

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Leichtbau

**Untersuchung des thermo-mechanischen  
und kryogenen Kurz- und Langzeitverhaltens  
von Polyethylen für Hochdrucktanks**

Martin Jakob Mahl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr. mont. habil. Dr. rer. nat. h.c. Ewald Werner

Prüfer der Dissertation: 1. Prof. Dr.-Ing. Horst Baier

2. Prof. Dr.-Ing. Klaus Drechsler

Die Dissertation wurde am 03.09.2018 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 01.02.2019 angenommen.



# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Leichtbau der Technischen Universität München.

Für die Betreuung der Arbeit und die Erstellung des Erstgutachtens bedanke ich mich besonders bei meinem Doktorvater Herrn Professor i.R. Dr.-Ing. Horst Baier, ehemaliger Leiter des Lehrstuhls für Leichtbau. Die essenziellen Fragestellungen des hier bearbeiteten Forschungsgebietes wurden gemeinsam herausgearbeitet und erörtert. Seine großzügige Haltung gegenüber der Teilnahme an Konferenzen ließ es zu mit Experten auch außerhalb des Lehrstuhls Ergebnisse dieser Arbeit zu diskutieren. Die uneingeschränkte Unterstützung von Professor Baier insbesondere bei der Durchführung von Experimenten trug stark zum Erfolg dieser Arbeit bei.

Allen Kollegen am Lehrstuhl für Leichtbau danke ich für die stets unkomplizierte Zusammenarbeit. Insbesondere gilt der Dank den Kollegen in der Werkstatt, die mit Engagement und durch ihre präzise und schnelle Arbeitsweise die Durchführung der vielen Versuche ermöglichten. Für die vielen hilfreichen fachlichen Diskussionen danke ich meinen Projektpartnern aus dem Forschungsprojekt „HyMod - Simulationsmethoden für die thermomechanische Auslegung und Lebensdauerprognose von Wasserstoff-(Kryo-)Druckspeichern in der Fahrzeuganwendung“. Gefördert wurde das Projekt vom deutschen Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi) unter dem Förderkennzeichen 03ET6013. Außerdem gilt mein Dank dem Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik in Freiburg und dem Walther-Meißner-Institut in Garching für die tatkräftige Unterstützung bei der Durchführung von Versuchen. Außerdem möchte ich mich bei den vielen Studenten bedanken, die sich für eine Studienarbeit bei mir entschieden haben und mit ihren Ergebnissen diese Dissertation aufwerten. Hier danke ich Herrn Christopher Jelich für seine hervorragende Studienarbeit und für die Durchsicht der vorliegenden Dissertation.

Während der gesamten Zeit am Lehrstuhl für Leichtbau wurde ich von meiner Familie unterstützt, insbesondere von meiner Frau Dina. Dafür bedanke ich mich herzlich.

München, August 2018

Martin Mahl



## Kurzfassung

Thermoplastische Kunststoffe werden aufgrund ihres Leichtbaupotentials vermehrt in thermo-mechanisch höher belasteten Strukturen eingesetzt. Als ein Vertreter dieser Polymere wird das mechanische Werkstoffverhalten von Polyethylen hoher Dichte (HDPE) in einem breiten Temperaturspektrum bis hinunter zu kryogenen Temperaturen experimentell untersucht. Unter anderem wird dabei das Kurz- und Langzeitverhalten unter quasistatischer sowie zyklischer Belastung analysiert. Darauf aufbauend werden Materialmodelle für numerische Belastungssimulationen parametrisiert, um das thermo-mechanische Materialverhalten mittels elastisch-plastischer, hyperelastischer sowie viskoelastischer Konstitutivgesetze möglichst genau darzustellen. Aus der Vielzahl von untersuchten Materialmodellen wird mit dem Drucker-Prager-Modell das Materialverhalten innerhalb des gegebenen Lastspektrums am besten abgebildet. Unter anderem ist es in der Lage die temperaturabhängige Anisotropie zu modellieren, d.h. das asymmetrische mechanische Verhalten von HDPE unter Zug- und Druckbelastung. Anwendung findet das Modell in der Simulation von mechanischen Zyklierungen sowie in der Auslegung von Komponenten in einem Wasserstoffhochdruck-tank.

## Abstract

Due to their lightweight potential thermoplastic polymers are increasingly utilized in thermo-mechanically highly loaded structures. As a representative of these polymers, the mechanical material behavior of high density polyethylene (HDPE) is investigated experimentally in a wide temperature range down to cryogenic temperatures. Inter alia the short and long-term behavior under quasistatic and cyclic loading is analyzed. Material models for numerical load simulations are parameterized to depict the thermo-mechanical material behavior by means of elastic-plastic, hyperelastic and viscoelastic constitutive laws. From the variety of investigated material models, the Drucker-Prager-Model turns out to reproduce the material behavior most appropriately within the given load spectrum. Among other things, it is capable of modelling the temperature-dependent anisotropy, i.e. the asymmetric mechanical behavior of the HDPE under tension and compression loading. Thus, this model is used in the simulation of mechanically cycled HDPE and in the design of components a high-pressure hydrogen tank.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XVII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Einführung in das Themengebiet . . . . .	1
1.2 Problemstellung und Motivation . . . . .	3
1.3 Aktuelle Forschung bei der Modellierung des thermo-mechanischen Verhaltens von Thermoplasten . . . . .	4
1.4 Gliederung der Arbeit . . . . .	6
<b>2 Struktureller Aufbau von thermoplastischen Polymeren</b>	<b>11</b>
2.1 Klassifizierung und Eingruppierung von Polymeren . . . . .	11
2.2 Molekularer Aufbau und Bindungsverhältnisse . . . . .	12
2.3 Kristalline und amorphe Bereiche . . . . .	13
2.4 Temperaturabhängige Zustandsbereiche . . . . .	15
2.5 Unterteilung verschiedener Polyethylen-Gruppen . . . . .	16
<b>3 Kontinuumsmechanische Materialmodellierung von Polymeren</b>	<b>19</b>
3.1 Deformationszustände . . . . .	19
3.1.1 Allgemeine dreidimensionale Beschreibung . . . . .	20
3.1.2 Verschiebungs- und Deformationsgradient . . . . .	21
3.1.3 Aufteilung des Deformationszustandes . . . . .	22
3.1.4 Verzerrungsmaße . . . . .	22
3.1.5 Dehnungen im Hauptachsensystem . . . . .	23
3.2 Spannungszustände . . . . .	24
3.2.1 Allgemeine dreidimensionale Beschreibung . . . . .	24
3.2.2 Hauptspannungssystem . . . . .	25
3.2.3 Hydrostatischer Spannungszustand . . . . .	27
3.2.4 Alternative Spannungsmaße . . . . .	28
3.3 Elastisch-plastische Materialbeschreibung . . . . .	28
3.3.1 Elastisch-plastisches Verhalten von Polymeren . . . . .	28
3.3.2 Isosensitive Fließbedingung und Verfestigungsfunktion . . . . .	29
3.3.3 Drucker-Prager-Modell . . . . .	31
3.4 Hyperelastische Materialbeschreibung . . . . .	32
3.4.1 Verzerrungsenergiefunktion von Polymeren . . . . .	32
3.4.2 Marlow-Modell . . . . .	34
3.5 Viskoelastische Materialbeschreibung . . . . .	36
3.5.1 Retardation und Relaxation . . . . .	36
3.5.2 Modellrheologie . . . . .	37
3.5.3 Prony-Reihen-Entwicklung . . . . .	38
3.5.4 Boltzmannsches Superpositionsprinzip . . . . .	40
3.5.5 Beziehung zwischen Nachgiebigkeit und Relaxationsmodul . . . . .	40

3.5.6	Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Experimentelle Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen</b>	<b>45</b>
4.1	Kristalline Zustandsübergänge, wie Glas- oder Schmelzübergang . . . . .	45
4.2	Temperaturabhängiges Wärmeausdehnungsverhalten . . . . .	47
4.3	Temperaturabhängiges quasi-statisches Materialverhalten . . . . .	49
4.3.1	Mechanisches Verhalten unter Zug- oder Druckbelastung . . . . .	49
4.3.2	Temperaturabhängigkeit der Anisotropie . . . . .	53
4.3.3	Zugbelastung unter kryogenen Flüssig-Stickstoff-Bedingungen . . . . .	55
4.3.4	Zugbelastung unter kryogenen Flüssig-Helium-Bedingungen . . . . .	58
4.4	Viskoelastisches Verhalten . . . . .	60
4.4.1	Temperaturabhängiges Kriechen infolge stationärer Zugbelastung . . . . .	60
4.4.2	Auswertung anhand des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips . . . . .	62
4.5	Temperaturabhängiges Betriebsfestigkeitsverhalten . . . . .	65
4.5.1	Dauerschwingversuche an Polyethylen . . . . .	66
4.5.2	Auswertung des Verhaltens unter zyklisch schwelender Zugbelastung . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen</b>	<b>69</b>
5.1	Verarbeitung und Einbindung der Messdaten für die Finite Elemente Analyse . . . . .	69
5.2	Finite Elemente Modelle der Probekörper zum Zweck der Evaluation der Materialmodelle . . . . .	72
5.3	Hyperelastische Materialmodellierung . . . . .	73
5.3.1	Reduziertes Polynommodell . . . . .	73
5.3.2	Ogden-Modell . . . . .	74
5.3.3	Van der Waals-Modell . . . . .	75
5.3.4	Marlow-Modell . . . . .	76
5.4	Elastisch-plastische Materialmodellierung . . . . .	76
5.4.1	Bestimmung der Fließspannungen . . . . .	77
5.4.2	Berechnung der Verfestigungsfunktion . . . . .	78
5.4.3	Evaluation des elastisch-plastischen Materialmodells im Vergleich zum hyperelastischen Marlow-Modell . . . . .	78
5.4.4	Einfluss der Querdehnung auf die Modellierung des Materialverhaltens . . . . .	80
5.5	Drucker-Prager-Materialmodell . . . . .	82
5.5.1	Bestimmung des Verhältnisses von Zug- zu Druckfließspannung . . . . .	82
5.5.2	Berechnung des Reibungswinkels $\beta$ . . . . .	83
5.5.3	Berechnung des Dilatationswinkels $\psi$ . . . . .	84
5.5.4	Berechnung der Verfestigungsfunktion . . . . .	85
5.5.5	Evaluation des berechneten Drucker-Prager-Modells . . . . .	86
5.5.6	Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter . . . . .	88
5.5.7	Diskussion der Drucker-Prager-Parameter . . . . .	91
5.5.8	Variation der Drucker-Prager-Parameter . . . . .	92
5.6	Viskoelastische Materialmodellierung . . . . .	95
5.6.1	Parameter-Optimierung zur Approximation der Masterkurve . . . . .	95
5.6.2	Berechnung der Prony-Koeffizienten . . . . .	97
5.6.3	Evaluation des viskoelastischen Materialmodells . . . . .	98

<b>6</b>	<b>Validierungen und Anwendungen der untersuchten Materialmodellierungen</b>	<b>103</b>
6.1	Evaluierung und Validierung der untersuchten Materialmodelle anhand mechanischer Zyklertests . . . . .	103
6.1.1	Versuchsbedingungen und -durchführung bei verschiedenen Last- und Temperaturniveaus . . . . .	103
6.1.2	Simulationsbedingungen und angewandte Materialmodelle . . . . .	104
6.1.3	Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklierung mit einer maximalen Dehnung von 1,0% . . . . .	106
6.1.4	Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklierung mit einer maximalen Dehnung von 3,0% . . . . .	111
6.1.5	Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklierung mit einer maximalen Dehnung von 5,0% . . . . .	116
6.1.6	Evaluation anhand der Dehnungsminima . . . . .	121
6.1.7	Evaluation anhand der Spannungsmaxima . . . . .	123
6.1.8	Diskussion der Ergebnisse aus der mechanischen Zyklierung . . . . .	125
6.2	Anwendung bei Komponenten eines Wasserstoff- hochdrucktanks für den automobilen Einsatz . . . . .	126
6.2.1	Beschreibung des Finite Elemente Modells des CGH <sub>2</sub> -Tanks . . . . .	127
6.2.2	Definition der Lastfälle . . . . .	128
6.2.3	Ergebnisse der Lastberechnungen und Diskussion . . . . .	129
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>133</b>
<b>8</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Abkürzungen

CFK	Kohlenstofffaser verstärkter Kunststoff
CGH <sub>2</sub>	Gasförmiger Wasserstoff unter Druck - englisch: <i>Compressed Gaseous Hydrogen</i>
CTE	Wärmeausdehnungskoeffizient - englisch: <i>Coefficient of Thermal Expansion</i>
DSC	Dynamische Differenz Kalorimetrie - englisch: <i>Differential Scanning Calorimetry</i>
FEM	Finite Elemente Methode
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese
HDPE	Polyethylen hoher Dichte - englisch: <i>High Density PolyEthylen</i>
LDPE	Polyethylen geringer Dichte - englisch: <i>Low Density PolyEthylen</i>
LH <sub>2</sub>	flüssiger Wasserstoff
LHe	flüssiges Helium
LN <sub>2</sub>	flüssiger Stickstoff
VEF	Verzerrungsenergiefunktion
WLF	Williams, Landel und Ferry

## Griechische Symbole

$\alpha$	thermischer Ausdehnungskoeffizient, Wärmeausdehnungskoeffizient
$\beta$	Reibungswinkel
$\delta_{kl}$	Kronecker-Symbol
$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$	linearisierter Deformationstensor
$\dot{\varepsilon}$	Dehnrate
$\kappa$	Kristallisationsgrad
$\Lambda_i$	Eigenwerte von $U$ , materielle Streckungen
$\lambda_i$	Eigenwerte von $v$ , räumliche Streckungen, Hauptdehnungen

$\bar{\lambda}_i$	modifizierte Hauptdehnungen
$\mu$	Dämpferviskosität, Dämpfungskonstante
$\nu$	Poissonzahl, Querkontraktionszahl
$\Psi$	Verzerrungsenergiefunktion
$\psi$	Dilatationswinkel
$\rho$	Dichte
$\varrho$	Retardationszeit
$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$	Cauchyscher Spannungstensor
$\sigma_i$	Hauptspannung
$\sigma_{ii}$	Normalspannung
$\tau$	Relaxationszeit
$\tau_i$	Hauptschubspannung
$\tau_{ij} = \sigma_{ij}$	Schubspannung

### Lateinische Symbole

$A$	Querschnittsfläche
$a_T$	Verschiebungsfaktor, meist logarithmisch: $\log a_T$
$\mathbf{b}$	linker Cauchy-Green-Deformationstensor
$\mathbf{C}$	rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
$\bar{\mathbf{C}}$	modifizierter Cauchy-Green-Deformationstensor
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$C_1$	Konstante in WLF-Gleichung
$C_2$	Konstante in WLF-Gleichung
$D$	Nachgiebigkeit
$\mathbf{E}$	Green-Lagrange-Deformationstensor
$E$	Elastizitätsmodul, Relaxationsmodul, Materialsteifigkeit

$e$	Euler-Almansi-Deformationstensor
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$f$	Abweichung
$\mathbf{H}$	Verschiebungsgradient
$G$	Schubrelaxationsmodul
$g_i$	normierte Element-Schubrelaxationsmoduln
$h$	Verschiebungsfunktion
$I_i$	Hauptinvarianten
$\bar{I}_i$	modifizierte Hauptinvarianten
$J$	Jacobi-Determinante
$J_i$	Invarianten des Spannungsdeviators
$j_i$	Invarianten des Spannungstensors
$K$	Verhältnis aus Zug- und Druckfließspannung
$L$	Länge
$N$	Grad der Funktion, die einem Materialmodell zugrunde liegt
$n$	Schwingspielzahl, Zyklenzahl
$\mathbf{N} = N_i$	Eigenvektoren von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{U}$ , materielle Hauptachsen
$\mathbf{n} = n_i$	Eigenvektoren von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{v}$ , räumliche Hauptachsen
$n_L$	Ecklastschwingspielzahl
$n_P$	Knicklastschwingspielzahl
$P$	Fließpotential
$\mathbf{R}$	Rotationstensor
$R$	universelle Gaskonstante
$r$	Verfestigungsfunktion
$\mathbf{s} = [s_{ij}]$	Spannungsdeviator
$s$	statistische Standardabweichung
$T$	Temperatur

$t$	Zeit
$t = t_i$	Spannungsvektor
$U$	rechter bzw. materieller Strecktensor
$u$	Verschiebung
$v$	linker bzw. räumlicher Strecktensor
$W$	Wahrscheinlichkeit
$X$	Ortsvektor, materielle Koordinaten
$x$	Ortsvektor, Ortskoordinaten

### Indices

A	Ausfall - z.B. Ausfallwahrscheinlichkeit $W_A$
a	Amplitude - z.B. Amplitudenspannung $\sigma_a$
Bruch	bei Bruch - z.B. Bruchdehnung $\varepsilon_{\text{Bruch}}$
Druck	unter Druckbelastung - z.B. E-Modul unter Druckbelastung $E_{\text{Druck}}$
el	elastisch - z.B. elastischer Anteil der Dehnung $\varepsilon^{\text{el}}$
exp	experimentell - z.B. experimentell ermittelte Spannungswerte $\sigma^{\text{exp}}$
F	Fließbeginn - z.B. Fließspannung, Fließgrenze $\sigma_F$
G	Glasübergang - Glasübergangstemperatur $T_G$
$\infty$	Grenzwert im Unendlichen - z.B. Gleichgewichts-Modul $E_\infty$
iso	isochor - z.B. isochorer Anteil der Verzerrungsenergiefunktion $\Psi_{\text{iso}}$
mat	materiell - z.B. materieller Elastizitätstensor $C_{\text{mat}}$
m	mittel - z.B. mittlere Normalspannung $\sigma_m$
0	Startwert - z.B. Initial-Nachgiebigkeit $D_0$
pl	plastisch - z.B. plastischer Anteil der Dehnung $\varepsilon^{\text{pl}}$
quer	quer, transversal - z.B. Querdehnung $\varepsilon_{\text{quer}}$
ref	Referenzwert - z.B. Referenztemperatur $T_{\text{ref}}$

rel	relativ - z.B. Relative Abweichung $f_{\text{rel}}$
sim	simulativ - z.B. simulativ ermittelte Spannungswerte $\sigma^{\text{sim}}$
S	Schmelzen - Schmelztemperatur $T_{\text{S}}$
s	Schwellenwert- z.B. Schwellspannung $\sigma_{\text{s}}$
tech	technisch - z.B. technische Dehnung $\varepsilon^{\text{tech}}$
vol	volumetrisch - z.B. volumetrischer Anteil der Verzerrungsenergiefunktion $\Psi_{\text{vol}}$
V	Vergleich - Vergleichsspannung nach von Mises $\sigma_{\text{V}}$
wahr	wahr - z.B. wahre Spannung $\sigma^{\text{wahr}}$
Zug	unter Zugbelastung - z.B. Fließgrenze unter Zugbelastung $\sigma_{\text{F,Zug}}$



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Flugzeugkonzept mit Wasserstoffdrucktanks entlang der Rumpfoberseite . . .	2
1.2	Position des Wasserstoffdrucktanks (CGH <sub>2</sub> ) im Automobil . . . . .	3
2.1	Räumliche Molekülstruktur von Polyethylen . . . . .	12
2.2	Struktureller Aufbau teilkristalliner Polymere . . . . .	14
2.3	Molekulare Strukturen von Polyethylen unterschiedlicher Dichten . . . . .	17
3.1	Verschiebungen und Verzerrungen an einem Festkörper . . . . .	20
3.2	Kartesische Komponenten des Spannungstensors $\sigma$ . . . . .	25
3.3	Dreiachsiger Spannungszustand mit Mohrschen Spannungskreisen . . . . .	27
3.4	Plastische Verformung von teilkristallinen Thermoplasten . . . . .	29
3.5	Fließfläche der von Mises-Plastizität . . . . .	30
3.6	Retardationsfunktion und Relaxationsfunktion . . . . .	36
3.7	Kelvin-Voigt-Modell und Maxwell-Modell . . . . .	37
3.8	Wiechert-Modell . . . . .	39
3.9	Verallgemeinerter Kelvin-Voigt-Festkörper . . . . .	39
3.10	Zeit-Temperatur-Verschiebung der Nachgiebigkeit $D(t, T)$ . . . . .	43
4.1	Dynamische Differenz Kalorimetrie von HDPE . . . . .	46
4.2	Experimentelle Anordnung zur Bestimmung des thermischen Ausdehnungsverhalten . . . . .	47
4.3	Thermischer Ausdehnungskoeffizient von HDPE . . . . .	48
4.4	Versuchsaufbau für Zug- und Drucktests . . . . .	50
4.5	Geometrie und Abmessungen der aus dem Liner geschnittenen Probekörper .	51
4.6	Spannungs-Dehnungs-Verhalten unter uniaxialer Zugbelastung . . . . .	52
4.7	Spannungs-Dehnungs-Verhalten unter uniaxialer Druckbelastung . . . . .	53
4.8	Temperaturabhängige E-Moduln und Festigkeitswerte von HDPE . . . . .	54
4.9	Verhältnis von Druck- zu Zugspannungen $\sigma_{\text{Druck}}/\sigma_{\text{Zug}}$ . . . . .	54
4.10	Zugversuch unter Flüssig-Stickstoff-Umgebung (LN <sub>2</sub> ) . . . . .	56
4.11	Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE bei $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	57
4.12	Versuchsaufbau für Zugversuche unter Flüssig-Helium-Umgebung (LHe) . .	58
4.13	Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE bei $-269\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	59
4.14	Versuchsaufbau für Zeitstandzugversuch . . . . .	61
4.15	Experimentell ermittelte Nachgiebigkeiten $D(T, t)$ . . . . .	63
4.16	Shift-Faktor $a_T$ für Zeit-Temperatur-Verschiebung . . . . .	64
4.17	Master-Nachgiebigkeitskurve von HDPE für die Referenztemperatur $T_{\text{ref}} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$	64
4.18	Schematische Darstellung einer Wöhlerkurve . . . . .	65
4.19	Wöhlerdiagramm von HDPE . . . . .	67
5.1	Aufbereitung experimenteller Messdaten . . . . .	70
5.2	Schematischer Ablauf der Simulation in Abaqus . . . . .	71
5.3	Geometrie und Belastung der Finite Elemente Modelle . . . . .	72
5.4	Spannungs-Dehnungs-Daten der reduzierten Polynommodelle . . . . .	74
5.5	Spannungs-Dehnungs-Daten der hyperelastischen Materialmodelle von Ogden, van der Waals und Marlow . . . . .	75

5.6	Bestimmung von E-Moduln anhand des Verlaufs experimenteller Spannungs-Dehnungs-Kurven . . . . .	77
5.7	Verfestigungsfunktionen für den Zugbereich von HDPE . . . . .	78
5.8	Spannungs-Dehnungs-Daten des elastisch-plastischen Materialmodells . . . . .	79
5.9	Temperaturabhängige relative Abweichung der Simulation vom Experiment . . . . .	80
5.10	Relative Abweichung der numerisch ermittelten Spannungs-Dehnungs-Daten im Zugbereich in Abhängigkeit der Querdehnung $\nu$ . . . . .	81
5.11	Methode zur Ermittlung des Parameters $K$ im Drucker-Prager-Modell . . . . .	83
5.12	Verfestigungsfunktionen für den Druckbereich von HDPE . . . . .	86
5.13	Vergleich des berechneten Drucker-Prager-Modells mit den Experimenten . . . . .	87
5.14	Relative Abweichung der simulierten Drucker-Prager-Modell-Daten von den experimentellen Daten . . . . .	88
5.15	Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter im Zugbereich . . . . .	89
5.16	Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter im Schubbereich . . . . .	90
5.17	Vergleich des variierten Drucker-Prager-Modells mit den Experimenten . . . . .	93
5.18	Relative Abweichung der variierten Drucker-Prager-Modell-Daten von den experimentellen Daten . . . . .	94
5.19	Ablauf der Optimierung von Prony-Parametern . . . . .	96
5.20	Approximation der Master-Nachbiebigkeitskurve von HDPE . . . . .	97
5.21	Vergleich des linear-viskoelastischen Modells mit den Experimenten . . . . .	100
5.22	Vergleich des hyperelastisch-viskoelastischen Modells mit den Experimenten . . . . .	101
6.1	Verschiebungsfeld in der FE-Simulation . . . . .	105
6.2	Dehnung in den Zyklertests Nr. 1, 4 und 7 . . . . .	106
6.3	Dehnung in den Simulationen Nr. 1, 4 und 7 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	107
6.4	Dehnung in den Simulationen Nr. 1, 4 und 7 mit viskoelastischem Modell . . . . .	108
6.5	Spannung in den Zyklertests Nr. 1, 4 und 7 . . . . .	109
6.6	Spannung in den Simulationen Nr. 1, 4 und 7 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	110
6.7	Spannung in den Simulationen Nr. 1, 4 und 7 mit viskoelastischem Modell . . . . .	110
6.8	Dehnung in den Zyklertests Nr. 2, 5 und 8 . . . . .	111
6.9	Dehnung in den Simulationen Nr. 2, 5 und 8 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	112
6.10	Dehnung in den Simulationen Nr. 2, 5 und 8 mit viskoelastischem Modell . . . . .	113
6.11	Spannung in den Zyklertests Nr. 2, 5 und 8 . . . . .	114
6.12	Spannung in den Simulationen Nr. 2, 5 und 8 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	115
6.13	Spannung in den Simulationen Nr. 2, 5 und 8 mit viskoelastischem Modell . . . . .	115
6.14	Dehnung in den Zyklertests Nr. 3, 6 und 9 . . . . .	116
6.15	Dehnung in den Zyklersimulationen Nr. 3, 6 und 9 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	117
6.16	Dehnung in den Zyklersimulationen Nr. 3, 6 und 9 mit viskoelastischem Modell . . . . .	118
6.17	Spannung in den Zyklertests Nr. 3, 6 und 9 . . . . .	119
6.18	Spannung in den Zyklersimulationen Nr. 3, 6 und 9 mit Drucker-Prager-Modell . . . . .	119
6.19	Spannung in den Zyklersimulationen Nr. 3, 6 und 9 mit viskoelastischem Modell . . . . .	120
6.20	Steigungen der Trendlinien über die Dehnungsminima . . . . .	121
6.21	Mittlere relative Dehnungsabweichung . . . . .	123
6.22	Steigungen der Trendlinien über die Spannungsmaxima . . . . .	124
6.23	Mittlere relative Spannungsabweichung . . . . .	125
6.24	Aufbau des Typ IV-CGH <sub>2</sub> -Tanks . . . . .	127
6.25	Geometrisches Modell des Hochdrucktanks . . . . .	128
6.26	Lastfälle für den Wasserstoffhochdrucktank CGH <sub>2</sub> . . . . .	129
6.27	Max. principal stress, Lastfall 1, $T = 20^\circ\text{C}$ . . . . .	130

6.28	Max. principal stress, Lastfall 2, $T = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	130
6.29	Max. principal stress, Lastfall 3, $T = -40\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	131
6.30	Max. principal plastic strain, Lastfall 3, $T = -40\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	131



# Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht über verschiedene Belastungsarten von Kunststoffen . . . . .	19
4.1	Elastizitätsmoduln $E_{\text{Zug}}$ und $E_{\text{Druck}}$ und Zugfestigkeit $R_m$ von HDPE . . . . .	52
4.2	Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul und Bruchdehnung von HDPE bei $-196\text{ }^\circ\text{C}$ .	57
4.3	Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul und Bruchdehnung von HDPE bei $-269\text{ }^\circ\text{C}$ .	60
4.4	Versuchsparameter für den Zeitstandzugversuch . . . . .	62
4.5	Parameter zur Beschreibung der Wöhlerlinien von HDPE . . . . .	68
5.1	Temperaturabhängige $K$ -Werte für Drucker-Prager-Modellierung . . . . .	84
5.2	Temperaturabhängige Reibungswinkel und Dilatationswinkel für die Drucker-Prager-Modellierung . . . . .	84
5.3	Temperaturabhängige Zug- und Druckfließspannungen für Drucker-Prager-Modellierung . . . . .	85
5.4	Temperaturabhängige berechnete Drucker-Prager-Parameter . . . . .	86
5.5	Variation der Drucker-Prager-Parameter . . . . .	89
5.6	Final variierte und temperaturabhängige Drucker-Prager-Parameter . . . . .	94
5.7	Koeffizienten der Prony-Reihe - berechnet für die Masterkurve von HDPE . .	98
5.8	Zeitliche Inkrementierung der einzelnen Rechenschritte für die Gesamtsimulationszeit . . . . .	99
6.1	Versuchsnummerierung der mechanischen Zyklertests . . . . .	104



# 1

## Einleitung

In erster Linie gibt das Einleitungskapitel eine Übersicht und Einordnung dieser Dissertation in das Themengebiet von ausgewählten Polymeren in Wasserstoffdrucktanks. Neben der Erläuterung von verschiedenen industriellen Anwendungen, werden aktuelle Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Modellierung des thermo-mechanischen Kurz- und Langzeitverhaltens solcher Kunststoffe erörtert. Offene Fragestellungen, die zu Beginn der vorliegenden Arbeit unzureichend oder nur teilweise beantwortet sind, werden eingeführt. Nach der Darstellung der Methodik zur Lösung der Problemstellungen werden Forschungsinhalte vorgestellt und die detaillierten Inhalte der jeweiligen Kapitel in Kürze zusammengefasst.

### 1.1 Einführung in das Themengebiet

Eine Vielzahl an thermoplastischen Kunststoffen ist unter anderem aufgrund ihres Leichtbaupotentials sowie ihrer kostengünstigen Verfügbarkeit als Konstruktionswerkstoffe im heutigen Automobilbau, aber auch in der Luft- und Raumfahrt nicht mehr wegzudenken. Dabei verdrängen sie mittlerweile auch in hoch beanspruchten Bauteilen konventionelle metallische Materialien. So wurde in einem vorangegangenen Forschungsprojekt „Cryoplane“ [35] die Machbarkeit von Wasserstoff als Treibstoff in der kommerziellen Luftfahrt untersucht. In einem ganzheitlichen Ansatz wurden unter anderem Flugzeugkonfigurationen, Luftfahrtsysteme und -komponenten sowie Antriebs- und Sicherheitskonzepte betrachtet und bewertet. Eine große Rolle dabei spielt die Speicherung des Wasserstoffes. Ein untersuchtes Flugzeugkonzept mit Wasserstoffspeichern entlang der Rumpfoberseite ist in Abbildung 1.1 illustriert. Um den Temperaturen in Flüssig-Wasserstoff-Umgebung bei  $-252\text{ °C}$  standzuhalten, wurden neben anderen Werkstoffen auch thermoplastische Kunststoffe auf ihre kryogene Tauglichkeit hin überprüft. Im Zuge dieser Untersuchung fand keine detailliertere Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens statt.

Der Lockheed Martin X-33 Venture Star war ein unbemannter Sub-Scale-Demonstrator, der in den 1990er Jahren die Machbarkeit einer vollständig wiederverwendbaren Raumfähre unter Beweis stellen sollte. Als geplanter Nachfolger des Space Shuttles basierte die Technologie auf einem einstufigen Raumgleiter, der mit kryogenen Wasserstoffdrucktanks ausgestattet war. Das Massachusetts Institute of Technology [61] untersuchte die Auswirkungen von kryogenen Temperaturwechselzyklen und mechanischen Lasten auf die Tankstruktur. Unter anderem wegen Probleme bei der Auslegung und Fertigung der Wasserstoffdrucktanks beendete die NASA das Forschungs- und Entwicklungsprogramm im Jahr 2001.



Abbildung 1.1: Flugzeugkonzept mit Wasserstoffdrucktanks entlang der Rumpfoberseite  
© Airbus Group

Auch im Automobilbereich bestehen Bestrebungen Wasserstoff als Energieträger einzusetzen [110]. Abbildung 1.2 zeigt wie Wasserstoffdruckspeicher samt Brennstoffzelle und Systemkomponenten in aktuellen Fahrzeugprototypen mit elektrischem Antrieb verbaut sind. Der zylinderförmige, sogenannte „Typ 4-Tank“ besteht aus einem Polyethylen Liner und einem Laminat aus Faser-verstärktem Kunststoff. Während der Liner aus Polyethylen hoher Dichte (HDPE) als Diffusionsbarriere gegen den gasförmigen Wasserstoff fungiert, tragen die hoch-festen Kohlenstofffasern der Ummantlung die Last des Innendrucks von 700 bar. Im Fertigungsprozess werden die Carbonfaser Filamente im sog. Filament Winding Process um einen Kern, den genannten HDPE-Liner, gewickelt. Neben dem Innendruck, der unter anderem auch auf dem Liner lastet, spielt die Behinderung der freien Ausdehnung bei Temperaturwechseln eine tragende Rolle bei der Auslegung des Liners. Bei Erwärmung sind somit Druckeigenstressungen im Polymerliner bei gleichzeitiger Abnahme der mechanischen Kennwerte zu erwarten. Dagegen ruft eine Abkühlung Zugeigenstressungen und eine Versprödung des Polymerwerkstoffes hervor. Diese Spannungs- bzw. Dehnungseinträge gilt es zu quantifizieren und zu bewerten.

Eine der großen Herausforderungen bei der Entwicklung von Strukturbauteilen aus Kunststoffen stellt die Analyse des Langzeitverhaltens der Polymerwerkstoffe dar. Neben physikalischer und chemischer Alterung beeinflussen vor allem zyklische mechanische Belastungen die Lebensdauer von Kunststoffbauteilen. In der Bauteilauslegung ist die Finite Elemente Methode seit Jahrzehnten ein etabliertes Werkzeug. Zur Anwendung derer ist es notwendig die Spannungs-Dehnungs-Relationen für die beteiligten Werkstoffe zu kennen. Bei der Modellierung von Metallen unter moderater Belastung reicht in der Regel ein linear-elastischer Ansatz aus, um das mechanische Materialverhalten darzustellen. Bei Polymerwerkstoffen dagegen ist dieser lineare Zusammenhang meist nicht gegeben. Schon unter Raumtemperatur verhalten sich Kunststoffe mechanisch zum Teil stark nicht linear. Für die temperaturabhängige Modellierung dieses Materialverhaltens stehen eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Verfügung.

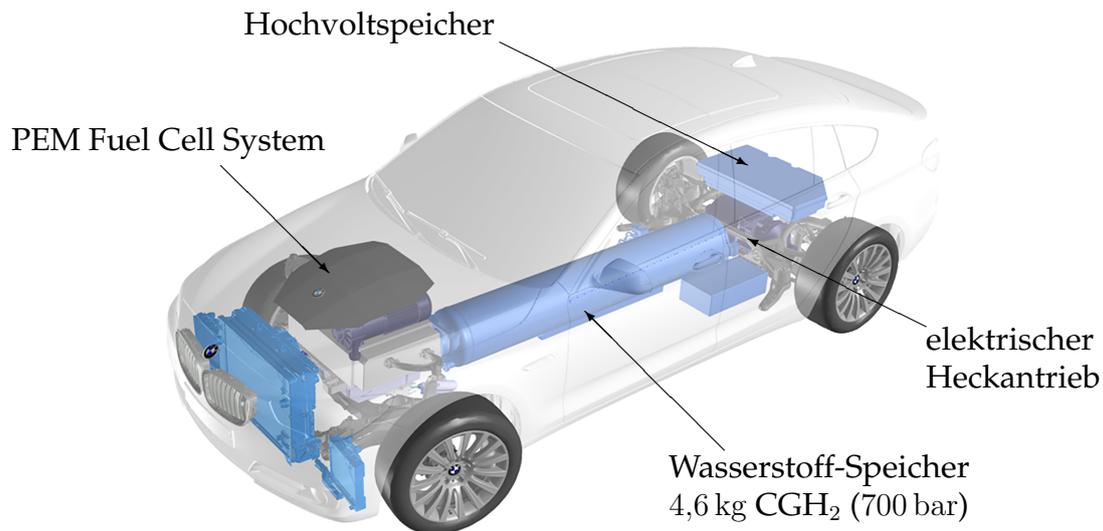


Abbildung 1.2: Position des Wasserstoffdrucktanks (CGH<sub>2</sub>) im Automobil © BMW Group

## 1.2 Problemstellung und Motivation

Die mechanische Auslegung von Kunststoffbauteilen unter quasistatischen Lasten wird grundsätzlich beherrscht. Die Finite Elemente Methode ermöglicht eine Bestimmung von auftretenden Verformungen. Sofern die Modellierung des thermo-mechanischen Verhaltens dem Material und den Belastungen angepasst ist, kann eine ausreichend genaue Berechnung des Spannungszustandes erfolgen. Nach Vorath [115] ist gerade für die Lebensdauerberechnung von Strukturbauteilen aus Kunststoffen eine präzise Bestimmung des Materialverhaltens notwendig. Oftmals werden bei diesen Simulationen thermische Lasten nur unzureichend betrachtet, z.B. in Form von thermisch konstanten Wärmeausdehnungskoeffizienten. In der vorliegenden Arbeit wird am Beispiel des Polyethylen eine ausführliche Materialcharakterisierung vorgenommen, die für die vorgestellten Modellierungsansätze erforderlich ist.

Neben einer detaillierten Analyse der kristallinen Zustandsübergänge von Polyethylen wird in der vorliegenden Arbeit das Wärmeausdehnungsverhalten des Polymers untersucht. Im Bereich zwischen  $-10\text{ °C}$  und  $70\text{ °C}$  analysierten Merah u. a. [79] die Auswirkungen der Temperatur auf das mechanische Verhalten von Thermoplasten. Bei steigender Temperatur diagnostizierten sie eine lineare Degradation der Materialsteifigkeit und -festigkeit von Polyethylen. Für die Fließdehnung besteht dagegen nur eine geringe Temperaturabhängigkeit. Hartwig [49] ermittelte temperaturabhängige lineare mechanische Kennwerte von HDPE hinunter bis Flüssig-Helium-Bedingungen bei  $-269\text{ °C}$ . Jedoch ist das nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Polyethylen bei kryogenen Tiefsttemperaturen bislang nur unzureichend erforscht. Das Materialverhalten von Polyethylen bei  $4\text{ K}$  wird daher ebenfalls detailliert untersucht.

Bei Raumtemperatur quantifizierten Donato und Bianchi [32] die für Thermoplaste typische Zug-Druck-Asymmetrie. Diese Asymmetrie, die das unterschiedliche Verhalten eines Werkstoffes unter Zug- bzw. Druckbelastung beschreibt, wird unter anderem Anisensensitivität genannt. Krumpholz [65] zeigte experimentell die Unabhängigkeit dieser Anisensensitivität von der Temperatur. Neben des thermo-mechanischen Materialverhaltens von HDPE über

einen hohen Temperaturbereich, wird in der vorliegenden Arbeit die Temperaturabhängigkeit der Zug-Druck-Asymmetrie von Polyethylen hoher Dichte untersucht und evaluiert. Das Drucker-Prager-Modell zur Modellierung der Anisotropie von Bauwerkstoffen wie Beton oder Kies [114] wurde schon in einigen Veröffentlichungen behandelt. Deren Anwendung auf thermoplastische Polymere, im Speziellen Polyethylen, ist dagegen weitgehend unbekannt und wird daher hier vorgenommen und diskutiert.

Die ingenieurmäßigen Fragestellungen dabei sind, wie sich verschiedene Modellierungsansätze auf die Spannungs- und Lebensdauerberechnung auswirken und welche quantitativen Einflüsse thermo-mechanische Größen, wie beispielsweise die Temperatur, die Belastungshöhe oder -geschwindigkeit haben. Diese Abhängigkeiten der Materialmodellierungen gilt es anhand des untersuchten Materialverhaltens zu validieren. Die Simulation am praktischen Beispiel von Komponenten eines Wasserstoffdrucktanks soll die Anwendbarkeit der Materialmodellierung zeigen.

### 1.3 Aktuelle Forschung bei der Modellierung des thermo-mechanischen Verhaltens von Thermoplasten

Aufgrund der vielseitigen und zum Teil komplexen Anwendungsmöglichkeiten von Kunststoffen wurden die Möglichkeiten das thermo-mechanische Materialverhalten zu modellieren bereits vielseitig untersucht. So charakterisierten und modellierten Popelar u. a. [93] das viskoelastische Materialverhalten von unterschiedlichen Äthylen-Polymeren. Aus etlichen Experimenten entwickelten und evaluierten sie materialspezifische Masterkurven. Zhang und Moore beleuchteten umfassend die nichtlineare Materialantwort von Polyethylen auf mechanische Lasten mittels einer Vielzahl von Experimenten [120] und entwickelten ein viskoelastisch-plastisches Materialmodell [121]. Neben der Dehnratenabhängigkeit zogen sie Belastungssprünge in die Evaluierung des Konstitutivgesetzes ein. Bau [11] untersuchte das lastabhängige nichtlinear-viskoelastische Verhalten von Kunststoffen.

Während sich Dusunceli und Colak [34] mit dem dem Kriech- und Relaxationsverhalten von Polyethylen hoher Dichte (HDPE) vorwiegend experimentell auseinandersetzten, postulierte und evaluierte Ghorbel [41] aus den Daten mechanischer Langzeitversuche ein viskoplastisches Konstitutivgesetz. Auch Elleuch und Taktak [37] analysierten das viskoelastische Kriechen von HDPE unter Zug- und Druckbelastung. Neben der Dehnratenabhängigkeit der Materialsteifigkeit quantifizierten sie die Zug-Druck-Asymmetrie des Polymers. Naumann [85] untersuchte das mechanische Langzeitdeformationsverhalten von thermoplastischen Kunststoffen und entwickelte in diesem Rahmen ein eigenständiges viskoelastisches Materialmodell.

Neben der für Kunststoffe in der FEM üblichen viskoelastischen Modellierung, existieren weitere Modellierungsansätze, gerade um das Verhalten bei hohen Verformungen abzubilden. Die Anwendung von hyperelastischen Materialmodellen zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Polyethylen ist in den meisten Fällen unüblich, da teilkristalline Thermoplaste im Gegensatz zu den Elastomeren auch plastische Verformungsmechanismen besitzen. Neben anderen beschrieben beispielsweise Ogden [88] und Marlow [73] hyperelastische Ansätze, um große, elastische Verformungen eines Materials mittels der Verzerrungsenergiefunktion abbilden zu können. Es existieren auch Kombinationen von hyperelastischen

mit viskoelastischen bzw. -plastischen Materialmodellen, die in der Lage sind das Kurz- und Langzeitverhalten von Kunststoffen zu modellieren. Im Allgemeinen findet das sog. Bergström-Modell Anwendung bei teilkristallinen Thermoplasten [13]. Ayoub u. a. [6], Abdul-Hameed u. a. [1] und Ognedal u. a. [89] untersuchten und evaluierten die Modellierung für das mechanische Verhalten von Polyethylen und anderer Polymere.

Auch das elastisch-plastische Verhalten und die ebensolche Materialmodellierung von Thermoplasten wurde schon in einigen Veröffentlichungen behandelt. Die Kontinuumsmechanik klassischer elastisch-plastischer Materialmodelle wurden unter anderem von Sedláček [106] und Lippmann [70] vorgestellt. Krumpholz [65] und Stommel u. a. [111] diskutierten die Anwendbarkeit auf thermoplastische Polymere. Aufgrund ihrer Fähigkeit plastische Deformationen abzubilden, eignen sich diese Art von Materialmodellen vor allem für die Berechnung und Beurteilung von wechselnden Belastungen. Je nach Modell sind diverse Parameter dazu im Stande physikalische Phänomene von Thermoplasten abzubilden, so z.B. die Temperaturabhängigkeit des Werkstoffverhaltens. Die Auswirkungen von variablen Dehnraten auf das Fließverhalten beschrieben Farrokh und Khan [38] für isotrope Polymere und G'Sell und Jonas [45] für Polyethylen hoher Dichte. Argon [3] analysierte das Plastifizieren und den Rissfortschritt in mechanisch belasteten Polymeren. Hachour u. a. [48] prüften verschiedene Theorien für die Plastizität von Polyethylen hoher Kristallinität anhand von Experimenten und numerischen Simulationen.

Eine Übersicht über elastisch-plastische Materialmodelle lieferten beispielsweise Kwon und Jar [66], die auch die Anwendung auf HDPE beschrieben. Speziell für Bereiche großer Deformationen entwickelten zunächst Cross und Haward [23] und anschließend Haward [50] mikromechanisch basierte Modelle. Hutchinson und Neale [56] stellten für diese Verformungen ein empirisches Modell vor. Um neben elastisch-plastischen auch zeitabhängige Effekte berücksichtigen zu können, werden eben genannte Modelle insbesondere mit viskoelastischen bzw. viskoplastischen gekoppelt. Vorgestellt wurden derartige Modellierungsansätze unter anderem in [64, 71] und [86]. Die Modelle wurden für unterschiedliche Belastungsfälle definiert und evaluiert, sowohl für Polymere im Allgemeinen als auch für Polyethylen im Speziellen.

Ward [117] beschrieb das Plastifizieren von Polymeren unter Berücksichtigung des hydrostatischen Spannungszustandes. In der Regel zeigt sich das Fließverhalten von Kunststoffen unabhängig vom hydrostatischen Druck. Für isosensitive Werkstoffe sind die Kriterien nach von Mises oder Tresca gebräuchlich, um den Fließbeginn zu bestimmen. Aufgrund der ausgeprägten Zug-Druck-Asymmetrie vieler Polymere, wie auch des Polyethylen, bereiten diese klassischen Fließbedingungen Probleme das Plastifizierungsverhalten von Thermoplasten zu beschreiben, so Donato und Bianchi [32]. Um die sog. Anisotropie abbilden zu können, lieferten Seltzer u. a. [108] einen Ansatz das Drucker-Prager Modell [33] auf Polymere anwenden zu können.

Kommerzielle Finite Elemente Programme beinhalten nur wenige der wissenschaftlich aktuell diskutierten Materialmodelle. Jedoch lassen sich über Schnittstellen in der Software diverse Modellierungen implementieren. Die meisten der angesprochenen physikalischen Phänomene lassen sich im Finite Elemente Programm Abaqus modellieren. Neben den klassischen elastisch-plastischen Modellen mit idealer Plastizität sowie linearer oder kinematischer Verfestigungsfunktion, existieren Modelle für die Abbildung von anisotropem Verhalten oder Dehnratenabhängigkeiten. Verschiedene bekannte Fließkriterien z.B. nach Mohr und Coulomb [22], nach Hill [53] oder nach Drucker und Prager [33] sind dazu in der

Lage anisotropes Materialverhalten abzubilden. Ein zusätzlicher Term im Konstitutivgesetz des elastisch-plastischen Materialmodells kann darüber hinaus die Dehnratenabhängigkeit berücksichtigen [24, 111], wie im Modell nach Johnson und Cook [59]. In Abaqus sind neben den elastisch-plastischen Materialmodellen auch unterschiedliche hyperelastische Materialmodelle realisiert, die sich in genannter Art und Weise mit den viskoelastischen bzw. viskoplastischen Modellen kombinieren lassen. [24]

## 1.4 Gliederung der Arbeit

### Kapitel 2: Struktureller Aufbau von thermoplastischen Polymeren

Beim molekularen, mikroskopischen Aufbau von Polymeren und deren temperaturabhängigen Zustandsbereichen unterscheidet man im Allgemeinen zwischen Thermoplaste, Duroplaste und Elastomere. Während die Kohlenstoffketten bei Thermoplasten unvernetzt und bei Elastomeren leicht vernetzt vorliegen, sind sie bei Duroplasten stark vernetzt. Der räumliche Aufbau beeinflusst die makroskopische Struktur sowie die mechanischen Eigenschaften des Kunststoffes. Eine Erhöhung des Vernetzungsgrades bewirkt zumeist einen Anstieg der Materialsteifigkeit und -festigkeit.

Neben der Kristallinität hat die Temperatur einen entscheidenden Einfluss auf die Ordnung der Polymerketten. Eine Unterschreitung der Glasübergangstemperatur erzeugt im Kunststoff ein glasähnliches bzw. sprödes Verhalten. Erreichen Thermoplaste den Temperaturbereich des Schmelzens beginnt der Werkstoff zu zerfließen. Zwischen den beiden Temperaturgrenzen verhalten sich thermoplastische Polymere zäh und gummiähnlich. Ein Vertreter der teilkristallinen Thermoplaste ist das Polyethylen. Es lässt sich je nach Kristallisationsgrad und Dichte in verschiedene Vertreter unterteilen. Neben dem Gewicht steigen die mechanischen Kennwerte wie Materialsteifigkeit, -festigkeit und Schlagzähigkeit.

### Kapitel 3: Kontinuumsmechanische Materialmodellierung von Polymeren

Das thermo-mechanische Materialverhalten von Kunststoffen lässt sich mittels diverser Materialmodelle abbilden. Dafür stellen sich je nach Werkstoff und Belastungsart verschiedene Anforderungen heraus. Neben der Beschreibung von Deformationen im Kontinuum, existieren unterschiedliche Möglichkeiten den Spannungszustand zu quantifizieren. Anhand der vorgestellten Spannungs- und Verzerrungsmaße werden die Gesetzmäßigkeiten von elastisch-plastischen, hyperelastischen und viskoelastischen Materialmodellierungen erläutert.

Das elastisch-plastische Verhalten von Polymeren kann beispielsweise mit Hilfe der Gestaltänderungsenergiehypothese abgebildet werden. Ein Spezialfall stellt das Drucker-Prager-Modell dar, das die Möglichkeit bietet, den Einfluss der Anisotropie zu berücksichtigen. Gerade für große Verformungen eignen sich hyperelastische Materialbeschreibungen. Das elastische Potential eines Werkstoffes lässt sich hier mittels der Verzerrungsenergiefunktion bestimmen. Dieses Potential bildet die Grundlage der hyperelastischen Konstitutivgleichungen. Das Marlow-Modell ist ein Vertreter dieser Modellierungsansätze.

Um Langzeiteinflüsse wie das Kriechen oder die Relaxation des Polymers oder Dehnratenabhängigkeiten abbilden zu können, werden üblicherweise viskoelastische Materialgesetze

herangezogen. Die Prony-Reihen-Entwicklung für die Modellierung erfolgt mit Hilfe des Boltzmannschen Superpositionsprinzips und des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips. Mit den verschiedenen Ansätzen können so temperatur-, zeit-, dehnraten- und richtungsabhängige Belastungen modelliert werden.

#### **Kapitel 4: Experimentelle Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen**

Zur Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen hoher Dichte unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen werden passende experimentelle Methoden herangezogen. Mittels Dynamischer Differenz Kalorimetrie werden neben kalorischer Größen, wie der spezifischen Wärmekapazität, auch die wichtigen Temperaturgrößen eines Polymers ermittelt. Für das untersuchte HDPE ergeben sich die Glasübergangstemperatur zu  $T_G = -115\text{ °C}$  und der Schmelzbereich zu  $T_S = (122 \pm 13)\text{ °C}$ . Das Wärmeausdehnungsverhalten wird anhand eines Dilatometers im Temperaturbereich von  $-160\text{ °C} < T < 110\text{ °C}$  bestimmt. Selbst für Kunststoffe befindet sich die temperaturabhängige Wärmeausdehnung von HDPE auf einem relativ hohen Niveau.

Unter Zug- und Druckbelastung wird das quasistatische, mechanische Materialverhalten von HDPE untersucht. Bei einer Dehnrate von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$  werden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen ermittelt und ausgewertet. Im Temperaturintervall von  $-50\text{ °C} \leq T \leq 100\text{ °C}$  werden neben Materialsteifigkeiten sowie -festigkeiten auch die temperaturabhängige Anisotropie von HDPE bestimmt und evaluiert.

In speziellen Versuchsbedingungen wird das Spannungs-Dehnungs-Verhalten unter uniaxialer Zugbelastung bis hinunter zu kryogenen Temperaturen analysiert. Dabei werden unter Flüssig-Stickstoff-Bedingungen Temperaturen von  $-196\text{ °C}$  und unter Flüssig-Helium-Bedingungen ca.  $4\text{ K}$  bzw.  $-269\text{ °C}$  erreicht. Während Materialfestigkeiten und -steifigkeiten ansteigen, fällt die Bruchdehnung auf ein sehr niedriges Niveau von  $\epsilon_{\text{Bruch}} < 2\%$ .

Das temperaturabhängige viskoelastische Materialverhalten von HDPE wird mittels Zeitstandzugversuche bei einachsiger statischer Zugbelastung untersucht. Unter konstanter Spannung nimmt die anfangs aufgebrachte Dehnung zu. Aus dem Kriechverhalten wird mit Hilfe des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips die sog. Master-Nachgiebigkeitskurve von HDPE für die Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$  berechnet.

Für die Beurteilung der Lebensdauerprognose von Strukturbauteilen aus HDPE werden aus Dauerschwingversuchen die Schwingfestigkeit ermittelt. Unter zyklisch schwellender Zugbelastung weisen die Wöhlerlinien bei Temperaturen im Bereich von  $-40\text{ °C} \leq T \leq 85\text{ °C}$  recht geringe Steigungen auf. Der Einfluss der Temperatur erweist sich als größer als der der zyklischen Belastung des Materials.

#### **Kapitel 5: Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen**

Für die numerische Simulation des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Thermoplasten existiert eine Vielzahl von mehr oder minder geeigneten Materialmodellen. Neben den klassischen Modellen auf der Basis von elastisch-plastischen, hyperelastischen oder viskoelastischen Konstitutivgesetzen, finden auch Kombinationen daraus Anwendung. Für die Finite Elemente Methode werden sämtliche Versuchsdaten aufbereitet, so dass sie für die

verschiedenen Modelle verwendet werden können. Für die Evaluation der Materialmodelle werden Finite Elemente Modelle generiert, die Randbedingungen und Belastungen der Versuche sowie die Dimensionen der Prüfkörper wiedergeben.

Als Vertreter der hyperelastischen Materialmodelle werden neben zahlreicher reduzierter Polynommodelle und Ogden-Modelle unterschiedlicher Grade, auch das van der Waals-Modell sowie das Marlow-Modell mit den experimentell gewonnenen Daten verglichen und evaluiert. Das Marlow-Modell stellt sich als das tauglichste heraus, um das thermo-mechanische Materialverhalten von Polyethylen abzubilden.

Für die elastisch-plastische Modellierung werden aus den Zugversuchen Fließspannungen und Verfestigungsfunktionen berechnet. Auch diese Art der Modellierung erweist sich als brauchbar, um das Verhalten unter Zugbelastung wiederzugeben. Bei beiden Arten der Modellierung zeigt sich ein geringer Einfluss der Querdehnung auf die Simulation des Materialverhaltens. Aufgrund der hohen Zug-Druck-Asymmetrie des HDPE sind die druckseitigen Abweichungen als zu hoch einzustufen. Für die Abbildung der Anisotropie des Werkstoffes ist das Drucker-Prager-Modell ein Spezialfall der elastisch-plastischen Modellierung. Nach der Ermittlung Modell-spezifischer Parameter und der druckseitigen Verfestigungsfunktionen wird das Drucker-Prager-Modell auf seine Güte hin untersucht. Eine Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter im Zug- und Schubbereich steckt die Grenzen der Modellierung ab und zeigt Möglichkeiten auf, das simulierte Materialverhalten zu beeinflussen. Eine Optimierung der Modellparameter liefert, neben niedriger Abweichungen unter Zug- und unter Druckbelastung, plausible Extrapolationen der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und somit eine effektive Methode das thermo-mechanische Materialverhalten von HDPE abzubilden.

Für die Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens von HDPE werden die Ergebnisse der Zeitstandzugversuche herangezogen. Die Master-Nachgiebigkeitskurve bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$  wird anhand von Feder-Dämpfer-Elementen approximiert. Die sog. Prony-Parameter der Elemente werden mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate numerisch optimiert. Sowohl mit einem linear viskoelastischen als auch mit einem hyperelastisch viskoelastischen Modell werden Kriechversuche simuliert. Ersteres Materialmodell ist in der Lage das Kriechverhalten von HDPE in guter Näherung abzubilden.

## Kapitel 6: Validierungen und Anwendungen der untersuchten Materialmodellierungen

Bei den drei Temperaturen  $-50\text{ °C}$ ,  $20\text{ °C}$  bzw.  $100\text{ °C}$  wurden mechanische Zyklerversuche an HDPE durchgeführt. Bis hin zu einem Dehnungsniveau von  $1,0\%$ ,  $3,0\%$  bzw.  $5,0\%$  wurden die Proben mehrfach be- und entlastet. Die Auswertung der neun Versuche erfolgte über die gemessenen Dehnungen und die berechneten Spannungen im Probekörper.

Anhand der experimentell gemessenen Verschiebungswerte werden FEM Simulationen der Zyklierungen durchgeführt. Dabei finden zum einen das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell und zum anderen das linear viskoelastische Modell Anwendung. Die Untersuchung und Bewertung der Materialmodelle erfolgt über den Vergleich der Spannungs- und Dehnungswerte. Bei der Darstellung der Dehnungen erweist sich das Drucker-Prager-Modell als tauglich. Das viskoelastische Modell schneidet hier etwas schlechter ab. Deutliche Schwächen zeigt das viskoelastische Modell bei der Berechnung der Spannungen. Diese werden vom Drucker-Prager-Modell zum Teil um Größenordnungen genauer bestimmt.

Mit dem Drucker-Prager-Modell werden unterschiedliche Belastungsrechnungen an dem HDPE-Liner eines Wasserstoffhochdrucktanks durchgeführt. Der thermo-mechanische Lastfall unter Vollbetankung ( $\Delta p = 700 \text{ bar}$ ) und bei tiefer Temperatur ( $T = -40 \text{ °C}$ ) erweist sich als der kritischste. Die simulierten Spannungs- und Dehnungswerte ergeben bei der quasistatischen Bewertung der Lasten kein Versagen der Tankstruktur. Die abschließende Bewertung der Lebensdauer findet anhand der berechneten Maximalspannung im Liner und der Ergebnisse aus den in Kapitel 4 beschriebenen Dauerschwingversuchen statt.



# 2

## Struktureller Aufbau von thermoplastischen Polymeren

Das vorliegende Kapitel behandelt den molekularen, mikroskopischen Aufbau von Kunststoffen und deren temperaturabhängige Zustandsbereiche. Ebenso werden Einflüsse des Aufbaus und der Zustandsbereiche auf die makroskopische Struktur sowie auf die mechanischen Eigenschaften des Polymers erörtert. Dabei wird auf Kunststoffe im Allgemeinen und auf Polyethylen im Speziellen eingegangen. Im weiteren Verlauf der Arbeit dient Polyethylen immer wieder als Beispiel eines teilkristallinen Thermoplasts und wird als Vertreter von in Wasserstoffdrucktanks eingesetzten Kunststoffen herangezogen.

### 2.1 Klassifizierung und Eingruppierung von Polymeren

Polymere sind hochmolekulare, zusammengesetzte, organische Verbindungen, die aus niedermolekularen Grundbausteinen, den Monomeren, bestehen. Bei der Polymerisation werden Mehrfachbindungen der am Prozess beteiligten Kohlenstoffatome aufgespalten und so eine Verknüpfung zu anderen Monomeren (altgriechisch: *mónos* - einzeln und *méros* - das Teil) ermöglicht. Durch diese chemischen Reaktionsverläufe werden Makromoleküle, auch Polymere (altgriechisch: *polýs* - viel) genannt, hergestellt.

Die bekannten Polymere lassen sich in ihrer Gesamtheit in vier Gruppen einteilen: Thermoplaste (altgriechisch: *thermós* - warm, heiß und *plássein* = bilden, formen), Duroplaste (auch: Duromere, lateinisch: *durare* - härten), Elastomere und thermoplastische Elastomere. Diese Einteilung erfolgt im Allgemeinen nach dem Temperaturverhalten des Schub- oder Elastizitätsmoduls, das auf die molekularen Bindungsverhältnisse zurückzuführen ist. [31] Eine weitere Möglichkeit der Unterscheidung liegt in dem Vernetzungsgrad der Kohlenstoffketten. Während die Polymerketten bei Thermoplasten unvernetzt und bei Elastomeren leicht vernetzt vorliegen, sind sie bei Duromeren stark vernetzt. [55] Polyethylen ist ein teilkristalliner Thermoplast aus der Gruppe der Polyolefinen, die aus einigen tausend gesättigten Kohlenwasserstoff-Monomeren bestehen. Ohne Farbzusätze hat es eine milchig-trübe, matte Erscheinung. [18]

## 2.2 Molekularer Aufbau und Bindungsverhältnisse

Im Allgemeinen wird zur Veranschaulichung der Bindungsverhältnisse von Polymeren zwischen intramolekularen Bindungen, die innerhalb der Molekülketten auftreten, und intermolekularen Bindungen, die zwischen den Ketten wirken, unterschieden.

Intramolekulare Bindungen sind im Wesentlichen kovalente Bindungen oder auch Hauptvalenzbindungen, die durch das gegenseitige Bestreben der Atome nach dem Edelgaszustand zu Stande kommen. Die Bindungselektronen werden von beiden Atomen zum Auffüllen der äußersten Elektronenschale genutzt. Findet der Aufbau der Bindung unter Energieabgabe statt, spricht man von einer exothermen Reaktion. Benötigt die Reaktion zum Ablauf eine Energiezugabe, meist in Form einer Temperaturerhöhung, wird sie endotherm genannt. Bei der Polymerisation von Kunststoffen handelt es sich stets um eine exotherme Reaktion. [36, 78]

Polyethylen entsteht durch die Polymerisation von Ethen-Monomeren, die aus Kohlenwasserstoffen der Formel  $C_nH_{2n}$  aufgebaut sind. Die Polymerisation von Polyethylen aus Ethen ist in der folgenden Reaktionsgleichung dargestellt: [12, 101]



Die Anordnung der gebundenen Atome um ein Kohlenstoffatom herum erfolgt im charakteristischen Tetraederwinkel von  $109,5^\circ$ , bei dem ein Minimum an potentieller Energie vorliegt. Durch die energetisch günstigste Stellung nehmen die Molekülketten des Polyethylens eine Zick-Zack Form an, die das für Thermoplasten typische Verknäulen der Polymerketten begünstigt. Die räumliche Anordnung der Atome im Polyethylen-Makromolekül ist vereinfacht in Abbildung 2.1 gezeigt.

