

Lehrstuhl für Baumechanik
der Technischen Universität München

Halbraumdynamik nach der Theorie Poröser Medien und Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem klassischen Halbraum gebetteten Balken

Lazar Bošković

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Vogt

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann (em.)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing.habil. G.H. Müller

Die Dissertation wurde am 17.05.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 18.11.2005 angenommen.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitt werden die Grundgleichungen zur kontinuumsmechanischen Beschreibung des Halbraums in den Wellenzahl-Frequenz-Bereich transformiert. Dabei werden Letztere mit Hilfe des Potentialansatzes nach Helmholtz und einer Fouriertransformation in gewöhnliche Differentialgleichungen umgeformt. Für die Beschreibung des Halbraums werden die Annahmen eines porösen Mediums nach der Theorie Poröser Medien (TPM) zugrunde gelegt. Die so gewonnenen Gleichungen und deren Lösungen werden denjenigen des klassischen Einkomponenten-Halbraums gegenübergestellt.

Der zweite Abschnitt greift den klassischen Einkomponenten-Halbraum wieder auf und beschreibt den Fall eines dynamisch belasteten unendlich langen, in Querrichtung starren Balkens auf der Halbraumoberfläche. Dabei wird insbesondere der Einfluss der Quer- und Längsverschiebungsbehinderung durch den Balken auf die Vertikalkomponente der Halbraumverschiebung näher untersucht. Die Anbindung des Balkens an den Untergrund wird über die sogenannte Halbraumsteifigkeit erfasst, welche das kontinuumsdynamische Verhalten des Untergrundes widerspiegelt. Mit Hilfe von Legendre-Polynom-Ansätzen zur Beschreibung der Interaktionsspannungen werden die Halbraumsteifigkeiten auf semi-analytischem Wege bestimmt.

Abstract

The dissertation in hand is divided into two parts. In its first part the fundamental equations for the continuum mechanical description of the half-space are transformed into the wavenumber-frequency-domain. For this purpose, by the use of the potential approach according to Helmholtz and a fourier transformation, the latter will be converted into ordinary differential equations. The description of the half-space is based on the assumptions of a porous medium according to the Theory of Porous Media (TPM). The equations thus derived and their solutions will be put into relation with those of the classical one-component half-space.

The second part takes up again the classical one-component half-space and describes the case of a dynamically loaded, in lateral direction rigid beam of infinite length on the surface of the half-space. For this reason particularly the influence of the displacement disability in lateral and longitudinal direction by the beam on the vertical component of the half-space displacement will be examined more closely. The beam's connection to the ground is acquired by the so-called half-space stiffness, which reflects the continuum dynamic behavior of the ground. By the use of Legendre-polynomial-approaches to describe the interaction stresses the half-space stiffness will be determined in a semi-analytical way.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist in den letzten etwa sechs Jahren entstanden. Mein Dank gilt einmal der Sportfördergruppe der Bundeswehr in Sonthofen, die mir während meiner aktiven Zeit als Leistungssportler den Freiraum zugestanden hat, diese Arbeit zu beginnen. Ebenfalls bedanke ich mich bei meinem jetzigen Arbeitgeber, der VA Tech Escher Wyss GmbH in Ravensburg, für das Verständnis und die Unterstützung, die Arbeit abzuschließen zu können.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann möchte ich herzlich danken für die fachliche Betreuung und vor allem für die persönliche Ermutigung, dem Ende entgegen zu gehen. Ich bin dankbar, in Herrn Grundmann nicht nur ein fachliches Vorbild als Gegenüber gehabt zu haben, sondern auch einen bescheidenen Menschen mit überfachlichem Blick.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. G.H. Müller danke ich für die Übernahme des Koreferates wie auch für die ergänzenden Anmerkungen zur Arbeit.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Vogt gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Verfahrens.

Auch den Mitarbeitern am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München gilt mein Dank für die Unterstützung.

Meiner Familie und meinen Freunden möchte ich für das entgegengebrachte Verständnis dafür danken, dass ich einen Großteil meiner Zeit am Schreibtisch verbracht habe.

Ich danke meiner lieben Frau Julia, die mir die letzten Jahren unserer frischen Ehe fest zur Seite gestanden ist, und auch meinen Sohn Jona möchte ich dafür umarmen, dass er uns so fröhlich und zufrieden durch die Zeit begleitet.

Mein größter Dank gilt meinem Vater im Himmel, dafür dass ich durch das Opfer seines geliebten Sohnes, meines Herrn Jesus Christus, die Vergebung meiner Schuld erhalten habe und sein Kind werden durfte. Ohne diese Ruhe im Herzen, beim Vater geborgen zu sein, und ohne die Gewissheit, nach dem Tod bei ihm zu sein, wäre es mir, so glaube ich, schwerer gefallen, meine Gedanken auf diese Arbeit konzentriert zu halten. Letztlich habe ich mein Leben und alles Gute, was ich erhalte, Gott zu verdanken.

Ravensburg, im Dezember 2005

Lazar Bošković

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 7 |
| 1.1 | Ziel der Arbeit | 7 |
| 1.2 | Überblick | 8 |
| 1.2.1 | Halbraum nach der TPM | 8 |
| 1.2.2 | Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken | 9 |
| 1.3 | Gliederung | 10 |
| I | Halbraum nach der Theorie Poröser Medien | 13 |
| 2 | Kontinuumsmechanisches Untergrundmodell nach der klassischen Theorie | 15 |
| 2.1 | Formulierung der Grundgleichungen | 15 |
| 2.2 | Lösung der Bewegungsgleichung | 16 |
| 2.3 | Transformierte Verschiebungs- und Spannungsgrößen | 17 |
| 2.4 | Formulierung der Randbedingungen | 19 |
| 2.5 | Grundlösungen für den klassischen Halbraum | 19 |
| 2.5.1 | Grundlösung für eine Vertikalbelastung | 20 |
| 2.5.2 | Grundlösung für eine Längsbelastung | 21 |
| 2.5.3 | Grundlösung für eine Querbelastung | 22 |
| 3 | Kontinuumsmechanisches Untergrundmodell nach der TPM | 25 |
| 3.1 | Herleitung der Grundgleichungen | 25 |
| 3.2 | Helmholtz-Ansatz und fouriertransformierte Lösung | 28 |
| 3.3 | Verschiebungen und Spannungen im Bildraum | 31 |
| 3.4 | Randbedingungen | 32 |
| 3.5 | Grundlösungen für den Halbraum nach der TPM | 33 |
| 3.5.1 | Grundlösung für eine Vertikalbelastung | 34 |
| 3.5.2 | Grundlösung für eine Längsbelastung | 35 |
| 3.5.3 | Grundlösung für eine Querbelastung | 36 |
| 4 | Vergleich der Untergrundmodelle | 39 |
| 4.1 | Untergrundparameter | 39 |
| 4.2 | Wellengeschwindigkeiten | 40 |
| 4.3 | Graphische Veranschaulichung | 42 |
| 4.3.1 | Verlauf der Wellengeschwindigkeiten | 42 |
| 4.3.2 | Verschiebung infolge einer Einzellast | 47 |

| | | |
|---|--|------------|
| 4.4 | Anmerkungen zu den Lösungen | 54 |
| II Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken 55 | | |
| 5 | Der auf dem Halbraum gebettete Balken | 57 |
| 5.1 | Balkenmodell | 57 |
| 5.2 | Bestimmung der Halbraumsteifigkeit | 60 |
| 6 | Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung | 65 |
| 6.1 | Bestimmung der Halbraumsteifigkeit | 65 |
| 6.2 | Erschütterungsausbreitung im Halbraum | 71 |
| 7 | Überprüfung des Berechnungsverfahrens | 73 |
| 7.1 | Bestimmung der Legendre-Koeffizienten C_P | 74 |
| 7.2 | Erschütterungsausbreitung im Halbraum unter Cosinus- und Sinus-förmiger Belastung | 76 |
| 7.3 | Anzahl der Abtastungen | 80 |
| 8 | Ergebnisse | 83 |
| 8.1 | Interaktionsspannungs- und Verschiebungsverlauf | 83 |
| 8.1.1 | Oszillierende, ortsfeste Einzellast ($\Omega = 50 \text{ rad/s}$) | 84 |
| 8.1.2 | Oszillierende, bewegte Einzellast ($\Omega = 50 \text{ rad/s}$, $v = 50 \text{ m/s}$) | 90 |
| 8.2 | Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung | 97 |
| 8.2.1 | Halbraumsteifigkeiten | 97 |
| 8.2.2 | Maximalverschiebungen für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast | 104 |
| 8.2.3 | Maximalverschiebungen für eine oszillierende, bewegte Einzellast | 115 |
| 8.3 | Halbraum nach der TPM | 125 |
| 9 | Schlusswort | 127 |
| 9.1 | Halbraum nach der TPM | 127 |
| 9.2 | Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken | 128 |
| A | Fourier-Transformation | 129 |
| A.1 | Rechenregeln | 129 |
| A.2 | Ausgewählte Funktionen | 130 |
| B | Legendre-Polynome | 133 |
| Literaturverzeichnis | | 135 |
| Abbildungsverzeichnis | | 141 |

Bezeichnungen

- **Mathematische Bezeichnungen:**

| | |
|---------------------------|--|
| $div(\dots)$ | Divergenz eines Vektorfeldes |
| \bar{f} | Fourier-Transformierte einer Funktion f |
| \dot{f} | Zeitableitung einer Funktion f |
| f' | Ortsableitung einer Funktion f |
| $f_{,i}$ | partielle Ableitung einer Funktion f nach i |
| $grad(\dots)$ | Gradient eines skalaren Feldes |
| $H(x)$ | Heaviside- oder Einheitssprungfunktion |
| \mathbf{I} | Einheitstensor |
| i | Imaginäre Einheit |
| $Im(f)$ | Imaginäranteil einer Funktion f |
| $Re(f)$ | Realanteil einer Funktion f |
| $rot(\dots)$ | Rotation eines Vektorfeldes |
| $\Delta(\dots)$ | Laplace-Operator |
| $\delta(x)$ | Dirac- δ -Distribution |
| $\circ \longleftarrow$ | Fouriertransformation (Hintransformation) |
| $\bullet \longrightarrow$ | Inverse Fouriertransformation (Rücktransformation) |

- **Koordinatenbezeichnungen:**

| | |
|------------|--|
| k_x, k_y | Transformierte Ortskoordinaten: Wellenzahlen |
| k_r | Radiale Wellenzahl: $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ |
| t | Zeitkoordinate |
| x, y, z | Rechtwinklige kartesische Koordinaten |
| ω | Transformierte Zeitkoordinate: Kreisfrequenz |

- **Materialkenngrößen:**

| | |
|------------|---|
| | <u>Halbraum nach der TPM</u> |
| E^S | Partieller Elastizitätsmodul des Festkörpers |
| E^{SR} | Realer Elastizitätsmodul des Festkörpers |
| k^L | Durchlässigkeitskoeffizient |
| n^α | Volumenanteil eines Bestandteils α |
| n_{0S}^S | Volumenanteil des Festkörpers in der Ausgangskonfiguration |
| α | Index für ein Bestandteil (L: L iquid, S: S olid) |
| α_L | Partiale Material-abhängige Konstante der Flüssigkeit |

| | |
|--------------------|---|
| α_ν | Durchlässigkeitswiderstandskoeffizient |
| γ^{LR} | Effektives spezifisches Gewicht der Flüssigkeit |
| λ^S, μ^S | Partiale Lamé-Konstanten des Festkörpers |
| ν^S | Partiale Querdehnzahl des Festkörpers |
| ν^{SR} | Reale Querdehnzahl des Festkörpers |
| ρ^α | Partiale Dichte |
| $\rho^{\alpha R}$ | Reale Dichte |

Klassischer Halbraum

| | |
|----------------|-----------------------------------|
| E | Elastizitätsmodul des Festkörpers |
| λ, μ | Lamé-Konstanten |
| ν | Querdehnzahl |
| ρ | Spezifische Dichte |

• **Halbraumkenngrößen:**

| | |
|--------------|--------------------------------------|
| c_R | Rayleighwellengeschwindigkeit |
| k_H | Halbraumsteifigkeit |
| k_R | Rayleighwellenzahl |
| \mathbf{p} | Lastvektor an der Halbraumoberfläche |

Halbraum nach der TPM

| | |
|-----------------------|--|
| A_{Sij}, B_{Sij} | Lösungskoeffizienten für den Festkörper im transformierten Raum |
| \mathbf{b}^α | Beschleunigung durch Volumenkraft |
| c_{11}, c_{12} | Druckwellengeschwindigkeiten |
| c_2 | Scherwellengeschwindigkeit |
| \mathbf{E}_S | Lagrange-Dehnungstensor des Festkörpers |
| e_S | Volumendehnung des Festkörpers |
| k_{11}, k_{12} | Wellenzahlen der Druckwellen |
| k_2 | Wellenzahl der Scherwelle |
| p | Flüssigkeitsdruck |
| \mathbf{p}_E^L | Effektive Interaktionskraft zwischen Flüssigkeit und Festkörper |
| \mathbf{p}^L | Interaktionskraft zwischen Flüssigkeit und Festkörper |
| \mathbf{S}_ν | Permeabilitätstensor |
| \mathbf{T}^α | Cauchy-Spannungstensor |
| \mathbf{T}_E^α | Effektiver Cauchy-Spannungstensor |
| \mathbf{u}_S | Verschiebungsvektor des Festkörpers |
| u_{Sx} | Längsverschiebung des Festkörpers infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| v_{Sx} | Querverschiebung des Festkörpers infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| w_{Sx} | Vertikalverschiebung des Festkörpers infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| \mathbf{x}_α | Raumvektor in der Augenblickskonfiguration |
| Φ_α | Skalarfunktion zur Beschreibung des rotationsfreien Zustandes |
| Ψ_α | Vektorfeld zur Beschreibung des quellenfreien Zustandes |

Klassischer Halbraum

| | |
|---------------|--|
| A_i, B_{ij} | Lösungskoeffizienten im transformierten Raum |
| c_p | Druckwellengeschwindigkeit |
| c_s | Scherwellengeschwindigkeit |
| \mathbf{E} | Lagrange-Dehnungstensor |
| k_p | Wellenzahl der Druckwelle |
| k_s | Wellenzahl der Scherwelle |
| \mathbf{u} | Verschiebungsvektor |
| u_x | Längsverschiebung infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| v_x | Querverschiebung infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| w_x | Vertikalverschiebung infolge einer in x -Richtung wirkenden Last |
| σ | Cauchy-Spannungstensor |
| Φ | Skalarfunktion zur Beschreibung des rotationsfreien Zustandes |
| Ψ | Vektorfeld zur Beschreibung des quellenfreien Zustandes |

• **Balkenkenngrößen:**

| | |
|---------|----------------------------------|
| b | Halbe Balkenbreite |
| E_B | Elastizitätsmodul des Balkens |
| I_B | Biegeträgheitsmoment des Balkens |
| p_B | Balkenbelastung |
| w_B | Vertikalverschiebung des Balkens |
| μ_B | Massebelegung des Balkens |

• **Sonstige Größen:**

| | |
|----------|--------------------------------------|
| C_P | Legendre-Koeffizient der Ordnung P |
| $P_P(y)$ | Legendre-Polynom der Ordnung P |
| v | Lastgeschwindigkeit |
| Ω | Harmonische Anregungsfrequenz |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Ziel der Arbeit

Im Rahmen von Forschungsarbeiten zur Halbraumdynamik gliedert sich diese Arbeit in die am Lehrstuhl für Baumechanik an der TU München geleisteten Beiträge ein und widmet zwei Bereichen ihre besondere Aufmerksamkeit.

Im ersten Abschnitt der Dissertation werden die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen des Halbraums aufgegriffen und mit Hilfe des Potentialansatzes nach Helmholtz und einer Fouriertransformation in gewöhnliche Differentialgleichungen umgeformt [Mül89, Lie97].

Im Gegensatz zur klassischen Kontinuumsmechanik, wo der ungeschichtete Halbraum als Einkomponenten-Medium angesehen wird, werden für die Beschreibung des Halbraums die Annahmen eines porösen Mediums nach der Theorie Poröser Medien zugrunde gelegt. Die Theorie Poröser Medien ist definiert als Kontinuumstheorie für mehrphasige Materialien, die sich aus den Elementen der Mischungstheorie und dem Konzept der Volumenanteile zusammensetzt [Ehl89b, Ehl95].

Die so gewonnenen Gleichungen und deren Lösungen werden denjenigen des klassischen Einkomponenten-Halbraums gegenübergestellt.

Das Ziel der Betrachtung ist, eine Aussage darüber zu liefern, inwiefern die Berücksichtigung der Porosität das Verformungsverhalten des Halbraums beeinflusst.

Der zweite Abschnitt stützt sich wiederum auf den ungeschichteten klassischen Einkomponenten-Halbraum und untersucht den Fall eines dynamisch belasteten unendlich langen, in Querrichtung starren Balkens auf der Halbraumoberfläche.

Über die sogenannte Halbraumsteifigkeit [DM96, Din00] wird die Anbindung des Balkens an den Untergrund erfasst. Diese spiegelt das kontinuumsdynamische Verhalten des Untergrundes wider.

Mit Hilfe von Legendre-Polynom-Ansätzen [Din00] zur Beschreibung der Interaktionsspannungen werden die Halbraumsteifigkeiten auf semi-analytischem Wege bestimmt.

Schließlich werden über eine Fast Fourier Transformation (FFT) die Halbraumverschiebungen in den Originalraum rücktransformiert.

Speziell werden in vorliegender Arbeit die Halbraumsteifigkeiten für einen durch den Balken in Quer- und Längsrichtung verschiebungsbehinderten Halbraum bei sowohl einer ortsfesten als auch einer bewegten, oszillierenden Belastung hergeleitet. Die resultieren-

den Halbraumverschiebungen werden mit denen des in Horizontalrichtung unbehinderten Halbraums verglichen.

Diese Untersuchung zielt darauf hin, eine Aussage darüber zu machen, inwieweit der Einfluss der Quer- und Längsverschiebungsbehinderung durch den Balken die Vertikalkomponente der Halbraumverschiebung beeinflusst.

1.2 Überblick

1.2.1 Halbraum nach der TPM

Poröse Medien spielen in vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften eine entscheidende Rolle. In den 80-er Jahren wurden an der Universität in Essen Untersuchungen und Nachforschungen über die bestehenden Theorien zur Behandlung von porösen Medien unternommen.

Bald wurde erkannt, dass viele der vorhandenen Theorien nicht vollständig, vielmehr unklar und z.T. fehlerbehaftet sind [dB00a].

Der Bedarf, eine mit den thermodynamischen Grundbeziehungen konsistente Theorie herzuleiten, war somit gegeben.

Für einen ausführlichen geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der TPM sei auf die Arbeiten von de Boer [dB91, dB95, dB98, dB00a] verwiesen.

Die TPM ist eine Theorie zur Beschreibung poröser Medien als einer Mischung sich überlagernder aber nicht vermischbarer Bestandteile unter Einhaltung der thermodynamischen Grundbeziehungen. Die Basis der TPM bildet die Mischungstheorie [Bow80], welche ursprünglich zur makroskopischen Beschreibung von Gas- und anderen Fluidmischungen entwickelt worden war.

Im Gegensatz zu einer Mischung, bei der von einer Vermengung auch der kleinsten Bestandteile ausgegangen werden kann, zeichnet sich ein poröses Medium dadurch aus, dass seine Bestandteile sich abgrenzen und ein heterogenes Gemenge darstellen [Ehl89b].

Eine kontinuumsmechanische Beschreibung auf makroskopischer Ebene ist nur im Rahmen einer idealisierten Modellbildung, wie sie z.B. durch das Konzept der Volumenanteile gegeben ist, möglich.

Das Konzept der Volumenanteile erfasst den volumetrischen Anteil jedes einzelnen Bestandteils am Gesamtvolumen des betrachteten Mediums. Jeder Bestandteil des porösen Mediums wird dabei als ein Kontinuum mit eigenständiger Bewegung angesehen. Es handelt sich speziell um ein makroskopisches Modell, das zu jedem Zeitpunkt einen Raumpunkt mit allen Bestandteilen gleichzeitig besetzt. Man spricht auch von einem "verschmierten" Ersatzkontinuum [Bre98a].

Vom mikroskopischen Aufbau der Materie wird somit abgesehen und der poröse Halbraum als ein Kontinuum genähert. Die physikalischen Größen sind als makroskopische Mittelwerte zu betrachten. Diese Annahme bedarf zweier Voraussetzungen: Erstens muss der betrachtete Bereich groß genug sein, um eine statistisch repräsentative Aussage zulassen zu können, und zweitens müssen die einzelnen Bestandteile so fein sein, dass die verschmierte Modellbildung zugrunde gelegt werden kann [Ehl95]. Beides sei in der vorliegenden Arbeit als gegeben angesehen.

Ausgehend von inkompressiblen Bestandteilen haben de Boer, Ehlers, Liu und Bluhm in verschiedenen Arbeiten das Verhalten der Raum- und Oberflächenwellen im porösen

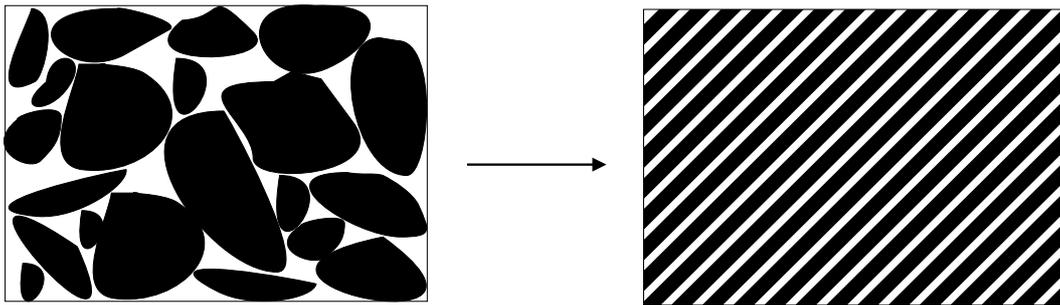


Abbildung 1.1: Systemskizze eines fluidgesättigten porösen Festkörpers und “verschmieretes“ Ersatzmodell (rechts)

Festkörper untersucht und beschrieben [dBEL93, dBL94, dBL95, dBL96, LdB96a, LdB96b, LdB97, LBdB98, LdB99].

Breuer untersuchte mit der Finite Elemente Methode das dynamische Verformungsverhalten für den eindimensionalen Fall wie auch das Konsolidierungsverhalten im Zweidimensionalen. [Bre98a, Bre98b].

Die oben erwähnten Untersuchungen und Arbeiten zum dynamischen Verhalten eines inkompressiblen porösen Mediums gaben den Anstoß, auf der Basis der dort formulierten Grundgleichungen, das Verhalten eines porösen dreidimensionalen Festkörpers im transformierten Raum (Wellenzahl-Frequenz-Raum) zu betrachten und einen Vergleich zur klassischen Halbraumtheorie zu ziehen.

Folgende Annahmen sind den in Kapitel 3 ausgeführten Herleitungen zugrunde gelegt:

- Der poröse Festkörper ist mit einer reibungsfreien Flüssigkeit vollständig gesättigt.
- Bei beiden Bestandteilen wird materielle Inkompressibilität angesetzt.
- Aufgrund der Annahme kleiner Verschiebungen und der Vernachlässigung von Langzeiteffekten aus plastischen Verformungen wird sowohl geometrische als auch physikalische Linearität angesetzt.

1.2.2 Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken

Anfang der 90-er Jahre wurden verstärkt Untersuchungen durchgeführt, die den dreidimensionalen Halbraum in den Berechnungen der Oberbaudynamik mitberücksichtigten. Der wesentliche Grund dieser Vorgehensweise lag im vermehrten Aufkommen von Hochgeschwindigkeitszügen. Geschwindigkeiten, die sich in die Nähe der Rayleighwellengeschwindigkeit bewegten, erforderten eine genauere Erfassung des Untergrundverhaltens. Einen ausführlichen Überblick über die verschiedenen Gleisbaumodelle und deren Entwicklung liefern Dinkel [Din00] und Vostroukhov [Vos02].

Petyt und Jones stellen verschiedene Berechnungsmethoden, die für die Erschütterungsausbreitung im Halbraum herangezogen werden, vor [PJ99]. Degrande gibt einen Einblick, wie die Lösung für einen geschichteten Halbraum durch Einbindung der berechneten Green'schen Funktion mittels der Randelementmethode gefunden werden kann [Deg02]. In dieser Arbeit wird der Lösungsweg über die Integraltransformation gewählt [Lie97].

Im Rahmen ihrer Forschungsarbeiten führten Dieterman und Metrikine den Begriff der sogenannten Halbraumsteifigkeit ein [DM96].

Dinkel weitet die Formulierungen auf einen in Querrichtung starren Balken mit konstanter Verschiebung aus [Din00].

Während Lieb und Sudret den Balken durch eine über die Balkenbreite konstante Interaktionsspannung an den Halbraum anbinden [LS98], bedient sich Dinkel der Legendre-Polynom-Ansätze, um die Interaktionsspannungen zwischen Halbraum und Balken derart anzupassen, dass sie die konstante Verschiebung über die Balkenbreite hinreichend genau abbilden [Din00].

Die Arbeit von Dinkel gab den Anstoß, den Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung durch einen unendlich langen, in Querrichtung starren auf dem Halbraum gebetteten Balken zu untersuchen.

Kim untersuchte das dynamische Verhalten einer Winkler-gebetteten Platte, die in Querrichtung durch Horizontalfedern abgestützt ist [Kim04]. Darin verglich er in einer Parameterstudie über die Lastgeschwindigkeit, Lastfrequenz und Dämpfung die Verschiebungen für unterschiedliche Horizontalsteifigkeiten miteinander.

Metrikine und Dieterman beschreiben, wie der Schubspannungseinfluss in Längsrichtung des Balkens in die Formulierung der Halbraumsteifigkeit eingeht [MD97].

Vostroukhov greift in seiner Dissertation die Ausführungen zur Halbraumsteifigkeit von Dieterman und Metrikine [DM96] auf und untersucht das Verhalten eines auf dem viskoelastischen Halbraum gelagerten Balkens, der über eine Horizontalfeder den Schubspannungseinfluss in Längsrichtung an der Anbindungsstelle zum Halbraum einbezieht [Vos02].

Mit Hilfe der Formulierung der Interaktionsspannungen als Superposition der verschiedenen Legendre-Polynome [Din00] ist es möglich, den Schubspannungseinfluss als eine wellenzahl- und frequenzabhängige Größe in die Bestimmung der Halbraumsteifigkeit mit einzubeziehen und sich von der konstanten Horizontalsteifigkeit zu lösen.

Daher basiert die Untersuchung des Einflusses der Horizontalverschiebungsbehinderung auf die Vertikalverschiebungen des Untergrundes auf einer halbraumgetreuen Anbindung des Balkens sowohl in Vertikal- als auch in Horizontalrichtung.

1.3 Gliederung

Der **Teil I** der Dissertation behandelt den Halbraum nach der TPM und gliedert sich in drei Kapitel.

Im zweiten Kapitel sind die kontinuumsmechanischen Beziehungen des klassischen Halbraums [Mül89, Lie97] formuliert.

Das dritte Kapitel beschreibt die Herleitung der kontinuumsmechanischen Gleichungen auf der Basis der TPM.

In beiden Kapiteln sind die Grundlösungen für eine Vertikal-, Längs- und Querbelastung mit ausgewiesen. Diese sind für die Bestimmung der Halbraumsteifigkeiten im Teil II der Arbeit von Bedeutung.

In Kapitel 4 werden die beiden Untergrundmodelle einander gegenübergestellt. Besonderes Augenmerk wird auf die Bestimmung der Untergrundparameter des porösen Mediums gelegt. Sowohl die Raumwellengeschwindigkeiten als auch die Rayleighwellengeschwindigkeit

werden miteinander verglichen. Schließlich werden die Vertikalverschiebungen des Halbraums unter Einwirkung einer oszillierenden Einzellast im transformierten Raum für beide Untergrundmodelle ausgewertet und beurteilt.

Der **Teil II** der Dissertation widmet sich dem Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung durch einen auf dem viskoelastischen Halbraum gebetteten unendlich langen Balken, der in Querrichtung starr ist.

Kapitel 5 und Kapitel 6 beschreiben das Verfahren zur Herleitung der Halbraumsteifigkeiten, wobei Letzteres den Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung berücksichtigt. In Kapitel 7 wird die Überprüfung der programmtechnischen Umsetzung zur Berechnung der Halbraumsteifigkeiten wie auch der Erschütterungsausbreitung im Halbraum erläutert und vorgestellt.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind für unterschiedliche Beispiele in Kapitel 8 dargestellt. Der Verlauf der Halbraumsteifigkeiten im transformierten Raum wird für den Fall mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung verglichen. Außerdem werden die Maximalverschiebungen im Halbraum für unterschiedliche Parameter ausgewiesen und beurteilt. Im letzten Beispiel wird die Verschiebung des klassischen Halbraums mit der Verschiebung eines porösen Untergrundes nach der TPM verglichen.

Das **9. Kapitel** schließt mit dem Schlusswort.

Teil I

Halbraum nach der Theorie Poröser Medien

Kapitel 2

Kontinuumsmechanisches Untergrundmodell nach der klassischen Theorie

Unter einem kontinuumsmechanischen Untergrundmodell nach der klassischen Theorie versteht sich in diesem Bericht ein Untergrundmodell, das die innere Struktur des Materials nicht explizit berücksichtigt, sondern es als Einkomponenten-Medium beschreibt. Für die Berechnung wird linear elastisches, isotropes und homogenes Materialverhalten des Untergrundes vorausgesetzt. Aufgrund des linear elastischen Materialverhaltens bleiben nichtlineare Effekte unberücksichtigt. Darum werden im Rahmen dieser Arbeit nur kleine Formänderungen vorausgesetzt. Langzeiteffekte, wie z.B. bleibende Deformationen, können mit diesem Bodenmodell nicht beschrieben werden, so dass nur Vorgänge von kurzer Dauer zum Tragen kommen.

2.1 Formulierung der Grundgleichungen

Die maßgebende Bewegungsgleichung des unter obigen Voraussetzungen beschriebenen Bodenmodells wird auch als Lamésche Differentialgleichung bezeichnet und lautet in tensorieller Schreibweise:

$$(\lambda + \mu)u^j |^i_j + \mu u^i |^j_j - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (2.1)$$

In konventioneller Schreibweise ausgeschrieben erhält man somit:

$$(\lambda + \mu) \cdot \text{grad div}(\mathbf{u}) + \mu \cdot \text{div grad}(\mathbf{u}) - \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

\mathbf{u} beschreibt den infinitesimalen Verschiebungsvektor des Festkörpers. Ein isotroper, homogener Halbraum lässt sich durch ein Stoffgesetz mit zwei Materialkonstanten beschreiben. In unserem Fall seien die Laméschen Materialkonstanten λ und μ zugrunde gelegt, die wiederum in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E und der Querdehnzahl ν ausgedrückt werden können.

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4)$$

Zur Berücksichtigung einer Materialdämpfung wird im weiteren Verlauf auf Grundlage des sogenannten Korrespondenzprinzips [Rüc81, Wol85] ein komplexer Elastizitätsmodul mit der hysteretischen Dämpfungskonstanten d (> 0) angesetzt [Mül89].

$$E^* = E \cdot (1 + 2d \cdot i) \quad (2.5)$$

Für negative Frequenzen ω (s. Kapitel 2.4) wird die Dämpfung mit einem negativen Term berücksichtigt [Mül89]. Die Verwendung des komplexen Elastizitätsmoduls E^* führt in der Differentialgleichung auf komplexe Lamésche Konstanten. Im weiteren Verlauf wird, soweit nicht anderweitig angemerkt, der komplexe Elastizitätsmodul mit E bezeichnet.

2.2 Lösung der Bewegungsgleichung

Für die Lamésche Gleichung kann auf direkte Weise außer für Spezialfälle kein analytischer Lösungsansatz gefunden werden. Der Potentialansatz nach Helmholtz erlaubt eine Aufspaltung des Verschiebungsvektorfeldes in einen rotationsfreien und einen quellenfreien Anteil. Dadurch lässt sich der Ansatz wie folgt anschreiben:

$$u^i = \Phi \cdot |^i + \Psi_k \cdot |_j \epsilon^{ijk} \quad (2.6)$$

In konventioneller Schreibweise erhält man:

$$\mathbf{u} = \text{grad}(\Phi) + \text{rot}(\Psi) \quad (2.7)$$

Φ ist die Skalarfunktion und Ψ das Vektorfeld in Abhängigkeit des Raumvektors \mathbf{x} und der Zeit t . Den drei Richtungskomponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{u} stehen die vier Größen Φ , Ψ_x , Ψ_y und Ψ_z gegenüber. Es kann gezeigt werden [Lon67], dass eine Komponente aus Ψ beliebig gewählt werden kann (hier: $\Psi_z = 0$), ohne dabei an Vollständigkeit in der Lösung einbüßen zu müssen.

Indem man nun Gl.(2.7) in Gl.(2.2) einsetzt, wobei $\Delta(\dots)$ den Laplace-Operator darstellt, erhält man folgenden Ausdruck:

$$\text{grad} \left[(\lambda + 2\mu) \cdot \Delta(\Phi) - \rho \cdot \ddot{\Phi} \right] + \text{rot} \left[\mu \cdot \Delta(\Psi) - \rho \cdot \ddot{\Psi} \right] = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Die Gleichung (2.8) ist erfüllt, wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern zu Null gesetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$\Delta(\Phi) - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.9)$$

$$\Delta(\Psi) - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Man erhält also zwei entkoppelte partielle Differentialgleichungen, für welche die Wellengeschwindigkeiten wie folgt definiert sind:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (2.11)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.12)$$

Infolge des komplexen Elastizitätsmoduls bzw. der komplexen Laméschen Konstanten sind beide Geschwindigkeiten komplexe Größen. Der Absolutwert aus dem Quotienten der Kreisfrequenz und dem Realteil der Wellenzahl $|\omega/Re(k_p)|$ und $|\omega/Re(k_s)|$ stellt die Kompressions- (oder Primärwellengeschwindigkeit) bzw. die Scherwellengeschwindigkeit (oder Sekundärwellengeschwindigkeit) des elastischen Mediums dar.

Das partielle entkoppelte Differentialgleichungssystem wird in einem weiteren Schritt durch eine dreifache Fourier-Transformation (s. Anhang A) über die zwei Ortskoordinaten x, y und die Zeit t in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen übergeführt. Die Tiefencoordinate z bleibt hierbei untransformiert.

$$\bar{\Phi}_{,zz} + \left(\frac{\omega^2}{c_p^2} - k_x^2 - k_y^2\right) \cdot \bar{\Phi} = 0 \quad (2.13)$$

$$\bar{\Psi}_{i,zz} + \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_x^2 - k_y^2\right) \cdot \bar{\Psi}_i = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Es kann folgender analytischer Lösungsansatz für die gewöhnliche Differentialgleichung gefunden werden:

$$\bar{\Phi} = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot z} + A_2 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot z} \quad (2.15)$$

$$\bar{\Psi}_i = B_{i1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot z} + B_{i2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot z}$$

$$\lambda_1^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_p^2; \quad k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad (2.16)$$

$$\lambda_2^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_s^2; \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}$$

Über Rand- bzw. Übergangsbedingungen im geschichteten Halbraum lassen sich die unbekanntenen Koeffizienten A_1 bis B_{i2} bestimmen, und dadurch auch der Verlauf der transformierten Verschiebungs- und Spannungsgrößen.

2.3 Transformierte Verschiebungs- und Spannungsgrößen

Die Verschiebungen im Originalraum (untransformierter Raum) ergeben sich unter Vereinfachung des Potentialansatzes ($\Psi_z = 0$) im kartesischen Koordinatensystem zu:

$$u^x = \Phi_{,x} - \Psi_{y,z}$$

$$u^y = \Phi_{,y} + \Psi_{x,z} \quad (2.17)$$

$$u^z = \Phi_{,z} - \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}$$

Analog dazu ergeben sich die transformierten Größen:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^x &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi} - \bar{\Psi}_{y,z} \\
 \bar{u}^y &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi} + \bar{\Psi}_{x,z} \\
 \bar{u}^z &= \bar{\Phi}_{,z} - i \cdot k_y \cdot \bar{\Psi}_x + i \cdot k_x \cdot \bar{\Psi}_y
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Setzt man den Lösungsansatz für die Potentiale aus Gl.(2.15) in Gl.(2.18) ein, so erhält man die allgemeine Lösung der transformierten Verschiebungen:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^x \\ \bar{u}^y \\ \bar{u}^z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 e^{\lambda_1 z} \\ A_2 e^{-\lambda_1 z} \\ B_{x1} e^{\lambda_2 z} \\ B_{x2} e^{-\lambda_2 z} \\ B_{y1} e^{\lambda_2 z} \\ B_{y2} e^{-\lambda_2 z} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \tag{2.19}$$

Im Rahmen der geometrisch-linearen Theorie und des isotropisch, linear-elastischen Festkörperverhaltens kann folgende konstitutive Beziehung für den Spannungstensor zugrunde gelegt werden.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \mathbf{E} + \lambda \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} = 2\mu \cdot \mathbf{E} + \lambda \cdot e \cdot \mathbf{I} \tag{2.20}$$

Die Volumendehnung des Festkörpers ist mit e bezeichnet. Im Rahmen geometrischer Linearität kann der Lagrange-Dehnungstensor \mathbf{E} eingeführt werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}^T(\mathbf{u})) \tag{2.21}$$

Den transformierten Spannungstensor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ erhält man durch Einsetzen des Lagrange-Dehnungstensors (Gl.(2.21)) mit den transformierten Verschiebungen in die Gleichung (2.20). Das führt zu folgendem Gleichungssystem, wobei hier nur die Schnittspannungen für den Normalenvektor in z -Richtung angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} &= [\bar{\boldsymbol{\sigma}}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \mu \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_1 & -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y & k_x k_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ 2ik_y \lambda_1 & -2ik_y \lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y \lambda_2 & 2ik_y \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 & -2ik_x \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit

$$k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{2.23}$$

2.4 Formulierung der Randbedingungen

Der Lösungsansatz, der die Tiefenkoordinate z untransformiert lässt, erlaubt nur eine horizontale Schichtung des Halbraums, und entlang dieser werden sämtliche Übergangsbedingungen formuliert. In unserem Fall gehen wir von einem ungeschichteten Halbraum aus. Somit müssen nur an der Oberfläche die Spannungsrandbedingungen formuliert werden.

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz} \\ -\bar{p}_{yz} \\ -\bar{p}_z \end{pmatrix}$$

Der Lösungsansatz in Gl.(2.15) stellt, in Abhängigkeit vom Exponenten, sowohl Raumwellen dar, die sich von der Oberfläche aus, bzw. zur Oberfläche hin, bewegen, als auch Oberflächenwellen, die mit der Tiefe exponentiell zu- bzw. abnehmen. Da in unserem Fall davon ausgegangen wird, dass vom Unendlichen keine Wellen eintreffen bzw. dass auch mit der Tiefe exponentiell zunehmende Oberflächenwellen physikalisch nicht möglich sind, können in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Frequenz ω als auch der Wellenzahlen k_x und k_y drei der Koeffizienten A_1 bis B_{y2} in Gleichung (2.19) zu Null gesetzt werden. In der Dissertation von Müller [Mül89] wird gezeigt, dass für negative ω die Koeffizienten A_1, B_{x1} und B_{y1} verschwinden müssen und nur die Koeffizienten A_2, B_{x2} und B_{y2} zu berücksichtigen sind. Die Lösung für positive ω ergibt sich anhand von Symmetrieüberlegungen aus der Lösung für negative ω .

Somit ergeben sich die Verschiebungen in Abhängigkeit von der Tiefenkoordinate zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^x \\ \bar{u}^y \\ \bar{u}^z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & \lambda_2 \\ ik_y & -\lambda_2 & 0 \\ -\lambda_1 & -ik_y & ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 e^{-\lambda_1 z} \\ B_{x2} e^{-\lambda_2 z} \\ B_{y2} e^{-\lambda_2 z} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Die Spannungsrandbedingung an der Stelle $z = 0$ lautet:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ -2ik_y \lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y \lambda_2 & -2ik_x \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz} \\ -\bar{p}_{yz} \\ -\bar{p}_z \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

2.5 Grundlösungen für den klassischen Halbraum

Da die analytische Lösung der Laméschen Differentialgleichung im fouriertransformierten Raum vorliegt, kann über eine numerische Rücktransformation auch die Lösung im Zeitbereich gefunden werden.

Nachfolgend werden die Grundlösungen der einzelnen Verschiebungskomponenten des Halbraums für eine Vertikalbelastung, eine Längsbelastung und eine Querbelastung dargestellt. Dabei versteht man unter einer Vertikalbelastung die senkrecht zur Halbraumoberfläche in z -Richtung wirkende Belastung. Die Längsbelastung wirkt in x -Richtung und die Querbelastung in y -Richtung (s. Abb.(2.1)).

Diese Aufteilung in die einzelnen Grundlösungen ist für den Teil II der vorliegenden Arbeit von Bedeutung.

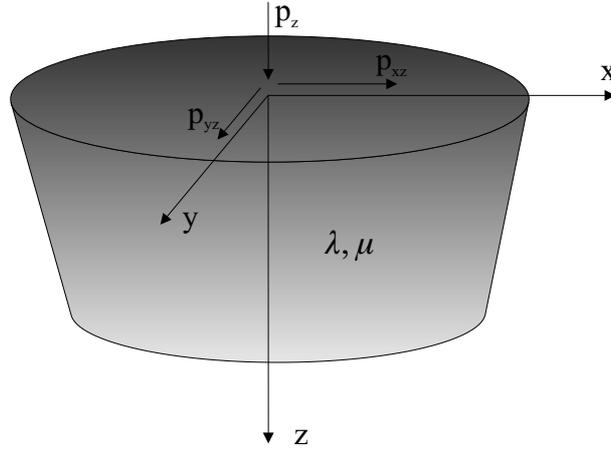


Abbildung 2.1: Systemskizze zur Definition des Koordinatensystems für den Halbraum

2.5.1 Grundlösung für eine Vertikalbelastung

Die Spannungsrandbedingung für eine vertikal in z -Richtung auf die Oberfläche wirkende Belastung nimmt folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_1 & k_xk_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ -2ik_y\lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_xk_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{p}_z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Aus Gl.(2.26) ergeben sich die drei Ansatzkoeffizienten der Potentialfunktionen.

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}(\lambda_2^2 + k_r^2) = \frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}(2k_r^2 - k_s^2) \\ B_{x2} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}2ik_y\lambda_1 \\ B_{y2} &= -\frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}2ik_x\lambda_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta &= -(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2\sqrt{k_r^2 - k_p^2}\sqrt{k_r^2 - k_s^2} \\ &= -(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2\lambda_1\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die transformierten Potentiale erhält man durch Einsetzen der Ansatzkoeffizienten in Gl.(2.15).

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}(2k_r^2 - k_s^2)e^{-\lambda_1 z} \\ \bar{\Psi}_x &= \frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}2ik_y\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} \\ \bar{\Psi}_y &= -\frac{\bar{p}_z}{\mu\Delta}2ik_x\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Daraus ergeben sich, durch Einsetzen der Potentiale in Gl.(2.18), die transformierten Verschiebungen an der Oberfläche.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi} + \lambda_2 \bar{\Psi}_y = \frac{\bar{p}_z i k_x}{\mu \Delta} (2k_r^2 - k_s^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\
\bar{v}_z &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi} - \lambda_2 \bar{\Psi}_x = \frac{\bar{p}_z i k_y}{\mu \Delta} (2k_r^2 - k_s^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\
\bar{w}_z &= -\lambda_1 \bar{\Phi} - i \cdot k_y \cdot \bar{\Psi}_x + i \cdot k_x \cdot \bar{\Psi}_y = \frac{\bar{p}_z \lambda_1}{\mu \Delta} k_s^2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Die einzelnen Verschiebungskomponenten sind derart bezeichnet, dass u die Verschiebung in Längsrichtung, v die Verschiebung in Querrichtung und w die Vertikalverschiebung darstellen. Der Index z steht für die Lastrichtung, welche die Verschiebungen hervorruft. Die Grundlösung ist die Antwort eines Systems auf eine "Einheitslast". Die "Einheitslast" stellt im Originalraum eine Einzellast dar, die durch Dirac- δ -Distributionen beschrieben wird (s. Anhang A).

$$p_z(x, y) = \delta(x = 0) \delta(y = 0) \circ \bullet \bar{p}_z(k_x, k_y) = 1$$

Damit ergibt sich die Grundlösung der Verschiebungen an der Oberfläche infolge einer vertikal wirkenden Belastung $\bar{p}_z = 1$ im Bildraum (transformierter Raum) zu:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{uz}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= \frac{i k_x}{\mu \Delta} (2k_r^2 - k_s^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\
\bar{G}_{vz}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= \frac{i k_y}{\mu \Delta} (2k_r^2 - k_s^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\
\bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= \frac{\lambda_1}{\mu \Delta} k_s^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.5.2 Grundlösung für eine Längsbelastung

Die Spannungsrandbedingung für eine horizontal in x -Richtung auf die Oberfläche wirkende Belastung lautet angeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz}(k_x, k_y, \omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die drei Ansatzkoeffizienten der Potentialfunktionen erhält man durch Auflösen der Gleichung.

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{\bar{p}_{xz}}{\mu \Delta} 2i k_x \lambda_2 \\
B_{x2} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu \Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)}{\lambda_2^2} \\
B_{y2} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu \Delta} \frac{4k_y^2 \lambda_1 \lambda_2 - (2k_r^2 - k_s^2)(\lambda_2^2 + k_y^2)}{\lambda_2^2}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Durch Einsetzen der Ansatzkoeffizienten in Gl.(2.15) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi} &= -\frac{\bar{p}_{xz}}{\mu\Delta} 2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_1 z} \\
 \bar{\Psi}_x &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu\Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \\
 \bar{\Psi}_y &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu\Delta} \frac{4k_x^2 \lambda_1 \lambda_2 - (2k_r^2 - k_s^2)(\lambda_2^2 + k_y^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die transformierten Verschiebungen erhält man, indem man die Potentiale in Gl.(2.18) einsetzt.

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_x &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi} + \lambda_2 \bar{\Psi}_y = \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu\Delta} \cdot \left(k_y^2 \cdot (4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2}) + k_s^2 \lambda_2 \right) \\
 \bar{v}_x &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi} - \lambda_2 \bar{\Psi}_x = -\frac{\bar{p}_{xz} k_x k_y}{\mu\Delta} \cdot (4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2}) \\
 \bar{w}_x &= -\lambda_1 \bar{\Phi} - i \cdot k_y \cdot \bar{\Psi}_x + i \cdot k_x \cdot \bar{\Psi}_y = \frac{\bar{p}_{xz} i k_x}{\mu\Delta} \cdot (2\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Infolge einer in Längsrichtung wirkenden Belastung $\bar{p}_{xz} = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{ux}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= \frac{1}{\mu\Delta} \cdot \left(k_y^2 \cdot (4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2}) + k_s^2 \lambda_2 \right) \\
 \bar{G}_{vx}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= -\frac{k_x k_y}{\mu\Delta} \cdot (4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2}) \\
 \bar{G}_{wx}(k_x, k_y, z = 0, \omega) &= \frac{ik_x}{\mu\Delta} \cdot (2\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.5.3 Grundlösung für eine Querbelastung

Die Spannungsrandbedingung für eine horizontal in y -Richtung auf die Oberfläche wirkende Belastung nimmt folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{p}_{yz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Auflösen der Gleichung erhält man die drei Potentialansatzkoeffizienten.

