150 Jahre
culture of
excellence

TUM

TUM Taller de Matemáticas 2018

5 al 10 de octubre de 2018
Medellín, Colombia

Technical University of Munich
TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Chair of Mathematics Education

En cooperación con:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Deutsches Museum

SIEMENS | Stiftung

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos

Heinz Nixdorf Stiftung

Frank Reinhold, Stefan Hoch, Bernhard Werner,
Jürgen Richter-Gebert, Kristina Reiss

El uso de los medios digitales en las clases de matemáticas

Taller de matemáticas

Versión en español

Technical University of Munich

TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Chair of Mathematics Education

Arcisstraße 21
80333 Munich, Germany

www.ma.edu.tum.de
frank.reinhold@tum.de

En cooperación con:

Universidad de Antioquia, Colombia
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia
Universidad Technical University of Munich, Alemania
Museo Deutsches Museum, Alemania
Fundación Siemens Stiftung, Alemania
Fundación Heinz Nixdorf Stiftung, Alemania

Citar como:
Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., Reiss, K. (2018). *El uso de los medios digitales en las clases de matemáticas. Taller de matemáticas* (Versión en español). Múnich, Alemania: Technical University of Munich. doi:10.14459/2018md1462084

Traducción de taller:
Anni de Martinez, República Dominicana;
Zoraida Finger-Collazos, Alemania;
Marian Anguela González, Alemania.

Traducción de libro escolar:
Patricia Haller, Alemania;
Marian Anguela González, Alemania.

Diseño de la cubierta:
Frank Reinhold, Alemania.

Redacción:
Frank Reinhold, Alemania.

Índice


IRR/YR
NPV
BEG/END
CFj
Nj
RND
RM
M+
8
9
5
6
2
3
LN
DISP

Prólogo

El siglo XXI es un siglo de numerosos desafíos. Por supuesto son diferentes en distintos lugares del mundo pero hay muchos desafíos que son más o menos iguales en todos los países. Un desafío importante es la educación de los jóvenes para un mundo con muchos problemas globales. Las soluciones requieren mucho más que el conocimiento de los hechos, requieren la implementación de ideas creativas. Tenemos la responsabilidad de brindar una educación con sentido y renunciar a la mera instrucción, la mera transferencia de conocimientos del profesor al alumno. Esto significa que los estudiantes tienen que explorar, experimentar y evaluar sus resultados de una manera autónoma. Una buena enseñanza debe tener en cuenta incluir la creatividad de los alumnos. Para ello no necesitamos solamente una instrucción frontal sino una cultura de participación en clase.

Es indispensable preparar a todos nuestros estudiantes para el mundo real. Para lograr este objetivo necesitamos una educación enfocada en competencias, donde los contenidos son importantes porque los aplicamos a la solución de problemas reales. Solo así es posible enseñar para el siglo XXI y apoyar el pensamiento crítico y creativo, la comunicación y la colaboración. Necesitamos involucrar a los estudiantes en actividades significativas para desarrollar su potencial, su creatividad y su disposición a intervenir de manera responsable en su entorno.

La educación STEM es el lugar perfecto para apoyar a los estudiantes en desarrollar estas competencias. También es el lugar para utilizar la tecnología y para aprender sobre su uso en varios contextos. En este libro intentamos combinar todos los aspectos. El objetivo principal es apoyar la comprensión de fracciones. Para alcanzar este objetivo utilizamos tecnologías modernas que permiten un aprendizaje independiente de los alumnos. Además, la tecnología ofrece oportunidades para actuar en el entorno cotidiano e interiorizar las acciones.

Esperamos que les gusten los ejemplos de las matemáticas. Y esperamos que las tareas ayuden a las alumnas y a los alumnos a explorar, comprender y aprender el contenido.

¡Que se diviertan!

Kristina Reiss
Múnich, 01 de octubre de 2018

Capítulo I

Teoría de la carga cognitiva

La presunción básica de la teoría de la carga cognitiva (inglés: *cognitive load theory*; Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011) es la capacidad limitada de la memoria de trabajo humana. Se supone que el estrés cognitivo necesario para aprender una habilidad se compone de tres elementos:

- Estrés cognitivo intrínseco (inglés: *intrinsic cognitive load*): La dificultad inherente al propio material, que puede ser diferente para cada alumno debido a sus conocimientos previos.
- Estrés cognitivo irrelevante (inglés: *extraneous cognitive load*): El estrés cognitivo causado por la forma de presentación del material. El cual no apoya los procesos de aprendizaje.
- Estrés cognitivo relacionado con el aprendizaje (inglés: *germane cognitive load*): Elementos que pueden apoyar el procesamiento de la información y contribuir al desarrollo del esquema (inglés: *schemata*: es decir, estructuras de conocimientos).

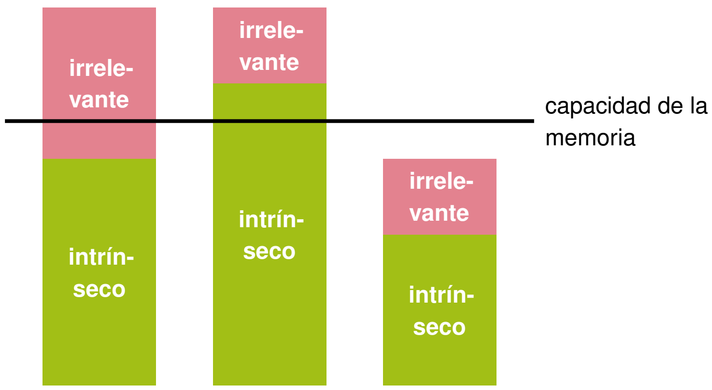
Se asume que los procesos de aprendizaje sólo pueden tener éxito si la carga cognitiva total no excede la capacidad de la memoria de trabajo.

Ejemplo

La adición de fracciones con el mismo denominador debe aprenderse como nuevo contenido. Como primer ejemplo se elige un ejercicio muy simple: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ (carga intrínseca baja). El modelo circular se utiliza como ilustración. Este modelo es conocido por los alumnos como el “modelo de la pizza” y puede ilustrar icónicamente muy bien por qué el denominador sigue siendo el mismo durante la adición (baja carga irrelevante). Realizar el cálculo simultáneamente en otra representación icónica (p. ej., en la recta numérica) puede causar una sobrecarga a algunos alumnos (carga demasiado elevada relacionada con el aprendizaje).

Ejercicio

Decide si los procesos de aprendizaje mostrados esquemáticamente según la teoría de la carga cognitiva pueden tener éxito o no. Transfiere la presentación esquemática a una situación concreta de enseñanza y, si es necesario, formula una estrategia de solución para apoyar al alumno en su proceso de aprendizaje individual.

