionsmatrix $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{(N_r+p) \times (N_p+1)}$, der Kontrollpunktmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times (N_p+1)}$ und der Interpolationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(N_r+p) \times d}$. Die Basisfunktionsmatrix ist dabei aufgrund der Lokalität (3.47) eine Bandmatrix mit einer maximalen Bandbreite $p+1$, sodass das resultierende Gleichungssystem effizient lösbar ist. Durch die Wahl des Knotenvektors \mathbf{u}_{knot} mit (3.61) sind die beiden Kontrollpunkte $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{p}_{N_p} = \mathbf{r}_{N_r}$ bereits gegeben und das LGS lässt sich um zwei Gleichungen reduzieren. Sind die Kontrollpunkte durch das Lösen von (3.74) bestimmt, ist der B-Spline definiert.

In Abbildung 3.7 ist ein Vergleich zwischen einer mehrdimensionalen Polynominterpolation und einer Interpolation mit einem B-Spline vom Grad $p=3$ abgebildet. Die Knoten $\boldsymbol{\mu}$ des B-Splines sind mit (3.65) berechnet. Als $p-1=2$ zusätzliche Bedingungen dieses kubischen B-Splines gilt $\mathbf{s}^{(2)}(0) = \mathbf{s}^{(2)}(1) = \mathbf{0}$, was dem sogenannten natürlichen kubischen Spline entspricht [56, S. 337]. Das Polynom in Abbildung 3.7 zeigt bereits deutliches Überschwingen, obwohl es lediglich Grad $\psi_S = 4$ besitzt. Beide Interpolationen vermögen es jedoch, die Interpolationsbedingungen exakt einzuhalten.

Die Nicht-Negativität (3.59) zusammen mit der Zerlegung der Einheit (3.58) bedeuten, dass der B-Spline auf dem Intervall $u \in [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$, $i \in \{p, \dots, N_p\}$ stets von der konvexen Hülle der Kontrollpunkte $\mathbf{p}_{i-p}, \dots, \mathbf{p}_i$ eingeschlossen wird [65, S. 83].

Bézier-Splines

Bézier-Splines sind eine spezielle Art von Splines, die darauf beruht, die Polynomsegmente durch Bernsteinpolynome darzustellen [46, S. 31 f.][54, S. 411–417]. Da B-Splines eine Basis

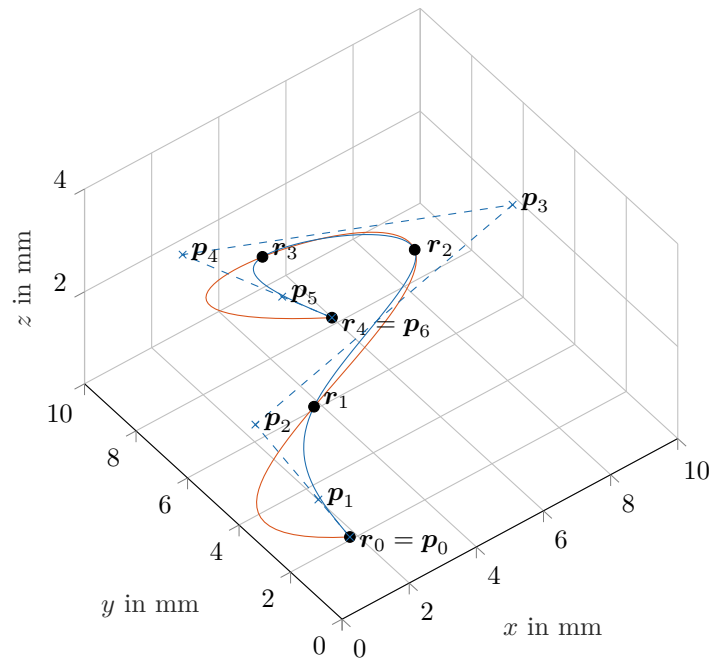


Abbildung 3.7: Mehrdimensionale Interpolation der Punkte $\mathbf{r}_0 = [1, 1, 1]^T$, $\mathbf{r}_1 = [3, 5, 1]^T$, $\mathbf{r}_2 = [6, 5, 3]^T$, $\mathbf{r}_3 = [3, 7, 3]^T$ und $\mathbf{r}_4 = [2, 3, 4]^T$ an den Knoten $\boldsymbol{\mu} = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, mit einem Polynom von Grad $\psi_S = 4$ (—), sowie einem B-Spline von Grad $p = 3$ (—) mit dessen Kontrollpunkten $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_6$ (×) und dem Kontrollpunkte-Polygon (---).

für Splinefunktionen bilden, stellen Bézier-Splines einen Spezialfall der B-Splines dar. Ein Bézier-Spline ist definiert durch [65, S. 9 f.]

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} B_{i,N_p}(u) \mathbf{p}_i, \quad (3.75)$$

wobei die Basisfunktionen durch die Bernsteinpolynome

$$B_{i,N_p} = \binom{N_p}{i} u^i (1-u)^{N_p-i} = \frac{N_p!}{i!(N_p-i)!} u^i (1-u)^{N_p-i} \quad (3.76)$$

gegeben sind. Ein B-Spline reduziert sich zu einem Bézier-Spline, wenn $N_p = p$ gilt und der Knotenvektor keine inneren Knoten besitzt, das heißt $\mathbf{u}_{\text{knot}} = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ [66, S. 5–8], da sich in diesem Fall die Basisfunktionen $N_{i,p}$ zu den Bernsteinpolynomen B_{i,N_p} reduzieren [65, S. 82]. Da Bézier-Splines keine inneren Knoten in \mathbf{u}_{knot} haben, besitzen sie gegenüber B-Splines nicht die Eigenschaft der Lokalität. Die Änderung eines Kontrollpunktes hat also stets globale Auswirkung auf den Spline.

3.2.5 Non-uniform rational B-Splines

Ein NURBS ist eine verallgemeinerte Definition eines B-Splines. Der Namensteil *non-uniform* signalisiert, dass ein NURBS einen nicht-gleichverteilten Knotenvektor besitzt, während *ra-*

tional bedeutet, dass die Basisfunktionen rationale Funktionen darstellen. Ein allgemeiner NURBS ist definiert durch [67]

$$\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i} = \sum_{i=0}^{N_p} R_{i,p}(u) \mathbf{p}_i, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (3.77)$$

Rationale Basis und Gewichte

Ein NURBS besitzt neben den B-Spline-Basisfunktionen nach (3.46) noch die Gewichte w_i , $i \in \{0, \dots, N_p\}$. Beide zusammengefasst ergeben die rationalen Basisfunktionen [65, S. 118]

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{N_p} N_{j,p}(u) w_j}, \quad i \in \{0, \dots, N_p\}. \quad (3.78)$$

Diese besitzen dieselben wesentlichen Eigenschaften wie die Basisfunktionen $N_{i,p}$, also Nicht-Negativität, Teilung der Einheit und Lokalität [65, S. 118]. Letztgenannte Eigenschaft bewirkt nicht nur, dass sich die Änderung eines Kontrollpunktes \mathbf{p}_i , sondern auch das Abändern des Gewichtes w_i nur auf das Intervall $u \in [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+p+1}]$ auswirkt [46, S. 482]. Für alle Gewichte gilt $w_i > 0$, $i \in \{0, \dots, N_p\}$. Sie stellen eine Art Anziehungsfaktor dar, das heißt je größer das Gewicht ist, desto näher wird der resultierende Spline sich dem zugehörigen Kontrollpunkt annähern, wie Abbildung 3.8 zeigt. Der Extremfall $w_i \rightarrow \infty$ bewirkt, dass $R_{j,p}(u) = 0$ für alle $j \neq i$ gilt und damit der NURBS unabhängig von \mathbf{u}_{knot} auf den Kontrollpunkt \mathbf{p}_i reduziert wird. Der gegenteilige Fall $w_i \rightarrow 0$ bedeutet, dass \mathbf{p}_i keinen Einfluss mehr auf den Spline ausübt, da sich für die zugehörige rationale Basisfunktion $R_{i,p}(u) = 0$ ergibt [67].

Wenn alle Gewichte $w_i = 1$, $i \in \{0, \dots, N_p\}$ sind, dann reduziert sich die rationale Basis aus (3.78) durch (3.58) zu den B-Spline Basisfunktionen. Vergleicht man (3.78) mit (3.75), so fällt auf, dass sich die B-Spline Basisfunktionen in (3.78) zu den Bernsteinpolynomen reduzieren, wenn der NURBS einen Knotenvektor ohne innere Knoten besitzt. In diesem Fall ergibt sich ein rationaler Bézier-Spline [65, S. 27]. Damit können B-Splines sowie rationale und nicht-rationale Bézierkurven als Spezialfälle von NURBS aufgefasst werden.

Homogene Transformation bei NURBS

Eine effektivere Darstellungsweise eines NURBS lässt sich durch homogene Koordinaten erreichen. Bei der bisherigen Verwendung der homogenen Koordinaten bzw. Transformation in Abschnitt 3.1 war die Skalierung stets Eins. Ein NURBS in homogenen Koordinaten wird

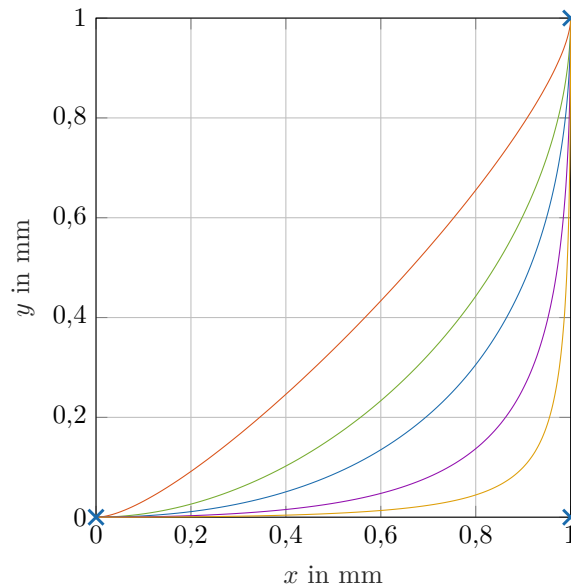


Abbildung 3.8: NURBS mit dem Knotenvektor $\mathbf{u}_{\text{knot}} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, Grad $p = 2$, Kontrollpunkten $\mathbf{p}_0 = [0, 0]^T$, $\mathbf{p}_1 = [1, 0]^T$ und $\mathbf{p}_2 = [1, 1]^T$ (\times), sowie den Gewichten $w_0 = w_2 = 1$ und $w_1 = 0.2$ (—), $w_1 = 0.6$ (—), $w_1 = 1$ (—), $w_1 = 2$ (—), und $w_1 = 4$ (—).

durch die Transformation \mathcal{H} [65, S. 120]

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) = \mathcal{H}(\mathbf{s}(u)) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (3.79)$$

mit den homogenen Kontrollpunkten $\tilde{\mathbf{p}}_i$ erreicht. Diese werden durch die affine Transformation erzeugt, die sie mit dem jeweiligen Gewicht w_i skaliert:

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathcal{H}(\mathbf{p}_i) = [w_i \cdot \mathbf{p}_i^T, w_i]^T. \quad (3.80)$$

Diese Skalierung kann als projektive Transformation aufgefasst werden [68, S. 36 f.]. Der Spline $\tilde{\mathbf{s}}$ entspricht nach (3.79) einem B-Spline, der gegenüber dem ursprünglichen NURBS eine zusätzliche Dimension w erhält [67]. Das heißt, jeder NURBS lässt sich durch \mathcal{H} in einen B-Spline transformieren. Dies erlaubt, für B-Spline vorhandene Algorithmen ebenfalls auf NURBS anzuwenden. Der ursprüngliche NURBS lässt sich aus dem B-Spline $\tilde{\mathbf{s}}$ ableiten, indem dieser durch die perspektivische Karte \mathcal{H}^{-1} in die Hyperebene $w = 1$ projiziert wird [67]. In Abbildung 3.9 ist diese Projektion für den NURBS aus Abbildung 3.8 mit $w_1 = 2$ dargestellt. Der eigentlich zweidimensionale NURBS wird durch die Projektion \mathcal{H} zum dreidimensionalen B-Spline. Da $w_0 = w_2 = 1$ gilt, sind die Kontrollpunkte \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_2 mit ihrer homogenen Transformation identisch. Lediglich \mathbf{p}_1 wird durch den Faktor $w_1 = 2$ skaliert.

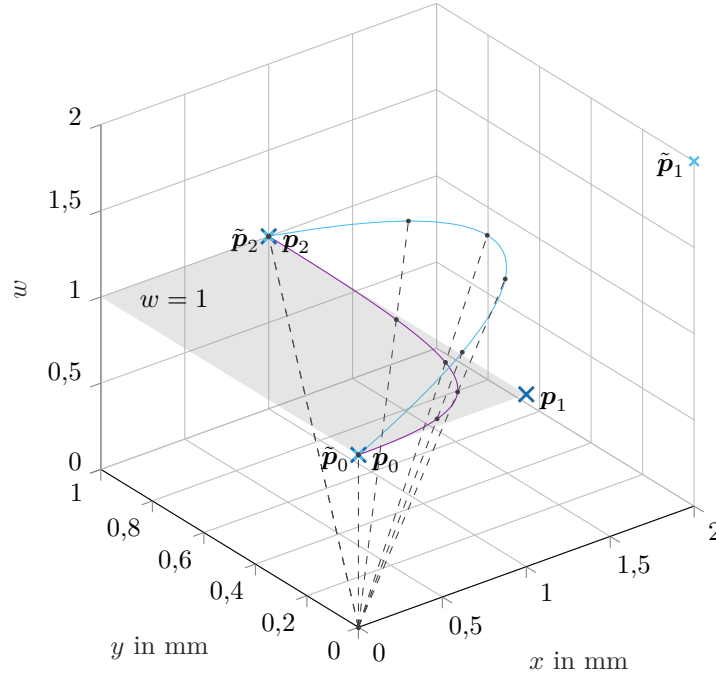


Abbildung 3.9: Projektion eines NURBS durch homogene Koordinaten; dreidimensionaler B-Spline (—) mit homogenen Kontrollpunkten (×) und den Gewichten $w_0 = w_2 = 1$ und $w_1 = 2$, sowie der in die Hyperebene $w = 1$ projizierte NURBS (—) und dessen Kontrollpunkte (×).

Ableitung eines NURBS

Wie Abbildung 3.9 zeigt, sind die Koordinatenwerte w ebenfalls vom Splineparameter u abhängig. Daher ist zur Bestimmung der Ableitung das Anwenden der homogenen Transformation mit anschließender Ableitung des entstehenden B-Splines durch (3.72) und Rückprojektion nicht möglich, da \mathcal{H} und \mathcal{H}^{-1} von u abhängen. Dies ist bei der Berechnung der Ableitung zu berücksichtigen. Die Ableitung des NURBS \mathbf{s} lässt sich durch die Ableitungen der Komponenten von $\tilde{\mathbf{s}}$ darstellen [65, S. 125]. Zunächst erfolgt die Aufteilung des NURBS in ein Zähler- und ein Nennerpolynom:

$$\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i} = \frac{\mathbf{Z}(u)}{\mathcal{N}(u)}. \quad (3.81)$$

Aus (3.81) folgt $\mathbf{Z}(u) = \mathcal{N}(u) \mathbf{s}(u)$, womit sich die erste Ableitung zu

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &= \frac{\mathcal{N}(u) \mathbf{Z}'(u) - \mathcal{N}'(u) \mathbf{Z}(u)}{\mathcal{N}(u)^2} = \\ &= \frac{\mathcal{N}(u) \mathbf{Z}'(u) - \mathcal{N}'(u) \mathcal{N}(u) \mathbf{s}(u)}{\mathcal{N}(u)^2} = \frac{\mathbf{Z}'(u) - \mathcal{N}'(u) \mathbf{s}(u)}{\mathcal{N}(u)} \end{aligned} \quad (3.82)$$

ergibt. Die k -te Ableitung von \mathbf{s} ergibt sich durch das Anwenden der Leibnizregel für das Zählerpolynom $\mathcal{Z}(u)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(k)}(u) &= (\mathcal{N}(u)\mathbf{s}(u))^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mathcal{N}^{(i)}(u) \mathbf{s}^{(k-i)}(u) = \\ &= \mathcal{N}(u) \mathbf{s}^{(k)}(u) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \mathcal{N}^{(i)}(u) \mathbf{s}^{(k-i)}(u)\end{aligned}$$

und anschließendem Umstellen

$$\Rightarrow \mathbf{s}^{(k)}(u) = \frac{\mathcal{Z}^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \mathcal{N}^{(i)}(u) \mathbf{s}^{(k-i)}(u)}{\mathcal{N}(u)}. \quad (3.83)$$

Die k -te Ableitung von \mathbf{s} ist also durch die k -te Ableitung von \mathcal{Z} , den ersten k Ableitungen von \mathcal{N} und den ersten $k-1$ Ableitungen von \mathbf{s} gegeben. Das Zählerpolynom für die d -dimensionalen Kontrollpunkte $\mathbf{p}_i = [p_{1,i}, \dots, p_{d,i}]^T \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{0, \dots, N_p\}$

$$\mathcal{Z}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i \cdot p_{1,i} \\ \vdots \\ w_i \cdot p_{d,i} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

und das Nennerpolynom

$$\mathcal{N}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i \quad (3.85)$$

ergeben zusammen den homogen transformierten B-Spline

$$\tilde{\mathbf{s}} = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \tilde{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i \cdot p_{1,i} \\ \vdots \\ w_i \cdot p_{d,i} \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}(u) \\ \mathcal{N}(u) \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

sodass die benötigten Ableitungen in (3.83) durch das Ableiten von $\tilde{\mathbf{s}}$ mit (3.72) berechenbar sind. Für eine effiziente, numerische Auswertung von (3.83) in einem Algorithmus ist darauf zu achten, dass die Ableitungen der Basisfunktionen nur einmal bestimmt werden.

3.2.6 Parametrisierung nach der Bogenlänge

Die bisher gezeigten Splines besitzen einen generischen Splineparameter u , meist definiert auf dem Intervall $u \in [0, 1]$, der keinen unmittelbaren Zusammenhang mit der darzustellenden Kurve besitzt. Wie jede parametrische Funktion lässt sich auch ein Spline umparametrisieren.

Eine Umparametrisierung stellt eine Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [\sigma_0, \sigma_f]$, $u \mapsto \sigma$ dar, die den Splineparameter u mit der Funktion $f(u)$ auf ein neues Intervall zuordnet.

Die am häufigsten verwendete Umparametrisierung ist die Parametrisierung nach der Bogenlänge (PBL) [69]. Diese beruht darauf, dass jedem Punkt auf der Kurve die vom TCP zurückgelegte Strecke, die der Bogenlänge entspricht, zugewiesen wird. Sie lässt sich berechnen mit [70, S. 189 f.][71]

$$\sigma = f(u) = \int_{\mu=0}^u \|\mathbf{s}'(\mu)\| \, d\mu. \quad (3.87)$$

Das Integral (3.87) ist nur für einfache Kurven analytisch lösbar. Für die Bestimmung einer allgemeinen PBL sind daher numerische Verfahren notwendig, deren gängigste Vertreter im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Casciola und Morigi [69] stellen eine PBL vor, bei der eine rational lineare Funktion

$$f(u) = \frac{au + b}{cu + d}$$

zum Einsatz kommt, um die Bogenlänge anzunähern. Der große Vorteil dabei ist, dass ein NURBS, der mit einer solchen Funktion umparametrisiert wird, wiederum einen NURBS ergibt [72]. Casciola und Morigi präsentieren einen Algorithmus, der für einzelne Knotenspannen mit einer linear rationalen Funktion deren Bogenlänge approximiert. Eine Aussage zur Genauigkeit des Verfahrens, die für die korrekte Vorschubplanung essentiell ist, treffen die Autoren nicht.

Einen anderen Ansatz verwenden Wang et al. [73]. Sie bestimmen die PBL eines kubischen Splines, in dem sie äquidistante Punkte (in Bezug auf die Bogenlänge) auf dem Spline mit einer Bisektion berechnen und diese Punkte als Knoten für einen approximierenden Spline verwenden. Diese Approximation stimmt zwar geometrisch nicht mehr exakt mit der ursprünglichen Kurve überein, ist aber näherungsweise nach der Bogenlänge parametrisiert. Als Vorteil dieses Verfahrens weisen die Autoren die Geschwindigkeit aus. Als Anwendung nennen Wang et al. die Approximation einer Straße in Fahrsimulatoren. Die mangelnde Genauigkeit reduziert jedoch das Potential in der Bahnplanung. Dieses Verfahren ist relativ zeiteffizient, bei Kurven mit höherer Krümmung ergeben sich allerdings erhöhte Approximationsfehler. Über die Anzahl der einzelnen kubischen Splineelemente lassen sich die Fehler jedoch reduzieren. Für eine hohe Genauigkeit sind selbst bei einem kurzen Spline schon viele Segmente notwendig, aus diesem Grund sind bei der Anwendung für eine Nadelwickelbahn bei einer ausreichenden Genauigkeit ein hoher Rechen- und Speicheraufwand zu erwarten.

Erkorkmaz [74, S. 17–23] untersucht die Approximation einer Kurve mit quintischen Polynomen, die so berechnet werden, dass sie nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Dabei kommt ein numerischer Optimierer zum Einsatz, der die Differenz zwischen dem Splinepa-

parameter und der Bogenlänge minimiert und die Polynomkoeffizienten liefert. Die numerische Optimierung vieler Polynome, um eine Kurve nachzubilden, ist bei der Länge der Nadelwickelbahn ebenfalls zu aufwendig.

Der große Teil der Forschungsarbeiten beschäftigt sich mit der numerischen Auswertung von (3.87) und der Approximation der Bogenlänge. Guenter und Parent [71] untersuchen die Anwendung der Gauß-Quadratur für die numerische Integration. Sie schlagen einen adaptiven Algorithmus vor, der die Intervalle der Integration teilt und jedes Intervall einzeln integriert. Ist die Differenz des Integralwertes aus dem gesamten Intervall und aus der Summe der beiden Teilintervalle größer als eine vorgegebene Toleranz, wenden die Autoren den Algorithmus so lange rekursiv auf die Teilintervalle an, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Statt das Integral direkt mit der Gauß-Quadratur zu bestimmen, verwenden Lei et al. [75] die Simpsonregel. Dabei erhalten sie Parametertupel (u, σ) zwischen dem Splineparameter und der Bogenlänge. Solche Tupel nutzen Erkorkmaz und Altintas [76], um die Bogenlänge zu approximieren. Dazu führen sie ein Polynom von Grad $\psi_S = 7$ ein, das diese Datenpunkte approximieren soll. Über eine Optimierung bestimmen sie das Polynom so, dass die mittlere quadratische Abweichung minimal wird. Heng und Erkorkmaz [77] erweitern dieses Verfahren durch Analyse des entstehenden Fehlers. Ist dieser zu groß, unterteilen sie das Intervall und führen den Algorithmus rekursiv aus. Die Segmentierung in der PBL erlaubt die Vorgabe eines maximalen Approximationsfehlers und limitiert die gesamte Problemgröße. Die Länge der umzuparametrisierenden Bahn geht lediglich linear in die Berechnungszeit ein. Damit bildet dieser Ansatz eine gute Ausgangsgrundlage für die PBL einer Nadelwickelbahn. Auf Basis dieses Verfahrens erfolgt in Abschnitt 4.4.2 eine spline-basierte PBL mit Segmentierung.

Einen kubischen Bézier-Spline verwenden Walter und Fournier [78]. Dazu müssen sie lediglich an drei Stellen der Kurve die Bogenlänge bestimmen. Die Autoren berichten einen Fehler von bis zu 7,8%, der sich jedoch durch das Verwenden weiterer Punkte auf Kosten der Rechenzeit reduzieren lässt.

Die genannten Verfahren ergeben stets eine Abbildung, die den Splineparameter u auf die Bogenlänge σ abbildet. Diese Abbildung ist bijektiv, wenn die Parametrisierung u regulär ist, da die Bogenlänge eine streng monoton steigende Funktion darstellt [70, S. 190]. Die inverse Abbildung, das heißt von einer Bogenlänge auf den Splineparameter zu schließen, erfolgt üblicherweise durch Bisektion, bis dieser ausreichend genau bestimmt ist. Als Alternative stellen Guenter und Parent [71] ein Verfahren vor, das den Newton-Raphson-Algorithmus verwendet.

3.3 Von der Bahn zur Trajektorie

Die Trajektorienplanung besteht nach Biagiotti aus den Teilbereichen Definition einer Bahn $\mathbf{s}(u)$ und Definition eines Bewegungsgesetzes $u(t)$ [46, S. 342]. Während die Bahn ausschließlich eine geometrische Beschreibung darstellt und beschreibt, welchen Positionen die Anlage folgen soll, ist die Aufgabe des Bewegungsgesetzes zu definieren, wie dies geschieht. Der Splineparameter u zeigt zwar, wie $\mathbf{s}(u)$ durchlaufen wird, ist allerdings eine künstliche Größe, die zunächst keinen Zusammenhang mit der Zeit t aufweisen muss. Für den Betrieb einer Anlage ist die Bahn jedoch mit der physikalisch messbaren Zeit zu beschreiben. Die Verkettung der Bahn und des Bewegungsgesetzes ergibt die Trajektorie

$$\mathbf{s}(u) \circ u(t) = \mathbf{s}(u(t)) = \mathbf{s}(t). \quad (3.88)$$

Zur Bestimmung des Bewegungsgesetzes wird meist die Vorschubgeschwindigkeit (auch Feed-Rate) verwendet, die die kartesische Geschwindigkeit des TCPs darstellt. Die Bahn bestehe für die folgenden Betrachtungen aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst ausschließlich aus den kartesischen Koordinaten des TCPs, das heißt $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{\text{TCP}} = [s_1, s_2, s_3]^T \in \mathbb{R}^3$. Der Vorschub ist dann definiert als

$$v_{\text{fr}} = \left\| \frac{d \mathbf{s}(u)}{d t} \right\| = \left\| \frac{d \mathbf{s}(u)}{d u} \frac{d u}{d t} \right\| = \left\| \frac{d \mathbf{s}(u)}{d u} \right\| \frac{d u}{d t}, \quad (3.89)$$

da $\dot{u} > 0$ gilt [79]. Analog zum Einsatz des Punktoperators beschreibt der Strichoperator $(\cdot)'$ die parametrische Ableitung $\frac{d}{d u}$. Die zeitliche Ableitung des Bewegungsgesetzes ist damit

$$\dot{u} = \frac{v_{\text{fr}}}{\|\mathbf{s}'(u)\|} \quad (3.90)$$

und das Bewegungsgesetz lässt sich durch Integration von (3.90) bestimmen:

$$u(t) = \int_{t_0}^t \dot{u} d t = \int_{t_0}^t \frac{v_{\text{fr}}}{\|\mathbf{s}'(u)\|} d t. \quad (3.91)$$

Um das Bewegungsgesetz definieren zu können, ist also zunächst der Vorschub zu bestimmen.

Besitzt die Bahn hingegen eine PBL, kann der Vorschub direkt mit dem Splineparameter σ durch

$$v_{\text{fr}} = \left\| \frac{d \mathbf{s}(\sigma)}{d \sigma} \right\| \frac{d \sigma}{d t} = \dot{\sigma} \quad (3.92)$$

verknüpft werden, da eine PBL-Kurve einen normierten Tangentenvektor besitzt [73].

3.3.1 Vorschubplanung

Wie Gleichung (3.89) bereits andeutet, ist v_{fr} eine Funktion vom Splineparameter u oder unter Berücksichtigung des Bewegungsgesetzes von der Zeit t . Der tatsächliche Vorschub ist also durch das Bewegungsgesetz mit der Bahn synchronisiert. Die Art und Weise, wie die Vorgabe des Vorschubs erfolgt, ist von Kinematik- und Prozessrandbedingungen abhängig.

Natürliche Interpolation

Die einfachste Form, ein Bewegungsgesetz zu definieren, ist die natürliche Interpolation, die durch das lineare Gesetz $u(t) = \lambda t$ definiert ist. Dadurch wird ein linearer Zusammenhang zwischen Splineparameter u und der Zeit t angenommen. Der Vorschub ergibt sich damit zu

$$v_{\text{fr}}(t) = \|\mathbf{s}'(u(t))\| \dot{u}(t) = \|\mathbf{s}'(u(t))\| \lambda.$$

Die parametrische Ableitung des Splines gibt den Verlauf des Vorschubprofils vor, das sich durch Anpassen von λ in seiner Höhe skalieren lässt. Da sich damit der Vorschub kaum beeinflussen lässt, kommen aufwändigere Verfahren zum Einsatz.

Planung eines konstanten Vorschubs

Üblicherweise wird der Vorschub unabhängig von der parametrischen Ableitung $\|\mathbf{s}'(u(t))\|$ des Splines definiert. Dadurch lassen sich beliebige Verläufe vorgeben. Oft kommen Geschwindigkeitsprofile zum Einsatz, die einen KVS, im Englischen auch constant feed rate, besitzen. Einen Überblick über verschiedene Standardprofile mit KVS geben Biagiotti und Melchiorri [46, S. 59–150]. Die wichtigsten Vertreter sind das Trapezprofil, das Doppel-S Profil sowie das trigonometrische Profil. Zur Bestimmung der Verläufe sind neben dem Vorschub auch dessen Ableitungen, die Beschleunigung $a_{\text{fr}}(t) = \dot{v}_{\text{fr}}(t)$ und der Ruck $j_{\text{fr}}(t) = \ddot{v}_{\text{fr}}(t)$, notwendig. Üblicherweise erfolgt neben der Begrenzung des Vorschubs durch eine Maximalgeschwindigkeit v_{max} auch eine Limitierung der verwendeten höheren Ableitung mit a_{max} bzw. j_{max} .

Das Trapezprofil besitzt ein stetiges Geschwindigkeitsprofil mit begrenzten Beschleunigungen [46, S. 62–65]. Das Profil besteht aus maximal drei Segmenten mit den Beschleunigungen

$$a_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0) \cdot a_{\text{max}} & 0 \leq t < \tau_1 = \left| \frac{v_{\text{max}} - v_0}{a_{\text{max}}} \right| \\ 0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 = T - \left| \frac{v_{\text{end}} - v_{\text{max}}}{a_{\text{max}}} \right| \\ \text{sign}(v_{\text{end}} - v_{\text{max}}) \cdot a_{\text{max}} & \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.93)$$

und den Geschwindigkeiten

$$v_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} v_0 + a_{\text{max}} t & 0 \leq t < \tau_1 \\ v_{\text{max}} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ v_{\text{max}} + a_{\text{max}}(t - \tau_2) & \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.94)$$

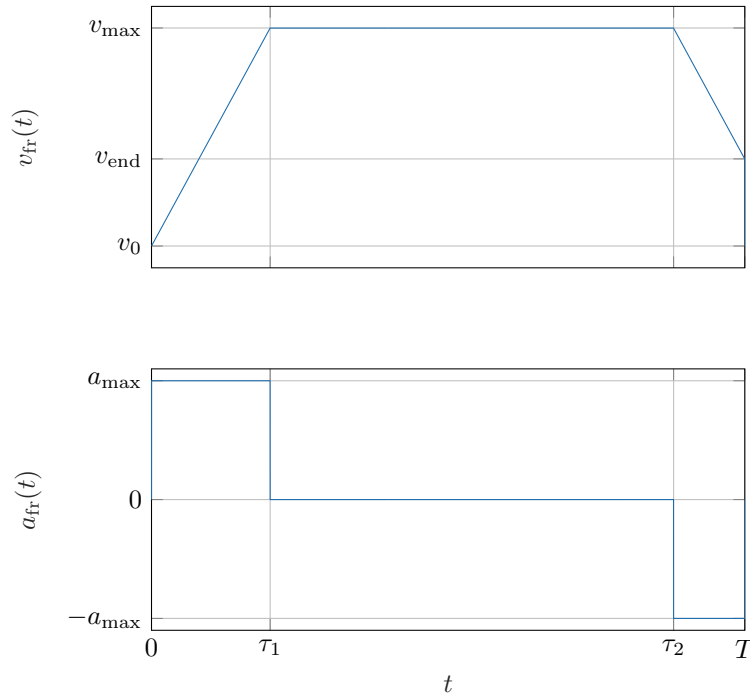


Abbildung 3.10: Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf eines asymmetrischen Trapezprofils.

In Abbildung 3.10 ist ein solches Trapezprofil gezeigt. Dessen erstes Segment umfasst das Zeitintervall $0 \leq t < \tau_1$, in der eine konstante Beschleunigung mit $a_1 = a_{\max}$ von der Startgeschwindigkeit v_0 auf die Endgeschwindigkeit der ersten Phase $v_{1,e} = v_{\max}$ erfolgt. In der anschließenden Phase ist der Vorschub konstant und die Beschleunigung $a_2 = 0$. Im Zeitraum $\tau_2 \leq t < T$, die das dritte Segment darstellt, wird von der maximalen Geschwindigkeit $v_{2,e} = v_{1,e}$ auf die Endgeschwindigkeit $v_{3,e} = v_{\text{end}}$ mit der Beschleunigung $a_3 = -a_{\max}$ verzögert. Die Trajektoriendauer T lässt sich direkt angeben oder durch die von der Anlage abzufahrende Bogenlänge l mit

$$l = \int_0^T v_{\text{fr}}(t) \, dt \quad (3.95)$$

bestimmen. Im Grenzfall $\tau_1 = \tau_2$, in der die beiden Beschleunigungszeitkonstanten der Dauer T entsprechen, reduziert sich das Trapezprofil um das Segment des KVS und die Geschwindigkeit v_{\max} wird am Übergang $t = \tau_1$ exakt erreicht. Übersteigen die Zeitkonstanten die Trajektoriendauer, lässt sich mit der gegebenen Beschleunigung a_{\max} die Zielgeschwindigkeit nicht mehr erreichen. Das Geschwindigkeitsprofil besitzt in diesen Fällen die Form eines Dreiecks.

Da das Trapez-Geschwindigkeitsprofil nicht-stetige Beschleunigungen besitzt, ist deren Ableitung, der Ruck $j_{\text{fr}}(t)$, an den Stellen τ_1 und τ_2 ein unendlich hoher Impuls. Untersuchungen von Barre et al. [80] zum Einfluss des Rucks auf die Mechanik einer Anlage zeigen, dass dessen Limitierung den höher-harmonischen Anteil im Frequenzspektrum der Trajekto-

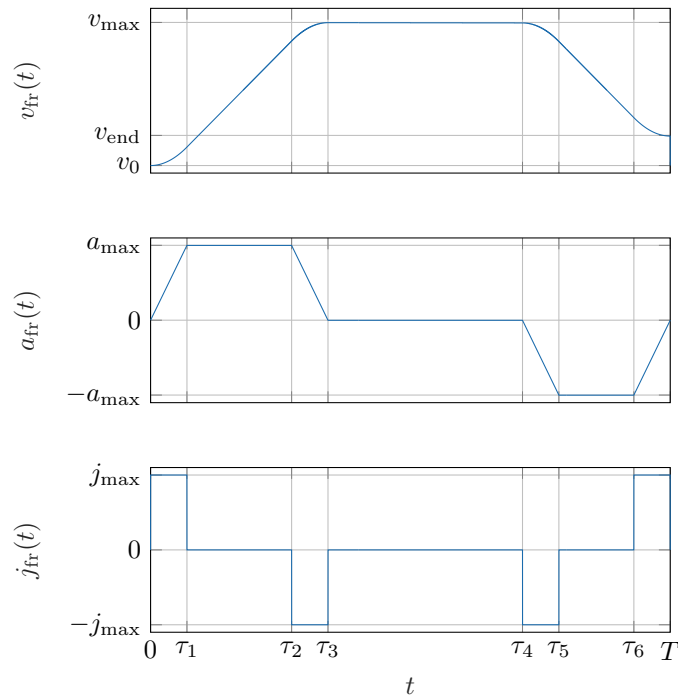


Abbildung 3.11: Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Ruckverlauf eines asymmetrischen Doppel-S-Profiles.

rie und damit Vibrationen reduziert. Dadurch lassen sich auch der mechanische Stress und Bahnfehler in der Trajektorie vermindern. Für eine glattere Trajektorie ist also der Ruck anstelle der Beschleunigung zu limitieren. Ein begrenztes Ruckprofil bedeutet trapezförmige Beschleunigungsprofile, die wiederum integriert lineare Geschwindigkeitsprofile mit parabelförmigen Blenden ergeben [46, S. 79]. Diese charakteristische Form ist namensgebend für dieses Geschwindigkeitsprofil, das unter den Bezeichnungen Doppel-S- oder Glockenprofil bekannt ist. Diese Trajektorie besteht aus insgesamt maximal sieben Segmenten und lässt sich in die drei Phasen Beschleunigung, KVS und Verzögerung unterteilen.

Die Beschleunigungsphase von $0 \leq t < \tau_3$ besteht aus drei Segmenten mit dem begrenzten Ruck

$$j_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0)j_{\text{max}} & 0 \leq t < \tau_1 = \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \\ 0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 = \tau_1 + \left| \frac{v_{\text{max}} - v_0}{a_{\text{max}}} \right| - \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \\ -\text{sign}(v_{\text{max}} - v_0)j_{\text{max}} & \tau_2 \leq t < \tau_3 = \tau_2 + \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \end{cases}, \quad (3.96)$$

dem aus (3.96) integrierten trapezförmigen Beschleunigungsprofil

$$a_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0)j_{\text{max}}t & 0 \leq t < \tau_1 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0)a_{\text{max}} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0)(a_{\text{max}} - j_{\text{max}}(t - \tau_2)) & \tau_2 \leq t < \tau_3 \end{cases} \quad (3.97)$$

und der resultierenden S-förmigen Geschwindigkeit

$$v_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0) \frac{1}{2} j_{\text{max}} t^2 + v_0 & 0 \leq t < \tau_1 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0) \left(\frac{1}{2} j_{\text{max}} \tau_1^2 + a_{\text{max}}(t - \tau_1) \right) + v_0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_0) \left(v_{\text{max}} - \frac{1}{2} j_{\text{max}} (t - \tau_3)^2 \right) & \tau_2 \leq t < \tau_3 \end{cases} \quad (3.98)$$

Die folgende Phase, die den Zeitraum $\tau_3 \leq t < \tau_4$ umfasst, besitzt KVS. Es gilt $j_{\text{fr}}(t) = a_{\text{fr}}(t) = 0$ und die Geschwindigkeit nimmt ihren Maximalwert $v_{\text{fr}}(t) = v_{\text{max}}$ an. Die Zeitkonstanten τ_4 , wie auch τ_5 und τ_6 , lassen sich aus der Trajektoriendauer T , die entweder gegeben oder via (3.95) berechnet werden kann, bestimmen:

$$\begin{aligned} \tau_4 &= \tau_5 - \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \\ \tau_5 &= \tau_6 - \left(\left| \frac{v_{\text{max}} - v_0}{a_{\text{max}}} \right| - \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \right) \\ \tau_6 &= T - \left| \frac{a_{\text{max}}}{j_{\text{max}}} \right| \end{aligned}$$

Die verbleibenden drei Segmente bilden zusammen die Verzögerungsphase, die ebenfalls ein trapezförmiges Beschleunigungsprofil besitzt. Der Ruck

$$j_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) j_{\text{max}} & \tau_4 \leq t < \tau_5 \\ 0 & \tau_5 \leq t < \tau_6 \\ -\text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) j_{\text{max}} & \tau_6 \leq t < T \end{cases} \quad (3.99)$$

ist wiederum auf seinen Maximalwert begrenzt, womit sich die Beschleunigung zu

$$a_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) j_{\text{max}} (t - \tau_4) & \tau_4 \leq t < \tau_5 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) a_{\text{max}} & \tau_5 \leq t < \tau_6 \\ \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) (a_{\text{max}} - j_{\text{max}} (t - \tau_6)) & \tau_6 \leq t < T \end{cases} \quad (3.100)$$

ergibt. Die Geschwindigkeit lautet damit

$$v_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} v_{\text{max}} - \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) \frac{1}{2} j_{\text{max}} (t - \tau_4)^2 + v_0 & \tau_4 \leq t < \tau_5 \\ v_{\text{max}} - \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) \left(\frac{1}{2} j_{\text{max}} \tau_5^2 + a_{\text{max}}(t - \tau_5) \right) + v_0 & \tau_5 \leq t < \tau_6 \\ v_{\text{end}} + \text{sign}(v_{\text{max}} - v_{\text{end}}) j_{\text{max}} (t - T)^2 & \tau_6 \leq t < T \end{cases} \quad (3.101)$$

Abhängig von den gewählten Werten für v_{max} , a_{max} und j_{max} besteht die Möglichkeit, dass einzelne Segmente verschwinden und sich die Trajektorie reduziert. Daher sind bei der Bestimmung eines Doppel-S-Profiles stets Fallunterscheidungen notwendig, die basierend auf den Zeitkonstanten und der Trajektoriendauer bestimmen, welche der sieben Segmente im Profil existieren.

Soll auch der Ruck stetig sein, besteht die Möglichkeit, dessen Ableitung zu begrenzen, die in der englischsprachigen Literatur den Namen Snap besitzt. Dies führt zu einer Trajektorie mit 15 Segmenten und trapezförmigem Ruckprofil [46, S. 107–116].

Eine Alternative zum Doppel-S-Profil, die ebenfalls einen ruckbegrenzten Beschleunigungsvorgang auf eine Zielgeschwindigkeit v_{\max} ermöglicht, stellt das trigonometrische Profil dar. Dazu wird das lineare Segment mit parabolischen Blenden durch eine Sinushalbwellenlinie ersetzt, was in einer Trajektorie resultiert, in der die drei Phasen Beschleunigung, KVS und Verzögerung aus jeweils einem Segment bestehen. Das Geschwindigkeitsprofil dieser Trajektorie ergibt sich zu [46, S. 133–134]

$$v_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \frac{v_{\max}-v_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_1}t + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{v_{\max}+v_0}{2} & 0 \leq t < \tau_1 \\ v_{\max} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \frac{v_{\text{end}}-v_{\max}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{T-\tau_2}(t-\tau_2) + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{v_{\max}+v_{\text{end}}}{2} & \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.102)$$

Durch Ableiten erfolgt sowohl die Bestimmung der Beschleunigung

$$a_{\text{fr}}(t) = \dot{v}_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\tau_1} \frac{v_{\max}-v_0}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_1}t + \frac{3\pi}{2}\right) & 0 \leq t < \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \frac{\pi}{T-\tau_2} \frac{v_{\text{end}}-v_{\max}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{T-\tau_2}(t-\tau_2) + \frac{3\pi}{2}\right) & \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.103)$$

als auch des Ruckes

$$j_{\text{fr}}(t) = \dot{a}_{\text{fr}}(t) = \begin{cases} -\left(\frac{\pi}{\tau_1}\right)^2 \frac{v_{\max}-v_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_1}t + \frac{3\pi}{2}\right) & 0 \leq t < \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ -\left(\frac{\pi}{T-\tau_2}\right)^2 \frac{v_{\text{end}}-v_{\max}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{T-\tau_2}(t-\tau_2) + \frac{3\pi}{2}\right) & \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.104)$$

Die beiden Zeitkonstanten τ_1 und $T - \tau_2$ für die Beschleunigungsphasen lassen sich über die Vorgabe einer maximalen Beschleunigung a_{\max} oder eines maximalen Ruckes j_{\max} bestimmen. Unter der Annahme, dass Anfangs-, Maximal- und Endgeschwindigkeit v_0 , v_{\max} bzw. v_{end} fest vorgegeben sind, besitzt das trigonometrische Profil für das Beschleunigungs- und Verzögerungssegment jeweils nur einen Freiheitsgrad τ_1 bzw. τ_2 . Sie sind, abhängig davon ob Beschleunigung oder Ruck begrenzt sein sollen, durch den Vergleich mit den Amplituden der Kosinus-Funktion in (3.103) bzw. der Sinus-Funktion in (3.104) bestimmbar:

$$\tau_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{a_{\max}} \frac{v_{\max}-v_0}{2} & \max a_{\text{fr}}(t) = a_{\max}, 0 \leq t < \tau_1 \\ \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2j_{\max}}{|v_{\max}-v_0|}}} & \max j_{\text{fr}}(t) = j_{\max}, 0 \leq t < \tau_1 \end{cases} \quad (3.105a)$$

$$\tau_2 = \begin{cases} T - \frac{\pi}{a_{\max}} \frac{v_{\text{end}}-v_{\max}}{2} & \max a_{\text{fr}}(t) = a_{\max}, \tau_2 \leq t < T \\ T - \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2j_{\max}}{|v_{\text{end}}-v_{\max}|}}} & \max j_{\text{fr}}(t) = j_{\max}, \tau_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.105b)$$

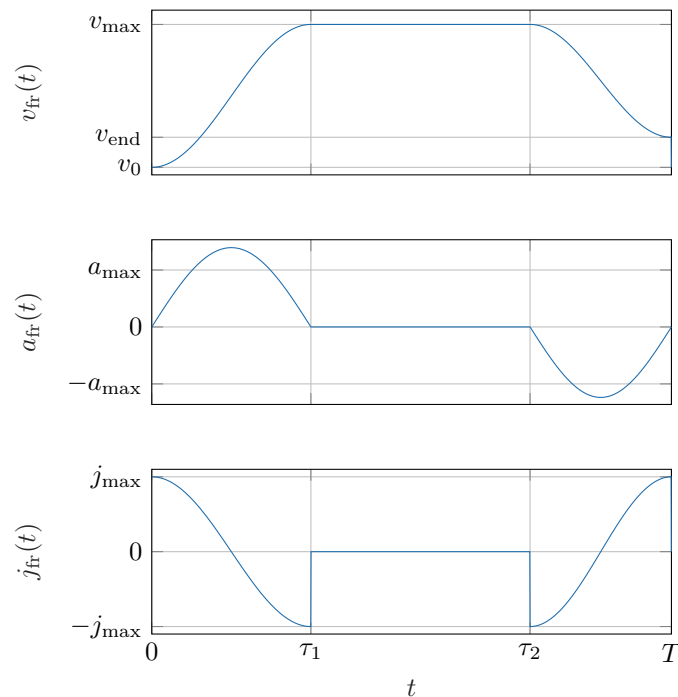


Abbildung 3.12: Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Ruckverlauf eines asymmetrischen trigonometrischen Profils.

In Abbildung 3.12 sind der Verlauf der Geschwindigkeit, Beschleunigung und des Rucks für ein trigonometrisches Profil gegeben, in dem der Ruck begrenzt ist. Der Amplitudenwert der Beschleunigung übersteigt dabei das angegebene Limit. Das Profil besitzt dieselben Parameter wie das Doppel-S-Profil aus Abbildung 3.11.

Neben dieser einfachen Vorgabe eines KVS ist die Vorschubplanung auch Gegenstand der Forschung in der Robotik und Maschinenteknik. Im folgenden Abschnitt soll ein kurzer Überblick über die Verfahren gegeben werden und deren Kategorisierung erfolgen.

3.3.2 Aktuelle Verfahren in der Trajektorienplanung

Die verschiedenen Algorithmen zur Vorschubplanung lassen sich hinsichtlich der eingesetzten Algorithmen und ihrem Ziel gruppieren. Abbildung 3.13 zeigt eine Möglichkeit die Methoden zusammenzufassen. Diese Einteilung folgt der Gruppierung in [81].

Verfahren aus den Bereichen der optimalen Steuerung und numerischen Optimierung sind in der Lage, optimale Trajektorien zu liefern. Hingegen liefern Heuristiken, die kritische Punkte betrachten, oder auch direkte Interpolationsmethoden zwar keine optimalen Lösungen, sind dafür aber deutlich effizienter in der Berechnung und besitzen Vorteile in echtzeitfähigen Anwendungen. Im Folgenden werden die verschiedenen Methoden kurz vorgestellt und ein Überblick über einige Verfahren aus der Literatur gezeigt.

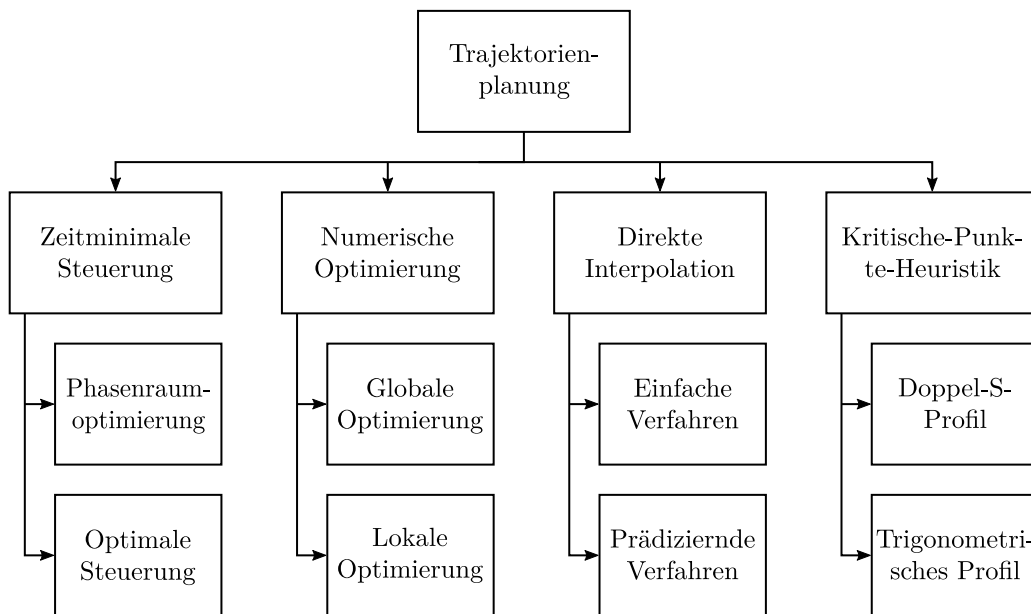


Abbildung 3.13: Überblick über aktuelle Verfahren zur Vorschubplanung

Zeitminimale Steuerung

Die ersten Lösungen für die zeitminimale Steuerung stammen aus dem Bereich der Robotik. Bobrow et al. [82] und Shin und McKay [83] untersuchen unabhängig voneinander im Wesentlichen denselben Algorithmus. Dazu transformieren die Autoren das Problem in den Phasenraum bzw. Zustandsraum, in dem als Steuergröße die zweite Ableitung des Splineparameters \ddot{u} dient, die von den maximalen Beschleunigungen der einzelnen Antriebe des Manipulators begrenzt ist. Der Splineparameter u und dessen Ableitung \dot{u} stellen die Zustände des Systems dar. Mit den Dynamikgleichungen des Manipulators lässt sich ein Zusammenhang zwischen den Achsmomenten und den Positionen \mathbf{q} und deren zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{q}}$ bzw. $\ddot{\mathbf{q}}$ der Achsen herstellen [30]. Diese sind über die VWK wiederum an die gegebene Bahn $\mathbf{s}(u)$ und damit an den Splineparameter gebunden. Aus diesen beiden Zusammenhängen lassen sich zulässige Intervalle für \ddot{u} ableiten. Bobrow et al. zeigen in [82], dass die Steuervariable stets ihren maximalen oder minimalen Wert annehmen muss, wenn eine zeitminimale Trajektorie resultieren soll. Die Herausforderung ist es daher, die Schaltzeitpunkte zwischen den beiden extremen Werten zu finden. Dazu wird ein Phasenraum-Diagramm (auch Zustandsraum-Diagramm) mit den beiden Zuständen u und \dot{u} verwendet. In diesem Phasenraum existiert eine Kennlinie, welche die maximal zulässige Geschwindigkeit $\dot{u}(u)$ beschreibt und sich über die begrenzten Achsmomente berechnen lässt. Um die Schaltzeitpunkte zu finden, verwenden Bobrow et al. [82] und Shin und McKay [83] einen Suchalgorithmus, der sowohl eine Vorwärts-Integration der Gleichungen vom Startpunkt als auch eine Rückwärts-Integration vom Endpunkt vorsieht. Schneiden sich die resultierenden Phasenkurven, existiert nur ein einziger Schaltzeitpunkt am Schnittpunkt. Schneiden die beiden Phasentrajektorien hingen-

gen das Geschwindigkeitslimit, so existieren mehrere Schaltzeitpunkte, die in nachgelagerten Suchalgorithmen gefunden werden.

Pfeiffer und Johanni [84] zeigen, dass die zulässigen Zustände in der \dot{u}^2 - \ddot{u} -Ebene durch ein Polygon begrenzt sind, dessen Kanten im Falle symmetrischer maximaler Achsmomente Parallelen darstellen. Dies erlaubt es, die Kennlinie der maximalen Geschwindigkeit zu bestimmen. Weiterhin führen die Autoren tangentielle und kritische Punkte auf dem Geschwindigkeitslimit ein und stellen dar, dass diese die Schnittpunkte der Phasentrajektorie mit dem Geschwindigkeitslimit verkörpern. Durch entsprechende Vorwärts- bzw. Rückwärtsintegration von diesen Punkten aus lassen sich die Schaltzeitpunkte damit wesentlich effizienter bestimmen. Slotine und Yang [85] definieren insgesamt drei spezielle Punkte auf dem Geschwindigkeitslimit. Ähnlich zum Verfahren von Pfeiffer und Johanni [84] erhöht die Berechnung dieser Punkte die Effizienz, aber auch die Robustheit des Algorithmus. Außerdem zeigen die Autoren, dass singuläre Punkte existieren, in denen die Beschleunigungsgrenzen zu Geschwindigkeitslimits degenerieren und die Steuervariable im Optimum keinen extremen Wert annimmt. In weiteren Arbeiten wurde die Effizienz erhöht [86], die Modellierung der Antriebslimits verfeinert [87] oder es ging durch Diskretisierung zwar die Optimalität verloren, aber die Komplexität ließ sich reduzieren [88].

Statt der Lösung durch direkte Integration stellen Shin und McKay [89] ein Verfahren vor, das das zeitminimale Steuerungsproblem mittels dynamischer Programmierung löst. Dies erlaubt, weitere Nebenbedingungen oder andere Modelle zu berücksichtigen.

Das zeitminimale Steuerungsproblem lässt sich auch im Kontext der optimalen Steuerung beschreiben. Dazu wird das Problem im Zustandsraum mit den Zuständen u und \dot{u} beschrieben, während die Beschleunigung \ddot{u} als Eingang für das System dient. Geering et al. [90] lösen dieses Problem für Roboter mit rotatorischen und linearen Achsen. Sie verwenden dafür Pontryagins Maximum-Prinzip. Diesen Ansatz verwenden auch Gourdeau und Schwartz [91] für eine optimale Steuerung mit einer gewichteten Zeit-Energie-Kostenfunktion, das durch numerische Integration gelöst wird. Von Stryk und Schlemmer [92] untersuchen die energieoptimale Steuerung eines Roboters.

Soll anstatt der Beschleunigung \ddot{u} der Pseudo-Ruck $\ddot{\ddot{u}}$ begrenzt werden, um zum Beispiel Vibrationen zu vermeiden, wird aus der eigentlichen Phasenebene u - \dot{u} ein tatsächlicher Phasenraum u - \dot{u} - $\ddot{\ddot{u}}$ [93]. Das Finden der optimalen Trajektorie im dreidimensionalen Phasenraum gestaltet sich deutlich komplexer, da höherdimensionale Differentialgleichungen resultieren. Zum Berechnen der Schaltzeitpunkte sind dabei aufwändigere Suchalgorithmen notwendig [88]. Tarkiainen und Shiller [94] beweisen, dass die optimale Trajektorie im Ruck $\ddot{\ddot{u}}$, abgesehen von singulären Punkten, den maximalen oder minimalen Wert annimmt und geben einen iterativen Lösungsansatz, indem sie das Problem ebenfalls als optimale Steuerung auffassen.

In der Anwendung Nadelwickeln zeigt sich die Begrenzung des Rucks als sinnvoll, aus diesem Grund ist stets das Finden der Schaltzeitpunkte im Phasenraum u - \dot{u} - $\ddot{\ddot{u}}$ durchzuführen. Damit geht ein sehr hoher Rechenaufwand einher, der insbesondere bei langen zusammen-

hängenden Bahnen, wie sie in der Nadelwickeltechnik auftreten, nicht zu vernachlässigen ist. Bahnen, die zum Beispiel in [93] oder [88] zur Validierung der Algorithmen verwendet werden, sind relativ kurz, um dieses Problem zu umgehen. Für sehr lange Werkzeugbahnen ist diese Art der Vorschubbestimmung daher selbst bei einer Offline-Berechnung nicht geeignet.

Numerische Optimierung

Optimale Trajektorien lassen sich neben einer analytischen Berechnung auch durch numerische Optimierung finden. Dazu wird die Aufgabe der Trajektorienplanung als nichtlineares Optimierungsproblem beschrieben, deren Lösung durch unterschiedliche Optimierungsalgorithmen und Heuristiken erfolgt. Abhängig von der Kostenfunktion bedeutet Optimalität bei diesen Verfahren nicht notwendigerweise eine Trajektorie mit minimaler Zeit.

Zeitminimale Trajektorien bilden jedoch den Startpunkt für die optimale Trajektorienplanung mit Hilfe numerischer Optimierung und nehmen den größten Teil der Forschungsarbeiten ein. Grund ist, dass in der Robotik bzw. CNC-Technik eine zeitminimale Trajektorie die wirtschaftliche Effizienz des Systems erhöht.

Constantinescu und Croft [95] beschreiben eine Lösung für die Bestimmung einer optimalen Trajektorie mit \ddot{u} als Steuervariable und einem begrenzten Ruck. Die Kennlinie im Phasenraum wird durch eine numerische Optimierung gefunden. Die Begrenzungen der Aktoren werden durch die Systembeschreibung eingehalten.

Altintas und Erkorkmaz [96] stellen einen Algorithmus vor, der ohne die Beschreibung der Trajektorie im Zustandsraum auskommt. Um die Stetigkeit von TCP-Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck zu garantieren, verwenden Altintas und Erkorkmaz einen Spline mit $p = 5$ für die Beschreibung des Bewegungsgesetzes. Durch die Minimierung der normierten Zeitinkremente via linearer Programmierung erreichen sie eine zeitoptimale Trajektorie. Nichtlineare Nebenbedingungen verkörpern die Maximalgeschwindigkeiten, -beschleunigungen und -rücke der einzelnen Achsen. Deren Auswertung erfolgt in konstanten Bahninkrementen. Für längere Bahnen stellen die Autoren ein Verfahren vor, das durch abschnittsweises Lösen des Optimierungsproblems die Problemgröße begrenzt.

Für Anlagen mit einem höheren Freiheitsgrad resultieren bei diesem Ansatz jedoch eine hohe Anzahl an nichtlinearen Nebenbedingungen mit aufwändiger Auswertung. Deswegen begrenzen Sencer et al. [97] die zulässigen Beschleunigungs- und Ruckbereiche und können damit die Komplexität bei der Auswertung der Nebenbedingungen deutlich reduzieren. Ein B-Spline beschreibt das Profil des Vorschubs und zur Minimierung der Zeit werden dessen Kontrollpunkte durch SQP maximiert. Auch Sencer et al. verwenden eine abschnittsweise Optimierung für lange Werkzeugbahnen. Damit resultiert ein glattes Geschwindigkeitsprofil, das durch die verwendeten Vereinfachungen jedoch nicht optimal ist.

Einen iterativen Optimierungsalgorithmus stellen Dong et al. [93] vor. Dabei verwenden sie einen bidirektionalen Suchalgorithmus, der abschnittsweise die Geschwindigkeit \dot{u} ma-

ximiert. Durch die verwendeten Nebenbedingungen können nicht stetige Beschleunigungen resultieren, weshalb in einem zweiten Schritt die Beschleunigungsprofile an diesen Stellen geglättet werden. Die Autoren zeigen, dass die resultierenden Trajektorien optimal sind.

Eine lineare Formulierung für das Optimierungsproblem erreichen Fan et al. [98] durch das Einführen eines Pseudo-Rucks. Sie unterteilen die Bahn für die Optimierung in diskrete Punkte, in denen der Vorschub optimiert und die Nebenbedingungen ausgewertet werden.

Die Achslimits berücksichtigen Zhang et al. [99], indem sie das Moment und dessen zeitliche Ableitung für die einzelnen Antriebe der Kinematik mit der Dynamikgleichung bestimmen. Auch hier erlaubt das Einführen des Pseudo-Rucks eine Linearisierung des Optimierungsproblems.

Ein lineares Programm mit abschnittsweiser Optimierung untersuchen Erkorkmaz et al. [100]. Dabei kommt ein Ansatz für die Bestimmung der Optimierungsabschnitte zum Einsatz, der ein solches Fenster in drei Bereiche einteilt, dem eigentlichen Optimierungsfenster sowie den beiden Randbereichen, die durch die Randbedingungen beeinflusst werden. Diese Auftrennung erlaubt es den Autoren, Optimierungsfenster mit minimalem Überlapp zu definieren und die Optimierung der einzelnen Trajektorienabschnitte zu parallelisieren, was auf modernen Rechnerarchitekturen deutlich kürzere Rechenzeiten erlaubt.

Den Pseudo-Ruck verwenden auch Liu et al. [101]. Sie lösen das Optimierungsproblem aber mit einem anderen Ansatz. Statt direkt den Vorschub zu maximieren, berechnen sie zunächst eine obere Schranke für die Geschwindigkeit an diskreten Zeitpunkten. Im folgenden Schritt wird die Abweichung des tatsächlichen Vorschubs vom Geschwindigkeitslimit minimiert.

Einen Ansatz, der neben der Trajektoriendauer auch die verbrauchte Energie mit berücksichtigt, präsentieren Verscheure et al. [102]. Die Kostenfunktion der Optimierung besteht in der vorgestellten Arbeit aus einer gewichteten Summe zwischen Dauer und Systemenergie. Mit diesem Gewicht kann der Zielkonflikt zwischen Zeit- und Energieoptimalität eingestellt werden. In [103] zeigte Shiller bereits, dass eine Trajektorie, in der auch die Energie Berücksichtigung findet, einen reduzierten Folgefehler besitzt. Basierend auf dem kinematischen Modell, das durch DH-Parameter aufgestellt wird, definieren Saramago und Steffen [104] mit Hilfe des Lagrange-Formalismus das dynamische Modell. Dieses verwenden sie ebenfalls, um eine gewichtete Zeit-Energie-Kostenfunktion aufzustellen. Details zur Lösung des nichtlinearen Programmierungsproblems (NLPs) sind jedoch nicht gegeben.