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} 2ik_y \lambda_2 \\
 B_{x2} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} \frac{4k_x^2 \lambda_1 \lambda_2 - (2k_r^2 - k_s^2)(\lambda_2^2 + k_x^2)}{\lambda_2^2} \\
 B_{y2} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)}{\lambda_2^2}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Nach Einsetzen der Ansatzkoeffizienten in Gl.(2.15) folgt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} 2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_1 z} \\
 \bar{\Psi}_x &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} \frac{4k_x^2 \lambda_1 \lambda_2 - (2k_r^2 - k_s^2)(\lambda_2^2 + k_x^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \\
 \bar{\Psi}_y &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu\Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

An der Oberfläche ergeben sich dann die transformierten Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_y &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi} + \lambda_2 \bar{\Psi}_y = -\frac{\bar{p}_{yz} k_x k_y}{\mu \Delta} \cdot \left(4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2} \right) \\
\bar{v}_y &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi} - \lambda_2 \bar{\Psi}_x = \frac{\bar{p}_{yz}}{\mu \Delta} \cdot \left(k_x^2 \cdot \left(4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2} \right) + k_s^2 \lambda_2 \right) \\
\bar{w}_y &= -\lambda_1 \bar{\Phi} - i \cdot k_y \cdot \bar{\Psi}_x + i \cdot k_x \cdot \bar{\Psi}_y = \frac{\bar{p}_{yz} i k_y}{\mu \Delta} \cdot (2\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Die Grundlösungen im Bildraum infolge einer in Querrichtung wirkenden Belastung $\bar{p}_{yz} = 1$ können somit angeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{uy}(k_x, k_y, z=0, \omega) &= -\frac{k_x k_y}{\mu \Delta} \cdot \left(4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2} \right) \\
\bar{G}_{vy}(k_x, k_y, z=0, \omega) &= \frac{1}{\mu \Delta} \cdot \left(k_x^2 \cdot \left(4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{2k_r^2 - k_s^2}{\lambda_2} \right) + k_s^2 \lambda_2 \right) \\
\bar{G}_{wy}(k_x, k_y, z=0, \omega) &= \frac{i k_y}{\mu \Delta} \cdot (2\lambda_1 \lambda_2 - 2k_r^2 + k_s^2)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Kapitel 3

Kontinuumsmechanisches Untergrundmodell nach der TPM

Im folgenden Kapitel werden, ausgehend von der Theorie Poröser Medien (TPM), die maßgeblichen Gleichungen zur Berechnung eines Untergrundes, der aus den zwei Komponenten, Festkörper und Flüssigkeit, besteht, hergeleitet. Nachfolgende Gleichungen sind derart formuliert, dass sie nur linear elastisches Materialverhalten berücksichtigen. Somit werden hiermit Langzeiteffekte aus plastischen Verformungen nicht erfasst. Es wird ein ungeschichteter, isotroper und durch das Konzept der Volumenanteile homogenisierter Untergrund betrachtet.

3.1 Herleitung der Grundgleichungen

Das Konzept der Volumenanteile beinhaltet, dass ein Volumenanteil als der Quotient des Volumenelements eines Bestandteiles dv^α ($\alpha = L, S$; **L**iquid, **S**olid) bezüglich des gesamten Volumenelements dv definiert ist [Ehl95].

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv} \quad (3.1)$$

Zu jedem Bestandteil wird eine partiale Dichte ρ^α über die reale Dichte $\rho^{\alpha R}$ definiert.

$$\rho^\alpha = n^\alpha \cdot \rho^{\alpha R} \quad (3.2)$$

Die materielle Inkompressibilität beinhaltet, dass die reale Dichte während der Verformung unverändert bleibt.

$$\rho^{\alpha R} = \text{const.} \quad (3.3)$$

Wenn man Massen-, Wärme- und Drallaustausch zwischen Flüssigkeit und Festkörper ausschließt, so lassen sich, nach de Boer und Ehlers [dBE86, Ehl89b] mit Hilfe des Konzepts der Volumenanteile für einen gesättigten Boden die Gleichgewichtsbedingungen wie folgt anschreiben:

Sättigungsbedingung:

$$n^S + n^L = 1 \quad (3.4)$$

Massenerhaltung:

$$(\dot{\rho}^\alpha)_\alpha + \rho^\alpha \cdot \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}_\alpha) = 0 \quad (3.5)$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{T}^\alpha) + \rho^\alpha \cdot (\mathbf{b}^\alpha - \ddot{\mathbf{x}}_\alpha) + \mathbf{p}^\alpha &= \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^S + \mathbf{p}^L &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Drallerhaltung:

$$\mathbf{T}^\alpha = \mathbf{T}^{\alpha T} \quad (3.7)$$

In diesen Gleichungen stellen $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$ den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zur Zeit t dar. \mathbf{T}^α steht für den partialen Cauchy-Spannungstensor, \mathbf{b}^α für die Beschleunigung durch Volumenkräfte und \mathbf{p}^α für den Zusatzterm der durch Interaktion zwischen Festkörper und Flüssigkeit hervorgerufenen Volumenkräfte. Die Operatoren div und grad beziehen sich auf den Raumpunkt \mathbf{x} der Augenblickskonfiguration.

Die materielle Zeitableitung ist definiert als:

$$(\dot{\dots})_\alpha = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \operatorname{grad}(\dots) \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad (3.8)$$

Aus den Gleichungen (3.2) und (3.5) kann man unter Berücksichtigung der materiellen Inkompressibilität (Gl.(3.3)) auf die Kontinuitätsgleichung der Volumenanteile schließen:

$$(\dot{n}^\alpha)_\alpha + n^\alpha \cdot \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}_\alpha) = 0 \quad (3.9)$$

In Verbindung mit Gl.(3.4) und Gl.(3.8) erhält man im Folgenden die Kontinuitätsbedingung für den flüssigkeitsgesättigten Festkörper.

$$\operatorname{div}(n^S \cdot \dot{\mathbf{x}}_S + n^L \cdot \dot{\mathbf{x}}_L) = 0 \quad (3.10)$$

Aus der Impulserhaltung (Gl.(3.6)) folgt für die einzelnen Bestandteile:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{T}^S) + \rho^S \cdot (\mathbf{b}^S - \ddot{\mathbf{x}}_S) - \mathbf{p}^L &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\mathbf{T}^L) + \rho^L \cdot (\mathbf{b}^L - \ddot{\mathbf{x}}_L) + \mathbf{p}^L &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Als eine Folge des Volumenanteilkonzeptes in Verbindung mit der Inkompressibilitätsbedingung können sowohl die totalen Spannungen \mathbf{T}^S und \mathbf{T}^L als auch die Interaktionskraft \mathbf{p}^L additiv in einen gewichteten unbekanntem Flüssigkeitsdruck p und in Effektivgrößen (Index: E) zerlegt werden, für welche konstitutive Gleichungen formuliert werden müssen [EdB90, BdB96, dB00c].

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^S &= -n^S \cdot p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S \\ \mathbf{T}^L &= -n^L \cdot p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^L \\ \mathbf{p}^L &= p \cdot \operatorname{grad}(n^L) + \mathbf{p}_E^L \end{aligned} \quad (3.12)$$

Das Einsetzen von Gl.(3.12) in Gl.(3.11) führt zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{T}_E^S) - n^S \cdot \operatorname{grad}(p) + \rho^S \cdot (\mathbf{b}^S - \ddot{\mathbf{x}}_S) - \mathbf{p}_E^L &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\mathbf{T}_E^L) - n^L \cdot \operatorname{grad}(p) + \rho^L \cdot (\mathbf{b}^L - \ddot{\mathbf{x}}_L) + \mathbf{p}_E^L &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Unter der Annahme eines linear-elastischen Festkörperverhaltens, sowie der Annahme idealer Flüssigkeiten [dBEL93], werden nachfolgende konstitutive Beziehungen zugrunde gelegt. Die ideale Flüssigkeit ist definiert als inkompressibel und reibungsfrei. Diebels et al. haben gezeigt [DEM01], dass für kleine Poren die Effektivspannung der Flüssigkeit \mathbf{T}_E^L vernachlässigt werden kann und daher die Annahme einer idealen Flüssigkeit für unsere Belange zulässig ist [EE99, Bre99].

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^S &= 2\mu^S \cdot \mathbf{E}_S + \lambda^S \cdot (\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} = 2\mu^S \cdot \mathbf{E}_S + \lambda^S \cdot e_S \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_E^L &\approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{p}_E^L = -\mathbf{S}_\nu \cdot (\dot{\mathbf{x}}_L - \dot{\mathbf{x}}_S)$$

μ^S und λ^S sind die makroskopischen oder partialen Laméschen Konstanten [LdB96b] des leeren porösen Festkörpers. e_S steht für die Volumendehnung des Festkörpers. Dazu sei erwähnt, dass trotz materieller Inkompressibilität die partialen Körper Volumenveränderungen infolge struktureller Kompressibilität erleiden [BdB97, Bre98a]. In der effektiven Interaktionskraft \mathbf{p}_E^L ist \mathbf{S}_ν als der Permeabilitätstensor definiert.

In Gl.(3.14) wird der Lagrange-Dehnungstensor im Rahmen geometrischer Linearität eingeführt:

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(\mathbf{u}_S) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u}_S)) \quad (3.15)$$

\mathbf{u}_S beschreibt den infinitesimalen Verschiebungsvektor des Festkörpergerüsts.

Im Fall von isotroper Permeabilität kann der Permeabilitätstensor wie folgt angesetzt werden [dBE86, Ehl89b]:

$$\mathbf{S}_\nu = \frac{(n^L)^2 \cdot \gamma^{LR}}{k^L} \cdot \mathbf{I} = \alpha_\nu \cdot \mathbf{I} \quad (3.16)$$

γ^{LR} ist das effektive spezifische Gewicht der Flüssigkeit und k^L der Durchlässigkeitskoeffizient des porösen Mediums.

Während des Verformungsprozesses ist wegen infinitesimaler Verformungen, unter der Bedingung einer vernachlässigbaren Volumendehnung, folgende Annahme gültig [dBEL93]:

$$n^S \cong n_{0S}^S \cdot (1 + \mathbf{E}_S \cdot \mathbf{I})^{-1} \cong n_{0S}^S \quad (3.17)$$

n_{0S}^S ist der Volumenanteil des Festkörpers im Ausgangszustand. Unter Beachtung der Tatsache, dass

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\dot{\mathbf{u}}_\alpha)_\alpha \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = (\ddot{\mathbf{u}}_\alpha)_\alpha \quad (3.18)$$

und dass die konvektiven Terme der materiellen Zeitableitung bei infinitesimal kleinen Verformungen entfallen, und auch die Beschleunigungsterme der Volumenkräfte \mathbf{b}^α in unserem Fall außer Acht gelassen werden können, lassen sich, durch Einsetzen der Gleichun-

gen (3.15) und (3.16) in Gl.(3.13), und über Gl.(3.10) die maßgebenden Feldgleichungen gewinnen [dBL94].

$$\begin{aligned} (\lambda^S + \mu^S) \cdot \text{grad div}(\mathbf{u}_S) + \mu^S \cdot \text{div grad}(\mathbf{u}_S) - n^S \cdot \text{grad}(p) \\ - \rho^S \cdot \ddot{\mathbf{u}}_S + \alpha_\nu \cdot (\dot{\mathbf{u}}_L - \dot{\mathbf{u}}_S) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$-n^L \cdot \text{grad}(p) - \rho^L \cdot \ddot{\mathbf{u}}_L - \alpha_\nu \cdot (\dot{\mathbf{u}}_L - \dot{\mathbf{u}}_S) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

$$\text{div}(n^S \cdot \dot{\mathbf{u}}_S + n^L \cdot \dot{\mathbf{u}}_L) = 0 \quad (3.21)$$

Somit erhält man ein gekoppeltes partielles Differential-Gleichungssystem mit den drei Unbekannten \mathbf{u}_S , \mathbf{u}_L und p .

3.2 Helmholtz-Ansatz und fouriertransformierte Lösung

Die Lösung nach Helmholtz spaltet den Verschiebungsvektor in einen rotationsfreien und einen quellenfreien Anteil auf. Dadurch lässt sich der Ansatz analog zu Kapitel 2.2 wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{u}_S = \text{grad}(\Phi_S) + \text{rot}(\Psi_S) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}_L = \text{grad}(\Phi_L) + \text{rot}(\Psi_L)$$

Φ_α beschreibt ein Skalarfeld und Ψ_α ein Vektorfeld in Abhängigkeit von der Raumkoordinate \mathbf{x} und der Zeit t .

Indem man nun Gl.(3.22) in die Gleichungen (3.19)-(3.21) einsetzt, erhält man folgenden Satz an Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot \Delta(\Phi_S) - n^S \cdot p - \rho^S \cdot \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} + \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right) \right] \\ + \text{rot} \left[\mu^S \cdot \Delta(\Psi_S) - \rho^S \cdot \frac{\partial^2 \Psi_S}{\partial t^2} + \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_S}{\partial t} \right) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[-n^L \cdot p - \rho^L \cdot \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial t^2} - \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right) \right] \\ + \text{rot} \left[-\rho^L \cdot \frac{\partial^2 \Psi_L}{\partial t^2} - \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_S}{\partial t} \right) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\text{div grad} \left[n^S \cdot \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + n^L \cdot \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} \right] = 0 \quad (3.25)$$

Das Gleichungssystem ist erfüllt, wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern der Gleichungen (3.23)-(3.24) zu Null gesetzt werden und die Kontinuitätsbedingung (Gl.(3.25)) eingehalten ist. Man erhält dann:

$$(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot \Delta(\Phi_S) - n^S \cdot p = \rho^S \cdot \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} - \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right) \quad (3.26)$$

$$-n^L \cdot p = \rho^L \cdot \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial t^2} + \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right) \quad (3.27)$$

$$\Delta \left(n^S \cdot \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + n^L \cdot \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.28)$$

$$\mu^S \cdot \Delta(\Psi_S) = \rho^S \cdot \frac{\partial^2 \Psi_S}{\partial t^2} - \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_S}{\partial t} \right) \quad (3.29)$$

$$\rho^L \cdot \frac{\partial^2 \Psi_L}{\partial t^2} + \alpha_\nu \cdot \left(\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_S}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Indem man Gl.(3.27) in Gl.(3.26) einsetzt, wird der Druck p eliminiert, und es ergibt sich folgende Gleichung:

$$(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot \Delta(\Phi_S) = \rho^S \cdot \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} - \frac{n^S}{n^L} \cdot \rho^L \cdot \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial t^2} - \frac{\alpha_\nu}{n^L} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \right) \quad (3.31)$$

Im weiteren Verlauf wird die Dissipation infolge des Durchlässigkeitswiderstandes zwischen Festkörper und Flüssigkeit nicht berücksichtigt ($\alpha_\nu = 0$). Die Dissipation wird auf Grundlage des Korrespondenzprinzips in Form einer hysteretischen Materialdämpfung über einen komplexen Elastizitätsmodul erfasst.

Man erhält, nach Anwendung der Fourier-Transformation bzgl. der Ortskoordinaten x, y und der Zeit t (s. Anhang A) auf die Gleichungen (3.31) und (3.28) des Gradientenanteils, folgende Ausdrücke in Abhängigkeit der skalaren Potentiale $\bar{\Phi}_S$ und $\bar{\Phi}_L$:

$$(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \cdot (\bar{\Phi}_S) = -\rho^S \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Phi}_S + \frac{n^S}{n^L} \cdot \rho^L \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Phi}_L \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \cdot (n^S \cdot \bar{\Phi}_S + n^L \cdot \bar{\Phi}_L) = 0 \quad (3.33)$$

Zur Lösung der obigen Gleichungen kann folgender Ansatz angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_S &= A_{S1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot z} + A_{S2} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot z} \\ \bar{\Phi}_L &= A_{L1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot z} + A_{L2} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot z} \end{aligned} \quad (3.34)$$

In Gl.(3.32) und Gl.(3.33) eingefügt, ergibt sich:

$$(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot (\lambda_1^2 - k_x^2 - k_y^2) \cdot (\bar{\Phi}_S) = -\rho^S \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Phi}_S + \frac{n^S}{n^L} \cdot \rho^L \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Phi}_L \quad (3.35)$$

$$(\lambda_1^2 - k_x^2 - k_y^2) \cdot (n^S \cdot \bar{\Phi}_S + n^L \cdot \bar{\Phi}_L) = 0 \quad (3.36)$$

Für Gleichung (3.36) lassen sich zwei Lösungen finden:

Lösung 1:

$$\begin{aligned} n^S \cdot \bar{\Phi}_S^{(1)} + n^L \cdot \bar{\Phi}_L^{(1)} &= 0 \\ \Rightarrow \bar{\Phi}_L^{(1)} &= -\frac{n^S}{n^L} \cdot \bar{\Phi}_S^{(1)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

eingesetzt in Gl.(3.35) ergibt:

$$\lambda_{11}^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_{11}^2 \quad (3.38)$$

mit

$$k_{11}^2 = \frac{(\rho^S \cdot (n^L)^2 + \rho^L \cdot (n^S)^2) \cdot \omega^2}{(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot (n^L)^2} \quad (3.39)$$

Lösung 2:

$$\lambda_{12}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (3.40)$$

Für diese Lösung erhält man aus Gl.(3.35), wegen $(\lambda_1^2 - k_x^2 - k_y^2) \cdot (\bar{\Phi}_S) = 0$:

$$\bar{\Phi}_L^{(2)} = \frac{\rho^S}{\rho^L} \cdot \frac{n^L}{n^S} \cdot \bar{\Phi}_S^{(2)} \quad (3.41)$$

Die Beziehungen in Gl.(3.37) und Gl.(3.41) zeigen, dass die Dilatationswellen im Festkörper und in der Flüssigkeit in der jeweiligen Lösung dieselbe Wellenform haben. In der ersten Lösung bewegen sich Festkörper und Flüssigkeit gegensinnig, während man in der zweiten Lösung eine gleichsinnige Bewegung mit jeweils unterschiedlichen Amplitudenverhältnissen hat.

Nach der Fouriertransformation der Gleichungen (3.29) und (3.30) des Rotationsanteils, unter Vernachlässigung der Dissipation ($\alpha_\nu = 0$), ergeben sich folgende Ausdrücke in Abhängigkeit der Vektorpotentiale $\bar{\Psi}_S$ und $\bar{\Psi}_L$:

$$\mu^S \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \cdot (\bar{\Psi}_S) = -\rho^S \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Psi}_S \quad (3.42)$$

$$-\rho^L \cdot \omega^2 \cdot \bar{\Psi}_L = 0 \quad (3.43)$$

$$\Rightarrow \bar{\Psi}_L = 0$$

Gl.(3.43) macht deutlich, dass der Rotationsanteil des Flüssigkeitskörpers verschwindet und wie zu erwarten keine Scherwellen in der Flüssigkeit verlaufen.

Gl.(3.42) liefert die Wellengleichung für den quellenfreien Anteil:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \cdot (\bar{\Psi}_S) + k_2^2 \cdot \bar{\Psi}_S = 0 \quad (3.44)$$

$$k_2^2 = \frac{\rho^S \cdot \omega^2}{\mu^S} \quad (3.45)$$

Unter Verwendung des Lösungsansatzes:

$$\bar{\Psi}_{Si} = B_{Si1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot z} + B_{Si2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot z} \quad (3.46)$$

folgt aus Gl.(3.44):

$$(\lambda_2^2 - k_x^2 - k_y^2 + k_2^2) \cdot \bar{\Psi}_{Si} = 0 \quad (3.47)$$

mit der Lösung:

$$\lambda_2^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_2^2 \quad (3.48)$$

Insgesamt erhält man folgende Lösungen für die Helmholtz-Potentiale:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_S &= \bar{\Phi}_S^{(1)} + \bar{\Phi}_S^{(2)} \Rightarrow \\ \bar{\Phi}_S &= A_{S11} \cdot e^{\lambda_{11} \cdot z} + A_{S21} \cdot e^{-\lambda_{11} \cdot z} + A_{S12} \cdot e^{\lambda_{12} \cdot z} + A_{S22} \cdot e^{-\lambda_{12} \cdot z} \\ \bar{\Phi}_L &= \bar{\Phi}_L^{(1)} + \bar{\Phi}_L^{(2)} \Rightarrow \\ \bar{\Phi}_L &= -\frac{n^S}{n^L} \cdot (A_{S11} \cdot e^{\lambda_{11} \cdot z} + A_{S21} \cdot e^{-\lambda_{11} \cdot z}) + \frac{\rho^S}{\rho^L} \cdot \frac{n^L}{n^S} \cdot (A_{S12} \cdot e^{\lambda_{12} \cdot z} + A_{S22} \cdot e^{-\lambda_{12} \cdot z}) \\ \bar{\Psi}_{Si} &= B_{Si1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot z} + B_{Si2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot z} \\ \bar{\Psi}_{Li} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_{11}^2 \\ \lambda_{12}^2 &= k_x^2 + k_y^2 \\ \lambda_2^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_2^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Über Rand- bzw. Übergangsbedingungen im geschichteten Halbraum lassen sich die unbekanntenen Koeffizienten A_{S11} bis B_{Si2} bestimmen und dadurch auch der Verlauf der transformierten Größen.

3.3 Verschiebungen und Spannungen im Bildraum

Die Verschiebungen lassen sich demnach nach Gleichung (3.22) unter Berücksichtigung, dass Ψ_{Sz} zu Null gesetzt werden kann (vgl. Kapitel 2.2) und $\Psi_{Li} = 0$ gilt, wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} u_S^x &= \Phi_{S,x} - \Psi_{Sy,z} & u_L^x &= \Phi_{L,x} \\ u_S^y &= \Phi_{S,y} + \Psi_{Sx,z} & u_L^y &= \Phi_{L,y} \\ u_S^z &= \Phi_{S,z} - \Psi_{Sx,y} + \Psi_{Sy,x} & u_L^z &= \Phi_{L,z} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dazu ergeben sich die transformierten Größen:

$$\begin{aligned} \bar{u}_S^x &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi}_S - \bar{\Psi}_{Sy,z} & \bar{u}_L^x &= i \cdot k_x \cdot \bar{\Phi}_L \\ \bar{u}_S^y &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi}_S + \bar{\Psi}_{Sx,z} & \bar{u}_L^y &= i \cdot k_y \cdot \bar{\Phi}_L \\ \bar{u}_S^z &= \bar{\Phi}_{S,z} - i \cdot k_y \cdot \bar{\Psi}_{Sx} + i \cdot k_x \cdot \bar{\Psi}_{Sy} & \bar{u}_L^z &= \bar{\Phi}_{L,z} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Setzt man den Lösungsansatz für die Potentiale aus Gl.(3.49) in Gl.(3.52) ein, so erhält man die allgemeine Lösung der transformierten Verschiebungen:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_S^x \\ \bar{u}_S^y \\ \bar{u}_S^z \\ \bar{u}_L^x \\ \bar{u}_L^y \\ \bar{u}_L^z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & ik_x & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & ik_y & ik_y & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & -\lambda_{11} & \lambda_{12} & -\lambda_{12} & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \\ -ik_x \frac{n^S}{n^L} & -ik_x \frac{n^S}{n^L} & ik_x \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & ik_x \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik_y \frac{n^S}{n^L} & -ik_y \frac{n^S}{n^L} & ik_y \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & ik_y \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{11} \frac{n^S}{n^L} & \lambda_{11} \frac{n^S}{n^L} & \lambda_{12} \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & -\lambda_{12} \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \quad (3.53)$$

mit

$$\mathbf{C} = [A_{S11}e^{\lambda_{11}z} \quad A_{S21}e^{-\lambda_{11}z} \quad A_{S12}e^{\lambda_{12}z} \quad A_{S22}e^{-\lambda_{12}z} \quad B_{Sx1}e^{\lambda_2z} \quad B_{Sx2}e^{-\lambda_2z} \quad B_{Sy1}e^{\lambda_2z} \quad B_{Sy2}e^{-\lambda_2z}]$$

Die transformierten effektiven Festkörperspannungen $\bar{\mathbf{T}}_E^S$ ergeben sich durch Einsetzen des Lagrange-Dehnungstensors (Gl.(3.15)) mit den transformierten Verschiebungen in die Gleichung (3.14). Daraus resultiert folgendes Gleichungssystem, wobei hier nur die Schnittspannungen für den Normalenvektor in z -Richtung angeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{Exz}^S \\ \bar{T}_{Eyz}^S \\ \bar{T}_{Ez}^S \end{pmatrix} = [\bar{\mathbf{T}}_E^S] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\mu^S \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_{11} & -2ik_x \lambda_{11} & 2ik_x \lambda_{12} & -2ik_x \lambda_{12} & k_x k_y & k_x k_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ 2ik_y \lambda_{11} & -2ik_y \lambda_{11} & 2ik_y \lambda_{12} & -2ik_y \lambda_{12} & \lambda_2^2 + k_y^2 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y & -k_x k_y \\ 2\lambda_{11}^2 - \frac{\lambda^S}{\mu^S} k_{11}^2 & 2\lambda_{11}^2 - \frac{\lambda^S}{\mu^S} k_{11}^2 & 2\lambda_{12}^2 & 2\lambda_{12}^2 & -2ik_y \lambda_2 & 2ik_y \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 & -2ik_x \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \quad (3.54)$$

Der Flüssigkeitsdruck ist durch die Gl.(3.27) beschrieben und ergibt sich zu:

$$\bar{p} = \frac{\rho^L}{n^L} \cdot \omega^2 \cdot \left[-\frac{n^S}{n^L} \quad -\frac{n^S}{n^L} \quad \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} \quad \frac{\rho^S}{\rho^L} \frac{n^L}{n^S} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \mathbf{C}^T \quad (3.55)$$

3.4 Randbedingungen

Da im vorliegenden Fall ein ungeschichteter Halbraum untersucht wird, muss nur die Spannungsrandbedingung an der Oberfläche ($z = 0$) formuliert werden.

$$[\bar{\mathbf{T}}^S + \bar{\mathbf{T}}^L] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{p}} = [-\bar{p} \cdot \mathbf{I} + \bar{\mathbf{T}}_E^S + \bar{\mathbf{T}}_E^L] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{p}_{xz} \\ \bar{p}_{yz} \\ \bar{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier stellt $\bar{\mathbf{p}}$ den Lastvektor dar, der an der Oberfläche wirkt. Somit lässt sich die Spannungsrandbedingung im transformierten Raum unter Berücksichtigung, dass die Effektivspannung in der Flüssigkeit zu Null wird (vgl. Gl.(3.14)), wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{Exz}^S \\ \bar{T}_{Eyz}^S \\ \bar{T}_{Ez}^S \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz} \\ -\bar{p}_{yz} \\ -\bar{p}_z + \bar{p}^* \\ \bar{p}^* \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Für eine durchlässige Oberfläche wird der Druck p am Rand zu Null gesetzt [dBL94]. p^* steht für den Druck an der Stelle $z = 0$.

Der Lösungsansatz für die Helmholtz-Potentiale in Gl.(3.49) stellt, in Abhängigkeit vom Exponenten, Raumwellen dar, die sich von der Oberfläche aus bzw. zur Oberfläche hin bewegen, sowie Oberflächenwellen, die mit der Tiefe exponentiell zu- bzw. abnehmen. Unter Berücksichtigung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung (vgl. Kapitel 2.4) werden für negative ω die Koeffizienten $A_{S11}, A_{S12}, B_{Sx1}$ und B_{Sy1} zu Null gesetzt und nur die Koeffizienten $A_{S21}, A_{S22}, B_{Sx2}$ und B_{Sy2} berücksichtigt. Die Lösung für positive ω ergibt sich anhand von Symmetrieüberlegungen aus der Lösung für negative ω . Somit lässt sich anhand der Gl.(3.54) bis Gl.(3.56) folgendes Gleichungssystem als Randbedingung an der Stelle $z = 0$ anschreiben:

$$\mu^S \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_{11} & -2ik_x\lambda_{12} & k_xk_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ -2ik_y\lambda_{11} & -2ik_y\lambda_{12} & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_xk_y \\ 2\lambda_{11}^2 - \frac{\lambda^S}{\mu^S}k_{11}^2 & 2\lambda_{12}^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \\ -\frac{\omega^2 n^S \rho^L}{\mu^S (n^L)^2} & \frac{\omega^2 \rho^S}{\mu^S n^S} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{S21} \\ A_{S22} \\ B_{Sx2} \\ B_{Sy2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz} \\ -\bar{p}_{yz} \\ -\bar{p}_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Anhand der Lösung aus Gleichung (3.57) ergeben sich die Verschiebungen des Festkörpergerüsts an der Stelle $z = 0$ zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_S^x \\ \bar{u}_S^y \\ \bar{u}_S^z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & 0 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & -\lambda_2 & 0 \\ -\lambda_{11} & -\lambda_{12} & -ik_y & ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{S21} \\ A_{S22} \\ B_{Sx2} \\ B_{Sy2} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

3.5 Grundlösungen für den Halbraum nach der TPM

Wie in Kapitel 2.5 dargestellt, werden nachfolgend für den Halbraum nach der TPM die Grundlösungen der einzelnen Verschiebungskomponenten für eine Vertikalbelastung, eine Längsbelastung und eine Querbelastung formuliert.

3.5.1 Grundlösung für eine Vertikalbelastung

Die Spannungsrandbedingung an der Halbraumoberfläche ist unter einer Vertikalbelastung $\bar{p}_z(k_x, k_y, \omega)$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{Exz}^S \\ \bar{T}_{Eyz}^S \\ \bar{T}_{Ezz}^S \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \mu^S \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_{11} & -2ik_x\lambda_{12} & k_x k_y & -\lambda_2^2 - k_x^2 \\ -2ik_y\lambda_{11} & -2ik_y\lambda_{12} & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ 2\lambda_{11}^2 - \frac{\lambda^S}{\mu^S} k_{11}^2 & 2\lambda_{12}^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \\ -\frac{\omega^2 n^S \rho^L}{\mu^S (n^L)^2} & \frac{\omega^2 \rho^S}{\mu^S n^S} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{S21} \\ A_{S22} \\ B_{Sx2} \\ B_{Sy2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{p}_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Die vier Ansatzkoeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} A_{S21} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} (2k_r^2 - k_2^2) \rho^S (n^L)^2 \\ A_{S22} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} (2k_r^2 - k_2^2) \rho^L (n^S)^2 \\ B_{Sx2} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} 2ik_y \lambda_1^* \\ B_{Sy2} &= -\frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} 2ik_x \lambda_1^* \end{aligned} \quad (3.60)$$

mit

$$\Delta = -\rho^* (2k_r^2 - k_2^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1^* \lambda_2 \quad (3.61)$$

$$\rho^* = \rho^S (n^L)^2 + \rho^L (n^S)^2 \quad (3.62)$$

$$\lambda_1^* = \lambda_{11} \rho^S (n^L)^2 + \lambda_{12} \rho^L (n^S)^2$$

Indem man die Koeffizienten in Gl.(3.49) einsetzt, ergeben sich die Potentialfunktionen für den Festkörper zu:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_S &= \frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} (2k_r^2 - k_2^2) (\rho^S (n^L)^2 e^{-\lambda_{11}z} + \rho^L (n^S)^2 e^{-\lambda_{12}z}) \\ \bar{\Psi}_{Sx} &= \frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} 2ik_y \lambda_1^* e^{-\lambda_2 z} \\ \bar{\Psi}_{Sy} &= -\frac{\bar{p}_z}{\mu^S \Delta} 2ik_x \lambda_1^* e^{-\lambda_2 z} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die transformierten Verschiebungen an der Oberfläche können, indem man die Potentiale in Gl.(3.52) einsetzt, wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bar{u}_z^S &= ik_x \bar{\Phi}_S + \lambda_2 \bar{\Psi}_{Sy} = \frac{\bar{p}_z ik_x}{\mu^S \Delta} (\rho^* (2k_r^2 - k_2^2) - 2\lambda_1^* \lambda_2) \\ \bar{v}_z^S &= ik_y \bar{\Phi}_S - \lambda_2 \bar{\Psi}_{Sx} = \frac{\bar{p}_z ik_y}{\mu^S \Delta} (\rho^* (2k_r^2 - k_2^2) - 2\lambda_1^* \lambda_2) \\ \bar{w}_z^S &= -\lambda_{11} \bar{\Phi}_S^{(1)} - \lambda_{12} \bar{\Phi}_S^{(2)} - ik_y \bar{\Psi}_{Sx} + ik_x \bar{\Psi}_{Sy} = \frac{\bar{p}_z \lambda_1^*}{\mu^S \Delta} k_2^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Grundlösung der Verschiebungen an der Oberfläche infolge einer vertikal wirkenden Belastung $\bar{p}_z = 1$ ergibt sich im transformierten Raum zu:

$$\begin{aligned}\bar{G}_{uz}^S &= \frac{ik_x}{\mu^S \Delta} (\rho^* (2k_r^2 - k_s^2) - 2\lambda_1^* \lambda_2) \\ \bar{G}_{vz}^S &= \frac{ik_y}{\mu^S \Delta} (\rho^* (2k_r^2 - k_s^2) - 2\lambda_1^* \lambda_2) \\ \bar{G}_{wz}^S &= \frac{\lambda_1^*}{\mu^S \Delta} k_2^2\end{aligned}\tag{3.65}$$

3.5.2 Grundlösung für eine Längsbelastung

Für den Fall einer horizontal in x -Richtung wirkenden Belastung $\bar{p}_{xz}(k_x, k_y, \omega)$ lässt sich die Spannungsrandbedingung an der Oberfläche wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{Exz}^S \\ \bar{T}_{Eyz}^S \\ \bar{T}_{Ez}^S \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{p}_{xz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die vier Ansatzkoeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}A_{S21} &= -\frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} 2ik_x \lambda_2 \rho^S (n^L)^2 \\ A_{S22} &= -\frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} 2ik_x \lambda_2 \rho^L (n^S)^2 \\ B_{Sx2} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_s^2))}{\lambda_2^2} \\ B_{Sy2} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} \frac{4k_y^2 \lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_s^2) (\lambda_2^2 + k_y^2)}{\lambda_2^2}\end{aligned}\tag{3.66}$$

Durch Einsetzen der Koeffizienten in Gl.(3.49), erhält man die Potentialfunktionen für den Festkörper:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_S &= -\frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} 2ik_x \lambda_2 (\rho^S (n^L)^2 e^{-\lambda_{11}z} + \rho^L (n^S)^2 e^{-\lambda_{12}z}) \\ \bar{\Psi}_{Sx} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_s^2))}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \\ \bar{\Psi}_{Sy} &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} \frac{4k_y^2 \lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_s^2) (\lambda_2^2 + k_y^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z}\end{aligned}\tag{3.67}$$

Die transformierten Verschiebungen an der Oberfläche lassen sich, indem man die Potentiale in Gl.(3.52) einsetzt, wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x^S &= \frac{\bar{p}_{xz}}{\mu^S \Delta} \cdot \left(k_y^2 \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^* \lambda_2 - \rho^* \frac{2k_r^2 - k_2^2}{\lambda_2}) + \rho^* k_2^2 \lambda_2 \right) \\
\bar{v}_x^S &= -\frac{\bar{p}_{xz} k_x k_y}{\mu^S \Delta} \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^* \lambda_2 - \rho^* \frac{2k_r^2 - k_2^2}{\lambda_2}) \\
\bar{w}_x^S &= \frac{\bar{p}_{xz} i k_x}{\mu^S \Delta} \cdot (2\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2))
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Die Grundlösung der Verschiebungen an der Oberfläche infolge einer horizontal wirkenden Belastung $\bar{p}_{xz} = 1$ ergibt sich im transformierten Raum zu:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{ux}^S &= \frac{1}{\mu^S \Delta} \cdot \left(k_y^2 \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^* \lambda_2 - \rho^* \frac{2k_r^2 - k_2^2}{\lambda_2}) + \rho^* k_2^2 \lambda_2 \right) \\
\bar{G}_{vx}^S &= -\frac{k_x k_y}{\mu^S \Delta} \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^* \lambda_2 - \rho^* \frac{2k_r^2 - k_2^2}{\lambda_2}) \\
\bar{G}_{wx}^S &= \frac{i k_x}{\mu^S \Delta} \cdot (2\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2))
\end{aligned} \tag{3.69}$$

3.5.3 Grundlösung für eine Querbelastung

Für den Fall einer horizontal in y -Richtung wirkenden Belastung $\bar{p}_{yz}(k_x, k_y, \omega)$ lässt sich die Spannungsrandbedingung an der Oberfläche wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{Ezz}^S \\ \bar{T}_{Eyz}^S \\ \bar{T}_{Ez}^S \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{p}_{yz} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die vier Ansatzkoeffizienten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
A_{S21} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} 2i k_y \lambda_2 \rho^S (n^L)^2 \\
A_{S22} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} 2i k_y \lambda_2 \rho^L (n^S)^2 \\
B_{Sx2} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} \frac{4k_x^2 \lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2)(\lambda_2^2 + k_x^2)}{\lambda_2^2} \\
B_{Sy2} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2))}{\lambda_2^2}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Indem man die Koeffizienten in Gl.(3.49) einsetzt, ergeben sich die Potentialfunktionen für den Festkörper zu:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_S &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} 2i k_y \lambda_2 (\rho^S (n^L)^2 e^{-\lambda_{11} z} + \rho^L (n^S)^2 e^{-\lambda_{12} z}) \\
\bar{\Psi}_{Sx} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} \frac{4k_x^2 \lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2)(\lambda_2^2 + k_x^2)}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \\
\bar{\Psi}_{Sy} &= -\frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S \Delta} \frac{k_x k_y (4\lambda_1^* \lambda_2 - \rho^* (2k_r^2 - k_2^2))}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Die transformierten Verschiebungen an der Oberfläche lauten, durch Einsetzen der Potentiale in Gl.(3.52), wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_y^S &= -\frac{\bar{p}_{yz}k_xk_y}{\mu^S\Delta} \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^*\lambda_2 - \rho^*\frac{2k_r^2-k_2^2}{\lambda_2}) \\
 \bar{v}_y^S &= \frac{\bar{p}_{yz}}{\mu^S\Delta} \cdot \left(k_x^2 \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^*\lambda_2 - \rho^*\frac{2k_r^2-k_2^2}{\lambda_2}) + \rho^*k_2^2\lambda_2 \right) \\
 \bar{w}_y^S &= \frac{\bar{p}_{yz}ik_y}{\mu^S\Delta} \cdot (2\lambda_1^*\lambda_2 - \rho^*(2k_r^2 - k_2^2))
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Die Grundlösung der Verschiebungen an der Oberfläche infolge einer horizontal wirkenden Belastung $\bar{p}_{yz} = 1$ ergibt sich im transformierten Raum zu:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{uy}^S &= -\frac{k_xk_y}{\mu^S\Delta} \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^*\lambda_2 - \rho^*\frac{2k_r^2-k_2^2}{\lambda_2}) \\
 \bar{G}_{vy}^S &= \frac{1}{\mu^S\Delta} \cdot \left(k_x^2 \cdot (4\lambda_1^* - 2\rho^*\lambda_2 - \rho^*\frac{2k_r^2-k_2^2}{\lambda_2}) + \rho^*k_2^2\lambda_2 \right) \\
 \bar{G}_{wy}^S &= \frac{ik_y}{\mu^S\Delta} \cdot (2\lambda_1^*\lambda_2 - \rho^*(2k_r^2 - k_2^2))
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Kapitel 4

Vergleich der Untergrundmodelle

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Untergrundmodelle nach der TPM und der klassischen Theorie miteinander verglichen.

In einem ersten Schritt wird der Zusammenhang der Bodenparameter für die beiden Untergrundmodelle erläutert. Ein Vergleich der beiden Bodenmodelle ist nur bedingt möglich und in Abhängigkeit der Porosität auf einen bestimmten Bereich beschränkt.

In einem zweiten Schritt werden die Wellengeschwindigkeiten sowie das Verhalten der Rayleighwellen miteinander verglichen.

Schließlich wird noch auf die Verschiebungen unter einer harmonischen Einzellast eingegangen.

4.1 Untergrundparameter

Ein isotroper, homogener Halbraum lässt sich durch ein Stoffgesetz mit zwei Materialkonstanten beschreiben. In unserem Fall seien die Laméschen Materialkonstanten λ^{SR} und μ^{SR} nochmals zugrunde gelegt, die wiederum in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E^{SR} und der Querdehnzahl ν^{SR} ausgedrückt werden können. Der Index R steht für den realen Festkörper ohne Poren.

$$\lambda^{SR} = \frac{\nu^{SR} \cdot E^{SR}}{(1 + \nu^{SR})(1 - 2\nu^{SR})} \quad (4.1)$$

$$\mu^{SR} = \frac{E^{SR}}{2(1 + \nu^{SR})} \quad (4.2)$$

In der Arbeit von S. Breuer [Bre98b] wurde für den porösen Halbraum im Bereich von Porositäten, die weniger als 20 % betragen ($n^S \geq 0.8$), ein linearer Zusammenhang zwischen dem realen Elastizitätsmodul als auch der realen Querdehnzahl zu den jeweiligen partialen Größen formuliert.

$$\begin{aligned} E^S &= n^S \cdot E^{SR} \\ \nu^S &= n^S \cdot \nu^{SR} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Der partielle Elastizitätsmodul und die Querdehnzahl sind daher keine unabhängigen Größen, sondern werden in Abhängigkeit von der Porosität bestimmt. Für den Fall, dass der Porenanteil des flüssigkeitsgefüllten Raums größer ist, können obige Gleichungen nicht

zugrunde gelegt werden. Dem Autor ist bezüglich dessen ein Zusammenhang, welcher die Beziehung der realen Größen zu den Partialgrößen beschreibt, nicht bekannt.

Die makroskopischen Laméschen Konstanten lassen sich für den porösen Untergrund folgendermaßen anschreiben:

$$\lambda^S = \frac{(n^S)^2 \cdot \nu^{SR} \cdot E^{SR}}{(1 + n^S \cdot \nu^{SR})(1 - 2n^S \cdot \nu^{SR})} \quad (4.4)$$

$$\mu^S = \frac{n^S \cdot E^{SR}}{2(1 + n^S \cdot \nu^{SR})} \quad (4.5)$$

Für einen porenlosen Boden $n^S = 1$ nehmen die Laméschen Konstanten die gewohnte Form des klassischen Halbraums an. Zur Berücksichtigung einer Materialdämpfung wird im weiteren Verlauf ein komplexer Elastizitätsmodul mit der hysteretischen Dämpfungskonstanten $d (> 0)$ angesetzt.

$$E^{SR*} = E^{SR} \cdot (1 + 2d \cdot i) \quad (4.6)$$

Für negative Frequenzen ω (s. Kapitel 2.4) wird die Dämpfung mit einem negativen Term berücksichtigt [Mül89]. Im weiteren Verlauf wird, soweit nicht anderweitig angemerkt, der komplexe Elastizitätsmodul mit E^{SR} bezeichnet.

Aufgrund der materiellen Inkompressibilität (vgl. Kapitel 3.1) ist die reale Querdehnzahl für den Festkörper mit $\nu^{SR} = 0.5$ vorgegeben.

4.2 Wellengeschwindigkeiten

Für den klassischen Halbraum können die Wellengeschwindigkeiten wie folgt angeschrieben werden:

$$\tilde{c}_p^2 = \frac{\lambda^{SR} + 2\mu^{SR}}{\rho^{SR}} \quad (4.7)$$

$$\tilde{c}_s^2 = \frac{\mu^{SR}}{\rho^{SR}} \quad (4.8)$$

Die Phasengeschwindigkeiten c_p und c_s für die Dilatations- oder Primärwelle (Index: p) und die Scher- oder Sekundärwelle (Index: s) erhält man über den Absolutwert aus dem Quotienten der Kreisfrequenz und dem Realteil der Wellenzahl:

$$c_p = \left| \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_p)} \right|; \quad k_p = \frac{\omega}{\tilde{c}_p} \quad (4.9)$$

$$c_s = \left| \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_s)} \right|; \quad k_s = \frac{\omega}{\tilde{c}_s} \quad (4.10)$$

Für den Boden nach der TPM erhält man hingegen zwei Dilatationswellengeschwindigkeiten. Über die Wellenzahl k_{11} (vgl. Gl.(3.39)) kann nachfolgender Ausdruck angeschrieben werden.

$$\tilde{c}_{11}^2 = \frac{\omega^2}{k_{11}^2} = \frac{(\lambda^S + 2\mu^S) \cdot (n^L)^2}{\rho^S \cdot (n^L)^2 + \rho^L \cdot (n^S)^2} \quad (4.11)$$

$$c_{11} = \left| \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_{11})} \right| \quad (4.12)$$

Die zweite Kompressionswellengeschwindigkeit ergibt sich, aufgrund der Tatsache, dass die Wellenzahl in Gl.(3.40) den Wert Null annimmt, zu einem unendlichen Wert.

$$c_{12} = \infty \quad (4.13)$$

Diese zweite Kompressionswelle trägt der Tatsache Rechnung, dass der Festkörper inkompressibel ist, während die langsamere Kompressionswelle die strukturelle Kompressibilität des Festkörpergerüsts widerspiegelt. Hierzu sei auch auf die Arbeit von Schanz und Diebels verwiesen [SD03].

Die Scherwellengeschwindigkeit im porösen Halbraum ergibt sich über Gl.(3.45) zu:

$$\tilde{c}_2^2 = \frac{\omega^2}{k_2^2} = \frac{\mu^S}{\rho^S} \quad (4.14)$$

$$c_2 = \left| \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_2)} \right| \quad (4.15)$$

Es sei nochmals erwähnt, dass es sich bei λ^S und μ^S um die makroskopischen Laméschen Konstanten [LdB97] des porösen Mediums handelt.

Betrachtet man das Gleichungssystem (3.57) unter der Voraussetzung eines lastfreien Zustandes, so erhält man nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante in Gl.(3.61) zu Null wird. Diese Beziehung lässt sich in folgender Weise anschreiben:

$$4 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{c_r}{c_{11}} \right)^2} + \frac{\rho^L (n^S)^2}{\rho^S (n^L)^2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c_r}{c_2} \right)^2} - \left(2 - \left(\frac{c_r}{c_2} \right)^2 \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\rho^L (n^S)^2}{\rho^S (n^L)^2} \right) = 0 \quad (4.16)$$

mit

$$c_r = \frac{\omega}{k_r}$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich folgender Ausdruck:

$$4 \left(\sqrt{1 - \alpha^2 Y^2} + \beta \right) \cdot \sqrt{1 - Y^2} - (2 - Y^2)^2 \cdot (1 + \beta) = 0 \quad (4.17)$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{c_2}{c_{11}} \right)^2 = \frac{1 - 2n^S \nu^{SR}}{2 - 2n^S \nu^{SR}} \cdot (1 + \beta), \quad Y^2 = \left(\frac{c_r}{c_2} \right)^2, \quad \beta = \frac{\rho^{LR} n^S}{\rho^{SR} n^L}$$

Im Falle einer Betrachtung mit reellen Elastizitätsmoduln erhält man aus Gl.(4.17), unter der Bedingung, dass $0 < Y < 1$, die Rayleighwellengeschwindigkeit c_R des ungedämpften porösen Halbraums. Die Geschwindigkeit ist abhängig vom Volumenanteil n^α und der realen Dichte $\rho^{\alpha R}$ der einzelnen Bestandteile.

Für den klassischen Halbraum vereinfacht sich Gl.(4.17) zu der bekannten Form:

$$4 \left(\sqrt{1 - \alpha^2 Y^2} \right) \cdot \sqrt{1 - Y^2} - (2 - Y^2)^2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 = \frac{1 - 2\nu^{SR}}{2 - 2\nu^{SR}}, \quad Y^2 = \left(\frac{c_r}{c_s} \right)^2$$

4.3 Graphische Veranschaulichung

Für die Halbraumberechnungen werden die Querdehnzahlen für den Festkörper nach der klassischen Theorie so bestimmt, dass sie den partialen Querdehnzahlen nach der TPM entsprechen. Ebenso werden auch der Elastizitätsmodul und die Festkörperdichte angepasst, um ähnliche mechanische und physikalische Eigenschaften beim Vergleich der beiden Untergrundmodelle zu gewährleisten.

$$\begin{aligned} \nu^{SR}(Klas) &= \nu^S(TPM) = n^S \cdot \nu^{SR}(TPM) = 0.5 \cdot n^S \\ E^{SR}(Klas) &= E^S(TPM) = n^S \cdot E^{SR}(TPM) \quad \text{für } n^S \geq 0.8 \\ \rho^{SR}(Klas) &= \rho^S(TPM) = n^S \cdot \rho^{SR}(TPM) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Halbraumgleichungen werden, falls nicht anderweitig angemerkt, für die nachfolgend angegebenen Materialparameter ausgewertet und miteinander verglichen. Die reale Querdehnzahl ist für den inkompressiblen Festkörper nach der TPM mit $\nu^{SR} = 0.5$ angesetzt. Die Lamé-Konstanten erhält man über die Formulierungen aus Abschnitt 4.1. Für den klassischen Halbraum werden die Materialwerte entsprechend der Gl.(4.19) angepasst.

| | | | | | |
|-------------|---|------------------------|-------------|---|------------------------|
| ρ^{SR} | = | 2500 kg/m ³ | ρ^{LR} | = | 1000 kg/m ³ |
| E^{SR} | = | 50 MN/m ² | d | = | 0.025 |
| ν^{SR} | = | 0.5 | | | |

4.3.1 Verlauf der Wellengeschwindigkeiten

Die Phasengeschwindigkeiten der Raumwellen und die Rayleighwellengeschwindigkeit sind nach beiden Theorien unabhängig von der Frequenz. In den Abb.(4.1) und (4.2) sind die Phasen- und Rayleighwellengeschwindigkeiten der beiden Untergrundmodelle dargestellt. Der auffälligste Unterschied ist bei den Kompressionswellen zu beobachten (vgl. Abb.(4.3)). Es treten nach der TPM zwei Druckwellen auf. Die langsamere Kompressionswelle gibt die strukturelle Kompressibilität des Festkörpergerüsts wieder. Sie weist ein empfindliches Verhalten in Abhängigkeit von der Flüssigkeitsdichte ρ^{LR} bzw. deren Verhältnis zur Festkörperdichte ρ^{SR} auf. In Abb.(4.5) ist dieser Sachverhalt dargestellt. Für immer kleiner werdende ρ^{LR} nähert sich die Druckwelle derjenigen nach der klassischen Theorie und nimmt deren Verlauf an. Für größer werdende ρ^{LR} wird die Druckwelle langsamer. Für Werte oberhalb der Festkörperdichte nimmt die Kompressionswellengeschwindigkeit kleinere Werte als die der Scherwelle an. Dieser Sachverhalt wird in vorliegender Arbeit nicht näher untersucht.