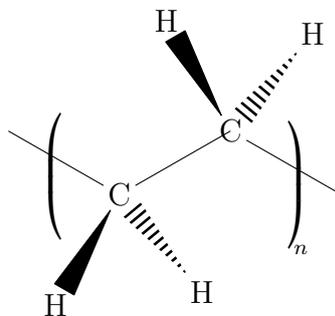


Abbildung 2.1: Räumliche Molekülstruktur von Polyethylen

Lineare (auch: aliphatische) Makromoleküle, wie Polyethylen, können verzweigt oder räumlich vernetzt auftreten. Dabei werden die Monomere der Molekülketten durch Hauptvalenzkräfte (chemische Bindungen) untereinander verknüpft. Der Zusammenhalt zwischen den Ketten und ihre Lage zueinander ist ein Resultat aus elektrostatischen Oberflächenkräften, Dipol-Wechselwirkungen, sowie Verhakungen und Verschlaufungen der Molekülketten. [5, 12, 31]

Intermolekulare Bindungen treten bei Thermoplasten ausschließlich in der Form von Nebenvalenzbindungen auf. Bei diesen Bindungen stellen physikalische Kräfte den Zusammenhalt zwischen Atomen der Molekülketten her, wie van der Waals-Kräfte oder Wasserstoffbrückenbindungen. Zu den van der Waals-Kräften zählen sämtliche Kräfte, die aus

Dipol-Wechselwirkungen hervorgehen. Die Bindungsenergie dieser Bindungen ist im Vergleich zu den kovalenten Bindungen um Größenordnungen geringer. Entsprechend ergeben sich bei Thermoplasten intramolekular wesentlich höhere Bindungskräfte als intermolekular. Der Zusammenhalt zwischen Molekülketten ist deutlich schwächer als der Zusammenhalt innerhalb einer Molekülkette. Dieser Umstand hat einen signifikanten Einfluss auf die makromechanischen Eigenschaften, neben der Möglichkeit eines Thermoplasts kristalline Bereiche auszubilden. [36, 78]

Bei Duromeren und Elastomeren treten zwischen den Polymerketten Querverbindungen durch chemische Bindungen auf. Diese bleiben bis zur Zersetzungstemperatur wirksam, wodurch Kunststoffe dieser Art nicht oder kaum schmelzbar sind. Dadurch entsteht ein räumliches Maschenwerk, das sowohl eine schwach vernetzte (Elastomere) als auch eine stark vernetzte Struktur (Duromere) aufweisen kann. [31, 78]

Polyethylen gehört zu den linearen und leicht verzweigten Polymeren, deren Molekülketten, unabhängig von der Temperatur, keine chemischen Bindungen untereinander ausbilden. Hergestellt wird Polyethylen aus dem Monomer Ethen, wodurch Hauptketten mit einfach gebundenen Kohlenstoffatomen entsteht. Intermolekular treten nur Dipol-Bindungen infolge von Dispersionskräften auf, d.h. klassische Van-der-Waals Bindungen. Polyethylen besteht nur aus Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen, deren Elektronegativitätsdifferenz nicht ausreicht Wasserstoffbrückenbindungen auszubilden. Zwischen den Polymerketten wechselwirken ausschließlich physikalische Bindungen durch Verhakungen und Verschlaufungen der Ketten. Abhängig von der molekularen Struktur des Thermoplasts und den Prozessparametern bei der Herstellung, ergeben sich amorphe oder teilkristalline Thermoplaste. [5, 31, 36]

### 2.3 Kristalline und amorphe Bereiche

In Thermoplasten liegt ein amorpher Zustand vor, wenn die Makromoleküle ohne regelmäßige Orientierung statistisch angeordnet sind. Es existiert keine Fernordnung, d.h. eine über den nächsten Nachbarn hinausreichende Ordnung ist nicht vorhanden. Dieser Zustand ist eine Art räumliche Knäuelstruktur, der nur durch Einschränkung der Beweglichkeit der Molekülketten unterbunden werden kann. Neben der ungeordneten Knäuelstruktur können auch geordnete, energetisch ungünstigere Strukturen, wie spiralförmige Anordnungen (Helix) oder Zick-Zack Anordnungen eingenommen werden. Des Weiteren existieren Bereiche in denen Nahordnung, also eine bis zum nächsten Nachbarn reichende Ordnung, vorliegt. Diese Bereiche der Nahordnung werden allerdings durch Wärmebewegung stetig abgebaut und wieder erneuert. [31, 36]

Liegt dagegen eine regelmäßige Nah- und Fernordnung der Makromoleküle vor, spricht man vom kristallinen Zustand eines Thermoplasten. Die Polymerketten sind gleichmäßig in Zick-Zack-Anordnung und parallel zueinander orientiert/ausgerichtet. Eine solche Anordnung wird durch lineare und möglichst wenig verzweigte Molekülketten begünstigt. Die Bildung kristalliner Bereiche (Kristallisation) wird aus der Polymerschmelze eingeleitet und ist über verschiedene Parameter, wie z.B. die Abkühlrate, einstellbar. [31, 78]

Die Kristallisation eines Polymers lässt sich in zwei Schritte unterteilen: Keimbildung und Keimwachstum. Bei der Keimbildung entwickeln sich die ersten Kristallite. Diese entstehen

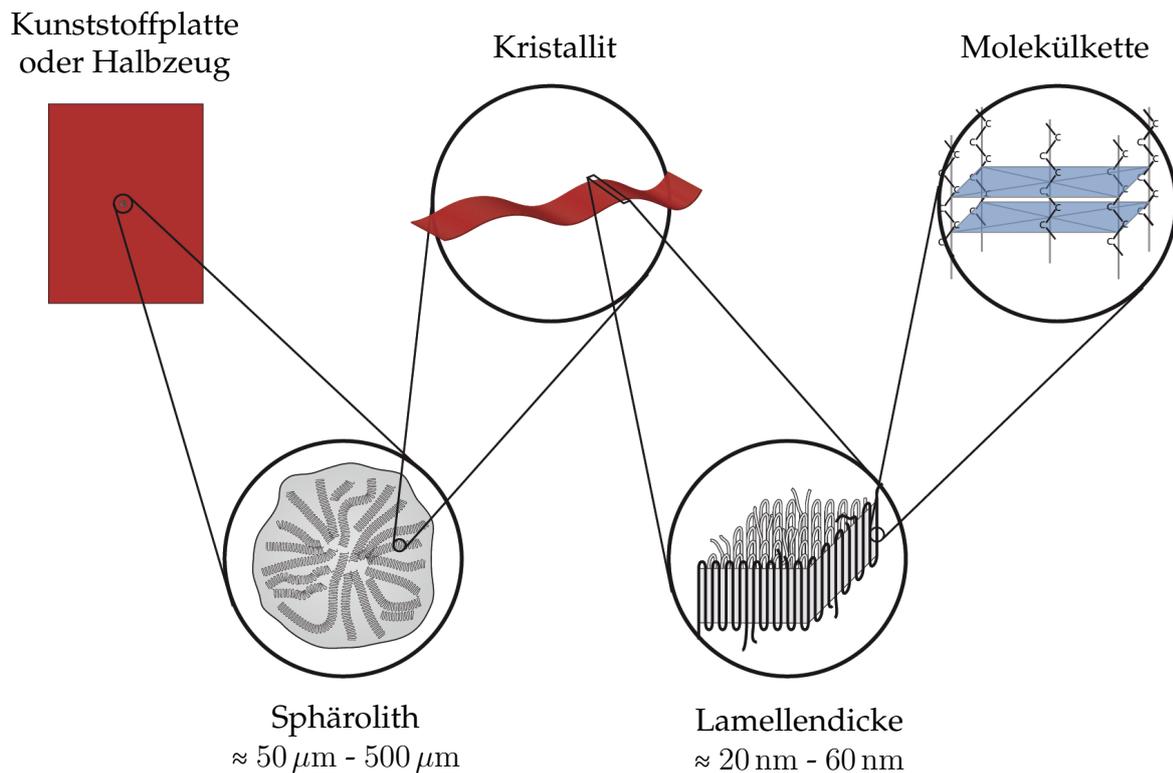


Abbildung 2.2: Struktureller Aufbau teilkristalliner Polymere; nach [16]

durch paralleles Aneinanderreihen von Molekülketten in Bereichen der Nahordnung oder durch Angliedern an Kristallkeime, die eine spezifische Größe überschritten haben. Kristallkeime werden durch spezielle Nukleierungsmittel in die Polymerschmelze eingebracht oder sind als Verunreinigung bereits vorhanden. Beim Keimwachstum ordnen sich weitere Molekülketten regelmäßig an die Kristallite an. Dies geschieht durch Faltung der Molekülketten, so dass lamellenförmige Kristallite mit einer typischen Dicke von etwa 100 nm entstehen. Meist bilden Lamellen verschiedenartig angeordnete Überstrukturen, wie z.B. ringförmige Sphärolithe. [31, 78]

Einen Überblick über den strukturellen Aufbau von teilkristallinen Thermoplasten zeigt Abbildung 2.2. An den Ober- und Unterseiten der Lamellen verlassen die Molekülketten die kristalline Ordnung und liegen amorph vor. Aufgrund der Verschlaufungen der Molekülketten in der hochviskosen Schmelze bildet sich beim Abkühlen im industriellen Maßstab niemals ein vollständig kristallines Polymer, sondern ein so genanntes teilkristallines. Verschlaufungen innerhalb einer knäuelartigen Anordnung werden im Allgemeinen nicht gelöst, da sich eine Molekülkette nicht als Ganzes aus der Schmelze heraus regelmäßig in einer kristallinen Struktur anordnet. Stattdessen ordnen sich Teilbereiche einer Molekülkette mit Teilbereichen von in der Schmelze benachbarten Molekülketten an. [31, 63, 78]

Anordnung und Orientierung der Molekülketten in den amorphen und kristallinen Bereichen sind verantwortlich für die unterschiedlich starken Wechselwirkungen zwischen den Ketten. Aufgrund der Zick-Zack-Anordnung der Molekülketten in den kristallinen Bereichen sind die Abstände zwischen den Ketten gering. Dagegen liegen in den amorphen Bereichen, wegen der Knäuelstruktur und der fehlenden Nah- und Fernordnung, größere Abstände zwischen den Ketten vor. Dementsprechend sind die Nebenvalenzbindungen in den amor-

phen Bereichen deutlich schwächer ausgeprägt als in den kristallinen Bereichen, was sich in den makromechanischen Eigenschaften widerspiegelt. Die Temperaturabhängigkeit der Bindungskräfte und Kettenbeweglichkeit resultiert außerdem in einem temperaturabhängigen mechanischen Verhalten. [36, 63, 100]

### 2.4 Temperaturabhängige Zustandsbereiche

Für amorphe und teilkristalline Thermoplaste lassen sich drei Temperaturbereiche variabler thermo-mechanischer Eigenschaften definieren. Unterschieden wird zwischen den Zuständen der Energieelastizität, der Entropieelastizität und der Schmelze. Diese Bereiche lassen sich anhand von temperaturabhängigen Verläufen elastischer Konstanten charakterisieren, wie z.B. des E-Moduls  $E$ . [36, 100]

Thermoplaste besitzen im energieelastischen Zustand, auch Glaszustand genannt, ein glasähnliches bzw. sprödes Verhalten. Sie sind makroskopisch formstabil und fließen nicht. Innerhalb dieses Temperaturbereichs weisen Thermoplaste die höchste Materialsteifigkeit auf. Eine Verformung geschieht durch Variation der intermolekularen Atomabstände und Bindungswinkel. Dabei wird ein energetisch ungünstigerer Zustand erreicht. Um den energetisch günstigeren Zustand wiederherzustellen stellt sich eine Rückstellkraft ein (Elastizität). Bei der makroskopischen Verformung werden vor allem die Nebenvalenzbindungen elastisch gedehnt. Die deutlich stärkeren kovalenten Bindungen erfahren beinahe keine elastische Dehnung. Die Rückstellkraft wird, da sie energetisch begründet ist, als Energieelastizität bezeichnet. Zu höheren Temperaturen hin ist der Glaszustand durch den Übergang in den entropieelastischen Bereich begrenzt. Dieser Übergang wird Glasübergang genannt. [36, 78, 100]

Der Glasübergang erstreckt sich über einen etwa 10 °C bis 40 °C breiten Temperaturbereich um die Glasübergangstemperatur  $T_G$ . Die molekulare Struktur der amorphen Bereiche bleibt während des Übergangs in den entropieelastischen Zustand unverändert. Jedoch wird über das erreichte Temperaturniveau ausreichend thermische Energie bereitgestellt, um die intermolekularen Bindungen lösen und Moleküle umlagern zu können. Entsprechend stellt sich eine deutlich gesteigerte Beweglichkeit der Polymerketten ein. Bei temperaturabhängigen Untersuchungen der Wärmeausdehnung von Polymeren äußert sich diese gesteigerte Beweglichkeit in einem Knick der Kurve des Wärmeausdehnungskoeffizienten CTE (englisch: *coefficient of thermal expansion*). [36, 63, 100]

Der entropieelastische Zustand, auch gummielastischer Zustand, stellt sich bei Temperaturen über dem Glasübergang ein. Thermoplaste verhalten sich in diesem Zustand zäh und gummiähnlich und besitzen eine deutlich niedrigere Materialsteifigkeit als im Glaszustand. Der E-Modul amorpher Thermoplaste fällt dabei deutlich stärker ab, als der E-Modul teilkristalliner Thermoplaste. Aufgrund der geringeren Abstände zwischen den Polymerketten und den daraus resultierenden stärkeren intermolekularen Bindungen, verbleiben die kristallinen Bereiche im energieelastischen Zustand. Nur in den amorphen Bereichen findet ein Glasübergang in den entropieelastischen Zustand statt. Eine Verformung durch mechanische Spannungen führt innerhalb des gummielastischen Zustands zu einem Abgleiten der Molekülketten zwischen den Verankerungen und Verschlaufungen. Da durch die Streckung ein Zustand geringerer Entropie eingenommen wird, stellt sich eine Rückstellkraft ein. Diese

Kraft ist in dem Bestreben den Zustand größtmöglicher Entropie einzunehmen begründet und wird dementsprechend als Entropieelastizität bezeichnet. [36, 63, 78, 100]

Durch eine weitere Erhöhung der Temperatur nimmt die Beweglichkeit der Polymerketten zu, das zu einer Abnahme der Materialsteifigkeit führt. Mechanische Belastung des Thermoplasten führt u.a. zu erhöhtem makroskopischem Fließen, gleichzusetzen mit einer erhöhten Kriechneigung gegenüber dem Glaszustand. Ein weiterer Temperaturanstieg führt zum Schmelzen des Thermoplasten, bei dem die kristallinen Bereiche aufgelöst werden. Davor liegen die Polymerketten in den kristallinen Bereichen regelmäßig und eng geordnet vor, bei entsprechend geringen Bindungsabständen und somit großen Bindungsenergien. Bei Erreichen der Schmelztemperatur  $T_S$  eines teilkristallinen Thermoplasts ist die thermische Energie groß genug, um die intermolekularen Bindungen in den kristallinen Bereichen zu lösen. [63, 78]

Ähnlich wie der Glasübergang erstreckt sich der Schmelzvorgang über einen Temperaturbereich von ca. 15 K. Im Gegensatz zum Glasübergang findet im Schmelzbereich eine Veränderung der molekularen Struktur statt. Die geordneten Molekülketten der kristallinen Bereiche verlassen die regelmäßige Ordnung und versuchen den Zustand größter Entropie einzunehmen. Dementsprechend kann diesem Übergang auch eine Enthalpie zugeordnet werden, die Schmelzenthalpie. Der Schmelzvorgang ist ein kontinuierlicher Vorgang, bei dem ausgehend von einer Koexistenz amorpher und kristalliner Bereiche sich die kristallinen Bereiche aufweichen und sich so Verhakungen und Verschlaufungen leichter lösen lassen. Zunächst ergibt sich ein zähfließender Zustand, der bei weiterem Temperaturanstieg in einen Zustand niedrigerer Viskosität übergeht. [5, 78, 100]

Ein weiterer Anstieg der Temperatur steigert die Beweglichkeit der Molekülketten so weit, bis die thermische Energie die Bindungsenergie der kovalenten Bindungen übersteigt und der Thermoplast degradiert. Dieser Vorgang ist irreversibel. [31]

## 2.5 Unterteilung verschiedener Polyethylen-Gruppen

Abhängig von Herstellungsverfahren und Bauteilform ergibt sich für den Werkstoff Polyethylen ein unterschiedlicher Grad der Kristallisation, d.h. ein variabler Anteil an kristallinen Bereichen im Polymer. Der jeweilige Kristallisationsgrad  $\kappa$  und die molekularen Bindungsverhältnisse sowie die molekulare Struktur ergeben die für Thermoplaste charakteristischen temperaturabhängigen Eigenschaftsspektren. [31, 36]

Je mehr Monomere sich bei der Polymerisation zu einem Polymer aneinander reihen, desto höher ist der Polymerisationsgrad. Die resultierenden langkettigen Makromoleküle können sich durch Oberflächenkräfte zu Lamellen falten, wobei der Kristallisationsgrad zunimmt. Ein Produkt der höheren Dichte ist u.a. eine höhere molare Masse des Polymers. [43, 52] Mit dem Kristallisationsgrad steigen neben der Dichte vor allem die thermo-mechanischen Eigenschaften, wie die Materialsteifigkeit und -festigkeit sowie die Schlagzähigkeit. [55] Die Dichte  $\rho$  von Polyethylen liegt abhängig von der Kristallinität zwischen  $0,86 \text{ g/cm}^3$  und  $0,97 \text{ g/cm}^3$ . Danach werden Gruppen unterschiedlicher Eigenschaftsspektren unterteilt: [16]

- HDPE (englisch: *high density polyethylen*) mit einer Dichte von  $\rho = 0,94 \text{ g/cm}^3$  bis  $0,970 \text{ g/cm}^3$  und einem Kristallisationsgrad von  $\kappa = 60 \%$  bis zu  $80 \%$

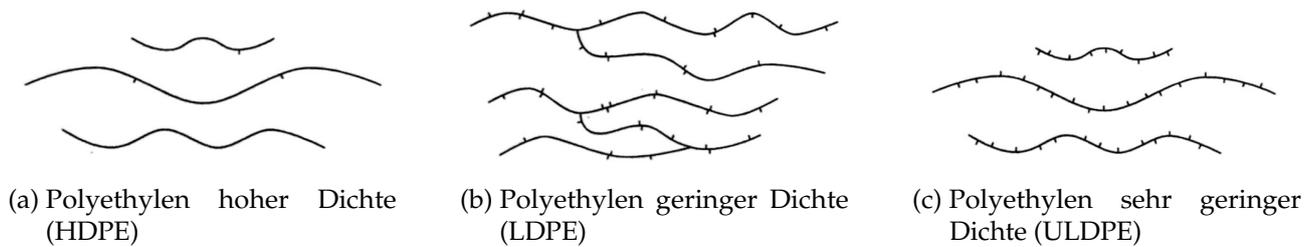


Abbildung 2.3: Molekulare Strukturen von Polyethylen unterschiedlicher Dichten; nach [92]

- LLDPE (englisch: *linear low density polyethylen*) mit einer Dichte von  $\rho = 0,92 \text{ g/cm}^3$  bis  $0,94 \text{ g/cm}^3$  und einem Kristallisationsgrad von  $\kappa = 55 \%$  bis zu  $65 \%$
- LDPE (englisch: *low density polyethylen*) mit einer Dichte von  $\rho = 0,915 \text{ g/cm}^3$  bis  $0,935 \text{ g/cm}^3$  und einem Kristallisationsgrad von  $\kappa = 40 \%$  bis zu  $50 \%$
- ULDPE (englisch: *ultra low density polyethylen*) mit einer Dichte von  $\rho = 0,86 \text{ g/cm}^3$  bis  $0,90 \text{ g/cm}^3$  und einem Kristallisationsgrad von  $\kappa < 40 \%$

HDPE besitzt wegen des hohen Kristallisationsgrades eine relativ hohe Schmelztemperatur von  $T_S = 130^\circ\text{C}$  bis  $135^\circ\text{C}$  und eine Glasübergangstemperatur von ungefähr  $T_G = -110^\circ\text{C}$ . [31, 63] Aufgrund der geringen Anzahl an Verzweigungen (Abbildung 2.3a) innerhalb der langkettigen Makromoleküle wird HDPE mitunter auch als LPE (englisch: *linear polyethylene*) bezeichnet. LDPE und ULDPE weisen dagegen Verzweigungen in ihrer Molekülstruktur auf. Bei LDPE handelt es sich um eine geringe Anzahl langkettiger Verzweigungen im Makromolekül (Abbildung 2.3b), die die Lamellenbildung und damit die Kristallisation nur bedingt zulassen. ULDPE besitzt häufig auftretende, kurz-kettige Verzweigungen (Abbildung 2.3c), die die Lamellenbildung effektiv hemmen, sodass im Polymer hauptsächlich amorphe Bereiche vorherrschen. [92]



# 3

## Kontinuumsmechanische Materialmodellierung von Polymeren

Ein wesentlicher Schritt bei der Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens ist die Wahl eines geeigneten Materialmodells. In der Regel besteht eine große Auswahl aus einer Vielzahl von Modellen, von denen nur wenige in der Lage sind das reale Verhalten möglichst exakt abbilden zu können. Jedem Modell liegen Annahmen oder Vereinfachungen zugrunde, die die Anwendbarkeit einschränken, aber auch den Aufwand zur Bestimmung der Modellparameter in Grenzen halten. Daher findet die Wahl eines Materialmodells problemspezifisch und unter Berücksichtigung der Belastungen und Randbedingungen der Problemstellung, des verwendeten Werkstoffs sowie des Aufwands zur Bestimmung der Modellparameter statt. Tabelle 3.1 zeigt eine Übersicht an möglichen Arten, wie Kunststoffe oder Werkstoffe allgemein belastet werden können.

Tabelle 3.1: Übersicht über verschiedene Belastungsarten von Kunststoffen; nach [65, 111]

Zeitraum $\Delta t$ der Belastung		Lastverlauf
Crash:	$\Delta t < 1 \text{ s}$	stoßartig, monoton steigend
Kurzzeit:	$1 \text{ s} < \Delta t < 1 \text{ h}$	monoton steigend
Langzeit:	$1 \text{ h} < \Delta t$	konstant oder langsam steigend
Periodisch:	$n \cdot \Delta t$	schwingend bzw. zyklisch

Abhängig von Umgebungs- und Belastungsfaktoren bieten sich verschiedene Materialmodelle an, um das Verhalten von Kunststoffen abzubilden. Belastungsrichtung, -betrag und -geschwindigkeit sowie Umgebungstemperatur und Belastungshistorie des Kunststoffs sind entscheidend für die Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens. Dabei besitzen die Modelle variierende Gültigkeitsbereiche und bedienen sich jeweils unterschiedlicher mechanischer Gesetzmäßigkeiten. Im Folgenden werden neben verschiedenen hyperelastischen auch elastisch-plastische sowie viskoelastische Materialmodelle vorgestellt und diskutiert. Zuvor werden in einem Exkurs in die Kontinuumsmechanik die nötigen Begrifflichkeiten erörtert, um die folgenden Materialmodelle beschreiben zu können.

### 3.1 Deformationszustände

Eine allgemeine Beschreibung der Deformationszustände mittels Deformationsmaßen und -gradienten dient zum Einen der Einordnung in die Kontinuumsmechanik und zum Anderen

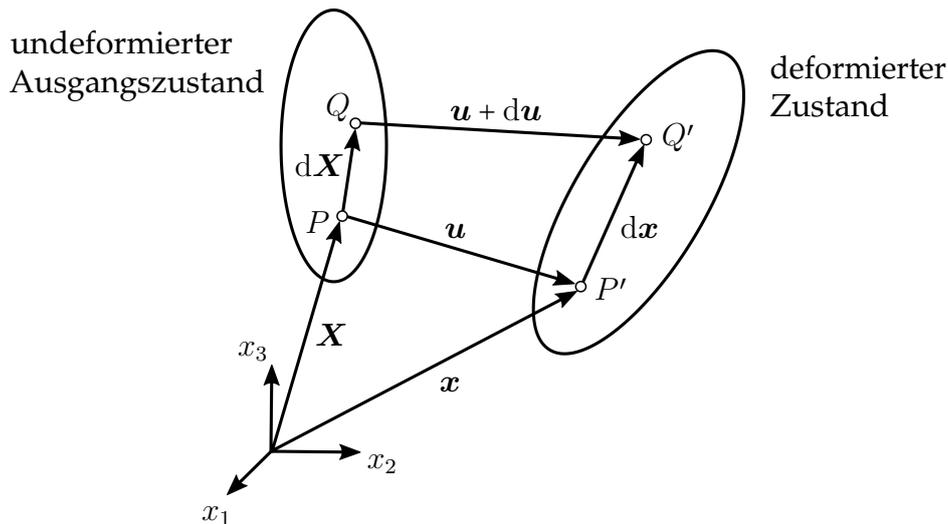


Abbildung 3.1: Deformation eines Festkörpers, beschrieben durch Verschiebungen und Verzerrungen

als Grundlage zur Definition der verwendeten Materialmodelle. In Anlehnung an Gross u. a. [44], Holzapfel [54], Betten [15] und Brinson und Brinson [19] werden im Folgenden der allgemeine dreidimensionale Deformationszustand sowie die Verschiebungs- und Deformationsgradienten und die Dehnungsmaße beschrieben. Zum Verständnis finden jegliche Definitionen der Größen sowohl in Vektornotation als auch in Indexschreibweise statt. Auf die durchgängige Konsistenz in der Notation verschiedener Größen sei hingewiesen.

### 3.1.1 Allgemeine dreidimensionale Beschreibung

Die Deformation eines Festkörpers, wie in Abbildung 3.1 gezeigt, kann im dreidimensionalen Fall durch Verschiebungen und Verzerrungen bzw. Deformationen beschrieben werden. Der Punkt  $P$  im undeformierten Ausgangszustand des Körpers wird durch die materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  festgelegt. Erfährt dieser Punkt eine Verschiebung

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad u_i = x_i - X_i,$$

so ist der resultierende Punkt  $P'$  durch die neue Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$  definiert. Für die Beschreibung der Lageänderung existieren zwei verschiedene Möglichkeiten. In der Lagrangeschen Beschreibung wird die Bewegung anhand des materiellen Teilchens  $\mathbf{X}$  betrachtet. Der Ort im deformierten Zustand und die Verschiebung ergeben sich durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad \text{bzw.} \quad x_i = x_i(X_j) \quad \text{und} \quad u_i = u_i(X_j), \quad (3.1)$$

mit der unabhängig veränderlichen, materiellen Koordinate  $\mathbf{X}$ . In der Eulerschen Darstellung wird dagegen der Zustand eines Raumpunktes  $\mathbf{x}$  verfolgt. Punkte im deformierten Körper haben eine bestimmte Verschiebung erfahren und werden beschrieben durch

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad X_i = X_i(x_j) \quad \text{und} \quad u_i = u_i(x_j),$$

mit der unabhängigen veränderlichen Ortskoordinate  $\mathbf{x}$ . Die Eulersche Beschreibung findet insbesondere in der Fluidmechanik Anwendung. In der Elastomechanik wird dagegen die Lagrangesche Darstellung bevorzugt. Im Folgenden wird daher von der Lagrangeschen Beschreibung ausgegangen.

### 3.1.2 Verschiebungs- und Deformationsgradient

Das Linienelement  $\overline{PQ}$ , das im undeformierten Zustand in Abbildung 3.1 als Vektor  $d\mathbf{X}$  definiert ist, geht durch Deformation in  $\overline{P'Q'}$  bzw.  $d\mathbf{x}$  über. Die Verschiebungsdifferenz

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad du_i = dx_i - dX_i \quad (3.2)$$

ist gegeben durch die Änderung  $d\mathbf{x} - d\mathbf{X}$  des Elements. Gleichung 3.2 kann mit Gleichung 3.1 umformuliert werden zu dem Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j},$$

einem Tensor 2. Stufe, der die Längenänderung und die Drehung eines Linienelements beschreibt, wobei Grad den materiellen Gradienten bezeichnet.

Ein alternatives Maß zur Beschreibung der Verzerrung ist der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

Der Deformationsgradient spielt bei der Beschreibung der Verzerrungsenergiefunktion für hyperelastische Materialmodelle in Unterabschnitt 3.4.1 eine entscheidende Rolle.  $\mathbf{F}$  bildet ein infinitesimales materielles Linienelement  $d\mathbf{X}$  auf das infinitesimale räumliche Linienelement  $d\mathbf{x}$  ab. Diese Abbildung der materiellen Konfiguration auf die räumliche Konfiguration wird als push-forward bezeichnet. Die sogenannte pull-back Abbildung ist über die Inverse des Deformationsgradienten definiert:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad [F_{ij}]^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}.$$

Hier ist grad der räumliche Gradient. Die Determinante des Deformationsgradienten  $\det \mathbf{F}$  wird als Jacobi-Determinante  $J$  bezeichnet. Die Abbildung des materiellen infinitesimalen Volumenelements  $dV$  auf das räumliche infinitesimale Volumenelement  $dv$  über die Determinante  $J$

$$dv = \det \mathbf{F} dV = J dV.$$

geht aus der Definition des Volumens über das Spatprodukt hervor.

Zwischen dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  und dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  besteht aufgrund von Gleichung 3.2 der einfache Zusammenhang

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad \text{bzw.} \quad H_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij},$$

worin  $\mathbf{1}$  den Einheitstensor darstellt. Diese Beziehung zwischen den Gradienten wird unter anderem für die Definition verschiedener Verzerrungsmaße, siehe Unterabschnitt 3.1.4, benötigt.

### 3.1.3 Aufteilung des Deformationszustandes

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit die Deformation eines Elements in verschiedene Deformationsanteile zu zergliedern. Gerade im Hinblick auf die Definition von elastisch-plastischen und hyperelastischen Materialmodellen, wie in Unterabschnitt 3.4.1 beschrieben, empfiehlt sich die Aufspaltung in einen volumetrischen Anteil und einen isochoren Anteil. Der volumetrische Anteil beschreibt eine Deformation, bei der ein Volumenelement in alle Richtungen gleichmäßig gestreckt wird. Dabei ändert sich das Volumen des Elements, nicht aber dessen Gestalt. Der isochore Anteil beschreibt hingegen eine Deformation bei der das Volumen eines Elements konstant bleibt, aber dessen Gestalt sich ändert. Für den Deformationsgradienten gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \mathbf{F}_{\text{iso}} ,$$

mit

$$\mathbf{F}_{\text{vol}} = (\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{1} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}$$

und

$$\mathbf{F}_{\text{iso}} = (\det \mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} .$$

Weiterhin kann die Deformation eines Elements in eine Starrkörperrotation und eine Streckung zerlegt werden. Für den Deformationsgradienten gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} ,$$

wobei  $\mathbf{R}$  der orthogonale Rotationstensor ist,  $\mathbf{U}$  der rechte bzw. materielle Strecktensor und  $\mathbf{v}$  der linke bzw. räumliche Strecktensor ist. Die unterschiedlichen Strecktensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{v}$  ergeben sich aus der verschiedenen Reihenfolge von Streckung und Rotation. Erfolgt zuerst eine Streckung und danach eine Rotation, so beschreibt der materielle Strecktensor  $\mathbf{U}$  die Streckung. Wird erst rotiert und anschließend gestreckt, so wird die Streckung über den räumlichen Strecktensor  $\mathbf{v}$  beschrieben. In beiden Fällen ist der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  identisch und enthält ausschließlich die Rotationsbewegung. Eine Translationsbewegung braucht aufgrund des dazugehörigen Deformationsgradienten von  $\mathbf{F} = \mathbf{1}$  und damit  $d\mathbf{X} = d\mathbf{x}$  nicht gesondert berücksichtigt werden.

### 3.1.4 Verzerrungsmaße

Zur weiteren Beschreibung der Deformation lassen sich neben dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  und dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  verschiedene Verzerrungsmaße definieren. Der Unterabschnitt 3.4.1 greift zur mathematischen Beschreibung der hyperelastischen Verzerrungsenergiefunktion auf diese Größen zurück. Während der rechte Cauchy-Green-Verzerrungstensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

die Deformation bezüglich der Ausgangskonfiguration beschreibt, bildet der linke Cauchy-Green-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2$$

die Deformation bezüglich der Momentankonfiguration ab. Beide Verzerrungstensoren sind symmetrisch und im Fall des undeformierten Ausgangszustand gleich dem Einheitstensor. Für die meisten ingenieurtechnischen Anwendungen ist allerdings ein Maß gewünscht, das zu Beginn der Deformation von einem Wert gleich 0 startet. Dafür eignen sich der Green-Lagrange-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$$

und der Euler-Almansi-Tensor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}),$$

die den undeformierten Zustand mit einer 0 darstellen. Aus dem linken Teil des Green-Lagrange-Tensors

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}[(\mathbf{H} + \mathbf{1})^T (\mathbf{H} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}]$$

kann der linearisierte Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

gebildet werden. Darin sind

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

die technischen Dehnungen und

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad 2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

die technischen Winkeländerungen.

### 3.1.5 Dehnungen im Hauptachsensystem

Sowohl im materiellen als auch im räumlichen Koordinatensystem existieren Hauptachsen, die einen Raum aufspannen, in dem nur Hauptdehnungen existieren. Für den orthonormalen Satz aus Eigenvektoren  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{n}$  und den jeweils zugehörigen Eigenwerten  $\Lambda_i$  des materiellen Strecktensors  $\mathbf{U}$  bzw. den Eigenwerten  $\lambda_i$  des räumlichen Strecktensors  $\mathbf{v}$  gilt:

$$\mathbf{U} \mathbf{N} = \Lambda_i \mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} \mathbf{n} = \lambda_i \mathbf{n}.$$

Die Eigenvektoren  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{n}$  werden als materielle bzw. räumliche Hauptdehnungsrichtungen oder Hauptachsen bezeichnet, die Eigenwerte  $\Lambda_i$  bzw.  $\lambda_i$  als materielle bzw. räumliche Hauptdehnungen. Dabei sind die materiellen und räumlichen Hauptdehnungen im materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  und am räumlichen Punkt  $\mathbf{x}$  identisch. Dementsprechend gilt:  $\Lambda_i = \lambda_i$ .

Für den rechten Cauchy-Green-Deformationstensor  $C$ , dem Quadrat des materiellen Strecktensors  $U$ , folgt:

$$C N = U^2 N = \lambda_i^2 N .$$

Somit entsprechen die Eigenvektoren von  $C$  den Eigenvektoren von  $U$  und dem Quadrat der Eigenwerte von  $U$  bzw.  $v$ . Mit den eingeführten Hauptdehnungen  $\lambda_i$  lassen sich die Hauptinvarianten des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors beschreiben durch

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Sp } C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 , \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\text{Sp } C)^2 - \text{Sp } (C \cdot C)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad \text{und} \\ I_3 &= \det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sowohl die Hauptinvarianten  $I_i$  als auch die Hauptdehnungen  $\lambda_i$  dienen der Formulierung des hyperelastischen Marlow-Modells in Unterabschnitt 3.4.2. Für rotationsinvariante Funktionen des Cauchy-Green-Deformationstensors besteht die Möglichkeit diese Funktionen als Funktionen der Hauptinvarianten umzuschreiben, was insbesondere hinsichtlich der physikalischen Interpretation von Vorteil ist. Die Formulierung der Hauptinvarianten lässt sich analog für den linken Cauchy-Green-Deformationstensor durchführen.

## 3.2 Spannungszustände

Das folgende Unterkapitel dient der Einführung der Spannungszustandsbeschreibung zur Einordnung in der Kontinuumsmechanik. Der allgemeine dreidimensionale Spannungszustand sowie dessen Transformation ins Hauptachsensystem führen auf die Beschreibung des hydrostatischen Spannungszustandes hin. Die dadurch formulierten Invarianten des Spannungsdeviators ermöglichen die Beschreibung von elastisch-plastischen Materialmodellen. Alternativ aufgeführte Spannungsgrößen werden zur Definition von nicht-linear hyperelastischen Modellen benötigt. Wie schon die Deformationszustände werden auch die Spannungszustände in Anlehnung an Gross u. a. [44], Holzapfel [54], Betten [15] und Brinson und Brinson [19] rezipiert.

### 3.2.1 Allgemeine dreidimensionale Beschreibung

Der Cauchysche Spannungstensor  $\sigma$  beschreibt den dreidimensionalen Spannungszustand in einem Material.  $\sigma$ , auch wahrer Spannungstensor genannt, ist durch drei aufeinander senkrecht stehende Spannungsvektoren  $t_i$  definiert. Jeder Vektor  $t$  kann in eine zur Schnittfläche senkrechte Komponente, die Normalspannung  $\sigma$ , und in eine tangentielle Komponente, die Schubspannung  $\tau$ , zerlegt werden. Stehen die Schnittflächen zudem senkrecht auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems, so zeigt Abbildung 3.2 die Komponenten des Spannungstensors in einem  $x, y, z$ -Koordinatensystem. In Matrixform wird der Tensor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

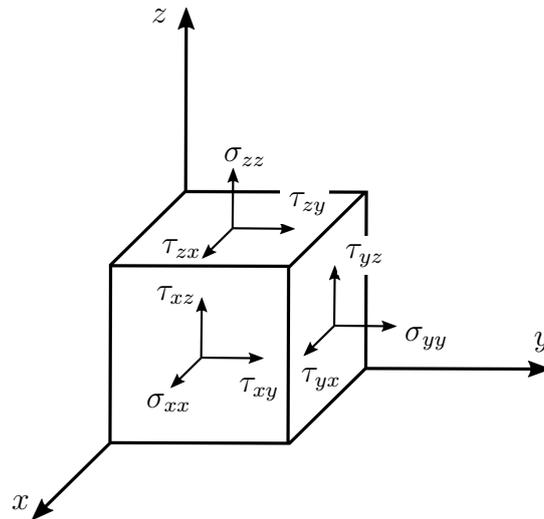


Abbildung 3.2: Kartesische Komponenten des Spannungstensors  $\sigma$

mit seinen Komponenten dargestellt, wobei die Normalspannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{zz}$  des öfteren kurz als  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  bezeichnet werden. Aufgrund des Momentengleichgewichts ist der Spannungstensor symmetrisch. Für die Schubspannungen gilt:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  und  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Die Indexnotation ermöglicht eine kompakte Schreibweise vieler Formeln. Darüber hinaus werden anstelle von  $x$ ,  $y$  und  $z$  die drei Raumrichtungen mit 1, 2 und 3 bezeichnet. In Indexnotation gilt mit Symmetrie und  $i, j = 1, 2, 3$  für den Spannungstensor

$$\sigma = [\sigma_{ij}] = [\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Die Komponenten  $\sigma_{ij}$  mit  $i = j$  bezeichnen Normalspannungen, während die Komponenten  $\sigma_{ij}$  mit  $i \neq j$  Schubspannungen sind.

### 3.2.2 Hauptspannungssystem

Der Spannungsvektor kann in ein ausgezeichnetes Koordinatensystem transformiert werden, in dem der Spannungsvektor senkrecht auf der Schnittfläche steht. In diesem Hauptspannungssystem wirken nur Normalspannungen, die deshalb hier Hauptspannungen genannt werden. Schubspannungen sind in diesem Achsensystem betragsmäßig gleich Null. Der Spannungsvektor  $t$  lässt sich durch  $t_i = \sigma n_i$  ausdrücken, wobei  $\sigma$  die entsprechende Hauptspannung und  $n_i$  den Normalenvektor darstellt. Nach der Cauchyschen Formel gilt für den Spannungsvektor allgemein  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ . Durch Gleichsetzen und Umstellen erhält man die kubische Gleichung

$$\sigma^3 - j_1 \sigma^2 - j_2 \sigma - j_3 = 0. \quad (3.6)$$

Die Lösungen von Gleichung 3.6

$$j_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$j_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad \text{und}$$

$$j_3 = \det[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Daher werden  $j_1$ ,  $j_2$  und  $j_3$  Invarianten des Spannungstensors genannt. Drei reelle Lösungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  liefern die Hauptspannungen, die in Richtung der Hauptachsen wirken und somit senkrecht aufeinander stehen. Nach der Bestimmung der Hauptachsenrichtungen und der Hauptspannungen nimmt der Spannungstensor die Diagonalform

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

an. Die drei Invarianten ergeben sich durch die Hauptspannungen zu

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ j_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad \text{und} \\ j_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Die Invarianten des Spannungstensors werden im folgenden Unterabschnitt 3.3.3 zur konstitutiven Beschreibung des Drucker-Prager-Modells angewandt.

Anhand der Hauptachsen lassen sich die maximal auftretenden Schubspannungen und die Schnittflächen berechnen, in denen sie wirken. Man erhält die Hauptschubspannungen

$$\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| \quad \text{und} \quad \tau_3 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|.$$

Dabei wirkt  $\tau_i$  in der Fläche, deren Normale senkrecht zur  $i$ -ten Hauptachse und im  $45^\circ$ -Winkel zu den anderen beiden Hauptachsen steht. Auf dieser Fläche ist die Normalspannung nicht Null. So berechnet sich die zur Hauptschubspannung  $\tau_1$  gehörende Normalspannung zu  $\sigma_{(\tau_1)} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ . Für die anderen Spannungen gilt entsprechendes. Typischerweise werden die Hauptspannungen der Größe nach geordnet, mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Der dreiachsige Spannungszustand im Kontinuum lässt sich, wie in Abbildung 3.3, durch drei Mohrsche Spannungskreise graphisch darstellen. So ergibt sich für die maximal auftretende Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Dabei liegen die möglichen Spannungszustände (Kombinationen aus  $\sigma$  und  $\tau$ ) ausschließlich in dem blauen Bereich, der von den Kreisen begrenzt ist. Die Kreise selbst sind durch die Hauptspannungen eindeutig bestimmt. Zur graphischen Erläuterung der isosensitiven Fließbedingung im elastisch-plastischen Modell werden die Mohrschen Spannungskreise in Unterabschnitt 3.3.2 herangezogen.

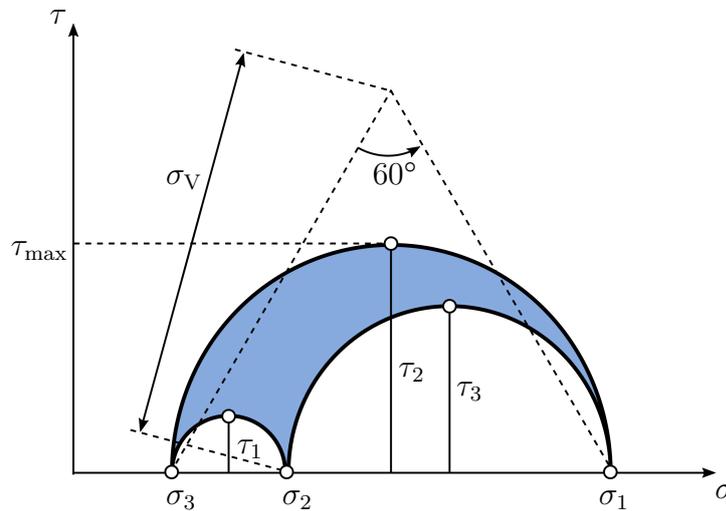


Abbildung 3.3: Graphische Darstellung eines dreiaxigen Spannungszustands anhand von drei Mohrschen Spannungskreisen

### 3.2.3 Hydrostatischer Spannungszustand

Ein hydrostatischer Spannungszustand hat die Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{kl} = \sigma_0 \delta_{kl}, \quad (3.8)$$

mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{kl}$ . Die Normalspannungen sind in diesem Spannungszustand zugleich die Hauptspannungen. Sie haben unabhängig von den Achsenrichtungen immer die Größe  $\sigma_0$ , während die Schubspannungen in jedem Fall verschwinden. Es existiert kein ausgezeichnetes Achsensystem, da hier jedes beliebige ein Hauptachsensystem darstellt. Ein Spannungszustand kann mithilfe der mittleren Normalspannung

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

zerlegt werden. Damit lässt sich der Spannungstensor umformulieren zu

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij},$$

wobei der Kugeltensor  $\sigma_m\delta_{ij}$  den hydrostatischen Spannungszustand infolge der mittleren Normalspannung  $\sigma_m$  darstellt. Die Abweichung von diesem Zustand ist durch den Spannungsdeviator  $s$  gegeben. Das Hauptachsensystem des Deviators stimmt mit dem des Tensors überein, da der hydrostatische Zustand keine ausgezeichneten Achsenrichtungen besitzt. So verfügt der Deviator über die drei Invarianten

$$J_1 = s_{ii} = (\sigma_{11} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{33} - \sigma_m) = 0,$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$J_3 = \det[s_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{vmatrix}$$

$$= s_1 s_2 s_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m).$$

Die Invarianten  $J_2$  und  $J_3$  werden unter anderem zur mathematischen Beschreibung von elastisch-plastischen Materialmodellen herangezogen. So finden sie nicht nur bei der Formulierung der Vergleichsspannung nach von Mises Anwendung in Unterabschnitt 3.3.2, sondern auch bei der Definition der Fließbedingung für das Drucker-Prager-Modell in Unterabschnitt 3.3.3.

### 3.2.4 Alternative Spannungsmaße

Neben den Cauchy-Spannungen  $\sigma$  existieren weitere Spannungsmaße, die für die Beschreibung der Hyperelastizität von Relevanz sind. Die ersten Piola-Kirchhoff-Spannungen

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

sind ausgehend von den Cauchy-Spannungen über die Jacobi-Determinante  $J$  und den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  definiert. Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ist i.d.R. unsymmetrisch und zur einen Hälfte der räumlichen und zur anderen Hälfte der materiellen Konfiguration zugeordnet. Der Tensor entspricht den technischen bzw. den nominellen Spannungen. Mit den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

lässt sich über eine Variation der ersten Piola-Kirchhoff-Spannungen ein vollständig materielles Spannungsmaß definieren. Der Tensor  $\mathbf{S}$  ist dabei symmetrisch.

Diese Spannungsmaße lassen sich mit Deformationsmaßen zu konstitutiven Beziehungen verknüpfen, so dass je nach Formulierung lineare oder nicht-lineare Materialgesetze beschrieben werden. In Unterabschnitt 3.4.1 werden mit den Piola-Kirchhoff-Spannungen die Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge hyperelastischer Materialmodelle beschrieben.

## 3.3 Elastisch-plastische Materialbeschreibung

### 3.3.1 Elastisch-plastisches Verhalten von Polymeren

Bei amorphen und teilkristallinen Polymeren kommt es unter Zugbelastung zunächst zu einer elastischen und bei erhöhter Belastung üblicherweise zu einer plastischen Deformation in Form einer lokalen Einschnürung. In diesem Bereich der Verformung können plastische, d.h. irreversible, Dehnungen von mehreren hundert Prozent auftreten. Teilkristalline Polymere beginnen die mikroskopischen Plastifizierungsprozesse schon weit unterhalb der Fließspannung. In Abbildung 3.4a bis 3.4e sind die Stadien der plastischen Verformung von teilkristallinen Thermoplasten dargestellt. Unter Zugbelastung wird die Lamellenstruktur durch die Deformation zu einer Fibrillenstruktur und es kommt zu einer Umorientierung

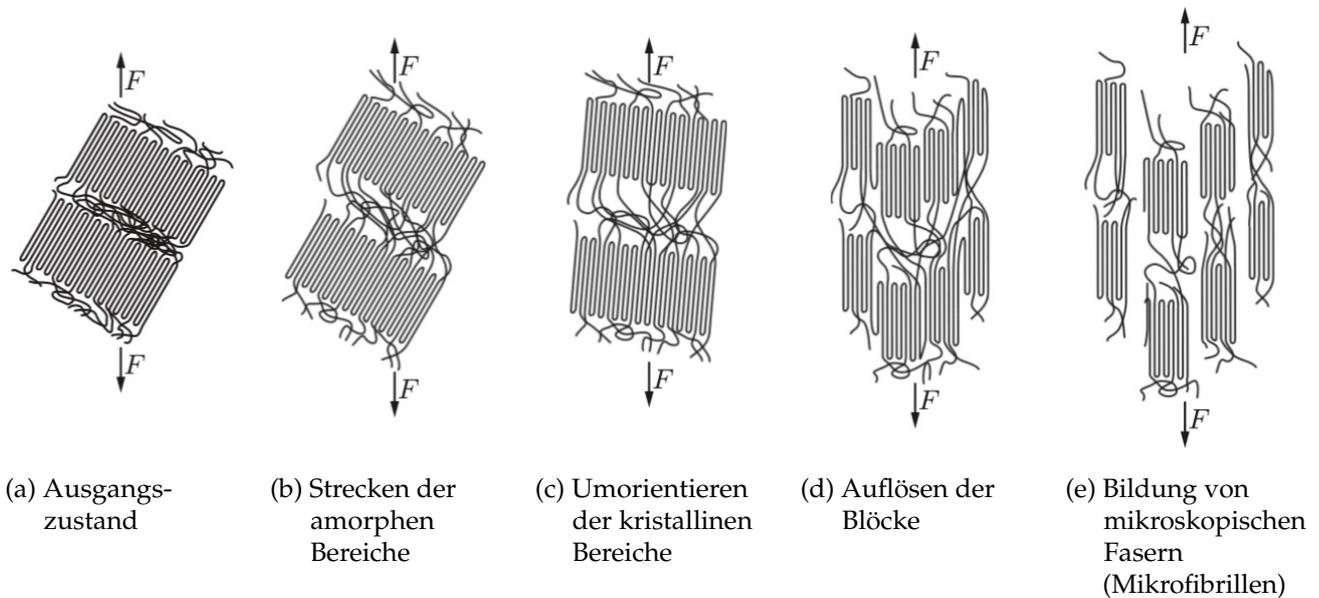


Abbildung 3.4: Stadien der plastischen Verformung von teilkristallinen Thermoplasten; nach [100]

der Makromoleküle im Belastungsrichtung. Der plastischen Verformung wirken Kräfte entgegen, die eine Verfestigung hervorrufen. Wird die Belastung weiter gesteigert, brechen die überbelasteten Makromolekülketten und es kommt zum Bruch des Materials. [100]

Da teilkristalline Polymere, wie Polyethylen, sowohl kristalline als auch amorphe Bereiche aufweisen, können sie als heterogene Materialverbunde betrachtet werden, da sich gerade die mechanischen Eigenschaften der beiden Bereiche stark unterscheiden. Durch die hohe Anzahl an Brückenmolekülen besteht bei den kristallinen Lamellen ein Zusammenhalt zwischen den Molekülketten. Dagegen wird der amorphe Bereich mit seinen Polymeren in knäueförmiger Anordnung als separate Phase betrachtet. Unter geringer Belastung dehnen sich zunächst die amorphen Bereiche. Es kann von einem rein elastischen Verhalten ausgegangen werden. Bei weiterer Belastung lösen sich die kristallinen Blöcke voneinander und bilden kleinere Segmente. Die Verlagerung des Deformationsbereichs vom amorphen in den kristallinen Bereich führt zu einer sichtbaren Verfestigung des Werkstoffs. Bei steigender Dehnung findet eine starke Zerteilung der Lamellen durch Abgleiten der Ketten statt. Die aufgeteilten kristallin-amorphen Bereiche verschieben sich in Längsrichtung. [68]

### 3.3.2 Isosensitive Fließbedingung und Verfestigungsfunktion

Elastisch-plastische Materialmodelle erlauben neben der Abbildung von elastischem auch plastisches Materialverhalten. Damit ist die Modellierung von bleibende Deformationen des Materials infolge eines Be- und Entlastungszyklus möglich. Eine Zusammensetzung aus einem elastischen und einem plastischen Materialgesetz ermöglicht eine getrennte Analyse des Spannungs- und Deformationszustandes. Wird ein Werkstoff unterhalb der Fließspannung  $\sigma_F$  belastet, treten zunächst elastische, d.h. reversible, Verformungen auf. Beim lokalen Erreichen dieser werkstoffspezifischen Fließgrenze zeigt der Werkstoff plastisches Verhalten. Oberhalb dieses Spannungszustandes beinhalten die auftretenden Gesamtdehnungen neben

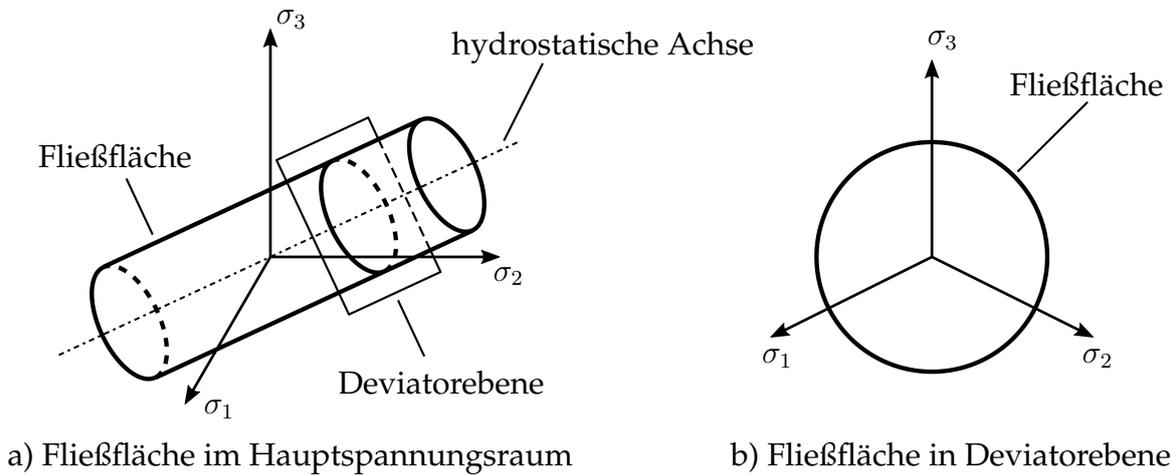


Abbildung 3.5: Fließfläche der von Mises-Plastizität im Hauptspannungsraum und in einer zur hydrostatischen Achse senkrechten Ebene

einem elastischen auch einen irreversiblen, plastischen Anteil:  $\epsilon = \epsilon^{\text{el}} + \epsilon^{\text{pl}}$ . Die Höhe der Fließspannung ist im Besonderen bei Polymeren stark abhängig von der Temperatur, dem Spannungszustand und der Belastungsgeschwindigkeit, d.h. der Dehnrates  $\dot{\epsilon}$ . [43, 55]

Bei allgemeiner Betrachtung eines dreidimensionalen Belastungszustandes reicht die Definition eines diskreten Spannungswerts, wie der Fließspannung  $\sigma_F$ , nicht aus. Eine mehrdimensionale Fließbedingung kann über die Anwendung einer Vergleichsspannungshypothese, wie z.B. der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH), definiert werden. Zur Beschreibung des Fließbeginns ist ein Ansatz die von Mises Fließbedingung. In Abbildung 3.5 a) ist qualitativ dargestellt die Fließfläche im Hauptspannungsraum, ein unendlich langer Zylinder, dessen Mittelachse mit der hydrostatischen Achse übereinstimmt. Die GEH unterliegt einer isosensitiven Fließbedingung, d.h. Fließen beginnt gleichermaßen bei betragsmäßigen identischen Zug- und Druckspannungszuständen. Dabei führen reine hydrostatische Zug- und Druckspannungszustände nicht zum Fließen des Materials. Da die Fließbedingung nur von den deviatorischen Spannungen abhängt, reicht es aus nur die Grundfläche des Zylinders zu betrachten. Projiziert man die Spannungszustände auf eine Ebene senkrecht zur hydrostatischen Spannungsachse, der Deviatorebene, so ergibt sich die in Abbildung 3.5 b) abgebildete kreisförmige Fließfläche.  $\sigma_F$  entspricht hier dem Abstand von der hydrostatischen Achse, der Vergleichsspannung nach von Mises

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_V = \sqrt{3J_2}, \quad (3.9)$$

mit den Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  sowie der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $J_2$ . Wie Abbildung 3.3 zu entnehmen ist, lässt sich  $\sigma_V$  graphisch aus dem Mohrschen Spannungskreis konstruieren. [70, 106, 111]

Unter Vernachlässigung der Dehnratenabhängigkeit, aber unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit wird die Fließbedingung wie folgt definiert:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}}, T) = \sigma_V - (\sigma_F(T) + r(\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}}, T)). \quad (3.10)$$

Dabei ist  $\sigma_V$  die von Mises Vergleichsspannung,  $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pl}}$  der plastische Anteil des Dehnungstensors,  $T$  die Temperatur,  $\sigma_F$  die Fließspannung und  $r$  die Verfestigungsfunktion. Während

die Fließgrenze den Beginn des plastischen Fließens definiert, bestimmt das ein Verfestigungsgesetz das Verhalten bei plastischem Fließen. Die gängigsten Verfestigungsgesetze bilden entweder eine ideale Plastizität, eine isotrope oder eine kinematische Verfestigung ab. Darüber hinaus existieren Erweiterungen, die material- oder belastungsspezifische Phänomene abbilden können, wie z.B. Abhängigkeiten von der Dehnrates  $\dot{\epsilon}$  oder der Temperatur  $T$ . [106, 111]

Die Verfestigungsfunktion  $r$  wird mit Hilfe von temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Daten aus uniaxialen Zugversuchen bestimmt. Die Daten werden in Form von tabellarisch zugeordneten Paaren aus wahrer Spannung

$$\sigma^{\text{wahr}} = \sigma^{\text{tech}}(1 + \epsilon^{\text{tech}}) \quad (3.11)$$

und wahrer, plastischer Dehnung

$$\epsilon^{\text{wahr,pl}} = \ln(1 + \epsilon^{\text{tech}}) - \frac{\sigma^{\text{wahr}}}{E_{\text{Zug}}} \quad (3.12)$$

herangezogen. Finite Elemente Programme, wie z.B. Abaqus, interpolieren dazwischen stückweise linear. Zwischen den verschiedenen diskreten Temperaturniveaus wird ebenso linear interpoliert. [24]

### 3.3.3 Drucker-Prager-Modell

Im Allgemeinen zeigen Kunststoffe ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes anisensitives mechanisches Verhalten. D.h. unter Druckbelastung besitzen sie eine höhere Fließgrenze und eine stärkere Verfestigung beim plastischen Fließen als unter Zugbelastung. Die Mohr-Coulomb Fließbedingung ist in der Lage eine derartige Anisensitivität abzubilden. Sie beschreibt im dreidimensionalen Spannungsraum eine pyramidenförmige Fließfläche mit der hydrostatischen Achse als Mittelachse. Aufgrund der Orientierung der sechs-seitigen Pyramide ist es im Zugbereich möglich durch einen rein hydrostatischen Spannungszustand plastisches Fließen hervorzurufen. Im Druckbereich dagegen ist dies aufgrund der unendlichen Ausdehnung der kegelförmigen Fließfläche unmöglich. [70, 111]

Eine Erweiterung des Mohr-Coulomb Modells ist das Drucker-Prager-Modell, das typischerweise für Materialien eingesetzt wird, deren Fließspannung druckseitig größer ist, wie z.B. für Stein- oder Betonwerkstoffe, aber auch für Polymere oder Verbundwerkstoffe. In seiner ursprünglichen Veröffentlichung durch Drucker und Prager [33] beschreibt es eine kegelförmige Fließfläche. Wie bei Mohr-Coulomb ist ein Eintreten der Plastifizierung durch hydrostatischen Druck möglich.

Heute bestehen zahlreiche Modifikationen, wie z.B. durch Alejano und Bobet [2], Batra u. a. [10] und Seltzer u. a. [108]. Eine Modifikation beinhaltet zugseitig eine Fortführung des Kegels durch eine zylinderförmige Fließfläche, die ein Fließen aufgrund reinem hydrostatischem Druck verhindert. Zur Beschreibung des Fließbeginns dieser Variation der von Mises Fließbedingung dient

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T) = \frac{1}{2}\sigma_{\text{V}} \left[ 1 + \frac{1}{K} - \frac{J_3}{\sigma_{\text{V}}^3} \cdot \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right] + \frac{1}{3}j_1 \tan \beta - \left( 1 - \frac{1}{3} \tan \beta \right) \sigma_{\text{F,Druck}} = 0 . \quad (3.13)$$

Dabei ist die Vergleichsspannung nach von Mises  $\sigma_V = \sqrt{3J_2}$ , die dritte Invariante des Spannungsdeviators  $J_3$  und die erste Invariante des Spannungstensors  $j_1$ . Das Verhältnis aus Zug- und Druckfließspannung wird durch

$$K = \frac{\sigma_{F,Zug}}{\sigma_{F,Druck}}$$

gegeben. Der Tangens des Reibungswinkels  $\beta$  beschreibt die Drucksensitivität

$$\tan \beta = 3 \frac{1 - K}{1 + K} \quad (3.14)$$

und der Ausdruck

$$\left(1 - \frac{1}{3} \tan \beta\right) \sigma_{F,Druck}$$

die Kohäsion des modellierten Materials, mit der Fließgrenze unter Druckbelastung  $\sigma_{F,Druck}$ .

Wegen der Temperaturabhängigkeit des gesamten mechanischen Verhaltens von Kunststoffen, wie der Fließgrenzen unter Zug  $\sigma_{F,Zug}$  und unter Druck  $\sigma_{F,Druck}$ , ist eine Abhängigkeit der Parameter  $K$  und  $\beta$  und damit der Fließbedingung  $f$  von  $T$  zu erwarten. Für  $f < 0$  ist das Materialverhalten linear elastisch und somit durch das Hookesche Gesetz dargestellt. Für  $f \geq 0$  ist das Materialverhalten plastisch. In diesem Fall wird die Materialantwort gemäß des aus experimentellen Daten gewonnenen Verfestigungsgesetzes berechnet, wobei das Fließpotential  $P$  bestimmt wird durch

$$P = \frac{1}{2} \sigma_V \left[ 1 + \frac{1}{K} - \frac{J_3}{\sigma_V^3} \cdot \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right] + \frac{1}{3} j_1 \tan \psi. \quad (3.15)$$

Hier wird der Dilatationswinkel  $\psi$  eingeführt. Dieser Materialparameter wird mit Hilfe experimenteller Daten aus Zug- und Drucktests berechnet durch

$$\tan \psi = \frac{3(1 - 2\nu^{pl})}{2(1 + \nu^{pl})}, \quad (3.16)$$

mit der plastischen Querkontraktionszahl

$$\nu^{pl} = \frac{\varepsilon_{quer}^{pl}}{\varepsilon^{pl}},$$

mit der plastischen Dehnung  $\varepsilon^{pl}$  und der plastischen Komponente der Querdehnung  $\varepsilon_{quer}^{pl}$ . [84]

## 3.4 Hyperelastische Materialbeschreibung

### 3.4.1 Verzerrungsenergiefunktion von Polymeren

Für viele Materialien, so auch für Polymere, wird die Existenz einer Verzerrungsenergiefunktion (VEF) angenommen, die die gespeicherte elastische Energie pro Volumen angibt.

Anhand einer solchen Funktion, die auch elastisches Potential oder Funktion der gespeicherten Energie genannt wird, lässt sich für das zu modellierende Material eine konstitutive Beziehung herleiten. Besonders für Materialien, die einen hohen Anteil der Deformation in elastische Energie umsetzen, macht die Definition einer VEF Sinn, um eine geeignete Konstitutivgleichung zu bestimmen. [14, 54]

Materialien, deren Deformationen rein oder vorwiegend reversibel sind, d.h. elastisch, werden als hyperelastische Materialien bezeichnet. Für sie kann eine VEF definiert werden, die aufgrund des elastischen Verhaltens nur vom aktuellen Deformationszustand abhängt. Unter Vernachlässigung thermischer Problemstellungen und bei Betrachtung des rein mechanischen, isothermen Falles, stimmt die Verzerrungsenergie mit der inneren Energie überein. [14, 54]

Im Wesentlichen werden bei der Bestimmung einer VEF die folgenden zwei Ansätze verfolgt: Der statistische Ansatz ist ein sogenannter Bottom-up Ansatz. Ausgehend von der molekularen Struktur eines Materials dient das physikalisch begründete Modell als Grundlage für die Definition der VEF. Der Top-down Ansatz formuliert über das makroskopische Verformungsverhalten eine VEF, die das mechanische Materialverhalten möglichst genau abbildet. Dies wird als phänomenologischer Ansatz bezeichnet. Unabhängig vom Ansatz ist die Wahl einer Funktion frei, solange die Funktion das Kriterium der Objektivität erfüllt. So darf zur Bestimmung der VEF eines hyperelastischen Materials der Deformationszustand nur einen Streckanteil  $\mathbf{U}$  beinhalten und nicht vom Rotationsanteil  $\mathbf{R}$  abhängen. [14, 54]

Die VEF wird meist als Funktion des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{C}$  und nicht als direkte Funktion des Strecktensors  $\mathbf{U}$  definiert, um die aufwändigere Bestimmung des Strecktensors zu umgehen. Für isotrope Materialien ist die VEF rotationsinvariant und kann als Funktion von  $\mathbf{C}$  definiert werden. Die Verzerrungsenergiefunktion

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1, I_2, I_3) , \quad (3.17)$$

ist durch die Hauptinvarianten von  $\mathbf{C}$  aus Gleichung 3.3 bestimmt. [14, 54]

Eine Zerlegung der VEF in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil ermöglicht eine übersichtlichere Beschreibung des unterschiedlichen Verhaltens bei volumetrischer und isochorer Deformation. Die Zerlegung erfolgt gemäß

$$\Psi = \Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) + \Psi_{\text{vol}}(J) ,$$

mit dem volumetrischen Anteil  $\Psi_{\text{vol}}$  als Funktion der Determinante des Deformationsgradienten  $J$  und dem isochoren Anteil  $\Psi_{\text{iso}}$  als Funktion des modifizierten Cauchy-Green-Deformationstensors  $\bar{\mathbf{C}}$ . Der modifizierte Cauchy-Green-Deformationstensor ergibt sich aus dem isochoren Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_{\text{iso}}$  und berechnet sich über

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{F}_{\text{iso}}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{iso}} = \left( J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \right)^T \cdot \left( J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \right) = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} .$$

Der isochore Anteil der VEF wird analog zur Definition in Gleichung (3.17) über die Hauptinvarianten des modifizierten Cauchy-Green-Deformationstensors beschrieben:

$$\Psi(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) . \quad (3.18)$$

Dabei gilt für die modifizierten Hauptinvarianten

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \text{Sp } \bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} I_1, \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\text{Sp } \bar{\mathbf{C}})^2 - \text{Sp}(\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}}) \right] = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad \text{und} \\ \bar{I}_3 &= \det \bar{\mathbf{C}} = 1.\end{aligned}$$

Durch die Zerlegung in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil ist sowohl die VEF als auch die daraus resultierende Spannungsantwort des Materialmodells vom isochoren und volumetrischen Deformationsanteil entkoppelt. Damit ergeben sich Materialparameter, die eindeutig einem der beiden Deformationsanteile zugeordnet werden können. [14, 54]

Neben der Darstellung als Funktion der Hauptinvarianten, kann die VEF auch als Funktion der Hauptdehnungen beschrieben werden. Bei einer Zerlegung in isochoren und volumetrischen Anteil werden analog die modifizierten Hauptdehnungen

$$\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i$$

verwendet, die sich aus den Hauptdehnungen  $\lambda_i$  berechnen lassen. [54]

Mittels partieller Differentiation nach dem Cauchy-Green Deformationstensor und entsprechender Transformation über den Deformationsgradienten lässt sich die Spannungsantwort als Funktion des Cauchy-Green Deformationstensors angeben. Die Cauchy Spannungen und die ersten und zweiten Piola-Kirchhoff Spannungen ergeben sich zu

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{P} = 2\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}.$$

Anhand der Spannungsantworten lässt sich der materielle Elastizitätstensor  $\mathbf{C}_{\text{mat}}$  bestimmen. Dieser verbindet über

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_{\text{mat}} \Delta \mathbf{E}$$

eine inkrementelle Änderung der zweiten Piola-Kirchhoff Spannungen  $\Delta \mathbf{S}$  mit einer inkrementellen Änderung der Green-Lagrange Verzerrungen  $\Delta \mathbf{E}$ . Somit stellt  $\mathbf{C}_{\text{mat}}$  die momentane Steifigkeit des Materials dar und lässt sich über

$$\mathbf{C}_{\text{mat}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$$

aus der VEF bzw. aus den eingeführten Spannungsmaßen berechnen. Eine gleichwertige Alternative zur Differentiation nach dem Cauchy-Green Deformationstensor ist die Differentiation nach den Hauptdehnungen. [14, 54]

### 3.4.2 Marlow-Modell

Aus der Unterteilung der Verzerrungsenergiefunktion in einen isochoren und in einen volumetrischen Anteil, folgt dass die Beschreibung des kompressiblen Verformungsverhaltens allein durch den volumetrischen Anteil stattfindet. Ein Teil der gebräuchlichen hyperelastischen Materialmodelle verfolgt die Idee einer VEF, die unabhängig von der zweiten Invariante  $I_2$  ist. Wird jedoch nur die erste Invariante  $I_1$  berücksichtigt, so lässt sich nach Gough u. a.

[42] das Materialverhalten durch einen einzigen Test vollständig beschreiben. Das Materialmodell reproduziert bis auf die Interpolation zwischen zwei Datenpunkten exakt die tabellarisch implementierten Testdaten. Auf der Grundlage basiert das in Abaqus implementierte hyperelastische Materialmodell nach Marlow [73], das keine direkte physikalische Verbindung zu den Verformungsmechanismen besitzt, sondern die makroskopisch gegebene Spannungs-Dehnungs-Beziehung mathematisch möglichst genau abbildet. [24, 58]

Als Grundlage zur Beschreibung der Deformationen in einem uniaxialen Zugversuch dient Abschnitt 3.1. Im Versuch wird die Last entlang der Längsachse eines homogenen Probekörpers aufgebracht. Diese Hauptachse soll hier als 1-Richtung bezeichnet werden. Im Messbereich liegt ein einachsiger Spannungszustand vor und in Belastungsrichtung ergibt sich eine Hauptdehnung  $\lambda_1$ . Die von Null verschiedene Poissonzahl ruft eine äquivalente Querkontraktionen entlang der beiden anderen Hauptachsen, hier als 2- und 3-Richtung bezeichnet, hervor. Unter der Annahme der Inkompressibilität gilt für die dritte Invariante im isothermen Fall

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 .$$

Da die Querkontraktionen gemäß des experimentellen Aufbaus nicht behindert werden, folgt für die Hauptdehnungen

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} .$$

Anhand dieser Beziehung und unter Zuhilfenahme von Gleichung 3.3 lassen sich die erste Invariante

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{2}{\lambda_1} + \lambda_1^2 \quad (3.19)$$

und zweite Invariante

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = 2\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1^2}$$

als Funktion der ersten Hauptdehnung beschreiben. Diese kontinuumsmechanischen Beschreibungen dienen der Definition des Marlow-Modells. [54, 58]

Die erste Invariante  $I_1$  besitzt den Minimalwert 3, der gerade dann auftritt, wenn die Hauptdehnung  $\lambda_1$  den Betrag von 1 annimmt. Bei steigender Streckung  $\lambda_1$  von 1 bis  $+\infty$ , ist  $I_1$  monoton steigend von 3 bis  $+\infty$ . Folglich lässt sich jeder Streckung  $\lambda_1$  ein eindeutiger Wert der ersten Invariante zuordnen. Damit ist die erste Invariante vollständig bestimmt. Hängt nun die VEF nur von der ersten Invariante ab, so lässt sich die Funktion mit den Testdaten eines einzigen uniaxialen Versuchs eindeutig bestimmen. [73]

Die VEF ergibt sich aus der Spannungs-Dehnungs-Kurve des Materialtests  $\sigma(\varepsilon)$  durch Integration über die Dehnung. Es ergibt sich

$$\Psi_{\text{iso}}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon .$$

Über den Zusammenhang zwischen uniaxialer Dehnung  $\varepsilon$  und uniaxialer Streckung  $\lambda$

$$\varepsilon = \lambda_1(\bar{I}_1) - 1 ,$$

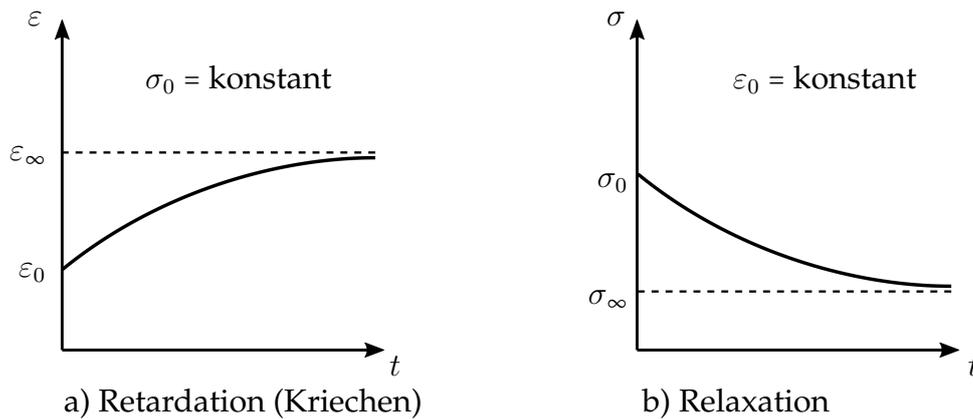


Abbildung 3.6: Zeitliche Darstellung der Retardationsfunktion und Relaxationsfunktion

wobei  $\bar{I}_1$  nur den isochoren Anteil von  $I_1$  enthält, ergibt sich die VEF des Marlow-Modells mit Testdaten  $\sigma(\varepsilon)$  aus einem uniaxialen Zugversuch zu

$$\Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1) = \int_0^{\lambda_1(\bar{I}_1)-1} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon .$$

Somit kann die VEF bis zu einem beliebig definierten Streckwert  $\lambda_1$  bestimmt werden, wobei das Materialverhalten gemäß der Testdaten bis zum maximal auftretenden Streckwert reproduziert wird. [73]

Die Beschreibung von kompressiblen Materialien wird beim Marlow-Modell durch die Aufteilung der VEF in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil ermöglicht. Durch die Zerlegung ergibt sich der Ausdruck

$$\Psi(\bar{I}_1, I_3) = \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi_{\text{vol}}(I_3) .$$

$\bar{I}_1$  lässt sich aus Gleichung 3.19 mit  $\bar{\lambda}_1 = I_3^{-\frac{1}{3}} \lambda_1$  berechnen.  $I_3$  ist die dritte Invariante des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors. [24]

## 3.5 Viskoelastische Materialbeschreibung

### 3.5.1 Retardation und Relaxation

Bei vielen Werkstoffen, so auch bei Polymeren, besteht im Allgemeinen eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Zeit- und Temperaturabhängigkeit in deren mechanischem Verhalten. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung lässt sich durch eine Kombination aus viskosen und aus elastischen Phänomenen beschreiben.

Bei Thermoplasten lässt sich dieses Verhalten bereits bei niedrigen Temperaturen beobachten, wenngleich es mit steigender Temperatur deutlich ausgeprägter in Erscheinung tritt. Ebenso nehmen die viskoelastischen Effekte mit steigender Belastung und Zeit zu. Diese Zeitabhängigkeit der Polymer-Werkstoffe liegt in ihrer Molekülstruktur begründet. Sie ist zu unterscheiden von anderen Zeiteinflüssen, wie metallischer Ermüdung oder Korrosion.

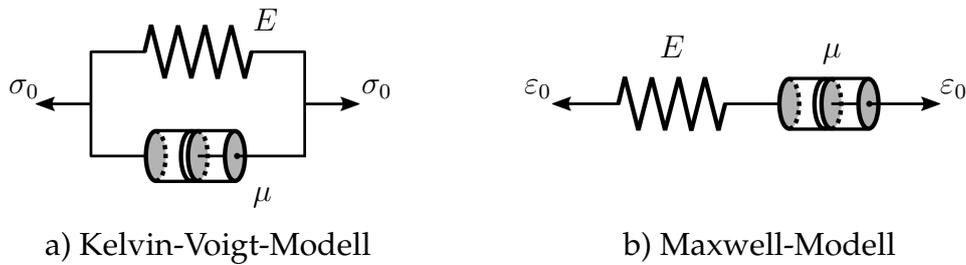


Abbildung 3.7: Anordnungen der Feder und Dämpferelemente für das Kelvin-Voigt-Modell und das Maxwell-Modell

Wird einem Polymer-Werkstoff eine konstante Last  $\sigma_0$  aufgebracht, erfährt dieser zunächst eine Initial-Dehnung  $\varepsilon_0$ . Der Kunststoff beginnt zu Kriechen und die Dehnung  $\varepsilon$  nimmt zu (Retardation) und nähert sich dem Grenzwert  $\varepsilon_\infty$  asymptotisch an, wie in Abbildung 3.6 a) dargestellt. Die Konstitutivgleichung für das Kriechen, die Retardationsfunktion

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) \quad (3.20)$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf der Dehnung  $\varepsilon(t)$  bei konstanter Spannung  $\sigma_0$  mit der Nachgiebigkeit  $D(t)$ . Der Wert  $D_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  heißt Initial-Nachgiebigkeit. Nähert sich die Retardationsfunktion dem Grenzwert  $\varepsilon_\infty$ , besitzt dort der Werkstoff die Gleichgewichtsnachgiebigkeit  $D_\infty$ .

Wird der Werkstoff dagegen mit einer konstanten Dehnung  $\varepsilon_0$  belastet, wird nach sprunghaftem Erreichen der Initial-Spannung  $\sigma_0$  ein Absinken der Spannung beobachtet (Relaxation). Wie in Abbildung 3.6 b) zu sehen, nähert sich die Spannung  $\sigma(t)$  dem Wert  $\sigma_\infty$  an. Die Relaxationsfunktion

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) \quad (3.21)$$

gibt die Verknüpfung der zeitlich veränderlichen Spannung  $\sigma(t)$  bei konstanter Dehnung  $\varepsilon_0$  mit dem Relaxationsmodul  $E(t)$  wieder. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Begriffe Elastizitätsmodul, Relaxationsmodul oder die Kurzform Modul gleichbedeutend sind und wechselnd verwendet werden.  $E_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  nennt sich Initial-Modul, der Grenzwert  $E_\infty$  dagegen Gleichgewichts-Modul.

Zur Untersuchung dieser beiden viskoelastischen Phänomene existieren auf Polymere angepasste Testverfahren. Mit Kriech- bzw. Relaxationstests lassen sich Zeit-, Temperatur- und Belastungsabhängigkeit der werkstoffspezifischen Eigenschaften untersuchen. [43, 105]

### 3.5.2 Modellrheologie

Es existieren Modelle, die das Verformungs- und Fließverhalten von Materialien beschreiben können. Mithilfe einer geeigneten Verschaltung von Feder- und Dämpferelementen lassen sich gleichzeitig elastische und viskose Eigenschaften abbilden. Die beiden Grundelemente, das Kelvin-Voigt-Modell und das Maxwell-Modell, zu sehen in Abbildung 3.7, sind in der Lage Retardation und Relaxation anschaulich zu beschreiben.

