



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik

Beschleunigungsregelung von Servoantrieben basierend auf
Positionsmesswerten

Josef Wittmann

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog

Prüfer der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Ralph Kennel
2. Prof. Dr.-Ing. Rainer Hagl

Die Dissertation wurde am 25.09.2018 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 04.12.2018 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer Forschungs Kooperation zwischen Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Ralph Kennel der Technischen Universität München und Prof. Dr.-Ing. Rainer Hagl der Technischen Hochschule Rosenheim.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Ralph Kennel sei herzlich für die Betreuung der vorliegenden Arbeit und für die freundliche Aufnahme am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik gedankt.

Besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Rainer Hagl für die Betreuung der Arbeit während meiner vierjährigen Tätigkeit als Forschungsingenieur an der Hochschule Rosenheim. Das geschaffene Arbeitsumfeld, der Freiraum bei der Bearbeitung der Themenstellung und die zahlreichen Diskussionen haben entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei meinen langjährigen Kollegen Franz Stubenrauch für die zahlreichen Diskussionen zu grundlegenden Fragestellungen und der gemeinsamen Zeit für den Aufbau und die Inbetriebnahme der Prüfstände im Labor für mechatronische Systeme an der Hochschule Rosenheim.

Weiterer Dank gilt den ehemaligen Kollegen an der Hochschule Rosenheim Elisabeth Winterstein, Alexander Kiermayer, Julia Hölltaler und Johannes Hilverkus für das stets angenehme Arbeitsklima und der tatkräftigen Unterstützung bei organisatorischen und fachlichen Herausforderungen. Die Arbeiten der Studenten Tobias Müller, Stefan Birnbacher, Florian Oberlechner und Fabian Fembacher haben einen großen Beitrag geleistet um in kurzer Zeit die Knackpunkte der aufgebauten Prüfstände herauszuarbeiten, dafür ein großes Dankeschön!

Bei meiner Familie möchte ich mich für das Verständnis für die vielen Stunden vor dem Laptop bedanken. Die fortwährende Unterstützung und die schönen gemeinsamen Stunden haben mich beim Schreiben dieser Arbeit immer wieder motiviert. Meiner Frau und unseren beiden Kindern möchte ich diese Arbeit widmen.

Josef Wittmann

Schaurain im August 2018

Für Ann-Kathrin, Benjamin und Paul

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluss einer Beschleunigungsregelung auf das Regelverhalten von Servoantrieben untersucht. Auf einen Beschleunigungssensor wird verzichtet. Die Istbeschleunigung wird aus dem Positionsmesswert berechnet. Anhand eines verifizierten Modells für Positionsmessfehler wird der Einfluss der Positionsaufösung und der Messsignalqualität auf die berechnete Beschleunigung dargestellt. Basierend auf diesen Ergebnissen wird das Konzept einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung entwickelt und dessen Funktionalität nachgewiesen.

Abstract

In this work, the influence of acceleration control on the control behavior of servo drives is investigated. An acceleration sensor is not used. The actual acceleration is calculated from the position measuring value. Using a verified model for position measuring errors, the influence of the position resolution and the measuring signal quality on the calculated acceleration is shown. Based on these results, the concept of a combined current and acceleration control is developed and its functionality proven.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Stand der Technik	2
1.1.1	Messung der Relativ-Beschleunigung nach dem Ferraris-Prinzip	3
1.1.2	Beschleunigungsregelung mit Beschleunigungssensor	4
1.1.3	Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten	7
1.2	Abgrenzung und Ziele der Arbeit	9
1.3	Gliederung	9
2	Positionsmessgeräte in Servoantrieben	11
2.1	Erfassung von Positionsmesswerten	11
2.1.1	Messsignale	12
2.1.2	Auswerteelektronik	13
2.1.3	Berechnung des Positionsmesswertes	14
2.2	Genauigkeit von Positionsmessgeräten	16
2.2.1	Definition und Ursachen des Positionsmessfehlers	16
2.2.2	Korrektur systematischer Positionsmessfehler	16
2.3	Modell für Positionsmessfehler	19
2.3.1	Abweichungen der Messsignale von der idealen Sinusform	19
2.3.2	Quantisierung in der Auswerteelektronik	23
2.3.3	Langperiodischer Messfehler	28
2.4	Verifikation der Modelle für Positionsmessfehler	29
2.4.1	Referenz-Winkelmessgerät	29
2.4.2	Messungen und Ergebnisse	30
3	Spezifikation von Regelkreisen	39
3.1	Nyquist-Kriterium	42
3.2	Sensitivität	46
3.3	Robuste Regelung	51
3.4	Anforderungen	56
4	Regelung mechanisch steifer Antriebe	59
4.1	Steuerung des Leistungsflusses	60
4.2	Permanentmagneterregte Synchronmaschine	64
4.2.1	Raumzeigerdarstellung	64

4.2.2	Antriebsmodell in dq-Koordinaten	66
4.3	Elastische Kopplung im Antriebsstrang	72
4.3.1	Dämpfungseigenschaften eines Elastomerzahnkranzes	73
4.3.2	Modellunsicherheit	74
4.4	Digitale Regelung	78
4.4.1	Integration und Differentiation	78
4.4.2	PI-Regler	82
4.4.3	Tiefpassfilter	83
4.4.4	Korrekturglied zur Phasenhebung	83
4.5	Kaskadenregelung	84
4.5.1	Stromregelkreis	84
4.5.2	Drehzahl- und Positionsregelkreis	93
4.5.3	Stabilität des Positionsregelkreises	98
5	Methoden zur Berechnung der Beschleunigung	103
5.1	Numerische Verfahren zur Berechnung der 2.Ableitung	105
5.1.1	Approximation durch Filter mit endlicher Impulsantwort (FIR)	106
5.1.2	Approximation durch Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR)	110
5.1.3	Bewertung der Verfahren	112
5.2	Zustandsbeobachter	115
5.3	Differentiation mit nachgeschalteten Filter	122
5.4	Signal-zu-Rausch-Abstand	124
6	Beschleunigungsregelung	129
6.1	Konzepte einer Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten	130
6.1.1	PI-Regelung	130
6.1.2	Smith-Prädiktor	132
6.1.3	Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung	134
6.2	Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung	137
6.2.1	Frequenzgangsfunktionen der Strom- und Beschleunigungsregelschleifen	137
6.2.2	Parametrische Modellunsicherheit Δ	138
6.3	Positionsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung	141
6.3.1	Sensitivität	143
6.3.2	Robustheit	145
6.3.3	Auslegung	146
6.4	Gleichlaufschwankungen	150
6.4.1	Verstärkung der Positionsmessfehler	150
6.4.2	Einfluss der Signalqualität und der Anzahl an Signalperioden	154
7	Funktionsnachweis der unterlagerten Beschleunigungsregelung	159
7.1	Architektur des Prüfstands	159
7.2	Untersuchungen zum Führungsverhalten	162

7.2.1	Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung	162
7.2.2	Signal-zu-Rausch-Abstand	164
7.2.3	Positionsregelung mit Vorsteuerung der Sollbeschleunigung	166
7.3	Untersuchungen zum Lastverhalten	169
7.3.1	Sinusförmige Aufschaltung des Lastmoments	169
7.3.2	Sprungförmige Aufschaltung des Lastmoments	174
8	Abschlussbetrachtung	179
	Anhang	180
A	Herleitung der Unterteilungswinkelfehler aufgrund nichtidealer Messsignale	181
A.1	Grundabweichungen	181
A.1.1	Amplitudenfehler	182
A.1.2	Nullpunktabweichung	184
A.1.3	Phasenwinkelfehler	186
A.2	Signaloberwellen	189
A.2.1	Signaloberwelle 2. Ordnung	191
A.2.2	Signaloberwelle 3. Ordnung	192
A.2.3	Signaloberwelle 4. Ordnung	193
A.2.4	Signaloberwelle 5. Ordnung	194
B	Experimentelle Ermittlung der Frequenzgangsfunktionen	195
B.1	Diskrete Fourier-Transformation	195
B.2	Frequenzgangsfunktionen	196
C	Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung mit unterlagerter Beschleunigungsregelung	197
	Abbildungsverzeichnis	199
	Tabellenverzeichnis	203
	Symbolverzeichnis	207
	Literaturverzeichnis	211

1 Einführung

Servoantriebe werden in industriellen Anwendungen überwiegend in Produktionsmaschinen für präzise und dynamische Bewegungsabläufe der Maschinenachsen eingesetzt. Je nach Anforderung des Fertigungsprozesses erfolgt ein Betrieb des Servoantriebes in

- Positionsregelung,
- Geschwindigkeits- bzw. Drehzahlregelung oder
- Kraft- bzw. Drehmomentregelung.

Die dynamischen Eigenschaften mechanischer Übertragungselemente haben einen grundlegenden Einfluss auf das dynamische Verhalten eines Servoantriebs. Dabei wird z.B. in [41, S. 186ff.] zwischen *mechanisch steifen Antrieben* und *mechanisch elastischen Antrieben* unterschieden. Bei mechanisch steifen Antrieben, z.B. des Rundtisches mit Direktantrieb oder der Hauptspindel einer Werkzeugmaschine, ist das zu bewegende Lastmassenträgheitsmoment über eine hohe Steifigkeit mit dem Rotor des Antriebs verbunden. Die vom Motor ausgeführte Bewegung und die der angekoppelten Last ist dadurch in einem großen Frequenzbereich identisch. Hingegen wird bei mechanisch elastischen Antrieben, z.B. einer Vorschubachse mit Kugelgewindetrieb, die Steifigkeit der Anbindung durch das mechanische Übertragungselement herabgesetzt. In diesem Fall bilden Antrieb und Last ein schwingungsfähiges System, welches typischerweise als Ein- oder Mehrmassenschwinger modelliert wird.

Für die Positionsregelung von Servoantrieben wird größtenteils eine kaskadierte Regelungsstruktur bestehend aus einer Positionsregelung, Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung und Stromregelung verwendet. Seit der Einführung der digitalen Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung in Servoantrieben wird die Rückführgröße für diesen Regelkreis aus der gemessenen Position berechnet. Dadurch sind die Eigenschaften des Positionsmessgerätes nicht nur für die Qualität der Positionsregelung relevant, sondern auch für das Verhalten der Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung maßgebend. Die Positionsmessgeräte wurden hinsichtlich der Anforderungen im Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelkreis seit Einführung der digitalen Antriebsregelung kontinuierlich weiterentwickelt. [93, S. 302ff.]

Messgeräte für Servoantriebe in der Industrieautomation zur Bestimmung der Linear- oder Winkelposition basieren größtenteils auf optoelektronischen, induktiven und magnetischen Messprinzipien. Allen Messprinzipien gemeinsam ist, dass sie sinusförmige Messsignale erzeugen die anschließend elektronisch weiterverarbeitet werden [41]. Zur Erhöhung der Positions-

auflösung werden die sinusförmigen Messsignale im Positionsmessgerät oder der Folgeelektronik typischerweise 4.096-fach bis 16.384-fach unterteilt.

Das Führungsverhalten der Servoantriebe wird mit Verfahren der Vorsteuerung verbessert. Die Sollwerte für die Regelgrößen werden in der Bewegungssteuerung aus dem NC-Programm generiert. Die Vorsteuerverfahren sind Stand der Technik in industriellen Steuerungen zur Bewegungsführung. Die überwiegende Aufgabe der Regler ist es deshalb Abweichungen von den Sollwerten aufgrund von

- Bearbeitungskräften oder Bearbeitungsdrehmomenten,
- Reibkräften oder Reibdrehmomenten und
- Vorsteuerfehler aufgrund von Modellunsicherheiten

auszuregeln. Prozessbedingt wird bei vielen Produktionsaufgaben z.B. eine konstante Geschwindigkeit oder Drehzahl vorgegeben. Variable Belastungen führen zu Gleichlaufschwankungen, die das Produktionsergebnis negativ beeinflussen. Die dynamische Laststeifigkeit von Servoantrieben ist daher von entscheidender Bedeutung. In einer kaskadierten Regelungsstruktur wird die dynamische Laststeifigkeit im Wesentlichen durch das Störverhalten des Geschwindigkeits- bzw. Drehzahlregelkreises bestimmt.

1.1 Stand der Technik

In mechanisch steifen Antrieben ist die erreichbare Bandbreite des Geschwindigkeits- bzw. Drehzahlregelkreises von den dynamischen Eigenschaften des unterlagerten Stromregelkreises abhängig, da über diesen Regelkreis die Kraft bzw. das Drehmoment des Motors gesteuert wird. Um die dynamische Laststeifigkeit von Servoantrieben zu verbessern, wird deshalb z.B. in [94], [33], [89], [64] oder [12] ein Beschleunigungssensor nach dem Ferraris-Prinzip zur Messung der Relativbeschleunigung eingesetzt. Dabei wird die Relativbeschleunigung unmittelbar verwendet um den Motorstrom hochdynamisch an die Belastung anzupassen. Die auf einer Beschleunigungsmessung basierenden Verfahren zur Verbesserung der Laststeifigkeit von Servoantrieben sind in der Literatur bereits seit einiger Zeit als *Beschleunigungsregelung* bekannt.

Häufig erfolgte die Entwicklung der Verfahren zur Beschleunigungsregelung für Applikationen mit Direktantrieben. Durch den Einsatz von Direktantrieben werden Nachgiebigkeiten, Getriebefehler, Spiel und Verschleiß im Antriebsstrang reduziert. Damit einhergehend ist aufgrund der fehlenden Untersetzung sowie der geringeren Massen eine Verschlechterung des Störverhaltens des Antriebs. Dynamische Lastwechsel während dem Bearbeitungsprozess führen somit zu erheblichen Positionsabweichungen. [12, S. 123]

Um das Störverhalten von Direktantrieben zu verbessern wurden z.B. in [6, S. 91ff.], [64, S. 81ff.] und [12, S. 169ff.] verschiedene Konzepte einer unterlagerten Beschleunigungsregelung untersucht. Prinzipiell liegt einer Beschleunigungsregelung der Ansatz zugrunde, „die Auswirkungen aller an der Welle angreifenden Störgrößen über deren Drehbeschleunigung ohne Zeitverzug“ zu erfassen. Mit einer Regelung der Drehbeschleunigung des Rotors können somit die eingreifenden Störgrößen schnellstmöglich kompensiert werden. [94, S. 44/45] Als Rückführgröße für die Beschleunigungsregelschleife wird die Relativ-Beschleunigung des Antriebs mit einem Sensor nach dem Ferraris-Prinzip gemessen. Im allgemeinen werden die Eigenschaften einer Regelung von der Qualität des Sensors sowie dessen mechanische Integration in der Regelstrecke maßgeblich beeinflusst [91, S. 291], [93, S. 275]. Folglich hatten die genannten Aspekte - Qualität und Integration des Beschleunigungssensors - auch einen Einfluss auf die entwickelten Beschleunigungsregelverfahren.

1.1.1 Messung der Relativ-Beschleunigung nach dem Ferraris-Prinzip

In den Arbeiten von Basel [10] und Denne et al. [21] werden zur Messung der Relativ-Beschleunigung Sensoren nach dem Ferraris-Prinzip beschrieben. Dabei wird ein elektrisch leitfähiger Läufer, z.B. aus Aluminium oder Kupfer in Form einer Scheibe oder einer Glocke mechanisch steif mit dem Rotor des Antriebs verbunden. Statorfest angeordnete Erregermagnete erzeugen ein konstantes Magnetfeld welches den Läufer senkrecht durchsetzt. Dadurch entstehen bei einer Rotation des Antriebs im Läufer Wirbelströme die wiederum in den um 90 Grad versetzten statorfesten Aufnehmerspulen eine Spannung induzieren. Der Gleichanteil dieser Spannung ist direkt proportional zur Beschleunigung des Antriebs [91, S. 308].

Aufgrund der im Läufer gespeicherten magnetischen Energie ist eine sprunghafte Änderung der Wirbelströme bzw. des dazu proportionalen magnetischen Flusses nicht möglich. Dadurch ist die in den Aufnehmerspulen induzierte Spannung gegenüber der tatsächlichen Beschleunigung des Läufers verzögert. Das Übertragungsverhalten des Beschleunigungssensors nach dem Ferraris-Prinzip wird in [89, S. 50ff.] mit einem Verzögerungsglied erster Ordnung beschrieben. Die Bandbreite kommerzieller Beschleunigungssensoren liegt zwischen 300 Hz und 5 kHz [12, S. 129] und ist umgekehrt proportional zur elektrischen Leitfähigkeit des Läufers.

Der Übertragungsfaktor von Beschleunigungssensoren nach dem Ferraris-Prinzip kann durch die Form und das Material des Läufers, das Erregermagnetfeld und die Aufnehmerspulen beeinflusst werden. Je nach Ausführung liegt der Übertragungsfaktor typischerweise zwischen $5 \mu\text{V}/\text{rad}/\text{s}^2$ und $300 \mu\text{V}/\text{rad}/\text{s}^2$. Dabei ist ein Signal-zu-Rausch-Abstand > 70 dB erreichbar. Das Magnetfeld der Wirbelströme wirkt dem Erregermagnetfeld entgegen, dadurch nimmt der Übertragungsfaktor des Beschleunigungssensors mit zunehmender Drehzahl ab. Der Übertragungsfaktor ist proportional zur elektrischen Leitfähigkeit des Läufers. Damit ist zwangsläufig ein anwendungsspezifischer Kompromiss zwischen Bandbreite und Übertragungsfaktor des Relativ-Beschleunigungssensors erforderlich. [12, S. 128/129]

Erfolgt die Integration des Sensors in die Regelstrecke mit einer mechanischen Verbindung zwischen dem Läufer des Beschleunigungssensors und dem Rotor des Antriebs resultiert ein schwingungsfähiges System mit einer schwach gedämpften Schwingung in Torsionsrichtung. Die geringe Dämpfung der Verbindung führt beispielsweise in [12, S. 137] zu einer Amplitudenüberhöhung im Frequenzgang der Messkette von ≈ 15 dB (Dämpfungsgrad $D \approx 0,18$).

Zusammenfassend ergeben sich aus dem Einsatz eines Relativ-Beschleunigungssensor nach dem Ferraris-Prinzip folgende Restriktionen die beim Entwurf einer Beschleunigungsregelung berücksichtigt werden müssen:

- Eine Erhöhung des Übertragungsfaktors durch eine Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit des Läufers führt zu einer geringeren Bandbreite des Beschleunigungssensors und zu einer starken Erwärmung des Sensors bei hohen Drehzahlen.
- Die Integration des Sensors in das Antriebssystem benötigt Bauraum und kann zu einer schwach gedämpften Torsionsschwingung in der Messkette führen.
- Der Übertragungsfaktor nimmt mit zunehmender Drehzahl ab. Dieses nicht-lineare Verhalten führt drehzahlabhängig zu einer fehlerbehafteten Erfassung der Beschleunigung.

1.1.2 Beschleunigungsregelung mit Beschleunigungssensor

Schwarz beschreibt 1986 in [94] ein neuartiges Steuerverfahren zur direkten Regelung der Winkelbeschleunigung einer dreiphasigen permanentmagneterregten Synchronmaschine. Die Ansteuersignale für den Pulswechselrichter werden dabei „*direkt aus einem Regelkreis für die Drehbeschleunigung des Rotors der Maschine abgeleitet.*“ [94, S. 44]. Dem Regelverfahren liegt der Ansatz zugrunde, eine Regeldifferenz im Beschleunigungsregelkreis mit einem Zweipunktregler schnellstmöglich zu kompensieren. Mit einer Raumzeigermodulation wird die Ausgangsspannung des Pulswechselrichters so eingestellt, dass der zur Kompensation der Regelabweichung benötigte Stromraumzeiger in q -Richtung schnellstmöglich gestellt wird.

Mit der unterlagerten Zweipunktregelung der Drehbeschleunigung des Rotors wurden im Regelkreis selbsterregte Schwingungen festgestellt. Diese Schwingungen führen zu einer deutlichen Geräuschentwicklung und zu einer Verminderung der Positionsstabilität des Antriebs. Ursache für diese Torsionsschwingung ist das Übertragungsverhalten des im Regelkreis eingeschlossenen mechanischen Teilsystems zum Beschleunigungssensor. [33, S. 24ff.]

Gambach entwickelt 1993 in [33] ein strukturmechanisches Modell des mechanischen Teilsystems mit Beschleunigungssensor. Dieses Modell berücksichtigt sieben Eigenfrequenzen in der Beschleunigungsmesskette jeweils mit einem System 2. Ordnung sowie die Tiefpasscharakteristik des Sensors. Um die selbsterregten Schwingungen im Regelkreis zu verhindern wird anhand des strukturdynamischen Modells „*vom Drehschub der Maschine,..., bis hin*

zur Drehbeschleunigung der Geberscheibe des Drehbeschleunigungssensors“ [89, S. 8] ein LUNENBERGER-Beobachter für das mechanische Teilsystem mit fünf Zustandsgrößen entworfen. Mit einer gewichteten Zustandsrückführung auf den Eingang des Zweipunktreglers werden „die störenden selbsterregten Schwingungen im unterlagerten Regelkreis für die Drehbeschleunigung unterdrückt“ [33, S. 39].

