

Virtualisierung des Bremsgeräusentwicklungprozesses zur Sicherstellung einer robusten Anlaufqualität

Martin Treimer, M.Sc.

Vollständiger Abdruck der von der promotionsführenden Einrichtung Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. Fabian Duddeck

Prüfer der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Norbert P. Hoffmann

Technische Universität Hamburg-Harburg

Die Dissertation wurde am 28.06.2016 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt am 28.11.2016 angenommen.

Abstract

This thesis is covering the field of uncertainty quantification of brake systems concerning the occurrence of brake noise. An algorithm is developed which characterizes the phenomenon of brake squeal with regard to its dependency on production-related scatter of the material parameter. A robustness assessment is done.

For the robustness assessment different approaches are introduced. An objective function is derived which is able to describe the mode coupling phenomenon. The parameter scatter for the simulation is identified out of the real distributions of the singular components. For the parameter scatter's evaluation a design of experiment is created which allows a universally valid assessment of systems with a low computation effort. The analysis of the robustness is based on mathematical surrogate models for the characterization of the parameter's influences. For the description of the results the processes of regression models, the parameter sensitivities and instability probabilities are used. The system's characterization is done with a robustness index.

During the virtual development of a brake system the algorithm provides a statement about its noise behaviour under the given elements of uncertainty in the production of the singular components and their assembly. Therefore the development of a robust system is ensured so that there are no brake noises in the vehicle.

Keywords

brake squeal, Design of Experiments, d-optimal design of experiments, Finite Element Method, mode coupling phenomenon, parameter distribution, reliability analysis, uncertainty quantification

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Unsicherheitsbetrachtung von Bremssystemen hinsichtlich dem Auftreten von Geräuschen. Es wird ein Algorithmus entwickelt, der das Phänomen des Bremsenquietschens in Bezug auf die Abhängigkeit von produktionsbedingten Schwankungen der Materialparameter charakterisiert. Es wird eine Bewertung der Robustheit durchgeführt.

Für die Robustheitsbewertung werden verschiedene Ansätze vorgestellt. Es wird eine Zielfunktion hergeleitet, welche das Phänomen der Modenkopplung abbildet. Die simulativen Parameterschwankungen werden aus realen Verteilungen der jeweiligen Komponenten ermittelt. Zur Untersuchung der Parameterschwankung wird ein Versuchsplan erstellt, der eine allgemeingültige Bewertung von Systemen mit geringem Aufwand zulässt. Die Auswertung der Robustheitsbetrachtung basiert auf mathematischen Ersatzmodellen zur Charakterisierung der Parametereinflüsse. Für die Ergebnisbeschreibung werden die Verläufe von Regressionsmodellen, die Parametersensitivitäten und Instabilitätswahrscheinlichkeiten verwendet. Die Systemcharakterisierung erfolgt über einen Robustheitsindex.

Der Algorithmus liefert während der virtuellen Auslegung eines Bremssystems eine Aussage über dessen geräuschliches Verhalten unter den gegebenen Unsicherheitsfaktoren in der Herstellung der Einzelkomponenten und deren Zusammenbau. Damit wird eine robuste Auslegung gewährleistet, sodass im Fahrzeug keine Bremsengeräusche auftreten.

Keywords

Bremsenquietschen, Design of Experiments, d-optimaler Versuchsplan, Finite Elemente Methode, Modenkopplungsphänomen, Parameterverteilungen, Unsicherheitsbetrachtungen, Versagenswahrscheinlichkeit

Vorwort

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit im ProMotion Programm der BMW Group und meiner wissenschaftlichen Arbeit am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München, Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt.

An erster Stelle möchte ich Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller für die Betreuung und Förderung meiner Arbeit danken. Wichtige Bausteine für das Gelingen meiner Dissertation waren seine Anregungen und intensiven Diskussionen wissenschaftlicher Fragestellungen, die immer wieder neue Lösungsansätze lieferten.

Ebenso möchte ich Prof. Dr. rer. nat. habil. Norbert P. Hoffmann für die Übernahme des Zweitgutachtens und den damit verbundenen Aufwand danken.

Ein großer Dank gilt meinen Kollegen der BMW Group im Umfeld der Simulation Längsdynamik. Durch die Arbeit im Team und ihren kritischen Fragen wurde diese Arbeit ermöglicht. Ganz besonders möchte ich Dr.-Ing. Baldur Allert für die intensive Betreuung während meiner Zeit als Doktorand danken. Seine Förderung und Motivation waren für mich immer Ansporn. Ebenfalls danke ich Philipp Buck für seinen Rückhalt und seine Hilfsbereitschaft. Ich möchte auch Hans-Jörg Kolbinger, der die Arbeit initialisiert hat, und Dr.-Ing. Julius Schluppkotten, der mich als Mentor betreut hat, für den Erfahrungsaustausch danken.

Ich bin ebenso allen Mitgliedern des Lehrstuhls für Baumechanik für ihre Anmerkungen und ihre Unterstützung dankbar.

Zuletzt danke ich allen Mitgliedern meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Frieda und Paul, dass sie mich während der Arbeit und meiner Ausbildung unterstützt haben und immer an meiner Seite standen. Dies gilt auch für alle Freunde und Bekannten mit denen ich währenddessen in Kontakt gekommen und geblieben bin. Ebenso danke ich meiner Freundin Corinna für ihre Unterstützung und ihre Geduld.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt zu haben. Die verwendete Literatur und sonstige Hilfsmittel sind vollständig angegeben.

München, den 14.06.2016

Martin Treimer

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Bremsengeräuschphänomene	2
1.2 Ziel der Arbeit	4
1.3 Stand der Technik	7
1.3.1 Überblick	7
1.3.2 Ansätze zur Robustheitsbewertung	9
1.3.3 Vergleich der Ansätze	12
1.4 Inhalt der Arbeit	14
2 Bremsenquietschen	17
2.1 Ansatz der Berechnung	17
2.2 Analyse von Bremsenquietschen	19
3 Statistische Grundlagen	25
3.1 Monte Carlo Simulationen	25
3.2 Design of Experiments	26
3.2.1 One Factor at One Time	27
3.2.2 Faktorielle Pläne	27
3.2.3 D-optimale Pläne	29
3.2.4 Latin Hypercube Sampling	33
3.3 Korrelationskoeffizient	34
3.4 Regressionsmodelle	37
3.4.1 Allgemeine Regressionsmodelle	37
3.4.2 Bivariate Regression	38
3.4.3 Multiple Regression	40
3.5 Verteilungen der Eingangsparameter	42
3.6 Weiterführende Untersuchungen zur Versuchsplanerstellung	45
3.7 Auswertung der Parameterverläufe	49
3.8 Berechnung der Parametersensitivitäten	50
3.9 Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit	52
3.9.1 First Order Reliability Method	53
3.9.2 Second Order Reliability Method	55
3.9.3 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit	57
3.9.4 Auswertung der Instabilitätswahrscheinlichkeiten	58

4	Entwicklung von Zielfunktionen	63
4.1	Normberechnungen	64
4.1.1	Norm für ein Frequenzspektrum	64
4.1.2	Norm für eine einzelne Frequenz	66
4.2	Modenkopplung	67
4.2.1	Modal Assurance Criterion	67
4.2.2	Berechnung der Modenkopplungszelfunktion	69
4.3	Zielfunktionen für ein Frequenzspektrum	69
4.3.1	Allgemeines Vorgehen zur Berechnung	69
4.3.2	Vorstellung von möglichen Zielfunktionen	70
4.3.3	Bewertung der Zielfunktionen	71
4.3.4	Verbesserungen des Vorgehens	74
4.3.5	Vergleich der Diagonalelemente	75
4.4	Serienzielfunktion	78
4.4.1	Herleitung der Zielfunktion	78
4.4.2	Artefakt der Zielfunktion	80
4.4.3	Betrachtung der Dämpfungsmatrix	81
4.5	Zusammenfassung	84
5	Vergleich und Validierung der Zielfunktionen	87
5.1	Bewertungsindex	87
5.1.1	Definition	87
5.1.2	Eigenschaften	89
5.2	Vergleich der Zielfunktionen	89
5.2.1	Vergleich der Zielfunktionen für eine einzelne Frequenz	91
5.2.2	Vergleich der Zielfunktionen für ein Frequenzspektrum	95
5.3	Validierung der Serienzielfunktion	98
5.3.1	Gesamtes Frequenzspektrum	99
5.3.2	Einzelne Frequenz	101
5.4	Abbildung eines Regressionsbewertungsindex	103
6	Parameterbetrachtungen	105
6.1	Modellparameter	106
6.2	Parameterreduktion	108
6.3	Parameterclustering	118
6.4	Schwankungsbreiten und Verteilungen der Eingangsparameter	119
7	Algorithmus zur Robustheitsbestimmung	129
7.1	Erstellung des Versuchsplans	129
7.2	Robustheitsbewertung	130
7.3	Durchführung am System aus Euler-Bernoulli Balken	133
7.4	Durchführung an einem realen Bremssystem	139
8	Fazit und Ausblick	145
8.1	Zusammenfassung	146
8.2	Einordnung der Ergebnisse	147

8.3	Erweiterungsansätze	149
8.3.1	Validierung des Regressionsmodells	149
8.3.2	Weiterführende Anwendungsbereiche des Algorithmus	150
8.3.3	Optimierung des Systems auf Basis des Ersatzmodells	150
8.3.4	Abstimmung zwischen Hard- und Softwareversuchen	152
8.3.5	Berechnung der Geräuschabstrahlung	152
A	Darstellung eines Bremsenmodells	155
B	Betrachtung von Ersatzsystemen	159
B.1	Einmassenschwinger	159
B.2	Zweimassenschwinger	162
B.3	System aus Euler-Bernoulli Balken	165
C	Messmethoden	169
C.1	Dichte	169
C.2	Beschreibung des elastischen Materialverhaltens	170
C.3	Isotropes Materialverhalten	172
C.4	Transversal isotropes Materialverhalten	174
	Literaturverzeichnis	177

Symbolverzeichnis

M bezeichnet eine Matrix und \mathbf{v} einen Vektor.

Griechische Buchstaben

δ		Abklingkonstante
λ		Eigenwert
μ		Modalvektor
μ		Erwartungswert Normalverteilung
μ		Reibwert
ν		Querkontraktion
ρ	$\frac{\text{t}}{\text{mm}^3}$	Dichte
σ		Standardabweichung Normalverteilung
φ_0		Phasenverschiebung
ψ		Eigenvektor
ω_D	$\frac{1}{\text{s}}$	Kreisfrequenz

Lateinische Buchstaben

c	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Schallgeschwindigkeit	
C, c		Dämpfung	
d		negative Dämpfung	$d = -2\frac{\text{Re}}{\text{Im}}$
E	Pa	Elastizitätsmodul	
E		Erwartungswert	
f	$\frac{1}{\text{s}}$	Frequenz	$f = \frac{\text{Im}}{2\pi}$
F	N	Kraft	
g	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Schwerebeschleunigung	
G	Pa	Schubmodul	

Im		Imaginärteil
K	Pa	Kompressionsmodul
K, k	Pa	Steifigkeit
l	m	Länge
Re		Realteil
M, m	kg	Masse
p	Pa	Druck
P		Wahrscheinlichkeit
R^2		Bestimmtheitsmaß/Modellgüte
t	s	Zeit
T	K	Temperatur
u, x	m	Ort, Verschiebung
v	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Geschwindigkeit
V	m^3	Volumen
\mathbf{v}_r	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	relativer Gleitvektor
z_f, f_z		Zielfunktion

1 Einleitung

Aufgrund verschiedener Einflussfaktoren befindet sich die Automobilindustrie im Wandel. Fokusthemen sind alternative Antriebstechnologien, die Steigerung des Fahrkomforts und eine Verbesserung der Produktqualität. Bei all diesen Anforderungen muss das Gesamtfahrzeug hinsichtlich der Geräuscentwicklung abgesichert werden. Durch die Entwicklung von Elektromotoren sinkt die Geräuschabstrahlung des Antriebs. Hinsichtlich des Komforts sind die Kundenbedürfnisse laufruhige Fahrzeuge ohne Störgeräusche. Zusätzlich haben die Premiumhersteller einen hohen Qualitätsanspruch und das Ziel der Vermeidung von Gewährleistungsfällen. Ein Fokus liegt auf den Bremsengeräuschen, welche die Kunden als funktionale Einschränkungen bewerten und in den Werkstätten reklamieren. Treten im Bremssystem hochfrequente Geräusche auf, stellen diese Bremsenquietschen dar.

Die Vermeidung von Bremsenquietschen, ein Teil der NVH (Noise, Vibration, Harshness) Untersuchungen, ist eine wichtige Anforderung im Auslegungsprozess eines Fahrzeugs (Nunes u. a. [2009] und de Paula u. a. [2012]), da es hohe Gewährleistungskosten und Kundenbeschwerden verursacht (Kinkaid u. a. [2003] und Lü und Yu [2014]). Deshalb gibt es neben den Sicherheits- und Funktionsbedingungen des Bremssystems hohe Anforderungen an die akustische Absicherung und Komfortaspekte (Hoffmann und Gaul [2008] und Nunes u. a. [2009]). Bremsenquietschen ist eines der zehn größten Geräuschprobleme in New York City und verursacht in den Vereinigten Staaten von Amerika über eine Billion US-Dollar Gewährleistungskosten pro Jahr (Akay [2002]). Obwohl bereits seit den 1930er Jahren die Untersuchungen zur Reduktion von Bremsenquietschen andauern (Akay [2002] und Tison u. a. [2014]), gibt es keine allgemeingültige Theorie (Lü und Yu [2014]), dieses komplexe Phänomen zu beschreiben (Nouby u. a. [2009]).

Die Anregemechanismen des Bremsenquietschens werden in Abschnitt 1.1 beschrieben. Das Geräusch ist durch eine selbstinduzierte Schwingung (AbuBakar und Ouyang [2006] und Hoffmann u. a. [2002]) charakterisiert, welche durch reibungsinduzierte Vibrationen angeregt wird (AbuBakar und Ouyang [2006], Nouby u. a. [2009] und Tison u. a. [2014]). Die Schwingung verursacht eine Modenkopplung oder einen Modeneinschluss (Akay [2002], Hamabe u. a.

[1999], Hoffmann und Gaul [2008] und Nobari u. a. [2015a]), was starke Vibrationen und eine Geräuschabstrahlung bedingt (Lü und Yu [2014]). Nicht alle Geräusche des Bremssystems werden dem Bremsenquietschen zugeordnet. Neben dem Quietschen, welches im Bereich von 1 bis 16 kHz auftritt (Lü und Yu [2014]), sind insbesondere das Knarzen für Frequenzen unter 100 Hz und das Schrummen im Bereich von 100 bis 500 Hz zu erwähnen (Tison u. a. [2014]).

Für die Betrachtung von Bremsenquietschen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es kann in theoretischer, experimenteller und simulativer Form untersucht werden (AbuBakar und Ouyang [2006]). Mit der theoretischen Analyse ist die Beschreibung der unterschiedlichen Anregemechanismen (Lü und Yu [2014]) möglich. Dazu wird auf Minimalmodelle zurückgegriffen (Allert und Müller [2014], Hamabe u. a. [1999] und Hoffmann und Gaul [2008]). Eine experimentelle Untersuchung ist für alle Bremssysteme möglich, jedoch ist diese zeit- und kostenintensiv. Aus diesem Grund ist die simulative Entwicklung von Bedeutung. Dazu muss eine gute Korrelation zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen gegeben sein. Es ist möglich, das System im Zeit- oder Frequenzbereich zu berechnen (Ouyang u. a. [2005]). Eine transiente Analyse ist zeitintensiv (Oberst und Lai [2015]), sodass die Berechnung von Bremsenquietschen in der Regel auf Basis der Eigenfrequenzen des Systems erfolgt (Ouyang u. a. [2005]). Ein allgemeingültiger Ansatz zur Vermeidung der hochfrequenten Geräusche kann nicht angegeben werden (Dunlap u. a. [1999]).

Der Ausgangspunkt des Bremsenquietschens ist die rotierende Bremsscheibe in Interaktion mit den Bremsbelägen während der Bremsung. Wenn beim Bremsvorgang die Beläge Kontakt mit der Scheibe herstellen, kann es zu einer hochfrequenten Geräuschabstrahlung kommen. Diese Problematik wird in der Bremsenentwicklung identifiziert und behoben.

Die Randbedingungen für das Auftreten des Bremsenquietschens sind vielfältig. Ein Aspekt ist die Reibung zwischen der Bremsscheibe und den Bremsbelägen, eine selbstinduzierte Schwingungsanregung, welche die Hauptursache der Geräuschentwicklung darstellt.

1.1 Bremsengeräuschphänomene

Für die Geräuschentwicklung im Bremssystem sind verschiedene Mechanismen verantwortlich. Diese werden in fünf Kategorien eingeteilt (Buck [2008, Kapitel 2, Seite 5ff] und Chen u. a. [2006, Kapitel 1.2, Seite 1ff]).

1. Stick-Slip

Die Unterschiede in den Haft- und Gleitreibungskoeffizienten führen zu einer Anregung des Systems. Dieser Effekt stellt keine Ursache für das Bremsenquietschen dar (Allert [2014, Kapitel 3.1.3, Seite 38f]).

2. Negative $\frac{\partial \mu}{\partial v_{\text{rel}}}$ Beziehung

Unter einer Linearisierung des idealen Reibgesetzes ergibt sich eine aufklingende Schwingung mit Ausprägung eines Grenzyklus. Dieser Effekt ist verantwortlich für eine Klasse von Instabilitäten (Buck [2008, Kapitel 2.1.1.2, Seite 9f]), welche im Folgenden nicht betrachtet wird, da sie nicht dem Bremsenquietschen zugeordnet wird.

3. Geometrische und kinematische Einschränkungen

Die Einschränkungen, welche auf dem Sprag-Slip Effekt (Keitzel und Hoffmann [2006]) basieren, verursachen eine Verkeilung zwischen den Bauteilen. Dieser Effekt stellt ebenfalls keine Ursache für Bremsenquietschen dar (Buck [2008, Kapitel 2.3, Seite 20f]).

4. Modenkopplung

Die Modenkopplung wird durch ein Minimalmodell mit zwei Freiheitsgraden (Hamabe u. a. [1999] und Hoffmann u. a. [2002]) beschrieben und basiert auf der Vereinigung von zwei Eigenfrequenzen. Dieser Effekt ist der zentrale Mechanismus für die Beschreibung von Bremsenquietschen (Allert [2014, Kapitel 3.3.1, Seite 42ff] und Nobari u. a. [2015a]).

5. „Hämmernde Anregung“

Verantwortlich dafür sind Vibrationen über die Oberflächenveränderungen der sich drehenden Bremsscheibe, dabei ändert sich die Reibbedingung zwischen Scheibe und Belag. Das Phänomen basiert auf der Modenkopplung (Hoffmann und Gaul [2008]).

Die Bremsengeräusche werden in verschiedene Klassen eingeteilt, vergleiche Abbildung 1.1. Es wird eine Unterscheidung auf Basis der Frequenzen und der Übertragungsart getroffen. Beim Bremsenquietschen handelt es sich um ein Geräusch beginnend bei 1 kHz bis zum Ende des hörbaren Bereichs, welches durch Luftschall übertragen wird (Hoffmann und Gaul [2008]).

1.2 Ziel der Arbeit

Um die Motivation der Robustheitsbestimmung darzustellen, werden zwei als identisch angenommene Bremsscheiben analysiert (BMW Group [2016]). Betrachtet wird die Dichte und der Elastizitätsmodul der beiden Scheiben. In der Simulation werden die Literaturwerte 112

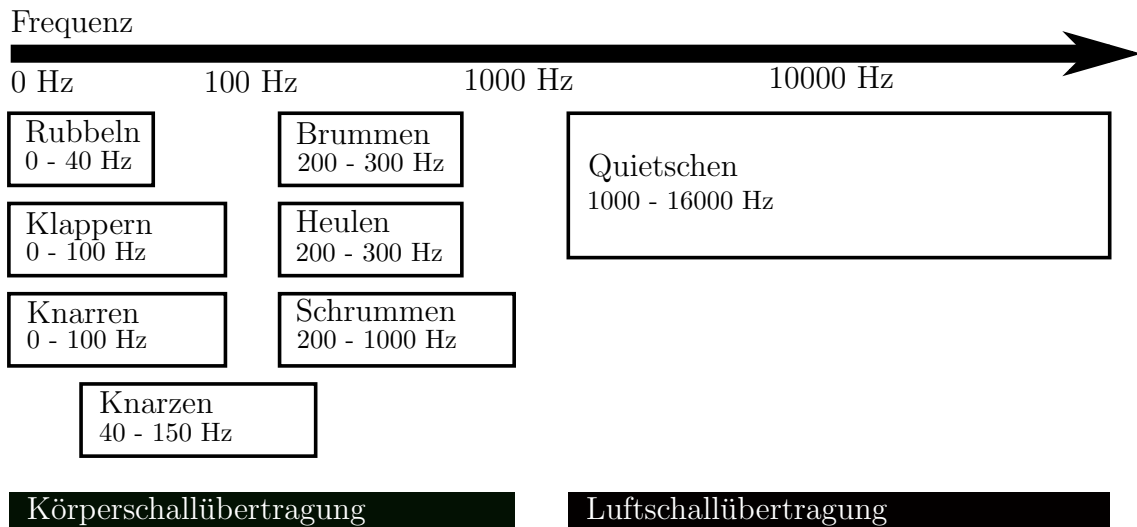


Abbildung 1.1: Eine Auflistung der Bremsengeräusche (Allert [2014, Kapitel 1.1, Seite 2f], Breuer und Bill [2006, Kapitel 22.2, Seite 334f], Buck [2008, Kapitel 1.3, Seite 4] und Tison u. a. [2014]). Eingeteilt werden diese nach dem abgedeckten Frequenzspektrum und der Art der Übertragung.

GPa für den Elastizitätsmodul und $7.2 \frac{g}{cm^3}$ für die Dichte angenommen. Die realen Parameter sind Schwankungen unterworfen.

Es werden zwei innenbelüftete Scheiben vermessen, aus denen fünf Materialproben entnommen werden. Eine Probe stammt aus dem Topf und jeweils zwei aus dem oberen und dem unteren Reibring, vergleiche Abbildung 1.2. Zur Bestimmung der Schwankung innerhalb einer und zwischen beiden Scheiben werden die Proben untereinander verglichen.

Bei der ersten Scheibe beträgt die prozentuale Abweichung der Dichte zwischen den einzelnen Entnahmestellen maximal 0.076%. Beim Elastizitätsmodul treten Schwankungen von 2.79% auf. Bei der zweiten Scheibe ergibt sich eine Abweichung in der Dichte von 0.13% und im Elastizitätsmodul von 0.59%.

Werden die Scheiben untereinander verglichen, ist eine Abweichung für die Mittelwerte der Dichte von 0.47% und für den Elastizitätsmodul von 13.3% gegeben, vergleiche Abbildung 1.3. Zusätzlich zu den fertigungsbedingten Schwankungen treten Messtoleranzen auf. In der Literatur werden die Toleranzen bei Bestimmung des Elastizitätsmoduls untersucht, welche $\pm 3\%$ betragen (Trubitz u. a. [2004]).

Es wird mit der Vorgehensweise aus Kapitel 2 der Einfluss der Elastizitätsmodulschwankung von 13.3% anhand des später folgenden Finiten Elemente Modells aus Abschnitt 7.4 auf das Ergebnis einer Bremsengeräuschsimulation untersucht. Für das gegebene Bremssystem werden zwei verschiedene Elastizitätsmoduln für den Reibring der Bremscheibe angenommen.

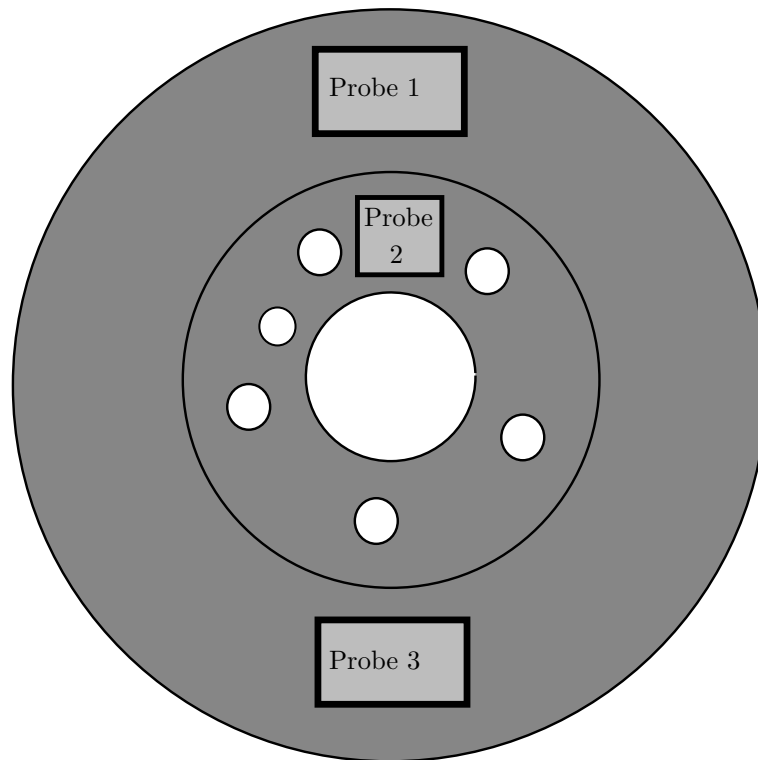


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der beiden betrachteten Bremsscheiben. Markiert sind die Stellen, an denen Proben entnommen werden. Die Entnahmestellen vier und fünf befinden sich am unteren Reibring und bilden die Pendanten zu eins und drei.

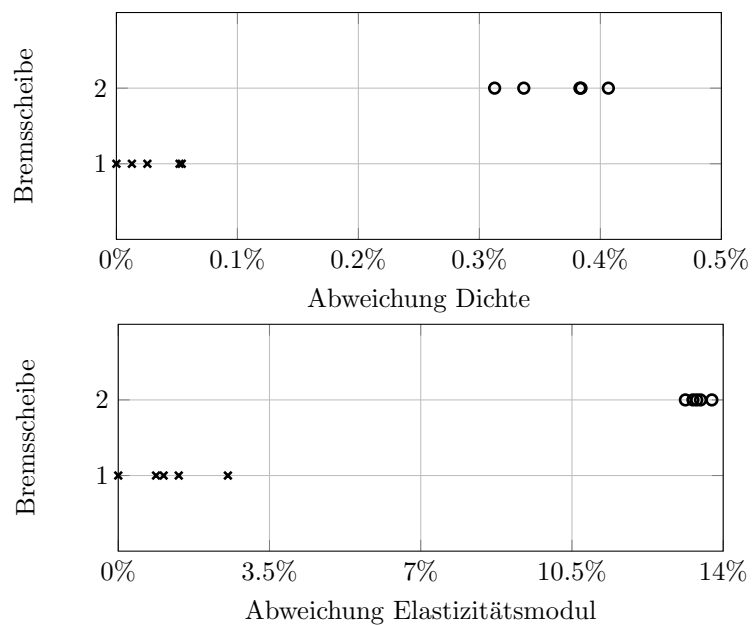


Abbildung 1.3: Prozentuale Abweichungen der beiden Scheiben. Im obigen Bild ist die Dichte dargestellt, im unteren der Elastizitätsmodul. Der Referenzwert ist definiert durch das Minimum von Scheibe eins und zwei.

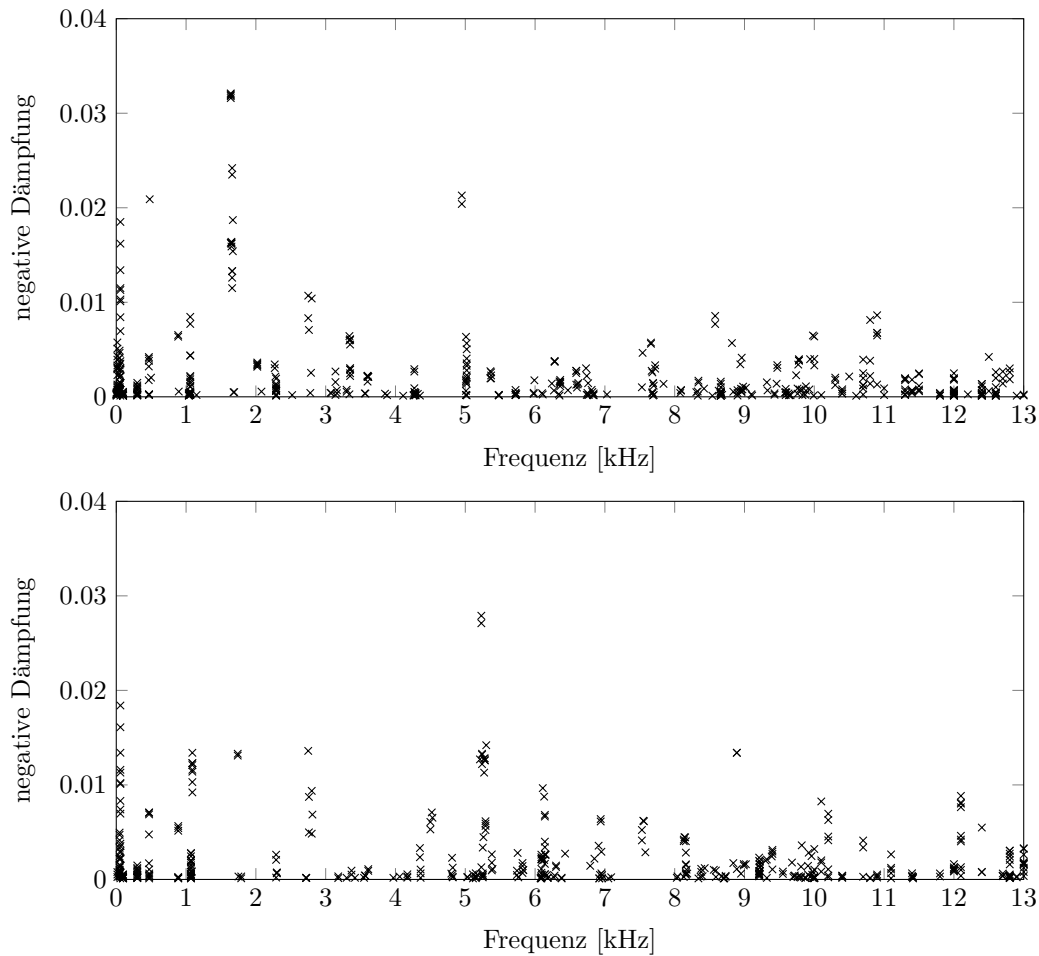


Abbildung 1.4: Darstellung der negativen Dämpfungen der berechneten Frequenzen bei verschiedenen Reibwerten und Bremsdrücken für zwei Einstellungen des Elastizitätsmoduls des Reibrings der Bremsscheibe. Oben aufgetragen ist das Ergebnis für 104 GPa, unten für 118 GPa.

In der ersten Simulation ist der Wert 104 GPa, in der zweiten 118 GPa. Die restlichen Parameter bleiben unverändert. Die Auswertung der Ergebnisse mit der Bewertungsgröße der negativen Dämpfung erfolgt bei verschiedenen Bremsdrücken und Reibwerten.

Wie in Abbildung 1.4 dargestellt, ergeben sich für die beiden Elastizitätsmoduln abweichende Ergebnisse. Dies wird an den Frequenzen 1.6 kHz und 5.0 kHz aufgezeigt. Bei 1.6 kHz gibt es Unterschiede zwischen den Ergebnissen. Es treten hohe negative Dämpfungen bei einer Vielzahl von Kombinationen aus Reibwerten und Bremsdrücken beim niedrigen Elastizitätsmodul auf. Beim hohem Elastizitätsmodul sind im Ergebnis weniger und geringere negative Dämpfungen gegeben als zuvor. Wird die Instabilität bei 5.0 kHz betrachtet, ergibt sich eine Frequenzverschiebung zu 5.4 kHz vom niedrigen zum hohen Elastizitätsmodul. Der Wert der maximalen negativen Dämpfung ist um 0.01 größer.

Dies zeigt, dass die Schwankungen Einfluss auf das Instabilitätsergebnis haben. In der Literatur werden ähnliche Schwankungen für den Elastizitätsmodul der Brems Scheibe betrachtet, welche einen vergleichbaren Einfluss auf die Simulationsergebnisse besitzen (Lü und Yu [2014]). Aufgrund der Variationen ist eine Robustheitsuntersuchung des Bremssystems zur Bestimmung der Auswirkungen der Schwankungen notwendig.

Eine robuste Auslegung des Bremssystems erfolgt über Betrachtung von Variationen für die im System enthaltenen Parameter. Die Auswertung eines fest definierten Werts ist nicht ausreichend. Die Bewertung des Bremssystems muss im Zusammenhang mit den real verwendeten Bauteilen stehen.

1.3 Stand der Technik

1.3.1 Überblick

Die Berechnung von Bremsenquietschen wird in der Literatur detailliert untersucht. Im Folgenden werden beispielhaft einige Grundlagen zusammengefasst, die als Basis der weiteren Untersuchungen herangezogen werden.

Kinkaid u. a. [2003] geben eine allgemeine Beschreibung des Bremsenquietschens basierend auf unterschiedlichen Untersuchungsmethodiken an. Es werden die Problemstellungen bei der Bearbeitung aufgezeigt und die verschiedenen Vorgehensweisen eingeordnet. Die historische Entwicklung wird angegeben und das Bremssystem mit seiner Funktionsweise beschrieben. Dabei wird der theoretische Hintergrund beleuchtet. Zur Berechnung des Bremsenquietschens werden die beschreibenden Gleichungen angegeben. Es werden die Reibgesetze und die thermische Auswirkung des Reibkontakts aufgezeigt. Nach Darstellung der Möglichkeiten zur experimentellen Untersuchung von Bremsenquietschen werden Strategien zur Vermeidung dessen angegeben. Für theoretische Betrachtungen werden Theorien zur analytischen Beschreibung und die zugehörigen Minimalmodelle aufgezeigt. Zur simulativen Untersuchungen werden Finite Elemente Modelle eingeführt.

Das Bremsenquietschen wird ebenfalls in Hoffmann und Gaul [2008] behandelt. Das Quietschen stellte eine reibungsinduzierte, strukturbedingte Vibration dar. Um das Ziel einer ruhigen Bremse zu verfolgen, welche frei von Vibrationen ist, werden die Anregemechanismen und Lösungsansätze dazu aufgezeigt. Dabei wird zwischen wissenschaftlichen Ansätzen zur Beschreibung und designorientierten Lösungen unterschieden, welche durch Simulationen und Experimente dargestellt werden. Es werden verschiedene Geräuscharten beschrieben und

die Übertragungsketten durch Körper- und Luftschall angegeben. Das Bremsenquietschen stellt ein tonales Geräusch dar und wird durch den Anregemechanismus der Modenkopplung hervorgerufen. Zur Charakterisierung werden die Komponenten einer frei-frei Schwingungsanalyse unterzogen, sodass diese möglichst exakt beschreibbar sind. Zusätzlich werden die Materialeigenschaften, die Reibung, der Verschleiß und die Bauteilbeschreibung in einem Simulationsmodell abgebildet. Das simulative Vorgehen wird mit dem experimentellen verglichen. Dazu werden Minimalmodelle, Finite Elemente Modelle und Mehrkörpersimulationen herangezogen. Diese werden im Rahmen der gegebenen Möglichkeiten validiert und die Grenzen der Modellierung werden angegeben. Zusammengefasst ist das Bremsenquietschen ein komplexes Phänomen mit Unsicherheiten, welches in Bezug auf die Robustheit untersucht wird.

In Buck [2008] wird eine Methode zur Simulation von Bremsenquietschen im nieder- und hochfrequenten Bereich vorgestellt. Dazu wird eine Stabilitätsanalyse eines Finiten Elemente Modells des Bremssystems durchgeführt und es werden die komplexen Eigenwerte berechnet, um die instabilen Moden zu identifizieren. Die Grundlage bildet ein mit Messwerten validiertes Simulationsmodell. Dies erfolgt über den Abgleich von experimentellen und simulativen Ergebnissen der Einzelbauteile und am Gesamtsystem. Es werden am verifizierten Simulationsmodell Maßnahmen zur Vermeidung der Geräuschentwicklung definiert.

Allert [2014] untersucht die Prognosegüte der Simulationsmodelle. Durch die Verwendung der komplexen Eigenwertanalyse zur Berechnung von Bremsenquietschen wird das vorliegende Modell linearisiert und die Fähigkeit der Abbildung physikalischer Effekte verringert. Es gehen Informationen über die Amplitude und die Intensität des Geräuschs verloren. Maßnahmen zur Verbesserung der Modellgüte werden durch Abgleich von experimentellen und simulativen Gegebenheiten vorgestellt. Durch ein Verständnis der Anregemechanismen des Bremsenquietschens werden effektiv Gegenmaßnahmen abgeleitet.

1.3.2 Ansätze zur Robustheitsbewertung

Vor einer Robustheitsbetrachtung des Bremssystems werden die Sensitivitäten der Parameter auf das Bremsenquietschen evaluiert. Möglichkeiten sind Perturbations Methodiken erster (Butlin und Woodhouse [2010]) und zweiter Ordnung (Nobari u. a. [2015a]). In der Literatur sind verschiedene Ansätze zur Robustheitsbewertung von Bremssystemen gegeben:

- Design of Experiments,
- Stochastische Finite Elemente,

- Polynomiale Chaos Theorie,
- Fuzzy Parameter.

Design of Experiments

Zur Analyse von Bremsengeräuschen gibt es in der Literatur Ansätze zur Kombination von Design of Experiments und komplexer Eigenwertanalyse (Nouby u. a. [2009]). Untersucht werden die Auswirkungen von beeinflussbaren und nicht beeinflussbaren Parametern eines Bremsbelags auf ein System und eine instabile Frequenz. Die negative Dämpfung stellt die Zielfunktion dar. Die Studie basiert auf einem vereinfachten Bremsenmodell, welches die Bremsscheibe und die Bremsbeläge beinhaltet. Die Methodik besteht darin, ein System aus möglichen schwankenden und modifizierbaren Parametern zu definieren, welches in drei Schritten analysiert wird. Im ersten Schritt erfolgt ein Screening mit einem teilfaktoriellen Versuchsplan, um die Parameteranzahl zu reduzieren. Danach wird mit einem Central Composite Design die Grundlage zur Berechnung eines quadratischen Regressionsmodells mit Wechselwirkungen geschaffen. Im letzten Schritt wird das Modell mit zufällig verteilten Werten validiert und die Übereinstimmung zwischen Regression und Simulation evaluiert. Es ergeben sich Abweichungen von $\pm 15\%$ zwischen dem Regressionsmodell und den Simulationsergebnissen.

In Lü und Yu [2014] wird eine Erweiterung des Vorgehens dargestellt und neben der Robustheitsuntersuchung eine Optimierung des Bremssystems durchgeführt. Für die Evaluation werden Intervalle des Reibkoeffizienten, von Materialparametern und der Dicke der Bremsbeläge herangezogen. Die Robustheitsbewertung erfolgt anhand der angenommenen Parameterschwankungen und wird mit der negativen Dämpfung einer Instabilität als Zielfunktion durchgeführt. Bei den Eingangsparametern wird auf Intervalle zurückgegriffen, in denen eine Gleichverteilung angenommen wird, da die Verteilungen und Schwankungen der Parameter nicht bestimmt werden. Nach Berechnung eines Latin Hypercube Versuchsplans wird ein Regressionsmodell zweiter Ordnung zur Bestimmung der Robustheit erstellt. An diesem Ersatzmodell wird im zweiten Schritt eine Reliability-basierte Optimierung zur Reduktion von Herstellungskosten und Gewicht des Bremssystems durchgeführt. Dazu wird ein zweidimensionales Optimierungsproblem gelöst. Zum einen wird eine Designvariable betrachtet, zum anderen werden die Schwankungen miteinbezogen und es ergibt sich ein Minimierungsproblem der Zielfunktion unter Nebenbedingungen. Für die Optimierung kommt ein genetischer Algorithmus (Gen und Cheng [2000]) zum Einsatz.

Zur Robustheitsbewertung von Bremssystemen wird in Nunes u. a. [2009] und Will [2013] eine stochastische Analyse verwendet. Für die Untersuchung werden reale Bauteilgeometrien und Materialien verwendet. Dazu werden statistische Verteilungen angegeben, welche aus Messungen, Erfahrungen und Erwartungswerten abgeleitet werden. Auf Basis derer werden die Parameterkombinationen generiert. Die Evaluation wird mit der negativen Dämpfung einer Instabilität durchgeführt. Damit werden die Parameter nach ihrem Einfluss geordnet und Korrelationen zwischen den Variablen bestimmt. Es wird ein Kompromiss zwischen Versuchsanzahl und Aussagequalität getroffen. Die Anzahl der nötigen Versuche ist abhängig von der Menge der Eingangsgrößen und deren linearen Abhängigkeiten untereinander. Die Versuchsplanung erfolgt durch ein Latin Hypercube Sampling. Nach Durchlauf der Simulationen wird das Postprocessing durchgeführt und ein generischer Ablauf definiert.

Nobari u. a. [2015b] stellen eine Untersuchung der Robustheit von Bremssystemen über Ersatzmodelle dar. Es erfolgt eine Materialanpassung des Finiten Elemente Modells an die experimentell bestimmten Eigenfrequenzen der Einzelbauteile. Um diese Materialwerte wird eine Normalverteilung für die Bestimmung der Parametervariationen angenommen. Zur Verringerung der zu betrachtenden Parameteranzahl wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt und die einflussreichsten Variablen identifiziert. Es folgt die Berechnung eines optimierten Latin Hypercube Versuchsplans zur Erstellung eines Ersatzmodells für die sensitiven Parameter. Über ein Monte Carlo Sampling wird die Wahrscheinlichkeit eines Geräuschauftritts bestimmt. Weitere Aussagen aus dem Ersatzmodell werden in Hinblick auf die Optimierung des Systems und möglichen Modifikationen der Komponenten zur Geräuschvermeidung abgeleitet.

In Snow und Bajaj [2015] wird ebenfalls der Ansatz der Berechnung eines Versuchsplans und anschließender Regressionsmodellierung durchgeführt. Dieser basiert auf einem Latin Hypercube Sampling, einer Regressionsberechnung über multivariante adaptive Regressionssplines und einer Monte Carlo Methode zur Bestimmung der Verteilungsdichtefunktionen. Das Feld der Anwendung ist die Unsicherheitsbetrachtung von elektrostatisch angeregten mikroelektromechanischen Modellen. Der Ansatz der Regressionsberechnung deckt neben der Analyse von Bremsenquietschen eine Vielzahl von Gebieten ab.

Stochastische Finite Elemente

Unsicherheiten von Parametern werden in der Literatur in vielen Gebieten betrachtet. In einer allgemeinen Art wird die Stochastische Finite Elemente Methode in Ghanem und Spanos [1991] eingeführt. Sepahvand und Marburg [2014] und Sarrouy u. a. [2013b] stellen diese

an vibroakustischen Problemen dar. Das Ziel ist die Abbildung der Materialschwankungen, wobei die Materialeigenschaften als stochastische Prozesse modelliert werden. Dies erfolgt durch eine Darstellung mit Zufallszahlen und bildet die Basis zur Berechnung durch polynomiales Chaos. Die klassische Berechnungsmethode ist um einen stochastischen Anteil zu erweitern. Dieser wird in die Berechnungsmatrizen übernommen, die mit der Karhunen-Loeve-Transformation umgeformt werden. Dasselbe Vorgehen wird bei Verschiebungsvektoren angewendet, welche mit der polynominalen Chaos-Expansion dargestellt werden. Dadurch wird eine allgemeine stochastische Finite Elemente Gleichung aufgestellt, die in die Berechnung integriert wird. Das vorhandene stochastische System wird auf eine Menge zufälliger algebraischer Gleichungen reduziert, aus denen eine Verteilungsdichtefunktion der Zielgröße bestimmt wird. Durch die Abbildung eines großen Bereichs von zufälligen Schwankungen erfolgt eine robuste und realistische Systemauslegung. Aufbauend auf der Verteilung der Zielgröße ist eine Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit möglich.

Polynomiale Chaos Theorie

Die Polynomiale Chaos Theorie ist bei den stochastischen Finiten Elementen in die Lösungsfindung integriert. Eine Beschreibung des Vorgehens erfolgt in Crestaux u. a. [2009]. In Nechak u. a. [2011] werden damit Untersuchungen zum dynamischen Verhalten nichtlinearer Reibungssysteme gezeigt. Eine Weiterentwicklung zur Verbesserung der Aussagequalität ist in Sarrouy u. a. [2013a] gegeben. Die Polynomiale Chaos Theorie dient zur Berechnung einer globalen Sensitivitätsanalyse und der Bestimmung der größten Einflussfaktoren. Die Stabilitätsberechnung und die Betrachtung der zugehörigen nichtlinearen Amplituden basiert auf einer kleinen Anzahl an Eingangsparametern. Ein Anwendungsfall ist die Berechnung von Stabilitätsintervallen auf Basis schwankender Reibkoeffizienten. Die Herangehensweise des Polynominalen Chaos ist effizienter als die Durchführung von Parameterstudien basierend auf Monte Carlo Versuchsplänen. Die Idee der Methodik ist die Modellierung eines stochastischen Prozesses durch gaußverteilte Zufallszahlen, welcher aufgelöst wird, um die Moden mit stochastischem Anteil auf Basis deterministisch gekoppelter Gleichungen zu berechnen. Ein Hilfsmittel stellen die Wiener-Legendre Expansionen dar. Die zugehörige Stabilitätsberechnung erfolgt mit der direkten Lyapunov-Analyse und unter Verwendung der Lyapunov-Funktion. Aufbauend auf den Ergebnissen werden Metamodelle zweiter Ordnung erstellt. Gezeigt wird das Vorgehen am Beispiel einer Trommelbremse, welche als Zweifreiheitsgradsystem mit schwankendem Reibwert modelliert wird.

Fuzzy Parameter

Die Modellierung der Unsicherheiten durch Fuzzy Parameter wird in Do u. a. [2014] aufgezeigt. Die Ergebnisse werden als Fuzzy Frequenzen und Abhängigkeitsgraphen dargestellt. Die Fuzzy Theorie, in allgemeiner Form beschrieben in Hanss [2005], ist eine Erweiterung der klassischen Mengenlehre, wobei die Parameterdarstellung durch Gewichtungsfunktionen mit Werten zwischen 0 und 1 erfolgt. Um die Fuzzy Parameter und die Gewichtungsfunktionen korrekt darzustellen, wird vor der Berechnung die Funktion mit einem Versuchsplan angepasst. Es sind Parameterkombinationen von Interesse, die minimale oder maximale Zielfunktionswerte hervorrufen. Nach Bestimmung der Gewichtungsfunktionen werden über eine Simulation mit den nominalen Werten und Berechnungen mit den Fuzzy Parametern die Fuzzy Frequenzen für den vorliegenden Fall bestimmt. Diese können in einem Abhängigkeitsgraphen dargestellt und daraus die Ergebnisschwankung abgelesen werden.

1.3.3 Vergleich der Ansätze

Die Stochastischen Finiten Elemente, die Polynomiale Chaos Theorie und die Fuzzy Parameter stellen Grundlagen für weitere Untersuchungen dar. Es gilt abzuwägen, inwieweit diese für die Analyse von Bremssystemen in der Serienentwicklung geeignet sind.

Die Fuzzy Parameter erzeugen einen hohen Aufwand durch die Berechnung eines Versuchsplans zur Funktionsbestimmung, welcher abhängig von der Anzahl der Eingangsvariablen ist. Die Komplexität der Gewichtungsfunktionserstellung steigt für große Parameterumfänge an. Zur Bestimmung der Robustheit entsteht ein Berechnungsaufwand aus der Variationsrechnung.

Der Aufwand der Polynominalen Chaos Theorie wird in Crestaux u. a. [2009] und Nechak u. a. [2011] mit einer Monte Carlo Methode verglichen. Das Ziel der Theorie ist, über eine zu bestimmende Verteilung eine Aussage zur Stabilität zu treffen. Am Beispiel einer Trommelbremse ist die Analyse effizienter als Monte Carlo und vergleichbar zu den anderen Vorgehensweisen der Robustheitsbewertung. Die Stabilitätsstudie erfolgt durch die Berechnung eines Versuchsplans. Der Aufwand der Auswertung mit Wiener-Legendre Polynomen ist vergleichbar zu einer Monte Carlo Simulation mit äquivalenter Versuchsanzahl.

Bei den Stochastischen Finiten Elementen wird ein System von algebraischen Gleichungen aufgestellt, welche durch die Einführung eines stochastischen Anteils erweitert werden. Zur

Demonstration der Technik ist in Sepahvand und Marburg [2014] ein allgemeines vibroakustisches Problem gegeben. Dabei werden die unbekannt Parameter durch Versuchspläne berechnet, wobei Non-Sampling Methoden effizienter als Sampling Methoden sind, zum Beispiel Monte Carlo. Der Berechnungsaufwand verringert sich gegenüber Monte Carlo.

Die Anwendungen der Methodiken in den aufgeführten Arbeiten beschränken sich auf akademische Beispiele und bilden keine komplexen Systeme ab. Die Umsetzung der Vorgehensweisen für reale Bremssysteme mit detailgetreuer Modellierung und einer großen Anzahl an Eingangsparametern ist nicht dargestellt. Zur Versuchsplanung mit Berechnung eines Regressionsmodells ist ein vergleichbarer Berechnungsaufwand gegeben.

Beim Design of Experiments gibt es an realen Systemen Anwendungen und Praxisbeispiele zur Robustheitsuntersuchung von Bremsenquietschen. Es werden verschiedene Eingangsgrößen analysiert und die Umsetzung von Schwankungsbetrachtungen mit den gegebenen Grundlagen hergeleitet. Das Ergebnis ist aufgrund der Darstellung der negativen Dämpfung der Eigenwerte gut zu interpretieren. Es ist eine Aufwandsabschätzung möglich und die benötigte Berechnungszeit und -ressourcen sind gering. Aus diesen Gründen erfolgt die Robustheitsbewertung anhand der Erstellung von Ersatzsystemen auf Basis der Versuchsplanung.

Aufbauend auf den gegebenen Untersuchungen wird das Vorgehen weiterentwickelt, um einen effizienten Algorithmus zu implementieren. Folgendes wird zu den in der Literatur gegebenen Punkten erweitert:

- Betrachtung aller Bauteile mit Einfluss auf die Geräuscentwicklung des Bremssystems,
- Herleitung einer Zielfunktion zur gesamthaften Bewertung des Bremssystems, insbesondere Abdeckung von mehr als einer instabilen Frequenz,
- Erarbeitung einer allgemeingültigen Theorie für unterschiedliche Bremssysteme,
- Auswahl einer Versuchsplanart mit minimaler Versuchsanzahl,
- Berechnung von Ersatzmodellen zur Auswertung der Ergebnisse,
- Bestimmung von Eingangsverteilungen der Parameter,
- Auswahl von Parametern mit hoher Sensitivität auf die Geräuscentwicklung,
- Erstellung eines Versuchsplans zur Robustheitsuntersuchung.

Diese Punkte werden in der vorliegenden Arbeit behandelt.

1.4 Inhalt der Arbeit

In der Arbeit wird ein Algorithmus zur Robustheitsuntersuchung von Bremssystemen hergeleitet und verschiedene Methoden für die Bewertung des Systems aufgezeigt. Dazu sind einige Vorüberlegungen notwendig.

Der Ansatz der Bremsengeräuschberechnung wird in Kapitel 2 vorgestellt. Es erfolgt die Beschreibung des Bremsenquietschens über einen Modellansatz, der in eine Differentialgleichung mündet. Diese wird gelöst.

In Kapitel 3 werden die theoretischen Grundlagen für die statistischen Untersuchungen aufgezeigt. Dazu zählen Monte Carlo, Design of Experiments, Korrelationsberechnungen, die Betrachtung von Regressionsmodellen und die Berechnung von Instabilitätswahrscheinlichkeiten. Es werden die Grundlagen weiterentwickelt und an die gegebene Situation angepasst, zum Beispiel die Versuchsplanerstellung in Abhängigkeit der Eingangsparameter und die Auswertung von Regressionsmodellen.

Zur Bewertung der Simulationen durch einen skalaren Wert werden Zielfunktionen entwickelt, vergleiche Kapitel 4. Es werden verschiedene Ansätze betrachtet, basierend auf Normen und Modenvergleichen, welche für einzelne Instabilitäten oder das gesamte Frequenzspektrum berechnet werden.

Die Zielfunktionen werden in Kapitel 5 an einem Bremsenmodell verglichen. Nach Auswahl der Funktion, welche am besten zur Bewertung der Simulationen geeignet ist, erfolgt ein Vergleich mit dem in der Literatur beschriebenen Bewertungsindex und darauf basierenden Sensitivitätsanalysen.

In Kapitel 6 werden die Parameter des Bremssystems identifiziert und die Auswirkungen von Parametervariationen auf das Schwingungsverhalten eines Zweimassenschwingers als Minimalbeispiel berechnet. Bei der Identifikation erfolgt eine Beschränkung auf die Hauptkomponenten der Bremsengeräuschentwicklung.

Die Bestimmung der Schwankungsbreiten der Parameter und die Reduktion der Parameteranzahl erfolgt ebenfalls in Kapitel 6. Es werden die Parameter mit der größten Sensitivität auf die Zielfunktion bestimmt und deren Eigenschaften untersucht. Die Basis dazu bilden physikalische Messungen und statistische Untersuchungen. Zur Erstellung eines Versuchsplans, welcher die wichtigsten Einflussgrößen auf das Bremsenquietschen enthält, wird die Anzahl der Parameter anhand verschiedener Kriterien reduziert.

In Kapitel 7 wird der Algorithmus zur Robustheitsbewertung vorgestellt. Als Beispiel werden ein Ersatzsystem aus Euler-Bernoulli Balken und ein reales Bremssystem betrachtet. Ebenso werden verschiedene Möglichkeiten zur Auswertung der analytischen Regressionsmodelle aufgezeigt, der Robustheitsbegriff definiert und eine Bewertung für die Robustheit eingeführt.

2 Bremsenquietschen

2.1 Ansatz der Berechnung

Der Ansatz zur Betrachtung von Bremsenquietschen wird am Einmassenschwinger (Frey-
mann [2011, Kapitel 3.1, Seite 17ff] und Magnus u. a. [2013, Kapitel 2.1.2, Seite 27ff]) auf-
gezeigt, vergleiche Abbildung 2.1 und Anhang B.1. Das System für eine freie und gedämpfte
Schwingung ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x(t), m, c, k \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Deren komplexe Lösung \bar{x} lautet

$$\bar{x}(t) = Y_1 e^{(-\delta + i\omega_D)t} + Y_2 e^{(-\delta - i\omega_D)t}, \quad (2.2)$$

mit δ Abklingkonstante, ω_D Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers und Y_1, Y_2 Konstanten
abhängig von den Anfangsbedingungen. Es gilt für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ des Einmassenschwin-
gers,

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_D. \quad (2.3)$$

Die Schwingungsdauer T_D des Systems ist gegeben durch

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}.^1 \quad (2.4)$$

Die zugehörige Frequenz berechnet sich durch

$$f = \frac{1}{T_D} = \frac{\omega_D}{2\pi}.^2 \quad (2.5)$$

¹Vergleiche Freymann [2011, Kapitel 2, Seite 3, Formel 2.2].

²Vergleiche Freymann [2011, Kapitel 2, Seite 3, Formel 2.3].

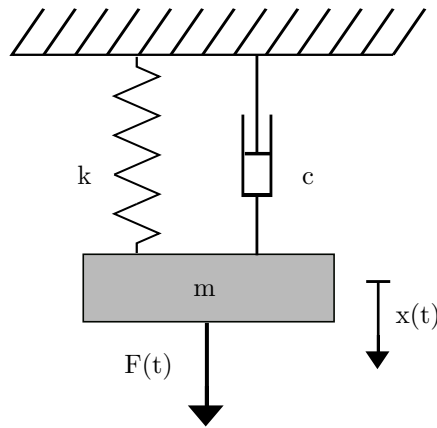


Abbildung 2.1: Darstellung des Einmassenschwingers.

Werden die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte des Einmassenschwingers aus Gleichung (2.3) identifiziert, gilt

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \operatorname{Re}(-\delta \pm i\omega_D) = -\delta, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_{1,2}) = \operatorname{Im}(-\delta \pm i\omega_D) = \pm\omega_D. \quad (2.7)$$

Die Frequenz f der Moden wird durch den Imaginärteil Im der Eigenwerte, ω_D , dargestellt. Zur Berechnung wird der Imaginärteil mit positivem Vorzeichen herangezogen.

$$f = \frac{\omega_D}{2\pi} = \frac{\operatorname{Im}}{2\pi}. \quad (2.8)$$

Die modale Dämpfung d (Magnus u. a. [2013, Kapitel 6.2.4, Seite 201] und Müller und Schiehlen [1976, Kapitel 6.1.2, Seite 161]) hängt vom Real- und Imaginärteil der Eigenwerte ab,

$$d = -2 \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}}. \quad (2.9)$$

Auf Basis der Dämpfung d erfolgt die Vorhersage des Stabilitätsverhaltens. Eine positive Dämpfung liegt vor, falls der Realteil negativ ist. Die Schwingung ist abklingend und die Mode stabil. Ist der Realteil positiv, ergibt sich eine Dämpfung $d < 0$ und es bildet sich eine selbsterregte aufklingende Schwingung aus. Dadurch ist eine instabile Mode charakterisiert. Die Beurteilung der Stabilität eines Bremssystems erfolgt an den auftretenden negativen Dämpfungswerten (Allert [2014, Kapitel 2, Seite 11ff], Buck [2008, Kapitel 3, Seite 23ff], Chen u. a. [2006, Kapitel 4, Seite 79ff] und Hoffmann u. a. [2002]). Ein System ohne Stabilitätsverlust ist gegeben, falls in der Simulation keine Moden mit negativen Dämpfungen vorhanden sind.

³Vergleiche Bajer u. a. [2003].

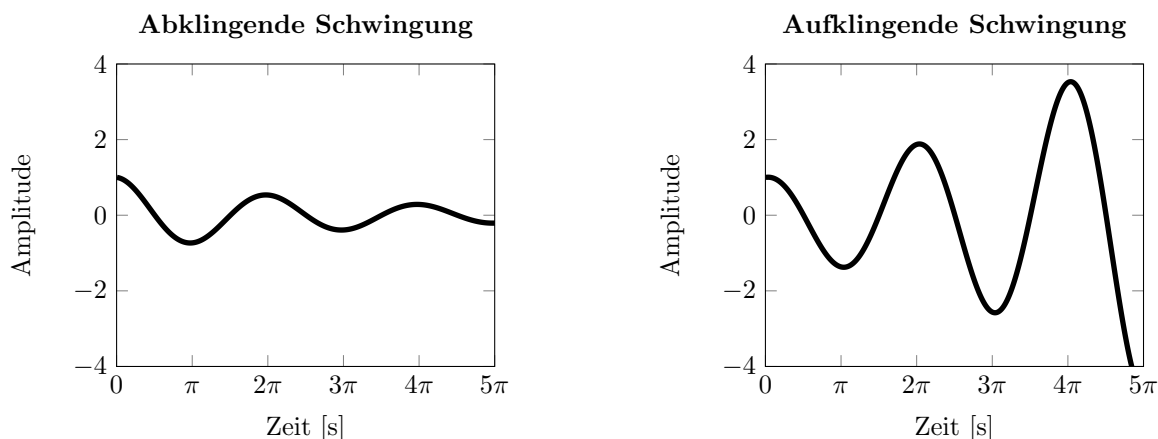


Abbildung 2.2: Darstellung einer abklingenden Schwingung, links, und einer aufklingenden Schwingung, rechts, auf Basis von Gleichung (2.10) mit den Parametern $x_0 = 1$, $\omega_D = 1$ und $\varphi_0 = 0$. Im abklingenden Fall gilt $\delta = 0.1$, im aufklingenden Fall $\delta = -0.1$.

Zur Visualisierung der auf- und abklingenden Schwingungen, welche die Stabilität des Systems charakterisieren, wird die reelle Lösung des Einmassenschwingers betrachtet, vergleiche Gleichung (B.13).

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi_0). \quad (2.10)$$

Für $\delta > 0$ ist die Schwingung abklingend. Gilt $\delta < 0$, ist die Schwingung aufklingend und die Amplitude wird mit fortschreitender Zeit größer, vergleiche Abbildung 2.2. Im Bremssystem entsprechen instabile Moden einer aufklingenden Konfiguration. Deren Schwingung ist die Ursache der Geräusentwicklung und das Ziel des Bremsenentwicklungsprozesses ist die Vermeidung derer. Eine stabile Bremse ist frei von aufklingenden Vibrationen (Hoffmann und Gaul [2008]).

2.2 Analyse von Bremsenquietschen

Das theoretische Vorgehen zur Berechnung von Bremsenquietschen wird in der Literatur beschrieben. Der folgende Abschnitt basiert auf Allert [2014, Kapitel 2.1, Seite 11ff] und Tison u. a. [2014]. Die Herangehensweise ist äquivalent in Buck [2008, Kapitel 3.2.2, Seite 29], Chen u. a. [2006, Kapitel 6.2, Seite 132ff], Do u. a. [2014], Kinkaid u. a. [2003], Nouby u. a. [2009] und Nunes u. a. [2009] gegeben.

Zur Berechnung der Bremsengeräusche erfolgt eine nichtlineare, quasi-statische Analyse des über die Finite Elemente Methode diskretisierten Systems. Es wird ein Stabilitätsproblem

M	Massenmatrix zur Beschreibung beschleunigungsproportionaler Kräfte; reellwertig, symmetrisch und positiv definit,
C	$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$, Dämpfungsmatrix, D : Dämpfungsmatrix zur Beschreibung geschwindigkeitsproportionaler Kräfte; reellwertig, symmetrisch und positiv definit, G : gyroskopische Matrix zur Beschreibung geschwindigkeitsproportionaler Kräfte; reellwertig und schiefsymmetrisch,
K	Steifigkeitsmatrix zur Beschreibung auslenkungsproportionaler Kräfte; reellwertig und symmetrisch,
$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u})$	Nichtlinearer Kontakt hinsichtlich der Verschiebung an der Kontaktfläche,
F	Nichtlinearer Kontakt hinsichtlich der Verschiebung durch äußere Kräfte,
$\ddot{\mathbf{u}}$	Beschleunigungsvektor,
$\dot{\mathbf{u}}$	Geschwindigkeitsvektor,
u	Verschiebungsvektor.