Die Parallelschaltung einer Feder der Steifigkeit  $E$  und einem Dämpfer der Viskosität  $\mu$  eignet sich zur Darstellung der Retardation. Unter der konstanten Last  $\sigma_0$  erfahren beide Elemente eine gleich große Dehnung  $\varepsilon$ . Die Spannung

$$\sigma_0 = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon}$$

setzt sich aus der Summe der beiden Einzelspannungen von Feder (Hookescher Körper) und Dämpfer (Newtonscher Körper) zusammen. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, liefert mit Gleichung 3.20 für die Nachgiebigkeit

$$D(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\tau}),$$

mit der konstanten Relaxationszeit  $\tau = \mu/E$ . Der Kelvin-Voigt-Körper besitzt ein flüssigartiges Anfangsverhalten und ein festkörperartiges Endverhalten. Da die Dehnung  $\varepsilon$  einem Grenzwert entgegen strebt, (Gleichgewichts-Nachgiebigkeit  $D_\infty = 1/E$ ), beschreibt das Kelvin-Voigt-Modell im Wesentlichen einen Festkörper.

Entsprechend spiegelt das Maxwell-Modell das Verhalten der Relaxation wider. Die Reihenschaltung von Feder- und Dämpferelement erfährt bei konstanter Dehnungslast  $\varepsilon_0$  eine Spannung  $\sigma$ . Die erste Ableitung der Dehnung nach der Zeit

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0$$

setzt sich aus der elastischen Dehnrates und der viskosen Dehnrates zusammen und ist gleich Null, vorausgesetzt, dass  $\varepsilon_0$  konstant bleibt. Unter der Anfangsbedingung  $\sigma(t = 0) = E \varepsilon_0$  ergibt die allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung mit Gleichung 3.21 für den Relaxationsmodul

$$E(t) = E e^{-t/\tau},$$

mit der Relaxationszeit  $\tau = \mu/E$ . Das festkörperartige Anfangsverhalten des Maxwell-Körpers bestimmt die Anfangsnachgiebigkeit zu  $D(t = 0) = 1/E$ . Aufgrund des flüssigkeitsartigen Endverhaltens spricht man beim Maxwell-Modell im Westlichen von einer Flüssigkeit.

### 3.5.3 Prony-Reihen-Entwicklung

Beide rheologische Modellansätze geben das Materialverhalten qualitativ wieder, sind jedoch limitiert in ihrer Möglichkeit die reale Spannungs-Dehnungs-Antwort eines Polymerwerkstoffs wiederzugeben. Für eine realitätsnahe Beschreibung ist ein mathematisch vielschichtigeres Modell nötig, so z.B. ein viskoelastisches Konstitutivgesetz für alle Zeitbereiche. Auch mit der Temperatur, beispielsweise am Glasübergangspunkt  $T_G$ , können sich Gesetzmäßigkeiten ändern. Reihen- bzw. Parallelschaltungen mehrerer Feder-Dämpfer-Elemente sind in der Lage das viskoelastische Verhalten von Polymeren sehr gut abzubilden. Neben Drei- und Vierparametermodellen lässt sich das Prinzip auf eine beliebig große Zahl an Elementen verallgemeinern. Diese Schaltungen werden als diskrete Spektren bezeichnet. [99]

Üblicherweise wird das in Abbildung 3.8 dargestellte Wiechert-Modell, eine Parallelschaltung von  $n$  Maxwell-Modellen und einer Feder, für die Simulation des Relaxationsverhalten verwendet. Der Relaxationsmodul des Gesamtsystems resultiert zu

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i}, \tag{3.22}$$

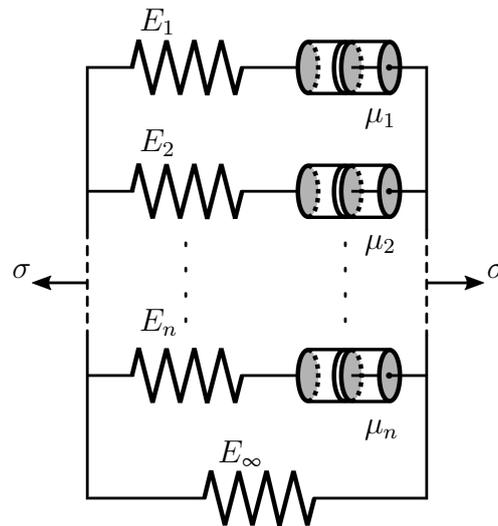


Abbildung 3.8: Wiechert-Modell

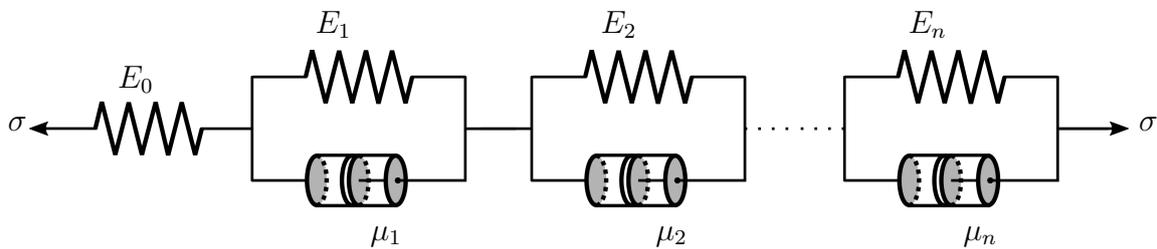


Abbildung 3.9: Verallgemeinerter Kelvin-Voigt-Festkörper

mit dem Langzeit-Relaxationsmodul  $E_\infty$ , den Relaxationsmoduln der Federn  $E_i$  und den Relaxationszeiten  $\tau_i$ .

In ähnlicher Art und Weise sind die  $n$  Elemente beim verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Modell in Reihe mit einer Feder der Steifigkeit  $E_0$  geschaltet (siehe Abbildung 3.9). Die Nachgiebigkeit zur Abbildung des Retardationsverhalten ergibt sich zu

$$D(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}), \quad (3.23)$$

mit dem Initial-Modul  $E_0$ , den Federmoduln  $E_i$  und den Relaxationszeiten  $\tau_i$ .

Mithilfe dieser verallgemeinerten Modelle lassen sich komplexe Materialeigenschaften besser approximieren. Die Darstellung aus Gleichungen 3.22 und 3.23 werden als Prony-Reihe bezeichnet. Ein Nachteil gegenüber den einfachen Modellen ist die steigende Anzahl der zu bestimmenden Parameter zur vollständigen Beschreibung. Dennoch lassen sich die Feder-Dämpfer-Elemente der Prony-Reihen eindeutig bestimmen, durch Wertepaare der Relaxationszeiten  $\tau_i$  mit den Steifigkeiten  $E_i$  bzw. der Retardationszeiten  $\varrho_i$  mit den Nachgiebigkeiten  $D_i$ . Kontinuierliche Spektren mit einer Verteilungsfunktion können ebenso zur Abbildung des Materialverhaltens verwendet werden. Jedoch eignen sich diese Spektren nur bedingt für die numerischen Lösungsverfahren, die im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden sollen. Dafür sei auf weiterführende Literatur, auf beispielsweise Lion [69] und auf Ranz [99], verwiesen.

### 3.5.4 Boltzmannsches Superpositionsprinzip

Das sogenannte Boltzmannsche Superpositionsprinzip beschreibt den Einfluss der mechanischen Vorgeschichte des Werkstoffes auf dessen lineares viskoelastisches Verhalten. Dabei gilt, dass bei konstanter Temperatur die Summe aus beliebigen zeitabhängigen Spannungsfunktionen  $\sigma_i(t)$ , die jeweils einzeln die Verformungen  $\varepsilon_i(t)$  hervorrufen, auch die Summe der Spannungen  $\sum \sigma_i(t)$  die Verformung  $\sum \varepsilon_i(t)$  bewirkt. [43]

Für differentiell kleine Dehnraten  $\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}$  lässt sich aus diesem Prinzip der folgende Zusammenhang zur Berechnung der Spannung herleiten

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.24)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E(t - \tau)$ . Das Integral beschreibt nicht nur das unmittelbare Verhalten zu jeder Zeit  $t$ , sondern auch die akkumulierte Belastungsgeschichte, die im Material gespeichert ist. Dafür wird im Englischen der Begriff *hereditary integral* verwendet. Für differentiell kleine Spannungsänderungen  $\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}$  lässt sich entsprechend das Faltungsintegral für die Dehnung aufstellen

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.25)$$

mit der Nachgiebigkeit  $D(t - \tau)$ . Die beiden Integrale der Gleichungen 3.24 und 3.25 werden auch Boltzmannsche Superpositionsintegrale genannt. Die untere Grenze der Integrale ist als  $t = 0^-$  zu verstehen, beinhaltet also auch den sprunghaften Anstieg für  $\sigma$  und  $\varepsilon$  als Dirac-Funktion. Genau genommen beginnt die Integration bei  $-\infty$ , um die gesamte konstitutive Vorgeschichte des Materials zu erfassen. Doch wird in der Regel davon ausgegangen, dass im Werkstoff keine Belastung gespeichert ist oder durch Auslagerung ausreichend beseitigt wurde. [17, 43, 46]

### 3.5.5 Beziehung zwischen Nachgiebigkeit und Relaxationsmodul

Nach dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip wird das linear viskoelastische Konstitutivverhalten eines Materials durch die Verknüpfung der Spannung  $\sigma$  mit der Dehnung  $\varepsilon$  über den Relaxationsmodul  $E$  bzw. die Nachgiebigkeit  $D$  beschrieben. Abhängig vom Material ist die experimentelle Bestimmung dieser Größen mit unterschiedlichem Aufwand verbunden. So ist beispielsweise ein Kriechversuch mit statischer Last in der Regel einfacher durchzuführen, als ein Relaxationsversuch. [91] Wenn Materialkarten aus einer vorhandenen Datenbank nur eine Beschreibungsmethode enthalten, wird eine Umrechnung der Größen ineinander notwendig. Im Allgemeinen gilt die einfache reziproke Beziehung

$$E(t) \neq \frac{1}{D(t)}$$

nicht, sondern kann nur für sehr kleine Dehnungen oder quasi-elastische Materialien mit geringem viskoelastischem Einfluss verwendet werden. [90] Stattdessen findet die aus dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip folgende Gleichung

$$\int_0^t E(t - \tau) D(\tau) d\tau = t$$

für  $t > 0$  Anwendung. Umformuliert in eine für die spätere Anwendung passendere Form:

$$\int_0^t E(t-\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau = 1. \quad (3.26)$$

Für die integrale Formulierung von  $E(t)$  und  $D(t)$  existieren unter anderem analytische und damit exakte Lösungsansätze von Ferry [39], jedoch müssen diese für jede Problemstellung neu aufgestellt und gelöst werden. Daher werden Näherungsansätze herangezogen, wie numerische Integrationsmethoden oder die Beschreibung als Potenzfunktion oder Wechselbeziehungen, wie nach Christensen [21] und Denby [25]. Eine weitere und sehr verbreitete Möglichkeit ist die bereits vorgestellte Darstellung als Prony-Reihe, manchmal auch Dirichlet-Reihe genannt

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i e^{-(t/\tau_i)} \quad \text{bzw.} \quad D(t) = D_0 + \sum_{j=1}^n D_j (1 - e^{-(t/\varrho_j)}), \quad (3.27)$$

mit dem Gleichgewichts-Modul  $E_\infty$ , den Relaxationsmoduln  $E_i$  und den Relaxationszeiten  $\tau_i$  sowie der Initial-Nachgiebigkeit  $D_0$ , den Einzelnachgiebigkeiten der Prony-Elemente  $D_j$  und den Retardationszeiten  $\varrho_j$ . Wobei die Retardationszeiten  $\varrho_j$  in der Regel gleich den Relaxationszeiten  $\tau_i$  gesetzt werden können.

Über die Anzahl der Prony-Elemente  $m$  bzw.  $n$  lässt sich die Genauigkeit der Approximation steuern. Eine anschließende numerische Umrechnung ist exakt möglich, wie von Park und Schapery [91] beschrieben. Auf den für diese Arbeit relevanten Teil der Umformung wird folgend für ein Wiechert-Element mit einem Langzeit-Relaxationsmodul  $E_\infty > 0$  und, falls es um einen Dämpfer erweitert wurde, der Initial-Viskosität  $\mu_0 \rightarrow \infty$  genauer eingegangen. Durch die mit  $s$  multiplizierte Laplace-Transformation, auch Carson-Transformation genannt, seien die Bildfunktionen von  $E(t)$  bzw.  $D(t)$  definiert als

$$\tilde{E}(s) \equiv s \int_0^\infty E(t) e^{-st} dt \quad \text{bzw.} \quad \tilde{D}(s) \equiv s \int_0^\infty D(t) e^{-st} dt.$$

Zusammen mit Gleichung 3.26 und dem Faltungssatz folgt der reziproke Zusammenhang

$$\tilde{E}(s) = \frac{1}{\tilde{D}(s)}. \quad (3.28)$$

Im Gegensatz zum reellen Zeitbereich gilt dieser Zusammenhang im Bildbereich uneingeschränkt. Setzt man dort die Laplace-Transformationen der Prony-Reihen

$$\tilde{E}(s) = E_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{s\tau_i E_i}{s\tau_i + 1} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{D}(s) = D_0 + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s\varrho_j + 1} \quad (3.29)$$

ein, so erhält man lineare Gleichungssysteme der Form

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{B}\} \quad \text{und} \quad [\mathbf{Y}] \{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{Z}\}$$

oder in Indexschreibweise

$$A_{kj} D_j = B_k \quad \text{und} \quad Y_{ki} E_i = Z_k,$$

mit den Nachgiebigkeiten  $D_j$  und den Relaxationsmoduln  $E_i$  sowie den Koeffizienten

$$A_{kj} = \frac{1}{s_k \varrho_j + 1} \quad \text{und} \quad B_k = \frac{1}{E_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{s_k \tau_i E_i}{s_k \tau_i + 1}} - D_0 \quad (3.30)$$

$$Y_{ki} = \frac{s_k \tau_i}{s_k \tau_i + 1} \quad \text{und} \quad Z_k = \frac{1}{D_0 + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s_k \varrho_j + 1}} - E_\infty . \quad (3.31)$$

Für die Transformationsvariable  $s$  gilt, dass sie diskrete Werte für  $k = 1, \dots, p$  annimmt, an denen Gleichung 3.28 erfüllt ist:

$$s \rightarrow s_k = \frac{1}{t_k} .$$

Weiter lassen sich mit den Grenzwertsätzen der Laplacetransformation die Anfangsnachgiebigkeit  $D_0$  und das Langzeit-Relaxationsmodul  $E_\infty$  durch

$$D_0 \equiv \lim_{t \rightarrow 0} D(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{D}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{E}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} E(t)} = \frac{1}{E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i}$$

$$E_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{E}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{D}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)} = \frac{1}{D_0 + \sum_{j=1}^n D_j}$$

beschreiben. Durch einsetzen in Gleichung 3.30 und Gleichung 3.31 ein, erhält man für die Koeffizienten

$$A_{kj} = \left( E_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{s_k \tau_i E_i}{s_k \tau_i + 1} \right) \left( \frac{1}{s_k \varrho_j + 1} \right)$$

$$B_k = 1 - \left( E_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{s_k \tau_i E_i}{s_k \tau_i + 1} \right) \left( E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i \right)^{-1}$$

und

$$Y_{ki} = \left( D_0 + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s_k \varrho_j + 1} \right) \left( \frac{s_k \tau_i}{s_k \tau_i + 1} \right)$$

$$Z_k = 1 - \left( D_0 + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s_k \varrho_j + 1} \right) \left( D_0 + \sum_{j=1}^n D_j \right)^{-1}$$

Damit lassen sich mit einem Satz von Konstanten der Prony-Reihe ( $\tau_i, E_i, E_\infty$  oder  $\varrho_j, D_j, D_0$ ), durch einfaches Lösen des linearen Gleichungssystems,  $E(t)$  und  $D(t)$  ineinander umrechnen.

### 3.5.6 Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip

Sowohl das Relaxations- als auch das Kriechverhalten von Polymeren hängen von verschiedenen Arten molekularer Bewegungsvorgänge ab, die bei höheren Temperaturen beschleunigt

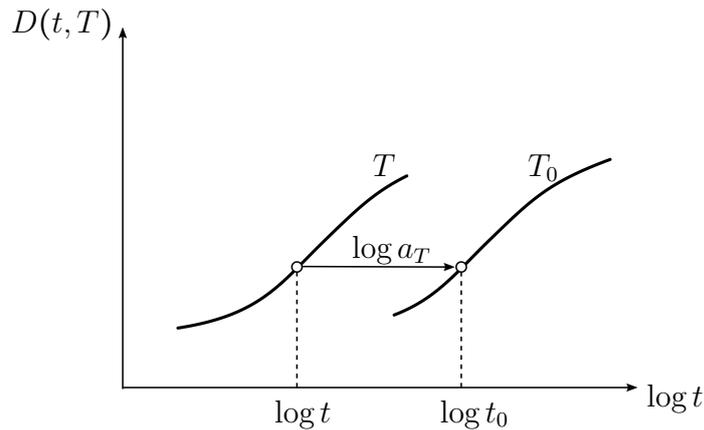


Abbildung 3.10: Zeit-Temperatur-Verschiebung der Nachgiebigkeit  $D(t, T)$

auftreten. Grund dafür ist die thermische Aktivierbarkeit der molekularen Bewegungs- und Umlagerungsprozesse. So sind der Relaxationsmodul  $E(t)$  und die Nachgiebigkeit  $D(t)$  nicht nur als Funktion der Zeit, sondern auch als Funktion der Temperatur zu betrachten. Relaxations- und Retardationszeitspektren verschieben sich hin zu kürzeren Zeiten. [17, 43]

Erfahren Materialien lediglich eine temperaturabhängige Geschwindigkeitsänderung der Prozessabläufe, so werden diese als thermo-rheologisch einfache Werkstoffe bezeichnet und weisen eine Verschiebung ihrer zeitlichen Lage entsprechend der Temperatur auf. Ändern sich in Abhängigkeit von der Temperatur weder Art noch Anzahl der molekularen Prozesse, so bleiben die Form der isothermen Relaxations- und Kriechspektren und die damit verbundenen Materialfunktionen entlang der logarithmischen Zeitachse erhalten. Eine Erhöhung der Temperatur bewirkt somit eine Verschiebung des Spektrums zu höheren Zeiten. Diese Zeit-Temperatur-Äquivalenz kann in Form eines Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips angewandt werden, wodurch sich Aussagen über das Langzeitverhalten treffen lassen, ohne dass Langzeitversuche durchgeführt werden müssen. [17, 43, 81, 105]

Bei Kenntnis einer Materialgröße, wie beispielsweise der Nachgiebigkeit  $D(t)$  bei voneinander unterschiedlichen Temperaturen  $T_0$  und  $T$ , kann der Verlauf von  $D(t, T)$  durch horizontale Verschiebung um den Verschiebungsfaktor  $\log a_T$  mit der Kurve der Referenztemperatur  $T_0$  zur Deckung gebracht werden. Die resultierende Kurve bei  $T = T_0$  nennt man Masterkurve und dient zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens über einen längeren Zeitraum. Diese Methode zur Erstellung einer Masterkurve für HDPE mittels Zeit-Temperatur-Verschiebung wurde bereits von Nitta und Maeda [87] erfolgreich durchgeführt. Es gilt, wie in Abbildung 3.10 dargestellt,

$$D(t_0, T_0) = D(t, T)$$

und damit für den Verschiebungsfaktor

$$\log a_T = \log t - \log t_0 ,$$

mit der Referenzzeit  $t_0$  und der Referenztemperatur  $T_0$  der Masterkurve sowie der Zeit  $t$  und Temperatur  $T$  der zu verschiebenden Kurve. Trägt man die Verschiebungsfaktoren  $a_T$  über den Temperaturbereich auf, ergibt sich eine temperaturabhängige Verschiebungsfunktion  $h(T)$ , für deren Beschreibung unterschiedliche Ansätze existieren.

Unterhalb der Glasübergangstemperatur  $T_G$  eines Polymers kann zur Beschreibung der horizontalen Verschiebungsfaktoren der Arrhenius-Ansatz verwendet werden. Damit ergibt sich:

$$\log a_T = \log \left( \frac{t}{t_0} \right) = -\frac{\Delta H}{2,303R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right),$$

mit der Aktivierungsenergie  $\Delta H$  und der universellen Gaskonstante  $R$ .

Oberhalb von  $T_G$  findet die empirisch entwickelte WLF-Gleichung nach Williams, Landel und Ferry Verwendung, erstmalig veröffentlicht in [119]. Mit den von  $T_0$  abhängigen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  folgt die Gleichung dem Zusammenhang

$$\log a_T = -\frac{C_1 (T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}. \quad (3.32)$$

Bei Verwendung der Glasübergangstemperatur  $T_G$  als Referenztemperatur  $T_0$  ergeben sich für viele Polymere die Konstanten zu  $C_1 = 17,44$  und  $C_2 = 51,6$ . Durch numerische Optimierung können diese je nach Polymer und Referenztemperatur angepasst werden. [43, 82]

Dieses Verschiebungsprinzip lässt sich dazu anwenden, um aus Nachgiebigkeitskurven verschiedener Temperaturen innerhalb eines zeitlich begrenzten experimentellen Fensters, eine Masterkurve zu formen. In dieser Kurve wird bei der Referenztemperatur  $T_0$  der Verlauf auf experimentell nicht sinnvoll umsetzbare Zeiten extrapoliert und ermöglicht so die Vorhersage des viskoelastischen Verhaltens bei sehr großen bzw. sehr kleinen Belastungszeiten.

# 4

## Experimentelle Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen

Für die Modellierung des thermo-mechanischen Verhaltens eines Werkstoffes ist eine Reihe verschiedener Versuche notwendig, um eben solches zu analysieren und zu interpretieren. Dieses Kapitel beschreibt die Durchführung von Tests sowie die Ermittlung der Ergebnisse für die Untersuchung des temperaturabhängigen mechanischen Verhaltens von Polyethylen hoher Dichte. Unter verschiedenen Kurz- und Langzeitbelastungen innerhalb eines breiten Temperaturspektrums, teilweise hinab bis zu kryogenen Flüssig-Helium-Bedingungen, werden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen unter Zug und Druck sowie das viskoelastische Kriechverhalten, die Betriebsfestigkeit sowie die Wärmeausdehnung und andere materialspezifische Größen quantifiziert, analysiert und diskutiert. Aus den experimentellen Ergebnissen werden in Kapitel 5 Kennwerte bestimmt für die Entwicklung der in Kapitel 3 vorgestellten Materialmodelle.

### 4.1 Kristalline Zustandsübergänge, wie Glas- oder Schmelzübergang

Die Dynamische Differenz Kalorimetrie (DDK) ist ein thermisches Analyseverfahren zur Ermittlung charakteristischer kalorischer Größen wie der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$ , Morphologiegrößen wie der Kristallisationsgrad  $\kappa$  sowie wichtiger Temperaturgrößen wie Glasübergangs- und Schmelztemperatur  $T_G$  und  $T_S$ . Das Verfahren ist ebenfalls unter den Namen Dynamische Differenz Thermoanalyse oder im Englischen *differential scanning calorimetry* (DSC) bekannt. [43]

Bei der DSC werden Enthalpieveränderungen bzw. Wärmeströme gemessen, während die zu analysierende Probe einem definierten Aufheiz- bzw. Abkühlprozess bei konstantem Druck unterzogen wird. Unter kontinuierlicher Messung der Temperatur befindet sich der Probekörper in einem unter Stickstoffatmosphäre verschlossenen Aluminiumtiegel. Als Referenz dient ein leerer Tiegel, der das selbe Temperaturwechselprogramm durchläuft. Beispielhaft soll hier das Messprinzip anhand einer Aufheizung erläutert werden.

Bei einer Aufheizung erfahren Probekörper und Referenz die gleiche Wärmezufuhr pro Zeiteinheit, solange bis beim Analysematerial eine exotherme oder endotherme Reaktion

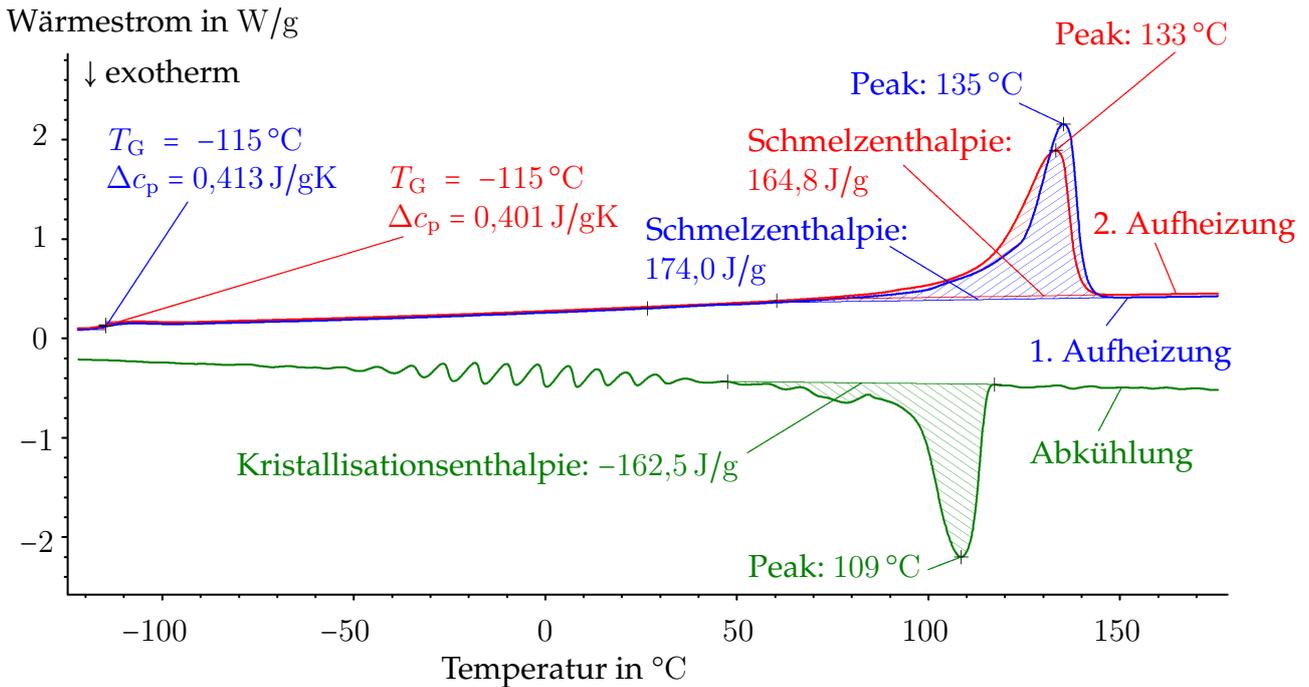


Abbildung 4.1: Dynamische Differenz Kalorimetrie zur Ermittlung des Glasübergangs- und des Schmelzbereichs von HDPE © BMW Group

auftritt. Dem Probekörper wird je nachdem mehr oder weniger Wärme zugeführt, so dass eine Temperaturdifferenz gegenüber der Referenz vermieden wird. Der Verlauf der Wärmezufuhr wird gemessen und, um die spezifische Wärmekapazität des Werkstoffes zu erhalten, auf das Probengewicht normiert. So können Schlüsse auf temperaturabhängige physikalische Größen des Kunststoffes gezogen werden. [104]

Für Polyethylen hoher Dichte (HDPE) zeigt Abbildung 4.1 den aufgezeichneten Wärmestrom in Abhängigkeit von der gemessenen Temperatur. Die HDPE-Probe wurde zwei Aufheizungen (rot und blau dargestellt) und einer Abkühlung (grün dargestellt) unterzogen. Der Temperaturwechsel zwischen den Randtemperaturen  $-140^\circ\text{C}$  und  $200^\circ\text{C}$  fand bei einer konstanten Aufheiz- bzw. Abkühlgeschwindigkeit von  $10 \text{ K/min}$  statt. Die DSC ermöglicht für das teilkristalline HDPE die Bestimmung der Glasübergangstemperatur  $T_G$  und der Schmelztemperatur  $T_S$ . Ein Knick in den beiden Aufheizkurven bei  $T = -115^\circ\text{C}$  deutet auf eine Zustandsänderung im Polymer hin, in diesem Fall auf den Glasübergang. Beim Aufheizen muss bei Erreichen des Schmelzbereichs mehr Wärme zugeführt werden. Diese endotherme Reaktion beginnt bereits bei ca.  $110^\circ\text{C}$  und erreicht ihren Höhepunkt bei  $135^\circ\text{C}$  (1. Aufheizung) bzw. bei  $133^\circ\text{C}$  (2. Aufheizung). Beim Erstarren der Schmelze während des Abkühlens handelt es sich dagegen um eine exotherme Reaktion, bei der der Wärmestrom reduziert werden muss. Diese Reaktion besitzt ihren Peak bei  $109^\circ\text{C}$  und, wie das Schmelzen auch, einen Einflussbereich über mehrere  $^\circ\text{C}$  hinweg. So spricht man beim Schmelzen von Kunststoffen des öfteren von einem Schmelzbereich und selten von einem Schmelzpunkt.

Für die spätere Anwendung des HDPE in einem Wasserstoffdrucktank mit einem Innendruck von bis zu  $700 \text{ bar}$  ist der Einfluss von hydrostatischem Druck auf die Größen  $T_G$  und  $T_S$  von Bedeutung. Ein hydrostatischer Druck von  $100 \text{ MPa} = 1000 \text{ bar}$  auf den Werkstoff HDPE hat eine Erhöhung der Schmelztemperatur um  $20^\circ\text{C}$  zur Folge. [107] Die Steigerung



(a) CTE-Probekörper



(b) Dilatometer

Abbildung 4.2: Experimentelle Anordnung zur Bestimmung des thermischen Ausdehnungsverhalten von Polyethylen hoher Dichte

des hydrostatischen Drucks beeinflusst auf ähnliche Art und Weise den Glasübergang. Vergleichbare teilkristalline Thermoplaste wurden von Jones Parry und Tabor [60] untersucht und ergaben Auswirkungen auf deren  $T_G$  in gleichem Maß wie auf  $T_S$ . [8] Wichtig sind diese Erkenntnisse für die gesamte thermo-mechanische Untersuchung und Beurteilung des Werkstoffverhaltens von HDPE. Wie in Unterabschnitt 3.5.6 beschrieben, spielt vor allem  $T_G$  eine bedeutende Rolle für die Analyse der Viskoelastizität bzw. des Kriechverhaltens, aufgrund unterschiedlicher Modellierungsansätze über bzw. unter der Glasübergangstemperatur.

## 4.2 Temperaturabhängiges Wärmeausdehnungsverhalten

Die Untersuchung des thermischen Ausdehnungsverhalten von Polyethylen hoher Dichte ist nicht nur materialwissenschaftlich von Interesse, sondern auch für die belastungsgerechte Auslegung eines HDPE-Liners in einem CGH<sub>2</sub>-Wasserstoffdrucktank. Aufgrund des hohen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  von derartigen Kunststoffen und wegen der blockierten thermischen Dehnungen durch die lasttragende CFK-Ummantelung entstehen bei Auf- oder Abkühlung thermisch induzierte Spannungen, die sich durchaus als kritisch für die Strukturintegrität erweisen können. Bei Erwärmung können die Druckeigenstressungen im Liner so groß werden, dass es zu Stabilitätsproblemen kommen kann. Für die qualitative

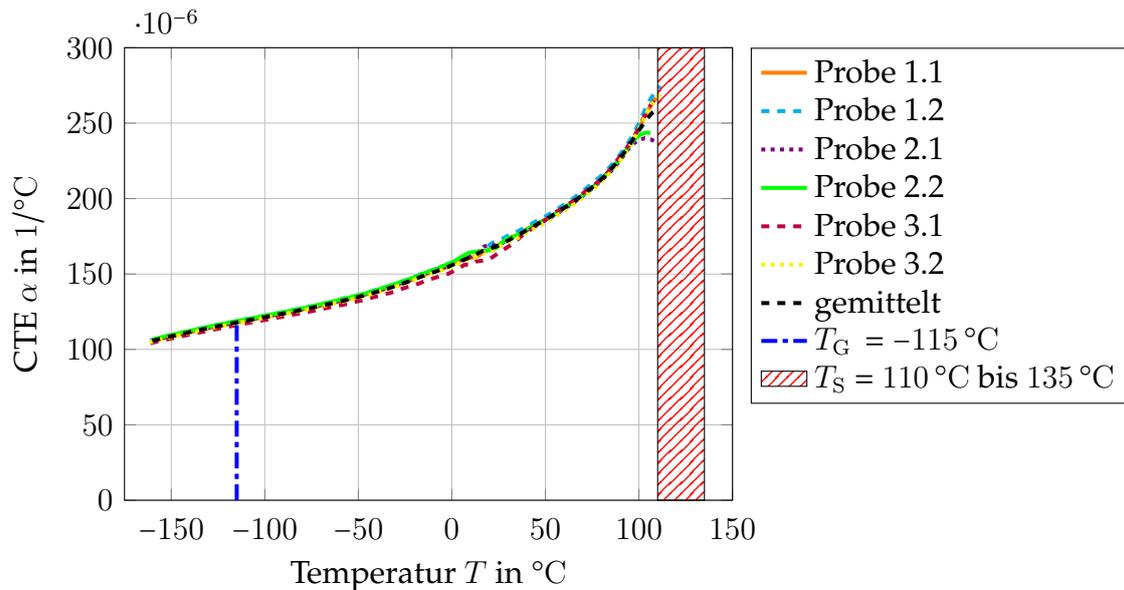


Abbildung 4.3: Thermischer Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  von HDPE zur Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$

sowie quantitative Vorhersage von Temperaturlasten im Liner mittels FEM-Simulationen ist die Kenntnis über das temperaturabhängige thermische Ausdehnungsverhalten von Bedeutung.

In Abbildung 4.2a zu sehen, ist ein quaderförmiger, aus dem HDPE-Liner geschnittener Probekörper mit einer Grundfläche von  $4,0 \times 6,0\text{ mm}^2$  und einer Länge von  $50,0\text{ mm}$ . Abbildung 4.2b zeigt das stehende Schubstangen-Differenz-Dilatometer *TMA 600* der Firma *wsk*. In der Probenaufnahme werden Probekörper senkrecht eingespannt und mit flüssigem Stickstoff auf die gewünschte Starttemperatur herunter gekühlt. Mittels elektrischer Heizung wird die Temperatur der Probe erhöht und dabei deren Längung gemessen. Damit kann der Wärmeausdehnungskoeffizient (englisch: *coefficient of thermal expansion* - CTE) berechnet werden.

Unter der Annahme von Isotropie kann die dreidimensionale Formulierung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta V}{V}$$

auf eine Dimension reduziert werden. Der CTE eines Materials ergibt sich damit zu

$$\alpha = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta T} = \frac{\Delta L}{L_0} \frac{1}{T - T_{\text{ref}}} \quad (4.1)$$

Er definiert sich aus der thermischen Dehnung  $\Delta \varepsilon$ , die innerhalb des Temperaturintervalls  $\Delta T$  auftritt. Die Dehnung in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  berechnet sich aus der Längenänderung  $\Delta L$  zur Ausgangslänge des Probekörpers  $L_0$  bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}}$ .

Im Bereich von  $-160\text{ °C}$  bis  $110\text{ °C}$  zeigt Abbildung 4.3 die ermittelten Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  von HDPE in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  und bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$ . Mit einer Aufheizrate von  $3\text{ K/min}$  wurden drei Proben je zwei mal vermessen und deren thermischer Ausdehnungskoeffizient bestimmt. Dabei ergeben sich die sechs

CTE-Kurven von  $\alpha_{\text{HDPE}} 1.1$  bis  $\alpha_{\text{HDPE}} 3.2$  direkt aus den Messungen, während die gemittelte  $\alpha_{\text{HDPE}}$ -Kurve durch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate beschrieben wird.

Selbst für Kunststoffe befindet sich die Wärmeausdehnung von HDPE auf sehr hohem Niveau. Bei Raumtemperatur  $T = 20\text{ °C}$  beträgt der gemittelte CTE  $\alpha_{\text{HDPE}} = 167 \cdot 10^{-6}\text{ °C}^{-1}$ . Bei  $T_G = -115\text{ °C}$  ist ein leichter Knick in der Kurve zu erkennen, der auf die Festkörperphasenumwandlung am Glasübergangspunkt hinweist. Zurückzuführen ist dies auf die gesteigerte Beweglichkeit der Makromoleküle nach dem Glasübergang, wie bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben. Bei Abkühlung wird die teilkristalline Struktur des HDPE kristallin und verfestigt bzw. versprödet und ruft so die Änderung in der Steigung der CTE-Kurve hervor. Die deutliche Zunahme der thermischen Ausdehnung hin zu  $110\text{ °C}$  resultiert aus der Phasenumwandlung von fest auf flüssig. Bei diesem Schmelzvorgang, der sich über einen breiten Temperaturbereich erstreckt, nimmt das Volumen deutlich zu und führt so zu der starken Temperaturabhängigkeit des CTE in diesem Bereich. So ist die Temperaturabhängigkeit der ausschlaggebende Grund dafür, dass es für HDPE in diesem breiten Temperaturspektrum nicht möglich ist, einen konstanten thermischen (Ersatz-)Ausdehnungskoeffizienten zu bestimmen. Damit könnte der simulative Aufwand bei späteren FEM-Rechnungen möglichst gering gehalten werden. Jedoch ist es in diesem Fall unumgänglich die Temperaturabhängigkeit der Wärmeausdehnung zu berücksichtigen. Die Eingabe für FEM-Simulationen besteht aus den gemittelten CTE-Werten in tabellarischer Form.

## 4.3 Temperaturabhängiges quasi-statisches Materialverhalten

### 4.3.1 Mechanisches Verhalten unter Zug- oder Druckbelastung

Für die Charakterisierung des thermo-mechanischen Verhaltens eines Werkstoffes ist die Analyse des temperaturabhängigen mechanischen Verhaltens unter verschiedenen Belastungszuständen von Bedeutung. Das hier untersuchte Polyethylen hoher Dichte wird unter anderem auf die Temperaturabhängigkeit des mechanischen Verhaltens generell sowie deren Anisotropie im Speziellen, d.h. auf die unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Antworten unter Zug- bzw. Druckbelastung, analysiert.

Wie bei beinahe allen Kunststoffen, so ist auch bei HDPE eine ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit zu erwarten, sowohl unter Zug- als auch unter Druckbelastung. [116] Jedoch soll diese Dehnratenabhängigkeit nicht Hauptbestandteil dieser Untersuchungen sein. Auch die Temperaturabhängigkeit der Materialsteifigkeit sowie der Festigkeit wurden schon unter anderem von Merah u. a. [79] erforscht und soll hier im Allgemeinen untersucht und vergleichend evaluiert werden. Der Fokus dieses Unterkapitels wird auf die Erforschung der Temperaturabhängigkeit der Anisotropie gelegt. Sowohl Raghava u. a. [97] als auch Elleuch und Taktak [37] untersuchten die Unterschiede von Zug- und Drucklasten auf Polyethylen. Dabei wurden neben unterschiedlichen Zug- und Druckfließpunkten auch das voneinander abweichende Fließverhalten ermittelt. Krumpholz [65] zeigte die Temperaturabhängigkeit der Anisotropie verschiedener thermoplastischer Polymere auf. Dieser Einfluss der Temperatur auf die Zug-Druck-Asymmetrie soll hier untersucht werden.

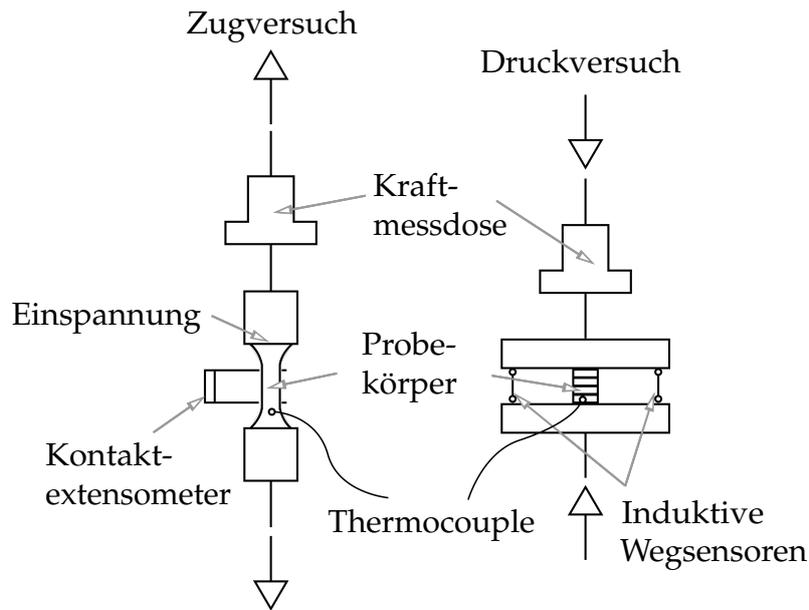


Abbildung 4.4: Schematischer Versuchsaufbau für Zug- und Drucktests

In Versuchen wurde das temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE unter uniaxialer Zug- bzw. Druckbelastung experimentell ermittelt. Abbildung 4.4 zeigt den schematischen Aufbau des Zug- bzw. Drucktests. Sowohl Zug- als auch Druckversuche fanden in einer Universalprüfmaschine statt. Eine Thermalkammer, die elektrisch geheizt oder mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden konnte, stellte die Temperaturregelung in der Umgebung des Prüflings sicher. Im Versuchsverlauf erfolgte die Aufzeichnung von Versuchsgrößen wie Kraft bzw. Temperatur mittels einer Kraftmessdose bzw. einem aufgeklebten Pt100 Sensor. Beim Zugversuch wurde der Probekörper in mechanischen Spannzeugen fixiert und die während des Versuchs auftretende Dehnung von einem Kontakttextensometer erfasst. Dagegen wurden die Druckprobekörper in Druckplatten eingespannt und deren Traversenverschiebung, aus dem sich die auftretende Dehnung ermitteln lässt, mittels induktiven Wegsensoren aufgezeichnet.

Die Durchführung der Tests und die Geometrie der Prüfkörper erfolgten nach DIN 50106 [27], DIN EN ISO 527 [28] und DIN EN ISO 604 [29]. Um fertigungsspezifische Einflüsse erfassen und abbilden zu können, wurden die Prüfkörper direkt aus einem zylindrischen Teil des HDPE-Liners eines CGH<sub>2</sub>-Tanks heraus getrennt. Hergestellt wird der Liner mittels Rotoextrusionsverfahren, wie von Barboza Neto u. a. [7] beschrieben. Position und Ausrichtung der Prüfkörper sowie deren Geometrie und Maße über alles sind Abbildung 4.5 zu entnehmen. Die 180 mm langen Knochenproben besaßen einen Messbereich mit einer Dicke von  $(4,0 \pm 0,1)$  mm und einer Länge von  $(75,0 \pm 1,0)$  mm. Für die Drucktests wurden je vier Plättchen mit einer Dicke von  $(3,8 \pm 0,1)$  mm und einem Durchmesser von  $(15,2 \pm 0,2)$  mm zu einem Stapel aufeinander gelegt. So wurde in allen Versuchen ein Verhältnis von Stapelhöhe zu Durchmesser von  $1,00 \pm 0,01$  erreicht. Die Prüfgeschwindigkeit bei den Zugtests betrug 1,0 mm/min, was einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  entspricht. Um die Vergleichbarkeit der Spannungs-Dehnungs-Antworten zu gewährleisten wurde bei den Drucktests abweichend von der Norm eine Prüfgeschwindigkeit von 0,14 mm/min gewählt. So wurde eine konstante Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  erreicht. Bei den Temperaturen  $-50^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$  und  $100^\circ\text{C}$  wurden je fünf Zugversuche durchgeführt. Bei den Temperaturen  $-10^\circ\text{C}$  und  $60^\circ\text{C}$

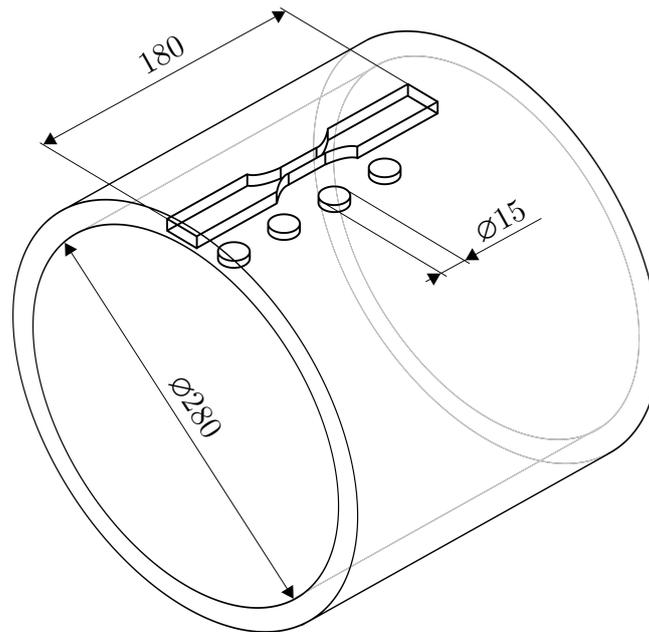


Abbildung 4.5: Geometrie, Position und Außenmaße (in mm) der aus dem Liner geschnittenen Probekörper für Zug- und Drucktests

wurden nur je drei Zugversuche unternommen, aufgrund der sehr geringen Varianz der Testergebnisse. Bei den gleichen fünf Temperaturniveaus wurden je drei Druckversuche durchgeführt. Zur Ermittlung der temperaturabhängigen Zugfestigkeit wurden zusätzlich bei jeder der fünf Temperaturen drei Zugversuche unternommen. Dabei wurde auf den Einsatz eines Extensometers verzichtet. Die Dehnungswerte bei Erreichen der Zugfestigkeit, vor allem bei höheren Temperaturen, liegen um Größenordnungen über dem maximalen Messintervall des Extensometers. Die Tests wurden beendet, sobald ein lokales Einschnüren des Probekörpers und gleichzeitig ein Absinken der wirkenden Kraft beobachtet werden konnte.

Die messtechnisch erfassten Größen aus den Zugversuchen wie Normalkraft, nominelle Dehnung und Temperatur wurden verarbeitet und sind in Abbildung 4.6 als Spannungs-Dehnungs-Kurven dargestellt. Dabei wurde für die fünf Temperaturniveaus die technische Spannung  $\sigma$  in Relation zur nominellen Dehnung  $\varepsilon$  gesetzt und gemittelt. Die experimentellen Daten weisen eine sehr geringe Varianz auf, weshalb nicht alle Versuchsdaten gezeigt und diskutiert werden. Das HDPE verhält sich in seinem mechanischen Materialverhalten ähnlich zu den Ergebnissen, die von Frontini u. a. [40] publiziert wurden. Zwischen 0 % und 0,3 % Dehnung zeigen alle Kurven einen annähernd linearen Verlauf. Dieser kleine Bereich linear-elastischer Deformation geht über in einen nichtlinearen Bereich, in dem sowohl Plastizität als auch Viskoelastizität zum Tragen kommen. Mit steigender Dehnung nehmen die Nichtlinearitäten weiter zu. Bei den niedrigeren Temperaturen wird bis ca. 8 % das waagrechte Plateau der Zugfestigkeit fast erreicht. Während die Spannungs-Dehnungs-Kurven der höheren Temperaturen nahe der 10 % Dehnung weiter ansteigen und die Zugfestigkeit noch nicht erreichen.

Ebenso wurden für die Druckversuche die experimentell ermittelten Größen, wie die aus den beiden induktiven Wegaufnehmern gemittelte Traversenverschiebung, die Normalkraft sowie die Temperatur ausgewertet. Für die fünf Temperaturen steht in Abbildung 4.7 die

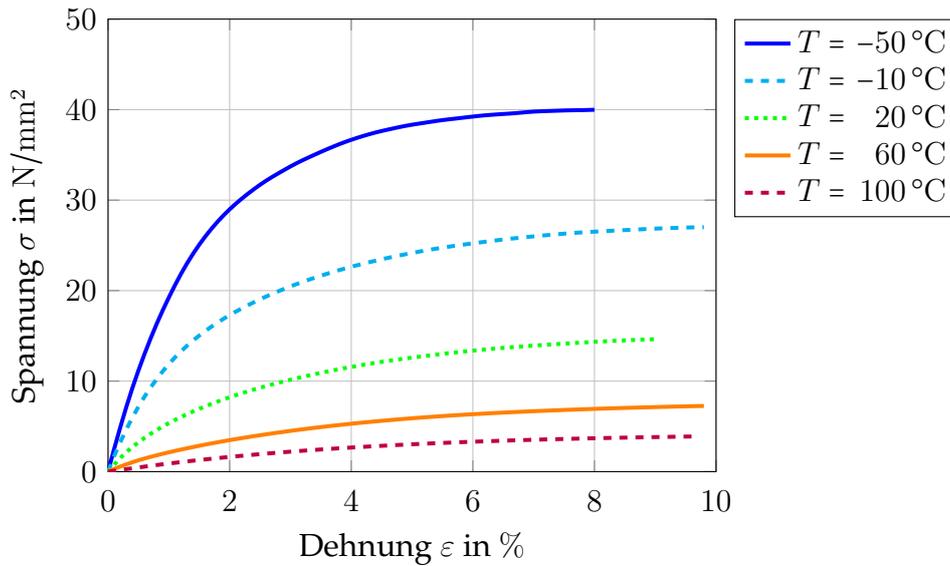


Abbildung 4.6: Temperaturabhängiges Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE unter uniaxialer Zugbelastung bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

technische Druckspannung der nominellen Dehnung gegenüber. Auch hier wurde auf die Abbildung aller Versuchskurven zu Gunsten der Übersichtlichkeit verzichtet. Je Temperatur ist die aus drei Versuchen gemittelte Kurve angetragen und wird der Analyse unterzogen. Die Temperaturabhängigkeit der Materialsteifigkeit tritt in vergleichbarer Deutlichkeit wie bei den Zugversuchen zu Tage. Beginnend von einem kleinen Dehnungsbereich linearer Elastizität weist das Materialverhalten bei ca.  $|\epsilon| > 1\%$  erste Nichtlinearitäten auf. Bei höheren Dehnungen verhält sich das HDPE elastisch-plastisch und verfestigt selbst bei  $|\epsilon| = 25\%$  weiter. Das Erreichen der Druckfestigkeit und der damit einhergehende Bruch der Probe treten bei diesen Druckdehnungen nicht auf.

Zhang und Moore [120] untersuchten das mechanische nichtlineare Verhalten von HDPE unter Drucklasten. Bei Raumtemperatur wurde unter anderem die Spannungs-Dehnungs-Antwort dehnraten- und zeitabhängig analysiert. Unter den Randbedingungen der hier vorliegenden Arbeit stimmen die Ergebnisse bezüglich des Materialverhaltens unter uniaxialem Druck sehr gut mit den eben genannten überein.

Tabelle 4.1: Gemittelte Werte von Elastizitätsmodul  $E_{\text{Zug}}$  und  $E_{\text{Druck}}$  und Zugfestigkeit  $R_m$  des untersuchten HDPE in Abhängigkeit der Temperatur; Die gegebene Unsicherheit repräsentiert einen Konfidenzbereich von  $\pm s$ .

Temperatur $T$ °C	Zugmodul $E_{\text{Zug}}$ N/mm <sup>2</sup>	Druckmodul $E_{\text{Druck}}$ N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit $R_m$ N/mm <sup>2</sup>
-50 ± 1	2381,4 ± 117,8	1567,4 ± 92,0	40,1 ± 0,3
-10 ± 1	1576,9 ± 36,3	1039,4 ± 11,3	27,4 ± 0,1
20 ± 1	686,8 ± 8,3	515,3 ± 6,2	17,1 ± 0,1
60 ± 1	267,7 ± 3,6	185,6 ± 5,0	8,8 ± 0,1
100 ± 1	83,2 ± 1,1	82,8 ± 5,5	4,9 ± 0,2

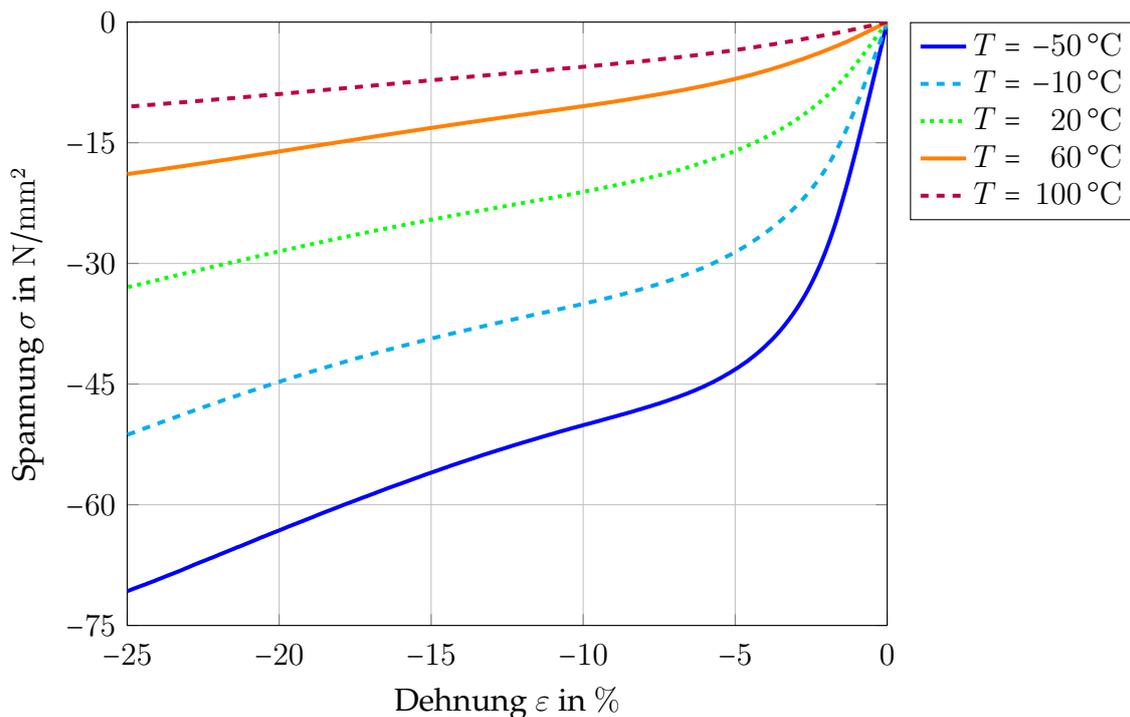


Abbildung 4.7: Temperaturabhängiges Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE unter uniaxialer Druckbelastung bei einer Dehnrates von  $\dot{\varepsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

### 4.3.2 Temperaturabhängigkeit der Anisotropie

Neben der temperaturabhängigen Zugfestigkeit wurden sowohl für das Verhalten unter Zug- als auch unter Druckbelastung der Elastizitätsmodul ermittelt. Für beide Belastungsrichtungen ermittelt sich die Materialsteifigkeit als Sekantenmodul zwischen einer betragsmäßigen Dehnung von  $|\varepsilon| = 0,05\%$  und  $|\varepsilon| = 0,25\%$ . Die gemittelten Werte für den Zugmodul  $E_{\text{Zug}}$  und den Druckmodul  $E_{\text{Druck}}$  sowie die Zugfestigkeit  $R_m$  sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Zusätzlich repräsentiert die statistische Standardabweichung mit dem Konfidenzbereich  $\pm s$  die Unsicherheit der experimentellen Daten. Sowohl für die Moduln als auch die Festigkeit ist dieses Intervall relativ klein, so dass für das Auslegen von Kunststoffbauteilen die potentielle Abweichungen von den Mittelwerten als gering erachtet werden kann.

Abbildung 4.8 bildet die Werte und deren Konfidenzintervall  $\pm s$  mittels Fehlerbalken graphisch ab. Merah u. a. [79] identifizierten eine lineare Temperaturabhängigkeit sowohl der Festigkeit als auch der Materialsteifigkeit von Polyethylen. Auch wenn hier zwischen den getesteten Temperaturniveaus linear interpoliert wurde, konnte über den gesamten Temperaturbereich von  $-50\text{ °C}$  bis  $100\text{ °C}$  kein linearer Zusammenhang bestätigt werden. Besonders die Moduln  $E_{\text{Zug}}$  und  $E_{\text{Druck}}$  weisen einen stark nichtlinearen Verlauf auf.

Zur Auswertung der Asymmetrie zwischen Zug- und Druckeigenschaften wird das Verhältnis aus Druck- und Zugspannung in Abhängigkeit des Dehnungsbetrages herangezogen. Für die fünf Temperaturniveaus wird  $\sigma_{\text{Druck}}/\sigma_{\text{Zug}}$  zu  $|\varepsilon|$  in Abbildung 4.9 graphisch dargestellt. Alle Kurven steigen monoton, d.h. die Anisotropie ist vorhanden und kann quantifiziert werden. Der Druckmodul  $E_{\text{Druck}}$  ist für alle Temperaturen kleiner als der Zugmodul  $E_{\text{Zug}}$ . Daraus resultierend beginnen die Kurven für kleine Dehnungen bei Werten unter 1. Zwischen

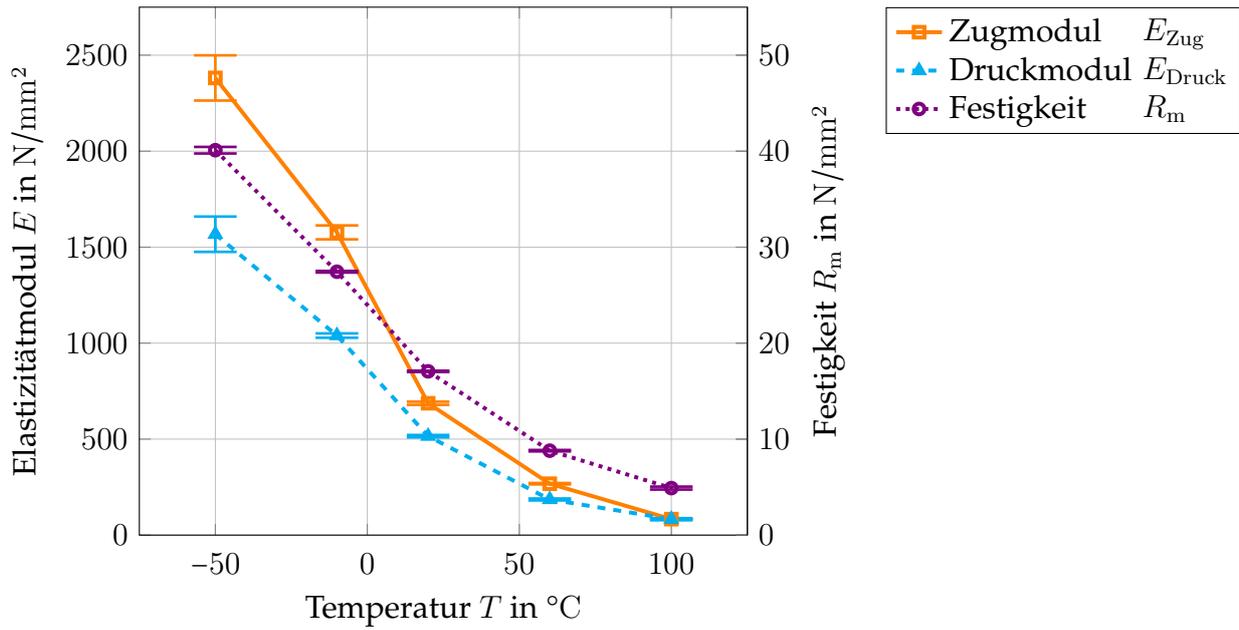


Abbildung 4.8: Temperaturabhängige Elastizitätsmodul  $E_{Zug}$  und  $E_{Druck}$  sowie die Festigkeit  $R_m$  von HDPE bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; Fehlerbalken repräsentieren einen Konfidenzbereich von  $\pm s$

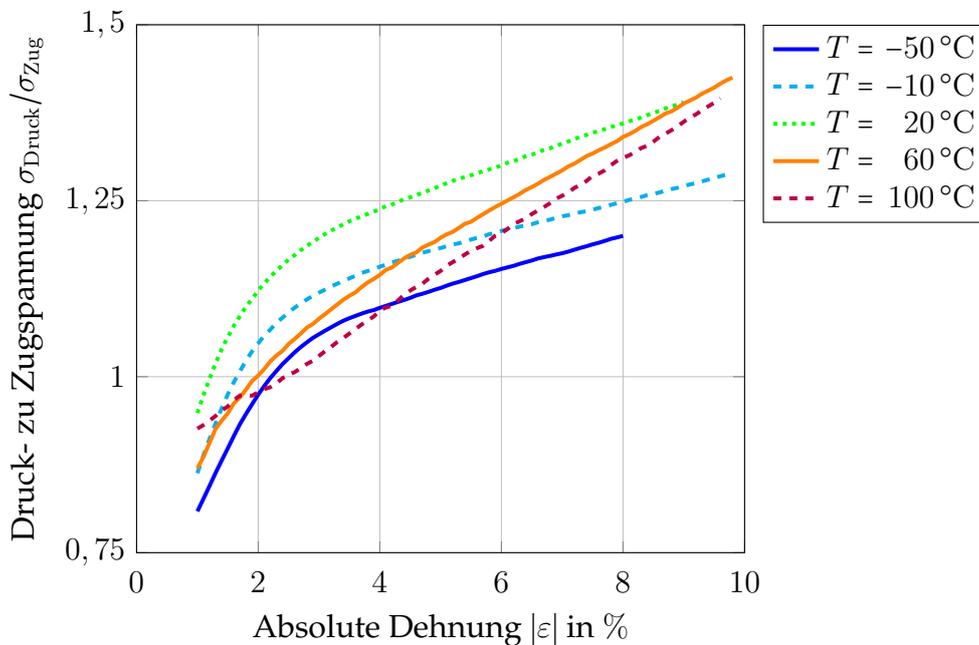


Abbildung 4.9: Temperaturabhängiges Verhältnis von Druck- zu Zugspannungen  $\sigma_{Druck}/\sigma_{Zug}$  in Abhängigkeit des auftretenden Dehnungsbetrages  $|\epsilon|$  von HDPE bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Dehnungen von ca. 1 % bis 2 % überschreiten die Druckspannungen betragsmäßig die Zugspannungen. Mit zunehmender Dehnung stellt sich für alle Kurven eine konstante Steigung des Quotienten  $\sigma_{\text{Druck}}/\sigma_{\text{Zug}}$  ein. Zu höheren Temperaturen hin nimmt die Steigung zu und zeigt die Temperaturabhängigkeit der Anisotropie. Krumpholz [65] führte Versuche an HDPE mit vergleichbaren Temperaturen und Dehnraten durch und identifizierte eine temperaturunabhängige Steigung des Verhältnisses  $\sigma_{\text{Druck}}/\sigma_{\text{Zug}}$ . Diese Temperaturunabhängigkeit konnte mit den hier präsentierten Ergebnissen nicht reproduziert werden.

Des Weiteren wurde von verschiedenen Seiten erforscht, welche Auswirkungen hydrostatischer Druck auf das thermo-mechanische Verhalten von HDPE oder generell von Kunststoffen hat. Castagnet u. a. [20] zeigten experimentell, dass eine Wasserstoffumgebung mit einem hydrostatischen Druck bis 100 bar keinen nennenswerten Einfluss auf Steifigkeit und Festigkeit von Polyethylen und Polyamid hat. Dagegen bewirkt eine Erhöhung des hydrostatischen Drucks bis 1100 MPa eine lineare Steigerung des Zug- und Druckmoduls bei Polyethylen, so Spitzig und Richmond [109]. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Polyethylen untersuchten sowohl Mears u. a. [77] als auch Tsirule und Tyunina [113]. Eine Steigerung des hydrostatischen Druck auf 280 MPa bzw. auf 690 MPa resultiert in einer linearen Erhöhung von E-Modul und Zugfestigkeit. Während ein hydrostatischer Druck von 140 MPa schon deutlich erhöhte Steifigkeiten und Festigkeiten hervorruft, bewirkt er andererseits auch eine Absenkung der Bruchdehnung des Thermoplasten. Wenngleich zu erwähnen ist, dass das mechanische Materialverhalten von HDPE bei atmosphärischen Druck nach einer zyklischen Belastung durch hydrostatischen Druck unverändert bleibt. [8]

### 4.3.3 Zugbelastung unter kryogenen Flüssig-Stickstoff-Bedingungen

Neben dem Verständnis des mechanischen Materialverhaltens von HDPE bei moderat hohen und tiefen Temperaturen, stellt sich die Frage wie sich das mechanische Verhalten bei tiefen Temperaturen entwickelt. Verschiedene Testeinrichtungen werden benutzt, um das kryogene Materialverhalten u.a. anhand von wesentlichen Kennwerten wie Festigkeit, Steifigkeit oder Bruchdehnung analysieren und interpretieren zu können. Dazu werden uniaxiale Zugversuche unter Flüssig-Stickstoff-Umgebung (LN<sub>2</sub>) bei ca. -196 °C bzw. 77 K und unter Flüssig-Helium-Umgebung (LHe) bei ca. -269 °C bzw. 4 K durchgeführt.

Physikalisch betrachtet stellt sich die Kühlung von Werkstoffen zu Prüfzwecken bis auf kryogene Temperaturen von -196 °C als relativ unproblematisch heraus. Mit flüssigem Stickstoff (LN<sub>2</sub>) können Materialproben in offenen Kryostaten, wie in Abbildung 4.10a zu sehen, abgekühlt werden. Dabei entwickelt sich über dem kochenden Stickstoff eine Art temperaturisolierende Schicht, die verhindert, dass die umgebende Luft direkt mit dem flüssigen Stickstoff in Kontakt kommt und so den Wärmeaustausch beschleunigt. Soll dagegen das Werkstoffverhalten bei noch tieferen Temperaturen untersucht werden, treten diverse Probleme auf. Das Kühlen mit flüssigem Wasserstoff (LH<sub>2</sub>) birgt Gefahren im Hinblick auf die Entflammbarkeit und die Explosivität eines Gemisches aus Wasserstoff und Luftsauerstoff. So ist es für die meisten Fälle ausreichend mit flüssigem Helium (LHe) bis auf 4,2 K herunterzukühlen. Die Kühlleistung von Helium fällt mit einer Verdampfungsenthalpie von 21,1 kJ/kg etwa 10 mal geringer aus als die von flüssigem Stickstoff. So werden, auch aus finanziellen Interessen, Gefäße in der Regel mit Stickstoff vorgekühlt, bevor sie mit Helium befüllt werden. Des Weiteren müssen bei derart tiefen Temperaturen Wärmeleitungseffekte aufgrund von Wärmestrahlung berücksichtigt werden. Die geringe Dichte des gasförmigen

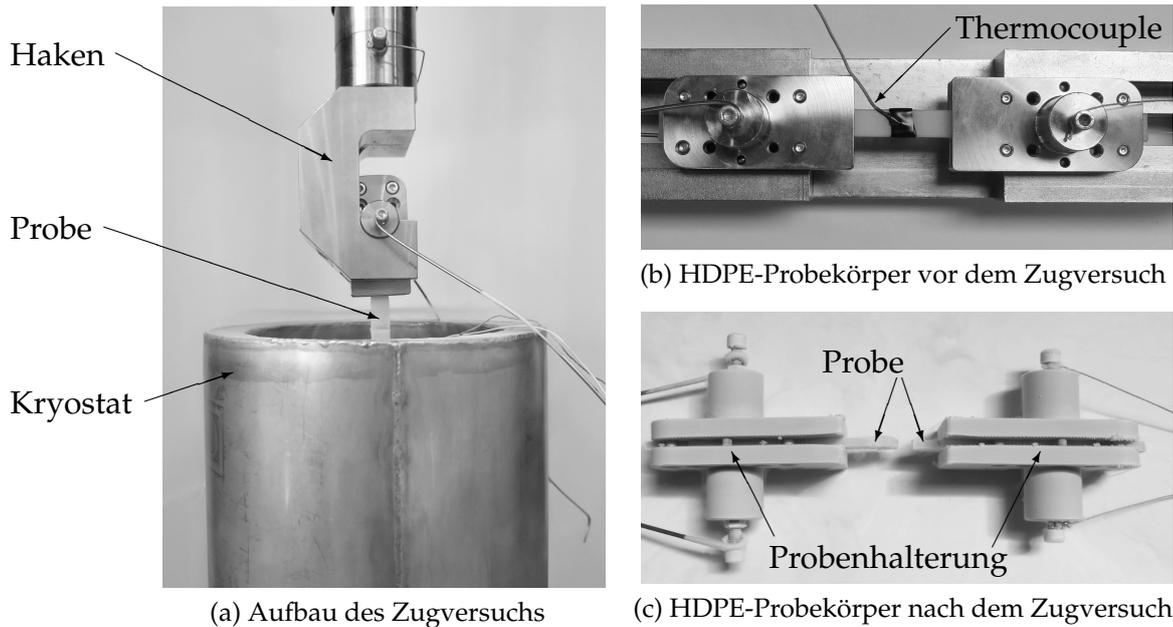


Abbildung 4.10: Zugversuch unter Flüssig-Stickstoff-Umgebung (LN2) bei  $-196\text{ °C}$  bzw.  $77\text{ K}$

Heliums führt zu einer Konvektion mit der Umgebungsluft. So bildet sich beim Verkochen keine Isolierschicht um die Zone des Phasenübergangs aus und das Helium verflüchtigt sich. Diese Punkte führen dazu, dass bei Prüftemperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt sogenannte Dewargefäße zum Einsatz kommen. Dabei handelt es sich um geschlossene, doppelwandig verspiegelte und evakuierte Kryostaten, die für die experimentelle Untersuchung einen deutlichen Mehraufwand bedeuten.

Zur Ermittlung des temperaturabhängigen mechanischen Werkstoffverhaltens bei  $-196\text{ °C}$  wurden Zugversuche an HDPE durchgeführt. Die Prüfbedingungen waren die gleichen, wie schon bei den Zugversuchen zwischen  $-50\text{ °C}$  und  $100\text{ °C}$ . Der Aufbau mit einem Kryostaten und einer Hakenvorrichtung, siehe Abbildung 4.10a, wurde in die Universalprüfmaschine integriert. Wie in Abbildung 4.10b zu sehen, wurden die Probekörper mit einem Pt100 Thermocouple versehen und in einer Probenhalterung für kryogene Anwendungen verschraubt. Um eine Temperatur von  $T = -196\text{ °C}$  für den Zugversuch zu erreichen, wurden die Probekörper samt Einspannung vollständig in das Stickstoffbad getaucht. Neben der Probekörpergeometrie blieb auch die Prüfgeschwindigkeit unverändert zu den bisher durchgeführten Zugversuchen. Abbildung 4.10c zeigt die spröde gebrochene Probe unmittelbar nach dem Test.