Die Scherwellengeschwindigkeiten nehmen unter den Voraussetzungen aus Gl.(4.19) für beide Untergrundmodelle dieselben Werte an.

Der Vergleich der Rayleighwellengeschwindigkeit in Abb.(4.4) zeigt eine gute Übereinstimmung für die beiden Halbraummodelle mit geringfügigen Unterschieden. In Abb.(4.6) ist nochmals in Abhängigkeit der Flüssigkeitsdichte ρ^{LR} der Verlauf der Rayleighwellengeschwindigkeiten dargestellt. Auch hier ist wiederum zu beobachten, dass sich für kleiner werdende ρ^{LR} die Werte denen des klassischen Halbraums annähern. In Abb.(4.7) sind die Geschwindigkeiten der Rayleighwellen im Verhältnis zur Scherwellengeschwindigkeit tabellarisch zusammengefasst. Die Unterschiede belaufen sich auf unter 1%.

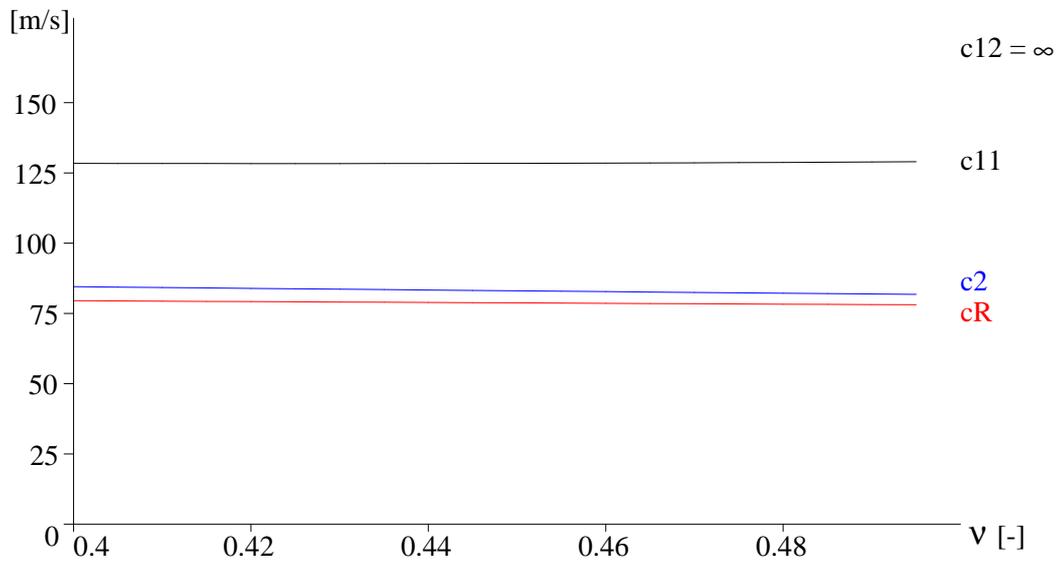


Abbildung 4.1: Verlauf der Phasengeschwindigkeiten c_{11} , c_{12} , c_2 und der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R nach der TPM in Abh. von der Querdehnzahl ν

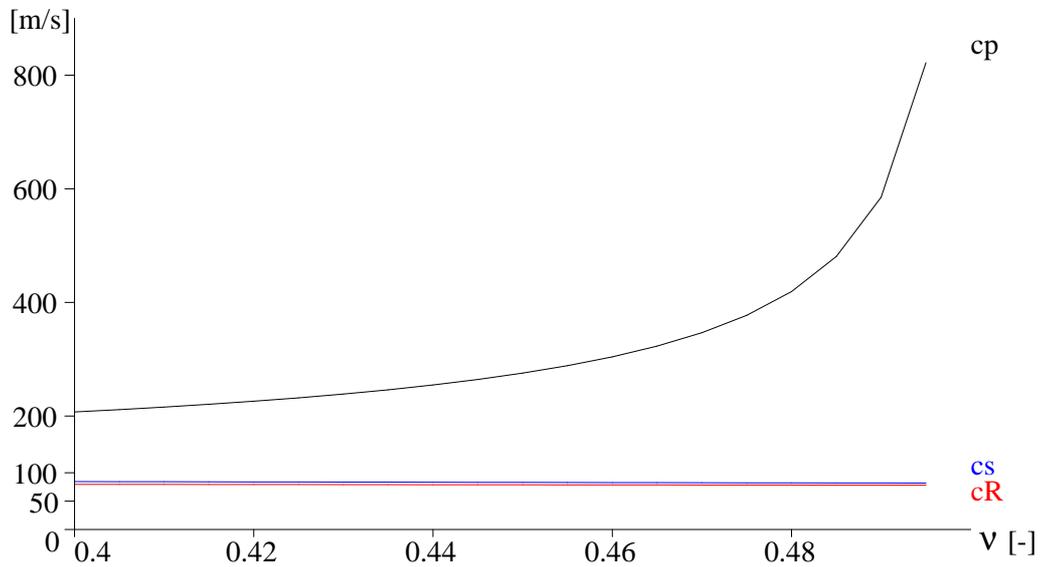


Abbildung 4.2: Verlauf der Phasengeschwindigkeiten c_p , c_s und der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R nach der klassischen Theorie in Abh. von der Querdehnzahl ν

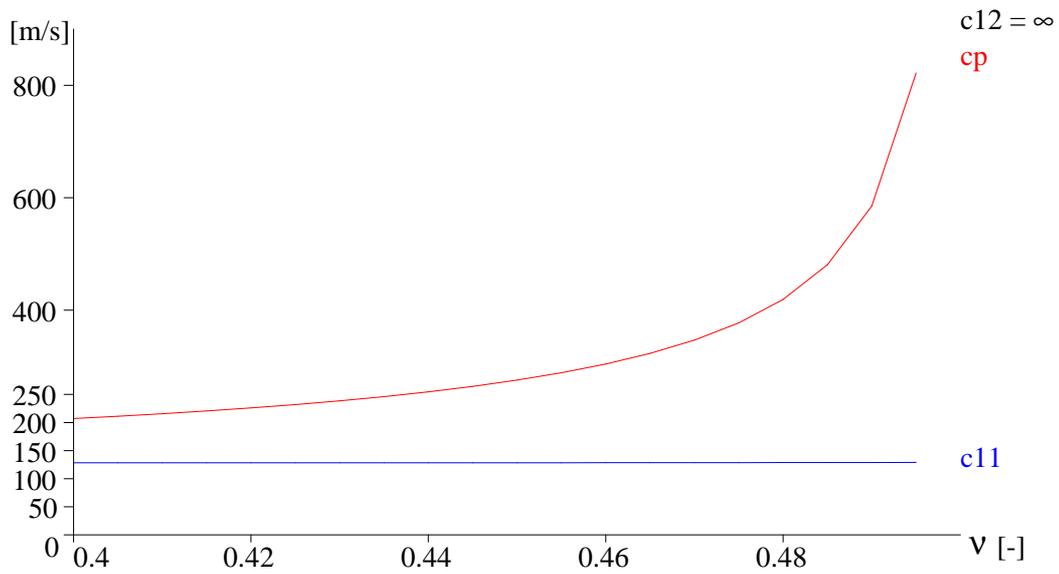


Abbildung 4.3: Vergleich der Kompressionswellengeschwindigkeit der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Querdehnzahl ν

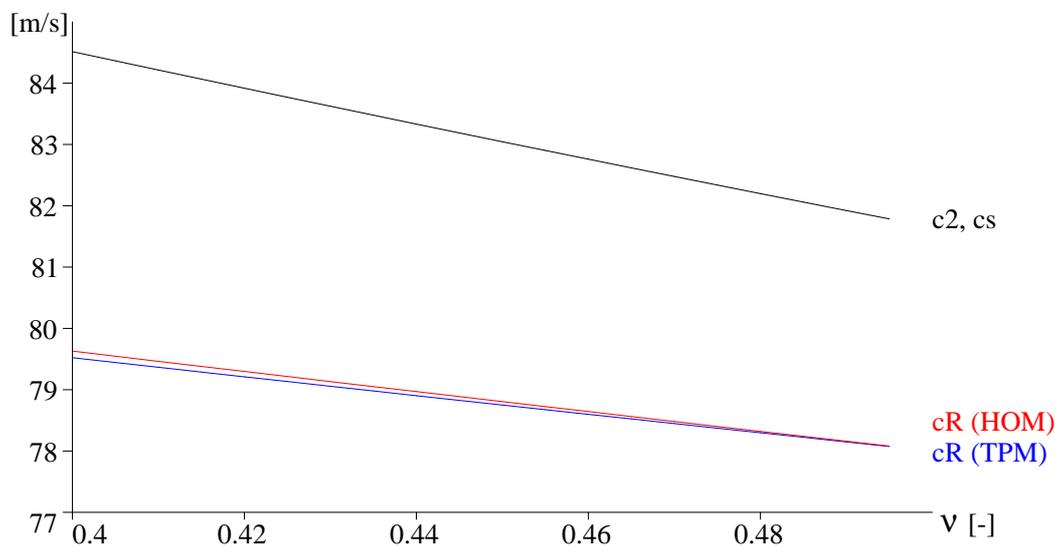


Abbildung 4.4: Vergleich der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Querdehnzahl ν

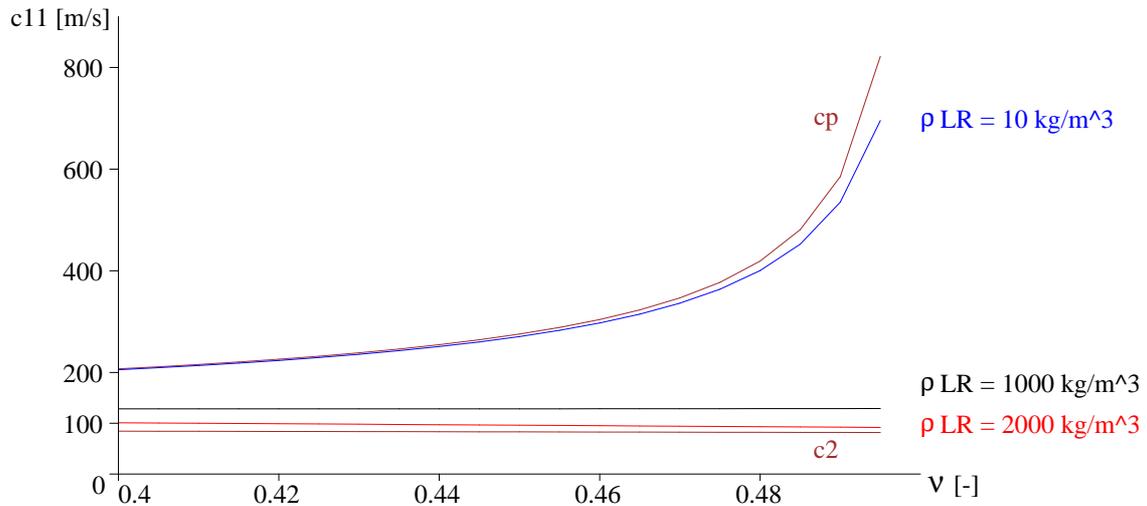


Abbildung 4.5: Verlauf der Kompressionswellengeschwindigkeit c_{11} nach der TPM für unterschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Querdehnzahl ν

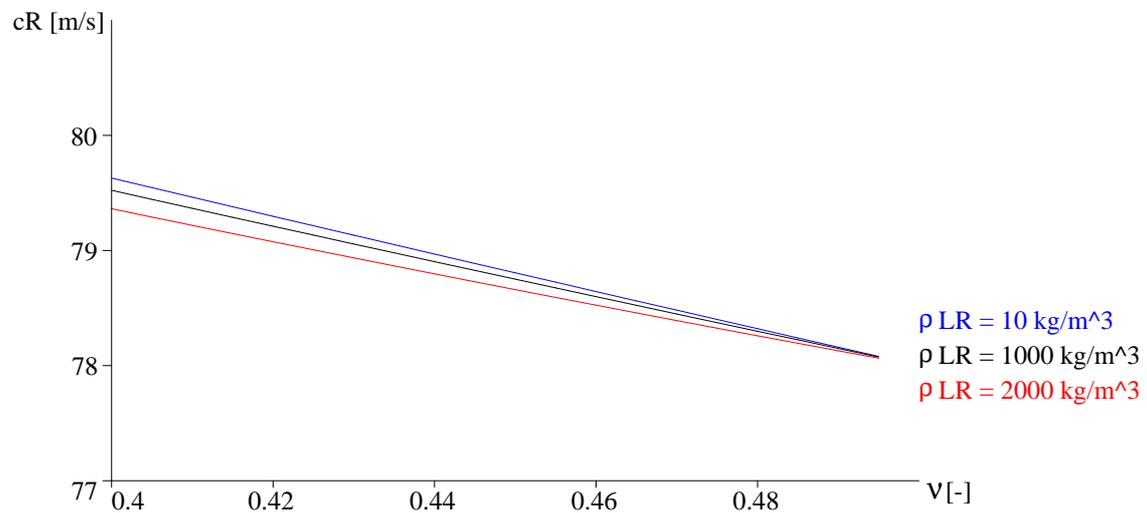


Abbildung 4.6: Verlauf der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R nach der TPM für unterschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Querdehnzahl ν

| Querdehnzahl ν | $c_R(\text{TPM})$ | $c_R(\text{TPM})$ | $c_R(\text{TPM})$ | $c_R(\text{HOM})$ |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------|
| | $\frac{\rho^{LR}}{\rho^{SR}} = 0.80$ | $\frac{\rho^{LR}}{\rho^{SR}} = 0.40$ | $\frac{\rho^{LR}}{\rho^{SR}} = 0.004$ | |
| 0.40 | $0.9390c_2$ | $0.9409c_2$ | $0.9422c_2$ | $0.9422c_s$ |
| 0.41 | $0.9407c_2$ | $0.9424c_2$ | $0.9436c_2$ | $0.9436c_s$ |
| 0.42 | $0.9423c_2$ | $0.9439c_2$ | $0.9449c_2$ | $0.9450c_s$ |
| 0.43 | $0.9439c_2$ | $0.9454c_2$ | $0.9463c_2$ | $0.9463c_s$ |
| 0.44 | $0.9456c_2$ | $0.9468c_2$ | $0.9476c_2$ | $0.9476c_s$ |
| 0.45 | $0.9472c_2$ | $0.9483c_2$ | $0.9490c_2$ | $0.9490c_s$ |
| 0.46 | $0.9488c_2$ | $0.9497c_2$ | $0.9503c_2$ | $0.9503c_s$ |
| 0.47 | $0.9504c_2$ | $0.9511c_2$ | $0.9515c_2$ | $0.9515c_s$ |
| 0.48 | $0.9521c_2$ | $0.9525c_2$ | $0.9528c_2$ | $0.9528c_s$ |
| 0.49 | $0.9537c_2$ | $0.9539c_2$ | $0.9541c_2$ | $0.9541c_s$ |

Abbildung 4.7: Rayleighwellengeschwindigkeit c_R im Verhältnis zur Scherwellengeschwindigkeit für die beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Querdehnzahl ν

4.3.2 Verschiebung infolge einer Einzellast

Für den nachstehenden Vergleich wird eine Einzellast im Originalraum angesetzt, welche mit der Frequenz Ω harmonisch veränderlich ist. Im transformierten Raum ergibt sich daraus eine ‘‘Einheitslast‘‘ für $\omega = \pm\Omega$.

Für einen qualitativen Vergleich der transformierten Vertikalverschiebungen wird der Verlauf für negative ω (vgl. Kapitel 2.4) ausgewertet. Hierzu werden exemplarisch die Verschiebungen für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ und $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$ graphisch dargestellt. In beiden Fällen wird mit einem Volumenanteil von $n^S = 0.8$ bzw. einer Querdehnzahl von $\nu = 0.4$ gerechnet, da unter diesen Bedingungen die Rayleighwellenzahl für die beiden Untergrundmodelle am stärksten abweicht (s. Abb.(4.7)).

Mit Bezugnahme auf die Gl.(2.30) für den klassischen Halbraum und Gl.(3.64) für den Halbraum nach der TPM, sind die Vertikalverschiebungen hier nochmals formuliert.

Klassisch:

$$\bar{w}_z = \frac{\bar{p}_z \lambda_1}{\mu \Delta} k_s^2$$

$$\Delta = -(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1 \lambda_2$$

TPM:

$$\bar{w}_z^S = \frac{\bar{p}_z \lambda_1^*}{\mu^S \Delta} k_2^2$$

$$\Delta = -\rho^*(2k_r^2 - k_2^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1^* \lambda_2$$

$$\rho^* = \rho^S (n^L)^2 + \rho^L (n^S)^2$$

$$\lambda_1^* = \lambda_{11} \rho^S (n^L)^2 + \lambda_{12} \rho^L (n^S)^2$$

Der Vergleich der Vertikalverschiebungen zeigt nahezu übereinstimmende Ergebnisse für die beiden Untergrundmodelle (s. Abb.(4.9) bis (4.15)). Für kleinere Wellenzahlen k_x sind

im Bereich der Dilatationswelle die größten Abweichungen zu sehen, welche wiederum in Abhängigkeit von der Flüssigkeitsdichte ρ^{LR} mehr oder weniger stark variieren (s. Abb.(4.16)).

An der Stelle der Rayleighwellenzahl ist erwartungsgemäß der größte Amplitudenausschlag zu erkennen. In Abb.(4.10) und (4.14) ist der Bereich des größten Ausschlags nochmals detailliert ausgewiesen. Da die Rayleighwellengeschwindigkeit für den klassischen Halbraum geringfügig größer ist, befindet sich das Maximum der Absolutverschiebung im Vergleich zum Halbraum nach der TPM bei einem kleineren k_x .

In Abb.(4.16) ist der Verlauf der Verschiebungen des porösen Halbraums für unterschiedliche ρ^{LR} dargestellt. Für größere ρ^{LR} nimmt die Amplitude zu und wandert zu größeren k_x , da die Rayleighwellengeschwindigkeit abnimmt.

Für verschwindende ρ^{LR} passt sich der Verschiebungsverlauf demjenigen des klassischen Halbraums an.

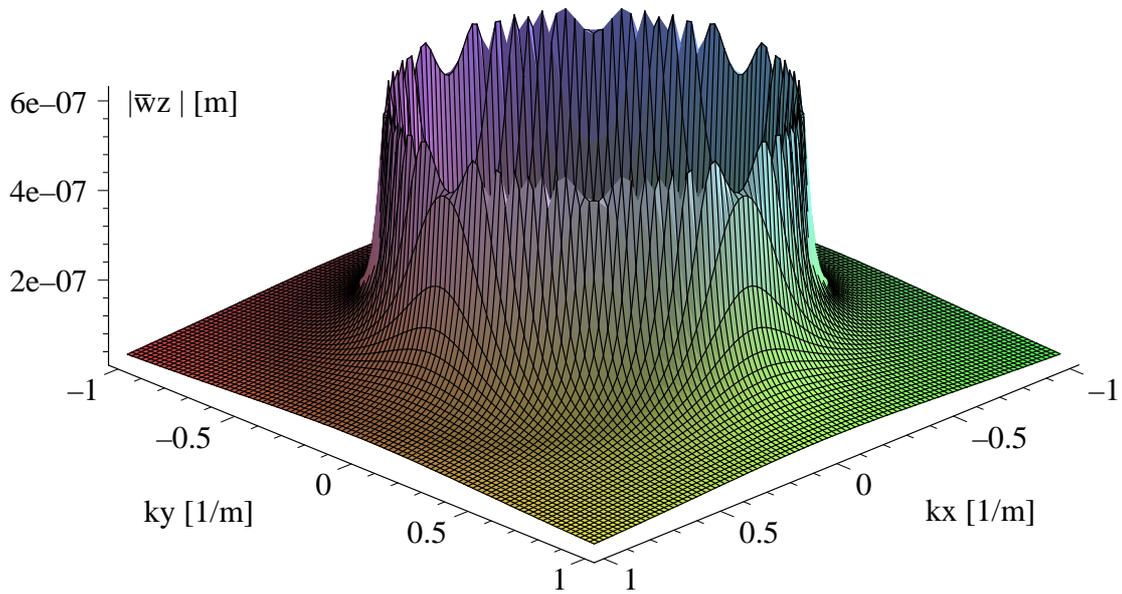


Abbildung 4.8: Vertikalverschiebung $|\bar{w}_z|$ nach der klassischen Theorie in Abh. von den Wellenzahlen k_x, k_y für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

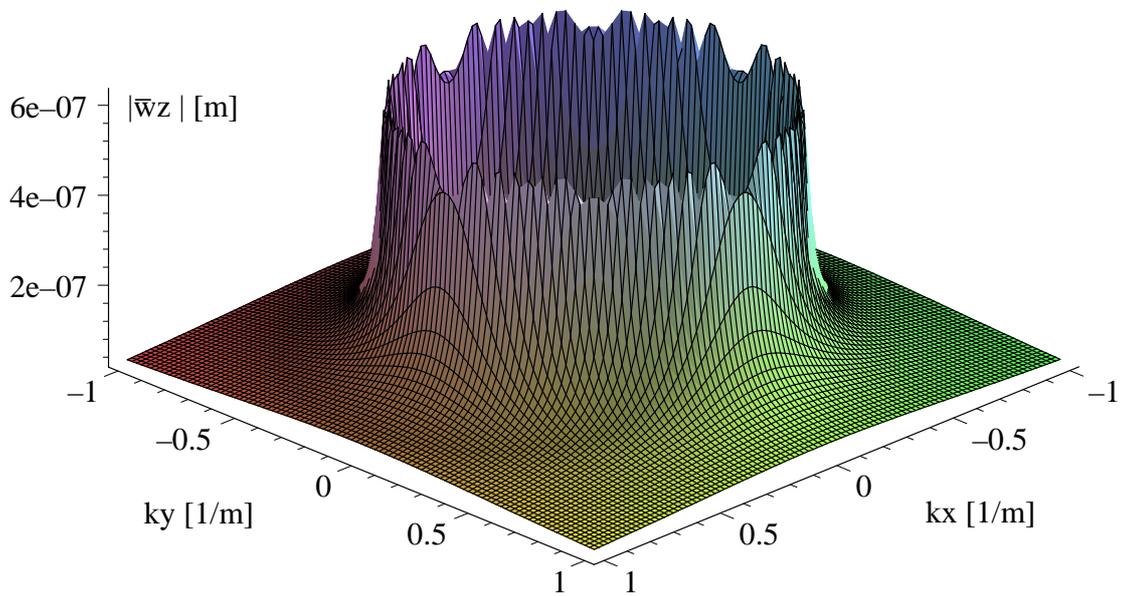


Abbildung 4.9: Vertikalverschiebung $|\bar{w}_z|$ nach der TPM in Abh. von den Wellenzahlen k_x, k_y für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

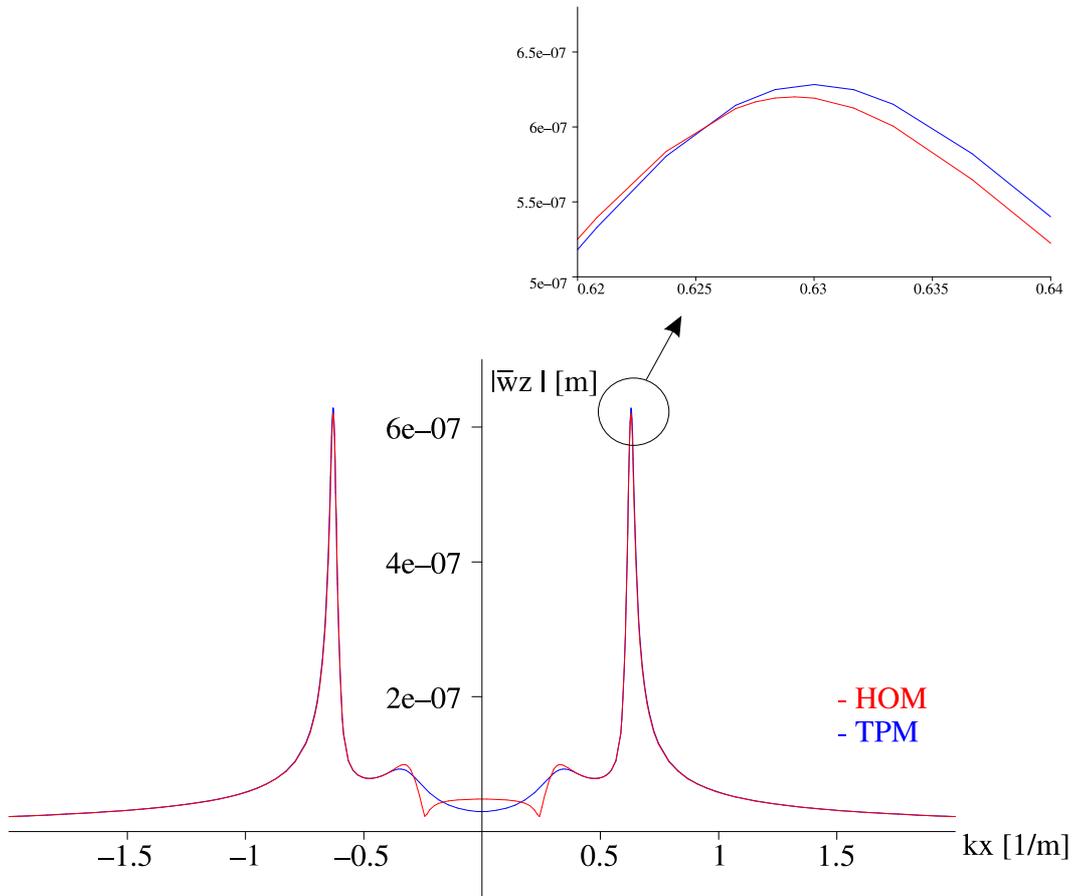


Abbildung 4.10: Vergleich der Vertikalverschiebungen $|\bar{w}_z|$ der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0.1/m$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

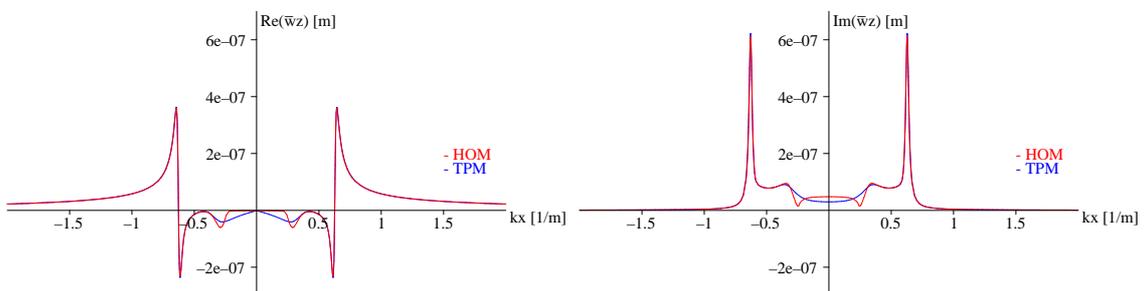


Abbildung 4.11: Vergleich der Real- und Imaginäranteile der Vertikalverschiebungen der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0.1/m$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

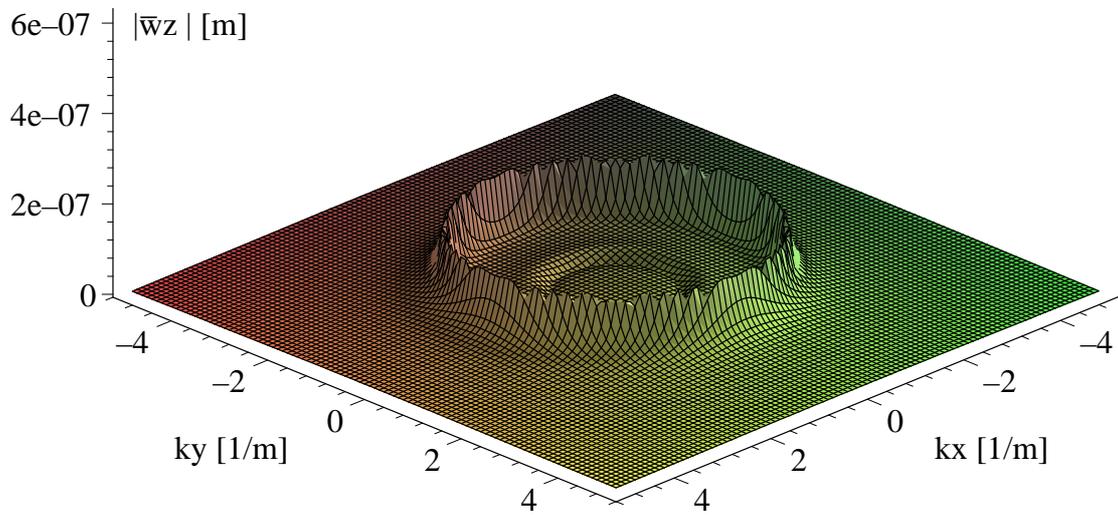


Abbildung 4.12: Vertikalverschiebung $|\bar{w}_z|$ nach der klassischen Theorie in Abh. von den Wellenzahlen k_x, k_y für $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

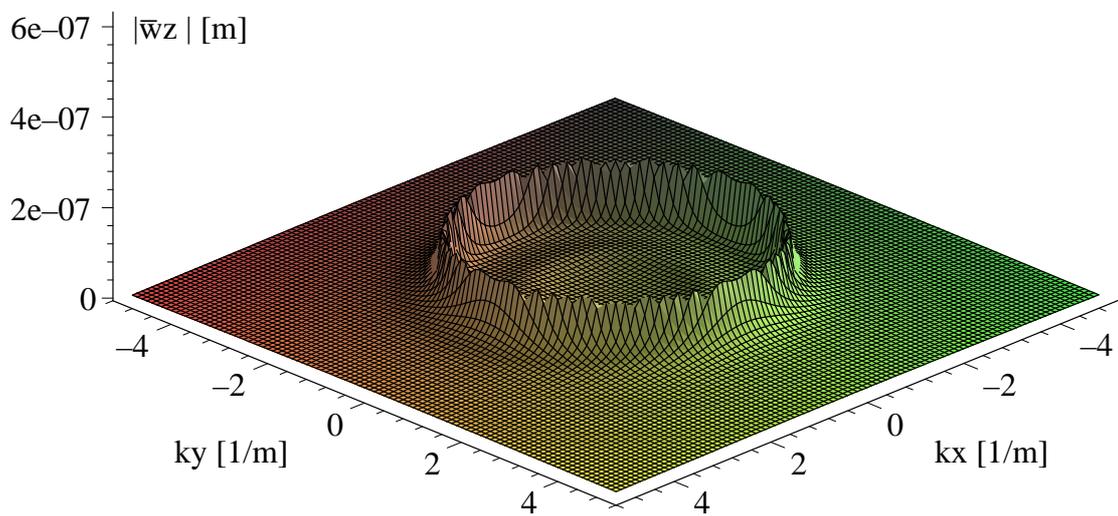


Abbildung 4.13: Vertikalverschiebung $|\bar{w}_z|$ nach der TPM in Abh. von den Wellenzahlen k_x, k_y für $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

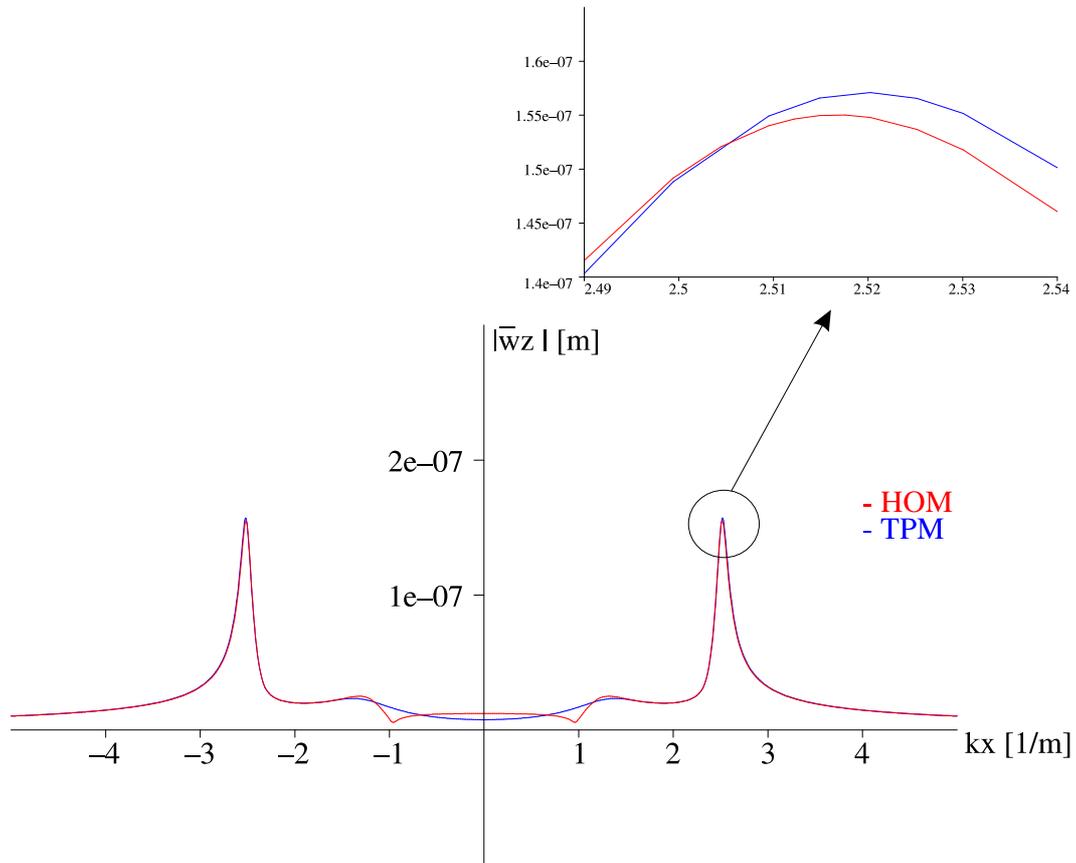


Abbildung 4.14: Vergleich der Vertikalverschiebungen $|\bar{w}_z|$ der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0 \text{ 1/m}$, $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

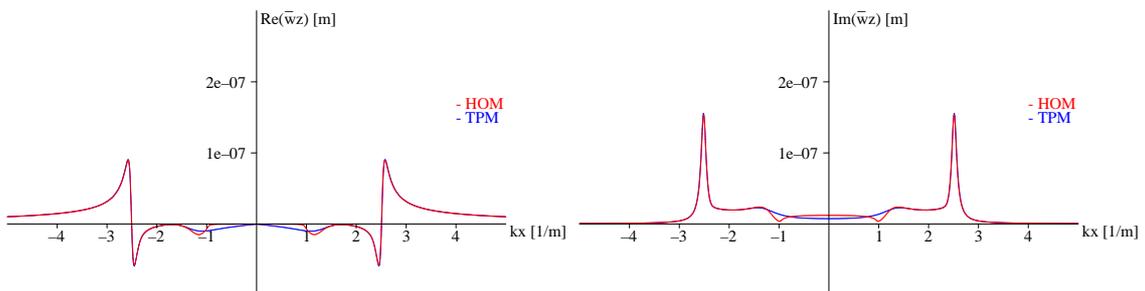


Abbildung 4.15: Vergleich der Real- und Imaginäranteile der Vertikalverschiebungen der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0 \text{ 1/m}$, $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

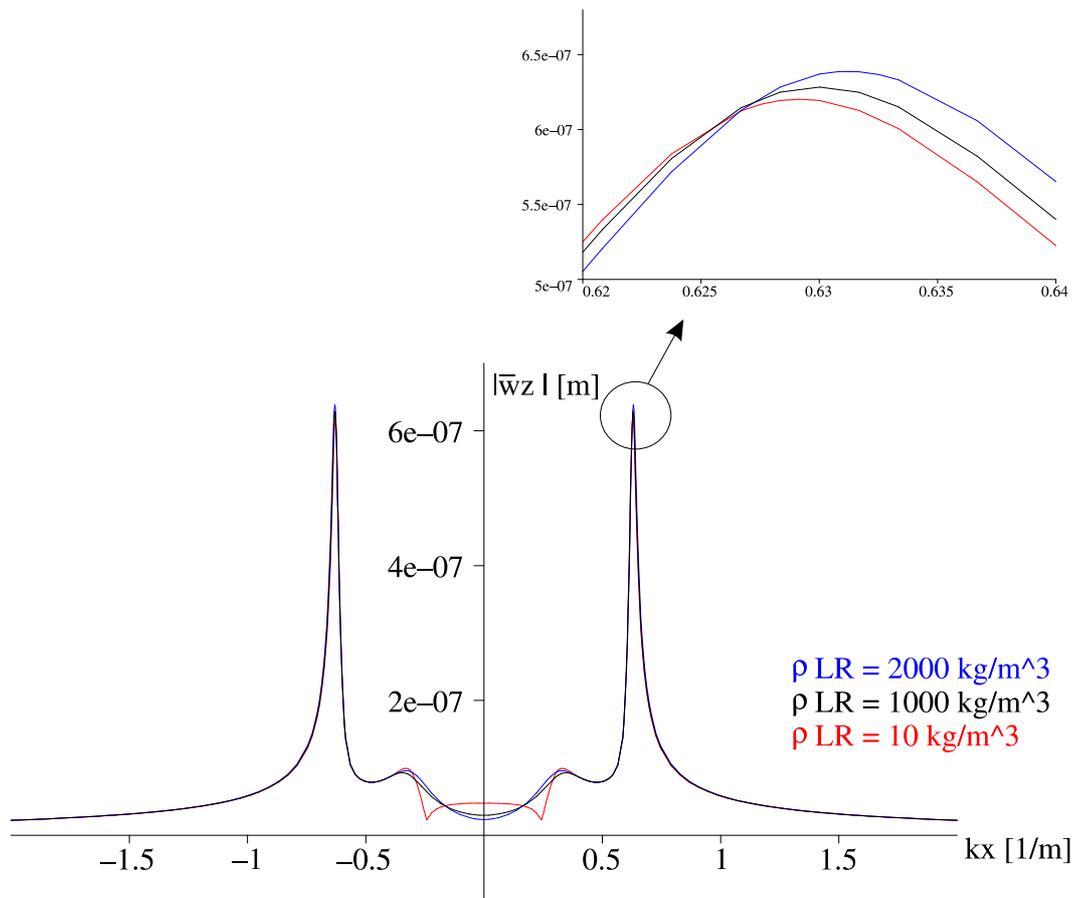


Abbildung 4.16: Verlauf der Vertikalverschiebungen $|\bar{w}_z|$ nach der TPM für unterschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0 \text{ 1/m}$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$

4.4 Anmerkungen zu den Lösungen

Die in vorliegender Arbeit hergeleiteten Lösungen nach der TPM sind beschränkt auf inkompressible Bestandteile. Daraus folgt zwangsläufig, dass die reale Querdehnzahl für den Festkörper auf 0.5 begrenzt ist. Für die partialen Größen, welche die strukturelle Kompressibilität des Untergrundes widerspiegeln, wurde ein linearer Zusammenhang zu den realen Größen über den Volumenanteil n^S gewählt (vgl. Kapitel 4.1). Dieser Zusammenhang ist in dieser Form nur im Bereich von $n^S \geq 0.8$ gültig [Bre98b].

Unter gegebenen Voraussetzungen war ein Vergleich mit dem klassischen Halbraum nur für Querdehnzahlen $\nu \geq 0.4$ und für die entsprechenden Elastizitätsmodule möglich. Um auch für kleinere Volumenanteile n^S Ergebnisse zu erhalten, müsste ein Zusammenhang zwischen realen und partialen Größen formuliert werden.

Der markanteste Unterschied der beiden Untergrundmodelle liegt sicherlich in der Lösung für die Kompressionswellengeschwindigkeiten. Während der klassische Halbraum einen einzigen Wert liefert, so ergeben sich für den Halbraum nach der TPM zwei Lösungen. Die erste Lösung c_{11} spiegelt die strukturelle Nachgiebigkeit wider, während die zweite Lösung mit einer unendlich schnellen Druckwelle die Bedingung der Inkompressibilität des Festkörpers wiedergibt.

Dieser Sachverhalt ist auch im Verschiebungsverlauf deutlich zu erkennen. In Abb.(4.16) sieht man, wie sich erst bei einer kleineren Flüssigkeitsdichte die lokale Spitze auf der Höhe der Kompressionswellenzahl ausbildet.

Von weiterem Interesse wäre sicherlich die Betrachtung des Untergrundes nach der TPM unter Voraussetzung kompressibler Bestandteile.

Die Scherwellen breiten sich in beiden Modellen unter gegebenen Voraussetzungen (s. Gl.(4.19)) mit gleichen Geschwindigkeiten aus.

Das Verhalten der Rayleighwellengeschwindigkeiten zeigt eine gute Übereinstimmung der beiden Bodenmodelle (s. Abb.(4.7)). Die Rayleighwellen breiten sich beim porösen Körper ein wenig langsamer aus. Während die Geschwindigkeit beim klassischen Halbraum nur von der Querdehnzahl abhängig ist, spielt beim porösen Untergrund auch die Flüssigkeitsdichte ρ^{LR} eine Rolle. Eine Reduktion der Flüssigkeitsdichte bewirkt eine Annäherung an den klassischen Festkörper, wohingegen für größere ρ^{LR} die Wellengeschwindigkeit abnimmt.

Hinsichtlich der Verschiebungen ist vor allem die maximale Amplitude im Bereich der Rayleighwellenzahl ausschlaggebend. Wie gezeigt wurde, ist der Ort der Verschiebungsspitzen beider Untergrundmodelle auf der k_x -Achse unwesentlich voneinander entfernt. Beim porösen Festkörper sind die Spitzenwerte geringfügig höher (s. Abb.(4.10), (4.14) & (4.16)).

Teil II

Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken

Kapitel 5

Der auf dem Halbraum gebettete Balken

5.1 Balkenmodell

In vorliegendem Kapitel wird der auf dem Halbraum elastisch gebettete unendlich lange, in Querrichtung starre Balken betrachtet. Die Anbindung des Balkens an den Untergrund soll über Halbraumsteifigkeiten erfasst werden. Der Begriff der Halbraumsteifigkeit wurde von Dieterman und Metrikine [DM96] eingeführt. Lieb und Sudret binden den Balken durch eine über die Balkenbreite konstante Interaktionsspannung an den Halbraum [LS98].

Dinkel weitet die Formulierungen auf einen in Querrichtung starren Balken mit konstanter Verschiebung aus [Din00]. Er geht in einer ersten Untersuchung kurz auf den Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung auf die Vertikalverschiebungen ein. In nachfolgenden Kapiteln soll der Einfluss der Längs- und Querverschiebungsbehinderung auf die Vertikalverschiebungen näher untersucht werden.

Die Differentialgleichung für den elastisch gebetteten Balken, unter der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte, Vernachlässigung der Rotationsträgheit, konstanter Biegesteifigkeit EI_B und konstanter Massebelegung μ_B des Balkens, lautet:

$$E_B I_B w_B''''(x, t) + \mu_B \ddot{w}_B(x, t) + c_W \dot{w}_B(x, t) + k_W w_B(x, t) = p_B(x, t) \quad (5.1)$$

Die Konstanten c_W und k_W stehen für die viskose Dämpfung bzw. für die elastische Steifigkeit der Winkler-Bettung. Die mit dem Index B versehenen Größen beziehen sich auf den Balken und dienen im Folgenden zur Unterscheidung von den Größen des Halbraums.

Über eine Fourier-Transformation der Gl.(5.1) wird die Lösung für die Balkenverschiebung im Bildraum angeschrieben:

$$\bar{w}_B(k_x, \omega) = \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B \omega^2 + k_W + i\omega c_W} \quad (5.2)$$

Über eine Vergleichsbetrachtung des elastisch gebetteten Balkens lässt sich der auf dem Halbraum gebettete Balken ableiten. Ersetzt man die komplexe Steifigkeit $k_W + i\omega c_W$ der Winkler-Bettung durch die wellenzahl- und frequenzabhängige Halbraumsteifigkeit k_H , so erhält man die Gleichung für den auf dem Halbraum gebetteten Balken:

$$\bar{w}_B(k_x, \omega) = \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B \omega^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega)} \quad (5.3)$$

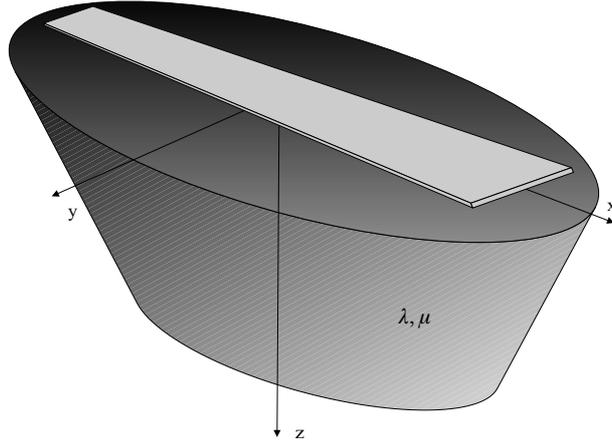


Abbildung 5.1: Systemskizze des auf dem Halbraum gebetteten Balkens

Die Ableitung über Gl.(5.2) wird deutlich, wenn man berücksichtigt, dass die Halbraumsteifigkeit \bar{k}_H für den gedämpften Halbraum ebenfalls eine komplexe Größe ist.

$$\bar{k}_H(k_x, \omega) = \operatorname{Re}(\bar{k}_H(k_x, \omega)) + i \operatorname{Im}(\bar{k}_H(k_x, \omega)) \quad (5.4)$$

Legt man die Gleichung (5.3) zugrunde und führt eine zweifache Fourier-Rücktransformation durch, so folgt daraus die Balkenverschiebung am Ort x zur Zeit t :

$$w_B(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B \omega^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega)} e^{ik_x x} e^{i\omega t} dk_x d\omega \quad (5.5)$$

In obiger Formulierung ist man von einer ortsfesten Belastung ausgegangen. Um die Verschiebungen im mitbewegten Koordinatensystem unter einer mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegten Last zu erhalten, ist eine Substitution über die mitbewegte Ortskoordinate $x^* = x - vt$ erforderlich. Diese Substitution ermöglicht eine Trennung in eine reine Orts- und Zeitabhängigkeit. Die Balkenverschiebung am Ort x^* zur Zeit t lautet:

$$w_B(x^*, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega + vk_x)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B \omega^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega)} e^{ik_x x^*} e^{ivk_x t} e^{i\omega t} dk_x d\omega \quad (5.6)$$

$\bar{p}_B(k_x, \omega + vk_x)$ stellt die bewegte Last im Bildraum dar. Über die Substitution mit $\omega^* = \omega + vk_x$ folgt:

$$w_B(x^*, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega^*)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (\omega^* - vk_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega^* - vk_x)} e^{ik_x x^*} e^{i\omega^* t} dk_x d\omega^* \quad (5.7)$$

Die Lösung im Bildraum für den auf dem Halbraum gebetteten Balken unter einer bewegten Last lautet folglich:

$$w_B(k_x, \omega^*) = \frac{\bar{p}_B(k_x, \omega^*)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (\omega^* - v k_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega^* - v k_x)} \quad (5.8)$$

Setzt man nun eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende vertikale Einzellast voraus, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt, so lässt sich die Belastung folgendermaßen anschreiben:

$$p_B(x, t) = \delta(x - vt) \cos(\Omega t) \quad (5.9)$$

Bei der mitbewegten Belastung handelt es sich um eine Translation entlang der x -Achse. Es ergeben sich, über die im Anhang A für die Translation definierte Rechenregel, folgende Ausdrücke im Bildraum:

$$\bar{p}_B(k_x, t) = e^{-i k_x v t} \cos(\Omega t) \quad (5.10)$$

$$\bar{p}_B(k_x, \omega^*) = \pi (\delta(\omega^* - \Omega) + \delta(\omega^* + \Omega)) \quad (5.11)$$

Indem man Gl.(5.11) in Gl.(5.7) einsetzt, bekommt man für die Vertikalverschiebung im Originalraum folgenden Ausdruck:

$$w_B(x^*, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi (\delta(\omega^* - \Omega) + \delta(\omega^* + \Omega))}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (\omega^* - v k_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, \omega^* - v k_x)} e^{i k_x x^*} e^{i \omega^* t} dk_x d\omega^* \quad (5.12)$$

$$w_B(x^*, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (\Omega - v k_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, \Omega - v k_x)} e^{i k_x x^*} dk_x + e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega - v k_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega - v k_x)} e^{i k_x x^*} dk_x \right) \quad (5.13)$$

Die beiden Integrale stellen konjugiert komplexe Zeiger in der komplexen Ebene dar. Zur Auswertung der Verschiebungen ist es daher ausreichend nur einen Zeiger zu berücksichtigen. Die Verschiebung ist eine physikalische Größe und nimmt somit reelle Werte an.

$$w_B(x^*, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega - v k_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega - v k_x)} e^{i k_x x^*} dk_x \right) \quad (5.14)$$

Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 2.4 wird die Berechnung für negative Anregungsfrequenzen $\omega = -\Omega$ durchgeführt.