Mit iterativer dynamischer Programmierung nähern sich Field und Stepanenko [105] einer energieminimalen Trajektorie an. Dabei untersuchen sie Punkt-zu-Punkt-Bewegungen, bei denen lediglich Anfangs- und Endpunkt definiert sind, die Zwischenzustände jedoch undefiniert bleiben.

Piazzini und Visioli [106][107] beschäftigen sich mit der Generierung einer Trajektorie mit minimalem Ruck. Sie stellen dafür ein globales Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen auf, das mit dem vorgestellten Algorithmus gelöst wird. Für eine gegebene Trajektoriendauer zerteilen sie die Bahn in mehrere Intervalle, in denen sie ein Optimierungsproblem ohne

Nebenbedingungen formulieren und lösen. Huang et al. [108] verwenden einen genetischen Algorithmus (GA) für das Generieren einer ruckminimalen Trajektorie. Sie verifizieren den Algorithmus durch eine Simulation mit einer Kinematik, die zwei Freiheitsgrade besitzt. Für lange Bahnen oder bei einer Kinematik mit mehr Freiheitsgraden ist anzunehmen, dass die Rechenzeit stark zunimmt.

Gasparetto et al. [109] vergleichen in ihrer Arbeit u.a. zwei Algorithmen, die jeweils eine zeit-ruckminimale Trajektorie berechnen. Durch die Variation der Gewichte in der Kostenfunktion lassen sich glattere bzw. schnellere Trajektorien bestimmen.

Abhängig vom Aufbau der Algorithmen lassen sich die beschriebenen nichtlinearen Optimierungen in globale und lokale Verfahren klassifizieren. Globale Verfahren betrachten stets die gesamte Bahn. Dies führt dazu, dass selbst fortgeschrittene numerische Methoden, welche zum Beispiel die in der Optimierung entstehenden dünnbesetzten Matrizen in der Optimierung verwenden, Speicherprobleme bekommen. Die universelle Anwendung einer globalen Vorschuboptimierung in der Nadelwickeltechnik ist daher nicht zielführend.

Das Unterteilen der zu optimierenden Bahn in Teilsegmente, welches beispielsweise Erkorkmaz et al. in [100] oder Piazzzi und Visioli in [106] und [107] beschreiben, erlaubt das Berechnen von Bewegungsgesetzen, bei denen die Bahnlänge lediglich linear in die Berechnungszeit eingeht und die Problemgröße klein bleibt. Zwar besteht damit keine Garantie für eine optimale Lösung, aber die Rechenzeit bleibt in einem angemessenen Rahmen für die Offline-Berechnung. Die Umsetzung eines solchen Verfahrens für die Nadelwickeltechnik ist in Abschnitt 4.4.3 beschrieben.

Direkte Interpolation

Sowohl das analytische Berechnen optimaler Steuerungsgesetze als auch die numerische Optimierung sind aufwendige Verfahren. Sie finden als solche zwar (beinahe) optimale Lösungen, sind aber derzeit nicht echtzeitfähig. Aus diesem Grund sind Verfahren entstanden, die geometrische und kinematische Begrenzungen einhalten. Sie haben zwar keinen Anspruch auf Optimalität, sind dafür jedoch deutlich effizienter. Diese Algorithmen lassen sich in zwei wesentliche Kategorien zusammenfassen. Die Gruppe der direkten Interpolation verbindet dabei die Phasen der Trajektorienplanung und der Interpolation und beschreibt den Stand der Technik in den CNC-Steuerungen der verschiedenen Hersteller. Ihr großer Vorteil liegt darin, dass sie die Referenzgrößen direkt bestimmen, während die bisher genannten Verfahren stets eine nachgelagerte Interpolation benötigen, die aus den berechneten Vorschubprofilen die diskret abgetasteten Positionen für die CNC-Steuerung bestimmt.

Eine Vorstufe zu direkt interpolierenden Verfahren stellen die Arbeiten von Lin et al. [110] und Piazzzi und Visioli [111] dar. In diesen Arbeiten wird die Bahn als Folge diskreter Lagen beschrieben. Ziel ist, Zeitpunkte für das Passieren dieser Punkte so zu berechnen, dass eine zeitminimale Trajektorie entsteht, während gleichzeitig kinematische Nebenbedingungen

eingehalten werden. Durch Verkleinern der Interpolationsintervalle nähert sich die Lösung dem tatsächlichen Optimum an.

Statt die Diskretisierung abhängig vom Splineparameter vorzunehmen, besteht die Idee der direkten Interpolation darin, im Zeitinkrement T_s der Steuerung den Soll-Vorschub und die Achspositionen zu bestimmen. Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich im Wesentlichen darin, wie und unter welchen Nebenbedingungen der Vorschub berechnet wird.

Das einfachste Verfahren ist das Planen eines KVS. Mit diesem Thema setzen sich die Arbeiten von Bedi et al. [112] und Yang und Kong [113] auseinander. Die einzige Nebenbedingung ist hier die Maximalgeschwindigkeit des TCPs.

Zusätzlich zu dieser betrachten Yeh und Hsu [114] den Bahnfehler. Durch die Interpolation entstehen diskrete Positionen, die verbunden ein Polygon ergeben und damit eine gekrümmte Bahn nicht exakt wiedergeben. Die maximale Abweichung von Polygon und tatsächlicher Bahn wird als Bahnfehler bezeichnet und ist vom Vorschub abhängig, da ein höherer Vorschub die Distanz zwischen den abgetasteten Punkten erhöht. Bei Kurven mit hohen Krümmungen ist daher die Bahngeschwindigkeit zu reduzieren, wenn eine obere Schranke für den Bahnfehler eingehalten werden soll.

Sollen neben der Geschwindigkeit auch höhere Ableitungen berücksichtigt werden, ist stets eine Prädiktion der Bahn notwendig. Nur so ist sichergestellt, dass der Algorithmus zum Beispiel die Geschwindigkeit vor Kurvenbereichen mit hoher Krümmung rechtzeitig reduziert, sodass keine Beschleunigungsgrenzen verletzt werden. Es existiert eine Vielzahl an Arbeiten, die sich mit unterschiedlichen Kombinationen aus Begrenzung der tangentialen Größen, Begrenzung der Kinematik oder Prädiktionsalgorithmen beschäftigen [115]-[116]. Alle Verfahren bestehen im Wesentlichen aus folgenden drei Phasen. Zunächst erfolgt für den aktuellen Zeitschritt die Berechnung des maximalen Vorschubs aus den unterschiedlichen Bedingungen, danach wird im Prädiktionsschritt überprüft, ob mit diesem Vorschub innerhalb des Prädiktionsfensters alle Bedingungen einhaltbar bleiben. Mit dem im Zweifel reduzierten Vorschub erfolgt abschließend die Interpolation im Zeitinkrement T_s .

Mit diesem Vorgehen untersuchen Nam und Yang [115] das Generieren einer Trajektorie, bei der sich neben dem Vorschub und dem Bahnfehler auch die tangentielle Beschleunigung und der tangentielle Ruck begrenzen lassen. Die Prädiktion erfolgt durch das Vorausberechnen der verbleibenden Kurvenlänge bis zu einem Beschleunigungsvorgang. Mit den gegebenen Begrenzungen lässt sich aus der Geschwindigkeitsdifferenz die für die Beschleunigung benötigte Wegstrecke bestimmen und der Beschleunigungsvorgang rechtzeitig einleiten. Dieselben Begrenzungen ermöglichen auch die Algorithmen von Lai et al. [117], die die Prädiktion durch das Vorausberechnen der kinematischen Größen realisieren. Durch Bisektion steigern Beudaert et al. [118] die Effizienz der Prädiktion.

Feng et al. [119] stellen ein Verfahren vor, das es ermöglicht, neben Vorschub und Bahnfehler auch die tangentielle Bahnbeschleunigung und Achsbeschleunigungen zu limitieren. Die Prädiktion erfolgt durch das Berechnen eines Vorschublimits, das vom Ende der Bahn

startend bestimmt wird. Zur Begrenzung der Beschleunigung nutzen die Autoren das Beschleunigungspolygon von Pfeiffer und Johanni aus [84].

Zhou et al. [116] berücksichtigen die Geschwindigkeits- und Beschleunigungslimits der Aktoren mit Hilfe der inversen Kinematik. Für die Berechnung des Geschwindigkeitslimits optimieren die Autoren an jedem Interpolationspunkt den Vorschub. Eine Linearisierung der Nebenbedingungen ermöglicht die Optimierung durch lineare Programmierung.

Die direkte Interpolation ist das Standardverfahren, um echtzeitfähig eine Trajektorie zu generieren. Durch fortgeschrittenere Verfahren, die nicht nur einen KVS ermöglichen, sind damit sogar verbesserte Bearbeitungsdauern bei der Nadelwickeltechnik erreichbar. Die Umsetzung einer direkten Interpolation zeigt Abschnitt 4.4.1.

Kritische-Punkte-Heuristiken

Verfahren dieser Gruppe untersuchen die Kurven auf kritische Stellen, die sich dadurch auszeichnen, dass an diesen der maximale Vorschub zu reduzieren ist. Meist suchen die Verfahren nach hohen Krümmungen, die eine Reduktion der Geschwindigkeit bedingen. Zwischen den Bereichen mit maximalem Vorschub und dem kritischen Punkt wird die Bahngeschwindigkeit durch verschiedene Profile angepasst.

Yong und Narayanaswami [120] untersuchen die Bahn im Hinblick auf den Bahnfehler und bestimmen damit die Obergrenze für die Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsänderung begrenzen sie auf eine maximal zulässige tangentielle Beschleunigung.

Heng und Erkorkmaz [77] zeigen, basierend auf der Arbeit von Erkorkmaz und Altintas [121], ein Verfahren mit Doppel-S-förmigem Geschwindigkeitsprofil. Lee et al. [122] untersuchen einen Vorschubplaner, der Geschwindigkeitsänderungen mit einem trigonometrischen Profil verwirklicht. Beide Arbeiten berücksichtigen die tangentialen Größen.

Die Forschergruppe um Lin, Tsai und Yau [123][124] untersucht neben dem Bahnfehler aus der Interpolation auch Abweichungen durch die Dynamik der Antriebe. Geschwindigkeitsänderungen erfolgen auch hier mit einem Doppel-S-Profil.

Eine Analyse des Fourier-Spektrums der resultierenden Trajektorie nehmen Liu et al. [125] vor. Dadurch lassen sich den Autoren zufolge Eigenfrequenzen des Systems gezielt vermeiden und die Bahntreue erhöhen.

Die Beschränkungen der Antriebe berücksichtigen Sun et al. [126]. Sie definieren äquidistante Punkte auf dem Parameterintervall und werten an diesen Punkten alle Bedingungen aus. Im Anschluss verwenden die Autoren einen Glättungsalgorithmus, der einen B-Spline definiert und das Vorschubprofil verkörpert.

Kritische-Punkte-Heuristiken erlauben das Berücksichtigen beliebiger Nebenbedingungen an kritischen Stellen, die vorab zu identifizieren sind. Im Gegensatz zu einer numerischen Optimierung wird der Vorschub nur an diesen kritischen Stellen begrenzt. Damit stellen diese Verfahren eine Mischform aus numerischer Optimierung und direkter Interpolation dar.

Abhängig von der Granularität der kritischen Stellen entlang der Bahn und der auszuwertenden Nebenbedingungen sind diese Heuristiken zeiteffizient in der Berechnung. Die Umsetzung eines solchen Verfahrens für die Vorschubplanung auf einer Nadelwickelbahn zeigt Abschnitt 4.4.2.

Bis auf die direkt interpolierenden Verfahren bestimmen alle gezeigten Algorithmen einen Vorschub. Um eine Bahn mit diesem Vorschub zu durchlaufen, sind diskrete Punkte für die Steuerung zu bestimmen. Dieser Schritt heißt Trajektorieninterpolation und bestimmt das Bewegungsgesetz $u(t)$.

3.3.3 Trajektorieninterpolation

Ist ein Vorschub bestimmt, ergibt sich das Bewegungsgesetz $u(t)$ mithilfe von (3.90) und (3.91). Normalerweise lässt sich jedoch keine analytische Stammfunktion für die Berechnung von (3.91) angeben, weshalb numerische Verfahren für die Bestimmung einzusetzen sind.

Die Steuerung eines CNC-Systems ist digital und besitzt eine bestimmte Taktzeit T_s . Sie erwartet an den diskreten Zeitpunkten $t_{[i]} = i \cdot T_s$, $i \in \{0, \dots, \lceil T/T_s \rceil\}$ eine Sollwertvorgabe [127]. Die Interpolationsaufgabe besteht daher darin, beginnend vom Startwert $u_{[0]} = 0$ zum Zeitpunkt $t_{[0]} = 0$ die Parameterwerte $u_{[i]}$ mit $i > 0$ für die Zeitpunkte $t_{[i]} = iT_s$ zu finden, sodass sich die gewünschte Schrittlänge

$$\hat{l}_{[i]} = \int_{t_{[i]}}^{t_{[i+1]}} v_{\text{fr}}(t) \, dt \quad (3.106)$$

einstellt. Dieses Integral lässt sich durch den Einsatz einer Taylorreihenentwicklung [56, S. 20] am Entwicklungspunkt $t_{[i]}$ annähern [128]:

$$\begin{aligned} \hat{l}_{[i]} &\approx \int_{t_{[i]}}^{t_{[i+1]}} v_{\text{fr}}(t_{[i]}) + a_{\text{fr}}(t_{[i]})(t - t_{[i]}) + \frac{1}{2}j_{\text{fr}}(t_{[i]})(t - t_{[i]})^2 \, dt \\ &= v_{\text{fr}}(t_{[i]})T_s + \frac{1}{2}a_{\text{fr}}(t_{[i]})T_s^2 + \frac{1}{6}j_{\text{fr}}(t_{[i]})T_s^3. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Der nächste Parameterwert $u_{[i+1]}$ kann ebenfalls durch eine Taylorreihe durch vernachlässigen der Terme höherer Ordnung $\text{HOT}(t)$ aus dem aktuellen Wert $u_{[i]}$ und den Ableitungen von u an diesen Stellen prädictiert werden.

$$u_{[i+1]} = u_{[i]} + \dot{u}(t)|_{t=t_{[i]}} T_s + \ddot{u}(t)|_{t=t_{[i]}} T_s^2 + \text{HOT}(t) \quad (3.108)$$

Die Ableitung $\dot{u}(t)$ ist aus (3.90) bekannt, durch erneutes Ableiten ergibt sich

$$\ddot{u}(t) = \frac{d}{dt} \dot{u}(t) = \frac{d}{dt} \frac{v_{\text{fr}}}{\|\mathbf{s}'(u)\|}. \quad (3.109)$$

Unter Berücksichtigung, dass die parametrische Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}'(u)\|$ ebenfalls von t abhängt, ergibt sich durch Anwenden der Quotientenregel [129]

$$\frac{d}{d t} \frac{v_{\text{fr}}}{\|\mathbf{s}'(u)\|} = \frac{\dot{v}_{\text{fr}} \|\mathbf{s}'(u)\| - v_{\text{fr}} \frac{d}{d t} \|\mathbf{s}'(u)\|}{\|\mathbf{s}'(u)\|^2}. \quad (3.110)$$

In (3.110) ist die zeitliche Ableitung der parametrischen Geschwindigkeit zu berechnen, die sich mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d t} \|\mathbf{s}'(u)\| &= \frac{d}{d t} \sqrt{s_1'(u)^2 + s_2'(u)^2 + s_3'(u)^2} = \frac{2s_1'(u)s_1''(u)\dot{u} + 2s_2'(u)s_2''(u)\dot{u} + 2s_3'(u)s_3''(u)\dot{u}}{2\sqrt{s_1'(u)^2 + s_2'(u)^2 + s_3'(u)^2}} \\ &= \frac{\mathbf{s}'(u)^T \cdot \mathbf{s}''(u) \cdot \dot{u}}{\|\mathbf{s}'(u)\|} \end{aligned} \quad (3.111)$$

bestimmen lässt. Mit (3.90) und (3.111) in (3.110) folgt

$$\ddot{u}(t) = \frac{\dot{v}_{\text{fr}} \|\mathbf{s}'(u)\| - v_{\text{fr}} \frac{\mathbf{s}'(u)^T \cdot \mathbf{s}''(u) \cdot v_{\text{fr}}}{\|\mathbf{s}'(u)\|^2}}{\|\mathbf{s}'(u)\|^2} = \frac{\dot{v}_{\text{fr}} \|\mathbf{s}'(u)\|^3 - v_{\text{fr}}^2 \mathbf{s}'(u)^T \cdot \mathbf{s}''(u)}{\|\mathbf{s}'(u)\|^4}. \quad (3.112)$$

Die diskret ausgewerteten Werte $\mathbf{s}(u_{[i]})$ werden als Sollwerte an die Steuerung übergeben. Durch das Abschneiden der Terme höherer Ordnung HOT(t) in der Taylorreihe in (3.108) entsteht ein Fehler, der zu einer Vorschubabweichung führt, da sich die tatsächliche Schrittweite von der gewünschten unterscheidet [128]:

$$\epsilon_{[i]} = \frac{\hat{l}_{[i]} - l_{[i]}}{\hat{l}_{[i]}} = \frac{\hat{l}_{[i]} - \|\mathbf{s}(u_{[i+1]}) - \mathbf{s}(u_{[i]})\|}{\hat{l}_{[i]}}. \quad (3.113)$$

Bisher erfolgte die Betrachtung der Bahn als eine dreidimensionale, kartesische Größe. Für eine vollständige Definition der Bahn ist allerdings auch die Orientierung, in der vorliegenden Anwendung Nadelwickeln durch die beiden Euler-Winkel ϕ und ψ , zu berücksichtigen. Die TCP-Geschwindigkeit v_{fr} ist jedoch von der Orientierung unabhängig. Aus diesem Grund erfolgt die Trajektorieninterpolation in (3.108) ausschließlich für die kartesischen Koordinaten des TCPs. Die Werte der Euler-Winkel werden für die ermittelten, diskreten Splineparameter $u_{[i]}$ durch die Auswertung von $\mathbf{s}(u_{[i]})$ mit berechnet und an die Steuerung als Sollwerte übergeben. Zu beachten ist, dass eine Änderung der Orientierung zwar keine kartesische Geschwindigkeitsänderung hervorruft, sich aber auf die Bewegung der einzelnen Achsen auswirkt und daher bei Verfahren berücksichtigt werden muss, die die Begrenzung der einzelnen Achsen als Nebenbedingung besitzen.

3.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel umfasst die notwendigen mathematischen Grundlagen zu den Themenbereichen Robotik und Trajektorienplanung. Beginnend mit der Definition von Positionen und Orientierungen im Raum und der Transformation dieser Eigenschaften zwischen zwei KOS, wird die Beschreibung einer Kinematik nach der DH-Konvention vorgestellt, die sich als Aneinanderreihung homogener Transformationen zeigt und aus der sich die VWK bestimmen lässt. Durch eine analytische Inversion der VWK ergibt sich die inverse Kinematik. Zusammen erlauben diese beiden Modelle eine Transformation zwischen Arbeits- und Gelenkraum der Kinematik. Die zeitliche Ableitung der VWK ermöglicht zudem die Transformation zwischen Achs- und TCP-Geschwindigkeiten.

Den zweiten Teil dieses Kapitels bildet die Beschreibung von Bewegungen. Neben Polynomen sind dazu vor allem Splines von großer Relevanz. Daher erfolgt zunächst die theoretische Herleitung der B-Spline-Basisfunktionen, die die Basis für den Splineraum mit minimalen Trägern bilden und damit durch eine Linearkombination jeden anderen Spline darstellen können. Zudem werden NURBS vorgestellt, die rationale Variante eines B-Splines. Wie sich zeigt, besitzen Splines gegenüber Polynomen Vorteile bei der Interpolation vieler Punkte und bei höheren Dimensionen, da sie sich als numerisch effizient erweisen.

Neben der Bahn, die die geometrische Beschreibung des gewünschten Positions- und Orientierungsverlaufs darstellt, ist zum Bestimmen einer Trajektorie die Definition eines Bewegungsgesetzes notwendig, das sich aus dem Vorschub ermitteln lässt. Neben einigen einfachen, analytisch berechenbaren Vorschubprofilen erfolgt daher die Betrachtung der derzeit in Industrie und Forschung angewandten Verfahren. Ist ein Vorschub bestimmt, ist noch die Diskretisierung der Trajektorie durch eine Interpolation notwendig.

4 Automatisierte Trajektorienplanung für Nadelwickler

Der Einsatz rechnerunterstützter Systeme erlaubt es, sowohl ein Produkt als auch dessen Herstellung mit ingenieurwissenschaftlichen Methoden zu entwickeln. Der Produktentstehungsprozess umfasst unter anderem die Phasen Produktentwicklung und Produktherstellung [130, S. Y18]. Erfolgt der komplette Produktentstehungsprozess durchgängig digital, kann man laut Spur und Krause [131, S. 3] von einem virtuellen Produkt sprechen. Der Umfang, in dem sich der Produktentstehungsprozess digitalisieren lässt, hängt maßgeblich von der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Informationstechnik ab [131, S. 3].

Die diversen digitalen Prozessketten im Produktentstehungsprozess werden unter dem Begriff Computer-Aided x (CAx) zusammengefasst. Das x in der Abkürzung stellt einen Platzhalter für den spezifischen Prozess dar. Eine zentrale Stellung nehmen dabei CAD-Systeme ein. In diesen Systemen werden digitale Modelle des Produktes erzeugt, die die Basis für die weiteren Prozessketten bilden [130, S. Y25].

Für die Herstellung des Produktes ist besonders der Prozess Computer-Aided Manufacturing (CAM) bzw. die Prozesskette CAD/CAM von Interesse. Als CAM beschreibt Groover generell den Einsatz von Informationstechnologie in der Produktionsplanung und -überwachung [132, S. 764]. Die Produktionsplanung umfasst alle Umfänge, in denen ein Computer nur indirekt den Herstellungsprozess unterstützt. Hingegen steht die Produktionsüberwachung für Verfahren, die direkt die physischen Prozesse in der Fertigung kontrollieren. Ziel einer CAD/CAM-Prozesskette ist es, Informationen zur Herstellung aus dem CAD-Modell abzuleiten. Ein solches CAD/CAM Verfahren für die Produktionsplanung wird nachfolgend für die automatisierte Trajektorienplanung eines Nadelwicklers untersucht.

4.1 Rechnergestützte Verfahren im Elektromaschinenbau

Im Bereich der elektrischen Maschinen sind rechnergestützte Konstruktion, Auslegung und Design mit Hilfe von CAx-Prozessketten mittlerweile Standard [20, S. 628]. Ausgehend von einem CAD-Modell der elektrischen Maschine lassen sich elektromagnetische, thermische und mechanische FEM-Simulationen anstoßen. Das CAD-Modell findet auch in verschiedenen

Phasen der Herstellung der elektrischen Maschine Anwendung.

Bei der Fertigung von Elektroblechen für Stator- und Rotorblechpakete sind CAD/CAM-Prozessketten weit verbreitet. Auf der EuroBLECH, der internationalen Leitmesse für die blechbearbeitende Industrie, nehmen Digitalisierung und CAD/CAM zentrale Rollen ein [133]. Auch die Anwendung von Computer-Aided Quality (CAQ) erfolgt für eine digitale Qualitätskontrolle im Bereich der Blechpaketherstellung [134].

Die Fertigung der magnetisch nicht-aktiven Bauteile, wie Gehäuse, Welle, Getriebe oder ähnlichem sind klassische Anwendungen im Bereich der Gieß- oder Zerspanungstechnik. In diesen Fertigungstechnologien kommt eine Vielzahl rechnergestützter Verfahren zum Einsatz.

Hingegen ist der Einsatz einer CAD/CAM-Prozesskette im Bereich des Wickelns, vor allem von verteilten Wicklungen, nach wie vor Gegenstand der Forschung. Der aktuelle Stand wird im Folgenden vorgestellt.

4.1.1 Rechnergestützte Herstellung von Wicklungen

Frühe Bestrebungen zur rechnerunterstützten Planung von Wickelvorgängen im Bereich des Linearwickelns stammen von Feldmann und Wolf [7][8][9, S. 133–153]. Basis für diesen Ansatz bilden zu bewickelnde Spulengrundkörper, die entweder vorgegeben oder parametergesteuert generierbar sind. In einem nächsten Schritt erfolgt das Erzeugen des Drahtverlaufs auf diesem Spulenkörper in Abhängigkeit von Drahtparametern wie dessen Maße. Der beim Linearwickeln deutlich komplexere Drahtverlauf für den Anwickelvorgang, das heißt das Verlegen des Drahtes vom Anschlusspin zur Wickelkammer, erfolgt nicht-automatisiert. Feldmann und Wolf beschreiben zwei Möglichkeiten, um die Bahn für diesen Teil des Wickelprogramms zu erzeugen [8]. Eine Möglichkeit umfasst das klassische Teach-In zu interpolierender Punkte durch die Angabe derer Koordinaten. Alternativ beschreiben die Autoren eine Möglichkeit diese Punkte durch interaktives Auswählen im CAD-Programm zu generieren. Die Punktefolge verbindet das CAD-Programm anschließend zu einem Spline. Durch diese CAD-basierte Erzeugung der Splines ist ein nachträgliches Anpassen der Bahn im CAD-Programm möglich. Ein wichtiger Aspekt, der beim Linearwickeln ebenso wie beim Nadelwickeln gilt, ist der räumliche Versatz zwischen gewünschter Drahtposition und TCP, den Feldmann und Wolf ebenfalls aufgreifen. Die Autoren beschreiben eine Funktion, die eine vektorielle Verschiebung des Drahtsplines bewirkt und so die Bewegungsbahn der Drahtführerspitze generiert. Der Algorithmus stellt einen Beispielvektor zur Verfügung, erlaubt aber das Editieren durch den Anwender. Wickeltechnische Parameter finden dabei keine Berücksichtigung. Ergebnis ist ein Programm, welches das Erstellen einer wild gewickelten Spule ermöglicht.

Wenger [10, S. 107–120] nimmt diesen Ansatz auf und erweitert ihn, um den Aufbau einer orthozyklisch gewickelten Spule zu ermöglichen. Zunächst werden Referenzpunkte anhand eines manuell erzeugten Volumenmodells der Wicklung generiert. Diese Referenzpunkte dienen anschließend als Eingang für ein Simulationsprogramm, das die Bahn der Anlage definiert.

Um den Versatz zwischen Drahtposition und TCP zu beschreiben, führt Wenger ein erstes einfaches Modell ein, das statt einer vektoriellen Verschiebung die Position des Drahtführers basierend auf der Drahtzugkraft berechnet.

Um den aufwändigen Aufbau des Volumenmodells der Wicklung im CAD zu vereinfachen, präsentiert Dobroschke [11, S. 149–160] einen Algorithmus, der ein automatisches Erzeugen der Wicklung basierend auf der Grundgeometrie des Wickelkörpers ermöglicht, womit er den Einsatz der CAD/CAM-Kette von Wolf und Wenger weiter vereinfacht. In einem weiteren Schritt erfolgt der Aufbau einer kinematischen Simulation eines komplexeren Wickelroboters basierend auf einer Parallelkinematik, um ein kollisionsfreies Bewickeln der Spulenkörper zu ermöglichen [11, S. 160–165].

Der rechnerunterstützte Entwurf konzentrierter Wicklungen ist Stand der Technik. Hersteller CNC-basierter Nadelwickelmaschinen bieten Programmieroberflächen an, die durch Eingabe von Parametern ein automatisches Erzeugen des Wickelprogramms ermöglichen [12][13]. Die Eingabe der Parameter obliegt jedoch dem Programmierer, sodass die Qualität der resultierenden Wicklung erheblich von der Expertise des Anwenders abhängt.

Basierend auf virtuellen Kurvenscheiben präsentieren Mahr et al. [14] einen Ansatz, der durch die Vorgabe von Stator-Parametern ein automatisches Erzeugen der Kurvenscheiben für eine verteilte Wicklung ermöglicht [14]. Berücksichtigung finden einige grundlegende Parameter wie Statorlänge oder Windungszahl. Eine weitere Flexibilisierung durch immer mehr Parameter führt zu einem großen Zuwachs an Komplexität in der Erstellung der Kurvenscheiben. Daher untersuchen die Autoren ebenfalls den Einsatz einer CAD/CAM-Toolkette für eine modular aufgebaute Wickelmaschine, die neben dem Nadelwickeln auch Flyer- oder Linearwickeln beherrscht. Zur Anlagensteuerung erfolgt die Beschreibung der Kinematik mittels Simulation der Anlage basierend auf einem CAD-Modell [15]. Ziel ist der Aufbau von Formspulen auf einem entsprechend geformten Wickelkörper. Im Simulationsprogramm wird dazu das Volumenmodell der Formspule referenziert. Aufgrund des gewählten Programmieransatzes ist Mahr et al. zufolge jedoch nur eine lineare Bahninterpolation möglich, bei der an den Übergängen gestoppt wird [15]. Ergebnis der Simulation ist G-Code, den ein Postprozessor für die CNC-Steuerung der Anlage übersetzt. Ein Nachweis der Konzepttauglichkeit für diesen Ansatz erfolgt anhand einer Formspule. Ein Einsatz für eine verteilte Wicklung sollte ebenfalls möglich sein, wenn ein entsprechendes Volumenmodell der Spulen vorliegt.

Hofmann et al. [33] erwähnen ein Verfahren, um aus Stator- und Wickelwerkzeugparametern die Bahn einer Nadelwickelanlage abzuleiten. Ziel ist es, diese Bahn in einem Simulationsmodell zu verwenden, mit dem der Drahtzug berechnet werden kann, um einen Regelungsalgorithmus zu entwickeln, der ein drahtschonenderes Wickeln ermöglicht. Detailliertere Informationen sind allerdings nicht angegeben und es erfolgt keine Verifizierung.

Nicht nur bei der Herstellung von Kupferwicklungen sind computergestützte Wickelverfahren von Interesse. Ein weiteres Anwendungsgebiet von CAM in der Wickeltechnik ist das Faserwickeln. Diese Technologie wird eingesetzt, um Hohlkörper aus kohlenstofffaser-

verstärktem Kunststoff (CFK) herzustellen. Verstärkungsfasern werden in einem Harzbad getränkt und über einen Kern gewickelt. Aus Festigkeitsgründen müssen zum einen die Fasern möglichst exakt in der späteren Belastungsrichtung liegen und zum anderen den Kern gleichmäßig bedecken [135]. Moderne Faserwickelmaschinen nutzen CNC-Achsen und erlauben das freie Programmieren einer Bahn [136, S. 8 f.]. Daher ist der logische Schritt, auch hier rechnergestützte Verfahren einzusetzen, um Wickelprogramme möglichst effizient zu erstellen [137, S. 41]. Faserwickelmaschinen besitzen teilweise mehr als sechs Achsen und sind in ihrer Bauweise mit Nadelwickelmaschinen vergleichbar [137, S. 43]. Ein gutes Programm ist dabei auf das Verhalten der Faser auf dem Kern anstelle der Bewegungen der Maschine fokussiert. Von zentraler Bedeutung ist es dabei, dass die Faser auf dem Kern nicht abrutscht, also nach dem Wickeln an dem ihr angedachten Platz zum Liegen kommt. Dies ist sichergestellt, wenn die Faser dem geodätischen Pfad, also der kürzestmöglichen Verbindung auf einer gekrümmten Oberfläche, folgt [137, S. 37 f.].

Das Erstellen eines Wickelprogramms erfolgt in drei Schritten. Im ersten Schritt bestimmt ein Algorithmus den Verlauf der Fasern auf dem Kern [137, S. 43]. Unter den Randbedingungen, dass der Kern mit möglichst konstanter Schichtdicke bedeckt sein soll, die Fasern zudem in Richtung der Belastung liegen sollen und nicht abrutschen dürfen, kann diese Aufgabe sehr umfangreich sein. Moderne Algorithmen berücksichtigen den Reibungskoeffizienten zwischen den Fasern und dem Kern bzw. zwischen den Fasern untereinander, was einen gewissen Freiheitsgrad in der Positionierung der Fasern bringt. Solange die Querkräfte kleiner als die Reibkraft sind, ist eine lagegenaue Positionierung der Fasern sichergestellt [138].

Im zweiten Schritt erfolgt die Berechnung der Position des Payout-Eyes in Relation zum Kern. Das Payout-Eye stellt den Austrittspunkt der Faser aus der Führung dar. Da die Fasern sehr dünn sind, bilden sie unter Zug eine Tangente an den Kern. Priestley [137, S. 43] beschreibt zwei Methoden, die verwendet werden, um die Position des Payout-Eyes zu bestimmen. Zum einen existieren Ansätze, die den TCP so berechnen, dass stets eine konstante freie Faserlänge zwischen Kern und Düse besteht. Bei besonders kleinen Winkeln zwischen Kernoberfläche und Tangente besteht jedoch nur ein geringer Abstand zwischen Payout-Eye und Kern, sodass Kollisionen entstehen können. Bei besonders großen Winkeln muss die Wickelanlage unnötig ausschweifende Bewegungen durchführen. Alternativ existieren Verfahren, in denen die Bahn stets auf einer einhüllenden Oberfläche um den Kern liegt. Der TCP ist damit durch den Schnittpunkt dieser Fläche mit der Tangente gegeben [137, S. 43].

Die letzte Phase umfasst einen Standard-Vorgang im Bereich der CNC-Technik. In einem Postprozessor muss die im Arbeitsraum definierte Bahn in Antriebssignale umgewandelt werden [137, S. 43].

Das Erzeugen von achsensymmetrischen Bauteilen ist deutlich leichter, da ein gleichmäßiges Verteilen der Fasern für konstante Schichtdicken besser möglich ist. Für nicht-achsensymmetrische Bauteile sind die möglichen Bauteilkonfigurationen deutlich begrenzter, teilweise ist das Produzieren solcher CFK-Teile unmöglich [137, S. 44].

4.1.2 Rahmenbedingungen für eine durchgängig virtuelle Produktentstehung elektrischer Maschinen

Vor allem im Bereich der Wickeltechnik für elektrische Maschinen ist der Einsatz von CAM-Methoden kaum oder nicht vorhanden. Bei konzentrierten Wicklungen verwenden Maschinenhersteller zwar bereits rechnergestützte Verfahren, allerdings müssen nach wie vor Programmierer direkt an der Anlage die notwendigen Parameter für die Erstellung der Wickelbahn bestimmen. Die entstehende Wickelqualität hängt also immer von der Expertise des Anwenders ab.

Für verteilte Wicklungen existieren zwei Ansätze von Mahr. Der erste, bei dem parameterbasiert Kurvenscheiben erzeugt werden, zeigt sich wenig flexibel und erfordert großen Programmieraufwand mit jedem weiteren Maschinenparameter, der betrachtet werden soll [14]. Der zweite Ansatz referenziert auf ein CAD-Volumenmodell der Wicklung und wurde bisher für das Erzeugen von Formspulen verifiziert. Durch die lineare Bahninterpolation besitzt diese Methode große Nachteile in Sachen Dynamik und Drahtbeanspruchung [15].

Wie Mahr et al. [14] und Hofmann et al. [33] bereits feststellen, ist die resultierende Bahn erheblich von den Dimensionen des Stators und von den Wickelwerkzeugen abhängig. Bisherige Ansätze referenzieren stets auf ein exaktes Volumenmodell der Wicklung, das normalerweise nicht in der benötigten Detailstufe zur Verfügung steht. Die Wicklung ergibt sich neben der Geometrie des Bauteils auch durch elektromagnetische Randbedingungen. In der elektromagnetischen Auslegung einer elektrischen Maschine kann über die Vorgabe einer gerichteten Stromdichte und des Wicklungswiderstands eine ausreichend genaue FEM-Berechnung durchgeführt werden [20, S. 627–639]. Der Wicklungswiderstand ist über den Kupferfüllgrad und die mittlere Leiterlänge anhand eines einfachen CAD-Modells bestimmbar. Aus einer solchen FEM-Berechnung leiten sich wickeltechnische Parameter wie die serielle Windungszahl z_s ab. Im Falle gewöhnlicher Maschinen mit Einschichtwicklung ist daher für die simulative Betrachtung keine detaillierte Volumenmodellierung der Wicklung im CAD notwendig. Demnach ist bei der Verwendung der beschriebenen CAD/CAM-Ketten ein Volumenmodell der Einzelspulen gesondert zu erzeugen. Da dieses Modell keine weitere Verwendung findet, wäre ein Algorithmus wünschenswert, der ohne Referenz auf ein Wicklungsmodell auskommt.

Ein CAD/CAM-Verfahren soll möglichst flexibel einsetzbar sein. Flexibilität bedeutet in diesem Zusammenhang zum einen die Fähigkeit, Wickelprogramme für verschiedene Produkte erzeugen zu können, die sich durch Wickelschemata, Dimensionen oder Wicklungstypen unterscheiden. Zum anderen soll aber auch die verwendete Nadelwickelkinematik austauschbar sein.

Keine der Forschergruppen oder Maschinenhersteller berücksichtigt bisher einen der größten Vorteile der Nadelwickeltechnik in ihren Algorithmen: die Möglichkeit einer definierten Drahtablage. Wie Versuche von Stenzel et al. zeigen, erlaubt die Nadelwickeltechnik den

Aufbau von Wicklungen mit optimiertem EFF [139]. Ein maximierter EFF ist eines der wesentlichen Ziele der Wickeltechnik, da sich dadurch Leistungsdichte und Effizienz der Maschine erhöhen lassen [17, S. 140 f.]. Ein rechnergestütztes Verfahren soll daher den Füllgrad der entstehenden Wicklung berücksichtigen und optimieren.

Im Grunde ergeben sich also drei Anforderungen, die eine automatisierte Trajektorienplanung zu erfüllen hat. Der Algorithmus sollte zwar auf das CAD-Modell der elektrischen Maschine referenzieren, da dieses die Bahn wesentlich bestimmt, aber kein Vorab-Volumenmodell der Wicklung benötigen. Dabei ist der EFF zu maximieren. Letztlich ist ein möglichst flexibler Einsatz wünschenswert.

4.2 Füllfaktoroptimierung und Stützpunktberechnung

Bevor eine Bahn geplant werden kann, die einen höheren EFF als eine Wildwicklung ermöglicht, ist zu definieren, wie ein mögliches Wickelbild aussehen kann. Der Terminus Wickelbild bezeichnet in diesem Fall die Positionierung der einzelnen Leiter in der Nut. Da sich der Nutquerschnitt in axialer Richtung nicht ändert, ist das optimale Wickelbild über die komplette Länge des Blechpaketes gleich. Somit reicht die Betrachtung eines zweidimensionalen Schnitts für die Berechnung aus. Bei der Suche nach einem optimalen Wickelbild ist zu berücksichtigen, dass dieses auch mit einer Nadelwickelmaschine umsetzbar sein muss. Die untersuchten Algorithmen wurden in [140] und in Teilen von [141] kurz dargestellt.

Stenzel et al. [139] bauen in ihrem Versuch eine orthozyklische Wicklung auf, die in der Theorie den höchstmöglichen Füllgrad für Runddrahtwicklungen erlaubt [17, S. 146 f.]. Dabei verwenden sie allerdings eine parallelfankige Nut, die in dieser Form in einer Radialflussmaschine üblicherweise nicht auftritt. Der Platz, den Zähne und Nuten haben, verringert sich durch die kreisrunde Anordnung bei einem sich verjüngendem Radius. Eine gleichbleibende Nutbreite würde daher eine Reduktion des Zahnquerschnitts zur Folge haben, was den magnetischen Widerstand erhöht und zu einer deutlichen Reduktion in der magnetischen Auslastung im Statorjoch durch Sättigung in den Zähnen führt. Aus diesem Grund sind Nuten in einer realen Runddraht-Anwendung stets konisch geformt, was bei der Suche nach einem optimalen Wickelbild berücksichtigt werden muss.

Ein rechnergestütztes Verfahren zum Berechnen von Füllfaktoren in elektrischen Maschinen ist in [142, S. 180–184] beschrieben. Dieses Verfahren beruht darauf, aus einer gegebenen Zahl an seriellen und parallelen Windungen, einer oberen Schranke für den EFF und dem Nutquerschnitt den genormten Drahtdurchmesser zu finden, der den tatsächlichen EFF maximiert. Ein Wickelbild lässt sich mit diesem Algorithmus jedoch nicht bestimmen.

Ein Verfahren zum Bestimmen des EFF einer orthozyklischen Wicklung in trapezförmigen Nuten stellen Bickel et al. vor [38]. Die Anwendung dieses Algorithmus auf technisch realistischere Nuten erfolgt in Abschnitt 4.2.1. Ein alternativer Algorithmus, der ebenfalls

orthozyklische Wickelbilder realisiert, ist in der Arbeit von Caruso et al. [143] gezeigt.

Einen weiteren, heuristischen Ansatz für die Abschätzung der Füllgrade in einer elektrischen Maschine präsentiert Raabe in [144]. Dieser Algorithmus soll eine Hilfestellung bei der Auslegung der elektrischen Maschine geben, wenn diese mit einer Wildwicklung aufgebaut wird. Die Anwendung dieses Algorithmus für die Bestimmung eines Wickelbildes ist in Abschnitt 4.2.2 beschrieben.

Die Füllfaktoroptimierung stellt ein klassisches Packungsproblem im zweidimensionalen Raum dar, wie es häufig in der Fertigungstechnik auftritt. Eine theoretische Betrachtung sowie die Analyse vorhandener Lösungsalgorithmen erfolgt in Abschnitt 4.2.3. Dort wird auch eine Heuristik vorgestellt, mit der sich der theoretisch erreichbare Füllgrad für eine gegebene Kombination aus Nut- und Drahtdaten abschätzen lässt.

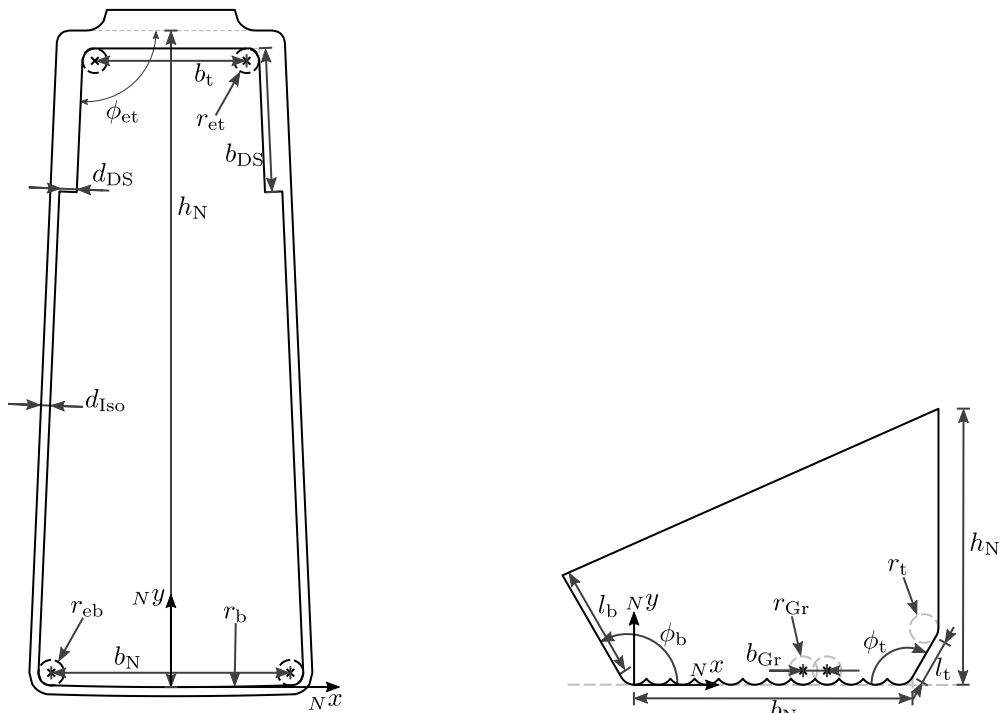
Zuletzt findet sich in Abschnitt 4.2.4 ein Algorithmus, der den Nadelwickelvorgang selbst, das heißt die sequenzielle Ablage einzelner Drähte, nachbildet. Das Verfahren versucht, die optimale Position für jeden abzulegenden Draht zu finden, wobei das bereits vorhandene Wickelbild berücksichtigt wird.

Um die Algorithmen vergleichen zu können, werden sie jeweils für eine Beispielnut eines Stators und Rotors angewendet und sowohl die Füllfaktoren als auch die Produzierbarkeit bewertet.

Da in der Großserienfertigung von Blechpaketen die einzelnen Elektrobleche aus Kostengründen ausgestanzt werden [29, S. 245 f.], müssen die Ecken im Blechschnitt einen Mindestradius besitzen, um herstellbar zu sein. Beim Einbringen einer Nutgrundisolation erweisen sich runde Nuten ebenfalls als vorteilhaft, weshalb Nutquerschnitte von verschiedenen Traktionsantrieben stets abgerundete Ecken besitzen [27, S. 32].

Für die Optimierung wird die Nut als Polygonzug nachgebildet, das heißt als Folge von $N_r + 1$ Punkten ${}_N \mathbf{r}_{\text{Nut},i} \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{0, \dots, N_r\}$ im Nut-KOS N , die zusammen die Polygonzugmatrix ${}_N \mathbf{R}_{\text{Nut}} = [{}_N \mathbf{r}_{\text{Nut},0}, \dots, {}_N \mathbf{r}_{\text{Nut},N_r}]$ ergeben. Analog dazu bezeichnen die Polygonpunkte ${}_N \mathbf{r}_{\text{Nut,Iso}}$ bzw. die Polygonzugmatrix ${}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}$ die Nut, die sich unter Berücksichtigung der Nutgrundisolation und des Deckschiebers ergibt. Die einzelnen Kanten zwischen den Polygonpunkten bestehen aus Geradenstücken, sodass die Dichte der Punkte die Qualität der Nachbildung beeinflusst. Zur Berechnung dieser Nut lassen sich parameterbasierte Funktionen verwenden [140]. Ein Vorschlag für zwei Parametersätze, die sich aus dem CAD-Modell der Nut bestimmen lassen, sind in Abbildung 4.1a für eine Statornut und in Abbildung 4.1b für eine Rotornut angegeben.

Die Statoranwendung besitzt eine verteilte Wicklung, während im Rotor eine konzentrierte Wicklung zum Einsatz kommt. Dadurch lässt sich der Algorithmus für beide Wicklungstypen abprüfen. In Kombination würden diese Bauteile eine FSM ergeben. Die zugehörigen Parametersätze sind in Tabelle 4.1 bzw. Tabelle 4.2 gegeben. Die Nutskizzen aus Abbildung 4.1 sind bereits entsprechend der Werte der beiden Beispielnuten parametrisiert. Zu beachten ist dabei, dass das Rotordesign im Gegensatz zu einer Statornut exakt auf eine einzelne Draht-



(a) Parametersatz für eine generische Statornut (b) Parametersatz für eine generische Rotorrot

Abbildung 4.1: Parametersätze zur Erzeugung der Nutpolygone

geometrie ausgelegt wird. Der entscheidende Parameter ist dabei b_{Gr} , der wesentlich vom maximalen Außenradius des gewünschten Drahtes beeinflusst wird. Der Vergleich des Wertes $b_{Gr} = 1,217 \text{ mm}$ aus Tabelle 4.2 und [18, S. 8] ergibt, dass die Rotorrot für einen Draht mit Kupferneindurchmesser 1,12 mm und Isolationsgrad Zwei ausgelegt ist. Der Isolationsgrad gibt die Schichtdicke der Lackisolation an und ist ebenfalls in [18, S. 8] definiert.

4.2.1 Orthozyklisches Wickelbild bei technisch realen Nuten

Untersuchungen zu orthozyklischen Wicklungsbildern in konischen Nuten stellen Bickel et al. an [38]. Sie bestimmen mit ihrem Algorithmus sowohl den MFF als auch den EFF bei variierendem Drahtdurchmesser. Sie können zeigen, dass zwar mit kleineren Drahtdurchmessern der MFF durch eine Verringerung der Zwickelräume steigt, sich aber kein Maximum beim EFF einstellt. Dies begründet sich aus dem immer ungünstiger werdenden Verhältnis von Kupfer- und Isolationsquerschnitt bei Verringerung des Drahtdurchmessers. Die verwendete Nut ist jedoch stark vereinfacht. Sie ist trapezförmig und besitzt keine abgerundeten Ecken oder einen runden Nutgrund. Zudem ist kein Deckschieber berücksichtigt. Der orthozyklische Lagenaufbau startet von einem initialen Draht mit Drahtradius. Bei einer Nut mit rundem Nutgrund lässt sich diese Position im Vergleich zur vereinfachten Nut von Bickel et al. jedoch nicht direkt angeben. Aus diesem Grund wird zur Bestimmung der Startposition

Tabelle 4.1: Paramtersatz der Beispielstatornut

Stator		
Parameter	Wert	Beschreibung
b_N	5,857 mm	Breite des Nutgrunds
b_t	3,683 mm	Breite der Nutöffnung
r_{eb}	0,28 mm	Radius der Ecke am Nutgrund
r_b	95,48 mm	Radius des Nutgrunds
d_{Iso}	0,22 mm	Dicke der Nutgrundisolation
d_{DS}	0,42 mm	Dicke des Deckschiebers
b_{DS}	3,683 mm	Überlapp des Deckschiebers
r_{et}	0,3 mm	Radius der Ecke am Zahnkopf
h_N	16,129 mm	Nuthöhe
ϕ_{et}	92,5°	Winkel der Nut

Tabelle 4.2: Paramtersatz der Beispielrotornut

Rotor		
Parameter	Wert	Beschreibung
n_{Gr}	12	Anzahl der Rillen im Nutgrund
r_{Gr}	0,65 mm	Radius der Rillen
r_t	0,65 mm	Radius am Polschuh
b_{Gr}	1,217 mm	Breite der Rillen
ϕ_t	120°	Winkel der Phase am Außenradius
ϕ_b	120°	Winkel der Phase am Innenradius
b_N	13,738 mm	Breite des Nutgrundes
l_b	5,943 mm	Breite der Flanke am Innenradius
l_t	2,434 mm	Breite der Flanke am Außenradius
h_N	14,684 mm	Höhe des Polschuhs

in dieser Anwendung ein Optimierungsalgorithmus eingesetzt, der die Position des ersten Drahtes ${}_N\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^2$ im Nut-KOS N mit Durchmesser $2r_D$ findet. Das Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \min_{{}_N\mathbf{r}_1} \quad & \|{}_N\mathbf{f} - {}_N\mathbf{r}_1\| \\ \text{s.t.} \quad & \delta({}_N\mathbf{r}_1, {}_N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Delta-Funktion $\delta(\cdot, \cdot)$ berechnet den Abstand zwischen den beiden Argumenten der Funktion mit der L_2 -Norm. In Bezug auf das Nutpolygon bestimmt sich der Abstand aus der minimalen Distanz zwischen Punkt und Polygon. Minimiert wird eine potentielle Energie, die der Draht an Position ${}_N\mathbf{r}_1$ durch die virtuelle Kraft ${}_N\mathbf{f}$ besitzt. Durch eine geeignete

Vorgabe dieser Kraft findet der Optimierer die Startposition für den Algorithmus.

Bickel et al. beschreiben in ihrer Arbeit zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus ausgeführt werden kann. Der Lagenaufbau erfolgt entweder am Nutgrund oder an der Nutflanke. Durch den symmetrischen Aufbau der Nut ist eine der beiden Flanken beliebig auswählbar. Für den Lagenaufbau ist ein Richtungsvektor \mathbf{n}_{RV} zu bestimmen, der die Ablagerichtung der einzelnen Lagen steuert. Dieser lautet

$${}_N\mathbf{n}_{RV} = \mathbf{R}_{2D}(\alpha) {}_N\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

mit dem Einheitsvektor in ${}_Nx$ -Richtung ${}_N\mathbf{e}_x \in \mathbb{R}^2$, wobei der Winkel α der zweidimensionalen Drehmatrix $\mathbf{R}_{2D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ abhängig von der Wickelrichtung durch

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{Wickeln am Nutgrund} \\ -\phi_{et} & \text{Wickeln an der Nutflanke} \end{cases}$$

gegeben ist. Der Aufbau einer neuen Lage erfolgt um den Drahradius r_D analog zu Abbildung 2.2 um 60° versetzt. Sei ${}_N\mathbf{r}_i$ der i -te zu positionierende Draht, der als erstes in einer neuen Lage zu platzieren ist. Dann ist ${}_N\mathbf{r}_i$ bestimmbar mit

$${}_N\mathbf{r}_i = {}_N\mathbf{r}_1 + 2r_D \mathbf{R}_{2D}(\pi/3) {}_N\mathbf{n}_{RV}. \quad (4.3)$$

Das Vorgehen, mit dem sich eine orthozyklische Wicklung aufbauen lässt, ist in Algorithmus 4.1 gegeben. Zunächst ist die Position des ersten, abzulegenden Drahtes ${}_N\mathbf{r}_1$ zu finden. Dazu erfolgt in Zeile 3 eine Optimierung der Position basierend auf einer Schwerkraft ${}_N\mathbf{f}$, die abhängig vom gewählten Lagenaufbau ist und händisch eingestellt wird. In den folgenden Zeilen 16-19 erfolgt das Auffüllen der Reihe parallel zu ${}_N\mathbf{n}_{RV}$, das heißt entweder horizontal oder parallel zur Nutflanke. Ist die Reihe voll, versucht der Algorithmus in Zeile 7 eine neue Lage zu finden, indem er an jeden Draht ${}_N\mathbf{r}_{j_{alt}:i}$ der aktuellen Lage im 60° -Winkel, analog Abbildung 2.2, einen Draht hinzufügt. Durch den konischen Aufbau der Nut ist zu beachten, dass von jedem Draht der letzten Ebene aus das Erweitern des Wickelbildes um eine neue Ebene möglich sein kann. Das heißt, das Ergebnis von (4.3) ist nicht nur mit ${}_N\mathbf{r}_1$, sondern für jeden Draht der vorhandenen Ebene auf Einhaltung der Bedingung $\delta({}_N\mathbf{r}_{i-1}, {}_N\mathbf{R}_{Nut,Iso}) \geq r_D$ zu testen. Bei Erfolg fährt der Algorithmus wieder mit dem Auffüllen der Lage fort. Es wechseln sich das Auffüllen einer Lage und das Finden einer neuen Lage solange ab, bis die Nut gefüllt ist.

In Algorithmus 4.1 wird in Zeile 7 der Ausdruck ${}_N\mathbf{r}_{j_{alt}:j}$ verwendet, der bedeutet, dass die Operation für alle Elemente ${}_N\mathbf{r}_i$ mit $i \in \{j_{alt}, \dots, j\}$ auszuführen ist.

Abbildung 4.2 zeigt die Ergebnisse der Anwendung von Algorithmus 4.1 auf die Statornut. Als virtuelle Kraftvektoren wurden ${}_N\mathbf{f}_{NG} = [-4, -4]^T$ für die Variante Nutgrund und

Algorithmus 4.1 Aufbau einer orthozyklischen Wicklung

```

1:  $i \leftarrow j \leftarrow 1$ 
2:  ${}_N \mathbf{n}_{\text{RV}} \leftarrow \mathbf{R}_{2\text{D}}(\alpha) \cdot \mathbf{e}_x$  ▷ Ersten Draht finden
3:  ${}_N \mathbf{r}_1 \leftarrow \arg \min_{{}_N \mathbf{r}_1} \|{}_N \mathbf{f} - {}_N \mathbf{r}_1\|$ 
   s.t.  $\delta({}_N \mathbf{r}_1, {}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_{\text{D}}$ 
4: while  $\delta({}_N \mathbf{r}_j, {}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_{\text{D}}$  do
5:   if  $j \neq 1$  then
6:      $j \leftarrow i + 1$  ▷ Ersten Draht einen neuen Lage finden
7:      ${}_N \tilde{\mathbf{r}}_{1:i-j_{\text{alt}}} \leftarrow {}_N \mathbf{r}_{j_{\text{alt}}:i} + 2r_{\text{D}} \mathbf{R}_{2\text{D}}(\pi/3) {}_N \mathbf{n}_{\text{RV}}$ 
8:     if  $\text{any}(\delta({}_N \tilde{\mathbf{r}}_{1:i-j_{\text{alt}}}, {}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_{\text{D}})$  then
9:        ${}_N \mathbf{r}_j \leftarrow {}_N \mathbf{r}_{\text{idx}} + 2r_{\text{D}} \mathbf{R}_{2\text{D}}(\pi/3) {}_N \mathbf{n}_{\text{RV}}$ 
10:       $i \leftarrow i + 1$ 
11:     else
12:       return  ${}_N \mathbf{r}_{1:\text{end}}$ 
13:     end if
14:   end if
15:    $j_{\text{alt}} \leftarrow i$ 
16:   while  $\delta({}_N \mathbf{r}_i, {}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_{\text{D}}$  do ▷ Aktuelle Lage auffüllen
17:      ${}_N \mathbf{r}_i \leftarrow {}_N \mathbf{r}_{i-1} \pm 2r_{\text{D}} {}_N \mathbf{n}_{\text{RV}}$  ▷ in beide Richtungen
18:      $i \leftarrow i + 1$ 
19:   end while
20: end while

```

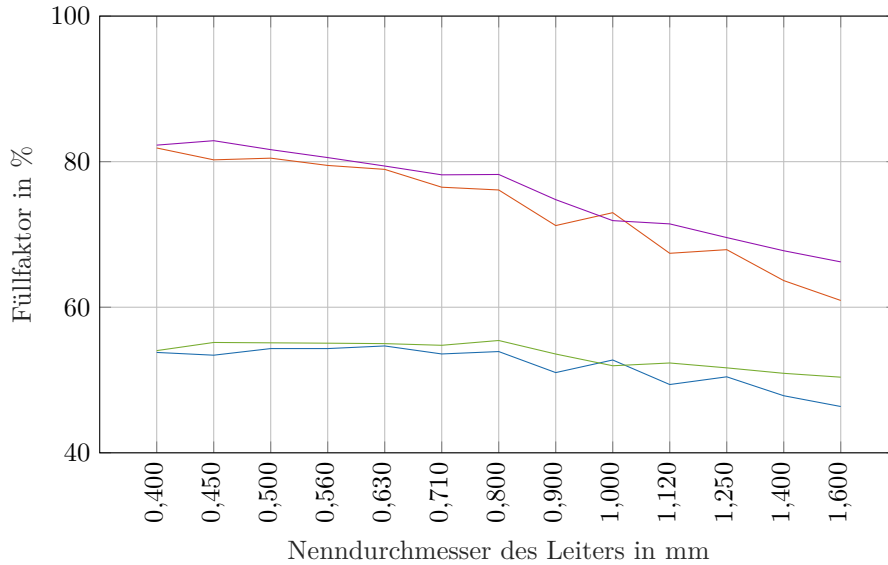
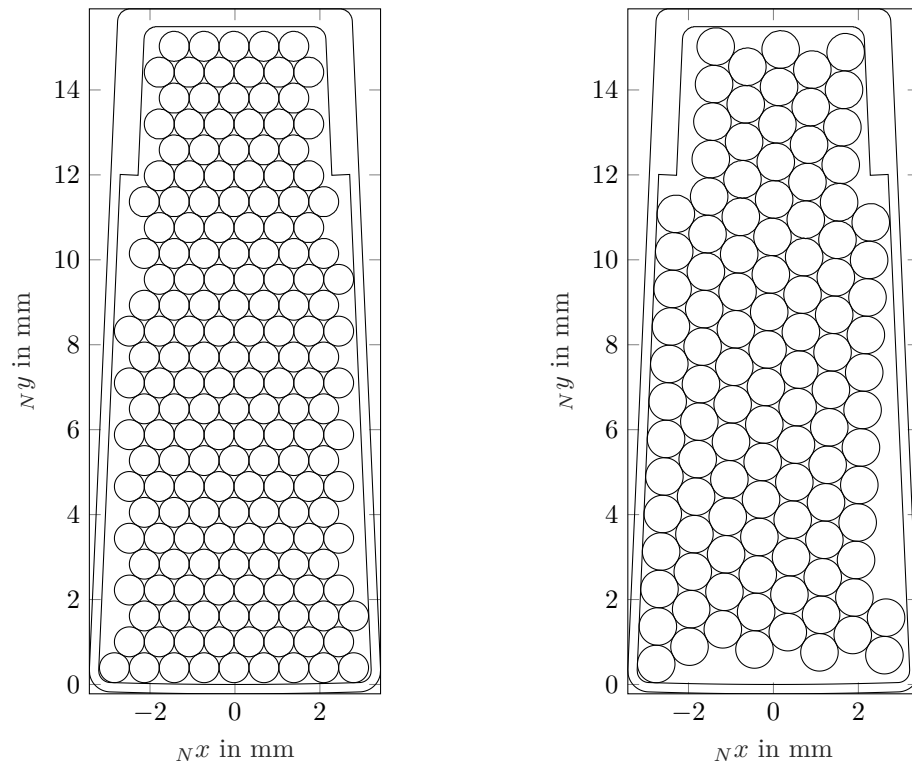


Abbildung 4.2: Füllfaktoren für orthozyklische Wickelbilder mit EFF (—) und MFF (—) der Variante Nutgrund und EFF (—) und MFF (—) der Variante Nutflanke

${}_N \mathbf{f}_{\text{NF}} = [-4, 0]^T$ für die Variante Nutflanke gewählt. Da die Auslegung der Rotornut für ein spezifisches Drahtmaß erfolgt, ist eine Auswertung des Füllfaktors für davon abweichende Drahtparameter wenig sinnvoll. Wie Bickel et al. [38] bereits zeigen konnten, ist der Drahtradius ein erheblicher Einflussfaktor für den erreichbaren EFF. Der MFF fällt mit steigenden Draht radien ab, da die Zwickelräume immer schlechter besetzt werden. Der EFF bleibt jedoch nahezu konstant. Der Unterschied zwischen den Varianten Wickeln am Nutgrund bzw. an der Nutflanke ist ähnlich zu den Ergebnissen von [38] marginal. Die verwendeten Drahtdaten entsprechen den Daten für lackisolierte Runddrähte mit Isolationsgrad Zwei aus [18, S. 8]. Hierbei sind die Nenn Durchmesser auf Werte begrenzt, die technisch und wirtschaftlich realistisch durch eine Nadelwickelanlage im Elektromaschinenbau verarbeitbar sind.