Tabelle 2.1: Die beschreibenden Größen zur Berechnung von Bremsenquietschen.

(Müller und Schiehlen [1976, Kapitel 5, Seite 108ff]) gelöst, welches durch die Modellierung eines Reibkontakts zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe in vertikaler und tangentialer Richtung entsteht. Die Analyse wird im Frequenzbereich durchgeführt. Eine transiente Berechnung des Systems im Zeitbereich wird aufgrund der hohen Rechenzeit nicht angewendet. Die Bestimmung der Stabilität des Systems erfolgt durch Extraktion der Eigenwerte der Matrizen.

Die zugrundeliegenden Gleichungen des Systems zur Beschreibung in der Finiten Elemente Methode sind wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{F}_{NL} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.11)$$

mit n Anzahl der Freiheitsgrade des Finiten Elemente Systems. Die Matrizen und Vektoren sind in Tabelle 2.1 gegeben.

Der nichtlineare Kontakt bezüglich der Verschiebung an der Kontaktfläche, $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u})$, ist wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{NL}^{normal}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}_{NL}^{friction}(\mathbf{u}), \quad (2.12)$$

mit $\mathbf{F}_{NL}^{normal}(\mathbf{u})$ Kontakteffekte in Normalenrichtung und $\mathbf{F}_{NL}^{friction}(\mathbf{u})$ Kontakteffekte in Tangentialrichtung, bedingt durch Reibung.

Die Terme \mathbf{F} und $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u})$ aus Gleichung (2.11) stellen Reibungskräfte dar, der Index NL kennzeichnet die Nichtlinearität.

Für die Stabilitätsanalyse des Systems wird eine nichtlineare, statische Analyse um einen Gleichgewichtspunkt \mathbf{u}_0 durchgeführt. Es gilt nach Einsetzen von \mathbf{u}_0 in Gleichung (2.11),

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

mit \mathbf{u}_0 der Verschiebung im statischen Gleichgewicht und $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0)$ der Kontaktkraft hinsichtlich der Verschiebung im statischen Gleichgewicht.

Es wird das statische Gleichgewicht unter äußeren Kräften bestimmt, dies entspricht im Bremssystem dem Aufbringen des Bremsdrucks und dem Anlegen der Beläge an die Scheibe. Anschließend erfolgt die Berechnung der Kontaktkräfte in Normalenrichtung $\mathbf{F}_{NL}^{normal}(\mathbf{u})$ und die Berechnung der tangentialen Kontaktkräfte $\mathbf{F}_{NL}^{friction}(\mathbf{u})$ durch Aufbringen eines permanenten Gleitzustandes unter Zuhilfenahme von $\mathbf{F}_{NL}^{normal}(\mathbf{u})$. Damit wird bei der Modellierung die Rotation der Bremscheibe abgebildet und es gilt,

$$\mathbf{F}_{NL}^{friction}(\mathbf{u}) = \mu \mathbf{F}_{NL}^{normal}(\mathbf{u}) \operatorname{sgn}(\mathbf{v}_r), \quad (2.14)$$

mit μ konstanter Reibkoeffizient und \mathbf{v}_r relativer Gleitvektor zwischen den Bauteilen im Kontakt, der gegeben ist durch die Rotationsgeschwindigkeit der Bremscheibe. $\mathbf{F}_{NL}^{friction}(\mathbf{u})$ ist die Steifigkeitsmatrix der Reibung, welche für die Anregung des Systems verantwortlich ist.

Es erfolgt eine Linearisierung von Gleichung (2.11) um das statische Gleichgewicht $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{u}}$ im Gleitzustand \mathbf{u}_0 mit einer kleiner Variation des statischen Verschiebungsvektors \mathbf{u}_0 , $\bar{\mathbf{u}}$. \mathbf{u} stellt die nodale Verschiebung dar. Nach der Linearisierung ergibt sich,

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}. \quad (2.15)$$

Der nichtlineare Kontakt $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{u}})$ wird als Taylorreihe erster Ordnung⁴ entwickelt.

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{u}}) \approx \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}_0)\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.16)$$

mit $\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}_0)$ der linearisierten und zuvor nichtlinearen Jakobimatrix⁵, welche den reibungsinduzierten, asymmetrischen Teil der Steifigkeitsmatrix darstellt.

⁴Vergleiche Forster [2013a, § 22, Seite 282].

⁵Vergleiche Forster [2013b, Kapitel I, § 6, Seite 68].

Es ergibt sich mit Gleichung (2.13) eine Vereinfachung von Gleichung (2.15).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}_0)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

mit $\mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}_0)$ asymmetrische Steifigkeitsmatrix. Gleichung (2.17) stellte eine Approximation von Gleichung (2.11) dar, deren Lösung vom statischen Gleichgewichtspunkt \mathbf{u}_0 und den Kontaktbedingungen abhängig ist.

Unter Nutzung der Identität $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}$ wird der Zustandsraum⁶ zur komplexen Eigenwertanalyse definiert.

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

$$\text{mit } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{K} - \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Nach der nichtlinearen, quasi-statischen Analyse folgt die komplexe Eigenwertanalyse. Es wird folgender Lösungsansatz für die Differentialgleichung zweiter Ordnung⁷ (2.17) verwendet,

$$\mathbf{x} = \Psi e^{st}, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{2n}.^8 \quad (2.19)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes in Gleichung (2.18) ergibt sich ein komplexes Eigenwertproblem.

$$(\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{A})\Psi_k = \mathbf{0} \quad \text{mit } 1 \leq k \leq 2n. \quad (2.20)$$

Dabei ist λ_k der k -te komplexe Eigenwert und Ψ_k der k -te komplexe Eigenvektor. Da die Eigenwerte komplexwertig sind, werden diese aufgeteilt in $\delta = -\text{Re}(\lambda_k)$, verantwortlich für die Abklingkonstante δ , und $\omega = \text{Im}(\lambda_k)$ zur Berechnung der Eigenfrequenz f . Nach der Berechnung werden die Eigenvektoren über folgende Bedingung normiert:

$$\Psi_k^\top \mathbf{A} \Psi_k = \mathbf{1}. \quad (2.21)$$

Zur Analyse der komplexen Eigenwerte wird ein Unterraum erzeugt, in den das System projiziert wird. Dies geschieht durch die Extraktion der Eigenvektoren eines symmetrischen und ungedämpften Systems, welches sich durch die Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix \mathbf{C}

⁶Vergleiche Laubenbacher und Pareigis [2001, Kapitel 1, Seite 240f].

⁷Vergleiche Forster [2013b, Kapitel II, § 14, Seite 185ff].

⁸Vergleiche Forster [2013b, Kapitel II, § 16, Seite 213].

und den unsymmetrischen Anteilen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL}$ ergibt. Es werden die reellen Frequenzen berechnet. Die Lösung des reduzierten Problems erfolgt durch eine QZ-Zerlegung⁹ oder Anwendung einer Residuenmethode, zum Beispiel GMRES¹⁰. Bei der Implementierung in Softwarepaketen kommt der Lanczos-Algorithmus¹¹ und der AMS-Solver¹² zum Einsatz.

Zur Bestimmung der komplexen Eigenwerte werden die Matrizen in den Unterraum projiziert,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^* &= \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{M} \mathbf{\Psi}, \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{C} \mathbf{\Psi}, \\ \mathbf{K}^* &= \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{K} \mathbf{\Psi}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Die Bestimmung der Stabilität erfolgt anhand der Eigenwerte des Systems. Nach Lyapunov¹³ und Allert [2014, Kapitel 2, Seite 11ff] besitzen instabile Moden einen positiven und stabile Moden einen negativen Realteil. Die zugehörige negative Dämpfung wird berechnet durch

$$d = -2 \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\operatorname{Im}(\lambda)}.\tag{2.23}$$

Es werden positive Frequenzen betrachtet. Negative Dämpfungswerte zeigen Instabilitäten auf (Hoffmann u. a. [2002]). Ein negativer Dämpfungswert verursacht eine Erhöhung der Amplitude der Oszillation, die Schwingung klingt auf, vergleiche Abschnitt 2.1.

⁹Vergleiche Stewart [2001, Kapitel 4, Seite 148ff].

¹⁰Vergleiche Saad [2003, Kapitel 6.5, Seite 164ff] und Meister [2011, Kapitel 4.3.2.4, Seite 156ff].

¹¹Vergleiche Lanczos [1950] und Stewart [2001, Kapitel 5.3, Seite 352ff].

¹²Vergleiche Bennighof und Lehoucq [2004].

¹³Vergleiche Sideris [2013, Kapitel 3.10, Seite 44ff] und Müller [1977].

¹⁴Vergleiche Nouby u. a. [2009, Kapitel 3, Seite 259].

3 Statistische Grundlagen

3.1 Monte Carlo Simulationen

„Monte Carlo Methoden sind Algorithmen, die Zufallszahlen benutzen.“¹⁵ Mit diesem Vorgehen werden die Verteilungsdichtefunktionen der Zielgröße bestimmt und die Instabilitätswahrscheinlichkeiten berechnet, vergleiche die später folgenden Abschnitte 3.9 und 7.2. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Monte Carlo Simulationen gegeben. Basierend auf Binder und Heermann [2010], Landau und Binder [2009], Müller-Gronbach u. a. [2012], Robert und Casella [2004] und Rubinstein und Kröse [2008] werden die Grundzüge der Methode dargestellt.

Das Vorgehen von Monte Carlo basiert auf dem Gesetz der großen Zahlen.

Theorem 3.1 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Es seien X_1, X_2, \dots, X_n stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit gleichem Erwartungswert $\mu (= EX_1)$ und gleicher Varianz $\sigma^2 (= V(X_1))$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_j - \mu\right| \leq \varepsilon\right) = 0.^{16}$$

Das heißt, die Folge D_n basierend auf Zufallsvariablen X_i , $i = 1, \dots, n$, konvergiert fast sicher gegen a . Die Wahrscheinlichkeit ist gleich 0, dass die Folge $(D_n(X_i))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Gute Zufallszahlen sind eine Voraussetzung für Monte Carlo, da mit diesen eine stochastische Simulation durchgeführt wird. In der genannten Literatur, insbesondere in Kröse u. a. [2011, Kapitel 1, 2 und 3, Seite 1ff], wird ein Überblick über die Zufallszahlgenerierung gegeben. Ein Beispiel ist der Algorithmus Mersenne Twister (Matsumoto und Nishimura [1998]).

¹⁵Vergleiche Müller-Gronbach u. a. [2012, Vorwort, Seite v].

¹⁶Vergleiche Henze [2013, Definition 26.1, Kapitel 26, Seite 217].

Eine klassische Anwendung von Monte Carlo ist die Approximation von Integralen. Das Integral wird durch das arithmetische Mittel einer unabhängigen Folge von identisch verteilten Zufallswerten mit Erwartungswert a angenähert.

$$S(f) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx \xrightarrow{\text{approx.}} M(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i). \quad (3.1)$$

Das Vorgehen bei der Simulation wird wie folgt dargestellt. Es wird eine reellwertige Zufallsvariable Y mit der Eigenschaft $E(Y) = a$ konstruiert. Dann wird eine unabhängige Folge $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von reellwertigen Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie Y generiert. Der Erwartungswert a wird approximiert durch eine Folge D_n ,

$$a = D_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (3.2)$$

Neben einer Gleichverteilung können die Zufallsvariablen durch andere Verteilungen gegeben sein, zum Beispiel einer Normalverteilung. Einen Überblick liefert Kröse u. a. [2011, Kapitel 4, Seite 85ff].

Für Monte Carlo wird neben dem vorgestellten „Simple Sampling“ das Verfahren „Random Walks“ angewendet, um eine Abdeckung der minimalen und maximalen Werte des Definitionsbereichs zu gewährleisten. Weiterführende Approximationen werden durch Markov-Ketten und darauf aufbauenden Algorithmen wie Metropolis-Hastings (Hastings [1970]), Slice-Sampler (Neal [2003]) und Gibbs-Sampler (Casella und George [1992]) durchgeführt.

3.2 Design of Experiments

Die Entwicklung eines Vorgehens zur Durchführung von Experimenten mit vielen Einflussparametern wird seit vielen Jahrzehnten untersucht.¹⁷ Das Ziel ist, mit einer geringen Anzahl an Versuchen viele Informationen über die Auswirkungen der Parametervariationen und deren Wechselwirkungen auf eine Zielgröße zu erhalten. Dabei wird zwischen der Aussagegenauigkeit und dem zu erbringenden Aufwand abgewogen.

Es gibt viele Theorien zu Versuchsplänen, welche in der Literatur behandelt werden. Beschreibungen zu den Vorgehensweisen für Design of Experiments werden aus Box u. a. [2005],

¹⁷Vergleiche Siebertz u. a. [2010, Kapitel 1.1, Seite 1].

Kleppmann [2011], Mitterer [2000], Montgomery [2012], Morris [2011], Ronniger [2012], Ronniger [2014] und Siebertz u. a. [2010] entnommen. Im Folgenden werden die Pläne One Factor at One Time, Vollfaktoriell, Fraktional Faktoriell, d-optimal und Latin Hypercube betrachtet. Es sei zur Vollständigkeit erwähnt, dass weitere Arten von Versuchsplänen existieren. Beispiele sind Box-Behnken-Pläne¹⁸, Central Composite Designs¹⁹ und Mischungspläne.

3.2.1 One Factor at One Time

Die Grundüberlegung des Versuchsplans ist die Variation eines Parameters während alle weiteren im Modell enthaltenen Variablen am Nominalwert fixiert sind. Das Ziel ist die Berechnung der Sensitivitäten der Zielfunktion gegenüber den Parametern ohne Einfluss von Wechselwirkungen. Die Anzahl der benötigten Versuche n lässt sich durch

$$n = ks,^{20} \tag{3.3}$$

mit k Parameteranzahl und s Anzahl der Stützstellen pro Parameter, angeben.

Die Art von Versuchsplan ist dazu geeignet eine Abschätzung über die Einflüsse der Parameter zu treffen. Dies entspricht einer Sensitivitätenberechnung. Für eine gesamthafte Bewertung müssen die Wechselwirkungen der Variablen in Betracht gezogen werden.

3.2.2 Faktorielle Pläne

Die vollfaktoriellen Versuchspläne werden an einem Beispiel dargestellt. Die Herleitung folgt Kleppmann [2011, Kapitel 7, Seite 95ff] und Ronniger [2012, Kapitel 4, Seite 51ff].

Die Basis der vollfaktoriellen Versuchspläne stellt die Kombination aller Faktoren und deren Stützstellen dar. Zur Visualisierung seien zwei Faktoren A und B mit den Stufen 0 und 1 gegeben. Der Versuchsplan ist wie in Tabelle 3.1 dargestellt aufgebaut.

Insgesamt ergeben sich vier Versuche für eine Kombination von zwei Parametern mit zwei Stufen. Der Versuchsplan ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Versuche. Durch die Betrachtung von allen Kombinationen, die zwischen den Stützstellen möglich sind, ist eine gesamthafte Auswertung möglich. Bei der Evaluation des Versuchsplans werden alle auftretenden Wechselwirkungen betrachtet.

¹⁸Vergleiche Ferreira u. a. [2007].

¹⁹Vergleiche Siebertz u. a. [2010, Kapitel 2.3.1, Seite 38ff].

²⁰Vergleiche Montgomery [2012, Kapitel 6.4, Seite 253ff und Kapitel 9, Seite 394ff].

	A	B
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Tabelle 3.1: Vollfaktorieller Versuchsplan für zwei Parameter mit zwei Stufen.

Der vorgestellte Plan für zwei Parameter kann auf beliebig viele Faktoren der Anzahl k mit jeweils zwei Parameterstufen erweitert werden. Die Anzahl der benötigten Versuche n ist gegeben durch

$$n = 2^k. \quad (3.4)$$

Im nächsten Schritt werden n Faktoren mit beliebig vielen Parameterstufen s betrachtet. Die Anzahl an Simulationen wird unter der Annahme einer gleichen Stützstellenanzahl für alle Parameter wie folgt angegeben,

$$n = s^k. \quad (3.5)$$

Bei unterschiedlicher Stützstellenanzahl erfolgt eine Multiplikation derer zur Bestimmung der Versuchsanzahl.

$$n = s_1 s_2 \dots s_k, \quad (3.6)$$

mit s_i , $i = 1, \dots, k$, Stufen der Parameter. Durch die Betrachtung aller Kombinationen von Stützstellen werden alle Wechselwirkungen analysiert. Aufgrund der schnell ansteigenden Versuchsanzahl ist der Plan nur bei einer kleinen Parameteranzahl mit wenigen Stützstellen umsetzbar. Zur Reduktion der durchzuführenden Versuchsanzahl gibt es die Möglichkeit auf fraktionelle faktorielle Pläne zurückzugreifen. Dabei werden einige Wechselwirkungen von Parametern untereinander vernachlässigt.

Fraktionell faktorielle Pläne (Box u. a. [2005, Kapitel 6, Seite 235ff], Gunst und Mason [2009] und Kleppmann [2011, Kapitel 8.2, Seite 123ff]) werden als Screening Pläne verwendet um die einflussreichsten Faktoren im System zu bestimmen. Ein Beispiel sind 2^{k-p} Pläne für k Faktoren mit jeweils zwei Stützstellen. Die Designs werden ausgehend vom vollfaktoriellen Versuchsplan für k Faktoren bestimmt und insgesamt werden 2^{k-p} Versuche durchgeführt. Dies ergibt sich durch den durchgeführten Anteil $\frac{1}{2^p}$ der insgesamt 2^k Faktorstufenkom-

²¹Vergleiche Kleppmann [2011, Kapitel 7.2.1, Seite 107].

binationen des vollfaktoriellen Versuchsplans, $\frac{1}{2^p}2^k = 2^{k-p}$. Es wird der Versuchsaufwand verringert, was einer Reduktion der Effekte entspricht. Abgebildet werden anteilmäßig $\frac{1}{2^p}$ der insgesamt $2^k - 1$ Effekte des vollständigen Plans. Um die Versuchszahl zu erreichen, werden 2^p Effekte vermengt und damit die Aussagequalität verringert.

3.2.3 D-optimale Pläne

D-optimale Versuchspläne sind Reduktionen von vollfaktoriellen Versuchsplänen. Sie werden optimal genannt, da die Pläne auf Basis einer minimalen Versuchsanzahl die dafür bestmögliche Aussagequalität generieren. Beschrieben wird die Theorie der Herleitung in Mitterer [2000], Morris [2011], Ronniger [2012] und Ronniger [2014].

Im Folgenden gilt die Annahme, dass die Effekte der Parameter in einem Ersatzmodell mit linearen und quadratischen Termen beschrieben werden. D-optimale Versuchspläne bilden bei gegebener Versuchsanzahl die Effekte und Wechselwirkungen optimal ab. Die Wechselwirkungen werden nach ihrem Grad eingeteilt. Einfache Wechselwirkungen vom Grad eins bilden eine Abhängigkeit zwischen zwei Faktoren ab. Bei einem Zusammenhang von drei Parametern sind Wechselwirkungen von Grad zwei gegeben. Für höhere Wechselwirkungen wird die Definition iterativ fortgeführt.

Bei p Faktoren im Versuchsplan ist die Anzahl der Wechselwirkungen vom Grad eins q gegeben durch:

$$q = \frac{p(p-1)}{2}.^{22} \quad (3.7)$$

Dies entspricht einer Kombination aller Faktoren untereinander. Höhere Wechselwirkungen werden vernachlässigt, da diese in linearen und quadratischen Modellen nicht enthalten sind.

Nach der Herleitung der im Modell enthaltenen Wechselwirkungen wird die minimale Versuchsanzahl eines d-optimalen Plans abgeleitet. Dieser wird durch ein Regressionsmodell ausgewertet, vergleiche Abschnitt 3.4. Es wird dazu ein lineares Modell angenommen. Zur Berechnung sind die Haupteffekte, welche die einzelnen Faktoren abbilden, die Wechselwirkungen, welche die Interaktionen der Faktoren untereinander darstellen, und eine Konstante nötig, vergleiche Tabelle 3.2. Insgesamt werden minimal $p + \frac{p(p-1)}{2} + 1$ Versuche bei p Faktoren durchgeführt. Bei der Betrachtung von quadratischen Modellen werden p zusätzliche

²²Vergleiche Ronniger [2014, Seite 48].

Experimente simuliert. Um die Signifikanz der Faktoren zu berechnen und Informationen über deren Streuung zu erhalten sind Zusatzversuche notwendig.

Konstante	1
Haupteffekte	p
Wechselwirkungen	$\frac{p(p-1)}{2}$
Summe	$p + \frac{p(p-1)}{2} + 1$

Tabelle 3.2: Herleitung der minimalen Versuchsanzahl eines d-optimalen Plans mit p Faktoren für ein lineares Modell.

Zur Demonstration der Optimalität der Pläne wird die theoretische Herleitung des Kriteriums angegeben. Das Ersatzmodell basiert auf einem quasilinearen Polynomansatz,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \quad (3.8)$$

mit

- p Anzahl der Einflussgrößen, welche die Faktoren darstellen,
- $N(p)$ Anzahl der Modellterme, welche die Haupteffekte und Wechselwirkungen im Regressionsmodell darstellen und abhängig von der Anzahl der zu betrachtenden Faktoren p sind,
- \mathbf{y} m -dimensionaler Spaltenvektor für die Zielfunktion,
- m Anzahl der Versuchspunkte,
- \mathbf{X} Designmatrix mit Dimension $p \times N(p)$, bestehend aus möglichen Parameterkombinationen,
- β $N(p)$ dimensionaler Spaltenvektor mit unbekanntem Parametern zur Beschreibung der Modellkonstanten,
- ε Modellfehler bei bestimmter Verteilung.²³

Der Ansatz ist quasilinear, falls die Variablen nicht linear in die Gleichung eingehen, aber die Parameter in linearer Form beschrieben werden (Eireiner [2013, Kapitel 4.2, Seite 46]). In allgemeiner Form wird der quasilineare Modellansatz angegeben durch

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j. \quad (3.9)$$

Da der Einfluss von höheren Wechselwirkungen als Grad eins gering ist, werden diese vernachlässigt. Sämtliche linearen und nichtlinearen Variablen werden zusammengefasst in der Designmatrix \mathbf{X} .

²³Vergleiche Mitterer [2000, Kapitel 4.1.2.2, Seite 54].

d-optimal	$\det(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = \min!$,
a-optimal	$\text{spur}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = \min!$,
e-optimal	$\lambda_{\max}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} = \min!$,
c_i -optimal	$(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})_{ii}^{-1} = \min!$.

Tabelle 3.3: Die verschiedenen Minimierungsansätze zur Generierung von optimalen Versuchsplänen.

Im ersten Schritt wird eine Parameterschätzung für das Systemmodell durch die Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt und der Parametervektor β berechnet,

$$\beta = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}. \quad (3.10)$$

Die Matrix $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$, welche Fishersche Informationsmatrix genannt wird, ist relevant zur Bestimmung der Eigenschaften des Versuchsplans, zum Beispiel der Orthogonalität, Drehbarkeit und Optimalität, und dient zur Einteilung der Pläne. Um die Koeffizienten eines Regressionsmodells zu berechnen, wird die Fishersche Informationsmatrix nach einem gegebenen Kriterium minimiert. Bei d-optimalen Versuchsplänen erfolgt die Minimierung der Matrix anhand der Determinante. Resultierend aus den Minimierungsansätzen der Matrix werden unterschiedliche Versuchspläne generiert, vergleiche Tabelle 3.3.

Die d-optimalen Versuchspläne basieren auf einer Maximierung der Determinante der Matrix $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$. Zur Verbesserung der Güte kann die Anzahl der Versuche erhöht oder der Wertebereich der Eingangsgrößen vergrößert werden. Sind die Versuchsanzahl und der Wertebereich eingeschränkt, muss eine optimale Kombination aus den möglichen Parameterkombinationen bestimmt werden. Dem zugrunde liegen aufwendige Rechenalgorithmen (Cook und Nachtsheim [1980] und Heredia-Langner u. a. [2003]).

Die Erstellung von d-optimalen Versuchsplänen erfolgt über Verfahren, welche mit Exchange-Algorithm²⁴ arbeiten. Im ersten Schritt wird mit einem Startalgorithmus eine Teilmenge aus allen Versuchen extrahiert. Danach werden die möglichen Kandidaten von Parameterkombinationen systematisch getauscht. Es werden diejenigen hinzugefügt, die die Güte des Plans erhöhen und diejenigen entfernt, welche die Güte nicht verbessern.

Das Vorgehen wird an einem Beispiel dargestellt, vergleiche Abbildung 3.1. Im ersten Schritt wird ein Grundplan erstellt. Der Plan wird durch iteratives Tauschen der Versuche zur Anpassung der Determinante ausbalanciert. Ein Fokus liegt durch den Maximierungsansatz auf den Randgebieten der Wertebereiche. Das Tauschen und das Ein- und Ausblenden von Versuchen wird solange durchgeführt, bis die Determinante der Fisherschen Informationsmatrix maximal und die Korrelation unter den Parametern minimal ist.

²⁴Vergleiche Mitterer [2000, Kapitel 4.1.2.3, Seite 58f].

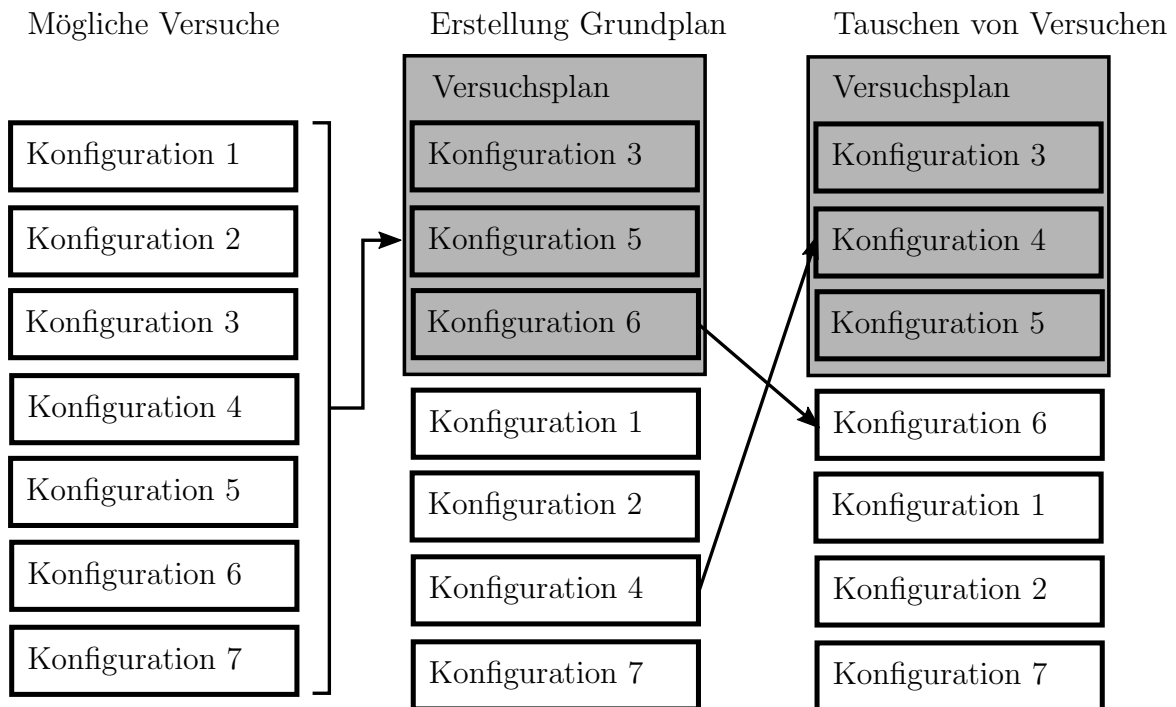


Abbildung 3.1: Veranschaulichung des Exchange-Algorithmus. Im ersten Schritt wird aus den möglichen Versuchen eine beliebige Kandidatenmenge bestimmt. Danach werden iterativ Versuche hinzugenommen und entfernt, bis die beste Teilmenge mit maximaler Determinante gefunden ist.

Da trotz der geringen Versuchsanzahl alle Wechselwirkungen betrachtet werden, sind die Pläne nicht orthogonal. Die Korrelationen der Eingangsparameter werden nicht vollständig beseitigt.

Zusammenfassend werden verschiedene Eigenschaften von d -optimalen Versuchsplänen angegeben.

- Die Generierung erfolgt iterativ und besitzt kein festes Schema.
- Die Determinante der Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ wird maximiert, diese ist eine Kennzahl für die Auswertbarkeit.
- Die Korrelationen der zu schätzenden Koeffizienten werden minimiert.
- Die Randbereiche der Parameterwerte werden ausbalanciert, es wird die gleiche Anzahl von Stufen aus den inneren und äußeren Bereichen in den Plan aufgenommen.

Aufgrund seiner Eigenschaften kann mit dem d -optimalen Design ein bestehender Versuchsplan erweitert werden. Dies wird angewendet, falls ein ungeplantes Design vervollständigt werden muss, eine Änderung des zu untersuchenden Bereichs nötig ist, Blockvariablen zur Erfassung eines neuen Einflusses eingeführt werden oder das Modell durch Hinzunahme von Modellanteilen verfeinert wird.

D-optimale Versuchspläne besitzen gegenüber anderen Ansätzen Vorteile.

- Die Wahl für die Anzahl der Stützstellen pro Einflussfaktor ist frei, sie kann für jeden Faktor unterschiedlich sein.
- Es besteht keine Einschränkung bei der Wahl der Stufenabstände, sie können äquidistant und nicht äquidistant sein.
- Die Verteilung der Versuchspunkte im Raum kann frei gewählt werden.
- Die Wahl des mathematischen Modells zur Regressionsanalyse ist frei.
- Es existieren Erweiterungsmöglichkeiten für die hinzukommenden Einflussfaktoren.
- Bestimmte Einstellungen und Kombinationen können ausgeschlossen werden.

Basierend auf den Eigenschaften und Vorteilen von d-optimalen Versuchsplänen gegenüber anderen wird diese Art im weiteren Verlauf zur Erstellung von analytischen Ersatzmodellen herangezogen.

3.2.4 Latin Hypercube Sampling

Einen abweichenden Ansatz zu den bisher vorgestellten Versuchsplänen stellt das Latin Hypercube Sampling (Henderson und Nelson [2006], Loh [1996], McKay u. a. [1979] und Stein [1987]) dar. Die Erstellung des Versuchsplans erfolgt durch eine zufällige Variation der Parameter, es werden keine expliziten Stützstellen definiert.

Die Grundlage des Latin Hypercube Samplings bildet die Betrachtung von unabhängigen und gleichverteilten Eingangsparametern. Bei einer vorgegebenen Anzahl von N Versuchen wird das betrachtete Gebiet pro Variable in N Intervalle mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\frac{1}{N}$ aufgeteilt. Ist k die Anzahl der Parameter, ergeben sich N^k Zellen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung N^{-k} . Es wird eine zufällige Auswahl der Zellen getroffen, in denen Versuche platziert werden. Dies erfolgt mit der Einschränkung, dass in jeder Zeile und Spalte nur ein Versuch vorhanden ist. Die Darstellung eines zweidimensionalen Versuchsplans mit fünf Versuchen ist in Abbildung 3.2 gegeben.

Das Latin Hypercube Sampling basiert auf einem Random Sampling (Tillé [2006, Kapitel 4, Seite 41ff]). Die Versuche werden zufällig ohne Einschränkungen auf dem betrachteten Gebiet verteilt. Im Gegensatz zum Random Sampling weist Latin Hypercube durch die Schichtung der Versuche in den einzelnen Spalten bessere Eigenschaften bei der Berechnung der Mittelungs- und Verteilungsfunktion auf. Aufgrund der Unterteilung des betrachteten Gebiets werden für jede Variable die Randbereiche einmal angenommen.

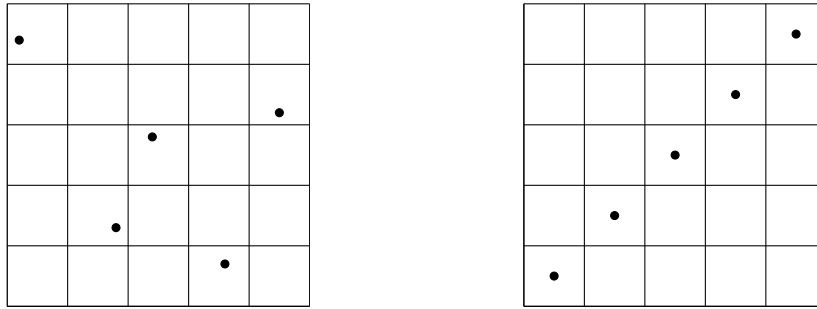


Abbildung 3.2: Veranschaulichung von zwei Latin Hypercube Samplings im zweidimensionalen Fall mit fünf Versuchen. Auf der linken Seite ist eine zufällige Verteilung der Versuche dargestellt, auf der rechten Seite eine schlecht konditionierte Aufteilung, welche beim Latin Hypercube Sampling auftreten kann.

Eine schlecht konditionierte Versuchsaufteilung im Latin Hypercube Sampling ist gegeben, falls das Gebiet nur unzureichend abgetastet wird, zum Beispiel wenn alle Konfigurationen auf einer Linie liegen (Viana u. a. [2010]). Um die in Abbildung 3.2 rechts gezeigte schlecht konditionierte Aufteilung bei der Versuchsplanung mit Latin Hypercube zu vermeiden und ein gut verteiltes Design zu erstellen, ist eine Optimierung des Latin Hypercube Designs möglich (Park [1994] und Viana u. a. [2010]). Die Idee ist eine Maximierung der Abstände zwischen den Konfigurationen und damit eine gleichmäßige Erfassung des Raums. Dazu werden aufwändige Algorithmen mit hohem Rechenaufwand angewendet.

Sind die Eingangsparameter nicht gleichverteilt, erfolgt bei Erstellung des Designs eine Unterscheidung nach den Eingangsverteilungen (Stein [1987]). Können die Parameter mit anderen Verteilungen beschrieben werden, zum Beispiel einer Normalverteilung, werden kleinere Spalten um den Mittelwert gebildet, während an den Randbereichen größere Intervalle angenommen werden.

3.3 Korrelationskoeffizient

Zur Evaluation von empirischen Daten wird der Korrelationskoeffizient verwendet. Es wird eine Definition des Koeffizienten angegeben, die Herleitung und Beispiele werden Brosius [2011], Cohen u. a. [2003], Grosche u. a. [2013], Hartung u. a. [2009], Mari und Kotz [2001] und Ronniger [2012] entnommen.

Der Korrelationskoeffizient quantifiziert die Abhängigkeit zwischen sachlich zusammenhängenden Parametern und bildet den Grad der Abhängigkeit verschiedener Merkmale ab. Dabei stellt die Stichprobenkorrelation, ausgedrückt durch den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten, ausschließlich den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen dar.

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die Stärke der Abhängigkeit von zwei Zufallsvariablen. Sind zwei unabhängige Zufallsvariablen gegeben, ist der Koeffizient Null und diese sind unkorreliert. Jedoch kann aus einer vorliegenden Unkorreliertheit nicht gefolgert werden, dass die Variablen unabhängig voneinander sind.

Zur Definition sei eine n-teilige Messreihe mit zwei Werten, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, gegeben. Über die Reihen werden die Mittelwerte berechnet.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.11)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.12)$$

Damit wird der empirische Korrelationskoeffizient Kor_e oder $r_{x,y}$ angegeben. Dieser stellt den Korrelationskoeffizienten nach Bravis-Pearson²⁵ dar.

$$\text{Kor}_e = r_{x,y} := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (3.13)$$

Es gilt,

$$\text{Kor}_e \in [-1; 1]. \quad (3.14)$$

Hat der Korrelationskoeffizient einen Wert von +1 oder -1, besteht ein linearer und monotoner Zusammenhang zwischen den Größen. Wird der Wert Null angenommen, sind die Merkmale unkorreliert. Damit sind keine Rückschlüsse auf eine Abhängigkeit dieser möglich. Falls gilt $0 < |\text{Kor}_e| < 1$, wird eine Tendenz der linearen Parameterkorrelation angegeben. Eine Quantifizierung des Korrelationskoeffizienten erfolgt in Tabelle 3.4.

Eine starke Korrelation zwischen zwei Parametern ist kein hinreichender Beleg für einen

²⁵Vergleiche Romniger [2014, Seite 56].

²⁶Vergleiche Hartung u. a. [2009, Kapitel X, Seite 569ff] und Romniger [2012, Kapitel 6, Seite 63].

0	Keine Korrelation,
über 0 bis 0.2	Sehr schwache Korrelation,
über 0.2 bis 0.4	Schwache Korrelation,
über 0.4 bis 0.6	Mittlere Korrelation,
über 0.6 bis 0.8	Starke Korrelation,
über 0.8 bis 1	Sehr starke Korrelation,
1	Perfekte Korrelation,

Tabelle 3.4: Quantifizierung des Korrelationskoeffizienten (Brosius [2011, Kapitel 23.1, Seite 523]).

kausalen Zusammenhang zwischen den Variablen. Es ist bei der Berechnung die Abhängigkeit von einer dritten Variablen möglich, die Einfluss auf die beiden betrachteten Merkmale hat. Dies führt zu einer Scheinkorrelation und wird über eine partielle Korrelation betrachtet.

Ein zu beachtender Punkt ist, ob die berechnete Korrelation durch Zufallsvariablen erreicht werden kann. Es erfolgt ein Abgleich zwischen der gegebenen und einer zufälligen Korrelation. Dazu wird die Korrelation einem Signifikanztest unterzogen und der Korrelationskoeffizient mit dem Stichprobenumfang verknüpft (Hartung u. a. [2009, Kapitel 9, Seite 547ff]). Er gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Korrelationskoeffizient in bestimmter Größenordnung für die Stichprobe berechnet wird, obwohl kein linearer Zusammenhang zwischen den Variablen besteht. Es wird ein großer Wert für die Korrelation bestimmt, ohne dass die Variablen voneinander abhängig sind. Die Evaluation der Irrtumswahrscheinlichkeit erfolgt exakt, falls die Eingangsparameter gleichverteilt sind.

Die Berechnung des Signifikanztests basiert auf der Prüfung der Nullhypothese, dass der Korrelationskoeffizient in seiner Grundgesamtheit Null ist. Dazu wird ein Testwert,

$$t = r_{x,y} \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{x,y}^2}},^{27} \quad (3.15)$$

mit N Anzahl der Stichproben, berechnet. Bei Gültigkeit der Nullhypothese H_0 ist der Wert t -verteilt (Kröse u. a. [2011, Kapitel 4.2.15, Seite 131]) mit $N-2$ Freiheitsgraden.

Zur Definition der Nullhypothese H_0 sei ϱ der exakte Wert für die Pearsonsche Schätzung $r_{x,y}$. Es wird die Nullhypothese

$$H_0 : \varrho = 0, \quad (3.16)$$

welche besagt, dass kein linearer Zusammenhang besteht, gegenüber der Hypothese

$$H_1 : \varrho \neq 0 \quad (3.17)$$

getestet. Die Prüfung erfolgt mit dem Signifikanztest, dargestellt durch den Testwert t , vergleiche Gleichung (3.15). Durchgeführt wird dies gegenüber einem festgelegten Niveau α . Die Nullhypothese wird verworfen, falls gilt:

$$|t| > t_{N-2, 1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.18)$$

²⁷Vergleiche Hartung u. a. [2009, Kapitel 9, Seite 547] und Brosius [2011, Kapitel 23.1, Seite 534].

Der Wert $t_{N-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$ stellt den Signifikanzwert oder die Irrtumswahrscheinlichkeit dar und wird aus Standardtabellen entnommen (Fischer u. a. [2015, Anhang 4, Tabelle 2, Seite 375]). Die Nullhypothese wird zurückgewiesen, falls eine hinreichend kleine Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet wird. In diesem Fall existiert ein Zusammenhang zwischen den Parametern. Die Signifikanz spiegelt einen Test auf einen grundsätzlichen Zusammenhang wider, liefert jedoch keine Aussage über die Größe des Zusammenhangs in seiner Gesamtheit.

3.4 Regressionsmodelle

Regressionsmodelle werden angewendet, um einen experimentellen Versuchsplan und dessen Ergebnisse über eine Ersatzfunktion zu beschreiben. Die Ausführungen basieren auf Cohen u. a. [2003], Hartung u. a. [2009], Montgomery [2012], Ronniger [2012] und Urban und Mayerl [2011]. Für eine mathematische Herleitung der Regressionsmodelle vergleiche Gross [2003].

3.4.1 Allgemeine Regressionsmodelle

Regressionsmodelle werden angewendet um Einflussbeziehungen zwischen Parametern zu bestimmen und diese durch ein Polynom anzunähern. Die Voraussetzung ist, dass mehr Datensätze als Koeffizienten des Polynoms vorliegen. Zur Auswertung wird eine Unterscheidung zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen getroffen. Es sei folgende Notation gegeben:

X	unabhängige Variablen,
Y	abhängige Variablen,
$Y = f(X)$	Darstellung der Abhängigkeit durch eine Funktion.

Die Größen X_i und Y_i werden durch Messungen bestimmt. Regressionsmodelle stellen keine deterministische Formulierung dar, sondern eine stochastische. Darin sind Messfehler bei der Bestimmung der Eingangsgrößen enthalten. In der Simulation werden die Experimente als exakt reproduzierbar angenommen, Streuungen durch Messfehler werden ausgeschlossen.

Die Darstellung der Abhängigkeit $f(x)$ erfolgt durch eine analytische Funktion. Zur Funktionsbeschreibung gibt es lineare und nichtlineare Ansätze, vergleiche Tabelle 3.5. Zur Herleitung wird ein linearer Zusammenhang angenommen (Linearitätsannahme).

$Y = aX^b$	Gerade im doppellogarithmischen Maßstab,
$Y = a + bX + cX^2 + \dots$	Polynom höheren Grads,
$Y = ae^{bX}$,	Exponentialfunktion multiplikativ,
$Y = ae^{\frac{b}{X}}$,	Exponentialfunktion divisional,
$Y = a + \frac{b}{X}$,	Polynom negativen Grads,
$Y = a + b \log(X)$	Gerade im einfachen logarithmischen Maßstab.

Tabelle 3.5: Verschiedene Ansätze für nichtlineare Regressionsfunktionen.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad (3.19)$$

mit α, β zu bestimmende Koeffizienten und ε_i Störgrößen.

Regressionsmodelle passen eine Funktion an vorhandene Daten an. Ein Qualitätsindikator ist gegeben durch den Korrelationskoeffizienten zwischen modellierten und berechneten Werten. Für eine gute Modellgüte muss der richtige Funktionsansatz gewählt werden, unter Berücksichtigung von physikalischen Zusammenhängen.

3.4.2 Bivariate Regression

Zur Erstellung eines linearen Regressionsmodells basierend auf zwei Eingangsvariablen X_i und Y_i werden die Koeffizienten in Gleichung (3.19) aus Datenpunkten bestimmt. Um die Anpassung durch die Regressionstechnik darzustellen, werden die beiden Konstanten α und β durch a und b ausgedrückt.

$$Y_i = a + bX_i + U_i. \quad (3.20)$$

Neben den experimentellen Ergebnissen wird zur Minimierung der Fehler U_i die berechnete Schätzung \hat{Y} benötigt,

$$\hat{Y}_i = a + bX_i, \quad (3.21)$$

worin die Fehlerterme U_i nicht auftreten. Um ein gutes Modell zu erstellen, gibt es verschiedene Minimierungsansätze. Sei N die Anzahl der Datensätze. Die jeweiligen Summen werden minimiert.

$\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)$	Ansatz ist nicht möglich, da vorzeichenbehaftet,
$\sum_{i=1}^N Y_i - \hat{Y}_i $	MAD Schätzung, „minimum absolute deviations“,
$\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2$	Methode der kleinsten Quadrate, OLS-Verfahren, „ordinary least squares“.

Im bivarianten Fall kann die Herleitung der Koeffizienten a und b explizit angegeben werden. Als Schätzmethode wird das OLS Verfahren verwendet.

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - a - bX_i)^2 \rightarrow \min! \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dS}{da} = \frac{dS}{db} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.22)$$

Damit werden a und b berechnet.

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \bar{Y}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2}. \quad (3.23)$$

Ist eine lineare Regression von Interesse, deren Ausgleichsgerade durch den Ursprung verläuft, vereinfacht sich das Modell zu $Y = bX$ mit $b = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2}$. Bei einem Regressionsmodell mit vorgegebener Steigung ist b fest und $a = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N Y_i - b \sum_{i=1}^N X_i)$.

Zur Bewertung, inwieweit das erstellte Regressionsmodell die gemessenen oder berechneten Daten widerspiegelt, ist das Bestimmtheitsmaß R^2 gegeben. Dies bildet ein Maß für die Güte des Modells und wird deshalb Modellgüte genannt. Es stellt eine Angabe dar, welcher Anteil der Streuung durch das Modell erklärt wird. Das Bestimmtheitsmaß ist wie folgt gegeben. Die Abkürzung SS steht für „sum of squares“, reg für Regression und res für Residuen, die Abweichungen zwischen den Ausgangswerten und dem Regressionsmodell.

$$R^2 = \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{total}}} = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{total}}}, \quad (3.24)$$

mit

$$SS_{\text{total}} = SS_{\text{reg}} + SS_{\text{res}} = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2, \quad (3.25)$$

$$SS_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, \quad (3.26)$$

$$SS_{\text{res}} = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2. \quad (3.27)$$

Es gilt,

$$R^2 \in [0; 1], \quad (3.28)$$

wobei $R^2 = 1$ die optimale Modellgüte darstellt. Gilt $R^2 < 0.6$, ist eine schlechte Korrelation zwischen den Daten und der Ersatzfunktion gegeben. Das Bestimmtheitsmaß wird nach den Gleichungen (3.25) bis (3.27) über die durchgeführten Simulationen berechnet. Die Anzahl der Stützstellen N der Berechnung ist durch die Anzahl der durchgeführten Experimente gegeben.

Neben dem Bestimmtheitsmaß sind die Residuen Indikatoren für die Modellgüte. Es werden die berechneten gegenüber den beobachteten Werten ausgewertet. Ausreißer zeigen systematische Fehler oder andere Störgrößen an. Je kleiner die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werten sind, desto besser ist die Aussagekraft des Regressionsmodells.

3.4.3 Multiple Regression

In multiplen oder multivarianten Modellen treten mehrere unabhängige Variablen auf, X_i , $i = 1, \dots, n$. Es werden die Regressionskoeffizienten für jede Variable unter der Annahme geschätzt, dass alle anderen unabhängigen Variablen konstant bleiben. Für das Modell gilt,

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.29)$$

Ausformuliert wird das allgemeine Modell für einen linearen Ansatz wie folgt geschrieben:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \dots + \beta_n X_{n,i} + \varepsilon_i. \quad (3.30)$$

Zur Veranschaulichung wird im Folgenden ein Regressionsmodell mit zwei unabhängigen Variablen verwendet.

$$Y_i = a + b_1 X_{1,i} + b_2 X_{2,i} + U_i. \quad (3.31)$$

Analog zum bivarianten Modell werden die Regressionskoeffizienten durch die Abweichungen der Berechnungsergebnisse gegenüber der Regressionsfläche bestimmt. Dazu wird die berechnete Schätzung benötigt.

$$\hat{Y}_i = a + b_1 X_{1,i} + b_2 X_{2,i}. \quad (3.32)$$

Die minimierende Summe wird wie folgt angegeben:

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - a - b_1 X_{1,i} - b_2 X_{2,i})^2 \rightarrow \min!. \quad (3.33)$$

Das Prinzip der Berechnung der multiplen Regressionskoeffizienten ist eine mehrfache bivariate Regression. Dies wird „Auspartialisierung“ oder „partielle Regressionskoeffizienten“ genannt. Es werden die beiden unabhängigen Variablen, im gegebenen Fall $X_{1,i}$ und $X_{2,i}$, von Anteilen bereinigt, die durch die jeweils andere unabhängige Variable beeinflusst werden. Danach wird die Regression der abhängigen Variable Y mit den neuen bereinigten Werten von $X_{1,i}$ und $X_{2,i}$ berechnet.

Im multivariaten Modell ist es möglich, eine nichtlineare Regression und eine Regression mit Wechselwirkungen zu berechnen.

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_1^2 + b_4 X_2^2, \quad (3.34)$$

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2. \quad (3.35)$$

Die Ansätze werden in Matrixform dargestellt.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\mathbf{b}, \quad (3.36)$$

mit

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{z1} \\ 1 & X_{12} & \dots & X_{z2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \dots & X_{zn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times z+1}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ \vdots \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{z+1}. \quad (3.37)$$

Der Koeffizientenvektor b wird durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet.

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}. \quad (3.38)$$

Die Berechnung des Bestimmtheitsmaßes R^2 verläuft analog zum bivariaten Modell.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\text{modellgebundene Variablen}}{\text{beobachtete Variablen}}. \quad (3.39)$$

Dabei wird die Korrelation zwischen Y und der Gesamtheit aller Effekte, bedingt durch die unabhängigen Variablen, betrachtet.

3.5 Verteilungen der Eingangsparameter

Die Parameter zur Beschreibung der Eingangsgrößen in das Modell sind in der Realität durch verschiedene Verteilungen (Kröse u. a. [2011] und Waldi [2015]) gegeben. Im Allgemeinen wird zwischen einer diskreten und einer kontinuierlichen Verteilung unterschieden.

Definition 3.2 (Diskrete Verteilung)

Eine Zufallsvariable X wird diskrete Verteilung genannt, falls gilt $P(X = X_i) > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, für eine endliche oder abzählbare Menge von Werten x_1, x_2, \dots , sodass $\sum_i P(X = X_i) = 1$. Die diskrete Verteilungsdichtefunktion von X ist die Funktion f definiert durch $f(x) = P(X = x)$.²⁸

Definition 3.3 (Kontinuierliche Verteilung)

Eine Zufallsvariable X mit kumulativer Verteilungsfunktion F wird kontinuierliche Verteilung genannt, falls eine positive Funktion f mit totalem Integral 1 existiert, sodass für alle $a < b$ gilt:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u) du.$$

Die Funktion f wird die Verteilungsdichtefunktion von X genannt.²⁹

Die Verteilungen der Eingangsparameter sind durch kontinuierliche Spektren gegeben. Es werden im Folgenden Verteilungen dieser Art definiert. Eine Visualisierung derer ist in Abbildung 3.3 gegeben.

Definition 3.4 (Gleichverteilung)

Eine Zufallsvariable X wird auf dem Intervall $[a; b]$ gleichverteilt genannt, falls ihre Verteilungsdichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.³⁰$$

Definition 3.5 (Normalverteilung)

Eine Zufallsvariable X wird normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2 genannt, falls ihre Verteilungsdichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.³¹$$

²⁸Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.3, Seite 27].

²⁹Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.4, Seite 28].

³⁰Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.14, Seite 42].

³¹Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.16, Seite 45].

Definition 3.6 (Gammaverteilung)

Eine Zufallsvariable X wird gamma-verteilt mit dem Shape Parameter $\alpha > 0$ und dem Scale Parameter $\lambda > 0$ genannt, falls ihre Verteilungsdichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

wobei Γ die Gamma-Funktion darstellt.³²

Definition 3.7 (F-Verteilung)

Seien m und n strikt positive, ganzzahlige Werte. Eine Zufallsvariable X wird F-verteilt mit den Freiheitsgraden m und n genannt, falls ihre Verteilungsdichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}) (\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2}) [1 + \frac{m}{n} x]^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x \geq 0,$$

wobei Γ die Gamma-Funktion darstellt.³³

Zum Abgleich der gegebenen Stichproben mit den angenommenen Verteilungen werden Abhängigkeitstests durchgeführt. Ein Beispiel ist der χ^2 -Test (Henze [2013, Kapitel 29.7, Seite 271f], Mulholland und Jones [1968, Kapitel 11, Seite 178ff], Ronniger [2014, Seite 111] und Savci [2015, Kapitel 3.3.3, Seite 36f]). Es erfolgt ein Vergleich der Verträglichkeit von beobachteten relativen Häufigkeiten mit hypothetischen Wahrscheinlichkeiten. Dazu wird eine Prüfgröße χ^2 berechnet,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(H_B - H_E)^2}{H_E}. \quad (3.40)$$

mit k Anzahl der Klassen, H_E erwarteten Häufigkeiten und H_B beobachteten Häufigkeiten. Die betrachtete Nullhypothese ist, dass die beobachtete Verteilung H_B der erwarteten Verteilung H_E entspricht. Dabei werden Verteilungsirregularitäten identifiziert.

Bei den erwarteten und beobachteten Wahrscheinlichkeiten wird die Klassenbreite K berücksichtigt. Am Beispiel der Normalverteilung gilt für H_E ,

$$H_E = K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.41)$$

Der berechnete Wert χ^2 wird gegenüber einen kritischen Wert aus Standardtabellen verglichen, zum Beispiel Mulholland und Jones [1968, Seite 268f]. Dazu wird ein Freiheitsgrad v benötigt,

$$v = k - a - 1, \quad (3.42)$$

³²Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.17, Seite 48].

³³Vergleiche Kröse und Chan [2014, Definition 2.18, Seite 49].

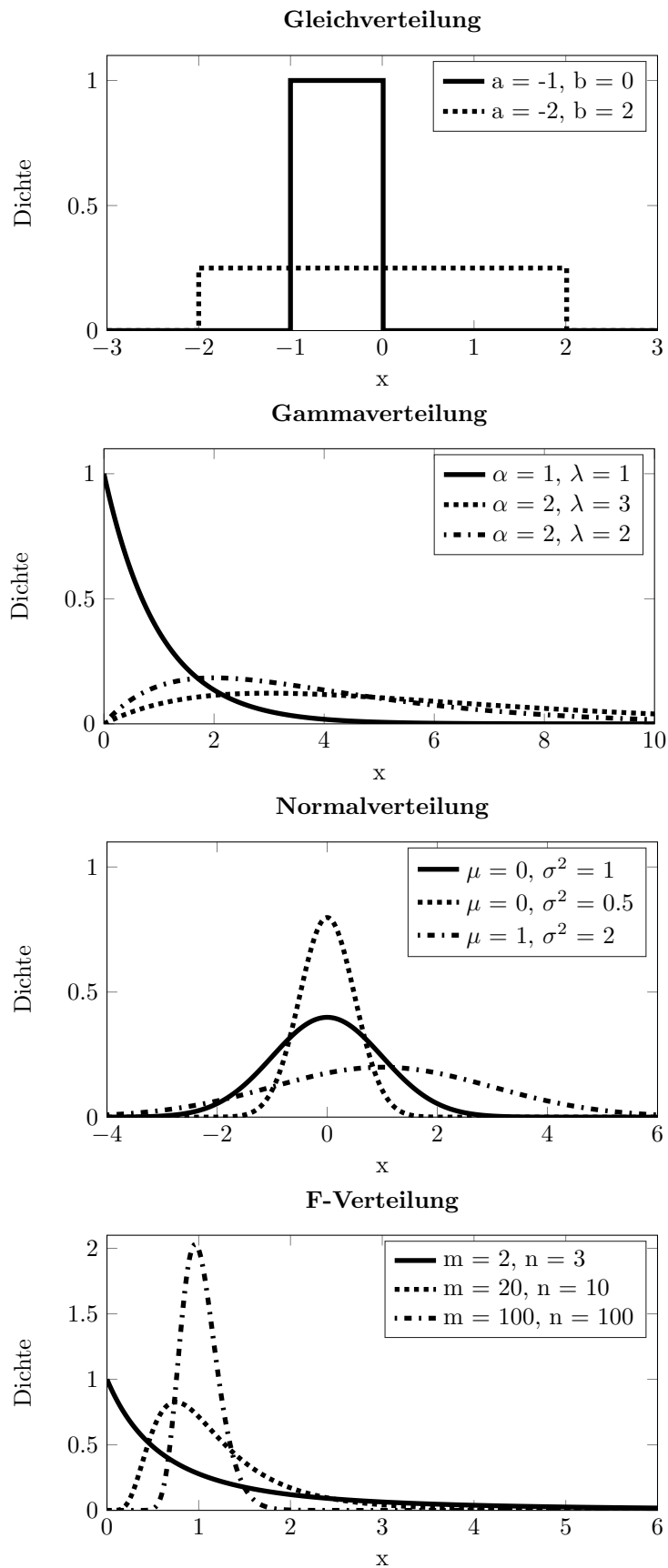


Abbildung 3.3: Die Verteilungsdichtefunktionen der angegebenen Verteilungen.

mit a abhängig von betrachteter Verteilung. Die Nullhypothese auf Basis eines Signifikanzniveaus α wird abgelehnt, falls gilt

$$\chi^2 > \chi_{krit}^2. \quad (3.43)$$

Beispiele für weitere Abhängigkeitstests stellen der Anderson-Darling-Test (Anderson und Darling [1952]), der Kolmogorov-Smirnov-Test (Heddrich und Sachs [2016, Kapitel 7.2.6, Seite 461ff]), der Shapiro-Wilk-Test (Shapiro und Wilk [1965]) und der Cramer-von Mises-Test (Anderson [1962]) dar.

3.6 Weiterführende Untersuchungen zur Versuchsplanerstellung

Auf Basis der in Kapitel 3.4.1 bis 3.4.3 gezeigten Herleitung von Regressionsmodellen wird eine Vorgehensweise entwickelt, die gegebenen Verteilungen der Parameter in die Versuchsplanung zu integrieren. Es wird angenommen, dass die Eingangsparameter durch eine Normalverteilung gegeben sind. Werden die Parameter durch eine andere Verteilung beschrieben, wird analog verfahren. Durch die Betrachtung von anderen Verteilungen als der Gleichverteilung sind mehr Bauteile mit Eigenschaften um den Nominalwert als an den Randbereichen gegeben, was im Versuchsplan abgebildet wird.

Die Idee hinter den Untersuchungen ist ein Regressionsmodell basierend auf einem zweistufigen Versuchsplan. Das Ziel ist, eine hohe Aussagekraft des Modells um den Nominalwert zu generieren. Die Stützstellen werden so verteilt, dass mehr Punkte um die Nominalwerte der Parameter gewählt werden, damit das Gebiet einen größeren Einfluss auf das Bestimmtheitsmaß R^2 besitzt. Umgesetzt wird dies durch eine Kombination von d-optimalen Versuchsplänen. Die Grundvoraussetzung ist, dass eine Kombination von d-optimalen Versuchsplänen wieder einen d-optimalen Versuchsplan darstellt.

In der klassischen Versuchsplanung werden die nötigen Versuche ohne Einschränkungen auf alle Stützstellen verteilt. Dies wird im Folgenden einstufiger oder gesamthafter Versuchsplan genannt. Dargestellt ist die Erstellung an einem Beispiel für zwei Parameter mit fünf Stützstellen in Abbildung 3.4.

Zur Verbesserung des Vorgehens und der stärkeren Gewichtung des Gebiets im Zentrum sei eine Aufteilung des Versuchsplans in eine zweistufige Regression angenommen, welche sich für dasselbe Beispiel wie in Abbildung 3.5 gegeben darstellen lässt. Dabei wird ein

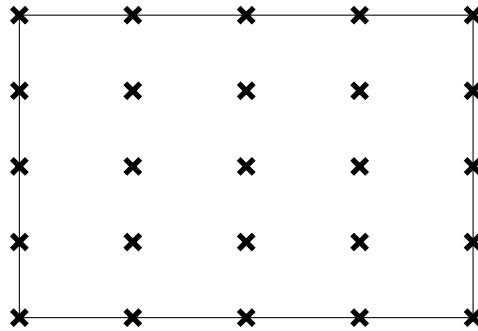


Abbildung 3.4: Mögliche Stützstellen bei einem einstufigen Versuchsplan zur Regressionsmodellierung für zwei Parameter mit fünf Werten und äquidistanter Verteilung, welcher keinen Einschränkungen bezüglich der Wahl der Stützstellen unterliegt.

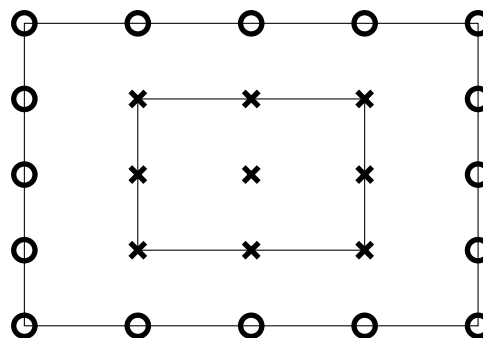


Abbildung 3.5: Mögliche Stützstellen bei einem zweistufigen Versuchsplan zur Regressionsmodellierung für zwei Parameter mit fünf Werten, welcher zuerst Versuche durch Stützstellen der Kreuze aus dem inneren Gebiet und anschließend Stützstellen der Kreise aus dem äußeren Gebiet wählt.

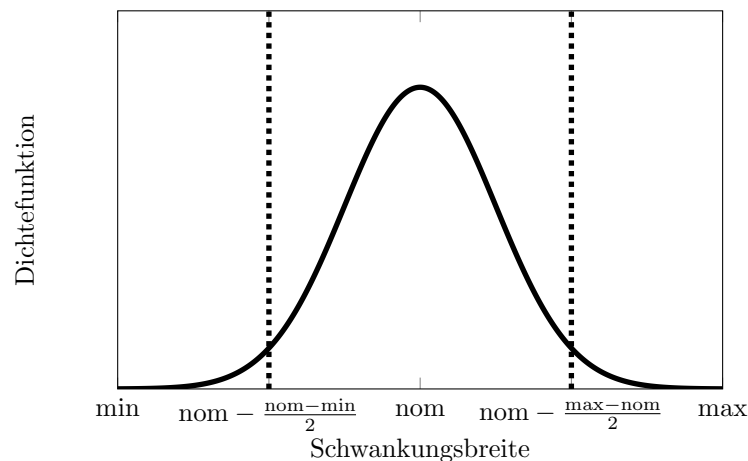


Abbildung 3.6: Angenommene Verteilung der Eingangsparameter. Innerhalb der gestrichelten Grenzen, welche die halben Schwankungsbreiten beschreiben, ist ein Großteil der angenommenen Werte gegeben.