Für das von Gambach vorgeschlagene Verfahren zur Unterdrückung der selbsterregten Schwingungen im Beschleunigungsregelkreis muss der Frequenzgang des mechanischen Teilsystems gemessen werden. Weiterhin ist zur Bestimmung der Gewichtsfaktoren ein aufwendiges Optimierungsverfahren erforderlich. Nachteilig ist dabei vor allem die Empfindlichkeit des Verfahrens gegenüber Änderungen der Streckenparameter, z.B. der drehelastischen Kopplung des Antriebs mit einer Last oder einer Änderung des Last-Massenträgheitsmoments. [89, S. 19]

In [89] wird von Schmidt 1999 eine neuartige Methode zur Unterdrückung der selbsterregten Schwingungen im unterlagerten Regelkreis der Drehbeschleunigung vorgeschlagen. In diesem Verfahren wird aus dem drehmomentbildenden Motorstrom $I_q(p)$ und der Drehbeschleunigung $\alpha(p)$ ein synthetisiertes Rückführsignal $\alpha_{syn}(p)$ für den Zweipunktregler der Beschleunigungsregelschleife gebildet. Die mechanischen Eigenfrequenzen im Beschleunigungssignal werden mit einem Butterworth-Tiefpaß 4. Ordnung $F_{TP}(p)$ bedämpft. Um ein dynamisch hochwertiges Rückführsignal für die Beschleunigungsregelschleife zu erhalten wird der drehmomentbildende Motorstrom mit einem Hochpassfilter nach der Bestimmungsgleichung $F_{HP}(p) = 1 - F_{TP}(p)$ gefiltert [14]. Das synthetisierte Rückführsignal wird nach folgender Gleichung gebildet ([89, Gl. 3.3]):

$$\alpha_{syn}(p) = F_{TP}(p)\alpha(p) + F_{HP}(p)I_q(p) \quad (1.1)$$

In der Arbeit von Schmidt entspricht aufgrund der gewählten Normierung bei bekannten Massenträgheitsmoment und ohne eingreifende Störgrößen das synthetisierte Beschleunigungssignal der tatsächlichen Drehbeschleunigung. Mit diesem Verfahren ist „eine Zweipunkt-Regelung der Drehbeschleunigung des Maschinenrotors möglich, ohne daß es zu selbsterregten Schwingungen in diesen Regelkreis kommt“ [89, S. 69].

Häffner untersucht in [39] die Anwendbarkeit der von Schmidt vorgeschlagenen unterlagerten Beschleunigungsregelung mit einem synthetisierten Rückführsignal für reaktionsschnelle Linear-Direktantriebe. Dabei erfolgt ein Vergleich der Eigenschaften einer Zweipunktregelung mit einer Abtastfrequenz von 100 kHz und einer Pulsweitenmodulation mit einer Trägerfrequenz von 16 kHz um die Querspannung des Antriebs einzustellen. Die Sollspannung für das pulsweitenmodulierte Stellglied wird durch einen Zustandsregler mit Bypass-I-Regler erzeugt. Mit dem Prinzip der Pulsweitenmodulation können im überlagerten Positionsregelkreis um den Faktor 2 größere Verstärkungsfaktoren eingestellt werden als bei unterlagerten Zweipunktregelung, „wenn in beiden Fällen das Entstehen von Grenzyklen im Positionsregelkreis noch

zuverlässig vermieden werden soll“. Zusätzlich wird durch die Vorgabe der Querspannung nach dem Prinzip der Pulsweitenmodulation die Schwankungsbreite der gemessenen Position des Antriebs um 35 Prozent reduziert und somit die Positionsstabilität verbessert. [39, S. 103]

Weiterhin erfolgt in der Arbeit von Häffner ein Vergleich des Störverhaltens des Positionsregelkreises bei unterlagerter Regelung der Linearbeschleunigung mit einem synthetisierten Rückführsignal und einer unterlagerten Regelung des Querstroms. Um die mechanischen Eigenfrequenzen wirksam zu bedämpfen wird für den Butterworth-Tiefpass 4. Ordnung eine Grenzfrequenz von 320 Hz gewählt. [39, S. 59] Dabei wird mit einer unterlagerten Regelung der Linearbeschleunigung eine um den Faktor 7 höhere Störsteifigkeit erzielt. [39, S. 101] Folglich kann bereits mit einer relativ niedrigen Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals das Störverhalten eines Antriebs signifikant verbessert werden.

In [64] werden von Lehner unterschiedliche Konzepte einer Beschleunigungsregelung für Vorschubachsen in Werkzeugmaschinen untersucht. Vielversprechend ist dabei das Regelungskonzept mit einer *kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung* bei welcher das Rückführsignal des Reglers nach Gleichung 1.1 synthetisiert wird. [64, S. 87ff.] Lehner untersucht dabei den Einfluss der Nutzbandbreite des rückgeführten Beschleunigungssignals auf das Störverhalten des Antriebs. Die Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals wird mit der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters variiert. Bei einer sprunghaften Aufschaltung der Störgröße führt eine Erhöhung der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters zu einer geringeren Regelabweichung. Eine Erhöhung der Grenzfrequenz über 100 Hz bringt nur noch geringe Verbesserungen. Lehner begründet dies mit dem Amplitudenspektrum der sprunghaften Anregung: *„Die Spektralanteile, deren Amplitude mehr als ein Prozent des Maximalwerts beträgt, sind auf Frequenzen bis 100 Hz beschränkt.“* [64, S. 89]

Um das Potential der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung zur Erhöhung der Störsteifigkeit nutzen zu können sollte die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters mindestens den doppelten Wert der Bandbreite des Positionsregelkreises betragen. Falls mechanische Eigenfrequenzen in der Lageregelstrecke innerhalb dieser Bandbreite vorhanden sind, so kann das Potential der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung nicht vollständig genutzt werden. *„In diesem niedrigen Frequenzbereich lässt sich die Relativbeschleunigung mit guter Näherung durch zweifache zeitdiskrete Differenziation aus dem Positionssignal des optischen Messsystems gewinnen.“* [64, S. 92/93]

Die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung mit Messung der Relativbeschleunigung kann auf die regelungstechnische Struktur einer Störgrößenaufschaltung überführt werden. Die Berechnung des Kompensationsterms der Störgrößenaufschaltung kann prinzipiell mit dem Soll-Querstrom oder dem Ist-Querstrom erfolgen. Aufgrund der in der Regel hohen Bandbreite der Stromregelung ist der Unterschied im dabei erreichbaren Störverhalten nur marginal. [64, S. 95ff.]

1.1.3 Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten

In den Arbeiten von Häffner [39] und Lehner [64] wurde gezeigt, dass eine signifikante Verbesserung des Störverhaltens von Direktantrieben bereits mit einer relativ niedrigen Nutzbandsbreite des Beschleunigungssignals möglich ist. Folglich wurden in den vergangenen Jahrzehnten eine Vielzahl an Konzepten einer Beschleunigungsregelung entwickelt bei denen das Rückführsignal aus der gemessenen Drehzahl bzw. dem Positionsmesswert ermittelt wird. Ein Großteil der vorstellten Verfahren ist auf das in [17] beschriebene regelungstechnische Konzept eines Störgrößenbeobachters mit einem inversen nominellen Modell der Regelstrecke rückführbar. Mit einem Störgrößenbeobachter wird, anstelle der gemessenen Störgröße, ein Schätzwert der Störgröße zur Berechnung des Kompensationsterms zur Störgrößenaufschaltung verwendet.

In [77] wird von Ohishi et al. 1987 eine Positionsregelung für einen DC-Motor mit einem unterlagerten *Dead-Beat*-Beobachter vorgestellt. Der Beobachter berechnet aus dem Strom und der Drehzahl des Antriebs eine Schätzgröße für das Lastmoment des Antriebs. Der Kompensationsterm zur Störgrößenaufschaltung wird durch Umrechnung der Schätzgröße in einen äquivalenten Strom gebildet. Der Sollwert für die Stromregelung setzt sich dabei aus der Stellgröße des überlagerten Positionsreglers und dem Kompensationsterm zusammen.

Hinsichtlich der Bewegungsführung eines elektromechanischen Antriebssystems ist es entsprechend den Ausführungen von Y. Hori in [47] vorteilhaft im innersten Regelkreis einer kaskadierten Regelungsstruktur unmittelbar die Beschleunigung zu regeln. Die üblicherweise verwendete Stromregelung wird bei diesem Regelungskonzept durch eine Beschleunigungsregelung ersetzt. Die Rückführgröße für den Beschleunigungsregelkreis wird durch eine Differentiation mit nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung aus der gemessenen Drehzahl berechnet. Äquivalent zur Stromregelung erfolgt die Regelung der Beschleunigung mit einem PI-Regler [46]. In den Arbeiten von Y. Hori erfolgt ein Vergleich des Führungs- und Störverhaltens eines positionsgeregelten Servoantriebs mit unterlagerten Stromregelung, einer Stromregelung mit Störgrößenbeobachter sowie der vorgeschlagenen unterlagerten Beschleunigungsregelung. Die Ersatzzeitkonstante der unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelkreise ist identisch und beträgt $200 \mu\text{s}$. Die Filterzeitkonstante des nachgeschalteten Tiefpassfilters zur Berechnung der Beschleunigung beträgt $1,5 \text{ ms}$. Die experimentellen Ergebnisse zeigen für alle Regelungsverfahren ein identisches Führungsverhalten. Während mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung sprungförmig aufgeschaltete Störgrößen zu den geringsten Auslenkungen im Drehzahl- und Positionsregelkreis führen.

In [76] wird 1991 von Ohishi et al. die Auslegung einer Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten für die Kraftregelung eines Roboters vorgestellt. Die Auslegung des Reglers erfolgt im Frequenzbereich nach der z.B. in [23] und [73] beschriebenen H^∞ -Designmethode. Durch eine frequenzabhängige Gewichtung der Sensitivitätsfunktion und der

komplementären Sensitivitätsfunktion wird beim Entwurf des Reglers die Verstärkung von Sensorrauschen und die Störunterdrückung gleichermaßen berücksichtigt.

In [88] werden 1992 von Schmidt und Lorenz grundlegende Untersuchungen verschiedener Regelungskonzepte einer Beschleunigungsrückführung zur Verbesserung der dynamischen Laststeifigkeit von Gleichstrommaschinen vorstellt. Die Regelungskonzepte basieren auf einem Zustandsregler für die Position, die Drehzahl und die Beschleunigung des Antriebs mit einer unterlagerten Stromregelung. Die Beschleunigungsrückführung wird als ein zusätzliches „*elektronisches Massenträgheitsmoment*“ interpretiert, welches die dynamische Laststeifigkeit eines Antriebssystems erhöht. Die Verbesserung des Störverhaltens wird ohne Änderungen im Positions- und Drehzahlregelkreis erreicht. Um eine Verstärkung von Rauschen durch eine zweifache zeitdiskrete Differentiation des Positionsmesswerts zu vermeiden wird das Beschleunigungssignal mit einer Beobachterstruktur aus dem Positionsmesswert ermittelt. Die experimentellen Ergebnisse wurden mit einer Abtastzeit von 1,25 ms durchgeführt und zeigen mit einer Beschleunigungsrückführung eine Verbesserung des Störverhalten des Antriebs bis zu einer Frequenz von ≈ 70 Hz. Limitiert wird die Verbesserung des Störverhaltens durch die benutzte Abtastzeit der digitalen Regelung.

In den vorgestellten Publikationen erfolgte die Berechnung der Beschleunigung entweder durch eine einfache zeitdiskrete Differentiation aus der gemessenen Drehzahl oder durch eine Beobachterstruktur aus dem Positionsmesswert. Die zweifache zeitdiskrete Differentiation zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten wurde aufgrund der damit einhergehenden Verstärkung von Positionsmessfehlern vermieden.

In [63] und [102] wird 2008 eine Regelungsstruktur mit Störgrößenbeobachter basierend auf einer Beschleunigungsrückführung aus Positionsmesswerten eines hochauflösenden Längenmessgerätes für Linear-Direktantriebe vorgeschlagen. In beiden Publikationen wird das Beschleunigungssignal durch eine zweifache zeitdiskrete Differentiation aus den Positionsmesswerten berechnet. Der nachgeschaltete Tiefpassfilter wird zur Begrenzung der Bandbreite des Beobachters verwendet um die Anregung mechanischer Eigenfrequenzen im Antriebsstrang zu verhindern. In den beiden Arbeiten wird mit dem Regelungskonzept einer zusätzlichen Beschleunigungsrückführung eine signifikante Verbesserung der dynamischen Laststeifigkeit der untersuchten Direktantriebe gegenüber der klassischen Kaskadenregelung mit einer unterlagerten Stromregelung erreicht.

Folglich erschließt sich durch den Einsatz hochauflösender Positionsmessgeräte die Möglichkeit die Relativ-Beschleunigung aus dem Positionsmesswert durch eine zweifache zeitdiskrete Differentiation zu berechnen. Das berechnete Beschleunigungssignal kann verwendet werden um die Störsteifigkeit eines Antriebs im Vergleich zur klassischen Kaskadenregelung signifikant zu erhöhen. Ausschlaggebend dafür ist, dass die Verbesserung des Störverhaltens bereits mit einer relativ niedrigen Nutzbandbreite der berechneten Beschleunigung möglich ist.

1.2 Abgrenzung und Ziele der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht inwiefern mit einer Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten die dynamische Laststeifigkeit von Servoantrieben verbessert werden kann. Für die Auslegung der Beschleunigungsregelung wird das nominelle Modell eines mechanisch steifen Antriebs zugrunde gelegt. Die robuste Stabilität eines Servoantriebs mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung wird hinsichtlich der Unsicherheit des nominellen Modells der Regelstrecke analysiert.

Die Rückführgröße für die Beschleunigungsregelschleife wird dabei durch eine zweifache zeitdiskrete Differentiation aus der gemessenen Position in der digitalen Regeleinrichtung berechnet. Positionsmessfehler werden dadurch verstärkt und beeinflussen folglich die Eigenschaften des berechneten Beschleunigungssignals. Hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit, Auflösung und Signalbandbreite der berechneten Beschleunigung wird der Einfluss

- der Abtastzeit der digitalen Regeleinrichtung,
- der Signalqualität der Positionsmesswerte beschrieben durch Amplituden-, Phasenwinkel- und Nullpunktabweichung sowie Signaloberwellen,
- der Quantisierung der sinusförmigen Messsignale in der Auswerteelektronik,
- und der Auflösung der Positionsmesswerte

analysiert.

1.3 Gliederung

Im Kapitel *Positionsmessgeräte in Servoantrieben* wird die Positionsmesswernerfassung in Servoantrieben für Positionsmessgeräte mit sinusförmigen Messsignalen beschrieben. Darauf aufbauend wird ein Modell für sämtliche Größen die den Positionsmessfehler beeinflussen eingeführt. Die Gültigkeit des eingeführten Modells wird mit einem eigens dafür entwickelten Prüfstand nachgewiesen. Die Referenzmessung erfolgt mit einem hochauflösenden Winkelmessgerät mit interferentiellen Abtastprinzip mit einer Positionsauflösung von 0,01 Winkelsekunden. Für die Verifikation des Modells wurden Positionsmessgeräte mit optoelektronischer und induktiver Abtastung untersucht.

Die dynamischen Eigenschaften der realen Positionsregelstrecke werden häufig nur mit einem vereinfachten Modell beschrieben. Weiterhin führen zeitvariante Parameter des Fertigungsprozesses, wie z.B. das mit der Beladung variierende Last-Massenträgheitsmoment des Rundtisches einer Werkzeugmaschine, zu einer Parameterunsicherheit. Somit müssen bei der

Parametrierung der Regelkreise strukturelle und parametrische Modellunsicherheiten der Regelstrecke berücksichtigt werden. Bei der Auslegung der Regler an einem nominellen Modell der Regelstrecke wird aus diesem Grund eine entsprechende Stabilitätsreserve gefordert. Im Kapitel *Spezifikation von Regelkreisen* wird anhand eines einschleifigen Regelkreises in das Gebiet der robusten Regelung eingeführt und grundlegende Anforderungen an die Stabilitätsreserve eines Regelkreises spezifiziert.

Darauf aufbauend wird eine typische Konfiguration eines Antriebssystems zur *Regelung mechanisch steifer Servoantriebe* modelliert und hinsichtlich der Stabilitätsreserve analysiert. Dabei wird die kaskadierte Regelungsstruktur bestehend aus einer Positionsregelung und einer unterlagerten Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelschleife in eine Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden überführt. In einer Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden ist durch einen Vorsteuerfilter eine weitgehend unabhängige Auslegung von Führungs- und Störverhalten möglich. Die Eigenschaften der Positionsregelung mit der klassischen kaskadierten Regelungsstruktur dienen in der weiteren Arbeit als Referenz für einen Vergleich mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung.

Für die Berechnung der Rückführgröße der Beschleunigungsregelschleife werden verschiedene zeitdiskrete Methoden zur Approximation der zeitkontinuierlichen zweifachen Differentiation analysiert. Die Verfahren werden dabei hinsichtlich Genauigkeit, Phasenverzögerung, der Verstärkung von Positionsmessfehlern und dem Ressourcenaufwand für eine Implementierung bewertet. Ergänzend wird der Einfluss der numerischen Integrationsverfahren in Beobachterstrukturen untersucht. Für die Modellierung und Auslegung der Beschleunigungsregelung wird eine Möglichkeit zur Approximation der Beschleunigungsermittlung vorgestellt.

Im Kapitel *Beschleunigungsregelung* werden verschiedene Konzepte einer Beschleunigungsregelung für Servoantriebe analysiert. Sinnvoll erscheint dabei insbesondere das Konzept einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung. Aus den Eigenschaften der Positionsregelung mit der unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung werden grundlegende Restriktionen für die Parametrierung der Beschleunigungsregelschleife abgeleitet. Weiterhin werden die Auswirkungen einer parametrischen Unsicherheit mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung untersucht.

Der *Funktionsnachweis der unterlagerten Beschleunigungsregelung* erfolgt mit experimentellen Untersuchungen. Für den Test der Regleralgorithmen wurde ein Prüfstand bestehend aus einer drehelastisch gekoppelten Antriebs- und Lastmaschine entwickelt. Die durchgeführten Untersuchungen zum Führungs- und Störverhalten ermöglichen einen umfassenden Vergleich der Eigenschaften der Positionsregelung mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung und der klassischen Kaskadenregelung mit einer unterlagerten Stromregelung.

2 Positionsmessgeräte in Servoantrieben

Positionsgeregelte Servoantriebe werden in industriellen Applikationen größtenteils in einer kaskadierten Regelungsstruktur, bestehend aus Positionsregelkreis, Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelkreis und Stromregelkreis betrieben. Mit einer analogen Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung war es üblich, die Rückführgröße des Regelkreises mit einem Tachogenerator zu messen. Um Kosten und Bauraum zu minimieren wurde mit Einführung der digitalen Regelung in den 1990er Jahren auf den Einsatz von Tachogeneratoren verzichtet. Die Rückführgröße für den Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelkreis kann mit einem Digitalrechner aus dem ohnehin vorhandenen Positionsmesswert einfach berechnet werden. Außerdem wäre mit der Auflösung der zu diesem Zeitpunkt verfügbaren A/D-Wandler nur eine unzulängliche Digitalisierung des meist sehr großen Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsmessbereiches möglich gewesen. Damit sind mit Einführung der digitalen Regelung die Eigenschaften des Positionsmessgerätes nicht nur für die Qualität der Positionsregelung, sondern auch für das Verhalten der Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung maßgebend. ([55],[56] und [93, S. 300 ff.])

2.1 Erfassung von Positionsmesswerten

Messgeräte für Servoantriebe zur Bestimmung der Linear- oder Winkelposition basieren zum überwiegenden Anteil auf optoelektronischen Messprinzipien. Diese ermöglichen im Vergleich zu anderen Technologien höhere Genauigkeiten und Auflösungen bei gleichen Montagetoleranzen der relativ zueinander beweglichen Teile des Messgerätes. In Anwendungen mit geringeren Anforderungen werden induktive und magnetische Messprinzipien verwendet. Eine detaillierte Beschreibung der verschiedenen Messprinzipien ist in [30, S. 9ff.], [41, S. 176 ff.] und [11, S. 43ff.] zu finden.

Beispielhaft ist in Abbildung 2.1 die optoelektronische Abtastung nach dem abbildenden Messprinzip dargestellt. Dieses Messverfahren nützt den Moiré-Effekt welcher bei der Überlagerung zweier feiner Gitterstrukturen entsteht. Die Maßverkörperung wird im abgebildeten Beispiel auf einem Glasträger mit photolithografischen Verfahren hergestellt, dabei werden regelmäßige Gitterstrukturen mit einer Teilungsperiode bis zu ca. $10\ \mu\text{m}$ erreicht. Auf der Abtastplatte ist ein Strichgitter mit gleicher oder ähnlicher Teilungsperiode aufgebracht. Die Halbleiterlichtquelle und der Kondensator erzeugen ein paralleles Lichtbündel dessen Intensität durch eine Relativbewegung der Teilscheibe zur Abtastplatte annähernd sinusförmig modelliert wird. Die variierende Lichtintensität wird von dem strukturierten Fotosensor in ein

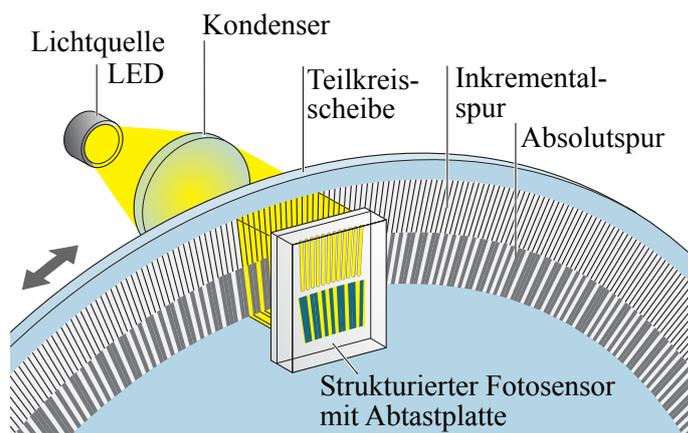


Abbildung 2.1: Photoelektrische Abtastung nach dem abbildenden Messprinzip
(Bild: Dr. Johannes Heidenhain GmbH [26, S. 31])

elektrisches Messsignal gewandelt [26]. Alle Messprinzipien liefern analoge annähernd sinusförmige Messsignale, die anschließend in einer Auswerteelektronik weiterverarbeitet werden. Diese Weiterverarbeitung erfolgt im Messgerät oder in der Folgeelektronik.