In analoger Weise, wie oben beschrieben, ergeben sich für eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende, ortsfeste Belastung die Verschiebungen zu:

$$w_B(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega)} e^{ik_x x} dk_x \right) \quad (5.15)$$

5.2 Bestimmung der Halbraumsteifigkeit

Wie in Kapitel 5.1 schon erwähnt, soll die Bettung des Balkens auf dem Halbraum durch die Halbraumsteifigkeit beschrieben werden. Die Anbindung des Halbraums an den eindimensionalen Balken muss linienförmig erfolgen. Die zweidimensional (k_x, k_y) veränderliche Größe der Verschiebungen des Halbraums $\bar{w}(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ muss auf die eindimensional (k_x) veränderliche Größe der Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x, \omega)$ umgewandelt werden.

Durch die Annahme, dass der Balken in Querrichtung starr ist, wird sich bei Belastung unmittelbar unter dem Balken eine konstante Verschiebung in Querrichtung ergeben. Es liegt somit ein gemischtes Randwertproblem für den Halbraum vor. Einerseits können die Spannungen, vorausgesetzt es wirkt keine weitere äußere Last, außerhalb vom Balken zu Null gesetzt werden, andererseits ist eine konstante Verschiebung unter dem Balken vorgegeben. Über Spannungsansätze für die Interaktionsspannung $\bar{p}_z(k_x, y, \omega)$ zwischen Balken und Halbraum wird das gemischte Randwertproblem in ein reines Spannungsrandwertproblem übergeführt.

Die Halbraumsteifigkeit ist definiert als der Quotient aus der resultierenden Interaktionsspannungskraft und der hierdurch unterhalb des Balken hervorgerufenen vertikalen Halbraumverschiebung. Die Mittelachse des Balkens ist so angenommen, dass sie im Ursprung der y -Achse ($y = 0$) liegt.

$$\bar{k}_H(k_x, \omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_z(k_x, y, \omega) dy}{\bar{w}_z(k_x, y = 0, z = 0, \omega)} \quad (5.16)$$

Die Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x, \omega)$ hängt nicht von der Koordinate y ab, da man, aufgrund der getroffenen Annahmen, nur die konstante Verschiebung unter dem Balken zu berücksichtigen hat. Die Bedingung, dass die Verschiebung unter dem Balken konstant ist, muss sich in der Interaktionsspannung widerspiegeln.

Hinsichtlich der Beschreibung einer konstanten Verschiebung über Interaktionsspannungen untersuchte Dinkel das Streifenverfahren und die Legendre-Polynom-Ansätze auf ihre Anwendbarkeit, Ergebnisqualität und Effizienz [Din00]. Das Letztere bildet den Verschiebungsverlauf besser ab und zeigt im Randbereich des Balkens geringere Abweichungen von der Sollverschiebung. In vorliegender Arbeit wird die Vorgehensweise mittels Legendre-Polynome-Ansätze aufgegriffen.

Die Interaktionsspannungen zwischen Halbraum und Balken werden somit über skalierte Legendre-Polynome angenähert. Die Polynome werden über die gesamte Balkenbreite angesetzt und weisen an den Rändern die Amplitude Eins auf. Die speziellen Eigenschaften und der Funktionsverlauf der einzelnen Polynome sind im Anhang B dargestellt. Die besonderen Eigenschaften der Legendre-Polynome kommen im Definitionsbereich $[-1, 1]$ zur Geltung. Es wird daher eine Substitution des Argumentes durchgeführt, damit das Intervall $[-b, b]$ auf den Bereich $[-1, 1]$ abgebildet werden kann.

Da die vertikalen Interaktionsspannungen entlang der y -Achse einen symmetrischen Verlauf bzgl. des Ursprungs haben, ist es ausreichend nur die Legendre-Polynome mit symmetrischen Verlauf zu berücksichtigen.

In Abb.(5.2) ist die Interaktion zwischen Balken und Halbraum schematisch dargestellt. Die ersten drei symmetrischen Legendre-Polynome sind ebenfalls mit dargestellt.

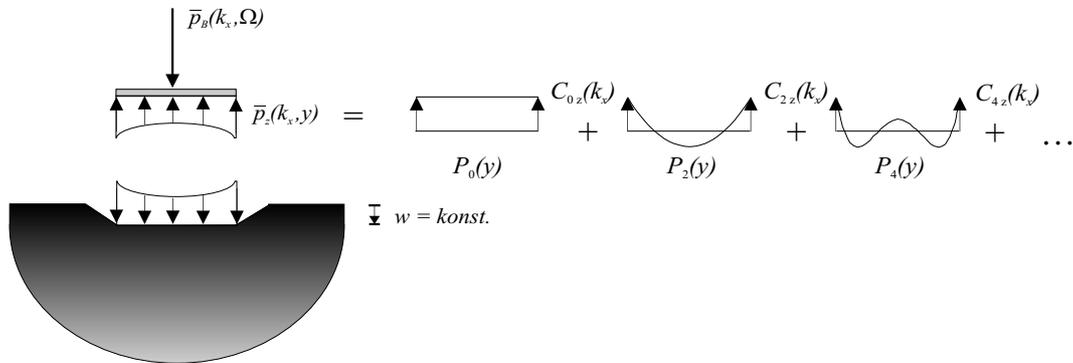


Abbildung 5.2: Systemskizze zur Interaktion Balken zu Halbraum mittels Legendre-Polynome

Der Verlauf der einzelnen Legendre-Polynome kann wiederum durch einzelne Streifenlasten abgebildet werden. Das hat den Vorteil, dass nur eine Halbraumberechnung für die einzelne Streifenlast durchgeführt werden muss. Die aus einer Streifenlast resultierenden Verschiebungen werden dann über alle Streifen superponiert.

In Abb.(5.3) ist für das Legendre-Polynom 2-ten Grades eine solche Vorgehensweise dargestellt.

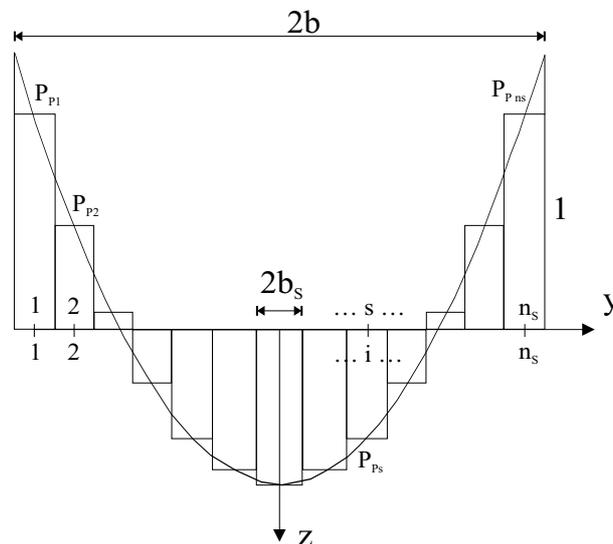


Abbildung 5.3: Systemskizze zur Aufspaltung des Legendre-Polynoms 2-ten Grades durch Streifenlasten

Setzt man n_s Streifen an, um die Legendre-Funktion anzunähern, so ergibt sich die Be-

lastung für einen Rechteckstreifen der Breite $2b_S = \frac{2b}{n_S}$ wie folgt:

$$\bar{p}_{Rz}(k_x, y, \omega) = \bar{p}_z(k_x, \omega) (H(y + b_S) - H(y - b_S)) \quad (5.17)$$

Dabei ist mit H die Heaviside oder Einheitssprungfunktion beschrieben. Über eine Fourier-Transformation der Koordinate y (s. Anhang A) erhält man den Ausdruck der Streifenbelastung im Bildraum:

$$\bar{p}_{Rz}(k_x, k_y, \omega) = \bar{p}_z(k_x, \omega) 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \quad (5.18)$$

Ausgehend von der vertikalen Rechteckbelastung lässt sich die Verschiebung im Bildraum mit Hilfe der in Kapitel 2.5 definierten Grundlösung anschreiben:

$$\bar{w}_z(k_x, k_y, \omega) = \bar{p}_z(k_x, \omega) 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega) \quad (5.19)$$

Für eine mit Ω oszillierende Balkenbelastung \bar{p}_B ist die Rechteckbelastung \bar{p}_{Rz} ebenfalls mit der gleichen Anregungsfrequenz oszillierend. Setzt man die Rechtecklast nun als Einheitsbelastung an, so erhält man:

$$\bar{w}_z(k_x, k_y, \omega = -\Omega) = 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega = -\Omega) \quad (5.20)$$

Für eine bewegte oszillierende Belastung ergibt sich:

$$\bar{w}_z(k_x, k_y, \omega^* = -\Omega) = 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega^* = -\Omega) \quad (5.21)$$

Transformiert man die Koordinate k_y zurück in den Originalraum, so können die Verschiebungswerte $\bar{y}_{Rwz}(i)$ an den n_S Stützstellen, die im Abstand $2b_S$ voneinander entfernt sind, angewiesen werden (s. Abb.(5.4)).

$$\bar{y}_{Rwz}(i) = \bar{w}_z(k_x, y = (i - 1)2b_S) \quad (5.22)$$

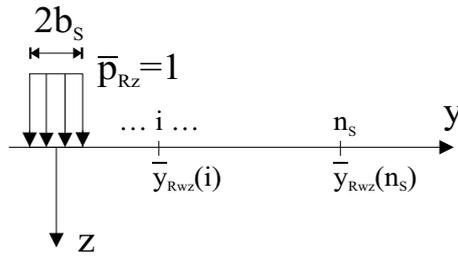


Abbildung 5.4: Systemskizze zur Bestimmung der Verschiebungen $\bar{y}_{Rwz}(i)$ infolge einer Einheits-Rechtecklast \bar{p}_{Rz}

Die Verschiebung \bar{w}_z^{is} an der Stützstelle i infolge einer Rechteckbelastung an der Stützstelle s (s. auch Abb.(5.3)) ergibt sich über folgende Formulierung:

$$\bar{w}_z^{is} = \bar{y}_{Rwz}(|i - s| + 1) \quad (5.23)$$

Die Amplitude P_{P_s} mit der die einzelnen Einheitsrechtecklasten beaufschlagt werden, hängt von der jeweiligen Ordnung des Legendre-Polynoms (Index: P) und der Stützstelle s , an der sie bestimmt wird, ab. Sie ergibt sich über die nachfolgende Beziehung.

$$P_{P_s} = \frac{1}{2b_S} \int_{-b+(s-1)2b_S}^{-b+s2b_S} P_P(y) dy \quad (5.24)$$

Die vertikale Gesamtverschiebung $\bar{w}_{P_z}^i(k_x)$ an der Stützstelle i infolge aller Streifenlasten eines einzelnen Legendre-Polynoms der Ordnung P ergibt sich somit zu:

$$\bar{w}_{P_z}^i(k_x) = \sum_{s=1}^{n_S} P_{P_s} \bar{w}_z^{is} \quad (5.25)$$

Um den konstanten Verschiebungsverlauf über die Balkenbreite $2b$ nachbilden zu können, wird die Interaktionsspannung durch mehrere Legendre-Polynome zusammengesetzt, welche wiederum über den Koeffizienten $C_{P_z}(k_x)$ unterschiedlich stark gewichtet werden.

Gibt man in einem ersten Berechnungslauf eine konstante Einheitsverschiebung durch $\bar{w}_{zSOLL}(k_x) = 1$ vor, so lautet die Bedingung der konstanten Verschiebung für jede Stützstelle i folgendermaßen:

$$\sum_P C_{P_z}(k_x) \bar{w}_{P_z}^i(k_x) = \bar{w}_{zSOLL}(k_x) = 1 \quad (5.26)$$

Die Gleichung (5.26) muss für jedes k_x erfüllt sein.

Dinkel empfiehlt eine Berechnung mit $n_S = 40 - 80$ Streifenlasten und die Verwendung der Legendre-Polynome bis zum Grad 10 [Din00]. Da die Anzahl der Stützstellen n_S somit höher liegt als die Anzahl der berücksichtigten Legendre-Polynome, ist Gl.(5.26) überbestimmt.

Durch eine integrale Gewichtung mit ebenfalls Legendre-Polynomen als Wichtungsfunktion bekommt man folgenden Ausdruck:

$$\int_{-b}^b \left[\sum_P C_{P_z}(k_x) \bar{w}_{P_z}^i(k_x) \right] P_R(y) dy = \int_{-b}^b P_R(y) dy \quad (5.27)$$

Der Index R steht für den Grad des Legendre-Polynoms in der Wichtungsfunktion.

Gewichtet man die Gleichung (5.26) mit den gleichen Legendre-Polynomen, mit denen auch die Interaktionsspannungskraft beschrieben ist, so erhält man ein linear unabhängiges Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten $C_{P_z}(k_x)$.

$$\begin{bmatrix} a_{00}^{wz} & \cdots & a_{P_0}^{wz} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0R}^{wz} & \cdots & a_{PR}^{wz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{0z}(k_x) \\ \vdots \\ C_{Pz}(k_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

mit

$$a_{PR}^{wz} = \int_{-b}^b \bar{w}_{Pz}^i(k_x) P_R(y) dy = \sum_{i=1}^{n_S} \bar{w}_{Pz}^i P_{Ri} 2b_S \quad (5.29)$$

Der Wert P_{Ri} an der Stützstelle i ist nach Gl.(5.24) zu bestimmen.

Aufgrund der Orthogonalität der Legendre-Polynome zueinander (s. Anhang B), ergibt sich auf der rechten Seite des Gleichungssystems (5.28) nur für das konstante Legendre-Polynom 0-ten Grades ein Beitrag aus der Sollverschiebung $\bar{w}_{zSOLL}(k_x)$.

Um die Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ zu erhalten, muss vorerst die resultierende Spannungskraft aus den Interaktionsspannungen bestimmt werden. Die Spannungsergebnis ergibt sich zu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_z(k_x, y) dy = \int_{-b}^b \sum_P C_{Pz}(k_x) P_P(y) dy = \int_{-b}^b C_{0z}(k_x) P_0(y) dy = C_{0z}(k_x) 2b \quad (5.30)$$

In Anlehnung an Gl.(5.16) ergibt sich die Halbraumsteifigkeit demnach über folgenden Ausdruck:

$$\bar{k}_H(k_x) = \frac{C_{0z}(k_x) 2b}{\bar{w}_{zSOLL}(k_x)} = C_{0z}(k_x) 2b \quad (5.31)$$

Kapitel 6

Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung

Bei der Bestimmung der Halbraumsteifigkeit \bar{k}_H in Kapitel 5 ist nicht berücksichtigt worden, dass, infolge von Schubkraftübertragung in Quer- sowie in Längsrichtung zwischen dem Balken und dem Untergrund, zusätzliche Interaktionsspannungen auftreten. Man ist davon ausgegangen, dass keine Schubspannungen zwischen Balken und Halbraum übertragen werden.

Eine weitere Annahme war das starre Verhalten des Balkens in Querrichtung. Geht man auch davon aus, dass die Längsverschiebung des Balkens im Vergleich zur Vertikalverschiebung sehr klein ist und setzt diese in einer einfachen Annäherung zu Null, so werden sich bei einem festen Verbund zwischen Balken und Halbraum Schubspannungen ausbilden, welche die Verschiebung des Halbraums unter dem Balken in Quer- als auch in Längsrichtung verhindern.

Im Folgenden wird der Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung bei der Bestimmung der Halbraumsteifigkeit \bar{k}_H formell hergeleitet, um dann in der numerischen Auswertung eine Aussage über den Effekt auf die Erschütterungsausbreitung im Untergrund machen zu können.

6.1 Bestimmung der Halbraumsteifigkeit

Zusätzlich zu den vertikalen Interaktionsspannungen \bar{p}_z (s. Kapitel 5.2) sind noch die Schubspannungen \bar{p}_{xz} in x - und \bar{p}_{yz} in y -Richtung zu bestimmen.

Aufgrund der symmetrischen Einleitung der Last bzgl. der Balken-Mittelachse wird die Schubspannung in Längsrichtung \bar{p}_{xz} ebenfalls einen symmetrischen Verlauf bzgl. der Mittelachse aufweisen. Folglich lässt sich die Interaktionsspannung \bar{p}_{xz} mit den symmetrischen Legendre-Polynomen gut annähern.

Der Schubspannungsverlauf in Querrichtung wird sich bzgl. der x -Achse antisymmetrisch verhalten, so dass sich zur Beschreibung von \bar{p}_{yz} die antisymmetrischen Legendre-Polynome ungerader Ordnung eignen. In Abb.(6.1) sind die Interaktionsspannungsverläufe schematisch dargestellt.

Wie in Kapitel 5.2 dargestellt, werden die einzelnen Legendre-Polynome, mit denen die Interaktionsspannungen beschrieben werden, wiederum in Streifenlasten unterteilt.

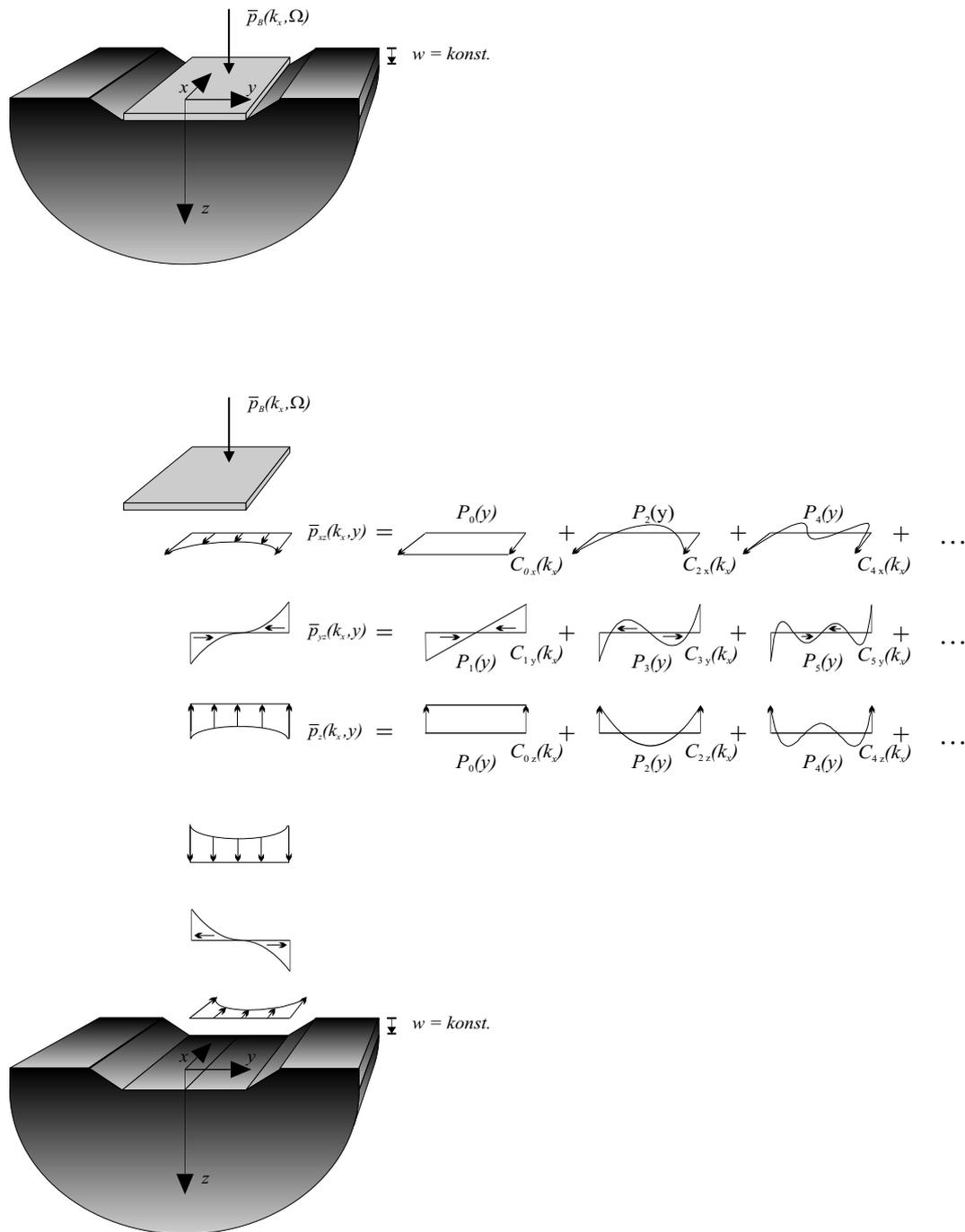


Abbildung 6.1: Systemskizze zur Interaktion Balken zu Halbraum mittels Legendre-Polynome bei Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung

Um die Bedingung der Horizontalverschiebungsbehinderung später in dem zu lösenden Gleichungssystem aufnehmen zu können, müssen neben den Vertikalverschiebungen auch die Horizontalverschiebungen infolge aller Interaktionsspannungen bestimmt werden.

Ausgehend von den einzelnen gerichteten Einheits-Rechtecklasten \bar{p}_{Rl} ($l = x, y, z$) und von

einer mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierenden Belastung, ergeben sich insgesamt neun Verschiebungsverläufe $\bar{u}_{Rl}(k_x, k_y)$, $\bar{v}_{Rl}(k_x, k_y)$ und $\bar{w}_{Rl}(k_x, k_y)$.

$$\begin{aligned}\bar{u}_{Rx}(k_x, k_y, \omega = -\Omega) &= 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{ux}(k_x, k_y, z = 0, \omega = -\Omega) \\ &\vdots \\ \bar{w}_{Rz}(k_x, k_y, \omega = -\Omega) &= 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega = -\Omega)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Für eine mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegte und mit Ω oszillierende Belastung ergeben sich die Verschiebungswerte entsprechend folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{Rx}(k_x, k_y, \omega^* = -\Omega) &= 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{ux}(k_x, k_y, z = 0, \omega^* = -\Omega) \\ &\vdots \\ \bar{w}_{Rz}(k_x, k_y, \omega^* = -\Omega) &= 2b_S \frac{\sin(b_S k_y)}{b_S k_y} \bar{G}_{wz}(k_x, k_y, z = 0, \omega^* = -\Omega)\end{aligned}\tag{6.2}$$

Führt man eine Fourier-Rücktransformation von k_y nach y durch, so lassen sich die Verschiebungswerte $\bar{y}_{Rul}(i)$, $\bar{y}_{Rvl}(i)$, $\bar{y}_{Rwl}(i)$ und $\bar{y}2_{Rul}(i)$, $\bar{y}2_{Rvl}(i)$, $\bar{y}2_{Rwl}(i)$, ($l = x, y, z$) an den n_S Stützstellen bestimmen. Die mit "y2" gekennzeichneten Verschiebungswerte sind dabei entlang der positiven y -Achse definiert (s. Abb.(6.2)).

$$\begin{aligned}\bar{y}_{Rux}(i) &= \bar{u}_{Rx}(k_x, y = -(i-1)2b_S) \\ \bar{y}2_{Rux}(i) &= \bar{u}_{Rx}(k_x, y = (i-1)2b_S) \\ &\vdots \\ \bar{y}_{Rwz}(i) &= \bar{w}_{Rz}(k_x, y = -(i-1)2b_S) \\ \bar{y}2_{Rwz}(i) &= \bar{w}_{Rz}(k_x, y = (i-1)2b_S)\end{aligned}\tag{6.3}$$

Die Verschiebungen \bar{u}_l^{is} , \bar{v}_l^{is} , \bar{w}_l^{is} an der Stützstelle i infolge einer an der Stützstelle s angreifenden Rechteckbelastung \bar{p}_{Rl} , ($l = x, y, z$) ergeben sich über folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x^{is} &= \begin{cases} = \bar{y}_{Rux}(|i-s|+1) & ; i < s \\ = \bar{y}2_{Rux}(|i-s|+1) & ; i \geq s \end{cases} \\ &\vdots \\ \bar{w}_z^{is} &= \begin{cases} = \bar{y}_{Rwz}(|i-s|+1) & ; i < s \\ = \bar{y}2_{Rwz}(|i-s|+1) & ; i \geq s \end{cases}\end{aligned}\tag{6.4}$$

Die Amplituden P_{Ps} der einzelnen Einheits-Rechtecklasten bekommt man über folgenden Ausdruck:

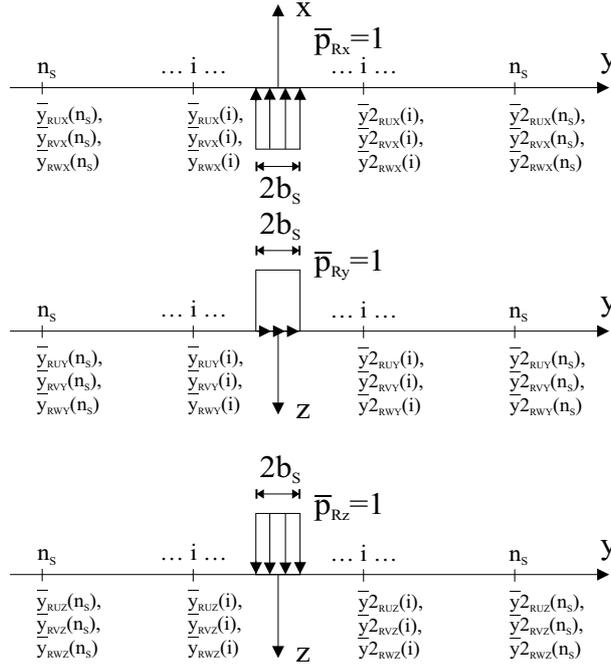


Abbildung 6.2: Systemskizze zur Bestimmung der Verschiebungen $\bar{y}_R(i)$ und $\bar{y}_{2R}(i)$ infolge der Einheits-Rechtecklasten \bar{p}_{Rx} , \bar{p}_{Ry} und \bar{p}_{Rz}

$$P_{Ps} = \frac{1}{2b_s} \int_{-b+(s-1)2b_s}^{-b+s2b_s} P_P(y) dy \quad (6.5)$$

Die Gesamtverschiebungen \bar{u}_{Pl}^i , \bar{v}_{Pl}^i , \bar{w}_{Pl}^i , ($l = x, y, z$) an der Stützstelle i infolge aller Streifenlasten eines einzelnen Legendre-Polynoms vom Grad P lauten:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Px}^i(k_x) &= \sum_{s=1}^{n_s} P_{Ps} \bar{u}_x^{is} \\ &\vdots \\ \bar{w}_{Pz}^i(k_x) &= \sum_{s=1}^{n_s} P_{Ps} \bar{w}_z^{is} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Um den konstanten Verschiebungsverlauf über die Balkenbreite $2b$ nachbilden zu können sowie die Horizontalverschiebungen unter dem Balken zu verhindern, wird die Interaktionsspannung durch mehrere Legendre-Polynome zusammengesetzt, die wiederum über die Koeffizienten $C_{P_{2n}x}(k_x)$, $C_{P_{2n-1}y}(k_x)$, $C_{P_{2n}z}(k_x)$ unterschiedlich stark gewichtet werden. Für die Interaktionsspannungen in x - und z -Richtung werden symmetrische Legendre-Polynome gerader Ordnung P_{2n} und für die Schubspannung in Querrichtung antisymmetrische Polynome der Ordnung P_{2n-1} angesetzt.

Indem man eine konstante Einheitsverschiebung $\bar{w}_{SOLL}(k_x) = 1$ vorgibt, kann so die Bestimmung der konstanten Verschiebung für jede Stützstelle i folgendermaßen angeschrieben

werden:

$$\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{w}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{w}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{w}_{P_{2n}z}^i(k_x) = \bar{w}_{SOLL}(k_x) = 1 \quad (6.7)$$

Im Unterschied zur Berechnung ohne Horizontalverschiebungsbehinderung, werden in der Gleichung (6.7) auch die Vertikalverschiebungen, welche durch die Schubspannungen hervorgerufen sind, mitberücksichtigt.

Die Bedingung, dass die Horizontalverschiebungen unter dem Balken an den Stützstellen i verhindert werden, lässt sich wie folgt formulieren:

$$\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{u}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{u}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{u}_{P_{2n}z}^i(k_x) = \bar{u}_{SOLL}(k_x) = 0 \quad (6.8)$$

$$\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{v}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{v}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{v}_{P_{2n}z}^i(k_x) = \bar{v}_{SOLL}(k_x) = 0 \quad (6.9)$$

Durch eine integrale Gewichtung mit Legendre-Polynomen als Wichtungsfunktionen können die Gl.(6.7) bis Gl.(6.9) in folgende Form gebracht werden:

$$\int_{-b}^b \left[\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{w}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{w}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{w}_{P_{2n}z}^i(k_x) \right] P_{R_{2n}}(y) dy = \int_{-b}^b P_{R_{2n}}(y) dy \quad (6.10)$$

$$\int_{-b}^b \left[\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{u}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{u}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{u}_{P_{2n}z}^i(k_x) \right] P_{R_{2n}}(y) dy = 0 \quad (6.11)$$

$$\int_{-b}^b \left[\sum_P C_{P_{2n}x}(k_x) \bar{v}_{P_{2n}x}^i(k_x) + C_{P_{2n-1}y}(k_x) \bar{v}_{P_{2n-1}y}^i(k_x) + C_{P_{2n}z}(k_x) \bar{v}_{P_{2n}z}^i(k_x) \right] P_{R_{2n-1}}(y) dy = 0 \quad (6.12)$$

Die bzgl. der Balkenmittelachse symmetrischen Verschiebungen $\bar{u}(k_x)$ und $\bar{w}(k_x)$ werden mit symmetrischen Legendre-Polynomen $P_{R_{2n}}$ gewichtet. Für die antisymmetrische Verschiebung in Querrichtung $\bar{v}(k_x)$ werden antisymmetrische Polynome $P_{R_{2n-1}}$ zugrunde gelegt.

Wählt man die gleiche Anzahl und gleiche Ordnung für die Legendre-Wichtungspolynome, mit denen auch die einzelnen Interaktionsspannungen beschrieben sind, so erhält man ein reguläres Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten $C_{P_{2n}x}(k_x)$, $C_{P_{2n-1}y}(k_x)$ und $C_{P_{2n}z}(k_x)$.

$$\begin{bmatrix}
a_{00}^{ux} & \cdots & a_{P_{2n}0}^{ux} & a_{10}^{uy} & \cdots & a_{P_{2n-1}0}^{uy} & a_{00}^{uz} & \cdots & a_{P_{2n}0}^{uz} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{0R_{2n}}^{ux} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n}}^{ux} & a_{1R_{2n}}^{uy} & \cdots & a_{P_{2n-1}R_{2n}}^{uy} & a_{0R_{2n}}^{uz} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n}}^{uz} \\
a_{01}^{vx} & \cdots & a_{P_{2n}1}^{vx} & a_{11}^{vy} & \cdots & a_{P_{2n-1}1}^{vy} & a_{01}^{vz} & \cdots & a_{P_{2n}1}^{vz} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{0R_{2n-1}}^{vx} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n-1}}^{vx} & a_{1R_{2n-1}}^{vy} & \cdots & a_{P_{2n-1}R_{2n-1}}^{vy} & a_{0R_{2n-1}}^{vz} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n-1}}^{vz} \\
a_{00}^{wx} & \cdots & a_{P_{2n}0}^{wx} & a_{10}^{wy} & \cdots & a_{P_{2n-1}0}^{wy} & a_{00}^{wz} & \cdots & a_{P_{2n}0}^{wz} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{0R_{2n}}^{wx} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n}}^{wx} & a_{1R_{2n}}^{wy} & \cdots & a_{P_{2n-1}R_{2n}}^{wy} & a_{0R_{2n}}^{wz} & \cdots & a_{P_{2n}R_{2n}}^{wz}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
C_{0x}(k_x) \\
\vdots \\
C_{P_{2n}x}(k_x) \\
C_{1y}(k_x) \\
\vdots \\
C_{P_{2n-1}y}(k_x) \\
C_{0z}(k_x) \\
\vdots \\
C_{P_{2n}z}(k_x)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
\vdots \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
2b \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{pmatrix}
\quad (6.13)$$

mit

$$\begin{aligned}
a_{P_{2n}R_{2n}}^{ux} &= \int_{-b}^b \bar{u}_{P_{2n}x}^i(k_x) P_{R_{2n}}(y) dy = \sum_{i=1}^{n_S} \bar{u}_{P_{2n}x}^i P_{R_{2n}i} 2b_S \\
&\vdots \\
a_{P_{2n}R_{2n}}^{wz} &= \int_{-b}^b \bar{w}_{P_{2n}z}^i(k_x) P_{R_{2n}}(y) dy = \sum_{i=1}^{n_S} \bar{w}_{P_{2n}z}^i P_{R_{2n}i} 2b_S
\end{aligned}
\quad (6.14)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Legendre-Polynome zueinander (s. Anhang B) ergibt sich auf der rechten Seite des Gleichungssystems (6.13) nur für das konstante Legendre-Polynom 0-ten Grades ein Beitrag aus der Sollverschiebung $\bar{w}_{SOLL}(k_x)$.

Um die Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ zu erhalten, muss die Spannungsergebnierende aus der vertikalen Interaktionsspannung vorerst bestimmt werden. Diese lautet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_z(k_x, y) dy = \int_{-b}^b \sum_P C_{Pz}(k_x) P_P(y) dy = \int_{-b}^b C_{0z}(k_x) P_0(y) dy = C_{0z}(k_x) 2b \quad (6.15)$$

Anhand von Gl.(6.16) lässt sich die Halbraumsteifigkeit ermitteln.

$$\bar{k}_H(k_x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_z(k_x, y) dy}{\bar{w}(k_x, y=0, z=0)} = \frac{C_{0z}(k_x) 2b}{\bar{w}_{SOLL}(k_x)} = C_{0z}(k_x) 2b \quad (6.16)$$

6.2 Erschütterungsausbreitung im Halbraum

Über die berechneten Halbraumsteifigkeiten $\bar{k}_H(k_x)$ für den horizontalverschiebungsunbehinderten (s. Gleichung (5.31)) und den horizontalverschiebungsbehinderten Halbraum (s. Gleichung (6.16)) kann die Balkengleichung gelöst werden.

Geht man von einer mit Ω oszillierenden Belastung aus, so errechnet sich die Balkenverschiebung $\bar{w}_B(k_x)$ im Bildraum in Anlehnung an Gl.(5.14) für eine mit v bewegte Last zu:

$$\bar{w}_B(k_x) = \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega - vk_x)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x)} \quad (6.17)$$

Für die unbewegte Last erhält man über Gl.(5.15) folgenden Ausdruck:

$$\bar{w}_B(k_x) = \frac{\pi}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega)} \quad (6.18)$$

Setzt man als Folge der Übergangsbedingung einer starren vertikalen Koppelung zwischen Balken und Halbraum die Sollverschiebung $\bar{w}_{SOLL}(k_x)$ der Balkenverschiebung $\bar{w}_B(k_x)$ gleich, so lassen sich die tatsächlichen Legendre-Interaktionsspannungskoeffizienten unter vorgegebener Belastung bestimmen.

$$C_P^{tat}(k_x) = \frac{\bar{w}_B(k_x)}{\bar{w}_{SOLL}(k_x)} C_P(k_x) = \bar{w}_B(k_x) C_P(k_x) \quad (6.19)$$

Die Interaktionsspannungen im Bildraum ergeben sich schließlich über nachstehende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{xz}(k_x, y) &= \sum_{P_{2n}} C_{P_{2n}x}^{tat}(k_x) P_{P_{2n}s} \\ \bar{p}_{yz}(k_x, y) &= \sum_{P_{2n-1}} C_{P_{2n-1}y}^{tat}(k_x) P_{P_{2n-1}s} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\bar{p}_z(k_x, y) = \sum_{P_{2n}} C_{P_{2n}z}^{tat}(k_x) P_{P_{2n}s}$$

Über eine einfache Fourier-Rücktransformation von k_x nach x lassen sich die Interaktionsspannungen im Originalraum ausweisen.

Die Halbraumverschiebungen im Bildraum sind definiert über folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(k_x, k_y) &= \sum_{P_{2n}} C_{P_{2n}x}^{tat}(k_x) \sum_{s=1}^{n_S} \left(P_{P_{2n}s} e^{ik_y(b-b_S(2s-1))} \right) \bar{u}_{Rx}(k_x, k_y) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\bar{w}_z(k_x, k_y) = \sum_{P_{2n}} C_{P_{2n}z}^{tat}(k_x) \sum_{s=1}^{n_S} \left(P_{P_{2n}s} e^{ik_y(b-b_S(2s-1))} \right) \bar{w}_{Rz}(k_x, k_y)$$

Durch eine Überlagerung der einzelnen Anteile erhält man die Gesamtverschiebungen im Fouriertransformierten Raum.

$$\begin{aligned}\bar{u}(k_x, k_y) &= \bar{u}_x(k_x, k_y) + \bar{u}_y(k_x, k_y) + \bar{u}_z(k_x, k_y) \\ \bar{v}(k_x, k_y) &= \bar{v}_x(k_x, k_y) + \bar{v}_y(k_x, k_y) + \bar{v}_z(k_x, k_y) \\ \bar{w}(k_x, k_y) &= \bar{w}_x(k_x, k_y) + \bar{w}_y(k_x, k_y) + \bar{w}_z(k_x, k_y)\end{aligned}\tag{6.22}$$

Führt man nun eine zweifache Fourier-Rücktransformation von k_x, k_y nach x, y durch, so bekommt man die Gesamtverschiebungen infolge einer mit der Geschwindigkeit v bewegten und mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierenden Last im Originalraum.

$$\begin{aligned}u(x^*, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(k_x, k_y) e^{ik_x x^*} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right) \\ v(x^*, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(k_x, k_y) e^{ik_x x^*} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right) \\ w(x^*, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{w}(k_x, k_y) e^{ik_x x^*} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right)\end{aligned}\tag{6.23}$$

Für eine ortsfeste Last ergeben sich die Verschiebungen analog zu Gl.(6.23), indem man die mitbewegte Koordinate x^* durch die ortsfeste Koordinate x ersetzt.

Kapitel 7

Überprüfung des Berechnungsverfahrens

Die Berechnung der Halbraumsteifigkeiten sowie der Erschütterungsausbreitungen im Halbraum sind in MATLAB programmiert und ausgewertet. Ein schematische Darstellung des Berechnungsablaufs ist in Abb.(7.1) wiedergegeben.

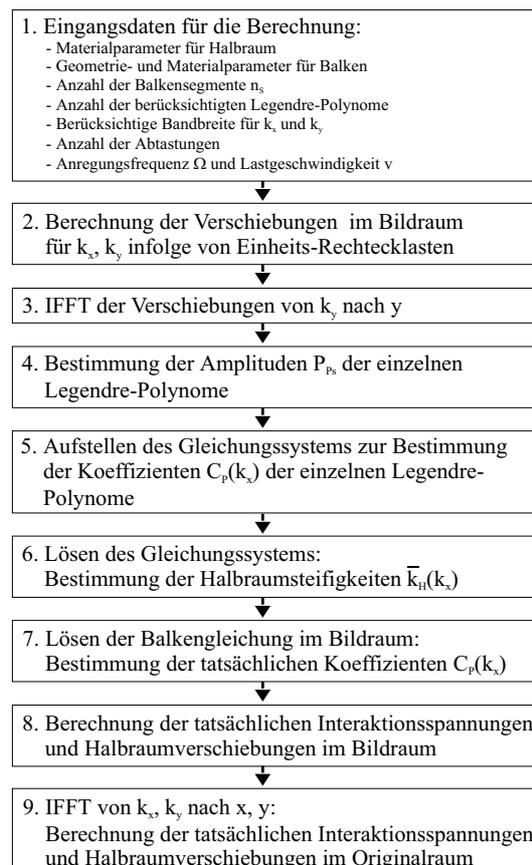


Abbildung 7.1: Programm-Ablaufschema zur Berechnung der Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ und der Erschütterungsausbreitung im Halbraum

Die Fourier-Rücktransformationen wurden ausschließlich über eine Inverse Fast Fourier Transformation (IFFT) durchgeführt.

Um die errechneten Ergebnisse auf ihre Güte und Verwendbarkeit beurteilen zu können, werden einige Vergleiche und Tests ausgeführt.

7.1 Bestimmung der Legendre-Koeffizienten C_P

Zur Bestimmung der Halbraumsteifigkeiten muss das Gleichungssystem zur Bestimmung der Legendre-Koeffizienten $C_P(k_x)$ gelöst werden (s. Gl.(5.28) und (6.13)).

Um einen Eindruck zu bekommen, ob die erhaltenen Legendre-Koeffizienten im richtigen Bereich liegen, werden zum Vergleich die Ergebnisse aus der Dissertation von S. Lenz herangezogen. Lenz bildet in seiner Arbeit den Verlauf der Legendre-Koeffizienten für einen ungeschichteten Halbraum ohne Horizontalverschiebungsbehinderung ab [Len03, Seite 86, Abbildung 6.7].

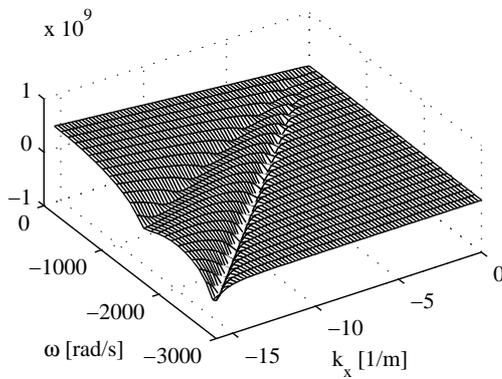
Die Bodenparameter und die Balkenbreite werden aus [Len03, Seite 71, Tabelle 6.1] übernommen und sind hier nochmals ausgewiesen.

| Balken: | | | |
|--------------------|--------|-------|----------|
| Breite: | $2b$ | 3.6 | m |
| Untergrund: | | | |
| E-Modul: | E | 50 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ | 2000 | kg/m^3 |
| Querdehnzahl: | ν | 0.3 | – |
| Dämpfungsgrad: | d | 0.025 | – |

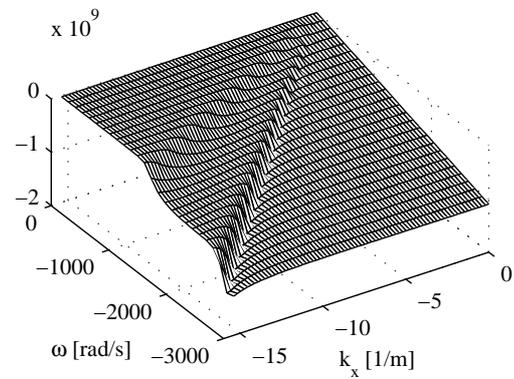
In Abb.(7.2) sind die Ergebnisse für die Legendre-Koeffizienten der 0., 4. und 8. Ordnung sowohl für die Real- als auch die Imaginärteile dargestellt.

Beim Vergleich mit den Ergebnissen von Lenz ist eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen. Die gerechneten Werte entsprechen in ihrem Verlauf und auch in ihrer Amplitudengrößenordnung den von Lenz errechneten und dargestellten Werten.

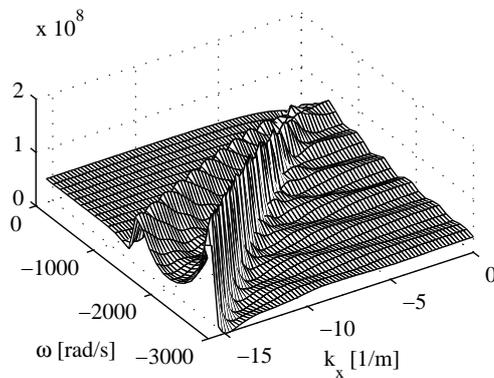
Bei der Berechnung der Halbraumsteifigkeiten geht neben der Balkenbreite nur noch der Legendre-Koeffizient 0. Ordnung C_{0z} ein (vgl. Gl.(5.31) und (6.16)). Damit lässt sich die Gleichung des auf dem Halbraum gebetteten Balkens lösen (s. Abb.(7.1), unter 7.).



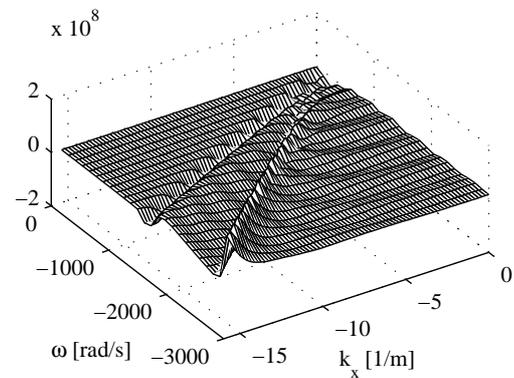
(a) 0. Polynom, Realteil



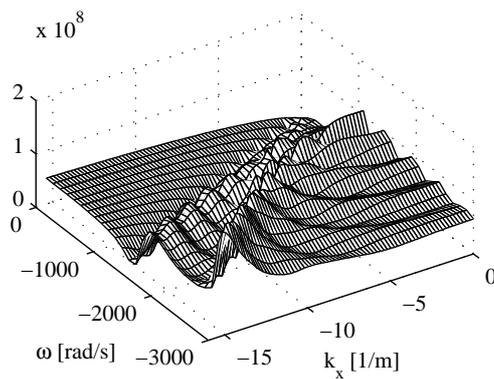
(b) 0. Polynom, Imaginärteil



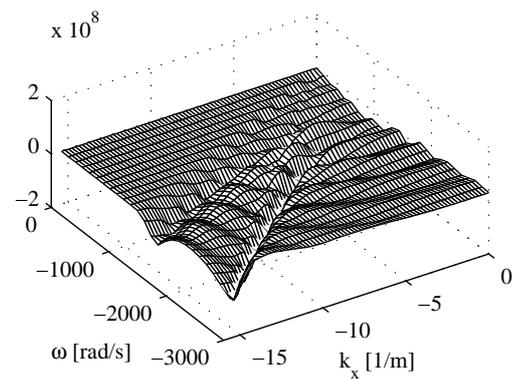
(c) 4. Polynom, Realteil



(d) 4. Polynom, Imaginärteil



(e) 8. Polynom, Realteil



(f) 8. Polynom, Imaginärteil

Abbildung 7.2: Legendre-Koeffizienten für eine Einheitseinsenkung als Vergleich zu den Ergebnissen von S. Lenz [Len03, Seite 86, Abbildung 6.7]

7.2 Erschütterungsausbreitung im Halbraum unter Cosinus- und Sinus-förmiger Belastung

In einer weiteren Test-Berechnung werden die Ergebnisse der Erschütterungsausbreitung im Halbraum überprüft. Um auf die Verschiebungsgrößen im Originalraum zu kommen, muss eine zweifache IFFT von k_x, k_y nach x, y durchgeführt werden (s. Abb.(7.1), unter 9.).