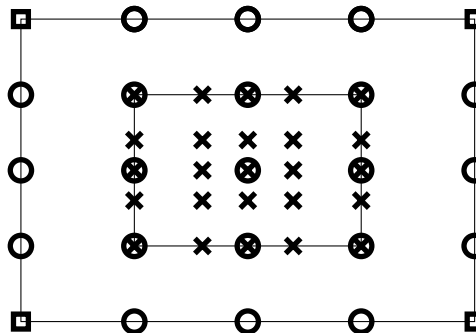


Abbildung 3.7: Darstellung der an die Eingangssparameter angepassten Versuchsplanerstellung. Der innere Versuchsplan und die zugehörigen Stützstellen sind mit Kreuzen dargestellt, der äußere Plan mit Kreisen. Einige Stützstellen sind in beiden Plänen enthalten. Die quadratischen Punkte an den Ecken besitzen die geringste Auftrittswahrscheinlichkeit.

Versuchsplan auf Basis der inneren, durch Kreuze dargestellten, Stützstellen erstellt. Es werden die halben Schwankungsbreiten der Parameter abgebildet. Die Parameter nehmen drei verschiedene Werte an. Dann wird der Versuchsplan durch die äußeren Stützstellen, durch Kreise dargestellt, erweitert, um das gesamte Gebiet mit fünf Werten pro Parameter abzudecken. Es wird von einem inneren und äußeren Versuchsplan gesprochen.

Auf Basis des Vorgehens, die Punkte im Zentrum aufgrund der gegebenen Eingangsverteilungen, vergleiche Abbildung 3.6, detaillierter abzubilden, wird die zweistufige Versuchsplanerstellung weiterentwickelt. Es wird die Zahl der Stützstellen erhöht.

Im inneren Versuchsplan werden die Stützstellen um den Mittelwert stärker gewichtet um die gegebenen Verteilungen abzubilden. Es werden fünf Stützstellen im inneren Bereich mit individueller Verteilung verwendet. Diese befinden sich beim Nominal-, dem Minimal- und

Maximalwert des inneren Gebiets und bei einer kleinen Abweichung vom Nominalwert, vergleiche Abbildung 3.7 für das Beispiel eines Versuchsplans mit zwei Parametern. Damit hat der Bereich um den Mittelwert einen größeren Einfluss zur Berechnung des Bestimmtheitsmaßes R^2 . Das Modell besitzt im Zentrum eine größere Aussagekraft als der einstufige Versuchsplan. Es wird folgender Abstand dist zwischen dem Nominalwert und den angrenzenden Stützstellen gewählt:

$$\text{dist} = \frac{2}{5}(\text{nom} - \text{min}). \quad (3.44)$$

Der äußere Versuchsplan stellt eine Erweiterung des inneren Plans auf Basis der gegebenen Stützstellen dar. Es werden zwei weitere Stützstellen pro Variable in den jeweiligen Extremwerten eingeführt. Die Stützstellen sind durch die des inneren Plans und den möglichen Maximalwerten gegeben.

Vorgehen zur Berechnung von Regressionsmodellen

Es wird ein Verfahren vorgestellt, das das Gebiet um den Nominalwert gegenüber den Randwerten bei der Versuchsplanerstellung stärker gewichtet. Die Konzentration der Stützstellen ist um das Zentrum höher als an den Rändern. Dazu wird ein Versuchsplan mit fünf Stützstellen pro Parameter, der halben Variationsbreite und individueller Verteilung erstellt. Anschließend wird dieser erweitert um das gesamte Spektrum abzubilden. Dies geschieht, indem zwei zusätzliche Stützstellen pro Parameter eingeführt werden. Es entfallen die Hälfte der Versuche auf den inneren Versuchsplan und die zweite Hälfte wird zur Erweiterung verwendet. Auf Basis des zweistufig erstellten Versuchsplans wird das Regressionsmodell berechnet. Die beiden Versuchspläne werden getrennt erstellt und danach zusammengefügt. Der Simulationsaufwand im Vergleich zu einem einstufigen Plan ist gleich.

Die Begründung für das Vorgehen ist durch die Verteilungen der Eingangsparameter gegeben, vergleiche Abbildung 3.6. Sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Parameter durch eine Normalverteilung gegeben, existiert eine hohe Verteilungsdichte um die Nominalwerte. Die Randbereiche werden mit einer geringen Wahrscheinlichkeit angenommen. Die realistischen Parameterkombinationen liegen nahe des Nominalwerts, was durch die hergeleitete Versuchsplanerstellung abgebildet wird.

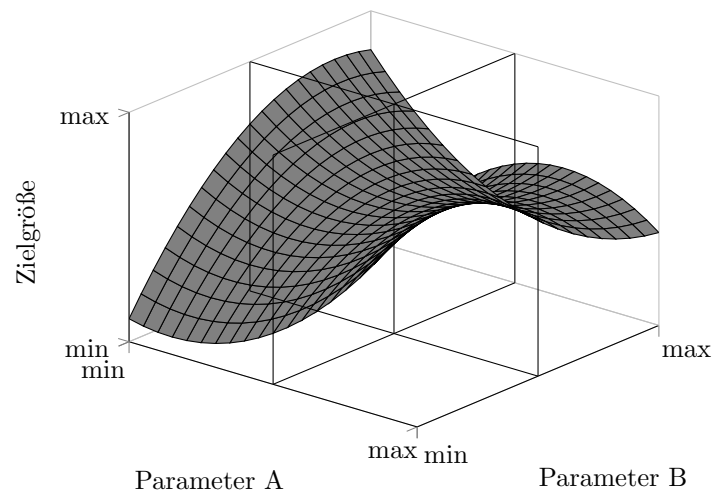


Abbildung 3.8: Dreidimensionale Darstellung eines Regressionsmodells für zwei Parameter. Die senkrechten Ebenen stellen die Schnittachsen dar.

3.7 Auswertung der Parameterverläufe

Das Regressionsmodell stellt eine mehrdimensionale Funktion dar, die von mehreren Parametern abhängig ist. Sind mehr als zwei Parameter im Modell enthalten, kann dieses im Dreidimensionalen nicht mehr in seiner Gesamtheit dargestellt werden. Durch das Auftreten von Wechselwirkungen zwischen den Parametern können die einzelnen Parameterverläufe nicht unabhängig von den anderen Variablen aufgezeigt werden.

Zur graphischen Darstellung des Regressionsmodells wird ein zweidimensionales Kurvendiagramm verwendet (Ronniger [2012, Seite 59]). Damit werden die einzelnen Parameterverläufe abhängig von den Einstellungen der anderen Parameter dargestellt. Durch die Wechselwirkungen bestehen Einflüsse der Variablen untereinander. Da der Schnitt durch das mehrdimensionale Modell nur für die betrachtete Konfiguration gültig ist, ist diese Darstellung nicht allgemeingültig. Deshalb werden im weiteren Verlauf in Abschnitt 3.8 und 3.9 Methoden eingeführt, welche eine gesamthafte Auswertung der Ersatzfunktion ermöglichen. Dazu zählen Sensitivitätenberechnungen und die Betrachtung von Instabilitätswahrscheinlichkeiten.

Bei der Betrachtung von zwei Parametern wird die Zielfunktion in Abhängigkeit aller Variablen visualisiert, vergleiche Abbildung 3.8. Die Fläche wird an den beiden Ebenen geschnitten, welche durch die jeweiligen Parametereinstellungen gegeben sind. Daraus lässt sich das zweidimensionale Kurvendiagramm ableiten, vergleiche Abbildung 3.9. Bei mehr als zwei Parametern kann die Flächendarstellung nicht mehr verwendet werden.

Aus den Parameterverläufen werden verschiedene Aussagen abgeleitet. Es ist möglich die Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Zielgröße zu bestimmen. Es werden Verbesse-

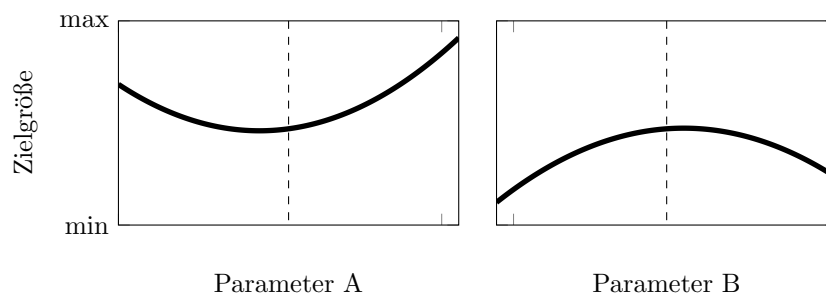


Abbildung 3.9: Darstellung eines Schnitts durch das Regressionsmodell für zwei Parameter. Bei Verschiebung eines Parameters ändert sich auch der Verlauf des anderen Parameters. Gestrichelt dargestellt sind die aktuellen Parametereinstellungen.

rungsansätze für das System aufgezeigt und kritische Einstellungen oder Kombinationen der Parameter identifiziert.

3.8 Berechnung der Parametersensitivitäten

Eine weitere Auswertemöglichkeit des Regressionsmodells ist die Bestimmung der einflussreichsten Parameter. Da die in Abschnitt 3.7 vorgestellten Verläufe nur einen Schnitt durch einen mehrdimensionalen Parameterraum darstellen, sind keine Rückschlüsse über die globalen Einflüsse der Parameter möglich. Es erfolgt eine Berechnung der Sensitivitäten der Parameter auf Zielgrößenveränderungen.

Zur Berechnung der Sensitivitäten gibt es verschiedene Ansätze (Saltelli u. a. [2004] und Ustinov [2015]). Die Definition ist wie folgt gegeben:

Definition 3.8 (Sensitivität)

*Die Sensitivität ist eine lokale Größe, die den Effekt eines gegebenen Eingangsparameters auf eine gegebene Ausgangsgröße beschreibt.*³⁴

Die Sensitivität eines Parameters Sen_j wird durch die partielle Ableitung der beschreibenden Funktion nach diesem berechnet,

$$Sen_j = \frac{\partial Y}{\partial X_j}, \quad (3.45)$$

mit Y Ausgangsgröße und X_j Eingangsparameter.

³⁴Vergleiche Saltelli u. a. [2004, Kapitel 2.2, Seite 42].

Es existiert keine allgemeingültige Theorie zur Berechnung von Sensitivitäten. Eine Unterscheidung erfolgt zwischen der lokale Methode, die die partielle Ableitung eines Parameters berechnet während die restlichen Variablen am Nominalwert fixiert bleiben, und der globalen Methode, welche die Abbildung aller Parameterschwankungen und Wechselwirkungen betrachtet.

Es wird eine Beschreibung der Sensitivitäten zur Bewertung von quadratischen Regressionsmodellen mit Wechselwirkungen hergeleitet, wie sie bei der Analyse von Bremssystemen in Näherung verwendet werden. Die Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Zielfunktion werden bestimmt. Das Modell wird unter Vernachlässigung von Termen ohne Abhängigkeit von dem betrachteten Parameter bewertet. Es erfolgt eine Streichung der nicht abhängigen Faktoren, Wechselwirkungen zu den anderen Variablen werden miteinbezogen.

Algorithmus 3.9 (Sensitivitätenberechnung)

1. Differenzieren des Regressionsmodells nach dem betrachteten Parameter.
2. Integrieren des Regressionsmodells nach dem betrachteten Parameter.
3. Minimierung und Maximierung der erhaltenen Funktion.
4. Berechnung der Sensitivität durch Bildung der Differenz zwischen Maximum und Minimum.

Schritt eins und zwei eliminieren die Terme ohne Einfluss der betrachteten Parameter. Die Sensitivität wird durch die Differenz des Minimums und des Maximums der erhaltenen Funktion dargestellt. Um das Ergebnis für alle Parameter zu berechnen, wird der Algorithmus für jede Variable wiederholt.

Zur Veranschaulichung sei das Beispiel eines quadratischen Regressionsmodells mit Wechselwirkungen basierend auf zwei Einflussparametern gegeben. Dargestellt ist dies durch

$$f(A,B) = a + bA + cB + dA^2 + eB^2 + fAB, \quad (3.46)$$

mit A, B Parameter, $f(A,B)$ Zielfunktion und a, b, c, d, e, f Koeffizienten.

Die Sensitivität des Parameters A wird nach Algorithmus 3.9 berechnet. Zu Beginn wird die Funktion differenziert.

$$\frac{d}{dA}f(A,B) = \frac{d}{dA}(a + bA + cB + dA^2 + eB^2 + fAB) = b + \frac{1}{2}dA + fB. \quad (3.47)$$

Dann erfolgt eine Integration der differenzierten Funktion.

$$\int b + \frac{1}{2}dA + fB \, dA = bA + dA^2 + fBA. \quad (3.48)$$

Die Funktion ist durch Terme gegeben, welche vom Parameter A abhängig sind. Zur Berechnung der Sensitivität nach A , Sen_A , werden zwei Optimierungen durchgeführt.

$$\text{Sen}_A = \max(bA + dA^2 + fAB) - \min(bA + dA^2 + fAB). \quad (3.49)$$

Für die Bestimmung der Sensitivität nach B , Sen_B , werden die Schritte des Algorithmus wiederholt.

$$\text{Sen}_B = \max\left(\int \left(\frac{d}{dB}f(A,B)\right) dB\right) - \min\left(\int \left(\frac{d}{dB}f(A,B)\right) dB\right). \quad (3.50)$$

Die Minimierung und Maximierung der Funktionen erfolgt innerhalb der Schwankungsbreiten der Parameter A und B .

3.9 Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit eines Bremssystems basierend auf dem Ersatzmodell aufgezeigt. Dies ist angelehnt an die klassische Strukturversagensanalyse. Die Grundlagen der Versagensberechnung und die Ansätze der First und Second Order Reliability Method werden in der Literatur vorgestellt (Chiralaksanakul und Mahadevan [2005], Ditlevsen und Madsen [2007], Kinreghian [2000], Low [2014], Madsen u. a. [2006], Papaioannou [2012], de Rocquigny [2009] und Verderaiame [1994]). Darauf aufbauend werden Instabilitätswahrscheinlichkeiten für das Bremssystem hergeleitet.

Die Basis der Versagensanalyse bildet die Definition einer Versagensfunktion $G(\mathbf{x})$ als reellwertige Funktion von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, auf einem Gebiet $D_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Durch diese wird ein Gebiet approximiert, welches das Versagen kennzeichnet und auf komplexen Modellen und physikalischen Zusammenhängen basiert. Es werden Materialeigenschaften, Lasten, Umgebungsvariablen in \mathbf{x} und den Modellierungskoeffizienten inkludiert. $D_{\mathbf{x}}$ wird in Teilmengen unterteilt:

$$\begin{aligned}
\text{sicheres Gebiet:} & & E_s &= \{\mathbf{x} \mid G(\mathbf{x}) > 0\}, \\
\text{Grenzfläche:} & & E_l &= \{\mathbf{x} \mid G(\mathbf{x}) = 0\}, \\
\text{Versagensgebiet:} & & E_f &= \{\mathbf{x} \mid G(\mathbf{x}) < 0\}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Es existiert eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ in Bezug auf \mathbf{x} , mit der die Versagenswahrscheinlichkeit P_f des Modells berechnet wird.

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = P(E_f) = \int_{E_f} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_{\mathbf{x}}} \mathbf{1}_{G(\mathbf{x}) < 0} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \tag{3.52}$$

mit $\varphi_n(\cdot)$ n-dimensionale Standardnormalverteilungsdichtefunktion und $\mathbf{1}$ Indikatorfunktion.

$$\mathbf{1}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } G(\mathbf{u}) \leq 0, \\ 0, & \text{falls } G(\mathbf{u}) > 0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Da die Berechnung der Funktion P_f nicht direkt durchgeführt werden kann, werden unterschiedliche Approximationsmethoden beschrieben.

3.9.1 First Order Reliability Method

Zur Anwendung der First Order Reliability Method, kurz FORM, wird die Grenzfunktion $G(\mathbf{x})$ durch eine lineare Funktion angenähert und es sind normalverteilte Eingangsvariablen x_i gegeben. Die Versagenswahrscheinlichkeit aus Gleichung (3.52) wird wie folgt geschrieben:

$$P_f = \Phi(-\beta), \tag{3.54}$$

mit β Versagensindex, der durch die Zufallsvariable $Z = G(\mathbf{x})$ gegeben ist, $\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$. μ_z ist der Erwartungswert und σ_z die Varianz von Z . Zur Berechnung von β wird der Standardnormalraum \mathbf{U} benötigt. Dies ist ein Raum aus unkorrelierten und normalverteilten Variablen \mathbf{y} mit der Verteilungsdichtefunktion

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^\top \mathbf{y}\right), \tag{3.55}$$

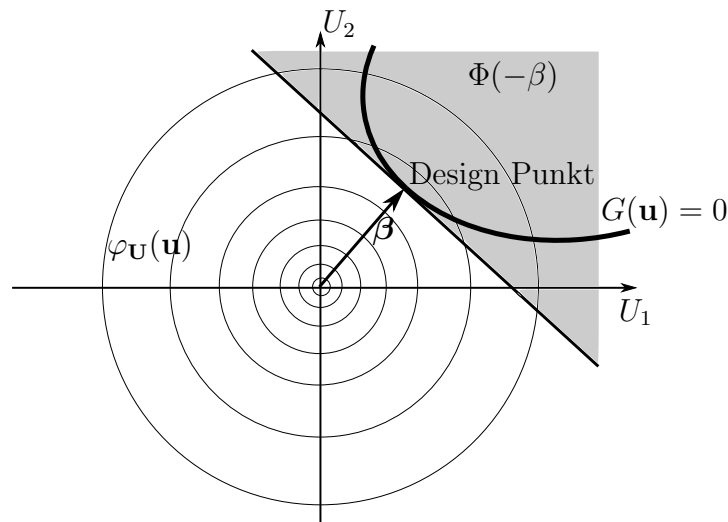


Abbildung 3.10: Grafische Darstellung des Vorgehens der First Order Reliability Method. Es wird der Abstand zwischen dem Zentrum der Verteilungen und dem Design Punkt berechnet. Grau dargestellt ist das Versagensgebiet. Die Annäherung an die Grenzfunktion $G(\mathbf{u}) = 0$ erfolgt mit einer Funktion erster Ordnung.

mit Erwartungswert 0 und der Standardabweichung. Die Definition des Versagensindex wird über den Abstand der Grenzfunktion $G(\mathbf{u}) = 0$ mit $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ vom Ursprung durchgeführt,

$$\beta = \min \left\{ \sqrt{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}} \mid G(\mathbf{u}) = 0 \right\}. \quad (3.56)$$

Dies stellt eine invariante Definition von β dar. Die Grenzfunktion ist linear in \mathbf{U} , das heißt sie ist linear in \mathbf{X} und \mathbf{X} ist Gaußverteilt. Bei Fehlen der Voraussetzung wird die Grenzfunktion linearisiert. Unter diesen Annahmen wird Gleichung (3.54) durch Gleichung (3.56) berechnet, dargestellt ist dies in Abbildung 3.10.

Ist \mathbf{x} kein Gaußvektor und $G(\mathbf{x})$ nichtlinear, muss \mathbf{x} und $G(\mathbf{x})$ in den Standardnormalraum \mathbf{U} transformiert werden. Dazu erfolgt die Berechnung von Gleichung (3.56) über die Euklidische Norm eines Design Punkt \mathbf{u}^* durch Lösung eines quadratischen Optimierungsproblems mit Gleichungsbeschränkung,

$$\mathbf{u}^* = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \mid G(\mathbf{u}) = 0 \right\}. \quad (3.57)$$

\mathbf{u}^* , der Design Punkt, wird auf die Grenzfläche $G(\mathbf{u}) = 0$ mit minimalem Abstand zum Ursprung des Standardnormalraums, dem Mittelwert von \mathbf{U} , projiziert und besitzt die höchste Wahrscheinlichkeitsdichte für eine beliebige Realisierung im Versagensgebiet. Dies gilt, weil die Verteilungsdichtefunktion rotationssymmetrisch ist. Da \mathbf{u}^* der Punkt mit der größten Versagenswahrscheinlichkeit ist, hat das Gebiet um \mathbf{u}^* den größten Beitrag zum Integral

(3.52). Es erfolgt zur Approximation der Versagenswahrscheinlichkeit (3.54) eine Linearisierung der Grenzfunktion in \mathbf{U} um den Punkt \mathbf{u}^* . Für die Linearisierung von $G(\mathbf{u})$ bei \mathbf{u}^* ergibt sich,

$$G(\mathbf{u}) \approx G_1(\mathbf{u}) = \nabla G(\mathbf{u}^*)^\top (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*), \quad (3.58)$$

mit $\nabla G(\mathbf{u})$ Gradient von $G(\mathbf{u})$ in Bezug auf \mathbf{u} .

Der Punkt \mathbf{u}^* wird durch Optimierungsalgorithmen berechnet. Beispiele sind die sequenziell quadratische Optimierung (Nocedal und Wright [2006, Kapitel 18, Seite 529]), die HL-RF Methode (Hasofer und Lind [1974]) und die Gradienten-Projektions-Methode (Luenberger und Ye [2008, Kapitel 12.4, Seite 367ff]).

3.9.2 Second Order Reliability Method

Ist die gegebene Grenzfläche $G(\mathbf{u})$ nichtlinear, entstehen bei der Linearisierung Fehler. Deshalb wird am Design Punkt eine Approximation zweiter Ordnung durch eine Taylor Entwicklung um \mathbf{u}^* durchgeführt. Dies stellt die Second Order Reliability Method, kurz SORM, dar.

$$G_2(\mathbf{u}) = \nabla G(\mathbf{u}^*)^\top (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^\top \nabla^2 G(\mathbf{u}^*) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*), \quad (3.59)$$

mit $\nabla^2 G(\mathbf{u}^*)$ Hessematrix von $G(\mathbf{u})$ am Design Punkt \mathbf{u}^* .

Zur Lösung der Gleichung wird das Koordinatensystem mit $\mathbf{v} = \mathbf{R}_m \mathbf{u}$ rotiert, wobei \mathbf{R}_m die Rotationsmatrix ist, sodass die Richtung v_n durch den Ursprung und den Design Punkt verläuft. Der Designpunkt ist im Raum \mathbf{V} durch $\mathbf{v}^* = [0, \dots, 0, \beta]^\top$ mit β Versagensindex aus der FORM gegeben.

Mit $G_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \frac{G(\mathbf{R}_m^\top \mathbf{v})}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|}$ gilt für $G_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$,

$$G_{\mathbf{v}2}(\mathbf{v}) = \beta - v_n + \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)^\top \mathbf{A} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*), \quad (3.60)$$

mit $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{R}_m \nabla^2 G(\mathbf{u}^*) \mathbf{R}_m^\top}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|}$. Sei $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ mit den ersten $n-1$ Zeilen und Spalten von \mathbf{A} , dann gilt die Approximation,

$$G_{\mathbf{v}2} \approx \beta - v_n + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{A}_{11} \mathbf{v}_1, \quad (3.61)$$

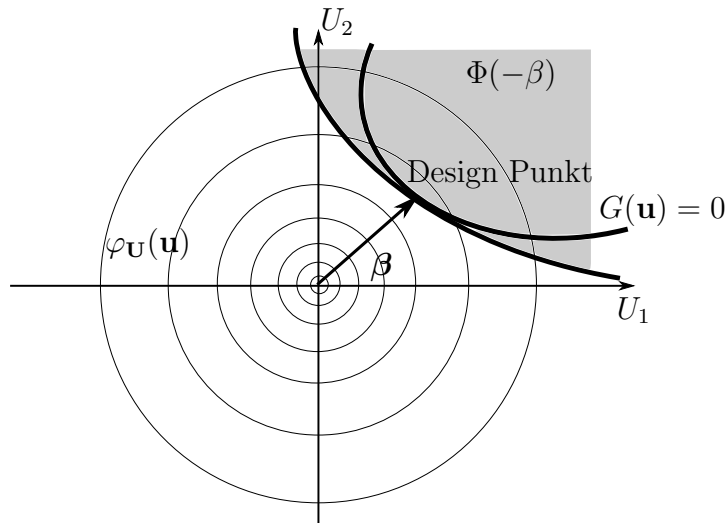


Abbildung 3.11: Grafische Darstellung des Vorgehens der Second Order Reliability Method. Es wird der Abstand zwischen dem Zentrum der Verteilungen und dem Design Punkt berechnet. Grau dargestellt ist das Versagensgebiet. Die Annäherung an die Grenzfläche $G(\mathbf{u}) = 0$ erfolgt mit einer Funktion zweiter Ordnung.

wobei \mathbf{v}_1 die ersten $n - 1$ Elemente von \mathbf{v} enthält. Wird eine weitere Rotation von \mathbf{v}_1 auf die ursprünglichen Koordinaten von \mathbf{A}_{11} durchgeführt, gilt für $G_{\mathbf{v}2}(\mathbf{v})$,

$$G_{\mathbf{v}2}(\mathbf{v}) \approx \beta - v_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i'^2, \quad (3.62)$$

mit κ_i Eigenwerte von \mathbf{A}_{11} und v_i' transformierte Koordinaten. Es wird eine Parabel mit Tangente zur Grenzfläche am Design Punkt definiert, wobei κ_i die ursprünglichen Krümmungen der Grenzfläche am Design Punkt darstellen.

Die Second Order Reliability Method liefert vergleichbar zur First Order Reliability Method eine Approximation der Versagenswahrscheinlichkeit basierend auf Gleichung (3.54). Es ist die Berechnung der Hessematrix $\nabla^2 G(\mathbf{u}^*)$ der Grenzfläche am Design Punkt \mathbf{u}^* notwendig. Die Auswertung wird durch zusätzliche Läufe des Finiten Element Modells, die BFGS Methode (Bogges und Tolle [1995]) oder eine Optimierung über die FORM durchgeführt.

Die Versagenswahrscheinlichkeit der SORM wird durch folgende Formel berechnet, welche asymptotisch exakt für große Werte von β ist,

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_i)^{-\frac{1}{2}} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 - \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \kappa_i \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.63)$$

Der zweite Teil ist exakter als der erste und liefert eine gute Approximation für $\beta \geq 1$.

Alternativ wird Tvedt's Formel (Tvedt [1990]) benutzt.

$$P_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\beta z + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \tan^{-1}(-\kappa_i z)\right) \frac{\exp(-\frac{1}{2}z^2)}{z \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i^2 z^2)\right]^{\frac{1}{4}}} dz. \quad (3.64)$$

Diese liefert die exakte Lösung des Wahrscheinlichkeitsintegrals auf dem Gebiet aus Gleichung (3.54) für ein einfach gefaltetes Integral. Ein einfach gefaltetes Integral $f \star g$ für zwei komplexwertige Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, mit L^1 Lebesguemenge, wird dargestellt durch

$$(f \star g)(e^{is}) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})g(e^{i(s-t)}) \frac{dt}{2\pi} \quad (3.65)$$

für eine Menge $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ (Werner [2005, Kapitel II.4, Seite 77]).

3.9.3 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Bei der Umsetzung der First und Second Order Reliability Method wird die Monte Carlo Methode angewendet, vergleiche Abschnitt 3.1. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$P_f = \int_{G(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{D_{\mathbf{u}}} \mathbf{1}(\mathbf{u}) \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = E[\mathbf{1}(\mathbf{u})], \quad (3.66)$$

mit $D_{\mathbf{u}} = \mathbb{R}^n$, $E[\cdot]$ Erwartungswert und $\mathbf{1}(\mathbf{u})$ Indikatorfunktion,

Die Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit erfolgt durch eine Generierung von N unabhängigen Stichproben \mathbf{u}_k , $k = 1, \dots, N$, für $\varphi_n(\mathbf{u})$ und Betrachtung des Mittelwerts von $\mathbf{1}(\mathbf{u})$,

$$\hat{P}_f = \hat{E}[\mathbf{1}(\mathbf{u})] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}(\mathbf{u}_k). \quad (3.67)$$

\hat{P}_f ist ein erwartungstreuer Schätzer von P_f , da $E[\hat{P}_f] = P_f$. Die Varianz des Schätzers ist gegeben durch

$$\text{Var}(\hat{P}_f) = \text{Var}\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}(\mathbf{u}_k)\right] = \frac{1}{N} \text{Var}[\mathbf{1}(\mathbf{u})] = \frac{1}{N} \left(E[\mathbf{1}(\mathbf{u})^2] - E[\mathbf{1}(\mathbf{u})]^2 \right), \quad (3.68)$$

da die Zufallsvariablen $\mathbf{1}(\mathbf{u}_k)$ von unabhängigen Stichproben von identisch verteilten Variablen stammen. Mit $P_f = E[\mathbf{1}(\mathbf{u})]$ und $(\mathbf{1}(\mathbf{u}))^2 = \mathbf{1}(\mathbf{u})$ gilt,

$$\text{Var}(\hat{P}_f) = \frac{1}{N} P_f (1 - P_f). \quad (3.69)$$

Der Variationskoeffizient $CV_{\hat{P}_f}$ ist

$$CV_{\hat{P}_f} = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{P}_f)}}{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}} \approx \frac{1}{\sqrt{NP_f}}, \quad (3.70)$$

für kleine Werte von P_f . Diese sind bei der Berechnung von Instabilitätswahrscheinlichkeiten gegeben. Im vorliegenden Fall ist insbesondere das zweite Gleichheitszeichen von Interesse.

Wird ein Beispiel aus der Versagenswahrscheinlichkeitsberechnung mit einer Größenordnung von $P_f = 10^{-k}$ und dem Ziel eines Variationskoeffizienten von 0.1 angenommen, werden $N = 10^{k+2}$ Samples benötigt. Da in der Strukturmechanik eine kleine Versagenswahrscheinlichkeit zu erreichen ist, werden große Stichprobenumfänge berechnet. Aus diesem Grund ist Monte Carlo ineffizient, falls jede Stichprobe aus einer Finite Elemente Simulation besteht. Bei der Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit von Bremssystemen werden weniger Stichproben benötigt und die Auswertung basiert auf Ersatzmodellen. Deshalb wird bei der Bestimmung von Instabilitätswahrscheinlichkeiten auf Monte Carlo zurückgegriffen. Der Variationskoeffizient wird als Fehlermessung für die Simulation benutzt. Ziel ist mit der Anzahl an Stichproben einen Koeffizienten von 0.05 bis 0.1 zu erreichen. Im Beispiel der Instabilitätswahrscheinlichkeit ist die Grenze empirisch 1% (BMW Group [2016]) und es werden 10000 Samples benötigt.

3.9.4 Auswertung der Instabilitätswahrscheinlichkeiten

Aufbauend auf der in Abschnitt 3.9.3 hergeleiteten Versagenswahrscheinlichkeit werden äquivalent Instabilitätswahrscheinlichkeiten für Bremssysteme definiert. Zur Auswertung der nichtlinearen Regressionsfunktion wird wie in Kapitel 3.9.3 beschrieben ein Monte Carlo Sampling verwendet. Es werden verschiedene Definitionen betrachtet. Es erfolgt die Anga-

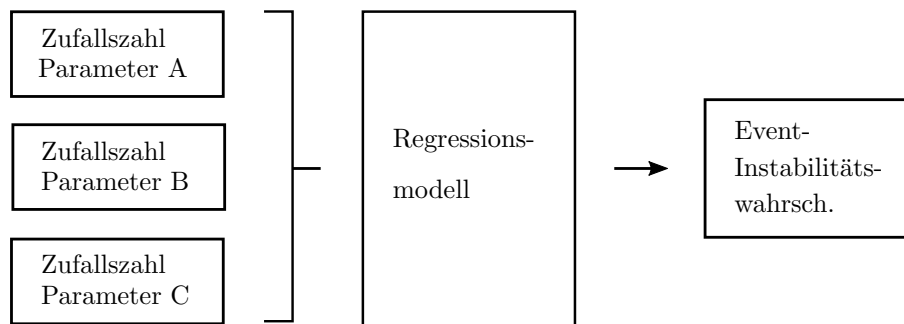


Abbildung 3.12: Darstellung der Berechnung der Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit am Beispiel von drei Eingangsparametern.

be der Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit, der System-Instabilitätswahrscheinlichkeit und der Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit.

Definition 3.10 (Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit)

Die Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit gibt an, welcher Anteil der Bremsungen Instabilitäten verursacht.

Bei der Umsetzung kommt folgender Algorithmus zum Einsatz.

Algorithmus 3.11 (Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit)

1. Generierung von Zufallsvariablen für alle Regressionsparameter nach definierten Eingangsverteilungen,
2. Übergabe der Zufallsvariablen an Regressionsmodell und Berechnung der Zielgröße für die gegebene Konfiguration,
3. Einteilung der Ergebnisse anhand der Zielgröße zur Unterscheidung von instabilen und stabilen Konfigurationen,
4. Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit durch Vergleich instabiler und stabiler Experimente.

Das Vorgehen ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Als Ergebnis wird der Anteil an instabilen Bremsungen ausgegeben. Neben der Event- kann die System-Instabilitätswahrscheinlichkeit betrachtet werden.

Definition 3.12 (System-Instabilitätswahrscheinlichkeit)

Die System-Instabilitätswahrscheinlichkeit gibt an, welcher Anteil der Bremssysteme Instabilitäten verursacht.

Dafür sind am Algorithmus Anpassungen nötig.

Algorithmus 3.13 (System-Instabilitätswahrscheinlichkeit)

1. *Generierung von Zufallsvariablen für Material- und Geometrieparameter (zum Beispiel Elastizitätsmoduln und Dichten),*
2. *Erstellung von Ersatzmodell abhängig von den Umgebungsparametern (zum Beispiel Reibwert und Bremsdruck),*
3. *Generierung von Zufallsvariable für Umgebungsparameter und Einsetzen in Ersatzmodell,*
4. *Wiederholung von Schritt 3 für Kombinationen von Umgebungsparametern,*
5. *Einteilung der Ergebnisse anhand der Evaluation aus Schritt 3 und 4 in Systeme mit und ohne Instabilität,*
6. *Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit durch Vergleich der Anzahl von instabilen und stabilen Systemen.*

Die Visualisierung des Algorithmus ist in Abbildung 3.13 gegeben. Das Resultat spiegelt den Anteil der instabilen Systeme wider.

Um die Fragestellung zu beantworten, wie viel Systeme zu welchem Anteil instabil sind, erfolgt eine Kombination der Event- und System-Instabilitätswahrscheinlichkeit. Als Basis dient der Algorithmus zur Berechnung der System-Instabilitätswahrscheinlichkeit.

Algorithmus 3.14 (Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit)

1. *Generierung von Zufallsvariablen für Material- und Geometrieparameter,*
2. *Erstellung von Ersatzmodell abhängig von Umgebungsparametern,*
3. *Generierung von Zufallsvariablen für Umgebungsparameter und Einsetzen in Ersatzmodell,*
4. *Wiederholung von Schritt 3 für Kombinationen von Umgebungsparametern,*
5. *Berechnung von Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit für jedes generierte Bremssystem,*
6. *Einteilung der Systeme nach Häufigkeit und Instabilitätsaufreten.*

Durch diesen Algorithmus ist eine Übersicht gegeben, wie viele der möglichen Parameterkombinationen im Zusammenbau des Bremssystems zu welchem Anteil instabil sind, vergleiche Abbildung 3.14. Die Aussage ist, dass im gegebenen Beispiel 50% der Systeme bei 8% der Bremsungen instabil sind oder 20% der Systeme bei 20% der Bremsungen. 12% der Systeme sind unabhängig von den Umgebungsparametern stabil.

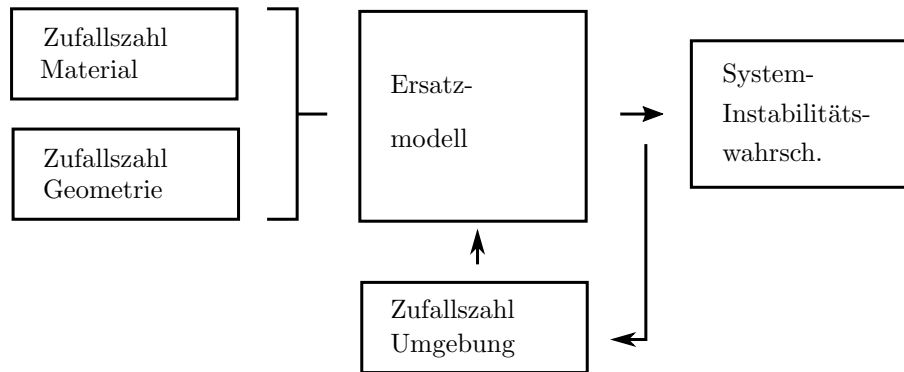


Abbildung 3.13: Darstellung der Berechnung der System-Instabilitätswahrscheinlichkeit am Beispiel von einem Material-, Geometrie- und Umgebungsparameter.

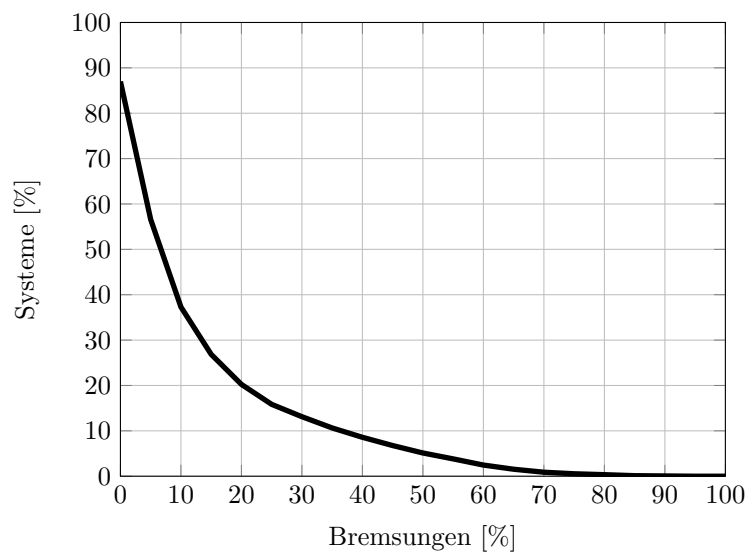


Abbildung 3.14: Darstellung des Ergebnisses der Berechnung der Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit. Aus diesem Diagramm wird abgelesen, welcher Anteil der Bremssysteme zu welchem Anteil instabil ist.

Bei Betrachtungen von Bremssystemen treten mehr simulativ berechnete Instabilitäten als experimentell gemessene Geräuschevents auf (Kruse u. a. [2015]). Als Gründe dafür werden in Kruse u. a. [2015] verschiedene Punkte angegeben: Modellierungsfehler, die unzureichende Abbildung von Dämpfungen oder hinreichend kleine Grenzyklen der Schwingungen, sodass diese im Test nicht als Geräusch erkannt werden. Daraus sind die Modellierungsfehler nur eingeschränkt gültig, da diese auch Instabilitäten eliminieren können. Die vernachlässigten Dämpfungen und die Grenzyklen werden im Algorithmus miteinbezogen.

Die Simulationen zur Robustheitsbetrachtung werden ohne Betrachtung der Material- und Reibungsdämpfung durchgeführt. Das System wird kritischer als bei der experimentellen Untersuchung analysiert. Um die Instabilitätswahrscheinlichkeit in Relation zu einer Geräuschwahrscheinlichkeit zu bringen, sind Anpassungen an dem zu betrachtenden Grenzwert der negativen Dämpfung nötig. Zur Herleitung einer allgemeingültigen Vorschrift werden verschiedene Simulationen und Prüfstandsprotokolle ausgewertet (BMW Group [2016]). Alle Instabilitäten mit einer negativen Dämpfung kleiner 1% werden bei der Auswertung vernachlässigt und als stabil angenommen.

4 Entwicklung von Zielfunktionen

Vor der Herleitung verschiedener Zielfunktionen wird der Stabilitätsgrad (Müller und Schiehlen [1976, Kapitel 6.2.1, Seite 169]), oder auch absolute Stabilitätsreserve, definiert. Dieser dient zur Quantifizierung der Stabilität der Moden. Instabilitäten mit $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ werden zur Herleitung des Stabilitätsgrads nicht betrachtet.

Definition 4.1 (Stabilitätsgrad)

Der Stabilitätsgrad oder die absolute Stabilitätsreserve gibt den Abstand d_0 von der imaginären Achse des nächstgelegenen Eigenwerts an.

$$d_0 = - \max_{i=1, \dots, n} \text{Re}(\lambda_i).$$

Dargestellt ist der Stabilitätsgrad in Abbildung 4.1. Für schwach gedämpfte Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten, $\lambda_i = \delta_i \pm i\omega_i$, $\delta_i < 0$, existiert eine Definition des Dämpfungsgrads oder der relativen Stabilitätsreserve D_0 , vergleiche Abbildung 4.2 mit $D_0 = \sin \lambda$. Dann gilt,

$$D_0 = - \max_{i=1, \dots, n} \frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}. \quad (4.1)$$

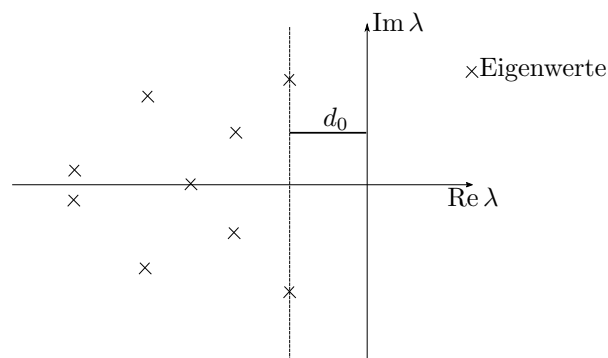


Abbildung 4.1: Darstellung des Stabilitätsgrads. Definiert ist dieser durch den minimalen Abstand d_0 der Eigenwerte von der imaginären Achse.

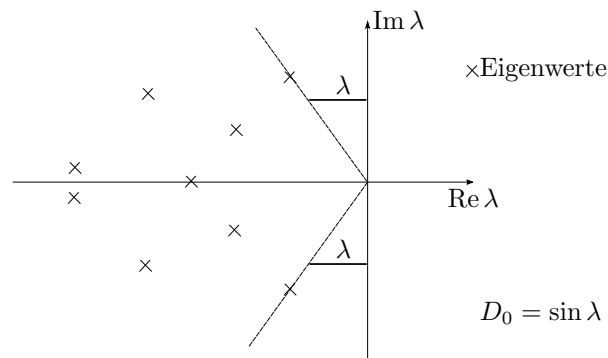


Abbildung 4.2: Darstellung des Dämpfungsgrads. Definiert ist dieser durch den Winkel λ des Eigenwerts mit maximalem Realteil.

4.1 Normberechnungen

Eine Art der Simulationsbewertung ist eine Zielfunktionsberechnung über Normen (Alt [2012, Kapitel 0.4, Seite 13f]). Eine Unterscheidung ist hinsichtlich des zu betrachtenden Frequenzspektrums nötig. Die Berechnung ist über das gesamte Modenspektrum, einen eingeschränkten Frequenzbereich und einer einzelnen Instabilität möglich. In diesem Abschnitt wird das allgemeine Vorgehen beschrieben.

4.1.1 Norm für ein Frequenzspektrum

Bei der Betrachtung des gesamten Modenspektrums wird die Norm über alle negativen Dämpfungen aus dem Simulationsergebnis des Frequenzbereichs berechnet, vergleiche Abbildung 4.3. Frequenzen unter 1 kHz werden nicht betrachtet, da für diesen Bereich die Modelle nicht validiert sind und die Geräusche nicht dem Bremsenquietschen zugeordnet werden. Die Schwelle des hörbaren Bereichs liegt zwischen 15 und 16 kHz, was die Grenze des in der Simulation betrachteten Bereichs darstellt.

Nach Abschluss der Simulationen wird zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse ein Modenbereich zur Normberechnung definiert. Dazu wird aus allen experimentell erhaltenen Ergebnissen die kleinste Modennummer identifiziert, die eine zugehörige Frequenz größer 1 kHz besitzt. Ebenso wird die instabile Mode bestimmt, die über alle Simulationen gesehen die größte Modennummer besitzt. Zur Auswertung werden diejenigen Moden betrachtet, welche zwischen der minimalen und maximalen Nummer liegen.

Ein Überblick der verschiedenen Normen ist in Alt [2012, Kapitel 0.5, Seite 14] und Zeidler [2013, Kapitel 1.3, Seite 252 und Kapitel 7.5, Seite 913] gegeben. Bei der Maximumnorm

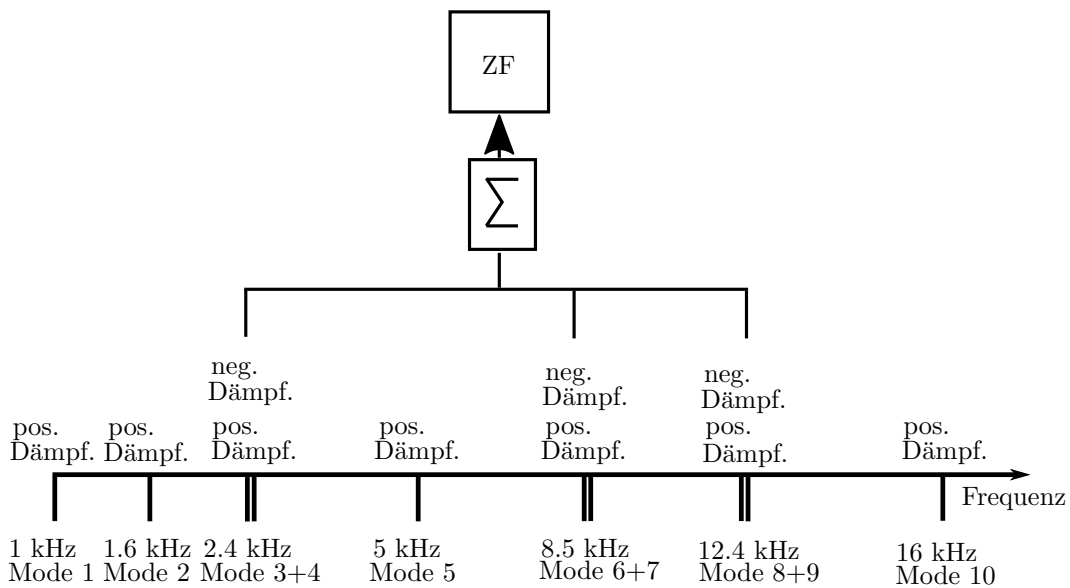


Abbildung 4.3: Beispielhafte Veranschaulichung der Zielfunktionsberechnung mit einer Normauswertung. Die Zielfunktion wird über alle Moden mit negativen Dämpfungswerten berechnet. Die Summe charakterisiert die Normberechnung und stellt die Maximums-, die Summen- oder die Euklidische Norm dar.

wird aus den vorliegenden negativen Dämpfungen der betragsmäßig größte Wert bestimmt,

$$zf_{\max} = \max_{i=1, \dots, N} d_i. \quad (4.2)$$

Für die Summennorm werden alle Beträge der negativen Dämpfungen aufsummiert.

$$zf_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^N d_i. \quad (4.3)$$

Zur Berechnung der euklidischen Norm wird neben einer Summierung über die Quadrate der negativen Dämpfungen die Wurzel des Werts gezogen.

$$zf_{\text{euk}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N d_i^2}. \quad (4.4)$$

Es werden jeweils alle Instabilitäten im Frequenzbereich zur Berechnung benutzt.

Bei dem Vorgehen wird der gesamte Frequenzbereich bewertet, einzelne Instabilitäten werden nicht betrachtet. Durch den Einfluss aller negativen Dämpfungen werden keine Rückschlüsse auf die Unterschiede der Instabilitäten in den einzelnen Experimenten gezogen. Eine stabile Konfiguration ohne negative Dämpfungen wird durch den Wert Null angezeigt. Es wird keine Aussage über den Grad der Stabilität getroffen, vergleiche Abbildung 4.4.

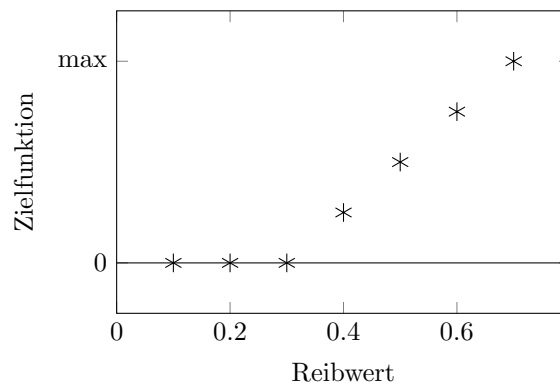


Abbildung 4.4: Darstellung einer Auswertung mit der Normzielfunktion. Der stabile Bereich $\mu \leq 0.3$ wird durch den Zielfunktionswert 0 dargestellt und es erfolgt keine Angabe des Stabilitätsgrads.

4.1.2 Norm für eine einzelne Frequenz

Mit der Normberechnung ist es möglich eine einzelne Frequenz zu betrachten. Die Unterscheidung zwischen der Maximums-, Summen- und Euklidischen Norm entfällt, da die Normen bei Betrachtung einer einzelnen Instabilität äquivalent sind.

$$zf_{\max} = zf_{\text{sum}} = zf_{\text{euk}} = d_i. \quad (4.5)$$

Es wird die kritische Frequenz identifiziert. Zur Berechnung der Norm wird um die zu betrachtende Modennummer ein Band einer zuvor definierten Anzahl an Moden in beide Richtungen gelegt, da eine Änderung der Modennummer der instabilen Frequenz über die Experimente möglich ist. Schematisch dargestellt ist das Vorgehen in Abbildung 4.5. Damit wird Verschiebungen durch entstehende oder entfallende Moden Rechnung getragen. Um einzig die gewählte Instabilität zu betrachten, ist in diesem Band keine weitere Instabilität vorhanden. Durch die Konstruktion des Vorgehens wird eine instabile Mode betrachtet. Es ergeben sich zu der Frequenz Informationen zum Stabilitätsverhalten unter der Parametervariation.

Es sind große Veränderungen an anderen Moden möglich, welche nicht in die Bewertung einfließen. Bei der Auswertung können viele Experimente mit dem Wert Null auftreten, da die betrachtete Frequenz für Konfigurationen mit einer positiven Dämpfung belegt ist. Stabile Bereiche werden bei Darstellung der Zielfunktion und bei der Regressionsberechnung durch ein Plateau in der Null angezeigt, vergleiche Abbildung 4.4.

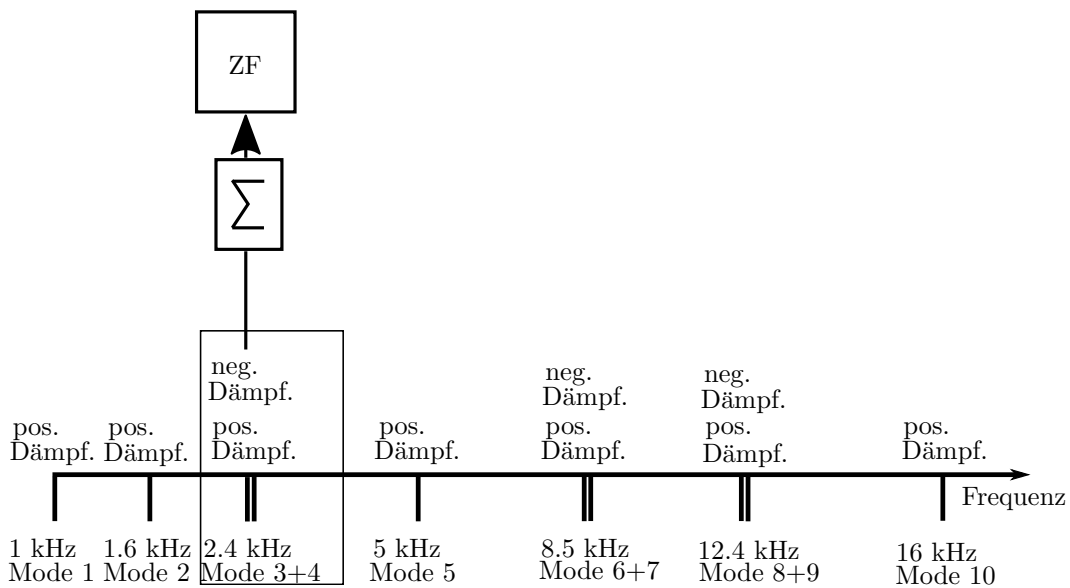


Abbildung 4.5: Beispielhafte Veranschaulichung der Zielfunktionsberechnung auf Basis der Normauswertung. Die Zielfunktion wird über eine Mode mit negativem Dämpfungswert berechnet, positiv gedämpfte Moden haben keinen Einfluss. Die Summe charakterisiert die Normberechnung. In diesem Fall sind die Normen gleich.

4.2 Modenkopplung

Durch die fehlende Gewichtung der Stabilität ergeben sich mit der Normauswertung Einschränkungen bei der Erstellung des Regressionsmodells. Deshalb werden Ansätze entwickelt, welche die Stabilität charakterisieren. Es wird eine Zielfunktion durch Betrachtung von Modenkopplungen entwickelt, dem primären Anregemechanismus von Bremsenquietschen (Hoffmann und Gaul [2008]).

Bei Analyse einer bestimmten Instabilität wird für diese Mode eine Zielfunktion über den Vergleich mit der koppelnden Mode berechnet. Durch einen Abgleich der Schwingformen werden die zugehörigen Modenummern in den anderen Simulationsläufen ermittelt. Der Abgleich erfolgt mit dem Modal Assurance Criterion, zur Berechnung der Zielfunktion werden die Real- und Imaginärteile der Moden herangezogen.

4.2.1 Modal Assurance Criterion

Das Modal Assurance Criterion (Allemang [2003], Pastor u. a. [2012] und Vacher u. a. [2010]), kurz MAC, ist ein Bewertungskriterium zum Vergleich von Schwingformen experimentell erhaltener oder berechneter Moden. Dies erfolgt auf Basis von deren Verschiebungsvektoren.

\mathbf{M}	Massenmatrix,
μ_r	Modalvektor der Mode r ,
μ_r^\top	transponierter Vektor zu μ_r ,
μ_r^H	komplex konjugiert transponierter Vektor zu μ_r , der Hermitesche Vektor,
μ_{pr}	Modalvektor für Referenz p , das heißt des zu vergleichenden Vektors der Mode r ,
μ_{pqr}	Modalkoeffizient für Referenz p , Freiheitsgrad q und Mode r ,
$\bar{\mu}_{pr}$	komplex konjugierter Vektor von μ_{pr} .

Tabelle 4.1: Die Größen zur Beschreibung des Modal Assurance Criterion.

Das MAC wird seit den 1970er Jahren entwickelt, seine Ursprünge liegen beim Orthogonalitäts- und Pseudo-Orthogonalitätscheck.

Zur Herleitung sei die Notation aus Tabelle 4.1 gegeben. Die Beschreibung verwendet die Massenmatrix \mathbf{M} , da diese bei der Berechnung im Vergleich zu den anderen Matrizen die höchste Genauigkeit aufweist. Die Durchführung mit der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} oder der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist ebenfalls möglich.

Der Orthogonalitätscheck ist wie folgt gegeben:

$$\text{für } r \neq s : \quad \mu_r^\top \mathbf{M} \mu_s = 0, \quad (4.6)$$

$$\text{für } r = s : \quad \mu_r^\top \mathbf{M} \mu_s = M_r. \quad (4.7)$$

Dabei werden zwei experimentell bestimmte Moden verglichen. Wird eine analytische Berechnung miteinbezogen, wird der Pseudo-Orthogonalitätscheck angewendet.

$$\text{für } r \neq s : \quad \mu_r^H \mathbf{M} \mu_s = \bar{\mu}_r^\top \mathbf{M} \mu_s = 0, \quad (4.8)$$

$$\text{für } r = s : \quad \mu_r^H \mathbf{M} \mu_s = \bar{\mu}_r^\top \mathbf{M} \mu_s = M_r. \quad (4.9)$$

Auf Basis der Orthogonalität wird der Modal Scale Factor, MSF, und das Modal Assurance Criterion definiert. Der MSF führt eine Normierung der Eigenvektoren durch, sodass diese untereinander vergleichbar sind. Das MAC liefert einen Vergleich der Linearität und der Konsistenz der Vektoren untereinander.

$$\text{MSF}_{cdr} = \frac{\mu_{cr}^H \bar{\mu}_{dr}}{\mu_{dr}^H \bar{\mu}_{dr}}, \quad (4.10)$$

$$\text{MAC}_{cdr} = \frac{|\mu_{cr}^H \bar{\mu}_{dr}|^2}{\mu_{cr}^H \bar{\mu}_{cr} \mu_{dr}^H \bar{\mu}_{dr}}. \quad (4.11)$$

³⁵Vergleiche Allemang [2003, Seite 15f] und Pastor u. a. [2012, Seite 544].

Das MAC ist ein statistischer Indikator für die Vergleichbarkeit der Vektoren. Der Wertebereich ist das Intervall $[0; 1]$. Bei 0 haben die Vektoren keine Konsistenz zueinander, beim Wert 1 besteht eine volle Übereinstimmung zwischen den Vektoren.

4.2.2 Berechnung der Modenkopplungszielfunktion

Die Berechnung der Modenkopplungszielfunktion erfolgt über die Differenzen von Real- und Imaginärteilen eines Modenpaars. Es wird die Zielfunktion für eine einzelne Frequenz berechnet. Sei im Folgenden die instabile Mode mit μ_1 und die koppelnde und stabile Mode mit μ_2 sowie die Zielfunktion mit $f_z(\mu_1, \mu_2)$ bezeichnet. Die Berechnung der Zielfunktion wird über eine Quadratur der Differenzen von Real- und Imaginärteil durchgeführt.

$$f_z(\mu_1, \mu_2) = |\operatorname{Re}(\mu_1) - \operatorname{Re}(\mu_2)|^2 - |\operatorname{Im}(\mu_1) - \operatorname{Im}(\mu_2)|^2. \quad (4.12)$$

Werden Bremssysteme unter Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} in Gleichung (2.11) berechnet, ergibt sich bei der Zielfunktion eine der beiden Differenzen zu Null. Im stabilen Fall sind die Realteile gleich, im instabilen Fall die Imaginärteile. Die Zielfunktion besitzt für stabile Moden einen negativen Wert, somit erfolgt eine Angabe des Grads der Stabilität.

Mit Erweiterung des Wertebereichs der Zielfunktion auf negative Werte wird das Systemverhalten im Regressionsmodell besser als bei den Normauswertungen charakterisiert. Die Stabilität der Bereiche wird durch das Vorzeichen definiert und die Regessionsmodelle besitzen eine bessere Aussagekraft als bei Verwendung der Norm. Es tritt bei der Auswertung der Versuchspläne eine Verbesserung der Modellqualität gegenüber der Normberechnung ein. Durch die Berechnungsvorschrift (4.12) ohne Mittelung über die Frequenz ist keine Erweiterung auf mehrere Moden möglich.

4.3 Zielfunktionen für ein Frequenzspektrum

Die Modenkopplungszielfunktion wird auf ein Frequenzspektrum erweitert. Dazu werden verschiedene Ansätze aufgezeigt. Es wird angenommen, dass die Zielfunktion über eine fest definierte Anzahl an Modenpaaren aufsummiert wird.

4.3.1 Allgemeines Vorgehen zur Berechnung

Zur Berechnung der Zielfunktion für ein Frequenzspektrum werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Simulation des Modells mit Nominalwerten,
2. Identifikation der instabilen Frequenzen und Zuordnung der Modenummern,
3. Generierung des Versuchsplans mit Parametervariationen,
4. Simulation der Experimente,
5. Anwendung des MAC zwischen Basislauf und den Versuchen mit Parametervariationen,
6. Zuordnung der Moden anhand des MAC,
7. Berechnung der Zielfunktion.

Die Aufwandsabschätzung ergibt sich wie folgt. Es müssen bei einem Versuchsplan mit n Experimenten $n + 1$ Simulationen berechnet werden. Dies entspricht dem Versuchsplan und dem Nominalwert. Dann werden Auswertungen des MAC zwischen der Nominalrechnung und den n Versuchen durchgeführt.

Bei der Bewertung werden nur instabile Moden aus dem Nominalmodell betrachtet. Eventuelle Instabilitäten, die in Experimenten beim Durchlauf des Versuchsplans auftreten, werden nicht berücksichtigt. Werden die aus Gleichung (4.12) erhaltenen Ergebnisse für alle Modenpaare aufsummiert, ergeben sich Summanden mit positivem und negativem Vorzeichen. Es ist keine Bewertung möglich, da sich diese gegenseitig aufheben können.

Aus diesem Grund wird eine Zielfunktion entwickelt, welche eine gegenseitige Auslöschung von Termen verhindert, unabhängig vom MAC ist und eine Gewichtung über die Frequenzen besitzt.

4.3.2 Vorstellung von möglichen Zielfunktionen

Es werden fünf Ansätze für die Erweiterung der Zielfunktion auf ein Frequenzspektrum aufgezeigt. Das Ziel ist, Funktionen zu finden, welche zur Bewertung der Simulationen geeignet sind.

Die erste Möglichkeit ist die Addition von Einzelwerten der Zielfunktion (4.12) zu einer Gesamtzielfunktion.

$$zf_1(\mu) = \sum_{i=1}^n \left((\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i}))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i}))^2 \right), \quad (4.13)$$

mit n Anzahl der betrachteten Modenpaare. Die Indizes eins und zwei stehen für die stabile und instabile Mode. Neben der Addition werden die erhaltenen Ergebnisse im Folgenden durch die Frequenzen normiert. Das erfolgt in linearer oder quadratischer Form.