2.1.1 Messsignale

Um eine Richtungserkennung der Bewegung zu ermöglichen, werden üblicherweise zwei um 90 Grad phasenverschobene Messsignale $u_1(x_P)$ und $u_2(x_P)$ gebildet. Bei idealen Messsignalen ist der Momentanwert abhängig von der Position des Antriebs x_P , der Länge einer Signalperiode x_{SP} und der nominalen Signalamplitude \hat{u}_n :

$$u_1(x_P) = \hat{u}_n \sin\left(2\pi \frac{x_P}{x_{SP}}\right) \quad (2.1a)$$

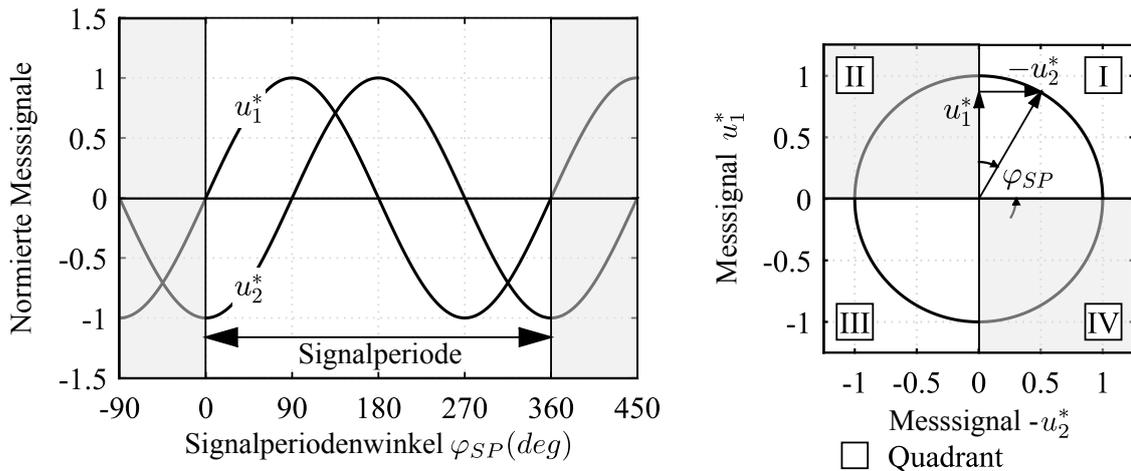
$$u_2(x_P) = -\hat{u}_n \cos\left(2\pi \frac{x_P}{x_{SP}}\right) \quad (2.1b)$$

Die Messsignale sind periodisch in einer Signalperiode, diese entspricht bei Längenmessgeräten meist der Länge einer Teilungsperiode. Bei Winkelmessgeräten wird die Länge einer Signalperiode aus der Anzahl an Signalperioden pro Umdrehung z_{SP} berechnet:

$$x_{SP} = \frac{2\pi}{z_{SP}} \quad (2.2)$$

Somit entspricht das Argument der trigonometrischen Funktionen in Gleichung 2.1a und 2.1b dem Winkel in einer Signalperiode und wird als Signalperiodenwinkel φ_{SP} bezeichnet:

$$\varphi_{SP} = 2\pi \frac{x_P}{x_{SP}} \quad (2.3)$$



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung 2.2: Phasenverschobene Messsignale und vektorielle Darstellung idealer Messsignale

Der Übersichtlichkeit halber ist es zweckmäßig die Messsignale $u_1(\varphi_{SP})$ und $u_2(\varphi_{SP})$ zu normieren. Als Bezugsgröße wird die nominelle Amplitude \hat{u}_n der Messsignale gewählt:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = \frac{u_1(\varphi_{SP})}{\hat{u}_n} = \sin(\varphi_{SP}) \quad (2.4a)$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = \frac{u_2(\varphi_{SP})}{\hat{u}_n} = -\cos(\varphi_{SP}) \quad (2.4b)$$

In Abbildung 2.2a sind die normierten Messsignale als Funktion des Signalperiodenwinkels dargestellt. Werden die idealen Messsignale u_1^* und u_2^* aus den Gleichungen 2.4a und 2.4b in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem orthogonal aufgetragen, entsteht ein Kreis (Abb. 2.2b). Der eingeschlossene Winkel zwischen dem resultierenden Gesamtzeiger und der positiven Abszisse entspricht dem Signalperiodenwinkel φ_{SP} .

2.1.2 Auswertelektronik

Bei inkrementellen Positionsmessgeräten mit sinusförmigen Messsignalen wird der Positionsmesswert aus der absoluten Position in einer Signalperiode und einem Zählerwert gebildet. Eine relative Positionsinformation entsteht durch elektronisches Zählen der Quadranten der Signalperioden und wird aus den Nulldurchgängen der Messsignale abgeleitet. Dafür werden die Messsignale mit Schwellwertschalter in die binären Signale u_{1B} und u_{2B} gewandelt und die Signalpegel anschließend mit einer Zählerschaltung ausgewertet (Abbildung 2.3, links). Der relative Positionsmesswert y_{CP} (engl. Course Position) wird durch Multiplikation des Zählerstandes mit einem Viertel der Länge bzw. dem Winkel einer Signalperiode berechnet.

In einer Signalperiode wird durch Unterteilung (engl. Subdivision) eine absolute Positionsinformation ermittelt. Um die Unterteilung durchführen zu können müssen die Messsignale digitalisiert werden. Die Unterteilung durch die Auswerteelektronik ist in Abbildung 2.3, rechts dargestellt. Die Positionsaufösung q_P berechnet sich aus der Länge einer Signalperiode und dem Unterteilungsfaktor der Auswerteelektronik χ_{SD} :

$$q_P = \frac{x_{SP}}{\chi_{SD}} \quad (2.5)$$

Gängige Unterteilungsfaktoren in Anwendungen mit Servoantrieben sind 4096-fach bis 16 384-fach. Dadurch ergeben sich z.B. für einen Drehgeber mit 2048 Signalperioden pro Umdrehung bei 16 384-facher Unterteilung mehr als 33 Mio. Positionsmessschritte pro Umdrehung bzw. eine Positionsaufösung von ca. 0,04 Winkelsekunden. Eine hohe Positionsaufösung ist eine Grundvoraussetzung um bei einer digitalen Regelung die Rückführgröße für den Drehzahlregelkreis ausreichend genau berechnen zu können.

Der Positionsmesswert im Speicherregister der Auswerteelektronik wird aus dem Zählerstand und dem Ergebnis der Unterteilung gebildet. In Abbildung 2.3 ist ein vereinfachtes Blockschaltbild der Auswerteelektronik zur Berechnung des Positionsmesswertes darstellt. Die erreichbare Auflösung und Genauigkeit der Unterteilung der Messsignale in einer Signalperiode wurde in den 1990er Jahren limitiert durch

- die Quantisierung der Messsignale der verfügbaren A/D-Wandler
- sowie die verfügbare Wortbreite der Speicherregister der Digitalrechner.

Beispielsweise konnte mit einem Digitalrechner mit einer 8 Bit Wortbreite maximal eine 256-fach Unterteilung realisiert werden. Dabei wurde für jede mögliche Wertekombination der digitalisierten Messsignale ein zugehöriger Positionsmesswert in einem Speicherregister abgelegt [40].

Üblicherweise werden heutzutage Digitalrechner mit einer Wortbreite von mindestens 16 Bit und Gleitkomma-Arithmetik eingesetzt. Diese Systeme ermöglichen theoretisch eine 65 536-fache Unterteilung der Positionsmesswerte in einer Signalperiode und stellen somit primär keine Limitierung hinsichtlich der erreichbaren Auflösung des Positionsmesswertes dar. Restriktionen bezüglich der realisierbaren Positionsaufösung ergeben sich üblicherweise aus der Amplitudenquantisierung der Messsignale durch die A/D-Wandlung mit typischerweise 12 Bit. Aus der Quantisierung der Messsignale resultiert ein Positionsmessfehler welcher zugleich die technisch sinnvolle Positionsaufösung beschreibt [51]. Demnach wird der Unterteilungsfaktor der Auswerteelektronik im Wesentlichen durch die Auflösung des A/D-Wandlers begrenzt.

2.1.3 Berechnung des Positionsmesswertes

Eine übliche Methode um aus den beiden Messsignalen die Position in einer Signalperiode zu bestimmen basiert auf der Arkustangens-Berechnung. Dabei wird die Arkustangens-Funktion so abgewandelt, dass ein eindeutiger Winkel in allen vier Quadranten und für $u_2^* = 0$ berechnet werden kann (Gl. 2.6). Die Messsignale werden mit einer Transformation in den ersten

Quadranten abgebildet. Dadurch erfolgt die Auswertung der Arkustangens-Funktion ausschließlich im ersten Quadranten und der Funktionswert des berechneten Unterteilungswinkels ist auf das Intervall $\varphi_{SD} \in [0; \pi/2]$ begrenzt. Mit den idealen Messsignalen aus Gleichung 2.4a und 2.4b entspricht der berechnete Unterteilungswinkel φ_{SD} dem Signalperiodenwinkel φ_{SP} .

$$\varphi_{SD} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{u_1^*}{-u_2^*}\right) & \text{für } u_1^* > 0 \text{ und } u_2^* < 0 \quad (1Q) \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_1^*}{u_2^*}\right) & \text{für } u_1^* > 0 \text{ und } u_2^* > 0 \quad (2Q) \\ \arctan\left(\frac{-u_1^*}{u_2^*}\right) & \text{für } u_1^* < 0 \text{ und } u_2^* > 0 \quad (3Q) \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-u_1^*}{-u_2^*}\right) & \text{für } u_1^* < 0 \text{ und } u_2^* < 0 \quad (4Q) \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } u_1^* > 0 \text{ und } u_2^* = 0 \\ 0 & \text{für } u_1^* < 0 \text{ und } u_2^* = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{mit } \varphi_{SD} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Aufgrund der Periodizität der Messsignale ist der daraus berechnete Unterteilungswinkel φ_{SD} nicht eineindeutig. Ein absoluter Positionsbezug kann deshalb nur für den Positionsmesswert innerhalb einer Signalperiode y_{SP} hergestellt werden.

$$y_{SP} = \frac{\varphi_{SD}}{2\pi} x_{SP}; \text{ mit } y_{SP} \in \left[0; \frac{x_{SP}}{4}\right] \quad (2.7)$$

Der Positionsmesswert y_P wird aus der Position in einer Signalperiode y_{SP} und dem relativen Positionsmesswert der Zählerschaltung y_{CP} gebildet.

$$y_P = y_{CP} + y_{SP} \quad (2.8)$$

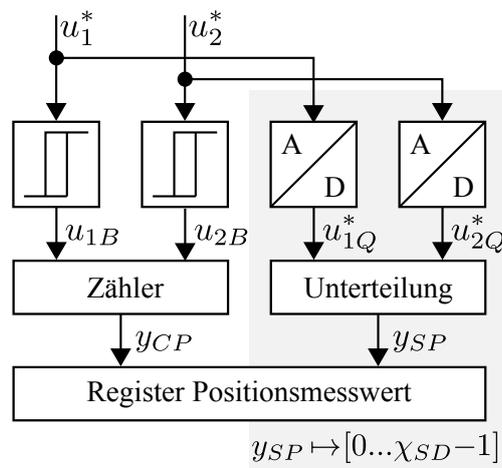


Abbildung 2.3: Auswertelektronik zur Ermittlung des Positionsmesswertes

2.2 Genauigkeit von Positionsmessgeräten

2.2.1 Definition und Ursachen des Positionsmessfehlers

Der Positionsmessfehler Δy_P ist definiert als Differenz zwischen der Istposition x_P und der gemessenen Position y_P . Er setzt sich aus dem langperiodischen Messfehler Δy_{LP} und dem Positionsmessfehler in einer Signalperiode Δy_{SP} zusammen.

$$\Delta y_P = x_P - y_P = \Delta y_{LP} + \Delta y_{SP} \quad (2.9)$$

Die Überlagerung der beiden Fehler ist in Abbildung 2.4 für ein rotatorisches Positionsmessgerät mit 32 Signalperioden in einer Umdrehung dargestellt. Der Positionsmessfehler in einer Signalperiode oszilliert um den langperiodischen Messfehler mit hoher Frequenz. Der maximale Positionsmessfehler in einer Umdrehung resultiert überwiegend aus dem langperiodischen Messfehler und wird auch als Systemgenauigkeit bezeichnet. Die Ursachen für den langperiodischen Messfehler sind

- Fehler bei der Maßverkörperung,
- Exzentrizität des Messsystems bei rotatorischen Messgeräten

und sind in [30, S. 75 ff.] beschrieben. Anbau- und Verbiegungsfehler führen beispielsweise zu einer Exzentrizität des Messsystems und somit zu einem Fehler bei der Abtastung des Maßstabs [26, S. 33ff.]. Charakteristisch für den langperiodischen Messfehler rotatorischer Positionsmessgeräte ist die Periodizität in einer Umdrehung des Messgerätes.

Die Positionsmessfehler in einer Signalperiode resultieren aus

- Fehler bei der Maßverkörperung und der Abtastung,
- Unterteilungswinkelfehler durch Abweichungen der Messsignale und
- Dynamische Messfehler durch Laufzeiten in der Auswerteelektronik.

Im Rahmen dieser Arbeit wird insbesondere der Einfluss von Positionsmessfehlern in einer Signalperiode durch Abweichungen der Messsignale von der idealen Sinusform analysiert. Die daraus resultierenden Unterteilungswinkelfehler werden bei der Berechnung der Rückführgröße für den Drehzahl- bzw. Beschleunigungsregelkreis frequenzabhängig verstärkt und haben somit unmittelbar Auswirkungen auf die Gleichlaufeigenschaften des Antriebs [105].

2.2.2 Korrektur systematischer Positionsmessfehler

Die Methoden und Algorithmen zur Korrektur systematischer Positionsmessfehler wurden entwickelt um die Positionsgenauigkeit zu erhöhen und somit auch den Einfluss des Positionsmessgerätes im Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelkreis von hochdynamischen Servoantrieben zu reduzieren. Beispielsweise wird der langperiodische Messfehler eines Positionsmessgerätes aufgrund eines Fehlers bei der Maßverkörperung in einem Messprotokoll dokumentiert und kann zur Kompensation des Fehlers in der Auswerteelektronik verwendet werden

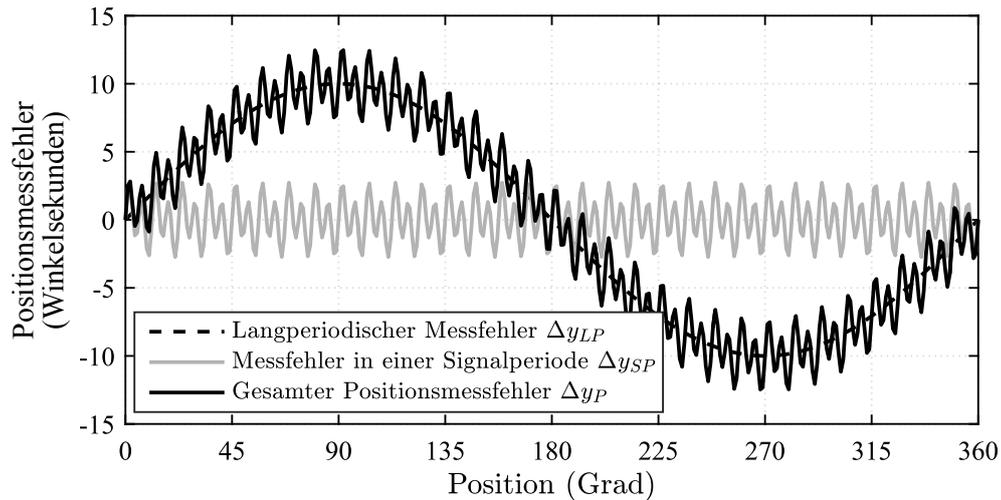


Abbildung 2.4: Messfehler eines rotatorischen Positionsmessgerätes mit 32 Signalperioden pro Umdrehung

[25]. Eine statistische Methode basierend auf einer Lernphase für die Kompensation langperiodischer Messfehler beschreibt Kavanagh in [54]. Dabei wird der Antrieb über mehrere Minuten bei quasi-konstanter Drehzahl betrieben und dabei eine Kompensationsfunktion mit 360 Stützstellen ermittelt. Im Normalbetrieb wird zwischen den Stützstellen der Kompensationsfunktion linear interpoliert und der berechnete Positionsmesswert korrigiert. Hagiwara et al. beschreiben in [40] eine auf Tabellen basierte Methode zur Kompensation von Nichtlinearitäten bei der Berechnung des Unterteilungswinkels mit der Arkustangens-Funktion. Dabei wird mit einer Kalibrierung für jeden Positionsmesswert ein Korrekturwert ermittelt und in einem Register gespeichert. Diese systematischen Unterteilungswinkelfehler resultieren aus

- unterschiedlichen Signalamplituden der Messsignale,
- Nullpunktabweichungen der beiden Signale,
- Abweichungen der Phasenverschiebung von 90 Grad und
- Signaloberwellen

der Messsignale [106], [87]. Unterschiedliche Signalamplituden, Nullpunktabweichungen und Abweichungen der Phasenverschiebung werden als Grundabweichungen bezeichnet. Der Einfluss dieser Grundabweichungen auf den berechneten Positionsmesswert kann beispielsweise mit dem von Heydemann in [43] beschriebenen Korrekturverfahren reduziert werden. Die Signaloberwellen resultieren aus den Messprinzipien welche die Abtastung regelmäßiger optischer, magnetischer oder induktiver Strukturen nutzen. Eine Reduktion der Oberwellen der Messsignale wird beispielsweise in [24], [42] und [104] mit einer speziellen Gestaltung der Gitterstrukturen der Maßverkörperung erreicht.

Aufgrund von Verschmutzung, Anbau- und Verbiegungsfehler variieren die Grundabweichungen über eine Umdrehung eines Positionsmessgerätes. Aus diesem Grund ermittelt Probst in [81] für ein Positionsmessgerät mit 5000 Signalperioden aus dreizehn Messwerten je Signalperiode mit einem Minimierungsverfahren die Grundabweichungen für jede Signalperiode. Die Daten werden in einem Register abgelegt und in der Auswerteelektronik verwendet um den berechneten Unterteilungswinkel online zu korrigieren. Ein ähnliches Korrekturverfahren basierend auf parametrischen Tabellen wird von Höscheler in [48] vorgeschlagen. In beiden Ansätzen bleiben Signaloberwellen unberücksichtigt.

Bünthe und Beineke beschreiben in [15] eine Methode um den Einfluss systematischer Positionsmessfehler aufgrund der Grundabweichungen der Messsignale zu kompensieren. Für die Korrektur der fehlerbehafteten Messsignale werden in der Auswerteelektronik Fehlersignale berechnet und mit fünf Integral-Reglern die Abweichungen der Messsignale ermittelt. Um die Grundabweichungen der Messsignale zu identifizieren erfolgt die Adaption der Korrekturwerte über mehrere Signalperioden. Dies ist insbesondere bei sehr kurzen Bewegungsvorgängen und bei Betriebspunkten bei denen die Frequenz der Messsignale nahe an der NYQUIST-Frequenz liegt problematisch. Bezüglich der stabilen Parametrierung der fünf Integral-Regler der Korrekturmethode berichtet Bähr in [7, S. 75ff.] über ein aufwändiges Verfahren mit genetischen Algorithmen.

In der Arbeit von Bähr wird vorgeschlagen die Unterteilungswinkelfehler eines Positionsmessgerätes mit 5000 Signalperioden an acht Stützpunkten in einer Signalperiode zu erfassen und diese anschließend in einer Tabelle abzulegen. Zwischen den erfassten Stützstellen werden die Daten mit einem Polynom 2. Ordnung interpoliert. Die gemessenen Daten werden nach einer Filterung zur Reduzierung des Rauschens in der Auswerteelektronik zur positionsabhängigen Korrektur der berechneten Unterteilungswinkel verwendet. Mit der Positionskorrektur sollen insbesondere Gleichlaufschwankungen reduziert und die Positionsgenauigkeit verbessert werden.

Nachteile der offline berechneten Korrekturwerte sind der hohe Speicherbedarf sowie die begrenzte Gültigkeit der ermittelten Grundabweichungen. Insbesondere führen Verschmutzung und thermische Einflüsse in dem weiten Einsatzbereich von -20°C bis 125°C zu einer Veränderung der systematischen Unterteilungswinkelfehler über die Nutzungsdauer des Positionsmessgerätes. Korrekturmethode welche die Abweichungen online berechnen, können auf diese Veränderungen reagieren, benötigen dafür allerdings mehrere Adaptionsschritte. Mit eingebauter Signalkorrektur können die Unterteilungsfehler auf unter 0,1 Prozent bezogen auf die Länge bzw. den Winkel einer Teilungsperiode reduziert werden [30, S. 80].

Für eine systematische Untersuchung des Einflusses der beschriebenen Positionsmessfehler auf die berechnete Drehzahl bzw. Geschwindigkeit und Beschleunigung wird im folgenden Abschnitt ein Modell der Positionsmessfehler beschrieben.

2.3 Modell für Positionsmessfehler

Die Ursachen für die beschriebenen Positionsmessfehler können folgendermaßen kategorisiert werden:

- Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode
- Quantisierung in der Auswerteelektronik
- Langperiodische Messfehler

Entsprechend dieser Einteilung wird in den folgenden Abschnitten eine analytische Beschreibung der daraus resultierenden Positionsmessfehler eingeführt.

