



Lehrstuhl für Angewandte Mechanik



Technische Universität München

Philipp Seiwald

Entwicklung eines Zustandsschätzers für zweibeinige Laufroboter

Semesterarbeit

Juni 2015

Betreuer:
Prof. dr. ir. Daniel Rixen
Dipl.-Ing. (Univ.) Robert Wittmann

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Bestimmung des Systemzustandes von zweibeinigen Laufrobotern, ohne auf externe Sensorik zurückzugreifen. Aufbauend auf einem bereits bestehenden Verfahren für den humanoiden Roboter LOLA wird eine verbesserte Methode entwickelt, um möglichst viele Systemfreiheitsgrade zuverlässig und störunempfindlich zu schätzen. Den Kern der Zustandsschätzung stellt eine Sensordatenfusion mittels KALMAN-Filter dar, deren Verhalten sowohl in einer Simulationsumgebung, als auch am realen System untersucht und bewertet wird. Aus den gewonnenen Erkenntnissen werden abschließend Vorschläge für mögliche Verbesserungen in zukünftigen Arbeiten gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung und Anwendung	1
1.2	Lösungsstrategien	2
1.3	Aufbau der Arbeit	3
1.4	Literatur	4
2	Modellierung	5
2.1	Der humanoide Roboter LOLA	5
2.2	System unter Verwendung der Kraft-Moment-Sensoren	7
2.3	System mit modelliertem Kontakt	8
2.4	Zustandsraumdarstellung	12
2.5	Validierung mit MATLAB	14
3	Zustandsschätzung	17
3.1	Kalman-Filter	17
3.2	Sensordatenfusion mittels EKF	21
3.3	Implementierung	25
4	Auswertung und Vergleich	29
4.1	Verhalten in der Simulation	29
4.2	Verhalten am realen System	32
4.3	Robustheit	38
4.4	Vergleich mit bestehendem Verfahren	41
5	Fazit und Ausblick	43
A	Allgemeines	45
B	Modellgeometrie und Kinematik	49
C	Kontaktmodell	65
D	Bewegungsgleichungen	73
E	Aufbereitung von Sensordaten	81
F	Parameterwahl	85

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Anwendung

Humanoide Roboter sind ein aktueller Forschungsschwerpunkt in der Mechatronik. Als Bergungsroboter, private Assistenzsysteme oder im Einsatz in der Unterhaltungsindustrie ergeben sich viele zukünftige Anwendungsmöglichkeiten.

Die Forschung an einer intelligenten Steuerung solcher zweibeinigen Laufmaschinen verspricht im Vergleich zur bereits weitgehend realisierbaren Mechanik großes Verbesserungspotential. Ein schnelles und dennoch robustes Laufen stellt hierbei eine besondere Herausforderung dar [2]. Für eine praktische Nutzung muss der Roboter außerdem flexibel auf äußere Einflüsse reagieren und Störungen kompensieren können.

Ein besonderes Merkmal von Laufrobotern im Vergleich zu z. B. Montagerobotern einer Fertigungsstraße ist, dass sie sich frei im Raum bewegen können. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade um die räumliche Position und Orientierung des Gesamtsystems erweitert. Bild 1.1 veranschaulicht dies anhand einer Prinzipskizze für den ebenen Fall.

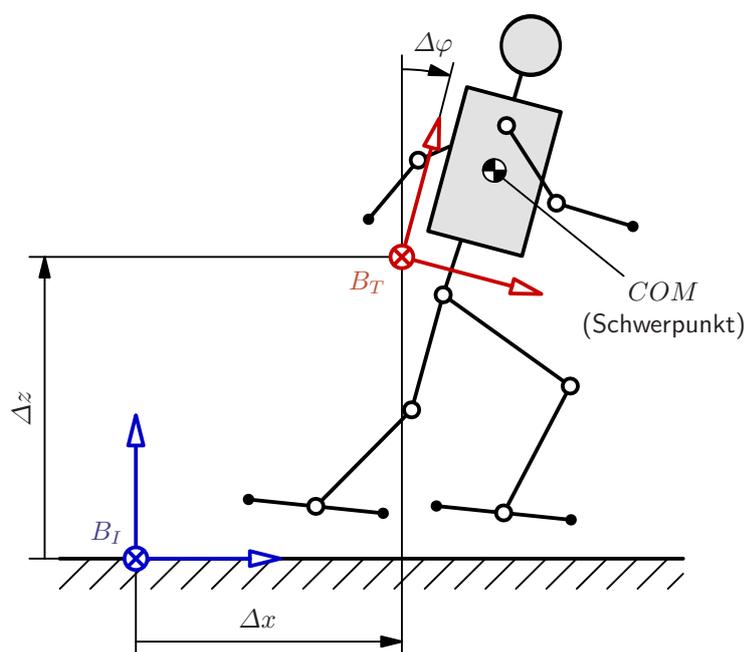


Bild 1.1: Prinzipskizze zu den Freiheitsgraden eines Laufroboters (ebener Fall). Die Konfiguration des Roboters wird im Planungskoordinatensystem B_T beschrieben. Die Freiheitsgrade Δx , Δz und $\Delta\varphi$ bestimmen die Transformation vom B_T -System in das inertielle B_I -System.

Um die einzelnen Gelenke des Roboters regeln zu können, ist für jeden Aktor mindestens ein zugehöriger Sensor notwendig. Damit kann die Konfiguration des Roboters, d. h. die kinematische Kette vom Schwerpunkt (COM) zu den Füßen und Armen, stets gemessen und mit Sollwerten verglichen werden. Ohne weitere Maßnahmen bleibt aber die absolute

Position und Orientierung des Gesamtsystems unbekannt (Freiheitsgrade Δx , Δz und $\Delta\varphi$ in Bild 1.1).

Stehen keine äußeren Messsysteme zur Verfügung, so können die verbleibenden Freiheitsgrade über einen Zustandsschätzer bestimmt werden. Dieser soll auch bei Störungen wie unebenem Terrain, Modellfehlern oder Stößen den Zustand des Gesamtsystems möglichst zuverlässig wiedergeben. Speziell die Orientierung und Rotationsgeschwindigkeit des Roboters spielen für ein robustes Verhalten (z. B. für die Planung eines Ausfallschrittes [12], [13]) eine wichtige Rolle. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung und Realisierung eines solchen Zustandsschätzers.

1.2 Lösungsstrategien

Das einfachste Verfahren zur Bestimmung von Position, Orientierung und Geschwindigkeit des Roboters im Raum (im Folgenden als *Systemzustand* bezeichnet) ist die Berechnung über die direkte Kinematik. Unter der Annahme eines idealen Kontakts des Standfußes mit der Umwelt kann der Systemzustand direkt aus der kinematischen Kette des Roboters bestimmt werden. Die getroffene Annahme stellt eine starke Vereinfachung dar, unebenes Terrain oder ein Kippen des Roboters werden nicht berücksichtigt. Außerdem können Modellfehler und Störungen durch äußere Einflüsse nicht erfasst werden, weshalb die Berechnung über die direkte Kinematik in der Praxis nur in Kombination mit anderen Verfahren sinnvoll ist.

Um den Systemzustand zu messen, kann ein Inertiales Messsystem (kurz IMS) verwendet werden. Dieses wird z. B. im Oberkörper des Roboters verbaut, um dessen Rotationsgeschwindigkeit und translatorische Beschleunigung relativ zum Inertialsystem zu bestimmen. Eine einfache bzw. zweifache Integration liefert dann die gewünschte Position und Orientierung. Bedingt durch die numerische Integration der Position ergibt sich aber ein Drift, den es zu kompensieren gilt. Außerdem führen Schwingungen der mechanischen Strukturen sowie Einflüsse der Gelenkregelungen auf ein stark oszillierendes Messsignal, wobei für die Verwendung im Rahmen einer Langzeitstabilisierung aber möglichst glatte Verläufe erforderlich sind.

Der Einsatz eines Komplementärfilters verbindet die genannten Methoden, indem der hochfrequente Anteil des IMS-Signals mit dem niederfrequenten Anteil aus der direkten Kinematik kombiniert wird. Das Driftverhalten kann dadurch verbessert werden, hochfrequente Schwingungen werden aber nicht kompensiert.

Um die Nachteile von ausschließlich IMS-basierten Daten zu umgehen, können neben einem Komplementärfilter auch Informationen aus einem Modell verwendet werden. Das lineare inverse Pendel (Bild 1.2) stellt ein sehr einfaches, aber dennoch geeignetes Modell für die Dynamik von zweibeinigen Robotern dar [11].

Fortgeschrittene Verfahren verwenden z. B. KALMAN-Filter für die Fusion von Daten aus Messung und Modell und erzielen in der Praxis gute Ergebnisse [14]. Eine sorgfältige Wahl des Drehpunktes, sowie die Modellierung unbekannter äußerer Kräfte erhöhen zwar die Genauigkeit und erweitern die Fähigkeiten des Zustandsschätzers, die Reduktion des komplexen Mehrkörpersystems auf ein einfaches inverses Pendel lässt aber nur die Schätzung von rotatorischen Freiheitsgraden zu.

Als Alternative zur KALMAN-Filterung kann auch über das Verfahren der quadratischen Programmierung eine Beziehung zwischen Messung und Modell hergestellt werden. Dabei wird die Sensordatenfusion als Minimierungsproblem formuliert, wobei das zu optimierende Gütemaß von gewichteten Modell- und Messfehlern abhängt. Das Verhalten ähnelt dem des

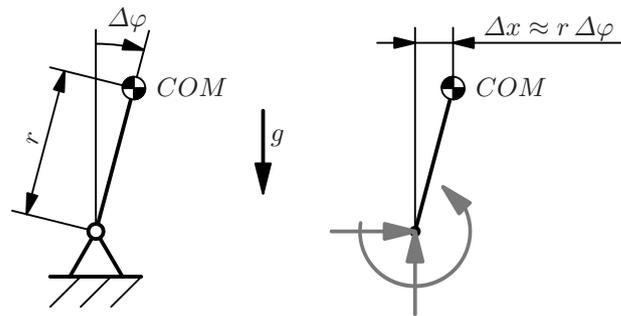


Bild 1.2: Modell eines inversen Pendels. Durch die Kleinwinkelnäherung $\Delta x \approx r \Delta \varphi$ kann das Modell als lineares System geschrieben und bei bekannten Kontaktkräften (grau) ein momentenfreier Drehpunkt berechnet werden. Eine Drallbilanz führt nach Festlegung der Eingangsgrößen auf die gesuchte Bewegung $\Delta x(t)$ (und damit $\Delta \varphi(t)$). Der Roboter wird als konzentrierte Masse (COM) behandelt.

KALMAN-Filtern [15], wobei die Systemgleichungen jedoch beliebig nichtlinear sein dürfen¹. Für ein großes Mehrkörpersystem müssen viele Wichtungsparameter festgelegt werden, der Realisierungsaufwand ist damit höher.

Versuche am realen System haben gezeigt, dass eine Sensordatenfusion mittels KALMAN-Filter auch bei einfacher Modellierung eine gute Schätzung für den Systemzustand liefern kann [14]. Das Modell des inversen Pendels erlaubt jedoch nur die Berücksichtigung der Rotation, die translatorischen Freiheitsgrade bleiben weiterhin unbekannt.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines verbesserten Schätzers, der durch ein erweitertes Modell die Bestimmung des gesamten Systemzustandes ermöglicht und idealerweise auch eine bessere Schätzung der rotatorischen Freiheitsgrade liefert. Im Sinne einer Langzeitstabilisierung des Roboters wird dabei besonders Wert auf eine gute Approximation des Trends der Rotationsgeschwindigkeit gelegt².

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Entwicklung des Zustandsschätzers erfolgt am Laufroboter LOLA des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik, welcher in Kapitel 2 zusammen mit der Beschreibung des mechanischen Modells vorgestellt wird. Es wird auf zwei unterschiedliche Ersatzmodelle des Mehrkörpersystems eingegangen, für die jeweils die Zustandsraumdarstellung des Systems hergeleitet wird. Anschließend wird die Gültigkeit des Modells anhand einer Simulation in MATLAB untersucht.

Das verwendete Verfahren zur Sensordatenfusion sowie dessen Implementierung wird in Kapitel 3 beschrieben. Dort wird auch auf die Integration in die bestehende Software zur Steuerung des Roboters eingegangen. Kapitel 4 behandelt das Verhalten der Methode in der Simulation und am realen System. Anhand verschiedener Testfälle wird dabei die Robustheit des Zustandsschätzers untersucht und ein Vergleich mit dem bestehenden Verfahren aufgestellt. Eine abschließende Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse und ein Ausblick auf mögliche anschließende Arbeiten werden in Kapitel 5 gegeben.

Im Hauptteil dieser Arbeit wird auf ausführliche Berechnungen verzichtet, detaillierte Rechenwege und Herleitungen befinden sich aber in Anhang B bis E. Die dabei verwendete

¹ Der KALMAN-Filter ist nur für lineare Systeme optimal (siehe Abschnitt 3.1)

² Eine Aufbereitung der IMS-Daten mittels Tiefpassfilter (z. B. BUTTERWORTH) führt genauso auf ein geglättetes Signal und liefert damit ebenfalls den Trend der Neigungsrate. Die Ergebnisse unter Verwendung eines KALMAN-Filtern sind in der Praxis aber deutlich besser [14].

Notation orientiert sich grundlegend am Stil des Lehrstuhls, besondere Bezeichnungen und eigene Definitionen sind in Anhang A vermerkt.

1.4 Literatur

Für die mathematische Beschreibung von mechanischen Modellen werden in dieser Arbeit Methoden der technischen Mechanik, wie in BÖGE [3] und PFEIFFER [10], verwendet.

Grundlagen zu Zustandsbeobachtern sind ADAMY [1] entnommen. Detaillierte Hintergrundinformationen speziell zur KALMAN-Filterung gibt KALMAN [8], wobei CHUI [4], ADAMY [1] und ISERMANN [7] auch Ausführungen zum hier verwendeten, erweiterten KALMAN-Filter enthalten. Die Definition von wichtigen Begriffen der Stochastik liefert HÜBNER [6].

2 Modellierung

2.1 Der humanoide Roboter LOLA

Als reales Testsystem dient der Laufroboter LOLA des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik (Bild 2.1). Dieser verfügt über 24 aktuierte Freiheitsgrade, die von bürstenlosen Synchronmotoren angetrieben werden [5]. Die Drehwinkel der Gelenke werden von entsprechenden Sensoren erfasst und zusammen mit den daraus abgeleiteten Winkelgeschwindigkeiten sowohl den dezentralen Gelenkreglern als auch der zentralen Steuerung mitgeteilt.

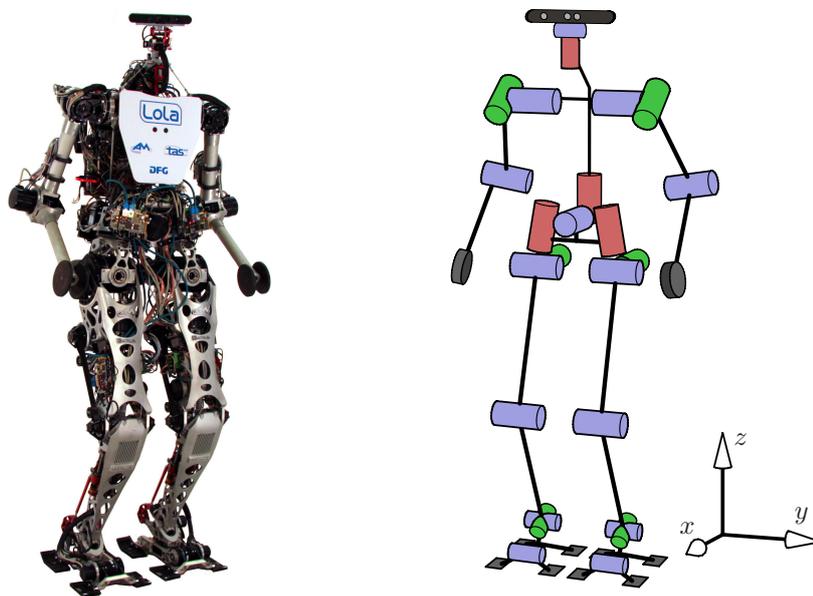


Bild 2.1: Foto des Laufroboters (links) und schematische Darstellung der aktuierten Freiheitsgrade (rechts). (Quelle: Lehrstuhl für Angewandte Mechanik)

Neben den Winkelmesssystemen in den Gelenken ist weitere Sensorik integriert, die für Planung und Regelung genutzt werden kann: Die Füße des Roboters stehen durch je vier Pads in Kontakt mit dem Untergrund. In jedes Pad ist ein Drucksensor integriert, mit dem ein Öffnen bzw. Schließen des Kontaktes als binäres Signal detektiert werden kann.

Außerdem befindet sich ein Kamerasystem mit Tiefensensor an Stelle des Kopfes, womit Hindernisse erkannt und passende Ausweich- oder Überwindungsmanöver geplant werden können. Die Auflösung dieses Sensors reicht aus, um eine Kollision mit Gegenständen zu verhindern, ein zuverlässiges Tracking von Position und Orientierung des Roboters relativ zur Umgebung ist mit der gewünschten Genauigkeit aber nicht möglich.

Des Weiteren kann auf ein Inertiales Messsystem und zwei Kraft-Moment-Sensoren zurückgegriffen werden, auf welche in den folgenden Abschnitten näher eingegangen wird.

Kraft-Moment-Sensoren (KMS)

Um detailliertere Informationen über den Kontakt mit der Umgebung zu erhalten, sind in beiden Füßen Kraft-Moment Sensoren verbaut (Bild 2.2 links). Diese messen die am

Sprunggelenk angreifenden Kräfte und Momente in je drei Raumrichtungen.

Es ist zu beachten, dass die so erhaltenen Daten die Belastung im Sprunggelenk beschreiben und nicht im Kontaktpunkt. Gewichts- und Trägheitskräfte des Fußes beeinflussen das Ergebnis also auch bei offenem Kontakt, d. h. bei gehobenem Bein. Die Sensoren sind eine Eigenentwicklung des Lehrstuhls und nutzen Dehnmessstreifen, um ein lastabhängiges Signal zu erzeugen.

Inertiales Messsystem (IMS)

Für den hier entwickelten Zustandsschätzer stellt das Inertiale Messsystem den wichtigsten Sensor dar. Konkret handelt es sich dabei um das Modell *iVRU-FC-C167* der Firma *iMAR Navigation* (Bild 2.2 rechts), welches starr mit dem Oberkörper des Roboters verbunden ist. Es misst durch faseroptische Gyroskope die Rotationsgeschwindigkeit und durch mikroelektro-mechanische Sensoren die translatorische Beschleunigung des Oberkörpers, jeweils mit einer Abtastrate von 200 Hz [5]. Eine integrierte Datenaufbereitung berechnet daraus die schwerkraftskompensierten Werte zur Bestimmung der Orientierung im Raum.

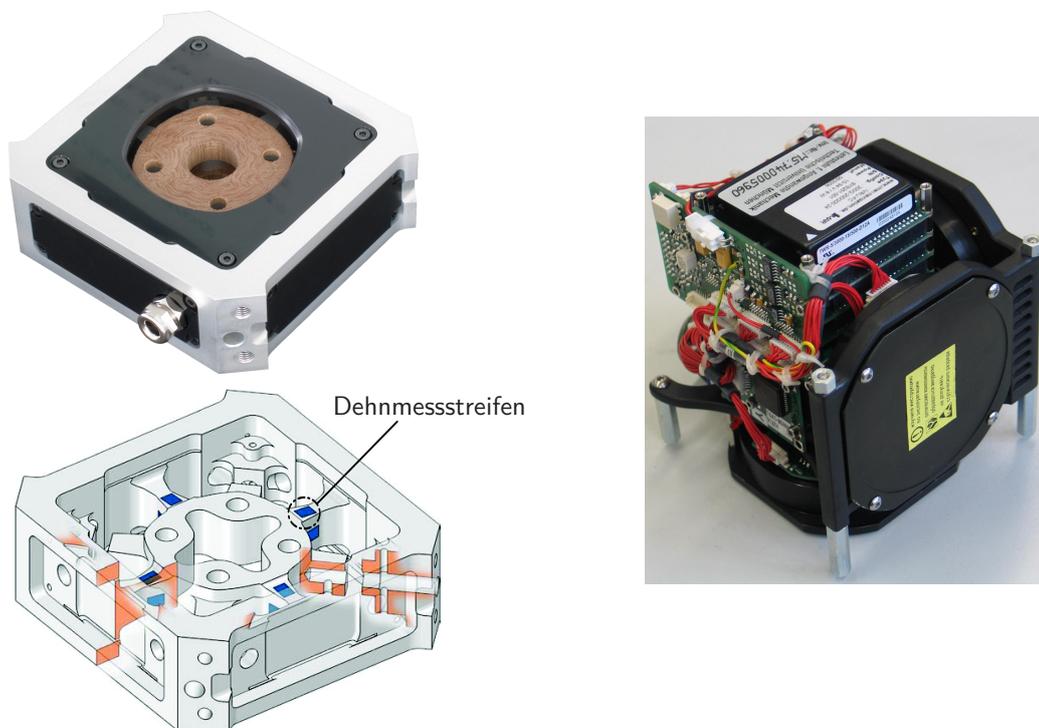


Bild 2.2: Kraft-Moment-Sensor (links) und Inertiales Messsystem (rechts). (Quelle: Lehrstuhl für Angewandte Mechanik)

Wie in Abschnitt 1.2 bereits erwähnt, führen mechanische Schwingungen, neben anderen Effekten, zu stark oszillierenden Signalen des IMS. Vor allem sich schnell ändernde Werte der Rotationsgeschwindigkeit erschweren eine darauf aufbauende Langzeitstabilisierung. Außerdem ist die Berechnung der Position aus den Beschleunigungen mit einem numerischen Fehler behaftet, weshalb die ungefilterten Daten des IMS den Systemzustand nicht zufriedenstellend wiedergeben können.

Um die genannten Probleme zu beseitigen, soll ein KALMAN-Filter die Messung mithilfe eines dynamischen Modells fusionieren. Dazu muss die Mechanik des Laufroboters durch ein passendes Modell approximiert werden.

Der in dieser Arbeit entwickelte Zustandsschätzer soll in Zukunft die nötigen Informationen für eine Schrittmodifikation zur Stabilisierung nach WITTMANN [13] liefern. Es liegt nahe, für den Schätzer ein ähnliches mechanisches Modell wie bei der Stabilisierung zu verwenden. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt, die sich an diese Vorlage anlehnen.

Beide Ansätze zerlegen das dreidimensionale Problem in zwei einfachere ebene Probleme. Aufgrund dieser Vereinfachung müssen bei einer späteren Implementierung entsprechende Anpassungen vorgenommen werden, um z. B. auch beim Laufen entlang einer Kurve, d. h. bei einer Bewegung senkrecht zur Modellierungsebene, korrekte Ergebnisse zu liefern (siehe Abschnitt 3.3).

2.2 System unter Verwendung der Kraft-Moment-Sensoren

Das erste Modell wird durch die bereits vorhandenen Kontaktinformationen aus den KMS motiviert. Ein Einzelkörper (Masse m , Massenträgheitsmoment θ) stellt den Roboter dar, wobei die Füße einzeln modelliert und im Gegensatz zum Modell aus der Stabilisierung als masselos angenommen werden (Bild 2.3). Dafür werden mit x_S und y_V auch horizontale Verschiebungen berücksichtigt, wodurch bis auf eine Drehung um die z_I -Achse¹ der gesamte Systemzustand erfasst werden kann.

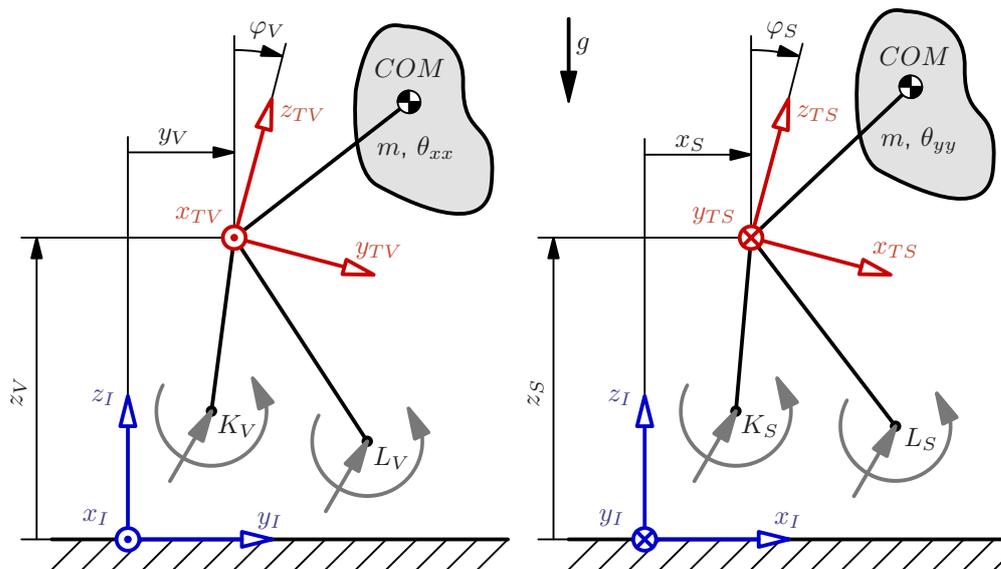


Bild 2.3: Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS in der Vorderansicht (links, Index „V“) und Seitenansicht (rechts, Index „S“).

Es wird vereinfachend angenommen, dass die Messwerte der KMS den tatsächlichen Kontaktkräften (in Bild 2.3 grau) entsprechen. Außerdem wird das gesamte Mehrkörpersystem auf einen Einzelkörper reduziert, wobei die aktuelle Position des Schwerpunktes (COM) sowie der Kontaktpunkte im rechten (K) und linken (L) Fuß relativ zum Planungskoordinatensystem

¹ Die Drehung um die z_I -Achse kann durch eine Betrachtung in zwei Ebenen nicht dargestellt werden. Auf die Modellierung einer weiteren Ebene (z. B. Draufsicht) wird aber aufgrund der geringen Bedeutung dieser Drehung für die Stabilisierung verzichtet.

natensystem (TV bzw. TS^2) aus den Idealtrajektorien berechnet wird³. Dasselbe gilt für die (geplante) Neigung des Körpers.

Die verbleibenden Freiheitsgrade der Einzelsysteme

$$\mathbf{q}_V := (\varphi_V, z_V, y_V)^T, \quad \mathbf{q}_S := (\varphi_S, z_S, x_S)^T \quad (2.1)$$

bilden zusammen mit ihren Zeitableitungen die Zustandsvektoren

$$\mathbf{x}_V := \begin{pmatrix} \mathbf{q}_V \\ \dot{\mathbf{q}}_V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_S := \begin{pmatrix} \mathbf{q}_S \\ \dot{\mathbf{q}}_S \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Winkel φ_V und φ_S beschreiben dabei zusammen mit den translatorischen Verschiebungen (x_S, y_V, z_V, z_S) die Transformation vom Planungskoordinatensystem zum inertialen B_I -System (x_I, y_I, z_I). Eine detaillierte Skizze der Geometrie sowie eine mathematische Beschreibung der Kinematik befindet sich in Anhang B.

2.3 System mit modelliertem Kontakt

Um die Messfehler der KMS zu umgehen, wird in einem alternativen Ansatz der Kontakt der FüÙe mit dem Boden mitmodelliert. Der Roboter wird wie zuvor mit einem Einzelkörper dargestellt, der nun aber durch je zwei Punkte am Fuß mit dem Untergrund interagieren kann (Bild 2.4).

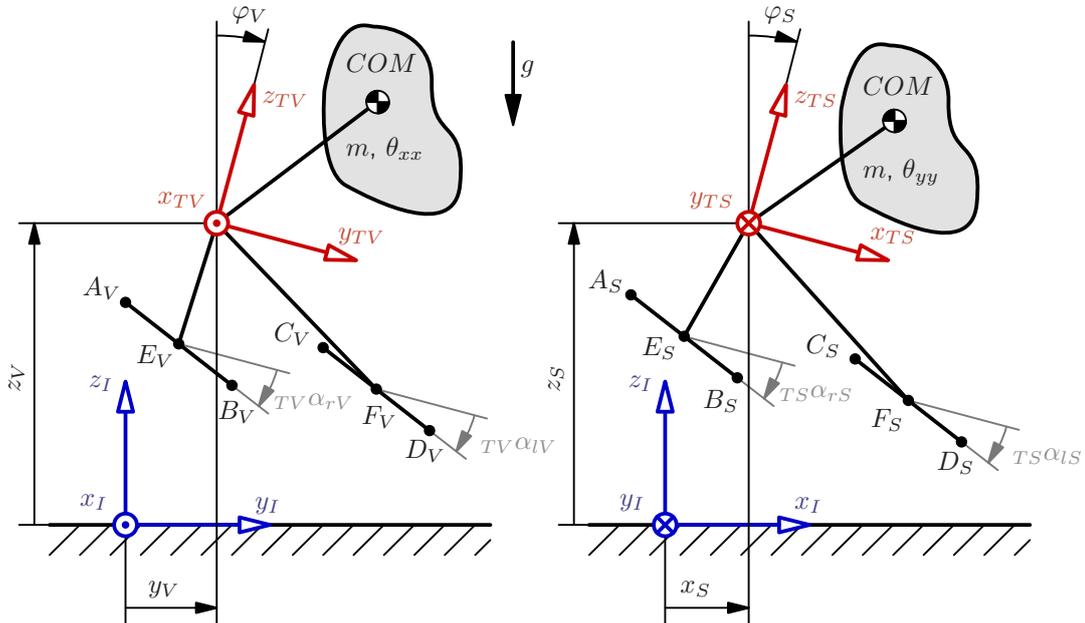


Bild 2.4: Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt in der Vorderansicht (links, Index „V“) und Seitenansicht (rechts, Index „S“).

2 TV und TS bezeichnen dasselbe Koordinatensystem des Planungsprozesses, das aber in unterschiedlichen Ebenen verwendet wird.

3 Die Berechnung der Kinematik für die Punkte K und L erfordert die Kenntnis der Punkte E und F sowie des Winkels α . Diese Parameter werden im nächsten Abschnitt eingeführt und der Übersichtlichkeit halber in Bild 2.3 nicht dargestellt. Eine vollständige geometrische Beschreibung der Punkte K und L befindet sich in Anhang B.

Analog zum ersten Modell wird die Position des Schwerpunkts (COM) und der Fußknotenpunkte (E und F) relativ zum Planungskoordinatensystem aus den Idealtrajektorien bestimmt. Anders verhält es sich bei den Kontaktpunkten A , B , C und D . Deren Position wird aus einer Drehung um E bzw. F mit dem Winkel α bei konstanter Fußlänge bzw. -breite berechnet. Der Winkel ${}_{TV}\alpha_{rV}$ bezeichnet dabei beispielsweise den Kippwinkel des rechten Fußes in der Vorderansicht relativ zum TV -System.

Am realen System befindet sich in den Füßen ein weiteres Gelenk, mit dem ein Abrollen der Zehen möglich wird (siehe Bild 2.1 rechts). Diese Bewegung kann durch das Modell nicht abgebildet werden, weshalb für den Kippwinkel α eine passende Wahl getroffen werden muss. Zum besseren Verständnis der Hintergründe wird an dieser Stelle kurz auf die hybride Kraft-/Positions-Regelung des Roboters eingegangen:

Im Planungsprozess werden mithilfe eines vereinfachten Dreimassenmodells Idealtrajektorien (\mathbf{x}_{ideal}) für Schwerpunkt und Füße im Arbeitsraum erzeugt. Diese werden von einem Kraftregler passend modifiziert (\mathbf{x}_{mod}) und anschließend mittels inverser Kinematik des vollständigen Mehrkörpersystems zu Solltrajektorien im Gelenkraum (\mathbf{q}_{soll}) transformiert. Die dezentralen Gelenkregler erhalten dann Position und Geschwindigkeit als Sollgrößen. Die Sensordaten aus KMS und IMS sowie eine Rückführung der Solltrajektorien mittels direkter Kinematik (\mathbf{x}_{dk}) dienen dem Kraftregler als Eingang und schließen dadurch den Wirkungskreislauf. Bild 2.5 veranschaulicht die Struktur der hybriden Kraft-/Positions-Regelung.

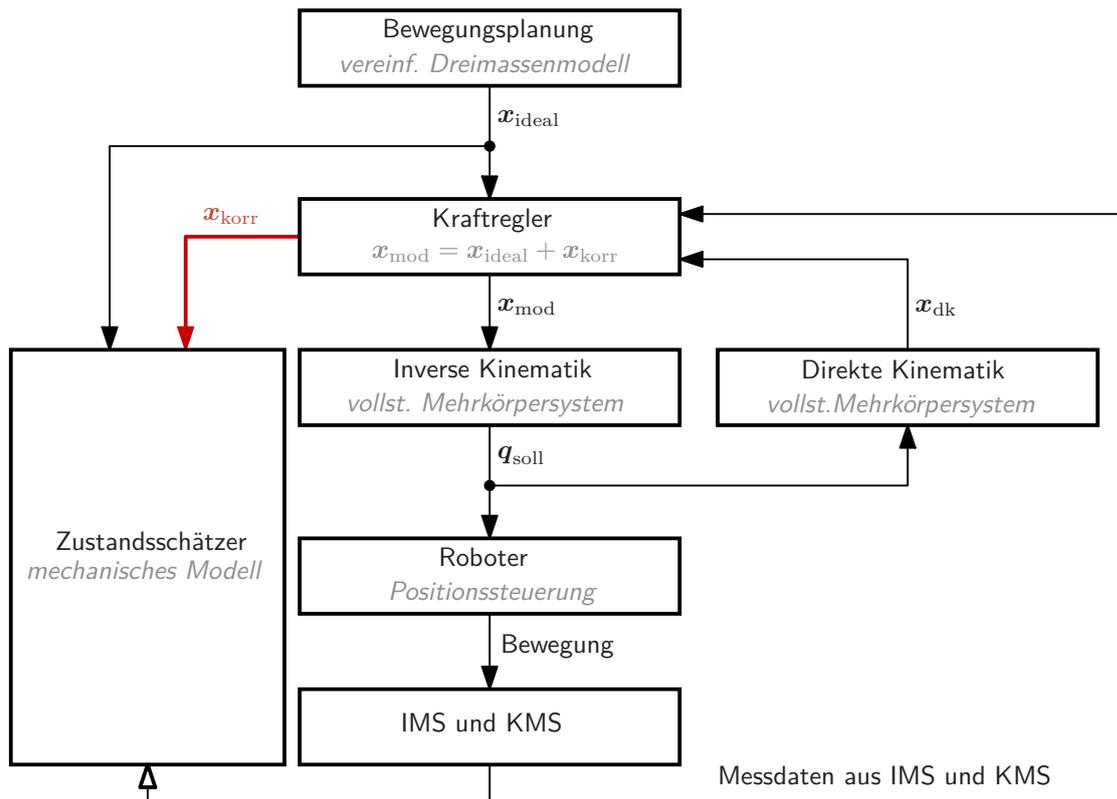


Bild 2.5: Schema der hybriden Kraft-/Positionsregelung. Die Idealtrajektorien aus der Planung (\mathbf{x}_{ideal}) bestimmen die Position des Schwerpunktes COM und der Fußknotenpunkte E und F . Die Kippwinkel α werden aus den Korrekturwerten der Kraftregelung (\mathbf{x}_{korr}) entnommen.

Für die unbekannt Winkel α des Modells werden vereinfacht die Korrekturwinkel aus der Kraftregelung (in Bild 2.5 rot), also die Differenz von geplanten zu modifizierten Kipp-

winkeln, gewählt. Um konsistent zu bleiben, wird für die Kippwinkel in der Vorderansicht auf dieselbe Weise vorgegangen. Für Versuche mit langen Schritten (d. h. für schnelles Gehen), bei denen das Abrollen der Zehen genutzt wird, sollte entweder eine andere Wahl getroffen oder das mechanische Modell um dieses Gelenk erweitert werden. Dies liegt aber nicht im Fokus der Arbeit und kann bei Bedarf mit geringem Aufwand als Erweiterung hinzugefügt werden.

Mit dem Winkel α als Eingangsgröße wird das System auch hier durch die Zustandsvektoren aus Gl. (2.2) vollständig beschrieben. Eine mathematische Formulierung der Kinematik befindet sich in Anhang B.

Kontaktmodell

Für die vier Punkte A , B , C und D muss das Verhalten bei Kontakt mit dem Untergrund definiert werden. In Normalenrichtung wird dafür eine unilaterale Bindung und in Tangentialrichtung ein Reibgesetz nach COULOMB (wie in BÖGE [3, S. 90-93]) festgelegt. Dies lässt sich durch den mathematischen Zusammenhang

$$f_{\text{cont}N}^*(g_N) \begin{cases} = 0 & \text{für } g_N > 0 \\ \geq 0 & \text{für } g_N = 0 \end{cases},$$

$$\mu^*(\dot{g}_T) \begin{cases} = \mu_0 & \text{für } \dot{g}_T < 0 \\ \in [-\mu_0, \mu_0] & \text{für } \dot{g}_T = 0 \\ = -\mu_0 & \text{für } \dot{g}_T > 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

$$f_{\text{cont}T}^*(g_N, \dot{g}_T) = \mu^*(\dot{g}_T) f_{\text{cont}N}^*(g_N)$$

ausdrücken oder grafisch wie in Bild 2.6 darstellen. Dabei bezeichnet $f_{\text{cont}N}^*$ die Normal- und $f_{\text{cont}T}^*$ die Tangentialkraft im Kontaktpunkt. Diese hängen von der Lücke in Normalenrichtung g_N , der tangentialen Relativgeschwindigkeit \dot{g}_T und dem Reibkoeffizienten μ_0 ab. Für Haft- und Gleitreibung wird derselbe Parameter angenommen.

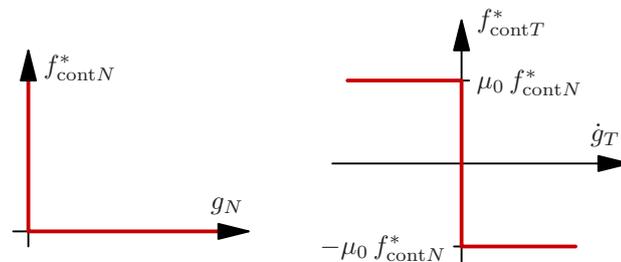


Bild 2.6: Nicht-glattes Kontaktmodell: unilaterale Bindung (links) und Reibgesetz (rechts).

Dieses Kontaktgesetz ist nichtlinear und nicht-glatt. Für die spätere Verwendung in Verbindung mit einem KALMAN-Filter darf die Beziehung aber keine Sprünge enthalten und sollte außerdem an den Übergängen möglichst sanft verlaufen. Dazu werden im Folgenden die Zusammenhänge aus Gl. (2.3) getrennt betrachtet und regularisiert. Hier soll nur das prinzipielle Vorgehen erläutert werden, eine ausführliche Berechnung befindet sich in Anhang C.

Regularisierung in Normalenrichtung

Aufgrund elastischer Elemente in den Pads der Füße verhält sich der Kontakt des realen Systems nicht wie eine ideale unilaterale Bindung. Es liegt eine Modellierung durch

parallelgeschaltete Federn und Dämpfer nahe (Bild 2.7 links). Eine einfache Näherung des Bereichs $g_N < 0$ bzw. $\dot{g}_N < 0 \wedge g_N \leq 0$ durch eine Gerade, wie es bei der Verwendung von linearen (aber einseitigen) Federn und Dämpfern der Fall wäre, ist für diesen Anwendungsfall nicht zulässig.