So zeigt sich eine Konstanz bei der Dehnrage, die sich bei allen bisher beschriebenen Versuchen auf einen Wert von  $\dot{\epsilon} = (1,50 \pm 0,05) \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$  ermitteln lässt. Unter der Annahme, dass sich dieser Wert bei  $-196\text{ °C}$  nur unwesentlich ändert, lassen sich auch ohne Dehnungsaufnehmer Werte, wie z.B. der E-Modul und die Bruchdehnung, berechnen. Eine Überlagerung des zeitlich aufgelösten Kraftsignals mit der berechneten Dehnrage liefert das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE bei  $-196\text{ °C}$ , graphisch dargestellt in Abbildung 4.11. Neben den drei einzelnen Testkurven ist der gemittelte Spannungs-Dehnungs-Verlauf abgebildet. Die Abweichungen zwischen den Tests sind wie bei den moderaten Temperaturen äußerst gering. Während sich der E-Modul aus der Steigung der Spannung zwischen  $\epsilon = 0,05\%$  und  $\epsilon = 0,25\%$  berechnet, ergeben sich Festigkeit und Bruchdehnung aus den Spannungs-

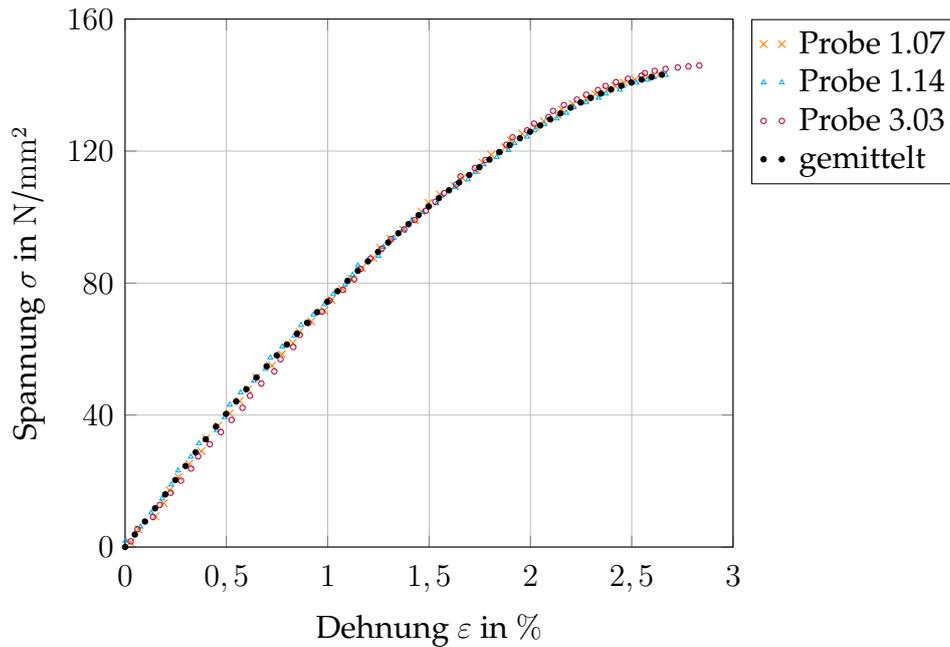


Abbildung 4.11: Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE unter Flüssig-Stickstoff-Umgebung (LN2) bei  $-196\text{ °C}$  bzw.  $77\text{ K}$  und unter uniaxialer Zugbelastung bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$

bzw. Dehnungsmaxima. Die ermittelten Werte für Materialsteifigkeit, Bruchdehnung und Zugfestigkeit sind in Tabelle 4.2 aufgelistet.

Wie erwartet, erfahren sowohl die Materialsteifigkeit als auch die Festigkeit bei  $T = -196\text{ °C}$  eine deutliche Steigerung gegenüber derer bei Raumtemperatur. Der E-Modul liegt mit ca.  $8\text{ GPa}$  höher als der von sogenannten Hochleistungskunststoffen wie PEEK oder Polyimid. [72] Auch die Zugfestigkeit liegt mit ca.  $145\text{ MPa}$  auf einem für Kunststoffe hohem Niveau. Diese enormen Anstiege sind auf den kristallinen Zustand des Polyethylens zurückzuführen, als eine Auswirkung des Glasübergangs bei ca.  $-110\text{ °C}$ , der den teilkristallinen Kunststoff versteifen und verspröden lässt. Bis  $T = -50\text{ °C}$  waren keinerlei Anzeichen auf einen Bruch bis zu einer Dehnung von  $\epsilon = 10\%$  zu erkennen. Die kristalline Versprödung hat auch zur Folge, dass der Werkstoff seine maximal ertragbare Dehnung bei ca.  $2,75\%$  erreicht.

Tabelle 4.2: Experimentell ermittelte Zugfestigkeitswerte  $R_m$  und berechnete Elastizitätsmodul  $E_{Zug}$  sowie Bruchdehnungen  $\epsilon_{Bruch}$  von HDPE unter Flüssig-Stickstoff-Umgebung (LN2) bei  $-196\text{ °C}$  bzw.  $77\text{ K}$  bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$

Probe Nr.	Zugmodul $E_{Zug}$ N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit $R_m$ N/mm <sup>2</sup>	Bruchdehnung $\epsilon_{Bruch}$ %
1.07	7913	143,6	2,65
1.14	8511	143,5	2,70
3.03	7360	146,2	2,84
gemittelt	7928	144,4	2,73

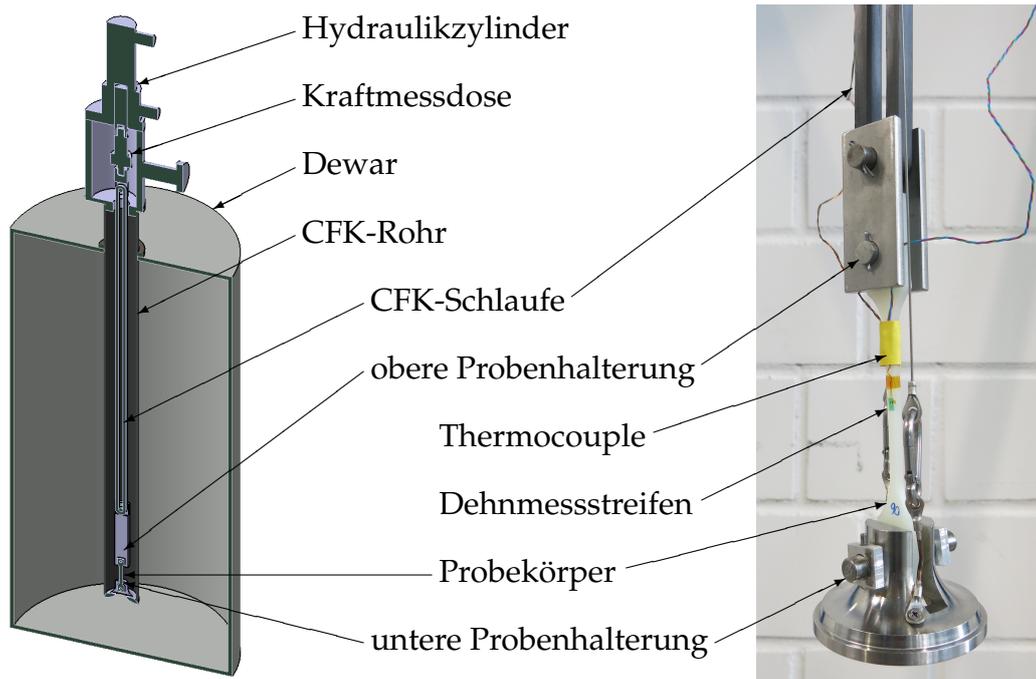


Abbildung 4.12: Versuchsaufbau für Zugversuche unter Flüssig-Helium-Umgebung (LHe) bei  $-269\text{ °C}$  bzw.  $4\text{ K}$

#### 4.3.4 Zugbelastung unter kryogenen Flüssig-Helium-Bedingungen

Zur Analyse des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens bei Temperaturen von weniger als  $-196\text{ °C}$  bzw.  $77\text{ K}$  eignet sich aus bereits genannten Gründen flüssiges Helium (LHe). In einem Heliumbad erreicht der Werkstoff eine Temperatur von ca.  $-269\text{ °C}$  bzw.  $4\text{ K}$  und wird dabei einer Zugprüfung unterzogen. Dafür wird ein bereits vorhandenes System verwendet [47], dessen Aufbau in Abbildung 4.12 dargestellt ist.

In dem kommerziell verfügbaren Dewar befindet sich bis zur gewünschten Höhe flüssiges Helium. Für den Versuch wird der Probekörper samt Apparatur eingeführt, so dass der Prüfling vollständig eintaucht. Der Vorschub des Hydraulikzylinders setzt die Kraftmessdose und die CFK-Schlaufe unter Zug. Über eine formschlüssige Probenhalterung wird von der CFK-Strebe die uniaxiale Zugbelastung auf den Probekörper übertragen. Die tellerförmige untere Probenhalterung wird in ein CFK-Rohr gepresst, das auf Druck belastet, den Kraftfluss schließt. Der Probekörper ist mit speziell für Tiefsttemperaturen tauglicher Messensorik ausgestattet. So macht ein Halbleiter-Thermocouple, das unterhalb von  $20\text{ K}$  seinen elektrischen Widerstand bis zum absoluten Nullpunkt linear erhöht, die Messung von kryogenen Temperaturen erst möglich. Ein speziell für kryogene Temperaturen entwickelter Klebstoff ermöglicht die Applikation von Dehnmessstreifen auf den Proben zur Ermittlung von Verformungen. Um bei der Belastung möglichst niedrige Dehnraten zu realisieren, wurde das System mit einem besonders reibungsarmen Hydraulikzylinder und einem Hydraulikkaggregat ausgestattet, das für sehr kleine Volumenströme bei hohen Drücken ausgelegt wurde.

Der experimentelle Aufwand war für die Zugversuche unter LHe-Bedingungen erheblich größer. Ursache dafür waren nicht nur die speziellen kryogenen Anforderungen an Versuchs-

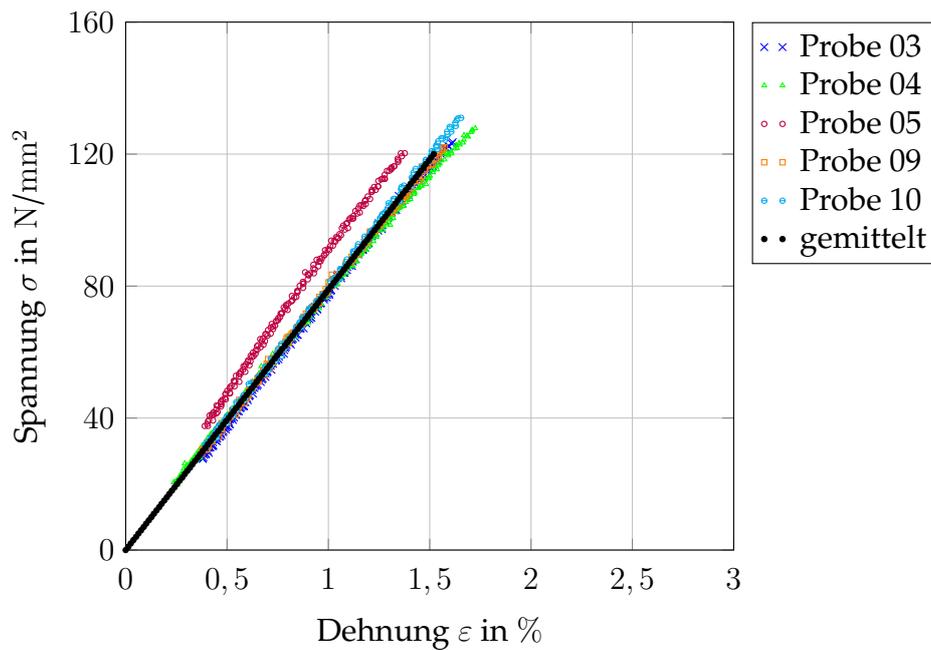


Abbildung 4.13: Spannungs-Dehnungs-Verhalten von HDPE unter Flüssig-Helium-Umgebung (LHe) bei  $-269\text{ °C}$  bzw.  $4\text{ K}$  und unter uniaxialer Zugbelastung bei einer Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = 2,1 \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$

und Messtechnik, sondern auch der zeitliche und personelle Aufwand für die Vorbereitung, Kühlung, Handhabung und Durchführung der Experimente. Mehrere Prüfkörper aus HDPE wurden vorbereitet, von denen fünf getestet wurden. Kraft, Dehnung und Temperatur wurden zeitlich aufgezeichnet. Die durchgeführten Zugversuche bei  $T = 4\text{ K}$  liefern das in Abbildung 4.13 gezeigte Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Schwarz eingetragen ist die aus den fünf Versuchen gemittelte Kurve, die der Vollständigkeit halber bis zum Ursprung linear extrapoliert wurde. Die Versuchskurven beginnen bei einem Spannungsniveau von  $> 20\text{ MPa}$ . Verantwortlich dafür ist die relativ hohe Vorspannung, die aus der Minimalkraft des hydraulischen Systems herrührt. Ebenfalls der Hydraulik geschuldet ist die durchschnittliche Dehnrates von  $\dot{\epsilon} = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$ , die geringfügig höher liegt als die Dehnrates aller vorangegangener Tests. Die mit der etwas höheren Dehnrates einhergehende Versteifung des Polymers wird hier nicht ausführlicher diskutiert.

HDPE zeigt bei dieser kryogenen Temperatur ( $T = 4\text{ K}$ ) ein annähernd linear-elastisches Werkstoffverhalten. Darin unterscheidet es sich deutlich von dem bei  $T = 77\text{ K}$ . Die weitere Versprödung ist eine Folge der Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt. Sowohl Bruchdehnung, als auch Zugfestigkeit fallen geringer aus als unter flüssigem Stickstoff. Wegen der mangelnden Messpunkte bei niedriger Belastung, wird der E-Modul zwischen einer Dehnung von  $\epsilon = 0,50\%$  und  $\epsilon = 0,75\%$  bestimmt. Dieser bleibt in etwa auf dem gleichen Niveau wie bei  $77\text{ K}$ . Alle ermittelten Kennwerte für den Zugmodul  $E_{\text{Zug}}$ , die Zugfestigkeit  $R_m$  und die Bruchdehnung  $\epsilon_{\text{Bruch}}$  sind in Tabelle 4.3 gelistet. Vergleicht man die mechanischen Kennwerte von HDPE bei  $T = 4\text{ K}$  mit denen von den Thermoplasten PEEK oder Polyimid [72], so zeigen sich kaum Unterschiede in der Bruchdehnung. E-Modul und Zugfestigkeit von HDPE dagegen liegen deutlich höher, als die der Hochleistungskunststoffe.

Abschließend sei zu erwähnen, dass bei der Bestimmung der Festigkeit  $R_m$  und des Zugmoduls  $E_{\text{Zug}}$  für Tiefsttemperaturen eine systematische Abweichung auftritt. Ausschlaggebend

## 4 Experimentelle Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen

Tabelle 4.3: Experimentell ermittelte Zugfestigkeitswerte  $R_m$ , Elastizitätsmoduln  $E_{Zug}$  sowie Bruchdehnungen  $\varepsilon_{Bruch}$  von HDPE unter Flüssig-Helium-Umgebung (LHe) bei  $-269\text{ °C}$  bzw.  $4\text{ K}$  bei einer Dehnrates von  $\dot{\varepsilon} = 2,1 \cdot 10^{-4}\text{ s}^{-1}$

Probe Nr.	Zugmodul $E_{Zug}$ N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit $R_m$ N/mm <sup>2</sup>	Bruchdehnung $\varepsilon_{Bruch}$ %
03	7261	125,6	1,61
04	7920	129,6	1,72
05	10 276	121,5	1,38
09	8012	123,8	1,57
10	7954	133,3	1,65
gemittelt	8284	126,8	1,59

dafür ist der Unterschied zwischen der Temperatur, bei der die Probekörper vermessen werden, und der kryogenen Testtemperatur. Für die Quantifizierung der Schrumpfung wird der integrale Ausdehnungskoeffizient von HDPE bei Flüssig-Helium-Bedingungen benötigt. Eine lineare Extrapolation der Daten aus Abbildung 4.3 ergibt einen CTE von  $\alpha|_{T=-269\text{ °C}} = 75 \cdot 10^{-6}\text{ 1/°C}$  zur Referenztemperatur von  $T_{ref} = 20\text{ °C}$ . So liefert eine Überschlagsrechnung für die Neuberechnung der Querschnittsfläche  $A$  in Abhängigkeit von  $A_0$  nach der Abkühlung von Raumtemperatur auf  $T = -269\text{ °C}$

$$\frac{A}{A_0} = (1 + \Delta T \cdot \alpha|_{T=-269\text{ °C}})^2 = (1 - 289\text{ °C} \cdot 75 \cdot 10^{-6}\text{ 1/°C})^2 = 0,957.$$

Damit ergibt sich eine Abweichung der vermessenen Querschnittsfläche von der tatsächlich im Experiment belasteten von ca. 4,3 %. Das heißt neben der Festigkeit  $R_m$  ist auch der E-Modul  $E_{Zug}$  um etwa 4,3 % höher als zunächst berechnet. Ziel dieser Überlegung ist es, diese Abweichung zu quantifizieren und abzuschätzen, ob sie einen gewichtigen Einfluss auf die experimentellen Ergebnisse hat. Die Wichtigkeit soll hiermit als gering eingestuft werden und nicht weiter in die Evaluation des Materialverhaltens einbezogen werden.

## 4.4 Viskoelastisches Verhalten

### 4.4.1 Temperaturabhängiges Kriechen infolge stationärer Zugbelastung

Für das belastungsgerechte Auslegen von Kunststoffstrukturen ist nicht nur das Kurzzeitverhalten des Werkstoffes von Interesse, sondern vor allem auch das thermo-mechanische Langzeitverhalten. Viskoelastische Polymere zeigen zeitabhängige Antworten auf mechanische Belastungen. Wird einem Werkstoff sprungförmig eine Belastung  $\sigma$  aufgezwungen, verformt er sich abhängig von seiner Steifigkeit zunächst elastisch. Bleibt diese Beanspruchung konstant, so nimmt die anfänglich erzeugte Dehnung über die Belastungsdauer zu. Neben der elastischen Verformung stellt sich eine viskoelastische Kriechverformung ein.

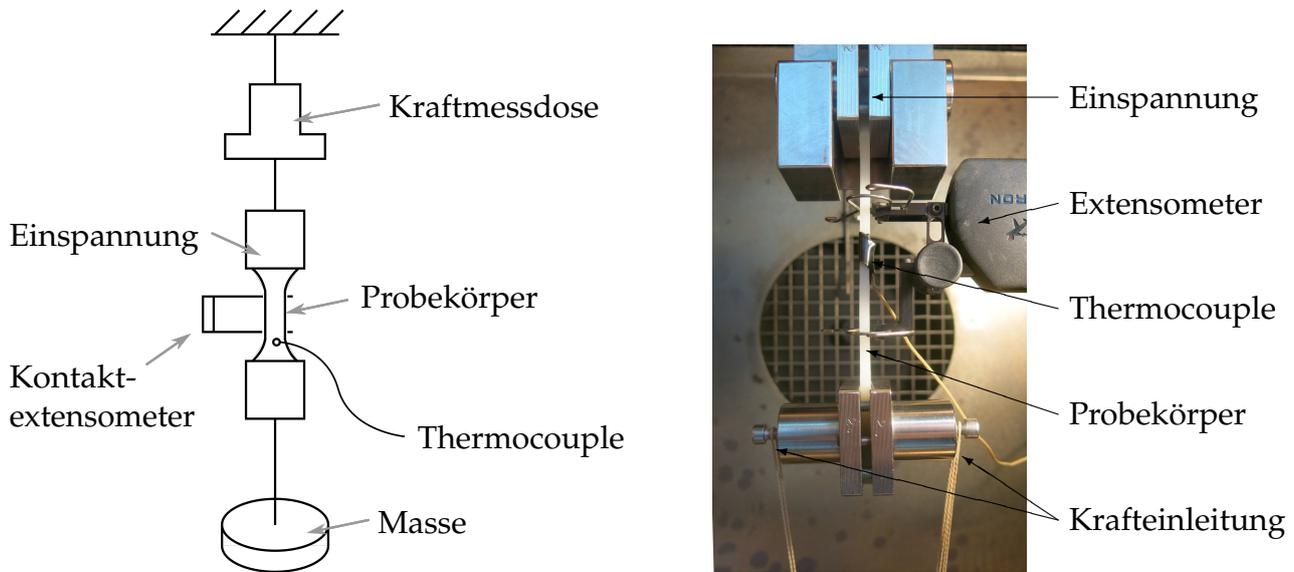


Abbildung 4.14: Versuchsaufbau für Zeitstandzugversuch

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, besitzen Polymere sehr verschiedenartige molekulare Aufbauten, wie z.B. die amorphen und teilkristallinen Strukturen von Thermoplasten oder die dreidimensional vernetzten Strukturen von Duromeren. So bestehen zum Teil deutliche Unterschiede beim viskoelastischen Langzeitverhalten zwischen den einzelnen Kunststoffen. Beispielsweise zeigen Thermoplaste, vor allem amorphe, eine starke Kriechneigung. [43, 100]

Zur experimentellen Untersuchung des temperaturabhängigen Kriechverhaltens von HDPE wurden Zeitstandzugversuche bei einachsiger statischer Zugbelastung nach DIN EN ISO 899-1 [30] durchgeführt. In Abbildung 4.14 ist der Versuchsaufbau samt Spannvorrichtungen und applizierter Sensorik dargestellt. Die Geometrie und Fertigung der Probekörper blieb die Selbe, wie in den Zugversuchen zuvor beschrieben, siehe Abbildung 4.5. In einer Universalprüfmaschine, umgeben von einer Temperaturkammer, wurden im Temperaturbereich zwischen  $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$  und  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  neun Zeitstandzugversuche durchgeführt. Ein Kontakttextensometer diente zur Erfassung der Längsdehnung im Probekörper, ein Pt100 Sensor zur Kontrolle der Temperatur auf dem Probekörper. Um die thermisch induzierten Spannungen im Werkstoff abzubauen und um die Belastungshistorie des Polymerwerkstoffs vernachlässigen zu können, siehe Unterabschnitt 3.5.4, wurden alle Probekörper unmittelbar vor dem Versuch bei der jeweiligen Testtemperatur 24 h ausgelagert.

Üblicherweise haben Zeitstandversuche in Prüfmaschinen das Problem, dass die Prüfmaschine hochfrequent verfahren werden muss, um die konstante Spannung im Probekörper zu halten. So entstehen Schwingungen in den resultierenden Kriechkurven, die die Ergebnisauswertung erschweren oder gar verfälschen können. Hier wurde auf die Prüfmaschine zur Krafteinleitung verzichtet. Es wurden Gewichte verwendet, die an die untere Einspannung des Prüflings gehängt wurden. Zu Beginn des Tests wurde die Prüfmaschine so verfahren, dass die Gewichtslast innerhalb von 5 s auf den Prüfling aufgebracht wurde. So konnte eine tatsächlich konstante Belastung gewährleistet werden. Die Gewichte wurden so gewählt, dass die Last  $\sigma$  etwa 10 % bis 12 % von der Zugfestigkeit bei der jeweiligen Temperatur betrug

Tabelle 4.4: Temperaturabhängige Spannungswerte beim Zeitstandzugversuch von HDPE und das jeweilig zugehörige Verhältnis aus Spannung und Zugfestigkeit  $\sigma/R_m(T)$

Temperatur $T$ °C	Spannung $\sigma$ N/mm <sup>2</sup>	Verhältnis $\sigma/R_m(T)$ -
-50 ± 1	4,58	11,4 %
-30 ± 1	3,70	-
-10 ± 1	3,13	11,4 %
5 ± 1	2,31	-
20 ± 1	1,73	10,1 %
40 ± 1	1,30	-
60 ± 1	1,13	12,8 %
80 ± 1	0,81	-
100 ± 1	0,51	10,4 %

und so keine plastischen Effekte im Polymer zu erwarten waren. Tabelle 4.4 zeigt die genauen Belastungswerte der durchgeführten Zeitstandzugversuche.

Während der Versuchsdauer von ca. 24 h wurden neben der Temperatur, die anliegende Kraft und Dehnung aufgezeichnet. Daraus lassen sich sogenannte Kriechkurven ermitteln, die bei einer konstanten Spannung  $\sigma$  die Nachgiebigkeit  $D(t) = \varepsilon(t)/\sigma$  über der Zeit  $t$  abbilden. Für alle Temperaturen zwischen  $-50\text{ °C}$  und  $100\text{ °C}$  wurden Kriechkurven berechnet und der Übersichtlichkeit halber logarithmisch ausgedünnt. In Abbildung 4.15 sind die Ergebnisse der Zeitstandzugversuche graphisch dargestellt. Die Messwerte starten bei einer Zeit von 10 s. Die Nachgiebigkeit steigt sowohl mit der Messdauer als auch mit der Temperatur. Dabei ist der Anstieg von zwei Größenordnungen über den Temperaturbereich von  $\Delta T = 150\text{ °C}$  beachtlich. Die Steigerung über die vier Zeitdekaden fällt dagegen geringer aus. Auch ändert sich die Form der stets monoton steigenden Kriechkurven. Während bei tieferen Temperaturen eine parabolische Kriechfunktion angestrebt wird, lässt sich bei Temperaturen über  $5\text{ °C}$  eine logarithmisch steigende Funktion erkennen.

#### 4.4.2 Auswertung anhand des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips

Wie in Unterabschnitt 3.5.6 beschrieben, besteht die Möglichkeit Nachgiebigkeitskurven unterschiedlicher Temperaturen zeitlich um den Faktor  $\log a_T$  zu verschieben. So lassen sich für eine bestimmte Referenztemperatur zum Teil sehr lange sowie sehr kurze Belastungsdauern simulieren. Die experimentelle Bestimmung derer würde entweder Jahre dauern oder wäre schlicht unmöglich. Die mit der Verschiebung entstehende Masterkurve beschreibt das viskoelastische Verhalten des Polymers bei der gewählten Referenztemperatur  $T_{\text{ref}}$  für einen größeren Zeitbereich als experimentell für diese Temperatur untersucht wurde.

Die Identifikation der für die Masterkurve notwendigen Verschiebungsfaktoren  $a_T$  (auch Shift-Faktoren genannt) erfolgt zunächst manuell, so dass sich die Nachgiebigkeitskurven möglichst exakt überlappen. Anschließend wird Gleichung 3.32, die sogenannte WLF-Gleichung, an die ermittelten Faktoren angepasst. Dazu werden die Parameter  $C_1$  und

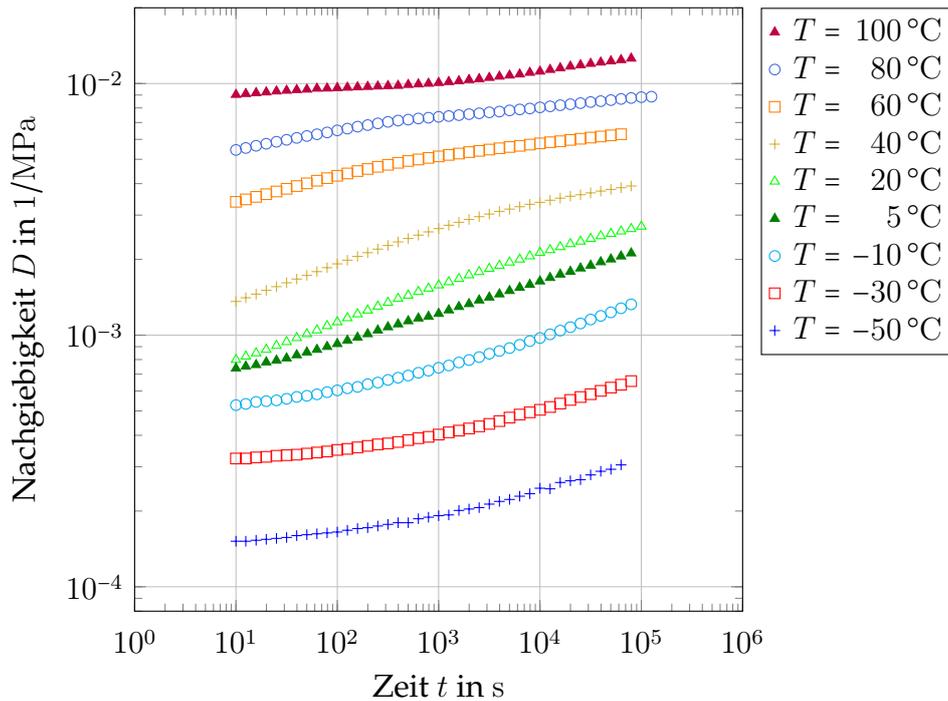


Abbildung 4.15: Experimentell ermittelte Nachgiebigkeiten  $D(t)$  von HDPE bei verschiedenen Temperaturniveaus

$C_2$  unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (nichtlineare Regression) optimiert und somit die WLF-Gleichung an die Faktoren iterativ approximiert. Für die Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$  ergeben sich die Parameter zu  $C_1 = 1,810 \cdot 10^6$  und  $C_2 = 1,454 \cdot 10^7$ . Damit berechnet sich der logarithmische Shift-Faktor zu

$$\log a_T = -\frac{1,810 \cdot 10^6 (T - 20\text{ °C})}{1,454 \cdot 10^7 + (T - 20\text{ °C})}.$$

In Abbildung 4.16 ist dessen Verlauf zusammen mit den zuvor manuell identifizierten Shift-Faktoren dargestellt.

Anhand der mit der WLF-Gleichung berechneten Verschiebungsfaktoren  $a_T$  werden die einzelnen Nachgiebigkeitskurven abhängig von der Testtemperatur horizontal, das heißt in der Zeitebene, verschoben. Zur eindeutigen Identifikation der Überlappungsbereiche zwischen den einzelnen Kurven, werden  $D(t)$ -Wertepaare bis zu einer Versuchsdauer von 100 s abgeschnitten. Eine graphische Darstellung der erzeugten Masterkurve und der einzelnen experimentell ermittelten Nachgiebigkeitskurven ist in Abbildung 4.17 zu finden. Damit ist die Vorhersage des viskoelastischen Verhaltens von HDPE auch über einen Zeitraum von vielen Jahren bei einer Temperatur von  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$  möglich. Mit steigender Temperatur nimmt der zeitliche Horizont der Vorhersage ab, beträgt jedoch bei  $T = 80\text{ °C}$  immer noch weit über 10 Jahre. Die Masterkurve zur Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20\text{ °C}$  enthält in dem Zeitfenster zwischen  $10^{-3}\text{ s}$  und  $10^{-2}\text{ s}$  keine Daten, was für die spätere Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens keinerlei Probleme darstellt.

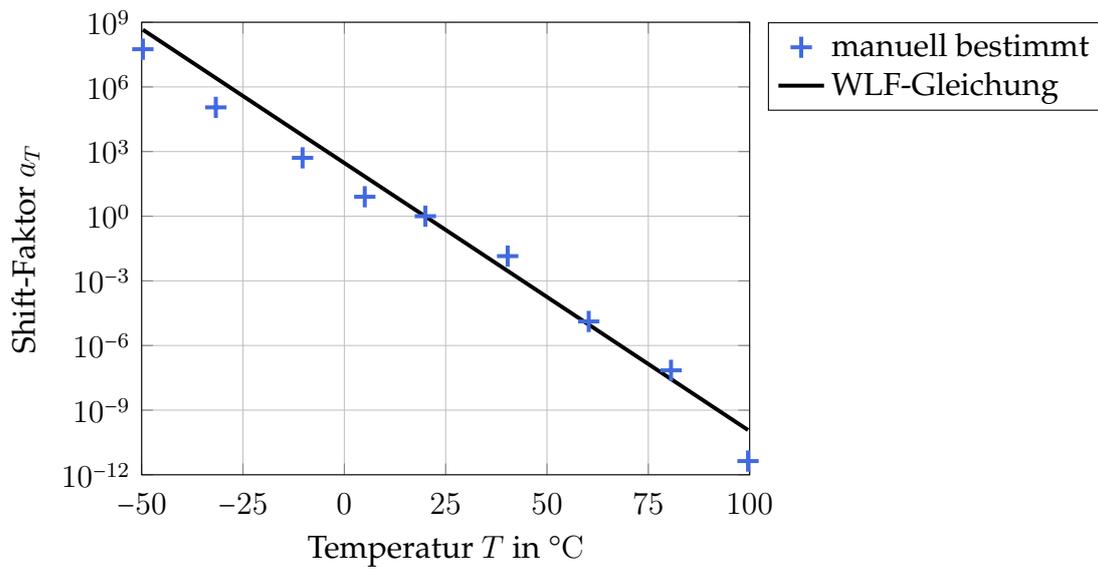


Abbildung 4.16: Shift-Faktoren  $a_T$  für Zeit-Temperatur-Verschiebung nach Williams, Landel und Ferry (WLF) für HDPE bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^{\circ}\text{C}$

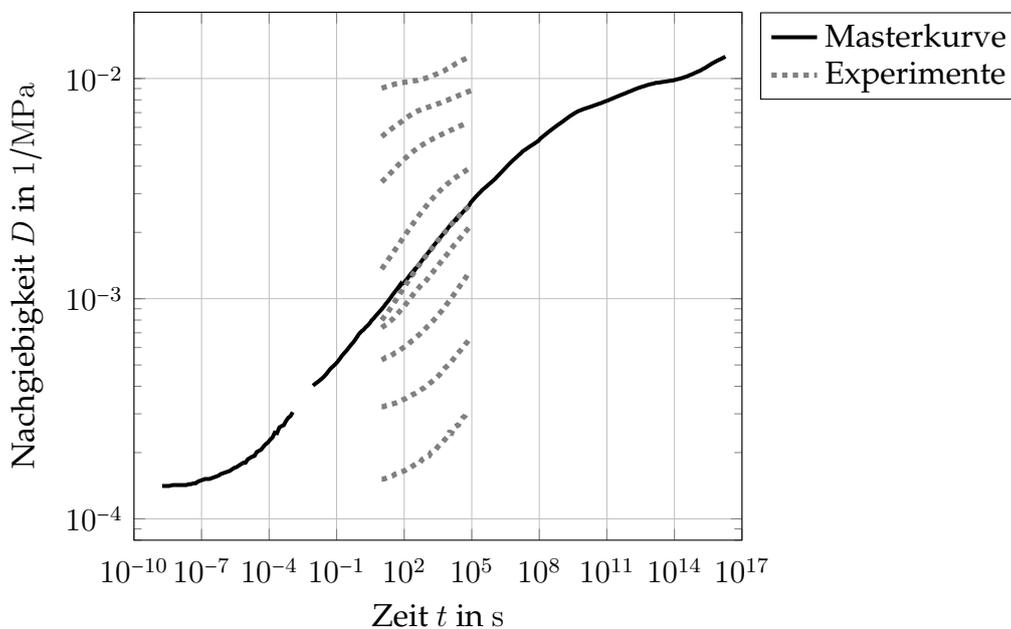


Abbildung 4.17: Master Nachgiebigkeitskurve von HDPE für die Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^{\circ}\text{C}$  mit experimentellen Daten

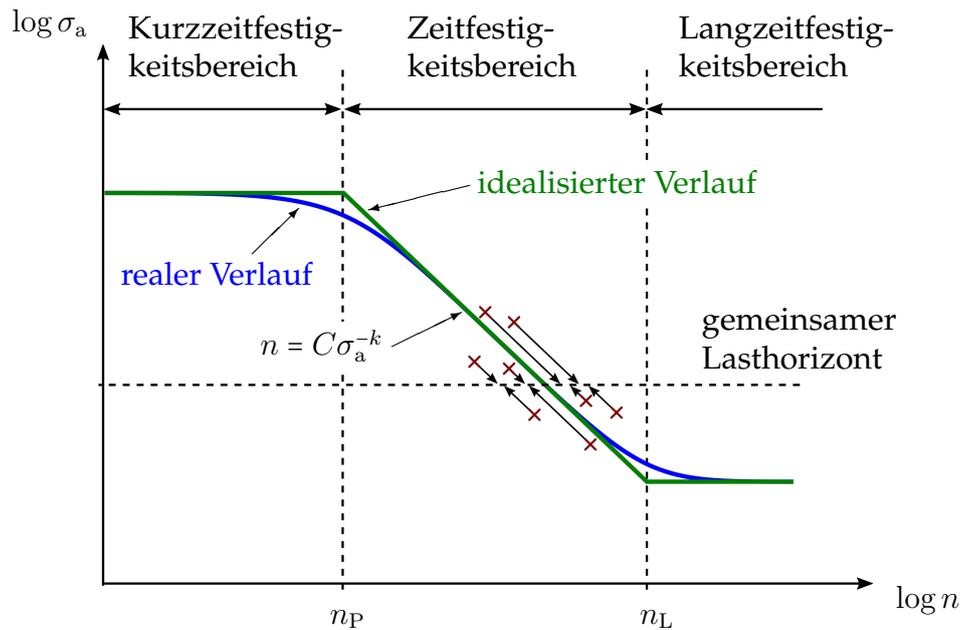


Abbildung 4.18: Schematische Darstellung einer realen und einer idealisierten Wöhlerkurve, deren charakteristische Festigkeitsbereiche sowie die Erstellung der Wöhlerlinie mittels Perlschnurverfahren

## 4.5 Temperaturabhängiges Betriebsfestigkeitsverhalten

Ebenso entscheidend für die Lebensdauer eines Bauteils ist neben dem Langzeitverhalten unter quasistatischer Belastung das Langzeitverhalten unter zyklischer Beanspruchung. Dynamischen Belastungen können bei bedeutend niedrigeren Spannungen zum Versagen des Bauteils führen, als es statisch der Fall wäre. Eine Untersuchung der Schwingfestigkeit bzw. der Dauerfestigkeit eines Werkstoffes findet im Allgemeinen anhand von Dauerschwingversuchen nach DIN 50100 [26] statt. Ein Spezialfall ist der Wöhler-Versuch, der die Abhängigkeit zwischen Beanspruchungshöhe und maximal ertragbarer Lastspielzahl wiedergibt. Mithilfe von Wöhler-Versuchen an Polyethylen wird dessen temperaturabhängiges Materialverhalten bei zyklisch schwellender Zugbelastung untersucht.

Die sich aus den Versuchen ermittelten Schwingspielzahlen  $n$  bis zum Versagen werden in einem sogenannten Wöhlerdiagramm in Relation zu den zugehörigen Spannungsamplituden  $\sigma_a$  oder Schwellspannung  $\sigma_s$  gesetzt. Bei einem Anriss oder Bruch der Probe spricht man von Versagen. Im Folgenden wird verallgemeinernd von einem Bruch ausgegangen. Die experimentell ermittelten Punkte ergeben eine Wöhlerkurve.

Abbildung 4.18 stellt einen realen und einen idealisierten Verlauf einer Wöhlerlinie graphisch dar. Unterteilt werden kann die Kurve in drei charakteristische Bereiche, einen Kurzzeit-, einen Zeit- und einen Langzeitfestigkeitsbereich. [103] Durch lineare Idealisierung können die drei Bereiche wie folgt unterteilt werden. Bis zu einer Knicklastschwingspielzahl  $n_P$  verharret die Wöhlerkurve auf einem konstanten Niveau im Kurzzeitfestigkeitsbereich. Daraufhin zeigt sich eine lineare Abnahme der Festigkeit im Zeitfestigkeitsbereich, die im Doppelt-logarithmischen durch die Geradengleichung nach Basquin [9]

$$n = C \sigma_a^{-k} , \quad (4.2)$$

mit der Lage  $C$  und der Neigung  $k$  im Raum beschrieben werden kann. Bei steigender Lastschwingzahl, ab der sogenannten Ecklastschwingspielzahl  $n_L$ , geht die Wöhlerkurve in den konstanten Langzeitfestigkeitsbereich über. Die charakteristischen Lastschwingzahlen  $n_P$  und  $n_L$  sind nicht konstant, sondern materialspezifisch und temperaturabhängig. [96] Auf die verschiedenen möglichen Belastungsarten, die zur Aufzeichnung einer Wöhlerlinie herangezogen werden können, soll hier nicht detailliert eingegangen werden. Es sei auf weiterführende Literatur, wie z.B. [83] oder [43], verwiesen.

Unter der Annahme, dass die experimentell gewonnenen Daten einer logarithmischen Standardverteilung unterliegen und diese Verteilung über den gesamten Zeitfestigkeitsbereich konstant bleibt, wird zur Erstellung der Wöhlerlinie das sogenannte Perlschnurverfahren angewandt. [75] Schematisch dargestellt findet es sich in Abbildung 4.18. Dabei werden Versuchspunkte (dunkelrot markiert), die auf unterschiedlich hohen Lasthorizonten liegen, auf einen gemeinsamen Lasthorizont projiziert. Die Wöhlerkurve mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von  $W_A = 50\%$  kann durch lineare Regression ermittelt werden. [76] Für alle Proben im Zeitfestigkeitsbereich erfolgt dabei die Minimierung der Fehlerquadrate über die Schwingspielzahl. [74]

### 4.5.1 Dauerschwingversuche an Polyethylen

In einer kraftgeregelten Universalprüfmaschine wurden aus dem HDPE-Liner geschnittene Materialproben einer zyklischen Zugschwellbelastung unterzogen. Die Geometrie der Zugprobekörper wurde an DIN EN ISO 527 [28] angelehnt. Vorgenommen wurde lediglich eine Verkürzung des parallel verlaufenden Prüfbereichs der Schulterproben, um für zyklische Belastung kleinere Verformungen und damit höhere Belastungsfrequenzen erreichen zu können. Mit einer Frequenz von  $f = 5$  Hz wurde eine sinusförmige Belastung zwischen einer definierten Oberspannung  $\sigma_a$  und der Entlastung ( $\sigma \approx 0$ ) aufgebracht. Zur Vermeidung einer wechselnden Last wurde ein Spannungsverhältnis von  $R = 0,1$  gewählt.

Für jedes der drei Temperaturniveaus von  $T = -40^\circ\text{C}$ ,  $T = 20^\circ\text{C}$  und  $T = 85^\circ\text{C}$  wurden vorab die durchschnittlichen quasistatischen Zugfestigkeiten von HDPE bestimmt. Ausgehend davon wurden die Probekörper mit konstanter Spannungsamplitude zyklisch bis zum Bruch belastet. So wurde für verschiedene Oberspannungen geprüft, welches Lastvielfache der Kunststoff bis zu einem definierten Versagenskriterium erträgt. Während der Zyklertests trat bei den Materialproben unter Zugschwellbelastung zunächst eine Einschnürung des parallelen Prüfbereichs auf, die sich im Laufe des Experiments lokalisierte. An dieser Stelle trat bei Erreichen der maximal ertragbaren Zyklenzahl der Bruch der Probe auf. Auf diese Art und Weise wurden je nach Temperatur und Ermüdungsverhalten zwischen 10 und 15 unterschiedlich hohe Spannungsniveaus geprüft. Jo u. a. [57] stellten bei der experimentellen Untersuchung des Betriebsfestigkeitsverhaltens von HDPE ein Abflachen der Wöhlerlinien ab einer Zyklenzahl von  $10^5$  fest. Für die hier beschriebenen Versuche wurde so eine Grenzschningspielzahl von  $10^5$  Zyklen festgelegt. Wurde diese Zyklenzahl erreicht, ohne dass Versagen auftrat, wurde der Dauerschwingversuch abgebrochen und die Probe als Durchläufer markiert. In Abbildung 4.19 sind die Durchläufer auf einem Niveau mit einer Zyklenzahl von  $10^5$  eingezeichnet und mit farblich passendem Pfeil markiert.

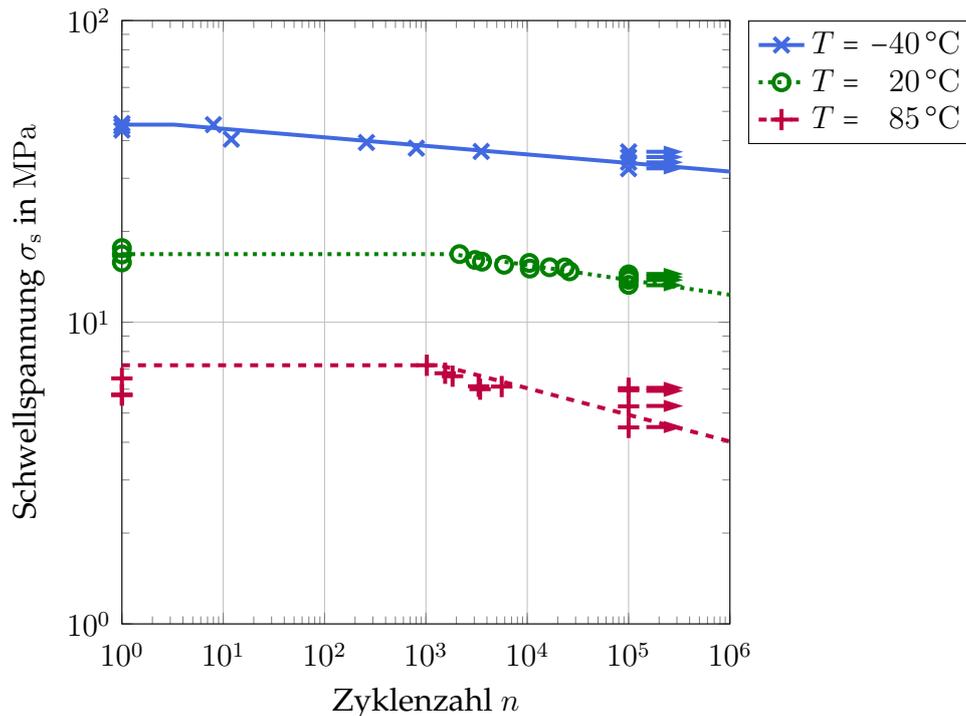


Abbildung 4.19: Wöhlerdiagramm von HDPE bei Temperaturen von  $T = -40\text{ °C}$ ,  $T = 20\text{ °C}$  und  $T = 85\text{ °C}$ ; Durchläufer sind mit Pfeil markiert

#### 4.5.2 Auswertung des Verhaltens unter zyklisch schwellender Zugbelastung

Die Ergebnisse der durchgeführten Dauerschwingversuche sind als sogenannte S-N-Kurven in Abbildung 4.19 dargestellt. Die quasistatisch ermittelten Zugfestigkeiten von HDPE sind für alle drei Temperaturniveaus auf der Ordinate angetragen. Durchläufer sind abhängig von Temperatur und Schwellspannung bei einer Lastspielzahl von  $n = 10^5$  zu finden. Dazwischen befinden sich die Proben, bei denen es während des Dauerschwingversuchs zum Versagen kam. Zur Bestimmung der Wöhlerlinien wurden die Durchläufer mit einbezogen, um ein unerwünschtes Abflachen der Geraden zu verhindern. Damit ist eine konservativere Auslegung von Systemkomponenten aus Polyethylen ermöglicht.

Bei Raumtemperatur ( $T = 20\text{ °C}$ ) ergibt sich für das untersuchte Polyethylen eine klar unterteilbare Wöhlerlinie mit einem Kurzzeitfestigkeitsbereich bis zu einer Knicklastschwingspielzahl von  $n_p \approx 10^3$ . Der daraufhin folgende Zeitfestigkeitsbereich lässt sich mit der Gerade  $n = 10^{28,16} \sigma_s^{-20,31}$  beschreiben, die für thermoplastische Polymere durchschnittliche Werte aufweist.

Das spröde mechanische Verhalten des Polyethylen bei  $T = -40\text{ °C}$  führt zunächst zu einem verkürzten Kurzzeitfestigkeitsbereich. Der Zeitfestigkeitsbereich, d.h. die lineare Abnahme der Festigkeit mit steigender Lastspielzahl  $n$ , weist eine verhältnismäßig flache Neigung im Vergleich zur Raumtemperatur auf.

Bei erhöhter Temperatur ( $T = 85\text{ °C}$ ) ist die Knicklastschwingspielzahl ähnlich hoch wie bei Raumtemperatur. Die erhöhte Steigung der Gerade für den Zeitfestigkeitsbereich liegt mit  $k \approx 11$  auf einem mit Metallen vergleichbaren Niveau. [51] Die erhöhte Dehnrates bei

#### 4 Experimentelle Untersuchung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen unter zeit-, temperatur- und richtungsabhängigen Belastungen

den zyklischen Tests im Vergleich zu den quasistatischen Zugfestigkeitsversuchen sorgt bei  $T = 85\text{ °C}$  für höhere erreichbare Spannungen. Alle Festigkeiten, die in quasistatischen Versuchen ermittelt wurden, fallen niedriger aus, als die ersten zyklisch gebrochenen Proben bei  $n \approx 10^3$ .

Tabelle 4.5: Experimentell ermittelte Werte zur Beschreibung der Wöhlerlinien von HDPE im Temperaturbereich von  $T = -40\text{ °C}$  bis  $T = 85\text{ °C}$

Temperatur $T$ °C	Lage $\lg C$ -	Steigung $k$ -	Knicklast $\lg n_P$ -
-40	58,99	35,34	0,513
20	28,16	20,31	3,260
85	12,84	11,31	3,140

Alle zur Beschreibung der Wöhlerlinien relevanten Parameter finden sich in Tabelle 4.5 wieder. Aufgrund der Testabbrüche bei  $n = 10^5$  kann eine Ecklast  $n_L$  nicht mit Gewissheit bestimmt werden. Eine Aussage über den Beginn des Langzeitfestigkeitsbereich bzw. der Dauerfestigkeit von HDPE wäre spekulativ und soll hier nicht getroffen werden. Für anschließende Lebensdauersimulationen wird daher auf eine Definition des Dauerfestigkeitsbereichs verzichtet und die ermittelte Zeitfestigkeitsgerade, wie in Abbildung 4.19 dargestellt, bis hin zu hohen Lastspielzahlen fortgeführt. Für die Lebensdauerberechnung von Strukturbauteilen führt diese Annahme dazu, dass die Auslegung für Lastspielzahlen von  $n > 10^5$  konservativ erfolgt.

# 5

## Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von Polyethylen

Um das thermo-mechanische Materialverhalten von Polyethylen für Finite Elemente Analysen zu modellieren, existiert eine Vielzahl von sogenannten Materialmodellen, die dafür mehr oder minder geeignet sind. Es besteht die Möglichkeit der Erweiterung einer linear elastischen Modellierung um ein Plastizitätskriterium. Ebenso denkbar ist eine nichtlineare, hyperelastische Modellierung. Unter den gebräuchlichen Materialmodellen für Kunststoffe befinden sich neben viskoelastischen Ansätzen auch Kombinationen diverser Modellierungen. Bei alledem soll die Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden. Die Möglichkeit die Anisotropie abzubilden soll ebenso eingeräumt werden.

Im folgenden Kapitel wird zunächst beschrieben, wie die Aufbereitung der Messdaten für die spätere Finite Elemente Analyse erfolgt. Daraufhin werden die für die Bewertung der Materialmodelle notwendigen Finite Elemente Modelle beschrieben. Neben hyperelastischen Materialmodellen werden auch elastisch-plastische sowie viskoelastische untersucht. Die Modelle werden hierzu parametrisiert sowie bezüglich des beschriebenen thermo-mechanischen Verhaltens evaluiert.

Alle hyperelastischen und elastisch-plastischen Materialmodelle sowie die viskoelastische Modellierung werden einer Untersuchung ihrer Qualität unterzogen. Zur Evaluation der numerischen Daten wird deren relative Abweichung von den experimentell ermittelten Kurven berechnet. Die relative Abweichung

$$f_{\text{rel}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\sigma_i^{\text{sim}} - \sigma_i^{\text{exp}}|}{\sigma_i^{\text{exp}}} \quad (5.1)$$

definiert sich aus dem Mittel der über die Anzahl der Datenpunkte  $n$  aufsummierten relativen Unterschiede der simulativ berechneten Spannungswerte  $\sigma_i^{\text{sim}}$  von den experimentell bestimmten Spannungswerten  $\sigma_i^{\text{exp}}$ . Dieses Maß wird im folgenden Kapitel als Bewertung der Qualität der Modellierung herangezogen.

### 5.1 Verarbeitung und Einbindung der Messdaten für die Finite Elemente Analyse

Für die Verwendung der experimentellen Daten zur Charakterisierung der Konstitutivmodelle bedarf es einer Aufbereitung der Daten. Diese Verarbeitung betrifft die Auflösung

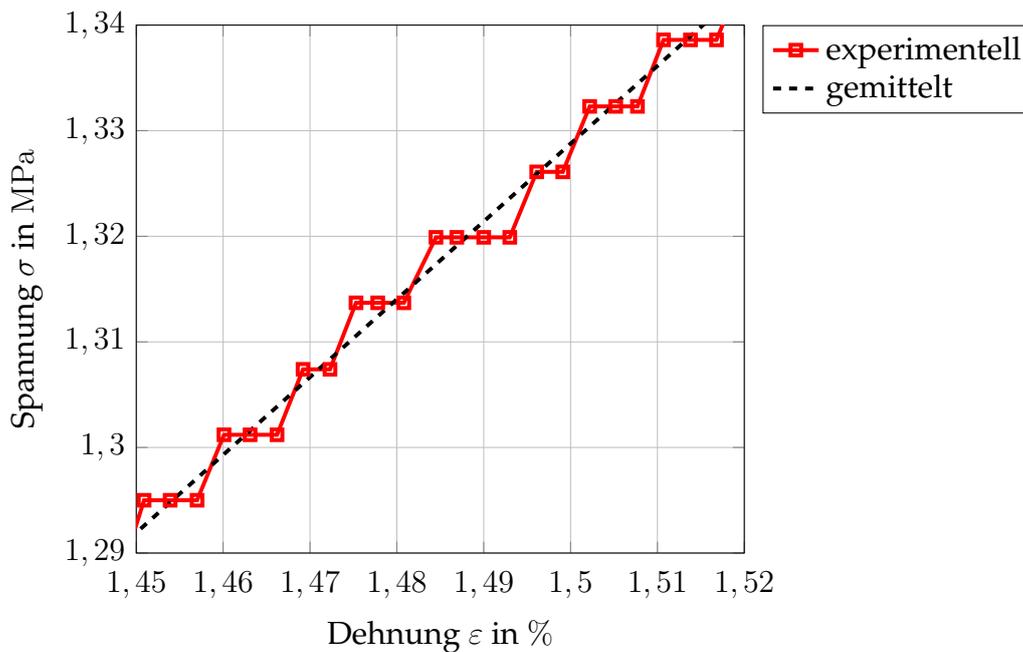


Abbildung 5.1: Vergleich von experimenteller Spannungs-Dehnungs-Kurve bei 100 °C mit der durch einen Spline geglätteten Mittelwertskurve

der Messdaten sowie das Arretieren und die Anzahl der Messkurven. Beispielhaft soll hier anhand der Zugversuche bei einem Temperaturniveau die Aufbereitung erläutert werden.

Die in allen Experimenten verwendete Kraftmessdose besitzt eine Auflösung von 0,305 N. Bei einer Probenquerschnittsfläche von 50 mm<sup>2</sup> entspricht das einer Spannungsauflösung von  $6,10 \cdot 10^{-3}$  MPa. Bei den auftretenden Spannungswerten ist diese Auflösung völlig ausreichend. Dennoch ergeben sich bei der Aufzeichnung Sprünge in den Spannungs-Dehnungs-Kurven, wie dem Ausschnitt aus einer Spannungs-Dehnungs-Kurve in Abbildung 5.1 zu entnehmen ist. Um mögliche Effekte der Sprünge auf die Materialmodelle ausschließen zu können, werden alle Versuchskurven jeweils mit einer Kurve gemittelt, ebenso zu sehen in Abbildung 5.1. Die Mittelwertskurve beschreibt einen Spline entlang der experimentell bestimmten Datenpunkte und glättet dabei die Sprünge, die der Spannungsauflösung geschuldet sind. Die Kurve weist ein statistisches Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9999$  auf. Im Zuge der Mittelung wird zugleich die Dehnungsauflösung auf 0,01 % diskretisiert. Diese Vereinheitlichung vereinfacht die automatisierte Verarbeitung der Messdaten.

Die einzelnen Messkurven beginnen bei Startpunkten abweichend vom Ursprung des Spannungs-Dehnungs-Raums. Auch wenn dieser Offset im Verhältnis zu den erreichten Spannungs- und Dehnungswerten gering ausfällt, ist er messbar und wird in einem weiteren Schritt behoben. Für jede Messung wird die anfängliche Materialsteifigkeit bestimmt und damit die Kurve anhand dieser Steigung extrapoliert. Anschließend erfolgt eine Verschiebung der Messpunkte entlang der Dehnungsachse bis die Kurve durch den Ursprung verläuft.

Sämtliche Versuchskurven eines Temperaturniveaus werden abschließend gemittelt und mit einer Dehnungsauflösung von 0,01 % für die folgenden Prozesse bereit gehalten. Die Eingabe der Daten für die Materialmodelle in den Finite Elemente Analysen erfolgt tabellarisch. Für die fünf Temperaturen zwischen -50 °C und 100 °C liegen die Bestimmtheitsmaße

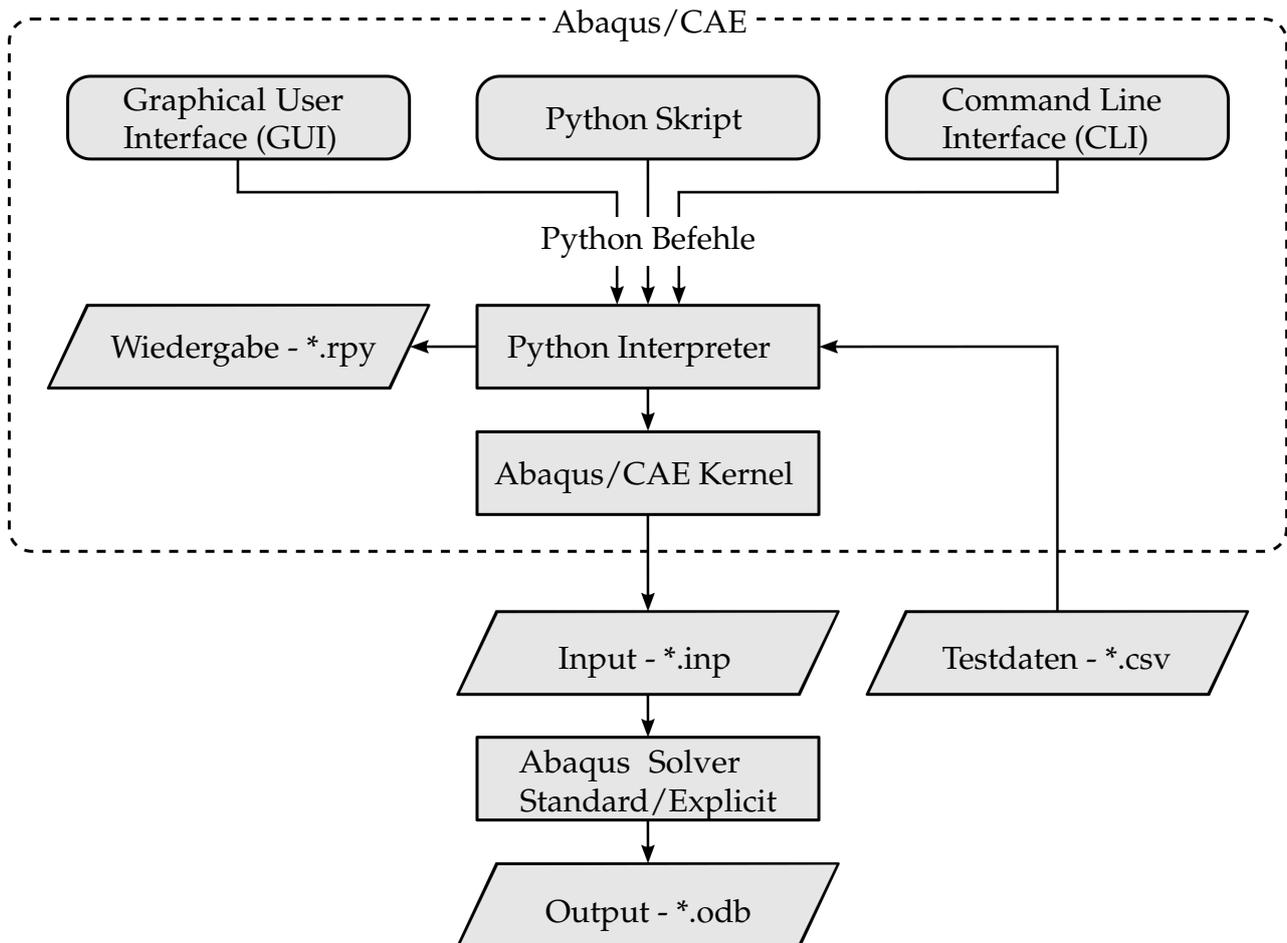


Abbildung 5.2: Schematischer Ablauf der Simulation in Abaqus mit Interaktion zwischen Nutzer, Interpreter und Solver

der berechneten Kurven der Zugversuche zwischen  $R^2 = 0,9989$  und  $R^2 = 0,9993$ . Diese geringe Variation, hervorgerufen durch die Regression der Daten, spricht für die Qualität der Auswertemethode der Messkurven.

Abbildung 5.2 zeigt den generellen Ablauf von Simulationen in Abaqus. Das Programm bietet drei Möglichkeiten Python Befehle einzugeben, um das *Preprocessing* der Finite Elemente Analyse durchzuführen. Neben der graphischen Benutzeroberfläche stehen Python Skripte oder die Kommandozeile zur direkten Eingabe zur Verfügung. Der *Python Interpreter* nimmt als weiteren *Input* die aufbereiteten Testdaten auf. Während die Wiedergabedatei ein Protokoll der erfolgten Eingaben ist, liefert der *Abaqus Kernel* ein *Inputfile* mit allen geometrischen und lastspezifischen Daten sowie Details über die Finite Elemente Auswahl und die erforderlichen Berechnungsprozesse. Der *Abaqus Solver* löst die Simulation und ermöglicht das *Postprocessing*, indem er die Ergebnisdaten in ein *Outputfile* schreibt. Nach diesem Schema laufen alle folgend dargestellten Berechnungen in Abaqus ab.

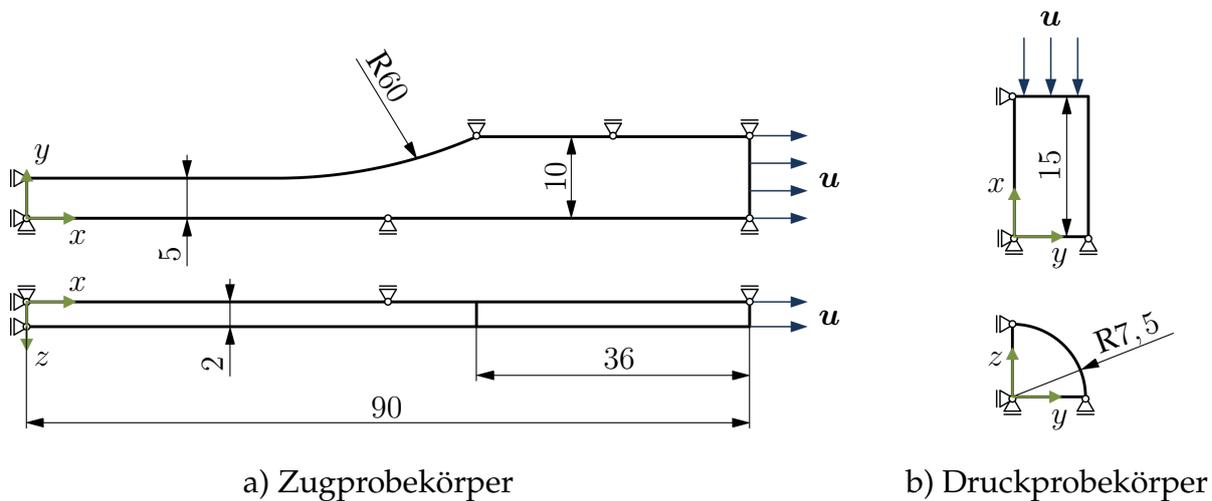


Abbildung 5.3: Geometrie, Abmaße (in mm) und Belastung der Finite Elemente Modelle zur Evaluation der verschiedenen Materialmodelle

## 5.2 Finite Elemente Modelle der Probekörper zum Zweck der Evaluation der Materialmodelle

Zur Evaluation der untersuchten Materialmodelle dienen zwei Finite Elemente Modelle (FE Modelle), die die uniaxialen Zug- bzw. Druckprüfungen adäquat nachbilden. Die FE Modelle sollen physikalische Effekte wie die Beziehung von Last zu Verformung hinreichend genau abbilden und dabei in einem vertretbaren Rahmen zu Rechen- und Modellierungsaufwand stehen. Bei der Modellierung wird insbesondere auf Annahmen und Vereinfachungen eingegangen, die einen Einfluss auf die Simulationsergebnisse haben.

Die Schulterprobe für die Zugversuche und der Zylinder für die Druckversuche sind in Abbildung 5.3 a) und b) gezeigt. Neben der Geometrie der Modelle beinhaltet die Abbildung die Abmaße sowie die anliegenden Dirichlet Randbedingungen. Während die Symmetrien und Einspannungen durch Auflager angedeutet sind, sind die angreifenden Verschiebungslasten  $u$  als Pfeile in die jeweilige  $x$ -Richtung eingetragen.

Im experimentellen Zugversuch wird der Probekörper in der Prüfmaschine mit einem gewissen Druck durch die Spannbacken eingespannt. Die kraftschlüssige Verbindung zwischen Spannbacken und Prüfling überträgt die Verschiebungslast. Im FE Modell wird diese Verbindung näherungsweise durch eine zusätzliche Lagerbedingung an dessen Schulter modelliert. Die Modellierung der Einspannung unterbindet die im realen Probekörper vorherrschende Querdehnung. Wegen der geringen induzierten Spannung und wegen der hohen Reibungskräfte in der Kontaktfläche stellt dies keine beträchtliche Vereinfachung dar. Das Aufbringen der Verschiebung erfolgt an der Stirnseite des Probekörpers. So werden die Zugspannungen im gesamten Einspannungsbereich hervorgerufen, die im Realfall durch die flächige Einspannung nicht auftreten. Der resultierende ebene Spannungszustand im Einspannungsbereich wird durch die Symmetrierandbedingungen hervorgerufen und bildet in gewisser Weise die Querdehnung, die unter realen Bedingungen herrscht, ab. Die Abweichung zwischen den realen und den simulierten Einspannungen wird somit so klein wie möglich gehalten. Beim

realen Druckversuch wurden die Oberflächen der Druckkalotte mit Teflon behandelt, so dass eine annähernd reibungsfreie Oberfläche angenommen werden kann.

Beide Geometrien sind mittels Hexaeder-Elementen regelmäßig vernetzt. Während der Zugprobekörper etwa 1100 Elemente und circa 5600 Freiheitsgrade besitzt, ist der Druckprobekörper mit etwa 900 Elementen bei circa 3500 Freiheitsgraden modelliert. Als Elementtyp wird der 8-knotige Hexaeder mit reduzierter Integration und linearen Ansatzfunktionen gewählt. Bei der reduzierten Integration in den sog. C3D8R-Elementen wird bei der Auswertung anstelle der Gaußpunkte der Punkt in der Mitte des Elements verwendet. Dies hat den Vorteil, dass dadurch parasitäre Effekte, wie beispielsweise das Schublocking, beseitigt werden. Für ausführlichere Details, die für und wider die Elementwahl sprechen sei auf weiterführende Literatur, [80] und [122], verwiesen.

Bei späteren Anwendungsbeispielen werden Elemente mit linearen Ansatzfunktionen und reduzierter Integration verwendet. Um die Konformität zu wahren sollen auch hier Elementtypen dieser Natur zum Einsatz kommen, um in Frage kommende Materialmodelle zu evaluieren. Bei der hier gewählten feinen Vernetzung weist der Elementtyp C3D8R keine nennenswerten Nachteile gegenüber Elementen mit Ansatzfunktionen höherer Ordnungen auf. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine Konvergenzanalyse durchgeführt wurde. Weder eine Verfeinerung des Netzes noch eine Erhöhung der Ordnung der Elementansatzfunktionen konnte eine signifikante Verbesserung der Qualität der Lösung hervorrufen.

### 5.3 Hyperelastische Materialmodellierung

Anhand von hyperelastischen Materialmodellen wird im Folgenden das Verformungsverhalten unter uniaxialer Druck- bzw. Zugbelastung numerisch abgebildet. Dabei werden die simulativ erlangten Ergebnisse den experimentell ermittelten Daten gegenübergestellt. Um eine geeignete Vorauswahl des Materialmodells treffen zu können, werden verschiedene hyperelastische Modelle einander gegenüber gestellt und mit den Versuchsdaten verglichen. Dies geschieht zunächst mit den experimentellen Daten, die bei einer Temperatur von 20 °C gewonnen wurden. Die zur Auswahl stehenden hyperelastischen Materialmodelle sind, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, das reduzierte Polynommodell und das Ogden-Modell verschiedener Grade  $N$  sowie das van der Waals-Modell und das Marlow-Modell. In Unterabschnitt 3.4.2 sind beispielhaft für die hyperelastischen Materialmodelle die Konstitutivgleichungen des Marlow-Modell aufgezeigt und diskutiert. Die anderen genannten Modelle wurden unter anderem von Holzapfel [54], Johannknecht [58], Ogden [88], Arruda und Boyce [4], Kilian [62] und Treloar [112] veröffentlicht, erläutert oder weiterentwickelt.