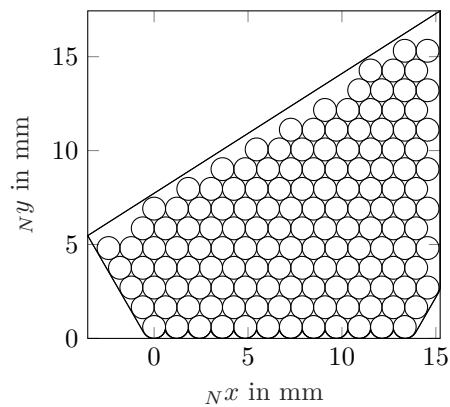
Für den jeweils besten EFF aus Abbildung 4.2 ist in Abbildung 4.3 das orthozyklische Wickelbild dargestellt. Die optimalen Nenn Durchmesser des Drahtes ergeben sich zu $2r_{\text{D,Cu}} = 0,63 \text{ mm}$ für die Variante Nutgrund sowie zu $2r_{\text{D,Cu}} = 0,80 \text{ mm}$ für die Variante Nutflanke. Ebenso ist die optimale Konfiguration für die Rotornut in Abbildung 4.3c gezeigt. Die geometrische Auslegung der Nut in Kombination mit dem Drahtdurchmesser ermöglicht ein orthozyklisches Wickelbild.

Der Einsatz der Nadelwickeltechnik bei verteilten Wicklungen bedeutet, dass stets ein Drahtzug in Richtung Nutgrund herrscht [21, S. 92–98], da die Drähte im Wickelkopf hinter den Wickelwerkzeugen zu verlegen sind, um die Nuten der anderen Phasen freizuhalten. Dies führt dazu, dass die Drahtzugkräfte im Nut-KOS N eine negative ${}_N y$ -Komponente besitzen. Diese Kraft ist bei der Analyse der Wickelbilder in Bezug auf deren Produzierbarkeit zu berücksichtigen. Aus Abbildung 4.3a ist ersichtlich, dass der Lagenaufbau spätestens in der vierten Ebene beim Draht links außen gestört wäre, da dieser nicht in der berechneten



(a) Variante Nutgrund mit $2r_{D,Cu} = 0,63$ mm

(b) Variante Nutflanke mit $2r_{D,Cu} = 0,80$ mm



(c) Rotornut mit $2r_{D,Cu} = 1,12$ mm

Abbildung 4.3: Orthozyklische Wickelbilder für Beispielnuten

Position bleiben, sondern abrutschen würde. Da die folgenden Drähte in der orthozyklischen Wicklung stets in den Nuten der vorhandenen Drähte abgelegt werden, hätte dies zur Folge, dass ab diesem Draht kein geordneter Aufbau der Wicklung mehr möglich ist [139]. Dieses Wickelbild ist also als nicht produzierbar einzustufen. Analog verhält es sich für die Variante Nutflanke aus Abbildung 4.3b, bei dem spätestens die Drähte der zweiten Ebene abrutschen.

4.2.2 Heuristische Abschätzung des Füllfaktors einer Wildwicklung

Raabe stellt in [144] einen Algorithmus vor, der bei der Auslegung einer elektrischen Maschine helfen soll. Ziel des Algorithmus ist es, eine Abschätzung der Maschinenparameter EFF und Anzahl paralleler Leiter zu geben. Als Nut verwendet Raabe eine IEC-Standard-Nut. Diese Nuten finden bei Industriemotoren Einsatz. Zunächst wird eine Initialposition fest vorgegeben. Basierend auf diesem ersten Draht wird das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{N\mathbf{r}_i} \quad & N^{r_{i,y}} & (4.4) \\ \text{s.t.} \quad & \delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{r}_j) \geq 2r_D + d_{\text{safety}}, \quad j < i \\ & \delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{R}_{\text{Nut}}) \geq r_D + d_{\text{safety}} + d_{\text{Iso}} \end{aligned}$$

gelöst, bis sich keine valide Position mehr für einen abzulegenden Draht finden lässt. Der Abstand d_{safety} erlaubt es, einen gewissen Mindestabstand zwischen den einzelnen Elementen in der Nut einzuhalten. Dieser Parameter wird so eingestellt, dass der Algorithmus einen Füllfaktor berechnet, der basierend auf Erfahrungswerten aufgebauter Maschinen samt Kombination aus Nut und Draht verifiziert werden kann. Mit diesem Parameter lassen sich dann die Eigenschaften unbekannter Motortypen abschätzen. Da das Ergebnis des Optimierers von der Positionierung des ersten Drahtes abhängt, schlägt Raabe vor, den Algorithmus für verschiedene Erstkonfigurationen durchzuführen.

Algorithmus 4.2 zeigt das Verfahren, mit dem sich Wickelbilder für Stator und Rotor basierend auf [144] erzeugen lassen, der jedoch im Vergleich zu dem in [144] beschriebenen Verfahren einige Anpassungen besitzt. Zunächst wird zur Maximierung des EFF der Parameter $d_{\text{safety}} = 0$ gesetzt. Weiterhin erfolgt in (4.4) die Berücksichtigung der Nutgrundisolation durch den zusätzlichen Abstand d_{Iso} in den Nebenbedingungen.

Der Parameter `iShift` erlaubt die Berechnung des Wickelbildes mit unterschiedlichen Startkonfigurationen. Der Algorithmus wird in dieser Anwendung viermal mit der in Zeile 3 variierten Startposition des ersten Drahtes $N\mathbf{r}_1$ durchlaufen. Basierend auf der Startposition versucht der Algorithmus nun solange Drähte in der Nut abzulegen, bis keine valide Position mehr existiert. Dabei ist in Zeile 4 auf die Nut aus Abbildung 4.1a, die neben der Nutgrundisolation ebenfalls einen Deckschieber besitzt, zu referenzieren, sodass in der δ -Funktion die isolierte Nut $N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}$ Anwendung finden muss. In Zeile 6 erfolgt die Optimierung aus

(4.4). Da die Suche nach dem Draht i aufgrund der ersten Nebenbedingung nur auf einem Kreis um den $i - 1$ -ten Draht mit dem Radius $2r_D + d_{\text{safety}}$ durchgeführt wird, kann es zu einem frühzeitigem Abbruch des Algorithmus durch die Verletzung der Bedingung in Zeile 4 kommen, obwohl noch valide Positionen existieren. Um diesen Abbruch zu vermeiden, lässt sich der beinahe geordnete Lagenaufbau nutzen, den dieser Algorithmus produziert und der in Abbildung 4.5 gezeigt ist. Findet der Algorithmus keine valide Position mehr, werden zunächst in Zeile 8 alle Drähte der obersten Ebene durch einen Vergleich ihrer Ny -Koordinaten bestimmt. Im Anschluss überprüft der Algorithmus in Zeile 10 das Ergebnis der Optimierung (4.4) aus Zeile 9 für jede dieser Positionen auf das Erfüllen der Nebenbedingungen. Bei Erfolg kann der Algorithmus die Optimierung am erfolgreichen Draht fortsetzen und springt zurück zu Zeile 4, bei Misserfolg existiert keine valide Position mehr und das finale Wickelbild für den Startparameter $i\text{Shift}$ ist bestimmt. Das Beste, das heißt das Wickelbild n mit dem höchsten Füllfaktor, wird als Ergebnis ausgegeben.

Algorithmus 4.2 Erzeugung eines Wickelbildes basierend auf [144]

```

1: for  $i\text{Shift} \leftarrow 1 : 4$  do
2:    $i \leftarrow 1$ 
3:    $N\mathbf{r}_1 \leftarrow N\mathbf{r}_{\text{init}} + (i\text{Shift} - 1)/4 \cdot r_D \cdot N\mathbf{e}_x$ 
4:   while  $\delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D$  do
5:      $i \leftarrow i + 1$ 
6:      $N\mathbf{r}_i \leftarrow \arg \min_{N\mathbf{r}_{i-1,y}} N\mathbf{r}_{i-1}$ 
       s.t.  $\delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D$  &  $\delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{r}_{i-1}) \geq 2r_D$ 
7:   end while
8:   for all  $\text{idx}$  mit  $N\mathbf{r}_{\text{idx}}$  in oberster Ebene do
9:      $N\tilde{\mathbf{r}} \leftarrow \arg \min_{N\tilde{\mathbf{r}}_y} N\tilde{\mathbf{r}}$ 
       s.t.  $\delta(N\tilde{\mathbf{r}}, N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D$  &  $\delta(N\tilde{\mathbf{r}}, N\mathbf{r}_{\text{idx}}) \geq 2r_D$ 
10:    if  $\delta(N\tilde{\mathbf{r}}, N\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D$  &  $\delta(N\tilde{\mathbf{r}}, N\mathbf{r}_{\text{idx}}) \geq 2r_D$  then
11:       $N\mathbf{r}_i \leftarrow N\tilde{\mathbf{r}}$ 
12:      jump Zeile 4
13:    end if
14:  end for
15:   $\mathbf{R}_{i\text{Shift}} \leftarrow N\mathbf{r}_{1:i-1}$ 
16:   $\mathbf{n}_{i\text{Shift}} \leftarrow i - 1$ 
17: end for
18:  $n \leftarrow \text{index}(\max(\mathbf{n}))$ 
19: return  $\mathbf{R}_n$ 

```

Die Anwendung von Algorithmus 4.2 auf die Statornut ergibt die in Abbildung 4.4 abgebildeten Füllfaktoren. Die verwendeten Drähte entsprechen wieder den Normwerten aus

[18, S. 8] mit Isolationsgrad Zwei. Wie zu erwarten ist, sinkt der MFF mit steigendem Drahradius. In den Wickelbildern zeigt sich, dass die Zwickelräume in diesem Fall erneut nur schlecht ausgenutzt werden. Bei kleinen Drahradien zeigen die Optimierungsergebnisse ein nahezu orthozyklisches Wickelbild. Entsprechend sind die Füllfaktoren auch mit denen aus Abbildung 4.2 vergleichbar.

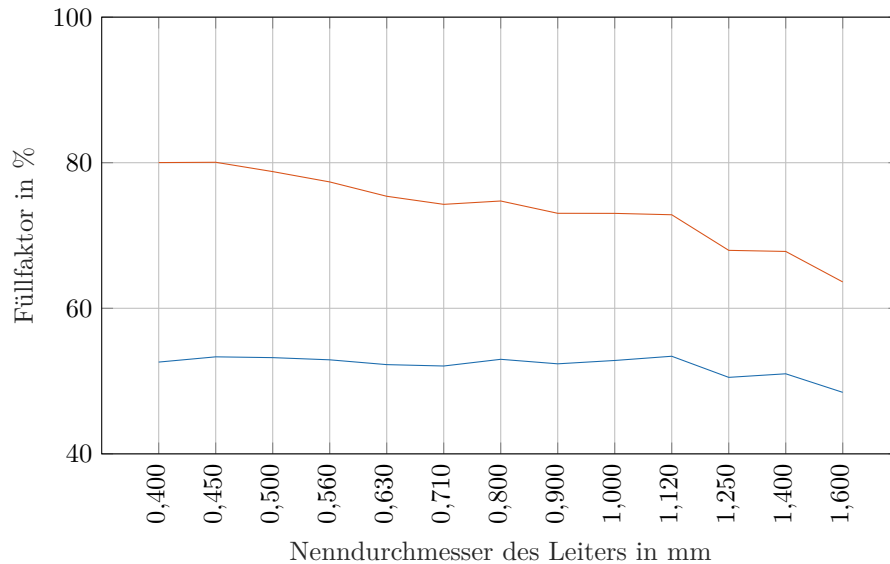


Abbildung 4.4: Füllfaktoren für Wickelbilder nach Algorithmus 4.2 mit EFF (—) und MFF (—)

Der maximale Füllgrad ergibt sich nach Abbildung 4.4 für den Kupfernenndurchmesser $2r_{D,Cu} = 1,12$ mm. Das entsprechende Wickelbild ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Die ersten vier Ebenen lassen sich unter Berücksichtigung der Drahtzugkraft als produzierbar einschätzen, da sich die außen liegenden Drähte an der Nutwand abstützen können. Weil durch die konisch geformte Nut in der fünften Ebene kein geordneter Lagenaufbau mehr möglich ist, entsteht ein unregelmäßiges Wickelbild. Ob die Drähte der sechsten Lage in der angedachten Position bleiben, ist fraglich. Wahrscheinlicher ist, dass diese Windungen in die Rillen der fünften Ebene abrutschen. Spätestens der Draht am rechten Rand der siebten Ebene wird abrutschen, sodass auch dieses Wickelbild nicht produzierbar ist.

4.2.3 Bestimmung des maximalen Füllgrades technisch realistischer Nuten

Elemente mit einer möglichst hohen Packungsdichte auf einem gegebenen Raum anzuordnen, ist ein klassisches Optimierungsproblem, das oft in der Fertigungstechnik auftritt. Ein typischer Anwendungsfall ist das Ausschneiden definierter Objekte auf einer gegebenen Fläche mit minimalem Verschnitt. Mathematisch lassen sich solche Probleme auf das allgemeine Behälter-Packungsproblem (BPP), im Englischen auch Bin Packing Problem, zurückführen. Hierbei ist die minimale Anzahl an d -dimensionalen Behältern der Größe

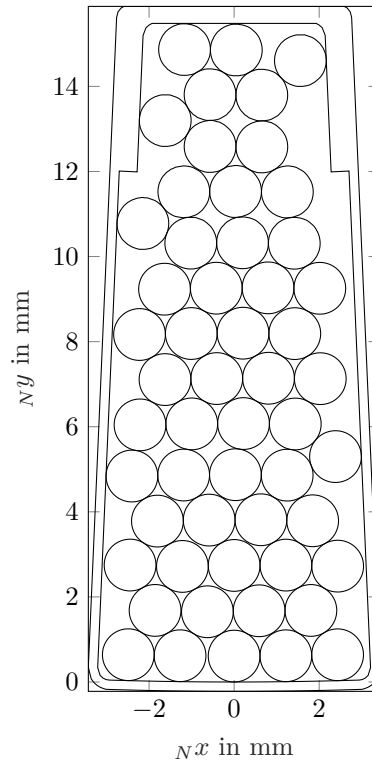


Abbildung 4.5: Wickelbild mit maximalem Füllfaktor nach Algorithmus 4.2

Eins zu finden, die insgesamt N d -dimensionale Objekte \mathbf{r}_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ mit den Größen $r_{i,j} \in [0, 1]$, $j \in \{1, \dots, d\}$ aufnehmen kann [145]. Dieses Problem ist im Allgemeinen nicht-deterministische-Polynomialzeit (NP)-schwer. NP-Schwer bedeutet, dass es (vermutlich) keinen deterministischen Algorithmus gibt, der das Problem in polynomialer Zeit löst [146][147, S. 40 f.]. Das BPP ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem. Der bekannteste Vertreter dieser Optimierungsklasse ist das Problem des Handelsreisenden, im Englischen Traveling-Salesman Problem.

Wie beschrieben, ist das Optimieren des EFFs ein zweidimensionales Packungsproblem, in dem eine Konfiguration gesucht ist, die eine möglichst hohe Packungsdichte an identischen Sphären (Drähte) in einem Polygon (Nut) ergibt. Fowler [148] zeigt, dass auch dieses Packungsproblem im Allgemeinen NP-schwer und damit nicht effizient lösbar ist. Das Sphären-Packungsproblem (SPP) tritt in verschiedenen Naturwissenschaften auf und wird von Physikern, Biologen, Materialwissenschaftlern, Ingenieuren und Chemikern untersucht [149].

Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Varianten des zweidimensionalen SPP, für die in der Literatur verschiedene Lösungsverfahren existieren. Diese lassen sich immer entweder in deterministische oder stochastische Algorithmen unterteilen [150, S. 1–4]. Deterministische Verfahren berechnen stets optimale Packungen unabhängig von den Eingangsparametern, dies aber auf Kosten von hoher Rechenzeit. Wenn zusätzliche Einschränkungen getroffen werden, wie zum Beispiel ein begrenzter Einsatzbereich des Algorithmus oder die Zulässigkeit

von suboptimalen Lösungen, lassen sich effiziente deterministische Algorithmen finden [146]. Eine weitere Möglichkeit ist das Anwenden von stochastischen Algorithmen wie dem GA oder anderen Heuristiken, bei denen zwar keine Garantie der Leistungsfähigkeit besteht, die aber im praktischen Lösen von Packungsproblemen eine große Rolle spielen [146]. Ziel dieses Abschnittes ist es, den maximal möglichen Füllfaktor für eine Kombination aus Nut und Drahtparameter zu finden und das resultierende Wickelbild auf die Herstellbarkeit hin zu untersuchen. Dieses technische System, bestehend aus Nut, Isolationen und Drähten, ist toleranzbehaftet, sodass eine exakte Lösung in der Anwendung nicht zwingend notwendig erscheint. Deshalb werden im Folgenden Heuristiken aufgearbeitet, die zwar kein exaktes Ergebnis, dafür aber erfolgreich und effizient eine Näherung für die optimale Lösung eines SPP finden.

Vorweg sei ein wichtiges Konzept beim Lösen von Packungsproblemen beschrieben: die Stauung des betrachteten Systems. Ein Objekt in einem Packungsproblem ist gestaut, wenn sich die Position dieses Objektes nicht ändern lässt, während alle anderen Objekte im System fest platziert sind [149]. Dies ist gleichbedeutend damit, dass diese Änderung entweder zu einer Verschlechterung der Packungsdichte oder zur Verletzung der Nebenbedingungen des Nicht-Überlappens führt. Besonderes Augenmerk gilt dabei losen Objekten, die einen gewissen Freiheitsgrad in ihrer Positionierung aufweisen, aber keine Verbesserung in der Packungsdichte bewirken können. Ein System lässt sich als dicht gepackt bezeichnen, wenn es gestaut ist [151].

Heuristiken zum Lösen verschiedener Sphären-Packungsprobleme

Hopkins et al. [152] stellen einen heuristischen Algorithmus vor, der eine feste Anzahl gleich großer Sphären in einem möglichst kleinen, konzentrischen Kreis um eine initiale Sphäre gleicher Größe anordnet, und dabei die Nebenbedingung erfüllt, dass mindestens eine Sphäre die initiale tangiert. Sie lösen dieses NLP mit erweiterten Lagrange-Multiplikatoren, die lokale Minima finden [153, S. 311–313]. Diese lokalen Minima hängen erheblich von der Startkonfiguration ab, weshalb die Lösung des NLP iterativ für verschiedene Startkonfigurationen erfolgt, die mit Hilfe einer speziellen Heuristik erzeugt werden. Durch ausreichend häufiges Ausführen ergibt der Algorithmus dichte Packungen, die Kandidaten für das theoretische Optimum repräsentieren.

Lubachevsky stellt in [151] einen Algorithmus vor, der eine effiziente Simulation eines Billard-Systems ermöglicht. Statt in diskreten Zeitschritten zu simulieren, erfolgt die Simulation ereignis-orientiert, indem der Zeitpunkt der nächsten Kollision für jede der sich bewegenden Kugeln berechnet wird. Bei jedem Update-Schritt, an denen stets ein Ereignis vorliegt, erfolgt ein elastischer Stoß, und es werden nur die Geschwindigkeitsvektoren und künftigen Stoßzeiten betroffener Kugeln berechnet. Indem die Kugeln einen über die Simulationszeit wachsenden Radius erhalten, lässt sich der Algorithmus zur Bestimmung

dichter Packungen im Zweidimensionalen verwenden [154]. Da die Simulationszeitinkremente kurz vor dem Stauen des Systems infinitesimal klein werden, wachsen auch die Radien nicht mehr an und die Konfiguration besitzt immer eine Rest-Lockerheit [155]. Graham, Lubachevsky et al. nutzen diesen Billard-Algorithmus, um dichte Packungen für Kreise in einem Kreis [155][156] und in einem gleichschenkligen Dreieck [157] zu bestimmen. Einige weitere Arbeiten zum Packen von Kreisen in einem Kreis finden sich in [158], [159] und [160]. Die Untersuchungen von Melissen in [161], [162] und [163] beschäftigen sich mit dichten Packungen von Sphären in gleichschenkligen Dreiecken. Das Packen der Sphären durch die Simulation als Billard-System ermöglicht eine effiziente, wenn auch nicht absolut exakte Berechnung von Konfigurationen mit hohen Packungsdichten und lässt sich erfolgreich für konvexe Außenkonturen anwenden. Die nicht-konvexe Nutform bereitet aber Schwierigkeiten bei der Berechnung von Stößen an den Ecken des Deckschiebers, da diese dort undefiniert sind. Dennoch stellt diese Heuristik einen interessanten Ansatz für die Optimierung des Füllfaktors dar.

Boll et al. [164] präsentieren einen Algorithmus, der erfolgreich für eine optimale Packung von Sphären in Quadraten angewendet wird. Eine gegebene Anzahl von Kreisen, die stochastisch im Raum verteilt ist, wird in ungeordneter Reihenfolge durchlaufen. Anschließend erfolgt ein Verschieben der Sphären in eine beliebige Richtung um eine definierte Schrittweite. Ist das Ergebnis dieses Schrittes eine Position, die zu keiner Überschneidung mit anderen Sphären oder der Umrandung führt und den Abstand zum nächsten Nachbarn erhöht, wird sie übernommen. Wenn keine gültigen Bewegungen mehr möglich sind, reduziert sich die Schrittweite, bis diese einen bestimmten Grenzwert unterschreitet. Damit lässt sich eine dichte Packung bestimmen, die die Genauigkeit dieses Grenzwertes besitzt. Eine exakte und optimale Lösung für dieses Problem mit bis zu 20 Sphären in einem Quadrat geben Peikert et al. [165]. Einen Überblick über das Problem des Packens von Sphären in einem Quadrat liefert [166]. Dieses Konzept versucht die Positionen möglichst gleich im Raum zu verteilen, heißt den Sphärenradius zu maximieren. Damit ist das Verfahren sehr ähnlich zum Billard-System von Lubachevsky [154]. Da die Bewegungsrichtung der Sphären zufällig ist, ist davon auszugehen, dass dasselbe Ergebnis entsteht, der Algorithmus aber langsamer konvergiert.

Einige Algorithmen nutzen das Konzept des SA. Dieser Art der Optimierung liegt das physikalische Phänomen zugrunde, dass eine Flüssigkeit bei absoluter Nulltemperatur den Grundzustand eines Kristalls annimmt und damit einen energiearmen Zustand nahe am Optimum aufweist. Die Kostenfunktion der Optimierung spiegelt eine Form der Energie im zu optimierenden System wider. Das Verfahren beruht auf der Boltzmann-Statistik. Durch das Absenken der Temperatur steigt damit die Wahrscheinlichkeit, den energieminimalen Zustand zu finden [167]. Beim Herabsetzen der Temperatur werden energieärmere Zustände des Systems stets zugelassen, während die Akzeptanz eines energiereicheren Zustands in Abhängigkeit einer über die Temperatur des Systems bestimmten Wahrscheinlichkeit erfolgt. Dadurch kann das System lokale Minima verlassen. In [168] erfolgt die Anwendung von

SA, um sowohl dichte Packungen für Sphären im Quadrat als auch in beliebig geformten Polygonen zu erreichen. Die Kostenfunktion von Theodoracatos und Grimsley beinhaltet zwei Teile. Der erste Term verkörpert die Packungsdichte, die durch die Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Fläche beschrieben wird. Die Nebenbedingung, dass die Konfiguration keine Überlappung besitzen darf, ist im zweiten Teil der Kostenfunktion durch einen variablen Kostenanteil bei Überschneidungen inkludiert. Liu et al. [169] verwenden SA, um identische und unterschiedlich große Sphären möglichst dicht in einem Kreis anzuordnen. Die Optimierung mit SA ermöglicht das Verlassen lokaler Minima, was bei den beschriebenen Ansätzen [154] und [164] durchaus vorkommen kann.

Einen Überblick über weitere SPP-Varianten und verschiedene Lösungsalgorithmen geben Castillo et al. [170]. Solche Varianten sind zum Beispiel das SPP mit Sphären unterschiedlicher Radien, das Packungsproblem dreidimensionaler Zylinder oder das Ausschneiden von Kreisen aus einem Band.

Heuristik zum Finden eines Wickelbildes mit maximalem Füllgrad

Keiner dieser Algorithmen lässt sich direkt für das Finden eines Wickelbildes mit optimalem Füllfaktor verwenden. Da die Drahtgrößen in [18, S. 8] genormt sind, müssen die Drähte einen exakt definierten Außendurchmesser besitzen, sodass nicht nach dem größtmöglichen Radius gesucht werden kann. Auch eine Reduktion der Behältergröße, um eine dichte Packung zu forcieren, ist nicht möglich, da die Nutkontur ebenfalls exakt vorgegeben ist. Aus diesen Gründen wird im Folgenden eine potentialbasierte Füllfaktor-Heuristik (PFFH) eingeführt, die einige Ideen der beschriebenen Packungsalgorithmen aufgreift. Freiheitsgrade bei der Füllfaktoroptimierung sind die Anzahl der Sphären N_D sowie die diskret definierten Außendurchmesser des Drahtes. Algorithmus 4.3 zeigt den schematischen Ablauf der PFFH.

Der Algorithmus basiert auf der Potentialtheorie. Die Grundlage der PFFH ist, dass jeder Sphäre eine Ladung Q zugeordnet wird. Nach Coulomb üben zwei Ladungen i und j , die sich an den Orten ${}^N\mathbf{r}_i$ bzw. ${}^N\mathbf{r}_j$ befinden, aufeinander eine Kraft aus [171, S. 107 f.]. Im Algorithmus wird dieser Zusammenhang adaptiert, sodass zwei Sphären nur Kräfte aufeinander ausüben, wenn sie sich überschneiden. Die Kraft, die eine Sphäre i von einer Sphäre j erfährt, ist dann

$${}^N\mathbf{f}_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{\|{}^N\mathbf{r}_i - {}^N\mathbf{r}_j\|^2} \frac{{}^N\mathbf{r}_i - {}^N\mathbf{r}_j}{\|{}^N\mathbf{r}_i - {}^N\mathbf{r}_j\|} & \delta({}^N\mathbf{r}_i, {}^N\mathbf{r}_j) < 2r_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.5)$$

Die Kräfte führen nach Newton zu einer Beschleunigung der Sphären und somit zu einer Bewegung. Dabei ist zu beachten, dass sich diese Bewegung durch die Gesamtkraft

$${}^N\mathbf{f}_i = \sum_{j=0, j \neq i}^{N_D} {}^N\mathbf{f}_{i,j} + {}^N\mathbf{f}_{i,N} \mathbf{R}_{\text{Nut, Iso}} \quad (4.6)$$

ergibt, die eine Sphäre i im System erfährt. Der Summand ${}_N \mathbf{f}_{i,N} \mathbf{R}_{\text{Nut, Iso}}$ stellt die Kraft dar, die ein Leiter von der Nutbegrenzung erfährt. Diese ist als Potentialbarriere modelliert und stößt die Sphären ab, wenn sie die Begrenzung berühren. Die Richtung zeigt dabei stets orthogonal von ${}_N \mathbf{R}_{\text{Nut, Iso}}$ ins Nutinnere. Die resultierende Beschleunigung ergibt sich damit zu

$${}_N \ddot{\mathbf{r}}_i \propto {}_N \mathbf{f}_i. \quad (4.7)$$

Zunächst ist die Startkonfiguration für den Algorithmus zu finden. Da die PFFH das Wickelbild für ein festes N_D berechnet, erfolgt in Zeile 1 zunächst eine Abschätzung dieses Parameters basierend auf dem zu erwartenden maximalen MFF. Für eine gegebene, isolierte Nut mit Querschnitt $A_{N, \text{Iso}}$ und einem zu erwartenden Füllfaktor \hat{k}_m lässt sich über den Leiterquerschnitt die Anzahl der Drähte mit

$$N_D \approx \left\lfloor \frac{A_{N, \text{Iso}} \hat{k}_m}{r_D^2 \pi} \right\rfloor \quad (4.8)$$

abschätzen. Die Positionen dieser N_D Sphären werden in Zeile 4 in der Nut zufällig nach der Gleichverteilung verteilt und in der Variable ${}_N \mathbf{R}_D$ gespeichert. Sie besitzen zunächst einen Radius von $0,5r_D$. Analog zur Methode von Lubachevsky [151] erhöht sich in Zeile 14 der Außendurchmesser über die Simulationszeit. Überschneiden sich Sphären, erfahren sie in den Zeilen 8 und 9 eine Coulomb-Kraft, welche zu ihrer Bewegung führt. Mit steigendem Radius erhöhen sich die Überlappungen und es resultieren höhere Kräfte, sodass die Energie im System stets ansteigt. Dies führt dazu, dass das System unkontrolliert ins Schwingen kommt und kein stabiler Endzustand erreichbar ist. Neben einem gleitreibungsbasierten Ansatz, der einen Teil der Bewegungsenergie in Form von Reibenergie aus dem System nimmt, lässt sich durch SA das Abkühlen des Systems erzwingen, um einen stabilen Endzustand zu erreichen. Es hat sich gezeigt, dass SA im Gegensatz zur Modellierung der Reibung reproduzierbare und schneller konvergierende Lösungen ermöglicht. Der Grund ist, dass SA zu Beginn der Simulation einen hochenergetischen und chaotischen Zustand zulässt, in dem größere Positionsänderungen erfolgen. Dadurch ordnen sich die Sphären schneller in einem Equilibrium an. Das Abkühlen des Systems erfolgt durch die Begrenzung der zulässigen Kräfte über die Simulationszeit in Zeile 10.

In der Natur dieses Algorithmus liegen Überlappungen, die in einem gewissen Maß auch in einem dichten Endzustand vorliegen sollten. In [18, S. 8] sind neben den maximalen Durchmessern der Leiter auch deren Größentoleranzen bestimmt. Der Außendurchmesser darf demnach, abhängig vom Leiternenddurchmesser, eine Toleranz im Bereich von $\epsilon_D = -2 \dots -4\%$ vom maximalen Außendurchmesser besitzen. Liegen die maximalen Überschneidungen am Ende der Simulation in der Abfrage in Zeile 18 unterhalb von $0,5\epsilon_D r_D$, wird die Optimierung als erfolgreich gewertet, N_D in Zeile 28 erhöht und die Simulation erneut ausgeführt. Verletzt

das Endresultat diese Bedingung, wird der Algorithmus erneut mit der gleichen Drahtzahl und einer neuen gleichverteilten Startkonfiguration ausgeführt. Der Grund dafür ist, dass die PFFH für unterschiedliche Startkonfigurationen unterschiedliche Ergebnisse liefern kann. Bei viermaligem Misserfolg ist davon auszugehen, dass keine zulässige Lösung für die aktuelle Drahtzahl existiert und es wird, falls vorher noch keine Lösung gefunden wurde, eine neue Optimierung mit einem in Zeile 23 reduzierten N_D gestartet. Gab es bereits eine erfolgreiche Simulation, terminiert der Algorithmus in Zeile 21 und gibt das zugehörige Wickelbild zurück.

Die Variable `timer` in Zeile 10 von Algorithmus 4.3 stellt die Simulationszeit dar. Mit den Variablen a und b lässt sich die exponentiell abklingende Temperaturfunktion des SA-Ansatzes anpassen. Diese begrenzt die Maximalkräfte, die im System auftreten dürfen. Als gute Werte für die Simulation haben sich $a = 500$ und $b = 10$ gezeigt.

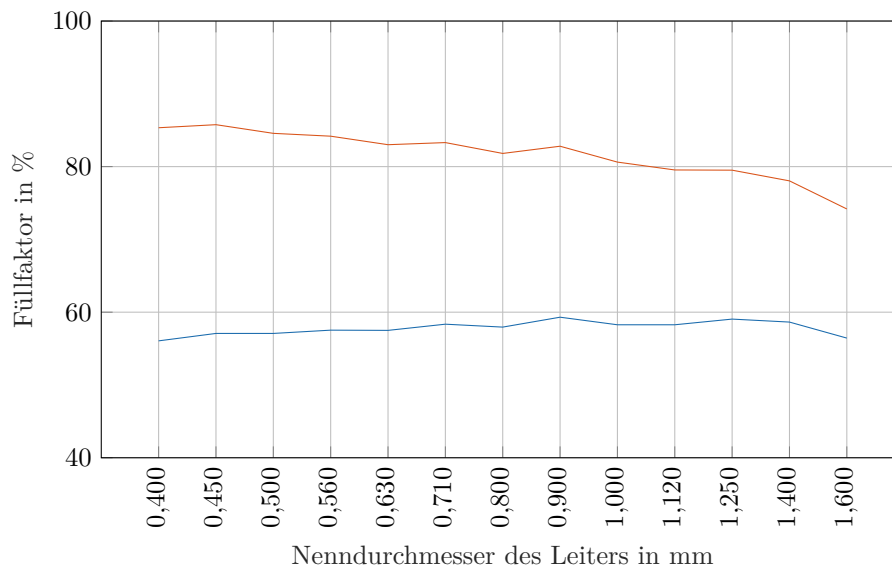


Abbildung 4.6: Theoretisch optimale Füllfaktoren nach Algorithmus 4.3 unterschiedlicher Drahtdurchmesser mit EFF (—) und MFF (—)

Bei Anwendung der PFFH ergeben sich die in Abbildung 4.6 gezeigten Füllgrade. Die mit der PFFH erzeugten Wickelbilder besitzen deutlich höhere Füllfaktoren, als es die aus der Literatur abgewandelten Verfahren nach Algorithmus 4.1 und Algorithmus 4.2 vermögen. Dies liegt an den deutlich besser ausgenutzten Zwickelräumen, wie Abbildung 4.7 zeigt, in der das Wickelbild für das Optimum bei einem Drahtdurchmesser von $2r_{D,Cu} = 0,9$ mm dargestellt ist. An beiden Nutflanken baut sich eine orthozyklische Wicklung auf, die im Nutinneren aufgrund deren Konizität einer unregelmäßigeren Packung weicht. Dieses Verhalten zeigt sich bei allen Wickelbildern mit einem ausreichend kleinen Drahtdurchmesser. Für kleiner werdende Drahtdurchmesser nähert sich der MFF wie zu erwarten immer weiter dem theoretischen Optimum $k_m = 90,7\%$ an, da der Effekt der Zwickelräume im Verhältnis zur beinahe perfekt orthozyklischen Fläche im Nutinneren immer weiter an Bedeutung verliert.

Algorithmus 4.3 PFFH

```

1:  $N_D \leftarrow \text{floor}(A_N \hat{k}_m / r_D^2 / \pi)$ 
2: while true do
3:   stall  $\leftarrow$  timer  $\leftarrow$  1
4:    ${}_N \mathbf{R}_D \leftarrow \text{random}({}_N \mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}, N_D)$   $\triangleright$  Gleichverteilte Startkonfiguration erzeugen
5:    $r_{\text{temp}} \leftarrow 0.5 r_D$ 
6:   while ( $r_{\text{temp}} < r_D$ )  $\parallel$  ( $\|{}_N \dot{\mathbf{R}}_D\| > 5 \cdot 10^{-5} N_D$ ) do
7:     for all Drähte do
8:        ${}_N \mathbf{f}_{j,i} \leftarrow -{}_N \mathbf{f}_{j,i} \leftarrow (4.5)$ 
9:        ${}_N \mathbf{f}_i \leftarrow (4.6)$ 
10:       ${}_N \mathbf{f}_i \leftarrow \text{limit}({}_N \mathbf{f}_i, \exp((\text{timer} - a)/b))$   $\triangleright$  Simulated Annealing
11:    end for
12:     ${}_N \mathbf{R}_D \leftarrow {}_N \mathbf{R}_D + ({}_N \mathbf{R}_D \cdot 0,01 {}_N \mathbf{f}_{1:N_D})$ 
13:    if ( $\|{}_N \dot{\mathbf{R}}_D\| < \text{threshold}$ ) then
14:       $r_{\text{temp}} \leftarrow \min(r_{\text{temp}} + 0.005 r_D, r_D)$ 
15:    end if
16:    timer  $\leftarrow$  timer + 1
17:  end while  $\triangleright$  Simulation abgeschlossen
18:  if  $\max(\delta({}_N \mathbf{r}_{1:N_D})) > 0.5 \epsilon_D r_D$  then
19:    stall  $\leftarrow$  stall + 1
20:    if (stall > 4) & (exist( ${}_N \mathbf{R}_{\text{best}}$ )) then
21:      return  ${}_N \mathbf{R}_{\text{best}}$ 
22:    else if stall > 4 then
23:       $N_D \leftarrow N_D - 1$ 
24:    end if
25:  else
26:    stall  $\leftarrow$  1
27:     ${}_N \mathbf{R}_{\text{best}} \leftarrow {}_N \mathbf{R}_D$ 
28:     $N_D \leftarrow N_D + 1$ 
29:  end if
30: end while

```

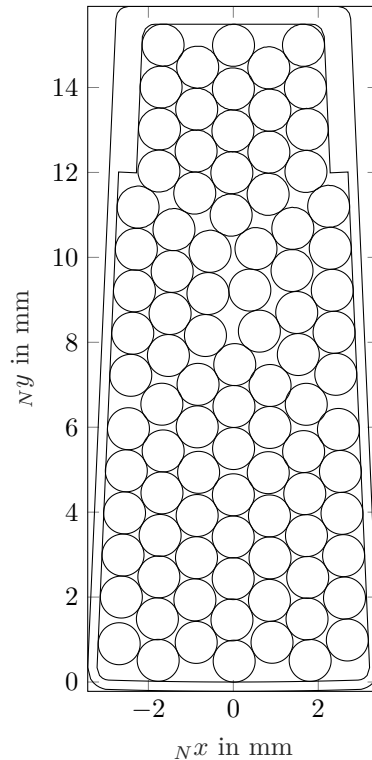


Abbildung 4.7: Wickelbild bei theoretisch optimalem Füllfaktor nach Algorithmus 4.3

Die gezeigten Füllfaktoren stellen sehr wahrscheinlich das jeweilige theoretische Optimum dar. Eine mehrmalige Wiederholung der Optimierung an der Grenze der maximalen Drahtzahl bestätigt zuverlässig die maximale Drahtzahl, obwohl die Wickelbilder des Optimums teilweise voneinander abweichen. Die Optimierung mit einem Draht zu viel liefert jedoch stets deutlich zu hohe Überschneidungen, sodass die gefundenen optimalen Drahtzahlen eine harte Grenze darzustellen scheinen.

Die Produzierbarkeit ist neben eventuellem Drahtabrutschen auch im Hinblick auf die auftretenden Überlappungen zu bewerten. Untersuchungen von Stenzel et al. [172] zeigen, dass beim Nadelwickeln eine Erhöhung des elektrischen Widerstandes von bis zu 10% in Relation zum zu erwartenden Widerstand aufgrund der Drahtzugkraft auftritt. Grund dafür ist, dass sich die Drähte beim Wickeln plastisch verformen. Eine ähnliche Widerstandserhöhung beobachten Hofmann et al. [33]. Ein Teil dieser Widerstandszunahme kommt durch die Verjüngung des Drahtquerschnitts zustande. Unter der konservativen Annahme, dass nur 50% der Widerstandszunahme auf eine Reduktion des Drahtdurchmessers zurückzuführen ist, ergibt sich eine Verkleinerung des Drahtradius von bis zu 2,4%. Weiterhin erfolgt in der Optimierung die Anwendung des maximal zulässigen Außendurchmessers $2r_D$, während der tatsächlich verwendete Draht toleranzabhängig im Mittel ebenfalls um ca. 2% kleiner ist. Diese beiden Umstände lassen die Annahme zu, dass maximale Überschneidungen von ca. 1,5% bzw. von lediglich ca. 0,75% für den einzelnen Draht als zulässig einzuschätzen sind. Damit ist das Wickelbild in dieser Hinsicht produzierbar. Ein weiteres Indiz dafür ist die

Betrachtung der Summe aller Überschneidungen. Die Schnittfläche zweier sich überschneidender Sphären i und ι ist gegeben mit

$$A_{i,\iota} = \beta_{i,\iota} \cdot r_D^2 - \frac{\delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{r}_\iota)}{2} r_D \sin(\beta_{i,\iota}), \quad (4.9)$$

wobei $\beta_{i,\iota}$ den Winkel zwischen der Verbindungslinie von $N\mathbf{r}_i$ und $N\mathbf{r}_\iota$ sowie einem der beiden Schnittpunkte der Kreise in Radiant darstellt und sich mit Hilfe von Trigonometrie durch

$$\beta_{i,\iota} = \arccos\left(\frac{\delta(N\mathbf{r}_i, N\mathbf{r}_\iota)}{2r_D}\right) \quad (4.10)$$

bestimmen lässt. Die gesamte Schnittfläche ergibt sich für das Optimum aus Abbildung 4.7 zu

$$A_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{N_D} \sum_{\iota>i}^{N_D} A_{i,\iota} = 0,0317 \text{ mm}^2 \quad (4.11)$$

und damit zu ungefähr 0,03 % der gesamten Nutfläche A_N . Durch die Modellierung der Nut als Potentialbarrieren befinden sich alle Drähte in der Nut. Die resultierenden Überlappungen können daher als nicht kritisch angesehen werden.

Gegenteilig verhält es sich bei der Betrachtung des Drahtabrutschens. Die PFFH erzeugt einen orthozyklischen Lagenaufbau an der Nutflanke. Beim Nadelwickeln herrscht jedoch eine Drahtzugkraft in Richtung Nutgrund, weshalb sich das gezeigte Wickelbild nicht realisieren lässt. Aus diesem Grund ist das Bewickeln einer konischen Nut mit dem theoretisch optimalen Füllfaktor nicht möglich.

4.2.4 Nadelwickel-Simulationsalgorithmus

Keines der bisher gezeigten Verfahren kann ein Wickelbild erzeugen, das produzierbar ist. Der Grund liegt darin, dass die bisherigen Algorithmen den Wickelprozess als solchen nicht berücksichtigen. Bei der Nadelwickeltechnik erfolgt die Ablage der Drähte sequenziell. Wie Stenzel [21, S. 102] zeigt, ist zudem eine exakte Drahtablage ohne Abrutschen der Windungen im Wickelkopf notwendig, um sie in der Nut exakt positionieren zu können. Weiterhin sind Stenzel zufolge die auftretenden Drahtzugkräfte zu berücksichtigen [21, S. 94–100]. Um das Ziel einer füllfaktoroptimierten Wicklung zu erreichen, sollte ein Algorithmus zum Erzeugen optimaler Wickelbilder den Nadelwickelprozess in seiner Gesamtheit betrachten, also sequenzielle Drahtablage, Positionierung in Nut und Wickelkopf sowie die auftretenden Drahtzugkräfte.

Diese Anforderungen nimmt der Nadelwickel-Simulationsalgorithmus (NWSA) auf. Der NWSA berechnet die optimale Position des i -ten Drahtes ${}_j\mathbf{r}_i = [{}_jx_i, {}_jy_i]^T \in \mathbb{R}^2$ unter Berücksichtigung der bereits abgelegten Drähte ${}_j\mathbf{r}_1, \dots, {}_j\mathbf{r}_{i-1}$ und der Nut ${}_j\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}$ [141]. Die

KOS $j \in \{1, \dots, 4\}$ sind den einzelnen Ablageorten der Drähte in den Nuten und Wickelköpfen zugeordnet. Im Folgenden seien $j = 1$ und $j = 3$ die KOS der Nuten, sowie $j = 2$ und $j = 4$ die der Wickelköpfe bzw. Stirnflächen von Stator und Rotor, die im Wickelprozess sequenziell durchlaufen werden. Analog zu den Nuten erfolgt die Beschreibung des Wickelbildes im Wickelkopf ebenfalls reduziert auf einen zweidimensionalen Schnitt. Die Ablagefläche, die durch das Wickelwerkzeug (Stator) oder die Endkappe (Rotor) begrenzt ist, wird durch den Polygonzug ${}_j\mathbf{R}_{\text{Wk}}$ beschrieben. In Abbildung 4.8 sind die KOS für die Rotoranwendung gezeigt.

Zunächst ist die Position des ersten Drahtes $i = 1$ im KOS $j = 1$ zu finden. Dabei ist zu beachten, dass vor dem Wickeln der Windungen immer ein Anbindevorgang erfolgt. Dieser kann z.B. um einen Haken oder Pin geschehen. Basierend auf der Position dieses Elementes erfährt der Draht beim ersten Eintauchen in die Nut bereits eine Drahtzugkraft ${}_1\mathbf{f}_1$, die die optimale Position wesentlich beeinflusst. Aus diesem Grund kommt analog zu (4.1) eine Kostenfunktion zum Einsatz, die diese Drahtzugkraft beinhaltet. Das Optimierungsproblem zum Finden der ersten Windung ${}_1\mathbf{r}_1 = [{}_1x_1, {}_1y_1]^T$ lautet

$$\begin{aligned} \min_{{}_1x_1, {}_1y_1} J_{1,1} &= \min_{{}_1x_1, {}_1y_1} \|{}_1\mathbf{f}_1\| \\ \text{s.t.} \quad &\delta({}_1\mathbf{r}_1, {}_1\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}}) \geq r_D. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Da dieses Problem, abhängig von der Nutform, lokale Minima haben kann, erfolgt die Lösung durch den Einsatz eines GAs. Die Richtung der Drahtzugkraft ${}_1\mathbf{f}_1$ lässt sich aus dem CAD-Modell ablesen. Die weiteren Drahtpositionen ${}_j\mathbf{r}_1$, $j \in \{2, \dots, 4\}$ sind durch das Lösen des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{{}_jx_1, {}_jy_1} J_{j,1} &= \min_{{}_jx_1, {}_jy_1} \|{}_j\mathbf{f}_1\|, \quad j \in \{2, \dots, 4\} \\ \text{s.t.} \quad &\delta({}_j\mathbf{r}_1, {}_j\mathbf{R}) \geq r_D. \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit einem GA bestimmbar, wobei

$${}_j\mathbf{R} = \begin{cases} {}_j\mathbf{R}_{\text{Wk}} & j = 2, 4 \\ {}_j\mathbf{R}_{\text{Nut,Iso}} & j = 1, 3 \end{cases} \quad (4.14)$$

gilt. Die Richtung der dreidimensionalen Drahtzugkraft ${}_B\mathbf{f}_{j,1} \in \mathbb{R}^3$ des ersten Drahtes im Ablageort j im Bauteil-KOS B ist von der Drahtposition ${}_j\tilde{\mathbf{r}}_1$ abhängig und lässt sich mit Hilfe der Position des Drahtes ${}_{j-1}\mathbf{r}_1$ durch

$${}_B\tilde{\mathbf{f}}_{j,1} = {}^B\tilde{\mathbf{T}}_{j-1} \cdot {}_{j-1}\tilde{\mathbf{r}}_1 - {}^B\tilde{\mathbf{T}}_j \cdot {}_j\tilde{\mathbf{r}}_1 \quad (4.15)$$

bestimmen. Eine Vektorzerlegung dieser Kraft erlaubt es, diese in eine tangentielle Kompo-

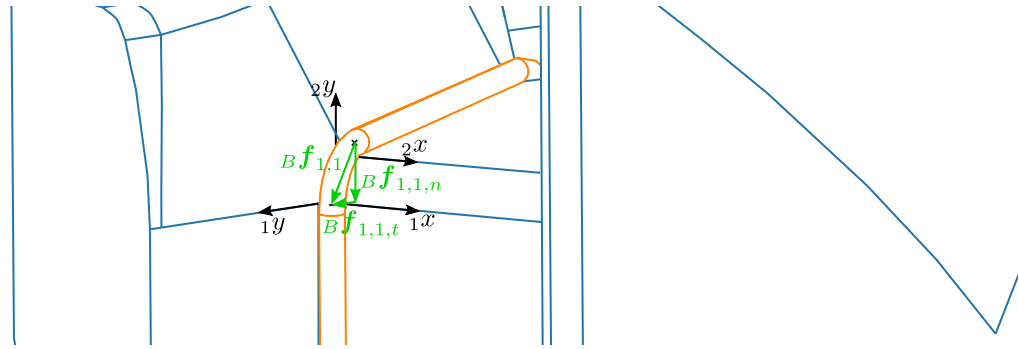


Abbildung 4.8: Vektorzerlegung der Drahtzugkräfte

nente ${}_B\mathbf{f}_{j,1,t}$ und eine normale Komponente ${}_B\mathbf{f}_{j,1,n}$ aufzuteilen. Eine solche Vektorzerlegung ist in Abbildung 4.8 skizziert. Die Tangential- und Normalkomponenten werden durch entsprechende Rücktransformationen im KOS j dargestellt. Durch die Wahl der Zerlegung ergibt sich für die tangentiale Komponente im zweidimensionalen KOS j stets ${}_j\tilde{\mathbf{f}}_{1,t} = {}^j\tilde{\mathbf{T}}_B \cdot {}_B\tilde{\mathbf{f}}_{j,1,t} = \mathbf{0}_{4 \times 1}$. Für die Optimierung resultiert damit die Kraft ${}_j\tilde{\mathbf{f}}_1 = {}^j\tilde{\mathbf{T}}_B \cdot {}_B\tilde{\mathbf{f}}_{j,1,n}$.

Das Lösen von (4.13) für die weiteren Ablageregionen liefert die jeweiligen Drahtpositionen. Die Position ${}_1\mathbf{r}_2$ des zweiten Drahtes lässt sich durch eine ähnliche Optimierung mit der Drahtzugkraft berechnen, die sich durch (4.15) mit ${}_4\mathbf{r}_1$ ergibt. Hier kommt jedoch eine weitere Einschränkung zum Tragen. Ist mehr als ein Draht abgelegt, so werden die folgenden Windungen immer mindestens einen der vorhandenen Drähte berühren. Dieser Zusammenhang lässt sich geometrisch damit auflösen, dass die Position eines Drahtes i stets auf einem konzentrischen Kreis mit Radius $2r_D$ um mindestens eine weitere Drahtposition $\iota \in \{1, \dots, i-1\}$ liegen muss. Diese Zwangsbedingung ist auch durch

$$\delta({}_j\mathbf{r}_i, {}_j\mathbf{r}_\iota) = 2r_D, \quad i > 1, \quad \iota < i \quad (4.16)$$

beschreibbar und ist in der Optimierung zu berücksichtigen. Statt (4.16) als weitere Nebenbedingung einzufügen, lässt sie sich auch verwenden, um das Optimierungsproblem durch Umformulieren deutlich zu vereinfachen. Statt die Positionen frei wählen zu können, sind sie durch (4.16) eingeschränkt, und die optimale Position ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \min_{{}_j\alpha_{i,\iota}} J_{j,i,\iota} &= \min_{{}_j\alpha_{i,\iota}} \|{}_j\mathbf{f}_i({}_j\mathbf{r}_i({}_j\alpha_{i,\iota}))\|, \\ \text{s.t.} \quad c_{\text{Nut}} &= \delta({}_j\mathbf{r}_i, {}_j\mathbf{R}) - r_D \geq 0, \\ c_{D,\iota} &= \delta({}_j\mathbf{r}_i, {}_j\mathbf{r}_\iota) - 2r_D \geq 0, \quad \forall \iota < i, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei sich die Positionen ${}_j\mathbf{r}_i({}_j\alpha_{i,\iota})$ effizient durch die Bedingung (4.16) mit

$${}_j\mathbf{r}_i({}_j\alpha_{i,\iota}) = {}_j\mathbf{r}_\iota + 2r_D \left[\cos({}_j\alpha_{i,\iota}), \sin({}_j\alpha_{i,\iota}) \right]^T, \quad \iota < i \quad (4.18)$$

bestimmen lassen. In anderen Worten ist der Winkel zu finden, der, basierend auf der herrschenden Drahtzugkraft ${}_j\mathbf{f}_i({}_j\mathbf{r}_i)$, die optimale Position ${}_j\mathbf{r}_i$ für den zu platzierenden Draht i liefert. Dieses Optimierungsproblem besitzt neben dem globalen Minimum auch ein lokales, was beim Lösen zu berücksichtigen ist. In Abbildung 4.9a ist ein Beispiel gezeigt, das sowohl das lokale (Pos. 1) als auch das globale Optimum (Pos. 2) zeigt. Der Verlauf der Kostenfunktion, abhängig vom Winkel ${}_j\alpha_{i,\iota}$, ist in Abbildung 4.9b gezeigt. Lokales und globales Minimum dieser Optimierung stellen stets das Ende des zulässigen Bereiches dar. Um einen lokalen Optimierer verwenden zu können, erfolgt das Lösen des Optimierungsproblems mit sechs verschiedenen Startwerten $\alpha_{\text{init},l} = 2\pi \cdot l/6$, $l \in \{0, \dots, 5\}$. Im vorliegenden Beispiel würden $\alpha_{\text{init},0}$ und $\alpha_{\text{init},1}$ zum lokalen Minimum führen, während die Initialwerte $\alpha_{\text{init},2}$ und $\alpha_{\text{init},3}$ zum globalen Optimum konvergieren. Die Optimierungen mit $l = 4$ und $l = 5$ als Startwert liefern die unzulässige Position zwischen $\iota - 2$ und $\iota - 3$, da diese den lokal minimalen Kostenfunktionswert darstellt, während die Nebenbedingungen $c_{D,\iota-2}$ und $c_{D,\iota-3}$ verletzt werden. Sind alle Lösungen von (4.18) durch die Verletzung von mindestens einer Nebenbedingung unzulässig, existiert keine valide Position mehr, sodass sich der Draht für eine effizientere Berechnung aus künftigen Optimierungen ausschließen lässt. Die Optimierung erfolgt durch SQP.

Der Draht ι als Ausgangsbasis für die Optimierung ist dabei nicht bestimmt, sodass die beste Position ι^* durch einen Vergleich der Optima mit

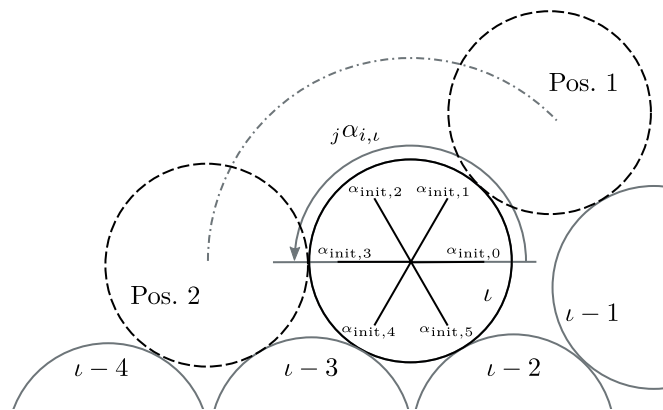
$$\iota^* = \arg \min_{\iota} J_{j,i} = \arg \min_{\iota} \left(\min \left\{ \min_{j\alpha_{i,1}} J_{j,i,1}, \dots, \min_{j\alpha_{i,\iota}} J_{j,i,\iota-1} \right\} \right) \quad (4.19)$$

zu bestimmen ist. Die verglichenen Kostenwerte $J_{j,i,\iota}$ stammen aus der Optimierung (4.18). Das heißt, für alle Drähte, die noch nicht aus der Optimierung ausgeschlossen sind, werden die Ergebnisse von (4.18) verglichen und das beste Ergebnis ausgewählt. Die resultierende Drahtposition ist damit gegeben durch

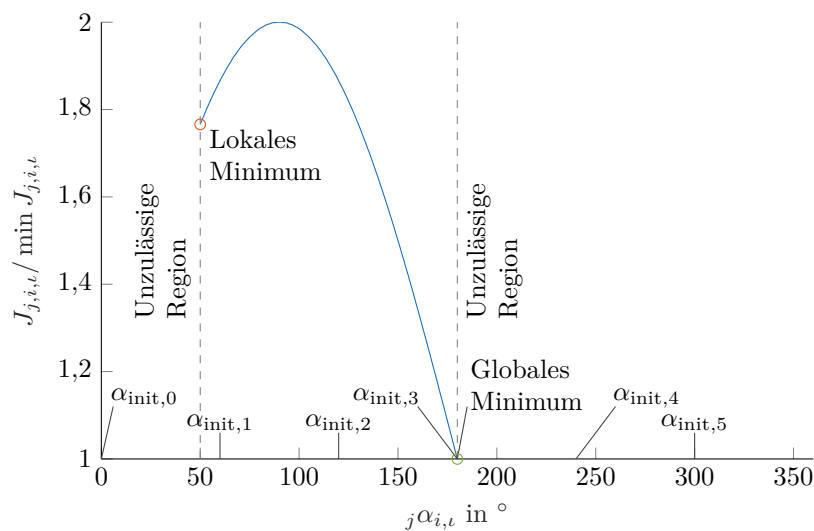
$${}_j\mathbf{r}_i = {}_j\mathbf{r}_{\iota^*} + 2r_D \left[\cos({}_j\alpha_{i,\iota^*}), \sin({}_j\alpha_{i,\iota^*}) \right]^T. \quad (4.20)$$

Durch eine Abbildung der Kostenfunktion von ${}_j\alpha_{i,\iota}$ in Abbildung 4.9 auf die ${}_jx$ -Achse lässt sich die globale Kostenfunktion $J_{j,i}$ aus einer Aneinanderreihung aller $J_{j,i,\iota}$ der Teiloptimierungen (4.18) darstellen, wie Abbildung 4.10 zeigt. Der in der Optimierung verwendete Kraftvektor ergibt sich durch ${}_{j-1}\mathbf{r}_{13} = [14 \text{ mm}, -5 \text{ mm}]^T$.

Obwohl alle Minima im Bereich von $-r_D = -0,61 \text{ mm} < {}_jx < 19r_D = 11,56 \text{ mm}$ im Wert ihrer ${}_jy$ -Koordinate äquivalent mit der optimalen Position sind, besitzen diese Positionen bezogen auf den Kraftvektor ${}_j\mathbf{f}_{13}$ mit dem Bezugspunkt ${}_{j-1}\mathbf{r}_{13}$ eine höhere potentielle Energie, während das Optimum bei ${}_jx = 21r_D = 12,78 \text{ mm}$ die Position mit der minimalen potentiellen Energie darstellt. In der dreidimensionalen Betrachtung bedeutet dies, dass diese Position diejenige ist, welche die minimale Drahtlänge zwischen den beiden Ablagere-



(a) Skizze des Optimierungsproblems

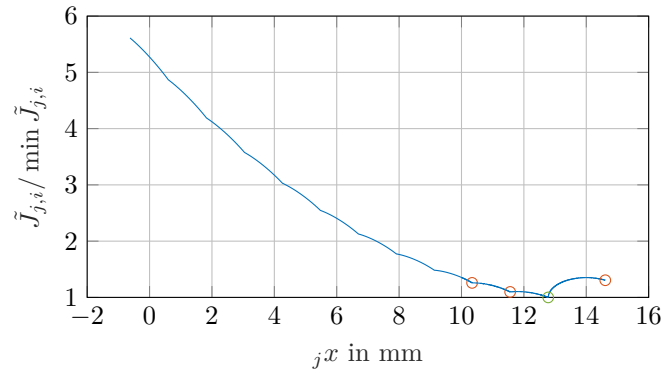


(b) Normalisierte Kostenfunktion (—) mit lokalem (○) und globalem Minimum (◊)

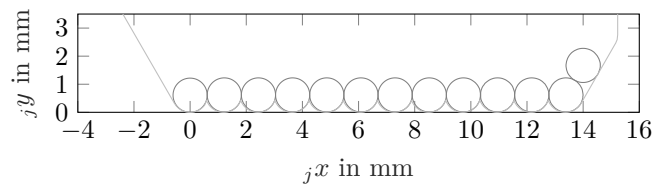
Abbildung 4.9: Graphische Darstellung des Optimierungsproblems (4.19)

gionen j und $j-1$ besitzt. Analog zu den Anforderungen im Faserwickeln aus Abschnitt 4.1.1 verkörpert das Drahtstück zwischen den beiden Ablagepositionen einen geodätischen Pfad. Dieser ist definiert als die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Oberfläche, bei der die ganze Kurve Teil der Oberfläche ist [173, S. 217–221]. Ein Verlegen des Drahtes entlang eines geodätischen Pfades verhindert das Drahtabrutschen. Per Definition ist die verlegte Drahtlänge entlang des geodätischen Pfades minimal, sodass ein abgerutschter Draht eine höhere Länge besäße und damit nicht auftreten kann.

Algorithmus 4.4 zeigt den schematischen Ablauf des NWSA. Nachdem in Zeile 1 die Positionen der ersten Drähte durch Anwenden des GA aus (4.12) bzw. (4.13) gefunden sind, werden sequenziell Drähte in die einzelnen Ablageregionen gelegt. Die Variable $wireIdx_{j,i}$ speichert, ob an Draht i in Region j noch eine zulässige Position gefunden werden konnte. Solange in jeder Region noch mindestens eine valide Position existiert, legt der Algorithmus



(a) Normalisierte Kostenfunktion (—) mit lokalen Minima (○) und globalem Minimum (○)



(b) Drahtpositionen

Abbildung 4.10: Globale Kostenfunktion einer Beispielkonfiguration

weitere Drähte ab. Dazu führt er das umgeformte Optimierungsproblem aus (4.18) in Zeile 6 aus. Führt das Ergebnis dieser Optimierung zu einer Verletzung der Nebenbedingung, kann an diesen Draht kein weiterer angelegt werden und er wird durch Anpassung der wireIdx-Variable in Zeile 8 aus der weiteren Optimierung ausgeschlossen. Aus dem Vergleich der Kosten in Zeile 10 lässt sich dann die optimale Position in Zeile 11 mit (4.18) berechnen.

Indem der NWSA für jeden Drahtdurchmesser ausgeführt wird, lässt er sich ebenfalls anwenden, um einen optimalen EFF zu finden. Den Verlauf der Füllfaktoren für die Statornut zeigt Abbildung 4.11. Analog den bisherigen Beobachtungen steigt der MFF mit sinkendem Drahtdurchmesser durch die bessere Nutfüllung vor allem in den Zwickelräumen, während der EFF durch das schlechter werdende Verhältnis aus Kupfer und Isolation nahezu konstant bleibt. Im Vergleich zu einem rein orthozyklischen Wickelbild ist jedoch der Füllfaktor vor allem bei kleineren Drahtdurchmessern schlechter, obwohl die Zwickelräume beim NWSA besser ausgenutzt werden. Grund dafür ist, dass der optimale Wicklungsaufbau einer orthozyklischen Wicklung im Inneren der Nut die schlechter ausgenutzten Zwickelräume deutlich überkompensiert. Wie zu erwarten erreichen die Füllfaktoren nicht das theoretische Optimum der PFFH. Als optimaler Drahtdurchmesser ergibt sich $2r_{D,Cu} = 0,90$ mm. Das zugehörige Wickelbild ist in Abbildung 4.12 gezeigt. Durch das Optimierungsziel, dass für jeden Draht sequenziell die Suche nach der optimalen Position erfolgt, sollte Drahtabrutschen in der Theorie effektiv verhindert werden und die Produzierbarkeit lässt sich als positiv bewerten.

