



Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau

Technische Universität München

Statistische Linearisierung für große Mehrfreiheitsgradsysteme in reduzierter Basis aus elastischen und plastischen Ansatzmoden

Michael Geisenhofer

Herausgeber

Prof. Dr.-Ing. K. Zilch, federführend

Prof. Dr.-Ing. G. Albrecht

Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann

Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger

Prof. Dr. rer. nat. E. Rank

Schriftleitung

apl. Prof. Dr.-Ing. habil. R. Rackwitz

Lehrstuhl für Massivbau

Institut für Baustoffe und Konstruktion

Technische Universität München

80290 München

Tel.: (089) 289-23050

© 2002 **Michael Geisenhofer**

Vulpiusstr. 91b

81739 München

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf
fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Dieses Heft ist auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

ISSN 0941 - 925X

Zusammenfassung:

Statistische Linearisierung für große Mehrfreiheitsgradsysteme in reduzierter Basis aus elastischen und plastischen Ansatzmoden

In der vorliegenden Arbeit wird eine Berechnungsmethode für große Mehrfreiheitsgradsysteme mit nichtlinearem hysteretischem Materialverhalten unter stochastischen Lasten vorgestellt. Basierend auf der Methode der Statistischen Linearisierung wird eine Reduktionsstrategie angewandt, die speziell in Hinblick auf das mechanische Verhalten des Systems optimiert ist. Der neue Unterraum zur weiteren Berechnung besteht dabei aus sogenannten elastischen und plastischen Moden: Elastische Moden beschreiben das globale Systemverhalten, während plastische Moden gezielt lokal auftretende Plastifikationen abbilden. Mit vorliegender Methode kann die Anzahl der Rechenunbekannten signifikant reduziert werden.

Abstract:

Statistical Linearization for large Multi-degree of Freedom Systems using a reduced Set of elastic and plastic Modes

The present study concerns a calculation scheme for large multi-degree of freedom systems with non-linear hysteretic material behaviour subjected to stochastic loads. Starting from the method of statistical linearization a reduction strategy of the degrees of freedom is applied which is optimized with respect to the mechanical properties of the system. The new subspace for further calculations consists of so-called elastic and plastic modes: The elastic modes describe the global behaviour of the system whereas the plastic modes are used to represent local plastifications. Using the proposed calculation scheme, the number of degrees of freedom can be reduced significantly.

Vorwort

Der Großteil der vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München in der Zeit von Juli 1998 bis September 2000. Sie wurde später parallel zu meiner eigentlichen beruflichen Tätigkeit am Europäischen Patentamt München fertiggestellt.

Ich möchte Herrn Prof. Dr.-Ing. Harry Grundmann und Herrn Dr.-Ing. Markus Schneider herzlich für die fachliche und persönliche Unterstützung danken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Rackwitz für die Übernahme des Koreferats.

Besonderer Dank gebührt aber vor allem meiner Familie und insbesondere Martina, die meine gelegentlichen Launen während der Erstellung der Arbeit ertragen mußte.

München, Juli 2002
Michael Geisenhofer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Prüfer der Dissertation:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann

apl. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. R. Rackwitz

Die Dissertation wurde am 12.11.2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 19.6.2002 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines, Grundlagen	7
1.1	Stand der Forschung	7
1.2	Zielsetzung der vorliegenden Arbeit	9
1.3	Generelles Vorgehen	10
2	Prinzip der statistischen Linearisierung	13
2.1	Nichtlineares DGL-System	13
2.1.1	Linearisierung	13
2.1.2	Optimierungskriterium	14
2.1.3	Andere Optimierungskriterien zur Linearisierung	16
2.2	Berechnung des linearisierten Systems	17
2.3	Lösungsstrategie	17
3	Reduktionsstrategien	19
3.1	Prinzip	19
3.2	Beispiele für bereits existierende Reduktionsstrategien	20
3.2.1	Modale Verfahren	20
3.2.2	Covariance-equivalent realization	21
3.2.3	Wechsel in Krylov-Räume	22
3.2.4	Bewertung	22

4	Materialverhalten und Ableitung des Gesamtgleichungssystems	23
4.1	Diskrete Scherbalkensysteme	23
4.1.1	Ansatz nach Bouc/Wen bzw. Suzuki/Minai	23
4.1.2	Bewegungsgleichungen	25
4.1.3	Parameterstudie des Materialverhaltens nach Bouc & Wen	26
4.1.4	Linearisierungsstrategie	26
4.2	Kontinuierliche Biegebalkensysteme	29
4.2.1	Ansatz analog zur FEM	30
4.2.2	Bewegungsgleichungen	31
4.2.3	Linearisierungsstrategie	33
5	Diskrete Scherbalken-Systeme	37
5.1	Klassisches Vorgehen	37
5.1.1	System	37
5.1.2	Linearisierung	40
5.1.3	Beispiel: SDOF-System	41
5.2	Reduzierte Basis	44
5.2.1	Vorbemerkung: Darstellung der Antwort mit Ansatzmoden	44
5.2.2	Beispiel: Benötigte Eigenmoden zur Antwortdarstellung	46
5.2.3	Wahl der Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis	49
5.2.4	System in der reduzierten Basis	50
5.2.5	Gewichtung mit Galerkin-Methode	51
5.2.6	Linearisierung der Materialgleichungen	51
5.3	Beispiel: Stockwerkrahmen mit 20 Geschossen	53
5.3.1	Vergleich der Statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen Statistischen Linearisierung	53
5.3.2	Vergleich der Statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen	59
5.4	Interpretation der Ergebnisse	64

6	Beliebige kontinuierliche Biegebalken-Systeme	65
6.1	Klassisches Vorgehen	65
6.1.1	System	65
6.1.2	Linearisierung	67
6.2	Reduzierte Basis	68
6.2.1	Wahl von Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis . .	68
6.2.2	System in der reduzierten Basis	70
6.2.3	Gewichtung mit Galerkin-Methode	70
6.2.4	Linearisierung der Materialgleichungen	71
6.3	Beispiel: Stockwerkrahmen mit 20 Geschossen	71
6.3.1	System und Wahl der Ansatzmoden	72
6.3.2	Vergleich der statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen statistischen Linearisierung	75
6.3.3	Vergleich der statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen	78
6.4	Beispiel: MDOF-System "Fußgängersteg"	81
6.4.1	System und Wahl der Ansatzmoden	81
6.4.2	Vergleich der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen statistischen Linearisierung	86
6.4.3	Vergleich der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen	90
6.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	93
7	Zusammenfassung	95
7.1	Wesentlichen Merkmale der Methode	95
7.2	Vergleichbarkeit der Methode mit anderen Berechnungsverfahren . . .	96
7.3	Stärken der Methode	96
7.3.1	Übereinstimmung der Ergebnisse mit anderen Berechnungs- verfahren	96
7.3.2	Berechnungsaufwand	97
7.3.3	Übertragbarkeit auf andere Materialverhalten und andere Ele- menttragverhalten	97

7.4	Schwächen der Methode	98
7.4.1	Wahl der Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis . . .	98
7.4.2	Nicht konzentrierte Plastifizierungen bzw. hohe Anzahl an lokalen Plastifizierungen	98
7.5	Abschließende Bewertung des neu entwickelten Berechnungsverfahrens	98
A	Einschränkungen der Theorie der Statistischen Linearisierung	99
B	Auflistung der verwendeten Variablennamen	103
B.1	Differentialgleichungssystem	103
B.1.1	Systeme mit nur einem Freiheitsgrad	103
B.1.2	Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	104
B.1.3	Materialverhalten	104
B.2	Stochastische Parameter	104
B.3	Spezielle Funktionen	105
	Literaturverzeichnis	106
	Abbildungsverzeichnis	113

Kapitel 1

Allgemeines, Grundlagen

1.1 Stand der Forschung

Im Konstruktiven Ingenieurbau ist eine Zuverlässigkeitsaussage hinsichtlich des Grenzzustandes der Tragfähigkeit von großer Bedeutung. In diesem Bereich ist das Systemverhalten meist nichtlinear und damit eine lineare Untersuchung der dynamischen Reaktion des Systems nicht ausreichend aussagekräftig. Da die Systemlasten im Bereich des Ingenieurwesens meist nicht in ihrem zeitlichen Verlauf deterministisch ermittelbar sind, muß häufig auf eine stochastische Lastformulierung zurückgegriffen werden. Deshalb ist es nötig, Berechnungsansätze für das nichtlineare stochastische Verhalten eines mechanischen Systems zu entwickeln.

Nichtlineare stochastische Probleme in der Dynamik sind, abgesehen von wenigen Ausnahmen, mit vertretbarem Aufwand nicht exakt lösbar. Analytische Lösungen auf der Basis der Fokker-Planck-Gleichung und der Theorie der Markov-Prozesse (wie z.B. in [38] vorgestellt) konnten bisher nur für einfachste Sonderfälle gefunden werden. Aus diesem Grund wurde in der Vergangenheit eine Anzahl von Näherungslösungen entwickelt.

Zur Berechnung beliebiger Systeme mit beliebigen Eigenschaften und Belastungen wird häufig auf Simulationsmethoden zurückgegriffen. Shinozuka und Jan haben in [64] eine "Urform" dargestellt, die sich allerdings aufgrund des enormen Rechenaufwands nur für kleine Systeme eignet.

Aus diesem Grunde wurden zahlreiche Weiterentwicklungen vorangetrieben, die erhebliche Verbesserungen der Leistungsfähigkeit ergaben. Vor allem die Response-Surface Methode (wie z.B. in [23] vorgestellt), die advanced Monte Carlo Simulationsmethoden mit z.B. dem Double and Clump-Verfahren, dem Russian Roulette-Vorgehen und dem adaptive and selective sampling ([49], [52]) seien hier genannt. In [61] gibt Schuëller einen state of the art-Bericht. Der aktuelle Stand der Forschung wird auch von Lin und Cai [39], sowie Soong und Grigoriu [68] in Büchern wiedergegeben.

Die Perturbation Näherung [24] liefert nur für sehr kleine Streuungen zuverlässige Ergebnisse.

Eine weitere Möglichkeit stellt die Methode der Äquivalenten oder Statistischen Linearisierung dar, eines der am häufigsten benützten Näherungsverfahren. Aufgrund der einfachen Handhabung und der Bedeutung, die dieser Methode für orientierende Voruntersuchungen im Entwurfs- und Planungsstadium zukommt, existiert ebenfalls ein sehr umfangreiches Schrifttum.

Eingeführt wurde die Methode von Caughey [11]; einen umfassenden Überblick liefert z. B. [58]. In diesem Buch schildern die Autoren charakteristische Merkmale der Methode für sowohl SDOF-Systeme als auch MDOF-Systeme mit nichtlinear elastischem und mit hysteretischem Materialverhalten unter sowohl stationärer als auch instationärer stochastischer Belastung. Außerdem wird die Beziehung zur Moment-Closure-Technik hergestellt, die auch in [47] beschrieben wird.

Im Rahmen der Statistischen Linearisierung muß im Zusammenhang mit der Ermittlung von Fehlerquadrat-Erwartungswerten eine Annahme über den Verteilungstyp der Antwort getroffen werden. Obwohl der Antwort-Prozeß eines nichtlinearen Systems auch unter Gaußscher Anregung im allgemeinen nicht Gaußisch ist, nimmt man ihn wegen der damit einhergehenden Berechnungsvereinfachungen als Gauß-Prozeß an. Dies hat eine Ergebnisverfälschung zur Folge, die sich nach vorliegenden, auch eigenen Vergleichsuntersuchungen auf die auslaufenden Bereiche, d.h. die Extremwerte des Ergebnisses zwar stärker auswirkt, über den zufälligen Charakter des Ergebnisses insgesamt jedoch eine recht zuverlässige Aussage erlaubt. Bei einer vergleichenden Bewertung ist im Hinblick auf Anwendungen in der Praxis zu bedenken, daß die Eingangs-Informationen, die auf die auslaufenden Verteilungsbereiche Einfluß haben, in Realität nur unvollständig sind und daß die diese Bereiche betreffenden Rechenwerte lediglich als operationelle Größen auszusehen sind. Dennoch empfiehlt sich für den Fall, daß die Statistische Linearisierung für die Versagenswahrscheinlichkeit oder davon abhängige Bewertungsmaße der Zuverlässigkeit Werte im Grenzbereich zulässiger Größen liefert, eine genauere Untersuchung mit Simulationsmethoden. Mit der Problematik der Gauß-Annahme hat sich unter anderem Bernard [3] beschäftigt. In der selben Arbeit beschreibt der Autor auch eine methodische Ungenauigkeit, die sich auch in [25] herausgestellt hatte. Die Problematik, die sich bei Systemen mit mehrgipfeligen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen stellt, wurde auch in [22] behandelt. In diesem Punkt können bei einfachen Systemen unter Verwendung der Moment-Closure-Technik bessere Näherungen erreicht werden. Für größere Systeme ist diese Technik derzeit jedoch noch nicht anwendbar.

Für Systeme mit einer nicht zu großen Anzahl an Freiheitsgraden haben Pradlwarter und Li in [50] gezeigt, wie unter Zuhilfenahme der modalen Entwicklung auch diese Systeme befriedigend behandelt werden können. Sie ermitteln die am stärksten zur Antwort beitragenden Modes des äquivalenten linearisierten Systems unter Zuhilfenahme der Eigenwerte der Kovarianzmatrix. Elishakoff und Cai entwickelten in [17] eine partielle Linearisierungstechnik sowie Iwan und Whirley in [33] einen

Ansatz für kontinuierliche nichtlineare Systeme unter nicht-stationärer Erregung. Chen und Yang erweiterten in [13] die Verfahren auf nicht-mittelwertfreie Belastungen und nicht-weißes Rauschen. Elishakoff und Zhang verglichen verschiedene Linearisierungstechniken teilweise auch unter Verwendung von Gewichtungsfunktionen in [18], und Elishakoff und Colombi schlagen in [19] eine Kombination mit Monte Carlo Simulationen vor. Donley und Spanos stellen in ihrem Werk [16] auch Nicht-Linearisierungstechniken dar.

Iwan und Huang [34], Chang und Yang [12] und Grundmann und Waubke [26] gehen auf die Problematik streuender Systemparameter ein. Dies ist dann relevant, wenn ein eng begrenztes Anregungsspektrum vorliegt und die unsicheren Eigenfrequenzen des Systems in diesen Bereich der Anregung fallen. Da jedoch das Anregungsspektrum meist breitbandig ist, wird dies in den meisten Ansätzen der Statistischen Linearisierung nicht berücksichtigt.

1.2 Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

Die meisten der vorliegenden Berechnungsverfahren sind auf eine sehr geringe Anzahl an Freiheitsgraden beschränkt. Sobald deren Anzahl steigt, kann der Berechnungsaufwand schnell auf eine für normale Rechenanlagen nicht mehr akzeptable Größe ansteigen. Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein leistungsfähiges Verfahren zur Berechnung von Systemen mit einer großen bis sehr großen Anzahl an Freiheitsgraden zu entwickeln. Ausgeklammert werden punktförmig einwirkende Stoßbelastungen, oder allgemeiner Lasten, die in einer linearen Berechnung im Rahmen einer modalen Entwicklung eine ausreichend genaue Beschreibung mit einer deutlich reduzierten Anzahl an Eigenvektoren nicht erlauben würden. Von diesem Sonderfall abgesehen, soll das Verfahren für beliebig räumlich zufällig verteilte stochastische Belastungen anwendbar sein. Es soll einfach zu handhaben sein und nur geringen Rechenaufwand erfordern. Es soll dem konstruktiven Ingenieur eine Orientierung über die zu erwartenden Streuungen der Systemantwort als Basis zielgerichteter Entwurfsentscheidungen erlauben.

Für diese Aufgabe ist die Methode der Statistischen Linearisierung besonders geeignet, da sie für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden bei vertretbarem Rechenaufwand gute Ergebnisse für stochastische Systeme mit nichtlinearem Verhalten liefert. Es finden sich bereits viele Veröffentlichungen zur Behandlung von Systemen mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden in der Literatur.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Grundlagen der Methode betrachtet. Neben dem Prinzip der Statistischen Linearisierung und der Idee der Berechnung an Ersatzsystemen, wird eine Möglichkeit eines nichtlinearen, hysteretischen Materialverhaltens aufgezeigt.

Im zweiten Teil wird dann die entwickelte Methode auf zuerst diskrete Schwingerket-

ten und anschließend kontinuierliche Biegesysteme unter mittelwertfreier stationärer Anregung angewandt.

Die diskrete Schwingerkette eignet sich besonders gut zur Verdeutlichung der Methode, da die Federelemente zwischen den Massen mit vorliegenden Ansätzen für hysteretisches Verhalten direkt beschrieben werden können. Je Knoten ist nur ein Freiheitsgrad zu berücksichtigen.

Die gewählten Systeme erlauben es auf eine besonders übersichtliche Weise, die für die Brauchbarkeit des Verfahrens wesentliche Frage zu beantworten, nämlich ob die beabsichtigte Aufwandsreduzierung, d.h. die vorgesehene Entwicklung mit geeignet gewählten Formfunktionen, und die Operationen der Statistischen Linearisierung einfach und zuverlässig realisierbar sind. Dies ist die wesentliche Voraussetzung für die Lösung der statisch und geometrisch komplexeren Aufgabe der Entwicklung des Verfahrens für beliebige (mittels FEM beschriebene) Bauwerke mit lokaler Plastifizierung.

Im Rahmen des Vorhabens wurde der Fehler, der durch die Vereinfachungen der Berechnungsmethode entsteht, abgeschätzt. Dazu wurden Vergleichsrechnungen herangezogen, bei denen die "exakte" Lösung mit geeigneten Simulationstechniken ermittelt wurde.

1.3 Generelles Vorgehen

Die Vorgehensweise unterscheidet sich grundlegend von den bisher existierenden Methoden in der Abfolge von modaler Entwicklung und Linearisierung. Statt erst zu linearisieren und dann eine modale Entwicklung vorzunehmen, wird hier im ersten Schritt das Differentialgleichungssystem in seinen Freiheitsgraden reduziert. Dazu wird zur Vorbereitung eines Galerkinverfahrens der Lösungsraum transformiert und durch Gewichtung in eine Basis aus Formfunktionen überführt, deren Anzahl nicht durch die Anzahl der ursprünglichen Freiheitsgrade, sondern durch den (zeitlich veränderlichen) Verlauf der Systemantwort bestimmt ist. Während für Systeme mit einer geringeren Anzahl an Freiheitsgraden (je nach Art der Belastung) die damit erreichte Reduzierung der Anzahl an Unbekannten nur unbedeutend sein wird, kann diese für Systeme mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden sehr effektiv sein.

Die Formfunktionen setzen sich dabei aus rein *elastischen Schwingungsmoden* sowie einigen *plastischen Moden* zusammen. Die plastischen Moden berücksichtigen dabei die lokalen Plastifizierungen, während die elastischen Modes die globale Systemantwort - die in weiten Teilen linearelastisch ist - abbilden.

In diesem Zusammenhang nimmt die Frage, ob unter Umständen bei dieser Reduzierung der Freiheitsgrade ein Teil der Systemantwort nicht vollständig beschrieben werden kann, eine zentrale Rolle ein.

Der erste Schritt zur Auswahl der Formfunktionen ist die rein elastische Untersuchung des Systems mittels der Modalanalyse. Sie gibt Aufschluß darüber, welche

Eigenvektoren benötigt werden, um die Beanspruchungen im linearen System ausreichend genau darstellen zu können. Diese Eigenvektoren werden auch für die nicht-lineare Untersuchung benutzt. Die lineare Untersuchung zeigt zugleich, wo innerhalb des Tragwerks die Ausbildung plastischer Zonen *nicht* zu erwarten ist. Da in diesen Bereichen keine zusätzlichen Krümmungen oder Relativbewegungen als Folge der Ausbildung von plastischen Zonen an anderen Stellen zu erwarten sind, sind dort zur Beschreibung des Deformationsverhaltens die bereits gewählten Ansatzfunktionen, die beibehaltenen Eigenvektoren, ausreichend. In den Plastifizierungszonen hingegen treten zusätzliche Verzerrungen auf. Statt diese jedoch mit zusätzlichen Eigenvektoren zu beschreiben, von denen für diese Aufgabe eine viel zu hohe Anzahl benötigt würde, werden hierfür der Plastifizierung direkt zugeordnete plastische Moden eingeführt. Diese weisen starke Krümmungen oder Relativverschiebungen nur im Plastifizierungsbereich auf. Man benötigt also nur so viele zusätzliche Ansatzfunktionen wie Plastifizierungsbereiche auftreten. Die vorgeschaltete lineare Berechnung ist natürlich nicht in der Lage, die Anzahl und Lage der tatsächlich auftretenden Plastifizierungszonen genau anzugeben. Man wird, um den Berechnungsaufwand gering zu halten, zunächst die Anzahl der Plastifizierungszonen nicht zu hoch ansetzen. Inwieweit die gewählte Festsetzung zutreffend ist, kann anhand der Ergebnisse der Untersuchung mittels der Statistischen Linearisierung über entsprechende Grenzwert-Überschreitungsrate überprüft werden. U. U. ist eine Neuberechnung unter Einbeziehung zusätzlicher plastischer Moden notwendig (was angesichts der erzielten Aufwandsreduktion durchaus akzeptabel ist).

Kapitel 2

Prinzip der statistischen Linearisierung

2.1 Nichtlineares DGL-System

Das nichtlineare System wird beschrieben durch die DGL

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(t) \quad (2.1)$$

Im Hinblick auf die Verwendung der Ansätze von Bouc/Wen bzw. Suzuki/Minai, in deren Rahmen die zusätzliche dimensionslose Variable z_j für jede Feder mit hysteretischem Verhalten eingeführt wird, enthält \mathbf{q} nicht nur die normierten Knotenverschiebungen $w_j = w/w_{Fl}$ sondern zusätzlich auch die Größen $z_j = z/z_{Fl}$ wobei die Normierung mit z_{Fl} , der Fließgrenzverformung der Feder j , lediglich die Dimensionsgleichheit aller Größen im Vektor \mathbf{q} sicherstellt.

Die Massenmatrix \mathbf{M} , die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sind entsprechend erweitert; sie enthalten zusätzlich die der gewählten Stoffmodellierung jeweils angehörigen linearen Anteile (siehe Gl. 4.4). Mit $\dot{}$ bezeichnet man die zeitliche Ableitung. Im Vektor $\bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ sind alle Nichtlinearitäten des Systems enthalten.

2.1.1 Linearisierung

Ziel der Linearisierung ist es, den nichtlinearen Term $\bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ in der Form $\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q}$ darzustellen, derart daß der linearisierte Verlauf sich optimal an den exakten Verlauf anschmiegt. Der dabei in Kauf genommene Fehler ist

$$\epsilon = \bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - (\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

Dabei sind die Parameter \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e noch zu bestimmen. Die Suche nach der optimalen Kombination der Parameter stellt dabei einen wesentlichen Teil der Aufgabenstellung dar.

2.1.2 Optimierungskriterium

Das am häufigsten benützte Optimierungskriterium ist die Minimierung des Erwartungswertes der quadratischen Fehlernorm von ϵ :

$$E\{\epsilon^T \epsilon\} \longrightarrow \min \quad (2.3)$$

Für ein SDOF-System z. B. mit einem nichtlinearem Anteil, der ausschließlich von der Verschiebung w abhängt, würde sich nach [58] mit $\bar{\Phi} := \Phi$ dann zur Bestimmung des Parameter K_e des linearen Ersatzterms $K_e q$ ergeben:

$$E\{[\Phi(q) - K_e q]^2\} \longrightarrow \min \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dK_e} E\{[\Phi(q) - K_e q]^2\} = 0 \quad (2.5)$$

Daraus läßt sich K_e bestimmen zu:

$$K_e = \frac{E\{q\Phi(q)\}}{E\{q^2\}} \quad (2.6)$$

Ähnliche Formulierungen lassen sich auch für Nichtlinearitäten in Funktion der zeitlichen Ableitungen von \mathbf{q} ermitteln.

Für MDOF-Systeme mit Nichtlinearitäten in Abhängigkeit von \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ lassen sich die Parameter \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e sinngemäß ableiten.

Für Gauß-verteilte Antwortprozesse hat Kazakov in [35] Beziehungen zwischen verschiedenen Erwartungswerten hergeleitet, mit denen sich für die Linearisierungsparameter von Systemen mit der Nichtlinearität $\Phi = \Phi(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ folgende Berechnungsvorschriften ergeben:

$$K_e^{ij} = E\left\{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}\right\} \quad (2.7)$$

$$C_e^{ij} = E\left\{\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j}\right\} \quad (2.8)$$

$$M_e^{ij} = E\left\{\frac{\partial \Phi_i}{\partial \ddot{q}_j}\right\} \quad (2.9)$$

Für die Auswertung der Linearisierung wird meist von diesen Formeln ausgegangen. Ihre Herleitungen für das hier verwendete Stoffmodell nach Suzuki/Minai ist unter Verwendung der Beziehungen von Kazakov im Anhang angegeben.

Die benutzte Minimierungsbedingung führt auf ein lineares Gleichungssystem. Die

linke und die rechte Seite hängen über die auftretenden Erwartungswerte von den (unbekannten) statistischen Parametern des Antwortprozesses ab. Es ist also nur eine iterative Vorgehensweise möglich, indem für die Prozeßparameter jeweils die Ergebnisse des unmittelbar zurückliegenden Iterationsschrittes verwendet werden. Bei der Suche des Minimums in jedem Iterationsschritt stellt sich die Frage, ob die gefundene Bedingung immer ein absolutes Minimum liefert. Für ϵ_i läßt sich auch schreiben

$$\epsilon_i = \Phi_i - \sum_{(j)} A_{ij}x_j = \Phi_i - \mathbf{A}_i\mathbf{x} \quad (2.10)$$

Dabei enthält der Vektor \mathbf{x} die unbekannt Parameter der Linearisierung und die Zeile \mathbf{A}_i die unbekannt Verschiebungsgrößen und ihre zeitlichen Ableitungen. Daraus ergibt sich für die Norm von ϵ :

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum (\Phi_i^2 - 2\Phi_i\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_i\mathbf{x}) = \quad (2.11)$$

$$= \Phi^T\Phi - 2\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\Phi + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.12)$$

Nun wird der Erwartungswert dieser Gleichung gebildet und abgeleitet, um den Extremwert zu finden. Diese Lösung stellt ein absolutes Minimum dar, wenn der Term $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ eine positiv definite Matrix ist (vgl. Abb. 2.1.2). Das ist, solange die zur Beschreibung des Systems verwendete Basis linear unabhängig ist, immer der Fall, da der Erwartungswert von $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nichts anderes ist, als die Kovarianzmatrix der Verschiebungen und Verschiebungsableitungen des Antwortprozesses wie er sich für die Näherungswerte der Linearisierungsparameter aus dem unmittelbar zurückliegenden Iterationsschritt ergeben würde. Somit führt in jedem Iterationsschritt, falls eine Lösung vorhanden, jede nach der Rechenvorschrift 2.3 bestimmte Kombination von K_e , C_e und M_e auf ein absolutes Minimum.

Mit den Ergebnissen der Gleichungsauflösung, d. h. neuen Koeffizienten der Linearisierung ergibt sich eine geänderte Systemantwort, damit über eine neue Matrix \mathbf{A} eine geänderte "Fläche", deren Minimum im nächsten Iterationsschritt aufzusuchen ist. Die Konvergenz ist davon unabhängig, wie stark sich diese "Flächen" verändern. Als weitere Minimierungsstrategie soll ein Evolutionsalgorithmus nach [25] erwähnt werden. Bei dieser Vorgehensweise wird der Wechsel der "Flächen" vermieden. Statt dessen wird mit dem Evolutionsalgorithmus das Minimum der "Fehlerfläche", die sich nach Gl. (2.3) jeweils in Abhängigkeit von den Linearisierungsparametern ergibt, direkt gesucht. In Fällen von Konvergenzschwierigkeiten der zuvor betrachteten Iteration kann diese Vorgehensweise zu einer Verkürzung der Rechenzeiten führen. Dies ist vor allem dann vorteilhaft, wenn das durch die Parameter bestimmte "Gebirge" stark wellig ist.

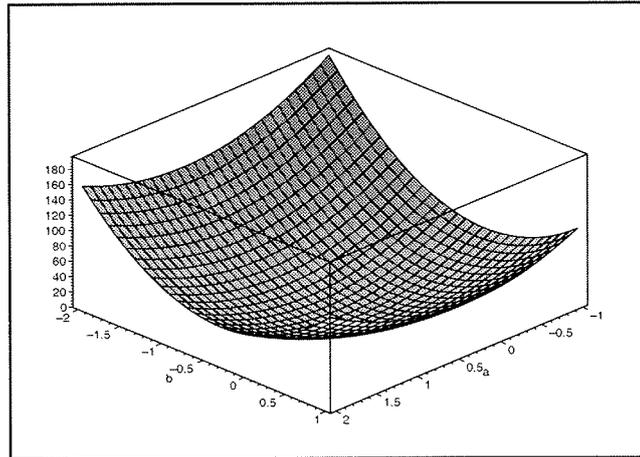


Abbildung 2.1: Beispiel einer bestimmten Linearisierungsparametern des vorangehenden Schrittes zugeordneten C_e - K_e -"Landschaft" für ein SDOF-System

2.1.3 Andere Optimierungskriterien zur Linearisierung

Denkbar sind auch andere Kriterien, wie z. B. in [18] vorgestellt. So kann die Linearisierung auch so vorgenommen werden, daß der Erwartungswert des Quadrats der nichtlinearen und linearisierten Rückstellkraft gleich ist. Für den SDOF-Fall mit einer Nichtlinearität, die nur von q abhängt, ergibt sich:

$$E\{[\Phi(q)]^2\} = E\{(K_e q)^2\} \quad (2.13)$$

Daraus läßt sich K_e ableiten zu:

$$K_e = \sqrt{\frac{E\{\Phi(q)^2\}}{E\{q^2\}}} \quad (2.14)$$

Eine weitere Möglichkeit ist die von Zhang [79] vorgeschlagene Minimierung der quadrierten Differenz der potentiellen Energien $U(q)$ des ursprünglich nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems:

$$E\left\{\left[U(q) - \frac{1}{2}K_e q^2\right]^2\right\} \longrightarrow \min \quad (2.15)$$

Daraus ergibt sich für K_e :

$$K_e = 2 \frac{E\{q^2 U(q)\}}{E\{q^4\}} \quad (2.16)$$

Diese alternativen Kriterien haben sich jedoch nach eigenen, sowie in der Literatur vorgenommenen Vergleichsuntersuchungen nicht allgemein bewährt.

2.2 Berechnung des linearisierten Systems

Für die Untersuchung des linearen Ersatzsystems wird die Spektralanalyse gewählt, da die Darstellung im Frequenzbereich für eine Berechnung am linearen System besonders vorteilhaft ist.

Bei der Spektralanalyse wird die Anregung im Frequenzbereich dargestellt. Die Einwirkung $\mathbf{f}(t)$ kann als spektrale Verteilung erfaßt werden, wobei $\mathbf{S}_f(\omega)$ dem Kreuzleistungsspektrum zwischen den Lasten $f_i(\omega)$ und $f_j(\omega)$ an den Einwirkungsstellen i und j entspricht. Die Anregung wird als mittelwertfreier stationärer und Gaußverteilter Prozeß angenommen. $\mathbf{S}_f(\omega)$ erhält man aus der Fouriertransformierten der Korrelationsmatrix.

$$\mathbf{S}_f(\omega) = \begin{pmatrix} S_{f_1 f_1} & S_{f_1 f_2} & \cdots & S_{f_1 f_n} \\ S_{f_2 f_1} & S_{f_2 f_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ S_{f_n f_1} & \cdots & & S_{f_n f_n} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Das Kreuzleistungsspektrum der Antwort \mathbf{S}_q ergibt sich aus:

$$\mathbf{S}_q(\omega) = \boldsymbol{\alpha}(\omega) \mathbf{S}_f(\omega) \boldsymbol{\alpha}(\omega)^{T*} \quad (2.18)$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = [-\omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}_e) + i\omega(\mathbf{C} + \mathbf{C}_e) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_e)]^{-1}. \quad (2.19)$$

Die Parameter der Verteilung der Antwort können aus $\mathbf{S}_q(\omega)$ unter Verwendung der Beziehung

$$E\{q_i q_j\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_i q_j}(\omega) d\omega \quad (2.20)$$

berechnet werden. Nachdem damit die Wahrscheinlichkeitsdichte der Antwort (zugeordnet zu den Linearisierungsparametern des letzten Schritts) bekannt ist, folgt unter Zuhilfenahme der Beziehungen zur Ermittlung der Korrelationen zwischen \dot{q}_i und q_i eine Neuberechnung der Parameter \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e .

2.3 Lösungsstrategie

Das Vorgehen ist iterativ:

- Beginn mit $\bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = 0$
- Berechnung von $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$, $\mathbf{S}_q(\omega)$ und daraus $E\{q_i q_j\}$, somit Gauß-Verteilung der Antwort bekannt

- Berechnung der Parameter des linearisierten äquivalenten Systems \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e unter Verwendung der ermittelten stochastischen Verteilung der Antwort
- Neuberechnung von $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$, $\mathbf{S}_q(\omega)$ und daraus $E\{q_i q_j\}$
- Neuberechnung der Parameter des linearisierten äquivalenten Systems \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e
- usw.

Der Ablauf wird solange wiederholt, bis die jeweils größte relative Differenz entsprechender Werte von \mathbf{S}_q zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schritten einen vorher gesetzten Wert unterschreitet. Dieser Konvergenzradius wird entsprechend den Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse gewählt und meist relativ zu den berechneten stochastischen Verteilungsparametern berechnet.

Kapitel 3

Reduktionsstrategien

Häufig wird bei einer Systemanalyse von der vollständigen Beschreibung der Struktur ausgegangen. Da insbesondere bei niederfrequenten Anregungen eine Vielzahl von Informationen “mitgeschleppt” wird, die zur Beurteilung des Systemverhaltens im jeweiligen Fall oftmals nicht benötigt werden, stellt sich die Frage, wie dies zu vermeiden ist.

Eine Reduktion der Unbekannten hat vor allem den großen Vorteil, daß Berechnungsverfahren schneller ablaufen, jedoch den Nachteil, gleichzeitig ungenauere Ergebnisse zu liefern. Daher ist das primäre Ziel eine Minimierung der Abweichungen zwischen exakter Lösung im vollständigen System und angenäherter Lösung im reduzierten System bei gleichzeitiger Maximierung der Ordnungsreduktion. Das daraus resultierende Ersatzsystem, wie z. B. in [78] ausgeführt, kann dann in guter Näherung zum exakten System für Berechnungen verwendet werden.

3.1 Prinzip

Mathematisch kann dieser Übergang auf das Ersatzsystem als Transformation beschrieben werden. Für ein System erster Ordnung kann man allgemein im Phasenraum schreiben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

Ersetzt man nun das ursprünglich vollständige System in den N Unbekannten \mathbf{x} durch ein reduziertes System in den $\tilde{N} < N$ Unbekannten $\mathbf{x} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}}$, so ergibt sich die reduzierte Systemgleichung durch links- und rechtsseitiges Multiplizieren der Gleichung mit einer Transformationsvorschrift zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (3.2)$$

Dabei sind die Transformationsmatrizen \mathbf{R} und \mathbf{L} nicht zwingend invers zueinander. Ihre Bestimmung hängt von der Reduktionsstrategie ab.

Der aus der Reduktion resultierende Fehler der Zustandsgrößen $\epsilon(t)$ ergibt sich aus

$$\epsilon = \mathbf{x}(t) - \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.3)$$

Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung können entweder auf diese Form gebracht werden oder analog behandelt werden.

3.2 Beispiele für bereits existierende Reduktionsstrategien

3.2.1 Modale Verfahren

Die aus einer Modalanalyse berechneten Eigenwerte $\mathbf{\Lambda}$ und Eigenvektoren $\mathbf{\Phi}$ ergeben sich für das DGL-System erster Ordnung nach

$$\mathbf{A}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda} \quad (3.4)$$

und können zur Reduktion des Systems verwendet werden, da die Eigenwerte Aufschluß über den Anteil an der Systemantwort geben.

Das z. B. von Litz in [37] vorgeschlagene Verfahren benützt diese Matrizen, um die modalen Systemzustände anhand der Größe der Eigenwerte in dominante und subdominante Moden zu unterteilen. Diese Moden bilden jeweils Unterbasen des ursprünglichen Lösungsraums.