2.3.1 Abweichungen der Messsignale von der idealen Sinusform

Die Auswirkungen von fehlerbehafteten Messsignalen mit Grundabweichungen und Signaloberwellen auf den berechneten Unterteilungswinkel wird im folgenden Abschnitt untersucht. Der Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode $\Delta\varphi_{SD}$ wird als Differenz zwischen Signalperiodenwinkel φ_{SP} und dem berechneten Unterteilungswinkel φ_{SD} definiert.

$$\Delta\varphi_{SD} = \varphi_{SP} - \varphi_{SD} \quad (2.10)$$

Für die Berechnung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode Δy_{SP} wird der Unterteilungswinkelfehler auf eine Periode normiert und mit der Länge bzw. dem Winkel einer Signalperiode skaliert.

$$\Delta y_{SP} = \frac{\Delta\varphi_{SD}}{2\pi} x_{SP} \quad (2.11)$$

Die Signalqualität χ_{SP} eines Positionsmessgerätes wird aus dem Verhältnis des maximalen Positionsmessfehler in einer Signalperiode bezogen auf die Länge bzw. dem Winkel einer Signalperiode charakterisiert.

$$\chi_{SP} = \pm \frac{\max |\Delta y_{SP}|}{x_{SP}} 100\% \quad (2.12)$$

Somit ist bei gleicher Qualität der Messsignale der Positionsmessfehler in einer Signalperiode nur von der Länge bzw. dem Winkel einer Signalperiode abhängig. Typischerweise wird eine Signalqualität von kleiner $\pm 0,5\%$ erreicht. Der daraus resultierende maximale Positionsmessfehler in einer Signalperiode beträgt bei einem Messgerät mit 2048 Signalperioden in einer Umdrehung $\pm 3,16$ Winkelsekunden.

Grundabweichungen

Als Grundabweichungen der Messsignale werden Nullpunktabweichungen, unterschiedliche Signalamplituden sowie Abweichungen der Phasenverschiebung von 90 Grad betrachtet. Die

Nullpunktabweichungen U_{10}^* und U_{20}^* sowie die Amplituden der Messsignale \hat{u}_1^* und \hat{u}_2^* sind auf die nominelle Amplitude der Messsignale normiert. Die Abweichung von der idealen Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{PS}$ wird je zur Hälfte mit unterschiedlichen Vorzeichen im Argument der trigonometrischen Funktionen berücksichtigt. Damit ergibt sich folgende allgemeine Beschreibung für die normierten Messsignale mit Grundabweichungen:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (2.13a)$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = U_{20}^* - \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (2.13b)$$

Der Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode wird als Funktion des Signalperiodenwinkels und den Grundabweichungen der Messsignale beschrieben. Der entsprechende Ansatz wird mit den Gleichungen 2.10 und 2.6 sowie den Messsignalen mit Grundabweichungen formuliert.

$$\Delta\varphi_{SD} = f(\hat{u}_1^*, \hat{u}_2^*, U_{10}^*, U_{20}^*, \Delta\varphi_{PS}, \varphi_{SP}) \quad (2.14a)$$

$$\Delta\varphi_{SD} = \varphi_{SP} - \arctan\left(\frac{U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}{-U_{20}^* + \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}\right) \quad (2.14b)$$

Die mathematische Herleitung der Unterteilungswinkelfehler für Grundabweichungen der Messsignale ist im Anhang in Kapitel A dargestellt. Die Berechnung erfolgt dabei für alle Grundabweichungen separat. Für die Umformung der trigonometrischen Terme sind Näherungen erforderlich, die unter folgenden Bedingungen gültig sind:

- Kleinwinkelnäherung der Arkustangens-Funktion $\arctan(\Delta\varphi_{SD}) \approx \varphi_{SD}$ für kleine Werte des Unterteilungswinkelfehlers $\varphi_{SD} \leq 0,1439$ rad
- Näherung für kleine Amplitudenfehler $1 - (\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) / (\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^*) \approx 1$ bzw. Nullpunktabweichungen $1 + (U_{10}^* \sin \varphi_{SP} - U_{20}^* \cos \varphi_{SP}) \approx 1$
- Kleinwinkelnäherung der Arkustangens-Funktion $\arctan(\Delta\varphi_{PS}/2) \approx \varphi_{PS}/2$ für kleine Werte der Abweichung der Phasenverschiebung $\varphi_{PS}/2 \leq 0,1439$ rad

Die Formeln zur Berechnung der Unterteilungswinkelfehler aus den Grundabweichungen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Demnach führen Messsignale mit Grundabweichungen zu einem trigonometrischen Verlauf des Unterteilungswinkelfehlers. Nullpunktabweichungen führen zu einer Schwingung mit der Frequenz des Signalperiodenwinkels, Amplituden- und Phasenfehler führen zu einer Schwingung mit der doppelten Frequenz des Signalperiodenwinkels. Die Höhe der Abweichungen wirkt sich unmittelbar auf die Amplitude der Schwingung aus.

Tabelle 2.1: Unterteilungswinkelfehler für Grundabweichungen der Messsignale

Signalabweichung	Unterteilungswinkelfehler	
Amplitudenfehler	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*}{\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^*} \sin(2\varphi_{SP}) \text{ rad}$	A.10
Nullpunktfehler	$\Delta\varphi_{SD} \approx -(U_{10}^* \cos(\varphi_{SP}) + U_{20}^* \sin(\varphi_{SP})) \text{ rad}$	A.15
Phasenverschiebung	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \cos(2\varphi_{SP})$	A.23

Signaloberwellen

Signaloberwellen werden als Sinus-Funktion mit der normierten Amplitude \hat{u}_m^* modelliert, als Bezugsgröße wird die nominelle Amplitude der Messsignale gewählt. Die Ordnung der Signaloberwelle $m \geq 2$ ist ein Vielfaches der Periode des Signalperiodenwinkels. Die idealen Messsignale aus Gleichung 2.4a und 2.4b werden von den Signaloberwellen beliebiger Ordnung überlagert.

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = \sin(\varphi_{SP}) + \sum_{m=2}^{\infty} \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \quad (2.15a)$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = -\cos(\varphi_{SP}) + \sum_{m=2}^{\infty} \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.15b)$$

Die Signaloberwellen ergeben sich aus den Messprinzipien, welche die Abtastung verteilter regelmäßiger optischer, magnetischer oder induktiver Strukturen nutzen. Mit dem gewählten Ansatz zur Beschreibung sind sie ortsabhängig formuliert. Der daraus resultierende Unterteilungswinkelfehler soll als Funktion der Amplitude und der Ordnung einer Signaloberwelle sowie des Signalperiodenwinkels berechnet werden. Der entsprechende Ansatz wird mit den Gleichungen 2.10 und 2.6 sowie den Messsignalen mit Signaloberwellen formuliert.

$$\Delta\varphi_{SD} = f(\hat{u}_m^*, m, \varphi_{SP}) \quad (2.16a)$$

$$\Delta\varphi_{SD} = \varphi_{SP} - \arctan\left(\frac{\sin(\varphi_{SP}) + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP})}{\cos(\varphi_{SP}) - \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2})}\right) \quad (2.16b)$$

Die mathematische Herleitung der Unterteilungswinkelfehler aufgrund von Signaloberwellen der Messsignale ist im Anhang in Kapitel A.2 dargestellt. Für die Umformung der trigonometrischen Terme sind Näherungen erforderlich, die unter folgenden Bedingungen gültig sind:

- Kleinwinkelnäherung der Arkustangens-Funktion $\arctan(\Delta\varphi_{SD}) \approx \varphi_{SD}$ für kleine Werte des Unterteilungswinkelfehlers $\varphi_{SD} \leq 0,1439 \text{ rad}$

Tabelle 2.2: Unterteilungswinkelfehler für verschiedene Ordnungen der Signaloberwellen der Messsignale

Ordnung	Unterteilungswinkelfehler	
$m = 2$	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\hat{u}_2^*}{2} (\sin(\varphi_{SP}) - \cos(\varphi_{SP}) + \sin(3\varphi_{SP}) + \cos(3\varphi_{SP}))$ rad	A.30
$m = 3$	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\hat{u}_3^* \sin(4\varphi_{SP})$ rad	A.31
$m = 4$	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\hat{u}_4^*}{2} (\sin(3\varphi_{SP}) + \cos(3\varphi_{SP}) + \sin(5\varphi_{SP}) - \cos(5\varphi_{SP}))$ rad	A.32
$m = 5$	$\Delta\varphi_{SD} \approx -\hat{u}_5^* \sin(4\varphi_{SP})$ rad	A.33

- Näherung für kleine Amplituden der Signaloberwellen $\hat{u}_m^* \ll 1$

Der Unterteilungswinkelfehler für eine beliebige Ordnung m der Signaloberwellen wird mit Gleichung 2.17 beschrieben. Für eine bestimmte Ordnung einer Signaloberwellen kann der Unterteilungswinkelfehler aus dieser Gleichung hergeleitet werden und ist im Anhang für die Signaloberwellen der 2. bis 5. Ordnung durchgeführt, die Ergebnisse sind in Tabelle 2.2 dargestellt.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{SD} \approx & -\hat{u}_m^* (\sin(m\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} \\ & + \sin(m\varphi_{SP}) \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi_{SP} \\ & - \cos(m\varphi_{SP}) \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi_{SP}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wie bei den Grundabweichen führen Signaloberwellen zu einem trigonometrischen Verlauf des Unterteilungswinkelfehlers. Die Frequenz des Unterteilungswinkelfehlers ist ein Vielfaches des Signalperiodenwinkels und resultiert aus der Ordnung der Signaloberwelle. Die Amplitude der Schwingung ergibt sich, analog zu den Grundabweichungen, unmittelbar aus der Amplitude einer Signaloberwelle.

Formulierung als Fourier-Reihe

Der trigonometrische Verlauf des Unterteilungswinkelfehlers durch Grundabweichungen und Signaloberwellen der Messsignale ermöglicht eine Beschreibung des Unterteilungswinkelfehlers als Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen. Die Bezugsperiode entspricht einer Signalperiode und ganzzahlige Vielfache werden mit der Ordnung der Oberschwingung $i_{SD} \in \mathbb{N}^+$ gekennzeichnet. Die Koeffizienten $a_{i_{SD}}$ und $b_{i_{SD}}$ der Sinus- und Kosinusfunktionen können den Tabellen 2.1 und 2.2 unmittelbar entnommen werden.

$$\Delta\varphi_{SD} = \sum_{i_{SD}=1}^{\infty} (a_{i_{SD}} \cos(i_{SD}\varphi_{SP}) + b_{i_{SD}} \sin(i_{SD}\varphi_{SP})) \text{ rad} \quad (2.18)$$

Der Positionsmessfehler in einer Signalperiode wird entsprechend Gleichung 2.11 aus dem Unterteilungswinkelfehler berechnet. Mit einer Transformation der Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen in eine Darstellung als Summe trigonometrischer Terme mit der Amplitude $\Delta\hat{y}_{SD,i_{SD}}$ und der Phase $\varphi_{i_{SD}}$ folgt somit für den Positionsmessfehler in einer Signalperiode:

$$\Delta y_{SP} = \sum_{i_{SD}=1}^{\infty} \Delta\hat{y}_{SP,i_{SD}} \sin(i_{SD}\varphi_{SP} + \varphi_{i_{SD}}) \quad (2.19)$$

Folglich ist eine Approximation des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode aufgrund von Grundabweichungen und Signaloberwellen der Messsignale mit einer Überlagerung phasenverschobener sinusförmiger Terme möglich.

2.3.2 Quantisierung in der Auswerteelektronik

In der Auswerteelektronik entstehen Positionsmessfehler durch die Quantisierung der Messsignale bei der A/D-Wandlung sowie der Arkustangens-Berechnung. Der prinzipielle Aufbau der Messkette ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Rauschen auf den Messsignalen, beispielsweise aufgrund von Störeinflüssen oder elektronischen Rauschen der Messgeräteelektronik, wird mit den beiden unkorrelierten, normal-verteilten Rauschquellen ϵ_1^* und ϵ_2^* vor der A/D-Wandlung berücksichtigt. Der aus der Quantisierung resultierende Positionsmessfehler wird im folgenden Abschnitt für die Wortbreite der A/D-Wandlung und Genauigkeit der Arkustangens-Berechnung beschrieben.

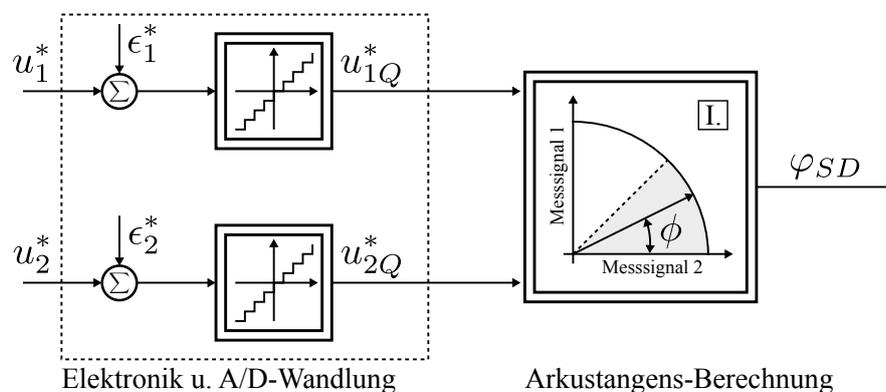


Abbildung 2.5: Quantisierung in der Auswerteelektronik durch die A/D-Wandlung und die Arkustangens-Berechnung

Wortbreite der A/D-Wandlung

Bei der A/D-Wandlung werden die analogen Messsignale auf eine endliche Anzahl diskreter Werte abgebildet. Die Höhe einer Quantisierungsstufe entspricht der Spannungsaufösung q_u und wird aus dem Messbereich U_M und der Wortbreite N_{ADC} des A/D-Wandlers berechnet.

$$q_u = \frac{U_M}{2^{N_{ADC}}} \quad (2.20)$$

Der bei der A/D-Wandlung sinusförmiger Signale entstehende Quantisierungsfehler ϵ_u wird als additives weißes Rauschen mit einer rechteck-förmigen Verteilung (Gleichverteilung) modelliert und ist auf das Intervall $\epsilon_u \in [-q_u/2, q_u/2]$ begrenzt [37]. Die Varianz σ_u^2 des gleichverteilten Quantisierungsfehlers wird aus der Spannungsaufösung des A/D-Wandlers berechnet und entspricht der Quantisierungsrauschleistung [79, S. 184].

$$\sigma_u^2 = \frac{(q_u)^2}{12} \quad (2.21)$$

Die quantisierten Messsignale u_{1Q}^* und u_{2Q}^* können als Summe der idealen Messsignale aus Gleichung 2.4a und 2.4b und des normierten Quantisierungsfehlers dargestellt werden. Als Bezugsgröße für die Normierung des Quantisierungsfehlers ϵ_u^* wird die nominelle Amplitude der Messsignale \hat{u}_n gewählt. Die Quantisierungsfehler der beiden Messsignale $\epsilon_{u_1}^*$ und $\epsilon_{u_2}^*$ sind vom Signalperiodenwinkel abhängig und somit im Verlauf unterschiedlich.

$$u_{1Q}^*(\varphi_{SP}) = u_1^* + \epsilon_{u_1}^* = \sin(\varphi_{SP}) + \epsilon_{u_1}^*(\varphi_{SP}) \quad (2.22a)$$

$$u_{2Q}^*(\varphi_{SP}) = u_2^* + \epsilon_{u_2}^* = -\cos(\varphi_{SP}) + \epsilon_{u_2}^*(\varphi_{SP}) \quad (2.22b)$$

Der Einfluss der Quantisierung der Messsignale auf den berechneten Unterteilungswinkel ist in Abbildung 2.6a dargestellt. Durch die Quantisierung werden in dem Koordinatensystem $2^{2N_{ADC}}$ quadratische Felder mit der Seitenlänge einer Quantisierungsstufe q_u^* gebildet. Jedes Feld repräsentiert eine mögliche Wertekombination der quantisierten Messsignale dem ein Unterteilungswinkel zugeordnet werden kann. Bei idealen Messsignalen entspricht die maximale Abweichung der beiden Vektoren der Hälfte der Diagonalen eines Feldes. Der daraus resultierende maximale Unterteilungswinkelfehler $\Delta\hat{\varphi}_{SD}$ wird mit der Gleichung eines Kreissegments berechnet. Für kleine Werte kann die Arkussinus-Funktion mit dem Argument approximiert werden.

$$\Delta\hat{\varphi}_{SD} = \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}q_u^*}{2}\right) \approx \pm \frac{\sqrt{2}q_u^*}{2} \text{ rad} \quad (2.23)$$

Prinzipiell wirkt der Quantisierungsfehler wie eine Nullpunktabweichung der Messsignale. Der daraus resultierende Unterteilungswinkelfehler wird mit Gleichung A.15 berechnet. Eine Abschätzung des maximalen Fehlers aufgrund der A/D-Wandlung der Messsignale ist mit dem

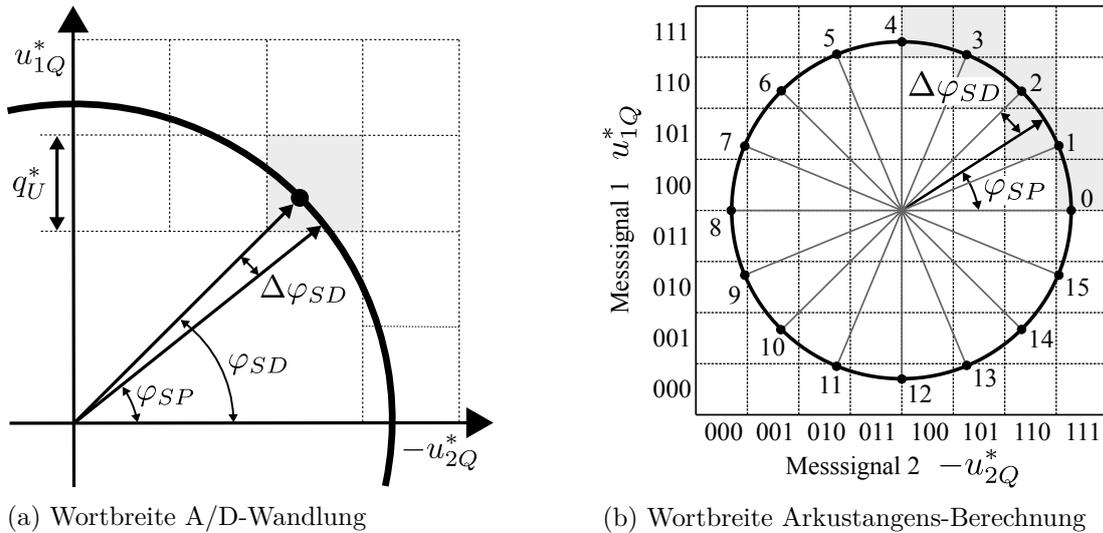


Abbildung 2.6: Unterteilungswinkelfehler durch die Quantisierung in der Auswertelektronik

Betrag der Intervallgrenzen des normierten Quantisierungsfehler $\epsilon_u^* \in [-q_u^*/2, q_u^*/2]$ möglich.

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{SD} &\approx -(\epsilon_{u_1}^* \cos \varphi_{SP} + \epsilon_{u_2}^* \sin \varphi_{SP}) \text{ rad} \\
 &\approx -\left|\frac{q_u^*}{2}\right| (\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP}) \text{ rad} \\
 &\approx -\sqrt{2} \left|\frac{q_u^*}{2}\right| \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Demnach resultiert der maximale Unterteilungswinkelfehler aufgrund der Quantisierung der Messsignale bei einem Signalperiodenwinkel von 45 Grad. Typischerweise werden Messsignale mit einer nominellen Signalamplitude von 0,5 Volt mit einem 12 Bit A/D-Wandler mit einem Messbereich von 1,2 Volt quantisiert. Aus der daraus resultierenden normierten Spannungsaufösung von $585,9 \times 10^{-6}$ folgt ein maximaler Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode von $\pm 85,45$ Winkelsekunden bzw. ein relativer Fehler in einer Signalperiode von $\pm 6,6 \times 10^{-3}$ Prozent.

Weiterhin führen statische Fehler wie beispielsweise

- Nullpunktfehler (Offset),
- Verstärkungsfehler (Gain error),
- Integrale (INL) und differentielle Nichtlinearität (DNL)

zu Abweichungen von der theoretischen Kennlinie des A/D-Wandlers [72, S. 51ff.]. Diese Fehler werden typischerweise als ein Vielfaches der Spannungsaufösung charakterisiert und führen ebenfalls zu Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode.

Genauigkeit der Arkustangens-Berechnung

Mit Digitalrechnern ist aufgrund der endlichen Menge darstellbarer Zahlen keine exakte Auswertung der Arkustangens-Funktion möglich. Bei Positionsmessgeräten mit sinusförmigen Messsignalen wirkt sich die Genauigkeit der Arkustangens-Berechnung unmittelbar auf den Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode und die Wortbreite N_{SD} auf die Auflösung des Positionsmesswertes aus. Prinzipiell führt die Forderung einer höheren Genauigkeit und Wortbreite zu einem größeren Ressourcenverbrauch bei der Implementierung der Arkustangens-Berechnung. Aus diesem Grund wurden verschiedene numerische Methoden entwickelt die jeweils hinsichtlich der Performance des Digitalrechners optimiert sind. Üblicherweise erfolgt die Implementierung der Arkustangens-Berechnung bei allen numerischen Methoden nur für den ersten Oktanten, da durch einfache Transformationen alle weiteren Oktanten in diesem abgebildet werden können [83]. Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss verschiedener numerischer Algorithmen für die Unterteilung in einer Signalperiode hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit analysiert.

