

Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion

Ein Verfahren auf der Grundlage einer Kopplung der
Integraltransformationemethode mit der Finite-Elemente-Methode

Kai Müller

Technische Universität München
Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen

Lehrstuhl für Baumechanik
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller
Arcisstr. 21
80333 München

Tel.: (+49 89) 289 - 28345

Fax: (+49 89) 289 - 28665

<http://www.bm.bv.tum.de>



Lehrstuhl für Baumechanik
der Technischen Universität München

Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion

Ein Verfahren auf der Grundlage einer Kopplung der
Integraltransformationsmethode mit der Finite-Elemente-Methode

Kai Müller

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E. h. K. Zilch

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann, em.
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. G. H. Müller
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Die Dissertation wurde am 06.03.2007 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 24.05.2007 angenommen.

Zusammenfassung

Es wurde ein Prognosemodell zur Erfassung der dreidimensionalen dynamischen Tunnel-Halbraum-Interaktion entwickelt. Das Verfahren basiert auf einer Kopplung der Integraltransformationemethode (ITM) zur Erfassung der unendlichen Ausdehnung des Bodens und der Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Beschreibung beliebiger Tunnelgeometrien sowie innerer Einbauten. Die Kopplung wird mit Hilfe der Substrukturtechnik im Wellenzahl-Frequenzraum vollzogen. Das erfordert die Formulierung der FEM in entsprechend modifizierter Weise. Das Vorgehen zeichnet sich durch ein hohes Maß an Effizienz aus, da das dreidimensionale Problem auf eine von den Wellenzahlen in Tunnellängsrichtung abhängige Serie von ebenen Problemen reduziert wird. Es erlaubt eine Prognose der Ausbreitung von Erschütterungen und Körperschall infolge von Zugverkehr in Tunnels. In einem Beispiel wurde die Interaktion eines nichtlinear modellierten Fahrzeuges mit einem eingebauten Masse-Feder-System zur Körperschallisolation untersucht.

Abstract

A model for the assessment of the three-dimensional dynamic tunnel-half-space interaction has been established. The model is based upon a coupling of the integral transform method (ITM) to take into account the infinite extensions of the soil with the finite element method (FEM) to consider the arbitrary shape of the tunnel and interior constructional elements. The coupling is performed using a substructuring approach in the wavenumber-frequency domain. Therefore a modified FEM description is necessary. The procedure is very efficient, because the three-dimensional problem is reduced to a series of plane problems depending on the wavenumbers in the longitudinal direction of the tunnel. The method allows the prediction of the propagation of vibrations and ground-borne sound due to moving trains in tunnels. In an example the interaction of a nonlinear vehicle with a floating slab-track which has been installed in order to reduce the emission of structure-borne sound has been investigated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann, für seine Motivation zu dieser Arbeit, seine außergewöhnliche Unterstützung und sein großes Interesse an dieser Arbeit.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Müller danke ich nicht nur für die Übernahme des Korreferates, sondern auch für seine wertvollen Hinweise zu dieser Arbeit und seine stete Diskussionsbereitschaft.

Die überaus angenehme und vertrauensvolle Zusammenarbeit sowohl mit Prof. Grundmann als auch mit Prof. Müller am Lehrstuhl für Baumechanik hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ebenso für die Übernahme des Korreferates danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger. Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Zilch gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Meinen ehemaligen und derzeitigen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Baumechanik danke ich für die fachlichen Diskussionen, vor allem aber für die immer angenehme und freundliche Zusammenarbeit. Insbesondere danke ich Herrn Dr.-Ing. S. Lenz und Herrn Dr.-Ing. S. Lutzenberger für die wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit.

Meinen Eltern danke ich für die Förderung meiner Ausbildung, vor allem aber für ihre stete Unterstützung und den starken Rückhalt.

Der größte Dank gebührt Christine, die mir mit unermüdlicher Unterstützung und großer Geduld immer fest zur Seite gestanden ist.

München, im Juni 2007

Kai Müller

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Berechnungsverfahren	3
1.3	Literaturüberblick Halbraum- und Tunneldynamik	8
1.3.1	Literatur Halbraum	8
1.3.2	Literatur Tunnel	11
1.4	Zielsetzung und Vorgehen	14
2	Der Halbraum unter dynamischer Belastung	16
2.1	Grundlegende Beziehungen der Elastizitätstheorie	16
2.1.1	Berücksichtigung der Materialdämpfung	17
2.2	Lösung mittels Helmholtzschem Satz	18
2.3	Fouriertransformation der Bewegungsgleichungen	19
2.3.1	Lösung der homogenen Laméschen Gleichung	20
2.3.2	Spannungen und Verschiebungen in kartesischen Koordinaten im fourier- transformierten Raum	20
2.4	Randbedingungen	22
2.4.1	Lokale Randbedingungen	22
2.4.2	Nicht lokale Randbedingungen	23
2.5	Belastung	24
2.5.1	Ortsfeste, zeitlich veränderliche Belastung	24
2.5.2	Geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Belastung	24
2.6	Lösung für den homogenen Halbraum	27

3	Der Vollraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	28
3.1	Allgemeine Grundlagen	28
3.1.1	Bewegte statische Lasten ($\Omega = 0$)	32
3.2	Lösung der Bewegungsgleichung für eine dynamische Belastung im Bildraum . .	33
3.2.1	Lösung der Bewegungsgleichung für komplexe Werte von α^2 und β^2 infolge des Ansatzes einer komplexen Steifigkeit	37
3.2.2	Lösung der Bewegungsgleichung für reellwertige Größen $\alpha^2 < 0, \beta^2 < 0$.	44
3.2.3	Lösung der Bewegungsgleichung für reellwertige Größen $\alpha^2 > 0, \beta^2 > 0$.	45
3.2.4	Sonderfall der geradlinig bewegten, statischen Belastung	47
3.3	Berechnung der Zustandsgrößen im Vollraum mit zylindrischem Hohlraum	48
4	Der Halbraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	50
4.1	Superposition der Lösungen für das System des Halbraumes und das System des Vollraumes mit zylindrischem Hohlraum	51
4.1.1	Ermittlung der Zustandsgrößen und Formulierung der Randbedingungen .	52
4.1.2	Transformation der Spannungen	53
4.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	55
4.2	Kraft-Verformungsverhalten am zylindrischen Rand Γ_S	56
5	Finite-Elemente-Methode im fouriertransformierten Raum	59
5.1	Grundlegende Beziehungen des Elastischen Kontinuums	60
5.1.1	Lineares Dreieckselement	61
5.2	Herleitung der dynamischen Steifigkeitsmatrix	64
5.3	Substrukturtechnik	66
5.4	Diskretisierungsfragen	68
5.4.1	Abtasttheorem	68
5.4.2	FEM-Diskretisierung	69
6	Dynamische Fahrzeug-Fahrweg Interaktion	70
6.1	Interaktion eines Masse-Feder-Systems mit dem Tunnel	71
6.1.1	Ermittlung der Fahrwegverschiebung im Originalraum	73
6.2	Fahrzeugmodell und Anregung	75
6.2.1	Fahrzeugmodell Drehgestell	75

6.2.2	Fahrzeugmodell Einmassenschwinger	76
6.3	Lineare Interaktion	77
6.4	Nichtlineare Interaktion im Zeitbereich	80
6.4.1	Fahrzeugmodell Einmassenschwinger	81
6.4.2	Fahrzeugmodell Drehgestell	83
6.4.3	Zeitintegration mit dem Newmark- $\beta = \frac{1}{4}$ -Verfahren	85
6.4.4	Nichtlineare Iteration mit dem Newton-Raphson-Verfahren	85
7	Beispiele	87
7.1	Vergleichsberechnungen	87
7.1.1	Kontrollbeispiel einer kreiszylindrischen Tunnelschale	88
7.1.2	Kontrollbeispiel eines ungestörten Halbraums	95
7.2	Anwendungsbeispiele	104
7.2.1	Prognose der Wirksamkeit von Masse-Feder-Systemen zur Körperschall- isolation	104
7.2.2	Interaktion eines Fahrzeuges mit einem Masse-Feder-System im Tunnel	114
8	Zusammenfassung und Ausblick	123
	Literaturverzeichnis	125
A	Fouriertransformation	135
A.1	Definition	135
A.2	Rechenvorschriften	135
B	Zylinderfunktionen	138
B.1	Besselfunktionen	138
B.2	Modifizierte Besselfunktionen	140
B.3	Asymptotische Entwicklungen der Besselfunktionen	142
C	Matrix $\mathbf{H}(r, n, k_x, v, \omega)$ für dynamische Belastung	143
C.1	Fundamentalsystem aus Modifizierten Besselfunktionen I_n und Macdonaldfunktionen K_n	143
C.2	Fundamentalsystem aus Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen Y_n	146
C.3	Fundamentalsystem aus Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$	149

Abbildungsverzeichnis

153

Bezeichnungen

Mechanische Größen

A	Fläche
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
C	Koeffizienten
D	Lehrsches Dämpfungsmaß
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
I	Flächenträgheitsmoment
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
L	Länge
\mathbf{M}	Massenmatrix
c	Dämpfungskonstante
c_p, c_s, c_R	Wellengeschwindigkeiten der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
\mathbf{f}	Lastvektor
f	Frequenz
$g(\dots)$	Zeitfunktion der Last
h	Dicke einer Bodenschicht, Höhe der Überdeckung oberhalb des fiktiven Randes Γ_S
k	Federsteifigkeit
k_x, k_y	Wellenzahlen
k_p, k_s, k_R	Wellenzahlen der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
k_r	radiale Wellenzahl ($k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$)
l	Länge
m	Masse, Massenbelegung je Längen- bzw. Flächeneinheit
\mathbf{p}	Lastvektor
p	Lastfunktion, Lastamplitude
\mathbf{p}_0	Vektor der Knotenlasten
t	Zeit
\mathbf{u}	Vektor der Verschiebungsgrößen
\mathbf{u}_0	Vektor der Knotenverschiebungen
$\dot{\mathbf{u}}$	Vektor der Geschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vektor der Beschleunigungen
v	Lastgeschwindigkeit
w	Verschiebungsgröße
x	Längskoordinate eines Bauteils
y, z	Ortskoordinaten

Γ_S	Berandung des zylindrischen Hohlraumes
γ	Winkel der Bettung zur Vertikalen
ϵ	Dehnung
η	Frequenzverhältnis Ω/ω
λ	Lamésche Konstante
μ	Lamésche Konstante (Schubmodul)
ν	Poissonzahl (Querdehnzahl)
ρ	Materialdichte
σ	Spannung
ζ	Verlustfaktor
Ω	Erregerkreisfrequenz
ω	Eigenkreisfrequenz

Mathematische Symbole

$\circ \rightarrow \bullet$	Fourierhintransformation
$\bullet \rightarrow \circ$	Fourierrücktransformation
$IFT(\dots)$	Fourierrücktransformation
$*$	Faltung
$(\hat{\cdot})$	Größe im fouriertransformierten Raum
$(\dots)'$	Ableitung einer Größe
δ	Dirac-Distribution
H	Heaviside-Distribution
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
$J_n(z)$	Besselfunktion der Ordnung n
$Y_n(z)$	Neumannfunktion der Ordnung n
$I_n(z)$	Modifizierte Besselfunktion der Ordnung n
$K_n(z)$	MacDonaldfunktion der Ordnung n
$H_n^{(1)}(z)$	Hankelfunktion 1. Art der Ordnung n
$H_n^{(2)}(z)$	Hankelfunktion 2. Art der Ordnung n

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Das Verkehrsaufkommen hat in den letzten Jahren erhebliche Zuwächse verzeichnet. Nicht nur in Schwellenländern mit ihren großen Metropolen, sondern auch in den hoch entwickelten Staaten ist vermehrter Zuzug in die Ballungsgebiete und besonders deren Zentren festzustellen. Das städtische Umland wird immer dichter besiedelt und die Verkehrsströme in die Innenstädte nehmen zu. Der in den entwickelten Staaten sehr gut funktionierende öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) stößt dadurch an die Grenzen seiner Kapazität: er muß vielerorts ausgebaut werden.

In Großstädten übernimmt der schienengebundene ÖPNV meist den größten Anteil des Fahrgastaufkommens. Foglich sind U- und S-Bahnen auszubauen, deren Strecken in Zentrumsnähe in der Regel nur unterirdisch geführt werden können. Auf diesen unterirdisch geführten Verkehr konzentriert sich diese Arbeit.

Alle Arten von Verkehr und Transport haben immer auch Auswirkungen auf die Umwelt. Obwohl Züge allgemein als unter Umweltaspekten vorteilhaft angesehen werden, werden ihnen oft die Probleme im Zusammenhang mit Lärm und Erschütterungen als Nachteil angelastet. Dabei steht bei oberirdisch fahrenden Zügen die Problematik der Ausbreitung des direkten Zuglärms als sogenannter *primärer Luftschall* in Gebäude hinein i.d.R. gegenüber *Körperschall* infolge von Bodenerschütterungen im Vordergrund. Bei Zügen hingegen, welche in Tunnels verkehren, kommt diese Rolle dem Körperschall zu. Dieser wird infolge der Transmission durch den Boden – was im Englischen durch den Begriff *ground-borne noise* anstelle des gewöhnlichen *structure-borne noise* besonders zur Geltung kommt – in Gebäude eingeleitet.

Die für den Körperschall relevanten Frequenzen erstrecken sich über einen Bereich von 2 – 200 Hz [GROOTENHUIS 1977]. Dabei führen die niederfrequenten Anteile aus diesem Bereich zu Erschütterungen, wohingegen die höherfrequenten Anteile für die Entstehung von Körperschall verantwortlich sind. Interagieren nun die Bodenerschütterungen mit den Gründungen von Gebäuden, so führt dies zu störenden Immissionen von für den Menschen spürbaren *Erschütterungen* (im Bereich von 1 – 80 Hz) und *sekundärem Luftschall* (im Bereich von 1 – 200 Hz) in diese Gebäude [GUGGENBERGER und MÜLLER 2004]. Wird nämlich ein Gebäude infolge der Ausbreitung von Erschütterungen zu Schwingungen angeregt und löst diese Anregung ein starkes Eigenschwingverhalten von Bauteilen wie z.B. Decken aus, so kommt es zur Abstrahlung

von sekundärem Luftschall, was ebenso zu vermeiden ist wie direkte, spürbare Erschütterungen. Eine Übersicht über die verschiedenen nach der Art ihrer Übertragung bezeichneten Schallarten kann Abbildung 1.1 entnommen werden.

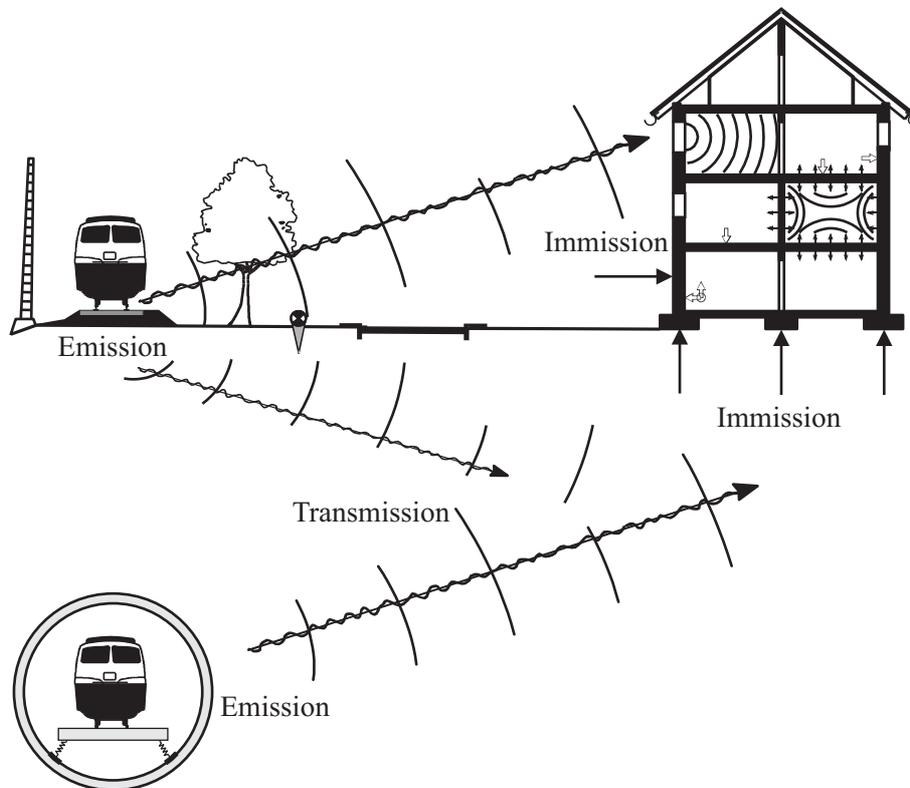


Abbildung 1.1: Emission, Transmission sowie Immission von zuginduziertem primärem und sekundärem Luftschall sowie von Körperschall

Zur Beurteilung der Auswirkungen von unterirdischem Zugverkehr sind folglich baodynamische Untersuchungen erforderlich, welche von der Emission der Erschütterungen in die Tragstruktur im Tunnel über die Transmission dieser Erschütterungen durch den Boden bis hin zur Immission in benachbarte Gebäude belastbare Prognosen liefern.

Eines der Probleme bei der Planung und Ausführung unterirdischer Bahnstrecken ergibt sich dadurch, daß der Untergrund unter dem Straßenraum häufig bereits für die bestehenden Trassen verwendet wurde, wodurch vermehrt auch ungünstige Trassenführungen gewählt werden müssen. So kann z.B. ein Trassenverlauf in unmittelbarer Nachbarschaft zu historisch bedeutsamer Bausubstanz erforderlich sein. Dies hat zur Folge, daß in der Bauphase zur Vermeidung von Setzungen verschiedenste geotechnische Bauverfahren wie z.B. die Bodenvereisung eingesetzt werden müssen, während in der Betriebsphase die Anforderungen an den Erschütterungsschutz besonders streng sind. Ähnliches gilt z.B. für unterirdische Bahnstrecken in der Nähe von Produktionsstandorten von Unternehmen aus Hochtechnologie-Bereichen wie der Chipindustrie oder von Forschungseinrichtungen, wo erhöhte Anforderungen an den Erschütterungsschutz gestellt werden.

Da viele große Städte Untergrundbahnen betreiben, gehören besonders durch im Untergrund fahrende Züge erzeugte Erschütterungen im Boden zu den größten Problemen im Zusammenhang mit der Immission von Lärm und Erschütterungen in urbanen Gebieten. Bei der Planung von neuen Strecken sind die grundlegenden Zusammenhänge der Entstehung von Erschütterungen durch unterirdischen Zugverkehr von großer Wichtigkeit, da die größten Bedenken von Anwohnern gegenüber unterirdischen Zügen gewöhnlich mit erwarteten Erschütterungen und Körperschall sowie mit möglichen damit verbundenen Schäden an ihrem Eigentum zusammenhängen. Beide Effekte sind dabei stark von den Spektren der erzeugten Erschütterungen abhängig, welche wiederum Funktionen der Parameter des Zuges, des Fahrweges, des Tunnels sowie des Bodens sind.

Um die Mechanismen der Entstehung sowie der Fortpflanzung von Erschütterungen zu verstehen und die Wirksamkeit von erschütterungsmindernden Maßnahmen an der Strecke wie z.B. Unterschottermatten, elastischen Schwellenbesohlungen oder Masse-Feder-Systemen [HEMSWORTH 2000] beurteilen zu können, sind vielfältige Parameterstudien notwendig. Im Rahmen von Messungen an bestehenden Strecken können jedoch nur vorgegebene Konfigurationen der Parameter sowohl des Bodens als auch der Struktur erfaßt werden. Deshalb sind experimentelle Beurteilungen von erschütterungsmindernden Maßnahmen grundsätzlich nur schwierig möglich. Stattdessen benötigt man ein realistisches mechanisches Modell. So ist im Fall von Masse-Feder-Systemen vor allem eine genaue Kenntnis der Interaktion zwischen der elastisch gebetteten Fahrbahnplatte und dem im Halbraum eingebetteten Tunnel von Interesse. Die Untersuchung der Abstrahlung von Erschütterungen und Körperschall im elastisch-isotropen Halbraum infolge von bewegten Lasten in Tunnels mit beliebiger Querschnittsform besitzt folglich eine große Bedeutung für die Planung und den Bau von Untergrundbahnen im Hinblick auf die Auslegung und Dimensionierung erschütterungsmindernder Maßnahmen.

1.2 Berechnungsverfahren

An dieser Stelle soll eine Übersicht über die für dynamische Untersuchungen des elastisch isotropen Kontinuums etablierten Berechnungsverfahren mit ihren spezifischen Vor- und Nachteilen gegeben werden. Dies sind vor allem die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Randelementemethode (Boundary Element Method, BEM) und die Integraltransformationemethode (ITM) sowie auf Kombinationen von diesen Verfahren basierende hybride Methoden.

Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die FEM ist die für strukturdynamische Untersuchungen am häufigsten verwendete Methode. Die hohe Flexibilität, da sie für annähernd jede noch so komplizierte geometrische Situation angewandt werden kann, und der Umstand, daß die meisten Benutzer mit dieser Methode vertraut sind, machen sie attraktiv. Auf der anderen Seite weist sie jedoch auch Nachteile auf. So ist bereits für ein relativ eng begrenztes Gebiet die Anzahl der für ein dreidimensionales dynamisches Problem zu lösenden linearen Gleichungen verhältnismäßig groß. Außerdem vermögen die FEM-Gleichungen nicht unmittelbar zu zeigen, welche Phänomene für das vorliegende Problem charakteristisch sind. Darüber hinaus kann das FEM-Netz nicht ins Unendliche ausgedehnt werden; seine Größe hängt dabei von einer zulässigen Anzahl von Unbekannten und den notwendigen Abmessungen eines einzelnen Elementes ab. Die Elementabmessungen sind überdies

im Gegensatz zu einer statischen Berechnung im dynamischen Fall so zu wählen, daß die kleinste nicht vernachlässigbare Wellenlänge mit den gewählten Elementen noch erfaßt werden kann [ZIRWAS 1996, HALL 2000]. Es ist offensichtlich, daß man hierzu den Frequenzgehalt der Lösung hinreichend genau kennen muß.

Nach der Zeit, welche die Kompressionswelle als die Welle mit der größten Wellengeschwindigkeit c_p benötigt, um sich bis zur künstlichen Berandung des FEM-Gebietes fortzupflanzen und von dieser wieder zurückzukehren, treten fehlerhafte Reflexionen auf. Da grundsätzlich nur ein endliches Gebiet diskretisiert werden kann, sollte die Berandung des FEM-Netzes deshalb weit genug vom interessierenden Bereich entfernt sein.

Um diese Fehler, welche durch die Diskretisierung *unendlich* ausgedehnter Gebiete mittels eines FEM-Netz mit *endlichen* Abmessungen verursacht werden, zu minimieren oder gar zu vermeiden, sind in der Zwischenzeit eine beträchtliche Anzahl von Forschungsarbeiten entstanden. Eine Möglichkeit, um sicherzustellen, daß keine Wellen mit einer signifikanten Amplitude an dieser künstlichen Berandung reflektiert werden, besteht in der Einführung spezieller Randbedingungen, welche oft als „durchlässige Randbedingungen“ bezeichnet werden. Im allgemeinen lassen sich jedoch exakt durchlässige Randbedingungen für alle Wellenzahlen und damit Ausbreitungsrichtungen sowie für alle Frequenzen nicht finden. Es ist zwar möglich, diese Randbedingungen näherungsweise zu erfassen, dies setzt aber voraus, daß sich die künstliche Berandung im Fernfeld befindet, was wiederum die Größe des FEM-Netzes und damit die Komplexität des Problems erhöht.

Als Spezialfall der FEM sei an dieser Stelle die *Thin Layer Method* (TLM) genannt [WAAS 1972, KAUSEL 1994, KAUSEL et al. 1995]. Diese ermöglicht durch die Modellierung eines unendlich ausgedehnten Mediums mittels horizontal liegender dünner Schichten, welche nur in vertikaler Richtung unter Verwendung von Ansatzfunktionen diskretisiert werden, die Abbildung des Mediums ohne störende Ränder in horizontaler Richtung.

Für dreidimensionale Finite-Elemente-Berechnungen einer großen Struktur mit lokalen absorbierenden Randbedingungen übersteigt die Anzahl der benötigten Elemente in dem betrachteten, sehr weiten Frequenzbereich, rasch vertretbare Größenordnungen, weil sie die Verwendung sowohl eines ausgedehnten FEM-Netzes als auch relativ kleiner Elemente verlangen.

Randelementemethode (Boundary Element Method - BEM)

Die BEM hat sich in den letzten Jahren ebenfalls gut für Berechnungen elastischer Festkörper etabliert und ist prinzipiell auf Gebiete mit beliebigen Berandungen anwendbar. Im Vergleich zur FEM wird die Dimension des Problems um eins verringert, das lineare Gleichungssystem für die unbekanntten Spannungen und Verschiebungen an den Rändern ist im Vergleich zur FEM deutlich kleiner. Allerdings ist die zugehörige Matrix unsymmetrisch und weist keine Bandstruktur auf. Dadurch gestaltet sich die Lösung des algebraischen Gleichungssystems aufwendiger. Außerdem besitzen die Elemente des Gleichungssystems eine deutlich kompliziertere Form. Eine symmetrische Matrix läßt sich mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens erreichen, jedoch lediglich auf Kosten einer zusätzlichen Integration [MAIER et al. 1991, BONNET et al. 1998]. Gegenstand aktueller Untersuchungen ist es, durch die Einführung der Waveletmethode für die unbekanntten Randgrößen in der entsprechenden Matrix zu einer Bandstruktur zu gelangen [SCHMIDLIN und SCHWAB 2000].

Die BEM ist im allgemeinen sehr gut an die Berechnung unendlicher Medien angepaßt, da die Wellenabstrahlung ins Unendliche implizit berücksichtigt wird. Wendet man jedoch z.B. auf den Fall der geschichteten Halbebene ebene Greensche Funktionen für die Vollebene an, so ist neben der Diskretisierung der Oberfläche auch eine Diskretisierung der Schichtgrenzen erforderlich, welche auf einen endlichen Bereich beiderseits des betrachteten Systems beschränkt werden [BESKOS et al. 1986]. Aufgrund des bei der Diskretisierung solcher unendlicher Randflächen erforderlichen Abbruchs der Diskretisierung entsteht jedoch bei der klassischen BEM – wenn die Greenschen Funktionen für den Vollraum verwendet werden – auch ein Abschneidefehler. Wie Berechnungen gezeigt haben, ist dieser Fehler allerdings im Gebiet der Halbraumdynamik aufgrund der großen Entfernungen zwischen dem betrachteten Gebiet und den Quellen fehlerhafter Reflexionen infolge nicht korrekter Randwerte in der Nähe der Abbruchstelle nicht allzu schwerwiegend. Sollen derartige Abschneidefehler generell ausgeschlossen werden, so können entweder Greensche Funktionen für den (homogenen oder geschichteten) Halbraum – welche jedoch nur die Einführung horizontaler Schichtgrenzen erlauben – oder infinite Randelemente verwendet werden [FIRUZIAAN 2003]. Letztere beruhen auf Ortsansatzfunktionen, die mit zunehmender Entfernung abklingen [MANOLIS und BESKOS 1988]. Ein „truncation element“ haben Sheng et al. [SHENG et al. 2005a] entwickelt, welches den Abschneidefehler signifikant reduziert.

Greensche Funktionen liegen z.B. für den geschichteten Halbraum unter stationären und bewegten harmonischen Lasten [DE BARROS und LUCO 1994, SHENG 2001] und für einen homogenen, in horizontaler x -Richtung in den Wellenzahlraum transformierten Vollraum für stationäre [STAMOS und BESKOS 1996, TADEU und KAUSEL 2000] sowie für bewegte harmonische Lasten [SHENG et al. 2005a] vor.

Die Randelementemethode kann sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich angewandt werden. Im ersten Fall ist zusätzlich zur Diskretisierung der Ränder auch eine Diskretisierung bezüglich der Zeit notwendig. Im letzteren Fall sind die Ergebnisse – außer für eine harmonische oder einfache periodische Anregung – einer inversen Fourier- oder Laplace-Transformation zu unterwerfen. Die BEM im Frequenzbereich beschreiben z.B. Banerjee et. al. [BANERJEE et al. 1992].

In den letzten fünfundzwanzig Jahren sind umfangreiche Forschungsarbeiten zur Randelementemethode entstanden. Einen guten Überblick bis zum Jahre 1996 gibt Beskos [BESKOS 1987, BESKOS 1997]. Theorie und Anwendung sind ebenso in verschiedenen Büchern vorgestellt, z.B. Manolis und Beskos [MANOLIS und BESKOS 1988], Dominguez [DOMINGUEZ 1993], Antes [ANTES 1988] und Gaul [GAUL et al. 2003]. Eine Verallgemeinerung der Randelementemethode auf der Grundlage der Fouriertransformation findet man bei Duddeck [DUDDECK 2002].

Randelementemethoden können zur Lösung des vorliegenden Problems beitragen, da sie den Diskretisierungsaufwand reduzieren. So haben Stamos und Beskos [STAMOS und BESKOS 1996] für die seismische Untersuchung großer unterirdischer Strukturen im elastischen Halbraum eine 3D BEM-Formulierung verwendet. Im allgemeinen ist die BEM jedoch für dünne Strukturen wie z.B. eine Tunnelschale nicht optimal geeignet, da beide Oberflächen der Struktur diskretisiert werden müssen und die BEM dabei Probleme für dünne Bereiche aufweist.

Integraltransformationmethode

Die Integraltransformationmethode (ITM) hat sich neben der Finite-Elemente-Methode und der Randelementemethode als weitere Methode zur Beschreibung des elastischen isotropen Kontinu-

ums etabliert [GRUNDMANN et al. 1999]. Sie ist weniger bekannt als die vorgenannten Methoden und wird in der vorliegenden Arbeit angewandt, da sie verschiedene Vorteile zur Beschreibung unendlich ausgedehnter Medien, besonders unter der Einwirkung von bewegten Lasten, bietet. Bereits Lamb [LAMB 1904] hat das Problem des Halbraumes unter dynamischer Belastung mit Hilfe von Integraltransformationen gelöst.

Die ITM beruht darauf, daß sich die entkoppelten Wellengleichungen, bei welchen es sich um partielle Differentialgleichungen handelt, mit Hilfe einer dreifachen Fouriertransformation in den Wellenzahl-Frequenzraum in gewöhnliche Differentialgleichungen überführen lassen. Dieses Verfahren geht auf Wolf [WOLF 1985] sowie Grundmann und Müller [GRUNDMANN und MÜLLER 1988, MÜLLER 1989] bzw. für die Lösung in Zylinderkoordinaten auf Konrad [KONRAD 1985] zurück. Einen Überblick gibt Grundmann [GRUNDMANN 1999].

Läßt sich mit diesem Verfahren die Antwort infolge einer sowohl örtlichen als auch zeitlichen Impulslast – sowie für einige spezielle Lasten durch Multiplikation mit der transformierten Lastfunktion, welche ebenfalls analytisch vorliegt – noch analytisch bestimmen, so muß die Rücktransformation jedoch numerisch erfolgen. Lieb [LIEB 1997] diskutiert ausführlich verschiedene Rücktransformationmethoden wie z.B. die *Fast Fourier Transform* (FFT). Er entwickelt ein sehr effizientes, adaptives Verfahren für eine zweidimensionale Rücktransformation auf der Grundlage der Wavelettransformation, welches Lenz [LENZ 2003] für den dreidimensionalen Fall erweitert. Damit besitzt die ITM für geometrisch regelmäßige, unendliche Gebiete mit linear isotropem Material wie den elastischen Halbraum ein hohes Maß an Effizienz. Deshalb wird dieses Verfahren auch in der vorliegenden Arbeit zur Ermittlung der Impulsreaktionsfunktion des gekoppelten Systems *elastisch gebetteter Fahrweg - Tunnel - Halbraum* angewendet.

Einerseits ist es für dynamische Untersuchungen bei der Behandlung der Boden-Bauwerk-Interaktion von entscheidender Bedeutung, die geometrische Abstrahldämpfung in den unendlichen Bereich richtig zu erfassen, was die Verfahren BEM oder ITM implizit erfüllen. Andererseits muß es natürlich möglich sein, die mit dem Boden interagierende Struktur möglichst genau abbilden zu können. Hierzu ist eindeutig die FEM am besten geeignet. Um die wichtigsten Vorteile der jeweiligen Methoden bei gleichzeitiger Minimierung oder gar Beseitigung ihrer Nachteile zu bündeln, sind hybride Verfahren entwickelt worden, in welchen die BEM oder die ITM mit der FEM gekoppelt werden.

FEM-BEM Kopplung

Wie oben beschrieben, ist die FEM optimal zur Modellierung von Gebieten mit endlichen Abmessungen, die beliebige Geometrien, nichtlineare Materialeigenschaften, Anisotropie und Inhomogenitäten aufweisen dürfen, geeignet. Die BEM hingegen ist optimal an die Beschreibung unendlicher Gebiete angepaßt, da sie implizit die Abstrahlbedingung erfüllt. Diese Eigenschaften der FEM und der BEM legen für die Beschreibung von dynamischen Boden-Bauwerk Interaktionsproblemen eine Kombination dieser beiden Verfahren nahe. Da die BEM auf dem Superpositionsprinzip beruht und deshalb linear elastisches, isotropes Material für das zu modellierende Gebiet vorauszusetzen ist, lassen sich Lösungen für allgemeine Situationen wie z.B. nichtlineare Materialeigenschaften, Anisotropie und Inhomogenität durch eine FEM-BEM Kopplung finden [FIRUZIAAN 2003].

Zur Modellierung eines Tunnels im unendlichen Halbraum wurden deshalb alternativ zu reinen BEM-Beschreibungen zweidimensionale FEM-BEM Kopplungen angewandt [VON ESTORFF et al. 1991], wobei der Diskretisierungsaufwand auf das FEM-Gebiet des Tunnels und das Randelemente-Netz beschränkt ist. Benutzt man die Greenschen Funktionen für den geschichteten Halbraum als Alternative zu den Vollraumlösungen, so kann dieses Randelemente-Netz auf den Kopplungsrand zwischen dem Tunnel und dem Boden begrenzt werden. Zweidimensionale Modelle erzwingen jedoch starke Vereinfachungen, um eine dreidimensionale (bewegte) Last in eine gleichwertige Linienlast zu überführen und unterschätzen die Abstrahlungsdämpfung in den Boden.

Ein dreidimensionales FEM-BEM Modell zur Untersuchung eisenbahninduzierter Erschütterungen in Tunnels wurde von Andersen und Jones implementiert [ANDERSEN und JONES 2002]. Derartige Fragestellungen erfordern jedoch auch Berechnungen für höhere Frequenzen. Dies läßt dreidimensionale gekoppelte FEM-BEM Formulierungen aufgrund der großen Dimension der vollbesetzten BEM-Matrizen infolge der Kopplung aller Freiheitsgrade entlang des Randes zwischen Tunnel und Boden im Hinblick auf den Berechnungsaufwand sehr aufwendig werden. Für Parameterstudien im gesamten interessierenden Frequenzbereich sind diese Modelle daher unpraktisch. Dies war die Motivation für viele Arbeiten, in denen die Unendlichkeit oder die Periodizität des Systems *Oberbau - Tunnel - Boden* für Züge in Tunnels oder des Systems *Oberbau - Boden* für Züge auf der Halbraumoberfläche in Längsrichtung ausgenutzt wird.

Gemäß Stamos und Beskos [STAMOS und BESKOS 1996] hat sich jedoch die Verwendung der BEM sowohl für den Boden als auch für die Struktur für ein lineares Problem gegenüber einer hybriden FEM-BEM Kopplung als vorteilhafter erwiesen. Der Grund liegt in der genaueren Kopplung zweier Körper bei der reinen BEM. Außerdem sind in diesem Fall die unsymmetrischen Matrizen des Systems im allgemeinen kleiner als die einer hybriden FEM-BEM Kopplung.

FEM-ITM Kopplung

In ihrem ursprünglichen Konzept ist die ITM lediglich für regelmäßige Strukturen anwendbar, wie z.B. für den ungeschichteten oder den geschichteten Halbraum. Das Vorhandensein des Tunnels macht jedoch ihre direkte Anwendung unmöglich. Eine Tunnelstruktur mit ihren endlichen Abmessungen und ihrer beliebigen Querschnittsform verlangt in der Regel nach einer FEM-Beschreibung. Da die das mechanische Problem beschreibenden Gleichungen im Rahmen der ITM im bezüglich der Koordinaten in Längs- resp. Querrichtung $x \circ \bullet k_x$, $y \circ \bullet k_y$ sowie der Zeit $t \circ \bullet \omega$ dreifach fouriertransformierten Wellenzahl-Frequenzraum aufgestellt und gelöst werden, bietet sich die ITM-FEM Kopplung im Falle eines in Längsrichtung als konstant abbildbaren Querschnittes in besonderem Maße an. Ebenso läßt sich im Rahmen einer ITM-FEM Kopplung eine sich in Richtung der Tunnelachse bewegende Belastung sehr vorteilhaft in einem bewegten Koordinatensystem beschreiben. Die Berechnungen des gekoppelten Systems erfolgen dann im zweifach fouriertransformierten $x \circ \bullet k_x$, $t \circ \bullet \omega$ Raum. Dies erfordert die Verwendung von adäquaten Finiten Elementen im fouriertransformierten Raum (k_x, y, z, ω) . Dazu sind die Gleichungen, welche das FEM-Gebiet beschreiben, einer zweifachen Fouriertransformation vom Orts- in den Wellenzahlbereich $x \circ \bullet k_x$ und vom Zeit- in den Frequenzbereich $t \circ \bullet \omega$ zu unterwerfen, wobei x die Koordinate in Tunnellängsrichtung bezeichnet. Im transformierten Raum kann man nun, sofern die (y, z) -Ebene betrachtet wird, mit gewöhnlichen FEM Diskretisierungen arbeiten. Die zu verwendenden Finiten Elemente besitzen dabei wellenzahl- sowie

frequenzabhängige Eigenschaften.

Ein leistungsfähiges Verfahren unter Verwendung einer ITM-FEM Kopplung für den Fall einer zweidimensionalen Aushebung an der Oberfläche des elastischen Halbraumes hat Zirwas [ZIRWAS 1996] vorgestellt. Dieses ist von Grundmann und Dinkel [GRUNDMANN und DINKEL 2000] für den dreidimensionalen Fall eines in Längsrichtung unendlichen Damms mit gleichbleibendem Querschnitt auf dem Halbraum verallgemeinert worden. Das Verhalten des Damms wird dabei im (k_x, y, z, ω) -Raum durch ein FEM-Modell beschrieben, bei welchem Finite Elemente mit linearen Ansatzfunktionen für die z -Richtung verwendet werden. In der Querrichtung y werden Legendre-Polynome als Ansatzfunktionen eingeführt. Die Formulierung der Verträglichkeitsbedingungen für die Damm-Halbraum-Kontaktstelle $(k_x, y, z = 0, \omega)$ erfordert eine Ermittlung der Halbraumantwort für die Koordinaten y entlang der Kontaktstelle mit Hilfe einer Fourierrücktransformation. Rastandi [RASTANDI 2003] hat darauf aufbauend einen allgemeinen dreidimensionalen Fall betrachtet, bei welchem ein begrenztes Bodenvolumen im Bereich der Halbraumoberfläche mit der FEM diskretisiert wird.

1.3 Literaturüberblick Halbraum- und Tunneldynamik

In der Vergangenheit wurden einfache analytische Modelle, semianalytische Verfahren sowie numerische Modelle von unterschiedlicher Komplexität entwickelt, um die Erschütterungen bzw. den Körperschall infolge von auf der Halbraumoberfläche oder in Tunnels verkehrenden Zügen zu prognostizieren. Im folgenden wird ein Überblick über die Entwicklung und den Stand der entsprechenden Forschung gegeben. Den aktuellen Stand der Normung gibt dabei [ISO 14837-1 2005] wieder.

1.3.1 Literatur Halbraum

Für den Halbraum (ohne Hohlraum) unter dynamischer Belastung auf der Oberfläche sowie für die Interaktion des Halbraumes mit Gebäuden auf seiner Oberfläche wurde eine große Anzahl von Lösungen publiziert. Einen Überblick findet man bei Grundmann [GRUNDMANN 1999].

Viele Forschungsarbeiten sind im Zusammenhang mit den Erfahrungen der staatlichen schwedischen Bahngesellschaft (Banverket) mit ihrer im Jahr 1997 eröffneten Verbindung mit dem X-2000 Hochgeschwindigkeitszug entlang der Westküste zwischen Göteborg und Malmö entstanden. Kurz nach Inbetriebnahme der Verbindung wurden extrem starke Erschütterungen des Bahndamms, des umgebenden Bodens und der Oberleitungsmasten an verschiedenen Stellen mit weichen Böden (besonders bei Ledsgård) während Zugüberfahrten mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 200 km/h festgestellt. Die Ergebnisse eines umfangreichen Meßprogramms sind in [MADSHUS und KAYNIA 2000] beschrieben und mit Hilfe eines Rechenmodells untersucht worden.

Für Züge, welche auf der Oberfläche eines geschichteten Halbraumes verkehren, sind verschiedene Modelle entwickelt worden. Am einfachsten sind Verfahren zur Berechnung von Erschütterungen infolge von bewegten Achslasten. Besonders zu erwähnen sind in diesem Zusammenhang die grundlegenden Untersuchungen von Frýba [FRÝBA 1972]. In der Zwischenzeit sind jedoch viele weitere Arbeiten entstanden [KRYLOV 1995a, KRYLOV 1996,

MADSHUS und KAYNIA 2000, DEGRANDE und LOMBAERT 2001]. Sheng et al. koppeln ein unendliches geschichtetes Balkenmodell für den Fahrweg mit einem geschichteten Halbraum unter Verwendung der Haskell-Thomson-Übertragungsmatrizen für den Boden für den Fall bewegter statischer [SHENG et al. 1999a] wie bewegter dynamischer Achslasten [SHENG et al. 1999b, JONES et al. 2000a]. Ebenso sind Modelle entstanden, welche sowohl bewegte Achslasten als auch Unebenheiten von Rad- oder Schiene berücksichtigen [SHENG et al. 2003a]. Diese Modelle beruhen auf der Anwendung semianalytischer Verfahren im Wellenzahl-Frequenzbereich und gehen von einem gleichbleibenden Querschnitt der Struktur in Längsrichtung aus.

Ein anderes Modell für die dynamische Oberbau-Boden-Interaktion wurde von Andersen und Nielsen [ANDERSEN und NIELSEN 2003] vorgestellt, welche die 3D-BEM für die stationäre Antwort eines elastischen Mediums infolge einer bewegten Last in einem mitbewegten Koordinatensystem anwenden. Ekevid und Wiberg [EKEVID und WIBERG 2002] verwenden die *Scaled Boundary Finite Element Method* (SBFEM) und kombinieren die FEM und die Scaled Boundary Element Method [WOLF und SONG 1996, WOLF 2003]. Damit ermitteln sie die quasi-statische Antwort des gekoppelten Fahrweg-Boden Systems für einen Zug auf einem geraden Oberbau sowie für die spezielle Situation, wenn der Zug z.B. vor einem Tunnel durch einen Felsbereich einen Bereich mit abnehmender Dicke der Bodenschicht auf der ansteigenden Felsschicht erreicht [EKEVID et al. 2006].

In der Realität werden die dynamischen Achslasten durch parametrische Anregung aufgrund der diskreten Stützungen der Gleise durch Schwellen, transiente Anregung infolge von Schienenverbindungen und Radflachstellen und durch die Anregung durch Rad- und Schienenrauigkeiten sowie Unebenheiten des Fahrweges verursacht [HECKL et al. 1996]. Die Interaktion zwischen Zug und Fahrweg kann bei der Berechnung der dynamischen Achslasten nicht vernachlässigt werden, da besonders die sogenannte Rad-Schiene Resonanz (Resonanz der Radmassen gegenüber der Untergrundsteifigkeit, im Bereich von 30 – 100 Hz) wichtig ist.

Deshalb sind einige Modelle entstanden, welche auch die dynamische Interaktion zwischen Zug und Oberbau erfassen. Van den Broeck et al. [VAN DEN BROECK et al. 2002] untersuchen den Einfluß des Bodenmodells auf die Erschütterungsausbreitung infolge von Zugverkehr und auf die Rad-Schiene- sowie die Oberbau-Boden-Interaktionskräfte. Während ein großer Einfluß der Bodenschichtung auf die Freifelderschütterungen den Erwartungen entspricht, so ist es jedoch bemerkenswert, daß ein vergleichbar großer Einfluß auf die Interaktionskräfte besteht. Sheng et al. [SHENG et al. 2003a, SHENG et al. 2004] haben ebenso ein Fahrzeugmodell mit dem Fahrweg gekoppelt und zeigen, daß im Falle relativ kleiner Geschwindigkeiten des Zuges verglichen mit den Wellengeschwindigkeiten des Bodens der quasi-statische Beitrag zur Antwort im Freifeld gering ist und der dynamische Anteil der Achslasten die Antworten im Freifeld bestimmt.

Madshus und Kaynia [MADSHUS und KAYNIA 2000] modellieren den Fahrweg mit Hilfe von Balkenelementen und berechnen damit die Impedanz des gekoppelten Systems *Balken-Boden* unter Verwendung diskreter Greenscher Funktionen für einen horizontal geschichteten Halbraum [KAUSEL und ROËSSET 1981]. Auersch [AUERSCH 2005] hat ein Finite-Elemente-Modell für einen begrenzten Bereich des Fahrweges mit einem BEM Modell für den Boden gekoppelt. Mit diesem Modell hat er die Nachgiebigkeit des Fahrweges ermittelt, welche er anschließend zur Lösung des Fahrzeug-Fahrweg-Interaktionsproblems verwendet hat. Metrikine et al. [METRIKINE et al. 2005] untersuchen die Stabilität eines bewegten Drehgestells mit Hilfe eines Zweifreiheitsgradmodells, welches mit einem unendlich langen Balken für den Fahrweg und dem

Modell eines homogenen Halbraums für den Boden gekoppelt ist, wobei das von Metrikine und Popp [METRIKINE und POPP 1999] vorgestellte Verfahren zur Anwendung gelangt.

Wird in den vorgenannten Arbeiten für die Berechnung der Interaktionsspannungen zwischen Oberbaustruktur und Boden von einer konstanten Spannungsverteilung ausgegangen, so nähern Dinkel [DINKEL 2001] sowie Grundmann und Lenz [GRUNDMANN und LENZ 2003] für die Untersuchung der Interaktion einer Oberbauplatte mit einem sich darüber bewegenden Fahrzeug die reale Verteilung der Interaktionsspannungen durch Legendrepolynome an. Dabei handelt es sich um globale Ansatzfunktionen, welche über die gesamte Breite der Kontaktfläche definiert sind. Eine Erhöhung der Anzahl der Ansatzfunktionen führt zur Verwendung von Polynomen höherer Ordnung, was in Anlehnung an die Netzverfeinerung bei der FEM als *p-Methode* bezeichnet werden kann.

Als Erweiterung dieser Modelle für die Vertikaldynamik hat Bošković [BOŠKOVIĆ 2007] den Einfluß der Quer- und Längsverschiebungsbehinderung durch den unendlich langen, in Quer- richtung starren Balken auf der Halbraumoberfläche auf die Vertikalkomponente der Halbraum- verschiebung untersucht. Dabei verwendet er ebenso Legendrepolynome zur Beschreibung der Interaktionsspannungen.

François et al. [FRANÇOIS et al. 2005] haben die Leistungsfähigkeit verschiedener Arten von Ansatzfunktionen (konstant, Legendrepolynome oder Tschebyschewsche Polynome höherer Ordnung) für die Spannungen an der Kontaktstelle zwischen einem als Balken modellierten Fahrweg und dem Untergrund in Bezug auf die Genauigkeit sowie auf den Berechnungsaufwand untersucht. Diese Ansatzfunktionen werden dann für die Diskretisierung der Randintegralgleichungen verwendet, welche im Rahmen der BEM die Interaktion zwischen einer in Längsrichtung in- varianten Struktur und einem elastischen, geschichteten Halbraum beschreiben. Aufgrund des Vorhandenseins der Singularität führt die Verwendung konstanter Ansatzfunktionen mit kompaktem Träger – jede Ansatzfunktion ist nur in einem einzelnen Element ungleich Null – zu einem Überschätzen der Spannungen im Bereich der Ecken und zu einem Unterschätzen der Spannungen in den übrigen Elementen. Für Berechnungen im Bereich höherer Frequenzen – die Netzgröße wird vom Frequenzgehalt der Belastung bzw. der kleinsten Wellenlänge im Boden bestimmt – ist folglich eine große Zahl von konstanten Ansatzfunktionen und damit Elementen für eine ausreichend genaue Berechnung notwendig, was in Anlehnung an die FEM als *h-Methode* bezeichnet werden kann. Im Falle globaler Ansatzfunktionen haben sich die Tschebyschewschen Polynome als den Legendrepolynomen überlegen erwiesen, da sie an den Ecken $\xi = \frac{x}{l} = \pm 1$ die Singularitäten aufweisen, welche auch im statischen Fall eines starren Streifens auf der Halbraumoberfläche auftreten. Lombaert et al. [Lombaert et al. 2006a] verwenden dieses Modell zur Untersuchung der Wirksamkeit von Unterschottermatten zur Körperschallisolation.

Gegenstand einer aktuellen Arbeit von Steenbergen und Metrikine [STEENBERGEN und METRIKINE 2007] ist die Untersuchung des Einflusses der Beschreibung des Oberbau-Boden-Kontaktes auf die dynamische Steifigkeit des Halbraums unter dem Balken sowie auf die stationäre Antwort des Oberbaus und des Bodens infolge von bewegten statischen oder bewegten harmonischen Lasten. Drei Fälle werden betrachtet, eine gleichmäßige Spannungsverteilung mit Einhaltung der Kontinuität nur in Balkenmitte einerseits sowie der Verschiebung in Balkenmitte und der durchschnittlichen Verschiebung des Halbraumes unter dem Balken andererseits und der Fall, daß die Verschiebungen unter dem Balken konstant sind.

1.3.2 Literatur Tunnel

Obwohl eine große Anzahl von experimentellen Untersuchungen der von Untergrundbahnen verursachten Erschütterungen durchgeführt wurde, hat es jedoch nur wenige theoretische Arbeiten gegeben, die auf einer analytischen Lösung der entsprechenden Gleichungen beruhen. Vielleicht die früheste Veröffentlichung eines analytischen Lösungsansatzes für das Problem der Entstehung von Erschütterungen durch im Untergrund fahrende Züge war die Arbeit von Krylov [KRYLOV 1995b]. Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens war jedoch nur auf Erschütterungen in einem sehr niedrigen Frequenzbereich ($1-4\text{ Hz}$) beschränkt, da ein idealisiertes Modell zur Anwendung kam, in welchem der Einfluß des Tunneldurchmessers unter der Annahme vernachlässigt wurde, daß er sehr klein sei im Vergleich zu den charakteristischen Wellenlängen der erzeugten Erschütterungsspektren. Tatsächlich ist der Tunneldurchmesser jedoch nicht unbedingt sehr klein und hat i.d.R. einen erheblichen Einfluß auf die Entstehung sowie die Ausbreitung von Erschütterungen. Eine strenge Lösung für das vorliegende Problem läßt sich durch die Entwicklung der abgestrahlten Felder in Reihen von Zylinderfunktionen konstruieren. Wegen des dazu erforderlichen Rechenaufwandes stellen Lin und Krylov [LIN und KRYLOV 2000] jedoch einen näherungsweisen Ansatz auf der Grundlage des Reziprozitätsprinzips vor. Dabei ergibt sich die Greensche Funktion für eine auf der Tunnelsohle wirkende Punktlast aus zwei Anteilen: der eine Anteil ist unabhängig vom Tunneldurchmesser (und entspricht damit exakt der in [KRYLOV 1995b] verwendeten Lösung), der andere beinhaltet die Abhängigkeit der Lösung vom Tunneldurchmesser. Damit zeigt er, daß der vom Tunneldurchmesser unabhängige Teil der Lösung das Verhalten nur in einem sehr niedrigen Frequenzbereich von ca. $1-4\text{ Hz}$ wiederzugeben vermag und der Einfluß des Tunneldurchmessers mit zunehmender Frequenz erwartungsgemäß steigt.

Rücker und Said [RÜCKER und SAID 1994] verwenden ein 2D-Finite-Elemente-Modell für den ebenen Verformungszustand zur Lösung des dynamischen (Oberbau-)Tunnel-Boden-Interaktionsproblems, welches der unendlichen Ausdehnung des Bodens in vertikaler Richtung durch lokale, absorbierende Randbedingungen Rechnung trägt. Diese werden mit Hilfe von viskosen Dämpferelementen unterhalb des FEM-Gebietes modelliert. Um den Boden auch in horizontaler Richtung als unendlich ausgedehntes 3D Kontinuum abbilden zu können, werden die Bereiche seitlich des FEM-Gebietes mit Hilfe der TLM durch horizontal liegende dünne Schichten modelliert.

Hussein und Hunt [HUSSEIN und HUNT 2003, HUSSEIN und HUNT 2004] und Forrest und Hunt [FORREST und HUNT 2006b, FORREST und HUNT 2006a] stellen ein halbanalytisches Modell auf der Basis der Schalentheorie vor, welches die dreidimensionale dynamische Interaktion zwischen Oberbau, Tunnel und Boden sowie die Erschütterungsausbreitung im Boden abbildet. Bei diesem Verfahren werden der Boden und der Tunnel als viskoelastischer Vollraum mit einer unendlich langen kreiszylindrischen dünnen Tunnelschale nach der Theorie von Flügge [FLÜGGE 1957] abgebildet. Die Gleichgewichtsbedingungen werden im Wellenzahlen-Frequenzraum aufgestellt, wobei das Gesamtsystem als invariant in Längsrichtung angesehen wird. Durch das Fehlen der Halbraumoberfläche werden jedoch weder von ihr zurück zum Tunnel reflektierte Raumwellen noch die an ihr entstehenden Oberflächenwellen berücksichtigt. Dennoch kann dieses Verfahren zur Untersuchung verschiedener Fahrwegsysteme dienen, da zu diesem Zweck hauptsächlich die Antworten im Nahfeld des Tunnels von Bedeutung sind. So wird zwar auf Gebäude im Fernfeld mehr Energie von Oberflächenwellen als von Raumwellen – erstere

klingen weniger schnell ab – übertragen, aber auf die Antworten in der direkten Nähe des Tunnels besitzt die freie Oberfläche einen deutlich geringeren Einfluß. Dies trifft mit zunehmender Tiefe noch stärker zu. Hussein hat mit diesem Modell die Einfügedämmung eines Masse-Feder-Systems mit vier verschiedenen Lagerungen untersucht [HUSSEIN und HUNT 2003]. Ein solches analytisches Modell ist in Bezug auf die Rechenzeit zwar sehr effizient, aber nichtsdestoweniger ist seine Anwendbarkeit beschränkt, falls der Tunnel keinen kreisförmigen Querschnitt besitzt, falls er nicht sehr tief unter der Halbraumoberfläche liegt oder falls der Boden eine Schichtung aufweist.

Ein anderes Modell [METRIKINE und VROUWENVELDER 2000] setzt sich aus zwei zweidimensionalen viskoelastischen Schichten, welche den Boden oberhalb und unterhalb des Tunnels darstellen, und zwei identischen Balken zusammen, welche den Tunnel repräsentieren. Die Balken werden dabei durch kontinuierlich verteilte Federn verbunden. Dieses Modell kann zwar der Bewegung der anregenden Last sowie der Wellenausbreitung in Tunnellängsrichtung Rechnung tragen, die Wellenausbreitung in Querrichtung vermag es jedoch nicht zu berücksichtigen. Ein gekoppeltes zweidimensionales FEM-BEM Modell für die Erschütterungsausbreitung von Eisenbahntunnels haben Jones und Petyt entwickelt [JONES et al. 2000b, JONES et al. 2002].

All diese Modelle beinhalten jedoch Vereinfachungen, welche ihre Anwendbarkeit z.T. erheblich einschränken. So sind zweidimensionale Modelle nicht in der Lage, die Wellenausbreitung in der dritten Richtung abzubilden. Wird der Boden als Vollraum behandelt, so können Wellenreflexionen an der Halbraumoberfläche nicht berücksichtigt werden. Beinhalten sie Einschränkungen bezüglich des Tunnelquerschnitts, so sind sie nicht in der Lage, Effekte und Einflüsse verschiedener Tunnelkonstruktionen zu untersuchen. Das verwendete Modell muß nicht nur der Anforderung genügen, die Wellenausbreitung im Boden abbilden zu können. Vielmehr muß auch der Bewegung der Züge im Tunnel und der Wellenausbreitung in Tunnellängsrichtung Rechnung getragen werden. Letzteres ist wichtig, da die Tunnelstruktur wie ein „Wellenleiter“ in dieser Richtung wirkt. Deshalb benötigt man ein dreidimensionales Modell. Um beliebige Geometrien abbilden zu können, werden zur Berechnung von Erschütterungen von Tunnels häufig numerische Verfahren verwendet.

Ein reines 3D-FEM-Modell zur Berechnung der Erschütterungsausbreitung von Tunnels haben Gardien und Stuit [GARDIEN und STUIT 2003] vorgestellt. Ein dreidimensionales gekoppeltes FEM-BEM Modell haben [ANDERSEN und JONES 2002] entwickelt, welches jedoch einen sehr großen Berechnungsaufwand erfordert.

In vielen praktischen Situationen kann jedoch die Geometrie sowohl des Bodens als auch der Tunnelstruktur als in Längsrichtung invariant betrachtet werden (vgl. Abschnitt 1.3.1). Diese Annahme ist ebenso zutreffend für den Fahrweg (Schienen, Schottertragschicht, Bahndamm) wie für Bauteile zur Erschütterungsminderung, wie z.B. Schlitze oder „Wave Impeding Blocks“ [TAKEMIYA 2002]. Diese Invarianz kann man sich durch ein Vorgehen zunutze machen, in welchem das dreidimensionale Problem auf eine Folge von zweidimensionalen Modellen in der (y, z) -Ebene reduziert wird, welche von der Wellenzahl in Tunnellängsrichtung (x -Richtung) abhängen. Dieses Verfahren wird von Sheng et al. [SHENG et al. 2003b] als *Diskrete Wellenzahl-Methode* bezeichnet und wurde z.B. von Aubry et al. [AUBRY et al. 1994] empfohlen, wobei das Problem in eine Reihe von zweidimensionalen Modellen in Abhängigkeit von der Wellenzahl in Tunnellängsrichtung überführt wird. Dabei wird z.B. für jede diskrete Wellenzahl k_x in Längsrichtung der Tunnelquerschnitt mit Finiten Elementen (*Diskrete Wellenzahl-Finite-Elemente-Methode*) und

die Wellenausbreitung in den umgebenden Boden mit Hilfe der Randelementemethode (*Diskrete Wellenzahl-Randelementemethode*) abgebildet. Dieses Vorgehen wird als *Diskrete Wellenzahl FEM-BEM Methode* bezeichnet und von Sheng et al. angewandt [SHENG et al. 2005a]. Nach der Lösung der gekoppelten FEM-BEM Gleichungen für jede diskrete Wellenzahl k_x kann die Antwort im Originalraum mit Hilfe der Fourierreücktransformation ermittelt werden. Dabei liegt die Einfachheit dieses Vorgehens darin begründet, daß eine Diskretisierung lediglich für den Querschnitt des Systems *Tunnel-Boden* nötig ist, wodurch sich die Gesamtzahl der Freiheitsgrade signifikant gegenüber dem dreidimensionalen Modell reduziert. In der Literatur werden solche Modelle häufig als 2.5D-Modelle bezeichnet; es sei jedoch betont, daß sie das dreidimensionale Verhalten des Systems *Oberbau-Tunnel-Boden* komplett abbilden.

Vielleicht das früheste Beispiel für die Anwendung der *Wellenzahl-Methode* für die FEM ist im Zusammenhang mit nichtdeterministischen Bodenparametern von Grundmann und Waubke für den ebenen [GRUNDMANN und WAUBKE 1992] sowie den 3D Fall [GRUNDMANN und WAUBKE 1993] vorgestellt worden. Ähnlich früh wurde sie von Gavric angewendet [GAVRIC 1994, GAVRIC 1995], um die Dispersionskurven von dünnwandigen Wellenleitern und freien Schienen zu ermitteln.

Sheng et al. [SHENG et al. 2003b] haben auf der Basis der von Luco und de Barros [LUCO und DE BARROS 1993, LUCO und DE BARROS 1994] angewendeten *Methode der virtuellen Kräfte* ein Prognosemodell für Bodenerschütterungen infolge von stationären oder bewegten harmonischen Lasten entwickelt, welche in einem kreiszylindrischen Tunnel mit oder ohne Tunnelschale im geschichteten Boden angreifen. Auf der Basis von mitbewegten Greenschen Funktionen einerseits für einen geschichteten Halbraum, andererseits für einen radial geschichteten Zylinder von unendlicher Länge, werden Randintegralgleichungen lediglich entlang des Kontaktbereiches zwischen Tunnel und Boden formuliert. Anstatt einer FEM-BEM Kopplung verwenden die Autoren dabei die *Diskrete Wellenzahl-Virtuelle Kräfte Methode*. Dabei werden im Gegensatz zur FEM-BEM Kopplung die Verschiebungen und Spannungen entlang des Randes zur Überführung der Randintegralgleichungen in ein System von algebraischen Gleichungen nicht durch Polynome interpoliert, sondern in Fourierreihen entwickelt. Luco und de Barros benötigen allerdings – wie für gewöhnliche Randintegralgleichungen in der Elastodynamik – nicht nur die Greenschen Funktionen für die Verschiebungen, sondern auch diejenigen für die Spannungen. Sheng et al. genügen jedoch durch die Behandlung des innenliegenden Gebiets (eines Zylinders von unendlicher Länge) als Substruktur lediglich die Greenschen Funktionen für die Verschiebungen der einzelnen Substrukturen. Aufgrund des zur Ermittlung der Greenschen Funktionen für den geschichteten Halbraum nötigen Zeitaufwandes hat sich jedoch die in Sheng et al. [SHENG et al. 2005a] vorgestellte *Diskrete Wellenzahl FEM-BEM Methode* als effizienter gegenüber der *Diskrete Wellenzahl-Virtuelle Kräfte Methode* erwiesen.

