

Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München

Ein differentiell - algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug - Fahrweg Interaktion

Stefan Helmut Lutzenberger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger
3. Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. M. Arnold

Die Dissertation wurde am 15. Mai 2002 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 5. Juli 2002
angenommen.

Ein differentiell - algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug - Fahrweg Interaktion

Zusammenfassung

Zur Berechnung der dynamischen Fahrzeug - Fahrweg Wechselwirkung wird ein vielseitig einsetzbares Simulationsmodell entwickelt. Die Kopplung des Fahrzeugmodells mit dem Finite Element Modell des Fahrwegs erfolgt über zeitvariante Lagrangesche Nebenbedingungen und liefert eine differentiell - algebraische Formulierung. Die maßgebenden Effekte differentiell - algebraischer Systeme werden analysiert und es werden Stabilitätskriterien zur Zeitintegration mittels Verfahren 2. Ordnung entwickelt. Stabile Lösungsverfahren zu deren Integration werden angegeben. Ein praktisches Anwendungsbeispiel zeigt die Einsatzmöglichkeiten des Simulationsmodells.

A differential - algebraic model for vehicle – road way interaction

Summary

A multifunctional applicable model is developed for the dynamic analysis of vehicle – road way systems. The vehicle model and the Finite Element model of the road way are coupled by time-dependent constraint equations. This provides a differential – algebraic system. The major effects of differential – algebraic systems are analysed and stability conditions for the time integration by second order methods are developed. Stable algorithms for the time integration are stated. A practical example shows the applications of the model.

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter und wissenschaftlicher Assistent in den Jahren 1996-2002.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für die fachliche Unterstützung und den gewährten Freiraum beim Anfertigen der Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger und Herrn PD Dr. rer. nat. habil. M. Arnold danke ich für die Übernahme des zweiten bzw. dritten Referats und für die wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Meinen Kollegen und ehemaligen Kollegen gilt der Dank für die gute Zusammenarbeit und ihre Diskussionsbereitschaft. Ganz besonders danke ich meiner Kollegin Dr.-Ing. Jutta Gehrmann, auch für die mühevollen Arbeit des Korrekturlesens. Bei Herrn Dr.-Ing. W. Baumgärtner bedanke ich mich für die Grundidee der vorliegenden Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern für die Förderung meiner Ausbildung und ihre ständige Unterstützung.

München im Juli 2002

Stefan Lutzenberger

Inhaltsverzeichnis

BEZEICHNUNGEN	1
1 EINLEITUNG	3
1.1 MOTIVATION	3
1.2 ZIELSETZUNG UND AUFGABENSTELLUNG	5
1.3 LITERATUR.....	6
1.4 VORGEHEN.....	12
2 INTERAKTION FAHRZEUG-FAHRWEG	16
2.1 VORGEHENSWEISE	16
2.2 KRAFTWIRKUNGEN AM FAHRZEUG	19
2.3 FORMULIERUNG DES FAHRZEUGS ALS „CONSTRAINED SYSTEM“	20
2.3.1 Herleitung der Bewegungsgleichung	20
2.3.2 Anwendungsbeispiel.....	22
2.4 DIFFERENTIALGLEICHUNG DER BRÜCKE	24
2.5 EINTRAG DER KOPPELKÄRFTEN IN DEN FAHRWEG	24
2.5.1 Lokale Einflußlinien für Randschnittgrößen.....	25
2.5.2 Globale Einflußlinien für Knotenlastwirkungen	27
2.5.3 Transformation in den Zeitbereich.....	29
2.5.4 Superposition der Radlasten.....	30
2.5.5 Formulierung der Brückenbelastung	31
2.6 FAHRBAHNRAUIGKEIT	32
2.7 VERSCHIEBUNGSKOMPATIBILITÄT ZWISCHEN FAHRZEUG UND FAHRWEG.....	32
2.7.1 Allgemeine Formulierung.....	32
2.7.2 Die Durchsenkung infolge Knotenverschiebung $z_h(t,x)$	33
2.7.3 Die Verformung des Elements aus seiner direkten Belastung $z_d(t)$	35
2.7.4 Die Durchsenkung aus Trägheitskräften des Elements $z_d(t)$	37
2.8 ZUSAMMENSTELLUNG DER SYSTEMMATRIZEN	38
2.9 ABSCHLIEBENDE BEMERKUNGEN.....	40
3 ALGEBRAISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	42
3.1 ALLGEMEINES	42
3.2 BEISPIELE FÜR PROBLEME BEI DER ZEITINTEGRATION VON DAE'S	43
3.3 SYMBOLISCHE DARSTELLUNG MECHANISCHER DAE'S.....	46
3.4 FORMEN VON DAE'S	47
3.4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen.....	48
3.4.2 Algebraische Differentialgleichungen.....	48
3.5 DIFFERENTIATIONSINDEX.....	49
3.6 INDEXREDUKTION UND ABDRIFTEN DER LÖSUNG.....	50
3.6.1 Indexreduktion und zugrundeliegende Differentialgleichung.....	50
3.6.2 Abdriften der Lösung („drift-off Effekt“).....	51
3.7 LÖSBARKEIT DER DAE	52

3.7.1	Regularität.....	52
3.7.2	Lösbarkeit des Anfangswertproblems	52
3.7.3	Konsistenz der Anfangswerte der DAE	53
3.7.4	Lösbarkeit der DAE	55
3.8	STÖRUNGSINDEX	55
3.9	STEIFHEIT.....	57
3.10	ZEITINTEGRATIONSVERFAHREN FÜR ALGEBRAISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	57
3.10.1	Algebraische DGL 1. Ordnung.....	58
3.10.1.1	DAE's mit Index 1	58
3.10.1.2	DAE's mit höherem Index	58
3.10.2	Algebraische DGL 2. Ordnung.....	59
3.11	ZUSAMMENFASSUNG.....	60
4	ANALYSE DES LINEAREN, DIFFERENTIELL - ALGEBRAISCHEN EINMASSENSCHWINGERS	61
4.1	MODELL 1	62
4.1.1	Differentiationsindex.....	64
4.1.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	64
4.1.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	67
4.2	MODELL 2	68
4.2.1	Differentiationsindex.....	70
4.2.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	70
4.2.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	71
4.3	MODELL 3	72
4.3.1	Differentiationsindex.....	74
4.3.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	74
4.3.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	74
4.4	MODELL 4	76
4.4.1	Differentiationsindex.....	77
4.4.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	77
4.4.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	78
4.5	MODELL 5	78
4.5.1	Differentiationsindex.....	80
4.5.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	80
4.5.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	81
4.6	MODELL 6	82
4.6.1	Differentiationsindex.....	83
4.6.2	Betrachtung im Frequenzraum.....	83
4.6.3	Eigenwerte des Systems 2. Ordnung	84
4.7	ZUSAMMENFASSUNG, SCHLUBFOLGERUNGEN	85
5	ANALYSE DER ZEITINTEGRATION DIFFERENTIELL - ALGEBRAISCHER SYSTEME	88
5.1	STABILITÄTSUNTERSUCHUNGEN VON INTEGRATIONSVERFAHREN 2. ORDNUNG.....	89
5.2	ENTKOPPLUNG DIFFERENTIELL - ALGEBRAISCHER SYSTEME	90
5.3	STABILITÄTSUNTERSUCHUNG UNGEDÄMPFTER INDEX 3 SYSTEME	91
5.3.1	Entkopplung der Bewegungsgleichung	91
5.3.2	Stabilitätsanalyse der Zeitintegration	93
5.3.3	Analyse auftretender Effekte bei der Zeitintegration	95
5.4	STABILITÄTSUNTERSUCHUNG UNGEDÄMPFTER INDEX 1 SYSTEME	100
5.4.1	Entkopplung der Bewegungsgleichung	100
5.4.2	Stabilitätsanalyse der Zeitintegration	101
5.4.3	Analyse auftretender Effekte bei der Zeitintegration	102
5.5	ÜBERTRAGUNG AUF SYSTEME MIT FESTHALTUNGEN IM INNEREN	105

5.6	ZEITINTEGRATIONSVERFAHREN FÜR STRUKTURDYNAMISCHE DIFFERENTIELL –ALGEBRAISCHE SYSTEME..	107
5.6.1	<i>Indexbestimmung, Indexreduktion</i>	108
5.6.2	<i>Zeitintegration von Index 1 Systemen</i>	109
5.6.3	<i>Zeitintegration von Index 2 Systemen</i>	109
5.6.4	<i>Zeitintegration von Index 3 Systemen</i>	109
5.7	ZUSAMMENFASSUNG	110
6	ZEITINTEGRATION DER DIFFERENTIELL – ALGEBRAISCHEN INTERAKTIONSGLEICHUNG	112
6.1	BESTIMMUNG DES INDEX	114
6.2	DIFFERENTIATION DER NEBENBEDINGUNG.....	114
6.3	ZEITINTEGRATION VON INDEX 1 SYSTEMEN.....	115
6.4	LÖSUNGSVERFAHREN FÜR INDEX 2 SYSTEME.....	118
6.4.1	<i>Zeitintegration des Index 2 Systems nach Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung</i>	118
6.4.2	<i>Zeitintegration nach Indexreduktion durch Einfügen einer Aufstandsfeder</i>	119
6.5	LÖSUNGSVERFAHREN FÜR INDEX 3 SYSTEME.....	121
6.5.1	<i>Zeitintegration nach einmaliger Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung</i>	122
6.5.2	<i>Zeitintegration nach zweimaliger Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung</i> ..	123
6.5.3	<i>Indexreduktion durch Einfügen einer Aufstandsfeder</i>	123
6.6	ZUSAMMENFASSUNG	125
7	MODELLIERUNG VON KRAFTFAHRZEUGEN	127
7.1	MODELLBILDUNG	127
7.2	FAHRZEUGMODELLE ZUR BESTIMMUNG VON RADLASTSCHWANKUNGEN	128
7.3	FAHRZEUGKOMONENTEN	130
7.3.1	<i>Prinzipieller Aufbau eines Lkw</i>	130
7.3.2	<i>Luftfedern</i>	131
7.3.3	<i>Blattfedern</i>	131
7.3.3.1	Statische Eigenschaften von geschichteten Blattfedern	131
7.3.3.2	Reibung geschichteter Blattfedern.....	133
7.3.3.3	Dynamische Eigenschaften geschichteter Blattfedern	133
7.3.3.4	Modellierung von Blattfedern	134
7.3.4	<i>Stoßdämpfer</i>	134
7.3.5	<i>Räder</i>	135
7.3.6	<i>Rahmen</i>	136
7.3.7	<i>Achsen</i>	136
7.4	ZUSAMMENFASSUNG	137
8	ANWENDUNGSBEISPIEL	138
8.1	DIE BELLEVILLEBRÜCKE.....	138
8.2	LKW MODELL.....	140
8.3	RAUHIGKEITSPROFIL.....	142
8.4	DURCHFÜHRUNG DER BERECHNUNG.....	144
8.5	ERGEBNISSE	144
9	ZUSAMMENFASSUNG	149

ANHANG A	EINFLUßFUNKTIONEN, BIEGELINIEN FÜR PLATTENELEMENTE	152
A.1	DURCHBIEGUNG INFOLGE KNOTENDURCHSENKUNG w_z	153
A.2	DURCHBIEGUNG INFOLGE KNOTENVERDREHUNG φ_y	156
A.3	DURCHBIEGUNG INFOLGE KNOTENVERDREHUNG φ_x	158
A.4	ZUSAMMENFASSUNG	158
ANHANG B	STRUKTURDYNAMISCHE ZEITINTEGRATIONSVERFAHREN	160
B.1	EINTEILUNG DER VERFAHREN	161
B.1.1	<i>Einschritt- Mehrschrittverfahren</i>	161
B.1.2	<i>Explizite – Implizite Verfahren</i>	162
B.1.3	<i>Indirekte Verfahren</i>	163
B.2	EIGENSCHAFTEN VON ZEITSCHRITTVERFAHREN FÜR LINEARE PROBLEMSTELLUNGEN	164
B.2.1	<i>Modale Entkopplung</i>	164
B.2.2	<i>Analyse von Zeitschrittverfahren</i>	164
B.2.3	<i>Spektrale Stabilität</i>	167
B.2.4	<i>Genauigkeit, Konvergenz</i>	168
B.2.5	<i>Numerische Dämpfung (Dissipation)</i>	169
B.2.6	<i>Periodenverlängerung</i>	170
B.2.7	<i>Wahl der Zeitschrittgröße Δt</i>	170
B.2.8	<i>Overshooting</i>	171
B.3	ANFORDERUNGEN AN ZEITSCHRITTVERFAHREN	171
B.4	EIGENSCHAFTEN BEKANNTER ZEITSCHRITTVERFAHREN	171
B.5	GENERALIZED- α VERFAHREN	172
ANHANG C	ANALYTISCHE VERGLEICHSLÖSUNG FÜR DEN FUßPUNKTERREGEN EINMASSENSCHWINGER	176
LITERATURVERZEICHNIS		178

Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

A	Fläche
A_i	Ansatzfunktion für Knotenlast, Durchbiegung
A	Vergrößerungsmatrix
B_i	Ansatzfunktion für Knotenmoment, Verdrehung
c	Dämpferkonstante
C	Konstante
C	Dämpfungsmatrix
C*	generalisierte Dämpfungsmatrix
d	Dicke
Dof	Degree of Freedom (Freiheitsgrad)
d_i	Differentiationsindex
E	Elastizitätsmodul
E_{kin}	kinetische Energie
E_{pot}	potentielle Energie
f	Frequenz
f	Vektor aller innerhalb des Systems wirkenden Kräfte (ohne Zwangskräfte)
f_c	Vektor der Zwangskräfte
g	Nebenbedingung
g_j	Nebenbedingung für j-tes Rad
G	Schubmodul
G^T	Matrix der Zwangskräfte
k	Federsteifigkeit
k_p	virtuelle Federsteifigkeit
K	Steifigkeitsmatrix
K*	generalisierte Steifigkeitsmatrix
K_{int}	Interaktionsmatrix
l	Länge
L	Gesamtenergie
L	Lastoperator
m	Masse
M	Massenmatrix
M*	generalisierte Massenmatrix

M	Moment
N	Vektor der Ansatzfunktionen
p_i	Störungsindex
$P_{\text{dyn},j}$	dynamische Radlast von Rad j
$P_{\text{stst},j}$	statische Radlast von Rad j
P_i	Anteil der dynamischen Radlasten, die auf Knoten wirkt
P	Lastvektor
PV	Periodenverlängerung
q	Vektor der Lagekoordinaten
Q	Vektor der Randschnittgrößen
Q	Querkraft
r_j	Fahrbahnrauigkeit unter j-tem Rad
R_{nc}	Vektor der nichtkonservativen Kräfte
s	Differentialoperator
t	Zeit
T	Periodendauer, kinetische Energie
u	Vektor der Lagekoordinaten System 1. Ordnung
u_j	Durchsenkung des Radaufstandspunktes von Rad j
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
w	Vektor aller Verschiebungsgrößen (mit Lagrangeschen Operatoren)
W_{nc}	nichtkonservative Arbeit
x_j	x-Koordinate des j-ten Rades
x_i	x-Koordinate des i-ten Brückenknotens
z	Vektor der Freiheitsgrade für System 1. Ordnung
z_h	Durchsenkung infolge Knotenverformung
z_d	Durchsenkung infolge Last im Element
z_a	Durchsenkung infolge Trägheitskräfte
z_j	Durchsenkung der Brücke unter j-tem Rad zum Zeitpunkt t
z_i	Durchsenkung des Fahrwegsknotens i zum Zeitpunkt t

Griechische Buchstaben

δ	Störung in der Differentialgleichung
λ	Lagrangesche Parameter
μ	Massebelegung
ν	Querdehnzahl
Θ	Störung in der Nebenbedingung
ρ	spektraler Radius
ω	Eigenkreisfrequenz
\mathbf{x}	Lehrsches Dämpfungsmaß, bezogene Länge
$\bar{\mathbf{x}}$	numerische Dämpfung
\mathbf{y}	Eigenvektor

1 Einleitung

1.1 Motivation

Prognosen zur Entwicklung des europäischen Güterverkehrs sagen für die nächsten Jahre ein deutliches Wachstum des Transportverkehrs und -volumens voraus. Für Deutschland wird der Zuwachs stark von der Schaffung des europäischen Binnenmarktes und von der Öffnung der Grenzen zwischen West- und Osteuropa beeinflusst. Vor dem Hintergrund des lange erwarteten Aufschwungs in den neuen Bundesländern und aufgrund der mit den Wechselwirkungen zwischen diesen Ereignissen verbundenen Unwägbarkeiten sind die absoluten Steigerungsraten schwer zu quantifizieren. Zusätzlich wirken sich Veränderungen im Bereich der Güterproduktion aus, namentlich die Verringerung der Gütertiefe und die „just in time“-Lieferung [Heitzer 1992], [Baum 1990] und [Rothengatter 1991] ungünstig aus.

Einhergehend mit dieser Entwicklung fand in den letzten Jahrzehnten eine kontinuierliche Erhöhung der zulässigen Gewichtsgrenzen für Lastkraftwagen auf deutschen Straßen statt. Das zulässige Gesamtgewicht von Lkws erhöhte sich von 32 t auf inzwischen 44 t, die zulässige Achslast für Einzelachsen beträgt 10 t, für angetriebene Einzelachsen 11.5 t (§34 [StVZO 2000]). Obwohl die Bundesregierung eine weitere Erhöhung der zulässigen Achslasten und Gewichte für den Straßengüterverkehr ablehnt und deshalb auch keine Veranlassung sieht, das Bundesfernstraßennetz für höhere Achslasten auszubauen [Bundesregierung 2000], muß im Rahmen der europäischen Harmonisierung der zulässigen Achslasten mit einer Erhöhung auf bis zu 13 t gerechnet werden.

In Wirklichkeit sind diese Achslasten auf europäischen Straßen bereits jetzt vorzufinden. Die Konkurrenzsituation im Transportgewerbe zwingt Unternehmen, den verfügbaren Laderaum von Lastkraftwagen maximal auszunutzen. Ein nicht unbeträchtlicher Teil der Lastkraftwagen überschreitet so die zulässigen Achslasten. So ergaben Messungen in den Niederlanden, daß dort 10-15% der Achsen überladen sind [Dijk 1999].

Das deutsche Straßennetz beinhaltet insgesamt 35'272 Brücken mit einer Gesamtoberfläche von 24.79 Millionen m² (Stand 31.12.1998). Aufgrund des zunehmenden Verkehrs und der erhöhten Achslasten von Lastkraftwagen verschärft sich die Belastungssituation. Der damit in Zusammenhang stehende Bedarf an Finanzmitteln zum Unterhalt deutscher Brücken wird in Zukunft weiter ansteigen. Nach Schätzungen der Bundesanstalt für Straßenwesen wird der Finanzbedarf für die Instandhaltung und den Neubau der existierenden Brücken innerhalb des deutschen Straßennetzes von 800 Mio. DM im Jahr 1999 auf über 1.2 Milliarden DM im Jahr 2012 ansteigen [Krieger, Haardt 2000]. Dies entspricht einer Steigerungsrate von über 50 %. Demgegenüber standen in den letzten Jahren Mittel für den Unterhalt von 600 Mio. DM/Jahr. Vor dem Hintergrund der

sich verknappenden finanziellen Ressourcen erscheint es dringend geboten, diese so effizient wie möglich einzusetzen.

Die dynamischen Wirkungen von Verkehrslasten auf Brücken werden in Deutschland im Rahmen der Bemessung über die DIN 1072 (Lastannahmen für Straßen- und Wegebrücken) geregelt. So sind für alle Brückenteile die Verkehrsregellasten der Hauptspur mit dem Schwingbeiwert ϕ zu vervielfachen, der von der maßgebenden Länge des betrachteten Bauteils abhängig ist ($1.0 \leq \phi \leq 1.4$). In Beiblatt 1 zur DIN 1072 findet sich zusätzlich der Hinweis: „Die wirklich auftretenden Schwingwirkungen sind von einer Vielzahl von Faktoren abhängig, die nicht ohne weiteres rechnerisch erfaßt werden können. Die deshalb vereinfachend anzunehmenden Schwingbeiwerte sollen nicht nur die Spannungsauslässe aus Schwingungen der Verkehrslasten, sondern auch Stoßwirkungen beim Überfahren von Unebenheiten sowie den Einfluß mitschwingender Massen des Bauwerks erfassen“.

Eine möglichst wirtschaftliche Bemessung von Brücken hingegen wie auch die Abschätzung deren Ermüdung erfordert eine genaue Kenntnis nicht nur der statischen, sondern auch der dynamischen Lasten speziell von Lastkraftwagen. Dabei besitzen speziell die gefederten und ungefederten Massen, die Fahrgeschwindigkeit und das dynamische Verhalten der Lastkraftwagen sowie die Rauigkeit der Fahrbahnoberfläche großen Einfluß auf die dynamischen Achslasten. Die Abschätzung dynamischer Lasten und vor allem der an Brücken entstehenden dynamischen Spannungen infolge der Überfahrt von Lastkraftwagen erfordert ein möglichst genaues Rechenmodell.

Zur Erfassung des Verkehrs- und Achslastaufkommens werden in den letzten Jahren verstärkt Weighing – in - motion Systeme (Wim) entwickelt und eingesetzt. Bridge Weighing – in - motion Systeme (B-Wim) verwenden an ausgewählten Brücken gemessene Dehnungen, um daraus die Art des Fahrzeugs, das Fahrzeuggewicht und die Achslasten zu ermitteln. Dynamische Simulationen können bei der Auswahl geeigneter Meßpunkte im Vorfeld der Messung und zum Testen von B-Wim Systemen eingesetzt werden.

Realistische, rechnerische Simulationsmodelle bieten daneben viele Vorteile. Konstruktionsvarianten lassen sich im Planungsstadium kostengünstig am Computer simulieren. Ihre Wirkungsweise, auftretende Effekte und Auswirkungen können anhand der Ergebnisse beurteilt werden. Kritische Effekte können erkannt und behoben werden. Der Fortschritt der Computertechnologie ermöglicht es, immer komplexere Modelle immer schneller zu simulieren. So können die Simulationsrechnungen im Rahmen dieser Arbeit problemlos an einem handelsüblichen PC durchgeführt werden.

Die Bestimmung der maßgeblichen Effekte bei der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion und der sich ergebenden Beanspruchungen an Fahrzeugen und Brücken erfordert detaillierte Modelle. Das verwendete Interaktionsmodell muß komplex genug sein, um die bei der betrachteten Problemstellung auftretenden Effekte genau genug zu erfassen. Andererseits stellt das einfachste, kostengünstigste und zeiteffizienteste Modell, welches diese Anforderungen erfüllt, die günstigste Lösung dar. Mit Hilfe eines detaillierten Modells können vereinfachte Modelle auf ihre Eignung für konkrete Problemstellungen und ihre Grenzbereiche hin untersucht werden.

Messungen an Brücken bei einer Fahrzeugüberfahrt erfassen lediglich eine konkrete Situation. Prognosen bezüglich anderer Fahrzeug- und Brückentypen sind deswegen mit großen Unsicherheiten behaftet. Auf der anderen Seite sind die Ergebnisse von Simulationsrechnungen den bei der Modellierung getroffenen Annahmen und Vereinfachungen unterworfen. Erst der Abgleich von Messung und Rechnung ermöglicht die Kalibrierung der Rechenmodelle und zeigt die in den Modellen nicht enthaltenen Effekte auf. Die Rechenmodelle können verbessert werden. Anhand der verifizierten Simulationsergebnisse lassen sich die Meßergebnisse besser erklären, und es können Prognosen bezüglich anderer Systeme getroffen werden.

Eine wichtige Fragestellung ist die Ermüdung von Brücken und die sich daraus ergebende Restnutzungsdauer. Detaillierte Modelle können durch Einbeziehung verschiedener Fahrzeugtypen helfen, Aussagen über die Ermüdungsneigung einer Brücke zu treffen. Die Restnutzungsdauer einer bestehenden Brücke kann jedoch am besten über Monitoring der kritischen Punkte (z.B. Dauermessungen von Dehnungen) in Verbindung mit regelmäßigen Inspektionen bestimmt werden.

1.2 Zielsetzung und Aufgabenstellung

Bei der Überfahrt eines Fahrzeugs über eine Brücke findet eine Wechselwirkung (Interaktion) zwischen beiden Systemen statt. Dabei ergeben sich eine zeitveränderliche Durchsenkung der Brücke, sowie dynamische Spannungen an deren Komponenten. Gleiches gilt für das Fahrzeug. Ziel dieser Arbeit ist es, einen Algorithmus zu entwickeln, der die Simulation der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion ermöglicht und die dabei entstehenden Spannungen an beiden Systemen berechnet. Darüber hinaus wird besonderer Wert auf eine vielseitige Anwendbarkeit des Algorithmus gelegt.

Abhängig von der Aufgabenstellung können komplexe, nichtlineare und dreidimensionale Modelle zur Bestimmung von Spannungen an Brückenkomponenten, ebenso wie vereinfachte zweidimensionale Modelle zum Studieren von Effekten wichtige Simulationsmodelle sein. Deshalb soll, neben der Möglichkeit verschiedene Brückentypen abzubilden, die Verwendung beliebig komplexer Brückenmodelle möglich sein. Die dafür bedeutendste Technik ist die Methode der Finiten Elemente. Der Algorithmus muß deshalb mit FE - Modellen zusammenarbeiten.

Andere Anforderungen werden an die Fahrzeugmodelle gestellt. Hier ist die Abbildung verteilter Steifigkeits- und Massenverhältnisse von geringerer Bedeutung. Wichtiger ist statt dessen die realistische Abbildung der Nichtlinearitäten des Fahrzeugs, die insbesondere aus den nichtlinearen und plastischen Kennlinien der Fahrzeugfedern und Stoßdämpfer resultieren. Geeignet formulierte Fahrzeugmodelle müssen in die Interaktionsberechnung integriert werden können.

Das zentrale Element der Interaktionsberechnung ist der Algorithmus selbst. Ziel ist es, einen Algorithmus zu entwickeln, der eine möglichst genaue Simulation ermöglicht. Dazu muß bei der Verknüpfung der Modelle der Krafteintrag vom Fahrzeug in die Brücke möglichst genau erfolgen. Daneben muß eine Verschiebungskompatibilität sicherstellen, daß die Radaufstandspunkte des Fahrzeugs exakt der Brückenoberfläche folgen.

Eine wichtige dynamische Anregung des Fahrzeuges stellt die Fahrbahnrauigkeit der Brückenoberfläche dar. An das Verfahren muß deshalb die Anforderung gestellt werden, daß beliebige Rauigkeitsbeschreibungen einbezogen werden können.

Die Zeitintegration der hier vorliegenden strukturdynamischen Problemstellung muß mittels geeigneter Verfahren unbedingt stabil erfolgen.

Die Umsetzung des Algorithmus soll zum einen programmtechnisch möglich sein, um einfache Interaktionsmodelle (z.B. zweidimensionale Beschreibungen) schnell und kostengünstig zu simulieren. Zum anderen soll die Umsetzung des Algorithmus „angedockt“ an beliebige vorhandene FE - Programmpakete möglich sein. Damit eröffnen sich eine Vielzahl an Möglichkeiten:

- Beliebige Brücken- und Fahrzeugmodelle können verwendet werden. Die Modellierungstiefe reicht dabei für das Fahrzeug von der bewegten konstanten Einzellast bis zum dreidimensionalen nichtlinearen Fahrzeugmodell. Die Brücke kann als Einfeldbalken ebenso wie als komplexes realistisches und nichtlineares Brückenmodell beschrieben werden. Die Einbindung der Modelle in das verwendete Programm ist über definierte Schnittstellen möglich. Damit können auch FE - Modelle verwendet werden, die von anderen Institutionen und mit anderen FE - Programmen entwickelt wurden.
- Die in der Regel sehr hoch entwickelten numerischen Verfahren des verwendeten FE - Programmpakets können im Sinne einer zeiteffizienten und genauen Lösung des Problem verwendet werden.
- Die im FE - Programm vorhandenen Methoden zur Spannungsermittlung können genutzt werden.
- Im FE - Programm vorhandene Tools zur Visualisierung können genutzt werden.
- Die Umsetzung ist damit nicht zuletzt anwenderfreundlich möglich.

Weiterhin wird auf die Validierung der Interaktionssimulation anhand analytischer und numerischer Vergleichslösungen großen Wert gelegt.

Abschließend soll die Umsetzung des Algorithmus anhand eines konkreten Anwendungsbeispiels und die Vorgehensweise bei der Interaktionssimulation gezeigt werden.

1.3 Literatur

Grundlegende Literatur

Lösungen für grundlegende Probleme der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion sind in [Fryba 1972] dargestellt. Neben deterministischen Modellen zur Interaktion Fahrzeug - Brücke und Fahrzeug - Halbraum beschäftigt sich der Autor mit stochastischen Lasten. Weitergehende Modelle speziell zu Fragestellungen für Eisenbahnbrücken finden sich in [Fryba 1996]. Eine umfassende Darstellung zur Bestimmung der Bauwerksreaktion infolge dynamischer Lasten wird in [Clough, Penzien 1993] und [Petersen 1996] gegeben. Mit der Methode der Finiten Elemente sowie mit Zeitschrittverfahren für strukturdynamische Problemstellungen beschäftigen sich [Bathe 1986] und [Hughes 2000]. Einen Überblick über die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen ge-

ben [Hairer, Norsett, Wanner 2000], [Hairer, Wanner 2002] und [Brenan, Campbell, Petzold 1989]. Speziell mehrkörperdynamische Fragestellungen dabei behandeln [Eich-Soellner, Führer 1998] und [Arnold 2001]. Das experimentelle Messen wird in [Heymann, Lingener 1986], die Meßdatenanalyse mittels der Fouriertransformation in [Bracewell 2000] und [Brigham 1974] ausführlich dargestellt.

Nachfolgend wird die Literatur vorgestellt, welche sich speziell mit der Fahrzeug - Brücken Interaktion beschäftigt.

Historische (analytische) Ansätze

Mitte des 19. Jahrhunderts ließ die englische Königin Victoria eine Kommission zu Schadensfällen an Eisenbahnbrücken einsetzen. Der im Jahr 1847 vorgelegte Bericht der Kommission enthält einen von [Willis 1847] verfaßten Anhang, in dem es ihm gelingt, die Differentialgleichung für die Bewegung einer Einzelmasse über einen masselosen Balken aufzustellen. Willis gehörte auch zu den wenigen Forschern, welche theoretische Untersuchungen mit experimentellen Versuchen kombinierten. 1849 gelang es erstmals [Stokes 1849], die Lösung des Problems zu finden.

Eine weitere vereinfachte Modellierung der Bewegung einer Last über einen massebelegten Balken ergibt sich aus der Vernachlässigung der Fahrzeugmasse. Der Träger besitzt dadurch feste Eigenfrequenzen und Eigenformen. [Krylow 1905] und [Timoshenko 1911] gelang es als ersten, dieses Problem zu lösen. Timoshenko erweiterte seine Berechnungen 1922 [Timoshenko 1922] auf den Fall einer pulsierenden Last.

Die Berücksichtigung der Fahrzeugmasse führte zu dem Modell der bewegten Masse über einen massebelegten Balken. Dieses Problem wurde erstmals von [Schallenkamp 1937] zufriedenstellend gelöst.

[Inglis 1934] verwendet eine harmonische Analyse, um die grundlegenden Modellierungen: Bewegung einer konstanten/harmonischen Last, einer konstanten Masse, eines Einmassenschwingers über einen massebelegten Balken zu lösen. Mit Hilfe einer Eigenwertanalyse gelingt es [Ödman 1948] und [Kolusek 1962], allgemeine und statisch komplexe Systeme zu behandeln. Das Fahrzeug wird vereinfachend als Einzelmasse behandelt.

Die Lösung, der bei der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion entstehenden partiellen Differentialgleichung, bleibt jedoch aufgrund von Schwierigkeiten bei der Lösung auf einfache Fälle beschränkt. Für detaillierte Analysen wäre es jedoch erforderlich, komplexe Fahrzeug-/Brückensysteme, die Dämpfung von Fahrzeug und Brücke sowie die Rauigkeit der Fahrbahn mit abzubilden. Weitergehende Untersuchungen wurden erst ab Mitte des 20. Jahrhundert mit der Entwicklung des Computers möglich.

Moderne deterministische Ansätze

In den letzten Jahrzehnten erschienen eine Vielzahl von Veröffentlichungen zur Interaktion Fahrzeug – Fahrweg. Um den Umfang dieser Arbeit nicht zu sprengen werden im folgenden ausgewählte Publikationen aufgeführt, welche die verschiedenen Modellierungen der Brücke und des Fahrzeugs sowie mögliche Lösungsansätze zeigen.

Eindimensionale Brückenmodelle:

[Zhu, Law 2001] berechnen die dynamische Antwort eines Euler Bernoulli Balkens unter einer bewegten, konstanten Last. Dazu verwenden sie die Ritzsche Methode in Kombination mit dem Hamiltonschen Prinzip. Weiter werden ein Integrationsverfahren 1. Ordnung sowie die Methode nach Newmark zur Lösung der entstehenden Gleichung verglichen.

[Abu-Hilal, Mohsen 2000] betrachten einen elastischen, homogenen und isotropen Einfeldbalken mit allgemeinen Randbedingungen. Die Anregung erfolgt dabei durch konstante Lasten. Die Autoren gewinnen die Schwingungsantwort des Balkens in geschlossener Form durch Anwendung der Eigenformmethode und unter Verwendung der Impulsantwortfunktion.

[Henchi et al 1997] untersuchen das dynamische Verhalten von Mehrfeldbalken unter bewegten konstanten Lasten. Dazu beschreiben sie eine dynamische Steifigkeitsformulierung eines Balkenelementes zur FE – Berechnung. Die Berechnung der Balkenantwort erfolgt unter Verwendung der Eigenformen. Die Systemantwort wird zunächst im Frequenzbereich berechnet und anschließend in den Zeitbereich rücktransformiert.

Die Idealisierung des Fahrzeugs als bewegte Masse anstatt als bewegte Last wird von [Lee 1995] untersucht. Damit gelingt es dem Autor Auswirkungen der Massenträgheit zu studieren. Die Brücke wird durch einen Euler Bernoulli Balken idealisiert. Für das gekoppelte System stellt der Autor die Bewegungsgleichung nach Euler Lagrange auf und löst diese unter Verwendung spezieller Ansatzfunktionen. Die Lösung des Problems wird damit ohne Integration möglich.

Die Schwingung eines Balkens unter einer bewegten Masse beschreiben ebenfalls [Cifuentes, Herting 1986]. Sie verwenden jedoch eine andere Vorgehensweise. Das verwendete FE – Modell des Balkens und die Masse werden getrennt. Die Kopplung erfolgt über eine Lagrangesche Nebenbedingung. Damit kann die Relativbewegung beider über zeitliche Ansatzfunktionen beschrieben werden.

Realistischer sind Beschreibungen, welche das Schwingungsverhalten des Fahrzeugs berücksichtigen. Exemplarisch werden folgende Veröffentlichungen genannt:

[Yang, Yau 1997] entwickeln ein „Brücke - Fahrzeug Interaktionselement“ für FE Berechnungen. Dieses Element beinhaltet den Balken selbst, die Rauigkeit der Fahrbahn sowie auf Fahrzeugseite einen Einmassenschwinger. Das Gesamtsystem wird aus dem entwickelten Element und aus Balkenelementen zusammengesetzt und iterativ gelöst. Die Modellierung des Fahrzeuges ist auf den Einmassenschwinger beschränkt.

[Cheng, Au, Zheng u.a. 1999] verwenden als Brückenmodell einen mehrfeldrigen Euler Bernoulli Balken sowie einen Einmassenschwinger als Fahrzeugmodell. Die Beschreibung der Brücke (unter Verwendung modifizierter Balkenschwingformen) und des Fahrzeuges werden zu einem zeitinvarianten Gleichungssystem zusammengefaßt, das direkt integriert werden kann.

[Green, Cebon 1994] beschränken sich ebenfalls auf lineare Modelle, was eine Berechnung der Systemantwort der Brücke im Frequenzraum ermöglicht. Die Fahrzeug – Fahrweg Interaktion wird dadurch realisiert, daß zunächst das Fahrzeug über die Straßenrauhigkeit angeregt wird. Dadurch ergeben sich dynamische Achslasten für die gesamte Überfahrtdauer die anschließend auf die Brücke aufgebracht werden. Die sich ergebende Brückendeformation wird zusammen mit der Rauigkeit wiederum als Anregung für das Fahrzeug verwendet. Das Problem der Interaktion wird somit iterativ gelöst. Als Fahrzeugmodelle kommen dabei ebene Modelle zur Anwendung.

Eine Lösung unter Verwendung Finiter Elemente stellen [Lin, Trethewey 1990] vor. Die Bewegungsgleichungen zur Beschreibung der Interaktion zwischen der Brücke (als Balken idealisiert) und dem Fahrzeug (Feder – Dämpfer System) werden basierend auf einer FE – Beschreibung für das gekoppelte System aufgestellt. Damit ergibt sich ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit zeitvarianten Koeffizienten, welches die Autoren mit dem Verfahren nach Runge – Kutta lösen.

[Chatterjee, Datta, Surana 1994] beschränken sich ebenfalls auf eine zweidimensionale Modellierung. Das Fahrzeug wird jedoch als nichtlinearer Einmassenschwinger abgebildet. Das Brückenmodell besteht aus einem Euler Bernoulli Balken, die Fahrbahnrauhigkeit wird ebenfalls berücksichtigt. Die Lösung der Interaktionsgleichung erfolgt iterativ im Zeitbereich.

[Wang, Huang 1992] bestimmen die dynamische Antwort einer Schrägseilbrücke. Dabei kommt ein ebenes nichtlineares Fahrzeugmodell zum Einsatz. Die Straßenrauhigkeit wird berücksichtigt. Die Lösung der Bewegungsgleichungen erfolgt ebenfalls iterativ im Zeitbereich.

Einen anderen Ansatz wählt [Duffek 1991]. Der Autor entwickelt einen Fahrbahnoperator zur Simulation der dynamischen Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrweg. Dabei können beliebige Fahrzeugmodelle mit einem Euler Bernoulli Balken gekoppelt werden.

[Drosner 1989] entwickelt ein Simulationsprogramm zur Fahrzeug-Fahrweg Wechselwirkung. Die Brücke wird dabei über eine Finite Element Modellierung unter Verwendung von Balkenelementen beschrieben. Die verwendeten Fahrzeugmodelle sind eben und können Nichtlinearitäten enthalten. Die Vorgehensweise ist eine Verbesserung der Methode von [Green, Cebon 1994]. Die Systeme werden zu jedem Zeitschritt getrennt gelöst. Die sich ergebende Brückendeformation dient zusammen mit der Straßenrauhigkeit als Anregung des Fahrzeugs. Die daraus berechneten Achslasten werden als Belastung der Brücke im nächsten Zeitschritt verwendet. Diese Vorgehensweise wird auch als Co - Simulation bezeichnet.

Zweidimensionale Brückenmodelle:

[Gbadeyan, Oni 1995] untersuchen die Interaktion anhand von Rayleigh Balken und Platten mit willkürlichen Randbedingungen. Als Fahrzeugmodelle verwenden die Autoren bewegte Massen.

[Marchesiello, Fasana, Garibaldi u.a. 1999] studieren in einer analytischen Vorgehensweise die Interaktion anhand einer mehrfeldrigen isotropen Platte und eines dreidimensionalen Lkw Modells. Dazu berechnen die Autoren die Eigenformen nach Rayleigh Ritz. Die Berechnung der Brückenantwort erfolgt dann unter Verwendung der Eigenformen. Das entstehende Gleichungssystem wird iterativ gelöst.

Dreidimensionale Brückenmodelle:

Die Verwendung von dreidimensionalen Modellen für Fahrzeug und Brücke ermöglicht detailgetreue Simulationen. Die Brücken werden dabei mittels der Methode der Finiten Elemente abgebildet, für das Fahrzeug kommen vertikaldynamische Beschreibungen als Mehrkörpermodell bzw. als Finite Element Modell zum Einsatz.

[Kasif, Humar 1990] stellen einen der ersten FE basierten Ansätze vor. Das Finite Element Modell der Brücke und ein Mehrkörper Fahrzeugmodell werden über Ansatzfunktionen, welche die Position des Fahrzeuges beschreiben, gekoppelt. Damit wird eine zeitvariante Bewegungsgleichung gebildet, die integriert werden kann.

[Fritsch 1994], [Collignon, Roux 1994] [Baumgärtner, Fritsch 1995], [Lichte 1996] und [Neun 1998] beschreiben die Interaktion Fahrzeug – Fahrweg über die zeitvariante Kopplung von Finite Element Modellen mittels Lagangescher Nebenbedingungen. Damit können beliebige FE-Modelle unter einbeziehung einer Straßenrauhigkeit gekoppelt werden. Die Umsetzung ist mittels eines kommerziellen FE-Programms möglich.

[Henchi, Fafard, Talbot u.a. 1998] stellen zwei verschiedene FE - basierte Formulierungen vor. Die erste entspricht einer Co – Simulationstechnik. Bei der zweiten Formulierung werden die zeitvarianten Bewegungsgleichungen des gekoppelten Systems aufgestellt und integriert.

[Xia, Xu Chan 2000] betrachten das FE – Brückenmodell über seine Eigenformen. Damit formulieren sie die Bewegungsgleichungen des gekoppelten Systems zeitvariant und integrieren diese mit dem Newmark - β Verfahren. Damit berechnen Sie die Schwingungsantwort einer Hängebrücke unter einem darüberfahrenden Zug.

[Guo, Xu 2001] beschreiben einen vollständig computerbasierten Ansatz. Mittels eines entwickelten Programms werden die zeitvarianten Bewegungsgleichungen für jeden Zeitpunkt aufgestellt.

[Dietz, Schupp 2000] entwickeln einen Algorithmus zur Co – Simulation von Mehrkörpersystemen und Finite Element Modellen. Dabei wird die mittels Finiter Elemente beschriebene Brücke über ihre Eigenformen beschrieben. In jedem Zeitschritt wird zunächst das Fahrzeug getrennt betrachtet. Die berechneten Radlasten werden anschließend auf die Brücke aufgebracht. Mit der sich ergebenden Durchsenkung der Brücke werden nun verbesserte Radlasten des Fahrzeugs berechnet. Dieser iterative Prozeß setzt sich solange fort, bis die geforderten Genauigkeitsschranken eingehalten sind. Als Besonderheit kann die Simulation „angedockt“ an das Mehrkörperprogramm „Simpack“ erfolgen.

Interaktion Eisenbahn- Brücke:

Bei der Interaktion Eisenbahn – Brücke treten vergleichbare Fragestellungen wie bei der Interaktion Lastwagen – Brücke auf. Einige Lösungsansätze wurden daher bereits in den vorhergehenden Abschnitten besprochen. Hier sei deshalb nur noch auf die Zusammenstellung wichtiger Problemstellungen in [Fryba 1996] verwiesen.

Stochastische Beschreibungen

In der Regel sind die Eingangsparameter der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion keine deterministischen Werte, sondern streuen innerhalb bestimmter Bereiche. Dazu zählen die Zusammensetzung oder die Geschwindigkeit des Straßenverkehrs, Häufigkeit und Dauer von Verkehrsstaus, Zufälligkeiten in der Verteilung der Straßenrauhigkeit oder auf der Brückenseite, Streuungen im Elastizitätsmodul des Betons. Die Eingangsgrößen können über stochastische Verteilungsfunktionen beschrieben werden. Verteilungsmodelle für Verkehrslasten geben z.B. [Bogath, Bergmeister 1999] aufgrund von Weigh-in-motion Messungen sowie [Bruls, Jacob, Sedlacek 1989] an. Die Ausgangsgrößen der (stochastischen) Berechnung ergeben sich ebenfalls über ihre stochastischen Parameter (Verteilungsfunktion, Mittelwert, Standardabweichung usw.). Stochastische Schwingungen stehen daher für Schwingungen, deren Charakteristika lediglich mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit bestimmt werden können. Eine umfassende Zusammenstellung der Sachverhalte findet man in [Mehlhorn 1996].

Fryba [1972] untersucht die Überfahrt einer Last mit zufälligen Amplituden über einen Balken. [Geidner 1979] wendet dabei die Spektralmethode an. [Groß 1988] und [Zibdeh, Rackwitz 1995] untersuchen Balkenbrücken. Die Belastung wird dabei als gefilterter Poissonprozeß betrachtet. [Schütz 1990] beschäftigt sich ebenfalls mit Verkehrslasten und deren Wirkung auf Straßenbrücken. Er betrachtet dabei ein- und mehrachsige Fahrzeugmodelle. Die Berechnung der dynamischen Achslasten der Fahrzeuge infolge Anregung durch die Straßenrauhigkeit erfolgt dabei vorab. Die bestimmten Achslasten werden anschließend auf die Brücke aufgebracht. [Cousy, Said und van Hoove 1989] untersuchen die Effekte zufälliger Straßenunebenheiten auf die dynamische Antwort eines Fahrzeuges. Die Brücke wird dabei als Balken, das Fahrzeug als Starrkörpermodell mit mehreren Freiheitsgraden abgebildet. Bezüglich des damit ermittelten dynamischen Vergrößerungsfaktors stellen die Autoren fest, daß dieser stark von der Qualität der Fahrbahnoberfläche und in deutlich geringerem Umfang von der Brückenlänge abhängt.

Verwandte Themenbereiche

Daneben spielt die Interaktion Fahrzeug – Fahrweg bei zahlreichen anderen Problemstellungen eine große Rolle. Dazu zählen die Interaktion Eisenbahn – Untergrund, Eisenbahn – Brücke, die Magnetschwebetechnik sowie Fußgängerbrücken.

Interaktion Eisenbahn- Untergrund:

Exemplarisch wird hier auf zwei Arbeiten eingegangen, in denen, wie in der vorliegenden Arbeit, Finite Elemente Beschreibungen verwendet werden:

[Ripke 1995] simuliert die Fahrzeug – Gleis Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik. Dabei erfolgt die Modellierung des Gleises unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente, das Fahrzeug wird als Mehrkörpersystem abgebildet. Die Beschreibung der Kopplung Rad - Schiene erfolgt unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik. Zur Lösung des resultierenden Differentialgleichungssystems entwickelt Ripke ein modales Zeitintegrationsverfahren. Die Differentialgleichungen des Fahrzeugs und des Gleises werden dabei zunächst auf ein DGL System erster Ordnung transformiert. Dann wird die Kontaktkraft aus vorhergehenden Zeitschritten extrapoliert und die Differentialgleichungen des Fahrzeugs und des

Gleises in modalen Freiheitsgraden unter Berücksichtigung der Rauigkeit des Gleises mittels Duhamel Integral gelöst. Die damit berechenbaren Kontaktkräfte werden mit den geschätzten verglichen und gegebenenfalls wird die Rechnung mit verbesserten Schätzungen der Kontaktkräfte verbessert.

[Diana, Bruni, Cheli u.a. 1999] entwickeln ein mathematisches Interaktionsmodell. Dabei wird das Gleis mittels Finiter Elemente diskretisiert, für das Fahrzeug kommt eine gemischt Mehrkörper- Finite Element Modellierung zum Einsatz. Die Lösung der Bewegungsgleichungen erfolgt über eine Co Simulationstechnik. Beide Modelle werden in jedem Zeitschritt separat integriert. Die Ergebnisse werden iterativ abgeglichen.

Eine semi - analytische Betrachtungsweise der Problematik findet sich z.B. in [Dinkel 2000].

Luft – und Raumfahrt:

[Messac 1995] untersucht die Problematik der Interaktion zwischen einem mobilen Transporter einer Weltraumstation.

Magnetschwebebahnen:

Mit der Problematik der Magnetschwebetechnik beschäftigen sich z.B. [Kortüm, Lugner 1994] und [Popp1979]. Hierbei kommen regelungstechnische Fragestellungen zur Anwendung.

Interaktion Fußgänger - Brücke:

Im weiteren Sinne zählt auch der Synchronisationseffekt bei Fußgängerbrücken zur Interaktionsproblematik. Bei einer Gruppe von Fußgängern, die eine Brücke überschreiten, neigen die Fußgänger dazu, ihre Schrittfrequenz der Eigenfrequenz der Brücke anzupassen. Die Wahrscheinlichkeit einer Synchronisation wächst mit größer werdenden Schwingungsamplituden. Hier findet eine (unbewußte) Interaktion zwischen dem Fußgänger und der Brücke statt [Petersen 1996], [Schneider 1991].

1.4 Vorgehen

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Problemstellung traten eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die zum zielführenden Abschluß der Arbeit untersucht werden mußten. Die Arbeit enthält deswegen Seitensritte. Um den Aufbau der Arbeit zu verdeutlichen und die Einordnung der einzelnen Kapitel zu erleichtern, wird der Aufbau der Arbeit sowie die Zuordnung der einzelnen Kapitel zu den entsprechenden Themengebieten (Interaktion Fahrzeug- Fahrweg, Algebraische Differentialgleichungen, Zeitintegration, Modellierung) in der nachfolgenden Abbildung skizziert. Jeder Themenbereich wird eigenständig beschrieben und kann unabhängig von den anderen gelesen werden. Leser, die sich nur für die Interaktionsberechnung interessieren, können die Lektüre auf die Kapitel 2, 6 und 8 beschränken.

Modellierung	Interaktion Fahrzeug- Fahrweg	Algebraische Differential- gleichungen	Zeitintegration
	<p>Kapitel 2: Entwicklung eines Algorithmus zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion</p>		
		<p>Kapitel 3: Grundlagen algebraischer Differentialgleichungen: Problematik Grundlegende Konzepte Lösbarkeit differentiell – algebraischer Systeme</p>	
		<p>Kapitel 4: Bestimmung grundlegender Einmassenschwinger Modelle Analyse strukturdynamische und differentiell – algebraischer Eigenschaften</p>	
			<p>Kapitel 5: Stabilität der Zeitintegration Erklärung auftretender Störungen und Instabilitäten Entwicklung von Lösungsverfahren</p>
		<p>Kapitel 6: Anwendung der entwickelten Lösungsverfahren auf die Interaktionsproblematik Durchführung von Vergleichsrechnungen zur Verifikation</p>	
	<p>Kapitel 7: Modellierung von Lkws Identifikation maßgebender Effekte</p>		
	<p>Kapitel 8: Anwendungsbeispiel: Überfahrt eines Lkws über die Bellevillebrücke</p>		
	<p>Anhang A: Einflußfunktionen für Platten</p>		<p>Anhang C: Eigenschaften von Zeitschrittverfahren für lineare Problemstellungen</p>

Tabelle 1.1: Aufbau der Arbeit

Der Einleitung folgend wird in **Kapitel 2** ein Verfahren zur Simulation der Interaktion Fahrzeug-Fahrweg hergeleitet. Im Gegensatz zu bisherigen Ansätzen soll der Algorithmus universell anwendbar, flexibel und anwenderfreundlich sein. Um dieses Ziel zu erreichen, wird eine spezielle Formulierung unter Einbeziehung von Lagrangeschen Nebenbedingungen gewählt. Das Fahrzeug und der Fahrweg werden dabei zunächst getrennt formuliert und anschließend über Nebenbedingungen gekoppelt. Die Kopplung beinhaltet Kräftegleichgewichtsbedingungen sowie Verschiebungscompatibilitäten. Für Balkenelemente ist diese mittels der Hermiteschen Polynome herstellbar. Für Plattenelemente werden im Anhang A geeignete Formfunktionen ermittelt.

Der entwickelte Algorithmus erfüllt die oben genannten Kriterien. Diese Vorteile werden jedoch auf Kosten einer hybriden Formulierung erkauft. Im Gleichungssystem sind neben Weggrößen auch Kraftgrößen enthalten. Die Zeitintegration dieses Gleichungssystems mit dem für gewöhnliche Differentialgleichungen unbedingt stabilen Newmark- β Zeitschrittverfahren mit $\beta=1/4$ und $\delta=1/2$ zeigt hohe Störungen und wird instabil. Mit der Zeitintegration dieses Gleichungssystems beschäftigen sich die Kapitel 3-6

Die entstandene Bewegungsgleichung gehört einer speziellen Klasse von Gleichungssystemen, den differentiell - algebraischen Gleichungen an. Diese sind in der Strukturmechanik weitgehend unbekannt. In **Kapitel 3** wird deshalb versucht, diese Problematik aus einer mechanischen Sichtweise darzustellen. Danach werden grundlegende Eigenschaften dieser Systeme gezeigt. Vor allem wird auf die zu erfüllenden Voraussetzungen eingegangen, damit diese Systeme analytisch lösbar sind. Weiterhin werden Probleme bei der numerischen Lösung aufgezeigt und dabei auftretende Effekte werden besprochen.

Für differentiell-algebraische Systeme existiert eine Vielzahl an Lösungsverfahren für Mehrkörpersysteme, jedoch kein geeignetes Verfahren für die hier vorliegende strukturdynamische Problemstellung. Als weiteres Ziel soll deshalb versucht werden, ein strukturdynamisches Verfahren zur Zeitintegration von differentiell - algebraischen Systemen zu entwickeln.

Um die maßgeblichen Effekte bei der Zeitintegration mit Verfahren 2. Ordnung zu bestimmen, werden in **Kapitel 4** grundlegende Modelle des differentiell – algebraischen Einmassenschwingers entworfen und analysiert. Die strukturdynamische und die differentiell – algebraischen Eigenschaften dieser Systeme werden analysiert. Die bei der Zeitintegration dieser Modelle auftretenden Störungen lassen sich aus der Sichtweise von algebraischen Differentialgleichungen heraus gut, aus der Sichtweise der Strukturmechanik zunächst nur teilweise erklären.

Wichtige Fragestellungen bleiben noch ungeklärt: Wie können die bei der Zeitintegration auftretenden Störungen erklärt werden und welche Voraussetzungen sind zur stabilen Integration dieser Systeme zu treffen?

In **Kapitel 5** wird deshalb eine Stabilitätsanalyse der Zeitintegration von differentiell – algebraischen Systemen mit dem Generalized- α Verfahren durchgeführt. Mit Hilfe einer speziellen Transformation können derartige Systeme in Einmassenschwinger und gekoppelte 2×2 Systeme aufgespalten werden. Die Stabilitätsanalyse der gekoppelten Teilsysteme erklärt die auftretenden Störfrequenzen und ermöglicht die Bestimmung von Stabilitätskriterien. Weiterhin kann eine neue Indexreduktionstechnik entwickelt und deren Wirkungsweise gezeigt werden. Abschließend werden Kriterien für die Zeitintegration strukturdynamischer differentiell – algebraischer Systeme angegeben und es werden Lösungsverfahren entwickelt.

In **Kapitel 6** werden diese Lösungsverfahren auf die DAE der Interaktion angewendet. Anhand von grundlegenden Modellen werden damit Vergleichsrechnungen durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit einer analytischen Lösung bzw. mit den Ergebnissen einer anderen Interaktionstechnik verglichen. Damit kann die Leistungsfähigkeit der entwickelten Lösungsverfahren gezeigt werden.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit der Modellierung von Lkws. Dabei werden verschiedene Modelle zur Interaktionssimulation aufgezeigt. Diese Modelle unterscheiden sich in ihrer Detailtreue. Weiter wird auf die Modellierung der maßgeblichen Bestandteile eines Lkw eingegangen.

Abschließend wird in **Kapitel 8** die Anwendung des Verfahrens anhand einer konkreten Problemstellung gezeigt. Dazu wird der entwickelte Algorithmus mittels eines kommerziellen FE – Programms umgesetzt und unter Verwendung der entwickelten Lösungstechniken gelöst. Damit kann die Überfahrt eines Lkws über eine Brücke berechnet werden. Die Leistungsfähigkeit dieser Umsetzung wird anhand von Berechnungsergebnissen gezeigt.

2 Interaktion Fahrzeug-Fahrweg

2.1 Vorgehensweise

Im folgenden Kapitel soll ein Algorithmus entwickelt werden, der es ermöglicht, zwei Finite Element Strukturen relativ zueinander zu bewegen. Damit kann die Bewegung eines Fahrzeugs über eine Brücke bzw. einen Halbraum simuliert werden. Die hier vorgestellte Methodik basiert auf Arbeiten von [Cifuentes, Herting 1986] [Fritsch 1994] [Baumgärtner, Fritsch 1995] und [Lichte 1996].

Dabei stellt sich zunächst die Frage, wie die dynamische Kopplung beider Modelle bei deren Relativbewegung hergestellt werden kann. Zum einen sind nämlich die Radaufstandspunkte des Fahrzeuges nicht fest mit Knoten des Fahrwegs verbunden, vielmehr ändern sich die Koppel­punkte mit der fortschreitenden Bewegung des Fahrzeuges. Zum anderen sind die Radauf­standspunkte nur selten ortsgleich mit einem Knoten des Fahrwegsmodells. Dies könnte nur durch eine extrem feine Diskretisierung des FE-Netzes erreicht werden, was aus praktischen Gesichtspunkten nicht sinnvoll ist.

Zur Lösung dieser Probleme wird folgende Vorgehensweise gewählt: Zunächst werden das Fahrzeug und der Fahrweg getrennt voneinander modelliert. Dadurch sind beide Modelle in der Gesamtsteifigkeitsmatrix separat enthalten und die Gesamtsteifigkeitsmatrix bleibt zeitinvariant. Die Bewegungsgleichungen des Fahrzeuges werden nun unter Verwendung von Lagrangeschen Nebenbedingungen als „constrained System“ formuliert. Das Fahrzeugmodell wird über die Fahrzeugfreiheitsgrade (Dof_{Fz}), das Brückenmodell über die Brückenfreiheitsgrade (Dof_{Br}) beschrieben. Die Lagrangesche Nebenbedingung bezieht sich dabei auf die Durchsenkung der Fahrzeugfußpunkte. Die Lagrangeschen Parameter gehen als weitere Unbekannte in das Gleichungssystem ein. Wird nun die Lagrangesche Nebenbedingung so gewählt, daß die Fahrzeugfußpunkte der Fahrwegoberfläche folgen (Durchsenkung der Brücke + Fahrbahnrauigkeit), dann entsprechen die Lagrange­schen Parameter den jeweiligen Kontaktkräften zwischen Fahrzeug und Fahrweg. Die Kontaktkräfte sind direkt in der Beschreibung enthalten und können via Interpolationsfunktionen in die benachbarten Knoten des Fahrweges eingeleitet werden. Die Durchsenkung der Fahrwegoberfläche unter den Fahrzeugfußpunkten kann dabei aus der Verschiebung und der Verdrehung der angrenzenden Knoten des Fahrwegsmodells bestimmt werden. Das Gesamtsystem kann nun durch Lösen eines Gleichungssystems vollständig berechnet werden.

Das Konzept der Simulation ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Dabei bezeichnen:

Laufvariablen:

$i [1,l]$ durch Räder belastete Brückenknoten

$j [1,m]$ Radaufstandspunkte

$k [1,n]$ Freiheitsgrade des Fahrzeuges

Bezeichnungen:

$x_j(t)$ = x-Koordinate des j-ten Rades

$x_i(t)$ = x-Koordinate des i-ten Brückenknotens

$P_{dyn,j}(t)$ = Dynamische Radlast von Rad j zum Zeitpunkt t

$P_{stat,j}(t)$ = Statische Radlast von Rad j zum Zeitpunkt t

$P_i(t)$ = Anteil der dynamischen Radlasten, die auf Knoten i zum Zeitpunkt t wirken

$u_j(t)$ = Durchsenkung des Radaufstandspunktes von Rad j zum Zeitpunkt t

$z_j(t)$ = Durchsenkung der Brücke unter j-tem Rad zum Zeitpunkt t

$z_i(t)$ = Durchsenkung des Fahrwegsknotens i zum Zeitpunkt t

$r_j(t)$ = Fahrbahnrauigkeit unter j-tem Rad zum Zeitpunkt t

$A_i(t)$ = Ansatzfunktion zur Last- und Verschiebungsinterpolation

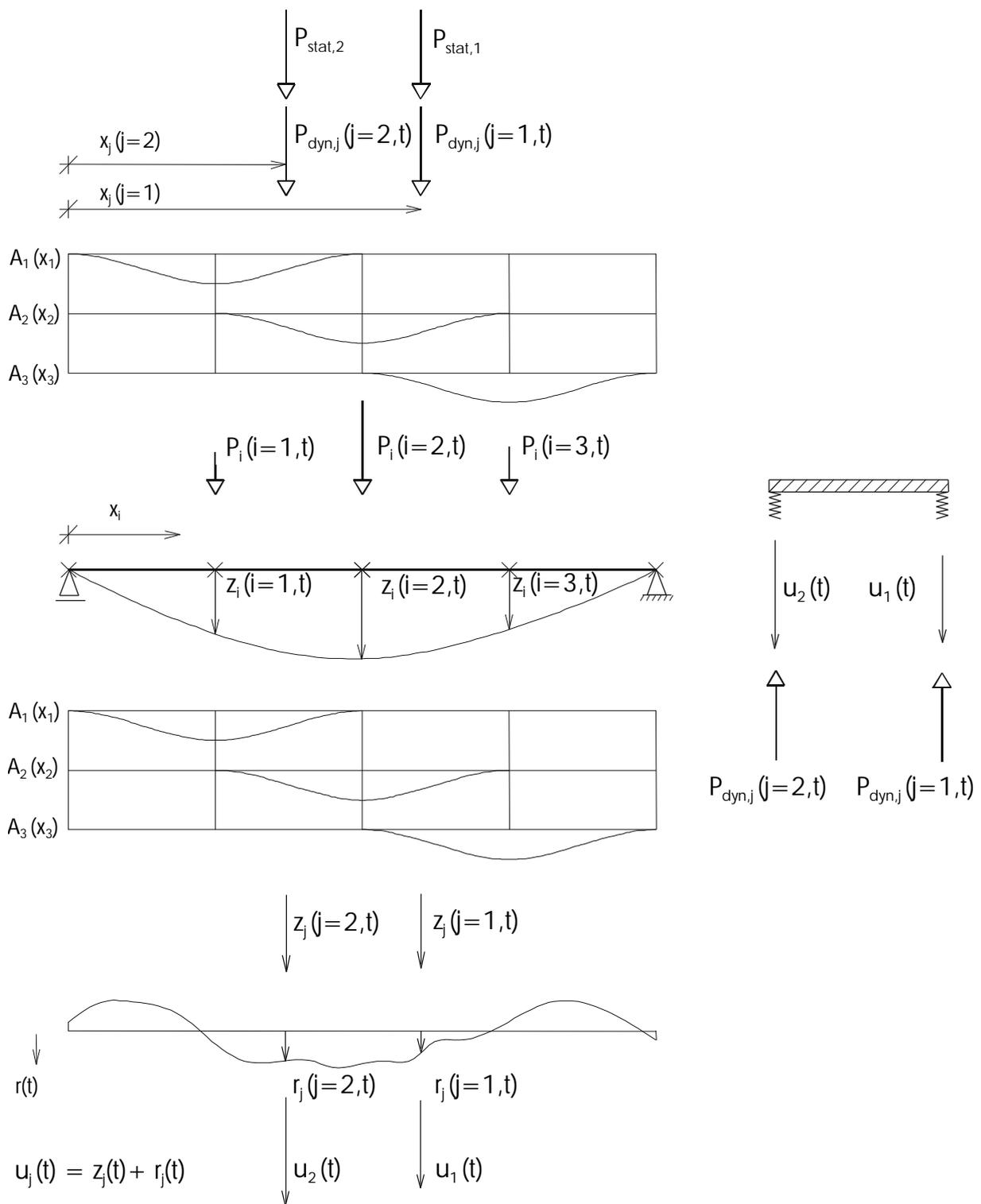


Abbildung 2.1: Prinzipskizze Vollsimulation

2.2 Kraftwirkungen am Fahrzeug

Auf ein Fahrzeug wirken bei der Überfahrt über eine Brücke nach [Cifuentes 1989] folgende Kräfte: Gravitationskraft $m g$, Massenträgheitskraft $m \ddot{z}$, „Corioliskraft“ $2 m v \dot{z}'$ und Zentrifugalkraft $m v^2 z''$.