Für ein gutes Verhalten bei späterer Linearisierung ist mindestens C^1 -Stetigkeit der Kontaktkräfte zu fordern, folglich müssen die ersten Ableitungen stetig sein. Dies kann durch eine quadratische Funktion im Übergangsbereich, wie in Bild 2.7 (Mitte und rechts), erreicht werden.

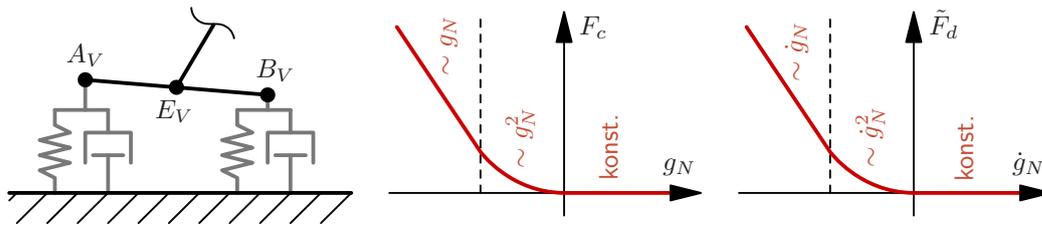


Bild 2.7: Modellierung der Normalenrichtung als Feder-Dämpfer-System: Prinzipskizze (links) und Kennlinien von Feder (F_c , Mitte) und Dämpfer (\tilde{F}_d , rechts).

Dabei bezeichnet $\tilde{F}_d(\dot{g}_N)$ eine Zwischengröße für die Dämpferkraft. Um ein sinnvolles Kontaktgesetz zu erhalten, wird diese mit der Hilfsfunktion $\sigma_d(g_N)$ multipliziert, wodurch sich die endgültige Dämpferkraft zu

$$F_d(g_N, \dot{g}_N) := \sigma_d(g_N) \tilde{F}_d(\dot{g}_N) \tag{2.4}$$

ergibt. Die Hilfsvariable σ_d übernimmt eine schaltende Funktion, um eine Dämpfung bei offenem Kontakt ($g_N > 0$) zu verhindern. Aus denselben Gründen wie bei F_c und \tilde{F}_d muss auch σ_d hinreichend glatt sein. Eine Visualisierung der Schaltfunktion sowie des Zusammenhangs aus Gl. (2.4) ist in Bild 2.8 dargestellt.

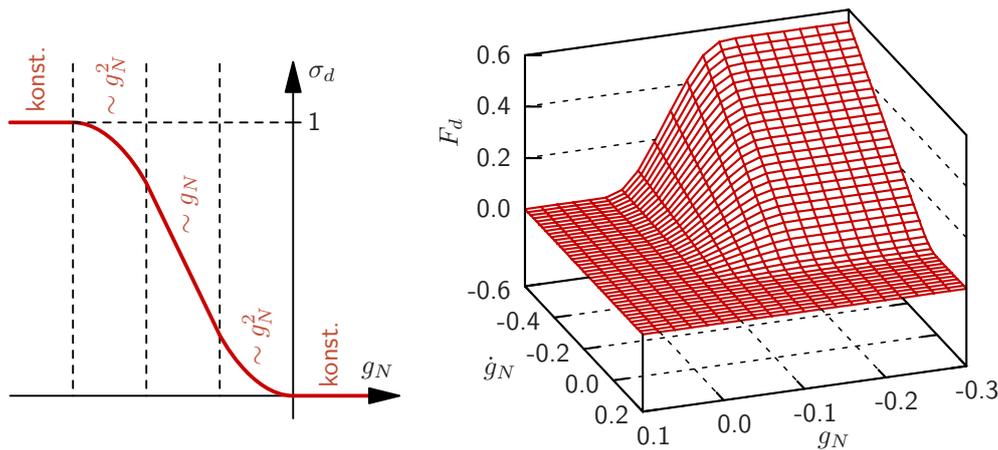


Bild 2.8: Schaltfunktion σ_d (links) und kombinierte Dämpferkraft F_d (rechts). Um den qualitativen Verlauf der Funktionen zu verdeutlichen, wurde eine passende Skalierung gewählt.

Mit den Anteilen von Feder und Dämpfer ergibt sich die C^1 -stetige Normalkraft zu

$$f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) := F_c(g_N) + F_d(g_N, \dot{g}_N) . \tag{2.5}$$

Regularisierung in Tangentialrichtung

Für die Glättung des Reibgesetzes wird die Arkustangensfunktion verwendet, da diese bei entsprechender Skalierung dem eigentlichen Verlauf aus Bild 2.6 sehr nahe kommt, effizient durch eine Taylorreihe berechnet werden kann und C^∞ -stetig ist. Bild 2.9 zeigt eine Gegenüberstellung von idealem und regularisiertem Hilfsreibwert.

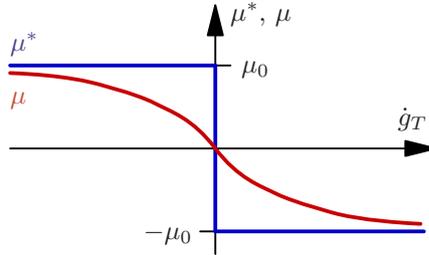


Bild 2.9: Idealer (μ^* , blau) und regularisierter (μ , rot) Hilfsreibwert.

Die regularisierte Reibkraft wird schließlich analog zu Gl. (2.3) durch

$$f_{\text{cont}T}(g_N, \dot{g}_N, \dot{g}_T) = \mu(\dot{g}_T) f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) \quad (2.6)$$

beschrieben.

2.4 Zustandsraumdarstellung

Mit der Beschreibung der Systemmodelle aus den vorherigen Abschnitten können über das NEWTON-EULER-Verfahren [10, S. 35f.] die Bewegungsgleichungen des Systems in der Form

$$M_V(\mathbf{q}_V, t) \ddot{\mathbf{q}}_V = \mathbf{h}_V(\mathbf{q}_V, \dot{\mathbf{q}}_V, \mathbf{u}_V, t), \quad (2.7)$$

$$M_S(\mathbf{q}_S, t) \ddot{\mathbf{q}}_S = \mathbf{h}_S(\mathbf{q}_S, \dot{\mathbf{q}}_S, \mathbf{u}_S, t) \quad (2.8)$$

aufgestellt werden. Dabei bezeichnen \mathbf{q}_V und \mathbf{q}_S die bereits in Gl. (2.1) eingeführten Freiheitsgrade (bzw. generalisierten Koordinaten) des Systems jeweils in der YZ-Ebene (Index „V“, Vorderansicht) und XZ-Ebene (Index „S“, Seitenansicht). Eine detaillierte Herleitung dieses Zusammenhangs sowie eine Beschreibung der Massenmatrix \mathbf{M} und des \mathbf{h} -Vektors findet sich für beide Systemmodelle und Ebenen in Anhang D.

Mit den Zustandsvektoren \mathbf{x}_V und \mathbf{x}_S aus Gl. (2.2) können aus den Bewegungsgleichungen die Zustandsraummodelle für die Vorderansicht

$$\mathbf{x}_V(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_V(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_V(t) \\ z_V(t) \\ y_V(t) \\ \dot{\varphi}_V(t) \\ \dot{z}_V(t) \\ \dot{y}_V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{V1}(t) \\ x_{V2}(t) \\ x_{V3}(t) \\ x_{V4}(t) \\ x_{V5}(t) \\ x_{V6}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_V(t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}_V(t), \mathbf{u}_V(t), t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_V(t) \\ \dot{z}_V(t) \\ \dot{y}_V(t) \\ M_V(\mathbf{x}_V(t), t)^{-1} \mathbf{h}_V(\mathbf{x}_V(t), \mathbf{u}_V(t), t) \end{pmatrix}$$

und die Seitenansicht

$$\mathbf{x}_S(t) = \begin{pmatrix} \varphi_S(t) \\ z_S(t) \\ \mathbf{q}_S(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_S(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{S1}(t) \\ x_{S2}(t) \\ x_{S3}(t) \\ x_{S4}(t) \\ x_{S5}(t) \\ x_{S6}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_S(t) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}_S(t), \mathbf{u}_S(t), t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_S(t) \\ \dot{z}_S(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_S(t) \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S(t), t)^{-1} \mathbf{h}_S(\mathbf{x}_S(t), \mathbf{u}_S(t), t) \end{pmatrix}$$

formuliert werden. Mit \mathbf{u}_V und \mathbf{u}_S werden dabei die Eingänge des Systems festgelegt, die sich für das Modell unter Verwendung der KMS aus

$$\mathbf{u}_V(t) = \mathbf{u}_{VKMS}(t) = \begin{pmatrix} {}_{TV}\mathbf{F}_{KV}(t) \\ {}_{TV}\mathbf{M}_{KV}(t) \\ {}_{TV}\mathbf{F}_{LV}(t) \\ {}_{TV}\mathbf{M}_{LV}(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_S(t) = \mathbf{u}_{SKMS}(t) = \begin{pmatrix} {}_{TS}\mathbf{F}_{KS}(t) \\ {}_{TS}\mathbf{M}_{KS}(t) \\ {}_{TS}\mathbf{F}_{LS}(t) \\ {}_{TS}\mathbf{M}_{LS}(t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

und für das System mit modelliertem Kontakt aus

$$\mathbf{u}_V(t) = \mathbf{u}_{V\text{cont}}(t) = \begin{pmatrix} {}_{TV}\alpha_{rV}(t) \\ {}_{TV}\alpha_{lV}(t) \\ {}_{TV}\dot{\alpha}_{rV}(t) \\ {}_{TV}\dot{\alpha}_{lV}(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_S(t) = \mathbf{u}_{S\text{cont}}(t) = \begin{pmatrix} {}_{TS}\alpha_{rS}(t) \\ {}_{TS}\alpha_{lS}(t) \\ {}_{TS}\dot{\alpha}_{rS}(t) \\ {}_{TS}\dot{\alpha}_{lS}(t) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

zusammensetzen. Die Eingänge des Systems unterscheiden sich von den restlichen zeitveränderlichen Systemvariablen, da für sie im Gegensatz zu z. B. der Idealtrajektorie des Schwerpunkts keine Zukunftswerte bekannt sind⁴. Stattdessen werden sie während des Betriebs gemessen bzw. von dem Kraftregler generiert.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass die Zustandsraummodelle der Vorder- und Seitenansicht in dieser Form nicht miteinander gekoppelt sind. Eine geringfügige Abhängigkeit wird aber später durch die Transformation der IMS-Daten (siehe Anhang E) eingeführt.

Übergang zum zeitdiskreten System

Für die Implementierung des mechanischen Modells am Rechner muss die zeitkontinuierliche Darstellung aus Gl. (2.9) und Gl. (2.10) in eine zeitdiskrete Form gebracht werden. Da dies für beide Ebenen (V und S) auf dieselbe Weise geschieht, wird das Zustandsraummodell im Folgenden durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \begin{cases} \stackrel{\wedge}{=} \dot{\mathbf{x}}_V(t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}_V(t), \mathbf{u}_V(t), t) & \text{in der Vorderansicht} \\ \stackrel{\wedge}{=} \dot{\mathbf{x}}_S(t) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}_S(t), \mathbf{u}_S(t), t) & \text{in der Seitenansicht} \end{cases} \quad (2.13)$$

vereinheitlicht. Der Index „ t “ weist dabei darauf hin, dass es sich um die zeitkontinuierliche Darstellung handelt.

⁴ Bei dem in dieser Arbeit entwickelten Zustandsschätzer werden an keiner Stelle Zukunftswerte verwendet, weshalb die Abgrenzung der Eingänge von den Systemvariablen lediglich einem besseren Verständnis bei der Sensorfusion mittels KALMAN-Filter dient.

Für die Diskretisierung wird auf das Einschritt- θ -Verfahren

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \theta f(t_{k+1}, \phi_{k+1}) \Delta t + (1 - \theta) f(t_k, \phi_k) \Delta t \quad (2.14)$$

zurückgegriffen. Die Wahl von θ führt für

1. $\theta = 0$ auf das explizite EULER-Verfahren,
2. $\theta = \frac{1}{2}$ auf die Trapezregel,
3. $\theta = 1$ auf das implizite EULER-Verfahren.

Die Anwendung von Gl. (2.14) auf Gl. (2.13) liefert

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \theta \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k, t_{k+1}) \Delta t + (1 - \theta) \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \Delta t, \quad (2.16)$$

wobei \mathbf{x}_{k+1} den Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_{k+1} beschreibt. Der Eingang \mathbf{u} wird als konstant im Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ angenommen, da der Zukunftswert \mathbf{u}_{k+1} , sowie der Zusammenhang zwischen \mathbf{u}_{k+1} und \mathbf{u}_k nicht bekannt sind.

Für $\theta \neq 0$ hat das Integrationsverfahren impliziten Charakter und wird iterativ durch eine Fixpunkt-Iteration gelöst:

$$\mathbf{x}_{k+1}^0 = \mathbf{x}_k, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{m+1} = \mathbf{x}_k + \theta \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{k+1}^m, \mathbf{u}_k, t_{k+1}) \Delta t + (1 - \theta) \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \Delta t. \quad (2.18)$$

Mit \mathbf{x}_{k+1}^m wird hierbei der Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_{k+1} in der m -ten Iteration bezeichnet. Bei Erreichen einer bestimmten Toleranz $\|\mathbf{x}_{k+1}^{m+1} - \mathbf{x}_{k+1}^m\| \leq \Delta x_{\text{tol}}$ oder Überschreiten der maximalen Iterationsanzahl $m \geq m_{\text{max}}$ wird die Iteration abgebrochen. Die abgekürzte Schreibweise

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_\theta(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \quad (2.19)$$

für das Einschritt- θ -Verfahren mit Fixpunkt-Iteration (Index „ θ “) vereinfacht die weitere Verwendung.

Für die Anwendung des erweiterten KALMAN-Filters in Abschnitt 3.2 wird eine rein explizite Darstellung von \mathbf{x}_{k+1} benötigt (Index „ex“), da nur diese das analytische Ableiten $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ex}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)}{\partial \mathbf{x}_k}$ ermöglicht:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_{\text{ex}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) = \mathbf{x}_k + \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \Delta t. \quad (2.21)$$

Für die Wahl $\theta = 0$ gilt

$$\mathbf{f}_{\theta=0}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) = \mathbf{f}_{\text{ex}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k). \quad (2.22)$$

2.5 Validierung mit MATLAB

Um die Plausibilität des mechanischen Modells sowie die Richtigkeit der mathematischen Beschreibung zu überprüfen, wurde eine Simulation des Systems in der Software MATLAB von *The MathWorks* erstellt. Hierbei lag das Hauptaugenmerk auf dem Test der Systemgleichungen noch vor der Implementierung des eigentlichen Zustandsschätzers, sowie der

passenden Parametrierung des Kontaktmodells, um ein physikalisch plausibles Verhalten des Mehrkörpersystems zu erreichen. Außerdem wurde mit dem GUI-Werkzeug von MATLAB eine Visualisierung erstellt, mit welcher das Verhalten des Systems innerhalb des simulierten Zeitintervalls qualitativ bewertet werden kann (siehe Bild 2.10).

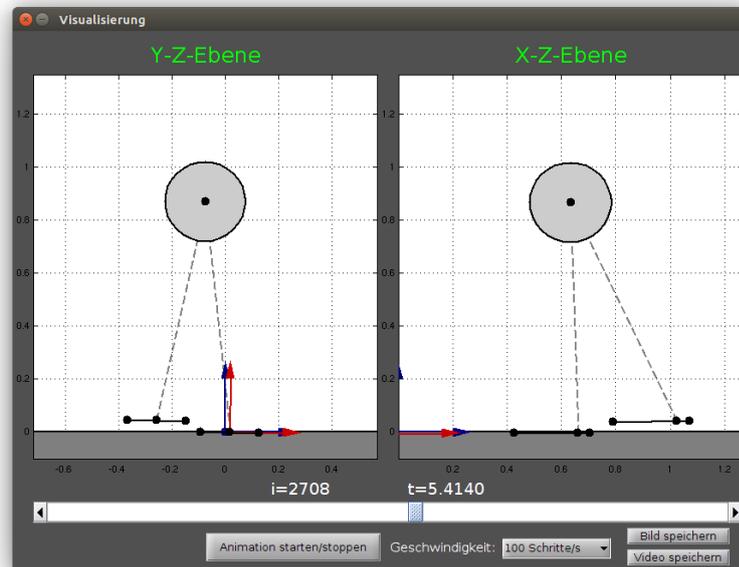


Bild 2.10: Visualisierung des mechanischen Modells in MATLAB-GUI.

Als Eingangsgrößen des Simulators dienen die Idealtrajektorien des Schwerpunkts und der Fußknotenpunkte sowie die Korrekturwerte der Fußkippwinkel aus der Kraftregelung (detaillierte Liste in Tabelle B.1). Die hierfür verwendeten Datensätze stammen aus einer Logdatei der am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik entwickelten Software zur Simulation des Roboters.

Durch Gl. (2.19) werden die im vorherigen Abschnitt eingeführten Zustandsraummodelle zeitlich diskretisiert und mit den Startwerten $\mathbf{x}_V(t_0)$ bzw. $\mathbf{x}_S(t_0)$ bis zur Endzeit t_e simuliert. Neben den in Anhang F gelisteten allgemeinen Parametern werden speziell für den MATLAB-Simulator die Werte aus Tabelle 2.1 verwendet. Die Zeitintegration muss aus Stabilitätsgründen mithilfe eines impliziten Verfahrens (hier $\theta = 0.5$) durchgeführt werden.

Tabelle 2.1: Parameter der MATLAB-Simulation.

Parameter	Wert	Bedeutung
θ	0.5	Trapezregel (für Zeitintegration)
Δx_{tol}	10^{-4}	Abbruchtoleranz (für Fixpunktiteration)
m_{max}	5	maximale Anzahl an Iterationen (für Fixpunktiteration)
$\mathbf{x}_V(t_0)$	$\mathbf{0}$	Startwert für Zustandsvektor in der Vorderansicht
$\mathbf{x}_S(t_0)$	$\mathbf{0}$	Startwert für Zustandsvektor in der Seitenansicht
t_e	10 s	Endzeitpunkt der Simulation

Für den MATLAB-Simulator wurde nur das System mit modelliertem Kontakt implementiert. Eine Simulation des Systems unter Verwendung der KMS würde aufgrund des fehlenden Kontakts mit der Umgebung keine zusätzliche Information liefern.

Bei der Auswertung von Simulationsergebnissen konnte folgendes Systemverhalten beobachtet werden:

1. In der XZ-Ebene (Seitenansicht) stellt sich ein stabiler Laufzyklus ein, wobei die FüÙe bei jedem Schritt flächig aufsetzen (Bild 2.11). Die Kontaktparameter sind so gewählt, dass die FüÙe nur geringfügig in den Untergrund eintauchen und ein Rutschen weitgehend verhindert wird.

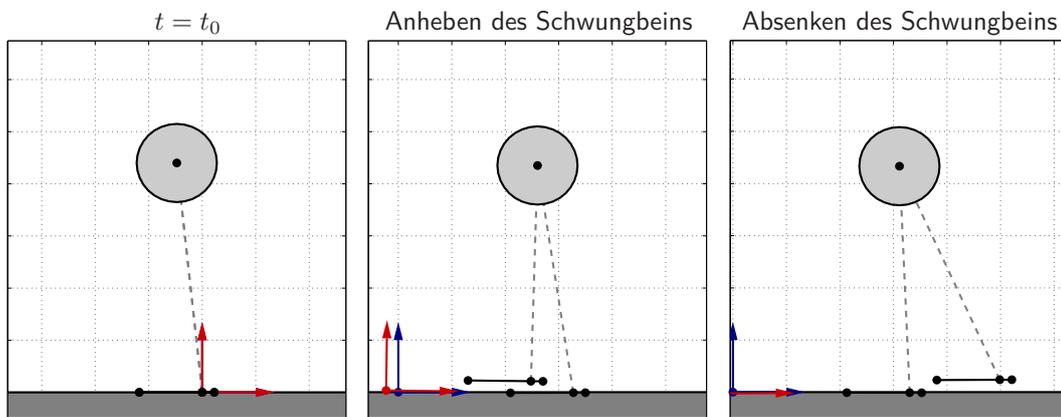


Bild 2.11: MATLAB-Simulation: stabile Bewegung in der XZ-Ebene.

2. In der YZ-Ebene (Vorderansicht) führen bereits kleine Störungen zu einer Drehung des Roboters um die x_I -Achse. Dadurch setzen die FüÙe nicht mehr parallel zum Boden auf. Es entsteht ein punktförmiger Kontakt und der Roboter beginnt zu schaukeln, was je nach Parameterwahl sogar zum Umkippen führen kann (Bild 2.12). Dabei muss berücksichtigt werden, dass in die MATLAB-Simulation keine Sensorinformationen einfließen, d. h., dass eine einfache Vorwärtsintegration bei festgelegter Bewegung des Roboters stattfindet. Im Gegensatz dazu werden am realen System unvorhergesehene Kontakte zur Laufzeit erkannt und entsprechende Gegenmaßnahmen eingeleitet. Trotz der geringen Aussagekraft des Langzeitverhaltens in der Simulation kann festgehalten werden, dass das System in der YZ-Ebene empfindlicher auf Störungen reagiert.

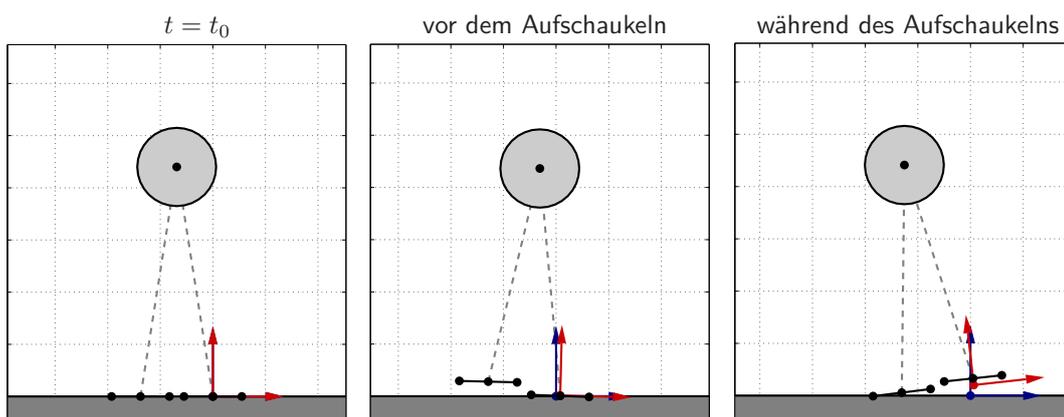


Bild 2.12: MATLAB-Simulation: Aufschaukeln in der YZ-Ebene.

Die aus der Simulation gewonnenen Erkenntnisse lassen darauf schließen, dass das Modell mit berücksichtigtem Kontakt die Dynamik des Roboters (in Bezug auf das Laufen) zufriedenstellend wiedergibt.

3 Zustandsschätzung

Die Sensordatenfusion erfolgt anhand eines KALMAN-Filters, dessen Grundlagen aus KALMAN [8] und CHUI [4] entnommen und in Abschnitt 3.1 zusammengefasst sind. Auf eine Herleitung der Zusammenhänge wird dabei verzichtet und stattdessen auf KALMAN [8] (ausführlicher Originalartikel) bzw. ISERMANN [7, S. 539-548] (anwendungsorientierter) verwiesen. Die konkrete Anwendung des Filters wird in Abschnitt 3.2 beschrieben.

3.1 Kalman-Filter

Der Zweck des Filters besteht darin, für das (hier zeitdiskrete) System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{W} \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{Z} \mathbf{x}_k + \mathbf{V} \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

eine optimale Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ zu bestimmen. Gl. (3.1) stellt ein beliebiges und (zunächst) lineares, zeitinvariantes System mit dem Zustand \mathbf{x}_k , dem Eingang \mathbf{u}_k und dem Ausgang (bzw. den Messgrößen) \mathbf{z}_k dar. Die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{Z} seien vorerst konstant.

Die Variable \mathbf{w}_k wird durch die Matrix \mathbf{W} auf den Systemzustand projiziert und führt ein Prozessrauschen ein. Auf die gleiche Weise wird mit \mathbf{V} und \mathbf{v}_k ein Rauschprozess in die Messgleichung integriert. Für den konkreten Fall des Laufroboters steht \mathbf{w}_k z. B. für den Einfluss von Strukturschwingungen (welche im vereinfachten Modell nicht berücksichtigt werden) und \mathbf{v}_k für das Rauschen der IMS-Messdaten.

Das System aus Gl. (3.1) kann als Überlagerung eines deterministischen (Index „det“) und eines stochastischen (Index „sto“) Systems

$$\mathbf{x}_{\text{det},k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{det},k} + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{z}_{\text{det},k} = \mathbf{Z} \mathbf{x}_{\text{det},k}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}_{\text{sto},k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{sto},k} + \mathbf{W} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{z}_{\text{sto},k} = \mathbf{Z} \mathbf{x}_{\text{sto},k} + \mathbf{V} \mathbf{v}_k \quad (3.3)$$

mit

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{\text{det},k} + \mathbf{x}_{\text{sto},k}, \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{\text{det},k} + \mathbf{z}_{\text{sto},k} \quad (3.4)$$

verstanden werden. Da die Lösung des deterministischen Systems $\mathbf{x}_{\text{det},k+1}$ bei bekanntem \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{u}_k eindeutig bestimmt ist, muss mit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{\text{det},k+1} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{sto},k+1}$ nur der stochastische Anteil geschätzt werden.

Für \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k werden normalverteilte, mittelwertfreie und weiße Rauschprozesse

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (3.5)$$

angenommen. Mit weißem Rauschen wird in diesem Kontext ein zeitlich unkorreliertes Signal bezeichnet, d. h. es hängt nicht von seinen Vergangenheits- oder Zukunftswerten ab. Mittelwertfrei bedeutet, dass der Erwartungswert¹ der Zufallsvariable $\mathbf{0}$ ist.

¹ Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable berechnet sich aus der Summe der mit den entsprechenden relativen Häufigkeiten gewichteten Einzelwerte [6, S. 89f.].

Kovarianzmatrizen

Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} heißen *Kovarianzmatrizen*. Um ein besseres Verständnis für deren Bedeutung während des Filterprozesses zu schaffen, wird an dieser Stelle kurz auf die Begriffe *Streuung*, *Varianz* und *Kovarianz* eingegangen. Die folgenden Erläuterungen sind HÜBNER [6, S. 100-107] entnommen:

Die *Streuung* einer Zufallsvariable X mit endlichem Erwartungswert $E(X)$ ist durch

$$\text{Str}(X) := |E(X - E(X))| \quad (3.6)$$

definiert, wobei $X - E(X)$ die Abweichung vom Erwartungswert beschreibt. Sie ist ein Maß für die mittlere Abweichung von $E(X)$ und gibt Auskunft darüber, wie „weit“ die Einzelwerte voneinander entfernt sind. Eine konstante Zufallsvariable Z hat z. B. die Streuung $\text{Str}(Z) = 0$.

Die *Varianz* einer Zufallsvariable stellt mit

$$\text{Var}(X) := \text{Str}(X)^2 = E(X - E(X))^2 \quad (3.7)$$

das Quadrat der Streuung und somit die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert dar. Sie vereinfacht den mathematischen Umgang mit der Streuung, da durch das Quadrieren der Betrag entfällt und deshalb keine Fallunterscheidungen berücksichtigt werden müssen.

Über den Begriff der *Kovarianz* wird der Grad der Abhängigkeit von zwei Zufallsvariablen X und Y zueinander beschrieben. Sie ist durch

$$\text{Kov}(X, Y) := E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.8)$$

definiert. In dieser Arbeit werden ausschließlich stochastisch unabhängige Zufallsvariablen betrachtet. Für diese gilt $\text{Kov}(X, Y) = 0$.

Die eben eingeführten Begriffe beziehen sich alle auf die eindimensionalen Variablen X und Y . Im mehrdimensionalen Fall kommt die *Kovarianzmatrix* ins Spiel. Sie fasst die Varianz und Kovarianz eines Vektors von Zufallszahlen

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \quad (3.9)$$

zusammen und ist definiert durch

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Kov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Kov}(X_1, X_n) \\ \text{Kov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{Kov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Hat die Kovarianzmatrix Diagonalform, so sind die Kovarianzen $K_{ij} = \text{Kov}(X_i, X_j) = 0$ (für $i \neq j$) und die Komponenten von \mathbf{X} sind stochastisch unabhängig.

Für die Zustandsschätzung werden für \mathbf{Q} und \mathbf{R} Diagonalmatrizen festgelegt. Es wird also davon ausgegangen, dass die einzelnen Störeinflüsse $w_{k,i}$ auf den Systemzustand völlig unabhängig voneinander sind. Dasselbe gilt für die Einwirkung von $v_{k,i}$ auf die Messgleichung.

Über die Diagonaleinträge Q_{ii} , R_{ii} kann die Varianz und damit die Streuung der einzelnen Komponenten von \mathbf{v}_k und \mathbf{w}_k eingestellt werden. Eine für das Schätzergebnis günstige Wahl dieser Matrizen stellt bei der Implementierung die größte Herausforderung dar.

Filteralgorithmus

Wie eingangs erwähnt, soll der KALMAN-Filter eine möglichst gute Schätzung des unbekanntem Systemzustandes liefern. Um eine Aussage über die Qualität der Schätzung zu treffen, wird mit

$$V_k := E \left(\|\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k\|_2^2 \right) \quad (3.11)$$

ein Maß für den quadratischen Schätzfehler zum Zeitpunkt t_k definiert [7, S. 540]. Dieses Gütemaß wird im Rahmen der Filterung minimiert, wodurch der KALMAN-Filter für lineare Systeme nicht nur eine gute, sondern unter Berücksichtigung der Eingangsgrößen- und Messwertverläufe sogar eine optimale Schätzung liefert.

Die konkrete Rechenvorschrift zur Bestimmung eines neuen optimalen Schätzwertes $\hat{\mathbf{x}}_k$ lautet für lineare, zeitinvariante und zeitdiskrete Systeme

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}, \\ \mathbf{P}_{k,\text{pred}} &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{W}^T, \end{aligned} \right\} \text{Prädiktion} \quad (3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{Z}^T \left(\mathbf{Z} \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{Z}^T + \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{V}^T \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{Z} \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}), \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{Z}) \mathbf{P}_{k,\text{pred}}, \end{aligned} \right\} \text{Korrektur} \quad (3.13)$$

wobei mit \mathbf{I} die Einheitsmatrix bezeichnet wird. Vom vorherigen Zeitschritt (t_{k-1}) sind die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ und der Eingang \mathbf{u}_{k-1} bekannt, während \mathbf{z}_k die aktuelle Messung und $\hat{\mathbf{x}}_k$ die neue Schätzung zum Zeitpunkt t_k darstellt.

Die Berechnung gliedert sich in zwei Schritte: Prädiktion und Korrektur. Bei der Prädiktion wird ein vorläufiger Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}$ mithilfe des deterministischen Systems aus Gl. (3.2) ermittelt. Außerdem wird eine Vorabversion der Matrix \mathbf{P}_k bestimmt. \mathbf{P}_k stellt die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ dar und steht über

$$V_k = \text{Spur}(\mathbf{P}_k) \quad (3.14)$$

mit dem Maß für den quadratischen Schätzfehler aus Gl. (3.11) in Verbindung [7, S. 542].

Im Korrekturschritt wird die Filtermatrix \mathbf{K}_k berechnet, welche dann über

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{Z} \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}) \quad (3.15)$$

die Daten aus Prädiktion und Messung mit einer bestimmten Gewichtung zusammenführt. Mit Gl. (3.15) wird der identische Aufbau von KALMAN-Filter und LUENBERGER-Beobachter ersichtlich [1, S. 530]. Die beiden Methoden unterscheiden sich lediglich in der Wahl der Filtermatrix: Bei der Auslegung des LUENBERGER-Beobachters wird \mathbf{K} so gewählt, dass sich günstige Beobachtereigenwerte ergeben und der Schätzfehler für $t \rightarrow \infty$ abklingt. Beim KALMAN-Filter wird im Gegensatz dazu eine Matrix \mathbf{K} verwendet, mit der der Schätzfehler (unter optimaler Ausnutzung der vorliegenden Informationen) minimiert wird.

Abschließend ist noch zu ergänzen, dass der eben vorgestellte Filteralgorithmus auch für zeitvariante Systeme, d. h. mit veränderlichen Matrizen \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k , \mathbf{Z}_k , \mathbf{V}_k , \mathbf{W}_k , \mathbf{Q}_k und \mathbf{R}_k , eine optimale Schätzung liefert. In den folgenden Abschnitten wird von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht, wobei die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} weiterhin als konstant angenommen werden.

Erweiterter Kalman-Filter (EKF)

Obwohl die Optimalität des KALMAN-Filters nur für lineare Systeme gilt, kann das Verfahren auch bei nichtlinearen Systemen zu guten Ergebnissen führen. Die Prädiktion des Systemzustandes $\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}$ wird hierbei direkt durch das nichtlineare Zustandsraummodell berechnet, während für die weiteren Schritte in Gl. (3.12) und Gl. (3.13) eine Linearisierung des Systems nötig ist. Für das nichtlineare, zeitvariante System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{f}_{\text{EKF}}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}, t_{k-1}), \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{z}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

gilt folgende Rechenvorschrift des *erweiterten* KALMAN-Filters (kurz EKF):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} &= \mathbf{f}_{\text{EKF}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}, t_{k-1}), \\ \mathbf{P}_{k,\text{pred}} &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q} \mathbf{W}_k^T, \end{aligned} \right\} \text{Prädiktion} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{Z}_k^T (\mathbf{Z}_k \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{Z}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R} \mathbf{V}_k^T)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}(\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, t_k)), \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k) \mathbf{P}_{k,\text{pred}}. \end{aligned} \right\} \text{Korrektur} \quad (3.18)$$

Der Index „EKF“ weist darauf hin, dass es sich bei \mathbf{f}_{EKF} um die nichtlineare System-Differenzgleichung des erweiterten KALMAN-Filters handelt. Der Unterschied zur Differenzgleichung des mechanischen Modells besteht in der Abhängigkeit von der Zufallsvariablen \mathbf{w}_k . Der Ablauf der Filterung ist schematisch in Bild 3.1 dargestellt.

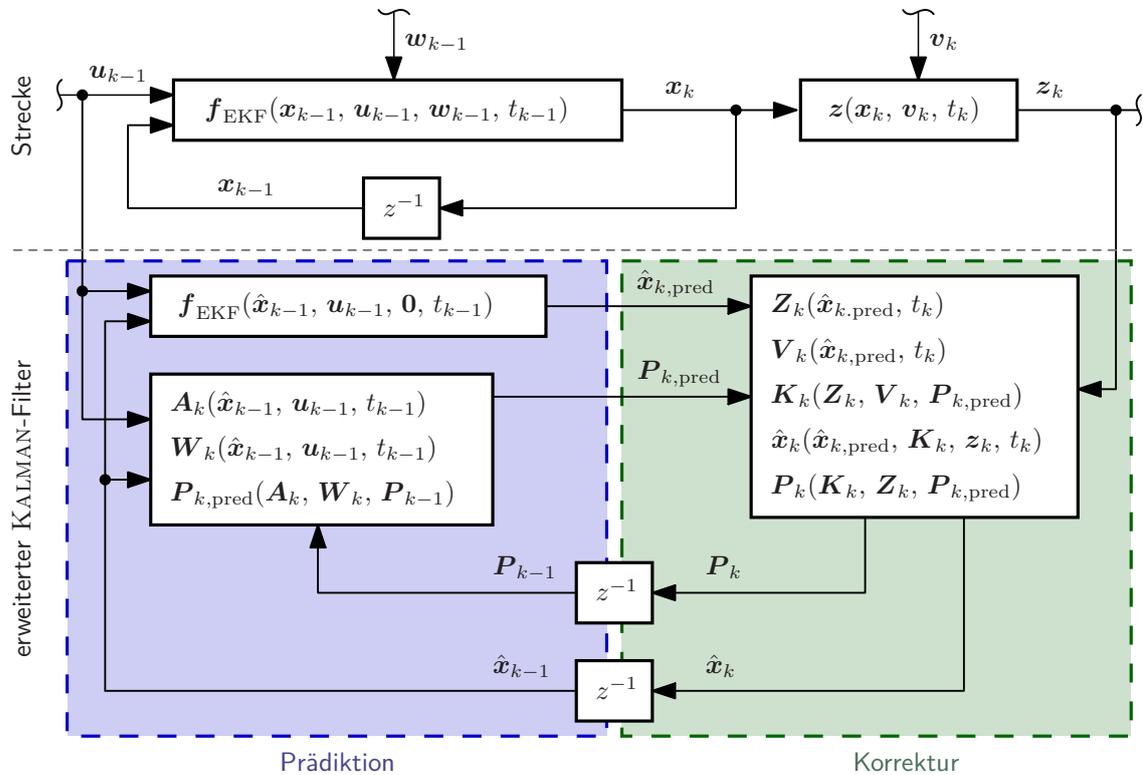


Bild 3.1: Schematische Darstellung der Strecke mit erweitertem KALMAN-Filter.

Die Linearisierung um den vorherigen Zeitschritt t_{k-1} wird durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &:= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{EKF}}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}, t_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}=\mathbf{0}, t_{k-1}}, \\
\mathbf{W}_k &:= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{EKF}}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}, t_{k-1})}{\partial \mathbf{w}_{k-1}} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}=\mathbf{0}, t_{k-1}}, \\
\mathbf{Z}_k &:= \left(\frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}, \mathbf{v}_k=\mathbf{0}, t_k}, \\
\mathbf{V}_k &:= \left(\frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k)}{\partial \mathbf{v}_k} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}, \mathbf{v}_k=\mathbf{0}, t_k}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

erreicht. Die Mittelwertfreiheit der Zufallsvariablen ist dabei der Grund für die Wahl des „Arbeitspunktes“ $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ in Gl. (3.17), Gl. (3.18) und Gl. (3.19).

Da in Gl. (3.19) Ableitungen des Zustandsraummodells benötigt werden und für korrekte Ergebnisse bei der Filterung das durch \mathbf{A}_k beschriebene Systemverhalten möglichst glatt sein sollte, wurde in Abschnitt 2.3 die C^1 -Stetigkeit der Kontaktkräfte gefordert. Aus demselben Grund wird auch auf die Verwendung der Drucksensoren in den Füßen (siehe Abschnitt 2.1) verzichtet, da diese ein binäres Signal liefern und schaltende Elemente, d. h. hochgradig nichtlineares Verhalten, bei der KALMAN-Filterung unbedingt vermieden werden muss.

3.2 Sensordatenfusion mittels EKF

Für die Anwendung des erweiterten KALMAN-Filters auf das Schätzproblem des Laufroboters wird die System-Differenzgleichung zu

$$\mathbf{f}_{\text{EKF}}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{f}_{\theta/\text{ex}}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \tag{3.20}$$

festgelegt, wobei $\mathbf{f}_{\theta/\text{ex}}$ wahlweise die Verwendung der expliziten oder impliziten Zeitintegration aus Gl. (2.19) bzw. Gl. (2.21) beschreibt. Das implizite Verfahren kann jedoch nur für die Prädiktion des Systemzustandes $\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}$ verwendet werden, für die analytische Linearisierung nach Gl. (3.19) muss das explizite Verfahren mit \mathbf{f}_{ex} bzw. $\theta = 0$ herangezogen werden.