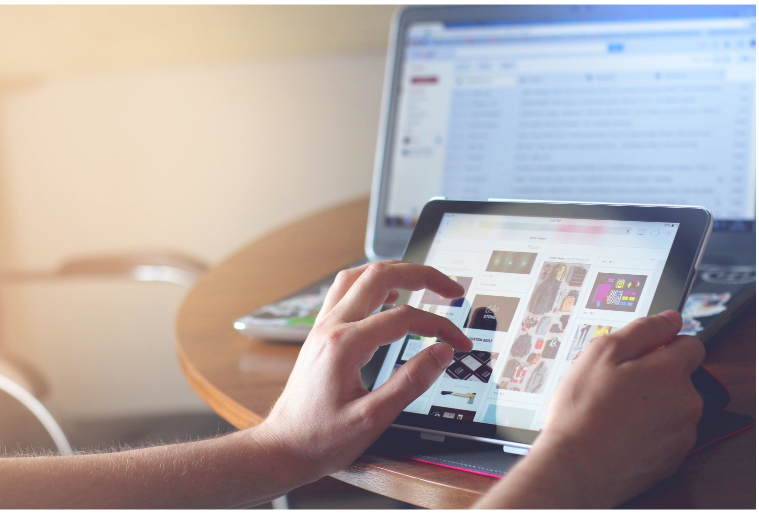


Solución

La carga cognitiva intrínseca de un objeto de aprendizaje no puede ser reducida. En este caso los conocimientos previos de los alumnos tienen una importancia decisiva. El estrés cognitivo irrelevante puede reducirse con materiales bien elaborados. Esto impone grandes exigencias al diseño de entornos de aprendizaje digital. El estrés cognitivo relacionado al aprendizaje puede ser integrado en los entornos de aprendizaje a través de ofertas adicionales correspondientes. En el contexto de los medios de enseñanza digitales, se está debatiendo hasta qué punto estos recursos cognitivos relacionados al aprendizaje pueden ser activados y enfocados.

Teoría cognitiva del aprendizaje multimedial

La teoría cognitiva del aprendizaje multimedial (inglés: *cognitive theory of multimedia learning*; Mayer, 2014) se basa no sólo en una capacidad limitada de memoria de trabajo sino también en los siguientes otros supuestos: Por un lado, se asume que las personas procesan información presentada, tanto audible como visualmente, en diferentes estructuras cognitivas. También se asume que la información presentada en textos e imágenes es procesada en otras diferentes estructuras cognitivas. Además, aprender se entiende como un proceso activo, en el que el conocimiento debe ser integrado en los esquemas existentes (es decir, en las estructuras de conocimiento) a través de un análisis específico de un tema de aprendizaje.



Ejercicio

Observe en el siguiente video cómo la información presentada de manera audible y visual se relaciona entre sí:

► **www.youtube.com/watch?v=xSYHWFya2Rs**

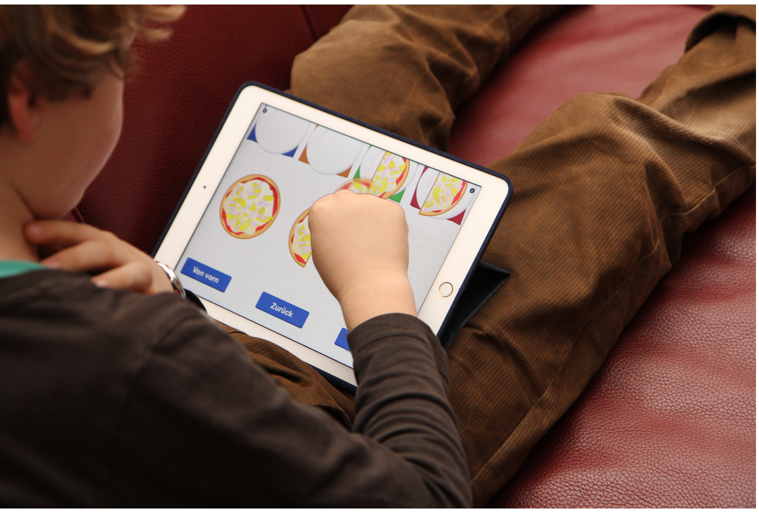
Explique el beneficio que puede tener una explicación del cálculo presentada por un alumno comparado con una presentación meramente visual.

Solución

El alumno explica cada uno de sus pasos matemáticos mientras escribe, dibuja o interpreta: La información presentada en forma auditiva puede apoyar la información presentada visualmente porque se presentan al mismo tiempo.

Capítulo I

Fragmento de un libro escolar



Ejercicio

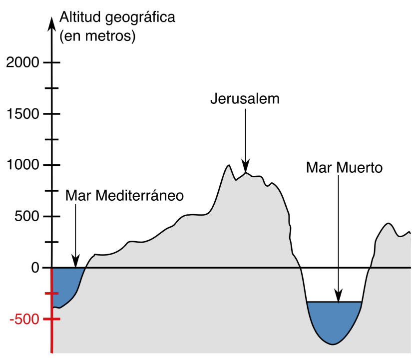
A continuación, se puede ver un ejemplo de un libro alemán de matemáticas para el quinto grado. Nombra y discute las dificultades que puedan aparecer por la presentación conjunta de textos e imágenes.

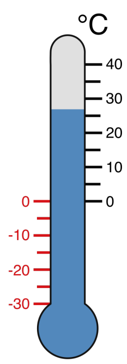
Solución

Según la teoría cognitiva del aprendizaje multimedial, la presentación de textos e imágenes puede ser beneficiosa si la información puede procesarse simultáneamente. En este caso esto no parece posible por varias razones: En el presente documento no se hace referencia a los estados de cuentas mencionados. El texto sólo coincide con una de las dos imágenes (alturas geográficas). La segunda imagen (escala de temperatura) no se menciona en el texto. Los ejes *y* de los dos diagramas tienen diferentes unidades y diferentes órdenes de magnitud. Esto podría sugerir que los dos diagramas contienen información relacionada. Además, la imagen de la izquierda es bidimensional, la de la derecha es unidimensional. En general, la distribución de las gráficas no parece ser muy lucrativa. Esta ilustración puede producir un aumento del estrés cognitivo irrelevante para los alumnos mientras trabajan con este ejemplo.

Cuando se trata de temperaturas, altitudes geográficas o balances de cuenta, pueden presentarse valores “bajo cero”.

La altura de las montañas o también la altitud de algunos lugares o lagos se indica en metros sobre el nivel del mar, también llamado “nivel del mar”, m.s.n.m. La ilustración muestra un perfil de altura de Israel. Se puede ver que también hay puntos, por ejemplo, el nivel del agua del Mar Muerto, que están por debajo del nivel del mar.

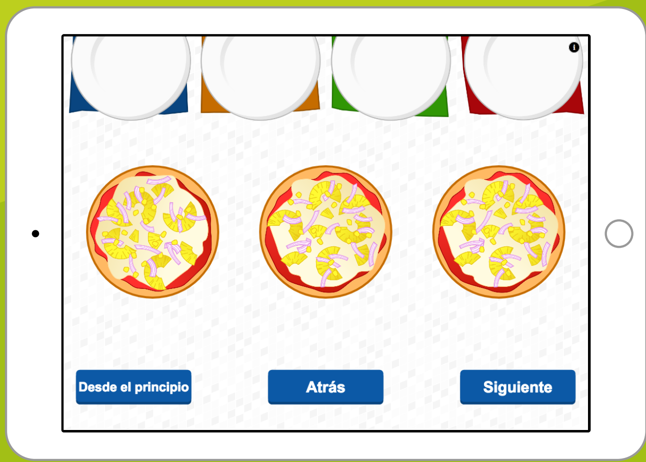




Fragmento de un libro escolar.