Zu Beginn sei ein linearer Zusammenhang zwischen den Real- und Imaginärteilen gegeben. Dieser ist über die Frequenzen gemittelt, um eine vergleichbare Bewertung im gesamten Frequenzspektrum zu erhalten.

$$zf_2(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{|\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i})| - |\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i})|}{\frac{1}{2}(f(\mu_{1,i}) + f(\mu_{2,i}))}, \quad (4.14)$$

wobei $f(\mu)$ die Frequenz der Mode angibt. Die Gewichtung der Frequenzen kann auch quadratisch erfolgen.

$$zf_3(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{|\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i})| - |\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i})|}{\left(\frac{1}{2}(f(\mu_{1,i}) + f(\mu_{2,i}))\right)^2}. \quad (4.15)$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Quadratur der Differenzen der Real- und Imaginärteile.

$$zf_4(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{(\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i}))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i}))^2}{\frac{1}{2}(f(\mu_{1,i}) + f(\mu_{2,i}))}. \quad (4.16)$$

Als Letztes gehen sowohl Zähler als auch Nenner quadratisch in die Zielfunktion ein.

$$zf_5(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{(\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i}))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i}))^2}{\left(\frac{1}{2}(f(\mu_{1,i}) + f(\mu_{2,i}))\right)^2}. \quad (4.17)$$

Die fünf vorgestellten Zielfunktionen werden anhand Kriterien, welche im folgendem Abschnitt aufgezeigt werden, hinsichtlich ihrer Eignung zur Evaluation der durchgeführten Simulationen geprüft.

4.3.3 Bewertung der Zielfunktionen

Die Zielfunktionen werden bewertet, inwieweit sie zur Beschreibung des Verhaltens von Bremssystemen geeignet sind. Es sind zwei Eigenschaften von Bedeutung:

- Die Zielfunktion muss eine Proportionalität zur negativen Dämpfung der instabilen Moden aufweisen.
- Die Zielfunktion darf keine Abhängigkeit von der betrachteten Frequenz besitzen, um über das ganze Frequenzspektrum vergleichbar zu sein.

Bei der Betrachtung der Zielfunktionen sind folgende Zusammenhänge gegeben. d stellt die negative Dämpfung der Moden dar, die Frequenz f wird über den Imaginärteil ausgedrückt.

$$d = -\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}, \quad (4.18)$$

$$f = \frac{\operatorname{Im}(\mu)}{2\pi}. \quad (4.19)$$

Unter der Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, gelten aufgrund der Annahme, dass μ_1 und μ_2 koppeln, folgende Zusammenhänge:

$$\operatorname{Re}(\mu) := \operatorname{Re}(\mu_1) = -\operatorname{Re}(\mu_2), \quad (4.20)$$

$$\operatorname{Im}(\mu) := \operatorname{Im}(\mu_1) = \operatorname{Im}(\mu_2), \quad (4.21)$$

$$f(\mu) := f(\mu_1) = f(\mu_2). \quad (4.22)$$

Im weiteren Verlauf werden die Quotienten der Zielfunktion zur negativen Dämpfung angegeben, um deren Proportionalität zu prüfen. Dazu wird ein Summand der Gleichungen (4.13) bis (4.17) betrachtet und mit den Gleichungen (4.20) bis (4.22) vereinfacht. Unter der Annahme, dass μ_1 die instabile Mode mit Realteil größer Null angibt, wird die negative Dämpfung d mit einem Wert kleiner Null angegeben, $d < 0$.

Es wird mit der Addition über alle Zielfunktionen der einzelnen Modenpaare ohne Gewichtung begonnen, vergleiche Gleichung (4.13). Durch Anwendung von Gleichung (4.20) und (4.21) ergibt sich folgende Form:

$$zf_1(\mu) = 4 \operatorname{Re}^2(\mu). \quad (4.23)$$

Der Quotient zwischen Zielfunktion und negativer Dämpfung ist gegeben durch:

$$\frac{zf_1(\mu)}{d} = \frac{4 \operatorname{Re}^2(\mu)}{-\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}} = -2 \operatorname{Re}(\mu) \operatorname{Im}(\mu) = -4\pi f(\mu) \operatorname{Re}(\mu). \quad (4.24)$$

Die Proportionalität zwischen Zielfunktion und Dämpfung ist abhängig von der betrachteten Frequenz. Somit ist diese nicht für verschiedene Frequenzen vergleichbar und ist zur Bewertung ungeeignet.

Die nächste Zielfunktion (4.14) wird ebenso vereinfacht. Zusätzlich wird Gleichung (4.22) angewendet.

$$zf_2(\mu) = \frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{f(\mu)}. \quad (4.25)$$

Es wird der Quotient zur Dämpfung berechnet.

$$\frac{zf_2(\mu)}{d} = \frac{\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{f(\mu)}}{-\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}} = -\frac{\operatorname{Im}(\mu)}{f(\mu)} = -2\pi. \quad (4.26)$$

Es ergibt sich ein konstanter Proportionalitätsfaktor zwischen Funktion und Dämpfung. Die Zielfunktion kann zur Bewertung herangezogen werden, da kein Frequenzeinfluss gegeben ist.

Die dritte Variante (4.15) mit quadratischem Term im Nenner wird ebenfalls geprüft.

$$zf_3(\mu) = \frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{f^2(\mu)}. \quad (4.27)$$

Die Quotientenberechnung zur negativen Dämpfung ergibt:

$$\frac{zf_3(\mu)}{d} = \frac{\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{f^2(\mu)}}{-\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}} = -\frac{\operatorname{Im}(\mu)}{f^2(\mu)} = -\frac{2\pi}{f(\mu)}. \quad (4.28)$$

Der Proportionalitätskoeffizient ist abhängig von der betrachteten Frequenz.

Es wird Vorschrift (4.16) betrachtet.

$$zf_4(\mu) = \frac{4 \operatorname{Re}^2(\mu)}{f(\mu)}. \quad (4.29)$$

Die Proportionalität wird wie angegeben berechnet.

$$\frac{zf_4(\mu)}{d} = \frac{\frac{4 \operatorname{Re}^2(\mu)}{f(\mu)}}{-\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}} = -\frac{2 \operatorname{Re}(\mu) \operatorname{Im}(\mu)}{f(\mu)} = -4\pi \operatorname{Re}(\mu). \quad (4.30)$$

Bei dem Quotienten besteht eine Abhängigkeit zum Realteil der jeweiligen Moden. Somit wird diese Zielfunktion nicht zur Bewertung verwendet.

Die Funktion (4.17) besitzt im Zähler und Nenner einen quadratischen Term und wird hinsichtlich ihrer Abhängigkeit analysiert.

$$zf_5(\mu) = \frac{4 \operatorname{Re}^2(\mu)}{f^2(\mu)}. \quad (4.31)$$

Es folgt eine Berechnung des Koeffizienten der Funktion zur negativen Dämpfung.

$$\frac{zf_5(\mu)}{d} = \frac{\frac{4 \operatorname{Re}^2(\mu)}{f^2(\mu)}}{-\frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)}} = -\frac{4\pi \operatorname{Re}(\mu)}{f(\mu)} = -4\pi^2 \frac{2 \operatorname{Re}(\mu)}{\operatorname{Im}(\mu)} = 4\pi^2 d. \quad (4.32)$$

Der berechnete Proportionalitätsfaktor ist abhängig von der negativen Dämpfung. Bei der Analyse der Zielfunktion gehen Werte mit größerer negativer Dämpfung stärker in das Ergebnis ein als Werte mit kleinerer negativer Dämpfung. Die Funktion kann bei der Bewertung der Simulation angewendet werden, da größere Dämpfungswerte einen höheren Einfluss auf die Funktion besitzen.

Auf Basis der durchgeführten Evaluationen werden zur Simulationsbewertung mit mehreren Moden zwei Zielfunktionen betrachtet. Zum einen wird Gleichung (4.14) als lineare Funktion mit konstantem Proportionalitätsfaktor verfolgt, zum anderen Gleichung (4.17), um eine stärkere Gewichtung der betragsmäßig großen Dämpfungen zu erhalten. Bei der Herleitung weiterer Bestandteile der Zielfunktion wird die quadratische Berechnung verwendet.

4.3.4 Verbesserungen des Vorgehens

Die Anwendung des Modal Assurance Criterion ist zeitintensiv und besitzt eine Fehleranfälligkeit bei der Modenzuordnung. Die instabilen Frequenzen werden anhand der Nominalwerte identifiziert. Durch die Einführung einer Exponentialfunktion wird eine Zielfunktion mit positiven Werten definiert.

$$zf_e(\mu) = \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{(\operatorname{Re}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Re}(\mu_{2,i}))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_{1,i}) - \operatorname{Im}(\mu_{2,i}))^2}{(\frac{1}{2}(f(\mu_{1,i}) + f(\mu_{2,i})))^2}\right). \quad (4.33)$$

Mit der Exponentialfunktion werden instabile Moden, dargestellt durch eine Differenz der Realteile größer Null, gewichtet und die Summanden nehmen Werte größer eins an. Je größer die Differenz der Imaginärteile ist, desto kleiner ist der entsprechende Summand in der Zielfunktion. Neben der Exponentialfunktion können andere Basen verwendet werden. Die Voraussetzung ist, dass diese größer eins sind, um die Instabilitäten gegenüber den stabilen Moden zu gewichten. Bei Basen mit Wert kleiner eins haben die Stabilitäten einen großen Beitrag zur Zielfunktion, während die Instabilitäten schwach in die Funktion eingehen.

Durch die Verwendung von Gleichung (4.33) als Zielfunktion wird das MAC umgangen. Da eine große Differenz in den Imaginärteilen der verschiedenen Moden einen kleinen Beitrag zum Wert der Zielfunktion liefert, werden diese Summanden miteinbezogen. Es werden die Real- und Imaginärteile aller Moden einer Simulation untereinander verglichen und die Werte aufsummiert.

$$z f_{es}(\mu) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \exp\left(\frac{(\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_j))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_j))^2}{(\frac{1}{2}(f(\mu_i) + f(\mu_j)))^2}\right). \quad (4.34)$$

Bei der Berechnung ist keine Anwendung des MAC notwendig. Der erhaltene Wert der Zielfunktion ist vorrangig abhängig von den Differenzen in den Realteilen und somit von den auftretenden Instabilitäten.

Bei der Zielfunktion wird folgende Anzahl an Termen m aufsummiert:

$$m = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (4.35)$$

Es werden alle Kopplungsmöglichkeiten in Betracht gezogen, auch wenn die zu vergleichenden Moden nicht benachbart sind.

4.3.5 Vergleich der Diagonalelemente

Bei der vorgestellten Zielfunktion mit der Exponentialfunktion werden alle Moden des Systems miteinander verglichen und es ergibt sich eine große Anzahl an Summanden. Bei fast allen Termen ergibt sich eine Imaginärteildifferenz und es besteht keine Kopplung. Die Zielfunktion wird durch die Anzahl der Summanden beeinflusst. Es folgt die Herleitung einer Zielfunktion durch ausschließlichen Vergleich benachbarter Moden.

Wird angenommen, dass Kopplungen nur bei benachbarten Moden auftreten, ist kein Vergleich aller Moden untereinander notwendig. Es wird ausschließlich die Relation zwischen den benachbarten Moden i und $i+1$ betrachtet.

$$z f_{en}(\mu) = \sum_{i=1}^{n-1} \exp\left(\frac{(\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1}))^2 - (\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1}))^2}{(\frac{1}{2}(f(\mu_i) + f(\mu_{i+1})))^2}\right). \quad (4.36)$$

Für die Anzahl der Summanden gilt $m = n - 1$. Der Vorteil des Vorgehens gegenüber dem Vergleich aller Moden ist, dass weniger Summanden ohne Kopplungsanteil mit einer Imaginärteildifferenz die Zielfunktion beeinflussen. Werden verschiedene Bremssysteme betrachtet,

welche mit dieser Zielfunktion bewertet werden, ist kein Vergleich der Ergebnisse möglich. Die Simulationen eines Versuchsplans besitzen in der Regel eine unterschiedliche Modenzahl. Der Wert der Zielfunktion wird durch diese Anzahl beeinflusst und hat somit Auswirkungen auf die Bewertung.

Die Problematik beim Gesamt- und Diagonalenvergleich besteht darin, dass bei beiden eine Korrelation zwischen den Zielfunktionen und der Modenzahl der Experimente gegeben ist, vergleiche Abbildung 4.6. Beim Vergleich aller Moden ergibt sich im dargestellten Beispiel mit 220 Experimenten der Korrelationskoeffizient $\text{Kor}_{zm} = 0.9973$ zwischen der Modenzahl und dem Zielfunktionswert, bei dem Vergleich der Diagonalelemente ist der Koeffizient $\text{Kor}_{zm} = 0.9512$. Dies ist dadurch bedingt, dass sich bei jeder Parametervariation eine unterschiedliche Modenzahl im definierten Frequenzbereich ergibt. Damit einhergehend ist eine Variation der Summandenzahl.

Ein Lösungsansatz ist die Mittelung der Zielfunktion über die Anzahl der Summanden und die Berechnung des durchschnittlichen Beitrags der Summanden zur Zielfunktion. Bei Vergleich aller Moden untereinander gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden, beim Vergleich der Diagonalelemente $n-1$. Trotz Mittelung bleibt eine Abhängigkeit der Zielfunktion von der Modenzahl für den Vergleich aller Moden bestehen. Ein Vergleich verschiedener Systeme ist wiederum nicht möglich.

Eine Verbesserung der Korrelation der Zielfunktion zur Modenzahl tritt ein, wenn der lineare Vergleich der Diagonalelemente mit Mittelung angewendet wird, vergleiche Gleichung (4.14),

$$zf_{em}(\mu) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \exp\left(\frac{|\text{Re}(\mu_i) - \text{Re}(\mu_{i+1})| - |\text{Im}(\mu_i) - \text{Im}(\mu_{i+1})|}{\frac{1}{2}(f(\mu_i) + f(\mu_{i+1}))}\right)}{n-1}. \quad (4.37)$$

Bei Zielfunktion ist kein Einfluss der Modenzahl gegeben, vergleiche Abbildung 4.6, der Korrelationskoeffizient ist $\text{Kor}_{zm} = 0.1658$. Die Imaginärteildifferenzen von nicht koppelnden Moden haben durch die Gewichtung mit der Exponentialfunktion Einfluss, da stabile und instabile Summanden Werte nahe eins annehmen.

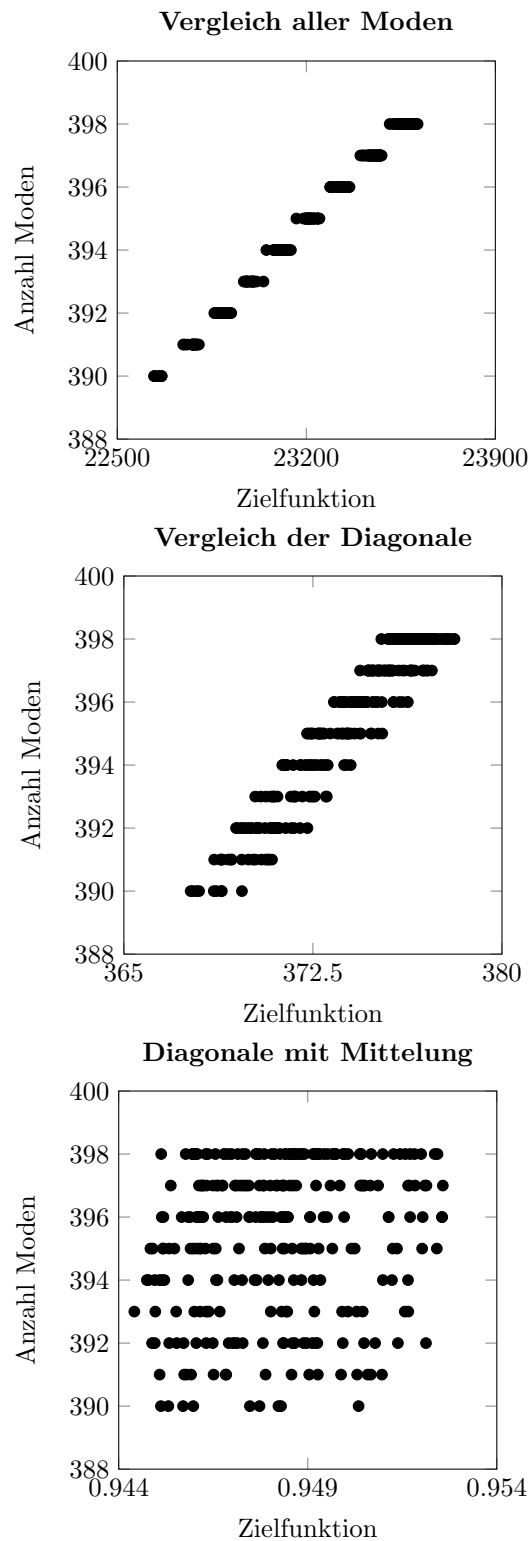


Abbildung 4.6: Darstellung der Korrelation zwischen der Zielfunktion mit Vergleich aller Moden, der Zielfunktion mit Diagonalenvergleich, der Zielfunktion mit Diagonalenvergleich und Mittelung über die Summanden gegenüber der Anzahl der im Experiment vorhandenen Moden. Der Korrelationswert für die Zielfunktion mit Vergleich aller Moden zur Modenanzahl beträgt im gegebenen Beispiel 0.9973, für die Zielfunktion mit Vergleich der Diagonalelemente 0.9512 und für die Zielfunktion mit Vergleich der Diagonalelemente und Mittelung 0.1658. Das Beispiel stellt die Berechnung eines realen Bremssystems und eines Versuchsplans mit 220 Experimenten dar.

4.4 Serienziefunktion

Die Eigenschaften der hergeleiteten Zielfunktionen lassen keine aussagekräftige Bewertung der Experimente zu. Basierend auf den gegebenen Problematiken werden Anforderungen an eine Weiterentwicklung der Zielfunktion gestellt. In diesem Abschnitt wird eine Zielfunktion hergeleitet, welche zur Charakterisierung der Versuche geeignet ist. Dies ist die Serienziefunktion.

4.4.1 Herleitung der Zielfunktion

Durch die Entwicklung der bisherigen Zielfunktionen ergeben sich Anforderungen, die für eine aussagekräftige Bewertung erfüllt werden müssen. Diese lauten:

- Unabhängigkeit von der Modenanzahl,
- Vergleichbarkeit mit der negativen Dämpfung,
- Globale Aussage über die Stabilität des Bremssystems,
- Entwicklung von einem guten Bestimmtheitsmaß im Regressionsmodell,
- Vergleichbarkeit zu der bestehenden Simulationsauswertung,
- Anzeige von stabilen und instabilen Bereichen,
- Abbildung des Phänomens der Modenkopplung.

Um die Punkte zu erfüllen, wird folgende Vorschrift für alle benachbarten Moden berechnet, vergleiche Gleichung (4.14):

$$zf_m = d_i = \frac{|\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1})| - |\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1})|}{\frac{1}{2}(\operatorname{Im}(\mu_i) + \operatorname{Im}(\mu_{i+1}))}. \quad (4.38)$$

Die $n - 1$ erhaltenen Werte werden absteigend sortiert, von instabil nach stabil, und mit der Reihe

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i}, \quad (4.39)$$

mit k konstant, gewichtet. Dadurch wird die größte Instabilität mit dem Faktor 1 multipliziert, die zweite mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Dies wird iterativ fortgesetzt und bis zum k -ten Term durchgeführt, vergleiche Abbildung 4.7. Mit der Serienziefunktion wird eine flexible Auswertung für ein Frequenzspektrum oder eine einzelne Moden durch Steuerung von Reihe und Frequenzband durchgeführt. Eine positive Zielfunktion zeigt eine Modenkopplung an,

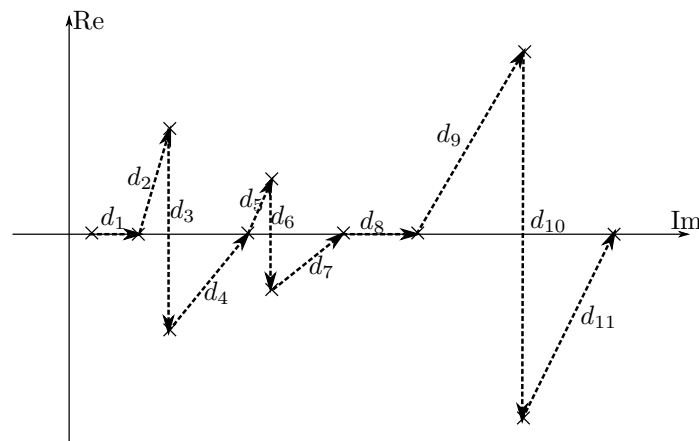


Abbildung 4.7: Die Zielfunktionsberechnung über Vergleich von Real- und Imaginärteilen von benachbarten Moden dargestellt an einem theoretischen Beispiel. Bei Serienlänge eins gilt $f_z = \max_{i=1, \dots, 11} d_i = d_{10}$, bei anderen Serienlängen wird die Serienentwicklung angewendet.

eine negative Zielfunktion ein stabiles Modenpaar. Je weiter die Zielfunktion im negativen Bereich liegt, desto größer ist der Grad der Stabilität, vergleiche Definition 4.1.

Äquivalent zu der Zielfunktion mit Vergleich der Diagonalelemente, vergleiche Abschnitt 4.3.5, basiert die Serienzifunktion auf der Annahme, dass nur zwischen benachbarten Moden eine Kopplung auftritt.

In Abhängigkeit der Anforderungen werden die Vorteile der Zielfunktion gegenüber den bisherigen Ansätzen angegeben.

- Vermeidung der Exponentialfunktion, durch die Reihenbildung keine Gruppierung der Zielfunktion um den Wert eins,
- Anzeige von stabilen und instabilen Bereichen der Zielfunktion durch das Vorzeichen,
- Unabhängigkeit von der Modenzahl in den einzelnen Experimenten,
- Vorrangige Betrachtung von koppelnden Moden,
- Größter Einfluss durch die größte Instabilität und zusätzlicher Einfluss von weiteren Instabilitäten,
- Vergleichbarkeit der Auswertung einer einzelnen Frequenz mit der Auswertung von negativer Dämpfung.

Es wird die Proportionalität der Zielfunktion (4.38) zur negativen Dämpfung, $d = -\frac{2\operatorname{Re}(\mu_i)}{\operatorname{Im}(\mu_i)}$, gezeigt. Wird angenommen, dass zwischen den Moden μ_i und μ_{i+1} eine Kopplung besteht, dann gilt:

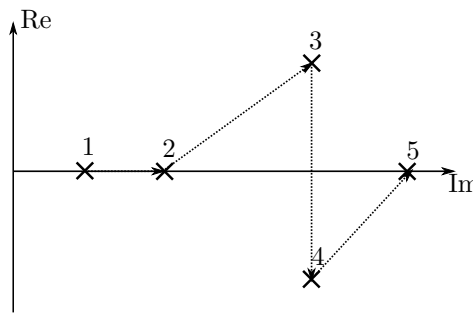


Abbildung 4.8: Modenverteilung zur Veranschaulichung der Artefakte. Zwischen drei und vier tritt eine Modenkopplung auf und es ist eine Instabilität gegeben.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_i) &= -\operatorname{Re}(\mu_{i+1}) =: \operatorname{Re}, \\ \operatorname{Im}(\mu_i) &= \operatorname{Im}(\mu_{i+1}) =: \operatorname{Im}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Zielfunktion wird auf Basis dessen wie folgt vereinfacht und besitzt einen Zusammenhang zur Dämpfung des Systems.

$$z f_m(\mu) = \frac{2 \operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} = -d. \quad (4.41)$$

4.4.2 Artefakt der Zielfunktion

Bei der in Abschnitt 4.4.1 hergeleiteten Serienzielfunktion ist es möglich, dass eine Instabilität mehr als einen positiven Beitrag zur Zielfunktion liefert. Dadurch werden große Instabilitäten bei der Zielfunktionsberechnung stärker gewichtet.

Als Beispiel sei die Ausgangssituation wie in Abbildung 4.8 dargestellt gegeben. In einem bestimmten Frequenzspektrum liegen fünf Moden, von denen zwei koppeln, Nummer drei und vier, und einen Realteil ungleich Null besitzen. Die restlichen Eigenwerte haben nur einen imaginären Anteil. In der gegebenen Situation liefert die Serienzielfunktion für den Vergleich von Mode eins und zwei einen negativen Wert, für den Vergleich von drei und vier einen positiven Wert. Bei der Berechnung der Zielfunktion zwischen den Moden zwei und drei sowie zwischen vier und fünf, treten verschiedene Fälle auf.

1. $\operatorname{Re}(\mu_3) < \operatorname{Im}(\mu_3) - \operatorname{Im}(\mu_2)$,

Die Zielfunktion besitzt einen negativen Wert, für die beiden Moden wird keine Kopplung angenommen.

2. $\operatorname{Re}(\mu_3) \approx \operatorname{Im}(\mu_3) - \operatorname{Im}(\mu_2)$,

Die Zielfunktion besitzt den Wert Null, die beiden Moden befinden sich im Übergangsbereich zwischen einer auftretenden oder nicht auftretenden Kopplung.

3. $\operatorname{Re}(\mu_3) > \operatorname{Im}(\mu_3) - \operatorname{Im}(\mu_2)$,

Die Zielfunktion besitzt einen positiven Wert. Es wird eine Kopplung der beiden Moden angenommen, obwohl keine vorliegt.

Somit kann mehr als ein positiver Wert beim Modenvergleich auftreten. Dies hilft bei der Erkennung ob nahe der Instabilität weitere Moden gegeben sind und liefert Hinweise auf eventuelle Kopplungen, falls die beiden Moden der Instabilität getrennt werden. Bei großen positiven Termen können unter Umständen in anderen Frequenzbereichen die Zielfunktionen auftretender Instabilitäten überlagert werden.

4.4.3 Betrachtung der Dämpfungsmatrix

Für die Berechnung von Bremsenquietschen kann die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} , vergleiche Abschnitt 2.2, betrachtet oder vernachlässigt werden. In Verbindung damit ergeben sich Unterschiede bei der Zielfunktionsberechnung.

Bei einer Berechnung von Bremsenquietschen mit Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix sind folgende Eigenschaften gegeben:

- Ausschließliche Darstellung des Phänomens der Modenkopplung (Buck [2008, Kapitel 2.2.1.3, Seite 13f]), welches die primäre Ursache für das Bremsenquietschen angibt (Bajer u. a. [2003]),
- Kein Einfluss von Dämpfung (Buck [2008, Kapitel 2.2.1.4, Seite 14ff]), es gilt für die Dämpfungsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Als Beispiel wird im Einmassenschwinger der Dämpfer c vernachlässigt.

Für die Berechnung mit Betrachtung der Dämpfungsmatrix gilt:

- Kein Eintrag von zusätzlichen instabilen Moden gegenüber Simulationen mit Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix (Bajer u. a. [2003]),
- Elimination von instabilen Moden im hohem Frequenzbereich (Bajer u. a. [2003]).

Bei der Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix liegt der Fokus auf dem primären Anregemechanismus des Bremsenquietschens, dem Phänomen der Modenkopplung. Es treten keine negativen Dämpfungsterme ohne einen betragsmäßig gleichen positiven Dämpfungsterm auf. Das System wird bei Berechnung ohne Dämpfungsmatrix schlechter bewertet als bei Berücksichtigung derer.

Die Robustheitsbewertung eines Systems wird auf Basis von Rechnungen ohne Dämpfungsmatrix durchgeführt. Insbesondere werden die damit verbundenen Eigenschaften bei der Zielfunktionsberechnung ausgenutzt, der Anregemechanismus wird beschrieben. Bei der Herleitung der Zielfunktion ergibt sich die Fragestellung, welche Auswirkungen die positiven Dämpfungsterme auf das Ergebnis haben.

Ein Vergleich zwischen betrachteter und vernachlässigter Dämpfungsmatrix wird anhand der Berechnung eines Finiten Elemente Modells durchgeführt. Als Beispiel wird die Variation von Reibwert und Bremsdruck über mehrere Stützstellen gewählt. Darüber wird ein Modell vierter Ordnung erstellt. Es wird die Zielfunktion für eine Frequenz bei Rechnungen mit und ohne Dämpfungsmatrix verglichen.

Die stabilen und instabilen Bereiche sind durch das Vorzeichen der Zielfunktion angegeben. Das Zielfunktionsniveau der Absolutwerte ist qualitativ vergleichbar, bei Einbezug der Dämpfungsmatrix ergibt sich ein schlechteres Niveau, da die gegebenen Instabilitäten eine höhere negative Dämpfung aufweisen. In der Analyse treten relative Abweichungen zwischen den Zielfunktionen von 24% auf, die maximale Abweichung beträgt 213%. Die Verläufe des Regressionsmodells sind in Abbildung 4.9 gegeben.

Die Erklärung der Abweichung und die Verschlechterung bei Betrachtung der Dämpfungsmatrix ist durch die zugrundeliegende Gleichung (4.38) gegeben,

$$zf_m = \frac{|\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1})| - |\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1})|}{\frac{1}{2}(\operatorname{Im}(\mu_i) + \operatorname{Im}(\mu_{i+1}))}. \quad (4.42)$$

Bei Simulationen mit Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix gilt bei einer Stabilität:

- $\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1}) = 0$,
- $\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1}) \neq 0$.

Für eine Instabilität ergibt sich:

- $\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1}) \neq 0$,
- $\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1}) = 0$.

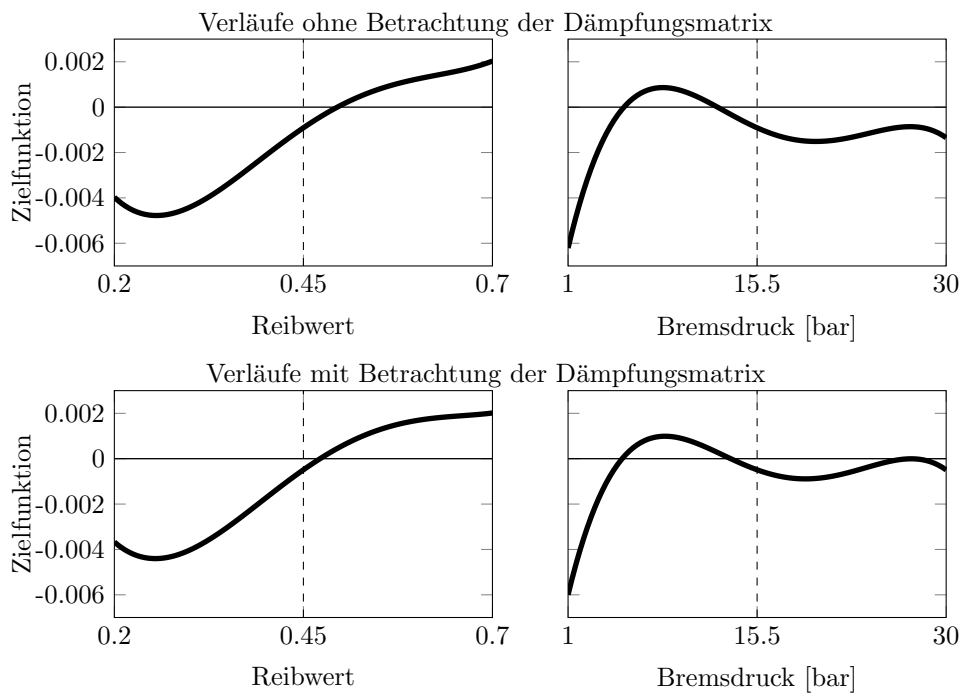


Abbildung 4.9: Darstellung der Parameterverläufe bei der Betrachtung von Rechnungen mit und ohne Dämpfungsmatrix. Oben angegeben sind die Verläufe ohne und unten mit Dämpfung. Für das gegebene Beispiel mit Betrachtung von Reibwert und Bremsdruck sind die Kurven qualitativ ähnlich.

Wird die Dämpfungsmatrix betrachtet, gilt für stabile und instabile Konfigurationen:

- $\text{Re}(\mu_i) - \text{Re}(\mu_{i+1}) \neq 0$,
- $\text{Im}(\mu_i) - \text{Im}(\mu_{i+1}) \neq 0$.

Die Bestimmung der Stabilität ist abhängig von der Größenordnung der Differenzen. Verdeutlicht wird dies an einem theoretischen Zahlenbeispiel. Es wird dazu eine Stabilität betrachtet:

	Realteil 1	Realteil 2	Imaginärteil 1	Imaginärteil 2
ohne Dämpfungsmatrix	0	0	1000	1100
mit Dämpfungsmatrix	-5	-10	1000	1100

Wird damit Gleichung (4.42) berechnet, ergibt sich für die Vernachlässigung der Dämpfungsmatrix die Zielfunktion $zf_m = -0.0952$ und bei Betrachtung der Dämpfungsmatrix der Wert $zf_m = -0.08095$. Da diese Zielfunktion größer ist, ist deren Niveau schlechter. Zur Robustheitsbewertung eines Systems ist der Vergleich von Zielfunktionen untereinander nötig. Die Funktion allein liefert keine Aussage über die Robustheit.

Bei der Berechnung der Zielfunktion auf Basis von Simulationen mit Dämpfungsmatrix können große negative Realteile auftreten, welche eine positive Dämpfung implizieren. Die Imagi-

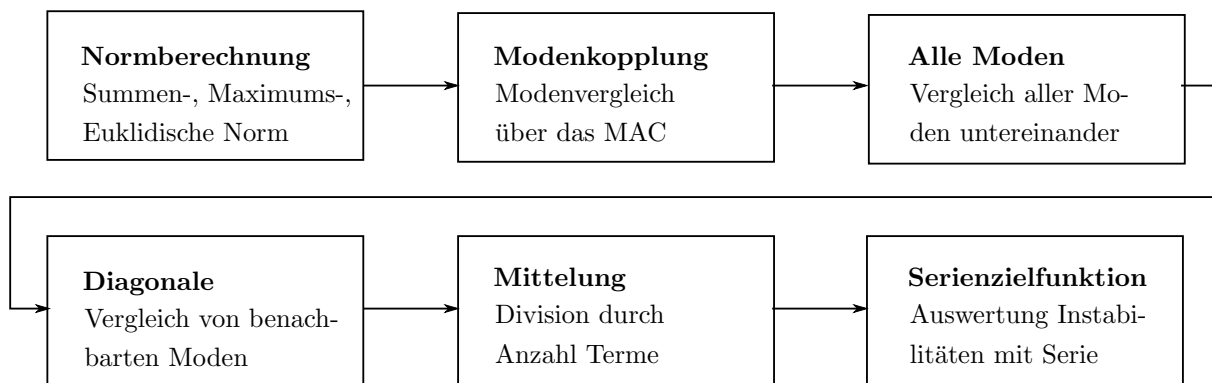


Abbildung 4.10: Übersicht der vorgestellten Zielfunktionen.

närteildifferenz kann durch die Differenz zweier negativer Realteile überlagert werden, sodass eine positive Zielfunktion ohne Vorliegen einer Instabilität entsteht. Um derartige Effekte auszuschließen erfolgt die Bewertung der Robustheit auf Basis von Rechnungen ohne Dämpfungsmatrix, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Bei NVH Bewertungen des Bremssystems wirkt sich Dämpfung positiv auf das Ergebnis aus, das System wird als weniger kritisch angesehen. Die Robustheitsbetrachtung legt durch die Serienzielfunktion den Fokus auf das Phänomen der Modenkopplung. Deshalb wird die Dämpfungsmatrix vernachlässigt.

4.5 Zusammenfassung

Nach Herleitung von verschiedenen Zielfunktionen wird für die Simulationsbewertung eine geeignete Wahl getroffen. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Funktionen sind in den vorangegangenen Abschnitten aufgelistet.

Die Normberechnungen über alle Frequenzen liefern einen Überblick über alle Moden. Es werden keine Rückschlüsse auf einzelne Instabilitäten und Werte der negativen Dämpfungen gezogen. Alle stabilen Konfigurationen besitzen den Zielfunktionswert 0, es wird kein Stabilitätsgrad angegeben.

Bei der Evaluation durch die Norm für eine einzelne Mode, was dem Wert der negativen Dämpfung entspricht, treten die umgekehrten Vor- und Nachteile gegenüber der Berechnung des gesamten Spektrums auf. Es wird eine Frequenz detailliert betrachtet und die restlichen Moden werden vernachlässigt. Alle stabilen Kombinationen werden durch den Zielfunktionswert Null angezeigt.

Die Zielfunktion der Modenkopplung hat ähnliche Eigenschaften wie die Normevaluation für eine Frequenz. Der Auswertalgorithmus ist komplexer und es wird eine bessere Aussa-

gefähigkeit der Zielfunktion erreicht als bei der Normauswertung. Dies geschieht durch die gewichtete Anzeige von stabilen Bereichen. Damit lässt sich eine aussagekräftige Regressionsfunktion erstellen und das Ersatzmodell wird an die experimentellen Ergebnisse angepasst. Insgesamt ist die Zielfunktion der Modenkopplung eine Basis für Erweiterungen, zum Beispiel zur Serienzielfunktion, da sie eine gute Aussagequalität besitzt. Eine Ausdehnung auf mehrere Frequenzen ist durch die Auslöschung von Termen nicht möglich.

Bei Betrachtung von mehreren Moden wird die die Zielfunktion der Modenkopplung durch eine vorangestellte Exponentialfunktion erweitert. Die stabilen und instabilen Terme haben das gleiche Vorzeichen und heben sich nicht gegenseitig auf. Damit wird das Modal Assurance Criterion umgangen, da alle Moden untereinander verglichen werden. Das ist möglich, weil eine große Imaginärteildifferenz einen kleinen Einfluss auf die Zielfunktion besitzt. Der große Einfluss der Instabilitäten bleibt bestehen. Die Zielfunktion ist abhängig von der Modenzahl der Experimente und es wird keine globale Aussage über den Zustand des Systems getroffen.

Wird angenommen, dass Kopplungen nur bei benachbarten Moden auftreten, wird obiges Vorgehen auf einen Vergleich der Diagonalelemente mit deren angrenzenden Moden reduziert. In diesem Fall wird über eine Mittelung durch die Anzahl der Summanden eine Zielfunktion erzeugt, die unabhängig von der Modenzahl des Experiments ist. Durch die Verwendung der Exponentialfunktion entsteht eine Gewichtung der Zielfunktion im Bereich von eins und sie ist bei der Erstellung des Regressionsmodells nur bedingt aussagekräftig.

Auf Basis der bisherigen Herleitungen von Zielfunktionen werden Anforderungen definiert. Es entsteht eine Zielfunktion, welche anstatt der Exponentialfunktion eine Gewichtung durch eine Reihe mit vorgegebener Länge verwendet. Es werden bei der Serienzielfunktion die Diagonalelemente mit ihren angrenzenden Moden verglichen. Diese werden zur Gewichtung absteigend sortiert. Die Funktion ist unabhängig von der Modenzahl im Experiment, besitzt über die Reihe und das betrachtete Spektrum Steuerungsmöglichkeiten und liefert hinsichtlich der Erstellung von Regressionsmodellen eine gute Aussagequalität.

Die Bewertung der Simulationen erfolgt auf Basis der Serienzielfunktion. Diese besitzt aus den hergeleiteten Zielfunktionen die besten Eigenschaften zur Bewertung der Experimente.

5 Vergleich und Validierung der Zielfunktionen

5.1 Bewertungsindex

Der Bewertungsindex bildet die gemeinsame Basis zwischen Simulation, Prüfstand und Fahrversuch zur Bewertung von Bremsenquietschen (Könning u. a. [2013] und von Wagner und Schlagner [2009]). Deshalb ist dieser eine allgemeingültige Größe, welche als Referenz zur Validierung und Verifikation der Zielfunktionen herangezogen wird. Der Bewertungsindex bildet die Grundlage für den Vergleich der verschiedenen Methodiken zur Untersuchung von Bremsenquietschen.

5.1.1 Definition

Für die Bewertung der simulativen Ergebnisse werden in der Literatur verschiedene Indizes definiert. Eine Möglichkeit ist der Quietschindex σ_s (Ahmed [2011] und Millner [1978]), welcher sich auf die Bewertung eines einzelnen Eigenwerts μ beschränkt.

$$\sigma_s = \sqrt{\operatorname{Im}(\mu)^2 + \operatorname{Re}(\mu)^2} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad (5.1)$$

mit $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(\mu)}{\operatorname{Re}(\mu)}\right)$.

Ebenso für eine Instabilität gültig ist der Geräuschindex σ_n (Ahmed u. a. [2012] und Yuan [1995]).

$$\sigma_n = \frac{\operatorname{Re}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{Re}(\mu) + \operatorname{Im}(\mu)}}. \quad (5.2)$$

1 und 2	unerträgliches Quietschen,
3 und 4	heftiges Quietschen,
5 und 6	moderates Quietschen,
7 und 8	leichtes Quietschen,
9	Spuren von Quietschen,
10	kein Quietschen.

Tabelle 5.1: Einteilung des Bremsenquietschens mit einem diskreten Bewertungsindex (Attia u. a. [2006]).

Äquivalent dazu wird in Flint [2000] ein Index σ_q definiert,

$$\sigma_q = \frac{\operatorname{Re}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{Re}^2(\mu) + \operatorname{Im}^2(\mu)}}. \quad (5.3)$$

Die vorgestellten Indizes basieren auf einer Bewertung der Stabilität anhand des Vorzeichens des Realteils der Eigenwerte. Bei σ_n muss gelten $\operatorname{Im}(\mu) > \operatorname{Re}(\mu)$, um eine reelle Zahl zu erhalten. Nach Kapitel 2 wird durch den Realteil die Stabilität des Systems charakterisiert. Für die Analyse von verschiedenen Betriebspunkten wird der Index im Folgenden angepasst.

Die Analyse eines Bremssystems erfolgt auf Basis von allen Instabilitäten des Systems im betrachteten Frequenzspektrum. Dazu wird in der experimentellen Bewertung ein Zusammenhang zwischen der Auftrittswahrscheinlichkeit und Lautstärke des Geräuschs dargestellt (Abendroth u. a. [2009] und Suetti [2013]). Der Bewertungsindex wird objektiv oder subjektiv bestimmt und liefert eine diskrete Aufteilung im Intervall $[1; 10]$, siehe Tabelle 5.1.

Die Simulationsbewertung in der Serienentwicklung der Automobilindustrie erfolgt mit einem Bewertungsindex, welcher eine gemeinsame Basis zwischen Prüfstand, Fahrversuch und Simulation darstellt (Könning u. a. [2013] und von Wagner und Schlagner [2009]). Im Gegensatz zu den Hardwareversuchen ist dieser in der Simulation nicht abhängig von der Intensität, sondern von der maximalen negativen Dämpfung über die Variation der Betriebspunkte.

Die Berechnung des Bewertungsindex erfolgt durch eine Betrachtung von Simulationen mit verschiedenen Reibwerten und Druckstufen. Die Auswertung beschränkt sich auf eine Frequenz. Es werden die Kombinationen der Druckstufen und Reibwerte berechnet.

$$\text{BI}_{\text{kont.}} = c_1 + c_2 \cdot \max(\text{neg. Dämp.}) + c_3 \cdot (\text{Kombinationen mit neg. Dämp.}),^{36} \quad (5.4)$$

mit c_1, c_2, c_3 , Konstanten. Auf Basis der negativen Dämpfungen der Rechnungen wird ein kontinuierlicher Wert zur Ableitung des Bewertungsindex berechnet. Mit einem linearen

³⁶Vergleiche Könning u. a. [2013].

Zusammenhang wird der durch eine kontinuierliche Funktion berechnete Wert in ein ganzzahliges Schema von eins bis zehn eingeordnet. Ist $BI_{\text{kont.}} = 0$ wird der Bewertungsindex 10 vergeben. Eine höhere Zahl visualisiert besseres Geräuschverhalten als eine niedrige, vergleiche Tabelle 5.1. Das Ergebnis stellt ein Bewertungsschema der Stabilität des Bremssystems dar. Die gleiche Einteilung der Auswertung wird am Bremsengeräuschprüfstand und am Gesamtfahrzeug durchgeführt, sodass die Bewertung von Hard- und Software äquivalent ist. Der globale Bewertungsindex für das Bremssystem ist gegeben durch das Minimum der einzelnen Werte für die identifizierten Frequenzen.

5.1.2 Eigenschaften

Der Bewertungsindex liefert eine übereinstimmende Analyse zwischen den Hard- und Softwareauswertungen. In der Simulation entstehen durch die diskrete Bewertung der Rechnungen und ohne die Berücksichtigung von Wechselwirkungen Probleme bei der Robustheitsbewertung. Dies betrifft:

- Diskrete gegenüber kontinuierliche Bewertung,
- Auswertung einzelner Frequenzen gegenüber gesamthafte Auswertung,
- Betrachtung von Einzelrechnungen gegenüber geschlossenen Zusammenhängen,
- Simulative gegenüber analytische Auswertung,
- BI-Bewertung des Gesamtsystems durch Betrachtungen der einzelnen Instabilitäten.

Aufgrund der gegebenen Eigenschaften ist der Bewertungsindex nicht zur Robustheitsbewertung geeignet. Dafür wird eine kontinuierliche Zielfunktion benötigt, welche zur Berechnung eines Regressionsmodells herangezogen wird.

5.2 Vergleich der Zielfunktionen

Die zur Bewertungen der Bremsengeräuschsimulationen geeigneten, in Kapitel 4 hergeleiteten, Zielfunktionen werden auf ein Beispielproblem angewendet. Es wird das in Abbildung 5.1 gegebene vereinfachte Finite Elemente Modell herangezogen. Dabei wird zur Auswertung entweder das ganze Frequenzspektrum betrachtet oder die Evaluation beschränkt sich auf die für das Modell dominante Instabilität bei 1.6 kHz. Variiert werden der Elastizitätsmodul und die Dichte des Reibrings der Bremsscheibe. Die Berechnung erfolgt anhand eines vollfaktoriellen Versuchsplans mit drei Stützstellen für beide Parameter, das entspricht neun Kombinationen. Betrachtet werden Schwankungen von $\pm 5\%$ um die Nominalwerte der Parameter. Die

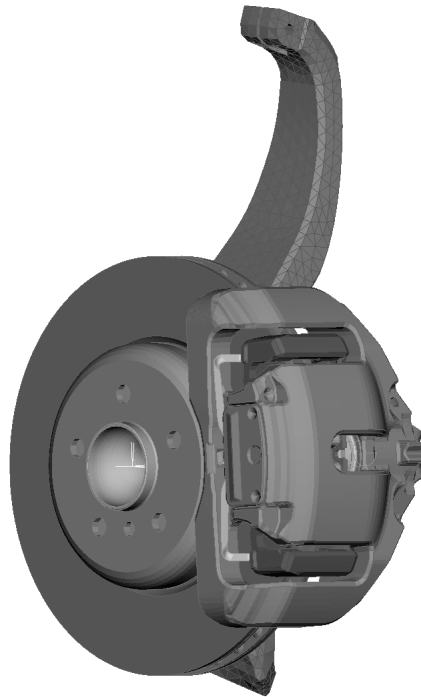


Abbildung 5.1: Darstellung des zum Vergleich und der Validierung benutzten vereinfachten Finite Elemente Modells eines Bremssystems ohne Darstellung der Lenker.

Auswertung erfolgt mit einem quadratischen Regressionsmodell, welches Wechselwirkungen inkludiert.

Es werden folgende Zielfunktionen für die Instabilität bei 1.6 kHz verglichen:

- Normberechnung, vergleiche Gleichung (4.5),
- Modenkopplung, vergleiche Gleichung (4.12),
- Serienzielfunktion, vergleiche Gleichung (4.38).

Für das gesamte Spektrum werden diese Funktionen berechnet:

- Maximums-, Summen- und Euklidische Norm, vergleiche Gleichung (4.4), (4.3) und (4.4),
- Modenkopplung für mehrere Moden, vergleiche Gleichung (4.13),
- Vergleich aller Moden mit Exponentialfunktion, vergleiche Gleichung (4.34),
- Vergleich der Diagonalelemente mit Mittelung, vergleiche Gleichung (4.37),
- Serienzielfunktion für Frequenzspektrum, vergleiche Gleichung (4.38).

Wird das Frequenzspektrum von 1 kHz bis zur Schwelle des hörbaren Bereichs betrachtet, liefert die Index-Betrachtung für 95% des Elastizitätsmoduls des Reibrings einen Wert von sieben und bei 105% die Bewertung fünf, vergleiche Tabelle 5.2. Somit bedingt ein weicheres

Variante	BI Spektrum	BI 1.6 kHz
Basis	6	6
Scheibe Reibring E-Modul 95%	7	8
Scheibe Reibring E-Modul 105%	5	5
Scheibe Reibring Dichte 95%	5	5
Scheibe Reibring Dichte 105%	7	8

Tabelle 5.2: Auswertung des Systems mit dem Bewertungsindex für das gesamte Frequenzspektrum und einer Instabilität bei 1.6 kHz.

Bauteil eine kleinere negative Dämpfung, während ein steiferer Reibring der Bremsscheibe eine größere negative Dämpfung verursacht. Umgekehrt verhält es sich bei der Dichte, dort ist der Wert bei 95% fünf und bei 105% sieben. In diesem Fall wird das System besser, je größer die Dichte des Reibrings ist.

Vergleichbar ist die Auswertung mit dem Bewertungsindex bei Betrachtung der Instabilität von 1.6 kHz, vergleiche Tabelle 5.2. Es gelten äquivalent die getätigten Aussagen, mit dem Unterschied, dass sich bei 95% der Steifigkeit und bei 105% der Dichte der Wert acht ergibt. Wird die Kombination von hoher Dichte und niedrigem Elastizitätsmodul angenommen, verschwindet die Instabilität bei 1.6 kHz.

5.2.1 Vergleich der Zielfunktionen für eine einzelne Frequenz

Bei der qualitativen Auswertung der drei Zielfunktionen sind keine Unterschiede in den Steigungen der Verläufe erkennbar, vergleiche Abbildung 5.2 bis 5.4, und sie besitzen eine Äquivalenz in der Vorhersage von instabilen und stabilen Konfigurationen zur Auswertung mit dem Bewertungsindex, vergleiche Tabelle 5.2. Bei der Modenkopplungs- und Serienzielfunktion ist in den Abbildungen gegeben, dass die Simulation mit hoher Dichte und niedriger Steifigkeit keine Instabilität bei 1.6 kHz liefert. Das Vorzeichen der Zielfunktion ist negativ. Bei der Norm wird dies durch den Wert 0 angezeigt.

Bei der Erstellung der Regressionsmodelle aus den vorhandenen Daten liefert die Modenkopplungszielfunktion mit $R^2 = 1$ aus allen Zielfunktionen das Modell mit der besten Güte aus den gegebenen Ansätzen, für die Serienzielfunktion gilt $R^2 = 0.997$. Das Bestimmtheitsmaß für die Normauswertung beträgt $R^2 = 0.978$. Zusammenfassend wird für jede Zielfunktion ein aussagekräftiges Regressionsmodell erstellt.

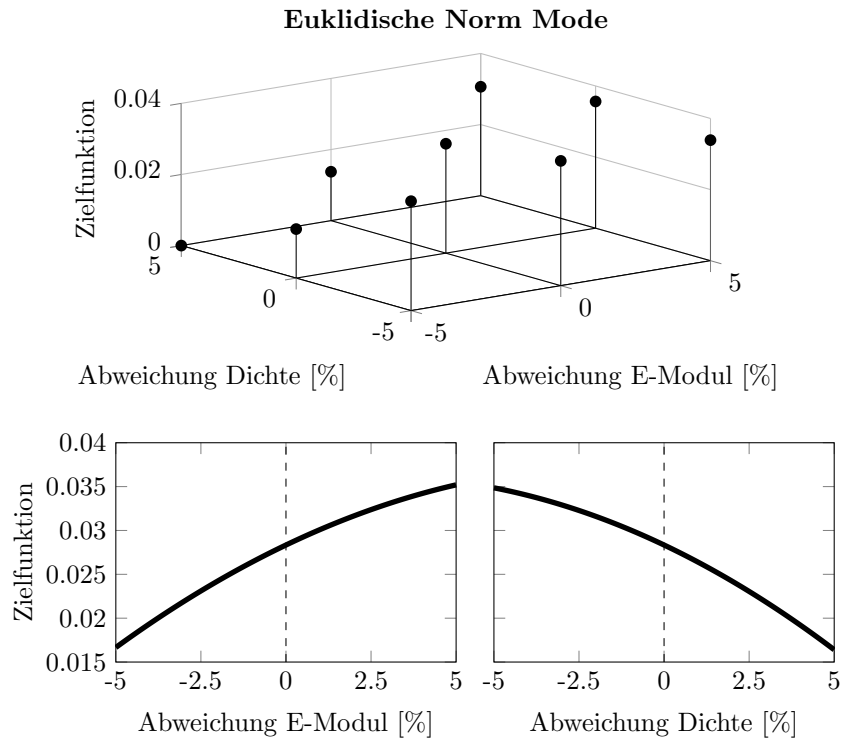


Abbildung 5.2: Verteilung der Norm-Zielfunktion für 1.6 kHz und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

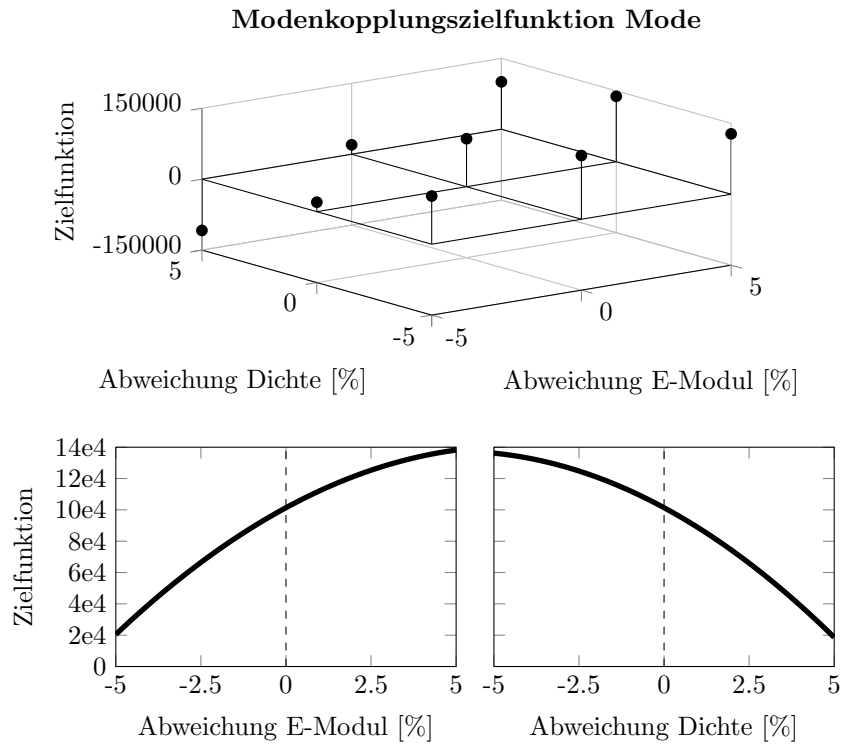


Abbildung 5.3: Verteilung der Modenkopplungszielfunktion für 1.6 kHz und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

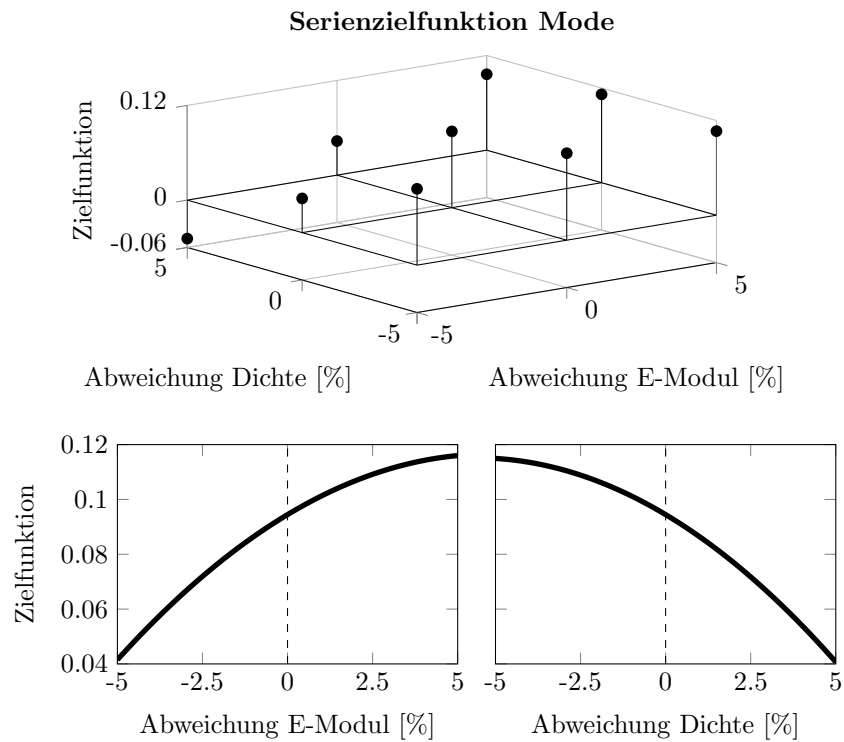


Abbildung 5.4: Verteilung der Serenzielfunktion für 1.6 kHz und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

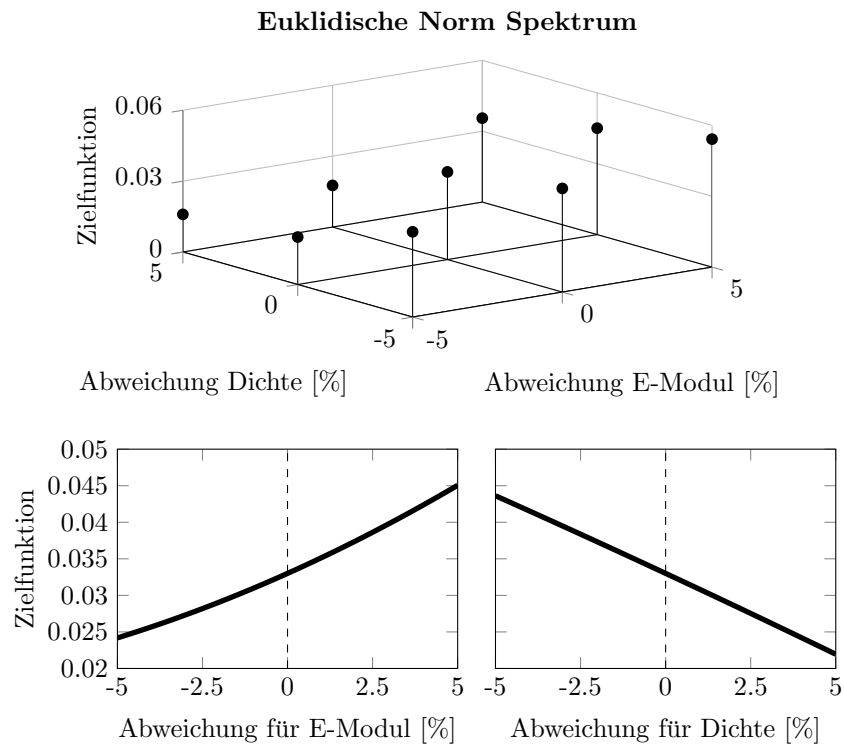


Abbildung 5.5: Verteilung der euklidischen Norm für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

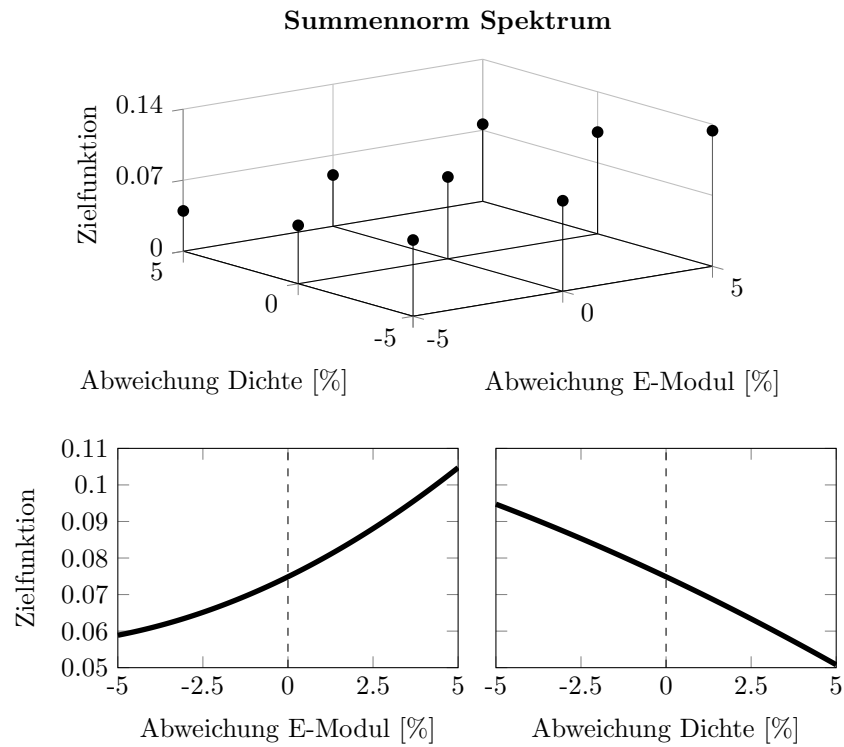


Abbildung 5.6: Verteilung der Summennorm für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

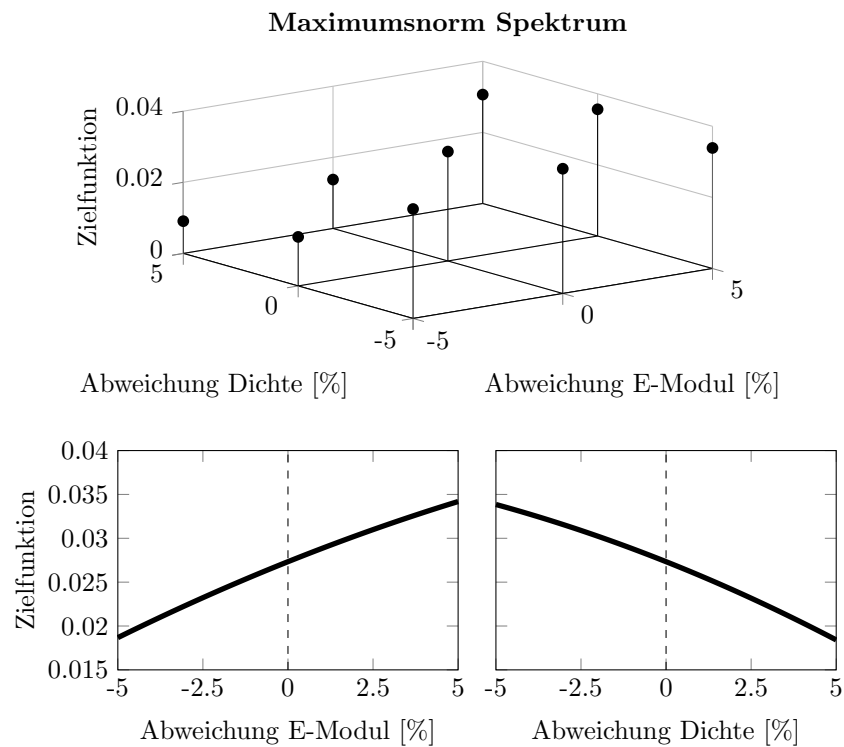


Abbildung 5.7: Verteilung der Maximumsnorm für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

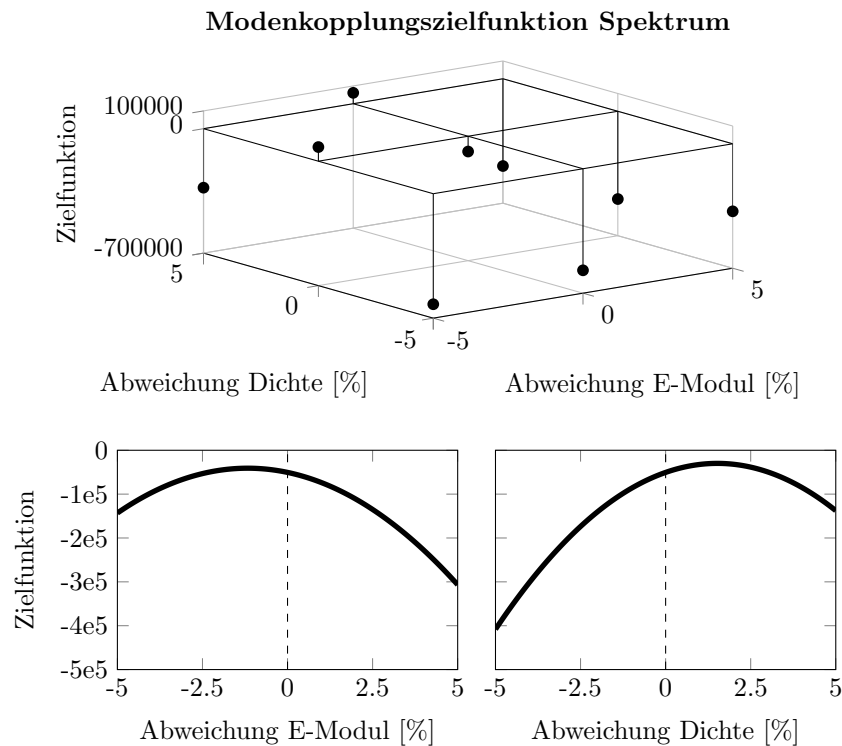


Abbildung 5.8: Verteilung der Modenkopplungszielfunktion für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

5.2.2 Vergleich der Zielfunktionen für ein Frequenzspektrum

Bei Auswertungen über das gesamte Frequenzspektrum werden sieben verschiedene Zielfunktionen betrachtet. Neben den unterschiedlichen Normberechnungen werden die Modenkopplungszielfunktion, der Vergleich aller Moden und der Diagonale sowie die Serienzielfunktion betrachtet. Bei der Erstellung der Regressionsmodelle ist neben dem Bestimmtheitsmaß der Korrelationskoeffizient zwischen der Zielfunktion und der auftretenden Anzahl der Moden angegeben.