Die dominanten Moden $\mathbf{\Phi}_{dom}$ werden vollständig weiterverwendet, während die subdominanten Moden $\mathbf{\Phi}_{subdom}$ als Linearkombination aus den abgebildeten Zustandsgrößen $x(t)$ approximiert werden.

Daraus ergibt sich die Transformationsvorschrift zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}_{dom} + \mathbf{E}\mathbf{\Phi}_{subdom} \quad \mathbf{L} = \mathbf{\Phi}_{dom}^{-1} \quad (3.5)$$

mit

$$\mathbf{\Phi}_{dom}\mathbf{\Phi}_{dom}^{-1} = \mathbf{1} \quad \mathbf{\Phi}_{dom}\mathbf{\Phi}_{subdom}^{-1} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Die Matrix \mathbf{E} ist noch unbekannt und wird so bestimmt, daß der aufaddierte Fehler in den Zustandsgrößen $\int_0^\infty \epsilon(t, \mathbf{E})dt$ minimal wird.

Nach dieser Trennung aller Ansatzmoden in zwei Gruppen, werden nur noch die der dominanten Unterbasis zugeordneten Moden als Ansatzfunktionen verwendet, so daß nur noch die ihnen zugeordneten Partizipationsfaktoren im Berechnungsverfahren auftreten. Somit läßt sich die Anzahl der verwendeten Rechenunbekannten reduzieren.

Das entstandene reduzierte System ist jedoch nicht mehr in der Lage, alle möglichen Systemantworten abzubilden, was aus strukturmechanischer Sicht einem Sperren der Moden $\Phi_{\text{subdominant}}$ gleichkommt. Somit hat die reduzierte Basis auch die Funktionsweise eines Filters, da sie spezielle Anteile der Systemantwort "verschluckt". Das reduzierte System ist - sofern das Originalsystem stabil war - ebenfalls stabil. Der in Kauf genommene Fehler könnte nun noch durch eine Approximation der vernachlässigten Anteile abgeschätzt werden. Interessante Ansätze und Ideen finden sich z. B. in [36]. Der numerische Aufwand steigt jedoch dadurch erheblich, so daß hier diese Überlegung bei großen Systemen nicht sinnvoll erscheint.

3.2.2 Covariance-equivalent realization

In [78] schlagen Yousuff, Wagie und Skelton ein Verfahren vor, das neben den reinen Eigenschaften der DGL auch wichtige statistische Eigenschaften des Originalsystems auf das Ersatzsystem abbildet. Dieses Verfahren wurde unter dem Namen *covariance equivalent realization* bekannt und basiert darauf, daß die Erwartungswerte von \mathbf{x} und $\tilde{\mathbf{x}}$ sowie die Momente bis p -ter Ordnung im Originalsystem und im Ersatzsystem übereinstimmen. Die Transformationsvorschrift ergibt sich dabei unter Verwendung der in Gleichung 3.1 definierten Phasenraumdarstellung zu

$$\mathbf{O}^p = [(\mathbf{A}^0)^T \quad (\mathbf{A}^1)^T \quad (\mathbf{A}^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^{(p-1)})^T] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{U}^p = \text{span}(\mathbf{O}^p) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{L} = (\mathbf{U}^p)^T \mathbf{O}^p \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R} = \sigma_x^2 \mathbf{L}^T (\mathbf{L}^T \sigma_x^2 \mathbf{L}^T)^{-1} \quad (3.10)$$

Die Größen σ_x erhält man durch die Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}\sigma_x + \sigma_x \mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W}_f \mathbf{B}^T = 0 \quad (3.11)$$

unter Annahme von weißem Rauschen der Intensität \mathbf{W}_f als Testanregung.

Die Kovarianz $\mathbf{R}_y(t)$ des Originalsystems kann nach Auswertung des reduzierten Systems durch einen Reihenansatz nach Taylor bis zur Ordnung p approximiert werden:

$$\mathbf{R}_y(t) = \sum_i \left(\frac{t^i}{i!} \tilde{\mathbf{A}}^i \sigma_x^2 \right) \quad \text{mit} \quad i = 0 \dots p \quad (3.12)$$

Falls zusätzlich Berechnungen am Originalsystem durchgeführt werden sollen, kann die Übertragungsmatrix α ebenfalls als Reihenansatz nach Laurent bis zur Ordnung $p - 1$ abgeschätzt werden:

$$\alpha(\omega) = \sum_i (\tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{B}} \omega^{-i+1}) \quad \text{mit} \quad i = 0 \dots p \quad (3.13)$$

Die Verwendung der Testanregung ist als Kalibriervorgang zu verstehen um die Parameter des Ersatzsystems zu bestimmen. Ist das Ersatzsystem erst einmal

bestimmt, kann mit der real vorliegenden Belastung die Berechnung durchgeführt werden. Diese ‘‘Doppelberechnung’’ kann unter Umständen bei großen System sehr aufwendig werden. Daher wurde dieser Ansatz nicht weiterverfolgt.

3.2.3 Wechsel in Krylov-Räume

Von Su und Craig wird in [70] eine weitere Reduktionsstrategie beschrieben. Sie basiert auf einem Basiswechsel einhergehend mit einer Neuorientierung des beschreibenden Raumes. Verwendet wird ein Krylov-Raum, wie z. B. in [82] beschrieben. Die rechtsseitige Transformationsmatrix \mathbf{R} entspricht dabei den Basisvektoren, die nach [70] oder [42] basierend auf der statischen Systemantwort mit Hilfe der Operatormatrix \mathbf{A} gebildet wird.

$$\mathbf{R} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{-p}\mathbf{B}] \quad (3.14)$$

Um eine Orthogonalität der Transformation zu garantieren, muß die linksseitige Transformationsmatrix \mathbf{L} bestimmt werden zu

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}^T \quad (3.15)$$

Da $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ in der neuen Basis als Untersystem enthalten ist, stimmt das reduzierte System hinsichtlich der statischen Antwort mit dem Originalsystem überein. Selbiges gilt für die Momente bis zur Ordnung $p - 1$.

Um dynamische Berechnungen durchzuführen, läßt sich die Übertragungsmatrix α mit einem Reihenansatz bis zur Ordnung $p - 1$ bestimmen zu

$$\alpha(\omega) = \sum_i (-\tilde{\mathbf{A}}^{-(i+1)} \tilde{\mathbf{B}} \omega^i) \quad \text{mit} \quad i = 0 \dots p - 1 \quad (3.16)$$

3.2.4 Bewertung

Alle diese Strategien basieren nur auf einer mathematischen Manipulation des DGL-Systems, ohne die Systemeigenheiten einzubeziehen. Diese rein mathematische Formulierung läßt wenig bis keinen Spielraum für strukturmechanische Interpretationen der Systemeigenschaften. Dadurch können Zusatzinformationen - sei es aus Erfahrung mit analogen Aufgabenstellungen oder durch gezielte Vorlaufrechnungen - nicht berücksichtigt werden.

Die hier vorgestellte Methode dagegen kombiniert eine mathematische Reduktionstechnik mit der Einbeziehung der systemspezifischen Eigenheiten auf strukturmechanischer Ebene. So kann gezielt für das jeweilige System ein optimales, reduziertes Ersatzsystem gebildet und damit der benötigte Rechenaufwand minimiert werden.

Kapitel 4

Materialverhalten und Ableitung des Gesamtgleichungssystems

4.1 Diskrete Scherbalkensysteme

Nach Bouc/Wen oder Suzuki/Minai kann hysteretisches Materialverhalten je Plastifizierungsstelle j mit Hilfe einer zusätzlichen nichtlinearen Entwicklungsbedingung in differentieller Form beschrieben werden. Dafür wird jeweils als zusätzliche Rechengröße zur Beschreibung des hysteretischen Anteils der Rückstellkraft $(1 - \alpha)kw_{Fl}z_j$ die Unbekannte $z_j = z^{abs}/z_{Fl}$ eingeführt. Im Gleichgewichts-DGL-System werden die Rückstellkräfte in einen nicht hysteretischen Anteil αkw_j und den hysteretischen Anteil $(1 - \alpha)kw_{Fl}z_j$ aufgespalten.

Beim Materialverhalten nach Bouc-Wen ([4], [5], [76]) bzw. Suzuki-Minai ([71]) ist also die Nichtlinearität in den Gleichgewichtsdifferentialgleichungen des Systems nicht explizit vorhanden, sondern in zusätzlichen Materialgleichungen. Die Formulierung basiert ausschließlich auf den absoluten Knotenverschiebungen w_j und den Knotenspannungsgrößen z_j als Unbekannte, da das Verhalten des Bauteils (und somit der Verlauf der Schnittkräfte und -momente) zwischen den Knoten bereits in das Materialgesetz eingearbeitet ist. Somit kann ein Scherbalkensystem als diskretes System angesehen werden, was einige Formulierungen vereinfacht.

4.1.1 Ansatz nach Bouc/Wen bzw. Suzuki/Minai

Zur Darstellung der Ansätze sei ein ungedämpftes SDOF-System betrachtet. Die D'Alembertsche Gleichgewichtsbedingung laute $m\ddot{q} + F_{Rueck} = 0$. Nach Ausspaltung der Rückstellkraft in einen linearen Anteil αkw und einen hysteretischen Anteil

$(1 - \alpha)kw_{Fl}z$ lautet diese Gleichung

$$m\ddot{w} + \alpha kw + (1 - \alpha)kw_{Fl}z = 0. \quad (4.1)$$

Die Entwicklungsgleichung zur Beschreibung des hysteretischen Anteils wird mit $y = w/w_{Fl}$ (w_{Fl} ist dabei die Deformation an der Fließgrenze) in dimensionsloser Form von Bouc und Wen vorgeschlagen zu:

$$\dot{z} = G(\dot{y}, z) = -\gamma|\dot{y}|z|z|^{n-1} - \nu\dot{y}|z|^n + A\dot{y} \quad (4.2)$$

mit den "loop parameters" γ , ν , A und n .

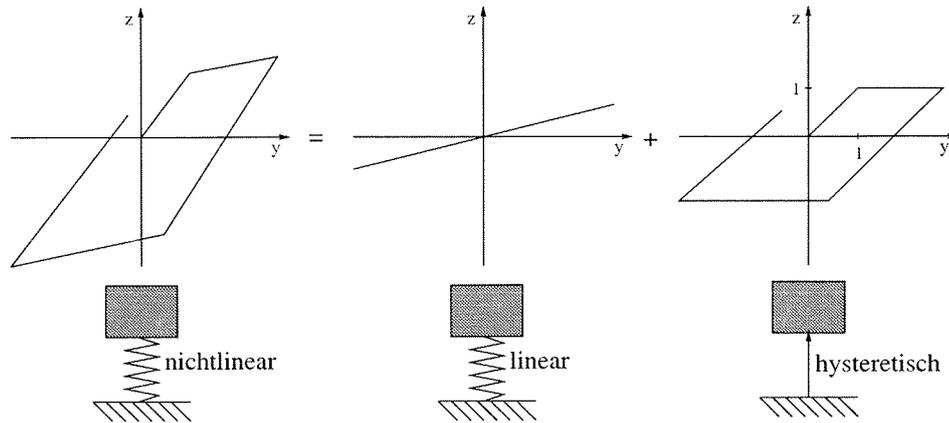


Abbildung 4.1: Bilineares Materialverhalten nach Suzuki/Minai; Aufspaltung in linearen Anteil sowie hysteretischen Anteil

Suzuki und Minai haben eine andere Form der Darstellung gewählt:

$$\dot{z} = G(\dot{y}, z) = \dot{y}[1 - U(\dot{y})U(z - 1) - U(-\dot{y})U(-z - 1)] \quad (4.3)$$

Dabei ist $U()$ die Einheitssprungfunktion. Diese Darstellung besitzt als Folge der Normierung keine direkten Parameter; die Angleichung erfolgt wie in Abschnitt 4.1 dargestellt durch die Normierung der Verschiebungs- und Spannungsgrößen auf die maximale elastische Auslenkung w_{fl} und die dabei auftretende Spannungsgröße z_{fl} . Für eine Belastung der Form $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ mit $y_0 = 2,0$ und $\omega = 1,5$ z. B. ergibt sich der in Abbildung 4.2 dargestellte z - y -Verlauf:

Der Vorteil dieses Materialgesetzes ist die einfache Formulierung und vor allem die einfache statistische Linearisierung. Aus diesem Grund wurde dieses Materialverhalten für das weitere Vorgehen gewählt.

Obwohl z im plastischen Bereich im Kraft-Verformungsdiagramm einen horizontalen Verlauf hat, kann mit dem gewählten Ansatz über die Wahl des Parameters α ($\alpha \neq 0$) auch ein abschnittsweise bilineares Materialverhalten mit Verfestigung beschrieben werden.

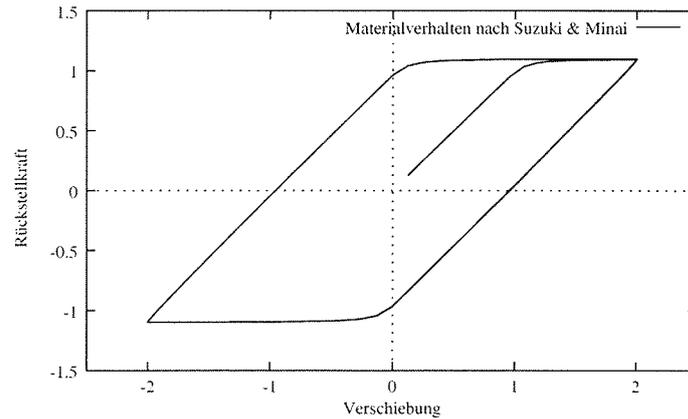


Abbildung 4.2: stark hysteretisches Kraft-Verformungsverhalten nach Suzuki / Minai

4.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung für den Kettenschwinger lautet in Matrixschreibweise unter Einbeziehung der Entwicklungsgleichungen für die Hysterese

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \bar{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(t) \quad (4.4)$$

bzw.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \Phi(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) = \mathbf{Q}(t) \quad (4.5)$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{K}_1 = \alpha\mathbf{K}_k \quad \mathbf{K}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{K}_k \\ \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{G}(\dot{\mathbf{q}}_{rel}, \mathbf{q}_{rel}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix sind gegenüber der klassischen Darstellung um \mathbf{M}_k , \mathbf{C}_k und \mathbf{K}_k erweitert, um die Größen \mathbf{z} und die Entwicklungsgleichungen einzuschließen. Der Vektor der nichtlinearen Beiträge $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ wird durch

eine Darstellung mit den entsprechenden Relativgeschwindigkeiten \dot{y} und dem Beitrag der hysteretischen Rückstellkräfte $(1 - \alpha)kw_F|z$, d.h. durch $\Phi(\dot{y}, z)$ ersetzt, da sich damit Vorteile für die weitere Berechnung ergeben. Die Matrix \mathbf{K}_2 enthält die selben Elemente wie die mit den Werten b_i besetzte obere rechte Submatrix in Gleichung 5.9, soweit sie sich auf die Plastizierungsbereiche beziehen, ansonsten ist sie mit Nullen besetzt.

4.1.3 Parameterstudie des Materialverhaltens nach Bouc & Wen

Im Folgenden wird eine Parameterstudie der Materialkennwerte γ , ν und A eines Werkstoffes mit Hilfe der von Bouc & Wen eingeführten Beschreibung

$$\dot{z} = -\gamma|\dot{y}|z|z|^{n-1} - \nu\dot{y}|z|^n + A\dot{y} \quad (4.6)$$

dargestellt. Dabei ist y die aufgezwungene Verschiebung mit dem zeitlichen Verlauf $y = 2\sin(3\pi t)$ und z die ihr zugeordnete Spannungsgröße.

Eine Änderung des Parameters γ hat zur Folge, daß mit kleiner werdendem γ die Hysterese im z - y -Verlauf an Volumen zunimmt. Die drei dargestellten Kurven in Abbildung 4.3 ergeben sich aus $\gamma_1 = 2,0$, $\gamma_2 = 0,8$ und $\gamma_3 = 0,1$. Die anderen Parameter lauten: $\nu = 0,1$, $A = 1$ und $n = 1$. Die aufgezwungene Verformung hat die Form $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ mit $y_0 = 2$ und $\omega = 1,5$.

Der Parameter ν steuert ausschließlich die Lage der Diagonalen der Hysterese. Mit steigendem Wert neigt sie sich hin zur Verschiebungs-Achse. Die drei dargestellten Kurven in Abbildung 4.4 ergeben sich aus $\nu_1 = 0,1$, $\nu_2 = 0,5$ und $\nu_3 = 1,5$. Die anderen Parameter lauten: $\gamma = 0,8$, $A = 1$ und $n = 1$. Die aufgezwungene Verformung hat die Form $y(t) = y_0 \sin(\omega t)$ mit $y_0 = 2$ und $\omega = 1,5$.

Der Parameter A regelt schließlich die Lage der Hysterese. Dabei bedingt eine Vergrößerung des Faktors A eine Kippung der Achse der Hysteresis-Schleife gegenüber der Auslenkungsachse. Somit steuert A die Steifigkeit des Materials im elastischen Bereich.

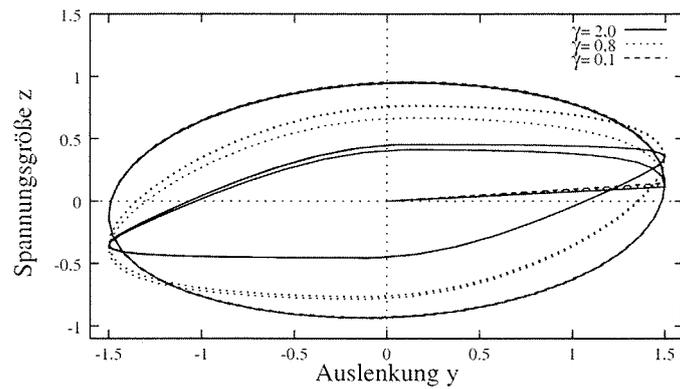
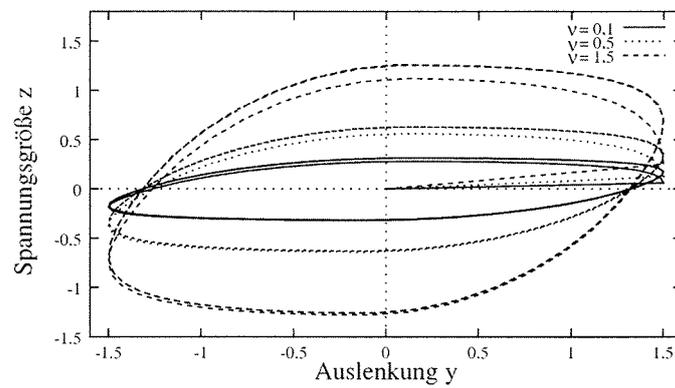
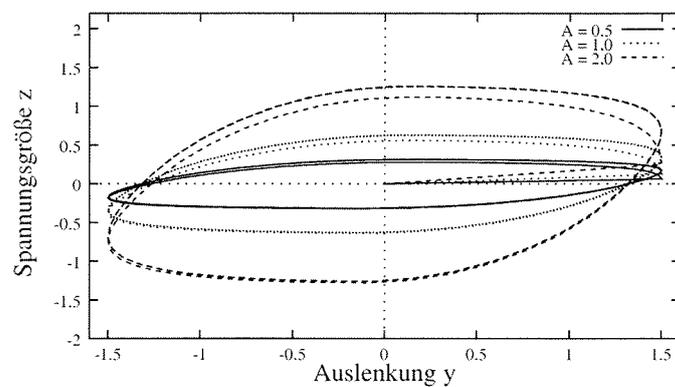
Die drei Kurven in Abbildung 4.5 ergeben sich aus $A_1 = 0,5$, $A_2 = 1,0$ und $A_3 = 2,0$ sowie $\gamma = 0,8$, $\nu = 0,5$ und $n = 1$.

4.1.4 Linearisierungsstrategie

Die nichtlinearen Entwicklungsgleichungen $\dot{z} = \mathbf{G}(\dot{q}_{rel}, z)$ werden durch lineare Gleichungen $\dot{z} = \mathbf{C}_e \dot{q}_{rel} + \mathbf{K}_e q^z$ ersetzt.

Zur Bestimmung der Linearisierungsparameter \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e der DGL

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_e)\ddot{q}_{rel} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_e)\dot{q}_{rel} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_e)q_{rel} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.7)$$

Abbildung 4.3: Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß γ Abbildung 4.4: Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß ν Abbildung 4.5: Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß A

ergeben sich aus $E\{\epsilon^T \epsilon\} \rightarrow \min$, wie im Anhang entwickelt, die folgenden Berechnungsvorschriften:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E\left\{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q^{(z)}}\right\} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -E\left\{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{q}_{rel}}\right\} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e nur an den von der Plastifizierung betroffenen Positionen mit von Null verschiedenen Werten zu besetzen ist.

Die in \mathbf{K}_e und \mathbf{C}_e enthaltenen Ableitungen lassen sich unter Verwendung eines Materialverhaltens nach Suzuki/Minai berechnen zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_{rel}} &= [1 - U(\dot{q}_{rel})U(q^{(z)} - 1) - U(-\dot{q}_{rel})U(-q^{(z)} - 1)] + \\ &\quad + \dot{q}_{rel} [-\delta(\dot{q}_{rel})U(q^{(z)} - 1) + \delta(\dot{q}_{rel})U(-q^{(z)} - 1)] \\ \frac{\partial G}{\partial q^{(z)}} &= \dot{q}_{rel} [-U(\dot{q}_{rel})\delta(q^{(z)} - 1) + U(-\dot{q}_{rel})\delta(-q^{(z)} - 1)] \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte dieser beiden Terme benötigt man die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)})$. Für einen Gauß-verteilten Prozeß ergibt sich:

$$f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(\sigma_1^2 q^{(z)2} + \sigma_2^2 \dot{q}_{rel}^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho\dot{q}_{rel}q^{(z)})}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right) \quad (4.9)$$

mit

$$\sigma_1^2 = E\{\dot{q}_{rel}^2\} \quad \sigma_2^2 = E\{q^{(z)2}\} \quad \rho = \frac{E\{\dot{q}_{rel}q^{(z)}\}}{\sigma_1\sigma_2} \quad (4.10)$$

Daraus ergibt sich für die beiden einzigen Einträge in den Korrekturmatriizen aus der Linearisierung:

$$\mathbf{C}_e = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_{rel}} f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_e = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial q^{(z)}} f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} \quad (4.12)$$

Bei näherer Untersuchung des Steifigkeitsterms findet man:

$$\mathbf{K}_e = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial q^{(z)}} f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} = \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}_{rel} [-U(\dot{q}_{rel})\delta(q^{(z)} - 1) + U(-\dot{q}_{rel})\delta(-q^{(z)} - 1)] \\ &\quad f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Unter Verwendung der Eigenschaften der Sprungfunktion kann dieses Doppelintegral in zwei Einfachintegrale getrennt werden:

$$\begin{aligned}
 K_e &= \int_0^\infty \dot{q}_{rel} f(\dot{q}_{rel}, 1) d\dot{q}_{rel} - \int_{-\infty}^0 \dot{q}_{rel} f(\dot{q}_{rel}, -1) d\dot{q}_{rel} = \\
 &= 2 \int_0^\infty \dot{q}_{rel} f(\dot{q}_{rel}, 1) d\dot{q}_{rel} = \\
 &= 2J
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Das Integral J lässt sich schließlich berechnen zu:

$$J = \frac{\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi\sigma_2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_2^2(1 - \rho^2)}\right] + \frac{\sigma_1\rho}{2\sqrt{2\pi}\sigma_2^2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_2^2}\right] \left(1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\rho}{\sqrt{2}\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}}\right]\right) \tag{4.16}$$

mit $\rho = \frac{E\{\dot{q}_{rel}q^{(z)}\}}{\sigma_1\sigma_2}$

Analog lässt sich auch der Term in der Matrix \mathbf{C}_e berechnen. Ausgehend von der bereits demonstrierten Berechnungsvorschrift ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 C_e &= - \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_{rel}} f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} = \\
 &= - \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty [1 - U(\dot{q}_{rel})U(q^{(z)} - 1) - U(-\dot{q}_{rel})U(-q^{(z)} - 1)] \\
 &\quad f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} = \\
 &= -1 + \int_1^\infty \int_0^\infty f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} dq^{(z)} + \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^0 f(\dot{q}_{rel}, q^{(z)}) d\dot{q}_{rel} = \\
 &= L - 1
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Das Integral ergibt sich dabei zu:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_2^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{\rho}{\sigma_2}x}{\sqrt{2(1 - \rho^2)}}\right)\right] dx \tag{4.18}$$

Mit $\int_0^\infty \exp(-x^2) \operatorname{erf}(Bx) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \arctan(B)$ ergibt sich:

$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \tag{4.19}$$

4.2 Kontinuierliche Biegebalkensysteme

Das Scherbalkenmodell ist in der Praxis von einigen Ausnahmen abgesehen nicht universell einsetzbar, sondern nur für die Untersuchung dafür geeigneter spezieller

Konstruktionen gedacht. Die meisten Strukturen lassen sich nur durch kontinuierliche Formulierungen beschreiben. Im Folgenden wird daher ein hysteretisches nichtlineares Materialgesetz analog zum diskreten Scherbalkenmodell vorgestellt, das diese Einschränkungen behebt.

Das Materialverhalten wird auch hier für jeden Freiheitsgrad mit einer zusätzlichen nichtlinearen Entwicklungsgleichung in differentieller Form beschrieben. Analog zu z im Modell des Scherbalkens wird dadurch als weitere Rechengröße das plastische Rückstellmoment Y eingeführt. Das vollständige Rückstellmoment hat dadurch einen rein elastischen Anteil sowie einen nichtlinearen plastischen Anteil.

Im Gegensatz zum Scherbalkenmodell muß nun von einem kontinuierlichen Verlauf der Rechengrößen auch im Inneren des Elements ausgegangen werden, da diese Effekte noch nicht im verwendeten Materialgesetz eingearbeitet sind. Daraus ergibt sich eine Abhängigkeit aller Größen vom Ort, was dazu führt, daß eine der Finite-Element-Formulierung nachempfundene Übertragung der Elementeigenschaften auf die Knotenfreiheitsgrade nötig ist.

4.2.1 Ansatz analog zur FEM

Benutzt wird eine Momenten-Krümmungsbeziehung unter den klassischen Annahmen nach Navier und Bernoulli, wie sie auch in der Literatur (z. B. [81]) zu finden ist. Dabei wird das Moment in einen linear-elastischen Anteil $M^{el}(x)$ und einen nichtlinearen, plastischen Anteil $M^{pl}(x)$ unterteilt.

Der linear-elastische Anteil läßt sich nach der klassischen Biegetheorie ausdrücken zu

$$M^{el}(x) = -\alpha EI(x)w''(x) \quad (4.20)$$

Der nichtlineare Anteil $M^{pl}(x) = (1 - \alpha)M_{Fl}Y(x)$ läßt sich entsprechend zum Scherbalkenmodell aus einer Momenten-Krümmungsbeziehung ermitteln. Analog zum Modell von Suzuki/Minai ergibt sich dann das folgende Bildungsgesetz in normierten Größen:

$$\dot{Y}(x) = \dot{\kappa}(x)[1 - U(\dot{\kappa}(x))U(Y(x) - 1) - U(-\dot{\kappa}(x))U(-Y(x) - 1)] \quad (4.21)$$

Man beachte, daß die Größen κ und Y dabei wieder analog wie bei den Formulierungen des Scherbalkensystems in dimensionsloser Form verwendet werden, die durch eine "Normierung" hinsichtlich des plastischen Grenzmomentes bzw. der entsprechenden Krümmung entsteht.

$$Y = \frac{M_{pl}}{M_{Fl}} \quad \kappa = \frac{\kappa_{pl}}{\kappa_{Fl}} \quad (4.22)$$

Daraus läßt sich das Rückstellmoment $M(x)$ ausdrücken zu

$$M(x) = -\alpha EIw''(x) + (1 - \alpha)M_{Fl}Y(x) \quad (4.23)$$

mit $\alpha \in [0; 1]$ als Steuerparameter des Verhältnisses zwischen elastischem und plastischem Steifigkeitsanteil.

Analog zu Abbildung 4.1 kann das Bildungsgesetz wieder als Überlagerung eines rein linearen Anteils und eines ideal elastisch-plastischen Anteils verstanden werden. An die Stelle von y tritt nur die normierte Krümmung κ und an die von z das normierte plastische Rückstellmoment Y .

4.2.2 Bewegungsgleichungen

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist etwas umfangreicher als im Fall des Scherbalkens, da man das Postulat des diskreten Systems aufgrund des modifizierten Materialgesetzes nicht mehr halten kann. Statt dessen muß der Ansatz auf ein kontinuierliches System erweitert werden. Um die Charakteristika im Inneren des Elements auf die Knotenfreiheitsgrade w (Verschiebung), ϕ (Verdrehung) und Y (plastisches Rückstellmoment) zu übertragen, müssen Annahmen zum Verlauf der Zustandsgrößen über das Element getroffen werden. Daraus ergeben sich für die

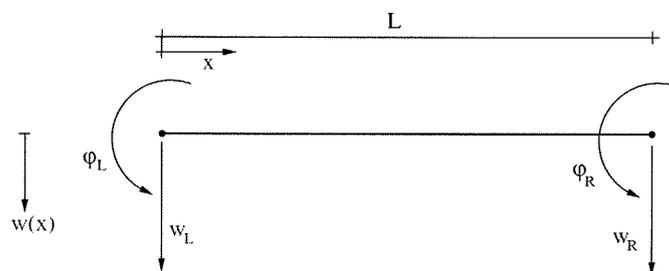


Abbildung 4.6: FEM-Element, System

Zustandsgrößen im Element unter Verwendung der Ansatzfunktionen F_i mit $\zeta = \frac{x}{l}$ und $\phi' = \frac{\phi}{l}$ folgende Verläufe:

$$w(\zeta) = F_1(\zeta)w_L - F_2(\zeta)\phi_L + F_3(\zeta)w_R + F_4(\zeta)\phi_R \quad (4.24)$$

$$w'(\zeta) = F_1'(\zeta)w_L - F_2'(\zeta)\phi_L + F_3'(\zeta)w_R + F_4'(\zeta)\phi_R \quad (4.25)$$

$$w''(\zeta) = \kappa = F_1''(\zeta)w_L - F_2''(\zeta)\phi_L + F_3''(\zeta)w_R + F_4''(\zeta)\phi_R \quad (4.26)$$

$$Y(\zeta) = F_5(\zeta)Y_L + F_6(\zeta)Y_R \quad (4.27)$$

Gewählt wurden für die Verschiebungen und Verdrehungen kubische, orthogonale Polynome. Daraus ergibt sich ein linearer Verlauf der Verkrümmung, so daß für den Verlauf des plastischen Rückstellmomentes ein linearer Ansatz ausreicht. Mit Hilfe dieser Ansatzfunktionen können nun die Bewegungsgleichungen des Systems über eine elementweise Auswertung der Ansätze abgeleitet werden. Unter Benützung des

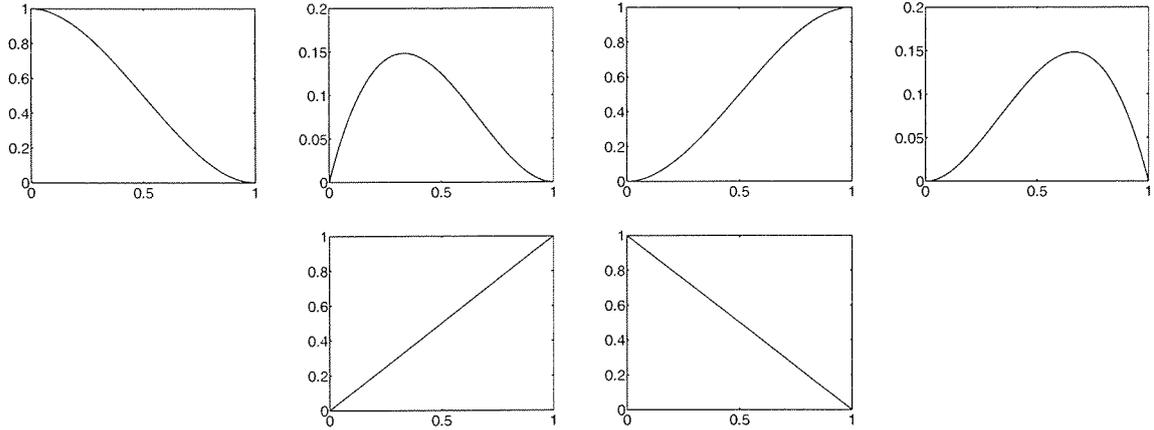


Abbildung 4.7: FEM-Ansatzfunktionen für w_L , ϕ_L , w_R , ϕ_R (obere Reihe) sowie Y_L und Y_R (untere Reihe)

Prinzips der virtuellen Arbeit (δ entspricht dem virtuellen Zustand) erhält man je Element i folgende Bestimmungsgleichung:

$$\int_0^1 [(\alpha EI w''(\zeta) + (1 - \alpha)Y(\zeta))\bar{w}''(\zeta) + \mu \dot{w}(\zeta)\bar{w}(\zeta) - p(\zeta)\bar{w}(\zeta)] d\zeta \longrightarrow Min(4.28)$$

Daraus lassen sich die Beiträge aus den Gleichgewichtsbedingungen des Elementes i zur Gesamtsystemmatrix ermitteln zu:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12\alpha & -12\alpha & 6al & -6al & -(1-\alpha) & (1-\alpha) \\ -12\alpha & 12\alpha & -6al & 6al & (1-\alpha) & -(1-\alpha) \\ 6al & -6al & 4al^2 & -2al^2 & -(1-\alpha)l & 0 \\ -6al & 6al & -2al^2 & 4al^2 & 0 & -(1-\alpha)l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{w_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{w_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\phi_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{\phi_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mu l \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & \frac{9}{70} & \frac{11}{210} & \frac{13}{420} & 0 & 0 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{13} & \frac{13}{420} & \frac{22}{210} & 0 & 0 \\ \frac{11}{210} & \frac{13}{420} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} & 0 & 0 \\ \frac{13}{420} & \frac{22}{210} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

4.2.3 Linearisierungsstrategie

Analog zum diskreten Scherbalken-Modell erhält man weitere Bestimmungsgleichungen der Unbekannten w_l , w_R , ϕ_L , ϕ_R , Y_L und Y_R aus den Materialgleichungen. Somit liegen eine ausreichende Anzahl von Bestimmungsgleichungen vor, die eine Lösung nach den unbekanntem Knotenverschiebungen und -verdrehungen sowie der Spannungsgrößen ermöglicht.

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung ist grundsätzlich nichtlinearer Natur, kann aber wieder im Sinne einer Statistischen Linearisierung linearisiert werden, d. h. man überführt das Bildungsgesetz 4.21 in eine lineare Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{lin}(\zeta) = & C^{w_L}(12\zeta - 6)\dot{w}_L + C^{\phi_L}(6\zeta - 4)\dot{\phi}_L + C^{w_R}(-12\zeta + 6)\dot{w}_R + \\ & + C^{\phi_R}(-6\zeta + 2)\dot{\phi}_R + K^{Y_L}(1 - \zeta)Y_L + K^{Y_R}\zeta Y_R \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Linearisierungsparameter C^{w_L} , C^{w_R} , C^{ϕ_L} , C^{ϕ_R} , K^{Y_L} und K^{Y_R} werden analog zum Scherbalkensystem mit Hilfe der Bedingung

$$\epsilon^T \epsilon = \int_0^1 \left(\dot{Y}(\zeta) - \dot{Y}_{lin}(\zeta) \right)^T \left(\dot{Y}(\zeta) - \dot{Y}_{lin}(\zeta) \right) d\zeta \quad (4.31)$$

$$E\{\epsilon^T \epsilon\} \longrightarrow Min \quad (4.32)$$

ermittelt. Eine vollständige analytische Auswertung der Gleichung in symbolischer Form ist nicht geglückt, doch kann eine langwierige numerische Minimumsuche vermieden werden. Dabei bedient man sich eines Tricks, um die aus der Erwartungswertbildung $E\{\beta(x_1, x_2, \dots, x_6)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x_1, x_2, \dots, x_6) f(x_1, x_2, \dots, x_6) dx_1 dx_2 \dots dx_6$ resultierende 6-fache Integration in jedem Suchschritt nach dem absoluten Minimum zu umgehen: Da $E\{\epsilon^T \epsilon\}$ eine quadratische Form in allen unbekanntem Linearisierungsparametern hat, kann man den Erwartungswert auch darstellen als

$$E\{\epsilon^T \epsilon\} = \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{b}^T \mathbf{p} + c. \quad (4.33)$$

Die unbekanntem 6 Linearisierungsparameter werden dabei in \mathbf{p} als Vektor geschrieben und bilden mit der noch zu bestimmenden Matrix \mathbf{A} , dem Vektor \mathbf{b} und der Konstante c eine quadratische Gleichung, deren Minimum leicht bestimmbar ist. Zur Berechnung des Erwartungswertes der Abweichung ϵ werden die stochastischen Parameter aus dem letzten Iterationsschritt der Berechnung benützt. Aus

$$\frac{\partial E\{\epsilon^T \epsilon\}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.34)$$

ergibt sich \mathbf{p} zu

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (4.35)$$

Zur Bestimmung der Gleichungsparameter \mathbf{A} , \mathbf{b} und c berechnet man in jedem Iterationsschritt $6^2 + 6 + 1 = 43$ Stützstellen $F_i(\mathbf{p})$ pro Element. Die Unbekannten A_{ij} , b_i und c werden in einem Vektor $\mathbf{u} = (A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{1N} \ A_{21} \ \dots \ A_{2N} \ \dots \ A_{N1} \ \dots \ A_{NN} \ b_1 \ \dots \ b_n \ c)$ angeordnet, so daß sich 43 Gleichungen in matrizieller Schreibweise herleiten lassen zu $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{O}\mathbf{u}$. Die Matrix \mathbf{O} ergibt sich dabei durch Umordnung der Gleichung 4.33. Daraus lassen sich sofort die unbekanntes A_{ij} , b_i und c aus $\mathbf{u} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{p})$ ermitteln.