Teoría Embodied Cognition

Dentro de la teoría *Embodied Cognition* (Wilson, 2002) se supone que las personas son capaces de deshacerse del estrés cognitivo en forma de gestos o movimientos de los dedos. Un ejemplo de lo dicho es contar con los propios dedos. También se asume que los esquemas de acción pueden apoyar procesos puramente cognitivos, separados de sus propósitos sensomotores originales. Por ejemplo, el concepto de "número fraccionario", puede visualizarse al cortar una pizza por la mitad en dos pedazos de igual tamaño, de esta forma se puede apoyar la formación de la representación de una ampliación del concepto, en donde la "división" pueda distinguirse de una manera más detallada.



Tarea interactiva 23: Reparte las pizzas justamente entre los clientes.

Ejercicio

Abra el iBook en la página 23. Imagíne que es un niño y resuelva la tarea interactiva 23 (inglés: *widget*). ¿De qué modo se implementan los aspectos de la teoría Embodied Cognition en este ejercicio? Explique cómo cambiarían estos aspectos si el ejercicio tuviera que ser realizado en un ordenador con un ratón.

Solución

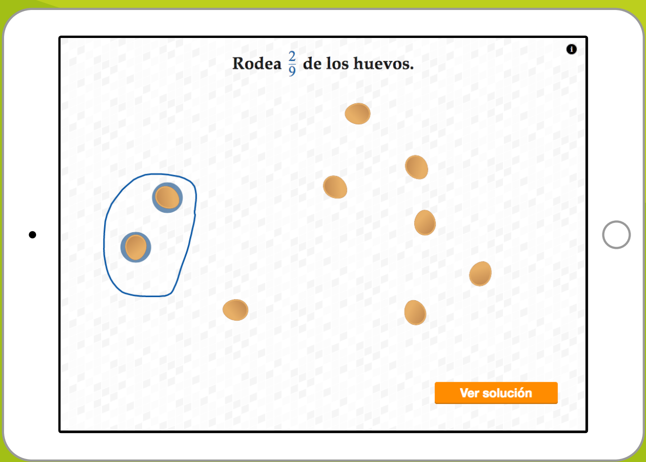
La pizza se puede cortar y mover con la ayuda de los dedos. Al igual en la realidad el usuario en este caso puede seguir sus acciones directamente sobre la pantalla táctil. La tarea interactiva se basa en gestos naturales. Por el contrario, en un ordenador, el usuario seguiría la pizza en la pantalla, no el movimiento del ratón. Hasta los gestos de cortar tampoco serían naturales.

Reflexión

Reflexione acerca de cómo una tarea interactiva podría beneficiarse de los gestos naturales en otro contexto matemático. Haga un esquema aproximado del interfaz de usuario (inglés: *user interface*) de dicho ejercicio. ¿Qué funcionalidad le gustaría obtener aquí? ¿Qué ventajas tendría su tarea interactiva sobre una actividad con papel y lápiz?

Adaptabilidad

Los ejercicios pueden implementarse en entornos de aprendizaje digitales de tal manera que puedan adaptarse de forma independiente a los procesos de aprendizaje diferentes e individuales de cada alumno (Leutner, 1993). Estos formatos de ejercicios adaptables pueden permitir un manejo adecuado de la heterogeneidad dentro de una clase. De esta manera, los alumnos con diferentes niveles de rendimiento pueden ser incentivados de igual manera. Los entornos de aprendizaje de este tipo se denominan adaptables, si la entrada de datos de los alumnos durante el trabajo conduce automáticamente a cambios en los parámetros de este entorno de aprendizaje.



Tarea interactiva 13: Enmarca la cantidad correcta de los objetos.

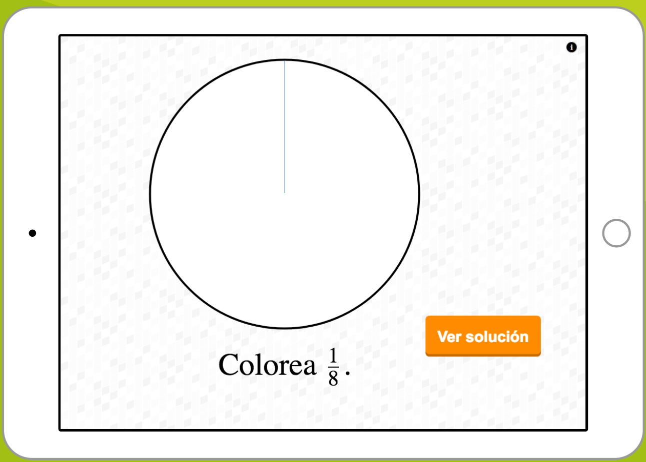
Ejercicio

Abra el iBook en la página 14. La tarea interactiva 13 aumenta el nivel de dificultad una sola vez. Experimente con el ejercicio. Describa cómo se implementó la adaptabilidad a esta tarea interactiva: ¿Cuándo aumenta el nivel de dificultad? ¿Como se expresa el aumento de la dificultad? ¿Cómo reacciona la tarea interactiva a respuestas incorrectas?

Solución

Después de tres respuestas correctas, se aumenta la dificultad de los ejercicios. En primer lugar, el denominador de la fracción corresponde al número de elementos en la pantalla. En el segundo nivel de dificultad, el número de elementos es un múltiplo del denominador de fracción. Por lo tanto, es necesario un paso adicional para resolver el ejercicio correctamente.

Adaptabilidad en el iBook



Tarea interactiva 10: Marca la fracción en el círculo.

Ejercicio

Abra el iBook en la página 13. Descubra los tres diferentes niveles de dificultad de forma análoga al ejemplo de la tarea interactiva 10.

Solución

En la tarea interactiva, primero, se generan cinco ejercicios en los que el denominador de la fracción es un múltiplo de 2 (específicamente: 2, 4 u 8). Si éstos se contestan correctamente, se generan cinco tareas en las que el denominador es 2, 5 o 10. En el último grado de dificultad, se generan diez tareas con cualquier denominador entre 2 y 12. Si se contestan varias tareas de forma incorrecta dentro de un grado de dificultad, el alumno permanece dentro de ese nivel.

Dos fragmentos de un libro escolar

Ejercicio

A continuación, encontraras fragmentos de textos de libros escolares alemanes (de distintos niveles escolares) sobre diferentes temas de matemáticas. ¿Cómo cambia el nivel de dificultad en estos ejercicios? ¿Qué diferencias y similitudes se pueden notar entre los dos fragmentos de los libros y la tarea interactiva 10– relacionada con el cambio en el nivel de dificultad? ¿Qué ventajas puede tener el ajuste adaptativo de la dificultad del ejercicio?

Solución

En el primer ejemplo, el nivel de dificultad aumenta continuamente de ejercicio a ejercicio. También se modifican las operaciones que se deben realizar en las actividades. En el segundo ejemplo existen– complementando de forma análoga la tarea interactiva del iBook– bloques en los que se combinan ejercicios del mismo nivel de dificultad. Los ejercicios adaptables pueden ser particularmente útiles para los alumnos con bajo rendimiento si las soluciones incorrectas no generan actividades más difíciles, sino actividades del mismo nivel de dificultad, o incluso más fáciles.