Das Prozessrauschen des Laufroboters \mathbf{w}_{k-1} entsteht durch die Überlagerung von verschiedenen, nicht modellierten Dynamikeffekten, deren Wechselwirkungen mit dem System nicht bekannt sind. Deshalb wird der Einfluss von \mathbf{w}_{k-1} ohne spezielles Mapping direkt auf die Systemgleichungen addiert. Mit der Linearisierung aus Gl. (3.19) ergibt sich damit

$$\mathbf{A}_k = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ex}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}} = \mathbf{I} + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{f}_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right) \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}}, \tag{3.21}$$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{I}. \tag{3.22}$$

Für die Berechnung der Matrix \mathbf{A}_k muss das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell aus Gl. (2.13) nach dem Zustandsvektor \mathbf{x} abgeleitet werden. Für die Vorder- und Seitenansicht

ergibt sich aus Gl. (2.9) und Gl. (2.10) mit $i \in \{V, S\}$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_{i1}} & \dots & \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_{i6}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{i6}}{\partial x_{i1}} & \dots & \frac{\partial f_{i6}}{\partial x_{i6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{i6}}{\partial \mathbf{x}_i} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

wobei die ersten drei Zeilen durch

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial f_{i2}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial f_{i3}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

und die letzten drei Zeilen durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{i4}}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \frac{\partial f_{i5}}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \frac{\partial f_{i6}}{\partial \mathbf{x}_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial (\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{h}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}_i^{-1}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ \mathbf{h}_i \right] + \mathbf{M}_i^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad (3.27)$$

berechnet werden. Für Gl. (3.27) wird die Definition der Ableitung eines Matrix-Vektorproduktes aus Anhang A und die Ableitung der inversen Massenmatrix \mathbf{M}_i^{-1} sowie des Vektors \mathbf{h}_i aus Anhang D verwendet.

Messmodell

Die Messung des Systemzustandes erfolgt durch das IMS. Mithilfe einer Transformation vom IMS- in das jeweilige Planungskoordinatensystem (siehe Anhang E) stehen zum Zeitpunkt t_k die Messgrößen

$$\begin{aligned} \varphi_{VIMS,k}, \quad \dot{\varphi}_{VIMS,k}, \quad \ddot{z}_{VIMS,k}, \quad \ddot{y}_{VIMS,k}, \quad (\text{in der Vorderansicht}) \\ \varphi_{SIMS,k}, \quad \dot{\varphi}_{SIMS,k}, \quad \ddot{z}_{SIMS,k}, \quad \ddot{x}_{SIMS,k} \quad (\text{in der Seitenansicht}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

zur Verfügung. Da bei den translatorischen Anteilen nur die Beschleunigungen gemessen werden können, stehen keine direkten Geschwindigkeits- oder Positionsdaten zur Verfügung. Die Messgleichung kann deshalb auf zwei verschiedene Arten realisiert werden:

1. Es werden nur die Beschleunigungsdaten in den Filter eingespeist (\mathbf{z}_{acc}).
2. Die fehlenden Informationen werden durch numerische Integration ermittelt (\mathbf{z}_{full}).

Fall 1 (\mathbf{z}_{acc})

Im ersten Fall kann der Vektor der Messgrößen sofort angegeben werden:

$$\mathbf{z}_{\text{acc}V,k} = \begin{pmatrix} z_{\text{acc}V,k1} \\ z_{\text{acc}V,k2} \\ z_{\text{acc}V,k3} \\ z_{\text{acc}V,k4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{VIMS,k} \\ \dot{\varphi}_{VIMS,k} \\ \ddot{z}_{VIMS,k} \\ \ddot{y}_{VIMS,k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_{\text{acc}S,k} = \begin{pmatrix} z_{\text{acc}S,k1} \\ z_{\text{acc}S,k2} \\ z_{\text{acc}S,k3} \\ z_{\text{acc}S,k4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{SIMS,k} \\ \dot{\varphi}_{SIMS,k} \\ \ddot{z}_{SIMS,k} \\ \ddot{x}_{SIMS,k} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

wobei die Zufallsvariable \mathbf{v}_k hier weggelassen wurde. Die Messgleichung wird passend dazu zu

$$\mathbf{z}_{\text{acc}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k) = \mathbf{v}_k + \begin{cases} (\varphi_{V,k}, \dot{\varphi}_{V,k}, \ddot{z}_{V,k}, \ddot{y}_{V,k})^T & \text{in der Vorderansicht} \\ (\varphi_{S,k}, \dot{\varphi}_{S,k}, \ddot{z}_{S,k}, \ddot{x}_{S,k})^T & \text{in der Seitenansicht} \end{cases} \quad (3.30)$$

bzw.

$$\mathbf{z}_{\text{acc}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k) = \mathbf{v}_k + \begin{pmatrix} \varphi_{i,k} \\ \dot{\varphi}_{i,k} \\ \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)_{5. \text{ u. } 6. \text{ Zeile}} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } i \in \{V, S\} \quad (3.31)$$

gewählt. Streng genommen hängt damit die Messgleichung auch vom Eingangsvektor \mathbf{u}_k ab, d. h. $\mathbf{z}_{\text{acc}} = \mathbf{z}_{\text{acc}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$, obwohl dies im zuvor beschriebenen Algorithmus nicht vorgesehen ist. Die Abbildung \mathbf{z}_{acc} darf aber zeitvariant sein, weshalb der Eingang \mathbf{u}_k auch als ein von der Zeit abhängiger Parameter $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$ gesehen werden kann und damit wieder $\mathbf{z}_{\text{acc}} = \mathbf{z}_{\text{acc}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k)$ gilt.

Da die Zufallsvariable \mathbf{v}_k das Messrauschen der IMS-Daten darstellt, wird sie in Gl. (3.31) durch eine Addition berücksichtigt. Die Linearisierung nach Gl. (3.19) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{acc},k} &= \left(\frac{\partial \mathbf{z}_{\text{acc}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{pred}}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, t_k} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)_{5. \text{ u. } 6. \text{ Zeile}} \end{pmatrix} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

sowie $\mathbf{V}_{\text{acc},k} = \mathbf{I}$. Hierbei wird zur Zeitersparnis $\mathbf{Z}_{\text{acc},k}$ an der Stelle $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, t_{k-1})$ anstatt $(\hat{\mathbf{x}}_{\text{pred}}, t_k)$ ausgewertet². Aus demselben Grund wird auch der zweite Korrekturschritt des Filters approximiert:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}(\hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}}, \mathbf{v} = \mathbf{0}, t_k)) \\ &\approx \hat{\mathbf{x}}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v} = \mathbf{0}, t_{k-1})). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Fall 2 (\mathbf{z}_{full})

In Fall zwei wird durch eine vorgeschaltete Integration die Messung des vollständigen Systemzustandes $\mathbf{z}_{\text{full},k} \approx \mathbf{x}_k$ ermöglicht. Die Trapezregel aus Gl. (2.14) liefert:

$$\mathbf{z}_{\text{full}V,k} = \begin{pmatrix} z_{\text{full}V,k1} \\ z_{\text{full}V,k2} \\ z_{\text{full}V,k3} \\ z_{\text{full}V,k4} \\ z_{\text{full}V,k5} \\ z_{\text{full}V,k6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{V\text{IMS},k} \\ \hat{z}_{V,k-1} + (\hat{z}_{V,k-1} + z_{\text{full}V,k5}) \frac{\Delta t}{2} \\ \hat{y}_{V,k-1} + (\hat{y}_{V,k-1} + z_{\text{full}V,k6}) \frac{\Delta t}{2} \\ \dot{\varphi}_{V\text{IMS},k} \\ \hat{z}_{V,k-1} + (\ddot{z}_{V\text{IMS},k} + \ddot{z}_{V\text{IMS},k-1}) \frac{\Delta t}{2} \\ \hat{y}_{V,k-1} + (\ddot{y}_{V\text{IMS},k} + \ddot{y}_{V\text{IMS},k-1}) \frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

² Die Ableitung von \mathbf{f}_i nach \mathbf{x}_i wurde für $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, t_{k-1})$ bereits im Rahmen der Berechnung der Matrix \mathbf{A}_k bestimmt (siehe Gl. (3.21)).

$$\mathbf{z}_{\text{fullS},k} = \begin{pmatrix} z_{\text{fullS},k1} \\ z_{\text{fullS},k2} \\ z_{\text{fullS},k3} \\ z_{\text{fullS},k4} \\ z_{\text{fullS},k5} \\ z_{\text{fullS},k6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{SIMS},k} \\ \hat{z}_{S,k-1} + (\hat{\dot{z}}_{S,k-1} + z_{\text{fullS},k5}) \frac{\Delta t}{2} \\ \hat{x}_{S,k-1} + (\hat{\dot{x}}_{S,k-1} + z_{\text{fullS},k6}) \frac{\Delta t}{2} \\ \dot{\varphi}_{\text{SIMS},k} \\ \hat{z}_{S,k-1} + (\ddot{z}_{\text{SIMS},k} + \ddot{z}_{\text{SIMS},k-1}) \frac{\Delta t}{2} \\ \hat{x}_{S,k-1} + (\ddot{x}_{\text{SIMS},k} + \ddot{x}_{\text{SIMS},k-1}) \frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Dabei ist für Driftfreiheit wichtig, dass bei der Integration über das Zeitintervall $[t_{k-1}, t_k]$ die letzte Schätzung des Systemzustands

$$\hat{\mathbf{x}}_{V,k-1} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{V,k-1} \\ \hat{z}_{V,k-1} \\ \hat{y}_{V,k-1} \\ \hat{\dot{\varphi}}_{V,k-1} \\ \hat{\dot{z}}_{V,k-1} \\ \hat{\dot{y}}_{V,k-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_{S,k-1} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{S,k-1} \\ \hat{z}_{S,k-1} \\ \hat{x}_{S,k-1} \\ \hat{\dot{\varphi}}_{S,k-1} \\ \hat{\dot{z}}_{S,k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{S,k-1} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

als Startwert verwendet wird. Die passende Messgleichung lautet

$$\mathbf{z}_{\text{full}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k) = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.37)$$

und mit der Linearisierung nach Gl. (3.19) ergibt sich schließlich $\mathbf{Z}_{\text{full},k} = \mathbf{V}_{\text{full},k} = \mathbf{I}$.

Zusammenfassung

An dieser Stelle soll zu der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Vorgehensweise ein kurzer Überblick gegeben werden (siehe Bild 3.2).

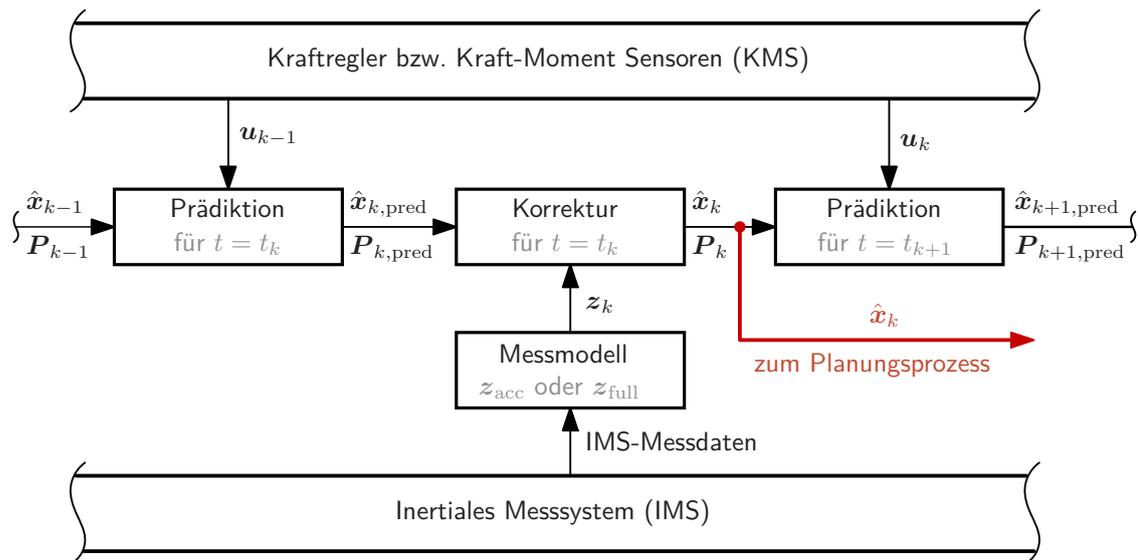


Bild 3.2: Vorgehensweise bei der Sensordatenfusion für den Laufroboter.

Um den Systemzustand zu schätzen wird ein erweiterter KALMAN-Filter verwendet. Dieser ist nur für lineare Systeme optimal, aufgrund der Regularisierung des Kontaktmodells ist

aber trotz nichtlinearer Systemdynamik mit gutem Verhalten zu rechnen. Je nach gewählter Modellierung (Verwendung der KMS \leftrightarrow modellierter Kontakt, Messmodell $z_{\text{acc}} \leftrightarrow z_{\text{full}}$) wirken die Daten der KMS, des IMS und des Kraftreglers in unterschiedlicher Weise als Eingänge bzw. Messungen.

Der Filter besteht aus den Teilen Prädiktion und Korrektur und liefert eine Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_k$, welche z. B. für eine Langzeitstabilisierung im Planungsprozess genutzt werden kann. Das Verhalten des Filters wird maßgeblich von der Wahl der als konstant angenommenen Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} beeinflusst.

3.3 Implementierung

Um das dynamische Verhalten des Zustandsschätzers untersuchen zu können, muss dieser in die bestehende Softwarestruktur des Roboters integriert werden. Obwohl die allgemeine Vorgehensweise bei der Filterung bereits fest steht, müssen für die konkrete Implementierung noch Erweiterungen vorgenommen werden.

1. Erweiterung: Standbeinwechsel

Das Gangmuster des Roboters ist so konzipiert, dass zu jedem Zeitpunkt mindestens ein Fuß in Kontakt mit dem Boden steht. Während eines Schrittes gibt es daher immer ein Schwung- und ein Standbein. Der Fuß des Standbeins kann als ruhend angenommen werden, während sich das Schwungbein entlang einer vorgeschriebenen Trajektorie bewegt.

Für die Planung der Gesamtbewegung des Roboters ist es günstig, die Berechnungen in einem möglichst körpernahen und dennoch unbeweglichen Koordinatensystem durchzuführen. Aus diesem Grund wird das Koordinatensystem des Planungsprozesses nach jedem abgeschlossenen Schritt in den Fuß des aktuellen Standbeins verschoben. Je nach Art des Laufens (geradeaus oder in einem Bogen) kommt es dadurch auch zu einer Drehung des Koordinatensystems. Bild 3.3 veranschaulicht diesen Vorgang für den Fall eines Schrittes in einer Linkskurve.

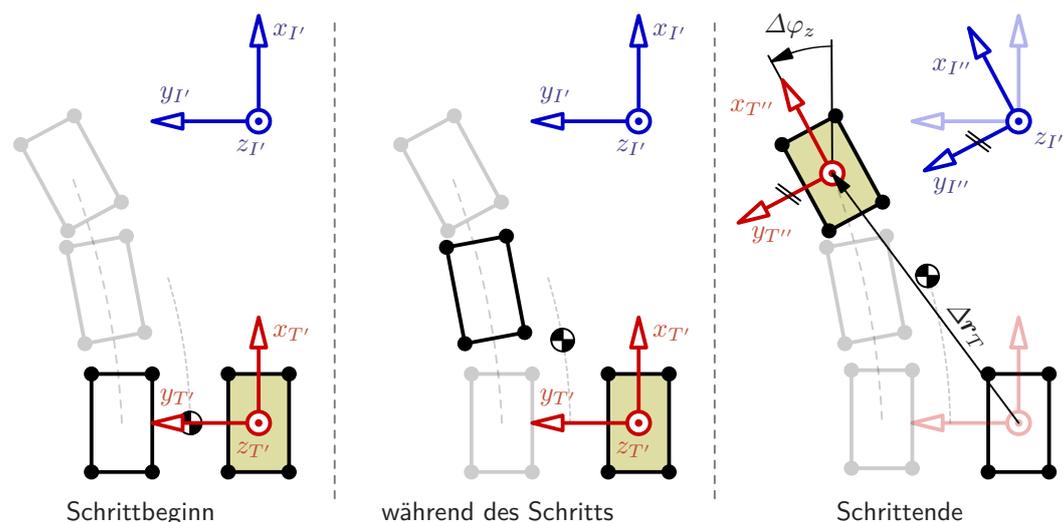


Bild 3.3: Ablauf beim Standbeinwechsel in einer Linkskurve (Draufsicht). Beim Wechsel des Standbeins verschiebt sich das Planungskoordinatensystem ($T' \rightarrow T''$) in den Fuß des aktuellen Standbeins (in gelb hervorgehoben). Um die ebene Modellierung aus Kapitel 2 beibehalten zu können, muss das inertielle I-System durch eine Drehung am T'' -System ausgerichtet werden.

Mit T' und T'' wird das Planungskoordinatensystem vor bzw. nach dem Standbeinwechsel bezeichnet. Das T -System ist äquivalent zum TV - bzw. TS -System in Vorder- und Seitenansicht³.

Da sich bei jedem Standbeinwechsel mit dem Planungskoordinatensystem auch die Art der Darstellung der Idealtrajektorien (in Bild 2.5 mit $\mathbf{x}_{\text{ideal}}$ bezeichnet) ändert, muss diese Transformation dem Zustandsschätzer mitgeteilt werden. Konkret handelt es sich um eine Verschiebung des Ursprungs von T um den Vektor $\Delta \mathbf{r}_T$ mit anschließender Drehung des Inertialsystems I um den Winkel $\Delta \varphi_z$ ⁴ (siehe Bild 3.3 rechts).

Da die Schätzung des Systemzustands $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ Position und Geschwindigkeit des TV - bzw. TS -Systems beschreibt, muss diese entsprechend transformiert werden. Der Übergang von $\hat{\mathbf{x}}'_{k-1}$ zur korrigierten Schätzung $\hat{\mathbf{x}}''_{k-1}$ während des Standbeinwechsels erfolgt durch

$$\begin{pmatrix} \hat{x}''_{S,k-1} \\ \hat{y}''_{V,k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta \varphi_z) & \sin(\Delta \varphi_z) \\ -\sin(\Delta \varphi_z) & \cos(\Delta \varphi_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_{S,k-1} + \Delta_{I'r_T,x} \\ \hat{y}'_{V,k-1} + \Delta_{I'r_T,y} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Die Position des T -Systems wird also erst entlang $\Delta_{I'r_T}$ im I' -System ($x_{I'}$, $y_{I'}$, $z_{I'}$) verschoben und anschließend im gedrehten I'' -System ($x_{I''}$, $y_{I''}$, $z_{I''}$) dargestellt. Die Geschwindigkeiten müssen mit

$$\begin{pmatrix} \hat{\dot{x}}''_{S,k-1} \\ \hat{\dot{y}}''_{V,k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta \varphi_z) & \sin(\Delta \varphi_z) \\ -\sin(\Delta \varphi_z) & \cos(\Delta \varphi_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\dot{x}}'_{S,k-1} \\ \hat{\dot{y}}'_{V,k-1} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

lediglich gedreht werden. Falls beim Messmodell von $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{\text{full},k}$ (d. h. von Fall 2) ausgegangen wird, müssen außerdem die zum Zeitpunkt t_{k-1} von dem IMS gemessenen Beschleunigungen ($\ddot{x}_{\text{SIMS},k-1}$ und $\ddot{y}_{\text{VIMS},k-1}$) wie in Gl. (3.39) transformiert werden.

2. Erweiterung: Modifikation der Fußhöhen

Der Zustandsschätzer lieferte bei Versuchen am realen System mit hoher Laufgeschwindigkeit schlechte Ergebnisse. Diese äußerten sich in spontanen Ausschlägen der Systemzustände kurz vor dem Aufsetzen eines Fußes. Der Grund dafür war, dass beim schnellen Laufen vermehrt ein vorzeitiger Kontakt des bewegten Fußes mit dem Boden auftritt. Die ungeplanten Berührungen werden von der Steuerungssoftware des Roboters erkannt und veranlassen den Kraftregler dazu, eine passende Modifikation an den Fußhöhen vorzunehmen. Dem Zustandsschätzer werden jedoch lediglich die Idealtrajektorien der Füße mitgeteilt, die Konfiguration des Roboters im Modell weicht also von der realen Situation ab.

Deshalb müssen dem Zustandsschätzer zusätzlich zu den Fußkippwinkeln α auch die Korrekturen des Kraftreglers an den Fußhöhen $\Delta_{T'r_{E,3}}$ (rechter Fuß) und $\Delta_{T'r_{F,3}}$ (linker Fuß) als Eingangsgrößen zur Verfügung gestellt werden ($\mathbf{x}_{\text{korrr}}$ in Bild 2.5). Die Berücksichtigung dieser Anpassung erfolgt durch eine einfache Addition im mechanischen Modell:

$$TV^rEV_{\text{mod},3} = TV^rEV_{,3} + \Delta_{T'r_{E,3}}, \quad TS^rES_{\text{mod},3} = TS^rES_{,3} + \Delta_{T'r_{E,3}}, \quad (3.40)$$

$$TV^rFV_{\text{mod},3} = TV^rFV_{,3} + \Delta_{T'r_{F,3}}, \quad TS^rFS_{\text{mod},3} = TS^rFS_{,3} + \Delta_{T'r_{F,3}}, \quad (3.41)$$

wobei der Index „mod“ darauf hinweist, dass es sich um die angepasste Fußhöhe handelt.

Die Größen $\Delta_{T'r_{E,3}}$ und $\Delta_{T'r_{F,3}}$ können als zusätzliche Komponenten des Eingangsvektors \mathbf{u} gesehen werden.

³ Die Drehung in der jeweiligen Ebene um φ_V bzw. φ_S ist in Bild 3.3 nicht dargestellt.

⁴ Da in Kapitel 2 von einer ebenen Betrachtungsweise ausgegangen wird, ist eine Drehung des Inertialsystems notwendig.

Gesamtablauf

Der Zustandsschätzer wird im Rahmen dieser Arbeit sowohl simulativ, als auch anhand realer Messdaten untersucht. Dazu dienen die Simulationsumgebung des Roboters und eine in die Steuerungssoftware integrierte Funktion, mit der aus geloggen Datensätzen ein realer Versuch offline nachgestellt werden kann. Da eine Verwendung der Ausgabedaten des Zustandsschätzers (z. B. im Planungsprozess) derzeit nicht implementiert ist, würde ein Test im laufenden Betrieb keine weiteren Erkenntnisse bringen. Für einen zukünftigen Test des Gesamtsystems kann der bestehende Code des Schätzers aber ohne Änderungen übernommen werden.

In beiden Fällen (Versuch mit realen Datensätzen und in Simulationsumgebung) wird eine neue Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_k$ durch den Aufruf der *update()*-Funktion des Zustandsschätzers angefordert. Der prinzipielle Gesamtablauf ist in Bild 3.4 dargestellt.

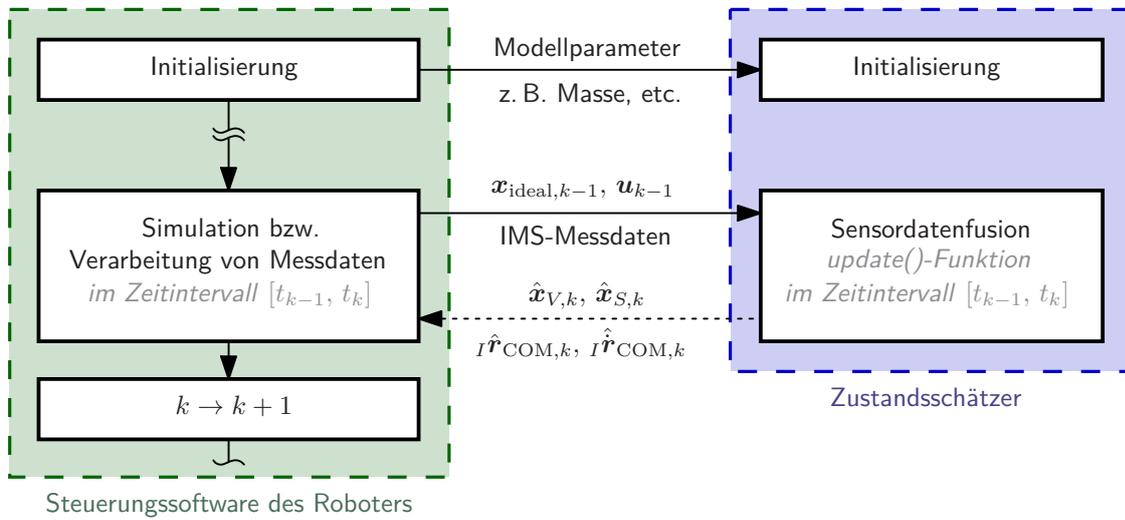


Bild 3.4: Schematische Darstellung des Gesamtablaufs der Zustandsschätzung. Die Ausgabedaten des Zustandsschätzers (Punktlinie) haben derzeit keinen Einfluss auf das Verhalten des Roboters.

Zusätzlich zur Schätzung des Systemzustands $\hat{\mathbf{x}}_{V,k}$ bzw. $\hat{\mathbf{x}}_{S,k}$ wird auch eine daraus errechnete Schwerpunktsbewegung $I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k}$ und $I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k}$ zurückgegeben⁵. Dadurch wird ein Vergleich mit den Vorgaben der Planung in Kapitel 4 ermöglicht. Die x - und y -Komponenten werden in den entsprechenden Ebenen (YZ bzw. XZ) bestimmt, während für die z -Komponente die Kombination von beiden durch

$$\begin{aligned} I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3} &= \gamma I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3}(\hat{\mathbf{x}}_{V,k}) + (1 - \gamma) I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3}(\hat{\mathbf{x}}_{S,k}), \\ I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3} &= \gamma I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3}(\hat{\mathbf{x}}_{V,k}) + (1 - \gamma) I\hat{\mathbf{r}}_{COM,k3}(\hat{\mathbf{x}}_{S,k}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

gewählt wird. Da die Schwerpunktsbewegung nicht rückgeführt wird, stellt der Gewichtungsparemeter $\gamma \in [0, 1]$ an dieser Stelle keine Kopplung der Modellebenen dar.

Bei der Beschreibung der Sensordatenfusion in Abschnitt 3.2 wurden die Idealtrajektorien des Schwerpunkts und der FüÙe $\mathbf{x}_{ideal}(t)$ nicht explizit als Eingangsgrößen erwähnt. Wird der Roboter als flexibler Körper betrachtet, so beschreiben sie eine festgelegte Veränderung seiner Geometrie und erscheinen bei der Filterung daher als zeitveränderliche Systemparameter (z. B. $T_V \mathbf{r}_{COMV}(t)$). Da die von der Planung generierten Idealtrajektorien glatt sind,

⁵ Die Bewegung des Schwerpunkts kann durch die kinematischen Zusammenhänge in Anhang B aus dem Systemzustand berechnet werden.

wird bei der Zustandsschätzung davon ausgegangen, dass sie innerhalb des betrachteten Zeitintervalls konstant sind⁶. Es gilt also

$$\mathbf{x}_{\text{ideal},k-1} \approx \mathbf{x}_{\text{ideal},k} \quad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k] . \quad (3.43)$$

Abschließend ist in Bild 3.5 der schematische Ablauf der Sensordatenfusion innerhalb der *update()*-Funktion dargestellt. Ein Durchlauf benötigt auf einem handelsüblichen Rechner im Durchschnitt eine Rechenzeit von ca. 250 μs .

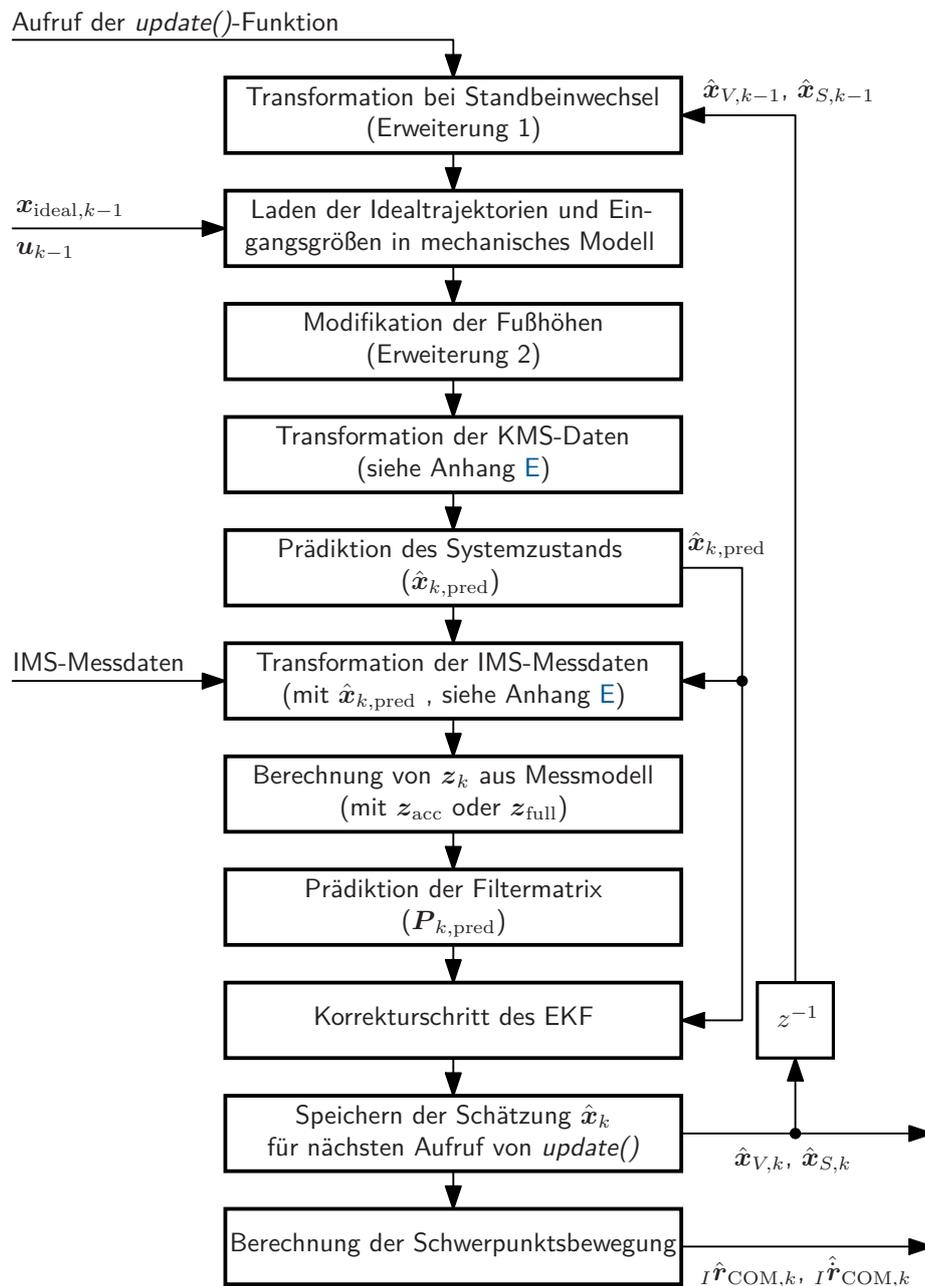


Bild 3.5: Ablauf der Sensordatenfusion innerhalb der *update()*-Funktion.

⁶ Diese Vereinfachung hat Einfluss auf die Prädiktion (nur für $\theta \neq 0$), die Transformation der IMS-Daten (Anhang E) und die Berechnung der Schwerpunktsbewegung.

4 Auswertung und Vergleich

Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Zustandsschätzers wird die in Anhang F beschriebene Parameterwahl getroffen. Allgemeine Systemparameter werden dabei der Steuerungssoftware des Roboters entnommen, während die Parametrierung des Kontaktmodells sowie die Wahl der Kovarianzmatrizen des Filters experimentell durchgeführt wurde. Für Versuche, bei denen die Parameter von den Vorgaben in Anhang F abweichen, werden an der entsprechenden Stelle die verwendeten Einstellungen explizit angegeben.

Das Schätzergebnis ist sehr empfindlich auf Änderungen bestimmter Einträge der Kovarianzmatrizen, weshalb sich die Suche nach einer passenden Wahl als sehr schwierig herausstellte. Außerdem musste für die Verwendung von realen Messdaten eine andere Belegung der Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} gefunden werden, als beim Betrieb in der Simulationsumgebung.

In den folgenden Abschnitten wird das Verhalten des Schätzers in der Simulation und am realen System getestet. Dabei wird besonders auf Stabilität und Robustheit gegenüber Störungen eingegangen. Abschließend werden die Ergebnisse mit dem bereits bestehenden Verfahren zur Zustandsschätzung verglichen.

4.1 Verhalten in der Simulation

Die Belegung der Kovarianzmatrizen hat starken Einfluss auf das Schätzergebnis, sowohl qualitativ als auch quantitativ. Dadurch kann je nach Anforderung an das Ergebnis eine dazu passende Wahl getroffen werden. Der Betrieb in der Simulationsumgebung diente vorerst dazu, den entwickelten Algorithmus lauffähig zu machen, weshalb das Hauptaugenmerk auf ein stabiles Verhalten gelegt wurde. Da sich die Charakteristik der Messdaten in der Simulation ohnehin grundlegend von der am realen System unterscheidet, wurde auf eine aufwändige Optimierung zur Verbesserung des Ergebnisses verzichtet.

Um eine Aussage über die Stabilität des Filters treffen zu können, wird neben dem zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen (diese beschreiben die „externe“ Dynamik des Filters), auch das Verhalten der Spur von \mathbf{P} betrachtet. Mit Gl. (3.11) und Gl. (3.14) aus Kapitel 3 gilt

$$V_k = \text{Spur}(\mathbf{P}_k) = E \left(\|\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k\|_2^2 \right). \quad (4.1)$$

Die Spur von \mathbf{P} stellt also ein Maß für den quadratischen Schätzfehler dar und eignet sich deshalb besonders gut, um die Stabilität der „internen“ Dynamik des Filters beurteilen zu können. Die Untersuchung von V ist damit ein notwendiger Test, mit dem das dynamische Verhalten des erweiterten KALMAN-Filters bewertet werden kann.

In einem ersten Versuch wird ein einfacher Laufvorgang ohne äußere Störungen betrachtet. Der Roboter befindet sich zum Zeitpunkt t_0 im Stillstand und beginnt dann, sich mit gleichmäßigen Schritten vorwärts zu bewegen. Für die vier Modellvarianten (Verwendung der Kraft-Moment-Sensoren vs. modellierter Kontakt und \mathbf{z}_{acc} vs. \mathbf{z}_{full}) ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Systemverhalten.

Verwendung der Kraft-Moment-Sensoren

Unter Verwendung der KMS fällt ein starker Drift der translatorischen Größen auf, was aufgrund der fehlenden Bindung zur Umwelt auch zu erwarten war. Dies stellt aber keinen Grund für den Ausschluss von weiteren Betrachtungen dar, da für diese Modellvariante möglicherweise günstige Verläufe der rotatorischen Zustandsgrößen erzielt werden können. Die Erfassung des gesamten Systemzustands ist durch diese Modellierung jedoch prinzipbedingt nicht möglich.

Die Kovarianzmatrizen konnten so eingestellt werden, dass die Dynamik der rotatorischen Größen ($\hat{\varphi}_V$, $\hat{\varphi}_S$, $\hat{\dot{\varphi}}_V$, $\hat{\dot{\varphi}}_S$) stabil bleibt (Bild 4.1 oben). Eine Aussage über die Qualität der Schätzung wird in Abschnitt 4.2 anhand realer Messdaten getroffen.

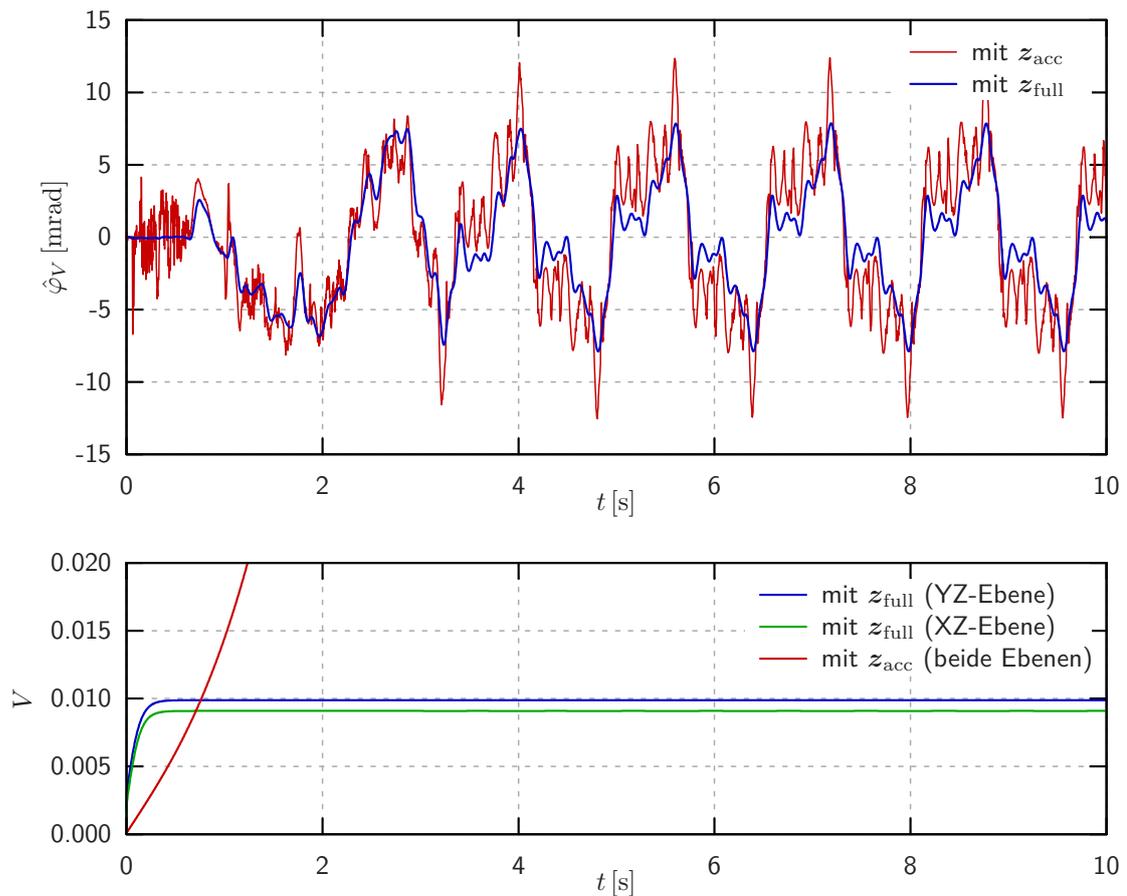


Bild 4.1: Simulationsergebnisse unter Verwendung der KMS. Die rotatorischen Zustandsgrößen sind stabil (z. B. $\hat{\varphi}_V$, oben). Für $z = z_{acc}$ wächst die Spur von \mathbf{P} (V , unten) quadratisch mit der Zeit.

Werden die IMS-Beschleunigungen direkt verwendet (d. h. $z = z_{acc}$), so ergibt sich für $V = \text{Spur}(\mathbf{P})$ ein quadratischer Anstieg (Bild 4.1 unten), der Filter ist also instabil. Eine Verbesserung durch eine Veränderung von \mathbf{Q} und \mathbf{R} konnte nicht erreicht werden. Im Gegensatz dazu, konvergiert V für $z = z_{full}$ gegen einen konstanten Wert, die „interne“ Dynamik bleibt also innerhalb fester Grenzen.