Zentrale Bedeutung bei dieser Strategie hat die Wahl der Stützstellen zur Berechnung der zu minimierenden Fläche. Dabei sind zwei Szenarien denkbar:

1. Die Stützstellen werden zu stark konzentriert gewählt
In diesem Fall kann das Minimum weit entfernt von der Punktwolke der Stützstellen liegen, so daß bei der Bestimmung der Funktion der zu minimierenden Fläche bereits kleine numerische Ungenauigkeiten ausreichen, um eine exakte Bestimmung des Minimums der Fläche stark zu verfälschen.
2. Die Stützstellen werden zu stark verstreut gewählt
In diesem Fall kann es passieren, daß der der Stützstelle zugeordnete Funktionswert der zu minimierenden Fläche einen sehr großen Wert annimmt. Übersteigt dieser Wert den maschinenabhängigen Maximalwert der Rechenanlage, so führt dies zu einem Abbruch des Rechengangs.

Da a priori nicht bekannt ist, wo das Minimum liegt, kann dieses Problem der Wahl der Stützstellen nicht vollständig eliminiert werden. Drei Gegenstrategien sind denkbar, um eine möglichst exakte Bestimmung des Minimums zu ermöglichen:

1. Einerseits kann man mehr Stützstellen als mindestens nötig verwenden. Daraus entsteht ein überbestimmtes Gleichungssystem das numerisch optimiert werden kann.
2. Andererseits ist es denkbar, mit einer stark konzentrierten Punktwolke zu beginnen und dann im Sinne einer Iteration um das jeweils daraus bestimmbare Minimum herum eine neue Punktwolke zu legen. Somit ist sichergestellt, daß die Punktwolke sich um die Region der starken Krümmung der zu minimierenden Funktion befindet und somit die Bestimmung der Funktionsparameter leichter möglich ist.
3. Die dritte Möglichkeit stellt die Wahl des Streuungsradius der Punktwolke der Stützstellen dar. Beginnend bei einer eng begrenzten Wolke kann so der Radius vergrößert werden, bis die Grenze Rechenkapazität erreicht ist.

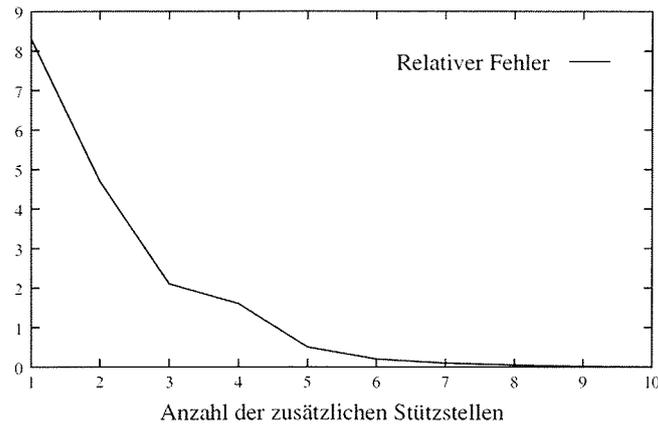


Abbildung 4.8: relativer Fehler in Prozent bei der Bestimmung der Linearisierungsparameter unter Verwendung zusätzlicher Freiheitsgrade

Die letzten beiden Strategien laufen auf eine Iteration hinaus, die rechenzeitaufwendig ist, da bei jedem Optimierungsschritt eine komplette Neuberechnung nötig ist. Daher wurde im weiteren nur die erste Strategie weiterverfolgt, die ausreichend genaue Ergebnisse bei bereits nur wenigen zusätzlichen Stützstellen im Fall des Biegebalkenmodells lieferte.

Exemplarisch ist in Figur 4.8 der relative Fehler in der Berechnung der Linearisierungsparameter für ein beliebig gewähltes Stockwerk in Abhängigkeit der Anzahl der zusätzlichen Stützstellen gezeigt. Ausgegangen wurde dabei von einem eng konzentrierten Steuerungsradius, der vom Minimum der zu betrachtenden Fläche weit entfernt war; dieses Szenario entspricht somit dem numerisch ungünstigsten Fall.

Wie man sieht nimmt der Fehler bei nur wenigen zusätzlichen Stützstellen schnell ab, so daß diese Strategie als am zweckdienlichsten erscheint. Unter Verwendung dieses Vorgehens entsteht ein wesentlich geringerer numerischer Aufwand im Vergleich zu einer ungerichteten Minimumsuche eines Systems mit 6 Freiheitsgraden selbst unter Verwendung kommerzieller optimierter Algorithmen. Mit Hilfe dieses Vorgehens unter Verwendung der Information über die Form der zu minimierenden Fläche konnten die Rechenzeiten zur Bestimmung der Linearisierungsparameter auf einen Bruchteil reduziert werden.

Aus den nun bekannten Linearisierungsparametern ergibt sich für die Spannungsgrößen in den Knoten des Elements für $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$

$$\dot{Y}_L^{lin} = -6C^{wL}\dot{w}_L - 4C^{\phi L}\dot{\phi}_L + 6C^{wR}\dot{w}_R + 2C^{\phi R}\dot{\phi}_R + K^{Y_L}Y_L \quad (4.36)$$

$$\dot{Y}_R^{lin} = 6C^{wL}\dot{w}_L + 2C^{\phi L}\dot{\phi}_L - 6C^{wR}\dot{w}_R - 4C^{\phi R}\dot{\phi}_R + K^{Y_R}Y_R \quad (4.37)$$

Zusammenfassend ergibt sich nach der Linearisierung pro Element folgender Beitrag zum Gesamtgleichungssystem:

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^{Y_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^{Y_R} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6C^{w_L} & 6C^{w_R} & -4C^{\phi_L} & 2C^{\phi_R} & 1 & 0 \\ 6C^{w_L} & -6C^{w_R} & 2C^{\phi_L} & -4C^{\phi_R} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Diese Gleichungen können nun zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen in ein Gesamtgleichungssystem eingebaut werden, das dann numerisch lösbar ist.

Der Einbau ins Gesamtsystem erfolgt dabei wie in Standardwerken der Finite Element Methode beschrieben (z. B. [81]).

Kapitel 5

Diskrete Scherbalken-Systeme

Kettenstrukturen wie z. B. Stockwerkrahmen erlauben aufgrund ihrer einfachen Beschreibung, die wesentlichen Merkmale der Vorgehensweise wie die modale Entwicklung und die Linearisierung zu erkennen und das Verfahren hinsichtlich seiner Funktionsweise zu testen.

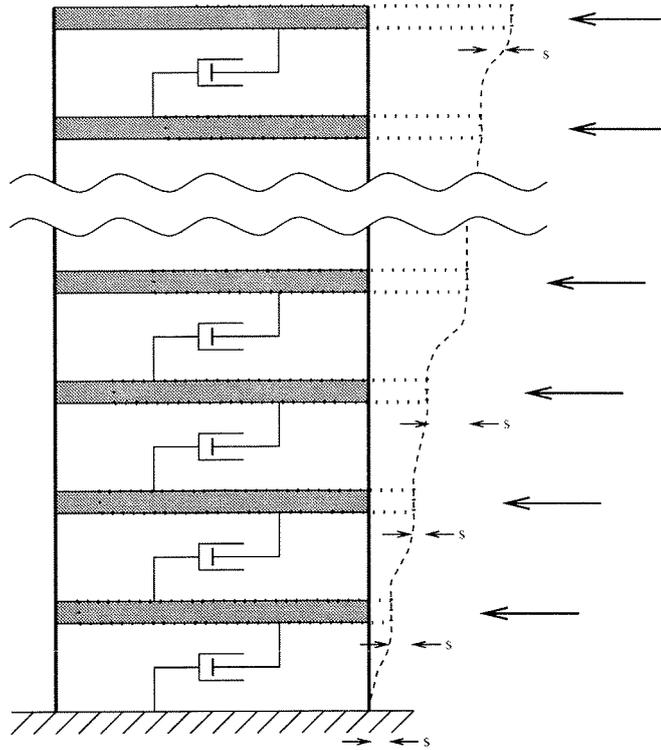
Verwendet wurde hier ein Materialverhalten das dem Modell des Scherbalkens entspricht. Dieses Modell liefert im Allgemeinen für Stockwerkrahmenstrukturen bereits gute Ergebnisse, ohne daß wesentlich kompliziertere Modelle nötig sind. Sollte das Modell nicht einer hinreichend genauen Beschreibung genügen, ist eine Erweiterung des Modells auf beliebige Systeme (wie im nächsten Kapitel beschrieben) nötig.

5.1 Klassisches Vorgehen

5.1.1 System

Der Stockwerkrahmen besteht aus den starren Stockwerksmassen m_i , die über die elastischen Stäbe mit jeweils einer Ersatzfedersteifigkeit von $\alpha k = \alpha \frac{12EI}{h^3} l$ (mit l =Anzahl der Stützen pro Stockwerk) miteinander verbunden sind. Um das hysteretische Materialverhalten zu simulieren, wird neben dem Dämpfer mit der Dämpfungskonstante c_i zwischen je zwei benachbarte Stockwerke die hysteretische Rückstellkraft $(1 - \alpha)k_i q_{Fi} z_i$ hinzugefügt. Das System kann entweder in absoluten Stockwerksverschiebungen oder aber in relativen Verschiebungen beschrieben werden. Die Gleichgewichtsbedingung des Stockwerkes i lautet dann:

$$m_i \ddot{q}_i - c_{i+1}(\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i) + c_i(\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) - \alpha k_{i+1}(q_{i+1} - q_i) + \alpha k_i(q_i - q_{i-1}) - (1 - \alpha)k_{i+1} q_{rel F i+1} z_{i+1} + (1 - \alpha)k_i q_{rel F i} z_i = F_i \quad (5.1)$$



bzw. unter Verwendung der relativen Koordinaten $s_i = q_i - q_{i-1}$ mit $q_0 = 0$

$$m_i \sum_{j=1}^i \ddot{s}_j - c_{i+1} \dot{s}_{i+1} + c_i \dot{s}_i - \alpha k_{i+1} s_{i+1} + \alpha k_i s_i + (1 - \alpha) k_{i+1} z_{i+1} s_{F i+1} - (1 - \alpha) k_i z_i s_{F i+1} = F_i \quad (5.2)$$

Die dimensionslosen hysteretischen Rückstellkräfte z_i ergeben sich dabei aus dem Materialverhalten. Zur Beschreibung des Materialverhaltens nach Bouc/Wen oder Suzuki/Minai gehören je Plastifizierungsstelle immer zwei Anteile in den linearen Gleichgewichtsbedingungen: Eine lineare Federsteifigkeit ($\alpha_i k_i s_i$) und ein der Hysterese zugeordneter Term ($(1 - \alpha_i) k_i q_F z_i$). Dabei ist α der Faktor, der das Verhältnis zwischen den Steifigkeiten vor und nach der Plastifizierung steuert. Zusätzlich tritt je Plastifizierungsstelle noch die nichtlineare Entwicklungsgleichung des hysteretischen Kraftanteils

$$\dot{z}_i = G_i(\dot{s}_i, z_i) \quad (5.3)$$

auf. G_i hängt dabei vom verwendeten Materialgesetz ab. Damit ergeben sich als Unbekannte die relativen Verschiebungen s_i sowie die Rückstellkräfte z_i . Die beiden Größen sind dabei über die Steifigkeitsmatrix gekoppelt und können zusammen mit den Materialgleichungen somit nur als System gelöst werden.

Unter Verwendung des Materialgesetzes nach Suzuki- Minai

$$\dot{z}_i = \dot{s}_i [1 - U(\dot{s}_i)U(z_i - 1) - U(-\dot{s}_i)U(-z_i - 1)] \quad (5.4)$$

kann das Gleichungssystem mit dem Unbekanntenvektor \mathbf{p} in den Relativverschiebungen geschrieben werden als:

$$\mathbf{M}^r \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}^r \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^r \mathbf{p} + \Phi = \mathbf{Q} \quad (5.5)$$

mit:

$$\mathbf{p}^T = (s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n \quad z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{M}^r = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_2 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_3 & m_3 & m_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_n & m_n & m_n & \dots & m_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{C}^r = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{K}^r = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & b_1 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 & b_2 & -b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

mit $a_i = \alpha_i k_i$ und $b_i = (1 - \alpha_i) k_i q_{Fl i}$ sowie:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -G_1(\dot{s}_1, z_1) \\ -G_2(\dot{s}_2, z_2) \\ \vdots \\ -G_n(\dot{s}_n, z_n) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$Q = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

5.1.2 Linearisierung

Das Gleichungssystem 5.5 kann bei stochastischer Belastung durch Simulation (Monte Carlo) oder Näherungsmethoden wie die Statistische Linearisierung gelöst werden. Bei Anwendung der Statistischen Linearisierung wird es durch $(M^r + M_e)\ddot{\mathbf{p}} + (C^r + C_e)\dot{\mathbf{p}} + (K^r + K_e)\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ersetzt.

Die entsprechenden Ausdrücke ergeben sich analog zum Vorgehen in den Kapiteln *Statistische Linearisierung* und *Materialverhalten*. Die Zusatzterme aus der Linearisierung lauten dann:

$$M_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{e1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{e2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{en} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{e1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{e2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{en} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

mit:

$$c_{ei} = -E \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \dot{s}_i} \right\} \quad (5.15)$$

$$k_{ei} = -E \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial z_i} \right\} \quad (5.16)$$

Das sich so ergebende lineare Gleichungssystem kann nun mit den bereits beschriebenen Mitteln iterativ gelöst werden. Die Relativverschiebungen s_i sind nur mittels der Gleichung (5.6) gekoppelt, in den nichtlinearen Materialbeziehungen (5.4) jedoch entkoppelt, was wesentliche Berechnungsvereinfachungen erlaubt.

5.1.3 Beispiel: SDOF-System

Um das Prinzip der statistischen Linearisierung zu verdeutlichen, wird ein nichtlineares Einfreiheitsgradsystem einerseits numerisch "exakt" als auch als linearisiertes System näher untersucht. Die Gleichungen zur Linearisierung werden nicht explizit vorgeführt, da hier nur gezeigt werden soll, in wie weit das lineare Ersatzsystem das Orginalsystem abbilden kann.

Als System wurde ein dem Scherbalkenmodell folgender Einmassenschwinger der Masse $m = 1.000 \text{ kg}$ gewählt. Die Federkonstante k beträgt 5.000 N/m und verteilt sich mit $\alpha = 0.8$ auf Weg- und Kraftgröße. Das System ist mit einer Dämpfung versehen, die einer Dämpfungskonstante von $c = 50 \text{ Ns/m}$ entspricht.

Der Einmassenschwinger wird von einer periodischen Last der Form $F(t) = 3.500 \cos(2\pi \cdot 0,3 \cdot t) + 6.500 \cos(2\pi \cdot 0,35 \cdot t)$ in N belastet. Die Anregefrequenzen liegen damit in der Nähe der Eigenfrequenz des linearen Systems (0,36 Hz).

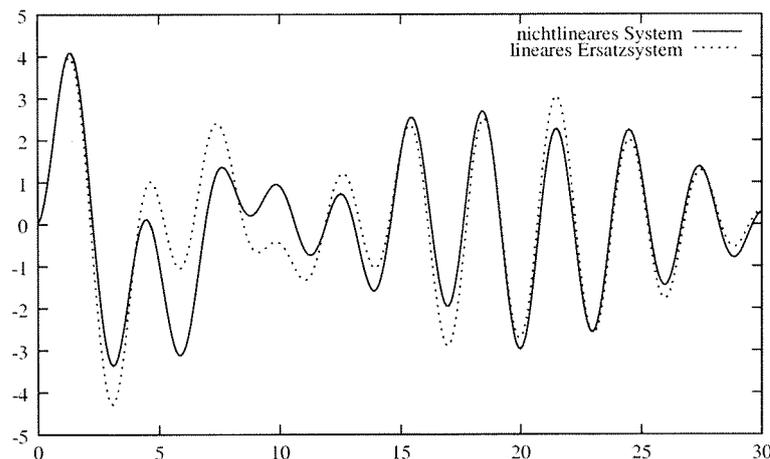


Abbildung 5.1: zeitlicher Verlauf der Verschiebungen des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems

Die Antwort des Systems wurde einerseits in seiner nichtlinearen Form mit einem Zeitschrittalgorithmus (HHT) berechnet, andererseits zunächst linearisiert und dann am linearen Ersatzsystem die Antwort berechnet. Daraus ergaben sich die in Abbildung 5.1 abgebildeten Zeitverläufe der Verschiebungsgröße, die belegen, daß das linearisierte System den exakten Verlauf der nichtlinearen Bewegung in brauchbarer Näherung darstellen kann.

Im Bereich des Einschwingvorgangs treten noch erhebliche Abweichungen auf, sobald sich jedoch im weiteren Zeitverlauf ein stationärer Zustand eingestellt hat, ist der Verschiebungsverlauf des linearen Ersatzsystems nahe an der exakten Lösung des ursprünglichen Systems.

Die normierten Kraftgrößen z (Abbildung 5.2) haben stark unterschiedliche Verläufe, da am nichtlinearen System über einen Betrag von 1 hinausgehend keine weitere Steigerung möglich ist. Im Gegensatz dazu entfällt diese Begrenzung beim linearisierten Ersatzsystem, so daß auch höhere Werte möglich sind. Dies wird jedoch durch vergrößerte Trägheitskräfte als Folge größerer Beschleunigungen abgefangen, so daß die Ergebnisse in den Verschiebungen kaum Abweichungen aufweisen.

Bei den Werten der Rückstellkräfte (Abbildung 5.3) unter Einschluß der linearen Anteile treten keine derart großen Abweichungen auf.

Im Kraft-Verschiebungs-Diagramm (Abbildung 5.4) erkennt man die Hysterese deutlich. Die Unterschiede zwischen nichtlinearem System und linearisiertem Ersatzsystem zeigen sich in der Lage der Hysterese, die umschlossene Fläche jeweiliger Hysteresendurchläufe als Maß für die Energiedissipation ist jedoch sehr ähnlich. Die unterschiedliche Lage der Hysterese hat somit keinen wesentlichen Einfluß auf die Systemantwort.

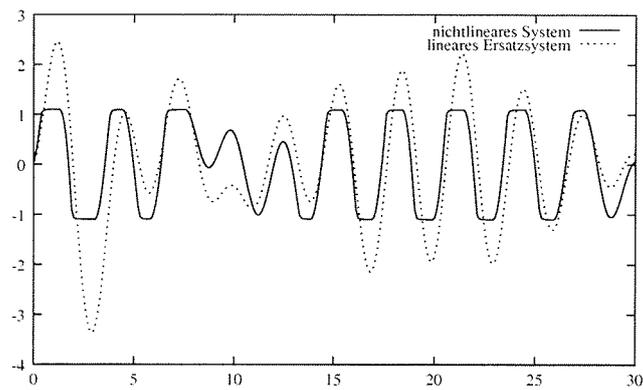


Abbildung 5.2: zeitlicher Verlauf der Kraftgrößen des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems

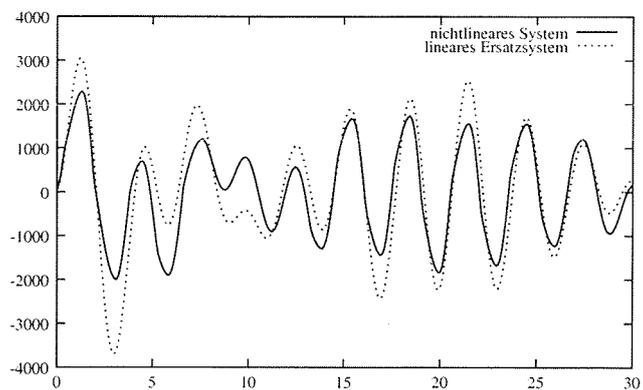


Abbildung 5.3: zeitlicher Verlauf der Rückstellkraft (hysteretischer und linearer Anteil) des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems

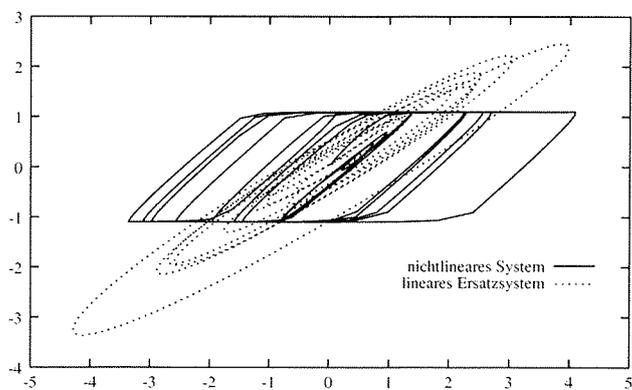


Abbildung 5.4: Kraft-Verschiebungs-Diagramm des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems

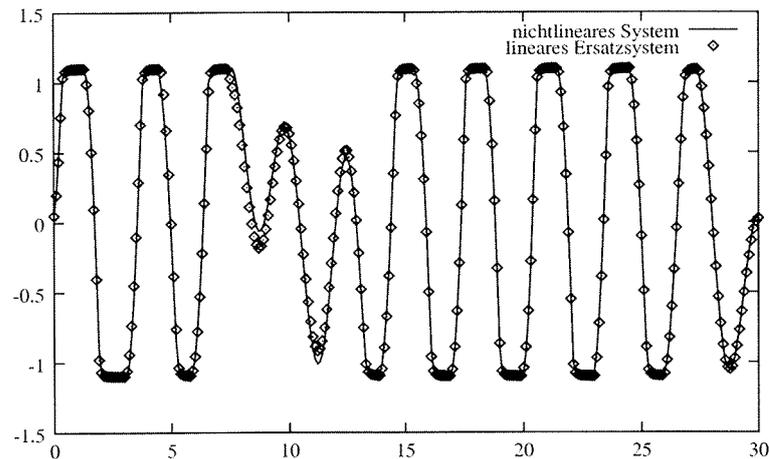


Abbildung 5.5: Kraft-Verschiebungs-Diagramm des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems

In manchen Anwendungsfällen wird jedoch nicht die Verschiebung für weiterführende Berechnungen benötigt, sondern die auftretenden Kräfte bzw. Spannungen. In diesem Fall ist im Hinblick auf die erwähnten Abweichungen eine Nachlaufrechnung anzuraten: Über den am linearisierten Ersatzsystem berechneten zeitlichen Verlauf der Verschiebungen können leicht mit Hilfe der Materialbeschreibung in der ursprünglichen nichtlinearen Form Kräfte oder Spannungen errechnet werden.

Wie in Abbildung 5.5 zu sehen, ist der Verlauf der Spannungsgröße aus der Nachlaufrechnung mit den Ergebnissen des linearen Ersatzsystems nahezu identisch zu der exakten Berechnung am nichtlinearen Ausgangssystem. An diesem einfachen Beispiel kann man erkennen, daß das lineare Ersatzsystem das nichtlineare System in wesentlichen Punkten gut ersetzen kann.

5.2 Reduzierte Basis

5.2.1 Vorbemerkung: Darstellung der Antwort mit Ansatzmoden

Die *modale Superpositionsmethode* beruht auf einer Beschreibung der Systemantwort durch einen Separationsansatz, bestehend aus zeitunabhängigen Formfunktionen und einer ihnen zugeordneten Anzahl von Funktionen, die den Zeitverlauf charakterisieren. Als Formfunktionen verwendet man in linearen Untersuchungen in der Regel die Schwingungseigenformen, da sie ein orthogonales System bilden und somit die Berechnung sich erheblich vereinfacht, da die einzelnen Freiheitsgrade entkoppelt voneinander untersucht werden können.

Das Verfahren hat für lineare Systeme den Vorteil gegenüber direkten Integrationsverfahren, daß sich die Rechenzeiten verkürzen und überdies interessante Systemparameter (wie z. B. Eigenfrequenzen oder Partizipationsfaktoren der Eigenmoden) als Zusatzinformation berechnet werden. Unter Verwendung sämtlicher Eigenmoden liefert die modale Superpositionsmethode die exakte Lösung.

Die Darstellung durch Eigenvektoren wirft die Frage auf, ob es notwendig ist, alle Eigenmoden für die Berechnung heranzuziehen. Bekanntlich genügt es, bei ausreichend verteilten und nicht impulsartig einwirkenden Belastungen auch, einen unvollständigen Satz an Eigenmoden zu verwenden, was eine erhebliche Rechenzeiterparnis zur Folge hat. Dieses Vorgehen hat sich bewährt, solange man sich im linearen Bereich befindet. Sobald das System Nichtlinearitäten aufweist, stellt sich die Frage, wie diese einzubringen sind.

Zur Lösung dieses Problems wird in der Literatur als Lösung unter anderem vorgeschlagen, die Nichtlinearitäten durch *Pseudolasten* darzustellen, die auf die real existierenden aufaddiert werden. Dies führt dazu, daß man mit den immer gleichen Eigenmoden rechnet, sich aber in den einzelnen Iterationsschritten zur Gleichgewichtsfindung die Lasten ändern. Über den Lastvektor sind die Gleichgewichtsbedingungen dann auch gekoppelt.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung einer anderen Kombination von Vektoren anstelle der Eigenmoden zur Beschreibung der Systemantwort. Denkbar hierfür wäre eine Basis aus Ritz-Basisvektoren wie z. B. von Wilson vorgeschlagen.

Die vorliegende Arbeit basiert auf einer ähnlichen Vorgehensweise: Als Basis wird eine Kombination aus einigen ausgewählten Eigenmoden verwendet, ergänzt durch einige im folgenden als *plastische Modes* bezeichnete Formfunktionen, die das nicht-lineare Verhalten des Systems charakterisieren.

Bei ausreichend verteilten Anregungen im niederfrequenten Bereich, wie sie z. B. bei der Windanregung vorliegen, kann die lineare Systemantwort häufig bereits mit nur 2 bis 3 Schwingungsmoden sehr gut beschrieben werden, selbst wenn das Tragwerk mit Hunderten oder Tausenden von Freiheitsgraden in der FEM-Aufbereitung beschrieben war.

Die Reduzierung der Freiheitsgrade ist noch deutlicher bei kontinuierlichen Systemen wie z. B. einer Platte zu sehen: Während die FEM-Berechnung eine Diskretisierung mit einer großen Anzahl von Unbekannten nötig macht, kann man unter Verwendung von nur wenigen Eigenmoden die lineare Antwort des Systems leicht erhalten. Bei einer Bewertung ist natürlich zu bedenken, daß, bevor eine Weiterrechnung mit wenigen Eigenvektoren möglich ist, diese erst durch Berechnung des ursprünglichen Systems bestimmt sein müssen.

Die Vorteile dieser Vorgehensweise treten daher bei deterministischen Berechnungen viel weniger zu Tage als bei stochastischen Berechnungen, wo bei Simulationsberechnungen oder wie im vorliegenden Fall bei iterativem Vorgehensweise Berechnungswiederholungen für das modal beschriebene System in großer Zahl nötig sind.

5.2.2 Beispiel: Benötigte Eigenmoden zur Antwortdarstellung

Als Beispiel wurde ein linear reagierendes 20-stöckiges diskretes Rahmensystem mit gleichen Stockwerksmassen und gleicher Stielsteifigkeit verwendet. Es wird ein dem Scherbalkenmodell folgendes Materialverhalten zugrundegelegt, so daß die Unbekannten den Stockwerkshorizontalverschiebungen entsprechen; dementsprechend gibt es im exakten Fall 20 Eigenmoden und ebensoviele Eigenfrequenzen. Unter der Annahme einer Stockwerksmasse von 3.000 kg und einer äquivalenten konstanten Federsteifigkeit von 12.000.000 N/m (um die Steifigkeit der Stockwerksstiele zu ersetzen) ergeben sich folgende Eigenfrequenzen:

20,07 Hz	19,90 Hz	19,60 Hz	19,19 Hz	18,67 Hz
18,04 Hz	17,30 Hz	16,47 Hz	15,53 Hz	14,51 Hz
13,39 Hz	12,20 Hz	10,94 Hz	9,62 Hz	8,23 Hz
6,80 Hz	5,33 Hz	3,83 Hz	2,31 Hz	0,77 Hz

Das System befindet sich unter einer idealisierten Bodenanzregung, die sich aus drei Anteilen unterschiedlicher Frequenz und Stärke zusammensetzt:

- Fußpunktbeschleunigung mit 1,0 m/s und einer Frequenz von 3,4 Hz
- Fußpunktbeschleunigung mit 1,2 m/s und einer Frequenz von 8,2 Hz
- Fußpunktbeschleunigung mit 1,6 m/s und einer Frequenz von 3,9 Hz

Der daraus resultierende Anregungskraftverlauf hat den in Abbildung 5.6 gezeigten Verlauf. Die Antwort des Systems wurde mit Hilfe der modalen Superposition ermittelt, wobei unter Berücksichtigung aller Eigenmoden die exakte Lösung resultiert.

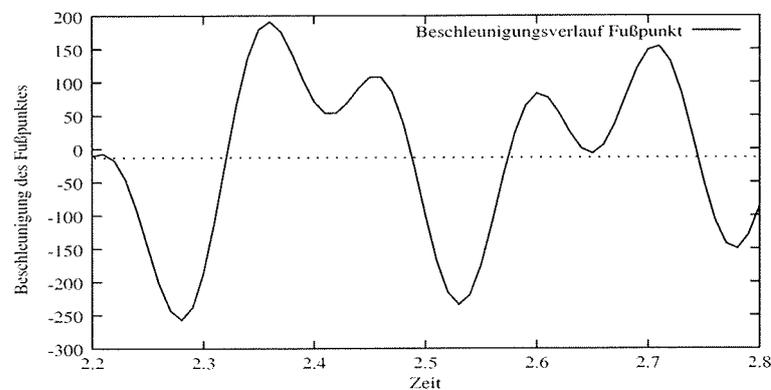


Abbildung 5.6: Beispiel; zeitlicher Verlauf der Anregung

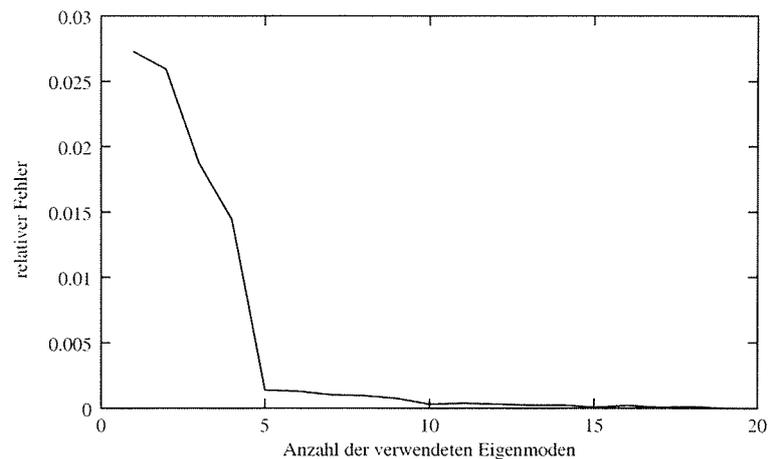


Abbildung 5.7: Beispiel; Fehler bei nur unvollständiger Wahl einer Basis aus Eigenmoden

Anschließend wurde schrittweise die Zahl der verwendeten Eigenmoden reduziert, um die minimal nötige Anzahl zu ermitteln. Die errechnete Antwort wird dabei nur noch zu einer Näherung für die tatsächlichen Reaktion des Systems. Um die Abweichung zu charakterisieren, wird der maximale relative Fehler der Einzelabweichung für jedes Stockwerk summiert und gemittelt. So ergibt sich zum Beispiel für das oberste Stockwerk die in Abbildung 5.7 gezeigte Abhängigkeit des summierten Fehlers von der Anzahl der verwendeten Eigenmoden zur Bestimmung der Systemantwort.

Die Schwingungsantwort für den exakten Fall sowie unter Verwendung von nur 3, 4 bzw. 5 Eigenmoden ergibt den in den Abbildungen 5.8, 5.9 und 5.10 gezeigten zeitlichen Verlauf für die Verschiebung des obersten Stockwerks.

Deutlich kann man erkennen, daß nur wenige Eigenmoden ausreichen, um nahezu eine Übereinstimmung der Verschiebungsverläufe zu erhalten. Andererseits sieht man jedoch auch deutlich, daß bereits eine Mode zu wenig zu einem nicht zu vernachlässigenden Fehler führt.

Insbesondere wenn eine Mode weggelassen wird, in deren Eigenfrequenz das System stark angeregt wird, weichen die Ergebnisse stark ab. In diesem Beispiel hatte die Mode, die beim Übergang von der Basis mit drei (Abb. 5.8) auf die mit vier Ansatzmoden (Abb. 5.8) hinzugenommen wurde eine Eigenfrequenz von 3,83 Hz und wurde somit stark vom ersten Anteil der Anregung angesprochen.

Somit hat die Entscheidung, welche Moden nicht mehr gebraucht werden, unter Umständen weitreichende Folgen und muß daher mit Sorgfalt getroffen werden.

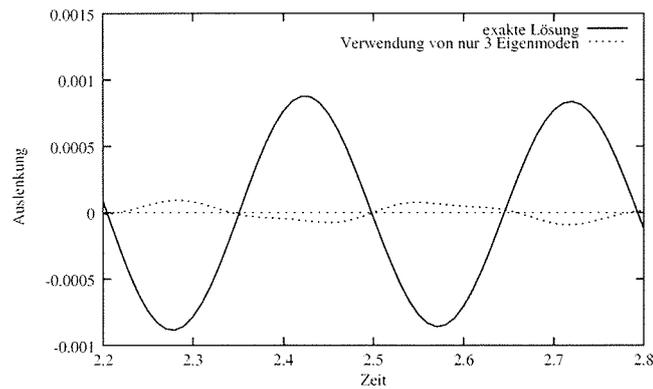


Abbildung 5.8: Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 3 Eigenmoden zur Antwortberechnung

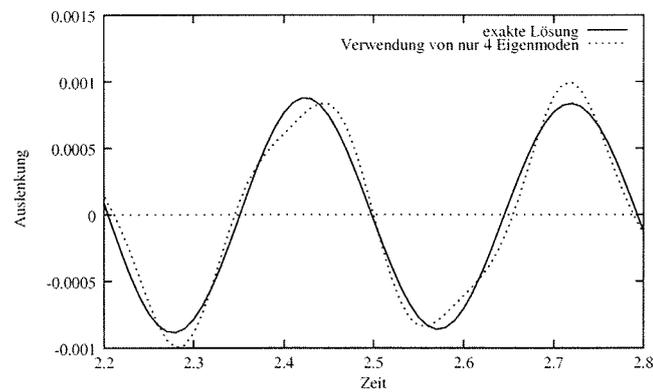


Abbildung 5.9: Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 4 Eigenmoden zur Antwortberechnung

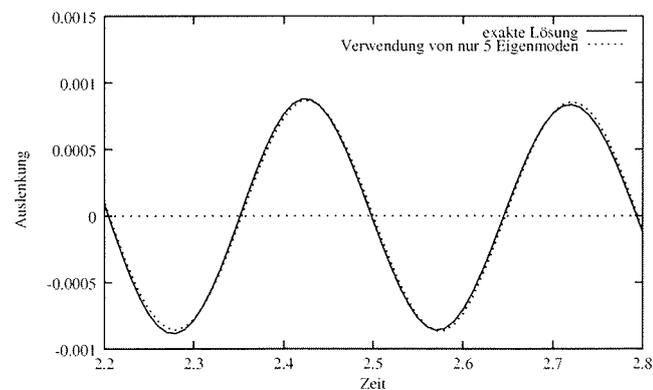


Abbildung 5.10: Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 5 Eigenmoden zur Antwortberechnung

5.2.3 Wahl der Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis

Bei der Beschreibung des nichtlinearen stochastischen Systems, das anschließend mit Hilfe der statistischen Linearisierung iterativ gelöst wird, kann man sich die Vorteile einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Verwendung von Formfunktionen zur örtlichen Darstellung der Lösung zunutze machen. Durch den Wechsel in eine neue Basis, bestehend aus einer geringen Zahl von Ansatzfunktionen, kann die Anzahl der Unbekannten wesentlich reduziert werden.