Bei den vergleichsweise geringen Fahrgeschwindigkeiten und dem großen Radius der Fahrbahnkrümmung (aus der Durchbiegung der Brücke) können Coriolis- und Zentrifugalkraft vernachlässigt werden.

Die Wirkungsweise der Gravitation wird folgendermaßen berücksichtigt: Die Erdbeschleunigung selbst wird nicht angesetzt. Das Fahrzeug- und das Fahrwegsmodell schwingen dann um ihre unausgelenkte Lage. Zwischen Fahrzeug und Fahrweg werden damit lediglich die dynamischen und nicht die statischen Kontaktkräfte aus dem Eigengewicht des Fahrzeuges übertragen. Zur Richtigstellung der Formulierung werden statischen Achslasten als äußere Kräfte mit eingeführt, die sich zeit- und ortsgleich mit den Radaufstandspunkten bewegen. Die Achslasten $P_{gesamt,j}(t)$ ergeben sich dann zu:

$$P_{gesamt,j}(t) = P_{stat,j} + P_{dyn,j}(t) \quad (2.1)$$

Die statische Durchsenkung der Brücke infolge ihres Eigengewichtes wird somit zunächst nicht für die Berechnung berücksichtigt. Sie kann jedoch formal in die Straßenrauigkeit mit einbezogen werden.

2.3 Formulierung des Fahrzeugs als „constrained system“

2.3.1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Das Fahrzeug wird zunächst vom Fahrweg getrennt betrachtet. Dafür ist sicherzustellen, daß die Radaufstandspunkte des Fahrzeuges der Brückenoberfläche folgen. Hier wird aus Gründen der Übersichtlichkeit vereinfachend angenommen, daß sich die Radaufstandspunkte direkt über einem Knotenpunkt befinden. Der allgemeine Fall beliebiger Radstellungen wird in 2.7 (Verschiebungskompatibilität) behandelt. Weiterhin kann die Beschreibung der orts- und zeitabhängigen Größen in eine reine zeitabhängige Beschreibung transformiert werden (Kapitel 2.5.3).

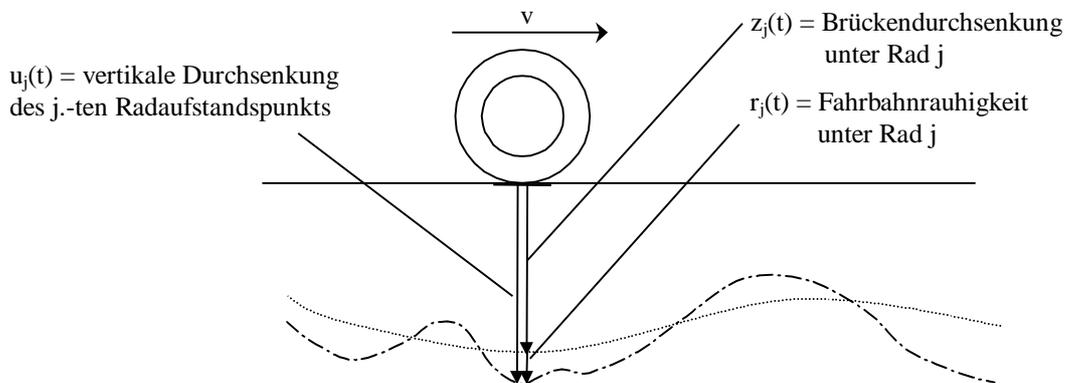


Abbildung 2.2: Kompatibilitätsbedingung am Radaufstandspunkt

Für den Fall daß die Radaufstandspunkte direkt der Durchsenkung der Brückenoberfläche folgen ergeben sich die Koppelbedingungen g_j :

$$g_j = u_j(t) - z_j(t) = 0 \quad (2.2)$$

Wird zusätzlich die Rauigkeit der Fahrbahn $r(x)$ mit berücksichtigt, so ergibt sich:

$$g_j : u_j(t) - z_j(t) - r_j(t) = 0 \quad (2.3)$$

Diese Koppelbedingung kann formal als Lagrangesche Nebenbedingung in die Formulierung des Fahrzeuges mit einbezogen werden. Systeme dieser Art werden aufgrund derart berücksichtigter Zwangsbedingungen auch als „constrained systems“ bezeichnet.

Die Herleitung der Bewegungsgleichung gelingt dann über das Hamiltonsche Prinzip nach:

$$L = T - U \quad \text{mit} \quad T = E_{Kin}, \quad U = E_{Pot} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{d} \int_{t_0}^{t_1} L dt = \mathbf{d} \int_{t_0}^{t_1} T - U dt = 0 \quad (2.5)$$

Damit ergibt sich die Euler-Lagrangesche Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.6)$$

Mit:

$\mathbf{q} :=$ Vektor der unbekanntenen Lagekoordinaten der Systeme

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen g_j kann die Euler-Lagrangesche Bewegungsgleichung erweitert werden zu:

$$\mathbf{d} \int_{t_0}^{t_1} L^* dt = \mathbf{d} \int_{t_0}^{t_1} \left(T - U + \sum_{j=1}^m \mathbf{l}_j g_j \right) dt = 0 \quad (2.7)$$

\mathbf{l} entspricht hierbei den Lagrangeschen Multiplikatoren. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung des Systems mit Festhaltungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w})}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right) - \frac{\partial L^*(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 0 \quad (2.8)$$

Der Vektor der Freiheitsgrade \mathbf{q} erweitert sich dabei um die Lagrangeschen Parameter \mathbf{l} zum Vektor aller Unbekannten des Systems \mathbf{w} . Nichtkonservative Kräfte \mathbf{R}_{nc} können über das Prinzip der virtuellen Arbeiten in Gleichungen (2.6) bzw. (2.8) mit einbezogen werden:

$$\mathbf{R}_{nc} = \frac{d}{d(\mathbf{d}\mathbf{q})} (\mathbf{W}_{nc}(\mathbf{d}\mathbf{q})) \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w})}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right) - \frac{\partial L^*(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{R}_{nc} \quad (2.10)$$

Mit dem Differentialoperator s :

$$s = \frac{d}{dt} \quad (2.11)$$

Für die kinetische Energie T

$$T = E_{kin} = \frac{1}{2} m_o \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_u \dot{u}^2 \quad (2.13)$$

sowie für die potentielle Energie U ergibt sich::

$$U = E_{pot} = \frac{1}{2} k (z - u)^2 \quad (2.14)$$

Die Lagrangesche Nebenbedingung lautet:

$$\mathbf{I} (u - z_{Br,i} - r) = 0 \quad (2.15)$$

Die nichtkonservativen Dämpferkräfte:

$$\begin{aligned} R_{nc,z} &= -c(\dot{z} - \dot{u}) \\ R_{nc,u} &= -c(\dot{u} - \dot{z}) \\ R_{nc,I} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Anwendung der Euler-Lagrange Gleichung (2.10) liefert die einzelnen Zeilen des Systems der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial z} = R_{nc,z} : \quad m_o \ddot{z} + k(z - u) = -c(\dot{z} - \dot{u}) \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial u} = R_{nc,u} : \quad m_u \ddot{u} + k(u - z) - \mathbf{I} = -c(\dot{u} - \dot{z}) \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{I}}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{I}} = R_{nc,I} : \quad u = z_{Br,i} + r \quad (2.19)$$

Damit die Hamiltonsche Formulierung (2.7) konsistent ist, muß folgender Zusammenhang zwischen dem Lagrangeschen Parameter λ und der dynamischen Radlast P_{dyn} gelten, wenn P_{dyn} als Druckkraft definiert wird:

$$\mathbf{I} = -P_{dyn} \quad (2.20)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & m_u s^2 + c s + k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{Br,i}(t) + r(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.4 Differentialgleichung der Brücke

Infolge der Trennung des gekoppelten Systems Fahrzeug – Fahrweg in zwei Teilsysteme kann die Ableitung der beschreibenden Differentialgleichung der Brücke ebenfalls getrennt erfolgen:

Neben der mitgeführten statischen Achslast $P_{stat,j}$ existiert mit der dynamischen Achslast $P_{dyn,j}$ ein weiterer Lastanteil:

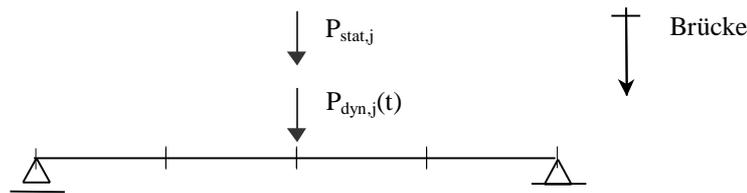


Abbildung 2.3: Diskretisiertes Brückenmodell, Belastung

Die Formulierung der Differentialgleichungen mittels des Hamiltonschen Prinzips für ein räumlich diskretisiertes Brückenmodell liefert:

$$\left[\mathbf{M}_{Br.} s^2 + \mathbf{C}_{Br.} s + \mathbf{K}_{Br.} \right] \begin{Bmatrix} Dof_{Brücke, \text{ unbelastet}} \\ Dof_{Brücke, \text{ belastet}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{stat, j} + P_{dyn, j}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

2.5 Eintrag der Koppelkräfte in den Fahrweg

Bis jetzt wurde vereinfachend davon ausgegangen, daß sich die Räder des Fahrzeugs zu jedem Zeitpunkt ortsgleich zu einem Knoten des Brückenmodells befinden. Bei Finite Elemente Formulierungen können die Lasten nur in Knoten des Modells eingetragen werden. Dies würde jedoch eine extrem feine Diskretisierung der Fahrbahnoberfläche erfordern, was wegen der großen Anzahl der daraus resultierenden Freiheitsgrade in der Praxis nicht realisierbar und sinnvoll ist. Zur Umrechnung von Lasten innerhalb eines Elementes auf Knotenbelastungen bietet sich die Verwendung von Einflußlinien für Randschnittgrößen an. Diese liefern die Randschnittgrößen eines Elements infolge einer ortsveränderlichen Belastung im Inneren. Damit ist das Ziel erreicht, denn diese Randschnittgrößen führen auf die gesuchten Knotenbelastungen.

Zur Bestimmung der Knotenbelastungen einer sich über das gesamte FE Netz bewegendes Last sind drei Bereiche zu unterscheiden:

1. Die Last befindet sich im Einflußbereich vor dem betrachteten Knoten.
2. Die Last befindet sich im Einflußbereich hinter dem betrachteten Knoten.
3. Die Last befindet sich außerhalb des Einflußbereiches des Knoten.

Damit kann die globale Einflußlinie für Knotenlasten beschrieben werden.

Weiterhin wird zur dynamischen Berechnung eine Beschreibung im Zeitbereich benötigt. Alle vom Ort abhängigen Größen wie z.B. die Ortskoordinate x_j des j -ten Rades werden daher in den Zeitbereich transformiert.

2.5.1 Lokale Einflußlinien für Randschnittgrößen

Die Ermittlung der Randschnittgrößen von Balken- bzw. Plattenelementen kann mittels Einflußlinien bzw. Einflußflächen durchgeführt werden. Die Einflußlinien liefern die Randschnittgröße eines Elements infolge der Belastung durch eine ortsveränderliche Einzellast. Die Richtung der Randschnittgröße wird dabei so gewählt, daß sich die Knotenlasten entsprechend der positiven Vorzeichendefinition ergeben.

Für (Euler-Bernoulli) Balken können die Einflußlinien für Randschnittgrößen analytisch ermittelt werden. Diese entsprechen den Hermitschen Interpolationspolynomen.

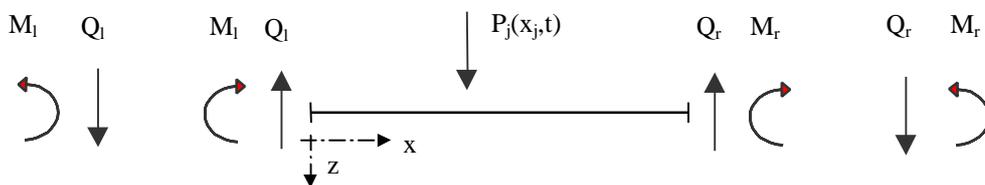
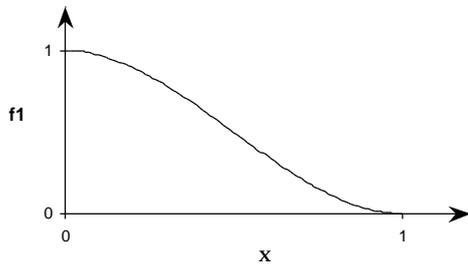


Abbildung 2.4: Randschnittgrößen und Knotenbelastungen aus Last im Element

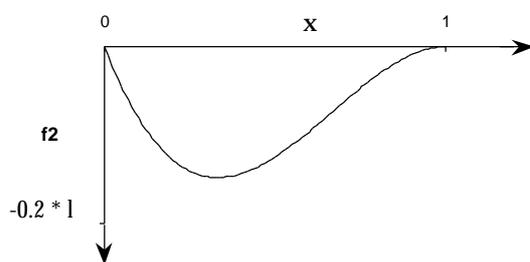
Für den beidseitig eingespannten Stab ergeben sich mit:

$$\mathbf{x} = \frac{x}{l} \quad (2.23)$$

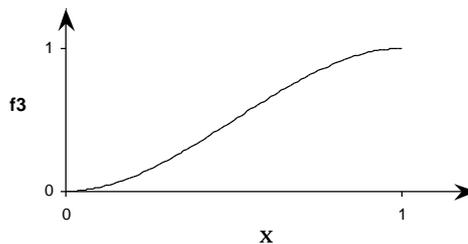
die vier Hermiteschen Polynome:



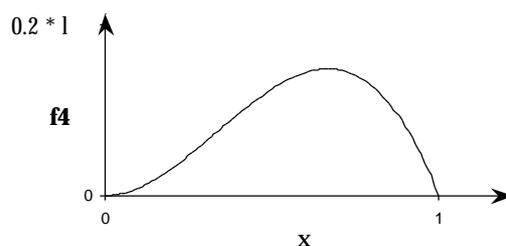
$$f1 := 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (2.24)$$



$$f2 := l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \quad (2.25)$$



$$f3 := 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (2.26)$$



$$f4 := l(\xi^2 - \xi^3) \quad (2.27)$$

Abbildung 2.5: Hermite Polynome

Mit dem Vektor der Ansatzfunktionen \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = \{1 - 3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}^3 \quad l(-\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3) \quad 3\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}^3 \quad l(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3)\} \quad (2.28)$$

berechnet sich der Vektor der Randschnittgrößen

$$\mathbf{q}^T = \{Q_l \quad M_l \quad Q_r \quad M_r\} \quad (2.29)$$

zu

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}^T P_j(x_j, t). \quad (2.30)$$

Sind im Fahrwegsmodell Gelenke oder freie Ränder enthalten, erfordert dies eine genauere Betrachtung. Hier ist es wichtig, daß zur Bestimmung der Knotenlasten die gleichen Ansatzfunktionen wie bei der FE-Formulierung der betreffenden Elemente verwendet werden. Elemente, bei denen das Kräftegleichgewicht am Gelenk bereits eingearbeitet ist, besitzen entsprechend weniger Freiheitsgrade. Zur Berechnung der betreffenden Knotenschnittgrößen sind dann entsprechende Funktionen zu verwenden. So ergibt sich für ein Balkenelement mit einem Gelenk am rechten Rand:

$$\mathbf{q}^T = \{Q_l \quad M_l \quad Q_r\}, \quad \mathbf{N} = \left\{ 1 - \frac{3}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 \quad -l(\mathbf{x} - \frac{3}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{x}^3) \quad \frac{3}{2}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 \right\}. \quad (2.31)$$

Und für Balkenelemente mit einem Gelenk am linken Rand:

$$\mathbf{q}^T = \{Q_l \quad Q_r \quad M_r\}, \quad \mathbf{N} = \left\{ 1 - \frac{3}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 \quad \frac{3}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 \quad l(\frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^3) \right\}. \quad (2.32)$$

Analoges gilt für freie Ränder. Da nun in Abhängigkeit vom Elementtyp verschiedene Lastinterpolationsfunktionen nötig sind, erschwert dies die Umsetzung. Daneben gehen die Freiheitsgrade der Randknotenverdrehung verloren, welche zur Verschiebungsinterpolation benötigt werden. Daher soll auf diese Variante verzichtet werden.

Für Plattenelemente sind die Einflußflächen analytisch nicht mehr ermittelbar. In Anhang A werden deshalb an einem FE-Modell die Einflußfunktionen für die Randschnittgrößen untersucht.

Die Aufteilung der Last in Knotenkräfte und Knotenmomente sowie eine sinnvolle Wahl der Ansatzfunktionen hat großen Einfluß auf die Genauigkeit der Interaktionssimulation.

2.5.2 Globale Einflußlinien für Knotenlastwirkungen

Bei der Bewegung einer Last über ein FE-Netz ist jeder Knoten die meiste Zeit unbelastet. Knotenlasten ergeben sich nur, solange sich die Last im Einflußbereich der Knotenschnittgröße vor (bzw. nach) dem Knoten befindet.

Bei Balkenelementen reicht der Einflußbereich bis zum jeweils nächsten Knoten. Jeder Knoten wird belastet, solange sich die Last in den beiden angrenzenden Elementen befindet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im weiteren nur Balkenelemente behandelt. Analoges gilt jedoch für Plattenelemente. Ansatzfunktionen für Plattenelemente werden in Anhang A ermittelt.

Die Kraft am Knoten kann, wie in 2.5.1 hergeleitet, ausgedrückt werden durch:

$$Q_i(x_j, t) = P_j(t)A_{i,j}(x_j) = (P_{stat,j} + P_{dyn,j}(t)) A_{i,j}(x_j) \quad (2.33)$$

mit
$$A_{i,j}(x_j) = \begin{cases} A_I(x_j) & \text{für } x_{i-1} \leq x_j < x_i \\ A_{II}(x_j) & \text{für } x_i \leq x_j < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.34)$$

und
$$A_I(x_j) = 3 \left(\frac{x_j - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_j - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^3$$

$$A_{II}(x_j) = 1 - 3 \left(\frac{x_{i+1} - x_j}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_{i+1} - x_j}{x_{i+1} - x_i} \right)^3 . \quad (2.35)$$

Das Moment am Knoten i ergibt sich aus:

$$M_i(x_j, t) = P_j(t)B_{i,j}(x_j) = (P_{stat,j} + P_{dyn,j}(t)) B_{i,j}(x_j) \quad (2.36)$$

mit
$$B_{i,j}(x_j) = \begin{cases} B_I(x_j) & \text{für } x_{i-1} \leq x_j < x_i \\ B_{II}(x_j) & \text{für } x_i \leq x_j < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.37)$$

und
$$B_I(x_j) = (x_i - x_{i-1}) \left[\left(\frac{x_j - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \left(\frac{x_j - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^3 \right]$$

$$B_{II}(x_j) = (x_{i+1} - x_i) \left[- \left(\frac{x_{i+1} - x_j}{x_{i+1} - x_i} \right) + 2 \left(\frac{x_{i+1} - x_j}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 - \left(\frac{x_{i+1} - x_j}{x_{i+1} - x_i} \right)^3 \right]. \quad (2.38)$$

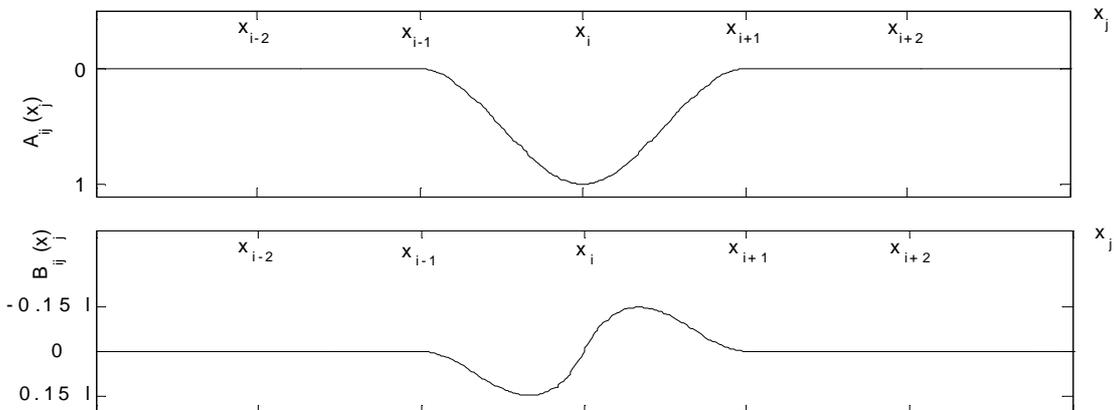


Abbildung 2.6: Ansatzfunktionen $A_{ij}(x_j)$, $B_{ij}(x_j)$ entlang eines Abschnittes des Überfahrweges

2.5.3 Transformation in den Zeitbereich

Bisher sind in der Beschreibung der Interaktion neben ortsabhängigen Größen (Ansatzfunktionen) auch zeitabhängigen Größen (Freiheitsgrade des Fahrzeug- und Brückenmodells) enthalten. Diese sind vor der dynamischen Berechnung in eine zeitabhängige Beschreibung zu überführen. Dabei wird folgende Notation gewählt: Die ortsfeste Position der Brückenknoten x_i wird überführt in den Zeitpunkt $t_{i,j}$ (=Zeitpunkt an dem das Rad j den Knoten i an der Position x_i erreicht). Genauso bezeichnen:

$t_{i-1,j}$ =Zeitpunkt an dem die Last j den Knoten $i-1$ erreicht

$t_{i+1,j}$ =Zeitpunkt an dem die Last j den Knoten $i+1$ erreicht

Die Transformation kann wie folgt durchgeführt werden. Ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ortsabhängig durch $v(x)$ gegeben, so folgt aus

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{v} \quad (2.39)$$

die Transformationsbeziehung

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}. \quad (2.40)$$

Für eine konstante Fahrgeschwindigkeit v_0 und $t_0=0$, $x_0=0$ vereinfacht sich diese zu

$$t(x) = \frac{x}{v_0}. \quad (2.41)$$

Damit ergibt sich die ortsvariante Koordinate x_j :

$$x_j = t v_0 - d_{1,j} \quad (2.42)$$

mit $d_{1,j}$ =Abstand zwischen Achse 1 und Achse j des Fahrzeugs, sowie für die ortsfeste Koordinate x_i

$$x_i = t_{i,j} v_0 - d_{1,j}. \quad (2.43)$$

Die Lastwirkung auf den Brückenknoten i infolge der Radlast $P_j(t)$ des j -ten Radaufstandspunktes ist dann:

$$P_i(t) = P_j(t) A_{i,j}(t) = (P_{stat,j} + P_{dyn,j}(t)) A_{i,j}(t) \quad (2.44)$$

mit

$$A_{i,j}(t) = \begin{cases} A_I(t) & \text{für } t_{i-1,j} \leq t < t_{i,j} \\ A_{II}(t) & \text{für } t_{i,j} \leq t \leq t_{i+1,j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.45)$$

und

$$A_I(t) = 3 \left(\frac{t - t_{i-1,j}}{t_{i,j} - t_{i-1,j}} \right)^2 - 2 \left(\frac{t - t_{i-1,j}}{t_{i,j} - t_{i-1,j}} \right)^3$$

$$A_{II}(t) = 1 - 3 \left(\frac{t - t_{i,j}}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} \right)^2 + 2 \left(\frac{t - t_{i,j}}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} \right)^3 \quad (2.46)$$

Für das Moment am Knoten i erhält man

$$M_i(t) = P_j(t) B_i(t) = B_i(t) (P_{stat,j} + P_{dyn,j}(t))$$

mit

$$B_{i,j}(t) = \begin{cases} B_I(t) & \text{für } t_{i-1,j} \leq t < t_{i,j} \\ B_{II}(t) & \text{für } t_{i,j} \leq t \leq t_{i+1,j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.47)$$

und

$$B_I(t) = (t_{i,j} - t_{i-1,j}) v \left[\left(\frac{t - t_{i-1,j}}{t_{i,j} - t_{i-1,j}} \right)^2 - \left(\frac{t - t_{i-1,j}}{t_{i,j} - t_{i-1,j}} \right)^3 \right]$$

$$B_{II}(t) = (t_{i+1,j} - t_{i,j}) v \left[- \left(\frac{t - t_{i,j}}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} \right) + 2 \left(\frac{t - t_{i,j}}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} \right)^2 - \left(\frac{t - t_{i,j}}{t_{i+1,j} - t_{i,j}} \right)^3 \right] \quad (2.48)$$

2.5.4 Superposition der Radlasten

Ein Fahrzeug mit mehreren Achsen belastet die Brückenknoten mehrmals hintereinander. Die Einflüsse der einzelnen Achsen sind hier zu superponieren. Befinden sich mehrere Radlasten innerhalb eines Elements können nach dem Superpositionsprinzip für lineare Systeme die Knotenlastgrößen ebenfalls addiert werden. In der Regel wird jedoch die Elementlänge des Fahrwegs kleiner als der minimale Radabstand des Fahrzeugs sein. Des weiteren werden zahlreiche Knoten nicht direkt durch die Radlast belastet. Für diese werden deshalb auch keine Ansatzfunktionen benötigt. Der Lastvektor für alle Brückenknoten ergibt sich in symbolischer Darstellung zu:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} Q_{\text{belasteter Knoten 1}} \\ M_{\text{belasteter Knoten 1}} \\ \vdots \\ Q_{\text{belasteter Knoten l}} \\ M_{\text{belasteter Knoten l}} \\ Dof_{\text{unbelastet}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m (P_{\text{stat},j} + P_{\text{dyn},j}(t)) A_{1,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m (P_{\text{stat},j} + P_{\text{dyn},j}(t)) B_{1,j}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m (P_{\text{stat},j} + P_{\text{dyn},j}(t)) A_{l,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m (P_{\text{stat},j} + P_{\text{dyn},j}(t)) B_{l,j}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

2.5.5 Formulierung der Brückenbelastung

Die Belastung der Brücke erfolgt durch die statischen und durch die dynamischen Radlasten. Im Gegensatz zu den statischen Radlasten stellen die dynamischen Radlasten Unbekannte des Systems dar. Deshalb kann die Belastung sinnvollerweise in zwei Anteile aufgetrennt werden. Einen Lastvektor P_0 , welcher die statischen Radlasten beinhaltet, sowie eine Interaktionsmatrix K_{int} , welche linear von den dynamischen Radlasten abhängig ist und deshalb die Form einer Steifigkeitsmatrix besitzt:

$$\mathbf{P}_{Br}(t) = \mathbf{P}_{0Br}(t) + \mathbf{K}_{\text{int}Br}(t) \mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m P_{\text{stat},j} A_{1,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m P_{\text{stat},j} B_{1,j}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m P_{\text{stat},j} A_{l,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m P_{\text{stat},j} B_{l,j}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{1,1}(t) & \cdots & A_{1,m}(t) \\ B_{1,1}(t) & \cdots & B_{1,m}(t) \\ 0 & 0 & \vdots \\ A_{l,1}(t) & \cdots & A_{l,m}(t) \\ B_{l,1}(t) & \cdots & B_{l,m}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Dof_{\text{Brücke}} \\ Dof_{\text{Fahrzeug}} \\ P_{\text{dyn},1}(t) \\ \vdots \\ P_{\text{dyn},m}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

2.6 Fahrbahnrauigkeit

Die Fahrbahnrauigkeit kann entweder real gemessen werden oder es wird ein statistisch generierter Rauigkeitsverlauf verwendet. Ist die Fahrbahnrauigkeit in diskreten Punkten gegeben ($r(x_j)$ =Rauigkeit an der Stelle des Rades j) so ergibt sich durch Transformation in den Zeitbereich $r(t)$ mit $v=const$:

$$x_j = t v - d_{1,j}. \quad (2.51)$$

Die von den Systemfreiheitsgraden unabhängige Anregung $r_j(t)$ für alle Räder j kann in den Lastvektor P_0 eingebracht werden

$$P_{0Fz,Rauhigkeit}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r_{j=1}(t) \\ \vdots \\ r_{j=m}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.52)$$

2.7 Verschiebungskompatibilität zwischen Fahrzeug und Fahrweg

2.7.1 Allgemeine Formulierung

Während der Fahrt eines Fahrzeuges über eine Brücke folgen die Räder der Brückenoberfläche. Im Rechenmodell wird dies über die Verschiebungskompatibilitätsbedingung sichergestellt. Diese bewirkt, daß die Durchsenkung der Radaufstandspunkte der Summe aus Brückendurchsenkung und Fahrbahnrauigkeit entspricht (Abbildung 2.7)

Bei einer FE-Berechnung werden ausschließlich die Verschiebungen der FE-Knotenpunkte berechnet. Befindet sich ein Rad zwischen zwei Knoten, ist die Brückendurchsenkung $z_j(t)$ hier zunächst unbekannt. Diese kann aber aus den Knotenweggrößen der Nachbarknoten über eine Interpolation berechnet werden.

$$z_j(t) = f(z_{i-1}(t), \mathbf{j}_{i-1}(t), z_i(t), \mathbf{j}_i(t)) \quad (2.53)$$

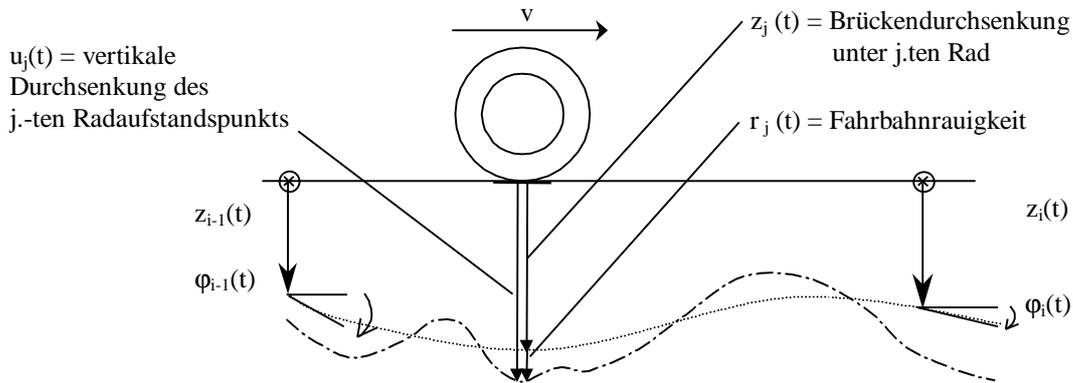


Abbildung 2.7: Kompatibilitätsbedingung am Radaufstandspunkt

Als Nebenbedingung ergibt sich nun:

$$u_j(t) = z_i(t) + r_j(t) \quad (2.54)$$

Die Interpolationsfunktionen müssen dabei folgende Anforderung erfüllen: Die mittels der Interpolationsfunktionen bestimmte Durchsenkung der Brückenoberfläche muß stetig differenzierbar sein. Unstetigkeiten (Sprünge, Knicke) würden für das Fahrzeug einen Anregungsmechanismus darstellen und damit zu fehlerbehafteten Berechnungsergebnissen führen.

Die Durchsenkung eines Brückenelements selbst ergibt sich aus der Durchsenkung infolge der Knotenverschiebung und der Deformation des Elements selbst infolge seiner direkten Belastung durch äußere wie durch auftretende Trägheitskräfte:

$$z_{ges}(t,x) = z_h(t,x) + z_d(t,x) + z_a(t,x) \quad (2.55)$$

Diese einzelnen Anteile werden in den nächsten Abschnitten näher erläutert.

2.7.2 Die Durchsenkung infolge Knotenverschiebung $z_h(t,x)$

Die Durchsenkung infolge Knotenverschiebung beschreibt die Deformation eines Elementes infolge der Verschiebungen und Verdrehungen der angrenzenden Knotenpunkte. Sie entspricht dem Verlauf der Biegelinie eines im Feld unbelasteten Elements infolge der Verschiebung der Knotenfreiheitsgrade.

Nach dem Prinzip von Müller-Breslau sind die Biegelinien infolge der Auslenkung einer Knotenweggröße und die Einflußlinie der korrespondierenden Knotenschnittgröße identisch. Damit können hier die gleichen Ansatzfunktionen wie zur Lastinterpolation (2.5) angewendet werden.

$$z_{h_j}(x_j, t) = \sum_{i=1}^l A_{i,j}(x_j) z_i(t) + \sum_{i=1}^l B_{i,j}(x_j) \mathbf{j}_i(t) \quad (2.56)$$

Dabei ist z_i die Durchsenkung und \mathbf{j}_i die Verdrehung aller Fahrwegsknoten i . Für Balkenelemente entsprechen $A_{i,j}(t)$ und $B_{i,j}(t)$ den aus den Hermite Polynomen abgeleiteten Ansatzfunktionen. Für andere Elementtypen ist es wiederum erforderlich, geeignete Interpolationsfunktionen herzuleiten (siehe Anhang A). Wiederum sind die gefundenen Beziehungen in den Zeitbereich zu transformieren:

$$z_{h_j}(t) = \sum_{i=1}^{i=l} A_{i,j}(t) z_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} B_{i,j}(t) \mathbf{j}_i(t). \quad (2.57)$$

Die Durchsenkung infolge Knotenverformung ist linear von den Verschiebungen/ Verdrehungen der Brückenknoten abhängig. Sie liefert daher einen weiteren Anteil zur Interaktionsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\text{int } F_z}(t) \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 & 0 \\ & 0 & & & & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ A_{1,1}(t) & B_{1,1}(t) & \dots & A_{l,1}(t) & B_{l,1}(t) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ A_{1,m}(t) & B_{1,m}(t) & \dots & A_{l,m}(t) & B_{l,m}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{\text{KnotenÜberfahrt},1} \\ \mathbf{j}_{\text{KnotenÜberfahrt},1} \\ \vdots \\ z_{\text{KnotenÜberfahrt},l} \\ \mathbf{j}_{\text{KnotenÜberfahrt},l} \\ \text{Dof}_{\text{unbelastet}} \\ \text{Dof}_{F_z} \\ P_{\text{dyn},j} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Ein Beitrag zum Lastvektor ergibt sich nicht: $\mathbf{P}_{h_{F_z}} = 0 \quad (2.59)$

Bemerkung zum Zusammenhang der Einflußlinie für Randschnittgrößen und der Biegelinie infolge Knotenverformung: Nach dem Prinzip von Müller-Breslau ergibt sich die Einflußlinie für eine Kraftgröße durch Freischneiden dieser Kraftgröße und Aufbringen einer Einheitsverformung entgegen der Richtung der gesuchten Kraftgröße. Die sich einstellende Biegelinie entspricht der Einflußlinie der Kraftgröße. Damit sind die Einflußlinie für eine Kraftgröße und die Biegelinie der korrespondierenden Knotenverformung identisch.

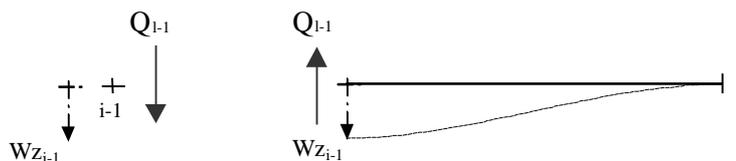


Abbildung 2.8: Einflußlinie Q_{i-1} und Biegelinie $w_{z_{i-1}}$

2.7.3 Die Verformung des Elements aus seiner direkten Belastung $z_d(t)$

Dieser Anteil erfaßt die Verformungen, die durch eine Belastung des Elements im Inneren an der Stelle $x_{j,e}$ zusätzlich entstehen. Sie entspricht also der Biegelinie des durch eine zeitlich veränderliche Einzellast belasteten, beidseitig eingespannten Trägers:

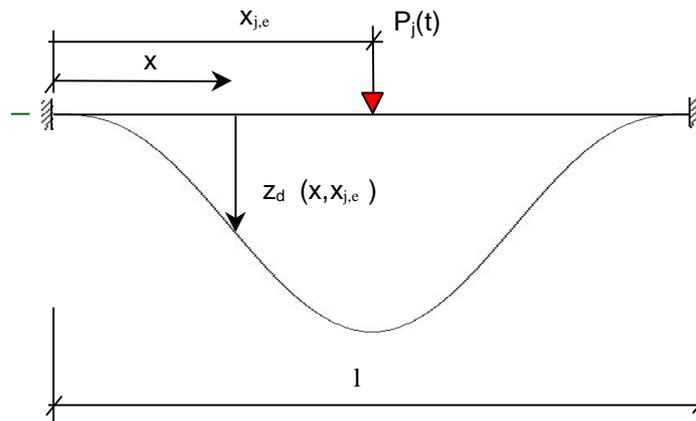


Abbildung 2.9: Durchsenkung aus direkter Belastung

[Ripke 1995] gibt für dieses Problem die folgende Lösung an:

$$z_d(x, x_{j,e}) = \begin{cases} w_l(x) & \text{für } x < x_{j,e} \\ w_r(x) & \text{für } x \geq x_{j,e} \end{cases} \quad (2.60)$$

mit

$$w_l(x, x_{j,e}, t) = \frac{P_j(t) l^3}{6EI} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 \left\{ -2 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^2 - 1 \right\} + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left\{ 3 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^3 - 6 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^2 + 3 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right) \right\} \right] \quad (2.61)$$

$$\text{und } w_r(x, x_{j,e}, t) = -\frac{P_j(t) x_{j,e}^2}{6EI} \left[(2x_{j,e} - 3l) \left(\frac{x}{l} \right)^3 - (3x_{j,e} - 6l) \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 3l \left(\frac{x}{l} \right) + x_{j,e} \right] \quad (2.62)$$

Wird nur die Durchsenkung unter dem Radaufstandspunkt gesucht, so vereinfachen sich die Gleichungen (2.61) und (2.62) zu:

$$z_d(x_{j,e}, t) = \frac{P_j(t) x_{j,e}^3}{3EI} \left[1 - \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x_{j,e}}{l} \right) \right] \quad (2.63)$$

Die Transformation in eine zeitvariante Formulierung liefert mit:

$$x_{j,e} = x_j - x_i = t v_0 - d_{1,j} - t_{i,j} v_0 + d_{1,j} = (t - t_{i,j}) v_0 \quad (2.64)$$

$$z_d(t) = P_j(t) C_{i,j}(t) \quad (2.65)$$

$$C_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{[(t-t_{i,j})v]^3}{3EI_i} \left[1 - \left[\frac{(t-t_{i,j}) \cdot v}{l} \right]^3 + 3 \left[\frac{(t-t_{i,j})v}{l} \right]^2 - 3 \left[\frac{(t-t_{i,j})v}{l} \right] \right] & \text{für } t_{i,j} \leq t \leq t_{i+1,j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.66)$$

Die Ansatzfunktion $C(t)$ ergibt sich aus der Summe der Ansatzfunktionen $C_{i,j}(t)$ für alle Knoten:

$$z_{d,j}(t) = P_j(t) \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j}(t) = (P_{j,stat} + P_{j,dyn}(t)) \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j}(t). \quad (2.67)$$

Die Durchsenkung im Element infolge der statischen Radlast liefert einen Beitrag zum Lastvektor des Systems, die Durchsenkung infolge der dynamischen Radlast liefert einen Anteil zur Interaktionsmatrix:

$$\mathbf{P}_{z_d Fz}(t) = \mathbf{P}_{0z_d Fz}(t) + \mathbf{K}_{int z_d Fz}(t) \mathbf{w}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=1}(t) P_{stat,j=1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=m}(t) P_{stat,j=m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & \\ & \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=1}(t) & & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=m}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Dof_{Brücke} \\ Dof_{Fz} \\ P_{dyn,1}(t) \\ \vdots \\ P_{dyn,m}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.68)$$

Für die Durchsenkung einer Platte unter einer Last hingegen existiert keine analytische Lösung mehr. Eine Möglichkeit besteht z.B. durch die Abschätzung einer mitwirkenden Plattenbreite.

Bei der hier verwendeten Vorgehensweise ist darauf zu achten, daß sich nur ein Rad im betrachteten Element befindet. Diese Forderung ist mit ausreichend kurzen Elementen erfüllbar. Befinden sich mehrere Radlasten innerhalb eines Elements ist eine Superposition der Verschiebungen erforderlich.

Bei einer ausreichend feinen Elementierung kann z_d gegenüber dem homogenen Anteil vernachlässigt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, daß sich dadurch ein welliger Verlauf der Biegelinie ergibt. Die Wellenlänge entspricht dabei der Länge der Fahrwegselemente (siehe Abbildung 2.9). Dies kann eine zusätzliche Anregung des Fahrzeugs bewirken. Zur Vermeidung dieses Effekts sollte der Anteil aus der direkten Belastung des Elements mit berücksichtigt werden.

2.7.4 Die Durchsenkung aus Trägheitskräften des Elements $z_a(t)$

Die Durchsenkung aus Trägheitskräften des Elements erfasst zusätzliche Durchsenkungsanteile im Element infolge der wirkenden Trägheitsbelastung. Die Trägheitskraft ergibt sich nach d'Alembert aus der Massebelegung μ sowie der vorhandenen Beschleunigung. Die Trägheitskraft kann als äußere, den Beschleunigungen entgegengerichtete Kraft angesetzt werden.

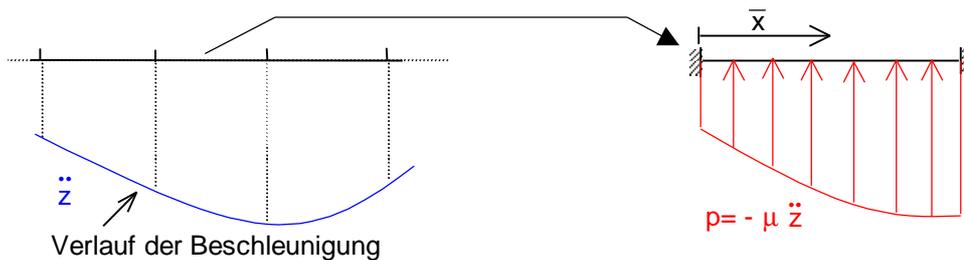


Abbildung 2.10: Trägheitskräfte nach d'Alembert

Die zusätzlich anzusetzende Belastung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 p_a(\bar{x}, t) &= -\ddot{z}(\bar{x}, t) \mathbf{m} = -\mathbf{m} [z_h(\bar{x}, t) + z_d(\bar{x}, t) + z_a(\bar{x}, t)]'' = \\
 &= -\mathbf{m} \left[\begin{matrix} \{A_i(t), B_i(t), A_{i+1}(t), B_{i+1}(t)\} \\ \left\{ \begin{matrix} \ddot{w}_i(t) \\ \mathbf{J}_i(t) \\ \ddot{w}_{i+1}(t) \\ \mathbf{J}_{i+1}(t) \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right] + \ddot{z}_d(\bar{x}, t) + \ddot{z}_a(\bar{x}, t). \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist nur der erste Summand problemlos ermittelbar.

Hinweis: Mit der angegebenen Formulierung kann mittels des Hamiltonschen Prinzips über die Aufstellung der Potentialausdrücke die Massenmatrix hergeleitet werden.

Zur Ermittlung des zweiten Summanden kann dieser nach (2.63) wie folgt geschrieben werden:

$$z_d(x_{j,e}, t) = f(x_{j,e}) P_j(t). \quad (2.70)$$

Als Näherung zur Berechnung kann folgende Beziehung verwendet werden:

$$\ddot{z}_d(x_{j,e}, t) = f(x_{j,e}) \ddot{P}_j(t). \quad (2.71)$$

$\ddot{P}(t)$ entspricht der zweiten Ableitung der dyn. Last und kann durch numerische Differentiation gewonnen werden [Ripke 1995].

und über den Lastvektor $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{P}_{0\text{Brücke}}(t) + \mathbf{P}_{0z_d Fz}(t) + \mathbf{P}_{0Fz, \text{Rauhigkeit}}(t) \quad (2.78)$$

$$\left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^m P_{stat,j} A_{1,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m P_{stat,j} B_{1,j}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m P_{stat,j} A_{l,j}(t) \\ \sum_{j=1}^m P_{stat,j} B_{l,j}(t) \\ \dots \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=1}(t) P_{stat,j=1} + r_{j=1}(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=l} C_{i,j=m}(t) P_{stat,j=m} + r_{j=m}(t) \end{array} \right] \cdot \quad (2.79)$$

2.9 Abschließende Bemerkungen

Bei der Differentialgleichung der Interaktion handelt es sich um ein lineares, inhomogenes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Die Massen-, die Dämpfung- und die Steifigkeitsmatrix sind zeitinvariant. Die Interaktionsmatrix ist zeitvariant.

Durch die Einbeziehung der dynamischen Radlasten in die Formulierung entstehen singuläre Matrizen. Die Massenmatrix und die Dämpfungsmatrix sind singulär. Die Summe aus Steifigkeitsmatrix und Interaktionsmatrix (ist der Form nach als Steifigkeitsmatrix zu behandeln) ist regulär. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist immer regulär. Das sich aus Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen zusammensetzende System wird als System algebraischer Differentialgleichungen bezeichnet.

Nach dem Prinzip von Müller-Breslau (Abschnitt 2.7.2) sind die Lastinterpolationsfunktionen und die Verschiebungsinterpolationsfunktionen identisch. Die Steifigkeitsmatrix ist daher symmetrisch.

Die in diesem Kapitel entwickelte Vorgehensweise kann als Vollsimulation bezeichnet werden, d.h. es wird in jedem Zeitschritt das gekoppelte System Fahrzeug-Fahrweg betrachtet. Im Gegensatz dazu existieren zahlreiche Co-Simulationstechniken, welche beide Systeme getrennt behandeln. Die in beiden Teilsystemen vorkommenden Unbekannten werden bei der Co-Simulation am Ende jedes Zeitschrittes verglichen. Falls erforderlich wird dieser Prozeß iterativ wiederholt.

Ein Vorteil der hier entwickelten Beschreibung ist die breite Anwendungsmöglichkeit. Beliebige Fahrzeug-Fahrweg Interaktionen können damit simuliert werden. Lediglich der Fahrweg wie auch das Fahrzeug müssen als FE-Modell vorliegen. Da beide Modelle in der Steifigkeitsmatrix voneinander getrennt sind, können sie mittels der Importierungsmöglichkeiten des verwendeten FE-Programms zusammengebunden werden. Die zeitvariante Interaktionsmatrix sowie die Ansatzfunktionen können mit kommerziellen FE-Programmen (z.B. MSC Nastran) in der Regel beschrieben werden. Die Formulierung ist außerdem zeiteffizient, da die Gesamtsteifigkeitsmatrix zeitinvariant ist (und somit nur einmal bestimmt werden muß) und nur die schwach besetzte Interaktionsmatrix für jeden Integrationsschritt neu bestimmt werden muß.

3 Algebraische Differentialgleichungen

3.1 Allgemeines

Algebraische Differentialgleichungen (differential algebraic equations, DAE's) sind Gleichungssysteme, in denen neben Differentialgleichungen zusätzlich algebraische Gleichungen auftreten. Für algebraische Gleichungen ist in diesem Sinne kennzeichnend, daß sie keine Ableitungen der Freiheitsgrade enthalten. DAE's treten in mehreren Bereichen wie der Simulation chemischer Prozesse, der Fluidsimulation, elektrischen Netzwerken und bei der Modellierung von Starrkörpersystemen auf.

Die theoretische und numerische Behandlung von differentiell-algebraischen Systemen ist ein junges Forschungsgebiet der Mathematik. Das Lösungsverhalten dieser Systeme unterscheidet sich in starkem Maße von dem gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Die zeitliche Diskretisierung kann infolge schlecht konditionierter linearer Gleichungssysteme zu großen numerischen Schwierigkeiten führen. Klassische Fehlerabschätzungsmethoden zur Schrittweitensteuerung sind unter Umständen nicht mehr anwendbar. Unbedingt stabile Zeitintegrationsverfahren können instabil werden [Eich, Führer 1995]. Deswegen können klassische numerische Methoden zur numerischen Lösung von lediglich einiger Typen von DAE's verwendet werden [Brenan, Campbell, Petzold 1989].

Die ersten Methoden zur Lösung von DAE's beruhen auf der Beobachtung, daß BDF (backward differentiation formulas) Methoden, ähnlich wie auf steife Differentialgleichungen, auf algebraische Differentialgleichungen angewendet werden können. Erste Anwendungen waren Schaltkreise. Später wurden DAE's mechanischer Systeme untersucht. Hier ergaben sich numerische Probleme, da mechanische Systeme deutlich schwieriger als elektrische Netzwerke zu lösen sind. Dies führte zur Entwicklung komplizierter Lösungstechniken. So setzen sich die bekannten Lösungsverfahren für algebraische Differentialgleichungen neben der eigentlichen Zeitintegration oft auch aus anderen Komponenten (wie z.B. Projektionstechniken, Transformationsmethoden) zusammen. Jedoch existiert bis heute kein Verfahren, welches alle Typen von algebraischen Differentialgleichungen zu integrieren vermag. Für jede Technik müssen einige Bedingungen bezüglich der Struktur der DAE und der numerischen Methode erfüllt sein. Da die Entwicklung noch nicht abgeschlossen ist, stellen algebraische Differentialgleichungen einen aktuellen Forschungsbereich der Mathematik dar.

Algebraische Differentialgleichungen für mechanische Probleme werden bislang nur in der mathematischen Literatur behandelt. In diesem Kapitel soll ein Überblick über DAE's aus einer mechanischen Sichtweise gegeben werden. Weiterhin werden die wichtigsten Grundlagen zu Lösung differentiell - algebraischer Systeme zusammengestellt:

Zunächst soll beispielhaft aufgezeigt werden, welche numerischen Probleme bei der Zeitintegration von DAE's auftreten können. Danach wird die symbolische Darstellung mechanischer DAE's besprochen. Insbesondere wird zunächst gezeigt, wie mechanische Systeme mit Lagrangeschen Nebenbedingungen in der Formulierung für differentiell-algebraische Systeme dargestellt werden können. Deshalb soll, ausgehend von der Schreibweise mechanischer Systeme, deren Beschreibung in die in der Literatur gebräuchliche Beschreibung der differentiell-algebraischen Systeme überführt werden. Danach schließt eine Zusammenstellung der wichtigsten, in dieser Arbeit verwendeten Formen von DAE's an. Dies ist besonders wichtig, da zur Auswahl des Lösungsverfahrens die Form der DAE benötigt wird.

Das grundlegende Konzept zum Verständnis von DAE's ist deren Index. Der Differentiationsindex ist dabei ein Maß für die Schwierigkeit der Lösung der DAE. Dieser kann zwar verringert werden, auf der anderen Seite ergeben sich daraus neue Schwierigkeiten (Abdriften der Lösung).

Damit eine algebraische Differentialgleichung lösbar ist, müssen mehrere Voraussetzungen erfüllt sein. Diese werden in Kapitel 3.7 zusammengefaßt. Hier sei besonders darauf hingewiesen, daß mit der Erfüllung dieser Voraussetzungen lediglich die analytische Lösbarkeit einer DAE gegeben ist. Bei der numerischen Lösung ergeben sich weitere Probleme. Kennzeichnend dafür ist der Störungsindex.

Die oben angesprochenen Problempunkte ermöglichen einen Zugang zur Problematik der DAE's zu finden und analytische wie auch numerische Effekte in den Lösungen zu erkennen. Ein Kriterium zur Wahl des Lösungsverfahrens ist schließlich die Steifheit von Systemen. Weiterhin sollen Lösungsverfahren für differentiell-algebraische Systeme in kurzer Form zusammengefaßt und hinsichtlich ihrer Eignung auf die vorliegende Problematik untersucht werden.

3.2 Beispiele für Probleme bei der Zeitintegration von DAE's

Obwohl algebraische Differentialgleichungen (DAE) lediglich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) und zusätzlich einer oder mehreren algebraischen Gleichungen bestehen, unterscheidet sich ihr Lösungsverhalten stark von dem gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zeitintegrationsverfahren, die für gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelt wurden, können für DAE's nicht bedenkenlos angewendet werden.

Das für gewöhnliche Differentialgleichungen unbedingt stabile Newmark- β Zeitschrittverfahren mit $\mathbf{b}=\frac{1}{4}$ und $\mathbf{g}=\frac{1}{2}$ kann bei der Lösung von DAE's instabil werden. Dies kann am Beispiel des folgenden Einmassenschwingers gezeigt werden:

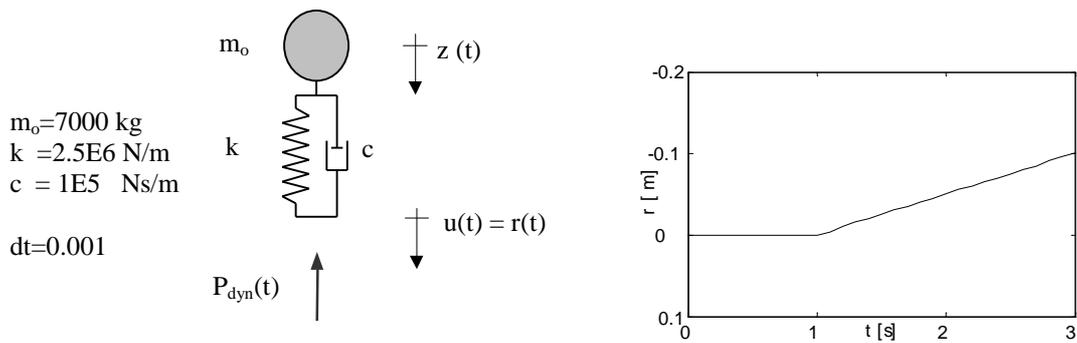


Abbildung 3.1: Einmassenschwingermodell, Anregungsfunktion $r(t)$

Der Einmassenschwinger entspricht dabei einem vereinfachten Modell eines Lkws, welches in der Literatur häufig für Simulationen verwendet wird. Da die Größe der Störungen von der Dämpferkonstante c abhängt, wurde diese zur Verdeutlichung der auftretenden Effekte sehr groß gewählt.

Die Zeitintegration des Einmassenschwingers unter der Anregung $r(t)$ liefert folgendes Ergebnis:

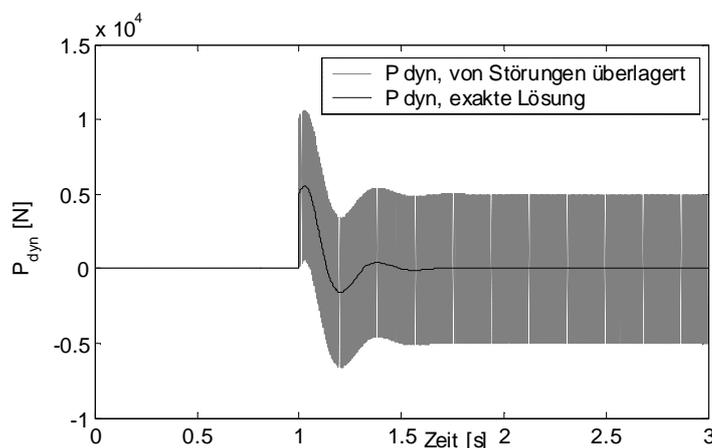


Abbildung 3.2: Berechnete Radlast und exakte Lösung

Es ergibt sich eine numerische Störung mit einer extrem hohen Frequenz in der dynamischen Radlast (Lagrangescher Multiplikator), welche die exakte Lösung überlagert.

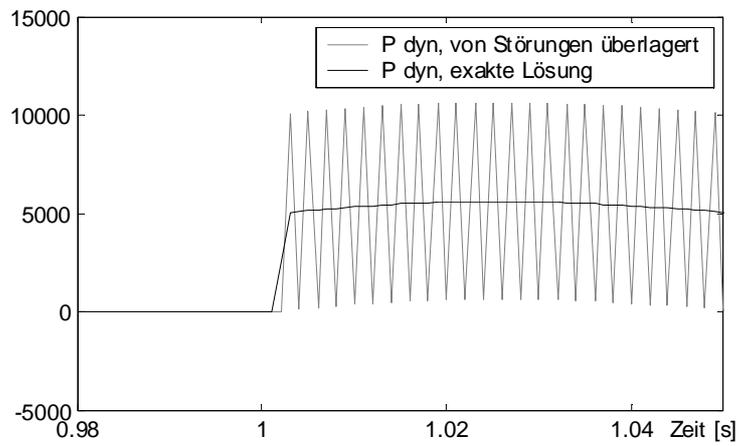


Abbildung 3.3: Ausschnitt aus Abbildung 3.2

Wird statt des Einmassenschwingers eine Einzelmass mit $m_0=7000 \text{ kg}$ verwendet, so wird die Lösung instabil:

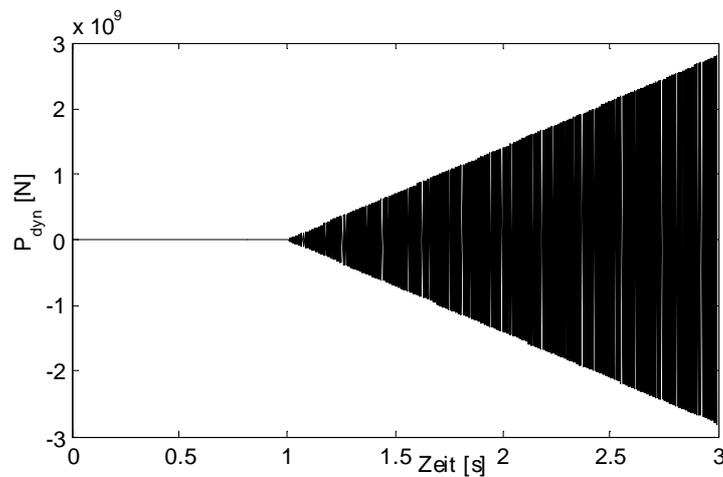


Abbildung 3.4: Dynamische Last zwischen Einzelmass und Untergrund

3.3 Symbolische Darstellung mechanischer DAE's

Die Schreibweisen für mechanische Differentialgleichungen und DAE's unterscheiden sich in einigen Punkten voneinander. Diese Unterschiede sollen hier aufgezeigt und erklärt werden.

Für mechanische Systeme besitzen die Bewegungsgleichungen die allgemeine Struktur

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{P}_0 \quad (3.1)$$

mit :

\mathbf{M} := Massenmatrix (positiv semidefinit) \mathbf{C} := Dämpfungsmatrix, \mathbf{K} := Steifigkeitsmatrix,
 \mathbf{P}_0 := Vektor der am System wirkenden Lasten, \mathbf{w} := Vektor der unbekanntenen Größen des Systems

Mechanische Systeme mit Zwangsbedingungen führen auf differentiell-algebraische Beschreibungen. Werden die Kraftwirkungen am System unterschieden in Kräfte infolge Massenträgheiten, Zwangskräfte \mathbf{f}_c und sonstige Kraftwirkungen \mathbf{f} so ergibt sich:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \quad (3.2)$$

\mathbf{f} := Vektor aller innerhalb des Systems wirkenden, oder von außen auf das System aufgebracht Kräfte mit Ausnahme der Lagrangeschen Multiplikatoren

\mathbf{f}_c := Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren (Zwangskräfte)

Die Trennung der Unbekannten \mathbf{w} des Systems in die Lagekoordinaten \mathbf{q} und die Lagrangeschen Multiplikatoren l sowie die Abspaltung der algebraischen Gleichungen von den Differentialgleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, ?) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit:

\mathbf{q} := Vektor der unbekanntenen Lagekoordinaten der Systeme

$?$:= Lagrangesche Multiplikatoren

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ Zwangsbedingungen des Systems

Für Zwangsbedingungen auf Lageebene (Verformungszwangsbedingungen) entfällt die Abhängigkeit der Zwangsbedingungen $\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, ?)$ von der Ableitung der Lagekoordinaten. $\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, ?)$ vereinfacht sich zu $\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, ?)$. Daneben ist der Vektor der Zwangskräfte linear von den Lagrangeschen Multiplikatoren abhängig. Somit kann \mathbf{f}_c geschrieben werden:

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, ?) = \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) ? \quad (3.4)$$

\mathbf{G}^T ist hierbei die Matrix der Zwangskräfte.

Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})? \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit:

$$\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (3.6)$$

Hinweis: Bei Zwangsbedingungen, welche neben den Freiheitsgraden des Systems zusätzlich eine Anregungsfunktion $r(t)$ enthalten, kann $r(t)$ formal in $\mathbf{g}(\mathbf{q})=0$ mit einbezogen werden.

(3.6) gilt dann ebenfalls, da $\frac{d\mathbf{r}(t)}{d\mathbf{q}} = 0$.

Da für die weiteren Ableitungen die differentiell-algebraische Schreibweise benötigt wird, soll diese am Beispiel des Einmassenschwingers aus Kapitel 2 verdeutlicht werden. Für diesen Einmassenschwinger lauten die Bewegungsgleichungen in mechanischer Form:

$$\begin{bmatrix} m_O & 0 & 0 \\ 0 & m_U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{u} \\ \ddot{P}_{dyn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{P}_{dyn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dabei sind z und u die Lagekoordinaten des Systems. P_{dyn} entspricht dem Lagrangeschen Multiplikator. Die Aufspaltung in die Kraftwirkungen \mathbf{f} und \mathbf{f}_c ergibt:

$$\begin{bmatrix} m_O & 0 \\ 0 & m_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cs-k & cs+k \\ cs+k & -cs-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} P_{dyn} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = [0 \quad -u] + r(t) \quad (3.9)$$

3.4 Formen von DAE's

Da algebraische Differentialgleichungen Sonderfälle gewöhnlicher Differentialgleichungen sind, werden zunächst in kurzer Form die wichtigsten Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben. Die Zusammenstellung der Typen algebraischer Differentialgleichungen ist aus Vollständigkeitsgründen ausführlich. Von besonderer Bedeutung für die Analysen in den folgenden Kapiteln ist die semiexplizite Form.