Im Zusammenhang mit seismischen Berechnungen von unendlich langen Spundwänden konnten große Fortschritte in der Lösung dynamischer Boden-Struktur-Interaktionsprobleme periodischer Bereiche durch die Verwendung von gekoppelten periodischen FEM-BEM Formulierungen erreicht werden [CLOUTEAU et al. 2000]. Im Rahmen des EU-Projektes CONVURT (CONtrol of Vibrations from UndergrounD Rail Traffic) wurde dieses Vorgehen angewandt, um ein modulares numerisches Modell zur Prognose von Erschütterungen infolge der Anregung durch Untergrundbahnen für neue und existierende Strecken zu entwickeln [CLOUTEAU et al. 2005].

Degrande et al. [DEGRANDE et al. 2006] konzentrieren sich auf das dreidimensionale dynami-

sche Interaktionsproblem *Oberbau-Tunnel-Boden*, welches unter Verwendung einer Substrukturformulierung mit Hilfe der FEM für den Tunnel und der BEM für den Boden gelöst wird. Die Periodizität des Tunnels und des Bodens wird durch die Anwendung der *Floquet-Transformation* ausgenutzt, wodurch die Diskretisierung auf eine einzelne begrenzte Referenzzelle des Tunnels beschränkt werden kann. Bei diesem Verfahren kann man auf die bestehende 3D BEM-Technologie für geschichtete Medien zurückgreifen, da die Integrationskerne der periodischen Greenschen Funktionen die gleichen Singularitäten wie diejenigen der 3D Greenschen Funktionen aufweisen [CLOUTEAU et al. 2000]. Dies ist ein bedeutender Vorteil gegenüber den sogenannten 2.5D FEM-BEM Verfahren, welche auf der Annahme eines translationsinvarianten Modells beruhen und die wiederholte Ermittlung aller Singularitäten nach der Fouriertransformation entlang der Tunnelachse erfordern, ausgenommen für Strecken auf der Oberfläche, bei denen die singulären Integrationskerne für die Spannungen verschwinden [AUBRY et al. 1994]. Dabei wird zur Ankopplung eines Masse-Feder-Systems zur Körperschallisolation die Craig-Bampton Substrukturmethode [CRAIG und BAMPION 1968] verwendet.

Um dieses Verfahren jedoch auf bewegte Lasten anwenden zu können, werden die Antworten für eine harmonische Last an verschiedenen Stellen entlang der Längsachse in der Referenzzelle resp. die Übertragungsfunktionen benötigt. Dieses Vorgehen wurde allgemein in [CLOUTEAU et al. 2001] gezeigt und zur Ermittlung der Antworten sowohl für invariante [LOMBAERT et al. 2006b, LOMBAERT et al. 2006a] als auch für periodische [SHENG et al. 2005b] Fahrwege auf der Halbraumoberfläche, jedoch noch nicht auf das Problem periodischer Tunnel-Boden Systeme angewandt.

In [GRUNDMANN und MÜLLER 2005] haben Grundmann und Müller die Erschütterungen eines Tunnels im Vollraum mit Hilfe von drei verschiedenen Vorgehensweisen ermittelt. Eine dünne Tunnelschale wurde sowohl mit der Vollraumlösung für den radial geschichteten, unendlich langen Zylinder als dünne Schicht, als auch als dünne Schale gemäß der Flüggeschen Theorie [FLÜGGE 1957] sowie mit Finiten Elementen modelliert. In [MÜLLER und GRUNDMANN 2006] werden mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren Übertragungsfunktionen zwischen elastisch gelagerten Platten in Tunnels und Erschütterungen an der Halbraumoberfläche numerisch ermittelt.

1.4 Zielsetzung und Vorgehen

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines effizienten Simulationsmodells zur Prognose der Erschütterungsausbreitung infolge von in Tunnels verkehrenden Zügen. Dieses muß dazu in der Lage sein, das gesamte gekoppelte Fahrzeug-Fahrweg-Tunnel-Boden Interaktionsproblem abzubilden.

Das entwickelte Modell basiert auf der Integraltransformationsmethode. Es handelt sich jedoch um ein hybrides Modell, da es die ITM mit der FEM koppelt. Dazu wird das auf der Basis der ITM beschriebene System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* entlang seiner zylindrischen Berandung mit einem innenliegenden FEM-Gebiet gekoppelt.

Zur Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* unter dynamischer Belastung werden in der vorliegenden Arbeit die Lösungen für den Halbraum (homogen oder geschichtet) und für den Vollraum mit einem unendlich langen zylindrischen Hohlraum überlagert.

Dabei ist es sinnvoll, den Fall des unendlichen elastisch isotropen Kontinuums in Polarkoordinaten zu beschreiben, wobei der Koordinatenursprung in der Mitte des zylindrischen Hohlraumes liegt. Eine allgemeine Form der Lösung erhält man, wenn man eine Fourierreihenentwicklung zur Beschreibung der Veränderlichkeit der Zustandsgrößen in Umfangsrichtung einführt. Dies führt zu einer Beschreibung des Verhaltens in Radialrichtung durch Zylinderfunktionen, deren spezifische Form von der Scher- resp. der Längswellengeschwindigkeit, der Frequenz ω , der Wellenzahl in Längsrichtung k_x sowie der Geschwindigkeit v der bewegten Last abhängt [KONRAD 1985].

Entlang der zylindrischen Berandung Γ_S des Hohlraumes wird schließlich der Kontakt mit dem innenliegenden FEM-Gebiet hergestellt. Damit ist das Verfahren nicht auf zylindrische Tunnelchalen – in diesem Fall stellt die Berandung Γ_S eine reale Berandung zum Boden dar – beschränkt, sondern es erlaubt die Modellierung beliebiger Tunnelquerschnitte und Einbauten. Dann handelt es sich bei der Berandung Γ_S nur um eine gedachte Berandung und mit dem innenliegenden FEM-Gebiet wird nicht nur die Tunnelstruktur selbst, sondern auch ein Teil des umgebenden Bodens zwischen dem Tunnel und der gedachten Oberfläche Γ_S modelliert.

In Kapitel 2 wird deshalb zuerst die Lösung für den (homogenen oder geschichteten) *Halbraum* unter dynamischer Belastung beschrieben. In Kapitel 3 folgt dann die Darstellung der entsprechenden Lösung für den *Vollraum* mit einem unendlich langen kreiszylindrischen Hohlraum. Aus diesen beiden Lösungen wird in Kapitel 4 die Lösung für das System *Halbraum mit unendlich langem, kreiszylindrischen Hohlraum* hergeleitet. Dies geschieht durch den Ansatz unbekannter Spannungszustände sowohl auf der Halbraumoberfläche als auch am Lochrand, die Beschreibung dieser Größen durch die Koeffizienten der numerischen Fourierintegrale auf der Oberfläche bzw. die Koeffizienten ihrer Fourierreihenglieder am Lochrand und das anschließende Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen auf der Halbraumoberfläche und entlang des Randes Γ_S .

Kapitel 5 behandelt die FEM im transformierten Raum (k_x, y, z, ω) . Beispielhaft wird die Elementsteifigkeitsmatrix für ein lineares Dreieckselement im Wellenzahl-Frequenzraum hergeleitet.

Die Interaktion des Tunnels mit einem Fahrzeug auf einem Masse-Feder-System wird in Kapitel 6 behandelt. Als Fahrzeug wird sowohl ein Einmassenschwinger als auch ein Drehgestellmodell mit anteiliger Wagenkastenmasse verwendet. Für den besonderen Fall, daß das Fahrzeug nichtlineare Eigenschaften besitzt – im gezeigten Fall wird beispielhaft eine Primärfederung mit nichtlinearer Federcharakteristik verwendet –, muß die Interaktionsberechnung im Zeitbereich erfolgen. Dazu wird mit dem entwickelten Verfahren die Systemübertragungsfunktion $H(k_x, \omega')$ und damit durch eine zweidimensionale Fourierrücktransformation die Impulsreaktionsfunktion $h(\bar{x}, t)$ ermittelt. Diese beschreibt vollständig das Verhalten des gesamten gekoppelten Systems [GRUNDMANN und LENZ 2003]. Dabei werden die bei der Kopplung von sich relativ zueinander in Bewegung befindenden Systemen im Zusammenhang mit den sogenannten *Retardierte Differentiell-Algebraischen Gleichungen* beim Zeitschrittalgorithmus auftretenden Probleme und deren Lösung aufgezeigt [GRUNDMANN et al. 2002, LUTZENBERGER 2003, LUTZENBERGER 2006].

Einige Vergleichs- sowie Anwendungsbeispiele werden in Kapitel 7 gezeigt.

In Kapitel 8 folgt schlußendlich eine kurze Zusammenfassung sowie ein Ausblick auf interessante Fragestellungen, welche eine Grundlage für weitergehende Untersuchungen darstellen können.

Kapitel 2

Der Halbraum unter dynamischer Belastung

Den folgenden Betrachtungen liegt der linear-elastische, homogene und isotrope Halbraum zugrunde. Wenngleich diese Voraussetzungen bei realen Problemen in vielerlei Hinsicht nicht als erfüllt angesehen werden können, so haben sie dennoch ihre Berechtigung. So können nichtlineare Effekte für die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen wegen der auftretenden kleinen Formänderungen im allgemeinen unberücksichtigt bleiben. Soll ein inhomogenes, anisotropes Materialverhalten einbezogen werden, so ist eine zuverlässige Quantifizierung der Bodenparameter ohnehin kaum möglich, da diese in der Regel stark streuen. Hier kann die von Grundmann et al. [GRUNDMANN et al. 2001, GRUNDMANN et al. 2003] vorgestellte Modellierung mit der Stochastischen Finite-Elemente-Methode (SFEM) Abhilfe schaffen, welche die Berücksichtigung stochastischer Materialparameter erlaubt. Dabei werden z.B. in vertikaler Richtung Ansatzfunktionen auf der Basis einer Karhunen-Loeve-Zerlegung verwendet, während in den beiden horizontalen Richtungen eine Beschreibung auf der Basis der ITM erfolgt. Die entsprechenden SFEM-Gleichungen werden dann mit Hilfe der Entwicklung in ein polynomies Chaos gelöst. Trotz des hierzu erforderlichen hohen Aufwandes ist dieses Vorgehen gegenüber einer Monte-Carlo-Simulation vorteilhaft. Eine Möglichkeit der Erfassung des Halbraums als ein aus den Phasen Feststoff und Wasser bestehendes Medium stellt die Theorie Poröser Medien (TPM) dar [BOŠKOVIĆ 2007].

2.1 Grundlegende Beziehungen der Elastizitätstheorie

Zu den Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie gehört das Gleichgewicht des Kontinuums:

$$\sigma^{ij}|_j + Q^i = 0. \quad (2.1)$$

Hierin ist σ^{ij} der Cauchysche Spannungstensor und Q^i sind die Volumenkräfte.

Das Werkstoffgesetz für linear-elastisches, homogenes und isotropes Material liefert den folgenden Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor σ^{ij} und dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor ϵ^{ij} :

$$\sigma^{ij} = 2\mu\epsilon^{ij} + \lambda\epsilon_m^m g^{ij}. \quad (2.2)$$

Hierin ist g^{ij} der Metriktensor; λ und μ sind die Laméschen Konstanten, welche man aus dem Schubmodul G bzw. dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl (Poissonzahl) ν erhält.

$$\begin{aligned}\mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Schlußendlich lauten die kinematischen Beziehungen, gegeben durch den linearisierten Verzerrungstensor, d.h. unter Vernachlässigung der gemischten Glieder für den Fall kleiner Verformungen:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|i). \quad (2.4)$$

Setzt man die kinematischen Beziehungen (2.4) in das Stoffgesetz (2.2) ein und führt die erhaltenen Beziehungen wiederum in die Gleichgewichtsbedingung (2.1) ein, so erhält man die Naviersche Gleichung, welche die grundlegende Gleichung zur Beschreibung des homogenen, isotropen Kontinuums in Abhängigkeit von den Verschiebungen u^i in der Elastostatik ist.

$$\mu u^i|_j^j + (\lambda + \mu)u^j|_j^i + Q^i = 0 \quad (2.5)$$

Führt man in das Gleichgewicht (2.1) zusätzlich die D'Alembertschen Trägheitskräfte ein, so geht die Naviersche Gleichung in die Lamésche Gleichung über, die Grundgleichung der Elastodynamik. Unter der Voraussetzung, daß die Belastung immer an einer Schichtoberfläche angreift, können im folgenden die Volumenkräfte Q^i – als solche werden innerhalb des Kontinuums angreifende Lasten bezeichnet – vernachlässigt werden. Damit lautet die Lamésche Gleichung

$$\mu u^i|_j^j + (\lambda + \mu)u^j|_j^i - \rho \ddot{u}^i = 0, \quad (2.6)$$

wobei ρ die Materialdichte ist.

2.1.1 Berücksichtigung der Materialdämpfung

Um die innere Reibung des Bodens zu überwinden, wird ein Teil der Energie einer Welle im Boden während ihrer Ausbreitung in Wärme umgesetzt. Bei diesem Effekt handelt es sich um die sogenannte *Materialdämpfung*. Zu ihrer Berücksichtigung gibt es mehrere Dämpfungsmodelle. Die häufig verwendete viskose Dämpfung besitzt den Nachteil, daß der Energieverlust pro Zyklus für eine feste Amplitude frequenzabhängig ist, was im Widerspruch zu umfangreichen Meßergebnissen steht [CLOUGH und PENZIEN 1993]. Diese Frequenzabhängigkeit wird durch den Ansatz einer hysteretischen Dämpfung anstatt der viskosen Dämpfung beseitigt. Betrachtet man einen Einmassenschwinger, so kann dessen hysteretische Dämpfungskraft im Fall einer harmonischen Anregung durch

$$f_D(t) = i\zeta k' w(t) \quad (2.7)$$

beschrieben werden, wobei ζ der hysteretische Dämpfungsfaktor ist, welcher die Dämpfungskraft $f_D(t)$ in Abhängigkeit von der Federkonstante k' beschreibt. Damit läßt sich im Falle einer harmonischen Anregung der Anteil der Feder sowie des Dämpfers durch eine komplexe Steifigkeit k berücksichtigen.

$$k = k'(1 + i\zeta) \quad (2.8)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung des Einmassenschwingers lautet damit:

$$m\ddot{w}(t) + kw(t) = p_0 e^{i\omega t}. \quad (2.9)$$

In [CLOUGH und PENZIEN 1993] ist gezeigt, daß die hysteretische Dämpfungszahl ζ in folgendem Verhältnis zu der viskosen Dämpfungszahl ξ steht, welche dem Lehrschen Dämpfungsmaß D entspricht:

$$\zeta = 2\xi\eta = 2D\eta. \quad (2.10)$$

In diesem Zusammenhang besteht jedoch wieder eine Frequenzabhängigkeit durch das Frequenzverhältnis η . In der Regel legt man die hysteretische Dämpfungszahl ζ im Resonanzfall $\eta = 1$ fest, wodurch die Frequenzabhängigkeit beseitigt wird.

$$\zeta = 2\xi = 2D \quad (2.11)$$

Auf das vorliegende Problem angewandt, ergibt sich die Einführung eines komplexen Elastizitätsmoduls zur Berücksichtigung der zusätzlich zur geometrischen Abstrahldämpfung vorhandenen Materialdämpfung:

$$E = E'(1 + i \operatorname{sign}(\omega) \zeta). \quad (2.12)$$

Bezeichnet man hierin den Dämpfungsmodul mit E''

$$E = E' + i \operatorname{sign}(\omega) \zeta E' = E' + i \operatorname{sign}(\omega) E'', \quad (2.13)$$

so läßt sich die hysteretische Dämpfungszahl ζ , welche häufig als Verlustfaktor bezeichnet wird, als das Verhältnis zwischen dem Dämpfungsmodul E'' und dem Elastizitätsmodul E' definieren [CREMER und HECKL 1996]:

$$\zeta = \frac{E''}{E'}. \quad (2.14)$$

2.2 Lösung mittels Helmholtzschem Satz

Die Lamésche Gleichung der Elastodynamik – hier in Indexschreibweise gegeben – beschreibt drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses gekoppelten Gleichungssystems besteht darin, die gekoppelten Gleichungen direkt mit einem Exponentialansatz zu lösen (vgl. z.B. [LENZ 2003]):

$$\hat{u}_x = A_x e^{\beta z} \quad \hat{u}_y = A_y e^{\beta z} \quad \hat{u}_z = A_z e^{\beta z} \quad (2.15)$$

Eine weitere, sehr elegante Möglichkeit, ist die Anwendung des Helmholtzschen Satzes (vgl. z.B. [MÜLLER 1989]). Dieser erlaubt die Definition des Verschiebungsfeldes mit Hilfe von neuen Feldern, für welche sich entkoppelte Differentialgleichungen formulieren lassen. Er besagt, daß ein hinreichend stetiges Vektorfeld in ein rotationsfreies Feld und ein quellenfreies Feld, dessen Divergenz verschwindet, zerlegt werden kann. Wendet man diese Zerlegung auf das Vektorfeld der Verschiebungen u^i an, so kann dieses durch die Superposition des wirbelfreien Anteiles als dem Gradienten des skalaren Feldes Φ und des quellenfreien Anteiles als der Rotation des Vektorfeldes Ψ_k beschrieben werden.

$$u^i = \Phi|{}^i + \Psi_k|_j \epsilon^{ijk} \quad (2.16)$$

Drückt man nun die Verschiebungen u^i in (2.6) durch diese Überlagerung aus, so erhält man aus den drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen vier entkoppelte partielle Differentialgleichungen.

$$\Phi|_j^j - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.17)$$

$$\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (2.18)$$

Hierbei kann eines der Potentiale Ψ_i zu null gesetzt werden (ein Beweis der Vollständigkeit dieses Ansatzes ist in [LONG 1967] erbracht worden). Damit handelt es sich bei diesen Gleichungen um eine Wellengleichung für das skalare Potential Φ sowie um zwei Wellengleichungen für das vektorielle Potential Ψ_i mit den Wellengeschwindigkeiten c_p und c_s .

$$\begin{aligned} c_p^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ c_s^2 &= \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Gleichung (2.17) beschreibt Kompressionswellen oder wirbelfreie Wellen, welche Volumenänderungen bewirken und sich mit der Wellengeschwindigkeit c_p ausbreiten. Bei den durch Gleichung (2.18) beschriebenen Wellen handelt es sich hingegen um Scherwellen, welche Gestaltänderungen hervorrufen und sich mit der Wellengeschwindigkeit c_s ausbreiten.

Da im kartesischen Koordinatensystem die Christoffelsymbole verschwinden, entkoppeln sich hier die in (2.18) angegebenen Wellengleichungen für das vektorielle Potential Ψ_i . Die Wellengleichungen lauten in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{1}{c_p^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} \frac{1}{c_s^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3 Fouriertransformation der Bewegungsgleichungen

Wie eingangs erwähnt, läßt sich der gegebenen Fragestellung mit verschiedenen Methoden begegnen. In der vorliegenden Arbeit wird die Integraltransformationsmethode (ITM) zur Lösung der Aufgabenstellung verwendet. Diese beruht auf der mehrdimensionalen Anwendung der Fourier-Transformation. Der Formelapparat dieses Transformationsalgorithmus kann Anhang A entnommen werden.

Mit der Fouriertransformation läßt sich ein Differentialoperator im Originalraum in einen algebraischen Operator im transformierten Raum überführen. Auf das Problem des Halbraums unter dynamischer Belastung findet das Verfahren insofern Anwendung, als das erhaltene System von vier entkoppelten *partiellen* Differentialgleichungen sowohl bezüglich der beiden Ortskoordinaten $x \circ \bullet k_x$, $y \circ \bullet k_y$ vom Orts- in den Wellenzahlenraum als auch bezüglich der Zeit $t \circ \bullet \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich transformiert wird. Man erhält ein System von vier entkoppelten *gewöhnlichen* Differentialgleichungen. Die Ortskoordinate z bleibt bei diesem Vorgehen untransformiert; dies erlaubt das Einführen von Randbedingungen in z -Richtung, wie z.B. die Einführung der freien Oberfläche.

2.3.1 Lösung der homogenen Laméschen Gleichung

Unterwirft man nun die in (2.17) und (2.18) angegebenen Wellengleichungen einer dreifachen Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x, y \circ \bullet k_y, t \circ \bullet \omega$), so erhält man das folgende System entkoppelter *gewöhnlicher* Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (-k_x^2 - k_y^2 + k_p^2) \hat{\Phi} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} &= 0 \\ (-k_x^2 - k_y^2 + k_s^2) \hat{\Psi}_i + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_i}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei k_p und k_s die Kompressions- respektive die Scherwellenzahl darstellen:

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\omega}{c_p} \\ k_s &= \frac{\omega}{c_s}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für das skalare Potential $\hat{\Phi}$ sowie für das vektorielle Potential $\hat{\Psi}_i$ in diesem System gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.21) lassen sich die folgenden Exponentialansätze für die Veränderlichkeit in z -Richtung finden

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} \\ \hat{\Psi}_i &= B_{i1} e^{\lambda_2 z} + B_{i2} e^{-\lambda_2 z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_p^2 \\ \lambda_2^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_s^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die hierin enthaltenen unbekanntenen Koeffizienten A_j und B_{ij} können mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen auf der Halbraumoberfläche bzw. an den Schichtgrenzen im Falle des geschichteten Halbraums bestimmt werden. Damit erhält man den analytischen Verlauf der Potentiale $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}_i$ und daraus die Verschiebungen u_i im transformierten Raum.

2.3.2 Spannungen und Verschiebungen in kartesischen Koordinaten im fouriertransformierten Raum

Unter Verwendung kartesischer Koordinaten vereinfacht sich mit $\Psi_z = 0$ gemäß Abschnitt 2.2 der Helmholtzsche Ansatz für das Verschiebungsfeld nach Gleichung (2.16) zu:

$$\begin{aligned} u_x &= \Phi_{,x} - \Psi_{y,z} \\ u_y &= \Phi_{,y} - \Psi_{x,z} \\ u_z &= \Phi_{,z} - \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nach der dreidimensionalen Fouriertransformation vom Originalraum (x, y, z, t) in den Wellenzahlen-Frequenzraum (k_x, k_y, z, ω) erhält man die entsprechenden Verschiebungen im transformierten Raum:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x &= ik_x \hat{\Phi} - \hat{\Psi}_{y,z} \\ \hat{u}_y &= ik_y \hat{\Phi} - \hat{\Psi}_{x,z} \\ \hat{u}_z &= \hat{\Phi}_{,z} - ik_y \hat{\Psi}_x + ik_x \hat{\Psi}_y \end{aligned} \quad (2.26)$$

Verwendet man nun die Lösungen (2.23) für die fouriertransformierten Helmholtzschen Potentiale, so lassen sich die Verschiebungen im fouriertransformierten Raum (2.26) folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{\lambda_1 z} \\ A_2 e^{-\lambda_1 z} \\ B_{x1} e^{\lambda_2 z} \\ B_{x2} e^{-\lambda_2 z} \\ B_{y1} e^{\lambda_2 z} \\ B_{y2} e^{-\lambda_2 z} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Die zugehörigen Spannungen ergeben sich gemäß den in (2.2) und (2.4) angegebenen Gesetzen der Festigkeitslehre zu

$$\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & 0 & 0 & -2ik_x \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 \\ -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) & 2ik_y \lambda_2 & -2ik_y \lambda_2 & 0 & 0 \\ (2k_r^2 - k_s^2) & (2k_r^2 - k_s^2) & -2ik_y \lambda_2 & 2ik_y \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 & -2ik_x \lambda_2 \\ -2k_x k_y & -2k_x k_y & ik_x \lambda_2 & -ik_x \lambda_2 & -ik_y \lambda_2 & ik_y \lambda_2 \\ 2ik_y \lambda_1 & -2ik_y \lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y & -k_x k_y \\ 2ik_x \lambda_1 & -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \end{bmatrix} \mathbf{c} \quad (2.28)$$

mit

$$k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.29)$$

und \mathbf{c} dem Vektor der unbekanntenen Koeffizienten nach Gleichung (2.27).

Um das Auftreten von numerischen Instabilitäten aufgrund von zu großen Argumenten der Exponentialfunktion in (2.23) zu vermeiden, werden abklingende anstelle von aufklingenden Exponenten verwendet [GRUNDMANN und MÜLLER 1988].

$$\begin{aligned} A_1 e^{\lambda_1 z} &= (A_1 e^{\lambda_1 h}) e^{-\lambda_1 h} e^{\lambda_1 z} = \bar{A}_1 e^{\lambda_1(z-h)} \\ B_{i1} e^{\lambda_2 z} &= (B_{i1} e^{\lambda_2 h}) e^{-\lambda_2 h} e^{\lambda_2 z} = \bar{B}_{i1} e^{\lambda_2(z-h)} \\ h &\geq z \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Größe h entspricht hier der Dicke einer einzelnen Bodenschicht. Gemäß (2.27) ergeben sich nun die Verschiebungen im fouriertransformierten Raum in folgender Form

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_1(z-h)} & ik_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-h)} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ ik_y e^{\lambda_1(z-h)} & ik_y e^{-\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h)} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -ik_y e^{\lambda_2(z-h)} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} & ik_x e^{\lambda_2(z-h)} & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \quad (2.31)$$

mit

$$\bar{\mathbf{c}} = [\bar{A}_1 \ A_2 \ \bar{B}_{x1} \ B_{x2} \ \bar{B}_{y1} \ B_{y2}]^T. \quad (2.32)$$

Die transformierten Spannungen ergeben sich analog aus Gleichung (2.28).

2.4 Randbedingungen

Die Lösung des vorliegenden Problems erfolgt mit den oben hergeleiteten analytisch beschriebenen Spannungen und Verschiebungen im fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum. Wie oben erwähnt, bleibt die Koordinate z untransformiert, wodurch horizontale Schichtgrenzen berücksichtigt werden können. Die Zustandsgrößen sind in Abhängigkeit der unbekanntenen Koeffizienten $\bar{\mathbf{c}}$ gegeben, welche nach der Einführung der Randbedingungen durch die Lösung des entstandenen Gleichungssystems zu bestimmen sind.

Wie eingangs erwähnt, kann auf den Ansatz von Volumenlasten verzichtet werden, da die Belastung bei den untersuchten Problemstellungen stets an einer Schichtgrenze oder auf der Halbraumoberfläche angreift. Wie später gezeigt werden wird, kann es sich dabei auch um eine gedachte Schichtgrenze innerhalb einer eigentlich homogenen Bodenschicht handeln. Eine an einer Schichtgrenze angreifende Last kann einfach durch ihre transformierte Belastungsfunktion als Spannungsrandbedingung in das Gleichungssystem eingeführt werden.

Die Belastungsfunktion im transformierten Raum kann dabei in vielen Fällen sogar analytisch beschrieben werden, beliebige Lastgeometrien sind durch eine numerische Fouriertransformation zu ermitteln.

Zur Ermittlung der unbekanntenen Koeffizienten $\bar{\mathbf{c}}$ müssen nun neben den *lokalen* Rand- und Übergangsbedingungen der Spannungen und Verschiebungen an der Halbraumoberfläche sowie den Schichtgrenzen auch *nicht lokale* Randbedingungen im Unendlichen eingehalten werden.

2.4.1 Lokale Randbedingungen

Im folgenden sind die Spannungen und Verschiebungen jeweils an der oberen ($z = 0$) sowie an der unteren ($z = h$) Schichtgrenze einer Schicht mit der Dicke h angegeben.

Spannungen an der oberen Schichtgrenze $z = 0$:

$$\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2ik_x\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & -2ik_x\lambda_1 & k_x k_y e^{-\lambda_2 h} & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 h} & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ 2ik_y\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & -2ik_y\lambda_1 & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 h} & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y e^{-\lambda_2 h} & -k_x k_y \\ (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 h} & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & 2ik_y\lambda_2 & 2ik_x\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \quad (2.33)$$

Spannungen an der unteren Schichtgrenze $z = h$:

$$\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2ik_x\lambda_1 & -2ik_x\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & k_x k_y & k_x k_y e^{-\lambda_2 h} & -\lambda_2^2 - k_x^2 & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 h} \\ 2ik_y\lambda_1 & -2ik_y\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & \lambda_2^2 + k_y^2 & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 h} & -k_x k_y & -k_x k_y e^{-\lambda_2 h} \\ 2k_r^2 - k_s^2 & (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 h} & -2ik_y\lambda_2 & 2ik_y\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & 2ik_x\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \quad (2.34)$$

Verschiebungen an der oberen Schichtgrenze $z = 0$:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{-\lambda_1 h} & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & \lambda_2 \\ ik_y e^{-\lambda_1 h} & ik_y & \lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & -\lambda_1 & -ik_y e^{-\lambda_2 h} & -ik_y & ik_x e^{-\lambda_2 h} & ik_x \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \quad (2.35)$$

Verschiebungen an der unteren Schichtgrenze $z = h$:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{(p)x} \\ \hat{u}_{(p)y} \\ \hat{u}_{(p)z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x e^{-\lambda_1 h} & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 e^{-\lambda_2 h} \\ ik_y & ik_y e^{-\lambda_1 h} & \lambda_2 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 h} & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} & -ik_y & -ik_y e^{-\lambda_2 h} & ik_x & ik_x e^{-\lambda_2 h} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \quad (2.36)$$

2.4.2 Nicht lokale Randbedingungen

An der Oberfläche sind in der Regel Spannungsrandbedingungen gegeben, sei es anhand einer Lastfunktion im transformierten Raum oder sei es aufgrund der Forderung, daß eine freie Oberfläche vorliegt und folglich alle Spannungen an dieser Oberfläche verschwinden müssen. Im Falle einer rein vertikalen, in positive z -Richtung wirkenden Belastung auf der Oberfläche ($z = 0$), führt dies zu den folgenden drei Randbedingungen:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{zx}(z=0) \\ \hat{\sigma}_{zy}(z=0) \\ \hat{\sigma}_z(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{p}_z \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Sofern keine Lasten an den Schichtgrenzen angreifen, liegen dort jeweils drei Spannungs- und drei Verschiebungsübergangsbedingungen derart vor, daß die Verschiebungen $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ und die Spannungen $\hat{\sigma}_{zx}, \hat{\sigma}_{zy}, \hat{\sigma}_z$ beider Schichten an der Schichtgrenze gleich sein müssen.

Für den Fall des Halbraumes gestaltet sich die Beschreibung der Randbedingungen durchaus schwieriger, da dieser eine unendliche Schichtdicke aufweist und somit Randbedingungen im Unendlichen anzusetzen sind. Setzte man bei vorhandener Dämpfung im Unendlichen die Spannungen oder die Verschiebungen jedoch einfach zu null, so ergäbe sich einerseits ein singuläres Gleichungssystem, andererseits träten an einem solchen Rand Reflexionen auf, die zu einfallenden Wellen führten, welche in der Realität jedoch nicht vorkommen. Hier ist die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung einzuhalten, welche verlangt, daß die Wellenausbreitung nur in positiver z -Richtung fortschreitet, keine Wellen von unten einfallen und die Amplituden der Wellen mit zunehmender Tiefe abklingen.

Eine übersichtliche Betrachtung ergibt sich, wenn man auf den Ansatz einer Materialdämpfung gemäß Abschnitt 2.1.1 verzichtet, da die Laméschen Konstanten dann rein reelle Werte annehmen. Wie man leicht erkennen kann, sind λ_1 und λ_2 in (2.24) dann für den Fall $k_x^2 + k_y^2 \geq k_p^2$ bzw. $k_x^2 + k_y^2 \geq k_s^2$ rein reellwertig. Die Faktoren $e^{\pm\lambda_1 z}$ bzw. $e^{\pm\lambda_2 z}$ sind in diesem Fall exponentiell mit zunehmender Tiefe z auf- bzw. abklingende Funktionen; es handelt sich folglich um Oberflächenwellen. Für den Fall $k_x^2 + k_y^2 < k_p^2$ bzw. $k_x^2 + k_y^2 < k_s^2$ nehmen sie hingegen rein imaginäre Werte an, $e^{\pm\lambda_1 z}$ bzw. $e^{\pm\lambda_2 z}$ beschreiben dann in positiver oder negativer z -Richtung abgestrahlte Wellen; in diesem Fall handelt es sich um Raumwellen.

Erschwert wird diese einfache Betrachtung dann, wenn gemäß Abschnitt 2.1.1 eine Materialdämpfung durch die Einführung eines komplexwertigen Elastizitätsmoduls in Ansatz gebracht wird. In diesem Fall sind k_p und k_s komplexe Größen, so daß λ_1 und λ_2 ebenfalls komplexe Werte annehmen. Betrachtet man die Oberflächenwellen, so ist leicht zu erkennen, daß die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung genau dann eingehalten ist, wenn die Exponenten negativ sind. Müller [MÜLLER 1989] hat den Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsrichtung sowie dem Abklingverhalten von Wellen und den Wellenzahlen sowie den Frequenzen untersucht. Dabei konnte er zeigen, daß für negative Frequenzen $\omega < 0$ immer Wellen vorliegen, welche der

Sommerfeldschen Abstrahlbedingung genügen; eine sonst notwendige Fallunterscheidung kann folglich dadurch vermieden werden, daß alle Funktionsauswertungen ausschließlich für negative Werte von ω erfolgen. Das Ergebnis für positive Frequenzen läßt sich dann aus dem Ergebnis für negative Frequenzen anhand von Symmetrieüberlegungen als dessen konjugiert komplexe Lösung erhalten. Somit reduziert sich die Anzahl der Unbekannten von sechs auf drei, die Randbedingungen im Unendlichen werden damit implizit im Gleichungssystem berücksichtigt.

2.5 Belastung

2.5.1 Ortsfeste, zeitlich veränderliche Belastung

Die Lösung der Laméschen Differentialgleichung wurde in Abschnitt 2.3 im fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum hergeleitet. Da diese Lösung folglich im Frequenzraum vorliegt, ist es möglich, für jede Frequenz eines gegebenen Frequenzspektrums die Lösung zu ermitteln und mit Hilfe der IFT in den Zeitbereich zurückzuführen. Liegt nun eine ortsfeste Belastung vor, die jedoch zeitlich veränderlich ist, so ist es vorteilhaft, den Belastungszeitverlauf unter Zuhilfenahme der Fouriertransformation in ein Frequenzspektrum zu überführen. Für einige einfache Fälle kann die transformierte Lastfunktion analytisch gefunden werden, in den übrigen Fällen muß sie durch eine numerische Fouriertransformation gewonnen werden.

Der für eine dreidimensionale inverse Fouriertransformation nötige Berechnungsaufwand kann jedoch bei dem Einsatz von herkömmlichen Transformationsverfahren wie der FFT [BRIGHAM 1987] sehr schnell stark anwachsen, was den Einsatz von Verfahren zur Datenkompression sinnvoll werden läßt oder gar erfordert. Hierzu wurde von Lieb [LIEB 1997] ein adaptives Verfahren für die zweidimensionale Fourierrücktransformation vom Wellenzahl- in den Ortsbereich entwickelt, welches auf der in der Bildverarbeitung zur Datenkompression verwendeten Waveletterlegung aufbaut. Dieses Verfahren wurde von Lenz [LENZ 2003] um die dritte Dimension Frequenz bzw. Zeit erweitert, was zu einer signifikanten Einsparung an Rechenzeit geführt und letztendlich eine mit vertretbarem Aufwand durchführbare dreidimensionale numerische Rücktransformation erst ermöglicht hat.

2.5.2 Geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Belastung

In der vorliegenden Arbeit soll die örtliche Veränderlichkeit der Belastung auf den Fall einer sich geradlinig, mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung einer Koordinatenachse bewegenden Last beschränkt werden. Damit kann ein mit konstanter Geschwindigkeit auf einem geraden Streckenabschnitt fahrender Zug abgebildet werden.

Ist eine Last $p_0(x, y)$ in x - und y -Richtung beliebig veränderlich, bewegt sie sich mit der konstanten Geschwindigkeit v fort und ist sie bezüglich der Zeit mit $g_0(t)$ veränderlich, so lautet ihre Belastungsfunktion:

$$p(x, y, t) = p_0(x - vt, y)g_0(t) \quad (2.38)$$

Wendet man auf diese Lastfunktion nun eine zweifache Fouriertransformation vom Orts- in den Wellenzahlbereich an, so ist bei der Transformation $x \circ \bullet k_x$ der Verschiebungssatz der

Fouriertransformation (Anhang A) anzuwenden.

$$\hat{p}(k_x, k_y, t) = \hat{p}_0(k_x, k_y) e^{-ivtk_x} g_0(t) \quad (2.39)$$

Die Fouriertransformation vom Zeit- in den Frequenzbereich $t \circ \bullet \omega$ ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0(k_x, k_y) e^{-ivtk_x} g_0(t) \quad \circ \bullet & \hat{p}_0(k_x, k_y) \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t) e^{-ivtk_x} e^{-i\omega t} dt = \\ & = \hat{p}_0(k_x, k_y) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t) e^{-i(\omega + vk_x)t} dt}_{\hat{g}_0(\omega + vk_x)} = \\ & = \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{g}_0(\omega + vk_x) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\hat{p}(k_x, k_y, \omega) = \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{g}_0(\omega + vk_x) \quad (2.40)$$

Im folgenden wird eine wellenzahl-frequenzabhängige *Steifigkeit* $\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega)$ eingeführt, welche die Charakteristik des gesamten elastischen Halbraumes repräsentiert und sich aus dem Kehrwert der infolge einer örtlichen sowie zeitlichen Impulslast $\hat{p}(k_x, k_y, \omega) = 1$ erhaltenen Grundlösung $\hat{G}(k_x, k_y, z, \omega)$ ergibt:

$$\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega) = \frac{1}{\hat{G}_z(k_x, k_y, z, \omega)}. \quad (2.41)$$

Damit ergibt sich die Verschiebung im fouriertransformierten Raum für eine beliebig veränderliche Last $\hat{p}(k_x, k_y, \omega)$ zu:

$$\hat{u}_z(k_x, k_y, z, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, k_y, \omega)}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega)} = \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{g}_0(\omega + vk_x)}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega)}. \quad (2.42)$$

Wie Müller [MÜLLER 1989] zeigt, ist es vorteilhaft, auf ein mitbewegtes Koordinatensystem überzugehen. Mit der Substitution $\omega' = \omega + vk_x$ erhält man nach einer dreidimensionalen Fourierrücktransformation ($k_x \bullet \circ x$, $k_y \bullet \circ y$, $\omega \bullet \circ t$) das folgende Ergebnis im mitbewegten Koordinatensystem an der Stelle $\bar{x} = x - vt$ im Originalraum:

$$\begin{aligned} u_z(\bar{x}, y, z, t) & = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{g}_0(\omega')}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega' - vk_x)} e^{i(\bar{x}+vt)k_x} e^{iyk_y} e^{it\omega} dk_x dk_y d\omega = \\ & = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{g}_0(\omega')}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega' - vk_x)} e^{i\bar{x}k_x} e^{iyk_y} e^{it\omega'} dk_x dk_y d\omega'. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sonderfall der geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegten, harmonischen Belastung

Hier soll der Sonderfall einer auf der Halbraumoberfläche angreifenden, sich geradlinig mit der Geschwindigkeit v entlang der Koordinatenachse x bewegenden und harmonisch mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierenden Last untersucht werden, welche in x - und y -Richtung

beliebig ist.

$$p(x, y, t) = p_0(x - vt, y)g_0(t) = p_0(x - vt, y) \cos(\Omega t) \quad (2.44)$$

Die Fouriertransformierte der Zeitfunktion $g_0(t) = \cos(\Omega t)$ lautet:

$$\hat{g}_0(\omega) = \pi(\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) \quad (2.45)$$

Setzt man diese nun in (2.40) ein, so erhält man die Belastung im transformierten Raum:

$$\hat{p}(k_x, k_y, \omega) = \hat{p}_0(k_x, k_y)\pi(\delta(\omega + vk_x - \Omega) + \delta(\omega + vk_x + \Omega)). \quad (2.46)$$

Nach Einsetzen der transformierten Lastfunktion in (2.43) erhält man die Verschiebung im Originalraum (\bar{x}, y, z, t) :

$$u_z(\bar{x}, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y)\pi(\delta(\omega' - \Omega) + \delta(\omega' + \Omega))}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \omega' - vk_x)} e^{i\bar{x}k_x} e^{iyk_y} e^{it\omega'} dk_x dk_y d\omega' \quad (2.47)$$

Die Fourierrücktransformation $\omega \bullet \rightarrow t$ kann in diesem Fall durch analytische Auswertung der beiden Delta-Dirac-Distributionen erfolgen. Die Lösungsfunktionen sind damit jeweils an den Stellen $\omega' = \Omega$ und $\omega' = -\Omega$ bzw. $\omega = \Omega - vk_x$ und $\omega = -\Omega - vk_x$ zu berechnen. Die Auswertung der Verschiebungen im mitbewegten Koordinatensystem am Ort der Lasteinwirkung erlaubt dabei ein Vorziehen der Terme $e^{\pm i\Omega t}$, die sich aus der Rücktransformation ergeben. Die beiden Fourierrücktransformationen vom Wellenzahlen- in den Ortsbereich $(k_x \bullet \rightarrow x, k_y \bullet \rightarrow y)$ können dann numerisch erfolgen. Die Verschiebung $u(\bar{x}, y, z, t)$ ergibt sich damit als Summe zweier Terme:

$$\begin{aligned} u_z(\bar{x}, y, z, t) &= e^{i\Omega t} \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y)}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, \Omega - vk_x)} e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y + \\ &+ e^{-i\Omega t} \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y)}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x)} e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y. \end{aligned}$$

Ohne die beiden Zeitfunktionen $e^{\pm i\Omega t}$ stellen die beiden Summanden zwei konjugiert komplexe Ausdrücke dar. In der komplexen Zahlenebene lassen sich diese als zwei konjugiert komplexe Zeiger auffassen, weshalb es ausreichend ist, nur einen von diesen zu berechnen. Aufgrund des in Abschnitt 2.4.2 erläuterten Zusammenhanges ist es zweckmäßig, die Auswertung für den Zeiger mit negativer Anregungsfrequenz vorzunehmen. Das Ergebnis, welches als physikalische Größe rein reell sein muß, ergibt sich dann als das Zweifache des Realteiles des Summanden mit der Frequenz $\omega = -\Omega - vk_x$.

$$u_z(\bar{x}, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \Re \left[e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}_0(k_x, k_y)}{\hat{K}_s(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x)} e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y \right] \quad (2.48)$$

Die hiermit berechneten Verschiebungen im mitbewegten Koordinatensystem sind nun lediglich noch unter Berücksichtigung der Beziehung $\bar{x} = x - vt$ in Verschiebungen im ruhenden Koordinatensystem umzurechnen.

2.6 Lösung für den homogenen Halbraum

Zur Lösung des Gleichungssystems im transformierten Raum sind nun die Spannungsrandbedingungen an der Halbraumoberfläche in (2.33) einzuführen. Im folgenden sollen auf diese Weise die Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche infolge einer auf dieser wirkenden Last $p_z(x, y) \circ \bullet \hat{p}_z(k_x, k_y)$ ermittelt werden.

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_1 & k_xk_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \\ -2ik_y\lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_xk_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{p}_z \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Mit der Determinante der Matrix

$$\begin{aligned} \Delta &= -4k_r^2\lambda_1\lambda_2^3 + 2k_r^2\lambda_2^4 + 4k_x^2\lambda_2^2k_y^2 + 2k_r^4\lambda_2^2 - k_s^2\lambda_2^4 - k_s^2\lambda_2^2k_r^2 = \\ &= (2k_r^2 - k_s^2)^2\lambda_2^2 - 4k_r^2\lambda_1\lambda_2^3 \end{aligned} \quad (2.50)$$

ergibt sich nach Anwendung der Cramerschen Regel der analytische – sofern die Lastfunktion analytisch beschrieben werden kann – Lösungsvektor zu:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta}(2k_r^2 - k_s^2)\lambda_2^2 \\ -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta}2ik_y\lambda_1\lambda_2^2 \\ \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} - 2ik_x\lambda_1\lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Mit (2.31) ergeben sich schlußendlich die transformierten Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche ($z = 0$):

$$\hat{u}_x = -\frac{\hat{p}_z ik_x}{\mu\Delta}(\lambda_2^4 + k_r^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3) \quad (2.52)$$

$$\hat{u}_y = -\frac{\hat{p}_z ik_y}{\mu\Delta}(\lambda_2^4 + k_r^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3) \quad (2.53)$$

$$\hat{u}_z = -\frac{\hat{p}_z\lambda_1\lambda_2^2}{\mu\Delta}k_s^2. \quad (2.54)$$

Die hergeleitete Lösung gilt allerdings nur unter der Voraussetzung einer dynamischen Belastung, d.h. für $\omega \neq 0$. Dies läßt sich an der Tatsache erkennen, daß für die statische Lösung mit $\omega = 0$ die Determinante in (2.50) verschwindet und die Verschiebungen in diesem Fall unendlich große Werte annehmen. Die Ansätze (2.23) sind folglich für $\omega = 0$ nicht vollständig. Für die Lösung in diesem Fall wird auf die Arbeit von Lenz [LENZ 2003] verwiesen.

Kapitel 3

Der Vollraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung

Als nächste Teillösung, welche man zur Ermittlung einer Lösung des Systems *Halbraum mit einem zylindrischen Hohlraum* unter dynamischer Belastung benötigt, wird nun nach der in Kapitel 2 hergeleiteten Halbraumlösung der Vollraum mit einem zylindrischen, unendlich langen Hohlraum behandelt. Auch dieses Problem wird mit Hilfe der Integraltransformationmethode gelöst. Das gezeigte Vorgehen baut hierbei grundsätzlich auf der Arbeit von Konrad [KONRAD 1985] auf, der den Spannungs- und Verformungszustand des Kontinuums mit zylindrischem Hohlraum unter einer beliebig verteilten, ruhenden oder sich mit konstanter, unterkritischer Geschwindigkeit in Richtung der Zylinderlängsachse bewegenden statischen Belastung untersucht hat.

3.1 Allgemeine Grundlagen

Wie eingangs bereits erwähnt, stellt die Lamésche Gleichung die grundlegende Gleichung der Kontinuumsdynamik dar. Sie ist in (2.6) in Tensornotation gegeben.

Im Gegensatz zum Halbraum, welcher als horizontal geschichtet abgebildet und natürlicherweise in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben wird, ist es sinnvoll, die geometrische Situation des Vollraumes mit zylindrischem Hohlraum mit Hilfe von Zylinderkoordinaten zu beschreiben. Hierzu bedarf es einer Transformation der Tensoren von der kartesischen Basis \mathbf{e}_j hin zu einer Basis in Abhängigkeit von den krummlinigen Koordinaten $\theta^{i'}$ mit $\theta^{1'} = r$, $\theta^{2'} = \psi$ und $\theta^{3'} = x$, welche als $\mathbf{g}_{i'}$ bezeichnet wird.

Für die Transformation der Basis gilt formal der Zusammenhang:

$$\mathbf{g}_{i'} = \beta_i^j \mathbf{e}_j. \quad (3.1)$$

Die zu der Basis $\mathbf{g}_{i'}$ bzw. \mathbf{e}_j zugehörigen Koordinaten $x^{i'}$ bzw. x^j einer vektoriellen Größe werden gemäß

$$x^{i'} = x^j \beta_j^{i'} \quad (3.2)$$

transformiert. Hierin entspricht $\beta_{i'}^j$ der Jakobimatrix und $\beta_j^{i'}$ ihrer Inversen.

$$\mathbf{J} = [\beta_{i'}^j] = \left[\frac{\partial x^j}{\partial \theta^{i'}} \right], \quad [\beta_j^{i'}] = \left[\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial x^j} \right] = \mathbf{J}^{-1} \quad (3.3)$$

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 3.1 das gewählte Koordinatensystem sowie die Spannungen und Verschiebungen an einem herausgetrennten Element.

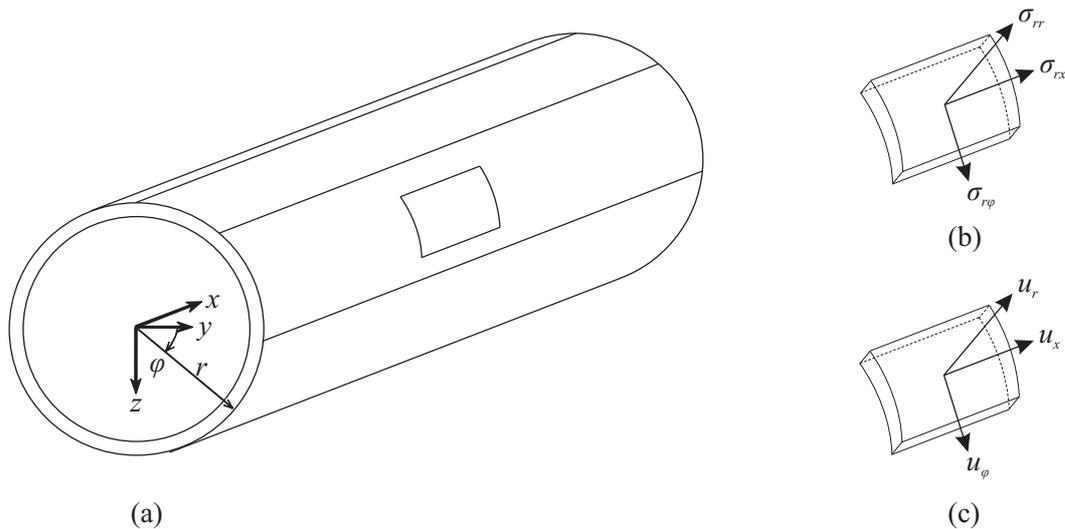


Abbildung 3.1: Koordinatensystem für das in Radialrichtung geschichtete Kontinuum mit zylindrischem Hohlraum (a), Spannungen am Element (b) und Verschiebungen am Element (c)

wurde jedoch anstelle der in der Mathematik üblichen Vorgehensweise nicht der in Abbildung 3.2 eingezeichnete, in mathematisch positivem Sinne von der y -Achse zur z -Achse drehende Winkel φ verwendet, sondern mit dem ebenfalls eingezeichneten Winkel ψ gearbeitet. Diese Definiton

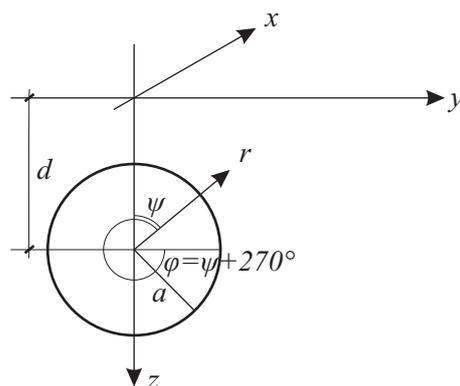


Abbildung 3.2: Koordinatensystem für das Kontinuum

wird hier vor dem Hintergrund eingeführt, daß die Gesamtlösung für eine beliebig verteilte Belastung aus der Superposition von zur z -Achse symmetrischen und antisymmetrischen Spannungs- und

Verschiebungszuständen berechnet werden soll. Bei dem dazu verwendeten Ansatz von bezüglich der Umfangsrichtung harmonisch veränderlichen Spannungszuständen kann das Argument der entsprechenden trigonometrischen Funktionen mit einer Phasenverschiebung verwendet werden. Es erscheint jedoch zweckmäßiger, diese Funktionen auf einen Winkel zu beziehen, welcher an der z -Achse beginnt. Deshalb wird im folgenden der Winkel ψ verwendet.

Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten x, y, z und den Zylinderkoordinaten r, φ, x bzw. r, ψ, x lautet:

$$x = x \quad (3.4)$$

$$y = r \cos(\varphi) = r \sin(\psi) \quad (3.5)$$

$$z = r \sin(\varphi) = -r \cos(\psi). \quad (3.6)$$

Aus diesem Zusammenhang ergibt sich nun die Jakobi-Matrix.

$$\mathbf{J} = [\beta_{i'}^j] = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\psi) & -\cos(\psi) \\ 0 & r \cos(\psi) & r \sin(\psi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Die Inverse der Jakobi-Matrix lautet:

$$\mathbf{J}^{-1} = [\beta_j^{i'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi) & \frac{1}{r} \cos(\psi) & 0 \\ -\cos(\psi) & \frac{1}{r} \sin(\psi) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Unter Verwendung des Helmholtzschen Satzes kann man, wie in Abschnitt 2.2 gezeigt, das Vektorfeld \mathbf{u} durch die Superposition des Gradienten eines skalaren Feldes Φ und der Rotation eines Vektorfeldes Ψ beschreiben.

$$u^i = \Phi|_j^i + \Psi_k|_j \epsilon^{ijk} \quad (3.9)$$

Nach Einsetzen des Ansatzes (3.9) in die Lamésche Gleichung (2.6) erhält man die schon in (2.17) und (2.18) angegebenen Wellengleichungen.

$$\Phi|_j^j - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (3.10)$$

$$\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (3.11)$$

Behandelt man nun ein spezielles Problem, so sind die Verschiebungsansätze an die Randbedingungen anzupassen. Im vorliegenden Falle ist es also zweckmäßig, das Verschiebungsfeld \mathbf{u} in Abhängigkeit von Zylinderkoordinaten zu beschreiben, da sich mit diesen die Berandung des zylindrischen Hohlraumes besonders einfach beschreiben läßt.

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u^{i'} \mathbf{g}_{i'} \quad (3.12)$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Beziehung (3.11) nur dann zu drei entkoppelten partiellen Differentialgleichungen führt, wenn die Christoffelsymbole der zu Ψ_i gehörigen Basis \mathbf{g}^i verschwinden. Diese Forderung ist im allgemeinen Falle einer stationären Basis, im besonderen im Falle einer

kartesischen Basis, erfüllt. Daher ist es von Vorteil, die Komponenten $\Psi_{i'}$ des beliebigen krummlinigen Koordinatensystems durch die Komponenten Ψ_i des kartesischen Koordinatensystems zu ersetzen.

Bei der Ableitung der Rotation eines Vektorfeldes ist zu berücksichtigen, daß die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes (also eines Tensors 1. Ordnung) einen Tensor 2. Ordnung ergibt und somit den entsprechenden Transformationsbeziehungen genügt. Mit

$$\Psi_{k'}|_{j'} = \Psi_i|_j \beta_{j'}^j \beta_{k'}^i \quad (3.13)$$

ergibt sich dann für das Verschiebungsfeld $u^{i'} \mathbf{g}_{i'}$ unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Christoffelsymbole in einem kartesischen Koordinatensystem verschwinden:

$$\begin{aligned} u^{i'} &= \Phi_{,j'} g^{j'i'} + \Psi_i|_j \beta_{j'}^j \beta_{k'}^i \epsilon^{i'j'k'} = \\ &= \Phi_{,j'} g^{j'i'} + \left[\Psi_{i,j} - \Psi_k \Gamma_{ij}^k \right] \beta_{j'}^j \beta_{k'}^i \epsilon^{i'j'k'} = \\ &= \Phi_{,j'} g^{j'i'} + \Psi_{i,j'} \beta_{k'}^i \epsilon^{i'j'k'} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die zu wählenden Ansatzfunktionen Φ und Ψ_i müssen dabei Lösungen der in (3.10) und (3.11) angegebenen Wellengleichungen sein. In Zylinderkoordinaten ergeben sich damit die physikalischen Komponenten u_x , u_r und u_ψ des Verschiebungsvektors \mathbf{u} zu

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial r} \cos \psi + \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \sin \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_y}{\partial \psi} \sin \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \psi} \cos \psi \\ u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \psi} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \cos \psi - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \sin \psi \\ u_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \sin \psi - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \cos \psi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei müssen die Ansatzfunktionen Φ und Ψ_i folgenden Bedingungsgleichungen genügen, welche sich durch den Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten aus den in (3.10) und (3.11) angegebenen Wellengleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wie in [KONRAD 1985] gezeigt, ist es von Vorteil, die trigonometrischen Funktionen $\sin \psi$ und $\cos \psi$ durch die komplexe Exponentialfunktion auszudrücken

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{1}{2} i \left(e^{-i\psi} - e^{i\psi} \right) \\ \cos \psi &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\psi} + e^{i\psi} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

und die Funktionen $e^{i\psi}$ und $e^{-i\psi}$ unter den Differentialoperator zu ziehen

$$e^{\pm i\psi} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} (e^{\pm i\psi} \Psi_i) \mp i \left(e^{\pm i\psi} \Psi_i \right). \quad (3.18)$$

Damit ergeben sich folgende Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} e^{i\psi} (\Psi_y - i\Psi_z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \right] + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} e^{-i\psi} (\Psi_y + i\Psi_z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \\
u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{i\psi} (\Psi_y - i\Psi_z) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{-i\psi} (\Psi_y + i\Psi_z) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \psi} \\
u_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{i\psi} (\Psi_y - i\Psi_z) \right] + i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{-i\psi} (\Psi_y + i\Psi_z) \right] - \frac{\partial \Psi_x}{\partial r}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Für die Ausdrücke in eckigen Klammern werden nun neue Funktionen eingeführt.

$$\begin{aligned}
M'_1 &= \left[\frac{1}{2} e^{i\psi} (\Psi_y - i\Psi_z) \right] \\
M'_2 &= \left[\frac{1}{2} e^{-i\psi} (\Psi_y + i\Psi_z) \right]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Wie in Abschnitt 2.3.2 dargestellt, kann wieder eine Komponente des vektoriellen Potentials Ψ_i frei gewählt werden. Stellt man nun die Forderung auf, daß das Potential Ψ_x verschwindet, so erhält man die folgenden Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) [M'_1 + M'_2] + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} [M'_1 - M'_2] \\
u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} [M'_1 + M'_2] \\
u_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - i \frac{\partial}{\partial x} [M'_1 - M'_2].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Bedingungsgleichungen (3.16) lassen sich mit (3.20) ebenso in Abhängigkeit von den neuen Funktionen M'_1 und M'_2 angeben.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \psi} - 1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M'_1 &= 0 \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2i \frac{\partial}{\partial \psi} - 1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M'_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.1.1 Bewegte statische Lasten ($\Omega = 0$)

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Erschütterungsausbreitung infolge von bewegten dynamischen Lasten in Tunnels, welche z.B. von Zügen erzeugt werden. Deshalb wird der Fall einer sich geradlinig mit der Geschwindigkeit v in Tunnellängsrichtung x bewegenden Last untersucht.

Wie in Abschnitt 2.5.2 für den Halbraum sowie in [KONRAD 1985] für den Vollraum mit zylindrischem Hohlraum gezeigt, ist es dazu vorteilhaft, auf ein mitbewegtes Koordinatensystem überzugehen. Die Verschiebungen im ortsfesten Koordinatensystem (x, r, ψ) stehen dabei in folgendem Zusammenhang zu den Verschiebungen im mitbewegten Koordinatensystem (\bar{x}, r, ψ) :

$$u_i(x, r, \psi, t) = u_i(x - vt, r, \psi) = u_i(\bar{x}, r, \psi) \tag{3.23}$$

Für die Ansatzfunktionen Φ , M'_1 und M'_2 muß der gleiche Zusammenhang gelten. Damit ergibt sich der Verschiebungsansatz für das mitbewegte Koordinatensystem aus (3.21), indem x durch \bar{x} ersetzt wird.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) [M'_1 + M'_2] + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} [M'_1 - M'_2] \\ u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} [M'_1 + M'_2] \\ u_\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - i \frac{\partial}{\partial \bar{x}} [M'_1 - M'_2] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Ansatzfunktionen (3.16) bzw. (3.22) lauten nun mit

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} (-v)^2 \quad (3.25)$$

und den Definitionen der Wellengeschwindigkeiten c_p und c_s in (2.19) für den Fall der bewegten Belastung:

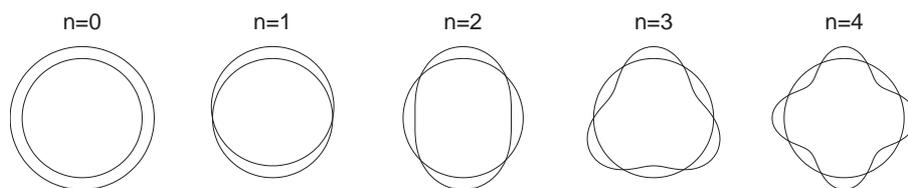
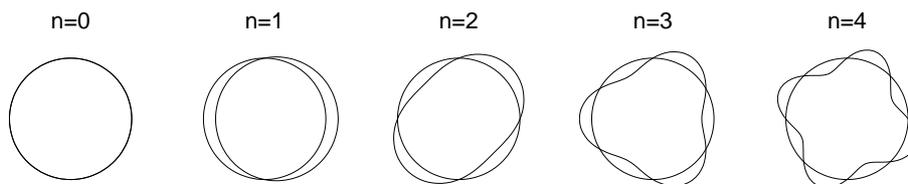
$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c_p^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \right] \Phi &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \psi} - 1 \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \right] M'_1 &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2i \frac{\partial}{\partial \psi} - 1 \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c_p^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \right] M'_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da fortan nur noch das bewegte Koordinatensystem verwendet wird, wird im folgenden auf den zur Unterscheidung zwischen dem ruhenden und dem mitbewegten Koordinatensystem verwendeten Balken verzichtet.

3.2 Lösung der Bewegungsgleichung für eine dynamische Belastung im Bildraum

Die im folgenden verwendeten Lösungsansätze stellen zwar eine vollständige Lösung der Laméschen Gleichung, jedoch nicht der Navierschen Gleichung dar, d.h. sie sind für den statischen Fall mit $\Omega = 0$ und $v = 0$ nicht vollständig. Für die Lösung in diesem Fall wird auf die Arbeit von Konrad [KONRAD 1985] verwiesen, der als Verschiebungsansatz im Fall einer statischen Belastung den Ansatz von Papkovitch-Neuber verwendet.

Die Lösung der gestellten Aufgabe soll im Bildraum erfolgen. Deshalb werden zunächst die Funktionen Φ , M'_1 und M'_2 in Umfangsrichtung ψ in eine Fourierreihe entwickelt. Wie in den Abbildungen 3.3 und 3.4 dargestellt, hat man hierbei zwischen über den Umfang mit $\cos n\psi$ - und mit $\sin n\psi$ -verteilten Zustandsgrößen zu unterscheiden. Grundsätzlich werden dabei zwei Lastfälle getrennt behandelt: der bezüglich der z -Achse symmetrische und der antimetrische Lastfall. Beliebige Lastzustände können dann durch die Superposition dieser beiden Lastfälle erzeugt werden. Je nachdem, welcher Lastfall betrachtet wird, ergibt sich die entsprechende Veränderlichkeit der Spannungen und Verschiebungen über den Umfang gemäß Tabelle 3.1.