Modellierter Kontakt

Wird anstatt der KMS-Daten der Kontakt zum Untergrund miteinbezogen, so verschwindet der Drift der vertikalen Verschiebungen \hat{z}_V und \hat{z}_S (Bild 4.2 oben). Deren Zeitableitun-

gen weichen zwar weiterhin vom Soll ab, bleiben aber beschränkt. Bei den horizontalen Verschiebungen verhält es sich ähnlich: Die Zeitableitungen sind driftfrei (Bild 4.2 Mitte) während \hat{x}_S und \hat{y}_V driften.

Dieses Verhalten kann durch die Art der Modellierung des Kontakts erklärt werden. Ausschlaggebend für die Kontaktkräfte am Fuß sind in erster Linie die Eindringtiefe ($g_{Nji} \sim z_V, z_S^1$) sowie die Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung ($\dot{g}_{Tji} \sim \dot{x}_S, \dot{y}_V$). Diese Größen sind mit der Bindung zwischen Roboter und Umwelt gekoppelt. Im Gegensatz dazu spielt die absolute Position des Roboters in x_I bzw. y_I -Richtung für die Kontaktkräfte und damit auch für das dynamische Verhalten keine Rolle.

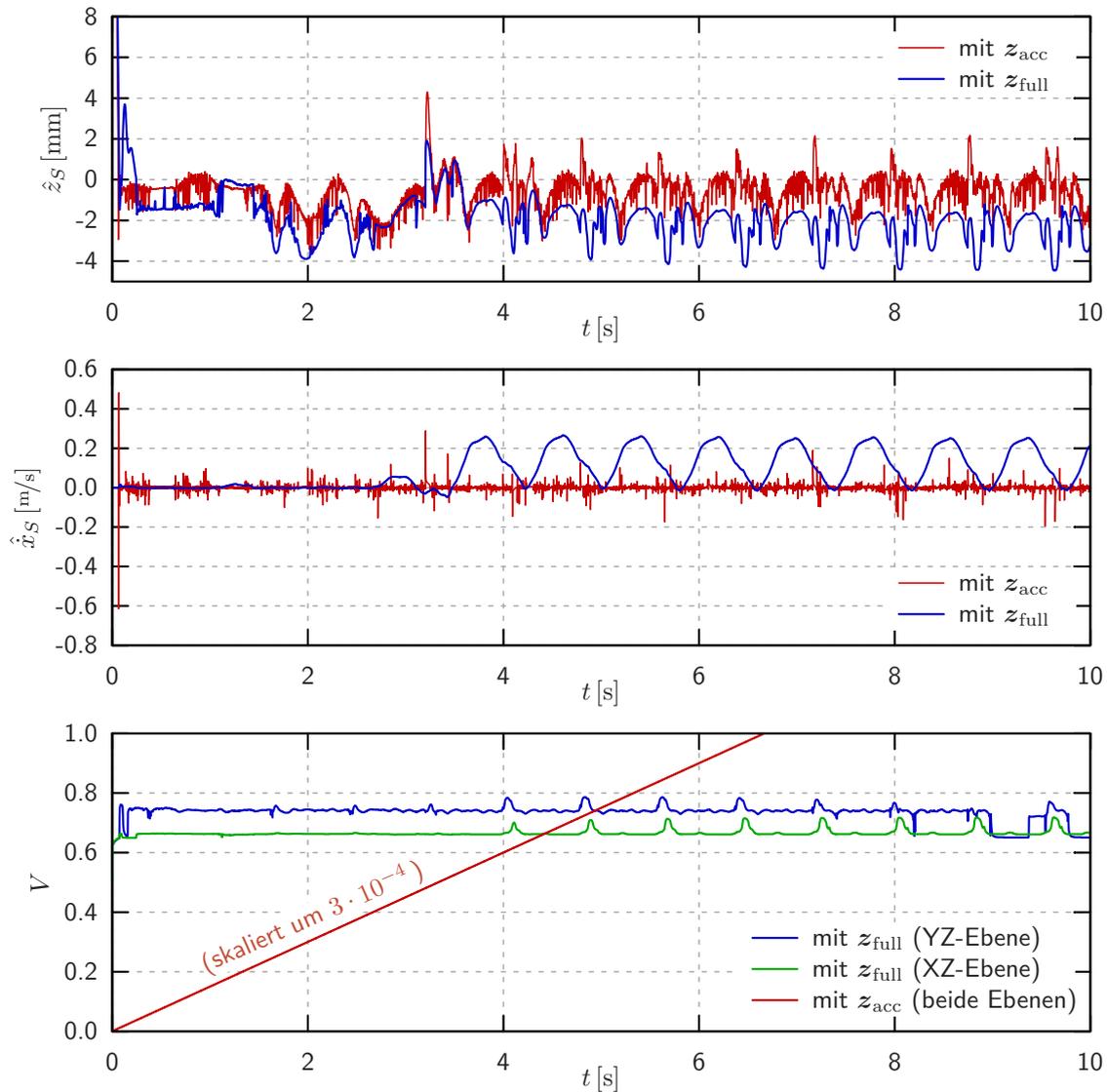


Bild 4.2: Simulationsergebnisse bei modelliertem Kontakt. Die vertikalen Verschiebungen (z. B. \hat{z}_S , oben) und horizontalen Geschwindigkeiten (z. B. \hat{x}_S , Mitte) sind driftfrei. Für $z = z_{acc}$ sind die Verläufe der translatorischen Zustandsgrößen verrauscht und V steigt linear (unten, aus Darstellungsgründen skaliert).

¹ Die Zeitableitungen \hat{z}_V bzw. \hat{z}_S beeinflussen maßgeblich die Dämpfung in Normalenrichtung. Dies gilt jedoch nur für $g_{Nji} \leq 0$, weshalb sie für den Zustandsschätzer erst in zweiter Instanz eine Rolle spielen. Das erklärt die schlechteren Ergebnisse im Vergleich zu \hat{z}_V bzw. \hat{z}_S .

Für die rotatorischen Zustandsgrößen konnte ein stabiles und im Vergleich zur vorherigen Modellvariante besseres Verhalten erreicht werden. Wie bereits erwähnt, macht ein qualitativer Vergleich aber erst mit realen Messdaten Sinn. Mit der Stabilität des Filters verhält es sich ähnlich wie unter Verwendung der KMS: Für $z = z_{\text{full}}$ bleibt V stets beschränkt, während bei $z = z_{\text{acc}}$ ein linearer Anstieg auffällt (Bild 4.2 unten). Auch hier lässt sich das qualitative Verhalten von V nicht über die Wahl der Kovarianzmatrizen einstellen.

Offensichtlich ist die direkte Nutzung der IMS-Beschleunigungen als Messgrößen ungeeignet. Ein möglicher Grund dafür ist die fehlende Beobachtbarkeit des Systems bei dieser Modellvariante. Da eine analytische Untersuchung des nichtlinearen Systems sehr schwierig ist, wird stattdessen das bei der Filterung linearisierte Modell mithilfe des KALMAN-Kriteriums [9, S. 93] bewertet. Die Berechnung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{B,k}(\mathbf{A}_k, \mathbf{Z}_k)$ zum Zeitpunkt $t = 5$ s zeigt, dass das linearisierte System für $z = z_{\text{acc}}$ nicht vollständig beobachtbar ist. Für $z = z_{\text{full}}$ ist hingegen wegen $\mathbf{Z}_{\text{full},k} = \mathbf{I}$ stets vollständige Beobachtbarkeit sichergestellt.

Neben den Stabilitätsproblemen fallen für $z = z_{\text{acc}}$ außerdem die stark verrauschten Verläufe der translatorischen Zustandsgrößen negativ auf (Bild 4.2 oben und Mitte).

Die Verwendung des Kontaktmodells lieferte in Kombination mit der Integration der IMS-Beschleunigungen die besten Ergebnisse. Für diese Modellvariante wurde eine weitere Simulation mit auf der Stelle stampfendem Roboter und $t_e = 50$ s durchgeführt (Bild 4.3). Dadurch konnte das Langzeitverhalten beurteilt und die Stabilität für einen großen Zeithorizont gezeigt werden.

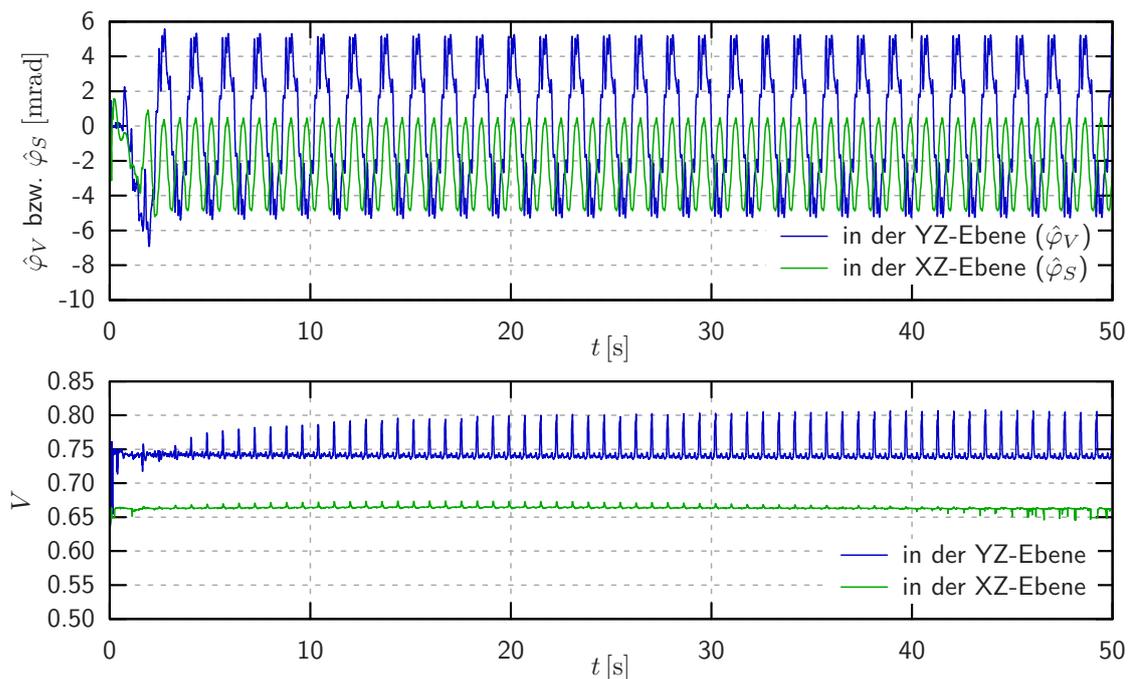


Bild 4.3: Simulationsergebnisse im Langzeitversuch (auf der Stelle stampfender Roboter). Für $z = z_{\text{full}}$ bleibt der Filter stabil.

4.2 Verhalten am realen System

Für Datensätze aus realen Versuchen zeigt der Zustandsschätzer qualitativ dasselbe Verhalten wie in der Simulationsumgebung. In einem ersten Testfall steht der Roboter bei t_0 still,

beginnt dann ca. 5 m geradeaus zu laufen (mit ca. 0.5 m/s) und bleibt kurz vor $t_e = 20 \text{ s}$ wieder stehen. Es ergibt sich für $z = z_{\text{acc}}$ auch hier ein linearer bzw. quadratischer Anstieg von V . Durch das monotone Wachsen des quadratischen Schätzfehlers ist die Stabilität des Filters für große Zeitintervalle nicht garantiert. Deshalb werden mit dieser Modellvariante keine weiteren Versuche durchgeführt. Stattdessen wird ab jetzt von $z = z_{\text{full}}$ ausgegangen.

Durch die integrierte Schwerkraftkompensation liefert das IMS mit φ_{VIMS} und φ_{SIMS} bereits sehr gute Signale für die Neigung des Oberkörpers. Damit der Filter diese Messgrößen möglichst wenig verändert, wurden entsprechende Belegungen von \mathbf{Q} und \mathbf{R} gewählt. Für den beschriebenen Testfall folgen $\hat{\varphi}_V$ und $\hat{\varphi}_S$ den Messsignalen sehr gut (Bild 4.4). Da die `update()`-Funktion des Zustandsschätzers mit 500 Hz ($\Delta t = 2 \text{ ms}$) aufgerufen wird und das IMS neue Messwerte mit einer Frequenz von 200 Hz liefert, erscheint der Verlauf von φ_{VIMS} treppenförmig. Durch die Filterung steht dadurch mit $\hat{\varphi}_V$ ein Signal der Oberkörperneigung mit höherer Abtastrate zur Verfügung.

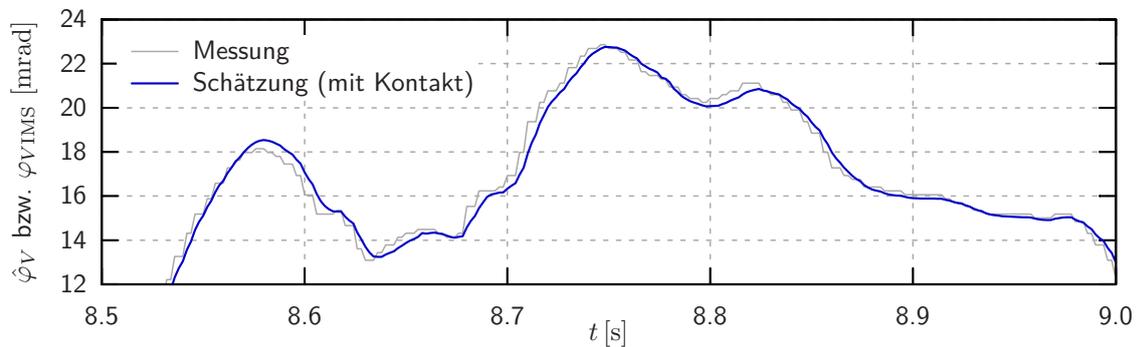


Bild 4.4: Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_V$ am realen System (mit modelliertem Kontakt).

Bei der Wahl der Kovarianzmatrizen wurde neben einem guten Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_V$ bzw. $\hat{\varphi}_S$ auch auf einen günstigen Verlauf der Rotationsgeschwindigkeiten geachtet. Um die Ergebnisse des Zustandsschätzers für eine Langzeitstabilisierung verwenden zu können, müssen die stark oszillierenden IMS-Messgrößen $\dot{\varphi}_{VIMS}$ und $\dot{\varphi}_{SIMS}$ durch die Sensordatenfusion geglättet werden. Es wird also nach einem Trend gesucht, wobei die durch die Glättung hervorgerufene Phasenverschiebung klein gehalten werden soll. Bei modelliertem Kontakt konnten für $\hat{\varphi}_S$ die in Bild 4.5 dargestellten Ergebnisse erzielt werden.

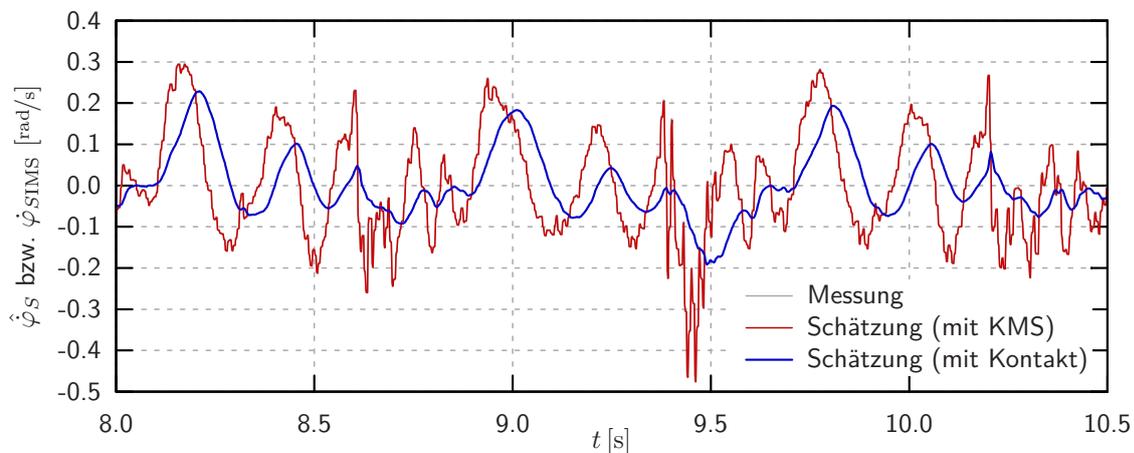


Bild 4.5: Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_S$ am realen System. Bei Verwendung der KMS deckt sich der Verlauf der Schätzung ($\hat{\varphi}_S$) mit dem der Messung ($\dot{\varphi}_{SIMS}$).

In Bild 4.5 ist eine Phasenverschiebung von etwa 40 ms zu erkennen. Abhängig von der Wahl der Kovarianzmatrizen wird das Messsignal stärker oder schwächer geglättet. Je stärker die Dämpfung von $\hat{\varphi}_V$ bzw. $\hat{\varphi}_S$ ist, desto größer ist auch der Zeitverzug. Je nach Anforderungen an das Schätzergebnis muss ein passender Kompromiss gefunden werden.

Um ein stabiles Filterverhalten und plausible Verläufe der Zustandsgrößen zu erhalten, mussten bei der Verwendung der KMS die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} so eingestellt werden, dass $\hat{\varphi}_{VIMS}$ und $\hat{\varphi}_{SIMS}$ fast unverändert übernommen und damit kaum geglättet² werden (siehe Bild 4.5). Zusammen mit dem Drift der translatorischen Zustandsgrößen scheint die Verwendung der KMS, abgesehen von einer kürzeren Rechenzeit³, keinerlei Vorteile zu bieten, weshalb keine weiteren Versuche mit dieser Modellvariante durchgeführt werden.

Von den vier Möglichkeiten der Systembeschreibung behauptet sich also die Modellierung mit Kontakt und Integration der IMS-Beschleunigungen ($z = z_{\text{full}}$). Sie liefert auch mit den realen Messdaten des beschriebenen Testfalls driftfreie Verläufe der wichtigsten translatorischen Größen. In Bild 4.6 und 4.7 sind die Verläufe der geschätzten Schwerpunktsbewegung dargestellt. Sie werden mit den Idealtrajektorien des Planungsprozesses verglichen (Index „ideal“).

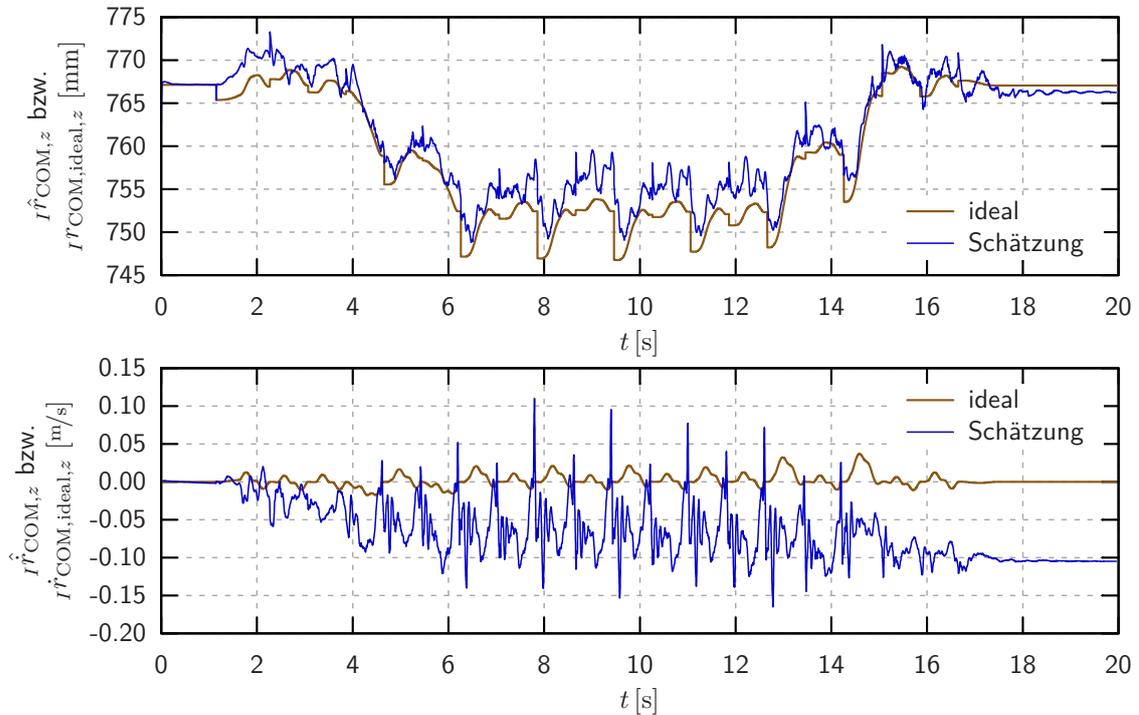


Bild 4.6: Geschätzte Schwerpunktsbewegung des Roboters (vertikaler Freiheitsgrad). Der Verlauf der idealen Schwerpunktsgröße $I^r\hat{COM}_{,ideal,z}$ wurde für einen direkten Vergleich um 113 mm nach unten verschoben.

Wie in der Simulation kann auch am realen System ein numerischer Drift von $I^r\hat{COM}_{,x}$ und $I^r\hat{COM}_{,y}$ nicht verhindert werden. Da ein Versatz in x_I - oder y_I -Richtung die Dynamik des Roboters nicht beeinflusst, kann für das in Kapitel 2 vorgestellte Modell keine gute Schätzung für x_S und y_V erwartet werden. Die Zielsetzung, den vollständigen Systemzustand (ausgenommen der Drehung um die z_I -Achse) schätzen zu können, muss deshalb verworfen

² Dementsprechend gibt es auch keinen nennenswerten Zeitverzug von $\hat{\varphi}_V$ bzw. $\hat{\varphi}_S$.

³ Die Kontaktkräfte können hier direkt aus den Sensordaten entnommen werden, wodurch die aufwändige Berechnung mithilfe des Kontaktmodells entfällt.

werden. Stattdessen werden alle frei wählbaren Parameter auf ein möglichst gutes Verhalten der driftfreien Zustandsgrößen eingestellt.

Für $\hat{I}^{\dot{r}}_{COM,z}$ ergibt sich wie in der Simulation kein plausibler Verlauf (siehe Bild 4.6). Falls dennoch eine gute Schätzung benötigt wird, kann über eine Rückrechnung von $I^{\dot{r}}_{COM,z}$ nachgedacht werden.

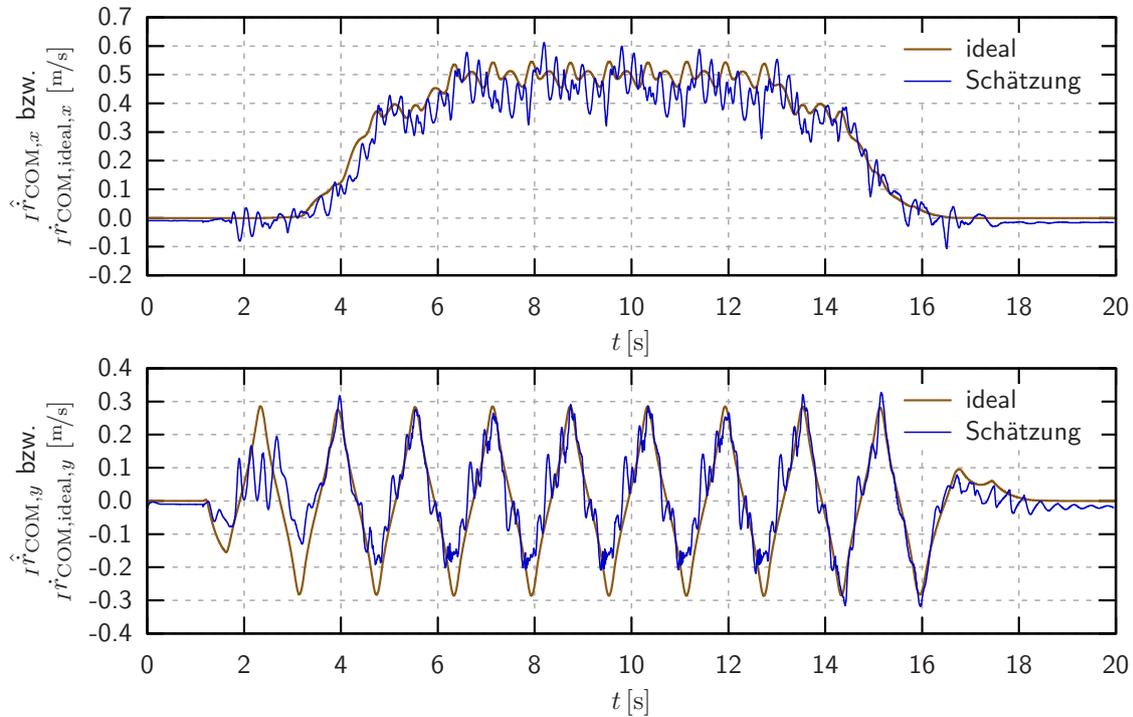


Bild 4.7: Geschätzte Schwerpunktsbewegung des Roboters (horizontale Freiheitsgrade).

Langzeitverhalten

Um das Langzeitverhalten am realen System beurteilen zu können, wird ein weiterer Testfall mit auf der Stelle stampfendem Roboter und großem Zeithorizont ($t_e \approx 43$ s) betrachtet. Obwohl ein reines Stampfen ohne Vorwärtsbewegung für den Filter eine Herausforderung darstellt, bleibt die Schätzung des Systemzustandes stabil (siehe Bild 4.8).

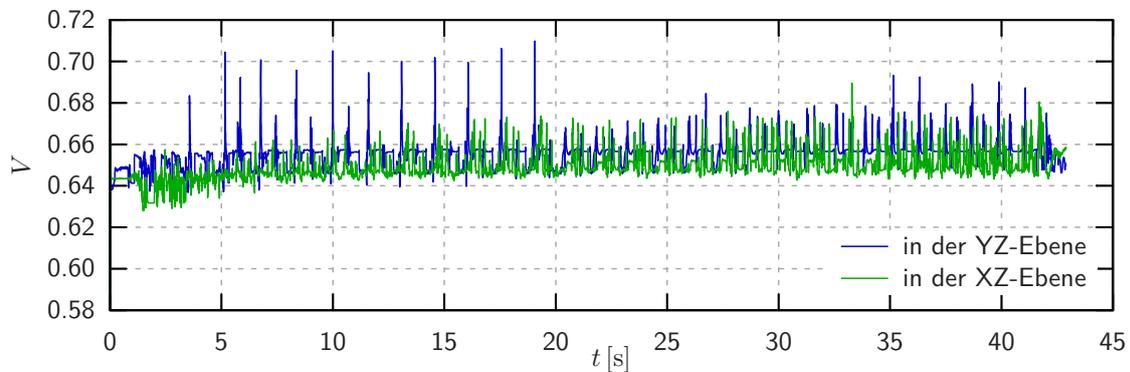


Bild 4.8: Verlauf von V für reines Stampfen mit großem Zeithorizont. Die „interne“ Dynamik des Filters bleibt auch für $t_e \approx 43$ s stabil.

Die Neigung des Oberkörpers $\hat{\varphi}_V$ bzw. $\hat{\varphi}_S$ weist zwar im Vergleich zum vorherigen Versuch (mit Vorwärtsbewegung) eine größere Abweichung von den Messdaten des IMS auf, der Fehler hat aber stets dieselbe Größenordnung. Bei den Rotationsgeschwindigkeiten $\hat{\varphi}_V$ und $\hat{\varphi}_S$ fällt außerdem die geringe Glättung des Messsignals auf (siehe Bild 4.9). Auch dieses Verhalten kann bereits zu Beginn des Versuchs beobachtet werden, die Qualität der Ergebnisse hängt demnach nicht von der Laufzeit ab.

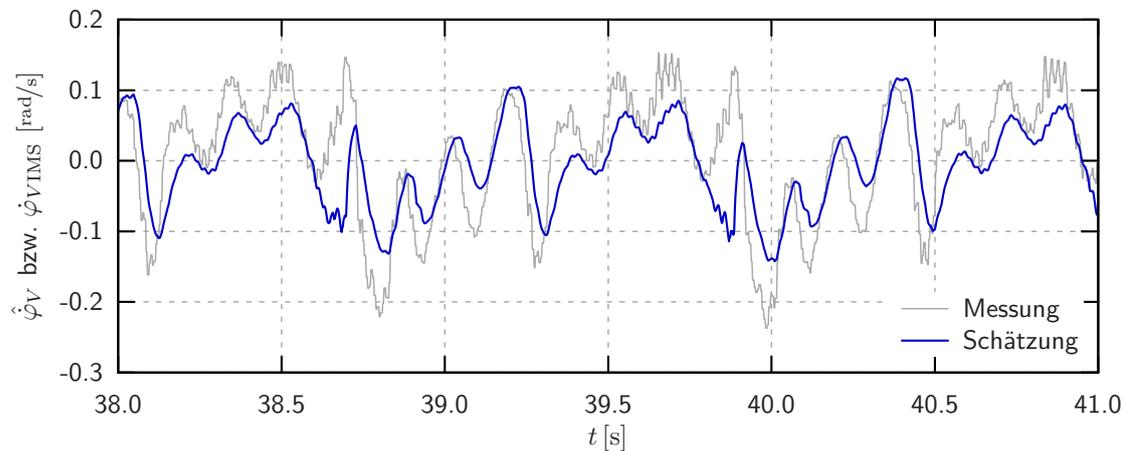


Bild 4.9: Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_V$ für reines Stampfen mit großem Zeithorizont. Das Messsignal des IMS wird während des gesamten Versuchs nur leicht geglättet.

Dasselbe gilt für die translatorischen Zustandsgrößen \hat{z}_V , \hat{z}_S , \hat{x}_S und \hat{y}_V (siehe Bild 4.10 oben). Bei diesem Versuch ist außerdem der Drift der horizontalen Position \hat{x}_S bzw. \hat{y}_V besonders gut zu sehen (siehe Bild 4.10 unten).

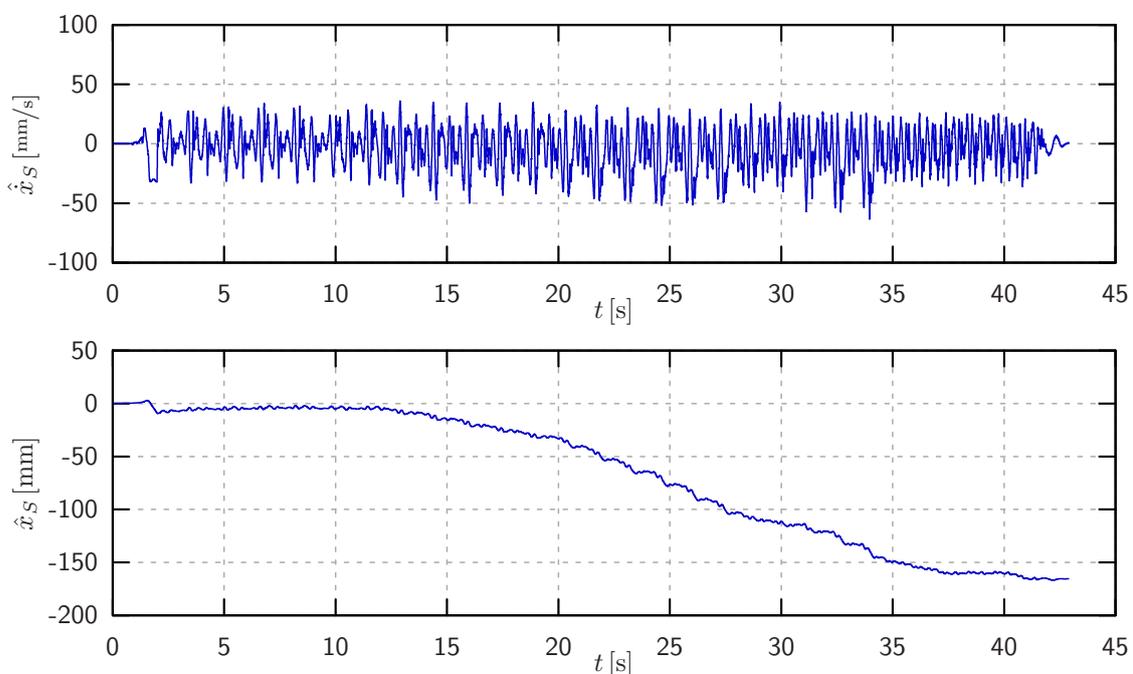


Bild 4.10: Verlauf von \hat{x}_S und \hat{x}_S für reines Stampfen mit großem Zeithorizont. Die Geschwindigkeit \hat{x}_S (oben) ist im Gegensatz zur Position \hat{x}_S (unten) driftfrei.

Laufen entlang einer gekrümmten Bahn

In Abschnitt 3.3 wurde eine Erweiterung für den Betrieb des Filters während eines Standbeinwechsels und der damit verbundenen Transformation des Planungskoordinatensystems eingeführt. Um die Kompensation der Drehung um die z_I -Achse zu testen, wurde ein weiterer Testlauf durchgeführt. Der Roboter folgte hierbei nicht einem zuvor festgelegten Bewegungsablauf, sondern wurde während des laufenden Betriebs über einen Joystick gesteuert. Die Laufbahn führte zu Beginn des Versuchs bei t_0 geradeaus, um, nach einer leichten Bewegung nach links, mit einer scharfen Rechtskurve wieder in die Ausgangsposition zurückzukehren und zum Zeitpunkt $t_e \approx 64$ s dort anzuhalten.

Wie beim Langzeitversuch mit reinem Stampfen bleibt der Zustandsschätzer bis zum Schluss stabil. Unterschiede im qualitativen Verhalten bestehen nur in den stärker geglätteten Verläufen der Rotationsgeschwindigkeiten $\hat{\varphi}_V$ und $\hat{\varphi}_S$ (siehe Bild 4.11 oben), sowie den aussagekräftigeren Signalen der horizontalen Geschwindigkeiten ${}_I\hat{r}_{COM,x}$ und ${}_I\hat{r}_{COM,y}$ (siehe Bild 4.11 unten).

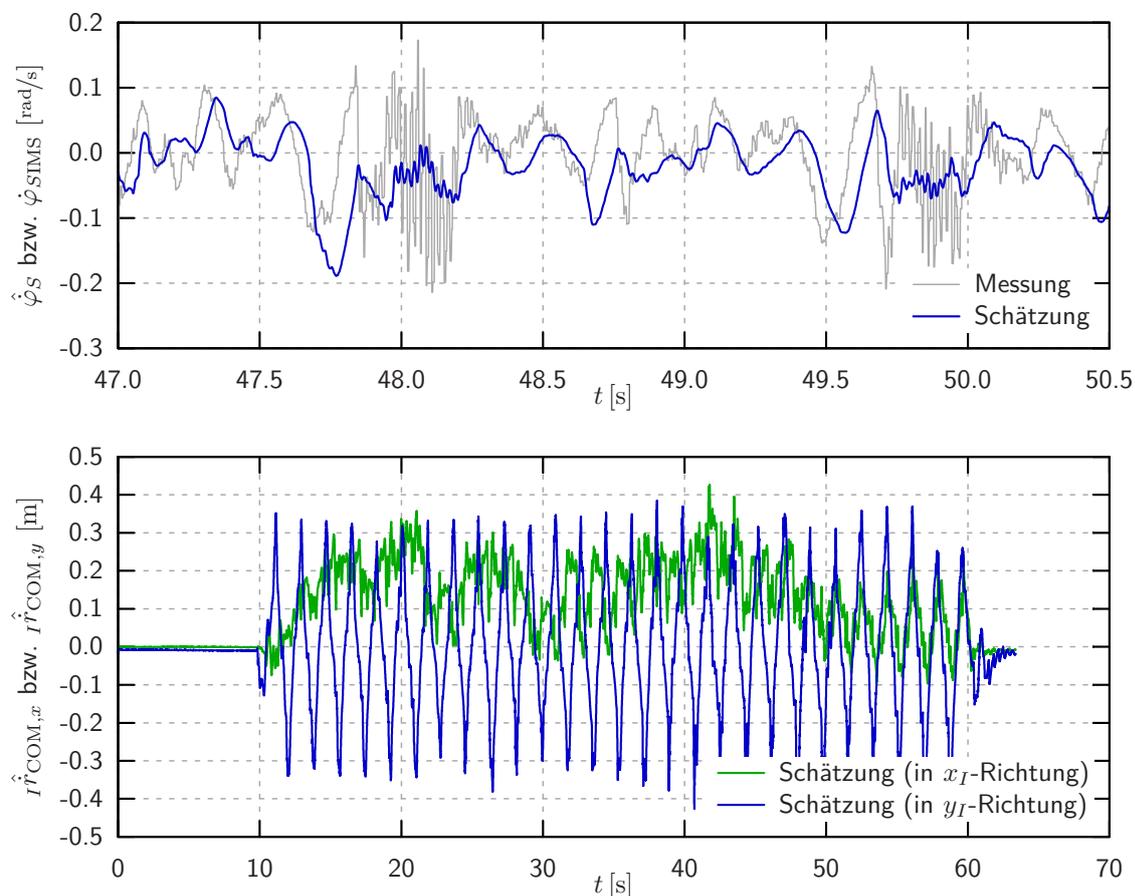


Bild 4.11: Verhalten von $\hat{\varphi}_S$, ${}_I\hat{r}_{COM,x}$ und ${}_I\hat{r}_{COM,y}$ bei gekrümmter Laufbahn. Das stark verrauschte IMS-Signal der Rotationsgeschwindigkeit wird durch die Sensordatenfusion gefiltert (oben). Die horizontalen Geschwindigkeiten zeigen einen plausiblen Verlauf und sind driftfrei (unten).

Vergleich der Kontaktkräfte

Da der Zustandsschätzer mit modelliertem Kontakt ein wesentlich besseres Ergebnis liefert als unter Verwendung der KMS, stellt sich die Frage, welcher Unterschied zwischen den

Bindungskräften des Kontaktmodells und den KMS-Messdaten besteht. Für einen direkten Vergleich können aus dem Kontaktmodell „virtuelle“ KMS-Daten errechnet werden (siehe Anhang E). Bild 4.12 zeigt die Verläufe für einfaches geradeaus Laufen ohne äußere Störung (Stillstand bei t_0 und $t_e = 20$ s).

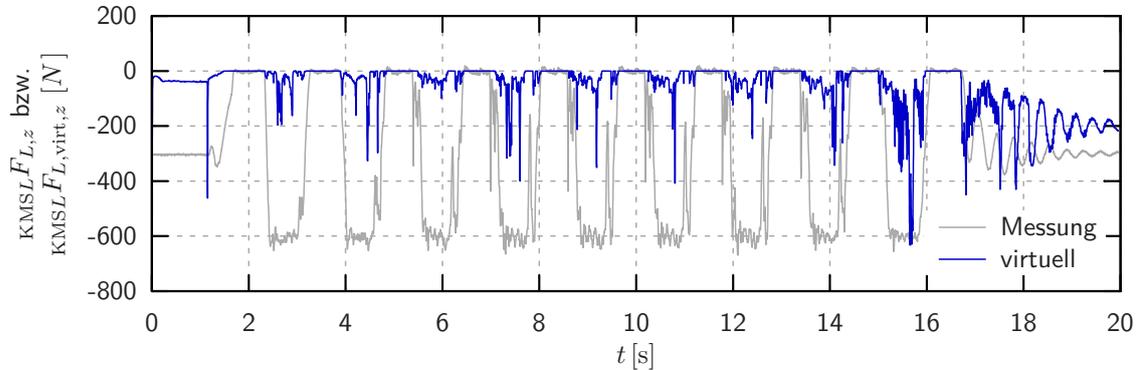


Bild 4.12: Vergleich von gemessenen und virtuellen KMS-Daten (linker Fuß). Es ergeben sich völlig unterschiedliche Verläufe.