3.4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die allgemeine implizite Formulierung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung lautet:

$$F[t, \mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), \ddot{\mathbf{w}}(t)] = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

In ihrer expliziten Form kann (3.10) durch Auflösung nach der höchsten vorkommenden Ableitung wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{\mathbf{w}}(t) = f[t, \mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t)]. \quad (3.11)$$

Jede Differentialgleichung 2. Ordnung läßt sich auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung transformieren. Mittels der Hilfsfunktion \mathbf{z} :

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2(t) \\ f[t, \mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t)] \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

und damit die explizite Form:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{z}(t)]. \quad (3.14)$$

3.4.2 Algebraische Differentialgleichungen

In einem System algebraischer Differentialgleichungen können die algebraischen Gleichungen getrennt aufgeführt werden. Werden die Differentialgleichungen auf ein System 1. Ordnung transformiert, kann die DAE wie folgt geschrieben werden:

$$F[t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)] = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{g}[t, \mathbf{z}(t)] = \mathbf{0}$$

DAE's, bei denen ein Teil der Gleichungen in seiner expliziten Form und der andere Teil in seiner impliziten Form angegeben wird, bezeichnet man als semiexplizite DAE's. Die algebraischen Gleichungen sind hier nicht explizit formulierbar, da sie keine Ableitungen enthalten.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{z}(t)] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}[t, \mathbf{z}(t)].$$

Wird der Vektor der Unbekannten des Systems \mathbf{z} in den Vektor der Lagekoordinaten \mathbf{u} und in den Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren \mathbf{l} unterschieden, so lautet (3.16):

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{u}(t), \mathbf{l}(t)] \quad (3.17)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}[t, \mathbf{u}(t), \mathbf{l}(t)]$$

Analog zu gewöhnlichen Gleichungen können die DAE's in zeitinvariante

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.18)$$

zeitvariante

$$\mathbf{A}(t) \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.19)$$

und (implizite) nichtlinear algebraische Differentialgleichungen unterschieden werden

$$F[t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)] = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

3.5 Differentiationsindex

Grundlegend für das Verständnis von algebraischen Differentialgleichungen ist das Konzept des Differentiationsindex. Der Differentiationsindex wird auch allgemein als Index bezeichnet.

Der Ausgangspunkt für die Analyse und die numerische Lösung von algebraischen Differentialgleichungssystemen ist die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, denn einerseits sind gewöhnliche Differentialgleichungen analytisch sehr detailliert untersucht und andererseits gibt es eine Vielzahl effizienter Verfahren für ihre numerische Lösung. Der Index eines algebraischen Differentialgleichungssystems dient als ein qualitatives Maß für den Unterschied dieses Systems zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen und ist damit ein qualitatives Maß für die Schwierigkeiten, die bei der numerischen Lösung des algebraischen Differentialgleichungssystems zu erwarten sind [Arnold 2001].

Des weiteren läßt der Differentiationsindex Rückschlüsse auf die Struktur der DAE zu und charakterisiert deren algebraischen Teil. Die Grundidee der Definition des Differentiationsindex ist die Überführung des algebraischen Differentialgleichungssystems in ein System gewöhnlicher Gleichungen.

Definition 3.1: Die minimale Anzahl an Differentiationen der Gleichung (3.5) oder eines Teils davon, die nötig sind, um Gleichung (3.5) durch algebraische Umformungen in ein explizites gewöhnliches Gleichungssystem zu überführen, entspricht dem Differentiationsindex d_i .

Bei semi-expliziten DAE's vereinfacht sich die Indexbestimmung. Hier genügt es, den algebraischen Teil zu differenzieren.

Mechanische Systeme mit Zwangsbedingungen auf Lageebene besitzen, für den Fall daß \mathbf{M} in Gleichung (3.5) nichtsingulär ist, den Index 3. Werden die Zwangsbedingungen auf Geschwindigkeitsebene formuliert ergibt sich ein Index von 2, und mit Zwangsbedingungen auf Beschleunigungsebene der Index 1. Die Bestimmung des Differentiationsindex wird anhand mehrerer Einmassenschwingermodelle in Kapitel 4 näher gezeigt.

3.6 Indexreduktion und Abdriften der Lösung

Der Index einer DAE ist ein Maß für die Schwierigkeiten, die bei deren Lösung zu erwarten sind. Je größer der Index ist, um so schwieriger ist es, die DAE zu lösen. Deshalb ist es wünschenswert, den Index zu reduzieren. Mittels der Indexreduktionstechnik wird dies ermöglicht.

3.6.1 Indexreduktion und zugrundeliegende Differentialgleichung

Eine DAE mit dem Index 3 kann durch Reduktion des Index in eine DAE mit dem Index 2, eine DAE mit dem Index 1 und in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführt werden. Die sich aus der Indexreduktion ergebende gewöhnliche Differentialgleichung wird „zugrundeliegende Differentialgleichung“ genannt.

Da der Index sich aus der Anzahl der Differentiationen ergibt, die nötig sind, um die DAE in eine gewöhnliche Differentialgleichung zu überführen, kann der Index einer DAE durch die Ableitung nach der Zeit reduziert werden. Um den Index um n zu verringern, ist die Zwangsbedingung der semi - expliziten DAE n -mal zu differenzieren.

Ausgehend von der Index 3 DAE mit Zwangsbedingungen auf Lageebene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})? \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

liefert die Differentiation der Zwangsbedingung mittels der Kettenregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \quad (3.22)$$

$$\frac{d \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

und damit die Index 2 Formulierung von (3.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})? \\ \mathbf{0} &= \mathbf{G}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Eine weitere Differentiation der Zwangsbedingung liefert die Index 1 Formulierung

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})? \\ \mathbf{0} &= \mathbf{G}(\mathbf{q}(t)) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_{qq}(\mathbf{q}(t)) (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analog dazu kann die „zugrundeliegende“ gewöhnliche Differentialgleichung abgeleitet werden.

Die zugrundeliegende Differentialgleichung, die Index 1-, die Index 2- und die Index 3 Formulierungen sind dabei mathematisch äquivalent.

3.6.2 Abdriften der Lösung („drift-off Effekt“)

Bei der numerischen Lösung von algebraischen Differentialgleichungen ist die Index 1 Formulierung am vorteilhaftesten. Sie besitzt aber den Nachteil, daß statt der Lagenebenbedingung die Beschleunigungsnebenbedingung erfüllt wird. Die analytische Lösung der Index 1 Formulierung erfüllt die Lagebedingungen zwar exakt, in der numerischen Lösung werden infolge der im Integrationsprozeß auftretenden Rundungs- und Abbruchfehler die Lagebedingungen jedoch nicht mehr exakt erfüllt. Die Abweichungen wachsen mit der Zeit.

Der Fehler in der Lagenebenbedingung wird dabei von einer quadratischen, der Fehler in der Geschwindigkeitsnebenbedingung von einer linearen Funktion der Zeit begrenzt. Die Lösung driftet von der Lage- und Geschwindigkeitsmannigfaltigkeit ab. Der Drifteffekt ist von der Schrittweite Δt abhängig [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996].

Im folgenden ist die Abweichung der Aufhängung eines Pendels von der Lagerung bei Integration der Index 1/2/3 Formulierung mittels der impliziten Eulermethode bei einer Schrittweite von 0.005 s dargestellt. Dabei ist gut zu erkennen, daß die Index 3 Formulierung die Lagenebenbedingung $u=0$ exakt erfüllt. Die Index 2 Formulierung zeigt bereits ein Abweichen von der Nulllage des Auflagers. Bei der Index 1 Formulierung wird dies noch verstärkt.

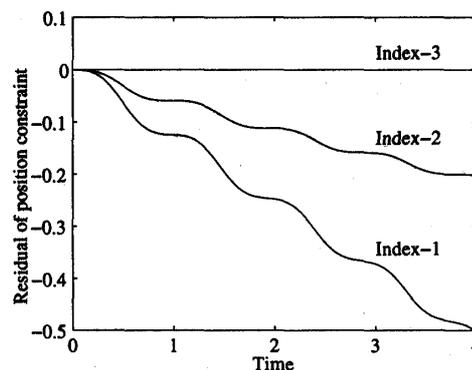


Abbildung 3.5: Abdriften der Pendelaufhängung von der Ausgangslage aus: [Eich-Soellner, Führer 1998]

Aus mechanischer Sicht läßt sich dies dadurch erklären, daß die Differentiation der Nebenbedingung Eigenwerte mit $w \neq 0$ auf Eigenwerte mit $w=0$ transformiert.

3.7 Lösbarkeit der DAE

Damit eine DAE analytisch lösbar ist, müssen mehrere Voraussetzungen erfüllt sein. Im folgenden wird zunächst auf diese eingegangen. Aufbauend darauf kann auf die Lösbarkeit der DAE geschlossen werden [Arnold 2001].

3.7.1 Regularität

Eine wichtige Voraussetzung bei der Lösung algebraischer Differentialgleichungen in der Mechanik ist die sog. Grübler-Bedingung. Die Grübler-Bedingung fordert, daß die Matrix $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ für beliebige \mathbf{q} Vollrang besitzt. Dies bedeutet, daß in den einzelnen Zeilen der Matrix keine linearen Abhängigkeiten voneinander enthalten sein dürfen. Die Grübler-Bedingung ist daher mit voneinander unabhängigen Zwangsbedingungen zu erfüllen. Überflüssige (redundante) Zwangsbedingungen können durch eine geeignete Modellierung vermieden werden.

Weiterhin sei die (symmetrische) Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ auf dem Nullraum von $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ positiv definit.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}), \quad \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{x} > 0 \quad (3.26)$$

Lemma 3.1: Gegeben sei eine symmetrische, positiv semi-definite Matrix $\mathbf{M} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{A}}^{nq \times nq}$ und eine Matrix $\mathbf{G} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{A}}^{n1 \times nq}$ die Vollrang hat ($n_1 \neq n_q$). Gilt (3.26), so ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

regulär.

Vereinfachend dazu kann man statt der Voraussetzungen in **Lemma 3.1** fordern, daß $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ für beliebige $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^{nq}$ symmetrisch und positiv definit ist.

3.7.2 Lösbarkeit des Anfangswertproblems

Anfangswertprobleme für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen sind eindeutig lösbar, falls folgender Satz gilt:

Satz 3.1 (Satz von Picard-Lindelöf): Gegeben sei eine Funktion $\mathbf{j} : [0, T] \times \hat{\mathbf{A}}^{nx} \rightarrow \hat{\mathbf{A}}^{nx}$. Ist $\mathbf{j}(x, t)$ stetig und bezüglich x global Lipschitz-stetig:

$$\|\mathbf{j}(t, x_2) - \mathbf{j}(t, x_1)\| \leq L \|x_2 - x_1\|, \quad (x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^{n_x}), \quad (3.27)$$

so ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \mathbf{j}(t, x(t)), \quad (t \in [0, T]), \quad x(0) = x_0 \quad (3.28)$$

eindeutig lösbar.

3.7.3 Konsistenz der Anfangswerte der DAE

Die Anfangswerte $q(t_0)$ der Lösung $q(t)$ der DAE (3.5) werden konsistente Anfangswerte genannt. Dies erfordert daß die durch die Lagerung vorgegebenen Zwangsbedingungen $q(t_0) = q_0$ erfüllt sind:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

In Kapitel (3.5) wurde weiterhin gezeigt, daß sich aus dem vorliegenden Index 3 Problem durch ein- bzw. zweimalige Differentiation nach der Zeit eine Formulierung mit dem Index 2 bzw. Index 1 ableiten läßt. Durch dreimalige Differentiation ergibt sich die „zugrundeliegende“ gewöhnliche Differentialgleichung. Die Index 1, Index 2, Index 3 Formulierungen des zugrundeliegenden mechanischen Systems sind dabei mathematisch äquivalent. Das bedeutet, daß für einen konsistenten Anfangswert $q(t_0)$ die Lösung $q(t)$ der zugrundeliegenden Differentialgleichung auf den durch die Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsnebenbedingungen definierten Mannigfaltigkeiten liegt.

Die analytische Lösung von (3.5) erfüllt damit neben der Lagenebenbedingung auch die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsnebenbedingungen. Die beiden letzteren Nebenbedingungen werden auch „versteckte“ Nebenbedingungen genannt, da sie in der Formulierung des Index 3 Systems nicht explizit auftreten [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996]. Damit sind folgende Zwangsbedingungen zu erfüllen:

Zwangsbedingungen auf Ebene der Lagekoordinaten:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Zwangsbedingungen auf Ebene der Geschwindigkeitskoordinaten:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{G}(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Zwangsbedingungen auf Ebene der Beschleunigungskoordinaten:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{G}(\mathbf{q}(t)) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}_{qq}(\mathbf{q}(t)) (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Definition 3.2: *Konsistente Anfangswerte*

Anfangswerte $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0)$ für die Bewegungsgleichung (3.5) heißen konsistent mit den Bewegungsgleichungen, wenn sie die Bedingungen (3.30), (3.31) und (3.32) erfüllen:

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{G}(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{q}_0) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_0) [f(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{q}}_0] + \mathbf{g}_{qq}(\mathbf{q}_0) (\dot{\mathbf{q}}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$$

Das folgende Beispiel zeigt die dynamischen Radlasten des Einmassenschwingers aus Abschnitt 3.2. Die Nebenbedingung ist als Geschwindigkeitsnebenbedingung formuliert. Das System wird über eine Rampenfunktion angeregt. Die Integration erfolgt über 3 Zeitpunkte. Die Anregung beginnt im ersten Beispiel mit $t=0$, so daß für die Geschwindigkeitskoordinaten inkonsistente Anfangsbedingungen vorliegen.

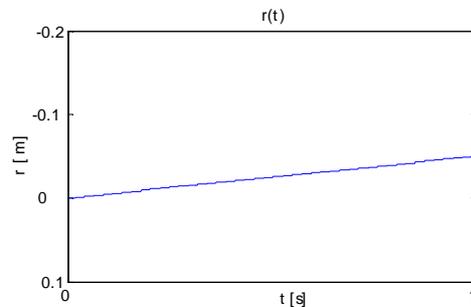


Abbildung 3.6: Anregungsfunktion $r(t)$

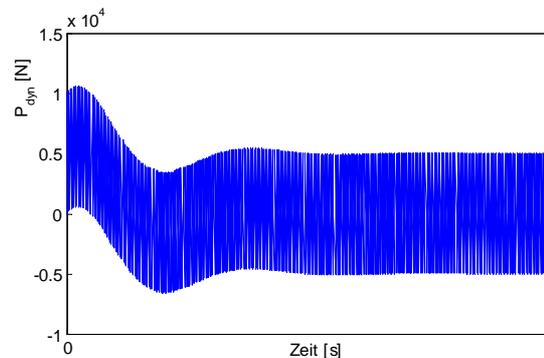


Abbildung 3.7: Dynamische Radlast, inkonsistente Anfangsbedingungen

Die nächste Abbildung zeigt die dynamische Radlast für den Fall, daß die Anregung erst nach dem 2. Zeitschritt beginnt. Die Anfangsbedingungen sind nun konsistent.

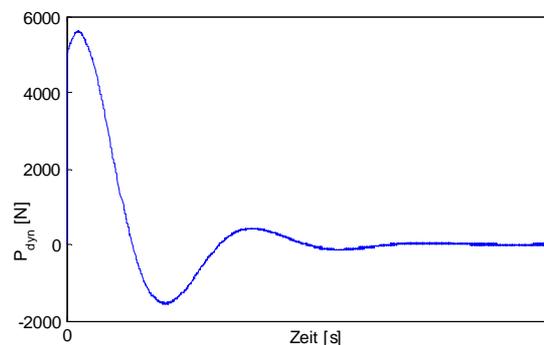


Abbildung 3.8: Dynamische Radlast, konsistente Anfangsbedingungen

Dies zeigt, daß inkonsistente Anfangsbedingungen ebenfalls Störungen in den Lagrangeschen Multiplikatoren hervorrufen können.

3.7.4 Lösbarkeit der DAE

Durch die Differentiation der DAE ergibt sich die „zugrundeliegende“ gewöhnliche Differentialgleichung. Beide Formen sind mathematisch äquivalent. Für die Lösung eines Anfangswertproblems der DAE (3.5) kann für konsistente Anfangswerte die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung analog zu dem entsprechenden Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen gezeigt werden [Arnold 2001].

Satz 3.2: Gegeben seien stetige Funktionen $\mathbf{f}: \mathcal{R}^{nq} \times \mathcal{R}^{nq} \rightarrow \mathcal{R}^{nq}$, $\mathbf{M}: \mathcal{R}^{nq} \rightarrow \mathcal{R}^{nq} \times \mathcal{R}^{nq}$ und $\mathbf{g}: \mathcal{R}^{nq} \rightarrow \mathcal{R}^{nq}$, für die gilt:

- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ist zweimal stetig differenzierbar,
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ist für beliebige $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{nq}$ symmetrisch, positiv semi-definit und auf dem Nullraum von $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ positiv definit
- $\mathbf{G}(\mathbf{q}) := \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$ hat für beliebige $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{nq}$ Vollrang.
- \mathbf{f}, \mathbf{M} und $\mathbf{g}_{\mathbf{q}}$ sind global Lipschitz-stetig bezüglich \mathbf{q} .

Dann hat das Anfangswertproblem (3.5) mit den Anfangswerten $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{l}(0) = \mathbf{l}_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[0, T]$, wenn die Anfangswerte \mathbf{q}_0 , $\mathbf{v}_0, \mathbf{l}_0$ konsistent mit den Bewegungsgleichungen sind.

Hinweis: Aus den Forderungen b und c folgt die Regularität der Matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

3.8 Störungsindex

Während der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen entstehen infolge der Diskretisierung des numerischen Verfahrens sog. Diskretisierungsfehler. Bei der Implementierung in Gleitpunktarithmetik kommen Rundungsfehler und gegebenenfalls Fehler durch Abbruch der iterativen Lösung nichtlinearer Gleichungen hinzu [Arnold 1998].

Der Störungsindex p_i mißt die Sensitivität der Lösung $z(t)$ der DAE gegenüber diesen unvermeidlichen Störungen im algebraischen Differentialgleichungssystem sowie gegenüber Störungen in den Anfangswerten. Damit können die während der numerischen Integration einer DAE auftretenden Störungen analysiert werden.

Definition 3.2: Gleichung (3.5) besitzt längs einer Lösung $\mathbf{z}(t)$ auf dem Intervall $[t_0; t_e]$ den Störungsindex $p_i=k$, wenn k die kleinste natürliche Zahl ist, so daß für alle Funktionen $\tilde{\mathbf{z}}(t)$, die einen Defekt

$$F(t, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}') = \mathbf{d}(t)$$

haben, im Intervall $[t_0; t_e]$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq C (\|\mathbf{z}(t_0) - \tilde{\mathbf{z}}(t_0)\| + \max_{t_0 \leq \mathbf{x} \leq t} \|\mathbf{d}\mathbf{x}\| + \dots + \max_{t_0 \leq \mathbf{x} \leq t} \|\mathbf{d}^{k-1}(\mathbf{x})\|)$$

gilt, solange der Ausdruck auf der rechten Seite hinreichend klein bleibt. C bezeichnet hierbei eine Konstante die nur von F und der Länge des Integrationsintervalls abhängig ist.

Die höchste Ordnung der in der Ungleichung vorkommenden Ableitung der Defektes $\mathbf{d}t$ bestimmt den Störungsindex. Der Störungsindex beträgt damit für gewöhnliche Differentialgleichungen $p_i=0$ [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996].

Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten entspricht der Störungsindex dem Differentiationsindex $p_i=d_i$ [Hairer, Wanner 1996].

Eine genauere Betrachtung des Störungsindex gibt [Arnold 1995]. Für Mehrkörpersysteme mit dem Störungsindex 3 wird eine weitere Unterscheidung in den Störungsindex der Lage- und Geschwindigkeitsvariablen \mathbf{q} \mathbf{v} und in den Störungsindex der Lagrangeschen Parameter 1 getroffen. Es wird gezeigt, daß 1 den Störungsindex 3 besitzt während \mathbf{q} und \mathbf{v} den Störungsindex 2 haben. Daher sind i.A. die Fehler in den Variablen \mathbf{q} und \mathbf{v} wesentlich kleiner als die Fehler in den Variablen 1.

Die numerische Behandlung von DAE's mit einem Störungsindex $p_i > 1$ ist dadurch problematisch, daß nicht nur die Störungen \mathbf{Q} und \mathbf{d} im Gleichungssystem, sondern auch deren Ableitungen bis zur Ordnung p_i-1 in die Lösung eingehen. Diese können normmäßig groß sein, auch wenn die Störung \mathbf{d} selbst klein sind. Kleine Störungen können durchaus beliebig große Änderungen der Lösung $\mathbf{z}(t)$ hervorrufen. In diesem Sinne gehören DAE's vom Index > 1 zu der Klasse der schlecht konditionierten Probleme. Für die numerische Lösung spiegeln sich die Ableitungen der Störung \mathbf{d} als Differenzenquotient in $\mathbf{D}t$ wieder. In die Näherungslösung gehen Fehler der Größenordnung $O(\mathbf{D}t^{1-p_i})$ ein. Für kleine Schrittweiten $\mathbf{D}t$ können demzufolge Rundungs- und Diskretisierungsfehler die Näherungslösung verfälschen [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996].

3.9 Steifheit

Für steife Systeme gibt es in der Literatur keine einheitliche Definition, allerdings lassen sich einige charakteristische Eigenschaften steifer Systeme herausstellen. Steife Systeme enthalten Lösungskomponenten, die sich nur langsam ändern. Störungen dieser langsam veränderlichen Lösung werden aber sehr schnell gedämpft. Vom praktischen Standpunkt aus kann man auch sagen, ein System ist steif, wenn bei Anwendung eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens die Schrittweite durch Stabilitätsanforderungen stärker eingeschränkt wird als durch die vorgegebene Genauigkeit. Äußeres Kennzeichen dafür sind bei einer Implementierung mit Schrittweitensteuerung eine relative Unabhängigkeit der Schrittzahl von der vorgegebenen Genauigkeit und häufig eine große Anzahl von wiederholten Schritten [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996].

Unter steifen Systemen versteht man im allgemeinen ein System von Gleichungen, bei dem die Lösungsfunktionen des Anfangswertproblems $z_i(t)$ ein stark unterschiedliches Wachstumsverhalten zeigen: Für wachsendes x gibt es z.B. stark abklingende und schwach abklingende oder zunehmende Funktionen $z_i(t)$.

Die erste und auch pragmatischste Definition lieferten [Curtis, Hirschfelder 1952]:

Definition 3.3: *Steife Gleichungen sind Gleichungen, bei denen bestimmte implizite Methoden, insbesondere BDF, ihre Aufgabe besser, im allgemeinen gewaltig besser erfüllen als explizite Methoden.*

3.10 Zeitintegrationsverfahren für algebraische Differentialgleichungen

Für algebraische Differentialgleichungen existiert eine Vielzahl von Lösungsverfahren. DAE's für schwingungsdynamische Problemstellungen beschränken sich bis jetzt jedoch auf den Bereich der Mehrkörperdynamik. Diese Systeme zeichnen sich durch wenige Freiheitsgrade, geometrische und physikalische Nichtlinearitäten sowie hohe Genauigkeitsanforderungen aus. Auf strukturdynamische Problemstellungen (viele Freiheitsgrade, i.d.R. nur physikalische Nichtlinearitäten sowie geringere Genauigkeitsanforderungen) angepaßte Verfahren sind dem Autor nicht bekannt. Zeitintegrationsverfahren für Mehrkörpersysteme beruhen in der Regel auf der Transformation des Systems auf ein System 1. Ordnung, Indexreduktion, Transformation auf Zustandsform, oder Projektion auf die Zwangsmannigfaltigkeit

3.10.1 Algebraische DGL 1. Ordnung

3.10.1.1 DAE's mit Index 1

Neben der Reduktion des Index können für algebraische Differentialgleichungen 1. Ordnung Lösungsverfahren mit zwei verschiedenen Strategien unterschieden werden [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996].

1. Direkter Weg

Das Anfangswertproblem (3.5) wird in das singular gestörte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{f}[t, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ \mathbf{e} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{g}[t, \mathbf{u}, \mathbf{v}]\end{aligned}\quad (3.33)$$

mit $0 < \mathbf{e} \ll 1$ eingebettet. Darauf wendet man ein Diskretisierungsverfahren für steife Systeme an und betrachtet anschließend den Grenzübergang $\mathbf{e} \rightarrow 0$. Daraus ergibt sich ein Diskretisierungsverfahren für das Index 1 Problem.

2. Indirekter Weg

Die Lösung der Nebenbedingung

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{G}[t, \mathbf{u}(t)] \quad (3.34)$$

wird in den Differentialgleichungsteil von (3.5) eingesetzt. Damit ergibt sich das Anfangswertproblem:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{u}, \mathbf{G}(\mathbf{u}(t))], \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \quad (3.35)$$

welches mit Standarddiskretisierungsmethoden gelöst werden kann.

3.10.1.2 DAE's mit höherem Index

Für Systeme mit höherem Index ergibt sich folgender Zwiespalt: Wird das System als Index 3 System betrachtet gehen Fehlerterme der Ordnung $O(\Delta t^{-2})$ in die Lösung ein. Wird das System hingegen als indexreduziertes System betrachtet, driftet die Lösung von der Lage- und Geschwindigkeitsmannigfaltigkeit ab.

Bei den bekannten Lösungsverfahren können für Mehrkörpersysteme nach [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996] zwei Arten unterschieden werden:

1. Stabilisierung durch Invarianten

Das mechanische Mehrkörpersystem vom Index 3 wird unter Einbeziehung der Geschwindigkeits- und/oder Lagenebenbedingung und Invarianten als indexreduziertes System formuliert. Auf dieses System wird eine Standarddiskretisierungsmethode angewendet. Dazu zählen die Baumgar-

te-Stabilisierung [Baumgarte 1972] und die Gear-Gupta-Leimkuhler-Formulierung [Gear, Gupta, Leimkuhler 1985].

2. Stabilisierung durch Nebenbedingung

Die DAE vom Index 3, 2, 1 wird diskretisiert. Anschließend wird zu jedem Zeitpunkt eine Stabilisierung durch Projektion der Näherungslösung auf die Zwangsmannigfaltigkeit vorgenommen.

Weiterhin lassen sich algebraische Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen, die dann mittels geeigneter Methoden gelöst werden können. Bei der Transformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung geht jedoch die physikalische Bedeutung der Variablen verloren. Im Fall von computergenerierten, zeitinvarianten oder nichtlinearen Modellen kann die Transformation auf ein explizites Modell zeitraubend oder gar unmöglich sein. Daneben kann die Änderung von Parametern in der ursprünglichen DAE die Relation zwischen Variablen ändern und so andere explizite Modelle bedingen. Weiterhin funktioniert diese Technik nicht bei allen Arten von Zwangsbedingungen.

Auch existieren mehrere Programme zur Zeitintegration algebraischer Differentialgleichungen wie der Code Radau 5 [Hairer, Wanner 1996], der auf einem impliziten Runge-Kutta Verfahren basiert. Radau 5 sowie Vmultirad können algebraische Differentialgleichungen mit einem Index bis zu 3 integrieren [Schneider 1995]. Aus praktischer Sicht sind BDF Methoden wichtiger.

3.10.2 Algebraische DGL 2. Ordnung

[Cardona, Geradin 1989] zeigen, daß das Verhalten des Algorithmus bei unendlich hohen Frequenzen eine entscheidende Rolle für die Qualität der numerischen Lösung spielt. Um eine physikalisch sinnvolle Lösung zu erhalten, sollte der Algorithmus daher Komponenten mit unendlich hohen Frequenzen herausfiltern und dabei die Genauigkeit in der Berechnung erhalten. Aus der Vielzahl der dafür in Frage kommenden impliziten Methoden mit einer Genauigkeit 2. Ordnung und numerischer Dissipation im hohen Frequenzbereich (Houbolt, Park, Wilson, Hilber-Hughes-Taylor) empfehlen sie die Methode von Hilber-Hughes-Taylor. Die Störungen in der Lösung treten hier allerdings nach wie vor auf. Der Vorteil diese Vorgehensweise besteht darin, daß die auftretenden Störungen durch Einführen einer Dämpfung abklingen.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Transformation der algebraischen Differentialgleichung auf die zugrundeliegende Differentialgleichung. Unter Verwendung der Nebenbedingung auf Beschleunigungsebene kann die algebraische Differentialgleichung auf ihre zugrundeliegende gewöhnliche Differentialgleichung transformiert werden. Hier sind die Lagrangeschen Parameter nicht mehr enthalten. Auf die zugrundeliegende Differentialgleichung kann jede numerische Integrationstechnik angewandt werden. Da die Beschleunigungsnebenbedingungen und nicht die Lagenebenbedingungen in die Formulierung eingehen, ergibt sich ein Abdriften der numerischen Lösung. Deshalb wird die numerische Lösung auf die Lagemannigfaltigkeit projiziert. Das sich ergebende Gleichungssystem kann über eine Newton-Iteration gelöst werden [Yen, Petzold, Raha 1996]. Unter Beibehaltung der Lagrangeschen Parameter entwickeln [Yen, Petzold, Raha 1996] die obige Vorgehensweise weiter zur DAE- α Methode, die jedoch immer noch umfangreiche nichtlineare Ausdrücke enthält.

3.11 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Überblick über die mathematischen Grundlagen von DAE's gegeben. Neben der Herleitung der für algebraische Differentialgleichungen gebräuchlichen Schreibweise aus mechanischer Sicht wurden die wichtigsten Grundformen von algebraischen Differentialgleichungen aufgezeigt. Den bei der numerischen Lösung auftretenden Probleme wie Störfrequenzen, Instabilitäten oder Abdriften der Lagekoordinaten können prinzipiell zwei verschiedenen Ursachen zugeschrieben werden. Zum einen ist die analytische Lösbarkeit für algebraische Differentialgleichungen nur unter bestimmten Voraussetzungen gegeben. Zum Anderen treten bei der numerischen Lösung der DAE weitere Probleme auf. Die mathematischen Grundlagen dafür wurden in diesem Abschnitt dargestellt.

Zur effektiven Lösung der in dieser Arbeit entwickelten Interaktionsformulierung ist ein strukturdynamisches Integrationsverfahren vonnöten. Die bekannten strukturdynamischen Verfahren sind jedoch für die vorliegende Problemstellung nicht geeignet. Deshalb wurde weiterhin eine Literaturstudie über Zeitschrittverfahren für algebraische Differentialgleichungen durchgeführt. Jedoch sind bekannte Lösungsverfahren für mechanische DAE's für Mehrkörpersysteme optimiert. Diese Systeme zeichnen sich durch wenige Freiheitsgrade, geometrische und physikalische Nichtlinearitäten sowie hohe Genauigkeitsanforderungen aus. Auf strukturdynamische Problemstellungen (viele Freiheitsgrade, i.d.R. nur physikalische Nichtlinearitäten sowie geringere Genauigkeitsanforderungen) können diese Verfahren nicht wirtschaftlich angewandt werden.

Als weiteres Ziel dieser Arbeit soll deshalb ein für strukturdynamische Problemstellungen geeignetes Integrationsverfahren für algebraische Differentialgleichungen entwickelt werden. Als erster Schritt werden im nächsten Kapitel zunächst Studien an vereinfachten Modellen durchgeführt. Dabei soll versucht werden die bei der Zeitintegration von DAE's auftretenden Effekte aus strukturdynamischer Sicht zu analysieren.

4 Analyse des linearen, differentiell - algebraischen Einmassenschwingers

In diesem Kapitel wird - als vereinfachtes Fahrzeugmodell - das Modell des fußpunkterregten Einmassenschwingers untersucht. Dieser Ansatz ist als erste Abschätzung oftmals in der Literatur anzutreffen. Ein großer Vorteil davon ist, daß analytische Referenzlösungen einfach zu ermitteln sind. Der Einmassenschwinger wird hier durch die Berücksichtigung seiner Zwangsbedingungen über die Lagrangesche Nebenbedingung als differentiell - algebraisches System modelliert. Ziel dieses Kapitels ist es, die betrachteten Systeme hinsichtlich ihrer differentiell – algebraischen und ihrer strukturdynamischen Eigenschaften zu analysieren. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse werden mit Ergebnissen einer numerischen Berechnung verglichen.

Die Modellierung des Fußpunktes des Einmassenschwingers kann dabei auf unterschiedliche Arten erfolgen. Je nach betrachtetem Fahrzeugmodell können sich am Fußpunkt Aufstandsmassen, Federn und Dämpfer oder lediglich Federelemente befinden. Weitere Modellvarianten ergeben sich durch ein- oder mehrmaliges Anwenden der Indexreduktionstechnik auf obige Modelle (Verringerung des Index durch die Differentiation der Nebenbedingung; siehe Kapitel 3). In diesem Kapitel werden insgesamt sechs verschiedene Modelle untersucht. Jedes Modell zeigt bei seiner numerischen Berechnung spezifische Effekte.

Die Modelle werden zunächst aus Sicht der DAE's analysiert. Als erstes werden die wichtigsten kennzeichnenden Charakteristika bestimmt:

Der Differentiationsindex d_i gibt an, wie viele Differentiationen nötig sind, um das differentiell-algebraische System in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen. Er klassifiziert die Schwierigkeiten, die bei der Lösung der DAE zu erwarten sind.

Anschließend wird untersucht, welche Probleme bei der numerischen Lösung der DAE zu erwarten sind. Hier treten, im Gegensatz zur analytischen Vorgehensweise, Diskretisierungs- und Rundungsfehler auf. Diese können als Störungen des Gleichungssystems interpretiert werden. Das zweite wichtige Charakteristikum, der Störungsindex p_i , bewertet die Auswirkungen dieser Störungen auf die numerische Lösung $\tilde{\mathbf{w}}$. Die Berechnung des Störungsindex erfolgt über eine Fouriertransformation der Bewegungsgleichungen 2. Ordnung in den Frequenzraum. Im Frequenzraum kann dann die Näherungslösung $\tilde{\mathbf{w}}$ analytisch bestimmt werden. Nach einer Fourierrücktransformation der Näherungslösung in den Zeitbereich gelingt die Bestimmung des Störungsindex. Dieser zeigt, ob nur die Störung selbst, oder auch die Ableitungen der Störung in die Lösung eingehen. Dies kann gravierende Fehler der numerischen Lösung zur Folge haben, da die Ableitungen der Störung sehr groß werden können, auch wenn die Störung selbst klein ist. Da nicht alle Freiheitsgrade gleich stark davon betroffen sind, läßt sich darüber hinaus erklären, an welchen Freiheitsgraden besonders große Probleme zu erwarten sind.

Mit Hilfe von Differentiationsindex und Störungsindex soll eine Erklärung der bei numerischen Berechnungen der verschiedenen Modelle auftretenden Effekte (Störungen in der Lösung, Instabilität der Lösung, Abdriften der Lösung nach Indexreduktion) versucht werden.

Zur Lösung des Interaktionsproblems soll in dieser Arbeit versucht werden ein strukturdynamisches Verfahren zu entwickeln. Deshalb soll weiter versucht werden, diese Effekte auch aus Sichtweise der Strukturdynamik zu erklären. Dazu werden die Eigenfrequenzen und Eigenformen der DAE 2. Ordnung bestimmt. Mit ihrer Hilfe soll versucht werden, das numerische Lösungsverhalten bei deren Zeitintegration zu erklären.

Allen numerischen Berechnungen in diesem Kapitel liegen folgende Parameter zugrunde:

Einmassenschwinger: $m_o=7000$ kg, $m_u=300$ kg, $k=2.5 \cdot 10^6$ N/m, $c=1 \cdot 10^5$ Ns/m

Der Einmassenschwinger entspricht dabei einem vereinfachten Modell eines Lkws, welches in der Literatur häufig für Simulationen verwendet wird. Da die Größe der Störungen von der Dämpferkonstante c abhängt, wurde diese zur Verdeutlichung der auftretenden Effekte groß gewählt. Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\mathbf{b}=1/4$, $\mathbf{g}=1/2$ und $dt=0.001$ s. Die Anregung $r(t)$ erfolgt über einen Knick in der Fahrbahn:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \text{ s} \\ (1[s]-t) \cdot 0.05 \text{ m} & t > 1 \text{ s} \end{cases} \quad (4.1)$$

Als Anregung $r(t)$ zur Untersuchung des Abdriftens wird das reale Rauigkeitsprofil der Belleville Brücke verwendet (vgl. Abschnitt 8.3).

4.1 Modell 1

Zunächst wird der gedämpfte Einmassenschwinger mit der Aufstandsmasse m_u untersucht. Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen sind bezüglich der Lagekoordinaten z und u regulär. Die Nebenbedingung wird auf Lageebene formuliert.

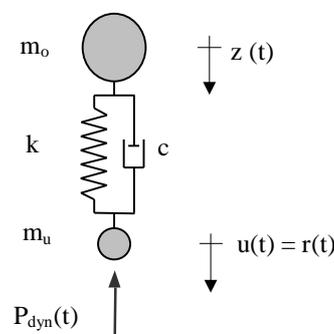


Abbildung 4.1: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 1

Das betrachtete Modell wird über seine algebraische Differentialgleichung beschrieben:

$$\begin{bmatrix} m_O s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & m_U s^2 + c s + k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Die Zeitintegration des Modells 1 mittels des Newmark- β Verfahrens liefert folgendes Ergebnis für die Freiheitsgrade z , u , P_{dyn} :

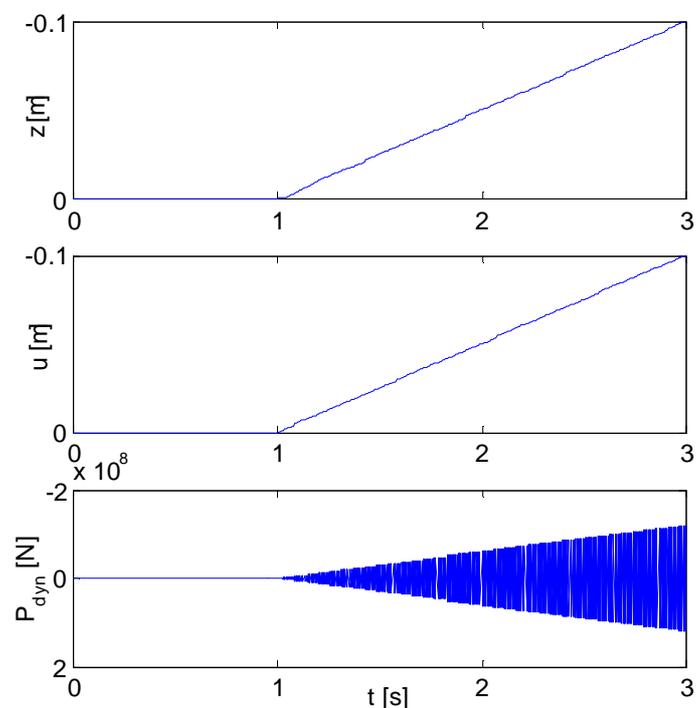


Abbildung 4.2: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 1

Aus der Graphik ist ersichtlich, daß $u(t)$ exakt der Anregung $r(t)$ entspricht. Dies wird durch die Nebenbedingung sichergestellt. Da das betrachtete System sehr hoch gedämpft ist, führt die obere Masse (Freiheitsgrad $z(t)$) praktisch keine Schwingung aus. Die Lösungen für $u(t)$ und $z(t)$ stimmen mit der analytischen Lösung überein. Die dynamische Radlast wird von einer Störung mit einer scheinbar unendlich hohen Frequenz überlagert. Die Lösung für P_{dyn} ist darüber hinaus instabil (schwache Instabilität).

4.1.1 Differentiationsindex

Mit den Hilfsvariablen $z_1 = \dot{z}$, $u_1 = \dot{u}$ kann das System 2. Ordnung über eine Transformation in ein äquivalentes System 1. Ordnung überführt werden:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_1 \\ \dot{u} &= u_1 \\ m_o \dot{z}_1 &= -c z_1 - k z + c u_1 + k u \\ m_u \dot{u}_1 &= c z_1 + k z - c u_1 - k u - P_{dyn} \\ 0 &= u - r(t) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das Gleichungssystem (4.2) stellt eine semiexplizite DAE dar. Der Differentiationsindex kann deshalb über die Differentiation des algebraischen Teiles (Nebenbedingung g) sowie mittels algebraischer Umformungen bestimmt werden (siehe Kapitel 3):

$$\frac{dg}{dt}: \quad \dot{u} - \dot{r}(t) = u_1 - \dot{r}(t) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2g}{dt^2}: \quad \dot{u}_1 - \ddot{r}(t) = \frac{1}{m_u} (c z_1 + k z - c u_1 - k u - P_{dyn}) - \ddot{r}(t) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{d^3g}{dt^3}: \quad \frac{1}{m_u} (c \dot{z}_1 + k \dot{z}_1 - c \dot{u}_1 - k u_1 - \dot{P}_{dyn}) - \ddot{r}(t) = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{dyn} &= \frac{c}{m_o} (-c z_1 - k z + c u_1 + k u) + k \dot{z}_1 - \\ \rightarrow & -\frac{c}{m_u} (c z_1 + k z - c u_1 - k u - P_{dyn}) - k u_1 - \ddot{r}(t) m_u . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nach drei Differentiationen der Nebenbedingung geht das System (4.2) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Dem Modell 1 kann daher der Differentiationsindex $d_i=3$ zugeordnet werden.

4.1.2 Betrachtung im Frequenzraum

Die Überführung von (4.2) in den Frequenzraum gelingt mittels einer Fouriertransformation:

$$F(\mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-I\mathbf{w}t} dt \quad (4.8)$$

$$\dot{f}(t) \bullet \rightarrow I \mathbf{w} F(\mathbf{w}) \quad (4.9)$$

$$\ddot{f}(t) \bullet \rightarrow (I \mathbf{w})^2 F(\mathbf{w}) \quad (4.10)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} -m_o \mathbf{w}^2 z(\mathbf{w}) &= -c I \mathbf{w} z(\mathbf{w}) - k z(\mathbf{w}) + c I \mathbf{w} u(\mathbf{w}) + k u(\mathbf{w}) \\ -m_U \mathbf{w}^2 u(\mathbf{w}) &= c I \mathbf{w} z(\mathbf{w}) + k z(\mathbf{w}) - c I \mathbf{w} u(\mathbf{w}) - k u(\mathbf{w}) - P_{dyn}(\mathbf{w}) \\ 0 &= u(\mathbf{w}) - r(\mathbf{w}) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Den nun drei unbekanntnen Freiheitsgraden des Systems stehen drei Gleichungen gegenüber; die Freiheitsgrade des Systems können analytisch bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{w}) &= r(\mathbf{w}) \\ z(\mathbf{w}) &= \frac{r(\mathbf{w})(k + I \mathbf{w} c)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \\ P_{dyn}(\mathbf{w}) &= \frac{\mathbf{w}^2 r(\mathbf{w})(k(m_o + m_U) - m_o m_U \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c(m_o + m_U))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Anhand dieser Beschreibung kann die Sensitivität des Systems hinsichtlich Störungen beschrieben werden. Abschneide- oder Rundungsfehler während der numerischen Berechnung oder Störungen in den Anfangsbedingungen können als Störungen in den analytischen Gleichungen angesehen werden. Anstatt der analytischen Lösung \mathbf{w} (\mathbf{w} : Vektor der unbekanntnen Größen des Systems) wird dann nur noch eine Näherungslösung $\tilde{\mathbf{w}}$ berechnet. Ein System ist um so störungsempfindlicher, je stärker die Störungen die Näherungslösung verfälschen.

Infolge einer Störung $\Theta(\mathbf{w})$ in der algebraischen Nebenbedingung wird nun statt der richtigen Lösung $u(\mathbf{w})$ nur noch die Näherungslösung $\tilde{u}(\mathbf{w})$ erfüllt:

$$0 = \tilde{u}(\mathbf{w}) - r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}) \quad (4.13)$$

Die in den Differentialgleichungen auftretenden Störungen werden mit $\mathbf{d}(\mathbf{w})$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} -m_o \mathbf{w}^2 \tilde{z}(\mathbf{w}) &= -c I \mathbf{w} \tilde{z}(\mathbf{w}) - k \tilde{z}(\mathbf{w}) + c I \mathbf{w} \tilde{u}(\mathbf{w}) + k \tilde{u}(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_1(\mathbf{w}) \\ -m_U \mathbf{w}^2 \tilde{u}(\mathbf{w}) &= c I \mathbf{w} \tilde{z}(\mathbf{w}) + k \tilde{z}(\mathbf{w}) - c I \mathbf{w} \tilde{u}(\mathbf{w}) - k \tilde{u}(\mathbf{w}) - \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wird das Gleichungssystem nach den Freiheitsgraden $\tilde{\mathbf{w}}_i$ aufgelöst, so kann der störende Einfluß von $\Theta(\mathbf{w})$ und $\mathbf{c}(\mathbf{w})$ auf \tilde{z}, \tilde{u} sowie \tilde{P}_{dyn} beurteilt werden:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}) \quad (4.15)$$

$$\tilde{z}(\mathbf{w}) = \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(k + I \mathbf{w} c) - \mathbf{d}_1(\mathbf{w})}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = & -\frac{\mathbf{w}^2 (r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) m_o m_U \mathbf{w}^2}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) (I \mathbf{w}^3 c (m_o + m_U))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \\ & + \frac{\mathbf{w}^2 (k(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(m_o + m_U) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}))(I c \mathbf{w} + k)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Als nächstes ist zu bestimmen, Ableitungen welchen Grades in $\tilde{\mathbf{w}}$ eingehen. Der Beginn einer Partialbruchzerlegung für $\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w})$ führt auf:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = & -\frac{\mathbf{w}^2 (r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) (m_o m_U \mathbf{w}^2 - m_U k - m_U I \mathbf{w} c + m_U k + m_U I \mathbf{w} c)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \\ & + \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) (I \mathbf{w}^3 c (m_o + m_U))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\mathbf{w}^2 (k(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(m_o + m_U) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}))(I c \mathbf{w} + k)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \\ \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = & \mathbf{w}^2 (r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) m_U + \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) I \mathbf{w}^3 c m_o}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \\ & + \frac{\mathbf{w}^2 (k m_o (r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}))(I c \mathbf{w} + k)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Damit ist erkennbar, daß $\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w})$ von $\mathbf{w}^2 \Theta(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \Theta(\mathbf{w})$, ... abhängt. Dies zeigt sich auch durch einen Vergleich der in den Störungstermen vorhandenen maximalen Potenz von \mathbf{w} im Zähler (\mathbf{w}^3) und im Nenner (\mathbf{w}^2). Die Fourierreücktransformation liefert deshalb für $\tilde{P}_{dyn}(t)$ einen Ausdruck, der maximal von der zweiten Ableitung der aufgebrachten Störung $\Theta(\mathbf{w})$ abhängt. Dem Gleichungssystem kann entsprechend der maximal auftretenden 2. Ableitung der Störung $\Theta(\mathbf{w})$ in den Lagrangeschen Multiplikatoren der Störungsindex $p_i=3$ zugeordnet werden. \tilde{P}_{dyn} ist sehr empfindlich gegenüber Störungen. Das Problem ist schlecht konditioniert. In \tilde{u} gehen Störungen $\Theta(\mathbf{w})$ lediglich in der 0-ten Ableitung ein, in \tilde{z} sogar in der -1-ten Ableitung. Hier haben die Störungen weit geringere Auswirkungen. Darüber hinaus zeigt sich, daß das System empfindlicher gegen Störungen in der Nebenbedingung als bei Störungen in den Differentialgleichungen ist.

Die Lösung für $\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w})$ hängt nicht mehr stetig von der Anregung $r(\mathbf{w})$ ab. Statt dessen enthält $\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w})$ Komponenten die über die zweiten Ableitung von $r(\mathbf{w})$ bestimmt werden. Deshalb müssen an $r(\mathbf{w})$ Anforderungen hinsichtlich der Differenzierbarkeit gestellt werden. Damit eine analytische Lösung für P_{dyn} existiert, muß $r(\mathbf{w})$ mindestens 2-fach stetig differenzierbar sein.

Betrachtet man die Lösung für $\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w})$ genau, so sieht man daß Störfrequenzen von $\Theta(\mathbf{w})$ $\mathbf{w}^{\otimes 0}$ praktisch keine Auswirkung auf \tilde{P}_{dyn} haben. Die Amplituden hoher Frequenzen werden jedoch mit \mathbf{w}^2 verstärkt. Je höher die in der Störung enthaltenen Frequenzen sind, um so größer sind die Auswirkungen in \tilde{P}_{dyn} . Damit lassen sich die Störungen mit $\mathbf{w}^{\otimes 1}$ in den numerischen Berechnungsergebnissen von \tilde{P}_{dyn} erklären. Die in den Störungen $c(\mathbf{w})$ enthaltenen Frequenzen $\mathbf{w}^{\otimes 0}$ gehen linear in \tilde{P}_{dyn} ein.

Diese Problematik gilt speziell für \tilde{P}_{dyn} . In die Näherungslösung \tilde{u} gehen nur die Störungen $\Theta(\mathbf{w})$, und diese linear ein. In \tilde{z} gehen die Störungen in $\Theta(\mathbf{w})$ noch maximal linear ein. Der Einfluß von Störfrequenzen mit $\mathbf{w}^{\otimes} \nrightarrow$ geht jeweils gegen Null.

4.1.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

In dem algebraischen Differentialgleichungssystem (4.2) sind Unbekannte mit unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen enthalten. Um dies zu beheben wird zunächst die Größe k_P und eine fiktive Verschiebung w_P eingeführt:

$$P_{dyn} = k_P w_P \quad (4.20)$$

Als Unbekannte im Gleichungssystem sind nun lediglich Verschiebungsgrößen vorhanden. Die Symmetrie des Gleichungssystems geht dabei jedoch verloren:

$$\begin{bmatrix} m_O s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & m_U s^2 + c s + k & k_P \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

Eine Fouriertransformation des homogenen Gleichungssystems liefert:

$$\begin{bmatrix} -m_O \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & -I \mathbf{w} c - k & 0 \\ -I \mathbf{w} c - k & -m_U \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & k_P \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.22)$$

Für das gedämpfte System der Dimension 3 ergeben sich sechs komplexe Eigenwerte. Nur die beiden ersten Eigenwerte sind direkt bestimmbar:

$$\mathbf{w}_{1/2} = \frac{I c \pm \sqrt{4 m_O k - c^2}}{2 m_O} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4 m_O k} + 2 m_O k) / 2 m_O k_P \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Eigenvektoren entsprechen einer Auslenkung der oberen Masse sowie der dadurch auftretenden dynamischen Aufstandskraft.

Die weiteren Eigenwerte ergeben über die Einführung eines kleinen Parameters \mathbf{e}^2 mit $\mathbf{e} \ll 1$, welcher die Singularität in der Massenmatrix behebt [Cardona, Geradin 1989].

$$\begin{bmatrix} -m_O \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & -I \mathbf{w} c - k & 0 \\ -I \mathbf{w} c - k & -m_U \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & k_P \\ 0 & 1 & -\mathbf{e}^2 \mathbf{w}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Durch die Transformationen

$$z' = z/\mathbf{e}, \quad u' = u/\mathbf{e}, \quad \mathbf{w}'^2 = \mathbf{w}^2 \mathbf{e}, \quad (4.25)$$

sowie durch Division der letzten Zeile durch \mathbf{e} ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} -m_o \mathbf{w}'^2 + I \mathbf{w}' c \sqrt{\mathbf{e}} + k \mathbf{e} & -I \mathbf{w}' c \sqrt{\mathbf{e}} - k \mathbf{e} & 0 \\ -I \mathbf{w}' c \sqrt{\mathbf{e}} - k \mathbf{e} & -m_u \mathbf{w}'^2 + I \mathbf{w}' c \sqrt{\mathbf{e}} + k \mathbf{e} & k_p \\ 0 & 1 & -\mathbf{w}'^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z' \\ u' \\ w_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Damit ergeben sich für $\mathbf{e} \neq 0$ die 4 restlichen Eigenwerte:

$$\mathbf{w}_{3,4} \rightarrow +\infty, \quad \mathbf{w}_{5,6} \rightarrow -\infty \quad ?_{3/4/5/6} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Das System enthält neben den beiden komplex konjugierten Eigenfrequenzen des Einmassenschwingers auch 4 Eigenwerte mit $\mathbf{w} \rightarrow \pm\infty$, welche lediglich die Lagrangeschen Multiplikatoren beeinflussen. Dies vermag die in Simulationen auftretenden Störungen in den dynamischen Radlasten zu erklären. Die Lagekoordinaten des Systems bleiben davon unbeeinflusst. Warum die Lösung jedoch instabil wird, bleibt zunächst unklar.

4.2 Modell 2

Dem Modell 2 liegt der gleiche Einmassenschwinger wie Modell 1 zugrunde. Hier soll jedoch der Index des Systems durch die Differentiation der Nebenbedingung reduziert werden. Die Nebenbedingung ist dann auf Geschwindigkeitsebene formuliert.

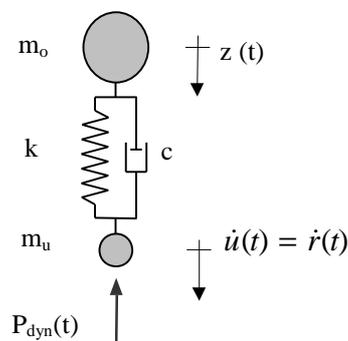


Abbildung 4.3: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 2

Die DAE 2. Ordnung für das betrachtete Modell lautet:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & m_u s^2 + c s + k & 1 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r}(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.28)$$

Die Zeitintegration mit den gleichen Parametern wie bei Modell 1 liefert folgendes Ergebnis:

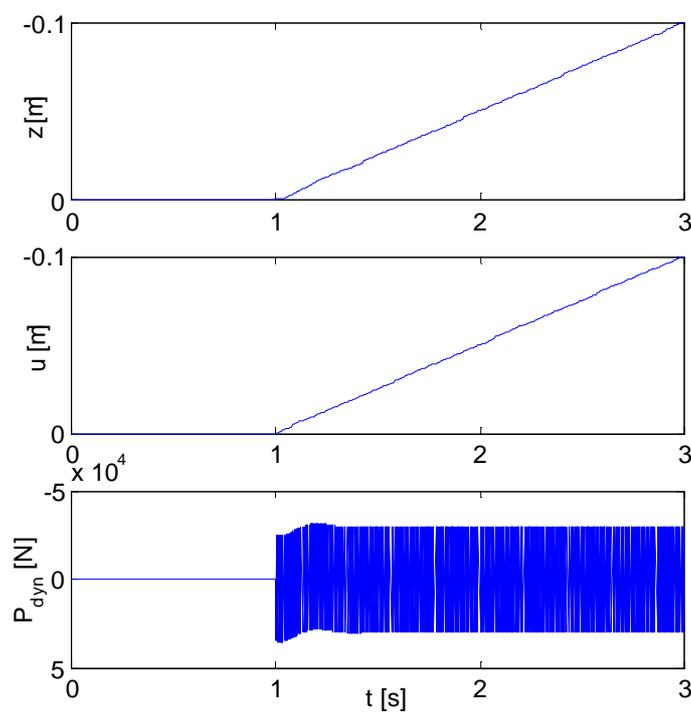


Abbildung 4.4: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 1

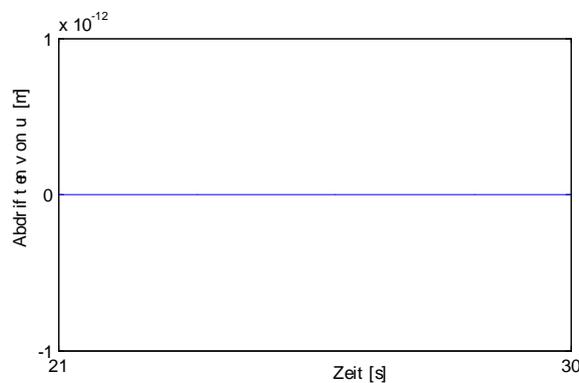


Abbildung 4.5: Abdriften des Fußpunktes u nach Anregung durch das Rauheitsprofil Belleville

Erwartungsgemäß verbessert die Differentiation der Nebenbedingung die Lösungsqualität. Die dynamische Radlast wird nach wie vor von einer Störung mit einer scheinbar unendlich hohen Frequenz überlagert. Die Lösung ist jetzt aber stabil. Da statt der Lagenebenbedingung nun die Geschwindigkeitsnebenbedingung erfüllt wird, müßte sich ein Abdriften des Fußpunktes ergeben. Entgegen der Erwartungen entspricht die Lösung für $u(t)$ jedoch wiederum exakt der Anregung $r(t)$. Sogar nach der Anregung durch eine reale Fahrbahnunebenheit driftet die Fußpunktcoordinate nicht von der Nulllage ab. Auch für $z(t)$ ergibt sich die richtige Lösung.

4.2.1 Differentiationsindex

Das Modell 2 geht aus dem Modell 1 durch einmalige Differentiation der Nebenbedingung hervor. Damit sind nur noch zwei Differentiationen erforderlich, um (4.28) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zu überführen. Damit beträgt der Differentiationsindex $d_i=2$.

4.2.2 Betrachtung im Frequenzraum

Wird das Gleichungssystem (4.28) über die Fouriertransformation in den Frequenzraum transformiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -m_o \mathbf{w}^2 z(\mathbf{w}) &= -c I \mathbf{w} z(\mathbf{w}) - k z(\mathbf{w}) + c I \mathbf{w} u(\mathbf{w}) + k u(\mathbf{w}) \\ -m_U \mathbf{w}^2 u(\mathbf{w}) &= c I \mathbf{w} z(\mathbf{w}) + k z(\mathbf{w}) - c I \mathbf{w} u(\mathbf{w}) - k u(\mathbf{w}) - P_{dyn}(\mathbf{w}) \\ 0 &= I \mathbf{w} u(\mathbf{w}) - \dot{r}(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Eingangsgröße des Systems ist nun \dot{r} . Wird nun wiederum das gestörte System betrachtet, kann die Näherungslösung $\tilde{\mathbf{w}}$ berechnet werden:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = \frac{\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})}{I \mathbf{w}} \quad (4.30)$$

$$\tilde{z}(\mathbf{w}) = \frac{(\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(-I k + \mathbf{w} c) - \mathbf{d}_1(\mathbf{w}) \mathbf{w}}{\mathbf{w}(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) &= \frac{(\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) I \mathbf{w}^3 c m_o m_U}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \frac{\mathbf{w}^2 (c(\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(m_o + m_U) + \mathbf{d}_1(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \\ &\quad - \frac{\mathbf{w} (I c (\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) + I k (m_o + m_U) (\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) k}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die numerische Umsetzung des Modells 2 erweist sich im Vergleich zum letzten System als günstiger. Störungen $\Theta(\mathbf{w})$ in der Nebenbedingung gehen maximal noch in der ersten Ableitung in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Der Störungsindex beträgt nur noch $p_i=2$.

In \tilde{P}_{dyn} werden die Amplituden hochfrequenter Anteile von $\Theta(\mathbf{w})$ nur noch mit \mathbf{w} verstärkt. Niederfrequente Anteile ($\mathbf{w} \approx 0$) aus $\Theta(\mathbf{w})$, $\mathbf{c}_1(\mathbf{w})$ und $\mathbf{c}_2(\mathbf{w})$ gehen linear in die Näherungslösung von \tilde{P}_{dyn} ein und beeinflussen diese daher kaum.

In \tilde{u} und \tilde{z} verschwinden Störfrequenzen aus $\Theta(\mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} \approx 0$. Störfrequenzen mit $\mathbf{w} \approx 0$ führen zu falschen Lösungen von \tilde{u} und \tilde{z} . Dies erklärt den Effekt des Abdriftens der Lösung bei einigen Zeitschrittverfahren. Warum bei der Zeitintegration mit Newmark- β kein Abdriften auftritt ist hiermit nicht erklärbar.

4.2.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

Analog zum ersten Modell wird wieder die Größe k_P und eine fiktive Verschiebung w_P eingeführt. Damit treten im Gleichungssystem 2. Ordnung wiederum nur Verschiebungsgrößen auf. Die Fouriertransformation des homogenen Gleichungssystems liefert:

$$\begin{bmatrix} -m_o \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & -I \mathbf{w} c - k & 0 \\ -I \mathbf{w} c - k & -m_U \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & k_P \\ 0 & I \mathbf{w} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.33)$$

Daraus ergeben sich direkt die ersten drei Eigenwerte:

$$\mathbf{w}_{1/2} = \frac{I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}}{2 m_o} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4 m_o k} + 2 m_o k) / 2 m_o k_P \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{w}_3 = 0. \quad (4.35)$$

Die beiden ersten Eigenwerte sind denen der Modellierung 1 identisch. Sie entsprechen einer Auslenkung der oberen Masse sowie der dadurch auftretenden dynamischen Aufstandskraft. Zur Bestimmung von ψ_3 steht folgendes Gleichungssystem zur Verfügung:

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k & k_P \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.36)$$

Wird u zu 1 gewählt, so ergeben sich aus den ersten beiden Zeilen $z=1$ und $w_P=0$.

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Die restlichen 3 Eigenwerte ergeben sich über die Einführung eines kleinen Parameters $\epsilon^{\frac{3}{2}}$, welcher die Singularität in der Massenmatrix behebt. Mittels der Transformationen $z' = z/\epsilon$, $u' = u/\epsilon$, $w'^2 = w^2 \epsilon$, sowie durch Division der letzten Zeile durch $\sqrt{\epsilon}$ ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} -m_o w'^2 + I w' c \sqrt{\epsilon} + k \epsilon & -I w' c \sqrt{\epsilon} - k \epsilon & 0 \\ -I w' c \sqrt{\epsilon} - k \epsilon & -m_u w'^2 + I w' c \sqrt{\epsilon} + k \epsilon & k_p \\ 0 & I w' & -w'^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z' \\ u' \\ w_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Damit ergeben sich für $\epsilon \rightarrow 0$ die restlichen 3 Eigenkreisfrequenzen sowie die dazugehörigen reellen Eigenwerte:

$$w_{4/5/6} \rightarrow \infty \quad \omega_{4/5/6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Das System enthält neben den herkömmlichen Eigenwerten der DGL einen Eigenwert mit $w=0$. Die zugehörige Eigenform beeinflusst nur die Lagekoordinaten u und z des Systems und beide dabei gleich stark. Dies kann als Abdriften des Systems gedeutet werden. Weiter ergeben sich 3 Eigenwerte mit $w \rightarrow \pm \infty$, welche lediglich die Lagrangeschen Multiplikatoren beeinflussen. Damit lassen sich die Störungen in den dynamischen Radlasten erklären, während die Lagekoordinaten des Systems davon unbeeinflusst bleiben.

Beide Ansätze können die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen in den dynamischen Radlasten erklären. Unklar bleibt jedoch, warum bei der Integration des Systems nach Newmark- β kein Abdriften auftritt.