Zur Auswahl der Formfunktionen wird die Reaktion des Systems gedanklich unterteilt in einen rein elastischen linearen Anteil sowie einen plastischen nichtlinearen Anteil, der aus lokalen Plastifizierungen entsteht.

- elastische Schwingungseigenvektoren

Der rein elastische Anteil der Systemantwort ergibt sich aus den linearen Eigenschaften des Systems. Dabei kann, wie bereits gezeigt, die Zahl der verwendeten Eigenvektoren stark reduziert werden.

Zur Berechnung der sogenannten *elastischen Moden* r_E wird das linearisierte System mit seinen Ausgangsparametern verwendet.

Die elastischen Moden werden bestimmt aus der üblichen Eigenwertgleichung (aufgestellt in Relativverschiebungen):

$$(-\lambda^2 \mathbf{M}^r + \mathbf{K}^r) \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Zur weiteren Berechnung verwendet wird von den n erhaltenen Eigenmoden nur ein Satz von a_E Eigenmoden. Sie werden so ausgewählt, daß sie die globale Antwort des Systems, speziell sein Verhalten in den Bereichen ohne Plastifizierung, gut abbilden können. Im Regelfall sind dies die zu den niedrigsten Eigenfrequenzen gehörenden Eigenvektoren, da die meisten Anregungen im Baubereich Spektren mit einem hohen Anteil im tieffrequenten Bereich aufweisen.

Die elastischen Moden umfassen nur Anteile für die Verschiebungen y , nicht jedoch für die Spannungsgröße z , da sie nur rein elastisches Verhalten beschreiben.

- plastische Moden

Lokale Plastifikationen werden durch sogenannte *plastische Moden* r_P beschrieben, die primär die lokal konzentrierten starken Krümmungen aus Plastifizierungen repräsentieren.

Bei der Beschreibung des nichtlinearen Anteils der Systemantwort müßte unter Beibehaltung der ursprünglichen Basis von Schwingungseigenvektoren eine große Anzahl wenn nicht sogar alle Moden verwendet werden, da sich die mit der Plastifizierung einhergehenden starken lokalen Krümmungen nur mit

hochfrequenten Moden beschreiben lassen. Somit wäre es nicht möglich, die Anzahl der Freiheitsgrade wesentlich zu reduzieren.

Verwendet man jedoch anstelle der hochfrequenten Eigenvektoren spezielle Ansatzfunktionen, die die Plastifizierung zutreffend abbilden können, so sind außer den zur Darstellung des elastischen Anteils nötigen a_E Moden nur wenige zusätzliche Moden nötig. Zur Abbildung eines Geschosses mit Plastifizierung ist sogar nur eine einzige zusätzliche Formfunktion nötig.

Bei der Wahl der a_P Moden zur Darstellung des plastischen Anteils der Antwort müssen die Stellen einer plastischen Reaktion bereits bekannt sein bzw. durch Vorberechnungen oder iterative Verbesserungen ermittelt werden. Dies ist jedoch insbesondere bei Kettenstrukturen relativ einfach möglich.

Die plastischen Moden beschreiben die Verschiebungen infolge lokaler Plastizierungen. Zugeordnet zu jedem plastischen Mode wird in das Gleichgewichtsgleichungssystem ein zusätzlicher Freiheitsgrad für die Spannungsgrößen z eingeführt. Vorteilhaft ist es dabei, von Einheitsverschiebungen und -rückstellkräften auszugehen.

Nachdem die reduzierte Basis nicht mehr alle theoretisch möglichen Antworten des Systems enthält, muß bei der Wahl der Basis besondere Sorgfalt auf die Auswahl der verwendeten Moden gelegt werden.

5.2.4 System in der reduzierten Basis

Die reduzierte Basis ergibt sich aus den ausgewählten Formfunktionen (elastische und plastische Moden) für die Verschiebungen, bzw. Relativverschiebungen, und zusätzlich den Kraftgrößen, d. h. mit den neuen Unbekannten \mathbf{u} und \mathbf{z} zu:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{E,1} & \dots & \mathbf{r}_{E,a_E} & \mathbf{r}_{P,1} & \dots & \mathbf{r}_{P,a_P} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \mathbf{1} & \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

als Matrix, die in \mathbf{r}_E bzw. \mathbf{r}_P die verwendeten elastischen und plastischen Moden enthält. Damit wurde die Zahl der Unbekannten von $2n$ auf $a_E + 2a_P$ reduziert.

Die Gleichgewichtsgleichungen lassen sich in der reduzierten Basis mit den unbekannt Faktoren \mathbf{p} der Relativmoden schreiben zu:

$$\mathbf{M}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{C}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{K}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \quad (5.20)$$

5.2.5 Gewichtung mit Galerkin-Methode

Die so erhaltenen Gleichungen werden im Sinne der Galerkin-Methode gewichtet. Als Gewichtungsfunktion werden hier die (elastischen und plastischen) Ansatzmoden zuzüglich der Einheitsmatrix zur Einbringung der Beiträge von \mathbf{z} verwendet. Die die Unbekannten \mathbf{z} betreffenden Gleichungen bleiben bei dieser Vorgehensweise unverändert.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \mathbf{C}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \mathbf{K}^r \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \Phi(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{R}^T \mathbf{F} \quad (5.21)$$

oder:

$$\mathbf{M}^* \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{C}^* \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \mathbf{K}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \Phi(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{F}^* \quad (5.22)$$

Dieser Satz von Gleichungen schließt die nichtlinearen Materialgleichungen mit ein.

5.2.6 Linearisierung der Materialgleichungen

Die nichtlinearen Materialgleichungen $\dot{\mathbf{z}} = \Phi(\mathbf{s}, \mathbf{z})$ werden wie bereits beschrieben auf die lineare Form $\mathbf{C}_e^r \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_e^r \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}}$ gebracht. Betrachtet werden jedoch nur die Stockwerke, in denen von einer Plastifizierung ausgegangen wird, ansonsten werden die entsprechenden Terme in den Gleichungen (4.8) zu 0.

Um die Linearisierung einfach zu gestalten, d. h. um Kopplungen in den nichtlinearen Beziehungen zu vermeiden bzw. die einfache Form aus Gleichung (4.3) zu erhalten, müssen in diesen Beziehungen die jeweiligen Relativverschiebungen s_i als Unbekannte beibehalten werden. Der Zusammenhang zwischen diesen und den unbekanntenen Faktoren \mathbf{u} des Gleichungssystems ergibt sich durch Herausgreifen der entsprechenden Zeilen aus Gleichung (5.18).

Treten Plastifizierungen z. B. in den untersten $a_P = 2$ Geschossen auf, so wären dies die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} r_{E1,1} & \dots & r_{Ea_E,1} & r_{P,1,1} & \dots & r_{Pa_P,1} & 0 & \dots & 0 \\ r_{E1,2} & \dots & r_{Ea_E,2} & r_{P,1,2} & \dots & r_{Pa_P,2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

oder

$$\mathbf{s}_{a_P} = \mathbf{R}_{red} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Es besteht die Möglichkeit, diesen Satz an Gleichungen dem System (5.22) hinzuzufügen oder durch eine vorgezogene Elimination a_P Unbekannte von \mathbf{u} durch a_P unbekannte $s_1 \dots s_{a_P}$ zu ersetzen.

Das entstandene Gleichungssystem kann nun mit den bereits beschriebenen Mitteln zur Verbesserung der Linearisierungsparameter iterativ gelöst werden.

In der spektralen Darstellung nimmt die Anregung in der reduzierten Basis (vor der Ablösung der Unbekannten \mathbf{u} durch vorgezogene Elimination) die Form

$$\mathbf{S}_f(\omega) = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_{f,abs}(\omega) \mathbf{R} \quad (5.25)$$

an.

Hier anschließend wird ein Beispiel ausführlich behandelt; es handelt sich dabei um einen Stockwerksrahmen mit 20 Freiheitsgraden. Hierbei können bereits alle Effekte betrachtet werden, ohne daß aufwendige Numerik zu betreiben ist.

5.3 Beispiel: Stockwerkrahmen mit 20 Geschossen

Um die Vorteile des vorgestellten Verfahrens zu verdeutlichen, wird eine Kettenstruktur mit 20 Freiheitsgraden unter stochastischen Lasten behandelt. Dabei wird die Statistische Linearisierung in reduzierter Basis der klassischen Stochastischen Linearisierung gegenübergestellt, außerdem werden auch verschiedene Varianten der Wahl der Formfunktionen diskutiert.

Anschließend wird die Statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit einer Simulationsmethode (Monte Carlo) verglichen.

5.3.1 Vergleich der Statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen Statistischen Linearisierung

Als System wurde ein 20-stöckiger Geschoßrahmen gewählt, dessen Geschoßmassen sowie Stielsteifigkeiten und -dämpfungswerte über alle Geschosse konstant bleiben. Im einzelnen betragen die Systemkennwerte:

$$m_i = 80 \text{ kg} \quad c_i = 50 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \quad k_i = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \alpha = 0,8$$

Daraus resultieren die drei niedrigsten Eigenfrequenzen zu $f_1 = 0,49\text{Hz}$, $f_2 = 1,55\text{Hz}$ und $f_3 = 2,48\text{Hz}$. Höherfrequente Eigenformen tragen zur Antwort nur noch in geringem Umfang bei. Aus diesem Grund wurden zur Bildung der reduzierten Basis nur die drei den niedrigsten Eigenfrequenzen zugeordneten Eigenformen ($a_E = 3$) als elastische Ansatzfunktionen gewählt.

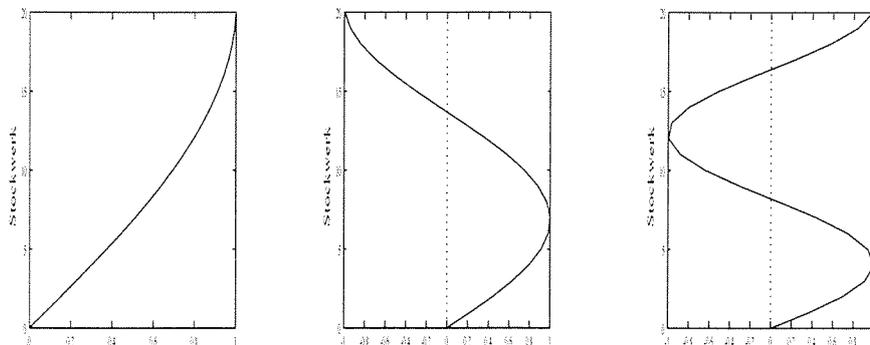


Abbildung 5.11: elastische Ansatzfunktionen

Bei der Wahl der plastischen Ansatzfunktionen kann davon ausgegangen werden, daß

Plastifizierungen in den unteren Stockwerken zu erwarten sind. Daher wurden im ersten Berechnungsdurchgang in den untersten sechs Stockwerken ($a_P = 6$) plastische Ansatzfunktionen angesetzt. Wie sich später herausstellte, wären auch vier plastische Ansatzfunktionen ausreichend gewesen. Unter Verwendung der so festgelegten

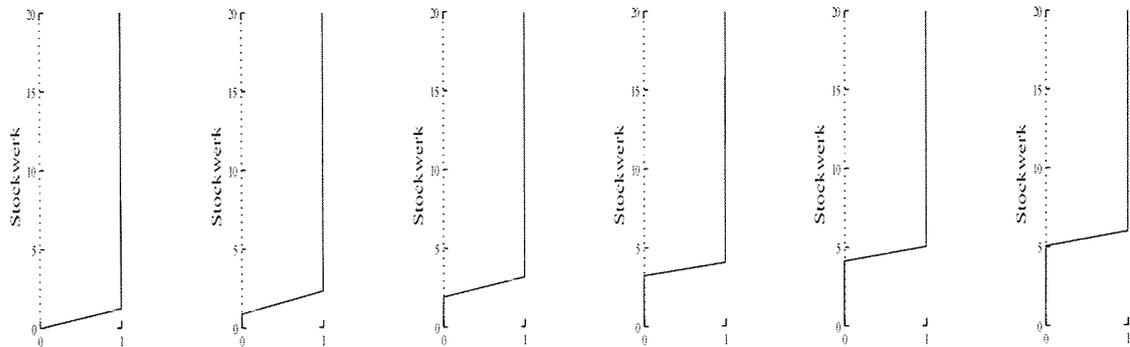


Abbildung 5.12: plastische Ansatzfunktionen

$a_E + a_P = 9$ Ansatzfunktionen konnte die ursprüngliche Anzahl der Unbekannten des Verfahrens von $w + z = 20 + 20 = 40$ auf $a_E + 2a_P = 3 + 2 * 6 = 15$ reduziert werden.

Als Anregung wurde ein über die Höhe der Konstruktion voll korreliertes weißes Rauschen auf alle Stockwerke des Systems aufgebracht.

In den Abbildungen 5.13 und 5.14 sind die Ergebnisspektren der relativen Verschiebungen des untersten sowie des 10. Stockwerks graphisch dargestellt. Das System wurde dabei jeweils sowohl mit Hilfe der Methode der vollständigen statistischen Linearisierung, d. h. Linearisierung in allen 20 ursprünglichen Freiheitsgraden, sowie in der neu entwickelten Methode mit Hilfe der Transformation in eine reduzierte Basis berechnet.

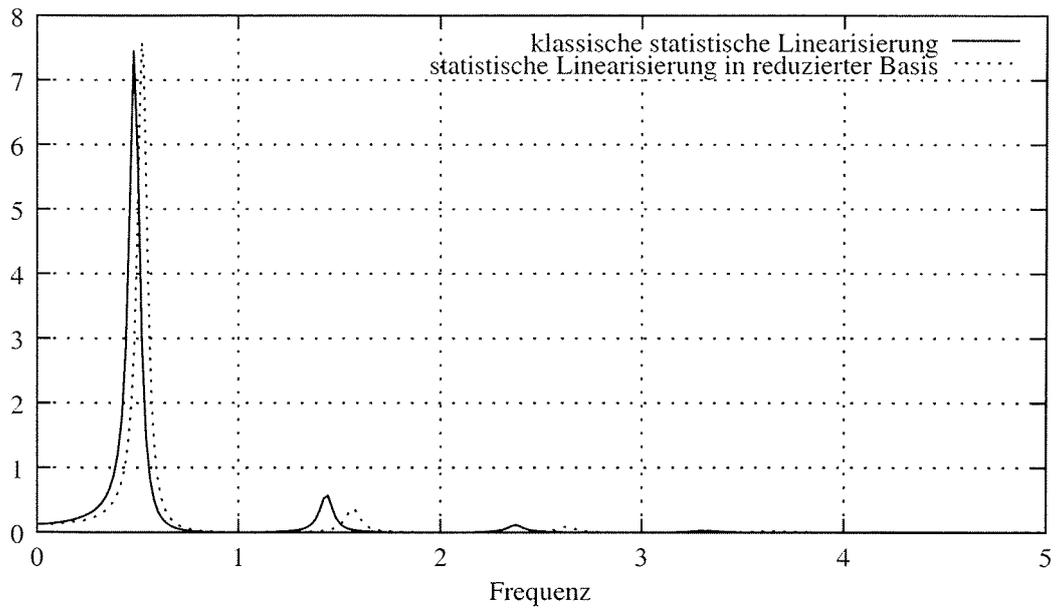


Abbildung 5.13: Spektrum der Relativverschiebung des untersten Stockwerks unter voll korrelierter Last

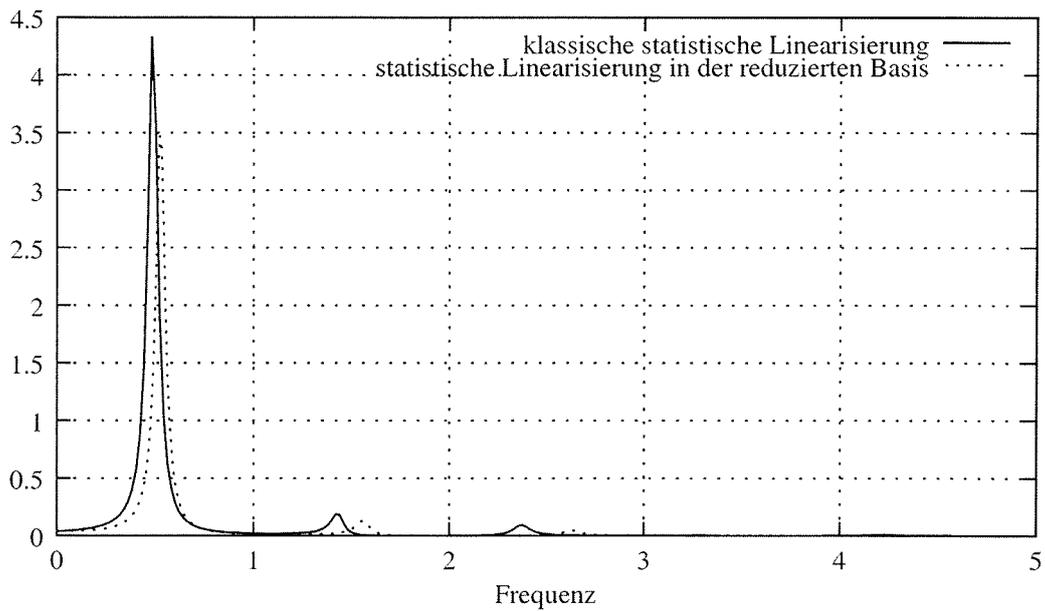


Abbildung 5.14: Spektrum der Verschiebung des 10. Stockwerks unter voll korrelierter Last

Die Ergebnisse sind im Einflußbereich des plastischen Ansatzfunktionen sehr gut, in Bereichen, in denen die Relativverschiebungen nur von den elastischen Moden abgebildet werden im Hinblick auf die aus den Spektren zu bildenden Flächeninhalte noch gut verwendbar.

Auch der direkte Vergleich der stochastischen Parameter der resultierenden Verschiebungen bestätigt, daß die Reduzierung der Basis auf drei elastische und sechs plastische Ansatzfunktionen kaum einen negativen Einfluß auf die Güte der Ergebnisse der Verschiebungsgrößen hat. Die Spannungsgrößen divergieren jedoch deutlicher, sollten jedoch wie im letzten Kapitel anhand eines Einmassenschwingers gezeigt in einer Nachlaufrechnung aus den Verschiebungsgrößen errechnet werden. Für die Stockwerke, in denen eine Plastifizierung vorliegt, ergeben sich die folgenden charakteristischen Werte für die stochastische Verteilung der Verschiebungsgrößen:

	neue Methode	klassische Methode
Stockwerk	$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}$	$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}$
1	1.211422	1.150267
2	1.013490	1.013646
3	0.977566	0.927070
4	0.964890	0.883170
5	0.948310	0.866770
6	0.954742	0.853694

Bei der Annahme eines unkorrelierten weißen Rauschens divergieren die Ergebnisse stärker, was aber durchaus zu erwarten ist (siehe *Interpretation der Ergebnisse*).

Wahl der reduzierten Basis

Bei der Wahl der reduzierten Basis stellt sich die Frage, welche und wieviele Moden man verwendet, so daß die Antwort in der reduzierten Basis in zufriedenstellendem Umfang dargestellt werden kann.

Bei der Transformation in die reduzierte Basis werden die ursprünglichen physikalischen Freiheitsgrade (Verschiebungen bzw. Spannungsgrößen der einzelnen Stockwerke) in rein rechnerische Größen überführt. Diese neuen Rechenunbekannten sind die Partizipationsfaktoren der einzelnen Ansatzfunktion an der globalen Antwort. Somit geben diese Größen direkt Auskunft über den Beitrag, den sie zur Antwort liefern und somit ein Indiz für ihre Wichtigkeit in der reduzierten Basis.

Eine erste Berechnung hat ergeben, daß Ansatzfunktionen mit geringen Partizipationsfaktoren aus der reduzierten Basis entfernt werden könnten, da sie nur einen geringen Beitrag zur Antwort aufweisen und der dabei in Kauf genommene Fehler nicht stark ins Gewicht fällt.

Bei einer Berechnung mit 4 elastischen und 5 plastischen Ansatzfunktionen ergibt sich zwischen der am stärksten und der schwächsten beitragenden Mode als Verhältnis der Partizipationsfaktoren ein Faktor von ca. 16 bei den elastischen Moden. Bei den plastischen Moden ist dieses Verhältnis schwächer ausgebildet und beträgt nur etwa 4,3.

Da somit die vierte elastische Ansatzfunktion im Vergleich zur ersten elastischen Ansatzfunktion nur geringen Einfluß auf die Systemantwort hat, kann sie unbedenklich vernachlässigt werden.

Im Bereich der plastischen Ansatzfunktionen ist dies nicht so einfach möglich, da das Verhältnis dort bei weitem nicht so stark ausgeprägt ist. Dennoch könnte auch hier die Anzahl der verwendeten Ansatzfunktionen von fünf auf vier verringert werden, ohne daß sich die Systemantwort dramatisch verschlechtern würde.

In den Abbildungen 5.15 und 5.16 sind die niederfrequenten Anteile der Spektren der Verschiebungsantwort des ersten und 10. Stockwerks dargestellt. Um eine optisch gut erkennbare aussagekräftige graphische Darstellung zu ermöglichen, wurde so ein Eigenfrequenzbereich vergrößert dargestellt.

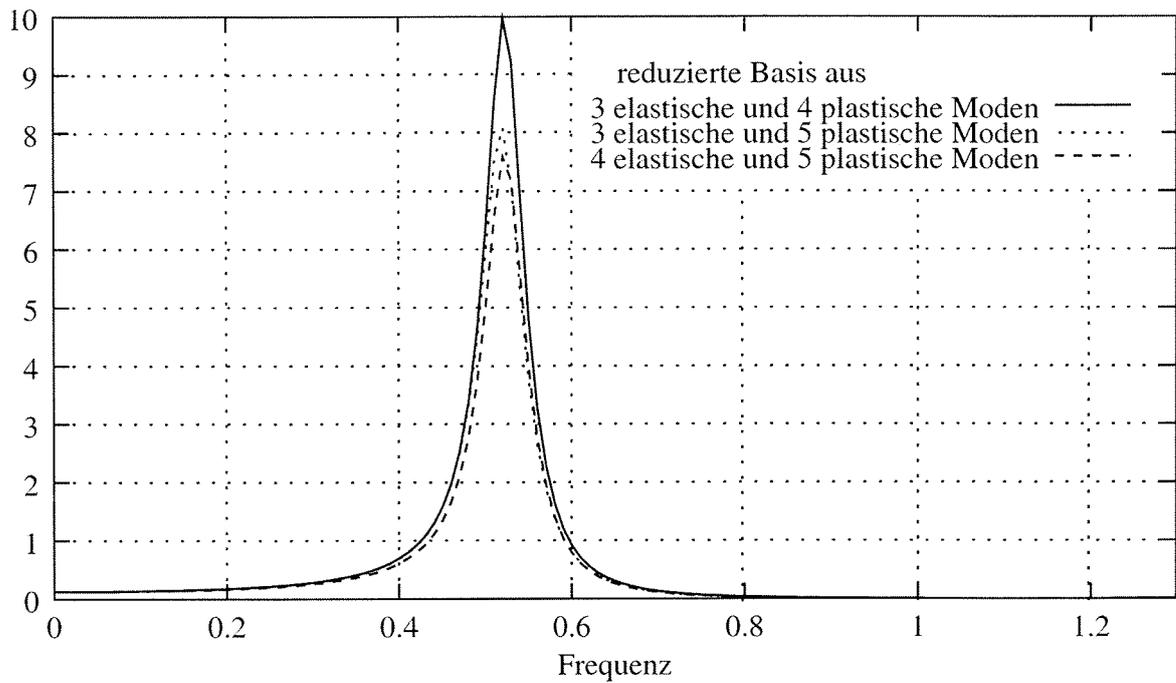


Abbildung 5.15: Spektrum der Systemantwort; Relativverschiebung des untersten Stockwerks unter Verwendung verschiedener reduzierter Basen

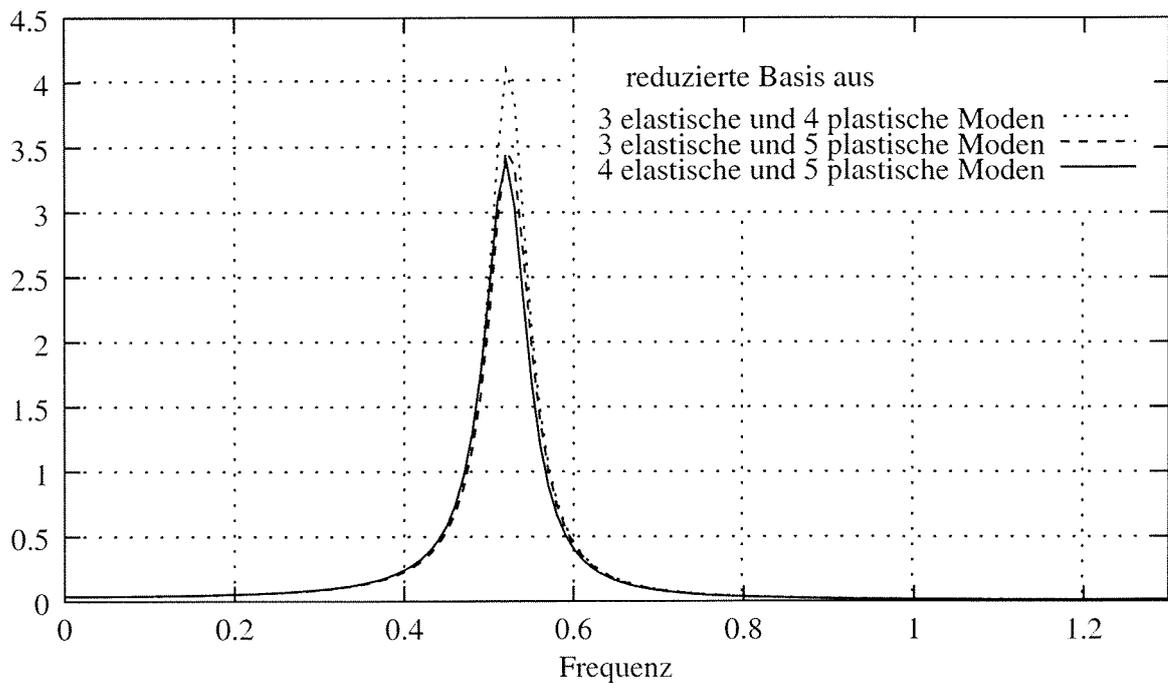


Abbildung 5.16: Spektrum der Systemantwort; Relativverschiebung des 10. Stockwerks unter Verwendung verschiedener reduzierter Basen

5.3.2 Vergleich der Statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen

Die Monte Carlo Simulation beruht auf der Generierung eines deterministischen Lastschriebs im Zeitbereich, der im Grenzfall eines unendlich langen Zeitschriebes die vorgegebenen Parameter eines ergodischen stochastischen Prozesses erfüllt. Diese deterministische Last kann auf das nichtlineare System aufgebracht werden und die Antwort des Systems im Zeitbereich bestimmt werden. Mittels Fouriertransformation ist daraus auch eine spektrale Darstellung möglich, die, wie bereits im Kapitel *Linearisierung* angesprochen, ausgewertet werden kann.

Lastgenerierung

Die Methode setzt voraus, daß zu einem vorgegebenen Spektrum eines stochastischen Prozesses Realisierungen des Prozesses im Zeitbereich ermittelt werden können. Dies wurde unter Zuhilfenahme der von Shinozuka entwickelten Methode ([64], [65], [66]) realisiert.

In der von Shinozuka entwickelten Grundform wird der Zeitschrieb $f(t)$ basierend auf der Vorgabe des zu erzielenden Spektrums $S(\omega)$ in Form einer Reihenentwicklung dargestellt. Für den Fall, daß ein mehrdimensionaler korrelierter Prozeß dargestellt werden soll, wurde die Methode später entsprechend verallgemeinert.

Die Vorgabe der zu erzielenden stochastischen Eigenschaften des Prozesses erfolgt dann nicht mehr nur durch das Spektrum sondern durch die Kreuzspektraldichtematrix $\mathbf{S}(\omega)$ mit

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1N}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2N}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{N1}(\omega) & S_{N2}(\omega) & \dots & S_{NN}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Sie wird aufgespalten in

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^{T*}, \quad (5.27)$$

wobei \mathbf{H} die Form

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11}(\omega) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & 0 & \dots & H_{NN}(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

besitzt. Mit Hilfe von \mathbf{H} lassen sich "Phasenwinkel" θ berechnen, die die Korrelation der einzelnen Freiheitsgrade in der Reihenentwicklung des Prozesse $f(t)$ steuern:

$$\theta_{ij}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}H_{ij}(\omega)}{\text{Re}H_{ij}(\omega)} \right) \quad (5.29)$$

$\mathbf{S}(\omega)$ und damit auch $\mathbf{H}(\omega)$ und $\boldsymbol{\theta}(\omega)$ sind kontinuierliche Funktionen der Frequenz ω . Vereinfachend wird das Spektrum in A diskreten, äquidistanten ω_l im Abstand $\Delta\omega$ dargestellt und so die Integration durch eine Summation über l ersetzt.

Somit läßt sich nun der Zeitschrieb $\mathbf{f}(t)$ ausdrücken zu

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^A |H_{ij}(\omega_l)| \sqrt{2\Delta\omega} \cos(\tilde{\omega}_l t + \theta_{ij}(\omega_l) + \Phi_{jl}). \quad (5.30)$$

Φ_{jl} ist dabei ein auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ gleichverteilter Phasenwinkel, der je Freiheitsgrad j und Diskretisierung l unabhängig ist.

$\tilde{\omega}_l = \omega_l + \delta\omega$ entspricht den Frequenzen ω_l , in denen diskretisiert wurde, überlagert durch einen Störprozeß $\delta\omega \ll \Delta\omega$, der die Periodizität des Simulationsprozesses, verursacht durch die Reihenentwicklung, verhindern soll.

Antwortberechnung und Auswertung

Die so erzeugte Funktion \mathbf{f} kann als Belastung auf das nichtlineare System aufgebracht werden. Als System wurde ein im Vergleich zum vorstehenden Beispiel wesentlich weiches System gewählt, um auch hier eine Funktionsfähigkeit der Methode zu demonstrieren.

Die Antwortberechnung kann mit verschiedenen Methoden erfolgen; hier wurde eine Zeitintegration mit impliziten Algorithmen des Newmark-Typs nach Hugh, Hilbert und Taylor gewählt (z. B. in [14]).

Die so erhaltene Antwort des Systems wurde Fourier-transformiert und im Frequenzraum ausgewertet.

Die Aussagekraft des Ergebnisses hängt dabei wesentlich von der Länge des verwendeten Zeitschriebs ab. Um aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen müssen mindestens 10^5 Zeitschritte berechnet werden, für Aussagen in den Extrembereichen mit Wahrscheinlichkeitsniveaus im Bereich 10^{-3} ein Vielfaches mehr.

Die Vergleichsrechnung durch MC-Simulation ist methodisch völlig unabhängig von der Statistischen Linearisierung und erfüllt somit ohne Einschränkung alle Anforderungen einer aussagekräftigen Kontrolle.

Vergleich der Ergebnisse

Exemplarisch ist in Abbildung 5.17 das Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks dargestellt. Wie zu sehen ist, stimmt das Ergebnisspektrum, das durch eine Statistische Linearisierung in der reduzierten Basis erhalten wurde, gut mit dem Spektrum aus der Simulation überein. Die Übereinstimmung in Form und Lage ist in diesem Beispiel sogar besser als beim Ergebnisspektrum aus klassischer Linearisierung.

Diese Aussagen finden sich auch in den charakteristischen Werten der Verteilung der Verschiebungsgröße wieder. Trotz der Unterschiede im Verlauf des Spektrums der Verschiebungen haben sich dabei für die im Iterationsprozeß benutzten charakteristischen Werte ($\sigma_{\dot{q}\dot{q}}, \sigma_{zz}$) in nahezu identischer Größe ergeben. Dies resultiert aus Beiträgen, die (im Verschiebungsspektrum nicht dargestellten) höheren Frequenzen zugeordnet sind. (Nachdem die Last als nicht korreliert angesetzt wurde, werden diese im Vergleich zu einer voll korrelierten Last hier verstärkt angeregt.)

Für die unteren neun Stockwerke, die sich in einem plastischen Zustand befinden, ergeben sich folgende Werte:

Stockwerk	neue Methode	klassische Methode	Monte Carlo
	$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}$	$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}$	$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}$
1	5.165913	5.078512	5.170462
2	6.016097	5.921878	6.012733
3	6.111043	6.078943	6.128664
4	6.135714	6.101499	6.119853
5	6.147823	6.190654	6.150028
6	6.162923	6.186616	6.159839
7	6.182651	6.201008	6.190391
8	6.206660	6.284339	6.220474
9	6.314817	6.486886	6.463371

Analoges gilt auch für die Spannungsgrößen, wie sie in Abbildung 5.18 für das unterste Stockwerk dargestellt sind.