Abbildung 3.3: Über den Umfang $\cos(n\psi)$ -verteilte Zustandsgrößen für $n = 0..4$ Abbildung 3.4: Über den Umfang $\sin(n\psi)$ -verteilte Zustandsgrößen für $n = 0..4$

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, r, \psi) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Phi(x, r, n) e^{in\psi} \\
 M_1'(x, r, \psi) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} M_1'(x, r, n) e^{in\psi} \\
 M_2'(x, r, \psi) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} M_2'(x, r, n) e^{in\psi}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

	Symmetrischer Lastfall	Antimetrischer Lastfall
Verschiebungen		
u_r	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
u_ψ	$\sin n\psi$	$\cos n\psi$
u_x	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
Spannungen		
σ_{rr}	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
$\sigma_{\psi\psi}$	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
σ_{xx}	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
$\sigma_{r\psi}$	$\sin n\psi$	$\cos n\psi$
σ_{rx}	$\cos n\psi$	$\sin n\psi$
$\sigma_{\psi x}$	$\sin n\psi$	$\cos n\psi$

Tabelle 3.1: Veränderlichkeit der Zustandsgrößen über den Umfang im bezüglich der z -Achse symmetrischen und antimetrischen Lastfall

Aus den Gleichungen (3.16) bzw. (3.22) erhält man damit die folgenden Bedingungsgleichungen

für die Koeffizienten der Fourierreihe.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, r, n) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M_1'(x, r, n) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n+1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M_2'(x, r, n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Als nächster Schritt folgt die zweifache Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x$, $t \circ \bullet \omega$) bezüglich der Längsrichtung und der Zeit. Dabei ist der bewegten dynamischen Last Rechnung zu tragen. Geht man dazu, wie in den Abschnitten 3.1.1 und 2.5.2 beschrieben, nach der Substitution $\bar{x} = x - vt$ auf ein mitbewegten Koordinatensystem über, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 k_x^2 \right) \right] \hat{\Phi}(k_x, r, n) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(+\frac{(n-1)^2}{r^2} + \beta^2 k_x^2 \right) \right] \hat{M}_1'(k_x, r, n) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{(n+1)^2}{r^2} + \beta^2 k_x^2 \right) \right] \hat{M}_2'(k_x, r, n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit den dimensionslosen Parametern

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2 k_x^2} - 1 = \frac{k_p^2}{k_x^2} - 1 \quad \text{und} \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2 k_x^2} - 1 = \frac{k_s^2}{k_x^2} - 1. \quad (3.30)$$

Für eine geradlinig mit der Geschwindigkeit v bewegte und mit der harmonischen Zeitfunktion $\cos(\Omega t)$ veränderliche Last müssen diese dimensionslosen Parameter α^2 und β^2 im Rahmen der analytischen Fourierrücktransformation bezüglich der Zeit nur an den beiden Stellen $\omega = \Omega - vk_x$ und $\omega = -\Omega - vk_x$ ausgewertet werden. Aufgrund der in Abschnitt 2.5.2 angestellten Symmetrieüberlegungen genügt es jedoch, die Werte wieder nur an einer dieser beiden Stellen zu berechnen.

Die erhaltenen Bedingungsgleichungen für die Funktionen $\hat{\Phi}(k_x, r, n)$, $\hat{M}_1'(k_x, r, n)$ und $\hat{M}_2'(k_x, r, n)$ im Bildraum sind Gleichungen vom Besselschen Typ. Lösungen für diesen Gleichungstyp sind in [ABRAMOWITZ und STEGUN 1965, JAHNKE et al. 1966] angegeben und wurden im Anhang B für die im Zusammenhang mit dieser Arbeit benötigten Fälle zusammengefaßt. Ein Fundamentalsystem zur Lösung der Besselgleichung bilden demnach die Besselfunktionen J und die Neumannfunktionen Y . Die Parameter dieser Funktionen sind neben der Wellenzahl k_x und dem Radius r durch α und β implizit nicht nur die Bodenparameter, welche sich in den Wellengeschwindigkeiten c_p und c_s wiederfinden, sondern auch die Lastgeschwindigkeit v und die Kreisfrequenz der Belastung Ω . Somit ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(k_x, r, n) &= C_{1n} J_n(\alpha k_x r) + C_{4n} Y_n(\alpha k_x r) \\ \hat{M}_1'(k_x, r, n) &= C_{2n} J_{n-1}(\beta k_x r) + C_{5n} Y_{n-1}(\beta k_x r) \\ \hat{M}_2'(k_x, r, n) &= C_{3n} J_{n+1}(\beta k_x r) + C_{6n} Y_{n+1}(\beta k_x r) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die allgemeine Lösung enthält nun für jedes n sechs unbekannte Konstanten C_{in} , welche durch das Einführen von Randbedingungen zu bestimmen sind. Grundsätzlich gilt es, die für das

vorliegende Problem gegebenen Randbedingungen im Unendlichen zu erfüllen: die Lösungen müssen mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort abklingen und dürfen nur vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende, jedoch keine dorthin zurücklaufenden Wellen beschreiben. Durch die Erfüllung dieser Abstrahlbedingung wird die geometrische Dämpfung erfaßt. Hinzu kommt die gemäß Abschnitt 2.1.1 hysteretisch angesetzte Materialdämpfung.

Dazu können die Besselfunktionen $J(z)$ und die Neumannfunktionen $Y(z)$ für jedes beliebige Argument $z_\alpha = \alpha k_x r$ bzw. $z_\beta = \beta k_x r$ hinsichtlich dieser beiden Randbedingungen ausgewertet werden. Das Abklingverhalten kann man anhand des Betrages der jeweiligen Besselfunktionen für zwei ausreichend weit auseinanderliegende Punkte r und $r + \Delta r$ untersuchen. Für die Überprüfung der Ausbreitungsrichtung kann man für zwei dicht beieinander liegende Punkte r und $r + \Delta r$ die Lage eines Zeigers in der komplexen Ebene betrachten. Dabei zeichnen sich fortlaufende Wellen dadurch aus, daß in der komplexen Ebene der Zeiger an der Stelle r einen größeren Phasenwinkel in Richtung von ωt besitzt als der Zeiger an der Stelle $r + \Delta r$. Zunächst muß jedoch zwischen dem Fall positiver Werte für die Kreisfrequenz ω und dem Fall negativer Werte für ω unterschieden werden, da sich dadurch die Laufrichtung der Zeiger im Zeigerdiagramm ändert. Zur Veranschaulichung ist in Bild 3.5 für diese beiden Situationen jeweils die Lage der komplexen Zeiger in den verschiedenen Quadranten der komplexen Ebene dargestellt.

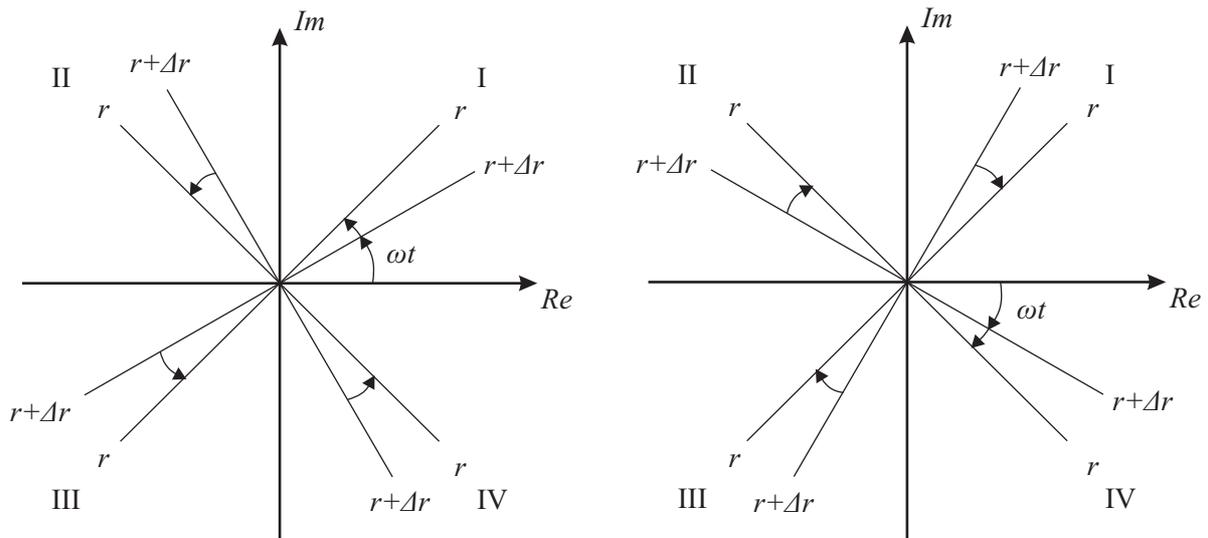


Abbildung 3.5: Zeigerdiagramme in der komplexen Ebene für positive (links) und negative (rechts) Kreisfrequenz ω

Nun werden abhängig vom Vorzeichen von ω jeweils die Beträge der Tangensfunktion, welche sich in der komplexen Ebene als der Quotient des Imaginärteiles und des Realteiles ergibt, an den beiden Stellen r und $r + \Delta r$ betrachtet. Für eine Funktion $f(\alpha k_x r)$ sind den Diagrammen folgende Zusammenhänge zu entnehmen, die analog für eine Funktion $f(\beta k_x r)$ gelten:

- Für $\omega > 0$ liegen fortlaufende Wellen vor, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \text{I.+III. Quadrant:} & \quad \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} \right| < \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))} \right| \\ \text{II.+IV. Quadrant:} & \quad \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} \right| > \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))} \right| \end{aligned}$$

- Für $\omega < 0$ liegen fortlaufende Wellen vor, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \text{I.+III. Quadrant:} & \quad \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} \right| > \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))} \right| \\ \text{II.+IV. Quadrant:} & \quad \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} \right| < \left| \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))} \right| \end{aligned}$$

Diese unterschiedlichen Fälle können zusammengefaßt werden, wenn man die Beträge wegläßt:

- Für $\omega > 0$ liegen fortlaufende Wellen vor, wenn gilt:

$$\frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} < \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))}$$

- Für $\omega < 0$ liegen fortlaufende Wellen vor, wenn gilt:

$$\frac{\Im(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))}{\Re(f(\alpha k_x(r + \Delta r)))} > \frac{\Im(f(\alpha k_x r))}{\Re(f(\alpha k_x r))}$$

Zusätzlich sind noch einige Sonderfälle – wenn z.B. der Real- oder der Imaginärteil gerade verschwindet oder rein abklingende Funktionen vorliegen, so daß beide Zeiger übereinander zu liegen kommen – zu berücksichtigen. Damit ist es nun möglich, das Abklingverhalten sowie die Ausbreitungsrichtung zu untersuchen und für jedes Argument diejenige Lösungsfunktion auszuwählen, welche diesen Kriterien gerecht wird.

Wünschenswert ist es allerdings, besonders auch in Hinsicht auf den Berechnungsaufwand, anhand der Eigenschaften der zu verwendenden Besselfunktionen in allgemeiner Form Lösungsfunktionen zu bestimmen, welche die gegebenen Randbedingungen erfüllen. Dabei lassen sich jedoch für reelle Argumente der Besselfunktionen gewonnene Einsichten bezüglich deren Verhalten nicht ohne weiteres auf den Fall komplexer Argumente, die sich durch die Berücksichtigung einer Materialdämpfung ergeben, übertragen. Deshalb wird der allgemeine Fall komplexer Argumente im folgenden Abschnitt ausführlich behandelt. Im Anschluß daran wird ebenfalls der Fall reeller Argumente untersucht, da dieser eine anschauliche Interpretation des Lösungsverhaltens anhand von Fallunterscheidungen gestattet.

3.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung für komplexe Werte von α^2 und β^2 infolge des Ansatzes einer komplexen Steifigkeit

Wie in Abschnitt 2.1.1 gezeigt, wird eine Materialdämpfung als hysteretische Dämpfung mit dem Verlustfaktor ζ durch die Einführung eines komplexen Elastizitätsmoduls E berücksichtigt. Infolgedessen nehmen die Laméschen Konstanten und damit die Kompressions- und die

Scherwellengeschwindigkeit komplexe Werte an, wie sich anhand von (2.3) und (2.19) leicht nachvollziehen läßt. Mit (2.22) gilt dies auch für die Kompressionswellenzahl k_p und die Scherwellenzahl k_s . Mit den Realteilen λ' und μ' der Laméschen Konstanten gemäß (2.12) und (2.3) ergeben sich diese Wellenzahlen zu:

$$\begin{aligned} k_p^2 &= \frac{\omega^2}{c_p^2} = \frac{\omega^2 \rho}{(\lambda' + 2\mu')(1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)} =: \frac{D_\alpha}{1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta} \\ k_s^2 &= \frac{\omega^2}{c_s^2} = \frac{\omega^2 \rho}{\mu'(1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)} =: \frac{D_\beta}{1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Hierin sind $D_\alpha = \Re(k_p^2)$ bzw. $D_\beta = \Re(k_s^2)$ als die Realteile der Kompressions- bzw. der Scherwellenzahl definiert. Diese sind immer positiv.

Aufgrund der Beziehung (3.30) nehmen damit auch die Quadrate α^2 und β^2 der Argumente der Besselfunktionen komplexe Werte an. Dieser allgemeine Fall, der die Lösungen für den Sonderfall eines ungedämpften Mediums mit einschließt, soll im folgenden untersucht werden. Dabei überträgt sich das durch das Vorzeichen der Kreisfrequenz ω festgelegte Vorzeichen des im Nenner der Kompressions- resp. der Scherwellenzahl vorkommenden Imaginärteils gemäß der einfachen Beziehung

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad (3.33)$$

umgekehrt auf das Vorzeichen von α^2 und β^2 . Damit nimmt das Argument z der jeweiligen Besselfunktion die Werte

$$z_\alpha = \alpha k_x r = k_x r \sqrt{\frac{k_p^2}{k_x^2} - 1} = k_x r \sqrt{\frac{D_\alpha}{(1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)k_x^2} - 1} = k_x r \sqrt{\frac{D_\alpha(1 - i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)}{(1 + \zeta^2)k_x^2} - 1} \quad (3.34)$$

oder

$$z_\beta = \beta k_x r = k_x r \sqrt{\frac{k_s^2}{k_x^2} - 1} = k_x r \sqrt{\frac{D_\beta}{(1 + i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)k_x^2} - 1} = k_x r \sqrt{\frac{D_\beta(1 - i \operatorname{sign}(\omega)\zeta)}{(1 + \zeta^2)k_x^2} - 1} \quad (3.35)$$

an. Der Realteil des Argumentes z_α ergibt sich dabei zu

$$\Re(z_\alpha) = \frac{1}{2} k_x r \sqrt{2 \sqrt{\left(\frac{D_\alpha}{(1 + \zeta^2)k_x^2} - 1\right)^2 + \frac{D_\alpha^2 \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2 k_x^4} + \frac{2D_\alpha}{(1 + \zeta^2)k_x^2}} - 2} \quad (3.36)$$

und der Imaginärteil zu

$$\begin{aligned} \Im(z_\alpha) &= \operatorname{csgn}(-D_\alpha \operatorname{sign}(\omega)\zeta + i(-D_\alpha + k_x^2 \zeta^2 + k_x^2)) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2} k_x r \sqrt{2 \sqrt{\left(\frac{D_\alpha}{(1 + \zeta^2)k_x^2} - 1\right)^2 + \frac{D_\alpha^2 \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2 k_x^4} - \frac{2D_\alpha}{(1 + \zeta^2)k_x^2}} + 2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dabei ist die komplexe Signumfunktion definiert durch:

$$\operatorname{csgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Re(z) > 0 \text{ oder } \Re(z) = 0 \text{ und } \Im(z) > 0 \\ -1 & \text{falls } \Re(z) < 0 \text{ oder } \Re(z) = 0 \text{ und } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Für das Argument z_β ergeben sich analoge Ausdrücke. Im folgenden wird a sowohl für $\Re(z_\alpha)$ als auch für $\Re(z_\beta)$ und b sowohl für $\Im(z_\alpha)$ als auch für $\Im(z_\beta)$ verwendet.

Wie leicht zu erkennen ist, nimmt der Betrag des Realteiles a immer größere Werte an als der Betrag des Imaginärteiles b . Der Realteil a nimmt dabei immer positive Werte an¹. Dahingegen besitzt der Imaginärteil b der Argumente $z_\alpha = \alpha k_x r$ und $z_\beta = \beta k_x r$ ein negatives Vorzeichen im Falle positiver Werte für ω und umgekehrt.

Da die Lösungsfunktionen (3.31) ein Fundamentalsystem zur Lösung der in (3.29) angegebenen Besselgleichungen sind, müssen sie dazu in der Lage sein, sämtliche mathematisch möglichen Lösungen dieses Gleichungssystems darzustellen. Mathematisch möglich sind grundsätzlich auch Funktionen, die, wendet man sie auf das hier vorliegende Problem an, physikalisch nicht sinnvoll sind. Dies bedeutet, daß dieses Fundamentalsystem sowohl ab- als auch aufklingende Funktionen und ebenso sowohl vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende als auch dorthin zurücklaufende Wellen abzubilden imstande ist. Um die Anzahl der zu ermittelnden Unbekannten möglichst gering zu halten, ist es daher von Vorteil, nur den Teil der Lösung zu verwenden, welcher für das untersuchte Problem physikalisch sinnvoll ist. Nun stellt sich also die Frage, ob die Lösungsfunktionen mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort abklingende und von diesem fortlaufende Wellen beschreiben. Während durch die Erfassung der Wellenlaufrichtung die geometrisch bedingte Abnahme der Amplituden berücksichtigt wird, führt der Ansatz komplexer Argumente der entsprechenden Besselfunktionen zu einem zusätzlichen Abklingen der Amplituden aufgrund von Materialdämpfung.

Zur Untersuchung der Laufrichtung ist es sinnvoll, das Verhalten der Funktionen für den Fall großer Argumente zu betrachten. Die asymptotischen Entwicklungen der Bessel- sowie der Neumannfunktion lauten gemäß [JAHNKE et al. 1966] in erster Näherung für $|z| \gg 1$, $|z| \gg n$:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.39)$$

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.40)$$

Es zeigt sich, daß zwischen zwei verschiedenen Fällen zu unterscheiden ist, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

(a) n gerade:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\cos(z) + \sin(z)) = \pm \sqrt{\frac{1}{\pi z}} (\cos(z) + \sin(z)) \quad (3.41)$$

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\sin(z) - \cos(z)) = \pm \sqrt{\frac{1}{\pi z}} (\sin(z) - \cos(z)) \quad (3.42)$$

(b) n ungerade:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\cos(z) - \sin(z)) = \pm \sqrt{\frac{1}{\pi z}} (\cos(z) - \sin(z)) \quad (3.43)$$

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\sin(z) + \cos(z)) = \pm \sqrt{\frac{1}{\pi z}} (\sin(z) + \cos(z)) \quad (3.44)$$

¹Allgemein gilt, daß man beim Radizieren einer komplexen Zahl grundsätzlich eine Wurzel mit positivem Realteil erhält.

Sind $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ von gleicher Ordnung n , so ergibt sich für beide Funktionen stets das gleiche Vorzeichen, weshalb im folgenden alle Ausdrücke vereinfachend nur mit positivem Vorzeichen verwendet werden.

Multipliziert man die beiden Besselfunktionen $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ mit Zeitfunktionen $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$, so erhält man Funktionen, welche laufende Wellen beschreiben. Diese müssen im vorliegenden Fall mit der Zeit in positive Richtung r und damit mit zunehmendem Argument z vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende Wellen beschreiben. Für positive Kreisfrequenzen ω liegen diese vor, wenn im Argument der Kosinus- bzw. der Sinusfunktion die Differenz $(z - \omega t)$ auftritt. Tritt im Argument die Summe $(z + \omega t)$ auf, so liegen mit der Zeit in negative z -Richtung zurücklaufende Wellen vor, die für das vorliegende Problem physikalisch grundsätzlich auszuschließen sind.

Im folgenden wird zur Untersuchung der Laufrichtung neben dem in 3.31 angegebenen Fundamentalsystem aus Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen Y_n auch das Fundamentalsystem aus Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$, welches ebenfalls eine Lösung des in 3.29 angegebenen Gleichungssystems darstellt, verwendet. Wie sich zeigen wird, steht mit letzterem eine deutlich elegantere Lösung zur Verfügung.

Fundamentalsystem aus Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen Y_n

Verwendet man das Fundamentalsystem aus Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen Y_n , so ist es zur Beurteilung des Laufverhaltens erforderlich, anstelle der einzelnen Funktionen $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ die folgenden Kombinationen zu untersuchen. Mit diesen werden alle möglichen Lösungen erfaßt. Dabei bezeichnet a den Realteil ($a = \Re(z_\alpha)$ bzw. $a = \Re(z_\beta)$) und b den Imaginärteil ($b = \Im(z_\alpha)$ bzw. $b = \Im(z_\beta)$) eines aufgrund komplexer Argumente α und β nun komplexen Argumentes $z = a + ib$:

$$1. f_1(z, t) = J_n(z) \cos(\omega t) + Y_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$\begin{aligned} \Re(f_1(z, t)) &= +C_1[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \cosh(b) + \\ &+ C_2[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_1(z, t)) &= -C_2[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &+ C_1[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.46)$$

(b) n ungerade

$$\begin{aligned} \Re(f_1(z, t)) &= +C_1[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \cosh(b) - \\ &- C_2[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_1(z, t)) &= -C_2[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) - \\ &- C_1[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$2. f_2(z, t) = Y_n(z) \cos(\omega t) - J_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$\begin{aligned} \Re(f_2(z, t)) &= -C_1[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \cosh(b) + \\ &\quad + C_2[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_2(z, t)) &= +C_2[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &\quad + C_1[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.50)$$

(b) n ungerade

$$\begin{aligned} \Re(f_2(z, t)) &= +C_1[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \cosh(b) + \\ &\quad + C_2[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_2(z, t)) &= -C_2[\cos(a - \omega t) + \sin(a - \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &\quad + C_1[\cos(a - \omega t) - \sin(a - \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$3. f_3(z, t) = J_n(z) \cos(\omega t) - Y_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$\begin{aligned} \Re(f_3(z, t)) &= +C_1[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \cosh(b) + \\ &\quad + C_2[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_3(z, t)) &= -C_2[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &\quad + C_1[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.54)$$

(b) n ungerade

$$\begin{aligned} \Re(f_3(z, t)) &= +C_1[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \cosh(b) - \\ &\quad - C_2[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_3(z, t)) &= -C_2[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) - \\ &\quad - C_1[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$4. f_4(z, t) = Y_n(z) \cos(\omega t) + J_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$\begin{aligned} \Re(f_4(z, t)) &= -C_1[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \cosh(b) + \\ &\quad + C_2[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_4(z, t)) &= +C_2[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &\quad + C_1[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \end{aligned} \quad (3.58)$$

(b) n ungerade

$$\begin{aligned} \Re(f_4(z, t)) &= +C_1[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \cosh(b) + \\ &\quad + C_2[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \sinh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Im(f_4(z, t)) &= -C_2[\cos(a + \omega t) + \sin(a + \omega t)] \cosh(b) \operatorname{csgn}(b + ia) + \\ &\quad + C_1[\cos(a + \omega t) - \sin(a + \omega t)] \sinh(b). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Hierin sind die Vorfaktoren C_1 und C_2 durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2\pi(a^2 + b^2)}} \\ C_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2\pi(a^2 + b^2)}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

gegeben. In Verbindung mit (3.37) gilt für den Ausdruck $\text{csgn}(b + ia)$ in (3.45) bis (3.60):

$$\text{csgn}(b + ia) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega < 0 \\ -1 & \text{falls } \omega > 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Daraus erkennt man, daß unabhängig von der Ordnung n der verwendeten Besselfunktionen lediglich die in den Funktionen $f_1(z, t)$ und $f_2(z, t)$ vorkommenden Kombinationen der Besselfunktion $J_n(z)$ und der Neumannfunktion $Y_n(z)$ mit den Zeitfunktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ für das vorliegende Problem physikalisch sinnvolle, vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende Wellen beschreiben. Die in den Funktionen $f_3(z, t)$ und $f_4(z, t)$ vorkommenden Kombinationen hingegen weisen in den trigonometrischen Funktionen Argumente auf, welche zum Lasteinleitungsort zurücklaufende Wellen beschreiben. Dies gilt allerdings nur für den Fall positiver Werte der Kreisfrequenz ω . Nimmt ω negative Werte an, so verhält es sich genau umgekehrt.

Damit lassen sich nun zwei verschiedene Zeitpunkte – wie z.B. $t = 0$ und $t = \frac{T}{4}$, so daß jeweils ein Lösungsanteil verschwindet – betrachten. Zu diesen Zeitpunkten sind dann jeweils die Lösungsfunktionen am Lochrand an die durch die Spannungen σ_r , $\tau_{r\psi}$ und τ_{rx} gegebenen Randbedingungen anzupassen, welche ebenfalls mit $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$ zeitveränderlich sind. Dieses Verfahren ist jedoch nicht nur umständlich, sondern es erfordert grundsätzlich die Auswertung beider Lösungsfunktionen und die Bestimmung aller sechs unbekanntenen Koeffizienten C_{in} .

Fundamentalsystem aus Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$

Einfachere Lösungen erhält man, wenn man die Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$ verwendet, welche ebenfalls ein Fundamentalsystem zur Lösung der in (3.29) angegebenen Besselgleichung darstellen und sich aus der Besselfunktion J_n und der Neumannfunktion Y_n herleiten (vgl. Anhang B.1).

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (3.63)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad (3.64)$$

Die Lösung der Besselschen Gleichung (3.29) ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \Phi(k_x, r, n) &= C_{1n}H_n^{(1)}(\alpha k_x r) + C_{4n}H_n^{(2)}(\alpha k_x r) \\ M_1'(k_x, r, n) &= C_{2n}H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) + C_{5n}H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) \\ M_2'(k_x, r, n) &= C_{3n}H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) + C_{6n}H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Im folgenden bezeichnen $a_1 = a - \omega t$ und $a_2 = a + \omega t$ die Argumente der Kosinus- bzw. der Sinusfunktionen für fort- respektive zurücklaufende Wellen. Multipliziert man die Hankelfunktionen mit den Zeitfunktionen $e^{i\omega t}$ resp. $e^{-i\omega t}$, so lassen sich nun abhängig von der Ordnung n der Hankelfunktionen folgende Fälle unterscheiden:

1. n gerade

$$H_n^{(1)} e^{i\omega t} = (\cosh b - \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_2 + \sin a_2) - i(\cos a_2 - \sin a_2)] - \\ & - C_2 [(\cos a_2 - \sin a_2) + i(\cos a_2 + \sin a_2)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.66)$$

$$H_n^{(2)} e^{i\omega t} = (\cosh b + \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_1 + \sin a_1) + i(\cos a_1 - \sin a_1)] + \\ & + C_2 [(\cos a_1 - \sin a_1) - i(\cos a_1 + \sin a_1)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.67)$$

$$H_n^{(1)} e^{-i\omega t} = (\cosh b - \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_1 + \sin a_1) - i(\cos a_1 - \sin a_1)] - \\ & - C_2 [(\cos a_1 - \sin a_1) + i(\cos a_1 + \sin a_1)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.68)$$

$$H_n^{(2)} e^{-i\omega t} = (\cosh b + \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_2 + \sin a_2) + i(\cos a_2 - \sin a_2)] + \\ & + C_2 [(\cos a_2 - \sin a_2) - i(\cos a_2 + \sin a_2)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.69)$$

2. n ungerade

$$H_n^{(1)} e^{i\omega t} = (\cosh b - \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_2 - \sin a_2) + i(\cos a_2 + \sin a_2)] + \\ & + C_2 [(\cos a_2 + \sin a_2) - i(\cos a_2 - \sin a_2)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.70)$$

$$H_n^{(2)} e^{i\omega t} = (\cosh b + \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_1 - \sin a_1) - i(\cos a_1 + \sin a_1)] - \\ & - C_2 [(\cos a_1 + \sin a_1) + i(\cos a_1 - \sin a_1)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.71)$$

$$H_n^{(1)} e^{-i\omega t} = (\cosh b - \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_1 - \sin a_1) + i(\cos a_1 + \sin a_1)] + \\ & + C_2 [(\cos a_1 + \sin a_1) - i(\cos a_1 - \sin a_1)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.72)$$

$$H_n^{(2)} e^{-i\omega t} = (\cosh b + \sinh b) \left[\begin{aligned} & C_1 [(\cos a_2 - \sin a_2) - i(\cos a_2 + \sin a_2)] - \\ & - C_2 [(\cos a_2 + \sin a_2) + i(\cos a_2 - \sin a_2)] \operatorname{csgn}(b + ia) \end{aligned} \right] \quad (3.73)$$

Dabei wird durch die vom Ort der Lasteinleitung weglaufernden Wellen die geometrische Dämpfung erfaßt. An dieser Stelle soll jedoch auch das Abklingen aufgrund der angesetzten Materialdämpfung untersucht werden. Dafür sind, wie obige Gleichungen zeigen, unabhängig von der Ordnung n der verwendeten Besselfunktionen lediglich die Terme $\cosh b - \sinh b$ bzw. $\cosh b + \sinh b$ verantwortlich². Allgemein lassen sich für die Betrachtung $|b| \rightarrow \infty$ infolge von $r \rightarrow \infty$ folgende Fälle unterscheiden:

$$\cosh b - \sinh b \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{falls } \omega < 0 \quad (b > 0) \\ \rightarrow \infty & \text{falls } \omega > 0 \quad (b < 0) \end{cases} \quad (3.74)$$

$$\cosh b + \sinh b \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{falls } \omega < 0 \quad (b > 0) \\ \rightarrow 0 & \text{falls } \omega > 0 \quad (b < 0) \end{cases} \quad (3.75)$$

²Das Argument der cosh- bzw. der sinh-Funktion ist der Imaginärteil b des Argumentes der entsprechenden Besselfunktionen. Dieser verschwindet im Falle von ungedämpftem Material, weshalb es sich hierbei um das Abklingen aufgrund der Materialdämpfung handelt.

Daraus wird ersichtlich, daß unabhängig von der Ordnung n nur die Lösungen $H_n^{(2)} e^{i\omega t}$ (3.67 und 3.71) sowie $H_n^{(1)} e^{-i\omega t}$ (3.68 und 3.72) abklingende Funktionen beschreiben. Dies sind auch die Funktionen, welche als Argument der Kosinus- bzw. der Sinusfunktion $a_1 = a - \omega t$ besitzen und damit vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende Wellen beschreiben. Bei den übrigen Funktionen lautet dieses Argument $a_2 = a + \omega t$; sie beschreiben damit für den vorliegenden Fall physikalisch nicht sinnvolle, zum Ort der Lasteinwirkung zurücklaufende Wellen.

Damit ist es nun möglich, abhängig vom Vorzeichen der Kreisfrequenz ω , lediglich eine Lösungsfunktion des in (3.65) gegebenen Fundamentalsystems zur Lösung der Besselschen Gleichungen (3.29) zu verwenden. Die Anzahl der unbekanntenen Koeffizienten C_{in} reduziert sich damit von sechs auf drei, so daß die unbekanntenen Koeffizienten leicht durch die Randbedingungen für die Spannungen σ_r , $\tau_{r\psi}$ und τ_{rx} am Lochrand bestimmt werden können. Auch hinsichtlich des numerischen Aufwandes ist diese Reduzierung der Unbekannten von großem Vorteil.

An dieser Stelle soll erwähnt werden, daß die mit diesen Lösungsfunktionen erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen Ergebnissen, welche mit der zu Beginn des Abschnittes 3.1.1 erläuterten Methode ermittelt wurden, im Rahmen von numerisch durchgeführten Vergleichsberechnungen bestätigt werden konnten.

Zum Zwecke einer größeren Anschaulichkeit im Sinne einer mechanischen Deutung der zu verwendenden Lösungsfunktionen soll im folgenden der Sonderfall eines ungedämpften Materials untersucht werden. Dann nehmen die Quadrate α^2 und β^2 der Argumente der Besselfunktionen rein reelle Werte an. Damit lassen sich drei Fälle unterscheiden: $\alpha^2 < 0$ und $\beta^2 < 0$, $\alpha^2 > 0$ und $\beta^2 > 0$ und $\alpha^2 < 0$ und $\beta^2 > 0$. Da die Longitudinalwellengeschwindigkeit c_p immer größere Werte annimmt als die Scherwellengeschwindigkeit c_s , nimmt β grundsätzlich größere Werte an als α ; ein vierter Fall existiert folglich nicht. Der Fall, daß $\alpha^2 < 0$ und $\beta^2 > 0$, ergibt sich dabei aus einer Kombination der in den folgenden beiden Abschnitten für die Fälle $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 < 0$ und $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$ hergeleiteten Lösungen und wird deshalb nicht gesondert behandelt.

Die Abbildung 3.6 zeigt mit Hilfe der Linien für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ die Grenzen der Bereiche mit unterschiedlichem Lösungsverhalten. Aufgrund der Betrachtung im bewegten Koordinatensystem sind diese Linien nicht symmetrisch bezüglich der ω -Achse. Für einen gegebenen Wert von ω gibt es in der Mitte einen Bereich, in welchem sowohl α^2 als auch β^2 positiv sind (kleine Werte von k_x), zwei Bereiche, in welchen sowohl α^2 als auch β^2 negativ sind (große Werte von k_x), sowie zwei Bereiche, in welchen α^2 negativ und β^2 positiv ist (vgl. [GRUNDMANN et al. 1991]).

3.2.2 Lösung der Bewegungsgleichung für reellwertige Größen $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 < 0$

Im allgemeinen Fall stellt (3.29) ein System von Besselgleichungen dar. Im Sonderfall, daß die Quadrate der Argumente reelle, negative Werte $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 < 0$ annehmen, ändern sich in (3.29) die Vorzeichen derart, daß die damit beschriebenen Besselgleichungen in Modifizierte Besselgleichungen übergehen. Ein Fundamentalsystem zur Lösung der Modifizierten Besselgleichung bilden die Modifizierte Besselfunktion I und die Macdonaldfunktion K . Somit ergibt sich die folgende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}\Phi(k_x, r, n) &= C_{1n} I_n(\alpha k_x r) &+ C_{4n} K_n(\alpha k_x r) \\ M_1'(k_x, r, n) &= C_{2n} I_{n-1}(\beta k_x r) &+ C_{5n} K_{n-1}(\beta k_x r) \\ M_2'(k_x, r, n) &= C_{3n} I_{n+1}(\beta k_x r) &+ C_{6n} K_{n+1}(\beta k_x r)\end{aligned}\tag{3.76}$$

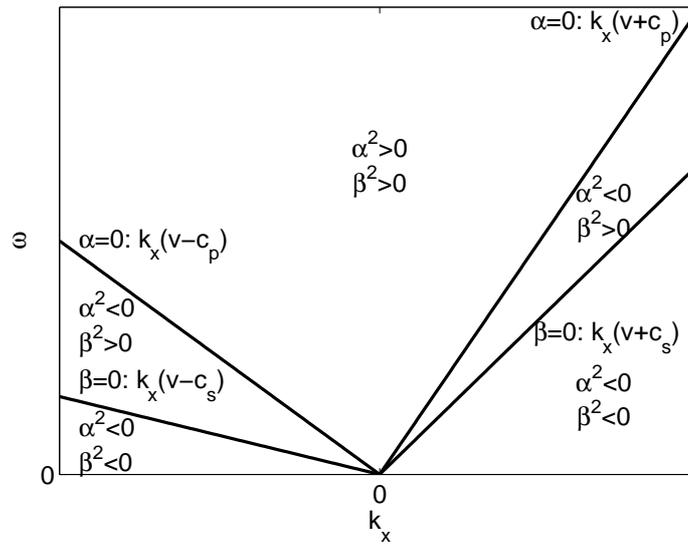


Abbildung 3.6: Vorzeichen von α^2 und β^2

Berücksichtigt man nun die im vorliegenden Fall zu erfüllenden Randbedingungen im Unendlichen, wonach nämlich die Lösungen mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort abklingen müssen, so kann das vorliegende Problem unter Beachtung der speziellen Eigenschaften der Lösungsfunktionen signifikant vereinfacht werden. Während die Modifizierten Besselfunktionen I monoton aufklingen, sind die Macdonaldfunktionen K monoton abklingende Funktionen. Damit sind die hier physikalisch sinnvollen Funktionen auf die Macdonaldfunktionen K beschränkt, was eine Reduzierung der insgesamt sechs Unbekannten C_{in} auf nur noch drei Unbekannte zur Folge hat. Diese lassen sich dann einfach mit Hilfe der drei Spannungsrandbedingungen für σ_r , $\tau_{r\psi}$ und τ_{rx} am Lochrand bestimmen.

Dies läßt auch eine anschauliche mechanische Deutung des Lösungsverhaltens zu: da es sich bei den Macdonaldfunktionen um monoton abklingende Funktionen handelt, beschreiben die Lösungen im untersuchten Fall $\alpha^2 < 0$, $\beta^2 < 0$ die Nahfeldlösungen, welche vom Ort der Lasteinleitung aus monoton abklingen. Es werden jedoch keine Wellen in das Kontinuum abgestrahlt. Die Geschwindigkeit des Abklingens ist dabei von der Ordnung n der Macdonaldfunktionen abhängig.

3.2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für reellwertige Größen $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$

In diesem Fall wird wieder das in (3.31) angegebene Fundamentalsystem aus Besselfunktionen $J_n(z)$ und Neumannfunktionen $Y_n(z)$ betrachtet. Um die geometrische Dämpfung zu erfassen, muß wieder die Abstrahlbedingung erfüllt werden, d.h. es sind wieder nur vom Ort der Lasteinleitung fortlaufende Wellen zu berücksichtigen. Zu diesem Zwecke werden wie in Abschnitt 3.2.1 verschiedene Kombinationen dieser Funktionen mit den Zeitfunktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ untersucht. Da für ungedämpftes Material der Imaginärteil b des Argumentes $z = a + ib$ in (3.45) bis (3.60) verschwindet, ergeben sich die Vorfaktoren C_1 und C_2 aus (3.61) zu (vgl. (3.41) bis

(3.44)):

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi z}}, \quad C_2 = 0. \quad (3.77)$$

Damit verschwindet in diesen Gleichungen jeweils der mit $\sinh b$ sowie der mit C_2 multiplizierte Anteil der dort eingeführten Funktionen $f_1(z, t)$ bis $f_4(z, t)$. Infolgedessen ergeben sich die Funktionen $f_1(z, t)$ bis $f_4(z, t)$ im hier betrachteten Fall zu:

$$1. \quad f_1(z, t) = J_n(z) \cos(\omega t) + Y_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$f_1(z, t) = C_1[\cos(z - \omega t) + \sin(z - \omega t)]$$

(b) n ungerade

$$f_1(z, t) = C_1[\cos(z - \omega t) - \sin(z - \omega t)]$$

$$2. \quad f_2(z, t) = Y_n(z) \cos(\omega t) - J_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$f_2(z, t) = -C_1[\cos(z - \omega t) - \sin(z - \omega t)]$$

(b) n ungerade

$$f_2(z, t) = C_1[\cos(z - \omega t) + \sin(z - \omega t)]$$

$$3. \quad f_3(z, t) = J_n(z) \cos(\omega t) - Y_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$f_3(z, t) = C_1[\cos(z + \omega t) + \sin(z + \omega t)]$$

(b) n ungerade

$$f_3(z, t) = C_1[\cos(z + \omega t) - \sin(z + \omega t)]$$

$$4. \quad f_4(z, t) = Y_n(z) \cos(\omega t) + J_n(z) \sin(\omega t)$$

(a) n gerade

$$f_4(z, t) = -C_1[\cos(z + \omega t) - \sin(z + \omega t)]$$

(b) n ungerade

$$f_4(z, t) = C_1[\cos(z + \omega t) + \sin(z + \omega t)].$$

Für positive Werte von ω handelt es sich bei den Kombinationen $f_1(z, t)$ und $f_2(z, t)$ wieder um Lösungen, welche die gesuchten fortlaufenden Wellen beschreiben, wohingegen die Kombinationen $f_3(z, t)$ und $f_4(z, t)$ im vorliegenden Fall zu verwerfen sind. Für negative Werte von ω verhält es sich genau umgekehrt.

Verwendet man als Fundamentalsystem für die in (3.29) angegebene Besselgleichung wieder die Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$ (Anhang B.1), so erhält man unter Annahme

positiver Werte von ω :

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z)e^{i\omega t} &= (J_n(z) + iY_n(z))(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = \\ &= \underbrace{J_n \cos(\omega t) - Y_n \sin(\omega t)}_{\text{3. Fall (zurücklaufend)}} + i \underbrace{(Y_n \cos(\omega t) + J_n \sin(\omega t))}_{\text{4. Fall (zurücklaufend)}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(z)e^{i\omega t} &= (J_n(z) - iY_n(z))(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = \\ &= \underbrace{J_n \cos(\omega t) + Y_n \sin(\omega t)}_{\text{1. Fall (fortlaufend)}} - i \underbrace{(Y_n \cos(\omega t) - J_n \sin(\omega t))}_{\text{2. Fall (fortlaufend)}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Unter Annahme negativer Werte von ω folgt sinngemäß:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z)e^{-i\omega t} &= (J_n(z) + iY_n(z))(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) = \\ &= \underbrace{J_n \cos(\omega t) + Y_n \sin(\omega t)}_{\text{1. Fall (fortlaufend)}} + i \underbrace{(Y_n \cos(\omega t) - J_n \sin(\omega t))}_{\text{2. Fall (fortlaufend)}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(z)e^{-i\omega t} &= (J_n(z) - iY_n(z))(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) = \\ &= \underbrace{J_n \cos(\omega t) - Y_n \sin(\omega t)}_{\text{3. Fall (zurücklaufend)}} - i \underbrace{(Y_n \cos(\omega t) + J_n \sin(\omega t))}_{\text{4. Fall (zurücklaufend)}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Hieraus ist erkennbar, daß wieder für den Fall positiver Werte von ω nur die Hankelfunktion 2. Art $H_n^{(2)}$ fortlaufende Wellen und die Hankelfunktion 1. Art $H_n^{(1)}$ nur zurücklaufende Wellen beschreibt. Im Fall negativer Werte von ω verhält es sich umgekehrt: in diesem Fall ist nur die Hankelfunktion 1. Art $H_n^{(1)}$ als Lösung zu verwenden, die Hankelfunktion 2. Art $H_n^{(2)}$ beschreibt nun zurücklaufende Wellen. Somit genügt es für die Lösung der in (3.29) angegebenen Besselgleichung, in Abhängigkeit des Vorzeichens von ω jeweils wieder nur eine Hankelfunktion zu verwenden. Die drei verbleibenden Unbekannten lassen sich nun wieder einfach durch die drei Spannungsrandbedingungen für σ_r , $\tau_{r\psi}$ und τ_{rx} am Lochrand bestimmen.

Die hier zu verwendenden Hankelfunktionen stellen dabei die Fernfeldlösungen dar, welche vom Ort der Lasteinleitung ausgehend in das Kontinuum abgestrahlte Wellen beschreiben.

3.2.4 Sonderfall der geradlinig bewegten, statischen Belastung

Ebenfalls für ungedämpftes Material soll abschließend noch der von Konrad [KONRAD 1985] untersuchte Sonderfall einer geradlinig mit der Geschwindigkeit v bewegten, statischen ($\Omega = 0$) Belastung untersucht werden. Für α^2 und β^2 ergibt sich dann:

$$\alpha^2 = \frac{v^2}{c_p^2} - 1, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{c_s^2} - 1. \quad (3.82)$$

Wie in Abschnitt 3.2.1 erläutert, nimmt β^2 immer größere Werte an als α^2 . Deshalb sind wieder nur die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

- $\alpha^2 < 0, \beta^2 < 0 \implies v < c_s < c_p$: unterkritisch (subsonic)
- $\alpha^2 < 0, \beta^2 > 0 \implies c_s < v < c_p$: transkritisch (transsonic)
- $\alpha^2 > 0, \beta^2 > 0 \implies c_s < c_p < v$: überkritisch (supersonic)

In der englischsprachigen Literatur werden zu dieser Einordnung die in Klammern angegebenen Begriffe verwendet (z.B. [KRYLOV 1998, ANDERSEN und NIELSEN 2005]).

Hier erkennt man am eindrucklichsten, welche physikalischen Phänomene einer von α^2 und β^2 abhängigen Änderung des Lösungsverhaltens zugrunde liegen. Je nachdem, ob die Geschwindigkeit der Last bzw. des Fahrzeuges kleiner bzw. größer als die Längswellengeschwindigkeit respektive die Scherwellengeschwindigkeit des untersuchten Mediums ist, ändert sich das Lösungsverhalten. So kommen im unterkritischen Bereich nur Nahfeldlösungen vor, d.h. es findet keine Wellenausbreitung in das unendliche Kontinuum statt. Es entsteht lediglich eine mitbewegte Einsenkungsmulde. Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, sind ausschließlich Macdonaldfunktionen als Lösungsfunktionen zu verwenden. Diesen Fall hat Konrad [KONRAD 1985] untersucht. Im Bereich überkritischer Lastgeschwindigkeiten kommen hingegen ausschließlich Fernfeldlösungen vor, die in das unendliche Kontinuum abgestrahlte Wellen beschreiben. Die hier zu verwendenden Lösungsfunktionen sind Abschnitt 3.2.3 zu entnehmen. Im dazwischen liegenden transkritischen Bereich kommen sowohl Nah- als auch Fernfeldlösungen vor. Damit ist das Lösungsverhalten grundsätzlich dem für den Halbraum ähnlich, bei welchem entweder Oberflächen- oder Raumwellen bzw. im transkritischen Bereich beide Wellenarten angeregt werden. Eine anschauliche Darstellung der Impedanzfunktion für einen auf seiner Oberfläche belasteten Halbraum mit Kennzeichnung dieser drei Lösungsbereiche ist z.B. bei [GUGGENBERGER und MÜLLER 2004] zu finden.

3.3 Berechnung der Zustandsgrößen im Vollraum mit zylindrischem Hohlraum

Hat man mit Hilfe einer der oben dargestellten Methoden eine Lösung der vorliegenden Besselgleichung (3.29) gefunden, welche die vorgegebenen physikalischen Randbedingungen befriedigt, so kann man mit den in (3.31), (3.65) oder (3.76) gegebenen Lösungen die Potentiale Φ , M'_1 und M'_2 berechnen. Sind diese Lösungen bekannt, so lassen sich an jeder beliebigen Stelle im Kontinuum in Abhängigkeit der unbekanntenen Koeffizienten

$$\mathbf{c}_n = \{C_{1n} C_{2n} C_{3n}\}^T \quad (3.83)$$

alle Spannungen und Verschiebungen

$$\mathbf{s} = \left\{ u_r \ u_\psi \ u_z \ \frac{\sigma_{rr}}{2\mu} \ \frac{\sigma_{\psi\psi}}{2\mu} \ \frac{\sigma_{xx}}{2\mu} \ \frac{\sigma_{r\psi}}{2\mu} \ \frac{\sigma_{rx}}{2\mu} \ \frac{\sigma_{\psi x}}{2\mu} \right\}^T \quad (3.84)$$

ermitteln in der Form

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}(r, n, k_x, v, \omega) \mathbf{c}_n. \quad (3.85)$$

Die Division der Spannungen durch 2μ in (3.84) dient dabei lediglich einer besseren Konditionierung des Gleichungssystems.

Mit einer Untermatrix $\mathbf{H}_\sigma^{\Gamma S}$ von \mathbf{H} gemäß (3.85) können nun die unbekannt Koeffizienten \mathbf{c}_n für einen beliebigen gegebenen Lastzustand

$$\mathbf{p} = \{p_{rr} \ p_{r\psi} \ p_{rx}\}^T \quad (3.86)$$

am Lochrand ermittelt werden:

$$\mathbf{c}_n = (\mathbf{H}_\sigma^{\Gamma S})^{-1} \mathbf{p}. \quad (3.87)$$

Hat man die unbekannt Koeffizienten \mathbf{c}_n mit Hilfe der Randbedingungen an der Stelle $r = a$ am Lochrand berechnet, so kann man an jeder beliebigen Stelle r im Vollraum alle Zustandsgrößen ermitteln, welche aus dem auf dem Lochrand herrschenden Spannungszustand resultieren.

Für das Fundamentalsystem aus Modifizierten Besselfunktionen $I_n(z)$ und Macdonaldfunktionen $K_n(z)$ gemäß Gleichung (3.76) sind alle Elemente der Matrix \mathbf{H} bei [KONRAD 1985] angegeben, wobei lediglich die Geschwindigkeit c durch $\bar{c} = v - \frac{\Omega}{k_x}$ zu ersetzen ist. Der Vollständigkeit halber sind sie auch im Anhang C.1 dieser Arbeit aufgeführt. Für das Fundamentalsystem aus Besselfunktionen $J_n(z)$ und Neumannfunktionen $Y_n(z)$ gemäß Gleichung (3.31) sind alle Elemente der Matrix \mathbf{H} im Anhang C.2 angegeben. Im Anhang C.3 findet man ebenso alle Elemente der Matrix \mathbf{H} für das in Gleichung (3.65) angegebene Fundamentalsystem aus Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}(z)$ und Hankelfunktionen 2. Art $H_n^{(2)}(z)$.

Kapitel 4

Der Halbraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurden die Situationen eines Halbraumes ohne Hohlraum sowie eines Vollraumes mit zylindrischem Hohlraum behandelt. Dem eigentlichen Problem der Berechnung eines oberflächennahen Tunnels unter dynamischer Belastung liegt jedoch die geometrische Situation des Halbraumes mit der Tunnelstruktur zugrunde. Dazu wird in diesem Kapitel das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* untersucht. Hierbei kann die zylindrische Berandung entweder die reale Berandung zu einer mit Hilfe der FEM modellierten Tunnelschale oder – wie in Abbildung 4.1 – lediglich eine fiktive Berandung zum anschließenden FEM-Netz darstellen.

Da es, wie eingangs erläutert, für dieses Problem keine geschlossene Lösung gibt, wird es durch eine Superposition der in Kapitel 2 hergeleiteten Lösung für das System *Halbraum ohne Hohlraum* und der in Kapitel 3 hergeleiteten Lösung für das System *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* beschrieben. Die zweifache Anwendung der Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega$) erlaubt es hierbei, lediglich eine Folge von wellenzahlabhängigen, ebenen Problemen in der (y, z) -Ebene zu betrachten. Das Ziel dieses Vorgehens ist es, das dynamische Verhalten dieses Systems vollständig durch eine Nachgiebigkeitsbeziehung am – realen oder fiktiven – Rand Γ_S als einzelne Substruktur abzubilden. Damit kann das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* anschließend im Rahmen der Substrukturtechnik mit der Steifigkeitsmatrix des innenliegenden FEM-Gebietes durch ein das gesamte System einschließlich des Tunnels beschreibendes Gleichungssystem erfaßt werden.

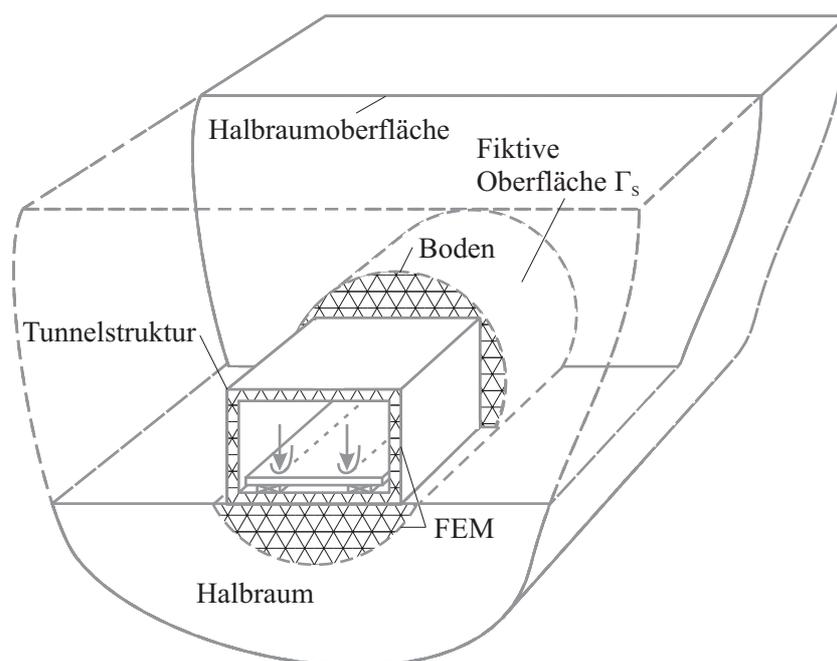


Abbildung 4.1: Halbraum mit einer fiktiven zylindrischen Oberfläche Γ_S , an welcher später der Kontakt zu dem innenliegenden FEM-Gebiet (welches hier einen Tunnel mit rechteckigem Querschnitt und einen Teil des umgebenden Bodens umfaßt) beschrieben wird

4.1 Superposition der Lösungen für das System des Halbraumes und das System des Vollraumes mit zylindrischem Hohlraum

Um nun eine Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* zu erhalten, wird die Lösung des Teilsystems *Halbraum ohne Hohlraum* mit der Lösung des Teilsystems *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* in geeigneter Weise überlagert.

Dazu werden gedachte, unbekannte Spannungen auf der Halbraumoberfläche $z = 0$ und auf dem Lochrand $r = a$ aufgebracht. Eine Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* unter dynamischer Belastung erhält man nun durch Einführung der für dieses System geltenden Randbedingungen an der Halbraumoberfläche $z = 0$ sowie am Lochrand $r = a$.

Hierzu sind zuerst die Spannungen im Vollraum an der dort einzuführenden Halbraumoberfläche und im Halbraum am dort einzuführenden zylindrischen Lochrand zu ermitteln. Anschließend sind die Randbedingungen zu formulieren.

4.1.1 Ermittlung der Zustandsgrößen und Formulierung der Randbedingungen

Die in Kapitel 2 dargestellten Lösungen für den Halbraum erlauben es, für einen gedachten Spannungszustand σ_{zz} , σ_{zy} und σ_{zx} an der Halbraumoberfläche oder an einer Schichtgrenze im geschichteten Halbraum alle Zustandsgrößen an jeder beliebigen Stelle innerhalb des Halbraums zu ermitteln. Im besonderen gilt dies für die Spannungen und Verschiebungen am gedachten Rand Γ_S des fiktiven zylindrischen Hohlraums. In Abbildung 4.2 ist diese Situation für den Fall eines an der Halbraumoberfläche angesetzten Spannungszustandes σ_{zz} dargestellt.

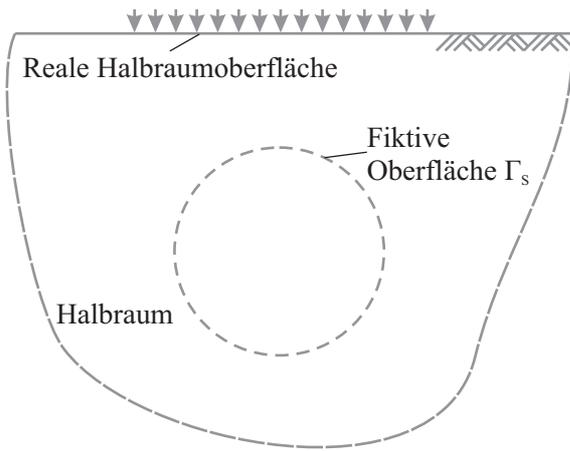


Abbildung 4.2: Auf seiner Oberfläche belasteter Halbraum mit fiktiver zylindrischer Oberfläche Γ_S

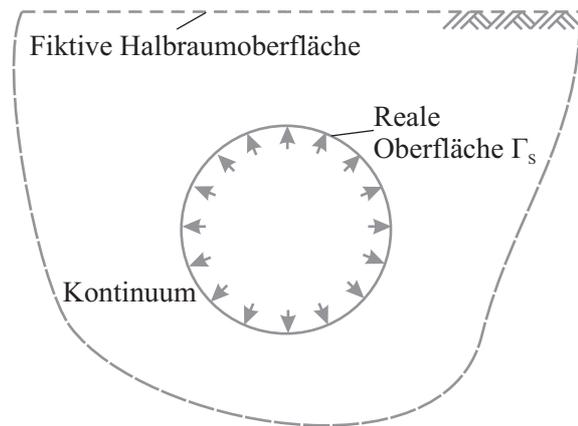


Abbildung 4.3: Auf der realen zylindrischen Oberfläche Γ_S belasteter Vollraum mit fiktiver Halbraumoberfläche

Ebenso ist es unter Verwendung der in Kapitel 3 für den Vollraum mit zylindrischem Hohlraum hergeleiteten Lösungen möglich, die Zustandsgrößen zu ermitteln, welche sich infolge eines gedachten Spannungszustandes σ_{rr} , $\sigma_{r\psi}$ und σ_{rx} am Lochrand an einer beliebigen Stelle innerhalb des Kontinuums ergeben. Dies gilt im besonderen wiederum für die Spannungen und Verschiebungen auf der gedachten Halbraumoberfläche $z = 0$. In Abbildung 4.3 ist diese Situation für den Fall eines am Lochrand angesetzten Spannungszustandes σ_{rr} dargestellt.

Nun werden gedachte, unbekannte Spannungen $[\sigma_m^s]$ an der Halbraumoberfläche $z = 0$ und $[\sigma_n^h]$ am Lochrand $r = a$ aufgebracht. An der Halbraumoberfläche sind die Randbedingungen durch die Forderung gegeben, daß alle dort freigeschnittenen Spannungen verschwinden müssen. Analog sind die Randbedingungen an der Oberfläche des zylindrischen Hohlraumes durch das Vorhandensein eines äußeren Lastzustandes $[\sigma_n^p]$ gegeben. Eine Möglichkeit, sowohl die Randbedingungen an der Halbraumoberfläche als auch diejenigen an der Oberfläche des zylindrischen Hohlraumes zu erfüllen, besteht in einem iterativen Prozeß. Für Probleme unter dynamischer Belastung ist ein solcher jedoch nicht nur aufwendig, sondern er birgt eventuell auch die Gefahr einer schlechten Konvergenz, da ein aufgebrachter Zustand vielleicht Beiträge hervorruft, welche im untersuchten Fall irrelevant sind.

Ein weitaus eleganteres Vorgehen auf der Basis der Fourierreihenentwicklung bzw. der numerischen (diskreten) Fouriertransformation erlaubt es jedoch, implizit eine geschlossene Lösung

zu erhalten. Für den zweidimensionalen Fall des Systems *Halbscheibe mit Loch* unter statischer Belastung ist dieser Ansatz in [BUCHSCHMID 2002] zu finden.

Hierbei werden alle Spannungen an der Halbraumoberfläche durch die Koeffizienten ihrer numerischen Fourierintegrale beschrieben, neben den Spannungen aus den dort angesetzten Lastzuständen $[\sigma_m^s]$ auch die Spannungen $[\sigma_{mn}^{sh}]$, welche sich infolge der am Lochrand angesetzten Lastzustände $[\sigma_n^h]$ an der Halbraumoberfläche ergeben.

Auf analoge Weise werden am zylindrischen Lochrand neben den Spannungen $[\sigma_n^h]$ aus den einzelnen am Lochrand aufgebrauchten Spannungszuständen auch die Spannungen $[\sigma_{nm}^{hs}]$, welche sich infolge der auf der Halbraumoberfläche aufgebrauchten Spannungszustände $[\sigma_m^s]$ am Lochrand ergeben, einer Fourierreihenentwicklung unterzogen.

Dabei bezeichnet n im Rahmen der Entwicklung der Spannungen am Lochrand in eine Fourierreihe das zugehörige Reihenglied. Im Rahmen der Beschreibung der Spannungen an der Halbraumoberfläche durch die Koeffizienten ihrer numerischen Fourierintegrale besteht zwischen den Wellenzahlen k_y und m der Zusammenhang $k_y = \frac{2\pi m}{B}$. Hierin bezeichnet B den Wiederholabstand des Lastbildes, welcher sich im Rahmen der diskreten Fouriertransformation ergibt.

Mit dem gezeigten Vorgehen läßt sich ebenso der Fall behandeln, daß der Boden oberhalb und unterhalb des Tunnels eine Schichtung aufweist. Dann sind neben den Randbedingungen an der Halbraumoberfläche zusätzlich die Übergangsbedingungen an den Schichtgrenzen einzuhalten. Lediglich die Berücksichtigung einer Schichtung im Bereich des Tunnels erfordert weiteren Aufwand.

Grundsätzlich ist es hierzu sinnvoll, alle Spannungen an der Halbraumoberfläche in kartesischen Koordinaten (σ_{zz} , σ_{zy} und σ_{zx}) und alle Spannungen am Lochrand in Polarkoordinaten (σ_{rr} , $\sigma_{r\psi}$ und σ_{rx}) auszudrücken.

4.1.2 Transformation der Spannungen

Die Transformationsbeziehungen zwischen den Spannungen in kartesischen Koordinaten und den Spannungen in Polarkoordinaten erhält man, indem man die Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element aufstellt.