Um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, ob die Programmierung der IFFT zu den richtigen Ergebnissen führt, wird mit einer in x -Richtung Cosinus- bzw. Sinus-veränderlichen Last gerechnet.

Dazu wird in einer ersten Berechnung die Last für eine bestimmte Wellenzahl K_x vorgegeben. Dadurch entfällt in der Berechnung der Erschütterungsausbreitung die IFFT von k_x nach x .

Für eine mit Ω oszillierende, K_x -Cosinus-veränderliche, ortsfeste Last lässt sich die Balkenbelastung wie folgt anschreiben:

$$p_B(x, t) = \cos(K_x x) \cos(\Omega t) \quad (7.1)$$

$$\bar{p}_B(k_x, \omega) = \pi (\delta(k_x - K_x) + \delta(k_x + K_x)) \pi (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) \quad (7.2)$$

Da für die Halbraumsteifigkeit unter einer ortsfesten Last $\bar{k}_H(K_x) = \bar{k}_H(-K_x)$ gilt, reicht es aus, diese nur für ein K_x zu bestimmen. Die Balkenverschiebung kann somit wie folgt formuliert werden:

$$w_B(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \cos(K_x x) \frac{2\pi^2}{E_B I_B (K_x)^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(K_x, -\Omega)} \right) \quad (7.3)$$

$$\bar{w}_B = \frac{2\pi^2}{E_B I_B (K_x)^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(K_x, -\Omega)} \quad (7.4)$$

Gleichung (7.4) liefert einen einzigen Wert für die Verschiebung unter dem Balken. Damit lassen sich in Anlehnung an Gl.(6.19) die tatsächlichen Legendre-Interaktionsspannungskoeffizienten $C_{P_z}^{tat}$ bestimmen. Um die Halbraumverschiebungen im Originalraum zu erhalten ist noch eine IFFT von k_y nach y durchzuführen (s. Kapitel 6.2).

In einer zweiten Berechnung wird ebenfalls eine mit Ω oszillierende, K_x -Cosinus-veränderliche, ortsfeste Last angesetzt, die jedoch in x -Richtung begrenzt ist. Die im Bereich $x \leq |x_0|$ gefensterter Last lautet wie folgt:

$$p_B(x, t) = \cos(K_x x) (H(x + x_0) - H(x - x_0)) \cos(\Omega t) \quad (7.5)$$

Über eine zweifache Fourier-Transformation ergibt sich die Last im Bildraum (vgl. Anhang A):

$$\bar{p}_B(k_x, \omega) = x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} + \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right) \pi (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) \quad (7.6)$$

Die Balkenverschiebung ergibt sich somit über folgende Ausdrücke:

$$w_B(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} + \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega)} e^{ik_x x} dk_x \right) \quad (7.7)$$

$$\bar{w}_B(k_x) = \frac{\pi x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} + \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega)} \quad (7.8)$$

Es lassen sich die tatsächlichen Legendre-Koeffizienten $C_{P_z}^{tat}(k_x)$ bestimmen, und über diese ergeben sich schließlich, nach einer zweifachen IFFT von k_x, k_y nach x, y , die Verschiebungen im Halbraum.

Im Unterschied zu der ersten Berechnung muss die Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ für die ganze Bandbreite k_x bestimmt werden und nicht nur für ein bestimmtes K_x . Damit ist eine IFFT (von k_x nach x) bei der Bestimmung der Halbraumverschiebungen im Originalraum zusätzlich durchzuführen.

Wählt man eine entsprechend weit gefensterte Cosinus-Funktion, um eine möglichst große Anzahl an ganzen Wellenlängen zu erfassen und die Störstelle der Randzone ausreichend zu entfernen, so ist bei korrekter Anbindung der Halbraumsteifigkeiten, wie auch richtiger programmtechnischer Erfassung der IFFT, in einem angemessenen Abstand von der Randzone des Fensters derselbe Verschiebungsverlauf wie bei der ersten Berechnung zu erwarten.

Da es sich bei der Cosinus-Funktion um eine k_x -symmetrische Funktion im Bildraum handelt, wird in einem zweiten Test eine Sinus-Last angesetzt, um die IFFT auch für eine antisymmetrische Funktion zu prüfen.

Die Balkenverschiebung ergibt sich somit für eine ungefensterte Sinus-Funktion zu:

$$w_B(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \sin(K_x x) \frac{2\pi^2}{E_B I_B (K_x)^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(K_x, -\Omega)} \right) \quad (7.9)$$

Für eine gefensterte Sinus-Funktion ergeben sich die Balkenverschiebungen zu:

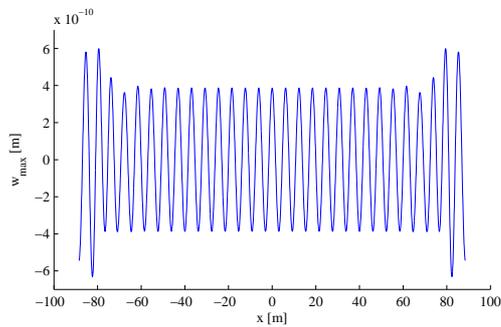
$$w_B(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \pi x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} - \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right)}{E_B I_B k_x^4 - \mu_B (-\Omega)^2 + \bar{k}_H(k_x, -\Omega)} e^{ik_x x} dk_x \right) \quad (7.10)$$

Die in Abb.(7.3) dargestellten Verläufe werden für folgende Parameter berechnet:

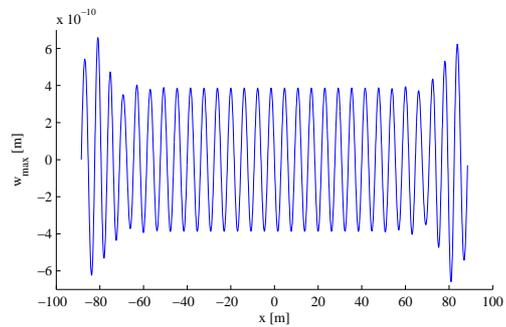
| Cosinus-Last: | | | |
|---------------------------|-----------|---------|----------|
| Anregungsfrequenz: | Ω | 1000 | rad/s |
| Wellenzahl: | K_x | 1.021 | $1/m$ |
| Lastbegrenzung: | x_0 | 100 | m |
| Balken: | | | |
| Höhe: | h_B | 0.4 | m |
| Breite: | $2b$ | 3.6 | m |
| E-Modul: | E_B | 34000 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ_B | 2400 | kg/m^3 |
| Untergrund: | | | |
| E-Modul: | E | 50 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ | 2000 | kg/m^3 |
| Querdehnzahl: | ν | 0.3 | – |
| Dämpfungsgrad: | d | 0.025 | – |
| Berechnung: | | | |
| Balkensegmente: | n_S | 61 | – |
| Anzahl Legendre-Polynome: | n_{LP} | 5 | – |
| k_x -Bandbreite: | $2k_{x0}$ | 106.466 | $1/m$ |
| k_y -Bandbreite: | $2k_{y0}$ | 106.466 | $1/m$ |
| Abtastungen: | N | 3000 | – |

Die Ergebnisse in Abb.(7.3) zeigen in einem begrenzten Ausschnitt, der ausreichend von der Störstelle am Rand der Fensterung entfernt ist, im Vergleich zueinander sehr gut übereinstimmende Verläufe.

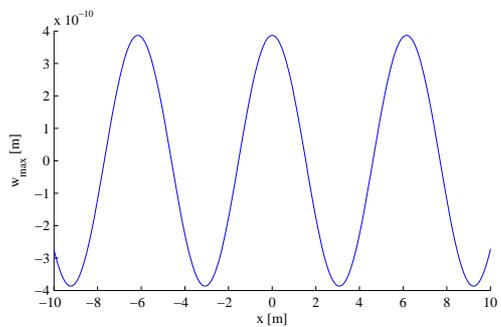
Daher ist das Ergebnis hinsichtlich der programmtechnischen Anbindung der Halbraumsteifigkeiten und auch der Implementierung der IFFT zufriedenstellend.



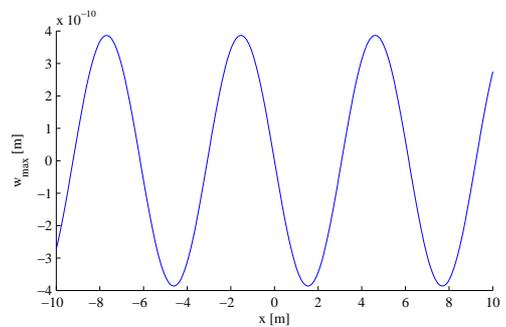
(a) Gefensterte Cosinus-Funktion



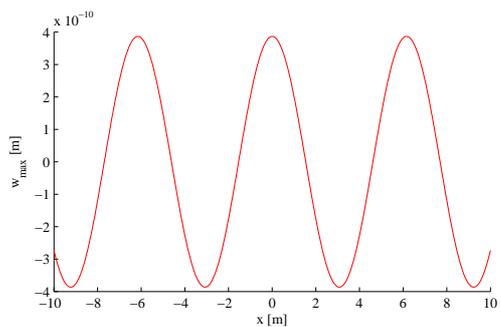
(b) Gefensterte Sinus-Funktion



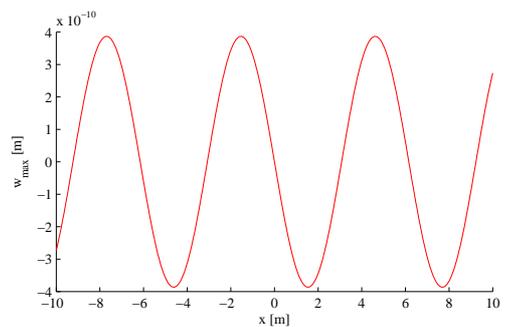
(c) Gefensterte Cosinus-Funktion, Ausschnitt



(d) Gefensterte Sinus-Funktion, Ausschnitt



(e) Ungefensterte Cosinus-Funktion, Ausschnitt



(f) Ungefensterte Sinus-Funktion, Ausschnitt

Abbildung 7.3: Vergleich der Verschiebungsverläufe für mit $\Omega = 1000 \text{ rad/s}$ oszillierende gefensterte und ungefensterte $\cos(K_x x)$ - und $\sin(K_x x)$ -förmige Belastungen, $K_x = 1.021 \text{ 1/m}$

7.3 Anzahl der Abtastungen

Die IFFT bietet einen schnellen Algorithmus zur numerischen Berechnung von Inversen Fourier-Rücktransformationen. Sie hat jedoch den Nachteil der äquidistanten Abtastung. Um scharfe Spitzen der rückzutransformierenden Größen richtig zu erfassen, ist eine entsprechend hohe Anzahl an Abtastungen notwendig. Dies beinhaltet wiederum eine Erhöhung des Rechenaufwands.

Die Ergebnisse, wie sie in Kapitel 8 dargestellt sind, sind ausschließlich mit der IFFT berechnet. Bei einem PC mit 1 GB Arbeitsspeicher und einem AMD Athlon 2500+ 1.83 GHz Prozessor, war die Anzahl der Abtastungen N , insbesondere bei Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung, auf etwa 3000 limitiert. Aus diesem Grund sind die Berechnungen ausschließlich mit einer Abtastung von $N = 3000$ durchgeführt worden.

Um die Verwendbarkeit der Ergebnisse unter dieser Einschränkung zu beurteilen, sind diese auf ihre Empfindlichkeit hinsichtlich der Anzahl der Abtastungen bei unveränderlicher $2k_x$ - bzw. $2k_y$ -Bandbreite untersucht und im Folgenden für den horizontalverschiebungsunbehinderten Halbraum graphisch veranschaulicht.

Die der Berechnung zugrunde gelegten Parameter sind der Tab.(8.1) in Kapitel 8 zu entnehmen.

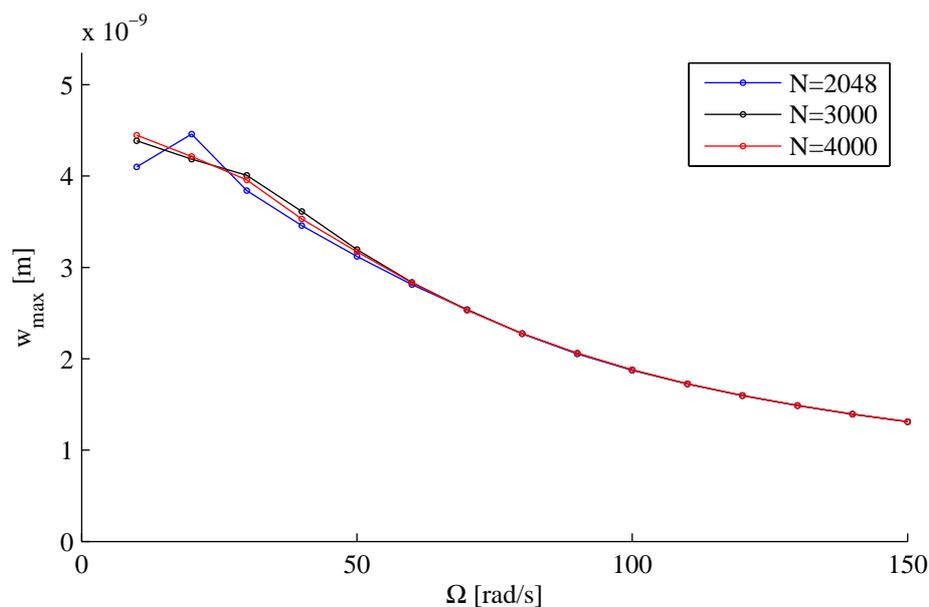


Abbildung 7.4: Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{\max} bei $y = 0$ m für eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$

Abbildung (7.4) zeigt für eine oszillierende, ortsfeste Belastung eine sehr gute Übereinstimmung im Bereich von $\Omega > 50$ rad/s. Im Bereich kleinerer Ω betrug die Abweichung der Werte für $N = 4000$ von denjenigen der gewählten Anzahl $N = 3000$ unter 5 %, während die Werte für $N = 2048$ vereinzelt über 5 % abwichen.

Die vorhandene Abweichung kann, hinsichtlich einer Aussage zur Beurteilung des Einflusses der Horizontalverschiebungsbehinderung, als annehmbar befunden werden.

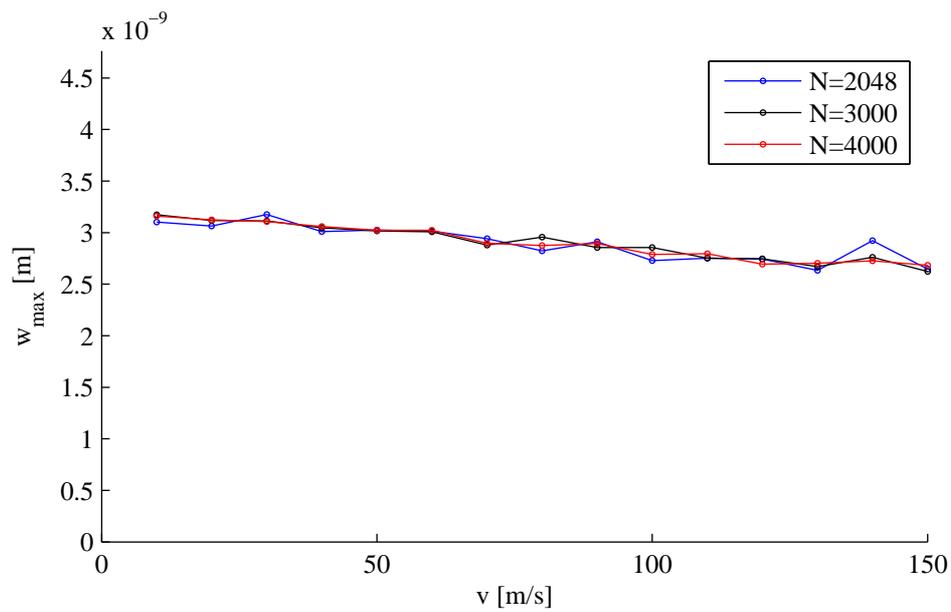


Abbildung 7.5: Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{max} bei $y = 0$ m für eine mit $\Omega = 50$ rad/s oszillierende, und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$

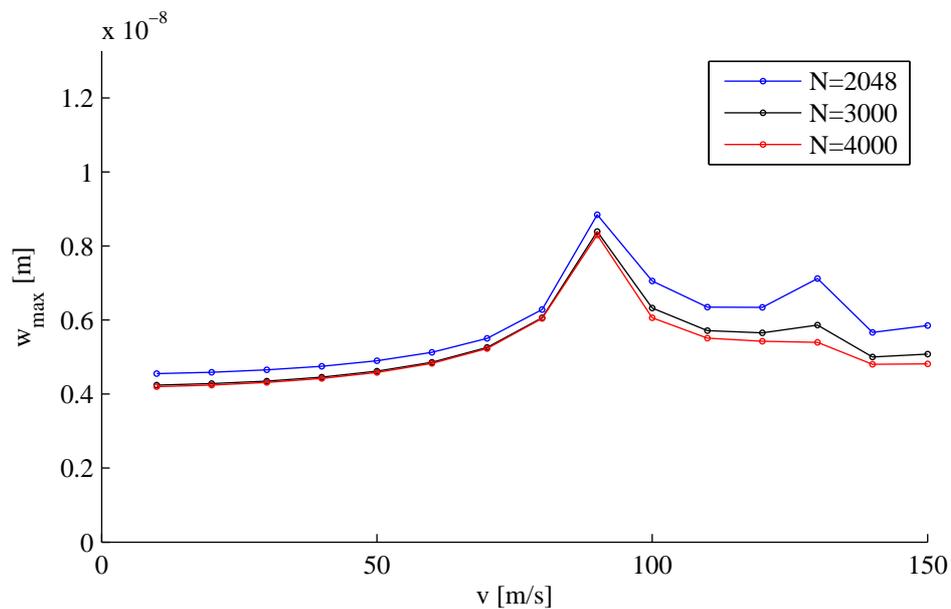


Abbildung 7.6: Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{max} bei $y = 0$ m für eine mit $\Omega = 0.1$ rad/s oszillierende, und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$

Um im Bereich von $\Omega < 30$ rad/s exaktere Werte zu erhalten, muss entweder die Rechnerkapazität verbessert werden, um mit höherer Abtastung, auch für den Fall der Horizon-

talverschiebungsbehinderung, rechnen zu können, oder eine adaptive Abtastung gewählt werden, wie sie z.B. Lieb vorschlägt [Lie97].

Für eine mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegte Last, die mit der Anregungsfrequenz $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszilliert zeigt der Vergleich in Abb.(7.5) eine gute Übereinstimmung mit einer Abweichung für den betrachteten Geschwindigkeitsbereich in der Größenordnung von unter 5 %.

In der Abb.(7.6) ist ebenfalls für eine bewegte Last, die mit der Anregungsfrequenz $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ oszilliert, der Einfluss der Abtastung dargestellt.

Es fällt sehr deutlich auf, dass für $N = 2048$ der qualitative Verlauf zwar gut erkennbar ist, die Verschiebungsamplituden jedoch zu hoch sind. Die Abweichung von den Werten bei $N = 3000$ liegen bei den Geschwindigkeiten unterhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit (Ort des maximalen Verschiebungsausschlags) im Bereich von 5 bis 10 %. Oberhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit beträgt der Unterschied vereinzelt bis zu 20 %.

Der Vergleich der Werte für $N = 4000$ zu $N = 3000$ zeigt im Bereich unterhalb der Rayleighwellengeschwindigkeit eine gute Übereinstimmung, oberhalb davon liegen die Abweichungen in der Größenordnung von 5 %.

Die den Berechnungen zugrunde liegende Bandbreite $2k_{x0}$ bzw. $2k_{y0}$ ist laut Tab.(8.1) mit 109.956 1/m vorgegeben. Die Rayleighwellenzahlen liegen für die dargestellten Ergebnisse bis $\Omega = 150 \text{ rad/s}$ im Bereich bis etwa 1.5 1/m . Da die Verschiebungen im Bildraum für größere Wellenzahlen schnell abklingen, ist die Bandbreite ausreichend gewählt.

Kapitel 8

Ergebnisse

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse sind, soweit nicht anderweitig angemerkt, mit den Parametern aus der Tab.(8.1) berechnet.

Dinkel, der die Güte der numerischen Erfassung einer konstanten Einsenkung über die gesamte Balkenbreite untersucht hat, empfiehlt eine Berechnung mit $n_S = 40 - 80$ Streifenlasten und die Verwendung der Legendre-Polynome bis zum Grad 10 [Din00].

Die Anzahl der berücksichtigten Legendre-Polynome wird jeweils mit $n_{LP} = 5$ gewählt. Daher sind die symmetrischen Polynome bis zum Grad 8, die antisymmetrischen Polynome bis zum Grad 9 berücksichtigt. Die Unterteilung des Balkens wird in $n_S = 63$ Streifen vorgenommen.

| Balken: | | | |
|---------------------------|-----------|---------|----------|
| Höhe: | h_B | 0.4 | m |
| Breite: | $2b$ | 3.6 | m |
| E-Modul: | E_B | 34000 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ_B | 2400 | kg/m^3 |
| Untergrund: | | | |
| E-Modul: | E | 50 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ | 2000 | kg/m^3 |
| Querdehnzahl: | ν | 0.3 | – |
| Dämpfungsgrad: | d | 0.025 | – |
| Berechnung: | | | |
| Balkensegmente: | n_S | 63 | – |
| Anzahl Legendre-Polynome: | n_{LP} | 5 | – |
| k_x -Bandbreite: | $2k_{x0}$ | 109.956 | $1/m$ |
| k_y -Bandbreite: | $2k_{y0}$ | 109.956 | $1/m$ |
| Abtastungen: | N | 3000 | – |

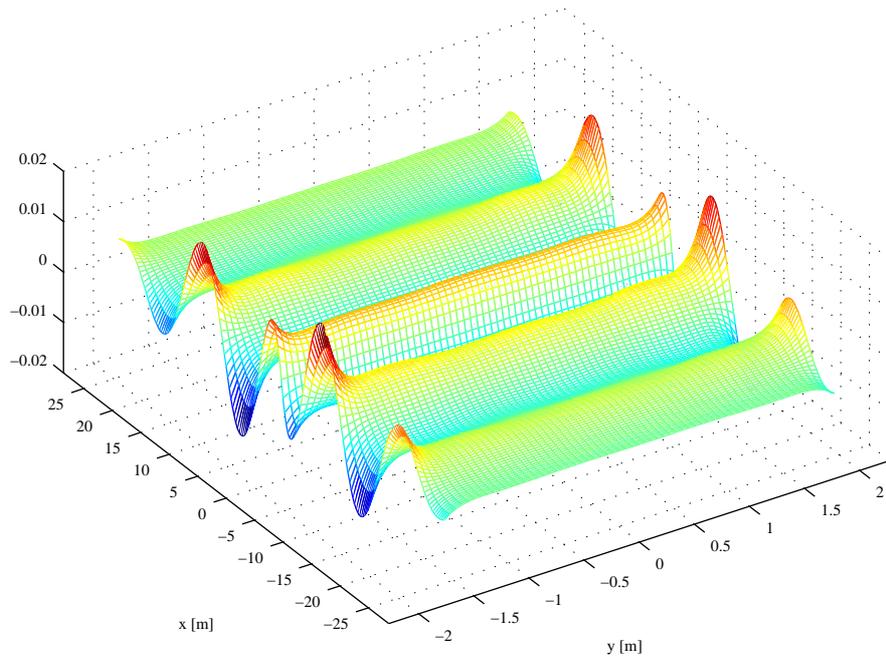
Tabelle 8.1: Berechnungsparameter

8.1 Interaktionsspannungs- und Verschiebungsverlauf

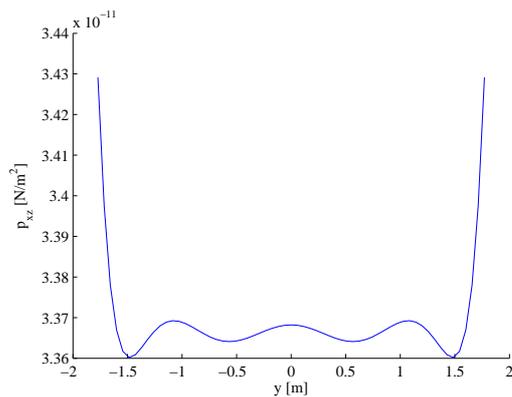
Nachfolgend sind für eine ortsfeste als auch eine bewegte und mit der Anregungsfrequenz $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende Belastung die Halbraumverschiebungen und Interaktionsspannungen dargestellt. Die Berechnung wird für einen in Längs- und Querrichtung behinderten Halbraum durchgeführt.

Die Ergebnisse sollen einen grundsätzlichen Eindruck über den Verlauf der Verschiebungen und Interaktionsspannungen im Originalraum geben und gleichzeitig auch einer Plausibilitätsprüfung standhalten.

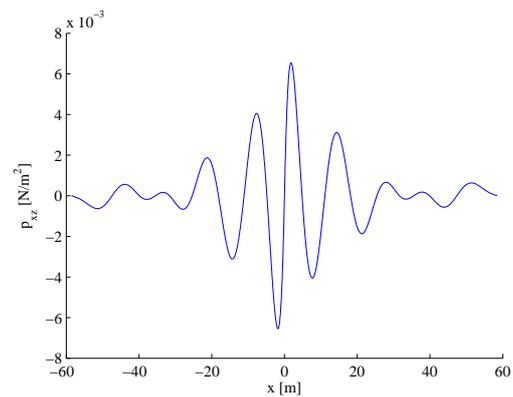
8.1.1 Oszillierende, ortsfeste Einzellast ($\Omega = 50 \text{ rad/s}$)



(a) Längsschubspannungsverlauf p_{xz} [N/m^2]



(b) Schnitt durch $x = 0$



(c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.1: Verlauf der Interaktionsspannung p_{xz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

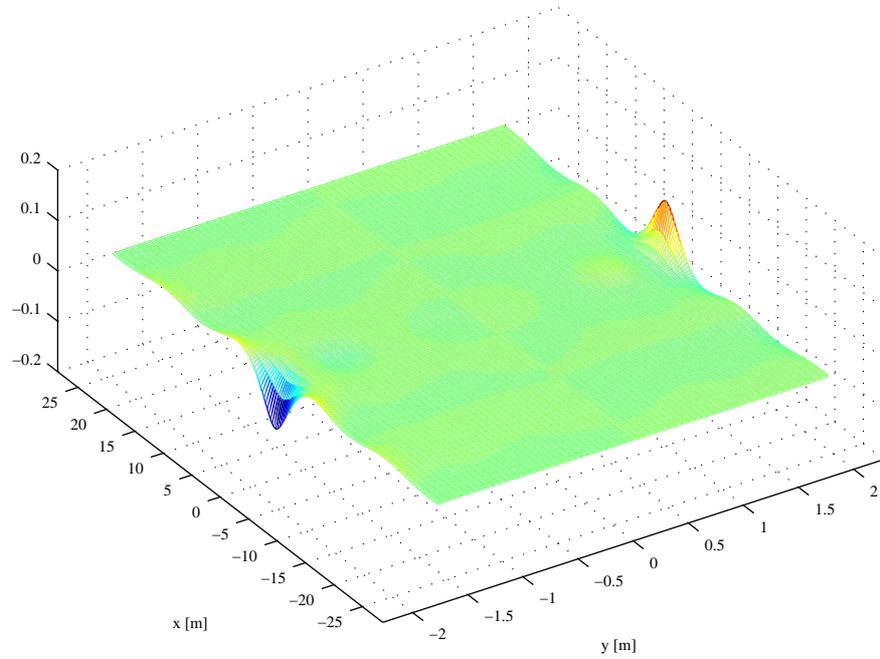
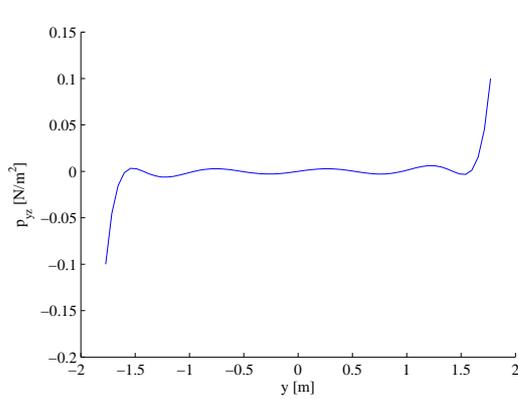
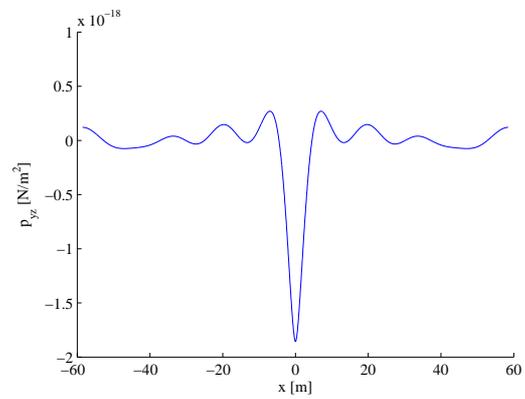
(a) Querschubspannungsverlauf p_{yz} [N/m^2](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.2: Verlauf der Interaktionsspannung p_{yz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

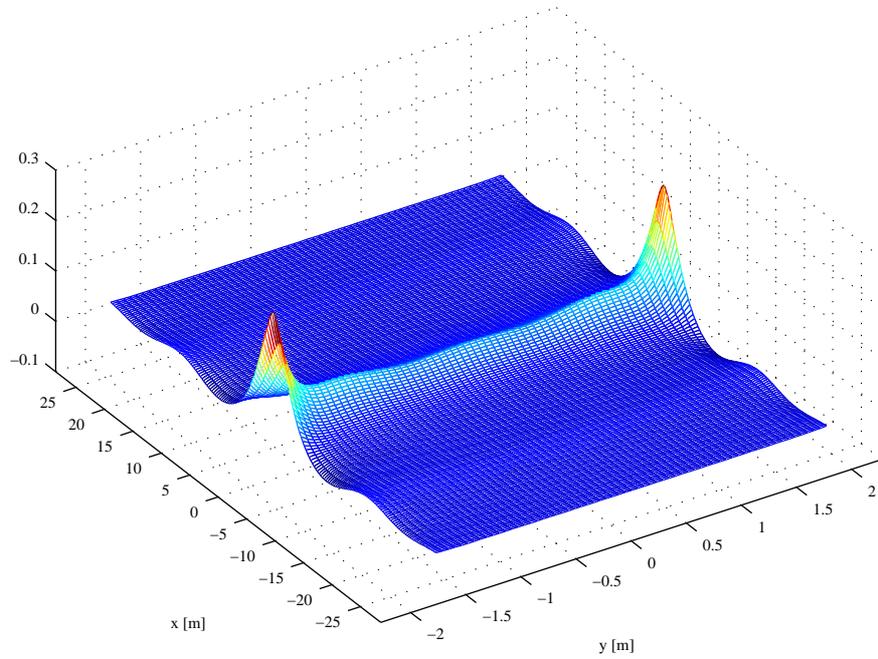
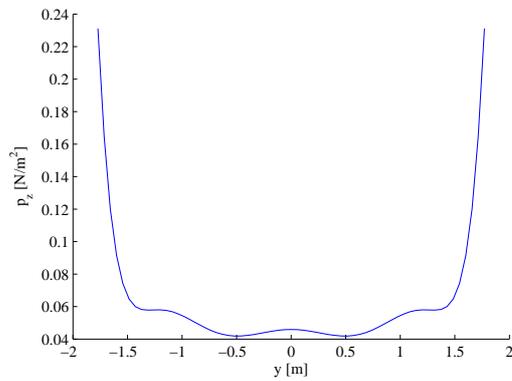
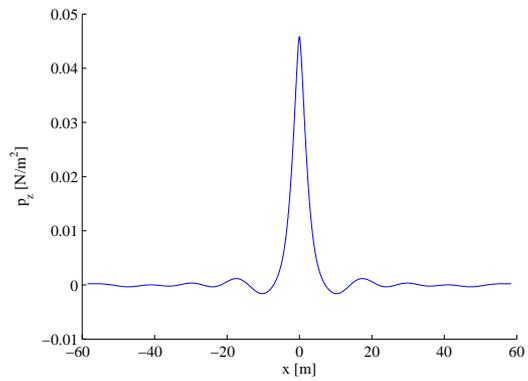
(a) Vertikalspannungsverlauf p_z [N/m^2](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.3: Verlauf der Interaktionsspannung p_z für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

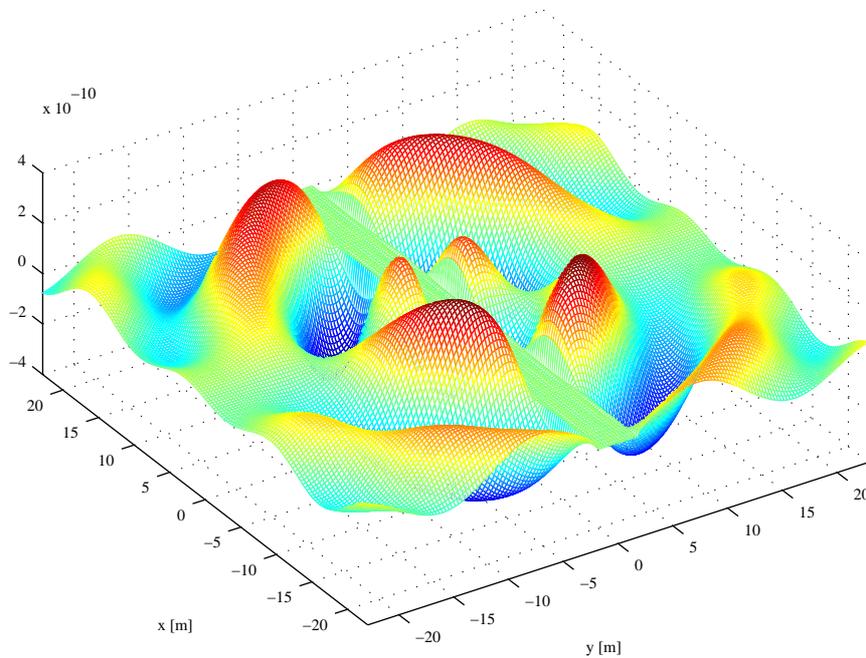
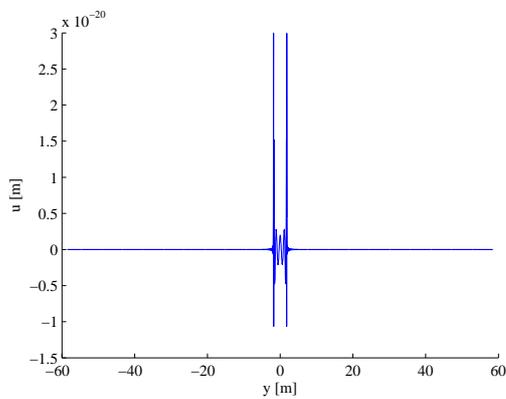
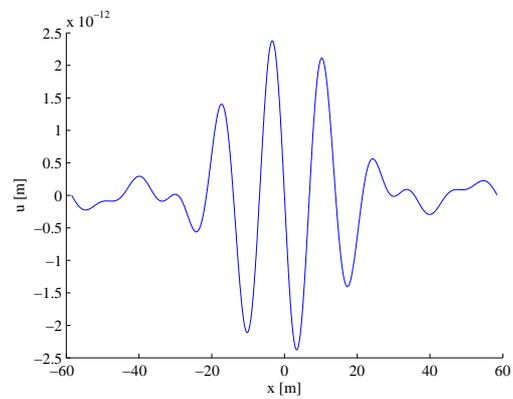
(a) Längsverschiebungsverlauf u [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.4: Verlauf der Halbraumverschiebung u für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

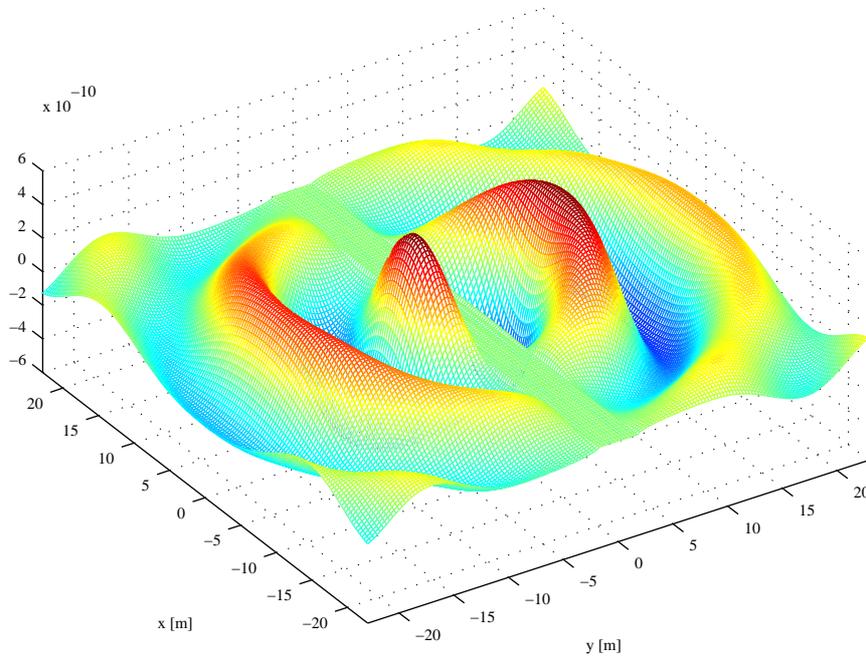
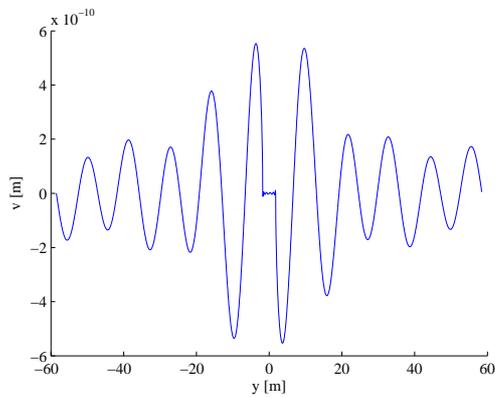
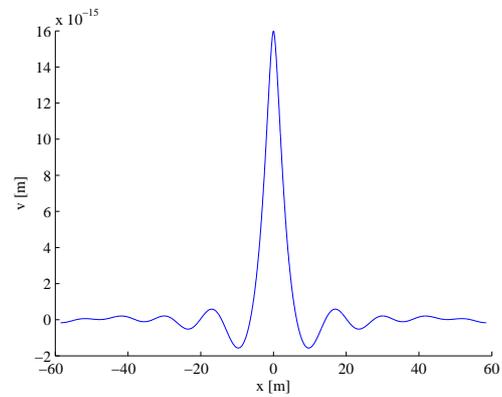
(a) Querverschiebungsverlauf v [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.5: Verlauf der Halbraumverschiebung v für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

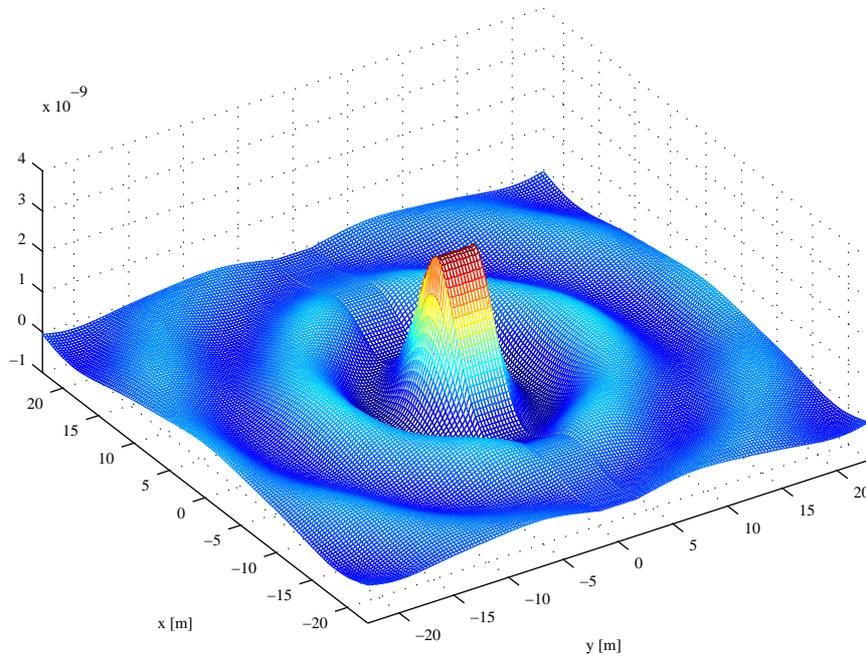
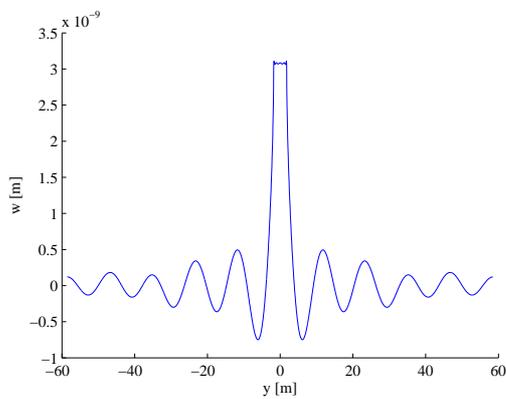
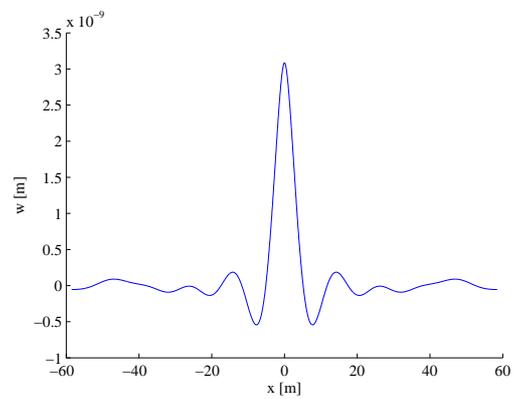
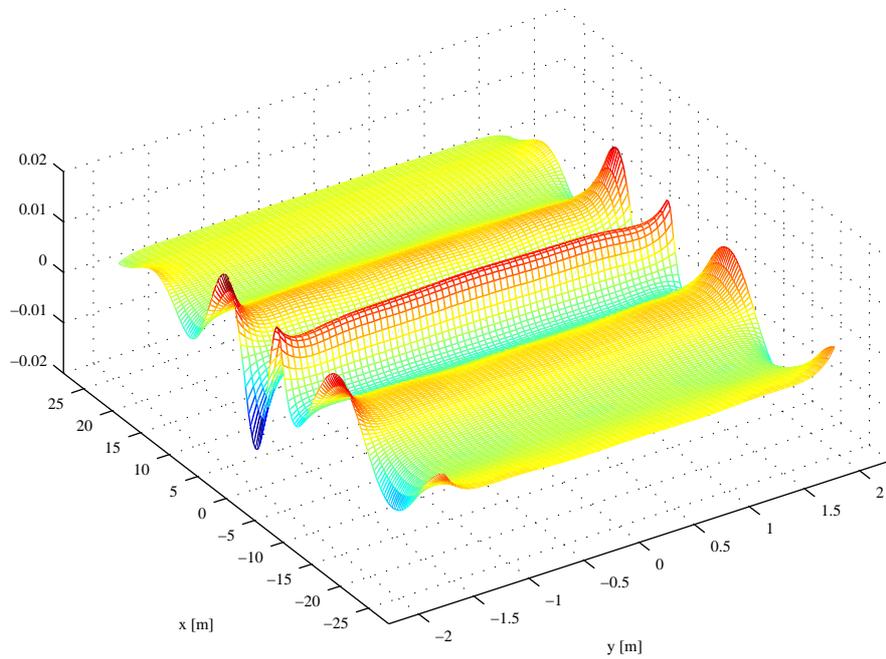
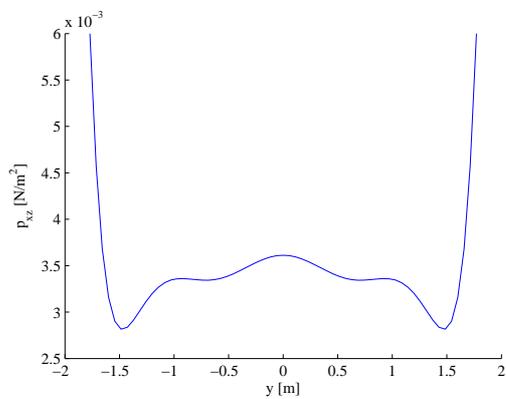
(a) Vertikalverschiebungsverlauf w [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.6: Verlauf der Halbraumverschiebung w für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

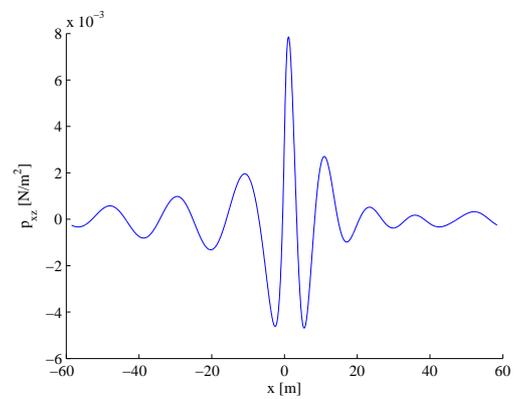
8.1.2 Oszillierende, bewegte Einzellast ($\Omega = 50 \text{ rad/s}$, $v = 50 \text{ m/s}$)



(a) Längsschubspannungsverlauf $p_{xz} \text{ [N/m}^2\text{]}$



(b) Schnitt durch $x = 0$



(c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.7: Verlauf der Interaktionsspannung p_{xz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 \text{ [N]} \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

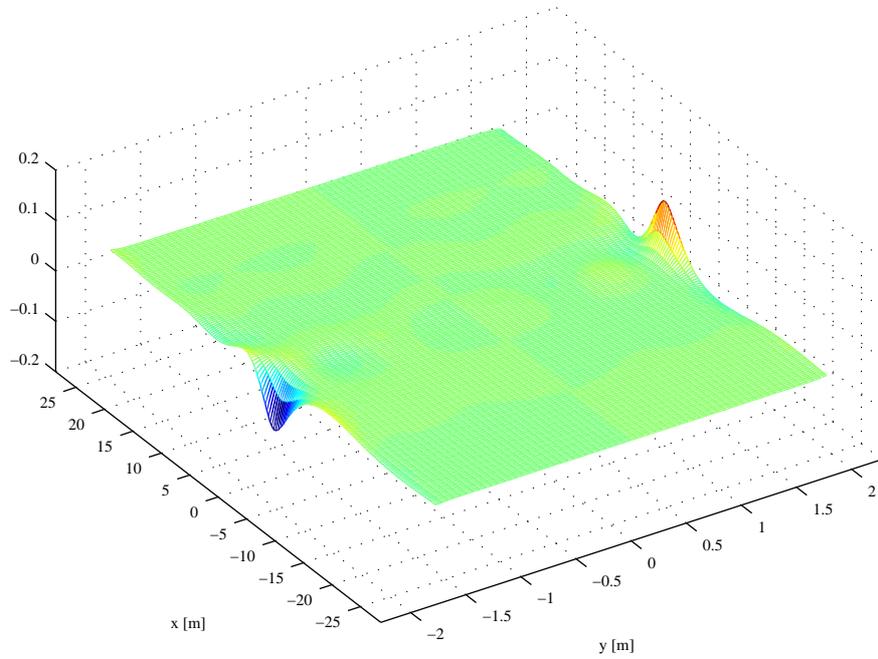
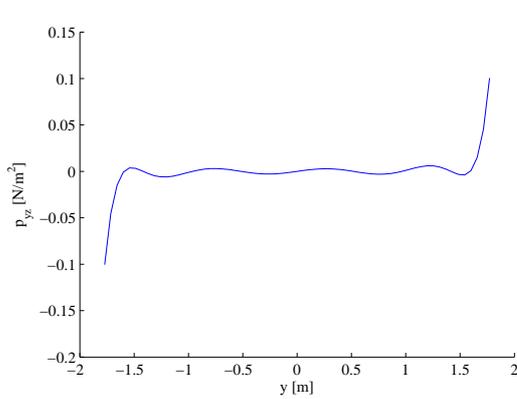
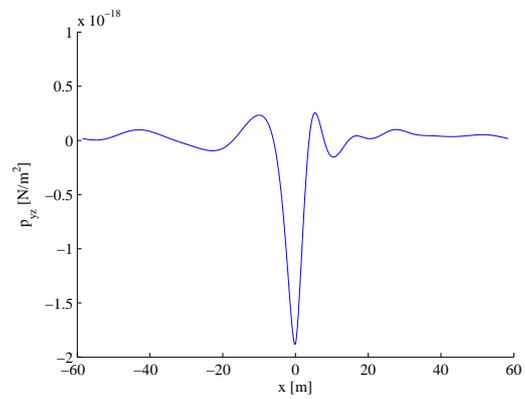
(a) Querschubspannungsverlauf p_{yz} [N/m^2](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.8: Verlauf der Interaktionsspannung p_{yz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