Die Euklidische Norm nach Gleichung (4.4) ist vergleichbar zum Bewertungsindex und der Parameterverlauf wird äquivalent abgebildet, vergleiche Abbildung 5.5. Das Regressionsmodell besitzt eine Modellgüte von $R^2 = 0.954$. Der Korrelationskoeffizient k_{zm} zwischen der Zielfunktion und der Modenzahl beträgt $k_{zm} = -0.9742$. Für die Maximums- und die Summennorm nach Gleichung (4.2) und (4.3) werden äquivalente Aussagen getroffen. Wird die Maximumsnorm betrachtet, gilt $R^2 = 0.907$ und der Korrelationskoeffizient ist $k_{zm} = -0.8736$, vergleiche Abbildung 5.7. Bei der Summennorm ist die Modellgüte $R^2 = 0.984$ und der Korrelationskoeffizient $k_{zm} = -0.9815$, vergleiche Abbildung 5.6. Wie bei der Auswertung für eine einzelne Instabilität werden stabile Bereiche durch 0 angezeigt.

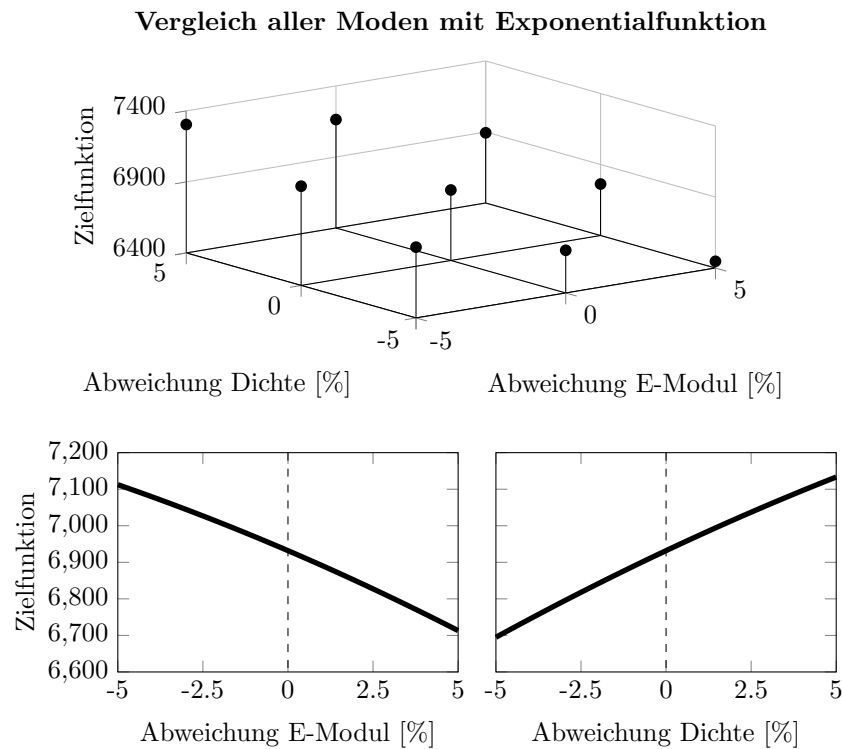


Abbildung 5.9: Verteilung der Zielfunktion mit Vergleich aller Moden mit Exponentialfunktion für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

Treten diese in der Auswertung auf, wird durch die fehlende Angabe des Stabilitätsgrads die Aussagekraft verringert.

Bei Betrachtung der Modenkopplung für mehrere Frequenzen nach Gleichung (4.13) ist die Auswertung nicht mit dem Bewertungsindex vergleichbar, vergleiche Abbildung 5.8. Es ergeben sich die Modellgüte $R^2 = 0.606$ und der Korrelationskoeffizient $k_{zm} = -0.4951$. Die Modellgüte ist schlechter als bei den vorherigen Auswertungen.

Werden alle Moden im Frequenzspektrum mit Gewichtung durch die Exponentialfunktion nach Gleichung (4.34) verglichen, spiegelt die Aussage ebenfalls nicht den Bewertungsindex wider, vergleiche Abbildung 5.9. Die Parameter verlaufen entgegengesetzt zu den anderen Modellen und der Robustheitsbewertung anhand des Bewertungsindex. Die Modellgüte ist $R^2 = 0.988$. Zusätzlich gibt es eine starke Korrelation zwischen der Zielfunktion und der Modenanzahl mit $k_{zm} = 0.9998$, sodass die Bewertung der Versuche maßgeblich durch die Anzahl der Moden im betrachteten Frequenzspektrum beeinflusst ist.

Wird anstatt des Vergleichs aller Moden der Vergleich von benachbarten Moden auf der Diagonale nach Gleichung (4.37) genommen, ergibt sich ein Modell, das nicht den Parameterverlauf des Bewertungsindex darstellt, vergleiche Abbildung 5.10. Obwohl gilt, $R^2 = 0.804$,

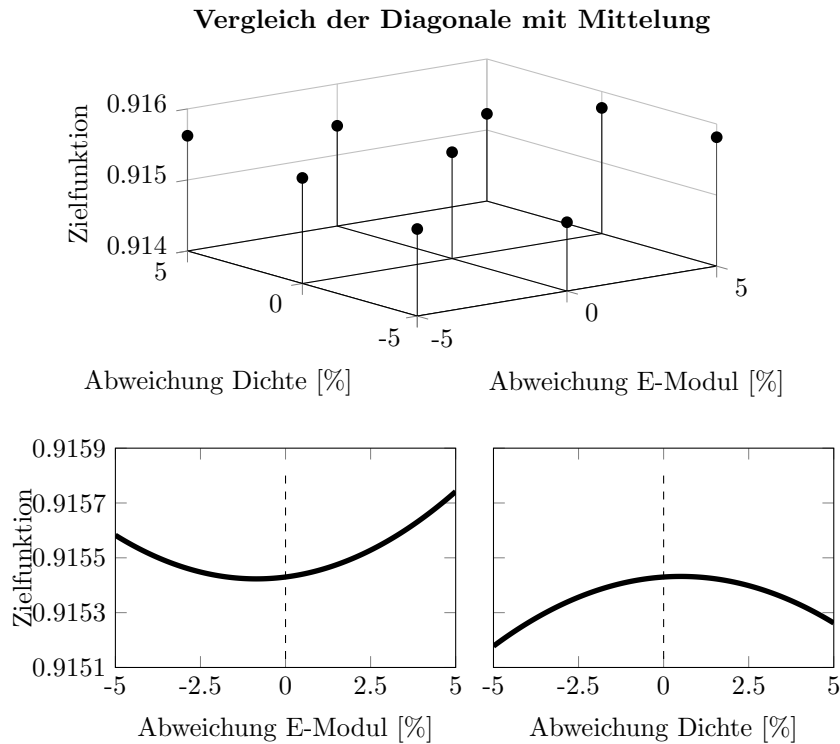


Abbildung 5.10: Verteilung der Zielfunktion mit Vergleich der Diagonalelemente mit Mittelung für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

und der Korrelationskoeffizient $k_{zm} = -0.088$ ist, ist die Zielfunktion nicht zur Bewertung der Experimente geeignet.

Die letzte Zielfunktion, welche zur Betrachtung des gesamten Frequenzspektrums der Simulationen gegeben ist, ist nach Gleichung (4.38) die Serienzielfunktion, vergleiche Abbildung 5.11. Das Resultat ist eine zum Bewertungsindex vergleichbare Auswertung, welche die beiden Parameter äquivalent dazu einordnet. Für das Bestimmtheitsmaß gilt $R^2 = 0.945$ und der Korrelationskoeffizient ist $k_{zm} = -0.9646$. Insgesamt spiegelt die Serienzielfunktion den Bewertungsindex im Vergleich zu den vorherigen Funktionen am besten wider und kann nach Abschnitt 5.1 zum Vergleich zwischen der Robustheitsuntersuchung, der Simulation, dem Prüfstand und dem Fahrzeugtest verwendet werden.

Beim Vergleich der einzelnen Zielfunktionen wird die Korrelation zwischen dem Wert der Funktion und der Modenzahl angegeben. Das Merkmal ist nur bei bestimmten Funktionen aussagekräftig. Wird die Zielfunktion über den Vergleich aller Moden betrachtet, führt eine Erhöhung der Modenzahl im Spektrum zu mehr Summanden in der Zielfunktion. Dies bedingt einen größeren Zielfunktionswert. Dagegen werden bei der Maximumsnorm und der Serienzielfunktion unabhängig von der Modenzahl eine bestimmte Anzahl an Instabilitäts-

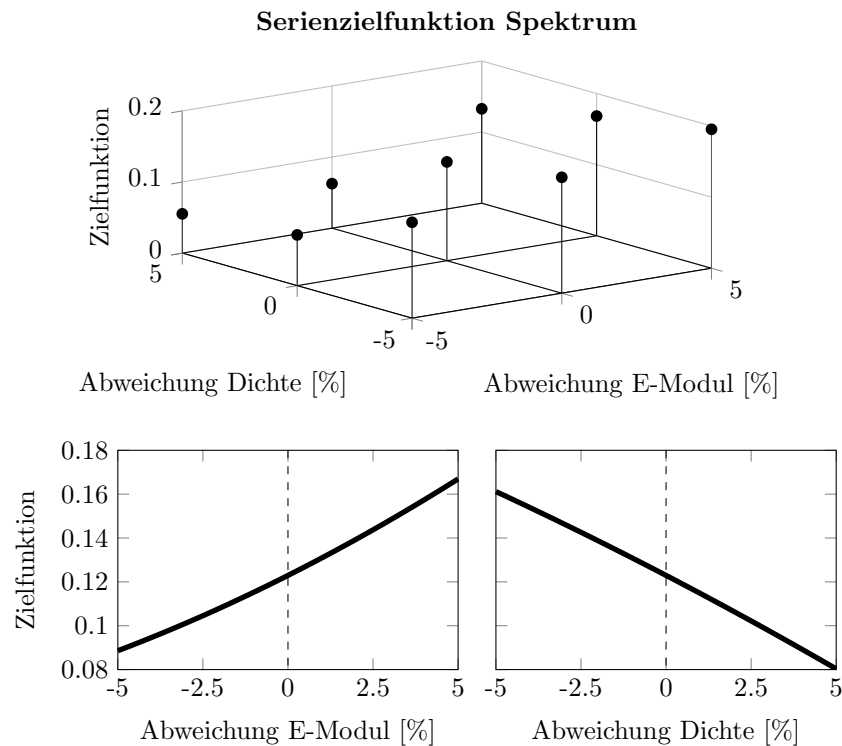


Abbildung 5.11: Verteilung der Serienzielfunktion für das gesamte Frequenzspektrum und ein Schnitt durch das Regressionsmodell beim Elastizitätsmodul 112 GPa und Dichte $7.2 \frac{g}{cm^3}$.

ten betrachtet. Deshalb existieren in diesen beiden Fällen keine Abhängigkeiten zwischen Zielfunktionswert und Moden im Frequenzspektrum.

5.3 Validierung der Serienzielfunktion

Zur Validierung der Serienzielfunktion wird dasselbe Bremsenmodell verwendet, welches zum Vergleich der Zielfunktionen herangezogen wird. Die Regressionsberechnungen werden an mehr Parametern als beim Zielfunktionsvergleich mit der vorhandenen Auswertung durch den Bewertungsindex verglichen, vergleiche Abbildung 5.3. Die Berechnung des Index mit NVH Rechnungen bei Kombinationen von Reibwerten und Bremsdrücken erfolgt über einen Versuchsplan nach dem Schema One Factor at One Time. Es werden die nicht betrachteten Parameter auf dem Nominalwert belassen und es werden keine Wechselwirkungen dargestellt. Die Parameter werden hinsichtlich ihrer Sensitivität auf den Bewertungsindex geprüft.

Ausgewertet werden die Variablen Elastizitätsmodul Reibring Bremsscheibe, Dichte Reibring Bremsscheibe, Elastizitätsmodul Halter, Dichte Halter, Elastizitätsmodul Schwenklager und

Variante	BI Spektrum	BI 1.6 kHz
Basis	6	6
Scheibe Reibring E-Modul 95%	7	8
Scheibe Reibring E-Modul 105%	5	5
Scheibe Reibring Dichte 95%	5	5
Scheibe Reibring Dichte 105%	7	8
Halter E-Modul 95%	6	6
Halter E-Modul 105%	7	7
Halter Dichte 95%	6	6
Halter Dichte 05%	5	5
Schwenklager E-Modul 95%	5	5
Schwenklager E-Modul 105%	7	7
Schwenklager Dichte 95%	7	8
Schwenklager Dichte 105%	5	5

Tabelle 5.3: Auswertung des Systems mit dem Bewertungsindex für das gesamte Frequenzspektrum und der Instabilität bei 1.6 kHz.

Dichte Schwenklager. Zusammen mit der Variation von Reibwert und Bremsdruck werden acht Parameter evaluiert. Zur Validierung wird in zwei Schritten vorgegangen. Zuerst werden die Auswertungen auf dem gesamten Frequenzspektrum betrachtet, im zweiten Schritt erfolgt eine Analyse einer einzelnen Frequenz, 1.6 kHz. Die Berechnung des Regressionsmodells basiert auf einem Versuchsplan mit 100 Experimenten.

5.3.1 Gesamtes Frequenzspektrum

Für die Berechnung des gesamten Frequenzspektrums wird die Serienziefunktion mit einer Reihenlänge von fünf auf dem Frequenzbereich von 1 bis 16 kHz berechnet. Bei der Auswertung des Regressionsmodells ergibt sich eine Modellgüte von 0.964, vergleiche Abbildung 5.12.

Zur Validierung der Verläufe von Reibwert und Bremsdruck werden Einzelauswertungen zur Erstellung des Bewertungsindex betrachtet, vergleiche Abbildung 5.13. Der Bewertungsindex wird aus den negativen Dämpfungen bei verschiedenen Reibwerten und Bremsdrücken berechnet. Diese sind in den Einzelauswertungen durch Symbole mit verschiedenen Formen dargestellt.

Die Auswertungen zeigen, dass der Reibwert einen großen Einfluss auf die einzelnen Instabilitäten besitzt. Abgelesen wird dies daran, dass die einem Reibwert von $\mu = 0.6$ entsprechenden Kreise durchgängig eine höhere negative Dämpfung als die einem Reibwert von $\mu = 0.3$ entsprechenden Kreuze besitzen. Für diesen Parameter ist der Bewertungsindex und das Regressionsmodell vergleichbar.

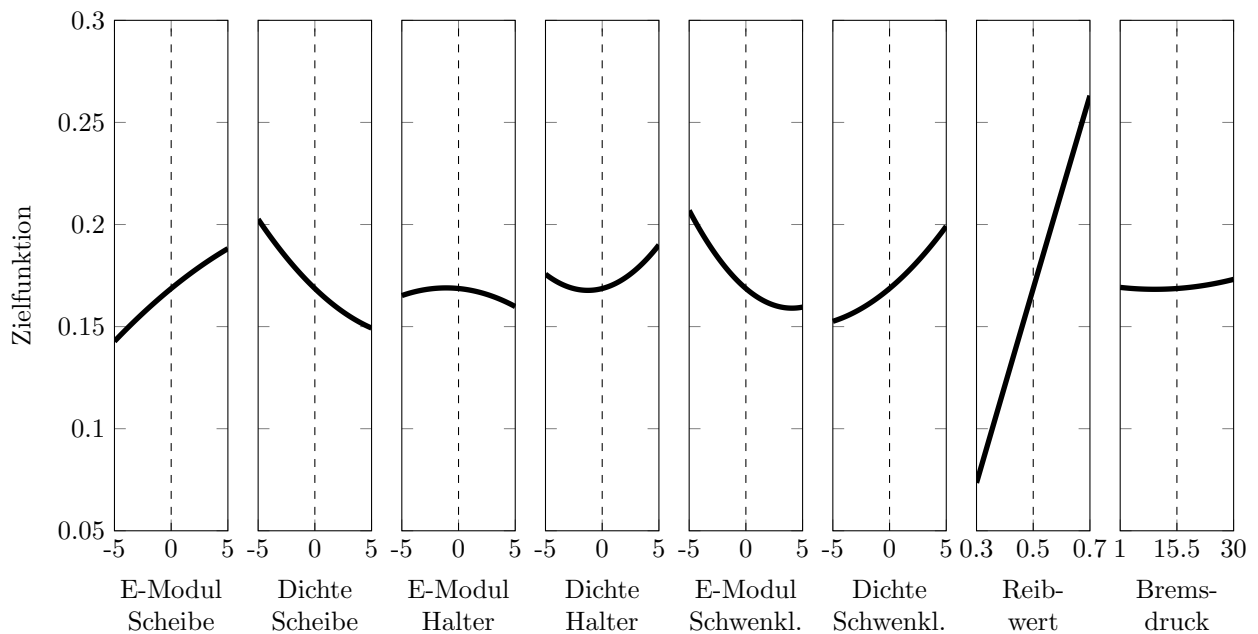


Abbildung 5.12: Grafische Darstellung des Regressionsmodells für das gesamte Frequenzspektrum mit den Verläufen der einzelnen Parameter. Angegeben sind Abweichungen der Materialparameter in Prozent sowie der Reibwert und der Bremsdruck. Die Kurvenschar wird nach Abschnitt 3.7 aus der achtdimensionalen Fläche geschnitten, während sich alle Parameter am Mittelwert befinden.

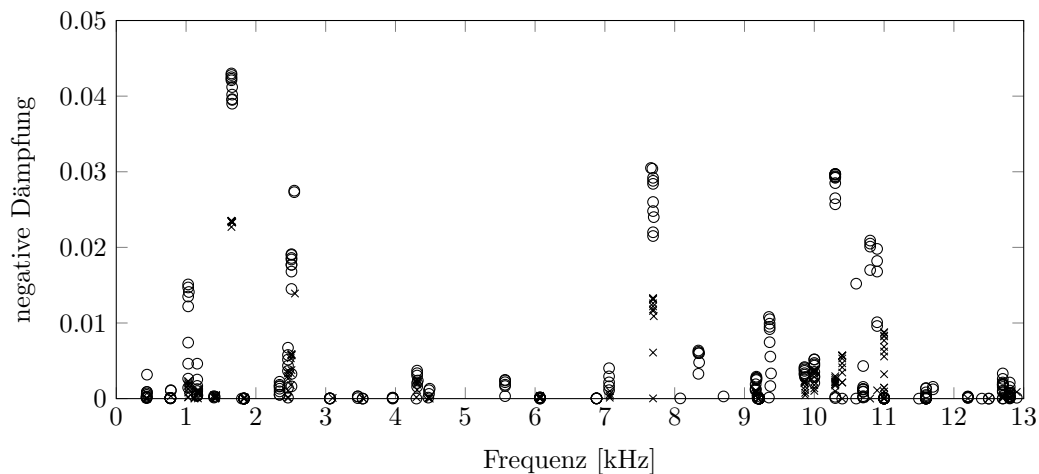


Abbildung 5.13: Einzelauswertung zur Berechnung des Bewertungsindex. Aufgetragen ist hier die negative Dämpfung über die Frequenz. Die Kreuze stellen Rechnungen bei $\mu = 0.3$ dar, die Kreise bei $\mu = 0.6$.

Es treten viele gruppierte Symbole bei den einzelnen Frequenzen und identischen Werten für die negative Dämpfung auf. Die Symbole stellen unterschiedliche Bremsdrücke dar, sodass der Einfluss des Bremsdrucks auf die Bewertung gering ist. Dies wird im Regressionsmodell abgebildet.

Im nächsten Schritt werden die Einflüsse der einzelnen Parameter zwischen dem Bewertungsindex aus Tabelle 5.3 und dem Ersatzmodell aus Abbildung 5.12 verglichen. Das Regressionsmodell wird in Abhängigkeit der Parameterwerte mit Nominalwerten betrachtet und es werden die Verläufe anhand der Zielfunktionswerte bewertet. Damit wird die Serienzielfunktion gegenüber dem Bewertungsindex validiert.

Für den Elastizitätsmodul des Bremsscheibenreibrings gilt, dass bei einem geringen Wert eine kleinere Serienzielfunktion auftritt und bei einem höheren eine größere als beim Nominalwert. Dies verhält sich äquivalent zum Bewertungsindex. Umgekehrt ist es bei der Dichte des Bremsscheibenreibrings. Eine leichtere Scheibe ist schlechter, eine schwerere besser als der Nominalwert und die Zielfunktion und der Bewertungsindex sind für den Elastizitätsmodul des Bremsscheibenreibrings vergleichbar. Somit gibt es eine Übereinstimmung.

Beim Elastizitätsmodul des Halters treten geringere Schwankungen auf. Es gilt, dass ein höhere Elastizitätsmodul kleinere Instabilitäten verursacht. Auch die Dichte hat wenig Einfluss auf die Zielfunktion, sie liefert bei einem großen Wert eine schlechtere Zielfunktion. Die Absolutwerte haben die gleiche Größenordnung wie die der Bremsscheibe. Der Regressionsverlauf des Halters zeigt bei Änderung des Parameters qualitativ die gleiche Tendenz wie der Bewertungsindex.

Das letzte Bauteil ist das Schwenklager. Wird dessen Elastizitätsmodul betrachtet, so gilt, dass weich besser und steif schlechter ist als die Zielfunktion bei Nominalwert. Wird die Dichte evaluiert, ist leicht besser und schwer schlechter als nominal. Die Werte sind vergleichbar zu den obigen Untersuchungen. Der Bewertungsindex und die Regression zeigen im Verlauf vergleichbare Auswirkungen bei Variation des Elastizitätsmoduls des Schwenklagers.

5.3.2 Einzelne Frequenz

Nach dem Vergleich zwischen dem Bewertungsindex und dem Regressionsmodell für das gesamte Frequenzspektrum wird die Auswertung für eine einzelne Frequenz, 1.6 kHz, durchgeführt. Es wird derselbe Versuchsplan wie bei den Betrachtungen zum gesamten Frequenzspektrum berechnet. Das Regressionsmodell, vergleiche Abbildung 5.14, wird mit der Serienzielfunktion mit Reihenlänge eins und dem betrachteten Frequenzbereich zwischen 1.4 und

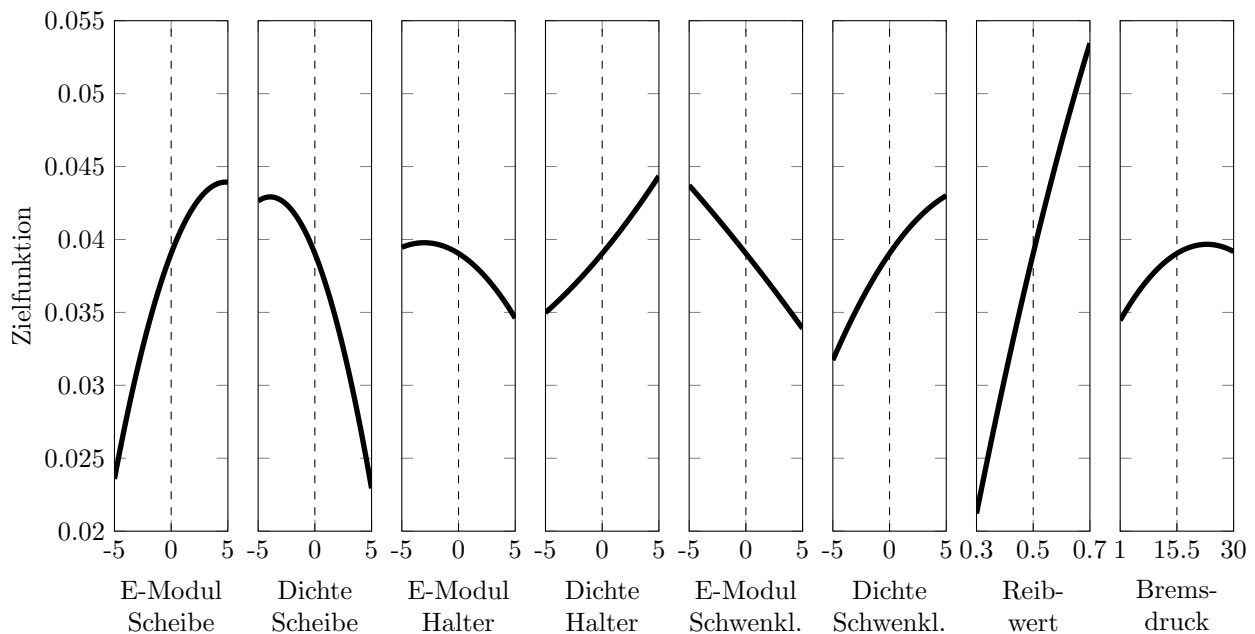


Abbildung 5.14: Grafische Darstellung des Regressionsmodells für die einzelne Frequenz bei 1.6 kHz mit den Verläufen der einzelnen Parameter. Angegeben sind Abweichungen der Materialparameter in Prozent sowie der Reibwert und der Bremsdruck. Die Kurvenschar wird nach Abschnitt 3.7 aus der achtdimensionalen Fläche geschnitten, während sich alle Parameter am Mittelwert befinden.

1.8 kHz bestimmt und besitzt eine Modellgüte von $R^2 = 0.951$, vergleiche Gleichung (3.39). Die zugehörigen Bewertungsindizes werden aus Tabelle 5.3 abgelesen.

Es werden der Reibwert und der Bremsdruck betrachtet. In der Einzelauswertung wird ausschließlich die Instabilität bei 1.6 kHz evaluiert, vergleiche Abbildung 5.13. Die Kreuz- und Kreissymbole stellen unterschiedliche Reibwerte dar. Durch die Differenz der negativen Dämpfung in Bezug auf die Symbole hat der Reibwert einen großen Einfluss auf die Bewertung. Der Bremsdruck hat wenig Einfluss auf die negative Dämpfung, vergleichbar zu dem zuvor betrachteten Frequenzspektrum. Dies ist sichtbar an der Lage vieler Punkte bei einem Wert. Für die beiden Parameter herrscht eine Übereinstimmung zwischen Regressionsmodell und Bewertungsindex.

Zur Validierung der Einflüsse werden die einzelnen Parameter gesondert betrachtet. Für den Elastizitätsmodul des Reibrings der Bremsscheibe ist ein niedrigerer besser und ein höherer schlechter als der Nominalwert. Insbesondere hat der Parameter eine große Steigung. Bei einer kleineren Dichte ist die Bewertung schlechter, bei einer größeren Dichte besser als beim Nominalwert. Die Werte und die Steigung sind vergleichbar zum Elastizitätsmodul und die Regression stimmt mit dem Bewertungsindex überein.

Beim Halter treten wenig Schwankungen auf. Bei höherem Elastizitätsmodul liegt eine bessere Bewertung und bei niedriger eine schlechtere als beim Mittelwert vor. Gleiches gilt für die Dichte, hier verschlechtert sich die Bewertung bei höherer Dichte. Insgesamt sind die Werte der Zielfunktion passend zu denen der Bremsscheibe. Der Bewertungsindex ist vergleichbar zur Zielfunktion.

Abweichungen zwischen den Auswertungen ergeben sich beim Schwenklager. Der Bewertungsindex liefert einen größeren Einfluss auf das Ergebnis als das Regressionsmodell. Es ist ein weicherer Elastizitätsmodul schlechter und ein steiferer besser sowie eine kleinere Dichte besser und eine größere Dichte schlechter als bei den Nominalwerten. Werden die zugrundeliegenden Einzelauswertungen detailliert betrachtet, sind die Ergebnisse des Regressionsmodells vergleichbar zum kontinuierlichen Bewertungsindex nach Gleichung (5.4). Indem eine diskrete Einteilung dessen nach Tabelle 5.1 erfolgt, ergeben sich Abweichungen zum Regressionsmodell.

Zusammenfassend wird für die Auswertung über das gesamte Frequenzspektrum und über eine einzelne Frequenz eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des Bewertungsindex und der Regressionsberechnung festgestellt. Die Serienzielfunktion liefert eine gute Modellqualität und bildet den Verlauf von Reibwert und Bremsdruck korrekt ab. Differenzen zwischen den Bewertungen ergeben sich durch den Vergleich von einem kontinuierlichen Ansatz, der Serienzielfunktion, mit einem diskreten, dem Bewertungsindex.

5.4 Abbildung eines Regressionsbewertungsindex

Der vorgestellte Bewertungsindex für die Simulationen wird auf das Ersatzmodell der Regression übertragen. Die Berechnung erfolgt durch das Regressionsmodell, welches an den entsprechenden Stellen ausgewertet wird. Um das Ersatzmodell mit dem Bewertungsindex zu vergleichen ist folgender Algorithmus gegeben:

Algorithmus 5.1 (Bewertungsindex)

1. *Simulation des Versuchsplans,*
2. *Berechnung des Regressionsmodells,*
3. *Auswertung des Regressionsmodells bei den gegebenen Druckstufen und Reibwerten zur Bestimmung des Bewertungsindex,*

4. *Berechnung von Regressionsbewertungsindex durch*
 - a) *maximale Zielfunktion bei bestimmter Frequenz,*
 - b) *Häufigkeit der positiven Zielfunktionswerte,*
5. *Einordnung von Regressionsbewertungsindex mit simulativem Bewertungsindex,*
6. *Vergleich von Bewertungsindex, Regressionsbewertungsindex und Zielfunktion.*

Die entwickelte Serienzielfunktion ist vergleichbar zur negativen Dämpfung, somit ist die Zielfunktion des Regressionsmodells und die Simulationsbewertung äquivalent. Ein Unterschied ist, dass die Simulationsbewertungen auf Rechnungen mit Betrachtung der Dämpfungsmatrix basieren, während beim Regressionsmodell in der Berechnung die Dämpfung vernachlässigt wird. Deshalb ist keine Übernahme der Zuweisung der kontinuierlichen Werte in das diskrete Schema möglich. Da die Rechnungen ohne Dämpfungsmatrix zumeist schlechter bewertet werden, vergleiche Abschnitt 4.4.3, ist eine Anpassung der Zuordnung von diskretem und kontinuierlichem Bewertungsindex nötig.

Trotz Anpassungen an der Einteilung sind Abweichungen zwischen dem wie in Abschnitt 5.1 beschriebenen Bewertungsindex der Simulation und der Serienzielfunktion gegeben. Gründe dafür sind:

- Berechnung von unterschiedlichen Druckstufen und Reibwerten,
- Rechnungen mit Dämpfungsmatrix gegenüber Rechnungen ohne Dämpfungsmatrix,
- Differenzierende Berechnungskonzepte und Auswertepunkte, Parametervariation gegenüber den Einzelauswertungen.

Die Serienzielfunktion ist im Gegensatz zum Bewertungsindex eine kontinuierliche Größe und besitzt die passenden Eigenschaften zur Erstellung des Regressionsmodells. Unter bestimmten Voraussetzungen existiert eine Übereinstimmung bei der Bewertung der Bremsenmodelle mit dem Bewertungsindex und der Serienzielfunktion.

6 Parameterbetrachtungen

Vor der Betrachtung von realen Bremssystemen wird am Beispiel eines Zweimassenschwingers als einfaches Schwingungssystem, vergleiche Anhang B.2, gezeigt, dass alle im System enthaltenen Parameter Einfluss auf die Eigenfrequenzen dessen besitzen. Dargestellt wird der Schwinger durch das Gleichungssystem

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0, \quad (6.1)$$

$$m\alpha\ddot{x}_2 - kx_1 + (1 + \beta)x_2 = 0. \quad (6.2)$$

Dabei ist α das Verhältnis zwischen den Massen und β das Verhältnis zwischen den Steifigkeiten. Die Eigenfrequenzen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, vergleiche Gleichung (B.28) bis (B.31), sind durch die nichtlinearen Funktionen $a(k, m, \alpha, \beta)$, $b(\alpha, \beta)$ und $c(\alpha, \beta)$ gegeben, vergleiche Gleichung (B.26), welche Abhängigkeiten von den erhaltenen Parametern besitzen.

$$\lambda_1 = i\sqrt{|a(k, m, \alpha, \beta)|}\sqrt{|b(\alpha, \beta)|}, \quad (6.3)$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{|a(k, m, \alpha, \beta)|}\sqrt{|b(\alpha, \beta)|}, \quad (6.4)$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{|a(k, m, \alpha, \beta)|}\sqrt{|c(\alpha, \beta)|}, \quad (6.5)$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{|a(k, m, \alpha, \beta)|}\sqrt{|c(\alpha, \beta)|}. \quad (6.6)$$

Tritt eine Schwankung bei einem der Parameter auf, ergibt sich eine Variation von α oder β in den Gleichungen (6.3) bis (6.6). Aufgrund der Abhängigkeit von $a(k, m, \alpha, \beta)$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, haben beide Eingangsparameter α und β Einfluss auf die Eigenfrequenzen des Zweimassenschwingers. Bei Änderung eines Parameters ergeben sich durch den nichtlinearen Zusammenhang abweichende Eigenfrequenzen im System zum Ausgangszustand. Es erfolgt keine Verschiebung der Eigenfrequenzen, sondern es wird das Verhältnis der Frequenzen untereinander variiert. Aus diesem Grund ist die Lösung der Differentialgleichung von allen Eingangsparametern abhängig.

6.1 Modellparameter

Wie am Zweimassenschwinger demonstriert, haben verschiedene Eingangsparameter Einfluss auf die Frequenzen des Bremssystems. Es erfolgt eine Identifikation der beschreibenden Parameter des Finiten Elemente Modells. Wie in Anhang A beschrieben, ist der Umfang des Bremssystems bis zur Anbindung an den Achsträger gegeben (Tison u. a. [2014]). Die Verbindung zwischen dem Bremssystem und den Achsen erfolgt über dämpfende Elemente, um die Vibrationsübertragung möglichst gering zu halten.

Bei der Identifikation der Bauteile werden diejenigen betrachtet, welche den größten Einfluss auf die Entwicklung des Bremsenquietschens besitzen. Den Ausgangspunkt des Quietschens stellt die Reibung zwischen der Bremsscheibe und den Bremsbelägen dar (Chen u. a. [2006, Kapitel 1.2.3, Seite 14f]) und die Scheibe tritt als dominanter Strahler auf (Buck [2008, Kapitel 6.2, Seite 84] und Mohammed und Rahim [2013]). Deshalb werden die Bremsscheibe, die Bremsbeläge und deren angrenzende Komponenten betrachtet. Neben der Scheibe und den Belägen (Lü und Yu [2014] und Soobbarayen u. a. [2014a]) werden zusätzlich der Halter und die Faust (Nouby u. a. [2009]) als benachbarte Bauteile miteinbezogen. Für die Anbindung des Bremssystems an die Achse ist das Schwenklager von Bedeutung (Carvajal Gonzalez u. a. [2014] und Nunes u. a. [2009]).

Werden von den ausgewählten Komponenten verschiedene Material- und Geometrieparameter betrachtet und die im Finiten Elemente Modell enthaltenen Betriebsparameter hinzugenommen, ergeben sich insgesamt 32 Parameter. Es werden die Geometrietoleranzen in der Fertigung vernachlässigt, da diese basierend auf empirischen Untersuchungen gegenüber den Materialschwankungen klein sind (Savci [2015]). Da Gusseisenwerkstoffe eine geringe Temperaturabhängigkeit besitzen (Trubitz u. a. [2004]), wird die Temperatur nicht betrachtet. Entgegengesetzt verhält es sich beim Bremsbelag (Breuer und Bill [2006, Kapitel 23, Seite 341ff]). Eine Übersicht der Parameter ist in Tabelle 6.1 gegeben.

Die Parameter werden in unterschiedliche Kategorien eingeteilt. Die Umgebungsparameter charakterisieren nicht beeinflussbare Variablen und stellen die Unterschiede in der Bremsbetätigung dar. Zu diesen Parametern gehören der Bremsdruck, die Fahrriechung, der Reibwert, der Gradient dessen und die Temperatur des Bremsbelags. Der Bremsdruck spiegelt die Bremskraft am Pedal wider. Bei der Fahrriechung wird zwischen vorwärts und rückwärts unterschieden. Die Geschwindigkeit stellt die Winkelgeschwindigkeit der Bremsscheibe dar, welche zur Fahrzeuggeschwindigkeit korreliert. Der Reibwert und dessen Gradient sind gegeben durch die Eigenschaften des Reibmaterials und durch äußere Einflüsse wie die Geschwindigkeit und den Bremsdruck.

Bremsdruck	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Dichte Bremsbelag	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Bremsscheibe	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Gehäuse	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Halter	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Kolben	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Rückenplatte	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dichte Schwenklager	$[\frac{t}{mm^3}]$,
Dicke Bremsbelag	$[mm]$,
Dicke Bremsscheibe	$[mm]$,
Elastizitätsmodul Bremsbelag E_{xx}	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Bremsbelag E_{zz}	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Bremsscheibe	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Gehäuse	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Halter	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Kolben	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Rückenplatte	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Elastizitätsmodul Schwenklager	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Fahrriichtung	$[-]$,
Geschwindigkeit	$[\frac{rad}{s}]$,
Gradient Reibwert	$[-]$,
Querkontraktion Bremsbelag P_{xy}	$[-]$,
Querkontraktion Bremsbelag P_{xz}	$[-]$,
Querkontraktion Bremsscheibe	$[-]$,
Querkontraktion Gehäuse	$[-]$,
Querkontraktion Halter	$[-]$,
Querkontraktion Kolben	$[-]$,
Querkontraktion Rückenplatte	$[-]$,
Querkontraktion Schwenklager	$[-]$,
Reibwert Bremsscheibe-Bremsbelag	$[-]$,
Schubmodul Bremsbelag G_{xz}	$[\frac{N}{mm^2}]$,
Temperatur Bremsbelag	$[^{\circ}C]$.

Tabelle 6.1: Die beschreibenden Parameter eines Bremssystems in alphabetischer Reihenfolge.

Zur Abbildung von Variationen in den Werkstoffen werden die Materialparameter herangezogen. Schwankungen in diesen entstehen durch die Herstellungsverfahren und chemischen Zusammensetzungen. Zu dieser Kategorie zählen die Elastizitätsmoduln, die Dichten, die Querkontraktionen und die Schubmoduln.

Die letzte Gruppe bilden die Geometrieparameter. Es erfolgt eine Betrachtung der Abnutzungen der Teile über die Laufzeit. Zu dieser Gruppe gehören die Dicke der Bremsscheibe und des Bremsbelags.

6.2 Parameterreduktion

Der erste Typus sind die Materialparameter. Für jedes Bauteil, welches isotropes Materialverhalten aufweist, erfolgt die Beschreibung durch drei Parameter. Sie werden dargestellt durch den Elastizitätsmodul, die Dichte und die Querkontraktion, vergleiche Anhang C.1 und C.3. Dies trifft mit Ausnahme des Bremsbelags zu, welcher durch ein transversal isotropes Materialgesetz mit fünf Parametern gegeben ist, vergleiche Anhang C.4. Es wird der einflussreichste Parameter für jedes Bauteil aus der gegebenen Menge bestimmt.

Zur Bestimmung der Anzahl der Kenngrößen, welche für die einzelnen Bauteile nötig sind, wird eine Entdimensionalisierung nach dem II-Theorem von Buckingham (Buckingham [1914] und Spurk [1992, Kapitel 1.5, Seite 33ff]) durchgeführt. Damit werden Beeinflussungen von Parametern untereinander untersucht um die Parameterzahl zu reduzieren. Es wird der Zusammenhang zwischen den Größen der isotropen Materialbeschreibung in der Simulation, dem Elastizitätsmodul, der Dichte und der Querkontraktion, mit einer zerstörungsfrei messbaren Größe, der ersten Out-of-Plane Eigenfrequenz, betrachtet. Unter der Annahme einer Kirchhoff Platte mit einheitlicher Dicke ist der allgemeine Zusammenhang der Größen wie folgt gegeben:

$$f = B \sqrt{\frac{Et^2}{\rho a^4(1 - \nu^2)}},^{37} \quad (6.7)$$

mit

f	Eigenfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$,
B	Konstante zur Beschreibung von Form und Randbedingungen	$[-]$,
E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{kg}{ms^2}\right]$,

³⁷Vergleiche Harris und Piersol [2002, Kapitel 1, Seite 1.14].

t	Dicke	$[m]$,
ϱ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$,
a	Seitenlänge oder Radius	$[m]$,
ν	Querkontraktion	$[-]$.

In der Beschreibung der ersten Out-of-Plane Eigenfrequenz enthalten sind die Grunddimensionen T für die Zeit, L für die Länge und M für die Masse. Zur Entdimensionalisierung werden die Parameter zur Darstellung der Form, a und t , vereint,

$$f = \text{const} \sqrt{g_f \frac{E}{\varrho(1-\nu^2)}}, \quad (6.8)$$

mit $g_f := \frac{t^2}{a^4} \left[\frac{1}{m^2}\right]$, Geometrieparameter zur Beschreibung der Form. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird zur Entdimensionalisierung $\text{const} = 1$ gewählt.

Für die Anwendung des II-Theorems von Buckingham sind vier Einflussgrößen, f , g_f , E und ϱ , und drei Dimensionen, T , L und M , gegeben. Daraus folgt, dass eine dimensionslose Größe zur Beschreibung des Zusammenhangs ausreichend ist. Die Anzahl der Parameter lässt sich auf eins reduzieren.

Gezeigt wird dies durch die Durchführung des II-Theorems. Es gilt der Produktansatz

$$\Pi = f^{x_1} g_f^{x_2} E^{x_3} \varrho^{x_4}. \quad (6.9)$$

Somit ergibt sich für die Dimensionen

$$\left(\frac{1}{T}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{L^2}\right)^{x_2} \left(\frac{M}{LT^2}\right)^{x_3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{x_4} = 1. \quad (6.10)$$

Dies liefert das unterbestimmte Gleichungssystem

$$-x_1 - 2x_3 = 0, \quad (6.11)$$

$$-2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \quad (6.12)$$

$$x_3 + x_4 = 0. \quad (6.13)$$

Mit der Wahl $x_3 = 1$ werden die weiteren Variablen bestimmt, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_4 = -1$, und die dimensionslose Größe wird angegeben:

$$\Pi = f^{-2} g_f E \varrho^{-1} = \frac{g_f E}{f^2 \varrho}. \quad (6.14)$$

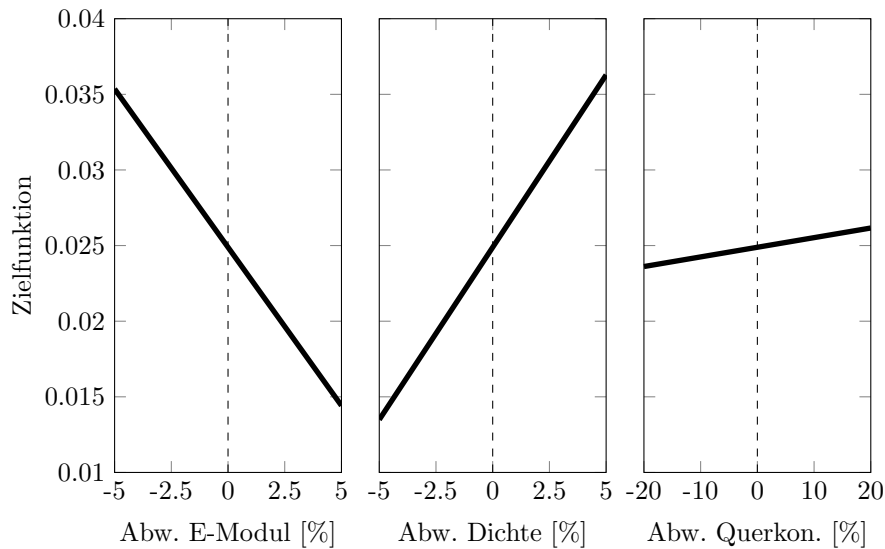


Abbildung 6.1: Darstellung der Parameterverläufe des Regressionsmodells bei Betrachtung von Elastizitätsmodul, Dichte und Querkontraktion eines Halters.

Das Ergebnis des II-Theorems lautet:

$$\frac{g_f E}{f^2 \varrho} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad f \sim \sqrt{\frac{g_f E}{\varrho}}. \quad (6.15)$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{B}{\sqrt{1-\nu^2}}$, welcher sich durch einen experimentellen Versuch bestimmen lässt, ergibt sich die Darstellung der ersten Out-of-Plane Eigenfrequenz, vergleiche Gleichung (6.7). Deshalb ist die Beschreibung der isotropen Bauteile durch einen Parameter möglich. Da die Eigenfrequenz nicht im Simulationsmodell enthalten ist, erfolgt die Auswahl der zu betrachtenden Variablen aus den Materialparametern Elastizitätsmodul, Dichte und Querkontraktion durch Evaluierung der realen Einflüsse und Schwankungen.

Zur Bestimmung werden die Materialgrößen eines Halters betrachtet. Für die Untersuchung der Parametersensitivitäten wird ein Versuchsplan berechnet und ein Regressionsmodell erstellt. Die Eingangsgrößen stellen der Elastizitätsmodul und die Dichte mit Schwankungen von $\pm 5\%$ dar, die Querkontraktion besitzt eine Variation von $\pm 20\%$. Die Parameterverläufe sind in Abbildung 6.1 und die Sensitivitäten der Größen auf die Zielfunktion in Abbildung 6.2 gegeben.

Die Ergebnisse der Untersuchung liefern in der Sensitivitätsbetrachtung einen vergleichbaren Einfluss in der Bewertung für den Elastizitätsmodul und für die Dichte. Die Querkontraktion besitzt trotz einer vierfach größeren Streuung als die restlichen Parameter einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Zielfunktion. Für Guss-, Stahl- und Aluminiumbauteile

ist das Beispiel allgemeingültig und die Ergebnisse anderer Komponenten sind vergleichbar. Bei Bauteilen aus anderen Materialien hat die Querkontraktion einen größeren Einfluss, zum Beispiel Gummi. Da in der Literatur in Bezug auf Bremsenkomponenten keine Behandlung der Querkontraktion erfolgt, wird der Parameter für alle Bauteile aus dem zu variierenden Umfang gestrichen.

Die in Abbildung 6.1 und Kapitel 5.2 gezeigten Regressionsmodelle weisen eine Korrelation zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte der einzelnen Bauteile auf. Dies wird über eine Messreihe von Bremsscheiben experimentell überprüft (BMW Group [2016]). Darin sind 63 Proben von Scheiben aus Grauguss mit Lamellengraphit gegeben. Der Korrelationskoeffizient zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte beträgt 0.8692, vergleiche Abbildung 6.3. Der Signifikanzwert ist 0, vergleiche Gleichung (3.15). Der Zusammenhang wird nicht durch Zufallsvariablen initiiert.

Nach Auswertung der Messreihe besteht zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte der Bremsscheiben ein linearer Zusammenhang, die beiden Größen sind korreliert. Dies ist übertragbar auf die weiteren Bauteile, da diese aus Materialien mit gleichen Eigenschaften bestehen. Zur allgemeinen Herleitung wird die Beziehung

$$\text{Elastizitätsmodul} \sim \text{Dichte} \quad (6.16)$$

an den Ersatzsystemen des Ein- und Zweimassenschwingers analytisch hergeleitet, vergleiche Anhang B. Für den Einmassenschwinger ist nach Gleichung (B.8) für physikalische Eigenfrequenzen mit positiver Schwingungsdauer folgende Lösung gegeben:

$$\lambda = -\delta + i\omega_D, \quad (6.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta &= \omega_0 \vartheta = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{c}{2\sqrt{km}}, \\ \omega_D &= \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

k stellt die Steifigkeit dar, welche zum Elastizitätsmodul korreliert, und m die Masse, welche bei dem angenommenen gleichbleibenden Volumen zur Dichte korrespondiert. c gibt die Dämpfung an. Wird zur Vereinfachung angenommen, dass das System ohne Dämpfung betrachtet wird, gilt $c = 0$. Der Eigenwert λ des Einmassenschwingers ist gegeben durch

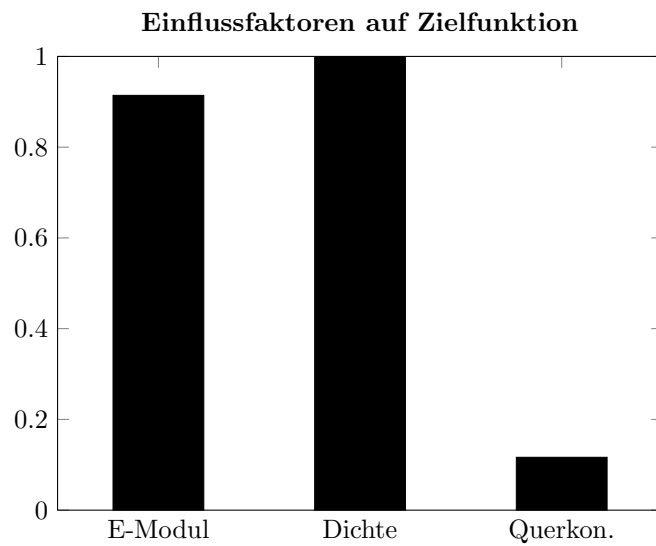


Abbildung 6.2: Darstellung der Sensitivitäten des Regressionsmodells bei Betrachtung von Elastizitätsmodul, Dichte und Querkontraktion des Halters auf die Zielfunktion.

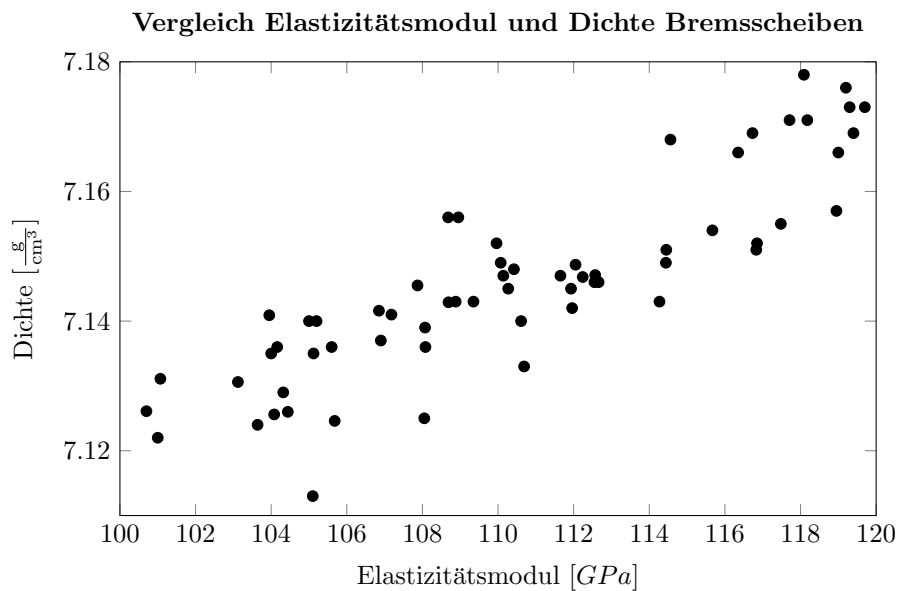


Abbildung 6.3: Verteilung der Werte für den Elastizitätsmodul und die Dichte von Bremscheiben. Es ist ein linearer Zusammenhang der Parameter gegeben.

$$\lambda = i\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.19)$$

Es gilt,

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{k}{m}} \sim \frac{k}{m} \sim \frac{\text{Elastizitätsmodul}}{\text{Dichte}}. \quad (6.20)$$

Es ist eine Proportionalität zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte in Bezug auf den Imaginärteil des Eigenwerts gegeben, welcher in die Eigenfrequenzen überführt werden kann,

$$\text{Elastizitätsmodul} \sim \text{Dichte}. \quad (6.21)$$

Wird der Zweimassenschwinger betrachtet, sind dessen Lösungen $\kappa_{1/2}$ durch Gleichung (B.26) gegeben.

$$\kappa_{1/2} = \frac{k}{m} \underbrace{\frac{1 + \alpha + \beta}{2\alpha} \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{1 + \alpha + \beta}} \right]}_{\text{dimensionslos, unabhängig von } k \text{ und } m}. \quad (6.22)$$

Es gilt,

$$\kappa_{1/2} \sim \frac{k}{m}, \quad (6.23)$$

und damit ist wie beim Einmassenschwinger in Ausdruck (6.21) gegeben,

$$\text{Elastizitätsmodul} \sim \text{Dichte}. \quad (6.24)$$

Als Schlussfolgerung der Korrelationsberechnungen wird nur einer der beiden Parameter pro Bauteil betrachtet. Werden die Schwankungsbreiten der Parameter ausgewertet, ergeben sich für das in Abbildung 6.3 gezeigte Beispiel Variationen von 20% für den Elastizitätsmodul und 1% für die Dichte. Nach Anhang C ist das Messverfahren für den Elastizitätsmodul innerhalb der Grenzen $\pm 3\%$ fehlerbehaftet, während die Dichte exakt bestimmt werden kann. Aus diesem Grund erfolgt eine Reduktion der Materialparameter auf die Elastizitätsmoduln der Bauteile. Die Schwankungen in den Dichten können durch eine größere Variation des Elastizitätsmoduls abgebildet werden, sind jedoch vernachlässigbar. Nach Chen u. a. [2006, Kapitel 1.3.3 und 1.3.4, Seite 17ff] haben die Elastizitätsmoduln der Bauteile einen großen Einfluss auf die Stabilität des Systems.

Durch die transversal isotrope Beschreibung des Reibmaterials werden fünf Parameter zur Materialbeschreibung benötigt. Darin enthalten ist der Schubmodul G_{xz} . Eine Variation dessen hat Auswirkungen auf die Eigenfrequenzen des Bremsbelags. Die Änderung ist vergleichbar mit einer Schwankung des Elastizitätsmoduls in tangentialer Richtung, E_{xx} . Damit wird die Variation von G_{xz} über die Schwankung des Elastizitätsmodul abgebildet und G_{xz} findet keine Berücksichtigung im Versuchsplan.

In den Umgebungsparametern wird die Temperatur des Bremsbelags betrachtet, welche abhängig ist von der Außentemperatur T . Diese besitzt Einfluss auf den Elastizitäts- und Schubmodul des Reibmaterials und wird mit folgenden Abhängigkeiten angegeben (BMW Group [2016]):

$$E_{\text{Belag}}(T) = \left(0.00875 \frac{T^2}{(20^\circ\text{C})^2} - 0.05 \frac{T}{20^\circ\text{C}} + 1.04125 \right) E_{\text{Belag}}(20^\circ\text{C}), \quad (6.25)$$

$$G_{\text{Belag}}(T) = \left(0.055 \frac{T^2}{(20^\circ\text{C})^2} - 0.25 \frac{T}{20^\circ\text{C}} + 1.195 \right) G_{\text{Belag}}(20^\circ\text{C}). \quad (6.26)$$

Die Relationen sind gültig für jede Richtung. Dazu werden Messungen von verschiedenen Belägen bei unterschiedlichen Temperaturen verglichen, über deren Auswirkungen auf den Elastizitäts- und Schubmodul gemittelt und als Funktion der Temperatur dargestellt. Da die Temperatur ausschließlich Einfluss auf den Elastizitäts- und Schubmodul des Bremsbelags besitzt, wird deren Variation durch die Elastizitätsmoduln des Belags abgebildet. Somit wird die Temperatur im Versuchsplan vernachlässigt.

Der Gradient des Reibwerts ∇_μ zwischen Scheibe und Belag stellt die Reibwertänderung zur Abbildung der Coulomb'schen Reibung (Popov [2010, Kapitel 10, Seite 137ff]) während der Bremsung dar. Dieser ist abhängig von der Geschwindigkeit und dem Reibkoeffizienten:

$$\nabla_\mu = \frac{\partial \mu}{\partial v_{\text{rel}}}, \quad (6.27)$$

mit μ Reibwert und v_{rel} relative Gleitgeschwindigkeit zwischen Scheibe und Belag. Der Gradient hat Einfluss in der Kontaktfläche zwischen der Scheibe und dem Belag (Allert [2014, Kapitel 6.3.3 und 6.3.4, Seite 122ff, und Anhang B.2, Seite 176f], Bajer u. a. [2003] und Bajer u. a. [2004]) und wird durch die virtuelle Arbeit nach Coulomb für die Reibung dargestellt.

$$\partial \Pi = \int_A \tau_i \delta \gamma_i \, dA, \quad (6.28)$$

³⁸Vergleiche Buck [2008, Kapitel 2.1.1, Seite 7].

mit

A	Kontaktfläche,
$\delta\gamma_i$	virtuelle Relativbewegung,
$\tau_i = \mu(\bar{\gamma}, p)pn_i$	tangentiale Spannung,
$\mu = \mu(\bar{\gamma}, p)$	Reibkoeffizient,
p	Kontaktdruck,
$\bar{\gamma}_i = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}$	äquivalente Reibung,
$n_i = \frac{\dot{\gamma}_i}{\bar{\gamma}}, i = 1, 2$	normalisierte Bewegungsrichtung.

Die Variation der virtuellen Arbeit ist wie folgt gegeben:

$$d\delta\Pi = \int_A d\tau_i \delta\gamma_i dA = d\delta\Pi^K + d\delta\Pi^{D-} + d\delta\Pi^{D+}. \quad (6.29)$$

Der erste Term führt zu den unsymmetrischen Teil der Steifigkeitsmatrix, mit welchem das Phänomen der Modenkopplung in Zusammenhang steht.

$$d\delta\Pi^K = \int_A \left(\mu + \frac{\partial\mu}{\partial p} p \right) n_i \delta\gamma_i dp dA. \quad (6.30)$$

Der zweite Term zeigt den Einfluss der negativen Reibungsdämpfung auf die Dämpfungsmatrix.

$$d\delta\Pi^{D-} = \int_A \frac{\partial\mu}{\partial\bar{\gamma}} pn_i n_j \delta\gamma_i d\dot{\gamma}_j dA. \quad (6.31)$$

Die Auswirkungen der positiven Reibungsdämpfung auf die Dämpfungsmatrix werden durch den dritten Term dargestellt.

$$d\delta\Pi^{D+} = \int_A \frac{\mu p}{\bar{\gamma}} (\delta_{ij} - n_i n_j) \delta\gamma_i d\dot{\gamma}_j dA. \quad (6.32)$$

Es gilt für den Gradienten der Reibungsdämpfung:

$$\nabla_\mu = \frac{\partial\mu}{\partial v_{\text{rel}}} = \frac{\partial\mu}{\partial\bar{\gamma}}. \quad (6.33)$$

Dieser ist im zweiten Term der Variation der virtuellen Arbeit (6.31) enthalten, welcher ausschließlich Einfluss auf die Dämpfungsmatrix besitzt. Die Matrix wird in der Simulation nicht betrachtet, da die Annahme $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ gilt, vergleiche Gleichung (2.15). Somit ist der

Gradient des Reibwerts nicht in der Beschreibung von Bremsenquietschen enthalten und wird nicht im Versuchsplan berücksichtigt.