Wird der NWSA auf die Rotornut angewendet, erzeugt dieser bei entsprechender Aus-

Algorithmus 4.4 NWSA

```

1:  ${}_{1:4}\mathbf{r}_1 \leftarrow \arg \min_{{}_{1:4}x, {}_{1:4}y} \|{}_{1:4}\mathbf{f}_1\|$ 
   s.t.  $c_{\text{Nut}} = \delta({}_{1:4}\mathbf{r}_1, {}_{1:4}\mathbf{R}) - r_D \geq 0$ 
2:  $i \leftarrow 2$ 
3:  $\text{wireIdx}_{1:4,1} \leftarrow 1$ 
4: while  $\text{all}(\text{sum}(\text{wireIdx}_{1:4,:}) > 0)$  do
5:   for  $j \leftarrow 1 : 4$  do
6:      $J_{j,i,1:i-1} \leftarrow \min_{j\alpha_{i,1:i-1}} \|j\mathbf{f}_{1:i-1}\|$ 
     s.t.  $\delta({}_j\mathbf{r}_i, {}_j\mathbf{R}) \geq r_D$  &  $\delta({}_j\mathbf{r}_i, {}_j\mathbf{r}_{1:i-1}) \geq 2r_D$ 
7:     if any  $\text{idx} \leftarrow {}_j\mathbf{r}_{1:i-1}(j\alpha_{i,1:i-1})$  unzulässig then
8:        $\text{wireIdx}_{j,\text{idx}} \leftarrow 0$ 
9:     end if
10:     $\text{minIdx} \leftarrow \text{idx}(\min(J_{j,i,1}, \dots, J_{j,i,i-1}))$ 
11:     ${}_j\mathbf{r}_i \leftarrow {}_j\mathbf{r}_{\text{minIdx}} + 2r_D [\cos(j\alpha_{i,\text{minIdx}}), \sin(j\alpha_{i,\text{minIdx}})]^T$ 
12:  end for
13:   $\text{wireIdx}_{1:4,i} \leftarrow 1$ 
14:   $i \leftarrow i + 1$ 
15: end while
16: return  ${}_{1:4}\mathbf{r}_{1:i}$ 

```

legung der Nut auch ein orthozyklisches Wickelbild [141]. Der Algorithmus wird in [141] zudem für Untersuchungen in Bezug auf Robust Design eingesetzt, indem Toleranzen der Drahtgrößen und der Nut in die Berechnung mit einfließen. Es zeigt sich, dass eine zu knapp bemessene Nut in der Rotoranwendung zu verhindern ist, da sich dabei kein geordneter Lagenaufbau mehr realisieren lässt.

Beim Einsatz des NWSA zur Erzeugung von Wickelbildern in Nuten mit rilliertem Nutgrund sei noch ein Hinweis gegeben. Bei einem Rillenabstand, der größer als der Drahtdurchmesser $2r_D$ ist, wird Bedingung (4.16) für alle Drähte der ersten Ebene des Wickelbildes verletzt. Durch den Einsatz der ineffizienteren Optimierung (4.12) in der ersten Ebene lässt sich auch für dieses Szenario ein Wickelbild bestimmen.

4.2.5 Eignung der Verfahren für eine automatisierte Trajektorienplanung

Ziel ist ein Wickelbild, das einen optimalen EFF liefert. Dabei ist jedoch zu beachten, dass das Wickelbild produzierbar ist und sich ebenfalls wirtschaftlich herstellen lässt. Grundsätzlich gilt, dass eine höhere Drahtzahl beim Nadelwickeln zu einer höheren Produktionszeit führt, und damit direkt die Produktionskosten negativ beeinflusst. Gleichzeitig ist zu beachten, dass

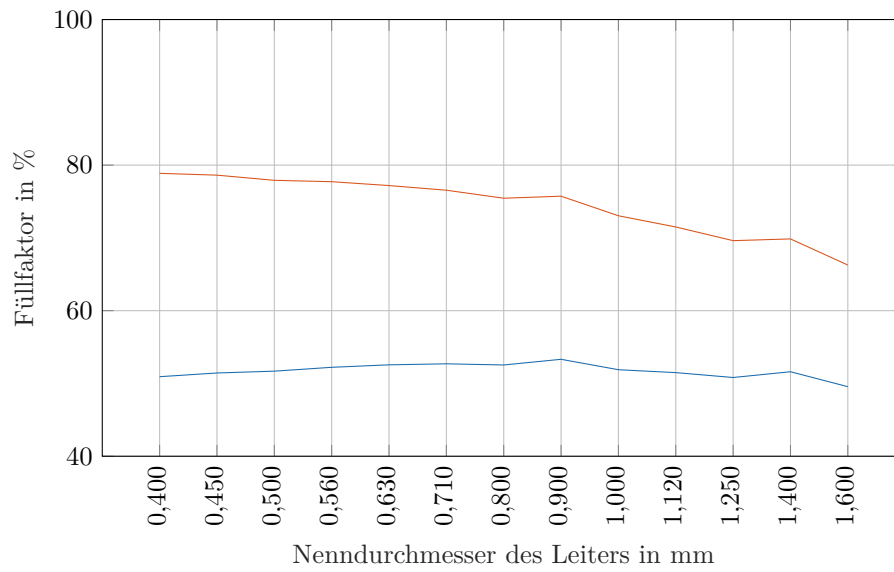


Abbildung 4.11: EFF (—) und MFF (—) bei Verwendung des NWSA

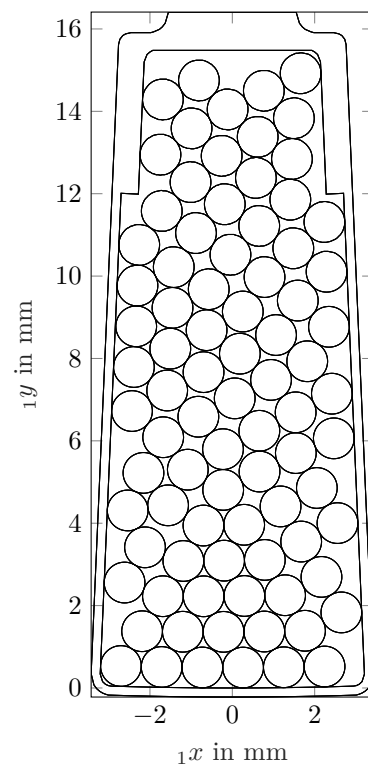


Abbildung 4.12: Optimales Wickelbild mit NWSA

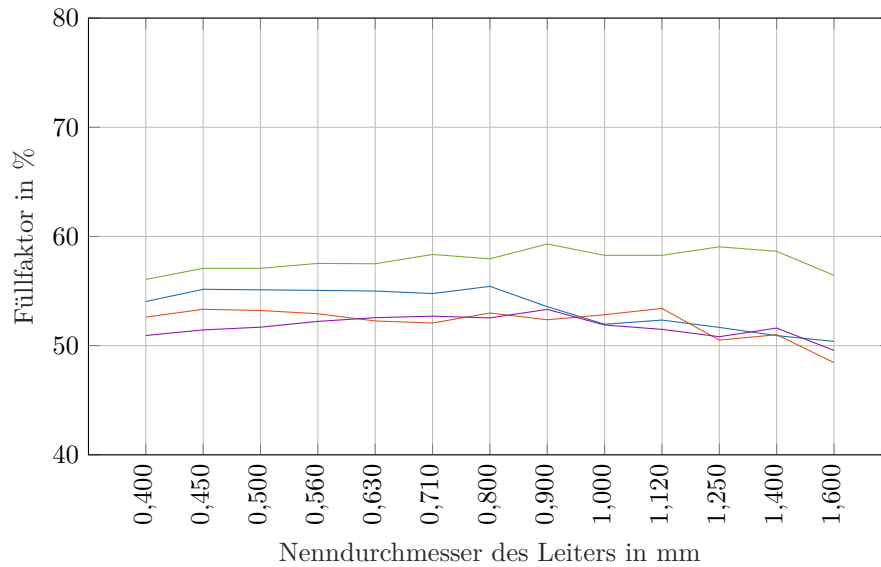


Abbildung 4.13: Vergleich der EFF von Algorithmus 4.1 (—), Algorithmus 4.2 (—), Algorithmus 4.3 (—) und Algorithmus 4.4 (—)

dickere Drähte eine größere Nadel bedingen. Da die geometrische Zugänglichkeit der Nut, vor allem beim Stator, durch die Zahnöffnung begrenzt ist, sind auch zu große Drahtdurchmesser zu vermeiden. Abbildung 4.13 zeigt den Vergleich der untersuchten Verfahren in Bezug auf den EFF.

Bickel et al. [38] verwenden ihren Füllfaktor-Algorithmus, um einige Grundzusammenhänge im Hinblick auf das Zusammenspiel von Füllfaktor, Drahtdurchmesser und Drahtzahl zu untersuchen. Dabei entstehen weder produzierbare noch füllfaktoroptimierte Wickelbilder. Der Algorithmus von Raabe [144] erlaubt ein schnelles Abschätzen von Füllfaktoren für Wildwicklungen und ist daher auch nur bedingt für die Anwendung Nadelwickeln einsetzbar.

Die PFFH liefert Wickelbilder, die vermutlich den theoretisch maximalen Füllfaktor besitzen. Hauptproblem bleibt dabei jedoch auch, dass sich Drahtabrutschen bei deren Umsetzung nicht verhindern lässt und damit auch diese Wickelbilder als nicht produzierbar zu klassifizieren sind.

Lediglich der NWSA ist in der Lage, ein produzierbares Wickelbild zu erzeugen. Ein weiterer großer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass nicht nur Referenzpositionen in der Nut, sondern auch im Wickelkopf bestimmt werden, da auch dort eine exakte Drahtablage notwendig ist. Aus diesem Grund finden die Wickelbilder des NWSA im weiteren Verlauf Anwendung.

Bei der Auswahl des Drahtdurchmessers für die Statoranwendung ist zudem noch zu beachten, dass eine elektrische Maschine, abhängig vom vorherrschenden Spannungsniveau, der gewünschten Nenndrehzahl und der Induktivität eine vorgegebene Anzahl an seriellen Leitern z_s besitzt. Damit ergibt sich die maximale Leiterzahl zu

$$N_D = z_s \cdot z_p. \quad (4.21)$$

Als Leiterzahl in der Nut sind nur ganzzahlige Vielfache der seriellen Windungszahl möglich. In Abhängigkeit der von den Optimierungsalgorithmen errechneten Drahtzahl kann sich der resultierende EFF durch die Bedingung (4.21) erheblich reduzieren, was bei der Wahl des Drahtdurchmessers zu berücksichtigen ist. Während für die Rotoranwendung der Drahtdurchmesser durch dessen geometrische Auslegung fest definiert ist, besteht bei der Statornut eine größere Auswahlmöglichkeit. Unter den Gesichtspunkten der Windungszahl und damit der Wirtschaftlichkeit der Wicklung, der geometrischen Zugänglichkeit der Nut und der Zielgröße der seriellen Windungszahl z_s ist entsprechend der optimale Drahtdurchmesser zu bestimmen.

4.2.6 Stützpunktberechnung

Ergebnis der Füllfaktoroptimierung mit dem NWSA sind zweidimensionale Wickelbilder sowohl in der Nut, als auch im Wickelkopf, die die gewünschten Drahtpositionen darstellen. Um dieses Wickelbild zu realisieren, soll in einem automatisierten, rechnergestützten Verfahren eine Solltrajektorie für die Wickelnadel berechnet werden. Dazu ist zunächst die Rücktransformation von den zweidimensionalen KOS $j \in \{1, \dots, 4\}$ in das dreidimensionale Bauteil-KOS B durchzuführen. Eine solche Koordinatentransformation erfolgt bereits in (4.15), um die Vektorzerlegung der Drahtzugkraft durchzuführen. Wie eingangs von Abschnitt 4.2 bereits dargestellt ist, ändert sich das Wickelbild entlang der Nut nicht. Selbiges gilt für die Drahtablage im Wickelkopf. Aus diesem Grund macht es Sinn, die Referenzpunkte jeweils an Ein- und Ausgang der jeweiligen Ablageregion zu definieren. Ein- und Ausgang sind dabei durch die Wickelrichtung bestimmt. Damit ergeben sich für jede der vier Ablageregionen zwei Transformationen und eine Windung ist insgesamt durch acht Referenzpunkte definiert.

Um die Transformationsmatrizen aufstellen zu können, sind dreidimensionale Bauteilgrößen notwendig. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 4.3 für den Beispielstator und in Tabelle 4.4 für den Beispielrotor dargestellt. Diese Werte sind ebenfalls mit Hilfe des CAD-Modells des Bauteils bestimmbar. Die homogenen Transformationsmatrizen ${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{j,e}$ für den Eintritt in die Ablageregion j und ${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{j,a}$ für den Austritt aus selbiger lassen sich dabei durch eine Aneinanderreihung von elementaren Translationen und Rotationen bestimmen. Beispielsweise sind die beiden Transformationsmatrizen für $j = 1$, also der ersten Nut, und den in Abbildung 4.14 sowie Abbildung 4.15 gezeigten KOS für die Statornut durch

$${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{1,a} = \tilde{\mathbf{R}}_z(n \cdot \phi_Z) \tilde{\mathbf{L}}_x(r_{\text{NG}}) \tilde{\mathbf{L}}_z(h_{\text{BP}}) \tilde{\mathbf{R}}_z(-\pi/2) \quad (4.22a)$$

$${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{1,e} = \tilde{\mathbf{R}}_z(n \cdot \phi_Z) \tilde{\mathbf{L}}_x(r_{\text{NG}}) \tilde{\mathbf{R}}_z(-\pi/2) \quad (4.22b)$$

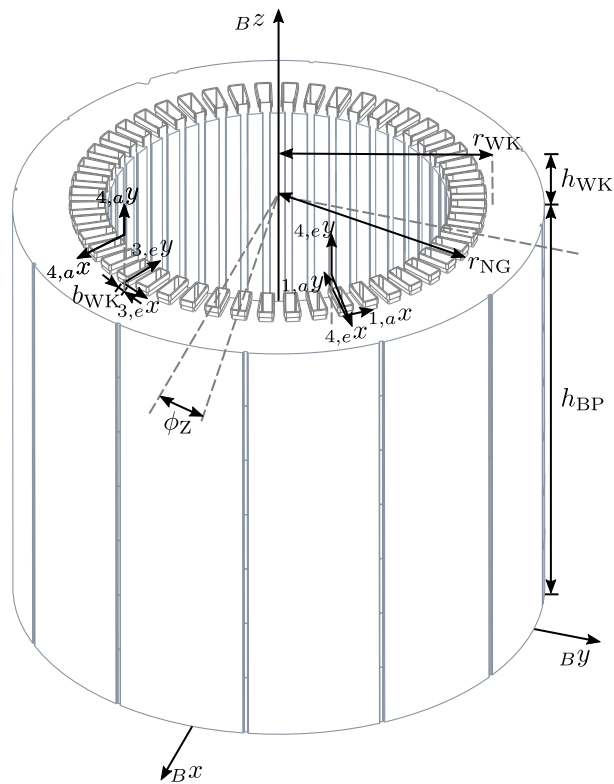
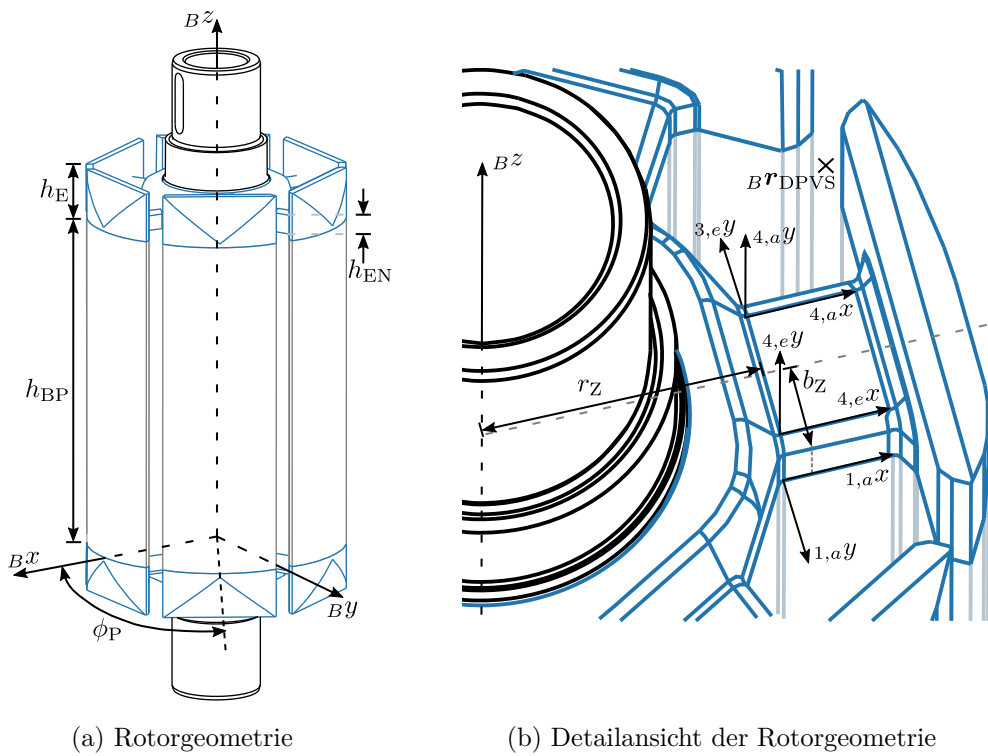


Abbildung 4.14: Dreidimensionale Ansicht der Statorgeometrie und zugehörige KOS



(a) Rotorgeometrie

(b) Detailansicht der Rotorgeometrie

Abbildung 4.15: Dreidimensionale Ansicht der Rotorgeometrie und zugehörige KOS

bzw. für die Rotornut durch

$${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{1,a} = \tilde{\mathbf{R}}_z(n \cdot \phi_P) \tilde{\mathbf{L}}_x(r_Z) \tilde{\mathbf{L}}_y(-b_Z) \tilde{\mathbf{L}}_z(h_{BP} + h_{EN}) \tilde{\mathbf{R}}_x(\pi) \quad (4.23a)$$

$${}^B\tilde{\mathbf{T}}_{1,e} = \tilde{\mathbf{R}}_z(n \cdot \phi_P) \tilde{\mathbf{L}}_x(r_Z) \tilde{\mathbf{L}}_y(-b_Z) \tilde{\mathbf{L}}_z(-h_{EN}) \tilde{\mathbf{R}}_x(\pi) \quad (4.23b)$$

gegeben. Die Winkel $n \cdot \phi_Z$ bzw. $n \cdot \phi_P$ mit $n \in \mathbb{N}$ verkörpern dabei ganzzahlige Vielfache der Zahn- bzw. Polteilung und sind abhängig davon, welche Nuten des Stators oder welcher Pol des Rotors bewickelt werden soll. In beiden Beispielen beginnt der Wickelvorgang an der oberen Seite des Blechpakets. Die Größen ${}^B\mathbf{r}_{i,j,e}$ und ${}^B\mathbf{r}_{i,j,a}$ am Ein- und Ausgang mit $i \in \{1, \dots, N_D\}$ und $j \in \{1, \dots, 4\}$ stellen zwar die gewünschten Drahtpositionen in B , jedoch nicht die Position des TCPs dar. Zwischen der Nadelspitze und dem Ablageort des Drahtes im Bauteil herrscht ein Versatz, wie Abbildung 2.5 zeigt. Dieser Versatz ist zu berücksichtigen, um den korrekten TCP zu berechnen.

Tabelle 4.3: 3D-Parametersatz für den Beispielstator

Stator		
Parameter	Wert	Beschreibung
r_{NG}	95,7 mm	Radius des Nutgrunds
ϕ_Z	7,5°	Zahnteilung
r_{WK}	99,971 mm	Radius Wickelwerkzeug
b_{WK}	2,5 mm	Verschiebung Wickelwerkzeug
h_{WK}	15,5 mm	Höhe Anlagepunkt Wickelwerkzeug
h_{BP}	210 mm	Blechpakethöhe

Tabelle 4.4: 3D-Parametersatz für den Beispielrotor

Rotor		
Parameter	Wert	Beschreibung
h_E	28 mm	Höhe der Endkappe
h_{EN}	10,6 mm	Höhe der Endkappe am Nutgrund
h_{BP}	202 mm	Blechpakethöhe
ϕ_P	60°	Polteilung
b_Z	10,35 mm	Zahnbreite
r_Z	40,10 mm	Zahnradius

Wolf [9, S. 146 f.] nutzt eine einfache vektorielle Verschiebung, um diesen Versatz zu modellieren. Die Vorgabe des Vektors erfolgt durch den Anwender. Wenger [10, S. 115–118] beschreibt einen Ansatz, der den herrschenden Drahtzug berücksichtigt. Anwendung ist in beiden Arbeiten jedoch das Linearwickeln, bei dem der Draht vom Drahtführer zum

Ablageort eine Gerade beschreibt. Auch beim Faserwickeln für CFK-Bauteile beschreiben die Fasern näherungsweise eine Gerade, da die verwendeten Fasern sehr dünn sind.

Diese Annahme kann beim Nadelwickeln von Drähten mit den betrachteten Durchmessern jedoch nicht getroffen werden. Vom Ablageort bis kurz vor der Nadel beschreibt der Draht zwar eine Gerade, kurz vor der Nadelspitze tritt jedoch eine Verformung des Drahtes auf, die von Betrag und Richtung der Drahtzugkraft sowie der Nadelstellung abhängt. Näherungsweise stellt diese Verformung einen Kreis mit einem Biegeradius dar, der einen Mindestwert nicht unterschreiten darf, damit keine Beschädigung der Lackisolation auftritt [21]. Um den Versatz zwischen Drahtposition und TCP beim Nadelwickeln beschreiben zu können, ist also ein Modell notwendig.

Der größte Einflussfaktor für den Verlauf des Drahtes nach Nadelaustritt ist die Drahtzugkraft, die an der Nadelspitze jedoch nur unter hohem Aufwand messbar ist [39]. Der Betrag der Drahtzugkraft beeinflusst dabei den Biegeradius. Im Modell wird ein statischer Wert der Zugkraft angenommen. Einen Ansatz für die dynamische Bestimmung der Zugkraft untersuchen Gerngroß et al. [39]. In dieser Arbeit schätzt ein Kalman-Filter die Drahtzugkraft während des Wickelns mit Hilfe von bekannten Prozessparametern und Prozesssignalen. Die Modellverifikation erfolgt durch den Einsatz von Dehnmessstreifen, mit denen über die an der Wickelnadel auftretenden Biegespannungen auf die herrschende Zugkraft geschlossen werden kann. Die für die Drahtablage relevante Normalenkomponente der Drahtzugkraft ist näherungsweise durch (4.15) gegeben, womit die Drahtzugkraft definiert ist. Damit ist eine positionsabhängige Bestimmung eines kraftabhängigen Verschiebungsvektors ${}^B\mathbf{t}_{i,j,a/e}({}^B\mathbf{f}_{j,i,a/e})$ möglich, der aus der Drahtposition im Wickelbild ${}^B\mathbf{r}_{i,j,a/e}$ die Berechnung der kartesischen Koordinaten des TCPs durch

$${}^B\mathbf{r}_{\text{TCP},i,j,a/e} = {}^B\mathbf{r}_{i,j,a/e} + {}^B\mathbf{t}_{i,j,a/e}({}^B\mathbf{f}_{j,i,a/e}) \quad (4.24)$$

ermöglicht.

Neben der Drahtzugkraft ist auch die Zugänglichkeit zur Nut zu beachten, die speziell beim Stator durch den dünnen Nutschlitz sehr begrenzt ist. Um die Drähte jedoch exakt im Stator positionieren zu können, ist es erforderlich, dass die berechneten TCP-Positionen erreichbar sind. Stenzel et al. verwenden dafür erfolgreich eine gebogene Wickelnadel, die die Nutzugänglichkeit deutlich erhöht [139][21, S. 91, 106–111]. Dabei treten jedoch erhöhte Drahtzugkräfte auf und die zusätzliche Achse zur Drehung der Nadel bedeutet eine komplexere Kinematik. Aus diesem Grund schlägt Stenzel das Konzept der Drehpunktverschiebung (DPVS) vor [21, S. 116–120]. Durch die kinematische Erweiterung der Nadelwickelanlage auf fünf Freiheitsgrade mit einer linearen Achse ermöglicht die DPVS eine gute Nutzugänglichkeit auch bei Verwendung von geraden Wickelnadeln. Dazu erfolgt die Definition virtueller Drehpunkte ${}^B\mathbf{r}_{\text{DPVS},j}$ im Mittelpunkt der Zahnöffnung des Stators. Durch die Drehung um diesen Punkt lässt sich die Wickelnadel relativ zur Nut verstellen. Mit steigendem DPVS-

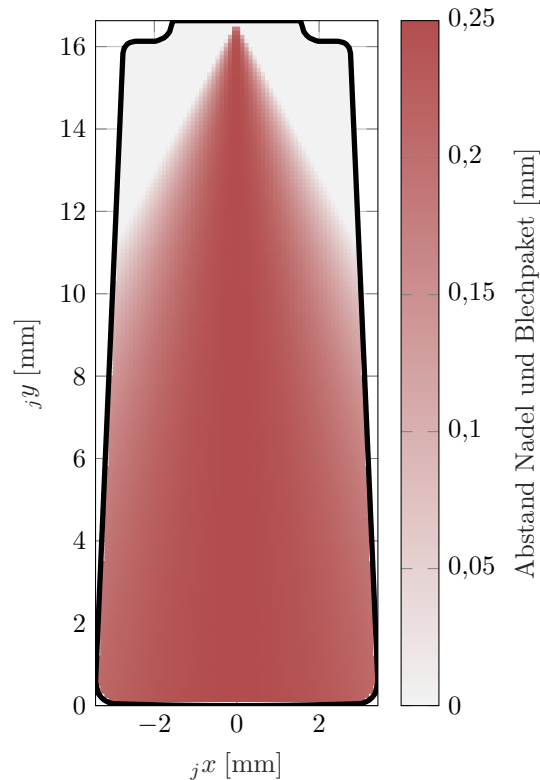


Abbildung 4.16: Nutzugänglichkeit im Stator bei Verwendung der DPVS

Winkel ϕ_{DPVS} sinkt der Abstand zwischen Nadel und Blechpaket, was die Nutzugänglichkeit begrenzt. In Abbildung 4.16 sind für beliebige TCPs in der mechanischen Nut die minimalen Abstände gezeigt, die eine Wickelnadel mit der Breite 2,6 mm zum Blechpaket mit der Nutschlitzbreite 3,1 mm hat.

Es zeigt sich, dass die Zugänglichkeit bei der DPVS vergleichbar mit der einer gebogenen Wickelnadel ist, wobei bei der Verwendung der DPVS jedoch keine erhöhten Drahtzugkräfte auftreten. Die Kombination aus gebogener Wickelnadel und DPVS würde die maximale Zugänglichkeit erlauben, neben der erhöhten Drahtzugkraft aber auch einen großen Aufwand in der Kinematik bedeuten, da zusätzlich zur Wickelkinematik mit fünf Freiheitsgraden auch die Rotation der gebogenen Wickelnadel möglich sein muss. Die volle Zugänglichkeit zur Nut ist nur in den unteren beiden Dritteln gegeben. Vor allem im Bereich der Zahnstege ist keine exakte Drahtpositionierung möglich. Dabei gilt es aber zu beachten, dass beim Berechnen der Wickelbilder zwar der Deckschieber berücksichtigt wird, dessen Montage jedoch erst nach dem Wickeln erfolgt. Die entsprechende Stützstruktur ist daher während des Wickelvorgangs nicht vorhanden und ein geordneter Aufbau des gewünschten Wickelbildes ist in diesen nicht zugänglichen Nutbereichen ohnehin nicht möglich.

Die DPVS lässt sich auch beim Herstellen einer Rotorwicklung anwenden, was allerdings keine Erhöhung der Nutzugänglichkeit zur Folge hat. Durch das radiale Eintauchen der Nadel in den Rotor lassen sich die Drähte in der kompletten Nut exakt ablegen.

In (4.24) erfolgt zunächst nur die Berechnung der kartesischen Position des TCPs bei Eintritt und Austritt in die Ablageregion j . Um die Lage komplett zu definieren, ist nach (3.10) noch die Bestimmung der Werkzeugorientierung notwendig. Beim Nadelwickeln sind dabei die beiden Euler-Winkel ϕ und ψ der Euler Sequenz Z - X - Z mit $\xi = [\phi, \vartheta, \psi]^T$ zu bestimmen. Der Parameter ϑ ist durch den Aufbau des Nadelhalters fest vorgegeben.

Der Winkel ${}_B\phi_{i,j,a/e}$ stellt eine Rotation um die ${}_Bz$ -Achse dar und spiegelt damit die Orientierung der Nadel in der ${}_Bx$ - ${}_By$ -Ebene wider. Diese Orientierung ist im Wesentlichen durch die Position des TCPs ${}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e} = [{}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e,x}, {}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e,y}, {}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e,z}]^T \in \mathbb{R}^3$ von Draht i in Ablageregion j ergänzt um den DPVS-Winkel ${}_B\phi_{\text{DPVS},i,j,a/e}$ gegeben:

$${}_B\phi_{i,j,a/e} = \text{atan2}\left({}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e,x}, {}_{B^r}\mathbf{TCP}_{i,j,a/e,y}\right) + {}_B\phi_{\text{DPVS},i,j,a/e}. \quad (4.25)$$

Bei innengenuteten Statorn zeigt die Nadel dabei von der Symmetrieachse des Stators radial nach außen.

Für alle drei betrachteten Wicklertypen RW, HW und VW gilt (3.13), da die dritte Euler-Drehung ${}_B\psi$ ausschließlich durch die Rotation der Nadel ausführbar ist. Dessen Wert ergibt sich durch die Bedingung, dass kein zu großer Drahtauszugswinkel auftreten darf. Dieser ist als der Winkel definiert, den der Draht mit der Symmetrieachse der Nadel einnimmt. Wenn der Auszugswinkel einen Wert von 90° übersteigt, erhöht sich die Drahtzugkraft deutlich, was große Querschnittsverjüngungen oder sogar Drahttriss zur Folge haben kann [172]. Um dies zu vermeiden, sind Nadelwickler für das Herstellen verteilter Wicklungen mit einer schwenkbaren Nadeldüse ausgestattet. Der zu verwendende Drehwinkel der Nadel ist beim Statorwickeln abhängig von der Ablageregion j und für alle Drähte $i \in \{1, \dots, N_D\}$ einer Region gleich. Daher ist eine Unterscheidung zwischen einem TCP bei Eintritt e und Austritt a in Region j nicht notwendig.

In der Nut, also für $j = 1$ und $j = 3$, gilt für den Euler-Winkel ${}_B\psi_{i,j} = 0$. Diese Nadelstellung garantiert Auszugswinkel kleiner 90° bei maximaler Zugänglichkeit zur Nut. Im Wickelkopf ist die Nadel zu schwenken, um ein Überschreiten der zulässigen Auszugswinkel zu verhindern [30]. Dabei muss zwischen beiden Stirnseiten unterschieden werden. Die Nadel ist stets so auszurichten, dass sie orthogonal zur Stirnseite des Blechpakets steht und zu dieser hin orientiert ist. Unter Annahme der Wickelrichtung aus (4.22) gilt damit für die Region $j = 2$, also der unteren Stirnfläche, ${}_B\psi_{i,2} = -\pi/2$, in Region $j = 4$ entsprechend ${}_B\psi_{i,4} = \pi/2$, sodass sich zusammen

$${}_B\psi_{i,j} = \begin{cases} 0, & j = 1, 3 \\ -\frac{\pi}{2}, & j = 2 \\ \frac{\pi}{2}, & j = 4 \end{cases} \quad (4.26)$$

ergibt. Aus (4.26), (4.25) und (4.24) lassen sich damit die Stützpunkte einer Statorwicklung

in den Arbeitsraumkoordinaten B angeben.

$${}_B\mathbf{s}_{i,j,a/e} = \begin{bmatrix} {}_B\mathbf{r}_{\text{TCP},i,j,a/e} \\ {}_B\phi_{i,j,a/e} \\ {}_B\psi_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \quad (4.27)$$

Für die Berechnung der Stützpunkte einer Rotorwicklung dienen ebenfalls die transformierten TCPs aus (4.23) als Ausgangsbasis. Analog zum Vorgehen beim Stator ist der Winkel ${}_B\phi_{\text{DPVS},i,j,a/e}$ eines Rotorstützpunktes durch die ${}_Bx$ - und ${}_By$ -Koordinaten des TCPs mit

$${}_B\phi_{i,j,a/e} = \text{atan2}\left({}_B r_{\text{TCP},i,j,a/e,1}, {}_B r_{\text{TCP},i,j,a/e,2}\right) + \pi \quad (4.28)$$

bestimmt. Da ein Rotor einem außengenuteten Bauteil entspricht, muss die Nadel in Richtung ${}_Bz$ -Achse orientiert sein, was durch den Summanden π in (4.28) berücksichtigt ist. Bei einer konzentrierten Wicklung ist kein Verstellen der Nadel notwendig, da die Auszugswinkel stets unterhalb von 90° bleiben. Damit ist

$${}_B\psi_{i,j} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N_D\}, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \quad (4.29)$$

Die TCP-Berechnung (4.24) zusammen mit (4.28) und (4.29) ergeben analog zu (4.27) die Stützpunkte der Rotorwicklung. Diese Punkte bilden die Referenz für die Bahnplanung im kommenden Abschnitt.

4.3 NURBS-basierte Bahnplanung

Die Stützpunkte ${}_B\mathbf{s}_{i,j,a/e}$ stellen fünfdimensionale Vektoren dar, die es in der Bahnplanung zu interpolieren gilt. Dabei ist die Bahn der Nadelwickelmaschine in erheblichem Maße vom CAD-Modell des zu bewickelnden Bauteils abhängig [14][33]. Die Analyse von Stator und Rotor zeigt, dass wesentliche Teile der Bahn durch die geometrischen Gegebenheiten der Bauteile festgelegt sind. Durch den axial invarianten Aufbau der Blechpakete ist ein linearer Verfahrensweg, sowohl in der Stator-, als auch in der Rotornut sinnvoll. Aufgrund der radialsymmetrisch angeordneten Statornuten einer Radialflussmaschine bietet sich für den Verfahrensweg im Wickelkopf des Stators ein Kreisbogen an. Beim Rotor lassen sich, abhängig vom Aufbau der Rotornut auf der Stirnseite, sowohl Kreisbögen als auch lineare Verfahrenswege ableiten.

Damit ist die Bahn in der Nut und im Wickelkopf definiert. Die Verbindungsstücke können frei gestaltet werden, einzige Bedingung ist, dass die resultierenden Bahnanteile keine Kollision mit Werkzeugen oder dem Bauteil verursachen. Das Verfahren zum Ableiten einer glatten Nadelwickelbahn basierend auf einem CAD-Modell geht aus [174] hervor.

Die Stützpunkte dienen als Referenz, anhand derer sich die Bahnsegmente ${}_B\mathbf{s}_n$ mit $n \in$

$\{1, \dots, 8 \cdot N_D - 1\}$ berechnen lassen. Die Stator- bzw. Rotorbahn ergibt sich damit zu

Stator	Rotor
$B\mathbf{s}_1 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{1,1,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,1,e}$	$B\mathbf{s}_1 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{1,1,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,1,e}$
$B\mathbf{s}_2 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,1,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,2,a}$	$B\mathbf{s}_2 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,1,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,2,a}$
$B\mathbf{s}_3 = \text{Kreisbogen von } B\mathbf{s}_{1,2,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,2,e}$	$B\mathbf{s}_3 = \text{Bogen/Gerade von } B\mathbf{s}_{1,2,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,2,e}$
$B\mathbf{s}_4 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,2,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,3,a}$	$B\mathbf{s}_4 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,2,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,3,a}$
$B\mathbf{s}_5 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{1,3,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,3,e}$	$B\mathbf{s}_5 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{1,3,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,3,e}$
$B\mathbf{s}_6 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,3,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,4,a}$	$B\mathbf{s}_6 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,3,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,4,a}$
$B\mathbf{s}_7 = \text{Kreisbogen von } B\mathbf{s}_{1,4,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,4,e}$	$B\mathbf{s}_7 = \text{Bogen/Gerade von } B\mathbf{s}_{1,4,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{1,4,e}$
$B\mathbf{s}_8 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,4,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{2,1,a}$	$B\mathbf{s}_8 = \text{Frei von } B\mathbf{s}_{1,4,e} \text{ nach } B\mathbf{s}_{2,1,a}$
$B\mathbf{s}_9 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{2,1,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{2,1,e}$	$B\mathbf{s}_9 = \text{Gerade von } B\mathbf{s}_{2,1,a} \text{ nach } B\mathbf{s}_{2,1,e}$
\vdots	\vdots

Pro Windung sind also acht einzelne Bahnsegmente im Bauteil-KOS B zu definieren, die jeweils einen Stützpunkt als Initial- bzw. Endwert besitzen. Die entsprechenden Bahnformen einer einzelnen Windung sind in Abbildung 4.17 gezeigt. Der Beispielrotor aus Abbildung 4.15 ist so aufgebaut, dass auf der Stirnseite eine Gerade vorzuziehen ist. Aus Drahtnummer i und Ablageregion j lässt sich die Splinenummer n mit

$$n = 8(i - 1) + 2j - 1 \quad (4.30)$$

bestimmen. Die Anzahl der Splinesegmente lautet damit $N_n = 8(N_D - 1) + 2 \cdot 4 - 1 = 8N_D - 1$. Im Segment $B\mathbf{s}_8$ findet der erste sogenannte Windungssprung statt. An diesem Punkt trifft die Wicklung auf den einlaufenden Draht und muss einen Windungsschritt um den Drahtdurchmesser $2r_D$ vollziehen [17, S. 147].

Zur Interpolation dieser Punkte stehen verschiedene Methodiken zur Verfügung. Polynome scheiden aus zweierlei Gründen aus. Zum einen kann ein Polynom zwar die Stützpunkte exakt interpolieren, das Verhalten zwischen diesen Punkten ist jedoch undefiniert und die vorgegebenen linearen oder kreisförmigen Bahnsegmente lassen sich nicht darstellen. Zum anderen kann eine einzelne Spule 200 Windungen oder mehr besitzen, was zu einem Polynom mit Grad $\psi_S = N_n = 8 \cdot N_D - 1$ führt und damit stark schwingendes Verhalten und numerische Ungenauigkeiten zur Folge hätte.

Sinnvoller scheint es, die Bahnsegmente $B\mathbf{s}_n$ einzeln zu interpolieren. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die einzelnen Segmente stetig zu verbinden sind, um insgesamt eine glatte Bahn zu erhalten. Damit bietet sich die Verwendung von Splines an, deren wesentliche Eigenschaft ist, dass sie aus glatt verbundenen Polynomsegmenten bestehen. Die Wahl der

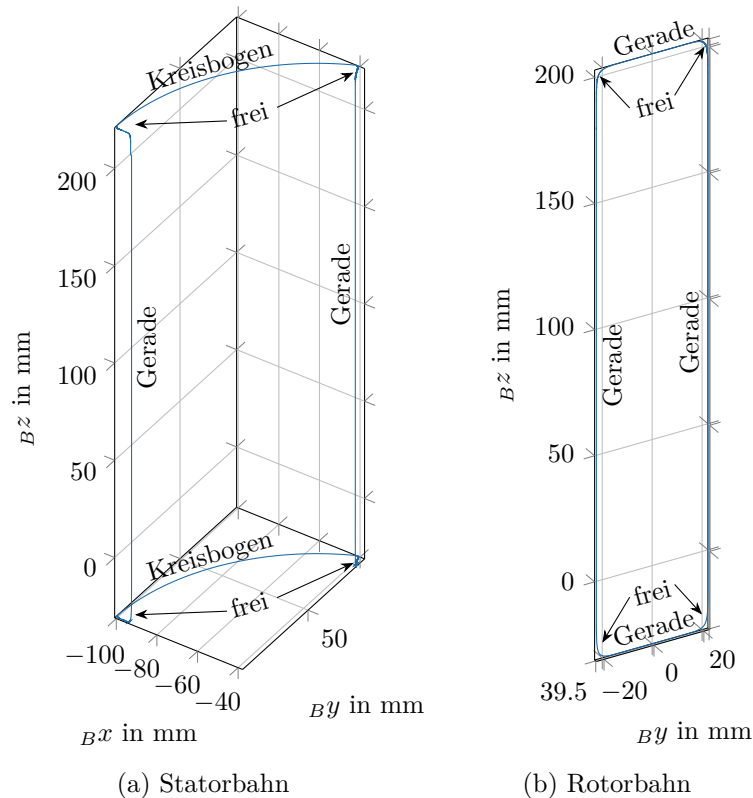


Abbildung 4.17: Grundform der Bahn und deren Segmente eines Stators und eines Rotors

Basis hat dabei erheblichen Einfluss auf die Eigenschaften des Splines. Zur Verfügung stehen die Bézier-Basisfunktionen $B_{i,p}$, die B-Spline Basisfunktionen $N_{i,p}$ sowie die rationalen NURBS-Basisfunktionen $R_{i,p}$. Ein Bézier-Spline besitzt nicht die Eigenschaft der Lokalität, das heißt das Anpassen eines Kontrollpunktes führt dazu, dass sich der komplette Spline ändert. Dies ist beim Nadelwickeln ein nachteiliges Verhalten, da ein lokales Anpassen der Bahn durchaus vonnöten sein kann.

Sowohl B-Splines als auch NURBS besitzen die Eigenschaft der Lokalität und bieten sich daher für die Beschreibung der Nadelwickelbahn an. Der zusätzliche Freiheitsgrad der Gewichte w_i , den ein NURBS gegenüber einem B-Spline besitzt, ermöglicht eine flexiblere Beeinflussung der Spline-Geometrie. Dies führt dazu, dass beispielsweise ein Kreissegment exakt durch einen NURBS dargestellt werden kann [175], wohingegen sich ein solches durch einen B-Spline nur annähern lässt [176]. Sowohl der VW als auch der HW führen die Bewegung auf einer konzentrischen Kreisbahn um die Symmetrieachse des Bauteils mit der Schaltachse durch, sodass kein Nachsteuern der anderen Achsen in diesen Verfahrensbewegungen notwendig ist. Weiterhin verkörpern Kreisbögen einen wesentlichen Teil der Wickelbahn, weshalb ein NURBS zur Beschreibung der Bahnsegmente vorteilhaft ist.

Neben dieser geometrischen Freiheit lässt sich ein NURBS mit Hilfe von (3.79) in einen höherdimensionalen B-Spline transformieren, was die Anwendung numerisch stabiler und effizienter Algorithmen ermöglicht.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst dargestellt, wie sich NURBS aus den geometrisch definierten Bahnteilen und den Stützpunkten ableiten lassen. Anschließend erfolgt die Betrachtung der Zwischensegmente, die als stetige Verbindung der Bahnsegmente dienen.

4.3.1 Lineare Interpolation zweier Punkte

Die lineare Verbindung zweier Punkte in einer parametrischen Form ist in (3.24) gegeben. Diese parametrische Funktion ist jedoch durch einen linearen NURBS \mathbf{s}_1 darzustellen. Dazu sind der Grad des Splines p , der Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} und die Kontrollpunkte \mathbf{p}_i mit den Gewichten w_i mit $i \in \{0, \dots, N_p\}$ zu definieren.

Der Splineparameter u kommt in (3.24) lediglich als lineares Monom vor, weshalb

$$p = 1 \quad (4.31)$$

zu setzen ist. Durch die Erweiterung des Knotenvektors mit (3.61) stellen die Kontrollpunkte \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_{N_p} die beiden Enden des Splines dar und werden exakt interpoliert. Entsprechend sind diese beiden Kontrollpunkte des Splines \mathbf{s}_1 durch

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= B\mathbf{r}_{\text{TCP},i,j,a} \\ \mathbf{p}_{N_p} &= B\mathbf{r}_{\text{TCP},i,j,e} \end{aligned} \quad (4.32)$$

gegeben mit $i \in \{1, \dots, N_D\}$ und $j \in \{1, 3\}$ für die Statoranwendung bzw. $j \in \{1, \dots, 4\}$ beim Rotor. Neben den beiden Enden des Splines sind keine weiteren Punkte zu interpolieren, sodass der Knotenvektor keine inneren Elemente besitzt. Mit Hilfe der Erweiterung (3.61) ergibt sich dieser damit zu

$$\mathbf{u}_{\text{knot}} = \{0, 0, 1, 1\}, \quad (4.33)$$

wobei wieder die übliche Annahme $u_{\min} = 0$ und $u_{\max} = 1$ getroffen wird. Die Anzahl der benötigten Kontrollpunkte für diesen Knotenvektor ist mit (3.57) gegeben durch $N_p + 1 = 2$, sodass mit (4.32) bereits alle Kontrollpunkte definiert sind. Die Gewichte lassen sich durch einen Vergleich von (3.24) mit (3.77) finden, indem die Basisfunktionen mit dem Cox-de Boor Algorithmus (3.46) ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \frac{\sum_{i=0}^1 N_{i,p}(u)w_i\mathbf{p}_i}{\sum_{j=0}^1 N_{j,p}(u)w_j} = \frac{N_{0,1}(u)w_0\mathbf{p}_0 + N_{1,1}(u)w_1\mathbf{p}_1}{N_{0,1}(u)w_0 + N_{1,1}(u)w_1} \\ &= \frac{\left(\frac{u-\bar{u}_0}{\bar{u}_1-\bar{u}_0}N_{0,0}(u) + \frac{\bar{u}_2-u}{\bar{u}_2-\bar{u}_1}N_{1,0}(u)\right)w_0\mathbf{p}_0 + \left(\frac{u-\bar{u}_1}{\bar{u}_2-\bar{u}_1}N_{1,0}(u) + \frac{\bar{u}_3-u}{\bar{u}_3-\bar{u}_2}N_{2,0}(u)\right)w_1\mathbf{p}_1}{\left(\frac{u-\bar{u}_0}{\bar{u}_1-\bar{u}_0}N_{0,0}(u) + \frac{\bar{u}_2-u}{\bar{u}_2-\bar{u}_1}N_{1,0}(u)\right)w_0 + \left(\frac{u-\bar{u}_1}{\bar{u}_2-\bar{u}_1}N_{1,0}(u) + \frac{\bar{u}_3-u}{\bar{u}_3-\bar{u}_2}N_{2,0}(u)\right)w_1}. \end{aligned}$$

Die Basisfunktionen $N_{0,0}(u)$ und $N_{2,0}(u)$ verweisen jeweils auf eine leere Knotenspanne und sind entsprechend Null, während $N_{1,0}(u)$ als Funktion nullten Grades nach (3.42) auf dem Intervall $[0, 1]$ den Wert Eins besitzt. Durch Einsetzen der Elemente des Knotenvektors \mathbf{u}_{knot} ergibt sich

$$\mathbf{s}_1 = \frac{(1-u)w_0\mathbf{p}_0 + uw_1\mathbf{p}_1}{(1-u)w_0 + uw_1}.$$

Ein Koeffizientenvergleich dieser Funktion mit (3.24) liefert die Gewichte des linearen Splines:

$$w_0 = w_1 = 1. \quad (4.34)$$

Damit ist der NURBS, der eine gerade Linie interpoliert, bestimmt. Allerdings bezieht sich der Spline \mathbf{s}_1 mit obiger Definition nur auf die kartesische Position des TCPs, sodass diese noch um die Orientierung der Nadel zu erweitern ist. Indem für die Kontrollpunkte

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= {}_B\mathbf{s}_{i,j,a} \\ \mathbf{p}_1 &= {}_B\mathbf{s}_{i,j,e} \end{aligned}$$

gesetzt wird, lässt sich der Spline $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^5$ zu einer fünfdimensionalen Nadelwickelbahn erweitern. Abbildung 4.18 zeigt die lineare Interpolation des Splines ${}_B\mathbf{s}_3$ der Rotorbahn, bei der neben der kartesischen Position auch der Eulerwinkel ${}_B\phi$ eine Veränderung erfährt. Analog der ${}_B y$ -Koordinate zeigt auch der Eulerwinkel ein lineares Verhalten.

4.3.2 Verbindung zweier Punkte mit einem Kreisbogen

Ein Kreisbogen \mathbf{s}_k lässt sich unter anderem durch seinen Start-, End- sowie seinen Mittelpunkt \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{m} definieren. Die exakte Darstellung eines Kreisbogens mit einem minimalen NURBS wird von Grothmann und Sommer [175] beschrieben. Dabei bestimmt der Öffnungswinkel $\alpha = \angle(\mathbf{r}_0, \mathbf{m}, \mathbf{r}_1)$ die Anzahl der Splinesegmente, die zusammen den gewünschten Kreisbogen ergeben. Dazu werden $N_a = \lceil \alpha/\pi/2 \rceil$ einzelne Segmente mit einem maximalen Öffnungswinkel von $\pi/2$ zu einem Kreisbogen durch Aneinanderreihen der Knotenvektoren und Kontrollpunkte zusammengefügt [65, S. 299].

Basierend auf dem Punkt \mathbf{r}_0 , an dem der Kreisbogen beginnt, lassen sich mithilfe des Mittelpunktes \mathbf{m} die Endpunkte der $N_a + 1$ Teilbögen durch

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{m} + \mathbf{R}_n(\alpha_i)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{m}), \quad i \in \{0, \dots, N_a\} \quad (4.35)$$

mit $\alpha_i = \frac{i\alpha}{N_a}$ berechnen. Die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_n(\alpha_i)$ beschreibt eine Drehung um den Vektor $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T \in \mathbb{R}^3$, die durch eine Aneinanderreihung von Elementarrotationen

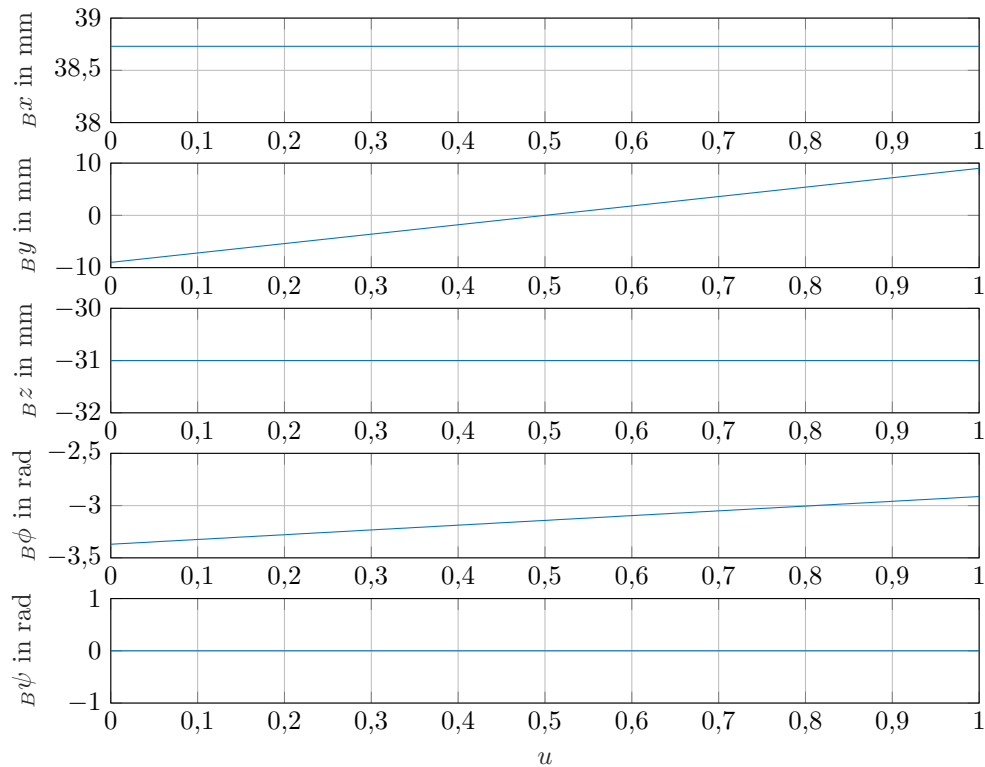


Abbildung 4.18: Fünfdimensionale lineare Splineinterpolation einer Nadelwickelbahn

darstellbar ist. Sie ist bestimmbar durch [42, S. 53 f.]

$$\mathbf{R}_n(\alpha_i) = \begin{bmatrix} n_x^2(1 - \cos\alpha_i) + \cos\alpha_i & n_x n_y(1 - \cos\alpha_i) - n_z \sin\alpha_i & n_x n_z(1 - \cos\alpha_i) + n_y \sin\alpha_i \\ n_x n_y(1 - \cos\alpha_i) + n_z \sin\alpha_i & n_y^2(1 - \cos\alpha_i) + \cos\alpha_i & n_y n_z(1 - \cos\alpha_i) - n_x \sin\alpha_i \\ n_x n_z(1 - \cos\alpha_i) - n_y \sin\alpha_i & n_y n_z(1 - \cos\alpha_i) + n_x \sin\alpha_i & n_z^2(1 - \cos\alpha_i) + \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

mit den Abkürzungen $\sin\alpha_i = \sin(\alpha_i)$ und $\cos\alpha_i = \cos(\alpha_i)$. Alternativ ist auch eine Berechnung dieser Matrix durch das Nutzen von Quaternionen zur Darstellung von Rotationen möglich [44, S. 44 f.][42, S. 54 f.]. Der normierte Vektor \mathbf{n} steht senkrecht auf der Fläche, in der der Kreisbogen liegt, und lässt sich aus dem Kreuzprodukt

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{m}) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{m})}{\|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{m}) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{m})\|}$$

bestimmen.

Um einen NURBS zu bestimmen, ist wiederum die Definition eines Grades p , eines Knotenvektors \mathbf{u}_{knot} , von Kontrollpunkten \mathbf{p}_i und Gewichten w_i mit $i \in \{0, \dots, N_p\}$ notwendig. Da sich ein Kreisbogen auch durch rationale Bézier-Splines von Grad Zwei beschreiben lässt

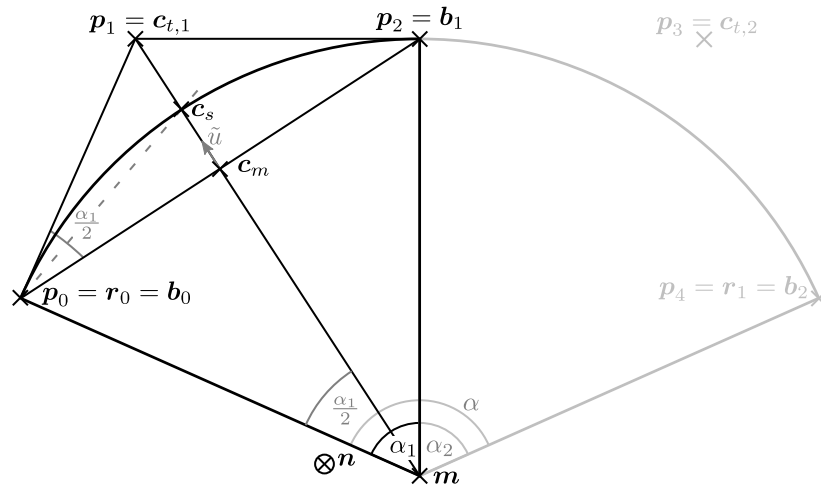


Abbildung 4.19: Beispieldarstellung eines Kreisbogens

[177], muss auch ein NURBS existieren, der einen Kreisbogen darstellen kann und den Grad

$$p = 2 \quad (4.36)$$

besitzt. Hintergrund dafür ist, dass ein rationaler Bézier-Spline lediglich einen Spezialfall eines NURBS verkörpert. Abbildung 4.19 zeigt einen Kreisbogen, mit Hilfe dessen die Ableitung eines NURBS als Beispiel erfolgt.

Die Punkte $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_0$, \mathbf{b}_1 und $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_2$ aus dem Beispiel, die die beiden Kreissegmente begrenzen, müssen vom resultierenden NURBS interpoliert werden. Mit der Knotenerweiterung (3.61) lassen sich die beiden Endpunkte interpolieren. Damit auch \mathbf{b}_1 Teil des Splines ist, muss der Knotenvektor einen inneren Knoten mit Häufigkeit $N_H = p = 2$ besitzen. Für den Splineparameter soll wieder $u \in [0, 1]$ gelten. Da sich \mathbf{b}_1 genau in der Mitte des Kreisbogens befindet, ist es sinnvoll, die inneren Knoten auf $\bar{u} = 1/2$ zu setzen. Für das Beispiel aus Abbildung 4.19 ergibt sich damit der Knotenvektor

$$\mathbf{u}_{\text{knot}} = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right\}.$$

Analog gilt diese Argumentation auch für Kreisbögen mit einem anderen N_a . Allgemein lässt sich daher der Knotenvektor zu

$$\mathbf{u}_{\text{knot}} = \left\{ 0, \frac{0}{N_a}, \frac{0}{N_a}, \dots, \frac{i}{N_a}, \frac{i}{N_a}, \dots, \frac{N_a}{N_a}, \frac{N_a}{N_a}, 1 \right\}, \quad i \in \{1, N_a - 1\} \quad (4.37)$$

bestimmen. Damit existieren insgesamt $N_u + 1 = 2(N_a + p) = 2(N_a + 2)$ Knoten und mit (3.57) ergeben sich $N_p + 1 = 2(N_a - 1) + p + 1 = 2N_a + 1$ Kontrollpunkte.