Bereits 1959 wurde von VOLDER eine iterative Berechnungsmöglichkeit der Arkustangens-Funktion in [101] mit dem Coordinate Rotation Digital Computer (CORDIC)-Algorithmus beschrieben. Die Methode basiert auf einer iterativen Transformation des kartesischen Koordinatensystem in ein Polarkoordinatensystem. Dabei wird in jeder Iteration i der berechnete Winkel ϕ verfeinert und das Vorzeichen der Rotationsrichtung mit der Hilfsvariablen s_i gesteuert.

$$\phi[i+1] = \phi[i] - s_i \arctan(2^{-i}) \quad (2.25)$$

Die Winkel der Arkustangens-Funktion $\phi_i = \arctan(2^{-i})$ werden für die erforderliche Anzahl an Iterationsschritten berechnet und als Konstanten in Register gespeichert. Da zur Berechnung des Winkel somit ausschließlich Schieberegister, Tabellenzugriffe sowie Addierer- bzw. Subtrahierer-Stufen erforderlich sind, wird diese Methode häufig auf FPGA-Plattformen verwendet [20]. Die Genauigkeit des berechneten Unterteilungswinkels ist von der Anzahl der durchgeführten Iterationen und von der Wortbreite der gespeicherten Winkel abhängig [38]. Dabei nimmt der Ressourcenaufwand und die Berechnungszeit quadratisch mit der Genauigkeit zu [22].

Weitere Approximationen der Arkustangens-Funktion basieren beispielsweise auf einer Taylor-Reihenentwicklung, Chebyshev-Polynomen oder rationalen Funktionen und nutzen Polynome höherer Ordnung, z.B. in [16], [49] und [59]. Der Fehler bei der Approximation der Arkustangens-Funktion wird mit zunehmender Ordnung n der Polynome $p_n(x)$ reduziert. Für die Berechnung des Winkels wird im ersten Schritt der Quotient der Messsignale mit $x = u_1^* / -u_2^*$ berechnet und anschließend das Polynom für diese Hilfsvariable ausgewertet.

$$\phi = \arctan(x) \approx p_n(x) \quad (2.26)$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Approximation der Arkustangens-Funktion mit linearen, quadratischen oder kubischen Polynomen. Beispielsweise wird in [84] mit einem kubischen Polynom eine Genauigkeit von $\pm 309,6$ Winkelsekunden bzw. ein relativer Fehler in einer Signalperiode von $\pm 0,024\%$ erreicht. Eine höhere Genauigkeit bei der Approximation der Arkustangens-Funktion wird mit der Polynominterpolation erreicht. Die Funktionswerte der Arkustangens-Funktion werden an m Stützstellen für den ersten Oktanten berechnet und in einer Tabelle abgelegt. Zwischen den Stützstellen werden die Funktionswerte der Arkustangens-Funktion linear interpoliert. Mit diesem Verfahren wird in [99] mit 101 Stützstellen im ersten Oktanten eine Genauigkeit von ± 5 Winkelsekunden bzw. ein relativer Fehler in einer Signalperiode von $\pm 0,385 \times 10^{-3}\%$ erreicht. Die Funktionswerte an den Stützstellen wurden dabei im 64 Bit-Gleitkommaformat berechnet und tabelliert. Die Approximation der Arkustangens-Funktion mit Polynomen bzw. mit einer Polynominterpolation wird insbesondere bei einer Software-Implementierung auf leistungsstarken Signalprozessoren mit Gleitkomma-Arithmetik angewandt [85], [83], [36].

Die schnellste und zugleich aufwendigste Methode für die Auswertung der Arkustangens-Funktion ist mit einer Tabelle der Funktionswerte für die möglichen Kombinationen der quantisierten Messsignale möglich [70]. Die Genauigkeit des Funktionswertes ist bei dieser Methode unmittelbar von der Wortbreite der Speicherregister abhängig.

Mit den heutzutage verfügbaren Digitalrechnern stellen die beschriebenen numerischen Methoden zur Berechnung der Arkustangens-Funktion für die Unterteilung der Messsignale in einer Signalperiode praktisch keine Einschränkung hinsichtlich der Genauigkeit des berechneten Positionsmesswertes dar. Der Fehler ist bei allen Methoden geringer als die Wertigkeit des Least Significant Bit (LSB) [22].

Um den Einfluss der Wortbreite N_{SD} auf den Unterteilungswinkelfehler darzustellen werden zunächst ideale Messsignale angenommen sowie eine äquidistante Verteilung der unterscheidbaren Winkel in einer Signalperiode. Die Anzahl der unterscheidbaren Messwerte wird als Unterteilungsfaktor der Auswerteelektronik χ_{SD} bezeichnet. In Abbildung 2.6b ist die Unterteilung in einer Signalperiode für eine Wortbreite $N_{SD} = 4$ bzw. einen Unterteilungsfaktor $\chi_{SD} = 16$ dargestellt. Der maximale Unterteilungswinkelfehler aufgrund der endlichen Wortbreite der Arkustangens-Berechnung ist die Hälfte des Abstands zweier aufeinanderfolgenden Unterteilungswinkel.

$$\Delta \hat{\varphi}_{SD} = \pm 0,5 \cdot \frac{2\pi}{2^{N_{SD}}} = \pm 0,5 \cdot \frac{2\pi}{\chi_{SD}} \quad (2.27)$$

Beispielsweise beträgt nach Gleichung 2.27 bei einer 4096-fachen Unterteilung der Messsignale der durch die Wortbreite der Arkustangens-Berechnung bedingte maximale Unterteilungswinkelfehler $\pm 158,2$ Winkelsekunden, dies entspricht einem relativen Fehler in einer Signalperiode von $\pm 12,2 \times 10^{-3}$ Prozent.

Der Einfluss der Wortbreite der A/D-Wandlung auf die erreichbare Auflösung und die Genauigkeit des Unterteilungswinkel wird in [51] mit einem 12 Bit Wandler untersucht. Dabei entsteht der maximale Unterteilungswinkelfehler durch die A/D-Wandlung der Messsignale bei einem Signalperiodenwinkel von $\varphi_{SP} = \pi/4$ und beträgt $1,87 \times 10^{-3}$ rad. Aus diesem Fehler wird eine 3360-fach Unterteilung in einer Signalperiode abgeleitet. Unberücksichtigt bleibt dabei der Einfluss der Genauigkeit und der Wortbreite der Arkustangens-Berechnung auf den berechneten Unterteilungswinkel. Der Unterteilungswinkelfehler aufgrund der Quantisierung in der Auswerteelektronik ist nur dann innerhalb dieser Schranke, wenn der Unterteilungswinkel entsprechend exakt aus den quantisierten Messsignalen berechnet wurde.

In der Auswerteelektronik folgen die beiden Quantisierungen durch die endliche Wortlänge der A/D-Wandlung und der Arkustangens-Berechnung aufeinander: Die Arkustangens-Berechnung wird mit den quantisierten und somit fehlerbehafteten Messsignalen durchgeführt. Die Obergrenze des Unterteilungswinkelfehlers aufgrund der Wortbreite der A/D-Wandlung wird mit Gleichung 2.23 beschrieben. Die Wortlänge der Arkustangens-Berechnung wird nun so gewählt, dass der daraus resultierende Unterteilungswinkelfehler nach Gleichung 2.27 kleiner ist. Mit dieser Forderung wird der Unterteilungswinkelfehler im Wesentlichen auf die A/D-Wandlung der Messsignale begrenzt.

$$\begin{aligned} \pm 0,5 \cdot \frac{2\pi}{2^{N_{SD}}} &< \pm \frac{\sqrt{2}q_u^*}{2} \\ \Rightarrow 2^{N_{SD}} &> \frac{2\pi}{\sqrt{2}q_u^*} = \frac{\sqrt{2}\pi\hat{u}_n}{U_M} \cdot 2^{N_{ADC}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ist der Messbereich des A/D-Wandlers exakt an die nominelle Amplitude der Messsignale angepasst ($U_M = 2\hat{u}_n$), kann für die Wortlänge der Arkustangens-Berechnung folgende Forderung abgeleitet werden:

$$N_{SD} > \log_2 \left(\pi/\sqrt{2} \right) + N_{ADC} \approx 1,15 + N_{ADC} \quad (2.29)$$

Demnach ist es sinnvoll die Auswertung der Arkustangens-Funktion zur Berechnung des Unterteilungswinkels in einer Signalperiode mit einer mindestens zwei Bit größeren Wortlänge zu realisieren als die A/D-Wandlung der Messsignale.

2.3.3 Langperiodischer Messfehler

Bei rotatorischen Positionsmessgeräten ist der langperiodische Messfehler periodisch in einer Umdrehung des Messgerätes. Die Beschreibung des langperiodischen Messfehlers erfolgt als Summe trigonometrischer Funktionen mit der Amplitude $\Delta\hat{y}_{LP,i_{LP}}$ und der Phase $\varphi_{i_{LP}}$, die Ordnung des Positionsmessfehlers wird mit i_{LP} gekennzeichnet.

$$\Delta y_{LP} = \sum_{i_{LP}=1}^{\infty} \Delta\hat{y}_{LP,i_{LP}} \sin(i_{LP}x_P + \varphi_{i_{LP}}) \quad (2.30)$$

2.4 Verifikation der Modelle für Positionsmessfehler

Für die Verifikation der in dem vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Modelle für Positionsmessfehler wurde der in Abbildung 2.7 dargestellte Prüfstand mit einem Referenzwinkelmessgerät entwickelt. Die Messung

- des Positionsrauschen,
- der Positionsmessfehler in einer Signalperiode sowie
- des langperiodischen Messfehlers

erfolgte mit unterschiedlichen Messverfahren. In allen Untersuchungen wird der Servoantrieb mit dem Referenzwinkelmessgerät als Winkelmessmaschine betrieben. Die Verifikation der Positionsmessfehler-Modelle erfolgt für Positionsmessgeräte mit optoelektronischer Ein- und Mehrfeldabtastung sowie induktiven Abtastverfahren. Bei Positionsmessgeräten mit Einfeldabtastung werden die einzelnen Photoelemente einer Mehrfeldabtastung durch einen speziell strukturierten, großflächigen Photosensor ersetzt. [26, S. 31] Eine Übersicht der charakteristischen Daten der verwendeten Positionsmessgeräte ist in Tabelle 2.3 dargestellt.

2.4.1 Referenz-Winkelmessgerät

Für die Referenzwinkelmessung wird ein Winkelmessgerät mit interferentiellen Abtastprinzip ohne Eigenlagerung (Abb. 2.7, Komponente ❶) verwendet. Der Teilkreis mit Nabe ist mit einem Adapter in Leichtbau-Konstruktion kraftschlüssig auf der Welle eines Servoantriebs montiert. Der Fehler der Referenzwinkelmessung wird überwiegend aus

- dem exzentrischen Anbau der Teilkreisscheibe sowie
- Rundlaufabweichungen der zu messenden Welle

bestimmt. Der daraus resultierende sinusförmige langperiodische Messfehler 1. Ordnung (Gl. 2.30) kann durch die Verrechnung der Positionsmesswerte zweier Abtastköpfe (Abb. 2.7, Komponenten ❷ u. ❸) kompensiert werden. Dafür werden die beiden Abtastköpfe in einem gleichmäßigen Abstand um die Teilkreisscheibe angeordnet und erfassen so die Relativbewegung der Teilkreisscheibe mit einer örtlichen Verschiebung von 180 Grad. Um den langperiodischen Positionsmessfehler weitgehend zu kompensieren wird die Referenzposition $y_{P,Ref}$ durch Mittelwertbildung aus den beiden Positionsmesswerten der Abtastköpfe $y_{P,AK1}$ und $y_{P,AK2}$ berechnet.

$$y_{P,Ref} = \frac{y_{P,AK1} + y_{P,AK2}}{2} \quad (2.31)$$

Wird der Regelkreis mit dem Positionsmesswert des Referenzwinkelmessgerätes geschlossen, ist eine Ermittlung des Positionsmessfehlers des im Servoantrieb integrierten Positionsmessgerätes (Abb. 2.7, Komponente ❹) möglich.

Die Berechnung der Positionsmesswerte aus den Messsignalen der Positionsmessgeräte erfolgte mit einem modularen dSPACE® Rapid Control Prototyping (RCP) System. Als Auswertelektronik wurde das *Incremental Encoder Board DS3002* [29] mit einer 4096-fachen Unterteilung der Positionsmesswerte in einer Signalperiode verwendet. Für das Referenzwinkelmeßgerät mit 30 000 Signalperioden in einer Umdrehung wird mit der Unterteilung eine Positionsaufösung von 0,01 Winkelsekunden erreicht.

Aus dem Anbau der Teilkreisscheibe auf der Motorwelle resultiert ein schwingungsfähiges System mit einer Eigenfrequenz bei 2270 Hz. Die Anregung dieser Torsionsschwingung wird mit einer Bandsperre im Regelkreis bei der Eigenfrequenz mit 20 dB unterdrückt.

2.4.2 Messungen und Ergebnisse

Für die Verifikation des Positionsmessfehler-Modells wurde der Positionsmessfehler aus der berechneten Referenzposition nach Gleichung 2.31 und dem gemessenen Positionsmesswert des im Motorgehäuse integrierten Positionsmessgerätes gebildet.

$$\Delta y_P = y_{P,Ref} - y_P \quad (2.32)$$

Als Positionsmessfehler wird die relative Änderung der Positionsmesswerte analysiert und dabei angenommen, dass die berechnete Referenzposition dem fehlerfreien Positionsmesswert entspricht. Die Auswertung der Positionsmessfehler erfolgte bei allen Messverfahren nach folgenden Ablauf:

1. Kompensation der Nullpunktabweichung der Messdaten
2. Berechnung des Positionsmessfehler nach Gleichung 2.32 und Darstellung im Zeitbereich
3. Fourier-Transformation des Positionsmessfehlers
4. Individuelle Normierung der Frequenzachse für die Darstellung des Frequenzspektrums des Positionsmessfehlers

Positionsruschen

Bei der Messung des Positionsruschens wurde nur die Messkette bestehend aus dem Positionsmessgerät und der Auswertelektronik betrachtet. Die Datenaufzeichnung erfolgte im geöffneten Regelkreis, der Pulsumrichter mit Spannungszwischenkreis war während der Messung von der Energieversorgung getrennt. Die Darstellung des Positionsruschens erfolgt als normierte Häufigkeitsverteilung.

Die Rauschleistung des Positionsruschens P_Q ist die Summe der unkorrelierten Rauschquellen der gesamten Positionsmesskette und wird im Wesentlichen durch die Quantisierung des Positionsmesswertes in der Auswertelektronik bestimmt.

$$P_Q = \frac{q_P^2}{12}; \text{ in rad}^2 \quad (2.33)$$

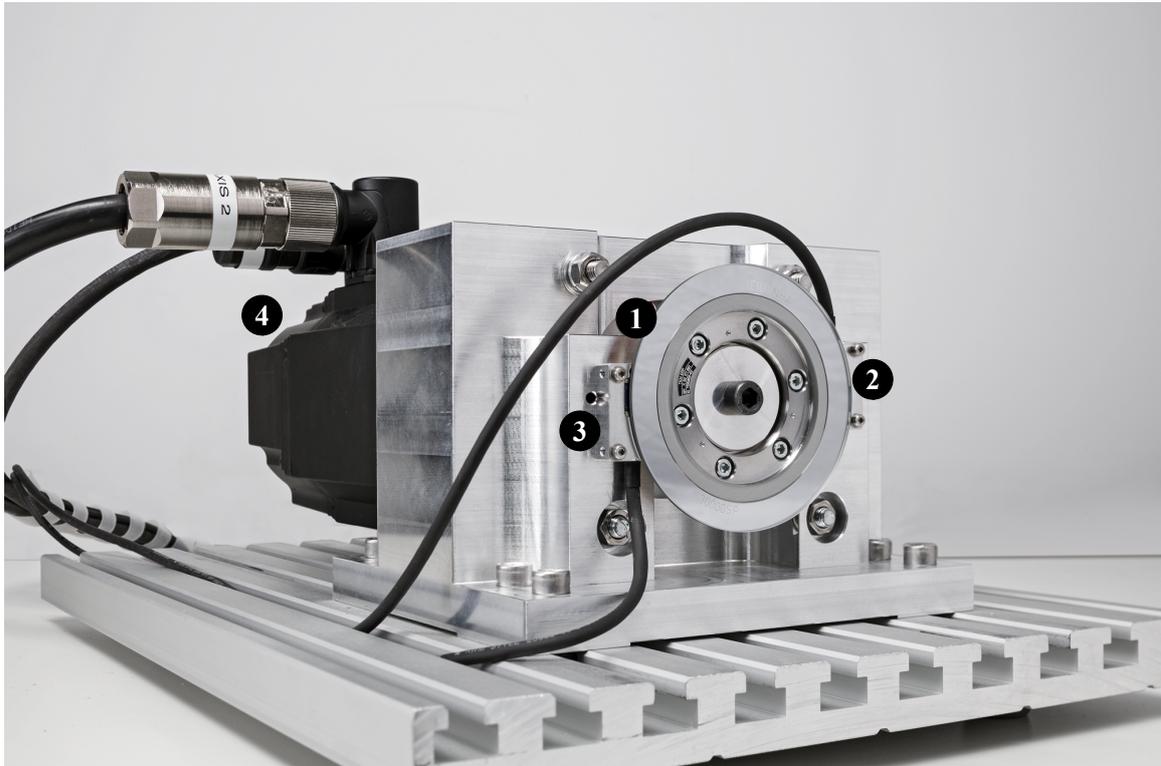


Abbildung 2.7: Servoantrieb mit angebauten interferentiellen Referenzwinkelmeßgerät zur Messung von Positionsmessfehlern

- ❶ Teilkreis mit 30 000 Signalperioden in einer Umdrehung
- ❷ Abtastkopf 1 mit sinusförmigen Abtastsignalen
- ❸ Abtastkopf 2 mit sinusförmigen Abtastsignalen
- ❹ Servoantrieb mit integrierten Positionsmessgerät

Tabelle 2.3: Charakteristische Daten der Positionsmessgeräte für die Verifikation des Positionsmessfehler-Modells aus [26]

Abtastprinzip	Serie	Signal- perioden	System- genauigkeit	Auflösung ($\chi_{SD} = 4096$)
Optoelektronisch (Einfeld)	EQN13xx	2048	± 20 "	0,15 "
Optoelektronisch (Mehrfeld)	ERN13xx	2048	± 20 "	0,15 "
Induktiv	ECI13xx	32	± 65 "	9,89 "

Im Frequenzbereich wird die Rauschleistung des Positionsrauschens auf das Abtastband verteilt. Die mittlere Rauschleistungsdichte des Positionsrauschens \bar{P}_Q wird aus der Rauschleistung des Positionsrauschens und der Abtastfrequenz f_S berechnet.

$$\bar{P}_Q = \frac{P_Q}{f_S}; \text{ in rad}^2/\text{Hz} \quad (2.34)$$

Der Übersichtlichkeit halber wird als Bezugsgröße für die Normierung der Frequenzachse die Abtastfrequenz $f_S = 1/T_S = 16 \text{ kHz}$ und für die Logarithmierung der Amplitude $1 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ gewählt. Im Frequenzbereich ist zusätzlich die aus der Positionsaufösung resultierende theoretische mittlere Rauschleistungsdichte aus Gleichung 2.34 dargestellt.

Positionsmessfehler in einer Signalperiode

Für die Messung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode wurde der Servoantrieb ohne Belastung in Drehzahlregelung mit konstanter Solldrehzahl betrieben. Die Berechnung der Rückführgröße für den Drehzahlregelkreis erfolgte aus dem Positionsmesswert des Referenzwinkelmessgerätes. Die Genauigkeit und die Auflösung des Referenzwinkelmessgerätes ist etwa um den Faktor 15 höher als die in den Servoantrieben integrierten optoelektronischen Positionsmessgeräte. Aus diesem Grund kann die Drehzahl des Antriebs für die Messung des Positionsmessfehlers als konstant betrachtet werden.

Die Frequenz der Messsignale f_{MS} wird bei Winkelmessgeräten aus der Anzahl an Signalperioden in einer Umdrehung und der Drehzahl des Antriebs n_{Mo} berechnet, bei Längenmessgeräten entsprechend aus der Geschwindigkeit v_{Mo} und der Länge einer Signalperiode. Im Allgemeinen ist die Frequenz der Messsignale von der prinzipiell variablen Drehzahl bzw. der Geschwindigkeit des Antriebs abhängig und somit eine Funktion der Zeit t .

$$f_{MS}(t) = z_{SP} n_{Mo}(t); \text{ (Winkelmessgerät)} \quad (2.35a)$$

$$f_{MS}(t) = \frac{v_{Mo}(t)}{x_{SP}}; \text{ (Längenmessgerät)} \quad (2.35b)$$

Der Beginn einer Signalperiode wird für die Darstellung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode aus den Nulldurchgängen der Messsignale abgeleitet. Der Signalperiodenwinkel wird durch Integration der Frequenz der Messsignale berechnet, bei konstanter Drehzahl bzw. Geschwindigkeit ist der Signalperiodenwinkel linear von der Zeit abhängig.

$$\varphi_{SP} = 2\pi \int_0^t f_{MS}(\tau) d\tau = 2\pi f_{MS} t \quad (2.36)$$

Für die Darstellung des Positionsmessfehlers muss eine ausreichende Anzahl an Messpunkten in einer Signalperiode vorhanden sein. Die Anzahl der Messpunkte wird aus dem Verhältnis der Abtastfrequenz der Datenaufzeichnung und der Frequenz der Messsignale berechnet. Die Solldrehzahl wurde in den Versuchen so gewählt, dass jede Signalperiode mit 1024 Messpunkten abgetastet wird. Daraus resultiert für die Versuche mit den Positionsmessgeräten

mit optoelektronischen Abtastverfahren eine Solldrehzahl von $0,458 \text{ min}^{-1}$ beziehungsweise $29,3 \text{ min}^{-1}$ für den Versuch für das Positionsmessgerät mit induktiven Abtastverfahren.

Die Frequenzkomponenten des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode werden mit einer Fourier-Transformation (FFT) von 167 Signalperioden berechnet. Damit der *Leakage*-Effekt das Ergebnis der Fourier-Transformation nicht verfälscht wird ein ganzzahliges Vielfaches der Signalperioden transformiert [44, S. 241]. Zweckmäßigerweise wird die Frequenz der Messsignale als Bezugsgröße für die Normierung der Frequenzachse gewählt, dadurch wird auf der normierten Achse unmittelbar die Ordnung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode dargestellt.