Offensichtlich sind die errechneten Normalkräfte (Index „virt“) wesentlich kleiner als die gemessenen. Eine kurze Übersichtsrechnung (Roboter­masse $m \approx 60$ kg, Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$) gibt den Werten der KMS recht. Den virtuellen KMS-Daten zufolge müsste der Roboter in negativer z_I -Richtung beschleunigen und damit in den Boden eintauchen.

Da bei der Sensordatenfusion neben dem mechanischen Modell auch die vom IMS gemessenen Beschleunigungen eine wesentliche Rolle spielen und die Berechnung der virtuellen KMS-Daten erst nach der Filterung, d. h. mit bereits korrigierter Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_k$, stattfindet, repräsentieren die berechneten Kontaktkräfte nicht die geschätzte Bewegung des Roboters⁴. Auf weitere Vergleiche wird deshalb verzichtet.

4.3 Robustheit

Die Empfindlichkeit des Zustandsschätzers gegenüber Störungen wird in den folgenden Abschnitten sowohl durch bewusst verfälschte Modellparameter, als auch durch Versuche mit unbekanntem äußeren Einflüssen untersucht.

Empfindlichkeit gegenüber Modellfehlern

Bei der Modellierung eines realen Systems müssen immer Vereinfachungen getroffen werden. Es macht z. B. keinen Sinn die Masse des Roboters auf ein Gramm genau zu bestimmen, da die exakte geometrische Verteilung bei der Bewegung ohnehin unbekannt ist (Verbiegung von Kabelsträngen, etc.). Die Annahme eines konstanten Massenträgheitsmoments für das dynamische Mehrkörpersystem stellt neben der Formulierung der Kontaktgesetze wie in Anhang C eine weitere fehlerbehaftete Näherung dar.

Um den Einfluss eines Fehlers in der Parametrierung des Systemmodells zu untersuchen, wurden sowohl in der Simulationsumgebung, als auch am realen System Versuche mit

- 0.9-facher Roboter­masse m ,

⁴ In Bild 4.6 (oben) ist trotz „zu kleiner“ Normalkräfte ein plausibles Verhalten von $I\hat{r}_{COM,z}$ zu beobachten. Die Aussagekraft der virtuellen KMS-Daten ist also in Frage zu stellen.

- 1.1-facher Robotertermasse m ,
- 0.75-fachem Massenträgheitsmoment θ_{xx} und θ_{yy} ,
- 2-fachem Massenträgheitsmoment θ_{xx} und θ_{yy} ,
- 0.8-facher Kontaktsteifigkeit und -dämpfung c_{cont} , d_{cont} und
- 1.2-facher Kontaktsteifigkeit und -dämpfung c_{cont} , d_{cont}

durchgeführt.

Während in der Simulation geringfügige Änderungen in den Verläufen der Zustandsgrößen auftreten, können beim realen System keine nennenswerten Unterschiede beobachtet werden. Das liegt vor allem an der geringen Gewichtung der Prädiktion bei der Filterung. Außerdem ist zu erwähnen, dass sich Parameterfehler durchaus auch positiv auf die Schätzung auswirken können. Eine Verdopplung des Massenträgheitsmoments bewirkt z. B. einen etwas größeren Drift von \hat{y}_V , dafür aber auch ein glatteres Signal von $\hat{\varphi}_V$.

Empfindlichkeit gegenüber ungeplanten äußeren Einflüssen

Als externe Störungen werden in dieser Arbeit Stöße (in der Realität z. B. hervorgerufen durch die Kollision mit einem Gegenstand) und unebenes Terrain behandelt. Für den Zustandsschätzer ist es wichtig, dass die Störung in den Verläufen des geschätzten Systemzustands sichtbar ist. Nur dann kann im Planungsprozess passend darauf reagiert werden. Außerdem soll der Filter das Verhalten unter Störeinwirkung korrekt abbilden und dabei stabil bleiben.

In einer Simulation wurde ein Bewegungsablauf wie in Abschnitt 4.1 vorgegeben (Stillstand bei t_0 , dann ca. 5 m geradeaus laufen und Abbruch der Simulation bei $t_e = 10$ s). Zusätzlich wurde eine impulsförmige äußere Kraft auf den Oberkörper mit einem Maximalwert von 75 N simuliert (siehe Bild 4.13 unten). Der Impuls wurde in y_I -Richtung aufgebracht, weshalb ein Ausschlag im Verlauf von $\hat{\varphi}_V$ und $\hat{\varphi}_V$ erkennbar ist (siehe Bild 4.13 oben). Nach der Störeinwirkung verhalten sich alle Zustandsgrößen wieder wie zuvor. Wie zu erwarten war, ist die Störung in der XZ-Modellebene (Seitenansicht) nicht sichtbar.

Neben dem Stoß in y_I -Richtung wurden auch Versuche mit impulsförmiger Kraft entlang der x_I -Achse durchgeführt (verschiedene Simulationen mit Maximalwerten von 50 N, 75 N und 100 N). Sie zeigen ein qualitativ ähnliches Störverhalten mit unterschiedlich großen Ausschlägen in der XZ-Ebene.

Für die Untersuchung des Störverhaltens am realen System wird ein auf der Stelle stampfender Roboter betrachtet. Dieser befindet sich zum Zeitpunkt t_0 im Stillstand und wird während des Stampfens hauptsächlich in x_I -Richtung mehrmals angestoßen. Kurz vor dem Ende des Versuchs bei $t_e \approx 39$ s bleibt der Roboter wieder stehen, d. h. beide Füße haben Bodenkontakt.

Obwohl für die rotatorischen Zustandsgrößen gute Ergebnisse erzielt werden können (siehe Bild 4.14 oben), ist die Störung bei $t \approx 15$ s groß genug, um einen positiven Drift von $I\hat{r}_{\text{COM},z}$ zu verursachen (Bild 4.14 unten). Im Modell verliert der Roboter also den Kontakt zum Boden, weshalb auch die Verläufe von $I\hat{r}_{\text{COM},x}$ und $I\hat{r}_{\text{COM},y}$ zu driften beginnen (keine Normalkraft \Rightarrow keine Reibkraft).

Um auch bei großen Störungen einen einwandfreien Betrieb des Zustandsschätzers sicherzustellen, können noch Verbesserungen am Gesamtablauf der entwickelten Methode vorgenommen werden. Offensichtlich falsche Schätzergebnisse, wie z. B. viel zu große oder zu kleine Werte für $I\hat{r}_{\text{COM},z}$ (d. h. „Schweben“ bzw. „Eintauchen“ in den Boden), könnten selbstständig erkannt werden und eine Rücksetzung des Filters (durch $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_0$) veranlassen.

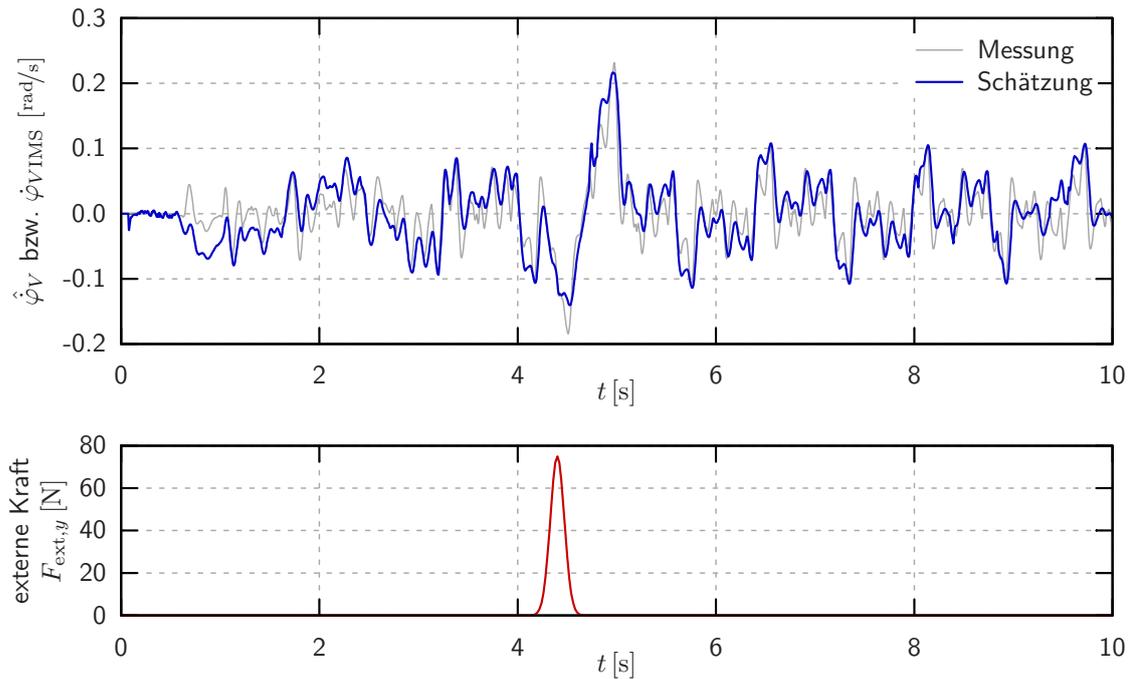


Bild 4.13: Simulationsergebnisse bei impulsartiger Störung. Die externe Kraft wirkt in y_I -Richtung und hat einen Maximalwert von 75 N (unten). In der Vorderansicht (YZ-Ebene) ist die Störung als Ausschlag im Verlauf von $\hat{\varphi}_V$ erkennbar (oben).

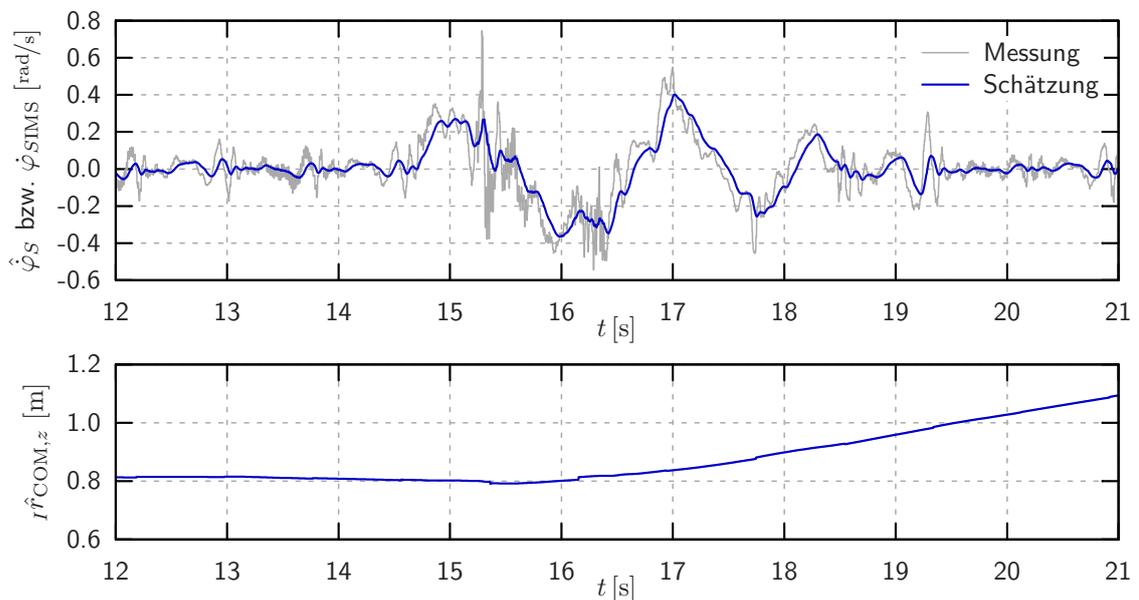


Bild 4.14: Verhalten von $\hat{\varphi}_S$ und $I\hat{r}_{COM,z}$ bei Stößen am realen System (reines Stampfen). Während für Neigung und Neigungsrate eine gute Schätzung erfolgt (z. B. $\hat{\varphi}_S$, oben), beginnt $I\hat{r}_{COM,z}$ bei $t \approx 15$ s zu driften (unten).

Neben Stößen muss die Sensordatenfusion auch mit unebenem Terrain umgehen können. Um Unregelmäßigkeiten des Untergrunds zu simulieren, wurde in einem weiteren Test ein Brett (ca. 4 cm dick) in die Laufbahn des Roboters gelegt. Die Vorgaben für den Bewegungsablauf wurden wie in Abschnitt 4.2 gewählt.

Die Störung ist in beiden Modellebenen sichtbar, wobei die Verläufe der Zustandsgrößen kurz nach dem Hindernis wieder ihr übliches Verhalten einnehmen (siehe Bild 4.15).

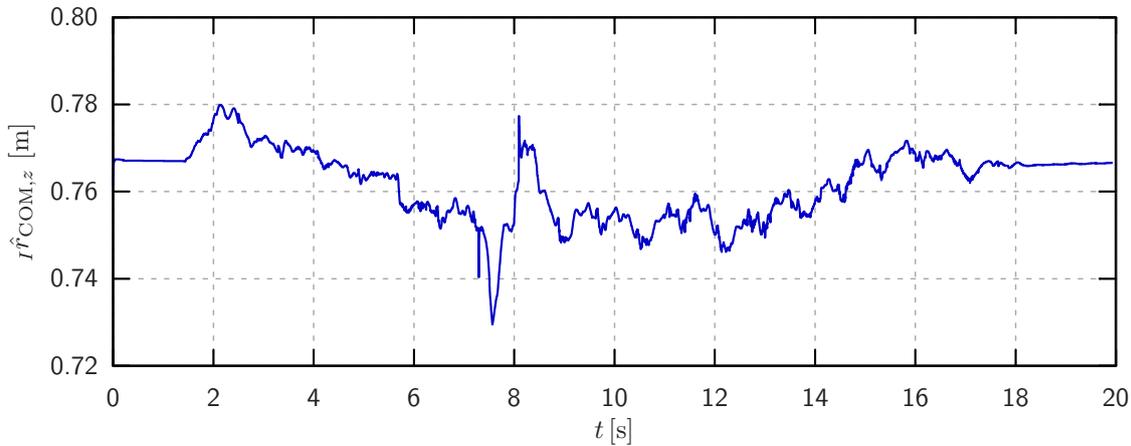


Bild 4.15: Verhalten von $I\hat{r}_{COM,z}$ bei unebenem Terrain am realen System. Nach der Störung bei $t \approx 7$ s hat $I\hat{r}_{COM,z}$ wieder den erwarteten Verlauf.

4.4 Vergleich mit bestehendem Verfahren

Abschließend wird der entwickelte Algorithmus mit dem am Testsystem LOLA bereits bestehenden Verfahren zur Zustandsschätzung verglichen. Beide Methoden verwenden einen KALMAN-Filter für die Sensordatenfusion, wobei beim Verfahren nach WITTMANN [14] ein lineares inverses Pendel als Modell für das Mehrkörpersystem dient. Demnach können lediglich die rotatorischen Zustandsgrößen miteinander verglichen werden.

Für die Gegenüberstellung wird ein Testfall gewählt, bei dem der Roboter zu Beginn stillsteht und dann beginnt geradeaus zu Laufen. Während des Laufens erfährt das System bei $t \approx 8.5$ s einen Stoß, der aber von der Steuerungssoftware ausgeglichen werden kann. Kurz vor dem Ende des Versuchs bei $t_e \approx 17$ s bleibt der Roboter wieder stehen.

Der Vergleich der Oberkörperneigungen zeigt, dass beide Verfahren in etwa gleich gut dem Signal des IMS folgen (siehe Bild 4.16). Je nach betrachtetem Zeitpunkt weicht die eine oder die andere Methode von der Vorgabe geringfügig ab. Bezüglich der Oberkörperneigungen liefern die Verfahren also ein nahezu identisches Ergebnis.

Mit den Neigungsraten $\hat{\varphi}_V$ und $\hat{\varphi}_S$ verhält es sich ähnlich: Beide Zustandsschätzer liefern vergleichbare Ergebnisse. Da der reale Verlauf nicht bekannt ist, kann hier keine Aussage darüber getroffen werden, welches Verfahren einen geringeren Schätzfehler verursacht. Beim neu entwickelten Zustandsschätzer ist jedoch eine geringfügig stärkere Glättung des IMS-Signals erkennbar (siehe Bild 4.17). Zusammen mit der größeren Phasenverschiebung hängt diese Eigenschaft aber in erster Linie von der Parametrierung der Kovarianzmatrizen ab, wobei diese je nach Verwendungszweck der Ergebnisse unterschiedlich eingestellt werden können.

Werden ausschließlich die rotatorischen Zustandsgrößen betrachtet, so liefert der neu entwickelte Zustandsschätzer vergleichbare Ergebnisse. Durch die zusätzliche Schätzung von translatorischen Größen wie \hat{z}_V , \hat{z}_S , \hat{x}_S und \hat{y}_V unterscheidet er sich aber vom bestehenden Verfahren und rechtfertigt dadurch den erheblichen Mehraufwand bei der Implementierung.

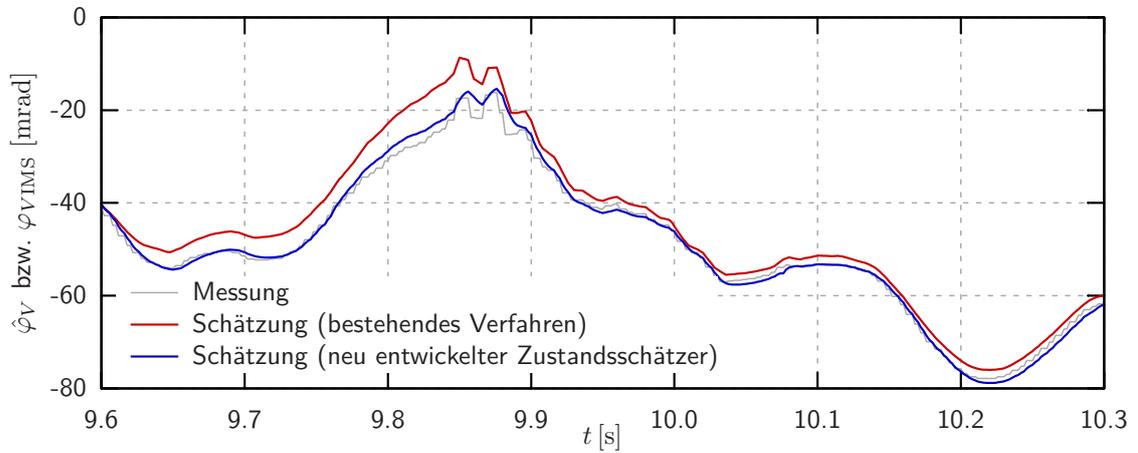


Bild 4.16: Verlauf der Oberkörperneigung im Vergleich mit dem bestehenden Verfahren. Beide Methoden liefern ähnliche Ergebnisse.

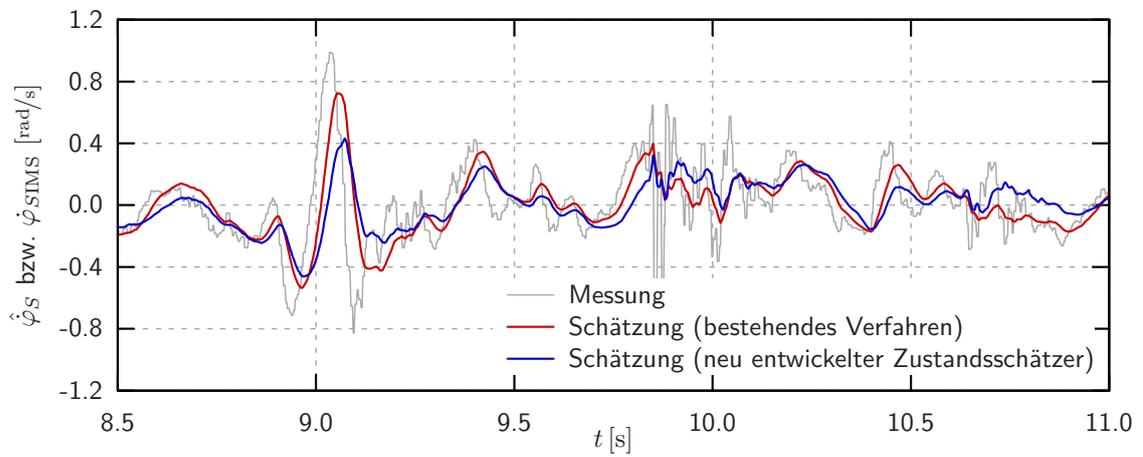


Bild 4.17: Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit im Vergleich mit dem bestehenden Verfahren. Der neu entwickelte Zustandsschätzer liefert ein geringfügig stärker gedämpftes Signal bei gleichzeitig erhöhter Phasenverschiebung.

5 Fazit und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, einen Zustandsschätzer für zweibeinige Laufroboter zu entwickeln. Dieser sollte alle passiven Freiheitsgrade des Roboters erfassen und somit die nötigen Daten für eine Langzeitstabilisierung liefern. Auf eine Schätzung der Rotation um die vertikale Raumachse wurde aufgrund der geringen Bedeutung dieser Größe für die Stabilisierung verzichtet. Obwohl sämtliche Betrachtungen auf das Testsystem LOLA des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik bezogen sind, lässt sich das vorgestellte Verfahren ohne Einschränkungen auch auf andere Systeme anwenden. Voraussetzung hierfür ist lediglich, dass ein IMS für die Sensordatenfusion zur Verfügung steht.

Bei der Zustandsschätzung wird die Mechanik des Roboters durch ein vereinfachtes Modell berücksichtigt. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Modellvarianten untersucht. Bei Verwendung der KMS zeigten die Versuche in Kapitel 4 schlechte Ergebnisse für die Schätzung der rotatorischen Zustandsgrößen und starkes Driften der translatorischen Systemzustände. Im Gegensatz dazu lieferte die zweite Variante durch den modellierten Kontakt (teilweise) driftfreie translatorische Zustandsgrößen. Außerdem konnten durch eine passende Wahl der Kovarianzmatrizen Signale der Rotationsgeschwindigkeiten erzeugt werden, die die Anforderungen für eine Verwendung bei der Stabilisierung erfüllen. Aufgrund der vielen Vorteile dieser Modellvariante ist sie für die Zustandsschätzung geeignet.

Neben der Mechanik musste auch für die Messdaten des IMS ein günstiges Modell gefunden werden. Da das im Testsystem verbaute IMS bereits die rotatorischen Komponenten des Systemzustands liefert, war lediglich die Art der Verwendung der translatorischen Beschleunigungen festzulegen. Auch hierfür wurden zwei Modellvarianten untersucht. Bei direkter Einspeisung der Beschleunigungen in den KALMAN-Filter traten Stabilitätsprobleme auf, während bei vorgeschalteter Integration und passender Wahl der Kovarianzmatrizen sowohl die „externe“ als auch die „interne“ Dynamik des Filters stabilisiert werden konnte.

Mit der Integration der IMS-Beschleunigungen und der Modellierung des Kontakts konnten in Kapitel 4 schließlich gute Ergebnisse erzielt werden. Es wurde jedoch klar, dass mit der vorgestellten Methode nicht der gesamte Systemzustand zuverlässig geschätzt werden kann. Aufgrund des fehlenden Einflusses einer horizontalen Verschiebung auf die Systemdynamik, unterliegt die horizontale Position des Roboters im Raum stets einem numerischen Drift. Dieser lässt sich durch die Wahl von Modell- und Filterparametern reduzieren aber nicht vollständig kompensieren. Außerdem kann für die Geschwindigkeit entlang der vertikalen Raumachse keine plausible Schätzung erzielt werden, eine Rückrechnung von der Position bietet sich aber als Alternative an.

Wie Untersuchungen zur Robustheit des Zustandsschätzers zeigten, haben moderate Modellfehler (d. h. eine fehlerhafte Wahl von Systemparametern) nur sehr geringen Einfluss auf das Schätzergebnis. Im Gegensatz dazu können große Störungen wie z. B. starke Stöße zu einem Drift der Schwerpunktshöhe und damit einem Abheben des Roboters im Modell führen. Eine Verschlechterung der Schätzung der rotatorischen Zustandsgrößen wurde nicht festgestellt, ist aber trotzdem denkbar. Um auch mit großen Störungen umgehen zu können, ist eine automatische Erkennung von unrealistischen Systemgrößen und eine anschließende Rücksetzung des Zustandsschätzers möglich. Obwohl diese Anpassung einfach in den Gesamtprozess zu integrieren ist, konnte sie im Rahmen dieser Arbeit aus Zeitgründen nicht mehr behandelt werden. Bei Versuchen mit kleinen Stößen oder unebenem Terrain

konnten hingegen sowohl stabiles Verhalten des Filters als auch eine gute Glättung von stark oszillierenden Messsignalen erreicht werden.

Eine erste Wahl für die Parameter des Zustandsschätzers wurde anhand von Langzeitversuchen ermittelt. Dadurch konnte die Stabilität des Filters auch bei großem Zeithorizont sichergestellt werden. Vor allem in Testläufen mit stampfendem Roboter, bei denen keine Vorwärtsbewegung stattfindet, reagiert das System sensibel auf Änderungen in der Belegung von \mathbf{Q} und \mathbf{R} . Insgesamt war es sehr schwer eine passende Wahl für die Kovarianzmatrizen zu finden. Durch die nichtlinearen Bewegungsgleichungen war es sogar für dieses einfache System mit nur einem Einzelkörper kaum möglich, eindeutige Abhängigkeiten bei der Einstellung zu finden. Manche Einträge von \mathbf{Q} und \mathbf{R} haben großen Einfluss auf sämtliche Zustandsgrößen, während die Veränderung von anderen Einträgen wiederum fast keine Auswirkung auf die Schätzung hat.

Im Vergleich zum bereits bestehenden Verfahren zur Sensordatenfusion am Laufroboter LOLA liefert der entwickelte Zustandsschätzer ähnliche Ergebnisse. Der wesentlich höhere Implementierungsaufwand kann aber durch die zusätzliche Schätzung von translatorischen Größen gerechtfertigt werden. Da die für die Langzeitstabilisierung benötigte Schwerpunkthöhe erfasst werden kann, stellt das vorgestellte Verfahren einen sinnvollen Ersatz der bisher verwendeten Methode dar.

Um das Ergebnis der Schätzung weiter zu verbessern, kann die vorgestellte Methode in Zukunft noch auf verschiedenste Art und Weise erweitert werden. Eine mögliche Verbesserung wäre z. B. Teile der Robotermaße im mechanischen Modell in die Fußknotenpunkte zu verlagern. Dadurch könnte die Dynamik des Mehrkörpersystems besser abgebildet und eventuell auch ein besseres Schätzergebnis erzielt werden. Da durch die Modellierung des Kontakts die Geometrie der Füße eine große Rolle spielt, könnte außerdem die Erweiterung der Modellkinematik um das Zehengelenk in den Füßen vorteilhaft sein. Damit wäre bei Versuchen mit schnell laufendem Roboter das Abrollen der Zehen miteinbezogen.

Die größten Verbesserungen können vermutlich durch die Berücksichtigung einer unbekanntes äußeren Kraft am Oberkörper erreicht werden. Dabei kann zwar keine gute Schätzung dieser Kraft, dafür aber eine Verbesserung der Robustheit bei Stößen erhofft werden.

In dieser Arbeit wurden die erzielten Ergebnisse nur qualitativ bewertet. Da die reale Bewegung des Roboters unbekannt ist, sind konkretere Aussagen auch nicht möglich. Die Vermessung der Bewegung durch ein externes Kamerasystem könnte in Zukunft Aufschluss über den tatsächlichen Schätzfehler liefern.

Schließlich muss der Zustandsschätzer für einen Test im Rahmen der Langzeitstabilisierung auf den Betrieb im Echtzeitsystem des Roboters vorbereitet werden. Dafür können im Sinne einer möglichst kurzen Rechenzeit noch an vielen Stellen des Codes Optimierungen vorgenommen werden. Die durchschnittliche Laufzeit eines Aufrufs der *update()*-Funktion benötigt derzeit ohne besondere Vorkehrungen an einem handelsüblichen Rechner ca. 250 μs . Bei einer Taktzeit der Steuerungssoftware von 2 ms und einer vergleichbaren Rechenleistung ist der vorgestellte Algorithmus damit auch für einen Betrieb im Echtzeitsystem geeignet.

Anhang A

Allgemeines

Notation

Tabelle A.1: Notation.

Merkmal	Bedeutung	Beispiel
Index „ I “	inertialfestes Koordinatensystem I	$I\mathbf{g}$
Index „ TV “	Planungskoordinatensystem in der YZ-Ebene (TV)	$TV\mathbf{r}^{COMV}$
Index „ TS “	Planungskoordinatensystem in der XZ-Ebene (TS)	$TS\mathbf{r}^{COMS}$
Index „ V “, „ S “	...in der YZ-Ebene (V) bzw. XZ-Ebene (S)	φ_V
Index „COM“	Schwerpunkt (Center of Mass)	$I\mathbf{r}^{COMV}$
Index „ A “, „ B “	Kontaktpunkt A bzw. B am rechten Fuß	$I\mathbf{r}_A$
Index „ C “, „ D “	Kontaktpunkt C bzw. D am linken Fuß	$I\mathbf{r}_C$
Index „ E “, „ F “	Fußknotenpunkt E (rechter Fuß) bzw. F (linker Fuß)	$I\mathbf{r}_E$
Index „ K “, „ L “	KMS-Messpunkt K (rechter Fuß) bzw. L (linker Fuß)	$I\mathbf{r}_K$
Index „ r “, „ l “	rechter Fuß (r) bzw. linker Fuß (l)	$TV\alpha_{rV}$
Index „cont“	...im Kontakt/Kontaktkraft	f_{contN}
Index „ N “	...in Normalenrichtung (bezogen auf Kontaktfläche)	f_{contN}
Index „ T “	...in Tangentialrichtung (bezogen auf Kontaktfläche) oder: translatorisch	f_{contT} $I\mathbf{J}_{TV}$
Index „ c “	Feder	F_c
Index „ d “	Dämpfer	F_d
Stern „*“	ideal	f_{contN}^*
Tilde „~“	Hilfsgröße bzw. Hilfsfunktion	\tilde{F}_d
Index „ G “	Gewichtskraft	$I\mathbf{F}_{GV}$
Index „ xx “, „ yy “	bezogen auf die x_I - bzw. y_I -Achse	θ_{xx}
Index „ m “	...der Masse (bzw. des Körpers)	$I\omega_{mV}$
Index „ e “	eingeprägte Kräfte bzw. Momente, oder: Endzeitpunkt	$I\mathbf{F}_{eV}, t_e$
Index „ R “	rotatorisch	$I\mathbf{J}_{RV}$
Index „ h “	Einzelterm des \mathbf{h} -Vektors	\mathbf{T}_{hV1}
Index „ t “	zeitkontinuierliche Darstellung	\mathbf{f}_t
Index „ θ “	...mit dem Einschritt- θ -Verfahren berechnet	\mathbf{f}_θ
Index „ex“	...mit dem Expliziten-Euler-Verfahren berechnet	\mathbf{f}_{ex}
Index „EKF“	nichtlineare System-Differenzgleichung des EKF	\mathbf{f}_{EKF}
Index „0“	...zum Startzeitpunkt t_0	\mathbf{x}_0
Index „ k “	...zum Zeitpunkt t_k	\mathbf{x}_k
Index „ m “	...im Iterationsschritt m	\mathbf{x}_{k+1}^m
Index „pred“	...aus der Prädiktion berechnet	$\hat{\mathbf{x}}_{k,pred}$
Dach „^“	Schätzung	$\hat{\mathbf{x}}_k$
Index „IMS“	Daten des IMS	$\varphi_{IMS,-x}$
Index „ $-x$ “	...um die negative x -Achse	$\varphi_{IMS,-x}$
Index „ $+y$ “	...um die positive y -Achse	$\varphi_{IMS,+y}$

Darstellung von Ableitungen nach Vektoren

In dieser Arbeit werden verschiedene mathematische Strukturen nach Vektoren abgeleitet. In manchen Fällen kann es dabei zu Problemen bei der Formulierung in Matrixschreibweise kommen¹. Im Sinne einer kurzen und verständlichen Darstellung werden in diesem Abschnitt eigene Schreibweisen definiert.

Skalare und Vektoren

Für Skalare und Vektoren kann die übliche Schreibweise verwendet werden:

Sind

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.1})$$

so gilt

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times m}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (\text{A.3})$$

Kreuzprodukt

Für die Ableitung eines Kreuzproduktes nach einem Vektor ohne vorheriges ausmultiplizieren wird folgende Schreibweise eingeführt:

Sind

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.4})$$

dann gilt

$$\frac{\partial (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \left(\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \in \mathbb{R}^{3 \times m}, \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) &:= \left(\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right) \in \mathbb{R}^{3 \times m}, \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \left(\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) &:= \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \in \mathbb{R}^{3 \times m}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sowie

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial a_2(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial a_3(\mathbf{x})}{\partial x_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial x_i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial b_2(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial b_3(\mathbf{x})}{\partial x_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}. \quad (\text{A.7})$$

Die Gültigkeit dieser Rechenregel kann durch Auswerten des Kreuzproduktes $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})$ und anschließendes Ableiten des resultierenden Vektors nach \mathbf{x} gezeigt werden.

¹ Eine Darstellung in Tensorschreibweise wäre ohne besondere Anpassungen möglich. Um eine einheitliche Formulierung beizubehalten, wird aber die Matrixschreibweise bevorzugt.

Matrix-Vektorprodukt

Die Ableitung eines Matrix-Vektorproduktes ohne explizite Auswertung des Produktes erfordert ebenfalls eine eigene Schreibweise:

Sind

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{A.8})$$

dann gilt

$$\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \circ \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right] + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad (\text{A.9})$$

mit

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \circ \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right] := \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right] \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (\text{A.10})$$

und den Matrizen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}(\mathbf{x})}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial A_{1n}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{p1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial A_{pn}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Da diese Rechenregel im Vergleich zu den vorherigen etwas schwerer nachzuvollziehen ist, wird im Folgenden der Beweis für die Gültigkeit geliefert.

Beweis

Zuerst wird das Matrix-Vektor-Produkt ausgewertet

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{pi} b_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

und anschließend nach \mathbf{x} abgeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{1i}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) b_i(\mathbf{x}) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{1i}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) b_i(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{pi}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) b_i(\mathbf{x}) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{pi}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) b_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{pi}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) & \dots & \sum_{i=1}^n A_{pi}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Mit diesem Ergebnis kann die Rechenregel geprüft werden:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \circ \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right] &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) \mathbf{b}(\mathbf{x}), \dots, \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A_{1n}}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{p1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A_{pn}}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial A_{1n}}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{p1}}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial A_{pn}}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{1i}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) b_i(\mathbf{x}) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{1i}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) b_i(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{pi}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) b_i(\mathbf{x}) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{pi}(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) b_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\text{entspricht erstem Term in Gleichung (A.13)}}, \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) &= \begin{pmatrix} A_{11}(\mathbf{x}) & \dots & A_{1n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1}(\mathbf{x}) & \dots & A_{pn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_n(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{pi}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) & \dots & \sum_{i=1}^n A_{pi}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix}}_{\text{entspricht zweitem Term in Gleichung (A.13)}}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit von Gl. (A.9) bewiesen.

Anhang B

Modellgeometrie und Kinematik

Für die Berechnung der Modellkinematik werden die in Tabelle B.1 gelisteten Größen als bekannt vorausgesetzt.

Tabelle B.1: Gegebene Größen für die Berechnung der Kinematik.

Größe	Bedeutung
$T_i \mathbf{r}_{COM_i}(t), T_i \dot{\mathbf{r}}_{COM_i}(t), T_i \ddot{\mathbf{r}}_{COM_i}(t)$	Position des Schwerpunkts
$T_i \mathbf{r}_{E_i}(t), T_i \dot{\mathbf{r}}_{E_i}(t), T_i \mathbf{r}_{F_i}(t), T_i \dot{\mathbf{r}}_{F_i}(t)$	Position der Fußknotenpunkte
u, v, w	Versatz der KMS-Messpunkte von Fußknotenpunkten
l_1, l_2, b_1, b_2	Fußabmessungen
$T_i \beta_i(t), T_i \dot{\beta}_i(t), T_i \ddot{\beta}_i(t)$	Neigung des Oberkörpers (relativ zum T_i -System)
$T_i \alpha_{ri}(t), T_i \dot{\alpha}_{ri}(t), T_i \alpha_{li}(t), T_i \dot{\alpha}_{li}(t)$	Fußkippwinkel des rechten (r) bzw. linken (l) Fußes

Dabei wird mit $i \in \{V, S\}$ die Beschreibung beider Ebenen abgedeckt. Neben den Relativgrößen aus Tabelle B.1 werden die Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_V &= (\varphi_V, z_V, y_V, \dot{\varphi}_V, \dot{z}_V, \dot{y}_V)^T \\ \mathbf{x}_S &= (\varphi_S, z_S, x_S, \dot{\varphi}_S, \dot{z}_S, \dot{x}_S)^T \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

benötigt.

In den folgenden vier Abschnitten werden für beide mechanischen Modelle des Zustandschätzers die kinematischen Beziehungen jeweils in Vorder- und Seitenansicht hergeleitet. Die Berechnungen laufen alle nach derselben Struktur ab:

1. Aufstellen der Transformationsmatrizen relevanter Koordiantensysteme
2. Beschreibung der Position und Orientierung des Planungskoordinatensystems T_i und deren zeitliche Ableitungen
3. Berechnung der Position relevanter Punkte über Vektorketten
4. Berechnung der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers (${}_I \boldsymbol{\omega}_{mi}$) sowie der (absoluten) Geschwindigkeit relevanter Punkte mithilfe der EULER-Ableitung
5. Berechnung der (absoluten) Beschleunigung des Schwerpunktes sowie der Winkelbeschleunigung der Masse (${}_I \dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi}$)
6. Ableitung bestimmter Größen nach dem Zustandsvektor

Neben der Herleitung ist im jeweiligen Abschnitt auch eine passende Skizze zur Geometrie zu finden. Im Fall des Systems unter Verwendung der KMS gibt eine zusätzliche Abbildung Aufschluss über die Position der KMS-Messpunkte K und L relativ zu den Fußknotenpunkten E und F .

System unter Verwendung der Kraft-Moment-Sensoren

Vorderansicht (YZ-Ebene)

Die Geometrie des Modells ist in Bild B.1 dargestellt.