Tarea 1. Transfiere la tarea a tu cuaderno y complétalo allí.

a)

	2	3	5	5
	1	5	4	7
+		3	8	9
	●	●	●	●

b)

	3	2	8	6	5	7	2
		4	5	3	8	6	1
+	8	3	2	1	1	6	5
●	●	●	●	●	●	●	●

c)

	1	3	3	9
	●	●	●	●
+		3	7	2
	5	3	5	4

d)

	5	1	2	3	●	8	1
	●	4	5	●	8	●	1
+	2	●	●	3	1	5	4
●	3	6	9	7	2	3	●

Tarea 2. Dibuja, por ejemplo, utilizando una tabla de valores la parábola normal en un sistema de coordenadas, usando diferentes colores para las gráficas de las diferentes funciones dadas por las variables de la función.

a) $f_1(x) = x^2 - 3$
$f_2(x) = x^2 + 2{,}5$
$f_3(x) = x^2 - 4{,}5$

b) $g_1(x) = (x + 1)^2$
$g_2(x) = (x + 4{,}5)^2$
$g_3(x) = (x - 3{,}25)^2$

c) $h_1(x) = (x - 1)^2 - 3$
$h_2(x) = (x + 2)^2 - 1$
$h_3(x) = (x - 2{,}5)^2 + 3$

Dos fragmentos de un libro escolar alemán

Feedback

Además de ajustar el nivel de dificultad, los entornos digitales de aprendizaje también pueden diseñarse de tal manera que los alumnos reciban de forma automática e inmediata *Feedback* sobre sus respuestas. El *Feedback* puede enfocarse en la solución de un ejercicio (inglés: *corrective feedback*), destacar los conceptos erróneos y dar *Feedback* sobre las respuestas correctas (Hattie & Timperley, 2007). El *Feedback* también puede referirse a la forma de realizar un ejercicio (inglés: *explanatory feedback*) y ayudar a los alumnos a cerrar las lagunas existentes en sus conocimientos previos, corregir los conceptos erróneos y desarrollar una comprensión profunda (Hattie & Timperley, 2007).

Tarea interactiva 86: En las tarjetas hay dos fracciones. Pulsa la fracción mayor.

Ejercicio

Supónga que es un alumno que comienza la escuela secundaria. Resuelva los ejercicios de las dos tareas interactivas 9 (pág. 13 en el iBook) y 86 (pág. 65 en el iBook) individualmente. Responda a los ejercicios de manera correcta e incorrecta. Observe que tipo de *Feedback* se da en los ejercicios. ¿En cuáles ejercicios interactivos se da un *Feedback* correctivo (inglés: *corrective feedback*), en cuáles un *Feedback* explicativo (inglés: *explanatory feedback*)? Evalúe los beneficios de cada tipo de *Feedback* para los alumnos de bajo y alto rendimiento.

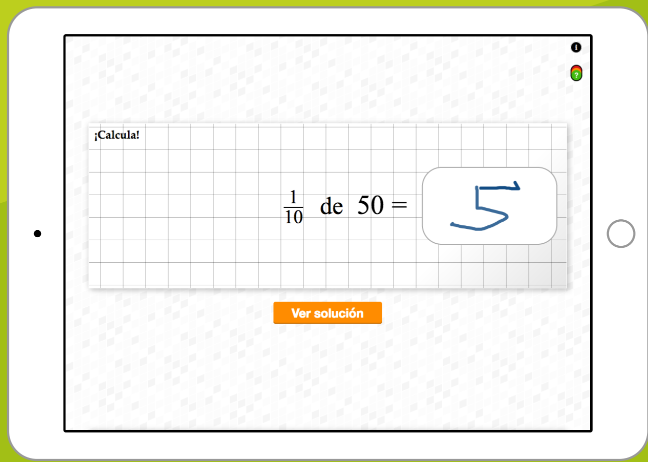
Solución

El *Feedback* en la tarea interactiva 9 es correctivo y provee adicionalmente una información explicativa sobre si la fracción marcada incorrectamente era demasiado grande o demasiado pequeña. Aquí no se generan informaciones más detalladas sobre las posibles causas de los errores. En la tarea interactiva 86, también, inicialmente sólo se realizan correcciones y una respuesta incorrecta se destaca en rojo. Si un alumno se decide por una explicación, se seleccionará una estrategia adaptable con respecto al par de fracciones para comparar su tamaño y se ilustrará tanto el texto como también la representación icónica. Estos consejos pueden ayudar a los alumnos con bajo rendimiento a corregir los conceptos erróneos. Y al mismo tiempo, los alumnos de mayor rendimiento pueden ser sensibilizados sobre estrategias adicionales y en ciertas situaciones por cierto más útiles.

Feedback en el iBook

Ejercicio

Abra el iBook en la página 18. La tarea interactiva 17 ofrece otra forma de *Feedback* con pistas graduales para solucionar el ejercicio. Aquí los alumnos pueden recurrir a las indicaciones para solucionar los ejercicios antes del cálculo de éstas. Analice las pistas para la solución de los ejercicios. Para ello, toque el símbolo “semáforo” en la esquina superior derecha. Describa: ¿Cómo se estructuran las pistas? ¿Cuáles son las ventajas de esta opción para los alumnos de diferentes niveles de rendimiento?



Tarea interactiva 17: Calcular la parte de la fracción.

Solución

Las actividades de la tarea interactiva 17 son ejercicios rutinarios. Primero, la unidad debe ser dividida por el denominador de fracción. La primera pista (verde) indica este paso. En la segunda pista (amarilla) el alumno recibe el resultado de esta división y se le indica el segundo paso necesario: El numerador de la fracción indica cuántas de estas partes se deben tomar. La última pista (roja) contiene la solución completa del ejercicio matemático. Con estas pistas graduadas para la solución del ejercicio se les puede dar un impulso a los alumnos de bajo rendimiento para resolver ejercicios matemáticos de múltiples pasos– incluso si no logran realizar los pasos individuales de forma inmediata. La presentación opcional de esta ayuda de solución también permite a los alumnos de alto rendimiento trabajar los ejercicios sin usar las pistas. Esto también puede tener un efecto positivo en su capacidad de autoevaluación.

El procesamiento de información y el uso de los medios digitales en las clases de matemáticas

Posibilidades de utilización, implementación y eficacia

Resultados de nuestro metaanálisis (Hillmayr, Reinhold, Ziernwald & Reiss, 2017) demuestran como los alumnos pueden beneficiarse del uso de los medios digitales en las clases de matemáticas y ciencias. En particular, se indican las siguientes implicaciones para la enseñanza STEM:

- Los medios digitales tienen un mayor impacto positivo en el desempeño de los alumnos en las clases de STEM cuando se utilizan en adición a las clases tradicionales, que cuando las reemplazan.

- El uso de los medios digitales parece tener más éxito cuando los alumnos trabajan en parejas y no solos con los dispositivos.

- Si los profesores brindan apoyo al trabajar con los medios digitales, se muestra un efecto más positivo, que cuando los alumnos tienen que trabajar sin ayuda.

- Hay indicios de que el llamado “efecto novedad” también se refleja en el desempeño de los alumnos: Las secuencias de clases más cortas con medios digitales tienen un efecto más positivo que las secuencias más largas.

- Se ha demostrado que los alumnos pueden beneficiarse directamente de una formación específica de sus maestros en los dispositivos digitales y el software utilizado en las clases.

- La influencia positiva de los medios digitales es más evidente, cuando los mismos alumnos trabajan con los dispositivos y programas y no sólo son demostrados por los docentes.