Um den Positionsmessfehler in einer Signalperiode möglichst unabhängig von weiteren Effekten darstellen zu können, wurde die auf Seite 30 beschriebene Auswertung des berechneten Positionsmessfehlers um die nachfolgend aufgeführten Schritte erweitert:

- a.) Filterung des Positionsmessfehlers mit einer Bandsperre bei der Eigenfrequenz der Torsionsschwingung welche aus dem Anbau der Teilkreisscheibe an die Motorwelle resultiert
- b.) Kompensation des langperiodischen Positionsmessfehlers mit einer linearen Interpolation zwischen dem Anfangs- und Endwert des Datensatzes
- c.) Kompensation der Nullpunktabweichung des Positionsmessfehlers

In den Diagrammen ist die experimentell ermittelte Signalqualität der Messsignale dargestellt. Diese wird aus den maximalen Betrag des Positionsmessfehler in einer Signalperiode mit Gleichung 2.12 berechnet.

Langperiodischer Positionsmessfehler

Die Messung des langperiodischen Positionsmessfehlers erfolgte mit dem bereits erläuterten Messverfahren welches auch für den Positionsmessfehler in einer Signalperiode angewandt wurde. Mit einer Solldrehzahl von $58,6 \text{ min}^{-1}$ und einer Abtastrate von 16 kHz wird der langperiodische Positionsmessfehlers in jeder Umdrehung mit $16\,384$ Messwerten abgetastet. In den Diagrammen ist der maximale Betrag des Positionsmessfehlers dargestellt.

Die Frequenzkomponenten des langperiodischen Positionsmessfehlers wurden mit einer Fourier-Transformation (FFT) von 97 Perioden berechnet. Als Bezugsgröße für die Normierung der Frequenzachse des Amplitudenspektrums wird die Solldrehzahl gewählt.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der Auswertung der Positionsmessfehler sind in den Abbildungen 2.8 für das Messgerät mit optoelektronischer Mehrfeldabtastung, in Abbildung 2.9 für das Messgerät mit optoelektronischer Einfeldabtastung und in Abbildung 2.10 für das Messgerät mit induktiven Abtastverfahren dargestellt.

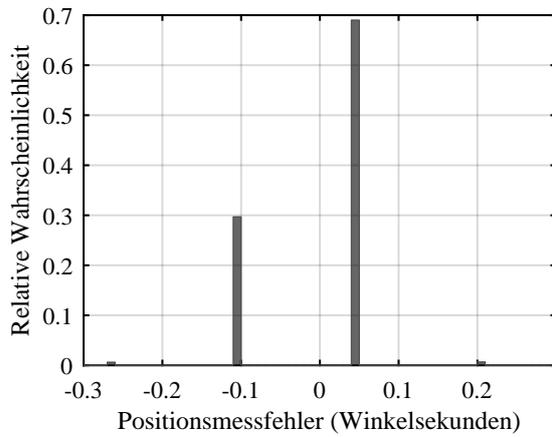
Bei den untersuchten Positionsmessgeräten ist das Positionsrauschen mit einer relativen Häufigkeit von ≥ 97 Prozent auf zwei nebeneinander liegende Positionsmesswerte verteilt. Das Positionsrauschen resultiert folglich aus einem Zustandswechsel des niederwertigsten Bits (LSB) des Positionsmesswertes. Aufgrund der Skalierung des Positionsmesswertes in einer Signalperiode mit Gleichung 2.7 entspricht die Differenz der beiden Positionsmesswerte in den Abbildungen 2.8a, 2.9a und 2.10a der Auflösung des jeweiligen Positionsmessgerätes. Das daraus ermittelte Frequenzspektrum in den Abbildungen 2.8b, 2.9b und 2.10b wird durch die mit Gleichung 2.34 berechnete mittlere Rauschleistungsdichte beschrieben.

Eine Systematik der Positionsmessfehler in einer Signalperiode (Abbildungen 2.8c, 2.9c und 2.10c) sowie des langperiodischen Messfehlers (Abbildungen 2.8e, 2.9e und 2.10e) ist bei allen Messgeräten eindeutig zu erkennen. Die Signalqualität beschreibt als Kennziffer den maximalen Positionsmessfehler in einer Signalperiode bezogen auf die Länge bzw. den Winkel einer Signalperiode. Die beiden Positionsmessgeräte mit optoelektronischen Messprinzip haben eine eindeutig unterschiedliche Signalqualität: Bei gleicher Signalperiode ist mit der optoelektronischen Einfeldabtastung der maximale Positionsmessfehler in einer Signalperiode ≈ 30 Prozent geringer als bei dem Messgerät mit Mehrfeldabtastung.

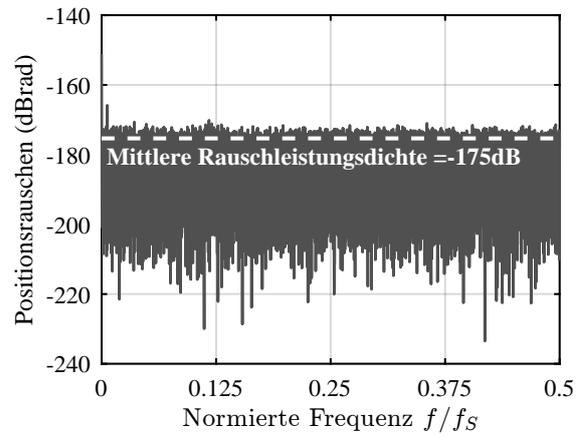
Grundabweichungen der Messsignale wirken sich gemäß dem mathematischen Modell der Unterteilungswinkelfehler im Amplitudenspektrum auf die 1. und 2. Ordnung aus. Diese Spektrallinien sind bei allen untersuchten Positionsmessgeräten im Amplitudenspektrum des Positionsmessfehlers in den Abbildungen 2.8d, 2.9d und 2.10d vorhanden. Das Positionsmessgerät mit optoelektronischer Einfeldabtastung hat zudem eine ausgeprägte Spektrallinie 4. Ordnung. Betrachtet man die Modellierung der Unterteilungswinkelfehler resultiert diese Spektrallinie aus Signaloberwellen 3. und 5. Ordnung. Bei allen anderen untersuchten Positionsmessgeräten sind die Messsignale praktisch frei von Signaloberwellen.

Im Amplitudenspektrum der langperiodischen Positionsmessfehler in den Abbildungen 2.8f, 2.9f und 2.10f ist die Spektrallinie 1. Ordnung erwartungsgemäß sehr ausgeprägt. Die Amplituden der Spektrallinien höherer Ordnung sind in den Messergebnissen der Positionsmessgeräte mit induktiver Abtastung und optoelektronischer Einfeldabtastung signifikant kleiner als die Amplitude der Spektrallinie 1. Ordnung und können vernachlässigt werden.

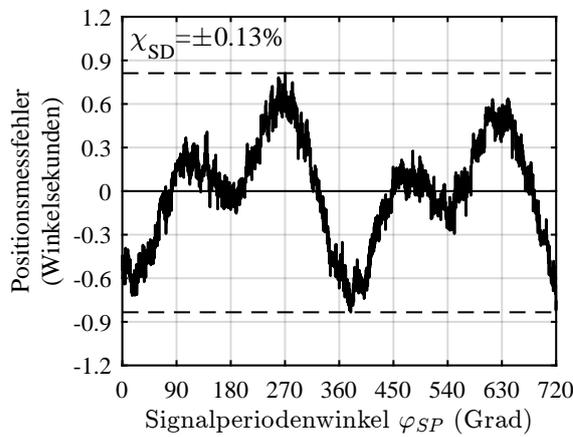
Die experimentell ermittelte maximale Positionsabweichung in einer Umdrehung ist bei allen Untersuchungen kleiner als die spezifizierte Systemgenauigkeit der verwendeten Positionsmessgeräte. Die Überlagerung des langperiodischen Positionsmessfehlers und des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode ist bei dem Messgerät mit induktiver Abtastung deutlich zu erkennen: Die maximale Positionsabweichung in einer Umdrehung setzt sich aus der Amplitude der Spektrallinie 1. Ordnung des langperiodischen Messfehlers und dem Maximalwert des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode zusammen. Zusammenfassend wird das eingeführte mathematische Modell für Positionsmessfehler durch die Ergebnisse bestätigt.



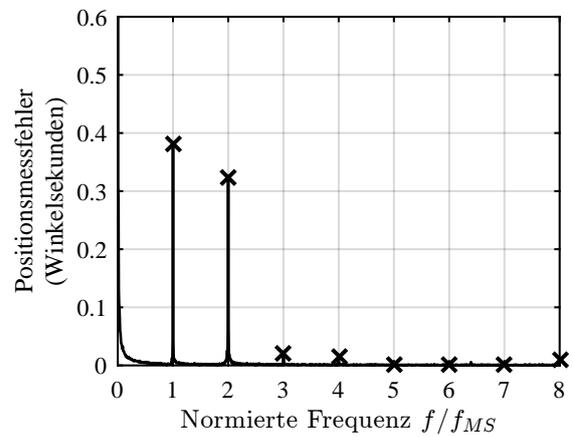
(a) Verteilung des Positionsrauschens



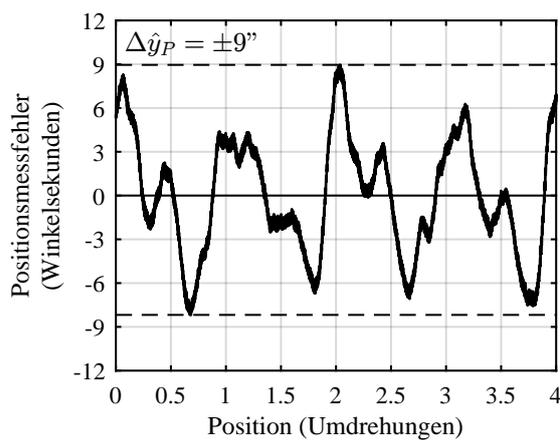
(b) Positionsrauschen im Frequenzbereich



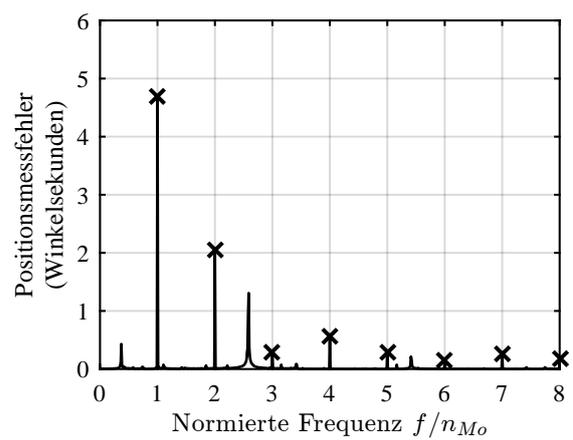
(c) Positionsmessfehler in einer Signalperiode



(d) Amplitudenspektrum

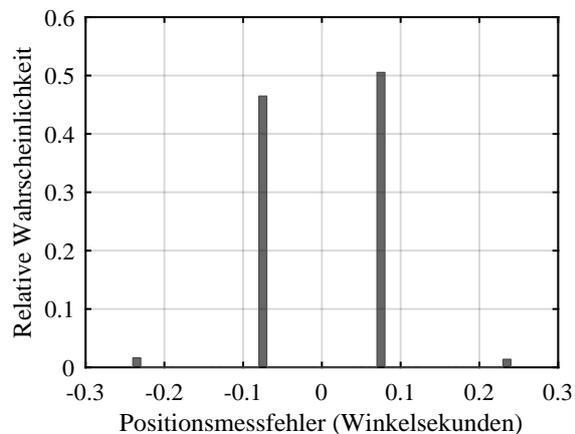


(e) Langperiodischer Messfehler

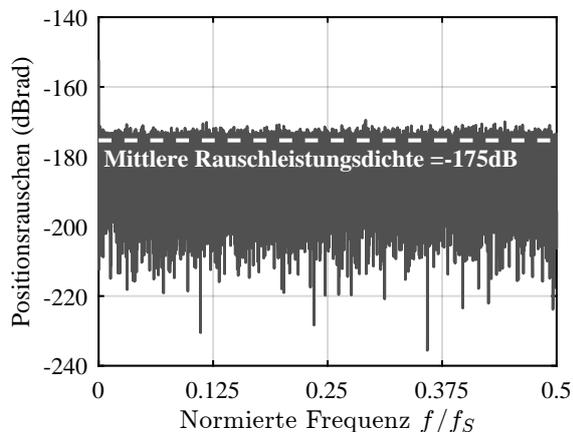


(f) Amplitudenspektrum

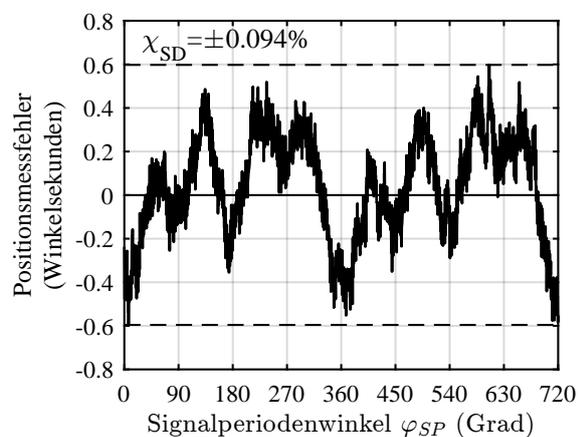
Abbildung 2.8: Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit optoelektronischer Mehrfeldabtastung



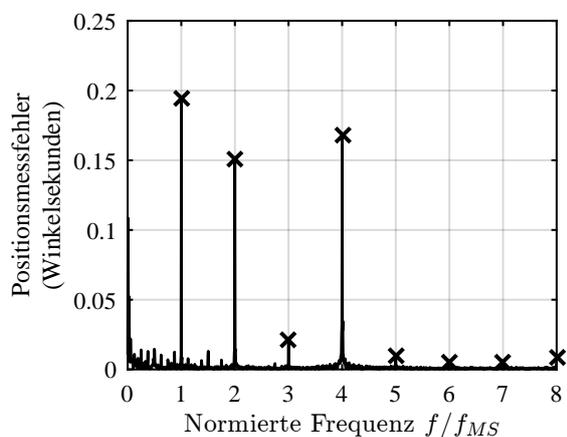
(a) Verteilung des Positionsrauschens



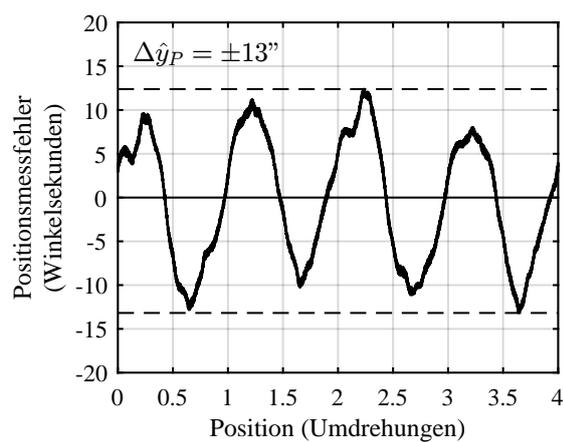
(b) Positionsrauschen im Frequenzbereich



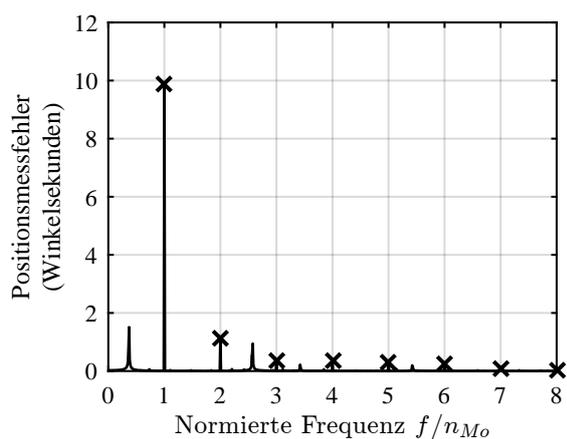
(c) Positionsmessfehler in einer Signalperiode



(d) Amplitudenspektrum

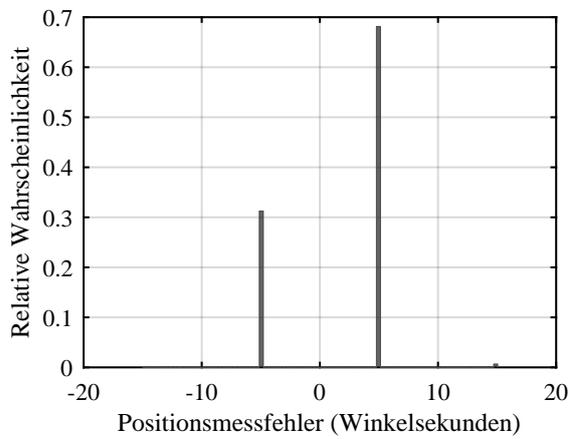


(e) Langperiodischer Messfehler

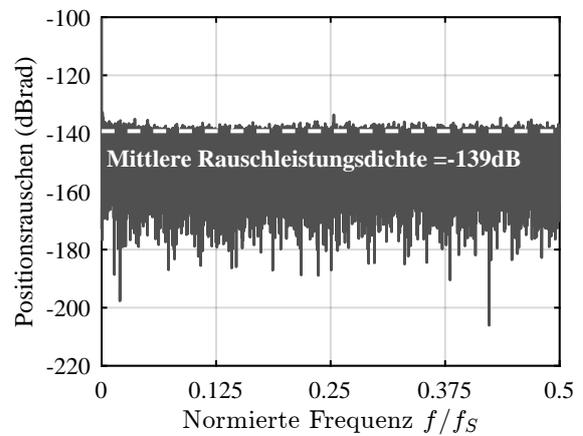


(f) Amplitudenspektrum

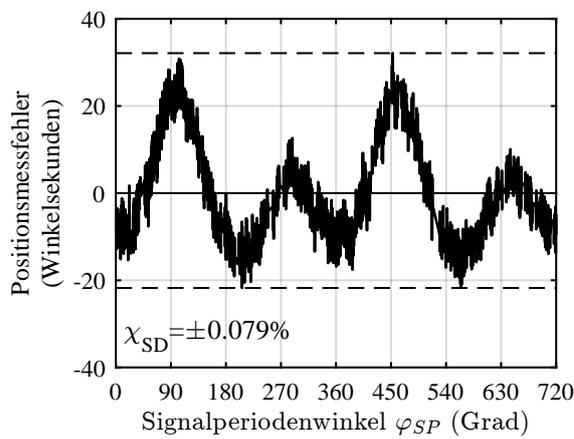
Abbildung 2.9: Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit optoelektronischer Ein-
feldabtastung



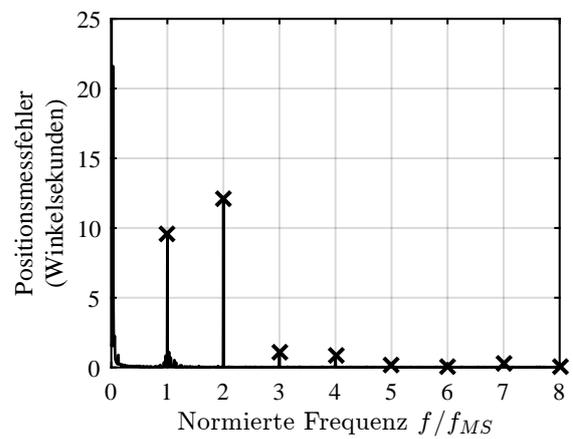
(a) Verteilung des Positionsrauschens



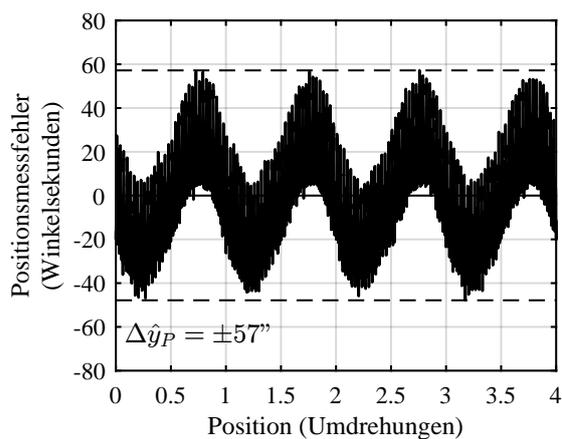
(b) Positionsrauschen im Frequenzbereich



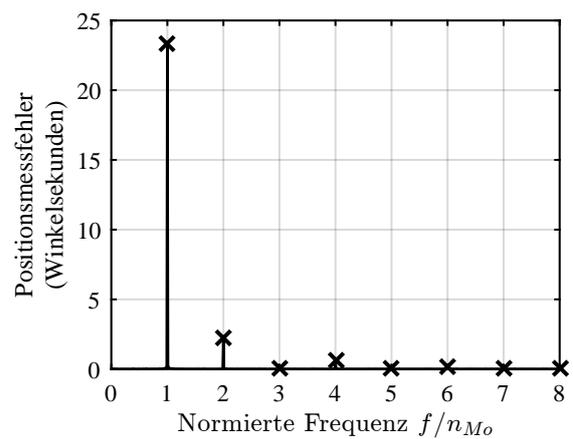
(c) Positionsmessfehler in einer Signalperiode



(d) Amplitudenspektrum



(e) Langperiodischer Messfehler



(f) Amplitudenspektrum

Abbildung 2.10: Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit induktiver Abtastung

3 Spezifikation von Regelkreisen

Charakteristisch für einen Servoantrieb sind mehrere Messgrößen innerhalb der Regelstrecke. Der Regler hat dadurch mehr Informationen über das Verhalten der Regelstrecke und kann somit auf Abweichungen der Regelgrößen schneller reagieren. Beispielsweise werden bei einem mechanisch steifen Antrieb die Phasenströme sowie die Position des Motors bzw. der zu bewegenden Masse als Rückführgrößen gemessen. Eine solche Regelungsstruktur wird auch als vermaschte Regelung bezeichnet. Der Entwurf und die Realisierung der Regelung erfolgt in industriellen Anwendungen üblicherweise in Form einer kaskadierten Regelungsstruktur. Die inneren Regelkreise der vermaschten Regelungsstruktur werden als Hilfsregelkreise bezeichnet und führen zu einer schnelleren Kompensation eingreifender Störgrößen [67, S. 477ff.]. Ein wesentlicher Vorteil der kaskadierten Regelungsstruktur gegenüber anderen Regelungsverfahren, wie beispielsweise einer Zustandsregelung, ist die Möglichkeit der sukzessiven Inbetriebnahme der einzelnen Regelkreise von innen nach außen.