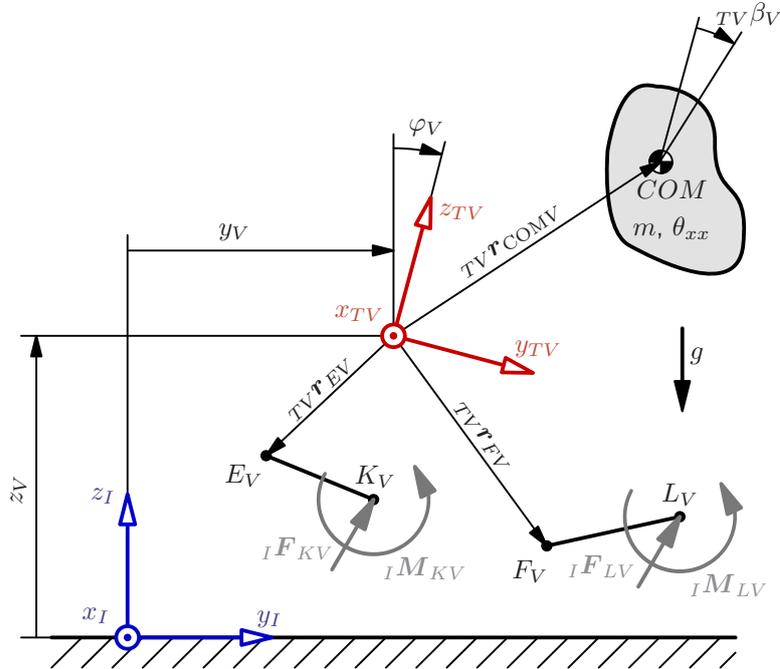


Bild B.1: Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS in der Vorderansicht.

Die Beziehung der Punkte K und L zu den Punkten E und F ist in Bild B.2 abgebildet.

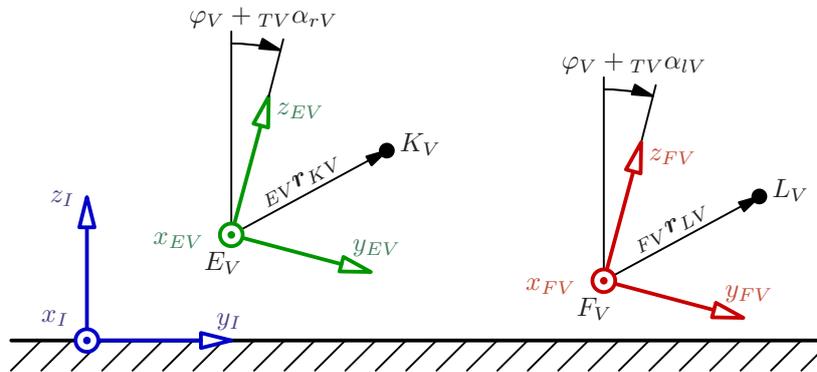


Bild B.2: Versatz der Punkte K und L in der YZ-Ebene.

(1.) Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{A}_{ITV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_V) & \sin(\varphi_V) \\ 0 & -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{A}_{IEV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \\ 0 & -\sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{A}_{IFV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \\ 0 & -\sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

(2.) Position und Orientierung des Koordinatensystems TV :

$${}^I\mathbf{r}_{TV} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_V \\ z_V \end{pmatrix}, \quad {}^I\dot{\mathbf{r}}_{TV} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_V \\ \dot{z}_V \end{pmatrix}, \quad {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{TV} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y}_V \\ \ddot{z}_V \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{TV} = {}^{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} = {}^{TV}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} = \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

(3.) Position des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$${}^I\mathbf{r}_{COMV} = {}^I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} {}^{TV}\mathbf{r}_{COMV} \quad (\text{B.7})$$

$${}^I\mathbf{r}_{EV} = {}^I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} {}^{TV}\mathbf{r}_{EV} \quad (\text{B.8})$$

$${}^I\mathbf{r}_{FV} = {}^I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} {}^{TV}\mathbf{r}_{FV} \quad (\text{B.9})$$

$${}^I\mathbf{r}_{KV} = {}^I\mathbf{r}_{EV} + \mathbf{A}_{IEV} {}^{EV}\mathbf{r}_{KV} \quad \text{mit} \quad {}^{EV}\mathbf{r}_{KV} = (0, v, w)^T \quad (\text{B.10})$$

$${}^I\mathbf{r}_{LV} = {}^I\mathbf{r}_{FV} + \mathbf{A}_{IFV} {}^{FV}\mathbf{r}_{LV} \quad \text{mit} \quad {}^{FV}\mathbf{r}_{LV} = (0, -v, w)^T \quad (\text{B.11})$$

(4.) Winkelgeschwindigkeit der Masse ${}^I\boldsymbol{\omega}_{mV}$ und Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{mV} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_V - {}^{TV}\dot{\beta}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$${}^I\dot{\mathbf{r}}_{COMV} = {}^I\dot{\mathbf{r}}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} ({}^{TV}\dot{\mathbf{r}}_{COMV} + {}^{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} \times {}^{TV}\mathbf{r}_{COMV}) \quad (\text{B.13})$$

(5.) Winkelbeschleunigung der Masse ${}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mV}$ und Beschleunigung des Schwerpunkts:

$${}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mV} = \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}_V - {}^{TV}\ddot{\beta}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$${}^I\ddot{\mathbf{r}}_{COMV} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} ({}^{TV}\ddot{\mathbf{r}}_{COMV} + {}^{TV}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} \times {}^{TV}\mathbf{r}_{COMV} + 2{}^{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} \times {}^{TV}\dot{\mathbf{r}}_{COMV} + {}^{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} \times ({}^{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} \times {}^{TV}\mathbf{r}_{COMV})) \quad (\text{B.15})$$

(6.) Ableitung des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{r}_{COMV} &= {}^I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} {}^{TV}\mathbf{r}_{COMV} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{TV}r_{COMV,1} \\ y_V + {}^{TV}r_{COMV,2} \cos(\varphi_V) + {}^{TV}r_{COMV,3} \sin(\varphi_V) \\ z_V - {}^{TV}r_{COMV,2} \sin(\varphi_V) + {}^{TV}r_{COMV,3} \cos(\varphi_V) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial {}^I\mathbf{r}_{COMV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{V1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{V2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_{V1} &:= TVr_{COMV,3} \cos(\varphi_V) - TVr_{COMV,2} \sin(\varphi_V) \\
k_{V2} &:= -TVr_{COMV,3} \sin(\varphi_V) - TVr_{COMV,2} \cos(\varphi_V)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{EV} &= I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} TV\mathbf{r}_{EV} \\
&= \begin{pmatrix} TVr_{EV,1} \\ y_V + TVr_{EV,2} \cos(\varphi_V) + TVr_{EV,3} \sin(\varphi_V) \\ z_V - TVr_{EV,2} \sin(\varphi_V) + TVr_{EV,3} \cos(\varphi_V) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -TVr_{EV,2} \sin(\varphi_V) + TVr_{EV,3} \cos(\varphi_V) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -TVr_{EV,2} \cos(\varphi_V) - TVr_{EV,3} \sin(\varphi_V) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{FV} &= I\mathbf{r}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} TV\mathbf{r}_{FV} \\
&= \begin{pmatrix} TVr_{FV,1} \\ y_V + TVr_{FV,2} \cos(\varphi_V) + TVr_{FV,3} \sin(\varphi_V) \\ z_V - TVr_{FV,2} \sin(\varphi_V) + TVr_{FV,3} \cos(\varphi_V) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -TVr_{FV,2} \sin(\varphi_V) + TVr_{FV,3} \cos(\varphi_V) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -TVr_{FV,2} \cos(\varphi_V) - TVr_{FV,3} \sin(\varphi_V) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{KV} &= I\mathbf{r}_{EV} + \mathbf{A}_{IEV} EV\mathbf{r}_{KV} \\
&= I\mathbf{r}_{EV} + \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) + w \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \\ -v \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) + w \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{KV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) + w \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) - w \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{LV} &= I\mathbf{r}_{FV} + \mathbf{A}_{IFV} FV\mathbf{r}_{LV} \\
&= I\mathbf{r}_{FV} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \cos(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) + w \sin(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) \\ v \sin(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) + w \cos(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{LV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v \sin(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) + w \cos(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v \cos(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) - w \sin(\varphi_V + TV\alpha_{lV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

Seitenansicht (XZ-Ebene)

Die Geometrie des Modells ist in Bild B.3 dargestellt.

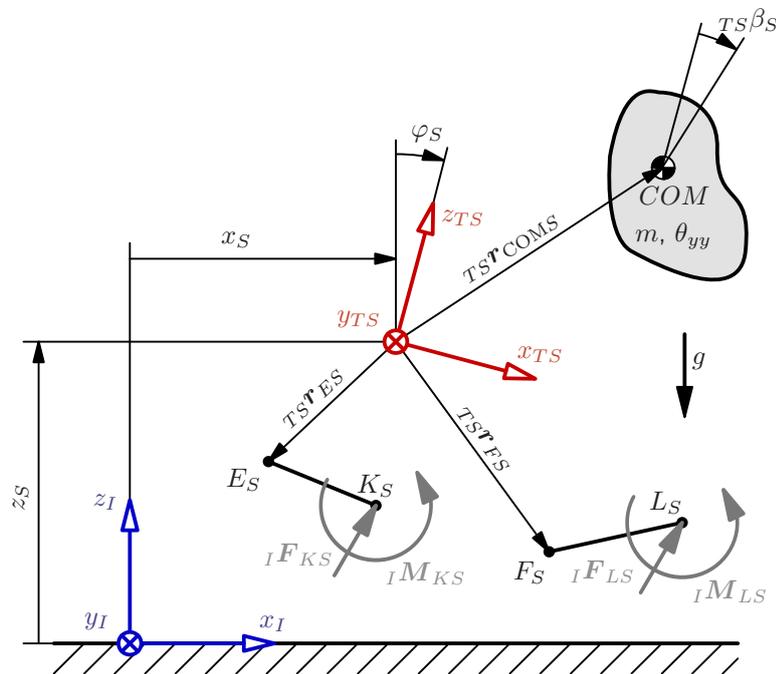


Bild B.3: Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS in der Seitenansicht.

Die Beziehung der Punkte K und L zu den Punkten E und F ist in Bild B.4 abgebildet.

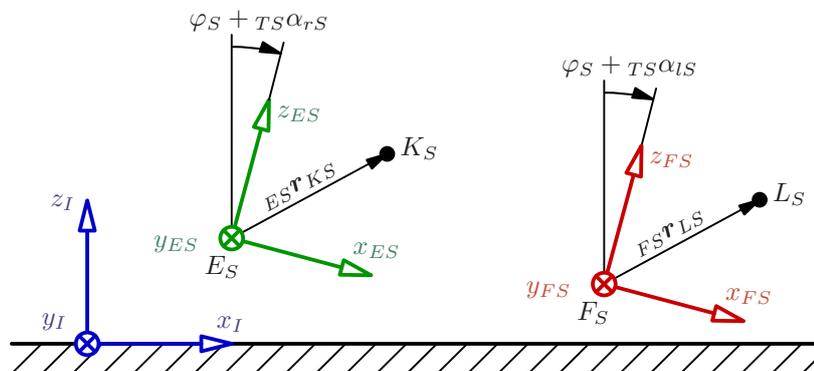


Bild B.4: Versatz der Punkte K und L in der XZ-Ebene.

(1.) Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{A}_{ITS} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_S) & 0 & \sin(\varphi_S) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_S) & 0 & \cos(\varphi_S) \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{A}_{IES} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{A}_{IFS} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & \sin(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & \cos(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

(2.) Position und Orientierung des Koordinatensystems TS :

$${}^I\mathbf{r}_{TS} = \begin{pmatrix} x_S \\ 0 \\ z_S \end{pmatrix}, \quad {}^I\dot{\mathbf{r}}_{TS} = \begin{pmatrix} \dot{x}_S \\ 0 \\ \dot{z}_S \end{pmatrix}, \quad {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{TS} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_S \\ 0 \\ \ddot{z}_S \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{TS} = {}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_S \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} = {}^{TS}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

(3.) Position des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$${}^I\mathbf{r}_{COMS} = {}^I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} {}^{TS}\mathbf{r}_{COMS} \quad (\text{B.27})$$

$${}^I\mathbf{r}_{ES} = {}^I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} {}^{TS}\mathbf{r}_{ES} \quad (\text{B.28})$$

$${}^I\mathbf{r}_{FS} = {}^I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} {}^{TS}\mathbf{r}_{FS} \quad (\text{B.29})$$

$${}^I\mathbf{r}_{KS} = {}^I\mathbf{r}_{ES} + \mathbf{A}_{IES} {}^{ES}\mathbf{r}_{KS} \quad \text{mit} \quad {}^{ES}\mathbf{r}_{KS} = (u, 0, w)^T \quad (\text{B.30})$$

$${}^I\mathbf{r}_{LS} = {}^I\mathbf{r}_{FS} + \mathbf{A}_{IFS} {}^{FS}\mathbf{r}_{LS} \quad \text{mit} \quad {}^{FS}\mathbf{r}_{LS} = (u, 0, w)^T \quad (\text{B.31})$$

(4.) Winkelgeschwindigkeit der Masse ${}^I\boldsymbol{\omega}_{mS}$ und Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{mS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_S + {}^{TS}\dot{\beta}_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

$${}^I\dot{\mathbf{r}}_{COMS} = {}^I\dot{\mathbf{r}}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} ({}^{TS}\dot{\mathbf{r}}_{COMS} + {}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times {}^{TS}\mathbf{r}_{COMS}) \quad (\text{B.33})$$

(5.) Winkelbeschleunigung der Masse ${}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mS}$ und Beschleunigung des Schwerpunkts:

$${}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_S + {}^{TS}\ddot{\beta}_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$${}^I\ddot{\mathbf{r}}_{COMS} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} ({}^{TS}\ddot{\mathbf{r}}_{COMS} + {}^{TS}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} \times {}^{TS}\mathbf{r}_{COMS} + 2{}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times {}^{TS}\dot{\mathbf{r}}_{COMS} + {}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times ({}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times {}^{TS}\mathbf{r}_{COMS})) \quad (\text{B.35})$$

(6.) Ableitung des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{r}_{COMS} &= {}^I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} {}^{TS}\mathbf{r}_{COMS} \\ &= \begin{pmatrix} x_S + {}^{TS}r_{COMS,1} \cos(\varphi_S) + {}^{TS}r_{COMS,3} \sin(\varphi_S) \\ {}^{TS}r_{COMS,2} \\ z_S - {}^{TS}r_{COMS,1} \sin(\varphi_S) + {}^{TS}r_{COMS,3} \cos(\varphi_S) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial {}^I\mathbf{r}_{COMS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \begin{pmatrix} k_{S1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{S2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_{S1} &:= TSrCOMS,3 \cos(\varphi_S) - TSrCOMS,1 \sin(\varphi_S) \\
k_{S2} &:= -TSrCOMS,3 \sin(\varphi_S) - TSrCOMS,1 \cos(\varphi_S)
\end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{ES} &= I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} TS\mathbf{r}_{ES} \\
&= \begin{pmatrix} x_S + TSr_{ES,1} \cos(\varphi_S) + TSr_{ES,3} \sin(\varphi_S) \\ TSr_{ES,2} \\ z_S - TSr_{ES,1} \sin(\varphi_S) + TSr_{ES,3} \cos(\varphi_S) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial I\mathbf{r}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \begin{pmatrix} -TSr_{ES,1} \sin(\varphi_S) + TSr_{ES,3} \cos(\varphi_S) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -TSr_{ES,1} \cos(\varphi_S) - TSr_{ES,3} \sin(\varphi_S) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{FS} &= I\mathbf{r}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} TS\mathbf{r}_{FS} \\
&= \begin{pmatrix} x_S + TSr_{FS,1} \cos(\varphi_S) + TSr_{FS,3} \sin(\varphi_S) \\ TSr_{FS,2} \\ z_S - TSr_{FS,1} \sin(\varphi_S) + TSr_{FS,3} \cos(\varphi_S) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial I\mathbf{r}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \begin{pmatrix} -TSr_{FS,1} \sin(\varphi_S) + TSr_{FS,3} \cos(\varphi_S) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -TSr_{FS,1} \cos(\varphi_S) - TSr_{FS,3} \sin(\varphi_S) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.39}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{KS} &= I\mathbf{r}_{ES} + \mathbf{A}_{IES} ES\mathbf{r}_{KS} \\
&= I\mathbf{r}_{ES} + \begin{pmatrix} u \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) + w \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) \\ 0 \\ -u \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) + w \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial I\mathbf{r}_{KS}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \frac{\partial I\mathbf{r}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} -u \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) + w \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) - w \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
I\mathbf{r}_{LS} &= I\mathbf{r}_{FS} + \mathbf{A}_{IFS} FS\mathbf{r}_{LS} \\
&= I\mathbf{r}_{FS} + \begin{pmatrix} u \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) + w \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \\ 0 \\ -u \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) + w \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial I\mathbf{r}_{LS}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \frac{\partial I\mathbf{r}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} -u \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) + w \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) - w \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

System mit modelliertem Kontakt

Vorderansicht (YZ-Ebene)

Die Geometrie des Modells ist in Bild B.5 dargestellt.

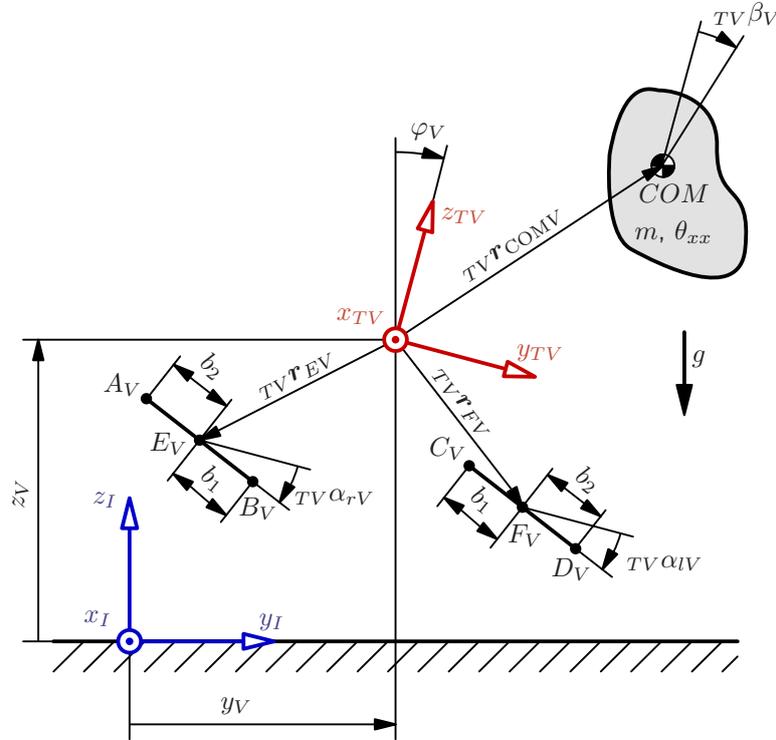


Bild B.5: Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt in der Vorderansicht.

(1.) Transformationsmatrix:

$$A_{ITV} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.2)}$$

(2.) Position und Orientierung des Koordinatensystems TV :

$$I\mathbf{r}_{TV}, I\dot{\mathbf{r}}_{TV}, I\ddot{\mathbf{r}}_{TV} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.5)}$$

$$I\boldsymbol{\omega}_{TV}, TV\boldsymbol{\omega}_{TV}, I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV}, TV\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.6)}$$

(3.) Position des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$$I\mathbf{r}_{COMV}, I\mathbf{r}_{EV}, I\mathbf{r}_{FV} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.7), Gl. (B.8), Gl. (B.9)}$$

$$I\mathbf{r}_{AV} = I\mathbf{r}_{EV} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \\ b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.42})$$

$$I\mathbf{r}_{BV} = I\mathbf{r}_{EV} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \\ -b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.43})$$

$$I\mathbf{r}_{CV} = I\mathbf{r}_{FV} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \\ b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.44})$$

$$I\mathbf{r}_{DV} = I\mathbf{r}_{FV} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \\ -b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.45})$$

(4.) Winkelgeschwindigkeit der Masse $I\boldsymbol{\omega}_{mV}$ und Geschwindigkeit des Schwerpunktes, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$$I\boldsymbol{\omega}_{mV}, I\dot{\mathbf{r}}_{\text{COMV}} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.12), Gl. (B.13)}$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{EV} = I\dot{\mathbf{r}}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} (TV\dot{\mathbf{r}}_{EV} + TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times TV\mathbf{r}_{EV}) \quad (\text{B.46})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{FV} = I\dot{\mathbf{r}}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} (TV\dot{\mathbf{r}}_{FV} + TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times TV\mathbf{r}_{FV}) \quad (\text{B.47})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{AV} = I\dot{\mathbf{r}}_{EV} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) \\ b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.48})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{BV} = I\dot{\mathbf{r}}_{EV} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) \\ -b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.49})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{CV} = I\dot{\mathbf{r}}_{FV} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) \\ b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.50})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{DV} = I\dot{\mathbf{r}}_{FV} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) \\ -b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.51})$$

(5.) Winkelbeschleunigung der Masse $I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mV}$ und Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mV}, I\ddot{\mathbf{r}}_{\text{COMV}} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.14), Gl. (B.15)}$$

(6.) Ableitung des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte, der Kontaktpunkte, sowie deren Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{\text{COMV}}}{\partial \mathbf{x}_V}, \frac{\partial I\mathbf{r}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V}, \frac{\partial I\mathbf{r}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.16), Gl. (B.18), Gl. (B.19)}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{AV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{BV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{CV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{DV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.55})$$

$$\begin{aligned} I\dot{\mathbf{r}}_{EV} &= I\dot{\mathbf{r}}_{TV} + \mathbf{A}_{ITV} (TV\dot{\mathbf{r}}_{EV} + TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times TV\mathbf{r}_{EV}) \\ &= \begin{pmatrix} TV\dot{r}_{EV,1} \\ \dot{y}_V + TV\dot{r}_{EV,2} \cos(\varphi_V) - TVr_{EV,2} \sin(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \\ \dot{z}_V - TV\dot{r}_{EV,2} \sin(\varphi_V) - TVr_{EV,2} \cos(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ TV\dot{r}_{EV,3} \sin(\varphi_V) + TVr_{EV,3} \cos(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \\ TV\dot{r}_{EV,3} \cos(\varphi_V) - TVr_{EV,3} \sin(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \end{pmatrix} \\ \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{EV}}{\partial x_{V1}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -TV\dot{r}_{EV,2} \sin(\varphi_V) - TVr_{EV,2} \cos(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \\ -TV\dot{r}_{EV,2} \cos(\varphi_V) + TVr_{EV,2} \sin(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \end{pmatrix} + \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ TV\dot{r}_{EV,3} \cos(\varphi_V) - TVr_{EV,3} \sin(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \\ -TV\dot{r}_{EV,3} \sin(\varphi_V) - TVr_{EV,3} \cos(\varphi_V) \dot{\varphi}_V \end{pmatrix} \\ \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial I\dot{r}_{EV,1}}{\partial x_{V1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial I\dot{r}_{EV,2}}{\partial x_{V1}} & 0 & 0 & -TVr_{EV,2} \sin(\varphi_V) + TVr_{EV,3} \cos(\varphi_V) & 0 & 1 \\ \frac{\partial I\dot{r}_{EV,3}}{\partial x_{V1}} & 0 & 0 & -TVr_{EV,2} \cos(\varphi_V) - TVr_{EV,3} \sin(\varphi_V) & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} \Rightarrow \text{analog zu Gl. (B.56) (Index } E \rightarrow F) \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{AV}}{\partial \mathbf{x}_V} &= \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) & 0 & 0 & b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 \\ -b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) & 0 & 0 & b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{BV}}{\partial \mathbf{x}_V} &= \frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{EV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) & 0 & 0 & -b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 \\ b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{rV}) & 0 & 0 & -b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{rV}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{CV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) & 0 & b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 \\ -b_1 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) & 0 & b_1 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{DV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{FV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) & 0 & -b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 \\ b_2 \sin(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) (\dot{\varphi}_V + TV\dot{\alpha}_{IV}) & 0 & -b_2 \cos(\varphi_V + TV\alpha_{IV}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.61})$$

Seitenansicht (XZ-Ebene)

Die Geometrie des Modells ist in Bild B.6 dargestellt.

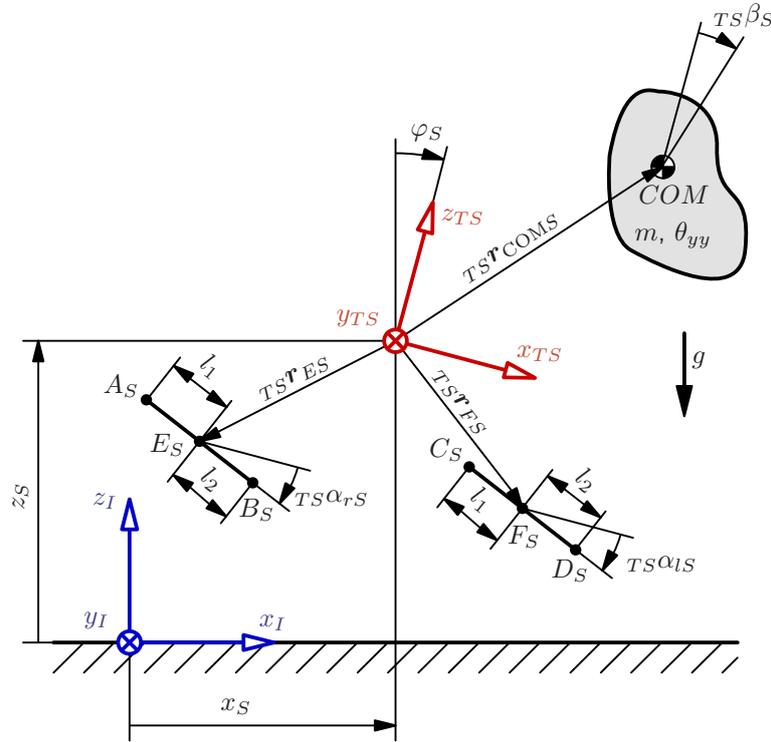


Bild B.6: Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt in der Seitenansicht.

(1.) Transformationsmatrix:

$$A_{ITS} \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.22)}$$

(2.) Position und Orientierung des Koordinatensystems TS :

$${}^I\mathbf{r}_{TS}, {}^I\dot{\mathbf{r}}_{TS}, {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{TS} \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.25)}$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{TS}, {}^{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS}, {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS}, {}^{TS}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.26)}$$

(3.) Position des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$${}^I\mathbf{r}_{COMS}, {}^I\mathbf{r}_{ES}, {}^I\mathbf{r}_{FS} \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.27), Gl. (B.28), Gl. (B.29)}$$

$${}^I\mathbf{r}_{AS} = {}^I\mathbf{r}_{ES} + \begin{pmatrix} -l_1 \cos(\varphi_S + {}^{TS}\alpha_{rS}) \\ 0 \\ l_1 \sin(\varphi_S + {}^{TS}\alpha_{rS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.62})$$

$${}^I\mathbf{r}_{BS} = {}^I\mathbf{r}_{ES} + \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi_S + {}^{TS}\alpha_{rS}) \\ 0 \\ -l_2 \sin(\varphi_S + {}^{TS}\alpha_{rS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

$$I\mathbf{r}_{CS} = I\mathbf{r}_{FS} + \begin{pmatrix} -l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \\ 0 \\ l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

$$I\mathbf{r}_{DS} = I\mathbf{r}_{FS} + \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \\ 0 \\ -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.65})$$

(4.) Winkelgeschwindigkeit der Masse $I\boldsymbol{\omega}_{mS}$ und Geschwindigkeit des Schwerpunktes, der Fußknotenpunkte und der Kontaktpunkte:

$$I\boldsymbol{\omega}_{mS}, I\dot{\mathbf{r}}_{\text{COMS}} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.32), Gl. (B.33)}$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{ES} = I\dot{\mathbf{r}}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} (TS\dot{\mathbf{r}}_{ES} + TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times TS\mathbf{r}_{ES}) \quad (\text{B.66})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{FS} = I\dot{\mathbf{r}}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} (TS\dot{\mathbf{r}}_{FS} + TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times TS\mathbf{r}_{FS}) \quad (\text{B.67})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{AS} = I\dot{\mathbf{r}}_{ES} + \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) \\ 0 \\ l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.68})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{BS} = I\dot{\mathbf{r}}_{ES} + \begin{pmatrix} -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) \\ 0 \\ -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.69})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{CS} = I\dot{\mathbf{r}}_{FS} + \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) \\ 0 \\ l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.70})$$

$$I\dot{\mathbf{r}}_{DS} = I\dot{\mathbf{r}}_{FS} + \begin{pmatrix} -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) \\ 0 \\ -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.71})$$

(5.) Winkelbeschleunigung der Masse $I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mS}$ und Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mS}, I\ddot{\mathbf{r}}_{\text{COMS}} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.34), Gl. (B.35)}$$

(6.) Ableitung des Schwerpunkts, der Fußknotenpunkte, der Kontaktpunkte, sowie deren Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{\text{COMS}}}{\partial \mathbf{x}_S}, \frac{\partial I\mathbf{r}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S}, \frac{\partial I\mathbf{r}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} \quad \Rightarrow \text{identisch mit Gl. (B.36), Gl. (B.38), Gl. (B.39)}$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{AS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{\partial I\mathbf{r}_{BS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial I\mathbf{r}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{\partial_I \mathbf{r}_{CS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial_I \mathbf{r}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.74})$$

$$\frac{\partial_I \mathbf{r}_{DS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial_I \mathbf{r}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{IS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.75})$$

$$\begin{aligned} I\dot{\mathbf{r}}_{ES} &= I\dot{\mathbf{r}}_{TS} + \mathbf{A}_{ITS} (TS\dot{\mathbf{r}}_{ES} + TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times TS\mathbf{r}_{ES}) \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}_S + TS\dot{r}_{ES,1} \cos(\varphi_S) - TSr_{ES,1} \sin(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ TS\dot{r}_{ES,2} \\ \dot{z}_S - TS\dot{r}_{ES,1} \sin(\varphi_S) - TSr_{ES,1} \cos(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ TS\dot{r}_{ES,3} \sin(\varphi_S) + TSr_{ES,3} \cos(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ 0 \\ TS\dot{r}_{ES,3} \cos(\varphi_S) - TSr_{ES,3} \sin(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \end{pmatrix} + \\ \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{ES}}{\partial x_{S1}} &= \begin{pmatrix} -TS\dot{r}_{ES,1} \sin(\varphi_S) - TSr_{ES,1} \cos(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ 0 \\ -TS\dot{r}_{ES,1} \cos(\varphi_S) + TSr_{ES,1} \sin(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ TS\dot{r}_{ES,3} \cos(\varphi_S) - TSr_{ES,3} \sin(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \\ 0 \\ -TS\dot{r}_{ES,3} \sin(\varphi_S) - TSr_{ES,3} \cos(\varphi_S) \dot{\varphi}_S \end{pmatrix} + \\ \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial_I \dot{r}_{ES,1}}{\partial x_{S1}} & 0 & 0 & -TSr_{ES,1} \sin(\varphi_S) + TSr_{ES,3} \cos(\varphi_S) & 0 & 1 \\ \frac{\partial_I \dot{r}_{ES,2}}{\partial x_{S1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial_I \dot{r}_{ES,3}}{\partial x_{S1}} & 0 & 0 & -TSr_{ES,1} \cos(\varphi_S) - TSr_{ES,3} \sin(\varphi_S) & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

$$\frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} \Rightarrow \text{analog zu Gl. (B.76) (Index } E \rightarrow F) \quad (\text{B.77})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{AS}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} + \\ &\begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) & 0 & 0 & l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) & 0 & 0 & l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{BS}}{\partial \mathbf{x}_S} &= \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{ES}}{\partial \mathbf{x}_S} + \\ &\begin{pmatrix} -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) & 0 & 0 & -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{rS}) & 0 & 0 & -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{rS}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

$$\frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{CS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) & 0 & 0 & l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) & 0 & 0 & l_1 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.80})$$

$$\frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{DS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{\partial_I \dot{\mathbf{r}}_{FS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \begin{pmatrix} -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) & 0 & 0 & -l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 \sin(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) (\dot{\varphi}_S + TS\dot{\alpha}_{lS}) & 0 & 0 & -l_2 \cos(\varphi_S + TS\alpha_{lS}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.81})$$

Anhang C

Kontaktmodell

In Abschnitt 2.3 wurde bereits auf den Hintergrund der Wahl der Kontaktkräfte als Komposition von C^1 -stetigen Funktionen eingegangen. In den folgenden zwei Abschnitten wird der konkrete Rechenweg zur Bestimmung der Kontaktkräfte hergeleitet. Der geometrische Zustand des Kontakts (mit g_N als Lücke in Normalenrichtung, dessen Zeitableitung \dot{g}_N sowie \dot{g}_T als Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung) wird hierfür als bekannt vorausgesetzt.

Um spätere Feinjustierungen des Kontaktverhaltens zu vereinfachen, werden die Kontaktkräfte in Abhängigkeit der in Tabelle C.1 gelisteten Parameter angegeben.

Tabelle C.1: Kontaktparameter.

Parameter	Bedeutung
c_{cont}	Federsteifigkeit
d_{cont}	Dämpfungskonstante
μ_0	Reibkoeffizient der Paarung Fuß-Umgebung
$g_{N\text{grenz}}$	Grenzwert für Übergangsbereich (Feder)
$\dot{g}_{N\text{grenz}}$	Grenzwert für Übergangsbereich (Dämpfer)
g_{N1}, g_{N2}, g_{N3}	Schwellwerte für Schaltfunktion
κ	Parameter für Hilfsreibungskraft
n	Parameter für Hilfsreibungskraft

Für die Schwellwerte g_{N1} , g_{N2} und g_{N3} wird von einem festen Verhältnis von

$$g_{N1} = \frac{1}{3} g_{N3}, \quad g_{N2} = \frac{2}{3} g_{N3} \quad (\text{C.1})$$

ausgegangen. Die Wahl der restlichen Parameter für Simulation und Messung ist in Anhang F beschrieben.

Kontaktkraft in Normalenrichtung

Die Normalkraft im Kontakt setzt sich aus den Anteilen von Feder und Dämpfer zu

$$f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) := F_c(g_N) + F_d(g_N, \dot{g}_N) \quad (\text{C.2})$$

mit

$$F_d(g_N, \dot{g}_N) := \sigma_d(g_N) \tilde{F}_d(\dot{g}_N) \quad (\text{C.3})$$

zusammen. Um die geforderte C^1 -Stetigkeit zu erreichen, werden die Beziehungen $F_c(g_N)$, $\tilde{F}_d(\dot{g}_N)$ und $\sigma_d(g_N)$ aus mehreren, hintereinander geschalteten Funktionen zusammenge-

setzt:

$$F_c(g_N) = \begin{cases} F_{c1}(g_N) & \text{für } g_N > 0 \\ F_{c2}(g_N) & \text{für } -g_{N\text{grenz}} < g_N \leq 0 \\ F_{c3}(g_N) & \text{für } g_N \leq -g_{N\text{grenz}} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$\tilde{F}_d(\dot{g}_N) = \begin{cases} \tilde{F}_{d1}(\dot{g}_N) & \text{für } \dot{g}_N > 0 \\ \tilde{F}_{d2}(\dot{g}_N) & \text{für } -\dot{g}_{N\text{grenz}} < \dot{g}_N \leq 0 \\ \tilde{F}_{d3}(\dot{g}_N) & \text{für } \dot{g}_N \leq -\dot{g}_{N\text{grenz}} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_d(g_N) = \begin{cases} \sigma_{d1}(g_N) & \text{für } g_N > 0 \\ \sigma_{d2}(g_N) & \text{für } g_{N1} < g_N \leq 0 \\ \sigma_{d3}(g_N) & \text{für } g_{N2} < g_N \leq g_{N1} \\ \sigma_{d4}(g_N) & \text{für } g_{N3} < g_N \leq g_{N2} \\ \sigma_{d5}(g_N) & \text{für } g_N \leq g_{N3} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Die resultierenden Verläufe sind in Bild C.1 dargestellt.

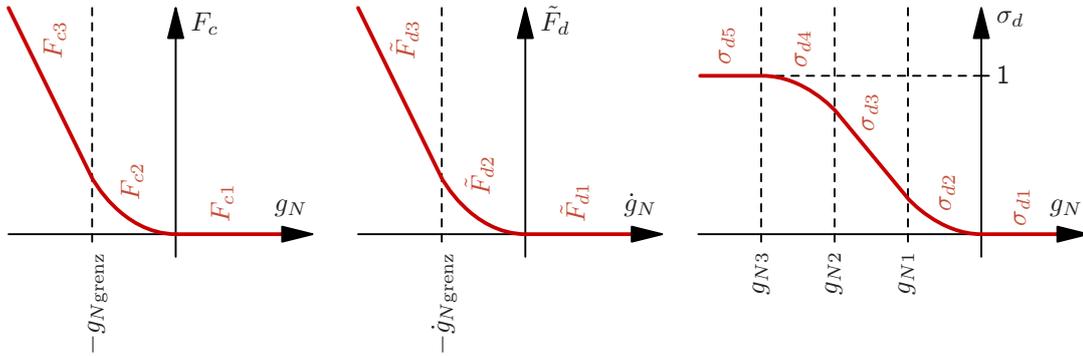


Bild C.1: Funktionskomposition der Federkraft (F_c , links), Dämpferkraft (\tilde{F}_d , Mitte) und Schaltfunktion (σ_d , rechts).