Hier ergeben sich die charakteristischen Werte der Verteilung zu:

Stockwerk	neue Methode	klassische Methode	Monte Carlo
	σ_{zz}	σ_{zz}	σ_{zz}
1	0.768161	0.691589	0.758923
2	0.693859	0.621919	0.681152
3	0.671891	0.614767	0.672003
4	0.659508	0.614803	0.668908
5	0.652286	0.615573	0.658220
6	0.650516	0.616391	0.653028
7	0.653296	0.617188	0.655521
8	0.657664	0.617960	0.649819
9	0.657713	0.618707	0.647522

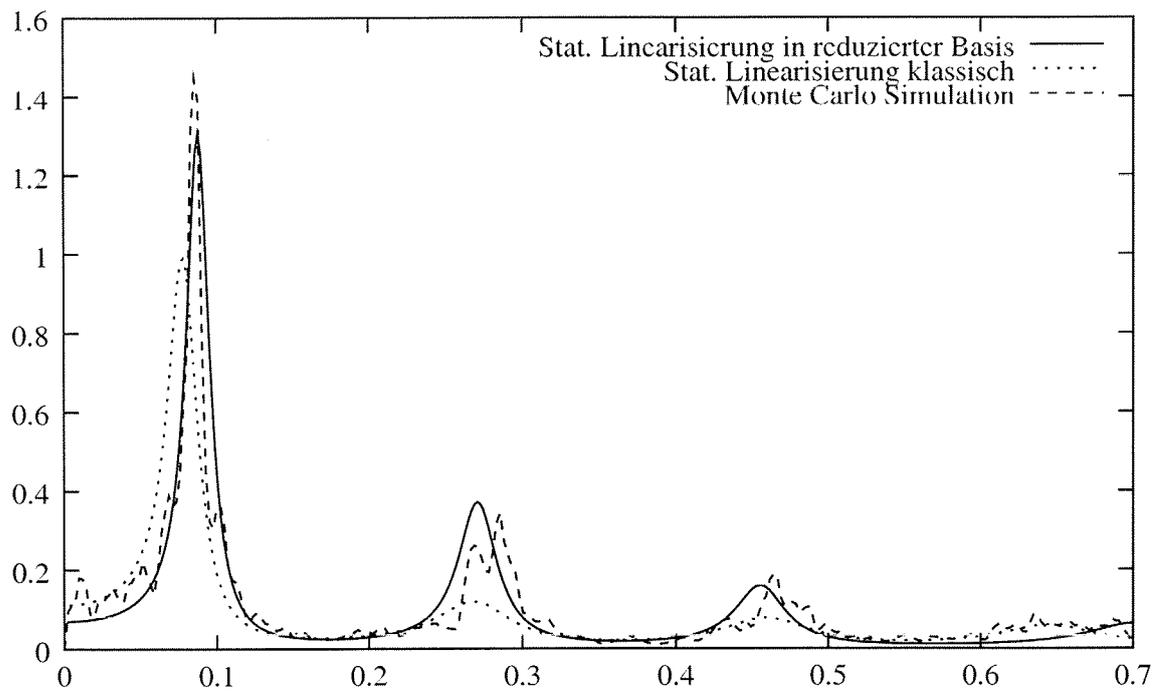


Abbildung 5.17: Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks; nur niederfrequenter Bereich dargestellt

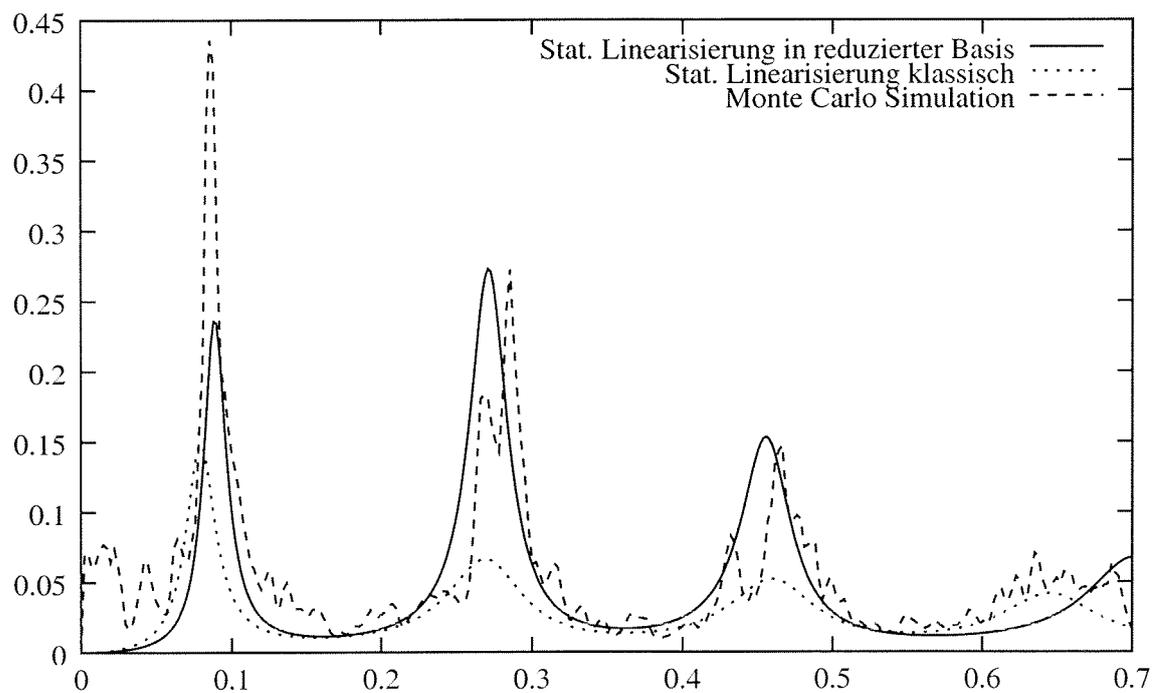


Abbildung 5.18: Spektrum der Spannungsgrößen des untersten Stockwerks; nur niederfrequenter Bereich dargestellt

In diesem Fall kann man erneut die brauchbare Übereinstimmung der Ergebnisse für die Verschiebungsfreiheitsgrade beobachten. Dabei scheint es erstaunlich, daß in den Verschiebungsspektren die Berechnung mit Linearisierung in reduzierter Basis Ergebnisse liefert, die näher an den Simulationsergebnissen liegt als die klassische Linearisierung. Dies ist jedoch in diesem Fall nicht maßgeblich, da zur Berechnung der stochastischen Parameter die Spektren der Geschwindigkeit verwendet werden. Dadurch werden die höherfrequenten Anteile des Spektrums deutlich stärker gewichtet als die niederfrequenten Anteile, so daß die Abweichungen im in Abbildung 5.17 und 5.18 dargestellten niederfrequenten Teil des Antwortspektrums kaum Auswirkungen auf die stochastischen Parameter der Antwort haben. Im höherfrequenten Teil der Antwortspektren stimmen die Verläufe der Spektren der beiden Linearisierungsmethoden nahezu überein, wie man auch an der guten Übereinstimmung der stochastischen Parameter erkennt.

Bei stärker korrelierten Belastungen ergeben sich noch geringere Differenzen zwischen den Ergebnissen der Monte Carlo Simulation und der neu entwickelten Methode.

In anderen Beispielen und für andere Anregungen hinsichtlich der Korrelationsstruktur der Belastung haben sich im wesentlichen ähnlich gute Genauigkeiten ergeben. Die graphische Darstellung und die wiedergegebenen Werte erlauben Aufschluß insbesondere über das "mittlere" Verhalten. Aussagen über die für eine Zuverlässigkeitsbeurteilung maßgeblichen auslaufenden Bereiche der Ergebnisverteilungen sind damit nicht unmittelbar möglich; dort sind größere Abweichungen zu erwarten, nachdem die statistische Linearisierung wegen der Annahme eines Gaußschen Antwortprozesses in diesem Bereich prinzipiell keine in den Zahlenwerten genaue Aussage erlaubt.

Die Vergleiche mit einer exakten Berechnungsmethode (Monte Carlo) belegen, daß (zumindest für das "mittlere Verhalten") die neu entwickelte Methode der Statistischen Linearisierung in einer reduzierten Basis eine interessante Alternative zur Berechnung von hysteretischen Systemen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden ist.

Dabei muß des weiteren auch noch beachtet werden, daß die Divergenzen zwischen direkter Simulation im Zeitbereich und Statistischer Linearisierung im Frequenzbereich teilweise auch zurückzuführen sind auf numerische Effekte im Zusammenhang mit dem Wechsel zwischen Zeit- und Frequenzraum. Bei der Darstellung der Ergebnisse der Simulation im Frequenzraum wurde eine Fast-Fourier-Transformation angewandt. Da diese Methode aber bei der Verwendung zeitlich begrenzter Zeitschriebe mit aliasing-Effekten behaftet ist, können sich auch hier Abweichungen ergeben. Gegenstrategien wie gefensterte Transformationen etc. bringen hier keine völlige Abhilfe.

Im Verlauf der Spannungsgrößen treten stärkere Abweichungen auf, die jedoch über eine Nachlaufrechnung wie auf Seite 42 vorgeschlagen, korrigiert werden können, falls für weitere Berechnungen diese Größen von Interesse sind.

5.4 Interpretation der Ergebnisse

Die neu entwickelte Methode erlaubt es, in den Bereichen, in denen Plastifizierungen zu erwarten sind, die Systemantwort im Vergleich sowohl zur klassischen Linearisierung als auch Simulation in allen Freiheitsgraden hinsichtlich der zweiten Momente der Antwort gut zu beschreiben. Die plastischen Ansatzfunktionen können die lokalen Krümmungen gut abbilden und die erhaltenen Spektren divergieren nur in akzeptablem Umfang von den Ergebnissen der beiden anderen Methoden.

In Bereichen, die als rein elastisch angenommen werden, fehlt der Einfluß der plastischen Moden auf die relativen Verschiebungen des Systems. Als Konsequenz daraus können lokale Plastifizierungen nicht oder nur unzureichend abgebildet werden und in den Ergebnissen treten größere Abweichungen auf. Dies tritt jedoch nur dann auf, wenn die Plastifizierungen nicht lokal auftreten, sondern über die gesamte Struktur verteilt sind, was nicht dem Regelfall entspricht.

In diesem Zusammenhang muß auch darauf hingewiesen werden, daß das Modell eines Schubalkens dieses Problem stärker zu Tage treten läßt. Bei einem unter Gleichlast belastetem Kragträger sind die Beanspruchungen parabolisch über die Höhe verteilt, so daß die maximale Beanspruchung deutlich lokalisierbar ist. Der Schubalken dagegen wird über seine Erstreckung linear ansteigend beansprucht, so daß kein eng begrenzter Plastifizierungsbereich auftritt. Dies kann man am folgenden Beispiel unter Verwendung eines Materialverhaltens vom Typ Biegebalken gut sehen.

Kapitel 6

Beliebige kontinuierliche Biegebalken-Systeme

Das bereits an diskreten Systemen unter Verwendung eines Scherbalkenmodells beschriebene Vorgehen ist jedoch nach wie vor beschränkt auf Kettenstrukturen. Aus diesem Grund liegt eine Erweiterung der Methode auf kontinuierliche Systeme nahe. Nichtsdestotrotz ist auch hier eine auf dem Scherbalken-Modell basierende Beschreibung denkbar. Dies wurde hier jedoch nicht weiterverfolgt.

6.1 Klassisches Vorgehen

6.1.1 System

Im Gegensatz zu Kettenstrukturen ist bei beliebigen Systemen eine auf der Theorie der Finiten Elemente basierende Beschreibung nötig, da an einem Knoten mehr als nur zwei Elemente angeschlossen sein können. Daraus ergibt sich eine Koinzidenztabelle, die angibt, an welchen Stellen die aus den Elementsteifigkeiten resultierenden Einträge in die Gesamtsteifigkeitsmatrix einzuordnen sind.

Das generelle Vorgehen wird hier nicht näher beschrieben, da es leicht aus Standardwerken (z. B. [81]) entnommen werden kann. Daher erfolgt hier nur eine kurze Beschreibung der wesentlichen Schritte, um die verwendeten Größen korrekt einzuführen.

Die Beschreibung erfolgt in den N Knotenfreiheitsgraden w_i (Verschiebung) und ϕ_i (Verdrehung). Darüber hinaus wird analog zu der hysteretischen Rückstellkraft z_i bei Kettenstrukturen ein plastisches Moment Y_i eingeführt. Alle drei Größen werden im Unbekanntenvektor $\mathbf{p} = (w_1 \dots w_N \ \phi_1 \dots \phi_N \ Y_1 \dots Y_N)$ zusammengefaßt.

Die daraus im Inneren des Elements resultierenden Verschiebungs- und Momentenverläufe hängen von den gewählten Ansatzfunktionen F_j ab. Sie wurden bereits im Kapitel *Materialverhalten* eingeführt und führen mit den dort ebenfalls abgeleiteten Elementbeiträgen \mathbf{K} , \mathbf{C} und \mathbf{M} zu den Gesamtsystemmatrizen \mathbf{K}_{ges} , \mathbf{C}_{ges} und \mathbf{M}_{ges} . Die Elementbeiträge ergeben sich dabei zu

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 12\alpha & -12\alpha & 6\alpha l & -6\alpha l & -(1-\alpha) & (1-\alpha) \\ -12\alpha & 12\alpha & -6l\alpha & 6l\alpha & (1-\alpha) & -(1-\alpha) \\ 6\alpha l & -6\alpha l & 4\alpha l^2 & -2\alpha l^2 & -(1-\alpha) & 0 \\ -6\alpha l & 6\alpha l & -2\alpha l^2 & 4\alpha l^2 & 0 & -(1-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{EI}{l^3}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{w_{links}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{w_{rechts}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{\phi_{links}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{\phi_{rechts}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{13}{35}\mu l & \frac{9}{70}\mu l & \frac{11}{210}\mu l & \frac{13}{420}\mu l & 0 & 0 \\ \frac{9}{70}\mu l & \frac{13}{35}\mu l & \frac{13}{420}\mu l & \frac{22}{210}\mu l & 0 & 0 \\ \frac{11}{210}\mu l & \frac{13}{420}\mu l & \frac{1}{105}\mu l & \frac{1}{140}\mu l & 0 & 0 \\ \frac{13}{420}\mu l & \frac{22}{210}\mu l & \frac{1}{140}\mu l & \frac{1}{105}\mu l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EI entspricht der Steifigkeit des Elements, μ der Massenbelegung. Die Elementlänge wurde im weiteren zu $l = 1$ normiert.

Analog zu Kettenstrukturen steuert der Parameter α auch hier das Verhältnis zwischen linearem und dem der Hysterese zugeordneten Term. Hier wird jedoch nicht auf eine Rückstellkraft zurückgegriffen sondern auf ein Rückstellmoment, das über eine Momenten-Krümmungsbeziehung berechnet wird.

Zusätzlich ergeben sich aus den Materialbeziehungen je Element zwei nichtlineare Gleichungen der Form

$$\dot{Y} = G(Y, \kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = w(\zeta = 0)'' \quad \text{bzw.} \quad \kappa = w(\zeta = 1)'' \quad (6.1)$$

Die kontinuierliche Verschiebung $w(\zeta)$ ergibt sich aus den Knotenfreiheitsgraden über zugeordnete Ansatzfunktionen.

Die nichtlineare Funktion G hängt dabei nur vom verwendeten Materialgesetz ab. Eine mögliche Form wurde bereits im Kapitel *Materialgleichungen* vorgestellt:

$$\dot{Y}(\zeta) = \dot{\kappa}(\zeta)[1 - U(\dot{\kappa}(\zeta))U(Y(\zeta) - 1) - U(-\dot{\kappa}(\zeta))U(-Y(\zeta) - 1)] \quad (6.2)$$

Diese Formulierung ist weitestgehend an das Scherbalkenmodell nach Suzuki / Minai angelehnt und hat den Vorteil, daß die weiteren Ableitungen mathematisch übersichtlich und unkompliziert bleiben.

Das Gesamtgleichungssystem ergibt sich schließlich nach dem Einordnen aller Beiträge an der korrekten Position zu

$$\mathbf{M}_{ges}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_{ges}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_{ges}\mathbf{p} + \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) = \mathbf{Q} \quad (6.3)$$

Im Vektor \mathbf{Q} sind die Belastungen auf dem Gesamtsystem enthalten, die als Einzelkräfte bzw. -momente in den Knoten angesetzt werden. $\mathbf{\Phi}$ enthält die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen des plastischen Rückstellmoments Y .

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ M_1 \\ \vdots \\ M_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ G_1(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}) \\ \vdots \\ G_N(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

6.1.2 Linearisierung

Die Lösung der Gleichung 6.3 ist für einen nur über stochastische Parameter bestimmbaren, zeitlichen Verlauf von \mathbf{Q} erneut nur aus Simulationen (Monte Carlo) oder Näherungsmethoden berechenbar.

Unter Verwendung der Methode der statistischen Linearisierung ergibt sich das Ersatzsystem zu

$$(\mathbf{M}_{ges} + \mathbf{M}_e)\ddot{\mathbf{p}} + (\mathbf{C}_{ges} + \mathbf{C}_e)\dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{K}_{ges} + \mathbf{K}_e)\mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (6.5)$$

Die aus der Linearisierung resultierenden Zusatzterme \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e und \mathbf{K}_e ergeben sich je Element zu

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^{Y_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^{Y_R} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6C^{wL} & 6C^{wR} & -4C^{\phi L} & 2C^{\phi R} & 1 & 0 \\ 6C^{wL} & -6C^{wR} & 2C^{\phi L} & -4C^{\phi R} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

wobei die Größen sich elementweise unter Verwendung des bereits im Kapitel *Materialgleichungen* beschriebenen Verfahrens ergeben.

Das lineare Ersatzsystem kann nun mit den bereits im Kapitel *Prinzip der Linearisierung* beschriebenen Methoden iterativ gelöst werden.

Die Kopplung zwischen den zusätzlichen Unbekannten und den Knotenfreiheitsgraden wird durch die Materialbeziehung hergestellt.

6.2 Reduzierte Basis

Analog zu Systemen mit Kettenstruktur kann auch bei kontinuierlichen Systemen über eine Reduktion der Anzahl der Ansatzfunktionen eine signifikante Rechenzeitersparnis erreicht werden.

6.2.1 Wahl von Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis

Auch hier wird die gewählte reduzierte Basis in Ansatzfunktionen, die einen elastischen linearen Anteil des Systems widerspiegeln und Ansatzfunktionen, die

den plastischen nichtlinearen Anteil aus lokalen Systemplastifizierungen modellieren unterteilt. Der elastische Anteil wird über die modalen Eigenvektoren des linearen Gleichgewichtssystems mathematisch bestimmt.

- elastische Schwingunseigenvektoren

Der elastische Anteil der Systemantwort stellt die globale Reaktion der Struktur dar, da Plastifizierungen in der Regel nur in lokal begrenzten Bereichen auftreten. Der überwiegende Rest der Struktur kann durch elastische Materialbeziehungen beschrieben werden. Daher wird zur Berechnung der *elastischen Moden* r_E das linearisierte System mit seinen Ausgangsparametern verwendet. Die Bestimmung der Form der Moden erfolgt über die übliche Eigenwertgleichung

$$(-\lambda^2 \mathbf{M}^r + \mathbf{K}^r) \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (6.9)$$

Daraus erhält man je Freiheitsgrad n eine Eigenmode. Im weiteren Vorgehen wird jedoch wieder nur ein Teil der Moden weiterverwendet, da meist nur wenige Moden ausreichen, um die Reaktion des Systems ausreichend gut zu beschreiben. Das verwendete Subset der elastischen Moden umfaßt die a_E Moden mit niedrigster Frequenz.

Auch hier beschreiben die elastischen Moden nur Verschiebungen bzw. Verdrehungen; sie können jedoch keine Spannungsgrößen wiedergeben.

- plastische Moden

Im Gegensatz zu den elastischen Moden haben die *plastischen Moden* nur in lokalen Bereichen entscheidenden Einfluß auf das Verformungsverhalten. Sie werden so gewählt, daß sie an den potentiellen Plastifizierungsstellen lokal auftretende starke Verkrümmungen darstellen können. Somit muß pro Plastifizierungsstelle bzw. -reaktion eine Formfunktion vorhanden sein, die die Systemreaktion beschreiben kann. Nur so kann erreicht werden, daß die hochfrequenten elastischen Moden (mit denen normalerweise starke Krümmungen angenähert werden können) nicht benötigt werden.

Daraus ergibt sich ein Bedarf von a_P plastischen Moden, die je einer Plastifizierungsstelle zugeordnet sind. Der Verlauf der Ansatzmode wird dadurch berechnet, daß im entsprechenden Freiheitsgrad eine Einheitsverkrümmung erzeugt wird und die daraus entstehende statische Biegelinie als Ansatzfunktion verwendet wird.

Parallel dazu wird an der Plastifizierungsstelle eine Spannungsgröße eingeführt, die aus der Verkrümmung am Knoten der angesetzten Einheitsverschiebung bzw. -verdrehung entsteht.

Durch den Wechsel von einer Basis mit n unbekanntem Verschiebungen \mathbf{w} , n Verdrehungen ϕ und n Spannungsgrößen \mathbf{Y} in eine reduzierte Basis mit $a_E + a_P$ unbekanntem Partizipationsfaktoren \mathbf{u} der Moden und a_P Spannungsgrößen \mathbf{Y} können

Teile der Antwort nicht mehr dargestellt werden. Die reduzierte Basis hat somit eine Filterwirkung auf die Antwort, die dazu führt, daß Anregungen in bestimmten Frequenzen keinen dynamisch überhöhten Anteil zur Antwort liefern.

Durch eine geschickte Wahl der Ansatzmoden kann dieser Effekt jedoch vernachlässigt werden. Es muß in allen Fällen jedoch eine gewisse Sorgfalt bei der Auswahl der Moden (insbesondere der plastischen) angewandt werden.

6.2.2 System in der reduzierten Basis

Die reduzierte Basis ergibt sich analog zum Kettensystem wieder aus den ausgewählten Formfunktionen (elastische und lastische Moden) für die Verschiebungen und Verdrehungen sowie zusätzlichen Spannungsgrößen, d. h. mit den neuen Unbekannten \mathbf{u} und \mathbf{Y} . Der Vektor \mathbf{u} enthält die Partizipationsfaktoren der einzelnen verwendeten Moden. Daraus ergibt sich die folgende Transformationsvorschrift:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \phi \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{E,1} & \dots & \mathbf{r}_{E,a_E} & \mathbf{r}_{P,1} & \dots & \mathbf{r}_{P,a_P} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \mathbf{1} & \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

als Matrix, die in \mathbf{r}_E bzw. \mathbf{r}_P die verwendeten elastischen und plastischen Moden enthält. Damit wurde die Zahl der Unbekannten von $2n$ auf $a_E + 2a_P$ reduziert.

Die Gleichgewichtsgleichungen lassen sich in der reduzierten Basis mit den unbekanntenen Faktoren \mathbf{u} und \mathbf{Y} schreiben zu:

$$\mathbf{MR} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} + \mathbf{CR} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{KR} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \Phi = \mathbf{F} \quad (6.12)$$

6.2.3 Gewichtung mit Galerkin-Methode

Die so erhaltenen Gleichungen werden im Sinne der Galerkin-Methode gewichtet. Als Gewichtungsfunktion werden hier die (elastischen und plastischen) Ansatzmoden zuzüglich der Einheitsmatrix zur Einbringung der Beiträge von \mathbf{Y} verwendet. Die die Unbekannten \mathbf{Y} betreffenden Gleichungen bleiben bei dieser Vorgehensweise unverändert.

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^T \mathbf{MR} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \mathbf{CR} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \\ & + \mathbf{R}^T \mathbf{KR} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \Phi(\mathbf{w}, \phi, \mathbf{Y}) = \mathbf{R}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (6.13)$$

oder mit generalisierten Größen (*):

$$\mathbf{M}^* \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} + \mathbf{C}^* \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{K}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \Phi(\mathbf{w}, \phi, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}^* \quad (6.14)$$

Dieser Satz von Gleichungen schließt die nichtlinearen Materialgleichungen mit ein. Sie sind jedoch noch in den ursprünglichen Unbekannten \mathbf{w} , ϕ und \mathbf{Y} geschrieben.

6.2.4 Linearisierung der Materialgleichungen

Die nichtlinearen Materialgleichungen $\dot{\mathbf{Y}} = \Phi(\mathbf{w}, \phi, \mathbf{Y})$ werden wie bereits beschrieben auf eine linearisierte Form gebracht. Analog zur Kettenstruktur werden jedoch nur die Elemente, in denen von einer Plastifizierung ausgegangen wird, betrachtet. Die anderen entsprechenden Terme in dem Teil des Gesamtgleichungssystem, das den Materialgleichungen entspricht, werden zu 0 gesetzt.

Auch bei beliebigen System sollte eine Kopplung der nichtlinearen Beziehungen vermieden werden um die Linearisierung einfach zu gestalten. Dazu werden die ursprünglichen Verschiebungen w_i und Verdrehungen ϕ_i als Unbekannte beibehalten. Der Zusammenhang zwischen diesen und den unbekannt Faktoren \mathbf{u} des Gleichungssystems ergibt sich durch Herausgreifen der entsprechenden Zeilen aus Gleichung (6.10). Das Vorgehen ist dabei das gleiche, wie bei Systemen mit Kettenstrukturen bereits dargestellt wurde.

Das entstandene Gleichungssystem kann nun mit den bereits beschriebenen Mitteln zur Verbesserung der Linearisierungsparameter iterativ gelöst werden.

In der spektralen Darstellung nimmt die Anregung in der reduzierten Basis (vor der Ablösung der Unbekannten \mathbf{u} durch vorgezogene Elimination) die folgende Form an:

$$\mathbf{S}_f(\omega) = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_{f,abs}(\omega) \mathbf{R} \quad (6.15)$$

6.3 Beispiel: Stockwerkrahmen mit 20 Geschossen

Als erstes Beispiel für die Anwendung der neu entwickelten Methode wird auf das bereits aus dem Kapitel *Kettenstrukturen* bekannte Beispiel zurückgegriffen.

Erneut wird die statistische Linearisierung in reduzierter Basis der klassischen Stochastischen Linearisierung gegenübergestellt und diverse Varianten der Wahl der verwendeten Formfunktionen diskutiert.

Anschließend wird ein Vergleich mit einer Berechnung unter Benutzung von Monte Carlo Simulationen angestellt.

6.3.1 System und Wahl der Ansatzmoden

Als System wurde erneut ein 20-stöckiger Geschoßrahmen gewählt, dessen Geschoßmassen sowie Stielsteifigkeiten und -dämpfungswerte über alle Geschosse konstant bleiben. Um zu zeigen, daß die Berechnungsmethode auch für stark gedämpfte Systeme anwendbar ist, wurde jedoch im Gegensatz zum im Kapitel *Kettenstrukturen* verwendeten System eine wesentlich höhere Dämpfung des Systems zugrundegelegt. Im einzelnen betragen die Systemkennwerte:

$$m_i = 80 \text{ kg} \quad c_i = 1000 \text{ Ns/m} \quad k_i = 5000 \text{ N/m} \quad \alpha = 0,8$$

Daraus resultieren die fünf niedrigsten Eigenfrequenzen zu

$$f_1 = 0,69 \text{ Hz} \quad f_2 = 1,36 \text{ Hz} \quad f_3 = 2,25 \text{ Hz} \quad f_4 = 3,17 \text{ Hz} \\ f_5 = 3,94 \text{ Hz} \quad f_6 = 5,02 \text{ Hz} \quad f_7 = 6,18 \text{ Hz}.$$

Höherfrequente Eigenformen tragen zur Antwort nur noch in sehr geringem Umfang bei. Aus diesem Grund wurden zur Bildung der reduzierten Basis die fünf den niedrigsten Eigenfrequenzen zugeordneten Eigenformen ($a_E = 5$) als elastische Ansatzfunktionen gewählt.

Im Vergleich zum Scherbalkenmodell sind das zwei Eigenformen mehr. Dies liegt daran, daß der Scherbalken als Unbekannte nur die Stockwerksverschiebungen benutzt, das Biegebalkenmodell jedoch außer Verschiebungen auch Knotenverdrehungen zuläßt. Das Modell in Form eines Kragarms hat somit doppelt so viele geometrische Freiheitsgrade wie das Scherbalkenmodell und ist daher auch in seinem Antwortverhalten des FE-Modells komplexer.

Beide Modelle haben ihre Berechtigung: Das Scherbalkenmodell beschreibt Situationen im klassischen Hochbau. Wie bereits dargestellt kann man mit ihm einen Stockwerksrahmen mit starren Deckenscheiben sehr gut abbilden, da in diesem Fall nur horizontale Verschiebungen der Stockwerkscheiben möglich sind. Will man jedoch z. B. ein turmartiges Gebäude oder einen Mast beschreiben, so kann man die Verdrehungen der Knoten bei der Modellbildung nicht vernachlässigen. In diesem Fall trifft das Modell des Biegebalkens eher auf das reale Verhalten der Struktur zu. Bei der Wahl der plastischen Ansatzfunktionen kann davon ausgegangen werden, daß Plastifizierungen in den unteren Stockwerken zu erwarten sind. Daher wurden im ersten Berechnungsdurchgang in den untersten sieben Stockwerken ($a_P = 7$) plastische Ansatzfunktionen angesetzt. Wie sich später herausstellte, wären auch fünf plastische Ansatzfunktionen ausreichend gewesen.

Die Wahl der Form der Ansatzfunktionen spiegelt die Absicht wieder, in den Bereichen der zu erwartenden Plastifizierung möglichst starke Krümmungen des Systems zu zeigen, während in den übrigen Bereichen des Systems nach Möglichkeit kein, bzw. nur geringer Einfluß auf das Verformungsverhalten genommen werden soll.

Daher werden die gewählten plastischen Moden so gebildet, daß eine Einheitsverdrehung in einem Stockwerk aufgebracht wird, die davon abgesehen keine weiteren aufgezwungenen Verkrümmungen in den darüber liegenden Stockwerken aufweist. Dies entspricht der Idee der gewählten plastischen Moden beim Scherbalkenmodell, nur daß in diesem Fall keine relative Einheitsverschiebung aufgebracht wird, sondern ein plastisches Gelenk durch eine Einheitsverdrehung simuliert wird.

Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Biegelinie keinen Knick im Knoten aufweist, sondern kontinuierlich in allen Bereichen des Tragwerks verläuft. Um einen Knick darzustellen, würde man rechts- und linksseitig des Knotens zwei unterschiedliche Freiheitsgrade des Systems benötigen, was die Zahl der Unbekannten jedoch erhöhen würde. Um dies zu vermeiden, wurde als Näherung eine Biegelinie gewählt, deren Verlauf durch eine aufgeprägte relative Verdrehung der Nachbarknoten gegeneinander charakterisiert wird. Dadurch entsteht eine statische Biegelinie, die im plastifizierten Element eine starke Krümmung aufweist und so die Plastifizierungsstelle ausreichend gut abbilden kann, im restlichen Tragwerk jedoch keine weiteren starken Krümmungen aufweist.

Mit der vorliegenden Berechnungsmethode wurden plastische Moden gefunden, die zu guten Ergebnissen bei der Berechnung mit statistischer Linearisierung führten. Es sind aber auch andere Formen von plastischen Moden denkbar; hier besteht noch Bedarf weiterer Untersuchungen, da unter Umständen auch andere aufgeprägte Zwangsverformungen brauchbare Biegelinien erzeugen würden.

Als Anregung wurde im Gegensatz zum Scherbalkenmodell ein über die Höhe der Konstruktion horizontal angreifendes unkorreliertes weißes Rauschen auf alle Stockwerke des Systems aufgebracht.

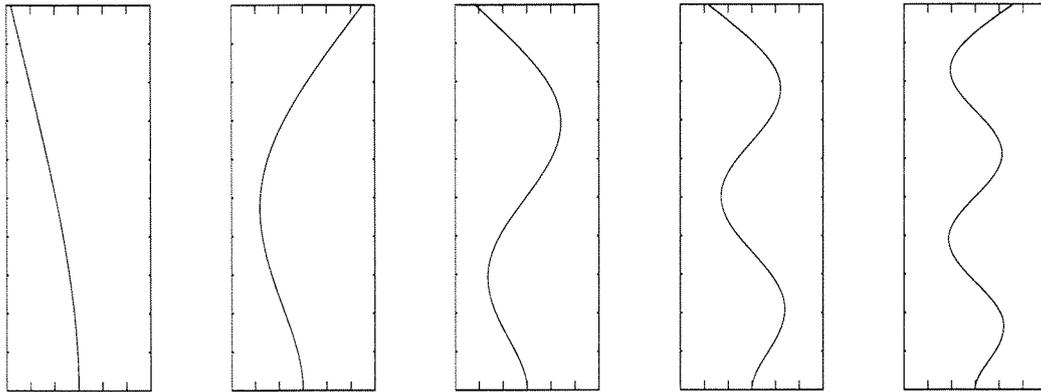


Abbildung 6.1: elastische Ansatzfunktionen für das Biegebalkenmodell

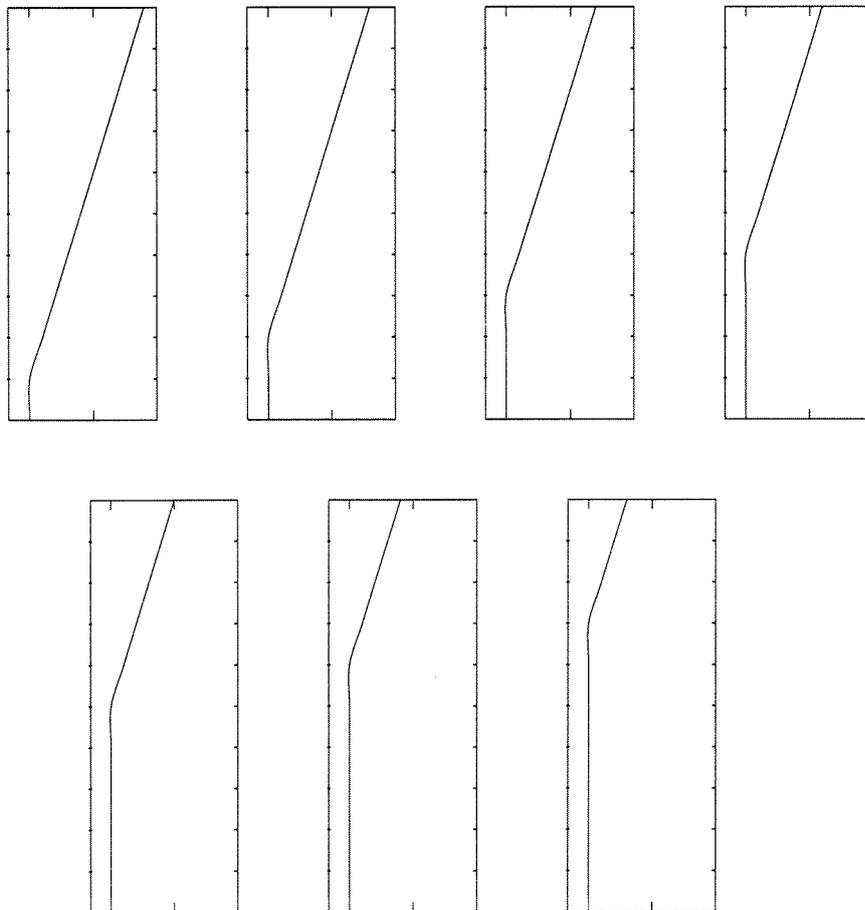


Abbildung 6.2: plastische Ansatzfunktionen für das Biegebalkenmodell

6.3.2 Vergleich der statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen statistischen Linearisierung

In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind die Ergebnisspektren der horizontalen Verschiebungen des 5. sowie des 10. Stockwerks graphisch dargestellt. Das System wurde dabei jeweils sowohl mit Hilfe der Methode der vollständigen statistischen Linearisierung, d. h. Linearisierung in allen ursprünglichen 40 Freiheitsgraden, sowie in der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit Hilfe der Transformation in zwei verschiedene reduzierte Basen berechnet: Einerseits wurde eine Basis bestehend aus 5 elastischen und 7 plastischen Ansatzmoden verwendet, andererseits eine noch stärker reduzierte Basis von nur 3 elastischen und 5 plastischen Moden. Unter Verwendung der so festgelegten $a_E + a_P = 12$ bzw. 8 Ansatzfunktionen konnte die ursprüngliche Anzahl der Unbekannten des Verfahrens von 50 auf 19 bzw. sogar 13 deutlich reduziert werden.

In Abbildung 6.3 kann man deutlich erkennen, daß zur Ermittlung des Spektrums des untersten Stockwerkes vor allem drei Moden einen Beitrag liefern. Ihre Eigenfrequenzen liegen bei ca. 2,2 Hz, 3,9 Hz und 6,2 Hz.

Da jedoch in der reduzierten Basis mit $a_E = 3$ elastischen Moden die einer Eigenfrequenz von etwa 6 Hz zugeordneten Moden nicht berücksichtigt wurden, kann dieser Teil des Spektrums nur unzureichend abgebildet werden. Entsprechend zeigt der Verlauf der ermittelten Antwortspektren in diesem Bereich eine deutliche Abweichung gegenüber den Ergebnissen, die in der vollständigen Basis bzw. in der Basis mit $a_E = 5$ elastischen Moden mit Hilfe der statistischen Linearisierung ermittelt wurden.

Eine gute Übereinstimmung erhält man dagegen im Bereich der beiden anderen Eigenfrequenzen. Dort weisen die Ergebnisse unter Verwendung einer reduzierten Basis im Vergleich zur vollständigen Basis kaum Unterschiede auf.

Die verwendeten elastischen Moden in der reduzierten Basis, deren Eigenfrequenzen nicht mit einer der drei im Antwortspektrum vertretenen Peaks übereinstimmen sind bei der Beurteilung der Antwort des untersten Geschosses nicht maßgebend, da sie keine großen Beiträge in diesen Bereichen aufweisen. Für das Gesamtverhalten des Systems sind sie jedoch unentbehrlich wie sich auch im Spektrum des 10. Stockwerks zeigen wird.

Dabei ist zu beachten, daß im tieffrequenten Bereich des Spektrums ($f < 0,2$ Hz) numerische Störungen auftraten. Die dort auftretenden Spannungsspitzen zeigen kein reales Systemverhalten, sondern entstammen numerischer Problemen im Rahmen der verwendeten Integrationsroutine. Daher wurde der Bereich mit Frequenzen unter 1 Hz nicht dargestellt.