Ermittlung der Spannungen in Polarkoordinaten aus den Spannungen in kartesischen Koordinaten

Wie man anhand der Abbildung 4.4 leicht nachvollziehen kann, erhält man am Element in der (y, z) -Ebene folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} dr &= \sigma_{zz} \cos \psi dr \cos \psi - \sigma_{zy} \sin \psi dr \cos \psi - \sigma_{yz} \cos \psi dr \sin \psi + \sigma_{yy} \sin \psi dr \sin \psi = \\ &= dr [\sigma_{zz} \cos^2 \psi + \sigma_{yy} \sin^2 \psi - (\sigma_{zy} + \sigma_{yz}) \sin \psi \cos \psi] \\ \sigma_{r\psi} dr &= -\sigma_{zz} \sin \psi dr \cos \psi - \sigma_{zy} \cos \psi dr \cos \psi + \sigma_{yz} \sin \psi dr \sin \psi + \sigma_{yy} \cos \psi dr \sin \psi = \\ &= dr [(-\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \sin \psi \cos \psi - \sigma_{zy} \cos^2 \psi + \sigma_{yz} \sin^2 \psi]. \end{aligned}$$

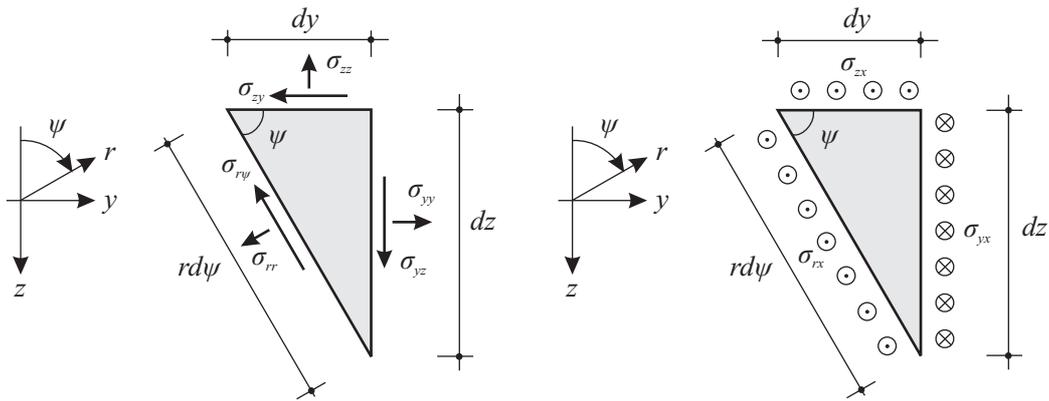


Abbildung 4.4: Spannungen am Element in Elementebene (links) und senkrecht dazu (rechts)

Daraus folgen die bekannten Beziehungen für den ebenen Zustand:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\psi} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zy} \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad [T] = \begin{bmatrix} \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & -\sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi - \cos^2 \psi \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Diese sind im vorliegenden Fall noch um die Beziehungen für die Längsrichtung zu ergänzen:

$$\sigma_{rx} dr = \sigma_{yx} dr \sin \psi - \sigma_{zx} dr \cos \psi. \quad (4.2)$$

Es folgt:

$$\sigma_{rx} = \sigma_{yx} \sin \psi - \sigma_{zx} \cos \psi. \quad (4.3)$$

Ermittlung der Spannungen in kartesischen Koordinaten aus den Spannungen in Polarkoordinaten

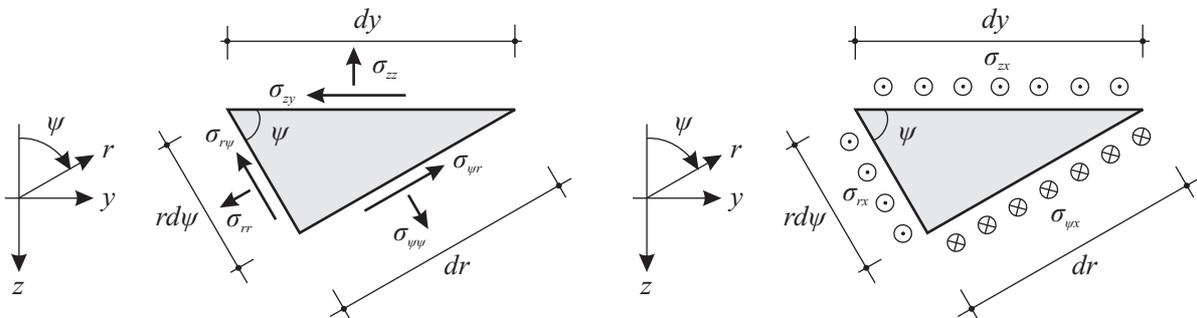


Abbildung 4.5: Spannungen am Element in Elementebene (links) und senkrecht dazu (rechts)

Mit Hilfe der Abbildung 4.5 lassen sich am Element in der (y, z) -Ebene folgende Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}dy &= \sigma_{rr} \cos \psi dy \cos \psi - \sigma_{r\psi} \sin \psi dy \cos \psi - \sigma_{\psi r} \cos \psi dy \sin \psi + \sigma_{\psi\psi} \sin \psi dy \sin \psi = \\ &= dy [\sigma_{rr} \cos^2 \psi + \sigma_{\psi\psi} \sin^2 \psi - 2\sigma_{r\psi} \sin \psi \cos \psi] \\ \sigma_{zy}dy &= \sigma_{rr} \sin \psi dy \cos \psi + \sigma_{r\psi} \cos \psi dy \cos \psi - \sigma_{\psi r} \sin \psi dy \sin \psi - \sigma_{\psi\psi} \cos \psi dy \sin \psi = \\ &= dy [\sigma_{rr} \sin \psi \cos \psi - \sigma_{\psi\psi} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{r\psi} \cos^2 \psi - \sigma_{\psi r} \sin^2 \psi].\end{aligned}$$

Es ergeben sich wieder die bekannten Beziehungen für den ebenen Zustand:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz} \\ \sigma_{zy} \end{array} \right\} = [\tilde{T}] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\psi\psi} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\psi} \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad [\tilde{T}] = \begin{bmatrix} \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -2 \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & -\sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi - \cos^2 \psi \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Beziehungen für die Längsrichtung lauten in diesem Fall

$$\sigma_{zx}dy = \sigma_{\psi x}dy \sin \psi - \sigma_{rx}dy \cos \psi, \quad (4.5)$$

woraus folgt:

$$\sigma_{rx} = \sigma_{yx} \sin \psi - \sigma_{zx} \cos \psi. \quad (4.6)$$

4.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

Nun werden die Gleichgewichtsbedingungen an der Halbraumboberfläche ($z = 0$) in kartesischen Koordinaten, diejenigen am Lochrand ($r = a$) in Polarkoordinaten formuliert.

Herrscht am Lochrand infolge einer gegebenen äußeren Belastung ein Spannungszustand $[\sigma_n^p]$, so lassen sich die unbekanntenen Spannungszustände unter Berücksichtigung der Bedingung ermitteln, daß auf der Oberfläche des Halbraumes alle Spannungen verschwinden müssen. Auf dem Lochrand muß außerdem der äußere Lastzustand vorhanden sein. Diese Bedingung gilt für alle Wellenzahlen $k_y = \frac{2\pi m}{B}$ der numerischen Fourierintegrale auf der Halbraumboberfläche sowie für alle Fourierreihenglieder n auf dem Lochrand.

Im folgenden wird mit m_{max} und n_{max} das jeweils höchste Reihenglied bezeichnet. Betrachtet man den symmetrischen Lastfall gemäß Tabelle 3.1, so sind unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die nullten Glieder der Sinusreihe entfallen, die Gleichgewichtsbedingungen auf der Halbraumboberfläche durch $3m_{max} + 2$ Gleichungen gegeben; im antimetrischen Lastfall erhält man $3m_{max} + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{4}{B} \int_0^{B/2} \sum_n [\sigma_{zz}^m C_{zz}^m + \sigma_{zz}^n C_{rr}^n + \sigma_{zz}^n C_{r\psi}^n + \sigma_{zz}^n C_{rx}^n] \cos\left(\frac{2\pi m}{B}y\right) dy &= 0 \\ \frac{4}{B} \int_0^{B/2} \sum_n [\sigma_{zx}^m C_{zx}^m + \sigma_{zx}^n C_{rr}^n + \sigma_{zx}^n C_{r\psi}^n + \sigma_{zx}^n C_{rx}^n] \cos\left(\frac{2\pi m}{B}y\right) dy &= 0 \\ \frac{4}{B} \int_0^{B/2} \sum_n [\sigma_{zy}^m C_{zy}^m + \sigma_{zy}^n C_{rr}^n + \sigma_{zy}^n C_{r\psi}^n + \sigma_{zy}^n C_{rx}^n] \sin\left(\frac{2\pi m}{B}y\right) dy &= 0.\end{aligned} \quad (4.7)$$

Analog sind die Gleichgewichtsbedingungen am zylindrischen Lochrand Γ_S im symmetrischen Lastfall durch $3n_{max}+2$ Gleichungen und im antimetrischen Lastfall durch $3n_{max}+1$ Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_m [\sigma_{rr}^m C_{zz}^m + \sigma_{rr}^m C_{zx}^m + \sigma_{rr}^m C_{zy}^m + \sigma_{rr}^n C_{rr}^n] \cos(n\psi) d\psi &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_{rr}(\psi) \cos(n\psi) d\psi \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_m [\sigma_{r\psi}^m C_{zz}^m + \sigma_{r\psi}^m C_{zx}^m + \sigma_{r\psi}^m C_{zy}^m + \sigma_{r\psi}^n C_{r\psi}^n] \sin(n\psi) d\psi &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_{r\psi}(\psi) \sin(n\psi) d\psi \quad (4.8) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_m [\sigma_{rx}^m C_{zz}^m + \sigma_{rx}^m C_{zx}^m + \sigma_{rx}^m C_{zy}^m + \sigma_{rx}^n C_{rx}^n] \cos(n\psi) d\psi &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_{rx}(\psi) \cos(n\psi) d\psi. \end{aligned}$$

Darin sind C_{zs}^m die Koeffizienten der an der Halbraumoberfläche und C_{rh}^n die Koeffizienten der am Lochrand aufgetragenen Spannungszustände.

In Matrizenform lassen sich die Bedingungen wie folgt formulieren:

$$\begin{bmatrix} [\sigma_m^s] & [\sigma_{mn}^{sh}] \\ [\sigma_{nm}^{hs}] & [\sigma_n^h] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_s^m] \\ [C_h^n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [\sigma_n^p] \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Hieraus kann man für einen beliebigen Lastzustand – hier nur gezeigt für einen äußeren Lastzustand auf der Oberfläche des zylindrischen Hohlraumes – alle unbekannt Koeffizienten $[C_h^n]$ der gedachten Spannungszustände auf dem Lochrand sowie die Koeffizienten $[C_s^m]$ der gedachten Spannungszustände auf der Halbraumoberfläche ermitteln. Sind diese bekannt, so lassen sich hiermit alle Zustandsgrößen an jeder beliebigen Stelle im Halbraum mit einem zylindrischen Hohlraum berechnen, im besonderen die Verschiebungen auf dem Lochrand infolge der dort angreifenden Spannungszustände. Liegen diese Zustandsgrößen vor, so ist es unter Beachtung des Parsevalschen Satzes möglich, für den Halbraum mit einem zylindrischen Hohlraum eine Matrix zu ermitteln, welche das Antwortverhalten des Systems infolge von Lastzuständen auf dem Lochrand beschreibt. Dieses Vorgehen wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

4.2 Kraft-Verformungsverhalten am zylindrischen Rand Γ_S

Die unbekannt, in radialer, tangentialer sowie longitudinaler Richtung am zylindrischen Rand Γ_S angreifenden Zwangskräfte werden in eine Fourierreihe mit $N_1 = 3n_{max} + 2$ (für den symmetrischen Lastfall gemäß Tabelle 3.1) Spannungszuständen entwickelt.

$$p_{\Gamma_S} = \sum_1^{N_1} C^n p_n(\Gamma_S) \quad (4.10)$$

Wie Zirwas [ZIRWAS 1996] zeigt, hat es sich im Hinblick auf die im Rahmen der späteren FEM-Implementierung zu verwendenden Freiheitsgrade als überaus vorteilhaft herausgestellt, als Freiheitsgrade für das Gesamtsystem deren N_1 Ansatzkoeffizienten C^n als generalisierte Freiheitsgrade zu verwenden. Damit lassen sich auch die Verschiebungen $\mathbf{u}(\Gamma_S)$ und die Spannungen

$\mathbf{t}(\Gamma_S) = \sigma(\Gamma_S) \mathbf{n}$ mit dem Normalenvektor \mathbf{n} am Lochrand Γ_S durch eine Linearkombination mit den Ansatzkoeffizienten C^m ausdrücken.

$$\mathbf{u}(\Gamma_S) = \sum_1^{N_1} C^k u_k(\Gamma_S) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{t}(\Gamma_S) = \sum_1^{N_1} C^l t_l(\Gamma_S) \quad (4.12)$$

Diese k Verschiebungsfelder u_k dienen hierbei als neue Basis, wodurch die Zustandsgrößen auf einen der Art des vorliegenden Problems und der vorkommenden Lastfälle angepaßten diskreten Vektorunterraum beschränkt werden.

Im Gegensatz zu dem von Zirwas [ZIRWAS 1996] behandelten Fall der *Halbebene* wird jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Situation des *Halbraums mit zylindrischem Hohlraum* untersucht. Bei der Herleitung eines das Verhalten des umgebenden Halbraums beschreibenden Arbeitsausdrucks ist folglich dessen dreidimensionaler Ausdehnung Rechnung zu tragen. Bei der Bildung des Arbeitsausdrucks ist folglich nicht nur über die Fläche in der (y, z) -Ebene, sondern über das gesamte Volumen zu integrieren. Dieses Integral läßt sich jedoch in das Integral über die Fläche in der (y, z) -Ebene und ein zusätzliches Integral über die Längsrichtung x aufspalten:

$$\delta U_\infty = \int \delta \epsilon \boldsymbol{\sigma} dV = \int \int \delta \epsilon \boldsymbol{\sigma} dA dx. \quad (4.13)$$

In diesem Zusammenhang soll jedoch nochmals darauf hingewiesen werden, daß die Anwendung der Integraltransformationemethode eine erhebliche Reduzierung des numerischen Aufwandes zur Folge hat: durch die zweifache Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega$) wird das tatsächlich dreidimensionale Problem auf eine Serie von ebenen Problemen im Wellenzahl-Frequenzraum reduziert. Um diesen Vorteil zu erhalten und das Integral bezüglich der Längsrichtung nicht im Originalraum ausführen zu müssen, ist eine gleichwertige Formulierung dieses Integrals im Wellenzahlraum zweckmäßig.

Dies kann wie in [PRIESTLEY 1981, GRUNDMANN und WAUBKE 1992] gezeigt mit Hilfe des Parsevalschen Satzes erreicht werden. Damit kann das Volumenintegral aus (4.13) auf das Integral über die Fläche in der (y, z) -Ebene und ein zusätzliches Integral über die Wellenzahlen k_x reduziert werden. Der Parsevalsche Satz besagt für die zwei Funktionen $\delta \mathbf{u}(x)$ und $\mathbf{t}(x)$, welche an dieser Stelle nur bezüglich ihrer Abhängigkeit von der x -Koordinate betrachtet werden, daß der folgende Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}(x) \mathbf{t}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}(x) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{t}}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}(x) e^{ik_x x} dx \right] \hat{\mathbf{t}}(k_x) dk_x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}(x) e^{-i(-k_x)x} dx \right] \hat{\mathbf{t}}(k_x) dk_x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \hat{\mathbf{u}}(-k_x) \hat{\mathbf{t}}(k_x) dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \hat{\mathbf{u}}(k_x) \hat{\mathbf{t}}(-k_x) dk_x. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Arbeitsausdruck (4.13) kann folglich unter Verwendung des Parsevalschen Theorems im fouriertransformierten (k_x, y, z, ω) -Raum für eine Serie von ebenen Problemen in der (y, z) -Ebene in Abhängigkeit von den Wellenzahlen k_x formuliert werden.

Treten keine Volumenkräfte auf, so kann das innere Potential aufgrund der durch das Gleichgewicht gegebenen Gleichheit der Variation des inneren Potentials und der virtuellen äußeren Arbeiten $\delta U^\infty = \delta W_{ext}$ mit Hilfe der virtuellen äußeren Arbeiten auf der Oberfläche des zylindrischen Randes Γ_S bestimmt werden. Damit vereinfacht sich das Integral über die Fläche in der (y, z) -Ebene gemäß (4.13) zu einem Integral über den Rand Γ_S des Zylinders. Variiert man nun die Arbeiten der Spannungsverteilungen am Lochrand Γ_S , so läßt sich diese Variation in Abhängigkeit von den generalisierten Freiheitsgraden δC^k auf der Berandung Γ_S angeben.

$$\begin{aligned}
\delta U^\infty(k_x) &= \int_{\Gamma_S} \delta \mathbf{u}(-k_x) \mathbf{t}(k_x) d\Gamma_S = \\
&= \int_{\Gamma_S} \delta C^k(-k_x) \frac{\partial \mathbf{u}(-k_x)}{\partial C^k(-k_x)} \frac{\partial \mathbf{t}(k_x)}{\partial C^l(k_x)} C^l(k_x) d\Gamma_S = \\
&= \delta C^k(-k_x) \int_{\Gamma_S} u_k(-k_x) t_l(k_x) d\Gamma_S C^l(k_x) = \\
&=: \delta C^k(-k_x) N_{kl}^\infty C^l(k_x)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dabei bezeichnet N_{kl}^∞ die Elemente einer das Kraft-Verformungsverhalten des Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* am zylindrischen Rand Γ_S charakterisierenden Matrix. Diese vermag das Kraft-Verformungsverhalten des Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* für alle Lastfälle zu beschreiben, welche sich mit der berücksichtigten Anzahl der Reihenglieder abbilden lassen. Mit \mathbf{c}_n als dem Vektor der Freiheitsgrade C^k bzw. C^l lautet der Zusammenhang 4.16 in symbolischer Notation :

$$\delta U^\infty(k_x) = \delta \mathbf{c}_n(-k_x) \mathbf{N}^\infty \mathbf{c}_n(k_x) \tag{4.16}$$

Für den symmetrischen Lastfall gemäß Tabelle 3.1 besitzt die Matrix \mathbf{N}^∞ folgendes Aussehen:

$$\mathbf{N}^\infty = \begin{bmatrix} \int \sigma_{rr}^0 u_r^{r0} & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{r1} & \dots & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{rn} & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{\psi n} & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{x0} & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{x1} & \dots & \int \sigma_{rr}^0 u_r^{xn} \\ \int \sigma_{rr}^1 u_r^{r0} & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{r1} & \dots & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{rn} & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{\psi n} & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{x0} & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{x1} & \dots & \int \sigma_{rr}^1 u_r^{xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \sigma_{rr}^n u_r^{r0} & \int \sigma_{rr}^n u_r^{r1} & \dots & \int \sigma_{rr}^n u_r^{rn} & \int \sigma_{rr}^n u_r^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rr}^n u_r^{\psi n} & \int \sigma_{rr}^n u_r^{x0} & \int \sigma_{rr}^n u_r^{x1} & \dots & \int \sigma_{rr}^n u_r^{xn} \\ \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{r0} & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{r1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{rn} & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{\psi n} & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{x0} & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{x1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^1 u_\psi^{xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{r0} & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{r1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{rn} & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{\psi n} & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{x0} & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{x1} & \dots & \int \sigma_{r\psi}^n u_\psi^{xn} \\ \int \sigma_{rx}^0 u_x^{r0} & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{r1} & \dots & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{rn} & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{\psi n} & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{x0} & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{x1} & \dots & \int \sigma_{rx}^0 u_x^{xn} \\ \int \sigma_{rx}^1 u_x^{r0} & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{r1} & \dots & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{rn} & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{\psi n} & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{x0} & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{x1} & \dots & \int \sigma_{rx}^1 u_x^{xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \sigma_{rx}^n u_x^{r0} & \int \sigma_{rx}^n u_x^{r1} & \dots & \int \sigma_{rx}^n u_x^{rn} & \int \sigma_{rx}^n u_x^{\psi1} & \dots & \int \sigma_{rx}^n u_x^{\psi n} & \int \sigma_{rx}^n u_x^{x0} & \int \sigma_{rx}^n u_x^{x1} & \dots & \int \sigma_{rx}^n u_x^{xn} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Hierin sind $\sigma_{r_i}^n$ die Spannungen und u_j^{in} ($i = r, \psi, x; j = r, \psi, x$) die Verschiebungen am Rand Γ_S infolge der $N_1 = 3n_{max} + 2$ Spannungszustände.

Kapitel 5

Finite-Elemente-Methode im fouriertransformierten Raum

Wie bereits erwähnt, besitzt der Tunnel im Gegensatz zum umgebenden Boden unterschiedliche Charakteristika für die verschiedenen Koordinatenrichtungen. Sofern nicht besondere, in einem Kurvenbereich auftretende Phänomene untersucht werden sollen, kann der Tunnelquerschnitt als konstant in Längsrichtung angesehen werden. Der Tunnel zeichnet sich dann durch eine unendliche Erstreckung in der Längsrichtung x und einen Querschnitt mit endlichen Abmessungen in horizontaler y - und vertikaler z -Richtung aus. Entsprechend ist bezüglich der Längsrichtung x eine Beschreibung mit Hilfe von Integraltransformationen möglich. In der Querschnittsebene ist jedoch eine Diskretisierung der Struktur mit ihren endlichen Abmessungen notwendig. Dazu ist zweifelsfrei die Finite-Elemente-Methode (FEM) die am besten geeignete Methode. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb – wie in Abbildung 4.1 dargestellt – die FEM zur Modellierung der Tunnelstruktur sowie eventuell auch eines Teiles des umgebenden Bodens herangezogen. Dadurch lassen sich nicht nur beliebige Tunnelgeometrien abbilden, sondern es kann auch einer im Zuge der Bauausführung erzeugten Störung des Bodens in der direkten Umgebung des Tunnels Rechnung getragen werden.

Aufgrund der Behandlung des Problems im fouriertransformierten Raum ($x \circ \rightarrow \bullet k_x$) genügt es, zugehörig zu den verschiedenen Wellenzahlen k_x ebene Zustände zu betrachten. Eine Diskretisierung im Sinne der Finiten Elemente ist folglich nur in der Querschnittsebene (y, z) erforderlich. Dies hat eine signifikante Reduzierung des Berechnungsaufwandes zur Folge, da jeder Zustand nur für eine feste Wellenzahl k_x berechnet werden muß und das dreidimensionale Problem dadurch auf eine Serie von zweidimensionalen Problemen in der (y, z)-Ebene reduziert wird.

Im folgenden wird nun ein Überblick über die Darstellung der grundlegenden Beziehungen des elastischen Kontinuums im Rahmen der FEM gegeben. Eine in dieser Arbeit auftretende Besonderheit ist dabei die Fouriertransformation in Koordinatenlängsrichtung und damit die Formulierung der FEM im Wellenzahl-Frequenzraum (k_x, ω). Es werden die nötigen Beziehungen für ein lineares Dreieckselement hergeleitet und die dynamische Steifigkeitsmatrix im fouriertransformierten (k_x, y, z, ω)-Raum aufgestellt. Danach erfolgt mit Hilfe der Substrukturtechnik die Beschreibung des gesamten gekoppelten Problems des Halbraums mit einem eingeschlossenen FEM-Gebiet. Schlußendlich wird auf Fragen der Diskretisierung eingegangen, anhand deren eine korrekte Erfassung der Wellenausbreitung im FEM-Gebiet sicherzustellen ist.

5.1 Grundlegende Beziehungen des Elastischen Kontinuums

Das Stoffgesetz liefert den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen (vgl. z.B. [PETYT 1990]). In Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E und der Querdehnzahl (Poissonzahl) ν ist dieser gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

wobei \mathbf{D} die *Elastizitätsmatrix* ist.

Die Verzerrungen werden durch die folgenden kinematischen Beziehungen beschrieben, welche sich in das Produkt der Operatormatrix \mathbf{G} und des Verschiebungsvektors \mathbf{u} aufspalten lassen:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ w_{,x} + u_{,z} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Unter Berücksichtigung der im Anhang A angegebenen Regeln für die Differentiation führt die Anwendung der Fouriertransformation auf die Längsrichtung ($x \circ \bullet k_x$) mit der transformierten Operatormatrix $\hat{\mathbf{G}}$ auf die Beziehung

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} ik_x \hat{u} \\ \hat{v}_{,y} \\ \hat{w}_{,z} \\ \hat{u}_{,y} + ik_x \hat{v} \\ \hat{v}_{,z} + \hat{w}_{,y} \\ ik_x \hat{w} + \hat{u}_{,z} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & ik_x & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & ik_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.1.1 Lineares Dreieckselement

Die einfachste Methode, ein ebenes Problem mit Finiten Elementen zu diskretisieren, ist die Verwendung von linearen Dreieckselementen. Die Abbildung 5.1 zeigt ein Dreieckselement mit drei Knotenpunkten i, j, m in jedem Eckpunkt. An jedem Knoten existieren im vorliegenden

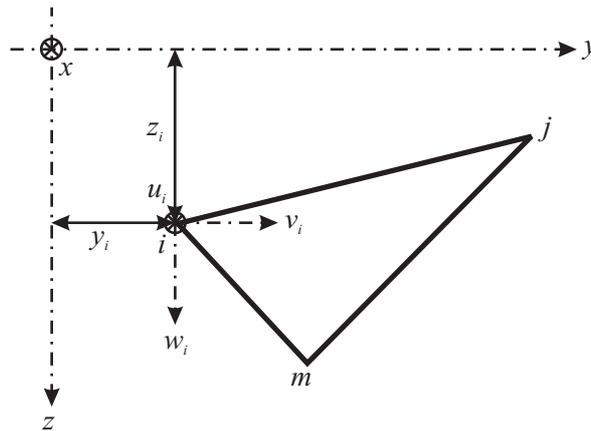


Abbildung 5.1: Ebenes Dreieckselement

Fall drei Freiheitsgrade: die Verschiebungen u in Längsrichtung rechtwinklig zur (y, z) -Ebene, v in horizontaler y - und w in vertikaler z -Richtung. Deshalb kann jede dieser Verschiebungskomponenten durch Polynome mit drei Termen beschrieben werden. Das in Abbildung 5.2 dargestellte Pascalsche Dreieck zeigt, daß ein vollständiges lineares Polynom – was die minimale Voraussetzung darstellt – gerade drei Terme besitzt. Unter näherungsweise Annahme eines solchen

	1			Konstant	
	x	y		Linear	
	x^2	xy	y^2	Quadratisch	
	x^3	x^2y	xy^2	y^3	Kubisch

Abbildung 5.2: Vollständige Polynome in Abhängigkeit von zwei Variablen y und z

linearen Funktionsverlaufes kann die Veränderlichkeit der Verschiebungen bezüglich der (y, z) -Ebene durch die Verschiebungsfunktionen $u(y, z)$, $v(y, z)$ und $w(y, z)$ beschrieben werden (vgl. z.B. [ZIENKIEWICZ 1984, PETYT 1990]).

$$\begin{aligned}
 u(y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\
 v(y, z) &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_6 z \\
 w(y, z) &= \alpha_7 + \alpha_8 y + \alpha_9 z
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Damit läßt sich der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen \mathbf{u} für einen beliebigen Punkt des Elements und den Freiwerten $\boldsymbol{\alpha}$ in Matrixschreibweise wie folgt darstellen:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(y, z) \\ v(y, z) \\ w(y, z) \end{bmatrix} = \mathbf{U} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9\} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & z \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Nun werden als Freiheitsgrade die neun unbekanntenen Elementknotenverschiebungen $u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j, u_m, v_m, w_m$ gewählt.

$$\mathbf{u}_0^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j \ u_m \ v_m \ w_m\} \quad (5.8)$$

Die Elementknotenverschiebungen \mathbf{u}_0 lassen sich nun über eine Koordinatenmatrix \mathbf{A} in Abhängigkeit von den unbekanntenen Freiwerten $\boldsymbol{\alpha}$ ausdrücken, indem die Verschiebungen \mathbf{u} durch Einsetzen der Knotenkoordinaten an den Knoten berechnet werden.

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_j & z_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_m & z_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_m & z_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Die neun unbekanntenen Freiwerte $\boldsymbol{\alpha}$ können nun hieraus durch Inversion der Koordinatenmatrix \mathbf{A} und Multiplikation mit den Elementknotenverschiebungen \mathbf{u}_0 bestimmt werden. Die hierzu benötigte Inverse der Koordinatenmatrix \mathbf{A} lautet

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & a_j & 0 & 0 & a_m & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_m & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 & 0 & a_j & 0 & 0 & a_m & 0 \\ 0 & b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_m & 0 \\ 0 & 0 & a_i & 0 & 0 & a_j & 0 & 0 & a_m \\ 0 & 0 & b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_m \\ 0 & 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_m \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

mit der Dreiecksfläche

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (y_j z_m - z_j y_m - y_i z_m + z_i y_m + y_i z_j - z_i y_j) \quad (5.11)$$

und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_i &= y_j z_m - y_m z_j \\ b_i &= z_j - z_m \\ c_i &= y_m - y_j. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die übrigen Koeffizienten a_j, b_j, c_j und a_m, b_m, c_m werden aus (5.12) durch zyklische Vertauschung der Indizes in der Reihenfolge i, j, m gewonnen.

Damit ergeben sich die Freiwerte α zu:

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_0 = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m \\ b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m \\ c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m \\ a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m \\ b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m \\ c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m \\ a_i w_i + a_j w_j + a_m w_m \\ b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m \\ c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen \mathbf{u} für einen beliebigen Punkt des Elementes und den Elementknotenverschiebungen \mathbf{u}_0 als den gewählten Freiheitsgraden ergibt sich damit unter Berücksichtigung von (5.5) und (5.13) zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_0 = \mathbf{N} \mathbf{u}_0, \quad (5.14)$$

worin das Produkt aus \mathbf{U} und \mathbf{A}^{-1} der *Matrix der Ansatzfunktionen* \mathbf{N} entspricht.

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{I} L_i \quad \mathbf{I} L_j \quad \mathbf{I} L_m] = \begin{bmatrix} L_i & 0 & 0 & L_j & 0 & 0 & L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_i & 0 & 0 & L_j & 0 & 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & L_i & 0 & 0 & L_j & 0 & 0 & L_m \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Gemäß (5.4) läßt sich damit die Verschiebung $u(y, z)$ ausdrücken als:

$$\begin{aligned} u(y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \\ &= ((a_i + b_i y + c_i z)u_i + (a_j + b_j y + c_j z)u_j + (a_m + b_m y + c_m z)u_m) / (2A) = \\ &= L_i u_i + L_j u_j + L_m u_m \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dabei sind L_i, L_j und L_m die Ansatzfunktionen, die für das betrachtete lineare Dreieck mit den Flächenkoordinaten zusammenfallen.

$$L_i = (a_i + b_i y + c_i z) / (2A) \quad (5.17)$$

$$L_j = (a_j + b_j y + c_j z) / (2A) \quad (5.18)$$

$$L_m = (a_m + b_m y + c_m z) / (2A) \quad (5.19)$$

In analoger Weise ergeben sich damit auch die Verschiebungsfunktionen $v(y, z)$ sowie $w(y, z)$.

Gemäß (5.3) erhält man die Verzerrungen $\hat{\epsilon}$ im fouriertransformierten Raum als das Produkt aus dem linearen Operator $\hat{\mathbf{G}}$ und dem Verschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}$.

$$\hat{\epsilon} = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{G}} \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (5.20)$$

Darin ist $\hat{\mathbf{B}}$ die *Verzerrungsmatrix*, welche sich durch die Anwendung des linearen Operators $\hat{\mathbf{G}}$ auf die Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} ergibt.

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{G}} \mathbf{N} =$$

$$= \begin{bmatrix} ik_x L_i & 0 & 0 & ik_x L_j & 0 & 0 & ik_x L_m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_j - z_m}{2A} & 0 & 0 & \frac{z_m - z_i}{2A} & 0 & 0 & \frac{z_i - z_j}{2A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_m - y_j}{2A} & 0 & 0 & \frac{y_i - y_m}{2A} & 0 & 0 & \frac{y_j - y_i}{2A} \\ \frac{z_j - z_m}{2A} & ik_x L_i & 0 & \frac{z_m - z_i}{2A} & ik_x L_j & 0 & \frac{z_i - z_j}{2A} & ik_x L_m & 0 \\ 0 & \frac{y_m - y_j}{2A} & \frac{z_j - z_m}{2A} & 0 & \frac{y_i - y_m}{2A} & \frac{z_m - z_i}{2A} & 0 & \frac{y_j - y_i}{2A} & \frac{z_i - z_j}{2A} \\ \frac{y_m - y_j}{2A} & 0 & ik_x L_i & \frac{y_i - y_m}{2A} & 0 & ik_x L_j & \frac{y_j - y_i}{2A} & 0 & ik_x L_m \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

5.2 Herleitung der dynamischen Steifigkeitsmatrix

Eine allgemeine Herleitung der Steifigkeitsausdrücke ist mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten möglich. Diese lassen sich getrennt als innere virtuelle Arbeit δW_i , virtuelle Arbeit infolge von Trägheit δW_T und äußere virtuelle Arbeit δW_a angeben:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= - \int \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dV = - \int \delta \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon dV \\ \delta W_T &= - \int \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \\ \delta W_a &= \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA \end{aligned} \quad (5.22)$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Finite-Elemente-Berechnung im vorliegenden Fall für ein ebenes Problem im (k_x, y, z, ω) -Raum, d.h. an jeder Stelle k_x , durchgeführt wird. Dies hat allerdings Einfluß auf die Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen. Diese sind analog zu dem in Abschnitt 4.2 gezeigten Vorgehen für den Fall des *Halbraumes mit zylindrischem Hohlraum* unter Berücksichtigung des Parsevalschen Theorems aufzustellen. Damit läßt sich nun das Prinzip der virtuellen Arbeiten im transformierten (k_x, y, z, ω) -Raum formulieren. Dazu sind lediglich in (4.14) die Funktionen $\delta \mathbf{u}(x)$ durch $\delta \epsilon(x)$ und $\mathbf{t}(x)$ durch $\boldsymbol{\sigma}(x)$ zu ersetzen. Mit der Elastizitätsmatrix \mathbf{D} , der Verzerrungsmatrix \mathbf{B} und der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} , die in Abschnitt 5.1 eingeführt wurden, läßt sich die virtuelle Arbeit der inneren Spannungen und die Arbeit der

Trägheitskräfte anschreiben.

$$\begin{aligned}\delta W_i &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta \mathbf{u}_0^T(-k_x) \int_z \left[\int_y \mathbf{B}^T(-k_x) \mathbf{D} \mathbf{B}(k_x) dy \right] dz \mathbf{u}_0(k_x) \right] dk_x \\ \delta W_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left[\delta \mathbf{u}_0^T(-k_x) \int_z \left[\int_y \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dy \right] dz \mathbf{u}_0(k_x) \right] dk_x\end{aligned}\quad (5.23)$$

Die äußere virtuelle Arbeit δW_a infolge von Lasten, die an den Elementrändern angreifen, ergibt sich in Abhängigkeit einer parallel zum jeweiligen Rand definierten Koordinate s zu:

$$\begin{aligned}\delta W_a &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} ds dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s \delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} ds dk_x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}_0^T(-k_x) \left[\int_s \mathbf{N}^T \mathbf{p}(k_x) ds \right] dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}_0^T(-k_x) \mathbf{p}_0(k_x) dk_x.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Darin ist \mathbf{p}_0 der Vektor der äquivalenten Knotenlasten.

Das dynamische Gleichgewicht ist erfüllt, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten null ergibt.

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_T + \delta W_a = 0 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{u}_0^T(-k_x) \left(\left[- \int_z \int_y \mathbf{B}^T(-k_x) \mathbf{D} \mathbf{B}(k_x) dy dz + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega^2 \int_y \int_z \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dy dz \right] \mathbf{u}_0(k_x) + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{p}(k_x) ds \right) dk_x = 0\end{aligned}\quad (5.26)$$

Berücksichtigt man, daß das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}_0^T(-k_x)$ beliebig und ungleich null ist, kann es aus der Arbeitsgleichung eliminiert werden. Damit erhält man nun die folgende Darstellung der Arbeitsgleichung:

$$\left(\underbrace{- \int_z \int_y \mathbf{B}^T(-k_x) \mathbf{D} \mathbf{B}(k_x) dy dz}_K + \omega^2 \underbrace{\int_y \int_z \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dy dz}_M \right) \mathbf{u}_0(k_x) + \mathbf{p}_0(k_x) = 0 \quad (5.27)$$

Mit den oben angegebenen Abkürzungen können hieraus die klassischen Finite-Elemente-Gleichungen angeschrieben werden:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}_0(k_x) = \mathbf{p}_0(k_x) \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K}_{dyn} \mathbf{u}_0(k_x) = \mathbf{p}_0(k_x) \quad (5.29)$$

Die programmtechnische Umsetzung erfolgte mit Hilfe des kommerziellen Programmpaketes MATLAB in Anlehnung an eine einfach zu implementierende Routine aus [ALBERTY et al. 1999].

5.3 Substrukturtechnik

Die Anwendung der Substrukturtechnik erlaubt es, das Verhalten verschiedener Teilstrukturen mit Ansätzen zu beschreiben, welche speziell an deren jeweilige Charakteristika angepaßt sind. Diese Eigenschaft läßt sie für die vorliegende Fragestellung – wie für Fragestellungen der Boden-Bauwerk-Interaktion überhaupt – als sehr vorteilhaft erscheinen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der unendliche Halbraum mit einem zylindrischen Hohlraum gemäß Kapitel 3 mit Hilfe der ITM, die Tunnelstruktur und gegebenenfalls ein Teil des den Tunnel umgebenden Bodens gemäß Abschnitt 5.2 mittels der FEM beschrieben. Die Kopplung dieser beiden Substrukturen und damit die Beschreibung des gekoppelten Gesamtsystems wird im folgenden erläutert.

In allgemeiner Schreibweise lauten die Gleichgewichtsbedingungen für das mit der FEM beschriebene Gebiet

$$\mathbf{K}_{\text{dyn}} \mathbf{u}_{FE} = \mathbf{p}_{FE}. \quad (5.30)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.2 beschrieben, ist es im Rahmen der FEM-Implementierung nun besonders vorteilhaft, als Freiheitsgrade für das Gesamtsystem die $N_1 = 3n_{max} + 2$ (für den symmetrischen Lastfall gemäß Tabelle 3.1) Ansatzkoeffizienten \mathbf{c}^n als generalisierte Freiheitsgrade zu verwenden. Bei diesen handelt es sich um die Koeffizienten der Reihenentwicklung der unbekanntten Zwangskräfte am zylindrischen Rand Γ_S . Zu diesem Zwecke ist es notwendig, die Freiheitsgrade \mathbf{u}_{FE} des Elementnetzes in diejenigen Freiheitsgrade $\mathbf{u}_{\Omega_{FE}}$, welche innerhalb des mit Finiten Elementen beschriebenen Gebietes liegen, und in diejenigen Freiheitsgrade \mathbf{u}_{Γ_S} , welche sich auf dem Lochrand Γ_S befinden, aufzuteilen.

$$\mathbf{u}_{FE} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_S} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Greift nur innerhalb des Gebietes Ω_{FE} eine Belastung an, so lassen sich die in Gleichung (5.30) angegebenen Finite-Elemente-Gleichgewichtsbedingungen unter Verwendung der Freiheitsgrade $\mathbf{u}_{\Omega_{FE}}$ und \mathbf{u}_{Γ_S} folgendermaßen formulieren:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\Omega_{FE}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Wie bereits im Zuge der Ermittlung der das Kraft-Verformungsverhalten des Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* am zylindrischen Rand Γ_S charakterisierenden Matrix \mathbf{N}^∞ in Abschnitt 4.2 beschrieben, werden nun die auf dem Lochrand liegenden Freiheitsgrade \mathbf{u}_{Γ_S} durch die Ansatzkonstanten \mathbf{c}_n der unbekanntten Spannungszustände auf dem Rand Γ_S ersetzt. Bei diesen handelt es sich um die Koeffizienten der über den Umfang des zylindrischen Hohlraums in Form von Fourierreihengliedern angesetzten Spannungszustände.

$$\mathbf{u}_{\Gamma_S} = \mathbf{A} \mathbf{c}_n \quad (5.33)$$

Dabei enthält die Matrix \mathbf{A} die sich infolge der am zylindrischen Rand Γ_S angesetzten Spannungszustände ergebenden Verschiebungen. Durch diesen Basiswechsel werden die Zustandsgrößen auf einen der Art des vorliegenden Problems und der vorkommenden Lastfälle angepaßten diskreten Vektorunterraum beschränkt. Die Ansatzkonstanten \mathbf{c}_n vermögen folglich in optimaler Weise als neue Basis zu dienen.

Schreibt man nun die innere virtuelle Arbeit $\delta W_{\Gamma_{S,i}}$ und die virtuelle Arbeit infolge von Trägheit $\delta W_{\Gamma_{S,T}}$ für die Freiheitsgrade auf dem Lochrand an, so lassen sich die Arbeitsausdrücke (5.23) folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}\delta W_{\Gamma_{S,i}} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta \mathbf{c}_n^T(-k_x) \mathbf{A}^T(-k_x) \int_z \left[\int_y \mathbf{B}^T(-k_x) \mathbf{D} \mathbf{B}(k_x) dy \right] dz \mathbf{A}(k_x) \mathbf{c}_n(k_x) \right] dk_x \\ \delta W_{\Gamma_{S,T}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left[\delta \mathbf{c}_n^T(-k_x) \mathbf{A}^T(-k_x) \int_z \left[\int_y \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dy \right] dz \mathbf{A}(k_x) \mathbf{c}_n(k_x) \right] dk_x.\end{aligned}\tag{5.34}$$

Als unabhängige Freiheitsgrade \mathbf{u}_Ω des gesamten Gebietes Ω verbleiben nun die Knotenfreiheitsgrade $\mathbf{u}_{\Omega_{FE}}$ im Inneren des Finite-Elemente-Netzes sowie die generalisierten Freiheitsgrade der Reihenentwicklung \mathbf{c}_n .

$$\mathbf{u}_\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}\tag{5.35}$$

Der Zusammenhang zwischen den Freiheitsgraden \mathbf{u}_Ω und \mathbf{u}_{FE} kann nun unter Verwendung einer Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}\tag{5.36}$$

beschrieben werden.

$$\mathbf{u}_{FE} = \mathbf{T} \mathbf{u}_\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{A} \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_S} \end{bmatrix}\tag{5.37}$$

Mit dieser Transformationsmatrix wird nun die Steifigkeitsmatrix des mit Finiten Elementen diskretisierten Gebietes auf die neuen unabhängigen Freiheitsgrade \mathbf{u}_Ω transformiert:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{dyn} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{A} \end{bmatrix}.\tag{5.38}$$

Dabei kann die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{11} gemäß (5.23) hergeleitet werden. Der Ausdruck $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{A}$ hingegen läßt sich mit Hilfe von (5.34) aufstellen. Die Untermatrizen $\mathbf{K}_{12} \mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{21}$ ergeben sich analog, wobei darauf zu achten ist, daß die Transponierte \mathbf{A}^T der Transformationsmatrix an der Stelle $(-k_x)$ und die Transformationsmatrix \mathbf{A} an der Stelle (k_x) zu verwenden sind.

Schlußendlich läßt sich das Finite-Elemente-Gleichungssystem in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden \mathbf{u}_Ω aufstellen.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\Omega_{FE}} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{5.39}$$

Das so erhaltene Gleichungssystem, welches nur das Gebiet Ω beschreibt, kann nun einfach durch Addition der in Abschnitt 4.2 ermittelten, das Kraft-Verformungsverhalten des umgebenden Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* charakterisierenden Matrix \mathbf{N}^∞ auf den gesamten unendlichen Bereich ausgedehnt werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{A} + \mathbf{N}^\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_{FE}} \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\Omega_{FE}} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{5.40}$$

Mit Hilfe des in Form von \mathbf{N}^∞ zur Verfügung stehenden Substrukturverhaltens des Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* können nun Parameterstudien im Bereich des mit Finiten Elementen diskretisierten Gebietes mit vergleichsweise geringem Berechnungsaufwand durchgeführt werden.

5.4 Diskretisierungsfragen

5.4.1 Abtasttheorem

Bei der Kopplung zweier Substrukturen wie dem auf Basis der ITM beschriebenen System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* und dem innenliegenden FEM-Gebiet am Rand Γ_S ist es von großer Wichtigkeit, eine unzulässige Energieabsorption an diesem Rand zu vermeiden. Diese tritt dann auf, wenn eine ungenügende Abtastrate es nicht erlaubt, alle signifikanten Spektralinhalte zu erfassen. Folglich muß die Abtastung entlang des Randes Γ_S fein genug sein. Gleichzeitig besteht jedoch das Interesse, die Abmessungen der Finiten Elemente so groß wie möglich zu wählen, um Rechenzeit einzusparen.

Im Falle des Halbraumes mit kreiszylindrischem Hohlraum wird die Kopplung im transformierten (k_x, ω) -Raum entlang des in Abhängigkeit der Koordinaten r und ψ bzw. der Koordinaten y und z beschriebenen Randes Γ_S für die verschiedenen Fourierreihenglieder in Umfangsrichtung durchgeführt. Hierbei ist sicherzustellen, daß das höchste zu verwendende Fourierreihenglied durch eine ausreichende Anzahl von Knoten entlang des Randes Γ_S abgebildet werden kann. Dies wird durch das Abtasttheorem nach Nyquist-Shannon sichergestellt. Dieses im Frequenzbereich bekannte Theorem gilt im Wellenzahlraum analog. In Abhängigkeit vom Abtastabstand Δ_L lautet es:

$$k_{abtast} = \frac{2\pi}{\Delta_L} \geq 2|k_{max}|. \quad (5.41)$$

Daraus ergibt sich der maximale Abtastabstand Δ_L , wenn die abzutastende Funktion durch das Intervall $[-k_{max}, k_{max}]$ bandbegrenzt ist. Diese Bandbegrenzung entspricht dabei der Abbildung einer kleinsten Wellenlänge λ_{min} :

$$\Delta_L \leq \frac{\pi}{|k_{max}|} = \frac{\lambda_{min}}{2}. \quad (5.42)$$

Voraussetzung für eine Bandbegrenzung ist, daß die Fourier-Transformierten für alle Werte $k > k_{max}$ verschwinden. Diese Bedingung ist im allgemeinen jedoch nicht eingehalten; die Fourier-Transformierte konvergiert zwar gegen null, eine Bandbegrenzung k_{max} läßt sich jedoch nicht angeben. Im Rahmen des hier verwendeten Vorgehens liegt eine Bandbegrenzung durch die Begrenzung der Anzahl der Fourierreihenglieder in Umfangsrichtung sowie der Anzahl der Knoten auf dem Rand Γ_S vor. Diese Begrenzung ist folglich derart an die wellendynamischen Verhältnisse anzupassen, die unter einer gegebenen Belastung sowie den vorhandenen Materialkenngrößen und geometrischen Verhältnissen vorliegen, daß alle signifikanten Beiträge berücksichtigt werden.

Werden Bodenerschütterungen betrachtet, so können aufgrund der schon bei einem geringen Bodenvolumen wirksamen Filterwirkung des Bodens kurzweilige Lösungsanteile, welche z.B. aus der Lasteinleitung herrühren, vernachlässigt werden. Für tiefliegende Tunnels ist die kürzeste

zu erfassende Wellenlänge folglich die Länge der Schwerwelle. Diese ist keine Materialkonstante, sondern sie ergibt sich aus der Scherwellengeschwindigkeit c_s gemäß (2.19) und der Frequenz f zu:

$$\lambda_s = \frac{c_s}{f}. \quad (5.43)$$

Dabei ist in diesem Zusammenhang die größte im System vorkommende Frequenz f maßgebend. Für oberflächennahe Tunnels hingegen ist die Rayleighwellenlänge λ_R die kürzeste zu erfassende Wellenlänge.

Durch die Beziehung (5.42) in Verbindung mit (5.43) wird sichergestellt, daß am Rand Γ_S zwischen dem innenliegenden FE-Gebiet und dem angrenzenden unendlichen Halbraum eine ausreichende Anzahl von Knoten vorhanden ist. Zu dem jeweiligen Fehlermaß, welches mit einer bestimmten Diskretisierung im Spektralbereich korrespondiert, sei an dieser Stelle auf [ZIRWAS 1996] verwiesen.

5.4.2 FEM-Diskretisierung

Ein weiteres wichtiges Kriterium im Zusammenhang mit Fragen der Diskretisierung ist die Erfassung der Wellenamplituden durch die Finiten Elemente. Werden wie in der vorliegenden Arbeit Finite Elemente mit linearen Verschiebungsansätzen verwendet, so genügen gemäß [LYSMER 1978] acht Elemente je Wellenlänge, um eine Genauigkeit der Abbildung der Amplituden von über 90 Prozent zu erreichen. Hall [HALL 2000] zeigt hierzu anschauliche Ergebnisse für ein FE-Netz mit fünf sowie mit zehn linearen Elementen je Wellenlänge. Für die Kantenlänge der Finiten Elemente ist demnach folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\Delta_{abstast} \leq \frac{\lambda_s}{8}. \quad (5.44)$$

Kapitel 6

Dynamische Fahrzeug-Fahrweg Interaktion

Der Körperschall entsteht im Rad-Schiene-Kontaktpunkt und pflanzt sich von dort in das Fahrzeug sowie in den Untergrund fort. Ursachen für die Entstehung des Körperschalls im Rad-Schiene-Kontaktpunkt sind gemäß [WETTSCHUREK et al. 2004] vor allem Unebenheiten der Schienen- und Radlaufflächen. Diese führen zu Kontaktkräften, welche das gesamte System zu Schwingungen anregen. Hierbei werden die *Weg- oder Geschwindigkeitserregung* infolge von geometrischen Formabweichungen bei Rad und Schiene und die *parametrische Schwingungsanregung* infolge von örtlichen und damit aus der Sicht des bewegten Bezugssystems zeitlichen Steifigkeitswechseln des Gleis-Oberbau-Systems beim Überrollvorgang unterschieden.

Eine sehr häufig verwendete Methode zur Beschreibung der dynamischen Fahrzeugwirkungen sind jedoch (bewegte) harmonische Lasten, welche auf den Oberbau wirken. Dabei wird das Fahrzeug nicht modelliert, sondern in Form von Einzellasten abgebildet. Vernachlässigt man die Interaktion derart, so können zwar einzelne Effekte studiert, jedoch keine umfassenden Aussagen gemacht werden, da sowohl die Größe der einzelnen harmonischen Anteile als auch deren Frequenzband geschätzt werden müssen. Eine Möglichkeit der Erfassung der auftretenden komplizierten Effekte ist die Verarbeitung von detaillierten Meßergebnissen zur Generierung eines Lastbildes für die Rad-Schiene-Kontaktkräfte [LIEB 1997]. Eine weitere Möglichkeit stellt die Verwendung von Oberbau- und Fahrzeugmodellen dar, welche in der Lage sind, den komplizierten Interaktionsvorgängen Rechnung zu tragen. Als Anregung können dabei z.B. Radunrundheiten [DINKEL 2001, LENZ 2003] oder gemessene Rauheitsbänder der Schienenoberfläche [LOMBAERT et al. 2006a] berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit soll der Oberbau als elastisch gelagerte Platte und das Fahrzeug als Einmassenschwinger sowie mit Hilfe eines Drehgestellmodells modelliert werden, wobei sinusförmige Schienen- bzw. Radoberflächenrauigkeiten angesetzt werden.

Als erster Schritt ist vor der eigentlichen Interaktionsberechnung die Durchsenkung der Fahrwegplatte unter einer Einheitslast zu ermitteln. Daraus erhält man eine *Steifigkeit* für das gekoppelte System *Platte-Tunnel-Halbraum* im Wellenzahl-Frequenzraum, welche in der darauffolgenden Interaktionsberechnung benötigt wird.

6.1 Interaktion eines Masse-Feder-Systems mit dem Tunnel

Als Maßnahme zur Isolation von Erschütterungen und Körperschall in Tunnels kommen häufig sogenannte *Masse-Feder-Systeme* (MFS) zum Einsatz. Hierbei handelt es sich um eine elastisch gelagerte Fahrwegplatte, deren Isolationswirkung auf der tiefen Abstimmung des Systems beruht. In Abbildung 6.1 ist ein mit einem Masse-Feder-System ausgerüsteter Tunnel mit zylindrischer Tunnelschale dargestellt.

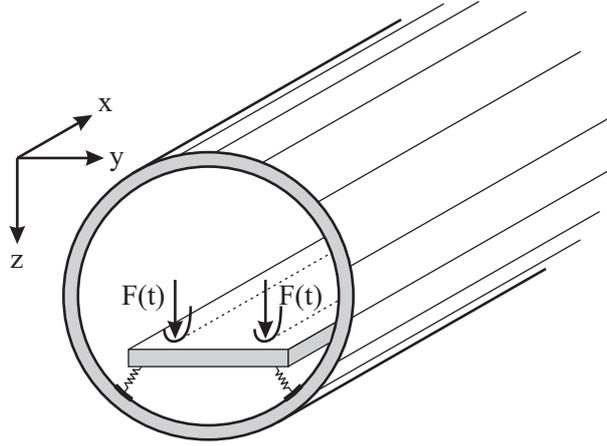


Abbildung 6.1: Systemskizze für ein Masse-Feder-System in einem Tunnel

Wird die Platte als in Querrichtung starr angenommen, reduziert sie sich im Sinne der Mechanik zum elastisch gebetteten Balken. Als Euler-Bernoulli-Balken genügt er der folgenden Differentialgleichung:

$$EIw_B''''(x, t) + m\ddot{w}_B(x, t) = p(x, t) + q(x, t) \cos \gamma \quad (6.1)$$

Hierin ist $p(x, t)$ die äußere Belastung des Balkens und $q(x, t)$ die resultierende Kontaktkraft in den Bettungselementen zwischen der Platte und der Tunnelstruktur. Der Winkel γ bezeichnet hier die Neigung der Bettung gegenüber der Vertikalen im Falle von in Radialrichtung mit einer zylindrischen Tunnelschale gekoppelten Bettungselementen (vgl. Abbildung 6.2).

Nach einer zweidimensionalen Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x$, $t \circ \bullet \omega$) erhält man die Differentialgleichung im Wellenzahl-Frequenzraum.

$$EI k_x^4 \hat{w}_B(k_x, \omega) - \omega^2 m \hat{w}_B(k_x, \omega) = \hat{p}(k_x, \omega) + \hat{q}(k_x, \omega) \cos \gamma \quad (6.2)$$

Wie man sieht, beschreibt die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens im fouriertransformierten Raum einen Einmassenschwinger. Das Modell des Balkens reduziert sich folglich im Wellenzahl-Frequenzraum auf das Modell einer Masse auf einer elastischen Bettung.

Wie Abbildung 6.2 zu entnehmen ist, ergibt sich die Kraft in den Bettungselementen in Abhängigkeit von der Differenz der Verschiebungen $\hat{w}_B \cos \gamma$ am oberen und \hat{w}_o am unteren Ende der Bettungselemente.

$$\hat{q}(k_x, \omega) = k_w(\hat{w}_o(k_x, \omega) - \hat{w}_B(k_x, \omega) \cos \gamma) \quad (6.3)$$

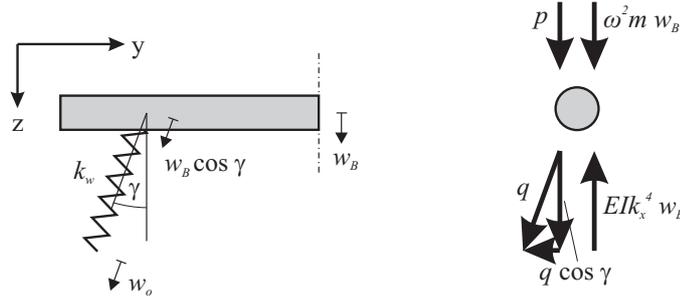


Abbildung 6.2: Teilsystem Platte

Das gekoppelte System *Halbraum-Tunnelstruktur* wird im folgenden durch eine wellenzahl-frequenzabhängige *Steifigkeit* $\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)$ repräsentiert. Diese wird aus dem Verhältnis zwischen den Verschiebungen am Fuße der elastischen Bettung und der Kraft in den Bettungselementen ermittelt. Unter Berücksichtigung der Gleichheit der Verschiebungen $\hat{w}_u(k_x, \omega) = \hat{w}_o(k_x, \omega)$ ergibt sich die Kraft $\hat{q}(k_x, \omega)$ für das aus der Tunnelstruktur und dem Halbraum bestehende System gemäß Abbildung 6.3 in Abhängigkeit von der *Steifigkeit* $\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)$:

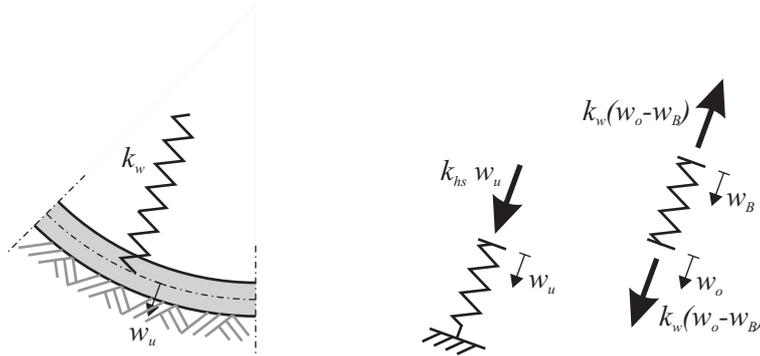


Abbildung 6.3: Teilsystem Tunnelschale

$$\hat{q}(k_x, \omega) = -\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)\hat{w}_u(k_x, \omega) = -\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)\hat{w}_o(k_x, \omega). \quad (6.4)$$

Hieraus läßt sich der Zusammenhang

$$\hat{w}_o(k_x, \omega) = -\frac{\hat{q}(k_x, \omega)}{\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)} \quad (6.5)$$

gewinnen, womit man in (6.3) eingesetzt die Kontaktkraft $\hat{q}(k_x, \omega)$ nur noch in Abhängigkeit von der Balkenverschiebung $\hat{w}_B(k_x, \omega)$ erhält.

$$\hat{q}(k_x, \omega) = \frac{-k_w \hat{w}_B(k_x, \omega) \cos \gamma}{\left(1 + \frac{k_w}{\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)}\right)} = -\hat{k}(k_x, \omega) \hat{w}_B(k_x, \omega) \cos \gamma \quad (6.6)$$

Hierin ist $\hat{k}(k_x, \omega)$ die wellenzahl-frequenzabhängige *Steifigkeit* des in Reihe geschalteten Systems aus der Bettung k_w und der für das System *Halbraum-Tunnelschale* ermittelten *Steifigkeit*

$\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)$:

$$\hat{k}(k_x, \omega) = \frac{1}{\frac{1}{k_w} + \frac{1}{\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)}} = \frac{k_w \hat{k}_{hs}(k_x, \omega)}{k_w + \hat{k}_{hs}(k_x, \omega)}. \quad (6.7)$$

Setzt man nun die Kontaktkraft $\hat{q}(k_x, \omega)$ aus (6.6) in Gleichung (6.2) ein, so erhält man die Durchsenkung $\hat{w}_B(k_x, \omega)$ des Balkens im transformierten Raum infolge einer äußeren Belastung $\hat{p}(k_x, \omega)$ zu

$$\hat{w}_B(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{EI k_x^4 - \omega^2 m + \hat{k}(k_x, \omega) \cos^2 \gamma} =: \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{\hat{D}_S(k_x, \omega)}, \quad (6.8)$$

worin $\hat{D}_S(k_x, \omega) = EI k_x^4 - \omega^2 m + \hat{k}(k_x, \omega) \cos^2 \gamma$ eine das gesamte System *elastisch gebettete Platte-Tunnel-Halbraum* charakterisierende wellenzahl-frequenzabhängige *Steifigkeit* ist. Der hier gebrauchte Terminus *Steifigkeit* im Wellenzahl-Frequenzraum wurde im Zusammenhang mit der Kopplung des Halbraumes mit einem Balken auf seiner Oberfläche von Dietermann und Metrikine [DIETERMANN und METRIKINE 1996] als *Halbraumsteifigkeit* eingeführt. Wie man sieht, setzt sich die Bettung der Masse aus zwei parallelgeschalteten Anteilen zusammen: zum einen aus der Biegesteifigkeit EI des Balkens und zum anderen aus dem in Reihe geschalteten System mit der *Steifigkeit* $\hat{k}(k_x, \omega)$.

Die Kontaktkraft zwischen der Tunnelschale und der elastischen Bettung der Platte – bzw. im mechanischen Sinne des Balkens – kann man durch Einsetzen der in (6.8) ermittelten Durchsenkung $\hat{w}_B(k_x, \omega)$ des Balkens in (6.6) berechnen.

$$\hat{q}_B(k_x, \omega) = \frac{-\hat{p}(k_x, \omega) \hat{k}(k_x, \omega) \cos \gamma}{\hat{D}_S(k_x, \omega)} = \frac{-\hat{p}(k_x, \omega) k_w \cos \gamma}{\hat{D}_S(k_x, \omega) \left(1 + \frac{k_w}{\hat{k}_{hs}(k_x, \omega)}\right)} \quad (6.9)$$

Bringt man schließlich diese Kontaktkraft im fouriertransformierten (k_x, ω) -Raum auf die entsprechenden FE-Knoten auf, so lassen sich mit (5.40) die Koeffizienten der unbekanntenen Zwangskräfte am fiktiven Lochrand Γ_S ermitteln. Kennt man diese Koeffizienten, so kann man nach Aufbringen dieser Zwangskräfte alle Zustandsgrößen an einer beliebigen Stelle im Halbraum berechnen, zum Beispiel die Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche.

6.1.1 Ermittlung der Fahrwegverschiebung im Originalraum

Soll der Fall der nichtlinearen Interaktion eines Fahrzeuges mit dem an das System *Tunnel-Halbraum* angekoppelten Masse-Feder-System betrachtet werden, so muß die Berechnung im Zeitbereich erfolgen.

Wie in Abschnitt 6.1 gezeigt, ergibt sich die Durchsenkung der Platte als Quotient zwischen der Lastfunktion $\hat{p}(k_x, \omega)$ und der wellenzahl-frequenzabhängigen *Steifigkeit* $\hat{D}_S(k_x, \omega)$ aus (6.8). Diese muß nun im Zeitbereich berechnet werden.