Insgesamt $N_a + 1$ dieser Kontrollpunkte sind durch die zu interpolierenden Punkte

$$\mathbf{p}_{2i} = \mathbf{b}_i, \quad i \in \{0, \dots, N_a\} \quad (4.38)$$

gegeben. Damit sind noch N_a Kontrollpunkte unbestimmt, weshalb pro Teilbogen ein weiterer Kontrollpunkt zu definieren ist. Aus [65, S. 126] ist bekannt, dass sich die erste Ableitung am Anfang ($u = 0$) bzw. am Ende ($u = 1$) eines NURBS durch eine Linearkombination der Kontrollpunkte \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_1 bzw. \mathbf{p}_{N_p-1} und \mathbf{p}_{N_p} ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)}(0) &= \frac{p}{\bar{u}_{p+1}} \frac{w_1}{w_0} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \\ \mathbf{s}^{(1)}(1) &= \frac{p}{1 - \bar{u}_{N_a-p-1}} \frac{w_{N_p-1}}{w_{N_p}} (\mathbf{p}_{N_p} - \mathbf{p}_{N_p-1}). \end{aligned}$$

Durch den doppelten Knoten $\bar{u}_3 = \bar{u}_4 = 1/2$ gelten diese Gleichungen auch für den halben Kreisbogen, sodass sich für das Beispiel

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)}(0) &= 4 \frac{w_1}{w_0} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \\ \mathbf{s}^{(1)}(1/2) &= 4 \frac{w_1}{w_2} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \end{aligned}$$

als Ableitungen berechnen lassen. Die Ableitung am Kreis ist stets parallel zur Tangente an diesem Punkt. Die Richtung der Ableitungen ist durch die Kontrollpunkte $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ bzw. $(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$ vorgegeben. Da \mathbf{p}_0 bzw. \mathbf{p}_2 exakt die Schnittpunkte der Tangenten mit dem Kreis darstellen, muss \mathbf{p}_1 sowohl auf der Tangente an den Kreisbogen im Punkt $u = 0$, als auch auf der Tangente im Punkt $u = 1/2$ des Kreisbogens liegen. Der Kontrollpunkt \mathbf{p}_1 kann also durch den Schnittpunkt $\mathbf{c}_{t,1}$ der beiden Tangenten bestimmt werden. Berechnen lässt sich dieser zum Beispiel durch das Aufstellen zweier Geradengleichungen mit den Aufpunkten \mathbf{p}_0 bzw. \mathbf{p}_2 und den Richtungsvektoren $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n}$ bzw. $(\mathbf{p}_2 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n}$, da die Tangente orthogonal auf dem Radius steht. Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen lässt sich das LGS

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 + \lambda_0 (\mathbf{p}_0 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{p}_2 + \lambda_1 (\mathbf{p}_2 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \\ \Rightarrow [(\mathbf{p}_0 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \quad - (\mathbf{p}_2 - \mathbf{m}) \times \mathbf{n}] \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

bilden, das aufgelöst nach $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1]^T \in \mathbb{R}^2$ den Schnittpunkt $\mathbf{c}_{t,1}$ liefert. Zu beachten ist, dass (4.39) im dreidimensionalen Raum überbestimmt ist und nur eine Lösung besitzt, wenn das LGS linear abhängig ist. Dies ist hier der Fall, da der komplette Kreisbogen per Definition in einer Ebene liegt. Damit sind die restlichen N_a Kontrollpunkte gegeben durch

$$\mathbf{p}_{2i-1} = \mathbf{c}_{t,i}, \quad i \in \{1, \dots, N_a\}. \quad (4.40)$$

Abschließend sind die Gewichte w_i , $i \in \{0, \dots, N_p\}$ zu bestimmen. Da Grad und Knotenvektor bekannt sind, kann der NURBS aus dem Beispiel im Bereich $0 < u < 1/2$ bestimmt werden. Aus der Lokalität ergibt sich, dass im Intervall $u \in [0, 1/2]$, welches der Spanne $i = 2$ entspricht, lediglich die Basisfunktionen $N_{0,2}, \dots, N_{2,2}$ ungleich Null sind. Für den Spline folgt damit

$$\mathbf{s}_k(u) = \frac{\sum_{i=0}^2 N_{i,p}(u) w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{j=0}^2 N_{j,p}(u) w_j} = \frac{N_{0,2}(u) w_0 \mathbf{p}_0 + N_{1,2}(u) w_1 \mathbf{p}_1 + N_{2,2}(u) w_2 \mathbf{p}_2}{N_{0,2}(u) w_0 + N_{1,2}(u) w_1 + N_{2,2}(u) w_2}, \quad u \in [0, 1/2]. \quad (4.41)$$

Die Basisfunktionen lassen sich durch die Rekursion (3.46) bestimmen und ergeben

$$\begin{aligned} N_{0,2}(u) &= \underbrace{\frac{u - \bar{u}_0}{\bar{u}_2 - \bar{u}_2} N_{0,1}(u)}_{=0} + \underbrace{\frac{\bar{u}_3 - u}{\bar{u}_3 - \bar{u}_1} N_{1,1}(u)}_{=1-2u} = (1 - 2u) \left(\underbrace{\frac{u - \bar{u}_1}{\bar{u}_2 - \bar{u}_1} N_{1,0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\bar{u}_3 - u}{\bar{u}_3 - \bar{u}_2} N_{2,0}}_{=1-2u} \right) \\ &= (1 - 2u)(1 - 2u) = (1 - 2u)^2, \\ N_{1,2}(u) &= \underbrace{\frac{u - \bar{u}_1}{\bar{u}_3 - \bar{u}_1} N_{1,1}(u)}_{=2u} + \underbrace{\frac{\bar{u}_4 - u}{\bar{u}_4 - \bar{u}_2} N_{2,1}(u)}_{=1-2u} = \\ &= 2u(1 - 2u) + (1 - 2u) \left(\underbrace{\frac{u - \bar{u}_2}{\bar{u}_3 - \bar{u}_2} N_{2,0}(u)}_{=2u} + \underbrace{\frac{\bar{u}_4 - u}{\bar{u}_4 - \bar{u}_3} N_{3,0}(u)}_{=0} \right) \\ &= 2u(1 - 2u) + (1 - 2u)2u = 4u(1 - 2u), \\ N_{2,2}(u) &= \underbrace{\frac{u - \bar{u}_2}{\bar{u}_4 - \bar{u}_2} N_{2,1}(u)}_{=2u} + \underbrace{\frac{\bar{u}_5 - u}{\bar{u}_5 - \bar{u}_3} N_{3,1}(u)}_{=2-2u} \\ &= 4u^2 + (2 - 2u) \left(\underbrace{\frac{u - \bar{u}_3}{\bar{u}_4 - \bar{u}_3} N_{3,0}(u) + \frac{\bar{u}_4 - u}{\bar{u}_4 - \bar{u}_3} N_{4,0}(u)}_{=0} \right) = 4u^2. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass auf der zweiten Knotenspanne lediglich die Basisfunktion $N_{2,0}(u) = 1$ ist, während alle anderen Null sind. Der Spline \mathbf{s}_k für das Beispiel auf $0 < u < 1/2$ lautet damit

$$\mathbf{s}_k(u) = \frac{(1 - 2u)^2 w_0 \mathbf{p}_0 + 4u(1 - 2u) w_1 \mathbf{p}_1 + 4u^2 w_2 \mathbf{p}_2}{(1 - 2u)^2 w_0 + 4u(1 - 2u) w_1 + 4u^2 w_2}. \quad (4.42)$$

Zwei der drei Gewichte sind frei wählbar, üblicherweise werden die Gewichte $w_0 = w_2 = 1$ gesetzt [65, S. 293]. Das unbestimmte Gewicht w_1 lässt sich daraus bestimmen, dass der Kreisbogen den Schulterpunkt \mathbf{c}_s interpolieren muss. Dies ist der Punkt, der von der Sekante $\overline{P_0 P_2}$ den maximalen Abstand hat und stellt den Schnittpunkt des Kreisbogens mit der Strecke $\overline{M P_1}$ dar. Der Wert des Splineparameters u , an dem der NURBS den Schulterpunkt \mathbf{c}_s interpoliert, ist dabei frei wählbar. Da der Schulterpunkt genau in der Mitte des Teilbogens

liegt, der den Bereich $0 < u < 1/2$ umfasst, wird $u = 1/4$ als Interpolationspunkt gesetzt. Mit der Wahl der Gewichte ergibt sich damit aus (4.42) [65, S. 294]

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_s = \mathbf{s}_k(1/4) &= \frac{\frac{1}{4}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}w_1\mathbf{p}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{p}_2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{4}} = \frac{\mathbf{p}_0 + 2w_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2 + 2w_1} = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_2)}{1 + w_1} + \frac{w_1\mathbf{p}_1}{1 + w_1} \\ &= \frac{1}{1 + w_1}\mathbf{c}_m + \frac{w_1}{1 + w_1}\mathbf{p}_1, \end{aligned} \quad (4.43)$$

wobei der Ortsvektor \mathbf{c}_m den Mittelpunkt der Sekante $\overline{P_0P_2}$ beschreibt. Nun wird, wie in Abbildung 4.19 gezeigt, eine lineare Interpolation nach (3.24) vom Punkt \mathbf{c}_m nach \mathbf{p}_1 aufgestellt [65, S. 294]:

$$\mathbf{s}_1(\tilde{u}) = (1 - \tilde{u})\mathbf{c}_m + \tilde{u}\mathbf{p}_1. \quad (4.44)$$

Aus einem Vergleich der Koeffizienten von (4.44) und (4.43) ergibt sich für den neuen Splinparameter \tilde{u}^* am Schulterpunkt $\mathbf{c}_s = \mathbf{s}_1(\tilde{u}^*)$

$$\tilde{u}^* = \frac{w_1}{1 + w_1} \Rightarrow w_1 = \frac{\tilde{u}^*}{1 - \tilde{u}^*}.$$

Das Dreieck $P_0P_1P_2$ ist aufgrund der Achsensymmetrie gleichschenkelig. Da die Strecke $\overline{MP_1}$ die Basis $\overline{P_0P_2}$ dieses gleichschenkligen Dreiecks im rechten Winkel schneidet, verkörpert diese die Winkelhalbierende von $\angle(P_0P_1P_2)$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens \mathbf{m} liegt somit auf der Winkelhalbierenden des Dreiecks. Außerdem berührt der Kreisbogen zwei Ecken des gleichschenkligen Dreiecks, weshalb der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und des Kreisbogens \mathbf{c}_s den Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden darstellen muss. Damit liegen auch die Strecken $\overline{P_0C_s}$ und $\overline{P_2C_s}$ auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks $P_0P_1P_2$.

Mit dem Winkelhalbierendensatz lässt sich damit das Gewicht w_1 durch

$$\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{\|\mathbf{c}_m - \mathbf{p}_0\|}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|} = \frac{\|\mathbf{c}_s - \mathbf{c}_m\|}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_s\|} = \frac{\tilde{u}^*}{1 - \tilde{u}^*} = w_1$$

bestimmen [65, S. 295]. Auf entsprechende Weise kann auch das Gewicht w_3 berechnet werden, wenn das Gewicht $w_4 = 1$ gesetzt wird. Allgemein sind die Gewichte für $i \in \{0, \dots, N_p\}$ gegeben durch

$$w_i = \begin{cases} 1, & i \text{ gerade} \\ \cos(\alpha_i/2), & i \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (4.45)$$

Damit ist ein NURBS definiert, der einen beliebigen Kreisbogen darstellen kann. Die gefundene Darstellung verkörpert keine minimale Repräsentation, da sie eine höhere Anzahl an Kontrollpunkten als notwendig besitzt. Generell kann ein Kreisbogen bis zu einem Öffnungs-

winkel von $\alpha = \pi$ durch ein einzelnes Splinesegment mit drei Kontrollpunkten dargestellt werden [175]. Die gewählte Darstellung liefert jedoch eine verbesserte Parametrisierung [65, S. 309], also eine gleichmäßigere parametrische Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}'_k(u)\|$.

Abbildung 4.20 zeigt die Interpolation der Kurve ${}_B\mathbf{s}_3$ einer Statorbahn, die einem Kreisbogen entspricht. Dieser Kreisbogen liegt in der ${}_Bx$ - ${}_By$ -Ebene des B -KOS, der normierte ${}_B\mathbf{n}$ -Vektor lautet ${}_B\mathbf{n} = [0, 0, -1]^T$. Der Mittelpunkt dieser Kreisbahn liegt, entsprechend des radialsymmetrischen Aufbaus eines Statorblechpakets, auf der ${}_Bz$ -Achse von B bei $\mathbf{m} = [0, 0, -31]^T$.

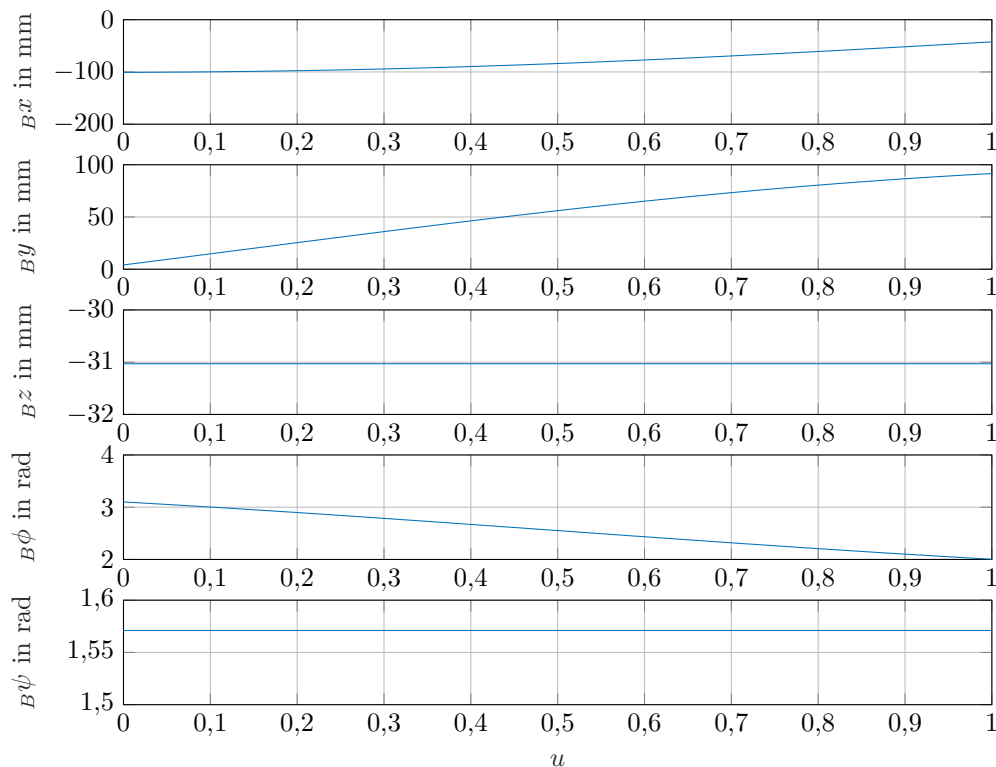


Abbildung 4.20: Fünfdimensionale Splineinterpolation eines Kreisbogens einer Nadelwickelbahn

4.3.3 Stetige Verknüpfung der Bahnsegmente

Die Splinesegmente $\mathbf{s}_1(u)$ und $\mathbf{s}_k(u)$ verkörpern die Teile der Bahn, die durch das zu bewickelnde Bauteil vorgegeben sind. Diese Teile werden von einem nahezu frei definierbaren Spline \mathbf{s}_f verbunden. Das Segment \mathbf{s}_f muss lediglich zwei Bedingungen erfüllen. Zum einen darf keine Kollision mit dem Bauteil oder den Werkzeugen auftreten, zum anderen soll eine glatte Bahn entstehen. Zusätzlich zu diesen zwei Anforderungen hat beim Bewickeln eines Stators in diesem Bahnteil das Schwenken der Nadel von der horizontalen Stellung in der Nut auf den vertikalen Drehwinkel im Wickelkopf zu erfolgen.

Zunächst ist zu definieren, was eine glatte Bahn auszeichnet. Es existieren zwei Konzepte, um die Stetigkeit parametrischer Funktionen, zu denen Splines gehören, zu beschreiben.

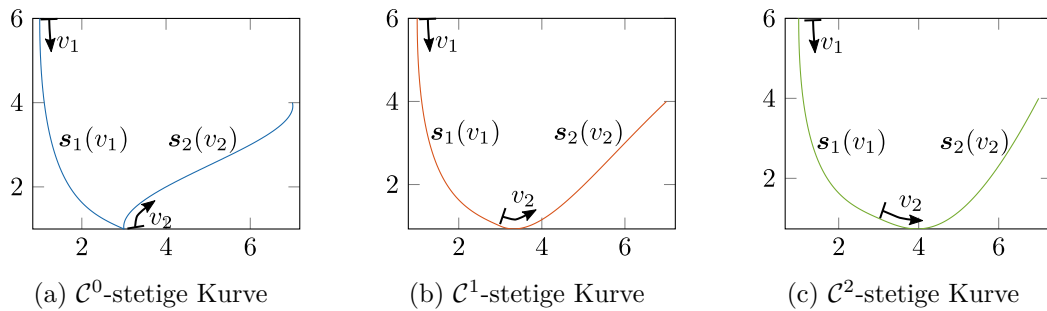


Abbildung 4.21: Parametrische Stetigkeit von Kurven

Parametrische Stetigkeit

Die restriktivere Methodik ist die parametrische Stetigkeit \mathcal{C} [178]. Es sei angenommen, dass sich zwei parametrische Kurven $\mathbf{s}_1(v_1)$ mit dem Splineparameter $v_1 \in [0, 1]$ und $\mathbf{s}_2(v_2)$ mit $v_2 \in [0, 1]$ an einem gemeinsamen Punkt $\mathbf{s}_1(1) = \mathbf{s}_2(0)$ treffen. Die beiden Kurven sind genau dann k -fach parametrisch stetig, auch \mathcal{C}^k -stetig genannt, wenn die ersten k Ableitungen am gemeinsamen Punkt übereinstimmen [178]:

$$\mathbf{s}_1^{(i)}(1) = \mathbf{s}_2^{(i)}(0), \quad i \in \{0, \dots, k\}. \quad (4.46)$$

Abbildung 4.21 zeigt drei Kurvenpaare, die einen unterschiedlichen Grad an geometrischer Stetigkeit besitzen. Die beiden einzelnen Splines sind dabei durch

$$\mathbf{s}(u) = \bigcup_{i=1}^2 \mathbf{s}_i(v_i) = \begin{cases} \mathbf{s}_1(v_1), & v_1 = u & u \in [0, 1] \\ \mathbf{s}_2(v_2), & v_2 = u - 1 & u \in [1, 2] \end{cases} \quad (4.47)$$

verbunden. In den Abbildungen ist der Spline $\mathbf{s}_1(v_1)$ jeweils identisch, lediglich $\mathbf{s}_2(v_2)$ ist mit unterschiedlichen Graden an Stetigkeit angebunden. Die \mathcal{C}^0 -stetige Kurve aus Abbildung 4.21a trifft sich lediglich an einem gemeinsamen Punkt, entsprechend sind nur die 0-ten Ableitungen stetig. Bei den \mathcal{C}^1 - bzw. \mathcal{C}^2 -Kurven aus Abbildung 4.21b bzw. Abbildung 4.21c sind zusätzlich die ersten bzw. die zweiten Ableitungen stetig, sodass beide Kurven auf eine glattere Art und Weise verbunden sind.

Abbildung 4.22 bestätigt diese Aussagen zur Stetigkeit. Dazu wurden die NURBS-Funktionen aus Abbildung 4.21 mit (3.77) und (3.83) ausgewertet. Der gemeinsame Punkt aller drei Kurven ist $\mathbf{s}_1(1) = \mathbf{s}_2(0) = [3, 1]^T$. Die Funktionswerte in Abbildung 4.22a zeigen, dass alle drei Kurven verbunden sind, es ist jedoch bereits an den beiden Knicken der \mathcal{C}^0 -Kurve am Verbindungspunkt $u = 1$ zu erkennen, dass sie an dieser Stelle eine nicht stetige erste Ableitungen besitzt, was sich auch in Abbildung 4.22b bestätigt. In dieser Abbildung ist auch der Verlauf der parametrischen Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}^{(1)}(u)\|$ dargestellt. Diese Grafik zeigt anschaulich, dass aus (4.46), abhängig von k , die Stetigkeit der parametrischen Geschwindigkeit ($k = 1$), Beschleunigung ($k = 2$) etc. folgt. Wie zu erwarten, besitzt in Abbildung 4.22c

lediglich die Kurve mit \mathcal{C}^2 eine stetige zweite Ableitung.

Spline-Funktionen wie B-Splines oder NURBS sind, falls sie innere Knoten besitzen, aus mehreren Segmenten zusammengesetzt. Diese sind abhängig von der Häufigkeit N_H und dem Grad des Splines p am Knotenpunkt $p - N_H$ stetig differenzierbar. Entsprechend besitzen Splines an diesen Stellen eine parametrische Stetigkeit \mathcal{C}^{p-N_H} . Ein kubischer Spline mit $p = 3$ ist also, falls er keine doppelten Knoten besitzt, eine \mathcal{C}^2 -stetige Kurve.

Geometrische Stetigkeit

Die zweite, flexiblere Möglichkeit zur Verbindung zweier Kurven ist die geometrische Stetigkeit \mathcal{G} . Diese Beschreibung der Stetigkeit ist im Gegensatz zur parametrischen Stetigkeit invariant in Bezug auf die Parametrisierung [178].

Der Einfluss der Parametrisierung auf eine \mathcal{C}^k -Stetigkeit sei an folgendem Beispiel dargestellt. Der Spline $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$ entstehe durch die Umparametrisierung von $\mathbf{s}_1(v_1)$ mit $v_1 \in [0, 1]$ durch die einfache lineare Abbildung $f : v_1 \mapsto \check{v}_1 = \lambda \cdot v_1$ mit $\lambda \neq 1, \lambda > 0$. Mit der Kettenregel folgt für die Ableitungen von $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$

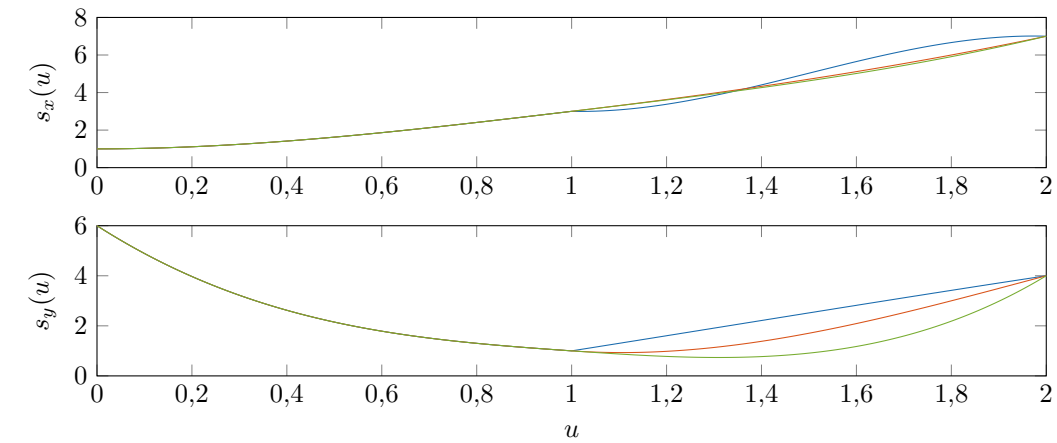
$$\begin{aligned} \frac{d \check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)}{d \check{v}_1} &= \frac{d \mathbf{s}_1(v_1)}{d v_1} \frac{d v_1}{d \check{v}_1} = \lambda^{-1} \mathbf{s}_1^{(1)}(v_1), \\ \frac{d \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(\check{v}_1)}{d \check{v}_1} &= \lambda^{-2} \mathbf{s}_1^{(2)}(v_1), \\ &\vdots \\ \frac{d \check{\mathbf{s}}_1^{(k-1)}(\check{v}_1)}{d \check{v}_1} &= \lambda^{-k} \mathbf{s}_1^{(k)}(v_1). \end{aligned}$$

Die k -te Ableitung von $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$ ist gegenüber der ursprünglichen Ableitung also um einen Faktor λ^{-k} skaliert. Der ursprüngliche Spline $\mathbf{s}_1(v_1)$ sei zudem k -fach parametrisch stetig mit einem zweiten Spline $\mathbf{s}_2(v_2)$ nach (4.46) am Punkt $\mathbf{s}_1(1) = \mathbf{s}_2(0)$ verbunden. Damit ergibt sich für $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$

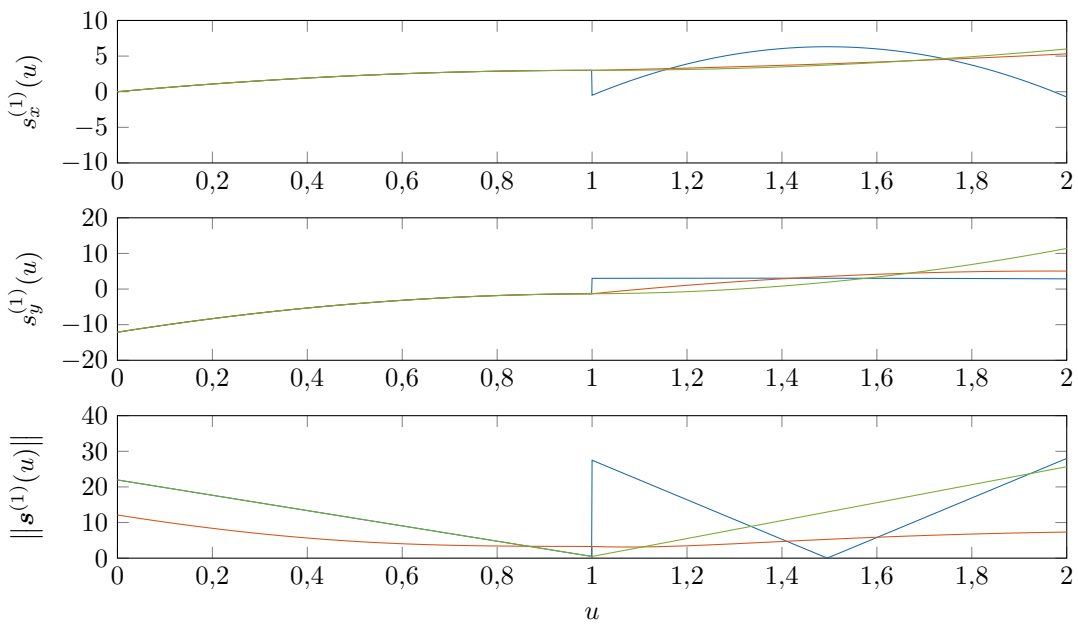
$$\check{\mathbf{s}}_1^{(i)}(\lambda \cdot 1) = \lambda^{-i} \mathbf{s}_1^{(i)}(1) \neq \mathbf{s}_2^{(i)}(0), \quad i \in \{0, \dots, k\}. \quad (4.48)$$

Für ein $\lambda \neq 1$ ist damit die Bedingung der parametrischen Stetigkeit verletzt. Die beiden Parametrisierungen $\mathbf{s}_1(v_1)$ und $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$ sind äquivalent, da die Abbildung f regulär ist, das heißt ihre erste Ableitung $f^{(1)} > 0$ ist [179, S. 15 f.]. Damit beschreiben die beiden Parametrisierungen aus geometrischer Sicht dieselbe Kurve. Daher müssen $\check{\mathbf{s}}_1$ und \mathbf{s}_2 , zumindest aus geometrischer Sicht, stetig verbunden sein.

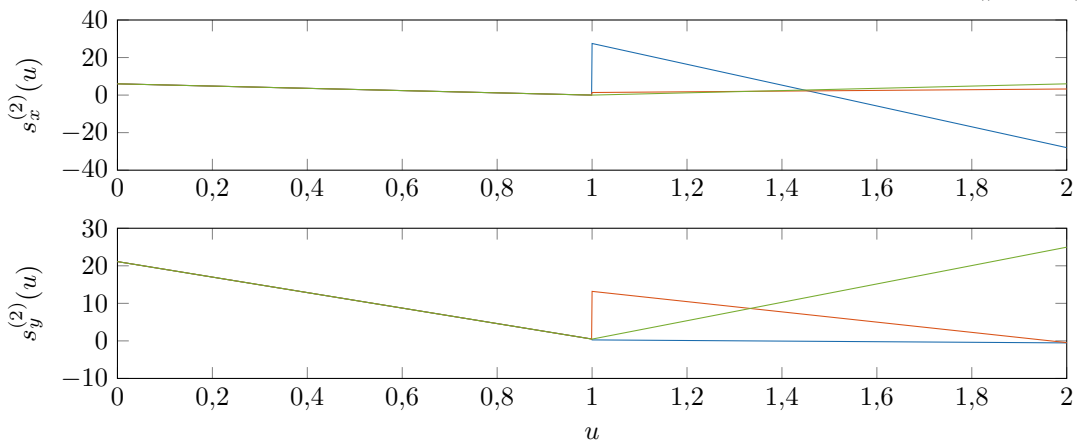
Äquivalente Umparametrisierungen kamen bereits aus (3.90) als Bewegungsgesetz und als PBL in Abschnitt 3.2.6 zum Einsatz. Da an beide Abbildungen die Bedingung $\dot{u} > 0$ bzw. $\frac{d u}{d \sigma} > 0$ gestellt wird, sind sie ebenfalls regulär. Daher haben auch diese Umparametrisierungen keinen Einfluss auf die geometrische Beschaffenheit der Kurve.



(a) Koordinatenverläufe von $\mathbf{s}(u)$



(b) Koordinatenverläufe der ersten Ableitung $\mathbf{s}^{(1)}(u)$ und parametrische Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}^{(1)}(u)\|$



(c) Koordinatenverläufe der zweiten Ableitung $\mathbf{s}^{(2)}(u)$

Abbildung 4.22: Koordinatenverläufe von Kurven verschiedener parametrischer Stetigkeiten, \mathcal{C}^0 -stetige Kurve (—), \mathcal{C}^1 -stetige Kurve (—) und \mathcal{C}^2 -stetige Kurve (—)

Da unterschiedliche Parametrisierungen dieselbe Kurve beschreiben können, muss es Eigenschaften geben, die sich auf die Parametrisierung Kurve beziehen und welche, die unabhängig von der Parametrisierung sind. Merkmale der zweiten Art heißen intrinsische Eigenschaften der Kurve. Für die Ableitung einer Parametrisierung gilt $\mathbf{s}_1^{(1)} = (\check{\mathbf{s}}_1 \circ f)^{(1)} = \check{\mathbf{s}}_1^{(1)} f^{(1)} \neq \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}$, sie ist damit keine intrinsische Eigenschaft der Kurve, da $f^{(1)}$ nicht notwendigerweise Eins ist. Eine sehr ähnliche Eigenschaft ist der normierte Tangentenvektor $\mathbf{t}(\mathbf{s}_1)$. Mit

$$\mathbf{t}(\mathbf{s}_1) = \frac{\mathbf{s}_1^{(1)}}{\|\mathbf{s}_1^{(1)}\|} = \frac{(\check{\mathbf{s}}_1 \circ f)^{(1)}}{\|(\check{\mathbf{s}}_1 \circ f)^{(1)}\|} = \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(1)} f^{(1)}}{\|\check{\mathbf{s}}_1^{(1)} f^{(1)}\|} = \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(1)} f^{(1)}}{\|\check{\mathbf{s}}_1^{(1)}\| \|f^{(1)}\|} = \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(1)}}{\|\check{\mathbf{s}}_1^{(1)}\|} = \mathbf{t}(\check{\mathbf{s}}_1)$$

lässt sich zeigen, dass zwei äquivalente Parametrisierungen für eine reguläre Abbildung f denselben normierten Tangentenvektor besitzen und dieser damit eine intrinsische Eigenschaft der Kurve darstellt. Eine weitere intrinsische Eigenschaft von Kurven ist die geometrische Stetigkeit [178]. Zwei Kurven $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$ und $\mathbf{s}_2(v_2)$ sind genau dann k -fach geometrisch stetig, wenn es eine äquivalente Parametrisierung $\mathbf{s}_1(v_1)$ von $\check{\mathbf{s}}_1$ gibt, die mit \mathbf{s}_2 am gemeinsamen Punkt \mathcal{C}^k -stetig ist [178][179, S. 16]. Nach dieser Definition sind die beiden Kurven $\check{\mathbf{s}}_1$ und \mathbf{s}_2 aus obigem Beispiel geometrisch stetig, da die äquivalente Parametrisierung \mathbf{s}_1 mit \mathbf{s}_2 parametrisch stetig ist. Das Finden einer solchen Parametrisierung ist jedoch nicht immer trivial, sodass ein formeller, algebraischer Nachweis der geometrischen Stetigkeit wünschenswert wäre.

Beta-Bedingungen

Eine Möglichkeit eines solchen Nachweises sind die Beta-Bedingungen. Diese lassen sich über die Kettenregel aus den Ableitungen der Parametrisierung bestimmen. Es sei angenommen, dass sich $\check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)$ und $\mathbf{s}_2(v_2)$ mit \mathcal{G}^k -Stetigkeit an der Stelle $\check{\mathbf{s}}_1(1) = \mathbf{s}_2(0)$ treffen. Dann muss es eine Umparametrisierung $f : [0, 1] \rightarrow [\check{v}_{1,0}, 1]$, $v_1 \mapsto \check{v}_1$ geben, mit der $\mathbf{s}_1(v_1) = \check{\mathbf{s}}_1(f(v_1))$ und $\mathbf{s}_2(v_2)$ \mathcal{C}^k -stetig sind, das heißt es gilt

$$\mathbf{s}_1^{(i)}(1) = \mathbf{s}_2^{(i)}(0), \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nutzen, um die Beta-Bedingungen zu bestimmen, indem die Ableitung von $\check{\mathbf{s}}_1(f(v_1))$ an der Stelle $f(1) = 1$ ausgewertet wird [178]:

$$\left. \frac{d \mathbf{s}_1(v_1)}{d v_1} \right|_{v_1=1} = \left. \frac{d \check{\mathbf{s}}_1(f(v_1))}{d v_1} \right|_{f(1)=1} = \left. \frac{d \check{\mathbf{s}}_1(\check{v}_1)}{d \check{v}_1} \right|_{\check{v}_1=1} \left. \frac{d f(v_1)}{d v_1} \right|_{v_1=1}.$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der parametrischen Stetigkeit (4.46)

$$\mathbf{s}_2^{(1)}(0) = \mathbf{s}_1^{(1)}(1) = \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1) f^{(1)}(1) \tag{4.49a}$$

$$\mathbf{s}_2^{(2)}(0) = \mathbf{s}_1^{(2)}(1) = \check{\mathbf{s}}_1^{(2)}(1)f^{(1)}(1)^2 + \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1)f^{(2)}(1) \quad (4.49b)$$

$$\mathbf{s}_2^{(3)}(0) = \mathbf{s}_1^{(3)}(1) = \check{\mathbf{s}}_1^{(3)}(1)f^{(1)}(1)^3 + 3\check{\mathbf{s}}_1^{(2)}(1)f^{(1)}(1)f^{(2)}(1) + \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1)f^{(3)}(1) \quad (4.49c)$$

$$\vdots$$

und es können ohne Kenntnis der Parametrisierung $\mathbf{s}_1(v_1)$ Bedingungen für die geometrische Stetigkeit angegeben werden. Diese Bedingungen heißen Beta-Bedingungen, deren Schreibweise üblicherweise mit den Abkürzungen $\beta_i = f^{(i)}(1)$ erfolgt [178]. Höhere Ableitungen der parametrischen Funktion $\mathbf{s}_1(v_1)$ lassen sich über die Faà di Bruno-Formel bestimmen [180, S. 481–483]:

$$\frac{d^k \mathbf{s}_1(1)}{d v_1^k} = k! \sum_{j=0}^k \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(j)}(1)}{j!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^k k_i = j, \\ \sum_{i=1}^k i k_i = k, \\ k_1, k_2, \dots, k_k \geq 0}} \frac{j!}{k_1!(1!)^{k_1} k_2!(2!)^{k_2} \dots k_k!(k!)^{k_k}} \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2} \dots \beta_k^{k_k}. \quad (4.50)$$

Für die Ableitung $k = 4$ ergibt sich aus (4.50)

$$\frac{d^4 \mathbf{s}_1(1)}{d v_1^4} = 4! \sum_{j=0}^4 \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(j)}(1)}{j!} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3+k_4=j, \\ k_1+2k_2+3k_3+4k_4=4, \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0}} \frac{j!}{k_1!(1!)^{k_1} k_2!(2!)^{k_2} k_3!(3!)^{k_3} k_4!(4!)^{k_4}} \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2} \beta_3^{k_3} \beta_4^{k_4}.$$

Bei der Auswertung sind die 4-Tupel (k_1, k_2, k_3, k_4) der zweiten Summe für alle $j \in \{0, \dots, 4\}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = j$ und $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 4$ erfüllt sind. Dadurch ergeben sich die Summanden

$$\begin{aligned} j = 0 : \emptyset & \Rightarrow 0, \\ j = 1 : (0, 0, 0, 1) & \Rightarrow \frac{1}{1!(4!)^1} \beta_4^1, \\ j = 2 : (0, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0) & \Rightarrow \frac{2!}{2!(2!)^2} \beta_2^2 + \frac{2!}{1!(1!)^1 1!(3!)^1} \beta_1^1 \beta_3^1, \\ j = 3 : (2, 1, 0, 0) & \Rightarrow \frac{3!}{2!(1!)^2 1!(2!)^1} \beta_1^2 \beta_2^1, \\ j = 4 : (4, 0, 0, 0) & \Rightarrow \frac{4!}{4!(1!)^4} \beta_1^4. \end{aligned}$$

Aus diesen Summentermen lässt sich die Ableitung bestimmen zu

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \mathbf{s}_1(1)}{d v_1^4} &= 24 \left(\frac{1}{24} \beta_4 \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1) + \left(\frac{1}{4} \beta_2^2 + \frac{2}{6} \beta_1 \beta_3 \right) \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(2)}(1)}{2} + \frac{6}{4} \beta_1^2 \beta_2 \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(3)}(1)}{6} + \beta_1^4 \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(4)}(1)}{24} \right) \\ &= \check{\mathbf{s}}_1^{(4)}(1) \beta_1^4 + 6 \check{\mathbf{s}}_1^{(3)}(1) \beta_1^2 \beta_2 + \check{\mathbf{s}}_1^{(2)}(1) (4 \beta_1 \beta_3 + 3 \beta_2^2) + \check{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1) \beta_4. \end{aligned}$$

Das k -Tupel $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ kann als formgebender Parametervektor aufgefasst werden, der es erlaubt, die Kurve $\check{\mathbf{s}}_1$ zu gestalten. Eine Vorgabe der β_i ermöglicht es, mit Hilfe der Beta-Bedingungen die Ableitungen der Kurve $\check{\mathbf{s}}_1$ am Verbindungspunkt so zu berechnen, dass diese geometrisch stetig mit einer zweiten Kurve \mathbf{s}_2 verbunden ist. Als großer Vorteil erweist sich, dass keine Parametrisierung \mathbf{s}_1 mit \mathcal{C}^k -Stetigkeit bestimmt werden muss. Mit den Beta-Bedingungen lässt sich jedoch auch eine Kurve erzeugen, die k -fach parametrisch stetig angebunden ist, indem für das Tupel $\boldsymbol{\beta}$ die Parameter $\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ gesetzt werden, da sich damit die Beta-Bedingungen aus (4.50) auf (4.46) reduzieren [181]. Die Terme der zweiten Summe in (4.50) sind mit diesem $\boldsymbol{\beta}$ nur dann ungleich Null, wenn $k_1 \neq 0$ und $k_2 = \dots = k_k = 0$ gilt. Damit können die Bedingungen $k_1 = j$ und $k_1 = k$ dieser Summe nur für den Fall $j = k$ erfüllt sein und es resultiert

$$\frac{d^k \mathbf{s}_2(0)}{d v_2^k} = \frac{d^k \mathbf{s}_1(1)}{d v_1^k} = k! \frac{\check{\mathbf{s}}_1^{(k)}(1)}{k!} \sum_{k_1=k} \frac{k!}{k_1! (1!)^{k_1}} \beta_1^{k_1} = \frac{d^k \check{\mathbf{s}}_1(1)}{d v_1^k}$$

und damit parametrische Stetigkeit. Ein geometrisch stetig verbundener Spline besitzt in seiner Gestaltung an der Verbindungsstelle die k zusätzlichen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\beta}$. Dabei definiert dieser Parametervektor die Abweichungen, die die Ableitungen zweier Splines am Verbindungspunkt haben dürfen [178]. Damit geht ein zusätzlicher Freiraum einher, der es erlaubt, den anzubindenden Spline, im Vergleich zu einer parametrisch stetig verbundenen Kurve, deutlich freier zu gestalten.

Interpolation des freien Splinesegments der Nadelwickelbahn

Die Nadelwickelbahnen aus Abbildung 4.17 setzen sich stets aus einer Abwechslung von linearen bzw. kreisförmigen und freien NURBS zusammen. Dabei können mit den Stützpunkten die zugehörigen Splines ${}_B \mathbf{s}_1$ und ${}_B \mathbf{s}_k$ bestimmt werden. Diese Stützpunkte stellen zudem die Verbindungspunkte dar, an denen eine stetige Verbindung hergestellt werden muss. Damit sind an beiden Rändern von ${}_B \mathbf{s}_f$ über die Stetigkeitsbedingungen dessen Position und Ableitungen definiert. Für die folgenden Betrachtungen seien die beiden Splines ${}_B \mathbf{s}_1(v_1)$ und ${}_B \mathbf{s}_3(v_3)$ durch die Stützpunkte definiert und entweder linear oder kreisförmig. Diese Splines sollen von einem dritten Spline ${}_B \mathbf{s}_2(v_2)$ stetig verbunden werden. Für alle Splineparameter gelte $v_1, v_2, v_3 \in [0, 1]$.

Wird an den Verbindungsstellen parametrische Stetigkeit \mathcal{C}^k gefordert, ergeben sich für jedes Ende dieses NURBS insgesamt $2(k+1)$ Forderungen.

$${}_B \mathbf{s}_2(1) = {}_B \mathbf{s}_1(1) = {}_B \mathbf{s}_{1,1,e} \quad (4.51a)$$

$${}_B \mathbf{s}_2^{(1)}(0) = {}_B \mathbf{s}_1^{(1)}(1) \quad (4.51b)$$

$$\vdots$$

$${}_B \mathbf{s}_2^{(k)}(0) = {}_B \mathbf{s}_1^{(k)}(1) \quad (4.51c)$$

$${}_B\mathbf{s}_2(1) = {}_B\mathbf{s}_3(0) = {}_B\mathbf{s}_{1,2,a} \quad (4.51d)$$

$${}_B\mathbf{s}_2^{(1)}(1) = {}_B\mathbf{s}_3^{(1)}(0) \quad (4.51e)$$

$$\vdots$$

$${}_B\mathbf{s}_2^{(k)}(1) = {}_B\mathbf{s}_3^{(k)}(0) \quad (4.51f)$$

Diese lassen sich zur Bestimmung des Splines ${}_B\mathbf{s}_2$ verwenden. Die Gleichungen (4.51a) und (4.51d) verkörpern zwei Interpolationsbedingungen der Form (3.68) und entsprechen den Stützpunkten ${}_B\mathbf{s}_{1,1,e}$ und ${}_B\mathbf{s}_{1,2,a}$. Die restlichen $2k$ Forderungen nach stetigen Ableitungen können durch Bedingungen vom Typ (3.70) dargestellt werden.

Für die Definition von ${}_B\mathbf{s}_2(v_2)$ sind wieder der Grad, die Knoten, die Kontrollpunkte und deren Gewichte zu bestimmen. Da lediglich Anfangs- und Endpunkt des Splines zu interpolieren sind, bietet sich die Knotenerweiterung (3.61) an, um die beiden Stützpunkte $\mathbf{p}_0 = {}_B\mathbf{s}_{1,1,e}$ und $\mathbf{p}_{N_p} = {}_B\mathbf{s}_{1,2,a}$ exakt zu interpolieren. Mit dieser Erweiterung lautet der Knotenvektor

$$\mathbf{v}_{2,\text{knot}} = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}. \quad (4.52)$$

Abhängig vom Grad p resultieren damit $N_u + 1 = 2p + 2$ Knoten. Damit ergeben sich mit (3.57) insgesamt $N_p + 1 = p + 1$ Kontrollpunkte, sodass neben den Interpolationsbedingungen noch $p - 1$ zusätzliche Bedingungen an den NURBS gestellt werden müssen. Wird eine \mathcal{C}^k -stetige Verbindung von ${}_B\mathbf{s}_2$ mit ${}_B\mathbf{s}_1$ und ${}_B\mathbf{s}_3$ gefordert, existieren nach (4.51) insgesamt $2(k + 1)$ Forderungen und für den Grad des Splines gilt

$$p = 2k + 1. \quad (4.53)$$

Durch die Verwendung der homogenen Transformation (3.79) lässt sich der NURBS als höherdimensionaler B-Spline interpretieren. Dabei werden die Gewichte $w(u)$ des NURBS als zusätzliche Koordinate interpretiert, wie in Abbildung 3.9 gezeigt. Entsprechend muss auch diese Gewichtskoordinate die Stetigkeitsanforderung erfüllen, damit zwei NURBS \mathcal{C}^k -stetig verbunden sind. Entsprechend lassen sich durch die homogene Transformation der Splines

$${}_B\tilde{\mathbf{s}}_1(v_1) = \mathcal{H}({}_B\mathbf{s}_1(v_1))$$

$${}_B\tilde{\mathbf{s}}_2(v_2) = \mathcal{H}({}_B\mathbf{s}_2(v_2))$$

$${}_B\tilde{\mathbf{s}}_3(v_3) = \mathcal{H}({}_B\mathbf{s}_3(v_3))$$

und die Bedingungen aus (4.51) neben den Kontrollpunkten auch die Gewichte des gesuchten Splines $\mathbf{s}_2(v_2)$ finden. Analog zu (3.74) bilden diese Gleichungen das LGS

$$\begin{bmatrix} N_{0,p}(0) & \cdots & N_{N_p,p}(0) \\ N_{0,p}^{(1)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(0) \\ N_{0,p}^{(k)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(1)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(1) \\ N_{0,p}(1) & \cdots & N_{N_p,p}(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_0^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{p}}_{N_p}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_B\tilde{\mathbf{s}}_1(1)^T \\ {}_B\tilde{\mathbf{s}}_1^{(1)}(1)^T \\ \vdots \\ {}_B\tilde{\mathbf{s}}_1^{(k)}(1)^T \\ {}_B\tilde{\mathbf{s}}_3^{(k)}(0)^T \\ \vdots \\ {}_B\tilde{\mathbf{s}}_3^{(1)}(0)^T \\ {}_B\tilde{\mathbf{s}}_3(0)^T \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

oder kurz $\mathbf{N}\tilde{\mathbf{P}}^T = \tilde{\mathbf{R}}$. Mit der Rücktransformation der homogenen Kontrollpunkte sowie (4.52) und (4.53) ist der NURBS $\mathbf{s}_2(v_2)$, der die beiden Kurven $\mathbf{s}_1(v_1)$ und $\mathbf{s}_3(v_3)$ mit parametrischer Stetigkeit \mathcal{C}^k verbindet, definiert.

Analog zu (4.51) können auch die Bedingungen einer \mathcal{G}^k -stetig angebundenen Kurve $\check{\mathbf{s}}_2$ aufgestellt werden. Dabei wird der Umweg über eine \mathcal{C}^k -stetige Parametrisierung \mathbf{s}_2 genommen, da dies die Berechnung des geometrisch stetigen Splines $\check{\mathbf{s}}_2$ auf Basis der Beta-Bedingungen und der Stetigkeitsbedingungen an den Verbindungsstellen erlaubt.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^{(i)}(1) &= \mathbf{s}_2^{(i)}(0) \\ \mathbf{s}_2^{(i)}(1) &= \mathbf{s}_3^{(i)}(0), \quad i \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

Mit der Faà di Bruno-Formel $\mathbf{F}(i, \cdot)$ aus (4.50) kann die i -te Ableitung von $\mathbf{s}_2^{(i)}(0)$ berechnet werden, ohne dessen Parametrisierung zu kennen, wenn eine \mathcal{G}^k -stetige Kurve $\check{\mathbf{s}}_2$ gegeben ist. Für einen gegebenen β -Parametervektor ergibt sich für die Verbindungsstelle $\mathbf{s}_1(1) = \mathbf{s}_2(0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^{(1)}(1) &= \mathbf{s}_2^{(1)}(0) = \mathbf{F}(1, \beta_1, \check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0)), \\ \mathbf{s}_1^{(2)}(1) &= \mathbf{s}_2^{(2)}(0) = \mathbf{F}(2, \beta_1, \beta_2, \check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0), \check{\mathbf{s}}_2^{(2)}(0)), \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_1^{(k)}(1) &= \mathbf{s}_2^{(k)}(0) = \mathbf{F}(k, \beta_1, \dots, \beta_k, \check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0), \dots, \check{\mathbf{s}}_2^{(k)}(0)). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Für den zweiten Verbindungspunkt mit \mathbf{s}_3 resultieren analog die k Gleichungen

$$\mathbf{s}_3^{(i)}(0) = \mathbf{s}_2^{(i)}(1) = \mathbf{F}(i, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{k+i}, \check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(1), \dots, \check{\mathbf{s}}_2^{(i)}(1)), \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (4.56)$$

mit einem eigenen Parametervektor. Die geometrisch stetigen Ableitungen $\check{\mathbf{s}}_2^{(i)}(0)$ und $\check{\mathbf{s}}_2^{(i)}(1)$ mit $i \in 1, \dots, k$ sind jedoch die gesuchten Größen. Für deren Berechnung sind die Faà di Bruno-Funktionen sequenziell nach den gesuchten Ableitungen $\check{\mathbf{s}}_2^{(i)}(0)$ und $\check{\mathbf{s}}_2^{(i)}(1)$ umzustellen. Es zeigt sich analog zu (4.49a), dass $\check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0)$ dann bestimmbar ist, wenn der benötigte

Parameter β_1 bekannt ist, da ${}_B\mathbf{s}_1^{(1)}(1)$ an der Verbindungsstelle vorgegeben ist. Dieses Ergebnis kann anschließend für das Auflösen von $\mathbf{F}(2, \cdot)$ verwendet werden, die analog zu (4.49b) aufgebaut ist. Die in diesem Schema sequenziell umgestellten Formeln seien im Folgenden als inverse Faà di Bruno-Formel $\mathbf{F}^{-1}(i, \cdot)$ bezeichnet und bestimmen die gesuchten Ableitungen $\check{\mathbf{s}}_2^{(i)}$ an den Verbindungspunkten. Aus diesen Bedingungen lässt sich das LGS mit homogen transformierten Splines

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{0,p}(0) & \cdots & N_{N_p,p}(0) \\ N_{0,p}^{(1)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(0) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(0) \\ N_{0,p}^{(k)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(k)}(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(1)}(1) & \cdots & N_{N_p,p}^{(1)}(1) \\ N_{0,p}(1) & \cdots & N_{N_p,p}(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_0^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{p}}_{N_p}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_B\check{\mathbf{s}}_2(0)^T \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0)^T \\ \vdots \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(k)}(0)^T \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(k)}(1)^T \\ \vdots \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(1)^T \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_2(1)^T \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} {}_B\check{\mathbf{s}}_1(1)^T \\ \mathbf{F}^{-1}\left(1, \beta_1, {}_B\check{\mathbf{s}}_1(1)\right)^T \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{-1}\left(k, \beta_1, \dots, \beta_k, {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(0), \dots, {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(k-1)}(0), {}_B\check{\mathbf{s}}_1^{(k)}(1)\right)^T \\ \mathbf{F}^{-1}\left(k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{2k}, {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(1)}(1), \dots, {}_B\check{\mathbf{s}}_2^{(k-1)}(1), {}_B\check{\mathbf{s}}_3^{(k)}(0)\right)^T \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{-1}\left(1, \beta_{k+1}, {}_B\check{\mathbf{s}}_3^{(1)}(0)\right)^T \\ {}_B\check{\mathbf{s}}_3(0)^T \end{bmatrix} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

ableiten, dessen Lösung die Kontrollpunkte und Gewichte des Splines ${}_B\check{\mathbf{s}}_2$ liefert, der eine \mathcal{G}^k -stetige Verbindung zwischen ${}_B\mathbf{s}_1$ und ${}_B\mathbf{s}_3$ herstellt. Dabei sind die Splines zur Aufstellung der Interpolationsgleichungen wiederum in ihre homogenen Koordinaten transformiert.

Mit (4.51) und (4.57) lassen sich damit der \mathcal{C}^k -stetige Spline ${}_B\mathbf{s}_2$ und der \mathcal{G}^k -stetige Spline ${}_B\check{\mathbf{s}}_2$ berechnen. Abbildung 4.23 zeigt parametrisch und geometrisch stetige Splines mit $k = 3$ für die Rotorbahn. Die ${}_Bx$ -Koordinate ist im betrachteten Trajektorienteil konstant. Die \mathcal{C}^3 -stetige Kurve in Abbildung 4.23 lässt sich ebenfalls aus (4.57) mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ ableiten. Der Vergleich der Kurven zeigt, dass ein höheres β_1 bzw. β_4 bedeutet, dass sie länger den Tangentenrichtungen an den Verbindungsstellen folgt.

Die einzelnen Koordinatenverläufe und deren Ableitungen sind in Abbildung 4.24 dargestellt. Der Gesamtspline entsteht durch die Vereinigung der Einzelsplines analog zu (4.47), indem der Splineparameter u aus den einzelnen v_i zusammengesetzt wird. Obwohl die Koordinaten der geometrisch stetigen Kurven in Abbildung 4.24a einen Knick aufweisen, der sich in der ersten Ableitung in Abbildung 4.24b auch bestätigt, zeigen die resultierenden Splines

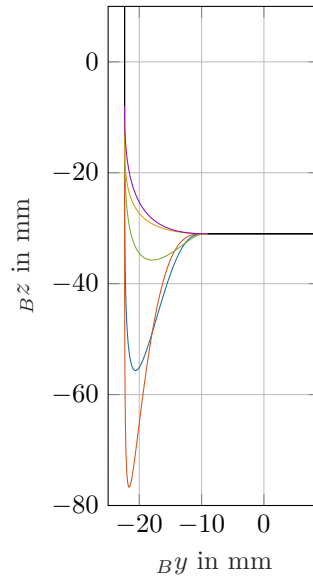
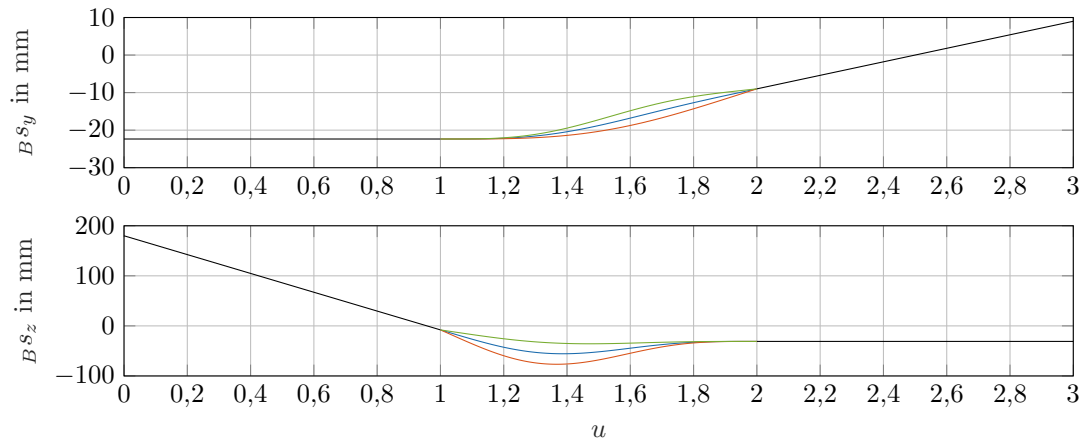


Abbildung 4.23: Stetige Verbindung der Splines \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_3 (—) der Rotorbahn durch eine \mathcal{C}^3 -stetige Kurve (—), eine \mathcal{G}^3 -stetige Kurve mit $\boldsymbol{\beta} = (1,5, 0, 0, 1,5, 0, 0)$ (—), eine \mathcal{G}^3 -stetige Kurve mit $\boldsymbol{\beta} = (0,5, 0, 0, 0,5, 0, 0)$ (—), die \mathcal{G}^3 -stetige Kurve mit minimalem Krümmungsintegral (—) und die \mathcal{G}^3 -stetige Ersatzkurve mit verbesserter Rechenzeit (—).

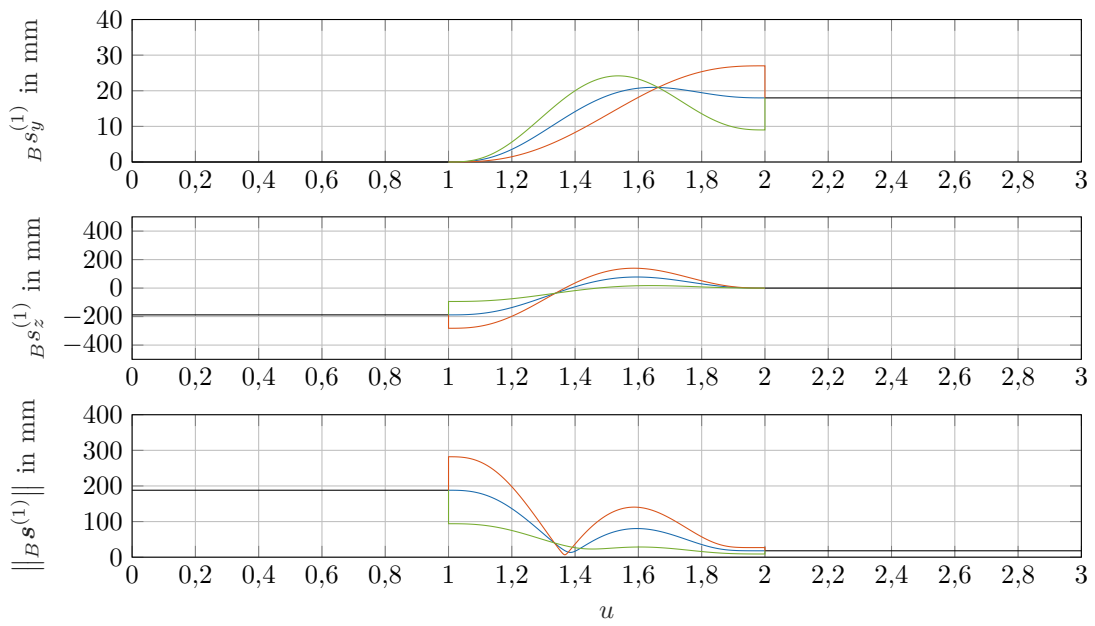
in Abbildung 4.23 glattes Verhalten. Grund dafür ist, dass lediglich die Parametrisierung unstetig ist, nicht die geometrische Form des Splines. Nach [178] besitzt jede geometrisch stetige Kurve eine Parametrisierung, mit der sie parametrisch stetig ist. Für die Beispiele aus Abbildung 4.23 wären diese durch die Umparametrisierung $f : \check{v}_2 \mapsto v_2 = \lambda \cdot \check{v}_2$ mit $\lambda = \beta_1 = \beta_4$ gegeben.

Die Sprünge, die die ersten Ableitungen der geometrisch stetigen Parametrisierungen aufweisen, spiegeln sich auch in der parametrischen Geschwindigkeit in Abbildung 4.24b wider. Alle zweiten Ableitungen erweisen sich als stetig. Dies ist dem Beispiel geschuldet und im Allgemeinen nicht notwendigerweise der Fall. Beide linearen Segmente ${}_B\mathbf{s}_1$ und ${}_B\mathbf{s}_3$ besitzen keine Krümmung, sodass $\mathbf{s}_1^{(2)}(1) = \mathbf{s}_3^{(2)}(0) = 0$ gilt. Nach (4.49b) ergeben sich durch die Wahl der beiden Parametervektoren $\boldsymbol{\beta}$ für die Verbindungsstellen, dass die zweiten Ableitungen der geometrisch stetigen Kurven Null sind. Die Parameter β_1 bzw. β_4 skalieren nach (4.49a) zudem den Betrag der ersten Ableitung, was sich ebenfalls in Abbildung 4.24b zeigt. Die Absolutwerte der Ableitung sind gegenüber den Ableitungen $\mathbf{s}_1^{(1)}(1)$ und $\mathbf{s}_3^{(1)}(0)$ verdoppelt bzw. halbiert.

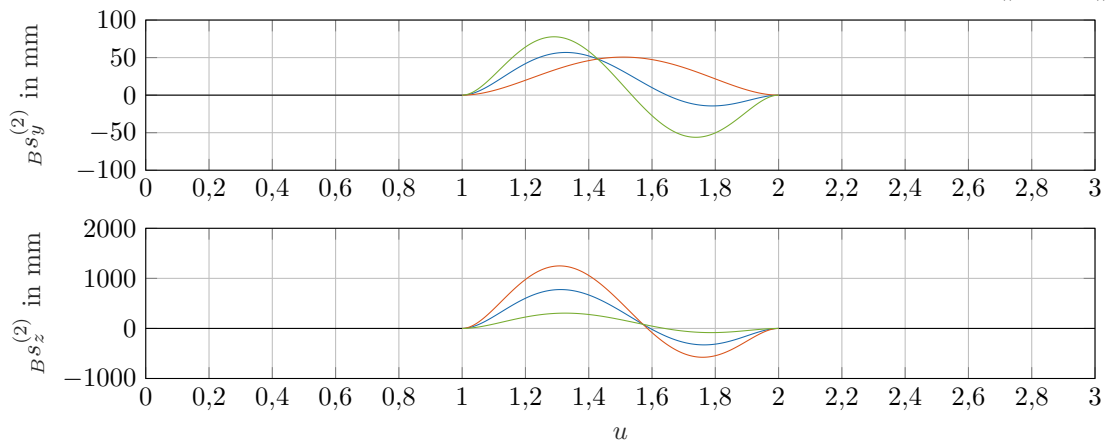
Vergleicht man die resultierenden Nadelwickelbahnen aus Abbildung 4.23 mit der Sollbahn in Abbildung 4.17b, so zeigt sich, dass alle drei erzeugten Bahnen beim Übergang ein überschwingendes Verhalten besitzen. Während beim parametrisch stetigen Spline keine Eingriffsmöglichkeit existiert, lassen sich die \mathcal{G} -stetigen Kurven durch Anpassen des Parametervektors $\boldsymbol{\beta}$ verändern [178]. Aus diesem Grund können Nadelwickelbahnen nur suboptimal durch Aneinanderreihen von \mathcal{C} -stetigen Splines aufgebaut werden. Während der Einfluss des Parameters β_1 auf die resultierende Kurve mit der Skalierung der Tangenten an der Verbin-



(a) Koordinatenverläufe der nullten Ableitung $\mathbf{s}(u)$



(b) Koordinatenverläufe der ersten Ableitung $\mathbf{s}^{(1)}(u)$ und parametrische Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}^{(1)}(u)\|$



(c) Koordinatenverläufe der zweiten Ableitung $\mathbf{s}^{(2)}(u)$

Abbildung 4.24: Koordinatenverläufe bei geometrisch stetiger Verbindung zweier Splines \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_3 (—) am Beispiel der Rotorbahn durch eine C^3 -stetige Kurve (—), eine G^3 -stetige Kurve mit $\beta = (1,5,0,0,1,5,0,0)$ (—) und eine G^3 -stetige Kurve mit $\beta = (0,5,0,0,0,5,0,0)$ (—)

dungsstelle noch einigermaßen greifbar ist, ist das Anpassen der anderen Parameter nicht mehr intuitiv, obgleich dieses für das Erzeugen einer Nadelwickelbahn notwendig ist. Im Sinne einer automatisierten Trajektorienplanung soll zudem ein Eingreifen des Anwenders minimiert werden.

4.3.4 Numerische Bahnoptimierung

Um die manuelle Vorgabe der Beta-Bedingungen durch den Anwender zu vermeiden, ist ein rechnergestütztes Verfahren wünschenswert, das den Parametervektor automatisiert einstellt. Dazu ist jedoch eine detailliertere Betrachtung des Zielsplines ${}_B\mathbf{s}_f$ notwendig. Als Prämisse sei dieser Spline \mathcal{G}^k -stetig mit den anderen Teilen der Nadelwickelbahn verbunden. Hier drängt sich bereits die Frage auf, welchen Wert k mindestens besitzen muss, sprich welche Grad an Glattheit zielführend ist. Bei der Trajektorienplanung ist ein Geschwindigkeitsprofil das Ziel, das zur Vermeidung von Vibrationen eine stetige Beschleunigung und damit begrenzten Ruck besitzt. Da das Bewegungsgesetz $u(t)$ eine Umparametrisierung darstellt, ergibt sich analog zu (4.49b) für einen allgemeinen Spline \mathbf{s} die zweite Ableitung nach der Zeit zu

$$\frac{d^2 \mathbf{s}(u(t))}{d t^2} = \ddot{\mathbf{s}}(u(t)) = \frac{d^2 \mathbf{s}}{d u^2} \left(\frac{d u}{d t} \right)^2 + \frac{d \mathbf{s}}{d u} \frac{d^2 u}{d t^2}. \quad (4.58)$$

Diese Gleichung repräsentiert die Zusammensetzung des Beschleunigungsvektors. Der erste Summand spiegelt die Beschleunigung wider, die sich durch die Krümmung der Kurve ergibt. Der zweite stellt die tangentielle Beschleunigung dar und verkörpert damit die Beschleunigung im Hinblick auf eine sich ändernde TCP-Geschwindigkeit v_f . Daher ist für eine stetige Beschleunigung die Stetigkeit der Krümmung Voraussetzung und die Segmente müssen mit mindestens \mathcal{G}^2 verbunden sein. Da für die Berechnung des Rucks nach (4.49c) zudem die dritte parametrische Ableitung $\mathbf{s}^{(3)}(u)$ notwendig ist, wird für eine ausreichende Glattheit $k = 3$ gewählt.