4.3 Modell 3

Eine weitere Ableitung der algebraischen Gleichung führt zur Nebenbedingung auf Beschleunigungsebene. Mit dem ansonsten gleichen Einmassenschwinger ergibt sich folgendes System:

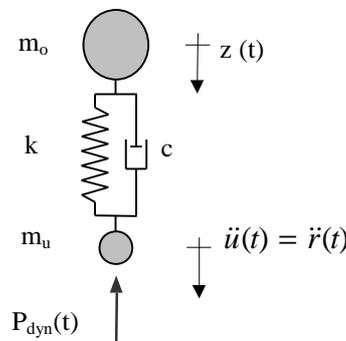


Abbildung 4.6: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 3

Die DAE 2. Ordnung für das Modell 3 lautet:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & m_v s^2 + c s + k & 1 \\ 0 & s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{r}(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

Die Zeitintegration mit den ansonsten gleichen Parametern wie bei Modell 1 ergibt:

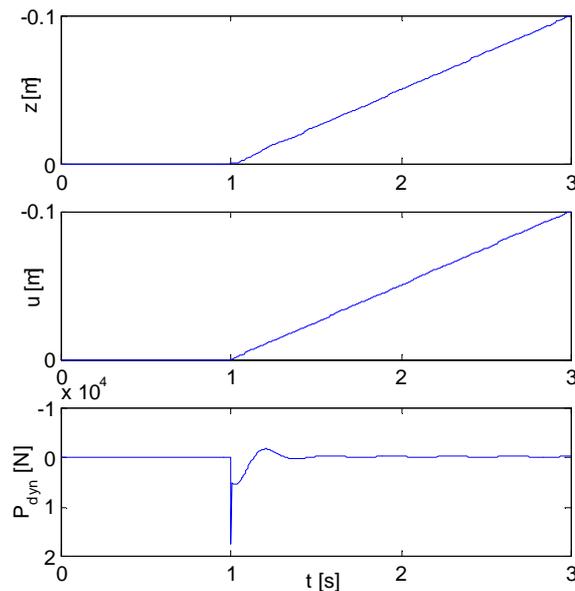


Abbildung 4.7: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 3

Infolge des Knickes in der Anregungsfunktion tritt in der dynamischen Radlast ein Impuls auf. Bei einer analytischen Betrachtung würde sich hier ein Dirac Impuls ergeben. Die Zeitintegration mit der Anregung des Rauheitsprofils Belleville ergibt für das Abdriften des Fußpunktes u :

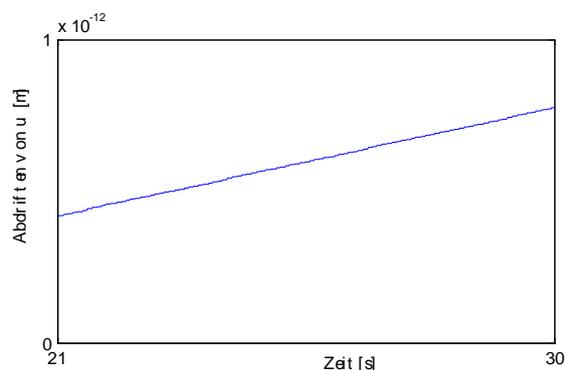


Abbildung 4.8: Abdriften des Fußpunktes u nach Anregung durch die Rauigkeit Belleville

Durch die zweimalige Differentiation der Nebenbedingung verbessert sich die Lösungsqualität weiter. Die Störung in der dynamischen Radlast tritt nicht mehr auf. Die Fußpunktcoordinate $u(t)$ wie auch die Lagekoordinate $z(t)$ zeigen ein extrem geringes Abdriften.

4.3.1 Differentiationsindex

Das Modell 3 geht aus dem Modell 1 durch zweimaliges Ableiten der Nebenbedingung hervor. Der Differentiationsindex verringert sich um 2. Damit beträgt der Differentiationsindex $d_i=1$.

4.3.2 Betrachtung im Frequenzraum

Wird nun das Gleichungssystem (4.40) in den Frequenzraum transformiert und werden Störungen in das Gleichungssystem eingebracht, so ergeben sich die Freiheitsgrade zu:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = -\frac{\ddot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} \quad (4.41)$$

$$\tilde{z}(\mathbf{w}) = \frac{(\ddot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(-k - I \mathbf{w} c) - \mathbf{d}_1 \mathbf{w}^2}{\mathbf{w}^2 (-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = & \frac{\mathbf{w}^2 ((\ddot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) m_o m_u + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \frac{\mathbf{w} (I c (\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) + I c (m_o + m_u) (\ddot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \\ & \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) k + (m_o + m_u) (\ddot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) k}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die numerische Umsetzung des Systems ist noch einmal günstiger als die von Modell 2. Störungen $\Theta(\mathbf{w}), \mathbf{c}_i(\mathbf{w})$ gehen nun maximal in der 0-ten Ableitung in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Der Störungsindex beträgt demzufolge nur noch $p_i=1$. Im Rechengang auftretende numerische Störungen werden nicht mehr verstärkt. Die Störungen in der Lösung sind nun sehr klein.

Störfrequenzen mit $\mathbf{w} \rightarrow \infty$ und $\mathbf{w} \rightarrow 0$ gehen ebenfalls linear in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Da diese nicht verstärkt werden haben sie kaum Auswirkungen auf die Näherungslösung.

Störfrequenzen mit $\mathbf{w} \rightarrow \infty$ haben keine Auswirkung auf \tilde{u} und gehen linear in \tilde{z} ein. Störfrequenzen mit $\mathbf{w} \rightarrow 0$ beeinflussen \tilde{u} und \tilde{z} stärker als beim Modell 2. Dies erklärt das Abdriften von \tilde{u} und \tilde{z} .

4.3.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

Analog zum ersten Modell wird wieder die Größe k_P und eine fiktive Verschiebung w_P eingeführt. Damit treten im Gleichungssystem 2. Ordnung wieder nur Verschiebungsgrößen auf. Die Fouriertransformation des homogenen Gleichungssystems liefert:

$$\begin{bmatrix} -m_o \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & -I \mathbf{w} c - k & 0 \\ -I \mathbf{w} c - k & -m_u \mathbf{w}^2 + I \mathbf{w} c + k & k_P \\ 0 & -\mathbf{w}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Direkt berechenbar sind die ersten vier Eigenwerte:

$$\mathbf{w}_{1/2} = \frac{I c \pm \sqrt{4m_o k - c^2}}{2m_o} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4m_o k} + 2m_o k) / 2m_o k_p \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{w}_{3/4} = 0 \quad \Psi_{3/4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Die beiden ersten Eigenwerte sind denen der Modellierung 1 identisch. Sie entsprechen einer Auslenkung der oberen Masse sowie der dadurch auftretenden dynamischen Aufstandskraft. Die Eigenwerte 3 und 4 mit den Eigenkreisfrequenzen $\mathbf{w}_{3/4} = 0$ beeinflussen lediglich die Lagekoordinaten und diese gleich stark.

Die restlichen 3 Eigenwerte ergeben sich über die Einführung eines kleinen Parameters \mathbf{e} , welcher die Singularität in der Massenmatrix behebt. Über die Transformationen $z' = z/\mathbf{e}$, $u' = u/\mathbf{e}$, $\mathbf{w}'^2 = \mathbf{w}^2 \mathbf{e}$, und den Grenzübergang $\mathbf{e} \rightarrow 0$ ergeben sich die restlichen 2 reellen Eigenfrequenzen. Die dazugehörigen reellen Eigenwerte sind:

$$\mathbf{w}_{5/6} = \pm \infty \quad ?_{5/6} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Das System besitzt zwei Eigenwerte mit $\mathbf{w}=0$. Die zugehörige Eigenform beeinflusst nur die Lagekoordinaten des Systems. Dies kann wieder als Abdriften des Systems gedeutet werden. Weiter ergeben sich 2 Eigenwerte mit $\mathbf{w} \rightarrow \pm \infty$, welche lediglich die Lagrangeschen Multiplikatoren beeinflussen. Jedoch treten in den numerischen Simulationen keine Störungen in den dynamischen Radlasten mehr auf.

4.4 Modell 4

Bisher wurden algebraische Differentialgleichungssysteme untersucht, bei denen die Massenmatrix der Differentialgleichung regulär ist. Ohne die untere Masse wird diese nun singular.

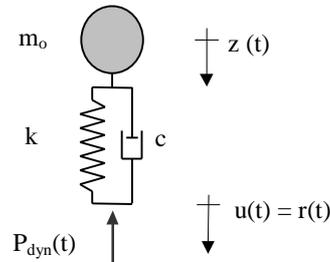


Abbildung 4.9: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 4

Die DAE 2. Ordnung für das Modell 4 ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & c s + k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.48)$$

Die Zeitintegration des Einmassenschwingers liefert folgendes Ergebnis:

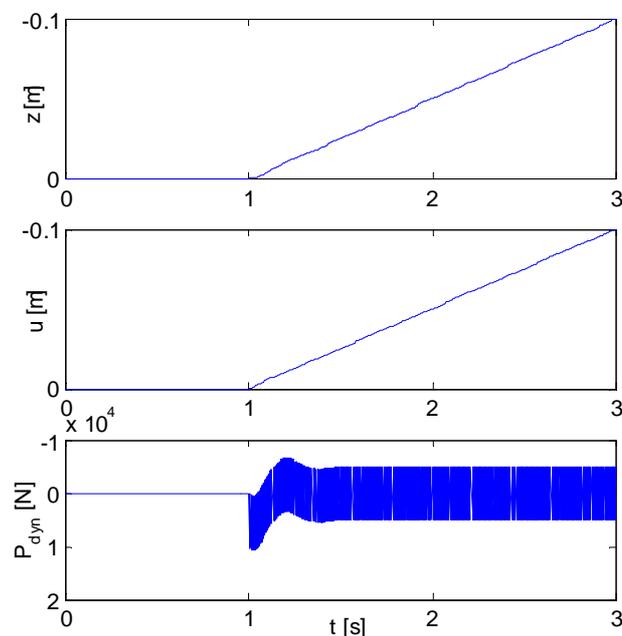


Abbildung 4.10: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 4

Die Lösungen für $u(t)$ und $z(t)$ sind richtig. Die dynamische Radlast wird von einer Störung mit einer scheinbar unendlich hohen Frequenz überlagert, ist aber stabil.

4.4.1 Differentiationsindex

Die Transformation auf eine algebraische Differentialgleichung 1. Ordnung sowie die Umformung auf ihre semiexplizite Form führt auf:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_1 \\ m_o \dot{z}_1 &= -P_{dyn} \\ c \dot{u} &= c z_1 + k z - k u - P_{dyn} \\ 0 &= u - r(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Der Differentiationsindex kann wieder über die Differentiation des algebraischen Teiles sowie über algebraische Umformung bestimmt werden:

$$\frac{d^2 g}{dt^2}: \dot{z}_1 + \frac{k}{c} \dot{z} - \frac{k}{c} \dot{u} - \frac{\dot{P}_{dyn}}{c} - \ddot{r}(t) = 0 \rightarrow \dot{P}_{dyn} = P_{dyn} \left(\frac{k}{c} - \frac{c}{m_o} \right) + \frac{k^2}{c} (u - z) - c \ddot{r}(t) \quad (4.50)$$

Das System (4.48) wird bereits nach 2-maliger Differentiation der Nebenbedingung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt. Das Modell 4 besitzt den Differentiationsindex $d_i=2$.

4.4.2 Betrachtung im Frequenzraum

Im Frequenzraum ergibt sich die Näherungslösung \tilde{w} von (4.48) zu:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}) \quad (4.51)$$

$$z(\mathbf{w}) = \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(k + I \mathbf{w} c) - \mathbf{d}(\mathbf{w})}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) &= \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) I c m_o \mathbf{w}^3}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} + \frac{((r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) k m_o + \mathbf{d}(\mathbf{w}) m_o) \mathbf{w}^2}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \\ &\quad - \frac{(\mathbf{d}(\mathbf{w}) + \mathbf{d}(\mathbf{w}))(I c \mathbf{w} + k)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die numerische Umsetzung des Systems wird durch das Wegfallen der Aufstandsmasse m_U vorteilhafter. Störungen $\Theta(\mathbf{w})$ in der Nebenbedingung gehen maximal in der ersten Ableitung in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Der Störungsindex beträgt demzufolge nur noch $p_i=2$. Störungsindex und Differentiationsindex entsprechen einander.

In \tilde{P}_{dyn} werden die Amplituden hoher Störfrequenzen in $\Theta(\mathbf{w})$ mit \mathbf{w} verstärkt. Störungen in $\mathbf{d}(\mathbf{w}), \mathbf{c}_2(\mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} \ll 0$ gehen linear in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Die Störungen in der Nebenbedingung bilden sich direkt in \tilde{u} ab. In \tilde{z} geht der Einfluß von Störfrequenzen für $\mathbf{w} \ll \mathbb{Y}$ gegen Null. Niedrige Frequenzen ($\mathbf{w} \ll 0$) von $\Theta(\mathbf{w})$ und $\mathbf{d}(\mathbf{w})$ gehen linear in die Näherungslösung \tilde{z} ein.

4.4.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

Analog zum ersten Modell wird wieder die Größe k_P und eine fiktive Verschiebung w_P eingeführt. Damit treten im Gleichungssystem 2. Ordnung wieder nur Verschiebungsgrößen auf. Die Fouriertransformation des homogenen Gleichungssystems liefert:

$$\begin{bmatrix} -m_o \omega^2 + I \omega c + k & -I \omega c - k & 0 \\ -I \omega c - k & I \omega c + k & k_P \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Wiederum sind die ersten beiden Eigenwerte direkt berechenbar:

$$\omega_{1/2} = \frac{I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}}{2 m_o} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4 m_o k} + 2 m_o k) / 2 m_o k_P \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Die Eigenvektoren entsprechen einer Auslenkung der oberen Masse sowie der dadurch auftretenden dynamischen Aufstandskraft.

Mit einem ähnlichen Vorgehen wie in den letzten Kapiteln konnte nur für drei weitere Eigenwerte eine analytische Lösung gefunden werden:

$$\omega_{3/4/5} \rightarrow \pm \infty \quad ?_{3/4/5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Deshalb wurde im Rahmen einer numerischen Untersuchung der Parameter ε schrittweise gegen null hin reduziert. Daraus war erkennbar, daß $\omega_b \rightarrow \infty$ geht. Die zugehörige Eigenform konnte nicht ermittelt werden.

Das System enthält neben den herkömmlichen Eigenwerten der DGL drei Eigenwerte mit $\omega \rightarrow \pm \infty$, welche lediglich die Lagrangeschen Multiplikatoren beeinflussen.

4.5 Modell 5

Nun wird der gleiche Einmassenschwinger wie im letzten Abschnitt untersucht. Durch einmalige Differentiation der Nebenbedingung stellt diese einen Zusammenhang zwischen der Durchsenkungsgeschwindigkeit der Fußpunktes und der Anregung her.

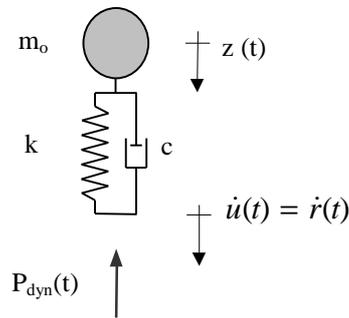


Abbildung 4.11: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 5

Die DAE 2. Ordnung für das Modell 5 lautet:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & c s + k & 1 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Die Zeitintegration unter gleichen Rahmenbedingungen wie bei Modell 4 ergab:

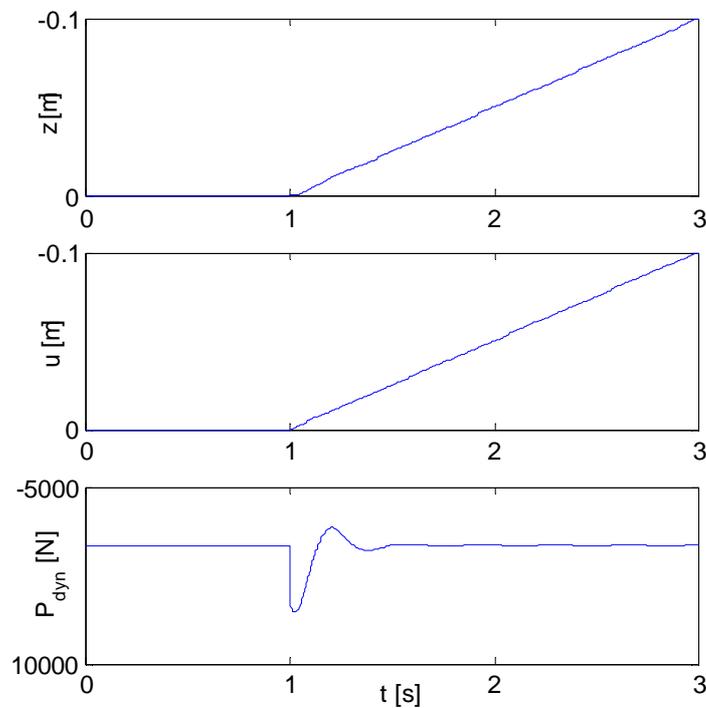
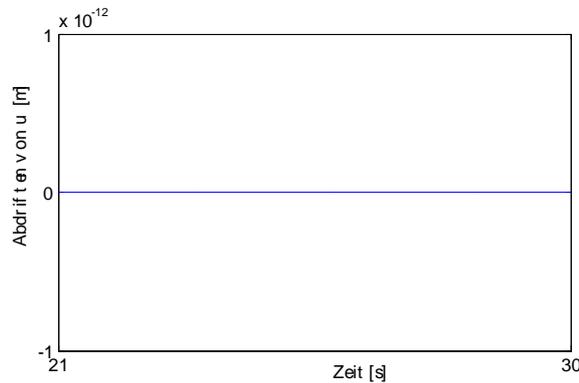


Abbildung 4.12: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 5

Abbildung 4.13: Abdriften von u nach Anregung durch das Rauheitsprofil Belleville

Bei der numerischen Integration treten keine Probleme mehr auf. Die Lösung für $u(t)$ entspricht wiederum exakt der Anregung $r(t)$, ein Abdriften findet nicht statt. Auch für $z(t)$ und $P_{dyn}(t)$ ergibt sich die richtige Lösung.

4.5.1 Differentiationsindex

Das Modell 5 geht aus dem Modell 4 durch einmalige Differentiation der Nebenbedingung hervor. Deshalb ist nur eine Differentiation der Nebenbedingung erforderlich, um (4.57) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zu überführen. Der Differentiationsindex beträgt $d_i=1$.

4.5.2 Betrachtung im Frequenzraum

Im Frequenzraum ergibt sich die Näherungslösung \tilde{w} von (4.57) zu:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = \frac{\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})}{I \mathbf{w}} \quad (4.58)$$

$$\tilde{z}(\mathbf{w}) = \frac{(\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))(-I k + \mathbf{w} c) - \mathbf{d}_1(\mathbf{w}) \mathbf{w}}{\mathbf{w} (-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = & \frac{\mathbf{w}^2((\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})) c m_o + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}) m_o)}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \\ & - \frac{\mathbf{w} (I c (\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) + I k m_o (\dot{r}(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w})))}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})) k}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k + I \mathbf{w} c)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Störungen $\Theta(\mathbf{w})$, $\mathbf{d}_2(\mathbf{w})$ in der Nebenbedingung gehen maximal noch in der 0-ten Ableitung in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Der Störungsindex beträgt nur noch $p_i=1$ und entspricht wiederum dem Differentiationsindex.

In \tilde{P}_{dyn} gehen die Amplituden hochfrequenter Anteile von $\Theta(\mathbf{w}), \mathbf{d}(\mathbf{w})$ nur noch linear ein. Niederfrequente Anteile ($\mathbf{w}^{\otimes 0}$) aus $\mathbf{c}_1(\mathbf{w}), \mathbf{c}_2(\mathbf{w})$ gehen linear in die Näherungslösung von \tilde{P}_{dyn} ein und beeinflussen diese daher kaum.

Niederfrequente Anteile ($\mathbf{w}^{\otimes 0}$) in den Störungen werden in den Näherungslösungen von \tilde{u} und \tilde{z} verstärkt und führen zum Abdriften der Lösung.

4.5.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

Mit dem gleichen Vorgehen ergeben sich die Eigenwerte von Modell 5 zu:

$$\mathbf{w}_{1/2} = \frac{I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}}{2 m_o} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4 m_o k} + 2 m_o k) / 2 m_o k_p \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

$$\mathbf{w}_3 = 0 \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Weiterhin konnten nur für 2 weitere Eigenwerte analytische Lösung gefunden werden:

$$\mathbf{w}_{4/5} = 0 \quad ?_{4/5} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Im Rahmen einer numerischen Untersuchung wurde der Parameter \mathbf{e} wieder schrittweise gegen null hin reduziert. Daraus war erkennbar, daß $\mathbf{w}_6^{\otimes 0} \notin \mathbb{Y}$ geht. Die zugehörige Eigenform konnte nicht ermittelt werden. Dies stellt jedoch keine Einschränkung für die weiteren Betrachtungen dar, da sie im Folgenden nicht weiter benötigt wird.

4.6 Modell 6

Im Modell 6 befindet sich am Aufstandspunkt nur noch eine Feder. Neben der Massenmatrix ist auch die Dämpfungsmatrix der Differentialgleichung singular.

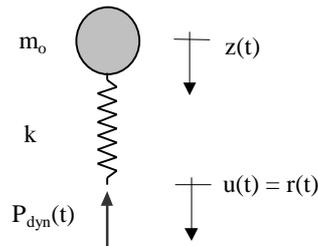


Abbildung 4.14: Fußpunkterregter Einmassenschwinger, Modell 6

Die DAE 2. Ordnung lautet:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + k & -k & 0 \\ -k & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

Die Zeitintegration des Einmassenschwingers unter gleichen Bedingungen wie vorher ergibt:

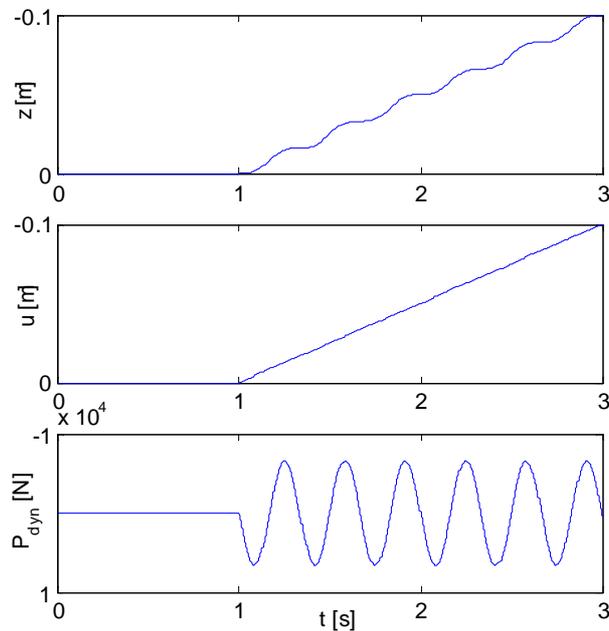


Abbildung 4.15: Numerische Lösung der Freiheitsgrade des Einmassenschwingermodells 6

Auch für Modell 6 liefert die numerische Integration die richtigen Ergebnisse. Die Lösung für $u(t)$ entspricht exakt der Anregung $r(t)$. Auch für $z(t)$ ergibt sich die richtige Lösung. Für die dy-

namische Radlast ist die Lösung ebenfalls sehr gut. Da im betrachteten Modell kein Dämpfer enthalten ist, ergibt sich für den Einmassenschwinger eine freie Schwingung.

4.6.1 Differentiationsindex

Nach algebraischen Umformungen führt die Transformation auf eine DAE 1. Ordnung zu:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_1 \\ m_o \dot{z}_1 &= -k z + k u \\ 0 &= k z - k u - P_{dyn} \\ 0 &= u - r(t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Sowohl P_{dyn} wie auch u treten nicht mehr in ihren Ableitungen auf. Der algebraische Teil besteht damit aus 2 Gleichungen. Die einmalige Differentiation des algebraischen Teiles der semiexpliziten DAE (2 Gleichungen) sowie algebraische Umformung ergeben eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{dg}{dt} : \quad \begin{aligned} 0 &= -k \dot{u} + k \dot{z} - \dot{P}_{dyn} \\ 0 &= \dot{u} - \dot{r}(t) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{r}(t) \\ \dot{P}_{dyn} &= -k \dot{u} + k \dot{z} = -k \dot{r}(t) + k z_1. \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.6.2 Betrachtung im Frequenzraum

Die Näherungslösung \tilde{w} von (4.64) lautet:

$$\tilde{u}(\mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}) \quad (4.67)$$

$$z(\mathbf{w}) = \frac{(r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))k - \mathbf{d}_1(\mathbf{w})}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k)} \quad (4.68)$$

$$\tilde{P}_{dyn}(\mathbf{w}) = \frac{((r(\mathbf{w}) + \Theta(\mathbf{w}))k m_o + \mathbf{d}_2(\mathbf{w})m_o) \mathbf{w}^2}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k)} - \frac{(\mathbf{d}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{w}))k}{(-m_o \mathbf{w}^2 + k)}. \quad (4.69)$$

Die numerische Umsetzung des Systems wird durch das Wegfallen des Aufstandsdämpfers c günstiger. Störungen $\Theta(\mathbf{w}), \mathbf{c}_i(\mathbf{w})$ in der Nebenbedingung gehen maximal der 0-ten Ableitung in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein. Der Störungsindex beträgt demzufolge nur noch $p_i=1$. Störungsindex und Differentiationsindex entsprechen einander.

In \tilde{P}_{dyn} werden die Amplituden hoher Störfrequenzen in $\Theta(\mathbf{w}), \mathbf{d}_1(\mathbf{w})$ nicht mehr verstärkt, vielmehr gehen die Amplituden der Störfrequenzen nur noch linear ein. Störungen in $\mathbf{c}_1(\mathbf{w}), \mathbf{c}_i(\mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} \ll 0$ gehen ebenfalls linear in die Näherungslösung \tilde{P}_{dyn} ein.

Die Störungen in der Nebenbedingung bilden sich direkt in \tilde{u} ab. In \tilde{z} geht der Einfluß von Störfrequenzen für $\mathbf{w} \ll 0$ gegen Null. Niedrige Frequenzen ($\mathbf{w} \ll 0$) von $\Theta(\mathbf{w})$ und $\mathbf{c}_1(\mathbf{w})$ gehen linear in die Näherungslösung \tilde{z} ein.

4.6.3 Eigenwerte des Systems 2. Ordnung

Die ersten beiden Eigenwerte sind direkt berechenbar. Sie entsprechen einer Auslenkung der oberen Masse sowie der dadurch auftretenden dynamischen Aufstandskraft:

$$\mathbf{w}_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m_0}} \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k/k_p \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

In der Massenmatrix sind nun zwei Diagonalelemente unbesetzt. Die Singularität kann durch das Einführen von \mathbf{e}_1 sowie \mathbf{e}_2 in der Massenmatrix behoben werden. Wird weiter $\mathbf{a}_e = \mathbf{e}_1 / \mathbf{e}_2$ ($\mathbf{a}_e^T \mathbf{0}$) eingeführt, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} -m_0 \mathbf{w}^2 + k & -k & 0 \\ -k & -\mathbf{a}_e \mathbf{e} \mathbf{w}^2 + k & k_p \\ 0 & 1 & -\mathbf{e} \mathbf{w}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

Durch die Transformationen $z' = z / \mathbf{e}$, $\mathbf{w}'^2 = \mathbf{w}^2 \mathbf{e}$, ergeben sich für $\mathbf{e}^{\otimes} 0$ die 4 restlichen Eigenfrequenzen. Die dazugehörigen Eigenwerte können nun jedoch nicht mehr eindeutig bestimmt werden, da \mathbf{a}_e beliebig gewählt werden kann.:

$$\mathbf{w}_{3/4} \rightarrow \pm \infty \quad ?_{3/4/5/6} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2a}_e / (\pm \mathbf{k} + \sqrt{\mathbf{k}^2 + 4 \mathbf{a}_e k_p}) \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Das System enthält neben den herkömmlichen Eigenwerten der DGL auch Eigenwerte $\mathbf{w}^{\otimes} \pm \infty$, welche neben den Lagrangeschen Multiplikatoren auch den Freiheitsgrad u beeinflussen. Da u aber durch die Nebenbedingung festgehalten ist, können die Eigenformen 3-6 nicht angeregt werden. Zur Lösung trägt nur die erste Eigenform bei. Die unendlich hohen Störfrequenzen treten in der Lösung der Bewegungsgleichungen nicht mehr in Erscheinung.

4.7 Zusammenfassung, Schlußfolgerungen

Ziel dieses Kapitels war es, verschiedene differentiell – algebraische Modellierungen fußpunkterregter Einmassenschwinger zu untersuchen. Bei der Zeitintegration dieser Systeme ergaben sich Störungen und Instabilitäten. Für diese Systeme sollten deswegen die maßgebenden Charakteristika von DAE's bestimmt werden. Die Eigenwerte 2. Ordnung sollten Ansatzpunkte zur Erklärung der bei der Integration mit Verfahren 2. Ordnung auftretenden Effekte ergeben. Dieses Ziel wurde teilweise erreicht.

Die Indexbestimmung der Modelle ergab, daß der Index mechanischer Systeme nicht zwangsläufig 3 betragen muß. Vielmehr ergibt sich der Index aus der Bestimmungsgleichung der Lagrange'schen Multiplikatoren. Sind in dieser Gleichung Massenträgheitskräfte enthalten und ergeben sich deshalb Terme in Abhängigkeit der Beschleunigung von Lagekoordinaten, dann beträgt der Index 3. Sind maximal Terme in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten von Lagekoordinaten enthalten beträgt der Index 2. Ansonsten beträgt der Index 1. Der Differentiationsindex und der Störungsindex sind dabei identisch ($d_i=p_i$). Besonders gut kann dies an einem Einmassenschwinger gezeigt werden. Befindet sich am Freiheitsgrad der Zwangsbedingung ($u(t)$) ein Massenelement, so besitzt das System den Index 3. Sind am Freiheitsgrad der Zwangsbedingung lediglich Dämpfer- Federelemente bzw. nur Federelemente angeordnet, so reduziert sich der Index auf 2 bzw. 1. Die Singularität in der Massenmatrix wirkt sich hier positiv aus! Ist die Massenmatrix der Differentialgleichung singular, so stellt die zusätzliche Singularität in der Dämpfungsmatrix einen weiteren Vorteil dar. Mit dieser Erkenntnis läßt sich erklären, warum ein Einmassenschwinger mit einer Aufstandsfeder bei der Zeitintegration mit dem Newmark- β Verfahren stabile Ergebnisse, ein Einmassenschwinger mit einer Aufstandsmasse aber instabile Ergebnisse liefert.

Daneben zeigt sich, daß die Anregungsfunktion $r(t)$ nicht beliebig gewählt werden kann. Damit für ein Index 3 System eine Lösung existiert, muß $r(t)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar sein.

Eine wichtige Technik bei DAE's ist die Indexreduktion. Die Auswirkungen der Indexreduktion auf die Empfindlichkeit der Lösung im Hinblick auf im Berechnungsverlauf auftretender Störungen konnte gezeigt werden. Die Indexreduktion verringert die Störungsanfälligkeit der Lagrange'schen Multiplikatoren, vergrößert zugleich aber die Fehler in den Lagekoordinaten. Die extrem hochfrequenten Störungen in Simulationsergebnissen der Lagrange'schen Multiplikatoren können dadurch erklärt werden, daß diese vor allem gegenüber hochfrequenten Anteilen ($\omega \rightarrow \infty$) in den Störungen empfindlich sind. Das Abdriften der Lagekoordinaten nach einer Indexreduktion ist durch die Empfindlichkeit dieser gegenüber tieffrequenter Störungen ($\omega \rightarrow 0$) erklärbar.

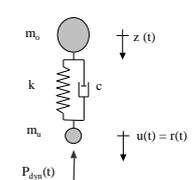
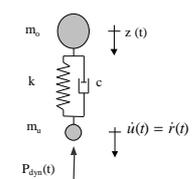
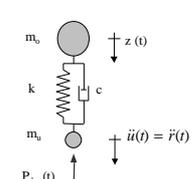
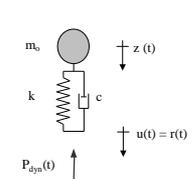
Aus strukturdynamischer Sicht besitzen Index 3 Systeme 4 Eigenwerte mit $\omega \rightarrow \infty$. Die dazugehörigen Eigenwerte beeinflussen nur die Lagrange'schen Multiplikatoren, nicht aber die Lagekoordinaten. Dies erklärt ebenfalls die hochfrequenten Störungen in den Lagrange'schen Multiplikatoren. Jede Indexreduktion bringt einen Eigenwert mit $\omega=0$ in das System ein und entfernt einen Eigenwert mit $\omega \rightarrow \pm\infty$. Die so entstandenen Eigenwerte mit $\omega=0$ beeinflussen nun nur die Lagekoordinaten. Damit ist das Abdriften der Lagekoordinaten nach einer Indexreduktion erklärbar.

Jedoch tritt bei einer Zeitintegration mit dem Newmark- β Verfahren mit $b=1/4$, $\xi=1/2$ das Abdriften erst nach einer zweimaligen Indexreduktion auf.

Unklar blieb jedoch, warum nach einer zweimaligen Indexreduktion des Index 3 Systems (Modell 3) zwei Eigenwerte mit $w^{\text{Re}} \pm \text{Im}$ im System verblieben, die Integration aber stabil und störungsfrei erfolgte. Gleiches gilt für die einmalige Indexreduktion eines Index 2 Systems (Modell 5). Vor allem konnte keine Erklärung für die auftretenden Instabilitäten bei der Zeitintegration gefunden werden. Es zeigte sich lediglich, daß diese nach der Reduktion des System auf den Index 2 verschwinden (Modell 1).

Das Lösungsverhalten von differentiell-algebraischen Systemen konnte in diesem Kapitel zum Teil erklärt werden. Mit den in diesem Kapitel angewandten Methoden sind einige Effekte jedoch nicht deutbar. Um dieses Problem näher zu untersuchen, soll im nächsten Kapitel eine Stabilitätsanalyse differentiell - algebraischer System durchgeführt werden.

Die Ergebnisse der Untersuchungen in diesem Kapitel sind in der nächsten Abbildung in kurzer Form zusammengefaßt:

Modell	d_i	p_i	Eigenwerte	Eigenformen
 <p>1</p>	3	3	$w_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}) / 2 m_o$ $w_{3/4/5/6} = \pm \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ C_1 \pm C_2]$ $?_{3/4/5/6} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}]$
 <p>2</p>	2	2	$w_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}) / 2 m_o$ $w_3 = 0$ $w_{4/5/6} = \pm \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ C_1 \pm C_2]$ $?_3 = [1 \ 1 \ 0]$ $?_{4/5/6} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}]$
 <p>3</p>	1	1	$w_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}) / 2 m_o$ $w_{3/4} = 0$ $w_{5/6} = \pm \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ C_1 \pm C_2]$ $?_{3/4} = [1 \ 1 \ 0]$ $?_{4/5/6} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}]$
 <p>4</p>	2	2	$w_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4 m_o k - c^2}) / 2 m_o$ $w_{3/4/5} = \pm \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ C_1 \pm C_2]$ $?_{3/4/5} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}]$ $?_6$

			$\mathbf{w}_6 = \infty$	
<p>5</p>	1	1	$\mathbf{w}_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4m_0 k - c^2}) / 2m_0$ $\mathbf{w}_3 = 0$ $\mathbf{w}_{4/5} = \pm \infty, \mathbf{w}_6 = \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ C_1 \pm C_2]$ $?_3 = [1 \ 1 \ 0]$ $?_{4/5} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}], ?_6$
<p>6</p>	1	1	$\mathbf{w}_{1/2} = (I c \pm \sqrt{4m_0 k - c^2}) / 2m_0$ $\mathbf{w}_{3/4/5/6} = \pm \infty$	$\Psi_{1/2} = [1 \ 0 \ k/k_p]$ $\Psi_{3/4/5/6} = [1 \ 0 \ C_3(\mathbf{a})]$

Abbildung 4.16: Charakteristika der untersuchten Modelle des Einmassenschwingers

Mit: $C_1 \pm C_2 = (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4m_0 k} + 2m_0 k) / 2m_0 k_p$, $\mathbf{C}_3(\mathbf{a}) = \mathbf{2a} / (\pm \mathbf{k} + \sqrt{\mathbf{k}^2 + 4\mathbf{a} k_p})$

5 Analyse der Zeitintegration differentiell - algebraischer Systeme

Im vorangegangenen Kapitel wurden verschiedene Modellierungen des Einmassenschwingers untersucht. Der Einmassenschwinger als vereinfachtes Modell eines Fahrzeugs hat den Vorteil, daß übersichtliche, einfach zu interpretierende Ergebnisse gewonnen werden können. Obwohl er ein vereinfachtes Modell darstellt, zeigt er bereits alle wesentlichen Effekte differentiell - algebraischer Systeme, die entsprechend bei umfassenden Fahrzeugmodellen auftreten. Anhand verschiedener Einmassenschwinger wurde gezeigt, daß der Index mechanischer Systeme den Wert 3,2 oder 1 annehmen kann. Damit konnten sechs grundlegende, differentiell - algebraische Systeme unterschieden werden:

- Index 3 Systeme (Modell 1),
- Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 2 (Modell 2)
- Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 1 (Modell 3)
- Index 2 Systeme (Modell 4),
- Index 2 Systeme, indexreduziert auf Index 1 (Modell 5),
- Index 1 Systeme (Modell 6),

Diese Systeme wurden sowohl aus Sicht der Theorie differentiell - algebraischer Gleichungen wie auch aus Sicht der Strukturmechanik untersucht. Mehrere, bei der Zeitintegration dieser Systeme mit Verfahren 2. Ordnung sich ergebende Effekte konnten damit erklärt werden. Ungeklärt blieben die bei Simulationsrechnungen auftretenden Instabilitäten. Darüber hinaus zeigte sich nach einer Indexreduktion überraschenderweise nicht immer ein Abdriften der Lagekoordinaten.

Zur Erklärung dieser Phänomene wird in diesem Kapitel eine Stabilitätsanalyse der Zeitintegration durchgeführt. Vor allem soll versucht werden, das Auftreten von Instabilitäten zu erklären, Stabilitätsgrenzen für die Zeitintegration festzulegen und die Störfrequenzen in den Ergebnissen zu deuten. Die Genauigkeit der Integration wird hier nicht untersucht. Dazu werden im folgenden Kapitel Vergleichsrechnungen mit analytischen Lösungen und anderen Lösungsverfahren durchgeführt.

Im Abschnitt 5.1 wird zunächst auf die Grundlagen zur Durchführung von Stabilitätsuntersuchungen eingegangen. Die Stabilitätskriterien bei der Zeitintegration gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels des Generalized - α Verfahrens werden zusammengefaßt. Mit den bei der Stabilitätsanalyse differentiell - algebraischer Systeme auftretenden Schwierigkeiten befaßt sich Abschnitt 5.2. Danach wird eine Stabilitätsanalyse ungedämpfter differentiell - algebraischer Systeme durchgeführt. Dabei wird versucht Stabilitätskriterien für derartige Systeme herzuleiten. Anschließend sollen die bei der Zeitintegration auftretenden Effekte interpretiert werden.

Die Stabilitätsuntersuchung in diesem Kapitel wird anhand des Generalized- α Verfahrens durchgeführt. Das Generalized- α Verfahren ist eines der modernsten Verfahren und besitzt beste spektrale Charakteristika. Darüber hinaus können viele populäre, strukturdynamische Verfahren di-

rekt aus dem Generalized- α Verfahren abgeleitet werden. Die Interpretation der bei numerischen Berechnungen auftretenden Effekte ist anhand des Generalized- α Verfahrens aufgrund der vielen Parameter des Verfahrens schwierig und soll deswegen anhand eines einfacheren Verfahrens erfolgen. Das einfachste der aus dem Generalized- α Verfahren ableitbaren Verfahren ist das Newmark- β Verfahren. Es wird lediglich über zwei Parameter beschrieben, was die Interpretation der Ergebnisse vereinfacht. Darüber hinaus zeigt es die geringsten Fehler bei der Integration.

Weiterhin sollen Systeme mit Festhaltungen im Inneren untersucht werden (Abschnitt 5.5). Anschließend soll versucht werden, Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische DAEs zu entwickeln (Abschnitt 5.6).

5.1 Stabilitätsuntersuchungen von Integrationsverfahren

2. Ordnung

Die Eigenschaften eines Zeitschrittverfahrens können für lineare Berechnungen durch analytische Untersuchungen bestimmt werden (siehe Anhang B). Zeitintegrationsverfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung werden dabei anhand der Eigenschaften der Vergrößerungsmatrix bewertet. Derartige Systeme sind auf der Basis ihrer Eigenformen in Einmassenschwinger entkoppelbar. Deshalb ist es ausreichend zur Stabilitätsuntersuchung einen Einmassenschwinger mit einer variablen Eigenkreisfrequenz ω und einem variablen Lehrschen Dämpfungsmaß α zu betrachten:

$$\ddot{w} + 2\alpha\omega \dot{w} + \omega^2 w = P. \quad (5.1)$$

Nach Anwendung des Zeitschrittverfahrens auf diesen Einmassenschwinger kann die Gleichgewichtsbetrachtung auf die Form

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{X}_t + \mathbf{L}(r_{t+\Delta t}) \quad (5.2)$$

gebracht werden. Dabei ist :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \omega \\ \Delta t \dot{w} \\ \Delta t^2 \ddot{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} := \text{Vergrößerungsmatrix}, \quad \mathbf{L} := \text{Lastoperator.}$$

Die Stabilität und Genauigkeit eines Integrationsverfahrens bestimmt man durch Untersuchung der Eigenwerte λ_i der Vergrößerungsmatrix [Hilber, Hughes, Taylor 1977]. Diese ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (5.3)$$

Der spektrale Radius r entspricht dem maximalen Eigenwert:

$$r = \max\{|\lambda_i|\}. \quad (5.4)$$

Damit ein Zeitintegrationsverfahren stabil ist, muß nach [Hughes 1987] für den spektralen Radius gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\leq 1 \quad \forall t \quad \text{für einfache Eigenwerte} \\ \mathbf{r} &< 1 \quad \forall t \quad \text{für mehrfache Eigenwerte} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Falls die zweite Bedingung verletzt ist, wachsen die Schwingungsamplituden schwächer als bei der Verletzung der 1. Bedingung und man spricht von schwacher Instabilität.

Für das Generalized- α Verfahren mit optimalen Eigenschaften lautet die Stabilitätsbedingung bei der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen [Chung, Hulbert 1993]:

$$0 \leq \mathbf{r}_\infty \leq 1. \quad (5.6)$$

ρ_∞ entspricht dabei dem spektralen Radius bei unendlich hohen Frequenzen. Die weiteren Parameter ergeben sich aus ρ_∞ zu (siehe Anhang B):

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{r}_\infty}{\mathbf{r}_\infty + 1} \quad \mathbf{a}_m = \frac{2\mathbf{r}_\infty - 1}{\mathbf{r}_\infty + 1} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f. \quad (5.7)$$

Algebraische Differentialgleichungen sind schwieriger zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen. Für die einzelnen Modelle sollen entsprechende Stabilitätskriterien gefunden werden, welche eine stabile Zeitintegration ermöglichen.

5.2 Entkopplung differentiell - algebraischer Systeme

Klassisch beginnt eine Stabilitätsanalyse mit der Entkopplung des Gleichungssystems über seine Eigenformen. Für differentiell - algebraische Systeme ist dies nicht möglich. Die Gleichungssysteme entkoppeln sich nicht mehr.

So ergeben sich für das Modell 3 (Index 3 indexreduziert auf Index 1) folgende generalisierte Massen- Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= \begin{bmatrix} m_o & m_o + (-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4m_o k + 2m_o k}) / (2m_o k_p) & 0 \\ m_o & m_o + m_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C}^* &= \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^* &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ \frac{-c^2 \pm c \sqrt{c^2 - 4m_o k + 2m_o k}}{2m_o} & 0 & k_p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Hinweis: \mathbf{M}^* ist nicht einheitenrein, da in der Nebenbedingung ($\ddot{u} = \ddot{r}$) keine Masse enthalten ist. Um dies herzustellen muß die Nebenbedingung mit einer Einheitsmasse multipliziert werden.

Darüber hinaus besitzen Index 3 und Index 1 Systeme je Lagerung zwei identische Eigenvektoren (mangelhafter Satz von Eigenvektoren, siehe Modell 1 und Modell 6, Kapitel 4). Eine Entkopplung in Einmassenschwinger ist schon allein deshalb nicht möglich. Die Entkopplung algebraischer Differentialgleichungen erfordert deshalb eine andere Vorgehensweise.

Eine Möglichkeit zur Entkopplung ungedämpfter differentiell – algebraischer Systeme mit Index 3 zeigen [Cardona, Géradin 1989] und [Farhat, Crivelli, Géradin 1995]. Da diese Transformation umfangreich ist, wird hier auf die Literatur verwiesen. Die Transformationsmatrix enthält unter anderem Eigenvektoren des ungedämpften Eigenwertproblems. Eine Anwendung der Transformation auf gedämpfte Systeme ist nicht möglich, da differentiell – algebraische Systeme im allgemeinen keine Rayleigh – Dämpfung ($\mathbf{C} = \mathbf{a} \mathbf{M} + \mathbf{b} \mathbf{K}$) besitzen. Die Steifigkeitsmatrix enthält Beiträge aus den Lagrangeschen Nebenbedingungen und den Lagrangeschen Parametern, für die in der Dämpfungsmatrix keine äquivalenten Einträge existieren. Dadurch würde \mathbf{b} zu 0. In der Regel ist \mathbf{C} weiterhin nicht proportional zu \mathbf{M} . \mathbf{C} kann nicht proportional zu \mathbf{M} und \mathbf{K} ausgedrückt werden. Für die hier betrachteten Fälle kann jedoch davon ausgegangen werden, daß sich eine Dämpfung nicht ungünstig auf die Stabilität der Zeitintegration auswirkt, so daß die Annahme ungedämpfter Systeme keine große Einschränkung darstellt.

Mit Hilfe dieser Transformation kann eine DAE mit Index 3 in Teilsysteme entkoppelt werden. Damit soll versucht werden Stabilitätskriterien für derartige Systeme herzuleiten und die bei der Zeitintegration auftretenden Effekte zu erklären.

5.3 Stabilitätsuntersuchung ungedämpfter Index 3 Systeme

Index 3 Systeme sind die am häufigsten auftretenden Systeme. Sie liegen vor, wenn sich an der Lagekoordinate mit Festhaltungen Massenelemente befinden und die Nebenbedingung auf Lageebene formuliert ist. Systeme dieser Art sind schwierig zu lösen.

5.3.1 Entkopplung der Bewegungsgleichung

Auf ein System mit $n-m$ Freiheitsgraden und m Festhaltungen kann die Transformation der Massen- und der Steifigkeitsmatrix [Cardona, Géradin 1989] angewendet werden. Damit können die Massen- und die Steifigkeitsmatrix nach wie vor nicht gleichzeitig diagonalisiert werden. Das Gleichungssystem kann jedoch in $n-m$ Einmassenschwinger und in m Systeme bestehend aus den Lagekoordinaten mit Festhaltungen und den dazugehörigen Lagrangeschen Parametern (2×2 Untermatrizen) aufgespalten werden:

5.3.2 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Zur Bestimmung der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} des gekoppelten Systems wird, abweichend von [Cardona, Géradin 1989], das Generalized- α Verfahren direkt auf (5.12) angewendet.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{2\ t+\Delta t} \\ \dot{y}_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{2\ t} \\ \dot{y}_{3\ t} \end{bmatrix} + \left((1-\mathbf{g}) \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t} \\ \ddot{y}_{3\ t} \end{bmatrix} + \mathbf{g} \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t+\Delta t} \\ \ddot{y}_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} \right) \Delta t \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} y_{2\ t+\Delta t} \\ y_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2\ t} \\ y_{3\ t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{y}_{2\ t} \\ \dot{y}_{3\ t} \end{bmatrix} \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \mathbf{b} \right) \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t} \\ \ddot{y}_{3\ t} \end{bmatrix} + \mathbf{b} \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t+\Delta t} \\ \ddot{y}_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} \right) \Delta t^2 \quad (5.14)$$

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} (1-\mathbf{a}_m) \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t+\Delta t} \\ \ddot{y}_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} + \mathbf{a}_m \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2\ t} \\ \ddot{y}_{3\ t} \end{bmatrix} \\ (1-\mathbf{a}_f) \begin{bmatrix} y_{2\ t+\Delta t} \\ y_{3\ t+\Delta t} \end{bmatrix} + \mathbf{a}_f \begin{bmatrix} y_{2\ t} \\ y_{3\ t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = (1-\mathbf{a}_f) \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{a}_f \mathbf{P}_t \quad (5.15)$$

Werden diese Gleichungen in die aus der Stabilitätsanalyse bekannte Formulierung gebracht, so ergibt sich:

$$\mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_t + \mathbf{L}(r_{t+\Delta t}). \quad (5.16)$$

\mathbf{L} wird dabei aus der Last gebildet. Damit erhält man die Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} zu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}_f}{(\mathbf{a}_f-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{g} & \mathbf{b}-\mathbf{g} & \frac{2\mathbf{b}-\mathbf{g}}{2\mathbf{b}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f-1)}{1} & -\frac{1}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b}-1}{2\mathbf{b}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\mathbf{a}_m}{C_1} & \frac{\mathbf{a}_m-1}{C_2} & \frac{\mathbf{a}_m+2\mathbf{b}-1}{2C_2} & \frac{\mathbf{a}_f}{(\mathbf{a}_f-1)} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{g}(1-\mathbf{a}_m)}{C_1} & \frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}_m-1)}{C_2} & \frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}_m+2\mathbf{b}-1)}{2C_2} & \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f-1)} & \frac{\mathbf{b}-\mathbf{g}}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b}-\mathbf{g}}{2\mathbf{b}} \\ \frac{1-\mathbf{a}_m}{C_1} & \frac{\mathbf{a}_m-1}{C_2} & \frac{\mathbf{a}_m+2\mathbf{b}-1}{2C_2} & \frac{1}{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f-1)} & -\frac{1}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b}-1}{2\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

mit:

$$C_1 = \Delta t^2 \mathbf{b} (1-2\mathbf{a}_f + \mathbf{a}_f^2)$$

$$C_2 = \Delta t^2 \mathbf{b} (\mathbf{a}_f - 1)$$

und

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \Delta t \dot{\mathbf{y}}_2 \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_2 \\ \mathbf{y}_3 \\ \Delta t \dot{\mathbf{y}}_3 \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Die Eigenwerte von \mathbf{A} sind:

$$\begin{aligned} I_{1,4} &= \frac{\mathbf{a}_f}{\mathbf{a}_f - 1} \\ I_{2,5} &= \frac{4\mathbf{b} - 2\mathbf{g} - 1 + \sqrt{1 + 4\mathbf{g}^2 - 16\mathbf{b} + 4\mathbf{g}}}{4\mathbf{b}} \\ I_{3,6} &= \frac{4\mathbf{b} - 2\mathbf{g} - 1 - \sqrt{1 + 4\mathbf{g}^2 - 16\mathbf{b} + 4\mathbf{g}}}{4\mathbf{b}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Damit das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung sowie eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen besitzt, muß gelten (siehe (5.7)):

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2. \quad (5.20)$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte (5.19) zu:

$$I_{1,4} = \frac{\mathbf{a}_f}{\mathbf{a}_f - 1}, \quad I_{2,3,5,6} = \frac{\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_f + 1}{\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_f - 1}. \quad (5.21)$$

Das gekoppelte System besitzt dann einen doppelten Eigenwert $\lambda_{1/3}$ sowie einen vierfachen Eigenwert $\lambda_{2/3/5/6}$. Eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen erfordert (siehe (5.7)):

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{r}_\infty}{\mathbf{r}_\infty + 1} \quad \mathbf{a}_m = \frac{2\mathbf{r}_\infty - 1}{\mathbf{r}_\infty + 1}. \quad (5.22)$$

Somit lauten die Eigenwerte (5.19) schließlich:

$$I_{1,2,3,4,5,6} = -\mathbf{r}_\infty. \quad (5.23)$$

Damit ist folgendes Stabilitätskriterium zu erfüllen:

$$\mathbf{r} = \max\{|I_i|\} < 1. \quad (5.24)$$

Für ungedämpfte differentiell - algebraische Systeme mit Index 3 lautet die Stabilitätsbedingung bei der Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren:

$$0 \leq r_\infty < 1. \quad (5.25)$$

Damit verbietet sich im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen der nichtdissipative Fall ($r_\infty = 1$).

5.3.3 Analyse auftretender Effekte bei der Zeitintegration

Die Analyse der bei der Zeitintegration auftretenden Effekte wird hier anhand des Einmassenschwingermodells 1 durchgeführt. Das Modell 1 ist aufgrund seiner lediglich drei Variablen ein sehr einfaches Modell. Dabei zeigt es alle bei derartigen Systemen auftretenden Effekte.

Die Zeitintegration erfolgt dabei mittels des Newmark- β Verfahrens. Das Newmark- β Verfahren mit $\mathbf{b} = 1/4$ und $\mathbf{g} = 1/2$ ist, wenn es auf das Index 3 Problem angewendet wird, instabil. Die Verwendung gerade dieses Verfahrens ist aber wegen der wenigen beschreibenden Parameter vorteilhaft. Aufbauend auf den hier gewonnenen Erkenntnissen lassen sich auch die Effekte bei der Integration der Index 3 DAE mit dem Generalized- α Verfahren erklären.

Das ungedämpfte Modell 1 sowie dessen algebraische Differentialgleichung sind in Abbildung 5.1 dargestellt:

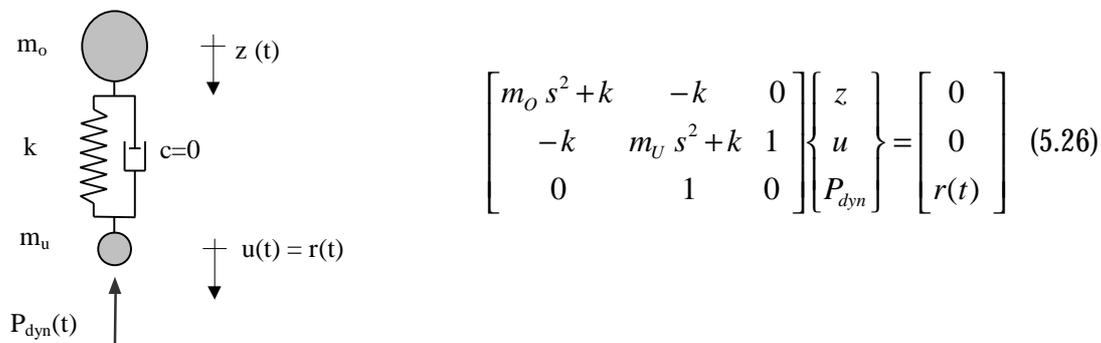


Abbildung 5.1: Einmassenschwinger Modell 1 und dessen DAE 2. Ordnung

Die Vergrößerungsmatrix kann auf zwei verschiedenen Wegen gewonnen werden. Zum einen kann zunächst eine Entkopplung in Teilsysteme vorgenommen werden. Nach Bestimmung der Vergrößerungsmatrizen für beide Teilsysteme kann die Vergrößerungsmatrix des Modells 1 über eine Rücktransformation gewonnen werden. Zum anderen kann die Vergrößerungsmatrix direkt aus der Diskretisierung der Bewegungsgleichungen des Einmassenschwingers ermittelt werden. Zur Verdeutlichung der Transformationsbeziehungen aus Abschnitt 5.3.1 wird die erste Vorgehensweise gewählt.

Die Transformationsbeziehungen sowie $\tilde{\Psi}$ für das Modell 1 lauten:

$$\mathbf{z} = \tilde{\Psi} \mathbf{y} \quad (5.27)$$

mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z \\ u \\ P_{dyn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_o} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_U} & 0 \\ k/\sqrt{m_o} & -k/2\sqrt{m_U} & \sqrt{m_U} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Damit ergeben sich die generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen zu:

$$\mathbf{M}^* = \tilde{\Psi}^T \mathbf{M} \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{K}^* = \tilde{\Psi}^T \mathbf{K} \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} k/m_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

mit

$$\mathbf{w}^2 = k/m_o. \quad (5.31)$$

Damit sind die folgenden Systeme mit dem Zeitschrittverfahren zu diskretisieren:

$$\ddot{y}_1 + \mathbf{w}^2 y_1 = P_1 \quad (5.32)$$

und

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Nun können für beide Systeme die Vergrößerungsmatrizen gewonnen werden. Diese können zur Vergrößerungsmatrix des Gesamtsystems \mathbf{A}_y zusammengesetzt werden.

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}_y \mathbf{y}_t \quad (5.34)$$

Die Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} in den Koordinaten z des Einmassenschwingers ergibt sich durch die Rücktransformation der Vergrößerungsmatrix. Mit:

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}_y \mathbf{y}_t, \quad \mathbf{z}_{t+\Delta t} = \tilde{\Psi} \mathbf{y}_{t+\Delta t} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_t = \tilde{\Psi} \mathbf{y}_t \quad (5.35)$$

folgt

$$\mathbf{z}_{t+\Delta t} = \tilde{\Psi} \mathbf{A}_y \tilde{\Psi}^{-1} \mathbf{z}_t \quad (5.36)$$

und damit:

$$\mathbf{A} = \tilde{\Psi} \mathbf{A}_y \tilde{\Psi}^{-1}. \quad (5.37)$$

Dabei sind

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t} \\ \Delta t \dot{\mathbf{y}}_{1,t} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_{1,t} \\ \mathbf{y}_{2,t} \\ \Delta t \dot{\mathbf{y}}_{2,t} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_{2,t} \\ \mathbf{y}_{3,t} \\ \Delta t \dot{\mathbf{y}}_{3,t} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{y}}_{3,t} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \Delta t \dot{\mathbf{z}}_t \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{z}}_t \\ \mathbf{u}_t \\ \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{P}_{dyn,t} \\ \Delta t \dot{\mathbf{P}}_{dyn,t} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{P}}_{dyn,t} \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Die Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} lautet:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 \frac{1}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 4 \frac{1}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & \frac{1}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \frac{\Delta t^2 \omega^2}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & -\frac{-4 + \omega^2 \Delta t^2}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 2 \frac{1}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 \frac{\Delta t^2 \omega^2}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & -4 \frac{\Delta t^2 \omega^2}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & -\frac{\Delta t^2 \omega^2}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 4 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 4 \frac{m_U}{\Delta t^2} & 4 \frac{m_U}{\Delta t^2} & \frac{m_U}{\Delta t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 8 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 8 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 2 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 8 \frac{m_U}{\Delta t^2} & 8 \frac{m_U}{\Delta t^2} & 2 \frac{m_U}{\Delta t^2} & -2 & -1 & 0 \\ 16 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 16 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 4 \frac{k}{4 + \omega^2 \Delta t^2} & 16 \frac{m_U}{\Delta t^2} & 16 \frac{m_U}{\Delta t^2} & 4 \frac{m_U}{\Delta t^2} & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Betrachtet man die Struktur von \mathbf{A} , so ist gut zu erkennen, daß der Vektor $[u_{n\Delta t} \dot{u}_{n\Delta t} \ddot{u}_{n\Delta t}]$ nach n Zeitschritten nur von $[u_0 \dot{u}_0 \ddot{u}_0]$ abhängt. $[P_{dyn,0} \dot{P}_{dyn,0} \ddot{P}_{dyn,0}]$ wie auch $[z_0 \dot{z}_0 \ddot{z}_0]$ haben keinen Einfluß. Damit ergeben sich $u_{n\Delta t}$, $\dot{u}_{n\Delta t}$ und $\ddot{u}_{n\Delta t}$ zu:

$$u_{n\Delta t} = 0 \quad (5.40)$$

$$\dot{u}_{n\Delta t} = (-1)^n \dot{u}_0 \quad (5.41)$$

$$\ddot{u}_{n\Delta t} = 4n(-1)^n \frac{\dot{u}_0}{\Delta t} + (-1)^n \ddot{u}_0. \quad (5.42)$$

Daraus läßt sich erkennen, daß

- u_n der Anregung r_n im aktuellen Zeitschritt entspricht, welche hier jedoch nicht betrachtet wird. u ist stabil und frei von Störungen.
- Die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{u} zeigt Oszillationen, indem sie in jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt. Die Berechnung von \dot{u} ist stabil, da \dot{u} begrenzt ist.
- Die Beschleunigung \ddot{u} zeigt sowohl Oszillationen wie auch eine schwache Instabilität.

Die Größen $z_{t+\Delta t}$, $\dot{z}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{z}_{t+\Delta t}$ sind nur von z_t , \dot{z}_t und \ddot{z}_t abhängig. Dabei gilt:

$$\begin{bmatrix} z_{t+\Delta t} \\ \Delta t \dot{z}_{t+\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{z}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{EMS} \begin{bmatrix} z_t \\ \Delta t \dot{z}_t \\ \Delta t^2 \ddot{z}_t \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$z_{t+\Delta t}$, $\dot{z}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{z}_{t+\Delta t}$ werden deshalb störungsfrei und stabil berechnet.

Problematisch ist die Berechnung der Lagrangeschen Parameter P_{dyn} . P_{dyn} ist an \ddot{u}_0 gekoppelt und zeigt deshalb das gleiche Lösungsverhalten (Oszillationen, schwache Instabilität). In \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} werden die auftretenden Störungen nochmals verstärkt. Beide sind instabil.

Diese Ergebnisse werden nun mit einer numerischen Vergleichsrechnung verglichen. Den durchgeführten numerischen Berechnungen liegen folgende Parameter zugrunde: Einmassenschwinger: $m_0=7000$ kg, $m_U=300$ kg, $k=2.5 \cdot 10^6$ N/m,

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\mathbf{b}=1/4$, $\mathbf{g}=1/2$ und $dt=0.01$ s.