In der kaskadierten Regelungsstruktur erfolgt die Beschreibung eines Regelkreises als einschleifige Regelung und somit als *Single Input Single Output (SISO)*-System. Beim Entwurf eines Reglers werden unterlagerte Regelkreise als Verzögerungsglied 1. Ordnung approximiert. ([93, S. 119] und [69, S. 722]) Die Vernachlässigung eines unterlagerten Regelkreises ist nach [67, S. 483ff.] möglich, wenn dieser innerhalb der Bandbreite des überlagerten Regelkreises der Führungsgröße folgen kann und eingreifende Störungen wirksam unterdrückt werden. Für die Stabilitäts- und Robustheitsuntersuchung wird für jeden Sensor des Servoantriebs eine Regelschleife gebildet. Alle mit der Messgröße des Sensors durchgeführten Operationen werden dabei zu einem Regleralgorithmus zusammengefasst. Das Blockschaltbild für eine Regelschleife ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

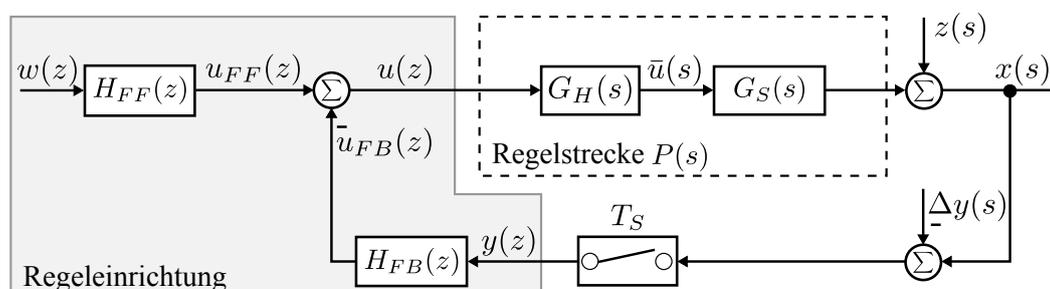


Abbildung 3.1: Zeitdiskrete einschleifige Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden

Die Regelung ist üblicherweise in einem digitalen Steuergerät implementiert. Der Einfluss der daraus resultierenden zeitdiskreten Arbeitsweise der Regeleinrichtung wird durch eine Beschreibung der Regelalgorithmen als Impulsübertragungsfunktionen $H(z)$ berücksichtigt. Die komplexe Frequenzvariable im z -Bereich wird als z -Operator bezeichnet und wird z.B. in [68, S. 429] definiert als:

$$z \equiv e^{sT_S} \quad (3.1)$$

Mit der Definition des z -Operators wird die Abbildung der komplexen Kreisfrequenz s aus dem LAPLACE-Bereich im z -Bereich beschrieben. Die zeitkontinuierlichen Elemente der Regelstrecke werden im LAPLACE-Bereich als Übertragungsfunktion und dementsprechend als Funktion der komplexen Kreisfrequenz modelliert. Der Real- und Imaginärteil der komplexen Kreisfrequenz wird mit σ und $j\omega$ bezeichnet:

$$s \equiv \sigma + j\omega \quad (3.2)$$

Die unterschiedlichen Anforderungen an das Führungs- und Störverhalten werden durch eine Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden berücksichtigt. Im ersten Schritt erfolgt die Auslegung des *Feedback*-Reglers $H_{FB}(z)$ für gutes Störverhalten, einer niedrigen Rauschverstärkung und einer geringen Empfindlichkeit bezüglich Modellabweichungen [5, S. 150]. Anschließend wird der Vorsteuerfilter $H_{FF}(z)$ für das spezifizierte Folgeregelverhalten ausgelegt. Die Ausgangsgrößen der beiden Regler $u_{FF}(z)$ und $u_{FB}(z)$ resultieren aus der Führungsgröße $w(z)$ beziehungsweise der abgetasteten Rückführgröße $y(z)$ und dem jeweiligen Regleralgorithmus. Die Differenz der beiden Ausgangsgrößen entspricht der Stellgröße $u(z)$ des Antriebsreglers.

$$\begin{aligned} u(z) &= u_{FF}(z) - u_{FB}(z) \\ &= H_{FF}(z)w(z) - H_{FB}(z)y(z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Stellgröße des Antriebsreglers wird durch ein Halteglied nullter Ordnung $G_H(s)$ für eine Abtastperiode der digitalen Regelung konstant gehalten, so dass am Ausgang des Halteglieds ein zeitkontinuierliches Signal $\bar{u}(s)$ entsteht. Die Haltefunktion wird beispielsweise mit Speicherregister oder einem Stellglied nach dem Prinzip der Pulsweitenmodulation realisiert ([2], [68, S. 368] und [69, S. 517]). Die Übertragungsfunktion eines Halteglieds nullter Ordnung wird in [5, S. 267] als Integrator modelliert, welcher automatisch nach einer Abtastperiode auf Null zurückgesetzt wird:

$$G_H(s) = \frac{\bar{u}(s)}{u(s)} = \frac{1 - e^{-sT_S}}{s} \quad (3.4)$$

Eine z -Transformation der gesamten Regelstrecke $P(s)$ in Abbildung 3.1 bestehend aus einem Halteglied nullter Ordnung, dem Modell der Strecke $G_S(s)$ und einem Abtastglied mit der Abtastzeit T_S führt zu der zeitdiskreten Beschreibung der Regelstrecke $P(z)$ aus Sicht des

Regleralgorithmus zu den Abtastzeitpunkten.

$$P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \mathcal{Z} \{G_H(s)G_S(s)\} \quad (3.5)$$

Die Führungs-Impulsübertragungsfunktion $H_C(z)$ beschreibt das Folgeregelverhalten des geschlossenen Regelkreises von einer Sollwertvorgabe am Eingang $w(z)$ auf die abgetastete Regelgröße $x(z)$. Aufgrund der Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden sind der Vorwärtszweig und der Rückwärtszweig des Regelkreises unterschiedlich.

$$H_C(z) = \frac{x(z)}{w(z)} = \frac{H_{FF}(z)P(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)} \quad (3.6)$$

Durch Umformung von Gleichung 3.6 kann die zeitdiskrete Vorsteuerfunktion $H_{FF}(z)$ für ein gewünschtes Folgeregelverhalten des geschlossenen Regelkreises gebildet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird für das Übertragungsverhalten des geschlossenen Regelkreises $H_C(z) \equiv 1$ gefordert. Mit dieser Vorgabe wird die Vorsteuerfunktion aus der Summe der inversen zeitdiskreten Regelstrecke und der Impulsübertragungsfunktion des Feedback-Reglers gebildet.

$$H_{FF}(z) = \frac{1 + H_{FB}(z)P(z)}{P(z)} = (P(z))^{-1} + H_{FB}(z) \quad (3.7)$$

Weitere Eingangsgrößen im Regelkreis sind die unmittelbar am Ausgang der Regelstrecke eingreifende Störgröße $z(s)$ sowie ein Messfehler $\Delta y(s)$ im Rückkoppelzweig der Regelung. Die Überlagerung aller Eingangsgrößen des Regelkreises in der abgetasteten Regelgröße wird mit folgender Gleichung beschrieben ([5, S. 90] und [69, S. 576ff.]):

$$x(z) = \frac{H_{FF}(z)P(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)}w(z) + \frac{1}{1 + H_{FB}(z)P(z)}z(z) + \frac{H_{FB}(z)P(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)}\Delta y(z) \quad (3.8)$$

Im Nenner aller Impulsübertragungsfunktionen des Regelkreises kommt das Produkt aus *Feedback*-Regler $H_{FB}(z)$ sowie der abgetasteten Regelstrecke $P(z)$ vor. Dieses Produkt beschreibt die Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(z)$ und wird im Rahmen dieser Arbeit für die Analyse der Stabilitäts- und Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises verwendet.

$$L(z) = H_{FB}(z)P(z) \quad (3.9)$$

Der gesamte Term im Nenner der Impulsübertragungsfunktionen in Gleichung 3.8 wird als Rückführdifferenzfunktion $F(z)$ des Regelkreises bezeichnet. Die Nullstellen der Rückführdifferenzfunktion sind die Polstellen z_i des geschlossenen Regelkreises ([67, S. 348] und [68, S. 448]). Der entsprechende Ausdruck um die Nullstellen zu berechnen wird als „*charakteristi-*

sche Gleichung“ des Regelkreises bezeichnet.

$$F(z) = 1 + H_{FB}(z)P(z) = 1 + L(z)$$

$$\Rightarrow \text{Charakteristische Gleichung des Regelkreises: } 1 + L(z) = 0 \quad (3.10)$$

Die Stabilitäts- und Robustheitseigenschaften einer Regelschleife werden Anhand der charakteristischen Gleichung des Regelkreises beurteilt. Dabei wird zwischen der asymptotischen Stabilität und der Eingangs/Ausgangs-Stabilität (E/A-Stabilität) unterschieden.

„Für die E/A-Stabilität wird ... gefordert, dass ein in Ruhelage befindliches System auf eine beschränkte Eingangsgröße mit einer beschränkten Ausgangsgröße antwortet.“ [68, S. 424] Die asymptotische Stabilität eines Regelkreises ist gegeben, wenn das System für eine beliebige Anfangsauslenkung in den Gleichgewichtszustand zurückkehrt. Asymptotische Stabilität ist bei linearen zeitinvarianten (LTI) Systemen eine Eigenschaft des Systems und keine spezielle Lösung einer Anfangsauslenkung. Aus der Definition der Stabilitätskriterien folgt, dass die asymptotische Stabilität das stärkste Stabilitätskriterium ist und somit die Eingangs-Ausgangs-Stabilität des Systems impliziert. Für zeitdiskrete LTI-Systeme ist die Eigenschaft der Eingangs-Ausgangs-Stabilität unter der folgenden Bedingung gegeben ([68, S. 448]):

Definition 3.1 *Eingangs-Ausgangs-Stabilität linearer Systeme*

Ein zeitdiskretes LTI-System ist E/A-stabil und nur dann, wenn alle n Polstellen z_i der charakteristischen Gleichung $1 + L(z) = 0$ innerhalb des Einheitskreises liegen:

$$|z_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Die Auswertung der Bedingung für E/A-Stabilität ist mit verschiedenen Verfahren möglich: Mit numerischen oder algebraischen Methoden können die Nullstellen der charakteristischen Gleichung unmittelbar berechnet werden. Das Determinantenkriterium von SCHUR, COHN und JURY bestimmt anhand der Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ob ein System stabil oder instabil ist. Diese Verfahren basieren auf einer analytischen Beschreibung der Regelstrecke und können somit nicht für experimentell ermittelte Frequenzgänge angewendet werden. Das NYQUIST-Kriterium hingegen ist für experimentell ermittelte Frequenzgänge und analytische Beschreibungen gleichermaßen geeignet und wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

3.1 Nyquist-Kriterium

Mit dem NYQUIST-Kriterium wird die Stabilität eines geschlossenen Regelkreises aus dem Verlauf der Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises überprüft. Dieses Verfahren wird insbesondere zur Analyse der Stabilität von experimentell ermittelten Frequenzgängen und für Regelkreise mit Totzeit-Elementen angewendet. ([67, S. 347ff.], [69, S. 219ff.]) Der offene Regelkreis eines mechanisch steifen Antriebs enthält keine instabilen Elemente, dadurch kann das vereinfachte NYQUIST-Kriterium zur Analyse der Stabilität des geschlossenen Regelkreises angewendet werden.

Bei zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen beschreibt die Frequenzgangsfunktion das Übertragungsverhalten eines Systems bei sinusförmigen Eingangssignalen. Aus der Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Systems $G(s)$ wird die Frequenzgangsfunktion $G(j\omega)$ mit

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s = j\omega} \quad (3.11)$$

berechnet. Damit wird bei der Frequenzgangsanalyse eines Systems das Übertragungsverhalten für die Frequenzen auf der imaginären Achse des LAPLACE-Bereichs betrachtet. Analog dazu wird aus der Impulsübertragungsfunktion $H(z)$ eines System die Frequenzgangsfunktion $H(j\omega)$ mit

$$H(j\omega) = H(z) \Big|_{z = e^{j\omega T_S}} \quad (3.12)$$

gebildet. ([68, S. 436], [5, S. 268ff.]) Die betrachteten Werte für die komplexe Frequenzvariable liegen somit auf den Einheitskreis der komplexen Ebene. Dadurch gehen bei der Frequenzbereichsanalyse zeitdiskreter Systeme wesentliche Vorteile gegenüber der Frequenzbereichsanalyse zeitkontinuierlicher Systeme verloren. Allerdings „kann die Stabilität eines Regelkreises weiterhin aus der Ortskurve bestimmt werden, wobei das Nyquistkriterium sogar unverändert erhalten bleibt.“ [68, S. 436]

Die Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L(j\omega)$ wird aus der Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(z)$ mit dem in Gleichung 3.12 beschriebenen Zusammenhang $z = e^{j\omega T_S}$ berechnet. Die Ortskurve der Frequenzgangsfunktion ist für $\omega \in]-\infty; \infty[$ symmetrisch zur reellen Achse. Dadurch ist es ausreichend die Frequenzgangsfunktion nur für die positiven Kreisfrequenzen innerhalb des Abtastbandes darzustellen und auszuwerten ([5, S. 86], [67, S. 353] und [68, S. 449]).

$$L(j\omega) = L(z) \Big|_{z = e^{j\omega T_S}}, \quad 0 < \omega T_S \leq \pi \quad (3.13)$$

Für die Stabilitätsuntersuchung wird der Regelkreis in Abbildung 3.1 im Rückführzweig der Regelgröße aufgetrennt. Der offene Regelkreis wird mit einer sinusförmigen Schwingung an der Trennstelle mit dem Eingangssignal $x_e(j\omega)$ angeregt und die daraus resultierende Schwingung

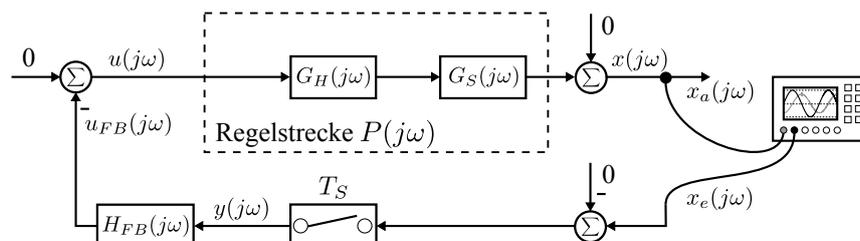


Abbildung 3.2: Regelkreis zur Untersuchung des vereinfachten NYQUIST-Kriteriums

des Ausgangssignals $x_a(j\omega)$ betrachtet. Für die Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L(j\omega)$ ergibt sich aus dem Blockschaltbild des geöffneten Regelkreises in Abbildung 3.2 folgender Zusammenhang:

$$L(j\omega) = H_{FB}(j\omega)G_H(j\omega)G_S(j\omega) = -\frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} \quad (3.14)$$

Der Regelkreis ist instabil wenn aus der erwünschten Gegenkopplung eine Mitkopplung wird. In diesem Fall ist die Schwingung des Ausgangssignals $x_a(j\omega)$ gleich der Schwingung des Eingangssignals $x_e(j\omega)$.

$$x_a(j\omega) = x_e(j\omega) \quad (3.15)$$

Die Frequenz bei der die Ortskurve den kritischen Punkt erreicht, wird kritische Kreisfrequenz ω_{krit} genannt. Die Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises (Gl. 3.14) durchläuft für diesen Fall den kritischen Punkt $P_{krit} = (-1, j0)$ in der komplexen Ebene.

$$L(j\omega_{krit}) = -1 \quad (3.16)$$

Die Rückwärtsdifferenzenfunktion des Regelkreises ist bei der kritischen Kreisfrequenz gleich Null. Dadurch wächst die Verstärkung der Impulsübertragungsfunktionen in Gleichung 3.8 über alle Grenzen. Wird der Regelkreis bei dieser kritischen Kreisfrequenz geschlossen resultiert eine ungedämpfte Schwingung.

$$F(j\omega_{krit}) = F(z) \Big|_{z = e^{j\omega_{krit}T_S}} = 1 + L(j\omega_{krit}) = 0 \quad (3.17)$$

Das vereinfachte NYQUIST-Kriterium ist für einschleifige Regelkreise gültig. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(z)$ stabil ist und keine Polstellen außerhalb des Einheitskreises aufweist. Sind diese Voraussetzungen erfüllt kann nach [5, S. 83ff.] und [68, S. 450] die NYQUIST-Stabilität mit dem folgenden Satz für ein zeitdiskretes System überprüft werden:

Theorem 3.1 Nyquist-Kriterium für stabile offene Kette

Eine stabile offene einschleifige Kette mit der Impulsübertragungsfunktion $L(z)$ führt bei Schließung genau dann zu einem asymptotisch stabilen Regelkreis, wenn die Frequenzgangsfunktion $L(e^{j\omega T_S})$ für $\omega T_S \in [0, \pi]$ den Punkt $(-1, j0)$ der komplexen Ebene nicht umschließt.■

Für die Auswertung des vereinfachten NYQUIST-Kriteriums wird in [5, S. 86] die **Linke-Hand-Regel** formuliert:

Eine stabile offene Kette bleibt bei Schließung genau dann stabil, wenn der kritische Punkt $(-1, j0)$ links von der in Richtung wachsender Frequenzen für $\omega T_S \in [0, \pi]$ durchlaufenen Frequenzgangsfunktion von $L(e^{j\omega T_S})$ liegt.

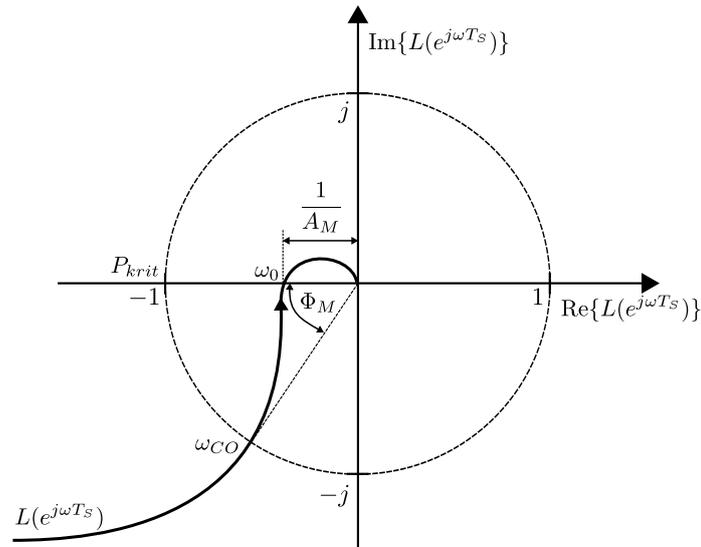


Abbildung 3.3: NYQUIST-Diagramm zur Ermittlung der Amplituden- und Phasenreserve des offenen Regelkreises aus dem Verlauf der Ortskurve in der komplexen Ebene

In Abbildung 3.3 ist die Ortskurve einer exemplarischen Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises dargestellt. Aus dem NYQUIST-Diagramm kann die relative Amplitudenreserve A_M und die Phasenreserve Φ_M unmittelbar entnommen werden. Diese Kenngrößen beschreiben um welchen Faktor die Verstärkung im Regelkreis erhöht bzw. welche zusätzliche Phasenverzögerung in den Regelkreis eingebracht werden kann, bevor dieser instabil wird. Die Amplituden- und Phasenreserve ist ein Maß für die Stabilitätsreserve des geschlossenen Regelkreises und für zeitdiskrete Regelsysteme z.B. in [5, S. 87] folgendermaßen definiert:

Definition 3.2 Amplitudenreserve (Amplitudenrand)

Gegeben sei die Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(z)$ und ω_0 sei die kleinste Frequenz für die gilt, dass

$$\arg L(e^{j\omega_0 T_s}) = -\pi$$

und $L(e^{j\omega T_s})$ soll für $\omega = \omega_0$ abfallen. Die Amplitudenreserve ist dann definiert als

$$A_M = \frac{1}{|L(e^{j\omega_0 T_s})|}. \quad \blacksquare$$

Definition 3.3 Phasenreserve (Phasenrand)

Gegeben sei die Impulsübertragungsfunktion des offenen Kreises $L(z)$ und die Durchtrittsfrequenz ω_{CO} sei die kleinste Frequenz für die gilt

$$|L(e^{j\omega_{CO} T_s})| = 1.$$

Die Phasenreserve Φ_M ist definiert als

$$\Phi_M = \pi + \arg L(e^{j\omega_{CO} T_s}). \quad \blacksquare$$

Der Verlauf der Ortskurve in der komplexen Ebene ermöglicht bezüglich der Stabilität eines Regelkreises nicht nur eine Auswertung mit dem Ergebnis *stabil* oder *instabil*. Der Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt sowie die Amplituden- und Phasenreserve sind ein Maß für die Robustheit des Regelkreises bezüglich Modellunsicherheiten. In den folgenden Abschnitten Sensitivität und Robustheit wird dargestellt wie robuste Stabilität unter Berücksichtigung von Modellunsicherheiten gewährleistet werden kann.