Die Bewertung der Bremssysteme hinsichtlich ihrer Robustheit erfolgt auf Basis von realen Fahrdaten, weshalb nur ein kleiner Anteil an Rückwärtsfahrten gegeben ist. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen und die Konvergenzrate bei der statischen Berechnung zu verbessern, wird die Rückwärtsfahrt vernachlässigt und es erfolgt keine Betrachtung der Fahrrichtung im Versuchsplan.

In der Regel sind niedrige Gleitgeschwindigkeiten verantwortlich für das Bremsenquietschen (Bagwan und Shelge [2015]). Dabei wird die relative Geschwindigkeit zwischen dem Belag und der Scheibe betrachtet, welche eine geschwindigkeitsabhängige Reibkraft bedingt (Shin u. a. [2002]). Somit hat die Geschwindigkeit Einfluss auf den Reibwert (Mohammed und Rahim [2013]). Wird der Geschwindigkeitseinfluss im Vergleich zu anderen Parametern betrachtet, zum Beispiel dem Bremsdruck, ist dieser klein (Liu u. a. [2007]). Es ergibt sich ein geringer bis vernachlässigbarer Einfluss der Geschwindigkeit (Mohammed und Rahim [2013]), weshalb diese nicht im Versuchsplan berücksichtigt wird. Durch eine Änderung des Reibwerts werden die Geschwindigkeitsvariation mit abgebildet.

Bei den Geometrieparametern erfolgt eine Betrachtung der Dicke der Bremsscheibe. Der Originalzustand derer ist abhängig von der Größe des Bremssystems. Die Abnutzung ist relativ zur ursprünglichen Dicke, im Regelfall aber gering. Wird der Zusammenhang zwischen der ersten Biegeeigenfrequenz, dem Elastizitätsmodul und der Dicke einer Bremsscheibe analytisch betrachtet, gilt für eine quadratische Kirchhoff Platte folgender Zusammenhang:

$$f = B \sqrt{\frac{Et^2}{\rho a^4(1 - \nu^2)}}, \quad {}^{39} \quad (6.34)$$

mit E Elastizitätsmodul, t Dicke, ρ Dichte, a Durchmesser, ν Querkontraktion und B Parameter abhängig von der Lagerungsbedingung. Der Zusammenhang wird mit einer Taylor-Entwicklung (Forster [2013a, §22, Seite 279ff]) für einen Parameter x um den Punkt x_0 linearisiert,

$$f = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0). \quad (6.35)$$

³⁹Vergleiche Harris und Piersol [2002, Kapitel 1, Seite 1.14].

Für die Linearisierung bezüglich des Elastizitätsmoduls gilt

$$\begin{aligned} f &= f(E_0) + \left. \frac{df}{dE} \right|_{E_0} (E - E_0) = \\ &= B \sqrt{\frac{E_0 t^2}{\rho a^4 (1 - \nu^2)}} + \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{t^2}{\rho a^4 (1 - \nu^2)}} \frac{1}{\sqrt{E_0}} (E - E_0). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Daraus ergibt sich die Proportionalität

$$f \sim \frac{1}{2} E. \quad (6.37)$$

Vergleichbar ist die Linearisierung für die Dicke der Bremsscheibe.

$$f = B \sqrt{\frac{E t_0^2}{\rho a^4 (1 - \nu^2)}} + B \sqrt{\frac{E}{\rho a^4 (1 - \nu^2)}} (t - t_0). \quad (6.38)$$

In diesem Fall ergibt sich

$$f \sim t. \quad (6.39)$$

Es gilt, dass 1% Verringerung der Dicke 1% Änderung in der ersten Eigenfrequenz der Bremsscheibe bedingt. Dies ist vergleichbar mit der Variation des Elastizitätsmoduls, wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ ist, aber größere Schwankungen in den Eingangsparametern auftreten. Es besitzen beide Parameter Einfluss auf die Eigenfrequenz des Bauteils. Es ist keine Betrachtung der Dickenänderung der Bremsscheibe nötig, da diese mit der Schwankung des Elastizitätsmoduls abgebildet wird. Durch die Variation der Konstanten B werden die Proportionalitäten zu höheren Eigenfrequenzen betrachtet. Die Korrelation ist somit für alle Eigenfrequenzen gültig.

Insgesamt werden die 32 in Tabelle 6.1 enthaltenen Parameter über die gezeigten Betrachtungen auf elf reduziert. Eine Übersicht über die verbleibenden Parameter ist in Tabelle 6.4 gegeben. Darin sind alle identifizierten Bauteile mit einem Materialparameter sowie Umgebungs- und Geometrieparameter inkludiert.

Bremsdruck	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Dicke Bremsbelag	$[mm]$,
Elastizitätsmodul Bremsbelag E_{xx}	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Bremsbelag E_{zz}	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Bremsscheibe	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Gehäuse	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Halter	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Kolben	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Rückenplatte	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Schwenklager	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Reibwert Bremscheibe-Bremsbelag	$[-]$.

Tabelle 6.4: Die reduzierten Parameter eines Bremssystems in alphabetischer Reihenfolge.

6.3 Parameterclustering

Zur weiteren Reduktion der elf Parameter aus Tabelle 6.4 werden Cluster zur Zusammenfassung derer gebildet. Es werden die Parameter in Bauteilgruppen kombiniert und im Versuchsplan erfolgt die Variation der Cluster.

Durch die Zusammenfassung von Parametern sind keine Rückschlüsse auf die Einflüsse der einzelnen Komponenten möglich, da die Auswirkungen gesamthaft betrachtet werden. Es werden keine Wechselwirkungen zwischen den Bauteilen der Cluster abgebildet. Hat eine Kombination einen großen Einfluss auf das System, kann anschließend eine Untersuchung der einzelnen Parameter erfolgen. Durch die Gruppierung wird die Parameteranzahl weiter verringert und es ist eine Variation von allen Parametern möglich.

Die Clusterung der Variablen erfolgt anhand des Zusammenbaus der Bauteile. Die erste Gruppe stellt der Belag dar. Dabei interagiert das Reibmaterial mit der Rückenplatte und es erfolgt eine gemeinsame Variation der Elastizitätsmodul des Reibmaterials E_{xx} und E_{zz} mit dem Elastizitätsmodul der Belagträgerplatte. Wird der Zusammenbau des Bremssattels betrachtet, werden die Elastizitätsmodul von Gehäuse, Halter und Kolben kombiniert.

Die restlichen Parameter werden einzeln betrachtet. Durch die Clusterung reduziert sich die Parameteranzahl auf sieben, vergleiche Tabelle 6.5. Mit diesen Parametern werden die Robustheitsuntersuchungen durchgeführt.

Bremsdruck	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Dicke Bremsbelag	$[mm]$,
Elastizitätsmodul Belag	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Bremsscheibe	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Sattel	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Elastizitätsmodul Schwenklager	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$,
Reibwert Brems Scheibe-Bremsbelag	$[-]$.

Tabelle 6.5: Die geclusterten Parameter eines Bremssystems in alphabetischer Reihenfolge.

6.4 Schwankungsbreiten und Verteilungen der Eingangsparameter

Nach Reduzierung und Clusterung der Parameter werden die Schwankungsbreiten dieser betrachtet und auf deren Basis ein Versuchsplan erstellt. Zusätzlich sind die Verteilungen der Variablen zu bestimmen, um bei den Berechnungen der Instabilitätswahrscheinlichkeiten realistische Annahmen für die Verteilungsdichtefunktion zu treffen. Eine Übersicht möglicher Verteilungen ist in Abschnitt 3.5 gegeben, weiterführende Betrachtungen, Validierungen und Tests der Schwankungen und Verteilungen in Savci [2015].

Bei der Bestimmung der Parameterverteilungen für das Regressionsmodell wird in zwei Schritten vorgegangen. Es werden die realen Schwankungsbreiten aus physikalischen Messungen, Ersatzparametern oder durch Literaturrecherche ausgewertet und es erfolgt eine Angabe der Verteilungsdichtefunktion der Variablen basierend auf den gleichen Eingangsgrößen wie bei der Schwankungsbestimmung.

Danach werden die Variationen auf das Intervall $[-1; 1]$ normiert, wie es im standardisierten Regressionsmodell gegeben ist. Es wird angenommen, dass der Mittelwert der Streuung im normierten Fall den Wert 0 besitzt. Die maximale Schwankung wird auf die Werte ± 1 übertragen. Es wird die Verteilung innerhalb der standardisierten Werte abgebildet. Falls nötig, erfolgt eine Anpassung der Verteilung auf dem Intervall $[-1; 1]$. Zum Beispiel ist eine Verschiebung des Mittelwerts möglich.

Bremsscheibe

Bremsscheiben bestehen aus Grauguss mit Lamellengraphit (Buck [2008, Kapitel 4.1, Seite 41]). Das Material zeichnet sich durch eine gute Wärmeleitfähigkeit und Gießbarkeit aus und besitzt schwingungsdämpfendes Verhalten. Durch die Anordnung der Kohlenstofflamellen ist

die Verteilung des Elastizitätsmodul inhomogen und dieser ist temperaturabhängig. In der Simulation werden die beiden Punkte vernachlässigt und es wird ein homogenes Material ohne Temperaturabhängigkeit angenommen. In Spezialfällen werden Bremsscheiben aus Keramik, Kohlefaser oder Edelstahl gefertigt. Neben den konventionellen Bremsscheiben, welche aus einem Guss gefertigt werden, sind Leichtbaubremsscheiben Stand der Technik. Dabei wird der Bremsscheibentopf aus Aluminium hergestellt und mit dem Reibring aus Grauguss vernietet.

Eine Messgröße bei Bremsscheiben ist die erste Eigenfrequenz mit einer Out-of-Plane Schwingung. Diese ist abhängig vom Elastizitätsmodul, der Geometrie und der Abnutzung des Bauteils. Unter Annahme einer identischen Form der Scheiben werden anhand der Eigenfrequenzen Rückschlüsse auf die Materialeigenschaften gezogen. Nach Gleichung (6.37) entspricht die Eigenfrequenzschwankung der doppelten Variation des Elastizitätsmoduls, welcher einen großen Einfluss auf das Geräuschverhalten besitzt (Bagwan und Shelge [2015] und Liu u. a. [2007]).

Als Folge der Parameterreduktion wird durch die Schwankung des Elastizitätsmoduls zusätzlich die Dichte, die Querkontraktion und die Dicke der Bremsscheiben beschrieben. Durch Unterschiede in den chemischen Zusammensetzungen von Grauguss GG15 UHC ist ein Streuband von 95 bis 120 GPa möglich, welches bei der Robustheitsuntersuchung abzudecken ist. Es wird eine Schwankungsbreite von $\pm 12\%$ für den Elastizitätsmodul der Bremsscheiben angenommen. Bei dem in Abbildung 6.3 gegebenen Beispiel existieren Schwankungen der vermessenen Teile um den Mittelwert von $\pm 10\%$. In der Literatur ist ein Variationskoeffizient von 3% und ein 2-Sigma-Level von $\pm 6\%$ mit Normalverteilung (Nunes u. a. [2009]) oder eine Schwankung von $\pm 5\%$ (Lü und Yu [2014]) für die Variation des Elastizitätsmoduls von Bremsscheiben gegeben.

Zur Bestimmung der Verteilung werden Daten von Messungen der ersten Eigenfrequenz in der Serienproduktion betrachtet (BMW Group [2016]). Durch den analytischen Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der Eigenfrequenz werden Rückschlüsse auf die Materialverteilung gezogen. Der Stichprobenumfang beträgt 54787 Messungen und es wird die erste frei-frei Eigenfrequenz der Bremsscheiben betrachtet. Der Erwartungswert ist $\mu = 843.6$ Hz und in den Messungen betragen die maximalen Abweichungen -2.92% und $+3.25\%$. Die Schwankungen der Eigenfrequenzen der Bremsscheiben sind kleiner als die angenommene Variation von $\pm 12\%$, da nicht das gesamte Streuband ausgenutzt wird.

Die Verteilung der Eigenfrequenz entspricht einer Normalverteilung mit Erwartungswert 843.6 Hz und der Standardabweichung 8.09 Hz, vergleiche Abbildung 6.4.

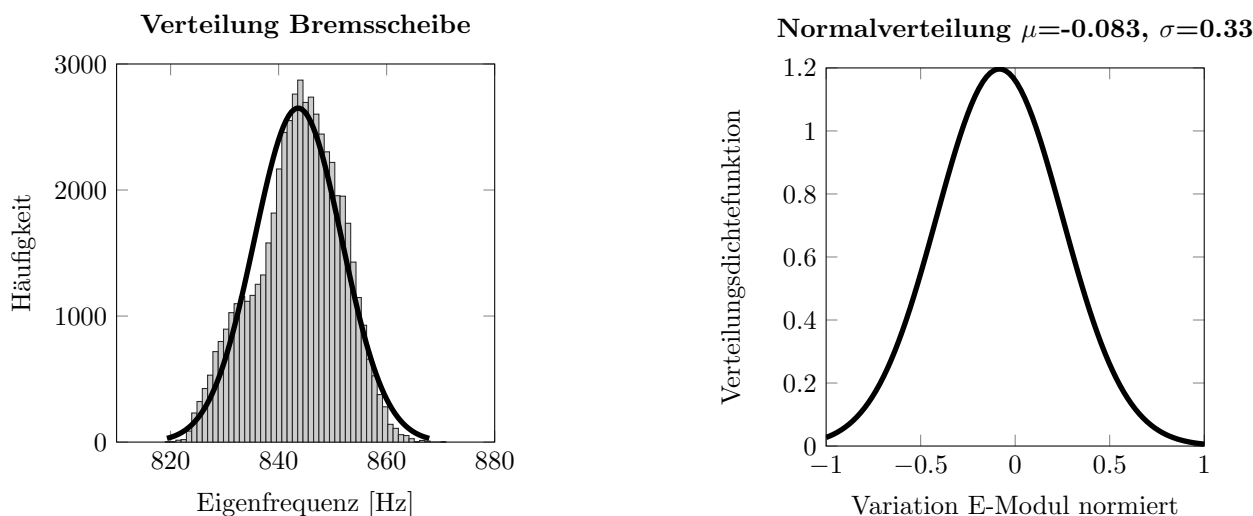


Abbildung 6.4: Darstellung der gemessenen Werte für die erste frei-frei Eigenfrequenz der Bremscheiben und der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 843.6$ Hz und Standardabweichung $\sigma = 8.09$ Hz (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Verteilung (rechts) unter Berücksichtigung des Verschleißzustands.

Reduzierungsmaß	0 mm	0.2 mm	0.4 mm	0.6 mm	0.8 mm
Erste Eigenfrequenz	952 Hz	948 Hz	944 Hz	940 Hz	936 Hz
Prozentuale Reduktion	0%	0.4%	0.8%	1.2%	1.7%

Tabelle 6.6: Darstellung des Zusammenhangs des Verschleißes einer konventionellen Bremscheibe mit der ersten Eigenfrequenz und der prozentualen Reduktion.

Neben den Eigenfrequenzschwankungen in der Produktion tritt eine Reduzierung der Frequenzen durch die Abnutzung der Scheibe auf (Savci [2015, Kapitel 5.3.2, Seite 65f]). Diese wird bei der Bestimmung der Verteilung zur Auswertung des Regressionmodells miteinbezogen. In Tabelle 6.6 ist der Einfluss des Verschleißes auf die Eigenfrequenz einer konventionellen Bremscheibe mit 10 mm Dicke gegeben, in Tabelle 6.7 einer Leichtbaubremsscheibe mit 30 mm Dicke.

Der maximale Einfluss der Reibringabnutzung beträgt 1.7%, dies entspricht einer Abnahme von 3.4% des Elastizitätsmoduls. Da im Kundenbetrieb keine allgemeingültige Abnutzungsrelation angegeben werden kann, wird eine durchschnittliche Reduktion der Eigenfrequenzen

Reduzierungsmaß	0 mm	0.2 mm	0.4 mm	0.6 mm	0.8 mm
Erste Eigenfrequenz	895 Hz	893 Hz	891 Hz	889 Hz	887 Hz
Prozentuale Reduktion	0%	0.2%	0.4%	0.6%	0.9%

Tabelle 6.7: Darstellung des Zusammenhangs des Verschleißes einer Leichtbaubremsscheibe mit der ersten Eigenfrequenz und der prozentualen Reduktion.

von 0.75% angenommen. Gleichzusetzen ist dies mit einer Verringerung des Elastizitätsmoduls um 1.5%. Unter der Voraussetzung einer Gleichverteilung für den Verschleiß der Bremscheiben erfolgt eine Verschiebung des Mittelwerts der Normalverteilung in negative Richtung. Im Regressionsmodell wird zur Abbildung der Verteilung eine Änderung von 1% im Elastizitätsmodul angenommen, was $\frac{2}{3}$ des Maximalwerts entspricht.

Zur Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeiten wird nach Six Sigma (Töpfer [2004, Kapitel A.3, Seite 152] und Wappis und Jung [2010, Kapitel 3.2.4, Seite 39]) ein 3-Sigma-Level angenommen. Für das normierte Regressionsmodell ist durch den Einfluss des Verschleißes der Erwartungswert $\mu = -0.083$ und die Standardabweichung $\sigma = \frac{1}{3}$ gegeben, vergleiche Abbildung 6.4. 99.65% aller Zufallszahlen liegen im Intervall von $\pm 12\%$ um den Erwartungswert. Zur Erstellung des Versuchsplans verbleiben die Stützstellen bei $\pm 12\%$ um den Erwartungswert, die Anpassungen erfolgen ausschließlich für die Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeiten.

Bremsbeläge

Im Gegensatz zu den Bremscheiben besteht das Reibmaterial der Beläge aus transversal isotropem Material und besitzt fünf beschreibende Parameter, vergleiche Anhang C.4.

Bei den Bremsbelägen wird der Zusammenbau von Reibmaterial, Underlayer und Rückenplatte betrachtet und die gesamte Schwankung dessen evaluiert. Die Variationen werden abgebildet im Elastizitätsmodul der Rückenplatte und den Elastizitätsmoduln des Belags in tangentialer und axialer Richtung, E_{xx} und E_{zz} . Es werden der Schubmodul, die Querkontraktion, die Temperatur und die Dichten vernachlässigt.

Zur Bestimmung der Schwankungen und Verteilungen werden zwei verschiedene Belagtypen bei drei verschiedenen Temperaturen vermessen (Dylla [2015, Kapitel 4, Seite 40ff]). Der Umfang sind jeweils 28 Beläge im Zusammenbau bei 20°C und sechs Beläge bei -20°C und 60°C . Die Schwankungen der Eigenfrequenzen der Bremsbeläge betragen $\pm 15\%$. Nach simulativer Verifikation (Savci [2015, Kapitel 5, Seite 58ff]) entspricht dies einer Variation des Elastizitätsmoduls E_{xx} in tangentialer Richtung von $\pm 30\%$.

In axialer Richtung erfolgt die Bestimmung der Schwankungsbreiten des Elastizitätsmoduls mit dem Ersatzparameter Kompressibilität. Es werden Messungen für die verschiedenen Belagtypen mit Stichprobengrößen zwischen 150 und 200 ausgewertet. Die maximalen Abweichungen betragen $\pm 18\%$ (Dylla [2015, Kapitel 4.5, Seite 54f]).

Zusammenfassend wird für alle Elastizitätsmoduln des Reibmaterials eine Schwankung von $\pm 40\%$ angenommen, da der Einfluss der nicht betrachteten Parameter miteinbezogen wird. Für die Rückenplatte wird eine Variation des Elastizitätsmoduls mit dem Faktor $\frac{1}{10}$ der Belagschwankung durchgeführt, dies entspricht $\pm 4\%$. In der Literatur werden unterschiedliche Schwankungsbreiten für die Parameter angegeben. Für das Reibmaterial sind $\pm 10\%$ (Lü und Yu [2014]) bis $\pm 50\%$ Variation mit Normalverteilung (Nunes u. a. [2009]) gegeben. Der Elastizitätsmodul der Rückenplatte schwankt in den Angaben von $\pm 5\%$ (Lü und Yu [2014]) bis $\pm 10\%$ (Nouby u. a. [2009]). Der Grund für die größere Schwankung gegenüber den Bremscheiben ist die Zusammensetzung der Bremsbeläge aus unterschiedlichen Materialien mit abweichenden Mischungsverhältnissen (Chan und Stachowiak [2004]). Die Rückenplatte hat Einfluss auf das Systemverhalten (Liu u. a. [2007]) und schwankt aufgrund der Herstellung aus Stahl geringer als das Reibmaterial.

Für die Verteilungen der Elastizitätsmoduln wird eine Gleichverteilung innerhalb der Schwankungsbreiten angenommen. Darin ist die Temperaturabhängigkeit miteinbezogen, vergleiche Abbildung 6.5. Dies entspricht einer Mittelung über die Normalverteilungen bei den verschiedenen Temperaturwerten.

Bremssattel

Die Bauteile des Bremssattels bestehen aus Grauguss mit Kugelgraphit, auch Spheroguss genannt (Buck [2008, Kapitel 4.2, Seite 42f]). Dieser besitzt eine hohe Festigkeit bei duktilem Verhalten und hat einen kleineren Streubereich als Grauguss mit Lamellengraphit. Verbreitet sind zusätzlich Leichtbaubremssättel aus Aluminium. Es wird für beide Fälle ein isotropes Materialverhalten angenommen und der Elastizitätsmodul als nicht temperaturabhängig.

Der Bremssattel stellt den Zusammenbau von Faust, Halter, Kolben und Bolzen bei Faustsätteln oder dem Gehäuse und Kolben beim Festsattelkonzept dar, vergleiche Anhang A. Es werden die Schwankungen über die Elastizitätsmoduln der betrachteten Bauteile abgebildet. Bei einer stichprobenartigen Vermessung von Elastizitätsmoduln von Gehäuse und Kolben von acht Bauteilen sind Schwankungen von $+1.82\%$ und -1.48% um den Erwartungswert gegeben (BMW Group [2016]). Da der Umfang nicht statistisch aussagekräftig ist, werden zur Robustheitsuntersuchung Variationen von $\pm 5\%$ angenommen, ein Wert, der in der Literatur gegeben ist (Nunes u. a. [2009]).

Innerhalb der Schwankungsbreiten von $\pm 5\%$ wird eine Normalverteilung angenommen, vergleiche Abbildung 6.6. Sind unterschiedliche Materialien im Zusammenbau vorhanden, wird

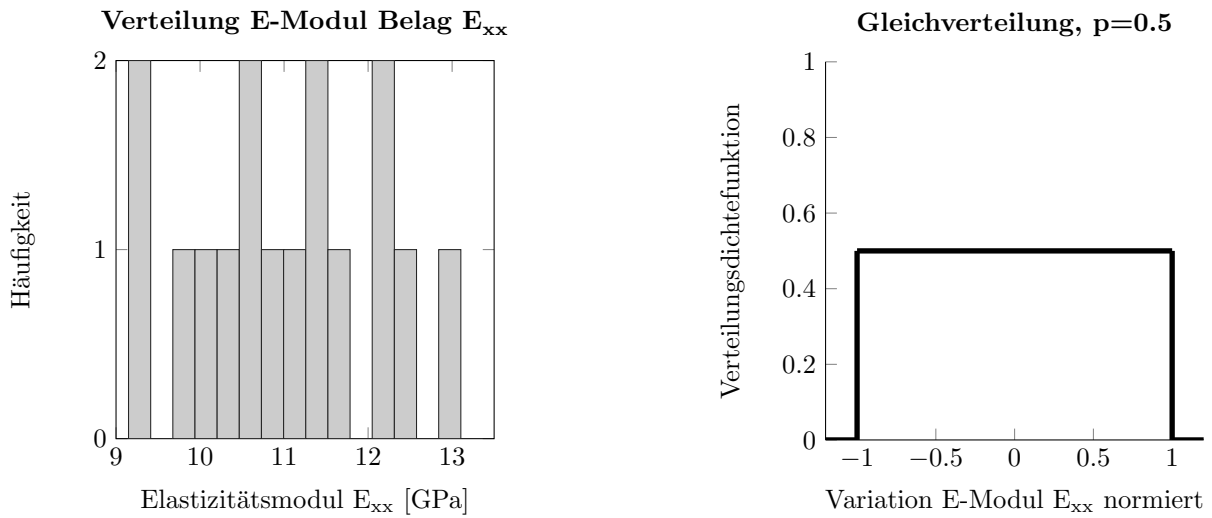


Abbildung 6.5: Darstellung der gemessenen Werte für den Elastizitätsmodul in tangentialer Richtung des Belags eines Beispiels mit jeweils sechs Belägen bei $-20^{\circ}C$, $20^{\circ}C$ und $60^{\circ}C$ (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Gleichverteilung (rechts).

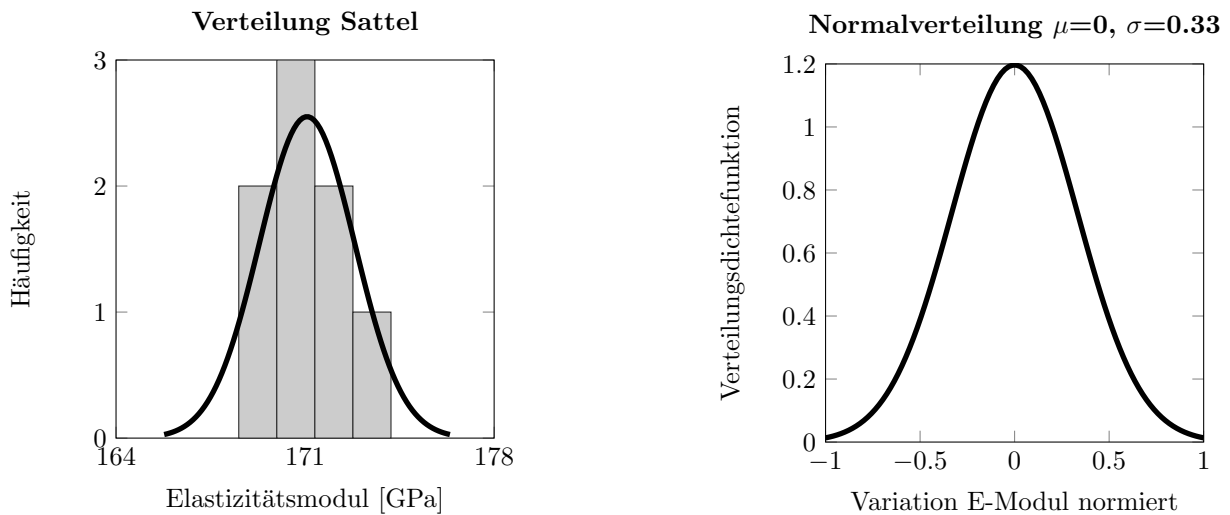


Abbildung 6.6: Darstellung der gemessenen Werte für den Elastizitätsmodul von Bremsätteln und der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 171.1$ GPa und Standardabweichung $\sigma = 1.764$ GPa (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Verteilung (rechts).

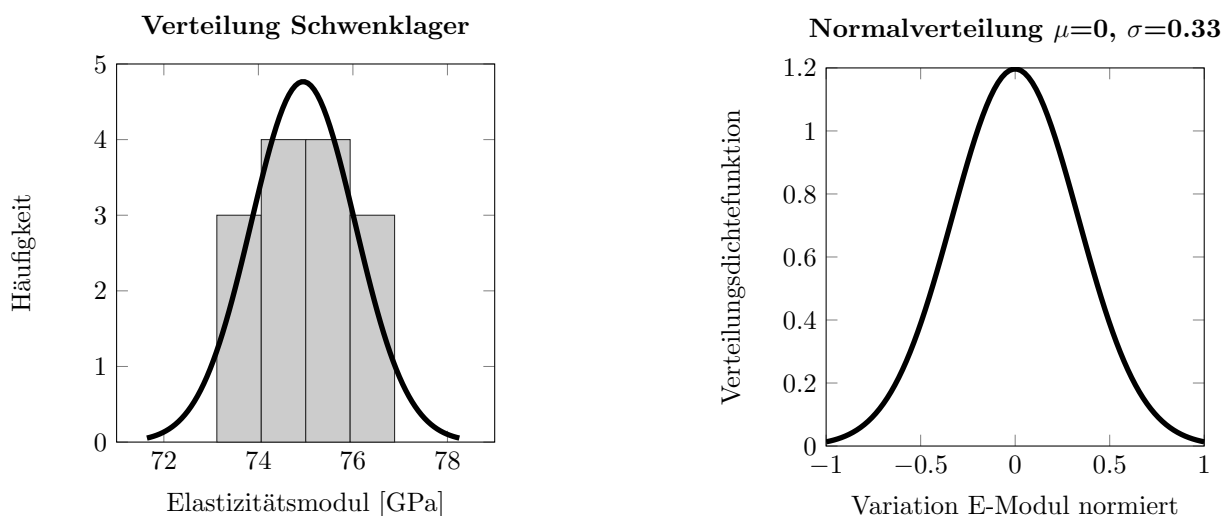


Abbildung 6.7: Darstellung der gemessenen Werte für den Elastizitätsmodul der Schwenklager und der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 76.88$ GPa und Standardabweichung $\sigma = 1.10$ GPa (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Verteilung (rechts).

keine Unterscheidung in den Streubreiten getroffen. Im normierten Fall des Regressionsmodells ist das Sigma-Level äquivalent zur Brems Scheibe, $\mu = 0$ und $\sigma = 0.33$.

Schwenklager

Das Schwenklager, zu sehen in Abbildung A.1, stellt die Anbindung an die Achse dar und ist aus Aluminium oder Spherguss gefertigt. Es wird eine Variation des Elastizitätsmoduls durchgeführt, durch die zusätzlich Dichte- und Querkontraktionsschwankungen abgebildet werden. Zur Bestimmung der Abweichungen werden sieben geometrisch identische Schwenklager mit zwei Probenentnahmestellen vermessen (BMW Group [2016]).

Die Abweichungen in den Messungen betragen $\pm 5\%$ und sind normalverteilt, vergleiche Abbildung 6.7. In der Literatur werden Normalverteilungen mit $\pm 2\%$ (d'Ippolito u. a. [2009]) sowie $\pm 5\%$ (Nunes u. a. [2009]) Schwankungsbreite angegeben. Das Schwenklager bildet die Schnittstelle zur Achse, deshalb wird eine Variation von $\pm 5\%$ und Normalverteilung angenommen. Die realen Werte betragen $\mu = 76.88$ GPa und $\sigma = 1.10$ GPa, für das normierte Regressionsmodell wird ein 3-Sigma-Level mit $\mu = 0$ und $\sigma = \frac{1}{3}$ betrachtet.

Reibwert

Der Reibwert, welcher großen Einfluss auf das Geräuschverhalten besitzt (Bagwan und Shelge [2015], Liu u. a. [2007] und Xing [2011]), kann nicht direkt gemessen werden und ist abhängig von der Belagbeschaffenheit, der Scheibe, dem Bremsmoment und dem Bremsdruck. Über diese Ersatzgrößen erfolgt eine Berechnung des Reibkoeffizienten (Breuer und Bill [2006, Kapitel 29.1, Seite 423ff] und Degenstein u. a. [2006]).

$$\mu = \text{const} \frac{M_d}{r_w A_p p_p},^{40} \quad (6.40)$$

mit

μ	Reibwert	$[-]$	Berechnung,
M_d	dynamisches Bremsmoment	$[N]$	Messung,
r_w	mittlerer Reibradius des Bremssystems	$[mm]$	Wert vorgegeben,
A_p	Kolbenfläche	$[mm^2]$	Wert vorgegeben,
p_p	Kolbendruck	$[bar]$	Messung.

Bei der Berechnung des Reibwerts des Bremsvorgangs erfolgt eine Glättung über das Zeitintervall der Bremsung zum Ausgleich von Schwankungen im Anlegedruck und im mittleren Reibradius. Ohne diesen Schritt entsteht ein bis zu zehnprozentiger Fehler (Degenstein u. a. [2006]). Die Geschwindigkeit besitzt über das Bremsmoment ebenfalls Einfluss auf den Reibkoeffizienten (Shin u. a. [2002] und Xing [2011]).

Eine Auswertung der Schwankungsbreite und der Verteilung des Reibwerts ist in BMW Group [2016] gegeben. Die Schwankungen des Reibwerts, welche anhand von verschiedenen Fahrsituationen bestimmt werden, liegen im Intervall zwischen 0.3 bis 0.7. Der betrachtete Stichprobenumfang beinhaltet 400000 Messungen, es treten aufgrund der gegebenen Verteilung minimale Werte bis 0.2 und maximale Werte bis 0.8 auf. Der Reibwert ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 0.49$ und der Standardabweichung $\sigma = 0.08$, vergleiche Abbildung 6.8. Wie bei den vorherigen Verteilungsdichtefunktionen wird im Regressionsmodell ein 3-Sigma-Level mit den Werten $\mu = 0$ und $\sigma = \frac{1}{3}$ angenommen. Um die physikalischen Anforderungen an den Reibwert einzuhalten, werden Werte $\mu \leq 0$ verworfen.

⁴⁰Vergleiche Breuer und Bill [2006, Formel 2.2, Kapitel 29.1, Seite 439].

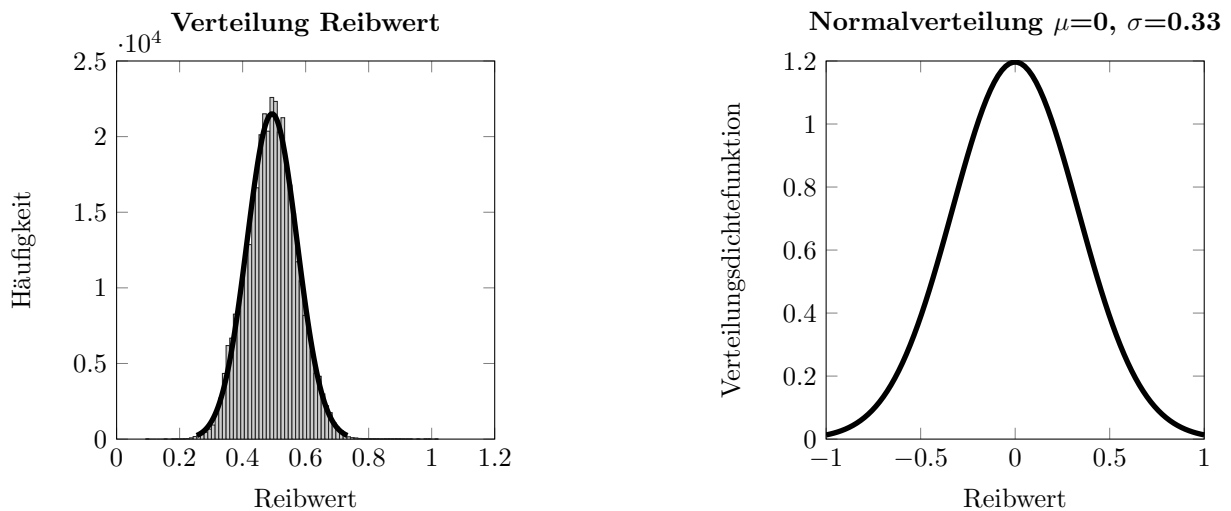


Abbildung 6.8: Darstellung der gemessenen Werte für den Reibwert und der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 0.49$ und Standardabweichung $\sigma = 0.08$ (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Verteilung (rechts).

Bremsdruck

Der Bremsdruck ist ein Betriebsparameter, der abhängig ist von der vom Fahrer aufgebrachtten Pedalkraft und der Geschwindigkeit (Xing [2011]), und hat Einfluss auf das Instabilitätsverhalten des Systems (Bagwan und Shelge [2015] und Liu u. a. [2007]). Die Bestimmung der Schwankung und der Verteilung erfolgt über die Auswertung von realen Fahrdaten mit 22000 Bremsungen (Keilholz [2015, Kapitel 6.3.1, Seite 83ff]). Betrachtet werden Fahrprofile von unterschiedlichen Fahrern im Stadt- und Überlandverkehr.

Die Variation des Bremsdrucks findet zwischen 0 und 24 bar statt, vergleiche Abbildung 6.9. Der Bremsdruck ist durch eine Gammaverteilung mit $\alpha = 5.0856$ und $\lambda = 1.7404$ angenähert. Die Gammaverteilung besitzt keine negativen Werte. Aufgrund dessen ist keine Transformation für das normierte Regressionsmodell möglich und nach Erzeugung der Zufallsvariablen erfolgt eine Skalierung auf das Intervall $[-1; 1]$.

Verschleißzustand

Zur Auswertung des Verschleißzustands wird die Dicke der Bremsbeläge betrachtet. Es erfolgt die Abbildung der Abnutzung vom Neuzustand bis zum vorgegebenen Reduzierungsmaß. Da Beläge aus verschiedenen Bremssystemen im Neuzustand verschiedene Dicken besitzen, erfolgt eine Reduktion ausgehend vom Originalzustand. Das Reduzierungsmaß ist nach BMW Group [2016] gegeben durch:

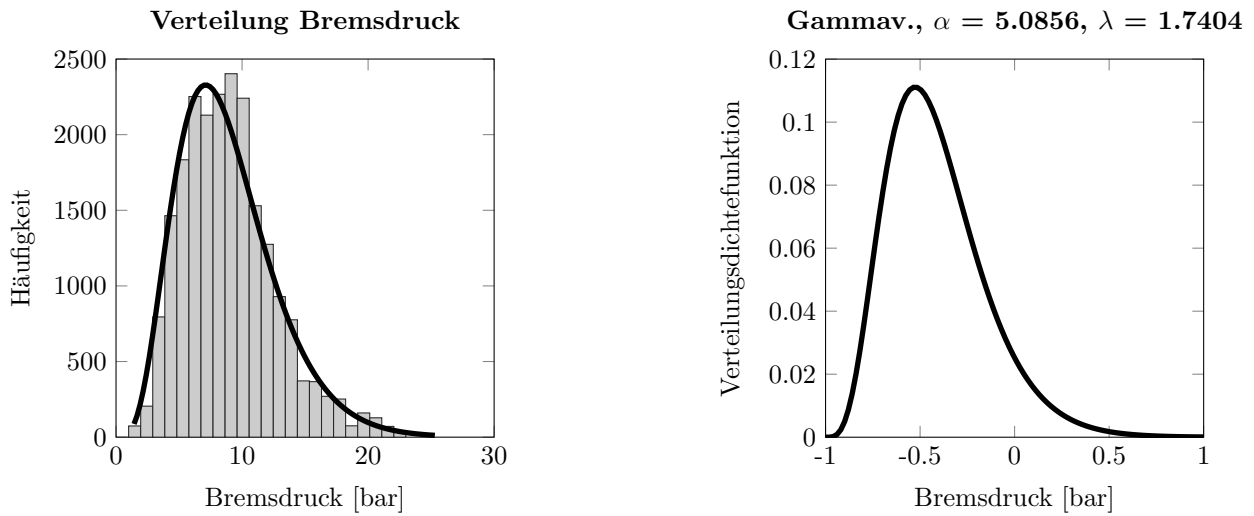


Abbildung 6.9: Darstellung der gemessenen Werte für den Bremsdruck und der Gammaverteilung mit $\alpha = 5.0856$ und $\lambda = 1.7404$ (links), Veranschaulichung der für das normierte Regressionsmodell angenommenen Verteilung (rechts).

$$\text{Reduzierungsmaß} = \frac{\text{Belagdicke} - 3\text{mm}}{2}. \quad (6.41)$$

Da eine Bestimmung der Abnutzung im Kundenbetrieb nicht möglich ist, wird eine durchschnittliche Reduktion der Belagdicke angenommen. Unter der Voraussetzung, dass im Kundenfahrzeug eine gleichmäßige Belagabnutzung bis zum Reduzierungsmaß erfolgt, wird eine Gleichverteilung innerhalb der Parametergrenzen angenommen.

Eine Zusammenfassung der betrachteten Parameter, deren bestimmten Schwankungsbreiten, den gegebenen Verteilungen und den zugehörigen Annahmen im Regressionsmodell ist in Tabelle 6.8 dargestellt.

Parameter	Schwankung	Verteilung	Regressionsmodell
Bremsscheibe	$\pm 12\%$	Normalverteilung	$\mu = -0.083, \sigma = \frac{1}{3}$
Bremsbeläge	$\pm 40\%$	Gleichverteilung	$p = 0.5$
Bremssattel	$\pm 5\%$	Normalverteilung	$\mu = 0, \sigma = \frac{1}{3}$
Schwenklager	$\pm 5\%$	Normalverteilung	$\mu = 0, \sigma = \frac{1}{3}$
Reibwert	0.3 – 0.7	Normalverteilung	$\mu = 0, \sigma = \frac{1}{3}$
Bremsdruck	0 – 24 bar	Gammaverteilung	$\alpha = 5.0856, \lambda = 1.7404$
Verschleißzustand	-40%	Gleichverteilung	$p = 0.5$

Tabelle 6.8: Zusammenfassung der Schwankungsbreiten, der zugrundeliegenden Verteilungen und der Annahmen im Regressionsmodell.

7 Algorithmus zur Robustheitsbestimmung

In diesem Kapitel wird aufbauend auf den in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Elementen ein Algorithmus zur Bewertung der Robustheit eines Bremssystems vorgestellt. Nach Angabe der durchzuführenden Schritte wird der Algorithmus an einem System aus Euler-Bernoulli Balken aufgezeigt um verschiedene Vorgehensweisen zu vergleichen. Im Anschluss an die Berechnung des Ersatzmodells wird der Algorithmus an einem realen Bremssystem durchgeführt.

Algorithmus 7.1 (Robustheitsanalyse)

1. *Definition eines Versuchsplans,*
2. *Durchführung des Versuchsplans für ein Bremssystem,*
3. *Bewertung der Versuche mit der Serienzielfunktion,*
4. *Erstellung des Regressionsmodells,*
5. *Auswertung des Regressionsmodells,*
 - a) *Parameterverläufe,*
 - b) *Sensitivitätsanalyse,*
 - c) *Instabilitätswahrscheinlichkeiten,*
6. *Bewertung der Robustheit des Bremssystems.*

7.1 Erstellung des Versuchsplans

Im Versuchsplan zur Robustheitsbewertung von Bremsengeräuschen werden die Überlegungen aus Abschnitt 3.6 mit den Parameterschwankungen aus Abschnitt 6.4 kombiniert. Zur Umsetzung der Verteilungen werden zum Beispiel entsprechend der Dichtefunktionen der Normalverteilung mehr Stützstellen um den Nominal- oder Mittelwert angeordnet als an

Scheibe	-12%	-6%	-2.4%	$\pm 0\%$	+2.4%	+6%	+12%
Belag	-40%	-26%	-12%	$\pm 0\%$	+12%	+26%	+40%
Sattel	-5%	-2.5%	-1%	$\pm 0\%$	+1%	+2.5%	+5%
Schwenklager	-5%	-2.5%	-1%	$\pm 0\%$	+1%	+2.5%	+5%
Reibwert	0.3	0.4	0.46	0.5	0.54	0.6	0.7
Bremsdruck	1 bar	4 bar	7 bar	10 bar	14 bar	19 bar	24 bar
Verschleiß	0 mm	-0.6 mm	-1.2 mm	-1.8 mm	-2.4 mm	-3.2 mm	-4 mm

Tabelle 7.1: Die Stützstellen der Parameter zur Erstellung des Versuchsplans. $\pm 0\%$ entspricht dem Erwartungswert.

den Randbereichen. Da im d-optimalen Design die Stützstellen nicht in einer kontinuierlichen Darstellung gegeben sind, werden diese nicht mit dem Erwartungswert und der Varianz der Normalverteilung beschrieben. Die Stützstellen werden entsprechend der Verteilungsdichtefunktion gewählt.

- Erwartungswert,
- Erwartungswert $\pm \frac{1}{5}$ Schwankungsbreite,
- Erwartungswert $\pm \frac{1}{2}$ Schwankungsbreite,
- Erwartungswert \pm Schwankungsbreite.

Es werden im inneren Plan fünf und im äußeren Plan sieben Stützstellen für die Parameter verwendet.

Insgesamt besteht der Versuchsplan aus 60 Experimenten. Es entfallen 35 auf den inneren und 25 auf den äußeren Plan. Dies stellt eine Abweichung vom Verhältnis $\frac{2}{3}$ der Experimente für den inneren und $\frac{1}{3}$ für den äußeren Plan dar, die Anpassung erfolgt für eine bessere Umsetzbarkeit in der Praxis. Zur Bestimmung der Stützstellen werden die Grenzen und Verteilungen aus Tabelle 6.8 herangezogen. Die Angabe der Stützstellen ist in Tabelle 7.1 gegeben. Aus diesen setzt sich der d-optimal Plan zusammen.

7.2 Robustheitsbewertung

Zur Quantifizierung der Robustheit wird der Begriff allgemein definiert.

Definition 7.2 (Robustheit)

Der Begriff Robustheit bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.⁴¹

⁴¹Vergleiche Wieland und Wallenburg [2012, Kapitel 3.1, Seite 890].

Wird der Begriff der Robustheit auf reibungsinduzierte Systeme übertragen, wird zwischen zwei Definitionen unterschieden (Kruse und Hoffmann [2013]). Es ist möglich den Zustand des Systems hinsichtlich seines gesamthaften Stabilitätsverhaltens zu charakterisieren.

Definition 7.3 (robust stabil)

Ein für reibungsinduzierte Schwingungen anfälliges, robust stabiles System ändert unter kleinen Schwankungen der Eingangsgrößen sein Stabilitätsverhalten nicht.

Bei Analyse eines einzelnen Eigenwerts wird die Robustheit ohne Betrachtung der Stabilität definiert, das heißt, es wird keine Unterscheidung zwischen stabilen und instabilen Systemen getroffen.

Definition 7.4 (robust)

Ein robuster Eigenwert eines für reibungsinduzierte Vibrationen anfälliges System bewegt sich nicht über die Stabilitätsgrenze (in jegliche Richtung) unter kleinen Änderungen der Systemparameter.

Zur Quantifizierung der Systemrobustheit wird ein Robustheitsindex r (Kruse und Hoffmann [2013]) definiert.

$$r = k \ln \left(1 + \frac{1}{100 \sqrt{\frac{1}{N-1}} \sum (\operatorname{Re}(\lambda) - \operatorname{Re}(\lambda_0))^2} \right), \quad (7.1)$$

mit N Stichprobenumfang, $\operatorname{Re}(\lambda)$ Realteil des Eigenwerts, $\operatorname{Re}(\lambda_0)$ Mittelwert der Realteile der Eigenwerte und k Anpassungsfaktor. Das System ist robust, falls gilt:

$$r \geq 1. \quad (7.2)$$

Der in Kruse und Hoffmann [2013] definierte Robustheitsindex wird auf das Regressionsmodell angewendet. Zur Auswertung werden die Realteile der Eigenwerte mit der Zielfunktion ersetzt. Es entsteht damit eine Verknüpfung mit den Imaginärteilen. Durch den Ansatz werden stabile Moden inklusive des Stabilitätsgrads bewertet und die Auswertung von mehreren Eigenwerten ist möglich.

$0\% \leq \text{System-Instabilitätswahrscheinlichkeit} < 5\%$	System robust stabil
$5\% \leq \text{System-Instabilitätswahrscheinlichkeit} < 10\%$	System bedingt robust stabil
$10\% \leq \text{System-Instabilitätswahrscheinlichkeit}$	System nicht robust stabil

Tabelle 7.2: Quantifizierung von robust stabilen Bremssystemen.

Zur Beschreibung des Robustheitsindex wird der Anpassungsfaktor empirisch an verschiedenen Bremssystemen bestimmt (BMW Group [2016]).

$$k = \frac{100}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}, \quad (7.3)$$

mit n Länge der Serie zur Zielfunktionsberechnung, vergleiche Gleichung (4.39). Damit ist eine Robustheitsbetrachtung von mehreren Instabilitäten über die Zielfunktionsdefinition möglich. Robuste Bremssysteme mit wenigen Schwankungen im Stabilitätsverhalten unter der Variation der Eingangsparameter besitzen einen hohen Robustheitsindex r . Die Berechnung ist abhängig von den Eingangsverteilungen und wird wie folgt dargestellt:

1. Generierung von Zufallszahlen für alle Eingangsparameter aus realen Verteilungsdichtefunktionen,
2. Bestimmung des Mittelwerts durch Einsetzen der Nominalwerte in das Ersatzmodell,
3. Berechnung des Robustheitsindex r .

Es erfolgt die Auswertung von 100000 Realisierungen der Ersatzfunktion.

Für die Quantifizierung der robusten Stabilität nach Definition 7.3 gilt:

Definition 7.5 (robust stabil)

Ein System ist robust oder bedingt robust stabil, falls bei Berechnung der System-Instabilitätswahrscheinlichkeit der Anteil an instabilen Systemen kleiner als 10% aller Systeme ist.

Die Anpassung der Grenze erfolgt empirisch (BMW Group [2016]). Abstufungen der Einordnung sind in Tabelle 7.2 gegeben.

7.3 Durchführung am System aus Euler-Bernoulli Balken

Im Folgenden wird der vorgestellte Algorithmus am im Anhang B.3 dargestellten System aus Euler-Bernoulli Balken durchgeführt. Die Parameter sind in Tabelle 7.3 gegeben. Als Ausgangspunkt werden die in Gleichung (B.38) beschriebenen Nominalwerte verwendet,

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} &= 0.05, & \frac{A_2 \varrho_2}{A_1 \varrho_1} &= 0.05, & \frac{EI_2}{EI_1} &= 0.004, \\ \frac{k_N}{k_W} &= 100, & \frac{d_2}{d_1} &= 0.5, & \mu &= 0.5. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die Parameterkonfiguration ist grenzstabil, sodass die Durchführung einer Robustheitsanalyse notwendig ist.

Das aus gekoppelten Euler-Bernoulli Balken bestehende System ist ein Ersatzmodell zur Berechnung von Bremsenquietschen, welches das Phänomen der Modenkopplung abbildet (Allert [2014, Kapitel 3.3.2, Seite 47ff]). Damit sind die in Kapitel 6 hergeleiteten Parametervariationen für das Bremssystem nicht umsetzbar. Es wird für alle Variablen eine Schwanungsbreite von $\pm 10\%$ mit einer Gleichverteilung auf dem Intervall angenommen.

Zur Untersuchung der Robustheit wird ein vollfaktorieller und ein d-optimaler Versuchsplan mit fünf Stützstellen pro Parameter erstellt, welche äquidistant auf die Intervalle verteilt werden. Da der d-optimale Plan mit einem vollfaktoriellen verglichen wird, wird die Stützstellenanzahl aus Abschnitt 7.1 um zwei auf fünf reduziert. Dies verringert den Simulationsaufwand um den Faktor zehn. Aus der möglichen Menge von 15625 Versuchen werden für den d-optimalen Plan 50 Experimente ausgewählt, da weniger Eingangsparameter als in Abschnitt 7.1 gegeben sind. Die minimal benötigte Anzahl ist 28 und es werden 22 zusätzliche Versuche durchgeführt. Um die Bewertung der Robustheit mit einem d-optimalen Plan und einer geringen Versuchsanzahl gegenüber dem vollfaktoriellen Plan zu verifizieren,

Formel	Beschreibung	Schreibweise
$\frac{l_2}{l_1}$	Längenverhältnis zwischen Belag und Scheibe	l
$\frac{A_2 \varrho_2}{A_1 \varrho_1}$	Massenverhältnis zwischen Belag und Scheibe	ϱA
$\frac{EI_2}{EI_1}$	Biegesteifigkeitsverhältnis zwischen Belag und Scheibe	EI
$\frac{k_N}{k_W}$	Kontaktsteifigkeitsverhältnis zwischen Belag und Scheibe	pen
$\frac{d_2}{d_1}$	Dickenverhältnis zwischen Belag und Scheibe	d
μ	Reibwert zwischen Belag und Scheibe	μ

Tabelle 7.3: Die betrachteten Parameter zur Beschreibung des Systems aus Euler-Bernoulli Balken.

	Realteil	Imaginärteil
λ_1	0	7056
λ_2	0	7419
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{11}	0	55659
λ_{12}	-187	79372
λ_{13}	187	79372

Tabelle 7.4: Beispielhafte Ausgabe für ein Experiment des d-optimalen und vollfaktoriellen Versuchsplans. Es ist eine Instabilität λ_{13} gegeben.

wird ein Abgleich zwischen den beiden Vorgehensweisen angegeben. Dies ist möglich, da die Rechenzeit des Systems aus Euler-Bernoulli Balken gering ist.

Das Ergebnis der Simulationen stellen die 13 ersten Eigenfrequenzen des Systems dar, die 14. Mode liegt außerhalb des für Menschen hörbaren Bereichs. Ein Beispiel der Ausgabe ist in Tabelle 7.4 gegeben.

Die Bewertung der Experimente erfolgt für beide Pläne äquivalent anhand der Eigenwerte durch die Serienzielfunktion, vergleiche Abschnitt 4.4. Eine Instabilität liegt vor, falls eine Mode einen positiven Realteil besitzt. Dazu existiert ein zweiter Eigenwert mit betragsmäßig gleichem Realteil und identischem Imaginärteil. Die Zielfunktion zf_m wird nach Gleichung (4.38) wie folgt berechnet:

$$zf_m = \frac{|\operatorname{Re}(\mu_i) - \operatorname{Re}(\mu_{i+1})| - |\operatorname{Im}(\mu_i) - \operatorname{Im}(\mu_{i+1})|}{\frac{1}{2}(\operatorname{Im}(\mu_i) + \operatorname{Im}(\mu_{i+1}))}, \quad (7.5)$$

mit μ Eigenwerte des Systems aus Euler-Bernoulli Balkens, $i = 1, \dots, 12$. Dabei wird die Serienlänge eins betrachtet,

$$zf = \max(zf_m). \quad (7.6)$$

Eine stabile Konfiguration besitzt einen negativen, ein instabiles Experiment einen positiven Zielfunktionswert.

Die Regressionsmodelle des d-optimalen und des vollfaktoriellen Versuchsplans werden mit den berechneten Zielfunktionen erstellt. Es wird ein quadratisches Modell mit Wechselwirkungen angenommen. Dazu sind sechs unabhängige Faktoren, die Eingangsparameter, und ein abhängiger Faktor, die Zielfunktion, gegeben. Es ergibt sich ein Regressionsmodell mit insgesamt 28 Termen, dargestellt durch eine Konstante, sechs linearen und sechs quadratischen Einflussfaktoren sowie 15 Wechselwirkungstermen. Das Ersatzmodell besitzt beim

d-optimalen Versuchsplan mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0.981$ eine gute Aussagekraft, gleiches gilt für den vollfaktoriellen Plan mit $R^2 = 0.962$. Die Auswertung erfolgt anhand der Parameterverläufe, der Sensitivitätsanalyse und der Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeiten.

Die Parameterverläufe der in Tabelle 7.3 gegebenen Variablen sind in Abbildung 7.1 und 7.2 gegeben. Die Darstellung stellt einen Schnitt durch das mehrdimensionale Regressionsmodell dar. Es werden die einzelnen Verläufe in Abhängigkeit der Einstellungen der restlichen Parameter aufgezeigt. Ein hoher Einfluss ist durch die Variable l gegeben. Die Verläufe sind für beide Versuchspläne qualitativ äquivalent, sodass gleiche Aussagen abgeleitet werden. Im Gegensatz zum d-optimalen Plan besitzen beim vollfaktoriellen die quadratischen Terme einen geringeren Einfluss. Die Steigungen sind jedoch vergleichbar.

Bei der Sensitivitätsanalyse, vergleiche Abschnitt 3.8, werden die gesamthaften Parameterinflüsse auf die Zielfunktion betrachtet. Die Berechnung erfolgt über die Optimierung des Ersatzmodells unter Betrachtung der verschiedenen Einflussparameter. Es wird eine Normalisierung hinsichtlich der höchsten Sensitivität durchgeführt. Das Ergebnis zeigt wiederum aus allen Variablen den höchsten Einfluss beim Parameter l für beide Versuchspläne, vergleiche Abbildung 7.3.

Im letzten Schritt werden die Instabilitätswahrscheinlichkeiten berechnet. Begonnen wird mit der Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit aus Definition 3.10. Die Verteilungsdichtefunktion der Zielgröße ist in Abbildung 7.4 dargestellt. Für den d-optimalen Plan sind 31.36% der Systeme instabil, 68.64% stabil. Beim vollfaktoriellen Design sind 32.02% instabil und 67.98% stabil. Es gilt für den d-optimalen Plan

$$zf_{\min} = -0.017, \quad (7.7)$$

$$zf_{\max} = 0.0084. \quad (7.8)$$

Der Robustheitsindex nach Abschnitt 7.2 beträgt $r = 1.18$ unter der Annahme von $k = 1$. Die Konstante wird gewählt, da keine Bestimmung von realistischen Eingangsschwankungen im Ersatzsystem aus Euler-Bernoulli Balken möglich ist. Das System ist nach gegebener Definition robust.

Im vollfaktoriellen Fall ergibt sich

$$zf_{\min} = -0.014, \quad (7.9)$$

$$zf_{\max} = 0.0092. \quad (7.10)$$

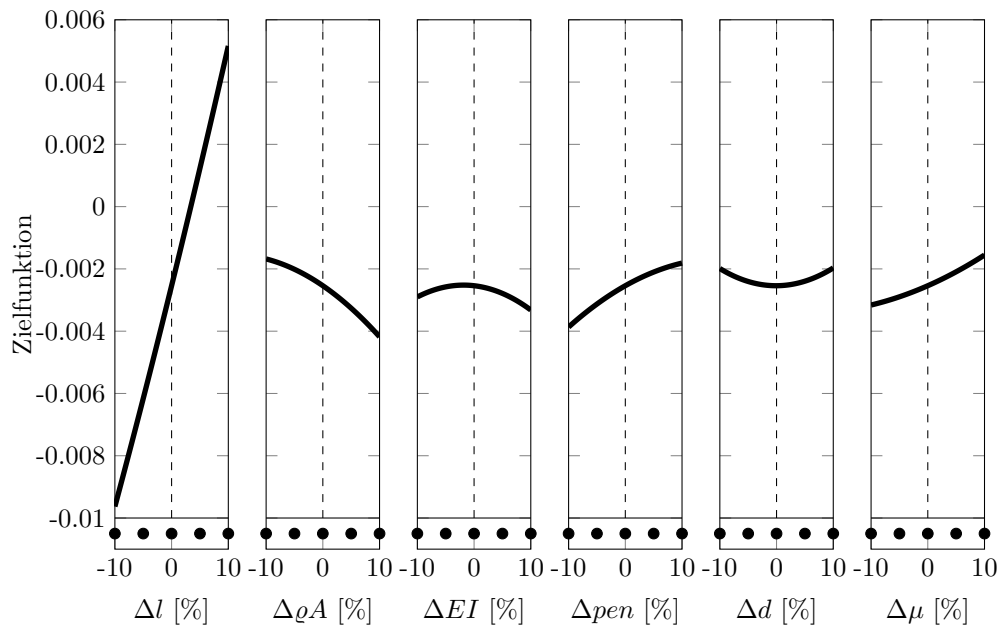


Abbildung 7.1: Graphische Darstellung des Regressionsmodells des d-optimalen Versuchsplans nach Abschnitt 3.7 für die Zielfunktion mit den Verläufen der Parameter für das System aus Euler-Bernoulli Balken. Auf der Linie am unteren Rand dargestellt sind die Parameterabszissen des Versuchsplans.

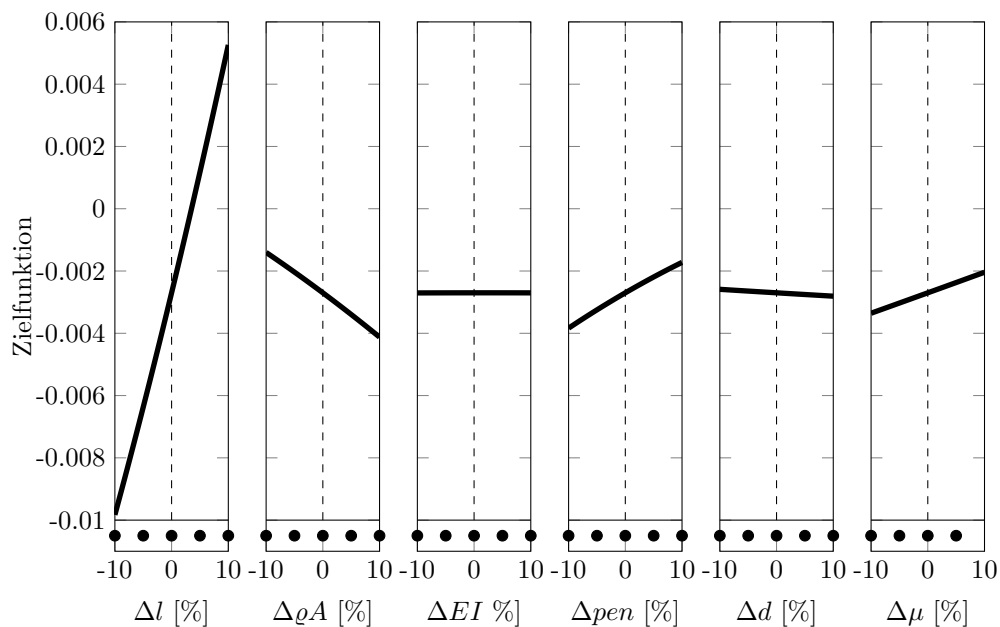


Abbildung 7.2: Graphische Darstellung des Regressionsmodells des vollfaktoriellen Versuchsplans nach Abschnitt 3.7 für die Zielfunktion mit den Verläufen der Parameter für das System aus Euler-Bernoulli Balken. Auf der Linie am unteren Rand dargestellt sind die Parameterabszissen des Versuchsplans.