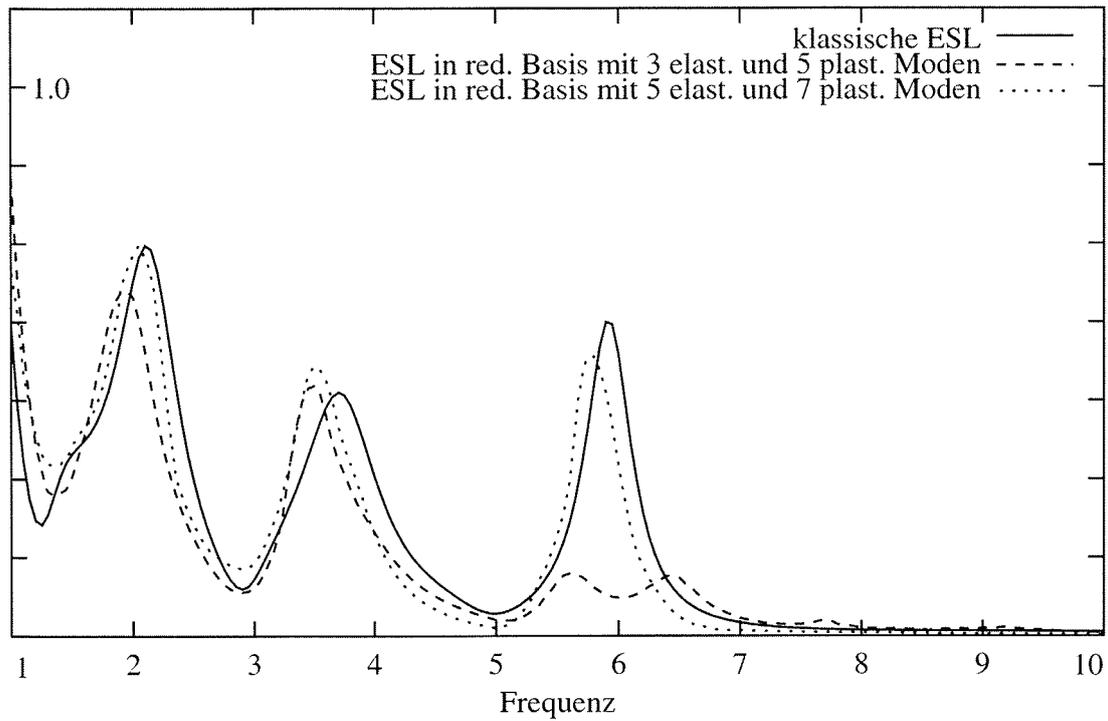


Abbildung 6.3: Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks unter voll korrelierter Last

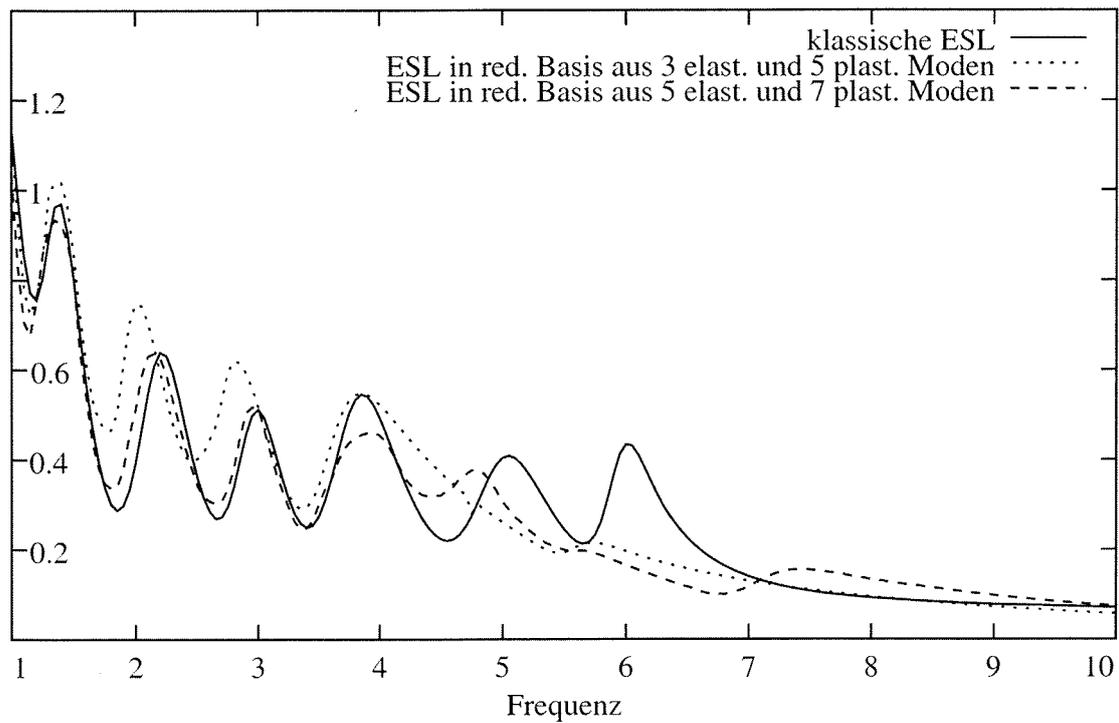


Abbildung 6.4: Spektrum der Verschiebung des 10. Stockwerks unter voll korrelierter Last

Die Wahl der Anzahl der plastischen Moden scheint hingegen gut getroffen, da über alle Stockwerke "gemittelt" die Ergebnisse gut übereinstimmen. Dies ist jedoch nicht weiter verwunderlich, da beim Kragbalken sich aus dem System an sich bereits die Orte der zu erwartenden Spannungsspitzen am Einspannungspunkt ergeben. Bei komplizierteren Strukturen wie z. B. im nächsten Beispiel ist dies jedoch nicht mehr so offensichtlich.

Nichtsdestotrotz hätten auch bereits nur $a_P = 3$ plastische Moden ausgereicht, um die Systemantwort passabel darzustellen.

Im Spektrum der Antwort für das 10. Stockwerk des Systems dagegen sieht man, daß alle verwendeten Moden auch im Antwortspektrum präsent sind. Man erkennt deutlich, daß die umfangreichere Basis mit $a_E = 5$ elastischen Moden im Vergleich zur kleineren Basis mit $a_E = 3$ elastischen Moden eine größere Anzahl von Peaks im Spektrum nachbilden kann.

Während im niederfrequenten Bereich das Antwortspektrum auch in den reduzierten Basen gut wiedergegeben wird, ist im Bereich über ca. 4 Hz eine deutliche Divergenz zwischen vollständiger und reduzierter Basis zu verzeichnen.

Jedoch kann auch hier wieder das Spektrum der Antwort bis auf einzelne Maximalwerte und nebengeordnete Frequenzbereich durch die reduzierten Basen ausreichend gut dargestellt werden.

Vor allem ist jedoch die Überschreitungswahrscheinlichkeiten vorgegebener Grenzwerte von Interesse; dazu wurden in der folgenden Tabelle die charakteristischen Werte der Verschiebungen und Verdrehungen bei einer Berechnung unter Verwendung der klassischen Methode und einer Berechnung in einer reduzierten Basis mit 5 elastischen und 7 plastischen Moden gegenübergestellt.

	neue Methode	klassische Methode	neue Methode	klassische Methode
Stockwerk	σ_{qq}	σ_{qq}	$\sigma_{\phi\phi}$	$\sigma_{\phi\phi}$
1	0.694	0.733	0.138	0.132
2	0.751	0.762	0.168	0.172
3	0.729	0.731	0.223	0.229
4	0.897	0.910	0.253	0.261
5	0.998	1.106	0.302	0.293
6	1.204	1.245	0.328	0.321
7	1.338	1.403	0.355	0.350
8	1.503	1.552	0.368	0.371
9	1.639	1.648	0.384	0.381
10	1.734	1.721	0.398	0.382

Wie man deutlich in den Ergebnissen erkennen kann, weichen die bei einer Berechnung in der reduzierten Basis erhaltenen Werte kaum von der exakten Methode in der vollständigen Basis ab.

Im Vergleich zum Scherbalkenmodell, bei dem der Vergleich weniger positiv ausfiel, ist dies jedoch wenig verwunderlich. Einerseits kann das Biegebalkenmodell einen Kragarm weitaus besser in seinem Verhalten nachbilden. Andererseits wurde auch eine vergleichsweise umfangreichere Basis verwendet, die natürlich auch zur hohen Übereinstimmung der Ergebnisse innerhalb der charakteristischen Werte beigetragen hat.

6.3.3 Vergleich der statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen

Als Referenzlösung wurde für das im letzten Abschnitt dargestellte Systembeispiel eine Monte Carlo Simulation mit 10^5 Zeitschritten durchgeführt. Der so erhaltene Zeitschrieb der Antwort wurde Fouriertransformiert und die Leistungsspektren gebildet.

Die Ergebnisse der Spektren der Verschiebung des untersten und des 5. Stockwerks sind in den Abbildungen 6.5 und 6.6 dargestellt. Um zusätzlich besonders die tieffrequenten Eigenmoden anzuregen, wurde als Last statt weißen Rauschens nun ein Blockspektrum bis 10 Hz auf das System aufgebracht. Dies entspricht einerseits eher einer guten Modellierung der Realität (z. B. Wellenschlag oder Windlasten), andererseits lassen sich so die höherfrequenten Einflüsse vermeiden, um einen aussagekräftigen Vergleich zu ermöglichen.

Als reduzierte Basis für die EQL wurde ein Satz von 3 elastischen und 4 plastischen Moden verwendet. Dies entspricht somit einer Reduktion von 40 auf 7 Bewegungsfreiheitsgrade und von 10 auf 4 korrespondierende Kraftgrößen. Somit wurden nur 11 Rechengrößen verwendet im Vergleich zu 50 bei der Verwendung der klassischen EQL.

Bei der Wahl der elastischen Ansatzmoden wurde darauf geachtet, daß die Eigenmoden des Systems verwendet werden, die das Spektrum auch im Bereich von 6 Hz darstellen können. Die plastischen Moden beeinflussen nur den unteren Bereich des Systems bis zum 4. Stockwerk.

Wie man in den Darstellungen der Spektren sieht, kann mit einer geschickt gewählten Basis (in der nur 3 elastische Moden enthalten sind) nicht nur den Bereich in dem die plastischen Moden zusätzlichen Einfluß haben (siehe Abbildung 6.5), sondern auch den Bereich, der nur durch elastische Moden beschrieben wird (siehe Abbildung 6.6), gut abbilden.

Auch hier traten erneut numerische Probleme auf, die zu stark überhöhten Werten im Frequenzbereich zwischen 0 und 0,2 Hz führten. Daher wird auch hier erst der Frequenzbereich über 1 Hz dargestellt.

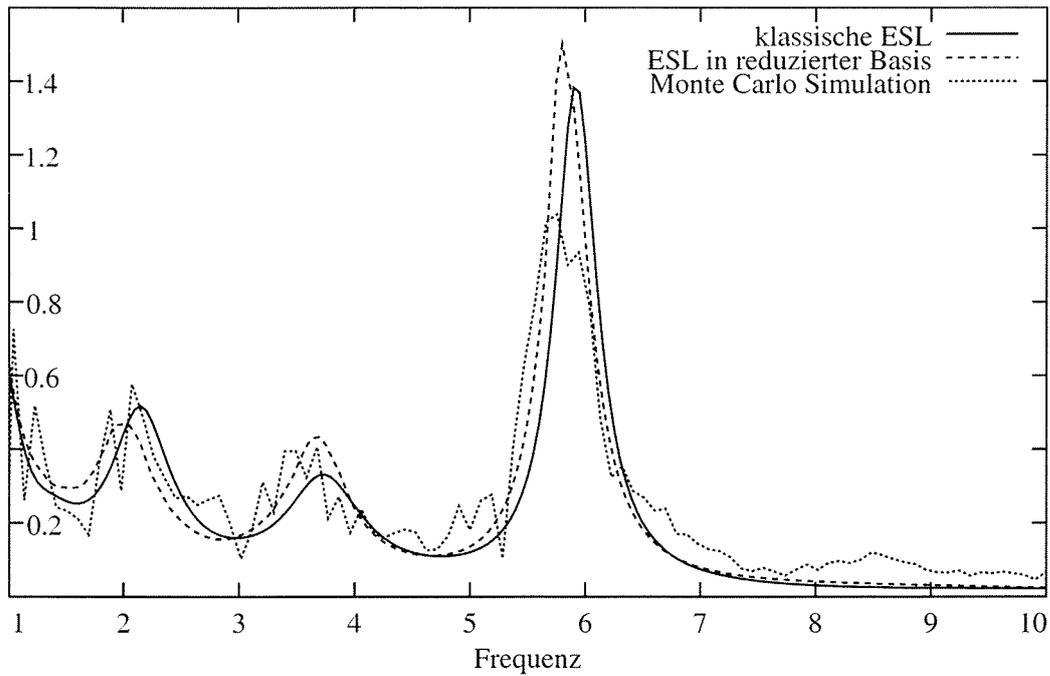


Abbildung 6.5: Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks unter Blocklast

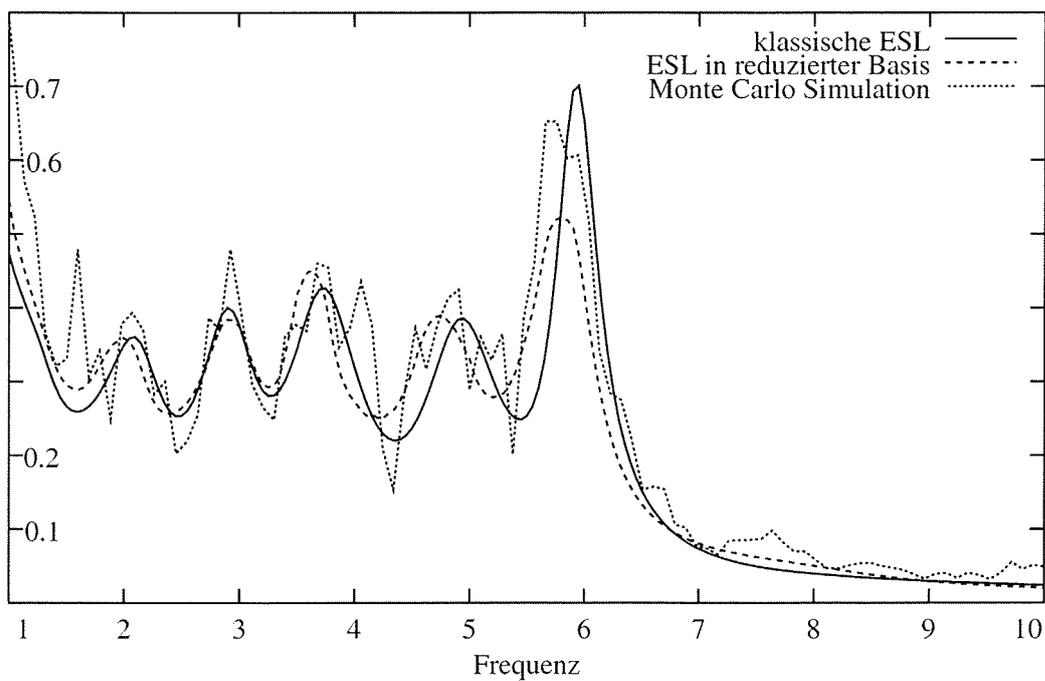


Abbildung 6.6: Spektrum der Verschiebung des 5. Stockwerks unter Blocklast

Die Übereinstimmung der Verläufe für die Verschiebung divergiert geringfügig. Die Spektren der Ableitung der Verschiebung ($S_{\dot{w}\dot{w}}$) bzw. der Verdrehungen ($S_{\dot{\phi}\dot{\phi}}$) zeigen eine noch bessere Übereinstimmung. Dies ist umso erfreulicher, da nicht die Verschiebungen, sondern die Ableitungen davon für die Rechenprozedur benötigt werden.

Im Bereich der zusätzlichen Kraftgröße treten größere Abweichungen besonders im mittleren Bereich des Kragarms auf. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da im reduzierten System nur Kraftgrößen bis zum 4. Stockwerk modellierbar sind. Da es sich bei den zusätzlichen Kraftgrößen um den plastischen Anteil des Rückstellmomentes handelt, der in den oberen Stockwerken einen geringen Einfluß hat, ist ein unterschiedlicher Verlauf als nicht zu gravierend zu beurteilen.

6.4 Beispiel: MDOF-System "Fußgängersteg"

Da der bisher als System verwendete Kragarm ein sehr einfaches Beispiel darstellt, das sich zwar sehr gut zur Demonstration der neu entwickelten Methode eignet, nicht jedoch ein klassisches Beispiel aus der Ingenieurpraxis darstellt, wird im folgenden ein praxisnäheres Beispiel vorgeführt. Überdies verfügt dieses System über eine wesentlich höhere Zahl an Unbekannten.

6.4.1 System und Wahl der Ansatzmoden

In Abbildung 6.7 ist das gewählte System abgebildet. Es repräsentiert einen idealisierten Fußgängersteg mit einseitigem Geländer. Die Vertikallasten V_i resultieren aus dem Eigengewicht der Konstruktion überlagert mit Verkehrslasten. Die Horizontallast H entsteht durch Windangriff am Geländer. Beide Lasten wurden als weißes Rauschen modelliert, auch wenn dies insbesondere bei den Verkehrslasten durch Fußgänger nur als grobe Näherung verstanden werden kann.

Daraus ergibt sich ein System, das z. B. mit Hilfe von 15 Elementen und 16 Knoten diskretisieren läßt. Somit hat das gesamte System 48 Freiheitsgrade, je Knoten einen Verschiebungs- und einen Verdrehungsfreiheitsgrad sowie eine korrespondierende Spannungsgröße (Rückstellmoment).

Die Massenbelegung wurde dabei zu $\mu = 500 \text{ kg/m}$ gewählt, die Biegesteifigkeit in allen Bereichen des Systems zu $EI = 50000 \text{ Nm}^2$.

Eine feinere Diskretisierung des in Abbildung 6.8 dargestellten Systems ist selbstverständlich möglich, erscheint jedoch im Sinne eines noch überschaubaren Beispiels unter Vermeidung umfangreicher Nachlaufrechnung nicht sinnvoll.

Mit Hilfe einer Eigenwertanalyse ergeben sich die folgenden niederfrequenten, nach ihrer Größe geordneten Eigenfrequenzen:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 0,82 \text{ Hz} & f_2 &= 3,21 \text{ Hz} & f_3 &= 4,04 \text{ Hz} \\
 f_4 &= 5,13 \text{ Hz} & f_5 &= 5,18 \text{ Hz} & f_6 &= 5,30 \text{ Hz} \\
 f_7 &= 10,42 \text{ Hz} & f_8 &= 12,19 \text{ Hz} & f_9 &= 13,58 \text{ Hz} \\
 f_{10} &= 13,83 \text{ Hz} & f_{11} &= 13,87 \text{ Hz} & f_{12} &= 27,40 \text{ Hz} \\
 f_{13} &= 31,51 \text{ Hz} & f_{14} &= 35,80 \text{ Hz} & f_{15} &= 38,01 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Die ihnen zugeordneten Eigenmoden bilden die Grundlage des elastischen Anteils der reduzierten Basis. Es werden nur die a_E Moden berücksichtigt, deren Eigenfrequenzen f_i im niederfrequenten Bereich liegt.

Als gute Wahl für die Anzahl der elastischen Moden hat sich bei diesem Beispiel unter der gegebenen Belastung eine Anzahl von $a_E = 5$ herausgestellt. In einem ersten Berechnungslauf wurden jedoch mit $a_E = 11$ mehr Moden als nötig verwendet, deren Anzahl später wieder reduziert wurde.

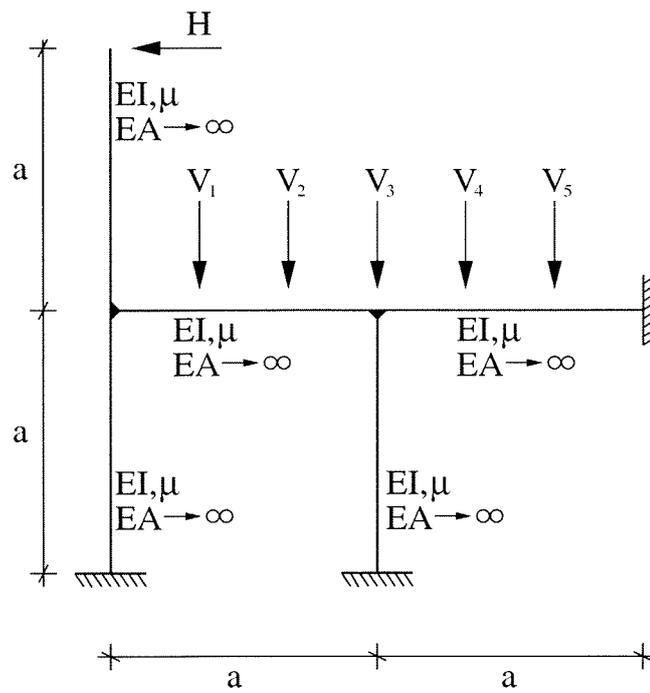


Abbildung 6.7: MDOF-System "Fußgängersteg"; System und Last

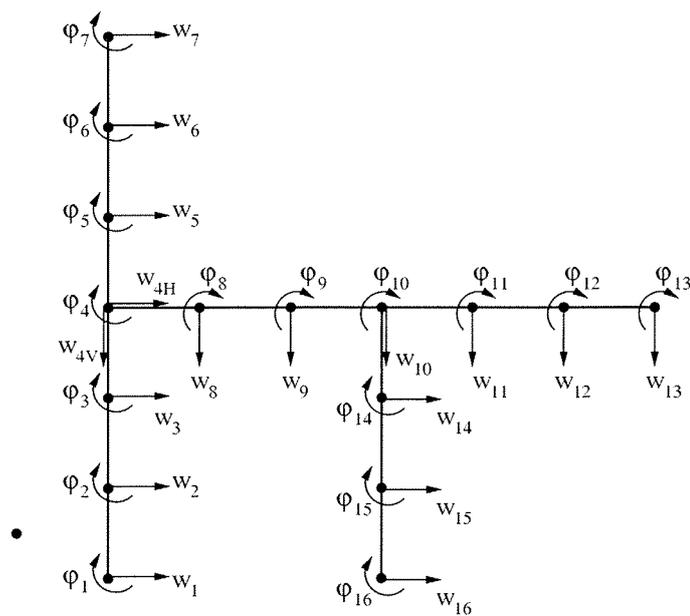


Abbildung 6.8: MDOF-System "Fußgängersteg"; Freiheitsgrade

In Abbildung 6.9 sind die Eigenmoden gezeigt, die später zur Bildung der reduzierten Basis berücksichtigt werden können. Währenddessen zeigt Abbildung 6.10 die verbleibenden Eigenmoden, die von vornherein als zur Bildung der reduzierten Basis ungeeignet eingestuft wurden.

Durch die graphische Überhöhung im Zusammenhang mit der diskreten Abtastung werden relative Winkel dabei teilweise verzerrt dargestellt.

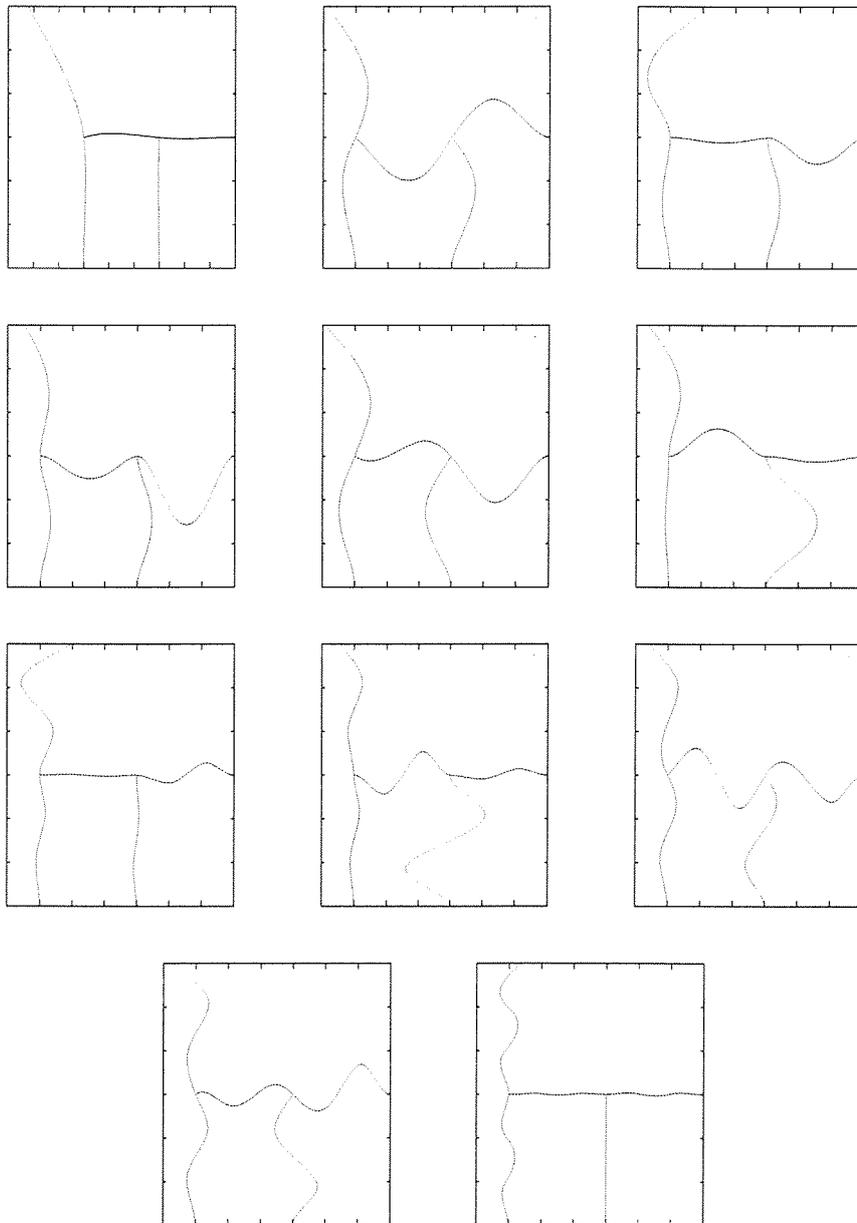


Abbildung 6.9: MDOF-System "Fußgängersteg"; maximale Anzahl der elastische Moden, die zur Bildung der reduzierten Basis verwendet wurden

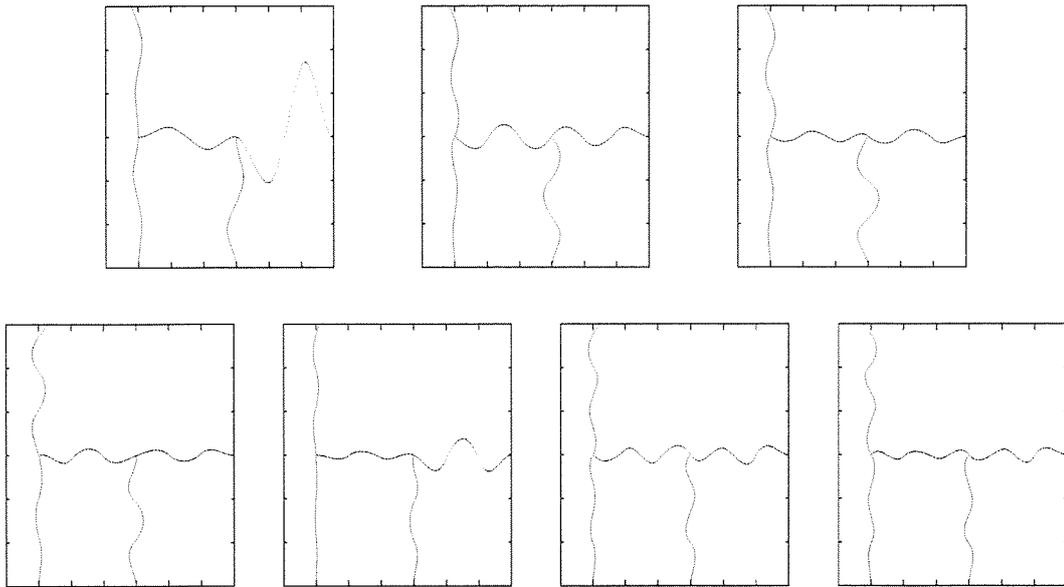


Abbildung 6.10: MDOF-System "Fußgängersteg"; nicht verwendete elastische Moden

Die nicht berücksichtigten Moden weisen eine zu starke Krümmung auf, um das Systemverhalten global entscheidend zu beeinflussen. Ein lokaler Einfluß der Moden wird im Vergleich zur klassischen EQL nicht benötigt, da sie durch die noch zu wählenden plastischen Moden ersetzt werden. Somit hat ihr Weglassen in der reduzierten Basis nur einen vernachlässigbar kleinen Einfluß auf das globale Antwortverhalten des Systems, da ihre Anregefrequenzen zu hoch liegen.

Bei der Wahl der plastischen Moden spielen wieder die bereits im letzten Kapitel ausgeführten Überlegungen eine Rolle: Einerseits soll der Einfluß der verwendeten Ansatzmoden lokal eng begrenzt sein, andererseits in diesen diskreten Bereichen dann jedoch einen Verlauf mit starker Krümmung aufweisen. Überdies müssen die Randbedingungen des Systems eingehalten werden, um eine kinematische Verträglichkeit der neuen Basis zu gewährleisten.

Eine mögliche Wahl für die Form der plastischen Ansatzmoden ergibt sich aus dem Aufbringen einer Einheitsverformung in bestimmten Freiheitsgraden, von denen man glaubt, daß in ihnen eine Plastifizierung auftreten wird.

Dies ist im vorliegenden Beispiel vermutlich auf der ganzen Länge im vorwiegend auf Biegung belasteten Querträger der Fall. Zusätzlich könnten auch Plastifizierungen im Anschlußpunkt der Kragstütze auftreten, so daß eine mögliche Wahl für die plastischen Ansatzmoden die in Abbildung 6.11 dargestellten Moden wäre.

Die Pfeile zeigen dabei an, welcher Knoten als Ort einer Plastifizierungsstelle angenommen wurde. In seinem Bereich weist die Ansatzmode die stärkste Krümmung auf. Trotzdem werden alle kinematischen Randbedingungen eingehalten, insbeson-

dere an den Einspannungsstellen.

Zu jeder dieser plastischen Moden gehört ein plastisches Moment Y , das im jeweiligen Knoten wirkt. In den restlichen Knoten treten keine weiteren Plastifizierungen auf, so daß pro plastische Mode nur eine zusätzlich unbekannte Spannungsunbekannte entsteht. a_P plastische Moden erzeugen somit auch nur a_P zusätzliche Unbekannte.

Berechnet wurde die jeweilige Mode dadurch, daß im jeweiligen Freiheitsgrad eine relative Verdrehung gegenüber den anderen benachbarten Freiheitsgraden aufgezwungen wurde. Dadurch entsteht eine statische Biegelinie, deren Verlauf als plastische Ansatzmode verwendet wurde.

Auch hier können durch die graphische Überhöhung im Zusammenhang mit der diskreten Abtastung relative Winkel teilweise verzerrt erscheinen.

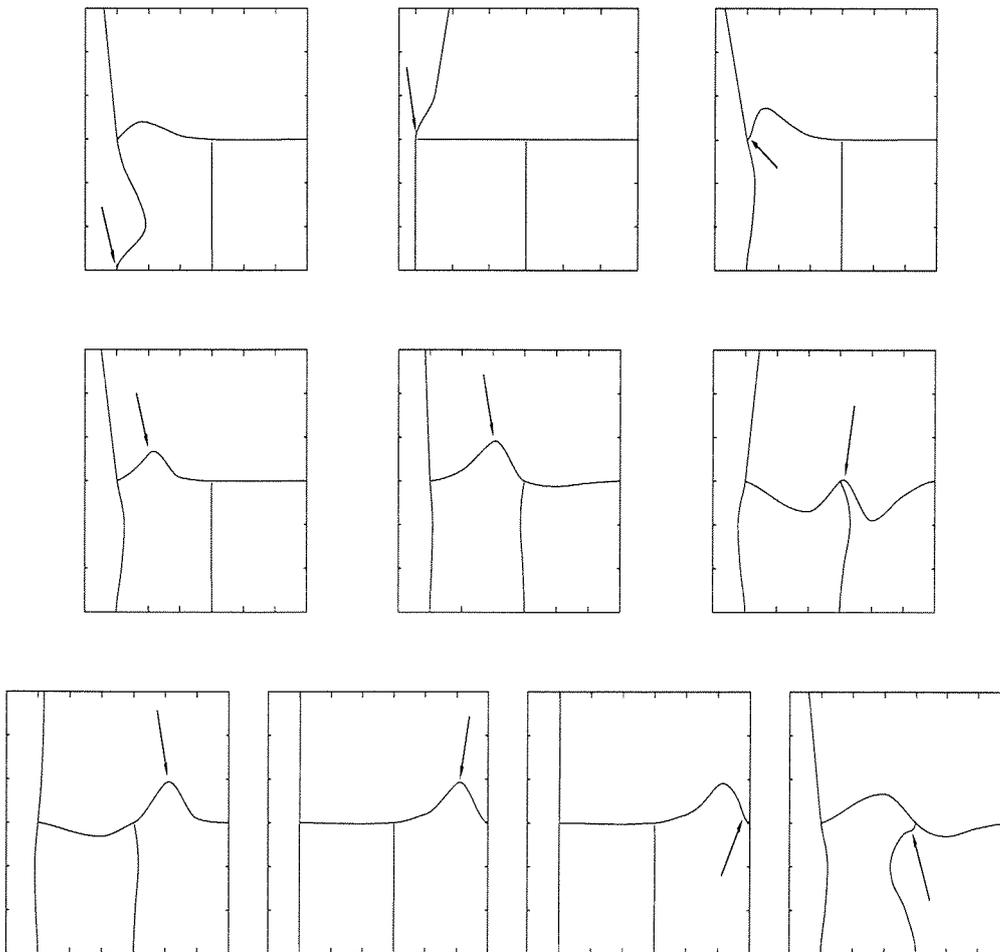


Abbildung 6.11: MDOF-System "Fußgängersteg"; maximale Anzahl der zur Bildung einer reduzierten Pasis verwendeten plastischen Moden

6.4.2 Vergleich der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit der klassischen statistischen Linearisierung

In den Abbildung 6.12, 6.13 und 6.14 kann man die durch EQL erhaltenen Ergebnisse für die Verschiebungs- bzw. Verdrehungsspektren vergleichen. Dabei werden die Ergebnisse der Berechnung in der mit 48 Freiheitsgraden beschriebenen vollständigen Basis einer Berechnung in einer reduzierten Basis aus 5 elastischen und 5 plastischen Moden (entspricht 15 Rechengrößen; Plastifizierungen nur im horizontalen Querträger) gegenübergestellt.

Das in Abbildung 6.12 dargestellte Spektrum der horizontalen Verschiebung des Endpunktes des vertikalen Trägers zeigt deutlich, daß die Ergebnisse der Berechnungen sehr gut übereinstimmen. Obwohl insbesondere in diesem Punkt mit größeren Abweichungen zu rechnen gewesen wäre, divergieren die Ergebnisse der Berechnungen in vollständiger und reduzierter Basis aus nur 5 elastischen und 5 plastischen Moden nur geringfügig.

Zwar weist das Spektrum bei Berechnung mit der klassischen EQL im Bereich der Eigenkreisfrequenz von ca. 4,5 Hz einen Maximalwert auf, der nur ca. 80 Prozent des Wertes erreicht, den eine Berechnung unter Verwendung einer reduzierten Basis ergibt. Dies ist jedoch nicht entscheidend für die Ermittlung der stochastischen Werte der Verteilung, da dieser Peak keinen besonders starken Einfluß auf die Fläche unter dem Verlauf der Kurve hat. Daher kann diese Abweichung, obwohl deutlich erkennbar, immer noch als "geringfügig" bezeichnet werden.