#### 5.3.1 Reduziertes Polynommodell

Unter Verwendung der reduzierten Polynommodelle 2. bis 6. Grades wurden Spannungs-Dehnungs-Kurven im Zug- und Druckbereich numerisch bestimmt. Abbildung 5.4 zeigt die berechneten Kurven im Vergleich zu dem experimentell ermittelten Verformungsverhalten bei  $T = 20\text{ °C}$ . Unter Zug steigen die Spannungs-Dehnungs-Kurven vom Ursprung ausgehend zunächst an. Im Falle des reduzierten Polynommodells 2. Grades erreicht die Kurve bei etwa 6,3 % Dehnung ein Maximum von 15,4 MPa. Bei höheren Dehnungswerten fällt die

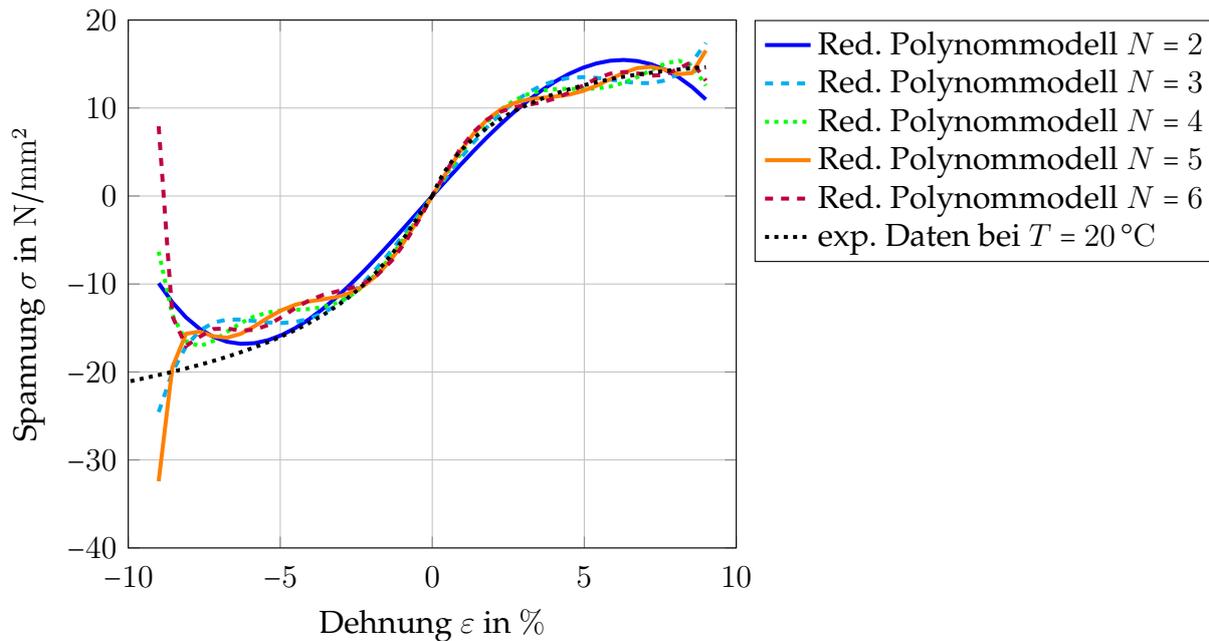


Abbildung 5.4: Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Daten der reduzierten Polynommodelle 2. bis 6. Grades zu den experimentellen Kurven bei 20 °C

Spannung wieder ab und erreicht bei 9 % Dehnung einen Wert von etwa 11 MPa. Gemäß des Polynomgrads beschreibt der Verlauf unter Zug eine Parabel. Die Parabel ist in den Druckbereich hinein punktgespiegelt. Beim Vergleich der Kurve des Polynoms 2. Grades im Zugbereich mit dem Experiment, so ergeben sich mitunter große Unterschiede in Form und Wert Kurve.

Mit steigendem Polynomgrad ändern sich Verlauf und Anzahl von Extremstellen der Kurven. Sie liegen teilweise deutlich näher an den experimentell bestimmten Daten. Aufschluss darüber gibt der mittlere relative Fehler der numerisch bestimmten Kurve. Er verringert sich infolge der Erhöhung des Polynomgrades von 15,1 % beim Modell 2. Grades, über 7,0 % beim Modell 4. Grades auf 4,8 % beim Modell 6. Grades. Darüber hinaus nimmt die Anfangssteigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve zu und nähert sich der experimentell ermittelten Steigung an.

Über den betrachteten Zugbereich verlaufen die Kurven des Polynommodells abwechselnd über- und unterhalb der experimentellen Kurve. Für Dehnungen oberhalb von 9 % divergieren sie, bei höheren Polynomgraden teilweise stark. Das reduzierte Polynommodell zeigt für Dehnungswerte, die nicht mehr experimentell erfasst wurden, Instabilitäten. Die Verläufe im Druckbereich ähneln sich denen im Zugbereich. Beträgsmäßig entsprechen die erreichten Spannungswerte einander im Wesentlichen. Im Unterschied zum Zugbereich divergieren die Kurven im Druckbereich des Modells schon bei einer betragsmäßig kleineren Dehnung von etwa -8,5 %.

### 5.3.2 Ogden-Modell

Abbildung 5.5 zeigt die berechneten Spannungs-Dehnungs-Kurven, die unter Verwendung des Ogden-Modells, des van der Waals-Modells und des Marlow-Modells simuliert worden

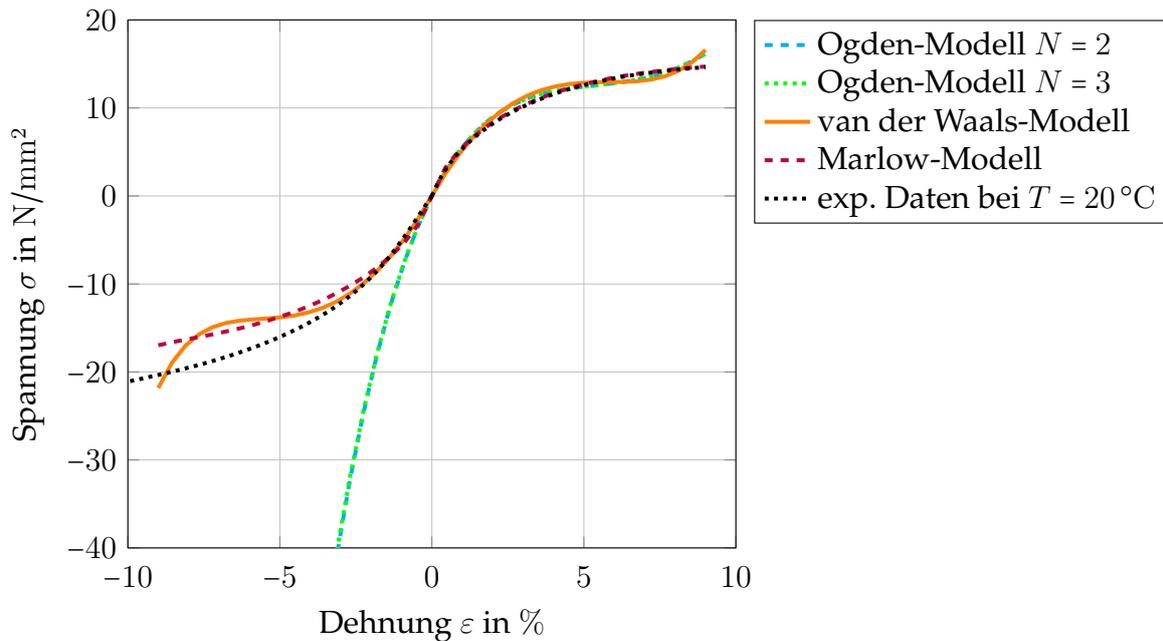


Abbildung 5.5: Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Daten der Materialmodelle von Ogden, van der Waals und Marlow mit den experimentellen Daten bei 20 °C

sind. Zum Vergleich gegenübergestellt sind die experimentell ermittelten Daten für den Zug- und Druckbereich.

Im Zugbereich steigen die Kurven der Ogden-Modelle 2. und 3. Grades monoton an und unterscheiden sich untereinander nur marginal. Beide weisen einen mittleren Fehler von den experimentellen Daten von jeweils 4,6 % auf. Ähnlich wie bei den reduzierten Polynommodellen oszillieren die berechneten Kurven um die experimentelle herum, was zu der genannten Abweichung führt. Bemerkenswert ist jedoch vielmehr die deutliche Divergenz der Ogden-Modelle im Druckbereich. Die Modelle 2. und 3. Grades weisen bei -9 % Dehnung eine Abweichung um mehr als eine Größenordnung auf. Der Übersichtlichkeit halber sind diese Werte in Abbildung 5.5 nicht eingetragen. Für Ogden-Modelle höherer Grade ( $N = 4$ ,  $N = 5$ ,  $N = 6$ ) nimmt diese Art der Instabilität im Druckbereich zu. Auf deren Abbildung wurde verzichtet.

### 5.3.3 Van der Waals-Modell

Die anhand des van der Waals-Modells generierte Kurve verläuft durch den Ursprung und steigt im Zugbereich monoton. In der Nähe des Ursprungs entspricht die Steigung in etwa der experimentellen Materialsteifigkeit. Auch die Kurve des van der Waals-Modells schwingt um die experimentelle Spannungs-Dehnungs-Kurve. Die sich dadurch ergebenden Abweichungen resultieren in einem mittleren Fehler von 6,0 % gegenüber der experimentell bestimmten Kurve. Im Druckbereich entspricht der Kurvenverlauf des van der Waals-Modells qualitativ dem des Zugbereichs. Lediglich bei betragsmäßig größeren Dehnungen werden höhere Spannungswerte erreicht. Die Werte liegen etwa 20 % über denen im Zugbereich.

### 5.3.4 Marlow-Modell

Der Kurvenverlauf des Marlow-Modells ist im gesamten Zug- und Druckbereich monoton steigend. Eine positive Eigenschaft des Marlow-Modells ist die Extrapolation bei unbekanntem Dehnungswerten. Spannungen zu experimentell nicht untersuchten Dehnungen werden mit der zuletzt bekannten Steigung extrapoliert [24]. So sind zumindest keine Instabilitäten bei hohen Dehnungswerten zu erwarten. Dort lassen sich, im Gegensatz zu den anderen bisher untersuchten hyperelastischen Materialmodellen, keine großen Abweichungen hinsichtlich Steigung und Funktionswert beobachten.

Die Kurve des Marlow-Modells zeigt qualitativ den gleichen Verlauf wie die experimentelle Kurve und entspricht annähernd der experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungs-Relation. Die Steigung im Zugbereich verläuft anfänglich linear und nimmt, wie experimentell bestimmt, mit steigender Dehnung kontinuierlich ab. Mit einem relativen Fehler von 0,001 % weist die Kurve äußerst geringe Abweichungen im Zugbereich auf. Abweichungen dieser Größenordnung sind häufig rechnerischer Natur und resultieren aus Rundungsfehlern. Im Druckbereich zeigt das Marlow-Modell qualitativ den gleichen Verlauf wie im Zugbereich. Allerdings werden betragsmäßig bis zu 15 % höhere Spannungswerte erreicht. Die Abweichung der Simulation des Druckbereichs weicht im Durchschnitt um 3,1 % von den experimentellen Daten ab. Damit ist auch beim Marlow-Modell mit den Eingabedaten aus dem Zugbereich eine Abbildung der Zug-Druck-Asymmetrie von HDPE nicht möglich.

Alle vorgestellten hyperelastischen Materialmodelle wurden beispielhaft anhand der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei einer Temperatur von  $T = 20\text{ °C}$  evaluiert. Ebenso lassen sich die Kurven bei den anderen Temperaturniveaus berechnen, untersuchen und bewerten. Das Modellverhalten entspricht dort qualitativ dem gleichen wie bei  $20\text{ °C}$  und so wird auf eine Darstellung und Diskussion dieser Spannungs-Dehnungs-Kurven verzichtet.

Beim Vergleich der hyperelastischen Materialmodelle untereinander fällt auf, dass das Marlow-Modell das experimentell ermittelte Materialverhalten mit den geringsten Abweichungen abbildet. Alle anderen Modelle, die reduzierten Polynommodelle verschiedener Grade sowie die Ogden-Modelle und das van der Waals-Modell weichen zum Teil stark von den Versuchsergebnissen ab. Vor allem unter Druckbelastung oder wenn eine Extrapolation der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen erforderlich ist, versagen manche Modelle. In der weiteren Betrachtung findet aus den gegebenen Gründen das Marlow-Modell Anwendung.

## 5.4 Elastisch-plastische Materialmodellierung

Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, lässt sich das Verhalten von Polymeren unter mechanischer Belastung elastisch-plastisch modellieren. Die vollständige Bestimmung des elastisch-plastischen Materialmodells mit isotroper Verfestigung erfolgt anhand von folgenden temperaturabhängigen Parametern. Die E-Moduln wurden experimentell bestimmt, wie in Unterabschnitt 4.3.1 beschrieben. Die für die Simulation ebenso notwendige Querkontraktion wurde von Peacock [92] und anderen [94] bzw. [98] zu  $\nu = 0,30$  angegeben. Domininghaus [31] dagegen, spricht von einer Poissonzahl von  $\nu = 0,45$  für Polyethylen. Der Einfluss einer variablen Querkontraktion auf die Qualität der Modellierung sowie die Berechnung der temperaturabhängigen Fließspannungen  $\sigma_F$  und Verfestigungsfunktionen werden im Folgenden diskutiert.

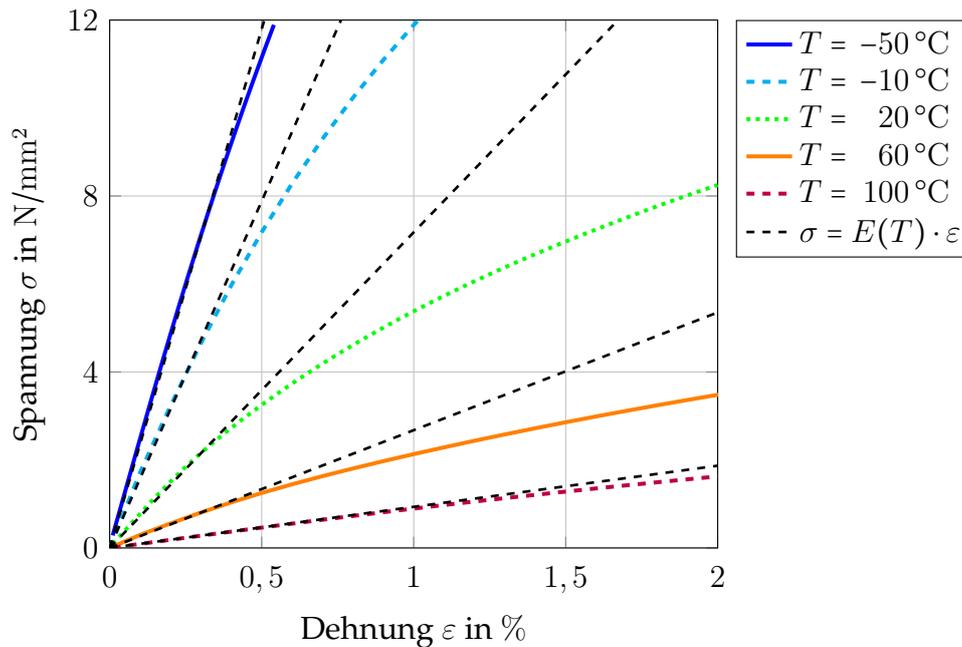


Abbildung 5.6: Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungs-Kurven und Ursprungsgeraden mit der Steigung der E-Moduln bei ausgewählten Temperaturen zur Bestimmung der Fließgrenzen  $\sigma_F$

#### 5.4.1 Bestimmung der Fließspannungen

Unter geringer mechanischer Belastung verhalten sich thermoplastische Kunststoffe linear elastisch. Im Falle des Polyethylen hoher Dichte setzt die Plastifizierung bei relativ geringen Belastungswerten ein. Der Übergang vom Elastischen zum Plastischen erfolgt an der sogenannten Fließspannung  $\sigma_F$ . Dieser Spannungspunkt lässt sich für jede Temperatur näherungsweise über den Schnittpunkt der Ursprungsgerade mit der Steigung des E-Moduls und der dazugehörigen Spannungs-Dehnungs-Kurve ermitteln.

Für fünf Temperaturniveaus zeigt Abbildung 5.6 die experimentell ermittelten und gemittelten Spannungs-Dehnungs-Kurven. Für jede Kurve ist zusätzlich eine Ursprungsgerade mit der Steigung des temperaturabhängigen E-Moduls  $E(T)$  eingetragen, die das linear elastische Verhalten wiedergibt. Die Graphen bei  $T = 20^\circ\text{C}$  verdeutlichen den Fehler, den eine rein linear elastische Modellierung hervorrufen würde. Schon bei einer Dehnung von  $\varepsilon = 1\%$  beträgt die Abweichung der elastischen Gerade vom tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Verlauf 33,4%.

Die Schnittpunkte der Kurven mit den zugehörigen Geraden ergeben folgende temperaturabhängige Fließspannungen:  $\sigma_F|_{T=-50^\circ\text{C}} = 7,44\text{ MPa}$ ,  $\sigma_F|_{T=-10^\circ\text{C}} = 3,30\text{ MPa}$ ,  $\sigma_F|_{T=20^\circ\text{C}} = 2,18\text{ MPa}$ ,  $\sigma_F|_{T=60^\circ\text{C}} = 0,87\text{ MPa}$  und  $\sigma_F|_{T=100^\circ\text{C}} = 0,40\text{ MPa}$ .

Die relativ niedrigen Werte ergeben sich aus Berechnung der Materialsteifigkeit bzw. des E-Moduls für Kunststoffe [28]. Andere Methoden zur Bestimmung der Fließgrenzen können in höheren Spannungswerten resultieren. Raghava u. a. [97] beispielsweise, versetzen den Tangenten-Modul der Spannungs-Dehnungs-Kurve parallel um eine Dehnung von 0,3% und berechneten so den Schnittpunkt. So entstehen gerade in Bereichen niedriger Dehnung zum Teil beträchtliche Abweichungen zwischen Simulation und Experiment.

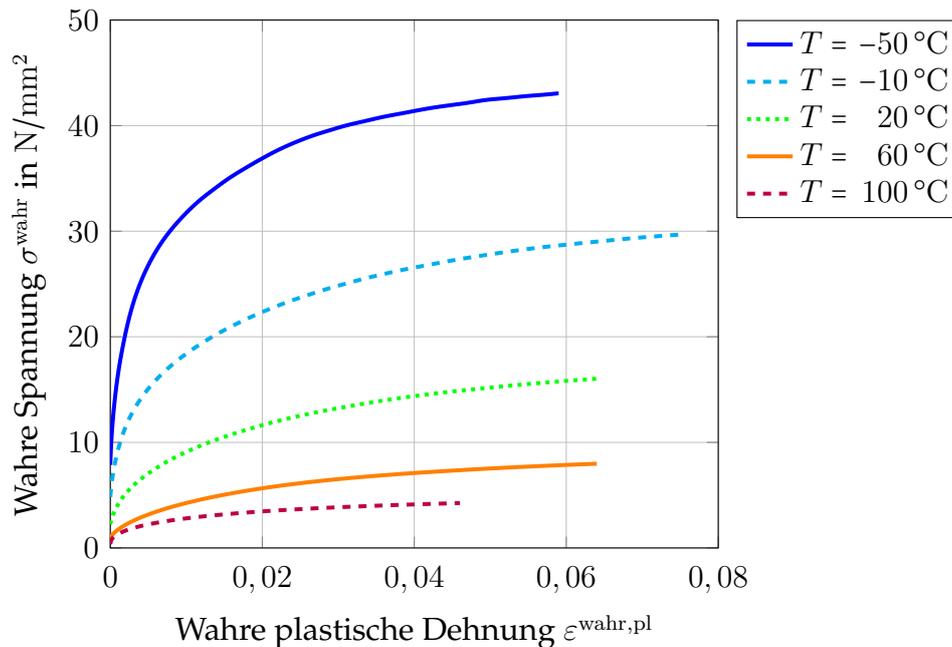


Abbildung 5.7: Verfestigungsfunktionen für den Zugbereich von HDPE bei verschiedenen Temperaturniveaus

### 5.4.2 Berechnung der Verfestigungsfunktion

Übersteigt die Belastung den Fließpunkt des Polymers, wird die weitere Verformung anhand der Verfestigungsfunktion  $r$  bestimmt. Dabei wird die wahre Spannung der wahren plastischen Dehnung für jedes Temperaturniveau gegenübergestellt. Die Gesetzmäßigkeiten sind den Gleichungen 3.11 und 3.12 zu entnehmen.

Abbildung 5.7 zeigt die temperaturabhängigen Verfestigungsfunktionen  $r$  für den Zugbereich von HDPE, die zur Vollständigen Beschreibung des elastisch-plastischen Materialmodells notwendig sind. Während die qualitative Form unabhängig von der Temperatur ist, nimmt die Elastizität mit steigender Temperatur zu. So verkleinern sich die Bereiche plastischer Dehnung, in denen die Verfestigungsfunktion definiert ist. Jedoch ist dieses Phänomen aufgrund der unterschiedlich großen Aufnahmebereiche nur im Vergleich mit den Spannungs-Dehnungs-Kurven unter Zugbelastung in Abbildung 4.6 zu erkennen.

### 5.4.3 Evaluation des elastisch-plastischen Materialmodells im Vergleich zum hyperelastischen Marlow-Modell

In folgendem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse des elastisch-plastischen Materialmodells unter Zug- und Druckbelastung vorgestellt und diskutiert. Abbildung 5.8 zeigt den bei  $T = 20\text{ °C}$  experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Verlauf für HDPE unter uniaxialer Zug- und Druckbelastung. Dem gegenübergestellt ist der berechnete Verlauf unter Verwendung des elastisch-plastischen Materialmodells mit einer Poissonzahl von  $\nu = 0,40$  und den zuvor vorgestellten Modellparametern.

Unter Zugbelastung entsprechen die numerischen Spannungswerte in sehr guter Näherung den experimentellen. In diesem Bereich ergibt sich eine relative Abweichung von 0,15 %.

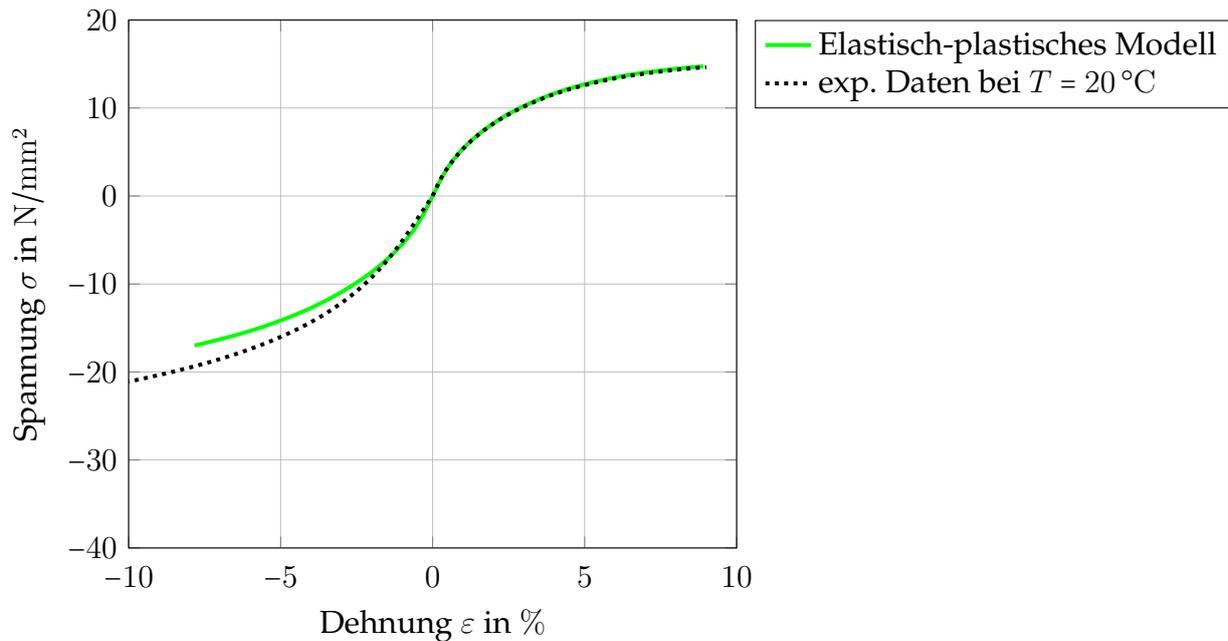


Abbildung 5.8: Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Daten des elastisch-plastischen Materialmodells mit den experimentellen Daten bei 20 °C

Dagegen zeigt sich im Druckbereich ein ähnliches Bild wie schon bei den Ergebnissen des Marlow-Modells. Die experimentellen Spannungen liegen betragsmäßig höher und werden durch das Materialmodell nur unzureichend abgebildet. Eine Abweichung von 2,6 % gegenüber der experimentellen Kurve erscheint zwar gering, jedoch ist zu beachten, dass gerade im Bereich betragsmäßig hoher Dehnungen die Kurven divergieren und dort somit sehr viel höhere Abweichungen zu erwarten sind.

Ferner lässt sich der Einfluss von Faktoren wie der Temperatur oder der Querdehnung auf die Qualität der Modellierung untersuchen. Abbildung 5.9 stellt die relative Abweichung der analysierten Materialmodelle logarithmisch in Abhängigkeit des Temperaturniveaus dar. Im Zugbereich ergeben sich für die Simulation mit beiden Materialmodellen sehr niedrige relative Abweichungen. Beim Marlow-Modell bewegen sie sich im Bereich zwischen  $6 \cdot 10^{-4} \%$  und  $3 \cdot 10^{-3} \%$ , während das elastisch-plastische Modell Werte zwischen  $7 \cdot 10^{-2} \%$  und  $7 \cdot 10^{-1} \%$  liefert. Die Fehler beider Modelle steigen mit der Temperatur leicht an. Eine klare Abhängigkeit ist dennoch nicht auszumachen. Im Druckbereich weisen beide Materialmodell eine etwas höhere Abweichung als im Zugbereich auf, allerdings ohne Tendenz mit der Temperatur. Die Werte verbleiben auf einem Niveau mit leichter Variation zwischen 1 % und 3 %.

Die äußerst niedrigen Abweichungen des Marlow-Modells im Zugbereich lassen sich auf die Formulierung des Konstitutivgesetzes zurückführen. Die Aussage aus Unterabschnitt 3.4.2, dass das Marlow-Modell die ihm zur Verfügung gestellten Spannungs-Dehnungs-Daten präzise wiedergibt [24], erweist sich als richtig. Die Abweichungen im Druckbereich weisen darauf hin, dass das Marlow-Modell in der Lage ist diesen Belastungszustand akzeptabel abzubilden. Eine Schwierigkeit ist, dass Input-Daten von dem zu untersuchenden Dehnungsbereich vorhanden sein müssen. So kann der Druckbereich mit den Daten aus den Zugversuchen bis zu einer betragsmäßigen Dehnung von  $|\varepsilon| = 10 \%$  in guter Näherung

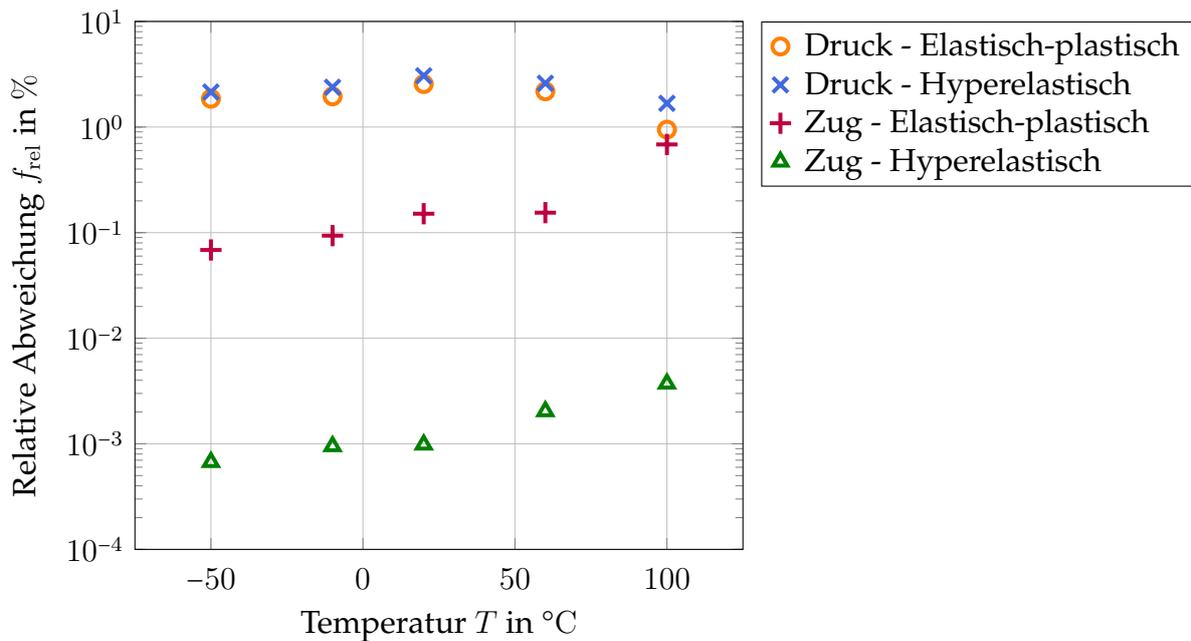


Abbildung 5.9: Temperaturabhängige relative Abweichung der numerisch ermittelten Spannungs-Dehnungs-Daten, die anhand des hyperelastischen Marlow-Modells bzw. dem elastisch-plastischen Modells berechnet wurden, von den experimentellen Daten unter Zug- und Druckbelastung

interpretiert werden. Darüber hinaus divergieren die Kurvenverläufe und die Fehler steigen an.

Bezüglich des elastisch-plastischen Modells ist die relative Abweichung unter Zugbelastung auf sehr gutem Niveau. Trotz des stark unterschiedlichen Verhaltens unter Zug- und unter Druckbelastung, wie schon in Unterabschnitt 4.3.2 beschrieben, ist die Qualität der Modellierung unter Druckbelastung zufriedenstellend. Wenn man bedenkt, dass die Materialsteifigkeit und Verfestigungsfunktion aus den Zugdaten gewonnen wurde, erscheint die elastische Modellierung mit isotroper Verfestigung brauchbar zu sein. Auch hier gilt dies nur in dem Bereich bekannter Spannungs-Dehnungs-Daten.

#### 5.4.4 Einfluss der Querdehnung auf die Modellierung des Materialverhaltens

Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss der Querdehnung auf die Qualität der elastisch-plastischen bzw. der hyperelastischen Materialmodellierung untersucht und diskutiert. Bislang wurde eine Poissonzahl von  $\nu = 0,40$  zur Evaluation der Daten verwendet. Nun zeigt Abbildung 5.10 den Einfluss der Variation der Poissonzahl auf die Qualität der Ergebnisse für  $T = 20\text{ °C}$ . Wird die Poissonzahl von anfänglich 0,35 schrittweise bis auf 0,499 gesteigert, nähert sich die elastisch-plastische Modellierung an den experimentellen Ergebnissen weiter an. Bei der hyperelastischen Modellierung bewirkt die Erhöhung der Querdehnung eine Steigerung der relativen Abweichung. Zu beachten ist auch hier die logarithmische Skalierung der Ordinate.

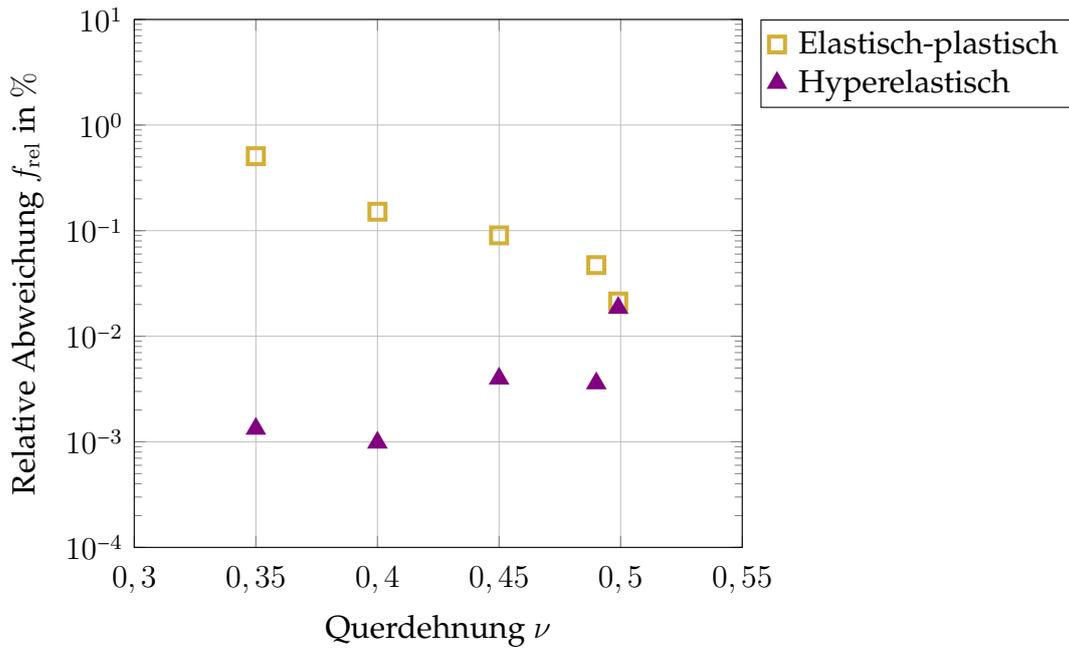


Abbildung 5.10: Relative Abweichung der numerisch ermittelten Spannungs-Dehnungs-Daten im Zugbereich in Abhängigkeit der Querdehnung  $\nu$  für das hyperelastische Marlow-Modell bzw. für das elastisch-plastische Materialmodell

Es besteht Grund zur Annahme, dass bei uniaxialem Spannungszustand weder die elastische noch die plastische Verformung abhängig zur Poissonzahl ist. Die Längsdehnung berechnet sich gemäß Gross u. a. [44] zu

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})),$$

mit den Spannungen quer zur Verformungsrichtung  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$ , die im uniaxialen Spannungszustand gleich Null sind. Somit verschwindet der von der Poissonzahl  $\nu$  abhängige Term. Die elastische Längsdehnung ist unabhängig von  $\nu$ .

Für die von Mises-Plastizität wird angenommen, dass die Plastifizierung keinen volumetrischen Deformationsanteil hervorruft. In FEM-Berechnung wird dies über die Annahme einer konstanten Poissonzahl von  $\nu = 0,5$  berücksichtigt. Eine mögliche Erklärung für die geringe aber erkennbare Abhängigkeit der Querdehnung ist, dass der Spannungszustand nicht vollkommen uniaxial ist. Die sich somit einstellenden Spannungen in Querrichtung bräuchten einen Teil der zur Verfügung gestellten Verzerrungsenergie auf. Für die Verformung in Längsrichtung stünde weniger Energie zur Verfügung und bei gleichen Dehnungswerten träten geringere Spannungswerte auf. Bei Betrachtung der numerisch berechneten Werte kann diese Interpretation bestätigt werden. Entsprechend ist dies eine plausible Erklärung, wovon die Abhängigkeit der Querdehnung herrühren kann.

Im Vergleich zur elastisch-plastischen Modellierung zeigt das Marlow-Modell gemäß Abbildung 5.10 insgesamt geringere relative Abweichungen vom Experiment. Auffällig ist eine konträre Tendenz der Abhängigkeit von der Querdehnung. Mit steigender Poissonzahl erhöht sich der mittlere relative Fehler. Beim Marlow-Modell werden aus den zur Verfügung gestellten Spannungs-Dehnungs-Daten anhand der Poissonzahl die volumetrischen Anteile der Verzerrungsenergiefunktion berechnet.

Aufgrund dieser Tatsache erfolgt das Herausrechnen der Abhängigkeit von der Querkontraktion auf das mechanische Verhalten des Werkstoffes. Die Abweichung bei  $\nu = 0,499$  kann auf eintretendes volumetrisches Locking zurückgeführt werden. Dies stellt das Unvermögen eines Finiten Elements dar, eine Volumenänderung korrekt abzubilden. Besonders stark tritt dieses Phänomen bei einer Poissonzahl von  $\nu \rightarrow 0,50$  in Erscheinung und führt dadurch zu verschlechtertem Konvergenzverhalten. Bei den anderen Abweichungen lässt sich keine eindeutige Tendenz feststellen und bei der Größenordnung von  $10^{-3} \%$  besteht die Möglichkeit, dass es sich um numerische Ungenauigkeiten handelt.

Die Diskussion über die Abhängigkeit der numerischen Lösungen von der Querkontraktion zeigt, dass die gelieferten Ansätze noch nicht vollständig diskutiert sind und sich weitere Untersuchungen hierzu anbieten. Für den Fall, dass in der Materialmodellierung auf eine absolute Präzision verzichtet werden kann, zeigen die Ergebnisse, dass auch für eine variable Poissonzahl der relative Fehler eine Größenordnung von  $1 \%$  nicht übersteigt.

## 5.5 Drucker-Prager-Materialmodell

Das Drucker-Prager-Modell stellt eine Weiterentwicklung der elastisch-plastischen Modellierung dar, um das zug- und druckseitige Fließverhalten unterschiedlich modellieren zu können. Das Materialmodell wird wegen seines Umfangs bezüglich der Parametrisierung sowie der Evaluierung in einem eigenständigen Unterkapitel diskutiert. Wie bereits in Unterabschnitt 3.3.3 erläutert, sind mehrere Parameter notwendig, um die zugseitige und die druckseitige Fließfläche im dreidimensionalen Spannungsraum sowie das Verfestigungsverhalten nach Beginn des Fließens beschreiben zu können. Vor der Plastifizierung des Materials wird das Verhalten linear elastisch modelliert.

### 5.5.1 Bestimmung des Verhältnisses von Zug- zu Druckfließspannung

Der Parameter  $K$  beschreibt das Verhältnis aus Zugfließspannung  $\sigma_{F,Zug}$  zu Druckfließspannung  $\sigma_{F,Druck}$  bei gegebener Temperatur  $T$ . Um die Fließspannungen zu bestimmen kann im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ein Schnittpunkt erzeugt werden, indem der E-Modul auf der Dehnungsachse um  $0,2 \%$  Dehnung parallel verschoben wird. Diese Methode ergibt die von Metallen bekannte Fließspannung  $R_{p0,2}$ . Für die meisten Thermoplasten, setzt das Fließen verzögert bzw. kontinuierlich ein. So ist es zum Teil schwer möglich oder unphysikalisch einen Fließpunkt zu bestimmen. Seltzer u. a. [108] haben eine alternative Methode vorgestellt, die speziell für die Ermittlung des Parameters  $K$  im Drucker-Prager-Modell entwickelt wurde.

Abbildung 5.11 visualisiert die Methode zur Bestimmung von  $K$  anhand der Gegenüberstellung von wahrer Spannung zu wahrer Dehnung. Dabei werden unter Zug- und unter Druckbelastung die jeweiligen elastischen und plastischen Bereiche durch Tangenten (gestrichelt) approximiert und deren Schnittpunkte zur Erhebung von  $K$  herangezogen. Für den elastischen Bereich entspricht die Gerade einer Ursprungsgerade mit der Steigung des E-Moduls. Der plastische Bereich lässt sich in der Beziehung von wahrer Spannung zu wahrer Dehnung als Gerade konstanter Steigung darstellen. Die so berechneten Schnittpunkte und

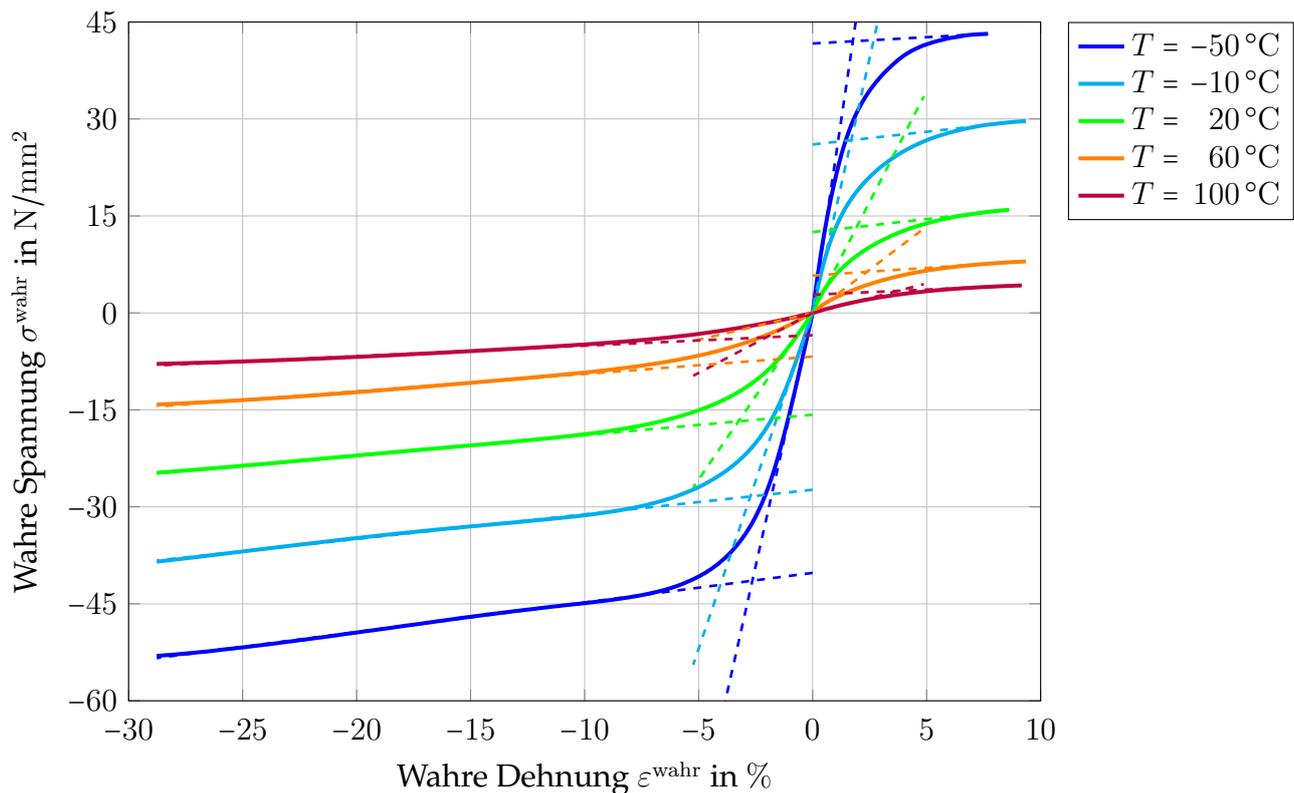


Abbildung 5.11: Methode zur Ermittlung des Parameters  $K$  im Drucker-Prager-Modell mit Schnittpunkten aus elastischem und plastischem Bereich zur Bestimmung der Fließgrenzen

daraus resultierenden Werte für  $K$  sind für die fünf untersuchten Temperaturniveaus in Tabelle 5.1 gelistet.

Nach dieser Methode bewegen sich alle  $K$  bis auf einen Wert im Bereich  $0 < K < 1$ . Für  $T = -50^\circ\text{C}$  ergibt sich für den zugseitigen Schnittpunkt ein betragsmäßig leicht größerer Wert als für den druckseitigen. Bei dieser Temperatur erstreckt sich der plastische Bereich zugseitig über ein relativ kleines Intervall. Es besteht die Möglichkeit, dass die Gerade zur Annäherung eben dieses Bereiches eine zu flache Steigung besitzt und so einen zu hohen Zug-Schnittpunkt zur Folge hat. Alejano und Bobet [2] fordern für den Fließkörper in der deviatorischen Ebene eine nicht konvexe Form. Unter dieser Voraussetzung beschränkt sich der  $K$ -Wert auf ein Intervall von  $0,778 \leq K \leq 1,00$ . So wird  $K$  für diesen Fall rechnerisch zu 1 gesetzt. Damit ist für diese Temperatur die Zugfließspannung betragsmäßig gleich der Druckfließspannung.

### 5.5.2 Berechnung des Reibungswinkels $\beta$

Der Reibungswinkel  $\beta$  beschreibt den Öffnungswinkel des druckseitigen Kegels, der den Fließkörper im dreidimensionalen Spannungsraum darstellt. Der Reibungswinkel kann mithilfe von Gleichung 3.14 bestimmt werden. So ergeben sich die in Tabelle 5.2 gelisteten, temperaturabhängigen Werte für  $\beta$ .

Tabelle 5.1: Temperaturabhängige Zug- und Druck-Schnittpunkte und die daraus berechneten  $K$ -Werte für die Drucker-Prager-Modellierung des Materialverhaltens von HDPE

Temperatur $T$ °C	Zug-Schnittpunkt N/mm <sup>2</sup>	Druck-Schnittpunkt N/mm <sup>2</sup>	$K$ -Wert $\sigma_{F,Zug}/\sigma_{F,Druck}$
-50	42,03	-41,46	1,014
-10	26,76	-28,40	0,942
20	13,31	-16,80	0,792
60	6,35	-7,91	0,802
100	3,43	-4,30	0,797

Die plastische Verfestigung wird, wie im folgenden Unterabschnitt 5.5.4 beschrieben, anhand der experimentellen Druckdaten definiert. So schließt das lineare Fließkriterium Werte für  $\beta > 71,5^\circ$  aus [24]. Für reale Werkstoffe kommt diese Einschränkung nur unwahrscheinlich zum Tragen. So bewegen sich die berechneten Reibungswinkel  $\beta$  in einem Wertebereich  $0^\circ \leq \beta < 19,3^\circ$ . Aufgrund der Tatsache, dass bei  $T = -50^\circ\text{C}$  der Fließbeginn unter Zug- und Druckbelastung bei betragsmäßig gleichen Werten einsetzt, beträgt  $\beta = 0^\circ$ . Während der Wert für  $\beta$  mit steigender Temperatur zunimmt, erreicht er bei Raumtemperatur ein Maximum von  $19,22^\circ$  und verbleibt auch bei höheren Temperaturen auf diesem Niveau.

Tabelle 5.2: Temperaturabhängige Reibungswinkel  $\beta$  und Dilatationswinkel  $\psi$  für die Drucker-Prager-Modellierung des Materialverhaltens von HDPE

Temperatur $T$ °C	Reibungswinkel $\beta$ °	Dilatationswinkel $\psi$ °
-50	0	0
-10	5,08	0
20	19,22	0
60	18,21	0
100	18,70	0

### 5.5.3 Berechnung des Dilatationswinkels $\psi$

Die Größe zur Beschreibung der Volumenänderung eines Körpers unter Scherbelastung ist der Dilatationswinkel  $\psi$ . Im Zustand des plastischen Fließens wird dieser als konstant angenommen. Ein Dilatationswinkel von  $0^\circ$  impliziert, dass das Volumen eines Körpers bei einer Scherung konstant bleibt. Während ein Winkel von  $\neq 0^\circ$  eine bleibende Vergrößerung des Körpers unter plastischer Scherung prognostiziert. [102]

Da das Drucker-Prager-Materialmodell vornehmlich im Bauingenieurwesen Verwendung findet, beziehen sich folgende Angaben auf bautechnische Werkstoffe. Für gewöhnlich besteht eine Abhängigkeit des Dilatationswinkels  $\psi$  vom Reibungswinkel  $\beta$ . Bei Beton oder Tonerden

wird angenommen, dass  $\psi = \beta$ . Für nicht bindende Böden, wie Sand oder Kies, die einen Reibungswinkel von  $\beta > 30^\circ$  besitzen, gilt die Abschätzung  $\psi = \beta - 30^\circ$ . In jedem Fall gilt:  $\psi \leq \beta$ . Für Polymere wird im Allgemeinen keine Abhängigkeit vom Reibungswinkel angenommen. Somit kann  $\psi$  nach Gleichung 3.16 berechnet werden. [24, 114]

Der zur Berechnung von  $\psi$  notwendige plastische Anteil der Querdehnung liegt nicht vor. Darüber hinaus verhält sich die Querkontraktion von Polymeren bei Dehnungen von ca.  $\varepsilon > 2\%$  variabel. Stommel u. a. [111] untersuchten die Volumenberechnung von Polymeren unter Verwendung einer konstanten Querdehnrzahl über den gesamten Dehnungsbereich. Bei höheren Dehnungen prognostizierten sie eine steigende Abweichung der Berechnung vom tatsächlichen Verhalten. So erhält man bei einer Maximaldehnung von  $\varepsilon = 25\%$  eine Abweichung von  $< 4\%$ . Die plastische Querkontraktion wird zunächst auf den konstanten Wert  $\nu^{pl} = 0,5$  festgelegt. In Unterabschnitt 5.5.6 wird diese Annahme bzw. deren Einfluss auf das modellierte Materialverhalten untersucht. So ergibt sich für alle Temperaturen ein Dilatationswinkel von  $\psi = 0^\circ$ . Die Werte sind in Tabelle 5.2 eingetragen.

### 5.5.4 Berechnung der Verfestigungsfunktion

Zur Modellierung des mechanischen Materialverhaltens nach Beginn des Fließens sind neben den modell-spezifischen Drucker-Prager-Parametern auch Verfestigungsfunktionen  $r$  notwendig, die die temperaturabhängige Plastifizierung des Polymers beschreiben. Zugseitig liegen nur Daten bis zu einer Dehnung von maximal 10 % vor. Dagegen können die Verfestigungskurven auf der Druckseite bis zu einer Dehnung von 25 % berechnet werden. Dies erfolgt nach der gleichen Methode, wie in Unterabschnitt 5.4.2 geschildert. Die Kurven selbst sind in Abbildung 5.7 dargestellt.

Die Verfestigungsfunktionen bilden konsequenterweise das plastische Verhalten ab, wie in Unterabschnitt 4.3.1 beschrieben. Dabei ist der wahren Spannung  $\sigma^{wahr}$  die wahre plastische Dehnung  $\varepsilon^{wahr,pl}$  gegenübergestellt. Mit steigender Temperatur flacht der E-Modul so stark ab, dass bei hohen Dehnungswerten der elastische Dehnungsanteil ansteigt. Damit lässt sich der bei hohen Temperaturen kürzere plastische Anteil erklären.

Der Startpunkt der jeweiligen Verfestigungskurve entspricht dem druckseitigen Fließbeginn  $\sigma_{F,Druck}$ . Dieser lässt sich aus den Zugfließspannungen, angegeben in Unterabschnitt 5.4.1, und dem temperaturabhängigen  $K$ -Wert bestimmen. Die berechneten Druckfließspannungen finden sich in Tabelle 5.3.

Tabelle 5.3: Temperaturabhängige Zug-  $\sigma_{F,Zug}$  und Druckfließspannungen  $\sigma_{F,Druck}$  für die Drucker-Prager-Modellierung des Materialverhaltens von HDPE

Temperatur $T$ °C	Zugfließbeginn $\sigma_{F,Zug}$ N/mm <sup>2</sup>	Verhältnis $K$ –	Druckfließbeginn $\sigma_{F,Druck}$ N/mm <sup>2</sup>
–50	7,44	1,000	7,44
–10	3,30	0,942	4,17
20	2,18	0,792	2,75
60	0,87	0,802	1,08
100	0,40	0,797	0,50

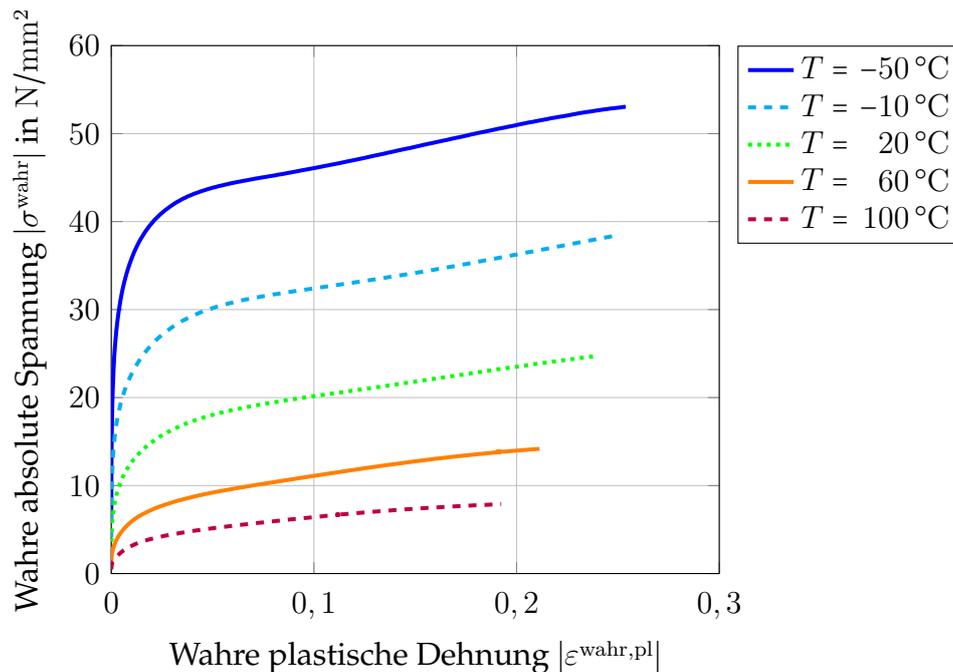


Abbildung 5.12: Verfestigungsfunktionen für den Druckbereich von HDPE bei verschiedenen Temperaturniveaus

### 5.5.5 Evaluation des berechneten Drucker-Prager-Modells

Das anhand des Drucker-Prager-Modells simulierte Materialverhalten ist maßgeblich durch folgende temperaturabhängige Faktoren bestimmt: Der E-Modul  $E_{\text{Druck}}$  für das elastische Verhalten bei niedrigen Dehnungswerten, die druckseitige Verfestigungsfunktion für den Fließbeginn und das plastische Materialverhalten und die Modell-Parameter  $K$ ,  $\beta$  und  $\psi$  für die Form des Fließkörpers im dreidimensionalen Spannungszustandsraum. Im folgenden Abschnitt wird das experimentell bestimmte Drucker-Prager-Modell anhand seiner Qualität das Materialverhalten abzubilden evaluiert. Tabelle 5.4 listet alle relevanten Parameter für die Modellierung des Materialverhaltens nach Drucker und Prager, so wie sie aus den Druckversuchen berechnet worden sind.

Tabelle 5.4: Temperaturabhängige Drucker-Prager-Parameter, bestimmt aus den durchgeführten Druckversuchen für die Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens

$T$ °C	$E$ MPa	$K$ –	$\beta$ °	$\psi$ °
–50	1576,4	1,000	0	0
–10	1039,4	0,942	5,08	0
20	515,3	0,792	19,22	0
60	185,6	0,802	18,21	0
100	82,8	0,797	18,70	0

Als Finite Elemente Modelle für den Vergleich finden die Modelle Anwendung, wie sie in Abschnitt 5.2 beschrieben sind. Dabei werden unter Zug- und unter Druckbelastung die

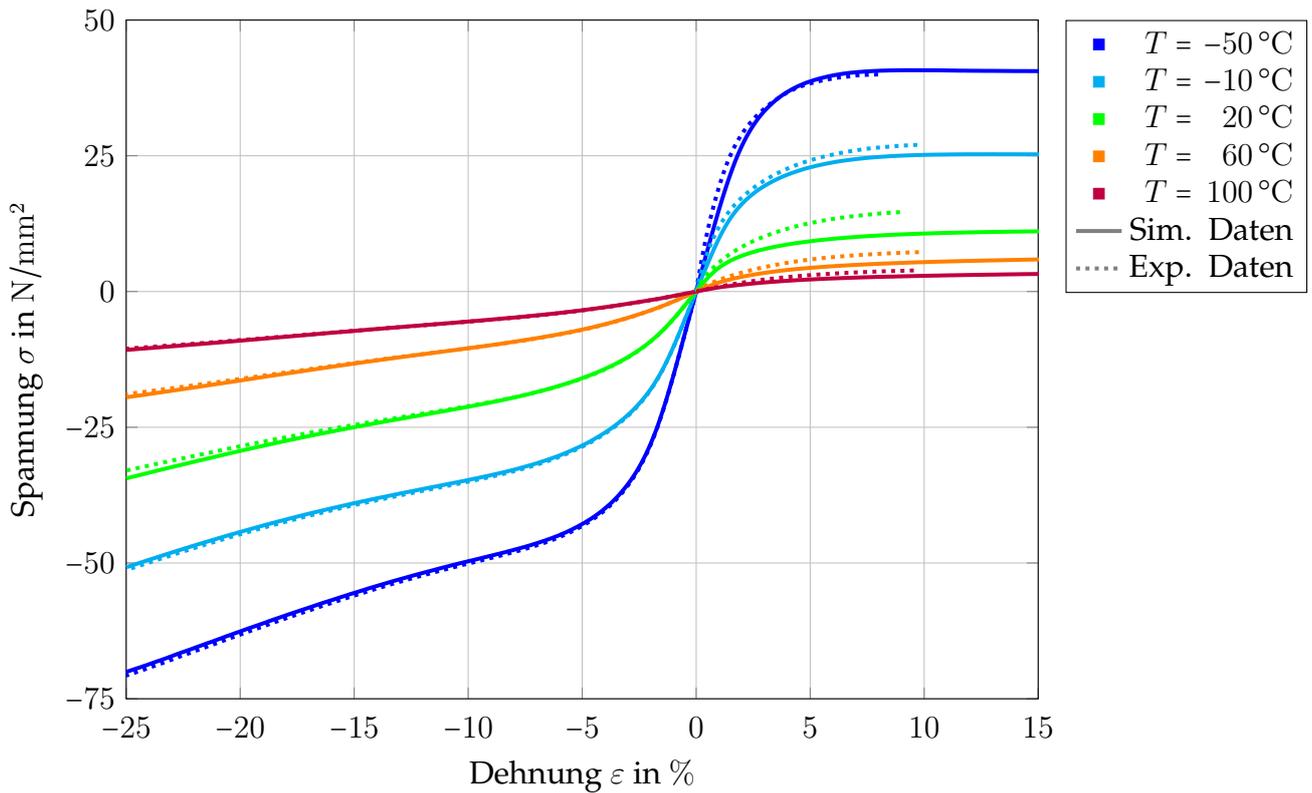


Abbildung 5.13: Vergleich des simulierten Materialverhaltens anhand des berechneten Drucker-Prager-Modells mit den experimentellen Daten

simulativ ermittelten Daten den experimentellen gegenübergestellt. In Abbildung 5.13 sind die technischen Spannungen gegen die nominellen Dehnungen angetragen. Unter Druckbelastung zeigen die FEM-Kurven für alle betrachteten Temperaturen einen sehr ähnlichen Verlauf, wie er aus den Druckversuchen ermittelt wurde. Auf den linear-elastischen Bereich folgt der konvexe Übergangsbereich, der wiederum in den plastisch dominierten Bereich übergeht und dort, bei betragsmäßig höheren Dehnungen, seine Krümmung ändert.

Qualitativ zeigen die simulierten Kurven nur geringfügige Abweichungen von den experimentellen Daten. Abbildung 5.14 quantifiziert die relative Abweichung der Simulationsdaten zu den Versuchsdaten. Experimentell und simulativ stimmen die Werte für den Druckmodul überein. So liegen die Abweichungen für den linear-elastischen Bereich sogar unter 1 %. Der Bereich betragsmäßig höherer Dehnungen, d.h. wo das Materialverhalten von der plastischen Verfestigungskurve dominiert wird, weist leicht höhere Abweichungen auf. Für  $T = -50\text{ °C}$  und  $T = -10\text{ °C}$  verbleiben die Abweichungen auf einem konstanten Niveau von etwa 1 %, während die Kurven für die drei übrigen Temperaturen geringfügig ansteigen. Dennoch bleiben sämtliche druckseitigen Werte liegen unter 5 %. Somit ist die gewählte Parametrisierung des Drucker-Prager-Modells in der Lage das temperaturabhängige Materialverhalten von Polyethylen unter Druckbelastung ausreichend genau abzubilden.

Dagegen bildet das Drucker-Prager-Modell das Materialverhalten unter Zugbelastung deutlich ungenauer ab. Vor allem für die drei Temperaturen von  $T = 20\text{ °C}$  bis  $T = 100\text{ °C}$  weichen die simulierten Kurven in Abbildung 5.13 von den experimentellen ab. Abbildung 5.14 offenbart die höheren relativen Abweichungen. Der relativ hohe Fehler im elastischen Bereich

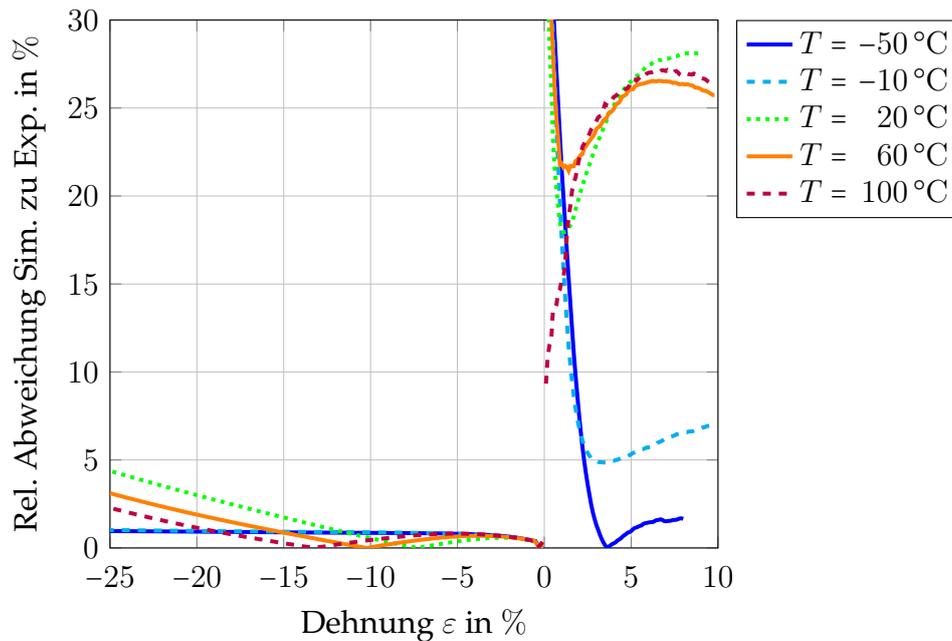


Abbildung 5.14: Relative Abweichung der simulierten Daten anhand des berechneten Drucker-Prager-Modells von den experimentellen Daten

rührt von der Abweichung der beiden Module  $E_{\text{Druck}}$  zu  $E_{\text{Zug}}$  her. So weisen die Kurven aller Temperaturen im Bereich bis 1 % Dehnung eine relative Abweichung von  $> 30\%$  auf. Die Abweichungen für die Temperaturen  $T = -50\text{ °C}$  und  $T = -10\text{ °C}$  sinken auf ein Niveau unter 10 %. Bei den verbleibenden Temperaturen unterscheiden sich die simulierten Verläufe unter Zugbelastung von den experimentellen um ca. 25 %.

Dennoch ist der grundsätzliche Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung unter Zug qualitativ in Ordnung. Nach einem kleinen Bereich linear-elastischen Verhaltens plastifiziert der Werkstoff. Der konstante Spannungsverlauf bei hohen Dehnungswerten deutet auf einen konstanten Kraftverlauf hin. Gleichzeitig werden höhere Dehnungszustände erreicht. Auf Materialebene bedeutet das, dass ein gleichbleibendes Kraftniveau notwendig ist, den Fließzustand des Kunststoffes zu erhalten. Der Querschnitt des Probekörpers ist aufgrund der Querkontraktion verringert. Somit unterliegt der Kunststoff einer plastischen Verfestigung, die die FE-Simulation in Abbildung 5.13 korrekt abbildet. Trotz alledem bewegen sich die Abweichungen zugseitig auf einem zu hohen Niveau um von einer gelungenen Modellierung des Materialverhaltens zu sprechen.

### 5.5.6 Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter

Eine Sensitivitätsanalyse der zunächst berechneten Drucker-Prager-Parameter soll Aufschluss darüber geben, wie groß die Einflüsse der jeweiligen Drucker-Prager-Parameter auf das elastisch-plastische Materialverhalten sind. Erwartet wird, dass die Variation der Parameter eine Veränderung des Verhaltens nach Fließbeginn hervorrufen. Der elastische Bereich davor sollte von der Variation unverändert gleich bleiben. Das Verhältnis von Zug- zu Druckfließspannung  $K$ , der Reibungswinkel  $\beta$  und der Dilatationswinkel  $\psi$  wurden aus den experimentellen Druckdaten bestimmt. Während eine Variation von  $K$  oder  $\beta$  auf das mechanische Materialverhalten unter Druckbelastung keine Auswirkung hat, ergibt eine Variation

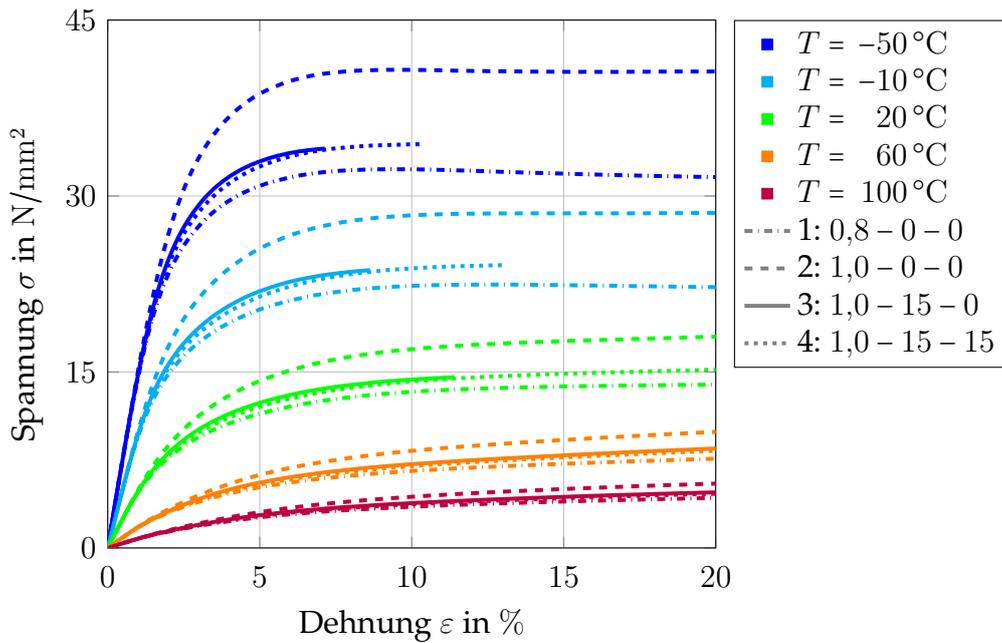


Abbildung 5.15: Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter  $K - \beta - \psi$  im Zugbereich

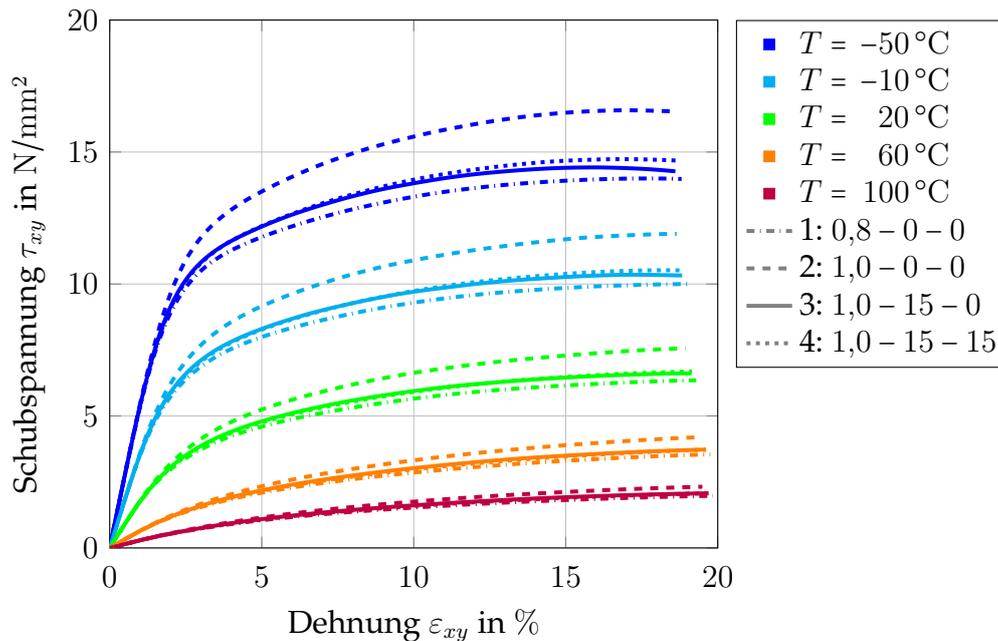
von  $\psi$  für den Zug- und Druckbereich die gleichen Tendenzen. Somit wird hier der Einfluss der Parametervariation auf das Verhalten unter Zug- und Schubbelastung untersucht. Für alle untersuchten Temperaturen werden die in Tabelle 5.5 gelisteten Parametereinstellungen geprüft.

Tabelle 5.5: Variation der Drucker-Prager-Parameter zur Untersuchung der Sensitivität auf das mechanische Materialverhalten unter Zug- und Schubbelastung

Konfiguration	Verhältnis	Reibungswinkel	Dilatationswinkel
Nr.	$K$	$\beta$	$\psi$
–	–	◦	◦
1	0,8	0	0
2	1,0	0	0
3	1,0	15	0
4	1,0	15	15

Die Grundeinstellung stellt Konfiguration 2 dar. Mit  $K = 1,0$ ,  $\beta = 0^\circ$  und  $\psi = 0^\circ$  handelt es sich um ein elastisch-plastisches Standardmodell. Das Drucker-Prager-Modell ist hier isosensitiv modelliert. Im Vergleich dazu zeigt Konfiguration 1 mit  $K = 0,8$  den Einfluss des Verhältnisses der Fließspannungen  $\sigma_{F,Zug}/\sigma_{F,Druck}$ . Konfiguration 3 variiert den Reibungswinkel zu  $\beta = 15^\circ$  und soll dessen Einfluss auf das simulierte Materialverhalten ergründen. Die Abhängigkeit des Dilatationswinkels  $\psi$  von  $\beta$  wird in Konfiguration 4 mit dem maximalen  $\psi = \beta = 15^\circ$  analysiert.

Die verschiedenartigen Auswirkungen der Variation der Drucker-Prager-Parameter auf das Verhalten unter Zug sind in Abbildung 5.15 graphisch dargestellt. Prinzipiell haben die verschiedenen Parameter Konfigurationen für jede Temperatur die selben Auswirkungen auf das mechanische Materialverhalten. Wie erwartet wirkt sich die Variation der Parameter


 Abbildung 5.16: Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter  $K-\beta-\psi$  im Schubbereich

auf den linear-elastischen Bereich nicht aus. Konfiguration 1 und 2, zwischen denen lediglich  $K$  verändert wird, weichen weit voneinander ab. Ein niedrigeres Verhältnis  $\sigma_{F,Zug}$  zu  $\sigma_{F,Druck}$  führt zu einer deutlich reduzierten Spannungsantwort bei gleichem Dehnungsniveau. Mit steigendem plastischen Dehnungsanteil wächst der Unterschied zwischen den beiden Kurven. Im Vergleich zur Konfiguration 2 hat eine Erhöhung des Reibungswinkels  $\beta$  (Konfiguration 3) eine Absenkung der Spannungsantwort zur Folge und liegt damit zwischen den Konfigurationen 1 und 2. Die Simulationsantwort mit Konfiguration 4 liegt nur unwesentlich unter der von Konfiguration 3. Dies bestätigt die zuvor getroffene Annahme, dass der Dilatationswinkel  $\psi$  kaum Auswirkungen auf das Ergebnis im Zugbereich hat. In den gewählten Intervallen ist der Einfluss von  $K$  größer als von den beiden Winkeln  $\beta$  und  $\psi$ .