Federkraft F_c

Die Federkraft $F_c(g_N)$ wird aus den linearen und quadratischen Teilen

$$F_{c1}(g_N) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$F_{c2}(g_N) = \xi_1 g_N^2 + \xi_2 g_N + \xi_3, \quad (\text{C.8})$$

$$F_{c3}(g_N) = -c_{\text{cont}} g_N + \xi_4. \quad (\text{C.9})$$

zusammengesetzt. Dabei sind ξ_i zunächst unbekannte Konstanten. Für C^1 -Stetigkeit ergeben sich an den Übergangsstellen $g_N = 0$ und $g_N = -g_{N\text{grenz}}$ die Forderungen

$$F_{c2}(0) \stackrel{!}{=} F_{c1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \xi_3 = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\left. \frac{\partial F_{c2}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_N=0} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial F_{c1}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_N=0} = 0 \quad \Rightarrow \xi_2 = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\left. \frac{\partial F_{c2}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{-g_{N\text{grenz}}} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial F_{c3}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{-g_{N\text{grenz}}} \stackrel{!}{=} -c_{\text{cont}} \quad \Rightarrow \xi_1 = \frac{c_{\text{cont}}}{2 g_{N\text{grenz}}}, \quad (\text{C.12})$$

$$F_{c2}(-g_{N\text{grenz}}) \stackrel{!}{=} F_{c3}(-g_{N\text{grenz}}) \quad \Rightarrow \xi_4 = -\frac{1}{2} c_{\text{cont}} g_{N\text{grenz}} \quad (\text{C.13})$$

wodurch alle vier Unbekannten eindeutig festgelegt werden. Damit lautet die Rechenvorschrift zur Bestimmung der Federkraft

$$F_{c1}(g_N) = 0, \quad (\text{C.14})$$

$$F_{c2}(g_N) = \frac{c_{\text{cont}}}{2 g_{N\text{grenz}}} g_N^2, \quad (\text{C.15})$$

$$F_{c3}(g_N) = -c_{\text{cont}} g_N - \frac{1}{2} c_{\text{cont}} g_{N\text{grenz}}. \quad (\text{C.16})$$

Zwischengröße \tilde{F}_d

Die Berechnung der Zwischengröße $\tilde{F}_d(\dot{g}_N)$ erfolgt analog zu $F_c(g_N)$. Es ergibt sich

$$\tilde{F}_{d1}(\dot{g}_N) = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$\tilde{F}_{d2}(\dot{g}_N) = \frac{d_{\text{cont}}}{2 \dot{g}_{N\text{grenz}}} \dot{g}_N^2, \quad (\text{C.18})$$

$$\tilde{F}_{d3}(\dot{g}_N) = -d_{\text{cont}} \dot{g}_N - \frac{1}{2} d_{\text{cont}} \dot{g}_{N\text{grenz}}. \quad (\text{C.19})$$

Schaltfunktion σ_d

Auch die Schaltfunktion $\sigma_d(g_N)$ setzt sich durch

$$\sigma_{d1}(g_N) = 0, \quad (\text{C.20})$$

$$\sigma_{d2}(g_N) = \xi_1 g_N^2 + \xi_2 g_N + \xi_3, \quad (\text{C.21})$$

$$\sigma_{d3}(g_N) = \xi_4 g_N + \xi_5, \quad (\text{C.22})$$

$$\sigma_{d4}(g_N) = \xi_6 g_N^2 + \xi_7 g_N + \xi_8, \quad (\text{C.23})$$

$$\sigma_{d5}(g_N) = 1. \quad (\text{C.24})$$

aus linearen und quadratischen Funktionen zusammen. Mit ξ_i werden Konstanten bezeichnet, die auch hier über die Forderungen für C^1 -Stetigkeit identifiziert werden können:

$$\sigma_{d2}(0) \stackrel{!}{=} \sigma_{d1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \xi_3 = 0, \quad (\text{C.25})$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{d2}(g_N)}{\partial g_N} \right|_0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial \sigma_{d1}(g_N)}{\partial g_N} \right|_0 = 0 \quad \Rightarrow \xi_2 = 0, \quad (\text{C.26})$$

$$\sigma_{d2}(g_{N1}) \stackrel{!}{=} \sigma_{d3}(g_{N1}) \quad \Rightarrow \xi_1 g_{N1}^2 = \xi_4 g_{N1} + \xi_5, \quad (\text{C.27})$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{d2}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N1}} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial \sigma_{d3}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N1}} \quad \Rightarrow 2 \xi_1 g_{N1} = \xi_4, \quad (\text{C.28})$$

$$\sigma_{d3}(g_{N2}) \stackrel{!}{=} \sigma_{d4}(g_{N2}) \quad \Rightarrow \xi_4 g_{N2} + \xi_5 = \xi_6 g_{N2}^2 + \xi_7 g_{N2} + \xi_8, \quad (\text{C.29})$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{d3}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N2}} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial \sigma_{d4}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N2}} \quad \Rightarrow \xi_4 = 2 \xi_6 g_{N2} + \xi_7, \quad (\text{C.30})$$

$$\sigma_{d4}(g_{N3}) \stackrel{!}{=} \sigma_{d5}(g_{N3}) = 1 \quad \Rightarrow \xi_6 g_{N3}^2 + \xi_7 g_{N3} + \xi_8 = 1, \quad (\text{C.31})$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{d4}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N3}} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial \sigma_{d5}(g_N)}{\partial g_N} \right|_{g_{N3}} = 0 \quad \Rightarrow 2 \xi_6 g_{N3} + \xi_7 = 0. \quad (\text{C.32})$$

Die Substitution $\eta := g_{N1}$ liefert mit Gl. (C.1) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2\eta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9\eta^2 & 3\eta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6\eta & 1 & 0 \\ \eta^2 & -\eta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta & 1 & -4\eta^2 & -2\eta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.33})$$

dessen Lösung

$$\xi_1 = \frac{1}{4\eta^2}, \quad \xi_4 = \frac{1}{2\eta}, \quad \xi_5 = -\frac{1}{4}, \quad (\text{C.34})$$

$$\xi_6 = -\frac{1}{4\eta^2}, \quad \xi_7 = \frac{3}{2\eta}, \quad \xi_8 = -\frac{5}{4} \quad (\text{C.35})$$

ist. Damit ergibt sich für die Schaltfunktion $\sigma_d(g_N)$

$$\sigma_{d1}(g_N) = 0, \quad (\text{C.36})$$

$$\sigma_{d2}(g_N) = \frac{9}{4g_{N3}^2} g_N^2, \quad (\text{C.37})$$

$$\sigma_{d3}(g_N) = \frac{3}{2g_{N3}} g_N - \frac{1}{4}, \quad (\text{C.38})$$

$$\sigma_{d4}(g_N) = -\frac{9}{4g_{N3}^2} g_N^2 + \frac{9}{2g_{N3}} g_N - \frac{5}{4}, \quad (\text{C.39})$$

$$\sigma_{d5}(g_N) = 1. \quad (\text{C.40})$$

Kontaktkraft in Tangentialrichtung

Die Kontaktkraft in Tangentialrichtung wird aus dem Produkt von Normalkraft $f_{\text{cont}N}$ und Hilfsreibwert μ bestimmt:

$$f_{\text{cont}T}(g_N, \dot{g}_N, \dot{g}_T) := \mu(\dot{g}_T) f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N). \quad (\text{C.41})$$

Der Hilfsreibwert führt dabei eine Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung ein. Aus den in Abschnitt 2.3 genannten Gründen wird die nicht-glatte

COULOMB-Reibung durch die Arkustangensfunktion approximiert:

$$\mu^*(\dot{g}_T) \approx -\frac{2\mu_0}{\pi} \arctan(\kappa_T \dot{g}_T). \quad (\text{C.42})$$

Der Vorfaktor $-\frac{2\mu_0}{\pi}$ und der Parameter κ dienen der korrekten Skalierung für $|\dot{g}_T| \rightarrow \infty$ und der Einstellung der Steigung um $\dot{g}_T = 0$. Der Einfluss von κ auf den Hilfsreibwert ist in Bild C.2 (links) dargestellt.

Im Sinne einer effizienten Berechnung wird der Arkustanges durch seine äquivalente Potenzreihe [16, S. 111]

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \quad (\text{C.43})$$

ersetzt, welche aber nur für $|x| \leq 1$ (mit $x \in \mathbb{R}$) konvergiert. Diese Einschränkung kann durch eine geschickte Umformulierung des Problems aufgehoben werden. Dazu werden die Gleichungen [16, S. 66 und 71]

$$\tan\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sin(z)}{1 + \cos(z)}, \quad (\text{C.44})$$

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad (\text{C.45})$$

folgendermaßen umgeformt:

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad (\text{C.46})$$

↓

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{C.47})$$

↓

$$\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = \tan(\arctan(x)) = x \quad (\text{C.48})$$

↓

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{C.49})$$

↓

$$z := \arctan(x) \quad (\text{C.50})$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right) = \frac{z}{2} = \arctan\left(\frac{\sin(\arctan(x))}{1 + \cos(\arctan(x))}\right). \quad (\text{C.51})$$

Durch Einsetzen von Gl. (C.47), Gl. (C.49) und Gl. (C.50) in Gl. (C.51) folgt der Zusammenhang

$$\arctan(x) = 2 \arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}\right). \quad (\text{C.52})$$

Wird in Gl. (C.43) x durch y mit

$$y := \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} \quad (\text{C.53})$$

ersetzt, so lässt sich $\arctan(x)$ nach Gl. (C.52) durch das äquivalente Problem

$$\arctan(x) = 2 \arctan(y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1}, \quad \text{mit } y \text{ nach Gl. (C.53)} \quad (\text{C.54})$$

bestimmen. Da aus Gl. (C.53) folgt, dass $y < 1 \forall x \in \mathbb{R}$, konvergiert die Reihe auch für $|x| > 1$. Für den konkreten Fall des Hilfsreibungwertes ergibt sich somit

$$\mu(\dot{g}_T) = -\frac{4\mu_0}{\pi} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{mit } y := \frac{\kappa_T \dot{g}_T}{1 + \sqrt{1 + (\kappa_T \dot{g}_T)^2}}. \quad (\text{C.55})$$

Der Parameter n bestimmt, nach welchem Term die Berechnung der Summe abgebrochen wird. Den Einfluss von n auf den Verlauf von μ zeigt Bild C.2 (rechts).

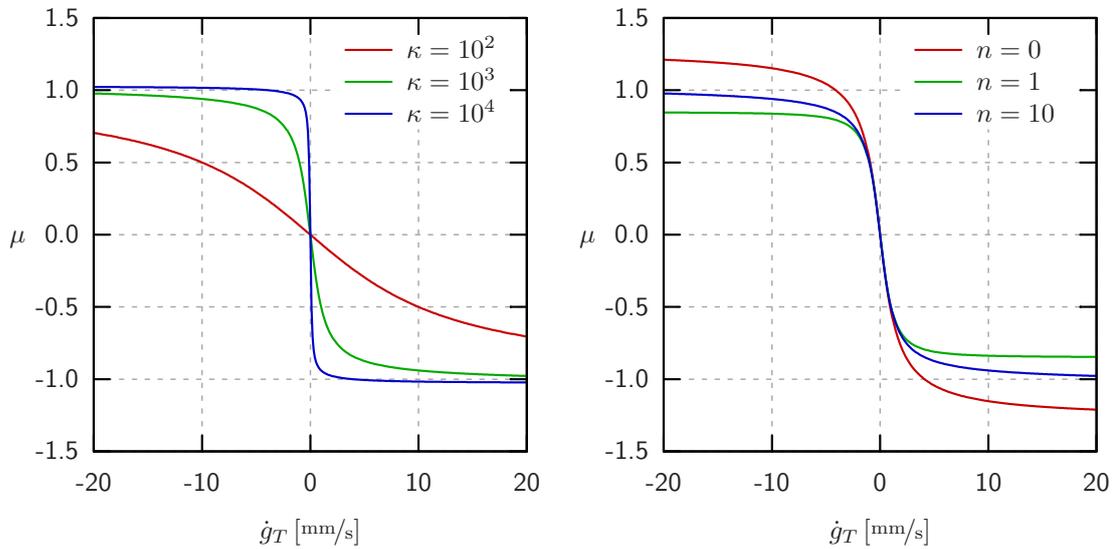


Bild C.2: Verlauf des Hilfsreibungwertes μ in Abhängigkeit von κ (links, $n = 10$) und n (rechts, $\kappa = 10^3$). Für den Reibkoeffizienten wird $\mu_0 = 1$ verwendet.

Ableitung der Kontaktkräfte

Im Folgenden werden die Ableitungen der Kontaktkräfte $f_{\text{cont}N}$ und $f_{\text{cont}T}$ nach den Variablen g_N , \dot{g}_N und \dot{g}_T beschrieben. Diese werden im Rahmen der Zustandsschätzung mittels EKF benötigt.

Ableitungen in Normalenrichtung

Aus den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte können die Ableitungen der Kontaktkraft in Normalenrichtung mit

$$\frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial g_N} = \frac{\partial F_c(g_N)}{\partial g_N} + \frac{\partial F_d(g_N, \dot{g}_N)}{\partial g_N}, \quad (\text{C.56})$$

$$\frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial \dot{g}_N} = \underbrace{\frac{\partial F_c(g_N)}{\partial \dot{g}_N}}_{=0} + \frac{\partial F_d(g_N, \dot{g}_N)}{\partial \dot{g}_N} \quad (\text{C.57})$$

berechnet werden. Eine Abhängigkeit von \dot{g}_T besteht nicht, weshalb

$$\frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial \dot{g}_T} = 0 \quad (\text{C.58})$$

gilt. Da die Einzelanteile F_c , \tilde{F}_d und σ_d aus Geraden- und Parabelstücken aufgebaut sind, ist deren Ableitung besonders einfach:

$$\frac{\partial F_c}{\partial g_N} = \begin{cases} 0 & \text{für } g_N > 0 \\ \frac{c_{\text{cont}}}{g_{N\text{grenz}}} g_N & \text{für } -g_{N\text{grenz}} < g_N \leq 0 \\ -c_{\text{cont}} & \text{für } g_N \leq -g_{N\text{grenz}} \end{cases}, \quad (\text{C.59})$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial g_N} = \frac{\partial \sigma_d(g_N)}{\partial g_N} \tilde{F}_d(\dot{g}_N) + \sigma_d(g_N) \underbrace{\frac{\partial \tilde{F}_d(\dot{g}_N)}{\partial g_N}}_{=0}, \quad (\text{C.60})$$

$$\frac{\partial \sigma_d}{\partial g_N} = \begin{cases} 0 & \text{für } g_N > 0 \\ \frac{9}{2g_{N3}^2} g_N & \text{für } g_{N1} < g_N \leq 0 \\ \frac{2g_{N3}}{2g_{N3}^2} g_N & \text{für } g_{N2} < g_N \leq g_{N1} \\ -\frac{9}{2g_{N3}^2} g_N + \frac{9}{2g_{N3}} & \text{für } g_{N3} < g_N \leq g_{N2} \\ 0 & \text{für } g_N \leq g_{N3} \end{cases}, \quad (\text{C.61})$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \dot{g}_N} = \underbrace{\frac{\partial \sigma_d(g_N)}{\partial \dot{g}_N}}_{=0} \tilde{F}_d(\dot{g}_N) + \sigma_d(g_N) \frac{\partial \tilde{F}_d(\dot{g}_N)}{\partial \dot{g}_N}, \quad (\text{C.62})$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_d(\dot{g}_N)}{\partial \dot{g}_N} = \begin{cases} 0 & \text{für } \dot{g}_N > 0 \\ \frac{d_{\text{cont}}}{\dot{g}_{N\text{grenz}}} \dot{g}_N & \text{für } -\dot{g}_{N\text{grenz}} < \dot{g}_N \leq 0 \\ -d_{\text{cont}} & \text{für } \dot{g}_N \leq -\dot{g}_{N\text{grenz}} \end{cases}. \quad (\text{C.63})$$

Ableitungen in Tangentialrichtung

Bei der Ableitung der Kontaktkraft in Tangentialrichtung muss etwas mehr Aufwand getrieben werden. Zunächst wird die Produktregel auf Gl. (C.41) angewendet:

$$\frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial g_N} = \underbrace{\left(\frac{\partial \mu(\dot{g}_T)}{\partial g_N} \right)}_{=0} f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) + \mu(\dot{g}_T) \left(\frac{\partial f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N)}{\partial g_N} \right), \quad (\text{C.64})$$

$$\frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_N} = \underbrace{\left(\frac{\partial \mu(\dot{g}_T)}{\partial \dot{g}_N} \right)}_{=0} f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) + \mu(\dot{g}_T) \left(\frac{\partial f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N)}{\partial \dot{g}_N} \right), \quad (\text{C.65})$$

$$\frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_T} = \left(\frac{\partial \mu(\dot{g}_T)}{\partial \dot{g}_T} \right) f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N) + \mu(\dot{g}_T) \underbrace{\left(\frac{\partial f_{\text{cont}N}(g_N, \dot{g}_N)}{\partial \dot{g}_T} \right)}_{=0}. \quad (\text{C.66})$$

Neben den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts wird nur noch die Ableitung des Hilfsreibwerts $\mu(\dot{g}_T)$ nach \dot{g}_T benötigt. Diese folgt aus Gl. (C.55) zu

$$\frac{\partial \mu(\dot{g}_T)}{\partial \dot{g}_T} = -\frac{4\mu_0}{\pi} \frac{\partial y(\dot{g}_T)}{\partial \dot{g}_T} \sum_{k=0}^n (-1)^k y^{2k}, \quad (\text{C.67})$$

$$\frac{\partial y(\dot{g}_T)}{\partial \dot{g}_T} = \frac{\partial \frac{a(\dot{g}_T)}{b(\dot{g}_T)}}{\partial \dot{g}_T} = \frac{\frac{\partial a}{\partial \dot{g}_T} b - a \frac{\partial b}{\partial \dot{g}_T}}{b^2}, \quad (\text{C.68})$$

wobei

$$a(\dot{g}_T) := \kappa_T \dot{g}_T, \quad \frac{\partial a}{\partial \dot{g}_T} = \kappa_T, \quad (\text{C.69})$$

$$b(\dot{g}_T) := 1 + \sqrt{1 + (\kappa_T \dot{g}_T)^2}, \quad \frac{\partial b}{\partial \dot{g}_T} = \frac{\kappa_T^2 \dot{g}_T}{\sqrt{1 + (\kappa_T \dot{g}_T)^2}}. \quad (\text{C.70})$$

Anhang D

Bewegungsgleichungen

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen wird das NEWTON-EULER-Verfahren [10, S. 35f.] mit der Gleichung

$${}_I \mathbf{J}_{Ti}^T (m {}_I \ddot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i} - {}_I \mathbf{F}_{ei}) + {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T ({}_I \dot{\mathbf{L}}_i + \underbrace{{}_I \boldsymbol{\omega}_I \times}_{{=0}} {}_I \mathbf{L}_i - {}_I \mathbf{M}_{ei}) = \mathbf{0} \quad (\text{D.1})$$

und $i \in \{V, S\}$ angewandt. Impuls- und Drallanteil werden im I -System beschrieben und auf den Schwerpunkt $\text{COM}i$ bezogen. Dabei bezeichnen ${}_I \mathbf{J}_{Ti}$ die Jacobimatrix der Translation und ${}_I \mathbf{J}_{Ri}$ die Jacobimatrix der Rotation des Roboters. Mit ${}_I \mathbf{F}_{ei}$ und ${}_I \mathbf{M}_{ei}$ werden eingeprägte Kräfte und Momente, wie z. B. der Einfluss der Gravitation, berücksichtigt. Der Drall des Roboters um den Schwerpunkt wird durch ${}_I \mathbf{L}_i$ mit

$${}_I \mathbf{L}_i = {}_I \boldsymbol{\theta}_i {}_I \boldsymbol{\omega}_{mi}, \quad {}_I \dot{\mathbf{L}}_i = {}_I \dot{\boldsymbol{\theta}}_i {}_I \boldsymbol{\omega}_{mi} + {}_I \boldsymbol{\theta}_i {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi} \quad (\text{D.2})$$

festgelegt. Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ${}_I \boldsymbol{\omega}_{mi}$ sowie die translatorische und rotatorische Beschleunigung ${}_I \ddot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i}$ und ${}_I \dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi}$ sind bereits in Anhang B beschrieben. Der Trägheitstensor ${}_I \boldsymbol{\theta}_i$ setzt sich aus

$${}_I \boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{A}_{ITi} {}_{Ti} \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{A}_{ITi}^T \quad \text{mit } {}_{Ti} \boldsymbol{\theta}_i = \begin{pmatrix} \theta_{xx} =: \theta_V & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} =: \theta_S & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \text{konst.} \quad (\text{D.3})$$

zusammen, wobei für den hier vorliegenden ebenen Fall nur die entsprechenden Werte auf der Diagonalen von ${}_{Ti} \boldsymbol{\theta}_i$ (θ_V und θ_S) Einfluss auf die Bewegung haben und unabhängig von der Rotation des Körpers sind. Da das I -System inertialfest ist, muss für dessen Eigenrotation ${}_I \boldsymbol{\omega}_I = \mathbf{0}$ gelten.

Jacobimatrizen in der Vorderansicht

Mit Gl. (B.12) ergibt sich für die Jacobimatrix der Rotation

$${}_I \mathbf{J}_{RV} = \frac{\partial {}_I \boldsymbol{\omega}_{mV}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_V} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Für die Jacobimatrix der Translation wird Gl. (B.13) benötigt und es folgt

$${}_I \mathbf{J}_{TV} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{\text{COM}V}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_V} \quad (\text{D.5})$$

$$= \underbrace{\frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{TV}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_V}}_{{}_I \mathbf{J}_{TV1}} + \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{A}_{ITV} {}_{TV} \dot{\mathbf{r}}_{\text{COM}V})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_V}}_{{=0}} + \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{A}_{ITV} ({}_{TV} \boldsymbol{\omega}_{TV} \times {}_{TV} \mathbf{r}_{\text{COM}V}))}{\partial \dot{\mathbf{q}}_V}}_{{}_I \mathbf{J}_{TV2}} \quad (\text{D.6})$$

mit den beiden Teilmatrizen ${}_I\mathbf{J}_{TV1}$ und ${}_I\mathbf{J}_{TV2}$. Die Erste ergibt sich mit Gl. (B.5) zu

$${}_I\mathbf{J}_{TV1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

Für die Zweite folgt mit Gl. (B.2) und Gl. (B.6) sowie k_{V1} und k_{V2} aus Gl. (B.17)

$$\mathbf{A}_{ITV} ({}_{TV}\boldsymbol{\omega}_{TV} \times {}_{TV}\mathbf{r}_{\text{COMV}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_V k_{V1} \\ \dot{\varphi}_V k_{V2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Daraus lässt sich ${}_I\mathbf{J}_{TV2}$ und schließlich ${}_I\mathbf{J}_{TV}$ zu

$${}_I\mathbf{J}_{TV2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{V1} & 0 & 0 \\ k_{V2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}_I\mathbf{J}_{TV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{V1} & 0 & 1 \\ k_{V2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

berechnen. Die Ableitungen der transponierten Jacobimatrizen ergeben sich mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{V1}}{\partial \varphi_V} &= -{}_{TV}r_{\text{COMV},3} \sin(\varphi_V) - {}_{TV}r_{\text{COMV},2} \cos(\varphi_V), \\ \frac{\partial k_{V2}}{\partial \varphi_V} &= -{}_{TV}r_{\text{COMV},3} \cos(\varphi_V) + {}_{TV}r_{\text{COMV},2} \sin(\varphi_V) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{RV}^T}{\partial x_{V1}} &= \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{RV}^T}{\partial \varphi_V} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{TV}^T}{\partial x_{V1}} &= \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{TV}^T}{\partial \varphi_V} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial k_{V1}}{\partial \varphi_V} & \frac{\partial k_{V2}}{\partial \varphi_V} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{TV}^T}{\partial x_{Vj}} &= \frac{\partial {}_I\mathbf{J}_{RV}^T}{\partial x_{Vj}} = \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Jacobimatrizen in der Seitenansicht

Die Schritte zur Berechnung der Jacobimatrizen in der Seitenansicht werden analog zum vorherigen Abschnitt durchgeführt.

Jacobimatrix der Rotation (mit Gl. (B.32)):

$${}_I\mathbf{J}_{RS} = \frac{\partial {}_I\boldsymbol{\omega}_{mS}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Jacobimatrix der Translation (mit Gl. (B.33)):

$${}_I\mathbf{J}_{TS} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{\text{COMS}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S} \quad (\text{D.13})$$

$$= \underbrace{\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{TS}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S}}_{{}_I\mathbf{J}_{TS1}} + \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{A}_{ITS} {}_{TS}\dot{\mathbf{r}}_{\text{COMS}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{A}_{ITS} ({}_{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times {}_{TS}\mathbf{r}_{\text{COMS}}))}{\partial \dot{\mathbf{q}}_S}}_{{}_I\mathbf{J}_{TS2}} \quad (\text{D.14})$$

Erste Teilmatrix (mit Gl. (B.25)):

$${}^I\mathbf{J}_{TS1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Zweite Teilmatrix und Gesamtmatrix (mit Gl. (B.22), Gl. (B.26) und k_{S1} und k_{S2} aus Gl. (B.37)):

$$\mathbf{A}_{ITS} ({}_{TS}\boldsymbol{\omega}_{TS} \times {}_{TS}\mathbf{r}_{\text{COMS}}) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_S k_{S1} \\ 0 \\ \dot{\varphi}_S k_{S2} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

$${}^I\mathbf{J}_{TS2} = \begin{pmatrix} k_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{S2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^I\mathbf{J}_{TS} = \begin{pmatrix} k_{S1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{S2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

Ableitung der Hilfsgrößen k_{S1} und k_{S2} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{S1}}{\partial \varphi_S} &= -{}_{TS}r_{\text{COMS},3} \sin(\varphi_S) - {}_{TS}r_{\text{COMS},1} \cos(\varphi_S), \\ \frac{\partial k_{S2}}{\partial \varphi_S} &= -{}_{TS}r_{\text{COMS},3} \cos(\varphi_S) + {}_{TS}r_{\text{COMS},1} \sin(\varphi_S). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Ableitungen der transponierten Jacobimatrizen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{RS}^T}{\partial x_{S1}} &= \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{RS}^T}{\partial \varphi_S} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{TS}^T}{\partial x_{S1}} &= \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{TS}^T}{\partial \varphi_S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_{S1}}{\partial \varphi_S} & 0 & \frac{\partial k_{S2}}{\partial \varphi_S} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{TS}^T}{\partial x_{Sj}} &= \frac{\partial {}^I\mathbf{J}_{RS}^T}{\partial x_{Sj}} = \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Eingeprägte Kräfte und Momente unter Verwendung der KMS

Die Berechnung ist für Vorder- und Seitenansicht identisch. Mit $i \in \{V, S\}$ ergeben sich die eingeprägten Kräfte zu

$${}^I\mathbf{F}_{ei} = {}^I\mathbf{F}_{Gi} + {}^I\mathbf{F}_{Ki} + {}^I\mathbf{F}_{Li} \quad (\text{D.20})$$

mit der Gewichtskraft und den Kontaktkräften in den KMS-Messpunkten K und L

$${}^I\mathbf{F}_{Gi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad {}^I\mathbf{F}_{Ki} = \mathbf{A}_{ITiTi} \mathbf{F}_{Ki}, \quad {}^I\mathbf{F}_{Li} = \mathbf{A}_{ITiTi} \mathbf{F}_{Li}. \quad (\text{D.21})$$

Die eingeprägten Momente setzen sich aus den gemessenen Kontaktmomenten und den Versatzmomenten zusammen:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{M}_{ei} &= {}^I\mathbf{M}_{Ki} + {}^I\mathbf{M}_{Li} \\ &+ ({}^I\mathbf{r}_{Ki} - {}^I\mathbf{r}_{\text{COM}i}) \times {}^I\mathbf{F}_{Ki} + ({}^I\mathbf{r}_{Li} - {}^I\mathbf{r}_{\text{COM}i}) \times {}^I\mathbf{F}_{Li}, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

wobei

$${}_I\mathbf{M}_{Ki} = \mathbf{A}_{ITi\ Ti}\mathbf{M}_{Ki}, \quad {}_I\mathbf{M}_{Li} = \mathbf{A}_{ITi\ Ti}\mathbf{M}_{Li}. \quad (\text{D.23})$$

Die Größen ${}_{Ti}\mathbf{F}_{Ki}$, ${}_{Ti}\mathbf{F}_{Li}$, ${}_{Ti}\mathbf{M}_{Ki}$ und ${}_{Ti}\mathbf{M}_{Li}$ resultieren aus einer Transformation der KMS-Daten in das Planungskoordinatensystem Ti (siehe Anhang E).

Mit Gl. (D.20) berechnet sich die Ableitung der eingprägten Kräfte zu

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Gi}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (\text{D.24})$$

wobei aus Gl. (D.21) und mit der in Anhang A definierten Schreibweise für Ableitungen eines Matrix-Vektorproduktes

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Gi}}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.25})$$

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial (\mathbf{A}_{ITi\ Ti}\mathbf{F}_{Ki})}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ITi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_{Ti}\mathbf{F}_{Ki} \right] + \underbrace{\mathbf{A}_{ITi} \left(\frac{\partial {}_{Ti}\mathbf{F}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)}_{=0}, \quad (\text{D.26})$$

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial (\mathbf{A}_{ITi\ Ti}\mathbf{F}_{Li})}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ITi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_{Ti}\mathbf{F}_{Li} \right] + \underbrace{\mathbf{A}_{ITi} \left(\frac{\partial {}_{Ti}\mathbf{F}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)}_{=0} \quad (\text{D.27})$$

folgt. Die Ableitungen der Transformationsmatrizen \mathbf{A}_{ITV} und \mathbf{A}_{ITS} ergeben sich dabei aus Gl. (B.2) und Gl. (B.22) zu

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ITV}}{\partial x_{V1}} = \frac{\partial \mathbf{A}_{ITV}}{\partial \varphi_V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \\ 0 & -\cos(\varphi_V) & -\sin(\varphi_V) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.28})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ITS}}{\partial x_{S1}} = \frac{\partial \mathbf{A}_{ITS}}{\partial \varphi_S} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_S) & 0 & \cos(\varphi_S) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\varphi_S) & 0 & -\sin(\varphi_S) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.29})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ITV}}{\partial x_{Vj}} = \frac{\partial \mathbf{A}_{ITS}}{\partial x_{Sj}} = \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (\text{D.30})$$

Mit Gl. (D.22) und Gl. (D.23) sowie der Definition der Ableitung eines Kreuzproduktes aus Anhang A können die Ableitungen der eingprägten Momente zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_I\mathbf{M}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ITi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_{Ti}\mathbf{M}_{Ki} \right] + \underbrace{\mathbf{A}_{ITi} \left(\frac{\partial {}_{Ti}\mathbf{M}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)}_{=0} \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ITi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_{Ti}\mathbf{M}_{Li} \right] + \underbrace{\mathbf{A}_{ITi} \left(\frac{\partial {}_{Ti}\mathbf{M}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)}_{=0} \\ &+ \left(\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{COMi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \times {}_I\mathbf{F}_{Ki} + ({}_I\mathbf{r}_{Ki} - {}_I\mathbf{r}_{COMi}) \times \left(\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{COMi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \times {}_I\mathbf{F}_{Li} + ({}_I\mathbf{r}_{Li} - {}_I\mathbf{r}_{COMi}) \times \left(\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

berechnet werden. Die Ableitungen $\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{Ki}}{\partial \mathbf{x}_i}$, $\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{Li}}{\partial \mathbf{x}_i}$ und $\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{COMi}}{\partial \mathbf{x}_i}$ sind in Anhang B hinterlegt.

Eingepägte Kräfte und Momente bei modelliertem Kontakt

Auch beim System mit modelliertem Kontakt sind die wesentlichen Schritte zur Berechnung der eingepägten Kräfte und Momente für beide Ebenen gleich. Die eingepägten Kräfte ergeben sich (mit $i \in \{V, S\}$) zu

$${}_I\mathbf{F}_{ei} = {}_I\mathbf{F}_{Gi} + {}_I\mathbf{F}_{Ai} + {}_I\mathbf{F}_{Bi} + {}_I\mathbf{F}_{Ci} + {}_I\mathbf{F}_{Di} \quad (\text{D.32})$$

mit einer zu Gl. (D.21) identischen Gewichtskraft ${}_I\mathbf{F}_{Gi}$ und den Kontaktkräften in A , B , C und D

$${}_I\mathbf{F}_{jV} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\text{cont}T}(g_{NjV}, \dot{g}_{NjV}, \dot{g}_{TjV}) \\ f_{\text{cont}N}(g_{NjV}, \dot{g}_{NjV}) \end{pmatrix}, \quad {}_I\mathbf{F}_{jS} = \begin{pmatrix} f_{\text{cont}T}(g_{NjS}, \dot{g}_{NjS}, \dot{g}_{TjS}) \\ 0 \\ f_{\text{cont}N}(g_{NjS}, \dot{g}_{NjS}) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.33})$$

wobei $j \in \{A, B, C, D\}$. Die Kontaktkräfte in Tangentialrichtung $f_{\text{cont}T}$ und Normalenrichtung $f_{\text{cont}N}$ sowie deren Ableitungen sind im Kontaktmodell in Anhang C definiert. Die Eingabeparameter g_{Nji} , \dot{g}_{Nji} und \dot{g}_{Tji} werden durch

$$g_{NjV} = I\mathbf{r}_{jV,3}, \quad \dot{g}_{NjV} = I\dot{\mathbf{r}}_{jV,3}, \quad \dot{g}_{TjV} = I\dot{\mathbf{r}}_{jV,2}, \quad (\text{D.34})$$

$$g_{NjS} = I\mathbf{r}_{jS,3}, \quad \dot{g}_{NjS} = I\dot{\mathbf{r}}_{jS,3}, \quad \dot{g}_{TjS} = I\dot{\mathbf{r}}_{jS,1} \quad (\text{D.35})$$

aus der Kinematik der Kontaktpunkte (siehe Anhang B) berechnet.

Die eingepägten Momente berechnen sich aus den Versatzmomenten zu

$${}_I\mathbf{M}_{ei} = \sum_j (I\mathbf{r}_{ji} - I\mathbf{r}_{\text{COM}i}) \times {}_I\mathbf{F}_{ji}. \quad (\text{D.36})$$

Aus Gl. (D.32) folgt die Ableitung der eingepägten Kräfte zu

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{Gi}}{\partial \mathbf{x}_i} + \sum_j \frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\text{D.37})$$

mit den aus Gl. (D.33) resultierenden Anteilen

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{jV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial g_{NjV}} \frac{\partial g_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_{NjV}} \frac{\partial \dot{g}_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_{TjV}} \frac{\partial \dot{g}_{TjV}}{\partial \mathbf{x}_V} \\ \frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial g_{NjV}} \frac{\partial g_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} + \frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial \dot{g}_{NjV}} \frac{\partial \dot{g}_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.38})$$

$$\frac{\partial {}_I\mathbf{F}_{jS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial g_{NjS}} \frac{\partial g_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_{NjS}} \frac{\partial \dot{g}_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \frac{\partial f_{\text{cont}T}}{\partial \dot{g}_{TjS}} \frac{\partial \dot{g}_{TjS}}{\partial \mathbf{x}_S} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial g_{NjS}} \frac{\partial g_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} + \frac{\partial f_{\text{cont}N}}{\partial \dot{g}_{NjS}} \frac{\partial \dot{g}_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} \end{pmatrix} \quad (\text{D.39})$$

und der Ableitung der Schwerkraft aus Gl. (D.25). Die Ableitungen der Eingangsparameter

$$\frac{\partial g_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \left(\frac{\partial I\mathbf{r}_{jV}}{\partial \mathbf{x}_V} \right)_{3. \text{ Zeile}}, \quad \frac{\partial \dot{g}_{NjV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \left(\frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{jV}}{\partial \mathbf{x}_V} \right)_{3. \text{ Zeile}}, \quad \frac{\partial \dot{g}_{TjV}}{\partial \mathbf{x}_V} = \left(\frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{jV}}{\partial \mathbf{x}_V} \right)_{2. \text{ Zeile}}, \quad (\text{D.40})$$

$$\frac{\partial g_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \left(\frac{\partial I\mathbf{r}_{jS}}{\partial \mathbf{x}_S} \right)_{3. \text{ Zeile}}, \quad \frac{\partial \dot{g}_{NjS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \left(\frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{jS}}{\partial \mathbf{x}_S} \right)_{3. \text{ Zeile}}, \quad \frac{\partial \dot{g}_{TjS}}{\partial \mathbf{x}_S} = \left(\frac{\partial I\dot{\mathbf{r}}_{jS}}{\partial \mathbf{x}_S} \right)_{1. \text{ Zeile}} \quad (\text{D.41})$$

folgen aus Gl. (D.34) und Gl. (D.35), wobei $\frac{\partial I \mathbf{r}_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i}$ wiederum in Anhang B berechnet wurden. Aus Gl. (D.36) ergibt sich außerdem die Ableitung der eingepprägten Momente zu

$$\frac{\partial I \mathbf{M}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_j \left(\frac{\partial I \mathbf{r}_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial I \mathbf{r}_{COMi}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \times I \mathbf{F}_{ji} + (I \mathbf{r}_{ji} - I \mathbf{r}_{COMi}) \times \left(\frac{\partial I \mathbf{F}_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad (\text{D.42})$$

mit $\frac{\partial I \mathbf{r}_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i}$ und $\frac{\partial I \mathbf{r}_{COMi}}{\partial \mathbf{x}_i}$ aus Anhang B.