Die Anregungsfunktion $r(t)$ lautet:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \text{ s} \\ (0.1[s]-t) * 0.1 \text{ m/s} & t > 1 \text{ s} \end{cases} \quad (5.80)$$

Die Zeitintegration des Modells 1 mittels des Newmark- β Verfahrens ergibt für die Systemfreiheitsgrade (z , u , P_{dyn}) sowie deren erste (\dot{z} , \dot{u} , \dot{P}_{dyn}) und zweite Ableitungen (\ddot{z} , \ddot{u} , \ddot{P}_{dyn}):

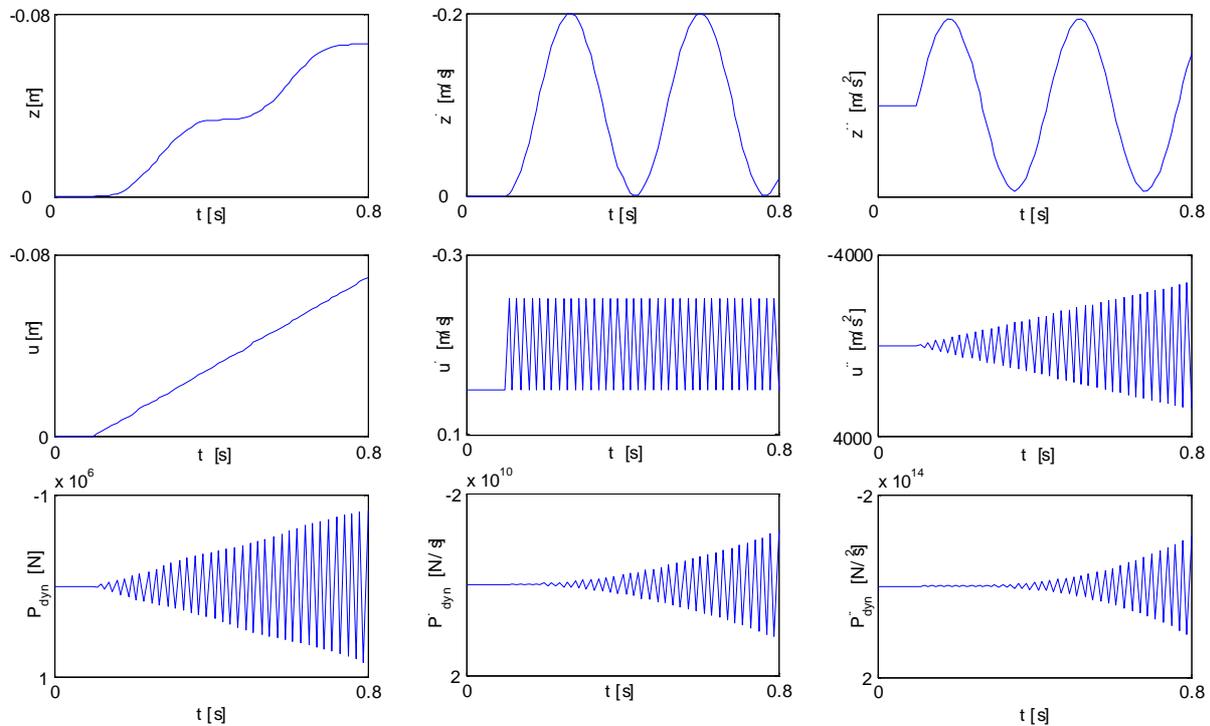


Abbildung 5.2: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingermodells 1

Die Vergleichsrechnungen bestätigen die gewonnenen Erkenntnisse.

Die Störungen entstehen in der Koordinate u und breiten sich in die Lagrangeschen Multiplikatoren (P_{dyn}) aus. In den Lagrangeschen Multiplikatoren entstehen zusätzliche Störungen bzw. die bereits vorhandenen Störungen verstärken sich. Da sich P_{dyn} aus den benachbarten Koordinaten berechnet und nicht umgekehrt, breiten sich die Störungen von P_{dyn} nicht weiter aus. Die Störungen in u wirken sich nicht in z , \dot{z} und \ddot{z} aus. Die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen sind stabil und störungsfrei integrierbar.

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration stabil. Die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen treten ebenfalls auf. Da das Generalized- α Verfahren jedoch für hohe Frequenzen eine numerische Dämpfung in das System einbringt, werden die unendlich hohen Störfrequenzen gedämpft.

Zur Stabilitätsanalyse sind deshalb die beiden Systeme

$$\ddot{y} + \mathbf{w}^2 y = 0 \quad (5.46)$$

$$y = 0 \quad (5.47)$$

zu untersuchen. Die stabile Integration von (5.46) ist durch Erfüllung der Stabilitätskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme gegeben. Daneben muß die stabile Integration der Gleichung (5.47) sichergestellt sein.

5.4.2 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Zur Bestimmung der Vergrößerungsmatrix wird das Generalized- α Verfahren direkt auf (5.47) angewandt. \mathbf{A} ergibt sich zu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}_f}{(\mathbf{a}_f - 1)} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f - 1)} & \frac{\mathbf{b} - \mathbf{g}}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b} - \mathbf{g}}{2\mathbf{b}} \\ 1 & -\frac{1}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b} - 1}{2\mathbf{b}} \\ \frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f - 1)}{\mathbf{b}(\mathbf{a}_f - 1)} & -\frac{1}{\mathbf{b}} & \frac{2\mathbf{b}}{2\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

und besitzt die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathbf{a}_f}{\mathbf{a}_f - 1} \\ I_2 &= \frac{4\mathbf{b} - 2\mathbf{g} - 1 + \sqrt{1 + 4\mathbf{g}^2 - 16\mathbf{b} + 4\mathbf{g}}}{\mathbf{b}} \\ I_3 &= \frac{4\mathbf{b} - 2\mathbf{g} - 1 - \sqrt{1 + 4\mathbf{g}^2 - 16\mathbf{b} + 4\mathbf{g}}}{\mathbf{b}}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Damit das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung sowie eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen besitzt muß gelten:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2. \quad (5.50)$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte zu:

$$I_1 = \frac{\mathbf{a}_f}{\mathbf{a}_f - 1}, \quad I_{2,3} = \frac{\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_f + 1}{\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_f - 1}. \quad (5.51)$$

Das gekoppelte System besitzt den einfachen Eigenwerte \mathbf{I}_1 sowie die doppelten Eigenwerte $\mathbf{I}_{2/3}$. Die doppelten Eigenwerte $\mathbf{I}_{2/3}$ dürfen nicht den Wert 1 annehmen, da sonst eine schwache Instabilität auftreten würde. Damit ergibt sich als Stabilitätskriterium:

$$\mathbf{a}_m < \mathbf{a}_f \leq \frac{1}{2}. \quad (5.52)$$

Analog zum Vorgehen beim Modell 1 lauten die Eigenwerte bei minimaler Dämpfung niedriger Frequenzen:

$$\mathbf{I}_{1,2,3} = -\mathbf{r}_\infty. \quad (5.53)$$

Damit ist folgendes Stabilitätskriterium zu erfüllen:

$$\mathbf{r} = \max\{|\mathbf{I}_i|\} < 1. \quad (5.54)$$

Für das ungedämpfte differentiell-algebraische System mit Index 1 lautet die Stabilitätsbedingung bei der Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren:

$$0 \leq \mathbf{r}_\infty < 1. \quad (5.55)$$

5.4.3 Analyse auftretender Effekte bei der Zeitintegration

Als einfach zu untersuchendes System wird Modell 6 gewählt.

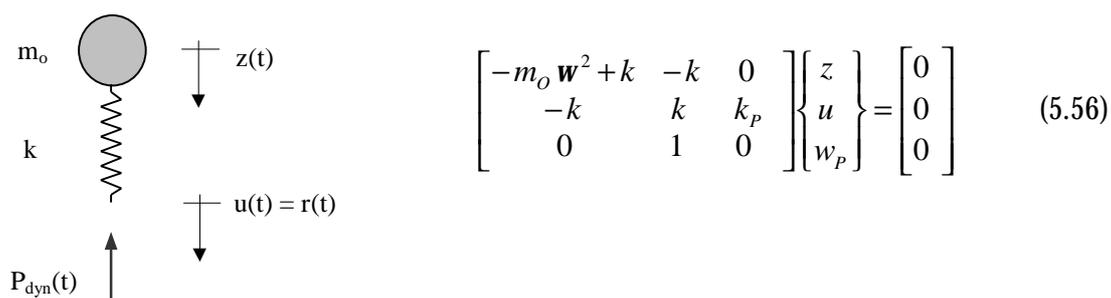


Abbildung 5.3: Einmassenschwinger Modell 6 und dessen DAE 2. Ordnung

Bei der Aufstellung der Transformationsmatrix $\tilde{\Psi}$ kann m_U mit beliebigen Werten $\neq 0$ versehen werden. Für das Modell 6 lautet $\tilde{\Psi}$ mit $m_U = 1$:

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_O} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/\sqrt{m_O} & -k/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Mit dem gleichen Vorgehen wie in 5.3.3 kann die Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} hergeleitet werden:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{1}{4 + dt^2 \omega^2} & 4 \cdot \frac{1}{4 + dt^2 \omega^2} & \frac{1}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot \frac{dt^2 \omega^2}{4 + dt^2 \omega^2} & -1 \cdot \frac{-4 + dt^2 \omega^2}{4 + dt^2 \omega^2} & 2 \cdot \frac{1}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 \cdot \frac{dt^2 \omega^2}{4 + dt^2 \omega^2} & -4 \cdot \frac{dt^2 \omega^2}{4 + dt^2 \omega^2} & -1 \cdot \frac{dt^2 \omega^2}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 4 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 8 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 2 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 16 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 16 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 4 \cdot \frac{\omega^2 m_O}{4 + dt^2 \omega^2} & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

In der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} sind $[u \ \dot{u} \ \ddot{u}]$ und $[z \ \dot{z} \ \ddot{z}]$ vollständig entkoppelt. $u_{n\Delta t}$, $\dot{u}_{n\Delta t}$ und $\ddot{u}_{n\Delta t}$ ergeben sich wie in 5.3.3 zu:

$$u_{n\Delta t} = 0 \quad (5.59)$$

$$\dot{u}_{n\Delta t} = (-1)^n \dot{u}_0 \quad (5.60)$$

$$\ddot{u}_{n\Delta t} = 4n(-1)^n \frac{\dot{u}_0}{\Delta t} + (-1)^n \ddot{u}_0. \quad (5.61)$$

Wiederum

- entspricht u_n der Anregung r_n im aktuellen Zeitschritt, welche hier jedoch nicht betrachtet wird. u ist stabil und frei von Störungen.
- zeigt die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{u} Oszillationen, indem sie in jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt. Die Berechnung von \dot{u} ist stabil, da \dot{u} begrenzt ist.
- beinhaltet die Fußpunkbeschleunigung \ddot{u} sowohl Oszillationen wie auch eine schwache Instabilität.

Die Größen z , \dot{z} und \ddot{z} sind entkoppelt und entsprechen der Vergrößerungsmatrix eines Einmassenschwingers. Damit sind z , \dot{z} und \ddot{z} störungsfrei und stabil.

P_{dyn} , \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} sind nur noch an z , \dot{z} und \ddot{z} gekoppelt. P_{dyn} wird daher nicht mehr von Oszillationen überlagert, die Integration erfolgt stabil. In \dot{P}_{dyn} entstehen Oszillationen, die Berechnung ist aber stabil. \ddot{P}_{dyn} ist von Oszillationen überlagert und schwach instabil.

Obwohl die Zeitintegration von Modell 6 mit dem Newmark- β Verfahren instabil ist, ist die Lösung für die Lagekoordinaten wie auch für P_{dyn} und \dot{P}_{dyn} stabil. Lediglich \ddot{u} und \ddot{P}_{dyn} sind schwach instabil, beeinflussen aber alle anderen Größen nicht.

Die Zeitintegration des Modells 6 mittels des Newmark- β Verfahrens mit den gleichen Parametern wie in 5.3.3 ergibt für die Systemfreiheitsgrade (z , u , P_{dyn}) sowie deren erste (\dot{z} , \dot{u} , \dot{P}_{dyn}) und zweite Ableitungen (\ddot{z} , \ddot{u} , \ddot{P}_{dyn}):

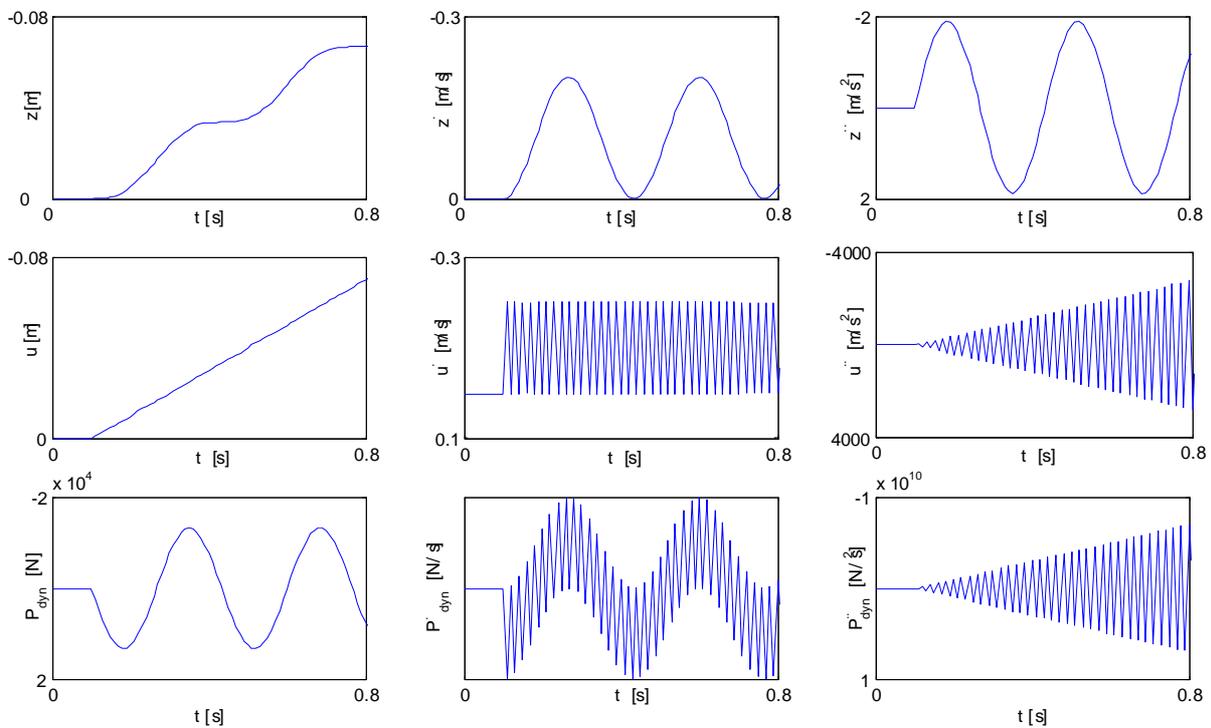


Abbildung 5.4: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingermodells 6

Erwartungsgemäß zeigen sich Störungen in \dot{u} und \dot{P}_{dyn} . \ddot{u} und \ddot{P}_{dyn} sind von Störungen überlagert und instabil. Die Störungen in u wirken sich nicht in z , \dot{z} und \ddot{z} aus. Die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen sind stabil und störungsfrei integrierbar.

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration auch für \dot{P}_{dyn} und \ddot{u} stabil. Die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen sind nach wie vor vorhanden, werden aber durch die numerische Dissipation des Verfahrens gedämpft.

5.5 Übertragung auf Systeme mit Festhaltungen im Inneren

Bisher wurden nur Systeme mit Festhaltungen am Rand untersucht. In diesem Abschnitt sollen aufbauend auf den dabei gewonnenen Erkenntnissen Systeme mit Festhaltungen im Inneren untersucht werden.

Die kennzeichnende Größe für Systeme mit Festhaltungen im Inneren ist, wie für die bisher behandelten differentiell – algebraischen Systeme, ebenfalls deren Index. Dieser kann wiederum den Wert 1, 2 oder 3 annehmen und durch die Differentiation der Nebenbedingung reduziert werden. Bei den bisher betrachteten Systemen war der Index von der Bestimmungsgleichung für P_{dyn} abhängig. Hier ergeben sich nun 2 oder mehr Gleichungen, in welchen P_{dyn} enthalten ist. Zunächst wird deswegen untersucht, welche dieser beiden Gleichungen maßgeblich zur Bestimmung des Index ist. Dazu wird folgendes System betrachtet, das an der oberen Koppelstelle ein Masenelement und an der unteren Koppelstelle lediglich ein Federelement besitzt:

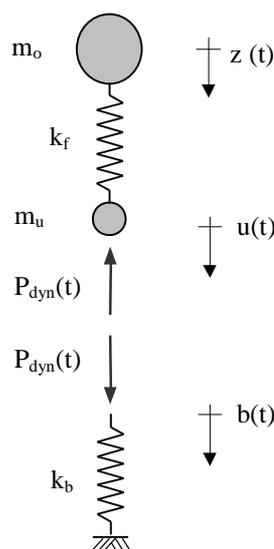


Abbildung 5.5: System mit Festhaltungen im Inneren

Wird weiter die Nebenbedingung auf Lageebene formuliert, so lautet die DAE 2. Ordnung:

$$\begin{bmatrix} m_o s^2 + k_f & -k_f & 0 & 0 \\ -k_f & m_u s^2 + k_f & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_b & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ b \\ P_{dyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r(t) \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

Die Transformation auf DAE 1. Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_1 \\ \dot{u} &= u_1 \\ \dot{z}_1 &= (k_f u - k_f z) / m_o \\ \dot{u}_1 &= (k_f z - k_f u - P_{dyn}) / m_u \\ 0 &= k_b b - P_{dyn} \\ 0 &= u - b - r(t) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Das Gleichungssystem stellt eine semiexplizite DAE dar. Der Differentiationsindex kann deshalb über die Differentiation des algebraischen Teiles sowie mittels algebraischer Umformungen bestimmt werden (siehe Kapitel 3):

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}: \quad \dot{u} - \dot{b} = \dot{r}(t) &\rightarrow \dot{b} = u_1 - \dot{r}(t) \\ 0 = k_b \dot{b} - \dot{P}_{dyn} &\rightarrow \dot{P}_{dyn} = k_b (u_1 - \dot{r}(t)) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Nach einer Differentiation der Nebenbedingungen geht das System in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Das System besitzt daher den Differentiationsindex $d_i=1$. Der gleiche Differentiationsindex ergibt sich, wenn die Masse m_u statt am Freiheitsgrad u am Freiheitsgrad b angeordnet ist. Damit ergibt sich der Index zu 1, falls an mindestens einem Freiheitsgrad der Kontaktbedingung lediglich Federelemente angeordnet sind. Besitzt kein Freiheitsgrad der Kontaktbedingung lediglich Federelemente, aber mindestens ein Freiheitsgrad lediglich Feder- und Dämpferelemente so beträgt der Index 2. In allen anderen Fällen beträgt der Index 3. Besteht ein System aus mehreren Festhaltungen, so ist der größte Index aller Festhaltungen maßgebend.

Bei der Zeitintegration zeigen Systeme mit Festhaltungen im Inneren vergleichbare Effekte wie die bisher untersuchten Systeme mit Festhaltungen am Rand. Hier nimmt nun die Nebenbedingung im homogenen Fall die Form

$$g: \quad u - b_i = 0 \quad (5.65)$$

an. b_i kennzeichnen die Lagekoordinaten, die neben u die Festhaltung im Inneren des Systems bilden. Die Stabilitätsaussagen in den Abschnitten 5.3.2 und 5.4.2 gelten dann sinngemäß für $u-b_i$. Da in diesem Fall $u-b_i$ stabil ist, wird angenommen, daß u und b_i stabil sind. Die Störungen in $u-b_i$ breiten sich über u und b_i in die weiteren Lagekoordinaten und die Lagrangeschen Multiplikatoren aus.

5.6 Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische differentiell – algebraische Systeme

Anforderungen an strukturdynamische Verfahren zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen wurden von [Hughes 1987] formuliert. Demnach sollte ein Zeitschrittalgorithmus folgende Eigenschaften erfüllen:

- Unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen.
- Maximal ein Satz impliziter Gleichungen je Zeitschritt.
- Genauigkeit 2. Ordnung.
- Steuerbare numerische Dissipation hoher Frequenzen.
- Selbststartend, d.h. es wird kein anderes Verfahren zur Gewinnung der Startwerte benötigt.

Es existiert eine Vielzahl an Verfahren, welche diese Anforderungen erfüllen. Bei der Zeitintegration von differentiell – algebraischen Gleichungen sind, zur Vermeidung von Instabilitäten, die Stabilitätskriterien enger zu wählen. Daneben treten bei der Integration häufig Störungen mit unendlich hohen Frequenzen auf, welche die Lösung überlagern. Das Lösungsverfahren muß deshalb zusätzlich mit diesen Störfrequenzen umgehen können. Verfahren wie das Generalized- α Verfahren, welche eine numerische Dissipation besitzen, dämpfen diese Störfrequenzen zwar, sind aber nicht in der Lage, deren Entstehung zu verhindern. Die Störfrequenzen treten in den Lagekoordinaten mit Festhaltungen u und den Lagrangeschen Parametern I selbst, sowie in deren Geschwindigkeiten \dot{u}, \dot{I} und Beschleunigungen \ddot{u}, \ddot{I} auf. Da von letzteren keine Rückkopplung auf die Freiheitsgrade des Systems besteht und in der Regel lediglich u und I berechnet werden, erscheint es ausreichend, die Störungsfreiheit der Freiheitsgrade des Systems zu gewährleisten. Damit ergibt sich folgendes Kriterium, das bei der Integration von differentiell – algebraischen Systemen zusätzlich einzuhalten ist:

- Störungsfreie Integration aller Freiheitsgrade.

Das maßgebliche Charakteristikum einer DAE ist ihr Index. Der Index stellt ein Maß für die Schwierigkeit der Lösung der DAE dar. In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, wie sehr der Index einer differentiell – algebraischen Gleichung das Lösungsverhalten bei deren Zeitintegration mit Verfahren 2. Ordnung bestimmt. Das Lösungsverfahren für eine DAE muß daher auf ihren Index abgestimmt sein.

Der nächste Abschnitt faßt deswegen in kurzer Form die Indexbestimmung sowie die verschiedenen Möglichkeiten der Indexreduktion zusammen. Danach werden für differentiell – algebraische Systeme Lösungsverfahren in Abhängigkeit von ihrem Index vorgeschlagen.

5.6.1 Indexbestimmung, Indexreduktion

Der Index eines Systems ergibt sich zum einen aus der Lagrangeschen Nebenbedingung, zum anderen wird er durch die Modellierung des Systems an der Kontaktstelle bestimmt. Der Index beträgt 1, falls an mindestens einem Freiheitsgrad der Kontaktbedingung lediglich Federelemente angeordnet sind. Besitzt kein Freiheitsgrad der Kontaktbedingung lediglich Federelemente, aber mindestens ein Freiheitsgrad lediglich Dämpferelemente (bzw. zusätzlich Federelemente), so beträgt der Index 2. In allen anderen Fällen beträgt der Index 3.

Dieser Bestimmung liegt die Formulierung der Nebenbedingung auf Lageebene zugrunde. Durch eine Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich diese auf Geschwindigkeitsebene. Der Index reduziert sich um 1. Nach einer weiteren Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich diese auf Beschleunigungsebene. Der Index reduziert sich um 2. Besteht ein System aus mehreren Festhaltungen, so ist der größte Index aller Festhaltungen maßgebend.

Die Tatsache, daß Systeme mit lediglich Federelementen an einem Freiheitsgrad den Index 1 besitzen kann zur Indexreduktion eines System benutzt werden. Wird an der Kontaktbedingung ein Federelement eingefügt, so reduziert sich der Index des Systems auf 1. Die Größe der Federkonstante ist dabei groß genug zu wählen, damit das Schwingungsverhalten des Systems nicht beeinflußt wird. Die Indexreduktion durch Einfügen einer Zwischenfeder ist in der nächsten Skizze dargestellt:

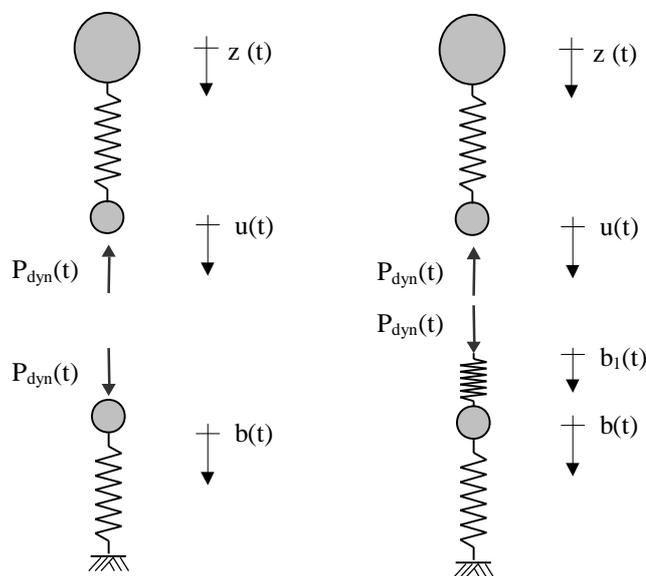


Abbildung 5.6: Index 3 System, Indexreduktion auf Index 1 durch Einfügen einer Zwischenfeder.

5.6.2 Zeitintegration von Index 1 Systemen

Am einfachsten lösbar sind Systeme mit Index 1. Die Integration dieser Systeme kann unter Einhaltung der in Stabilitätskriterien (5.55) und (5.7) mit dem Generalized- α Verfahren erfolgen. Sämtliche Freiheitsgrade w des Systems bleiben störungsfrei.

5.6.3 Zeitintegration von Index 2 Systemen

Systeme mit Index 2 können unter Einhaltung der Stabilitätskriterien (5.55) und (5.7) mit dem Generalized- α Verfahren integriert werden. Jedoch ergeben sich während der Zeitintegration Störungen in den Lagrangeschen Parametern (siehe Kapitel IV Modell 4). Deshalb ist es günstig, zunächst den Index des Systems auf 1 zu reduzieren. Dies gelingt durch eine einmalige Differentiation der Nebenbedingung. Hier tritt kein Abdriften auf (siehe Kapitel IV Modell 4). Daneben kann der Index durch Einführen einer Aufstandsfeder reduziert werden. Hier ergibt sich ebenfalls ein Index 1 System.

Damit sind folgende Vorgehensweisen für Index 2 Systeme möglich:

1. Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung und Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren unter Berücksichtigung von (5.55) und (5.7).
2. Indexreduktion durch Einfügen einer (steifen) Zwischenfeder. Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren unter Berücksichtigung der Stabilitätskriterien (5.55) und (5.7).

5.6.4 Zeitintegration von Index 3 Systemen

Index 3 Systeme besitzen den größten Schwierigkeitsgrad bei der Lösung der hier betrachteten Systeme. Sie können zwar unter Einhaltung der Stabilitätskriterien (5.25) und (5.7) mit dem Generalized- α Verfahren stabil integriert werden, jedoch ergeben sich während der Zeitintegration wiederum Störungen in den Lagrangeschen Parametern. Auch nach einer einmaligen Indexreduktion verschwinden diese Störungen nicht (siehe Kapitel IV Modell 2). Eine weitere Indexreduktion beseitigt diese Störungen schließlich, führt aber zu einem Abdriften der Lagekoordinaten (siehe Kapitel IV Modell 3). Dieses Abdriften ist bei Verwendung des Generalized- α Verfahrens jedoch extrem gering ($8 \cdot 10^{-13}$ nach 3000 Zeitschritten). Durch Einfügen einer Zwischenfeder reduziert sich der Index des Index 3 Systems auf 1. Die Zeitintegration ist dann für Freiheitsgrade w des Systems ebenfalls störungsfrei.

Index 3 Systeme können damit folgendermaßen gelöst werden:

1. Indexreduktion auf den Index 2 durch Differentiation der Nebenbedingung und Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren unter Einhaltung der Stabilitätsaussagen (5.25) und (5.7). Es treten geringe Störungen in den Lagrangeschen Parametern auf. Diese werden durch die dissipativen Eigenschaften des Verfahrens gedämpft. Ein Abdriften tritt nicht auf.

2. Indexreduktion auf den Index 1 durch Differentiation der Nebenbedingung. Die Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren ist störungsfrei aber instabil. Diese Instabilität äußert sich in einem extrem geringen Abdriften. Bei numerischen Berechnungen ergab sich hier ein Wert von $8 \cdot 10^{-13}$ nach 3000 Zeitschritten.
3. Indexreduktion durch Einfügen einer (steifen) Zwischenfeder sowie Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren unter Berücksichtigung der Stabilitätskriterien (5.55) und (5.7). Die Zeitintegration ist stabil und störungsfrei. Die Größe der Federkonstante ist dabei so zu wählen, daß das Schwingungsverhalten des Systems nicht beeinflußt wird.

5.7 Zusammenfassung

Ziel dieses Kapitels ist es, Stabilitätskriterien für die Integration mechanischer, differentiell – algebraischer Systeme mit Verfahren 2. Ordnung festzulegen. Darüber hinaus sollte eine Erklärung für die bei der Zeitintegration auftretenden Phänomene gefunden werden. Insbesondere die Störfrequenzen mit scheinbar unendlich hohen Frequenzen und auftretende Instabilitäten sollten untersucht werden.

Dieses Ziel wurde größtenteils erreicht. Für ungedämpfte Index 3 und Index 1 Systeme konnte das maßgebende Stabilitätskriterium gefunden werden. Bei der Zeitintegration mittels des Generalized- α Verfahrens lautet dieses:

$$0 \leq r_{\infty} < 1 \quad (5.66)$$

$$\text{mit: } \mathbf{a}_f = \frac{r_{\infty}}{r_{\infty} + 1} \quad \mathbf{a}_m = \frac{2r_{\infty} - 1}{r_{\infty} + 1} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f \quad (5.67)$$

Damit verbietet sich der nichtdissipative Fall ($\rho_{\infty} = 1$) im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier zeigt sich auch, daß das Verhalten des Algorithmus bei unendlich hohen Frequenzen von entscheidender Bedeutung für die Stabilität der Zeitintegration ist. Dies bestätigt die Erkenntnis aus dem letzten Kapitel, daß diese Systeme Eigenkreisfrequenzen mit $\omega \rightarrow \pm\infty$ besitzen. Beträgt der spektrale Radius des Verfahrens für $\mathbf{w}^{\circledast} \mathbb{Y} : r_{\infty} = 1$ (keine numerische Dissipation), so wird die Zeitintegration instabil. Ist der spektrale Radius r_{∞} kleiner als 1 (numerische Dissipation ist vorhanden), so ist die Integration stabil.

Mit Hilfe der Vergrößerungsmatrix des Newmark- β Verfahrens konnten die bei der Zeitintegration auftretenden Phänomene erklärt werden. Die unendlich hohen Störfrequenzen entsprechen einer Bildungsvorschrift:

$$w_{n\Delta t} = (-1)^n w_0. \quad (5.68)$$

Die zusätzlich zu den Störfrequenzen auftretenden Instabilitäten ergeben sich durch:

$$w_{n\Delta t} = n(-1)^n C w_0. \quad (5.69)$$

Die Störungen und Instabilitäten betreffen nur Lagekoordinaten mit Festhaltungen und die Lagrangeschen Parameter. Die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen werden stabil und störungsfrei integriert. Die angesprochenen Probleme sind, falls nur die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen gesucht sind, mehr kosmetischer Natur. Sie haben aber fatale Auswirkungen, falls die Lagekoordinaten mit Festhaltungen oder die Lagrangeschen Parameter benötigt werden.

Index 2 Systeme konnten mit der hier vorgestellten Technik nicht untersucht werden. Da deren Schwierigkeitsgrad zwischen dem von Index 3 und Index 1 Systemen liegt, kann angenommen werden, daß für diese Systeme die gleichen Stabilitätskriterien gelten. Weiter konnten nur ungedämpfte Systeme behandelt werden. Da eine Dämpfung dissipative Eigenschaften besitzt, kann angenommen werden daß sich eine zusätzlich vorhandene Dämpfung nicht negativ auf die Stabilität auswirkt. Die Wirkungsweise der Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung konnte ebenfalls nicht gezeigt werden. Insbesondere das nach einmaliger Indexreduktion nicht auftretende Abdriften der Lagekoordinaten bleibt ungeklärt. Da diese Art der Indexreduktion ein mathematisch bewährtes Konzept ist, kann davon ausgegangen werden, daß hier keine zusätzlichen Probleme entstehen. Diese Annahmen konnte durch Vergleichsrechnungen bestätigt werden.

Systeme mit Festhaltungen im Inneren zeigen die gleichen Effekte wie Systeme mit Festhaltungen am Rand. Hier nimmt nun die Nebenbedingung im homogenen Fall die Form $u-b_i=0$ an. Unter Anwendung der ermittelten Stabilitätskriterien ist dann $u-b_i$ stabil. Deswegen kann angenommen werden, daß auch u und b_i stabil sind.

Auf der Basis der in diesem und im letzten Kapitel gewonnenen Erkenntnisse wurden Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische differentiell-algebraische Systeme entwickelt.

Im nächsten Kapitel werden diese Lösungsverfahren auf die Interaktionsproblematik angewandt. Dabei werden Vergleichsrechnungen mit zeitinvarianten Systemen (Betrachtung des Fahrzeuges allein) und zeitvarianten Systemen (Interaktion Fahrzeug – Fahrweg) durchgeführt. Die hier aufgeführten Verfahren werden auf ihre Genauigkeit hin überprüft.

6 Zeitintegration der differentiell – algebraischen Interaktionsgleichung

In Kapitel 2 wurde ein differentiell – algebraisches Gleichungssystem zur Beschreibung der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion hergeleitet. Dessen Zeitintegration ist deutlich schwieriger als die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Deshalb wurden in den Kapiteln 3-5 Studien zur Struktur des Gleichungssystems vorgenommen. Zunächst wurde das Gleichungssystem in Kapitel 3 als DAE charakterisiert. Umfangreiche Untersuchungen halfen bei der Interpretation der maßgeblichen Effekte dieser Systeme (Störungen, Instabilitäten). In Kapitel 5 wurde die Zeitintegration von DAE's mit Verfahren 2. Ordnung untersucht. Dabei konnten Stabilitätskriterien für differentiell – algebraische Systeme hergeleitet werden. Weiterhin konnten Verfahren zu deren Zeitintegration entwickelt werden. Stabilitätskriterien für die Bewegungsgleichungen der Interaktion können wegen der Komplexität und der Zeitvarianz der vorliegenden Problemstellung nicht mehr ermittelt werden. Da die Interaktionsproblematik jedoch sehr ähnlich zu zeitinvarianten Systemen ist, werden die ermittelten Verfahren auf die Interaktionsproblematik angewendet. Deren Eignung wird durch Vergleichsrechnungen untersucht.

In diesem Kapitel wird zunächst eine einfach anzuwendende Vorgehensweise zur Bestimmung des Index der Interaktionsgleichung entwickelt. Danach wird die Reduktion des Index durch die Differentiation der Nebenbedingung behandelt. Anschließend wird die Zeitintegration von Index-1 Systemen untersucht. Für Systeme mit höherem Index finden Lösungsverfahren ihre Anwendung, welche vor einer Zeitintegration den Index reduzieren. Für Index-2 Systeme bzw. Index-3 Systeme werden deshalb mögliche Lösungstechniken untersucht.

Im Folgenden wird ein praxisnahes Fahrzeug-Fahrweg Interaktionssystem untersucht. Bei den durchzuführenden Vergleichsrechnung werden zwei Fälle unterschieden:

- Befindet sich das Fahrzeug vor oder hinter der Brücke, so kann das Fahrzeug getrennt von der Brücke betrachtet werden. Hier ist es ausreichend, ein Fahrzeugmodell mit einer Straßenrauigkeit als Anregung zu untersuchen. Das Fahrzeug entspricht dann einem System mit Festhaltungen am Rand. Die Stabilität der Zeitintegration ist mit den Lösungsverfahren aus Kapitel 5 sichergestellt. Durch Vergleichsrechnungen mit einer extrem starken Anregung soll die Lösungsgenauigkeit untersucht werden. Ferner wird betrachtet, ob und in welchem Maße Störungen auftreten. In diesem Fall können analytische Vergleichslösungen hergeleitet werden (Anhang C). Die Berechnungsergebnisse werden zur Verifikation mit diesen verglichen.
- Befindet sich das Fahrzeug auf der Brücke, so muß das gekoppelte System Fahrzeug-Fahrweg untersucht werden. Die Berechnungsergebnisse werden mit Ergebnissen der Co-Simulation [Lang 2001] verglichen. Die Parameter der Co-Simulation (Schrittweite, Lösungsgenauigkeit) werden so gewählt, daß diese sehr hohen Genauigkeitsansprüchen genügen.

Die numerischen Berechnungen in diesem Kapitel werden so gewählt, daß extrem hohe Belastungen auftreten. Das Abheben der Räder wird nicht berücksichtigt, da das Ziel dieser Vergleichsrechnungen ist, die Integrationsroutinen zu testen.

- Als Fahrzeugmodell wird ein Einmassenschwinger mit: $m_o=7000\text{ kg}$, $m_U=300\text{ kg}$, $k=2.5\cdot 10^6\text{ N/m}$ und $c=1\cdot 10^5\text{ Ns/m}$ betrachtet. Der Einmassenschwinger entspricht dabei einem vereinfachten Modell eines Lkws, welches in der Literatur häufig für Simulationen verwendet wird. Da die Größe der Störungen von der Dämpferkonstante c abhängt, wurde diese zum Testen des Interaktionsalgorithmus sehr groß gewählt. Die Geschwindigkeit des Einmassenschwingers beträgt jeweils $v=20\text{ m/s}$. Dies entspricht einer Geschwindigkeit von 72 km/h .
- Die Zeitintegration erfolgt mittels des Generalized- α Verfahrens mit $r_{\underline{x}}=0.5$. Die zeitliche Diskretisierung wird zu $dt=0.001\text{ s}$ gewählt.
- In einem ersten Fall wird das Fahrzeug allein betrachtet. Die Anregung des Fahrzeugs erfolgt über eine Rampe. Diese ist ähnlich der im EU Projekt „Copernikus“ für Simulationsrechnungen verwendeten Rampe [Vaculín, Valásek 1998]. Für diesen Fall kann für Index 1 und Index 2 Systeme eine analytische Vergleichslösung hergeleitet werden (siehe Anhang C). Für Index 3 Systeme existiert an den Knicken der Rampe infolge der Aufstandsmasse keine analytische Lösung für P_{dyn} mehr. Hier müssen diese Zeitpunkte beim Vergleich ausgenommen werden. Die Rampenfunktion stellt eine starke Anregung für das Fahrzeug dar. Damit soll überprüft werden, ob die Integration bei scharfen Knicken in der Fahrbahn genaue Ergebnisse liefert. Rauigkeitsverläufe von Straßen sind wesentlich glatter im Verlauf. Der verwendete Rauigkeitsverlauf soll daher auch die Belastbarkeit der Integrationsroutinen zeigen.
- Im zweiten Fall wird die Interaktion Fahrzeug – Fahrweg betrachtet. Als Brückenmodell wird ein aus der Bellevillebrücke abgeleiteter 2-dimensionaler Einfeldträger der Länge 50 m verwendet. Die Brücke wird dabei durch 10 Elemente diskretisiert. Bei der Brückenüberfahrt wird keine Straßenrauigkeit verwendet.

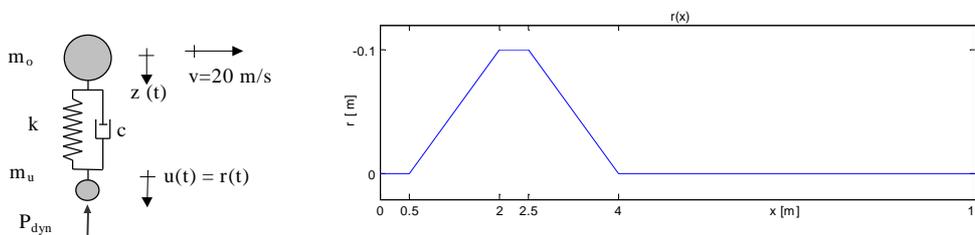


Abbildung 6.1: Modell: Fahrzeug außerhalb Brücke unter Anregung $r(x)$

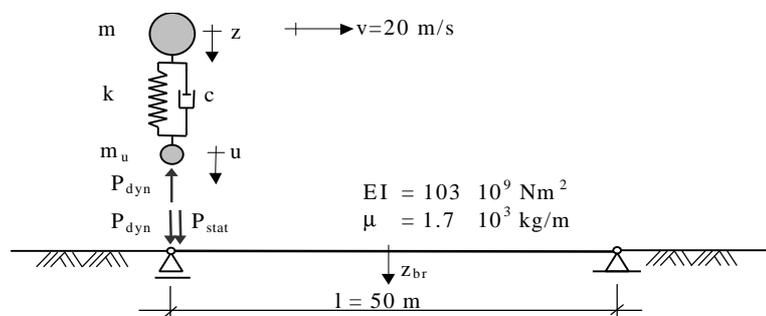


Abbildung 6.2: Modell: Fahrzeug überfährt Brücke

6.1 Bestimmung des Index

Der Index eines Systems ergibt sich zum einen aus den Kontaktbedingungen (Nebenbedingungen) zwischen Fahrzeug und Fahrweg. Zum anderen wird er durch die Modellierung des Fahrwegs und des Fahrzeugs am Aufstandspunkt bestimmt. Ist der Fahrweg masselos modelliert, so beträgt der Index der differentiell – algebraischen Bewegungsgleichung 1. In der Regel ist der Fahrweg jedoch massebehaftet. Der Index ergibt sich dann aus der Modellierung der Radaufstandspunkte. Befinden sich am Radaufstandspunkt des Fahrzeugs lediglich Federelemente, so ergibt sich der Index zu 1. Befinden sich am Radaufstandspunkt des Fahrzeugs Dämpfer- aber keine Massenelemente, so beträgt der Index 2. Sind schließlich am Radaufstandspunkt des Fahrzeugs Massenelemente vorhanden, so beträgt der Index 3. Besitzt ein Fahrzeug mehrere Aufstandspunkte, so ist der maximale Index maßgebend.

Dieser Bestimmung liegt die Formulierung der Nebenbedingung auf Lageebene zugrunde. Durch eine Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich diese auf Geschwindigkeitsebene. Der Index reduziert sich um eins. Nach einer weiteren Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich diese auf Beschleunigungsebene. Der Index reduziert sich um zwei.

6.2 Differentiation der Nebenbedingung

Die Nebenbedingung ist ursprünglich auf Lageebene formuliert. Sie stellt sicher, daß die Räder des Fahrzeugs der Fahrbahnoberfläche der Brücke folgen. Die dazu erforderliche Brückendurchsenkung bestimmt sich aus den Knotenweggrößen der angrenzenden Knotenpunkte, sowie aus der Deformation infolge der direkten Belastung und den Trägheitskräften des Elements (siehe Kapitel 2.7). Die beiden letzten Anteile können bei ausreichend kurzen Elementlängen in guter Näherung vernachlässigt werden. Die Nebenbedingung auf Lageebene ergibt sich nach Transformation in den Zeitbereich damit nach (2.57) zu:

$$z_j(t) = \sum_{i=1}^{i=l} A_{i,j}(t) z_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} B_{i,j}(t) \mathbf{j}_i(t) - r(t). \quad (6.1)$$

Die Nebenbedingung auf Geschwindigkeitsebene ergibt sich aus der Nebenbedingung auf Lageebene durch Ableitung nach der Zeit t :

$$\dot{z}_j(t) = \sum_{i=1}^{i=l} A_{i,j}(t) \dot{z}_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} \dot{A}_{i,j}(t) z_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} B_{i,j}(t) \dot{\mathbf{j}}_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} \dot{B}_{i,j}(t) \mathbf{j}_i(t) - \dot{r}(t). \quad (6.2)$$

Die Nebenbedingung auf Beschleunigungsebene lautet dann:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_j(t) = & \sum_{i=1}^{i=l} A_{i,j}(t) \ddot{z}_i(t) + 2 \sum_{i=1}^{i=l} \dot{A}_{i,j}(t) \dot{z}_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} \ddot{A}_{i,j}(t) z_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^{i=l} B_{i,j}(t) \ddot{\mathbf{j}}_i(t) + 2 \sum_{i=1}^{i=l} \dot{B}_{i,j}(t) \dot{\mathbf{j}}_i(t) + \sum_{i=1}^{i=l} \ddot{B}_{i,j}(t) \mathbf{j}_i(t) - \ddot{r}(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Hermite-Polynome sind jedoch nur C_1 stetig. Die zweiten Ableitungen sind daher zwar noch stetig, aber nicht mehr stetig differenzierbar. Infolge der auftretenden Knicke in $\ddot{A}_{i,j}$ und $\ddot{B}_{i,j}$ ergeben sich Störungen in der dynamischen Radlast. Weiterhin sind $\ddot{A}_{i,j}$ und $\ddot{B}_{i,j}$ für die Interpolation nicht mehr geeignet. Es tritt ein großes Abdriften auf. Soll die Nebenbedingung auf Beschleunigungsebene formuliert werden, so sind daher höherwertige Ansatzfunktionen zu verwenden.

Die Differentiation der Rauigkeitsfunktion $r(t)$ kann z.B. über den Differenzenquotienten erfolgen. Damit ergibt sich bei äquidistanten Stützstellen:

$$\dot{r}(t) \approx \frac{r(t) - r(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad (6.4)$$

$$\ddot{r}(t) \approx \frac{r(t+\Delta t) - 2r(t) + r(t-\Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (6.5)$$

6.3 Zeitintegration von Index 1 Systemen

Index 1 Systeme besitzen bei ihrer Zeitintegration den geringsten Schwierigkeitsgrad aller differentiell – algebraischer Systeme. Wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, kann ein System mit Festhaltungen am Rand mittels des Generalized- α Verfahrens stabil integriert werden, falls gilt:

$$0 \leq r_\infty < 1. \quad (6.6)$$

$$\text{Mit: } \mathbf{a}_f = \frac{r_\infty}{r_\infty + 1} \quad \mathbf{a}_m = \frac{2r_\infty - 1}{r_\infty + 1} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f \quad (6.7)$$

Die Berechnung fast aller Größen erfolgt dann störungsfrei und stabil. Lediglich in den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Lagekoordinaten mit Festhaltungen und den Lagrangeschen Parametern treten Störungen auf. Diese beeinflussen die anderen Größen jedoch nicht und werden durch die numerische Dissipation gedämpft.

Die Zeitintegration mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\mathbf{b}=1/4$, $\mathbf{g}=1/2$ wird zwar instabil, diese Instabilität betrifft jedoch nur die Beschleunigungen der Lagekoordinaten mit Festhaltungen und die 2. Ableitungen der Lagrangeschen Parameter. Deren Geschwindigkeiten werden stabil integriert, es treten jedoch Störungen auf. Beide beeinflussen die anderen Größen jedoch nicht. Alle Weggrößen und Geschwindigkeiten werden stabil und störungsfrei berechnet. Werden nur diese benötigt, so kann die Integration auch mittels des Newmark- β Verfahrens erfolgen.

Zunächst wird die Genauigkeit der Zeitintegration bei der Rampenüberfahrt des Einmassenschwingers untersucht. Die Ergebnisse der Zeitintegration mittels des Generalized- α Verfahrens mit $r_{\Psi}=0.5$ sowie die analytische Vergleichslösung sind in Abbildung 6.3 dargestellt:

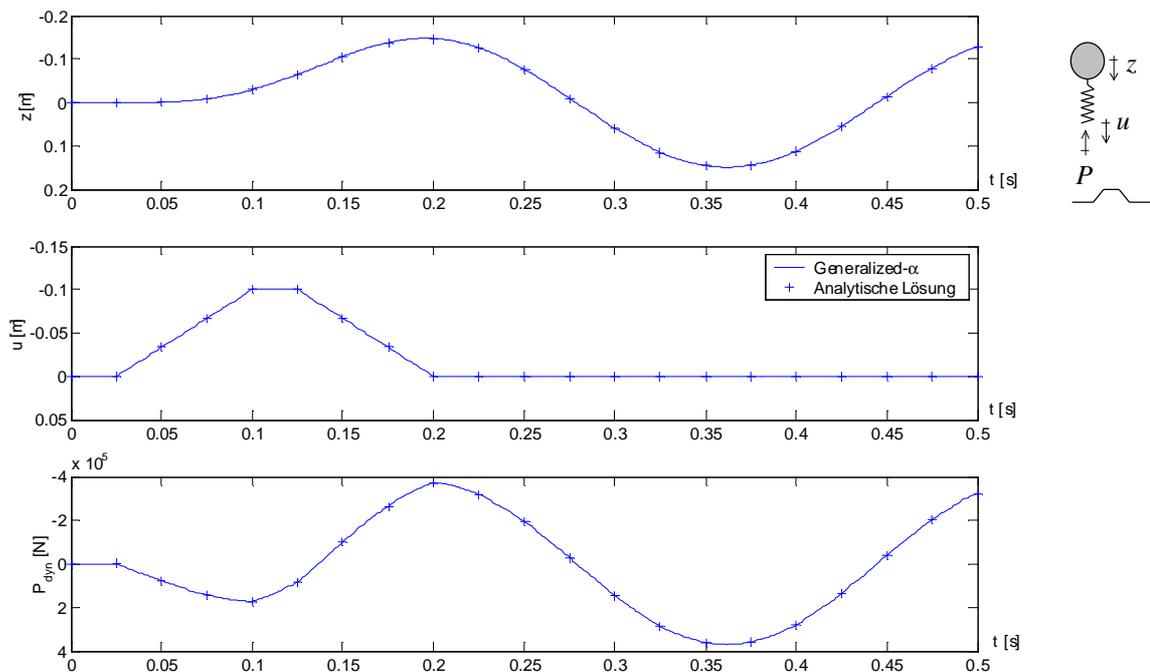


Abbildung 6.3: Ergebnisse der Fahrt des Einmassenschwingers mit Index 1 über Rampe: Integration mit dem Generalized- α Verfahren und analytische Vergleichslösung

Es ist zu erkennen, daß die Größen z , u und P_{dyn} sehr genau mit der analytischen Vergleichslösung übereinstimmen.

Als nächstes wird die Stabilität und die Lösungsgenauigkeit bei der Überfahrt des Einmassenschwingers über die Brücke untersucht. Ein Ergebnisvergleich zwischen der Interaktionssimulation und der Co-Simulation ist in der nächsten Abbildung dargestellt. Der Einmassenschwinger startet dabei am linken Auflager der Brücke und verläßt diese nach 2,5 s. Es werden die Mittendurchsenkung der Brücke z_{br} , die Durchsenkung des Radaufstandspunktes u sowie die dynamische Radlast P_{dyn} verglichen. Bei der Co-Simulation werden beide Teilsysteme getrennt voneinander berechnet. Die sich ergebenden Verschiebungen und Kontaktkräfte werden solange iterativ abgeglichen bis vorgegebene Genauigkeitsschranken erfüllt sind. Diese Genauigkeitsschranken wurden hier sehr eng gewählt. Die Bewegungsgrößen werden vom vorliegenden Programm zur Co-Simulation lediglich bis zum Verlassen des Fahrzeugs der Brücke ($t=2,5s$) berechnet. Danach ist kein Vergleich mehr möglich.

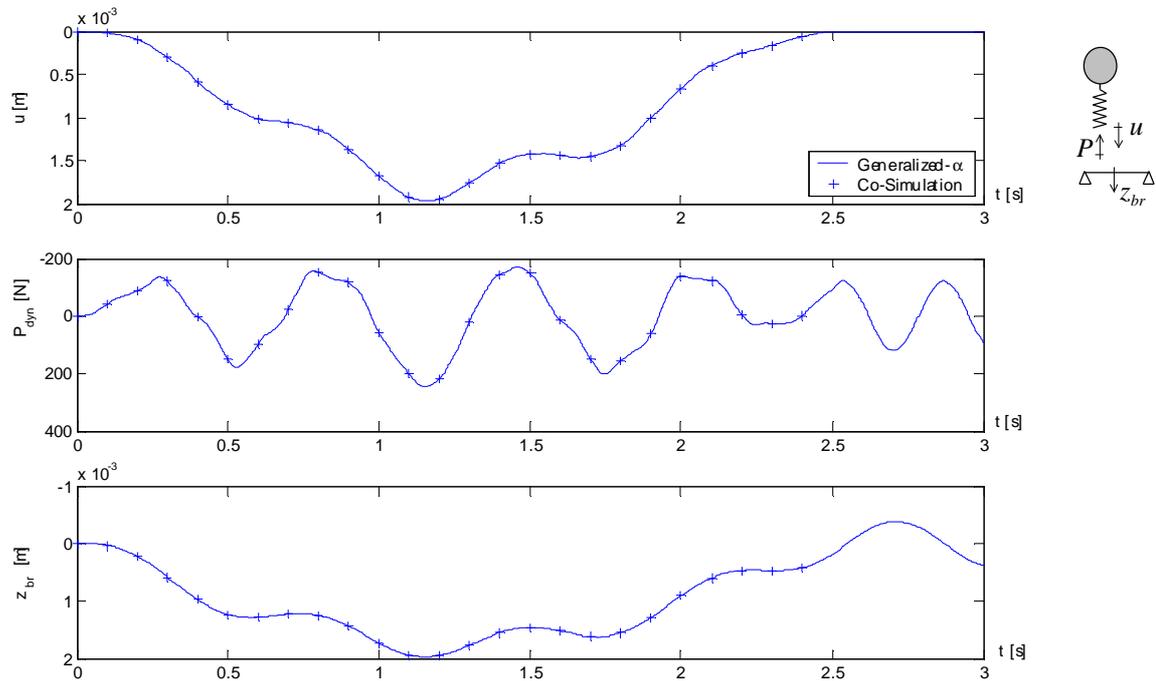


Abbildung 6.4: Ergebnisse der Fahrt des Einmassenschwingers mit Index 1 über Brücke: Integration mit dem Generalized- α Verfahren und Co-Simulation

Die Integration mit dem Generalized- α Verfahren ist hier stabil. Als nächstes wird die Lösungsgenauigkeit betrachtet. Die Berechnung der Mittendurchsenkung der Brücke wird durch die statische Radlast dominiert und ist relativ unsensibel. Wie erwartet stimmen beide Lösungen hier überein. Sensible Größen sind die Durchsenkung der Radaufstandspunkte und die dynamische Radlast. Auch hier ist die Übereinstimmung ausgezeichnet.

Die Integration der Bewegungsgleichung der Interaktion mit einem Index von 1 kann daher mit dem Generalized- α Verfahren erfolgen. Mit den oben genannten Einschränkungen ist die Integration ebenfalls mittels des Newmark- β Verfahrens möglich. Da das Generalized- α Verfahren aufgrund seiner dissipativen Eigenschaften jedoch besser geeignet ist, wird im Folgenden nur noch das Generalized- α Verfahren betrachtet.

6.4 Lösungsverfahren für Index 2 Systeme

Für zeitinvariante Index 2 Systeme ist es sinnvoll, bei der Integration mittels des Generalized- α Verfahrens das gleiche Kriterium (6.6) wie für Index 1 Systeme einzuhalten. Deren numerische Lösung ist nicht ohne weiteres möglich. Waren bei Index 1 Systemen die Lagrangeschen Parameter noch störungsfrei, so sind diese jetzt von Störungen überlagert. Daneben sind die Beschleunigungen der Lagekoordinaten mit Festhaltungen und die ersten und zweiten Ableitungen der Lagrangeschen Parameter ebenfalls von Störungen überlagert. Diese beeinflussen jedoch die anderen Größen nicht und werden durch die numerischen Dissipation gedämpft.

Problematisch sind hier vor allem die Störungen in den Lagrangeschen Parametern. Das Generalized- α Verfahren dämpft die Störungen zwar, kann aber deren Entstehung nicht verhindern. Da infolge der Straßenrauhigkeit permanent neue Störungen entstehen, sind die Lagrangeschen Parameter immer störungsbehaftet. Somit ist das Generalized- α Verfahren zur direkten Anwendung auf das Index 2 System hier nicht geeignet. Deswegen ist es sinnvoll den Index des Systems vor dessen Zeitintegration zu reduzieren.

Für die Brückenüberfahrt des Index 2 System lag keine Referenzlösung vor. Da in diesem Kapitel gezeigt werden konnte, daß die Lösung von Index 1 Systemen sehr genau und stabil möglich ist, werden die indexreduzierten Systeme miteinander verglichen.

6.4.1 Zeitintegration des Index 2 Systems nach Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung

Infolge der Indexreduktion ergibt sich ein Index 1 System. Alle Lagekoordinaten sind, ebenso wie die Lagrangeschen Parameter, störungsfrei. Sinnvollerweise ist wiederum das Kriterium (6.6) einzuhalten.

Die Ergebnisse der Zeitintegration der Rampenüberfahrt des Einmassenschwingers mittels des Generalized- α Verfahrens mit $\rho_\infty=0.5$ sowie die analytische Vergleichslösung sind in der nächsten Abbildung dargestellt:

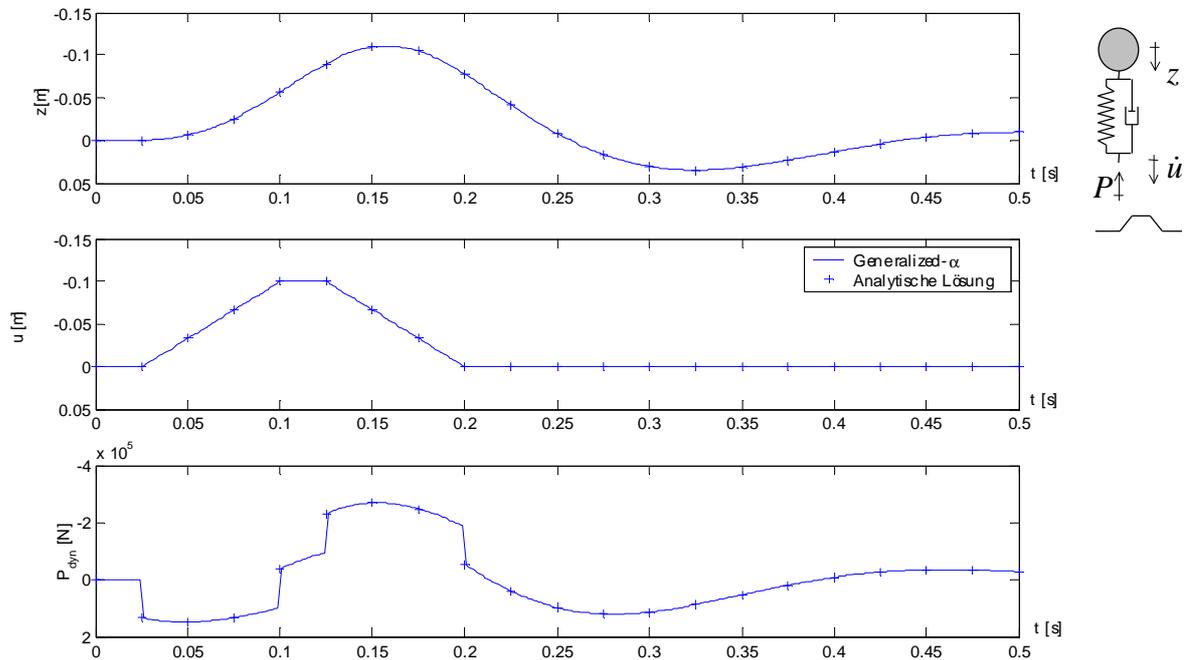


Abbildung 6.5: Ergebnisse für den Einmassenschwinger mit Index 2, indexreduziert auf Index 1: Integration mit dem Generalized- α Verfahren und analytische Vergleichslösung

Die numerische Lösung stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Ein Abdriften der Lagekoordinaten tritt erwartungsgemäß nicht auf.

Die Zeitintegration des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg (Abbildung 6.7) erfolgt ebenfalls stabil und störungsfrei. Anders als bei der Rampenüberfahrt des fußpunkterregten Einmassenschwingers ergibt sich im Bereich der Brücke ein geringes Abdriften.

6.4.2 Zeitintegration nach Indexreduktion durch Einfügen einer Aufstandsfeder

Wird unter den Radaufstandspunkten des Einmassenschwingers eine Feder eingefügt, so beträgt der Index des Systems nur noch 1. Die Zeitintegration vereinfacht sich (siehe Abschnitt 6.3). Die Größe der Federkonstante ist dabei groß genug zu wählen, so daß das Schwingungsverhalten des Fahrzeugs nicht beeinflusst wird. Diese wurde hier zu $5 \cdot 10^8$ gewählt.

Die Ergebnisse der Zeitintegration mittels des Generalized- α Verfahrens mit $r_{\Psi} = 0.5$ sowie die analytische Vergleichslösung sind in der nächsten Abbildung dargestellt.

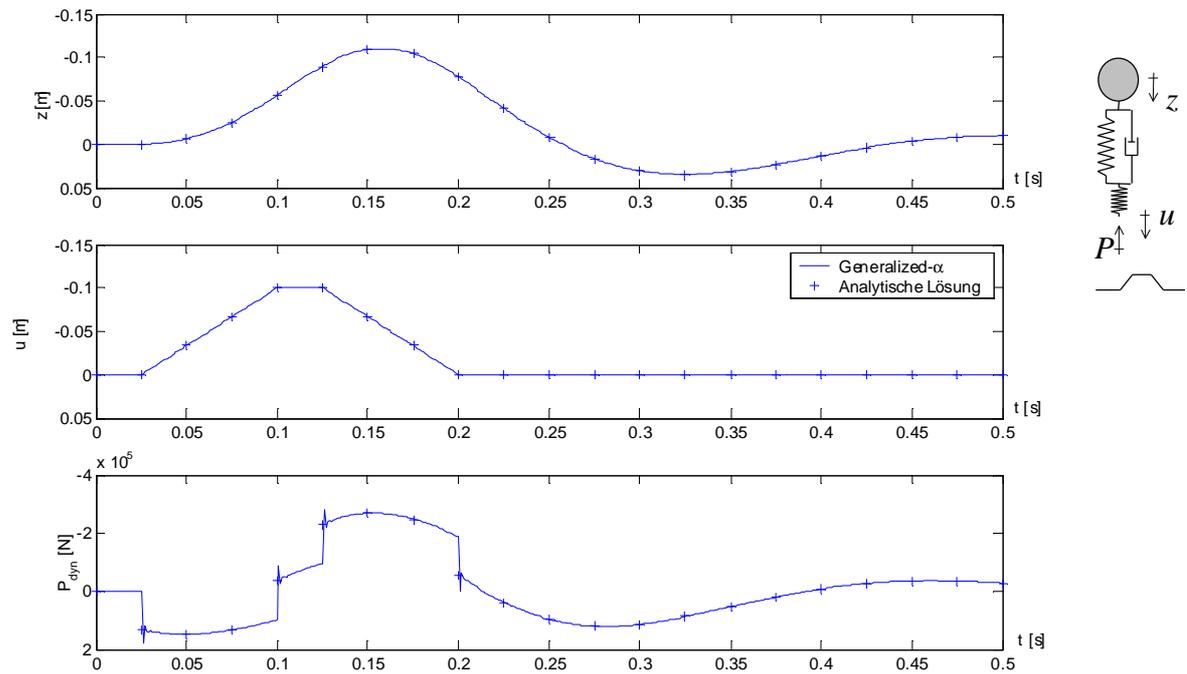


Abbildung 6.6: Ergebnisse der Fahrt des Index 2 Einmassenschwingers mit Aufstandsfeder über Rampe: Integration mit dem Generalized- α Verfahren und analytische Vergleichslösung

Daraus geht hervor, daß die Genauigkeit der numerischen Lösung sehr gut ist. Lediglich an den Knicken der Rampe treten kleine, schnell abklingende Störungen in den Lagrangeschen Parametern auf.