Gráfica de la derivada del seno en una función en matemáticas

La determinación manual de la pendiente de la tangente nunca será exacta si se trata de gráficos con curvas no rectas. En estos casos un programa informático funcionará con más precisión y esto siguiendo a los mismos pasos (Hillmayr y col., 2017).

Ejercicio

Primero dibuje en papel con ayuda de lápiz, regla y calculadora la función derivada $f(x) = \text{sen}(x)$. Puede proceder como sigue:

- Dibuje la gráfica de $f(x)$.
- Marque un punto P en G_f.
- Trace con ayuda de la regla aproximadamente la tangente a G_f en P.
- Calcule la pendiente m de la tangente t.
- Sitúe el punto Q con las coordinadas siguientes: Eje y con el mismo valor que P. Eje y con el valor de m.
- Repita los mismos pasos para otros puntos en G_f.

Ejercicio

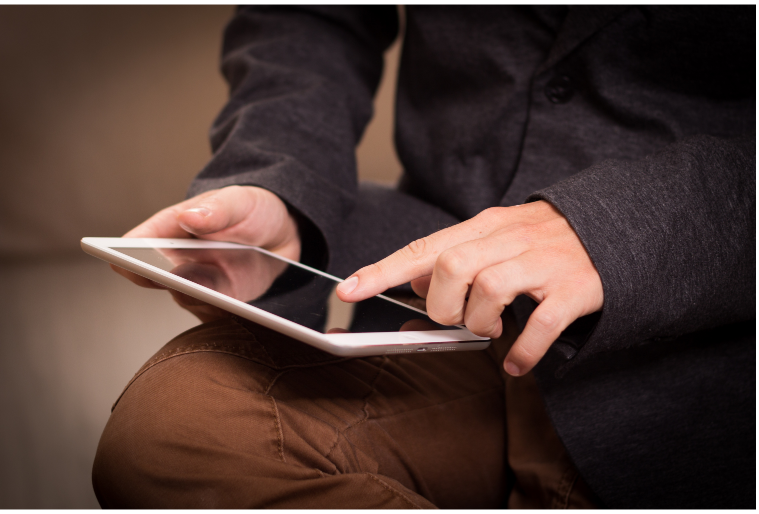
Ahora abra el programa GeoGebra en los iPads y cree una hoja de trabajo interactiva, en la que se pueda crear interactivamente una derivada de la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Proceda como se indica a continuación:

- Ingrese la función $f(x)$.
- Cree un deslizador con un parámetro a.
- Introduzca el punto $P = (a, f(a))$.
- Genere la tangente t de P a G_f mediante el programa.
- Deje que el programa le muestre el número m, que es igual a la Pendiente de g.
- Introduzca el punto $Q = (a, m)$.
- El programa le muestra el rasto de Q; cuando varía a usando el deslizador.

Utilizar exitoxamente GeoGebra para derivar

Ejercicio

¿Cómo se podría complementar ventajosamente una clase de matemáticas para la determinar la gráfica de la derivada de sen(x) con el uso de GeoGebra? Formule recomendaciones concretas de acción basadas en los resultados del metaanálisis mencionado anteriormente.



Solución

La generación de la gráfica de la derivada mediante GeoGebra puede ser utilizada como complemento del método clásico: La ejecución del procedimiento clásico para un punto específico P puede facilitar considerablemente la realización de los pasos necesarios en GeoGebra.

GeoGebra se puede integrar a corto plazo en las clases, por ejemplo, para la exploración al comienzo de una clase o de una unidad didáctica. El proceso se puede retomar una y otra vez durante el año escolar: Con otro término de función $f(x)$ se pueden derivar más funciones gráficamente. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los procedimientos formales– como la determinación de la pendiente mediante un triángulo de referencia– no deben de dejarse en manos de la computadora por completo, sino también debería de calcularse manualmente de vez en cuando.

GeoGebra es una herramienta compleja. Por lo tanto, es recomendable que el docente realice el ejercicio antes de usar el programa en clase para así identificar problemas y obstáculos.

Sobre todo, el manejo independiente de GeoGebra puede motivar a los alumnos a utilizar el software también en casa para la visualización de problemas. Solo obtendran experiencia y competencia si crean las herramientas ellos mismos. Facilitar el trabajo de los estudiantes a través del uso de “cajas negras” (inglés: *Blackbox*) preconcebidas, que solo requieren el uso de herramientas como el deslizador, parece poco adecuado (Hillmayr y col., 2017).

Medios digitales en la enseñanza secundaria de matemáticas y ciencias

Capítulo III

Las fracciones como reto didáctico

Cuando se amplía el área de conocimientos numéricos de tan solo números naturales a las fracciones, se modifica la comprensión conceptual de lo que se entiende como números. Estas diferencias, que siempre van acompañadas de los cambios necesarios de comprensión de los números, se pueden clasificar en cuatro toscas subsecciones (p. ej. Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015):

- Mientras que los números naturales tienen una representación simbólica muy clara, las fracciones del mismo valor pueden ser representadas por diferentes símbolos (p. ej. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Incluso los números naturales pierden su representación específica en el rango de números racionales (p. ej. $2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$).

- El concepto de sucesor, bien conocido en los números naturales, ya no existe en el contexto de los números fraccionarios, porque los números racionales forman un subentero denso de los números reales. Sin embargo, en este momento no se puede transmitir un concepto de densidad en la clase 6.

- La pregunta del número mayor de los dos números naturales preestablecidos puede ser respondida de forma muy simple usando la notación numérica. El concepto del tamaño de las fracciones se distingue sustancialmente de ésta. Por ejemplo $\frac{8}{9} < \frac{7}{6}$, aunque $8 > 7$ y $9 > 6$. Este paso puede causar mayores dificultades a los alumnos, si se aferran a los conceptos de números naturales. No es infrecuente que las respuestas de los alumnos interpreten erróneamente $\frac{8}{9}$ como la fracción más grande “porque el numerador es más grande”.

- También la interpretación de las operaciones matemáticas básicas se modifica cuando se amplía el rango de números. Las ideas habituales básicas, tales como la multiplicación como “adición repetida”, pierden o cambian su significado. Así mismo el concepto de que multiplicar incrementa, pierde su validez general. Así, por ejemplo, el cálculo $\frac{1}{2} \cdot 4$ no puede ser explicado como una adición repetida de 4, ni el resultado 2 es mayor que el segundo factor 4.

Se presupone que los alumnos tendrán dificultades mayores para desarrollar una idea clara de los números fraccionarios si se aferran a los conceptos de los números naturales. En la metodología didáctica y en la psicología, esta dificultad se conoce como *Natural Number Bias*.

Se ha demostrado que en las clases poner el enfoque en operaciones aritméticas así como el mero manejo de la ortografía simbólica formal de las fracciones por sí solos no suele ser beneficioso. Si no, que se asume que en la enseñanza inicial de las fracciones el uso de representaciones gráficas; tal como el cambio constante entre las diferentes representaciones de fracciones (guiado por el profesor), representan enfoques didácticos mucho más prácticos. Especialmente en este contexto, se ha atribuido– desde hace tiempo– un gran potencial a los medios de enseñanza digitales (p. ej. Lesh, Post & Behr, 1987).