Explizite Darstellung von $\ddot{\mathbf{q}}_V$ bzw. $\ddot{\mathbf{q}}_S$

Für eine explizite Darstellung von $\ddot{\mathbf{q}}_i$ mit $i \in \{V, S\}$ werden die Terme $I \ddot{\mathbf{r}}_{COMi}$ und $I \dot{\mathbf{L}}_i$ in Gl. (D.1) aufgelöst, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & I \mathbf{J}_{Ti}^T \{ m [I \ddot{\mathbf{r}}_{Ti} + \mathbf{A}_{ITi} (T_i \ddot{\mathbf{r}}_{COMi} + T_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Ti} \times T_i \mathbf{r}_{COMi} \\ & + 2 T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \dot{\mathbf{r}}_{COMi} + T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times (T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \mathbf{r}_{COMi}))] - I \mathbf{F}_{ei} \} \\ & + I \mathbf{J}_{Ri}^T (I \dot{\boldsymbol{\theta}}_i I \boldsymbol{\omega}_{mi} + I \boldsymbol{\theta}_i I \dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi} - I \mathbf{M}_{ei}) \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

folgt, wobei mit \mathbf{A}_{ITi} , $I \boldsymbol{\omega}_{mi}$ aus Anhang B und Gl. (D.4) bzw. Gl. (D.12)

$$I \mathbf{J}_{Ri}^T I \dot{\boldsymbol{\theta}}_i I \boldsymbol{\omega}_{mi} = I \mathbf{J}_{Ri}^T \frac{d(\mathbf{A}_{ITi} T_i \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{A}_{ITi}^T)}{dt} I \boldsymbol{\omega}_{mi} = \begin{pmatrix} (\dot{\varphi}_i + T_i \dot{\beta}_i) \dot{\theta}_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{D.44})$$

gilt, da $\theta_V := \theta_{xx} = \text{konst.}$, $\theta_S := \theta_{yy} = \text{konst.}$ und damit $\dot{\theta}_i = 0$. Anschließend werden alle Terme mit Anteilen von $\ddot{\mathbf{q}}_i$ auf die linke Seite gebracht und aufgelöst wodurch

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i, t) \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_i, t) \quad (\text{D.45})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_V &= (\varphi_V, z_V, y_V)^T, \quad \mathbf{q}_S = (\varphi_S, z_S, x_S)^T, \\ \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i, t) &= \begin{pmatrix} \theta_i + m k_{i3} & m k_{i2} & m k_{i1} \\ m k_{i2} & m & 0 \\ m k_{i1} & 0 & m \end{pmatrix}, \\ \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_i, t) &= \begin{pmatrix} -\theta_i T_i \dot{\beta}_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I \mathbf{J}_{Ti}^T \{ I \mathbf{F}_{ei} - m \mathbf{A}_{ITi} [T_i \ddot{\mathbf{r}}_{COMi} \\ & + 2 T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \dot{\mathbf{r}}_{COMi} \\ & + T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times (T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \mathbf{r}_{COMi})] \} + I \mathbf{J}_{Ri}^T I \mathbf{M}_{ei} \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

sowie

$$k_{V3} := k_{V1}^2 + k_{V2}^2 = TV r_{COMV2}^2 + TV r_{COMV3}^2, \quad (\text{D.47})$$

$$k_{S3} := k_{S1}^2 + k_{S2}^2 = TS r_{COMS1}^2 + TS r_{COMS3}^2 \quad (\text{D.48})$$

und k_{i1} , k_{i2} aus Anhang B entsteht. Das Invertieren der Massenmatrix \mathbf{M}_i führt dann auf

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i, t)^{-1} \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_i, t) \quad (\text{D.49})$$

mit

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i, t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_i} & -\frac{k_{i2}}{\theta_i} & -\frac{k_{i1}}{\theta_i} \\ -\frac{k_{i2}}{\theta_i} & \frac{1}{m} + \frac{k_{i2}^2}{\theta_i} & \frac{k_{i1}k_{i2}}{\theta_i} \\ -\frac{k_{i1}}{\theta_i} & \frac{k_{i1}k_{i2}}{\theta_i} & \frac{1}{m} + \frac{k_{i1}^2}{\theta_i} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.50})$$

Ableitung der inversen Massenmatrix M_V^{-1} bzw. M_S^{-1} und des \mathbf{h} -Vektors \mathbf{h}_V bzw. \mathbf{h}_S

Mit $i \in \{V, S\}$ und den Ableitungen der Hilfsgrößen k_{i1} und k_{i2} aus Gl. (D.10) bzw. Gl. (D.18) ergibt sich für die inverse Massenmatrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_i^{-1}}{\partial x_{i1}} &= \frac{\partial \mathbf{M}_i^{-1}}{\partial \varphi_i} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\theta_i} \frac{\partial k_{i2}}{\partial \varphi_i} & -\frac{1}{\theta_i} \frac{\partial k_{i1}}{\partial \varphi_i} \\ -\frac{1}{\theta_i} \frac{\partial k_{i2}}{\partial \varphi_i} & \frac{2k_{i2}}{\theta_i} \frac{\partial k_{i2}}{\partial \varphi_i} & \frac{1}{\theta_i} \left(\frac{\partial k_{i1}}{\partial \varphi_i} k_{i2} + k_{i1} \frac{\partial k_{i2}}{\partial \varphi_i} \right) \\ -\frac{1}{\theta_i} \frac{\partial k_{i1}}{\partial \varphi_i} & \frac{1}{\theta_i} \left(\frac{\partial k_{i1}}{\partial \varphi_i} k_{i2} + k_{i1} \frac{\partial k_{i2}}{\partial \varphi_i} \right) & \frac{2k_{i1}}{\theta_i} \frac{\partial k_{i1}}{\partial \varphi_i} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_i^{-1}}{\partial x_{ij}} &= \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Für eine übersichtliche Darstellung der Ableitung des \mathbf{h} -Vektors aus Gl. (D.46) wird dieser in die Einzelterme

$$\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^4 \mathbf{T}_{hij}, \quad \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \mathbf{T}_{hij}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\text{D.52})$$

mit

$$\mathbf{T}_{hi1} := \begin{pmatrix} -\theta_i T_i \ddot{\beta}_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{hi2} := {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T {}_I \mathbf{F}_{ei}, \quad \mathbf{T}_{hi4} := {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T {}_I \mathbf{M}_{ei}, \quad (\text{D.53})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{hi3} &:= -m {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{A}_{ITi} [T_i \ddot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i} + 2 T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \dot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i} \\ &\quad + T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times (T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \mathbf{r}_{\text{COM}i})]. \end{aligned}$$

zerlegt. Daraus folgen dann (mit den Jacobimatrizen und eingepägten Kräften und Momenten der vorherigen Abschnitte) die Teilableitungen für \mathbf{T}_{hi1} , \mathbf{T}_{hi2} und \mathbf{T}_{hi4} zu

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{hi1}}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.54})$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{hi2}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial ({}_I \mathbf{J}_{Ti}^T {}_I \mathbf{F}_{ei})}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_I \mathbf{F}_{ei} \right] + {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{F}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} \right), \quad (\text{D.55})$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{hi4}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial ({}_I \mathbf{J}_{Ri}^T {}_I \mathbf{M}_{ei})}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ {}_I \mathbf{M}_{ei} \right] + {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{M}_{ei}}{\partial \mathbf{x}_i} \right). \quad (\text{D.56})$$

Für die Ableitung des Terms \mathbf{T}_{hi3} wird die Abkürzung

$$\mathbf{T}_{hi3} = -m \mathbf{D}_i \mathbf{d}_i, \quad (\text{D.57})$$

$$\mathbf{D}_i := {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{A}_{ITi}, \quad (\text{D.58})$$

$$\mathbf{d}_i := T_i \ddot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i} + 2 T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \dot{\mathbf{r}}_{\text{COM}i} + T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times (T_i \boldsymbol{\omega}_{Ti} \times T_i \mathbf{r}_{\text{COM}i}) \quad (\text{D.59})$$

verwendet. Daraus folgt analog zu \mathbf{T}_{hi2} und \mathbf{T}_{hi4}

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{hi3}}{\partial \mathbf{x}_i} = -m \frac{\partial (\mathbf{D}_i \mathbf{d}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = -m \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \circ \mathbf{d}_i \right] + \mathbf{D}_i \left(\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \right\}. \quad (\text{D.60})$$

Die Ableitungen von \mathbf{D}_i und \mathbf{d}_i lauten dabei in der Vorderansicht (mit $i = V$)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_V &= \begin{pmatrix} 0 & TVrCOMV,3 & -TVrCOMV,2 \\ 0 & -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \\ 0 & \cos(\varphi_V) & \sin(\varphi_V) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}_V}{\partial x_{V1}} &= \frac{\partial \mathbf{D}_V}{\partial \varphi_V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\varphi_V) & -\sin(\varphi_V) \\ 0 & -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}_V}{\partial x_{Vj}} &= \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_V &= TV\ddot{\mathbf{r}}_{COMV} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\dot{\varphi}_V TV\dot{r}_{COMV,3} - \dot{\varphi}_V^2 TVr_{COMV,2} \\ -2\dot{\varphi}_V TV\dot{r}_{COMV,2} - \dot{\varphi}_V^2 TVr_{COMV,3} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{d}_V}{\partial \mathbf{x}_V} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2TV\dot{r}_{COMV,3} - 2\dot{\varphi}_V TVr_{COMV,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2TV\dot{r}_{COMV,2} - 2\dot{\varphi}_V TVr_{COMV,3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

und in der Seitenansicht (mit $i = S$)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_S &= \begin{pmatrix} TSrCOMS,3 & 0 & -TSrCOMS,1 \\ -\sin(\varphi_S) & 0 & \cos(\varphi_S) \\ \cos(\varphi_S) & 0 & \sin(\varphi_S) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}_S}{\partial x_{S1}} &= \frac{\partial \mathbf{D}_S}{\partial \varphi_S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\varphi_S) & 0 & -\sin(\varphi_S) \\ -\sin(\varphi_S) & 0 & \cos(\varphi_S) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}_S}{\partial x_{Sj}} &= \mathbf{0} \quad \text{mit } j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_S &= TS\ddot{\mathbf{r}}_{COMS} + \begin{pmatrix} 2\dot{\varphi}_S TS\dot{r}_{COMS,3} - \dot{\varphi}_S^2 TSr_{COMS,1} \\ 0 \\ -2\dot{\varphi}_S TS\dot{r}_{COMS,1} - \dot{\varphi}_S^2 TSr_{COMS,3} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{d}_S}{\partial \mathbf{x}_S} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2TS\dot{r}_{COMS,3} - 2\dot{\varphi}_S TSr_{COMS,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2TS\dot{r}_{COMS,1} - 2\dot{\varphi}_S TSr_{COMS,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

Anhang E

Aufbereitung von Sensordaten

Die Aufbereitung von Sensordaten stellt eine wichtige Schnittstelle zwischen dem neu entwickelten Zustandsschätzer und dem bestehenden Projektcode dar. Die von der Steuerungssoftware des Roboters bereitgestellten Messgrößen werden dabei für die Verwendung bei der Sensordatenfusion vorbereitet.

Transformation der IMS-Daten

Die Messung des Systemzustands erfolgt durch das im Oberkörper des Roboters starr montierte IMS. Die hierbei ermittelten Größen stellen die translatorische und rotatorische Bewegung des IMS-Koordinatensystems (Index „IMS“) relativ zum inertialfesten I -System dar.

Die Beschreibung der Rotation weicht dabei von den gängigen Konventionen (z. B. EULER- oder KARDAN-Winkel) ab: Die Neigung um die horizontalen Achsen wird mit $\varphi_{\text{IMS},-x}$ und $\varphi_{\text{IMS},+y}$ von der z_I -Achse aus gemessen, während φ_z den Winkel zwischen den x -Achsen um die positive z_I -Achse darstellt.

Aufgrund schlechter Messergebnisse für die Drehung um die z_I -Achse wird der Winkel φ_z im Gegensatz zu $\varphi_{\text{IMS},-x}$ und $\varphi_{\text{IMS},+y}$ nicht aus der Messung, sondern aus der Vorgabe des Planungsprozesses bestimmt. Da die Drehungen um die horizontalen Achsen im Normalfall sehr klein sind, kann φ_z näherungsweise auch als Winkel zwischen der y_I - und y_{IMS} -Achse betrachtet werden. Bild E.1 veranschaulicht die Konvention für den Fall $\varphi_{\text{IMS},-x} = 20^\circ$, $\varphi_{\text{IMS},+y} = 10^\circ$ und $\varphi_z = 10^\circ$.

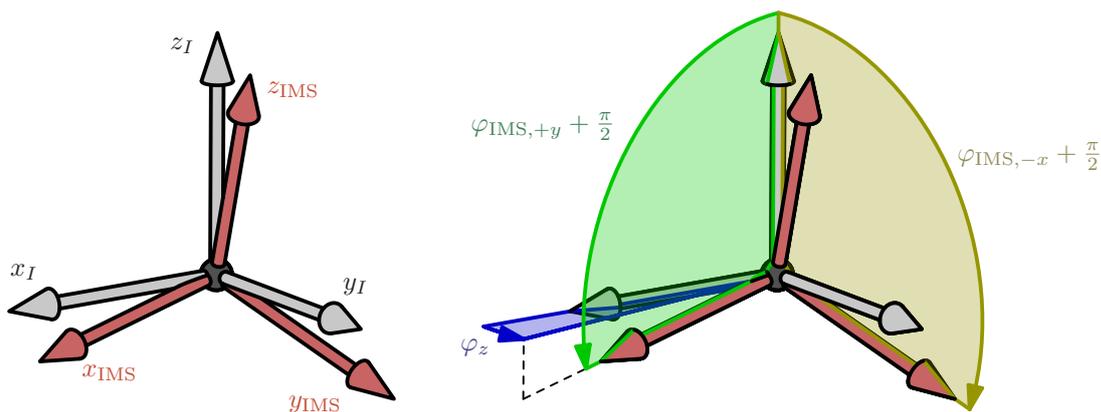


Bild E.1: Orientierung des IMS-Koordinatensystems relativ zum I -System. Der Versatz zwischen den Ursprüngen ist nicht dargestellt.

Die Daten für die translatorischen Beschleunigungen liegen im IMS-System vor und müssen deshalb auch transformiert werden. Tabelle E.1 fasst die Messgrößen des IMS vor der Transformation zusammen.

Tabelle E.1: Messgrößen des IMS vor der Transformation.

Messgröße	Einheit	Bedeutung
$\varphi_{\text{IMS},-x}, \dot{\varphi}_{\text{IMS},-x}$	rad, rad/s	Drehung um die negative x -Achse
$\varphi_{\text{IMS},+y}, \dot{\varphi}_{\text{IMS},+y}$	rad, rad/s	Drehung um die positive y -Achse
\ddot{x}_{IMS}	m/s ²	Beschleunigung in x_{IMS} -Richtung
\ddot{y}_{IMS}	m/s ²	Beschleunigung in y_{IMS} -Richtung
\ddot{z}_{IMS}	m/s ²	Beschleunigung in z_{IMS} -Richtung

Um die Sensordaten bei der Zustandsschätzung verwenden zu können, müssen diese in die Vorder- und Seitenansicht projiziert werden. Dazu wird die Lage des IMS-Systems in den Ebenen XZ, YZ und XY betrachtet (Bild E.2).

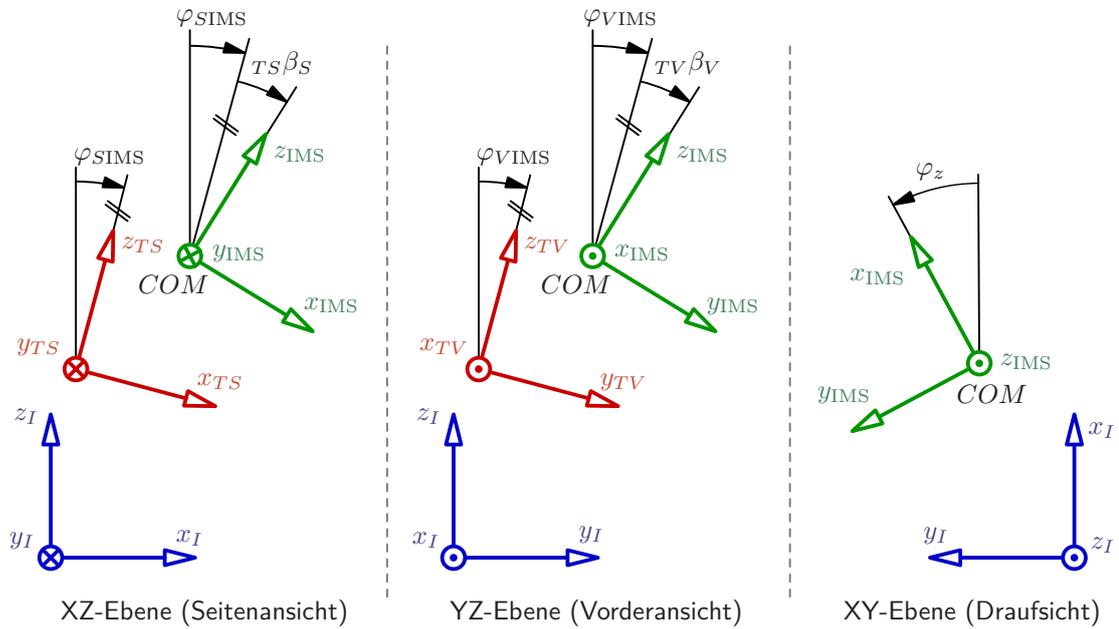


Bild E.2: Lage des IMS-Systems in Seitenansicht (links), Vorderansicht (Mitte) und Draufsicht (rechts).

Verdrehungen außerhalb der jeweiligen Ebene werden in Bild E.2 vernachlässigt. Die Annahme $\varphi_z = 0$ stellt in der XZ- und YZ-Ebene aufgrund der besonderen Winkelkonvention keine Näherung dar.

Der Vergleich von Bild E.1 mit Bild E.2 liefert für die Rotation des Planungskoordinatensystems (TV bzw. TS)

$$\varphi_{\text{VIMS}} = \varphi_{\text{IMS},-x} - TV\beta_V, \quad (\text{E.1})$$

$$\varphi_{\text{SIMS}} = \varphi_{\text{IMS},+y} - TS\beta_S. \quad (\text{E.2})$$

Die Rotationsgeschwindigkeit folgt damit zu

$$\dot{\varphi}_{\text{VIMS}} = \dot{\varphi}_{\text{IMS},-x} - TV\dot{\beta}_V, \quad (\text{E.3})$$

$$\dot{\varphi}_{\text{SIMS}} = \dot{\varphi}_{\text{IMS},+y} - TS\dot{\beta}_S. \quad (\text{E.4})$$

Um die Beschleunigung der Planungskoordinatensysteme zu bestimmen, müssen \ddot{x}_{IMS} , \ddot{y}_{IMS} und \ddot{z}_{IMS} erst in das I -System gedreht werden. Dies erfolgt durch die Transformationsmatrix

$$\mathbf{A}_{IIMS} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Auf eine Drehung um die x - oder y -Achse wird aufgrund der normalerweise kleinen Beträge von $\varphi_{IMS,-x}$ und $\varphi_{IMS,+y}$ verzichtet. Unter der Annahme, dass sich das IMS im Schwerpunkt des Roboters befindet, folgt mit Gl. (B.15) für die Vorderansicht

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{VIMS} \\ \ddot{y}_{VIMS} \\ \ddot{z}_{VIMS} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{IIMS} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{IMS} \\ \ddot{y}_{IMS} \\ \ddot{z}_{IMS} \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{ITV} (TV\ddot{\mathbf{r}}_{COMV} + TV\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} \times TV\mathbf{r}_{COMV} \\ + 2TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times TV\dot{\mathbf{r}}_{COMV} + TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times (TV\boldsymbol{\omega}_{TV} \times TV\mathbf{r}_{COMV})) \quad (\text{E.6})$$

und mit Gl. (B.35) für die Seitenansicht

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{SIMS} \\ \ddot{y}_{SIMS} \\ \ddot{z}_{SIMS} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{IIMS} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{IMS} \\ \ddot{y}_{IMS} \\ \ddot{z}_{IMS} \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{ITS} (TS\ddot{\mathbf{r}}_{COMS} + TS\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} \times TS\mathbf{r}_{COMS} \\ + 2TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times TS\dot{\mathbf{r}}_{COMS} + TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times (TS\boldsymbol{\omega}_{TS} \times TS\mathbf{r}_{COMS})). \quad (\text{E.7})$$

Die Komponenten \ddot{x}_{VIMS} und \ddot{y}_{SIMS} finden durch die ebene Betrachtungsweise in den mechanischen Modellen keine weitere Verwendung.

Um Fehler durch die Projektion zu verringern und eine einheitliche Messung für die Beschleunigung in z_I -Richtung sicherzustellen, wird mit

$$\ddot{z}_{VIMS} = \ddot{z}_{SIMS} = \gamma \ddot{z}_{VIMS} + (1 - \gamma) \ddot{z}_{SIMS} \quad (\text{E.8})$$

eine Gewichtung durch den Parameter $\gamma \in [0, 1]$ eingeführt. Dies hat eine geringfügige Kopplung der beiden Modellebenen zur Folge.

Da die Transformation mit

$$TV\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} = \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad TS\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

neben dem aktuellen Zustandsvektor und den Idealtrajektorien auch von der Winkelbeschleunigung abhängt, müssen zur Lösung von Gl. (E.6) bzw. Gl. (E.7) die Bewegungsgleichungen ausgewertet werden. $\ddot{\varphi}_V$ und $\ddot{\varphi}_S$ können dazu ohne Mehraufwand aus dem Prädiktionsschritt des KALMAN-Filters (siehe Kapitel 3) entnommen werden. Die Berücksichtigung der Winkelbeschleunigungen führte in Versuchen zu einer Verschlechterung der Schätzergebnisse, weshalb stattdessen für Gl. (E.6) und Gl. (E.7) $TV\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TV} = TS\dot{\boldsymbol{\omega}}_{TS} = \mathbf{0}$ angenommen wird.

Durch die beschriebene Transformation der IMS-Daten ergeben sich die für die Filterung vorbereiteten Messgrößen

$$\begin{aligned} \varphi_{IMS,-x}, \dot{\varphi}_{IMS,-x} &\Rightarrow \varphi_{VIMS}, \dot{\varphi}_{VIMS}, \\ \varphi_{IMS,+y}, \dot{\varphi}_{IMS,+y} &\Rightarrow \varphi_{SIMS}, \dot{\varphi}_{SIMS}, \\ \ddot{x}_{IMS}, \ddot{y}_{IMS}, \ddot{z}_{IMS} &\Rightarrow \ddot{x}_{SIMS}, \ddot{y}_{VIMS}, \ddot{z}_{VIMS}, \ddot{z}_{SIMS}, \end{aligned}$$

wobei nach Gl. (E.8) $\ddot{z}_{VIMS} = \ddot{z}_{SIMS}$ gilt.

Transformation der KMS-Daten

Um die Daten der Kraft-Moment-Sensoren als Systemeingang nutzen zu können, müssen diese vom sensoreigenen Koordinatensystem in das Planungskoordinatensystem (TV bzw. TS) transformiert werden. Dazu dienen die von der Steuerungssoftware des Roboters bereitgestellten Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_{T,KMSK}$ und $\mathbf{A}_{T,KMSL}$. Die Matrix $\mathbf{A}_{T,KMSK}$ beschreibt dabei die Drehung vom Sensorsystem („KMS“) des rechten Fußes („K“) in das Planungskoordinatensystem („T“).

Für die gemessenen Kräfte und Momente gilt damit

$${}^T\mathbf{F}_K = -(\mathbf{A}_{T,KMSK})(KMSK\mathbf{F}_K), \quad {}^T\mathbf{F}_L = -(\mathbf{A}_{T,KMSL})(KMSL\mathbf{F}_L), \quad (\text{E.10})$$

$${}^T\mathbf{M}_K = -(\mathbf{A}_{T,KMSK})(KMSK\mathbf{M}_K), \quad {}^T\mathbf{M}_L = -(\mathbf{A}_{T,KMSL})(KMSL\mathbf{M}_L). \quad (\text{E.11})$$

Das negative Vorzeichen sorgt dafür, dass die Kräfte und Momente des Fußes auf den Roboter verwendet werden und nicht umgekehrt. Durch Streichen der nicht verwendeten Komponenten folgen die in das TV -bzw. TS -System transformierten KMS-Daten zu

$${}^{TV}\mathbf{F}_{KV} = \left(0, {}^TF_{K,2}, {}^TF_{K,3}\right)^T, \quad {}^{TV}\mathbf{F}_{LV} = \left(0, {}^TF_{L,2}, {}^TF_{L,3}\right)^T, \quad (\text{E.12})$$

$${}^{TS}\mathbf{F}_{KS} = \left({}^TF_{K,1}, 0, {}^TF_{K,3}\right)^T, \quad {}^{TS}\mathbf{F}_{LS} = \left({}^TF_{L,1}, 0, {}^TF_{L,3}\right)^T, \quad (\text{E.13})$$

$${}^{TV}\mathbf{M}_{KV} = \left({}^TM_{K,1}, 0, 0\right)^T, \quad {}^{TV}\mathbf{M}_{LV} = \left({}^TM_{L,1}, 0, 0\right)^T, \quad (\text{E.14})$$

$${}^{TS}\mathbf{M}_{KS} = \left(0, {}^TM_{K,2}, 0\right)^T, \quad {}^{TS}\mathbf{M}_{LS} = \left(0, {}^TM_{L,2}, 0\right)^T. \quad (\text{E.15})$$

Berechnung der virtuellen KMS-Daten

Für einen Vergleich der Kontaktkräfte des Modells mit den gemessenen Daten der Kraft-Moment-Sensoren werden *virtuelle* KMS-Daten eingeführt. Diese lassen sich aus den Kräften der Punkte A , B , C und D und deren Versatzmomenten berechnen:

$${}^I\mathbf{F}_{Ki,\text{virt}} = {}^I\mathbf{F}_{Ai} + {}^I\mathbf{F}_{Bi}, \quad (\text{E.16})$$

$${}^I\mathbf{F}_{Li,\text{virt}} = {}^I\mathbf{F}_{Ci} + {}^I\mathbf{F}_{Di}, \quad (\text{E.17})$$

$${}^I\mathbf{M}_{Ki,\text{virt}} = ({}^I\mathbf{r}_{Ai} - {}^I\mathbf{r}_{Ki}) \times {}^I\mathbf{F}_{Ai} + ({}^I\mathbf{r}_{Bi} - {}^I\mathbf{r}_{Ki}) \times {}^I\mathbf{F}_{Bi}, \quad (\text{E.18})$$

$${}^I\mathbf{M}_{Li,\text{virt}} = ({}^I\mathbf{r}_{Ci} - {}^I\mathbf{r}_{Li}) \times {}^I\mathbf{F}_{Ci} + ({}^I\mathbf{r}_{Di} - {}^I\mathbf{r}_{Li}) \times {}^I\mathbf{F}_{Di}. \quad (\text{E.19})$$

Mit $i \in \{V, S\}$ gelten die Gleichungen sowohl für die Vorder- als auch für die Seitenansicht. Die Kräfte ${}^I\mathbf{F}_{Ai}$, ${}^I\mathbf{F}_{Bi}$, ${}^I\mathbf{F}_{Ci}$ und ${}^I\mathbf{F}_{Di}$ werden durch Gl. (D.33) festgelegt.

Durch die Drehung

$${}^{Ti}\mathbf{F}_{Ki,\text{virt}} = \mathbf{A}_{TiI} {}^I\mathbf{F}_{Ki,\text{virt}}, \quad (\text{E.20})$$

$${}^{Ti}\mathbf{F}_{Li,\text{virt}} = \mathbf{A}_{TiI} {}^I\mathbf{F}_{Li,\text{virt}}, \quad (\text{E.21})$$

$${}^{Ti}\mathbf{M}_{Ki,\text{virt}} = \mathbf{A}_{TiI} {}^I\mathbf{M}_{Ki,\text{virt}}, \quad (\text{E.22})$$

$${}^{Ti}\mathbf{M}_{Li,\text{virt}} = \mathbf{A}_{TiI} {}^I\mathbf{M}_{Li,\text{virt}}, \quad (\text{E.23})$$

wobei $\mathbf{A}_{TiI} = \mathbf{A}_{ITi}^T$ gilt, können die virtuellen KMS-Daten im jeweiligen Planungskoordinatensystem dargestellt werden.

Anhang F

Parameterwahl

Die Systemparameter in Tabelle F.1 sind weitgehend der Steuerungssoftware des Roboters entnommen. Für die Fußlängen sowie die Versatzkoordinaten der KMS-Messpunkte wurden die Konstruktionsdaten des Systems herangezogen. Die Fußbreite und -länge ist jeweils von den äußeren Eckpunkten der vier Drucksensoren am Fuß aus gemessen. Start- und Endzeitpunkt definieren das Zeitintervall eines Versuchs und unterscheiden sich durch eine Nullpunktverschiebung von der Systemzeit des Roboters.

Tabelle F.1: Systemparameter.

Parameter	Wert	Bedeutung
g	9.81 m/s^2	Erdbeschleunigung
m	60.885 kg	Roboter­masse
$\theta_{xx} = \theta_V$	10.66 kgm^2	Massenträgheitsmoment um die x_I -Achse
$\theta_{yy} = \theta_S$	10.66 kgm^2	Massenträgheitsmoment um die y_I -Achse
b_1	110 mm	Fußbreite (inneres Teilstück)
b_2	110 mm	Fußbreite (äußeres Teilstück)
l_1	235 mm	Fußlänge (hinteres Teilstück)
l_2	45 mm	Fußlänge (vorderes Teilstück)
u	-105 mm	Versatz­koordinate der KMS-Messpunkte
v	0 mm	Versatz­koordinate der KMS-Messpunkte
w	38 mm	Versatz­koordinate der KMS-Messpunkte
t_0	0 s	Startzeitpunkt des Versuchs
t_e	10 s	Endzeitpunkt des Versuchs
Δt	2 ms	Zeitschrittweite (entspricht 500 Hz)

Für die Parameter des Kontaktmodells wurde mit Hilfe der MATLAB-Simulation (Abschnitt 2.5) eine sinnvolle Wahl getroffen (Tabelle F.2).

Tabelle F.2: Parametrierung des Kontaktmodells.

Parameter	Wert	Bedeutung
c_{cont}	$3 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	Federsteifigkeit
d_{cont}	$2.4 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}$	Dämpfungskonstante
μ_0	1	Reibkoeffizient der Paarung Fuß-Umgebung
$g_{N_{\text{grenz}}}$	2 mm	Grenzwert für Übergangsbereich (Feder)
$\dot{g}_{N_{\text{grenz}}}$	3 mm/s	Grenzwert für Übergangsbereich (Dämpfer)
g_{N1}	-2 mm	Schwellwert für Schaltfunktion σ_d
g_{N2}	-4 mm	Schwellwert für Schaltfunktion σ_d
g_{N3}	-6 mm	Schwellwert für Schaltfunktion σ_d
κ	10^3	Parameter für Hilfsreibungskraft μ
n	10	Parameter für Hilfsreibungskraft μ

Federsteifigkeit, Dämpfungskonstante und Reibkoeffizient sind an die Parameter der Simulationsumgebung des Roboters angelehnt, wobei für die Dämpfung d_{cont} der 1.5-fache Wert verwendet wird.

Die Parametrierung des Zustandsschätzers ist in Tabelle F.3 dargestellt. Da eine implizite Zeitintegration neben einer deutlichen Erhöhung der Rechenzeit keinen nennenswerten Einfluss auf das Schätzergebnis hat, wird mit $\theta = 0$ das explizite EULER-Verfahren verwendet.

Tabelle F.3: Parametrierung des Zustandsschätzers.

Parameter	Wert	Bedeutung
θ	0	explizites EULER-Verfahren (für Prädiktion)
γ	0.5	Gewichtung von Vorder- und Seitenansicht bei der Bestimmung von Größen in z_I -Richtung

Die Startwerte der Zustandsvektoren \mathbf{x}_{V0} und \mathbf{x}_{S0} werden für Versuche in der Simulationsumgebung (Index „sim“) und am realen System (Index „real“) unterschiedlich gewählt:

$$\mathbf{x}_{V0,\text{sim}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ rad} \\ 0.020 \text{ m} \\ 0.137 \text{ m} \\ 0 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{S0,\text{sim}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ rad} \\ 0.020 \text{ m} \\ -0.045 \text{ m} \\ 0 \text{ rad/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.1})$$

$$\mathbf{x}_{V0,\text{real}} = \begin{pmatrix} \varphi_{VIMS,0} \\ -0.235 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ \dot{\varphi}_{VIMS,0} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{S0,\text{real}} = \begin{pmatrix} \varphi_{SIMS,0} \\ -0.235 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ \dot{\varphi}_{SIMS,0} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2})$$

In den Tabellen (F.5 bis F.7) sind die für die Filterung verwendeten Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} sowie die Belegung von \mathbf{P} zum Zeitpunkt t_0 aufgelistet. Diese haben stets Diagonalf orm und müssen je nach Modell und Einsatzgebiet unterschiedlich gewählt werden. Q_{ii} steht dabei z. B. für den Eintrag in i -ter Zeile und i -ter Spalte von \mathbf{Q} . Für eine übersichtliche Darstellung werden die Abkürzungen aus Tabelle F.4 verwendet.

Tabelle F.4: Abkürzungen für Modellierung und Einsatzgebiet.

Abkürzung	Bedeutung
„SIM“	Verwendung in Simulationsumgebung
„REAL“	Verwendung am realen System
„KMS“	System unter Verwendung der KMS
„KON“	System mit modelliertem Kontakt
„ACC“	Messung der Beschleunigungen mit z_{acc} (Fall 1)
„FULL“	Messung des vollständigen Systemzustandes mit z_{full} (Fall 2)
„V“	in der Vorderansicht (YZ-Ebene)
„S“	in der Seitenansicht (XZ-Ebene)

Tabelle F.5: Wahl der Kovarianzmatrix Q (Prozessrauschen).

Modell/Einsatzgebiet	Q_{11}	Q_{22}	Q_{33}	Q_{44}	Q_{55}	Q_{66}
SIM, KON, FULL, V	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$
SIM, KON, FULL, S	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$
SIM, KON, ACC, V	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$
SIM, KON, ACC, S	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$
SIM, KMS, FULL, V	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
SIM, KMS, FULL, S	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
SIM, KMS, ACC, V	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
SIM, KMS, ACC, S	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
REAL, KON, FULL, V	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-6}$
REAL, KON, FULL, S	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^0$	$3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-5}$
REAL, KON, ACC, V	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
REAL, KON, ACC, S	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$
REAL, KMS, FULL, V	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^1$
REAL, KMS, FULL, S	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^1$
REAL, KMS, ACC, V	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$
REAL, KMS, ACC, S	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$

Tabelle F.6: Wahl der Kovarianzmatrix R (Messrauschen).

Modell/Einsatzgebiet	R_{11}	R_{22}	R_{33}	R_{44}	R_{55}	R_{66}
SIM, KON, FULL, V	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$7 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$
SIM, KON, FULL, S	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$
SIM, KON, ACC, V	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^1$		
SIM, KON, ACC, S	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^1$		
SIM, KMS, FULL, V	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
SIM, KMS, FULL, S	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
SIM, KMS, ACC, V	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$		
SIM, KMS, ACC, S	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$		
REAL, KON, FULL, V	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$
REAL, KON, FULL, S	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$
REAL, KON, ACC, V	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^1$		
REAL, KON, ACC, S	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^1$		
REAL, KMS, FULL, V	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
REAL, KMS, FULL, S	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
REAL, KMS, ACC, V	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^3$		
REAL, KMS, ACC, S	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^3$		

Tabelle F.7: Belegung von P zum Zeitpunkt t_0 (Kovarianzmatrix des Schätzfehlers).

Modell/Einsatzgebiet	$P_{0,11}$	$P_{0,22}$	$P_{0,33}$	$P_{0,44}$	$P_{0,55}$	$P_{0,66}$
SIM, V	$1 \cdot 10^{-6}$					
SIM, S	$1 \cdot 10^{-6}$					
REAL, V	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$
REAL, S	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Prinzipiskizze zu den Freiheitsgraden eines Laufroboters (ebener Fall).	1
1.2	Modell eines inversen Pendels.	3
2.1	Foto des Laufroboters und schematische Darstellung der aktuierten Freiheitsgrade.	5
2.2	Kraft-Moment-Sensor und Inertiales Messsystem.	6
2.3	Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS.	7
2.4	Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt.	8
2.5	Schema der hybriden Kraft-/Positionsregelung.	9
2.6	Nichtglattes Kontaktmodell.	10
2.7	Modellierung der Normalenrichtung als Feder-Dämpfer-System.	11
2.8	Schaltfunktion σ_d und kombinierte Dämpferkraft F_d .	11
2.9	Idealer und regularisierter Hilfsreibwert.	12
2.10	Visualisierung des mechanischen Modells in MATLAB-GUI.	15
2.11	MATLAB-Simulation: stabile Bewegung in der XZ-Ebene.	16
2.12	MATLAB-Simulation: Aufschaukeln in der YZ-Ebene.	16
3.1	Schematische Darstellung der Strecke mit erweitertem KALMAN-Filter.	20
3.2	Vorgehensweise bei der Sensordatenfusion für den Laufroboter.	24
3.3	Ablauf beim Standbeinwechsel in einer Linkskurve (Draufsicht).	25
3.4	Schematische Darstellung des Gesamt Ablaufs der Zustandsschätzung.	27
3.5	Ablauf der Sensordatenfusion innerhalb der <i>update()</i> -Funktion.	28
4.1	Simulationsergebnisse unter Verwendung der KMS.	30
4.2	Simulationsergebnisse bei modelliertem Kontakt.	31
4.3	Simulationsergebnisse im Langzeitversuch (auf der Stelle stampfender Roboter).	32
4.4	Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_V$ am realen System (mit modelliertem Kontakt).	33
4.5	Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_S$ am realen System.	33
4.6	Geschätzte Schwerpunktsbewegung des Roboters (vertikaler Freiheitsgrad).	34
4.7	Geschätzte Schwerpunktsbewegung des Roboters (horizontale Freiheitsgrade).	35
4.8	Verlauf von V für reines Stampfen mit großem Zeithorizont.	35
4.9	Folgeverhalten von $\hat{\varphi}_V$ für reines Stampfen mit großem Zeithorizont.	36
4.10	Verlauf von \hat{x}_S und \hat{x}_S für reines Stampfen mit großem Zeithorizont.	36
4.11	Verhalten von $\hat{\varphi}_S$, $I\hat{r}_{COM,x}$ und $I\hat{r}_{COM,y}$ bei gekrümmter Laufbahn.	37
4.12	Vergleich von gemessenen und virtuellen KMS-Daten (linker Fuß).	38
4.13	Simulationsergebnisse bei impulsartiger Störung.	40
4.14	Verhalten von $\hat{\varphi}_S$ und $I\hat{r}_{COM,z}$ bei Stößen am realen System (reines Stampfen).	40
4.15	Verhalten von $I\hat{r}_{COM,z}$ bei unebenem Terrain am realen System.	41
4.16	Verlauf der Oberkörperneigung im Vergleich mit dem bestehenden Verfahren.	42
4.17	Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit im Vergleich mit dem bestehenden Verfahren.	42
B.1	Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS in der Vorderansicht.	50
B.2	Versatz der Punkte K und L in der YZ-Ebene.	50
B.3	Mechanisches Modell unter Verwendung der KMS in der Seitenansicht.	53
B.4	Versatz der Punkte K und L in der XZ-Ebene.	53
B.5	Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt in der Vorderansicht.	56
B.6	Mechanisches Modell mit modelliertem Kontakt in der Seitenansicht.	60
C.1	Funktionskomposition der Federkraft, Dämpferkraft und Schaltfunktion.	66
C.2	Verlauf des Hilfsreibwerts μ in Abhängigkeit von κ und n .	70

E.1	Orientierung des IMS-Koordinatensystems relativ zum I -System.	81
E.2	Lage des IMS-Systems in Seitenansicht, Vorderansicht und Draufsicht.	82

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter der MATLAB-Simulation.	15
A.1	Notation.	45
B.1	Gegebene Größen für die Berechnung der Kinematik.	49
C.1	Kontaktparameter.	65
E.1	Messgrößen des IMS vor der Transformation.	82
F.1	Systemparameter.	85
F.2	Parametrierung des Kontaktmodells.	85
F.3	Parametrierung des Zustandsschätzers.	86
F.4	Abkürzungen für Modellierung und Einsatzgebiet.	86
F.5	Wahl der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} (Prozessrauschen).	87
F.6	Wahl der Kovarianzmatrix \mathbf{R} (Messrauschen).	87
F.7	Belegung von \mathbf{P} zum Zeitpunkt t_0 (Kovarianzmatrix des Schätzfehlers).	87

Literatur

- [1] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 2. Aufl. Berlin : Springer Vieweg, 2014. – ISBN 978-3-642-45012-9
- [2] BUSCHMANN, T. ; FAVOT, V. ; LOHMEIER, S. ; SCHWIENBACHER, M. ; ULBRICH, H.: Experiments in Fast Biped Walking. In: *2011 IEEE International Conference on Mechatronics*, Ieee, April 2011, S. 863–868
- [3] BÖGE, A.: *Technische Mechanik*. 28. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2009. – ISBN 978-3-8348-0747-2
- [4] CHUI, C. ; CHEN, G.: *Kalman Filtering*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 1999. – ISBN 978-3-540-64611-2
- [5] FAVOT, V. ; BUSCHMANN, T. ; SCHWIENBACHER, M. ; EWALD, A. ; ULBRICH, H.: The Sensor-Controller Network of the Humanoid Robot LOLA. In: *2012 12th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, Ieee, November 2012, S. 805–810
- [6] HÜBNER, G.: *Stochastik*. 3. Aufl. Wiesbaden : Vieweg, 2002. – ISBN 978-3-528-25443-8
- [7] ISERMANN, R. ; MÜNCHHOF, M.: *Identification of Dynamic Systems*. Berlin : Springer, 2011. – ISBN 978-3-540-78878-2
- [8] KALMAN, R.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *ASME - Journal of Basic Engineering* 82 (1960), März, S. 35–45
- [9] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. 8. Aufl. Berlin : Springer Vieweg, 2014. – ISBN 978-3-642-53943-5
- [10] PFEIFFER, F. ; SCHINDLER, T.: *Einführung in die Dynamik*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 2014. – ISBN 978-3-642-41045-1
- [11] STEPHENS, B.: State Estimation for Force-Controlled Humanoid Balance using Simple Models in the Presence of Modeling Error. In: *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Ieee, Mai 2011, S. 3994–3999
- [12] STEPHENS, B. ; ATKESON, C.: Push Recovery by Stepping for Humanoid Robots with Force Controlled Joints. In: *2010 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, Ieee, Dezember 2010, S. 52–59
- [13] WITTMANN, R. ; HILDEBRANDT, A.-C. ; EWALD, A. ; BUSCHMANN, T.: An Estimation Model for Footstep Modifications of Biped Robots. In: *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Ieee, September 2014, S. 2572–2578

- [14] WITTMANN, R. ; HILDEBRANDT, A.-C. ; WAHRMANN, D. ; BUSCHMANN, T. ; RIXEN, D.: State Estimation for Biped Robots Using Multibody Dynamics (eingereicht). In: *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Ieee, 2015
- [15] XINJILEFU, X ; FENG, S. ; ATKESON, C.: Dynamic State Estimation using Quadratic Programming. In: *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Ieee, September 2014, S. 989–994
- [16] ZEIDLER, E.: *Taschenbuch der Mathematik*. 3. Aufl. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2013. – ISBN 978-3-8351-0123-4

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form – auch auszugsweise – noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegt worden.

Garching, Juni 2015

(Unterschrift)