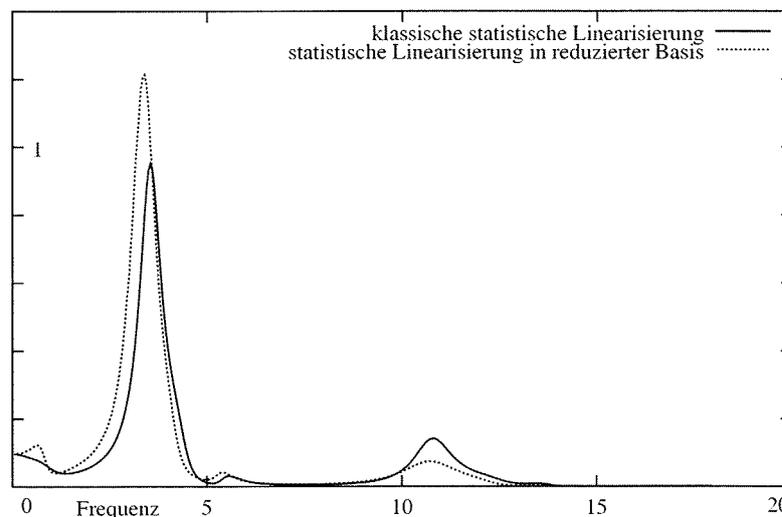


Abbildung 6.12: Spektrum der horizontalen Auslenkung des Knotens 7 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis

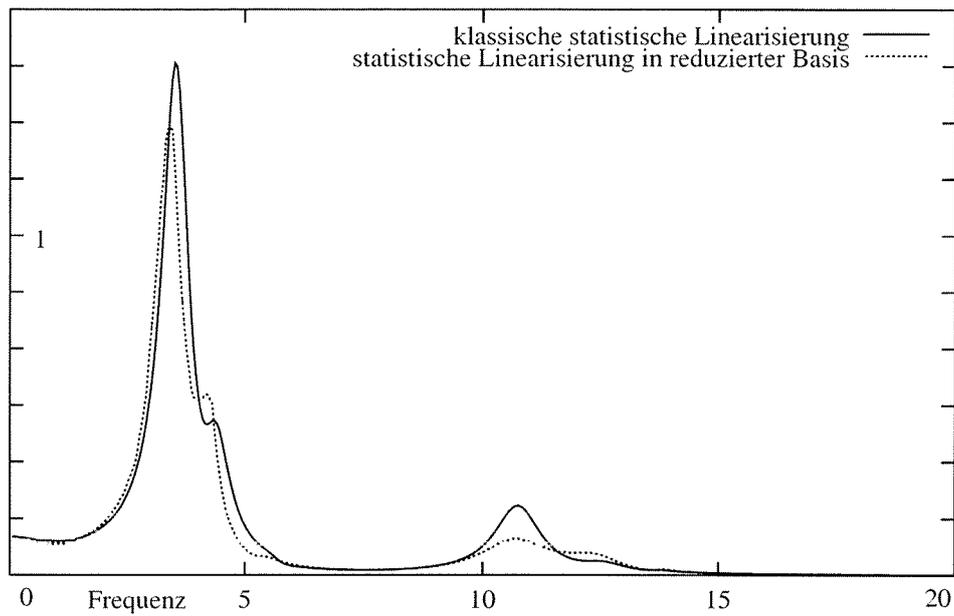


Abbildung 6.13: Spektrum der Verdrehung im Knoten 10 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis

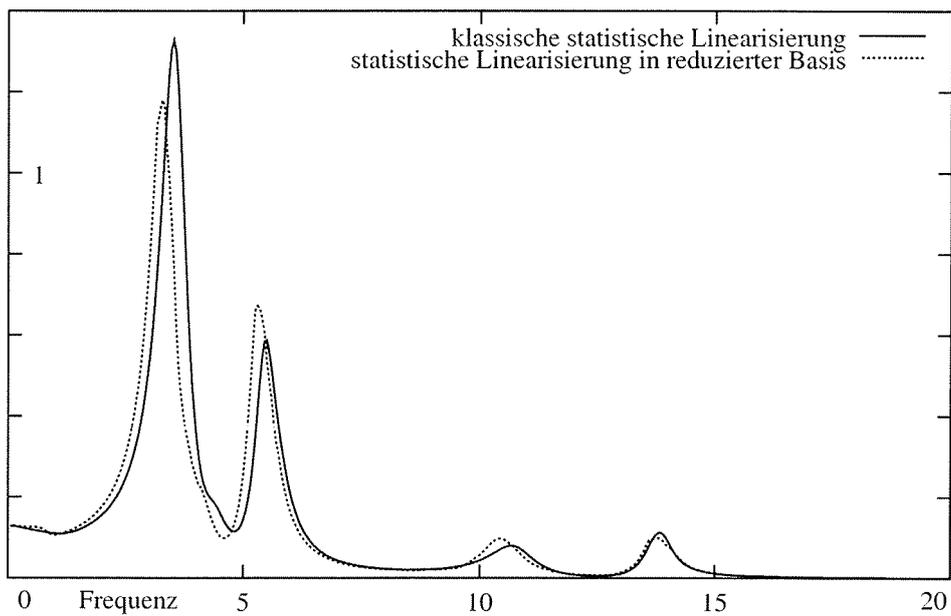


Abbildung 6.14: Spektrum der vertikalen Verschiebung im Knoten 8 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis

Nicht zu vergessen ist in diesem Zusammenhang auch, daß nicht die stochastischen Werte der Verschiebung (σ_q) beim Verfahren der statistischen Linearisierung verwendet wird, sondern die stochastischen Werte der Geschwindigkeit der Auslenkung (Schnelle $\sigma_{\dot{q}}$). Somit wird zusätzlich der niederfrequente Bereich der Antwort im Vergleich zu höheren Frequenzen weniger stark durch das Berechnungsverfahren entscheidenden stochastischen Parameter der Antwort beeinflussen.

Auch in den Abbildungen 6.13 und 6.14 ist eine gute Übereinstimmung der beiden Berechnungsmethoden zu erkennen. Die Abbildung 6.13 zeigt dabei das Verdrehungsspektrum im Knoten 10 und Abbildung 6.14 das Verschiebungsspektrum im Knoten 8. An beide Knoten grenzen Elemente des horizontalen Trägerteils, der am stärksten beansprucht wird.

Trotz einer Reduzierung der Zahl der Unbekannten auf nur noch ca. ein Drittel der ursprünglichen Zahl, erhält man unter Verwendung der statistischen Linearisierung in der reduzierten Basis immer noch aussagekräftige Ergebnisse, die kaum von der wesentlich aufwendigeren Methode in der vollständigen Basis abweichen.

Bei der Ermittlung der stochastischen Parameter der Verteilung der Antwort liegen die Abweichungen zwischen der klassischen statistischen Linearisierung und der Linearisierung in einer reduzierten Basis aus je 5 elastischen und plastischen Moden in allen Freiheitsgraden unter 15 Prozent. Dabei treten in den Freiheitsgraden die den oberen Elementen des senkrechten Trägerteils zugeordnet sind, stärkere Abweichungen auf. Im Bereich des Querträgers stimmen die stochastischen Verteilungsparameter dagegen wesentlich besser überein; Abweichungen im Bereich von maximal 11 Prozent werden hier nicht überschritten. Im Einzelnen ergeben sich z. B. im Freiheitsgrad 11 in der vollständigen Basis für die Verschiebung eine Standardabweichung von $\sigma_q = 1,12$ und für die Verdrehung eine Standardabweichung von $\sigma_\phi = 0,92$, während die Berechnung in der reduzierten Basis die Werte $\sigma_q = 1,07$ und $\sigma_\phi = 0,97$ ergibt. Eine ähnlich gute Übereinstimmung wird auch für die anderen Freiheitsgrade des horizontalen Tragwerkteils erzielt.

Auch die Parameter der stochastischen Verteilungen der Spannungsgrößen weisen in den Freiheitsgraden, in denen eine Plastifizierung erwartet wurde kaum gravierende Abweichungen auf. Die anderen Freiheitsgrade sind dabei nur bedingt vergleichbar, da als Berechnungsannahme davon ausgegangen wurde, daß in ihnen keine Plastifizierung auftritt und somit die Basis so gebildet wurde, daß in diesen Freiheitsgraden keine Spannungsgrößen mit der reduzierten Basis dargestellt werden können.

Besonders interessant ist in diesem Anwendungsbeispiel auch der Vergleich der Spektren von sowohl Verschiebungen als auch Verdrehungen. In den Abbildungen 6.13 und 6.14 erkennt man deutlich, daß die Methode sowohl für Verschiebungen als auch Verdrehungen beiderseits gute Ergebnisse liefert. Speziell wird hierbei auch deutlich, daß die beiden dargestellten Freiheitsgrade von deutlich unterschiedlichen Frequenzen angeregt werden: Während die Verdrehungen im Freiheitsgrad 10 (Knotenpunkt zwischen horizontalen und vertikalem Tragwerksteil) auf Anregfrequenzen im Bereich von ca. 5,5 Hz nahezu überhaupt nicht reagieren, erkennt man einen deutlichen Resonanzeffekt beim Spektrum der Verschiebung im Freiheitsgrad 8. Somit kann

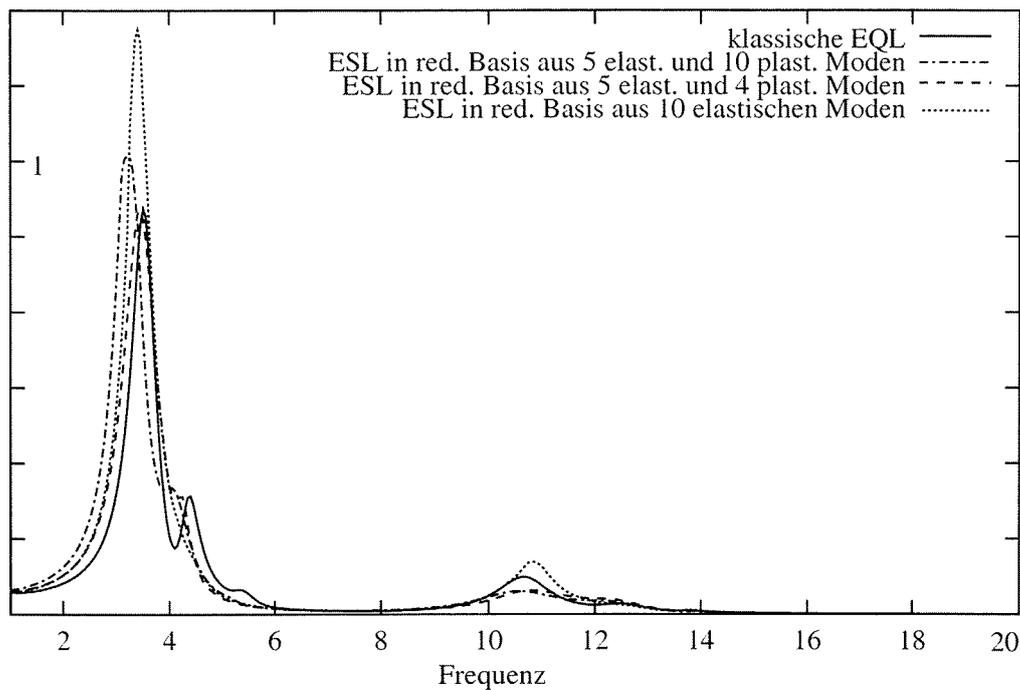


Abbildung 6.15: Spektrum der Verdrehung im Knoten 4; Vergleich von drei unterschiedlich stark reduzierten und der vollständigen Basis

man klar erkennen, daß obwohl beide Freiheitsgrade unmittelbar benachbart sind, sie jedoch von unterschiedlichen Frequenzen primär angeregt werden.

Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß die Methode durch die Reduzierung der Basis keine wesentliche Filterung der Antwortspektren nach sich zieht. Die reduzierte Basis kann zwar nicht mehr jegliche Kombination von Antworten darstellen, die wesentlichen Anteile der Antwort bleiben jedoch immer noch darstellbar und werden korrekt abgebildet.

Um dies noch näher zu beleuchten, insbesondere was die Wahl der plastischen Moden betrifft, wurden mehrere verschiedene Basen aus verschiedenen Kombinationen von elastischen und plastischen Ansatzmoden verglichen. Exemplarisch wurden in Abbildung 6.15 die Antwortspektren der Berechnungen von drei verschiedenen reduzierten Basen und der vollständigen Basis gegenübergestellt. Dabei wurde nur die Anzahl der plastischen Moden variiert. Unter anderem wurde auch eine rein elastische Basis ohne plastischen Ansatzmode verwendet.

Wie man deutlich erkennt, treten deutliche Abweichungen in den Maximalwerten der jeweiligen Resonanzpeaks auf. Man erkennt des weiteren, daß die plastischen Moden einen deutlichen Anteil an der Güte des Ergebnisses haben: Die stärksten Abweichungen weist der Verlauf des Spektrums bei einer Berechnung mit einer rein

elastischen Basis auf. Diese Basis kann keine Plastifizierungsstellen abbilden und führt somit insbesondere in den Bereichen des stark belasteten Querträgers, der plastifiziert, zu starken Abweichungen.

Andererseits ist jedoch auch zu erkennen, daß die Annahme, der Einspannungspunkt der linken Stütze würde plastifizieren, falsch war. Diese plastische Mode hat nur einen geringen Partizipationsfaktor und kann auch gut vernachlässigt werden.

Somit kann man hier deutlich erkennen, daß bereits nur 4 plastische Moden das lokal konzentrierte Plastifizieren des Systems ausreichend gut beschreiben können. Die in den beiden anderen Basen zusätzlich angesetzten Formfunktionen haben nur geringen Einfluß und könnten so ohne Bedenken aus der Basis entfernt werden ohne die Ergebnisgüte wesentlich zu stören.

Des weiteren zeigt auch der Vergleich von Verschiebung- und Verdrehungsspektren, daß dieses Beispiel mit einem klassischen Scherbalkenmodell nur unter Inkaufnahme von deutlichen Abweichungen modellierbar ist. Das Scherbalkenmodell kann Verdrehungen nicht abbilden. Da jedoch in diesem Beispiel die Verdrehungen insbesondere der Knoten im Bereich des horizontalen Trägerteils wichtig und somit nicht vernachlässigbar sind, würde ein Modell unter Verwendung des Scherbalkenmodells zu ungenauen, wenn nicht sogar stark verfälschten Ergebnissen führen.

Der Vergleich mit direkten Simulationen (Monte Carlo Methode) ist dagegen in erster Linie dazu gedacht, grundlegende Fehler der Methode wie z. B. eine Frequenzverschiebung der Antwort oder ähnliches aufzuzeigen. Trotz allem hat sich die neu entwickelte Methode der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis auch im Vergleich zu direkten Simulationstechniken bewährt, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird.

6.4.3 Vergleich der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen

In Abbildung 6.16 ist das Ergebnisspektrum der vertikalen Verschiebung des Systems im Knoten 9 abgebildet. Deutlich ist die gute Übereinstimmung der Verläufe für die beiden Berechnungsmethoden erkennbar. Abweichungen treten in nur geringem Umfang auf, so daß die Ergebnisse durchaus in ihrer Vorhersagegüte vergleichbar sind, obwohl ihnen unterschiedliche Annahmen in Bezug auf die Verteilung der Systemantwort zugrunde liegen. Während die statistische Linearisierung geschränkt ist auf Systeme, deren Antwortverhalten einer Gaußverteilung folgt, können Monte Carlo Simulationen für beliebige Verteilungstypen der Anregung und Antwort verwendet werden.

Auch in den meisten anderen Freiheitsgraden ist eine ähnlich gute Übereinstimmung der Methode der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis im Vergleich zu direkten Simulationsmethoden erkennbar. Nur in den Ergebnissen der Auslenkung des Endes des vertikalen Trägerteils treten stärkere Abweichungen auf, die jedoch die ermittelten Parameter der Antwortverteilung maximal bis 20 Prozent Abwei-

chung beeinflussen. Diese Abweichung erscheint jedoch angesichts des in weiten Teilen des Systems vorherrschenden guten Übereinstimmung hinnehmbar.

In Abbildung 6.17 ist des weiteren das Spektrum der Verdrehung im Knoten 8 dargestellt. Dabei wurden zwei verschiedene reduzierte Basen verwendet. Basis A besteht aus nur je 5 elastischen und plastischen Moden (also 15 Rechenunbekannte), während Basis B aus einer sehr großen Anzahl von 12 elastischen und 10 plastischen Ansatzmoden aufgebaut ist. Wie deutlich zu erkennen ist, stimmen die Berechnungen mittels statistischer Linearisierung in reduzierter Basis gut mit den Ergebnissen aus Monte Carlo Simulationen überein.

Anhand dieses Beispiels ist deutlich erkennbar, daß die Verwendung von einer größeren Anzahl von Rechenunbekannten nicht zwingend zu besseren Ergebnissen führt. Umgekehrt ist es jedoch auch so, daß eine schlecht gewählte Auswahl unter den möglichen Eigenmoden unter Umständen zu einer zu stark reduzierten Basis führt, so daß die Ergebnisse stark verfälscht das Antwortverhalten wiedergeben.

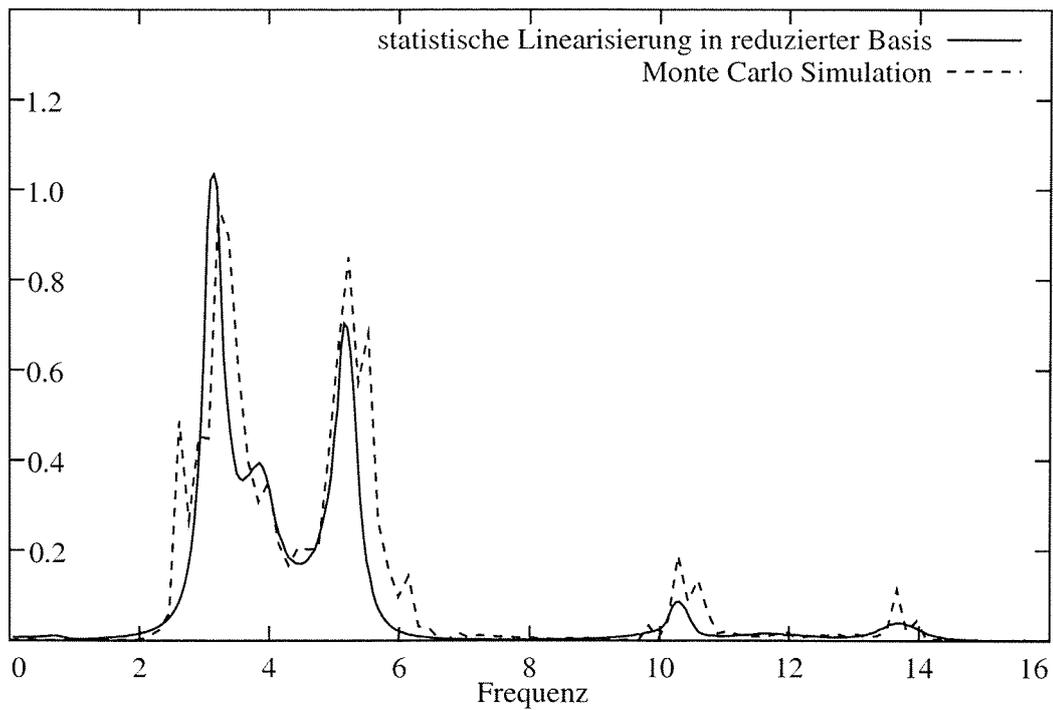


Abbildung 6.16: Spektrum der Verschiebung im Knoten 9; Vergleich statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen

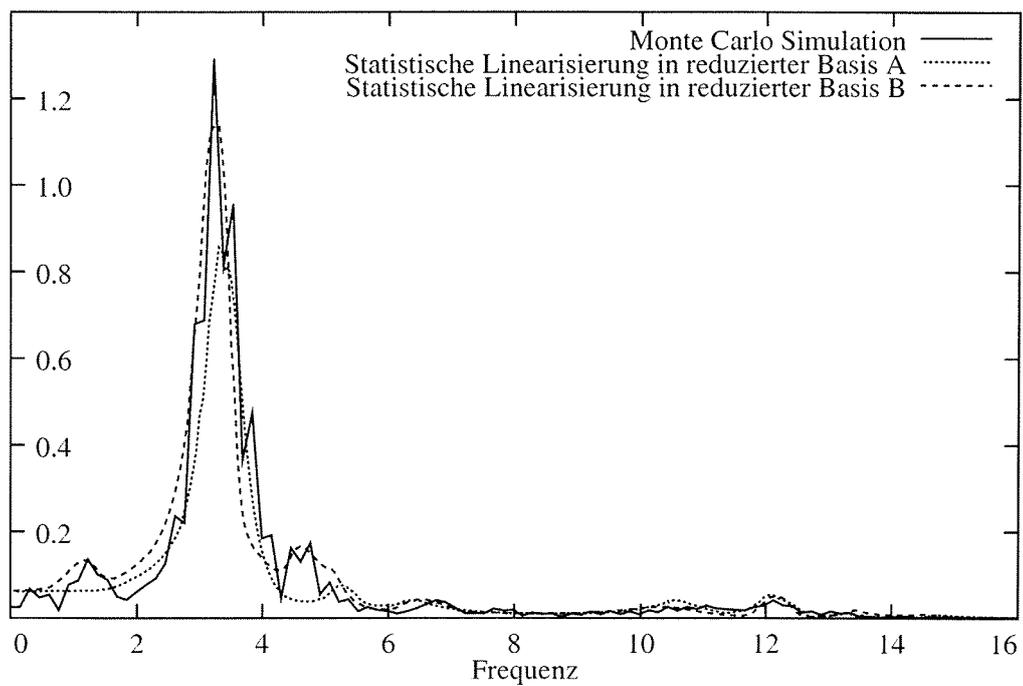


Abbildung 6.17: Spektrum der Verdrehung im Knoten 8; Vergleich Simulation mit statistischer Linearisierung in zwei unterschiedlich stark reduzierten Basen

6.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die statistische Linearisierung in reduzierter Basis erlaubt es ebenfalls für Systeme deren Lastabtragung eher durch ein Biegebalkenmodell modellierbar sind gute bis sehr gute Aussagen hinsichtlich der Systemantwort unter stochastischen Lasten zu treffen.

In den Bereichen, in denen Plastifizierungen zu erwarten sind, läßt sich mit Hilfe der plastischen Ansatzfunktionen gut das nichtlineare Systemverhalten beschreiben. Somit scheint es, als ob die plastischen Ansatzfunktionen die lokalen Krümmungen gut abbilden können.

Doch auch in den Bereichen des Systems in dem nicht mit einer Plastifizierung gerechnet wurde (und daher auch die reduzierte Basis diesen Anteil der Systemantwort herausfiltert) weichen die Ergebnisse nicht stark von der exakten Berechnung in vollständiger Basis ab. Größere Abweichungen treten nur dann auf, wenn die Plastifizierungen nicht lokal auftreten, sondern über die gesamte Struktur verteilt sind, was nicht dem Regelfall entspricht.

Die erhaltenen Spektren der Systemantwort unter Verwendung der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis divergieren nur geringfügig im Vergleich zu den Ergebnissen der beiden Vergleichsmethoden (klassische Linearisierung und Simulationen mit Monte Carlo) und sind insbesondere im Vergleich zur klassischen statistischen Linearisierung sehr gut in der Lage, die Systemantwort zu beschreiben. Die Güte der Ergebnisse ist dabei nicht wesentlich davon abhängig, ob sich die Belastung des Tragwerk aus korrelierten oder unkorrelierten Lasten zusammensetzt. Entscheidender ist dabei das Zusammenspiel zwischen Systemgeometrie und Lastbild, da die Methode umso besser funktioniert, je stärker konzentriert die Plastifizierungen auftreten.

Es ist des weiteren anzumerken, daß ein Teil der Abweichungen zwischen Simulationstechniken und statistischer Linearisierung auch daher herrührt, daß die Antwortberechnung bei direkten Simulationen im Zeitbereich erfolgt und daher zum Vergleich in den Frequenzbereich transformiert werden muß. Diese Transformation führt zu zusätzlichen Fehlern, die jedoch nicht der Methode an sich anzulasten sind. Besonderes Augenmerk muß jedoch in allen Fällen auf die Auswahl der Moden gelegt werden, die die reduzierte Basis bilden. Eine falsche Auswahl kann dazu führen, daß die Basis nicht mehr in der Lage ist, essentielle Anteile der Systemantwort abzubilden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

7.1 Wesentlichen Merkmale der Methode

Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis kombiniert eine Reduktionsstrategie der Rechenunbekannten mit der klassischen statistischen Linearisierung. Ziel ist es, ein Berechnungsverfahren aufzuzeigen, das auch zur Berechnung von großen Systemen unter stochastischen Lasten geeignet ist. Dabei wird besonders das physikalische bzw. mechanische Verhalten des Systems berücksichtigt.

Die Reduktionsstrategie beruht auf der Wahl einer Basis aus speziellen Ansatzfunktionen, die aus elastischen und plastischen Moden bestehen. Die elastischen Moden beschreiben das globale Systemverhalten und haben jeweils Einfluß auf nahezu alle Freiheitsgrade, während die plastischen Moden lokale Plastifizierungen der Struktur besonders gut abbilden können. Sie weisen eine lokal stark konzentrierte Krümmung auf, haben jedoch im restlichen Tragwerksbereich nur geringe Krümmungen. Der Ort der starken Krümmung entspricht dabei einer angenommenen Plastifizierungsstelle. Aufgrund dieser Eigenschaft der plastischen Moden ist es möglich, lokale Plastifizierungen zu simulieren, die ansonsten nur unter Verwendung einer vollständigen Basis möglich wären. Im Gegenzug können aber so die hochfrequenten Eigenmoden der Struktur (die sonst benötigt werden, um die an der Plastifizierungsstelle auftretenden starken Krümmungen zu beschreiben) vernachlässigt werden, da ihre Funktion jetzt von den plastischen Moden übernommen wird.

Dieser Strategie folgend läßt sich das Antwortverhalten des Systems mit nur wenigen Ansatzmoden beschreiben, wodurch eine starke Reduzierung des Rechenaufwands durch eine Verminderung der Anzahl der Rechenunbekannten erreicht wird.

7.2 Vergleichbarkeit der Methode mit anderen Berechnungsverfahren

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Modellbildung einen wesentlichen Einfluß auf das Antwortverhalten des Systems hat. Dabei können nicht nur in der Umsetzung des realen Systems in ein mechanisch abstrahiertes System Fehler auftreten, sondern auch in den Rechenannahmen, die der Berechnungsingenieur trifft, können Fehler versteckt sein. So ist auch die Annahme eines Antwortprozesses in Form einer Gaußverteilung nur eine Annäherung an das reale Verhalten in der Natur, so daß die Berechnung mit einer auf der statistischen Linearisierung basierenden Methode bereits hier einen strukturellen Fehler aufweisen kann. Dieser Fehler kann jedoch in den meisten hier angesprochenen Fällen vernachlässigt werden, da für die meisten Aufgabenstellungen im Ingenieurwesen die Annahme einer Gaußverteilung folgenden Antwort ausreichend gute Ergebnisse liefert. Nur in Ausnahmefällen ist eine solche Annahme nicht zulässig.

In diesen Fällen ist jedoch dann ein Vergleich der auf statistischer Linearisierung basierender Methoden mit anderen Methoden von vorne herein nur bedingt möglich, da den unterschiedlichen Methoden unterschiedliche Annahmen zugrundeliegen.

Daher muß sich die in dieser Arbeit präsentierte Methode primär mit der klassischen stochastischen Linearisierung messen können, da hier die grundlegenden Annahmen identisch sind. Die neue Methode der statistischen Linearisierung in reduzierter Basis muß auf alle Fälle die Ergebnisse sowie eine vergleichbare Aussagegüte erreichen, die mit einer klassischen Methode der Statistischen Linearisierung zu erreichen wäre. Der Vergleich mit direkten Simulationen (Monte Carlo Methode) ist dagegen in erster Linie dazu gedacht, die Größenordnung der Ergebnisse zu verifizieren. Völlige Übereinstimmung der Ergebnisse war daher von vorneherein nicht realistisch zu erwarten, da beide Methoden zu stark von unterschiedlichen Annahmen ausgehen.

In diesem Zusammenhang muß auch gesehen werden, daß beim Vergleich der Methoden Fehler über die Problematik der Signalanalyse (FFT, Fensterung der Transformation, Aliasing-Effekte, etc.) entstehen, die nicht durch die Wahl der Methode an sich entstehen, jedoch aber auch nicht vermeidbar sind.

7.3 Stärken der Methode

7.3.1 Übereinstimmung der Ergebnisse mit anderen Berechnungsverfahren

Mit Hilfe des neu entwickelten Berechnungsverfahrens der statistischen Linearisierung in einer reduzierten Basis erhält man bei der Verwendung geeigneter Ansatzmoden eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit anderen Berechnungsmethoden.

Insbesondere ist die Methode sehr gut dazu geeignet, die klassische Linearisierung in vollständiger Basis zu ersetzen. Gute Ergebnisse werden jedoch auch im Vergleich zu Monte Carlo Simulationen erreicht.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist gleichermaßen in Hinblick auf den Verlauf der Antwortspektren wie auf die stochastischen Parameter der Antwortverteilungen gut. Auch in den zeitlichen Ableitungen der Systemreaktion treten keine überraschenden größeren Abweichungen auf.

7.3.2 Berechnungsaufwand

Unter Verwendung der neu entwickelten Berechnungsmethode läßt sich der Rechenaufwand im Vergleich zu einer Berechnung mit der Methode der klassischen statistischen Linearisierung signifikant verkürzen .

Auch gegenüber Monte Carlo Simulationen stellt die Methode eine interessante Alternative dar; absolute Aussagen hinsichtlich Rechenzeiten sind jedoch nur unzureichend möglich, da im Bereich der direkten Simulationsverfahren zahlreiche Algorithmen existieren, die nicht vergleichend getestet wurden. Die Monte Carlo Simulationen, die in den Beispielen verwendet wurden, dienten ausschließlich zur Verifikation des Verfahrens.

7.3.3 Übertragbarkeit auf andere Materialverhalten und andere Elementtragverhalten

Die hier vorgestellte Methode ist auch leicht auf andere Materialverhalten neben dem nach Bouc und Wen ausweitbar. Die fundamentalen Herleitungen müssen dabei nur geringfügig modifiziert werden. Somit ist die Methode nicht auf diese Materialverhalten limitiert, sondern erweiterbar auf andere Materialverhalten und Lastabtragungsmechanismen.

Insbesondere ist dabei eine Erweiterung auf zweidimensionale Elemente wie Platten und Scheiben denkbar. Hier kann davon ausgegangen werden, daß sich die mit der Reduzierung verbundene Verkürzung der Rechenzeiten noch wesentlich deutlicher zeigt, da häufig bei Plattenschwingungen nur sehr wenige Eigenmoden entscheidend zur Systemantwort beitragen.

Die Methode ist überdies leicht in gebräuchlicher Software zu implementieren, da sie aufgrund der Beschreibung in Knotenfreiheitsgraden kompatibel zu den Grundprinzipien der Finiten Element Methode ist.

7.4 Schwächen der Methode

7.4.1 Wahl der Ansatzmoden zur Bildung der reduzierten Basis

Eine geschickte Auswahl der zur Bildung der reduzierten Basis verwendeten Ansatzmoden ist essentiell für die hier vorgestellte Methode. Eine falsch oder zu stark reduzierte Basis führt zu Verfälschungen der Ergebnisse, eine zu umfangreiche Basis erzeugt einen unnötigen Rechenaufwand, der vermeidbar sein kann.

Trotz allem wiegt dieser Nachteil nicht zu schwer, da eine "auf der sicheren Seite" gewählte Basis immer noch einen geringeren Rechenaufwand erforderlich macht, als eine statistische Linearisierung in der klassischen Form in vollständiger Basis.

7.4.2 Nicht konzentrierte Plastifizierungen bzw. hohe Anzahl an lokalen Plastifizierungen

Sind die Systembereiche, in den eine Plastifizierung vorliegt, nicht lokal begrenzt und stark konzentriert, so benötigt man in der reduzierten Basis eine große Anzahl an plastischen Ansatzmoden. Da jede plastische Mode mit jeweils zwei Rechenunbekannten korrespondiert, steigt die Anzahl der Unbekannten und damit der Rechenaufwand überproportional an.

Das gleiche gilt für Systeme, bei denen nicht nur an einzelnen Stellen eine Plastifizierung auftritt, sondern die eine größere Anzahl an Plastifizierungsstellen aufweisen. Überdies ist es dann auch schwer, die plastischen Moden der reduzierten Basis korrekt zu wählen, da häufig nur eine Mode pro Plastifizierungsstelle nicht ausreicht.

7.5 Abschließende Bewertung des neu entwickelten Berechnungsverfahrens

Somit stellt die neu entwickelte Berechnungsmethode einer statistischen Linearisierung in reduzierter Basis unter Verwendung eines Satzes von Ansatzfunktionen aus elastischen und plastischen Ansatzmoden eine zuverlässige und leistungsstarke Alternative sowohl zu herkömmlichen Linearisierungstechniken als auch Methoden anderer Berechnungsfamilien dar. Die Ergebnisse der in dieser Arbeit vorgestellten Methode sind in ihrer Aussagekraft mit der Methode der klassischen statistischen Linearisierung und direkten Simulationsmethoden vergleichbar, während der Rechenaufwand insbesondere gegenüber der klassischen statistischen Linearisierung signifikant reduziert werden konnte.

Anhang A

Einschränkungen der Theorie der Statistischen Linearisierung

Detaillierte Betrachtung der Berechnung der Linearisierungsparameter bei der Statistischer Linearisierung

Bei der Beschreibung des Materialverhaltens nach Suzuki & Minai ist es sinnvoll, eine Linearisierung nur in den Variablen \dot{q} und z vorzunehmen, da nur diese in der nichtlinearen Beziehung $\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z)$ vorkommen. Daraus ergibt sich die Berechnungsvorschrift der Linearisierungsparameter der statistischen Linearisierung zu

$$\begin{aligned}K_e &= E\left\{\frac{\partial\phi(\dot{q}, z)}{\partial z}\right\} \\C_e &= E\left\{\frac{\partial\phi(\dot{q}, z)}{\partial\dot{q}}\right\} \\M_e &= 0\end{aligned}$$

Dies beruht auf der Minimierung des Erwartungswertes des Fehlerquadrats ϵ , entstanden aus der Linearisierung des nichtlinearen Terms $\phi(\dot{q}, z)$:

$$\epsilon = \phi - C_e\dot{q} - K_eez$$

Der Erwartungswert ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}E\{\epsilon^2\} &= E\{\phi^2\} + E\{C_e^2\dot{q}^2\} + E\{K_e^2z^2\} - 2E\{\phi C_e\dot{q}\} - 2E\{\phi K_ez\} + 2E\{C_eK_e\dot{q}z\} = \\ &= E\{\phi^2\} + C_e^2\sigma_{\dot{q}}^2 + K_e^2\sigma_z^2 - 2C_eE\{\dot{q}\phi\} - 2K_eE\{z\phi\} + 2C_eK_eE\{\dot{q}z\}\end{aligned}$$

Die Bestimmung des Minimums erfolgt nach:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E\{\epsilon^2\}}{\partial C_e} &= 2C_e\sigma_q^2 - 2E\{\dot{q}\phi\} + 2K_eE\{\dot{q}z\} = 0 \\ \frac{\partial E\{\epsilon^2\}}{\partial K_e} &= 2K_e\sigma_z^2 - 2E\{z\phi\} + 2C_eE\{\dot{q}z\} = 0\end{aligned}$$

Nach Lösung des Gleichungssystems ergeben sich die Parameter C_e und K_e zu:

$$\begin{aligned}C_e &= \frac{\sigma_z^2 E\{\dot{q}\phi\} - E\{\dot{q}z\}E\{z\phi\}}{\sigma_q^2\sigma_z^2 - E\{\dot{q}z\}^2} \\ K_e &= \frac{\sigma_q^2 E\{z\phi\} - E\{\dot{q}z\}E\{\dot{q}\phi\}}{\sigma_q^2\sigma_z^2 - E\{\dot{q}z\}^2}\end{aligned}$$

Bis zu diesem Punkt ist die Linearisierung nicht abhängig von der Form der Verteilung. Die zur Ermittlung der Erwartungswerte benötigte Wahrscheinlichkeitsdichte der Antwortgrößen \dot{q} und z ist nicht bekannt. Daher wird im Regelfall von einer Gauss-verteilten Antwort ausgegangen. Dies hat den Vorteil, daß die von Kazakov in [35] beschriebene Eigenschaft gilt:

$$\begin{pmatrix} E\{\phi\ddot{q}\} \\ E\{\phi\dot{q}\} \\ E\{\phi q\} \\ E\{\phi z\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\{\ddot{q}\ddot{q}\} & E\{\dot{q}\ddot{q}\} & E\{q\ddot{q}\} & E\{z\ddot{q}\} \\ E\{\dot{q}\dot{q}\} & E\{\dot{q}q\} & E\{q\dot{q}\} & E\{z\dot{q}\} \\ E\{q\dot{q}\} & E\{q\dot{q}\} & E\{qq\} & E\{zq\} \\ E\{z\dot{q}\} & E\{z\dot{q}\} & E\{zq\} & E\{zz\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E\{\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{q}}\} \\ E\{\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}}\} \\ E\{\frac{\partial\phi}{\partial q}\} \\ E\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\} \end{pmatrix}$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned}E\{\dot{q}\phi\} &= E\{\dot{q}\ddot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{q}}\} + E\{\dot{q}\dot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}}\} + E\{q\ddot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial q}\} + E\{zq\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\} \\ E\{z\phi\} &= E\{z\ddot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{q}}\} + E\{z\dot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}}\} + E\{zq\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial q}\} + E\{zz\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\}\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Form der Nichtlinearität ergibt sich mit $\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{q}} = 0$ und $\frac{\partial\phi}{\partial q} = 0$ sowie $E\{\dot{q}\dot{q}\} = \sigma_q^2$ und $E\{zz\} = \sigma_z^2$:

$$\begin{aligned}E\{\dot{q}\phi\} &= \sigma_q^2 E\{\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}}\} + E\{zq\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\} \\ E\{z\phi\} &= E\{z\dot{q}\}E\{\frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}}\} + \sigma_z^2 E\{\frac{\partial\phi}{\partial z}\}\end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\begin{aligned}
C_e &= \frac{\sigma_z^2 \sigma_q^2 E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\} + \sigma_z^2 E\{z \dot{q}\} E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\} - E\{\dot{q} z\}^2 E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\} - \sigma_z^2 E\{\dot{q} z\} E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\}}{\sigma_q^2 \sigma_z^2 - E\{\dot{q} z\}^2} = \\
&= \frac{(\sigma_z^2 \sigma_q^2 - E\{\dot{q} z\}^2) E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\}}{\sigma_q^2 \sigma_z^2 - E\{\dot{q} z\}^2} = \\
&= E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\} \\
K_e &= \frac{\sigma_q^2 E\{\dot{q} z\} E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\} + \sigma_q^2 \sigma_z^2 E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\} - E\{\dot{q} z\} \sigma_q^2 E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}\right\} - E\{\dot{q} z\}^2 E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\}}{\sigma_q^2 \sigma_z^2 - E\{\dot{q} z\}^2} = \\
&= \frac{(\sigma_z^2 \sigma_q^2 - E\{\dot{q} z\}^2) E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\}}{\sigma_q^2 \sigma_z^2 - E\{\dot{q} z\}^2} = \\
&= E\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \dot{z}}\right\}
\end{aligned}$$

Dieses vereinfachte Ergebnis gilt jedoch ausschließlich für Gauss-verteilte Anregungen und Antworten des Systems.