Las fracciones como parte del entero

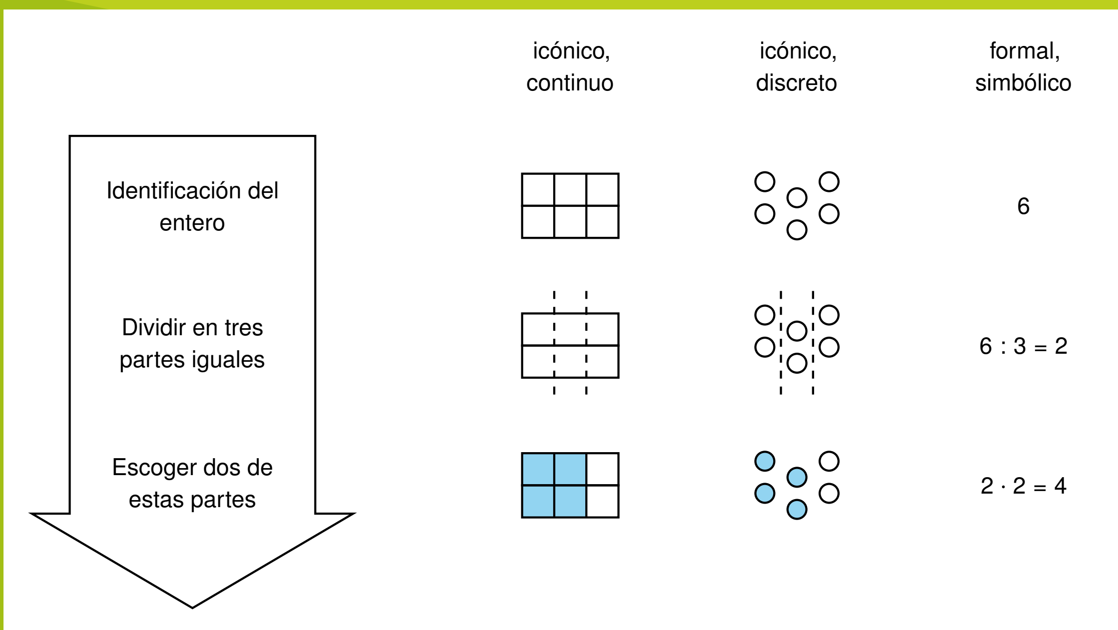
El procedimiento operativo para la formación de una "parte $\frac{a}{b}$ del entero" es el mismo cuando se trata de una representación icónica y simbólica: Primero, se identifica el entero. Luego se divide en un cantidad *b* de partes de igual tamaño, "partición" (inglés: *partitioning*). De estas partes se toma un cantidad *a* de partes, las cuales resultan ser la fracción buscada (p. ej. Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Este procedimiento se basa en un procedimiento operativo. En todo caso, no depende de si el entero es representado de forma icónica continua, icónica discreta o formal simbólica (Baturo & Cooper, 1999).

Ejercicio

Abra el iBook en la página 18. En la tarea interactiva 17, se deben calcular partes del entero según el procedimiento explicado arriba. Explique cómo el cálculo previo de ejercicios icónicos puede apoyar el proceso de aprender en este ejercicio interactivo. ¿De qué forma se realiza este apoyo en la tarea interactiva?

Solución

El procedimiento operativo puede ser un reto muy grande para los alumnos al principio del ejercicio de cálculo de fracciones. Inicialmente, una introducción basada en actos concretos y representaciones icónicas puede dar un alivio cognitivo y apoyar adecuadamente el proceso de aprendizaje de los niños (Bruner, 1960/2009). El sistema de ayuda de soluciones graduales implementado en la tarea interactiva se basa en las ideas de los actos concretos "dividir" y "multiplicar".

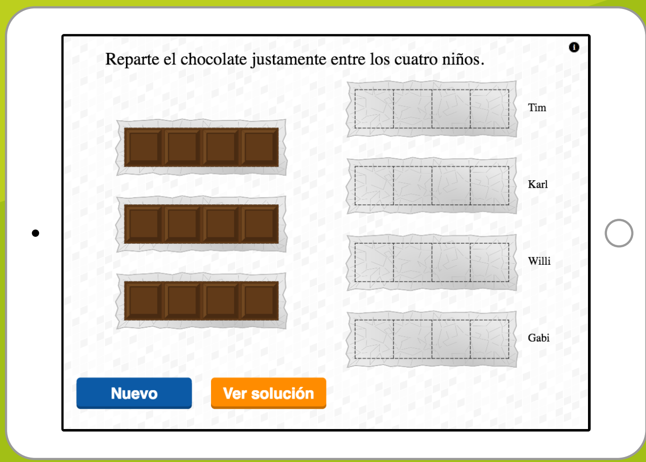


Procedimiento operativo para la formación de una parte del entero (Reinhold, 2018).

Parte de varios enteros

Ejercicio

Abra el iBook en la página 24. En la tarea interactiva 24, los alumnos deben distribuir tres barras de chocolate de forma equitativa entre cuatro niños. A continuación, hay que responder las preguntas de la tarea 25. Explique la diferencia entre el enfoque operativo descrito anteriormente para crear partes del entero y el procedimiento que se aplica en el tarea 24.



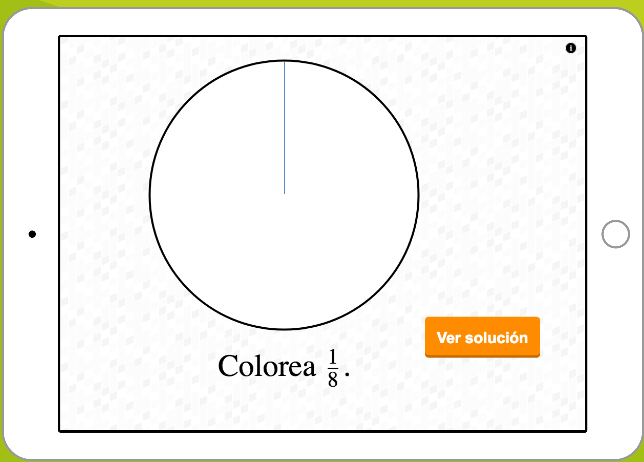
Tarea interactiva 24: Reparte las barras de chocolate justamente entre los cuatro niños.

Solución

En el procedimiento operativo descrito anteriormente, se utilizó primero “división” y luego “multiplicación”. La situación concreta de la distribución en la tarea interactiva 24 aplica un enfoque diferente pero equivalente: Primero se “multiplica” y luego se “divide”. Las preguntas que deben ser respondidas pueden animar a los alumnos a pensar en la equivalencia de ambos enfoques.

Tamaño de las fracciones

Para el desarrollo de ideas claras sobre el concepto de fracciones, la comprensión conceptual del tamaño de las fracciones (inglés: *magnitude*) puede ser útil en adición al procedimiento operativo para determinar las "partes del entero" (Meert, Grégoire & Noël, 2010). Esta idea un poco más intuitiva del "tamaño" de una fracción puede ser sustentada por la práctica de ejercicios de representaciones icónicas continuas sin subdivisiones (Carraher, 1993).



Tarea interactiva 10: Marca la fracción en el círculo.