Der Vergleich beider Lösungsmethoden für die Brückenüberfahrt ist in der nächsten Abbildung dargestellt:

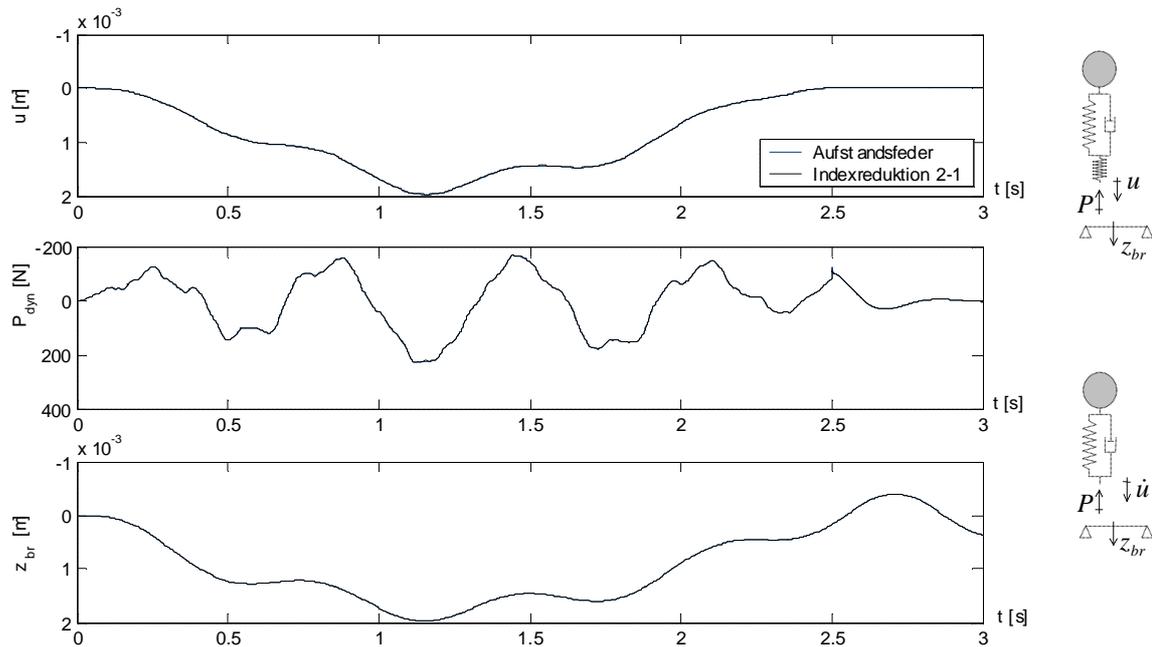


Abbildung 6.7: Zeitintegration der Fahrt des Einmassenschwingers über die Brücke (Generalized- α Verfahren): Index 2 System, indexreduziert auf Index 1; Index 2 System mit Aufstandsfeder

Wie daraus ersichtlich ist, stimmen beide Lösungen sehr gut überein. Im Fall der Aufstandsfeder ergibt sich eine minimale, schnell abklingende Störung am Ende der Brücke. Bei der Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich lediglich ein sehr geringes Abdriften von $5 \cdot 10^{-6}$ nach der Brückenüberfahrt. Für Index 2 Systeme können deshalb beide Lösungstechniken sinnvollerweise angewendet werden.

6.5 Lösungsverfahren für Index 3 Systeme

Für zeitinvariante Index 3 Systeme gilt bei der Integration mittels des Generalized- α Verfahrens das gleiche Stabilitätskriterium (6.6) wie für Index 1 Systeme. Deren numerische Lösung ist jedoch noch einmal schwieriger als die von Index 2 Systemen, da die Lagrangeschen Parameter stärker von Störungen überlagert sind. Das gleiche gilt für die Beschleunigungen der Lagekoordinaten mit Festhaltungen wie die ersten und zweiten Ableitungen der Lagrangeschen Parameter. Deswegen ist es sinnvoll, den Index des Systems vor dessen Zeitintegration zu reduzieren.

Bei der Bestimmung von Vergleichslösungen für Index 3 Systeme ergab sich folgende Schwierigkeiten: Für den fußpunkterregten Einmassenschwinger existiert eine analytische Vergleichslösung für P_{dyn} nur, wenn die Anregungsfunktion stetig differenzierbar ist. Dies ist an den Knicken nicht gegeben. Die dynamischen Radlasten würden hier einem Dirac Impuls entsprechen und unendlich groß werden. Für alle anderen Stellen, wie auch für u und z kann die analytische Vergleichslösung ermittelt werden. Bei der numerischen Lösung ergeben sich aufgrund der Integration über ein Zei-

tintervall statt der unendlich hohen Impulse an den Fahrbahnknicken in P_{dyn} nun Impulse von endlicher Größe.

Für die Brückenüberfahrt des Index 3 Systems lag keine Referenzlösung vor. In diesem Kapitel konnte jedoch gezeigt werden, daß durch das Einführen einer Aufstandsfeder stabile und genaue Ergebnisse erzielt werden können. Deshalb wird die Lösung aus der Differentiation der Nebenbedingung mit der Lösung aus Einführen einer Aufstandsfeder verglichen.

6.5.1 Zeitintegration nach einmaliger Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung

Infolge der einmaligen Indexreduktion ergibt sich ein Index 2 System. Die Zeitintegration sollte unter Einhaltung des Kriteriums (6.6) erfolgen. Jedoch sind hier noch Störungen in den Lagrange-schen Parametern enthalten. Die Ergebnisse der Zeitintegration der Rampenüberfahrt des sowie die analytische Vergleichslösung sind in der nächsten Abbildung dargestellt:

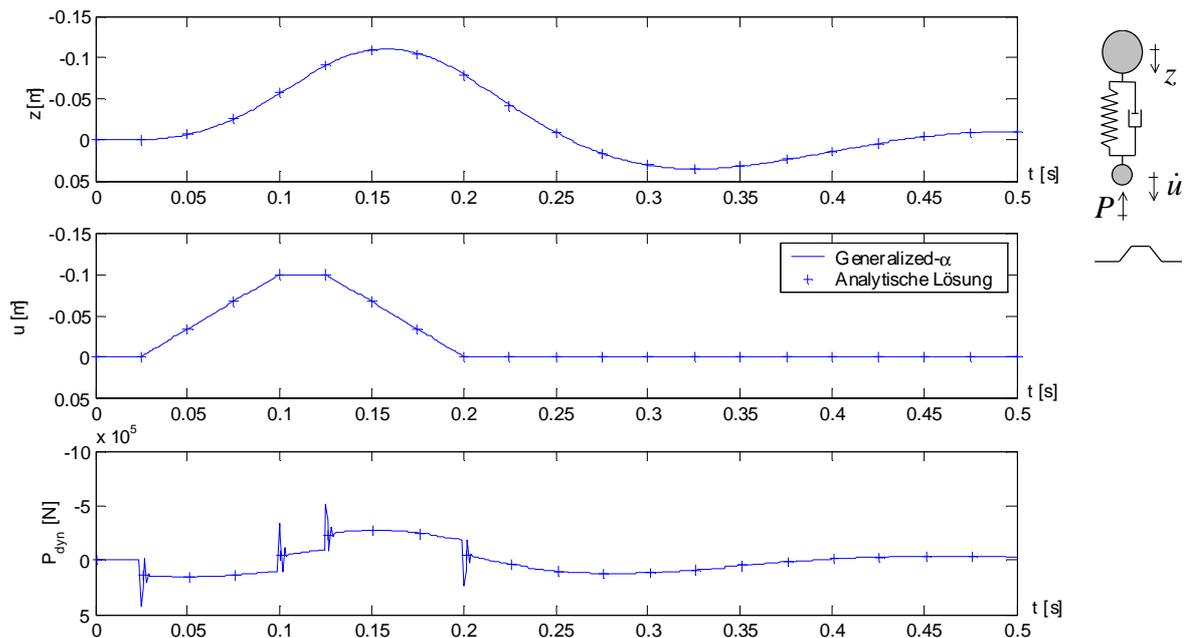


Abbildung 6.8: Ergebnisse der Fahrt des Einmassenschwingers mit Index 3, indexreduziert auf Index 2 über Rampe: Integration mittels Generalized- α und analytische Vergleichslösung

Die Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen ist sehr gut. An den Knicken der Rampe treten in den dynamischen Radlasten zunächst die erwarteten Impulse auf. Im Anschluß daran ergeben sich hier schnell abklingende Störungen, welche die Lösungsgenauigkeit kaum beeinflussen. Wird

statt der Rampe, welche eine extrem starke Anregung darstellt, ein realistisches Rauigkeitsprofil verwendet, so sind diese Störungen deutlich kleiner. Weiterhin tritt ein Abdriften hier nicht auf.

Die Ergebnisse der Zeitintegration des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Die Ergebnisse sind stabil und störungsfrei. Anders als bei der Rampenüberfahrt des fußpunkterreten Einmassenschwingers ergibt sich im Bereich der Brücke ein geringes Abdriften. Dies liegt wieder an den bei der Brückenüberfahrt verwendeten Interpolationsfunktionen.

6.5.2 Zeitintegration nach zweimaliger Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung

Nach zweimaliger Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung entsteht ein Index 1 System. Die Störungen in den Lagrangeschen Parametern verschwinden. Jedoch wird das System bei Integration mittels des Generalized- α Verfahrens instabil. Diese Instabilität äußert sich im Abdriften der Lagekoordinaten. Dieses Abdriften ist extrem gering. Bei der Interaktionsproblematik sind die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Interpolationsfunktionen nicht geeignet. Deswegen wird dieser Weg hier nicht weiter verfolgt.

6.5.3 Indexreduktion durch Einfügen einer Aufstandsfeder

Wird unter die Radaufstandspunkte des Fahrzeugs eine Feder eingefügt, so beträgt der Index des Systems nur noch 1. Die Größe der Federkonstante ist dabei groß genug zu wählen, daß das Schwingungsverhalten des Fahrzeugs nicht beeinflußt wird. Die Zeitintegration von Index 1 Systemen ist stabil und störungsfrei möglich (siehe Abschnitt 6.3).

Die Ergebnisse der Zeitintegration mittels des Generalized- α Verfahrens mit $\rho_\infty=0.5$ sowie die analytische Vergleichslösung sind in Abbildung 6.9 dargestellt:

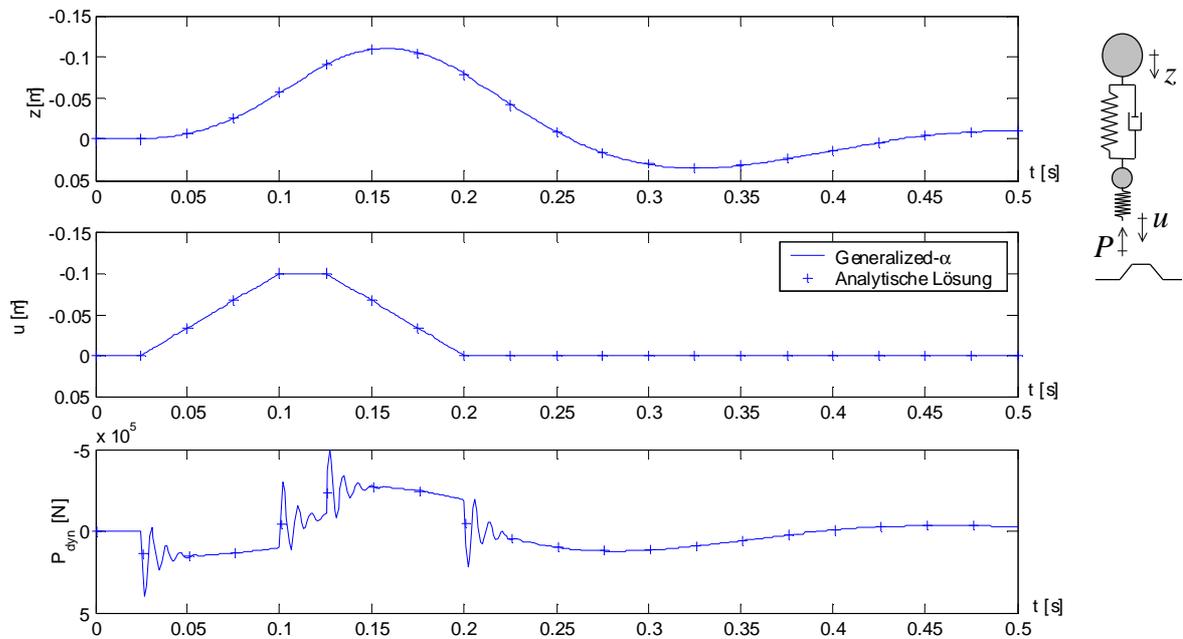


Abbildung 6.9: Ergebnisse der Fahrt des Einmassenschwingers mit Index 3 und Aufstandsfeder über Rampe: Integration mit dem Generalized- α Verfahren und analytische Vergleichslösung

Die Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen ist sehr gut. An den Knicken der Rampe treten in den dynamischen Radlasten zunächst die erwarteten Impulse auf. Danach treten kurzzeitige Störungen auf, welche die richtige Lösung überlagern. Bei realistischen Rauheitsprofilen sind diese Störungen deutlich geringer. Die Lösungen für die Lagekoordinaten sind wiederum ausgezeichnet.

Der Vergleich beider Lösungsmethoden für die Brückenüberfahrt ist in der nächsten Abbildung dargestellt:

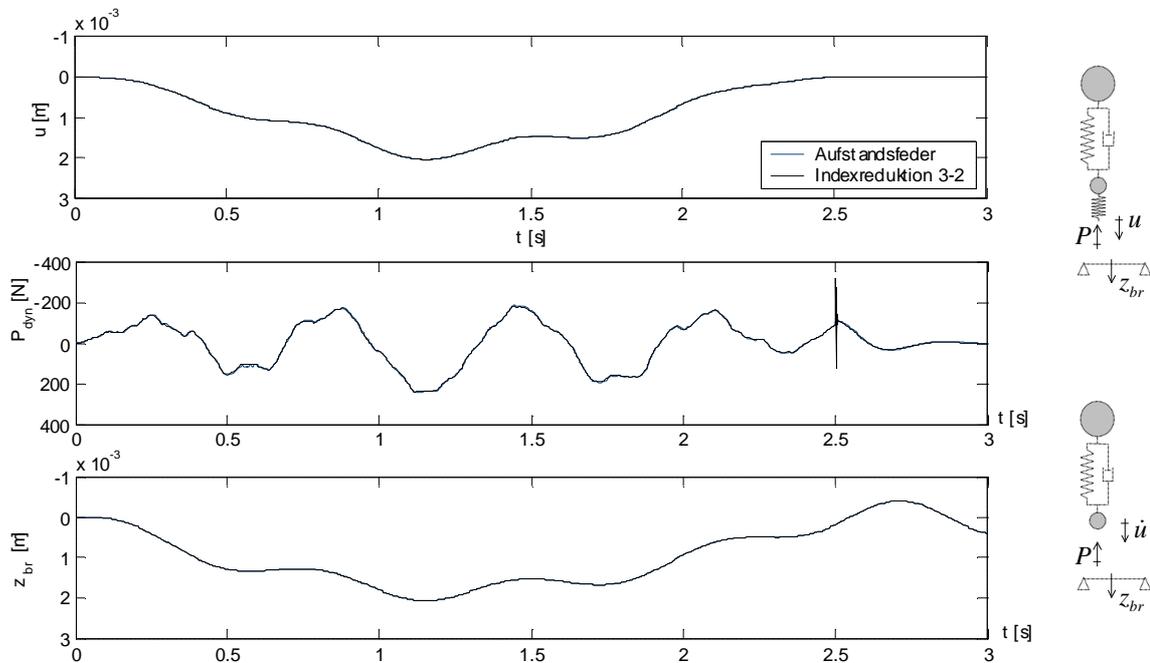


Abbildung 6.10: Zeitintegration der Fahrt des EMS über die Brücke (Generalized- α Verfahren):
Index 3 System, indexreduziert auf Index 2; Index 3 System mit Aufstandsfeder

Beide Lösungen stimmen sehr gut überein. Im Fall der Aufstandsfeder ergibt sich wiederum eine minimale, schnell abklingende Störung am Ende der Brücke. Bei der Indexreduktion durch einmalige Differentiation der Nebenbedingung tritt diese Störung stärker auf, klingt aber ebenfalls sofort ab. Auch wenn die Störungen in den dynamischen Radlasten hier hoch erscheinen, sind sie im Vergleich zu den dynamischen Radlasten bei Berücksichtigung der Straßenrauhigkeit sehr klein. Auch das Abdriften nach der Brückenüberfahrt ist mit $5 \cdot 10^{-6}$ sehr gering. Für Index 3 Systeme können deshalb beide Lösungstechniken sinnvollerweise angewendet werden.

6.6 Zusammenfassung

Im letzten Kapitel wurden Lösungsverfahren für differentiell – algebraische Systeme mit Festhaltungen am Rand hergeleitet. Deren Eignung, für die im Kapitel 2 hergeleitete Bewegungsgleichung der Interaktion, wurde hier durch Vergleichsrechnungen untersucht. Dabei wurde speziell die Stabilität wie auch die Genauigkeit der Zeitintegration betrachtet.

Die Lösungsverfahren beruhen darauf, daß zunächst der Index des Systems bestimmt wird. Zur Bestimmung des Index wurde eine einfach anzuwendende Anleitung gegeben.

Die durchgeführten Vergleichsrechnungen ergaben, daß für die differentiell – algebraische Interaktionsgleichung folgende Lösungstechniken sinnvoll angewendet werden können:

- Für Index 1 Systeme kann eine direkte Integration mittels des Generalized- α Verfahrens bzw. des Newmark- β Verfahrens erfolgen.
- Für Index 2 Systeme ist es sinnvoll, zunächst den Index durch das Einführen einer (steifen) Aufstandsfeder bzw. durch die Differentiation der Nebenbedingung zu reduzieren. Die Integration kann mittels des Generalized- α Verfahrens erfolgen. Im ersten Fall ergibt sich dabei kein Abdriften der Lösung. Im zweiten Fall ergibt sich ein minimales Abdriften während der Brückenüberfahrt ($5 \cdot 10^{-6}$).
- Für Index 3 Systeme ist ebenfalls zunächst der Index des Systems zu reduzieren. Dies kann günstigerweise durch das Einführen einer (steifen) Aufstandsfeder bzw. durch die einmalige Differentiation der Nebenbedingung erfolgen. Die Integration kann mittels des Generalized- α Verfahrens erfolgen. Im ersten Fall ergibt sich dabei kein Abdriften, im zweiten Fall ergibt sich ein minimales Abdriften während der Brückenüberfahrt ($5 \cdot 10^{-6}$). Ebenfalls tritt am Ende der Brücke eine geringfügige, schnell abklingende Störung auf.

Die Zeitintegration der differentiell – algebraische Interaktionsgleichung kann damit stabil, störungsfrei und mit einer hohen Lösungsgenauigkeit durchgeführt werden.

7 Modellierung von Kraftfahrzeugen

Im Rahmen dieses Kapitels wird auf die Modellierung von Fahrzeugen zur Interaktion Fahrzeug – Fahrweg eingegangen. Unter Zuhilfenahme der maßgeblichen Literatur soll der prinzipielle Aufbau eines Lastkraftwagens und die Modellierung der maßgeblichen Komponenten besprochen werden. Dabei ist zu untersuchen, in wie weit FE – Programme zur Modellierung von Fahrzeugen geeignet sind.

7.1 Modellbildung

„Die problematischste Aufgabe der Fahrzeug - Systemdynamik ist die Auswahl und die Erstellung eines geeigneten Ersatzmodells“ [Kortüm, Lugner 1994].

Kraftfahrzeuge stellen extrem komplexe Systeme dar. Sollen alle Systemkomponenten mit einer ausreichend feinen Diskretisierung beschrieben werden, so sind aufwendige FE - Modelle vonnöten. So wurde zur Berechnung der E-Klasse von Daimler Benz ein FE Modell mit ca. 1 Mio. Freiheitsgraden verwendet. Infolge der zunehmenden Rechenkapazitäten sind in Zukunft noch wesentlich größere Modelle zu erwarten. Jedoch ist eine derart feine Modellierung nicht für alle Problemstellungen erforderlich und sinnvoll, da:

- die Komplexität einer sehr exakten Formulierung und die hohen Rechenzeiten einen enormen Kosten- und Zeitaufwand darstellen.
- die Messung der im Modell verwendeten Parameter sehr aufwendig ist. Oftmals ist die Bestimmung der Parameter mit großen Unsicherheiten behaftet oder überhaupt nicht mehr möglich.
- die Auswirkungen von Parametervariationen an einem einfachen Modell einfacher studiert werden können, vorausgesetzt die Modellkomplexität ist zur Darstellung der gesuchten Zusammenhänge ausreichend.
- je nach Aufgabenstellung und dem dabei betrachteten Frequenzbereich sich einzelne Systemkomponenten wie starre Körper verhalten und daher vorteilhafter als solche modelliert werden können.

Sinnvoll ist es daher, die Komplexität des physikalischen Ersatzmodells auf die im Rahmen der theoretischen Untersuchungen zu beantwortenden Fragestellungen auszurichten. Die Modelle müssen dabei eine vollständige und hinreichend genaue Erfassung der wesentlichen Systemeigenschaften des realen Systems im Sinne der Aufgabenstellung erlauben und damit die dominierenden Effekte abbilden. Für die meisten Fragestellungen kann zur Beschreibung ein System mit wenigen Freiheitsgraden verwendet werden.

Bei der Modellbildung sind mehrere Vorgehensweisen gebräuchlich:

- Die physikalische Modellbildung (axiomatischer Weg) beruht auf der Erstellung von mechanischen Ersatzmodellen. Das Rechenmodell beinhaltet sowohl die Systemstruktur wie auch die Parameterzusammenhänge.
- Die experimentelle Modellbildung (empirischer Weg): Das zu modellierende Fahrzeug wird dynamisch angeregt (Kraft- oder Weganregung). Dabei werden sowohl die Anregung wie auch die Antwort des Fahrzeuges gemessen. Auf der Basis der ausgewerteten Meßergebnisse werden die mathematischen Modelle gebildet und deren Parameter bestimmt.
- Die Kombination beider Methoden: Die Bewegungsgleichungen für das Fahrzeug werden nach den Prinzipien der Mechanik aufgestellt. Die Modelle für die Feder- Dämpfersysteme oder andere Fahrzeugkomponenten können aus Messungen gewonnen werden. Werden lediglich die Parameter der Systemkomponenten bestimmt, so spricht man von einer Parameteridentifikation.

7.2 Fahrzeugmodelle zur Bestimmung von Radlastschwankungen

Zur Ermittlung von dynamischen Radlastschwankungen werden in der Regel Vertikalmodelle verwendet. Diese bilden das Schwingungsverhalten von Fahrzeugen in vertikaler Richtung ab. Die vertikalen Fahrbahnunregelmäßigkeiten als dominierende Anregungsquelle bewirken fast ausschließlich vertikale Bewegungen, Lateralbewegungen können vernachlässigt werden. Die Modellierung kann unter Verwendung von Mehrkörpersystemen (Multi body Modelle) und FE - Modellen erfolgen.

Im niederfrequenten Bereich ist es ausreichend, Starrkörpermodelle zu verwenden. Für Pkw reicht dieser Bereich bis zu einer Frequenz von ca. 25 Hz. Darüber wird das Schwingungsverhalten durch die elastischen Deformationen der Karosserie beeinflusst. Für Lkws beginnen die Eigenfrequenzen des Rahmens bei ca. 6 Hz. Bei den Starrkörpermodellen werden der Rahmen und die Achsen als starrer Körper mit der entsprechenden Masse und Rotationsträgheit abgebildet. Ihre Elastizitätseigenschaften werden dabei vernachlässigt. Die Federung des Fahrzeuges und dessen Stoßdämpfer werden, wie auch die Räder, mit Feder- Dämpfermodellen abgebildet.

Für Grundsatzuntersuchungen der niederfrequenten Vertikalschwingungen kann nach [Kortüm, Lugner 1994] ein ebenes lineares (zweidimensionales) Dreikörpermodell mit 4 Freiheitsgraden verwendet werden.

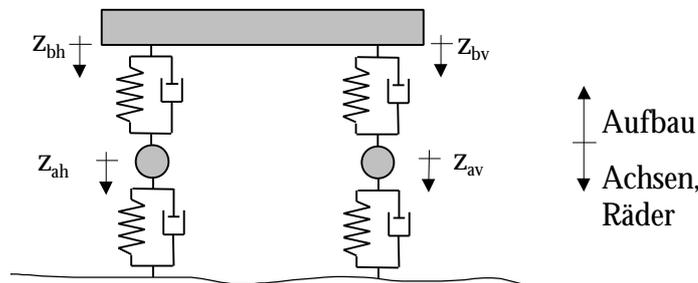


Abbildung 7.1: Ebenes, vertikaldynamisches Ersatzmodell

Jede Achse und die dazugehörigen Räder werden zu je einem starren Körper zusammengefaßt. Der Aufbau wird ebenso als starrer Körper durch seine Masse und seine Torsionsträgheit beschrieben.

Bei vielen Fahrzeugen ist die charakteristische „Koppelmasse“, die sich aus der Massenverteilung und den Abmessungen bestimmt, nahezu Null. Eine Anregung an der Vorderachse bewirkt keine signifikante Schwingung an der Hinterachse. Als erster Ansatz läßt sich für Grundlagenuntersuchungen ein eindimensionales Viertel - Fahrzeug Modell verwenden.

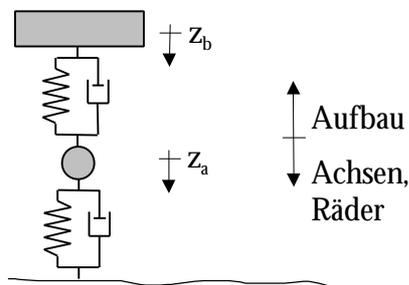


Abbildung 7.2: Viertel - Fahrzeug Modell

Werden weiterhin die (kleinen) Achs- und Radmassen sowie die (hohen) Federsteifigkeiten der Räder vernachlässigt, kann auch mit einem Einmassenschwingermodell gearbeitet werden.

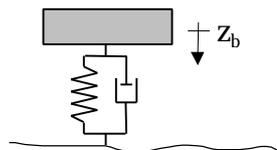


Abbildung 7.3: Einmassenschwinger Modell

Im höherfrequenten Bereich muß zur Modellierung eines Lkws dessen Rahmen abgebildet werden. Im Rahmen der Starrkörpersysteme erfolgt dies durch elastisch miteinander verbundene Starrkörper. Bei der Methode der Finiten Elementen kann der Rahmen über Balkenelemente modelliert werden.

Die realistischste Beschreibung ermöglicht ein räumliches Modell. Nur hier können die für die Anregung maßgeblichen Vertikalverschiebungen beider Fahrspuren, sowie die daraus resultierenden Wankbewegungen des Fahrzeugs berücksichtigt werden.

7.3 Fahrzeugkomponenten

In diesem Abschnitt wird zunächst der prinzipielle Aufbau eines Lkws erläutert. Danach wird auf die mechanische Modellierung der wesentlichen Systembestandteile eingegangen.

7.3.1 Prinzipieller Aufbau eines Lkw

Das wichtigste Element eines Lastkraftwagens ist der Wagenkasten. Der Wagenkasten mit den darin befindlichen Passagieren bzw. der Fracht wird durch das Trag- und Führsystem gegen den Fahrweg abgestützt. Das Trag- und Führsystem gewährleistet dabei die Führung des Fahrzeugs entlang des Fahrwegs und isoliert den Wagenkasten gegenüber Störungen durch Fahrwegunebenheiten. Diese Aufgaben stehen in einem gewissen Widerspruch zueinander: Zur Gewährleistung einer hohen Fahrsicherheit muß das Trag- und Führungssystem dazu eine möglichst steife Anbindung an den Fahrweg bewirken. Ein hoher Fahrkomfort erfordert dagegen geringe Beschleunigungen des Wagenkastens und damit eine möglichst weiche Aufhängung. Dieser Zielkonflikt wird bei den meisten Fahrzeugen durch ein Trag- und Führungssystem gelöst, das aus zwei Ebenen besteht: Der Primäraufhängung, sie umfaßt Elemente in unmittelbarer Nähe des Fahrwegs, und der Sekundäraufhängung zwischen Wagenkasten und Primäraufhängung [Popp, Schiehlen 1993].

Die Sekundärfederung dient bei Lastkraftwagen hauptsächlich zu deren Abfederung. Kurze Fahrbahnstöße werden dabei in lange Schwingungen umgesetzt. Als Federelemente kommen Luftfedern und Blattfedern (Trapez- bzw. Parabelblattfedern) zum Einsatz. Zur Dämpfung von Fahrzeugschwingungen werden Stoßdämpfer verwendet. Demgegenüber erfolgt die Anbindung an den Fahrweg durch die Primärfederung (Räder). Da die Federkonstante der Reifen wesentlich größer als die der Aufbaufederung ist, spricht man auch von gefederten Massen (Aufbaumasse) und ungedederten Massen (Achsen, Räder). Der prinzipielle Aufbau ist in der nächsten Abbildung dargestellt:

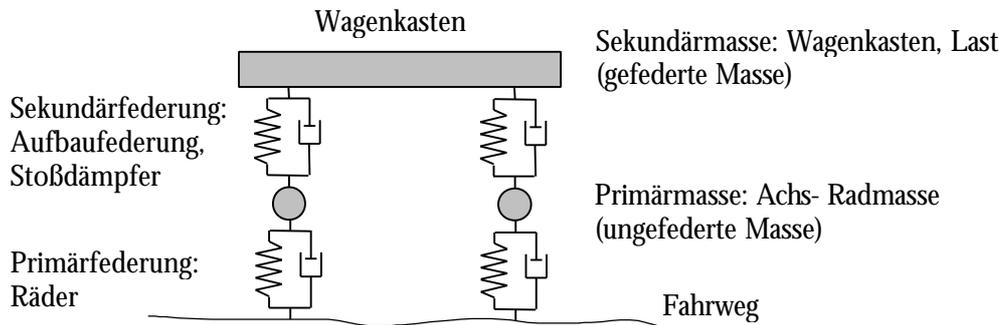


Abbildung 7.4: Prinzipieller Fahrzeugaufbau

7.3.2 Luftfedern

Luftfedern bestehen aus einem mit Druckluft gefüllten Gummibalg. Ihre Federkennlinie ist aufgrund der adiabatischen Kompression der Luft nichtlinear. Luftfedern werden in der Regel zusammen mit hydraulischen Stoßdämpfern ausgeführt. Hauptvorteil von Luftfedern ist die Möglichkeit der Steifigkeitsanpassung an den Beladungszustand sowie eine automatische Höhenregulierung. Da in dem im Rahmen dieser Arbeit modellierten Lkw keine Luftfedern eingebaut waren, werden diese hier nicht näher betrachtet.

7.3.3 Blattfedern

Blattfedern sind aus mehreren Schichten Stahlfedern aufgebaut. Die Reibung zwischen den Federblättern bewirkt dabei eine Dämpfung der Fahrzeugschwingungen. Die Dämpfung ist damit einerseits von Vorteil, andererseits wegen des damit verbundenen Verschleißes von Nachteil.

7.3.3.1 Statische Eigenschaften von geschichteten Blattfedern

Blattfedern zählen zu den biegebeanspruchten Federn. Die Eigenschaften der geschichteten Blattfeder können aus denen der einfachen Blattfeder abgeleitet werden. Hier ist das Konstruktionsziel, eine möglichst günstige Werkstoffausnutzung zu erreichen. Einblattfedern werden so dimensioniert, daß die maximale Biegebeanspruchung im Federblatt über die gesamte Federlänge gleich groß ist. Dies kann auf zwei verschiedenen Wegen erreicht werden: Zum einen ist für eine Einblattfeder mit konstanter Breite b eine parabolisch größer werdende Höhe h erforderlich (Parabelfeder). Zum anderen kann eine konstante Biegebeanspruchung für Einblattfedern über eine konstante Höhe h bei einer linear veränderlichen Breite b erreicht werden. Die Grundform dieser Feder ist damit dreiecksförmig. Aus konstruktiven Gründen wird eine leicht abgewandelte Grundform, das Trapez, verwendet. Diese Feder wird nach ihrer Grundform als Trapezfeder bezeichnet.

Um eine größere Variabilität der Steifigkeit bei einer geringeren Breite realisieren zu können, wird durch Übereinanderschichten gleich breiter Streifen die geschichtete Trapezfeder gebildet:

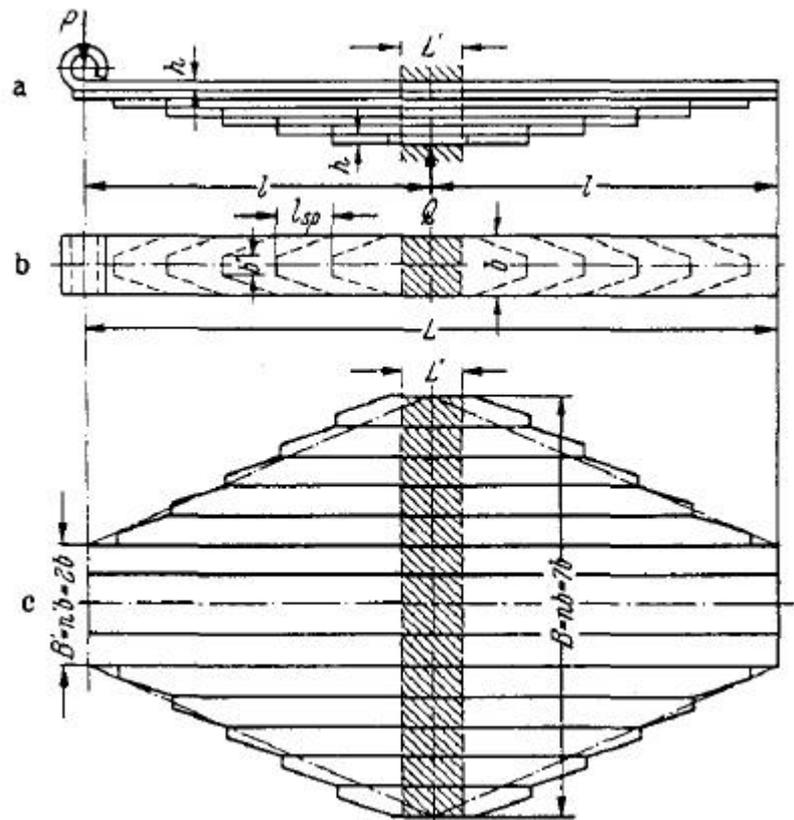


Abbildung 7.5: Entstehung Trapezfeder aus [Gross 1960]

Eine geschichtete Feder besitzt, vernachlässigt man die Reibung, die gleiche Steifigkeit wie die Einblattfeder. [Gross 1960] bestätigt dies durch Versuche. Die Ersatzfederkonstante für eine Trapezfeder ergibt sich zu:

$$k_{ers} = \frac{2cl^3}{nbh^3E}. \quad (7.1)$$

Mit:

$$c \cong \frac{3}{2 + \frac{B'}{B}} \quad \text{Beiwert zur Berücksichtigung der Trapezform} \quad (7.2)$$

l = Länge der Feder

n = Anzahl der Federblätter

b = Breite eines Federblattes

E = Elastizitätsmodul

B = Breite der Trapezgrundform in der Mitte

B' = Breite der Trapezgrundform am Rand.

Die einzelnen Federlagen werden durch Federschrauben oder einen aufgeschumpften Federbund zusammengehalten. Der versteifende Einfluß der Mitteleinspannung kann nach [Gross 1960]

vernachlässigt werden, falls der Einspannungsbereich $1/10$ der Federlänge nicht überschreitet. Das Ausfächern der einzelnen Blätter wird durch Verwenden von Federklammern verhindert.

7.3.3.2 Reibung geschichteter Blattfedern

Bei der Durchbiegung einer geschichteten Blattfeder verschieben sich die Blätter in Längsrichtung gegeneinander. Die Verschiebung ist an der Einspannstelle gleich null und nimmt gegen das Ende eines jeden Federblattes hin zu. Infolge der Druckkräfte zwischen den Federblättern (aus der Last P sowie durch das Aufschrumpfen des Federbundes bedingt) werden Reibungskräfte geweckt, welche die Verschiebung zu behindern versuchen.

Dadurch folgt die Feder im Betrieb nicht der theoretischen Kennlinie des Federdiagramms, sondern einer Hystereseschleife aus einer Belastungs- und Entlastungslinie.

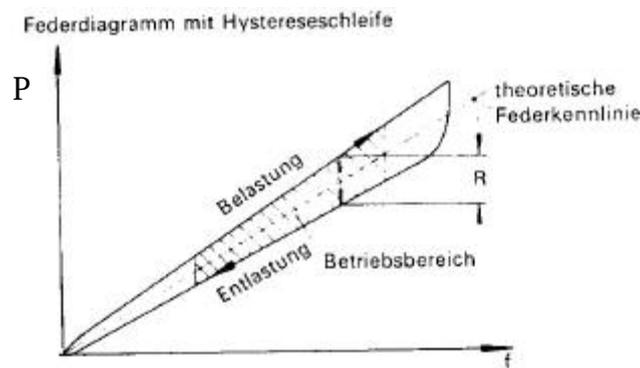


Abbildung 7.6: Federdiagramm einer geschichteten Trapezfeder [Stahlwerke Brüninghaus 1976]

Die theoretische Federkennlinie entspricht dabei nach [Gross 1960] ziemlich genau der Mittellinie zwischen Be- und Entlastungskurve. Diese entspricht in guter Näherung einer Geraden. Die Reibkraft wird prozentual zur aufgebrachtten Last P angegeben [Gross 1960]. Für die Reibkraft wurden Werte zwischen 3% und 40% gemessen. Die Gründe für die große Bandbreite sind in der Anzahl und der Dicke der Federblätter, der Länge der Feder [Gross 1960], der Schmierung und der Oberflächenbeschaffenheit der Federblätter, dem Verschleiß und nach [Stahlwerke Brüninghaus 1976] auch in der Witterung (feucht – trocken) zu suchen.

Bei Umkehr der Belastung verhält sich die Feder zunächst starr. Erst wenn die Stoßkraft die Reibkraft R überschreitet, beginnt die Feder zu wirken. Darunter „blockiert“ die Feder und es ergibt sich ein harter Stoß im Wagenkasten.

7.3.3.3 Dynamische Eigenschaften geschichteter Blattfedern

Dynamische Messungen von [Kranz 1983] zeigten, daß sich bei dynamischer Belastung ein etwas anderer Verlauf der Hysterese einstellt. Der Be- und der Entlastungsast weisen dabei verschiedene Steigungen auf. Ideale Coulombsche Reibung tritt nicht auf. Vielmehr verringert sich die Reibkraft bald nach Umkehr der Belastung. Dieser Verlauf tritt bei allen Lastfrequenzen auf. [Cebon 1986] kommt zu dem gleichen Ergebnis.

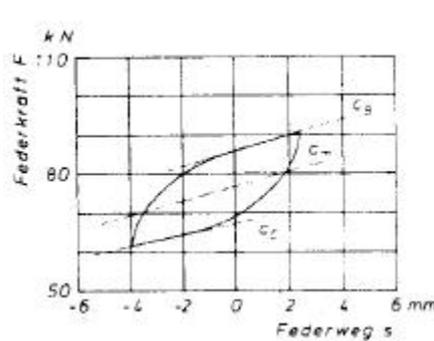


Abbildung 7.7: Dynamische Federkennlinie einer geschichteten Trapezfeder aus [Kranz 1983]

7.3.3.4 Modellierung von Blattfedern

Aufgrund der Form der Hysterese kann diese gut über eine Exponentialfunktion beschrieben werden [Fancher et al 1980], [Popp, Schiehlen 1993] und [Cebon 1986]. [Cebon 1986] vergleicht hieraus gewonnene Simulationsergebnisse mit Messergebnissen und kommt zu einer sehr guten Übereinstimmung. Die Modellierung ist außerdem über ein Jenkin-Element (Parallelschaltung einer Feder und eines Reibelementes) oder über ein Prandtl/Reuss-Element möglich.

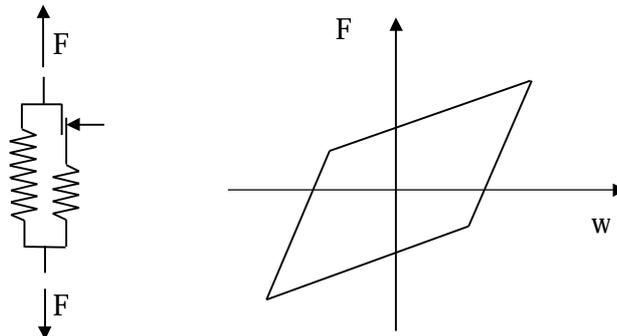


Abbildung 7.8: Prandtl/Reuss-Element und dessen charakteristische Hysterese

7.3.4 Stoßdämpfer

Der meist hydraulisch ausgeführte Stoßdämpfer stellt neben der Reibung in der Blattfeder das wesentliche energiedissipative Element der Aufhängung dar. Bei einer Relativbewegung zwischen Aufbau und Achse wird Dämpferöl durch eine Bohrung im Kolben gedrückt und dadurch kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Abbildung 7.9 zeigt eine typische Kraft-Geschwindigkeitscharakteristik eines Stoßdämpfers.

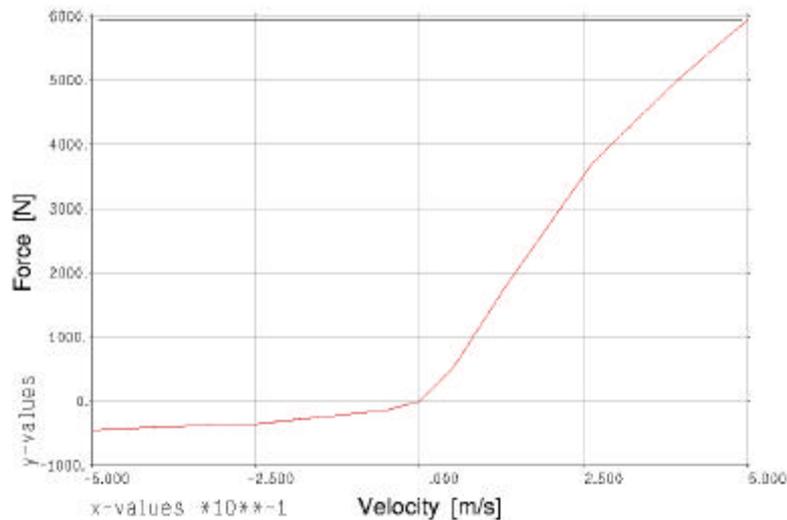


Abbildung 7.9: Kennlinie eines Stoßdämpfers aus [Vaculin, Valasek 1998].

Charakteristisch für den Verlauf ist das unterschiedliche Verhalten im Druck- und Zugbereich. Nach [Kortüm, Lugner 1994] gründet diese Auslegung in der Tatsache, daß beim Überfahren eines Hindernisses das Rad theoretisch eine beliebig große Einfederungsgeschwindigkeit erreichen kann, während es beim Ausfedern höchstens durch das Eigengewicht und die restliche Federkraft beschleunigt wird. Die deshalb beim Ausziehen geringere Einstellung des Dämpfers führt auch zu einer Verringerung der Radlastschwankungen bei kleineren Aufstandskräften. In der Literatur wird der Stoßdämpfer häufig mit einer bilinearen Charakteristik für den Druck- und den Zugbereich modelliert, vielfach überdies noch mit gleicher Feder- Dämpferkonstante für beide Bereiche.

7.3.5 Räder

Das primäre Trag- und Führungselement wird durch den Reifen gebildet. Für Reifen existieren für das Längs- und Querverhalten sehr komplexe Modelle. Dies ist auch Gegenstand zahlreicher Forschungsaktivitäten. Zur Beschreibung der Kraftübertragung in vertikaler Richtung kann der Reifen im Frequenzbereich bis 25 Hz jedoch durch ein einfaches Feder- Dämpfer Modell beschrieben werden [Vaculin, Valasek 1998]. Die Federkonstante ist hauptsächlich vom Luftdruck, von der Fahrgeschwindigkeit, von der Radkraft und vom Schräglaufwinkel abhängig [Fritz 1977]. Die Dämpfung ergibt sich aus den viskoelastischen Eigenschaften des Reifenmaterials und ist hauptsächlich von der Fahrgeschwindigkeit abhängig [Reimpell, Sponagel 1986]. Die Dämpferwerte fallen mit steigender Frequenz auf ein Minimum ab, und steigen dann wieder an. Da die Dämpfung im Vergleich zur Aufbaudämpfung (Stoßdämpfer) sehr klein ist, kann sie auch vernachlässigt werden [Vaculin, Valasek 1998].

Aufgrund seiner Aufstandsfläche besitzt der Reifen ein Schluckvermögen für sehr kurze Wellenlängen, das in der Simulation aufgrund der punktwise Abtastung der Rauigkeit nicht mit berücksichtigt wird. Aufgrund der kleinen Aufstandsfläche der Lkw-Reifen zeigt das Reifenschluck-

vermögen keinen entscheidenden Einfluß auf die dynamischen Radlasten. Dies bestätigen auch [Vaculin, Valasek 1998].

7.3.6 Rahmen

Die zentrale Einheit bei einem Lkw ist der Rahmen. An ihm sind die Achsen, der Antriebsstrang sowie der Kraftstofftank und alle Nebenaggregate befestigt. Das Führerhaus und der Aufbau sind oberhalb des Rahmens mittels Schraubverbindungen angebracht. Rahmen werden nach [Pippert 1998] in Leiterrahmenbauweise ausgeführt. Durch die Ausbildung der Längsträger mittels offener Profile sind die Rahmen torsionsweich bei einer relativ hohen Biegesteifigkeit.

Gemäß [Mitschke 1984] haben Lkw Rahmen Eigenfrequenzen ab 6 Hz. Die Biegeweichheit der Rahmen hat dabei kaum Einfluß auf die dynamischen Achslasten. Die Torsionsweichheit hingegen wirkt sich bei unterschiedlicher Anregung beider Spuren auf die Achslasten aus [Vaculin, Valasek 1998].

7.3.7 Achsen

Lkw besitzen vorwiegend Starrachsen [Pippert 1998], die über Blattfedern (bei neueren Lkw auch Luftfedern) mit dem Rahmen verbunden sind. Die Achsen können daher gut mittels starrer Körper modelliert werden.

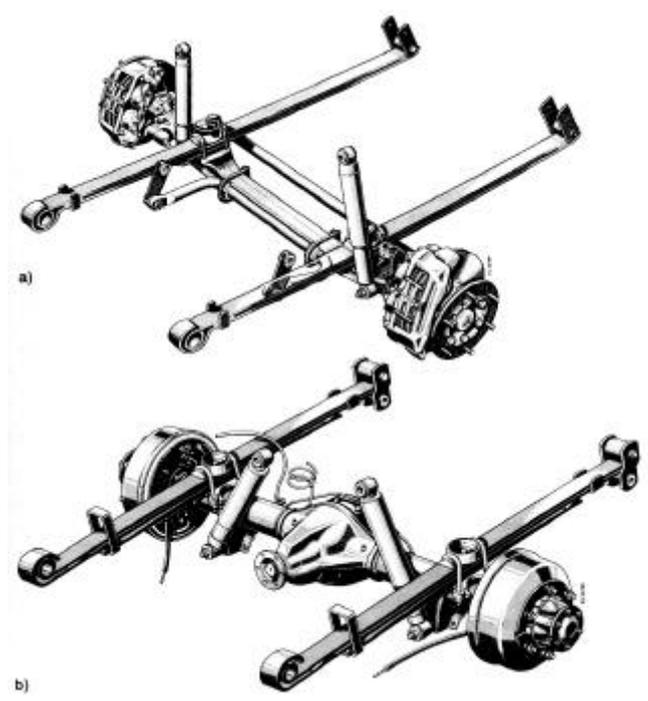


Abbildung 7.10: Vorder- und Hinterachse eines Lkws mit Blattfedern [Pippert 1998]

7.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene vertikaldynamische Modelle eines Lastkraftwagens dargestellt. Danach wurde auf Modellierung der wesentlichen Bestandteile eines Lkws eingegangen. Dabei zeigte sich, daß diese über lineare/ nichtlineare Feder- und Dämpferelemente, Balkenelemente und Massenelemente abgebildet werden können. Sehr gut kann ein Lkw unter Verwendung von Multibody - Programmen modelliert werden. Die Modellierung ist ebenfalls mittels Finiter Elemente möglich, vorausgesetzt im dazu verwendeten Programm sind die entsprechenden nicht-linearen Kennlinien der Systembestandteile abbildbar.

8 Anwendungsbeispiel

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Algorithmus zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion entwickelt. Ein wichtiges Ziel stellt die Umsetzung des Verfahrens, „angedockt“ an ein FE- Programmpaket dar. Damit kann das FE - Programm zur Erstellung der Modelle verwendet werden. Ebenso können auch die numerischen Algorithmen, die Methoden zur Spannungsermittlung und die Visualisierungsmöglichkeiten des FE – Programms für die Interaktionsberechnung genutzt werden. Damit kann die Interaktionssimulation anwenderfreundlich und komfortabel durchgeführt werden.

Für die nachfolgende Interaktionsberechnung wird beispielhaft das FE – Programm MSC Nastran verwendet. Die Modellierung von Fahrzeug und Brücke erfolgte unter Zuhilfenahme des Pre- und Postprocessors FEMAP. Das gleiche Programm wurde zur Darstellung der Ergebnisse benutzt.

Im Folgenden wird die Simulation der Überfahrt eines dreiachsigen Lkws über die Bellevillebrücke gezeigt. Zunächst werden die FE – Modelle des Lkws und der Brücke vorgestellt. Danach wird die Vorgehensweise bei der Simulation beschrieben, und es werden ausgewählte Simulationsergebnisse vorgestellt. Da sich die vorliegende Arbeit auf lineare Systeme beschränkt, werden für die Interaktionsberechnung lineare Modelle verwendet. Es ist aber ohne weiteres möglich, Nichtlinearitäten (z.B. aus der Federung des Fahrzeugs) zu berücksichtigen. Zur Interaktionsberechnung muß dann lediglich ein für nichtlineare Problemstellungen geeigneter Lösungsalgorithmus gewählt werden.

8.1 Die Bellevillebrücke

Die Bellevillebrücke befindet sich entlang der Autobahn A31 zwischen Metz und Nancy in Frankreich. Die Vergleichsrechnungen erfolgten anhand der 2-feldrigen Zugangsbrücke über die Gleise der SNCF. Die Spannweiten der Brücke betragen 54.9 und 51.7m. Über diese Zugangsbrücke führt die zweispurige Autobahn in Fahrtrichtung Nancy.



Abbildung 8.1: Bellevillebrücke

Die Brücke ist als Verbundbrücke, bestehend aus der Fahrbahnplatte aus Beton und einem Stahlkasten, konstruiert. Die Fahrbahnplatte wird mittig durch einen Stahlträger unterstützt. Weitere maßgebliche Konstruktionselemente sind Längsrippen am Boden des Stahlkastens und Querschotte. Eine Skizze des Querschnitts und die maßgeblichen Abmessungen sind in der nächsten Abbildung dargestellt:

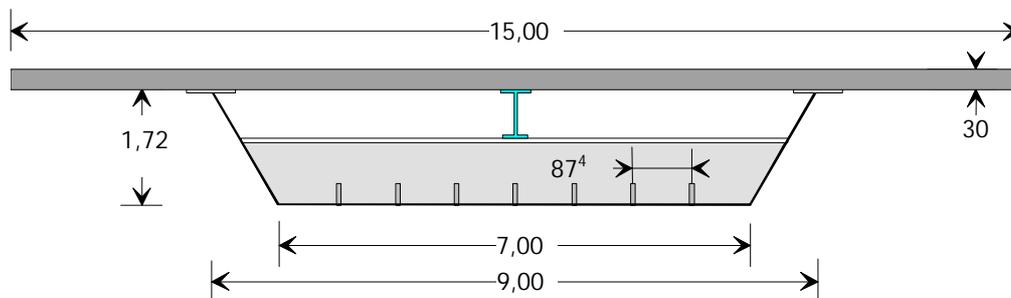


Abbildung 8.2: Querschnitt der Bellevillebrücke

Das FE - Modell der Brücke wurde anhand von Konstruktionszeichnungen und Messungen, die vor Ort durchgeführt wurden, entwickelt. Es besteht aus Schalenelementen für die Betonplatte, den Stahlkasten und die Querschotte sowie Balkenelementen für den Längsträger. Für die Brückenoberfläche wurde ein Raster von ca. $3\text{m} \times 3\text{m}$ gewählt. Damit kann die Interaktionsberechnung mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden. Um eine möglichst exakte Spannungsermittlung durchführen zu können, muß im Bereich der Meßpunkte der Raster verfeinert werden. Aus den gleichen Gründen wurde die veränderliche Dicke der Betonplatte abgebildet. Das Brückenmodell wird durch ca. 7000 Freiheitsgrade beschrieben.

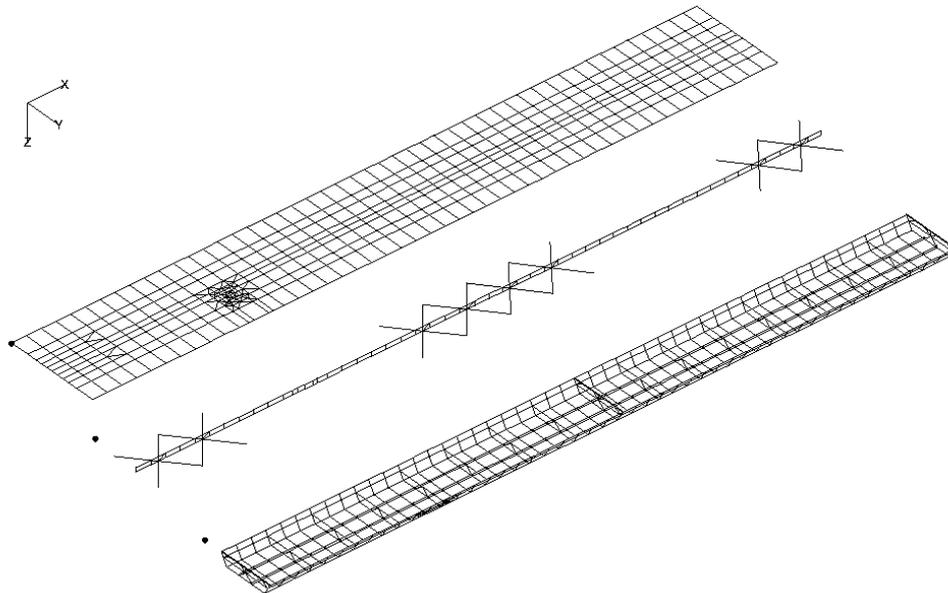


Abbildung 8.3: FE-Modell der Bellevillebrücke

8.2 Lkw Modell

Zur Simulation wird das Modell eines dreiachsigen Lkws mit einem Gesamtgewicht von 22t verwendet. Dieses Modell wurde dem Lkw des „Technischen Forschungszentrums von Finnland“ (VTT) nachempfunden [Schmadl 2000]. Um das Modell übersichtlich zu halten wurden dabei einige Vereinfachungen vorgenommen. Nichtlinearitäten wurden aufgrund der eingangs geschilderten Gründe nicht berücksichtigt.

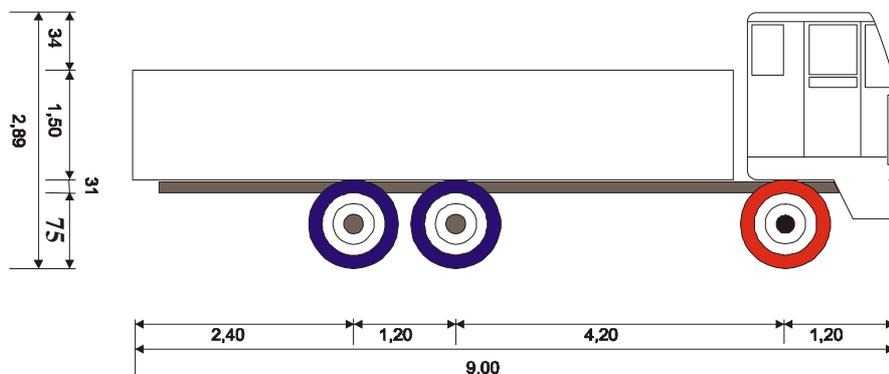
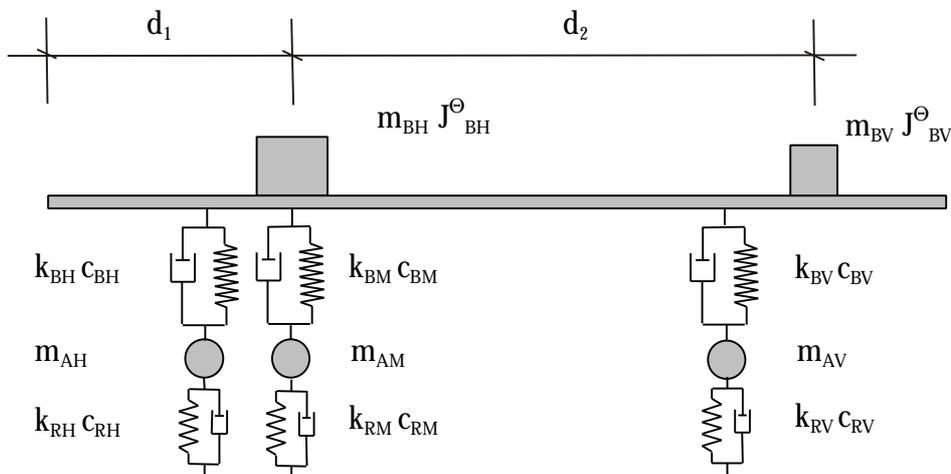


Abbildung 8.4: Abmessungen des Lkw

Im Folgenden wird kurz auf die Modellierung der einzelnen Fahrzeugkomponenten sowie die Ermittlung von deren Parametern eingegangen. Die verwendeten Fahrzeugparameter sind in der unten aufgeführten Abbildung 8.5 zusammengefasst.

Der Lkw Rahmen besteht in Längsrichtung aus einem Z - Profil, die Querverstrebungen bestehen aus geschlossenen Quadratrohren. Der Rahmen wurde mittels Balkenelementen abgebildet.

Die Aufbaumassen wurden als Massepunkte mit entsprechenden Massenträgheitsmomenten modelliert und direkt am Rahmen befestigt. Die starren Achsen des Lkws wurden durch Balkenelemente mit einer sehr hohen Steifigkeit abgebildet. Die Stoßdämpfer wurden als viskose Dämpfer mit einer konstanten Dämpfung abgebildet. Die Dämpfungskonstante wurde als Mittelwert der Dämpfung im Zug- und Druckbereich angenommen. Die Blattfedern des Lkw wurden durch lineare Federelemente abgebildet. Für die Steifigkeit der Radfedern wurde ein Mittelwert aus der Literatur [Cantieni 1991] verwendet. Die Steifigkeit der Zwillingsreifen wurde etwas geringer als die der Einzelreifen angenommen.



	Vorderachse	Mittlere Achse	Hinterachse
Aufbaumasse (gesamt): [kg]	$m_{BV} = 3'500$	$m_{BM} = 16'300$	
Massenträgheit: [kgm ²]	$J^{\ominus} = 550$	$J^{\ominus} = 60'000$	
Aufbaufeder: k_B [N/m]	$k_{BV} = 200'000$	$k_{BM} = 600'000$	$k_{BH} = 600'000$
Stoßdämpfer [Ns/m]	$c_{BV} = 10'000$	$c_{BM} = 15'000$	$c_{BH} = 15'000$
Achsmasse (gesamt) [kg]	$m_{AV} = 700$	$m_{AM} = 1225$	$m_{AH} = 500$
Radsteifigkeit [N/m]	$k_{RV} = 1'000'000$	$k_{RM} = 1'800'000$	$k_{RH} = 1'800'000$
Raddämpfung [Ns/m]	$c_{RV} = 1'000$	$c_{RM} = 2'000$	$c_{RH} = 2000$
J_y Rahmen: [m ⁴]		$5,4 \cdot 10^{-5}$	
J_z Rahmen: [m ⁴]		$3,9 \cdot 10^{-6}$	
d_1 : [m]		3,6	
d_2 : [m]		4,8	

Abbildung 8.5: Prinzipskizze Lkw und charakteristische Parameter

Das räumliche FE - Modell des Fahrzeugs ist in Abbildung 8.6 dargestellt. Es besteht aus Balkenelementen für den Rahmen sowie Feder- und Dämpferelementen für die Federung, die Stoßdämpfer und die Reifen:

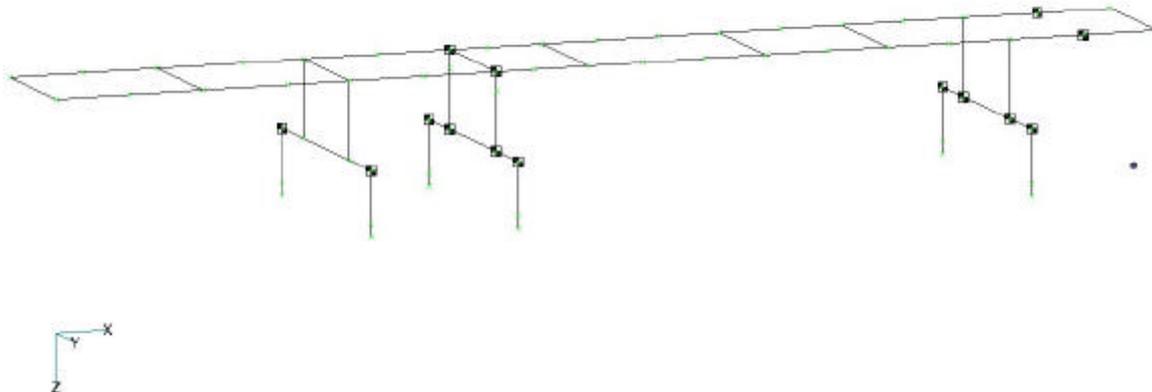


Abbildung 8.6: FE- Modell des Lkw

8.3 Rauigkeitsprofil

Das Rauigkeitsprofil stellt die maßgebende dynamische Anregung des Fahrzeugs dar. Die Verwendung des gemessenen Rauigkeitsprofils ist für die Interaktionssimulation von herausragender Bedeutung.

Das Rauigkeitsprofil wurde vom Laboratoire Régional de l'Ouest (LROP) gemessen. Dazu wurde das APL (Analyseur de profil en long) Meßsystem zur Analyse des Längsprofils von Straßenebenen verwendet [LROP 1998]. Das APL System besteht aus einem Meßfahrzeug und zwei einrädigen Anhängern. Damit ist die Messung des Rauigkeitsprofils für das linke und das rechte Rad möglich. In beiden Anhängern ist ein Meßrad angebracht, das durch einen horizontalen Pendelstab sowie über eine Feder und einen Stoßdämpfer gegenüber dem Anhänger gelagert ist. Dabei wird die sich infolge der Straßenrauigkeit ergebende Winkeländerung des Pendelstabes gemessen.