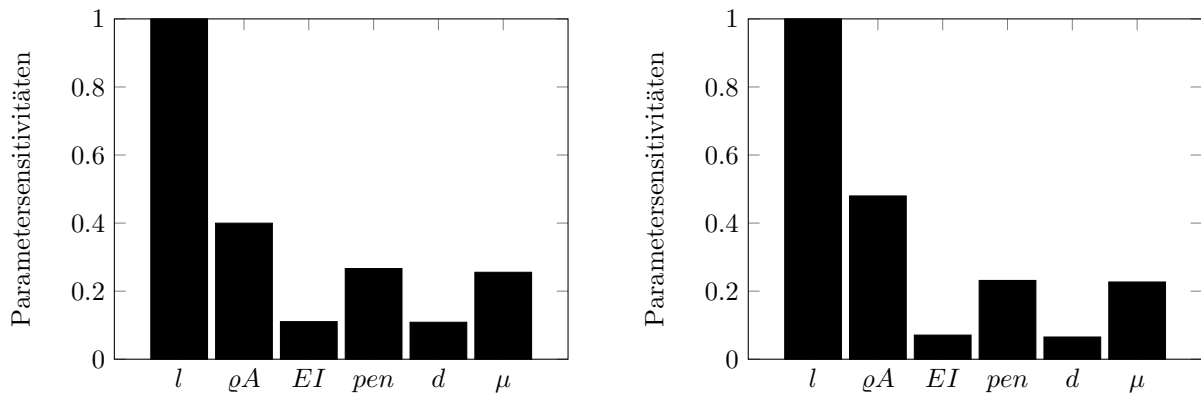


Abbildung 7.3: Darstellung der Sensitivitäten der Regressionsmodelle, links d-optimal, rechts vollfaktoriell.

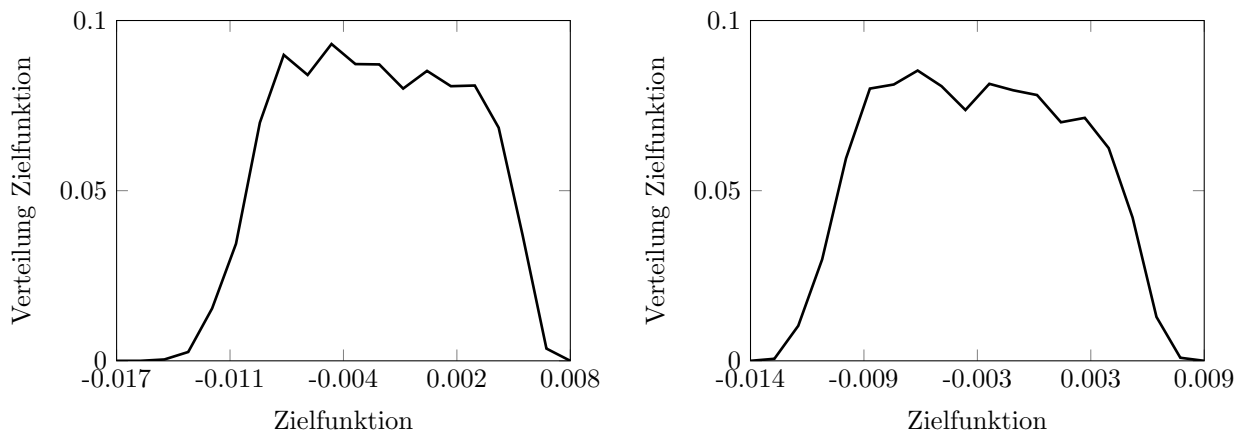


Abbildung 7.4: Verteilung der Zielfunktion bei Betrachtung der Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit für das System aus Euler-Bernoulli Balken, links d-optimal, rechts vollfaktoriell.

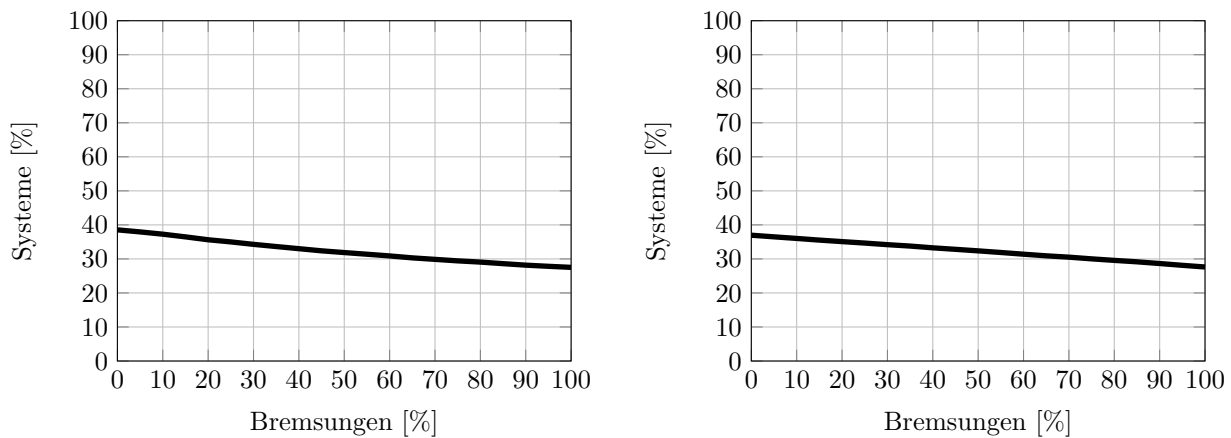


Abbildung 7.5: Darstellung der Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit für das System aus Euler-Bernoulli Balken, links d-optimal, rechts vollfaktoriell.

Der Robustheitsindex ist $r = 1.17$.

Wird die System-Instabilitätswahrscheinlichkeit nach Definition 3.12 berechnet, sind im d-optimalen Fall 38.08% der Systeme instabil, während 61.92% stabil sind. Im vollfaktoriellen Plan ergeben sich die Prozentzahlen 37.49% und 62.51%. Als Betriebsparameter wird der Reibwert betrachtet, die restlichen Variablen definieren die Konfiguration.

Unter denselben Voraussetzungen wird die Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit evaluiert, vergleiche Abbildung 7.5. Deren Ergebnis ist vergleichbar zur Event- und Systembetrachtung. Für beide Pläne wird eine äquivalente Aussage getroffen.

Die Instabilitätswahrscheinlichkeiten werden durch Monte Carlo Simulationen berechnet. Die Aufteilung, ob die Konfiguration instabil oder stabil ist, erfolgt am Zielfunktionswert Null. Da das System aus Euler-Bernoulli Balken positive und negative Werte besitzt, ist dieses nicht robust gegenüber der Entwicklung von Instabilitäten.

Der Berechnungsaufwand des d-optimalen Plans beträgt im gegebenen Beispiel $\frac{1}{300}$ des vollfaktoriellen Plans, wobei die Aussagequalität und Bewertung zum vollfaktoriellen Plan äquivalent ist.

Aufgrund der Aufwandsersparnis werden im weiteren Verlauf d-optimale Pläne zur Analyse von Bremssystemen verwendet. Bei der Simulation von realen Systemen wird die minimale Versuchsanzahl durchgeführt, da die Rechenzeit größer ist als beim System aus Euler-Bernoulli Balken.

Zur Interpretation der Ergebnisse erfolgt eine Zusammenfassung der Auswertungen. Der größte Parametereinfluss ist durch l gegeben. l stellt das Verhältnis zwischen dem Umfang

Parameter	Schwankung	Bezeichnung
E-Modul Bremsscheibe	$\pm 12\%$	E_d
E-Modul Bremsbeläge	$\pm 40\%$	E_p
E-Modul Bremssattel	$\pm 5\%$	E_c
E-Modul Schwenklager	$\pm 5\%$	E_k
Reibwert	0.3 – 0.7	μ
Bremsdruck	0 – 24 bar	p
Verschleißzustand	0 – 5 mm	w

Tabelle 7.5: Parameter zur Untersuchung im Bremssystem, vergleiche Tabelle 6.8.

der Bremsscheibe und der Länge der Bremsbeläge dar. In der Realität besitzt die Größe eine sehr geringe Schwankung und wird zur Systemmodifikation verwendet. Bei kürzeren Bremsbelägen verringert sich das Risiko der Instabilitätsentwicklung. Wird der Parameter im d-optimalen Fall auf den Bereich von 0.045 bis 0.05 eingeschränkt, ist das System trotz der möglichen Parametervariationen stabil. Sämtliche Instabilitätswahrscheinlichkeiten betragen 0% und der Robustheitsindex ist mit 1.63 gegeben.

In der betrachteten Konfiguration ist das System aus Euler-Bernoulli Balken nicht robust stabil, da die System-Instabilitätswahrscheinlichkeit 38.08%, beziehungsweise 37.49%, beträgt. Durch die aufgezeigten Einschränkungen wird ein robust stabiles System geschaffen.

7.4 Durchführung an einem realen Bremssystem

Nach der Anwendung des Algorithmus 7.1 am Ersatzsystem aus Euler-Bernoulli Balkens wird dieser an einem realen Bremssystem durchgeführt. Das Finite Elemente Modell mit 600.000 Freiheitsgraden ist in Abbildung 7.6 dargestellt und besteht aus Tetra-, Penta- und Hexaedern. Die Berechnung erfolgt mit der Software Abaqus, einem Finite Element Löser.

Zur Untersuchung wird der in Abschnitt 7.1 gegebene Versuchsplan herangezogen und auf Basis dessen werden 60 Simulationen durchgeführt. Die Schwankungsparameter stellen die in Tabelle 7.5 identifizierten Größen dar. Die Bewertung der einzelnen Rechnungen erfolgt mit der in Gleichung (4.38) angegebenen Serienziefunktion. Betrachtet wird eine Instabilität bei 1.6 kHz. Es wird ein quadratisches Regressionsmodell mit Wechselwirkungen erstellt, welches mit einem Bestimmtheitsmaß $R^2 = 0.916$ eine gute Aussagequalität besitzt. Für die Auswertung werden äquivalent zum System aus Euler-Bernoulli Balken die Parameterverläufe, die Sensitivitäten und die Instabilitätswahrscheinlichkeiten betrachtet.

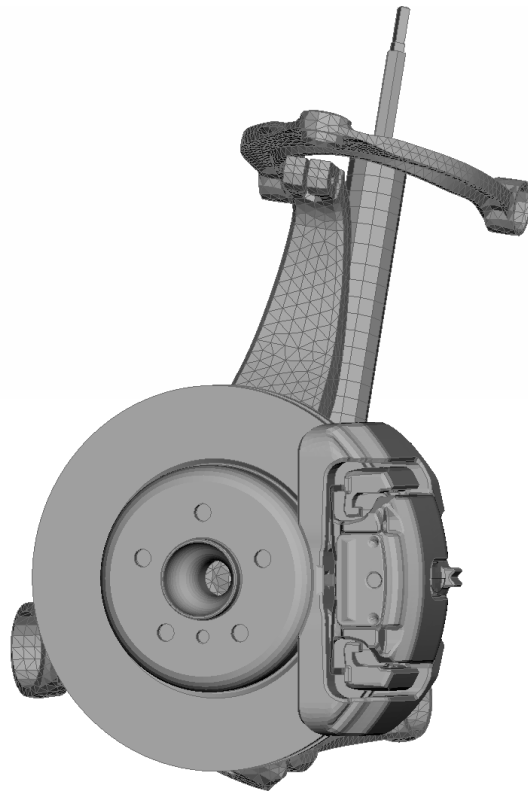


Abbildung 7.6: Darstellung des zur Robustheitsuntersuchung benutzten Finite Elemente Modells eines Bremssystems. Detailliert ist dies in Anhang A beschrieben.

Es gilt,

$$zf_{\min} = -0.0713, \quad (7.11)$$

$$zf_{\max} = 0.0679. \quad (7.12)$$

Die Parameterverläufe zeigen die größten Änderungen der Zielfunktion bei Schwankungen im Elastizitätsmodul der Bremsscheibe und dem Reibwert, vergleiche Abbildung 7.7. Diese Aussage ist für die betrachteten Einstellungen der Parameter gültig, welche den Mittelwert repräsentieren.

Bei der Sensitivitätsanalyse werden die gesamthaften Schwankungen der Parameter evaluiert, vergleiche Abbildung 7.8. Die größten Einflüsse auf das Gesamtmodell sind durch den Elastizitätsmodul der Bremsscheibe, die Elastizitätsmoduln der Komponenten des Bremssattels und den Reibwert gegeben.

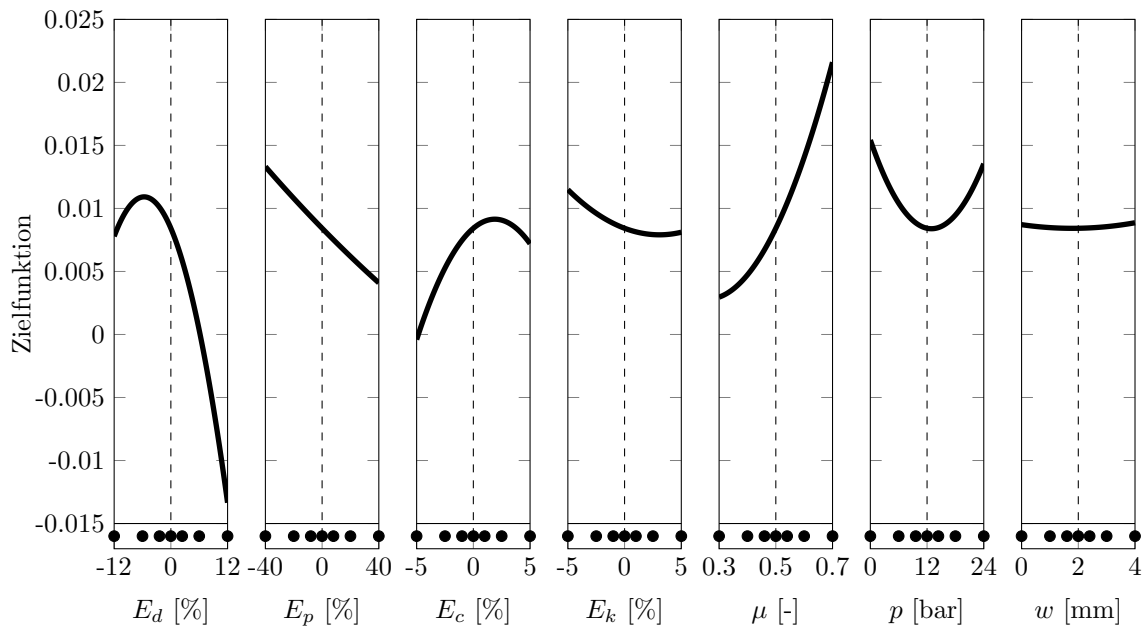


Abbildung 7.7: Graphische Darstellung des Regressionsmodells für die berechnete Zielfunktion mit den Verläufen der Parameter aus Tabelle 7.5 für das Bremssystem. Auf der Linie am unteren Rand dargestellt sind die Parameterabzissen des Versuchsplans.

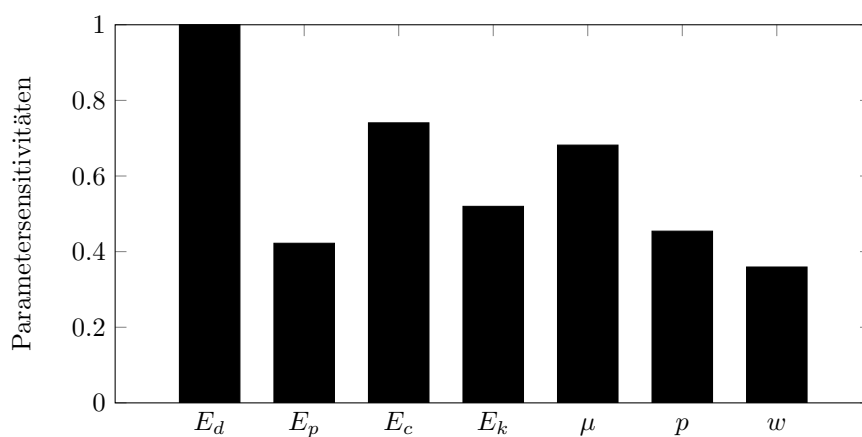


Abbildung 7.8: Darstellung der Sensitivitäten des Regressionsmodells der Parameter aus Tabelle 7.5 für das Bremssystem.

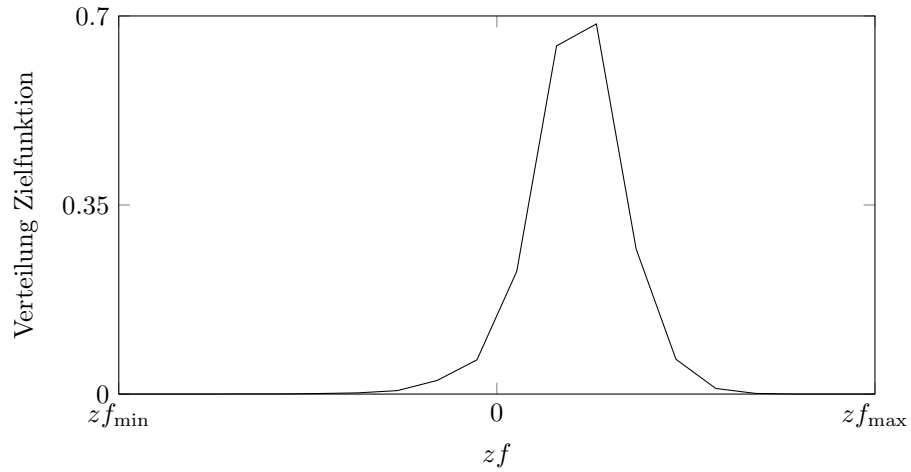


Abbildung 7.9: Verteilung der Zielfunktion bei Betrachtung der Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit für das Bremssystem.

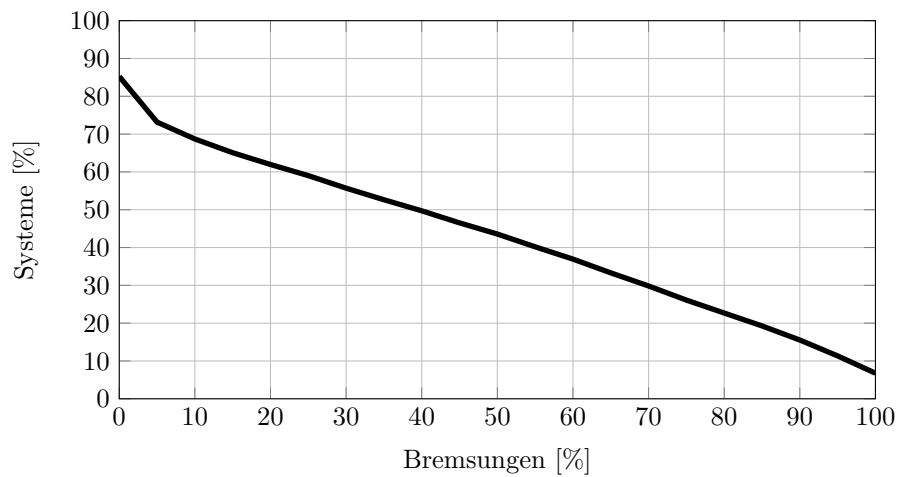


Abbildung 7.10: Darstellung der Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit für das Bremssystem.

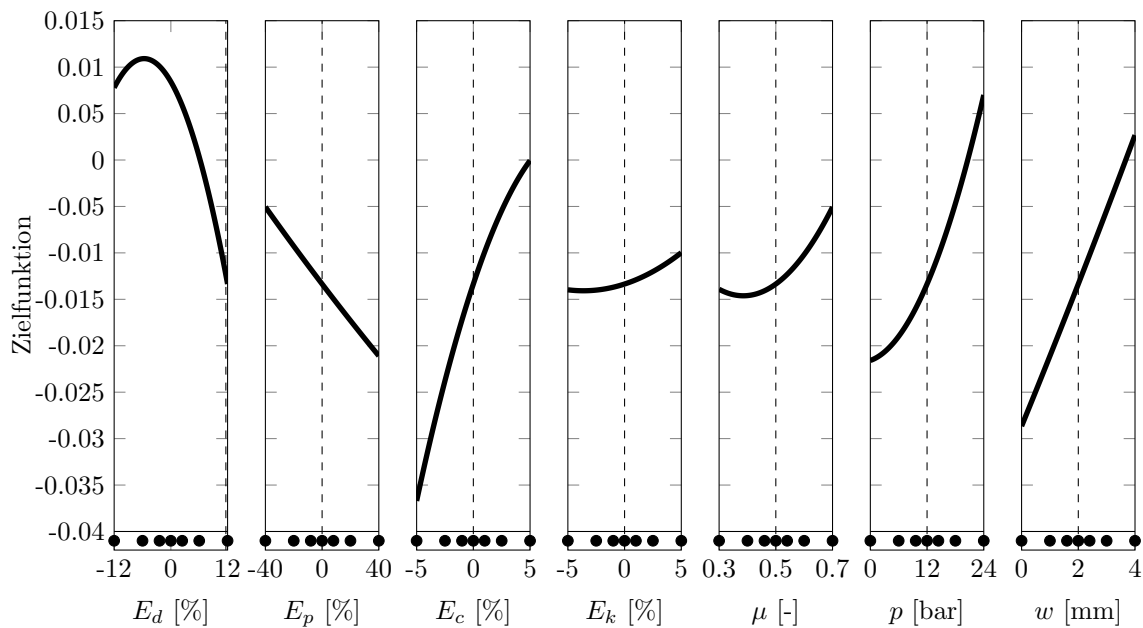


Abbildung 7.11: Graphische Darstellung des Regressionsmodells für die berechnete Zielfunktion mit den Verläufen der Parameter aus Tabelle 6.5 für das Bremssystem. Dabei wird der maximale Wert des Elastizitätsmoduls für die Bremsscheibe angenommen. Auf der Linie am unteren Rand dargestellt sind die Parameterabszissen des Versuchsplans.

Die Instabilitätswahrscheinlichkeiten sind abhängig von den bestimmten Parameterverteilungen, vergleiche Kapitel 6.4. Für die Event-Instabilitätswahrscheinlichkeit, vergleiche Abbildung 7.9, ergeben sich 42.79% instabile und 57.21% stabile Konfigurationen. Bei Betrachtung der Systeme verursachen 85.26% der Bremsen Instabilitäten, während 14.74% stabil sind. Zusammengefasst wird dies in der Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit, vergleiche Abbildung 7.10. Da die Material- und Reibungsdämpfung vernachlässigt wird, ist die Grenze für die Detektion der Instabilitäten beim Zielfunktionswert 0.01, vergleiche Abschnitt 3.9.4. Größere Werte zählen als instabil, kleinere als stabil.

Nach Abschnitt 7.2 ist das Bremssystem nicht robust stabil oder bedingt robust stabil für die Instabilität 1.6 kHz, da die System-Instabilitätswahrscheinlichkeit mehr als 5%, beziehungsweise 10%, beträgt. Es gilt für den Robustheitsindex $r = 1.29$, somit ist das System robust.

Die Ergebnisse werden wie folgt interpretiert und liefern einen Vorschlag für das weitere Vorgehen. Eine Verbesserung der Instabilität bei 1.6 kHz wird durch eine Modifikation der Bremsscheibe erzielt. Ein größerer Elastizitätsmodul der Bremsscheibe zeigt ein besseres Verhalten als der Nominalwert gegenüber der Ausprägung der Instabilität, vergleiche Abbildung 7.11. Die Bremsscheibe wird als Modifikationsparameter gewählt, da diese aus allen Parametern den größten Einfluss auf das System besitzt. Ebenfalls in Abbildung 7.11 ist

zu sehen, dass sich die Parameter gegenseitig beeinflussen, es bestehen Wechselwirkungen zwischen diesen. Im Vergleich zu Abbildung 7.7 ist zum Beispiel ein anderer Verlauf für den Verschleiß gegeben.

Die Robustheit des Bremssystems wird durch eine Einschränkung des Elastizitätsmoduls der Bremsscheibe auf hohe Werte erhöht, vergleiche Abbildung 7.11. Falls diese Modifikation nicht ausreichend oder möglich ist, ist eine Verbesserung des Instabilitätsverhaltens durch eine Änderung am Bremssattel, dem zweitgrößten Einflussparameter, möglich. Eine robuste Lösung kann durch Ausnutzung der Wechselwirkungen zwischen den Bauteilen und einer gemeinsamen Änderung geschaffen werden. Eine Modifikation des Reibwerts ist nicht möglich, da dieser einen Umgebungsparameter darstellt.

Das Vorgehen wird wie folgt eingeordnet. Durch die Berechnung eines Versuchsplans für die wichtigsten Einflussparameter auf das Bremssystem wird ein funktionales Ersatzmodell erstellt. Dieses wird hinsichtlich der Parameterverläufe, der Sensitivitäten und der Instabilitätswahrscheinlichkeiten ausgewertet. Damit erfolgt eine Bewertung der Robustheit. Basierend darauf werden Verbesserungsmöglichkeiten zur Vermeidung der Instabilität abgeleitet, sodass sich ein besseres Stabilitätsverhalten des Bremssystems als in der Ausgangskonfiguration ergibt.

Im Vergleich zu den in Abschnitt 1.3.2 vorgestellten Ansätzen ergeben sich Vorteile. Es werden unter anderem die wichtigsten Parameter aller Bauteile in Betracht gezogen, ein Versuchsplan mit geringem Berechnungsaufwand erstellt und eine auf den realen Verteilungen der Parameter basierende Auswertung durchgeführt.

8 Fazit und Ausblick

Der vorgestellte Algorithmus zur Robustheitsuntersuchung liefert eine Vorhersage über das Systemverhalten unter Parameterschwankungen. Er ist ein Hilfsmittel bei der Auslegung des Bremssystems, um zu vermeiden, dass die auftretenden Variationen die Stabilität des Systems beeinflussen. Auf Basis des Vorgehens ist ein optimierter Prozess zur Bremsengeräuschberechnung gegeben, wie in Abbildung 8.1 dargestellt.

Die Stabilität des Bremssystems wird anhand der Nominalwerte der Parameter bestimmt. Dies ist in Abbildung 8.1 links an einem theoretischen Beispiel mit zwei Veränderlichen dargestellt. Es erfolgt keine Betrachtung des Stabilitätsgrads. In ungünstigen Kombinationen können kleine Schwankungen in der Parameterkonfiguration eine Instabilität im System verursachen und es existiert ein Geräuschproblem.

Die Robustheitsuntersuchung betrachtet das Gebiet der Parameter um die Nominalwerte innerhalb der möglichen Schwankungsbreiten, vergleiche Abbildung 8.1 Mitte. Bedingen die Variationen eine Änderung der Stabilität, wird dies aus den Ergebnissen des Algorithmus abgelesen. Mit der Auswertung werden die Stabilitätsgrenzen der Parameter definiert und Abhilfemaßnahmen geschaffen.

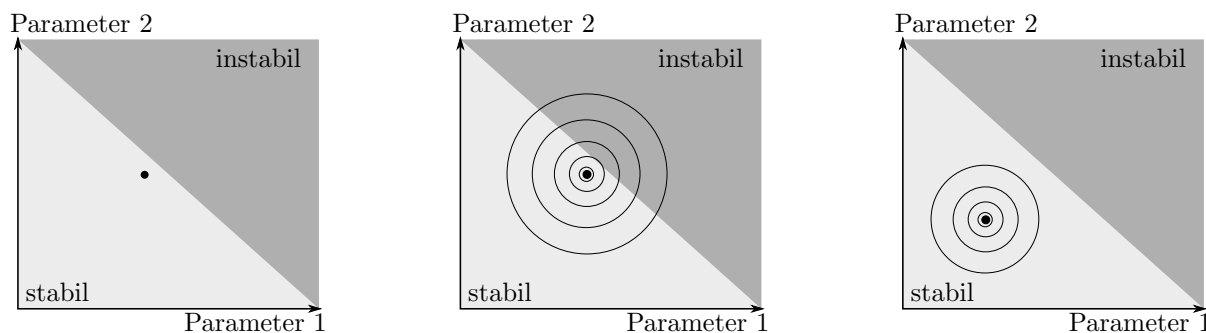


Abbildung 8.1: Darstellung des optimierten Prozesses zur Bremsenauslegung. Links ist das gebräuchliche Verfahren gegeben, in der Mitte wird die Robustheitsuntersuchung um den Nominalwert aufgezeigt und rechts ist die Modifikation der Konfiguration mit eingeschränkten Parametern zu sehen.

Um das System robust in den stabilen Bereich zu legen, werden zwei Modifikationen durchgeführt, vergleiche Abbildung 8.1 rechts. Zum einen werden die Nominalwerte der Parameter verschoben, sodass diese einen höheren Stabilitätsgrad besitzen, zum anderen erfolgt eine Einschränkung der Schwankungsbreiten. Die Parametervariationen haben reduzierten Einfluss auf die Stabilität und das System ist robust.

8.1 Zusammenfassung

Zu Beginn der Arbeit werden die Anregemechanismen für das Bremsenquietschen beschrieben, die Hauptursache für die Geräuscentwicklung stellt das Phänomen der Modenkopplung dar. Das Verhalten des Bremssystems selbst ist in der Beschreibung mit Finiten Elementen durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben. Als Lösungsraum dient der Frequenzbereich mit den komplexen Eigenwerten des Systems. Aufgrund von schwankenden Eingangsgrößen in den Massen- und Steifigkeitsmatrizen ist eine Robustheitsuntersuchung von Bremssystemen notwendig.

Die Analyse der Robustheit erfolgt auf Basis von Design of Experiments mit anschließender Regressionsauswertung. Als Versuchsplan ist ein d-optimales Design gegeben, für die Ersatzfunktion wird ein quadratisches Modell mit Wechselwirkungen betrachtet. Um ein effektives Design zu erstellen, wird die minimal nötige Parameteranzahl zur Beschreibung des Systems identifiziert. Insgesamt werden sieben Größen bestimmt, welche die Materialparameter der Bauteile abdecken und die wichtigsten Geometrie- und Umgebungsparameter enthalten.

Für die Versuchsplanerstellung werden die Schwankungsbreiten und Verteilungen der betrachteten Parameter erarbeitet. Als Ergebnis ergeben sich prozentuale Schwankungen und die Parameterverteilungen sind durch Normal-, Gleich- und Gammaverteilungen gegeben. Auf Basis der Ergebnisse wird ein Versuchsplan definiert. Es konzentrieren sich die Stützstellen verteilungsabhängig um die Mittelwerte, während an den Randgebieten weniger Versuche gegeben sind.

Die Durchführung des Versuchsplans und die Lösung der Differentialgleichung erfolgt mit kommerziellen Softwarepaketen. Zur Bewertung der Simulationsergebnisse wird die Serienzielfunktion herangezogen. Diese ist nach zuvor definierten Kriterien hergeleitet und weist den Simulationsergebnissen einen skalaren Wert zu. Auf Basis der Zielfunktion erfolgt die Erstellung des Regressionsmodells.

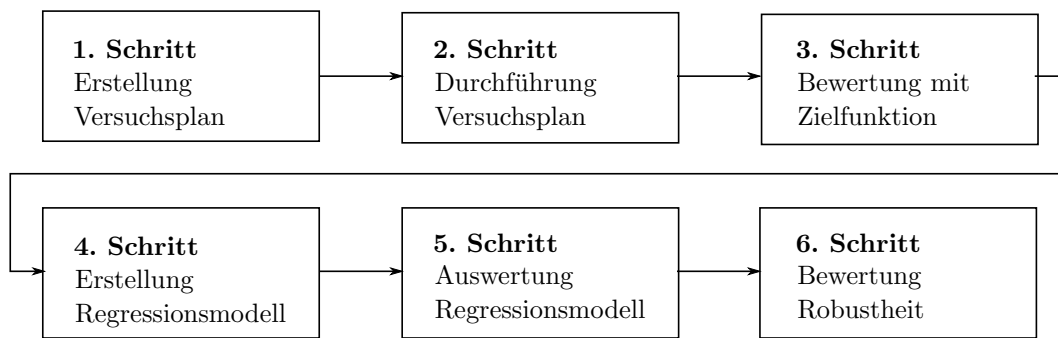


Abbildung 8.2: Ablaufdiagramm des Algorithmus zur Robustheitsbewertung von Bremssystemen.

Zur Systemanalyse wird die Ersatzfunktion ausgewertet. Die Parameterverläufe stellen die Änderungen der Größen in Abhängigkeit von deren Variationen dar. Eine gesamthafte Bewertung des Systems hinsichtlich der Einflüsse der einzelnen Parameter ist durch die Sensitivitätsanalyse gegeben. Basierend auf der Versagensberechnung werden die Instabilitätswahrscheinlichkeiten evaluiert. Diese werden über die realen Eingangsverteilungen der Parameter berechnet und es wird zwischen der Event-, System- und Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit unterschieden.

Die Bestimmung der Robustheit des Bremssystems erfolgt durch zwei unterschiedliche Definitionen. Zur Charakterisierung der Robustheit wird ein Robustheitsindex berechnet. Für die Definition eines robust stabilen Systems erfolgt die Auswertung der System-Instabilitätswahrscheinlichkeit. Beide Auswertungen basieren auf den realen Eingangsverteilungen der Parameter.

Eine Demonstration des Algorithmus zur Robustheitsbestimmung erfolgt an einem System aus Euler-Bernoulli Balken und einem realen Bremssystem.

8.2 Einordnung der Ergebnisse

Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit soll die Robustheitsbewertung von Bremssystemen verbessern.

Es erfolgt im ersten Schritt die Identifikation der einflussreichsten Parameter durch Sensitivitätsanalysen, Korrelationen, analytische Betrachtungen, Clusterung und Entdimensionalisierung. Dadurch wird eine Parameterreduktion auf die minimale Anzahl durchgeführt. Es werden die Schwankungsbreiten der Parameter und deren Verteilungen bestimmt, wobei auf physikalische Messungen und Literaturwerte zurückgegriffen wird. In der Simulation wird somit eine realistische Parameterverteilung ausgewertet. Die Versuchsplanerstellung erfolgt

auf Basis der gegebenen Parameterschwankungen und -verteilungen. Es wird eine Wahl der Art des Plans, d-optimal, getroffen und die Aussagen an einem vollfaktoriellen Versuchsplan validiert. Ebenso wird die Stützstellen- an die Parameterverteilung angepasst. Damit ergibt sich eine Maximierung der Aussagegüte durch die Verknüpfung der bestimmten Verteilungsdichtefunktionen und der Stützstellen.

Bei der Durchführung des Versuchsplans werden vorhandene Tools genutzt. Das Bremssystem wird für verschiedene Konfigurationen mithilfe der Software Abaqus simuliert. Es wird die Differentialgleichung zur Beschreibung von Bremsenquietschen gelöst und die komplexen Frequenzen werden berechnet.

Im dritten Schritt erfolgt der Vorschlag einer Zielfunktion zur Simulationsbewertung. Es werden Kriterien für eine aussagekräftige Funktion definiert, Schlüsselwörter sind Stabilitätsgrad, negative Dämpfung und die Auswertbarkeit. Es wird in Bezug auf das auszuwertende Frequenzspektrum unterschieden, es können einzelne Frequenzen oder Frequenzspektren evaluiert werden. Dazu werden verschiedene Ansätze diskutiert, zum Beispiel eine Normberechnung, die Anwendung des Modal Assurance Criterion und eine Serienentwicklung. Die Zielfunktionen werden untereinander verglichen und die gewählte Funktion basierend auf herkömmlichen Bewertungen wie der negativen Dämpfung oder dem Bewertungsindex validiert. Die Zielfunktion stellt eine Weiterentwicklung des Bewertungsindex dar, da diese eine kontinuierliche Darstellung der Ergebnisse erlaubt. Somit ist eine Bewertung der Versuche mit der hergeleiteten und verifizierten Zielfunktion möglich und es ergibt sich durch die negative Dämpfung eine durchgängige Bewertung der Robustheit mit NVH Simulationen, welche eine Vergleichbarkeit zum Bewertungsindex besitzen.

Zur Erstellung des Regressionsmodells wird die vorhandene Theorie angewendet. Es wird der für das gegebene Problem beste und minimale Modellansatz gewählt, eine Funktion zweiter Ordnung. Damit werden die Simulationsergebnisse des Versuchsplans durch einen funktionalen Zusammenhang dargestellt. Ist die Aussagegüte zu gering, kann die Versuchsanzahl und der gewählte Ansatz angepasst werden. Das Ziel ist die Erstellung eines aussagekräftigen Ersatzmodells.

Mit dem Ersatzmodell können mehr Varianten des Bremssystems in kürzerer Zeit als bei NVH Simulationen betrachtet werden. Die Auswertung des Modells wird neu entwickelt. Durch die Überführung physikalischer Zusammenhänge in funktionale Beschreibungen wird die Abstraktionsebene erhöht. Es werden die Wechselwirkungen zwischen den Bauteilen betrachtet. Die Parameterverläufe stellen die Zielfunktionsabhängigkeit von den Parametervariationen dar. Daraus lassen sich Verbesserungsmöglichkeiten für das System, zum Beispiel Parameterverschiebungen oder -einschränkungen, ableiten. Die Sensitivitätsanalyse liefert

eine gesamthafte Auswertung des Ersatzmodells ohne Abhängigkeit von den Parametereinstellungen und die globalen Parametereinflüsse auf die Zielfunktion werden bestimmt. Zur Berechnung der Instabilitätswahrscheinlichkeit wird eine Versagensbetrachtung angewendet und diese wird in die Event-, System- und Gesamt-Instabilitätswahrscheinlichkeit unterteilt. Bei der Auswertung durch ein Monte Carlo Sampling ist eine Abhängigkeit von der realen Parameterverteilung gegeben. Zusammenfassend erfolgt eine Bewertung vieler Varianten des betrachteten Bremssystems in Echtzeit und es können Maßnahmen zur Systemverbesserung abgeleitet werden.

Im letzten Schritt wird die Robustheit bewertet, wozu eine Weiterentwicklung vorhandener Tools erfolgt. Es wird ein Robustheitsindex definiert. Dieser ist abhängig von den realen Eingangsparametern und wird mit dem Ersatzmodell berechnet. Dabei erfolgt eine Unterscheidung zwischen robust und robust stabil. Es ergibt sich eine Quantifizierung der Robustheit.

Ziel ist es die Bremsenauslegung zu verbessern, indem die Parameter im robust stabilen Bereich verankert werden.

8.3 Erweiterungsansätze

Nach der simulativen Robustheitsuntersuchung von Bremssystemen werden Punkte aufgeführt, die zur Verbesserung des Vorgehens oder der Prognosegüte der Untersuchungen betrachtet werden können.

8.3.1 Validierung des Regressionsmodells

Nach der Erstellung des Regressionsmodells für das gegebene Bremssystem und die auszuwertende Frequenz wird die Modellgüte über die Berechnung des Bestimmtheitsmaßes R^2 bestimmt. Es erfolgt eine Anpassung der Ersatzfunktion an die simulierten Punkte. Damit werden die gegebenen Konfigurationen abgebildet.

Zur Validierung der Ersatzfunktion können weitere Simulationen durchgeführt werden. Deren Ergebnisse werden nicht zur Modellerstellung verwendet, sondern es erfolgt ein Abgleich des erstellten Regressionsmodells mit diesen. Dadurch entsteht eine zweite Population an Simulationen, welche zur Verifikation verwendet werden. Für dieses Verfahren müssen weitere

Rechnungen in relevanter Anzahl durchgeführt werden, sodass der Aufwand im Vergleich zur ausschließlichen Modellerstellung erhöht wird.

8.3.2 Weiterführende Anwendungsbereiche des Algorithmus

Der Algorithmus zur Bewertung der Robustheit von Bremsenquietschen kann auf andersartige Geräusche ausgedehnt werden. Neben dem Quietschen gibt es im niederfrequenten Bereich weitere Bremsengeräusche, vergleiche Abbildung 1.1. Aus dieser Menge sind insbesondere das Knarzen und Schrummen zu nennen. Zur Adaption des Algorithmus müssen die Simulationsweisen und Anregemechanismen der Geräusche betrachtet werden. Ist das zugrundeliegende Phänomen nicht die Modenkopplung, muss die Zielfunktion neu definiert werden. In der Simulation kann auf das Vorgehen mit einem Versuchsplan und der Berechnung eines Regressionsmodells zurückgegriffen werden.

Zur Vermeidung von Bremsenquietschen erfolgt eine geometrische Variation von Bauteilen oder die Bestimmung des Einflusses von Toleranzen. Mit einer Verallgemeinerung des Versuchsplans kann der Algorithmus erweitert werden, um die Gegebenheiten abzubilden. Diese sind von System zu System unterschiedlich, sodass kein allgemeingültiges Vorgehen angegeben werden kann.

Der hergeleitete Algorithmus liefert Modifikationen zur Verbesserung des Geräuschverhaltens anhand von Materialparametern. Eine Variation derer ist durch Einschränkung von Streubreiten möglich, eine signifikante Änderung wird durch den Produktionsprozess verhindert. Über die Eigenfrequenzen der Bauteile ist ein Zusammenhang zwischen Material und Geometrie gegeben. Dahingehend ist die Fragestellung, ob ein Übertrag zwischen Material- und Geometrieänderungen gemacht werden kann, um die Eigenfrequenzen der Bauteile zu verändern. Durch diese Geräuschmodifikationen wird äquivalent zur Veränderung der Materialeigenschaften die Robustheit erhöht und es tritt eine Qualitätsverbesserung ein.

8.3.3 Optimierung des Systems auf Basis des Ersatzmodells

Auf Basis des Regressionsmodells sind neben der Robustheitsbestimmung weitere Untersuchungen möglich. Mit der Zielfunktion kann das System hinsichtlich der Vermeidung von Bremsenquietschen optimiert werden. Das Optimierungsziel ist eine Minimierung der Zielfunktion, um das Instabilitätsverhalten zu verbessern.

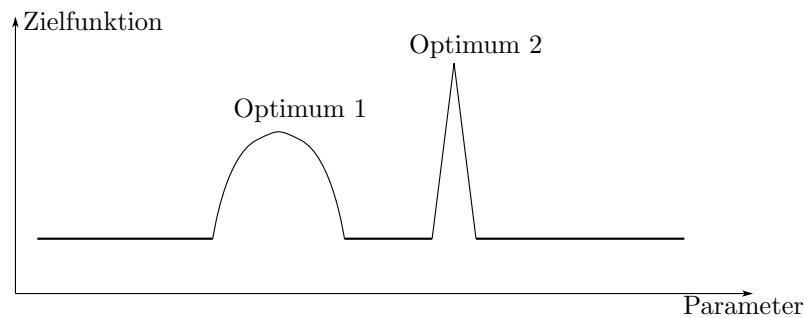


Abbildung 8.3: Darstellung von zwei Optima der Zielfunktion hinsichtlich einer Parametervariation mit dem Ziel einer Funktionsmaximierung. Optimum eins besitzt einen kleineren Zielfunktionswert als Optimum zwei und ist robust. Optimum zwei liefert einen besseren Zielfunktionswert und ist nicht robust. Die Robustheit ergibt sich durch den Gradienten des Parameters, der im Extrempunkt auftritt.

Bei der Erstellung des Versuchsplans sind Unterschiede zur Robustheitsuntersuchung gegeben. Um das Optimierungspotential aufzuzeigen, werden die Intervalle der einzelnen Parameter größer als im Robustheitsalgorithmus gewählt. Bei der Erstellung des Versuchsplans wird auf einen einstufigen Plan zurückgegriffen um alle Gebiete gleich zu gewichten. Der Ansatz zur Optimierung ist wie folgt gegeben:

1. Berechnung von Design of Experiment zur Erstellung eines Regressionsmodells,
2. Minimierung der Zielfunktion des Regressionsmodells,
3. Einsetzen der gefundenen Parameterkombination in NVH Modell und Bestätigungsrechnung.

Bei der Umsetzung existieren offene Punkte. Neben den beeinflussbaren Material- und Geometrieparametern sind im Modell nicht beeinflussbare Größen gegeben, zum Beispiel Bremsdruck und Reibwert. Diese können vergleichbar zu den anderen Parametern optimiert werden, es wird eine Mehrzieloptimierung für bestimmte Kombinationen derer durchgeführt oder das Optimierungsergebnis stellt eine Funktion abhängig von den Umweltparametern dar.

Es wird die Optimierung mit einer Robustheitsuntersuchung verknüpft, um ein robustes Optimum zu bestimmen, vergleiche Abbildung 8.3. Voraussetzung ist ein Ersatzmodell höherer Ordnung. Es erfolgt eine Bestimmung aller globalen und lokalen Optima. Diese werden innerhalb der bestimmten Schwankungsbreiten der einzelnen Parameter auf ihre Robustheit untersucht. Es wird eine Abwägung zwischen der optimalen Zielfunktion und der Robustheit der jeweiligen Minima getroffen. Überprüft wird dies durch eine Gradientenbestimmung im Optimalwert.

8.3.4 Abstimmung zwischen Hard- und Softwareversuchen

Der Algorithmus zur virtuellen Robustheitsuntersuchung kann auf die Hardwareebene am Prüfstand übertragen werden. Der erste Schritt zur Verknüpfung von Simulation und Prüfstand ist der Versuch einer Adaption des Vorgehens für reale Bauteile. Eine Problematik ergibt sich durch die Beschaffung von Informationen über die verfügbaren Komponenten. Die Fragestellung ist, welche Bauteile physikalisch bereits vorhanden sind oder hergestellt werden können und an welchen Punkten die Grenzen des Systems erreicht werden. Ebenso bestehen neben der Teilebeschaffung Einschränkungen in der Prüfstands- und Fahrzeugverfügbarkeit. Ein Ausweg ist, die vorhandenen Bauteile als Basis des Versuchsplans zu verwenden anstatt ein festes Design als Grundlage für die Parametereinstellungen zu benutzen. Es werden nicht mögliche Kombinationen zwischen Konfigurationen ausgeschlossen. Bei der Bewertung des Hardwareplans fehlt eine kontinuierliche und objektive Bewertungsgröße und die Auswertung der Versuche und die Erstellung des Ersatzmodells ist durch Messungenauigkeiten beeinflusst.

Eine Lösung der Fragestellungen ist eine Kombination zwischen der Robustheitsbestimmung in der Simulation und dem Prüfstands- und Fahrzeugversuch. Dazu werden Informationen über die verfügbaren Bauteile gesammelt. Es folgt eine Durchführung der virtuellen Robustheitsanalyse zur Darstellung der Parametereinflüsse und der Wechselwirkungen zwischen diesen. Es können aus den verfügbaren Bauteilen Worst Case Konfigurationen oder Golden Parts bestimmt und gezielt diese im Versuch kombiniert werden. Durch die berechneten Parameterverläufe wird Verbesserungspotential aufgezeigt und es erfolgt ein Vergleich von Hard- und Softwareversuchen.

8.3.5 Berechnung der Geräuschabstrahlung

Neben der Betrachtung der Bremsengeräusche im Frequenzbereich, wie in dieser Arbeit gegeben, können diese im Zeitbereich berechnet werden (Ouyang u. a. [2005]). Eine transiente Evaluation benötigt eine längere Rechenzeit als die Extraktion der Eigenfrequenzen aufgrund von kleinen Zeitschritten bei Lösung der Differentialgleichung. Damit ergibt sich eine lange Analysezeit der Designvariationen und durch die hohe Diskretisierung ein hoher Speicherbedarf. Mit der Weiterentwicklung der Simulationshardware wird dieses Vorgehen in Zukunft an Bedeutung gewinnen.

Ein Vorteil der transienten Bremsengeräuschberechnung ist die Bestimmung der Schallabstrahlung des Systems (Soobbarayen u. a. [2014a] und Soobbarayen u. a. [2014b]). Die Analyse

erfolgt zum Beispiel mit der Boundary Element Method (BEM). Dazu wird über die kinetische Energie für jede Frequenz die Schallabstrahlung der einzelnen Komponenten mit zeitlicher Abhängigkeit in den Raum ermittelt. Um den Rechenaufwand zu verringern, wird das System auf die dominanten Abstrahlfrequenzen reduziert und anhand derer die Geräuschemissionen des Bremssystems und eine Schallabstrahlungskarte ermittelt. Zur Analyse wird in diesem Fall die Multi-Frequency Acoustic Method (Li [2005] und Wu u. a. [1993]) herangezogen. In der Literatur wird eine Approximation der Schallabstrahlungsberechnung eines vereinfachten Bremssystems aufgezeigt (Soobbarayen u. a. [2014b]). Da die Geräuschbearbeitung in der Industrie anhand einer komplexen Eigenwertanalyse an Bremsmodellen mit vielen Bauteilen durchgeführt wird, vergleiche Anhang A, ist die Bestimmung der Schallabstrahlung ein zusätzlicher Aufwand, welcher bei der Simulation nicht durchgeführt wird.

Ist es möglich, mit angemessenem Aufwand eine transiente Simulation durchzuführen, kann die Betrachtung der Robustheit erweitert werden. In diesem Fall ist die Änderung der Schallabstrahlung durch die Parametervariationen eine Größe, die als Zielfunktion betrachtet werden kann. Die Definition der Robustheit kann durch die Schwankung in der Geräuschemission erfolgen und bezieht sich nicht auf die Änderung in den Instabilitäten. Zusätzlich können anstatt der Instabilitätswahrscheinlichkeiten Geräuschwahrscheinlichkeiten definiert werden.

A Darstellung eines Bremsenmodells

Das Finite Elemente Modell einer Bremse stellt die Umfänge eines realen Systems bis zur Achsanbindung dar (Tison u. a. [2014]). Dabei wird der Einfluss des Rads und seiner Bestandteile vernachlässigt. Die Anbindungen an die Achsen sind durch elastische Lagerungen gegeben, sodass die übertragenden Vibrationen gedämpft werden. Aus diesem Grund wird die Modellierung dort unterbrochen. Das dargestellte Bremsenmodell steht beispielhaft für alle Systeme. Der Umfang der Randbedingungen verschiedener Modelle ist äquivalent, aber es sind Abweichungen im Aussehen und der Modellierung möglich. In einigen Fällen kommen Komponenten hinzu oder entfallen.

In Abbildung A.1 ist das Modell in einer Rückansicht gegeben. In Abbildung A.2 erfolgt eine Beschränkung der Visualisierung auf die Bremsscheibe und den Bremssattel. Zur Darstellung aller Komponenten im Sattel wird die Faust ausgeblendet. Diese überdeckt die im Inneren liegenden Bauteile. Die Modellierung von Bremssystemen erfolgt mit allen Komponenten, welche zur Darstellung des Systems am Prüfstand aufgebaut werden.

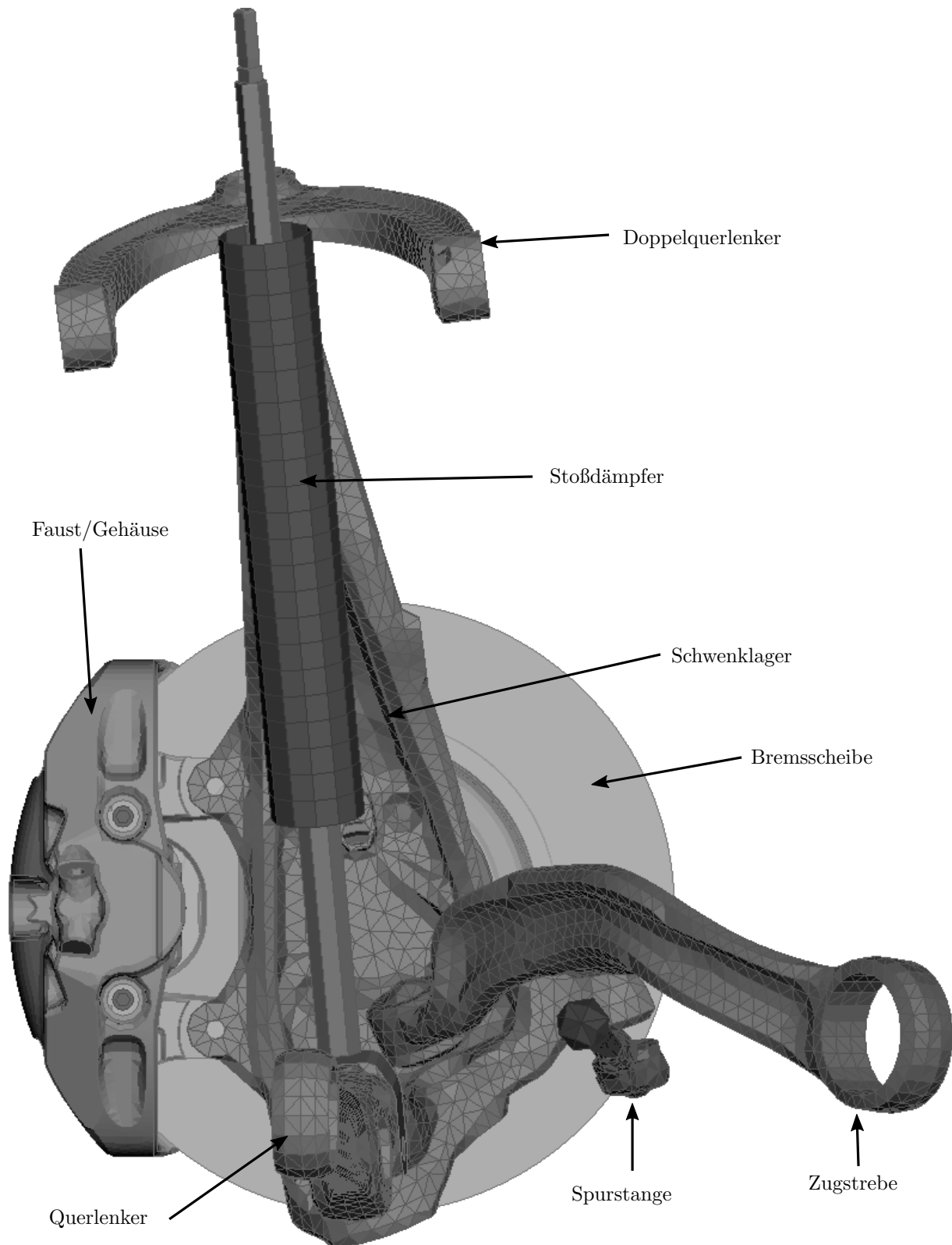


Abbildung A.1: Darstellung eines Bremsenmodells in der Rückansicht von der Fahrzeuginnenseite aus gesehen.

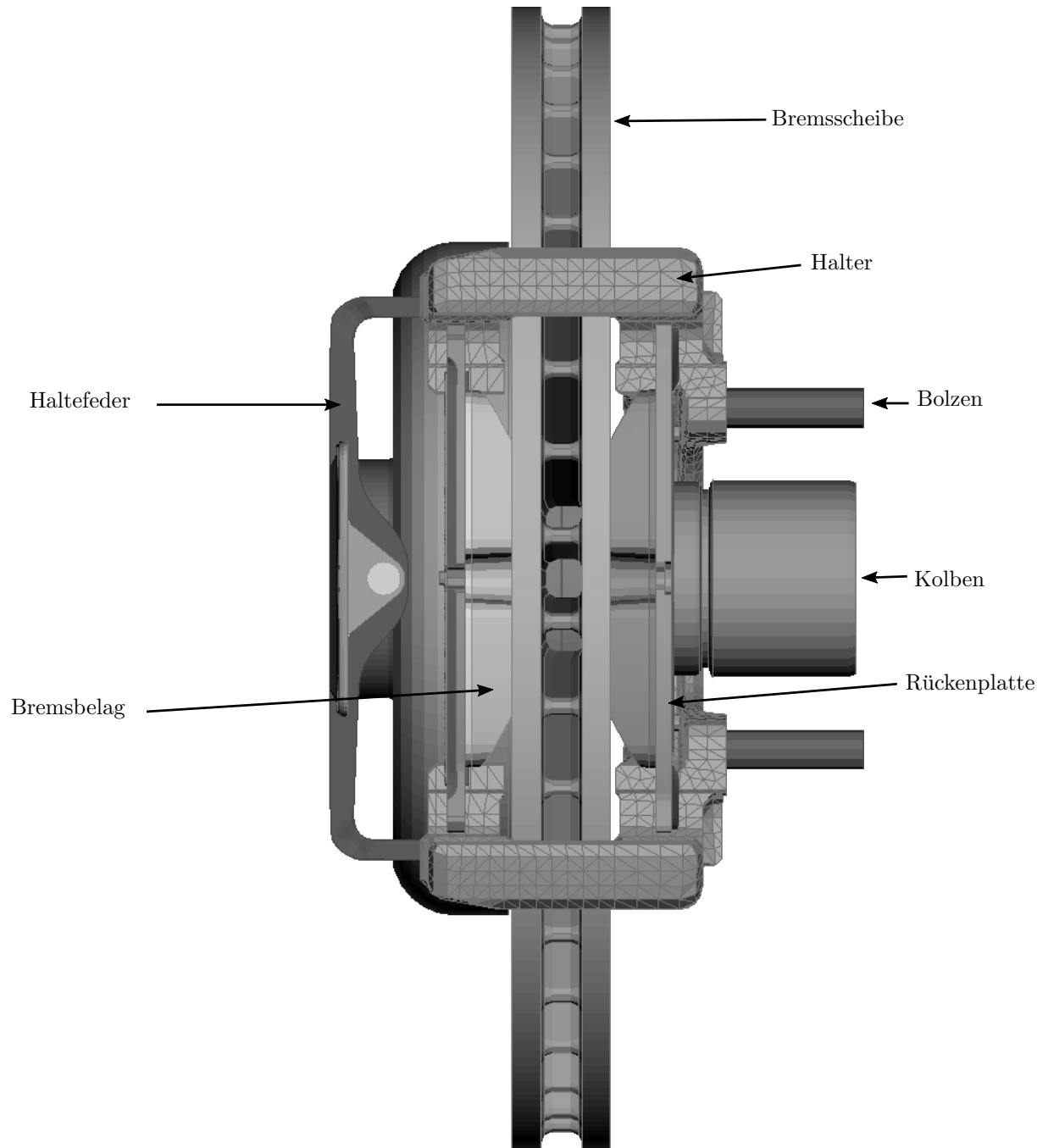


Abbildung A.2: Darstellung eines Bremsenmodells in der Seitenansicht bei ausgeblendeter Faust.

B Betrachtung von Ersatzsystemen

B.1 Einmassenschwinger

Es wird die Lösung des freischwingenden Einmassenschwingers hergeleitet, vergleiche Abbildung B.1. Dieser wird linear, frei und gedämpft betrachtet (Frey mann [2011, Kapitel 3.1, Seite 17ff], Magnus u. a. [2013, Kapitel 2.1.2, Seite 27ff] und Müller [2013a, Kapitel 6.1.4.2, Seite 64ff]).

Die Bewegungsgleichung ist wie folgt gegeben:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x(t), m, c, k \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.1})$$

Die Gleichung stellt eine homogene und lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Sei $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\vartheta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ und \bar{x} komplex. Die Differentialgleichung wird umgeformt in

$$\ddot{\bar{x}}(t) + 2\vartheta\omega_0\dot{\bar{x}}(t) + \omega_0^2\bar{x}(t) = 0. \quad (\text{B.2})$$

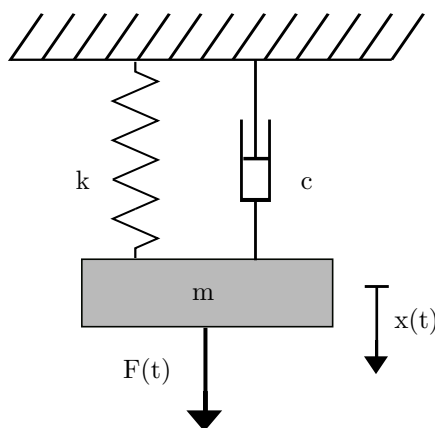


Abbildung B.1: Darstellung des Einmassenschwingers.

Der allgemeingültige Lösungsansatz lautet

$$\bar{x}(t) = Y e^{\lambda t}, \quad (\text{B.3})$$

wobei Y die komplexe Amplitude und λ einen frei wählbaren, komplexen Parameter darstellt.

Wird in Gleichung (B.2) die allgemeine Lösung mit den Ableitungen $\dot{\bar{x}}(t) = \lambda Y e^{\lambda t}$ und $\ddot{\bar{x}}(t) = \lambda^2 Y e^{\lambda t}$ eingesetzt, ergibt sich

$$(\lambda^2 + 2\vartheta\omega_0 + \omega_0^2)Y e^{\lambda t} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Es gilt $e^{\lambda t} \neq 0$ und $Y \neq 0$, da die triviale Lösung vernachlässigt wird. Die charakteristische Gleichung hat die Form

$$\lambda^2 + 2\vartheta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Deren Lösung $\lambda_{1/2}$ lautet:

$$\lambda_{1/2} = -\omega_0\vartheta \pm \sqrt{\omega_0^2\vartheta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{B.6})$$

Unter der Annahme $\vartheta < 1$, was auf strukturdynamische Probleme zutrifft, wird $\lambda_{1/2}$ wie folgt angegeben:

$$\lambda_{1/2} = -\omega_0\vartheta \pm i\omega_0\sqrt{1 - \vartheta^2}. \quad (\text{B.7})$$

Sei $\delta = \omega_0\vartheta$ und $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \vartheta^2}$, dann gilt:

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega_D, \quad (\text{B.8})$$

$$\lambda_2 = -\delta - i\omega_D, \quad (\text{B.9})$$

und die allgemeingültige Lösung hat die Form

$$\bar{x}(t) = Y_1 e^{(-\delta + i\omega_D)t} + Y_2 e^{(-\delta - i\omega_D)t}. \quad (\text{B.10})$$

Die Lösung wird durch Anwendung der Eulerschen Formel in Sinus- und Cosinusschreibweise angegeben. Dabei sind $Y_1 = k + il$ und $Y_2 = m + in$ komplex.