Betrachtet man beispielhaft für alle Temperaturen die Verläufe bei  $T = -50^\circ\text{C}$  so liefern die Simulationsantworten bei einer Dehnung von 20 % für Konfiguration 1 eine Spannung von 31,6 MPa und für Konfiguration 2 eine Spannung von 40,6 MPa. Bezogen auf die Grundkonfiguration 2 entspricht das einem relativen Unterschied von 22,2 %. Sowohl die Variation von  $K$  als auch von  $\beta$  verringern die Spannungsantwort. Damit sind beide Parameter in der Lage die temperaturabhängige Anisotropie eines Polymers zugleich zu beschreiben und zu quantifizieren.

Die Sensitivitätsanalyse der Drucker-Prager-Parameter unter Schubbeanspruchung ist sinnvoll, da für die Ermittlung der Parameter lediglich Zug- und Druckversuche durchgeführt wurden. Bei der Auslegung von Kunststoffbauteilen und der Betrachtung von vielfältigen Belastungszuständen treten in den allermeisten Fällen auch Scherungen auf. Die Auswirkungen des Drucker-Prager-Modells auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten im Schubbereich sollte bekannt sein. Dafür wird ein triviales FE-Modell in der Form eines Würfels aufgebaut. Als Dirichlet-Randbedingungen werden eine bodenseitige feste Einspannung und eine kopfseitige Querverschiebung definiert. Die Belastung erzeugt so einen Scherzustand im Modell. Als Eingabedaten dienen wiederum temperaturabhängige Druckmoduln  $E_{Druck}$

und Verfestigungskurven (Abbildung 5.12) sowie die verschiedenen Konfigurationen der Drucker-Prager-Parameter  $K$ ,  $\beta$  und  $\psi$  aus der Tabelle 5.5.

Die Auswirkungen der verschiedenen Konfigurationen auf das Materialverhalten unter Schubbelastung sind in Abbildung 5.16 gezeigt. Mit der Variation treten vergleichbare Effekte auf, wie sie unter Zugbelastung zu beobachten sind. Der linear-elastische Schubbereich bleibt von den Parametervariationen unberührt. Nach Fließbeginn zeigt die isosensitive Grundkonfiguration 2 bei allen Temperaturen die höchste Spannungsantwort. Mit dem Verringern von  $K$  (Konfiguration 1) zeigt sich ein deutlich reduziertes Verfestigungsverhalten und liefert somit geringere Schubspannungswerte bei gleichen Scherungen. Eine Zug-Druck-Asymmetrie kann abgebildet werden. Ausgehend von der Grundkonfiguration wird auch durch eine Erhöhung des Reibungswinkels  $\beta$  die Spannungsantwort abgesenkt. Wie unter Zugbelastung ist auch hier der Dilatationswinkel  $\psi$  kaum in der Lage die Simulationsantwort zu beeinflussen. Erst bei höheren Dehnungen zeigt sich ein geringer Einfluss von  $\psi$ . Mit der Konfiguration 4 wird ein beinahe identisches Materialverhalten simuliert, wie mit Konfiguration 3.

Innerhalb der angegebenen Intervalle zeigen die Konfigurationen 1 und 2 die größten Abweichungen voneinander. Bei einer gegebenen Temperatur von  $T = -50^\circ\text{C}$  und einer gegebenen Scherung von  $\varepsilon_{xy} = 18\%$  liegen die Spannungsantworten bei 14,0 MPa bzw. 15,6 MPa. Die relative Abweichung beträgt 10,0 %. Auch wenn die Parametervariation ein unterschiedliches mechanisches Materialverhalten zur Folge hat, fallen die Auswirkungen unter Schub geringer aus als unter Zugbelastung.

### 5.5.7 Diskussion der Drucker-Prager-Parameter

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Diskussion über die Plausibilität der bisher erlangten Simulationsergebnisse durchgeführt. Im Detail werden Stärken sowie Schwachstellen der Drucker-Prager-Modellierung hinsichtlich ihrer Resultate für die Zug- und Druckbelastung erörtert. Die Diskussion soll Aufschluss darüber geben, welche Parameter anschließend angepasst werden sollen und über das Maß der Variation.

Eine Reihe grundlegender Eingabedaten für die Modellierung, z.B. Verfestigung und Elastizitätsmodul, basieren ausschließlich auf den Resultaten der durchgeführten Druckversuche. Folglich ist die Abweichung der Simulationsantwort unter Druckbelastung gering, siehe Abbildung 5.14. Die minimale Abweichung bei kleinen Dehnungen ist dem geschuldet, dass die druckseitige Materialsteifigkeit  $E_{\text{Druck}}$  für Simulation und Versuch identisch ist. Die leicht höhere Abweichung bei betragsmäßig größeren Dehnungen kann durch die Wahl des Dilatationswinkels  $\psi$  erklärt werden, dessen Einfluss erst bei höheren Dehnungen zum Tragen kommt. Die qualitativ hohe Übereinstimmung von Experiment und Simulation des Verhaltens unter Druck spricht für die fehlerfreie Bestimmung aller Drucker-Prager-Parameter. Allerdings zeigt Unterabschnitt 5.5.6 auch, dass der Parameter  $K$  und folglich auch  $\beta$  einen großen Einfluss auf das modellierte Verhalten unter Zugbelastung hat. So kann eine Variation der Parameter zugseitig zur Verbesserung der Simulationsantwort beitragen, während sie druckseitig eine Verschlechterung hervorruft.

Bei Betrachtung von Abbildung 5.14 fallen die zugseitig deutlich höheren Abweichungen auf. Durch die Eingabe der Druckmoduln weicht gerade im linear-elastischen Bereich die Simulationsantwort vom Versuch ab. Der Zugmodul ist für jedes Temperaturniveau durchgehend höher als der Druckmodul. Allerdings ist der hohe relative Fehler bei niedrigen

Dehnungen nicht überzubewerten. Bereits bei kleinen absoluten Unterschieden stellt sich eine hohe relative Abweichung ein. Außerdem sind die niedrigen Dehnungen in keinsten Weise kritisch für das Materialversagen. Im weiteren Verlauf der Kurven bleiben die FEM-Lösungen, bis auf die bei  $T = -50\text{ °C}$ , unterhalb der experimentellen Kurven. Eine Mittelung des Elastizitätsmoduls aus dem Zug- und Druckmodul soll eine Anhebung der Spannungsantwort bei gleichzeitiger Absenkung der relativen Abweichungen im niedrigen Dehnungsbereich erwirken.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle liegt in dem kleineren Messbereich der Zugversuche. Alle Versuche wurden bis zu einer nominellen Maximaldehnung von  $< 10\%$  durchgeführt. Die Bestimmung des Verhältnisses von Zug- zu Druckfließspannung nach Seltzer u. a. [108] erfordert einen linearen plastischen Bereich zur Ermittlung der Ausgleichsgerade. Beim Auftragen der wahren Spannung gegen die wahre Dehnung, wie in Abbildung 5.11 dargestellt, erreicht keine der Kurven die Zugfestigkeit. Gerade die Spannungs-Dehnungs-Kurve bei  $T = 20\text{ °C}$  weist im Vergleich zu alle anderen Kurven eine recht hohe Reststeigung auf. Die Spannungsantwort von  $14,6\text{ MPa}$  bei einer Dehnung von  $9,0\%$  liegt deutlich unter der ermittelten Zugfestigkeit von  $17,1\text{ MPa}$ . Während für die Temperaturen  $-50\text{ °C}$  und  $-10\text{ °C}$  die Zugfestigkeiten beinahe erreicht werden, liegen die maximalen Spannungsantworten von  $T = 60\text{ °C}$  und  $100\text{ °C}$  merklich unter den Zugfestigkeiten. Für den Fall, dass das Verhältnis  $K$  und somit auch der Reibungswinkel  $\beta$  nur unzureichend genau bestimmt wurden, können die zugseitigen Abweichungen geklärt werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Verwendung der Zugfestigkeiten anstelle der Schnittpunkte von elastischer und plastischer Ausgleichsgerade keine Alternative darstellt, da dies zu unphysikalischen Werten von  $K > 1$  führen würde.

Der simulierte Bereich über  $10\%$  Dehnung bedarf einer weiteren Betrachtung, da er aufgrund fehlender experimenteller Ergebnisse nicht quantitativ verglichen werden kann. Jedoch bedeutet eine konstant verlaufende Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Bereich hoher Dehnungen nach [37] und [108] eine realistische Annahme für den plastischen Bereich von HDPE.

### 5.5.8 Variation der Drucker-Prager-Parameter

Ausgehend von den Erkenntnissen aus der Sensitivitätsanalyse der Parameter der Drucker-Prager-Modellierung und aus der Diskussion darüber, werden im folgenden Abschnitt die modelleigenen Parameter begründet variiert. Um ein bestmögliches Ergebnis für die Modellierung des thermo-mechanischen Verhaltens im gewählten Belastungsbereich zu erreichen, findet diese Anpassung mithilfe der Erkenntnisse der Sensibilitätsanalyse in Unterabschnitt 5.5.6 und der Diskussion in Unterabschnitt 5.5.7 statt. Auf Basis der festgestellten Mängel und der Kenntnis derer Ursachen werden die in Tabelle 5.4 gelisteten Ausgangsmodell-Parameter abgewandelt.

Zur Verringerung der Abweichungen im linear-elastischen Zugbereich, wird zur Modellierung anstelle des Druckmoduls  $E_{\text{Druck}}$  das arithmetische Mittel aus Zug- und Druckmodul herangezogen. Die Werte der Materialsteifigkeit sind für die jeweilige Temperatur in Tabelle 5.6 aufgestellt. Ebenfalls tabellarisch gelistet sind die numerisch angepassten Drucker-Prager-Parameter, deren Einfluss sich auf den plastischen Bereich des Materialverhaltens bezieht.

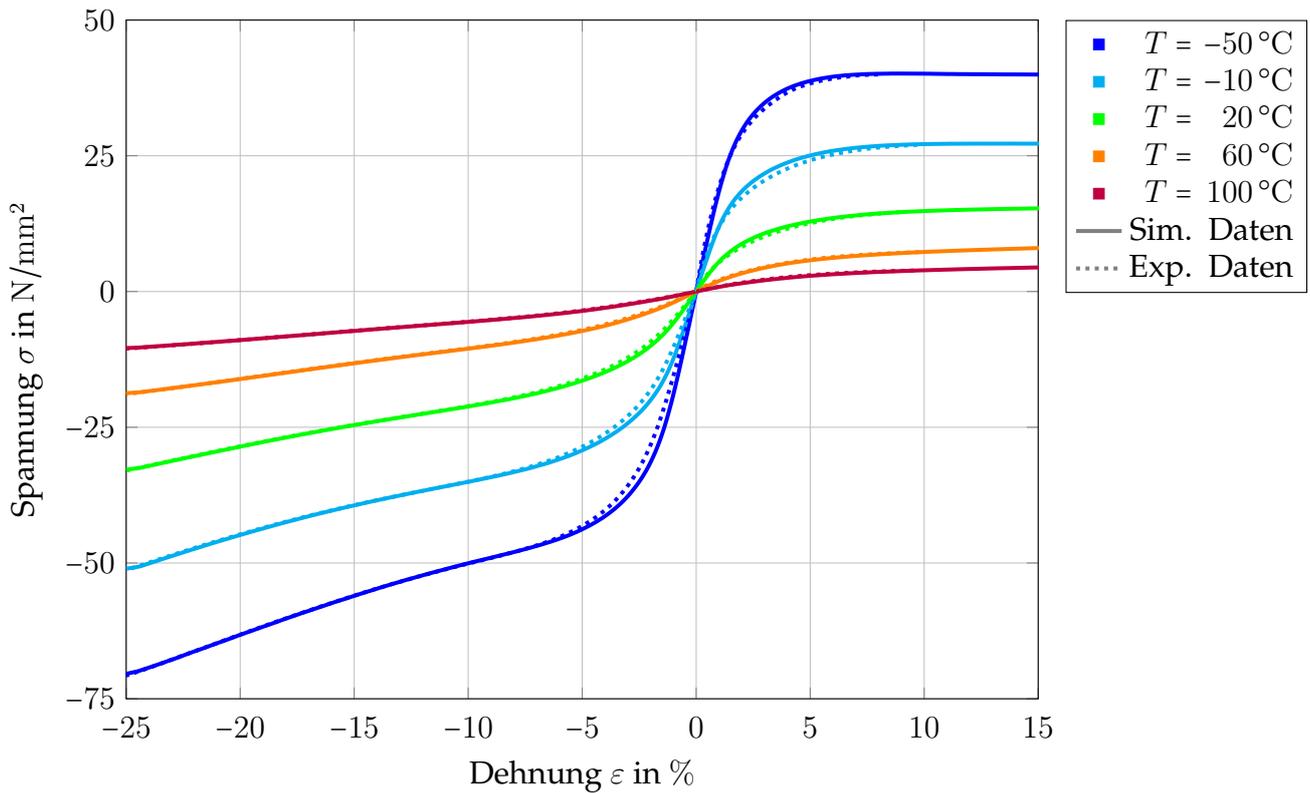


Abbildung 5.17: Vergleich des simulierten Materialverhaltens anhand des variierten Drucker-Prager-Modells mit den experimentellen Daten

Abbildung 5.17 zeigt, dass unter Zugbelastung im elastischen Bereich Simulation und Experiment sich bereits deutlich besser annähern, als mit reinen druck-elastischen Eingabedaten (Abbildung 5.13). Dafür weisen die Druckkurven im elastischen Bereich eine geringere Übereinstimmung auf als zuvor. Dieser „Trade-Off“ lässt sich quantitativ auch in Abbildung 5.18 beobachten. Während die zugseitigen Abweichungen im Bereich kleiner Dehnungen sinken, steigen die druckseitigen Abweichungen im Intervall  $-4\% < \varepsilon < 0\%$  deutlich an.

Neben der Materialsteifigkeit werden zusätzlich die Drucker-Prager-Parameter variiert, um die in der Diskussion aufgezeigten Modellgenauigkeiten zu reduzieren. Die numerische Optimierung der Parameter nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate erzielt eine Verbesserung der Modellierung des plastischen Dehnungsbereich. Mit den Startwerten aus Tabelle 5.4 ergeben sich die optimierten Drucker-Prager-Parameter zu den Werten in Tabelle 5.6.

Die temperaturabhängigen Verhältnisse  $K$  erhöhen sich allesamt bis auf  $K|_{T=-50^\circ\text{C}}$ , das von einem maximal möglichen Startwert von 1 ausgegangen ist. Bei der Bestimmung von  $K$  aus den Versuchen, in Unterabschnitt 5.5.1, wurde die Annahme getroffen, dass zu kurze plastische Bereiche unter Zugbelastung zu steilen Ausgleichsgeraden führen können. Die erhöhten  $K$ -Werte haben weniger steile Ausgleichsgeraden zur Folge und bestätigen so diese Annahme. Mit dem Zusammenhang zwischen  $K$  und  $\beta$  ergeben sich nach Gleichung 3.14 die Reibungswinkel zu den Werten in Tabelle 5.6. Unter Berücksichtigung der Einschränkungen aus Unterabschnitt 5.5.3 erhöhen sich die Dilatationswinkel  $\psi$  moderat. Auffällig ist, dass  $\psi$  mit der Temperatur ansteigt. Der Datensatz ist allerdings zu klein, um eine Aus-

Tabelle 5.6: Finale temperaturabhängige Drucker-Prager-Parameter, variiert den von Ausgangsparametern für die Modellierung des thermo-mechanischen Materialverhaltens von HDPE

$T$ °C	$E$ MPa	$K$ –	$\beta$ °	$\psi$ °
-50	1974,4	0,990	0,9	0,8
-10	1308,2	0,975	2,2	0,9
20	601,1	0,930	6,2	1,2
60	205,0	0,926	6,6	1,8
100	89,0	0,930	6,2	2,8

sage über eine Gesetzmäßigkeit zu treffen. Darüber hinaus fällt der Einfluss von  $\psi$  auf das Verfestigungsverhalten von HDPE gering aus.

Stellt man die relativen Abweichungen aus den Abbildungen 5.13 und 5.17 vergleichend gegenüber, zeigt sich vor allem zugeseitig die erhöhte Genauigkeit der Simulation. Mit den optimierten Parametern wird sowohl im Elastischen als auch im Plastischen das Materialverhalten deutlich besser modelliert. Ein Hauptaugenmerk unter Zugbelastung liegt auf der Modellierung des Materialverhaltens bei höheren Dehnungen. Vom Ende der Datenaufzeichnungen erhöhen sich die Spannungswerte auch bei steigenden Dehnungen bis zum Erreichen der Zugfestigkeit kaum. Im plastischen Bereich unter Druckbelastung stimmen simulierte und experimentelle Daten annähernd perfekt überein. Im elastischen Bereich ist die Approximation der Kurven wegen der Variation des E-Moduls leicht schwächer.

Die Auswertung der relativen Abweichung zwischen Versuch und Simulation in Abbildung 5.18 bestätigen die Verbesserung der Simulationsergebnisse. Für alle Temperaturen gilt:

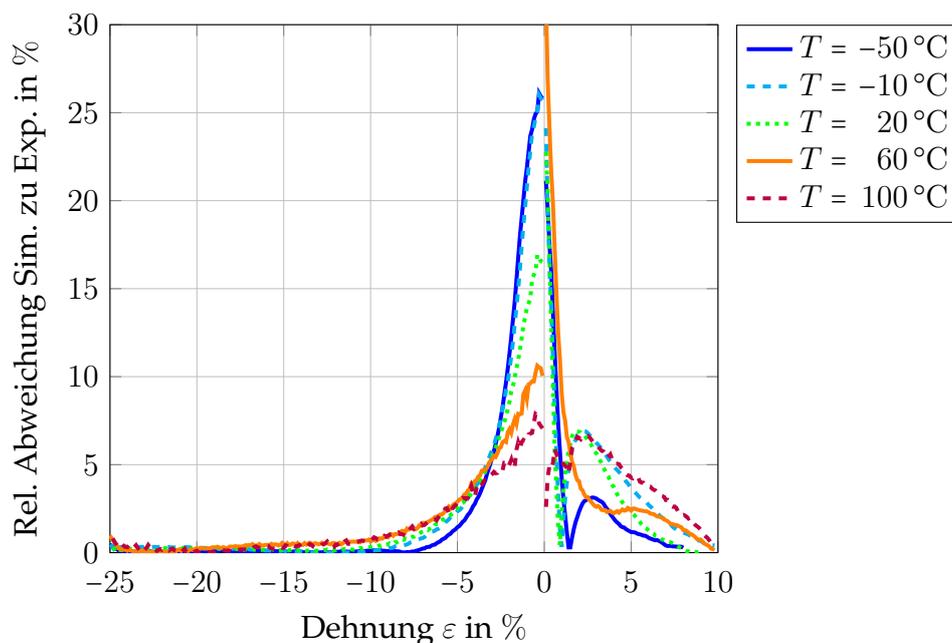


Abbildung 5.18: Relative Abweichung der simulierten Daten anhand des variierten Drucker-Prager-Modells von den experimentellen Daten

Im Druckbereich fallen die Abweichungen bereits bei einer Dehnung von  $-2,5\%$  unter  $10\%$ . Sie reduzieren sich weiter und bewegen sich spätestens ab einer Dehnung von  $-10\%$  unter  $1\%$  Abweichung. Für den Zugbereich wird eine Abweichung von  $10\%$  bereits bei einer Dehnung von  $1\%$  für alle Temperaturen unterschritten. Bis zur Dehnung von ca.  $9\%$  erreichen fast alle die  $1\%$  relative Abweichung. Für die Parametrisierung des Modells spricht, dass für alle Temperaturen durchgehend konvergierte Simulationslösungen geliefert werden. An dieser Stelle sei jedoch erwähnt, dass die Parameterergebnisse nicht als absolutes Optimum zu sehen sind, sondern als eine Einstellung, die unter Berücksichtigung der Modellrandbedingungen eine qualitativ angemessene Modellierung des Materialverhaltens ermöglicht.

### 5.6 Viskoelastische Materialmodellierung

Im Allgemeinen zeigen Polymere ein mehr oder minder stark ausgeprägtes viskoelastisches Materialverhalten. So zeigen die an Polyethylen durchgeführten Zeitstandzugversuche, beschrieben in Abschnitt 4.4, eine deutliche Zeit- und Temperaturabhängigkeit des mechanischen Materialverhaltens von HDPE. Dieses viskoelastische Materialverhalten lässt sich abbilden anhand von viskoelastischen Materialmodellen, deren Theorie in Abschnitt 3.5 erläutert ist. Eine Masterkurve für die Nachgiebigkeit  $D(t)$  bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$  wurde bereits in Unterabschnitt 4.4.2 ermittelt.

Bei der Betrachtung von Relaxations- und Retardationsvorgängen unterscheidet man zunächst zwischen Zeit- und Frequenzbereich. Die weiteren Ausführungen beschränken sich auf die *Time Domain*, da die Zeitstandzugversuche mit statischer Belastung durchgeführt wurden. Die Modellierung eignet sich zur Beschreibung von dehnratenabhängigen, isotropen Werkstoffen, die durch Eigendämpfung Energie dissipieren und sich somit viskos verhalten. Die Spannungen im Material bewegen sich unterhalb der Fließgrenze. Die Dehnungen bleiben dementsprechend reversibel.

Für mehrachsige Spannungszustände gilt die Annahme, dass deviatorischer und hydrostatischer (volumetrischer) Anteil unabhängig voneinander sind. Außerdem lässt sich das viskoelastische Modell sowohl mit einem linearen, als auch einem nichtlinearen Elastizitätsmodell kombinieren. [24] Von den besprochenen elastisch-plastischen Materialmodellen mit isotroper Verfestigung lässt sich ausschließlich die lineare Elastizität nach dem allgemeinen Hookeschen Gesetz benutzen. Im Rahmen dieser Arbeit hat sich das Marlow-Modell als guter Vertreter der nichtlinear elastischen Modelle erwiesen.

#### 5.6.1 Parameter-Optimierung zur Approximation der Masterkurve

Für die numerische Approximation von experimentell ermittelten Masterkurven lassen sich, wie in Unterabschnitt 3.5.3 beschrieben, diskrete Spektren verwenden. Diese sog. Prony-Reihen bestehen aus mehreren Prony-Elementen. Die Anzahl der Prony-Elemente  $n$  entspricht der Anzahl der Feder-Dämpfer-Elemente im verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Modell. Bei mehreren Elementen ist zur vollständigen Beschreibung des Materialverhaltens eine beachtliche Anzahl an Parametern zu bestimmen. Durch eine Optimierung kann die Masterkurve approximiert werden.

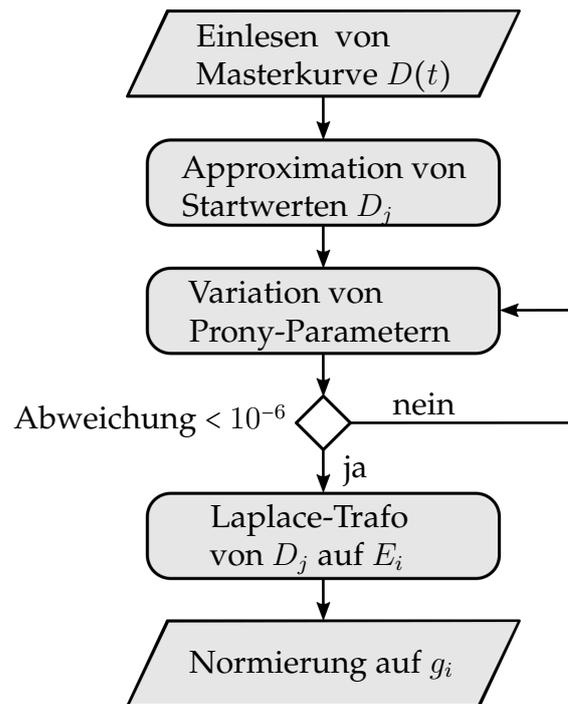


Abbildung 5.19: Ablauf der Optimierung von Prony-Parametern aus einer Masterkurve

Abbildung 5.19 zeigt den Ablauf einer numerischen Approximation einer Prony-Reihen-Entwicklung an eine Masterkurve mittels Optimierung der Prony-Parameter. Zu Beginn des Prozesses wird die Masterkurve  $D(t)$  bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$  eingelesen. Die Startwerte der Retardationszeiten  $\varrho_j$  werden im Zeitbereich  $10^{-8}\text{ s}$  bis  $10^{15}\text{ s}$  logarithmisch äquidistant verteilt. Mithilfe der Initial-Nachgiebigkeit  $D_0 = 1,411 \cdot 10^{-4}\text{ MPa}^{-1}$  und der Langzeit-Nachgiebigkeit  $D_\infty = 1,258 \cdot 10^{-2}\text{ MPa}^{-1}$  werden Startwerte  $D_j$  bestimmt, die im Laplace-Raum nach Gleichung 3.29 aufsummiert eine Masterkurve ergeben. Für die Optimierung werden beide Reihen, die Retardationszeiten  $\varrho_j$  sowie die Nachgiebigkeiten  $D_j$ , logarithmiert. Ausgehend von diesen Startwerten wird nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ein Optimum für die Parameter der Prony-Elemente ermittelt. Anhand der  $n$  Wertepaare wird nach Gleichung 3.27 die Prony-Masterkurve  $D(t)$  für HDPE bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$  berechnet.

Je nach Anzahl der Feder-Dämpfer-Elemente ergeben sich qualitativ sehr unterschiedliche Verläufe der Masterkurven. Abbildung 5.20 zeigt die Approximation der experimentell ermittelten Masterkurve mithilfe einer unterschiedlichen Anzahl an Prony-Elementen. Ein Prony-Element reicht offenkundig nicht aus, um den Verlauf der Masterkurve für HDPE adäquat abzubilden. Mit fünf Prony-Elementen wird bereits eine statistische Bestimmtheit von mehr als 90 % erreicht. Das Bestimmtheitsmaß mit 24 Elementen wächst auf  $R^2 = 0,9999$  an. Eine höhere Anzahl  $n$  kann mit dem aktuellen Verfahren zur Instabilität der Optimierung führen, so dass entweder kein Optimum gefunden wird oder zum Teil widersinnige Werte für die Prony-Parameter berechnet werden. Für das weitere Vorgehen zur Beschreibung des Materialverhaltens werden 24 Prony-Elemente herangezogen. Laut Brinson und Brinson [19] müsste für die viskoelastische Beschreibung von thermoplastischen Kunststoffen die Prony-Reihe um ein zusätzliches Dämpfungselement erweitert werden. An dieser Stelle sei jedoch darauf hingewiesen, dass in den meisten kommerziellen FEM-Programmen nicht die Möglichkeit dazu besteht.

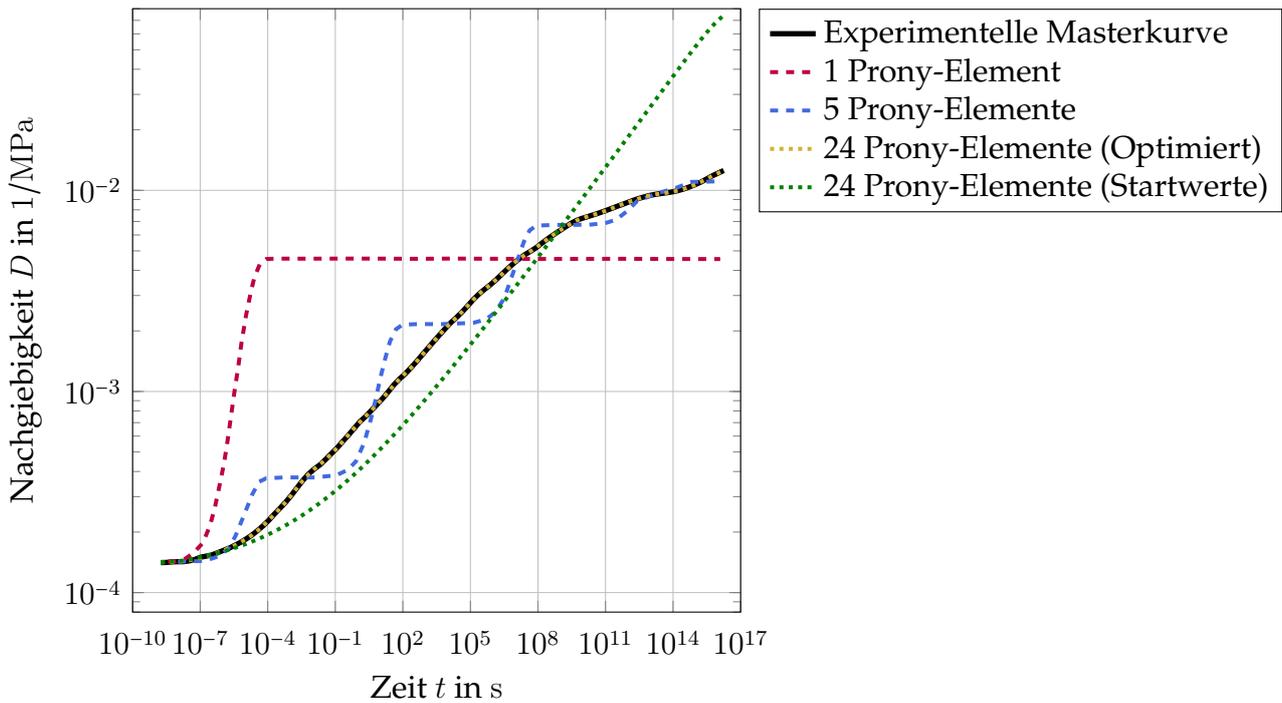


Abbildung 5.20: Approximation der Master-Nachgiebigkeitskurve von HDPE bei verschiedener Anzahl an Prony-Elementen

### 5.6.2 Berechnung der Prony-Koeffizienten

Die Implementierung des Materialmodells verlangt nach Relaxationszeiten  $\tau_i$  und normierten Schubrelaxationsmoduln  $g_i$  der Prony-Elemente. Dazu werden zunächst die Nachgiebigkeiten  $D_j$  aus dem Laplace-Raum in die Relaxationsmoduln  $E_i$  zurück transformiert. Das geschieht nach der in Unterabschnitt 3.5.5 bereits vorgestellten Methode von Park und Schapery [91]. Die zugehörigen Relaxationszeiten  $\tau_i$  werden dafür gleich der Retardationszeiten  $\rho_j$  gesetzt.

Bei gegebener Isotropie, linearer Elastizität und konstanter Querkontraktionszahl, d.h.  $\nu \neq f(t)$ , lassen sich Relaxationsmodul  $E$  und Schubrelaxationsmodul  $G$  über

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.2)$$

ineinander überführen. Wird das Wiechert-Modell auf Schubverformung angewandt, ergibt sich analog zu Gleichung 3.22 der Schubrelaxationsmodul  $G(t)$  zu

$$G(t) = G_\infty + \sum_{i=1}^n G_i e^{-t/\tau_i},$$

mit dem Gleichgewichtsschubmodul  $G_\infty$ , den Elementschubmoduln  $G_i$  und den Relaxationszeiten  $\tau_i$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt für den sogenannten Initial-Schubrelaxationsmodul

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^n G_i.$$

Daraus folgt die entdimensionierte Gleichung

$$1 = \frac{G_\infty}{G_0} + \sum_{i=1}^n g_i,$$

Tabelle 5.7: Koeffizienten der Prony-Reihe - berechnet für die Masterkurve von HDPE bei der Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$

Prony-Element	Relaxationszeit	Schubrelaxationsmodul
$i$	$\tau_i$	$g_i$
–	s	–
1	$1,00 \cdot 10^{-8}$	$8,0769 \cdot 10^{-2}$
2	$1,00 \cdot 10^{-7}$	$7,5082 \cdot 10^{-2}$
3	$1,00 \cdot 10^{-6}$	$1,3990 \cdot 10^{-1}$
4	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,6735 \cdot 10^{-1}$
5	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$1,5856 \cdot 10^{-1}$
6	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$5,9249 \cdot 10^{-2}$
7	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$8,6780 \cdot 10^{-2}$
8	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$4,9302 \cdot 10^{-2}$
9	$1,00 \cdot 10^0$	$4,6156 \cdot 10^{-2}$
10	$1,00 \cdot 10^1$	$2,8849 \cdot 10^{-2}$
11	$1,00 \cdot 10^2$	$2,7839 \cdot 10^{-2}$
12	$1,00 \cdot 10^3$	$1,5806 \cdot 10^{-2}$
13	$1,00 \cdot 10^4$	$1,2967 \cdot 10^{-2}$
14	$1,00 \cdot 10^5$	$8,7456 \cdot 10^{-3}$
15	$1,00 \cdot 10^6$	$6,4741 \cdot 10^{-3}$
16	$1,00 \cdot 10^7$	$4,3612 \cdot 10^{-3}$
17	$1,00 \cdot 10^8$	$4,2716 \cdot 10^{-3}$
18	$1,00 \cdot 10^9$	$1,0069 \cdot 10^{-3}$
19	$1,00 \cdot 10^{10}$	$1,9562 \cdot 10^{-3}$
20	$1,00 \cdot 10^{11}$	$1,4715 \cdot 10^{-3}$
21	$1,00 \cdot 10^{12}$	$8,5219 \cdot 10^{-4}$
22	$1,00 \cdot 10^{13}$	$9,8778 \cdot 10^{-5}$
23	$1,00 \cdot 10^{14}$	$2,6698 \cdot 10^{-3}$
24	$1,00 \cdot 10^{15}$	$4,8769 \cdot 10^{-4}$

mit dem den normierten Element-Schubrelaxationsmoduln  $g_i$ . Die Berechnung von  $g_i$  erfolgt anhand des Zusammenhangs von Gleichung 5.2:

$$g_i = \frac{G_i}{G_0} = \frac{E_i}{E_0} . \tag{5.3}$$

Auf diese Weise lassen sich die Prony-Koeffizienten der 24 Elemente definieren. Tabelle 5.7 listet alle berechneten Relaxationszeiten  $\tau_i$  und normierten Schubrelaxationsmoduln  $g_i$  auf, die für die vollständige Bestimmung des viskoelastischen Materialmodells notwendig sind.

### 5.6.3 Evaluation des viskoelastischen Materialmodells

Für die Simulation von Langzeitbelastungen lässt sich die Prony-Reihe sowohl mit einem linear elastischen, als auch einem hyperelastischen Materialmodell verknüpfen. Zur Evaluation der beiden Modell-Kombinationen werden die Kriechversuche simuliert und ausgewertet.

Tabelle 5.8: Zeitliche Inkrementierung der einzelnen Rechenschritte für die Gesamtsimulationszeit

Eigenschaft	Wert
Simulationszeit des Schritts	$10^{N-1} - 10^N$
maximale Inkrementgröße	$10^{N-1}$
minimale Inkrementgröße	$10^{N-3}$
Start Inkrementgröße	$10^{N-1}$
Toleranz des Dehnungsfehlers	$1 \cdot 10^{-4}$

Auf das bereits bekannte Finite Elemente Modell aus Abbildung 5.3 a) werden temperaturabhängig die gleichen statischen Lasten aufgebracht, wie zuvor auf die Probekörper in den Zeitstandzugversuchen, vgl. Tabelle 4.4. Bei der Simulation werden Massenträgheitseffekte vernachlässigt und geometrische Nichtlinearitäten zugelassen. Die Integration der inkrementellen Belastungsschritte erfolgt implizit. Unter der Voraussetzung, dass Stabilitätsbedingungen für Konvergenz gewährleistet sind, kann die Integration explizit gewählt werden, um Rechenzeit zu sparen oder um nichtlineare Viskoelastizität zu implementieren.

Bei der Berechnung langer Zeiten und der gleichzeitigen Abnahme der Dehnrates über der Zeit, sollte die Inkrementgröße nach Möglichkeit angepasst werden. Da die Grenzen der Zeitdiskretisierung für jeden Rechenschritt festgelegt sind, kann eine dynamische Anpassung der Inkrementierung nicht durchgeführt werden. Um zu verhindern, dass entweder die Ergebnisse für kleine Zeiten zu grob aufgelöst sind oder der Rechenaufwand für große Zeiten zu sehr ansteigt, wird die Gesamtsimulationszeit logarithmisch aufgeteilt. Die Eingabeparameter für die zeitliche Anpassung der Inkrementierung sind in Tabelle 5.8 aufgelistet. Die Parameter gelten für einen Zeitbereich von  $t = 10^N$  ( $N = 1, \dots, 5$ ). Somit ergeben sich für jeden Teilschritt der Gesamtsimulation mindestens zehn Inkremente, in denen die Simulation durchgeführt, aufgezeichnet und ausgewertet werden kann.

Zunächst wird das entwickelte Viskoelastizitätsmodell mit der linearen Elastizität des Hookeschen Gesetz kombiniert. Dazu wird der Prony-Reihe, wie im Wiechert-Modell (Abbildung 3.8) beschrieben, ein Feder-Element der Steifigkeit  $E_\infty$  hinzugefügt. Für die gewählte Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$  wird der Langzeit-Relaxationsmodul gleich dem experimentell ermittelten Zug-Modul gesetzt:

$$E_\infty = E(T = 20^\circ\text{C}) = 686,8 \text{ MPa} . \quad (5.4)$$

Für alle anderen Temperaturen wird das Materialverhalten aus den ZTV-Daten nach Unterabschnitt 4.4.2 berechnet. So wird für alle getesteten neun Temperaturniveaus zwischen  $T = 100^\circ\text{C}$  und  $T = -50^\circ\text{C}$  das Kriechen von HDPE simuliert. Geometrie und Randbedingungen des FE-Modells sind in Abbildung 5.3 a) gezeigt. Die konstanten Spannungslasten sind in Tabelle 4.4 gelistet.

In Abbildung 5.21 sind die experimentell gewonnenen Daten den Simulationsdaten vergleichend gegenüber gestellt. Die Werte der tieferen Temperaturen bis hin zu  $60^\circ\text{C}$  bilden die Versuchsdaten in guter Näherung ab. Bei den Temperaturen  $T = -30^\circ\text{C}$ ,  $T = -10^\circ\text{C}$  und  $T = 20^\circ\text{C}$  treten anfänglich Abweichungen auf, die hin zu größeren Zeiten annähernd verschwinden. Die simulierten Nachgiebigkeitskurven bei  $T = 80^\circ\text{C}$  und  $T = 100^\circ\text{C}$  weisen nur qualitativ den gleichen Verlauf wie die experimentellen auf. Beide sind hin zu höheren

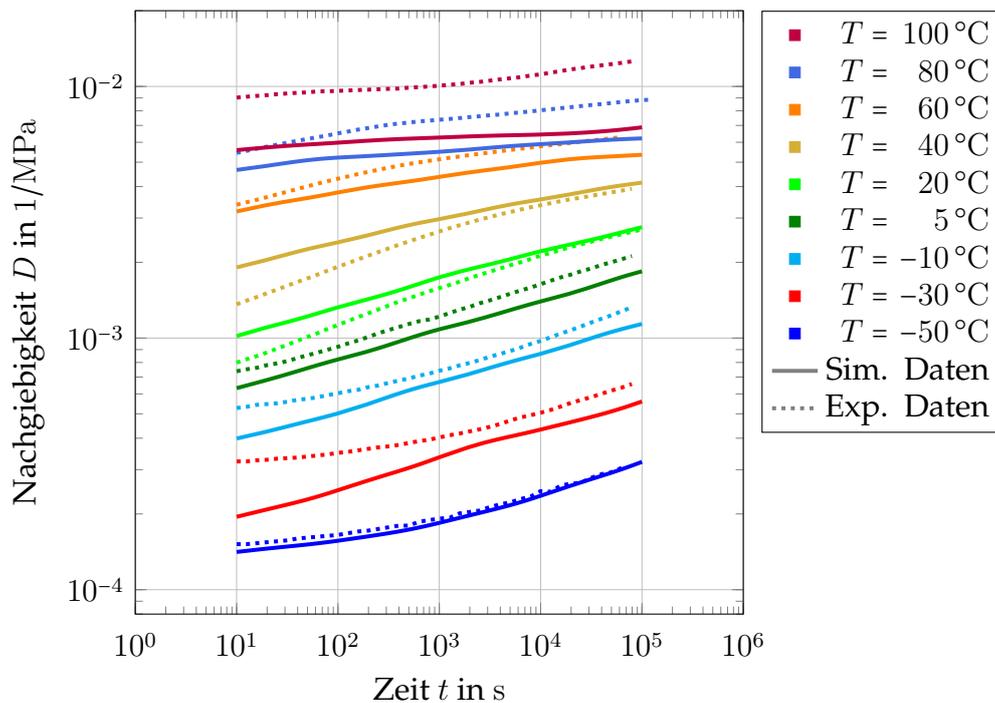


Abbildung 5.21: Vergleich des simulierten Materialverhaltens anhand des berechneten linear-viskoelastischen Modells mit den experimentellen Daten

Steifigkeiten verschoben. Der Versatz der Kurven korreliert nicht mit den Shift-Faktoren  $a_T$  aus Abbildung 4.16. Zwischen deren Abweichung von der WLF-Gleichung und den in Abbildung 5.21 dargestellten Kurven besteht kein erkennbarer Zusammenhang.

Wird für das alleinstehende Feder-Element im Wiechert-Modell anstelle einer linear-elastischen Steifigkeit eine hyperelastische verwendet, kann das Kriechen eines Kunststoffes mithilfe der Kombination aus einem hyperelastisch-viskoelastischen Materialmodells untersucht werden. Für den Langzeit-Modul  $E_\infty$  werden die Daten des Marlow-Modells aus Unterabschnitt 5.3.4 eingesetzt. Mit den variierten Eingabedaten wird erneut das Kriechverhalten von HDPE bei den verschiedenen Temperaturniveaus analysiert. Abbildung 5.22 zeigt die experimentellen sowie die durch die Simulationen gewonnen Nachgiebigkeitskurven. Die Simulationen zeigen zum Teil deutliche Abweichungen von den Versuchsergebnissen. Bis auf die Kurve bei  $T = -50^\circ\text{C}$  sind die Kurven aller anderen Temperaturen hin zu niedrigeren Nachgiebigkeiten verschoben. Trotz alledem stimmen die qualitativen Verläufe relativ gut mit denen der Versuche überein. Die Abbildung des tatsächlichen Kriechverhaltens von Polyethylen ist mit dem hyperelastisch-viskoelastischen Modell mit den vorliegenden Eingabeparametern nur bedingt zu erreichen.

Vergleicht man die zwei vorgestellten viskoelastischen Ansätze, bilden beide das Kriechverhalten von HDPE qualitativ korrekt ab. Bei quantitativer Betrachtung zeigt sich, wie eben beschrieben, dass die Kombination aus linear elastischem und viskoelastischem Modell über den großen Temperaturbereich von  $T = -50^\circ\text{C}$  bis  $100^\circ\text{C}$  eine zweckmäßige Modellierung darstellt. Die Prony-Reihe zur Abbildung der Masterkurve gekoppelt mit dem hyperelastischen Marlow-Modell wird diesem Anspruch nur bedingt gerecht.

Für die weitere Beurteilung der Qualität des Modells anhand von praktischen Anwendungen wird auf das lineare viskoelastische Modell zurückgegriffen. Im folgenden Kapitel

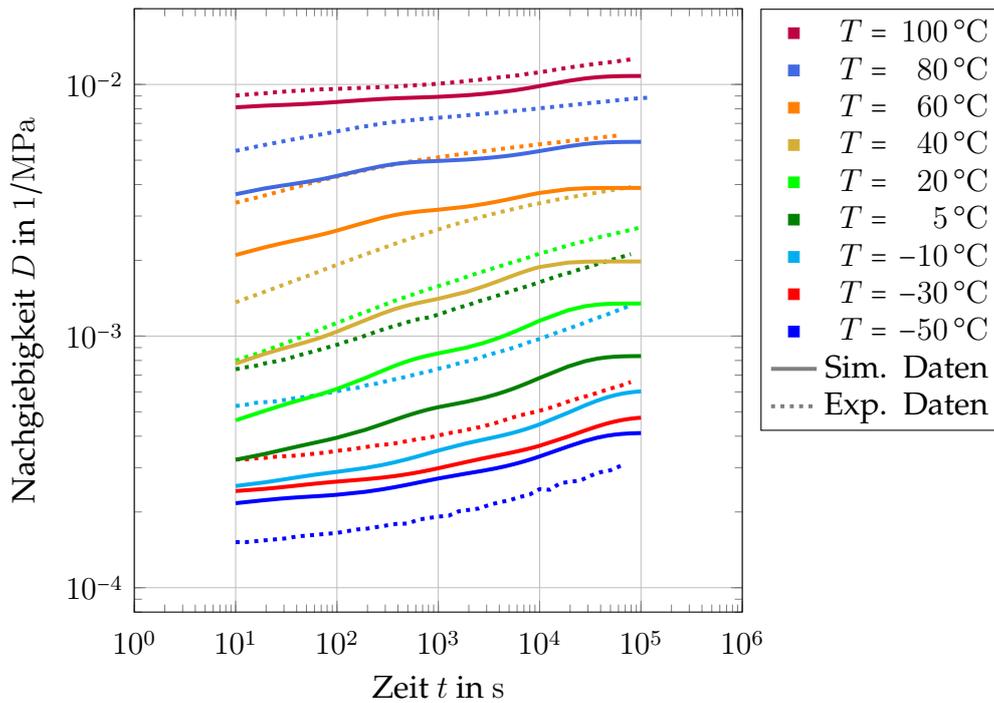


Abbildung 5.22: Vergleich des simulierten Materialverhaltens anhand des berechneten hyperelastisch-viskoelastischen Modells mit den experimentellen Daten

wird dem linear viskoelastischen Modell das Drucker-Prager-Modell gegenübergestellt. Beide werden anhand ihrer Qualität untersucht, mechanisch zyklische Belastungen möglichst genau zu modellieren. Das Drucker-Prager-Modell wird gewählt, da es im Gegensatz zu hyperelastischen Modellen plastische Dehnungen abzubilden vermag und darüber hinaus die Möglichkeit bietet zug- und druckseitige Belastungen unterschiedlich zu bewerten. Das klassische elastisch-plastische Modell steht in dieser Hinsicht dem Drucker-Prager-Modell nach.



# 6

## Validierungen und Anwendungen der untersuchten Materialmodellierungen

Dieses Kapitel stellt zwei Anwendungsfälle für die untersuchten Materialmodelle vor, anhand derer die Modellierungen beurteilt und validiert werden. Im ersten Teil werden mechanische Zyklertests simuliert und mit Hilfe von Ergebnissen durchgeführter Tests evaluiert. Der zweite Teil beschreibt die Simulationen verschiedener thermo-mechanischer Lasten an einem Modell eines Wasserstoffdrucktanks für den automobilen Einsatz. In beiden Teilen werden Materialmodelle eingesetzt, die im Laufe der Arbeit untersucht und evaluiert wurden. Eine Diskussion über die Qualität der Modellierung folgt am Ende der beiden Unterkapitel.

### 6.1 Evaluierung und Validierung der untersuchten Materialmodelle anhand mechanischer Zyklertests

Im folgenden Abschnitt werden die Durchführung von mechanischen Zyklertests und deren Simulation mithilfe verschiedener Materialmodelle erläutert und diskutiert. Deren Ergebnisse werden vergleichend gegenübergestellt. Dafür wird sowohl der qualitative Vergleich als auch die mittlere relative Abweichung nach Gleichung 5.1 zur Beurteilung des Simulationsergebnisses herangezogen. Neben des Vergleiches von Spannungswerten, wie zu Beginn von Kapitel 5 beschrieben, dient der Vergleich von Dehnungswerten dazu, die eingesetzten Materialmodelle zu bewerten.

#### 6.1.1 Versuchsbedingungen und -durchführung bei verschiedenen Last- und Temperaturniveaus

Für die Charakterisierung des zeitabhängigen Materialverhaltens von HDPE bei wiederholter Be- und Entlastung werden Zyklerversuche durchgeführt. Bei ausgewählten Temperaturniveaus zwischen  $-50\text{ °C}$  und  $100\text{ °C}$  werden Prüflinge aus Polyethylen hoher Dichte mechanisch mehrfach be- und entlastet. Deren Geometrie richtet sich, wie in Unterabschnitt 4.3.1 beschrieben, nach dem Probekörpertyp 1A aus DIN EN ISO 527 [28]. Durch die Taillierung im Messbereich der Knochenproben wird bei der Belastung auf Zug ein homogener einachsiger Spannungszustand erreicht. Die Probekörper wurden aus dem zylindrischen Teil eines HDPE-Liners getrennt, der mittels Rotoextrusionsverfahren hergestellt wurde. Damit können fertigungsspezifische Einflüsse auf die mechanischen Eigenschaften des Kunststoffes aufgenommen und charakterisiert werden. Die Zyklierung findet zwischen verschiedenen

Dehnungsmaxima und einem Spannungsminimum statt. Während das Minimum einer Belastung von  $\sigma = 0,2 \text{ MPa}$  entspricht, betragen die Dehnungsmaxima je nach Versuch  $\varepsilon_{\max} = 1,0 \%$ ,  $3,0 \%$  bzw.  $5,0 \%$ . Für die jeweils drei Temperatur- und Dehnungsniveaus ergibt sich eine  $3 \times 3$  Versuchsmatrix. Der Einfachheit halber bekommt jede Versuchskonfiguration eine Nummer von 1 bis 9 zugewiesen, die im Folgenden für die Benennung des jeweiligen Versuches verwendet wird. Die Nummerierung der Versuchskonfigurationen ist Tabelle 6.1 zu entnehmen.

Tabelle 6.1: Versuchsnummerierung der mechanischen Zyklertests nach Testtemperatur  $T$  und Maximaldehnung  $\varepsilon_{\max}$

		Maximaldehnung $\varepsilon_{\max}$ in %		
		1,0	3,0	5,0
T in °C	-50	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
	20	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6
	100	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9

Der Versuchsaufbau der Zyklerversuche entspricht dem Aufbau für quasistatische Zugversuche, nach Abbildung 4.4. Die Universal-Prüfmaschine *Instron 4505* wurde wiederum in Kombination mit einer Temperatorkammer zur Regelung der Umgebungstemperatur eingesetzt. Die gesamte Ausstattung, wie z.B. Kraftmessdose, Kontakttextensometer und Thermocouple zur Messung von anliegender Kraft, aufgebracht Dehnung bzw. Testtemperatur blieb unverändert zu der für die in Unterabschnitt 4.3.1 beschriebenen Zugversuchen. Darüber hinaus wurde die Verschiebungslast auf den Körper, d.h. der Traversenweg gemessen.

Vor der Versuchsdurchführung wurden die Probekörper bei ihrer jeweiligen Testtemperatur 24 h lang ausgelagert, um gewährleisten zu können, dass keinerlei Belastungshistorie die Versuchsergebnisse beeinflussen kann. Mit Versuchsbeginn wurde eine Vorspannkraft von 10 N aufgebracht, die bei Erreichen des Belastungsminimums nicht unterschritten wird. Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu den durchgeführten Zugversuchen gewährleisten zu können wurde die Dehnrates während der gesamten Versuchsreihe konstant bei  $\dot{\varepsilon} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  belassen. Dazu wurde die Traversengeschwindigkeit zu 1,0 mm/min gewählt. Über die Verschiebung der Traverse wurde die Belastung stoßfrei in den Prüfkörper eingeleitet. Die Lastaufbringung erfolgte bei gegebener Dehnrates bis zu einem Dehnungsmaximum von 1,0 %, 3,0 % oder 5,0 %. Bei Erreichen des Maximums wurde die Verschiebung der Traverse umgekehrt, bis bei gleicher Traversengeschwindigkeit ein Kraftminimum von 10 N erreicht wurde. Dieses Minimum entspricht einer Spannung im Werkstoff von etwa 0,2 MPa. Dieser Zyklus wurde für jeden Versuch zehn mal wiederholt.

### 6.1.2 Simulationsbedingungen und angewandte Materialmodelle

Zur Evaluation der verschiedenen untersuchten Materialmodelle wurden FEM-Simulationen der mechanischen Zyklertests durchgeführt. Im Folgenden werden die Randbedingungen erläutert und welche Materialmodelle angewandt wurden, um die physikalischen Effekte abzubilden. Für eine hinreichend genaue Beschreibung derer ist eine adäquate Modellierung der Geometrie sowie der Randbedingungen erforderlich. Abbildung 5.3 a) zeigt die Geometrie des verwendeten Finite Elemente Modells zur Berechnung der Lasten auf den Versuchskörper.

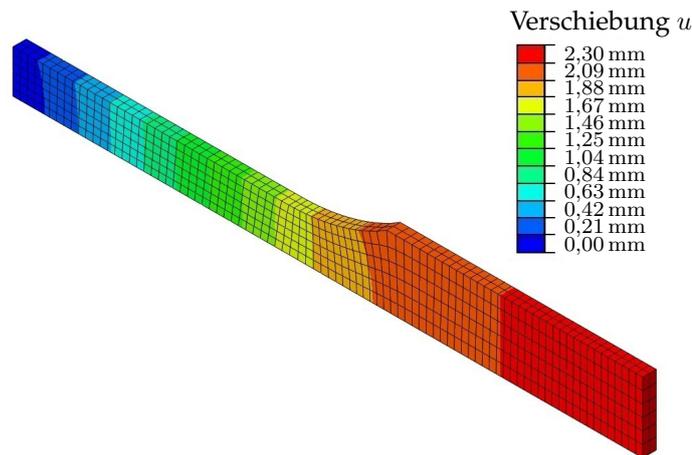


Abbildung 6.1: Verschiebungsfeld in der FE-Simulation an einem Zyklusmaximum

Die Auswahl der eingesetzten Elemente und die Vernetzung sowie die Annahmen für die Lagerung bzw. Einspannung sind in Abschnitt 5.2 beschrieben. Eine Konvergenzanalyse zur Beurteilung der Netzgüte wurde durchgeführt. Auf die Modellierung wird hier nicht im Detail eingegangen. Dafür sei auf eben genannten Abschnitt 5.2 verwiesen.

Die mechanische Belastung wird in Form von Verschiebungen auf den Probekörper aufgebracht. Diese ergeben sich aus den experimentell gemessenen Werten für die Verschiebungen an den Maxima und Minima der Zyklierung. Aus Gründen der Symmetrie wird der Wert der Traversenverschiebung halbiert. Abbildung 6.1 zeigt das Verschiebungsfeld an einem Lastmaximum während der Simulation der Zyklierung. Die Verschiebung in der Simulation wird über eine lineare Rampe aufgebracht. Dadurch wird die Lastsituation während des Experiments mit einer konstanten Traversenverschiebung möglichst genau abgebildet. Neben den Verschiebungswerten werden die gemessenen Versuchszeiten für die Simulation übernommen. So werden zu gleichen Zeitpunkten die jeweiligen Maxima und Minima erreicht. Die Vergleichbarkeit bei äquivalenter Dehnratesei damit gewährleistet. Insgesamt werden 10 Zyklen mit je einem Maximum und einem Minimum simuliert. Die Simulationensgesamt-dauer entspricht ebenso der jeweiligen Versuchsgesamtdauer.

Die Wahl eines passenden Materialmodells ermöglicht die realitätsgetreue Abbildung des mechanischen Werkstoffverhaltens. Vereinfachungen sowie Annahmen im Modell reduzieren im Allgemeinen den Aufwand, schränken jedoch die Anwendbarkeit des Materialmodells ein. Die Eignung der verschiedenen hyperelastischen, elastisch-plastischen und viskoelastischen Materialmodelle wurde in Kapitel 5 ausführlich untersucht. Gerade für zyklische bzw. zeitlich andauernde Belastungen haben sich das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell sowie das linear-viskoelastische Modell als geeignet erwiesen. Das Drucker-Prager-Modell ist dazu in der Lage neben einer Zug-Druck-Asymmetrie auch plastische Deformationen im Werkstoff abzubilden. Das viskoelastische Materialmodell ermöglicht die Darstellung zeitlicher Effekte, wie das Kriechen oder Relaxieren des Kunststoffes. Beide Modelle repräsentieren den Einfluss der Temperatur physikalisch korrekt. Angewandt werden sie in der Konfiguration mit den optimierten Parametern, wie in Abschnitt 5.5 bzw. Abschnitt 5.6 beschrieben.

### 6.1.3 Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklisierung mit einer maximalen Dehnung von 1,0%

Zur qualitativen Bewertung der untersuchten Materialmodelle werden die Ergebnisse der Simulation mit denen der Versuchsreihe verglichen. Dafür werden im Postprocessing der Berechnung bestimmte Zustandsgrößen, wie Spannung und Dehnung im Messbereich, entnommen. Wie schon zu Beginn von Abschnitt 6.1 erwähnt, werden diese Größen herangezogen, um die relative Abweichung an den Punkten der Minima und Maxima zu bestimmen. Sowohl bei den Simulationsergebnissen als auch bei den experimentell bestimmten Daten werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich technische Spannungs- und Dehnungswerte ausgewertet. Eine Validierung der Materialmodelle mit Versuchsergebnissen soll die getroffenen Modellannahmen und Vereinfachungen bestätigen oder aber widerlegen. Da Zeit- und Verschiebungswerte für die Lastmodellierung durch die Versuchsdaten vorgeschrieben sind, kann eine zweckmäßige Auswertung der Ergebnisse anhand von Spannungs- und Dehnungsdaten erfolgen.

Die Abschnitte sind nach der im Experiment maximal auftretenden Dehnung 1,0 %, 3,0 % bzw. 5,0 % unterteilt. Neben der Abbildung der ermittelten Dehnungen und Spannungen aus den Zyklerversuchen bzw. -simulationen, werden zur Charakterisierung des Modellverhaltens lineare Trendlinien über die Dehnungsminima und die Spannungsmaxima approximiert. Anhand der Steigungen der Trendlinien können Aussagen über das Plastifizierungs- sowie das Kriechverhalten von Polyethylen getroffen werden. Nach der Darstellung der experimentellen Ergebnisse, werden die Ergebnisse aus den Berechnungen anhand des Drucker-Prager-Modells sowie die anhand des viskoelastischen Modells ausgewertet und vergleichend gegenübergestellt.

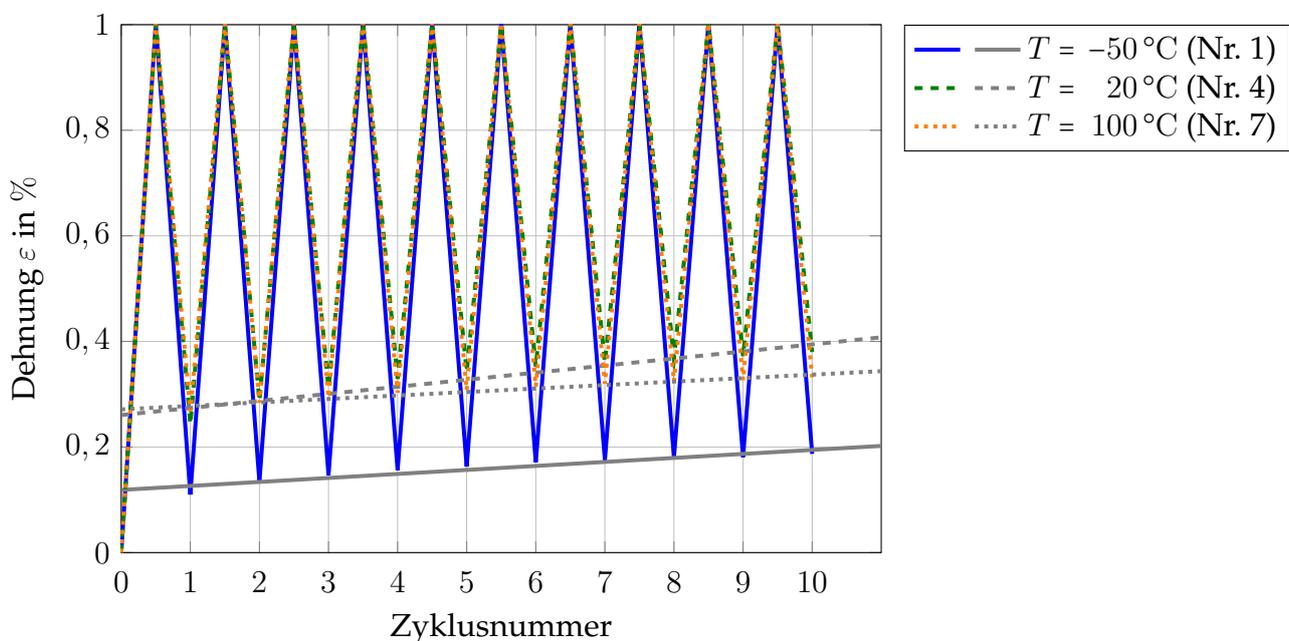


Abbildung 6.2: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklertests bei einer Maximaldehnung von 1,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7)

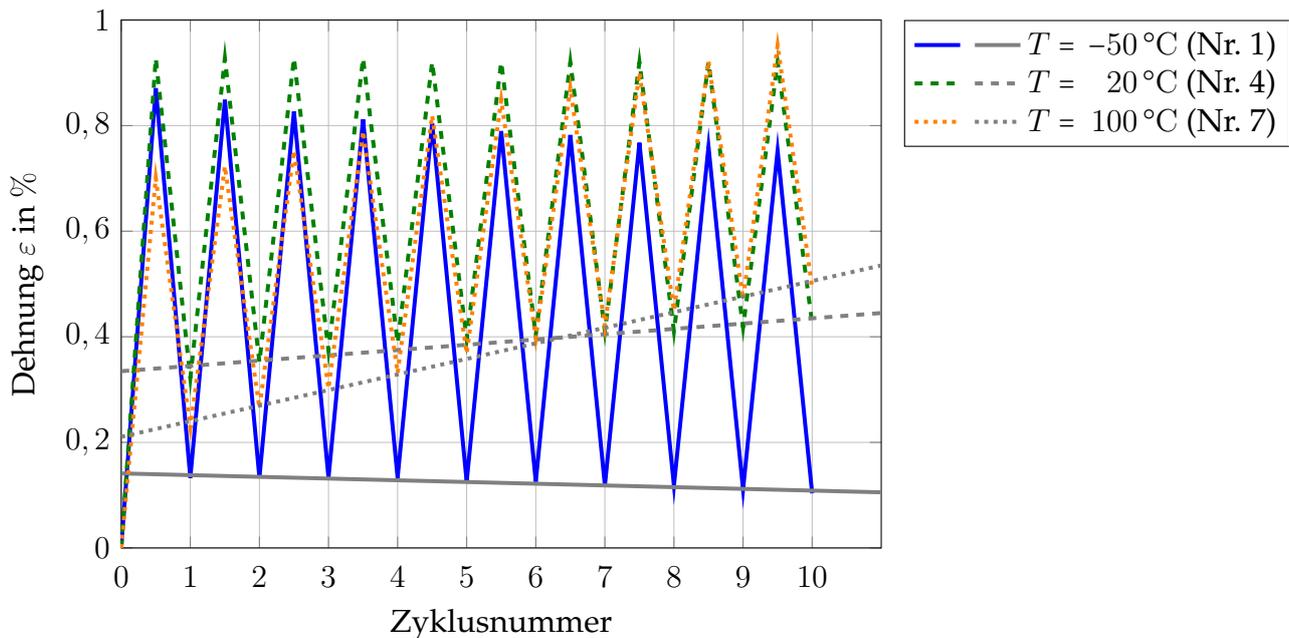


Abbildung 6.3: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zykliersimulationen bei einer Maximaldehnung von 1,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

### Auftretende Dehnungen während der mechanischen Zyklierung

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Versuche mit einer Maximaldehnung von 1,0 % dargestellt und diskutiert. Für die drei Temperaturniveaus  $-50\text{ °C}$ ,  $20\text{ °C}$  und  $100\text{ °C}$  sind das die Versuchsnummern 1, 4 und 7. Zunächst werden die Dehnungen, dann die Spannungen während der mechanischen der Zyklierung abgebildet. Außerdem werden die eben genannten Trendlinien entlang der Dehnungsminima bzw. der Spannungsmaxima aufgezeigt. Die Diagramme der Abbildungen 6.2 - 6.4 zeigen die während der Zyklierung gemessenen bzw. berechneten Dehnungen für die Versuche 1, 4 und 7.

Dabei zeigt Abbildung 6.2 die gemessene Dehnung, die während der Zykliertests durchlaufen wird. Die linearen Trendlinien durch die Dehnungsminima zeigen die Änderung dieser Minima auf. Bei Raumtemperatur (Nr. 4) und bei  $T = 100\text{ °C}$  (Nr. 7) weisen die Dehnungsminima höhere Werte auf als bei  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1). Bei diesem Belastungsniveau zeigt das HDPE eine geringere Plastifizierungsneigung je geringer die Temperatur ist. Die verbleibenden Dehnungsanteile bei Entlastung betragen für  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1) zwischen 0,1 % und 0,2 %, während bei Nr. 4 und Nr. 7 zwischen 0,3 % und 0,4 % erreicht werden. Ob es sich bei den verbleibenden Dehnungen dabei um plastische oder viskose Dehnungen handelt, kann hier nicht eindeutig geklärt werden. Die Dehnungen für  $T = 20\text{ °C}$  und  $T = 100\text{ °C}$  weisen beinahe identische Verläufe auf. Bei allen Temperaturen nehmen die Dehnungsminima während der Zyklierung höhere Werte an. Somit verlaufen die Trendlinien für alle drei Versuche positiv.

Aus der Simulation der Zyklierversuche werden die Dehnungsverläufe ermittelt und auf die selbe Weise dargestellt. Abbildung 6.3 zeigt die berechneten Dehnungswerte während der mechanischen Zyklierung mittels des elastisch-plastischen Drucker-Prager-Modells. Obwohl in allen Berechnungen die Verschiebungswerte aufgebracht werden, die zuvor experimentell

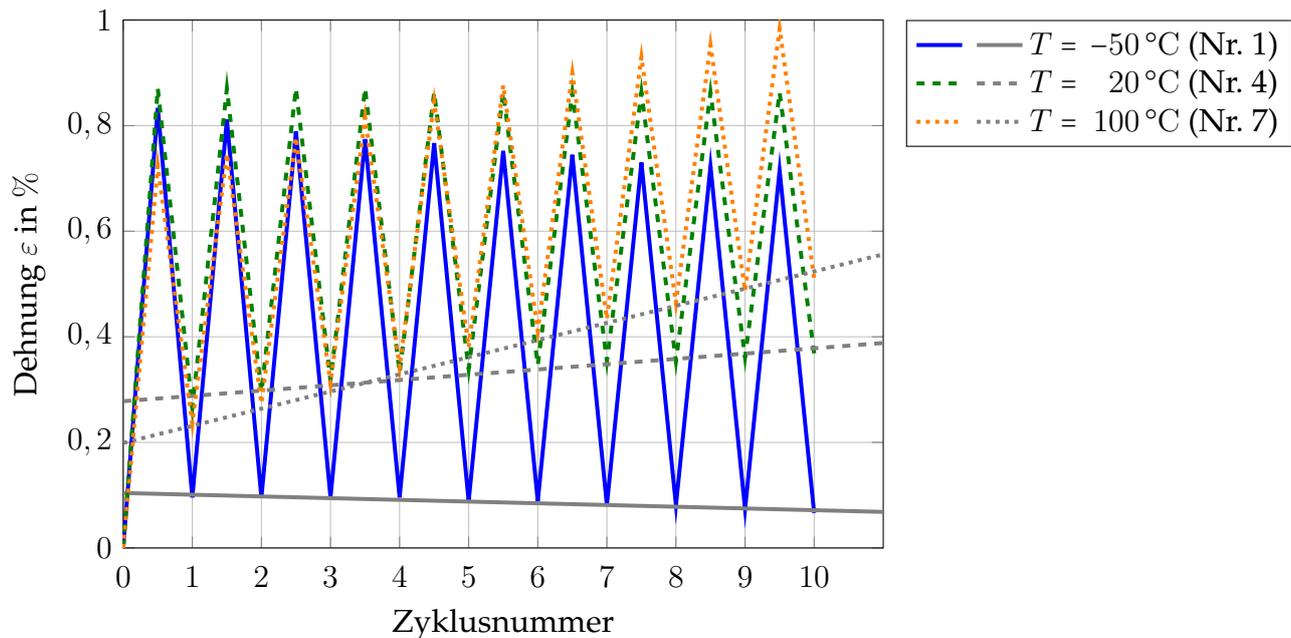


Abbildung 6.4: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 1,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

ermittelt wurden, wird bei keiner der Simulationen der Wert der maximalen Dehnung  $\varepsilon_{\max} = 1,0\%$  erreicht. Die Dehnungsminima von Nr. 4 und Nr. 7 weisen höhere Werte auf, als die von Nr. 1. In diesem Punkt spiegeln die Simulationen das Materialverhalten aus den Versuchen wider. Die plastischen Dehnungen betragen für Nr. 1 etwa 0,1 % und bei Nr. 4 und Nr. 7 zwischen 0,3 % und 0,5 %. Die linearen Approximationen durch die Dehnungsminima verlaufen für Nr. 4 und Nr. 7 erneut steigend, während für Nr. 1 die Trendlinie leicht fällt.

In Abbildung 6.4 sind die Dehnungswerte während der mechanischen Zyklisierung für die Simulation anhand des viskoelastischen Materialmodells dargestellt. Sowohl qualitativ als auch quantitativ ähneln die Ergebnisse denen des Drucker-Prager-Modells. Der Maximalwert der Dehnung von  $\varepsilon_{\max} = 1,0\%$  wird auch hier nicht erreicht. Die Abweichung zur Maximaldehnung ist dabei etwas größer als bei der Simulation mit dem elastisch-plastischen Materialmodell. Die Dehnungsminima bei  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1) betragen in etwa 0,1 % und fallen leicht mit steigender Zyklusanzahl. Dagegen treten bei den höheren Temperaturen (Nr. 4 und Nr. 7) höhere Dehnungsminima im Bereich zwischen 0,2 % und 0,5 % auf. Die Trendlinien der beiden Versuche weisen dabei eine positive Steigung auf. Das wiederum spricht für eine erhöhte Kriechneigung bei den höheren Temperaturen.