Die krümmungstetige Verbindung zweier fest definierter Kurvensegmente ist auch ein typisches Problem im Straßenbau. Die Verbindung dieser Kurven wird durch Klothoide umgesetzt, die sich durch eine konstante Änderung der Krümmung auszeichnen [182]. Dadurch ist der Gradient des Lenkwinkels beschränkt und die Insassen eines Fahrzeuges, das einer Klothoide folgt, erfahren stetige Querbeschleunigungen. Die Ableitung der Krümmung ist dabei nicht Null, was mit dem Entstehen eines Querrucks verbunden ist.

Aus diesem Grund soll eine Bahn entstehen, die eine mindestens einfach stetig differenzierbare Krümmung besitzt. Die Krümmung einer allgemeinen parametrischen Kurve $\mathbf{s}(u)$

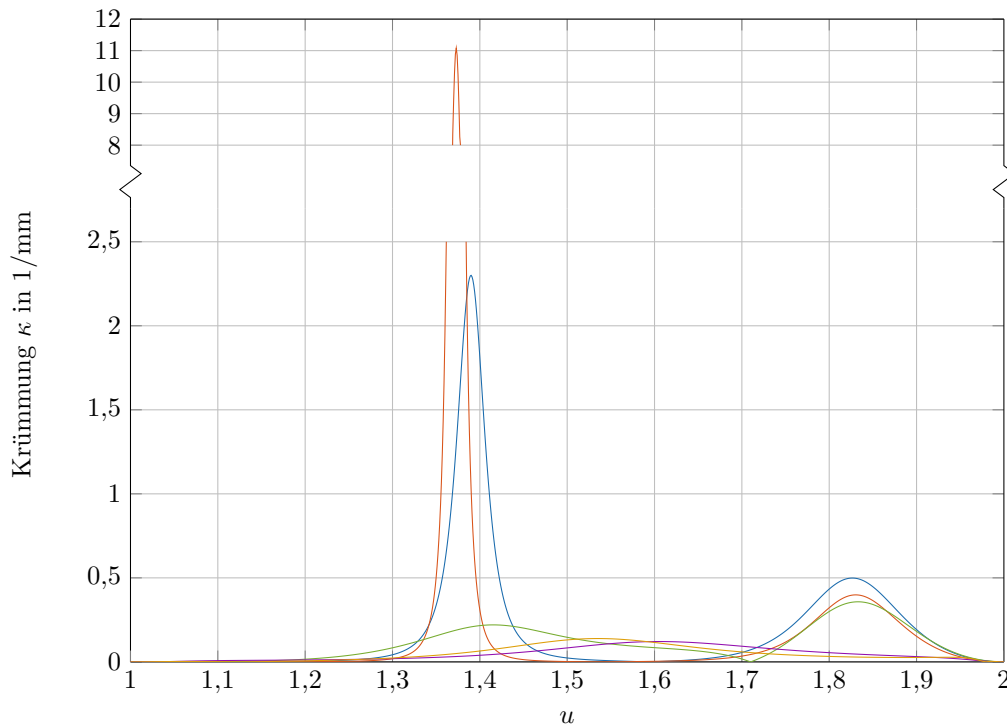


Abbildung 4.25: Krümmungsverhalten verschiedener Splines zur Verbindung der Rotorbahn; \mathcal{C}^3 -stetige Kurve (—), eine \mathcal{G}^3 -stetige Kurve mit $\beta = (1,5, 0, 0, 1,5, 0, 0)$ (—), eine \mathcal{G}^3 -stetige Kurve mit $\beta = (0,5, 0, 0, 0,5, 0, 0)$ (—), eine \mathcal{G}^3 -Kurve mit minimalem Krümmungsintegral (—) sowie die \mathcal{G}^3 -stetige Ersatzkurve (—).

ist gegeben durch [183, S. 206 f.]:

$$\kappa(u) = \frac{\|\mathbf{s}^{(1)}(u) \times \mathbf{s}^{(2)}(u)\|}{\|\mathbf{s}^{(1)}(u)\|^3}. \quad (4.59)$$

Die Krümmung κ verhält sich reziprok zum Radius des Krümmungskreises, der sich am ausgewerteten Punkt an die Kurve anschmiegt. Abbildung 4.25 stellt unter anderem das Krümmungsverhalten der Splines aus Abbildung 4.23 dar. Die Splines ${}_B\mathbf{s}_1$ und ${}_B\mathbf{s}_3$ besitzen als Geraden die Krümmung Null. Alle Kurven zeigen ein glattes Krümmungsverhalten und erfüllen damit diese Forderung. Speziell die Kurve mit dem Parametervektor $\beta = (1,5, 0, 0, 1,5, 0, 0)$ besitzt am Scheitelpunkt einen sehr hohen Krümmungswert. Die Krümmung einer Kurve verhält sich qualitativ invers proportional zum erreichbaren Vorschub v_{fr} . Je höher die Krümmung ist, desto schneller müssen die Achsen eine Richtungsänderung vornehmen. Da die Beschleunigung der Achsen begrenzt ist, resultiert an diesen Stellen eine geringere Maximalgeschwindigkeit.

Da ein höherer Vorschub eine kleinere Bewicklungszeit bedeutet, ist eine Bahn wünschenswert, die eine minimale Krümmung besitzt. Zudem soll auch die Änderungsrate der Krümmung, also deren Ableitung, berücksichtigt werden, da dies analog zum Ruck zu Vibrationen der Anlage und damit hohen Belastungen führen kann. Mit dem Parametervektor β existiert eine Möglichkeit die resultierende Bahn anzupassen. Entsprechend wird eine Kostenfunktion

gewählt, die sich aus einer gewichteten Summe der Gesamtkrümmung sowie deren Ableitung bestimmt. Für jeden Spline ${}_B\mathbf{s}_i(u)$ mit $i \in \{2, 4, \dots, N_n - 1\}$ ergibt dieser Ansatz das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\beta_i} J_{f,i} &= \int_{i-1}^i \kappa_i(v_i) \, d v_i + 8 \int_{i-1}^i |\kappa_i'(v_i)| \, d v_i = \\ &= \int_{i-1}^i \frac{\|{}_B\mathbf{s}_i^{(1)}(v_i) \times {}_B\mathbf{s}_i^{(2)}(v_i)\|}{\|{}_B\mathbf{s}_i^{(1)}(v_i)\|^3} \, d v_i + 8 \int_{i-1}^i \frac{d}{d v_i} \left| \frac{\|{}_B\mathbf{s}_i^{(1)}(v_i) \times {}_B\mathbf{s}_i^{(2)}(v_i)\|}{\|{}_B\mathbf{s}_i^{(1)}(v_i)\|^3} \right| \, d v_i. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die Verbindungssplines $\mathbf{s}_i(u)$ sind \mathcal{G}^3 -stetig und berechnen sich aus dem Parametervektor β_i mit Hilfe von (4.57). Die Bedingung, dass der Spline \mathcal{G}^k und dessen Krümmung stetig differenzierbar sind, ist durch die Anwendung der Beta-Bedingungen β_i bereits gegeben und muss daher nicht in der Optimierung berücksichtigt werden. Die Lösung des Problems erfolgt mit SQP. Der mit der Optimierung berechnete Spline ist ebenfalls in Abbildung 4.23 gegeben, dessen Krümmung zeigt Abbildung 4.25. Die resultierende Kurve ist konvex. In jedem Punkt liegt sie auf derselben Halbebene, die durch eine beliebige Tangente an die Kurve bestimmt ist. Der Parametervektor der dargestellten krümmungsoptimierten Kurve lautet $\beta = [10,31, -596,95, 2,88, 8,68, -1910,8, -4,86]$.

Diese Berechnung liefert zwar eine krümmungsoptimale stetige Splinerverbindung ${}_B\mathbf{s}_f(u)$, besitzt aber eine relativ lange Rechenzeit, da für jede Auswertung der Kostenfunktion zunächst die Kontrollpunkte nach (4.57) und anschließend die Krümmung zu bestimmen sind. Unter dem Gesichtspunkt, dass eine Nadelwickelbahn große Längen besitzt und sich die Rechenzeit damit nochmals vervielfacht, ist eine alternative Berechnung stetiger Verbindungssplines wünschenswert. Eine Analyse der Kontrollpunkte des krümmungsoptimierten Splines ${}_B\mathbf{s}_f(u)$ zeigt, dass die Kontrollpunkte ${}_B\mathbf{p}_3$ und ${}_B\mathbf{p}_4$ im optimalen Fall stets eine geringe geometrische Distanz besitzen. Aus diesem Grund wird die Ersatz-Kostenfunktion

$$\min_{\beta_i} \hat{J}_{f,i} = \|{}_B\mathbf{p}_3 - {}_B\mathbf{p}_4\| \quad (4.61)$$

angesetzt, welche die euklidische Distanz der Kontrollpunkte ${}_B\mathbf{p}_3$ und ${}_B\mathbf{p}_4$ von Spline ${}_B\mathbf{s}_i(u)$ minimiert. Das Ergebnis dieser Optimierung ist ebenfalls in Abbildung 4.23 dargestellt. Die krümmungsoptimale Bahn und die mit (4.61) bestimmte Ersatzkurve besitzen eine ähnliche Form. In Abbildung 4.25 zeigt sich zudem, dass die Ersatzkurve, wie zu erwarten, keine Optimalität in der Krümmung besitzt, allerdings ein ausreichend gutes Verhalten zeigt. Daher verkörpert die Ersatzkurve eine gute Näherung an die optimale Kurve, sodass diese für die weiteren Phasen der Trajektorienplanung eingesetzt wird. Der Parametervektor der Ersatzkurve für das gezeigte Beispiel lautet $\beta = [11,36, 1429,6, 93,54, 6,27, 585,8, 1332,5]$. Der Vergleich dieses Parametervektors mit dem der optimalen Kurve zeigt bereits signifi-

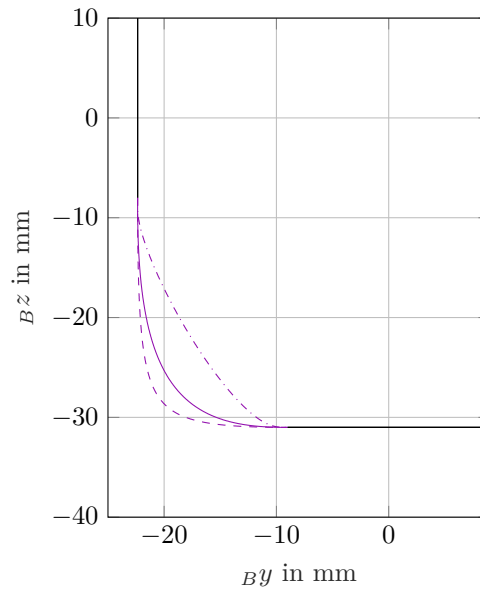


Abbildung 4.26: Auswirkung verschiedener Gewichte auf die Splinegeometrie mit $w_3 = w_4 = 1$ (—), $w_3 = w_4 = 2$ (---) und $w_3 = w_4 = 0.2$ (-.-).

kante Abweichungen in den einzelnen Werten, obwohl sich die resultierenden Kurven nur wenig unterscheiden. Dies verdeutlicht nochmals, warum ein rechnergestütztes Anpassen der Beta-Bedingungen notwendig ist.

Neben dem Parametervektor existiert noch eine Möglichkeit, mit der die Form eines \mathcal{G}^3 -Splines angepasst werden kann. Nach (4.53) besitzt ein solcher NURBS den Grad $p = 7$. Damit resultieren insgesamt $N_p + 1 = 8$ Kontrollpunkte ${}_B\mathbf{p}_i$ und Gewichte w_i , $i \in \{0, \dots, 7\}$. Aus [65, S. 99] ist bekannt, dass die zweite Ableitung eines NURBS ${}_B\mathbf{s}^{(2)}(u)$ an den Enden durch die ersten bzw. letzten drei Kontrollpunkte definiert ist. Damit können die Kontrollpunkte ${}_B\mathbf{p}_3$ und ${}_B\mathbf{p}_4$ bzw. Gewichte w_3 und w_4 variiert werden, ohne dass dies eine Auswirkung auf die zweite Ableitung an den Enden hat. Somit bleibt auch die Krümmung an diesen Punkten nach (4.59) unbeeinflusst und es besteht nach wie vor eine krümmungsstetige Anbindung des Splines. Da zudem die dritten Ableitungen der definierten Splines ${}_B\mathbf{s}_1$ und ${}_B\mathbf{s}_k$ an den Verbindungsstellen den Wert Null annehmen, wirkt sich eine solche Anpassung ebenfalls nicht auf die Differenzierbarkeit der Krümmung an den Verbindungsstellen aus. Werden die Kontrollpunkte ${}_B\mathbf{p}_3$ und ${}_B\mathbf{p}_4$ verändert, beeinflusst dies jedoch wesentlich die Grundform der Bahn, wohingegen das Anpassen der Gewichte einen besser kontrollierbaren Effekt auf die Bahn ausübt. Die Auswirkung verschiedener Gewichte auf die Ersatzkurve mit $w_3 = w_4 = 1$ zeigt Abbildung 4.26. Abhängig von der Wahl der Gewichte besitzen diese eine anziehende ($w_i > 1$) oder abstoßende ($0 < w_i < 1$) Wirkung auf den Spline. Durch das Anpassen der Gewichte lässt sich qualitativ ein eckigerer bzw. runderer Spline erreichen. Wird eine solche Anpassung auf den krümmungsoptimalen Spline angewendet, geht die Optimalität in der Krümmung verloren.

Optimierung einer Statorbahn

Bisher wurde die Erzeugung einer Nadelwickelbahn am Beispiel eines Rotors diskutiert. Die untersuchten Algorithmen lassen sich aber auch zur Berechnung einer Statorbahn verwenden.

Dazu ist allerdings das Hinzufügen zweier weiterer Bedingungen in (4.57) notwendig, um die gewünschte Bahn aus Abbildung 4.17a nachbilden zu können. Nach dem Verlassen der Statornut beginnt der Schwenkvorgang der Düse von der horizontalen in eine vertikale Stellung. Gleichzeitig bewegt sich der TCP radial nach außen hinter das Wickelwerkzeug. Erst im Anschluss erfolgt der Übergang in den rotatorischen Teil von ${}^B\mathbf{s}_f$, in dem die Nadel dann bereits die vertikale Stellung eingenommen hat.

Um diese Bahn nachzubilden, ist neben den Stützpunkten ein weiterer zu interpolierender Bahnpunkt

$${}^B\mathbf{s}_{i,j,zus} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{s}_{i,j,zus,x} \\ {}^B\mathbf{s}_{i,j,zus,y} \\ {}^B\mathbf{s}_{i,j,zus,z} \\ {}^B\phi_{i,j,zus} \\ {}^B\psi_{i,j,zus} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

zu bestimmen, der den Beginn bzw. den Abschluss der Schwenkbewegung der Nadel markiert. Die kartesischen Koordinaten dieses Bahnpunktes lassen sich aus den Referenzpunkten durch eine Fallunterscheidung berechnen und werden aus zwei Komponenten zusammengesetzt. Die erste Komponente beschreibt die Position in der Bx - By -Ebene. Diese entsteht durch die Translation

$${}^B\mathbf{s}_{i,j,zus,xy} = \begin{cases} {}^B\mathbf{s}_{i,j,e,xy} + \lambda \cdot \|{}^B\mathbf{s}_{i,j+1,a,xy} - {}^B\mathbf{s}_{i,j,e,xy}\| \cdot \frac{{}^B\mathbf{s}_{i,j,e,xy}}{\|{}^B\mathbf{s}_{i,j,e,xy}\|} & \text{Nut} \rightarrow \text{Wickelkopf} \\ {}^B\mathbf{s}_{i,j+1,e,xy} + \lambda \cdot \|{}^B\mathbf{s}_{i,j,a,xy} - {}^B\mathbf{s}_{i,j+1,e,xy}\| \cdot \frac{{}^B\mathbf{s}_{i,j+1,e,xy}}{\|{}^B\mathbf{s}_{i,j+1,e,xy}\|} & \text{Wickelkopf} \rightarrow \text{Nut} \end{cases}$$

mit den in die Bx - By -Ebene projizierten Referenzpunkten, die eine radial nach außen orientierte Verschiebung vom Referenzpunkt in der Nut darstellt. Der Parameter $\lambda \in [0, 1]$ beschreibt das Streckenverhältnis zwischen diesem zusätzlichen Punkt und den beiden Stützpunkten. Als geeigneter Wert für das Erzeugen der Statorbahn hat sich $\lambda = 0,5$ gezeigt. Die zweite Komponente umfasst die Bz -Koordinate des Referenzpunktes im Wickelkopf

$${}^B\mathbf{s}_{i,j,zus,z} = \begin{cases} {}^B\mathbf{s}_{i,j+1,a,z}, & \text{Nut} \rightarrow \text{Wickelkopf} \\ {}^B\mathbf{s}_{i,j,e,z} & \text{Wickelkopf} \rightarrow \text{Nut} \end{cases}.$$

Damit ist die kartesische Position des zusätzlichen Bahnpunktes definiert. Die beiden Euler-

winkel lassen sich direkt angeben. Sie lauten

$${}_B\phi_{i,j,zus} = \text{atan2}(s_{i,j,zus,x}, s_{i,j,zus,y})$$

und

$${}_B\psi_{i,j,zus} = \begin{cases} {}_B\psi_{i,j+1} & \text{Nut} \rightarrow \text{Wickelkopf} \\ {}_B\psi_{i,j} & \text{Wickelkopf} \rightarrow \text{Nut} \end{cases},$$

da die Orientierung radial nach außen gerichtet ist und in diesem Punkt das Nadelschwenken abgeschlossen sein soll. Neben der absoluten Position ${}_B\mathbf{s}_{i,j,zus}$ ist auch die Ableitung anzugeben, damit die Bahn in diesem Punkt korrekt gerichtet ist. Wie Abbildung 4.17a zeigt, verläuft sie nach dem Austritt bzw. vor dem Eintritt in die Nut in radialer Richtung. Gleichzeitig soll kein Schwenkvorgang sowie keine Drehung der Nadelorientierung stattfinden. Damit muss der Tangentenvektor

$${}_B\mathbf{s}_{i,j,zus}^{(1)} = [\cos(\varphi_{zus}), \sin(\varphi_{zus}), 0, 0, 0]^T$$

mit

$$\varphi_{zus} = \begin{cases} {}_B\phi_{i,j,zus} & \text{Nut} \rightarrow \text{Wickelkopf} \\ {}_B\phi_{i,j,zus} + \pi & \text{Wickelkopf} \rightarrow \text{Nut} \end{cases}$$

lauten. Der Punkt ${}_B\mathbf{s}_{i,j,zus}$ und dessen Ableitung bilden zwei weitere Bedingungen, die nach dem LGS (4.57) zu zwei zusätzlichen Kontrollpunkten führen. Der Parametervektor β in diesen Gleichungen ist wiederum das Ergebnis der Optimierung mit (4.61).

Abbildung 4.27 zeigt die kartesischen Koordinaten des resultierenden Splines ${}_B\mathbf{s}_2$. Er ist stetig an die bestehenden Splines ${}_B\mathbf{s}_1$ in der Nut und ${}_B\mathbf{s}_3$ im Wickelkopf angebunden. Im Punkt ${}_B\mathbf{s}_{1,1,zus}$ darf durch die Vorgabe der Ableitung des Splines ${}_B\mathbf{s}_2^{(1)}$ an dieser Stelle nur eine Bewegung in radialer Richtung, in diesem Fall nach außen, stattfinden.

4.4 Vorschubplanung und -optimierung

Die Folge der einzelnen NURBS ${}_B\mathbf{s}_n(v_n)$ mit $n \in \{1, \dots, N_n\}$ im Bauteil-KOS B beschreibt die Nadelwickelbahn. Um eine Trajektorie zu erhalten, ist ein Bewegungsgesetz zu definieren, das den Splineparameter mit der Zeit verbindet. Dazu müssen die NURBS als eine einzelne, zusammenhängende Bahn beschrieben werden. Eine Möglichkeit dafür ist das Bilden einer

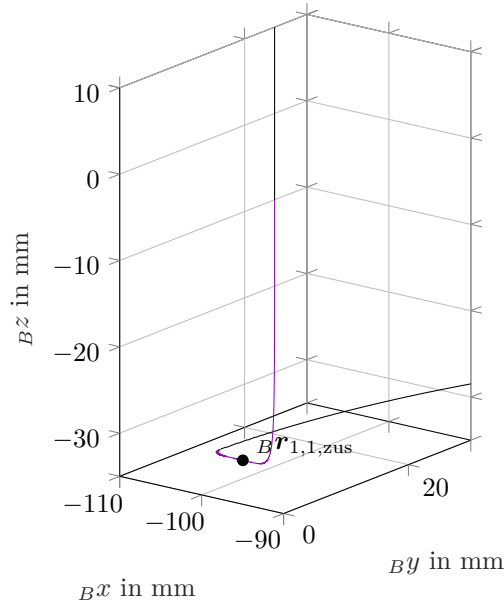


Abbildung 4.27: Verbindungsspline $B\mathbf{s}_2$ (—) zwischen dem linearen Spline $B\mathbf{s}_1$ und dem kreisförmigen Spline $B\mathbf{s}_3$ (—) einer Statorbahn.

Vereinigung aller Splines durch

$$B\mathbf{s}(u) = \bigcup_{n=1}^{N_n} B\mathbf{s}_n(v_n) = \begin{cases} B\mathbf{s}_1(u), & 0 \leq u < 1 \\ B\mathbf{s}_2(u-1), & 1 \leq u < 2 \\ \dots \\ B\mathbf{s}_{N_n}(u - (N_n - 1)), & (N_n - 1) \leq u \leq N_n \end{cases} \quad (4.62)$$

analog zu (4.47). Stetig verbundene NURBS lassen sich jedoch auch durch einen einzelnen NURBS beschreiben [65, S. 192]. Dazu müssen sie jedoch denselben Grad p besitzen. Ein Polynom $s(u) \in \mathcal{S}_{N_r}$ lässt sich relativ leicht auf Grad $N_r + 1$ erhöhen, indem der neue Parameter a_{N_r+1} in monomialer Basis (3.26) bzw. c_{N_r+1} in der Newton-Basis (3.30) Null gesetzt wird. Da Splines gestückelte Polynome darstellen, muss es ebenfalls möglich sein, den Grad eines Splines zu erhöhen. Dazu ist ein neuer Knotenvektor $\check{\mathbf{u}}_{\text{knot}}$ und eine neue homogene Kontrollpunktematrix $\check{\mathbf{P}}$ so zu berechnen, dass

$$\check{\mathbf{s}}(u) = \sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) \check{\mathbf{p}}_i = \sum_{j=0}^{\check{N}_p} N_{j,p+1}(u) \check{\mathbf{p}}_j = \check{\mathbf{s}}(u)$$

gilt [65, S. 188 f.]. Durch gezieltes Einfügen und Entfernen von Knotenpunkten lassen sich effizientere Algorithmen als das Lösen dieses LGS zum Erhöhen des Grades p ableiten [65, S. 201–209].

Um den Grad verschiedener Splines anzugleichen, besteht auch die Möglichkeit der Reduktion des Splinegrades. Dies ist aber, im Gegensatz zu einer Erhöhung, nicht bei jedem

Spline möglich und in der numerischen Genauigkeit begrenzt [65, S. 212]. Aus diesem Grund erfolgt das Anpassen der Splinegrade durch Graderhöhung.

Die einzelnen, mindestens \mathcal{G}^0 -stetig verbundenen homogenen Splines ${}_B\tilde{\mathbf{s}}_n(v_n)$ besitzen die homogenen Kontrollpunkte ${}_B\tilde{\mathbf{p}}_{i,n}$, Knotenvektoren \mathbf{v}_n mit den Elementen $\bar{v}_{j,n}$ und den Grad p_n mit $n \in \{1, \dots, N_n\}$, $j \in \{0, \dots, N_{u,n}\}$ und $i \in \{0, \dots, N_{p,n}\}$. Dabei stellt $N_{p,n} + 1$ die Anzahl der Kontrollpunkte und $N_{u,n} + 1$ die Anzahl der Knoten des n -ten Splines dar. Die Splineparameter v_n seien jeweils im Intervall $[0, 1]$ definiert. Wenn der Grad p_n eines jeden Splines solange erhöht wird, bis er $p = \max(p_1, \dots, p_{N_n})$ erreicht, dann lassen sich die Splines ${}_B\mathbf{s}_n$ durch das Zusammensetzen ihrer Knotenvektoren und Kontrollpunktmatrizen zu einer einzelnen Kurve ${}_B\tilde{\mathbf{s}}(u)$ mit Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} und Kontrollpunktmatrix $\tilde{\mathbf{P}}$ verbinden. Der Knotenvektor \mathbf{u}_{knot} lautet

$$\mathbf{u}_{\text{knot}} = \left\{ \bar{v}_{0,1}, \dots, \bar{v}_{p,1}, \underbrace{\bar{v}_{p+1,n} + (n-1), \dots, \bar{v}_{N_{u,n}-1,n} + (n-1)}_{n \in \{1, \dots, N_n\}}, \bar{v}_{N_{u,n}, N_n} + (N_n - 1) \right\}$$

und wird gebildet, indem die einzelnen Splineparameter v_n bzw. die Knotenvektoren \mathbf{v}_n durch Addition von $n - 1$ auf das Intervall $u \in [0, N_n]$ transformiert werden. Die Kontrollpunktmatrix lässt sich ebenfalls durch Aneinanderreihen der Kontrollpunkte bestimmen:

$${}_B\tilde{\mathbf{P}} = \left[\underbrace{{}_B\tilde{\mathbf{p}}_{0,n}, \dots, {}_B\tilde{\mathbf{p}}_{N_{p,n}-1,n}}_{n \in \{1, \dots, N_n\}}, {}_B\tilde{\mathbf{p}}_{N_{p,n}, N_n} \right].$$

Damit resultieren $N_p + 1 = \sum_{n=0}^{N_n} N_{p,n} + 1$ Kontrollpunkte, sodass sich als zusammengefasste Bahn

$${}_B\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) {}_B\mathbf{p}_i w_i}{\sum_{i=0}^{N_p} N_{i,p}(u) w_i} \quad (4.63)$$

ergibt.

Unabhängig davon, ob die einzelnen Splines mit (4.62) oder (4.63) zusammengefasst werden, kann basierend auf der Nadelwickelbahn ${}_B\mathbf{s}(u)$ die Definition eines Bewegungsgesetzes $u(t)$ erfolgen, um eine Trajektorie zu erhalten.

Eignung der verschiedenen Verfahren für die Nadelwickeltechnik

In Abschnitt 3.3.1 und Abschnitt 3.3.2 sind verschiedene Möglichkeiten dargestellt, wie der Vorschub ermittelt werden kann, der zur Bestimmung des Bewegungsgesetzes notwendig ist. Jedoch eignet sich nicht jedes dieser Verfahren für die Anwendung in der Nadelwickeltechnik.

Das Nadelwickeln zeichnet sich durch drei wesentliche Eigenschaften aus, die die Auswahl eines Vorschubplaners einschränken. Zunächst findet das Wickeln in einer statischen Umge-

bung statt. Die Berechnung der Referenzpositionen für die Anlagensteuerung kann komplett vor dem eigentlichen Wickeln erfolgen. Aus diesem Grund ist keine Echtzeitfähigkeit der eingesetzten Algorithmen notwendig und die Rechenzeit grundsätzlich zweitrangig. Dennoch besteht eine Nadelwickelbahn aus einer einzelnen, langen und zusammenhängenden Bewegungsabfolge, was bei der Wahl des Berechnungsverfahrens zu berücksichtigen ist. Obwohl keine Echtzeitfähigkeit geboten ist, ist also als zweites ein effizienter Algorithmus zu wählen, da ein ineffizientes Verfahren schnell zu extrem langen Rechenzeiten oder unzulässig hohem Speicherbedarf führt.

Zuletzt ist zu beachten, dass im Allgemeinen der Vorschub einen Einfluss auf den Bearbeitungsprozess einer Werkzeugmaschine hat [116]. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt auch beim Nadelwickeln. Untersuchungen von Hofmann et al. [33] zeigen zwar, dass die Wickelgeschwindigkeit keinen Einfluss auf den Wicklungswiderstand ausübt. Gleichzeitig hat jedoch das Erhöhen der Drahtzugkraft eine signifikante Steigerung des Widerstandes zur Folge [33][21, S. 75]. Grund dafür ist Stenzel zufolge eine Verringerung des Leiterquerschnitts durch die erhöhte Drahtzugkraft [21, S. 76]. Wie Versuche von Gerngroß et al. [39] zeigen, verstärken variierende Drahtauszugsraten Zugkraftschwankungen. Dieser Effekt ist abhängig vom verwendeten Nadelwickler. Besitzt die Drahtführung eine hohe Trägheit, steigt die Drahtzugvarianz. Denselben Effekt beobachten Sell-Le Blanc et al. [40] und Hofmann et al. [184] beim Linearwickeln. Durch die nicht-runde Form des Spulenkörpers variiert auch hier die Drahtauszugsrate und damit die Zugkraft. Eine konstante Drahtauszugsrate reduziert die Fluktuation des Drahtauszugs und bewirkt damit eine Drahtzugkraft mit geringerer Varianz.

Verfahren, die ein optimales Steuergesetz analytisch berechnen, werden in der Literatur übereinstimmend die geringste Effizienz in Bezug auf Rechenzeit zugewiesen. Deshalb scheiden diese Verfahren zur Bestimmung des Vorschubs aus, da eine Nadelwickelbahn sehr viele Schaltzeitpunkte besäße.

Für das Planen einer Trajektorie mit KVS eignen sich die direkten Interpolationsverfahren. Als Geschwindigkeitsverlauf bietet sich das Doppel-S-Profil an, da sich mit diesem die tangentielle Beschleunigung und damit die Änderung der Drahtauszugsgeschwindigkeit kontrollieren lässt. Einige der Interpolationsverfahren nutzen lediglich den linearen Term in (3.108) zur Prädiktion der Splineparameter. Da die Nadelwickelbahn durch die Forderung nach \mathcal{G}^3 -Stetigkeit einen hohen Grad besitzt, entsteht ein Fehler in der Berechnung, der zu ungewünschter Vorschubfluktuation führt. Bei der Wahl des Interpolators ist dies entsprechend zu berücksichtigen.

Im Falle einer Trajektorie mit KVS begrenzt die kritischste Stelle der Bahn die maximale Geschwindigkeit. Die Wirtschaftlichkeit des resultierenden Wickelprozesses ist damit beschränkt, obwohl auf Teilen der Bahn eine höhere Geschwindigkeit möglich wäre, die nach [33] keinen negativen Einfluss auf die Wicklungseigenschaften hätte. Wird eine gewisse tangentielle Beschleunigung zugelassen, erlaubt das die Fertigungszeit einer Wicklung durch das Anpassen des Vorschubs deutlich zu reduzieren. Die Auswirkungen der so induzierten Draht-

zugkraftschwankungen beschreibt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Wickeldrahtes. Ein Lackdraht besitzt ein typisches Festigkeitsverhalten [6]. Bei geringen Zugkräften zeigt er linear-elastisches Verhalten [17, S. 102 f.]. Steigt die Kraft an, geht dieses in dauerhafte, plastische Verformung über, bis es schlussendlich zum Drahttriss kommt. Lassen sich die Drahtzugkraftschwankungen auf den linear-elastischen Bereich dieses Diagramms begrenzen, bewirkt eine punktuell erhöhte Drahtzugkraft durch einen Beschleunigungsvorgang nur eine geringe Wirkung, da es zu keiner plastischen, dauerhaften Deformation kommt. Sowohl die numerische Optimierung als auch kritische-Punkte-Heuristiken erlauben es, definierte tangentielle Beschleunigungen vorzugeben und damit variable Vorschubprofile mit definierten Drahtzugschwankungen zu erzeugen.

Im Folgenden wird die Anwendung verschiedener Vorschubplaner für die Nadelwickeltechnik untersucht.

4.4.1 Konstanter Vorschub und Interpolator

Die analytische Berechnung eines Doppel-S-förmigen Vorschubprofils ist in Abschnitt 3.3.1 beschrieben. Zur Definition des Profils sind jedoch noch die Grenzen v_{\max} , a_{\max} und j_{\max} des Profils zu bestimmen. Die Geschwindigkeitsgrenze ist von der verwendeten Anlagentechnik abhängig. Sie kann durch Versuche angenähert oder analytisch durch Auswertung relevanter Bedingungen berechnet werden. Da sich eine Nadelwickelbahn pro Windung nur unwesentlich ändert, reicht für eine ausreichend genaue Abschätzung des Limits das Wickeln bzw. Berechnen weniger Spulen aus. Die Wicklungseigenschaften bestimmen die Beschleunigungs- und Ruckgrenze des Profils. Eine pauschale Aussage zu vernünftigen Werten ist nicht möglich, da die Grenzen von der zu definierenden, maximalen Drahtzugkraft abhängen. Diese ist von vielen verschiedenen Parametern wie der Drahtstrecke der Anlage [39], der verwendeten Nadelgeometrie [172] oder auch der eingesetzten Drahtzugbremse und der Wickelbahn abhängig [40].

Bei der Interpolation der Bahn ist zu beachten, dass das Doppel-S-förmige Vorschubprofil aus Abschnitt 3.3.1 eine Funktion der Zeit verkörpert, die Bahn jedoch mit dem Splineparameter u parametrisiert ist. Das Bewegungsgesetz $u(t)$ ist daher so zu definieren, dass ein KVS resultiert. Die Interpolationsgleichung (3.91) besitzt im Allgemeinen keine analytische Lösung, weshalb der Splineparameter durch die Taylorreihenentwicklung (3.108) angenähert wird. Für diese sind die zeitlichen Ableitungen \dot{u} und \ddot{u} notwendig. Einige Arbeiten zur Interpolation von Trajektorien vernachlässigen bei der Berechnung von \ddot{u} fälschlicherweise die Zeitabhängigkeit des Vorschubs. Der korrekte Term ist in (3.112) gegeben.

Einen effizienten und genauen Interpolator für NURBS-basierte Bahnen beschreiben Liu et al. [128]. Die zeitabhängige Bahngeschwindigkeit berücksichtigen die Autoren durch die Taylorreihenentwicklung der Schrittgröße $l_{[i]}$ im i -ten Schritt analog zu (3.107). Stimmt die berechnete Schrittlänge $\|\mathbf{s}(u_{[i+1]}) - \mathbf{s}(u_{[i]})\|$ mit der tatsächlichen $l_{[i]}$ überein, existiert nach

(3.113) keine Vorschubabweichung mehr. Daher bauen Liu et al. ihren Interpolator auf der Gleichung

$$l_{[i]} = \left\| \mathbf{s}(u_{[i+1]}) - \mathbf{s}(u_{[i]}) \right\| \quad (4.64)$$

auf. Den berechneten Vorschub bestimmen die Autoren durch die Taylorreihe mit (3.107). Für den Anwendungsfall KVS lässt sich die Schrittweite analytisch durch Integration der Gleichungen (3.98) und (3.101) bestimmen [77].

Statt der Taylorreihenentwicklung des Bewegungsgesetzes (3.108) nähern Liu et al. den Spline durch eine Taylorreihe an. Dazu gliedern sie den NURBS nach dem Zähler- und Nennerpolynom analog zu (3.81). Für die Entwicklung am Punkt $u_{[i]}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(u_{[i+1]}) &\approx \mathcal{Z}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \\ \mathcal{N}(u_{[i+1]}) &\approx \mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \end{aligned} \quad (4.65)$$

mit $\Delta u = u_{[i+1]} - u_{[i]}$. Die Ableitungen der Polynome lassen sich effizient durch die homogene Transformation (3.79) bestimmen. Durch Einsetzen der Näherung in (4.64) kann die tatsächliche Schrittweite bestimmt werden.

$$\hat{l}_{[i]} \approx l_{[i]} = \left\| \frac{\mathcal{Z}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2}}{\mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2}} - \frac{\mathcal{Z}(u_{[i]})}{\mathcal{N}(u_{[i]})} \right\|$$

Diese Gleichung stellt das Polynom

$$a_4 \Delta u^4 + a_3 \Delta u^3 + a_2 \Delta u^2 + a_1 \Delta u + a_0 = 0$$

vom Grad $\psi_S = 4$ in Δu dar, das sich mit der Formel von Ferrari lösen lässt [185, S. 48]. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind in Anhang B gegeben. Bei der Berechnung des Polynoms wird die Gleichung quadriert. Die theoretisch gebotene Fallunterscheidung nach negativen Schrittweiten ist jedoch nicht notwendig, da $v_{fr} > 0$ ist und damit nicht-negative Schrittweiten resultieren. Die quartische Gleichung besitzt bis zu vier Lösungen mit entweder keiner, einer oder zwei paarweise komplexen Nullstellen. Durch die Natur des Problems ist garantiert, dass eine reelle Lösung existiert, sodass der letzte Fall nicht auftreten kann. Der gesuchte Interpolationsschritt ist die kleinste, positive und reelle Lösung Δu^* , durch die sich der nächste Interpolationspunkt zu

$$u_{[i+1]} = u_{[i]} + \Delta u^*$$

ergibt.

Spezielles Augenmerk ist bei der Bildung der Taylorreihe auf den Knotenvektor zu legen.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(u_{[i+1]}) &\approx \mathcal{Z}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \\ \mathcal{N}(u_{[i+1]}) &\approx \mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2}\end{aligned}$$

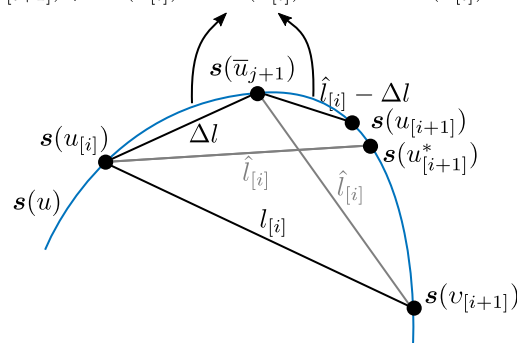


Abbildung 4.28: Verbesserte Berechnung der Schrittlänge bei Überschreiten von Knotenspannen

Angenommen, der Punkt $u_{[i]}$ befindet sich in der Knotenspanne j . Überschreitet der Schritt Δu^* diese Knotenspanne, ist die Entwicklung (4.65) falsch, da $\mathcal{Z}(u_{[i]})$ bzw. $\mathcal{N}(u_{[i]})$ andere Polynome als $\mathcal{Z}(u_{[i+1]})$ bzw. $\mathcal{N}(u_{[i+1]})$ verkörpern. Liu et al. schlagen daher vor, als Entwicklungspunkt den Knotenwert \bar{u}_{j+1} , der die übersprungene Grenze der Spanne darstellt, zu verwenden. In diesem Fall ergibt sich der Interpolationspunkt $v_{[i+1]}$. Dabei machen sie jedoch einen Fehler, weil die berechnete von der tatsächlichen Schrittlänge divergiert, wie Abbildung 4.28 zeigt. Eine genauere Lösung ergibt sich durch die Reduktion der von \bar{u}_{j+1} zu interpolierenden Schrittlänge auf $\hat{l}_{[i]} - \Delta l$. Der damit berechnete Schritt $u_{[i+1]}$ liegt deutlich näher an der tatsächlichen Lösung $u_{[i+1]}^*$. Die Distanz $\Delta l = \|\mathbf{s}(\bar{u}_{j+1}) - \mathbf{s}(u_{[i]})\|$ beschreibt dabei die Entfernung zwischen dem Entwicklungspunkt $u_{[i]}$ und der Grenze der Knotenspanne \bar{u}_{j+1} .

Unabhängig davon, ob die Nadelwickelbahn mit (4.62) oder (4.63) erzeugt wird, ist dieses Vorgehen auch beim Überschreiten der Splinegrenze durchzuführen. Hier wirkt sich jedoch der Fehler gravierender aus, da ${}_B\mathbf{s}(u)$ an den Übergängen bei \mathcal{G}^k -Stetigkeit nicht stetig differenzierbar ist, wie Abbildung 4.24b zeigt.

Sollte die beschriebene Korrektur an Knotenspannen- und Splineübergängen dennoch eine zu große Abweichung im Vorschub ergeben, kann der korrekte Parameter $u_{[i+1]}^*$ auch durch Lösen des Optimierungsproblems

$$u_{[i+1]}^* = \arg \min_{u_{[i+1]}} \left| \hat{l}_{[i]} - \|\mathbf{s}(u_{[i+1]}) - \mathbf{s}(u_{[i]})\| \right| \quad (4.66)$$

bestimmt werden. Durch die Länge einer Nadelwickelbahn ist diese Optimierung jedoch zu vermeiden, um annehmbare Rechenzeiten zu erhalten.

Ein Vergleich zwischen diesem Polynom-Interpolator und den Standard-Verfahren, die die Taylorreihe (3.108) entweder nach dem linearen oder quadratischen Term abbrechen, zeigt, dass sich die Vorschubfluktuation ohne wesentliche Änderung der Rechenzeit um eine

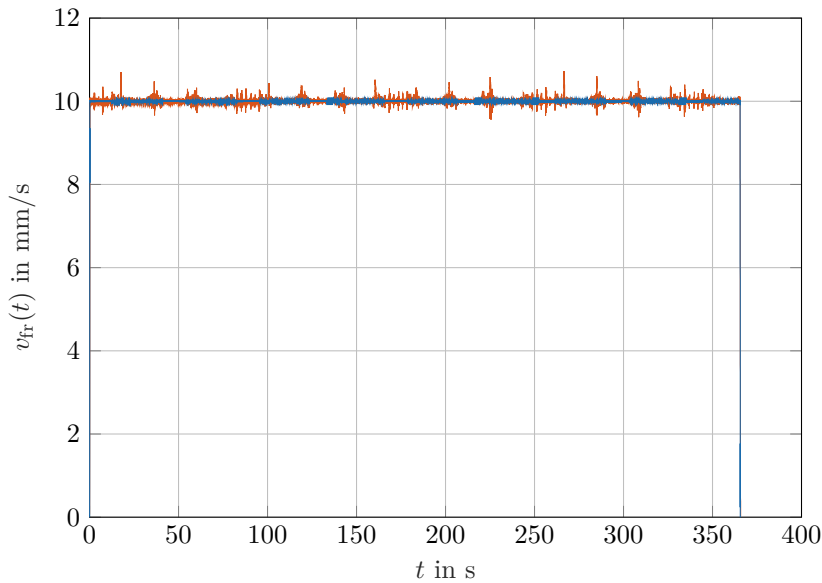


Abbildung 4.29: Trajektorie mit konstantem Vorschub; Interpolierte Sollvorgabe (—) und gemessene Geschwindigkeit (—)

Größenordnung reduzieren lässt [128].

In Abbildung 4.29 ist das Vorschubprofil mit einer maximalen Geschwindigkeit von $v_{\max} = 10$ mm/s gezeigt. Die Trajektorie folgt der Statorbahn aus Abbildung 4.17a und wird vom RW ausgeführt. Die interpolierte Solltrajektorie besitzt trotz des hohen Grades der Kurve eine mittlere Abweichung von 0,4% von der gewünschten Geschwindigkeit. Die aufgezeichneten Achspositionen ergeben über die VWK des RWs (3.7) die kartesischen Positionen. Aus numerischem Ableiten dieser Positionen resultiert die tatsächliche Geschwindigkeit. In Teilen der Bahn folgt der Wickler der Sollgeschwindigkeit sehr genau, während in den anderen Bereichen ein deutliches Rauschen um v_{\max} auftritt. Die Analyse der Achspositionen zeigt, dass die Achse θ_5 des RWs während der Nadeldrehung einen variierenden Schleppabstand besitzt. Dadurch entsteht eine Diskrepanz zwischen dem tatsächlichen TCP und dem Sollwert und damit auch eine Geschwindigkeitsabweichung.

4.4.2 Kritische-Punkte-Heuristik mit einer nach der Bogenlänge parametrisierten Nadelwickelbahn

Kritische-Punkte-Heuristiken suchen auf der Bahn nach kritischen Punkten und bestimmen anhand verschiedener Kriterien einen maximal möglichen Vorschub. Zwischen diesen Vorschubwerten nutzen die Verfahren, wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, verschiedene Vorschubprofile. Große Stärke der Kritische-Punkte-Heuristiken ist es, dass die Geschwindigkeitsprofile analytisch vorliegen und der Vorschub damit effizient berechnet werden kann. Wie die Ausführungen in Abschnitt 3.3.1 bereits andeuten, ist für die Beschreibung der verschiedenen Vorschubprofile eine Parametrisierung der Bahn notwendig, die einen physi-

kalischen Zusammenhang mit dieser besitzt. Nur so lassen sich die Geschwindigkeitsprofile analytisch in Abhängigkeit vom Bahnparameter berechnen. Ansonsten wäre nach (3.89) eine Skalierung der Geschwindigkeitsprofile mit der parametrischen Ableitung der Bahn notwendig, was einer Abbildung vom Funktionsparameter des Vorschubprofils zum Splineparameter gleichkommt. Diese Abbildung stellt jedoch das Bewegungsgesetz dar, für dessen Berechnung das Vorschubprofil notwendig ist.

Eine Möglichkeit, den Splineparameter physikalisch mit der Bahn zu verknüpfen, ist eine PBL. Nach (3.92) lässt sich in diesem Fall das Bewegungsgesetz $\dot{\sigma}$ für einen bekannten Vorschub v_{fr} direkt angeben.

Spline-basierte Parametrisierung nach der Bogenlänge

Heng und Erkorkmaz [77] präsentieren eine PBL, die das Verfahren aus [76] aufgreift und weiterentwickelt. Das Grundverfahren aus [76] basiert auf der Simpson-Regel, mit der eine numerische Integration der Bogenlänge über die Bahn erfolgt. Im nächsten Schritt wird ein Polynom vom Grad $\psi_S = 7$ verwendet, um die integrierte Bogenlänge zu approximieren. Für die Polynominterpolation erfolgt die Vorgabe von sechs der acht freien Parameter eines Polynoms von Grad $\psi_S = 7$ durch die Angabe von Position sowie erster und zweiter Ableitung jeweils am Start und Ende der Bahn. Die verbleibenden zwei Freiheitsgrade nutzen die Autoren, um mit einer Optimierung die mittlere Abweichung zwischen Polynom und tatsächlicher Bogenlänge σ zu minimieren.

Heng und Erkorkmaz erweitern dieses Verfahren, indem sie bei einer zu großen mittleren Abweichung zwischen interpolierter und tatsächlicher Bogenlänge eine Aufteilung der Bahn vornehmen. Für diese beiden Teilstücke erfolgt eine eigene Polynominterpolation, sodass eine genauere Wiedergabe der tatsächlichen Bogenlänge resultiert. Diesen Algorithmus führen die Autoren rekursiv fort, bis die Abweichung unter einen gegebenen Grenzwert fällt. An den Verbindungspunkten fordern die Autoren C^2 -Stetigkeit.

Mit den Ausführungen in Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 3.2.3 erscheint es wenig sinnvoll, eine Vielzahl an Polynomen statt eines Splines zur PBL zu verwenden. Im Folgenden wird daher eine PBL mit B-Splines untersucht.

Die Simpson-Regel basiert auf den Newton-Cotes-Formeln und erlaubt eine effiziente und genaue numerische Integration [54, S. 527–531]. Eine Abwandlung ist die adaptive Simpson-Regel, ein rekursiver Algorithmus, mit dem sich eine Näherung des Integrals mit einem Fehler kleiner einer gegebenen Toleranz finden lässt [54, S. 561 f.]. Die Bogenlänge einer Kurve $\mathbf{s}(u)$ mit $u \in [a, b]$ bestimmt sich nach (3.87) zu

$$\Sigma_l = \sigma(b) = \int_{\mu=a}^b \|\mathbf{s}'(\mu)\| \, d\mu.$$

Dieses Integral lässt sich numerisch durch die Simpson-Regel [77]

$$S(a, b) = \frac{h}{6}(\sigma'(a) + 4\sigma'(c) + \sigma'(b)) = \frac{b-a}{6} \left(\sigma'(a) + 4\sigma'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sigma'(b) \right) \quad (4.67)$$

annähern, wobei h die Intervallgröße und c den Intervallmittelpunkt darstellen. Die adaptive Simpsonregel wendet (4.67) rekursiv auf die beiden Teilintervalle $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ an, die sich durch die Zweiteilung von $[a, b]$ in gleiche Teile ergeben. Für eine gegebene Toleranz $\epsilon > 0$ gilt

$$|\Sigma_l - S(a_1, b_1) - S(a_2, b_2)| < \epsilon, \quad (4.68)$$

wenn die Ungleichung

$$\frac{1}{10}|S(a_1, b_1) + S(a_2, b_2) - S(a, b)| < \epsilon \quad (4.69)$$

eingehalten wird [186, S. 383 f.]. Mit einem ausreichend kleinen ϵ lässt sich die Bogenlänge Σ_l mit (4.68) durch die Summe

$$\Sigma_l \approx S(a_1, b_1) + S(a_2, b_2) \quad (4.70)$$

approximieren. Bei Verletzung von (4.69) werden die Teilintervalle $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ solange unterteilt und mit (4.67) ausgewertet, bis ϵ die gewünschte obere Schranke für den Fehler darstellt.

Die Güte der Approximation der Bogenlänge durch $S(a, b)$ hängt davon ab, wie gut sich $\sigma'(u) = \|\mathbf{s}'_f(u)\|$ im Intervall $[a, b]$ durch eine Parabel annähern lässt. Für die Nadelwickelbahn zeigt Abbildung 4.24b, dass vor allem im Bereich der stetigen Splinerverbindung ${}_B\mathbf{s}_f$ der Wert von $\|\mathbf{s}'_f(u)\|$ stark schwankt. Entsprechend fein löst die adaptive Simpson-Regel diesen Bereich auf, um die Bogenlänge ausreichend genau zu approximieren. Die parametrische Geschwindigkeit des Kreisbogens ${}_B\mathbf{s}_k(u)$ beschreibt selbst einen Bogen, sodass hier die numerische Integration mit einer Parabel als Näherung eine bessere Lösung darstellt. Dieser Bogen ist in Abbildung 4.30 im Bereich $u \in [2, 3)$ dargestellt. Die geraden Stücke der Nadelwickelbahn ${}_B\mathbf{s}_1(u)$ besitzen nach Abbildung 4.24b eine konstante parametrische Geschwindigkeit $\|\mathbf{s}'_1(u)\| = \sigma'(u) = \text{const.}$, sodass sich die Bogenlänge analytisch zu

$$\Sigma_l = \int_a^b \sigma' \, d\mu = b\sigma' - a\sigma'$$

bestimmen lässt. Die Auswertung der adaptiven Simpson-Regel (4.68) liefert für den ersten rekursiven Schritt, bei dem $a_1 = a$, $b_1 = a_2 = c$ und $b_2 = b$ gilt, durch das konstante σ' das

Resultat

$$\left| \Sigma_l - \frac{b_1 - a_1}{6}(\sigma' + 4\sigma' + \sigma') - \frac{b_2 - a_2}{6}(\sigma' + 4\sigma' + \sigma') \right| = |b\sigma' - a\sigma' - (c - a + b - c)\sigma'| = 0$$

und $S(a, b)$ gibt die Bogenlänge Σ_l entsprechend exakt wieder, da eine Gerade einen Spezialfall einer Parabel darstellt.

Bei der normalen numerischen Integration mit der Simpson-Regel werden die Ergebnisse jeder Rekursion verworfen, da nur das Endergebnis von Interesse ist. Die Spline-basierte PBL nutzt die Zwischenergebnisse, um Wertepaare (μ_i, σ_i) zu berechnen, die als Interpolationsbedingungen zur Bestimmung des Bogenlängen-Splines $\sigma(u)$ herangezogen werden.

Seien die Tupel (a_i, b_i) das i -te durch die adaptive Simpson-Regel bestimmte Approximationsintervall und $S(a_i, b_i)$ die Bogenlänge dieses Intervalls. Dann ergibt sich die gesamte Bogenlänge vom Beginn des Splines bis zum Splinewert $u_i = b_i$ aus der Summe

$$\sigma(b_i) = \sigma_i = \sum_{j=0}^i S(a_j, b_j).$$

Damit lassen sich Interpolationstupel (μ_i, σ_i) definieren, die Interpolationsbedingungen

$$\sigma(\mu_i = b_i) = \sum_{j=0}^{N_p} N_{j,p}(\mu_i) p_j$$

analog zu (3.68) bilden. Zur Interpolation werden kubische Splines verwendet, deren zwei zusätzliche Freiheitsgrade durch die Bogenlängensteigung σ' an den beiden Splineenden bedient werden. Das Bestimmen der Kontrollpunkte erfolgt mit (3.74), was auch bei einer hohen Zahl an Approximationsintervallen durch die Lokalität der Basisfunktionen und der damit resultierenden Bandmatrix effizient bleibt.

In Abbildung 4.30 ist σ' für die Splines ${}_B\mathbf{s}_1$ bis ${}_B\mathbf{s}_5$ der Statorbahn gezeigt. Ebenso sind die Tupel $(a_i, \sigma'(a_i))$ für $\epsilon = 1$ dargestellt. Es zeigt sich, dass die geraden Splineabschnitte in den Bereichen $u \in [0, 1)$ und $u \in [4, 5)$ je vier Punkte-Tupel erzeugen. Die freien Splinesegmente bei $u \in [1, 2)$ und $u \in [3, 4)$ bedingen durch ihre Form eine hohe Zahl an Rekursionen in der adaptiven Simpsonregel. Das unstetige Verhalten von σ' in diesen beiden Bereichen resultiert aus dem Einführen des zusätzlichen Punktes ${}_B\mathbf{s}_{i,j,\text{zus}}$ nach Abbildung 4.27. Das Kreissegment im Intervall $u \in [2, 3)$ zeigt die bereits angesprochene bogenähnliche Form und kann durch eine deutlich geringere Zahl an Parabeln ausreichend genau nachgebildet werden.

Erfolgt mit diesen Tupeln die Approximation der Bogenlänge, ergeben sich die in Abbildung 4.31a gezeigten Bogenlängensplines. Der tatsächliche Bogenlängenverlauf ist durch eine hochauflösende numerische Integration mit der Trapezregel und einer Schrittweite von $1 \cdot 10^{-5}$ berechnet. Die Integration mit der adaptiven Simpsonregel zeigt sowohl für $\epsilon = 1$ als auch für $\epsilon = 0,01$ im globalen Verlauf keine nennenswerte Abweichung. Bei der Betrachtung

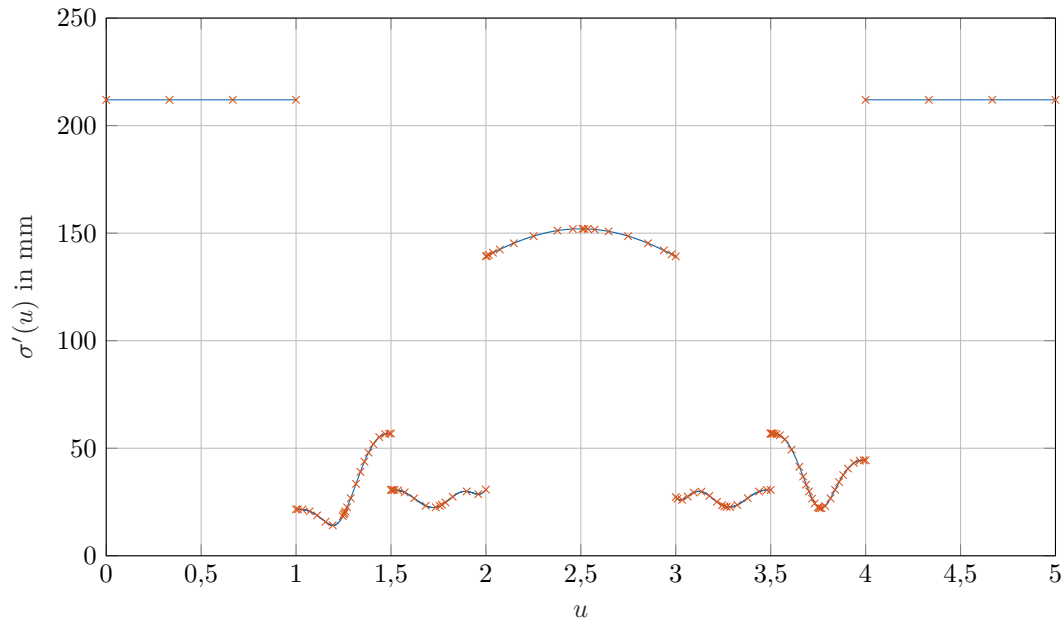


Abbildung 4.30: Interpolationspunkte der adaptiven Simpsonregel mit σ' (—) und den Interpolationstufen ($a_i, \sigma'(a_i)$) (x) mit $\epsilon = 1$

tung des Fehlers der jeweiligen Approximation mit der tatsächlichen Bogenlänge zeigen sich maximale Abweichungen von ca. 1 mm in der Bogenlänge für $\epsilon = 1$. Gravierend wirkt sich jedoch der bleibende Fehler bei der Näherung von $B_{S_5}(u)$ aus. Dieser beträgt 0,52 mm für die adaptive Simpsonregel mit $\epsilon = 1$ nach lediglich einer halben Windung. Bei bis zu 200 zu wickelnden Windungen summiert sich diese stationäre Abweichung auf und führt final zu einem erheblichen Fehler im Vorschub. Durch die Reduktion von ϵ auf den Wert 0,01 lassen sich sowohl die maximale als auch die stationäre Abweichung auf 0,1 mm bzw. 0,03 mm reduzieren. Dafür erhöht sich die Zahl der Interpolationstufen von 164 auf 1775. Für lange Nadelwickelbahnen ist damit zwischen Genauigkeit der PBL und Rechenzeit abzuwägen. Als sinnvoller Wert hat sich $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ erwiesen.

Mit einer solchen PBL kann nach (3.92) aus der Änderungsrate der Bogenlänge $\dot{\sigma}$ direkt auf den Vorschub v_{fr} geschlossen werden. Dieser Zusammenhang lässt sich verwenden, um mit einem analytisch berechneten Vorschubprofil $v_{fr}(t)$ die Schrittweite

$$l_{[i]} = \int_{t_{[i]}}^{t_{[i+1]}} v_{fr}(t) dt$$

zu bestimmen. Diese Schrittweite ist bei der Interpolation einzuhalten. Dank der PBL kann sie direkt mit

$$\sigma_{[i+1]} = \sigma_{[i]} + l_{[i]}$$

angegeben werden. Durch eine Bisektion lässt sich der Splineparameter $u_{[i+1]}$ aus der Bogen-

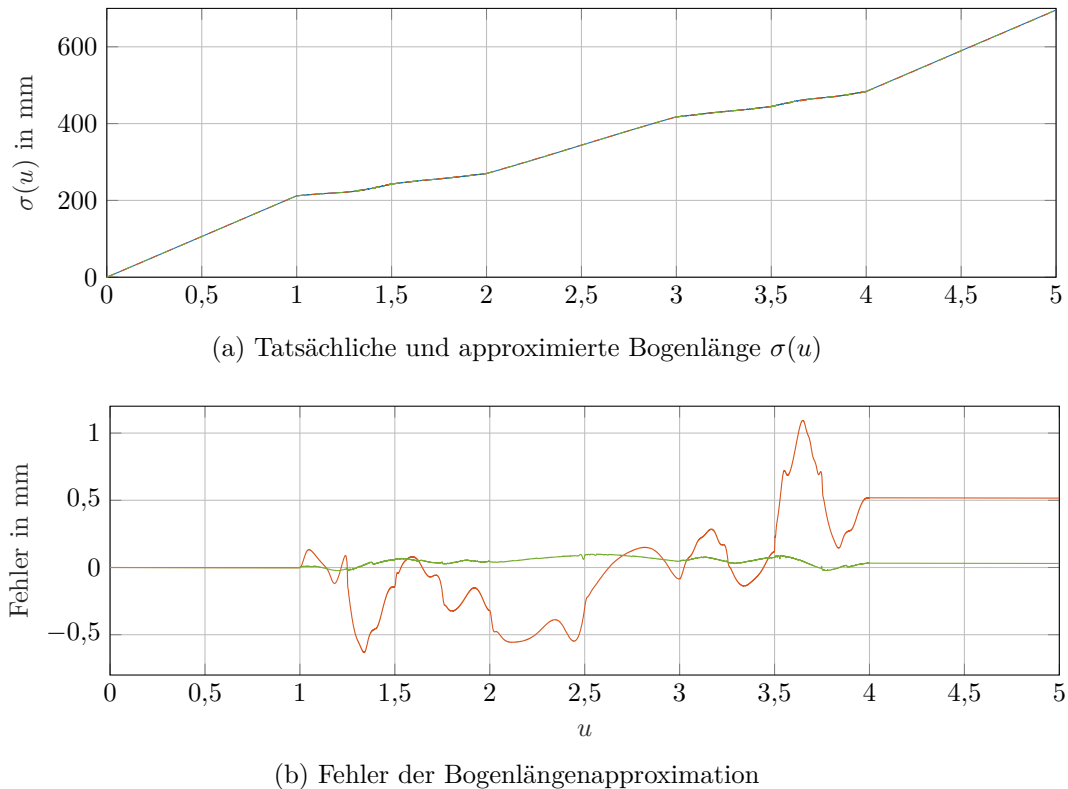


Abbildung 4.31: Tatsächliche Bogenlänge der Splines $B_{S_1}(u)$ bis $B_{S_5}(u)$ der Statorbahn (—), der approximierten Bogenlänge mit $\epsilon = 1$ (---) und $\epsilon = 0,01$ (-.-) sowie der Abweichung von approximierte zu tatsächlicher Bogenlänge für $\epsilon = 1$ (—) und $\epsilon = 0,01$ (—)

länge $\sigma_{[i+1]}$ angeben.

Für die analytische Berechnung eines Vorschubprofils sind in Abschnitt 3.3.1 die verbreitetsten Profile beschrieben. Da neben der Beschleunigung auch der Ruck begrenzt sein soll, bietet sich das Doppel-S-Profil an, das eine Einhaltung aller Grenzen erlaubt. Heng und Erkorkmaz [77] beschreiben die analytische Berechnung der Doppel-S-Profile für mehrere Beschleunigungsvorgänge. Damit lassen sich Zielgeschwindigkeiten für einzelne Bahnabschnitte angeben und das Vorschubprofil berechnen.