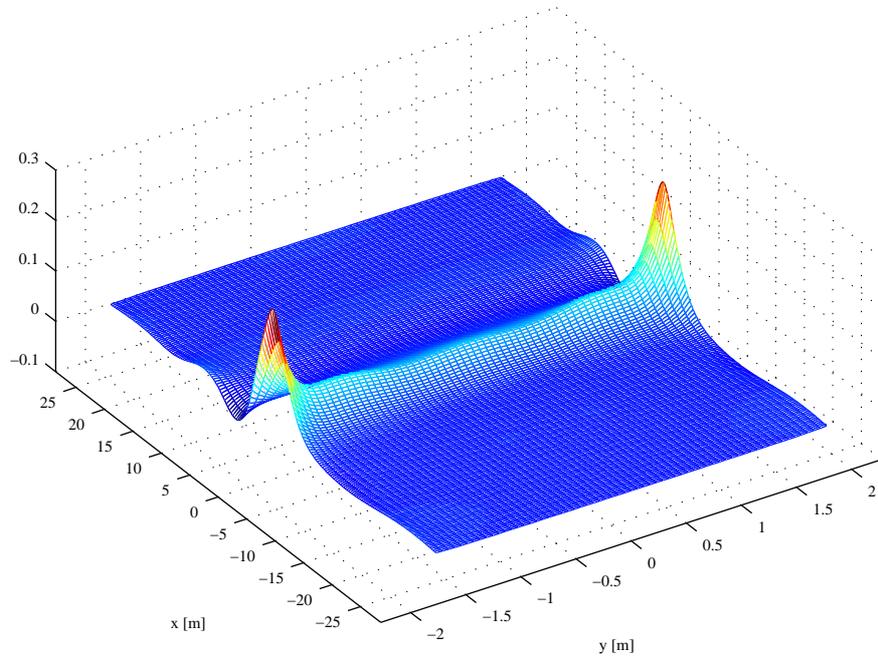
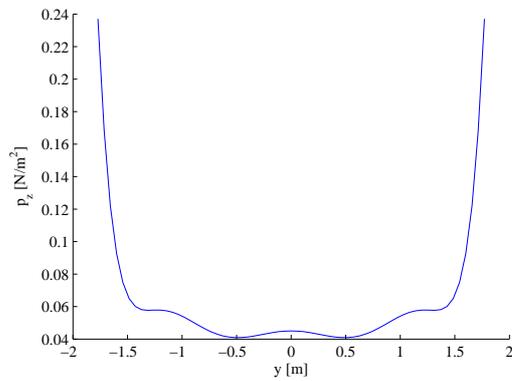
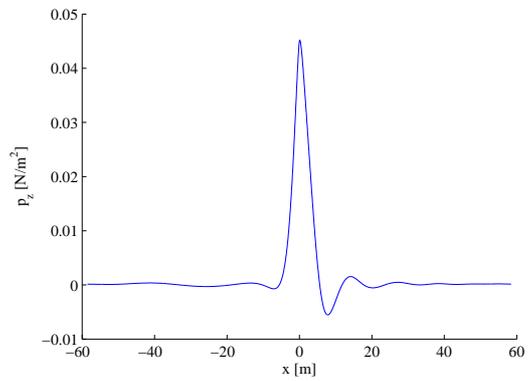
(a) Vertikalspannungsverlauf p_z [N/m^2](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.9: Verlauf der Interaktionsspannung p_z für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 \text{ [N]} \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$

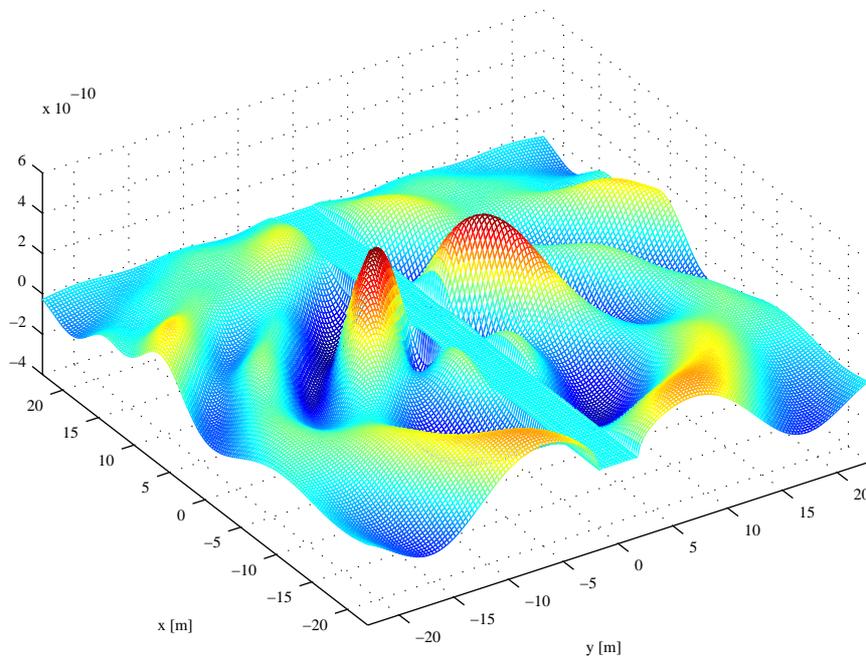
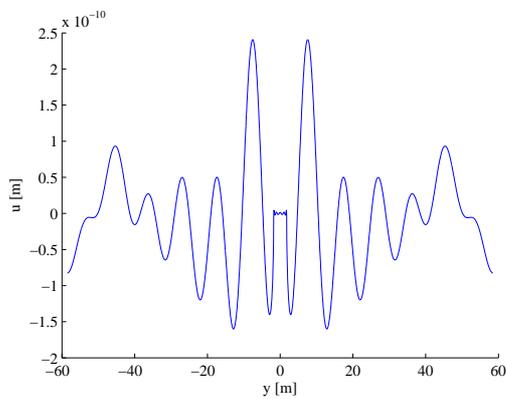
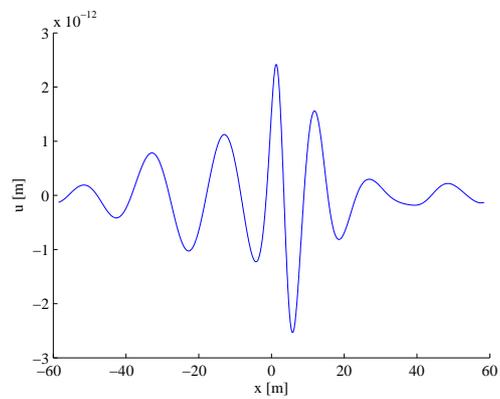
(a) Längsverschiebungsverlauf u [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.10: Verlauf der Halbraumverschiebung u für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

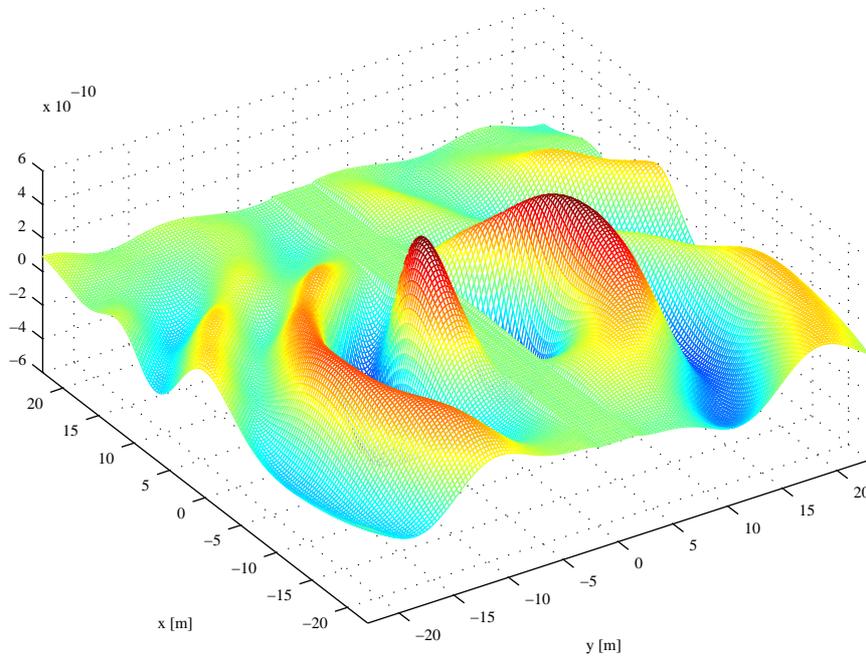
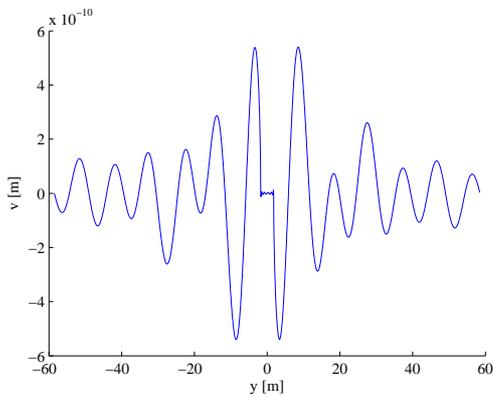
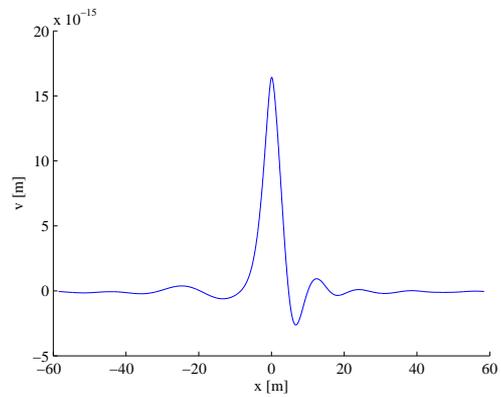
(a) Querverschiebungsverlauf v [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.11: Verlauf der Halbraumverschiebung v für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 \text{ [N]} \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

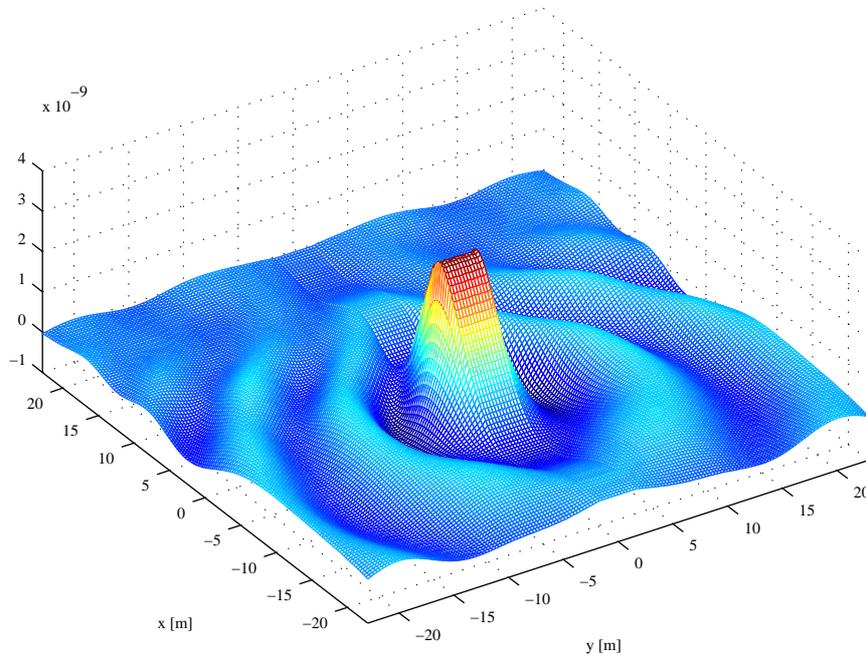
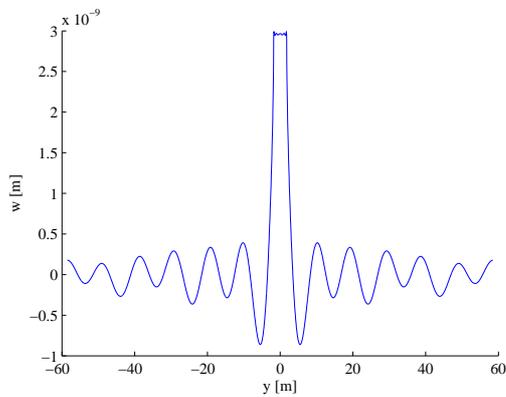
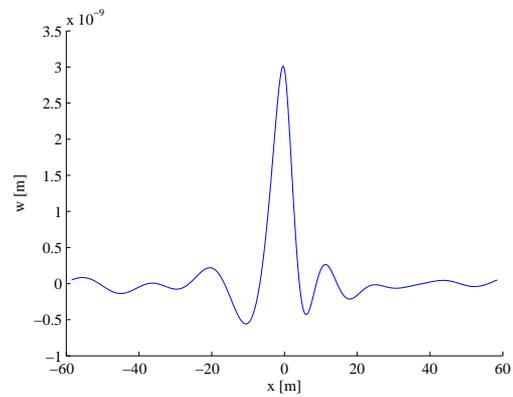
(a) Vertikalverschiebungsverlauf w [m](b) Schnitt durch $x = 0$ (c) Schnitt durch $y = 0$

Abbildung 8.12: Verlauf der Halbraumverschiebung w für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 \text{ [N]} \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff

Bei den in Kapitel 8.1.1 und 8.1.2 dargestellten Interaktionsspannungsverläufen ist auf der Höhe der Krafteinleitung, wie erwartet, die größte Amplitude im Randbereich des Balkens zu erkennen.

Hinsichtlich der Halbraumverschiebungen fällt der Sinus-ähnliche Verlauf auf.

In der xy -Ebene beschreiben die Verschiebungsspitzen einen elliptischen Verlauf. In y -Richtung kann sich die Welle ungehindert ausbreiten, und es wird hauptsächlich die Rayleighwelle angeregt. In x -Richtung beeinflusst der Balken durch seine Steifigkeit und Massenträgheit den Verschiebungsverlauf. Die Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ wird ebenfalls davon beeinflusst, ob mit oder ohne Horizontalverschiebungsbehinderung gerechnet wird (s. Kapitel 8.2.1).

8.2 Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung

8.2.1 Halbraumsteifigkeiten

Der Verlauf der Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ ist exemplarisch in den Abbildungen (8.13) für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ und (8.14) für $\omega = -\Omega = -100 \text{ rad/s}$ bei unterschiedliche Balkenbreiten dargestellt.

Geht man in einer theoretischen Vorüberlegung von einem an der Oberfläche in Horizontalrichtung verschiebungsbehinderten Halbraum aus, so lautet, in Anlehnung an die Gleichungen (2.24) und (2.25), das Gleichungssystem zur Lösung der Ansatzkoeffizienten der Potentialfunktionen folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_z \\ \bar{v}_z \\ \bar{\sigma}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & \lambda_2 \\ ik_y & -\lambda_2 & 0 \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{p}_z/\mu \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Die Vertikalverschiebung \bar{w}_z im transformierten Raum ergibt sich über die Ansatzfunktionen zu:

$$\bar{w}_z = \frac{\bar{p}_z \left(-\sqrt{k_r^2 - k_p^2} \sqrt{k_r^2 - k_s^2} + k_r^2 \right)}{\mu k_s^2 \sqrt{k_r^2 - k_s^2}} \quad (8.2)$$

Die Nullstelle des Nenners befindet sich auf der Höhe der Scherwellenzahl k_s . Somit sind die maximalen Halbraumverschiebungen, im Gegensatz zum horizontalverschiebungsunbehinderten Halbraum, nicht im Bereich der Rayleighwellenzahl k_R anzutreffen, sondern sie verschieben sich auf die Höhe der Scherwellenzahl.

Bei einer auf die Balkenbreite beschränkten Horizontalverschiebungsbehinderung ist der Einfluss der Balkenbreite auf die Halbraumsteifigkeiten in den Abbildungen (8.13) und (8.14) für eine oszillierende, ortsfeste Last dargestellt.

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich für größere Balkenbreiten und auch für größer werdende Anregungsfrequenzen die Steifigkeitsminima bei Horizontalverschiebungsbehinderung in Richtung Scherwellenzahl k_s bewegen. Des Weiteren nehmen für größere Balkenbreiten aufgrund der Proportionalität zu diesen auch die Steifigkeiten zu.

Während im Bereich kleiner Wellenzahlen mit größer werdender Anregungsfrequenz auch die Steifigkeitswerte zunehmen, so ist im Bereich großer Wellenzahlen die Steifigkeit unabhängig von der Anregungsfrequenz Ω . Dabei fällt insbesondere der lineare Verlauf der Halbraumsteifigkeiten für große Wellenzahlen k_x auf. Diese Tatsache wird deutlich, wenn man den Grenzwert der Ableitung des Kehrwertes der vertikalen Halbraumverschiebungen anschreibt. Dieser lautet für den in Horizontalrichtung behinderten Halbraum folgendermaßen:

$$f^{mit}(k_x) = \frac{\bar{p}_z}{w_z(k_x)} = \frac{\mu k_s^2 \sqrt{k_r^2 - k_s^2}}{-\sqrt{k_r^2 - k_p^2} \sqrt{k_r^2 - k_s^2} + k_r^2} \quad (8.3)$$

$$\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} f_{,k_x}^{mit}(k_x) = \pm 2\mu \frac{c_p^2}{c_p^2 + c_s^2}$$

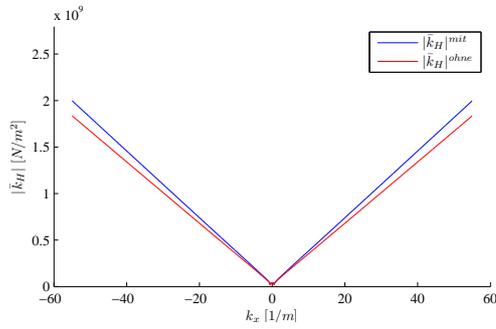
Für den in Horizontalrichtung unbehinderten Halbraum lässt sich über die Halbraumverschiebung (s. Gl.(2.30) mit Gl.(2.28)) die Steigung der Steifigkeit $f^{ohne}(k_x)$ bestimmen.

$$f^{ohne}(k_x) = \frac{\bar{p}_z}{w_z(k_x)} = \frac{\mu \left(-(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1 \lambda_2 \right)}{k_s^2 \lambda_1} \quad (8.4)$$

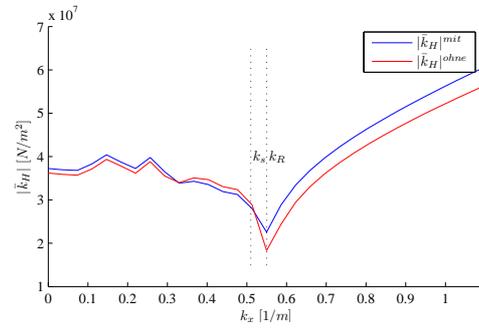
$$\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} f_{,k_x}^{ohne}(k_x) = \pm 2\mu \frac{c_p^2 - c_s^2}{c_p^2}$$

Das Verhältnis der beiden Steigungen ergibt sich demnach zu:

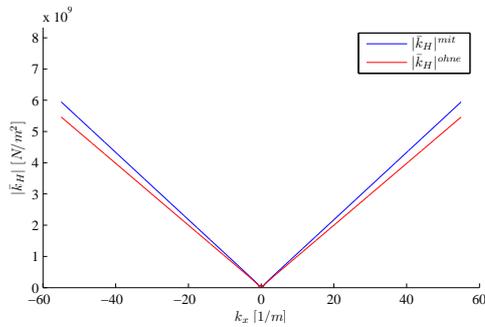
$$\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_{,k_x}^{mit}(k_x)}{f_{,k_x}^{ohne}(k_x)} = \frac{c_p^4}{c_p^4 - c_s^4} \quad (8.5)$$



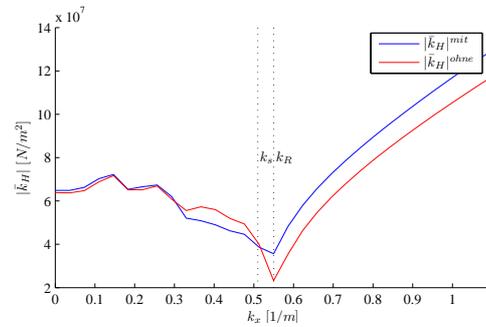
(a) Balkenbreite = 1.2 m



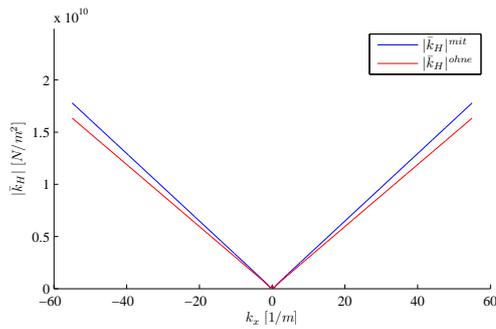
(b) Balkenbreite = 1.2 m, Ausschnitt



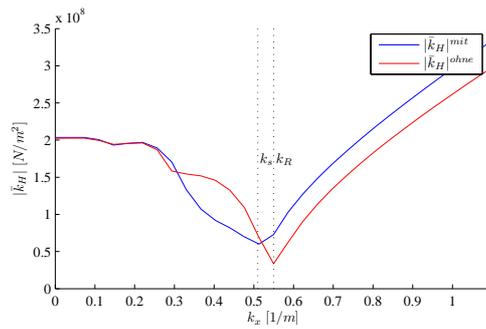
(c) Balkenbreite = 3.6 m



(d) Balkenbreite = 3.6 m, Ausschnitt

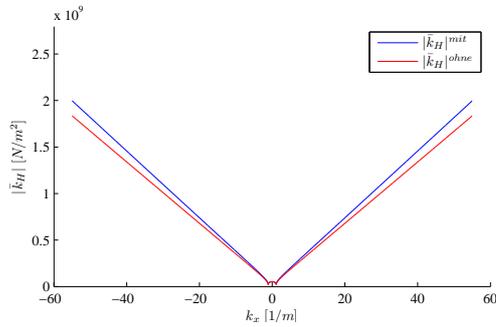


(e) Balkenbreite = 10.8 m

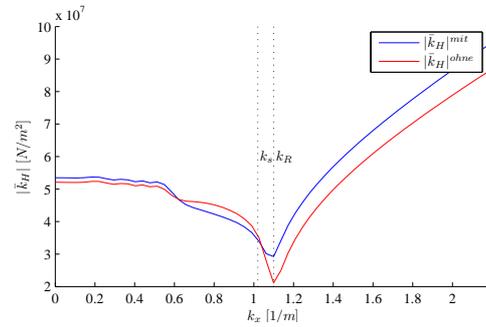


(f) Balkenbreite = 10.8 m, Ausschnitt

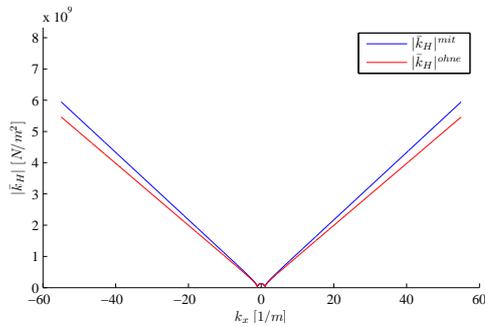
Abbildung 8.13: Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten



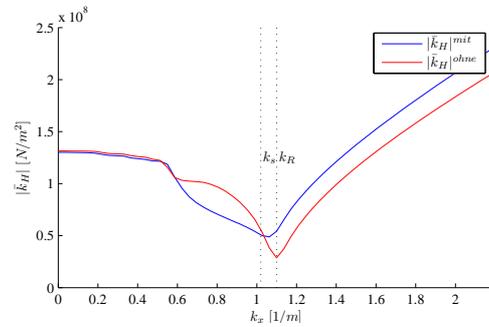
(a) Balkenbreite = 1.2 m



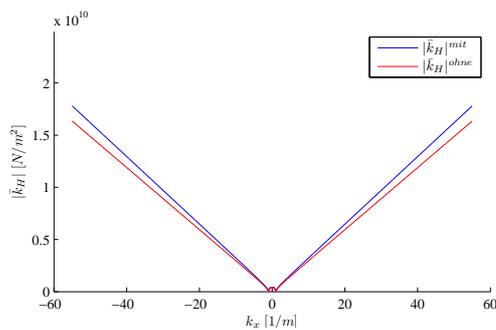
(b) Balkenbreite = 1.2 m, Ausschnitt



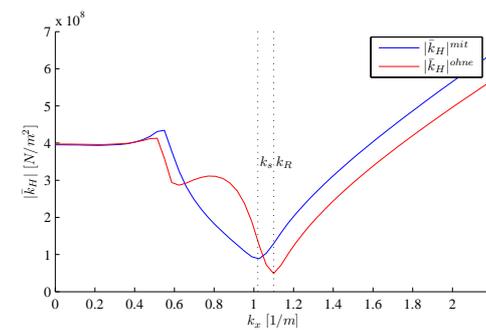
(c) Balkenbreite = 3.6 m



(d) Balkenbreite = 3.6 m, Ausschnitt



(e) Balkenbreite = 10.8 m



(f) Balkenbreite = 10.8 m, Ausschnitt

Abbildung 8.14: Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -100 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten

Betrachtet man die Verhältnisse für eine bewegte Last, so ergibt sich das Verhältnis der Steigungen über folgenden Ausdruck:

$$\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_{,k_x}^{mit}(k_x)}{f_{,k_x}^{ohne}(k_x)} = \frac{v^4 (c_s^* (c_p^2 - v^2) - c_p^* c_p^2) (c_s^2 - v^2)}{c_p^2 c_s^2 (c_p^* c_s^* - 1)^2 (c_s^* (2c_s^2 - v^2)^2 - 4c_p^* (c_s^4 - c_s^2 v^2))} \quad (8.6)$$

$$c_p^* = \sqrt{\frac{c_p^2 - v^2}{c_p^2}} \quad c_s^* = \sqrt{\frac{c_s^2 - v^2}{c_s^2}}$$

In Abbildung (8.15) ist der Verlauf der Steigungsverhältnisse in Abhängigkeit von der Lastgeschwindigkeit v graphisch dargestellt. Das Maximum befindet sich auf der Höhe der Rayleighwellengeschwindigkeit. Die beiden Minima liegen im Bereich der Kompressionswellengeschwindigkeit c_p bzw. der Scherwellengeschwindigkeit c_s . Für höhere Geschwindigkeiten nähern sich die Steigungen dem selben Wert an.

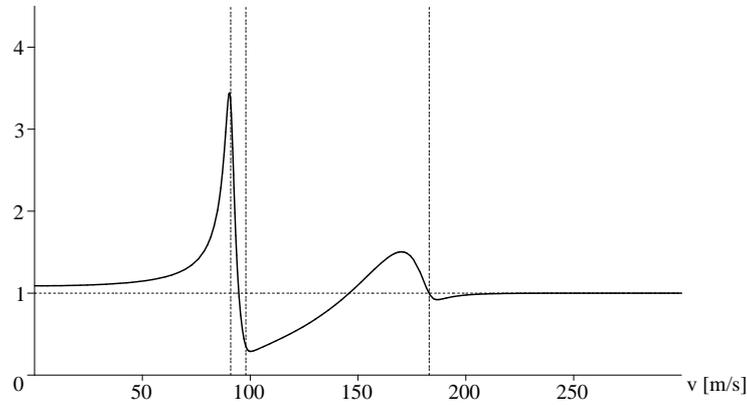
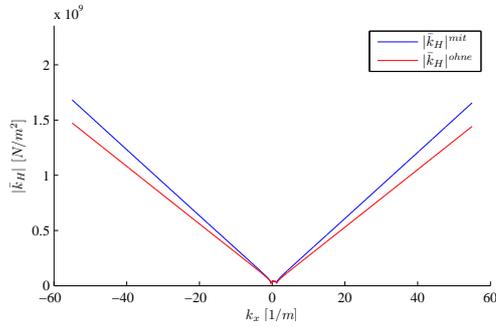


Abbildung 8.15: Verlauf der Steigungsverhältnisse $\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_{,k_x}^{mit}(k_x)}{f_{,k_x}^{ohne}(k_x)}$ für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast

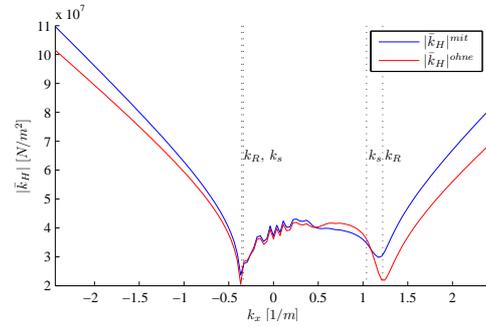
Der Verlauf der Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ ist beispielhaft in den Abbildungen (8.16) für die Lastgeschwindigkeit $v = 50 \text{ m/s}$ und in Abb.(8.17) für $v = 100 \text{ m/s}$ bei unterschiedlichen Balkenbreiten und für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ dargestellt.

Der Scher- und Rayleighwellenzahlen im bewegten Koordinatensystem ergeben sich über folgende Beziehung:

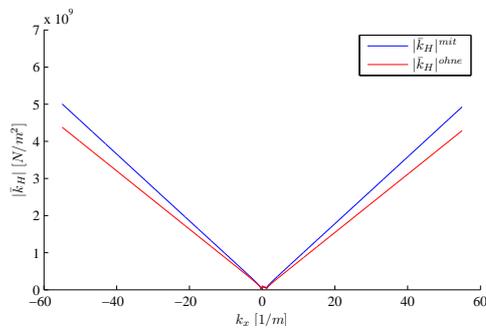
$$\begin{aligned} k_s^+ &= \frac{\omega}{c_s + v} & k_s^- &= \frac{-\omega}{c_s - v} \\ k_R^+ &= \frac{\omega}{c_R + v} & k_R^- &= \frac{-\omega}{c_R - v} \end{aligned} \quad (8.7)$$



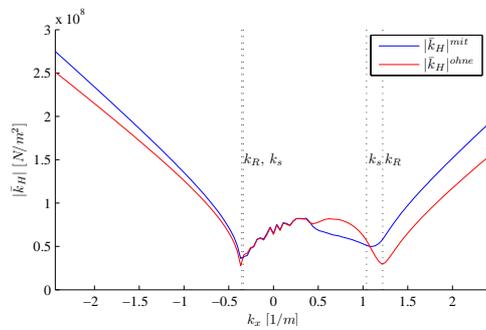
(a) Balkenbreite = 1.2 m



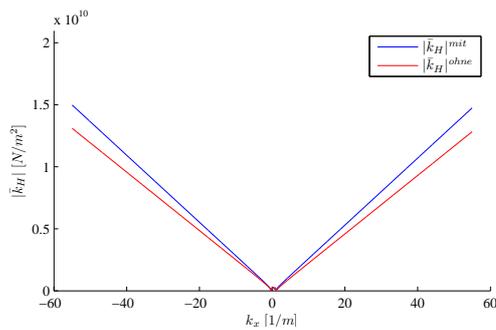
(b) Balkenbreite = 1.2 m, Ausschnitt



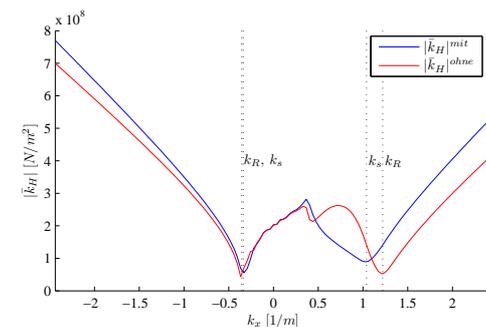
(c) Balkenbreite = 3.6 m



(d) Balkenbreite = 3.6 m, Ausschnitt

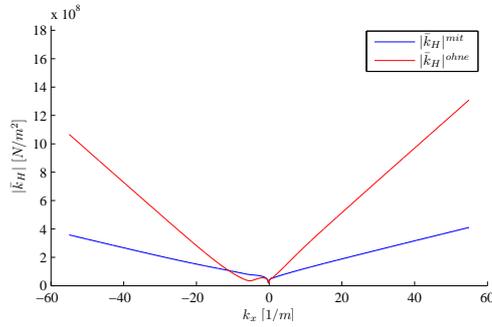


(e) Balkenbreite = 10.8 m

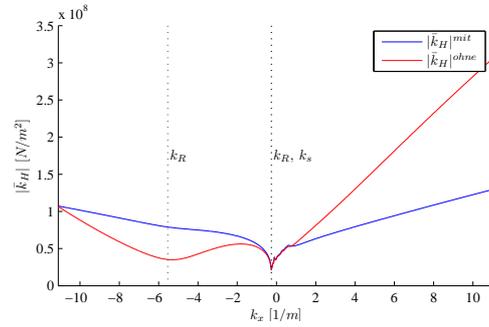


(f) Balkenbreite = 10.8 m, Ausschnitt

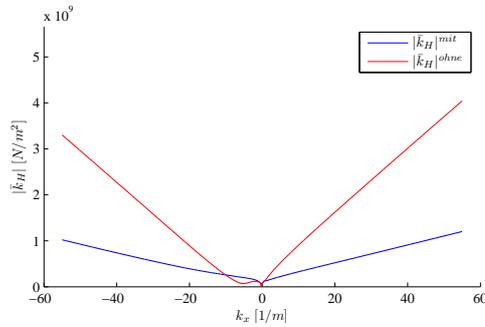
Abbildung 8.16: Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten



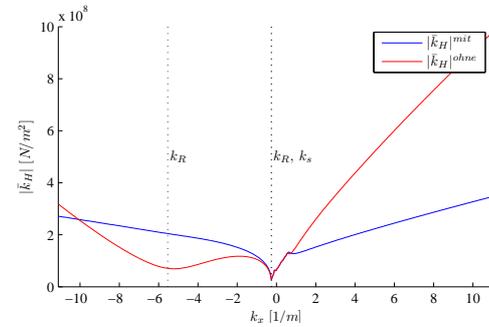
(a) Balkenbreite = 1.2 m



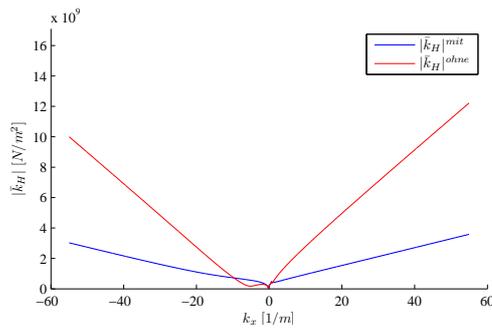
(b) Balkenbreite = 1.2 m, Ausschnitt



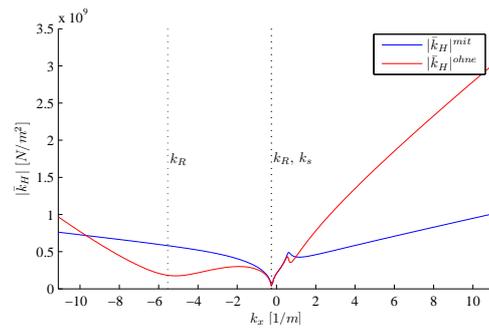
(c) Balkenbreite = 3.6 m



(d) Balkenbreite = 3.6 m, Ausschnitt



(e) Balkenbreite = 10.8 m



(f) Balkenbreite = 10.8 m, Ausschnitt

Abbildung 8.17: Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 100 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten

8.2.2 Maximalverschiebungen für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast

Im nachfolgenden Abschnitt sind die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen in Balkenmitte ($y = 0$) und im Abstand von 30 m von der Balkenachse für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast ausgewertet und dargestellt.

In Abbildung (8.18) sind die Verschiebungsverläufe mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für die Parameter nach Tab.(8.1) dargestellt.

Es ist deutlich zu erkennen, dass oberhalb der Anregungsfrequenz $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ die Verschiebungsverläufe unmerklich voneinander abweichen.

Für kleinere Anregungsfrequenzen liegen die Abweichungen bei maximal 10 %.

Von den Parametern in Tab.(8.1) ausgehend, werden die Maximalverschiebungen bei Variation der Balkenbreite, des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung des Untergrundes miteinander verglichen.

In Abb.(8.19) bis (8.21) sind die Ergebnisse für unterschiedliche Balkenbreiten aufgezeigt. Wie erwartet, fallen die Verschiebungsspitzenwerte bei kleineren Balkenbreiten höher aus. Für größere Ω nehmen die Verschiebungen ab.

Während für die kleinere Balkenbreite von 1.2 m die Verschiebungen ohne Horizontalverschiebungsbehinderung über das ganze Frequenzspektrum in der Größenordnung von 5 % höher liegen als mit Horizontalverschiebungsbehinderung, so sind bei einer Balkenbreite von 10.8 m nur für kleinere Ω Unterschiede bis über 10 % zu erkennen.

In den Abb.(8.22) bis (8.24) sind die Auswertungen für verschiedene Elastizitätsmodule dargestellt.

Bei dem weichen Boden ($E = 12.5 * 10 \text{ N/m}^2$) treten die größten Verschiebungen auf und der Verschiebungsabfall ist für größer werdende Ω am stärksten. Die Unterschiede mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung liegen unter 10 % und verschwinden für größere Anregungsfrequenzen.

Für den steiferen Boden ($E = 200 * 10 \text{ N/m}^2$) liegen die Verschiebungsspitzen ohne Horizontalverschiebungsbehinderung über der gesamten dargestellte Frequenzbreite bis zu etwa 10 % oberhalb von den Werten mit Behinderung in Horizontalrichtung.

Die Abb.(8.25) bis (8.27) zeigen die Verschiebungsverläufe bei Veränderung der Dämpfung des Halbraums.

Während sich in der Balkenmittelachse die Variation der Dämpfung nur für kleinere Ω in den Verschiebungsamplituden auswirkt, so sind bei $y = 30 \text{ m}$ die Unterschiede sehr viel stärker ausgeprägt (s. Abb.(8.25)).

Beim Vergleich mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung ist oberhalb von $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ eine Annäherung der Verschiebungsverläufe zu beobachten.

Für kleinere Anregungsfrequenzen liegen die Unterschiede teilweise über 10 %.

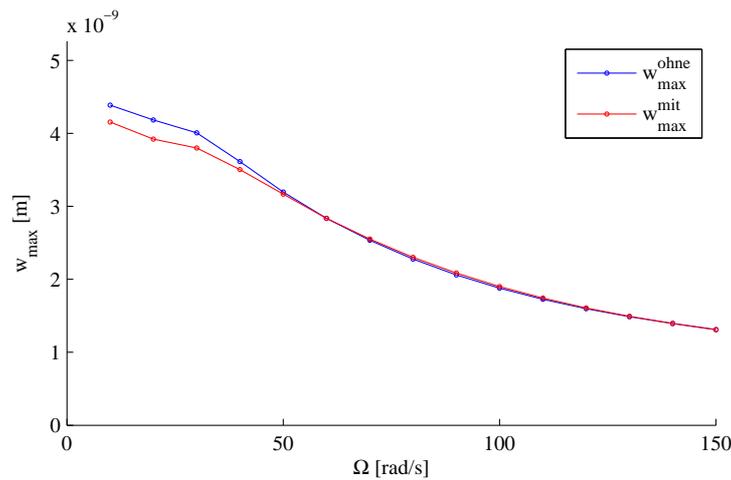
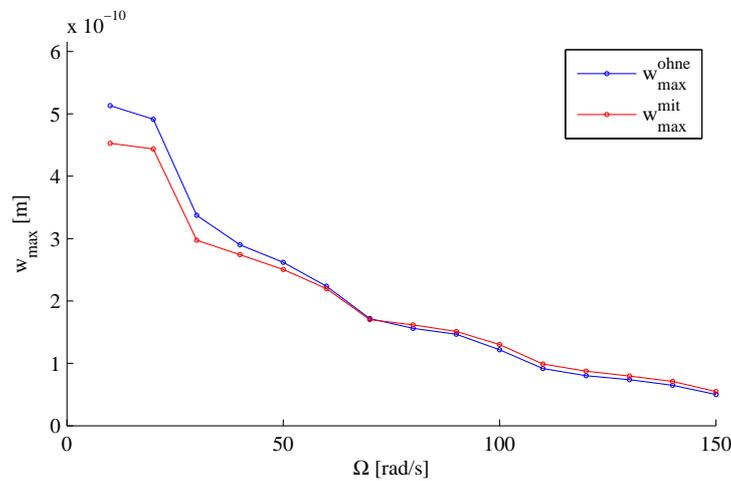
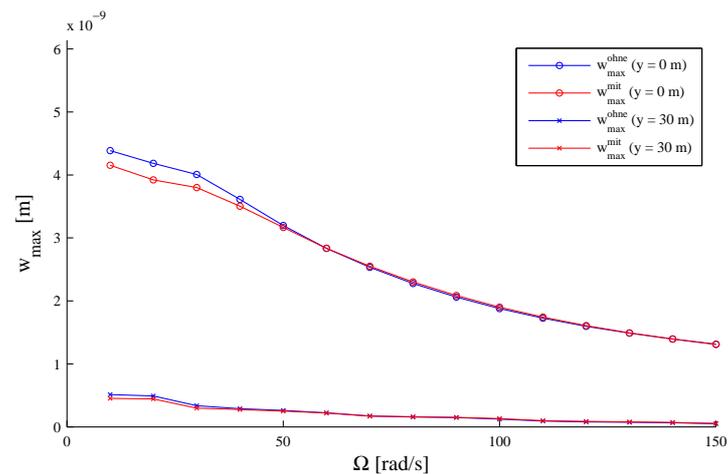
(a) w_{max} bei $y = 0$ m(b) w_{max} bei $y = 30$ m(c) w_{max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m

Abbildung 8.18: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω

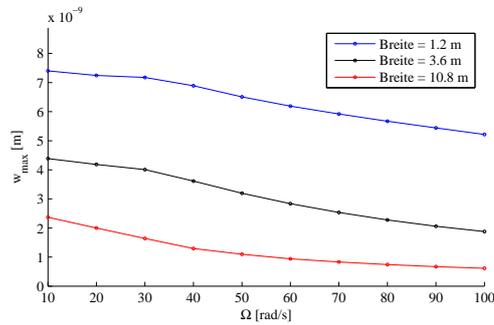
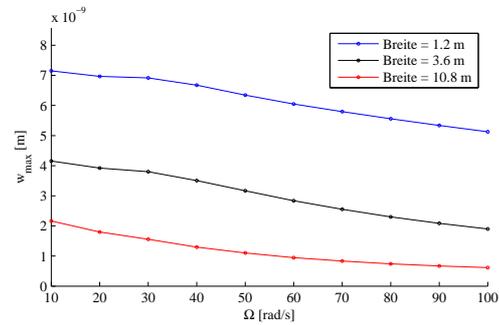
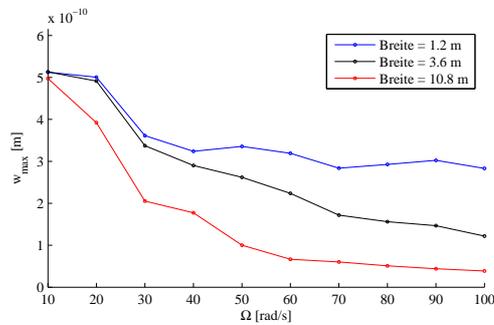
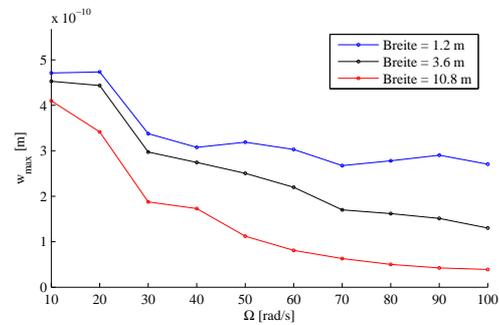
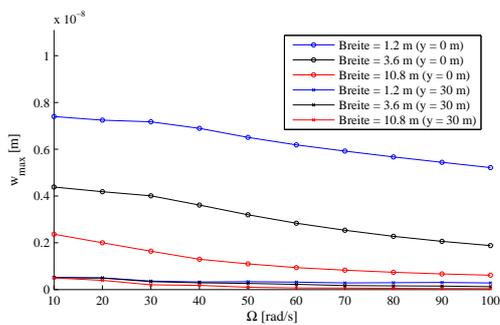
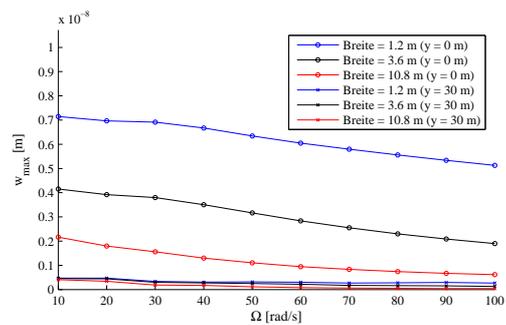
(a) w_{max} bei $y = 0$ m, ohne Querbehinderung(b) w_{max} bei $y = 0$ m, mit Querbehinderung(c) w_{max} bei $y = 30$ m, ohne Querbehinderung(d) w_{max} bei $y = 30$ m, mit Querbehinderung(e) w_{max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m, ohne Querbehinderung(f) w_{max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m, mit Querbehinderung

Abbildung 8.19: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche Balkenbreiten

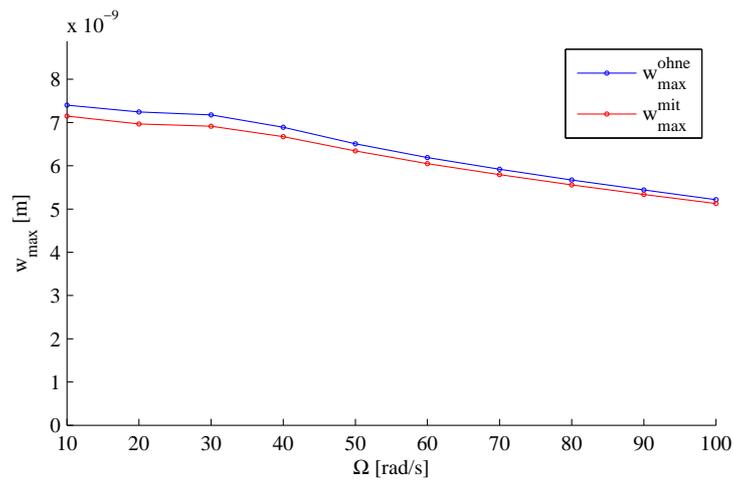
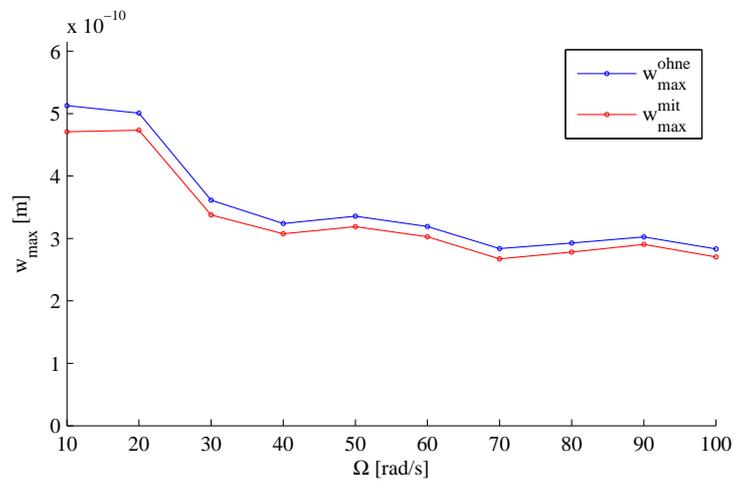
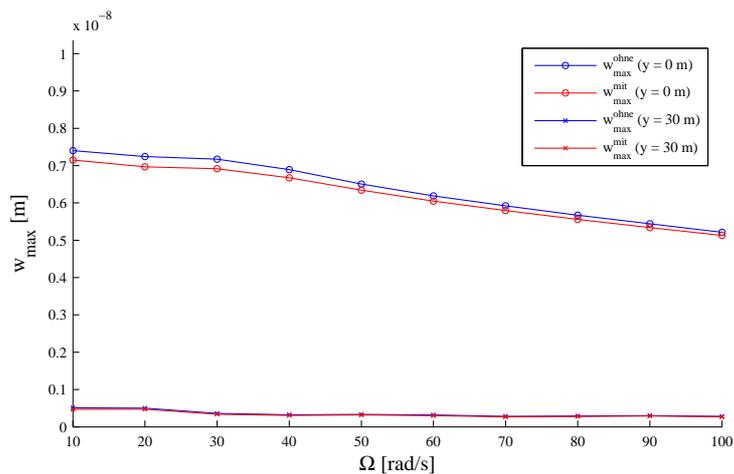
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.20: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Balkenbreite von 1.2 m