Beim Vergleich der Ergebnisse aus der Versuchs- und den beiden Simulationsreihen treten einige Gemeinsamkeiten zu Tage. Bei  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1) sind die verbleibenden Dehnungen auf einem niedrigeren Level als bei  $T = 20\text{ °C}$  und  $T = 100\text{ °C}$ . Die Kombination aus geringer Dehnung und niedrigen Temperaturen begünstigen die Elastizität des HDPE. Allerdings fallen die Trendlinien der Simulationen, während die Trendlinie des Versuchs eine leichte Steigung besitzt. Die Werte der Dehnungsmaxima reichen unter Verwendung des Drucker-Prager-Modells näher an die Versuchswerte von  $\varepsilon_{\max} = 1,0\%$  heran, als in den Simulationen mit dem viskoelastischen Materialmodell. Somit erscheint das Drucker-Prager-Modell besser

geeignet zu sein, um die Zyklisierung bis zu einer maximalen Dehnung von 1,0% darzustellen.

### Auftretende Spannungen während der mechanischen Zyklisierung

Zur weiteren Überprüfung der Aussagen werden im folgenden Abschnitt die zugehörigen Spannungswerte betrachtet. Die Abbildungen 6.5 - 6.7 zeigen die ermittelten Spannungswerte für die Zyklisierung bis zu einer Maximaldehnung von 1,0% (Nr. 1, 4 und 7). Die experimentellen Spannungswerte sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Die für alle drei Versuche vergleichbaren Dehnungen erzeugen bei der tiefen Temperatur  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1) die höchsten Spannungen. Mit steigender Temperatur (Nr. 4 und Nr. 7) treten niedrigere Spannungen auf. In allen Fällen ist das Niveau vergleichbar mit den Spannungen, die bei einer Dehnung von 1,0% unter uniaxialer Zugbelastung erreicht wurden, siehe Abbildung 4.6. Die lineare Approximation über die Spannungsmaxima ist für jeden der drei Versuche fallend. Mit fortschreitender Zyklisierung relaxiert der Kunststoff und es wirkt mit der Zeit weniger Spannung bzw. Kraft auf den Körper bei gleichbleibender Maximaldehnung. Die exakten Steigungen der Trendlinien über die Spannungsmaxima aller Versuche werden zum besseren Vergleich gesondert in Unterabschnitt 6.1.7 ausgewertet und diskutiert.

Abbildung 6.6 stellt die Ergebnisse der Berechnung mittels des Drucker-Prager-Modells dar. Für jedes der drei Temperaturniveaus ergibt die Simulation leicht niedrigere Spannungswerte als im Versuch. Während die Trendliniensteigung der Spannungsmaxima von Versuchs-Nr. 1 negativ ist, weist sie bei Nr. 4 ( $T = 20\text{ °C}$ ) beinahe keine Steigung auf und ist für Nr. 7 leicht positiv. Das heißt die Spannungsspitzen nehmen für  $T = 100\text{ °C}$  während der Zyklisierung zu. Über allem liegen die Spannungsverläufe der elastisch-plastischen Simulation sehr nahe an den experimentell ermittelten Verläufen.

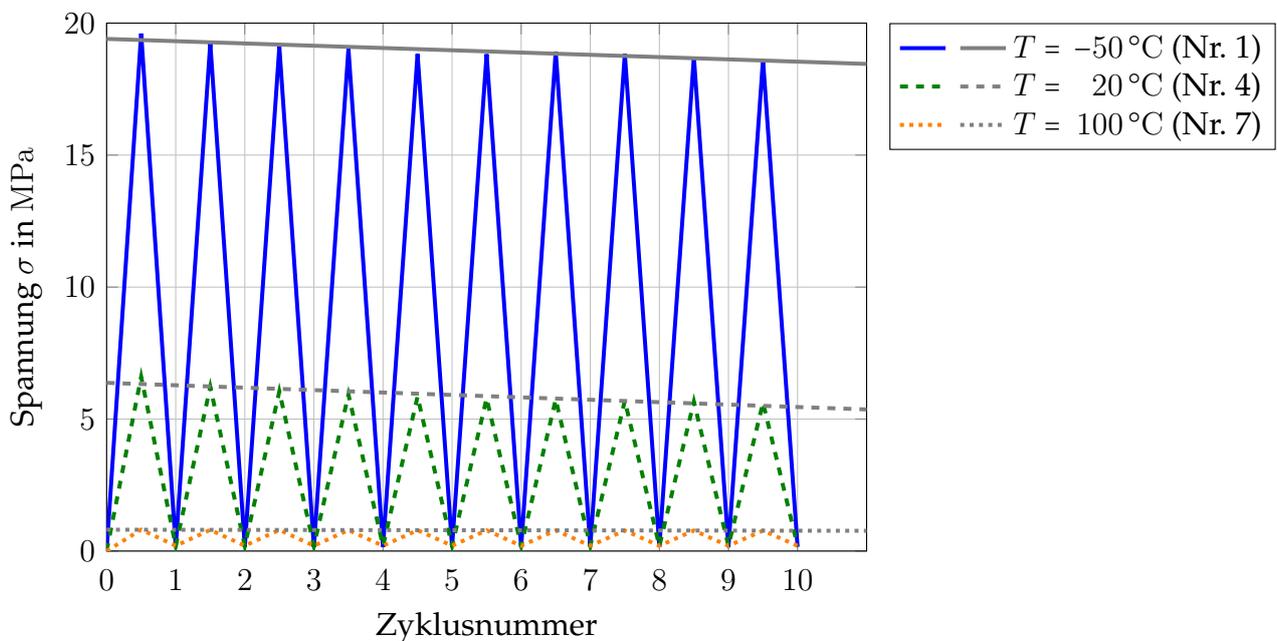


Abbildung 6.5: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zykliertests bei einer Maximaldehnung von 1,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7)

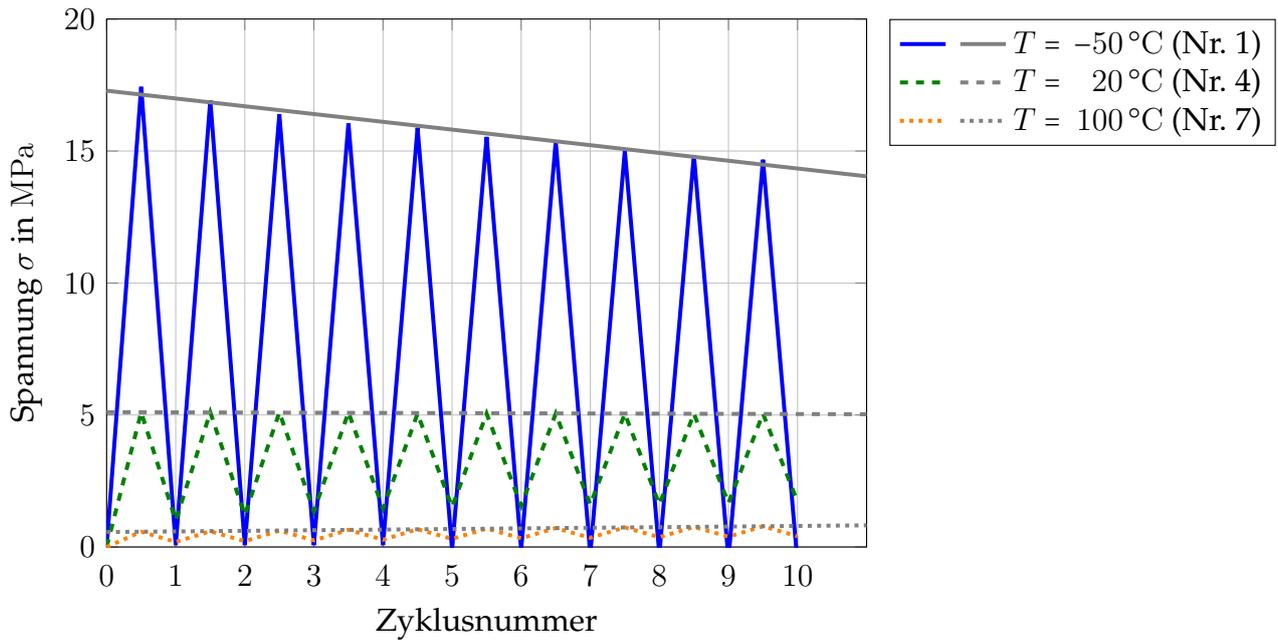


Abbildung 6.6: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 1,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

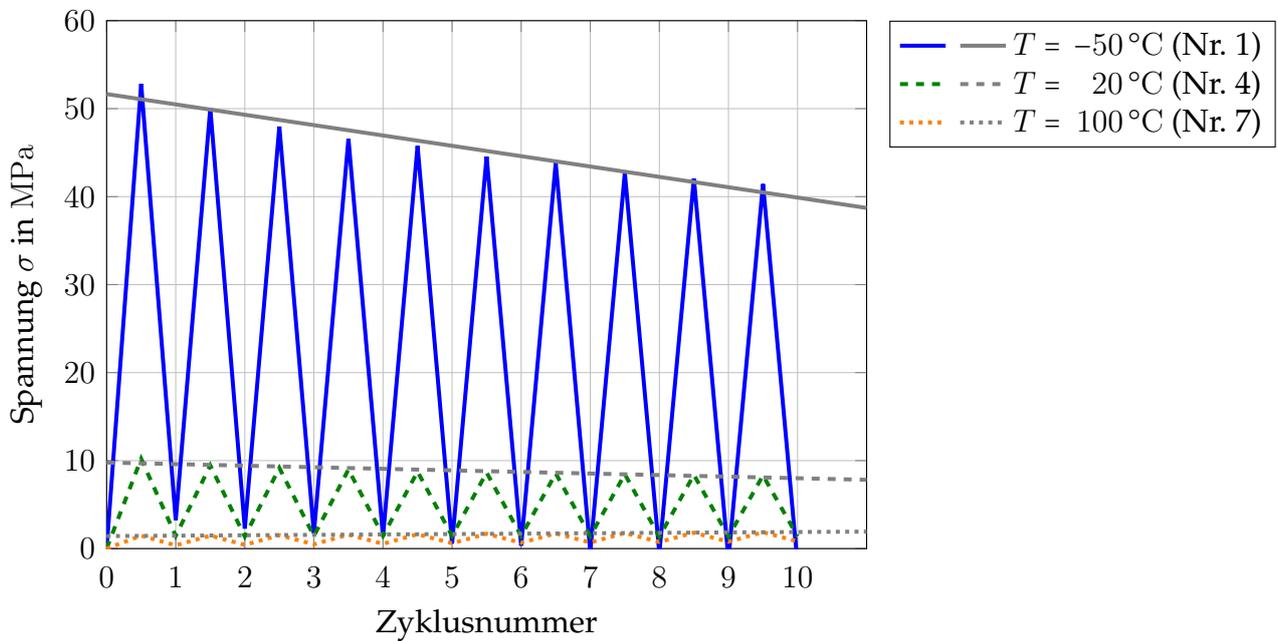


Abbildung 6.7: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 1,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 1, 4 und 7) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

Die Spannungswerte der Simulationsergebnisse mit dem viskoelastischen Modell unterscheiden sich von den experimentellen Werten, wie in Abbildung 6.7 zu sehen. Zunächst ist zu beachten, dass die Ordinatenkalierung des Graphen in Abbildung 6.7 von den bisherigen Spannungsgraphen abweicht. Unabhängig von der Temperatur bewegen sich die Werte auf einem etwa doppelt so hohem Niveau wie in den Versuchen. Die Ursache für dieses Phänomen liegt in der Modellierung einer erhöhten Materialsteifigkeit im viskoelastischen Modell. Bei der Beurteilung des viskoelastischen Modellverhaltens, siehe Abbildung 5.21, fällt auf, dass die modellierten Nachgiebigkeitsverläufe unter den experimentellen liegen. Somit werden bei einer verschiebungsgesteuerten Belastung höhere Spannungen erreicht. Die Trendlinien über die Spannungsmaxima von Versuchs-Nr. 1 und 4 fallen ab. Das spricht für die Abbildung des Relaxationsverhalten des Kunststoffes, da das wiederholte Erreichen der Maximaldehnung einen geringeren Spannungswert im Material zur Folge hat. Bei  $T = 100\text{ °C}$  (Nr. 7) verläuft die Trendlinie horizontal. Bis zu dem Dehnungsniveau von  $\varepsilon = 1,0\%$  und einer Zeitspanne von etwa  $t = 1200\text{ s}$  verhält sich das viskoelastische Modell vornehmlich elastisch und noch wenig viskos.

#### 6.1.4 Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklisierung mit einer maximalen Dehnung von 3,0%

Dieser Abschnitt zeigt die Ergebnisse der Zyklisierung mit der Maximaldehnung von  $\varepsilon = 3,0\%$  bei den Temperaturen  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 2),  $T = 20\text{ °C}$  (Nr. 5) und  $T = 100\text{ °C}$  (Nr. 8). Die experimentell ermittelten Dehnungs- und Spannungsverläufe werden den Simulationsergebnissen anhand des Drucker-Prager-Modells und des viskoelastischen Modells vergleichend gegen-

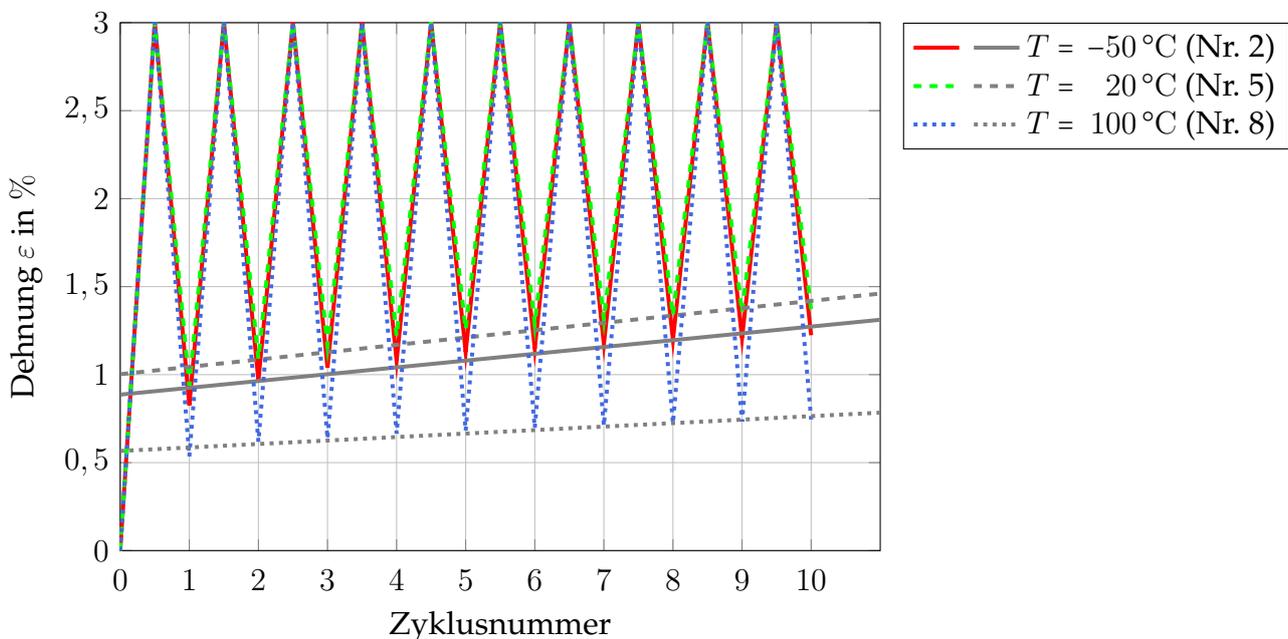


Abbildung 6.8: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklertests bei einer Maximaldehnung von 3,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8)

übergestellt. Dazu dienen unter anderem die Trendlinien durch die Dehnungsminima bzw. durch die Spannungsmaxima.

### Auftretende Dehnungen während der mechanischen Zyklisierung

Die Abbildungen 6.8 - 6.10 stellen die Dehnungsverläufe dar, die während der Zyklisierung mit einer Maximaldehnung von 3,0 % auftreten. Durch die dabei auftretenden Dehnungsminima werden lineare Trendlinien approximiert, um die Änderung der Dehnungsminima zu analysieren. Zunächst zeigt Abbildung 6.8 die Dehnungen der Versuchs-Nr. 2, 5 und 8 im Experiment. Die Trendlinien der drei Versuche verlaufen mit positiver Steigung. Die verbleibende Dehnung, sei sie plastischer oder viskoser Natur, nimmt bei den drei Temperaturen etwa in gleichem Maße zu. Dabei sind die Dehnungsminima mit 0,6 % bis 0,8 % bei Nr. 8 auf geringerem Niveau als bei Nr. 2 und Nr. 5 (0,9 % bis 1,5 %).

Die Verläufe der Dehnungswerte von Nr. 2, 5 und 8 für die Simulation mit dem Drucker-Prager-Modell sind in Abbildung 6.9 gezeigt. Bis auf den Punkt, dass mit einer Maximaldehnung von etwa 2,7 % die angestrebten 3,0 % nicht erreicht werden, sind die Verläufe denen aus den Tests recht ähnlich. Die plastischen Dehnungen sind auf dem gleichen Niveau wie in den Experimenten. Auch hier werden bei  $T = 100\text{ °C}$  Werte von etwa 0,5 % bis 0,8 % erreicht und bei  $T = 20\text{ °C}$  bzw.  $-50\text{ °C}$  zwischen 1,0 % bis 1,4 %. Die Trendlinien durch die Dehnungsminima weisen dabei positive Steigungen auf.

Neben dem elastisch-plastischen Materialmodell werden die Zyklisierungen Nr. 2, 5 und 8 ebenso mit dem linear viskoelastischen Materialgesetz simuliert. Die Dehnungsergebnisse sind in Abbildung 6.10 zu sehen. Die Dehnungsmaxima sind mit etwa 2,3 % deutlich niedriger

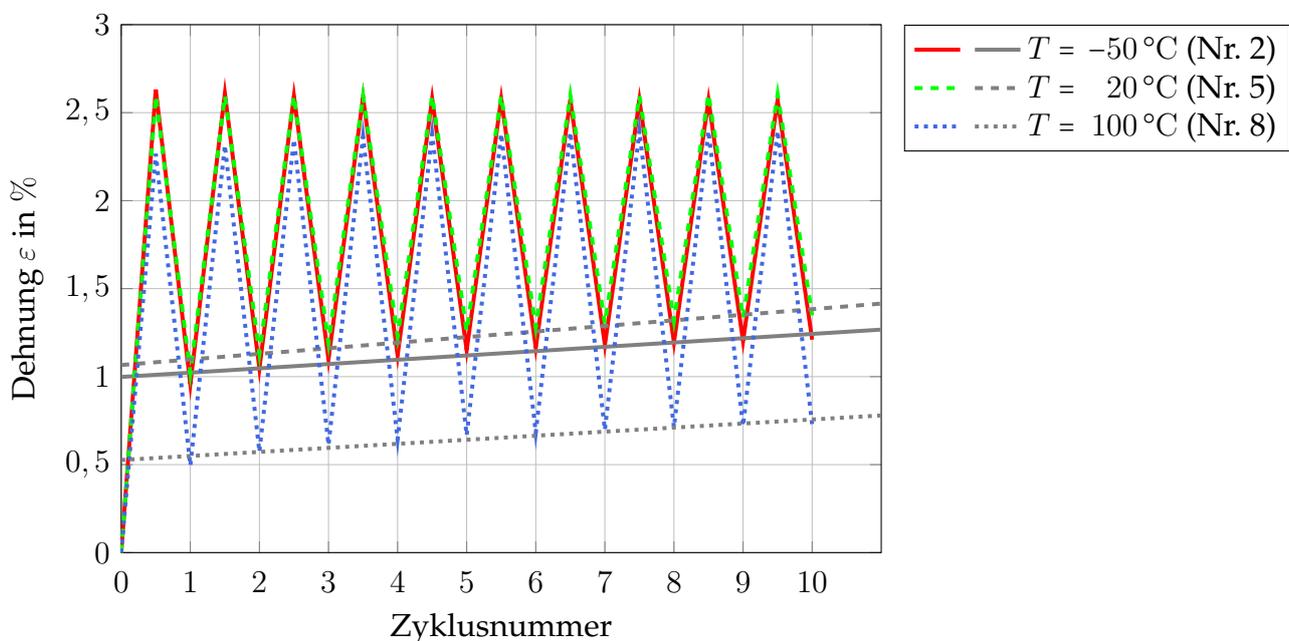


Abbildung 6.9: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklisimulationen bei einer Maximaldehnung von 3,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

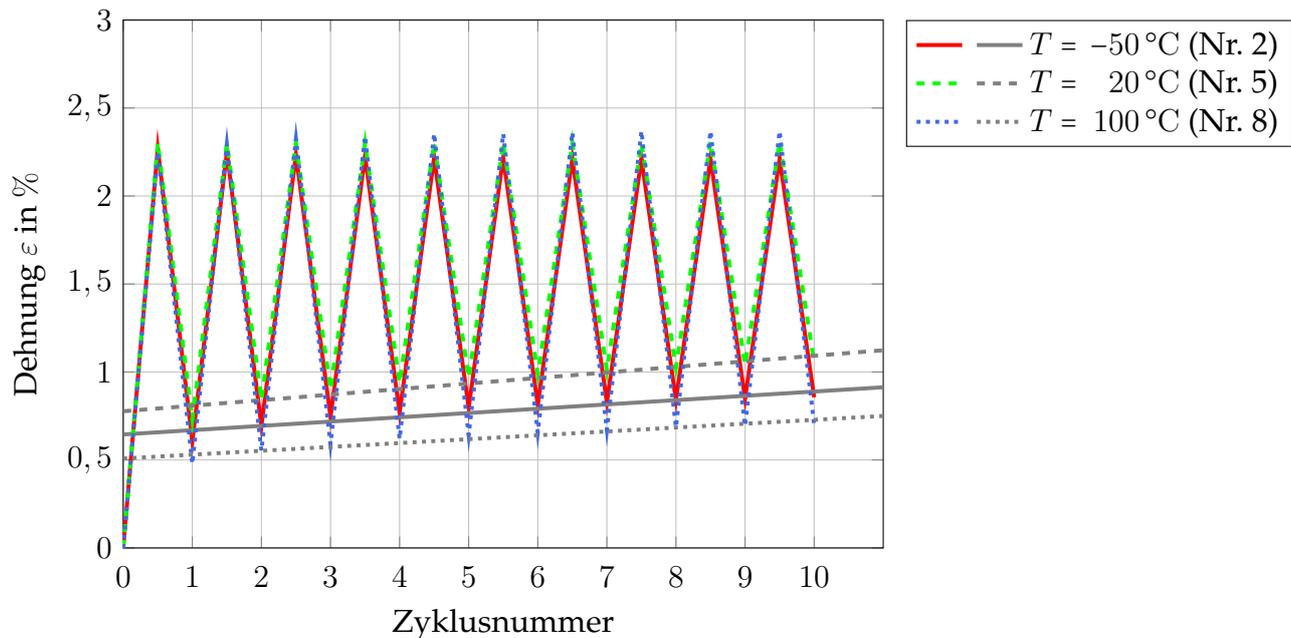


Abbildung 6.10: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 3,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

als die in den Tests mit 3,0 %. Die Trendlinien durch die Dehnungsminima bewegen sich auf etwas niedrigerem Niveau als die der Tests oder der Simulationen mit dem Drucker-Prager-Modell, besitzen jedoch positive Steigungen vergleichbarer Größenordnung. Für diese Simulationsreihe verlaufen die Linien annähernd parallel. Je nach Temperatur verbleibt nach den zehn Zyklen eine Kriechdehnung von 0,7 % bis maximal 1,2 %.

Beim Vergleich der drei Dehnungsverläufe aus Test und Simulation der Versuchs-Nr. 2, 5 und 8 fällt zunächst auf, dass die Dehnungsminima bei  $T = 100\text{ °C}$  durchwegs am geringsten ausfallen. Sowohl experimentell als auch simulativ zeigt sich bei dem Lastniveau eine geringere Plastifizierungs- bzw. Kriechneigung des untersuchten Kunststoffes. Die Dehnungsminima bei  $-50\text{ °C}$  liegen leicht über denen von  $20\text{ °C}$ . Die Abweichungen der elastisch-plastischen Simulationsergebnisse von den experimentellen Daten sind geringer, als die der viskoelastischen Simulation. Auch für das Lastniveau bei einer Maximaldehnung von 3,0 % scheint das Drucker-Prager-Modell geeigneter zu sein als das viskoelastische. Eine weitere Untersuchung der berechneten Spannungen im Material soll Aufschluss darüber geben, ob diese Hypothese bekräftigt werden kann.

### Auftretende Spannungen während der mechanischen Zyklierung

Abbildung 6.11 stellt den Spannungsverlauf der experimentellen Zyklierung mit einer Maximaldehnung von 3,0 % dar. Die Spannungsmaxima der Versuche 2, 5 und 8 weisen entsprechend höhere Werte auf, als die der bereits untersuchten Versuche 1, 4 und 7. Bei  $T = -50\text{ °C}$  liegen erwartungsgemäß die höchsten Spannungen vor mit Werten um etwa 32 MPa. Mit steigender Temperatur nehmen die Spannungswerte deutlich ab, befinden sich aber beinahe

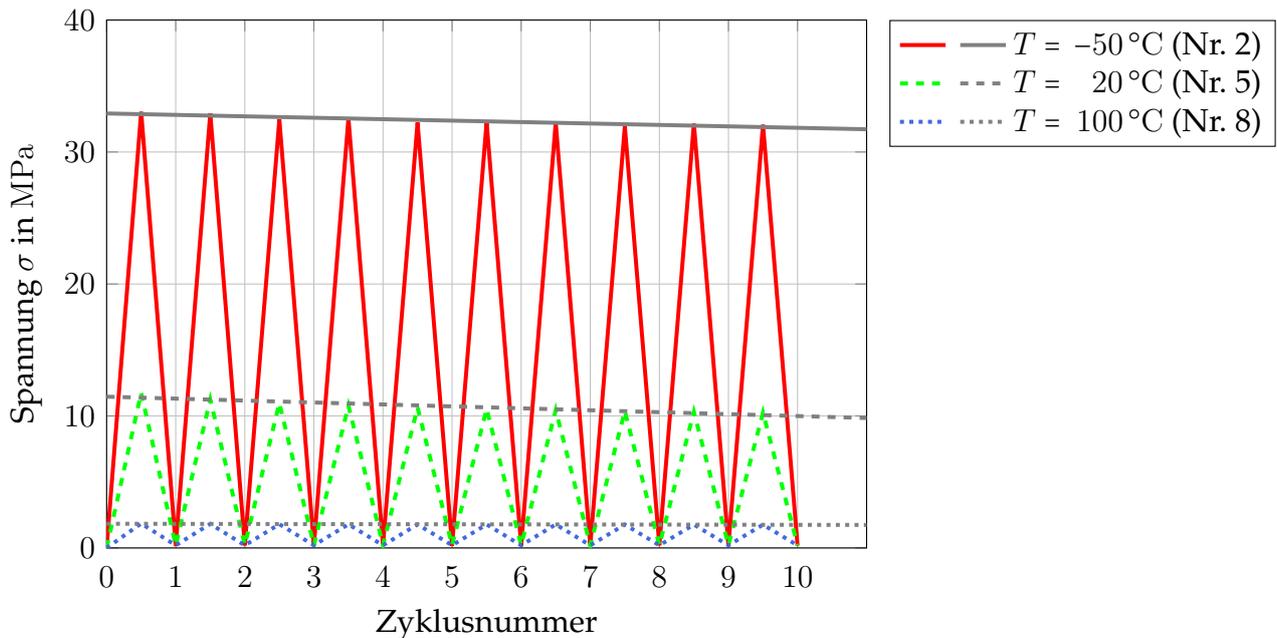


Abbildung 6.11: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklertests bei einer Maximaldehnung von 3,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8)

exakt auf dem Spannungslevel, das durch die Zugversuche in Unterabschnitt 4.3.1 bereits ermittelt wurde. Die Trendlinien durch die Spannungsmaxima fallen für alle drei Versuche leicht ab. Somit nimmt die Spannung bei Erreichen der Maximaldehnung mit fortschreitender Zykluszahl ab. Das kann auf ein Relaxieren im Polyethylen oder aber auf eine alternierende Plastizität bei erneuter Belastung hindeuten.

Die Spannungsverläufe aus den Simulationen (Nr. 2, 5 und 8) mit dem Drucker-Prager-Modell sind in Abbildung 6.12 dargestellt. Alle drei Zyklierungen ähneln quantitativ stark den experimentellen Verläufen. Für die drei Temperaturlevels werden die selben Spannungsniveaus erreicht, wie sie in den Versuchen ermittelt wurden. Zum Teil fallen die Maxima etwas geringer aus als im Test. Die Trendlinien über die Spannungsmaxima sind für Nr. 2 ( $T = -50^\circ\text{C}$ ) leicht abfallend, für Nr. 5 ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) in erster Näherung horizontal und für Nr. 8 ( $T = 100^\circ\text{C}$ ) leicht ansteigend. Bei den niedrigen Spannungswerten die bei Nr. 8 erreicht werden, kann es sich dabei um eine numerische Ungenauigkeit in der Approximation handeln.

Abbildung 6.13 zeigt die Spannungen während der mechanischen Zyklierungen Nr. 2, 5 und 8 der Simulation mit dem viskoelastischen Materialmodell. Zu beachten ist die veränderte Skalierung der Ordinate des Graphen. Zwar nehmen die Spannungen mit steigender Temperatur ab, jedoch werden deutlich höhere Spannungswerte erreicht als mit der elastisch-plastischen Simulation. Die Spannungsmaxima von Versuchs-Nr. 2 sind mehr als viermal, von Nr. 5 und 8 mehr als doppelt so hoch wie die der Drucker-Prager-Simulation oder die der Tests. Die Steigungen der Trendlinien sind für alle Simulationen bei  $-50^\circ\text{C}$  und  $20^\circ\text{C}$  negativ, für die bei  $T = 100^\circ\text{C}$  annähernd waagrecht. Der Wert für die Minimalspannungen, der sich aus dem Kraftminimum bei Entlastung berechnet, wird bei Nr. 2 ( $T = -50^\circ\text{C}$ ) nicht erreicht. Es bleibt eine vergleichsweise hohe Restspannung vorhanden.

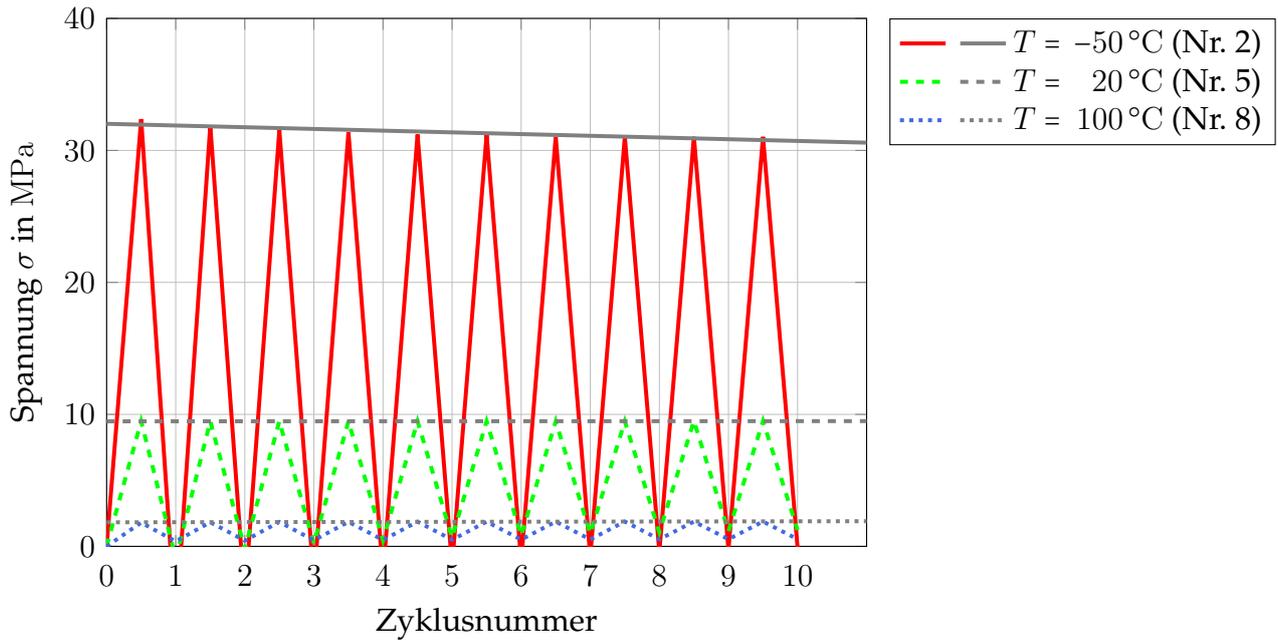


Abbildung 6.12: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 3,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

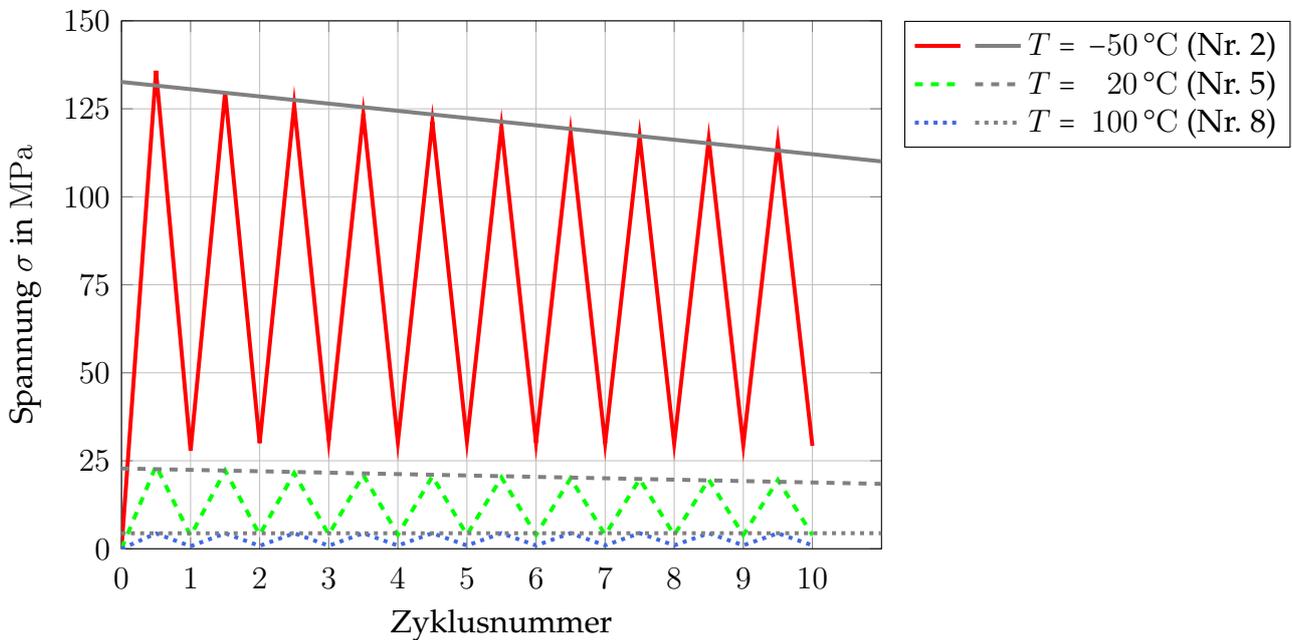


Abbildung 6.13: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklersimulationen bei einer Maximaldehnung von 3,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 2, 5 und 8) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

Auch der Vergleich der Spannungen während der mechanischen Zyklisierung mit der Maximaldehnung von  $\varepsilon_{\max} = 3,0\%$  liefert die Erkenntnis, dass das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell mit seinen Ergebnissen das experimentell ermittelte Materialverhalten deutlich besser abbildet, als es das viskoelastische Materialmodell vermag.

### 6.1.5 Versuchs- und Simulationsergebnisse der Zyklisierung mit einer maximalen Dehnung von 5,0%

Dieser Abschnitt behandelt die Test- und Simulationsergebnisse der Zyklisierung mit einer maximalen Dehnung von  $\varepsilon_{\max} = 5,0\%$ . Durchgeführt wurden sowohl die Tests als auch die Berechnungen bei den drei Temperaturlevels  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 3),  $T = 20\text{ °C}$  (Nr. 6) und  $T = 100\text{ °C}$  (Nr. 9). Die Dehnungs- und Spannungsverläufe werden aufgezeigt und untereinander verglichen. Darüber hinaus dienen lineare Approximationen durch die Dehnungsminima bzw. die Spannungsmaxima zur Evaluierung der Ergebnisse.

#### Auftretende Dehnungen während der mechanischen Zyklisierung

Abbildung 6.14 stellt die Dehnungen während der mechanischen Zyklisierung in den Versuchen 3, 6 und 9 dar. Die Dehnungsminima besitzen für  $T = 100\text{ °C}$  die geringsten Werte mit 1,0 % bis 1,3 %. Die mechanische Zyklisierung ruft bei den übrigen beiden Temperaturniveaus höhere verbleibende Dehnungen hervor. Die Minima steigen von anfangs etwa 2,0 % bis 2,7 % nach Abschluss der zehn Zyklen an. Das Ansteigen der Dehnungsminima lässt sich auf entweder eine Plastifizierung oder aber auf ein Kriechen im Kunststoff zurückführen. Die drei Trendlinien durch die Dehnungsminima steigen positiv, wobei die Minima der

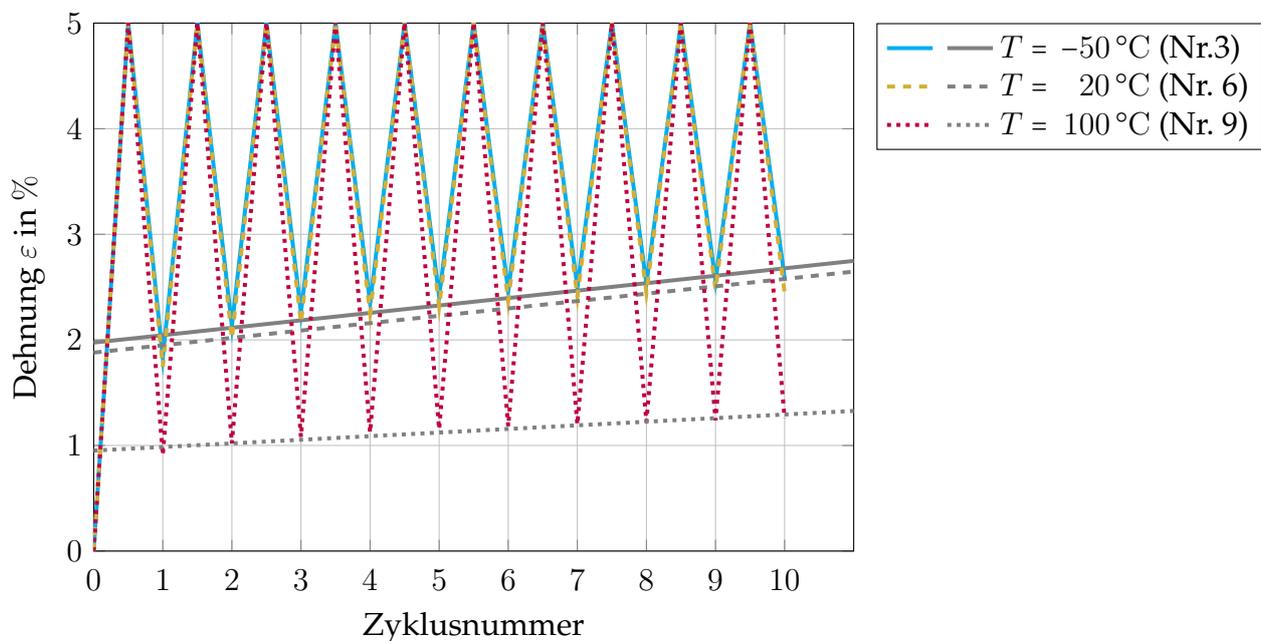


Abbildung 6.14: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Zyklertests bei einer Maximaldehnung von 5,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9)

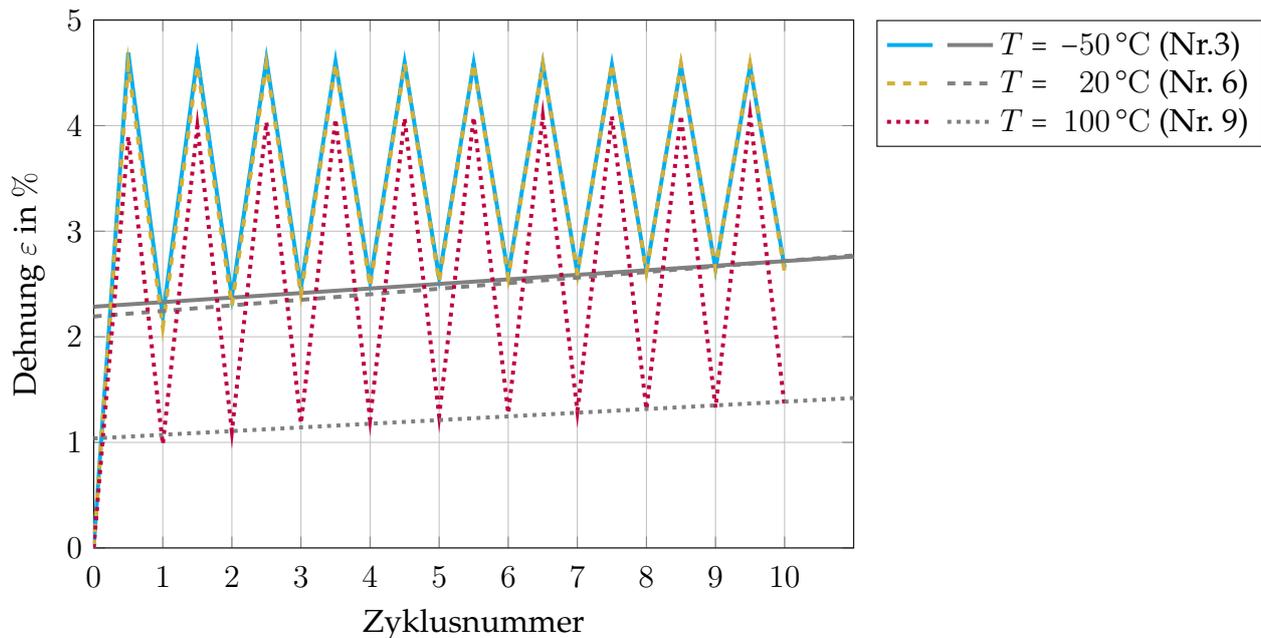


Abbildung 6.15: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Simulationen bei einer Maximaldehnung von 5,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

Versuche Nr. 3 und 6 etwas steiler ansteigen und annähernd parallel verlaufen. Die lineare Approximation von Nr. 9 besitzt eine flachere Steigung.

Abbildung 6.15 zeigt die simulierte Dehnungsverläufe von Nr. 3, 6 und 9 mit dem Drucker-Prager-Materialmodell, von denen die Verläufe Nr. 3 und 6 beinahe identisch sind. Die Dehnungsmaxima von 5,0 % werden auch in diesen drei Simulationen nicht erreicht und bewegen sich im Bereich von etwa 4,0 % bis 4,7 %. Die Dehnungsminima sind im Vergleich zu den experimentell bestimmten Minima leicht erhöht. Die Steigungen der Trendlinien der Simulationen sind mit den Ergebnissen aus den Zykliertests vergleichbar. In allen dargestellten Simulationen wächst der Anteil der plastischen Verformung mit steigender Zykluszahl. Die drei Trendlinien zeigen so eine positive Steigung.

In Abbildung 6.16 sind die Dehnungsverläufe gezeigt, die mittels Simulation mit dem viskoelastischen Materialmodell für die Versuche Nr. 3, 6 und 9 bestimmt wurden. Auch in diesem Fall werden die Maximaldehnungen von  $\varepsilon_{\max} = 5,0\%$  nicht erreicht und rangieren in einem Bereich etwas unter 4,0 %. Die Maximaldehnungen liegen damit auf einem noch niedrigeren Niveau als die Dehnungen, die mit dem Drucker-Prager-Modell berechnet wurden. Weiter ist zu erkennen, dass die Dehnungsminima von Nr. 9 mit  $\varepsilon_{\min} \approx 1,0\%$  die niedrigsten Werte von den drei Versuchen aufweisen. Sowohl diese Minima als auch deren Trendlinie bewegen sich innerhalb vergleichbarer Werte, wie die experimentellen Ergebnisse. Die Trendlinien von Nr. 3 und 6 weisen ähnliche Steigungen auf wie im Versuch. Die Dehnungsminima fallen jedoch um etwa 0,5 % niedriger aus als die experimentellen Ergebnisse.

Beim Vergleich der drei letztgenannten Graphen für die Dehnungsverläufe von Nr. 3, 6 und 9 zeigt sich erneut, dass das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell besser dazu im Stande ist das mechanische Verhalten unter mechanischer Zyklierung abzubilden als das viskoelastische. Bei dem Belastungsmaximum von bis zu 5,0 % waren die Abweichungen bei allen untersuchten Temperaturniveaus bei den Simulationen mit dem Drucker-Prager-Modell

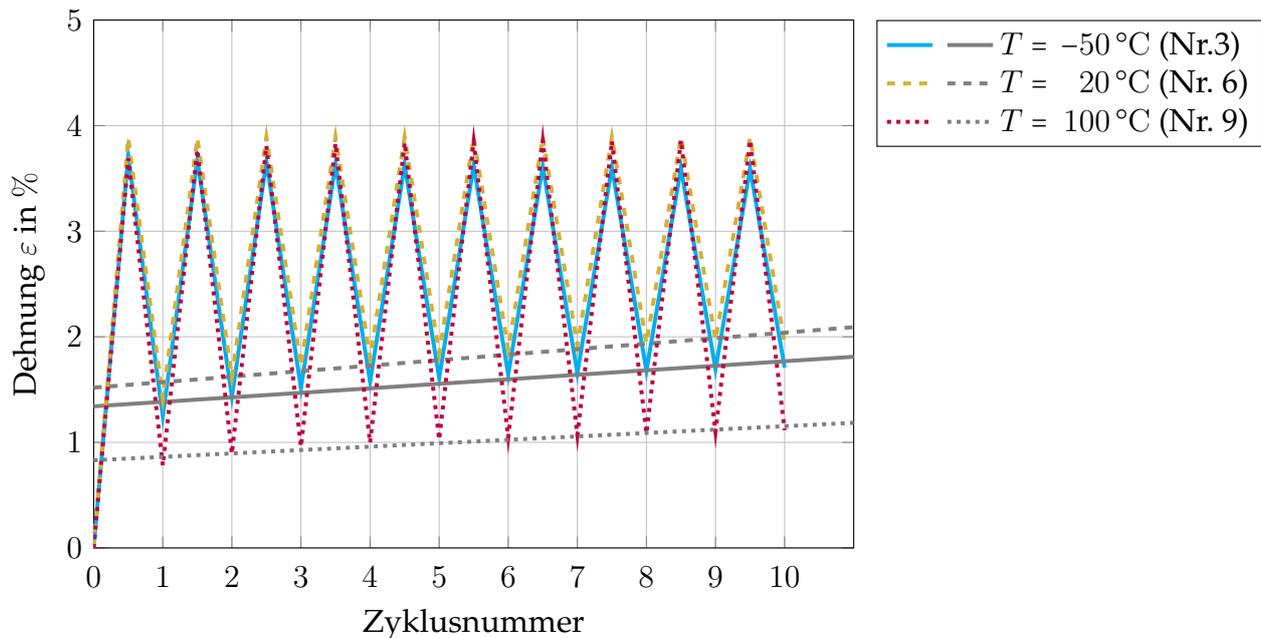


Abbildung 6.16: Dehnung und Trendlinie durch die Dehnungsminima in den Simulationen bei einer Maximaldehnung von 5,0 % für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

geringer und somit näher dran an dem experimentell bestimmten Materialverhalten. Erneut soll eine Überprüfung der zugehörigen Spannungen detailliertere Aufschlüsse darüber geben.

### Auftretende Spannungen während der mechanischen Zyklisierung

Abbildung 6.17 stellt die Spannungsverläufe für die experimentelle Zyklisierung bei einer Maximaldehnung von 5,0 % dar. Die Versuchs-Nr. 3, 6 bzw. 9 unterscheiden sich dabei in den Testtemperaturen  $-50\text{ °C}$ ,  $20\text{ °C}$  bzw.  $100\text{ °C}$ . Entsprechend treten bei Nr. 3 mit etwa 36 MPa die höchsten und bei Nr. 9 mit etwa 2,5 MPa die niedrigsten Spannungsmaxima auf. Die Spannungsmaxima bei  $\varepsilon_{\max} = 5,0\%$  entsprechen in sehr guter Näherung den Spannungswerten die bei gleichem Dehnungsniveau schon bei den Zugversuchen in Unterabschnitt 4.3.1 erreicht wurden. Für die drei Versuche sind die Steigungen der Trendlinien durch die Spannungsmaxima negativ. Mit fortschreitender Zyklenzahl nimmt die Spannung bei Erreichen der Maximaldehnung geringfügig ab.

Die Spannungsverläufe von Abbildung 6.18 wurden durch die Simulation der Zyklisierung mit dem Drucker-Prager-Modell berechnet. Bei den drei simulierten Temperaturen ähneln die Niveaus der Spannungsmaxima den experimentell ermittelten. Die starke Abnahme der Spannungen mit der Temperatur wurden durch die Simulationen mit dem Drucker-Prager-Modell in Abschnitt 5.5 bestätigt. Die erreichten Spannungen bei gegebenem Belastungsniveau von  $\varepsilon = 5,0\%$  entsprechen in sehr guter Näherung den Spannungen aus den quasistatischen Zugversuchen von Abbildung 5.17. Jedoch werden bei den Spannungsminima in der Simulation negative Werte erreicht, die nicht den Versuchswerten von etwa 0 MPa bei Entlastung entsprechen. Für Nr. 3 ist die Trendlinie durch die Spannungsmaxima etwas stärker abfallend

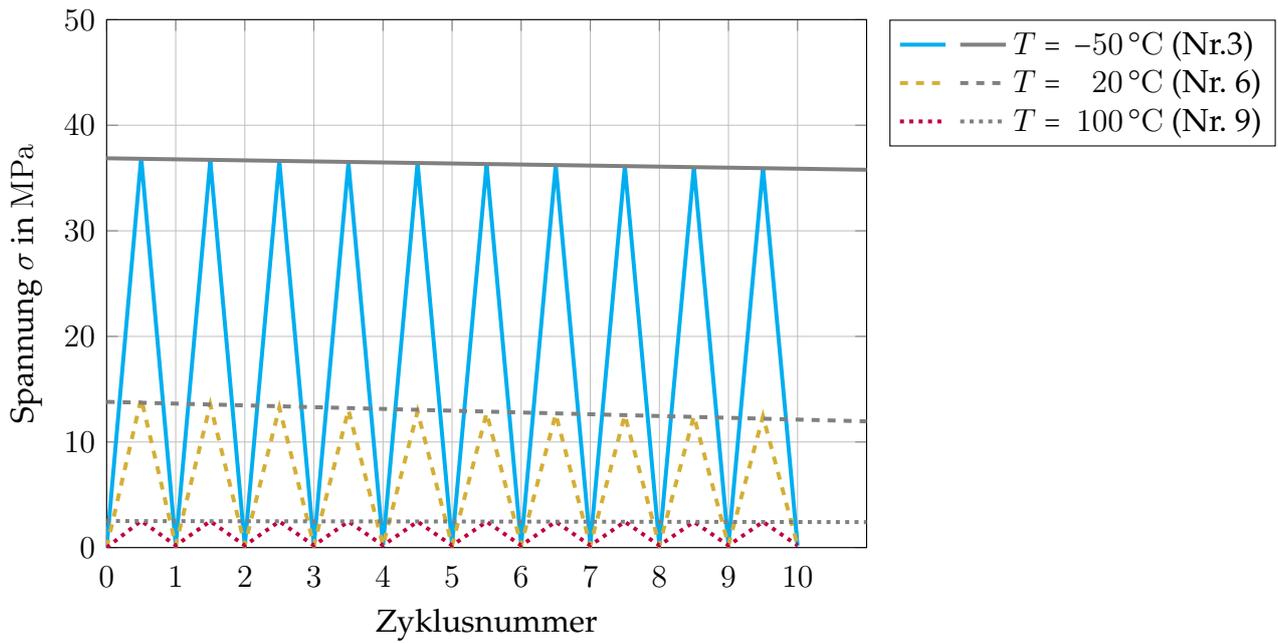


Abbildung 6.17: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Zyklertests bei einer Maximaldehnung von 5,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9)

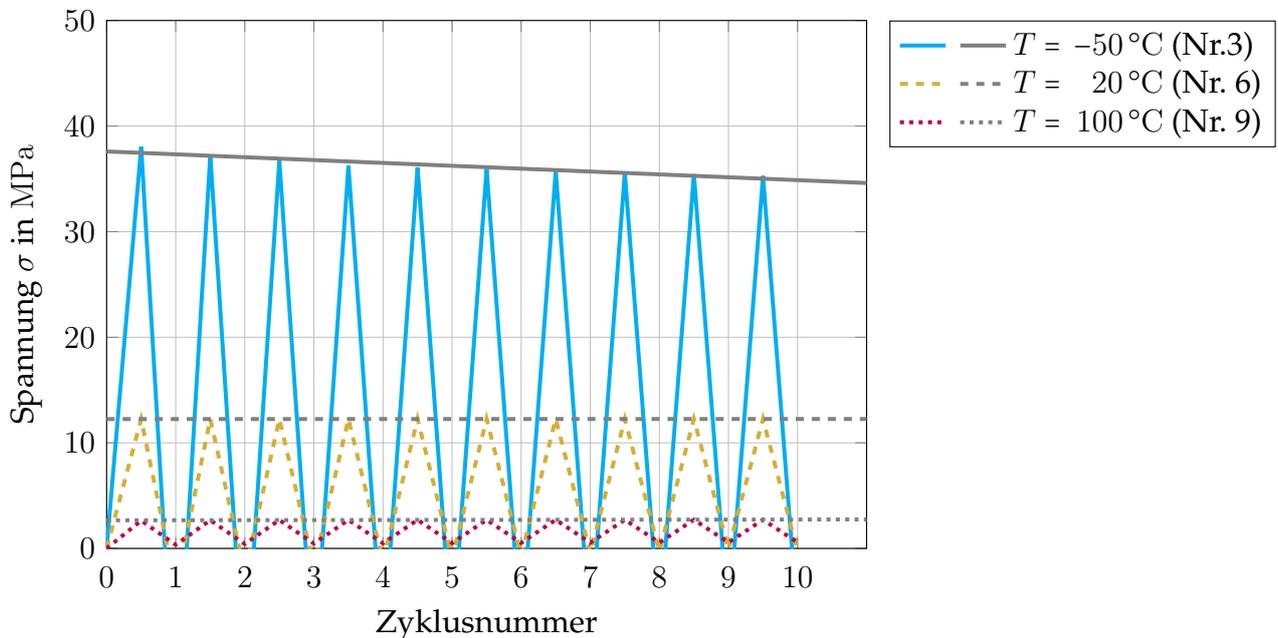


Abbildung 6.18: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Simulationen bei einer Maximaldehnung von 5,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9) mit Anwendung des Drucker-Prager-Modells

als im Versuch. Die Trendlinien von Nr. 6 und Nr. 9 sind dagegen etwas flacher und verlaufen somit beinahe horizontal.

Die mit dem viskoelastischen Materialmodell berechneten Spannungsverläufe für die Zyklierungen Nr. 3, 6 und 9 finden sich in Abbildung 6.19. Wie bei der bisherigen Darstellung der viskoelastischen Spannungsergebnisse wurde hier die Skalierung der Ordinate verändert, um die stark erhöhten Spannungswerte abbilden zu können. Die Spannungen liegen bei allen Temperaturen um ein Vielfaches höher als im Versuch. Für  $T = -50\text{ °C}$  betragen sie zum Teil mehr als 200 MPa, fallen aber mit steigender Zyklierung ab. Selbst die Spannungsminima von Nr. 3 liegen auf einem höheren Niveau als die Spannungsmaxima im Versuch. Die Trendlinien der Simulationen Nr. 3 und Nr. 6 fallen stärker als experimentell bestimmt. Die lineare Approximation durch die Spannungsmaxima von Nr. 9 verläuft wie im Versuch annähernd horizontal.

Ein Vergleich der Dehnungsminima und der Spannungsmaxima aller Versuche 1 - 9 soll ein präziseres Bild darüber geben, ob das Drucker-Prager-Materialmodell dem viskoelastischen Modell bei der Abbildung der mechanischen Zyklierung überlegen ist. Weiter kann durch den direkten Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Ergebnissen der Simulationen der Vorsprung des elastisch-plastischen Modells quantifiziert werden. In den folgenden Abschnitten werden die Simulationsergebnisse anhand der Trendliniensteigungen und der relativen Abweichung von Spannungs- und Dehnungsdaten von den Experimenten beurteilt.

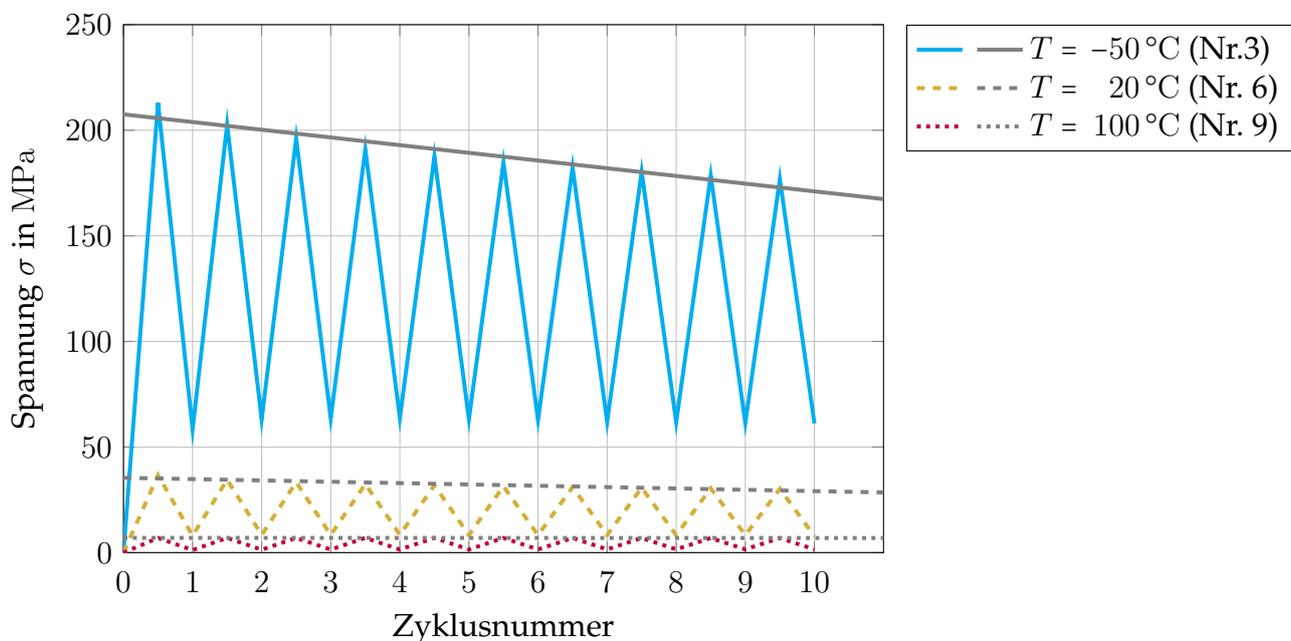


Abbildung 6.19: Spannung und Trendlinie durch die Spannungsmaxima in den Simulationen bei einer Maximaldehnung von 5,0% für unterschiedliche Temperaturen (Versuchs-Nr. 3, 6 und 9) mit Anwendung des viskoelastischen Modells

### 6.1.6 Evaluation anhand der Dehnungsminima

Aus den bisher untersuchten Ergebnissen der Zyklerversuche und -simulationen können deutliche Abhängigkeiten von der Belastungshöhe, der Temperatur sowie des in der Simulation angewandten Materialmodells ausgemacht werden. Zur detaillierteren Analyse der Ergebnisse werden in den vorliegenden Abschnitten 6.1.6 und 6.1.7 die Trendliniensteigungen sowie die gemittelten, relativen Abweichungen der Dehnungs- und Spannungsverläufe quantifiziert und vergleichend gegenübergestellt.

#### Vergleich der Trendliniensteigungen

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Steigungen der linearen Approximationen durch die Dehnungsminima (Trendliniensteigung) werden nicht wie in den Abschnitten zuvor über die Zyklenzahl dargestellt. Je nach Temperatur und Belastungshöhe unterschieden sich die Versuchsdauern zum Teil deutlich voneinander. Für den direkten Vergleich der neun Versuche erfolgt die Ermittlung der Steigung über die Zeit.

Abbildung 6.20 stellt die Steigungen der Trendlinien über die Dehnungsminima der neun Zyklierungen dar. Dabei werden die Steigungen der experimentell ermittelten Dehnungsminima mit denen aus den Simulationen mittels Drucker-Prager-Modell bzw. viskoelastischem Modell vergleichend gegenübergestellt.

Betrachtet man die experimentellen Steigungen, ■ in Abbildung 6.20, so fällt auf, dass bei den beiden niedrigeren Temperaturen  $-50\text{ °C}$  und  $20\text{ °C}$  (Versuchs-Nr. 1 - 6) mit steigender Belastung  $\varepsilon_{\max}$  die Steigung zunimmt. Dagegen verharren die Steigungen bei  $T = 100\text{ °C}$  (Versuchs-Nr. 7 - 9) auf einem Niveau. Das lässt darauf schließen, dass bei den niedrigeren

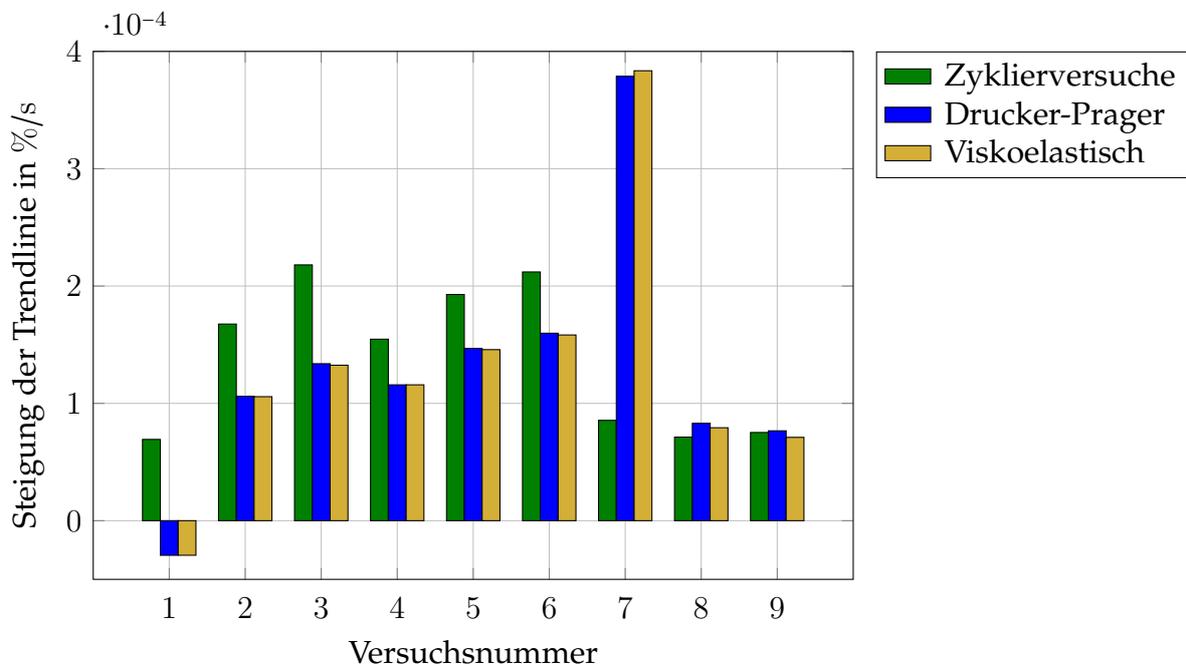


Abbildung 6.20: Steigungen der Trendlinien über die Dehnungsminima; Ergebnisse aus den Zyklerversuchen und -simulationen mittels Drucker-Prager-Modell bzw. viskoelastischem Modell

Temperaturen die Erhöhung der Belastung mit einer gesteigerten Plastifizierungs- bzw. Kriechneigung einhergeht. Bei  $T = 100\text{ °C}$  ist diese Neigung nicht festzustellen.

Es ist zu erkennen, dass die Trendliniensteigungen der Simulationen mit dem Drucker-Prager-Modell (■) mit denen des viskoelastischen Modells (■) stets beinahe gleichauf liegen. Bei den Versuchen 1 - 6 folgen sie dem Trend der Erhöhung der Steigung bei gleichzeitiger Belastungssteigerung. Bei Nr. 8 und 9 werden die experimentellen Steigungen in guter Näherung getroffen.

Bei den Simulationen von Nr. 1 und Nr. 7 treten erwähnenswerte Abweichungen auf. Die berechneten Dehnungsminima von Nr. 1 ergeben eine fast horizontale, aber negative Steigung. Das hätte die unrealistische Annahme zur Folge, dass die Plastifizierung bzw. das Kriechen des Werkstoffes mit wachsender Zyklenzahl abnehme. Für ein derartiges Materialverhalten gibt es jedoch keinerlei sonstige Hinweise. Die simulierten Trendlinien von Nr. 7 ergeben eine wesentlich größere Steigung als experimentell bestimmt. Beide Zyklierungen, Nr. 1 und Nr. 7, wurden bis zu einer Maximaldehnung von  $\varepsilon_{\max} = 1,0\%$  durchgeführt. Das kann auf eine Abweichung in der linearen Elastizität hindeuten. Der E-Modul hat bis zu dieser Dehnung einen erheblichen Einfluss auf das Modellierungsergebnis. Bei allen anderen Versuchen bilden die Simulationen die Tendenz richtig ab und befinden sich im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen auf akzeptablem Niveau.

### Bewertung der Materialmodelle

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse beleuchten die Abweichungen zwischen den simulierten und experimentellen Ergebnissen genauer und dienen somit der Bewertung der Materialmodelle. Die Simulationsergebnisse aller neun Zyklierungen werden mit den Versuchsergebnissen verglichen. Das gilt für die Simulationen, die mithilfe des Drucker-Prager-Modells sowie für die, die mithilfe des viskoelastischen Materialmodells durchgeführt wurden. Dabei werden in diesem Unterabschnitt Dehnungswerte miteinander verglichen. Aus den absoluten Unterschieden zwischen den experimentell gemessenen Dehnungen und den Dehnungen aus den Simulationen wird die gemittelte relative Abweichung berechnet. Die Quantifizierung der Abweichung ermöglicht den Vergleich der beiden Materialmodelle und damit die Bewertung der Qualität des Modells bzw. der Modellierung.

Das Diagramm in Abbildung 6.21 zeigt die mittlere relative Abweichung der simulativ berechneten Dehnungen von den experimentell bestimmten Dehnungen. Für die neun Versuche wird zwischen den Abweichungen des Drucker-Prager-Modells (■) und des viskoelastischen Modells (■) unterschieden. Wie sich die Versuchs-Nummerierung nach Testtemperatur und Belastungsmaximum ergibt, stellt Tabelle 6.1 dar.

Zunächst fällt auf, dass die Abweichungen der Simulationsergebnisse mit dem viskoelastischen Materialmodell bei allen Versuchen mindestens so hoch sind wie mit dem Drucker-Prager-Modell. Das bestätigt die Aussage aus Unterabschnitt 6.1.3 bis 6.1.5, dass das viskoelastische Materialmodell nicht in der Lage ist, das thermo-mechanische Materialverhalten so genau wiederzugeben, wie das Drucker-Prager-Modell. Für  $T = -50\text{ °C}$  (Nr. 1 - 3) nehmen die Abweichungen für das viskoelastische Modell mit steigender Maximalbelastung zu, beim Drucker-Prager-Modell dagegen ab. Bei Raumtemperatur (Nr. 4 - 6) zeigt das Drucker-Prager-Modell eine recht konstante Abweichung von etwa 7%. Das viskoelastische Modell schneidet hier durchgängig schlechter ab. Bei der erhöhten Temperatur von  $T = 100\text{ °C}$  weichen die

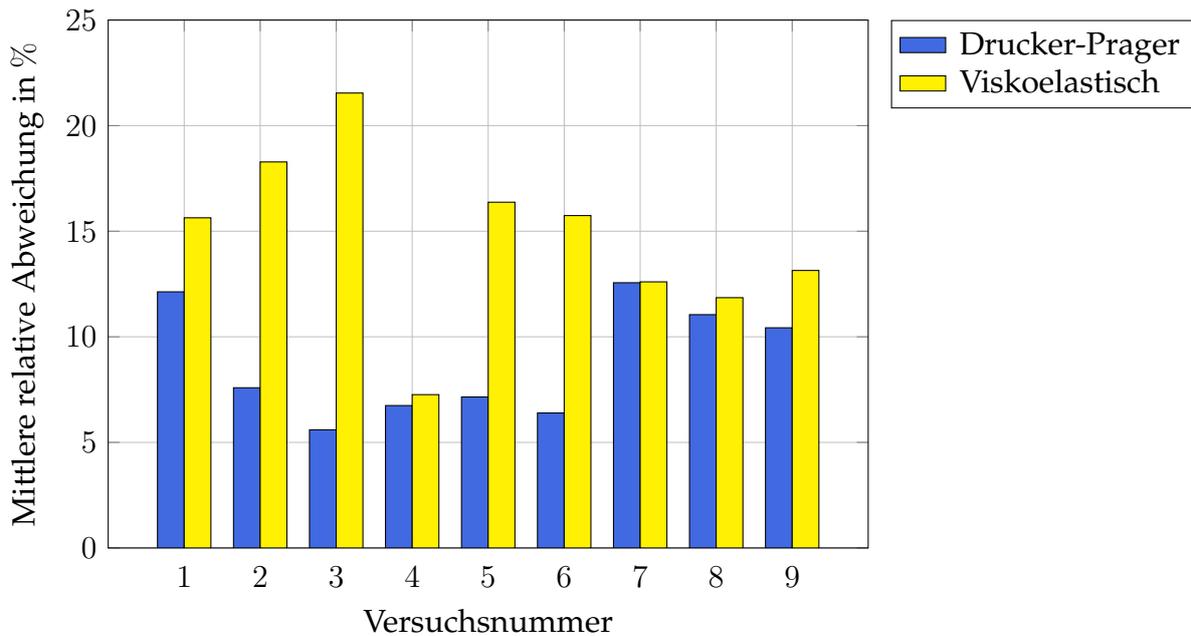


Abbildung 6.21: Mittlere relative Dehnungsabweichung der Simulationen mit Drucker-Prager-Modell bzw. viskoelastischem Modell von den Versuchsergebnissen

Simulationen beider Modelle in etwa gleich von der Dehnungsmessung im Versuch ab. Die mittleren relativen Abweichungen bewegen sich zwischen etwa 11 % und 13 %.