Ejercicio

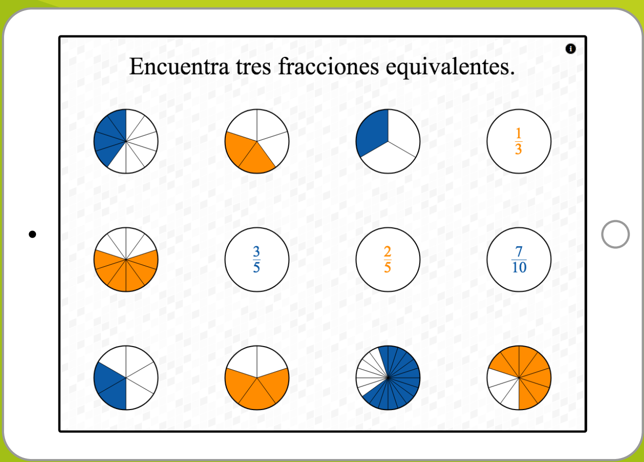
Abra el iBook en la página 13. En la tarea interactiva 10, se pide a los alumnos que marquen una parte determinada del círculo. Resuelva un par de tareas. Luego reflexione, sobre por qué es más probable que la formación de ideas intuitivas sobre la tamaño de las fracciones funcione mejor con este ejercicio interactivo en las pantallas táctiles que con ejercicios similares resueltos en papel.

Solución

Al trabajar con lápiz y papel, los alumnos tienden a recurrir más a procedimientos operativos para encontrar la parte buscada: En este caso, se calculan y dibujan los ángulos concretos. Mediante el uso de gestos adecuados y la posibilidad de colorear la parte de la superficie, las soluciones intuitivas tienen más posibilidades de ser abordadas. Estas no tienen que ser necesariamente totalmente correctas– la tarea interactiva también evalúa respuestas "casi" correctas como correctas. De hecho, en este caso, los niños recurren a otras estrategias de solución (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018).

Disminuir y aumentar una distribución

Basado en el concepto de “Parte del entero” la amplificación de la fracción $\frac{1}{2}$ con 2 se puede representar aumentando la cantidad de partes del entero– empezando con el corte de media pizza en dos trozos iguales y luego dibujando una línea adecuada en el diagrama circular. Así, utilizando este tipo de representaciones pictóricas se puede potenciar e ilustrar un acceso formalmente simbólico de la amplificación como una operación aritmética para la generación de fracciones equivalentes: Cortar la pizza da como resultado que las piezas de pizza ahora solo tengan la mitad de su tamaño original, y además existan el doble de trozos que antes– en resumen $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (p. ej. Lamon, 2012).



Tarea interactiva 35: Pertenecen siempre tres juntos.

Ejercicio

Abra el iBook en la página 34. En la tarea interactiva 35, se deben crear grupos de tres objetos que representen la misma fracción: uno de ellos representado simbólicamente y los otros dos iconográficamente. Resuelva un par de tareas interactivas. Nombre las ventajas de trabajar en un Tablet PC en comparación a resolver un ejercicio similar en papel.

Solución

Se puede generar un número ilimitado de tareas. El nivel de dificultad puede aumentarse de forma adaptativa. Resolver diferentes tareas puede ser mucho más rápido que en papel. Se elige tocando los objetos elegidos, que seran resaltados en verde – no tienen que ser conectados manualmente. Las fracciones correctamente asignadas desaparecen y, por lo tanto, no representan una carga cognitiva irrelevante para seguir trabajando. Si se eligen objetos falsos serán mostrados inmediatamente, enmarcados en rojo.

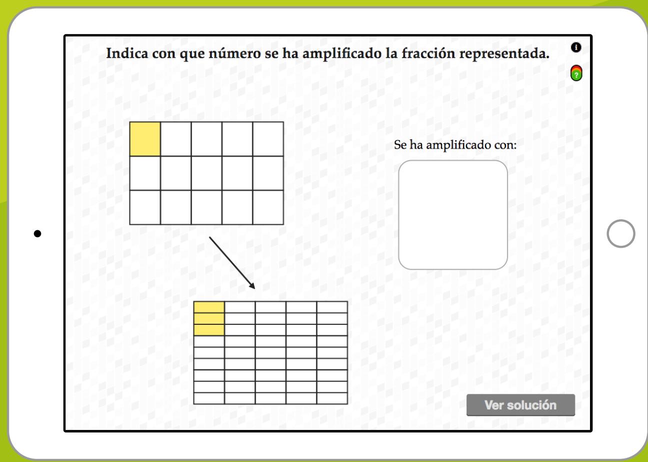
Amplificación y simplificación de fracciones

Ejercicio

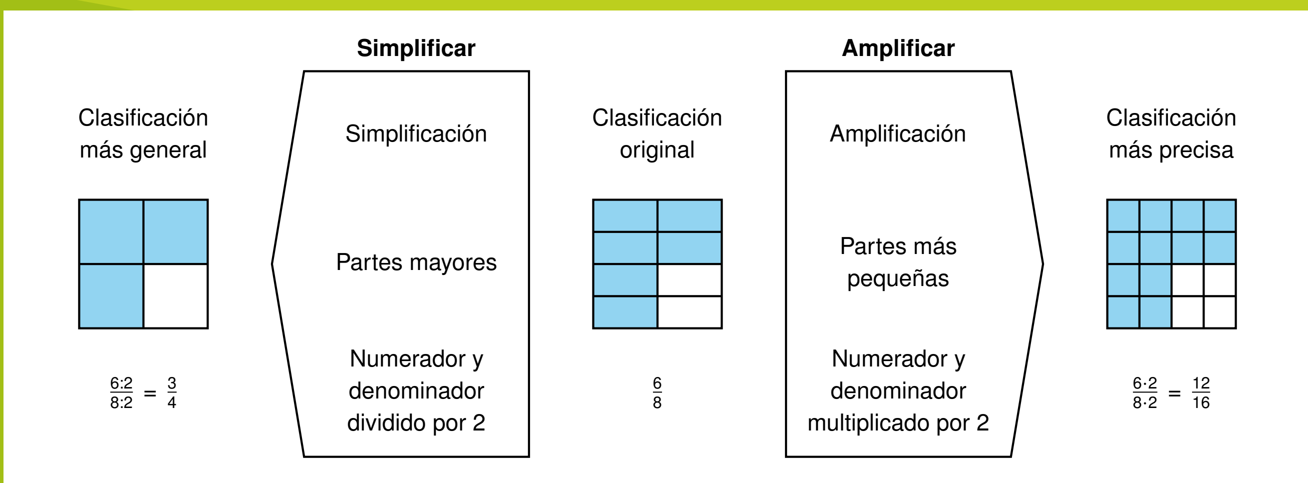
Abra el iBook en la página 36. Resuelva un par de tareas de las dos diferentes tareas interactivas 43 y 45. Explique las diferencias y similitudes entre las dos versiones del ejercicio.

Solución

En ambas tareas interactivas se practica la amplificación de fracciones. El la tarea 43, las fracciones son representadas de forma iconográfica en un diagrama de rectángulos, en el tarea 45 son representadas de forma simbólica. Si el ejercicio se realiza correctamente también se le mostrará el resultado en la forma opuesta– simbólica o icónica. En caso de respuestas incorrectas, se dará una explicación. Para resolver los ejercicios, los alumnos tienen acceso a una serie de ayudas escalonadas.