Eine bezüglich des Ortes punktförmige Last wie die Interaktionskraft zwischen den Rädern und dem Fahrweg nimmt im Zeitbereich folgende Form an:

$$p(x, t) = P(t) \delta(x - vt) \quad (6.10)$$

Mit Hilfe einer zweidimensionalen Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega$) ergibt sich unter Beachtung des Verschiebungssatzes der Fouriertransformation (vgl. Abschnitt 2.5.2, Anhang A) die Lastfunktion im Wellenzahl-Frequenzraum.

$$\hat{p}(k_x, \omega) = \hat{P}(\omega + vk_x) \quad (6.11)$$

Nach Einsetzen dieser Lastfunktion in (6.8) und anschließender zweidimensionaler Fourierrücktransformation ($k_x \bullet \circ x, \omega \bullet \circ t$) erhält man die Verschiebung des Balkens im Originalraum an der Stelle $x = vt$.

$$w(x = vt, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{\hat{D}_S(k_x, \omega)} e^{ik_x vt} e^{i\omega t} dk_x d\omega = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\omega + vk_x)}{\hat{D}_S(k_x, \omega)} e^{i(\omega + vk_x)t} dk_x d\omega \quad (6.12)$$

Mit der Substitution $\omega' = \omega + vk_x$ ergibt sich die Verschiebung des Fahrweges zu:

$$w(x = vt, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\omega')}{\hat{D}_S(k_x, \omega' - vk_x)} e^{i\omega' t} dk_x d\omega' \quad (6.13)$$

Dieser Ausdruck kann nun durch Einführen der Übertragungsfunktion $\hat{H}(\omega')$ für das gesamte gekoppelte System *Platte-Tunnel-Halbraum*

$$\hat{H}(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{D}_S(k_x, \omega' - vk_x)} dk_x \quad (6.14)$$

als inverse Fouriertransformation (IFT) des Produktes aus der Lastfunktion $\hat{P}(\omega')$ und der Übertragungsfunktion des Systems $\hat{H}(\omega')$ im Frequenzraum formuliert werden.

$$w_B(t) = w(x = vt, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{P}(\omega') \hat{H}(\omega') \right) e^{i\omega' t} d\omega' = IFT \left(\hat{P}(\omega') \hat{H}(\omega') \right) \quad (6.15)$$

Im Falle der Interaktion mit einem Fahrzeug, welches nichtlineare Eigenschaften aufweist, ist die Lösung im Frequenzraum nicht möglich. Die Berechnung der Verschiebung der Platte muß dann im Zeitbereich erfolgen. Dazu ist die Auswertung eines Faltungsintegrals nötig, welches aus der inversen Fouriertransformation des Produktes aus der Lastfunktion $\hat{P}(\omega')$ und der Übertragungsfunktion des Systems $\hat{H}(\omega')$ hervorgeht. Dabei ergibt sich die Impulsreaktionsfunktion des gesamten Systems durch die inverse Fouriertransformation der Systemübertragungsfunktion.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \quad (6.16)$$

Damit läßt sich nun die Verschiebung der Fahrwegplatte als Faltung der Impulsreaktionsfunktion $h(t)$ mit der Lastfunktion $P(t)$ im Zeitbereich berechnen.

$$w_B(t) = \int_0^t P(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.17)$$

6.2 Fahrzeugmodell und Anregung

6.2.1 Fahrzeugmodell Drehgestell

Als Fahrzeugmodell für die numerischen Untersuchungen wird – wie auch bei Dinkel und Lenz [DINKEL 2001, LENZ 2003] – das in Abbildung 6.4 dargestellte Drehgestellmodell von Ripke [RIPKE 1995] verwendet. Dieses besitzt mit den beiden Rädern zwei Kontaktpunkte zwischen

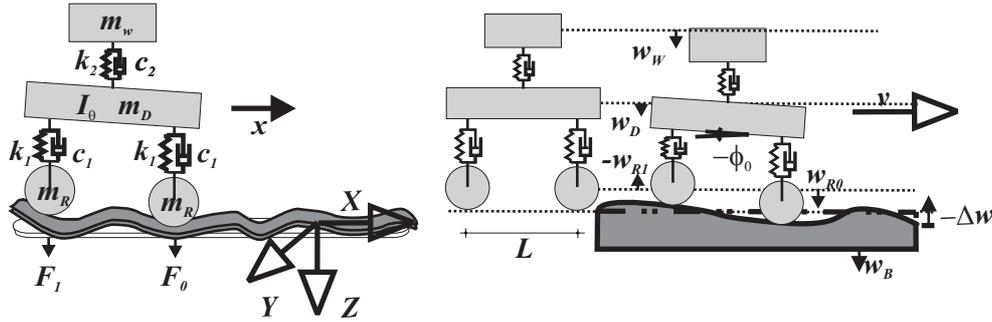


Abbildung 6.4: Modellierung des Fahrzeugs als Drehgestell auf einem Fahrweg mit der Schienenoberflächenrauigkeit $\Delta w(x)$ (aus [LENZ 2003])

Fahrzeug und Oberbau. Mit dem Radabstand L ergibt sich die Lastfunktion unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes der Fouriertransformation (Anhang A).

$$\hat{p}(k_x, \omega) = \hat{F}_0(k_x, \omega + vk_x) + \hat{F}_1(k_x, \omega + vk_x)e^{ik_x L} \quad (6.18)$$

Die geometrische Situation der Anregung der Fahrwegplatte infolge einer in Längsrichtung veränderlichen Oberflächenrauigkeit der Schiene $\Delta w(x)$ ist ebenfalls in Abbildung 6.4 dargestellt. Für den Fall eines sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegendes Zuges kann man diese in eine zeitabhängige Unebenheit $\Delta w(t)$ umrechnen.

Die Verschiebung der Radaufstandspunkte $w_{Ri}(t)$ unterscheidet sich demgemäß von der Verschiebung des Fahrweges $w_B(t)$ durch die Oberflächenrauigkeit $\Delta w(t)$.

$$w_B(t) = w_R(t) + \Delta w(t) \quad (6.19)$$

Für die fünf Freiheitsgrade des Drehgestells sowie die beiden Interaktionskräfte F_0 und F_1 zwischen den Rädern und der Fahrbahn ergeben sich die folgenden fünf Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m_W \ddot{w}_W + c_2(-\dot{w}_D + \dot{w}_W) + k_2(-w_D + w_W) &= 0 \\ m_D \ddot{w}_D + c_2(\dot{w}_D - \dot{w}_W) - c_1(\dot{w}_{R1} + \dot{w}_{R0} - 2\dot{w}_D) + \\ &+ k_2(w_D - w_W) - k_1(w_{R1} + w_{R0} - 2w_D) = 0 \\ I_\theta \ddot{\phi}_0 + c_1(\dot{w}_{R0} \frac{L}{2} + 2\dot{\phi}_0 \frac{L^2}{4} - \dot{w}_{R1} \frac{L}{2}) + k_1(w_{R0} \frac{L}{2} + 2\phi_0 \frac{L^2}{4} - w_{R1} \frac{L}{2}) &= 0 \\ m_{R0} \ddot{w}_{R0} + F_0 + c_1(\dot{w}_{R0} - \dot{w}_D + \dot{\phi}_0 \frac{L}{2}) + k_1(w_{R0} - w_D + \phi_0 \frac{L}{2}) &= 0 \\ m_{R1} \ddot{w}_{R1} + F_1 + c_1(\dot{w}_{R1} - \dot{w}_D - \dot{\phi}_0 \frac{L}{2}) + k_1(w_{R1} - w_D - \phi_0 \frac{L}{2}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

sowie zwei algebraische Integralgleichungen

$$\begin{aligned} w_{R0}(t) + \Delta w_0(t) &= \int_0^t (h_{00}(t-\tau)F_0(\tau) + h_{01}(t-\tau)F_1(\tau))d\tau \\ w_{R1}(t) + \Delta w_1(t) &= \int_0^t (h_{10}(t-\tau)F_0(\tau) + h_{11}(t-\tau)F_1(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Mit h_{ij} wird hier die Impulsreaktionsfunktion an der Stelle i infolge einer an der Stelle j einwirkenden Belastung bezeichnet.

6.2.2 Fahrzeugmodell Einmassenschwinger

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im folgenden teilweise auch der in Abbildung 6.5 dargestellte Einmassenschwinger als Fahrzeugmodell herangezogen, insbesondere für die Un-

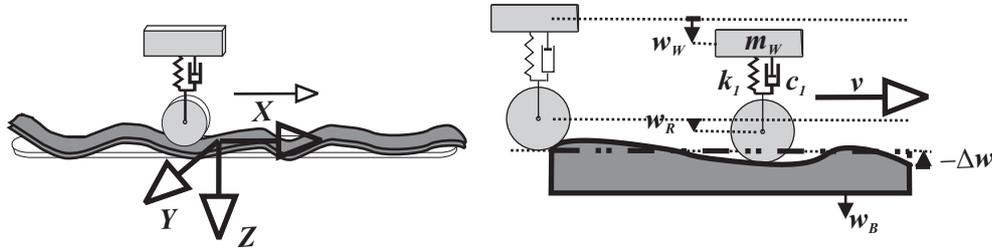


Abbildung 6.5: Modellierung des Fahrzeugs als Einmassenschwinger auf einem Fahrweg mit der Schienenoberflächenrauigkeit $\Delta w(x)$ (aus [LENZ 2003])

tersuchung der Interaktion mit einem nichtlinearen Fahrzeug. Vernachlässigt man die Masse des Rades, so wird das Interaktionsproblem vollständig durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$m_W \ddot{w}_W + c_1(\dot{w}_W - \dot{w}_R) + k_1(w_W - w_R) = 0 \quad (6.22)$$

$$F - c_1(\dot{w}_W - \dot{w}_R) - k_1(w_W - w_R) = 0 \quad (6.23)$$

$$w_R = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau - \Delta w \quad (6.24)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen der Radunrundheit $\Delta w(t)$, der Radverschiebung $w_R(t)$ und der Balkenverschiebung $w_B(t)$ aus Gleichung (6.19)

$$w_B(t) = w_R(t) + \Delta w(t)$$

stehen damit nun drei Gleichungen zur Ermittlung der drei Unbekannten (Verschiebung des Wagenkastens $w_W(t)$, Balkenverschiebung $w_B(t)$ und Kontaktkraft zwischen Rad und Balken $F(t)$) zur Verfügung. Dabei ist $h(t)$ die in (6.16) unter Berücksichtigung von (6.14) ermittelte Impulsreaktionsfunktion für das gekoppelte System *Fahrweg-Tunnel-Halbraum* für eine Last,

welche sich gemäß (6.10) mit der Geschwindigkeit v bewegt.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{D}_S(k_x, \omega' - vk_x)} dk_x \right) e^{i\omega' t} d\omega' = \\ &= IFT_{\omega'} \left(IFT_{k_x, \bar{x}=0} \left(\frac{1}{\hat{D}_S(k_x, \omega' - vk_x)} \right) \right) = IFT_{\omega'} \left(\hat{H}(\omega') \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.3 Lineare Interaktion

Betrachtet man den rein linearen Fall, so kann das vorliegende Problem der Interaktion des Drehgestells mit dem Fahrweg vollständig im fouriertransformierten Raum gelöst werden. Hierzu sind die Differentialgleichungen (6.20) bezüglich der Zeit zu transformieren ($t \circ \bullet \omega$). Man erhält im Frequenzbereich folgende Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von den fünf Freiheitsgraden des Fahrzeugs

$$\mathbf{K}(\omega) \mathbf{w}(\omega) = \mathbf{p}(\omega) \quad (6.26)$$

mit der Impedanzmatrix

$$\mathbf{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_W + i\omega c_2 + k_2 & -i\omega c_2 - k_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -\omega^2 m_D + i\omega(2c_1 + c_2) + 2k_1 + k_2 & 0 & -i\omega c_1 - k_1 & -i\omega c_1 - k_1 \\ & & -\omega^2 I_\theta + \frac{L^2}{2}(i\omega c_1 + k_1) & \frac{L}{2}(i\omega c_1 + k_1) & -\frac{L}{2}(i\omega c_1 + k_1) \\ & & & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 & 0 \\ & & & & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

den Freiheitsgraden

$$\mathbf{w}^T(\omega) = [w_W(\omega) \quad w_D(\omega) \quad \phi_D(\omega) \quad w_{R0}(\omega) \quad w_{R1}(\omega)] \quad (6.28)$$

sowie dem Lastvektor

$$\mathbf{p}^T(\omega) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\hat{F}_0(\omega) \quad -\hat{F}_1(\omega)]. \quad (6.29)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun nach den Verschiebungen der beiden Räder w_{R0} und w_{R1} auflösen.

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_{R0}(\omega) \\ \hat{w}_{R1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{F}_0(\omega) \\ -\hat{F}_1(\omega) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_R(\omega) = \mathbf{A}(\omega) \hat{\mathbf{f}}(\omega) \quad (6.31)$$

Die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(\omega)$ sind in [LENZ 2003] angegeben.

Dieses Gleichungssystem kann nun wiederum nach dem Vektor der gesuchten Interaktionskräfte $\hat{\mathbf{f}}(\omega)$ aufgelöst werden.

$$\hat{\mathbf{f}}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega) \hat{\mathbf{w}}_R(\omega) \quad (6.32)$$

Damit sind nun die Interaktionskräfte zwischen den beiden Rädern und der Fahrwegplatte in Abhängigkeit von den Verschiebungen der beiden Radaufstandspunkte gegeben.

Für das Gesamtsystem bestehend aus dem *Fahrzeug* sowie dem gekoppelten System *Fahrweg-Tunnel-Halbraum* kann man nun im fouriertransformierten Raum im mitbewegten Koordinatensystem für $\bar{x} = 0$ ebenfalls eine lineare Kraft-Verformungsbeziehung zwischen den Interaktionskräften an den Rad-Platte-Kontaktpunkten und dem Differentialoperator des Bodens, d.h. der in (6.8) definierten wellenzahl-frequenzabhängigen Steifigkeit $\hat{D}_S(k_x, \omega)$, formulieren.

$$\begin{aligned} \hat{w}_B(\bar{x} = 0, \omega) &= -\hat{F}_0(\omega) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega - vk_x)}}^{B_{11}} - \hat{F}_1(\omega) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{iLk_x} dk_x}{D_S(k_x, \omega - vk_x)}}^{B_{12}} = \\ &= \hat{w}_{R0}(\omega) + \Delta \hat{w}_0(\omega) \quad (6.33) \\ \hat{w}_B(\bar{x} = -L, \omega) &= -\hat{F}_0(\omega) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iLk_x} dk_x}{D_S(k_x, \omega - vk_x)}}^{B_{21}} - \hat{F}_1(\omega) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega - vk_x)}}^{B_{22}} = \\ &= \hat{w}_{R1}(\omega) + \Delta \hat{w}_1(\omega) \quad (6.34) \end{aligned}$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen, wobei $B_{11} = B_{22}$ gilt, ergibt sich in Matrixschreibweise folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{11}(\omega) & B_{12}(\omega) \\ B_{21}(\omega) & B_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{F}_0(\omega) \\ -\hat{F}_1(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{w}_{R0}(\omega) \\ \hat{w}_{R1}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \hat{w}_0(\omega) \\ \Delta \hat{w}_1(\omega) \end{bmatrix} \quad (6.35) \\ \mathbf{B}(\omega) \hat{\mathbf{f}}(\omega) &= \hat{\mathbf{w}}_R(\omega) + \mathbf{\Delta} \hat{\mathbf{w}}(\omega) \end{aligned}$$

Die Verschiebungen der beiden Räder w_{R0} und w_{R1} erhält man nun, indem man die Interaktionskräfte aus (6.32) in das Gleichungssystem (6.35) einsetzt.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}_R &= (\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Delta} \hat{\mathbf{w}} \\ &= \frac{1}{A_{11}B_{22} - A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21} - A_{12}B_{21} - A_{21}B_{12} + A_{22}B_{11} - B_{11}B_{22} + B_{11}B_{21}} \\ &\quad \begin{bmatrix} A_{11}A_{22} - A_{11}B_{22} - A_{12}A_{21} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11} \\ -A_{21}B_{22} + A_{22}B_{21} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + A_{21}B_{12} - A_{22}B_{11} \end{bmatrix} \mathbf{\Delta} \hat{\mathbf{w}} \\ &=: \begin{bmatrix} n_{11}(\omega) & n_{12}(\omega) \\ n_{21}(\omega) & n_{22}(\omega) \end{bmatrix} \mathbf{\Delta} \hat{\mathbf{w}} \quad (6.36) \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω in den obigen Gleichungen zum Zwecke der Übersichtlichkeit teilweise weggelassen wurde.

Mit dem gegebenen Gleichungssystem lassen sich nun die Radverschiebungen w_{R0} und w_{R1} in Abhängigkeit von den Oberflächenunrundheiten der beiden Räder berechnen. Sinusförmige

Radunrundheiten mit den Amplituden A_i und den Frequenzen Ω_i nehmen im Frequenzraum folgende Form an:

$$\Delta \hat{w}_i(\omega) = A_i i\pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (6.37)$$

Die inverse Fouriertransformation bezüglich der Zeit kann für die gegebene Lastfunktion analytisch erfolgen. Hierzu sind die Verschiebungen lediglich für die zwei Frequenzen ω auszuwerten, bei welchen die Argumente der beiden Delta-Dirac Distributionen verschwinden. Dies ist der Fall für $\omega_1 = -\Omega$ und $\omega_2 = \Omega$. Dieses Vorgehen zum Übergang vom Frequenzraum in den Zeitbereich wird im folgenden zur Verbesserung der Übersichtlichkeit für den Fall des in Abbildung 6.5 dargestellten Einmassenschwingers gezeigt. Da dieser nur ein Rad besitzt, entfallen in den Gleichungen (6.33) und (6.34) die Terme B_{12} , B_{21} und B_{22} . Die Interaktionskraft $\hat{F}_0(\omega)$ läßt sich mit Hilfe der Impedanz $\hat{k}_w(\omega)$ des Einmassenschwingers

$$\hat{k}_w(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{-\omega^2 m} + \frac{1}{i\omega c + k}} \quad (6.38)$$

berechnen, wobei hier die Definition der Interaktionskraft $\hat{F}_0(\omega)$ als Druckkraft zu beachten ist:

$$\hat{F}_0(\omega) = -\hat{k}_w(\omega) \hat{w}_{R0}(\omega) \quad (6.39)$$

Gemäß Gleichung (6.33) ergibt sich die Balkenverschiebung in diesem Fall mit der in (6.14) definierten Systemübertragungsfunktion $\hat{H}(\bar{x} = 0, \omega)$ zu

$$\hat{w}_B(\bar{x} = 0, \omega) = -\hat{F}_0(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega - vk_x)} = -\hat{k}_w(\omega) \hat{w}_{R0}(\omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, \omega). \quad (6.40)$$

Unter Beachtung der Definition (6.19) kann man nun die Radverschiebung \hat{w}_{R0} berechnen.

$$\hat{w}_{R0}(\bar{x} = 0, \omega) = -\hat{k}_w(\omega) \hat{w}_{R0}(\omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, \omega) - \Delta \hat{w}(\omega) \quad (6.41)$$

$$\hat{w}_{R0}(\bar{x} = 0, \omega) = -\frac{\Delta \hat{w}(\omega)}{1 + \hat{k}_w(\omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, \omega)} \quad (6.42)$$

Betrachtet man den Fall einer sinusförmigen Radunrundheit $\Delta \hat{w}_0(\Omega)$ mit der Amplitude A_0 gemäß (6.37), so ist die Radverschiebung nun lediglich für die beiden oben ermittelten Werte $\omega_1 = -\Omega$ und $\omega_2 = \Omega$ auszuwerten.

$$w_{R0}(\bar{x} = 0, t) = -A_0 \frac{i\pi}{2\pi} \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{1 + \hat{k}_w(-\Omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, -\Omega)} - \frac{e^{i\Omega t}}{1 + \hat{k}_w(\Omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, \Omega)} \right) \quad (6.43)$$

Da das Ergebnis im Originalraum rein reell sein muß, handelt es sich bei den beiden Summanden um zwei konjugiert komplexe Lösungen. Deshalb genügt es, nur eine dieser beiden Lösungen zu berechnen. Die gesuchte Verschiebung ergibt sich nun als das Zweifache des Realteils eines der beiden Summanden.

$$w_{R0}(\bar{x} = 0, t) = 2A_0 \Re \left(\frac{i}{2} \frac{e^{i\Omega t}}{1 + \hat{k}_w(\Omega) \hat{H}(\bar{x} = 0, \Omega)} \right) \quad (6.44)$$

Nun wird wieder das Drehstellmodell mit beiden Rädern betrachtet. Für den Fall zweier sinusförmiger Radunrundheiten $\Delta \hat{w}_0(\Omega_{L0})$ und $\Delta \hat{w}_1(\Omega_{L1})$ mit zwei verschiedenen Amplituden

A_0 und A_1 sowie zwei verschiedenen Frequenzen Ω_{L0} und Ω_{L1} können die Verschiebungen der Räder im Zeitbereich ermittelt werden.

$$\begin{bmatrix} w_{R0}(t) \\ w_{R1}(t) \end{bmatrix} = \Re \left(\begin{bmatrix} n_{11}(\Omega_{L1}) & n_{12}(\Omega_{L2}) \\ n_{21}(\Omega_{L1}) & n_{22}(\Omega_{L2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iA_0 e^{i\Omega_{L1}t} \\ iA_1 e^{i\Omega_{L2}t} \end{bmatrix} \right) \quad (6.45)$$

Gemäß der Definition (6.19) ergeben sich hiermit die Verschiebungen des Balkens in den Rad- aufstandspunkten.

$$\begin{bmatrix} w_{B0}(t) \\ w_{B1}(t) \end{bmatrix} = \Re \left(\begin{bmatrix} n_{11}(\Omega_{L1}) & n_{12}(\Omega_{L2}) \\ n_{21}(\Omega_{L1}) & n_{22}(\Omega_{L2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iA_0 e^{i\Omega_{L0}t} \\ iA_1 e^{i\Omega_{L1}t} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} A_0 \sin(\Omega_{L0}t) \\ A_1 \sin(\Omega_{L1}t) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

6.4 Nichtlineare Interaktion im Zeitbereich

Da im vorliegenden Fall eine analytische Auswertung des in (6.17) gegebenen Faltungsintegrals nicht möglich ist, wird es im folgenden numerisch aufbereitet (vgl. Lenz [LENZ 2003]). Setzt man eine äquidistante Abtastung mit dem Abstand Δt sowie einen konstanten Verlauf der Kraftfunktion $F(t)$ sowie der Impulsreaktionsfunktion $h(t)$ zwischen zwei Abszissenwerten voraus, so erhält man den Verschiebungswert am Ende des Zeitschrittes. Der Schritt $i + 1$ entspricht dabei dem aktuellen Zeitpunkt $t = (i + 1)\Delta t$.

$$w_B^{i+1} = w^{hist} + \frac{\Delta t}{4} [F^0 (h^{i+1} + h^i) + F^{i+1} (h^1 + h^0)] \quad (6.47)$$

Durch die Bezeichnung w^{hist} soll hervorgehoben werden, daß lediglich Beiträge der Kontaktkraft $F(t)$ aus früheren („historischen“) Zeitschritten eingehen.

$$w^{hist} = \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^i F^k (h^{i+1-k+1} + 2h^{i-k+1} + h^{i-1-k+1}) \quad (6.48)$$

Lenz [LENZ 2003] hat die Antworten verschiedener Systeme – einer Masse, einer Feder und des Systems *Balken auf Halbraum* – auf einen Impuls dargestellt. Er zeigt, daß die Impulsreaktionsfunktion für eine Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert null annimmt, daß sie für das System *Balken auf Halbraum* jedoch einen endlichen Wert ungleich null annimmt. Dies liegt in der Balkentheorie begründet. Für das gemäß Abschnitt 6.1 mit einem als Euler-Bernoulli-Balken modellierten Masse-Feder-System zur Körperschallisolation gekoppelte Gesamtsystem kann der Wert der Impulsreaktionsfunktion h^0 zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht zu null angenommen werden und ist folglich zu berücksichtigen. Mit Hilfe des Zeitschrittverfahrens wird jedoch sichergestellt, daß die Kontaktkraft F^0 zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert null annimmt. Damit ergibt sich die Balkenverschiebung aus (6.47) zu:

$$w_B^{i+1} = w^{hist} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (h^1 + h^0) \quad (6.49)$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhält man die im folgenden benötigte Ableitung der Balkenverschiebung. Zu ihrer Berechnung bedarf es der Ermittlung der Impulgeschwindigkeitsreaktionsfunktion $\dot{h}(t)$.

$$\dot{w}_B(t) = \int_0^t F(\tau) \dot{h}(t - \tau) d\tau + F(t) h(t = 0) \quad (6.50)$$

Bereitet man dieses Faltungsintegral ebenfalls unter Verwendung einer äquidistanten Abtastung mit dem Abstand Δt sowie unter Annahme eines konstanten Verlaufs der Kraftfunktion $F(t)$ sowie der Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion $\dot{h}(t)$ zwischen zwei Abszissenwerten numerisch auf, so erhält man wieder unter Berücksichtigung von $F^0 = 0$

$$\dot{w}_B^{i+1} = \dot{w}^{hist} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (\dot{h}^1 + \dot{h}^0) + F^{i+1} h^0 \quad (6.51)$$

mit

$$\dot{w}^{hist} = \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^i F^k (\dot{h}^{i+1-k+1} + 2\dot{h}^{i-k+1} + \dot{h}^{i-1-k+1}). \quad (6.52)$$

Die Gleichungen (6.20) und (6.21) im Falle des Drehstellmodells resp. die Gleichungen (6.22) bis (6.24) im Falle des Einmassenschwingers besitzen jedoch eine ungewöhnliche Form; es handelt sich hierbei nicht um reine Differentialgleichungssysteme. Im Falle des Drehstellmodells liegt ein Gleichungssystem vor, welches aus fünf Differentialgleichungen (6.20) sowie zwei sogenannten *retardierten* Gleichungen (6.21) besteht, welche ein Integral enthalten. Im Falle des Einmassenschwingers handelt es sich um ein System, welches aus zwei Differentialgleichungen (6.22) und (6.23) sowie einer *retardierten* Gleichung (6.24) besteht. Es handelt sich hierbei um eine spezielle Klasse von Systemen, welche als *Differentiell-Algebraische Gleichungen* (DAE) bzw. im vorliegenden Fall mit retardierten Gleichungen als *Retardierte Differentiell-Algebraische Gleichungen* (RDAE) bezeichnet wird. Lutzenberger hat sich in seinen Arbeiten [LUTZENBERGER 2003, LUTZENBERGER 2006] ausführlich mit diesen Gleichungen und den damit verbundenen Problemen im Zusammenhang mit der numerischen Lösung solcher Gleichungssysteme beschäftigt. Diese besitzen ausgesprochen unvorteilhafte Eigenschaften. So können numerische Berechnungen – selbst bei der Verwendung unbedingt stabiler Zeitschrittintegrationsalgorithmen wie dem Newmark- β -Verfahren – zu fehlerhaften hochfrequenten Beiträgen oder gar Instabilitäten führen, welche keinerlei mechanische Bedeutung besitzen. Diese hochfrequenten Störungen können jedoch nicht durch die Wahl kleinerer Zeitschritte beseitigt werden. Ohne weiter ins Detail zu gehen, soll an dieser Stelle nur darauf hingewiesen werden, daß das Verhalten des Systems entscheidend vom sogenannten *Index* – dem *Störungsindex* p_i , welcher im Rahmen der betrachteten mechanischen Anwendungen mit dem *Differentiationsindex* d_i identisch ist – abhängt. Der Differentiationsindex wird aus der Anzahl der Differentiationen der algebraischen bzw. der retardierten Gleichung bestimmt, welche notwendig ist, um das Gleichungssystem in seine Normalform zu überführen. Der Index erlaubt die Beurteilung, ob ein Zeitschrittalgorithmus stabil und störungsfrei ist.

Zur Lösung solcher Gleichungssysteme gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Wege. Einen Weg stellt die Elimination der Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem dar, sie wird in einem Folgeschritt explizit ermittelt. Bei dem anderen Weg bleibt die Interaktionskraft im System enthalten und wird damit implizit bestimmt.

6.4.1 Fahrzeugmodell Einmassenschwinger

Lösung mit Elimination der Interaktionskraft

Wertet man das in (6.24) gegebene Faltungsintegral mit der in (6.49) angegebenen numerischen Auswertung aus, so erhält man mit (6.19) die Radverschiebung w_R in Abhängigkeit von

der Interaktionskraft F im aktuellen Zeitschritt und in vorherigen Zeitschritten sowie von der Radunrundheit Δw im aktuellen Zeitschritt

$$w_R^{i+1} = w^{hist} + \frac{\Delta t}{4} F^{i+1} (h^1 + h^0) - \Delta w^{i+1}, \quad (6.53)$$

wobei mit w^{hist} wieder die Beiträge der Kontaktkraft F aus zurückliegenden Zeitschritten gemäß (6.48) bezeichnet werden. Löst man diese Gleichung nun nach der Interaktionskraft F auf, so erhält man:

$$F^{i+1} = \frac{w_R^{i+1} + \Delta w^{i+1} - w^{hist}}{\frac{\Delta t}{4} (h^1 + h^0)} \quad (6.54)$$

Die so bestimmte Kontaktkraft F^{i+1} im aktuellen Zeitschritt kann somit aus dem Gleichungssystem eliminiert werden, es gehen nun lediglich noch bekannte Beiträge von F aus zurückliegenden Zeitschritten in das Gleichungssystem ein.

Das mit Hilfe des Zeitintegrationsalgorithmus zu lösende Gleichungssystem besteht folglich nur noch aus den beiden Gleichungen (6.22) und (6.23), wobei die in (6.54) ermittelte Kontaktkraft in (6.23) eingesetzt werden muß.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} m_w & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + \frac{1}{\frac{\Delta t}{4} (h^1 + h^0)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_w \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w^{hist} - \Delta w^{i+1}}{\frac{\Delta t}{4} (h^1 + h^0)} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

Zur Berechnung von w^{hist} ist es hierbei erforderlich, am Ende eines jeden Zeitschrittes die Kontaktkraft für den folgenden Zeitschritt gemäß (6.54) zu ermitteln.

Damit liegt nun ein Gleichungssystem vor, welches problemlos mit den bekannten Zeitintegrationsalgorithmen gelöst werden kann. In diesem Fall ist es auch numerisch unproblematisch, dem Rad eine Masse zuzuweisen.

Lösung ohne Elimination der Interaktionskraft

Ist das oben gezeigte Vorgehen mit Elimination der Interaktionskraft $F(t)$ auch grundsätzlich möglich, so muß jedoch das Ziel der Entwicklung eines Berechnungsverfahrens immer die praktische Anwendbarkeit sein. Dazu ist allerdings eine einfache rechnerorientierte Aufbereitung wünschenswert, weshalb eine vorhergehende analytische Bearbeitung der Gleichungen zum Zwecke der Elimination von Interaktionskräften vor diesem Hintergrund als nicht sinnvoll erscheint. Deshalb wird im folgenden gezeigt, wie eine Lösung ohne vorausgehende Elimination der Interaktionskraft möglich ist.

Wie Lenz [LENZ 2003] zeigt, muß dazu die retardierte Gleichung im vorliegenden Fall zweimal bezüglich der Zeit differenziert werden, damit das Gleichungssystem in seiner Normalform vorliegt. Der Index des Systems ergibt sich folglich zu $d_i = p_i = 2$.

Damit das Newmark- $\beta = \frac{1}{4}$ -Verfahren stabil und störungsfrei arbeitet, ist gemäß Lutzenberger [LUTZENBERGER 2003] eine Indexreduktion von *zwei* auf *eins* erforderlich; folglich muß (6.24) zur Berechnung der Radverschiebung $w_R(t)$ einmal nach der Zeit differenziert werden.

$$\dot{w}_R = \int_0^t F(\tau) \dot{h}(t - \tau) d\tau - \Delta \dot{w} \quad (6.56)$$

Das mit Hilfe des Zeitintegrationsalgorithmus zu lösende Gleichungssystem, welches nun aus der einmal differenzierten Gleichung (6.56) und den beiden Differentialgleichungen (6.22) und (6.23) besteht, kann nun unter Verwendung von (6.51) und (6.52) aufgestellt werden.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} m_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta t}{4} (\dot{h}^1 + \dot{h}^0) - h^0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_w \\ w_R \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w}^{hist} - \Delta \dot{w}^{i+t} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Darin ist $\dot{h}(t)$ die Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion. Diese kann einfach aus (6.25) ermittelt werden, indem die Übertragungsfunktion $\hat{H}(\omega')$ im Frequenzraum gemäß den in Anhang A angegebenen Differentiationsregeln der Fouriertransformation mit $i\omega'$ multipliziert wird.

$$\dot{h}(t) = IFT_{\omega'} \left(IFT_{k_x, \bar{x}=0} \left(\frac{i\omega'}{\hat{D}_S(k_x, \omega' - vk_x)} \right) \right) = IFT_{\omega'} \left(i\omega' \hat{H}(\omega') \right) \quad (6.58)$$

Damit verliert die Übertragungsfunktion jedoch ihr im Rahmen der Anwendung der Fouriertransformation nötiges Abklingverhalten bezüglich der Frequenz ω' . Wie Lenz [LENZ 2003] zeigt, tritt dieses Problem zwar nicht infolge einer Impulseinwirkung auf eine Masse, jedoch z.B. infolge der Einwirkung eines Impulses auf das von ihm untersuchte System *Balken auf Halbraum* auf, da die Geschwindigkeit dieses Systems am Kräfteinwirkungsort zum Zeitpunkt $t = 0$ sehr groß bzw. unendlich ist. Da dies in der Balkentheorie begründet liegt, kommt dieser Effekt auch bei einem gemäß Abschnitt 6.1 als Euler-Bernoulli-Balken modellierten Masse-Feder-System zum Tragen. Eine elegante Methode zur Auswertung der Impulsgeschwindigkeitsreaktionsfunktion $\dot{h}(t)$ im ersten Zeitschritt ist in [GRUNDMANN und LENZ 2003] gezeigt.

Soll dem Rad, welches im vorliegenden Fall als nicht massebehaftet betrachtet wurde, jedoch eine Masse zugewiesen werden, dann handelt es sich um ein System mit dem Differentiations- bzw. dem Störungsindex $d_i = p_i = 3$. Ohne Elimination der Interaktionskraft ist es in diesem Fall notwendig, die Nebenbedingung durch eine zweifache Ableitung der retardierten Gleichung auf Beschleunigungsebene zu formulieren. Die dann benötigte Impulsbeschleunigungsreaktionsfunktion weist jedoch ein Verhalten auf, das numerisch nicht mehr problemlos zu erfassen ist.

6.4.2 Fahrzeugmodell Drehgestell

Lösung mit Elimination der Interaktionskraft

Beim Drehgestellmodell soll im folgenden den Rädern eine Masse zugeordnet werden, weshalb es sich wie im Fall eines Einmassenschwingers mit massebehaftetem Rad um ein System mit dem Index $d_i = p_i = 3$ handelt. Aufgrund der kaum möglichen numerischen Generierung der Impulsbeschleunigungsreaktionsfunktion wird diese Situation mit Hilfe der Elimination der Interaktionskraft aus dem Gleichungssystem untersucht.

Analog zu (6.54) erhält man die beiden Interaktionskräfte zu

$$F_0^{i+1} = \frac{4}{a_0} \left[+ (h_{00}^1 + h_{00}^0) (w_{01,1}^{hist} + w_{00,0}^{hist} - \Delta w_0 - w_{R0}) - \right. \\ \left. - (h_{01}^1 + h_{01}^0) (w_{10,0}^{hist} + w_{00,1}^{hist} - \Delta w_1 - w_{R1}) \right] \quad (6.59)$$

$$F_1^{i+1} = \frac{4}{a_0} \left[+ (h_{00}^1 + h_{00}^0) (w_{10,0}^{hist} + w_{00,1}^{hist} - \Delta w_1 - w_{R1}) - \right. \\ \left. - (h_{10}^1 + h_{10}^0) (w_{01,1}^{hist} + w_{00,0}^{hist} - \Delta w_0 - w_{R0}) \right] \quad (6.60)$$

mit

$$a_0 = -(h_{00}^1 + h_{00}^0)^2 + (h_{01}^1 + h_{01}^0)(h_{10}^1 + h_{10}^0). \quad (6.61)$$

Dabei ergibt sich $w_{kl,m}^{hist}$ gemäß (6.48), wobei die Impulsreaktionsfunktionen h_{kl} und die Kraft F_m an der Stelle m zu verwenden sind.

Nun kann das Gleichungssystem in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden

$$\mathbf{w}^T = [w_W \quad w_D \quad \phi_D \quad w_{R0} \quad w_{R1}] \quad (6.62)$$

aufgestellt werden. Bringt man dazu die von den Radverschiebungen w_{R0} und w_{R1} abhängigen Anteile der in (6.59) und (6.60) angegebenen Kontaktkräfte auf die Seite der Steifigkeitsmatrix, so lautet der Lastvektor

$$\mathbf{p}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad p_0 \quad p_1] \quad (6.63)$$

mit

$$p_0 = \frac{4}{a_0} \left(- (h_{00}^1 + h_{00}^0) (w_{01,1}^{hist} + w_{00,0}^{hist} - \Delta w_0) + (h_{01}^1 + h_{01}^0) (w_{10,0}^{hist} + w_{00,1}^{hist} - \Delta w_1) \right) \quad (6.64)$$

$$p_1 = \frac{4}{a_0} \left(- (h_{00}^1 + h_{00}^0) (w_{10,0}^{hist} + w_{00,1}^{hist} - \Delta w_1) + (h_{10}^1 + h_{10}^0) (w_{01,1}^{hist} + w_{00,0}^{hist} - \Delta w_0) \right) \quad (6.65)$$

Das Gleichungssystem ist nun durch die Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_R \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 2c_1 + c_2 & 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{2}c_1 & \frac{L}{2}c_1 & -\frac{L}{2}c_1 \\ 0 & -c_1 & \frac{L}{2}c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -\frac{L}{2}c_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad (6.67)$$

sowie die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 2k_1 + k_2 & 0 & -k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{2}k_1 & \frac{L}{2}k_1 & -\frac{L}{2}k_1 \\ 0 & -k_1 & \frac{L}{2}k_1 & k_1 - \frac{4}{a_0}(h_{00}^1 + h_{00}^0) & \frac{4}{a_0}(h_{01}^1 + h_{01}^0) \\ 0 & -k_1 & -\frac{L}{2}k_1 & \frac{4}{a_0}(h_{10}^1 + h_{10}^0) & k_1 - \frac{4}{a_0}(h_{00}^1 + h_{00}^0) \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

gegeben.

6.4.3 Zeitintegration mit dem Newmark- $\beta = \frac{1}{4}$ -Verfahren

Als Verfahren zur Zeitintegration wurde das Newmark- β -Verfahren mit den Parametern $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ gewählt, welchem die Annahme einer innerhalb eines Zeitschrittes konstanten Beschleunigung zugrunde liegt. Dieses Verfahren besitzt zwar nicht die dissipativen Eigenschaften des Generalized- α -Verfahrens – weshalb es z.B. in der Anwendung auf System mit dem Index $d_i = p_i = 3$ instabil ist –, seine Anwendung erscheint aber gemäß [LUTZENBERGER 2003] aufgrund der wenigen beschreibenden Parameter vorteilhaft.

Ausgehend vom dem Verfahren zugrunde liegenden Ansatz nach Newmark erhält man das Kräftegleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (6.69)$$

in der Form

$$\hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{w}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} \quad (6.70)$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_t = \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (6.71)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} = \left[\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} \right] \mathbf{w}_t + \left[\frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{f}_{t+\Delta t}. \quad (6.72)$$

Hiermit kann nun der Verschiebungsvektor im aktuellen Zeitschritt berechnet werden. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann durch Einsetzen des Verschiebungsvektors in:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}\mathbf{w}_{t+\Delta t} - \frac{2}{\Delta t}\mathbf{w}_t - \dot{\mathbf{w}}_t \quad (6.73)$$

Schlußendlich kann damit die Beschleunigung im aktuellen Zeitschritt aus dem Kräftegleichgewicht (6.69) ermittelt werden.

6.4.4 Nichtlineare Iteration mit dem Newton-Raphson-Verfahren

Besteht kein linearer Zusammenhang zwischen den Lasten und den Verformungen bzw. den Spannungen

$$\mathbf{K}(\mathbf{w})\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (6.74)$$

so ist nicht nur der Verformungsvektor \mathbf{w} , sondern auch die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}(\mathbf{w})$ unbekannt, weshalb ein Iterationsverfahren zur Anwendung gelangen muß.

Im vorliegenden Beispiel wird die folgende nichtlineare Federkennlinie für die Primärfederung des Drehgestells verwendet (vgl. [LENZ 2003]).

$$k_{nl} = \frac{k_0}{1 + a|\Delta w|^n} \quad \forall a, n > 0 \quad (6.75)$$

Hierin ist k_0 die Grundfedersteifigkeit und Δw die Zusammendrückung der Feder. Die Parameter a und n beschreiben die Stärke der Nichtlinearität, die grundsätzlich unterlinear ist, d.h. die Feder reagiert auf große Verformungen weicher als eine lineare Feder.

Dabei wird das Residuum $\Psi(\mathbf{w})$ der Gleichgewichtsbedingung

$$\Psi(\mathbf{w}) = \mathbf{K}(\mathbf{w})\mathbf{w} - \mathbf{f} \quad (6.76)$$

in eine Taylorreihe entwickelt, welche nach dem Glied der Ordnung eins abgebrochen wird.

$$\mathbf{K}(\mathbf{w}^{n+1}) \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{w}^n) \mathbf{w}^n - \mathbf{f} + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{w}^n)}{\partial \mathbf{w}} \right) \mathbf{w}^n + \mathbf{K}(\mathbf{w}^n) \right] \Delta \mathbf{w}^n = 0 \quad (6.77)$$

Hieraus kann der Vektor des Verformungszuwachses ermittelt werden

$$\Delta \mathbf{w}^n = - [\Psi'(\mathbf{w}^n)]^{-1} (\mathbf{K}(\mathbf{w}^n) \mathbf{w}^n - \mathbf{f}) \quad (6.78)$$

mit

$$\Psi'(\mathbf{w}^n) = \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{w}^n)}{\partial \mathbf{w}} \right) \mathbf{w}^n + \mathbf{K}(\mathbf{w}^n). \quad (6.79)$$

Damit ergibt sich der Ausgangsverschiebungsvektor für den folgenden Iterationsschritt.

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n + \Delta \mathbf{w}^n \quad (6.80)$$

Liegt der Wert des Verformungszuwachsvektors unter einer vorgegebenen Schranke, wird die Iteration abgebrochen.

Für die untersuchten Fahrzeugmodelle *Einmassenschwinger* und *Drehgestell* können die für die Newton-Raphson-Iteration benötigten Matrizen $\Psi'(\mathbf{w}^n)$ der Arbeit [LENZ 2003] entnommen werden.

Kapitel 7

Beispiele

Die Formulierung des hybriden Verfahrens dient der Erschließung der Möglichkeit, komplizierte geometrische Situationen zu untersuchen, für welche keine geschlossenen Lösungen vorliegen. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Kopplung der beiden Verfahren ITM und FEM gewählt, da dadurch die Vorteile, welche die ITM für die Abbildung unendlicher Gebiete mit regelmäßiger Geometrie wie des Kontinuums bzw. des Halbraums besitzt, mit denen der FEM für die Modellierung endlicher Gebiete mit unregelmäßiger Geometrie vereinigt werden können.

Das vorgestellte Verfahren setzt sich deshalb aus mehreren, für sich genommen bereits komplexen Teilsystemen zusammen. Es ist wichtig, diese Teilsysteme soweit als möglich einzeln zu überprüfen. Dazu wurden sowohl für die Halbraumlösung als auch für die Vollraumlösung mit kreiszylindrischem Hohlraum sowie für die FEM-Lösung Vergleiche mit bekannten Lösungen angestellt.

Um jedoch das entwickelte Verfahren – und nicht zuletzt dessen programmtechnische Umsetzung – in seiner Gesamtheit auf seine Richtigkeit und seine Zuverlässigkeit hin zu überprüfen, ist es von großer Wichtigkeit, mit dem entwickelten Programmpaket einfache geometrische Situationen zu untersuchen, für deren Lösung möglichst analytische Vergleichsberechnungen herangezogen werden können.

In den folgenden Abschnitten werden deshalb zuerst mögliche Vergleichsberechnungen beschrieben und durchgeführt. Danach werden Anwendungsbeispiele behandelt, welche weitere Möglichkeiten, die das hybride Vorgehen erschließt, vor Augen führen.

7.1 Vergleichsberechnungen

In diesem Abschnitt werden für zwei verschiedene Fälle Kontrollrechnungen durchgeführt, welche die Überprüfung der mit dem entwickelten Programmpaket erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe von vorhandenen, möglichst einfachen Verfahren für besondere geometrische Situationen erlauben.

7.1.1 Kontrollbeispiel einer kreiszylindrischen Tunnelschale

Als erstes Beispiel einer Kontrolle soll an dieser Stelle ein Tunnel mit einer kreiszylindrischen, dünnen Tunnelschale unter dynamischer Belastung untersucht werden. Eine geschlossene Lösung für dieses Problem läßt sich dadurch erreichen, daß man einen in Radialrichtung geschichteten Vollraum mit zylindrischem Hohlraum modelliert. Dazu weist man der innenliegenden Schicht die Parameter der Tunnelschale und der nach außen sich ins Unendliche erstreckenden Schicht die Parameter des umgebenden Bodens zu. Um jedoch diesen Fall mit der hier vorgestellten ITM-FEM Kopplung nachbilden zu können, muß in dieser die radialsymmetrische unendliche Ausdehnung des Vollraumes berücksichtigt werden. Dies läßt sich jedoch leicht durch die Anpassung der Höhe der Überdeckung erreichen, die entsprechend groß anzusetzen ist, so daß die störenden Einflüsse der freien Halbraumboberfläche vernachlässigbar klein werden. Man betrachtet folglich einen tiefliegenden Tunnel.

Hierbei wird zum einen die ITM-FEM Kopplung überprüft, zum andern wird aber auch implizit überprüft, ob die Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischen Hohlraum* bei ausreichend großer Überdeckungshöhe erwartungsgemäß in die Vollraumlösung übergeht.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit eröffnet sich, wenn man den Sonderfall einer dünnen Tunnelschale betrachtet. Die Schale kann nach der Theorie von Donnell-Marguerre oder der hier verwendeten Theorie von Flügge [FLÜGGE 1957] modelliert werden. Sie wird mit dem Vollraum entlang dessen innerer Berandung gekoppelt. Dieses Vorgehen wurde in [GRUNDMANN und MÜLLER 2005] zu Vergleichszwecken angewandt und entspricht der von Forrest und Hunt [FORREST und HUNT 2006a] benutzten Methode. In [RUNTEMUND 2006] wurden damit dimensionslose Feder- und Dämpfungskennwerte für eine Kreiszyinderschale im Vollraum ermittelt.

Die einzelnen zu vergleichenden Lösungen werden im folgenden detailliert beschrieben.

Modellierung des innenliegenden Zylinders nach der Kontinuumstheorie

Für den Vollraum ist es möglich, eine radiale Bodenschichtung beliebiger Dicke durch Einführung der entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen abzubilden. Das Vorgehen erfolgt hier analog dem in Abschnitt 2.4 gezeigten Prozedere für den geschichteten Halbraum. Es liegen folglich drei Spannungsrandbedingungen für σ_{rr} , $\sigma_{r\psi}$ und σ_{rx} am inneren Rand, drei Spannungs- und drei Verschiebungsübergangsbedingungen an der Schichtgrenze und die nicht lokalen Randbedingungen im unendlichen Raum vor. Da innerhalb der die Schale darstellenden Schicht sowohl auf- als auch abklingende Lösungsanteile vorkommen, ist hierfür das vollständige Fundamentalsystem – z.B. bestehend aus den Modifizierten Besselfunktionen I und den MacDonaldfunktionen K – zu verwenden. Im außenliegenden Vollraum wird hingegen zur Berücksichtigung der Randbedingungen im Unendlichen wie in Kapitel 3 vorgegangen. Insgesamt ist folglich ein Gleichungssystem der Dimension $9 \cdot 9$ zu lösen.

Das Verfahren zeigt jedoch numerische Probleme für den Fall dünner radialer Bodenschichten. In diesem Fall sind die Nahfeldlösungen noch kaum abgeklungen, weshalb die Differenz zu den Fernfeldlösungen in Abhängigkeit von der Ordnung der Besselfunktionen sowie den Wellenzahlen und Frequenzen Größenordnungen erreichen kann, welche eine mangelhafte Konditionierung

des Gleichungssystems zur Folge haben. Dies erfordert Maßnahmen zur Verbesserung der Konditionierung wie z.B. Spaltennormierungen.

Modellierung des innenliegenden Zylinders nach der Schalentheorie

Für den Fall dünner, flacher Schalen aus linear elastischem, homogenem und isotropem Material eignet sich die Theorie von Donnell-Marguerre oder von Flügge, wobei im folgenden die Differentialgleichungen von Flügge verwendet werden. Die entsprechenden Gleichungen können gewonnen werden, indem man die statischen Gleichungen von Flügge [FLÜGGE 1957] um die Trägheitskräfte ergänzt.

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 7.1 das gewählte Koordinatensystem (a) sowie die Richtungen der in der Schalenmittelfläche angreifenden Lasten p_x , p_ψ und p_r (b) und der positiven Deformationen u , v und w der Schalenmittelfläche (c) am herausgetrennten Element.

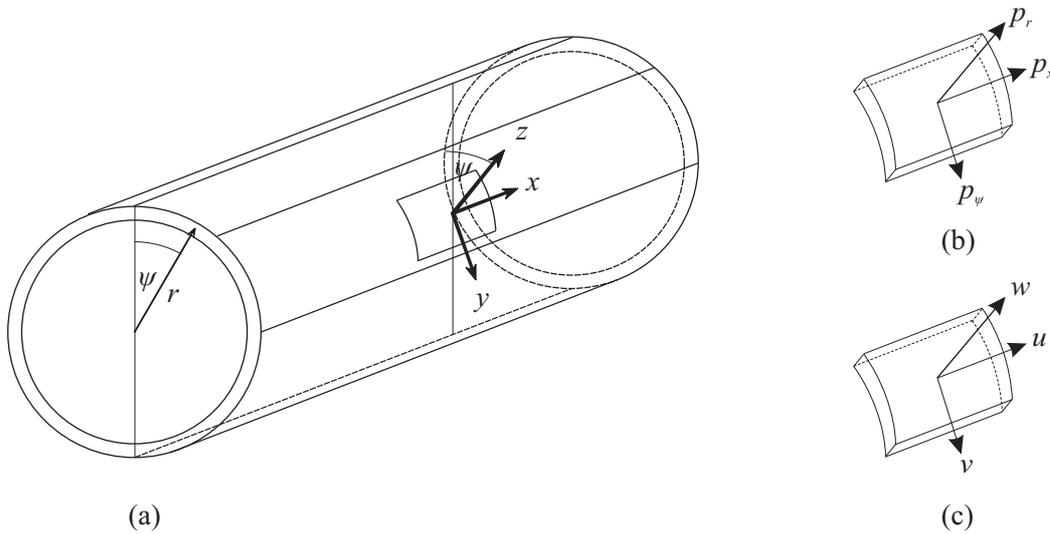


Abbildung 7.1: Koordinatensystem für die Kreiszylinderschale (a) sowie die Belastung (b) und die Verschiebungen (c) der Schalenmittelfläche am Element

ergeben sich die folgenden Gleichungen für das dynamische Gleichgewicht in der Longitudinalrichtung x , der Tangentialrichtung y sowie der Radialrichtung r

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(1+\nu)}{2} a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} + k \left[\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - a^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{(1-\nu)}{2} a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} \right] + p_x \frac{a^2}{D} - \rho h \frac{a^2}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{(1-\nu)}{2} a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \phi} + k \left[\frac{3(1-\nu)}{2} a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{(3-\nu)}{2} a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} \right] + p_y \frac{a^2}{D} - \rho h \frac{a^2}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (7.2)$$

$$\nu a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \phi} + w + k \left[\frac{(1-\nu)}{2} a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \phi^2} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{(3-\nu)}{2} a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \phi} + \right. \\ \left. + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \right] - p_z \frac{a^2}{D} + \rho h \frac{a^2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7.3)$$

mit

$$k = \frac{h^2}{12a^2} \quad \text{und} \quad D = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \quad (7.4)$$

Auf diese Gleichungen wird nun – analog zum auf die Wellengleichungen des Kontinuums angewandten Vorgehen in Kapitel 3.2 – eine Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung ψ sowie eine zweifache Fouriertransformation ($x \circ \bullet k_x$, $t \circ \bullet \omega$) bezüglich der Längsrichtung und der Zeit angewendet.

$$-k_x^2 a^2 \hat{u} - \frac{(1-\nu)}{2} n^2 \hat{u} + \nu i k_x a w - \frac{(1+\nu)}{2} k_x n a \hat{v} + \\ + k \left[-\frac{(1-\nu)}{2} n^2 \hat{u} + i k_x^3 a^3 \hat{w} - \frac{(1-\nu)}{2} i k_x n^2 a \hat{w} \right] + p_x \frac{a^2}{D} + \omega^2 \rho h \frac{a^2}{D} \hat{u} = 0 \quad (7.5)$$

$$- \frac{(1+\nu)}{2} k_x n a \hat{u} - n^2 \hat{v} - \frac{(1-\nu)}{2} k_x^2 a^2 \hat{v} + i n \hat{w} + \\ + k \left[-\frac{3(1-\nu)}{2} k_x^2 a^2 \hat{v} + \frac{(3-\nu)}{2} i k_x^2 n a^2 \hat{w} \right] + p_y \frac{a^2}{D} + \omega^2 \rho h \frac{a^2}{D} \hat{v} = 0 \quad (7.6)$$

$$\nu i k_x a \hat{u} + i n \hat{v} + w + k \left[-\frac{(1-\nu)}{2} i k_x n^2 a \hat{u} + i k_x^3 a^3 \hat{u} + \frac{(3-\nu)}{2} i k_x^2 n a^2 \hat{v} + \right. \\ \left. + k_x^4 a^4 \hat{w} + 2k_x^2 n^2 a^2 \hat{w} + n^4 \hat{w} - 2n^2 \hat{w} + \hat{w} \right] - p_z \frac{a^2}{D} - \omega^2 \rho h \frac{a^2}{D} \hat{w} = 0 \quad (7.7)$$

In Matrizenform ergibt sich das Gleichungssystem wie folgt:

$$\hat{\mathbf{K}}_{Fl} \hat{\mathbf{u}}_{Fl} = \hat{\mathbf{p}}_{Fl} \quad (7.8)$$

mit

$$\hat{\mathbf{u}}_{Fl}^T = [\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{w}] \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}}_{Fl}^T = \frac{a^2}{D} [\hat{p}_x \quad \hat{p}_\psi \quad \hat{p}_r].$$

Kopplung der Flügge-Schale mit dem Vollraum entlang des Randes Γ_S

Nachdem nun die Flüggeschen Gleichungen im fouriertransformierten (k_x, r, n, ω) -Raum als rein algebraisches Gleichungssystem (7.8) vorliegen, wird die damit beschriebene Kreiszyinderschale mit Hilfe der Substrukturtechnik mit dem unendlichen Kontinuum gekoppelt. Die Kopplung erfolgt entlang des Randes Γ_S . Hierbei sind die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S}$ des Kontinuums am Rand Γ_S mit den Verschiebungen der Schalenmittelfläche $\hat{\mathbf{u}}_{Fl}$ gleichzusetzen, wodurch die Schalenmittelfläche, wie in Abbildung 7.2 dargestellt, auf dem Rand Γ_S zu liegen kommt.

$$\hat{\mathbf{u}}_{Fl} = \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} \quad (7.9)$$

Löst man nun (7.8) nach den Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{Fl}$ auf, so erhält man:

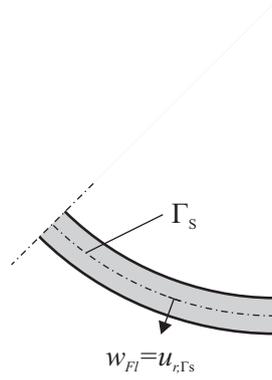


Abbildung 7.2: Lage der Schalenmittelfläche auf dem Rand Γ_S mit Radialverschiebungen w_{Fl} der Schale resp. u_{r,Γ_S} des Kontinuums

$$\hat{\mathbf{u}}_{Fl} = \hat{\mathbf{K}}_{Fl}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{Fl} \quad (7.10)$$

Mit einer Untermatrix $\hat{\mathbf{H}}_{\sigma}^{\Gamma_S}$ von (3.85) ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Spannungen im Kontinuum am Rand Γ_S und den Koeffizienten der entsprechenden Besselfunktionen $\hat{\mathbf{c}}_n$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{H}}_{\sigma}^{\Gamma_S} \hat{\mathbf{c}}_n. \quad (7.11)$$

Ebenso gilt mit einer Untermatrix $\hat{\mathbf{H}}_u$ der folgende Zusammenhang zwischen den Verschiebungen im Kontinuum am Rand Γ_S und den Koeffizienten $\hat{\mathbf{c}}_n$:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} = \hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S} \hat{\mathbf{c}}_n. \quad (7.12)$$

Löst man nun (7.12) nach den Koeffizienten $\hat{\mathbf{c}}_n$ auf

$$\hat{\mathbf{c}}_n = (\hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S})^{-1} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S}, \quad (7.13)$$

so erhält man nach dem Einsetzen dieses Zusammenhangs in (7.11) die folgende Beziehung zwischen den Verschiebungen und den Spannungen im Kontinuum am Rand Γ_S

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{H}}_{\sigma}^{\Gamma_S} (\hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S})^{-1} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} = \hat{\mathbf{K}}_S \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S}, \quad (7.14)$$

wobei mit $\hat{\mathbf{K}}_S$ die Steifigkeitsmatrix des Kontinuums

$$\hat{\mathbf{K}}_S = \hat{\mathbf{H}}_{\sigma}^{\Gamma_S} (\hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S})^{-1} \quad (7.15)$$

bezeichnet wird, welche im fouriertransformierten (k_x, r, n, ω) -Raum die Steifigkeit des unendlichen Kontinuums bezüglich seiner inneren zylindrischen Oberfläche beschreibt.

Da gemäß den Übergangsbedingungen (7.9) die Verschiebungen des Kontinuums und der Schalenmittelfläche entlang des Randes Γ_S gleichzusetzen sind, ergibt sich für die Kopplung der beiden Substrukturen *Tunnelschale* und *Vollraum mit einem zylindrischen Hohlraum*, daß ihre Steifigkeiten zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix für das gekoppelte System des Vollraumes mit einer dünnen, kreiszylindrischen Tunnelschale zu addieren sind.

$$\hat{\mathbf{K}}_{ges} = \hat{\mathbf{K}}_{Fl} + \hat{\mathbf{K}}_S \quad (7.16)$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verschiebungen des Gesamtsystems am Rand Γ_S .

$$\hat{\mathbf{p}}_{\Gamma_S} = \hat{\mathbf{K}}_{ges} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} \quad (7.17)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun nach den Verschiebungen des gekoppelten Systems am Rand Γ_S auflösen.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} = \hat{\mathbf{K}}_{ges}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{\Gamma_S} \quad (7.18)$$

Um nun die Zustandsgrößen an einer beliebigen Stelle im Kontinuum ermitteln zu können, sind zuerst mit Hilfe von (7.13) die Koeffizienten $\hat{\mathbf{c}}_n$ der entsprechenden Besselfunktionen zu ermitteln.

$$\hat{\mathbf{c}}_n = (\hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S})^{-1} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_S} = (\hat{\mathbf{H}}_u^{\Gamma_S})^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{ges}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{\Gamma_S} \quad (7.19)$$

Sind die Koeffizienten $\hat{\mathbf{c}}_n$ bekannt, lassen sich mit der Beziehung (3.85) nun die gesuchten Zustandsgrößen, z.B. die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}^r$ an einer beliebigen Stelle r im Kontinuum, ermitteln.

$$\hat{\mathbf{u}}^r = \hat{\mathbf{H}}_u^r \hat{\mathbf{c}}_n \quad (7.20)$$

Vergleichsergebnisse

Im Rahmen der Vergleichsberechnungen wurden die in Tabelle 7.1 angegebenen Bodenparameter verwendet.

Boden	Elastizitätsmodul $E [Nm^{-2}]$	Querdehnzahl $\nu [-]$	Dichte $\rho [kg/m^3]$	Verlustfaktor $\zeta [-]$	P-Wellengeschwindigkeit $v_s [m/s]$	S-Wellengeschwindigkeit $v_p [m/s]$
weich	$50 \cdot 10^6$	0.3	2000	0.10	183	98
steif	$2000 \cdot 10^6$	0.3	2000	0.10	1160	620

Tabelle 7.1: Bodenparameter

Die verwendeten Materialkenngrößen sowie die Abmessungen der Tunnelschale sind in Tabelle 7.2 aufgeführt.