Mittels des APL Systems können bei einer Fahrgeschwindigkeit von 20 m/s Wellenlängen von 1 m bis 40 m exakt gemessen werden. Dies entspricht einer Frequenz von 0.5 bis 20 Hz . Kürzere Wellenlängen werden auch infolge der Aufstandsfläche des Meßrades nicht mehr genau gemessen. Dies ist für die Simulation keine Einschränkung. Vielmehr ist dies von Vorteil, denn auch die Lkw Räder besitzen vergleichbare Aufstandsflächen. Deren Filterwirkung ist dann bereits im

Rauhigkeitsprofil enthalten. Das Fahrbahnprofil der Bellevillebrücke ist in der nächsten Abbildung dargestellt:

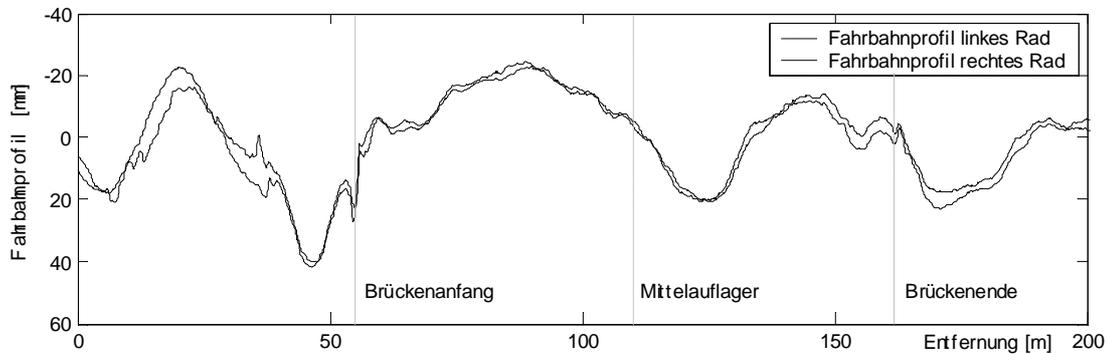


Abbildung 8.7: Fahrbahnprofil der Bellevillebrücke

Die maßgebliche Anregung für die Verschiebungsantwort des Fahrzeugs ist auf den Frequenzbereich $[2 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz}]$ beschränkt. Für die dynamischen Achslasten ist der Frequenzbereich überhalb von 2 Hz maßgebend. Zur besseren Interpretation des Rauhigkeitsprofils wurde eine Hochpaßfilterung durchgeführt. Die Grenzfrequenz lag dabei bei 2 Hz .

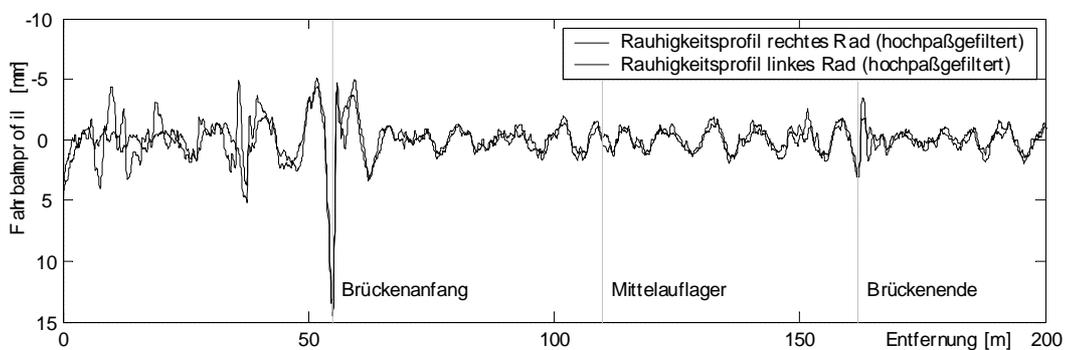


Abbildung 8.8: Fahrbahnprofil der Bellevillebrücke (hochpaßgefiltert)

Damit ist gut zu erkennen, daß die maßgebliche Anregung des Fahrzeugs im Vorfeld der Brücke sowie durch den Fugensprung am Beginn der Brücke erfolgt. Speziell der Fugensprung mit einer Höhendifferenz von ca. 2 cm bewirkt starke Schwingungen und hohe Achslasten des Fahrzeugs am Beginn der Brücke. Im Vergleich dazu ist die Fahrbahnoberfläche der Brücke relativ eben. Eine aus einer stochastischen Beschreibung erzeugte Rauhigkeitsfunktion bildet die vorhandenen Fugensprünge am Beginn der Brücke nicht ab. Daher ist deren Verwendung hier nicht sinnvoll.

8.4 Durchführung der Berechnung

Zur Interaktionsberechnung ist zunächst der Index des Systems zu bestimmen. Da der Fahrweg massebelegt ist, und an allen Aufstandspunkten des Fahrzeugs Feder-/Dämpferelemente vorliegen, beträgt der Index des Systems 2. Das Index 2 System konnte durch Einführung einer steifen Aufstandsfeder ($k=5 \cdot 10^9$) auf ein Index 1 System überführt werden. Da in diesem Beispiel realistische FE-Modelle für das Fahrzeug und den Fahrweg verwendet werden, erfolgt die Berechnung unter Verwendung der FE-Programms MSC/Nastran. Die in dieser Arbeit gewählte Formulierung der Interaktion ermöglicht es erstmals die Interaktionssimulation vollständig unter Verwendung eines FE-Programms durchzuführen. Die Umsetzung ist hierbei besonders anwenderfreundlich. Die beiden FE-Modelle können in Nastran zu einem System zusammengebunden werden. Zur Umsetzung mittels Nastran muß die Interaktionsgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_{\text{int}}(t) \mathbf{w}(t) = \mathbf{P}_0(t). \quad (8.1)$$

umgeformt werden. Werden alle, die Interaktion beschreibenden, Terme auf die rechte Gleichungsseite gestellt, so ergibt sich:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{w}(t) = \mathbf{P}_0(t) + \mathbf{K}_{\text{int}}(t) \mathbf{w}(t). \quad (8.2)$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt beide FE – Modelle. Der zeitabhängige Lastvektor $\mathbf{P}_0(t)$ und die zeitabhängige Interaktionsmatrix $\mathbf{K}_{\text{int}}(t)$ können über die „Bulk Data Section“ und die „Case Control Section“ definiert werden. Hierbei handelt es sich um externe Dateien, die in die eigentliche Berechnung eingebunden werden. In diesen Dateien können mittels eines speziellen Nastran Befehlssatzes die Nebenbedingungen definiert werden und die Ansatzfunktionen zur Formulierung der Interaktion beschrieben werden. Nach dem Zusammenbinden der Modelle und der „Case Control“ und der „Bulk Data Section“ kann die Nastran Berechnungsdatei generiert werden. Diese Datei enthält nun die gesamte Beschreibung der Interaktion. Die Berechnung kann unter Verwendung, der im Programmumfang von Nastran zur Verfügung stehenden Lösungsalgorithmen, durchgeführt werden. Im Anschluß daran können die Berechnungsergebnisse (z.B. Durchsenkungen, dynamische Radlasten, Spannungen und Dehnungen an Elementen) ausgegeben werden. Die graphische Visualisierung und die Darstellung der animierten Bewegung ist über ein Post Processing Programm möglich.

8.5 Ergebnisse

Im Folgenden werden einige Ergebnisse der Interaktionsberechnung dargestellt. Der Lkw erreicht die Brücke nach 0.53 s. Das Mittelauflager wird nach 2.84 s überfahren und der Lkw verläßt die Brücke nach 5.02 s.

Ein großer Vorteil der entwickelten Methodik ist es, daß die dynamischen Achslasten direkt berechnet werden. Eine Nachlaufrechnung zu deren Bestimmung ist nicht erforderlich. Beispielhaft wird in der nächsten Abbildung die dynamische Radlast am linken Rad der Vorderachses des

Lkws gezeigt. Die größten dynamischen Radlasten treten am Beginn der Brücke infolge der hohen Anregung (Fugensprung) auf. Aufgrund der hohen Dämpfung des Lkw klingen die Schwingungen relativ schnell ab.

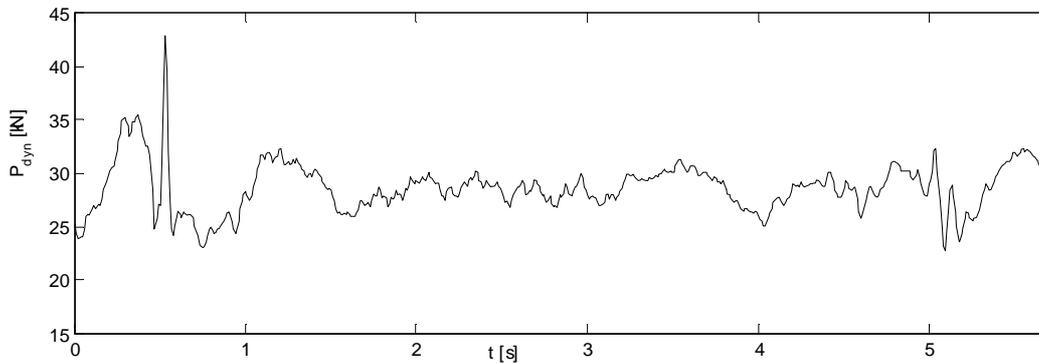


Abbildung 8.9: Dynamische Radlasten ersten Achse am linken Rad

Anschließend wurden die Durchsenkung der Belleville Brücke in der Mitte des 1. Feldes berechnet. In der folgenden Graphik sind die Durchsenkung an 3 Punkten des Stahlkastens dargestellt:

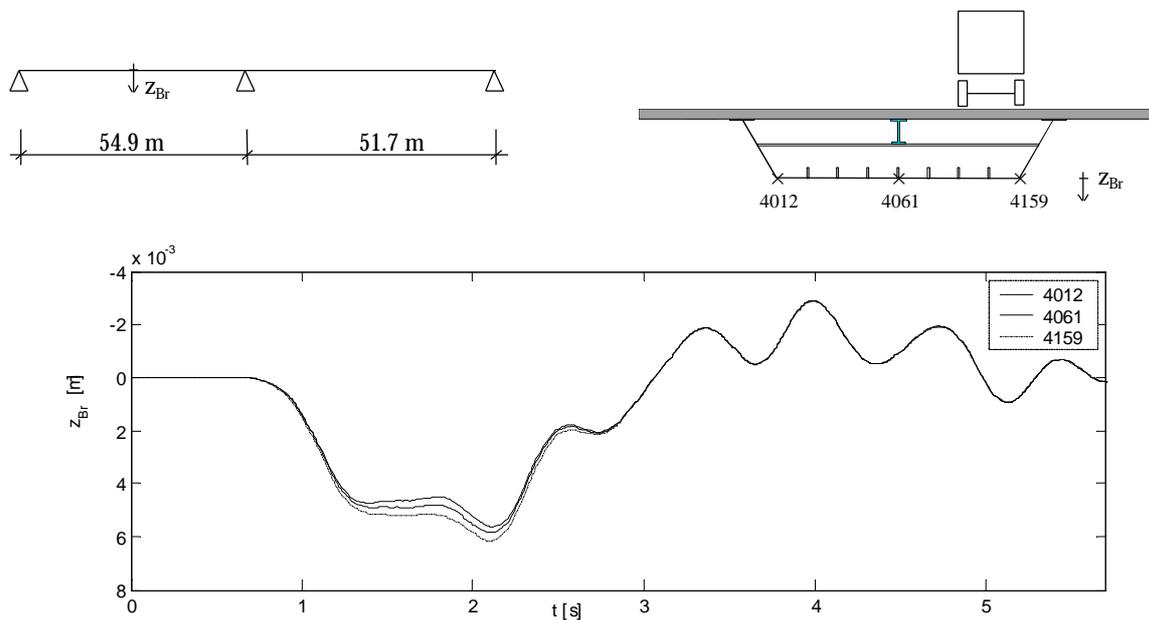


Abbildung 8.10: Durchsenkung des Stahlkastens in Mitte des 1. Feldes

Die Durchsenkung der Brücke setzt sich aus der statischen Durchbiegung sowie der Schwingung der Brücke in ihren Eigenformen zusammen. Dabei wird hauptsächlich die erste Eigenform angeregt. Nach dem der Lkw die Brücke verlassen hat stellt sich eine freie Schwingung der Brücke ein. In der Graphik ist auch die Torsion des Brückenkastens infolge der unsymmetrischen Belastung

gut zu erkennen. Die Abbildung dieses Effektes wird durch die dreidimensionale Modellierung möglich. Da die Mittendurchsenkung relativ unsensibel im Hinblick auf die Parameter der Interaktionsberechnung ist, wird sie deswegen hier nicht weiter betrachtet.

In den nächsten Abbildungen werden berechnete Dehnungen und Spannungen dargestellt. Die Ermittlung erfolgt für die Unterseite der Betonplatte (Element 1701: Dehnungen in Längs- und Querrichtung) sowie auf die Innenseite des Stahlkastens (Element 3504: Spannungen in Längsrichtung) in der Mitte des ersten Feldes.

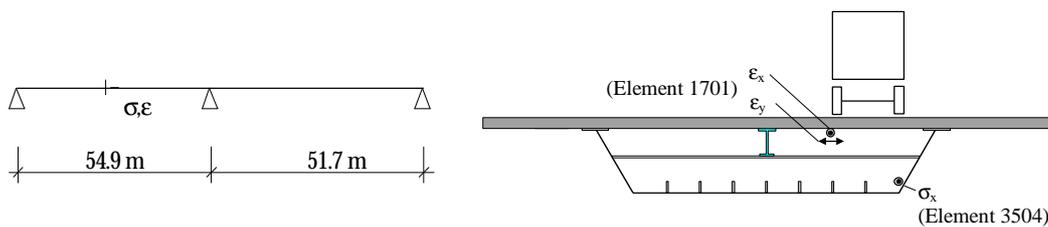


Abbildung 8.11: Berechnete Spannungen und Dehnungen

Die Spannungen in Längsrichtung am Stahlkasten werden durch die globale Reaktion der Brücke dominiert. Der Verlauf der Spannungen in Längsrichtung wird hauptsächlich durch das Biegemoment M_y an der betrachteten Stelle bestimmt und ist damit ähnlich der Momenteneinflusslinie eines Zweifeldträgers. Daneben bilden sich die Schwingungen der Brücke in den berechneten Spannungen ab.

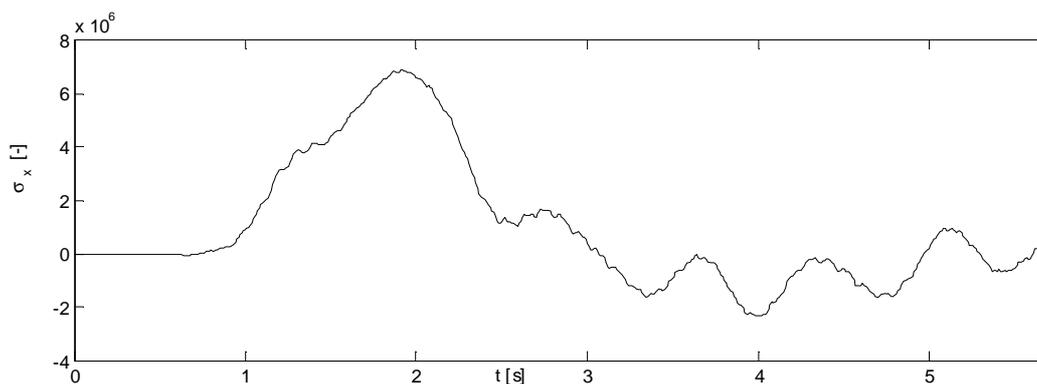


Abbildung 8.12: Spannungen σ_x am Stahlkasten (Element 3504)

Die Betonplatte wird direkt durch die Räder des Lkws belastet. Außerdem liegt die Betonplatte nahe der Spannungsnulllinie des Querschnittes. Die (globale) Durchbiegung der Brücke spiegelt sich deswegen kaum in den Berechnungsergebnissen wieder. Statt dessen zeigen die Dehnungen an der Unterseite des Betons ausgeprägte lokale Charakteristika. Zunächst ergeben sich in Längsrichtung infolge der Durchbiegung der Brücke geringe negative Dehnungen (Druck) im Beton. Befindet sich ein Rad des Fahrzeugs an der Stelle des betrachteten Elementes, so treten an der Unterseite der Betonplatte hohe Zugdehnungen auf. Der Verlauf der Dehnungen in Längsrichtung ist ähnlich der Superposition von 4 Momenteneinflußlinien einer Platte.

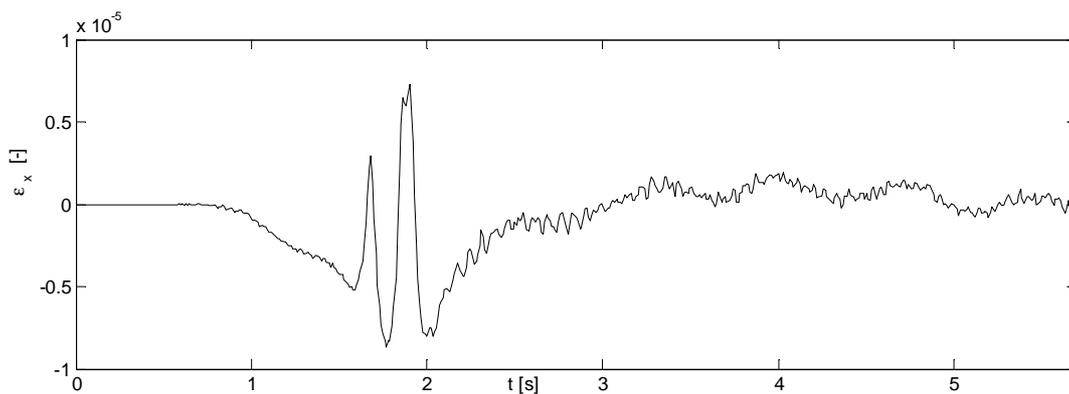


Abbildung 8.13: Dehnungen ϵ_x an der Unterseite der Betonplatte unten (Element 1701)

Signifikante Dehnungen in Querrichtung ergeben sich ebenfalls nur solange sich der Lkw in der Nähe des Sensors befindet. Die Dehnungen in Querrichtung sind betragsmäßig deutlich größer als in Längsrichtung.

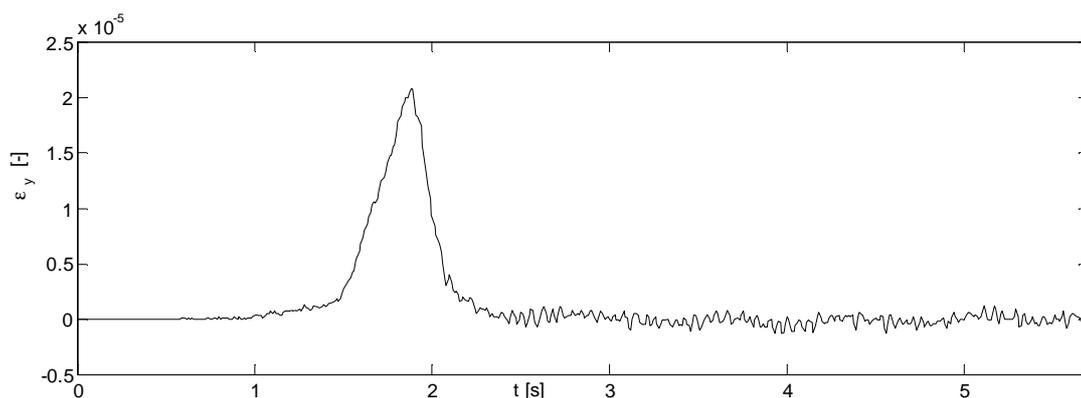


Abbildung 8.14: Dehnungen ϵ_y an der Unterseite der Betonplatte unten (Element 1701)

Unter Verwendung des Postprocessors FEMAP können die berechneten Größen graphisch dargestellt werden. Dadurch ist es möglich einen tieferen Einblick in bei der Interaktion auftretenden Effekte zu gewinnen. Als Beispiel für die Visualisierungsmöglichkeiten werden abschließend die Spannungen auf der Unterseite der Betonplatte sowie die Deformation der Brücke gezeigt:

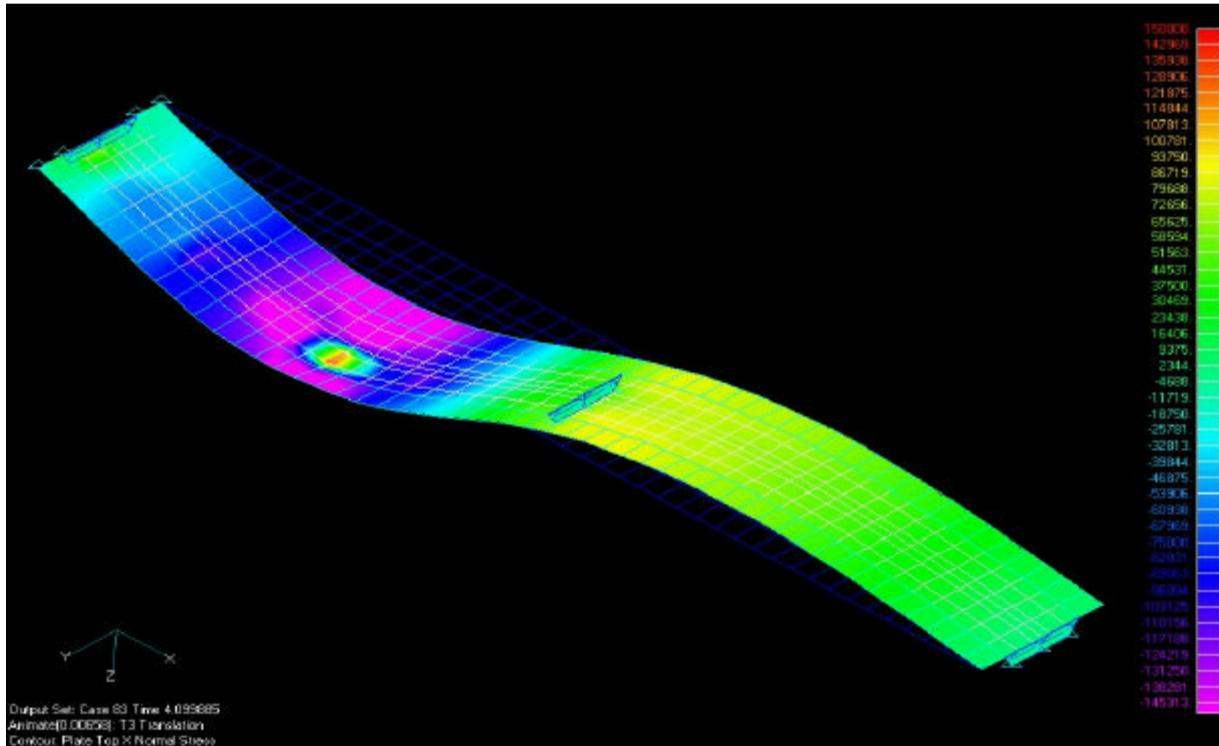


Abbildung 8.15: Spannungen σ_x auf der Unterseite der Betonplatte sowie die Deformation der Brücke

9 Zusammenfassung

Theoretischer Hintergrund:

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Simulationsmodell zur Berechnung der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion. Hierzu wurde ein leistungsfähiger differentiell – algebraischer Algorithmus entwickelt. Damit können beliebige Finite Element Modelle zur Interaktionsberechnung verwendet werden. Die Zeitintegration der entstehenden Gleichungen ist stabil und störungsfrei möglich. Sowohl für das Fahrzeug wie auch für die Brücke können alle Verschiebungen, Spannungen Schnittgrößen usw. bestimmt werden.

Das entwickelte Verfahren beruht auf einer Trennung der beiden Systembestandteile Fahrzeug und Fahrweg. Die Kopplung gelingt über Lagrangesche Nebenbedingungen. Die Lagrangeschen Nebenbedingungen gewährleisten dabei, daß sich die Räder des Fahrzeuges auf der Brückenoberfläche befinden. In diese Nebenbedingungen wurden zeitvariante Ansatzfunktionen eingearbeitet, welche zusammen mit zeitvarianten Lasteinleitungsfunktionen die Relativverschiebung beider Modelle bewerkstelligen.

Die damit formulierten Bewegungsgleichungen sind differentiell – algebraischer Natur. Da für die hier vorliegende strukturdynamische Problemstellung keine adäquaten Lösungsverfahren bekannt waren, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Zeitintegrationsverfahren für derartige Problemstellungen entwickelt. Diese Verfahren beruht auf der Bestimmung des Index der algebraischen Differentialgleichung. Dieser stellt das maßgebende Konzept zu deren Verständnis dar und ist ein Maß für den Schwierigkeitsgrad zur Lösung der DAE. Ebenso ist der Index kennzeichnend für die Probleme, die bei der numerischen Lösung einer DAE im Unterschied zu deren analytischer Lösung auftreten. Die Möglichkeit, diesen Index durch Differentiation der Nebenbedingung zu reduzieren (was zu neuen Schwierigkeiten führt), führt zu sechs verschiedenen Typen mechanischer differentiell – algebraischer Systeme.

Zur Bestimmung der maßgeblichen Effekte wurden sechs verschiedene Einmassenschwingermodelle formuliert. Jeder Einmassenschwinger entspricht dabei einem der oben genannten Typen. Die strukturdynamische und die differentiell – algebraischen Eigenschaften dieser Systeme wurden analysiert, was einen Einblick in deren Wirkungsweise ermöglichte.

Ein tiefergehendes Verständnis wurde erst nach der Stabilitätsanalyse der Zeitintegration von differentiell – algebraischen Systemen mit dem Generalized- α Verfahren möglich. Die große Schwierigkeit dabei bestand darin die Bewegungsgleichungen zu entkoppeln. Dies gelang mit Hilfe einer speziellen Transformation. Die Eigenformen selbst sind dazu ungeeignet, da die Massen und die Steifigkeitsmatrix nicht positiv definit sind. Die Stabilitätsanalyse erklärt die auftretenden Störfrequenzen und ermöglicht die Bestimmung von Stabilitätskriterien. Weiterhin wurde eine neue Indexreduktionstechnik entwickelt, die auf dem Einfügen einer steifen Zwischenfeder beruht. Die Wirkungsweise dieser Indexreduktionstechnik konnte ebenfalls gezeigt werden. Damit gelang es

Stabilitätskriterien für die Zeitintegration strukturdynamischer differentiell – algebraischer Systeme anzugeben und Lösungsverfahren zu entwickeln.

Mit diesen Lösungsverfahren wurden Vergleichsrechnungen durchgeführt. Damit konnte deren Leistungsfähigkeit im Hinblick auf die Zeitintegration der Interaktionsgleichung gezeigt werden. Der Interaktionsalgorithmus konnte damit als ausreichend erprobt angesehen werden.

Als letzter Schritt wurde die Anwendung des Algorithmus gezeigt. Dazu wurden zunächst die maßgebenden Modellierungen von Fahrzeugen besprochen. Zur Anwendung des Interaktionsalgorithmus wurde dieser mittels eines kommerziellen FE – Programms umgesetzt. Damit konnte die Überfahrt eines realistischen, dreidimensionalen Lkws über die Bellevillebrücke berechnet werden. Die Leistungsfähigkeit dieser Umsetzung wurde anhand von Berechnungsergebnissen gezeigt.

Anwendung:

Mit dem entwickelten Simulationsmodell zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion steht ein leistungsfähiger und effizienter Algorithmus zur Durchführung von Interaktionsberechnungen zu Verfügung. Als Besonderheit ist der Algorithmus universell für alle Problemstellungen der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion einsetzbar.

In die Interaktionsberechnung können alle Brückentypen (Balkenbrücken, Schrägseilbrücken, Hängebrücken...) einbezogen werden. Dabei kann ein komplexes dreidimensionales Modell ebenso wie ein Einfeldbalken zum Einsatz kommen. Ebenso können nichtlineare Effekte mit abgebildet werden.

Auf Seiten des Fahrzeugs ist die Verwendung eines vertikaldynamischen Modells zur Interaktionsberechnung ausreichend. Für das vorliegende Simulationsmodell können vertikaldynamische Modelle von Lastkraftwagen genauso wie von Eisenbahnen berücksichtigt werden. Wird zur Interaktionssimulation ein Finite Element Programm benutzt, so ist die Abbildung der Kennlinien der Fahrzeugkomponenten von den zur Verfügung stehenden Elementen des Programms abhängig. In der Regel steht eine ausreichende Anzahl verschiedener Elementtypen zur Verfügung. Sollte dies nicht der Fall sein, kann das FE – Programm i.d.R. dahingehend erweitert werden.

Der entwickelte Algorithmus ermöglicht die dynamische, zeitvariante Kopplung zweier FE - Modelle. Dabei zeichnet er sich durch folgende Vorteile aus:

- Simulationsberechnungen sind mit hoher Genauigkeit möglich.
- Die Straßenrauhigkeit kann in die Berechnung mit einbezogen werden.
- Die Umsetzung ist programmtechnisch in ein Fahrzeug – Fahrweg Simulationsprogramm möglich.
- Ebenso kann der Algorithmus „angedockt“ an ein kommerziellen FE – Programm umgesetzt werden. Damit können beliebige Fahrzeug und Fahrwegmodelle praxisgerecht über Schnittstellen eingelesen werden. Diese Modelle können dabei auch von verschiedenen Institutionen stammen. Weiter können die in der Regel sehr hoch entwickelten numerischen Verfahren des verwendeten FE - Programmpakets im Sinne einer zeiteffizienten und genauen Lösung des Problem verwendet werden. Ebenso können die im FE – Programm vorhandenen Methoden

zur Spannungsermittlung genutzt werden. Die Darstellung der Ergebnisse ist mittels vorhandener Tools zur Visualisierung anwenderfreundlich möglich.

- Die Simulation kann zeiteffizient durchgeführt werden. Die Interaktionsberechnungen im Rahmen dieser Arbeit können auf einem handelsüblichen PC bei Modellen mit ca. 7000 Freiheitsgraden und 9000 Integrationsschritten in ca. 30 Minuten durchgeführt werden.

Der Algorithmus selbst basiert auf einer direkten Integration der gekoppelten Bewegungsgleichungen. Es können aber problemlos andere Lösungstechniken wie modale Entkopplung oder getrennte Lösung beider Systeme angewandt werden.

Der Algorithmus ermöglicht damit realistische Simulationsberechnungen unter Verwendung beliebiger Modelle. Er kann zum Studium aller Arten von Interaktionseffekten eingesetzt werden. So kann der dynamische Vergrößerungsfaktor auf der Basis von Durchsenkungen und Spannungen an Brückenbauteilen bestimmt werden, die Auswirkung von identischen Frequenzen von Fahrzeug und Brücke kann realitätsnah untersucht werden...).

Dabei ist nicht für jede Fragestellung die gleiche Komplexität der Modelle erforderlich. Studien zur Bestimmung der erforderlichen Komplexität können durch schrittweises Vereinfachen der verwendeten Modelle durchgeführt werden.

Auch wenn der Algorithmus selbst mit hohen Genauigkeitsanforderungen arbeitet, bleibt die Frage, ob sich realistische Spannungen an Brücken überhaupt berechnen lassen. Dies hängt in erster Linie davon ab, in wie weit die verwendeten Modelle der Realität entsprechen. Eine Vergleich von berechneten Spannungen mit Meßdaten wäre hierzu wünschenswert.

Anhang A

Einflußfunktionen, Biegelinien für Plattenelemente

Für Platten existieren zur Beschreibung der Einflußfunktionen für Knotenschnittgrößen bzw. der Biegelinie infolge einer Knotenverformung keine analytischen Lösungen mehr.

Nach dem Prinzip von Müller-Breslau sind die Einflußflächen für Knotenschnittgrößen und die Biegeflächen infolge korrespondierender Knotenverschiebung identisch. Die weitere Überlegung soll sich daher auf die Bestimmung der Durchbiegung einer Platte infolge einer Knotenverschiebung beschränken. Diese Problematik kann mit der Methode der Finiten Elemente untersucht werden. Dazu wird eine Platte, bestehend aus 16 Plattenelementen, betrachtet. Alle 16 Plattenelemente werden durch ein feines Finite Element Raster diskretisiert, um später keine Verfeinerung im Bereich hoher Spannungsgradienten treffen zu müssen. Wird für die Interaktionsberechnung die Annahme getroffen, daß sich das Fahrzeug nur entlang von Plattenkanten bewegt, so sind lediglich die Biegelinien entlang der Kanten der einzelnen Plattenelemente zu ermitteln.

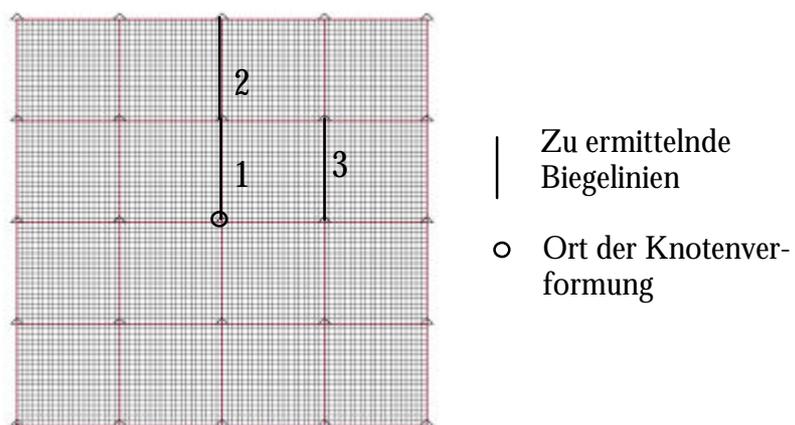


Abbildung A.16: FE Plattenstruktur

Bei der Bestimmung der Biegelinien sind dann nur Punkte entlang der Kanten auszuwerten. Weiterhin kann sich die Betrachtung infolge Symmetrie auf die beiden oberhalb des Einflußpunkts liegenden Plattenkanten sowie die Plattenkante im Nachbarfeld beschränken.

Die Festhaltung der Knotenfreiheitsgrade (j_x , j_y und w_z) ergibt sich durch Einführung von entsprechenden Lagern an den Randknoten aller Plattenelemente. Die Durchbiegung der gesamten Platte infolge einer Knotenverformung kann jetzt durch Aufbringen einer Einzelverformung (Auflagerverschiebung) am gesuchten Knotenfreiheitsgrad berechnet werden. Die restlichen Knotenfreiheitsgrade sind durch die Lagerung bereits festgehalten.

Da insbesondere die Plattendurchbiegung infolge von Zwangsverdrehungen von mehreren Faktoren wie Form der Plattenelemente, Größe der Plattenelemente, Querdehnzahl usw. abhängig ist, wird ein realistisches Modell für eine Betonfahrbahn verwendet. Die Länge der Quadratelemente beträgt $l=2.5\text{ m}$, die Plattendicke $d=0.2\text{ m}$. Als Materialparameter werden $E=34\,000\,10^9\text{ N/m}^2$ und $\nu=0.2$ angesetzt.

A.1 Durchbiegung infolge Knotendurchsenkung w_z

Die Durchbiegung des Systems ergibt sich hier durch Einführung einer Einheitsauflagerverschiebung w_z am Mittelaufleger der Platte. Die sich ergebende Durchbiegung beschränkt sich hauptsächlich auf die direkt angrenzenden Plattenelemente. Für alle anderen Felder ist die Durchbiegung vernachlässigbar klein.

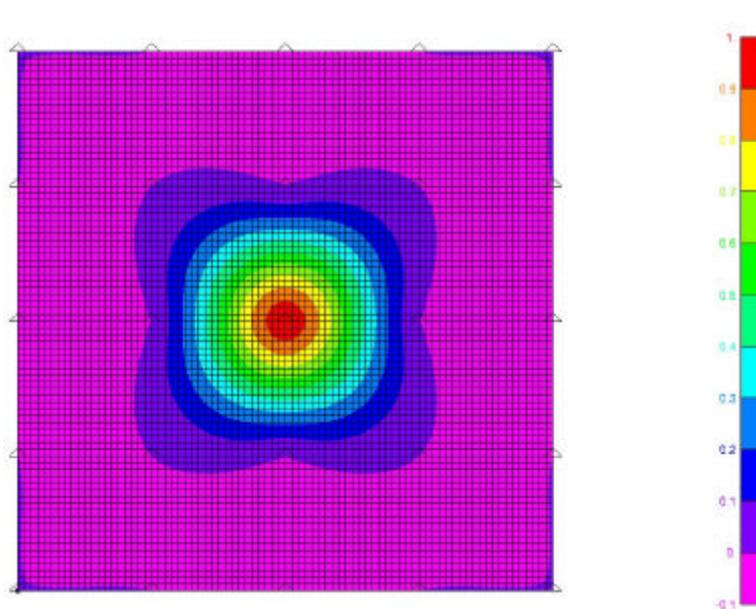


Abbildung A.17: Durchbiegung der Platte infolge Knotendurchsenkung w_z

Da hier die Knotenpunktverschiebung festgelegt wird, ist die entstehende Durchbiegung relativ unsensibel im Bezug auf Plattengröße sowie den Elastizitäts Modul. Die Durchbiegung ist jedoch sensibel bezüglich der Querdehnzahl und dem Verhältnis Elementbreite zu Elementlänge.

Die Auswertung der Biegefläche entlang der Kanten 1-3 ergibt folgende Biegelinien:

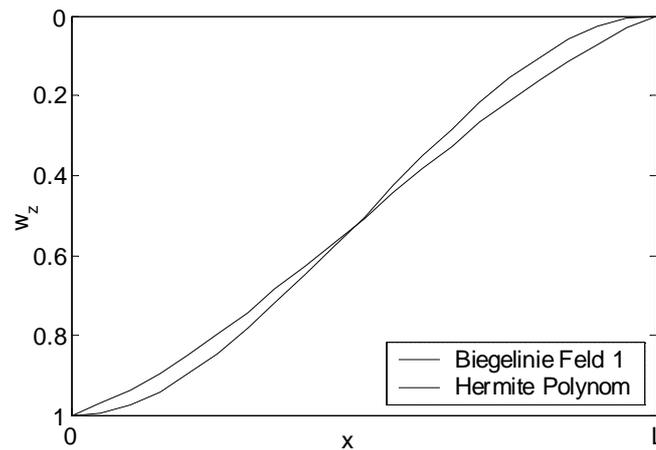


Abbildung A.18: Biegelinie 1 infolge w_z

Die Biegelinie im Feld neben der Verformung (Kante 1) ist etwas steiler als das entsprechende Hermite Polynom für Balkenelemente. Die Biegelinie kann deshalb in guter Näherung durch die Hermite Polynome angenähert werden.

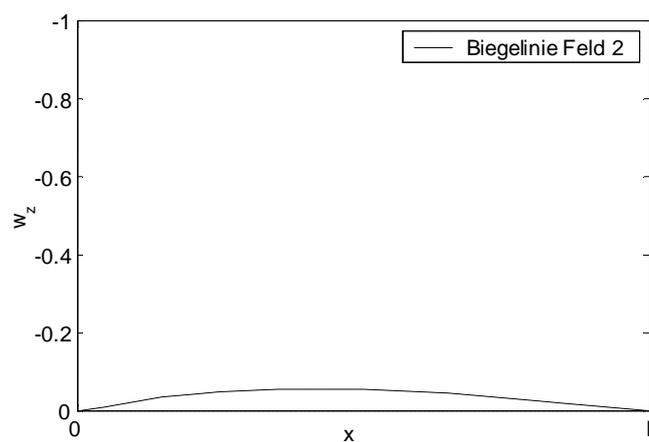
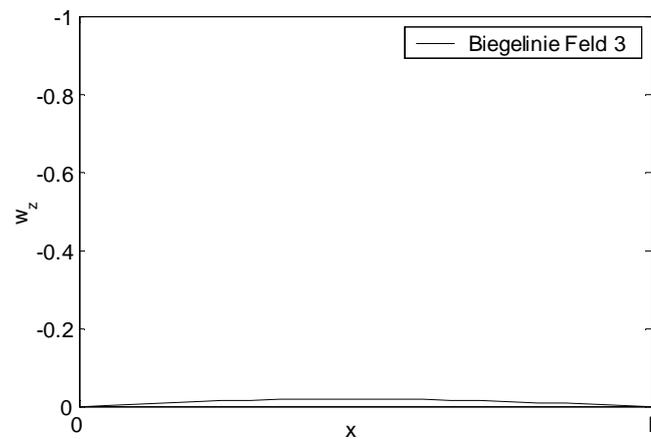
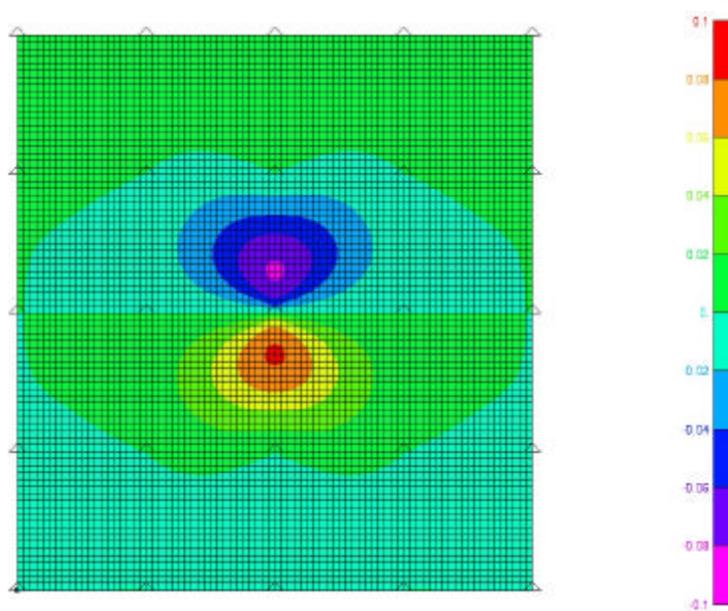


Abbildung A.19: Biegelinie 2 infolge w_z

Abbildung A.20: Biegelinie 3 infolge w_z

Die Biegelinien entlang der Kanten 2 (Maximalwert: 0.057) und 3 (Maximalwert: 0.019) sind sehr klein. Sie können in guter Näherung vernachlässigt werden.

A.2 Durchbiegung infolge Knotenverdrehung j_y

Abbildung A.21: Durchbiegung der Platte infolge Knotenverdrehung j_y

Da hier als Zwangsdeformation keine Verschiebung, sondern eine Verdrehung festgelegt wird, reagiert die Durchbiegung sensibler als im obigen Fall auf die Wahl der Plattenparameter. Die Auswertung der Biegefläche entlang der Kanten 1-3 ergibt für die verwendeten Parameter folgende Biegelinien:

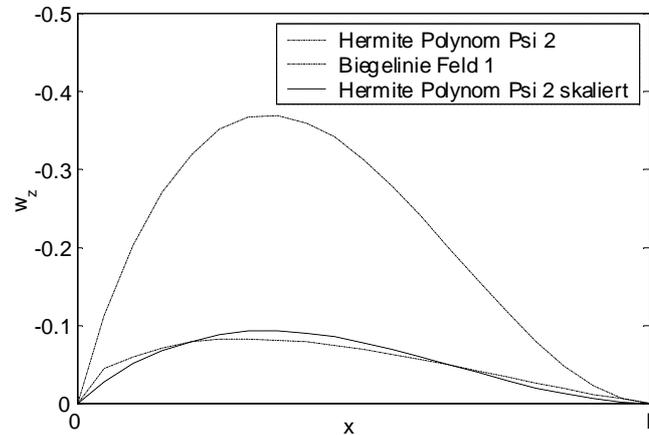
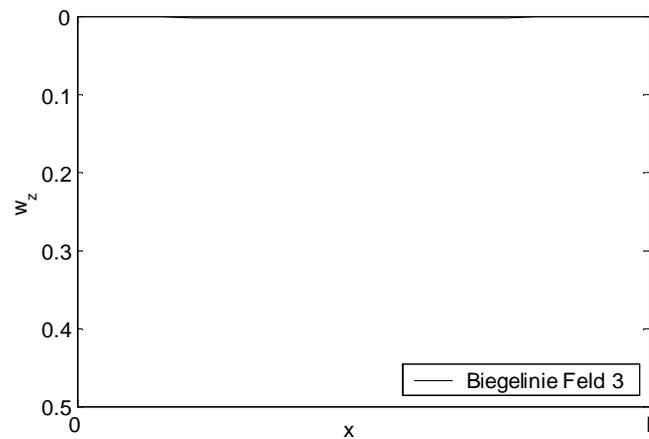


Abbildung A.22: Biegelinie 1 infolge j_y

Die Biegelinie im Feld neben der Verformung (Kante 1) ist deutlich kleiner als das entsprechende Hermite Polynom für Balkenelemente. Die Biegelinie kann aber in guter Näherung durch die Hermite Polynome angenähert werden, wenn diese zuvor mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ skaliert wurden. Dieser Skalierungsfaktor ist nur als Anhaltswert zu sehen, da er sich für andere Plattenparameter deutlich davon unterscheiden kann.

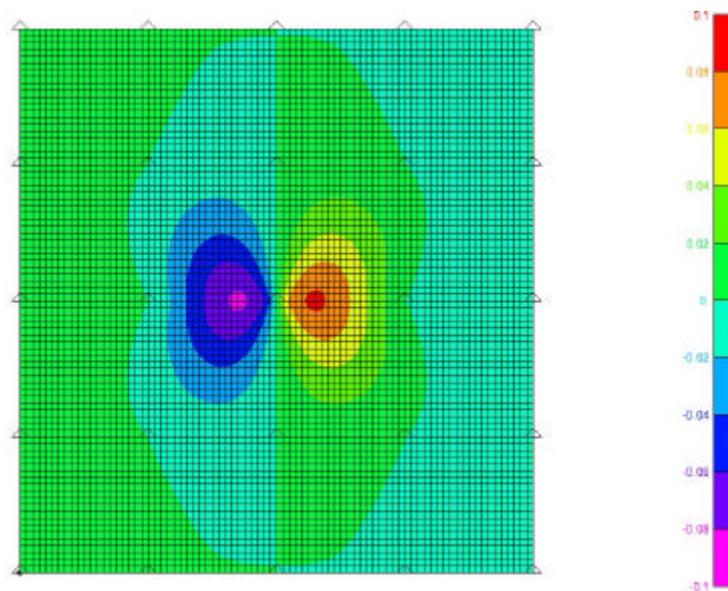


Abbildung A.23: Biegelinie 2 infolge j_y

Abbildung A.24: Biegelinie 3 infolge j_y

Die Biegelinien entlang Kanten 2 (Maximalwert: 0.008) und 3 (Maximalwert: 0.003) sind wiederum sehr klein. Sie können in guter Näherung vernachlässigt werden.

A.3 Durchbiegung infolge Knotenverdrehung j_x

Abbildung A.25: Durchbiegung der Platte infolge Knotenverdrehung j_x

Aus Symmetriegründen sind hier die Biegelinien entlang Kanten 1 und 2 identisch 0. Die Biegelinie entlang der Kante 3 (Maximalwert: 0.001) ist sehr klein und muß deshalb nicht näher betrachtet werden.

So ergeben sich für den Lastfall „Knotenverdrehung j_x “ entlang der betrachteten Plattenkanten keine oder vernachlässigbar kleine Durchsenkungen. Diese Annahme ermöglicht daher eine deutliche Vereinfachung, da bei der Beschreibung der Interaktion weniger Ansatzfunktionen für die Durchsenkung der Radaufstandspunkte sowie zur Lastinterpolation berücksichtigt werden müssen. Dies bewirkt auch eine erhöhte Genauigkeit, da die tatsächliche Plattendurchbiegung ohnehin nur näherungsweise ermittelt werden kann.

A.4 Zusammenfassung

Wird für die Interaktionsberechnung die Annahme getroffen, daß sich das Fahrzeug lediglich entlang von Elementkanten bewegt, vereinfacht sich die Beschreibung der Interaktion. Für die Durchsenkung der Radaufstandspunkte wie auch für die Lastinterpolation müssen weniger Ansatzfunktionen berücksichtigt werden. Dies erhöht auch die Genauigkeit, da die tatsächliche Plattendurchbiegung ohnehin nur näherungsweise ermittelt werden kann. Problematisch ist weiterhin, daß sich anders als für Balkenelemente keine allgemeingültige Beschreibung finden läßt. Vielmehr ist die gefundene Einflußlinie von den Parametern der Platte abhängig. Auf der anderen Seite spielen die hier ermittelten Einflußlinien und Biegelinien bei einer nicht zu groben Elementierung des FE-Modells lediglich eine untergeordnete Rolle. Die Untersuchungen ergaben, daß für Plattenelemente (ebenso wie für Balkenelemente) die Hermiteschen Ansatzfunktionen verwendet werden können. Lediglich die Einflußfunktionen für die Durchbiegung infolge Knotenverdrehung sollte mit einem Skalierungsfaktor (z.B. $\frac{1}{4}$) belegt werden.

Anhang B

Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren

Strukturdynamische Fragestellungen erfordern eine Formulierung des Problems im Raum und in der Zeit. Diese Probleme werden als Anfangs-Randwertprobleme bezeichnet. Nach der räumlichen Diskretisierung mittels Finiter Elemente muß die Lösung des Anfangswertproblems für die Differentialgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{P}(t) \quad (\text{B.1})$$

numerisch ermittelt werden. Dazu wird das zu untersuchende Zeitintervall mittels Stützstellen eingeteilt und das Differentialgleichungssystem numerisch ausgewertet. Das Gleichungssystem wird nicht zu allen Zeitpunkten t , sondern lediglich zu diskreten Zeitpunkten $n \cdot \mathbf{D}t$ erfüllt. Dieses Verfahren wird als Zeitintegration bezeichnet.

Für die Zeitintegration existiert eine Vielzahl an Verfahren. Eine sinnvolle Einteilung dieser Verfahren kann anhand der Anzahl der bei einer Integration berücksichtigten Zeitschritte, hinsichtlich des Zeitpunktes des Aufstellens der Gleichgewichtsbedingung und in die Klasse der direkten bzw. indirekten Verfahren erfolgen.

Jedes Zeitschrittverfahren besitzt individuelle Stärken und Schwächen, so daß es von der Problemstellung abhängt, welches Verfahren günstigerweise zum Einsatz kommt. Wichtige Kriterien hierfür sind der Aufwand eines Verfahrens (numerischer Aufwand, Größe des Zeitschrittes $\mathbf{D}t$), Genauigkeitsanforderungen sowie die erforderliche Stabilität (unbedingt/bedingt).

Zu den Schwächen von Zeitintegrationsverfahren zählt, daß sie lediglich eine Näherungslösung liefern, die von der exakten Lösung mehr oder weniger stark abweichen kann. Dabei kann die Integration instabil werden, das Verfahren kann eine unerwünschte (numerische) Dämpfung des Schwingungsverhaltens bewirken und die Periodendauer der Schwingung verlängern. Der Fehler ist dabei von der Größe des Zeitschrittes $\mathbf{D}t$ abhängig. Anhand von Genauigkeitsanforderungen kann damit eine sinnvolle Zeitschrittgröße gewählt werden.

Eines der bekanntesten Zeitschrittverfahren wurde 1959 von Newmark entwickelt. Die fehlende Möglichkeit, eine numerische Dämpfung bei Beibehaltung der Genauigkeit 2. Ordnung einzuführen, führte zur Entwicklung der sogenannten α -Verfahren [Hilber, Hughes, Taylor 1977], [Chung, Hulbert 1993]. Hierbei wird innerhalb des Zeitschrittverfahrens eine numerische Dämpfung in das System eingebracht, die hohe Eigenfrequenzen abklingen läßt. Die α -Verfahren sind Gegenstand der aktuellen Forschung, z.B. in [Rapolder 2001].

Verfahren, welche das Anfangswertproblem in Raum und Zeit gleichzeitig lösen und hauptsächlich zur Berechnung der Wellenausbreitung eingesetzt werden (z.B. Time-Diskontinuous-Galerkin TDG), werden hier nicht betrachtet. Eine weitere Klasse von jungen Verfahren, die sog. Energieerhaltenden Verfahren werden ebenfalls nicht betrachtet, da sie für energiedissipative Vorgänge spezielle Ansätze erfordern.

B.1 Einteilung der Verfahren

B.1.1 Einschritt- Mehrschrittverfahren

Einschrittverfahren:

Zeitintegrationsverfahren, bei denen zur Berechnung der Bewegungsgrößen im Zeitpunkt $t+Dt$ lediglich die Bewegungsgrößen im Zeitpunkt t verwendet werden, werden als Einschrittverfahren bezeichnet.

Die Änderung der Schrittweite Dt kann bei Einschrittverfahren einfach durchgeführt werden. Der Aufwand dieses Verfahrens ist gering.

Mehrschrittverfahren:

Im Gegensatz dazu verwenden Mehrschrittverfahren zur Berechnung der Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t+Dt$ neben der bereits berechneten Näherung im Zeitpunkt t zusätzlich die Näherung weiterer vorausgegangener Zeitpunkte (z.B. $t-Dt$).

Mehrschrittverfahren sind nicht selbststartend, da sie zunächst eine Anlaufrechnung mit geeigneten Einschrittverfahren zur Gewinnung der Startwerte erfordern. Dies ist auch bei einer Änderung der Schrittweite erforderlich, es sei denn die neue Schrittweite ist ein Vielfaches der alten Schrittweite. [Stoer, Bulirsch 1973; Engelen-Müllges, Reutter 1987]. Die Analyse des Gesamtverfahrens durch die Aneinanderreihung von zwei verschiedenen Verfahren ist schwierig. Mehrschrittverfahren benötigen einen höheren Aufwand zum Zwischenspeichern der Werte. Die maximal erreichbare Genauigkeit unbedingter stabiler Verfahren entspricht der von Einschrittverfahren.

B.1.2 Explizite – Implizite Verfahren

Explizite Verfahren:

Wird das Gleichgewicht eines Systems zu Beginn des jeweiligen Zeitinkrements also zum Zeitpunkt t formuliert, handelt es sich um ein explizites Verfahren. Die Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ lassen sich direkt durch Auflösen eines Gleichungssystems ermitteln. Zu den expliziten Verfahren zählen z.B. das zentrale Differenzenverfahren und Verfahren nach Runge Kutta.

Explizite Verfahren sind einfach anzuwenden und erfordern nur wenig Rechenoperationen pro Zeitschritt [Gross, Hauger, Schnell, Wriggers 1993].

Jedoch sind explizite Verfahren nur bedingt numerisch stabil, d.h. für zu große Zeitschritte kann die Lösung exponentiell anwachsen und damit unbrauchbar werden. Sie müssen daher auf die höchste im System vorkommende Eigenfrequenz angepaßt werden. Die Schrittweite Δt des Verfahrens ist entsprechend klein zu wählen.

Enthält ein System neben niedrigen Eigenfrequenzen auch hohe Eigenfrequenzen und wird die Schrittweite des Verfahrens lediglich auf die niedrigen Eigenfrequenzen abgestimmt, so kann die Lösung instabil werden. Man spricht dann von steifen Systemen.

Implizite Verfahren:

Bei impliziten Verfahren wird die Bewegungsgleichung für den noch unbekanntem Zustand zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ mit in den Zeitintegrationsalgorithmus eingebracht. Hierbei können nichtlineare Gleichungssysteme entstehen [Björck, Dahlquist 1972]. Implizite Verfahren sind das Verfahren nach Newmark oder das Generalized- α Verfahren.

Ein Vorteil von impliziten Verfahren ist, daß sie unbedingt stabil sein können. Damit sind wesentlich größere Zeitschritte als bei expliziten Verfahren möglich [Gross, Hauger, Schnell, Wriggers 1993].

Diese große Gruppe von Verfahren ist in der Strukturdynamik sehr weit verbreitet, da sie insbesondere bei Berechnungen mit überwiegend niederfrequenten Strukturantworten äußerst effektiv und robust sind. Aber auch die sehr gute Einbindung von Elementformulierungen verschiedenster Art, wie sie bei der Berechnung gekoppelter Systeme auftreten, zeichnet implizite Verfahren aus, da sie von der eigentlichen Elementformulierung meist völlig entkoppelt sind. Nicht zuletzt ist der geringe numerische Aufwand dieser Algorithmen vor allem bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden zu nennen [Rapolder 2001].

B.1.3 Indirekte Verfahren

Bei indirekten Verfahren wird das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung erst nach einer Transformation in eine andere Form numerisch gelöst. Durch diese Umformung kann die ursprüngliche Struktur des Gleichungssystems völlig verändert werden. Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen kann entweder reduziert werden (Modale Verfahren) oder stark anwachsen (Transformation in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung).

Modale Verfahren:

Eine Möglichkeit der Reduktion der Anzahl von Unbekannten liefert die Modalanalyse. Baupraktische Systeme besitzen i.d.R. eine große Anzahl an Freiheitsgraden. Beschränkt man sich auf die Betrachtung eines bestimmten Frequenzbereiches, ergibt sich jeweils ein Freiheitsgrad zugehörig zu den im Frequenzbereich enthaltenen Eigenformen. In dem für baodynamische Problemstellungen relevanten (unteren) Frequenzbereich sind meist nur wenige Eigenfrequenzen zu untersuchen. Hohe Eigenformen werden praktisch nicht mehr angeregt und können auch infolge von Problemen bei der Modellierung kaum noch realitätsgetreu abgebildet werden. Die Reduktion des Ausgangssystems mit sehr vielen Unbekannten auf ein System mit wenigen charakteristischen Frequenzen stellt eine enorme Rechenvereinfachung dar.

Die Entkopplung der Bewegungsgleichungen gelingt beim Vorhandensein einer Dämpfung nur über komplexe Eigenformen. Oft wird die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} deswegen proportional zu $\mathbf{a M} + \mathbf{b K}$ (Rayleigh-Dämpfung) angenommen.

Die modale Transformation ist jedoch nur für linear elastische Systeme gültig. Es gibt allerdings auch Versuche, diese oder ähnliche Vorgehensweisen bei nichtlinearen Systemen mittels einer stückweisen Linearisierung anzuwenden. Hierzu ist immer dann eine aufwendige Transformation vom Ausgangssystem zum reduzierten System notwendig, wenn sich die Struktureigenschaften infolge von Nichtlinearitäten wesentlich ändern. Gerade bei stark nichtlinearen Berechnungen ist dies mit einem erheblichen Aufwand verbunden, da sich die dynamischen Eigenschaften sehr oft stark verändern [Rapolder 2000].

Transformation in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

Eine andere Möglichkeit ist die Transformation des bestehenden Differentialgleichungssystems 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung. Da alle Differentialgleichungssystem höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung transformiert werden können, lassen sich Lösungsverfahren für Systeme 1. Ordnung auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Die meisten Zeitintegrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen wie auch für algebraische Differentialgleichungen wurden deswegen für Systeme erster Ordnung entwickelt. Somit stehen für Systeme 1. Ordnung eine Vielzahl leistungsfähiger Verfahren zur Verfügung.

Bei der Transformation vom System 2. Ordnung zum System 1. Ordnung verdoppelt sich jedoch die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Außerdem erhält man vollbesetzte, unsymmetrische Systemmatrizen, die nur mit speziellen Gleichungslösern behandelt werden können. Bei Mehrkörpersystemen mit wenigen Freiheitsgraden werden i.d.R. die Bewegungsgleichungen 1. Ordnung

integriert. Bei strukturdynamischen Problemstellungen mit vielen Freiheitsgraden ist dieses Vorgehen dagegen weniger sinnvoll.

Nach [Rutishauser 1960] ist aus Genauigkeitsgründen die Transformation auf ein System 1. Ordnung der direkten Lösung des Gleichungssystems vorzuziehen, falls neben Termen mit \ddot{w} auch Terme mit \dot{w} vorhanden sind. Die Genauigkeitsanforderungen strukturdynamischer Problemstellungen können jedoch mit Integrationsverfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung ausreichend genau erfüllt werden.

B.2 Eigenschaften von Zeitschrittverfahren für lineare Problemstellungen

B.2.1 Modale Entkopplung

Zur Stabilitätsuntersuchung von Zeitschrittverfahren ist es günstig, das System (B.1) in seiner modalen Form zu betrachten:

$$M_j \ddot{y}_j + C_j \dot{y}_j + K_j y_j = P_j \quad (\text{B.2})$$

Die Systeme (B.1) und (B.2) sind dabei äquivalent. Die Bewegungsgleichungen sind jedoch nun entkoppelt. (B.2) entspricht den Bewegungsgleichungen von n Einmassenschwingern mit den Eigenkreisfrequenzen ω_j und den Lehrschen Dämpfungsmaßen α_j :

$$\ddot{y}_j + 2\alpha_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = P_j. \quad (\text{B.3})$$

Mit:
$$\omega_j = \sqrt{\frac{K_j}{M_j}} \quad \text{und} \quad \alpha_j = \frac{C_j}{2\sqrt{K_j M_j}}.$$

Zur Stabilitätsuntersuchung kann jetzt statt eines Bewegungsgleichungssystems mit vielen Unbekannten ein Einmassenschwinger mit den Variablen y_j , \dot{y}_j und P_j betrachtet werden. Damit kann der Integrationsfehler, der bei der Lösung von (B.3) auftritt als Funktion von $\Delta t/T$, $\alpha_j P$ und den Parametern des Verfahrens bestimmt werden.

B.2.2 Analyse von Zeitschrittverfahren

Die Eigenschaften eines Zeitschrittverfahrens können für lineare Berechnungen durch analytische Untersuchungen bestimmt werden. Zeitintegrationsverfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung werden dabei anhand der Eigenschaften der Vergrößerungsmatrix bewertet. Dazu wird ein Einmassenschwinger mit der Eigenkreisfrequenz ω und dem Lehrschen Dämpfungsmaß α betrachtet:

$$\ddot{w} + 2\mathbf{x}\mathbf{w} \dot{w} + \mathbf{w}^2 w = P. \quad (\text{B.4})$$

Wird das Zeitschrittverfahren auf diesen Einmassenschwinger angewandt, so kann die Gleichgewichtsbetrachtung nach einigen algebraischen Umformungen auf die Form

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{X}_t + \mathbf{L}(r_{t+\Delta t}) \quad (\text{B.5})$$

gebracht werden. Dabei ist :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \Delta t \dot{w} \\ \Delta t^2 \ddot{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} := \text{Vergrößerungsmatrix}, \quad \mathbf{L} := \text{Lastoperator}.$$

Die Stabilität und Genauigkeit eines Integrationsverfahrens bestimmt man durch Untersuchung der Eigenwerte I_i der Vergrößerungsmatrix [Hilber, Hughes, Taylor 1977]. Aus der charakteristischen Gleichung für \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A} - I \mathbf{I}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

lassen sich zwei komplex konjugierte Eigenwerte $I_{1,2}$ („principal roots“)

$$I_{1,2} = a \pm ib \quad (\text{B.7})$$

sowie der Eigenwert I_3 („spurious root“) ermitteln.