Die kritische-Punkte-Heuristiken definieren diese Zielgeschwindigkeiten so, dass bestimmte Bedingungen eingehalten werden. Die Limits der Achsen lassen sich durch die Vorgabe der tangentialen Größen und Betrachtung der Krümmung einhalten. In Bezug auf die Krümmung gibt es zwei Aspekte zu berücksichtigen. Zum einen ist der Bahnfehler von Krümmung und Vorschub abhängig, sodass bei hohen Krümmungen der Vorschub zu begrenzen ist, wenn ein gewisser Bahnfehler eingehalten werden soll. Für einen gegebenen Bahnfehler ϵ_s lässt sich anhand der Krümmung die maximale Geschwindigkeit durch [114]

$$v_{\epsilon_s}(u) = \frac{2}{T_s} \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{\kappa(u)} - \epsilon_s^2} \quad (4.71)$$

bestimmen. Neben dem Bahnfehler kann der Vorschub auch direkt in Abhängigkeit der

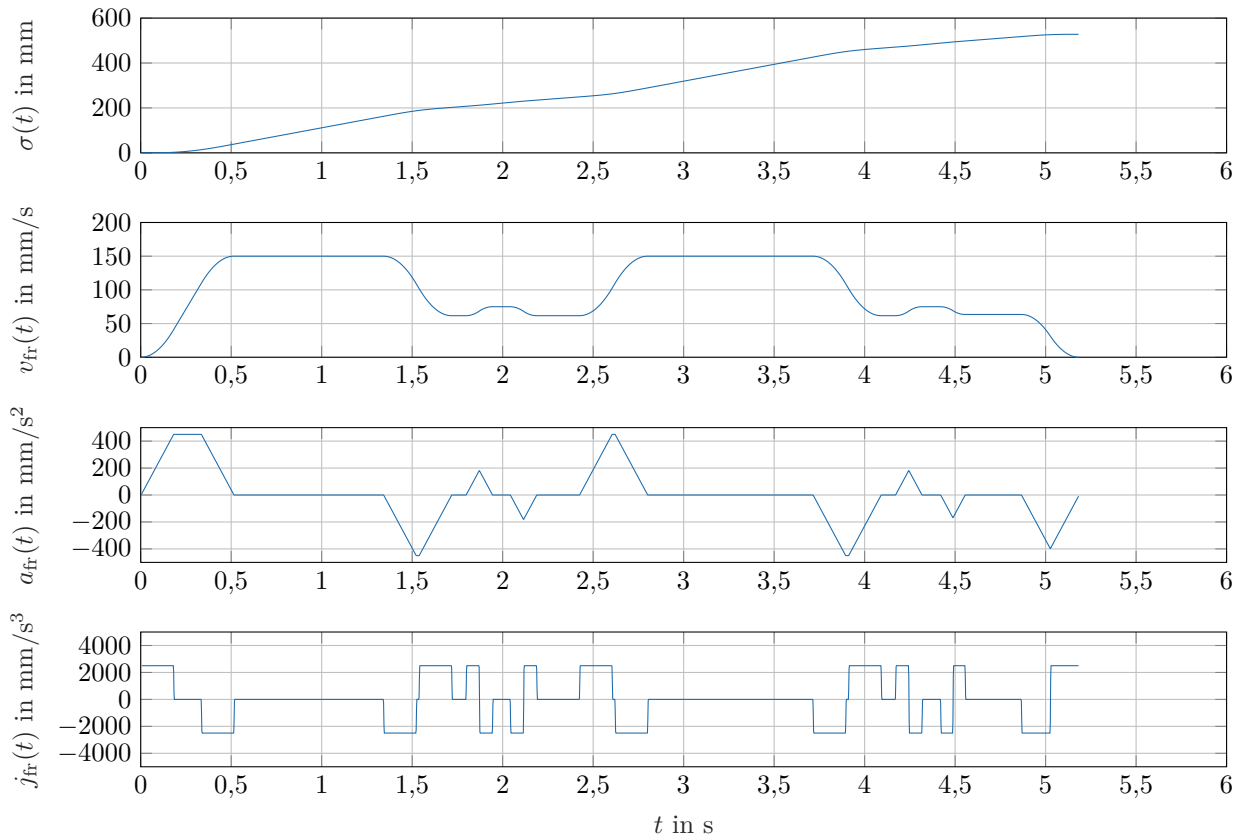


Abbildung 4.32: Ergebnis des variablen Vorschubplaners mit Bogenlänge, Vorschub, Beschleunigung und Ruck

Krümmung $\kappa(u)$ begrenzt werden. Mit dem Ansatz von Zhiming et al. [187] ist eine stetige Reduktion des Vorschubs vom Maximalwert möglich. Die Vorschubgrenze lautet

$$v_{\hat{\kappa}} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\kappa} + \kappa(u)} \cdot v_{\max}. \quad (4.72)$$

Dazu ist ein Wert $\hat{\kappa}$ zu bestimmen, bei dem der Vorschub noch exakt die Hälfte des Maximalwertes besitzen soll. Der maximal erlaubte Vorschub resultiert aus dem Minimum aller Vorschubgrenzen.

Für die Vorschubplanung der Nadelwickelbahn wird für jedes einzelne Bahnsegment $_{B}\mathbf{s}_i$, $i \in \{1, \dots, N_n\}$ die maximal zulässige Geschwindigkeit bestimmt. Neben den Beschränkungen in (4.71) und (4.72) ist die Vorgabe einer maximalen Geschwindigkeit $v_{\text{fr},i}$ pro Bahnsegment i möglich. Die maximale Geschwindigkeit für das einzelne Bahnsegment lautet damit

$$v_i^* = \min \left\{ \frac{2}{T_s} \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{\max(\kappa_i(u))} - \epsilon_s^2}, \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\kappa} + \max(\kappa_i(u))} \cdot v_{\max}, v_{\text{fr},i} \right\}. \quad (4.73)$$

Abbildung 4.32 zeigt den Verlauf der variablen Vorschubplanung für die Splines $_{B}\mathbf{s}_1(u)$ bis $_{B}\mathbf{s}_8(u)$ der Rotorbahn, also für eine komplette Windung. Die kinematischen Grenzen

sind hierbei auf $v_{\max} = 150 \text{ mm/s}$, $a_{\max} = 450 \text{ mm/s}^2$ und $j_{\max} = 2500 \text{ mm/s}^3$ gesetzt. Die Parameter für die krümmungsbasierte Vorschubbegrenzung lauten $\epsilon_s = 0,005$ und $\hat{\kappa} = 0,2$. Zunächst erfolgt die Beschleunigung auf die maximale Geschwindigkeit, da das Geradenstück ${}_B\mathbf{s}_1(u)$ keine Krümmung besitzt. Anschließend wird auf das Geschwindigkeitslimit von ${}_B\mathbf{s}_2$ verzögert. Da dieses Bahnsegment eine deutlich kleinere Bogenlänge als ${}_B\mathbf{s}_1$ besitzt, ist der Abschnitt mit konstanter Geschwindigkeit relativ kurz. Das niedrige Geschwindigkeitsdelta von ${}_B\mathbf{s}_2$ zu ${}_B\mathbf{s}_3$ führt dazu, dass der nachfolgende Beschleunigungsvorgang keine Phase mit konstanter Beschleunigung besitzt. Dieser Vorgang wiederholt sich für die weiteren Bahnteile. Am Ende der Bahn findet ein Verzögerungsvorgang auf die Zielgeschwindigkeit $v_{\text{fr}}(T) = 0$ statt.

Wie sich zeigt, ist eine deutliche Reduktion des Vorschubs in den gekrümmten Teilen der Bahn notwendig. Durch die variable Gestaltung des Vorschubs ist außerhalb dieser Bereiche eine Beschleunigung auf höhere Geschwindigkeiten möglich, während bei einem Profil mit KVS der minimale Wert die Trajektorie begrenzt. Mit dem variablen Vorschub ist damit ein wirtschaftlicherer Wickelprozess als bei Verwendung von KVS möglich, wobei die Beschleunigungsphasen jedoch Einfluss auf den Drahtzug haben können.

4.4.3 Numerische Vorschuboptimierung

Die Trajektorienplanung mit variablem Vorschub ist nicht zeitminimal. Die beiden Verfahren, die eine Berechnung optimaler Trajektorien ermöglichen, sind die zeitminimale Steuerung und die numerische Optimierung. Während der erste Typ aus Rechenzeitgründen ausscheidet, sind Algorithmen aus dem Bereich der numerischen Optimierung für die Nadelwickeltechnik anwendbar. Die Wickelzeit T verkörpert das Optimierungsziel, um die Wirtschaftlichkeit der Nadelwickeltechnik zu verbessern. Die Drahtzugkraft, die von der tangentialen Beschleunigung abhängt, darf dabei einen Grenzwert nicht überschreiten. Die Kinematik des Nadelwicklers beschreibt eine weitere Beschränkung der möglichen Vorschübe.

Die in Abschnitt 3.3.2 vorgestellten numerischen Optimierer lassen sich in global und lokal operierende Verfahren einteilen. Die globalen Verfahren optimieren die Bahn als Ganzes und erreichen damit bessere Lösungen, besitzen aber für lange Bahnen Nachteile in Bezug auf die benötigten Rechenkapazitäten. Lokal arbeitende Verfahren hingegen optimieren stets Teile der Bahn, um die Problemgröße und Anzahl der Variablen zu begrenzen. Um eine realisierbare Trajektorie zu erhalten, überschneiden sich die einzeln optimierten Bahnteile. Durch das lokale Verarbeiten der Bahn besteht die Möglichkeit, dass das globale Optimum nicht erreicht wird.

Globale Optimierungsverfahren

Durch die Länge der Nadelwickelbahn sind global operierende Verfahren nur schwierig für die Vorschubberechnung einer Nadelwickeltrajektorie einsetzbar. Eines der effizientesten Verfah-

ren von Liu et al. [101] nutzt ein linearisiertes Optimierungsproblem, um die Recheneffizienz zu steigern. Die Anwendung des Verfahrens von Liu et al. für die Statorbahn aus Abbildung 4.17a mit dem RW zeigt, dass bereits wenige Windungen, also eine noch relativ kurze Bahn, dazu führen, dass die Rechenzeit und die für die lineare Programmierung aufzustellenden Matrizen zu stark in ihrer Größe ansteigen. Ein globales Verfahren ist daher für die Vorschuboptimierung einer Nadelwickelbahn nicht geeignet.

Lokale Optimierungsverfahren

Die Idee von lokalen Verfahren ist es, die Größe des Optimierungsproblems zu begrenzen, indem der Vorschub abschnittsweise optimiert wird. Dabei ist jedoch die Optimierung mehrmals durchzuführen. Im Folgenden wird das allgemeine nichtlineare Optimierungsproblem für die Vorschuboptimierung einer Nadelwickelbahn aufgestellt. Das abschnittsweise Vorgehen orientiert sich an den Verfahren von Altintas und Erkorkmaz [96] und Sencer et al. [97].

Ziel der Vorschuboptimierung ist es, eine Trajektorie mit minimaler Zeit zu erhalten, die gegebene Bedingungen einhält. Das Optimierungsproblem lautet

$$\min_{\dot{u}(u)} T = \min_{\dot{u}(u)} \int_0^T dt = \min_{\dot{u}(u)} \int_0^{N_n} \frac{du}{\dot{u}}.$$

Aus (3.90) ist bekannt, dass sich der Vorschub mit \dot{u} durch die zeitliche Ableitung der kartesischen Koordinaten der Bahn mit

$$v_{fr}(u) = \|{}_B \mathbf{r}'_{TCP}(u)\| \dot{u}(u)$$

berechnen lässt. Wie Abbildung 4.24 und Abbildung 4.30 zeigen, besitzen die Nadelwickelbahnen durch die Erstellung mit geometrischer Stetigkeit nicht-stetige Ableitungen. Damit ein stetiger Vorschub resultiert, muss \dot{u} ebenfalls nicht-stetig sein. Die Beschreibung von \dot{u} durch einen B-Spline erfordert dafür jedoch Knoten der Häufigkeit $N_H = p$, was mathematisch einem Aufteilen des \dot{u} -Splines in mehrere einzelne B-Splines entspricht. Da Unstetigkeiten in der Optimierung schwierig handzuhaben sind und zusätzliche Stetigkeitsbedingungen an den Rändern zu definieren wären, wird ein anderes Vorgehen verfolgt. Aus Kapitel 4.3.4 ist bekannt, dass es bei geometrisch stetigen Splines mindestens eine Parametrisierung geben muss, die parametrisch stetig ist, also stetige Ableitungen besitzt. Eine solche Parametrisierung ist die PBL [178]. Ergebnis der PBL aus Kapitel 4.4.2 ist eine Parametrisierung $\sigma(u)$, die den Splineparameter u auf die Bogenlänge abbildet. Damit berechnen sich die zeitlichen Ableitungen der Bahn zu

$${}_B \dot{\mathbf{s}}(u) = \frac{d {}_B \mathbf{s}(u)}{d \sigma(u)} \frac{d \sigma}{d t} = \frac{d {}_B \mathbf{s}(u)}{d \sigma} \dot{\sigma} \quad (4.74a)$$

$${}_B\ddot{\mathbf{s}}(u) = \frac{d^2 {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma^2} \dot{\sigma}^2 + \frac{d {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma} \ddot{\sigma} \quad (4.74b)$$

$${}_B\ddot{\ddot{\mathbf{s}}}(u) = \frac{d^3 {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma^3} \dot{\sigma}^3 + 3 \frac{d^2 {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma^2} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + \frac{d {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma} \ddot{\ddot{\sigma}}. \quad (4.74c)$$

Die zeitlichen Ableitungen des Splines ${}_B\mathbf{s}(u)$ sind nach der Kettenregel mit der Bogenlänge und deren zeitlichen Ableitungen zu skalieren. Die erste Ableitung von ${}_B\mathbf{s}(u)$ nach der Bogenlänge lautet

$$\frac{d {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma} = \frac{d {}_B\mathbf{s} \, d u}{d u \, d \sigma} = \frac{B\mathbf{s}'}{\sigma'}. \quad (4.75)$$

Die zweite Ableitung ergibt sich durch erneutes Differenzieren

$$\frac{d^2 {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{B\mathbf{s}'}{\sigma'} \right) = \frac{\sigma' \cdot \frac{d B\mathbf{s}'}{d\sigma} - \frac{d\sigma'}{d\sigma} \cdot \sigma'}{\sigma'^2} = \frac{B\mathbf{s}'' - \frac{\sigma''}{\sigma'} B\mathbf{s}'}{\sigma'^2} = \frac{B\mathbf{s}''\sigma' - B\mathbf{s}'\sigma''}{\sigma'^3} \quad (4.76)$$

mit den beiden Ableitungen

$$\frac{d B\mathbf{s}'}{d\sigma} = \frac{d B\mathbf{s}' \, d u}{d u \, d \sigma} = \frac{B\mathbf{s}''}{\sigma'}$$

und

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{d\sigma' \, d u}{d u \, d \sigma} = \frac{\sigma''}{\sigma'}.$$

Analog resultiert für die dritte Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^3 {}_B\mathbf{s}(u)}{d\sigma^3} &= \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{B\mathbf{s}''\sigma' - B\mathbf{s}'\sigma''}{\sigma'^3} \right) = \frac{\sigma'^3 \left(\frac{d}{d\sigma} (\sigma' B\mathbf{s}'' - \sigma'' B\mathbf{s}') \right) - (\sigma' B\mathbf{s}'' - \sigma'' B\mathbf{s}') \frac{d}{d\sigma} \sigma'^3}{\sigma'^6} \\ &= \frac{\sigma'^3 B\mathbf{s}''' - \sigma'^2 \sigma''' B\mathbf{s}' - 3\sigma'^2 \sigma'' B\mathbf{s}'' + 3\sigma' \sigma''^2 B\mathbf{s}'}{\sigma'^6} \\ &= \frac{\sigma'^2 B\mathbf{s}''' - \sigma''' \sigma' B\mathbf{s}' - 3\sigma' \sigma'' B\mathbf{s}'' + 3\sigma''^2 B\mathbf{s}'}{\sigma'^5}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

wobei sich die beiden Terme im Zähler zu

$$\begin{aligned} \sigma'^3 \left(\frac{d}{d\sigma} (\sigma' B\mathbf{s}'' - \sigma'' B\mathbf{s}') \right) &= \sigma'^3 \left(\frac{d\sigma'}{d\sigma} B\mathbf{s}'' + \sigma' \frac{d B\mathbf{s}''}{d\sigma} - \frac{d\sigma''}{d\sigma} B\mathbf{s}' - \sigma'' \frac{d B\mathbf{s}'}{d\sigma} \right) \\ &= \sigma'^3 \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} B\mathbf{s}'' + B\mathbf{s}''' - \frac{\sigma'''}{\sigma'} B\mathbf{s}' - \frac{\sigma''}{\sigma'} B\mathbf{s}'' \right) = \sigma'^3 B\mathbf{s}''' - \sigma'^2 \sigma''' B\mathbf{s}' \end{aligned}$$

und

$$(\sigma' B\mathbf{s}'' - \sigma'' B\mathbf{s}') \frac{d}{d\sigma} \sigma'^3 = (\sigma' B\mathbf{s}'' - \sigma'' B\mathbf{s}') \cdot 3\sigma'^2 \frac{\sigma''}{\sigma'} = 3\sigma'^2 \sigma'' B\mathbf{s}'' - 3\sigma' \sigma''^2 B\mathbf{s}'$$

berechnen lassen. Durch die PBL ergeben sich für die parametrischen Ableitungen der Bahn nach der Bogenlänge stetige Verläufe, wie Abbildung 4.33 zeigt. Als Grundlage dient die

Nadelwickelbahn des Beispielrotors.

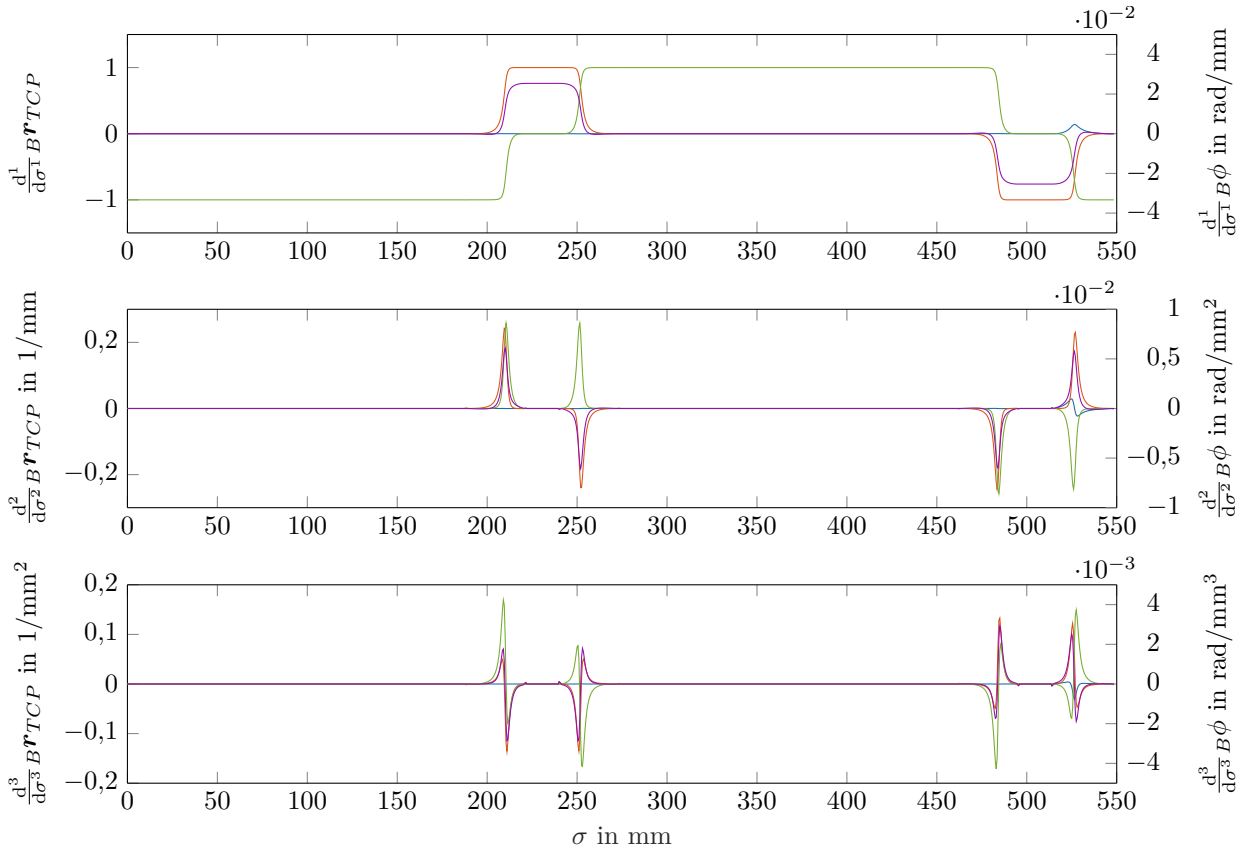


Abbildung 4.33: Parametrische Ableitungen der Komponenten B^s_1 (—), B^s_2 (—), B^s_3 (—) und B^s_4 (—) der Rotorbahn nach der Bogenlänge

Mit diesem Hintergrund lässt sich das Optimierungsproblem für eine zeitminimale Trajektorie besser in der Form

$$\min_{\dot{\sigma}(u)} T = \min_{\dot{\sigma}(u)} \int_0^T dt = \min_{\dot{\sigma}(u)} \int_0^{\Sigma_l} \frac{d\sigma}{\dot{\sigma}}$$

beschreiben. Analog zum Verfahren von Sencer et al. [97] wird die zeitliche Ableitung $\dot{\sigma}(u) = v_{\text{fr}}(u)$ als kubischer B-Spline definiert. Dieser Spline besitzt denselben Splineparameter u wie die Bahn $B^s(u)$, sodass Bahn und Vorschub synchronisiert sind. Damit vereinfacht sich das Optimierungsproblem weiter zu

$$\min_{\dot{\sigma}(u)} T = \min_{\dot{\sigma}(u)} \int_0^{\Sigma_l} \frac{d\sigma}{\dot{\sigma}} \approx \max_{\hat{p}_{v_{\text{fr}}}} \sum_{i=0}^{N_{\hat{p}}} \hat{p}_{v_{\text{fr}},i}. \quad (4.78)$$

Die Beschreibung des Vorschubs mit einem B-Spline erlaubt es, das Optimierungsproblem als Maximierung der $N_{\hat{p}} + 1$ Kontrollpunkte $\hat{p}_{v_{\text{fr}}} = [\hat{p}_{v_{\text{fr}},0}, \dots, \hat{p}_{v_{\text{fr}},N_{\hat{p}}}]$ des Vorschubsplines anzunähern.

Die höheren zeitlichen Ableitungen der Bogenlänge, die in (4.74) Anwendung finden, resultieren ebenfalls durch Einsatz der Kettenregel auf den zu optimierenden B-Spline $\dot{\sigma}$. Sie lauten

$$\ddot{\sigma} = \frac{d}{dt} \dot{\sigma} = \frac{d \dot{\sigma}}{du} \frac{du}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\dot{\sigma}'}{\sigma'} \dot{\sigma}$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\sigma}'}{\sigma'} \dot{\sigma} \right) = \frac{\sigma' \left(\dot{\sigma} \frac{d}{dt} \dot{\sigma}' + \dot{\sigma}' \ddot{\sigma} \right) - \frac{d\sigma'}{dt} (\dot{\sigma}' \dot{\sigma})}{\sigma'^2} \\ &= \frac{\dot{\sigma}'' \dot{\sigma}^2 \sigma' + \dot{\sigma}' \frac{\dot{\sigma}'}{\sigma'} \dot{\sigma} \sigma'^2 - \sigma'' \dot{\sigma}' \dot{\sigma}^2}{\sigma'^3} = \frac{\dot{\sigma}'' \dot{\sigma}^2 \sigma' + \dot{\sigma}'^2 \dot{\sigma} \sigma' - \sigma'' \dot{\sigma}' \dot{\sigma}^2}{\sigma'^3} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{d \dot{\sigma}'}{dt} = \frac{d \dot{\sigma}'}{du} \frac{du}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\dot{\sigma}''}{\sigma'} \dot{\sigma}.$$

Die parametrischen Ableitungen $\dot{\sigma}'$ und $\dot{\sigma}''$ lassen sich durch (3.72) bestimmen.

Das Optimierungsproblem (4.78) besitzt insgesamt vier Typen von Nebenbedingungen. Der erste Typ von Nebenbedingungen beschreibt den Umstand, dass der Vorschub nicht negativ sein kann, um die Bahn nur vorwärts zu durchlaufen. Dies wird sichergestellt, wenn $\hat{\mathbf{p}}_{v_{fr}} \geq \mathbf{0}_{1 \times N_p}$ eingehalten wird, da der Vorschubspline stets innerhalb einer konvexen Hülle von Kontrollpunkten liegt.

Weiters soll der Wickler aus dem Stillstand anfahren und im Stillstand enden. Hierfür ergibt sich

$$\mathbf{c}_0(\Phi) = \begin{bmatrix} {}_B \dot{\mathbf{s}}(0) \\ {}_B \ddot{\mathbf{s}}(0) \\ {}_B \ddot{\mathbf{s}}'(0) \\ {}_B \dot{\mathbf{s}}(\Sigma_l) \\ {}_B \ddot{\mathbf{s}}(\Sigma_l) \\ {}_B \ddot{\mathbf{s}}'(\Sigma_l) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{30 \times 1} \quad (4.79)$$

mit dem Parametervektor $\Phi = [{}_B \mathbf{s}', {}_B \mathbf{s}'', {}_B \mathbf{s}''', \sigma', \sigma'', \sigma''', \dot{\sigma}, \dot{\sigma}', \dot{\sigma}'']$. Weil bei der Nadelwickeltrajektorie nur der Ruck begrenzt sein soll, ist der Wert höherer Ableitungen an Start und Ende irrelevant.

Der zweite Satz von Nebenbedingungen ergibt sich aus den Anforderungen des Wickelns. Neben einer maximalen tangentialen Geschwindigkeit soll auch die tangentiale Beschleunigung begrenzt werden. Letztere korreliert mit einer Änderung der Drahtauszugsgeschwindigkeit und beeinflusst damit die Drahtzugkraft. Die tangentiale Beschleunigung beschreibt der zweite Summand in (4.58) [188]. Ein Ruck kann in tangentialer Richtung negativen Ein-

fluss auf den Draht nehmen, in normaler Richtung allerdings auch zu Abweichungen in der Positionierung des Drahtes führen. Aus diesem Grund ist der Ruck komplett zu begrenzen. Damit resultieren die tangentialen Nebenbedingungen

$$\mathbf{c}_t(\Phi) = \left\| \begin{bmatrix} \left\| \frac{d}{d\sigma} \dot{\sigma} \right\| \\ \left\| \frac{d}{d\sigma} \ddot{\sigma} \right\| \\ \left\| \frac{d^3}{d\sigma^3} \dot{\sigma}^3 + 3 \frac{d^2}{d\sigma^2} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + \frac{d}{d\sigma} \ddot{\sigma} \right\| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{t,\max} \\ a_{t,\max} \\ j_{\max} \end{bmatrix} \right\| \leq \mathbf{0}_{3 \times 1}. \quad (4.80)$$

Der dritte Typ von Nebenbedingungen beschreibt die Beschränkungen, die sich durch den kinematischen Aufbau der Wickelanlage ergeben. Während die inverse Kinematik eine Bahnposition ${}_B \mathbf{s}$ im Arbeitsraum B in die Achspositionen \mathbf{q} des Gelenkraums transformiert, beschreibt die IDK

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} {}_B \dot{\mathbf{s}}$$

aus (3.23) die Abbildung der Bahngeschwindigkeit ${}_B \dot{\mathbf{s}}$ auf die Achsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$. Die Achsbeschleunigungen lassen sich durch die zeitliche Differentiation von (3.23)

$$\begin{aligned} {}_B \ddot{\mathbf{s}} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} {}_B \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

bestimmen. Durch erneute Differentiation ergeben sich die Achsrücke

$$\begin{aligned} {}_B \ddot{\mathbf{s}} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + 2\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} {}_B \ddot{\mathbf{s}} - 2\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Da die differentielle Kinematik von den Achspositionen abhängt, besitzt sie eine zeitliche Abhängigkeit. Die Ableitungen nach der Zeit, bestimmt mit der Kettenregel, lauten

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q})}{\partial u} \frac{d u}{d \sigma} \frac{d \sigma}{d t} = \mathbf{F}_q(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{\dot{\sigma}}{\sigma'} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_q}{\partial t} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma'} + \mathbf{F}_q \frac{d}{d t} \frac{1}{\sigma'} \dot{\sigma} + \mathbf{F}_q \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma'^2} \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}_q}{\partial u} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma'} + \mathbf{F}_q \frac{-\sigma'' \dot{\sigma}}{\sigma'^3} + \mathbf{F}_q \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma'^2} = \mathbf{G}_q(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'') \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma'^2} - \mathbf{F}_q \frac{\sigma'' \dot{\sigma}^2}{\sigma'^3} + \mathbf{F}_q \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma'^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

In (4.81) und (4.82) finden die Matrixfunktionen \mathbf{F}_q und deren Ableitung \mathbf{G}_q Anwendung. Diese beschreiben die parametrische, komponentenweise Ableitung der Jacobimatrix und sind nur von den parametrischen Ableitungen der Achspositionen abhängig. Die Achspositionen und deren Ableitungen lassen sich durch (3.11) bestimmen. Wenn der Wickler den Freiheitsgrad ν besitzt und $\mathbf{v}_{q,\max} \in \mathbb{R}^\nu$, $\mathbf{a}_{q,\max} \in \mathbb{R}^\nu$ sowie $\mathbf{j}_{q,\max} \in \mathbb{R}^\nu$ die Geschwindigkeits-,

Beschleunigungs- und Rucklimits der einzelnen Achsen darstellen, dann lauten die Nebenbedingungen

$$\mathbf{c}_q(\Phi) = \left\| \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \\ \dddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{q,\max} \\ \mathbf{a}_{q,\max} \\ \mathbf{j}_{q,\max} \end{bmatrix} \right\| \leq \mathbf{0}_{15 \times 1}. \quad (4.83)$$

Es resultiert das nichtlineare, beschränkte Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\sigma} T &\approx \max_{\hat{p}_{v_{fr}}} \sum_{i=0}^{N_{\hat{p}}} \hat{p}_{v_{fr},i} \\ \text{s.t. } \hat{\mathbf{p}}_v &\geq \mathbf{0}_{1 \times N_{\hat{p}}} \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{0}_{30 \times 1} \\ \mathbf{c}_t &\leq \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{c}_q &\leq \mathbf{0}_{15 \times 1}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Die nichtlinearen Nebenbedingungen stellen kontinuierliche Größen in u bzw. σ dar, da sie auf der kompletten Bahn einzuhalten sind. Bei der Anwendung eines numerischen Optimierers sind diese Funktionen in einem diskreten Raster auszuwerten. Dazu wertet der Algorithmus die Nebenbedingungen in gleichmäßigen Schritten von je 0,5 mm aus. Resultat ist eine Folge von Splineparametern $\sigma_{[i]}$ mit variabler Schrittweite in u . Sollte diese Methodik zu einem Optimierungsergebnis mit verletzten Nebenbedingungen führen, ist eine Reduktion der Schrittlänge auf Kosten der Rechenzeit möglich. Alternativ ist auch ein krümmungsbasierter Ansatz denkbar, bei dem sich die Dichte der Auswertungspunkte in Abhängigkeit der Krümmung erhöht. Wie bereits diskutiert, ist der Vorschub an Kurventeilen mit hoher Krümmung anzupassen, an denen Verletzungen der Nebenbedingungen gehäuft auftreten.

Trotz Diskretisierung bedeutet das Auswerten der Nebenbedingungen einen hohen Rechenaufwand. Um diesen zu minimieren, lässt sich der Umstand nutzen, dass die Bahngrößen und ihre Ableitungen unabhängig vom Vorschub und somit auch von der Zeit sind. Zu den diskreten Bahnpunkten ${}_B \mathbf{s}(\sigma_{[i]})$ lassen sich die Bogenlängen-Ableitungen der Bahn $\frac{d^k}{} \frac{{}_B \mathbf{s}}{\sigma^k}$, sowie die parametrischen Ableitungen von Bahn $\mathbf{s}^{(k)}$ und Bogenlänge $\sigma^{(k)}$ bestimmen. Zudem sind die diskreten Achspositionen mit $\mathbf{q}(u_{[i]}) = \mathbf{i}_{\text{kin}}({}_B \mathbf{s}(u_{[i]}))$ unabhängig vom Vorschub. Deshalb können \mathbf{q} , die Jacobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, deren Inverse $\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$ und die parametrischen Ableitungen \mathbf{F}_q und \mathbf{G}_q ebenfalls an den Auswertepunkten der Nebenbedingungen berechnet werden. Damit lässt sich ein Großteil der notwendigen Rechenoperationen vor der eigentlichen Optimierung durchführen und deren Ergebnisse als Parametermatrizen für die Optimierung zwischenspeichern.

Aufgrund der großen Länge der Bahn ist für die Durchführung der Optimierung ein abschnittweises Vorgehen analog zu [96] und [97] notwendig. Dazu wird eine Breite $b_{\hat{p}_{v_{fr},i}}$ und

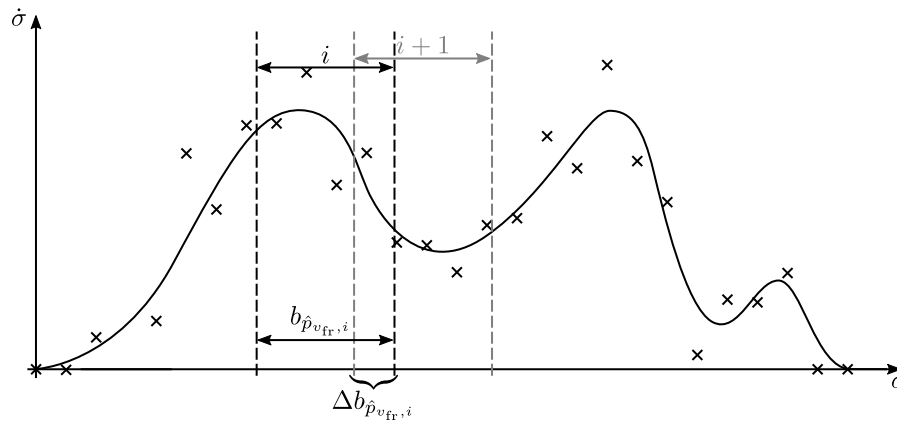


Abbildung 4.34: Abschnittsweises Optimieren des Vorschubsplines (—) durch Anpassen dessen Kontrollpunkte (x)

ein Überlapp $\Delta b_{\hat{p}_{v_{fr},i}}$ des Optimierungsfensters festgelegt. Definiert sind diese Werte über die Anzahl der Kontrollpunkte $\hat{p}_{v,i}$ des Vorschubsplines $\hat{\sigma}$. Abbildung 4.34 zeigt das schematische Vorgehen der abschnittswiseen Optimierung. Optimiert werden die Kontrollpunkte des Vorschubsplines im gerade aktiven Abschnitt. Das Einhalten der Nebenbedingungen und der Stetigkeit zwischen den einzelnen Abschnitten wird durch den Überlapp der einzelnen Abschnitte erreicht.

Das Lösen des Optimierungsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen erfolgt mit SQP. Die Rechenzeit für eine Windung inklusive der PBL und Vorberechnungen der zeitinvarianten Größen beträgt ca. 77 s für zwei Optimierungsdurchläufe mit einem Intel Core i7-7820HQ Prozessor und 32 GB Arbeitsspeicher. Die Berechnung erfolgt mit Matlab R2016b. Ein zweiter Optimierungsdurchlauf ist notwendig, um die Vorschubprofile zu glätten. Damit ergibt sich trotz minimierter Rechenoperationen bei der Berechnung der Nebenbedingungen eine relativ lange Rechenzeit zum Bestimmen einer kompletten Wickeltrajektorie. Für das schnelle Durchführen eines Wickelversuches empfiehlt sich daher eher ein KVS-Profil oder die kritische-Punkte-Heuristik. Ein möglicher Ansatz zur Reduktion der Rechenzeit ist neben einer Linearisierung der Nebenbedingungen das sinnvolle Setzen der Startwerte der Optimierung. Da sich eine Nadelwickelbahn über die Windungen hinweg nur marginal ändert, werden ähnliche Vorschubprofile pro Windung entstehen. Bei einem so vorkonditionierten Optimierungsproblem sollte das Lösungsverfahren deutlich schneller konvergieren. Für die einmalige Berechnung einer optimalen Trajektorie bei hohen zu produzierenden Stückzahlen ist die Rechenzeit jedoch zweitrangig.

In Abbildung 4.35 ist das Ergebnis der Optimierung für eine Windung gezeigt. Abgebildet sind die Achs- und Vorschubprofile, die sich für die Rotorbahn auf dem HW ergeben. Es zeigt sich, dass der angenommene Wert $v_{t,\max} = 700 \text{ mm/s}$ für große Teile der Trajektorie beschränkend wirkt und der HW noch Reserven in der maximalen Geschwindigkeit hätte. Der Geschwindigkeitseinbruch im Bereich von $200 \text{ mm} < \sigma < 250 \text{ mm}$ entspricht den Spli-

nes ${}_B\mathbf{s}_2$ bis ${}_B\mathbf{s}_4$. Diese Bahnsegmente sind gekrümmt und bedingen damit eine Reduktion der tangentialen Geschwindigkeiten. Eine Analyse der Geschwindigkeitslimits der Nebenbedingungen und der einzelnen Achsprofile zeigt, dass die Beschleunigungswerte von q_4 nicht ausreichen, um die Geschwindigkeit zu halten. Entsprechend der maximalen zugelassenen tangentialen Beschleunigung findet die Verzögerung frühzeitig statt. Bei der Rotorbahn findet kein Nadelschwenken statt, weshalb Achse q_5 nicht dargestellt ist.

4.5 Evaluation in Wickelversuchen

Das gezeigte Verfahren zur rechnergestützten Trajektorienplanung eines Nadelwicklers wird durch Wickelversuche evaluiert. Dazu wird auf die zur Verfügung stehenden Nadelwickelanlagen aus Kapitel 2.3 und ihre Eignung für das rechnergestützte Verfahren eingegangen. Im Anschluss erfolgt die Vorstellung der Versuchsergebnisse für die Stator- und Rotoranwendung.

4.5.1 Versuchsaufbauten

Für die Durchführung von Versuchen stehen die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Nadelwickelanlagen zur Verfügung. Diese unterscheiden sich neben dem kinematischen Aufbau auch in der Art und Weise, wie sie programmiert werden können.

Der VW besitzt eine SIMOTION der Firma Siemens als Steuerung [189]. Diese Bewegungssteuerung ist auf den Gleichlauf vieler Achsen spezialisiert und nutzt dazu virtuelle Kurvenscheiben. Analog zu den Untersuchungen von Mahr et al. [14] lässt sich die Trajektorie des VWs über einige Parameter wie der Blechpaketlänge h_{BP} einstellen. Wie von Mahr et al. jedoch bereits angedeutet, steigt die Komplexität der Kurvenscheibenerzeugung stark mit jedem zusätzlichen Parameter an. Die Kurvenscheiben stellen im Prinzip die Positionsverläufe der einzelnen Achsen dar. Diese sind mit der inversen Kinematik, gegeben in Anhang A, aus den kartesischen Positionen bestimmbar. Grundsätzlich wäre also die Möglichkeit gegeben, den VW mit der automatisierten Trajektorienplanung zu steuern. Dazu müsste jedoch eine externe Vorgabe der Kurvenscheiben in Echtzeit möglich sein. Eine weitere Herangehensweise, den VW mit dem gezeigten Algorithmus zu steuern, bestünde darin, dem unter der SIMOTION agierenden Antriebssystem SINAMICS direkt die Positionsvorgaben aus dem Algorithmus zu übermitteln. Dies würde den Zwischenschritt über die Kurvenscheiben entfallen lassen. Beide Methoden stehen im Rahmen dieser Arbeit jedoch noch nicht zur Verfügung, sodass der VW nicht für die Evaluation der untersuchten Algorithmen verwendet werden kann.

Sowohl im HW als CNC-Maschine als auch im RW als Industrieroboter erfolgt der Einsatz der speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) TwinCat der Firma Beckhoff Automation GmbH & Co. KG. [190]. Diese Steuerung erlaubt das Einbinden von sogenannten TcCOM-

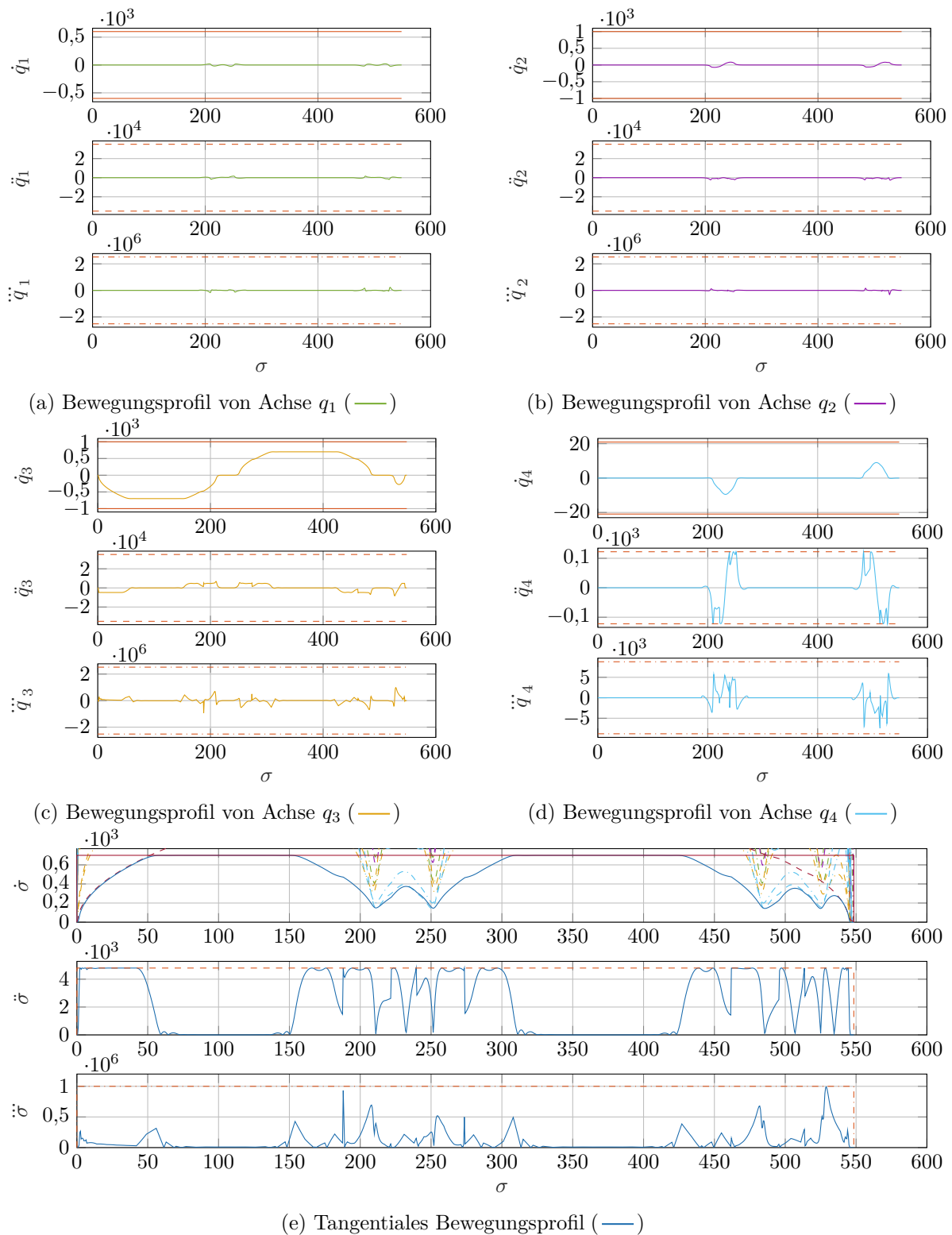


Abbildung 4.35: Achs- und Vorschubprofile bei numerischer Optimierung des Vorschubs unter Berücksichtigung von Geschwindigkeits- (—), Beschleunigungs- (---) und Rucklimits (---) sowie den Geschwindigkeitslimits, die sich durch Begrenzung der Geschwindigkeit der Achsen q_1 (—), q_2 (—), q_3 (—) und q_4 (—) sowie des maximalen Vorschubs (—), der Beschleunigung der Achsen q_1 (---), q_2 (---), q_3 (---) und q_4 (---) sowie der maximalen tangentialen Beschleunigung (---) und des Ruckes der Achsen q_1 (---), q_2 (---), q_3 (---) und q_4 (---) sowie des maximalen Ruckes (---) ergeben.

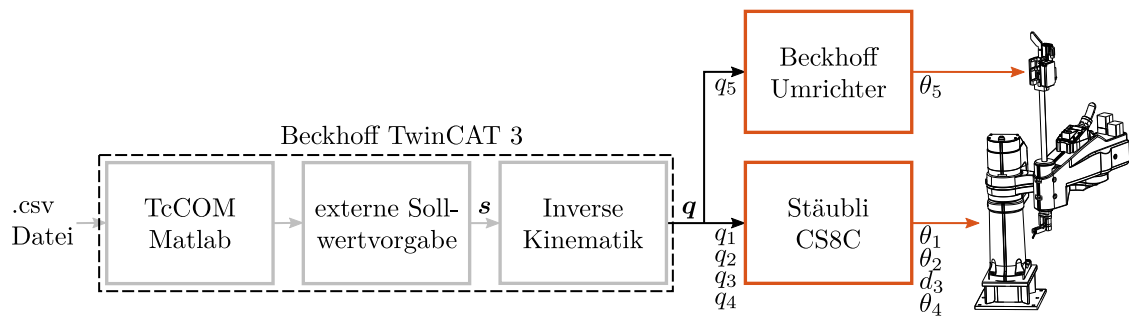


Abbildung 4.36: Aufbau der Steuerung des RWs mit EtherCAT-Signalen (—), TwinCAT-internen Signalen und Modulen (—) und Leistungssignalen und -bauteilen (—)

Modulen in den Echtzeit-Kernel der SPS. Dadurch können unter anderem Bausteine aus Matlab/Simulink, C oder C++ in die SPS integriert werden [190, S. 12].

Der von Gerngroß et al. [30] präsentierte RW besitzt eine Steuerungsstruktur, die auf diesen TcCOM-Modulen basiert. In Abbildung 4.36 ist diese Struktur gezeigt.

Die Datenbereitstellung erfolgt in einer .csv-Tabellendatei, die eine Matrix mit den Sollwerten für den RW im Takt $T_s = 2 \text{ ms}$ enthält. Neben den kartesischen Sollpositionen ${}^O\mathbf{s}$ beinhaltet diese Datei auch die Sollgeschwindigkeiten ${}^O\dot{\mathbf{s}}$ und die Sollkraft der Drahtzugbremse. Die Daten liest ein Matlab-TcCOM-Modul ein und verbindet die Werte mit den entsprechenden internen Signalen. In diesem TcCOM-Modul wäre zudem noch eine echtzeitfähige Bearbeitung der Sollgrößen möglich. Die inverse Kinematik enthält die Gleichungen aus Abschnitt 3.1.3 und bestimmt aus der kartesischen Position ${}^O\mathbf{s}$ die Achssollwerte \mathbf{q} . Der SCARA-Roboter mit der Typbezeichnung TS80 der Stäubli International AG besitzt eine eigene Robotersteuerung mit dem Namen CS8C. Diese ist so eingestellt, dass sie die externen Achswertvorgaben umsetzt und die Positionsregelung der Achsen θ_1 bis θ_4 übernimmt. Die Achse θ_5 , die für das Nadelschwenken sorgt, wird durch einen zusätzlichen Standard-Beckhoff-Servo angetrieben, der am oberen Ende der Pinole sitzt. Die servobasierte Drahtzugbremse besitzt eine eigene Regelung und bekommt die Momentensollwerte ebenfalls von der SPS zur Verfügung gestellt. Da diese drei Signalpfade unterschiedliche Laufzeiten besitzen, ist eine externe Sollwertvorgabe notwendig, die die unterschiedlichen Laufzeiten berücksichtigt und so für eine Synchronisation zwischen den einzelnen Pfaden sorgt.

Die Steuerung des HWs ist ähnlich zu der des RWs in Abbildung 4.36 aufgebaut, besitzt aber zwei wesentliche Unterschiede. Zum einen sind alle Achsen dieses Wicklers durch direkt angebundene Servoantriebe umgesetzt und die Umrichter aller Achsen werden direkt von TwinCat angesteuert. Zum anderen erwartet die SPS des HWs die Vorgabe der Achssollwerte statt der kartesischen Positionen. Das bedeutet, dass die Berechnung der Achspositionen mit der inversen Kinematik offline erfolgt.

Sowohl der RW als auch der HW besitzen die notwendige Flexibilität in der Steuerung, um die interpolierte Trajektorie aus der automatisierten Trajektorienplanung umzusetzen. Bei

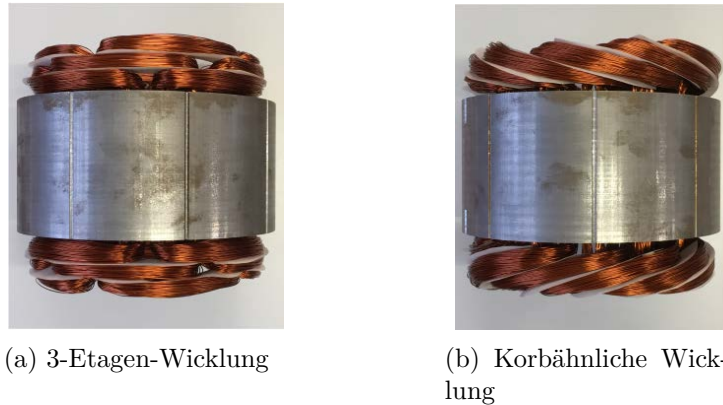


Abbildung 4.37: Wicklungsergebnisse für die Statoranwendung; Bildquelle [34]

beiden Wicklern ist lediglich die interpolierte Trajektorie in eine entsprechende Tabellendatei zu schreiben.

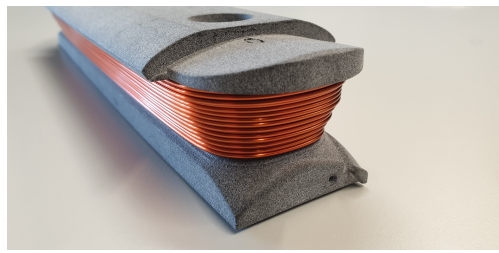
4.5.2 Wickelversuche

Mit der gezeigten automatisierten Trajektorienplanung wurden Wickelversuche sowohl für die Stator-, als auch für die Rotoranwendung durchgeführt. In [34] verwenden Gerngroß et al. die automatisierte Trajektorienplanung für den Beispielstator. Die Flexibilität des Algorithmus zeigt sich darin, dass sowohl die Standard-3-Etagen-Wicklung als auch eine korbähnliche Wicklung herstellbar ist. Dazu sind lediglich die Stützpunkte der Statorbahn aus Kapitel 4.3.2 für Eingang e und Ausgang a in den Ablageregionen $j = 2$ und $j = 4$ entsprechend anzupassen. Dies führt zu einem Normalenvektor \mathbf{n} der Kreisfläche, der nicht mehr senkrecht auf der $jx-jy$ -Ebene steht. Durch das Verbinden der Bahn mit den geometrisch stetigen Splines \mathbf{s}_f ist dennoch eine stetige Bahn sichergestellt. Abbildung 4.37 zeigt das Resultat. Das Bewickeln erfolgte mit dem RW.

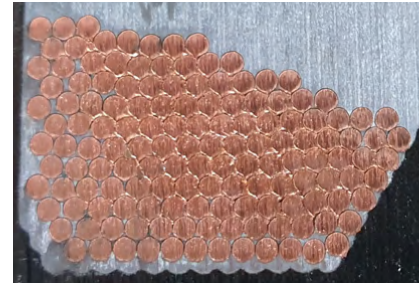
Das Ergebnis eines Wickelversuches für eine Rotoranwendung ist in Abbildung 4.38 anhand eines prototypischen Einzelzahns dargestellt. Die Bewicklung dieses Einzelzahns nimmt der HW vor. Der Einzelzahn wurde auf den Normdraht mit dem Außendurchmesser $2r_D = 1,217\text{ mm}$ ausgelegt und entspricht damit dem Beispielrotor. In der ersten Ebene befinden sich in diesem Beispiel 18 Windungen, also 50 % mehr als beim Beispielrotor, was die Komplexität bei der Erzeugung einer orthozyklischen Wicklung durch das potentielle Aufsummieren von Toleranzen erhöht.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel erfolgt die Vorstellung der automatisierten Trajektorienplanung als rechnergestütztes Verfahren zur Herstellung einer Wicklung mit der Nadelwickeltechnik. Ausgehend von der Darstellung aktueller rechnergestützter Verfahren zur Herstellung von Wicklun-



(a) Bewickelter Einzelzahn



(b) Schliffbild durch die Wicklung

Abbildung 4.38: Orthozyklischer Wicklungsaufbau am Beispiel einer Rotorwicklung

gen werden die Anforderungen an die automatisierte Trajektorienplanung definiert. Ziel ist im Wesentlichen ein Algorithmus, der zwar auf den CAD-Daten des herzustellenden Produktes basiert, aber kein Volumenmodell einer Wicklung benötigt. Weiterhin ist auf maximale Flexibilität zu achten und der EFF zu maximieren, da dieser großen Einfluss auf die Güte der Wicklung hat.

Zunächst wird auf die Füllfaktoroptimierung eingegangen, die ein typisches Problem aus der Produktionstechnik darstellt und nur ineffizient lösbar ist. Neben zwei Verfahren aus der Forschung wird die Literatur zur dichten Packung von Sphären aufgearbeitet, da sich die Füllfaktoroptimierung diesem Problembereich zuordnen lässt. Im Rahmen dieser Untersuchung wird eine Heuristik erarbeitet, die wahrscheinlich Kandidaten für das theoretische Optimum liefert. Da neben dem EFF auch die Produzierbarkeit essentiell ist, wird ein an den Nadelwickelprozess angelehnter Algorithmus vorgestellt. Dieser bestimmt produzierbare Wickelbilder sowohl für die Drahtablage in der Nut als auch für den Wickelkopf. Mit einem Modell, das auf der herrschenden Drahtzugkraft basiert, lassen sich aus den Wickelbildern die Referenzpunkte für die Bahnplanung ableiten.

Die Nadelwickelbahn ist durch die geometrischen Randbedingungen des Bauteils in wesentlichen Teilen eingeschränkt. In diesen Teilen lässt sich die Bahn durch einfache geometrische Formen beschreiben. Die Verbindungsstücke hingegen sind frei wählbar und besitzen erheblichen Einfluss auf die entstehende Wicklung. Um eine glatte Bahn zu erhalten, werden daher zunächst unterschiedliche Stetigkeitskonzepte vorgestellt. Es zeigt sich, dass lediglich geometrische Stetigkeit eine ausreichende Flexibilität zur Erstellung einer Nadelwickelbahn liefert. Der zusätzliche Freiheitsgrad, der sich durch die Verwendung der Beta-Bedingungen ergibt, wird als Parameter für eine numerische Optimierung verwendet, die das Berechnen einer Bahn mit minimaler Krümmung ermöglicht.

Der nächste Abschnitt umfasst die Berechnung einer Trajektorie durch Vorschubplanung und Trajektorieninterpolation. Beginnend vom einfachsten Verfahren, der Definition eines KVS, erfolgt die Berechnung eines Vorschubprofils mit variabler Geschwindigkeit. Dazu wird eine PBL durchgeführt, in der die Bogenlänge als B-Spline beschrieben ist. Diese PBL bildet auch die Grundlage für das dritte Verfahren zur Berechnung eines Vorschubs, einer lokalen

numerischen Optimierung, nachdem sich globale Verfahren als nicht zielführend herausgestellt haben. Zur Definition des Optimierungsproblems erfolgt die mathematische Modellierung der Kostenfunktion und der nichtlinearen Nebenbedingungen.

Den Abschluss des Kapitels bildet eine kurze Darstellung wickeltechnischer Produkte, die sich mit der automatisierten Trajektorienplanung herstellen lassen. Wie sich zeigt, besitzt der Algorithmus maximale Flexibilität sowohl in Bezug auf das herzustellende Produkt als auch in Bezug auf die verwendete Wickelkinematik. Des Weiteren ist das Herstellen einer orthozyklischen Wicklung möglich, die optimalen EFF besitzt. Das Verfahren funktioniert automatisiert, sodass, verglichen mit der industriellen Praxis, keine jahrelange Erfahrung in der Herstellung von Wicklungen notwendig ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Nadelwickeltechnik erlaubt die flexible Produktion sowohl konzentrierter als auch verteilter Wicklungen. Um diese inhärente Flexibilität und das Potential der exakten Drahtablage zu nutzen, ist eine intelligente Programmierung der Nadelwickelanlagen notwendig. Diese Arbeit untersucht daher eine automatisierte Trajektorienplanung für den Nadelwickelprozess in Anlehnung an einen CAD/CAM-Prozess.

Der Einsatz rechnergestützter Verfahren ist in vielen Phasen der Produktentstehung einer elektrischen Maschine verbreitet. Der Fertigungsprozess Wickeln, der in erheblichem Maße die Qualität des resultierenden Elektroantriebes beeinflusst, ist jedoch nur wenig digitalisiert. So ist beim Nadelwickeln eine aufwendige manuelle Programmierung industrielle Praxis, die sich in vielen Iterationen an ein zufriedenstellendes Ergebnis herantastet. Fortgeschrittenere Verfahren binden zwar Algorithmen in eine effizientere Programmierung eines Nadelwicklers ein, benötigen aber dennoch eine gewisse Expertise des Programmierers oder ein aufwendig zu konstruierendes Volumenmodell der Wicklung und sind nur für einfachere Wickelaufgaben etabliert.

An eine automatisierte Trajektorienplanung für einen Nadelwickler werden vielfältige Anforderungen gestellt. Da die herzustellende elektrische Maschine als Spulenkörper die Wicklungserzeugung in erheblichem Maße beeinflusst, muss das Wickelprogramm auf einem Modell der Maschine basieren. Um den größten Vorteil der Nadelwickeltechnik gegenüber anderen Wickelverfahren, die Möglichkeit zur exakten Positionierung des Drahtes, auszuschöpfen, ist die Trajektorie so umzusetzen, dass eine Wicklung mit maximalem Füllfaktor entsteht. Eine flexible Produktion bedeutet zum einen, dass der Algorithmus in der Lage ist, unterschiedliche Produkte und Wicklungstypen zu realisieren, aber zum anderen auch auf verschiedenen Nadelwickelanlagen zu funktionieren. Zuletzt sind im Algorithmus die Anforderungen, die an einen Nadelwickelprozess gestellt werden, zu berücksichtigen. Namentlich lassen sich hier beispielsweise Prozessparameter wie die Drahtzugkraft und die Wickelzeit nennen.

Da das Nadelwickeln einen statischen Produktionsprozess darstellt, bei dem sich die Produktionsbedingungen nicht unerwartet ändern, kann das Erstellen des Wickelprogramms komplett offline stattfinden. Für die Trajektorienplanung, die sich global als ein Optimierungsproblem mit dem Ziel einer möglichst glatten und optimalen Trajektorie auffassen lässt, haben sich in einer statischen Umgebung entkoppelte Ansätze durchgesetzt. Diese teilen das Finden einer Trajektorie in die Subprobleme Bahnplanung und Definition eines Bewegungsgesetzes auf.

Aus diesem Grund untersucht diese Arbeit den Einsatz einer entkoppelten Trajektorienplanung als rechnergestützten Wickelprozess. Als Basis dient eine Füllfaktoroptimierung, die anhand des CAD-Modells der elektrischen Maschine das Wickelbild einer herstellbaren Wicklung mit maximalem Füllfaktor berechnet. Daraus werden die Referenzpunkte für die Trajektorie bestimmt. Diese Referenzpunkte stellen die Verbindungsstellen der stetig verbundenen Bahnsegmente dar, die in der Bahnplanung bestimmt werden. Durch die Vorschubplanung lässt sich das Bewegungsgesetz ableiten und die Trajektorie komplettieren.

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Global gesehen ist das Ergebnis dieser Arbeit ein rechnergestütztes Verfahren, welches das automatisierte und flexible Planen von Trajektorien für Nadelwickler ermöglicht. Das erarbeitete Verfahren in seiner Gänze findet sich in Kapitel 4. Im Vergleich zur industriellen Praxis und anderen Verfahren aus der Forschung erlaubt die automatisierte Trajektorienplanung das effiziente Erstellen einer glatten Trajektorie mit optimalem Füllfaktor. Zugleich sind keine tieferen Kenntnisse der Nadelwickeltechnik notwendig.

Die Untersuchungen in Kapitel 4.2 befassen sich mit der Optimierung des Füllfaktors für konische und technisch realistische Nuten. Zunächst werden zwei Verfahren aus der Literatur untersucht, die für diesen Einsatzzweck adaptiert werden. Anschließend erfolgt das Lösen des NP-harten Problems der Füllfaktoroptimierung durch eine Heuristik, die Wickelbilder erzeugt, die potentielle Kandidaten für das theoretische Optimum in Bezug auf den Füllfaktor darstellen. Es zeigt sich, dass in den betrachteten Nuten eine nicht orthozyklische Wicklung das Optimum darstellt. Mit einem weiteren Verfahren, das den Nadelwickelprozess simuliert, lassen sich Wickelbilder erzeugen, die zwar nicht an den maximal möglichen Füllfaktor heranreichen, dafür aber produzierbar sind. Um aus den Wickelbildern Stützpunkte für die Berechnung der eigentlichen Trajektorie zu generieren, wird das Drahtverhalten bei Düsenaustritt durch ein einfaches, zugkraft-abhängiges Modell dargestellt.