Dieser Zusammenhang läßt sich leicht anhand eines Beispiels verdeutlichen. Gewählt wurde ein Duffing Oszillator, dessen Nichtlinearität nur den Verschiebungsterm berührt:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq + \alpha q^3 = f(t)$$

Somit ist $\phi(q) = q^3$ und unter Verwendung der allgemein gültigen Vorschrift ergibt sich der Fehler zwischen der ursprünglichen DGL und der linearisierten DGL $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq + K_e q$ zu:

$$\epsilon = \phi - K_e q$$

und

$$E\{\epsilon^2\} = E\{\phi^2\} - 2K_e E\{\phi q\} + K_e^2 E\{q^2\} \longrightarrow \text{Minimum}$$

Daraus folgt als Minimierungskriterium:

$$\begin{aligned}
\frac{dE\{\epsilon^2\}}{dK_e} &= -2E\{\phi q\} + 2K_e \sigma_q^2 = 0 \\
\longrightarrow K_e &= \frac{E\{\phi q\}}{E\{q^2\}} = \frac{E\{\alpha q^4\}}{E\{q^2\}}
\end{aligned}$$

Unter der Annahme einer mittelwertsfreien Gaußverteilung von q läßt sich das vierte Moment umrechnen:

$$E\{q^4\} = 3E\{q^2\}E\{q^2\} = 3\sigma_q^2 \sigma_q^2$$

Somit ergibt sich:

$$K_e = \frac{3\alpha\sigma_q^2\sigma_q^2}{\sigma_q^2} = 3\alpha\sigma_q^2$$

Der letzte Schritt ist jedoch nur unter der Annahme einer Gaußverteilung des Prozesses möglich. Bei anderen Verteilungen müssen die exakten Berechnungsvorschriften verwendet werden, die jedoch auf deutlich kompliziertere und zeitaufwendigere Berechnungen führen.

Das Ergebnis für den vereinfachten Fall unter Annahme eines Gaußschen Prozesses hätte man auch direkt erhalten aus der aus der Literatur entnommenen Berechnungsvorschrift

$$K_e = E\left\{\frac{d\Phi}{dq}\right\} = E\{3\alpha q^2\} = 3\alpha\sigma_q^2$$

Anhang B

Auflistung der verwendeten Variablennamen

B.1 Differentialgleichungssystem

B.1.1 Systeme mit nur einem Freiheitsgrad

m	Masse
c	Systemdämpfung
k	Systemsteifigkeit
q, \dot{q}, \ddot{q}	absolute Weggröße, Geschwindigkeitsgröße, Beschleunigung
$q_{rel}, \dot{q}_{rel}, \ddot{q}_{rel}$	relative Weggröße, Geschwindigkeitsgröße, Beschleunigung
z, \dot{z}, \ddot{z}	Kraftgröße, bzw. zeitliche Ableitungen
ϕ	nichtlinearer Anteil der DGL
m_e	Ersatzterm aus Linearisierung in der Masse
c_e	Ersatzterm aus Linearisierung in der Systemdämpfung
k_e	Ersatzterm aus Linearisierung in der Systemsteifigkeit
ϵ	Differenz zwischen linearisiertem und nichtlinearem System

B.1.2 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

\mathbf{M}, M_{ij}	Massenmatrix
\mathbf{C}, C_{ij}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{K}, K_{ij}	Steifigkeitsmatrix
Φ, Φ_i	nichtlinearer Anteil der DGL im Freiheitsgrad i
q, q_i	Verschiebung im Freiheitsgrad i im Scherbalkenmodell
\dot{q}, \dot{q}_i	Geschwindigkeit / Schnelle im Freiheitsgrad i im Scherbalkenmodell
\ddot{q}, \ddot{q}_i	Beschleunigung im Freiheitsgrad i im Scherbalkenmodell
z, z_i	normierte Spannungsgröße im Freiheitsgrad i beim Scherbalkenmodell
Y, z_i	normierte plastische Rückstellmoment im Freiheitsgrad i beim Biegebalkenmodell
\mathbf{M}_e, M_e^{ij}	Ersatzterm aus Linearisierung in der Massenmatrix
\mathbf{C}_e, C_e^{ij}	Ersatzterm aus Linearisierung in der Dämpfungsmatrix
\mathbf{K}_e, K_e^{ij}	Ersatzterm aus Linearisierung in der Steifigkeitsmatrix
\mathbf{x}	Zustandsgröße bei Darstellung im Phasenraum
α	Übertragungsmatrix des Systems
ϵ, ϵ_i	Differenz zwischen linearisiertem und nichtlinearem System
S_{f_1, f_2}	Kreuzleistungsspektrum der Funktionen f_1 und f_2 in spektraler Darstellung

B.1.3 Materialverhalten

q_{Fl}	Weggröße, ab der im Scherbalkenmodell Plastifizierung eintritt
z_{Fl}	Kraftgröße, ab der im Scherbalkenmodell Plastifizierung eintritt
κ_0	Krümmung, ab der im Biegebalkenmodell Plastifizierung eintritt
M_0	Moment, ab der im Biegebalkenmodell Plastifizierung eintritt
γ, n, ν	Parameter des Materialverhaltens nach Bouc & Wen
α	Steuerparameter zwischen plastischer und elastischer Reaktion des Systems

B.2 Stochastische Parameter

$E\{\}$	Erwartungswert
$\sigma_{qq}, \sigma_{q_i q_i}$	charakteristische Werte der Verschiebungsgrößen
$\sigma_{\dot{q}\dot{q}}, \sigma_{\dot{q}_i \dot{q}_i}$	charakteristische Werte der Geschwindigkeitsgrößen
$\sigma_{\ddot{q}\ddot{q}}, \sigma_{\ddot{q}_i \ddot{q}_i}$	charakteristische Werte der Beschleunigungsgrößen
$\sigma_{zz}, \sigma_{z_i z_i}$	charakteristische Werte der Spannungsgrößen
$\sigma_{YY}, \sigma_{Y_i Y_i}$	charakteristische Werte der plastischen Rückstellmomente

B.3 Spezielle Funktionen

$U()$	Einheits-Sprungfunktion
$exp()$	Exponentialfunktion
$erf(x) =$	Fehlerfunktion
$Re()$	Realteil
$Im()$	Imaginärteil

Literaturverzeichnis

- [1] Beaman, J.J., Hedrick J.K.: *Improved Statistical Linearization for Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems. Part I: An Extended Statistical Linearization*
Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 103, pp. 14-21
- [2] Beaman, J.J., Hedrick J.K.: *Improved Statistical Linearization for Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems. Part II: Application to Control System Design*
Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 103, pp. 22-27
- [3] Bernard P.: *Stochastic Linearization and Large Deviations*
International Conference on Uncertain Structures: analytical, numerical and experimental methods, Miami, Florida, March 3-10, 1996
- [4] Bouc R.: *Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis*
Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation, Prague, 1967, p. 315
- [5] Bouc R.: *Modèle mathématique d'hystérésis*
Acustica, 1971, No. 24, pp. 16-25
- [6] Bover, D.C.C.: *A Computational Study of Several Problems in Stochastic Modelling*
Dissertation an der Australian National University, 1978
- [7] Bover, D.C.C.: *Moment Equation Methods for Nonlinear Stochastic Systems*
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 65, 1978, pp. 306-320
- [8] Brokate M., Sprekels J.: *Hysteresis and Phase Transitions*
in: Applied Mathematical Sciences, Vol 121, Springer-Verlag, 1996
- [9] Bucher, C., Lin Y.K.: *Stochastic stability of bridges considering coupled modes I*
Journal of Engineering Mechanics, Vol 114(12), pp. 2055-2071, 1988

-
- [10] Bucher, C., Lin Y.K.: *Stochastic stability of bridges considering coupled modes II*
Journal of Engineering Mechanics, Vol 115(2), pp. 384-400, 1989
- [11] Caughey T.K.: *Equivalent Linearization Techniques*
Journal of the Acoustic Society of America, No. 35, 1963, pp. 1706-1711
- [12] Chang C.C., Yang H.-T.Y.: *Random Vibration of flexible uncertain Beam Element*
Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117 No. 10, 1991, pp. 2329-2350
- [13] Chen C.T., Yang T.Y.: *Flexible Beam and Frame Elements under Nonwhite and Nonzero Mean Loads*
Journal of Engineering Mechanics, Vol. 8, 1993, pp. 115-126
- [14] Clough R., Penzien J.: *Dynamics of Structures*
McGraw Hill, 1993
- [15] Crandall, S.H., Mark, W.D.: *Random Vibrations in Mechanical Systems*
Academic Press, New York, 1963
- [16] Donley M.G., Spanos P.D.: *Dynamic Analysis of Non-linear Structures by the Method of Statistical Quadraticization*
Lecture Notes in Engineering, Springer, Berlin, 1990
- [17] Elishakoff I., Cai G.Q.: *Approximate Solution for Non-linear Random Vibration Problems by Partial Stochastic Linearization*
Probabilistic Engineering Mechanics 8, 1993, pp. 233-237
- [18] Elishakoff I., Zhang X.: *An Appraisal of different Stochastic Linearization Techniques*
Journal of Sound and Vibration, Vol. 153 No. 2, 1992, pp. 370-375
- [19] Elishakoff I., Colombi P.: *Successful Combination of the Stochastic Linearization and Monte Carlo Methods*
Journal of Sound and Vibration, Vol. 160 No, 3, 1993, pp. 554-558
- [20] Elishakoff, I.: *Probabilistic methods in the theory of structures*
Wiley, New York, 1983
- [21] Elishakoff, I., Lyon R.H.: *Random Vibration - Status and Recent Developments*
Elsevier, Amsterdam, 1986
- [22] Fan F.-G., Ahmadi G.: *On Loss of Accuracy and Non-Uniqueness of Solutions generated by Equivalent Linearization and Cumulant-neglect Methodes*
Journal of Sound and Vibration 137 (3), 1990, pp. 385-401

- [23] Faravelli L.: *Response Surface Approach for Reliability Analysis*
Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 112 No. 12, 1989, pp. 2763-2782
- [24] Grigoriu M.: *On the spectral representation method in simulation*
Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, No. 8, pp. 75-90
- [25] Grundmann H., Hartmann C., Waubke H.: *Buildings Subjected to Stochastic Loadings, Preliminary Assessment by Statistical Linearization Combined with an Evolutionary Algorithm*
International Conference on Uncertain Structures: analytical, numerical and experimental methods, Miami, Florida, March 3-10, 1996
- [26] Grundmann H., Waubke H.: *Nonlinear Stochastic Dynamics of Systems with Random Properties - a Spectral Approach combined with Statistical Linearization*
EUROMECH Colloquium Innsbruck, March 13-17, 1995
- [27] Han W., Reddy B. D.: *Plasticity - Mathematical Theory and Numerical Analysis*
Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [28] Hagedorn P.: *Nichtlineare Schwingungen*
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978
- [29] Hasselmann, T.K., Hart, G.C.: *Modal Analysis of Random Structural Systems*
Journal of ASCE, EM3(4), 1972
- [30] Heinrich W., Hennig K.: *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*
Vieweg Verlag, Braunschweig, 1978
- [31] Höffer, R., Niemann, J.-J., Lou, J.X.: *Modeling of Artificial Stochastic Wind Loads and Interaction Forces on Oscillating Line-like Structures*
ICOSSAR 93, Vol. 3, pp. 1631.1638, Innsbruck, 1993
- [32] Hurty, W.C., Rubinstein, M.F.: *Dynamics of Structures*
Prentice-Hall, New Jersey, 1964
- [33] Iwan W.D., Whirley R.G.: *Nonstationary Equivalent Linearization of Nonlinear Continuous Systems*
Probabilistic Engineering Mechanics 8, 1993, pp. 273-280
- [34] Iwan W.D., Huang C.T.: *On the Dynamic Response of Nonlinear Systems with Parameter Uncertainties*
EUROMECH Colloquium Innsbruck, March 13-17, 1995
- [35] Kazakov I.E.: *Generalization of the Method of Statistical Linearization to Multidimensional Systems*
Journal of Automation Remote Control, 1965, No. 26, pp. 1201-1206

- [36] Krämer E.: *Maschinendynamik*
Springer-Verlag, Berlin, 1984
- [37] Litz L.: *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*
Dissertation, Hochschulverlag, Stuttgart, 1979
- [38] Lin, Y.K.: *Application of Markov Process theory to nonlinear random vibration problems*
in: Stochastic Methods in Structural Dynamics, Schuëller, G.I., Shinozuka, M. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht / Boston / Lancaster, 1987, pp. 134-153
- [39] Lin Y.K., Cai G.Q.: *Probabilistic Structural Dynamis*
Advanced Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1995
- [40] Lin, Y.K.: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*
McGraw-Hill, New York, 1967
- [41] Manohar, C.S., Iyengar, R. N.: *Entrainment in van der Pols Oscillator in the Presence of Noise*
Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 26, pp. 679-686
- [42] Maurer D.: *Untersuchung zur Simulation aktiver dynamischer Strukturen*
TH Darmstadt, Fachgebiet Leichtbau, Bericht 3/91
- [43] Müller, K.H.: *Seismisch erregte turmartige Bauwerke mit zufälligen Systemeigenschaften*
Bauplanung - Bautechnik, Vol. 5, pp. 196-198, 1990
- [44] Noori, M., Saffar, M., Ghantous, G.: *Equivalent linearization of a Newly Introduced General Hysteretic Model*
Journal of Computational Stochastic Mechanics, pp. 315-326
- [45] Newland, D.E.: *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*
Longman, Harlow, 1994
- [46] Nigam, N.C.: *Introduction to Random Vibrations*
MIT Press, Cambridge/Massachusetts, 1983
- [47] Noori, M.N., Saffar, A.: *A Comparison between non-Gaussian Closure and Statistical Linearization Techniques for Random Vibration of a Non-linear Oscillator*
Computers and Structures, Vol. 26 No. 6, 1987, pp. 925-931
- [48] Papoulis, A.: *Probability, random variables and stochastic processes*
McGraw-Hill, New York, 1991

- [49] Pradlwarter H.J.: *A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability*
Proceedings of ASCE Specialty Conference, Dnever, Dolorado, July 8-10,1992, ASCE, New York, 1992, pp. 69-72
- [50] Pradlwarter H.J., Li W.: *On the Computation of the Stochastic Response of Highly nonlinear Large MDOF-Systems Modeled by finite Elements*
Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 6 No. 2, 1991, pp. 109-116
- [51] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Statistical Energy Analysis in View of Stochastic Modal Analysis*
IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, Kluwer Publish, 1997
- [52] Pradlwarter H.J., Schuëller G.I.: *On Advanced MCS Procedures in Stochastic Structural Dynamics*
Journal of Non-Linear Mechanics, 1996
- [53] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Accuracy and Limitations fo the Method of Equivalent Linearization for Hysteretic Multi-Storey Structures*
IUTAM Symposium Innsbruck, 1987, pp. 3-21
- [54] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I., Chen, X.-W.: *Consideration of non-gaussian Response Properties by Use of Stochastic Equivalent Linearization*
Third Internat. Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, 1988, pp. 737-752
- [55] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I., Chen, X.-W.: *Stochastic Response of a Coulomb Slip System Subjected to Earthquake Excitation using Equivalent Linearization*
Ninth World Conference on Eqrthquake Engineering, 1988, pp. 247-252
- [56] Pradlwarter, H.J.: *Consideration of non-Gaussian Hysteretic Response Properties of MDOF-Systems by Use of Equivalent linearization*
ICOSSAR, 1989, pp. 1333-1340
- [57] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Equivalent Linearization - a suitable Tool for Analyzing MDOF-Systems*
Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 8, 1992, pp. 115-126
- [58] Roberts J.B., Spanos P.D.: *Random Vibration and Statistical Linearization*
John Wiley and Sons, Chichester New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990
- [59] Robson, J.D.: *An introduction to random vibration*
Edingburgh University Press, Edingburgh, 1964

- [60] vom Scheidt, J., Fellenberg, B., Wöhrl U.: *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*
B.G. Teubner, Stuttgart, 1994
- [61] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J.: *Advances in stochastic structural dynamics under the perspective of reliability estimation*
EURODYN 99, Eds.: L. Frba and J. Náprstek, 1999, Balkema, Rotterdam, S. 267-272
- [62] Schuëller, G.I., Bucher, C.G., Pradlwarter, H.J.: *Computational Methods in Stochastic Structural Dynamics*
Eurodyn 90, Vol. 2, pp. 599-606, 1990
- [63] Schuëller, G.I., Shinozuka, M.: *Stochastic Methods in Structural Dynamics*
Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987
- [64] Shinozuka M., Jan C.M.: *Digital simulation of random process and its applications*
Journal of Sound and Vibration, Vol. 25 No. 1, 1972, pp. 111-128
- [65] Shinozuka M.: *Simulation*
in: *Stochastic Methods in Structural Dynamics*, Eds.: Schuëller G. I. , Shinozuka M.
Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987
- [66] Shinozuka M.: *Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes*
Journal of the Acoustical Society of America, Vol 49, Number 1 (II), 1971, pp. 357-368
- [67] Sobczyk, K.: *Stochastic Differential Equations*
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991
- [68] Soong T.T., Grigoriu M.: *Random Vibrations of Mechanical and Structural Systems*
New Jersey, 1993
- [69] Spencer, B.F., Elishakoff, I.: *Reliability of Unvertain Linear and Nonlinear Systems*
Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114(1), pp. 135-148, 1988
- [70] Su, T.J., Craig, R.R.: *Model Reduction and Control of Flexible Stuctures Using Krylov Subspaces*
30th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Mobile, pp. 691-700

- [71] Suzuki Y., Minai R.: *Seismic Reliability Analysis of Hysteretic Structures Based on Stochastic Differential Equations*
Proceedings of 4th ICOSSAR, Kobe, Japan, 1985, II-177-II-186
- [72] Thompson J. M. T., Stewart H. B.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*
John Wiley and Sons, Chichester, 1987
- [73] Vasta M., Schuëller, G.I.: *Phase Space Reduction of Non linear Dynamical Systems by Karhunen-Loève Expansion* preprint to 12th Engineering Mechanics Conference, 1998
- [74] Wang C., Zhang, X.: *An Improved Equivalent Linearization Technique in Non-linear Random Vibrations*
preprint for Internat. Conference on nonlinear Mechanics, 1985
- [75] Wen, Y.K.: *Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation*
Transactions of the ASME, Vol. 47, 1980, pp. 150-154
- [76] Wen Y.K.: *Approximate Method for Nonlinear Random Vibration*
Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1975, No. 101, pp. 389-401
- [77] Wen, Y.K.: *Stochastic Response Analysis of Hysteretic Structures*
preprint, Quelle unbekannt
- [78] Yousuff, A., Wagie, D.A., Skelton, R.E.: *Linear System approximation via Covariance Equivalent Realization*
J. Math. Anal. and Appl., Vol 106/1, pp. 91-115
- [79] Zhang X.T., Elishakoff I., Zhang R.Ch.: *A new stochastic linearization technique based on minimum mean Square deviation of potential energies*
in: Stochastic Structural Dynamics - New Theoretical Developments, Berlin, Springer-Verlag pp. 327-338
- [80] Zhang, J.H.: *The Identification of Non-linear Systems with Statistically Equivalent Polynomial Systems*
aus: Safety Evaluation Based on Identification Approaches Related to Time-Variant and Nonlinear Structures
Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1993
- [81] Zienkiewicz, O. C. , Taylor, R. L.: *The Finite Element Method - Teil I/II*
McGraw-Hill, London, 1989
- [82] Zurmühl R., Falk S.: *Matrizen und ihre Anwendung - Teil I/II*
Springer-Verlag, Berlin, 1984

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispiel einer bestimmten Linearisierungsparametern des vorangegangenen Schrittes zugeordneten C_e - K_e -"Landschaft" für ein SDOF-System	16
4.1	Bilineares Materialverhalten nach Suzuki/Minai; Aufspaltung in linearen Anteil sowie hysteretischen Anteil	24
4.2	stark hysteretisches Kraft-Verformungsverhalten nach Suzuki / Minai	25
4.3	Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß γ	27
4.4	Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß ν	27
4.5	Parameterstudie Materialverhalten nach Bouc / Wen; Einfluß A	27
4.6	FEM-Element, System	31
4.7	FEM-Ansatzfunktionen für w_L, ϕ_L, w_R, ϕ_R (obere Reihe) sowie Y_L und Y_R (untere Reihe)	32
4.8	relativer Fehler in Prozent bei der Bestimmung der Linearisierungsparameter unter Verwendung zusätzlicher Freiheitsgrade	35
5.1	zeitlicher Verlauf der Verschiebungen des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems	42
5.2	zeitlicher Verlauf der Kraftgrößen des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems	43
5.3	zeitlicher Verlauf der Rückstellkraft (hysteretischer und linearer Anteil) des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems	43
5.4	Kraft-Verschiebungs-Diagramm des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems	43
5.5	Kraft-Verschiebungs-Diagramm des nichtlinearen Systems und des linearisierten Ersatzsystems	44
5.6	Beispiel; zeitlicher Verlauf der Anregung	46

5.7	Beispiel; Fehler bei nur unvollständiger Wahl einer Basis aus Eigenmoden	47
5.8	Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 3 Eigenmoden zur Antwortberechnung	48
5.9	Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 4 Eigenmoden zur Antwortberechnung	48
5.10	Beispiel; Zeitlicher Verlauf der horizontalen Verschiebung des obersten Stockwerks unter Berücksichtigung von nur 5 Eigenmoden zur Antwortberechnung	48
5.11	elastische Ansatzfunktionen	53
5.12	plastische Ansatzfunktionen	54
5.13	Spektrum der Relativverschiebung des untersten Stockwerks unter voll korrelierter Last	55
5.14	Spektrum der Verschiebung des 10. Stockwerks unter voll korrelierter Last	55
5.15	Spektrum der Systemantwort; Relativverschiebung des untersten Stockwerks unter Verwendung verschiedener reduzierter Basen	58
5.16	Spektrum der Systemantwort; Relativverschiebung des 10. Stockwerks unter Verwendung verschiedener reduzierter Basen	58
5.17	Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks; nur niederfrequenter Bereich dargestellt	62
5.18	Spektrum der Spannungsgrößen des untersten Stockwerks; nur niederfrequenter Bereich dargestellt	62
6.1	elastische Ansatzfunktionen für das Biegebalkenmodell	74
6.2	plastische Ansatzfunktionen für das Biegebalkenmodell	74
6.3	Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks unter voll korrelierter Last	76
6.4	Spektrum der Verschiebung des 10. Stockwerks unter voll korrelierter Last	76
6.5	Spektrum der Verschiebung des untersten Stockwerks unter Blocklast	79
6.6	Spektrum der Verschiebung des 5. Stockwerks unter Blocklast	79
6.7	MDOF-System "Fußgängersteg"; System und Last	82

6.8	MDOF-System "Fußgängersteg"; Freiheitsgrade	82
6.9	MDOF-System "Fußgängersteg"; maximale Anzahl der elastische Moden, die zur Bildung der reduzierten Basis verwendet wurden	83
6.10	MDOF-System "Fußgängersteg"; nicht verwendete elastische Moden	84
6.11	MDOF-System "Fußgängersteg"; maximale Anzahl der zur Bildung einer reduzierten Pasis verwendeten plastischen Moden	85
6.12	Spektrum der horizontalen Auslenkung des Knotens 7 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis	86
6.13	Spektrum der Verdrehung im Knoten 10 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis	87
6.14	Spektrum der vertikalen Verschiebung im Knoten 8 in vollständiger und reduzierter (5 elastische, 5 plastische Moden) Basis	87
6.15	Spektrum der Verdrehung im Knoten 4; Vergleich von drei unterschiedlich stark reduzierten und der vollständigen Basis	89
6.16	Spektrum der Verschiebung im Knoten 9; Vergleich statistische Linearisierung in reduzierter Basis mit Monte Carlo Simulationen	92
6.17	Spektrum der Verdrehung im Knoten 8; Vergleich Simulation mit statistischer Linearisierung in zwei unterschiedlich stark reduzierten Basen	92

**Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
Technische Universität München**

- 1/90** Dialer C.: Bruch- und Verformungsverhalten von schubbeanspruchten Mauerwerkscheiben, zweiachsige Versuche an verkleinertem Modellmauerwerk
- 1/91** Ostermeier B.: Ein Beitrag zur Erfassung des Vortriebsgeschehens beim Bau von Tunneln im Lockergestein mit Spritzbetonsicherung - Ebene und räumliche Berechnungen
- 2/91** Gebhard P.O.K.: Nichtlineares Materialverhalten bei der räumlichen Berechnung eines Tunnelvortriebs im Lockergestein
- 3/91** Doster A.: Expertensystemunterstützte Benutzungsoberfläche für Tragwerksberechnungen auf objektorientierter Basis
- 4/91** Heins E.: Eine allgemeine nichtlineare Stabtheorie mit einem dreidimensionalen Rißmodell für Stahlbeton
- 5/91** Schneider M.: Ein Beitrag zu fußgängerinduzierten Brückenschwingungen
- 6/91** Kneidl R.: Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalkensystemen
- 7/91** Goebel W.: Reduktion numerischer Modelle in der nichtlinearen Strukturdynamik mit globalen Ansätzen
- 1/92** Ebert K. D.: Dynamische Untersuchungsmethoden zur Erkennung von Rissen in Stahlbetonbauteilen
- 2/92** Hertle R.: Zur dynamischen Analyse von schubweich und diskret gekoppelten Mehrschichtenträgern
- 3/92** Graf U.: Bruchmechanische Kennwerte und Verfahren für die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit geschweißter Aluminiumbauteile
- 4/92** Hergenröder M.: Zur statischen Instandhaltungsplanung für bestehende Betonbauwerke bei Karbonatisierung des Betons und möglicher Korrosion der Bewehrung
- 5/92** Holzer S. M.: Das symmetrische Randelementverfahren: Numerische Realisierung und Kopplung mit der Finite-Elemente-Methode zur elastoplastischen Strukturanalyse
- 6/92** Springer O.: Zur Bedeutung der Querschnittsverformung für das Tragverhalten und die Konstruktion von stählernen Straßenbrücken
- 1/93** Neuner F.: Zur Berechnung prismatoidisch gefalteter Flächentragwerke unter besonderer Berücksichtigung elastischer Fugen
- 2/93** Müller G.: Ein Verfahren zur Kopplung der Randelementmethode mit analytischen Lösungsansätzen

**Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
Technische Universität München**

- 3/93** Mainz J.: Modellierung des Verbundtragverhaltens von Betonrippenstahl
- 4/93** Bulicek H.: Zur Berechnung des ebenen Spannungs- und des Verzerrungszustandes von schubbewehrten Stegen profilierter Stahlbeton- und Spannbetonträger im Grenzzustand der Schubtragfähigkeit
- 5/93** Bulenda T.: Behandlung nichtlinearer Lösungspfade in der Statik mit Hybriden Krylov-Newton-Verfahren
- 1/95** Eibl S. J.: Schockwellenbeanspruchung von Stahlbetonwänden durch Kontakt-Detonationen
- 2/95** Roos W.: Zur Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons in scheibenförmigen Bauteilen bei gleichzeitig wirkender Querkzugbeanspruchung
- 3/95** Bierwirth H.: Dreiachsige Druckversuche an Mörtelproben aus Lagerfugen von Mauerwerk
- 4/95** Vismann U.: Zuverlässigkeitstheoretische Verifikation von Bemessungskriterien im Stahlbetonbau
- 5/95** Temme Ch.: Numerische Behandlung der Interaktionseffekte von erdbebenerregten, unverankerten Flüssigkeitsbehältern
- 6/95** Mackert M.: Objektorientierte und wissensbasierte Modellierung für die Statik am Beispiel Tunnelbau
- 7/95** Plica S.: Zum Einfluß der Bauteilgröße auf die Zuverlässigkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund
- 1/96** Garske E.: Zur Innenverankerung von Spanngliedern unter Berücksichtigung nichtlinearer Materialgesetze für Beton und Betonstahl
- 2/96** Waubke H.: Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome
- 3/96** Nechvatal D.: Normalbeton unter hohen Dauerlasten bei vermindertem Feuchte-austausch
- 4/96** Borkner-Delcarlo O.: Eine Halbfacetten-Datenstruktur für die Modellierung von „non-manifold“-Körpern
- 5/96** Logiadis I.: Die Anwendung vertikaler Spannglieder ohne Verbund in der Erdbeben-isolierung von Bauwerken
- 6/96** Bouyssy V.: Zur probabilistischen Lebensdauervoraussage von Meeresplattformen

**Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
Technische Universität München**

- 7/96** Hartmann Chr.: "Simulierte Evolution": Ein Lösungsansatz für Formfindungsprobleme?
- 8/96** Breitsamter N.: Ersatzmodelle zur Bestimmung der Schwingungsantwort von Gebäuden unter Anregung durch Bodenerschütterungen
- 9/96** Schäpertöns B.: Über die Wellenausbreitung im Baugrund und deren Einfluß auf das Tragverhalten von flüssigkeitsgefüllten Behältern
- 10/96** Zirwas G.: Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Bodenwechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen
- 1/97** Böckmann A.: Zuverlässigkeitsanalyse von ebenen Tragwerken aus Stahlbeton in Wechselwirkung mit dem Baugrund
- 2/97** Lieb M.: Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung
- 3/97** Kowalczyk W.: Ein interaktiver Modellierer für evolutionäre Produktmodelle
- 4/97** Klöker T.: Beitrag zur nichtlinearen Berechnung von Brücken für den Lastfall Erdbeben
- 5/97** Duddeck F.: Funktional-Analysis der Kontinuumsmechanik – Fouriertransformation bezüglich Raum und Zeit der Energiemethoden
- 6/97** Deml M.: Ein Finite-Element-Konzept zur Traglastanalyse imperfektionssensitiver Schalenstrukturen
- 7/97** Ndogmo J.R.L.: Zur Sicherheit und zur wirtschaftlichen Verstärkung ausgebeulter Stegbleche von Vollwandträgerbrücken unter Berücksichtigung der Ermüdung
- 1/98** Sindel R.: Zur Untersuchung von Systemen von Ermüdungsrissen bei der Inspektionsplanung
- 2/98** Euringer Th.: Objektorientierte Formulierung und Programmierung numerischer Starrkörperverfahren in der Geotechnik
- 3/98** Schieder M.: Beitrag zur elasto-plastischen Bemessung orthotroper Platten
- 4/98** Ondra R.: Statistische Auswertung bruchmechanischer Kenndaten und Formulierung von Bemessungslinien geschweißter Bauteile aus Aluminiumlegierungen
- 1/99** Waubke H.: Moment-Closure Technik zur Abschätzung der elasto-plastischen Reaktion von Stockwerksrahmen auf zufällige Belastungen aus Windereignissen
- 2/99** Johannis A.: Zur Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit nichtlinear bemessener Stahlbetontragwerke

**Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
Technische Universität München**

- 3/99** Chen W.: Restsicherheit und Restlebensdauer älterer Stahlbrücken auf der Basis bruchmechanischer Verfahren mittels Finite Element Methoden
- 4/99** Schätz M.: Experimentelle Untersuchungen zur grundlegenden Neumodellierung des Biege-, Querkraft- und Verformungsverhaltens von Ziegelementdecken
- 5/99** Siebert G.: Zum Einsatz von Glas als tragendes Bauteil im konstruktiven Ingenieurbau
- 6/99** Pravida J.: Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben
- 7/99** Müller A.: Hybride Konstruktionen mit trapezförmig gefalteten Stahlstegen für Straßenbrücken
- 8/99** Bagayoko L.: Betriebsfestigkeit von Eisenbahnbrücken in Stahlbeton- und Spannbetonbauweise
- 1/2000** Kuschel N.: Neue Ansätze für die zuverlässigkeitsorientierte Strukturoptimierung unter Beachtung zeitvarianter Aspekte
- 2/2000** Ruile A.-V.: Zur Interaktion von Boden und Mauerwerk
- 3/2000** Hartmann H.: Die Berücksichtigung elastisch-plastischer Verformungseigenschaften mechanischer Verbindungsmittel bei Verbundkonstruktionen im Ingenieurholzbau
- 4/2000** Eierle B.: Berechnungsmodelle für rißgefährdete Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang
- 5/2000** Rudolph M.: Netzadaption bei elasto-plastischen Finite-Elemente-Berechnungen in der Geomechanik
- 6/2000** Rapolder M.: Parallele Finite-Element-Simulation der Bauwerk-Boden-Interaktion mit adaptiven Zeitintegrationsverfahren
- 7/2000** Albertin U.: Bemessungskonzepte für Stabilitätsfälle imperfektionssensitiver Schalenstrukturen
- 1/2001** Seiler Chr.: Näherungsmethoden zur Stabilitätsuntersuchung von erdbebenerregten verankerten Flüssigkeitsbehältern
- 2/2001** Ibach D.: Zum Kriechen und Schwinden von Verbundbrücken auf Grundlage der Eurocodes
- 3/2001** Steinl G.: Ein adaptives Finite-Element-Verfahren zur Behandlung von Lokalisierungseffekten im Rahmen der Cosserat-Theorie

**Berichte aus dem
Konstruktiven Ingenieurbau
Technische Universität München**

- 4/2001** Findeiß R.: Ein orts- und zeitadaptives Finite-Element-Verfahren zur Traglastanalyse wassergesättigter Böden
- 5/2001** Festschrift Albrecht
- 6/2001** Fritsche T.: Schnittgrößenverteilung nachträglich ergänzter Betonbauteile im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit unter Berücksichtigung der Rissbildung
- 7/2001** Gehrman J.: Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Konstruktionen mit zufälligen Systemeigenschaften
- 8/2001** Blaschko M.: Zum Tragverhalten von Betonbauteilen mit in Schlitze eingeklebten CFK-Lamellen
- 9/2001** Dinkel J.: Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen Berechnung des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund für das Oberbausystem Feste Fahrbahn
- 10/2001** Mohr B.: Zur Interaktion der Einflüsse aus Dauerstands- und Ermüdungsbeanspruchung im Ingenieurholzbau
- 11/2001** Niedermeier R.: Zugkraftdeckung bei klebarmierten Bauteilen