Für konvergente Algorithmen gilt dabei:

$$|I_3| < |I_{1,2}| \leq 1.$$

Für die Stabilität und die Genauigkeit sind der spektrale Radius, das algorithmische Dämpfungsverhalten sowie die Periodenverlängerung maßgebend.

Der spektrale Radius r ist über den maximalen Eigenwert definiert als

$$r = \max\{|I_i|\}. \quad (\text{B.8})$$

Das algorithmische Dämpfungsverhältnis („numerische Dämpfung“) \bar{x} ergibt sich zu:

$$\bar{x} = -\frac{\ln(a^2 + b^2)}{2 \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (\text{B.9})$$

Hinweis: \bar{x} entspricht dabei nicht der physikalischen Dämpfung ξ , da \bar{x} über die komplex konjugierten Eigenwerte definiert ist. Eine äquivalente physikalische Dämpfung kann deshalb nur über die Lösung eines Anfangswertproblems bestimmt werden. Dies erfordert die numerische

Integration eines homogenen Schwingungsvorganges. Die Bestimmung der Dämpfung ist dann über die Analyse des so gewonnenen Schwingungsvorganges möglich (z.B. Hilberttransformation oder Auslesen der Amplituden). Für kleine Zeitschrittgrößen Δt kann für das HHT- α Verfahren ein Zusammenhang zwischen \bar{x} und dem Lehrschen Dämpfungsmaß D hergestellt werden [Hilber, Hughes, Taylor 1977]:

$$\frac{dt}{T} \rightarrow 0 \quad \bar{x} \cong D \quad (\text{B.10})$$

mit:

$$T = \frac{2\Pi}{w} \quad (\text{B.11})$$

Die Periodenverlängerung PV ergibt sich zu:

$$PV = \frac{\bar{T} - T}{T} = - \frac{\Delta t \, 2 \, \Pi}{T \arctan\left(\frac{b}{a}\right)} - 1. \quad (\text{B.12})$$

Für ein gegebenes Zeitschrittverfahren hängen die kennzeichnenden Größen r , \bar{x} und PV von der Zeitschrittgröße Δt und von den Parametern w , \mathbf{c} des betrachteten Einmassenschwingers ab. Jedes lineare System kann über eine modale Zerlegung in mehrere EMS, die getrennt voneinander betrachtet werden können, unterteilt werden. Deshalb können damit die Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchungen des Algorithmus für beliebige Systeme durchgeführt werden.

Für das Generalized- α Verfahren kann die Vergrößerungsmatrix durch Anwendung des Zeitintegrationsalgorithmus auf den Einmassenschwinger (B.3) und algebraische Umformungen bestimmt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{b} A_1 & 1 + \mathbf{b} A_2 & 0.5 - \mathbf{b} (1 - A_3) \\ \mathbf{g} A_1 & 1 + \mathbf{g} A_2 & 1 - \mathbf{g} (1 - A_3) \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{D}\Omega^2 \\
A_2 &= -\frac{1}{D}(2\mathbf{x}\Omega + \Omega^2(1-\mathbf{a}_f)) \\
A_3 &= 1 - \frac{1}{D}\left(1 + 2\mathbf{x}\Omega(1-\mathbf{a}_f) + \frac{1}{2}\Omega^2(1-\mathbf{a}_f)\right) \\
\text{mit: } D &= (1-\mathbf{a}_m) + 2\mathbf{x}\Omega(1-\mathbf{a}_f) + \frac{1}{2}\Omega^2(1-\mathbf{a}_f) \\
\Omega &= \mathbf{w}\Delta t \\
\mathbf{w} &= \sqrt{\frac{K}{M}} \\
\mathbf{x} &= \frac{C}{2\sqrt{KM}}.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Mittels einer Eigenwertanalyse ergeben sich die drei Eigenwerte, wobei die beiden ersten Eigenwerte komplex konjugiert sind:

$$\mathbf{l}_{1,2} = a \pm ib, \mathbf{l}_3. \tag{B.15}$$

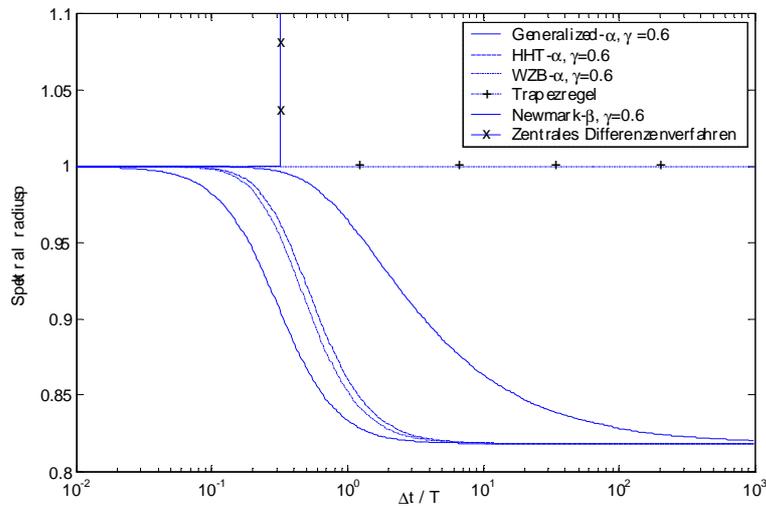
B.2.3 Spektrale Stabilität

Bei Zeitschrittverfahren lassen sich bedingte und unbedingte Stabilität unterscheiden. Bedingt stabile Integrationsschemata, erfordern die Verwendung eines Zeitschrittes \mathbf{Dt} , der kleiner als ein kritischer Zeitschritt \mathbf{Dt}_{kr} ist. Wird ein Zeitschritt verwendet, der größer ist als \mathbf{Dt}_{kr} , so wächst jeder durch numerische Integration oder Rundung entstehende Fehler. Die berechnete Antwort wird in den meisten Fällen wertlos. Die Integration wird als instabil, \mathbf{Dt}_{kr} als Stabilitätsgrenze bezeichnet. Dementsprechend ist ein Integrationsverfahren unbedingst stabil, falls die mit einem beliebig großen Zeitschritt \mathbf{Dt} ermittelte Lösung für beliebige Anfangsbedingungen nicht über alle Grenzen wächst.

Die Beurteilung der Stabilität kann anhand der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} erfolgen. Um Instabilität zu vermeiden, darf sich für eine große Anzahl n von Zeitschritten keine Vergrößerung von \mathbf{A}^n ergeben. Dies ist eingehalten, falls folgende Bedingungen gelten [Hughes 1987]:

$$\begin{aligned}
r &\leq 1 \quad \forall t \quad \text{für einfache Eigenwerte} \\
r &< 1 \quad \forall t \quad \text{für mehrfache Eigenwerte} .
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Falls Bedingung 2 verletzt ist, wachsen die Schwingungsamplituden schwächer als bei der Verletzung der Bedingung 1 und man spricht von schwacher Instabilität. Die spektralen Radien für einige Zeitschrittverfahren sind in der folgenden Abbildung in Abhängigkeit des Verhältnisses von Zeitschrittgröße \mathbf{Dt} zu Periodendauer der betrachteten Eigenfrequenz dargestellt.

Abbildung B.1: Spektrale Radien einiger Integrationsmethoden für $\delta=0$

Die zentrale Differenzenmethode ist demnach nur bedingt stabil. Während bei der Trapezregel (Newmark- β Zeitschrittverfahren mit $\mathbf{b}=\frac{1}{4}$ und $\mathbf{c}=\frac{1}{2}$) der spektrale Radius konstant 1.0 beträgt, nimmt er für alle anderen Verfahren mit wachsendem $\mathbf{D}t/T$ ab. Dies kann von Vorteil sein, da mit abnehmendem spektralen Radius die numerische Dämpfung steigt. Bei der Methode nach Newmark verringert das Einbringen von numerischer Dämpfung jedoch auch die Genauigkeit. Dies führte zur Entwicklung der α -Methoden, welche bei steuerbarer numerischer Dissipation nach 2. Ordnung genau sind. Die Parameter dieser Methoden können so festgelegt werden, daß unbedingte Stabilität erreicht wird.

B.2.4 Genauigkeit, Konvergenz

Der lokale Fehler eines Anfangswertproblems ist der Fehler, den man zum Zeitpunkt $t+\mathbf{D}t$ erhalten würde, wenn alle Größen zum Zeitpunkt t exakt wären [Björck, Dahlquist 1972].

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) - \mathbf{A} \mathbf{X}(t) - \mathbf{L}_t = \Delta t \mathbf{t}(t). \quad (\text{B.17})$$

mit:

$\mathbf{X}(t+\Delta t)$: Exakte Lösung des Gleichungssystems zum Zeitpunkt t_{n+1}

$\mathbf{X}(t)$: Exakte Lösung des Gleichungssystems zum Zeitpunkt t_n

$\mathbf{t}(t)$: Abschneidefehler

Die Genauigkeit eines Zeitschrittverfahrens wird über die Ordnung des Verfahrens $O(\mathbf{D}t^k)$ quantifiziert. Sie ergibt sich durch die Potenz k von $\mathbf{D}t$ im Abschneidefehler. Je größer k ist, um so kleiner wird der Abschneidefehler für kleine $\mathbf{D}t$. Für $k > 0$ wird der Algorithmus konsistent genannt.

Nach [Dahlquist 1963] kann die Genauigkeit eines unbedingt stabilen Zeitintegrationsverfahrens maximal von 2. Ordnung sein.

Oft können die Parameter des verwendeten Verfahrens so bestimmt werden, daß das Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung besitzt. Das Newmark Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung nur für $\xi=0.5$. Ansonsten liegt eine Genauigkeit 1. Ordnung vor. Das Generalized- α Verfahren besitzt generell die Ordnung 2.

B.2.5 Numerische Dämpfung (Dissipation)

Die numerische Dissipation ist eine besondere Eigenschaft mancher Zeitschrittverfahren, die zu einer Dämpfung der Strukturantwort führt, wobei insbesondere hohe Frequenzen beeinflusst werden. Diese Dämpfung ist rein numerisch bedingt und basiert nicht auf mechanischen Eigenschaften. Der Effekt ist also zunächst unerwünscht, da hierdurch das zu ermittelnde Ergebnis verfälscht wird [Rapolder 2001].

Die numerische Dämpfung ist stark vom verwendeten Verfahren und dessen Parametern abhängig. Werden beim Newmark Verfahren Parameter gewählt, die auf der Stabilitätsgrenze liegen („Trapezregel“) so ergibt sich keine numerische Dämpfung. Das Newmark Verfahren mit $\beta=0.3025$, $\xi=0.6$ besitzt vor allem im unteren Frequenzbereich hohe Dämpfungseigenschaften. Die Methoden nach Houbolt und die Kollokationsmethode führen zu einer starken numerischen Dämpfung, welche auch niedrige Frequenzen beeinflusst. Gute numerische Dämpfungseigenschaften besitzt das Generalized- α Verfahren. Niedrige Frequenzen werden praktisch nicht beeinflusst, wohingegen die Dämpfung im hohen Frequenzbereich steuerbar ist.

Die numerische Dämpfung ist um so größer, je kleiner der spektrale Radius ist. Für alle Verfahren ist die Dämpfung in hohen Frequenzbereich größer als im niedrigen. Obwohl die numerische Dissipation ein Abweichen von der exakten Lösung bewirkt, kann sie doch Vorteile bringen. Hochfrequente Oszillationen infolge Störungen in der numerischen Berechnung oder geometrischen Nichtlinearitäten [Wriggers 1981], [Belytschko, Hughes, 1983] können damit gedämpft werden.

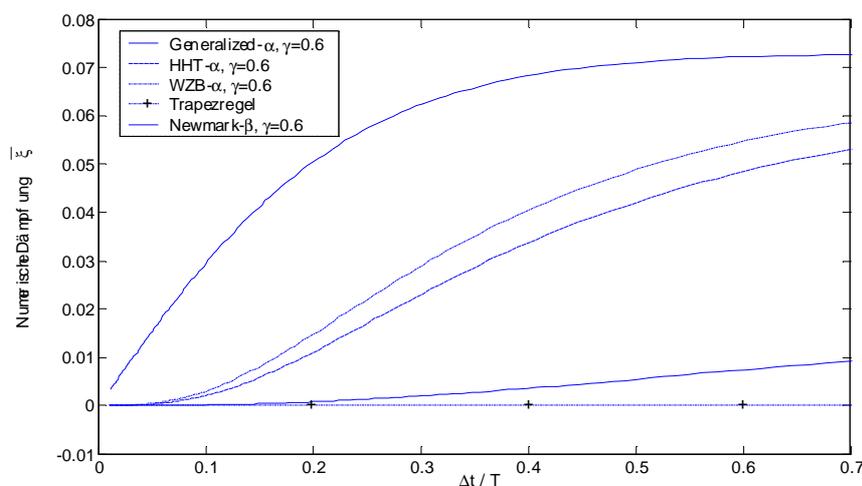


Abbildung B.2: Numerische Dämpfung verschiedener Verfahren

B.2.6 Periodenverlängerung

Ein weiterer Integrationsfehler von Zeitschrittverfahren ist die Verlängerung der Schwingungsperioden. Für einige Verfahren wurde dieser Zusammenhang in [Bathe 1986] untersucht. Bei transienten, gedämpften Vorgängen spielt dieser Effekt eine untergeordnete Rolle.

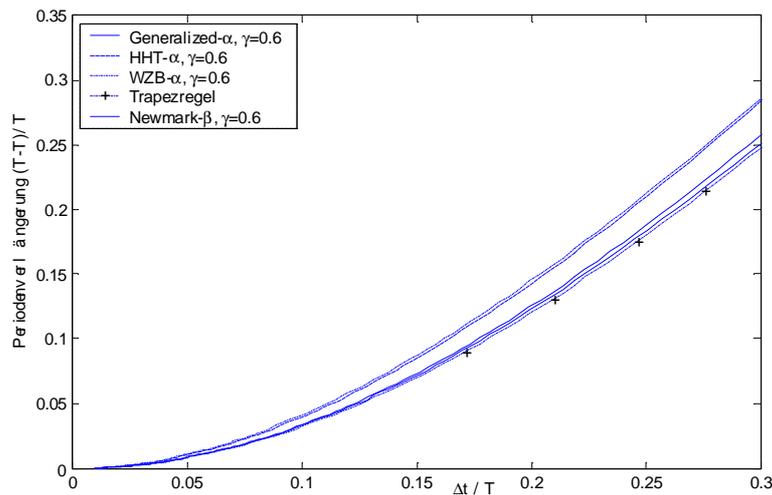


Abbildung B.3: Periodenverlängerung verschiedener Verfahren

B.2.7 Wahl der Zeitschrittgröße Δt

In Abschnitt B.2 wurde zunächst ein Einmassenschwinger mit variabler Eigenkreisfrequenz ω betrachtet. Werden auf diesen Einmassenschwinger Zeitschrittverfahren mit der Zeitschrittgröße Δt angewendet, so kann deren Qualität nun in Abhängigkeit der betrachteten Eigenfrequenz ω und der Zeitschrittgröße Δt untersucht werden. Dabei verbessert sich die Ergebnisqualität mit kleiner werdendem Δt . Die Effizienz eines Zeitschrittverfahrens ist jedoch indirekt von der Zeitschrittgröße abhängig. Je kleiner der Zeitschritt gewählt wird, um so mehr Integrations Schritte sind in einem Intervall $[0, t]$ durchzuführen. Bei bedingt stabilen Zeitschrittalgorithmen darf darüber hinaus eine kritische Zeitschrittgröße nicht überschritten werden.

Unbedingt stabile Zeitschrittverfahren ermöglichen eine Zeitintegration über den gesamten Frequenzbereich. In der berechneten Schwingungsantwort ist daher der gesamte Frequenzbereich enthalten [Bathe 1986]. Der niedrige Frequenzbereich wird jedoch genauer integriert als der hohe Frequenzbereich. Hohe Frequenzen werden in der Schwingungsantwort des Systems ungenauer abgebildet.

Als Faustregel zur ausreichend genauen Darstellung einer Schwingungsantwort wird häufig $\Delta t = 10 T_{min}$, wobei T_{min} die minimale Periodendauer repräsentiert, die berücksichtigt werden soll.

Die Fehler des verwendeten Zeitschrittalgorithmus sollten daher für folgenden Bereich vernachlässigbar klein sein:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq 0.1. \quad (\text{B.18})$$

Bei der Bestimmung von T_{min} ist zu beachten, daß die Schwingungsantwort meist mit wenigen Eigenmoden erfaßt werden kann. Zudem ist es schwierig, hohe Eigenmoden realitätsgetreu abzubilden. Auf der anderen Seite muß neben der dynamischen Antwort auch die statische Antwort des Tragwerks genau berechnet werden. Bei Berücksichtigung der statischen Antwort sind deutlich mehr Eigenmoden zu berücksichtigen.

B.2.8 Overshooting

Overshooting kennzeichnet ein „Überschießen“ einer Kenngröße in den ersten Schritten einer Berechnung unter bestimmten Ausgangsbedingungen. Dieses Phänomen wurde in [Hilber, Hughes 1978] ausführlich untersucht. Overshooting tritt hauptsächlich bei Verwendung einer Kollokationsmethode oder dem Wilson- θ Verfahren auf. Speziell bei den α -Methoden kann Overshooting vernachlässigt werden.

B.3 Anforderungen an Zeitschrittverfahren

Nach [Hughes 1987] sollte ein Zeitschrittalgorithmus folgende Eigenschaften erfüllen:

- Unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen.
- Maximal ein Satz impliziter Gleichungen je Zeitschritt.
- Genauigkeit 2. Ordnung
- Steuerbare numerische Dissipation hoher Frequenzen.
- Selbststartend, d.h. es wird kein anderes Verfahren zur Gewinnung der Startwerte benötigt.

B.4 Eigenschaften bekannter Zeitschrittverfahren

Die im folgenden aufgeführten Verfahren werden, soweit sie nicht in diesem Kapitel behandelt wurden, u. a. in [Hughes 1987], [Bathe 1986] und in [Hilber, Hughes 1978] besprochen.

Trapezregel: (Newmark- β Zeitschrittverfahren mit $\mathbf{b}=1/4$ und $\mathbf{c}=1/2$, Methode der konstanten Beschleunigungen, Crank-Nicolson Methode, Chan-Cox-Boxfield Methode): Das Trapezregel Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung und die kleinste Fehlerkonstante aller Verfahren [Dahlquist 1963]. Das Verfahren ist unbedingt stabil (für lineare Problemstellungen) und weist

keine numerische Dämpfung auf. Der spektrale Radius ist konstant ($r=1$). Overshooting tritt nicht auf. Als Einschrittverfahren ist die Trapezregel selbststartend.

Die Wilson- Θ Methode löst die Bewegungsgleichung außerhalb des Zeitintervalls am sogenannten Kollokations- oder Θ Punkt. Das selbststartende Verfahren besitzt unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen. Maximal ein Satz impliziter Gleichungen ist dabei je Zeitschritt zu lösen. Die Genauigkeit ist 2. Ordnung, die numerische Dissipation hoher Frequenzen ist steuerbar. Ein Nachteil des Verfahrens ist die hohe Dämpfung niedriger Moden.

Houbolt: Das Houbolt Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung und ist unbedingst stabil. Das Verfahren ist nicht selbststartend. Der spektrale Radius konvergiert für $\Delta t/T \rightarrow 0$ gegen 0. Die numerische Dissipation ist nicht steuerbar, niedrige Eigenfrequenzen werden relativ stark beeinflusst und die Periodenverlängerung ist hoch. Overshooting tritt nicht auf.

Das Verfahren nach Park besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung und ist unbedingst stabil. Der spektrale Radius konvergiert für $\Delta t/T \rightarrow 0$ gegen unendlich. Die numerische Dissipation ist nicht steuerbar. Niedrige Eigenfrequenzen werden schwächer als beim Houbolt Verfahren beeinflusst, aber stärker als bei den α -Methoden. Ein Overshooting tritt nicht auf. Das Verfahren ist nicht selbststartend und es tritt ein relativ hoher periodenverlängernder Fehler auf.

Das HHT- α Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung und ist unbedingst stabil. Die numerische Dissipation ist steuerbar. Niedrige Eigenfrequenzen werden schwächer als bei den Verfahren nach Houbolt und Park beeinflusst. Overshooting tritt praktisch nicht auf. Das Verfahren ist selbststartend.

Generalized- α Methode: Das Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung und ist unbedingst stabil. Es besitzt von allen α Verfahren die geringste numerische Dissipation im niedrigen Frequenzbereich und eine hohe, steuerbare numerische Dissipation im hohen Frequenzbereich. Als Einschrittverfahren ist das Generalized- α Verfahren selbststartend. Darüberhinaus zeigt es kein Overshooting [Chug, Hulbert 1993].

Das Generalized- α Verfahren ist deswegen für die hier untersuchte Problematik die günstigste Methode. Daneben lassen sich aus dem Generalized- α Verfahren folgende Verfahren ableiten: Das Newmark Verfahren, das Hilber-Hughes-Taylor- α Verfahren und das Wood-Bossak-Zienkiewicz- α .

Im Folgenden wird deshalb die Vorgehensweise beim Generalized- α Verfahren in kurzer Form zusammengefaßt.

B.5 Generalized- α Verfahren

Das Generalized- α Verfahren ist eine Weiterentwicklung des HHT- α und der WBZ- α Verfahrens. Die unbekanntenen Verformungsgrößen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ werden unter Annahme eines Beschleunigungsverlaufs zwischen zwei Zeitschritten über eine Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt.

Durch die Wahl eines Beschleunigungsverlaufs $\ddot{w}(t)$ können die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Ende eines Zeitschritts ($\dot{w}_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t}$) durch die Startwerte am Beginn des Zeitschritts (\dot{w}_t, w_t) und einen integralen Ausdruck ermittelt werden. Das Vorgehen beim Generalized- α Verfahren ist dabei identisch dem Verfahren nach Newmark [Newmark 1959]:

$$\dot{w}_{t+\Delta t} = \dot{w}_t + [(1 - \mathbf{g}) \ddot{w}_t + \mathbf{g} \ddot{w}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (\text{B.19})$$

$$w_{t+\Delta t} = w_t + \dot{w}_t \Delta t + [(0.5 - \mathbf{b}) \ddot{w}_t + \mathbf{b} \ddot{w}_{t+\Delta t}] \Delta t^2. \quad (\text{B.20})$$

Dabei entspricht $\mathbf{b}=1/4$ und $\mathbf{g}=1/2$ einem konstanten Verlauf der Beschleunigung und einem linearen Verlauf der Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitschritten (Trapezregel). $\mathbf{b}=1/6$ und $\mathbf{g}=1/2$ ergibt einen linearen Verlauf der Beschleunigung und einen quadratischen Verlauf der Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitschritten.

(B.19) und (B.20) können umgeformt werden zu:

$$\dot{w}_{t+\Delta t} = (w_{t+\Delta t} - w_t) \mathbf{k}_6 - \dot{w}_t \mathbf{k}_4 - \ddot{w}_t \mathbf{k}_5 \quad (\text{B.21})$$

$$\ddot{w}_{t+\Delta t} = (w_{t+\Delta t} - w_t) \mathbf{k}_1 - \dot{w}_t \mathbf{k}_2 - \ddot{w}_t \mathbf{k}_3 \quad (\text{B.22})$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{1}{\Delta t^2 \mathbf{b}} & \mathbf{k}_2 &= \frac{1}{\Delta t \mathbf{b}} & \mathbf{k}_3 &= \frac{1}{2 \mathbf{b}} - 1 \\ \mathbf{k}_4 &= \frac{\xi}{\mathbf{b}} - 1 & \mathbf{k}_5 &= \frac{\xi \Delta t}{2 \mathbf{b}} - \Delta t & \mathbf{k}_6 &= \frac{\xi}{\Delta t \mathbf{b}}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbetrachtung wird, anders als beim Newmark Verfahren, nicht am Ende des Zeitschritts sondern zwischen den Zeitschritten durchgeführt. Dabei wird eine Linearkombination aus Anfangs- und Endzustand der jeweiligen Größe verwendet. Für die Beschleunigungen wird dafür der Faktor α_m , für die restlichen Größen der Faktor α_f verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} [(1 - \mathbf{a}_m) \ddot{w}_{t+\Delta t} + \mathbf{a}_m \ddot{w}_t] + \mathbf{C} [(1 - \mathbf{a}_f) \dot{w}_{t+\Delta t} + \mathbf{a}_f \dot{w}_t] + \\ + \mathbf{K} [(1 - \mathbf{a}_f) w_{t+\Delta t} + \mathbf{a}_f w_t] = (1 - \mathbf{a}_f) \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{a}_f \mathbf{P}_t \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Werden nun (B.21) und (B.22) in (B.23) eingesetzt, so verbleibt als einzige Unbekannte $w_{t+\Delta t}$. Das Gleichungssystem kann nach $w_{t+\Delta t}$ aufgelöst werden:

$$\mathbf{A}_1 w_{t+\Delta t} = \mathbf{A}_2 w_t + \mathbf{A}_3 \dot{w}_t + \mathbf{A}_4 \ddot{w}_t + \mathbf{A}_5 \quad (\text{B.24})$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M} \mathbf{k}_1 (1 - \mathbf{a}_m) + \mathbf{C} \mathbf{k}_6 (1 - \mathbf{a}_f) - \mathbf{K} (1 - \mathbf{a}_f) \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{M} \mathbf{k}_1 (1 - \mathbf{a}_m) + \mathbf{C} \mathbf{k}_6 (1 - \mathbf{a}_f) - \mathbf{K} \mathbf{a}_f \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{M} \mathbf{k}_2 (1 - \mathbf{a}_m) + \mathbf{C} (\mathbf{k}_4 - \mathbf{a}_f - \mathbf{k}_4 \mathbf{a}_f) \\ \mathbf{A}_4 &= \mathbf{M} (\mathbf{k}_3 - \mathbf{a}_m - \mathbf{k}_3 \mathbf{a}_m) + \mathbf{C} \mathbf{k}_5 (1 - \mathbf{a}_f) \\ \mathbf{A}_5 &= \mathbf{P}_t (1 - \mathbf{a}_f) - \mathbf{P}_{t+\Delta t} \mathbf{a}_f \end{aligned}$$

Nach [Chung, Hulbert 1993] besitzt das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung für:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f \quad (\text{B.25})$$

und ist unbedingt stabil falls

$$\mathbf{a}_m \leq \mathbf{a}_f \leq \frac{1}{2}, \quad \mathbf{b} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_f - \mathbf{a}_m). \quad (\text{B.26})$$

Weiterhin sollte ein Zeitschrittalgorithmus niedrige Frequenzen möglichst wenig, hohe Frequenzen jedoch möglichst stark dämpfen. Damit lassen sich Zusammenhänge zwischen den Steuerparametern α_f , α_m , β und dem Spektralradius ρ_∞ (für $Dt/T^{\otimes} \mathbb{Y}$) herleiten.

Eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen ist gegeben falls:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{4}(1 - \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_f)^2. \quad (\text{B.27})$$

Eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen erfordert:

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{r}_\infty}{\mathbf{r}_\infty + 1} \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{a}_m = \frac{2\mathbf{r}_\infty - 1}{\mathbf{r}_\infty + 1} \quad (\text{B.29})$$

Für $0 \leq \rho_\infty \leq 1$ erfüllen (B.27), (B.28) und (B.29) die Stabilitätsbedingungen (B.26).

Damit kann beim Generalized- α Verfahren der gewünschte Wert für ρ_∞ ($0 \leq \rho_\infty \leq 1$) gewählt werden. Aus (B.25), (B.27), (B.28) und (B.29) ergeben sich dann die Parameter (α_f , α_m , β , γ) des Verfahrens.

Aus dem Generalized- α Verfahren lassen sich folgende Verfahren ableiten:

- Das Newmark Verfahren [Newmark 1959] für $\alpha_f = \alpha_m = 0$
- Das Hilber-Hughes-Taylor- α Verfahren (HHT- α) [Hilber, Hughes, Taylor 1977] für $\alpha_m = 0$
- Das Wood-Bossak-Zienkiewicz- α (WBZ- α) Verfahren [Wood, Bossak, Zienkiewicz 1980] für $\alpha_f = 0$

Dabei gelten folgende Grenzen, damit die Verfahren unbedingt stabil und nach 2. Ordnung genau sind:

HHT- α :

$$0 \leq \mathbf{a}_f \leq \frac{1}{3}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{2} + \mathbf{a}_f, \quad \mathbf{b} = \frac{(1 + \mathbf{a}_f)^2}{4} \quad (\text{B.30})$$

WBZ- α :

$$\mathbf{b} \geq \frac{\xi}{2} \geq \frac{1}{4}, \quad \mathbf{a}_m + \mathbf{g} \geq \frac{1}{2}, \quad \mathbf{a}_m \leq \frac{1}{2} \quad (\text{B.31})$$

Newmark- β :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{4} \quad (\text{B.32})$$

ergibt sich die dynamische Antwort $z(t)$ im aktuellen Abschnitt aus der dynamischen Antwort $z_a(t)$ infolge der Last im aktuellen Abschnitt a sowie aus den dynamischen Antworten $z_v(t)$ infolge der Last in den vorhergehenden Abschnitten i :

$$z(t) = z_a(t) + \sum z_v(t) \quad (\text{C.4})$$

$$z_a(t) = \frac{1}{m_o \mathbf{w}_d} \int_{t=t_a}^{t=t} p(\mathbf{t}) h(t-\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\text{C.5})$$

$$z_{v,i}(t) = \frac{1}{m_o \mathbf{w}_d} \int_{t=t_i}^{t=t_{i+1}} p(\mathbf{t}) h(t-\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\text{C.6})$$

mit:

$$h(t-\mathbf{t}) = \frac{1}{m_o \mathbf{w}_d} \sin(\mathbf{w}_d(t-\mathbf{t})) e^{-\mathbf{d}(t-\mathbf{t})}$$

$$\mathbf{d} = \frac{c}{2m_o}, \quad \mathbf{w} = \sqrt{\frac{k}{m_o}}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w}_d = \sqrt{\frac{k}{m_o}} \sqrt{1-\mathbf{x}^2}$$

t_a = Startzeitpunkt aktueller Abschnitt

t_i = Startzeitpunkt des i -ten vorhergehenden Abschnitts

Die dynamische Aufstandskraft P_{dyn} kann anschließend aus u, \dot{u}, z und \dot{z} berechnet werden.

Für den in Kapitel 6 verwendeten Einmassenschwinger mit $m_o=7000$ kg, $k=2.5 \cdot 10^6$ N/m und $c=1 \cdot 10^5$ Ns/m infolge der Anregung durch die Rampenfunktion $r(t)$:

$$r(t) := \begin{cases} 0 & t < .025 \\ -1.333 t + .03333 & t < .1 \\ -.1 & t < .125 \\ -.2667 + 1.333 t & t < .2 \\ 0 & t < .501 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

ergibt sich folgende Lösung für $z(t)$:

$t < 0.025$:

$$z := 0$$

$t < 0.1$:

$$z := -1.33 t + .0333 - .490 10^{-10} e^{(-7.14 t + .179)} \cos(17.5 t - .437) + .0762 e^{(-7.14 t + .179)} \sin(17.5 t - .437)$$

$t < 0.125$:

$$z := -.100 + .1 10^{-9} \cos(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} - .0762 \sin(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} \\ - .490 10^{-10} e^{(-7.14 t + .179)} \cos(17.5 t - .437) + .0762 e^{(-7.14 t + .179)} \sin(17.5 t - .437)$$

$t < 0.2$:

$$z := -.267 + 1.33 t + .1 10^{-9} \cos(17.5 t - 2.19) e^{(-7.14 t + .893)} - .0762 \sin(17.5 t - 2.19) e^{(-7.14 t + .893)} \\ + .1 10^{-9} \cos(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} - .0762 \sin(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} \\ - .490 10^{-10} e^{(-7.14 t + .179)} \cos(17.5 t - .437) + .0762 e^{(-7.14 t + .179)} \sin(17.5 t - .437)$$

$t < 0.5$:

$$z := -.816 10^{-10} \cos(17.5 t - 3.50) e^{(-7.14 t + 1.43)} + .0762 \sin(17.5 t - 3.50) e^{(-7.14 t + 1.43)} \\ + .1 10^{-9} \cos(17.5 t - 2.19) e^{(-7.14 t + .893)} - .0762 \sin(17.5 t - 2.19) e^{(-7.14 t + .893)} \\ + .1 10^{-9} \cos(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} - .0762 \sin(17.5 t - 1.75) e^{(-7.14 t + .714)} \\ - .490 10^{-10} e^{(-7.14 t + .179)} \cos(17.5 t - .437) + .0762 e^{(-7.14 t + .179)} \sin(17.5 t - .437)$$

(C.8)

Literaturverzeichnis

- ABU-HILAL, M.; MOHSEN, M.: *Vibrations of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 200, H. 232(4), S. 703-717.
- ARNOLD, Martin; SIMEON, Bernd: *The simulation of a pantograph and catenary: a PDAE approach* Darmstadt 1988.
- ARNOLD, M.: *A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems* In: *Applied numerical mathematics*, Jg. 1995, H. 18, S. 37-56.
- ARNOLD, Martin: *Zur Theorie und zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen für differentiell-algebraische Systeme von höherem Index* Düsseldorf (VDI-Verlag) 1998. (= 20 Nr 264).
- ARNOLD, Martin: *Numerische Grundlagen von Simulationswerkzeugen der Fahrzeugsystemdynamik* 2001.
- BACHEM ACHIM; JUENGER, Michael; SCHRADER, Rainer (Hrsg.): *Mathematik in der Praxis Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin* Heidelberg (Springer) 1995.
- BARTSCH, Hans-Jochen: *Taschenbuch mathematischer Formeln 7. bis 12. Auflage* Thun, Frankfurt a. M. (Harri Deutsch) 1989.
- RADISAVLJEVIC, V.; BARUH, H.: *Modelling of Flexible Mechanisms by Constrained Coordinates* In: *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, Vol. 21. Jg. (2000), H. 1, S. 1-14.
- BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden (Deutsche Übersetzung)* Berlin (Springer) 1986.
- BATHE, K. J.; WILSON, E. L.: *Stability and accuracy analysis of direct integration methods* In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Jg. 1973, H. 1, S. 283-291.
- BAUM, H.: *Verkehrswachstum und Deregulierung in ihren Auswirkungen auf Straßenbelastung, Verkehrssicherheit und Umwelt* 1990.
- BAUMGARTE, J.: *Stabilisation of Constraints and integrals of motion in dynamical systems* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Jg. 1972, S. 1-16.
- BAUMGÄRTNER, W. FRITSCH, U.: *Fahrt eines Fahrzeuges über eine Brücke: FEM - Berechnung - Dynamische Messung* In: *Finite Elemente in der Baupraxis, Modellierung, Berechnung und Konstruktion*, Jg. 1995.
- BAUMGÄRTNER, W.; LUTZENBERGER, S.: *Interaktion LKW - Brücke: Simulation und Messung* In: *D-A-CH Tagung 2001, Innsbruck*, Jg. 2001.
-

-
- BAYER, Jürgen: *Nitty Gritty Visual Basic 6* München, Boston, San Francisco u. a. (Addison-Wesley) 2000.
- BELYTSCHKO, T.; HUGHES, T. J.R. (Hrsg.): *Computational Methods in Mechanics Computational Methods for Transient Analysis* (North-Holland) 1983.
- BENDTSEN, Claus; THOMSEN, Per Grove: *Numerical Solution of Differential Algebraic Equations TECHNICAL REPORT IMM-REP-1999-8* Lyngby Denmark (Internet-Publikation http://www.imm.dtu.dk/documents/ftp/tr99/tr08_99.pdf) 1999.
- BJÖRK, Ake; DAHLQUIST, Germund: *Numerische Methoden* München, Wien (R. Oldenburg) 1972.
- BOGATH, J.; BERGMEISTER, K.: *Neues Lastmodell für Straßenbrücken* In: *Bauingenieur*, Jg. 1999, H. 6, S. 270-277.
- BRACEWEL, R. N.: *The Fourier transform and its applications* Boston, Mass. [u.a.] (McGraw Hill) 2000.
- BRENAN, K. E.; CAMPBELL, S. L.; PETZOLD, L. R.: *Numerical solution of Initial-Value Problems in differential-Algebraic Equations* New York (North-Holland) 1989.
- BRIGHAM, E. O.: *The Fast Fourier Transform* Englewood Cliffs, NJ (Prentice-Hall) 1974.
- BRINSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik 5. Auflage* Zürich, Frankfurt a. M. (Harri Deutsch) 1965.
- BRULS, A.; JACOB, B.; SEDLACEK, G.: *Traffic Data of the European Countries* In: *Report of working group 2, Traffic Loads on Bridges, EURCODE 1*, Jg. 1989, S. 1-17.
- BUNDESREGIERUNG: *Antwort der Bundesregierung (14/2481) auf Kleine Anfrage der PDS (14/2335)* 2000.
- CANTIENI, P. R.: *Beitrag zur Dynamik von Straßenbrücken unter der Überfahrt schwerer Fahrzeuge* ETH Zürich, Diss. 1991.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M.: *A Beam Finite Element Non-Linear Theory with Finite Rotations* In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Jg. 1988, S. 2403-2438.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M.: *Time integration of the equations of motion in mechanism analysis* In: *Computers & Structures*, 33. Jg. (1989), H. 3, S. 801-820.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M.: *Numerical Integration of Second Order Differential-Algebraic Systems in Flexible Mechanism Dynamics* In: *Computer Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, Jg. 1994, S. 501-529.
- CARDONA A.; GÉRADIN, M.; DOAN, D. B.: *Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Jg. 1991, S. 395-418.
- CEBON, David: *Simulation of the response of Leaf Springs to Broad Band Random Excitation* In: *Vehicle System Dynamics*, Jg. 1986, H. 15, S. 375-392.
- CHATTERJEE, P.; DATTA, T.; SURUNA, C.: *Vibration of continuous bridges under moving vehicles* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1992, H. 169 (5), S. 619-632.
- CHEUNG, Y. K.; AU, F.; ZHENG, D.; CHENG, Y.: *Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1999, H. 228 (3), S. 611-628.
-

-
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M.: *A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized-alpha Method* In: *Journal of applied mechanics*, Jg. 1993, H. 60, S. 371-375.
- CIFUENTES, Arturo: *Dynamic response of a beam excited by a moving mass* In: *Finite Elements in Analysis and Design* 5, Jg. 1989, S. 237-246.
- CIFUENTES, A.; HERTING, D.: *Transient Response of a Beam to a Moving Mass Using a Finite Element* In: *Innovative Numerical Methods in Engineering, Proceedings of the 4th International Symposium, Atlanta*, Jg. 1986, S. 533-538.
- CIFUENTES, Arturo; PAZ, Mario: *Determination of influence lines and surfaces* In: *Proceedings of the 6th conference on computing in civil engineering*, Jg. 1989.
- CIFUENTES, Arturo; PAZ, Mario: *A note on the determination of influence lines and surfaces using finite elements* In: *Finite Elements in Analysis and Design* 7, Jg. 1991, S. 299-305.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN J.: *Dynamics of Structures* New York (McGraw-Hill) 1993.
- COLLIGNON, O.; ROUX, S.: *Dynamische Reaktion einer Brücke infolge eines überfahrenden Einmassenschwingers, FEM-Modellierung (NASTRAN)* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1994.
- COUSSY, O.; SAID, M.; VAN HOOVE, J.-P.: *The Influence of Random Surface Irregularities on the Dynamic Response of Bridges under Suspended Moving Vehicles* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1989, S. 313-320.
- DAHLQUIST, G.: *A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods* In: *BIT*, Jg. 1963, H. 3, S. 27-43.
- DECKER, Karl-Heinz: *Maschinenelemente* München, Wien (Carl Hauser Verlag) 1982.
- DIANA, G.; BRUNI, S.; CHELI, F.; COLLINA, A.: *Train-track interaction: a comparison between a numerical model and full-scale experiments* In: *Heavy Vehicle Systems, International Journal of Vehicle Design, Vol6 Nos 1-4*, Jg. 1999.
- DIANA, G.; CHELI, F.; BRUNI, S., COLLINA, A.: *Dynamic interaction between rail vehicles and track for high speed train* In: *Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure, Supplement to "Vehicle System Dynamics"*, Jg. 1995, H. Vol. 24, S. 15-30.
- DIETZ, S.; SCHUPP, G.: *Co-Simulation von MKS und FEM zur Simulation einer Brückenüberfahrt* In: *VDI-Tagung: Dynamik von Fahrzeug und Fahrweg, Kassel, 5./6.Okt. 2000*, Jg. 2000, S. 1-12.
- DIJK, Rein J. van: *Enforcement of Regulations Concerning Overloading by the Introduction of a WIM-VD Network on the Motorways in the Netherlands*, In: *Weigh- in motion of Road Vehicles* (ed. B. Jacob) Paris (Hermes Science Publications) 1999.
- NORMENAUSSCHUß BAUWESEN IM DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN 1072: Straßen- und Wegbrücken Lastannahmen* (Beuth Verlag) 1995.
- DINKEL, Jens: *Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen Berechnung des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund für das Oberbausystem Feste Fahrbahn* TU München, Diss. 2000
- DROSNER, Stefan: *Beitrag zur Berechnung der Dynamischen Beanspruchungen von Brücken unter Verkehrslasten* RWTH Aachen, Diss. 1989
- BEITZ, W.; KÜTTNER, K.-H. (Hrsg.): *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau* Berlin u.a. (Springer Verlag) 1995.
-

-
- DUFFEK, W.: *Ein Fahrbahnmodell zur Simulation der dynamischen Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrweg* Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR) Institut für Dynamik der Flugsysteme (Oberpfaffenhofen) 1991.
- ECKL, Michael: *Modellierung des VTT-Trucks in MSC-Nastran, unter Berücksichtigung der Nicht-linearität von Blattfedern* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1999.
- EICH, Edda; FÜHRER, Claus: *Numerische Methoden in der Mehrkörperdynamik* Aus: Bachem Achim; Juenger, Michael; Schrader, Rainer (Hrsg.): *Mathematik in der Praxis Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin* Heidelberg (Springer) 1995. S. 41-60.
- EICH-SOELLNER, Edda; FÜHRER, Claus: *Numerical methods in Multibody dynamics* Stuttgart (Teubner Verlag) 1998.
- ELSNER, Thomas: *FE-Modell Belleville-Brücke: lokale Netzverfeinerung, s - und e Interpretation der FE-Ergebnisse und Simulation der Interaktion mit überfahrendem Lkw (VTT-truck)* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1999.
- ENGELN-MÜLLGES, G.; REUTTER, F.: *Numerische Mathematik für Ingenieure* Mannheim, Wien, Zürich (Bibliographisches Institut) 1987.
- FAFARD, M.; LAFLAMME, M.; SVARD, M. : *Dynamic Analysis of Existing Continuous Bridge* In: *Journal of Bridge Engineering*, Jg. 1998, S. 28-37.
- FARHAT, C.; CRIVELLE, L.; GÉRADIN, M.: *Implicit time integration of a class of constrained hybrid formulations- Part I spectral stability theory* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Jg. 1995, S. 71-107.
- FELBER, Andreas: *Development of a hybrid bridge evaluation system* University of British Columbia, Diss. 1993.
- FRITSCH, U.: *Dynamische Berechnungen eines räumlichen Brückenmodells für eine Lkw - Überfahrt unter Berücksichtigung von Fahrbahnunebenheiten* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1994.
- FRITZ, Werner: *Federhärte von Reifen und Frequenzgang der Reifenkräfte bei periodischer Vertikalbewegung der Felge* Karlsruhe, Diss. 1977.
- FRYBA, L.: *Vibration of solids and structures under moving loads* Groningen (Noordhoff International Publishing) 1972.
- FRYBA, L.: *Dynamics of railway Bridges* London (Thomas Telford) 1996.
- FÜHRER, Claus: *Differentiell-Algebraische Gleichungssysteme in mechanischen Mehrkörpersystemen Theorie, numerische Ansätze und Anwendungen* TU München, Diss. 1988.
- GARCÍA, J.; JALÓN; BAYO, E.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge* New-York (Springer-Verlag) 1994.
- GBADEYAN, J.; ONI, S.: *Dynamic behaviour of beams and rectangular plates under moving loads* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1995, H. 182 (5), S. 677-695.
- GEAR, William: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* Englewood Cliffs (Prentice-Hall) 1971.
- GEAR, C.W.; GUPTA, G.K.; LEIMKÜHLER, B.: *Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints* In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12&13. Jg. (1985), S. 77-90.
-

-
- GEIDNER, T.: *Zur Anwendung der Spektralmethode auf Lasten und Beanspruchungen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken* TU München, Diss. 1979.
- GELLERT, Walter; KÄSTNER, Herbert; NEUBER, Siegfried: *Fachlexikon ABC Mathematik* (Harri deutsch) 1978. (= Thun, Frankfurt a. M.)
- GREEN, M.F.; CEBON, D.: *Dynamic response of highway bridges to heavy vehicle loads: theory and experimental validation* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1994, H. 170 (1), S. 51-78.
- GRIEPENTROG, Eberhard; MÄRZ, Roswita: *Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment* Leipzig (Teubner) 1986. (= Teubner Texte zur Mathematik)
- GROSS, Siegfried: *Berechnung und Gestaltung von Metallfedern* Berlin u.a. (Springer Verlag) 1960.
- GROSS, Dietmar; HAUGER, Werner; SCHELL, Walter; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik 4 Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1993.
- GUO, W.; XU, Y.: *Fully computerised approach to study cable-stayed bridge-vehicle interaction* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 2001, H. 248 (4), S. 745-761.
- HAHN, Wolf-Dieter: *Die Federungs- und Dämpfungseigenschaften von Luftreifen bei vertikaler Wechsellast* Universität Hannover, Diss. 1972.
- HAIRER, Ernst; LUBICH, Christian; ROCHE, Michael: *The numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1989. (= Lecture Notes in Mathematics 1409)
- HAIRER, E; NORSETT, S. P.; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1993.
- HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard: *Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1996.
- HEEGE, Andreas: *Implicit Time integration of impacts between deformable bodies undergoing finite deformations, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*
- HEITZER, Heinz-Dieter: *Untersuchung der fahrdynamischen Eigenschaften eines neu konzipierten Lastkraftwagens für den Verteilerverkehr* RWTH Aachen, Diss. 1992.
- HENCHI, K.; FAFARD, M.; DHATT, G. : *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1997, H. 199 (3), S. 33-50.
- HENCHI, K.; FAFARD, M.; TALBOT, M. : *An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1998, H. 212 (4), S. 663-683.
- HEYMANN, Joachim; LINGENER, Adolf (Hrsg.): *Meßverfahren der experimentellen Mechanik* Berlin (Springer) 1986.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.: *Collocation, Dissipation and 'Overshoot' for Time Integration Schemes in Structural Dynamics* In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Jg. 1978, H. 6, S. 99-117.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T.; TAYLOR, R.: *Improved Numerical Dissipation For Time Integration Algorithms in Structural Dynamics* In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Jg. 1977, H. 5, S. 283-292.
-

-
- HOFF, C.; HUGHES, T. J. R.; HULBERT, G.; PAHL, P. J.: *Extended comparison of the Hilber-Hughes-Taylor alpha-method and the theta-one-method* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Jg. 1989, S. 87-93.
- HOFF, C.; PAHL, P.J.: *Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Jg. 1988, S. 367-385.
- HOFF, C.; PAHL, P.J.: *Practical Performance of the theta-one-method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Jg. 1988, S. 87-110.
- HUGHES, Thomas J. R.: *The Finite Element Method* (Prentice-Hall International) 1987.
- HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* Mineola, New York (Dover Publications, Inc.) 2000.
- HULBERT, G. M.: *A unified set of single-step asymptotic annihilation algorithms for structural dynamics* In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Jg. 1994, H. 113, S. 1-9.
- INGLIS, C. E.: *A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges* Cambridge (The University Press) 1934.
- KASHIF, A.; HUMAR, J.: *Analysis of the Dynamic Characteristics of Box Girder Bridges* In: *Developments In Short and Medium Span Bridge Engineering '90*, Jg. 1900, S. 367-378.
- KELLNER, Christian: *Modelling (NASTRAN) of the VTT truck, model updating according to the given eigenfrequencies and simulation of a ride on a rough pavement* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1997.
- KENIS, Williams J.; HAMMOUDA, Jamel: *A sensitivity study of some existing truck dynamic simulation programs* In: *Heavy vehicle systems*, Jg. 1996, H. 3 Nos 1-4, S. 275-292.
- KOFLER, Michael: *Visual Basic 6* Bonn, Reading, Menlo Park u. a. (Addison-Wesley) 1998.
- KOLLATZ, Matthias: *Kinematik und Kinetik von linearen Fahrzeugmodellen mit wenigen Freiheitsgraden unter Berücksichtigung der Eigenschaften von Reifen und Achsen* Düsseldorf (VDI Verlag) 1989. (= 12)
- KOLOUSEK, V.: *Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen* Leipzig (Fachbuchverlag) 1953.
- KOLOUSEK, V.: *Dynamik der Baukonstruktionen* Berlin (Verl. f. Bauwesen) 1962.
- KORTÜM, W.; LUGNER, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen Einführung und Beispiele* (Springer Verlag) 1994.
- KRANZ, Andreas: *Beitrag zur Beschreibung der Eigenschaften geschichteter Trapez- und Parabelfedern* Hannover (Dissertation, Universität Hannover) 1983.
- KRIEGER, J.; HAARDT, P.: *Management of bridges in Germany in: Bridge management four* (ed. Ryall, Parke, Harding) London (Thomas Telford) 2000.
- KRYLOV, A. N.: *Über die erzwungenen Schwingungen von elastischen, gleichförmigen Stäben* In: *Mathematische Annalen*, Jg. 1905, H. 61, S. 211-234.
- LANG, Eugen: *Co-Simulationstechniken zur Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion und die Umsetzung in SIMPACK* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2001 -.
- LEE, Steven Lewis: *Krylov methods for the numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations* University of Illinois at Urbana-Champaign, Diss. 1993.
-

-
- LEE, H. P.: *On the dynamic behaviour of a beam with an accelerating mass* In: *Archive of applied mechanics*, Jg. 1995, S. 564-571.
- LICHTE, U.: *Numerische Berechnung einer Fahrzeugüberfahrt über eine Brücke und deren Vorfeld unter Verwendung eines räumlichen Fahrzeug- und Fahrbahnmodells* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1996.
- LIN, Y.-H.; TRETHERWEY, M.: *Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1990, H. 136 (2), S. 323-342.
- LROP: *Longitudinal profile analyser Measurement of the longitudinal profil in continuous mode* Internetveröffentlichung: <http://www.lcpc.fr/LCPC/materiels/gb/mlpc/foto/apl.htm>.
- LUTZENBERGER, S.: *Dynamic modelling of bridges and trucks* Delft 1997.
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Interaction of an instrumented truck crossing Belleville bridge* In: *Weigh-in-motion of Road Vehicles*, ed. B.Jacob, Hermes Science Publications, Jg. 1999,
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Evaluation of measured bridge response due to an instrumented truck and free traffic* *Bridge Management four*, ed. Ryall, Parke, Harding London (Thomas Telford) 2000.
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Interaktion an Straßenbrücken: Simulation mittels Finiter Elemente und vergleichende Messungen* In: *Arbeitsmaterialien zum Workshop "Fahrzeug-Fahrweg-Wechselwirkung"*, ed. Arnold M., DLR IB 532-01-04, Jg. 2001,
- LUTZENBERGER, S.; DINKEL, J.; BAUMGÄRTNER, W.: *PRISIM - Ein Softwaremodul zur Simulation der dynamischen Interaktion zweier relativ zueinander bewegter Finite Element Strukturen* In: *Deutschsprachige MSC - NASTRAN Anwenderkonferenz, Kloster Andechs*, Jg. 1998,
- LUTZENBERGER, S.; OELSCHLEGEL, H.J.; BAUMGÄRTNER, W.: *Influence surfaces for stresses and strains at bridge components: Numerical modelling and experimental validation* *Modelling and Simulation in Civil Engineering: From Practice To Theory*", *Presse de l'école nationale des Ponts et Chaussées* In: *Paris 2001, ISBN 2-85978-348-2*, Jg. 2002.
- MARCHESIELLO, S.; FASANA, A.; GARIBALDI, L.; PIOMBO, B.: *Dynamics of multi-span continuous straight bridges to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 1999, H. 224 (3), S. 541-561.
- MAST, Andreas: *Meßdatenanalyse an einer Autobahnbrücke mit Hilfe des Meßprogramms Analyse* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 1998.
- MEHLDORN, Gerhard (Hrsg.): *Tragwerkszuverlässigkeit, Einwirkungen [8]* Berlin (Ernst und Sohn) 1996. (= Der Ingenieurbau: Grundwissen)
- MEISSNER, M.; WANKE, K.: *Handbuch Federn* Berlin, München (Verlag Technik GmbH).
- MESSAC, A.: *Flexible-Body Dynamics Modeling of a Vehicle Moving on the Rails of a Structure* In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19. Jg. (1996), H. 3, S. 540-548.
- MEYBERG, Kurt; VACHENAUER, Peter: *Höhere Mathematik II* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1991.
- MICHALTSOS, G. T.: *The influence of centripetal and coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving vehicles* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 2001, H. 247 (2), S. 261-277.
- MITSCHKE, Manfred: *Dynamik der Kraftfahrzeuge* Berlin u.a. (Springer) 1984.
- MITSCHKE, Manfred: *Beitrag zur Untersuchung der Fahrzeugschwingungen Theorie und Versuch D* (VDI Verlag) 1962. (= Heft 157)
-

-
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P.: *Vibration Damping* (John Wiley & Sons) 1985.
- NEUN, Erik: *Analyse Fahrzeug-/ Brückenparameter Belleville und Entwicklung eines Preprozessors zur Interaktionssimulation* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit.
- NEWMARK, N. M.: *A method of computation for structural dynamics* In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Jg. 1959, H. 3, S. 67-94.
- NIEDERMEYER, Susanne: *Nichtlineare Dynamik in MSC/NASTRAN am Beispiel der Finite-Elemente-Modellierung eines Lkw mit nichtlinearen Blattfedern* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2000.
- ÖDMAN, S. T. A.: *Differential Equation for Calculation of Vibrations Produced in Load-Bearing Structures by Moving Load* In: *3rd Congr. Intern. Assoc. Bridge Structural Engng.*, Jg. 1948, S. 669-680.
- OELSCHLEGEL, Hans Jörg: *Einflußflächen mit Finiten Elementen- Theorie, Umsetzung und Vergleichsrechnungen an der Brücke Belleville* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2000.
- OSTERMANN, A.: *A class of half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 3* In: *Applied numerical mathematics*, 13. Jg. (1993), H. 1-3, S. 165-179.
- PARK, K. C.: *Evaluation time integration methods for nonlinear dynamics analysis* In: *Finite element analysis of transient nonlinear behaviour*, AMD Vol 14. Jg. (1975), S. 35-58.
- PARK, K. C.; CHIOU, J. C.: *Evaluation of Constraint Stabilization Procedures for Multibody Dynamical Systems* American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 1987.
- PETERSEN, C.: *Dynamik der Baukonstruktionen* Wiesbaden (Vieweg) 1996.
- PIOMBO, B.; FASANA, A.; MARCHESIELLO, S.; RUZZENE, M.: *Modelling and Identification of the dynamic response of a supported bridge* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 2000, H. 14 (1), S. 75-89.
- PIPPERT, Horst: *Karosserietechnik* (Vogel-Fachbuch) 1998.
- POGORELOV, D.: *Differential-algebraic equations in multibody system modeling* In: *Numerical Algorithms*, Jg. 1998, H. 19, S. 183-194.
- POPP, K.: *Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen auf geständerten Fahrwegen*, *Fortschritts-Berichte VDI-Z Reihe 12, Nr 35* Düsseldorf 1979.
- POPP, K.; SCHIELEN W.: *Fahrzeugdynamik Eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug-Fahrweg* Stuttgart (Teubner) 1993.
- RAKHEJA, SUBHASH; WOODROOFFE, JOHN: *Role of suspension damping in enhancement of road friendliness of heavy vehicles* In: *Heavy vehicle systems*, 1996. Jg. (1996), H. 3, Nos 1-4, S. 363-381.
- RAPOLDER, Markus *Parallele Finite-Element-Simulation der Bauwerk-Boden-Interaktion mit adaptiven Zeitintegrationsverfahren* TU München, Dissertation, 2001.
- REIMPELL, J.; SPONAGEL, P.: *Fahrwerktechnik: Reifen und Räder* Würzburg (Vogel Buchverlag) 1986.
- RENTROP, P.; STEHMEL, K.; WEINER, R.: *Ein Überblick über Einschrittverfahren zur numerischen Integration in der technischen Simulation* GAMM-Mitteilungen 1996, Heft 1
- RICHTER, Bernd: *Schwerpunkte der Fahrzeugdynamik: Fahrzeugschwingungen, Kurshaltung, Vierradlenkung, Allradantrieb* Köln (TÜV Rheinland) 1990.
-

-
- RIPKE, Buchard: *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik 12: Verkehrstechnik, Fahrzeugtechnik* Düsseldorf (VDI Verlag) 1995.
- ROTHENGATTEER, W.: *Entwicklung des europäischen Straßenverkehrs nach Öffnung der Grenzen zwischen West und Ost Tagungsband zu 3. Aachener Kolloquium Fahrzeug- und Motorentechnik, Aachener* 1990.
- RUTISHAUSER, Heinz: *Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung* In: *Numerische Mathematik*, 2. Jg. (1960), S. 263-279.
- SAYERS, M.; GILLESPIE, T.D.: *The effect of suspension system nonlinearities on heavy truck vibration* In: *Proc 7th IAVSD Symposium on the dynamics of Vehicles on roads and on tracks*, Jg. 1981, S. 154-166.
- SCHALLENKAMP, A.: *Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten* In: *Ingenieur-Archiv*, 8. Jg. (1937), S. 182-198.
- SCHILBERTH, Günther: *25 Jahre MSC/Nastran bei Daimler Benz Ein Rückblick aus Sicht eines Systemingenieurs* In: *unveröffentlichter Tagungsband MacNeal-Schwendler GmbH Anwenderkonferenz im Kloster Andechs*, Jg. 1998.
- SCHMADL, Harald: *Dynamische Mehrkörpersimulation des VTT-Trucks in SIMPACK* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2000.
- SCHMERDER, Jochen: *Programmtechnische Umsetzung zur Bestimmung einer Einflußlinie aus Messkurven Ziel: Berechnung von Achslasten bei einer Brückenüberfahrt* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2002.
- SCHNEIDER, M.: *Ein Beitrag zu fußgängerinduzierten Brückenschwingungen* TU München, Diss. 1991.
- SCHNEIDER, Stefan: *Convergence of general linear methods on differential-algebraic systems of index 3* (Preprint, Internetveröffentlichung, <http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/pp94-96.html>) 1995.
- SCHÜTZ, K. G.: *Verkehrslasten und deren Wirkung auf Straßenbrücken* TU München, Habil.-Schr. 1990.
- SCHÜTZ, K. G.: *Verkehrslasten für die Bemessung von Straßenbrücken* In: *Bauingenieur*, Springer Verlag, Jg. 1991, H. 66, S. 363-373.
- SEDLER, Helmut: *Einführung in die numerische Mathematik für Ingenieure* München (Carl Hanser Verlag) 1973.
- SIDDIQUI, S.; GOLNARAGHI, M.; HEPPELER, G.: *Dynamics of a flexible beam carrying a moving mass using perturbation, numerical and time-frequency analysis techniques* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 200, H. 229 (5), S. 1023-1055.
- TECHNISCHE DATEN FAHRZEUFEDERN: *Maschinen- und Konstruktionselemente, Teil 2 Parabelfedern* Werdohl
- STEINHILPER, Waldemar; RÖPER, Rudolf: *Maschinen- und Konstruktionselemente 3* Berlin u.a. (Springer) 1994.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Einführung in die numerische Mathematik I* Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1972.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Einführung in die numerische Mathematik II* Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1973.
-

-
- STOKES, G.G.: *Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges* 1849. (= Trans. Cambridge Phil. Soc., Part5)
- StVZO : *Straßenverkehrs-Zulassungs-Ordnung*. - Stand: März 1998. *Verkehrsblatt-Dokument ; Nr. B 3211* zuletzt geändert durch *Verordnung vom 03. August 2000 (BGBl. I S. 1273)*. *Schriftenreihe: Verkehrsblatt-Dokumentation* Dortmund : Verkehrsbl.-Ver 1998.
- TIMOSHENKO, S. P.: *Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe* In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 59. Jg. (1911), H. 2, S. 163-203.
- TIMOSHENKO, S. P.: *On the Forced Vibration of Bridges* In: *Pinosoph. Magazine*, 43. Jg. (1922).
- VACULÍN, O.; VALÁSEK, M.: *Semi-Active Damping of Truck Suspension and their Influence on Driver and Road Loads in Final Technical Report, EU Projekt Copernicus* 1998.
- VEITL, A.; ARNOLD, M.: *Coupled simulation of Multibody Systems and Elastic Structures* In: *Advances in Computational Multibody Dynamics*, Jg. 1999
- VOY, Christian: *Die Simulation vertikaler Fahrzeuschwingungen* Düsseldorf (VDI Verlag) 1977.
- WANG, T.-L. HUANG, D.: *Cable-Stayed Bridge Vibration due to Road Surface Roughness* In: *Journal of Structural Engineering*, Jg. 1992, H. 118 (5), S. 1354-1374.
- WILLIS, R.: *Appendix to the report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures (H.M. Stationary Office, London 1847)* W. Clowes a. Sons London 1849.
- WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O.C.: *An alpha modification of Newmark's method* In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Jg. 1980, H. 15, S. 1562-1566.
- WRIGGERS, P.: *Zur Berechnung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der Finite-Element-Methode* Universität Hannover, Dissertation 1981.
- XIA, Y.; XU, Y.; CHAN, T.: *Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 200, H. 237 (2), S. 263-280.
- YANG, Y.-B.; YAU, J.-D.: *Vehicle-Bridge Interaction Element for dynamic Analysis* In: *Journal of Structural Engineering*, Jg. 1997, H. 123, S. 1512-1518.
- ZHENG, X. J.; WU, J. J.; ZHOU, Y.-H.: *Numerical analysis of dynamic control of five-degree-of-freedom maglev vehicle moving on flexible guideways* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 2000, H. 235 (1), S. 43-61.
- ZHU, X. Q.; LAW, S. S.: *Precise time-step integration for the dynamic response of a continuous beam under moving loads* In: *Journal of Sound and Vibration*, Jg. 2001, H. 240 (5), S. 962-970.
- ZIBDEH, H. S.; RACKWITZ, R.: *Random stream of moving loads on an elastic beam* In: *Computational Stochastic Mechanics (Spanos ed.)*, Jg. 1995 Balkema,
- ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendung I* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1984.
- ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen II* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1986.
-