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= e^{-\delta t} (Y_1 e^{i\omega_D t} + Y_2 e^{-i\omega_D t}) = \\
&= e^{-\delta t} \left[(k + il)e^{i\omega_D t} + (m + in)e^{-i\omega_D t} \right] = \\
&= e^{-\delta t} \left[(k + il)(\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) + (m + in)(\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t) \right] = \\
&= e^{-\delta t} \left[k \cos \omega_D t + ik \sin \omega_D t + il \cos \omega_D t - l \sin \omega_D t + \right. \\
&\quad \left. + m \cos \omega_D t - im \sin \omega_D t + in \cos \omega_D t + n \sin \omega_D t \right] = \\
&= e^{-\delta t} \left[((k + il) + (m + in)) \cos \omega_D t + i((k + il) - (m + in)) \sin \omega_D t \right] = \\
&= e^{-\delta t} \left[(Y_1 + Y_2) \cos \omega_D t + (Y_1 - Y_2)i \sin \omega_D t \right]. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Da $\bar{x}(t)$ reell ist, ist $Y_1 + Y_2$ reell und $Y_1 - Y_2$ imaginär. Somit sind Y_1 und Y_2 komplex konjugiert. Mit $Y_1 = \frac{A-iB}{2}$ und $Y_2 = \frac{A+iB}{2}$ ergibt sich die Lösung von $\bar{x}(t)$ zu

$$x(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t). \tag{B.12}$$

Wird $x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$ und $\tan \varphi_0 = -\frac{B}{A}$ eingesetzt, gilt,

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi_0), \tag{B.13}$$

mit $x(t=0) = x_0$. Die Größen A und B werden aus den Anfangsbedingungen der Differentialgleichung (B.1) hergeleitet. Es gilt $x(t=0) = x(0)$ und $\dot{x}(t=0) = \dot{x}(0)$. Mit Gleichung (B.12) ergibt sich

$$x(0) = A. \tag{B.14}$$

Mit

$$\dot{x}(t) = -\delta e^{-\delta t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + e^{-\delta t} \omega_D (-A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \tag{B.15}$$

gilt

$$\dot{x}(0) = -\delta A + \omega_D B. \tag{B.16}$$

ω_0	Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers,
ω_D	Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers,
ϑ	Lehrsches Dämpfungsmaß,
δ	Abklingkonstante.

Tabelle B.1: Größen zur Beschreibung des Einmassenschwingers.

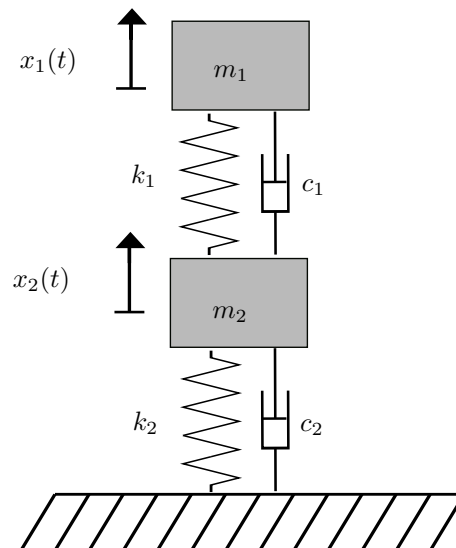


Abbildung B.2: Darstellung eines Zweimassenschwingers.

Aus der Herleitung resultiert

$$x_0 = \sqrt{x^2(0) + \frac{1}{\omega_D^2} (\dot{x}(0) + \delta x(0))^2}, \quad (\text{B.17})$$

$$\tan \varphi_0 = - \frac{\dot{x}(0) + \delta x(0)}{\omega_D x(0)}. \quad (\text{B.18})$$

Die Konstanten ω_0 , ω_D , ϑ und δ stellen physikalische Größen dar, vergleiche Tabelle B.1.

Die hergeleitete Lösung des Einmassenschwingers ist für ein Lehrsches Dämpfungsmaß $\vartheta < 1$ gültig und stellt eine Kriechlösung dar (Magnus u. a. [2013, Kapitel 2.2.2, Seite 51ff]). Für $\vartheta \geq 1$ ändert sich die Charakteristik der Lösung. Bei $\vartheta = 1$ ist ein aperiodischer Grenzfall und bei $\vartheta > 1$ ein aperiodischer Fall gegeben (Müller [2013b, Kapitel 4.3, Seite 48ff]).

B.2 Zweimassenschwinger

Nach der freien Schwingung des Einmassenschwingers wird die freie Schwingung des Zweimassenschwingers betrachtet. Die Bewegungsgleichungen eines Zweimassenschwingers im un-

gedämpften Fall, vergleiche Abbildung B.2, sind wie folgt gegeben:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) - c_1 \dot{x}_2(t) + k_1 x_1(t) - k_1 x_2(t) = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - c_1 \dot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_2(t) - k_1 x_1(t) + (k_1 + k_2) x_2(t) = 0. \quad (\text{B.20})$$

Die Lösung der Gleichungen erfolgt in allgemeiner Form (Buck [2008, Kapitel 2.2.1.2, Seite 12f], Forster [2013b, § 14, Seite 179ff] und Magnus u. a. [2013, Kapitel 6.2, Seite 190ff]). Die Gleichungen (B.19) und (B.20) werden in Matrixschreibweise angegeben.

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B.21})$$

Die Massen, Dämpfungen und Steifigkeiten des Schwingers werden in ein Verhältnis zueinander gebracht. Sei $m_1 := m$, $m_2 := \alpha m$, $c_1 := c$, $c_2 := \gamma c$, $k_1 := k$ und $k_2 := \beta k$. Es gilt für die Bewegungsgleichung:

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B.22})$$

Zur Herleitung der Lösung wird der Zweimassenschwinger ungedämpft betrachtet, $c = 0$. Damit ergibt sich eine bessere Übersichtlichkeit der beschreibenden Gleichungen. Es wird der Lösungsansatz für homogene Differentialgleichungen angewendet.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (\text{B.23})$$

Eingesetzt in Gleichung (B.22) ergibt dies

$$\left[\lambda^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \beta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0. \quad (\text{B.24})$$

Es gilt $e^{\lambda t} \neq 0$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, da die triviale Lösung vernachlässigt wird. Es wird die Lösung durch Berechnung der Determinante des in eckigen Klammern stehenden Terms bestimmt.

$$\begin{aligned}
& \det \left[\lambda^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \beta \end{pmatrix} \right] = \\
& = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 m + k & -k \\ -k & \lambda^2 m \alpha + k(1 + \beta) \end{pmatrix} = \\
& = (\lambda^2 m + k)(\lambda^2 m \alpha + k(1 + \beta)) - k^2 = \\
& = \lambda^4 m^2 \alpha + \lambda^2 m k(1 + \beta) + \lambda^2 m k \alpha + k^2(1 + \beta) - k^2 = \\
& = \lambda^4 m^2 \alpha + \lambda^2 (m k(1 + \beta) + m k \alpha) + k^2 \beta = \\
& = \lambda^4 m^2 \alpha + \lambda^2 m k(1 + \beta + \alpha) + k^2 \beta = 0. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt erfolgt die Substitution von λ , $\lambda^2 := \kappa$ und das Lösen der Gleichung.

$$\begin{aligned}
\kappa_{1/2} &= \frac{-mk(1 + \beta + \lambda) \pm \sqrt{(mk(1 + \beta + \alpha))^2 - 4m^2\alpha k^2}}{2m^2\alpha} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{k(1 + \beta + \alpha)}{m\alpha} \pm \frac{1}{2m\alpha} \sqrt{(k(1 + \beta + \alpha))^2 - 4\alpha k^2} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{k(1 + \beta + \alpha)}{m\alpha} \pm \frac{k(1 + \beta + \alpha)}{2m\alpha} \sqrt{1 - \frac{4\alpha k^2}{(k(1 + \beta + \alpha))^2}} = \\
&= \frac{k}{m} \left[-\frac{1}{2} \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha} \pm \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{4}{1 + \alpha + \beta}} \right] = \\
&= \underbrace{\frac{k}{m} \frac{1 + \alpha + \beta}{2\alpha}}_{:=a(k,m,\alpha,\beta)} \underbrace{\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{1 + \alpha + \beta}} \right]}_{\text{für } +:=b(\alpha,\beta), \text{ für } -:=c(\alpha,\beta)}. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Es gilt $\kappa_{1/2} < 0$, da

$$1 > \sqrt{1 - \frac{4\alpha k^2}{(k(1 + \beta + \alpha))^2}}. \tag{B.27}$$

Durch die Resubstitution ergeben sich die Eigenwerte, $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, welche imaginär sind, da $\kappa_{1/2} < 0$.

$$\lambda_1 = i\sqrt{|\kappa_1|} = i\sqrt{|a(k,m,\alpha,\beta)|} \sqrt{|b(\alpha,\beta)|}, \tag{B.28}$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{|\kappa_1|} = -i\sqrt{|a(k,m,\alpha,\beta)|} \sqrt{|b(\alpha,\beta)|}, \tag{B.29}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{|\kappa_2|} = i\sqrt{|a(k,m,\alpha,\beta)|} \sqrt{|c(\alpha,\beta)|}, \tag{B.30}$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{|\kappa_2|} = -i\sqrt{|a(k,m,\alpha,\beta)|} \sqrt{|c(\alpha,\beta)|}. \tag{B.31}$$

Ähnlich zum Einmassenschwinger kann für den Zweimassenschwinger der Lösungsverlauf aus den Anfangsbedingungen hergeleitet werden. Da die beschreibenden Gleichungen nicht kompakt darstellbar sind und der Verlauf $x(t)$ im Laufe dieser Arbeit nicht benötigt wird, wird auf die Angabe der Lösung verzichtet.

B.3 System aus Euler-Bernoulli Balken

Basierend auf der allgemeinen Balkentheorie (Gross u. a. [2011], Gross u. a. [2012], Gross u. a. [2013] und Gross u. a. [2014]) wird die Modellierung eines Systems aus Euler-Bernoulli Balken aufgezeigt, da dieses Ersatzmodell Verhaltensweisen des Bremssystems abbildet. Insbesondere wird das Phänomen der Modenkopplung betrachtet. Die Modellierung basiert auf Allert [2014, Kapitel 3.3.2, Seite 47ff] und ist ebenso in anderen Werken (Bauchau und Graig [2009], Chen u. a. [1987] und Han u. a. [1999]) gegeben.

In der Literatur werden verschiedene Balkenmodelle behandelt. Dabei werden die Bremsbeläge zumeist als Federn abgebildet (Flint [2002] und Hetzler [2009]). Minimalmodelle zur Abbildung weiterer Mechanismen, zum Beispiel von gyroskopischen Kräften (Kang u. a. [2009], von Wagner u. a. [2007] und von Wagner und Schlagner [2009]), werden vernachlässigt, da das Phänomen der Modenkopplung für die Entwicklung von Bremsenquietschen verantwortlich ist (Hoffmann und Gaul [2008]).

Der im 18. Jahrhundert von den Mathematikern Jakob Bernoulli und Leonhard Euler entwickelte Euler-Bernoulli Balken (Timoshenko [1953, Kapitel II, Abschnitt 6 und 7, Seite 25ff]) stellt ein einfaches Ersatzsystem dar. Der Zusammenbau aus Abbildung B.3 berücksichtigt die Deformierbarkeit der Bremsscheibe. Es werden die Out-of-Plane Schwingformen der Bremsscheibe dargestellt. Anhand des Modells können Einflussgrößen identifiziert und das Phänomen der Modenkopplung betrachtet werden.

Die Darstellung des Systems aus Euler-Bernoulli Balkens ist in Abbildung B.3 gegeben. Für die Modellierung wird die Bremsscheibe als Euler-Bernoulli Balken mit Länge $2l_1$, Höhe $2d_1$ und periodischen Randbedingungen angenommen. Damit werden Doppelmoden mit einer Kopplung dargestellt. Die Lagerung des Reibrings der Bremsscheibe ist durch eine Winklerbettung mit Steifigkeit k_w beschrieben. Der Bremsbelag ist als Euler-Bernoulli Balken mit veränderlicher Biegesteifigkeit modelliert. Seine Länge beträgt $2l_2 = 2l_3$ und seine Höhe $2d_2 = 2d_3$. Die Länge ist variabel, aber stets kürzer als die der Bremsscheibe. Die Bewegung am Balkenende wird mit Neumann Randbedingungen beschrieben: $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $x'_2 \neq 0$, $x'_3 \neq 0$, da dort kein Moment und keine Kraft auftritt. Die Kontaktsteifigkeit zwischen

$$\begin{aligned}
x_1|_{\xi=-l_1^+} &= x_1|_{\xi=l_1^-}, & -EI_1x_1''|_{\xi=-l_1^+} &= -EI_1x_1''|_{\xi=l_1^-}, \\
x_1'|_{\xi=-l_1^+} &= x_1'|_{\xi=l_1^-}, & -EI_1x_1'''|_{\xi=-l_1^+} &= -EI_1x_1'''|_{\xi=l_1^-},
\end{aligned} \tag{B.34}$$

mit $x_1|_{\xi=-l_1^+}$ rechtsseitiger Grenzwert an Stelle l_1 , welcher dem Funktionswert $x_1(-l_1)$ entspricht. Die weiteren Ableitungen sind analog.

Für die Übergangsrandbedingungen der Scheibe bei $\xi \pm l_2$ erfolgt eine Unterscheidung zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert. Es fehlt die Stetigkeit der dritten Ableitung x_1''' bei $\pm l_2$.

$$\begin{aligned}
x_1|_{\xi=-l_2^-} &= x_1|_{\xi=-l_2^+}, & x_1|_{\xi=l_2^-} &= x_1|_{\xi=l_2^+}, \\
x_1'|_{\xi=-l_2^-} &= x_1'|_{\xi=-l_2^+}, & x_1'|_{\xi=l_2^-} &= x_1'|_{\xi=l_2^+}, \\
-EI_1x_1''|_{\xi=-l_2^-} &= -EI_1x_1''|_{\xi=-l_2^+}, & -EI_1x_1''|_{\xi=l_2^-} &= -EI_1x_1''|_{\xi=l_2^+}, \\
-EI_1x_1'''|_{\xi=-l_2^-} &= -EI_1x_1''' - k_N\mu d_1(2x_1 - x_2 - x_3)|_{\xi=-l_2^+}, \\
-EI_1x_1''' - k_N\mu d_1(2x_1 - x_2 - x_3)|_{\xi=l_2^-} &= -EI_1x_1'''|_{\xi=l_2^+}.
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Bei den Neumann Randbedingungen der Beläge sind keinen freien Kräfte und Momente gegeben.

$$\begin{aligned}
-EI_2x_2''|_{\xi=-l_2} &= 0, & -EI_2x_2''|_{\xi=l_2} &= 0, \\
-EI_2x_2''' - k_N\mu d_2(x_1 - x_2)|_{\xi=-l_2} &= 0, & -EI_2x_2''' - k_N\mu d_2(x_1 - x_2)|_{\xi=l_2} &= 0, \\
-EI_2x_3''|_{\xi=-l_2} &= 0, & -EI_2x_3''|_{\xi=l_2} &= 0, \\
-EI_2x_3''' - k_N\mu d_2(x_1 - x_3)|_{\xi=-l_2} &= 0, & -EI_2x_3''' - k_N\mu d_2(x_1 - x_3)|_{\xi=l_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Die Diskretisierung wird mit finiten Differenzen beschrieben und die Wahl der Parameter erfolgt zur Anpassung des Balkens an ein PKW Bremssystem.

$$\begin{aligned}
l_1 &= 900\text{mm}, & A_1\varrho_1 &= 10\frac{\text{g}}{\text{mm}}, & EI_1 &= 10^{10}\text{Nmm}^2, \\
k_W &= 500\frac{\text{N}}{\text{mm}}, & d_1 + d_2 &= 20\text{mm}.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Die Werte beschreiben eine 16 bis 17 Zoll Bremsscheibe und sind passend zur ersten Eigenfrequenz derer gewählt.

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} &= 0.05, & \frac{A_2 \varrho_2}{A_1 \varrho_1} &= 0.05, & \frac{EI_2}{EI_1} &= 0.004, \\ \frac{k_N}{k_W} &= 100, & \frac{d_2}{d_1} &= 0.5, & \mu &= 0.5. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

C Messmethoden

C.1 Dichte

Es erfolgt eine Untersuchung von Messverfahren zur Dichtebestimmung. Diese werden anhand von Schenk u. a. [2014, Kapitel 1, Seite 29ff] eingeführt.

Die Dichte ρ homogener Körper ist das Verhältnis von Masse m zum Volumen V .

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (\text{C.1})$$

Die Masse wird durch eine Waage gemessen. Das Volumen wird bestimmt durch Längenmessung, durch Wägung einer vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge bekannter Dichte durch die Messapparatur des Pyknometers oder durch indirekte Verfahren, wie Auftriebs- und Resonanzverfahren.

Ein Körper mit Dichte ρ und Masse m schwebt in einer Flüssigkeit mit Dichte ρ_w , wenn die Auftriebskraft F_A betragsmäßig gleich der Gewichtskraft F_g des Körpers ist. Das Prinzip von Archimedes besagt, dass gilt „Auftriebskraft gleich Gewichtskraft“, wenn die Dichte des festen Körpers gleich der Dichte der Flüssigkeit ist. In diesem Fall schwebt der Körper in der Flüssigkeit.

Die Berechnung der Dichte erfolgt beispielsweise mit dem Auftriebsverfahren, vergleiche Abbildung C.1. Es gilt,

$$\rho = \frac{mg}{F_A} \rho_w. \quad (\text{C.2})$$

Das Verfahren wird im Entwicklungsprozess angewendet. Zur Dichtemessung mit dem Auftriebsverfahren wird auf Literaturwerte, zum Beispiel für die Dichte des Wassers, und Messungen von Hilfsgrößen, zum Beispiel für das Gewicht des Bauteils, zurückgegriffen. Es erfolgt ein Vergleich der Gewichtskraft im getauchten und im ungetauchten Zustand.

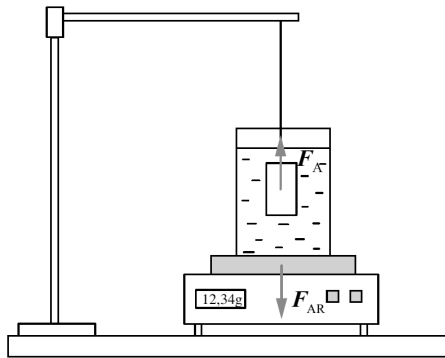


Abbildung C.1: Versuchsaufbau mit elektronischer Laborwaage zur Messung der Dichte mittels Auftriebsmethode (Schenk u. a. [2014, Kapitel 1.2, Seite 38]).

C.2 Beschreibung des elastischen Materialverhaltens

Zur Bestimmung der weiteren Materialkonstanten in Bezug auf die Elastizitäts- und Schubmoduln der Bauteile werden die beschreibenden Materialgesetze mithilfe von Altenbach [2012, Kapitel 12, Seite 327ff] und Müller [2013/2014, Kapitel 6.2.3, Seite 141ff] hergeleitet.

Die allgemeine Beschreibung der Elastizität nach dem Hookschen Gesetz lautet

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{E}, \quad (\text{C.3})$$

mit \mathbf{T} Spannungstensor und \mathbf{E} Elastizitäts- oder Dehnungstensor. Der Zusammenhang wird über die Matrix \mathbf{D} beschrieben, welche abhängig von den Materialeigenschaften ist.

Sei im Folgenden

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (\text{C.4})$$

Die Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ wird durch die Ingenieurkonstanten E_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$, beschrieben.

Für ein anisotropes Materialverhalten ist \mathbf{D} gegeben durch 21 Konstanten,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{56} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Sind im Material zwei orthogonale Symmetrieebenen enthalten, ergibt sich ein orthotropes Verhalten, welches wie folgt beschrieben wird.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

mit E Elastizitätsmoduln in Richtung der Achsen, ν Querkontraktionen zwischen der Beanspruchungs- und Querdehnungsrichtung und G Schubmoduln zur Beschreibung der Gleitung. Im System sind folgende Symmetrien enthalten.

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}, \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}, \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}. \quad (\text{C.7})$$

Sei die Ebene x_1 zur Ebene x_3 orthogonal und x_2 eine Symmetrieebene zu x_1 . Dann wird das Materialverhalten durch eine transversal isotrope Beschreibung ausgedrückt. Dies ist im Bremssystem bei den Reibbelägen gegeben. Die Anzahl der Konstanten verringert sich auf fünf, E_1 , E_3 , ν_{12} , ν_{31} und G_{31} .

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Ausgehend vom orthotropen Fall gilt,

$$E_1 = E_2, \quad G_{23} = G_{31}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{21})}. \quad (\text{C.9})$$

Die restlichen Materialien sind durch ein isotropes Materialverhalten gegeben. Es ergibt sich eine Reduktion der Parameteranzahl auf zwei, E und ν . Alle Richtungen sind bezüglich ihrer Materialeigenschaften gleich.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Im weiteren Verlauf wird die Bestimmung der beschreibenden Elastizitäts- und Schubmoduln der transversal isotropen und isotropen Materialbeschreibung aufgezeigt.

C.3 Isotropes Materialverhalten

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei isotropen Materialverhalten werden verschiedene Messverfahren angewendet (Schenk u. a. [2014] und Trubitz u. a. [2004]). Die erste Möglichkeit basiert auf dem Zusammendrücken des Werkstoffs mit bekannter Druckkraft und Messung der Dehnung. Der Elastizitätsmodul wird durch $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ bestimmt, dem Hook'schen Gesetz. Das Messverfahren ist nicht praktikabel, da die Verformungen zu klein sind und weitere Effekte auftreten, die in der Berechnung nicht berücksichtigt werden.

Ein zweites Verfahren ist die Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die erste Eigenfrequenz eines runden Stabs, der in Schwingung versetzt wird. Dies geschieht durch eine Lagerung an beiden Enden und Aufbringen einer Belastung durch eine Masse M in der Mitte des Stabs. Durch die Messung der Schwingfrequenz f wird der Elastizitätsmodul E berechnet.

$$E = \frac{16\pi M l^3 f^2}{3d^4}, \quad (\text{C.11})$$

mit l Entfernung zwischen den beiden Lagern und d Durchmesser des Stabs. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls mit der Eigenfrequenzmethode ist exakt, für beliebige Geometrien jedoch nicht umsetzbar.

Das letzte Verfahren basiert auf einer Messung der Schallgeschwindigkeit durch den Werkstoff und liefert den Elastizitätsmodul für beliebige Geometrien. Es wird die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen v_l gemessen,

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{C.12})$$

mit ρ Dichte des Bauteils. Die Messung erfolgt mit piezoelektronischen Kristallen um die Schallzeit eines Signals durch den Probenkörper zu bestimmen.

Die praxisrelevanten Konstruktionswerkstoffe liegen im Bereich von 10^{-3} bis 10^3 GPa. Literaturwerte für die im Bremssystem vorhandenen Materialien sind 196 GPa für Eisen, 69 GPa für Aluminium oder 170 - 190 GPa für Gusseisen (Ashby und Jones [2006, Tabelle 3.1, Seite 28f]). Andere Werte sind 210 GPa für Stahl oder abweichend 100 GPa für Gusseisen (Gross u. a. [2014, Kapitel 1, Seite 18]). Bei Gusseisen ist der Wert abhängig von der verwendeten Form.

Auf die Bestimmung der elastischen Konstanten von Gusseisenwerkstoffen und deren Messungenauigkeiten wird im Folgenden eingegangen (Trubitz u. a. [2004]).

Bei Bauteilen aus Gusseisen hat der Elastizitätsmodul bei Zug- und Druckbeanspruchungen einen großen Einfluss. Da im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ein nichtlinearer Verlauf im elastischen Bereich auftritt, ergeben sich verschiedene Problematiken. Wird zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls ein Zugversuch auf Annahme eines ideal-linearen Verlaufs der Spannungs-Dehnungs-Kurve durchgeführt und die Steifigkeit aus deren Verlauf extrahiert, tritt bei der Messung eine große Streuung dessen auf. Gründe sind prüftechnische Fehler, bedingt durch den nichtlinearen Verlauf. Ebenso besitzt der Elastizitätsmodul eine Abhängigkeit von der Form und dem Anteil des im Werkstoff enthaltenen Graphits, sowie der Größe und der Art der Beanspruchung.

Es wird neben dem Zugversuch, der statischen Elastizitätsmodulbestimmung, auf die Messung des reflektierenden Schalldrucks nach Durchquerung des Werkstoffs eingegangen, der dynamischen Elastizitätsmodulbestimmung, eingegangen. Die Messung mit dem Impuls-Echo-Verfahren dient dazu, überelastische Verformungen am Probenkörper zu vermeiden. Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls wird die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwelle c_l und die Schallgeschwindigkeit der Transversalwelle c_t ermittelt.

$$E = \rho \frac{3c_l^2 c_t^2 - 4c_t^4}{c_l^2 - c_t^2}, \quad (\text{C.13})$$

mit Dichte ρ . Mit den Größen wird der Schubmodul und die Querkontraktion berechnet.

$$G = \rho c_t^2, \quad (\text{C.14})$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{c_l^2 - 2c_t^2}{c_l^2 - c_t^2}. \quad (\text{C.15})$$

Die Abweichung der Elastizitätsmodulbestimmung, die nach einer statistischen Auswertung von mehreren Proben und Prüfständen bei dem Verfahren auftritt, beträgt $\pm 3\%$ um den angenommenen Wert.

Als Ergebnis der Elastizitätsmodulbestimmung anhand der vorgestellten Verfahren ist eine Übereinstimmung zwischen den dynamisch gemessenen Werten und den Literaturwerten gegeben. Es wird eine Abschätzung für die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls angegeben, gültig im Bereich von -40°C bis 20°C (Trubitz u. a. [2004]). Diese ist durch eine lineare Beziehung dargestellt,

$$E_2 = E_1 - k(T_2 - T_1), \quad (\text{C.16})$$

mit $k = 0.04 \frac{\text{GPa}}{\text{K}}$. Es ergibt sich eine Änderung von 4% des Temperaturunterschieds im Elastizitätsmodul. Der Wert ist kleiner als die Messungenauigkeit.

Zusammenfassend ist die Bestimmung des Elastizitätsmoduls mit einem Fehler versehen. Es gibt Abhängigkeiten von den Materialausprägungen wie der Graphitform und Zusammensetzung. Aufgrund dessen treten weitere Streuungen neben der Messungenauigkeit auf.

C.4 Transversal isotropes Materialverhalten

Bei transversal isotropen Materialbeschreibungen müssen fünf Parameter bestimmt werden. Im Bremssystem werden damit die Reibbeläge beschrieben. Die Besonderheiten der Belagmaterialien werden in Brecht u. a. [2003], Breuer und Bill [2006] und Burckhardt [1991] angegeben.

Die Reibbeläge setzen die zu verrichtende Reibarbeit in Wärme um, welche zur Verzögerung des Fahrzeugs nötig ist. Es entsteht ein Verschleiß der Beläge durch Reibung und sie bilden mit der Bremsscheibe ein tribologisches System⁴². Die Reibbeläge besitzen einen hohen Reibwert und einen geringen Verschleiß. Deshalb sind die Bremsbeläge aus komplexen Kompositwerkstoffen aufgebaut.

⁴²Vergleiche Czichos und Habig [2010, Kapitel 1.2, Seite 3f].

Die Anforderungen an die Beläge sind hoch. Sie müssen vergleichbare Reibwerte an Vorder- und Hinterachse erzeugen, Schiefziehen vermeiden und eine geringe Temperaturabhängigkeit besitzen. Die Bedingungen teilen sich auf in physikalisch und chemische Eigenschaften, das reibtechnische Verhalten und die Komfortanforderungen. Unter die physikalischen und chemischen Eigenschaften fallen die Materialeigenschaften wie Kompressibilität, der Elastizitätsmodul und die Wärmeleitfähigkeit. Die Abhängigkeit des Reibwerts von der Temperatur und dem Bremsdruck ist eine reibtechnische Eigenschaft. Der Komfortaspekt beschreibt die Bremsengeräusche, das Pedalgefühl und die auftretenden Vibrationen.

Um verschiedene Anforderungen zu erfüllen, gibt es unterschiedliche Mischungen von Materialien, die zur Belagherstellung verwendet werden. Erwähnt seien die NAO (non asbestos organics) Bremsbeläge, welche in den USA Anwendung finden. Sie zeichnen sich durch kleinen Verschleiß aus, besitzen jedoch im Vergleich zu anderen Belägen einen geringeren Reibwert. In Europa sind ECE (Economic Commission for Europe) Beläge verbreitet. Durch einen höheren Verschleiß wird bei diesen eine bessere Bremswirkung als bei NAO Belägen erzielt.

Das Material wird durch eine Komposition aus Kautschuk, Bindemitteln, Fasern, Funktionsstoffen, Metallen und Hilfsstoffen hergestellt. Die Zusammensetzung hat Einfluss auf das Verhalten der Bremsbeläge. Die gemischte Masse wird in die gewünschte Form gepresst und im Ofen gehärtet. Dann wird das Material geflämmt, um eine Minimierung des Reibwertverlusts über steigende Temperatur zu erreichen. Es entsteht eine Materialmischung, welche gekennzeichnet ist durch eine transversale Isotropie, Temperaturabhängigkeit und viskoelastisches Verhalten.

In der Industrie werden hauptsächlich zwei Messsysteme zur Bestimmung von transversal isotropen Materialien eingesetzt, das Grindo Sonic und das Ultrasonic System. Bei Grindo Sonic werden die Eigenfrequenzen einer rechteckigen Probe zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls herangezogen. Die Probe wird mit einem mechanischen Impuls angeregt und die entstehenden Vibrationen mit einem Beschleunigungsaufnehmer, einem Mikrofon oder einem Laser gemessen. Die Berechnung der Eigenfrequenzen erfolgt mittels einer Extraktion aus dem gemessenen Signal und unter Anwendung der Fast Fourier Transformation. Für den Elastizitätsmodul in tangentialer Richtung ergibt sich:

$$E_x = E_y = \frac{m}{bT^2} \left[3933.2 \left(\frac{l}{h} \right)^3 + 22635 \frac{l}{h} \right],^{43} \quad (\text{C.17})$$

mit l Länge, b Breite, h Höhe der Probe, m Masse und $T = \frac{2}{f}$, f betrachtete Frequenz.

⁴³Vergleiche Brecht u. a. [2003].

Bei diesem Verfahren ist keine Bestimmung des Elastizitätsmoduls in axialer Richtung der Bremsbeläge möglich.

Um die Werte in tangentialer und axialer Richtung von Bremsbelägen zu bestimmen, wird eine ETEK Messung angewendet. Dabei werden die Parameter temperatur- und druckabhängig bestimmt, was Schwankungen im Wert der Elastizitätsmoduln bedingt. Eine mögliche Vorgehensweise ist, die tangentialen Elastizitätsmoduln mit Grindo Sonic zu bestimmen und die restlichen transversal isotropen Parameter mit dem ETEK Ultrasonic Verfahren zu messen.

Neben den Elastizitätsmoduln müssen zwei Querkontraktionen und der Schubmodul bestimmt werden. Dazu werden die Eigenfrequenzen der Beläge gemessen. Basierend auf den bestimmten Elastizitätsmoduln können die Materialeigenschaften durch eine numerische Optimierung an die gemessenen Eigenfrequenzen angepasst werden.

Zusammenfassend ist der Belag durch seine Struktur ein komplexes Bauteil. Durch die Mischung bei der Herstellung stellen sich unterschiedliche Verhältnisse ein, sodass bei der Produktion große Schwankungen auftreten. Diese sind durch die Komposition größer als bei anderen Bauteilen. Aus diesem Grund müssen bei der Simulation größere Variationen berücksichtigt und im Versuchsplan aufgenommen werden.

Literaturverzeichnis

- [Abendroth u. a. 2009] ABENDROTH, H. ; HAVERKAMP, M. ; HOFFRICHTER, W. ; BALSCHKE, P. ; MAURER, G. ; WERNITZ, B.: Current and new approaches for brake noise evaluation and rating. In: *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems* 01-3037 (2009)
- [AbuBakar und Ouyang 2006] ABUBAKAR, A.R. ; OUYANG, H.: Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal. In: *International Journal for Vehicle Noise and Vibration* 2 (2006), S. 143–156
- [Ahmed 2011] AHMED, I.: Analysis of disc brake squeal using a ten-degree of freedom model. In: *International Journal of Engineering, Science and Technology* 3 (2011), S. 142–155
- [Ahmed u. a. 2012] AHMED, I. ; ALLAM, E. ; KHALIL, M. ; ABOUEL-SEoud, S.: Automotive drum brake squeal analysis using complex eigenvalue methods. In: *International Journal of Modern Engineering Research* 2 (2012), S. 179–199
- [Akay 2002] AKAY, A.: Acoustic of friction. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 111 (2002), S. 1525–1548
- [Allemang 2003] ALLEMANG, R.J.: The Modal Assurance Criterion (MAC): Twenty years of use and abuse. In: *Sound and Vibration Magazine* 37 (2003), S. 14–23
- [Allert 2014] ALLERT, B.: *Simulation von Bremsenquietschen: Ein Beitrag zur Prognosegüte*. Shaker, 2014
- [Allert und Müller 2014] ALLERT, B. ; MÜLLER, G.: Brake-squeal simulation: An efficient approach to define countermeasures. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODDYN* (2014), S. 3229–3235
- [Alt 2012] ALT, H.W.: *Lineare Funktionalanalysis - Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, 2012
- [Altenbach 2012] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer, 2012
- [Anderson 1962] ANDERSON, T.W.: On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 33 (1962), S. 1148–1159

- [Anderson und Darling 1952] ANDERSON, T.W. ; DARLING, D.A.: Asymptotic theory of certain „goodness of fit“ criteria based on stochastic processes. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 23 (1952), S. 193–212
- [Ashby und Jones 2006] ASHBY, M.F. ; JONES, D.R.H.: *Werkstoffe 1: Eigenschaften, Mechanismen und Anwendungen*. Spektrum, 2006
- [Attia u. a. 2006] ATTIA, F. ; ZOELLNER, T. ; ABDELHAMID, M.K. ; BRETZ, U. ; BALSCHKE, P.: The psycho acoustic approach behind the brake squeal evaluation procedure BONI. In: *SAE Technical Paper Series* 01-3210 (2006)
- [Bagwan und Shelge 2015] BAGWAN, S. ; SHELGE, S.V.: Review on study and analysis of disc brake to reduce disc brake squeal. In: *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology* 2 (2015)
- [Bajer u. a. 2004] BAJER, A. ; BELSKY, V. ; KUNG, S.-W.: The influence of friction-induced damping and nonlinear effects on brake squeal analysis. In: *SAE Technical Paper Series* 01-2794 (2004)
- [Bajer u. a. 2003] BAJER, A. ; BELSKY, V. ; ZENG, L.J.: Combining a nonlinear static analysis and complex eigenvalue extraction in brake squeal simulation. In: *SAE Technical Paper Series* 01-3349 (2003)
- [Bauchau und Graig 2009] BAUCHAU, O.A. ; GRAIG, J.I.: *Structural analysis*. Springer, 2009
- [Bennighof und Lehoucq 2004] BENNIGHOF, J.K. ; LEHOUCQ, R.B.: An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics. In: *SIAM Journal of Scientific Computing* 25 (2004), S. 2084–2106
- [Binder und Heermann 2010] BINDER, K. ; HEERMANN, D.W.: *Monte Carlo simulation in statistical physics - An introduction*. Springer, 2010
- [BMW Group 2016] BMW GROUP: *Interne Berichte*. 2016
- [Bogges und Tolle 1995] BOGGES, P.T. ; TOLLE, J.W.: Sequential quadratic programming. In: *Acta Numerica* 4 (1995), S. 1–51
- [Box u. a. 2005] BOX, G.E.P. ; HUNTER, J.S. ; HUNTER, W.G.: *Statistics for experimenters - Design, innovation, and discovery*. Wiley, 2005
- [Brecht u. a. 2003] BRECHT, J. ; ELVENKEMPER, A. ; BETTEN, J. ; NAVRATH, U. ; MÜLLERHOFF, J.B.: Elastic properties of friction materials. In: *SAE Technical Paper* 01 (2003)
- [Breuer und Bill 2006] BREUER, B. ; BILL, K.: *Bremsenhandbuch - Grundlagen, Komponenten, Systeme, Fahrdynamik*. Vieweg, 2006
- [Brosius 2011] BROSIUS, F.: *SPSS 19*. mitp, 2011
- [Buck 2008] BUCK, A.: *Simulation von Bremsenquietschen (Brake Squeal)*. Shaker, 2008

- [Buckingham 1914] BUCKINGHAM, E.: On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations. In: *Physical Review* 4 (1914), S. 345–376
- [Burckhardt 1991] BURCKHARDT, M.: *Fahrwerktechnik: Bremsdynamik und Pkw-Bremsanlagen*. Vogel, 1991
- [Butlin und Woodhouse 2010] BUTLIN, T. ; WOODHOUSE, J.: Friction-induced vibration: Quantifying sensitivity and uncertainty. In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), S. 509–526
- [Carvajal Gonzalez u. a. 2014] CARVAJAL GONZALEZ, S. ; WALLNER, D. ; HELFRICH, R. ; KLEIN, M.: Excellent brake noise comfort by simulation - Advanced methods to create stability maps. In: *SIA & CTTM, Automotive NVH Comfort Symposium, Le Mans* (2014)
- [Casella und George 1992] CASELLA, G. ; GEORGE, E.I.: Explaining the Gibbs Sampler. In: *The American Statistician* 46 (1992), S. 167–174
- [Chan und Stachowiak 2004] CHAN, D. ; STACHOWIAK, G.W.: Review of automotive brake friction materials. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 218 (2004), S. 953–966
- [Chen u. a. 2006] CHEN, F. ; TAN, C.A. ; QUAGLIA, R.L.: *Disc brake squeal - Mechanism, analysis, evaluation, and reduction/prevention*. SAE, 2006
- [Chen u. a. 1987] CHEN, G. ; KRANTZ, S.G. ; MA, D.W. ; WAYNE, C.E. ; WEST, H.H.: The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation. In: *Lecture notes in pure and applied mathematics, operator methods for optimal control problems* 108 (1987), S. 67–96
- [Chiralaksanakul und Mahadevan 2005] CHIRALAKSANAKUL, A. ; MAHADEVAN, S.: First-order approximation methods in reliability-based design optimization. In: *Journal of Mechanical Design* 127 (2005), S. 851–857
- [Cohen u. a. 2003] COHEN, J. ; COHEN, P. ; WEST, S.G. ; AKIEN, L.S.: *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences*. Lawrence Erlbaum Associates, 2003
- [Cook und Nachtsheim 1980] COOK, R.D. ; NACHTSHEIM, C.J.: A comparison of algorithms for constructing exact d-optimal designs. In: *Technometrics* 22 (1980), S. 315–324
- [Crestaux u. a. 2009] CRESTAUX, T. ; LE MAÎTRE, O. ; MARTINEZ, J.-M.: Polynomial Chaos expansion for sensitivity analysis. In: *Reliability Engineering and System Safety* 94 (2009), S. 1161–1172
- [Czichos und Habig 2010] CZICHOS, H. ; HABIG, K.-H.: *Tribologie - Handbuch*. Vieweg, 2010
- [de Paula u. a. 2012] DE PAULA, B.F. ; REJDYCH, G. ; CHANCELIER, T. ; DES ROCHES, G.V. ; BALMES, E.: On the influence of geometry updating on modal correlation of brake components. In: *18th symposium for Vibrations, Shocks and Noise* (2012)

- [de Rocquigny 2009] DE ROCQUIGNY, E.: Structural reliability under monotony: Properties of FORM, simulation of response surface methods and a new class of Monotonous Reliability Methods (MRM). In: *Structural Safety* 31 (2009), S. 363–374
- [Degenstein u. a. 2006] DEGENSTEIN, T. ; DOHLE, A. ; ELVENKEMPER, A. ; LANGE, J.: Der “mu“-Wert - Reibwertbestimmung in Bremssystemen. In: *XXVI. Internationales μ -Symposium* 12(620) (2006)
- [d’Ippolito u. a. 2009] D’IPPOLITO, R. ; HACK, M. ; DONDEERS, S. ; HERMANS, L. ; TZANNETAKIS, N. ; VANDEPITTE, D.: Improving the fatigue life of a vehicle knuckle with a reliability-based design optimization approach. In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 139 (2009), S. 1619–1632
- [Ditlevsen und Madsen 2007] DITLEVSEN, O. ; MADSEN, H.O.: *Structural reliability methods*. Wiley, 2007
- [Do u. a. 2014] DO, H.Q. ; GONZALEZ, A. ; MASSA, F. ; TISON, T. ; LAUBER, J. ; GUERRA, T.M.: Fuzzy analysis of a friction-induced vibration system: Frequency and time aspects. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN* (2014), S. 3059–3066
- [Dunlap u. a. 1999] DUNLAP, K.B. ; RIEHLE, M.A. ; LONGHOUSE, R.E.: An investigative overview of automotive disc brake noise. In: *SAE Technical Paper Series* 01-0142 (1999)
- [Dylla 2015] DYLLA, K.: *Simulative und statistische Untersuchungen zur robusten Prognose von Bremsenquietschen*. Masterarbeit, Technische Universität München. 2015
- [Eireiner 2013] EIREINER, Dieter: *Prozessmodelle zur statischen Auslegung von Anlagen für das Friction Stir Welding*. Herbert Utz, 2013
- [Ferreira u. a. 2007] FERREIRA, S.L.C. ; BRUNS, R.E. ; FERREIRA, H.S. ; MATOS, G.D. ; DAVID, J.M. ; BRANDÃO, G.C. ; DA SILVA, E.G.P. ; PORTUGAL, L.A. ; DOS REIS, P.S. ; SOUZA, A.S. ; DOS SANTOS, W.N.L.: Box-Behnken design: An alternative for the optimization of analytical methods. In: *Analytica Chimica Acta* 597 (2007), S. 197–186
- [Fischer u. a. 2015] FISCHER, G. ; LEHNER, M. ; PUCHERT, A.: *Einführung in die Stochastik*. Springer, 2015
- [Flint 2000] FLINT, J.: The effect of distributed parameters examined in a model for simulation of disc brake squeal. In: *SAE Technical Report* 01 (2000)
- [Flint 2002] FLINT, J.: *Disc brake squeal*, University of Southern Denmark, Dissertation, 2002
- [Forster 2013a] FORSTER, O.: *Analysis 1 - Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer, 2013
- [Forster 2013b] FORSTER, O.: *Analysis 2 - Differentialrechnung im R^n , gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2013

- [Freymann 2011] FREYMANN, R.: *Strukturdynamik - Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*. Springer, 2011
- [Gen und Cheng 2000] GEN, M. ; CHENG, R.: *Genetic algorithms & engineering optimization*. Wiley, 2000
- [Ghanem und Spanos 1991] GHANEM, R.G. ; SPANOS, P.D.: Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. In: *Journal of Engineering Mechanics* 117 (1991), S. 2351–2372
- [Grosche u. a. 2013] GROSCHKE, G. ; ZIEGLER, V. ; ZIEGLER, D.: *Springer - Taschenbuch der Mathematik*. Springer, 2013
- [Gross u. a. 2012] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.A.: *Technische Mechanik 3 - Kinetik*. Springer, 2012
- [Gross u. a. 2013] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.A.: *Technische Mechanik 1 - Statik*. Springer, 2013
- [Gross u. a. 2014] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.A.: *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. Springer, 2014
- [Gross u. a. 2011] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4 - Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, 2011
- [Gross 2003] GROSS, J.: *Linear regression*. Springer, 2003
- [Gunst und Mason 2009] GUNST, R.F. ; MASON, R.L.: Fractional factorial design. In: *WIREs Computational Statistics* 1 (2009), S. 234–244
- [Hamabe u. a. 1999] HAMABE, T. ; YAMAZAKI, I. ; YAMADA, K. ; MATSUI, H. ; NAKAGAWA, S. ; KAWAMURA, M.: Study of a method for reducing drum brake squeal. In: *SAE Technical Paper* 01-0144 (1999)
- [Han u. a. 1999] HAN, S.M. ; BENAROYA, H. ; WEI, T.: Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. In: *Journal of Sound and Vibration* 225 (1999), S. 935–988
- [Hanss 2005] HANSS, M.: *Applied fuzzy arithmetic*. Springer, 2005
- [Harris und Piersol 2002] HARRIS, C.M. ; PIERSOL, A.G.: *Shock and vibration: Handbook*. McGraw - Hill, 2002
- [Hartung u. a. 2009] HARTUNG, J. ; ELPELT, B. ; KLÄSENER, K.-H.: *Statistik - Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenburg, 2009
- [Hasofer und Lind 1974] HASOFER, A.M. ; LIND, N.C.: Exact and invariant second moment code format. In: *Journal of Engineering Mechanics* 100 (1974), S. 111–121
- [Hastings 1970] HASTINGS, W.K.: Monte Carlo sampling methods using markov chains and their application. In: *Biometrics* 57 (1970), S. 91–109

- [Heddrich und Sachs 2016] HEDDRICH, J. ; SACHS, L.: *Angewandte Statistik*. Springer, 2016
- [Henderson und Nelson 2006] HENDERSON, S.G. ; NELSON, B.L.: *Handbook in operations research and management science - Simulation*. North-Holland, 2006
- [Henze 2013] HENZE, N.: *Stochastik für Einsteiger*. Springer, 2013
- [Heredia-Langner u. a. 2003] HEREDIA-LANGNER, A. ; CARLYLE, W.M. ; MONTGOMERY, D.C. ; BORROR, C.M. ; RUNGER, G.C.: Genetic algorithms for the construction of d-optimal designs. In: *Journal of Quality Technology* 35 (2003), S. 28–43
- [Hetzler 2009] HETZLER, H.: On the influence of contact mechanics on friction induced flutter instability. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 9 (2009), S. 275–276
- [Hoffmann u. a. 2002] HOFFMANN, N. ; FISCHER, M. ; ALLGAIER, R. ; GAUL, L.: A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. In: *Mechanics Research Communications* 29 (2002), S. 197–205
- [Hoffmann und Gaul 2008] HOFFMANN, N.P. ; GAUL, L.: Friction induced vibration of brakes: Research fields and activities. In: *SAE Technical Paper Series* 01-2579 (2008)
- [Kang u. a. 2009] KANG, J. ; KROUSGRILL, C.M. ; SADEGHI, F.: Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction and mode-coupling mechanisms. In: *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), S. 387–407
- [Keilholz 2015] KEILHOLZ, A.: *Entwicklung eines Geräuschprüfstandprogrammes zur Detektion von Bremsenquietschen basierend auf den aktuellen Anforderungen an eine PKW Reibbremse*. Bachelorarbeit, Technische Universität Ilmenau. 2015
- [Keitzel und Hoffmann 2006] KEITZEL, H. ; HOFFMANN, N.: Influence of the contact model on the onset of sprag-slip. In: *PAMM, Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics* 6 (2006), S. 311–312
- [Kinkaid u. a. 2003] KINKAID, N.M. ; O'REILLY, O.M. ; PAPADOPOULOS, P.: Automotive disc brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 267 (2003), S. 105–166
- [Kinreggian 2000] KINREGGHIAN, A.D.: The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 15 (2000), S. 81–90
- [Kleppmann 2011] KLEPPMANN, W.: *Taschenbuch Versuchsplanung*. Carl Hanser, 2011
- [Könning u. a. 2013] KÖNNING, M. ; NUNES, R.F. ; HÄSLER, K. ; JASCH, T.: MB-CANI - An approach for a total evaluation of brake noise squeal. In: *Eurobrake, 2013* (005 EB2013-NVH)
- [Kröse und Chan 2014] KRÖSE, D.P. ; CHAN, J.C.C.: *Statistical modeling and computation*. Springer, 2014

- [Kröse u. a. 2011] KRÖSE, D.P. ; TAIMRE, T. ; BOTEV, Z.I.: *Handbook of Monte Carlo methods*. Wiley, 2011
- [Kruse und Hoffmann 2013] KRUSE, S. ; HOFFMANN, N.P.: On the robustness of instabilities in friction-induced vibration. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 135 (2013), S. 1–8
- [Kruse u. a. 2015] KRUSE, S. ; TIEDEMANN, M. ; ZEUMER, B. ; REUSS, P. ; HETZLER, H. ; HOFFMANN, N.P.: The influence of joints on friction induced vibrations in brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 340 (2015), S. 239–252
- [Lanczos 1950] LANCZOS, C.: An interaction method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. In: *Journal of Research of the Bureau of Standards* 45 (1950)
- [Landau und Binder 2009] LANDAU, D.P. ; BINDER, K.: *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. Cambridge University, 2009
- [Laubenbacher und Pareigis 2001] LAUBENBACHER, R. ; PAREIGIS, B.: Equivalence relations on finite dynamical systems. In: *Applied Mathematics* 26 (2001), S. 237–251
- [Li 2005] LI, S.: An efficient technique for multi-frequency acoustic analysis by boundary element method. In: *Journal of Sound and Vibration* 283 (2005), S. 971–980
- [Liu u. a. 2007] LIU, P. ; ZHENG, H. ; CAI, C. ; WANG, Y.Y. ; LU, C. ; ANG, K.H. ; LIU, G.R.: Analysis of disc brake squeal using the complex eigenvalue method. In: *Applied Acoustics* 68 (2007), S. 603–615
- [Loh 1996] LOH, W.-L.: On Latin Hypercube sampling. In: *The Annals of Statistics* 24 (1996), S. 2058–2080
- [Low 2014] LOW, B. K.: FORM, SORM, and spatial modeling in geotechnical engineering. In: *Structural Safety* 59 (2014), S. 56–64
- [Lü und Yu 2014] LÜ, H. ; YU, D.: Brake squeal reduction of vehicle disc brake system with interval parameters by uncertain optimization. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), S. 7313–7325
- [Luenberger und Ye 2008] LUENBERGER, D.G. ; YE, Y.: *Linear and nonlinear programming*. Springer, 2008
- [Madsen u. a. 2006] MADSEN, H.O. ; KRENK, S. ; LIND, N.C.: *Methods of structural safety*. Prentice-Hall, 2006
- [Magnus u. a. 2013] MAGNUS, K. ; POPP, K. ; SEXTRO, W.: *Schwingungen - Physikalische Grundlagen und mathematische Behandlung von Schwingungen*. Springer, 2013
- [Mari und Kotz 2001] MARI, D.D. ; KOTZ, S.: *Correlation and Dependence*. Imperial College Press, 2001

- [Matsumoto und Nishimura 1998] MATSUMOTO, M. ; NISHIMURA, T.: Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator. In: *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations: Special Issue on Uniform Random Number Generation* (1998)
- [McKay u. a. 1979] MCKAY, M.D. ; BECKMAN, R.J. ; CONOVER, W.J.: A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. In: *American Statistical Association and the American Society for Quality Control, Technometrics* 21 (1979), S. 239–245
- [Meister 2011] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, 2011
- [Millner 1978] MILLNER, N.: An analysis of disc brake squeal. In: *SAE Technical Paper* 02-01 (1978)
- [Mitterer 2000] MITTERER, A.: *Optimierung vielparametrischer Systeme in der Kfz-Antriebsentwicklung*. VDI, 2000
- [Mohammed und Rahim 2013] MOHAMMED, A.A.Y. ; RAHIM, I.A.: Analysing the disc brake squeal: Review and summary. In: *International Journal of Scientific & Technology Research* 2 (2013)
- [Montgomery 2012] MONTGOMERY, D.C.: *Design and analysis of experiments*. Wiley, 2012
- [Morris 2011] MORRIS, M.D.: *Design of Experiments - An introduction based on linear models*. Chapman & Hall, 2011
- [Mulholland und Jones 1968] MULHOLLAND, M. ; JONES, C.R.: *Fundamentals of statistics*. Springer, 1968
- [Müller 2013a] MÜLLER, G.: *Baudynamik*. 2013
- [Müller 2013b] MÜLLER, G.: *Ergänzungskurs Mechanik*. 2013
- [Müller 2013/2014] MÜLLER, G.: *Continuum mechanics and tensor analysis*. 2013/2014
- [Müller 1977] MÜLLER, P.C.: *Stabilität und Matrizen*. Springer, 1977
- [Müller und Schiehlen 1976] MÜLLER, P.C. ; SCHIEHLEN, W.O.: *Lineare Schwingungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1976
- [Müller-Gronbach u. a. 2012] MÜLLER-GRONBACH, T. ; NOVAK, E. ; RITTER, K.: *Monte-Carlo-Algorithmen*. Springer, 2012
- [Neal 2003] NEAL, R.M.: Slice sampling. In: *The Annals of Statistics* 31 (2003), S. 705–767
- [Nechak u. a. 2011] NECHAK, L. ; BERGER, S. ; AUBRY, E.: A Polynomial Chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 30 (2011), S. 594–607

- [Nobari u. a. 2015a] NOBARI, A. ; OUYANG, H. ; BANNISTER, P.: Statistics of complex eigenvalues in friction-induced vibration. In: *Journal of Sound and Vibration* 338 (2015), S. 169–183
- [Nobari u. a. 2015b] NOBARI, A. ; OUYANG, H. ; BANNISTER, P.: Uncertainty quantification of squeal instability via surrogate modelling. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 60-61 (2015), S. 887–908
- [Nocedal und Wright 2006] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.J.: *Numerical Optimization*. Springer, 2006
- [Nouby u. a. 2009] NOUBY, M. ; MATHIVANAN, D. ; SRINIVASAN, K.: A combined approach of complex eigenvalue analysis and design of experiment (DOE) to study disc brake squeal. In: *International Journal of Engineering, Science and Technology* 1 (2009), S. 254–271
- [Nunes u. a. 2009] NUNES, R.F. ; WILL, J. ; BAYER, V. ; CHITTEPU, K.: Robustness Evaluation of brake system concerned to squeal noise problem. In: *Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 6.0* (2009)
- [Oberst und Lai 2015] OBERST, S. ; LAI, J.C.S.: Nonlinear transient and chaotic interactions in disc brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 342 (2015), S. 272–289
- [Ouyang u. a. 2005] OUYANG, H. ; NACK, W. ; YUAN, Y. ; CHEN, F.: Numerical analysis of automotive disc brake squeal: A review. In: *International Journal for Vehicle Noise and Vibration* 1 (2005), S. 207–231
- [Papaioannou 2012] PAPAIOANNOU, I.: *Non-intrusive finite element reliability analysis methods*, Technische Universität München, Dissertation, 2012
- [Park 1994] PARK, J.-S.: Optimal Latin-Hypercube design for computer experiments. In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 39 (1994), S. 95–111
- [Pastor u. a. 2012] PASTOR, M. ; BINDER, M. ; HARCARIK, T.: Modal Assurance Criterion. In: *Procedia Engineering* 48 (2012), S. 543–548
- [Popov 2010] POPOV, V.L.: *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, 2010
- [Robert und Casella 2004] ROBERT, C.P. ; CASELLA, G.: *Monte Carlo statistical methods*. Springer, 2004
- [Ronniger 2012] RONNIGER, C.: *Versuchsmethoden - Statistik & DoE*. BMW Group, 2012
- [Ronniger 2014] RONNIGER, C.: *Taschenbuch der statistischen Methoden - Die wichtigsten Methoden und Verfahren für die Praxis*. BMW Group, 2014
- [Rubinstein und Kröse 2008] RUBINSTEIN, R.Y. ; KRÖSE, D.P.: *Simulation and the Monte Carlo method*. Second Edition. Wiley, 2008
- [Saad 2003] SAAD, Y.: *Iterative method for sparse linear systems*. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003

- [Saltelli u. a. 2004] SALTELLI, A. ; TARANTOLA, S. ; CAMPOLONGO, F. ; RATTO, M.: *Sensitivity analysis in practice*. Wiley, 2004
- [Sarrouy u. a. 2013a] SARROUY, E. ; DESSOMBZ, O. ; SINOUE, J.-J.: Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear system. In: *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), S. 577–594
- [Sarrouy u. a. 2013b] SARROUY, E. ; DESSOMBZ, O. ; SINOUE, J.-J.: Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 40 (2013), S. 1–10
- [Savci 2015] SAVCI, E.: *Parameter reduction for robustness evaluations of brake squeal and implementation of an efficient algorithm*. Masterarbeit, Technische Universität München. 2015
- [Schenk u. a. 2014] SCHENK, W. ; KREMER, F. ; BEDDIES, G. ; FRANKE, T. ; GALVOSAS, P. ; RIEGER, P.: *Physikalisches Praktikum*. Springer, 2014
- [Sepahvand und Marburg 2014] SEPAHVAND, K. ; MARBURG, S.: On uncertainty quantification in vibroacoustic problems. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN* (2014), S. 3259–3263
- [Shapiro und Wilk 1965] SHAPIRO, S.S. ; WILK, M.B.: An analysis of variance test for normality (complete samples). In: *Biometrika* 52 (1965), S. 591–611
- [Shin u. a. 2002] SHIN, K. ; BRENNAN, M.K. ; OH, J.-E. ; HARRIS, C.J.: Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model. In: *Journal of Sound and Vibration* 254 (2002), S. 837–848
- [Sideris 2013] SIDERIS, T.C.: *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Atlantic Press, 2013
- [Siebertz u. a. 2010] SIEBERTZ, K. ; VAN BEBER, D. ; HOCHKIRCHEN, T.: *Statistische Versuchsplanung - Design of Experiments (DoE)*. Springer, 2010
- [Snow und Bajaj 2015] SNOW, M.G. ; BAJAJ, A.K.: Uncertainty quantification analysis of the dynamics of an electrostatically actuated microelectromechanical switch model. In: *Journal of Sound and Vibration* 349 (2015), S. 375–388
- [Soobbarayen u. a. 2014a] SOOBBARAYEN, K. ; BESSET, S. ; SINOUE, J.-J.: A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN* (2014), S. 3289–3296
- [Soobbarayen u. a. 2014b] SOOBBARAYEN, K. ; SINOUE, J.-J. ; BESSET, S.: Numerical study of friction-induced instability and acoustic radiation - Effect of ramp load on the squeal propensity for a simplified brake model. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), S. 5475–5493
- [Spurk 1992] SPURK, J.H.: *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre*. Springer, 1992

- [Stein 1987] STEIN, M.: Large sample properties of simulations using Latin Hypercube sampling. In: *American Statistical Association and the American Society for Quality Control, Technometrics* 29 (1987), S. 143–151
- [Stewart 2001] STEWART, G.W.: *Matrix algorithms - Volume II: Eigensystems*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001
- [Suetti 2013] SUETTI, A.G.L.: Objective noise index for brake tests using analytical equations. In: *SAE Technical Paper Series* 36 (2013), Nr. 0027
- [Tillé 2006] TILLÉ, Y.: *Sampling algorithms*. Springer, 2006
- [Timoshenko 1953] TIMOSHENKO, S.P.: *History of strength of materials*. McGraw-Hill, 1953
- [Tison u. a. 2014] TISON, T. ; HEUSSAFF, A. ; MASSA, F. ; TURPIN, I. ; NUNES, R.F.: Improvement in the predictivity of squeal simulations: Uncertainty and robustness. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), S. 3394–3412
- [Töpfer 2004] TÖPFER, A.: *Six Sigma - Konzeption und Erfolgsbeispiele für praktizierte Null-Fehler-Qualität*. Springer, 2004
- [Trubitz u. a. 2004] TRUBITZ, P. ; REHMER, B. ; PUSCH, G.: Die Ermittlung elastischer Konstanten von Gusseisenwerkstoffen. In: *Tagung Werkstoffprüfung*, 2004, S. 267–272
- [Tvedt 1990] TVEDT, L.: Distribution of quadratic forms in normal space - Application to structural reliability. In: *Journal of Engineering Mechanics* 116 (1990), S. 1183–1197
- [Urban und Mayerl 2011] URBAN, D. ; MAYERL, J.: *Regressionsanalyse: Theorie, Technik und Anwendung*. Springer, 2011
- [Ustinov 2015] USTINOV, E.A.: *Sensitivity Analysis in Remote Sensing*. Springer, 2015
- [Vacher u. a. 2010] VACHER, P. ; JACQUIER, B. ; BUCCHARLES, A.: Extensions of the MAC criterion to complex modes. In: *Proceedings of ISMA2010 including USD 2010*, 2010, S. 2713–2736
- [Verderaime 1994] VERDERAIME, V.: Illustrated structural application of universal First-Order Reliability Method. In: *NASA Technical Paper* 3501 (1994)
- [Viana u. a. 2010] VIANA, F.A.C. ; VENTER, G. ; BALABANOV, V.: An algorithm for fast optimal Latin Hypercube Design of Experiments. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 82 (2010), S. 135–156
- [von Wagner u. a. 2007] VON WAGNER, U. ; HOCHLENERT, D. ; HAGEDORN, P.: Minimal models for the explanation of disk brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), S. 527–539
- [von Wagner und Schlagner 2009] VON WAGNER, U. ; SCHLAGNER, S.: On the origin of disk brake squeal. In: *International Journal of Vehicle Design* 51 (2009)

- [Waldi 2015] WALDI, R.: *Statistische Datenanalyse - Grundlagen und Methoden für Physiker*. Springer, 2015
- [Wappis und Jung 2010] WAPPIS, J. ; JUNG, B.: *Taschenbuch Null-Fehler-Management*. Carl Hanser, 2010
- [Werner 2005] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 2005
- [Wieland und Wallenburg 2012] WIELAND, A. ; WALLENBURG, C.M.: Dealing with supply chain risks: Linking risk management practices and strategies to performance. In: *International Journal of Physical Distribution & Logistics* 42 (2012), S. 887–905
- [Will 2013] WILL, J.: Virtual robustness evaluation of brake systems as base for a robust design process and as part of the quality control in the early stage of the design process. In: *Eurobrake* MS-034 (2013)
- [Wu u. a. 1993] WU, T.W. ; LI, W.L. ; SEYBERT, A.F.: An efficient boundary element algorithm for multi-frequency acoustic analysis. In: *Journal of Acoustical Society of America* 94 (1993), S. 447–452
- [Xing 2011] XING, H.: Squeal analysis of disc brake squeal. In: *4th ANSA & μ ETA International Conference* (2011)
- [Yuan 1995] YUAN, Y.: A study of the effect of negative friction-speed slope on brake squeal. In: *ASME Design Engineering Technical Conference* 3 (1995), S. 1153–1162
- [Zeidler 2013] ZEIDLER, E.: *Springer - Taschenbuch der Mathematik*. Springer, 2013