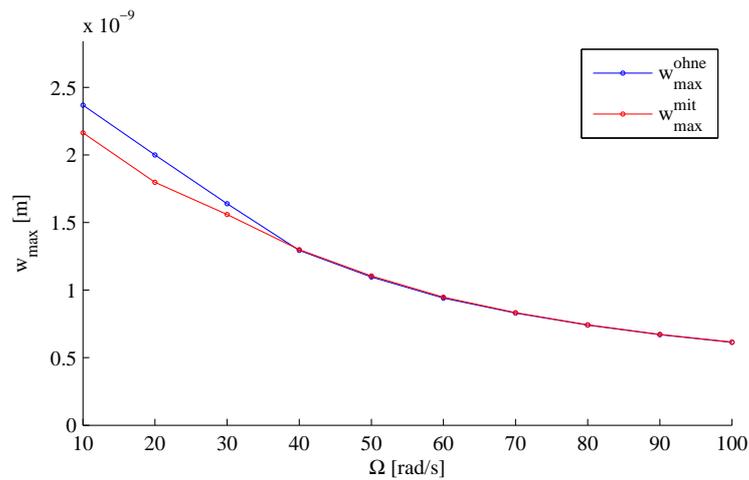
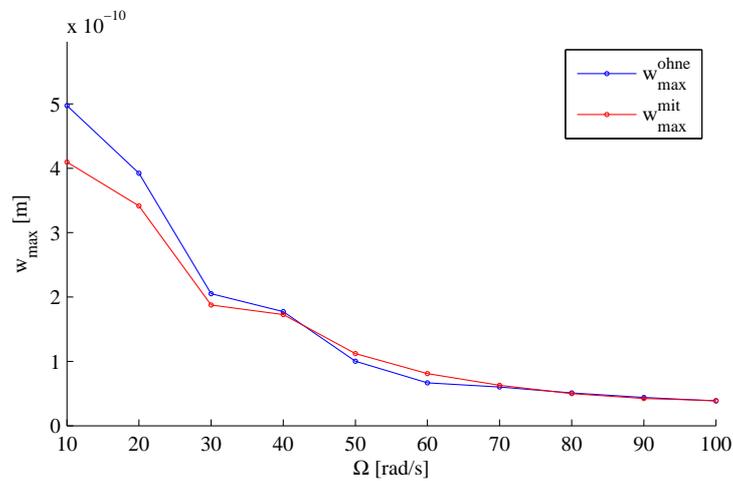
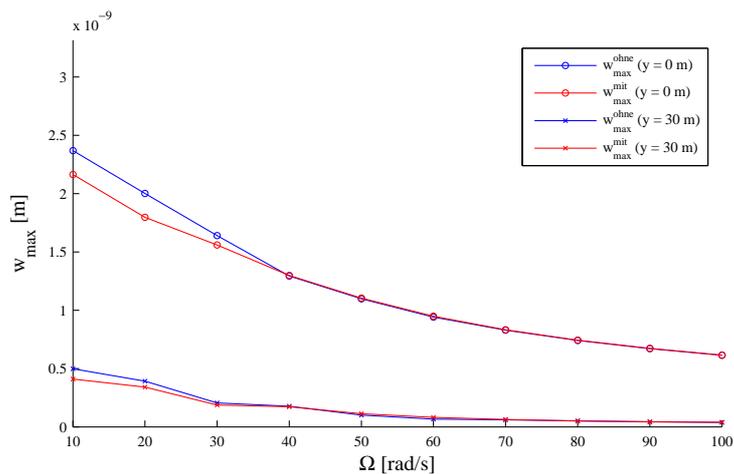
(a) w_{max} bei $y = 0 m$ (b) w_{max} bei $y = 30 m$ (c) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$

Abbildung 8.21: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Balkenbreite von $10.8 m$

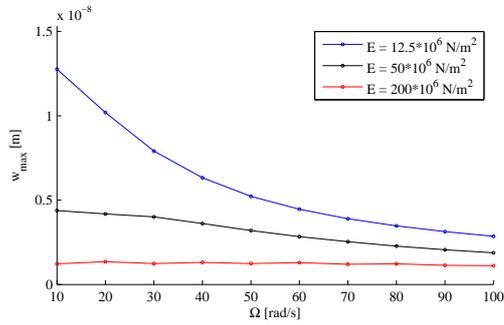
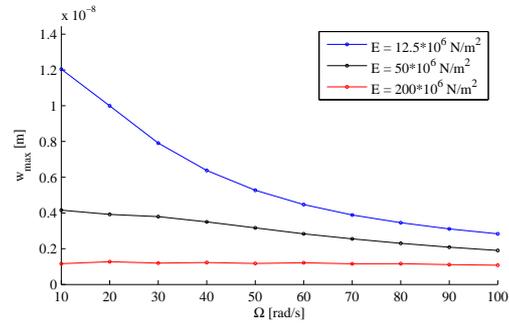
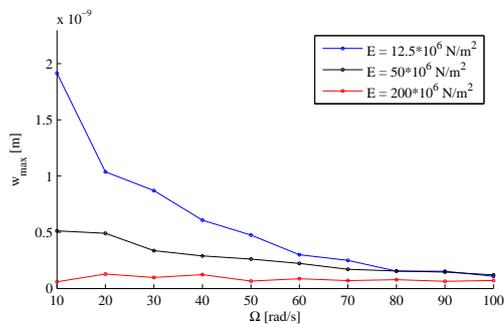
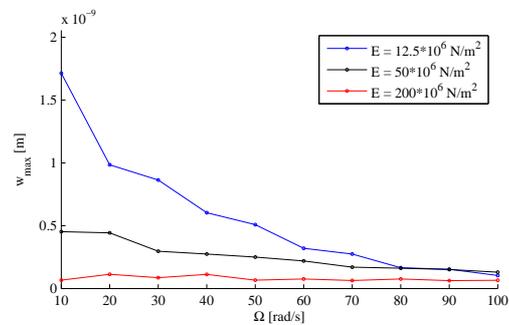
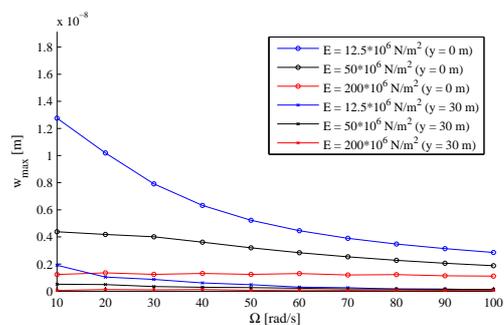
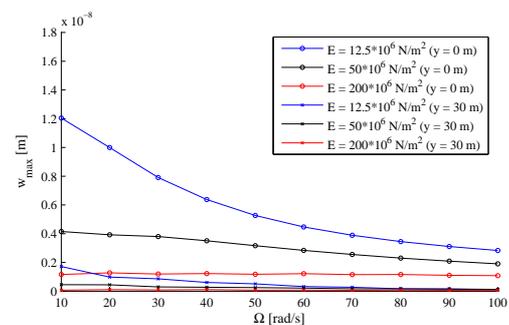
(a) w_{max} bei $y = 0 m$, ohne Querbehinderung(b) w_{max} bei $y = 0 m$, mit Querbehinderung(c) w_{max} bei $y = 30 m$, ohne Querbehinderung(d) w_{max} bei $y = 30 m$, mit Querbehinderung(e) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$, ohne Querbehinderung(f) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$, mit Querbehinderung

Abbildung 8.22: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche E-Module des Bodens

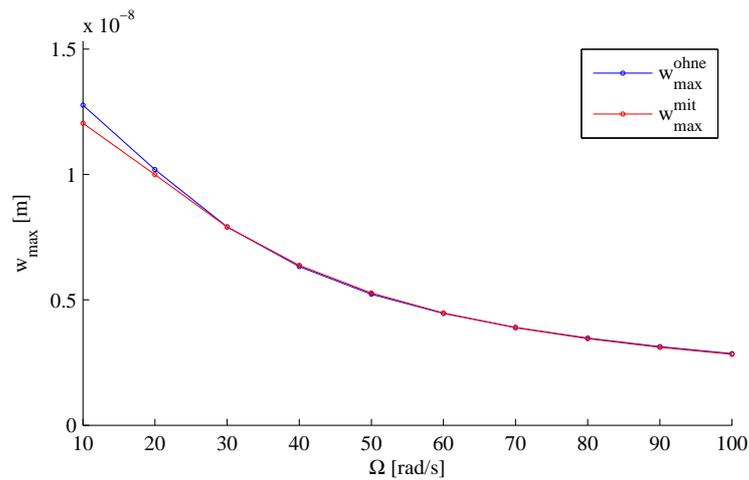
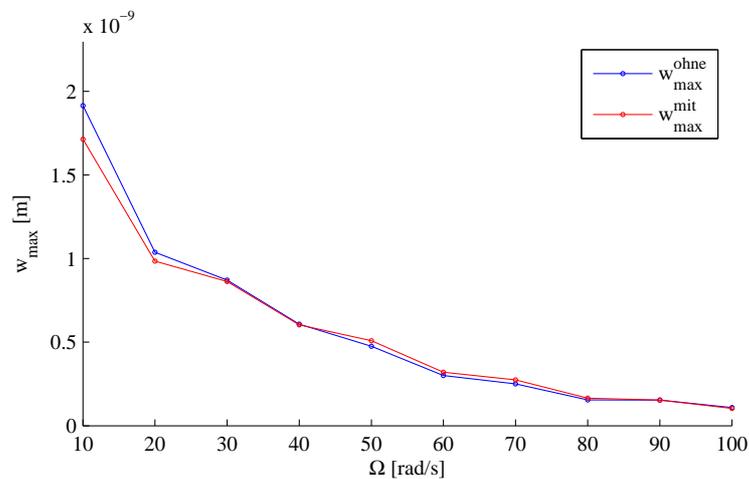
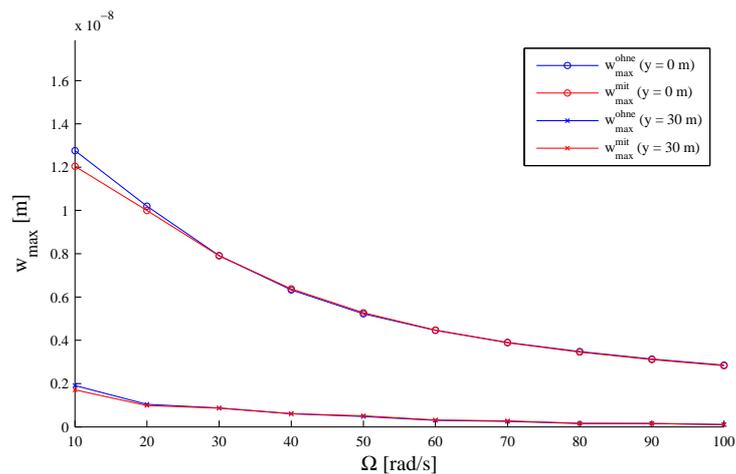
(a) w_{max} bei $y = 0 m$ (b) w_{max} bei $y = 30 m$ (c) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$

Abbildung 8.23: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einem E-Modul des Bodens von $12.5 \cdot 10^6 N/m^2$

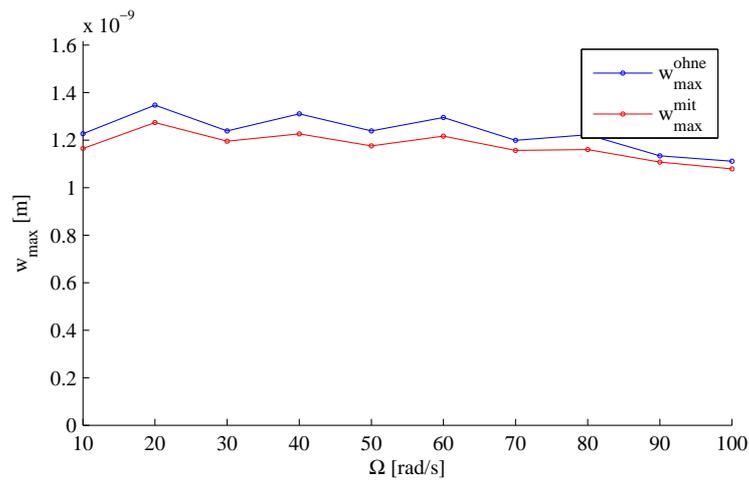
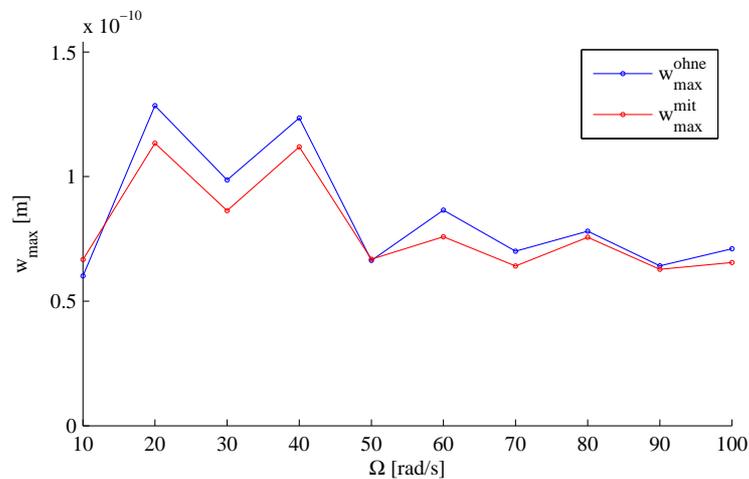
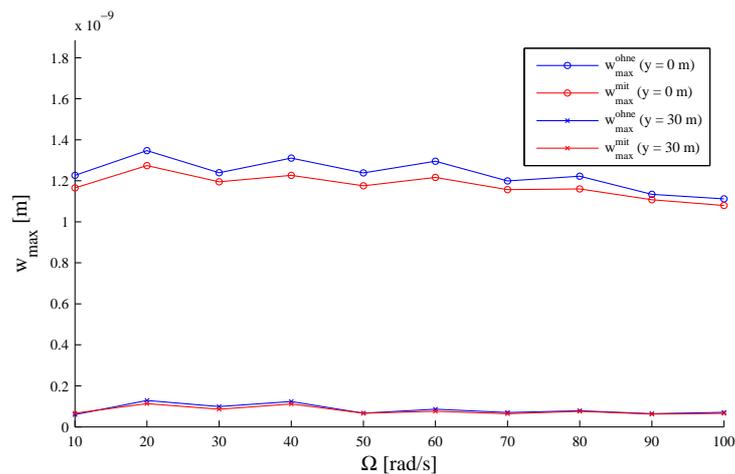
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.24: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einem E-Modul des Bodens von $200 \cdot 10^6\text{ N/m}^2$

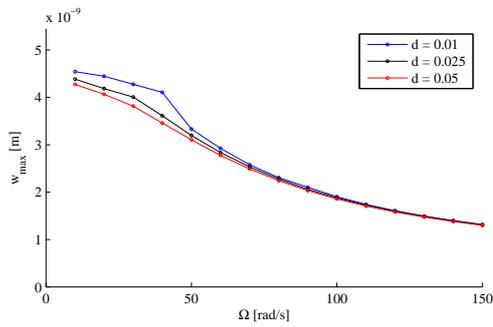
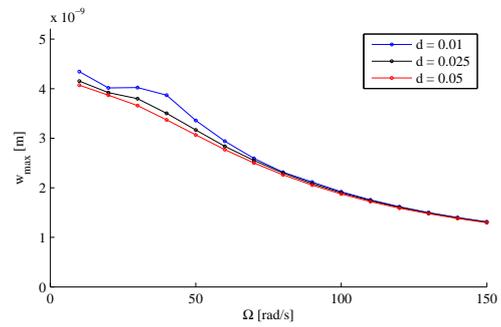
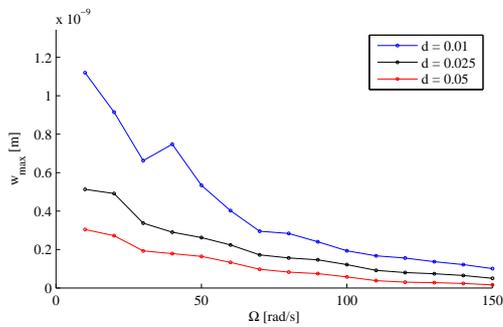
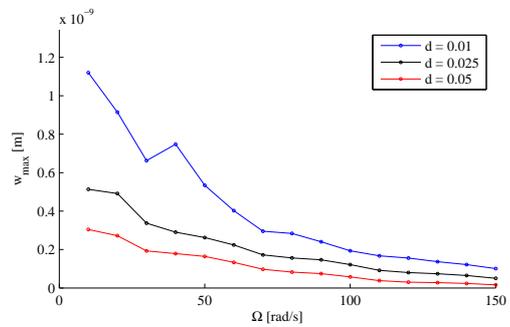
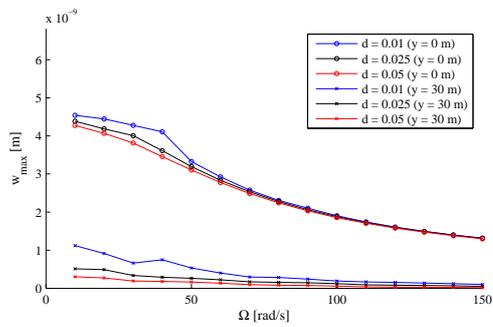
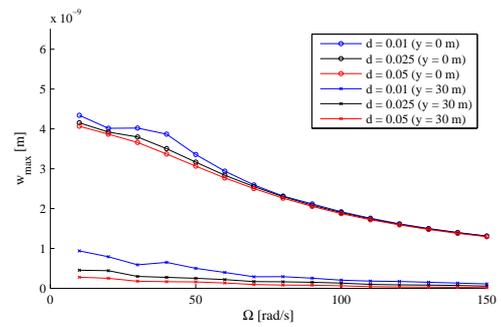
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$, ohne Querbehinderung(b) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$, mit Querbehinderung(c) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$, ohne Querbehinderung(d) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$, mit Querbehinderung(e) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$, ohne Querbehinderung(f) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$, mit Querbehinderung

Abbildung 8.25: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche Bodendämpfungen

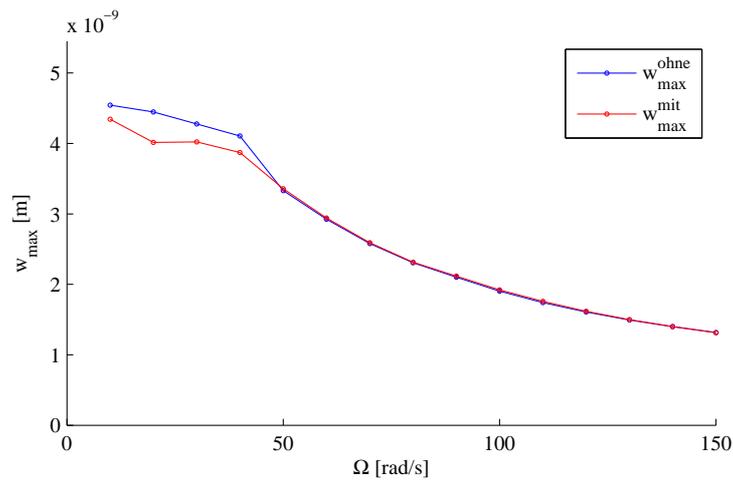
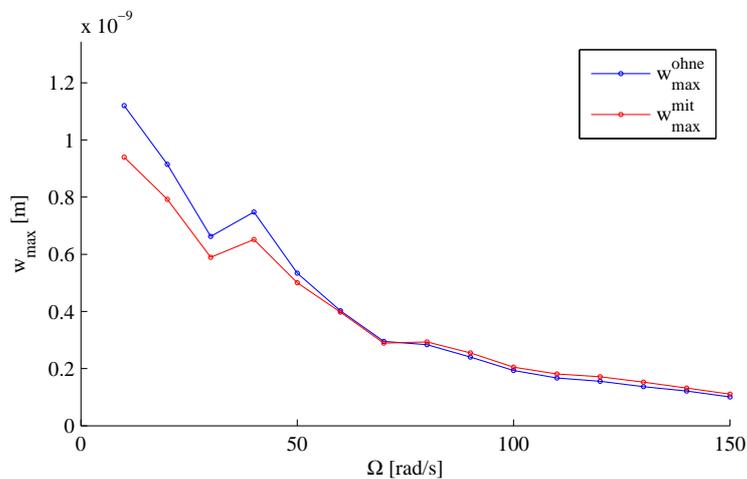
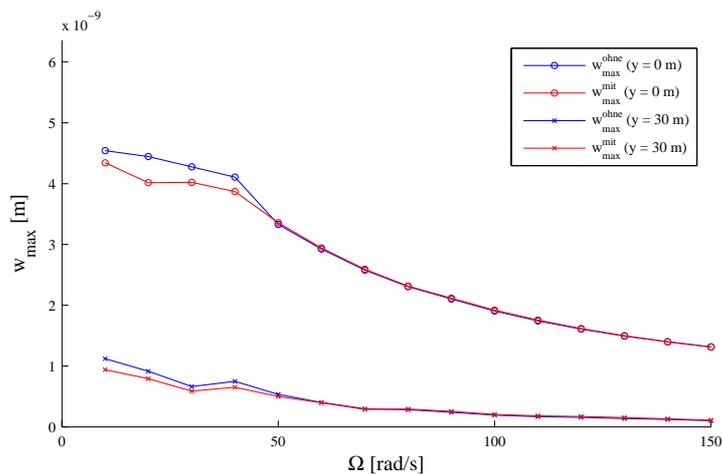
(a) w_{max} bei $y = 0$ m(b) w_{max} bei $y = 30$ m(c) w_{max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m

Abbildung 8.26: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Bodendämpfung von $d = 0.01$

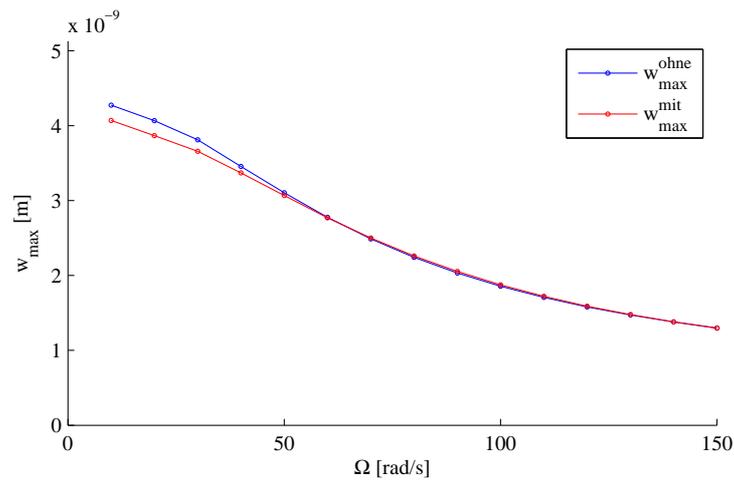
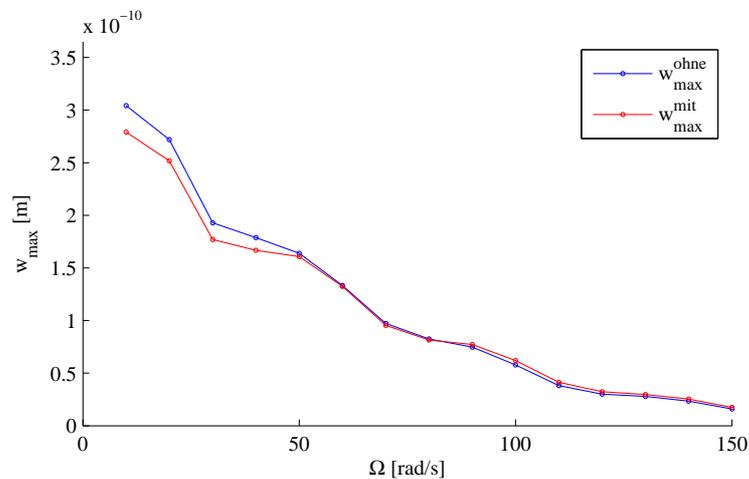
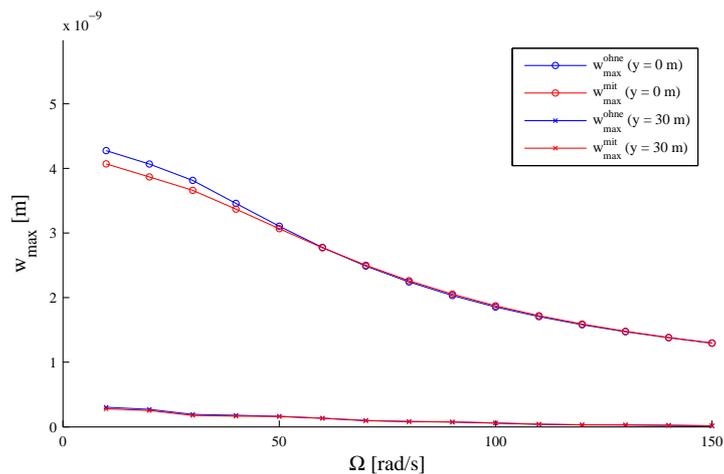
(a) w_{max} bei $y = 0$ m(b) w_{max} bei $y = 30$ m(c) w_{max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m

Abbildung 8.27: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Bodendämpfung von $d = 0.05$

8.2.3 Maximalverschiebungen für eine oszillierende, bewegte Einzellast

In nachfolgendem Abschnitt sind die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen in Balkenmitte ($y = 0$) und im Abstand von 30 m von der Balkenachse für eine bewegte Einzellast, welche mit der Anregungsfrequenz Ω oszilliert, ausgewertet und dargestellt.

In den Abb.(8.28) bis (8.34) wird die Anregungsfrequenz mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ angesetzt. Den Verschiebungsverläufen in Abb.(8.28) sind die Parameter nach Tab.(8.1) zugrunde gelegt und davon ausgehend sind in den weiteren Abbildungen die Maximalverschiebungen für unterschiedliche Balkenbreiten als auch Elastizitätsmodul des Bodens dargestellt.

Die Ergebnisse zeigen Unterschiede in den Verschiebungsspitzen mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung in der Größenordnung von teilweise bis zu 10 %. Bei einem breiten Balken (s. Abb.(8.31)) wie auch bei dem steifen Boden (s. Abb.(8.34)) sind im Abstand von 30 m auch Unterschiede über 10 % zu erkennen.

In der Abb.(8.35) sind die Maximalverschiebungen für eine mit $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ oszillierende bewegte Einzellast dargestellt.

Dabei ist die Spitze des Verschiebungsverlaufs auf der Höhe der Rayleighwellengeschwindigkeit deutlich zu erkennen. Der Unterschied mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung beträgt bei dieser Geschwindigkeit nahezu 20 %.

In Abb.(8.36) sind für den Fall ohne Horizontalverschiebungsbehinderung die Verschiebungsverläufe für unterschiedliche Ω dargestellt. Erst für sehr kleine Anregungsfrequenzen wird die Verschiebungsspitze auf der Höhe der Rayleighwellengeschwindigkeit erkennbar.

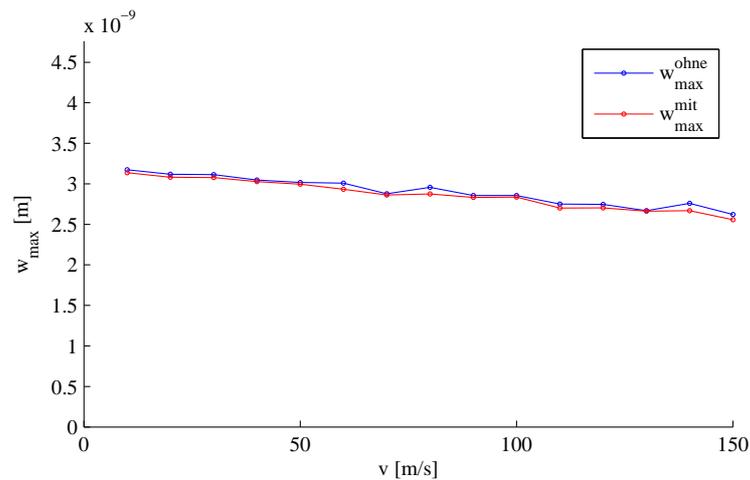
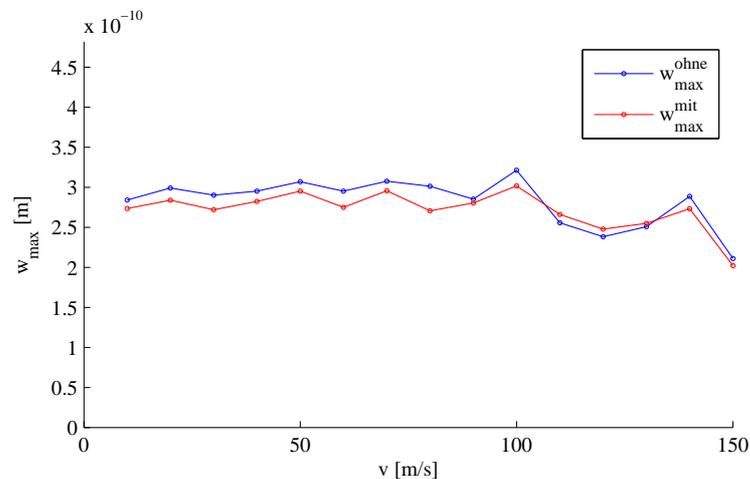
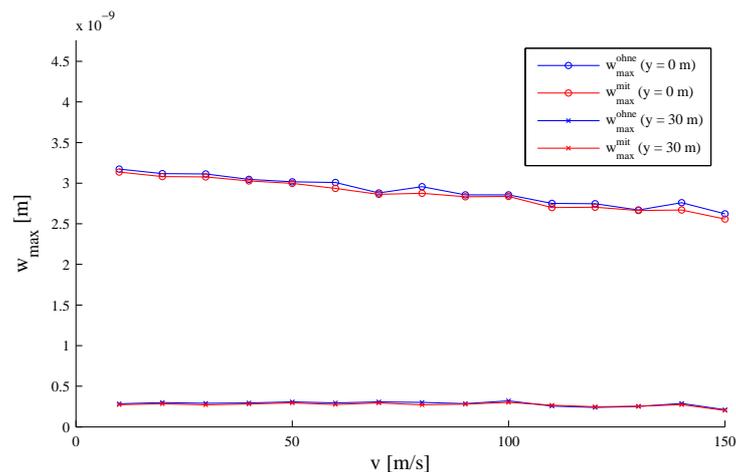
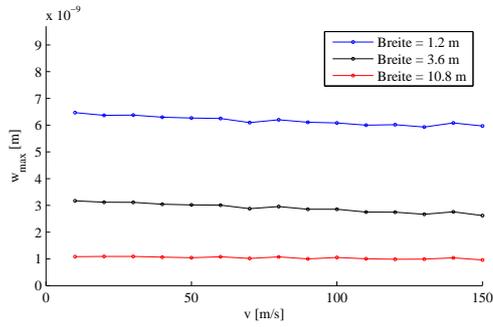
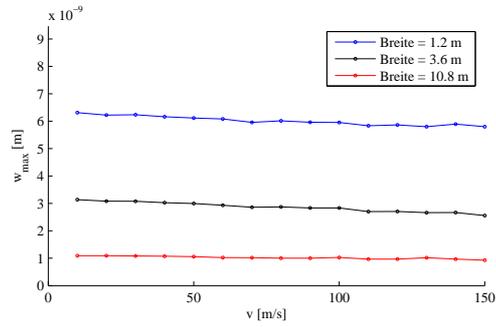
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

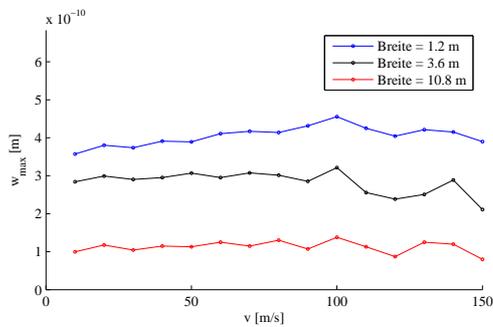
Abbildung 8.28: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v



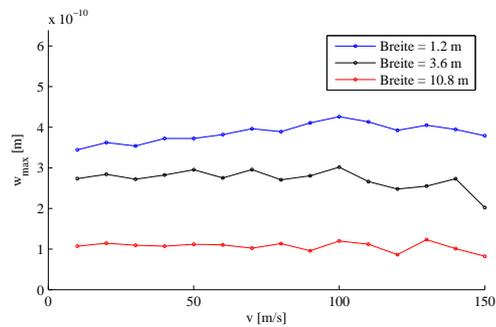
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$, ohne Querbehinderung



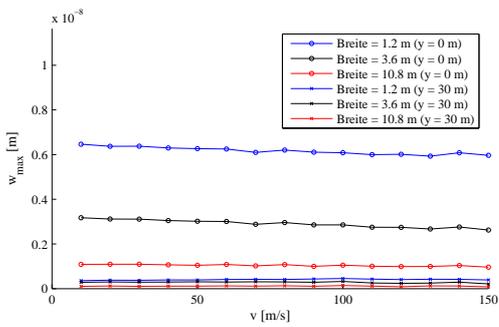
(b) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$, mit Querbehinderung



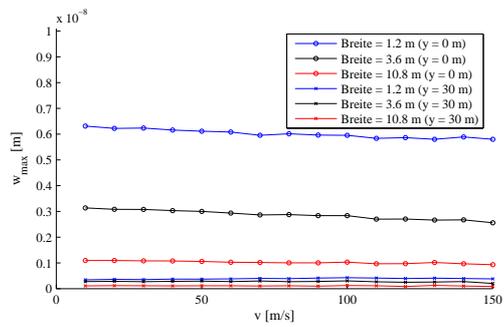
(c) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$, ohne Querbehinderung



(d) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$, mit Querbehinderung



(e) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$, ohne Querbehinderung



(f) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$, mit Querbehinderung

Abbildung 8.29: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche Balkenbreiten

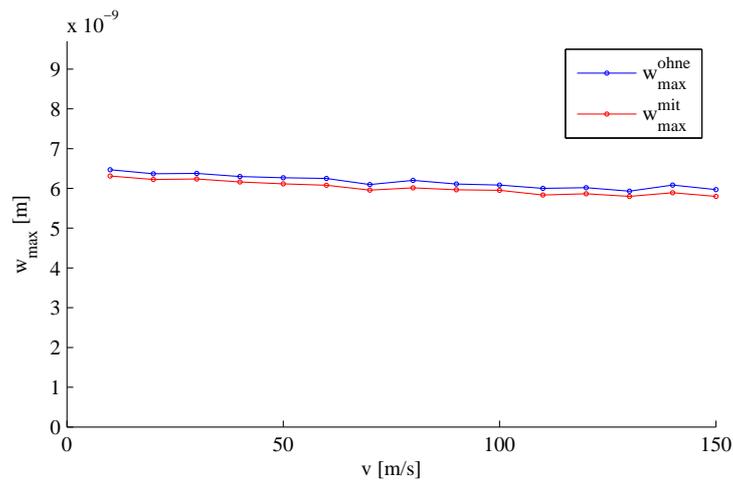
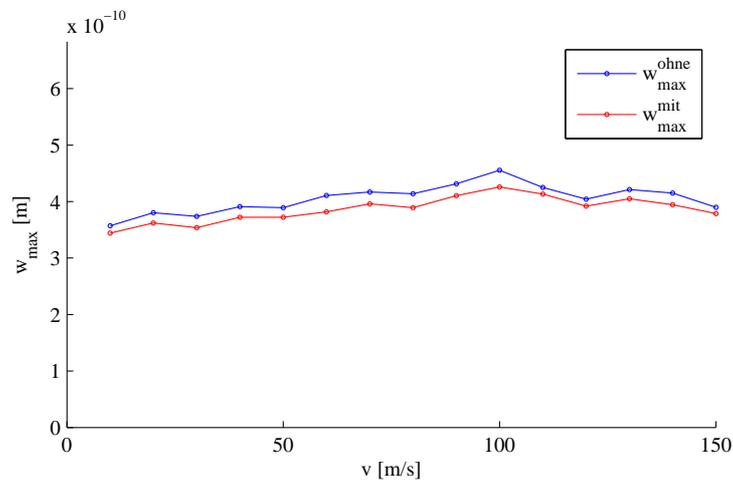
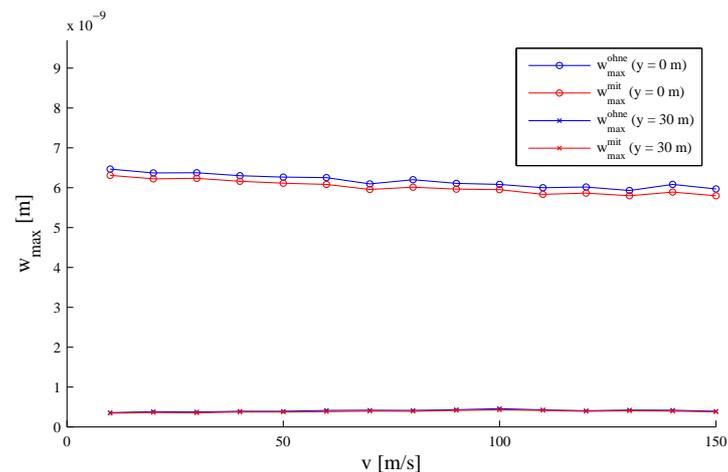
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.30: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]}\delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einer Balkenbreite von 1.2 m

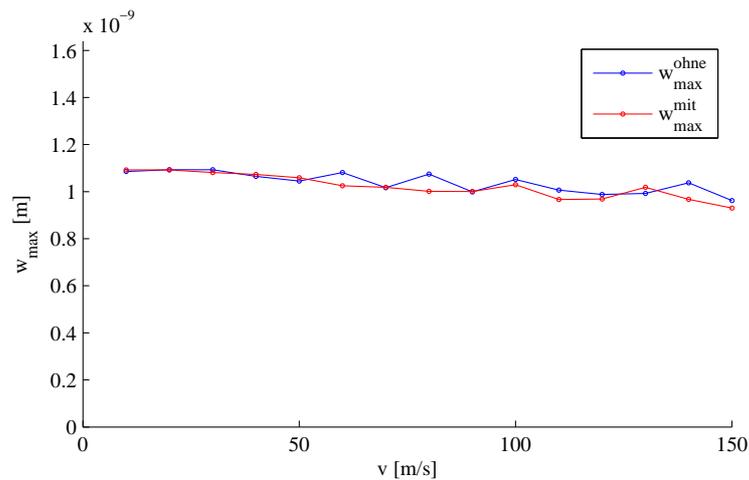
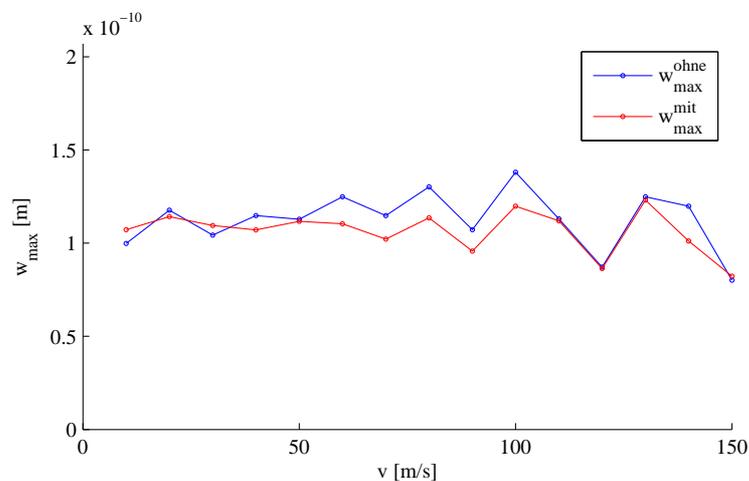
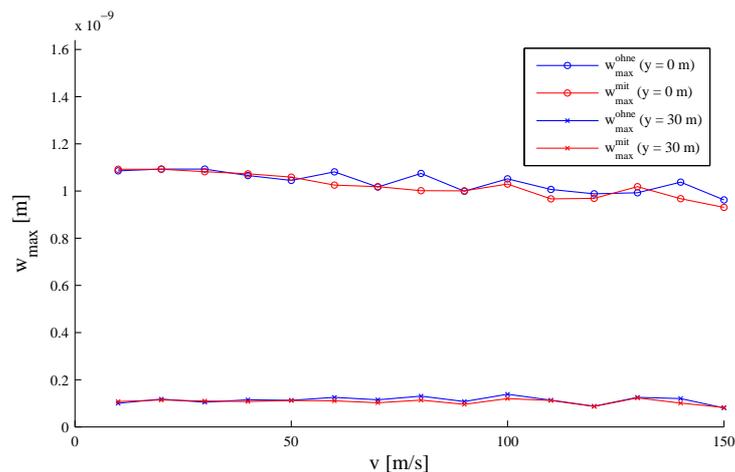
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.31: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einer Balkenbreite von 10.8 m

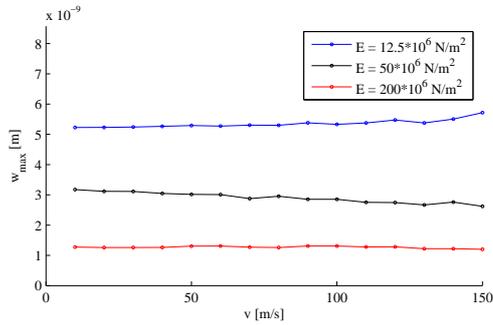
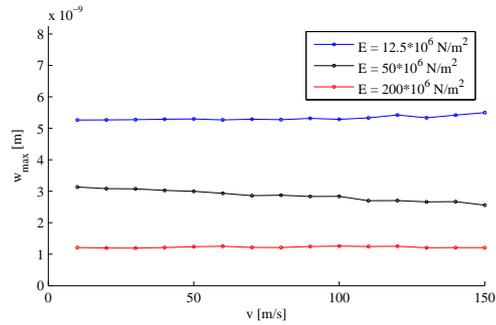
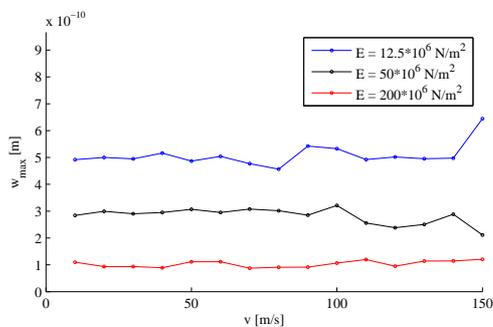
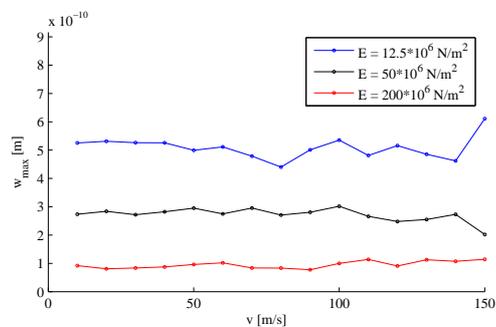
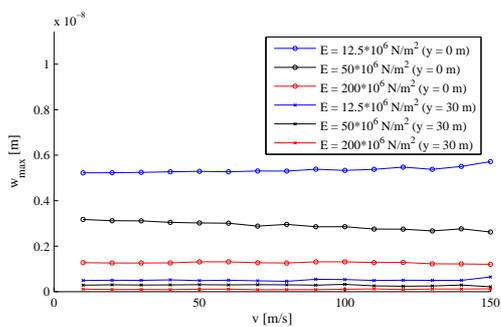
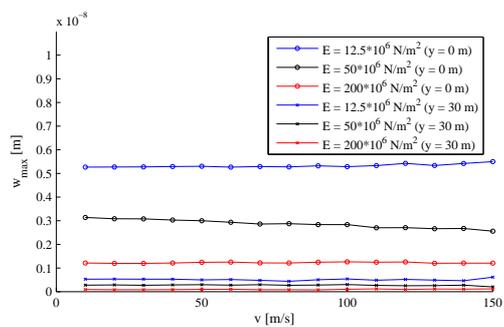
(a) w_{max} bei $y = 0 m$, ohne Querbehinderung(b) w_{max} bei $y = 0 m$, mit Querbehinderung(c) w_{max} bei $y = 30 m$, ohne Querbehinderung(d) w_{max} bei $y = 30 m$, mit Querbehinderung(e) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$, ohne Querbehinderung(f) w_{max} bei $y = 0 m$ und $y = 30 m$, mit Querbehinderung

Abbildung 8.32: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche E-Module des Bodens

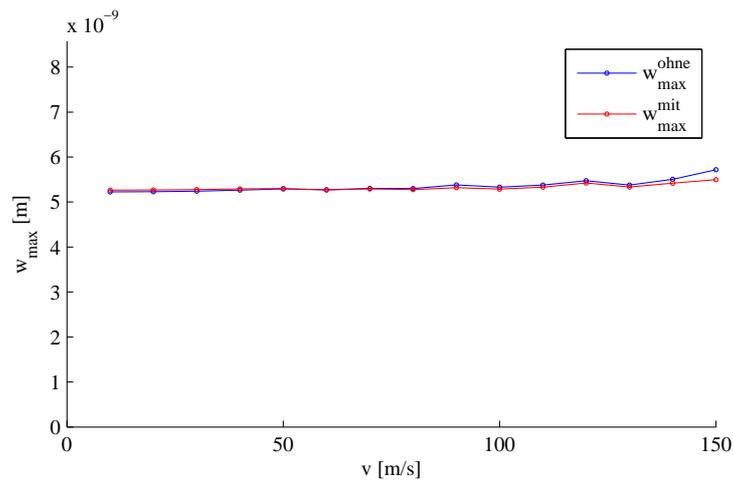
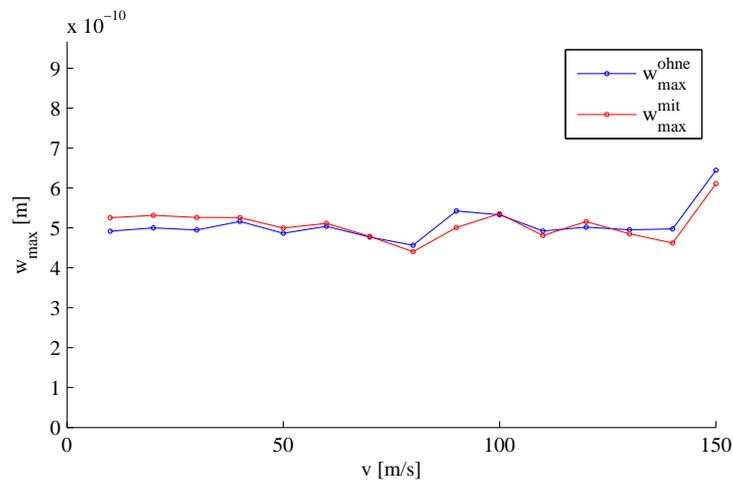
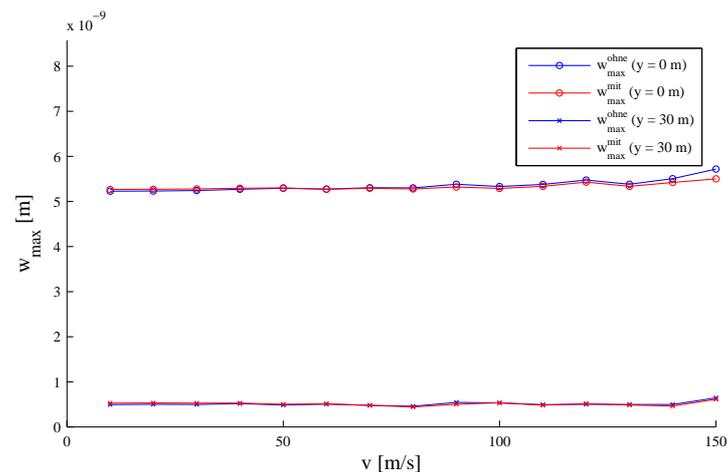
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.33: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einem E-Modul des Bodens von $12.5 \times 10^6\text{ N/m}^2$