Elastizitätsmodul $E [Nm^{-2}]$	Querdehnzahl $\nu [-]$	Dichte $\rho [kg/m^3]$	Verlustfaktor $\zeta [-]$	Innerer Radius $r_i [m]$	Äußerer Radius $r_a [m]$
$30000 \cdot 10^6$	0.2	2500	0	3.0	3.15

Tabelle 7.2: Parameter der Tunnelschale

Es wird die Einwirkung einer radial im Inneren der Tunnelschale angreifenden Ringlast mit der Amplitude $p_{r0} = 0.5 N$ untersucht. Sie weist eine Veränderlichkeit der Form $\cos(n\phi)$ bezüglich der Umfangsrichtung auf und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 20 m/s$. Dabei oszilliert sie harmonisch mit einer Frequenz $\Omega = 2\pi f$. Damit lautet die Lastfunktion im Originalraum:

$$p_r(x, r, \phi, t) = p_{r0} \delta(x) \cos(n\phi) \cos(\Omega t) \quad (7.21)$$

Im fouriertransformierten (k_x, r, n, ω) -Raum erhält man daraus folgende Lastfunktion:

$$p_r(k_x, r, n, \omega) = p_{r0} \pi (\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad \forall \quad n \neq 0 \quad (7.22)$$

In den folgenden Abbildungen werden die mit Hilfe des entwickelten Verfahrens auf der Basis der ITM-FEM Kopplung erhaltenen Ergebnisse für verschiedene Überdeckungshöhen h den mit der Vollraumlösung für eine nach der Kontinuumstheorie sowie nach der Schalentheorie modellierte Tunnelschale gegenübergestellt. Dabei zeigt Abbildung 7.3 die Ergebnisse für einen weichen Boden gemäß Tabelle 7.1 und eine Last mit der Anregungsfrequenz $f = 10 \text{ Hz}$, welche mit $n = 1$ kosinusförmig in Umfangsrichtung veränderlich ist. Abbildung 7.4

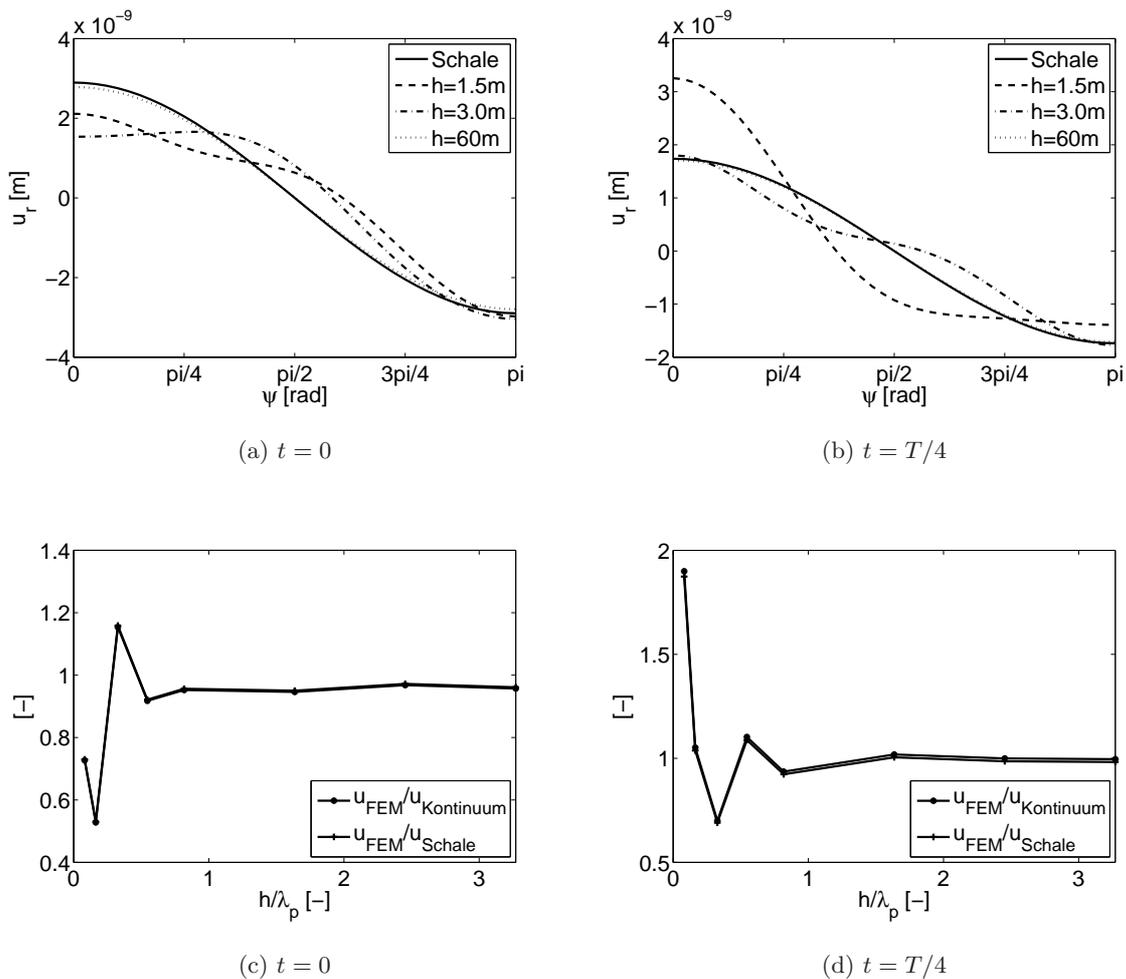


Abbildung 7.3: Vergleichsergebnisse für weichen Boden, $n = 1$ und $f = 10 \text{ Hz}$

zeigt ähnliche Ergebnisse für einen weichen Boden gemäß Tabelle 7.1 und eine Last mit der Anregungsfrequenz $f = 50 \text{ Hz}$, welche mit $n = 2$ kosinusförmig in Umfangsrichtung veränderlich ist.

Dabei ist jeweils die Veränderlichkeit der Radialverschiebung u_r über den Umfang in Abhängigkeit vom Winkel ψ für die Zeitpunkte $t = 0$ (a) und $t = T/4$ (b) dargestellt. Zeigen die Ergebnisse

für große Höhen der Überdeckung einen kosinusförmigen Verlauf, so ist dies für oberflächennahe Tunnels nicht mehr der Fall. Hier wird der Einfluß der spannungsfreien Halbraumboberfläche deutlich erkennbar. Ebenso kann man erkennen, daß die Ergebnisse an der Tunnelsohle ($\psi = \pi$) im Gegensatz zu denen am Tunnelscheitel ($\psi = 0$) nur wenig von der Mächtigkeit der überdeckenden Bodenschicht abhängen. Ebenso dargestellt sind die mit dem entwickelten Verfahren

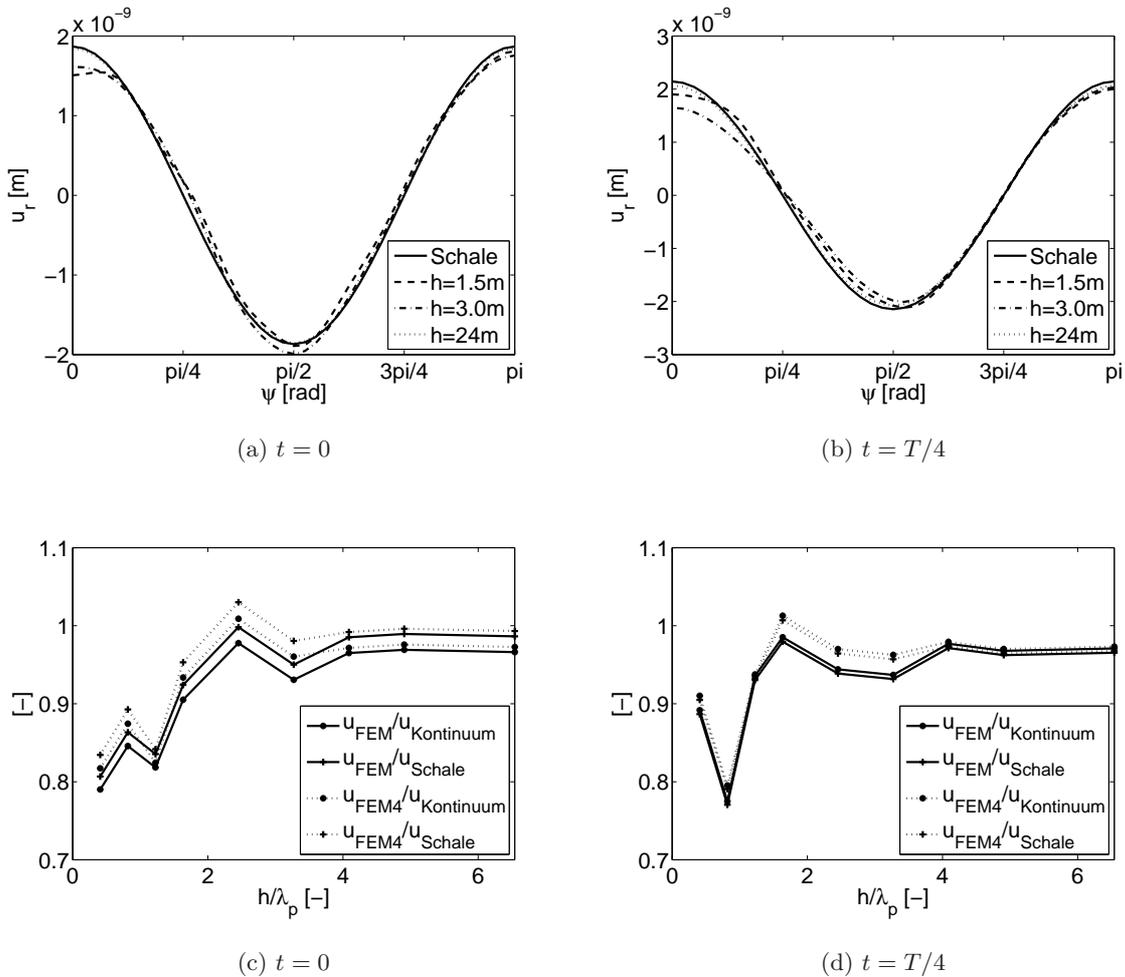


Abbildung 7.4: Vergleichsergebnisse für weichen Boden, $n = 2$ und $f = 50 \text{ Hz}$

ermittelten Ergebnisse für die Verschiebung des Tunnelscheitels bezogen auf die für eine nach der Kontinuumstheorie bzw. nach der Schalentheorie modellierte Tunnelchale erhaltenen Ergebnisse. Die Auswertung erfolgt dabei an der Stelle $\bar{x} = 0 \text{ m}$ für die Zeitpunkte $t = 0$ (c) und $t = T/4$ (d) und ist in Abhängigkeit von der Überdeckungshöhe des Tunnels bezogen auf die Kompressionswellenlänge des Bodens dargestellt. Man erkennt deutlich die Annäherung der Halbraumlösung an die beiden Vollraumlösungen mit zunehmender Mächtigkeit des sich über dem Tunnel befindenden Bodens.

Während allen übrigen Ergebnissen eine FEM-Diskretisierung der Schale mit Hilfe von zwei „Ele-

mentringen“ in Radialrichtung zugrunde liegt, zeigen die Abbildungen 7.4 (c) und (d) auch die Ergebnisse für eine nach einer Netzverfeinerung mittels vier „Elementringen“ (FEM4) diskretisierte Schale. Erwartungsgemäß zeigt sich ein weniger steifes Verhalten der Tunnelschale, wodurch sich die Ergebnisse noch stärker an die beiden Vollraumlösungen annähern.

7.1.2 Kontrollbeispiel eines ungestörten Halbraums

Die oben gezeigten Vergleichsberechnungen bestätigen grundsätzlich die mit der ITM-FEM Kopplung ermittelten Ergebnisse. Allerdings läßt sich damit nur der Übergang der Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* in das System *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* mit zunehmender Mächtigkeit der den Tunnel überdeckenden Bodenschicht und damit die Kopplung der *Vollraum*lösung mit dem FEM-Gebiet nachweisen. Der Nachweis der korrekten Einbeziehung der freien Halbraumoberfläche kann mit diesem Vorgehen jedoch nicht geführt werden.

Es wird eine Kontrollmethode benötigt, welche, indem sie auch für beliebig kleine Überdeckungshöhen herangezogen werden kann, die Möglichkeit der Überprüfung der richtigen Erfassung des von der freien Halbraumoberfläche ausgehenden Einflusses auf die Antwortgrößen bietet. In hervorragender Weise eignet sich hierzu der Fall einer Bodenschicht auf dem Halbraum, welche mit den gleichen Bodenparametern wie der Halbraum modelliert wird. Die Schichtgrenze ist folglich nur eine gedachte Grenze innerhalb des homogenen Halbraums. Auf dieser gedachten Schichtgrenze innerhalb des Halbraums wird nun eine Lastfunktion angesetzt. Die Lösung dieses einfachen Falles kann mit Hilfe der ITM semianalytisch berechnet werden. Mit der hier vorgestellten ITM-FEM Kopplung läßt sich diese Situation ebenfalls leicht abbilden, indem das komplette Gebiet innerhalb des ebenfalls fiktiven Randes Γ_S mit Finiten Elementen diskretisiert wird, welchen die gleichen Bodenparameter wie dem umgebenden Halbraum zugewiesen werden. Einen skizzenhaften Überblick über die mit beiden Verfahren untersuchte Situation gibt Abbildung 7.5. Im folgenden wird kurz auf die beiden Vergleichslösungen eingegangen.

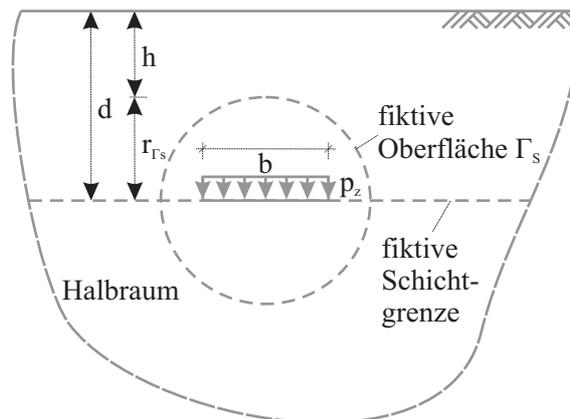


Abbildung 7.5: Halbraum mit gedachter Schichtgrenze sowie Vollraum mit gedachter Berandung Γ_S zum innenliegenden FEM-Gebiet

Halbraumlösung mittels ITM

Um den oben beschriebenen Lastfall mit Hilfe der ITM geschlossen als geschichteten Halbraum behandeln zu können, wurde eine gedachte horizontale Schichtgrenze auf der Kote der Tunnelmitte $z = d$ im Halbraum eingefügt, d.h. oberhalb sowie unterhalb dieser Schichtgrenze liegen die gleichen Bodenverhältnisse vor. Die Schichtgrenze dient hierbei lediglich zum Eintragen der Lasten auf dieser Kote. Die Belastung wird – im Falle der untersuchten Rechtecklast sogar analytisch – als Flächenlast im fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum aufgebracht.

Für das in Abbildung 7.5 dargestellte System mit einer Schicht auf dem unendlich ausgedehnten Halbraum liegen drei Spannungsrandbedingungen an der freien Oberfläche sowie je drei Spannungs- und drei Verschiebungsübergangsbedingungen an der Schichtgrenze vor. An der Oberfläche müssen alle Spannungen verschwinden, während an der Schichtgrenze die Spannungen in der oberen Schicht gleich den Spannungen in der unteren Schicht sein müssen, falls dort keine äußeren Lastzustände angreifen; im Fall der angreifenden Last p_z muß diese im vertikalen Gleichgewicht berücksichtigt werden. Alle Rand- und Übergangsbedingungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
 z = 0 : \quad & \hat{\sigma}_{xz}^{(1)}(z = 0) = \hat{\sigma}_{yz}^{(1)}(z = 0) = \hat{\sigma}_{zz}^{(1)}(z = 0) = 0 \\
 z = h : \quad & \hat{u}_i^{(1)}(z = h) = \hat{u}_i^{(2)}(z = h) \\
 & \hat{\sigma}_{zx}^{(1)}(z = h) = \hat{\sigma}_{zx}^{(2)}(z = h) \\
 & \hat{\sigma}_{zy}^{(1)}(z = h) = \hat{\sigma}_{zy}^{(2)}(z = h) \\
 & \hat{\sigma}_{zz}^{(1)}(z = h) = \hat{\sigma}_{zz}^{(2)}(z = h) + \hat{p}_z
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Damit ergibt sich für eine Schicht auf dem unendlichen Halbraum ein System von neun Gleichungen im (k_x, k_y, z, ω) -Raum. Nach der Lösung dieses Gleichungssystems ist das Ergebnis einer zweidimensionalen numerischen Fourierreücktransformation zu unterwerfen; die Transformation vom Frequenz- in den Zeitbereich kann im Falle der hier angesetzten, bezüglich der Zeit harmonischen Lastfunktion wieder analytisch erfolgen.

Halbraumlösung mittels ITM-FEM Kopplung

Zur Modellierung des ungestörten Halbraums ist der zweidimensionale Tunnelquerschnitt vollständig mit Finiten Elementen zu vernetzen. Das FEM-Netz wird mit Hilfe des Präprozessors GID vom CIMNE – International Center for Numerical Methods in Engineering der Universität Politècnica de Catalunya [Ribó 2006] – erzeugt, wobei im vorliegenden Fall lediglich Dreieckselemente zur Diskretisierung verwendet werden (Abbildung 7.6). Die Geometrie sowie die Netzdaten werden mittels einer zu diesem Zwecke erstellten Schnittstelle aus GID in das vorhandene Programmpaket übernommen, welches ausgehend von diesen Daten die Elementsteifigkeitsmatrizen im transformierten (k_x, ω) -Raum erzeugt und zur Gesamtsteifigkeitsmatrix assembliert.

Im vorliegenden Beispiel sind dem vernetzten innenliegenden FEM-Gebiet lediglich die Materialparameter des angrenzenden Halbraums zuzuweisen. Die Lastfunktion muß in Querrichtung in Knotenlasten umgerechnet und so näherungsweise auf das System aufgebracht werden, während sie in Längsrichtung mit der gleichen Genauigkeit wie im Fall der Halbraumlösung im fouriertransformierten (k_x) -Raum eingetragen wird.

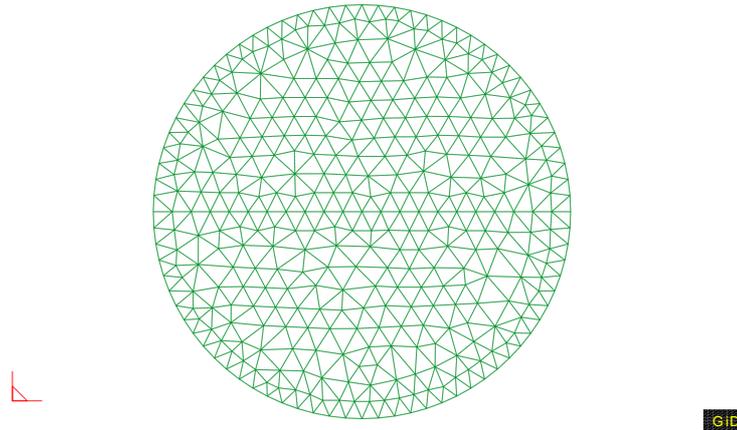


Abbildung 7.6: Finite-Elemente-Netz für das von der gedachten Berandung Γ_S eingeschlossene Gebiet

Vergleichsergebnisse

Dem Beispiel liegen die in Tabelle 7.1 für den steifen Boden angegebenen Systemparameter zugrunde. Die Last bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v und oszilliert harmonisch mit einer Frequenz $\Omega = 2\pi f$. Sie besitzt die Breite L_y in Querrichtung sowie die Länge L_x in Tunnellängsrichtung. Damit ergibt sich die Lastfunktion im Originalraum zu:

$$p_z(x, y, z = h, t) = p_{zh} \left(H\left(x + \frac{L_x}{2} - vt\right) - H\left(x - \frac{L_x}{2} - vt\right) \right) \left(H\left(y + \frac{L_y}{2}\right) - H\left(y - \frac{L_y}{2}\right) \right) \cos(\Omega t) \quad (7.24)$$

Nach einer dreidimensionalen Fouriertransformation erhält man hieraus die Lastfunktion im fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum:

$$p_z(k_x, k_y, z = h, \omega) = p_{zh} \frac{2 \sin(k_x L_x / 2)}{k_x} \frac{2 \sin(k_y L_y / 2)}{k_y} \pi (\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad (7.25)$$

Grundsätzlich ist dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Vorgehen eine Inkonsistenz der verwendeten Lösungen für das System *Halbraum* einerseits und das System *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* andererseits immanent. Diese Inkonsistenz liegt darin begründet, daß die verwendete Lösung für das System *Halbraum* auf der konventionellen ITM basiert. Diese zeichnet sich durch eine zweifache Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinaten $(x \circ \bullet k_x, y \circ \bullet k_y)$ aus. Die Lösung für das System *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* hingegen gründet zwar insofern auf der ITM, als in Längsrichtung eine Fouriertransformation $x \circ \bullet k_x$ erfolgt, jedoch wird für die Lösung in Radialrichtung r eine Reihe von Besselfunktionen verwendet.

Der grundsätzliche Unterschied dieser Ansätze liegt darin, daß durch die Fouriertransformation in y -Richtung und die damit einhergehende Diskretisierung im Wellenzahlenbereich eine Periodisierung im Originalraum hervorgerufen wird. Diese Periodisierung hat zur Folge, daß sich, wie in Abbildung 7.7 dargestellt, im System *geschichteter Halbraum* aufgebrachte Lasten mit einer Periode B wiederholen. Dieser Effekt tritt jedoch im Fall des Systems *Vollraum mit zy-*

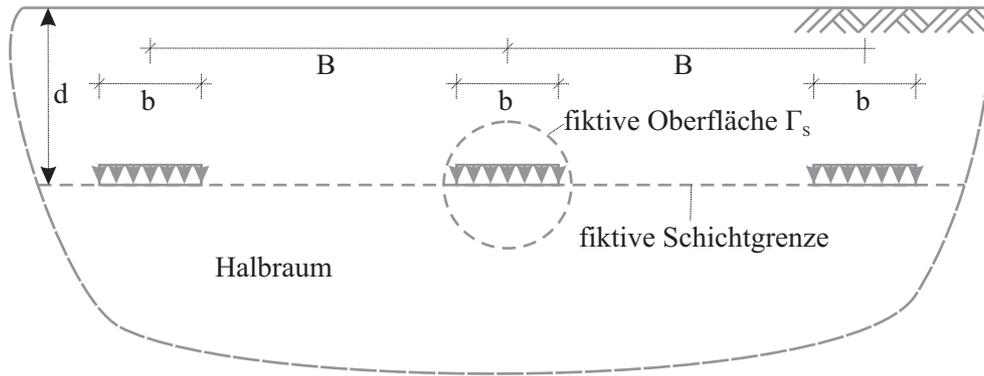


Abbildung 7.7: Inkonsistenz der beiden verglichenen Modelle *geschichteter Halbraum* und *Halbraum mit FEM-Gebiet*

lindrischem Hohlraum nicht auf. Der Hohlraum und damit auch die innerhalb des Hohlraumes mit Finiten Elementen abgebildete Struktur wiederholt sich nicht. Eine nicht ausreichend feine Abtastung bezüglich der Wellenzahl k_y , welche grundsätzlich fehlerhafte Ergebnisse nach sich zieht, führt dadurch zu einer Überschätzung der auftretenden Antwortgrößen bei der reinen ITM-Halbraumlösung.

Eine Möglichkeit einer groben Abschätzung des zu wählenden Wiederholabstandes B bietet das logarithmische Dekrement, welches jedoch nur die Amplitudenabnahme für eine eindimensionale Struktur berücksichtigt, nicht jedoch der Verstärkung der Amplitudenabnahme durch die dreidimensionale Wellenabstrahlung Rechnung zu tragen vermag.

$$\Lambda = \ln \left| \frac{w^{n+1}}{w^n} \right| \approx 2\pi D \quad (7.26)$$

Daraus kann man die Abnahme der Schwingungsamplitude nach k Schwingungszyklen berechnen.

$$|w_{n+k}| = |w_n| e^{-\Lambda k} \quad (7.27)$$

Wählt man die Abtastwellenzahl Δk_y bzw. den Wiederholabstand B z.B. derart, daß er ungefähr der Länge von zehn Wellenlängen entspricht, so verringert sich die Amplitude bei einer Dämpfung von $D = 5\%$ auf ungefähr vier Prozent ihrer Ausgangsgröße; wählt man B zu zwanzig Wellenlängen, so verringert sich die Amplitude bei gleicher Dämpfung auf weniger als zwei Promille ihrer Ausgangsgröße. Diese Größenordnungen können toleriert werden.

In den Abbildungen 7.8 bis 7.11 sind verschiedene Antwortgrößen infolge einer Last mit der Amplitude $p_{zh} = 0.5 \text{ MN/m}^2$ und einer quadratischen Grundfläche mit der Breite $b = 5 \text{ m}$ und der Länge $l = 5 \text{ m}$, welche sich mit der Geschwindigkeit $v = 20 \text{ m/s}$ bewegt und harmonisch mit der Frequenz $f = 5 \text{ Hz}$ (Abbildung 7.8) bzw. $f = 50 \text{ Hz}$ (Abbildung 7.9 bis Abbildung 7.11) oszilliert, dargestellt.

Dabei sind jeweils die Vertikalverschiebungen u_z auf der Halbraumoberfläche zum Zeitpunkt $t = 0$ bezüglich der Längsrichtung \bar{x} (a) sowie bezüglich der Querrichtung y (b) und zum Zeitpunkt $t = T/4$ ebenso bezüglich der Längsrichtung \bar{x} (c) sowie bezüglich der Querrichtung y (d) gezeigt. Das Verhältnis der Spannungen auf der Halbraumoberfläche zur Amplitude der

eingetragenen Last σ_z^0/p_z^d zeigt jeweils Abbildung (e). Das Wellenfeld mit den Nulldurchgängen der Wellen zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in den Abbildungen (f) dargestellt.

Dabei greift die Last in einer Tiefe $d = 13\text{ m}$ (Abbildungen 7.8 und 7.9) sowie $d = 8\text{ m}$ (Abbildungen 7.10 und 7.11) an; der Radius der zylindrischen Berandung beträgt immer $r_{\Gamma_S} = 3.0\text{ m}$, so daß die untersuchten Tiefenlagen jeweils einer „Überdeckungshöhe des zylindrischen Hohlraumes“ gemäß Abbildung 7.5 von $h = 5.0\text{ m}$ bzw. $h = 10.0\text{ m}$ entsprechen.

Allen gezeigten Fällen ist gemein, daß die Übereinstimmung zwischen der semianalytischen und der ITM-FEM-Lösung sogar dann noch sehr gut ist, wenn eine nur geringe Anzahl von Fourierreihengliedern in Umfangsrichtung berücksichtigt wird. Dies liegt darin begründet, daß zur Abbildung der Erschütterungen an der Halbraumoberfläche lediglich der Eintrag der resultierenden Kraft in der Tiefe $z = d$ gewährleistet werden muß. Im Falle der gewählten Lastfunktion ergeben sich allerdings vergleichbar glatte Zustände entlang des Randes Γ_S . Bereits das Reihenglied $n = 1$, welches keinen statischen Gleichgewichtszustand abbildet, sondern eine vertikale Resultierende aufweist, vermag einen großen Beitrag des Lasteintrages abzubilden.

Zur Generierung der in den Abbildungen 7.8 bis 7.10 gezeigten Ergebnisse wurden 80 FE-Knoten auf dem Rand Γ_S sowie Finite Elemente mit einer maximalen Elementkantenlänge von 30 cm verwendet. Den in Abbildung 7.11 gezeigten Ergebnissen liegt hingegen ein Modell mit 40 FE-Knoten auf dem Rand Γ_S und Finiten Elementen mit einer maximalen Elementkantenlänge von 60 cm zugrunde. Die kleinste in allen Fällen abzubildende Wellenlänge ist dabei die Länge der Rayleighwelle des steifen Boden für eine Frequenz $f = 50\text{ Hz}$. Diese beträgt $\lambda_R = 11.5\text{ m}$, so daß die in Abschnitt 5.4 angegebenen Kriterien für den maximalen Knotenabstand sowie die maximale Elementkantenlänge in allen untersuchten Fällen erfüllt sind.

Bei einer solch geringen Anzahl zu berücksichtigender Reihenglieder wirkt sich folglich die Reduzierung der Anzahl der auf der zylindrischen Berandung Γ_S liegenden Knoten von 80 auf 40 (Abbildung 7.11 im Gegensatz zu Abbildung 7.10) nicht aus, da diese mit nur wenigen Knoten bereits ausreichend genau abgebildet werden können.

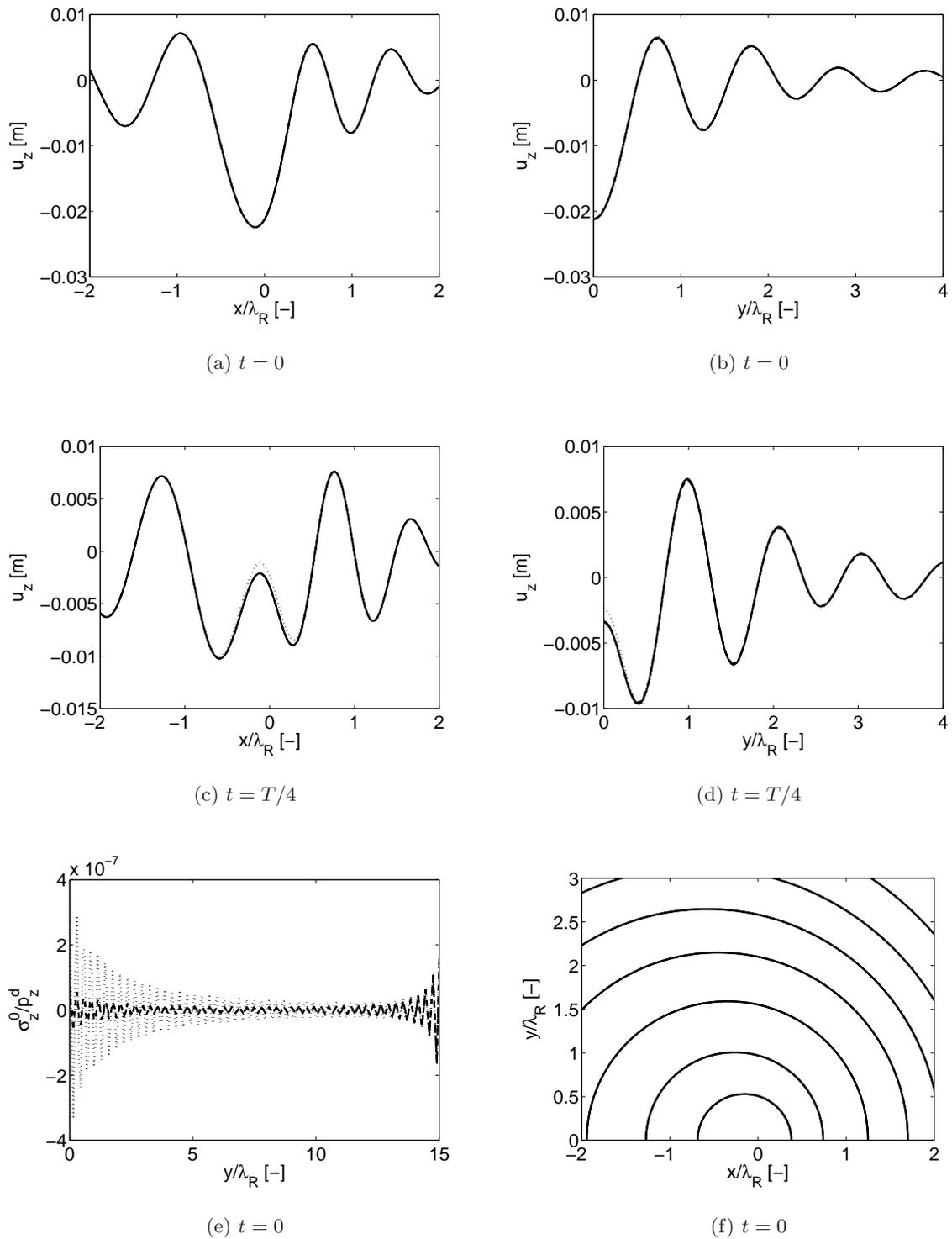


Abbildung 7.8: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (—) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\cdots), $n = 6$ (— —) und $n = 9$ ($\cdot\cdot$) Reihengliedern in Umfangsrichtung, weicher Boden, $f = 5 \text{ Hz}$, $h = 10 \text{ m}$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})

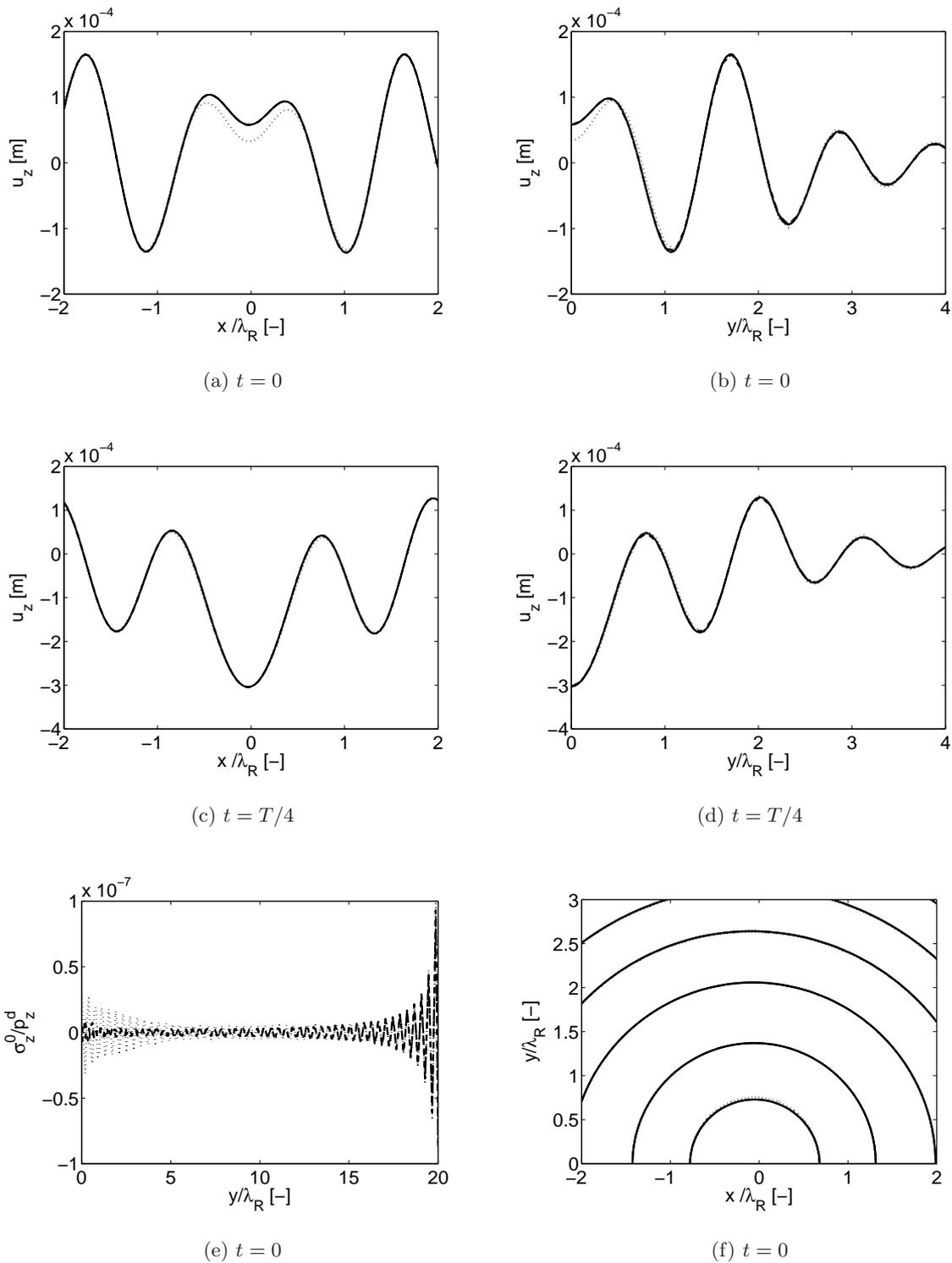


Abbildung 7.9: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (—) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\cdots), $n = 6$ (— —) und $n = 9$ ($- \cdot -$) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 \text{ Hz}$, $h = 10 \text{ m}$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})

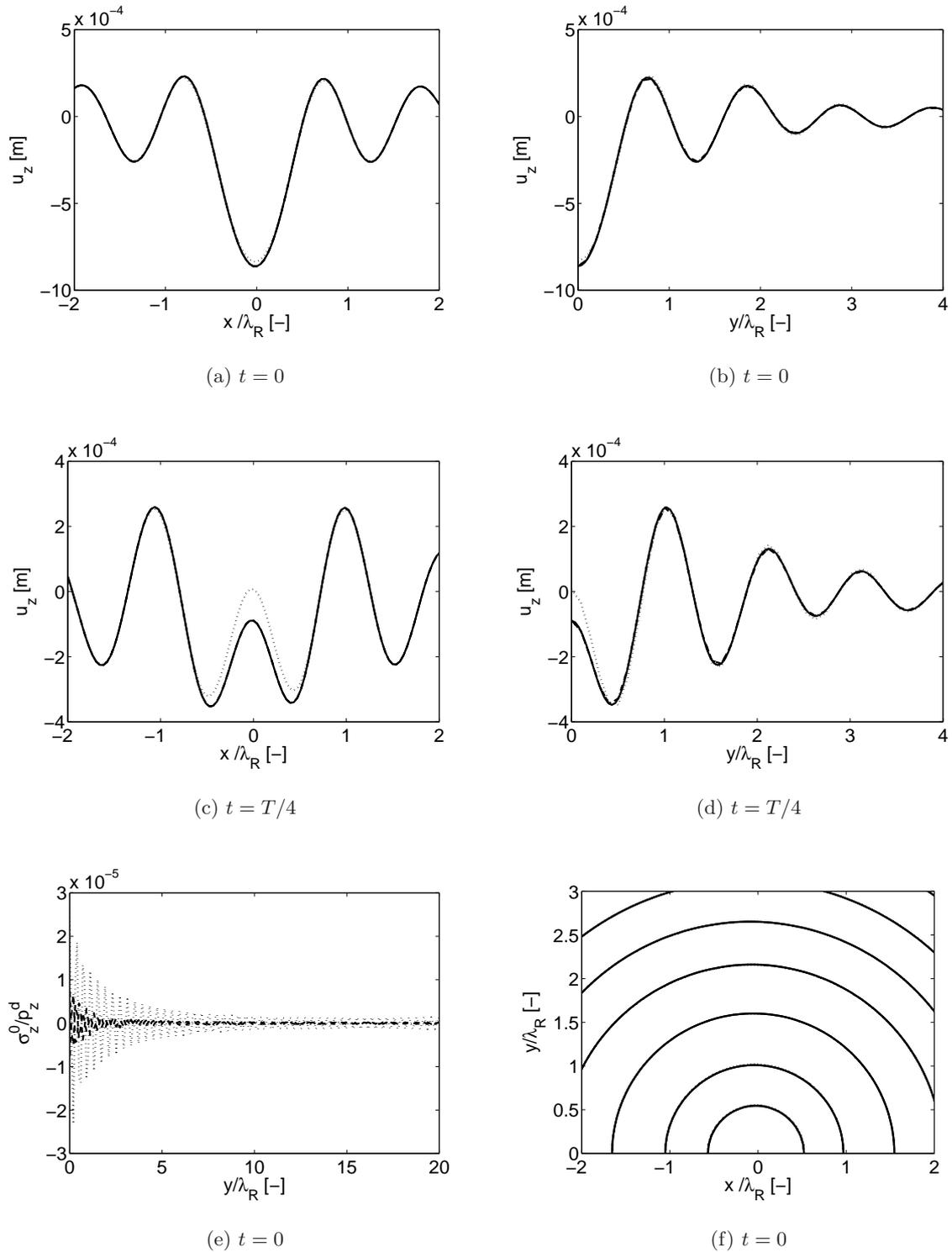


Abbildung 7.10: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (–) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\cdots), $n = 6$ (– –) und $n = 9$ ($\cdot\cdot$) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 \text{ Hz}$, $h = 5 \text{ m}$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})

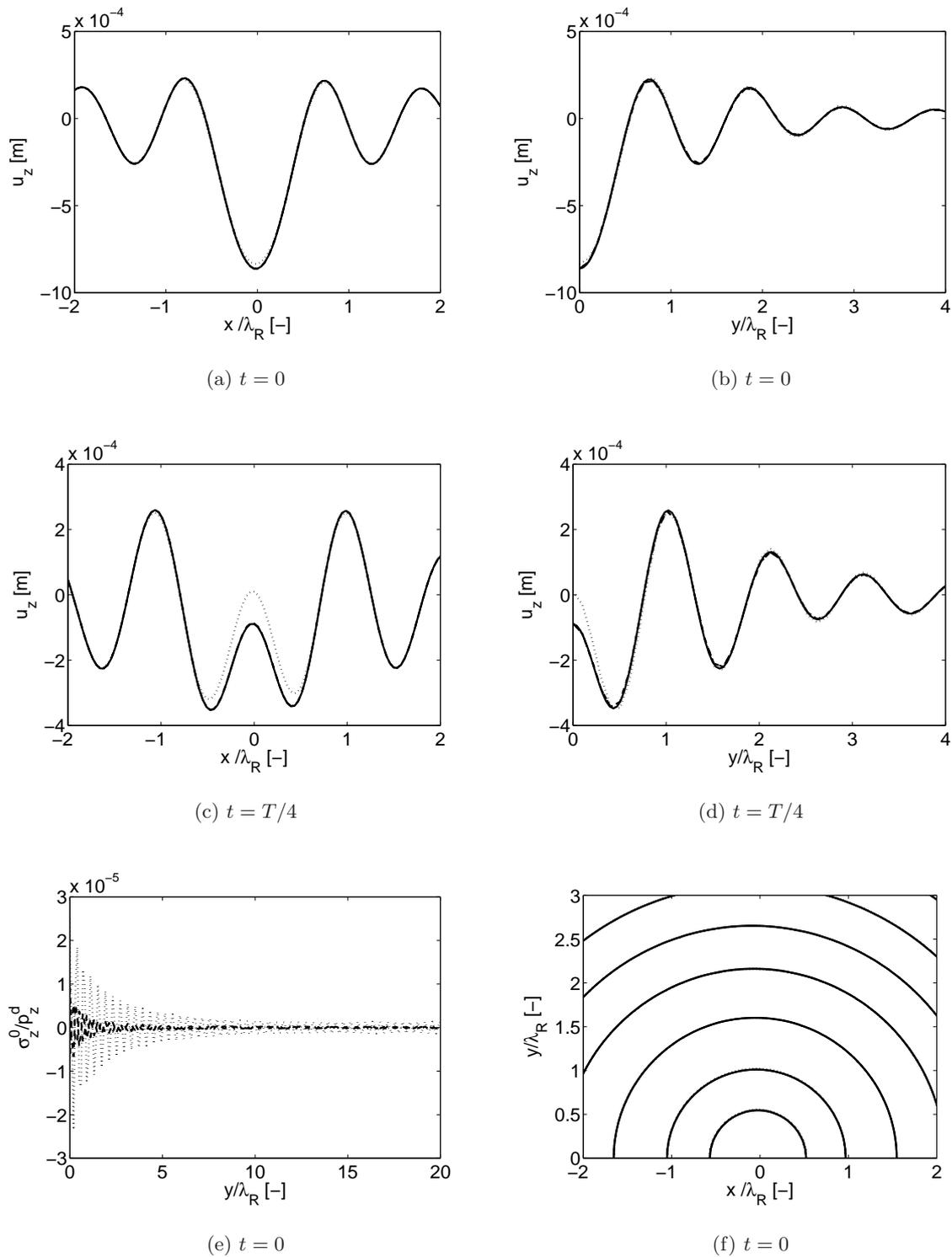


Abbildung 7.11: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (—) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\cdots), $n = 6$ (— —) und $n = 9$ ($\cdot\cdot$) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 \text{ Hz}$, $h = 5 \text{ m}$, 40 Knoten auf r_{Γ_S})

7.2 Anwendungsbeispiele

Nach den oben durchgeführten Vergleichsberechnungen werden im folgenden weitere Beispiele gezeigt, welche durch einen stärkeren Anwendungsbezug gekennzeichnet sind. Sie dienen dabei ebenfalls der Illustration der durch das hybride Verfahren erschlossenen Möglichkeiten.

Zunächst wird die Kopplung mit einem Masse-Feder-System behandelt. Dabei wird insbesondere dessen Wirksamkeit hinsichtlich der Isolation von Körperschall untersucht. Der darauffolgende Abschnitt ist der Interaktion mit einem linear sowie einem nichtlinear modellierten Fahrzeug gewidmet.

7.2.1 Prognose der Wirksamkeit von Masse-Feder-Systemen zur Körperschallisolation

Fahrende Züge erzeugen Schwingungen, welche über das Oberbausystem in den Untergrund eingeleitet werden und sich im umgebenden Boden ausbreiten. Diese werden dabei auch über die Fundamente in benachbarte Gebäude übertragen, wodurch jene ebenfalls zu Schwingungen angeregt werden. Je nach Größenordnung können diese Schwingungen von Menschen in Gebäuden als spürbare Erschütterungen wahrgenommen werden. Ebenso können sie von schwingenden Gebäudeteilen wie z.B. Decken oder Wänden in die umgebende Luft abgestrahlt und als sogenannter sekundärer Luftschall hörbar werden (vgl. Abbildung 1.1). In der Literatur wird häufig anstelle des Begriffs *Erschütterungen* synonym der Begriff *Körperschall* verwendet, obwohl dieser eigentlich für die Behandlung von Festkörperschwingungen im Bereich hörbarer Frequenzen ($f > 16 \text{ Hz}$) reserviert ist, was auch in der Bezeichnung *Schall* zum Ausdruck kommt [WETTSCHUREK et al. 2004].

Bei der Planung von Untergrundbahnen ist es deshalb von großer Bedeutung, die Einleitung von Körperschall in die Struktur sowie seine weitere Ausbreitung weitgehend zu verhindern. Eine Möglichkeit, die Übertragung von Körperschall zu verringern, ist die Wahl einer möglichst großen Entfernung zwischen Sender und Empfänger. Man macht sich dabei die Tatsache zunutze, daß sich die Energie mit zunehmender Entfernung auf ein immer größer werdendes Gebiet verteilt und somit die Energiedichte kleiner wird. Dies ist auch der Grund dafür, daß bei eindimensionalen Strukturen wie z.B. Rohrleitungen kaum eine Abnahme des Körperschalls vorliegt; ohne Maßnahmen wird er fast unverringert über lange Strecken übertragen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die einzuleitenden Kräfte zu reduzieren. Da sich jedoch die angreifenden Kräfte in der Regel nicht signifikant verringern lassen und die Entfernung zwischen Quelle und Einleitungs-ort nach Festlegung einer Trasse vorgegeben ist, stehen zu diesem Zwecke lediglich die Körperschalldämmung und die Körperschalldämpfung zur Verfügung [HECKL und NUTSCH 2004].

Den größten Nutzen hinsichtlich der Isolation von Körperschall versprechen elastische Lagerungen. Bei der Planung und Bemessung von Maßnahmen für den Fahrweg wie den Einbau von Unterschottermatten, elastischen Schwellenbesohlungen oder elastisch gelagerten Platten spielen Untersuchungen der Anregung sowie der Abstrahlung von Erschütterungen und Körperschall eine wichtige Rolle. Deshalb wird in diesem Abschnitt aufbauend auf der entwickelten Lösung für dynamisch belastete Tunnels im Halbraum das dynamische Verhalten von elastisch gelagerten Platten in Tunnels untersucht. In der Literatur wird neben dem Begriff *elastisch gelagerte Platte* häufig die Bezeichnung *Masse-Feder-System* sowie im Englischen *floating slab-track* verwendet.

Wirkungsweise und Auslegung eines Masse-Feder-Systems

Untersucht wird ein eingleisiger Tunnel mit Rechteckquerschnitt. Als schematische Darstellung der untersuchten Gesamtsituation kann Abbildung 4.1 herangezogen werden. Das verwendete Finite-Elemente-Netz für das innerhalb der Berandung Γ_S liegende Gebiet, welches in diesem Fall nicht nur die Tunnelstruktur selbst, sondern auch einen Teil des umgebenden Bodens mit einschließt, ist in Abbildung 7.12 gezeigt. Darin ist auch das Masse-Feder-System eingezeich-

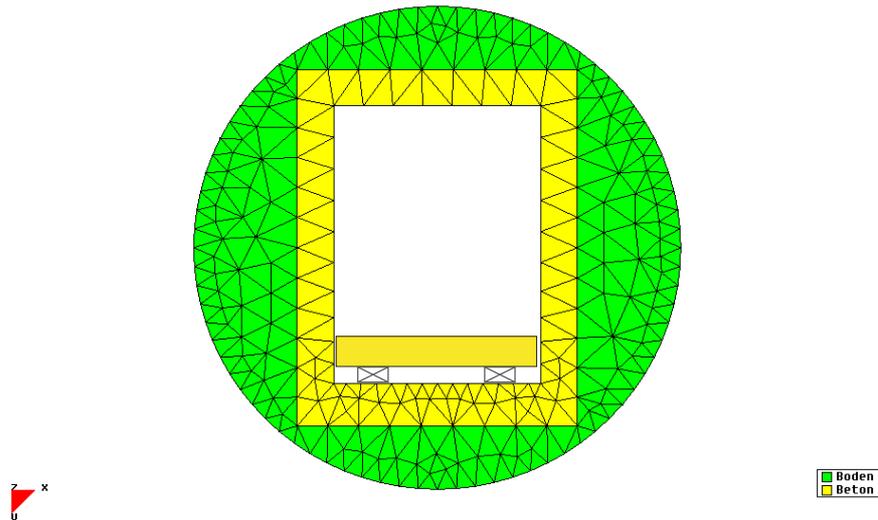


Abbildung 7.12: Systemskizze für einen Tunnel mit Rechteckquerschnitt und Masse-Feder-System

net, welches allerdings nicht mit Finiten Elementen, sondern, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, analytisch erfaßt wird.

Die Platte, welche im untersuchten Fall in Querrichtung als starr angenommen und damit im mechanischen Sinne als Balken modelliert wird, ist im Beispiel auf zwei elastischen Bettungen mit der Steifigkeit k_w gelagert, welche zur Berücksichtigung der Dämpfung gemäß Abschnitt 2.1.1 komplexwertig angesetzt wird. Die Bettung überträgt die Kräfte über die Breite ihrer Lagerung in die Tunnelstruktur.

Derartige elastische Lagerungen werden tief abgestimmt, wobei ausreichend weit oberhalb der Abstimmfrequenz f_0 die anregenden Kräfte verringert werden. Diese Reduzierung der eingeleiteten Kräfte geht allerdings mit einer Erhöhung im Resonanzbereich einher. Der wichtigste Gesichtspunkt für die Dimensionierung einer solchen elastischen Lagerung besteht also darin, die Steifigkeit der verwendeten Federn so auszulegen, daß die Abstimmfrequenz f_0 unterhalb des interessierenden Frequenzbereiches liegt. Dabei ist man jedoch hinsichtlich der Gebrauchstauglichkeit an Untergrenzen für die Steifigkeit gebunden, welche anhand der ermittelten zulässigen Durchsenkung festgelegt werden.

Die Abstimmfrequenz f_0 für ein einfaches Masse-Feder-System ergibt sich dabei aus der Steifigkeit k_w der verwendeten Federn und der wirksamen Masse m des elastisch gelagerten Systems.

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_w}{m}} \quad (7.28)$$

Je tiefer die Abstimmfrequenz gewählt wird, desto besser ist die erzielte Körperschallisolation.

Im Gegensatz zu kompakten Maschinen, bei denen die wirksame Masse m mit der Masse der Maschine identisch ist, ist bei elastischen Schienenlagerungen, bei denen zwar die Federelemente unter den Schienen durch die gesamte Masse des Zuges zusammengedrückt werden, wegen der weichen Federn zwischen Drehgestell und Wagen für die Abstimmfrequenz nur die Masse des Drehgestells und eines Schienenstückes maßgebend. Man führt hier eine dynamisch wirksame Masse m_{dyn} ein, welche nur den Massenanteil berücksichtigt, der dieselben Bewegungsamplituden wie die Oberseite der Federn besitzt.

Vernachlässigt man die Nachgiebigkeit des Bodens, so ergibt sich eine Frequenz von Biege- wellen für den als elastisch gebetteten Balken modellierten Fahrweg bei der Resonanzfrequenz des starren Fahrweges auf der flexiblen Bettung oder einer Unterschottermatte. Aufgrund der zusätzlichen Flexibilität infolge der Kopplung des Fahrweges mit dem Boden tritt das Antwort- maximum jedoch bei einer geringfügig kleineren Frequenz als der Eigenfrequenz der gebetteten Platte und damit der Abstimmfrequenz auf. Bei Frequenzen mit ausreichendem Abstand ober- halb dieser Frequenz wirkt die Fahrbahnplatte entkoppelt vom Boden und bewegt sich frei unter der Anregung.

Die wichtigste Größe zur Kennzeichnung von Erschütterungen resp. Körperschall ist der Schwingschnelle- resp. Körperschallschnellepegel oder kurz der Schnellepegel L_v [WETTSCHUREK et al. 2004]

$$\begin{aligned} L_v &= 20 \log \frac{v}{v_0} [dB] \\ v &= 10^{\frac{L_v}{20}} v_0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

mit dem Effektivwert der Schwingschnelle v und der Bezugsschnelle $v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$.

Beispielhaft wurden für den in Abbildung 7.12 dargestellten Tunnel drei verschiedene Situationen betrachtet: der unisolierte Fall, bei welchem die Last direkt in die Tunnelsohle eingetragen wird, sowie die beiden Fälle, daß der Tunnel mit einem Masse-Feder-System mit der Abstimmfrequenz $f_0 = 8 \text{ Hz}$ sowie $f_0 = 16 \text{ Hz}$ ausgerüstet ist.

Die verwendeten Materialparameter sind Tabelle 7.1 für den steifen Boden und Tabelle 7.2 für den Tunnel und die Fahrwegplatte aus Stahlbeton zu entnehmen. Für letztere wurde eine Materialdämpfung mit einem Verlustfaktor von $\zeta = 0.02$ gemäß [DIN 4178 2005] angesetzt. Der Verlustfaktor der elastischen Bettung wurde in Anlehnung an in [WETTSCHUREK et al. 2004] gegebene Werte zu $\zeta = 0.2$ angesetzt.

Dabei werden lediglich Einzellasten mit der Amplitude $F_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$ untersucht, welche sich mit der Geschwindigkeit $v = 20 \text{ m/s}$ geradlinig über die Platte bewegen und dabei harmonisch mit der Frequenz $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ oszillieren; auf die Interaktion eines sowohl linear als auch nichtlinear modellierten Fahrzeuges mit einem Masse-Feder-System in einem Tunnel wird in Abschnitt 7.2.2 eingegangen. Aus der Überlagerung der zu verschiedenen Lastfrequenzen gehörenden Antworten lassen sich schlußendlich auch zeitlich beliebig veränderliche Belastungen untersuchen.

In Abbildung 7.13 sind für die drei Situationen die Schnellepegel an der Halbraumoberfläche, auf der Tunnelsohle sowie auf der Platte im mitbewegten Koordinatensystem jeweils an der

Stelle $\bar{x} = 0 \text{ m}$, $y = 0 \text{ m}$ dargestellt. Dabei wurden die Pegel aus den Absolutwerten der Schnelle

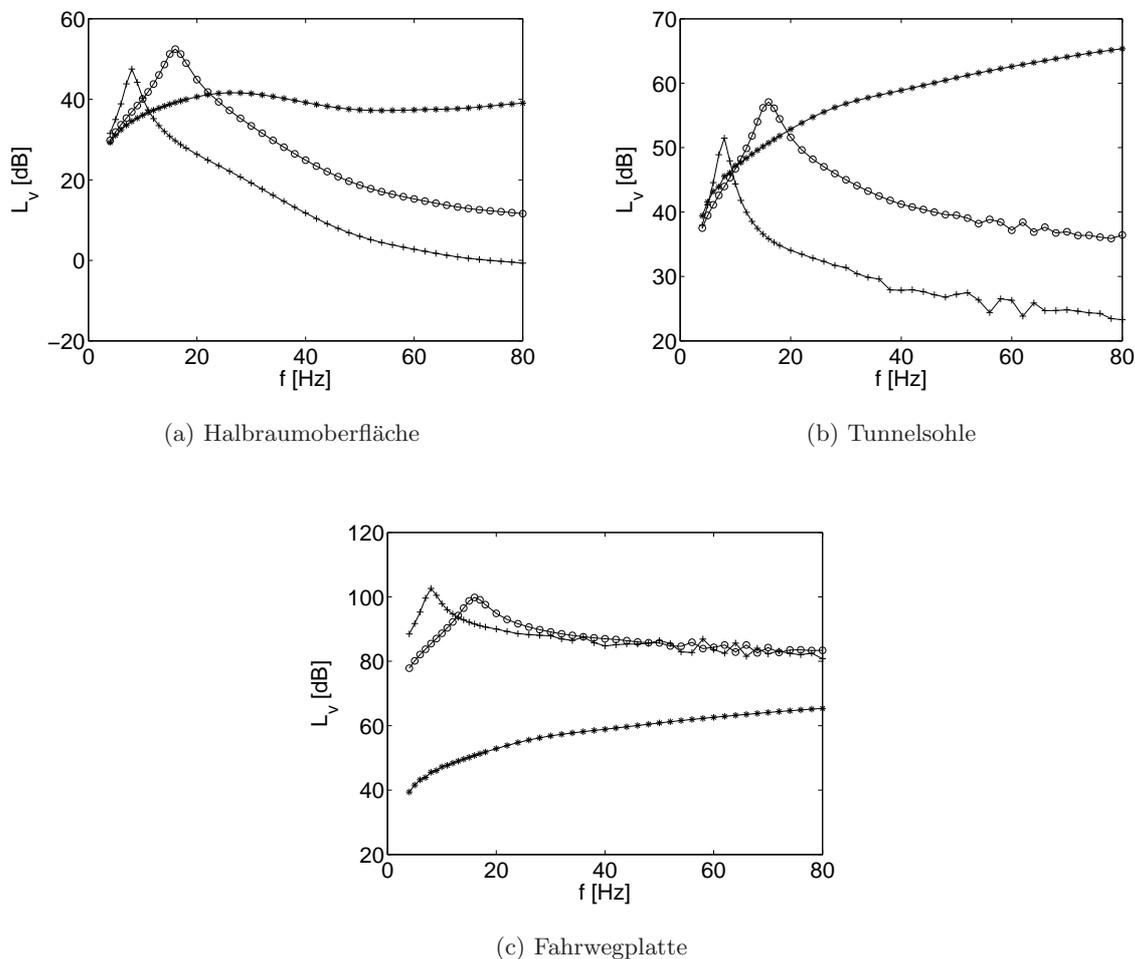


Abbildung 7.13: Schnellepegel L_v für den unisolierten Fall (*) bzw. die Fälle mit Masse-Feder-System mit $f_0 = 8 \text{ Hz}$ (+) und $f_0 = 16 \text{ Hz}$ (o)

für diskrete Frequenzen f ermittelt. Für den Fall ohne Masse-Feder-System fallen dabei die Verschiebungen der Platte mit denen der Tunnelsohle zusammen.

Die Abbildungen veranschaulichen die typischen Charakteristika von Masse-Feder-Systemen. So führt im Bereich niedrigerer Frequenzen die Nachgiebigkeit der elastischen Bettung zu einer größeren Durchsenkung der Fahrwegplatte und damit höheren Schnellepegeln. Auf der Tunnelsohle treten jedoch geringfügig niedrigere Antwortwerte auf, was sich ebenfalls auf die elastische Lagerung der Fahrwegplatte zurückführen lässt, da diese die Last über eine größere Balkenlänge verteilt [HETÉNYI 1946]. Im Bereich der Abstimmfrequenz sind die Schnellepegel auf der Platte, auf der Tunnelsohle sowie an der Halbraumoberfläche signifikant erhöht gegenüber dem Fall ohne MFS. Diese Überhöhung ist der Preis für die deutliche Reduzierung der Pegel auf der Tunnelsohle sowie auf der Halbraumoberfläche im Bereich höherer Frequenzen mit

ausreichendem Abstand oberhalb der Abstimmfrequenz des Balkens.

Sind die Antworten der Platte selbst im Bereich kleiner Frequenzen sowie im Bereich der Abstimmfrequenz besonders deutlich gegenüber dem unisolierten Oberbau überhöht, so weisen sie jedoch auch im Bereich höherer Frequenzen noch signifikant größere Werte auf.

Man sieht auch, daß die Isolationswirkung im ausreichend weit oberhalb der Abstimmfrequenz liegenden Bereich auf der Halbraumoberfläche geringer ist als auf der Tunnelsohle und damit einhergehend die Überhöhung unterhalb der Abstimmfrequenz auf der Halbraumoberfläche die größeren Werte annimmt, wie man anhand der Fläche zwischen den Kurven des unisolierten und des jeweiligen isolierten Falles sehen kann.

Als anschaulicheres Maß für die Wirksamkeit einer Maßnahme zur Körperschallisolierung wird das sogenannte *Einfügedämmmaß* (*insertion loss*) verwendet [HECKL und NUTSCH 2004]. Dieses wird definiert als der Quotient aus dem Körperschallschnellepegel vor und dem Körperschallschnellepegel nach dem Einbau der Isolationsmaßnahme

$$\Delta L_e = 20 \log \frac{v^{uniso}}{v^{iso}} [dB] \quad (7.30)$$

mit dem Effektivwert der Schwingschnelle v^{uniso} vor Einbau der Maßnahme und v^{iso} nach Einbau der Maßnahme. Positive Werte für das Einfügedämmmaß entsprechen folglich einer geringeren Antwort des isolierten Systems. In der Literatur wird neben dem *Einfügedämmmaß* [LOMBAERT et al. 2006b, WETTSCHURECK und KÜRZE 1985] zum Teil auch der *insertion gain* als negativer Wert des *insertion loss* verwendet [HUNT et al. 2003, HUSSEIN und HUNT 2003], es wird also lediglich der Logarithmus des Kehrwertes gebildet.

In Abbildung 7.14 ist das durch den Einbau des Masse-Feder-Systems auf der Halbraumoberfläche bzw. auf der Tunnelsohle erreichte Einfügedämmmaß für die beiden Abstimmungen $f_0 = 8 \text{ Hz}$ und $f_0 = 16 \text{ Hz}$ in Abhängigkeit von der Frequenz f dargestellt. Dabei wurden

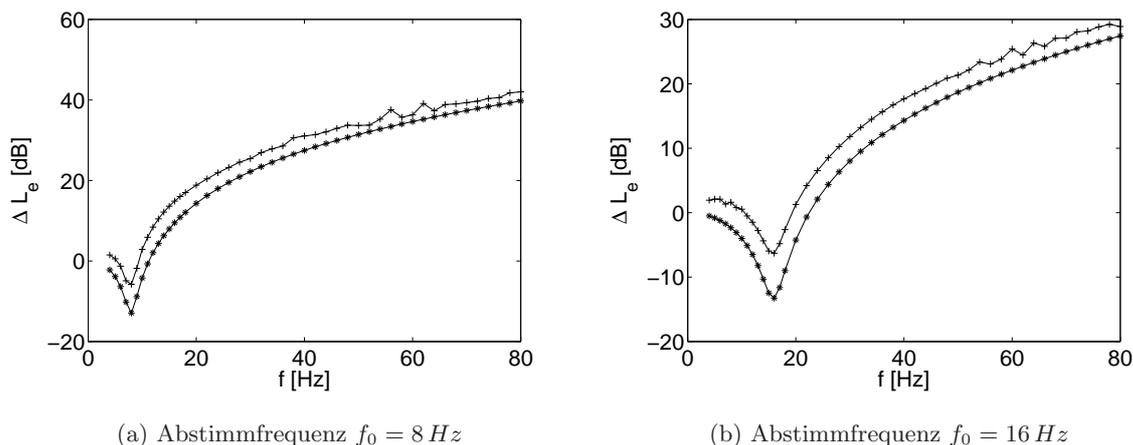


Abbildung 7.14: Einfügedämmmaß auf der Halbraumoberfläche (*) bzw. auf der Tunnelsohle (+)

die Absolutwerte der Schnelle für diskrete Frequenzen f an der Stelle $\bar{x} = 0 \text{ m}$, $y = 0 \text{ m}$ im mitbewegten Koordinatensystem verwendet.