Dieser Vergleich der Materialmodelle spricht gleichermaßen für das Vermögen des Drucker-Prager-Modells zeitabhängige, mechanische Belastungen des Werkstoffes abzubilden. Das linear viskoelastische Modell kann diesem Anspruch nur bedingt gerecht werden.

### 6.1.7 Evaluation anhand der Spannungsmaxima

Zur weiteren Analyse und Bewertung der untersuchten Materialmodelle werden im vorliegenden Abschnitt die Spannungswerte aus den Simulationen und Versuchen vergleichend gegenübergestellt. Die Trendliniensteigungen der ermittelten Spannungsmaxima sowie die gemittelten, relativen Abweichungen der Spannungsverläufe voneinander tragen zur Evaluation der Materialmodelle bei.

#### Vergleich der Trendliniensteigungen

Wie schon die Trendlinien der Dehnungsminima, werden auch die Steigungen der Trendlinien über die Spannungsmaxima über der Zeit dargestellt. Die je nach Temperatur und Belastungshöhe unterschiedlichen Versuchsdauern würden den direkten Vergleich anhand von Trendliniensteigungen über die Zyklenzahl erschweren. Neben der Bewertung mittels der Trendlinien, erfolgt eine Evaluation der relativen Abweichung der Simulationsergebnisse zu den Versuchsdaten für das jeweilige Materialmodell anhand der Spannungswerte.

Abbildung 6.22 zeigt die Steigungen der Trendlinien entlang der Spannungsmaxima für alle neun Zyklierungen, deren Nummerierungen in Tabelle 6.1 aufgelistet sind. Neben den Versuchsergebnissen sind die Ergebnisse aus den Simulationen mittels Drucker-Prager-Modell

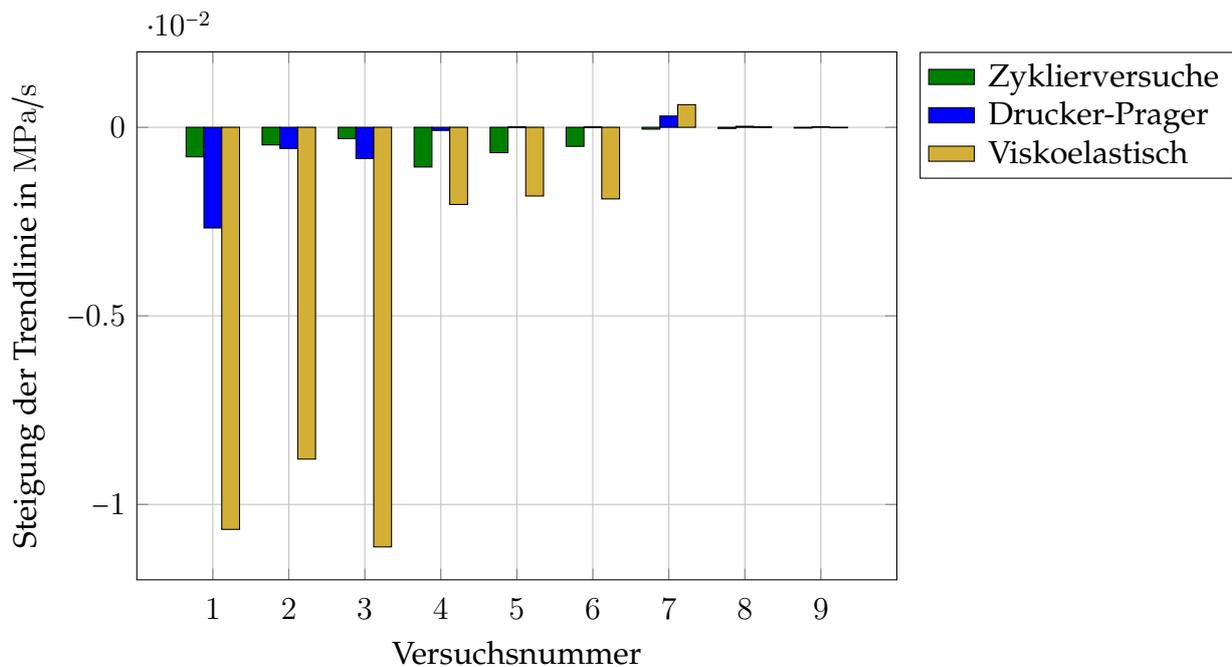


Abbildung 6.22: Steigungen der Trendlinien über die Spannungsmaxima; Ergebnisse aus den Zyklerversuchen und -simulationen mittels Drucker-Prager-Modell bzw. viskoelastischem Modell

bzw. viskoelastischem Modell dargestellt. Zunächst fällt auf, dass beinahe alle Trendliniensteigungen negativ sind. Bei der Betrachtung der experimentellen Ergebnisse (■) ist zu erkennen, dass die Steigungen mit Erhöhung der Maximalbelastung abflachen. Diese Tendenz gilt vor allem für die beiden Temperaturen  $T = -50\text{ °C}$  und  $20\text{ °C}$ . Bei diesen Temperaturen verhalten sich die Trendlinien annähernd identisch. Die Trendlinien bei  $T = 100\text{ °C}$  dagegen verlaufen allesamt beinahe horizontal und zeigen kaum Ausschläge.

Die Trendlinien aus der Simulation fallen für  $T = -50\text{ °C}$  deutlich stärker ab als die experimentellen Ergebnisse. Besonders die mit dem viskoelastischen Modell berechneten Spannungsmaxima (■) weisen bei den Versuchs-Nr. 1 - 3 stark überhöhte Steigungswerte auf. Ebenso bei Raumtemperatur (Nr. 4 - 6) fallen die Trendlinien der viskoelastischen Simulation zu stark ab. Die Trendlinien des Drucker-Prager-Modells (■) verhalten sich hier dagegen annähernd horizontal und können das Abfallen der Spannungsmaxima nicht abbilden. Für die Zyklierungen bei  $T = 100\text{ °C}$  (Nr. 7 - 9) lässt sich nur schwer eine Aussage treffen, da alle Trendlinien nur geringe Ausschläge aufweisen.

Für eine umfangreichere Bewertung des Drucker-Prager-Modells und des viskoelastischen Materialmodells dient ein Vergleich der ermittelten Spannungsdaten aus den Simulationen mit den experimentellen.

### Bewertung der Materialmodelle

Nach der selben Vorgehensweise wie bei den Dehnungswerten, werden ebenso die Spannungswerte der Simulationen mit dem Drucker-Prager-Modell sowie mit dem viskoelastischen Modell näher betrachtet. Aus der Abweichung der Spannungsdaten aus den Simula-

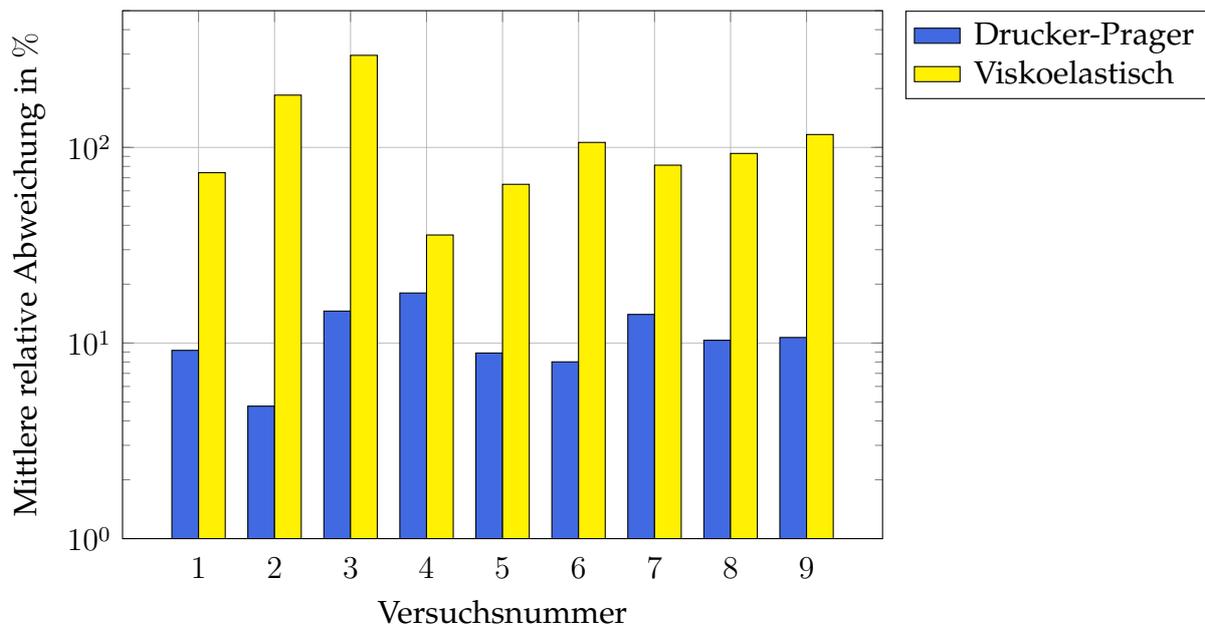


Abbildung 6.23: Mittlere relative Spannungsabweichung der Simulationen mit Drucker-Prager-Modell bzw. viskoelastischem Modell von den Versuchsergebnissen

tionen von den Spannungen aus den Experimenten wird für jeden der neun Versuche die mittlere relative Abweichung berechnet.

Abbildung 6.23 stellt diese Abweichungen für die Simulationen der Zyklierungen mit dem Drucker-Prager-Modell (■) sowie mit dem viskoelastischen Modell (■) graphisch dar. Für die Bewertung der relativen Abweichungen sei auf die logarithmische Skalierung der Ordinate hingewiesen. Es fällt ins Auge, dass bei allen neun Versuchen die Spannungsberechnung bei der Modellierung mit dem viskoelastischen Modell deutlich mehr von den Versuchsergebnissen abweicht als mit dem Drucker-Prager-Modell. Während die mittleren relativen Abweichungen beim Drucker-Prager-Modell sich im Bereich von etwa 5 % bis 18 % bewegen, erreichen die Abweichungen beim viskoelastischen Modell zum Teil beinahe 300 %. Bestenfalls weichen die berechneten Spannungen, bei Versuchs-Nr. 4, um etwa 35 % ab. Mit der viskoelastischen Modellierung nehmen die Abweichungen innerhalb eines Temperaturniveaus mit steigender Maximalbelastung zu. Bei konstantem Belastungsniveau und Veränderung der Temperatur lässt sich ein solcher Trend nicht beobachten. Bei den Abweichungen des Drucker-Prager-Modells ist keine Abhängigkeit von Temperatur oder Belastungshöhe feststellbar.

Damit schneidet gerade bei der Berechnung der Spannungen das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell deutlich besser ab, als das linear viskoelastische Materialmodell. Ein zusammenfassendes Urteil liefert die anschließende Diskussion der Ergebnisse der Materialmodellierung für die mechanische Zyklierung.

### 6.1.8 Diskussion der Ergebnisse aus der mechanischen Zyklierung

Zur Evaluation der zwei Materialmodelle, das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell und das linear viskoelastische Modell, wurden zunächst mechanische Zykliertests durchgeführt. Bei drei Temperatur- sowie drei Belastungsniveaus wurden HDPE-Proben mechanisch

be- und entlastet. Anhand der Verschiebungswerte wurden die Zyklierungen mittels FEM simuliert und für jedes Materialmodell ausgewertet.

Die Untersuchung der Dehnungsdaten anhand der gemittelten relativen Abweichung der Simulationsergebnisse von den Versuchsergebnissen zeigt Schwächen des viskoelastischen Modells auf, wie in Abbildung 6.21 zu sehen ist. Vor allem aber die Spannungswerte weichen für die viskoelastischen Simulationen deutlich von den experimentellen Spannungen ab, siehe Abbildung 6.23. Damit bestätigten sich die Aussagen aus den Unterkapiteln 6.1.3 bis 6.1.5, dass das Drucker-Prager-Modell geeigneter ist, das Materialverhalten unter mechanischer Zyklierung abzubilden. Das gilt für das untersuchte HDPE im Rahmen von gegebener Temperatur, Belastungshöhe und -geschwindigkeit.

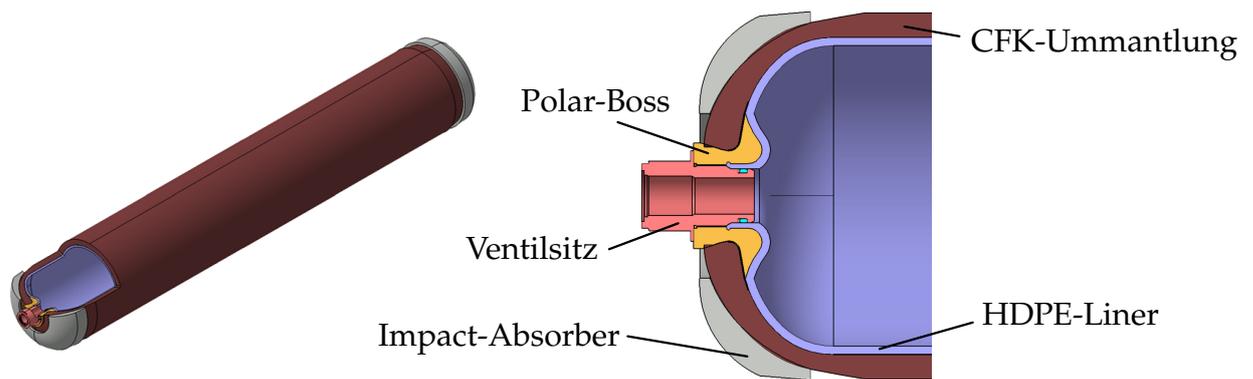
Anhand der molekularen Struktur des HDPE, wie sie in Kapitel 2 beschrieben ist, kann das gezeigte Materialverhalten geklärt werden. Das HDPE, als Vertreter der teilkristallinen Thermoplaste, besitzt sowohl amorphe als auch kristalline Strukturen. Die Bindungskräfte zwischen den Polymerketten sind in den amorphen Bereichen deutlich geringer als in den kristallinen. Unter Belastung brechen zunächst die amorphen Strukturen auf, gefolgt von den kristallinen. Diese gleiten dabei ab oder orientieren sich um. Makroskopisch äußern sich diese Effekte in einem Kriechen des Werkstoffes. Bei Entlastung bilden sich die Verformungen nicht komplett zurück, wodurch eine plastische Dehnung bleibt. Bei erneuter Belastung reicht eine geringere Spannung aus, um das vorherige Verformungsniveau zu erreichen. Teile der Lamellenstruktur sind bereits umorientiert oder abgeglitten. Eine Erhöhung der thermischen Energie im Material steigert diese Effekte. Aufgezeigt werden diese Auswirkungen auf das mechanische Materialverhalten in den durchgeführten Zyklertests.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass bei dieser Untersuchung eine Sache nicht eindeutig geklärt werden konnte. Mit fortschreitender Zyklierung steigen die Werte der verbleibenden Dehnung an. Ob es sich dabei um eine Kriech- oder eine Plastifizierungsneigung im Polymer handelt, oder aber um eine Kombination der beiden Phänomene konnte mit dieser Versuchsreihe nicht festgestellt werden. Eine belastungsfreie Auslagerung der Probekörper bei der Versuchstemperatur unmittelbar nach der mechanischen Zyklierung könnte Ausschluss darüber geben, ob es sich bei den auftretenden Dehnungen um bleibende Verformungen handelt.

## 6.2 Anwendung bei Komponenten eines Wasserstoffhochdrucktanks für den automobilen Einsatz

Folgendes Kapitel untersucht die strukturelle Integrität eines Liners aus Polyethylen hoher Dichte (HDPE) unter variablen thermischen und mechanischen Lasten. In Abschnitt 6.1 hat sich das Drucker-Prager-Materialmodell als geeignet erwiesen, das temperaturabhängige und anisotrope Materialverhalten über einen hohen Lastbereich abzubilden. Somit wird es hier für die Berechnung verschiedener Lastfälle herangezogen.

Abbildung 6.24 zeigt den Aufbau des in Abschnitt 1.1 vorgestellten Typ IV-CGH<sub>2</sub>-Tank. Der Teilquerschnitt des Tanks stellt die verbauten Komponenten inklusive HDPE-Liner dar. Zum einen dient der Liner als Permeationsbarriere gegen das Austreten des Wasserstoffs, zum anderen besteht bei HDPE keine Gefahr der sog. Wasserstoffversprödung. Außerdem fungiert er als Wickelkern für die CFK-Ummantlung, die bei relativ geringem Gewicht

Abbildung 6.24: Aufbau des Typ IV-CGH<sub>2</sub>-Tanks © BMW Group

die Lasten aufnimmt, die durch den Innendruck auftreten. Mithilfe eines Finite Elemente Modells des Wasserstoffdrucktanks werden verschiedene Lastfälle simuliert und anhand von auftretenden Spannungen und Dehnungen evaluiert.

### 6.2.1 Beschreibung des Finite Elemente Modells des CGH<sub>2</sub>-Tanks

Für die numerische Anwendung des in Abschnitt 5.5 definierten Drucker-Prager-Modells wurde mit dem kommerziellen Finite Elemente Tool Abaqus ein axialsymmetrisches Modell des Hochdrucktanks erstellt. Die Geometrie des Modells samt seinen Komponenten ist in Abbildung 6.25 links dargestellt. Auf der rechten Seite der Abbildung finden sich Detailausschnitte des „oberen“ sowie des „unteren“ Teils des Tanks. In den Ausschnitten ebenfalls abgebildet ist das Finite Elemente Netz der einzelnen Komponenten.

Durch die axiale Symmetrie besitzt das Finite Elemente Gesamtmodell etwa 82 000 CAX4R und CAX3 Elemente, von denen etwa 20 000 Elemente dem HDPE-Liner zugeordnet sind. Insgesamt hat das Modell etwa 208 000 Freiheitsgrade. Die Vernetzung, der in Abbildung 6.25 rechts dargestellten Gebiete, ist so gewählt, dass Bereiche, in denen große Gradienten zu erwarten sind oder eine unregelmäßige Struktur vorliegt oder in denen die Ergebnisse genauer untersucht werden sollen, feiner vernetzt sind als die übrigen Bereiche. Im besonderen Fokus der Festigkeitsanalyse steht der HDPE-Liner. Die höheren Spannungsgradienten im Liner treten außerhalb des länglichen, axialen Bereichs auf. Diese Teilbereiche in den Domen des Tanks sind daher deutlich feiner vernetzt als der axiale Bereich. Somit ist auch bei der Wahl der Elemente mit linearer Ansatzfunktion eine hinreichend genaue Abbildung der Spannungen gewährleistet.

Die Randbedingungen im Modell sind wie folgt definiert: Drucklasten werden als Neumann Randbedingungen senkrecht auf die Oberfläche des Liners aufgebracht. Eine Dirichlet Randbedingung an der Unterseite des Blindbosses behindert jeglichen translatorischen oder rotatorischen Freiheitsgrad. Die Schnittstellen zwischen benachbarten Komponenten sind als Kontaktflächen modelliert. Beispielsweise für die Kontaktfläche zwischen Liner und CFK-Ummantlung wird ein für Kunststoff-auf-Kunststoff, in diesem Fall „Polyethylen-auf-Epoxidharz“, typischer Reibungskoeffizient von  $\mu_R = 0,3$  [67] eingesetzt.

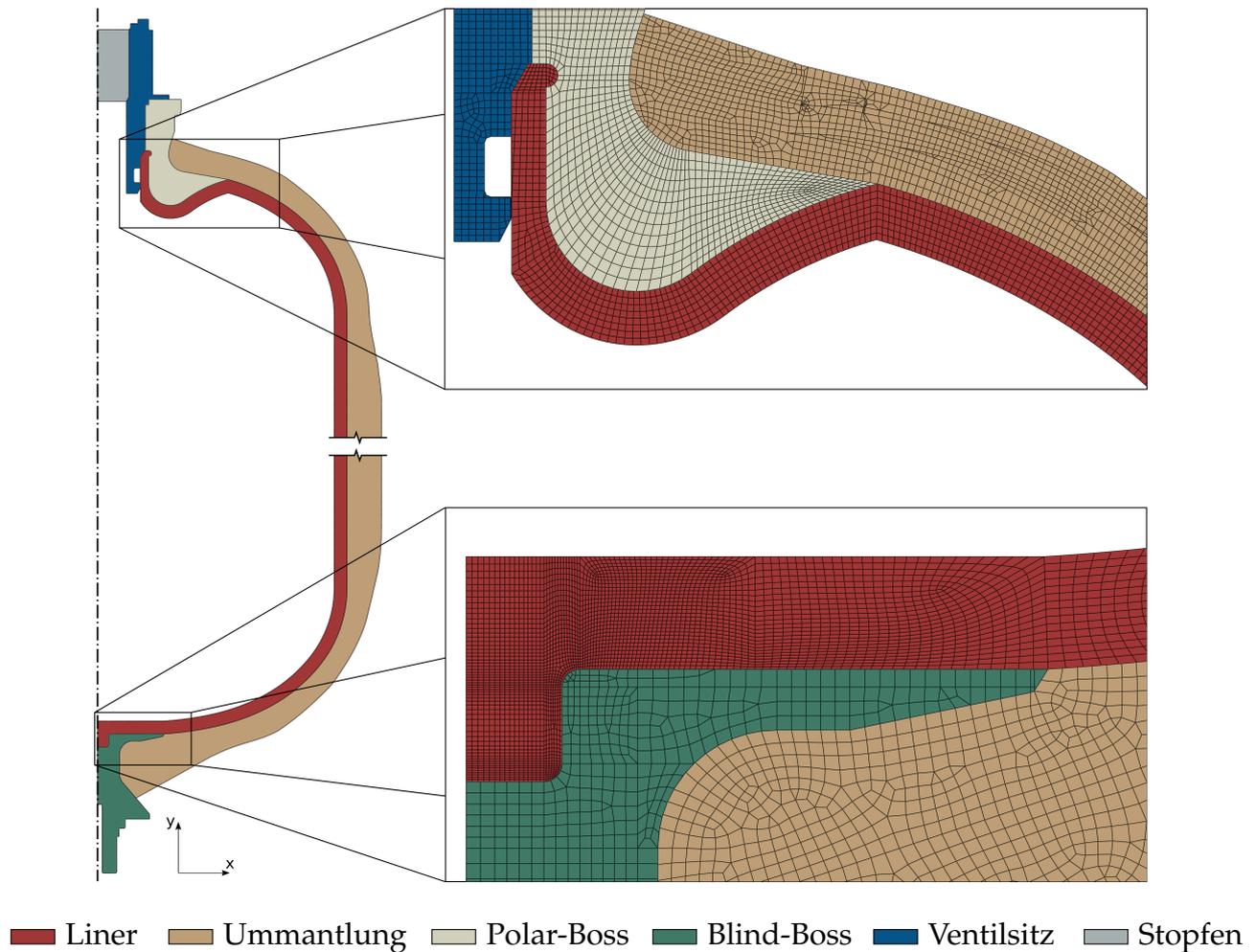


Abbildung 6.25: Geometrisches Modell des Hochdrucktanks (links) sowie kritische Bereiche im Detail mit zugehörigem Finite Elemente Netz (rechts)

## 6.2.2 Definition der Lastfälle

Für den Tank werden verschiedene Lastfälle untersucht. Die mechanische Maximalbelastung tritt unter Vollbetankung bei  $\Delta p = 700 \text{ bar} = 70 \text{ N/mm}^2$  im Temperaturbereich zwischen  $-40 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $80 \text{ }^\circ\text{C}$  auf. Dabei haben beide Extremtemperaturen ihre Besonderheiten. Zwar besitzt das HDPE, ebenso wie viele andere Kunststoffe, höhere Festigkeiten bei tiefen Temperaturen, aber auch eine höhere Materialsteifigkeit. Somit erzeugen Verformungen höhere Spannungen im Material als bei Raumtemperatur, wie in Unterabschnitt 4.3.1 untersucht wurde. Zudem spielt der hohe Wärmedehnungskoeffizient des Polyethylen bei tiefen Temperaturen eine entscheidende Rolle. Die Abkühlung würde ein Schrumpfen des Liners hervorrufen, jedoch behindert der Innendruck, in manchen Bereichen auch die CFK-Ummantlung, diese Kontraktion. Die Zugspannungen im Liner können somit höhere Werte erreichen. Bei erhöhter Temperatur dagegen sinkt die Festigkeit des Polymers deutlich ab. Dafür sind im Wesentlichen höhere Dehnungen ertragbar. Die niedrigeren Steifigkeiten verursachen darüber hinaus geringere Zugspannungen. Trotz alledem ist der Lastfall mit erhöhter Temperatur kritisch einzustufen und wird, genauso wie der Lastfall bei tiefer Temperatur, näher untersucht.

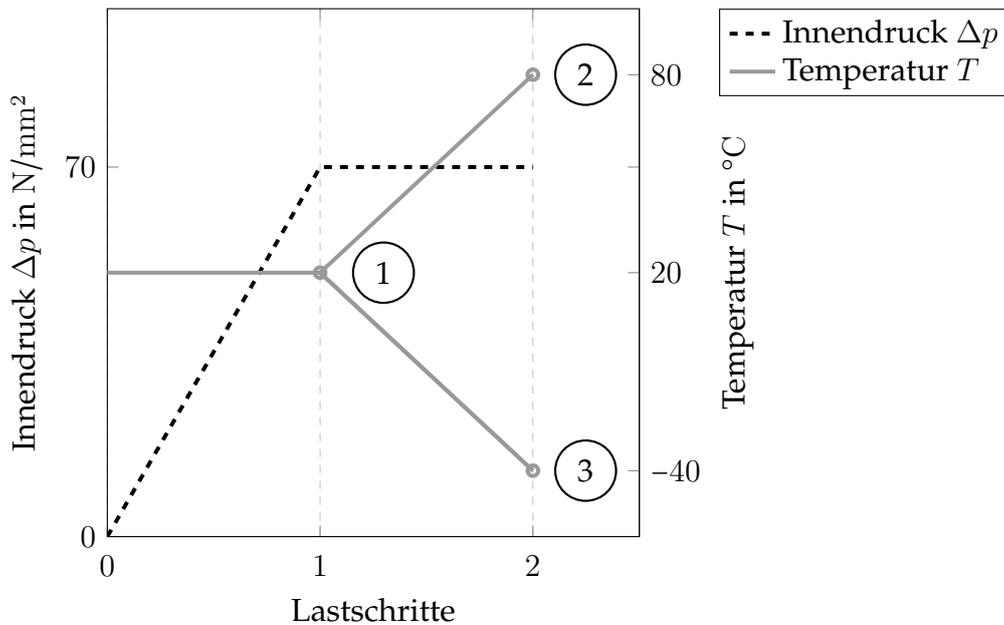


Abbildung 6.26: Drei Lastfälle für den Wasserstoffhochdrucktank CGH<sub>2</sub> mit Variation der Druck- und Temperaturlasten

Die Temperatur- und Drucklasten für die drei Lastfälle sind in Abbildung 6.26 dargestellt. Die FEM-Simulationen starten alle bei Raumtemperatur  $T = 20\text{ °C}$ . Um die Berechnung nicht-linearer Verformungen möglichst realitätsnah zu halten, wird die Last des Innendrucks  $\Delta p$  iterativ von 0 auf  $70\text{ N/mm}^2$  aufgebracht. Der erste Lastfall ist dort erreicht. Für Lastfall 2 wird die Temperatur schrittweise auf  $T = 80\text{ °C}$  gesteigert, für Lastfall 3 auf  $T = -40\text{ °C}$  gesenkt. Bei der Analyse der drei Lastfälle werden die maximalen Hauptspannungen (englisch: *max. principal stress*) in Hauptspannungsrichtung sowie die maximalen Hauptdehnungen (englisch: *max. principal strain*) untersucht. In allen Fällen können ausschließlich die Dombereiche, siehe vergrößerte Ausschnitte in Abbildung 6.25, als kritisch für den Liner identifiziert werden. Im länglichen zylindrischen Bereich des Liners werden keine Spannungs- oder Dehnungsspitzen erreicht.

### 6.2.3 Ergebnisse der Lastberechnungen und Diskussion

Der folgende Abschnitt behandelt die Simulations-Ergebnisse der Lastfälle 1, 2 und 3 für den Liner. Abbildung 6.27 zeigt die maximalen Hauptspannungen im Liner im Bereich des Blind-Boss für den Lastfall 1. Die Spannungen bewegen sich im Bereich zwischen minimal etwa  $-60\text{ MPa}$  und maximal etwa  $-20\text{ MPa}$ . Im gesamten Liner herrschen Druckspannungen vor. Die negativen Spannungen, bei gleichzeitig auftretenden positiven Dehnungen entlang des Umfangs im Liner, lassen auf einen beträchtlichen hydrostatischen Spannungsanteil schließen. Nach Pugh u. a. [95] hat dieser Anteil, wie in Unterabschnitt 3.2.3 beschrieben, einen begrenzten Einfluss auf das Versagen des Werkstoffes. Bei erhöhtem hydrostatischem Druck steigt die Festigkeit von HDPE in geringem Maße. Von einem Druckversagen des HDPE-Liners aufgrund von den Belastungen aus Lastfall 1 kann hier nicht ausgegangen werden. Eine Rissinitiation durch die auftretenden positiven Dehnungen, die bis maximal etwa 14 % reichen, kann ebenso ausgeschlossen werden. Weltschew [118] untersuchte unter

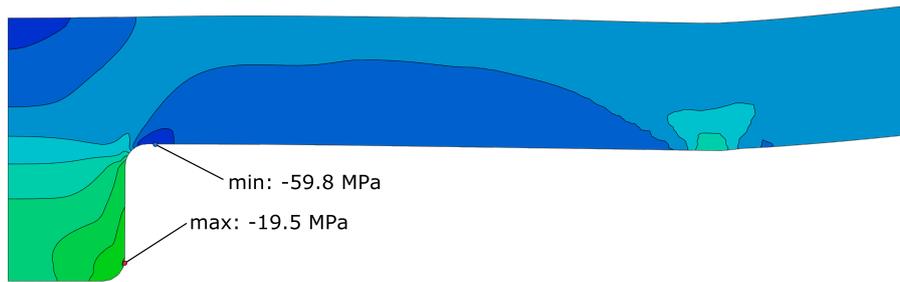


Abbildung 6.27: Max. principal stress, Lastfall 1,  $T = 20\text{ °C}$

anderem die Bruchdehnung  $\varepsilon_B$  von HDPE bei Raumtemperatur. In den zahlreichen Versuchen erreichte die Versagensdehnung Werte zwischen etwa  $450\% < \varepsilon_B < 650\%$ .

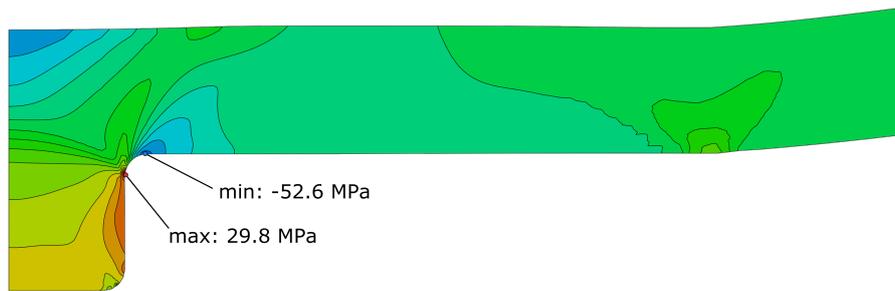
Wird in der Simulation die Temperatur auf  $T = 80\text{ °C}$  erhöht, während der Überdruck konstant bleibt, wird Lastfall 2 erreicht. Die Spannungsextrema im Liner werden auch für die Lastfälle 2 und 3 ausschließlich im Bereich des Blind-Boss erreicht. So zeigt Abbildung 6.28 die maximalen Hauptspannungen im Liner unter 700 bar Druck und einer Temperatur von  $80\text{ °C}$ . Die Spannungsverteilung variiert nur schwach im Vergleich zum Lastfall 1. Die Druckspannungen bewegen sich zwischen minimal etwa  $-64\text{ MPa}$  und maximal etwa  $-33\text{ MPa}$ . Auch hier werden, wie im vorherigen Absatz beschrieben, die Drucklasten mit einem großen hydrostatischen Spannungsanteil kein Versagen hervorrufen.

Wird anstelle der der Aufwärmung das Tankmodell von Raumtemperatur auf  $-40\text{ °C}$  abgekühlt, wird Lastfall 3 erreicht. Im Vergleich zu den Lastfällen 1 und 2 unterscheidet sich die Spannungsverteilung deutlich, wie in Abbildung 6.29 zu sehen ist. Mit Spannungswerten von etwa  $-53\text{ MPa}$  und etwa  $30\text{ MPa}$ , liegen die beiden „Hotspots“ nahe dem kleinen Radius des Pins, der den Liner im Blind-Boss fixiert. Wie bei den anderen Lastfällen auch, befinden sich die Hauptspannungsextrema im Bereich der Kontaktfläche zum Blind-Boss. Hier, bei  $T = -40\text{ °C}$ , werden jedoch Zugspannungen erreicht, die gerade bei einer zyklischen Belastung zu einer Rissinitiierung bzw. im weiteren Verlauf zu einem Zugversagen führen können. Jedoch stellt für die quasistatische Auslegung diese Höhe der Zugspannungen kein Risiko dar. Die Auswertung der Zugversuche in Unterabschnitt 4.3.1 ergab deutlich höhere ertragbare Spannungswerte unter Zugbelastung.

Betrachtet man die Position der Spannungsextrema in Abbildung 6.29, kann es sich durchaus um einen kritischen Lastfall für das Bauteil handeln. Die Abkühlung auf  $-40\text{ °C}$  hat



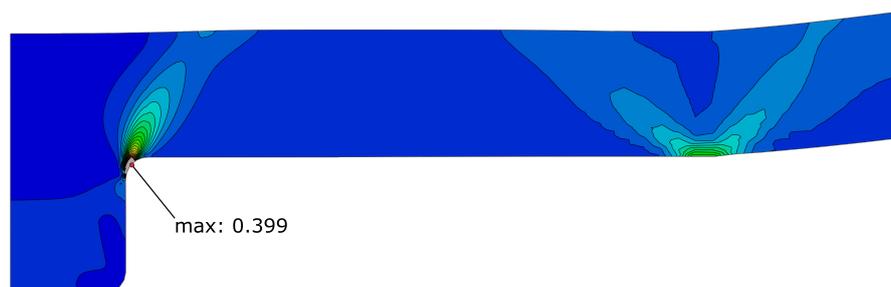
Abbildung 6.28: Max. principal stress, Lastfall 2,  $T = 80\text{ °C}$

Abbildung 6.29: Max. principal stress, Lastfall 3,  $T = -40\text{ °C}$ 

hauptsächlich zwei Auswirkungen auf die Verformung bzw. auf die Spannungsverteilung im Liner. Wie bereits erwähnt, erhöhen sich Materialfestigkeit und Steifigkeit beträchtlich, wie in Abbildung 4.8 dargestellt. Der hohe temperaturabhängige Wärmedehnungskoeffizient des HDPE führt zu einer Kontraktion des Liners. Der Innendruck steht dieser Verformung entgegen und wird letztendlich durch die CFK-Ummantlung geometrisch limitiert. Jegliche Relativbewegung des Pins am Blind-Boss wird dadurch konstruktionsbedingt behindert. Dem Pin wird dadurch eine Scherspannung aufgezwungen, die zu dem hohen Spannungsgradienten in dessen Radius führt.

Um die Plastifizierung des Materials beurteilen zu können, sind in Abbildung 6.30 die maximalen plastischen Hauptdehnungen aufgezeigt. In der Spitze wird ein maximaler Dehnungswert von etwa 0,40 im Radius des Pins erreicht. Bei tiefen Temperaturen, wie hier bei  $-40\text{ °C}$ , können solche Dehnungen kritisch für die Integrität des Bauteils sein. Dem widersprechen Merah u. a. [79]. Sie zeigten experimentell, dass HDPE bei solch tiefen Temperaturen und bei gemäßigten Dehnraten über 100 % nominelle Längsdehnung ertragen kann. Für den Fall, dass eine Abscherung des Pins erfolgt, sollte die Dichtigkeit und damit die Funktionalität des Liners noch gegeben sein.

Vergleicht man die erreichten Dehnungsniveaus der Simulationsergebnisse mit denen der Versuchsergebnisse, können weitere Schlüsse gezogen werden. Die Parametrisierung des Drucker-Prager-Modells basiert auf den Auswertungen der durchgeführten Versuche, wie in Abschnitt 5.5 beschrieben. Jedoch erreichen die Berechnungen am Tankmodell unter anderem Dehnungen, die außerhalb der experimentell bestimmten Dehnungsintervalle liegen. So wird das Materialverhalten außerhalb dieser Bereiche durch Extrapolation gewonnen. Die durchgeführten Extrapolationen des Materialverhaltens in Unterabschnitt 5.5.8 wiesen logisch nachvollziehbare Ergebnisse auf. Daher werden die erreichten Dehnungen von etwa

Abbildung 6.30: Max. principal plastic strain, Lastfall 3,  $T = -40\text{ °C}$

40 % im Rahmen von experimentellen und numerischen Ungenauigkeiten als qualitativ in Ordnung erachtet. Bezüglich der strukturellen Integrität haben Analysen an HDPE-Linern [8] ergeben, dass auch von den erreichten Dehnungswerten keinerlei Versagen zu erwarten ist.

Mithilfe des Drucker-Prager-Materialmodells wurden für die drei vorliegenden Lastfälle auftretende Spannungen und Dehnungen quantifiziert. Auf der Basis der Spannungswerte und den Ergebnissen der Dauerschwingversuche an HDPE aus Unterabschnitt 4.5.2 wird eine Mindestlebensdauer für den Liner des CGH<sub>2</sub>-Tanks berechnet. Da für die Lastfälle 1 und 2 ausschließlich negative Druckspannungen im Liner auftreten, lässt sich für diese Belastungen keine Lebensdauer nach Gleichung 4.2 errechnen. Lastfall 3 stellte sich als der kritischste heraus und wird somit für die konservative Berechnung der Mindestlebensdauer herangezogen. Für den Innendruck  $\Delta p = 70$  MPa bei Temperatur  $T = -40$  °C sind in Tabelle 4.5 die Parameter der Wöhlerlinie aufgelistet. Mit der Lage  $\lg C = 58,99$  und der Steigung  $k = 35,34$  der Geraden und der berechneten Amplitudenspannung  $\sigma_a = 29,8$  MPa ergeben sich die ertragbaren Lastzyklen zu

$$n = 10^{58,99} \cdot 29,8^{-35,34} = 10^{6,89} . \quad (6.1)$$

Selbst wenn bei jedem Betankungsvorgang der kritische Lastfall 3 erreicht wird, entspricht diese Mindestlebensdauer in etwa 7,8 Mio. Tankzyklen. Darüber hinaus ist, wie bereits erwähnt, der Pin des Liners am Blind-Boss im Betrieb keine funktionstragende Komponente. Ein Abscheren des Pins sollte zu keinem Dichtigkeitsproblem des Tanks führen.

# 7

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Dissertation wird das thermo-mechanische Materialverhalten von Polyethylen hoher Dichte modelliert und untersucht. Neben dem temperaturabhängigen Wärmeausdehnungsverhalten werden kalorische Größen, wie die Glasübergangstemperatur sowie die Schmelztemperatur von HDPE bestimmt. Eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen zeigt nicht nur, dass das HDPE eine für Kunststoffe typische Zug-Druck-Asymmetrie besitzt, sondern auch, dass die Auswirkung der Anisotropie mit steigender Temperatur zunimmt. Gerade im Hinblick auf kryogene Anwendungen wird das nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten über einen weiten Temperaturbereich bis hin zu Flüssig-Helium-Bedingungen bei  $-269\text{ °C}$  erforscht. Dabei steigen Materialsteifigkeit und -festigkeit deutlich an, während die Versprödung zu einem Herabsetzen der Bruchdehnung führt. Das viskoelastische Kriechverhalten wird durch eine Reihe von Zeitstandzugversuchen bei verschiedenen Temperaturniveaus ermittelt und ausgewertet. Anhand von Dauerschwingversuchen wird das Betriebsfestigkeitsverhalten von HDPE analysiert und mit temperaturabhängigen Wöhlerlinien quantifiziert.

Am Beispiel der thermo-mechanischen Auslegung von Komponenten eines Wasserstoffhochdrucktanks wird die große Bedeutung der möglichst genauen Kenntnis von zeit-, belastungs- und temperaturabhängigen kontinuumsmechanischen Beziehungen aufgezeigt. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Werkstoffes wird mithilfe von verschiedenen Materialmodellen in Finite Elemente Simulationen modelliert und untersucht. Neben elastisch-plastischen, nichtlinear hyperelastischen und viskoelastischen Materialgesetzen, kommen auch Kombinationen sowie Erweiterungen davon zum Einsatz. So werden unter anderem hyperelastisch-viskoelastische Modelle zur Abbildung nichtlinearer Viskoelastizität oder das Drucker-Prager-Modell zur Abbildung der temperaturabhängigen Anisotropie untersucht und evaluiert.

Modellparameter von allen Materialmodellen werden aus den zahlreichen Versuchsergebnissen gewonnen. Sensitivitätsanalysen mittels Variation der Parameter quantifizieren die Abhängigkeiten der Modellformulierungen von unterschiedlichen Belastungen und Temperaturen. Um das Materialverhalten über einen großen Temperaturbereich möglichst genau abbilden zu können werden die Parameter des viskoelastischen sowie des Drucker-Prager-Modells numerisch optimiert. Eine Evaluation der Modellgüte qualifiziert beide Modelle, um das thermo-mechanische Kurz- und Langzeitverhalten von HDPE darzustellen.

Mechanische Zyklerversuche bei verschiedenen Temperatur- und Belastungsniveaus werden am Polyethylen hoher Dichte durchgeführt und ausgewertet. Finite Elemente Berechnungen der Zyklisierung werden mit dem Drucker-Prager-Modell sowie mit dem linearen viskoelastischen Modell simuliert. Das Postprocessing wird den experimentellen Ergebnissen vergleichend gegenübergestellt. Das elastisch-plastische Drucker-Prager-Modell vermag die resultierenden Dehnungen, vor allem aber die im Kunststoff auftretenden Spannungen

genauer abzubilden, als das viskoelastische Materialmodell. Es muss erwähnt werden, dass durch die Zyklertests nicht zweifelsfrei geklärt werden kann, ob die dort auftretenden bleibenden Dehnungen plastischer oder viskoelastischer Natur sind oder aber eine Kombination beider Phänomene.

Für die weitere thermo-mechanische Untersuchung bzw. Auslegung eines HDPE Liners für einen Wasserstoffhochdrucktank das Drucker-Prager-Modell verwendet. Lastenrechnungen mittels Finite Elemente Methode werden bei unterschiedlichen Temperaturniveaus am vollbetankten Hochdrucktank durchgeführt. Für den Polymer-Liner stellt sich der Lastfall bei einem Innendruck von  $\Delta p = 700$  bar und einer tiefen Temperatur von  $T = -40$  °C als der kritischste heraus. Eine abschließende Lebensdauerberechnung ergibt im Bereich bis über  $10^6$  Betankungszyklen einen versagensfreien Betrieb.

Ein Ausblick in zukünftig zu erforschende Themen offenbart mehrere denkbare Vorstöße, gerade im Hinblick auf die Anwendung von thermoplastischen Kunststoffen in kryogenen oder aber in ungekühlten Hochdrucktanks. Der Kunststoff-Liner im Typ IV-Tank dient als Permeationsbarriere sowie als Wickelkern für den Filament-Winding-Prozess. Im späteren Einsatz erfährt der Liner zyklische Belastungen sowohl mechanischer als auch thermischer Natur. Während der Einfluss zyklischer mechanischer Lasten auf den Werkstoff HDPE nicht zuletzt in der vorliegenden Arbeit untersucht wurde, mangelt es der aktuellen Forschung an Arbeiten zum Einfluss thermischer Zyklierung auf das mechanische Verhalten von Thermoplasten wie Polyethylen, insbesondere wenn die untere Temperaturgrenze im Bereich sehr tiefer, kryogener Temperaturen liegt.

Des Weiteren befindet sich der Kunststoff im Liner in einer gesättigten Wasserstoffumgebung. Zwar tritt mit dem Wasserstoff im Material keine versprödende Wirkung ein, wie sie bei Stahllegierungen auftritt, dennoch kann der Wasserstoff Auswirkungen auf das thermo-mechanische Verhalten des Polyethylen haben. Diese wurden, soweit bekannt, noch nicht wissenschaftlich untersucht.

Die Anwendung von HDPE als Matrixwerkstoff in einem faserverstärkten, aber linerlosen Tank wirft physikalische bzw. fertigungsspezifische Fragen auf. Das Diffusionsverhalten von Wasserstoff durch monolithisches HDPE ist weitgehend geklärt. Ein hoher Anteil von Carbonfasern im Matrixwerkstoff dürfte beträchtliche Auswirkungen auf die Permeation von Wasserstoff haben. Neben dieser Fragestellung müsste geklärt werden, inwieweit sich die Viskosität von Polyethylen herabsetzen lässt, um es in einem CFK-Fertigungsprozess einsetzen zu können. Die angesprochenen, unterschiedlichen Herausforderungen werden nicht zuletzt anhand von Versuchs- und Simulationsreihen auf ihre Machbarkeit und Anwendbarkeit hin untersucht werden müssen.

# 8

## Literaturverzeichnis

- [1] ABDUL-HAMEED, H. ; MESSEGER, T. ; ZAÏRI, F. ; NAÏT-ABDELAZIZ, M.: Two-phase hyperelastic–viscoplastic constitutive modelling of semi-crystalline polymers: Application to polyethylene with wide range of crystallinity. In: *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 37 (2014), S. 323–332
- [2] ALEJANO, Leandro R. ; BOBET, Antonio: Drucker–Prager Criterion. In: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45 (2012), S. 995–999
- [3] ARGON, Ali S.: Physical basis of distortional and dilational plastic flow in glassy polymers. In: *Journal of Macromolecular Science, Part B* 8 (1973), S. 573–596
- [4] ARRUDA, Ellen M. ; BOYCE, Mary C.: A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials. In: *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 41 (1993), S. 389–412
- [5] ASHBY, Michael F. ; JONES, David Rayner H.: *Engineering Materials 2: An Introduction to Microstructures, Processing and Design*. 3rd edition. Butterworth-Heinemann, 2006. – ISBN 978-0-7506-6381-6
- [6] AYOUB, G. ; ZAÏRI, F. ; NAÏT-ABDELAZIZ, M. ; GLOAGUEN, J. M.: Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: Application to a high density polyethylene. In: *International Journal of Plasticity* 26 (2010), S. 329–347
- [7] BARBOZA NETO, E. S. ; COELHO, L. A. F. ; FORTE, M. M. C. ; AMICO, S. C. ; FERREIRA, C. A.: Processing of a LLDPE/HDPE Pressure Vessel Liner by Rotomolding. In: *Materials Research* 17 (2014), Nr. 1, S. 236–241
- [8] BARTH, R. R. ; SIMMONS, K. L. ; SAN MARCHI, C.: Polymers for Hydrogen Infrastructure and Vehicle Fuel Systems: Applications, Properties, and Gap Analysis / Sandia National Laboratories. Oktober 2013. – Forschungsbericht. No. SAND2013-8904
- [9] BASQUIN, O.-H.: The Exponential Law of Endurance Test. In: *American Society for Testing and Materials* 10 (1910), S. 625–630
- [10] BATRA, R. C. ; GOPINATH, G. ; ZHENG, J. Q.: Material Parameters for Pressure-dependent Yielding of Unidirectional Fiber-reinforced Polymeric Composites. In: *Composites - Part B: Engineering* 43 (2012), S. 2594–2604
- [11] BAU, Manfred: *Untersuchungen zum nichtlinear viskoelastischen Verhalten von Kunststoffen unter variabler Last*, Institut für Werkstoffe und Verarbeitung, Technische Universität München, Dissertation, 2000

- [12] BECKERT, Frauke: *Werkstoffe im Bauwesen I - Kunststoffe*. Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart. 2000
- [13] BERGSTRÖM, J. S. ; KURTZ, S. M. ; RIMNAC, C. M. ; EDIDIN, A. A.: Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. In: *Biomaterials* 23 (2002), Nr. 11, S. 2329–2343
- [14] BERTRAM, Albrecht: *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer, 2005. – ISBN 978-3-540-24033-4
- [15] BETTEN, Josef: *Kontinuumsmechanik - Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. 2. Auflage. Springer, 2001. – ISBN 978-3-540-42043-9
- [16] BONTEN, Christian: *Kunststofftechnik: Einführung und Grundlagen*. Carl Hanser, 2014. – ISBN 978-3-446-44093-7
- [17] BOWER, David I.: *An Introduction to Polymer Physics*. Cambridge University Press, 2002. – ISBN 978-0521631372
- [18] BREITMAIER, Eberhard ; JUNG, Günther: *Organische Chemie: Grundlagen, Stoffklassen, Reaktionen, Konzepte, Molekülstruktur*. 5. Auflage. Thieme, 2005. – ISBN 3-13-541505-8
- [19] BRINSON, Hal F. ; BRINSON, L. C.: *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An introduction*. 2nd edition. Springer, 2015. – ISBN 978-1-4899-7484-6
- [20] CASTAGNET, Sylvie ; GRANDIDIER, Jean-Claude ; COMYN, Mathieu ; BENOÎT, Guillaume: Hydrogen influence on the tensile properties of mono and multi-layer polymers for gas distribution. In: *International Journal of Hydrogen Energy* 35 (2010), S. 7633–7640
- [21] CHRISTENSEN, Richard M.: *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. Academic Press, 1971. – ISBN 978-0-12-174252-2
- [22] COULOMB, Charles A.: Essai - Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Stratique, relatifs à l'Architecture. In: *Mémoires de Mathématique et de Physique, Présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans* 7 (1773), S. 343–382
- [23] CROSS, A. ; HAWARD, Robert N.: Orientation hardening of PVC. In: *Polymer* 19 (1978), S. 677–682
- [24] DASSAULT SYSTÈMES: *Documentation: Analysis User's Guide - Abaqus 6.14*. 2015
- [25] DENBY, E. F.: A note on the interconversion of creep, relaxation and recovery. In: *Rheologica Acta* 14 (1975), Nr. 7, S. 591 – 593
- [26] DIN 50100: *Schwingfestigkeitsversuch - Durchführung und Auswertung von zyklischen Versuchen mit konstanter Lastamplitude für metallische Werkstoffproben und Bauteile*. Dezember 2016
- [27] DIN 50106: *Prüfung metallischer Werkstoffe - Druckversuch*. Dezember 1978
- [28] DIN EN ISO 527: *Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften*. Juni 2012
- [29] DIN EN ISO 604: *Kunststoffe - Bestimmung von Druckeigenschaften*. Dezember 2003
- [30] DIN EN ISO 899-1: *Kunststoffe - Bestimmung des Kriechverhaltens*. Oktober 2003

- [31] DOMININGHAUS, Hans ; ELSNER, Peter (Hrsg.) ; EYERER, Peter (Hrsg.) ; HIRTH, Thomas (Hrsg.): *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen*. 8. Ausgabe. Springer, 2012. – ISBN 978-3-642-16172-8
- [32] DONATO, Gustavo Henrique B. ; BIANCHI, Marcos: Pressure Dependent Yield Criteria Applied for Improving Design Practices and Integrity Assessments against Yielding of Engineering Polymers. In: *Journal of Materials Research and Technology* 1 (2012), S. 2–7
- [33] DRUCKER, Daniel C. ; PRAGER, William: Soil Mechanics and Plastic Analysis for Limit Design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), S. 157–165
- [34] DUSUNCELI, Necmi ; COLAK, Ozgen U.: High density polyethylene (HDPE): Experiments and modeling. In: *Mechanics of Time-Dependent Materials* 10 (2006), S. 331–345
- [35] EADS AIRBUS GMBH GERMANY: *Cryoplane - Liquid Hydrogen Fuelled Aircraft - System Analysis*. September 2003. – 5th Framework Program of the European Communities - Contract No: G4RD-CT-2000-00192 - Project No: GRD1-1999-10014
- [36] EHRENSTEIN, Gottfried W.: *Polymer Werkstoffe*. 3. Ausgabe. Carl Hanser, 2001. – ISBN 978-3-446-42283-4
- [37] ELLEUCH, R. ; TAKTAK, W.: Viscoelastic behavior of HDPE polymer using tensile and compressive loading. In: *Journal of Materials Engineering and Performance* 15 (2006), Nr. 1, S. 111–116
- [38] FARROKH, Babak ; KHAN, Akhtar S.: A strain rate dependent yield criterion for isotropic polymers: Low to high rates of loading. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 29 (2010), S. 274–282
- [39] FERRY, John D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*. 2nd edition. Wiley, 1970. – ISBN 0-471-25774-5
- [40] FRONTINI, Patricia M. ; RUEDA, Federico ; TORRES, Juan P.: Constitutive modeling and Computational Simulations of the external pressure induced buckling collapse of High Density Polyethylene (HDPE) liners. In: *13th International Conference on Fracture*, June 2013, S. 1–9
- [41] GHORBEL, Elhem: A viscoplastic constitutive model for polymeric materials. In: *International Journal of Plasticity* 24 (2008), S. 2032–2058
- [42] GOUGH, J. ; GREGORY, I. H. ; MUHR, A. H.: Determination of Constitutive Equations for Vulcanized Rubber. In: *Finite Element Analysis of Elastomers* (1999), S. 5–26
- [43] GRELLMANN, Wolfgang ; SEIDLER, Sabine: *Kunststoffprüfung*. 3. Auflage. Carl Hanser, 2015. – ISBN 978-3-446-44350-1
- [44] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik 4: Hydro-mechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 9. Auflage. Springer Vieweg, 2014. – ISBN 978-3-642-40999-8
- [45] G'SELL, C. ; JONAS, J. J.: Determination of the plastic behaviour of solid polymers at constant true strain rate. In: *Journal of Materials Science* 14 (1979), S. 583–591
- [46] GUTIERREZ-LEMINI, Danton (Hrsg.): *Engineering Viscoelasticity*. Springer, 2014. – ISBN 978-1-4614-8138-6

- [47] HABERLE, Till: *Thermomechanik werkstoffhybrider, faserverstärkter Schichtverbunde und Bauteile bei tiefen Temperaturen*, Lehrstuhl für Leichtbau, Technische Universität München, Dissertation, 2001
- [48] HACHOUR, K. ; ZAÏRI, Fahmi ; NAÏT-ABDELAZIZ, Moussa ; GLOAGUEN, Jean-Michel ; ABERKANE, M. ; LEFEBVRE, Jean-Marc: Experiments and modeling of high-crystalline polyethylene yielding under different stress states. In: *International Journal of Plasticity* 52 (2014), S. 1–18
- [49] HARTWIG, Gunther: *Polymer Properties at Room and Cryogenic Temperatures*. Springer US, 1994. – ISBN 978-0-306-44987-1
- [50] HAWARD, Robert N.: The application of a simplified model for the stress-strain curves of polymers. In: *Polymer* 28 (1987), S. 1485–1488
- [51] HÜCK, Manfred ; THRAINER, Lorenz ; SCHÜTZ, Walter: Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguß und Grauguß: synthetische Wöhlerlinien. In: *Bericht der Arbeitsgemeinschaft Betriebsfestigkeit* 11 (1981)
- [52] HELLERICH, Walter ; HARSCH, Günther ; BAUR, Erwin: *Werkstoff-Führer Kunststoffe: Eigenschaften, Prüfungen, Kennwerte*. 10. Auflage. Carl Hanser, 2010. – ISBN 978-3-446-42436-4
- [53] HILL, Rodney: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. In: *Proceedings Royal Society London* 193 (1948), Nr. 1033, S. 281–297
- [54] HOLZAPFEL, Gerhard A.: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley and Sons, 2000. – ISBN 978-0-471-82319-3
- [55] HORNBÖGEN, Erhard ; EGGELER, Gunther ; WERNER, Ewald: *Werkstoffe: Aufbau und Eigenschaften*. 9. Ausgabe. Springer, 2008. – ISBN 978-3-540-71857-4
- [56] HUTCHINSON, J. W. ; NEALE, K. W.: Neck propagation. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31 (1983), S. 405–426
- [57] JO, Nam-Ju ; TAKAHARA, Atsushi ; KAJIYAMA, Tisato: Analysis of Fatigue Behavior of High-Density Polyethylene Based on Nonlinear Viscoelastic Measurement under Cyclic Fatigue. In: *Polymer Journal* (1993), S. 721–729
- [58] JOHANNKNECHT, Raphaël: *The Physical Testing and Modelling of Hyperelastic Materials for Finite Element Analysis*. VDI, 1999. – ISBN 978-3-183-30220-9
- [59] JOHNSON, Gordon R. ; COOK, William H.: A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics* (1983), S. 541–547
- [60] JONES PARRY, E. ; TABOR, D.: Effect of hydrostatic pressure on the mechanical properties of polymers: A brief review of published data. In: *Journal of Materials Science* 8 (1973), S. 1510–1516
- [61] KESSLER, Seth S. ; MATUSZESKI, Thad ; MCMANUS, Hough L.: *Cryocycling and Mechanical Testing of CFRP for X-33 Liquid H2 Fuel Tank Structure*. Technology Laboratory for Advanced Composites, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 1998

- [62] KILIAN, Hanns-Georg: Equation of state of real networks. In: *Polymer* 22 (1981), S. 209–217
- [63] KOLTZENBURG, Sebastian ; MASKOS, Michael ; NUYKEN, Oskar: *Polymere: Synthese, Eigenschaften und Anwendungen*. 1. Ausgabe. Springer Spektrum, 2014. – ISBN 978-3-642-34772-6
- [64] KRISHNASWAMY, P. ; TUTTLE, M. E. ; EMERY, A. F. ; AHMAD, J.: Finite element modeling of the time-dependent behavior of nonlinear ductile polymers. In: *Polymer Engineering and Science* 32 (1992), S. 1086–1096
- [65] KRUMPHOLZ, Thorsten: *Das mechanische Verhalten thermoplastischer Kunststoffe unter Druckbeanspruchung im Hinblick auf eine beanspruchungsgerechte Dimensionierung von Kunststoffbauteilen*, Institut für Kunststoffverarbeitung, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 2005
- [66] KWON, H. J. ; JAR, P.-Y. B.: On the application of FEM to deformation of high-density polyethylene. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), S. 3521–3543
- [67] LICHARZ GMBH: *Werkstoffkennwerte - Technische Kunststoffe*. <https://www.licharz.de/de/service/downloads>. – Online, aufgerufen am 31.Mai 2018
- [68] LIN, L. ; ARGON, A. S.: Structure and Plastic Deformation of Polyethylene. In: *Journal of Materials Science* 29 (1994), January, S. 294–323. – DOI: 10.1007/BF01162485
- [69] LION, Alexander: Einführung in die lineare Viskosität. In: *Beiträge zur Materialtheorie* (2007), Nr. 4
- [70] LIPPMANN, Horst: *Mechanik des plastischen Fließens*. Springer, 1981. – ISBN 978-3-642-52210-9
- [71] LIU, Hongtao ; POLAK, Maria A. ; PENLIDIS, Alexander: A practical approach to modeling time-dependent nonlinear creep behavior of polyethylene for structural applications. In: *Polymer Engineering and Science* 48 (2008), S. 159–167
- [72] MAHL, Martin ; KLAPROTH, Tim ; BAIER, Horst: *Thermo-mechanische Untersuchungen von Hochleistungskunststoffen für kryogene Wasserstoffdrucktanks*. Symposium Material Innovativ. Februar 2016
- [73] MARLOW, Randy S.: A General First-Invariant Hyperelastic Constitutive Model. In: *Constitutive Models for Rubber III* (2003), S. 157–160
- [74] MARTIN, Andreas ; HINKELMANN, Karsten ; ESDERTS, Alfons: Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich - Teil I. In: *MP Materials Testing* 53 (2011), Nr. 9, S. 502–512
- [75] MARTIN, Andreas ; HINKELMANN, Karsten ; ESDERTS, Alfons: Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich - Teil II. In: *MP Materials Testing* 53 (2011), Nr. 9, S. 513–521
- [76] MAUCH, Heiko: Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder. In: *Forschungsvereinigung Antriebstechnik - Vorhaben 304 Forschungsheft 591* (1999)

- [77] MEARS, D. R. ; PAE, K. D. ; SAUER, J. A.: Effects of Hydrostatic Pressure on the Mechanical Behavior of Polyethylene and Polypropylene. In: *Journal of Applied Physics* 40 (1969), S. 4229–4237
- [78] MENGES, Georg ; HABERSTROH, Edmund ; MICHAELI, Walter ; SCHMACHTENBERG, Ernst: *Menges Werkstoffkunde Kunststoffe*. 6. Auflage. Carl Hanser, 2011. – ISBN 978-3-446-42762-4
- [79] MERAH, N. ; SAGHIR, F. ; KHAN, Z. ; BAZOUNE, A.: Effect of temperature on tensile properties of HDPE pipe material. In: *Plastics, Rubber and Composites* 35 (2006), Nr. 4, S. 226–230
- [80] MEYWERK, Martin: *CAE-Methoden in der Fahrzeugtechnik*. 1. Auflage. Springer, 2007. – ISBN 978-3-540-49866-7
- [81] MICHAELI, Walter: *Einführung in die Kunststoffverarbeitung*. 5. Auflage. Hanser, 2006. – ISBN 978-3446405806
- [82] MICHAELI, Walter: *Extrusionswerkzeuge für Kunststoffe und Kautschuk: Bauarten, Gestaltung und Berechnungsmöglichkeiten*. 3. Auflage. Hanser, 2009. – ISBN 978-3-446-42026-7
- [83] MÜLLER, Christian: *Zur statistischen Auswertung experimenteller Wöhlerlinien*, Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 2001
- [84] NATIONAL PHYSICAL LABORATORY: *Manual for the Calculation of Elastic-Plastic Materials Models Parameters*. 2007
- [85] NAUMANN, Tobias: *Beitrag zur Beschreibung des mechanischen Langzeitdeformationsverhaltens von thermoplastischen Kunststoffen*, Universität des Saarlandes, Dissertation, 2012
- [86] NGUYEN, Song Thanh T. ; CASTAGNET, Sylvie ; GRANDIDIER, Jean-Claude: Nonlinear viscoelastic contribution to the cyclic accommodation of high density polyethylene in tension: Experiments and modeling. In: *International Journal of Fatigue* 55 (1997), S. 166–177
- [87] NITTA, Koh-hei ; MAEDA, Hirohito: Creep behavior of high density polyethylene under a constant true stress. In: *Polymer Testing* 29 (2010), S. 60–65
- [88] OGDEN, Raymond W.: Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 326 (1972), Nr. 1567, S. 565–584
- [89] OGNEDAL, Anne S. ; CLAUSEN, Arild H. ; POLANCO-LORIA, Mario ; BENALLAL, Ahmed ; RAKA, Bumedijsen ; HOPPERSTAD, Odd S.: Experimental and numerical study on the behaviour of PVC and HDPE in biaxial tension. In: *Mechanics of Materials* 54 (2012), S. 18–31
- [90] PARK, S. W. ; KIM, Y. R.: Interconversion between Relaxation Modulus and Creep Compliance for Viscoelastic Solids. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 11 (1999), Nr. 1, S. 76–82

- [91] PARK, S. W. ; SCHAPERY, R. A.: Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I - a numerical method based on Prony series. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), Nr. 11, S. 1653–1675
- [92] PEACOCK, Andrew J.: *Plastics engineering*. Bd. 57: *Handbook of Polyethylene: Structures, Properties, and Applications*. New York : Marcel Dekker, 2000. – ISBN 0-8247-9546-6
- [93] POPELAR, C. F. ; POPELAR, C. H. ; KENNER, V. H.: Viscoelastic Material Characterization and Modeling for Polyethylene. In: *Polymer Engineering and Science* 30 (1990), Nr. 10, S. 577–586
- [94] PRACHUMCHON, Sompong: *A Study of HDPE in High Pressure of Hydrogen Gas - Measurement of Permeation Parameters and Fracture Criteria*, University of Nebraska-Lincoln, Dissertation, 2012
- [95] PUGH, H. Ll. D. ; CHANDLER, E. F. ; HOLLIDAY, L. ; MANN, J.: The Effect of Hydrostatic Pressure on the Tensile Properties of Plastics. In: *Polymer Engineering and Science* 11 (1971), Nr. 6, S. 464–473
- [96] RADAJ, Dieter ; VORMWALD, Michael: *Ermüdungsfestigkeit*. 3. Auflage. Springer, 2016. – ISBN 978-3-540-71458-3
- [97] RAGHAVA, Ram ; CADELL, Robert M. ; YEH, Gregory S. Y.: The Macroscopic Yield Behaviour of Polymers. In: *Journal of Material Science* 8 (1973), S. 225–232
- [98] RANGARAJAN, Shalini: *Long-Term Creep of Encased Polymer Liners*, College of Engineering and Mineral Resources, West Virginia University, Diplomarbeit, 2002
- [99] RANZ, Thomas: Elementare Materialmodelle der Linearen Viskoelastizität im Zeitbereich. In: *Beiträge zur Materialtheorie* (2007), Nr. 5
- [100] RÖSLER, Joachim ; HARDERS, Harald ; BÄKER, Martin: *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. 5. Auflage. Springer Vieweg, 2016. – ISBN 978-3-658-13794-6
- [101] SAECHTLING, Hansjürgen ; OBERBACH, Karl: *Kunststoff Taschenbuch*. 28. Ausgabe. Carl Hanser, 2001. – ISBN 3-446-21605-7
- [102] SALGADO, Rodrigo: *The Engineering of Foundations*. McGraw-Hill, 2008. – ISBN 978-0-07-250058-5
- [103] SANDER, Manuela: *Sicherheit und Betriebsfestigkeit von Maschinen und Anlagen - Konzepte und Methoden zur Lebensdauervorhersage*. Springer, 2008. – ISBN 978-3-540-77732-8
- [104] SCHICK, C.: Differential scanning calorimetry (DSC) of semicrystalline polymers. In: *Analytical and Bioanalytical Chemistry* 395 (2009), S. 1589–1611
- [105] SCHWARZ, Otto (Hrsg.) ; EBELING, Friedrich W. (Hrsg.): *Kunststoffkunde: Aufbau, Eigenschaften, Verarbeitung, Anwendungen der Thermoplaste, Duroplaste und Elastomere*. 9. Auflage. Vogel, 2007. – ISBN 978-3-8343-3105-2
- [106] SEDLÁČEK, Radan: *Finite Elemente in der Werkstoffmechanik*. Verlag Dr. Hut, 2009. – ISBN 978-3-868-53027-8
- [107] SEEGER, Andreas ; FREITAG, Detlef ; FREIDEL, Frank ; LUFT, Gerhard: Melting Point of Polymers under High Pressure: Part I: Influence of the Polymer Properties. In: *Thermochimica Acta* 424 (2004), S. 175–181

- [108] SELTZER, Rocio ; CISILINO, Adrian P. ; FRONTINI, Patricia M. ; MAI, Yiu-Wing: Determination of the Drucker-Prager Parameters of Polymers Exhibiting Pressure-sensitive Plastic Behaviour by Depth-sensing Indentation. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (2011), S. 471–478
- [109] SPITZIG, W. A. ; RICHMOND, O.: Effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of polyethylene and polycarbonate in tension and in compression. In: *Polymer Engineering and Science* 19 (1979), S. 1129–1139
- [110] STOLTEN, Detlef: *Hydrogen and Fuel Cells*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. – ISBN 978-3-527-32711-9
- [111] STOMMEL, Markus ; STOJEK, Marcus ; KORTE, Wolfgang: *FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen*. Carl Hanser, 2011. – ISBN 978-3-446-42124-0
- [112] TRELOAR, Leslie R. G.: *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford University Press, 1975. – ISBN 978-0-191-52330-4
- [113] TSIRULE, K. I. ; TYUNINA, E. L.: *High-Pressure Chemistry and Physics of Polymers*. Kap. Viscoelastic and deformational properties of polymers under high pressure, S. 59–115, CRC Press, 1994
- [114] VERMEER, P.A. ; DE BORST, R.: Non-Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock. In: *Heron* 29 (1984), Nr. 3
- [115] VORATH, B.-J.: Beitrag zur Ermittlung der dynamischen Festigkeit von Thermoplasten in Abhängigkeit vom Fertigungsverfahren. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 5 (1974), Nr. 8, S. 429–437
- [116] WALLEY, S. M. ; E., Field J.: Strain Rate Sensitivity of Polymers in Compression from Low to High Rates. In: *International Journal on the Dynamic Deformation of Materials and Applications* 1 (1994), S. 211–227
- [117] WARD, Ian M.: Review: The Yield Behaviour of Polymers. In: *Journal of Material Science* 6 (1971), S. 1397–1417
- [118] WELTSCHEV, Margit: *Vergleich der Materialkennwerte von Formstoffen aus Polyethylen hoher Dichte mit dem Baumsterverhalten von Gefahrgutverpackungen*, Bergische Universität Wuppertal, Dissertation, 2009
- [119] WILLIAMS, Malcolm L. ; LANDEL, Robert F. ; FERRY, John D.: The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids. In: *Journal of the American Chemical Society* 77 (1955), Nr. 14, S. 3701–3707
- [120] ZHANG, Chuntao ; MOORE, Ian D.: Nonlinear mechanical response of high density polyethylene. Part I: Experimental investigation and model evaluation. In: *Polymer Engineering and Science* 37 (1997), Nr. 2, S. 404–413
- [121] ZHANG, Chuntao ; MOORE, Ian D.: Nonlinear mechanical response of high density polyethylene. Part II: Uniaxial constitutive modeling. In: *Polymer Engineering and Science* 37 (1997), Nr. 2, S. 414–420
- [122] ZIENKIEWICZ, Olek ; TAYLOR, Robert ; ZHU, J.Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2013. – ISBN 978-1-85617-633-0