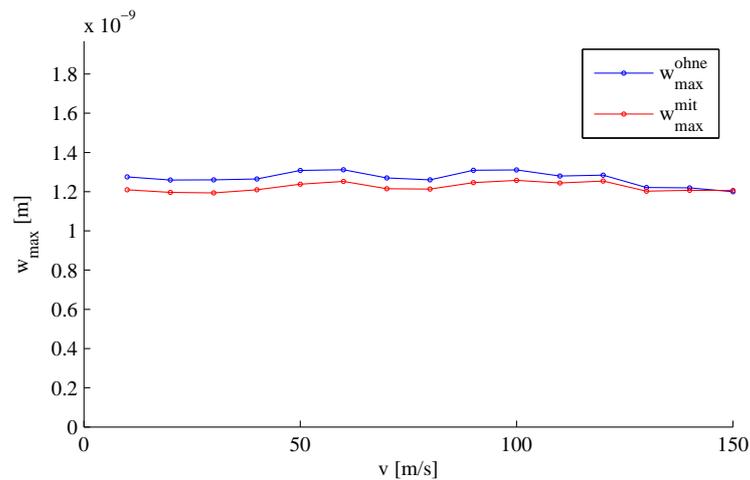
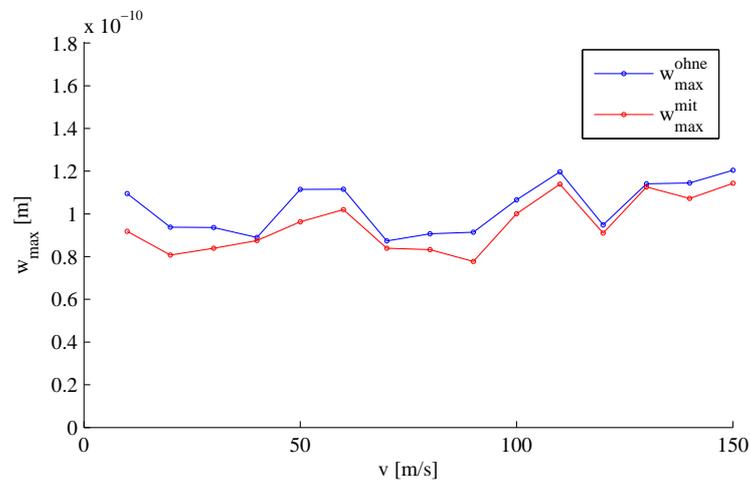
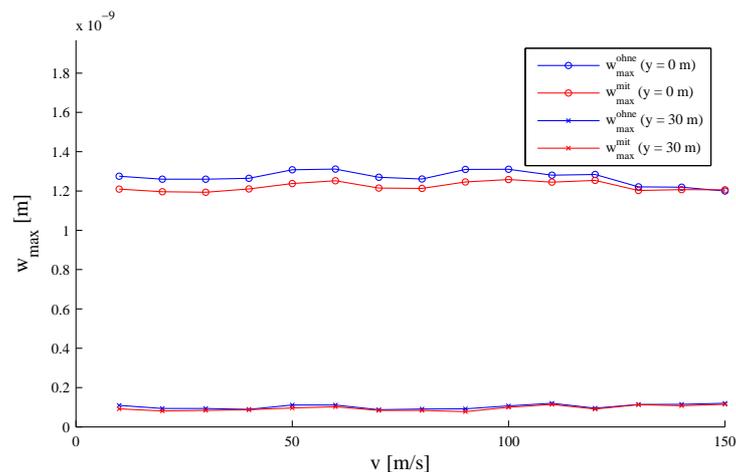
(a) w_{\max} bei $y = 0$ m(b) w_{\max} bei $y = 30$ m(c) w_{\max} bei $y = 0$ m und $y = 30$ m

Abbildung 8.34: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{\max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 \text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einem E-Modul des Bodens von $200 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$

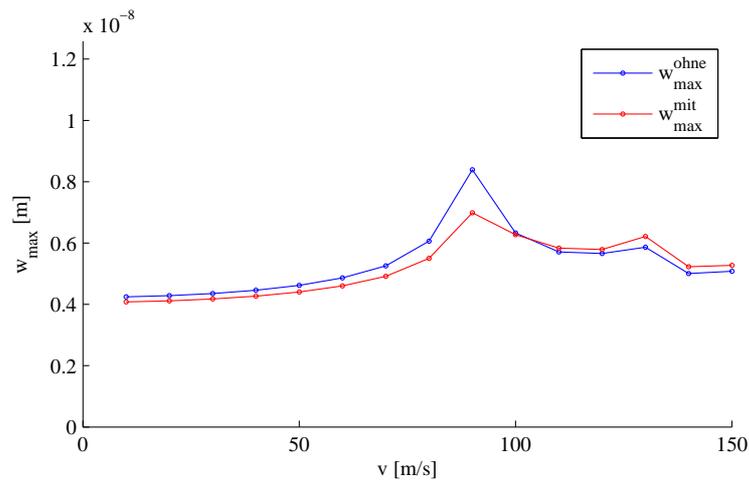
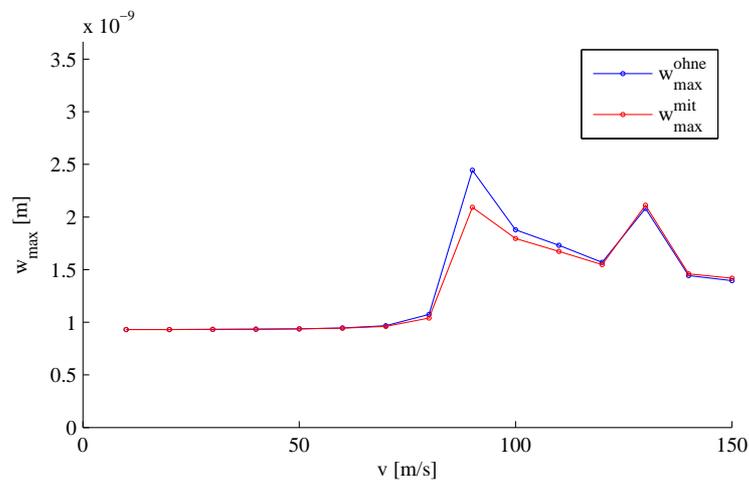
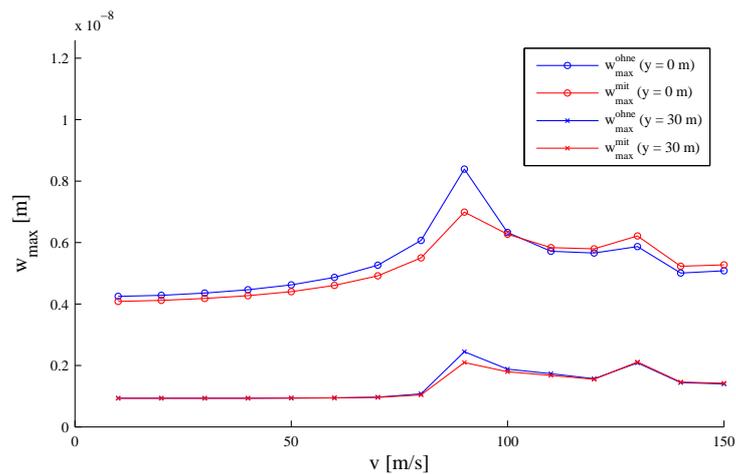
(a) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ (b) w_{max} bei $y = 30\text{ m}$ (c) w_{max} bei $y = 0\text{ m}$ und $y = 30\text{ m}$

Abbildung 8.35: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 0.1\text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1\text{ [N]} \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v

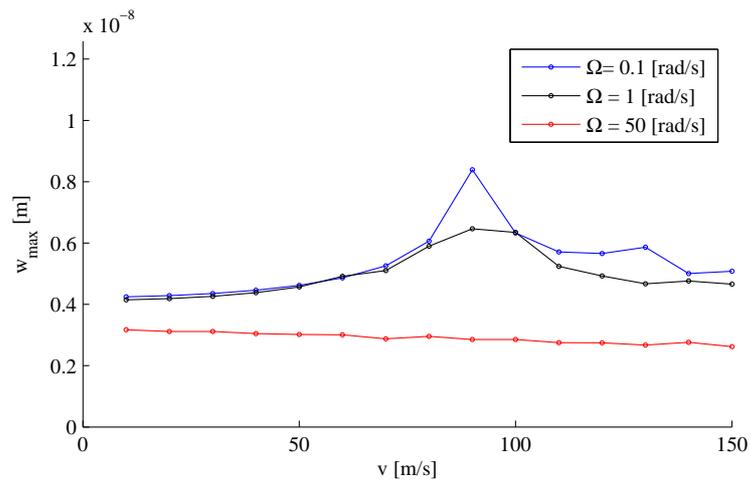


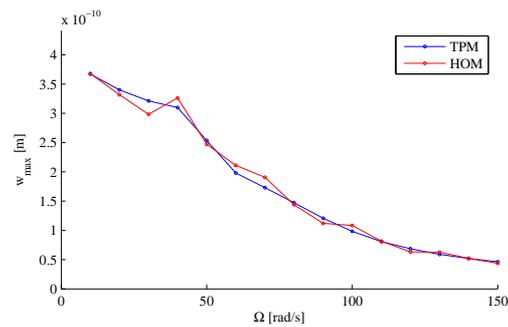
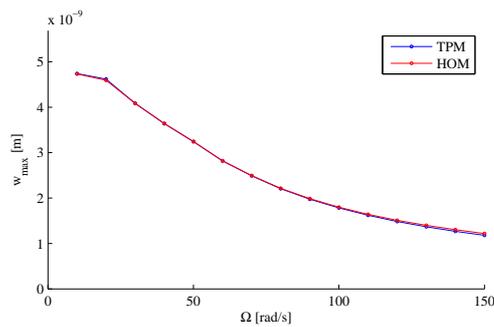
Abbildung 8.36: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche Anregungsfrequenzen Ω

8.3 Halbraum nach der TPM

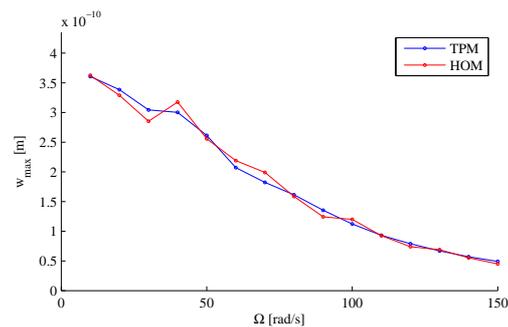
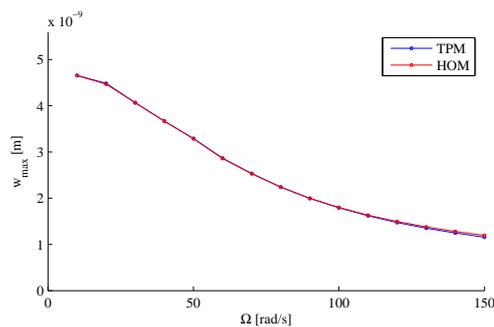
In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse eines auf dem Halbraum gebetteten Balkens, bei dem der Untergrund mit der TPM beschrieben wird, dargestellt und mit den Werten, bei Zugrundelegung des klassischen Halbraumes, verglichen.

Die neu definierten Bodenparameter sind nachstehend aufgelistet. Alle sonstigen Berechnungsparameter entsprechen weiterhin den Werten aus Tab.(8.1).

| Untergrund nach der klassischen Theorie: | | | |
|--|----------|-------|----------|
| E-Modul: | E | 40 | MN/m^2 |
| Dichte: | ρ | 2000 | kg/m^3 |
| Querdehnzahl: | ν | 0.4 | — |
| Dämpfungsgrad: | d | 0.025 | — |
| Untergrund nach der TPM: | | | |
| Festkörperanteil: | n^S | 0.8 | — |
| E-Modul: | E^S | 40 | MN/m^2 |
| Dichte Festkörper: | ρ^S | 2000 | kg/m^3 |
| Dichte Flüssigkeit: | ρ^L | 200 | kg/m^3 |
| Querdehnzahl: | ν^S | 0.4 | — |
| Dämpfungsgrad: | d | 0.025 | — |

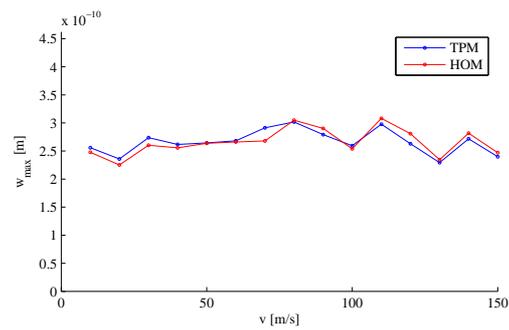
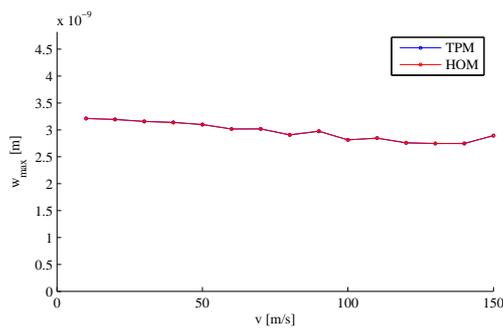


(a) Ohne Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 0 [m]$, bei (b) Ohne Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 30 [m]$

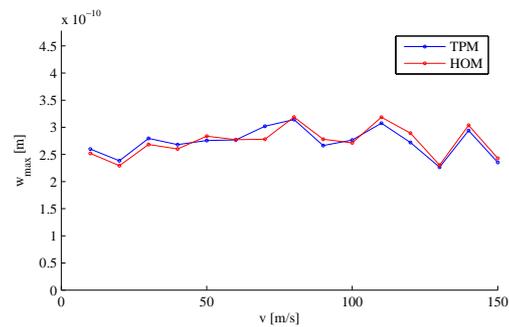
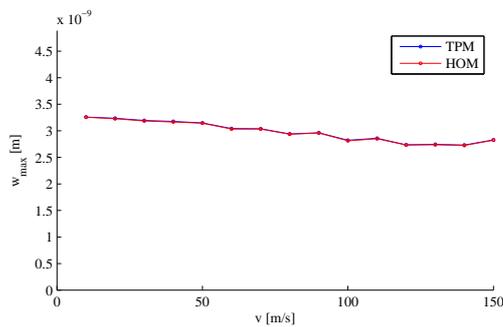


(c) Mit Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 0 [m]$, bei (d) Mit Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 30 [m]$

Abbildung 8.37: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} nach der TPM und der klassischen Theorie für eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$



(a) Ohne Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 0 [m]$ bei (b) Ohne Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 30 [m]$



(c) Mit Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 0 [m]$ bei (d) Mit Horizontalverschiebungsbehinderung, bei $y = 30 [m]$

Abbildung 8.38: Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} nach der TPM und der klassischen Theorie für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$

Die abgebildeten Ergebnisse zeigen nahezu identische Kurvenverläufe für die beiden Untergrundmodelle. Die gute Übereinstimmung bestätigt somit auch die in Kapitel 4 erörterten Ergebnisse.

Kapitel 9

Schlusswort

9.1 Halbraum nach der TPM

Die Ergebnisse in Kapitel 4 und 8.3 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Untergrundmodelle in ihrem Verschiebungsverhalten.

Der auffälligste Unterschied liegt darin, dass sich in der Lösung für den Untergrund nach der TPM eine zweite Druckwelle ergibt, die sich unendlich schnell bewegt.

Dies liegt in der Tatsache begründet, dass bei der Herleitung der Grundgleichungen von inkompressiblen Bestandteilen ausgegangen wurde.

Für die Belange der vorliegenden Arbeit ist diese Annahme ausreichend, da die Nachgiebigkeit des Festkörpergerüsts über die strukturelle Kompressibilität mit Hilfe des Konzeptes der Volumenanteile erfasst ist.

Von weiterem Interesse wäre dennoch die Betrachtung des Untergrundes nach der TPM unter Voraussetzung kompressibler Bestandteile. Hierzu sei auf die folgende Literatur verwiesen: [Ehl93, Bre97, dB97, Blu97b, JB98, dB00b]

Die aufgeführten Lösungen beschränken sich wie erwähnt auf inkompressible Bestandteile. Die Querdehnzahl für den Festkörper ist damit auf 0.5 festgelegt.

Für die partialen Größen, welche die strukturelle Kompressibilität widerspiegeln, wurde ein linearer Zusammenhang zu den realen Größen über den Volumenanteil n^S angesetzt (vgl. Kapitel 4.1). Dieser Zusammenhang ist in dieser Form nur im Bereich von Festkörperanteilen $n^S \geq 0.8$ gültig [Bre98b].

Unter diesen Voraussetzungen war ein Vergleich mit dem klassischen Halbraum nur für Querdehnzahlen $\nu \geq 0.4$ und für die entsprechenden Elastizitätsmodule möglich.

Um auch für kleinere Volumenanteile Ergebnisse zu erhalten, bzw. auch einen Untergrund mit kleineren Querdehnzahlen bewerten und mit dem klassischen Untergrund vergleichen zu können, müsste ein formeller Zusammenhang zwischen realen und partialen Größen definiert werden.

Dem Autor war zum Zeitpunkt der Abfassung hierzu keine Ausarbeitung aus der Literatur bekannt.

9.2 Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem Halbraum gebetteten Balken

Der Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung auf die Halbraumsteifigkeiten ist in Kapitel 8.2.1 dargestellt. Die minimale Halbraumsteifigkeit ist beim horizontalverschiebungsunbehinderten Halbraum auf der Höhe der Rayleighwellenzahl anzutreffen, während sie bei Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung mit größer werdender Balkenbreite in Richtung der Scherwellenzahl wandert.

Ein weiteres Merkmal der Halbraumsteifigkeiten ist ihr linearer Verlauf für große Wellenzahlen oberhalb des Steifigkeitsminimums. Für eine ortsfeste Last liegen die Steifigkeiten ohne Horizontalverschiebungsbehinderung unterhalb der Werte mit Horizontalverschiebungsbehinderung, während es bei einer bewegten Last Geschwindigkeitsbereiche gibt, in denen die Halbraumsteifigkeiten mit Horizontalverschiebungsbehinderung unterhalb von den Werten ohne Verschiebungsbehinderung liegen (s. Abb.(8.15)).

Um einen Eindruck zu gewinnen, wie sich die Halbraumsteifigkeiten auf die Verschiebungen im Halbraum auswirken, sind in Kapitel 8.2.2 und 8.2.3 die Maximalverschiebungen in Balkenmitte und im Abstand von 30 m von der Balkenmittelachse bei Variation der Balkenbreite, des Elastizitätsmoduls des Untergrundes und auch der Halbraumdämpfung ausgewiesen.

Es fällt auf, dass die Maximalverschiebungen ohne Horizontalverschiebungsbehinderung in bestimmten Teilbereichen in der Größenordnung von 5 bis 10 % höher liegen als bei Mitberücksichtigung der Quer- und Längsverschiebungsbehinderung. Im Abstand von 30 m werden vereinzelt auch mehr als 10 % erreicht. Das gleiche gilt auch für eine im Bereich der Rayleighwellengeschwindigkeit bewegte Einzellast, die mit einer sehr geringen Anregungsfrequenz oszilliert (s. Abb.(8.35)).

Es hängt somit von dem gestellten Problem einer Aufgabe ab, ob die Horizontalverschiebungsbehinderung unberücksichtigt bleiben kann oder nicht. Die vorliegende Arbeit kann keine allgemeingültige Aussage über den Einfluss der Quer- und Längsverschiebungsbehinderung liefern, vielmehr gibt sie eine Vorstellung in welcher Größenordnung die Verschiebungsunterschiede liegen können.

Anhang A

Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte (FT) $\bar{f}(k_x, k_y, z, \omega)$ einer Funktion $f(x, y, z, t)$ aus dem Originalraum ergibt sich im Bildraum zu:

$$f(x, y, z, t) \circ \bullet \bar{f}(k_x, k_y, z, \omega)$$

$$\bar{f}(k_x, k_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((f(x, y, z, t) e^{-ik_x x} dx) e^{-ik_y y} dy) e^{-i\omega t} dt$$

Die Tiefenkoordinate z ist in obiger Formulierung nicht mittransformiert.

Für die Fourier-Rücktransformation (FRT) gilt:

$$\bar{f}(k_x, k_y, z, \omega) \bullet \circ f(x, y, z, t)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((\bar{f}(k_x, k_y, z, \omega) e^{ik_x x} dk_x) e^{ik_y y} dk_y) e^{i\omega t} d\omega$$

Die in den Bildraum transformierten Größen werden mit einem Querstrich “-“ gekennzeichnet.

A.1 Rechenregeln

Differentiation

Für die Transformierte der Ableitung einer Funktion $f(t)$ gilt folgende Beziehung:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \circ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n \bar{f}(\omega)$$

Translation

Die Achsenverschiebung einer Funktion im Originalraum führt zu folgendem Ausdruck im Bildraum:

$$f(y \pm a) \circ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(y \pm a) e^{-ik_y y} dy = \bar{f}(k_y) e^{\pm ik_y a}$$

A.2 Ausgewählte Funktionen

Einheits-Dirac

Die Transformation eines Einheits-Diracs $\delta(x)$ an der Stelle $x = 0$ ergibt den Wert 1 [Bri85].

$$f(x) = \delta(x = 0)$$

$$f(x) \circ \bullet \bar{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx = e^{-ik_x 0} = 1$$

Rechteck-Distribution

Eine Rechteckdistribution der Breite $2b$ lässt sich mit zwei entgegengesetzten Heaviside-Distributionen (mit H bezeichnet) beschreiben.

$$f(y) = H(y + b) - H(y - b) = \begin{cases} = 1 & ; |y| < b \\ = \frac{1}{2} & ; |y| = b \\ = 0 & ; |y| > b \end{cases}$$

$$f(y) \circ \bullet \bar{f}(k_y) = \int_{-b}^b f(y) e^{-ik_y y} dy = 2 \frac{\sin(bk_y)}{k_y} = 2b \frac{\sin(bk_y)}{bk_y}$$

Cosinus-Funktion

$$f(t) = \cos(\Omega t)$$

$$\begin{aligned} f(t) \circ \bullet \bar{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left(\delta\left(\frac{\omega + \Omega}{2\pi}\right) + \delta\left(\frac{\omega - \Omega}{2\pi}\right) \right) \\ &= \pi (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) \end{aligned}$$

Gefensterter Cosinus-Funktion

$$f(x) = \cos(K_x x) (H(x + x_0) - H(x - x_0))$$

$$\begin{aligned}
 f(x) \circ \bullet \bar{f}(k_x) &= \int_{-x_0}^{x_0} f(x) e^{-ik_x x} dx = \int_0^{x_0} \cos((k_x + K_x)x) + \cos((k_x - K_x)x) dx \\
 &= x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} + \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right)
 \end{aligned}$$

Sinus-Funktion

$$f(t) = \sin(\Omega t)$$

$$\begin{aligned}
 f(t) \circ \bullet \bar{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{2} \left(\delta\left(\frac{\omega + \Omega}{2\pi}\right) - \delta\left(\frac{\omega - \Omega}{2\pi}\right) \right) \\
 &= i\pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega))
 \end{aligned}$$

Gefensterter Sinus-Funktion

$$f(x) = \sin(K_x x) (H(x + x_0) - H(x - x_0))$$

$$\begin{aligned}
 f(x) \circ \bullet \bar{f}(k_x) &= \int_{-x_0}^{x_0} f(x) e^{-ik_x x} dx = i \int_0^{x_0} \cos((k_x + K_x)x) - \cos((k_x - K_x)x) dx \\
 &= i x_0 \left(\frac{\sin((k_x + K_x)x_0)}{(k_x + K_x)x_0} - \frac{\sin((k_x - K_x)x_0)}{(k_x - K_x)x_0} \right)
 \end{aligned}$$

Anhang B

Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome sind laut [BS81] wie folgt definiert:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_0(x) = 1$$

Ein besonderes Charakteristikum der Legendre-Polynome ist ihre Orthogonalität zueinander im Bereich $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0 \quad ; m \neq n$$

Die Legendre-Polynome gerader Ordnung P_{2n} sind symmetrisch zur Ordinatenachse, während die Polynome ungerader Ordnung P_{2n-1} punktsymmetrisch zum Ursprung verlaufen. An der Stelle $x = \pm 1$ ergeben sich die Werte $P_{2n} = 1$ und $P_{2n-1} = \pm 1$.

Für den Gebrauch der Legendre-Polynome bei der Ermittlung der Halbraumspannungen unter dem Balken werden diese über eine Substitution mit $y = \frac{x}{b}$ auf die Balkenbreite $2b$ skaliert. Nachfolgend sind die ersten 10 Polynome, wie sie im Rahmen dieser Dissertation für die Berechnungen benutzt werden, ausgewiesen.

$$P_0(y) = 1$$

$$P_1(y) = \frac{y}{b}$$

$$P_2(y) = 3/2 \frac{y^2}{b^2} - 1/2$$

$$P_3(y) = 5/2 \frac{y^3}{b^3} - 3/2 \frac{y}{b}$$

$$P_4(y) = \frac{35}{8} \frac{y^4}{b^4} - \frac{15}{4} \frac{y^2}{b^2} + 3/8$$

$$P_5(y) = \frac{63}{8} \frac{y^5}{b^5} - \frac{35}{4} \frac{y^3}{b^3} + \frac{15}{8} \frac{y}{b}$$

$$P_6(y) = \frac{231}{16} \frac{y^6}{b^6} - \frac{315}{16} \frac{y^4}{b^4} + \frac{105}{16} \frac{y^2}{b^2} - \frac{5}{16}$$

$$P_7(y) = \frac{429}{16} \frac{y^7}{b^7} - \frac{693}{16} \frac{y^5}{b^5} + \frac{315}{16} \frac{y^3}{b^3} - \frac{35}{16} \frac{y}{b}$$

$$P_8(y) = \frac{6435}{128} \frac{y^8}{b^8} - \frac{3003}{32} \frac{y^6}{b^6} + \frac{3465}{64} \frac{y^4}{b^4} - \frac{315}{32} \frac{y^2}{b^2} + \frac{35}{128}$$

$$P_9(y) = \frac{12155}{128} \frac{y^9}{b^9} - \frac{6435}{32} \frac{y^7}{b^7} + \frac{9009}{64} \frac{y^5}{b^5} - \frac{1155}{32} \frac{y^3}{b^3} + \frac{315}{128} \frac{y}{b}$$

Eine weitere charakteristische Eigenschaft der Legendre-Polynome ergibt sich für ihre Resultierende, welche, mit Ausnahme des Polynoms 0-ter Ordnung, zu Null wird.

$$\int_{-b}^b P_n(y) dy = \begin{cases} = 2b & ; n = 0 \\ = 0 & ; n > 0 \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

- [Bio56] M. A. Biot: *Theory of propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid-I. Low-Frequency Range and II. Higher Frequency Range*, The Journal of the Acoustical Society of America 28-2, 168-191, (1956)
- [BdB94] J. Bluhm, R. de Boer: *Endliche Elastizitätsgesetze für poröse Medien*, ZAMM 74-4, T224-T225, (1994)
- [BdB96] J. Bluhm, R. de Boer: *Effective stresses-a clarification*, Archive of Applied Mechanics 66, 479-492, (1996)
- [Blu97a] J. Bluhm: *A consistent model for saturated and empty porous media*, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 74, Universität Essen, (1997)
- [Blu97b] J. Bluhm: *Zur Berücksichtigung der Kompressibilität des Festkörpers bei porösen Materialien*, ZAMM 77-S1, S39-S41, (1997)
- [BdB97] J. Bluhm, R. de Boer: *The Volume Fraction Concept in the Porous Media Theory*, ZAMM 77-8, 563-577, (1997)
- [BdB98] J. Bluhm, R. de Boer: *Biots Poroelastizitätstheorie aus der Sicht der Theorie poröser Medien*, ZAMM 78-S1, S281-S282, (1998)
- [Blu99] J. Bluhm: *Constitutive relations for thermo-elastic porous solids*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 99/1, Universität Essen, (1999)
- [Bow80] R. M. Bowen: *Incompressible Porous Media models by use of the Theory of Mixtures*, International Journal of Engineering Science Vol. 18, 1129-1148, (1980)
- [Bra86] R. N. Bracewell: *The Fourier Transform and Its Applications*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, (1986)
- [Bre97] S. Breuer: *Zur Berechnung des mechanischen Verhaltens von porösen Materialien mit kompressiblen und inkompressiblen Phasen*, ZAMM 77-S1, S59-S60, (1997)
- [Bre98a] S. Breuer: *Numerical simulation of the behavior of a fluid saturated elastic porous solid*, Berichte aus dem Bauwesen, Shaker Verlag, Aachen, (1998)
- [Bre98b] S. Breuer: *Numerische Berechnung der Wellenausbreitung in porösen Medien*, ZAMM 78-S1, S305-S306, (1998)

- [Bre99] S. Breuer: *Quasi-Static and Dynamic Behavior of Saturated Porous Media with Incompressible Constituents*, Transport in Porous Media 34, 285-303, (1999)
- [Bri85] E. O. Brigham: *FFT Schnelle Fourier-Transformation*, 2. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, (1985)
- [BS81] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Harry Deutsch Thun und Frankfurt am Main, 20. Auflage, (1981)
- [CW90] H. Cramer, W. Wunderlich: *Multiphase models in soil dynamics*, European Conference on Structural Dynamics, Volume I, Bochum, (1990)
- [dBE86] R. de Boer, W. Ehlers: *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme*, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 40, Universität Essen, (1986)
- [dBE90] R. de Boer, W. Ehlers: *Uplift, friction and capillarity: Three fundamental effects for liquid-saturated porous solids*, Int. Journal of solids and structures 26, 43-51, (1990)
- [dB91] R. de Boer: *THEORIE PORÖSER MEDIEN - historische Entwicklung und gegenwärtiger Stand*, Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 53, Universität Essen, (1991)
- [dBEL93] R. de Boer, W. Ehlers, Z. Liu: *One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media*, Archive of Applied Mechanics 63, 59-72, (1993)
- [dBL94] R. de Boer, Z. Liu: *Plane Waves in a Semi-Infinite Fluid Saturated Porous Medium*, Transport in Porous Media 16, 147-172, (1994)
- [dBL95] R. de Boer, Z. Liu: *Propagation of Acceleration Waves in Incompressible Saturated Porous Solids*, Transport in Porous Media 21, 163-173, (1995)
- [dB95] R. de Boer: *Highlights in the historical development of the porous media theory toward a consistent macroscopic theory*, Bericht aus dem Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, Universität Essen, (1995)
- [dBL96] R. de Boer, Z. Liu: *Growth and Decay of Acceleration Waves in Incompressible Saturated Poroelastic Solids*, ZAMM 76-6, 341-347, (1996)
- [dB97] R. de Boer: *Saturated compressible and incompressible elastic porous solids*, ZAMM 77-S2, S397-S400, (1997)
- [dB98] R. de Boer: *Theory of Porous Media - Past and Present*, ZAMM 78-7, 441-466, (1998)
- [dBD00a] R. de Boer, A. K. Didwania: *The capillarity phenomenon in porous solids: a continuum thermomechanical approach*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 00/1, Universität Essen, (2000)
- [dBD00b] R. de Boer, A. K. Didwania: *Capillarity in porous bodies: macromechanical investigations*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 00/2, Universität Essen, (2000)

- [dB00a] R. de Boer: *Theory of Porous Media*, Springer Verlag, (2000)
- [dB00b] R. de Boer: *Saturated elastic porous solids: incompressible, compressible and hybrid binary models*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 00/3, Universität Essen, (2000)
- [dB00c] R. de Boer: *Uplift, friction, capillarity and effective stress: revisited via the porous media theory*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 00/4, Universität Essen, (2000)
- [Deg02] G. Degrande: *Wave propagation in the soil: theoretical background and application to traffic induced vibrations*, In: H. Grundmann & G.I.S. Schuëller (Herausgeber): *Structural Dynamics, EUROODYN2002*, Band 1, A.A. Balkema Publishers, (2002)
- [DE95] S. Diebels, W. Ehlers: *Dynamik poröser Medien*, ZAMM 75-S1, S151-S152, (1995)
- [Die01] S. Diebels: *Zur Beschreibung komplexen Materialverhaltens: Beiträge anlässlich des 50. Geburtstages von Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers*, Institut für Mechanik Lehrstuhl II, Bericht Nr. II-7, Universität Stuttgart, (2001)
- [DEM01] S. Diebels, W. Ehlers, B. Markert: *Neglect of the Fluid Extra Stresses in Volumetrically Coupled Solid-Fluid Problems*, ZAMM 81, S521-S522, (2001)
- [DM96] H. A. Dieterman, A. V. Metrikine: *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical Velocities of a moving load along the beam*, European Journal of Mechanics 15(1), 67-90, (1996)
- [Din00] J. Dinkel: *Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen Berechnung des gekoppelten Systems Fahrzeug-Untergrund für das Oberbausystem Feste Fahrbahn*, Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, (2000)
- [Ehl85] W. Ehlers: *Die Grundgleichungen flüssigkeits- und gasgefüllter poröser Körper*, ZAMM 65-4, T134-T136, (1985)
- [Ehl86] W. Ehlers: *Wärme- und Feuchtekopplung in porösen Medien*, ZAMM 66-4, T203-T204, (1986)
- [Ehl88] W. Ehlers: *Zur Entwicklung konstitutiver Gleichungen für poröse Medien*, ZAMM 68-4, T170-T171, (1988)
- [Ehl89a] W. Ehlers: *Ein Elastizitätsgesetz für poröse Medien*, ZAMM 69-5, T472-T474, (1989)
- [Ehl89b] W. Ehlers: *PORÖSE MEDIEN - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*, Fachbereich Bauwesen, Habilitationsschrift, Universität Essen, (1989)
- [EdB90] W. Ehlers, R. de Boer: *The development of the concept of effective stresses*, Acta Mechanica 83, 77-92, (1990)

- [Ehl93] W. Ehlers: *Ein thermodynamisches Konzept kompressibler poröser Medien*, ZAMM 73-4&5, T260-T262, (1993)
- [EL94] W. Ehlers, Z. Liu: *On finite dynamic equations for fluid-saturated porous media*, Acta Mechanica 105, 101-117, (1994)
- [Ehl95] W. Ehlers: *Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien*, Institut für Mechanik Lehrstuhl II, Bericht Nr. II-5, Universität Stuttgart, (1995)
- [Ehl97] W. Ehlers: *Theoretical and Numerical Modelling of Granular Liquid-saturated Elasto-plastic Porous Media*, ZAMM 77-S2, S401-S404, (1997)
- [EE99] W. Ehlers, G. Eipper: *Finite Elastic Deformations in Liquid-Saturated and Empty Porous Solids*, Transport in Porous Media 34, 179-191, (1999)
- [Ehl99] W. Ehlers: *IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Proceedings of the IUTAM Symposium held at the University of Stuttgart, Kluwer Academic Publishers, (1999)
- [GLL02] H. Grundmann, S. Lenz, S. Lutzenberger: *Nonlinear SDOF-system moving on a beam-halfspace-system*, In: H. Grundmann & G.I.S. Schüller (Herausgeber): Structural Dynamics, EURO-DYN2002, Band 1, A.A. Balkema Publishers, (2002)
- [GL03] H. Grundmann, S. Lenz: *Nonlinear interaction between a moving SDOF-system and a Timoshenko beam/halfspace support*, Archive of Applied Mechanics 72, Springer Verlag, (2003)
- [Ivá95] G. Iványi: *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Reint de Boer - Beiträge zur Mechanik*, Forschungsbericht aus dem Bereich Bauwesen 66, Universität Essen, (1995)
- [JB98] S. Jägering, J. Bluhm: *Zur Berechnung mechanischer Probleme kompressibler poröser Medien*, ZAMM 78-S2, S523-S524, (1998)
- [Jäg98] S. Jägering: *Ein Beitrag zur numerischen Behandlung elastoplastischer Prozesse in porösen Medien*, Berichte aus dem Bauwesen, Shaker Verlag, Aachen, (1998)
- [Kim04] S. M. Kim: *Influence of horizontal resistance at plate bottom on vibration of plates on elastic foundation under moving loads*, Engineering Structures 26, 519-529, (2004)
- [Kon85] A. Konrad: *Der Zylinder, der zylindrische Hohlraum und die dickwandige Kreis-zylinderschale unter beliebigen, ruhenden oder bewegten Lasten*, Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, Heft 17, Technische Universität München, (1985)
- [Len03] S. Lenz: *Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund unter Zuhilfenahme von Integraltransformationen*, Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, (2003)
- [Lie97] M. Lieb: *Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung*, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 2/97, Technische Universität München, (1997)

- [LS98] M. Lieb, B. Sudret: *A fast algorithm for soil dynamics calculations by wavelet decomposition*, Archive of Applied Mechanics 68(3/4), 147-157, (1998)
- [Lie98] U. Liedl: *Gekoppelte elastisch gebettete Balken unter bewegter harmonischer Belastung*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, (1998)
- [LdB96a] Z. Liu, R. de Boer: *Love Waves in a two-phase saturated porous layer*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 96/8, Universität Essen, (1996)
- [LdB96b] Z. Liu, R. de Boer: *Dispersion and attenuation of surface waves in a biphasic porous medium*, Institut für Mechanik, Fachbereich Bauwesen, MECH-Bericht 96/9, Universität Essen, (1996)
- [LdB97] Z. Liu, R. de Boer: *Dispersion and Attenuation of Surface Waves in a Fluid-Saturated Porous Medium*, Transport in Porous Media 29, 207-223, (1997)
- [LBdB98] Z. Liu, J. Bluhm, R. de Boer: *Inhomogeneous Plane Waves, Mechanical Energy Flux and Energy Dissipation in a Two-Phase Porous Medium*, ZAMM 78-9, 617-625, (1998)
- [LdB99] Z. Liu, R. de Boer: *Propagation and Evolution of Wave Fronts in Two-Phase Porous Media*, Transport in Porous Media 34, 209-225, (1999)
- [Lon67] C. F. Long: *On the Completeness of the Lamé Potentials*, Acta Mechanica 3, (1967)
- [Mah00] D. Mahnkopf: *Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen*, Institut für Mechanik Lehrstuhl II, Bericht Nr. II-5, Universität Stuttgart, (2000)
- [MD97] A. V. Metrikine, H. A. Dieterman: *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam, including the shear stresses at the beam - half-space interface*, European Journal of Mechanics 16(3), 515-527, (1997)
- [Mül89] G. Müller: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten*, Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, Heft 25, Technische Universität München, (1989)
- [PJ99] M. Petyt, C. J. C. Jones: *Modelling of ground-borne vibration from railways*, In: L. Frýba & J. Náprstek (Herausgeber): Structural Dynamics, EURO DYN '99, A.A. Balkema, (1999)
- [Rüc81] W. Rücker: *Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund*, Technischer Bericht 78, Bundesanstalt für Materialprüfung Berlin, (1981)
- [SD03] M. Schanz, S. Diebels: *A comparative study of Biot's theory and the linear Theory of Porous Media for wave propagation problems*, Acta Mechanica 161, 213-235, (2003)

- [Sud96] B. Sudret: *Die Wechselwirkung eines unendlichen Balkens mit dem Halbraum unter bewegter Belastung*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, (1996)
- [Vos02] A. V. Vostroukhov: *Three-dimensional Dynamic Models of a Railway Track for High-speed Trains*, thesis, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University of Technology, (2002)
- [Wol85] J. P. Wolf: *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall, (1985)

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Systemskizze eines fluidgesättigten porösen Festkörpers und “verschmier-tes“ Ersatzmodell (rechts) | 9 |
| 2.1 | Systemskizze zur Definition des Koordinatensystems für den Halbraum . . . | 20 |
| 4.1 | Verlauf der Phasengeschwindigkeiten c_{11} , c_{12} , c_2 und der Rayleighwellen- geschwindigkeit c_R nach der TPM in Abh. von der Querdehnzahl ν | 44 |
| 4.2 | Verlauf der Phasengeschwindigkeiten c_p , c_s und der Rayleighwellengeschwin- digkeit c_R nach der klassischen Theorie in Abh. von der Querdehnzahl ν . . | 44 |
| 4.3 | Vergleich der Kompressionswellengeschwindigkeit der beiden Untergrund- modelle in Abh. von der Querdehnzahl ν | 45 |
| 4.4 | Vergleich der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R der beiden Untergrundmo- delle in Abh. von der Querdehnzahl ν | 45 |
| 4.5 | Verlauf der Kompressionswellengeschwindigkeit c_{11} nach der TPM für un- terschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Querdehnzahl ν . . . | 46 |
| 4.6 | Verlauf der Rayleighwellengeschwindigkeit c_R nach der TPM für un- terschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Querdehnzahl ν | 46 |
| 4.7 | Rayleighwellengeschwindigkeit c_R im Verhältnis zur Scherwellengeschwin- digkeit für die beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Querdehnzahl ν | 47 |
| 4.8 | Vertikalverschiebung $ \bar{w}_z $ nach der klassischen Theorie in Abh. von den Wellenzahlen k_x , k_y für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 49 |
| 4.9 | Vertikalverschiebung $ \bar{w}_z $ nach der TPM in Abh. von den Wellenzahlen k_x , k_y für $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 49 |
| 4.10 | Vergleich der Vertikalverschiebungen $ \bar{w}_z $ der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0.1/m$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 50 |
| 4.11 | Vergleich der Real- und Imaginäranteile der Vertikalverschiebungen der bei- den Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0.1/m$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 50 |
| 4.12 | Vertikalverschiebung $ \bar{w}_z $ nach der klassischen Theorie in Abh. von den Wellenzahlen k_x , k_y für $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 51 |
| 4.13 | Vertikalverschiebung $ \bar{w}_z $ nach der TPM in Abh. von den Wellenzahlen k_x , k_y für $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 51 |
| 4.14 | Vergleich der Vertikalverschiebungen $ \bar{w}_z $ der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 0.1/m$, $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 52 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.15 | Vergleich der Real- und Imaginäranteile der Vertikalverschiebungen der beiden Untergrundmodelle in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 01/m$, $\omega = -\Omega = -200 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 52 |
| 4.16 | Verlauf der Vertikalverschiebungen $ \bar{w}_z $ nach der TPM für unterschiedliche Flüssigkeitsdichten ρ^{LR} in Abh. von der Wellenzahl k_x für $k_y = 01/m$, $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$, $\nu = 0.4$, $\bar{p}_z = 1 \text{ N}$ | 53 |
| 5.1 | Systemskizze des auf dem Halbraum gebetteten Balkens | 58 |
| 5.2 | Systemskizze zur Interaktion Balken zu Halbraum mittels Legendre-Polynome | 61 |
| 5.3 | Systemskizze zur Aufsplittung des Legendre-Polynoms 2-ten Grades durch Streifenlasten | 61 |
| 5.4 | Systemskizze zur Bestimmung der Verschiebungen $\bar{y}_{Rwz}(i)$ infolge einer Einheits-Rechtecklast \bar{p}_{Rz} | 62 |
| 6.1 | Systemskizze zur Interaktion Balken zu Halbraum mittels Legendre-Polynome bei Berücksichtigung der Horizontalverschiebungsbehinderung | 66 |
| 6.2 | Systemskizze zur Bestimmung der Verschiebungen $\bar{y}_R(i)$ und $\bar{y}2_R(i)$ infolge der Einheits-Rechtecklasten \bar{p}_{Rx} , \bar{p}_{Ry} und \bar{p}_{Rz} | 68 |
| 7.1 | Programm-Ablaufschema zur Berechnung der Halbraumsteifigkeit $\bar{k}_H(k_x)$ und der Erschütterungsausbreitung im Halbraum | 73 |
| 7.2 | Legendre-Koeffizienten für eine Einheitseinsenkung als Vergleich zu den Ergebnissen von S. Lenz [Len03, Seite 86, Abbildung 6.7] | 75 |
| 7.3 | Vergleich der Verschiebungsverläufe für mit $\Omega = 1000 \text{ rad/s}$ oszillierende gefensterterte und ungefensterte $\cos(K_x x)$ - und $\sin(K_x x)$ -förmige Belastungen, $K_x = 1.021 \text{ 1/m}$ | 79 |
| 7.4 | Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{max} bei $y = 0 \text{ m}$ für eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ | 80 |
| 7.5 | Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{max} bei $y = 0 \text{ m}$ für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ | 81 |
| 7.6 | Einfluss der Anzahl der Abtastungen N auf die maximalen vertikalen Halbraumverschiebungen w_{max} bei $y = 0 \text{ m}$ für eine mit $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ oszillierende, und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ | 81 |
| 8.1 | Verlauf der Interaktionsspannung p_{xz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ | 84 |
| 8.2 | Verlauf der Interaktionsspannung p_{yz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ | 85 |
| 8.3 | Verlauf der Interaktionsspannung p_z für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ | 86 |
| 8.4 | Verlauf der Halbraumverschiebung u für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff | 87 |
| 8.5 | Verlauf der Halbraumverschiebung v für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff | 88 |

8.6 Verlauf der Halbraumverschiebung w für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff 89

8.7 Verlauf der Interaktionsspannung p_{xz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ 90

8.8 Verlauf der Interaktionsspannung p_{yz} für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ 91

8.9 Verlauf der Interaktionsspannung p_z für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ 92

8.10 Verlauf der Halbraumverschiebung u für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff 93

8.11 Verlauf der Halbraumverschiebung v für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff 94

8.12 Verlauf der Halbraumverschiebung w für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ zum Zeitpunkt zum Zeitpunkt der max. Verschiebung am Lasteingriff 95

8.13 Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten 99

8.14 Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -100 \text{ rad/s}$ oszillierende, ortsfeste Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten 100

8.15 Verlauf der Steigungsverhältnisse $\lim_{k_x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_{,k_x}^{mit}(k_x)}{f_{,k_x}^{ohne}(k_x)}$ für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast . 101

8.16 Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 50 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten . . . 102

8.17 Vergleich der Halbraumsteifigkeiten $|\bar{k}_H(k_x)|$ mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\omega = -\Omega = -50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit $v = 100 \text{ m/s}$ bewegte Einzellast für unterschiedliche Balkenbreiten . . . 103

8.18 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω 105

8.19 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche Balkenbreiten 106

8.20 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Balkenbreite von 1.2 m 107

| | | |
|------|--|-----|
| 8.21 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Balkenbreite von $10.8 m$ | 108 |
| 8.22 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche E-Module des Bodens | 109 |
| 8.23 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einem E-Modul des Bodens von $12.5 * 10^6 N/m^2$ | 110 |
| 8.24 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einem E-Modul des Bodens von $200 * 10^6 N/m^2$ | 111 |
| 8.25 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω und für unterschiedliche Bodendämpfungen | 112 |
| 8.26 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Bodendämpfung von $d = 0.01$ | 113 |
| 8.27 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ in Abh. von der Anregungsfrequenz Ω bei einer Bodendämpfung von $d = 0.05$ | 114 |
| 8.28 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 rad/s$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v | 116 |
| 8.29 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 rad/s$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche Balkenbreiten | 117 |
| 8.30 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 rad/s$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einer Balkenbreite von $1.2 m$ | 118 |
| 8.31 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 rad/s$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einer Balkenbreite von $10.8 m$ | 119 |
| 8.32 | Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 rad/s$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche E-Module des Bodens | 120 |

8.33 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einem E-Modul des Bodens von $12.5 * 10^6 \text{ N/m}^2$ 121

8.34 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v bei einem E-Modul des Bodens von $200 * 10^6 \text{ N/m}^2$ 122

8.35 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} mit und ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine mit $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v . 123

8.36 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} ohne Horizontalverschiebungsbehinderung für eine oszillierende, bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ in Abh. von der Lastgeschwindigkeit v und für unterschiedliche Anregungsfrequenzen Ω 124

8.37 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} nach der TPM und der klassischen Theorie für eine mit der Anregungsfrequenz Ω oszillierende, ortsfeste Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x)$ 125

8.38 Vergleich der maximalen Halbraumverschiebungen w_{max} nach der TPM und der klassischen Theorie für eine mit $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ oszillierende und mit der Geschwindigkeit v bewegte Einzellast $p_B = 1 [N] \delta(x^*)$ 126