In der folgenden Bahnplanung in Kapitel 4.3 wird eine geometrische Beschreibung der Nadelwickelbahn auf Basis von NURBS erzeugt. Hier finden die geometrischen Beschränkungen Berücksichtigung, die sich durch das zu bewickelnde Bauteil ergeben. Um eine glatte Bahn zu erhalten, müssen die vorgegebenen Bahnteile durch stetig angebundene Segmente ergänzt werden. Wie sich zeigt, reicht parametrische Stetigkeit nicht aus, um eine zufriedenstellende Bahn zu erhalten. Mit den Beta-Bedingungen für geometrische Stetigkeit werden daher Berechnungsvorschriften abgeleitet, die das Berechnen eines geometrisch stetigen Segmentes ermöglichen. Die dazu notwendigen Beta-Parameter werden durch einen Optimierer berechnet, der eine krümmungsminimale Splineverbindung zum Ziel hat. Der Algorithmus an sich erlaubt das Erzeugen beliebig glatter Kurven aus einzelnen abschnittsweise definierten parametrischen Funktionen.

In der anschließenden Vorschubplanung in Kapitel 4.4 werden Verfahren vorgestellt, die die konkurrierenden Ziele Wickelzeit und Wickelqualität beachten. Bei der Wahl der Verfahren ist die große Länge einer Nadelwickelbahn zu berücksichtigen, die trotz einer Offline-Berechnung zu erheblichen Rechenzeiten führen kann. Neben einem Verfahren mit konstanter Bahngeschwindigkeit, das sich durch geringere Drahtzugkraftschwankungen auszeichnet und damit eine höhere Wicklungsqualität erlaubt, wird auch der Einsatz einer variablen Vorschubplanung untersucht. Dabei kommt eine PBL zum Einsatz, die auf B-Splines basiert und so eine effiziente und genaue Approximation der Bogenlänge auch bei sehr langen Bahnen ermöglicht. Über doppel-S-förmige Geschwindigkeitsprofile erlaubt die variable Vorschubplanung das Generieren einer Trajektorie mit deutlich reduzierter Prozesszeit, in der die auftretenden Drahtzugkraftschwankungen kontrollierbar bleiben. In einem dritten Verfahren wird ein Optimierungsproblem mit nicht-linearen Nebenbedingungen aufgestellt, mit dem sich eine beinahe zeitoptimale Wickeltrajektorie berechnen lässt. Der Algorithmus berücksichtigt neben tangentialen Größen auch Beschränkungen, die sich durch die einzelnen Antriebsachsen der Nadelwickelkinematik ergeben. Die Nebenbedingungen werden dabei durch die Berechnung der zeitlichen Ableitungen der Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik so aufgestellt, dass ein Großteil der notwendigen Rechenoperationen bereits vor der Optimierung durchführbar sind. Dadurch ergibt sich trotz der Problemgröße ein Optimierungsalgorithmus mit akzeptabler Rechenzeit.

In verschiedenen Wickelversuchen zeigt sich, dass der Algorithmus als ganzheitlicher Ansatz in der Lage ist, sowohl verteilte Wicklungen unterschiedlichen Typs als auch konzentrierte Wicklungen zu erstellen. Das Verfahren wurde auf zwei komplett unterschiedlichen Wickelanlagen eingesetzt und zeigt damit auch hier seine Flexibilität. Mit dem Algorithmus ist zudem das Umsetzen einer lagegenauen Wicklung möglich, was eine Optimierung des Füllfaktors erlaubt.

5.2 Ausblick

Ziel dieser Arbeit ist ein rechnergestütztes Verfahren, das automatisiert und ohne Eingriffe eines Programmierers auf Basis der CAD-Daten ein Wickelprogramm erstellt, mit dem sowohl konzentrierte als auch verteilte Wicklungen auf gängigen Nadelwickelanlagen herstellbar sind. In den Wickelversuchen zeigte sich, dass speziell bei der Umsetzung einer lagegenauen Wicklung einzelne Referenzpunkte anzupassen sind. Grund dafür ist das angesetzte Drahtmodell, das basierend auf einer statischen Berechnung der Drahtzugkraft aus geometrischen Größen das Auszugsverhalten modelliert. Dieses ist teilweise zu ungenau und spiegelt das reale Verhalten nicht ausreichend genau wider. Die Drahtzugkraft ist eine sehr dynamische Variable, die von geometrischen Größen wie dem Auszugswinkel, von Prozessparametern wie der Bremskraft, aber auch von der Wickeltrajektorie selbst abhängt. Aktuelle Forschungsar-

beiten von Hofmann et al. [184] und Komodromos et al. [191] im Bereich des Linearwickelns zeigen, dass das Modellieren des Drahtverhaltens komplex ist und einer genaueren Betrachtung bedarf. Mit einem präziseren Modell ließe sich die Anzahl notwendiger Iterationen bis zu einer perfekten Wicklung nochmal deutlich reduzieren.

Eine ähnliche Auswirkung hätte der Einsatz einer Drahtzugregelung, die für eine möglichst konstante Drahtzugkraft an der Nadelwickelspitze sorgt. Dadurch ließen sich die Schwankungen im Drahtverhalten während des Wickelprozesses deutlich reduzieren. Die automatisierte Trajektorienplanung ermöglicht zu jeder Zeit das Berechnen der geometrischen Verhältnisse im Wickelprozess, was mit einem entsprechenden Modell der Drahtstrecke die Schätzung einer Drahtzugkraft an der Nadelspitze erlaubt [39]. Da der Wickelprozess bereits vor dem eigentlichen Wickeln bekannt ist, kann auch die Berechnung der Sollkräfte für die Drahtzugbremse offline erfolgen.

Ein weiteres Themenfeld umfasst den Einsatz einer iterativ lernenden Regelung zur Optimierung der Nadelwickelbahn. Die Grundidee ist hierbei, den iterativen Prozess, wie er derzeit industrielle Praxis ist und vom Programmierer ausgeführt wird, durch einen maschinellen Prozess zu ersetzen. Mit zum Beispiel einem bilderkennenden Verfahren wird das Wickelbild während des Wickelns erfasst und ausgewertet. Tritt eine unerwünschte Abweichung vom Sollverhalten auf, kann ein Algorithmus dies erkennen und die Referenzpositionen oder die Bahn für den nächsten Wickelversuch anpassen [192].

Die automatisierte Trajektorienplanung wurde erfolgreich für das Produzieren konzentrierter und verteilter Wicklungen eingesetzt. Grundsätzlich bietet der Algorithmus das Potential, vom Nadelwickeln verschiedene Wickeltechnologien zu digitalisieren. Hier sind zum Beispiel das Linearwickeln oder das Flyerwickeln denkbar. Aus dem optimierten Wickelbild ist dazu lediglich ein anderer Bahnplanungsprozess notwendig, der Vorgaben aus diesen Wickeltechnologien aufgreift und einhält. Somit ließen sich weitere Disziplinen digitalisieren und die Wickeltechnik als Ganzes voranbringen.

A Kinematik der Wickelanlagen

Kinematik des Vertikalwicklers

Die DH-Parameter des VWs sind in Tabelle A.1 gegeben.

Da die Kinematik entkoppelt ist, werden die Transformationsmatrizen der beiden kinematischen Ketten einzeln aufgestellt. Für den oberen Teil der Kinematik lauten die einzelnen Transformationsmatrizen

$$\begin{aligned}
 {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{OB} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^{OB}\tilde{\mathbf{T}}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2\tilde{\mathbf{T}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -o_{\text{Tool}} \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} &= \begin{bmatrix} \cos_3 & -\sin_3 & 0 & l_{\text{Tool}} \cos_3 \\ \sin_3 & \cos_3 & 0 & l_{\text{Tool}} \sin_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tabelle A.1: DH-Parameter des VWs

DH-Parameter	θ in rad	d in mm	a in mm	α in rad
obere Basis	$\pi/2$	700	500	$\pi/2$
Achse 2	0	q_2	0	$\pi/2$
Achse 1	$-\pi/2$	q_1	o_{Tool}	$\pi/2$
Achse 3	q_3	0	l_{Tool}	0
untere Basis	0	100	500	$-\pi/2$
Achse 5	0	q_5	0	$\pi/2$
Achse 4	q_4	0	0	0

und für den unteren Teil

$$\begin{aligned}
 {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{UB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^{UB}\tilde{\mathbf{T}}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5\tilde{\mathbf{T}}_B &= \begin{bmatrix} \cos_4 & -\sin_4 & 0 & 0 \\ \sin_4 & \cos_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

mit den DH-Parametern aus Tabelle A.1 und der bereits in Kapitel 3.1.2 verwendeten Abkürzung $\sin_3 = \sin(q_3)$. Beim Aufstellen der VWK ist zu beachten, dass sich beide kinematischen Ketten vom Welt-KOS W aus bilden. Soll eine kinematische Kette vom TCP zum fest mit der Anlage verbundenen Bauteil mit dem KOS B gebildet werden, ist die Kette der unteren Basis rückwärts zu durchlaufen. Aus diesem Grund bildet sich die VWK der entkoppelten Kinematik durch

$$\begin{aligned}
 {}^B\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} &= ({}^W\tilde{\mathbf{T}}_B)^{-1} \cdot {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} = {}^5\tilde{\mathbf{T}}_B^{-1} {}^{UB}\tilde{\mathbf{T}}_5^{-1} {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{UB}^{-1} {}^1\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} {}^2\tilde{\mathbf{T}}_1 {}^{OB}\tilde{\mathbf{T}}_2 {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{OB} \\
 &= {}^B\tilde{\mathbf{T}}_5 {}^5\tilde{\mathbf{T}}_{UB} {}^{UB}\tilde{\mathbf{T}}_W {}^W\tilde{\mathbf{T}}_{OB} {}^{OB}\tilde{\mathbf{T}}_2 {}^2\tilde{\mathbf{T}}_1 {}^1\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}}.
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Transformationsmatrix der VWK für den HW

$${}^{\text{TCP}}\tilde{\mathbf{T}}_B = \begin{bmatrix} -\cos_3 \cos_4 & \sin_3 \cos_4 & -\sin_4 & \cos_4(q_2 - o_{\text{Tool}} - l_{\text{Tool}} \cos_3 - 500) + \sin_4(500 - q_5) \\ \cos_3 \sin_4 & -\sin_3 \sin_4 & -\cos_4 & \sin_4(500 + o_{\text{Tool}} - q_2 + l_{\text{Tool}} \cos_3) + \cos_4(500 - q_5) \\ -\sin_3 & -\cos_3 & 0 & 600 - l_{\text{Tool}} \sin_3 - q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die VWK als Funktion $\mathbf{s} = \mathbf{f}_{\text{kin}}(\mathbf{q}) = [{}^W\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}), \boldsymbol{\xi}_{\text{TCP}}(\mathbf{q})]^T$ lautet damit

$$\begin{aligned}
 {}^W\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}) &= {}^{\text{TCP}}\tilde{\mathbf{T}}_B \cdot {}^{\text{TCP}}\tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} = \begin{bmatrix} \cos_4(q_2 - o_{\text{Tool}} - l_{\text{Tool}} \cos_3 - 500) + \sin_4(500 - q_5) \\ \sin_4(500 + o_{\text{Tool}} - q_2 + l_{\text{Tool}} \cos_3) + \cos_4(500 - q_5) \\ 600 - l_{\text{Tool}} \sin_3 - q_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos_4 & \sin_4 & 0 \\ -\sin_4 & \cos_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 - o_{\text{Tool}} - l_{\text{Tool}} \cos_3 - 500 \\ 500 - q_5 \\ 600 - l_{\text{Tool}} \sin_3 - q_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{R}_z(-q_4) \begin{bmatrix} q_2 - o_{\text{Tool}} - l_{\text{Tool}} \cos_3 - 500 \\ 500 - q_5 \\ 600 - l_{\text{Tool}} \sin_3 - q_1 \end{bmatrix}.$$

Für den Ortsvektor ${}^w \mathbf{r}_{\text{TCP}}$ und mit (3.9) ergibt sich für die Euler-Winkel

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \text{atan2}(-\sin_4, \cos_4) \\ \text{atan2}\left(\sqrt{\sin_4^2 + \cos_4^2}, 0\right) \\ \text{atan2}(-\sin_3, -\cos_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_4 \\ \pi/2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Da auch bei dieser Kinematik die Drehung um den Euler-Winkel $\vartheta = \pi/2$ konstant ist, stellt das Vektorfeld \mathbf{f}_{kin} eine Abbildung $\mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^5$ dar.

Mit diesem Ergebnis ist die inverse Kinematik $\mathbf{q} = \mathbf{i}_{\text{kin}}(\mathbf{s})$ analytisch bestimmbar. Die beiden Euler-Drehwinkel lassen sich direkt der Schaltachse und der Schwenkachse q_4 bzw. q_3 zuordnen.

$$q_3 = s_5$$

$$q_4 = -s_4$$

Damit resultieren aus dem kartesischen Teil der VWK die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} q_2 - o_{\text{Tool}} - l_{\text{Tool}} \cos(s_5) - 500 \\ 500 - q_5 \\ 600 - l_{\text{Tool}} \sin(s_5) - q_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(-s_4) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

und aufgelöst nach den Achspositionen q_1 , q_2 und q_5 ergibt sich

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_5 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(-s_4) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_{\text{Tool}} + l_{\text{Tool}} \cos(s_5) + 500 \\ 500 \\ 600 - l_{\text{Tool}} \sin(s_5) \end{bmatrix}.$$

Kinematik des Horizontalwicklers

Analog zum VW lassen sich auch die direkte und inverse Kinematik des HW bestimmen. Die DH-Parameter des HWs für die Variante ohne schwenkbaren Nadelhalter, wie er in Kapitel 4.5 verwendet wird, sind in Tabelle A.2 gegeben.

Damit resultieren die einzelnen Transformationsmatrizen für die Drehspindel

$${}^w \tilde{\mathbf{T}}_{Sp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{Sp} \tilde{\mathbf{T}}_B = \begin{bmatrix} \cos_4 & -\sin_4 & 0 & 0 \\ \sin_4 & \cos_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabelle A.2: DH-Parameter des HWs

DH-Parameter	θ in rad	d in mm	a in mm	α in rad
Spindel	0	700	500	π
Achse 4	q_4	h_B	0	π
Achse 3	0	q_3	l_{Tool}	0
Zwischendrehung	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$
Achse 2	$\pi/2$	q_2	0	$-\pi/2$
Achse 1	$\pi/2$	q_1	l_{Tool}	0

und für den Nadelhalter

$$\begin{aligned}
 {}^W\tilde{\mathbf{T}}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{\text{Tool}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3\tilde{\mathbf{T}}_{3'} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^{3'}\tilde{\mathbf{T}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_{\text{Tool}} \\ 0 & 0 & 1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Damit ist die direkte Kinematik durch das inverse Durchlaufen der Transformationen an der Spindel mit

$$\begin{aligned}
 {}^B\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} &= \left({}^W\tilde{\mathbf{T}}_{S_p} {}^{S_p}\tilde{\mathbf{T}}_B \right)^{-1} {}^W\tilde{\mathbf{T}}_3 {}^3\tilde{\mathbf{T}}_{3'} {}^{3'}\tilde{\mathbf{T}}_2 {}^2\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} = {}^B\tilde{\mathbf{T}}_{S_p} {}^{S_p}\tilde{\mathbf{T}}_W {}^W\tilde{\mathbf{T}}_3 {}^3\tilde{\mathbf{T}}_{3'} {}^{3'}\tilde{\mathbf{T}}_2 {}^2\tilde{\mathbf{T}}_{\text{TCP}} \\
 &= \begin{bmatrix} -\cos_4 & 0 & \sin_4 & q_1 \sin_4 + q_2 \cos_4 \\ \sin_4 & 0 & \cos_4 & q_1 \cos_4 - q_2 \sin_4 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 + z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

gegeben und die VWK lautet

$$\begin{aligned}
 {}^W\tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}(\mathbf{q}) &= {}^{\text{TCP}}\tilde{\mathbf{T}}_B \cdot {}^{\text{TCP}}\tilde{\mathbf{r}}_{\text{TCP}} = \begin{bmatrix} q_1 \sin_4 + q_2 \cos_4 \\ q_1 \cos_4 - q_2 \sin_4 \\ q_3 + z_B \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos_4 & \sin_4 & 0 \\ -\sin_4 & \cos_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_3 + z_B \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(-q_4) \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_3 + z_B \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Für die kartesische Komponenten und mit (3.9) resultiert für die Euler-Winkel

$$\begin{bmatrix} s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{atan2}(r_{13}, -r_{23}) \\ \operatorname{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \operatorname{atan2}(r_{31}, r_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_4 \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Damit sind zwei der drei Euler-Drehungen konstant und die VWK ist eine Abbildung $\mathbf{f}_{\text{kin}} : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$.

Die inverse Kinematik lässt sich analog zum HW analytisch durch Umformen bestimmen. Der Verdrehwinkel ist direkt aus der VWK ablesbar und lautet

$$q_4 = -s_4.$$

Damit können auch die restlichen Achspositionen berechnet werden und es resultiert

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(-s_4) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 - z_B \end{bmatrix}.$$

B Koeffizienten des Polynominterpolators

Die Taylorentwicklung des NURBS, eingesetzt in die Interpolationsgleichung gibt am Entwicklungspunkt $u_{[i]}$ die Gleichung

$$\hat{l}_{[i]} \approx l_{[i]} = \left\| \frac{\mathcal{Z}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2}}{\mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2}} - \frac{\mathcal{Z}(u_{[i]})}{\mathcal{N}(u_{[i]})} \right\|.$$

Diese Gleichung stellt das Polynom

$$a_4 \Delta u^4 + a_3 \Delta u^3 + a_2 \Delta u^2 + a_1 \Delta u + a_0 = 0$$

dar. Dessen Koeffizienten lassen sich bestimmen, indem die 2-Norm ausgeschrieben wird. Dazu werden die Terme in der Norm zunächst zusammengefasst:

$$l_{[i]} = \left\| \frac{-\mathcal{Z}(u_{[i]}) \left(\mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right) + \mathcal{N}(u_{[i]}) \left(\mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right)}{\mathcal{N}(u_{[i]}) \left(\mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right)} \right\|.$$

Der Nenner ist eine skalare Größe und lässt sich aus der Norm herausziehen. Gleichzeitig wird die Gleichung quadriert, um die Wurzel der 2-Norm zu eliminieren.

$$l_{[i]}^2 = \frac{\left\| -\mathcal{Z}(u_{[i]}) \left(\mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right) + \mathcal{N}(u_{[i]}) \left(\mathcal{Z}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right) \right\|^2}{\left(\mathcal{N}(u_{[i]}) \left(\mathcal{N}(u_{[i]}) + \mathcal{N}'(u_{[i]}) \cdot \Delta u + \mathcal{N}''(u_{[i]}) \cdot \frac{\Delta u^2}{2} \right) \right)^2}$$

Unter der Verwendung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{Z}^{(k)}(u_{[i]}) \right\|^2 &= \mathcal{Z}_1^{(k)}(u_{[i]})^2 + \mathcal{Z}_2^{(k)}(u_{[i]})^2 + \mathcal{Z}_3^{(k)}(u_{[i]})^2 \\ \mathcal{Z}^{(j)}(u_{[i]})^T \mathcal{Z}^{(k)}(u_{[i]}) &= \mathcal{Z}_1^{(j)}(u_{[i]}) \mathcal{Z}_1^{(k)}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}_2^{(j)}(u_{[i]}) \mathcal{Z}_2^{(k)}(u_{[i]}) + \mathcal{Z}_3^{(j)}(u_{[i]}) \mathcal{Z}_3^{(k)}(u_{[i]}) \end{aligned}$$

lassen sich die Koeffizienten des gesuchten Polynoms durch Sortieren angeben:

$$\begin{aligned} a_4 &= -l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^2 \mathcal{N}''(u_{[i]})^2 + \left\| \mathcal{Z}(u_{[i]}) \right\|^2 \mathcal{N}''(u_{[i]})^2 + \left\| \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \right\|^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^2 \\ &\quad - 2 \mathcal{Z}(u_{[i]})^T \mathcal{Z}''(u_{[i]}) \mathcal{N}(u_{[i]}) \mathcal{N}''(u_{[i]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2\mathbf{Z}'(u_{[i]})^T \mathbf{Z}''(u_{[i]}) \mathcal{N}(u_{[i]})^2 + 2 \left\| \mathbf{Z}(u_{[i]}) \right\|^2 \mathcal{N}'(u_{[i]}) \mathcal{N}'''(u_{[i]}) - 2l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^2 \mathcal{N}'(u_{[i]}) \mathcal{N}'''(u_{[i]}) \\
&\quad - 2\mathbf{Z}(u_{[i]})^T \mathbf{Z}'(u_{[i]}) \mathcal{N}(u_{[i]}) \mathcal{N}'''(u_{[i]}) - 2\mathbf{Z}(u_{[i]})^T \mathbf{Z}''(u_{[i]}) \mathcal{N}(u_{[i]}) \mathcal{N}'(u_{[i]}) \\
a_2 &= 2l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^3 \mathcal{N}'''(u_{[i]}) - l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^2 \mathcal{N}'(u_{[i]})^2 + \left\| \mathbf{Z}(u_{[i]}) \right\|^2 \mathcal{N}'(u_{[i]})^2 \\
&\quad - 2\mathbf{Z}(u_{[i]})^T \mathbf{Z}'(u_{[i]}) \mathcal{N}(u_{[i]}) \mathcal{N}'(u_{[i]}) + \left\| \mathbf{Z}'(u_{[i]}) \right\|^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^2 \\
a_1 &= -2l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^3 \mathcal{N}'(u_{[i]}) \\
a_0 &= -l_{[i]}^2 \mathcal{N}(u_{[i]})^4.
\end{aligned}$$

Literatur

- [1] P. Thomes, A. Kampker, D. Vallée, A. Schnettler und G. Kasperk, „Grundlagen,“ in *Elektromobilität*, A. Kampker, D. Vallée und A. Schnettler, Hrsg., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 5–58, ISBN: 978-3-642-31985-3.
- [2] Kraftfahrt-Bundesamt, *Pressemitteilung Nr. 01/2019- Fahrzeugzulassungen im Dezember 2018 - Jahresbilanz*, 2019. Adresse: https://www.kba.de/DE/Presse/Pressemitteilungen/2019/Fahrzeugzulassungen/pm01_2019_n_12_18_pm_komplett.html (besucht am 20.01.2019).
- [3] M. Robinius, J. Linssen, T. Grube, L. Kozur und D. Stolten, *Infrastruktur-Analyse zur Sektorenkopplung Strom und Verkehr*, Hannover, 2018.
- [4] A. Karle, *Elektromobilität: Grundlagen und Praxis*, 1. Aufl. München: Fachbuchverl. Leipzig im Hanser-Verl., 2015, ISBN: 9783446443396. DOI: 10.3139/9783446444171. Adresse: <http://dx.doi.org/10.3139/9783446444171>.
- [5] W. Jordan, *Technologie kleiner Elektromaschinen: Wissensspeicher für Produktentwickler, Techniker und Kaufleute*, 5. Aufl. Dresden: Eigenverl. technoexpert dresden, 2013, ISBN: 978-3-00-039888-9.
- [6] P. Herrmann, M. Gerngross, C. Endisch, P. Stenzel und P. Uhlmann, „Automated Contacting Technology for Needle Winding Applications with Distributed Windings,“ in *2017 7th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2017, S. 218–225.
- [7] K. Feldmann und K.-U. Wolf, „Rechnerunterstützte Planung von Wickelvorgängen zur Leistungs- und Qualitätssteigerung bei der Spulenfertigung,“ *Produktionsautomatisierung - pa*, Jg. 3, Nr. 3, S. 11–14, 1994.
- [8] K. Feldmann und K.-U. Wolf, „Improvements of Winding Quality and Production Efficiency with the help of computer based Planning and Programming Systems,“ *Production Engineering*, Jg. 4, Nr. 2, S. 115–118, 1997.
- [9] K.-U. Wolf, „Verbesserte Prozeßführung und Prozeßplanung zur Leistungs- und Qualitätssteigerung beim Spulwickeln,“ Diss., Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg, 1997.

- [10] U. Wenger, „Prozessoptimierung in der Wickeltechnik durch innovative maschinenbauliche und regelungstechnische Ansätze,“ Diss., Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg, 2004.
- [11] A. Dobroschke, „Flexible Automatisierungslösungen für die Fertigung wickeltechnischer Produkte,“ Diss., Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg, 2011.
- [12] Aumann GmbH. „NWS/S Data Sheet.“ (2014), Adresse: https://www.aumann.com/uploads/tx_yesprojects/Aumann-Datenblatt-NWS-S.pdf (besucht am 05.10.2018).
- [13] D. Kiefer, „Ne|W: MARSILLI Needle Winding Platform,“ in *2015 5th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2015, S. 13–15.
- [14] A. Mahr, M. Masuch und J. Franke, „Benefits of an universal winding machine,“ in *2016 6th International Electric Drives Production Conference (EDPC) - Industrial Transcript*, 2016, S. 45–52.
- [15] A. Mahr, M. Wurm, B. Bickel, J. Franke und H. Halder, „Development of a control system for a universal winding machine based on virtual path planning,“ in *2017 7th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2017, S. 1–5.
- [16] DIN 8580:2003-09, *Fertigungsverfahren: Begriffe, Einteilung*, Berlin, 2003.
- [17] J. Hagedorn, F. Sell-Le Blanc und J. Fleischer, *Handbook of Coil Winding*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018, ISBN: 978-3-662-54401-3.
- [18] DIN EN 60317-0-1, *Technische Lieferbedingungen für bestimmte Typen von Wickeldrähten*, Berlin, 2008.
- [19] DIN EN 60851-1:2010-09, *Wickeldrähte: Prüfverfahren*, Berlin, 2010.
- [20] G. Müller, K. Vogt und B. Ponick, *Berechnung elektrischer Maschinen*, 6., völlig neu bearb. Aufl., Ser. Elektrische Maschinen. Weinheim: WILEY-VCH, 2008, Bd. 2, ISBN: 3-527-40525-9.
- [21] P. Stenzel, „Großserientaugliche Nadelwickeltechnik für verteilte Wicklungen im Anwendungsfall der E-Traktionsantriebe,“ Diss., Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg und Meisenbach KG, 2017.
- [22] G. Müller und B. Ponick, *Grundlagen elektrischer Maschinen*, 10., wesentlich überarb. und erw. Aufl., Ser. Elektrische Maschinen. Weinheim: WILEY-VCH, 2014, Bd. 1, ISBN: 978-3-527-41205-1.
- [23] D. Gerling, K. Mühlbauer und G. Dajaku, „Frisch gewickelt,“ *AutoCAD Magazin*, Nr. 4, S. 36–37, 2012.

- [24] P. Stenzel, P. Dollinger, D. Mihajlovic, J. Richnow, J. Franke und C. Endisch, „Needle winding for distributed round-wire-windings without the use of insulation disks,“ in *2014 4th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2014, S. 1–7.
- [25] T. Röth, A. Kampker, U. Reisingen, K. Hameyer, R. W. de Doncker, T. Stolze, A. Vetter, J. Hagedorn, D. U. Sauer und D. Müller, „Entwicklung von elektrofahrzeugspezifischen Systemen,“ in *Elektromobilität*, A. Kampker, D. Vallée und A. Schnettler, Hrsg., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 235–334, ISBN: 978-3-642-31985-3.
- [26] OECD, *Material Resources, Productivity and the Environment*. OECD, 2015, ISBN: 9789264190498. DOI: 10.1787/9789264190504-en.
- [27] J. Richnow, „Untersuchungen zur Optimierung der Fertigung von Drehfeldstatoren für Traktionsantriebe,“ Diss., Universität der Bundeswehr München, München, 2016.
- [28] A. Kampker, *Elektromobilproduktion*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014, ISBN: 978-3-642-42021-4. DOI: 10.1007/978-3-642-42022-1.
- [29] R. Tzscheutschler, H. Olbrich und W. Jordan, *Technologie des Elektromaschinenbaus*, 1. Aufl. 1990, ISBN: 3-341-00851-9.
- [30] M. Gerngross, P. Herrmann, C. Westermaier und C. Endisch, „Highly Flexible Needle Winding Kinematics for Traction Stators Based on a Standard Industrial Robot,“ in *2017 7th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2017, S. 42–48.
- [31] F. Sell-Le Blanc und J. Gutekunst, „Flexible needle winding approaches for distributed stator windings,“ in *2016 6th International Electric Drives Production Conference (EDPC) - Industrial Transcript*, 2016, S. 32–44.
- [32] J. Fleischer, J. Hagedorn und J. Hofmann, *Qou Vadis Winding Technology?* Institute of Production Science, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 2017.
- [33] J. Hofmann, B. Bold, C. Baum und J. Fleischer, „Investigations on the tensile force at the multi-wire needle winding process,“ in *2017 7th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2017, S. 1–6.
- [34] M. Gerngross, P. Herrmann, C. Westermaier und C. Endisch, „Optimization of the End Winding Patterns in Needle Wound Traction Stators,“ in *2019 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, S. 314–320.
- [35] P. Stenzel, „Verfahren zur Herstellung eines Stators einer elektrischen Maschine,“ DE 10 2016 005 176 A1, 2017.
- [36] P. Herrmann und P. Uhlmann, „Verfahren und Vorrichtung zum Herstellen einer elektrischen Maschine,“ DE 10 2016 015 238 A1, 2018.

- [37] J. Richnow, R. Gräf, P. Stenzel und C. Westermaier, „Verfahren zum Bewickeln eines Wicklungsträgers,“ DE 10 2016 003 802 A1, 2017.
- [38] B. Bickel, M. Hübner und J. Franke, „Analyse des Optimierungspotenzials zur Erhöhung des Kupferfüllfaktors in elektrischen Maschinen,“ *ant journal*, Jg. 53, Nr. 2, S. 16–21, 2014.
- [39] M. Gerngross, P. Herrmann und C. Endisch, „Nonlinear Modelling of Dynamic Wire Tension in Needle Winding Process for Distributed Windings,“ in *2019 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2019, S. 151–156.
- [40] F. Sell-Le Blanc, J. Fleischer, M. Schmitt, M. Unger und J. Hagedorn, „Analysis of wire tension control principles for highly dynamic applications in coil winding: Investigation of new tension control devices for noncircular orthocyclic coils,“ in *2015 5th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2015, S. 1–8.
- [41] P. Uhlmann, C. Endisch, P. Herrmann und M. Gerngroß, „Nadelwickelvorrichtung,“ DE 10 2016 014 371 A1, 2018.
- [42] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani und G. Oriolo, *Robotics*, Ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London: Springer London, 2009, ISBN: 978-1-84628-641-4.
- [43] B. Siciliano und O. Khatib, „Robotics and the Handbook,“ in *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano und O. Khatib, Hrsg., Springer Berlin Heidelberg, 2016, S. 1–5, ISBN: 978-3-319-32550-7.
- [44] P. Corke, „Robotics, Vision and Control,“ in *Springer Tracts in Advanced Robotics*, B. Siciliano und O. Khatib, Hrsg., Bd. 2, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2017.
- [45] J. Kuipers, „Quaternions and Rotation Sequences,“ *Geometry, Integrability & Quantization*, Jg. 1, S. 127–143, 2000.
- [46] L. Biagiotti und C. Melchiorri, *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, ISBN: 978-3-540-85628-3.
- [47] K. J. Waldron und J. Schmiedeler, „Kinematics,“ in *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano und O. Khatib, Hrsg., Springer Berlin Heidelberg, 2016, S. 11–35, ISBN: 978-3-319-32550-7.
- [48] J. Denavit und R. Hartenberg, „A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices,“ *ASME Journal of Applied Mechanics*, Jg. 22, Nr. 2, S. 215–221, 1955.
- [49] R. M. Murray, Z. Li und S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994, ISBN: 9780849379819.

- [50] S. Chiaverini, G. Oriolo und A. A. Maciejewski, „Redundant Robots,“ in *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano und O. Khatib, Hrsg., Springer Berlin Heidelberg, 2016, S. 221–242, ISBN: 978-3-319-32550-7.
- [51] J. Hertzberg, K. Lingemann und A. Nüchter, *Mobile Roboter: Eine Einführung aus Sicht der Informatik*, Ser. SpringerLink Bücher. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2012, ISBN: 978-3-642-01725-4.
- [52] B. Ezair, T. Tassa und Z. Shiller, „Planning high order trajectories with general initial and final conditions and asymmetric bounds,“ *The International Journal of Robotics Research*, Jg. 33, Nr. 6, S. 898–916, 2014.
- [53] H. M. Choset, *Principles of robot motion: Theory, algorithms, and implementation*, Ser. Intelligent robotics and autonomous agents. Cambridge, Mass: MIT Press, 2005, ISBN: 9780262033275.
- [54] G. Dahlquist, *Numerical methods in scientific computing*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008, ISBN: 978-0-898716-44-3.
- [55] W. Neundorff, *Numerische Mathematik*, Ser. Berichte aus der Mathematik. Aachen: Shaker Verlag, 2002, ISBN: 3-8322-1001-6.
- [56] W. Dahmen und A. Reusken, *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 2.*, korrigierte Auflage, Ser. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, ISBN: 978-3-540-76492-2.
- [57] L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, ISBN: 9780511618994.
- [58] Z. Yang und E. Red, „On-line Cartesian trajectory control of mechanisms along complex curves,“ *Robotica*, Jg. 15, Nr. 3, S. 263–274, 1997.
- [59] C. de Boor, *Splinefunktionen*, Ser. Lectures in mathematics. Basel, Boston und Berlin: Birkhäuser, 1990, ISBN: 978-3-7643-2514-5.
- [60] M. Cox, „The Numerical Evaluation of B -Splines,“ *IMA Journal of Applied Mathematics*, Jg. 10, Nr. 2, S. 134–149, 1972.
- [61] C. de Boor, „On calculating with B-splines,“ *Journal of Approximation Theory*, Jg. 6, Nr. 1, S. 50–62, 1972.
- [62] M. J. Marsden, „An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation,“ *Journal of Approximation Theory*, Jg. 3, Nr. 1, S. 7–49, 1970.
- [63] E. T. Lee, „Marsden’s identity,“ *Computer Aided Geometric Design*, Jg. 13, Nr. 4, S. 287–305, 1996.

- [64] J. Matousek und J. Nešetřil, *Diskrete Mathematik: Eine Entdeckungsreise*, Ser. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2007, ISBN: 978-3-540-30150-9.
- [65] L. Piegl und W. Tiller, *The NURBS Book*, 21. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997, ISBN: 3-540-61545-8.
- [66] C. de Boor, „B(asic)-spline basics,“ in *Fundamental developments of computer-aided geometric modeling*, L. A. Piegl, Hrsg., Academic Press, 1993, S. 27–49, ISBN: 978-0-12-554765-9.
- [67] L. Piegl, „On NURBS: a survey,“ *IEEE Computer Graphics and Applications*, Jg. 11, Nr. 1, S. 55–71, 1991.
- [68] J. Gomes, L. Velho und M. Costa Sousa, *Computer graphics: Theory and practice*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012, ISBN: 978-1-56881-580-0.
- [69] G. Casciola und S. Morigi, „Reparametrization of NURBS Curves,“ *International Journal of Shape Modeling*, Jg. 2, Nr. 2&3, S. 103–116, 1996, ISSN: 0218-6543. DOI: 10.1142/S0218654396000075.
- [70] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide*, 3rd ed. Burlington: Elsevier Science, 1993, ISBN: 9781483296999. Adresse: <http://gbv.eblib.com/patron/FullRecord.aspx?p=1888725>.
- [71] B. Guenter und R. Parent, „Computing the arc length of parametric curves,“ *IEEE Computer Graphics and Applications*, Jg. 10, Nr. 3, S. 72–78, 1990, ISSN: 0272-1716. DOI: 10.1109/38.55155.
- [72] L. Alt, „Rational linear reparametrization of NURBS and the blossoming principle,“ *Computer Aided Geometric Design*, Jg. 10, Nr. 5, S. 465–467, 1993, ISSN: 01678396. DOI: 10.1016/0167-8396(93)90023-V.
- [73] H. Wang, J. Kearney und K. Atkinson, „Arc-length parameterized spline curves for real-time simulation,“ in *Proc. 5th International Conference on Curves and Surfaces*, T. Lyche, M.-L. Mazure und L. L. Schumaker, Hrsg., 2002, S. 387–396.
- [74] K. Erkorkmaz, „Optimal trajectory generation and precision tracking control for multi-axis machines,“ Diss., The University of British Columbia, Vancouver, 2004.
- [75] W. T. Lei, M. P. Sung, L. Y. Lin und J. J. Huang, „Fast real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 47, Nr. 10, S. 1530–1541, 2007, ISSN: 08906955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2006.11.011.
- [76] K. Erkorkmaz und Y. Altintas, „Quintic Spline Interpolation With Minimal Feed Fluctuation,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 127, Nr. 2, S. 339, 2005, ISSN: 08906955. DOI: 10.1115/1.1830493.

- [77] M. Heng und K. Erkorkmaz, „Design of a NURBS interpolator with minimal feed fluctuation and continuous feed modulation capability,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 50, Nr. 3, S. 281–293, 2010.
- [78] M. Walter und A. Fournier, „Approximate Arc Length Parametrization,“ in *Proc. 9th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, 1996, S. 143–150.
- [79] H. Dong, B. Chen, Y. Chen, J. Xie und Z. Zhou, „An accurate NURBS curve interpolation algorithm with short spline interpolation capacity,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 63, Nr. 9-12, S. 1257–1270, 2012.
- [80] P.-J. Barre, R. Bearee, P. Borne und E. Dumetz, „Influence of a Jerk Controlled Movement Law on the Vibratory Behaviour of High-Dynamics Systems,“ *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Jg. 42, Nr. 3, S. 275–293, 2005.
- [81] P. Herrmann, M. Gerngross und C. Endisch, „Numerical Optimization in Planning of Flexible Needle Winding Trajectories,“ in *2018 IEEE 22nd International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, IEEE, 2018, S. 000 255–000 260, ISBN: 978-1-5386-1122-7. DOI: 10.1109/INES.2018.8523924.
- [82] J. Bobrow, S. Dubowsky und J. Gibson, „Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths,“ *The International Journal of Robotics Research*, Jg. 4, Nr. 3, S. 3–17, 1985.
- [83] K. Shin und N. McKay, „Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 30, Nr. 6, S. 531–541, 1985.
- [84] F. Pfeiffer und R. Johanni, „A concept for manipulator trajectory planning,“ *IEEE Journal on Robotics and Automation*, Jg. 3, Nr. 2, S. 115–123, 1987, ISSN: 0882-4967. DOI: 10.1109/JRA.1987.1087090.
- [85] J.-J. Slotine und H. S. Yang, „Improving the efficiency of time-optimal path-following algorithms,“ *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Jg. 5, Nr. 1, S. 118–124, 1989, ISSN: 1042296X. DOI: 10.1109/70.88024.
- [86] Z. Shiller und H.-H. Lu, „Robust computation of path constrained time optimal motions,“ in *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE Comput. Soc. Press, 1990, S. 144–149, ISBN: 0-8186-9061-5. DOI: 10.1109/ROBOT.1990.125962.
- [87] S. D. Timar und R. T. Farouki, „Time-optimal traversal of curved paths by Cartesian CNC machines under both constant and speed-dependent axis acceleration bounds,“ *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Jg. 23, Nr. 5, S. 563–579, 2007, ISSN: 07365845. DOI: 10.1016/j.rcim.2006.07.002.

- [88] K. Zhang, C.-M. Yuan und X.-S. Gao, „Efficient algorithm for time-optimal feedrate planning and smoothing with confined chord error and acceleration,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 66, Nr. 9-12, S. 1685–1697, 2013.
- [89] K. Shin und N. McKay, „A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 31, Nr. 6, S. 491–500, 1986, ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104317.
- [90] H. Geering, L. Guzzella, S. Hepner und C. Onder, „Time-optimal motions of robots in assembly tasks,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 31, Nr. 6, S. 512–518, 1986, ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104333.
- [91] R. Gourdeau und H. M. Schwartz, „Optimal control of a robot manipulator using a weighted time-energy cost function,“ in *28th IEEE Conference on Decision and Control*, 1989, S. 1628–1631.
- [92] O. von Stryk und M. Schlemmer, „Optimal control of the industrial robot manutec r3,“ in *Computational Optimal Control*, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1994, S. 367–382.
- [93] J. Dong, P. M. Ferreira und J. A. Stori, „Feed-rate optimization with jerk constraints for generating minimum-time trajectories,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 47, Nr. 12-13, S. 1941–1955, 2007.
- [94] M. Tarkkainen und Z. Shiller, „Time optimal motions of manipulators with actuator dynamics,“ in *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE Comput. Soc. Press, 1993, S. 725–730, ISBN: 0-8186-3450-2. DOI: 10.1109/ROBOT.1993.291873.
- [95] D. Constantinescu und E. A. Croft, „Smooth and time-optimal trajectory planning for industrial manipulators along specified paths,“ *Journal of Robotic Systems*, Jg. 17, Nr. 5, S. 233–249, 2000, ISSN: 0741-2223. DOI: 10.1002/(SICI)1097-4563(200005)17:5<233::AID-ROB1>3.0.CO;2-Y.
- [96] Y. Altintas und K. Erkorkmaz, „Feedrate Optimization for Spline Interpolation In High Speed Machine Tools,“ *CIRP Annals*, Jg. 52, Nr. 1, S. 297–302, 2003, ISSN: 00078506. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)60588-5.
- [97] B. Sencer, Y. Altintas und E. Croft, „Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 48, Nr. 7-8, S. 733–745, 2008.

- [98] W. Fan, X.-S. Gao, C.-H. Lee, K. Zhang und Q. Zhang, „Time-optimal interpolation for five-axis CNC machining along parametric tool path based on linear programming,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 69, Nr. 5-8, S. 1373–1388, 2013.
- [99] Q. Zhang, S. Li, J.-X. Guo und X.-S. Gao, „Time-optimal path tracking for robots under dynamics constraints based on convex optimization,“ *Robotica*, Jg. 34, Nr. 9, S. 2116–2139, 2016, ISSN: 02635747. DOI: 10.1017/S0263574715000247.
- [100] K. Erkorkmaz, Q.-G. Chen, M.-Y. Zhao, X. Beudaert und X.-S. Gao, „Linear programming and windowing based feedrate optimization for spline toolpaths,“ *CIRP Annals*, Jg. 66, Nr. 1, S. 393–396, 2017, ISSN: 00078506. DOI: 10.1016/j.cirp.2017.04.058.
- [101] H. Liu, Q. Liu und S. Yuan, „Adaptive feedrate planning on parametric tool path with geometric and kinematic constraints for CNC machining,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 90, Nr. 5-8, S. 1889–1896, 2017.
- [102] D. Verscheure, B. Demeulenaere, J. Swevers, J. de Schutter und M. Diehl, „Time-energy optimal path tracking for robots: a numerically efficient optimization approach,“ in *2008 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, 2008, S. 727–732.
- [103] Z. Shiller, „Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints,“ in *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE Comput. Soc. Press, 1994, S. 2680–2685, ISBN: 0-8186-5330-2. DOI: 10.1109/ROBOT.1994.350931.
- [104] S. F. P. Saramago und V. Steffen, „Optimization of the Trajectory Planning of Robot Manipulators Taking into Account the Dynamics of the System,“ *Mechanism and Machine Theory*, Jg. 33, Nr. 7, S. 883–894, 1998, ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/S0094-114X(97)00110-9.
- [105] G. Field und Y. Stepanenko, „Iterative dynamic programming: an approach to minimum energy trajectory planning for robotic manipulators,“ in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996, S. 2755–2760.
- [106] A. Piazzoli und A. Visioli, „An interval algorithm for minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators,“ in *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1997, S. 1924–1927.
- [107] A. Piazzoli und A. Visioli, „Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 47, Nr. 1, S. 140–149, 2000.

- [108] P. Huang, Y. Xu und B. Liang, „Global Minimum-Jerk Trajectory Planning of Space Manipulator,“ *International Journal of Control Automation and Systems*, Jg. 4, Nr. 4, S. 405–413, 2006.
- [109] A. Gasparetto, A. Lanzutti, R. Vidoni und V. Zanotto, „Experimental validation and comparative analysis of optimal time-jerk algorithms for trajectory planning,“ *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Jg. 28, Nr. 2, S. 164–181, 2012.
- [110] C. Lin, P. Chang und J. Luh, „Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 28, Nr. 12, S. 1066–1074, 1983, ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103181.
- [111] A. Piazzzi und A. Visioli, „Global minimum-time trajectory planning of mechanical manipulators using interval analysis,“ *International Journal of Control*, Jg. 71, Nr. 4, S. 631–652, 1998, ISSN: 0020-7179. DOI: 10.1080/002071798221713.
- [112] S. Bedi, I. Ali und N. Quan, „Advanced Interpolation Techniques for N.C. Machines,“ *Journal of Engineering for Industry*, Jg. 115, Nr. 3, S. 329–336, 1993. DOI: 10.1115/1.2901668.
- [113] D. C. Yang und T. Kong, „Parametric interpolator versus linear interpolator for precision CNC machining,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 26, Nr. 3, S. 225–234, 1994, ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/0010-4485(94)90045-0.
- [114] S.-S. Yeh und P.-L. Hsu, „Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 34, Nr. 3, S. 229–237, 2002, ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/S0010-4485(01)00082-3.
- [115] S.-H. Nam und M.-Y. Yang, „A study on a generalized parametric interpolator with real-time jerk-limited acceleration,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 36, Nr. 1, S. 27–36, 2004.
- [116] J. Zhou, Y. Sun und D. Guo, „Adaptive feedrate interpolation with multiconstraints for five-axis parametric toolpath,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 71, Nr. 9-12, S. 1873–1882, 2014, ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-014-5635-8.
- [117] J.-Y. Lai, K.-Y. Lin, S.-J. Tseng und W.-D. Ueng, „On the development of a parametric interpolator with confined chord error, feedrate, acceleration and jerk,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 37, Nr. 1-2, S. 104–121, 2008.
- [118] X. Beudaert, S. Lavernhe und C. Tournier, „Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 57, S. 73–82, 2012.

- [119] J. Feng, Y. Li, Y. Wang und M. Chen, „Design of a real-time adaptive NURBS interpolator with axis acceleration limit,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 48, Nr. 1-4, S. 227–241, 2010, ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-009-2261-y.
- [120] T. Yong und R. Narayanaswami, „A parametric interpolator with confined chord errors, acceleration and deceleration for NC machining,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 35, Nr. 13, S. 1249–1259, 2003.
- [121] K. Erkorkmaz und Y. Altintas, „High speed CNC system design. Part I: Jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 41, Nr. 9, S. 1323–1345, 2001.
- [122] A.-C. Lee, M.-T. Lin, Y.-R. Pan und W.-Y. Lin, „The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 43, Nr. 6, S. 612–628, 2011.
- [123] M.-T. Lin, M.-S. Tsai und H.-T. Yau, „Development of a dynamics-based NURBS interpolator with real-time look-ahead algorithm,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 47, Nr. 15, S. 2246–2262, 2007, ISSN: 08906955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2007.06.005.
- [124] M.-S. Tsai, H.-W. Nien und H.-T. Yau, „Development of an integrated look-ahead dynamics-based NURBS interpolator for high precision machinery,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 40, Nr. 5, S. 554–566, 2008.
- [125] X. Liu, F. Ahmad, K. Yamazaki und M. Mori, „Adaptive interpolation scheme for NURBS curves with the integration of machining dynamics,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 45, Nr. 4-5, S. 433–444, 2005, ISSN: 08906955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2004.09.009.
- [126] Y. Sun, Y. Zhao, Y. Bao und D. Guo, „A novel adaptive-feedrate interpolation method for NURBS tool path with drive constraints,“ *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Jg. 77, S. 74–81, 2014, ISSN: 08906955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2013.11.002.
- [127] H. Liu, Q. Liu, P. Sun, Q. Liu und S. Yuan, „A polynomial equation-based interpolation method of NURBS tool path with minimal feed fluctuation for high-quality machining,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 90, Nr. 9-12, S. 2751–2759, 2017.
- [128] H. Liu, Q. Liu, S. Zhou, C. Li und S. Yuan, „A NURBS interpolation method with minimal feedrate fluctuation for CNC machine tools,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 78, Nr. 5-8, S. 1241–1250, 2015.

- [129] R. T. Farouki und Y.-F. Tsai, „Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 33, Nr. 2, S. 155–165, 2001.
- [130] R. Anderl, „Virtuelle Produktentstehung,“ in *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, K.-H. Grote, B. Bender und D. Göhlich, Hrsg., Springer Berlin Heidelberg, 2018, S. 2012–2028, ISBN: 978-3-662-54804-2.
- [131] G. Spur und F.-L. Krause, *Das virtuelle Produkt: Management der CAD-Technik*. München: Hanser, 1997, ISBN: 3-446-19176-3.
- [132] M. P. Groover, *Automation, production systems, and computer-integrated manufacturing*, 4. ed. Harlow: Pearson Education, 2016, ISBN: 978-0133499612.
- [133] M. Kaufmann, *EuroBLECH 2018: Enormes Potential für blechbearbeitende Unternehmen in der Digitalisierung: Neue digitale Geschäftsmodelle auch für KMU vermehrt wichtiger Investitionsbereich*, 2018.
- [134] F. Scheihing, „Qualitätsregelkreis geschlossen: Modulares CAQ-System schafft Synergien,“ *QZ Qualität und Zuverlässigkeit*, Jg. 60, Nr. 4, S. 42–44, 2015.
- [135] M. Kübler, A. K. Müller und H. Schürmann, „Kunststoffe,“ in *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, K.-H. Grote, B. Bender und D. Göhlich, Hrsg., Springer Berlin Heidelberg, 2018, S. 275–301, ISBN: 978-3-662-54804-2.
- [136] J. E. Green, „Automated Filament Winding Systems,“ in *Composite filament winding*, S. T. Peters, Hrsg., ASM International, 2011, S. 7–18, ISBN: 978-1-61503-722-3.
- [137] A. P. Priestley, „Programming techniques, computer-aided manufacturing, and simulation software,“ in *Composite filament winding*, S. T. Peters, Hrsg., ASM International, 2011, S. 35–47, ISBN: 978-1-61503-722-3.
- [138] H. Li, Y. Liang und H. Bao, „Splines in the parameter domain of surfaces and their application in filament winding,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 39, Nr. 4, S. 268–275, 2007.
- [139] P. Stenzel, P. Dollinger, J. Richnow und J. Franke, „Innovative needle winding method using curved wire guide in order to significantly increase the copper fill factor,“ in *2014 17th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, Bd. 17, 2014, S. 3047–3053.
- [140] P. Herrmann, P. Stenzel, U. Voegele und C. Endisch, „Optimization algorithms for maximizing the slot filling factor of technically feasible slot geometries and winding layouts,“ in *2016 6th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2016, S. 149–155.
- [141] P. Herrmann, M. Gerngross und C. Endisch, „Benefits of Numerical Optimization and CAD/CAM in Needle Winding Processes,“ in *2019 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, S. 301–307.

- [142] H. Reiche und G. Glöckner, *VEM-Handbuch maschinelles Berechnen elektrischer Maschinen*. Berlin: Verl.Technik, 1973.
- [143] M. Caruso, A. O. Di Tommaso, R. Miceli und C. Nevoloso, „Algorithmic Approach for Slot Filling Factors Determination in Electrical Machines,“ in *2018 7th International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*, IEEE, 2018, S. 1489–1494, ISBN: 978-1-5386-5982-3. DOI: 10.1109/ICRERA.2018.8566849.
- [144] N. Raabe, „An algorithm for the filling factor calculation of electrical machines standard slots,“ *International Conference on Electrical Machines (ICEM), 2014*, S. 981–986, 2014.
- [145] D. Pisinger und M. Sigurd, „The two-dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs,“ *Discrete Optimization*, Jg. 2, Nr. 2, S. 154–167, 2005.
- [146] Z. A. Mann, „The Top Eight Misconceptions about NP-Hardness,“ *Computer*, Jg. 50, Nr. 5, S. 72–79, 2017.
- [147] S. Arora und B. Barak, *Computational complexity: A Modern Approach*, 4th printing 2016. New York: Cambridge University Press, 2016, ISBN: 978-0521424264.
- [148] R. J. Fowler, M. S. Paterson und S. L. Tanimoto, „Optimal packing and covering in the plane are NP-complete,“ *Information Processing Letters*, Jg. 12, Nr. 3, S. 133–137, 1981.
- [149] S. Torquato, T. M. Truskett und P. G. Debenedetti, „Is random close packing of spheres well defined?“ *Physical review letters*, Jg. 84, Nr. 10, S. 2064–2067, 2000. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.2064.
- [150] P. G. Szabó, M. C. Markót und T. Csendes, „Global Optimization in Geometry — Circle Packing into the Square,“ in *Essays and Surveys in Global Optimization*, C. Audet, P. Hansen und G. Savard, Hrsg., Springer-Verlag, 2005, S. 233–265, ISBN: 0-387-25569-9.
- [151] B. D. Lubachevsky, „How to simulate billiards and similar systems,“ *Journal of Computational Physics*, Jg. 94, Nr. 2, S. 255–283, 1991.
- [152] A. B. Hopkins, F. H. Stillinger und S. Torquato, „Densest local sphere-packing diversity: general concepts and application to two dimensions,“ *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, Jg. 81, Nr. 4 Pt 1, S. 041305/1–15, 2010.
- [153] A. P. Ruszczyński, *Nonlinear optimization*. Princeton: Princeton University Press, 2006, ISBN: 978-0-691-11915-1.
- [154] B. D. Lubachevsky und F. H. Stillinger, „Geometric properties of random disk packings,“ *Journal of Statistical Physics*, Jg. 60, Nr. 5-6, S. 561–583, 1990.

- [155] R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela und P. Östergård, „Dense packings of congruent circles in a circle,“ *Discrete Mathematics*, Jg. 181, Nr. 1-3, S. 139–154, 1998.
- [156] B. D. Lubachevsky und R. L. Graham, „Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle,“ *Discrete & Computational Geometry*, Jg. 18, Nr. 2, S. 179–194, 1997.
- [157] R. L. Graham und B. D. Lubachevsky, „Dense Packings of Equal Disks in an Equilateral Triangle: From 22 to 34 and Beyond,“ *The Electronic Journal of Combinatorics*, Jg. 2, #A1, 1995.
- [158] F. Fodor, „The Densest Packing of 19 Congruent Circles in a Circle,“ *Geometriae Dedicata*, Jg. 74, Nr. 2, S. 139–145, 1999.
- [159] F. Fodor, „The Densest Packing of 13 Congruent Circles in a Circle,“ *Contributions to Algebra and Geometry*, Jg. 44, Nr. 2, S. 431–440, 2003.
- [160] M. Goldberg, „Packing of 14, 16, 17 and 20 Circles in a Circle,“ *Mathematics Magazine*, Jg. 44, Nr. 3, S. 134–139, 1971.
- [161] H. Melissen, „Densest Packings of Congruent Circles in an Equilateral Triangle,“ *The American Mathematical Monthly*, Jg. 100, Nr. 10, S. 916–925, 1993.
- [162] H. Melissen, „Optimal packings of eleven equal circles in an equilateral triangle,“ *Acta Mathematica Hungarica*, Jg. 65, Nr. 4, S. 389–393, 1994.
- [163] H. Melissen und P. C. Schuur, „Packing 16, 17 or 18 circles in an equilateral triangle,“ *Discrete Mathematics*, Jg. 145, Nr. 1-3, S. 333–342, 1995.
- [164] D. W. Boll, J. Donovan, R. L. Graham und B. D. Lubachevsky, „Improving Dense Packings of Equal Disks in a Square,“ *The Electronic Journal of Combinatorics*, Jg. 7, R46, 2000.
- [165] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan und C. de Groot, „Packing circles in a square: A review and new results,“ in *System Modelling and Optimization*, Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, M. Thoma, W. Wyner, L. D. Davisson, A. G. J. MacFarlane, H. Kwakernaak, J. L. Massey, Y. Z. Tsypkin, A. J. Viterbi und P. Kall, Hrsg., Bd. 180, Springer Berlin Heidelberg, 1992, S. 45–54, ISBN: 978-3-540-55577-3.
- [166] P. G. Szabó, T. Csendes, L. G. Casado und I. García, „Packing Equal Circles in a Square I. — Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions,“ in *Optimization Theory*, Ser. Applied Optimization, P. M. Pardalos, D. Hearn, F. Giannessi, P. Pardalos und T. Rapcsák, Hrsg., Bd. 59, Springer US, 2001, S. 191–206, ISBN: 978-1-4020-0009-6.
- [167] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt und M. P. Vecchi, „Optimization by simulated annealing,“ *Science (New York, N.Y.)*, Jg. 220, Nr. 4598, S. 671–680, 1983.

- [168] V. E. Theodoracatos und J. L. Grimsley, „The optimal packing of arbitrarily-shaped polygons using simulated annealing and polynomial-time cooling schedules,“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Jg. 125, Nr. 1-4, S. 53–70, 1995.
- [169] J. Liu, Y. Zheng und W. Liu, „A Heuristic Simulated Annealing Algorithm for the Circular Packing Problem,“ in *2009 3rd International Conference on Genetic and Evolutionary Computing (WGEC)*, 2009, S. 802–805.
- [170] I. Castillo, F. J. Kampas und J. D. Pintér, „Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications,“ *European Journal of Operational Research*, Jg. 191, Nr. 3, S. 786–802, 2008.
- [171] K. Küpfmüller, W. Mathis und A. Reibiger, *Theoretische Elektrotechnik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 978-3-642-37939-0.
- [172] P. Stenzel, P. Dollinger, J. Richnow, T. Bader, J. Franke und C. Endisch, „Experimental investigations of the needle winding technology regarding the influence of the wire guide geometry on the tensile wire force,“ in *2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2015, S. 2642–2649.
- [173] S. Dineen, *Multivariate Calculus and Geometry*. London: Springer London, 2014, ISBN: 978-1-4471-6418-0.
- [174] P. Herrmann, M. Gerngross und C. Endisch, „NURBS based trajectory generation for an industrial five axis needle winding robot,“ *2018 4th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)*, 2018.
- [175] R. Grothmann und M. Sommer, „Composing circular arcs with minimal NURBS,“ *International mathematical forum*, Jg. 4, Nr. 5-8, S. 193–218, 2009.
- [176] L. A. Piegl und W. Tiller, „Circle approximation using integral B-splines,“ *Computer-Aided Design*, Jg. 35, Nr. 6, S. 601–607, 2003, ISSN: 00104485.
- [177] C. Blanc und C. Schlick, „Accurate parametrization of conics by NURBS,“ *IEEE Computer Graphics and Applications*, Jg. 16, Nr. 6, S. 64–71, 1996, ISSN: 0272-1716. DOI: 10.1109/38.544074.
- [178] B. A. Barsky und T. D. DeRose, „Geometric continuity of parametric curves: three equivalent characterizations,“ *IEEE Computer Graphics and Applications*, Jg. 9, Nr. 6, S. 60–69, 1989. DOI: 10.1109/38.41470.
- [179] A. D. DeRose, „Geometric Continuity: A Parametrization Independent Measure of Continuity for Computer Aided Geometric Design,“ Diss., University of California, Berkeley, 1985.

- [180] D. E. Knuth, *Fundamental algorithms*, Third edition, thirty-sixth printing, newly updated and revised., Ser. The art of computer programming. Boston: Addison-Wesley, 2017, Bd. 1, ISBN: 0-201-89683-4.
- [181] B. A. Barsky und T. D. DeRose, „Geometric continuity of parametric curves: Constructions of geometrically continuous splines,“ *IEEE Computer Graphics and Applications*, Jg. 10, Nr. 1, S. 60–68, 1990.
- [182] E. Bachmann, „Die Klothoide als Übergangskurve im Strassenbau,“ *Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie*, Jg. 49, S. 133–140, 1951. DOI: 10.5169/seals-208340.
- [183] M. Husty, A. Karger, H. Sachs und W. Steinhilper, *Kinematik und Robotik*. Berlin, Heidelberg und s.l.: Springer Berlin Heidelberg, 1997, ISBN: 978-3-642-63822-0. DOI: 10.1007/978-3-642-59029-0. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-59029-0>.
- [184] J. Hofmann, A. Komodromos, J. Fleischer und A. E. Tekkaya, „Optimization of the Linear Coil Winding Process by Combining New Actuator Principles on the Basis of Wire Forming Analysis,“ in *2018 8th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2018, S. 11–17. DOI: 10.1109/EDPC.2018.8658264.
- [185] J. Rotman, *Galois Theory*. New York, NY: Springer New York, 1998, ISBN: 978-0-387-98541-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-0617-0.
- [186] J. H. Mathews und K. D. Fink, *Numerical Methods Using MATLAB*, 3. Aufl. Upper Saddle River: Pearson Education, 1999, ISBN: 978-0-132-70042-9.
- [187] X. Zhiming, C. Jincheng und F. Zhengjin, „Performance Evaluation of a Real-Time Interpolation Algorithm for NURBS Curves,“ *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Jg. 20, Nr. 4, S. 270–276, 2002, ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s001700200152.
- [188] M. Tsirlin, „Jerk by axes in motion along a space curve,“ *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, S. 1437, 2017, ISSN: 1429-2955. DOI: 10.15632/jtam-pl.55.4.1437.
- [189] Siemens AG, *SIMOTION*, Siemens AG, Hrsg., 2017. Adresse: <https://c4b.gss.siemens.com/resources/images/articles/dfa-b10333-00.pdf> (besucht am 06.04.2019).
- [190] Beckhoff Automation GmbH & Co. KG, *TwinCAT 3 | eXtended Automation (XA)*, Beckhoff Automation GmbH & Co. KG, Hrsg., 2012. Adresse: http://download.beckhoff.com/download/Document/catalog/Beckhoff_TwinCAT3_042012_d.pdf (besucht am 06.04.2019).

-
- [191] A. Komodromos, A. E. Tekkaya, J. Hofmann und J. Fleischer, „Experimental and numerical investigations of wire bending by linear winding of rectangular tooth coils,“ in *Proceedings of the 21st International ESAFORM Conference on Material Forming: ESAFORM 2018*, Ser. AIP conference proceedings, Melville (NY): AIP Publishing, 2018, S. 150007-1–150007-6. DOI: 10.1063/1.5035014.
- [192] P. Herrmann, C. Westermaier, M. Gerngroß und C. Endisch, „Verfahren und Wickelmaschine zum automatisierten Herstellen einer Spulenwicklung unter Berücksichtigung des Drahtdurchmessers,“ DE 10 2017 006 083 A1, 2019.