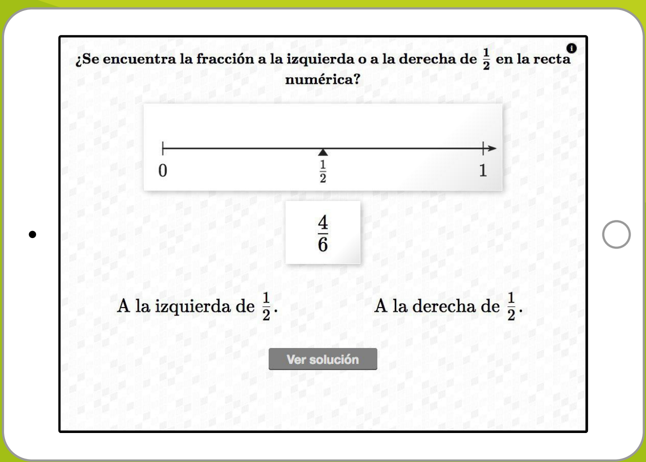
Tarea interactiva 43: ¿Con qué n umero se ha amplificado la fracción?



Amplificación y simplificación de fracciones (Reinhold, 2018).

Comparación de tamaños de fracciones

Se puede ver que los alumnos con alto rendimiento en los ejercicios de comparación de tamaño disponen de una variedad de diferentes estrategias de comparación, que pueden utilizar de forma flexible y adaptada a cada problema concreto (Clarke & Roche, 2009). Estas estrategias se basan en parte en las propiedades específicas del par de fracciones a comparar. Éstas pueden mostrarse, por ejemplo, recurriendo a una comprensión subyacente del tamaño de ambas fracciones (Meert y col., 2010; Reinhold, Reiss, Hoch, Werner & Richter-Gebert, 2018).



Tarea interactiva 77: ¿A la izquierda de 1/2 o a la derecha de 1/2?

Ejercicio

Abra el iBook en la página 58-59. En las tareas interactivas 77, 78 y 79 se desarrolla sucesivamente una estrategia para comparar el tamaño de las fracciones. Trabaje esta breve secuencia de las tres tareas. ¿Cómo está estructurada esta secuencia? ¿Qué función desempeña el medio digital? ¿Qué propiedades deben tener los pares de fracciones para poder ser comparados según este procedimiento? ¿Qué distingue este procedimiento del procedimiento operativo para comparar el tamaño de dos fracciones arbitrarias, que se presenta en la página 64 del iBook?

Solución

En primer lugar, los alumnos deben desarrollar una comprensión conceptual de cuando una fracción es menor o mayor que $\frac{1}{2}$. En este caso, se trabaja con dos ejercicios interactivos con diferentes representaciones icónicas en el iBook: el modelo rectangular y la recta numérica. A continuación, se muestra una estrategia de argumentación transitiva: Si una fracción es más pequeña que la mitad (p. ej. $\frac{2}{5}$) y una fracción es más grande que la mitad (p. ej. $\frac{4}{7}$), son fáciles de comparar ($\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7}$). En este método, la comprensión conceptual de las fracciones es más importante que en la utilización de algoritmos (Reinhold y col., 2018).

Cómo hacer que las fracciones sean comprensibles con los Tablet-PC

Referencias

Baturo, A. R. & Cooper, T. J. (1999). Fractions, Reunitisation and the Number-Line Representation [Fracciones, Reunificación y Representación de Línea Numérica]. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 81-88). Haifa, Israel: PME.

Behr, M., Lesh, R. A., Post, T. R. & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts [Conceptos de números racionales]. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Bruner, J. S. (2009). *The Process of Education: Revised Edition [El Proceso de Educación: Edición revisada]*. Cambridge: Harvard University Press. (Fecha inicial de publicación 1960)

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number [Líneas de pensamiento: Un modelo de ratio y operador de número racional]. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(4), 281-305. doi:10.1007/bf01273903

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction [Una perspectiva para conseguir una comprensión profunda de las estrategias de los estudiantes para comparar fracciones y los posibles indicadores en la enseñanza]. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138. doi:10.1007/s10649-009-9198-9

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback [El poder de la retroalimentación]. *Review of educational research*, *77*(1), 81-112. doi:10.3102/003465430298487

Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L. & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit [Los medios digitales en la educación matemática y científica de la enseñanza secundaria: posibles aplicaciones, su implantación y su eficacia]*. Münster, Alemania: Waxmann.

Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018). How do students visualize fractions? A finger tracking study [¿Cómo visualizan estudiantes las fracciones? Un estudio de rastreo de dedos]. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 64). Umeå, Suecia: PME.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers [Enseñanza de Fracciones y Ratios para la Comprensión: Conocimiento de Contenido Esencial y Estrategias de Instrucción para Maestros]* (3.ª ed.). New York: Routledge.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments [Dienes revisited: Múltiples encarnaciones en entornos informáticos]. En I. Wirsup & R. Streit (Eds.), *Development in School Mathematics Education Around the World* (pp. 647-680). Reston: NCTM.

Leutner, D. (1993). Guided discovery learning with computer-based simulation games: Effects of adaptive and non-adaptive instructional support [Enseñanza guiada de descubrimiento con juegos de simulación por computadoras: Efectos del apoyo educativo adaptativo y no adaptativo]. *Learning and Instruction*, *3*(2), 113-132. doi:10.1016/0959-4752(93)90011-n

Mayer, R. E. (2014). Cognitive Theory of Multimedia Learning [Teoría cognitiva del estudio multimedia]. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2.ª ed., pp. 31-48). New York: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139547369.005

Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? [Comparación de la magnitud de dos fracciones con componentes comunes: ¿Qué representaciones utilizan los niños de 10 y 12 años?] *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244-259. doi:10.1016/j.jecp.2010.04.008

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts [¿Quién puede escapar al sesgo numérico natural en las tareas numéricas racionales? Un estudio en colaboración con estudiantes y expertos]. *British Journal of Psychology*, *107*(3), 537-555. doi:10.1111/bjop.12161

Reinhold, F. (2018). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Reinhold, F., Reiss, K., Hoch, S., Werner, B. & Richter-Gebert, J. (2018). *Comparing Fractions: The Enactive Way. Supporting Students' Choice of Appropriate Strategies with iPad-Assisted Instruction [Comparación de fracciones: El camino enactive. Apoyo a los estudiantes en la elección de estrategias apropiadas con instrucción asistida por iPad]*. Paper presented at the 2018 annual meeting of the American Educational Research Association. New York: AERA.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory [Teoría de la carga cognitiva]*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-8126-4

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition [Seis puntos de vista de la cognición encarnada]. *Psychonomic Bulletin and Review*, *9*(4), 625-636. doi:10.3758/bf03196322

Créditos de las ilustraciones:

Página 1, página 9: ⓪ fancycrave1 / pixabay.com; página 5, página 32: ⓪ Rawpixel / stockimages.io; página 6: ⓪ Michal Jarmoluk / pixabay.com; página 10: © Roswitha Zander / TUM; página 10: © Bernhard Werner / TUM; página 13: © Roswitha Zander / TUM; página 17: © Astrid Eckert / TUM; página 18: ⓪ Gerd Altmann / pixabay.com; página 19: ⓪ Rawpixel / stockimages.io; página 20: ⓪ Niek Verlaan / pixabay.com; página 21: © Astrid Eckert / TUM; página 22: ⓪ Nadine Doerlé / pixabay.com; página 24: © Roswitha Zander / TUM; página 29: © Astrid Eckert / TUM.

Technical University of Munich

TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Chair of Mathematics Education

Arcisstraße 21
80333 Munich, Germany

www.ma.edu.tum.de
frank.reinhold@tum.de