Im Bereich niedriger Frequenzen nimmt das Einfügedämmmaß bezogen auf die Tunnelsohle aufgrund der oben erwähnten lastverteilenden Wirkung eines elastisch gebetteten Balkens positive Werte an, wohingegen es in der Nähe der jeweiligen Abstimmfrequenz negative Werte annimmt. Während diese für beide Abstimmfrequenzen ungefähr die gleiche Größe besitzen, ist das erzielte Einfügedämmmaß im Bereich höherer Frequenzen für das System mit der niedrigeren Abstimmfrequenz deutlich höher. Eine ähnliche Charakteristik zeigt sich für die Halbraumoberfläche.

In den Abbildungen 7.15 bis 7.17 sind die Verschiebungen an der Halbraumoberfläche infolge einer sich im Tunnel mit der Geschwindigkeit $v = 20 \text{ m/s}$ bewegenden Last mit der Amplitude $F_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$ dargestellt. Diese oszilliert harmonisch mit der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$.

Dabei zeigen die Abbildungen jeweils die Verschiebungen zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie zum Zeitpunkt $t = T/4$ für den unisolierten Fall sowie für den Fall, daß der Tunnel mit einem Masse-Feder-System mit der Abstimmfrequenz $f_0 = 16 \text{ Hz}$ ausgerüstet ist¹.

Insgesamt werden drei verschiedene Situationen untersucht: ein im steifen Boden gemäß Tabelle 7.1 eingebetteter Tunnel mit dem in Abbildung 7.12 dargestellten Rechteckquerschnitt (Abbildung 7.15), ein im weichen Boden gemäß Tabelle 7.1 eingebetteter Tunnel mit demselben Rechteckquerschnitt (Abbildung 7.16) sowie ein ebenfalls im weichen Boden eingebetteter Tunnel mit einer dünnen Kreiszyinderschale mit der Dicke $d = 0.15 \text{ m}$ (Abbildung 7.17).

In allen drei untersuchten Situationen erkennt man die deutliche Reduzierung der Verschiebungen infolge der Isolationswirkung des eingebauten Masse-Feder-Systems. Jedoch ergeben sich signifikante Unterschiede hinsichtlich der Lastverteilung und der angeregten Wellenmuster.

So zeigt Abbildung 7.15 ein sehr regelmäßiges Wellenmuster. Die lastverteilende Wirkung der Tunnelstruktur in Tunnellängsrichtung ist auf einen vergleichsweise kleinen Bereich in der Nähe der Lasteinleitung beschränkt. Schon in kurzer Entfernung vom Tunnel tritt ganz deutlich die Rayleighwelle zutage. Im Gegensatz dazu erkennt man in Abbildung 7.16, daß der Tunnel die eingeleitete Last über eine vergleichsweise große Länge verteilt. Außerdem werden in diesem Fall an der Oberfläche Kompressions- statt Rayleighwellen angeregt. Eine ähnliche Situation zeigt Abbildung 7.17. Hier sind an der Oberfläche ebenfalls Kompressionswellen zu erkennen, allerdings zeigt sich ein in den beiden anderen Fällen nicht aufgetretener Effekt: während die Amplituden im Falle des isolierten Systems zwar unter der Last und weit davon entfernt in Querrichtung deutlich verringert werden, tritt in Tunnellängsrichtung eine deutlich geringere Abnahme der Amplituden auf. Dies führt in weiter vom Ort der Lasteinwirkung entfernten Bereichen zu größeren Amplituden als im Falle des unisolierten Systems.

Zur Erklärung dieser Effekte ist es sinnvoll, die Wellenlängen bzw. die Wellenzahlen der charakteristischen Wellen beider Böden zu betrachten. Einen Überblick darüber gibt Tabelle 7.3 für die hier betrachtete Anregungsfrequenz $f = 50 \text{ Hz}$.

¹Aus Darstellungsgründen wurden die jeweiligen Abbildungen für den isolierten und den unisolierten Fall teilweise unterschiedlich skaliert.

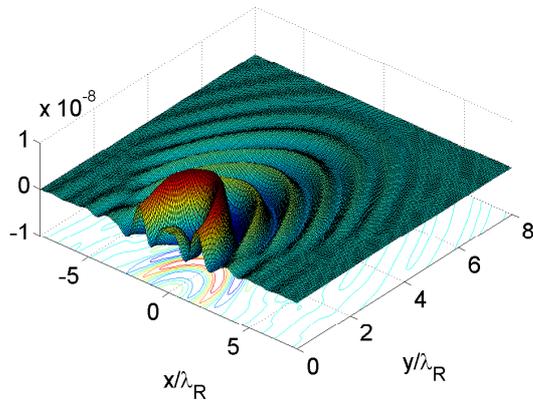
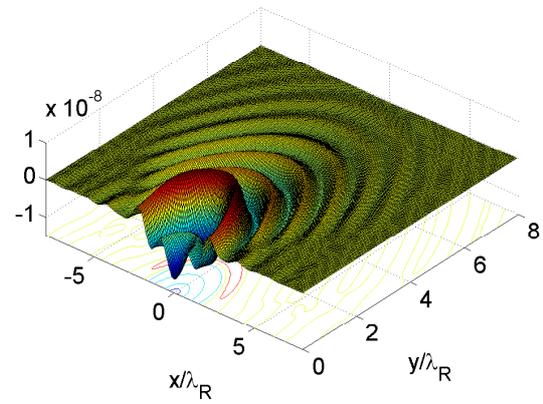
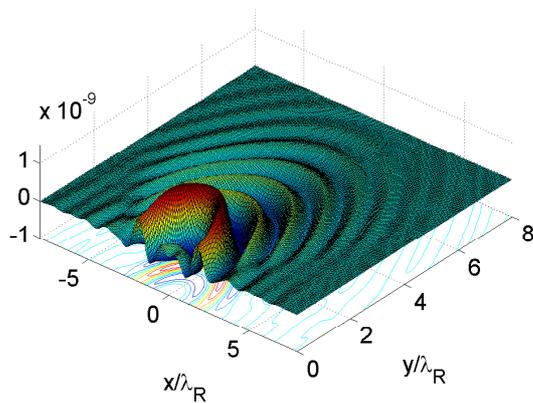
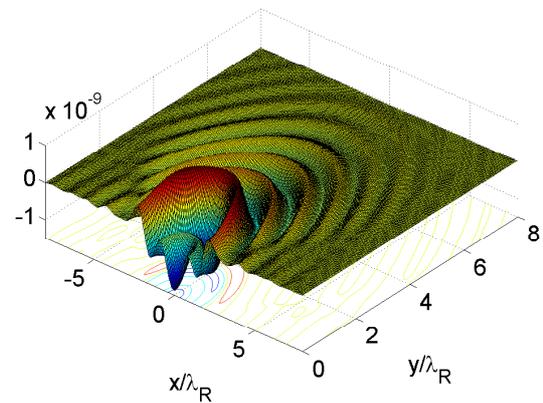
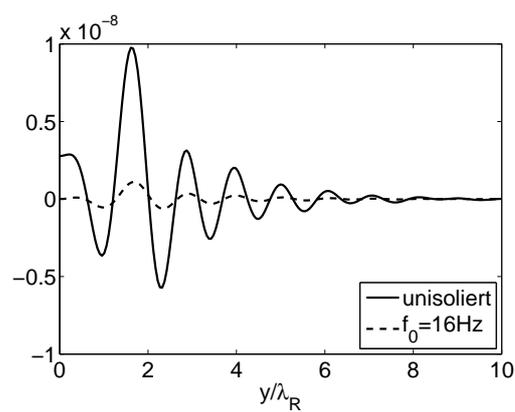
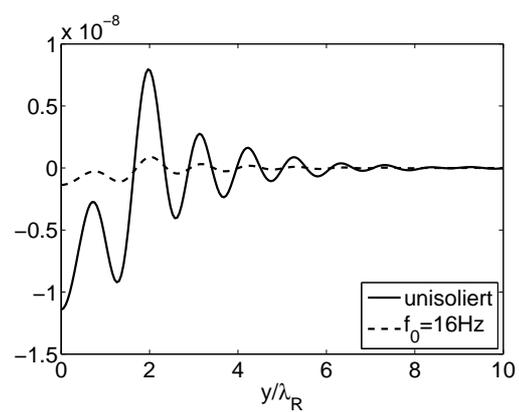
(a) unisoliert, $t = 0$ (b) unisoliert, $t = T/4$ (c) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = 0$ (d) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = T/4$ (e) $t = 0$ (f) $t = T/4$

Abbildung 7.15: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, steifer Boden, Tunnel mit Rechteckquerschnitt

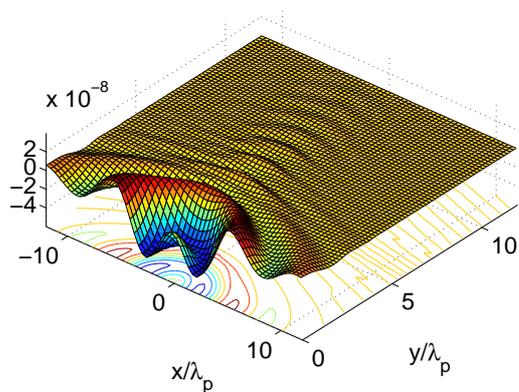
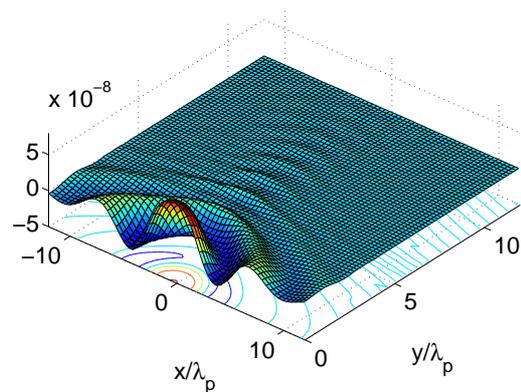
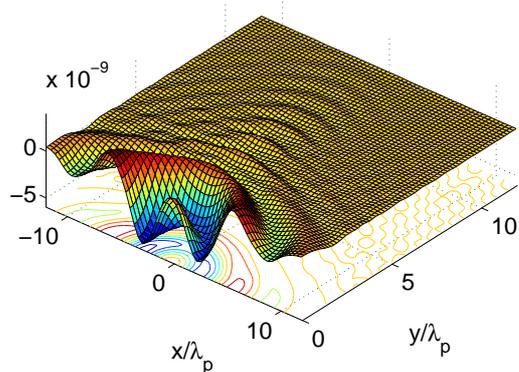
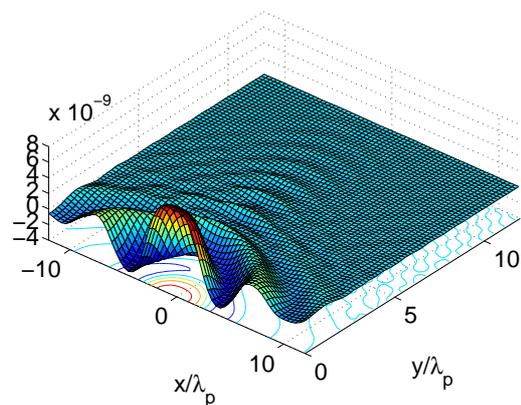
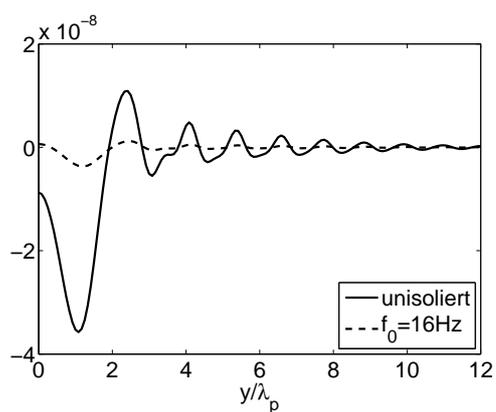
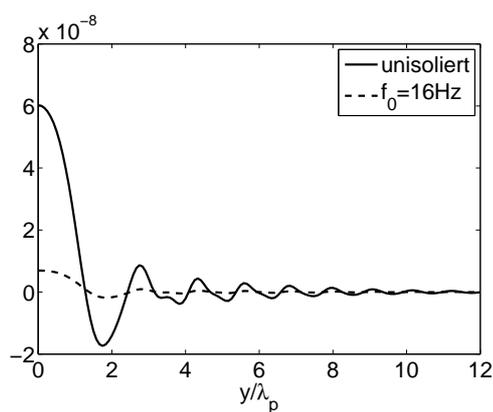
(a) unisoliert, $t = 0$ (b) unisoliert, $t = T/4$ (c) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = 0$ (d) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = T/4$ (e) $t = 0$ (f) $t = T/4$

Abbildung 7.16: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, weicher Boden, Tunnel mit Rechteckquerschnitt

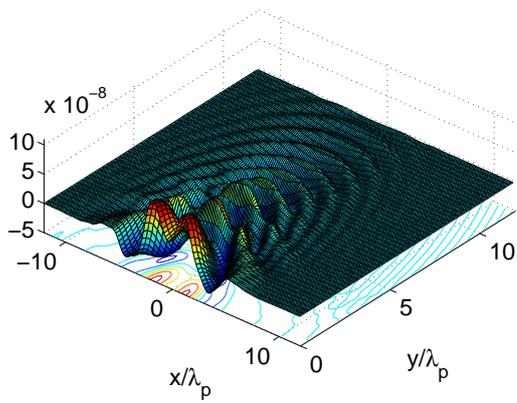
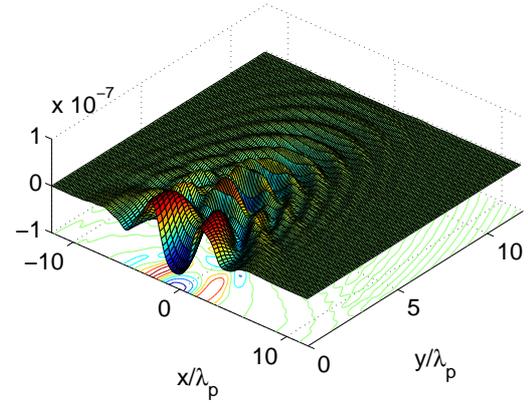
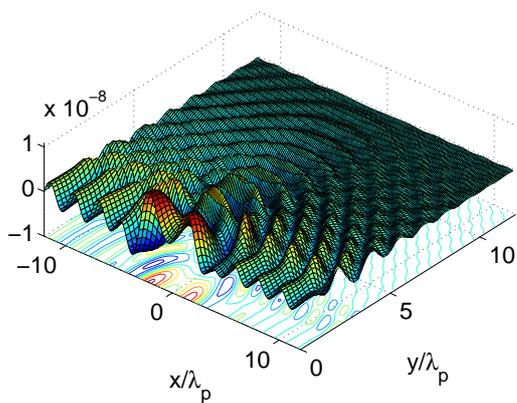
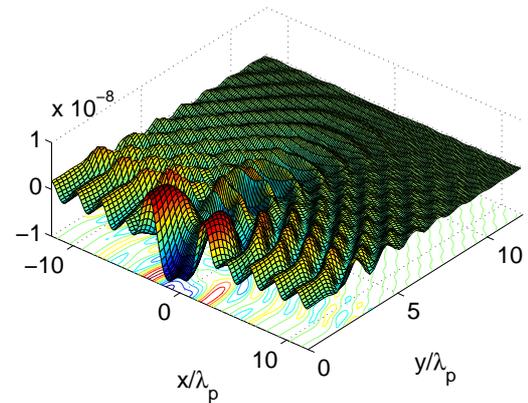
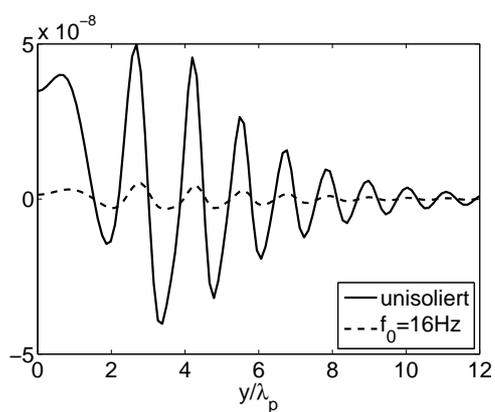
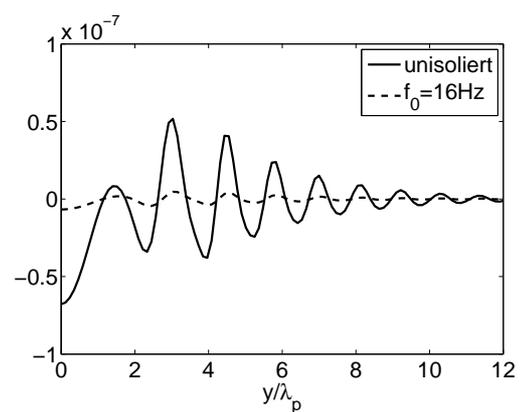
(a) unisoliert, $t = 0$ (b) unisoliert, $t = T/4$ (c) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = 0$ (d) isoliert ($f_0 = 16 \text{ Hz}$), $t = T/4$ (e) $t = 0$ (f) $t = T/4$

Abbildung 7.17: Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, weicher Boden, Tunnel mit dünner Kreiszylinderschale

Boden	p-Wellen- länge λ_p [m]	p-Wellen- zahl k_p [1/m]	s-Wellen- länge λ_s [m]	s-Wellen- zahl k_s [1/m]	R-Wellen- länge λ_R [m]	R-Wellen- zahl k_R [1/m]
weich	3.67	1.71	1.96	3.21	1.82	3.45
steif	23.20	0.27	12.40	0.51	11.50	0.55

Tabelle 7.3: Wellenlängen und Wellenzahlen für $f = 50 \text{ Hz}$

Diese Wellenzahlen werden nun den Biegewellenzahlen des im Halbraum gebetteten Tunnels bzw. des elastisch gebetteten Balkens gegenübergestellt. Dazu sind in Abbildung 7.18 die Realteile der Verschiebungen der Tunnelsohle in Abhängigkeit von der Wellenzahl k_x in Tunnellängsrichtung angegeben. In beiden Abbildungen erkennt man eine dominante Wellenzahl der Biegewelle des

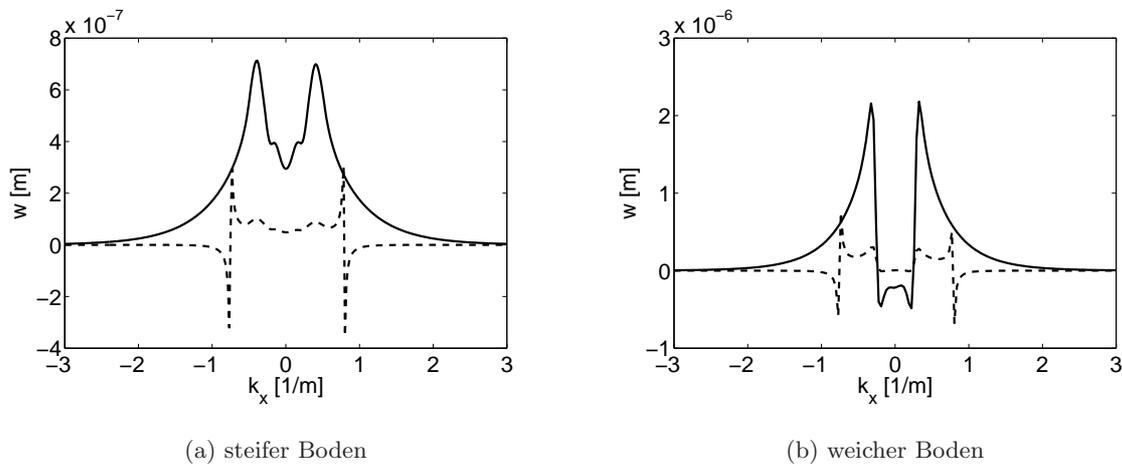


Abbildung 7.18: Realteil der Verschiebungen an der Tunnelsohle für den unisolierten Fall (-) sowie den Fall mit Masse-Feder-System mit $f_0 = 16 \text{ Hz}$ (- -)

im Boden gebetteten Tunnels im unisolierten Fall. Im isolierten Fall wird diese abgeschwächt, hier tritt deutlich die zur Biegewellenlänge λ_B der Fahrwegplatte des Masse-Feder-Systems zugehörige Biegewellenzahl k_B zutage. Diese ergibt sich in Abhängigkeit von der Masse m , der Kreisfrequenz ω , der Federkonstante der elastischen Bettung k und der Biegesteifigkeit EI zu:

$$k_B = \frac{2\pi}{\lambda_B} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k}{EI}}. \quad (7.31)$$

Für das verwendete Masse-Feder-System liegt die Biegewellenzahl bei $k_B = 0.79 \frac{1}{m}$.

Insgesamt läßt sich anhand der in Tabelle 7.3 angegebenen Wellenzahlen erkennen, daß im Falle des weichen Bodens nur eine sehr geringe Anregung im kurzwelligen Bereich auftritt, weshalb keine Rayleigh- oder Scherwellen angeregt werden. Deshalb bilden sich in diesem Fall an der Halbraumoberfläche Kompressionswellen aus. Im Falle des steifen Bodens schließt das angeregte Wellenzahlband hingegen alle charakteristischen Wellenzahlen des Bodens ein, so daß es an der Oberfläche zur Ausbildung von Rayleighwellen kommt. Dies liegt in der relativ hohen Steifigkeit

der Tunnelkonstruktion begründet: der dominante Wellenzahlbereich, in welchem der Tunnel den Boden zu Schwingungen anregt, ist der Bereich kleiner Wellenzahlen.

Wie ein Vergleich der Abbildungen 7.15 und 7.16 zeigt, bilden sich im Bereich der Lasteinleitung im Falle des weichen Bodens Wellen mit deutlich längeren Wellenlängen aus als im Falle des steifen Bodens. Beide Situationen unterscheiden sich dabei lediglich durch den umgebenden Boden. Vergleicht man nun die im Halbraum gebettete Tunnelstruktur mit einem elastisch gebetteten Balken, so wirkt sich die Steifigkeit des umgebenden Bodens fast ausschließlich auf die Steifigkeit k der elastischen Bettung in (7.31) aus, jedoch kaum auf das mitschwingende Bodenvolumen und damit auf die Trägheitskräfte. Die im Bereich der Lasteinleitung signifikant größeren Wellenlängen im Falle des weichen Bodens zeigen, daß in diesen Fällen der Einfluß der elastischen Bettung k in (7.31) gegenüber dem Einfluß der Trägheitskräfte dominant sein muß. Setzt man dies voraus, so nimmt die Länge der angeregten Wellen mit zunehmender Biegesteifigkeit des Balkens und mit abnehmender Steifigkeit der Bettung zu. Vergleicht man jedoch den in Abbildung 7.16 dargestellten Fall des Tunnels mit Rechteckquerschnitt mit dem in Abbildung 7.17 gezeigten Fall des Tunnels mit dünner Kreiszylinderschale, so besitzt letzterer eine geringere Biegesteifigkeit, weshalb er kürzere Wellen anregt. In diesem Fall tritt deshalb der Einfluß des Masse-Feder-Systems deutlich zutage: es verteilt die an der Tunnelkonstruktion angreifenden Kräfte ebenfalls über eine größere Länge. Dieser Effekt tritt jedoch im Falle des Rechteckquerschnittes nicht auf: in diesem Fall dominiert der Tunnel selbst aufgrund seiner hohen Steifigkeit in Quer- sowie Längsrichtung die Lastverteilung.

7.2.2 Interaktion eines Fahrzeuges mit einem Masse-Feder-System im Tunnel

Im folgenden wird die Interaktion eines Fahrzeuges mit der in Abbildung 6.1 dargestellten gekoppelten Struktur untersucht, welche aus dem Masse-Feder-System, der Tunnelschale sowie dem Halbraum besteht. Das Fahrzeug wird, wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, als Drehgestell mit fünf Freiheitsgraden modelliert. Die zugehörigen Fahrzeugparameter sind in Tabelle 7.4 angegeben. Die Bodenparameter für den hier gewählten steifen Boden können Tabelle 7.1 entnommen

Achsabstand:	Δl	2.5	m
Wagenkastenmasse:	m_W	20300	kg
Drehgestellmasse:	m_D	2980	kg
Radsatzmasse:	m_R	1760	kg
Steifigkeit der Primärfederung (Grundwert):	k_0	$7.04 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfungszahl der Primärfederung:	c_1	$2.02 \cdot 10^4$	Ns/m
Steifigkeit der Sekundärfederung:	k_2	$19.44 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfungszahl der Sekundärfederung:	c_2	$2.38 \cdot 10^4$	Ns/m
Rotationsträgheitsmoment des Drehgestelles:	I_θ	650	kgm^2
Amplitude der Radunrundheiten:	A	$1.5 \cdot 10^{-5}$	m

Tabelle 7.4: Parameter des Fahrzeuges

werden, während die Parameter der Tunnelschale in Tabelle 7.2 angegeben sind. Wie bereits in Abschnitt 7.2.1 wird für die Platte ein Verlustfaktor von $\zeta = 0.02$ und für die elastische Bettung ein Verlustfaktor von $\zeta = 0.2$ zur Berücksichtigung der Materialdämpfung in Ansatz gebracht.

Mit dem in Kapitel 6 dargestellten Vorgehen könnte man nun, wie in Abbildung 6.4 gezeigt, eine beliebige, synthetisch erzeugte oder gemessene Schienenoberflächenrauigkeit berücksichtigen. In den folgenden Beispielen werden jedoch stattdessen zwei verschiedene Radoberflächenunrundheiten angenommen, wobei das gleiche Vorgehen in analoger Weise zur Anwendung gelangt. Für derartige harmonische Lasten kann im linearen Fall eine analytische Lösung im Frequenzraum berechnet werden, welche dann als Vergleichslösung dienen kann. Die Frequenz einer harmonischen Radoberflächenunrundheit, welche von der Geschwindigkeit v des Zuges abhängt, wird dabei wie folgt errechnet:

$$f_s = \frac{v}{s}. \quad (7.32)$$

Hierin bezeichnet s den Radumfang, der für übliche Radreifen zu $s = 2.883 \text{ m}$ angenommen wird.

Im folgenden wird zuerst der Fall der Interaktion eines linear modellierten Fahrzeuges mit dem MFS im Frequenzraum untersucht. Anschließend wird die Interaktion mit einem Fahrzeug behandelt, welches sich durch eine nichtlineare Primärfederung auszeichnet.

Interaktion eines linearen Fahrzeuges mit einem Masse-Feder-System im Tunnel

Für die Interaktion eines linearen Fahrzeuges mit dem Masse-Feder-System werden Berechnungen durchgeführt, in welchen der gesamten Interaktion mit der Tunnelstruktur und dem Halbraum Rechnung getragen und folglich die auf der Unterseite der Bettung wirkende endlich große Abschlußimpedanz der Tunnelsohle berücksichtigt wird. Zu Vergleichszwecken wird auch der Fall eines Masse-Feder-Systems auf einer starren Unterlage untersucht, deren Abschlußimpedanz unendlich groß ist. Dabei wurde als Federsteifigkeit der linearen Feder deren Grundsteifigkeit k_0 gemäß Tabelle 7.4 verwendet.

Die Abbildung 7.19 zeigt Vergleichsergebnisse für die Verschiebungen der beiden Räder des Drehgestells infolge eines sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 20 \text{ m/s}$ bewegenden Fahrzeuges, dessen erstes bzw. zweites Rad eine harmonische Unrundheit mit der Frequenz $f = 28 \text{ Hz}$ (entspricht der 4. harmonischen Unrundheit) bzw. $f = 56 \text{ Hz}$ (entspricht der 8. harmonischen Unrundheit) besitzt. Hierbei wird sowohl ein mit $f_0 = 10 \text{ Hz}$ tief als auch ein mit $f_0 = 100 \text{ Hz}$ hoch abgestimmtes MFS untersucht. Die Radoberflächenunrundheiten besitzen die Amplitude $A = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Dabei ist jeweils der Fall mit Berücksichtigung der endlichen Abschlußimpedanz der Tunnelsohle sowie der Fall mit unendlicher Abschlußimpedanz dargestellt, bei welchem das Masse-Feder-System auf einer starren Unterlage ruht.

Erwartungsgemäß zeigt sich, daß für das massebestimmte Masse-Feder-System mit der Abstimmfrequenz $f = 10 \text{ Hz}$ der Einfluß des im Halbraum eingebetteten Tunnels im Vergleich zum elastisch gebetteten Balken auf starrer Unterlage für den hier betrachteten Boden mit relativ hoher Steifigkeit nur gering ist; er liegt sogar innerhalb der üblichen Rechengenauigkeit. Für das tief abgestimmte MFS läßt sich an der Stelle des ersten Rades die Dominanz seiner eigenen Anregungsfrequenz $f = 28 \text{ Hz}$ deutlich erkennen, während ein höherfrequenter Beitrag des zweiten Rades kaum sichtbar ist. Bei dem zweiten Rad, welches aufgrund seiner Unrundheit mit der Frequenz $f = 56 \text{ Hz}$ angeregt wird, tritt hingegen der Einfluß des ersten Rades aufgrund der größeren Distanz der Anregungsfrequenz des zweiten Rades von der Abstimmfrequenz des Systems deutlich zutage.

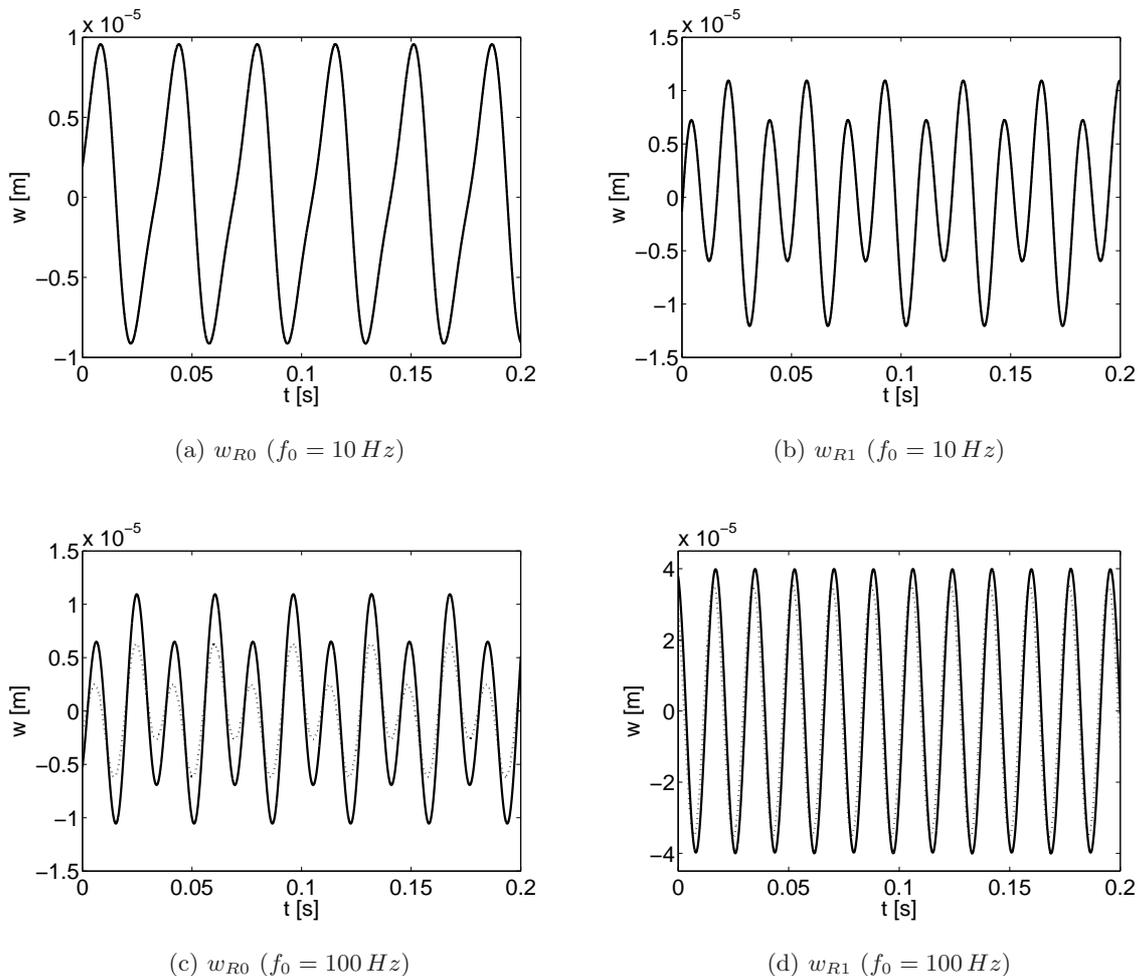


Abbildung 7.19: Radverschiebungen $w_{R0}(f_{R0} = 28 \text{ Hz})$ und $w_{R1}(f_{R1} = 56 \text{ Hz})$ für ein MFS mit endlicher (—) und unendlicher Abschlußimpedanz (\cdots)

Für ein steifigkeitsbestimmtes Masse-Feder-System mit der Abstimmfrequenz $f = 100 \text{ Hz}$ – wobei dieser Fall gemäß den in Abschnitt 7.2.1 angegebenen Prinzipien für die Auslegung solcher Systeme rein akademischer Natur ist und nur dem Studium auftretender Effekte dient – sind die Ergebnisse für das gesamte System unter Berücksichtigung der endlichen Abschlußimpedanz des Tunnels erkennbar höher als die Ergebnisse für den elastisch gebetteten Balken auf starrer Unterlage. Ursache dafür ist die Koinzidenz zweier Effekte: zum einen besitzt das in Reihe geschaltete System zweier Federn, als welches man die Bettung sowie die Steifigkeit des Systems *Halbraum-Tunnelschale* gemäß Abschnitt 6.1 ansehen kann, eine niedrigere Steifigkeit als die Bettung des Balkens für sich alleine genommen; zum anderen geht mit der Abnahme der Steifigkeit eine Zunahme des Wertes der Vergrößerungsfunktion einher. In diesem Zusammenhang muß darauf hingewiesen werden, daß die Abbildungen die Gesamtverschiebungen zeigen, welche die Verschiebungen der Tunnelschale einschließen.

Aufgrund der Tatsache, daß die Anregungsfrequenz $f = 56 \text{ Hz}$ des zweiten Rades näher an der Abstimmfrequenz und damit der Systemeigenfrequenz liegt, kann ihr Einfluß auf die Verschiebungen des ersten Rades nun deutlich erkannt werden. Ein Einfluß der niedrigeren Frequenz des ersten Rades auf die Antworten am zweiten Rad existiert in diesem Fall überhaupt nicht; dies liegt an dem zugehörigen geringeren Wert der Vergrößerungsfunktion und den deutlich größeren D'Alembertschen Kräften infolge der höheren Frequenz, welche mit der Potenz von zwei der Kreisfrequenz ω zunehmen.

Ähnliche Ergebnisse wie die in Abbildung 7.19 gezeigten sind in Abbildung 7.20 für den Fall dargestellt, daß das erste bzw. zweite Rad eine harmonische Unrundheit mit der Frequenz $f = 21 \text{ Hz}$ (entspricht der 3. harmonischen Unrundheit) bzw. $f = 28 \text{ Hz}$ (entspricht der 4. harmonischen Unrundheit) besitzt.

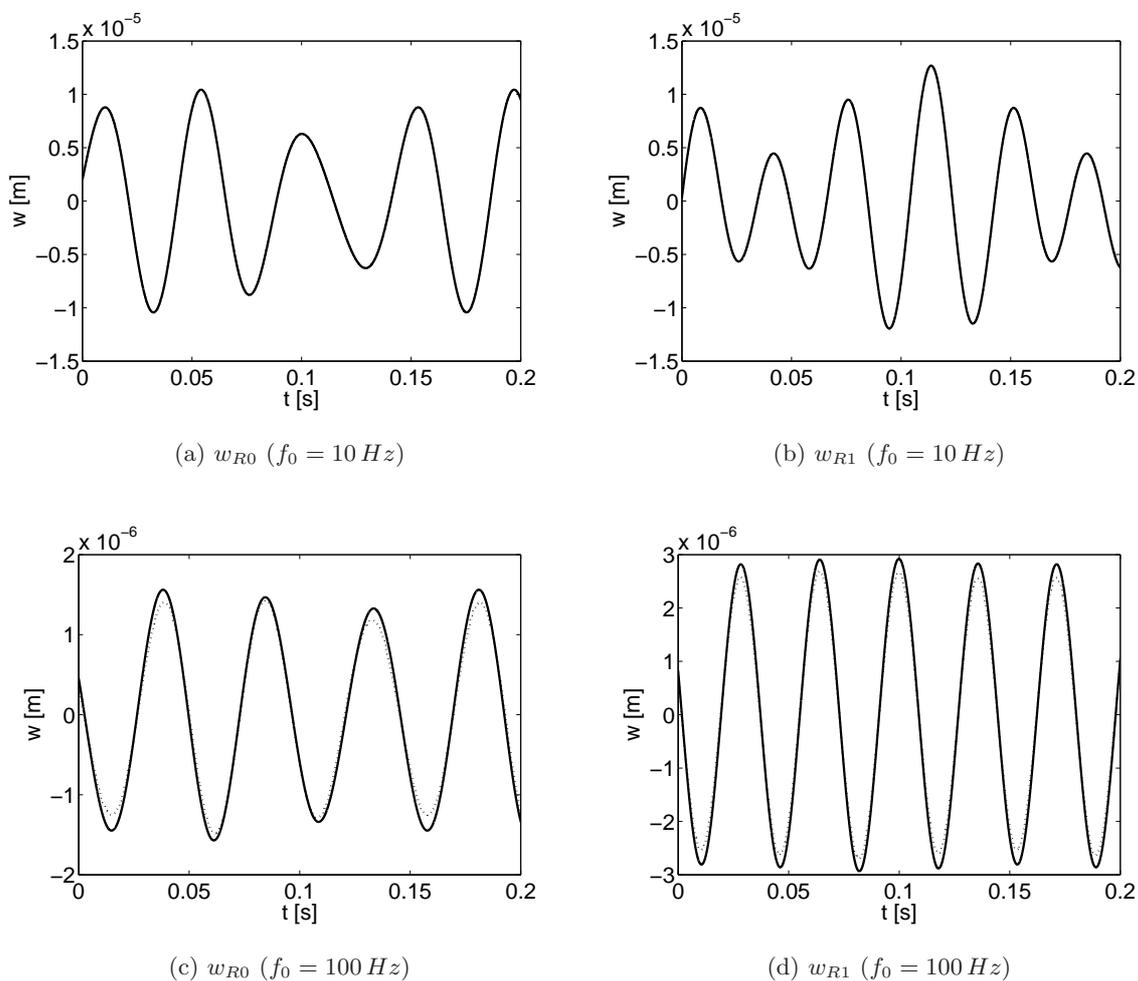


Abbildung 7.20: Radverschiebungen $w_{R0}(f_{R0} = 21 \text{ Hz})$ und $w_{R1}(f_{R1} = 28 \text{ Hz})$ für ein MFS mit endlicher (—) und unendlicher Abschlußimpedanz (\cdots)

In diesem Fall ist der gegenseitige Einfluß der beiden Räder auf die Antwort am Ort des jeweils

anderen Rades deutlich höher, da die beiden Frequenzen dichter beieinander liegen und deshalb der Unterschied in den hervorgerufenen Trägheitskräften als auch in den Werten, welche die Vergrößerungsfunktion annimmt, deutlich geringer sind.

Interaktion eines nichtlinearen Fahrzeuges mit einem Masse-Feder-System im Tunnel

Sollen nichtlineare Eigenschaften des Fahrzeuges im Modell berücksichtigt werden, so muß die Berechnung gemäß Abschnitt 6.1.1 mit Hilfe der Impulsreaktionsfunktion $h(\bar{x}, t)$ des gesamten gekoppelten Systems *MFS-Tunnel-Halbraum* im Zeitbereich erfolgen.

Um die Impulsreaktionsfunktion $h(\bar{x}, t)$ zu ermitteln, muß die Übertragungsfunktion des Systems $\hat{H}(k_x, \omega')$ mittels einer zweidimensionalen Fourierrücktransformation ($k_x \bullet \circ x, \omega \bullet \circ t$) in den Originalraum transformiert werden. Da die Verwendung herkömmlicher Transformationsverfahren wie sogar der FFT [BRIGHAM 1987] für eine mehrdimensionale Fourierrücktransformation jedoch einen hohen numerischen Aufwand zur Folge hat, wurde für die im Rahmen der Untersuchung der nichtlinearen Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion nötige 2D-Fourierrücktransformation das von Lenz [LENZ 2003] aufbauend auf der Arbeit von Lieb [LIEB 1997] entwickelte Programmpaket für die adaptive numerische Fouriertransformation auf der Basis der Waveletdekomposition verwendet. Dieses erlaubt eine sehr effiziente Rücktransformation.

Als Grundlage für die Ermittlung der Impulsreaktionsfunktion muß in einem ersten Schritt die Übertragungsfunktion $\hat{H}(k_x, \omega')$ des Systems berechnet werden. Die Abbildung 7.21 zeigt das Raster der mit Hilfe des von Lenz [LENZ 2003] entwickelten Programmpaketes erhaltenen adaptiven Abtastung der Übertragungsfunktion. Ein Detailausschnitt dieses Rasters ist in Abbildung 7.22 dargestellt. In dieser ist ebenfalls die Dispersionskurve des elastisch gebetteten Balkens auf starrer Unterlage eingetragen, welche von der adaptiven Abtastung sehr gut erfaßt wird; die Abschlußimpedanz der Tunnelschale ist folglich vergleichsweise hoch.

In Abbildung 7.23 ist ein Ausschnitt des Realteils der Übertragungsfunktion $\hat{H}(k_x, \omega')$ des Gesamtsystems dargestellt. Darin erscheint die Funktion nur deshalb als nicht glatt, weil sie zur Erzeugung der Abbildung durch Interpolation auf äquidistante Stützstellen bezogen werden mußte.

Die Impulsreaktionsfunktion $h(\bar{x}, t)$ ist in Abbildung 7.24 dargestellt.

Die Antworten an den Stellen $\bar{x} = \pm 2.5 \text{ m}$ im mitbewegten Koordinatensystem, welche als $h_{01}(t)$ und $h_{10}(t)$ neben der Antwort an der Stelle $\bar{x} = 0 \text{ m}$ als $h_{00}(t) = h_{11}(t)$ zur Interaktionsberechnung benötigt werden, können der Abbildung 7.25 entnommen werden. Aufgrund der Bewegung des Koordinatensystems in positiver x -Richtung nimmt die Amplitude der Balkenverschiebung in dieser Richtung schneller ab. Deshalb ist in Abbildung 7.25 die Verschiebung an der Stelle $\bar{x} = -2.5 \text{ m}$ größer als die Verschiebung an der Stelle $\bar{x} = +2.5 \text{ m}$.

Im betrachteten Beispiel soll in Anlehnung an [LENZ 2003] eine nichtlineare Federcharakteristik der Primärfedern des Fahrzeuges berücksichtigt werden. Diese ist gegeben durch die Funktion

$$k_{nl} = \frac{k_0}{1 + a|w|^n} \quad (7.33)$$

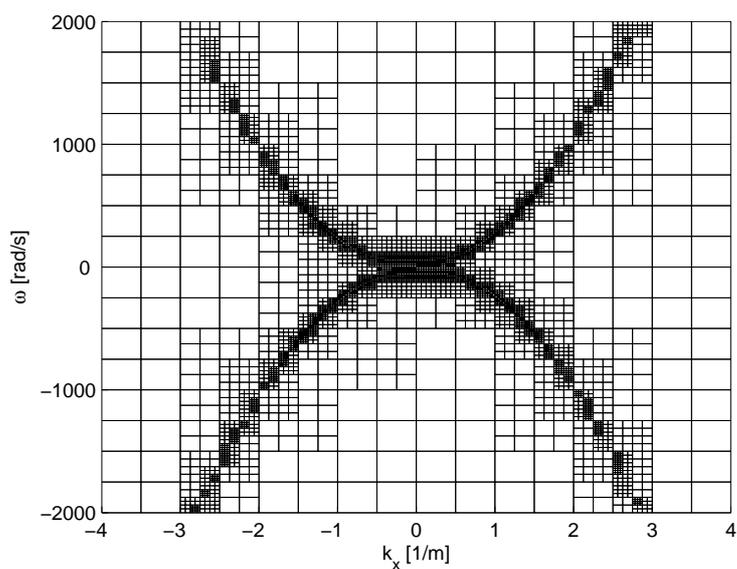


Abbildung 7.21: Abtastraster im Wellenzahl-Frequenzraum

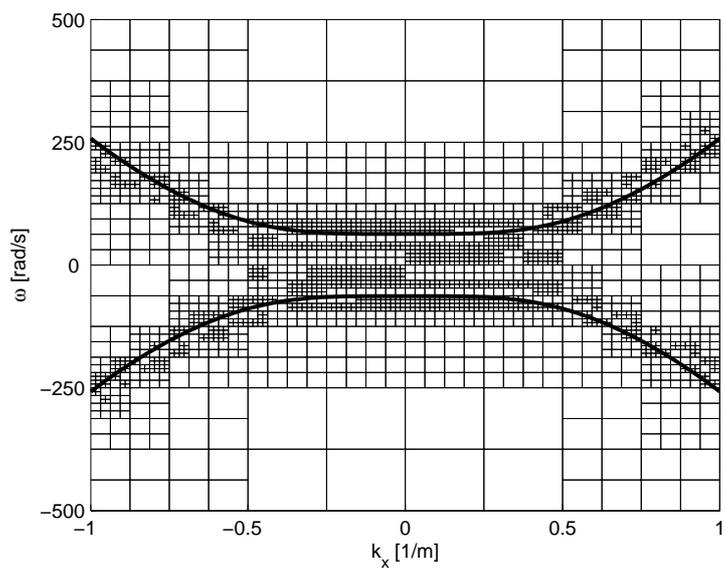


Abbildung 7.22: Detail des Abtastrasters im Wellenzahl-Frequenzraum; überlagert dargestellt ist die analytische Dispersionskurve für den elastisch gebetteten Balken auf starrer Unterlage (-)

mit dem Parameter k_0 gemäß Tabelle 7.4, $a = 2 \cdot 10^5$ und $n = 0.1$. Die Abbildung 7.26 zeigt das Ergebnis der nichtlinearen Berechnung für die Plattenverschiebung unter der ersten w_{B0} und der

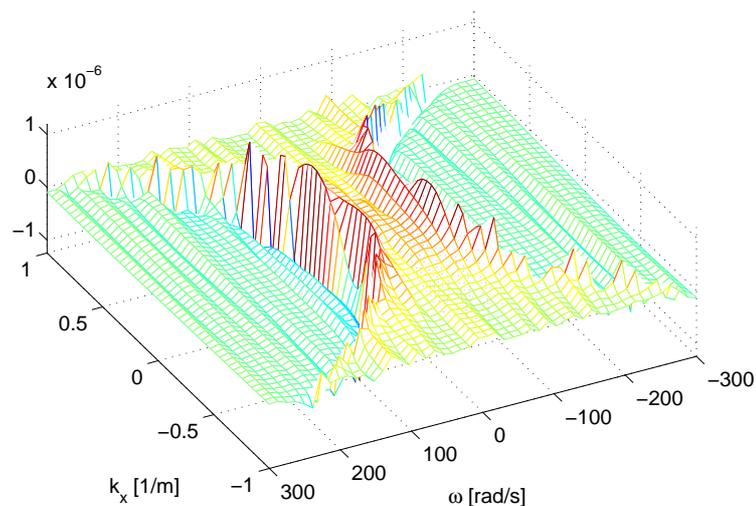


Abbildung 7.23: Detail des Realteils der Übertragungsfunktion des Systems $\hat{H}(k_x, \omega')$

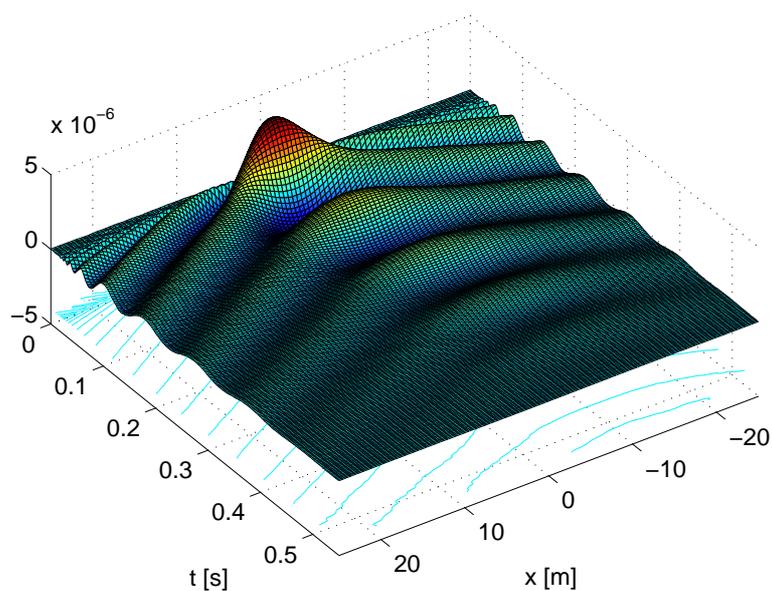


Abbildung 7.24: Impulsreaktionsfunktion $h(t)$

zweiten Radachse w_{B1} , die Interaktionskraft F_0 zwischen Platte und erstem sowie F_1 zwischen Platte und zweitem Rad, die Verschiebung w_D und die Verdrehung ϕ_D des Drehgestells sowie die Verschiebung w_W des Wagenkastens.

Die Graphen (b) und (e) in [Abbildung 7.26](#) zeigen Detailausschnitte der Plattenverschiebungen

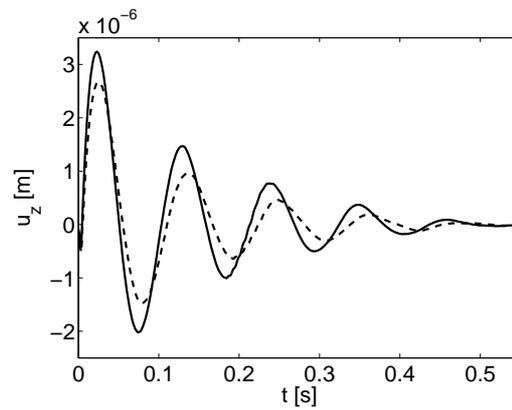


Abbildung 7.25: Impulsreaktionsfunktionen an der Stelle $\bar{x} = -2.5$ m (-) und an der Stelle $\bar{x} = +2.5$ m (- -)

unter den beiden Radachsen (a) und (d), welche im Rahmen der nichtlinearen Berechnung mit Hilfe des Zeitschrittverfahrens im Zeitbereich berechnet wurden. Zum Vergleich sind in den Bildern (a), (b), (d) und (e) auch die Ergebnisse einer für ein Fahrzeug mit linearer Primärfederung im Frequenzraum durchgeführten Interaktionsberechnung angegeben.

Man erkennt, daß sich trotz der starken Nichtlinearität der Primärfederung die für den nichtlinearen Fall im Zeitbereich erhaltene Lösung kaum von der im Frequenzraum für den linearen Fall erhaltenen Lösung unterscheidet. Dies kann dadurch begründet werden, daß die Antwort des Gesamtsystems vom Massenträgheitsterm der Radmassen dominiert wird und der Steifigkeitsterm kaum Einfluß besitzt.

Die Radverschiebungen weisen jedoch zu sehr frühen Zeitpunkten einen homogenen Lösungsanteil auf. Dieser entsteht aufgrund des plötzlichen Anfahrens des Fahrzeuges zum Zeitpunkt $t = 0$: durch die sinusförmige Radunrundheit nimmt die Geschwindigkeit des Rades in Vertikalrichtung plötzlich einen Wert ungleich null an, wozu streng genommen eine unendliche Beschleunigung notwendig ist. Dieser homogene Lösungsanteil dominiert im betrachteten Zeitraum die Verschiebungen des Drehgestells sowie des Wagenkastens.

Numerische Schwankungen sind lediglich bei den Interaktionskräften erkennbar, welche jedoch weder die Stabilität noch die Genauigkeit der übrigen Ergebnisse beeinflussen.

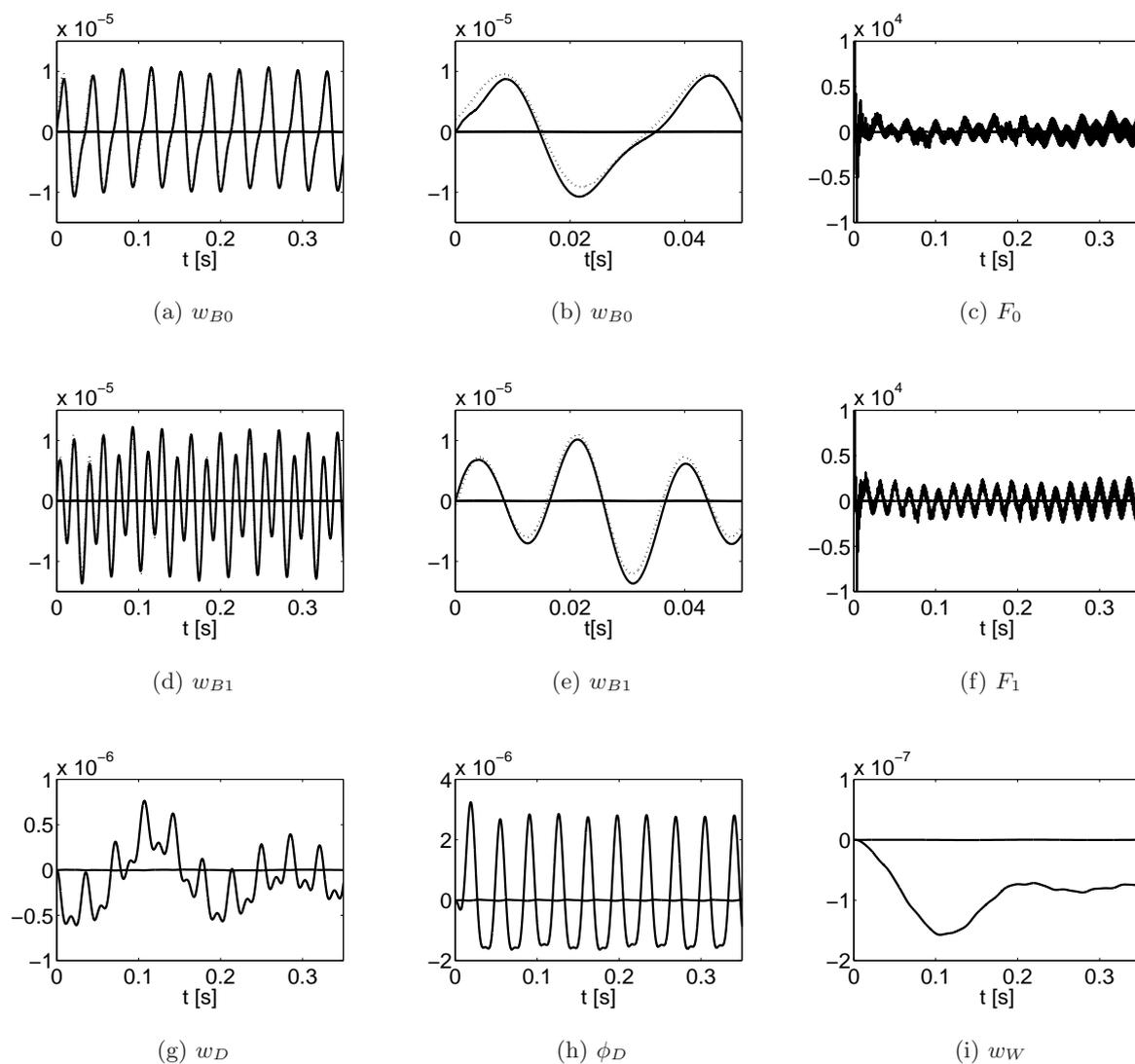


Abbildung 7.26: Ergebnisse der nichtlinearen (–) sowie zum Vergleich der linearen (···) Interaktionsberechnung ((a), (b), (d) und (e))

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren entwickelt, welches das dynamische Verhalten eines Tunnels infolge eines fahrenden Zuges der numerischen Berechnung zugänglich macht. Im Gegensatz zu anderen, in der Einleitung vorgestellten Vorgehensweisen, beruht dieses Verfahren auf der Anwendung der Integraltransformationmethode. Dabei wird eine numerische Lösung für das System *Halbraum mit Tunnel* durch die Kopplung der Lösung für das System *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* mit einer innenliegenden, mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode beschriebenen Struktur, im Rahmen der Substrukturtechnik erzielt. Zur Herleitung der hierzu benötigten Lösung für die Substruktur *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum*, welche ebenfalls nicht analytisch vorliegt, werden die bekannten, je nach Komplexität semianalytisch vorliegenden Lösungen für die Systeme (*geschichteter*) *Halbraum* und *Vollraum mit zylindrischem Hohlraum* in geeigneter Weise überlagert. Dabei liegt die Halbraumlösung im dreifach fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum und die Vollraumlösung im (k_x, r, n, ω) -Raum vor, wobei mit n die Reihenglieder der in Umfangsrichtung angewendeten Fourierreihenentwicklung bezeichnet werden. Um jedoch die Randbedingungen des neuen Gesamtsystems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* beschreiben zu können, muß die Superposition dieser beiden Teillösungen jedoch im (k_x, y, z, ω) -Raum erfolgen. Ebenfalls im (k_x, y, z, ω) -Raum findet auch die Kopplung mit der innenliegenden FEM-Struktur statt, so daß die FEM hier in entsprechend modifizierter Weise im Wellenzahl-Frequenzraum anzuwenden ist.

Dabei wird das Substrukturverhalten des Systems *Halbraum mit zylindrischem Hohlraum* an der Berandung des zylindrischen Hohlraumes zur Verfügung gestellt, weshalb Parameterstudien im Bereich des mit Finiten Elementen diskretisierten Gebietes mit vergleichsweise geringem Berechnungsaufwand ohne Neuberechnung des unendlichen Gebietes durchgeführt werden können.

Da die Lösung der gekoppelten ITM-FEM Gleichungen für jede diskrete Wellenzahl k_x im fouriertransformierten (k_x, y, z, ω) -Raum ermittelt wird und deshalb lediglich eine Diskretisierung des Querschnittes des Systems *Tunnel-Halbraum* erfolgt – was eine signifikante Reduzierung des Berechnungsaufwandes zur Folge hat –, werden solche translationsinvarianten Modelle in der Literatur häufig als 2.5D-Modelle bezeichnet. Sie bilden jedoch das mechanische Verhalten des Systems *Oberbau-Tunnel-Boden* vollständig dreidimensional ab.

Damit ermöglicht es dieses Verfahren, die infolge eines im Tunnel sich bewegenden Zuges hervorgerufenen Erschütterungen bzw. den Körperschall im dreidimensionalen Halbraum numerisch zu

ermitteln und für Prognosezwecke zu quantifizieren.

Neben bewegten dynamischen Lasten, welche häufig zur Untersuchung einzelner Effekte verwendet werden, kommen in der vorliegenden Arbeit auch Fahrzeugmodelle zur Anwendung, mit welchen die Entstehung der dynamischen Kräfte im Rad-Schiene-Kontaktpunkt infolge von Schienen- bzw. Radoberflächenrauigkeiten – im Sonderfall Radunrundheiten, welche zu einer harmonischen Anregung führen – abgebildet wird.

Als Maßnahme zur Körperschallisolation wurde der Einbau eines Masse-Feder-Systemes untersucht und das zu erreichende Einfügungsdämmmaß ermittelt, um das Anwendungsspektrum des vorgestellten Verfahrens aufzuzeigen.

Auch der Fall eines Fahrzeuges, welches sich nichtlinear verhält, wurde untersucht. In diesem Fall muß die Interaktionsberechnung zwischen dem Fahrzeug und dem System *Fahrweg - Tunnel - Halbraum* im Zeitbereich erfolgen. Die dazu nötige Impulsreaktionsfunktion für das gekoppelte Gesamtsystem wurde aus der Systemübertragungsfunktion $\hat{H}(k_x, \omega)$ durch zweifache Fourierrücktransformation mit Hilfe des von Lieb und Lenz [LIEB 1997, LENZ 2003] am Lehrstuhl für Baumechanik der TU München entwickelten Verfahrens auf der Grundlage der Waveletdekomposition gewonnen. Damit konnte eine deutliche Effizienzsteigerung der mehrdimensionalen Integraltransformationsmethode erreicht werden.

Dabei wird vor der numerischen Fourierrücktransformation ein Algorithmus zur adaptiven Abtastung der Systemübertragungsfunktion $\hat{H}(k_x, \omega)$ im Wellenzahl-Frequenzraum verwendet. Es soll allerdings darauf hingewiesen werden, daß trotz des Einsatzes dieses Algorithmus der nötige Aufwand vergleichsweise hoch ist gegenüber dem z.B. für den Halbraum im dreifach fouriertransformierten (k_x, k_y, z, ω) -Raum erforderlichen Berechnungsaufwand. Dies liegt im Übergang in den (k_x, y, z, ω) -Raum und dem für die dort zu ermittelnde Lösung des Gleichungssystems zur Berücksichtigung der Randbedingungen sowohl am Lochrand Γ_S als auch auf der Halbraumoberfläche notwendigen Berechnungsaufwand begründet. Hier sollten weitere Untersuchungen ansetzen, um die Effektivität des vorgestellten Verfahrens deutlich zu erhöhen. Vorstellbar wäre hierzu eine Einschränkung der an der Halbraumoberfläche auszuwertenden Wellenzahlen k_y und der zur Einhaltung der Randbedingungen zu verwendenden Koordinaten y in Abhängigkeit von den Amplituden der angeregten Wellenarten. Diese hängen von den Materialparametern, der Geometrie der verschiedenen Strukturen sowie von der Tiefenlage des Tunnels ab.

Insgesamt wäre ein Vergleich der numerisch ermittelten Ergebnisse mit anhand von Messungen an real existierenden Zugstrecken vorliegenden Ergebnissen wünschenswert. Die Fahrzeug- und Oberbaumodelle – welche in folgenden Untersuchungen vor allem im Bereich des Fahrweges noch erweitert werden müssen – sind ebenfalls auf ihre Fähigkeit hin, die jeweils vorliegende Situation abbilden zu können, zu überprüfen. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die Erfassung der Bodenparameter zu legen, welche in rerum realitatis teilweise sehr großen Streuungen unterworfen und infolgedessen nur schwierig zu quantifizieren sind. Letztendlich erlauben nämlich nur Ergebnisse, welche an in einer vergleichbaren Situation erhaltenen Meßergebnissen kalibriert wurden, eine belastbare Quantifizierung von zu erwartenden Erschütterungen bzw. Körperschall. Aussagen über den Einfluß der Tunnelgeometrie (Kreisquerschnitt, ovaler Querschnitt, Rechteckquerschnitt, ein- oder zweigleisig) und des umgebenden Erdreichs, über die Auswirkung einer Erhöhung der Massen oder der Steifigkeiten oder zur Auslegung von Maßnahmen zur Körperschallisolation sind jedoch nur anhand von numerischen Prognosemodellen möglich. Dazu soll das entwickelte Verfahren einen Beitrag leisten.

Literaturverzeichnis

- [ABRAMOWITZ und STEGUN 1965] ABRAMOWITZ, M. und I. STEGUN (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York. 35
- [ALBERTY et al. 1999] ALBERTY, J., C. CARSTENSEN und F. S.A. (1999). *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*. Numerical Algorithms, 20(2-3):117–137. 65
- [ANDERSEN und JONES 2002] ANDERSEN, L. und C. JONES (2002). *Vibration from a railway tunnel predicted by coupled finite element and boundary element analysis in two and three dimensions*. In: GRUNDMANN, H. und G. SCHUËLLER, Hrsg.: *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, München*, S. 1131–1136, Lisse. Swets & Zeitlinger. 7, 12
- [ANDERSEN und NIELSEN 2003] ANDERSEN, L. und S. NIELSEN (2003). *Boundary Element Analysis of the Stationary Response from a Moving Force on an Elastic Half-Space*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 27(1):23–38. 9
- [ANDERSEN und NIELSEN 2005] ANDERSEN, L. und S. NIELSEN (2005). *Reduction of ground vibrations by means of barriers or soil improvement along a railway track*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 25:701–716. 48
- [ANTES 1988] ANTES, H. (1988). *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik*. BG Teubner, Stuttgart. 5
- [AUBRY et al. 1994] AUBRY, D., D. CLOUTEAU und G. BONNET (1994). *Modeling of wave propagation due to fixed or mobile dynamic sources*. In: CHOUW, N. und G. SCHMID, Hrsg.: *Erschütterungsausbreitung und Erschütterungsreduzierung, Workshop WAVE'94, Ruhr-Universität Bochum*, S. 109–121, Bochum. Berg-Verlag. 12, 14
- [AUERSCH 2005] AUERSCH, L. (2005). *The excitation of ground vibration by rail traffic: theory of vehicle-track-soil interaction and measurements on high-speed lines*. Journal of Sound and Vibration, 284(1-2):103–132. 9
- [BANERJEE et al. 1992] BANERJEE, P.K., H. WANG und S. AHMAD (1992). *Multiregion periodic dynamic analysis by BEM of 2D, 3D and axisymmetric problems*. In: BANERJEE, P.K. und S. KOBAYASHI, Hrsg.: *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods*, Nr. 7 in *Developments in Boundary Element Methods*, S. 27–74. Elsevier Applied Science, London. 5

- [DE BARROS und LUCO 1994] BARROS, F.C.P. DE und J. LUCO (1994). *Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load*. Wave Motion, 19:189–210. 5
- [BESKOS 1987] BESKOS, D.E. (1987). *Boundary element methods in dynamic analysis*. Applied Mechanics Reviews, 40(1):1–23. 5
- [BESKOS 1997] BESKOS, D.E. (1997). *Boundary element methods in dynamic analysis: Part II*. Applied Mechanics Reviews, 50(3):149–197. 5
- [BESKOS et al. 1986] BESKOS, D.E., K. LEUNG und I. VARDOULAKIS (1986). *Vibration Isolation of Structures From Surface Waves in Layered Soil*. In: KARABALIS, D.L., Hrsg.: *Recent Applications in Computational Mechanics*, S. 125–140, New York. 5
- [BONNET et al. 1998] BONNET, M., G. MAIER und C. POLIZZOTTO (1998). *Symmetric Galerkin boundary element methods*. Applied Mechanics Reviews, 51(11):669–703. 4
- [BOŠKOVIĆ 2007] BOŠKOVIĆ, L. (2007). *Halbraumdynamik nach der Theorie Poröser Medien und Einfluß der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem klassischen Halbraum gebetteten Balken*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Baumechanik, Band 1, Technische Universität München. 10, 16
- [BRIGHAM 1987] BRIGHAM, E.O. (1987). *FFT Schnelle Fourier-Transformation*. R. Oldenbourg Verlag, München. 24, 118
- [VAN DEN BROECK et al. 2002] BROECK, P. VAN DEN, G. DEGRANDE und G. DE ROECK (2002). *A prediction model for ground-borne vibrations due to railway traffic*. In: *Structural Dynamics, EUROODYN2002*, S. 503–508. 9
- [BUCHSCHMID 2002] BUCHSCHMID, M. (2002). *Geschlossene Lösung des Systems Halbscheibe mit Loch unter Verwendung der Fourierreihenentwicklung*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München. 53
- [CLOUGH und PENZIEN 1993] CLOUGH, R.W. und J. PENZIEN (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York. 17, 18
- [CLOUTEAU et al. 2005] CLOUTEAU, D., M. ARNST, T. AL-HUSSAINI und G. DEGRANDE (2005). *Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium*. Journal of Sound and Vibration, 283(1-2):173–199. 13
- [CLOUTEAU et al. 2001] CLOUTEAU, D., G. DEGRANDE und G. LOMBAERT (2001). *Numerical Modelling of Traffic Induced Vibrations*. Meccanica, 36(4):401–420. 14
- [CLOUTEAU et al. 2000] CLOUTEAU, D., M. ELHABRE und D. AUBRY (2000). *Periodic BEM and FEM-BEM coupling: application to seismic behaviour of very long structures*. Computational Mechanics, 25(6):567–577. 13, 14
- [CRAIG und BAMPTON 1968] CRAIG, R.R. und M. BAMPTON (1968). *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses*. AIAA Journal, 6(7):1313–1319. 14
- [CREMER und HECKL 1996] CREMER, L. und M. HECKL (1996). *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 18

- [DEGRANDE und LOMBAERT 2001] DEGRANDE, G. und G. LOMBAERT (2001). *An efficient formulation of Krylov's prediction model for train induced vibration based on the dynamic reciprocity theorem*. Journal of the Acoustical Society of America, 110(3):1379–1390. 9
- [DEGRANDE et al. 2006] DEGRANDE, G., M. SCHEVENELS, P. CHATTERJEE, W. VAN DE VELDE, P. HÖLSCHER, V. HOPMAN, A. WANG und N. DADKAH (2006). *Vibrations due to a test train at variable speeds in a deep bored tunnel embedded in London clay*. Journal of Sound and Vibration, 293(3-5):626–644. 13
- [DIETERMANN und METRIKINE 1996] DIETERMANN, H.A. und A. METRIKINE (1996). *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam..* European Journal of Mechanics, 15(1):67–90. 73
- [DIN 4178 2005] DIN 4178 (2005). *Glockentürme*. Deutsche Norm, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin. 106
- [DINKEL 2001] DINKEL, J. (2001). *Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen Berechnung des gekoppelten Systems Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund für das Oberbausystem Feste Fahrbahn*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 9/2001, Technische Universität München. 10, 70, 75
- [DOMINGUEZ 1993] DOMINGUEZ, J. (1993). *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton. 5
- [DUDDECK 1997] DUDDECK, F.E.M. (1997). *Funktional-Analyse der Kontinuumsmechanik - Fouriertransformation bezüglich Raum und Zeit der Energiemethoden*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 5/97, Technische Universität München. 136
- [DUDDECK 2002] DUDDECK, F.M.E. (2002). *Fourier BEM - Generalization of Boundary Element Methods by Fourier Transform*. Nr. 5 in *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 5
- [EKEVID et al. 2006] EKEVID, T., H. LANE und N.-E. WIBERG (2006). *Adaptive solid wave propagation - influences of boundary conditions in high-speed train applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195:236–250. 9
- [EKEVID und WIBERG 2002] EKEVID, T. und N.-E. WIBERG (2002). *Wave propagation related to high-speed train. A scaled boundary FE-approach for unbounded domains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191(36):3947–3964. 9
- [VON ESTORFF et al. 1991] ESTORFF, O. VON, A. STAMOS, D. BESKOS und H. ANTES (1991). *Dynamic interaction effects in underground traffic systems*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 8(4):167–175. 7
- [FIRUZIAAN 2003] FIRUZIAAN, M. (2003). *Untersuchungen zur Bauwerk/Boden-Wechselwirkung unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte*. Nr. 279 in *Fortschrittsberichte VDI Reihe 18*. VDI Verlag, Düsseldorf. 5, 6
- [FLÜGGE 1957] FLÜGGE, W. (1957). *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg. 11, 14, 88, 89

- [FORREST und HUNT 2006a] FORREST, J.A. und H. HUNT (2006a). *Ground vibration generated by trains in underground tunnels*. Journal of Sound and Vibration, 294(4-5):706–736. 11, 88
- [FORREST und HUNT 2006b] FORREST, J.A. und H. HUNT (2006b). *A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration*. Journal of Sound and Vibration, 294(4-5):678–705. 11
- [FRANÇOIS et al. 2005] FRANÇOIS, S., G. LOMBAERT und G. DEGRANDE (2005). *Local and global shape functions in a boundary element formulation for the calculation of traffic induced vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 25(11):839–856. 10
- [FRÝBA 1972] FRÝBA, L. (1972). *Vibrations of solids and structures under moving loads*. Nordhoff International Publishing, Groningen. 8
- [GARDIEN und STUIT 2003] GARDIEN, W. und H. STUIT (2003). *Modelling of soil vibrations from railway tunnels*. Journal of Sound and Vibration, 267(3):605–619. 12
- [GAUL et al. 2003] GAUL, L., M. KÖGL und M. WAGNER (2003). *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 5
- [GAVRIC 1994] GAVRIC, L. (1994). *Finite element computation of dispersion properties of thin-walled waveguides*. Journal of Sound and Vibration, 173(1):113–124. 13
- [GAVRIC 1995] GAVRIC, L. (1995). *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*. Journal of Sound and Vibration, 185(3):531–543. 13
- [GROOTENHUIS 1977] GROOTENHUIS, P. (1977). *Floating track slab isolation for railways*. Journal of Sound and Vibration, 51(3):443–448. 1
- [GRUNDMANN 1999] GRUNDMANN, H. (1999). *Dynamic interaction of structures with the subsoil*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK, Hrsg.: *Proceedings of the Fourth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN '99, Prag*, S. 31–41, Rotterdam. Balkema. 6, 8
- [GRUNDMANN und DINKEL 2000] GRUNDMANN, H. und J. DINKEL (2000). *Moving oscillating loads acting on a dam over a layered halfspace*. In: *Wave 2000*, S. 53–70. 8
- [GRUNDMANN et al. 1991] GRUNDMANN, H., A. KONRAD und G. ZIRWAS (1991). *The elastic continuum with a cylindrical hole subjected to a moving time depending load*. In: BRÜLLER, O., V. MANNL und J. NAJAR, Hrsg.: *Advances in Continuum Mechanics*, S. 350–360. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 44
- [GRUNDMANN und LENZ 2003] GRUNDMANN, H. und S. LENZ (2003). *Nonlinear interaction between a moving SDOF system and a Timoshenko beam/halfspace support*. Archive of Applied Mechanics, 72:830–842. 10, 15, 83
- [GRUNDMANN et al. 2002] GRUNDMANN, H., S. LENZ und S. LUTZENBERGER (2002). *Nonlinear SDOF-system moving on a beam-halfspace-system*. In: GRUNDMANN, H. und G. SCHUËLLER, Hrsg.: *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, München*, S. 459–465, Lisse. Swets & Zeitlinger. 15

- [GRUNDMANN et al. 2001] GRUNDMANN, H., S. LENZ und H. WAUBKE (2001). *Time dependent moving load on a half space with random properties - Transform technique for a numerical approach*. In: *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics ECCM 2001, Cracow, Poland*. 16
- [GRUNDMANN et al. 1999] GRUNDMANN, H., M. LIEB und E. TROMMER (1999). *The response of a layered half-space on traffic loads moving along its surface*. *Archive of Applied Mechanics*, 69(1):55–67. 6
- [GRUNDMANN und MÜLLER 1988] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER (1988). *Untergrundbewegungen infolge ortsveränderlicher Lasten an der Oberfläche*. In: WUNDERLICH, W. und E. STEIN, Hrsg.: *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis.*, S. 163–176. Ernst & Sohn, Berlin. 6, 21
- [GRUNDMANN und MÜLLER 2005] GRUNDMANN, H. und K. MÜLLER (2005). *Dynamic interaction of a plate elastically mounted on a tunnel*. In: SOIZE, C. und G. SCHUËLLER, Hrsg.: *Proceedings of the Sixth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2005, Paris*, S. 1273–1278, Rotterdam. Millpress. 14, 88
- [GRUNDMANN et al. 2003] GRUNDMANN, H., K. MÜLLER und S. LENZ (2003). *Local and global shape functions*. In: *Proceedings of the International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences ICCES, Corfu*. 16
- [GRUNDMANN und WAUBKE 1992] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE (1992). *Stochastische Finite Elemente zur Ermittlung der Bewegungen eines mehrschichtigen ebenen Kontinuums unter periodischer Belastung*. In: *Zum 80. Geburtstag von Herrn Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. E.h. Kurt Magnus, Festschrift, Lehrstuhl B für Mechanik, Technische Universität München*. 13, 57
- [GRUNDMANN und WAUBKE 1993] GRUNDMANN, H. und H. WAUBKE (1993). *Approximate solution for the response of a layered stochastic linear soil to a dynamic excitation at the surface*. In: MOAN, T. ET AL., Hrsg.: *Proceedings of the Second European Conference on Structural Dynamics, EURODYN '93, Trondheim*, S. 713–720, Rotterdam. Balkema. 13
- [GUGGENBERGER und MÜLLER 2004] GUGGENBERGER, J. und G. MÜLLER (2004). *Erschütterungen*. In: MÜLLER, G. und M. MÖSER, Hrsg.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer-Verlag, Berlin. 1, 48
- [HALL 2000] HALL, L. (2000). *Simulations and Analyses of Train Induced Ground Vibrations*. Doktorarbeit, Division of Soil and Rock Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm. 4, 69
- [HECKL et al. 1996] HECKL, M., G. HAUCK und R. WETTSCHURECK (1996). *Structure-borne sound and vibration from rail traffic*. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):175–184. 9
- [HECKL und NUTSCH 2004] HECKL, M. und J. NUTSCH (2004). *Körperschalldämmung und -dämpfung*. In: MÜLLER, G. und M. MÖSER, Hrsg.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer-Verlag, Berlin. 104, 108
- [HEMSWORTH 2000] HEMSWORTH, B. (2000). *Reducing groundborne vibrations: state-of-the-art study*. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):703–709. 3

- [HETÉNYI 1946] HETÉNYI, M. (1946). *Beams on Elastic Foundation*, Bd. XVI d. Reihe *Scientific Series*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan. 107
- [HUNT et al. 2003] HUNT, H.E.M., M. HUSSEIN und J. TALBOT (2003). *Insertion loss models for evaluating the performance of vibration counter-measures for underground railways*. In: *Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Schweden*. 108
- [HUSSEIN und HUNT 2003] HUSSEIN, M.F.M. und H. HUNT (2003). *An insertion loss model for evaluating the performance of floating slab-track for underground railway tunnels*. In: *Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Schweden*. 11, 12, 108
- [HUSSEIN und HUNT 2004] HUSSEIN, M.F.M. und H. HUNT (2004). *Dynamic effect of slab discontinuity on underground moving trains*. In: *Proceedings of the Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Petersburg, Russland*, S. 3047–3054. 11
- [ISO 14837-1 2005] ISO 14837-1 (2005). *Mechanische Schwingungen - Erschütterungen und sekundärer Luftschall aus dem Schienenverkehr - Teil 1: Allgemeine Anleitungen*. International Standard, ISO Internationale Organisation für Normung, Genf. 8
- [JAHNKE et al. 1966] JAHNKE, EMDE und LÖSCH (1966). *Tafeln höherer Funktionen*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 35, 39
- [JONES et al. 2000a] JONES, C.J.C., X. SHENG und M. PETYT (2000a). *Simulations of ground vibrations from a moving harmonic load on a railway track*. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):739–751. 9
- [JONES et al. 2000b] JONES, C.J.C., D. THOMPSON und M. PETYT (2000b). *Studies using a combined finite element and boundary element model for vibration propagation from railway tunnels*. In: *7th Int. Congr. on Sound and Vibration, Int. Inst. of Acoustics and Vibration*, S. 2703–2710. 12
- [JONES et al. 2002] JONES, C.J.C., D. THOMPSON und M. PETYT (2002). *A model for ground vibration from railway tunnels*. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Transport*, 153(2):121–129. 12
- [KAUSEL 1994] KAUSEL, E. (1994). *Thin layer method: formulation in the time domain*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:927–941. 4
- [KAUSEL und ROËSSET 1981] KAUSEL, E. und J. ROËSSET (1981). *Stiffness matrices for layered soils*. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(6):1743–1761. 9
- [KAUSEL et al. 1995] KAUSEL, E., J. ROËSSET und G. WAAS (1995). *Dynamic analysis of footings on layered media*. *Journal of Engineering Mechanics*, 101:679–693. 4
- [KONRAD 1985] KONRAD, A. (1985). *Der Zylinder, der zylindrische Hohlraum und die dickwandige Kreiszyllinderschale unter beliebigen, ruhenden oder bewegten Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingw. I, Heft 17, TU München. 6, 15, 28, 31, 32, 33, 47, 48, 49, 139, 140

- [KRYLOV 1995a] KRYLOV, V.V. (1995a). *Generation of Ground Vibrations by Superfast Trains*. Applied Acoustics, 44:149–164. 9
- [KRYLOV 1995b] KRYLOV, V.V. (1995b). *Low-Frequency Ground Vibrations from Underground Trains*. Journal of Low Frequency Noise and Vibration, 14(1):55–60. 11
- [KRYLOV 1996] KRYLOV, V.V. (1996). *Vibrational impact of high-speed trains. I. Effect of track dynamics*. Journal of the Acoustical Society of America, 100(5):3121–3134. 9
- [KRYLOV 1998] KRYLOV, V.V. (1998). *Effects of Track Properties on Ground Vibrations Generated by High-Speed Trains*. ACUSTICA - acta acustica, 84(1):78–90. 48
- [LAMB 1904] LAMB, H. (1904). *On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Philosophical Transactions of the Royal Society, (A203):1–42. 6
- [LENZ 2003] LENZ, S. (2003). *Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund unter Zuhilfenahme von Integraltransformationen*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 7/03, TU München. 6, 18, 24, 27, 70, 75, 76, 78, 80, 82, 83, 86, 118, 124, 154
- [LIEB 1997] LIEB, M. (1997). *Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 2/97, TU München. 6, 24, 70, 118, 124
- [LIN und KRYLOV 2000] LIN, Q. und V. KRYLOV (2000). *Effect of Tunnel Diameter on Ground Vibrations Generated by Underground Trains*. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 19(1):17–25. 11
- [LOMBAERT et al. 2006a] LOMBAERT, G., G. DEGRANDE, J. KOGUT und S. FRANÇOIS (2006a). *The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations*. Journal of Sound and Vibration, 297(3-5):512–535. 10, 14, 70
- [LOMBAERT et al. 2006b] LOMBAERT, G., G. DEGRANDE, B. VANHAUWERE, B. VANDEBORGHGT und S. FRANÇOIS (2006b). *The control of ground-borne vibrations from railway traffic by means of continous floating slabs*. Journal of Sound and Vibration, 297(3-5):946–961. 14, 108
- [LONG 1967] LONG, C.F. (1967). *On the completeness of the Lamé potentials*. Acta mechanica, 3:371–375. 19
- [LUCO und DE BARROS 1993] LUCO, J.E. und F. DE BARROS (1993). *On the three-dimensional seismic response of a class of cylindrical inclusions embedded in layered media*. In: ÇAKMAK, A.S. und C. BREBBIA, Hrsg.: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering VI*, S. 565–580, Southampton. Computational Mechanics Publications. 13
- [LUCO und DE BARROS 1994] LUCO, J.E. und F. DE BARROS (1994). *Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space. I: Formulation*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23(5):553–567. 13
- [LUTZENBERGER 2003] LUTZENBERGER, S. (2003). *Ein differentiell-algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug-Fahrweg-Interaktion*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 1/03, TU München. 15, 81, 82, 85

- [LUTZENBERGER 2006] LUTZENBERGER, S. (2006). *Gekoppelte Probleme der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion*. Habilitationsschrift, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München. 15, 81
- [LYSMER 1978] LYSMER, J. (1978). *Analytical procedure in soil dynamics*. In: *Proceedings of the ASCE Geotechnical Engineering Division Specialty Conference, Pasadena, CA*, Bd. 3, S. 1267–1317. 69
- [MADSHUS und KAYNIA 2000] MADSHUS, C. und A. KAYNIA (2000). *High-speed railway lines on soft ground: dynamic behaviour at critical train speed*. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):689–701. 8, 9
- [MAIER et al. 1991] MAIER, G., M. DILIGENTI und A. CARINI (1991). *Variational approach to boundary element elastodynamic analysis and extension to multidomain problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:193–213. 4
- [MANOLIS und BESKOS 1988] MANOLIS, G.D. und D. BESKOS (1988). *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. Unwin-Hyman (Chapman & Hall), London. 5
- [METRIKINE und POPP 1999] METRIKINE, A.V. und K. POPP (1999). *Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space*. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 18(4):679–701. 10
- [METRIKINE et al. 2005] METRIKINE, A.V., S. VERICHEV und J. BLAAUWENDRAAD (2005). *Stability of a two-mass oscillator moving on a beam supported by a visco-elastic half-space*. *International Journal of Solids and Structures*, 42:1187–1207. 9
- [METRIKINE und VROUWENVELDER 2000] METRIKINE, A.V. und A. VROUWENVELDER (2000). *Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model*. *Journal of Sound and Vibration*, 234(1):43–66. 12
- [MÜLLER 1989] MÜLLER, G. (1989). *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 25, TU München. 6, 18, 23, 25
- [MÜLLER und GRUNDMANN 2006] MÜLLER, K. und H. GRUNDMANN (2006). *Numerische Ermittlung von Übertragungsfunktionen zwischen elastisch gelagerten Platten in Tunnels und Erschütterungen an der Halbraumoberfläche*. In: *Baudynamik, Tagung Kassel*, Nr. 1941 in *VDI-Berichte*, S. 555–568. VDI Verlag, Düsseldorf. 14
- [PETYT 1990] PETYT, M. (1990). *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. 60, 61
- [PRIESTLEY 1981] PRIESTLEY, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Bd. 1. Academic Press, London. 57
- [RASTANDI 2003] RASTANDI, J.I. (2003). *Modelization of Dynamic Soil-Structure Interaction Using Integral Transform-Finite Element Coupling*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München. 8
- [RIBÓ 2006] RIBÓ, R. ET AL. (2006). *GID User Manual*. CIMNE - International Center for Numerical Methods in Engineering, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. 96

- [RIPKE 1995] RIPKE, B. (1995). *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Düsseldorf. 75
- [RÜCKER und SAID 1994] RÜCKER, W. und S. SAID (1994). *Erschütterungsübertragung zwischen U-Bahn-Tunneln und dicht benachbarten Gebäuden*, Bd. 199 d. Reihe *BAM Forschungsberichte*. Wirtschaftsverlag NW, Bremerhaven. 11
- [RUNTEMUND 2006] RUNTEMUND, K. (2006). *Beitrag zur Prognose der Erschütterungsausbreitung infolge bewegter Lasten in Tunnels unter Verwendung dimensionsloser Kennzahlen*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München. 88
- [SCHMIDLIN und SCHWAB 2000] SCHMIDLIN, G. und C. SCHWAB (2000). *Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes by aggregation*. Research report 2000-15, Seminar für angewandte Mathematik, ETH Zürich, Zürich. 4
- [SHENG 2001] SHENG, X. (2001). *Ground vibrations generated from trains*. Doktorarbeit, University of Southampton, UK. 5
- [SHENG et al. 1999a] SHENG, X., C. JONES und M. PETYT (1999a). *Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track*. *Journal of Sound and Vibration*, 225(1):3–28. 9
- [SHENG et al. 1999b] SHENG, X., C. JONES und M. PETYT (1999b). *Ground vibration generated by a load moving along a railway track*. *Journal of Sound and Vibration*, 228(1):129–156. 9
- [SHENG et al. 2003a] SHENG, X., C. JONES und D. THOMPSON (2003a). *A comparison of a theoretical model for quasi-statically and dynamically induced environmental vibration from trains with measurements*. *Journal of Sound and Vibration*, 267(3):621–635. 9
- [SHENG et al. 2003b] SHENG, X., C. JONES und D. THOMPSON (2003b). *Ground vibration generated by a harmonic load moving in a circular tunnel in a layered ground*. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 22(14):83–96. 12, 13
- [SHENG et al. 2004] SHENG, X., C. JONES und D. THOMPSON (2004). *A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities*. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):937–965. 9
- [SHENG et al. 2005a] SHENG, X., C. JONES und D. THOMPSON (2005a). *Modelling ground vibration from railways using wavenumber finite- and boundary-element methods*. *Proceedings of the Royal Society A*, 461:2043–2070. 5, 13
- [SHENG et al. 2005b] SHENG, X., C. JONES und D. THOMPSON (2005b). *Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads*. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1-2):125–129. 14
- [STAMOS und BESKOS 1996] STAMOS, A.A. und D. BESKOS (1996). *3-D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space*. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15:111–118. 5, 7

- [STEENBERGEN und METRIKINE 2007] STEENBERGEN, M.J.M.M. und A. METRIKINE (2007). *The effect of the interface conditions on the dynamic response of a beam on a half-space to a moving load*. European Journal of Mechanics, A/Solids, 26(1):33–54. 10
- [TADEU und KAUSEL 2000] TADEU, A.J.B. und E. KAUSEL (2000). *Green's functions for two-and-a-half-dimensional elastodynamic problems*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 126(10):1093–1097. 5
- [TAKEMIYA 2002] TAKEMIYA, H. (2002). *Controlling of track-ground vibrations due to high-speed trains by WIB*. In: GRUNDMANN, H. und G. SCHUËLLER, Hrsg.: *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2002, München*, S. 497–502, Lisse. Swets & Zeitlinger. 12
- [WAAS 1972] WAAS, G. (1972). *Linear two-dimensional analysis of soil dynamics problems in semi-infinite layered media*. Doktorarbeit, University of California, Berkeley, CA. 4
- [WETTSCHURECK und KURZE 1985] WETTSCHURECK, R. und U. KURZE (1985). *Einfügungsdämmmaß von Unterschottermatten*. Acustica, 58(3):177–182. 108
- [WETTSCHUREK et al. 2004] WETTSCHUREK, R.G., G. HAUCK, R. DIEHL und L. WILLENBRINK (2004). *Geräusche und Erschütterungen aus dem Schienenverkehr*. In: MÜLLER, G. und M. MÖSER, Hrsg.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer-Verlag, Berlin. 70, 104, 106
- [WOLF 1985] WOLF, J.P. (1985). *Dynamic soil-structure interaction..* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 6
- [WOLF 2003] WOLF, J.P. (2003). *The Scaled Boundary Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Chichester New York. 9
- [WOLF und SONG 1996] WOLF, J.P. und C. SONG (1996). *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*. John Wiley & Sons, Chichester New York. 9
- [ZIENKIEWICZ 1984] ZIENKIEWICZ, O. (1984). *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag, München. 61
- [ZIRWAS 1996] ZIRWAS, G. (1996). *Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Bodenwechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 10/96, TU München. 4, 8, 56, 57, 69

Anhang A

Fouriertransformation

A.1 Definition

Fourierhintransformation

Die Fourierhintransformation (meist nur als Fouriertransformation oder kurz FT bezeichnet) wird mit dem Symbol $\circ\text{---}\bullet$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$\hat{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad (\text{A.1})$$

Transformierte Größen werden mit einem Dach ($\hat{\cdot}$) gekennzeichnet.

Fourierrücktransformation

Die Fourierrücktransformation (kurz als FRT, häufig auch als inverse Fouriertransformation oder kurz IFT bezeichnet) wird mit dem Symbol $\bullet\text{---}\circ$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{A.2})$$

A.2 Rechenvorschriften

Multiplikation - Faltung

Eine Faltung wird mit dem Symbol $*$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \quad . \quad (\text{A.3})$$

Eine Multiplikation zweier Funktionen entspricht einer Faltung ihrer beiden Transformaten im transformierten Raum. Im umgekehrten Fall gilt dieser Zusammenhang in analoger Weise.

$$f(x) \cdot g(x) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_x) * \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.4})$$

$$f(x) * g(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(k_x) \cdot \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.5})$$

Differentiation

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \circ \bullet \quad (i k_x)^n \hat{f}(k_x) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^n}{dk_x^n} \hat{f}(k_x) \quad \bullet \circ \quad (-i x)^n f(x) \quad (\text{A.7})$$

Streckung oder Stauchung (Dilatation)

$$f(ax) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{f}(ak_x) \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{|a|} \left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.9})$$

Verschiebung (Translation)

$$f(x - b) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(k_x) e^{-ibk_x} \quad (\text{A.10})$$

$$f(k_x - b) \quad \bullet \circ \quad f(x) e^{ibx} \quad (\text{A.11})$$

Kombination aus Dilatation und Translation

$$f(ax - b) = f(a(x - b/a)) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) e^{-ibk_x/a} \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{f}(ak_x - b) \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{|a|} \left(\frac{x}{a}\right) e^{ibx/a} \quad (\text{A.13})$$

Ausgewählte Funktionen

Dirac-Distribution

Die Dirac- δ -Distribution ist gewöhnlich definiert durch [\[DUDDECK 1997\]](#)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (\text{A.14})$$

und nimmt im fouriertransformierten Raum den Wert eins an.

$$\delta(x) \quad \circ \bullet \quad 1 \quad (\text{A.15})$$

Rechteckdistribution

Die Rechteckdistribution mit der Amplitude eins sowie der Länge L kann mit Hilfe von zwei entgegengesetzten Heaviside-Distributionen (Einheitssprungfunktionen, bezeichnet mit H) beschrieben werden.

$$H\left(x + \frac{L}{2}\right) - H\left(x - \frac{L}{2}\right) \circ \bullet 2 \frac{\sin\left(\frac{L}{2}k_x\right)}{k_x} \quad (\text{A.16})$$

Sinusfunktion

$$\sin(\Omega t) \circ \bullet i \pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.17})$$

Kosinusfunktion

$$\cos(\Omega t) \circ \bullet \pi (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.18})$$

Anhang B

Zylinderfunktionen

Als Zylinderfunktionen bezeichnet man im allgemeinen die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + z \frac{\partial w}{\partial z} + (z^2 - \nu^2)w = 0 \quad (\text{B.1})$$

mit dem komplexwertigen Argument $z = x + iy$.

Lösungen dieser Differentialgleichung sind die Besselfunktionen erster Art $J_{\pm\nu}(z)$, zweiter Art $Y_\nu(z)$ (Neumannfunktionen) sowie dritter Art $H_\nu^{(1)}(z)$ und $H_\nu^{(2)}(z)$ (Hankelfunktionen).

B.1 Besselfunktionen

Mit dem Potenzreihenansatz

$$w(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (\text{B.2})$$

ergibt sich eine spezielle Lösung der Besselschen Differentialgleichung (B.1). Nach Einsetzen dieser Reihe in (B.1) und einem Vergleich der Koeffizienten erhält man die sogenannten Besselfunktionen $J_\nu(z)$, die auch als Besselfunktionen erster Art und ν -ter Ordnung bezeichnet werden.

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \quad (\text{B.3})$$

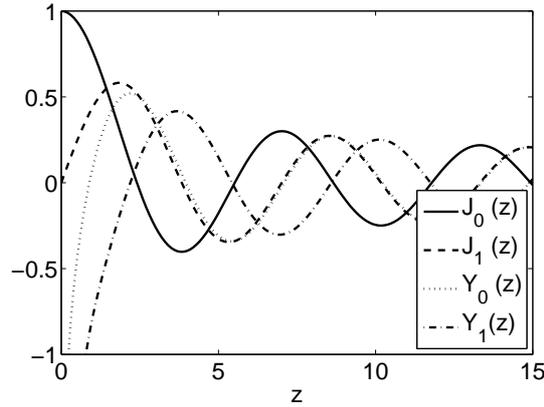
Dabei ist die Gammafunktion $\Gamma(z)$ definiert zu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{B.4})$$

und für ganzzahlige Argumente zu

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (\text{B.5})$$

Im Falle nichtganzzahliger Ordnung ν stellt auch

Abbildung B.1: Besselfunktionen $J_0(z)$, $J_1(z)$ und $Y_0(z)$, $Y_1(z)$

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \quad (\text{B.6})$$

eine von (B.3) linear unabhängige Lösung der Besselschen Differentialgleichung dar, was sich mit Hilfe der Wronskideterminante der beiden Funktionen $J_{\nu}(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ nachweisen läßt, welche nicht verschwindet (vgl. z.B. [KONRAD 1985]). Die Funktionen $J_{\nu}(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ bilden folglich ein Fundamentalsystem.

Im Falle ganzzahliger Ordnung $\nu = n$ hingegen ist dies nicht der Fall, da die beiden Lösungsfunktionen dann nicht linear unabhängig sind. Mit (B.5) gilt nämlich:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! (k+n)!} \quad (\text{B.7})$$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! (k-n)!} = (-1)^n J_n(z) \quad (\text{B.8})$$

Eine im Falle ganzzahliger Ordnung $\nu = n$ von $J_n(z)$ linear unabhängige Lösung ist die sogenannte Neumannsche Funktion oder Besselsche Funktion zweiter Art. Im Falle nichtganzzahliger Ordnung ν ist diese definiert zu:

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{B.9})$$

Als Linearkombination von $J_{\nu}(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ ist sie für nicht ganzzahlige Ordnung $\nu \neq n$ auch eine Lösung von (B.1). Beim Übergang auf ganzzahlige Ordnung $\nu = n$ nimmt $Y_n(z)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, mit der l'Hospitalschen Regel ergibt sich jedoch

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.10})$$

wobei sich die Konstante γ

$$\ln \gamma = C = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = 0.577215665 \quad (\text{B.11})$$

aus der Eulerschen Konstanten C ergibt.

Weiterhin gilt:

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z) \quad (\text{B.12})$$

Da die Wronskideterminante der beiden Funktionen $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$ nicht verschwindet (vgl. z.B. [KONRAD 1985]), erhält man damit für beliebige Ordnung ν die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung als Linearkombination von $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$.

$$w(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z) \quad (\text{B.13})$$

Mit dieser Beziehung ergeben sich die Hankelfunktionen oder auch Besselschen Funktionen dritter Art als weitere Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad (\text{B.14})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \quad (\text{B.15})$$

was für nichtganzzahliges ν gleichbedeutend ist mit

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \frac{\pm i}{\sin(\nu\pi)} [e^{\mp i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)]. \quad (\text{B.16})$$

Da diese Funktionen weder untereinander noch von der Bessel- oder der Neumannfunktion abhängig sind, stellt jede Linearkombination von zwei beliebigen der dargestellten Besselschen Funktionen eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung dar. Die Auswahl des verwendeten Fundamentalsystems kann schließlich dem vorliegenden Problem angepaßt werden.

Im folgenden bedeutet $\mathcal{C}_\nu(z)$ eine beliebige der Funktionen $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ oder eine Linearkombination dieser Funktionen mit konstanten (vom Index ν unabhängigen) Koeffizienten. Zwischen den Besselschen Funktionen beliebiger Ordnung und ihren Ableitungen bestehen nun folgende Rekursionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\nu-1}(z) + \mathcal{C}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \\ \mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \mathcal{C}_{\nu+1}(z) &= 2\mathcal{C}'_\nu(z) \\ \mathcal{C}'_\nu(z) &= \mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \\ \mathcal{C}'_\nu(z) &= -\mathcal{C}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

B.2 Modifizierte Besselfunktionen

In Anwendungen wie in der vorliegenden Arbeit stößt man auch auf die folgende Differentialgleichung:

$$z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + z \frac{\partial w}{\partial z} - (z^2 + \nu^2)w = 0 \quad (\text{B.18})$$

Diese Gleichung geht aus (B.1) dadurch hervor, daß man $z = i\tilde{z}$ setzt und anschließend \tilde{z} durch z ersetzt. Dies entspricht einer Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel von 90° .

Ausgehend von den speziellen Funktionen $J_\nu(iz)$ und $H_\nu^{(1)}(iz)$, welche deshalb auch ein Fundamentalsystem der modifizierten Besselschen Gleichung (B.18) bilden, erhält man die modifizierten Zylinderfunktionen:

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\frac{\pi}{2}i} J_\nu(iz) \tag{B.19}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu\frac{\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(iz) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\nu\frac{\pi}{2}i} H_\nu^{(2)}(-iz) \tag{B.20}$$

Dabei gilt der Zusammenhang:

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \tag{B.21}$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \tag{B.22}$$

Hierin wird $I_\nu(z)$ als modifizierte Besselfunktion und $K_\nu(z)$ als modifizierte Hankelfunktion oder auch als MacDonaldfunktion bezeichnet. Diese besitzen die Eigenschaft, daß sie für reelle

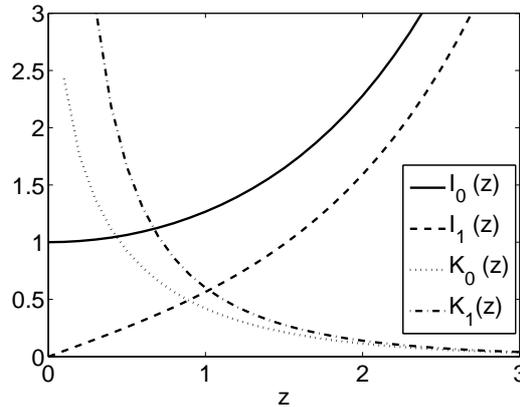


Abbildung B.2: Besselfunktionen $I_0(z)$, $I_1(z)$ und $K_0(z)$, $K_1(z)$

Argumente z und reelle Ordnung ν selbst rein reelle Werte annehmen.

Die modifizierte Besselfunktion $I_\nu(z)$ lautet damit:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \tag{B.23}$$

Im Falle ganzzahliger Ordnung $\nu = n$ ergibt sich mit (B.5):

$$I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(n+k)!} \tag{B.24}$$

Für nichtganzzahlige Ordnung ν ergibt sich die Reihendarstellung der MacDonaldfunktion $K_\nu(z)$ aus derjenigen von $I_\nu(z)$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \tag{B.25}$$

im Falle ganzzahliger Ordnung $\nu = n$ gilt:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\gamma \frac{z}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.26})$$

Im folgenden bedeutet $\mathcal{Z}_\nu(z)$ eine beliebige der Funktionen $I_\nu(z)$, $e^{i\nu\pi} K_\nu(z)$ oder eine Linearkombination dieser Funktionen mit konstanten vom Argument z und vom Index ν unabhängigen Koeffizienten. Zwischen den modifizierten Besselschen Funktionen beliebiger Ordnung und ihren Ableitungen bestehen nun folgende Rekursionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu(z) \\ \mathcal{Z}'_\nu(z) &= \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu(z) \\ \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) + \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= 2\mathcal{Z}'_\nu(z) \\ \mathcal{Z}'_\nu(z) &= \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu(z) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

B.3 Asymptotische Entwicklungen der Besselfunktionen

Für kleine Argumente $|z| \ll 1$ gilt:

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad (\nu \geq 0) \quad (\text{B.28})$$

$$Y_0(z) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma z} \quad (\text{B.29})$$

$$Y_\nu(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \quad (\nu \geq 0) \quad (\text{B.30})$$

Für große Argumente $|z| \gg 1$, $|z| \gg \nu$ gilt als erste Näherung für die angegebenen Winkelräume:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (-\pi < \arccos z < \pi) \quad (\text{B.31})$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (-\pi < \arccos z < \pi) \quad (\text{B.32})$$

Für positives reelles Argument $z = x$ und $0 < x \ll 1$ gilt:

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (\text{B.33})$$

$$K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x} \quad (\text{B.34})$$

$$K_n(x) \approx \frac{1}{2} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{B.35})$$

Für $x \gg 1$ wächst $I_\nu(x)$ exponentiell an, während $K_\nu(x)$ exponentiell abfällt (vgl. Abbildung B.2).

Anhang C

Matrix $\mathbf{H}(r, n, k_x, v, \omega)$ für dynamische Belastung

C.1 Fundamentalsystem aus Modifizierten Besselfunktionen I_n und Macdonaldfunktionen K_n

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_r des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}H_{11} &= \frac{n}{r}I_n(\alpha k_x r) + \alpha k_x I_{n+1}(\alpha k_x r) \\H_{12} &= k_x I_{n-1}(\beta k_x r) \\H_{13} &= -k_x I_{n+1}(\beta k_x r) \\H_{14} &= \frac{n}{r}K_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x K_{n+1}(\alpha k_x r) \\H_{15} &= k_x K_{n-1}(\beta k_x r) \\H_{16} &= -k_x K_{n+1}(\beta k_x r)\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_ϕ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}H_{21} &= i\frac{n}{r}I_n(\alpha k_x r) \\H_{22} &= ik_x I_{n-1}(\beta k_x r) \\H_{23} &= ik_x I_{n+1}(\beta k_x r) \\H_{24} &= i\frac{n}{r}K_n(\alpha k_x r) \\H_{25} &= ik_x K_{n-1}(\beta k_x r) \\H_{26} &= ik_x K_{n+1}(\beta k_x r)\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_x des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{31} &= ik_x I_n(k_x \alpha r) \\ H_{32} &= i\beta k_x I_n(\beta k_x r) \\ H_{33} &= -i\beta k_x I_n(\beta k_x r) \\ H_{34} &= ik_x K_n(\alpha k_x r) \\ H_{35} &= -i\beta k_x K_n(\beta k_x r) \\ H_{36} &= i\beta k_x K_n(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{41} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] I_n(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} I_{n+1}(\alpha k_x r) \\ H_{42} &= \frac{k_x}{r} (n-1) I_{n-1}(\beta k_x r) + \beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) \\ H_{43} &= -\beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n+1) I_{n+1}(\beta k_x r) \\ H_{44} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] K_n(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} K_{n+1}(\alpha k_x r) \\ H_{45} &= \frac{k_x}{r} (n-1) K_{n-1}(\beta k_x r) - \beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) \\ H_{46} &= \beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n+1) K_{n+1}(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{51} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] I_n(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} I_{n+1}(\alpha k_x r) \\ H_{52} &= -\frac{k_x}{r} (n-1) I_{n-1}(\beta k_x r) \\ H_{53} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) I_{n+1}(\beta k_x r) \\ H_{54} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] K_n(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} K_{n+1}(\alpha k_x r) \\ H_{55} &= -\frac{k_x}{r} (n-1) K_{n-1}(\beta k_x r) \\ H_{56} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) K_{n+1}(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{xx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{61} &= k_x^2 \left[(\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} - 1 \right] I_n(\alpha k_x r) \\ H_{62} &= -\beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) \\ H_{63} &= \beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) \\ H_{64} &= k_x^2 \left[(\alpha^2 - 1) \frac{\lambda}{2\mu} - 1 \right] K_n(\alpha k_x r) \\ H_{65} &= \beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) \\ H_{66} &= -\beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{r\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{71} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) I_n(\alpha k_x r) + \alpha k_x \frac{n}{r} I_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{72} &= i \left[\frac{k_x}{r} (n-1) I_{n-1}(\beta k_x r) + \frac{1}{2} \beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) \right] \\ H_{73} &= i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 I_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n+1) I_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{74} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) K_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x \frac{n}{r} K_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{75} &= i \left[\frac{k_x}{r} (n-1) K_{n-1}(\beta k_x r) - \frac{1}{2} \beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) \right] \\ H_{76} &= -i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 K_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n+1) K_{n+1}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{81} &= i \left[k_x \frac{n}{r} I_n(\alpha k_x r) + \alpha k_x^2 I_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{82} &= \frac{i}{2} \left[k_x^2 (\beta^2 + 1) I_{n-1}(\beta k_x r) - \beta k_x \frac{n}{r} I_n(\beta k_x r) \right] \\ H_{83} &= -\frac{i}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} I_n(\beta k_x r) + k_x^2 (\beta^2 + 1) I_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{84} &= i \left[k_x \frac{n}{r} K_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x^2 K_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{85} &= \frac{i}{2} \left[k_x^2 (\beta^2 + 1) K_{n-1}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} K_n(\beta k_x r) \right] \\ H_{86} &= \frac{i}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} K_n(\beta k_x r) - k_x^2 (\beta^2 + 1) K_{n+1}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi x}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{91} &= -k_x \frac{n}{r} I_n(\alpha k_x r) \\
H_{92} &= -\frac{1}{2} \left[k_x^2 I_{n-1}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} I_n(\beta k_x r) \right] \\
H_{93} &= \frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} I_n(\beta k_x r) - k_x^2 I_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\
H_{94} &= -k_x \frac{n}{r} K_n(\alpha k_x r) \\
H_{95} &= \frac{1}{2} \left[-k_x^2 K_{n-1}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} K_n(\beta k_x r) \right] \\
H_{96} &= -\frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} K_n(\beta k_x r) + k_x^2 K_{n+1}(\beta k_x r) \right]
\end{aligned}$$

C.2 Fundamentalsystem aus Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen Y_n

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_r des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \frac{n}{r} J_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x J_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{12} &= 2 \frac{n}{\beta r} J_n(\beta k_x r) - k_x J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{13} &= -k_x J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{14} &= \frac{n}{r} Y_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x Y_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{15} &= 2 \frac{n}{\beta r} Y_n(\beta k_x r) - k_x Y_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{16} &= -k_x Y_{n+1}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_ϕ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{21} &= i \frac{n}{r} J_n(\alpha k_x r) \\
H_{22} &= 2i \frac{n}{\beta r} J_n(\beta k_x r) - ik_x J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{23} &= ik_x J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{24} &= i \frac{n}{r} Y_n(\alpha k_x r) \\
H_{25} &= 2i \frac{n}{\beta r} Y_n(\beta k_x r) - ik_x Y_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{26} &= ik_x Y_{n+1}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_x des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{31} &= ik_x J_n(k_x \alpha r) \\
H_{32} &= -i\beta k_x J_n(\beta k_x r) \\
H_{33} &= -i\beta k_x J_n(\beta k_x r) \\
H_{34} &= ik_x Y_n(\alpha k_x r) \\
H_{35} &= -i\beta k_x Y_n(\beta k_x r) \\
H_{36} &= -i\beta k_x Y_n(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{41} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] J_n(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} J_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{42} &= \frac{1}{\beta r^2} (-\beta^2 k_x^2 r^2 + 2n(n-1)) J_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n-1) J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{43} &= -\beta k_x^2 J_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n+1) J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{44} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] Y_n(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} Y_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{45} &= -\frac{1}{\beta r^2} (\beta^2 k_x^2 r^2 - 2n(n-1)) Y_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n-1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{46} &= -\beta k_x^2 Y_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n+1) Y_{n+1}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix **H** zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{51} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] J_n(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} J_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{52} &= -\frac{1}{\beta r^2} 2n(n-1) J_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n-1) J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{53} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) J_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{54} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] Y_n(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} Y_{n+1}(\alpha k_x r) \\
H_{55} &= -\frac{1}{\beta r^2} 2n(n-1) Y_n(\beta k_x r) + \frac{k_x}{r} (n-1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \\
H_{56} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) Y_{n+1}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{xx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{61} &= -k_x^2 \left[(\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right] J_n(\alpha k_x r) \\ H_{62} &= \beta k_x^2 J_n(\beta k_x r) \\ H_{63} &= \beta k_x^2 J_n(\beta k_x r) \\ H_{64} &= -k_x^2 \left[(\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right] Y_n(\alpha k_x r) \\ H_{65} &= \beta k_x^2 Y_n(\beta k_x r) \\ H_{66} &= \beta k_x^2 Y_n(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{r\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{71} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) J_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x \frac{n}{r} J_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{72} &= i \left[\frac{1}{2\beta r^2} (4n(n-1) - \beta^2 k_x^2 r^2) J_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n-1) J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{73} &= i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 J_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n+1) J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{74} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) Y_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x \frac{n}{r} Y_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{75} &= i \left[\frac{1}{2\beta r^2} (4n(n-1) - \beta^2 k_x^2 r^2) Y_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n-1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{76} &= i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 Y_n(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n+1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{81} &= i \left[k_x \frac{n}{r} J_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x^2 J_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{82} &= \frac{i}{2} \left[k_x \frac{n}{\beta r} (-\beta^2 + 2) J_n(\beta k_x r) + k_x^2 (\beta^2 - 1) J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{83} &= -\frac{i}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} J_n(\beta k_x r) + k_x^2 (-\beta^2 + 1) J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{84} &= i \left[k_x \frac{n}{r} Y_n(\alpha k_x r) - \alpha k_x^2 Y_{n+1}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{85} &= \frac{i}{2} \left[k_x \frac{n}{\beta r} (-\beta^2 + 2) Y_n(\beta k_x r) + k_x^2 (\beta^2 - 1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\ H_{86} &= -\frac{i}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} Y_n(\beta k_x r) + k_x^2 (-\beta^2 + 1) Y_{n+1}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi x}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{91} &= -k_x \frac{n}{r} J_n(\alpha k_x r) \\
H_{92} &= -\frac{1}{2} \left[k_x \frac{n}{r\beta} (-\beta^2 + 2) J_n(\beta k_x r) - k_x^2 J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\
H_{93} &= \frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} J_n(\beta k_x r) - k_x^2 J_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\
H_{94} &= -k_x \frac{n}{r} Y_n(\alpha k_x r) \\
H_{95} &= -\frac{1}{2} \left[k_x \frac{n}{r\beta} (-\beta^2 + 2) Y_n(\beta k_x r) - k_x^2 Y_{n+1}(\beta k_x r) \right] \\
H_{96} &= \frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} Y_n(\beta k_x r) - k_x^2 Y_{n+1}(\beta k_x r) \right]
\end{aligned}$$

C.3 Fundamentalsystem aus Hankelfunktionen 1. Art $H_n^{(1)}$ und 2. Art $H_n^{(2)}$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_r des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x H_{n+1}^{(1)}(\alpha k_x r) \\
H_{12} &= k_x H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
H_{13} &= -k_x H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
H_{14} &= \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x H_{n+1}^{(2)}(\alpha k_x r) \\
H_{15} &= k_x H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) \\
H_{16} &= -k_x H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_ϕ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
H_{21} &= i \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\alpha k_x r) \\
H_{22} &= i k_x H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
H_{23} &= i k_x H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
H_{24} &= i \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\alpha k_x r) \\
H_{25} &= i k_x H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) \\
H_{26} &= i k_x H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r)
\end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten u_x des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
 H_{31} &= ik_x H_n^{(1)}(k_x \alpha r) \\
 H_{32} &= -i\beta k_x H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{33} &= -i\beta k_x H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{34} &= ik_x H_n^{(2)}(\alpha k_x r) \\
 H_{35} &= -i\beta k_x H_n^{(2)}(\beta k_x r) \\
 H_{36} &= -i\beta k_x H_n^{(2)}(\beta k_x r)
 \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
 H_{41} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] H_n^{(1)}(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} H_{n+1}^{(1)}(\alpha k_x r) \\
 H_{42} &= \frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) - \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{43} &= \frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) - \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{44} &= \frac{1}{r^2} \left[n(n-1) - k_x^2 r^2 \left(\alpha^2 + (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] H_n^{(2)}(\alpha k_x r) + \frac{\alpha k_x}{r} H_{n+1}^{(2)}(\alpha k_x r) \\
 H_{45} &= \frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) - \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r) \\
 H_{46} &= \frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r) - \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r)
 \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
 H_{51} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] H_n^{(1)}(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} H_{n+1}^{(1)}(\alpha k_x r) \\
 H_{52} &= -\frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{53} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \\
 H_{54} &= -\frac{1}{r^2} \left[n(n-1) + k_x^2 r^2 (\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} \right] H_n^{(2)}(\alpha k_x r) - \frac{\alpha k_x}{r} H_{n+1}^{(2)}(\alpha k_x r) \\
 H_{55} &= -\frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) \\
 H_{56} &= -\frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r)
 \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{xx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{61} &= -k_x^2 \left[(\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right] H_n^{(1)}(\alpha k_x r) \\ H_{62} &= \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\ H_{63} &= \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) \\ H_{64} &= -k_x^2 \left[(\alpha^2 + 1) \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right] H_n^{(2)}(\alpha k_x r) \\ H_{65} &= \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r) \\ H_{66} &= \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r) \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{r\phi}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{71} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) H_n^{(1)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x \frac{n}{r} H_{n+1}^{(1)}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{72} &= i \left[\frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) - \frac{1}{2} \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{73} &= i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 H_n^{(1)}(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{74} &= i \left[\frac{n}{r^2} (n-1) H_n^{(2)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x \frac{n}{r} H_{n+1}^{(2)}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{75} &= i \left[\frac{k_x}{r} (n-1) H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) - \frac{1}{2} \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{76} &= i \left[\frac{1}{2} \beta k_x^2 H_n^{(2)}(\beta k_x r) - \frac{k_x}{r} (n+1) H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{rx}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned} H_{81} &= i \left[k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x^2 H_{n+1}^{(1)}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{82} &= \frac{i}{2} \left[-k_x^2 (\beta^2 - 1) H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{83} &= \frac{i}{2} \left[-\beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\beta k_x r) + k_x^2 (\beta^2 - 1) H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{84} &= i \left[k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\alpha k_x r) - \alpha k_x^2 H_{n+1}^{(2)}(\alpha k_x r) \right] \\ H_{85} &= \frac{i}{2} \left[-k_x^2 (\beta^2 - 1) H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\beta k_x r) \right] \\ H_{86} &= \frac{i}{2} \left[-\beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\beta k_x r) + k_x^2 (\beta^2 - 1) H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r) \right] \end{aligned}$$

Elemente der Matrix \mathbf{H} zur Ermittlung der Spannungskomponenten $\frac{\sigma_{\phi x}}{2\mu}$ des Kontinuums in (3.85):

$$\begin{aligned}
 H_{91} &= -k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\alpha k_x r) \\
 H_{92} &= \frac{1}{2} \left[-k_x^2 H_{n-1}^{(1)}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\
 H_{93} &= \frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\beta k_x r) - k_x^2 H_{n+1}^{(1)}(\beta k_x r) \right] \\
 H_{94} &= -k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\alpha k_x r) \\
 H_{95} &= \frac{1}{2} \left[-k_x^2 H_{n-1}^{(2)}(\beta k_x r) + \beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\beta k_x r) \right] \\
 H_{96} &= \frac{1}{2} \left[\beta k_x \frac{n}{r} H_n^{(2)}(\beta k_x r) - k_x^2 H_{n+1}^{(2)}(\beta k_x r) \right]
 \end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Emission, Transmission sowie Immission von zuginduziertem primärem und sekundärem Luftschall sowie von Körperschall	2
3.1	Koordinatensystem für das in Radialrichtung geschichtete Kontinuum mit zylindrischem Hohlraum (a), Spannungen am Element (b) und Verschiebungen am Element (c)	29
3.2	Koordinatensystem für das Kontinuum	29
3.3	Über den Umfang $\cos(n\psi)$ -verteilte Zustandsgrößen für $n = 0..4$	34
3.4	Über den Umfang $\sin(n\psi)$ -verteilte Zustandsgrößen für $n = 0..4$	34
3.5	Zeigerdiagramme in der komplexen Ebene für positive (links) und negative (rechts) Kreisfrequenz ω	36
3.6	Vorzeichen von α^2 und β^2	45
4.1	Halbraum mit einer fiktiven zylindrischen Oberfläche Γ_S , an welcher später der Kontakt zu dem innenliegenden FEM-Gebiet (welches hier einen Tunnel mit rechteckigem Querschnitt und einen Teil des umgebenden Bodens umfaßt) beschrieben wird	51
4.2	Auf seiner Oberfläche belasteter Halbraum mit fiktiver zylindrischer Oberfläche Γ_S	52
4.3	Auf der realen zylindrischen Oberfläche Γ_S belasteter Vollraum mit fiktiver Halbraumoberfläche	52
4.4	Spannungen am Element in Elementebene (links) und senkrecht dazu (rechts) . .	54
4.5	Spannungen am Element in Elementebene (links) und senkrecht dazu (rechts) . .	54
5.1	Ebenes Dreieckselement	61
5.2	Vollständige Polynome in Abhängigkeit von zwei Variablen y und z	61
6.1	Systemskizze für ein Masse-Feder-System in einem Tunnel	71
6.2	Teilsystem Platte	72

6.3	Teilsystem Tunnelschale	72
6.4	Modellierung des Fahrzeugs als Drehgestell auf einem Fahrweg mit der Schienenoberflächenrauigkeit $\Delta w(x)$ (aus [LENZ 2003])	75
6.5	Modellierung des Fahrzeugs als Einmassenschwinger auf einem Fahrweg mit der Schienenoberflächenrauigkeit $\Delta w(x)$ (aus [LENZ 2003])	76
7.1	Koordinatensystem für die Kreiszyinderschale (a) sowie die Belastung (b) und die Verschiebungen (c) der Schalenmittelfläche am Element	89
7.2	Lage der Schalenmittelfläche auf dem Rand Γ_S mit Radialverschiebungen w_{Fl} der Schale resp. u_{r,Γ_S} des Kontinuums	91
7.3	Vergleichsergebnisse für weichen Boden, $n = 1$ und $f = 10 Hz$	93
7.4	Vergleichsergebnisse für weichen Boden, $n = 2$ und $f = 50 Hz$	94
7.5	Halbraum mit gedachter Schichtgrenze sowie Vollraum mit gedachter Berandung Γ_S zum innenliegenden FEM-Gebiet	95
7.6	Finite-Elemente-Netz für das von der gedachten Berandung Γ_S eingeschlossene Gebiet	97
7.7	Inkonsistenz der beiden verglichenen Modelle <i>geschichteter Halbraum</i> und <i>Halbraum mit FEM-Gebiet</i>	98
7.8	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (-) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\dots), $n = 6$ (- -) und $n = 9$ (- \cdot) Reihengliedern in Umfangsrichtung, weicher Boden, $f = 5 Hz$, $h = 10 m$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})	100
7.9	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (-) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\dots), $n = 6$ (- -) und $n = 9$ (- \cdot) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 Hz$, $h = 10 m$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})	101
7.10	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (-) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\dots), $n = 6$ (- -) und $n = 9$ (- \cdot) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 Hz$, $h = 5 m$, 80 Knoten auf r_{Γ_S})	102
7.11	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche (semianalytische Lösung (-) sowie ITM-FEM Lösung mit $n = 3$ (\dots), $n = 6$ (- -) und $n = 9$ (- \cdot) Reihengliedern in Umfangsrichtung, steifer Boden, $f = 50 Hz$, $h = 5 m$, 40 Knoten auf r_{Γ_S})	103
7.12	Systemskizze für einen Tunnel mit Rechteckquerschnitt und Masse-Feder-System	105
7.13	Schnellepegel L_v für den unisolierten Fall (*) bzw. die Fälle mit Masse-Feder-System mit $f_0 = 8 Hz$ (+) und $f_0 = 16 Hz$ (o)	107
7.14	Einfügedämmmaß auf der Halbraumoberfläche (*) bzw. auf der Tunnelsohle (+) .	108
7.15	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, steifer Boden, Tunnel mit Rechteckquerschnitt	110
7.16	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, weicher Boden, Tunnel mit Rechteckquerschnitt	111

7.17	Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche, weicher Boden, Tunnel mit dünner Kreiszylinderschale	112
7.18	Realteil der Verschiebungen an der Tunnelsohle für den unisolierten Fall (-) sowie den Fall mit Masse-Feder-System mit $f_0 = 16 Hz$ (- -)	113
7.19	Radverschiebungen $w_{R0}(f_{R0} = 28 Hz)$ und $w_{R1}(f_{R1} = 56 Hz)$ für ein MFS mit endlicher (-) und unendlicher Abschlußimpedanz (\cdots)	116
7.20	Radverschiebungen $w_{R0}(f_{R0} = 21 Hz)$ und $w_{R1}(f_{R1} = 28 Hz)$ für ein MFS mit endlicher (-) und unendlicher Abschlußimpedanz (\cdots)	117
7.21	Abtastraster im Wellenzahl-Frequenzraum	119
7.22	Detail des Abtastrasters im Wellenzahl-Frequenzraum; überlagert dargestellt ist die analytische Dispersionskurve für den elastisch gebetteten Balken auf starrer Unterlage (-)	119
7.23	Detail des Realteils der Übertragungsfunktion des Systems $\hat{H}(k_x, \omega')$	120
7.24	Impulsreaktionsfunktion $h(t)$	120
7.25	Impulsreaktionsfunktionen an der Stelle $\bar{x} = -2.5 m$ (-) und an der Stelle $\bar{x} = +2.5 m$ (- -)	121
7.26	Ergebnisse der nichtlinearen (-) sowie zum Vergleich der linearen (\cdots) Interaktionsberechnung ((a), (b), (d) und (e))	122
B.1	Besselfunktionen $J_0(z)$, $J_1(z)$ und $Y_0(z)$, $Y_1(z)$	139
B.2	Besselfunktionen $I_0(z)$, $I_1(z)$ und $K_0(z)$, $K_1(z)$	141