3.2 Sensitivität

Die Sensitivitätsfunktion oder Empfindlichkeitsfunktion $S(z)$ ist der gemeinsame Faktor aller Impulsübertragungsfunktionen des Regelkreises in Gleichung 3.8. Durch die Sensitivitätsfunktion wird der Einfluss einer am Ausgang der Regelstrecke eingreifenden Störgröße auf die Regelgröße beschrieben. Der Nenner der Sensitivitätsfunktion enthält die für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises entscheidende Rückführdifferenzfunktion aus Gleichung 3.10.

$$S(z) = \frac{x(z)}{z(z)} = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{1 + L(z)} \quad (3.18)$$

„Die Empfindlichkeitsfunktion S ist ein wesentliches Maß für die Qualität einer Regelung.“ [73, S. 9] Die Bedeutung der Sensitivitätsfunktion eines Regelkreises wird in [35] anhand drei möglicher Interpretationen für einen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad vorgestellt. Die Aussagen können auf einen Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden übertragen werden:

a.) Interpretation als Sensitivität des Folgeregelungsverhaltens

Ursprünglich wurde die Sensitivität eines Regelkreises definiert als die relative Änderung des Folgeregelungsverhaltens des geschlossenen Regelkreises $dH_C(z)/H_C(z)$ aufgrund einer relativen Änderungen der Regelstrecke $dP(z)/P(z)$. Diese Interpretation wird für eine Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden verifiziert, indem im ersten Schritt die Empfindlichkeit des Folgeregelungsverhaltens bezüglich Änderungen der Regelstrecke berechnet wird.

$$\begin{aligned} \frac{dH_C(z)}{dP(z)} &= \frac{d}{dP(z)} \left(\frac{H_{FF}(z)P(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)} \right) \\ &= \frac{(1 + H_{FB}(z)P(z))H_{FF}(z) - H_{FF}(z)P(z)H_{FB}(z)}{(1 + H_{FB}(z)P(z))^2} \\ &= \frac{H_{FF}(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)} \frac{1}{1 + H_{FB}(z)P(z)} = \frac{H_C(z)}{P(z)} S(z) \end{aligned}$$

Damit folgt für die relative Änderung des Folgeregelungsverhaltens:

$$\frac{dH_C(z)}{H_C(z)} \bigg/ \frac{dP(z)}{P(z)} = \frac{dH_C(z)}{dP(z)} \frac{P(z)}{H_C(z)} = S(z)$$

b.) Interpretation als Störgrößenunterdrückung

Die Impulsübertragungsfunktion der am Ausgang der Regelstrecke eingreifenden Störgröße auf die Regelgröße in Abbildung 3.1 entspricht der eingeführten Sensitivitätsfunktion. Demnach werden die frequenzabhängigen Auswirkungen von Störgrößen auf die Regelgröße durch die Sensitivitätsfunktion beschrieben.

$$S(z) = \frac{x(z)}{z(z)} = \frac{1}{1 + L(z)}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass der Ort einer eingreifenden Störgröße lediglich einen Einfluss auf den Zählerterm der jeweiligen Impulsübertragungsfunktion zwischen Störeingriff und Regelgröße hat. Die Sensitivitätsfunktion als gemeinsamer Faktor aller Impulsübertragungsfunktionen des Regelkreises bleibt dabei unverändert.

c.) Interpretation als Güte der Folgeregelung

Die Regelabweichung $e(z)$ der Folgeregelung ist als Differenz der Führungsgröße und der Regelgröße definiert:

$$e(z) = w(z) - x(z) \tag{3.19}$$

Die Regelgröße wird mit Gleichung 3.6 substituiert. Dadurch wird die Regelabweichung als Funktion der Führungsgröße und einer Impulsübertragungsfunktion dargestellt in welcher die Sensitivitätsfunktion wiederum als Faktor enthalten ist:

$$\begin{aligned} e(z) &= w(z) \left(1 - \frac{H_{FF}(z)P(z)}{1 + H_{FB}(z)P(z)} \right) \\ &= w(z) \frac{1 + P(z)(H_{FB}(z) - H_{FF}(z))}{1 + H_{FB}(z)P(z)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

In einem Regelkreis mit einem Freiheitsgrad gilt für die Impulsübertragungsfunktionen der Regler $H_{FF}(z) = H_{FB}(z)$. Damit entfällt der Term im Zähler von Gleichung 3.20 und die Regelabweichung wird durch die Sensitivitätsfunktion des Regelkreises beschrieben.

$$S(z) = \frac{e(z)}{w(z)} = \frac{1}{1 + L(z)} \tag{3.21}$$

Die Sensitivitätsfunktion beschreibt somit nur für den Regelkreis mit einem Freiheitsgrad die Güte des Folgeregelverhaltens. Wird in einer Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden die Impulsübertragungsfunktion des *Feedforward*-Regler nach Gleichung 3.7 berechnet, ergibt sich ohnehin für die Regelabweichung in Gleichung 3.20

$$e(z) = 0.$$

Zusammenfassend beschreibt die Sensitivitätsfunktion die Auswirkungen von Modellunsicherheiten im Regelkreis, die Störgrößenunterdrückung der Regelung sowie die Güte der Folgeregelung für den Regelkreis mit einem Freiheitsgrad ohne weitere Maßnahmen zur Vorsteuerung.

In [67, S. 310] erfolgt eine Einteilung des frequenzabhängigen Verlauf der Sensitivitätsfunktion in den Gegenkopplungsbereich, den Mitkopplungsbereich sowie den Unempfindlichkeitsbereich der Regelung. Über den Verlauf der Sensitivitätsfunktion in den einzelnen Bereichen sind grundlegende Aussagen möglich. Der Verlauf der Frequenzgangfunktion bei kleinen Frequenzen wird anhand der statischen Kreisverstärkung k_0 des offenen Regelkreises $L(z)$ für $z = e^{j\omega T_s}$ mit $\omega = 0$ analysiert. Durch eine geeignete Wahl der Vorzeichen der Regelungsstruktur wird diese positiv gewählt und ist typischerweise größer Eins.

$$k_0 = H_{FB}(j\omega)P(j\omega)|_{\omega=0} \gg 1 \quad (3.22)$$

Enthält der Regelkreis ein integrierendes Element, was aufgrund der Forderung nach stationärer Genauigkeit der Regelung üblicherweise gegeben ist, wächst die statische Kreisverstärkung über alle Grenzen. Der statische Wert der Sensitivitätsfunktion wird mit einer Grenzwertbetrachtung der statischen Kreisverstärkung $k_0 \rightarrow \infty$ des Regelkreises ermittelt:

$$S(j\omega = 0) = \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + k_0} = 0 \quad (3.23)$$

Dieser untere Frequenzbereich wird als Gegenkopplungsbereich der Regelung bezeichnet: Der Regelkreis ist unempfindlich gegenüber Streckenänderungen, Störgrößen werden unterdrückt und die Regelgröße wird der Führungsgröße nachgeführt. Die Entwurfsziele des Reglers werden in diesem Frequenzbereich erfüllt. Das Verhalten des Regelkreises bei hohen Frequenzen wird anhand der Eigenschaften der kontinuierlichen Regelstrecke argumentiert. Reale Regelstrecken mit Aktoren und Sensoren haben eine Tiefpasscharakteristik, dadurch strebt die Frequenzgangfunktion der Regelstrecke $P(j\omega)$ für hohe Frequenzen gegen Null:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(j\omega) = 0 \quad (3.24)$$

Die Sensitivitätsfunktion konvergiert dadurch für hohe Frequenzen gegen Eins:

$$S(j\infty) = \lim_{P(j\omega) \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H_{FB}(j\omega)P(j\omega)} = 1 \quad (3.25)$$

Dieser Frequenzbereich wird als Unempfindlichkeitsbereich bezeichnet, die Regelung ist wirkungslos. Die Regelgröße wird der Führungsgröße nicht nachgeführt und Störgrößen wirken sich unvermindert im Regelkreis aus.

Der Frequenzbereich zwischen dem Gegenkopplungsbereich und dem Unempfindlichkeitsbereich wird als Mitkopplungsbereich der Regelung bezeichnet. Typischerweise ist in diesem Frequenzbereich die Sensitivität des Regelkreises größer Eins. Die damit verbundene Überhöhung des Amplitudengangs der Frequenzgangfunktion führt dazu, dass Störgrößen durch die Regelung verstärkt werden und die Regelabweichung des Regelkreises mit einem Freiheitsgrad ist größer als im ungeregelten System. Dieser Effekt wurde erstmals 1945 von Hendrik W. BODE in der Publikation *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* beschrieben [13, Seite 285].

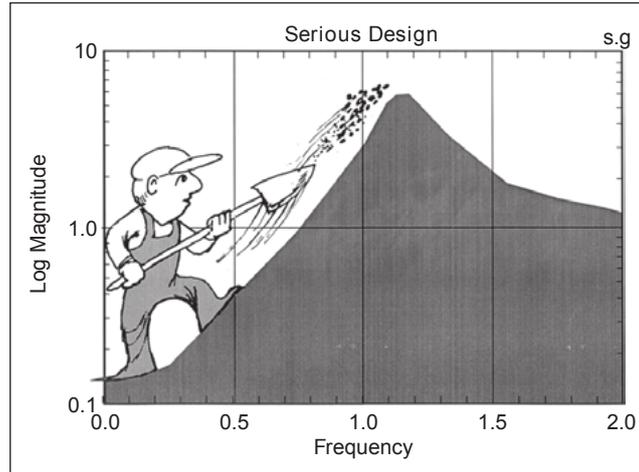


Abbildung 3.4: Wasserbett-Effekt der Sensitivitätsfunktion
(Quelle: G. Stein, Respect the Unstable, [98])

Theorem 3.2 *In a single-loop feedback amplifier of more than one stage, the average regeneration and degeneration over the complete frequency spectrum is zero.* ■

WESTCOTT beweist 1952 in [103] das Theorem von BODE. In der Regelungstheorie wird die mathematische Notation von Theorem 3.2 als Gleichgewichtstheorem bezeichnet. Es gilt für stabile LTI-Systeme mit einem Polüberschuss von mindestens zwei:

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \log|S(j\omega)|dj\omega = 0 \quad (3.26)$$

Reale Regelstrecken in der Antriebstechnik bestehen in der Regel aus einem Stellglied, der eigentlichen Strecke sowie einem Messglied für die zu regelnde Größe. Jedes dieser Elemente hat einen Polüberschuss von mindestens eins, die gesamte Regelstrecke weist somit einen Polüberschuss von drei und höher auf. [67, S. 309ff.] Das Gleichgewichtstheorem ist somit für Antriebsregelungen in industriellen Applikationen gültig und führt zu grundlegenden Restriktionen bei den Möglichkeiten der Verbesserung des Störverhaltens eines Regelkreises. Dieser grundlegende Aspekt wird auch als *Wasserbett-Effekt* bezeichnet und ist in Abbildung 3.4 illustriert: Eine Reduktion der Sensitivität im niedrigen Frequenzbereich führt gleichermaßen zu einer Erhöhung der Sensitivität bei höheren Frequenzen [98]. In [74] wird die Gültigkeit des Gleichgewichtstheorems auf zeitdiskrete Systeme erweitert.

Eine charakteristische Kenngröße eines Regelkreises ist die maximale Überhöhung der Sensitivitätsfunktion im Mitkoppelbereich der Regelung. Im allgemeinen wird dieser Maximalwert der Sensitivitätsfunktion z.B. in [23] mit der ∞ -Norm der Sensitivitätsfunktion $S(j\omega)$ bestimmt:

$$\|S\|_{\infty} := \sup_{\omega} |S(e^{j\omega T_s})| \quad (3.27)$$

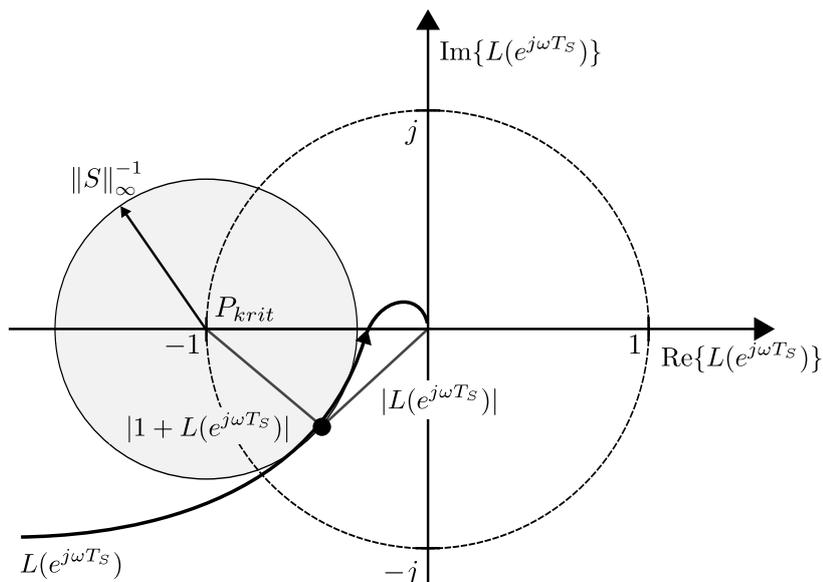


Abbildung 3.5: NYQUIST-Diagramm mit Kreis für konstante maximale Sensitivität

Für experimentell ermittelte Frequenzgänge wird der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion grafisch aus dem Verlauf der Ortskurve des offenen Regelkreises im NYQUIST-Diagramm bestimmt. Dafür wird der minimale Betragsabstand der Ortskurve des offenen Regelkreises $L(e^{j\omega T_s})$ zum kritischen Punkt im NYQUIST-Diagramm ausgewertet:

$$\|S\|_{\infty} = \frac{1}{\min |1 + L(e^{j\omega T_s})|} \quad (3.28)$$

Folglich lassen sich die geometrischen Orte im NYQUIST-Diagramm, an denen beliebige Sensitivitätsfunktionen den gleichen Betrag annehmen, als Kreise um den kritischen Punkt zusammenfassen. Der kleinste von der Ortskurve des offenen Regelkreises tangierte Kreis entspricht dem minimalen Betragsabstand und wird auch als *Modulus margin* bezeichnet [34]. Der Radius dieses Kreises entspricht nach Gleichung 3.28 der inversen maximalen Sensitivität $\|S\|_{\infty}^{-1}$ des Regelkreises. In Abbildung 3.5 ist exemplarisch ein Kreis für eine maximale Sensitivität $\|S\|_{\infty} \approx \sqrt{2}$ dargestellt. Der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion liegt typischerweise im Bereich der Amplituden- und der Phasendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises. Der Kreis mit Radius $\|S\|_{\infty}^{-1}$ und Mittelpunkt im kritischen Punkt wird im Folgenden als Sensitivitätskreis bezeichnet.

Bei Vorgabe einer maximalen Sensitivität $\|S\|_{\infty}$ als Entwurfsziel für den Regelkreis wird eine gewisse Amplituden- und Phasenreserve nach Definition 3.2 und 3.3 sichergestellt. Der garantierte Amplitudenrand A_M wird aus dem Abstand des Schnittpunktes des Sensitivitätskreises mit der reellen Achse zum Ursprung berechnet:

$$\frac{1}{A_M} = 1 - \|S\|_{\infty}^{-1} \Rightarrow A_M(\|S\|_{\infty}) = \frac{\|S\|_{\infty}}{\|S\|_{\infty} - 1} \quad (3.29)$$

Der garantierte Phasenrand Φ_M entspricht dem eingeschlossenen Winkel zwischen der negativen reellen Achse und einer Geraden die vom Ursprung zum Schnittpunkt von Einheitskreis und Sensitivitätskreis verläuft. Der garantierte Phasenrand ist somit nur vom Radius des Sensitivitätskreises abhängig und wird mit dem Halbwinkelsatz [9] berechnet:

$$\sin \frac{\Phi_M}{2} = \frac{\|S\|_\infty^{-1}}{2} \Rightarrow \Phi_M(\|S\|_\infty) = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{1}{2\|S\|_\infty} \right) \quad (3.30)$$

Beispielsweise ist bei Vorgabe einer maximalen Sensitivität von $\|S\|_\infty = \sqrt{2}$ ($\hat{=}$ 3dB) ein Amplitudenrand von $A_M = 3,41$ ($\hat{=}$ 10,6dB) und ein Phasenrand von $\Phi_M = 41,4$ Grad garantiert. Weiterhin ist die Überhöhung im Mitkoppelungsbereich auf den vorgegebenen Maximalwert der Sensitivitätsfunktion limitiert. Entsprechend der ersten Interpretation der Sensitivitätsfunktion ist in diesem Frequenzbereich die Empfindlichkeit des Regelkreises bezüglich Modelländerungen maximal. Daraus resultiert die Forderung einer möglichst exakten Beschreibung der Regelstrecke im Bereich zwischen der Amplituden- und der Phasendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises. Schranken für die tolerierbare Modellunsicherheit werden im folgenden Abschnitt beim Entwurf einer robusten Regelung berücksichtigt.

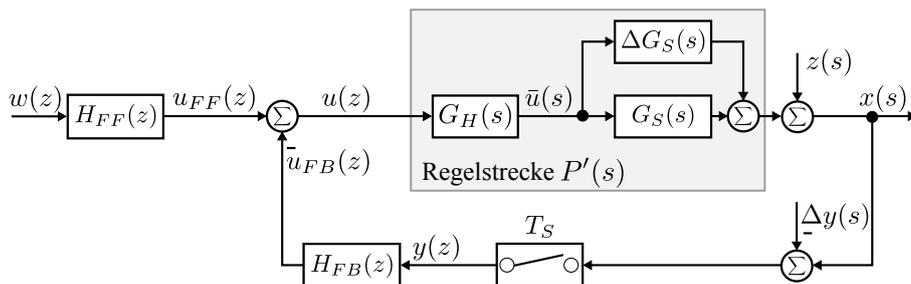
3.3 Robuste Regelung

Für die reale Regelstrecke ist aufgrund von Parameter- und Strukturunsicherheiten häufig keine exakte Modellbeschreibung verfügbar. Der Entwurf der Regelung erfolgt deshalb an einem vereinfachten oder nominellen Modell der Regelstrecke. Eine robuste Regelung gestattet eine quantitative Aussage über die tolerierbare Modellunsicherheit des nominellen Modells. Die Unsicherheit bei der Modellierung der Regelstrecke kann als additive oder multiplikative Modellunsicherheit beschrieben werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die additive Modellunsicherheit durch die Übertragungsfunktion $\Delta G(s)$ beschrieben. Das reale Modell der Regelstrecke $G'_S(s)$ ist die Summe der beiden Übertragungsfunktionen: [73, S. 11 ff.]

$$G'_S(s) = G_S(s) + \Delta G_S(s) \quad (3.31)$$

In Abbildung 3.6 ist der Regelkreis mit additiver Modellunsicherheit dargestellt. Die Stellgröße $u(z)$ der Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden wird mit einem Halteglied nullter Ordnung für eine Abtastperiode konstant gehalten und die Regelgröße $x(z)$ mit einem Abtastglied synchron dazu abgetastet. Die zeitdiskrete Beschreibung der Regelstrecke mit additiver Modellunsicherheit $P'(z)$ folgt aus der z -Transformation der zeitkontinuierlichen Strecke mit Halteglied, dabei gilt für die Transformation das Linearitätsprinzip:

$$\begin{aligned} P'(z) = \frac{y(z)}{u(z)} &= \underbrace{\mathcal{Z}\{G_H(s) \cdot G_S(s)\}}_{P(z)} + \underbrace{\mathcal{Z}\{G_H(s) \cdot \Delta G_S(s)\}}_{\Delta P(z)} \\ &= P(z) + \Delta P(z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Abbildung 3.6: Regelkreis mit additiver Modellunsicherheit $\Delta G(s)$

Die Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises mit additiver Modellunsicherheit $L'(z)$ wird mit dem realen Modell der abgetasteten Regelstrecke gebildet.

$$L'(z) = H_{FB}(z)P'(z) \quad (3.33)$$

Aufgrund der additiven Modellunsicherheit unterscheidet sich das reale Folgeregelverhalten von der nominellen Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises aus Gleichung 3.6. Das reale Folgeregelverhalten des geschlossenen Regelkreises $H'(z)$ berücksichtigt zwangsläufig das Modell mit additiver Modellunsicherheit:

$$H'(z) = \frac{x(z)}{w(z)} = \frac{H_{FF}(z)P'(z)}{1 + H_{FB}(z)P'(z)} \quad (3.34)$$

Der Term im Nenner von Gleichung 3.34 beschreibt die Rückführdifferenzfunktion des Regelkreises mit additiver Modellunsicherheit $F'(z)$. Diese wird mit Gleichung 3.32 als Überlagerung

- der nominellen Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(z)$
- und dem Produkt aus additiver Modellunsicherheit sowie der Impulsübertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers $\Delta P(z)H_{FB}(z)$

dargestellt. ([5, S. 91])

$$F'(z) = 1 + L'(z) = 1 + L(z) + H_{FB}(z)\Delta P(z) \quad (3.35)$$

Die Impulsübertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers führt in Gleichung 3.35 zu einer frequenzabhängigen Gewichtung der unsicheren Streckenkomponente $\Delta P(z)$. Daraus resultiert die Forderung einer exakten Beschreibung der Regelstrecke in Frequenzbereichen mit hohen Reglerverstärkungsfaktoren. Im NYQUIST-Diagramm wird die nominelle Ortskurve des offenen Regelkreises von dem Produkt aus additiver Modellunsicherheit und Impulsübertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers überlagert. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.7 exemplarisch für eine Modellunsicherheit bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises dargestellt. Die reale Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises mit

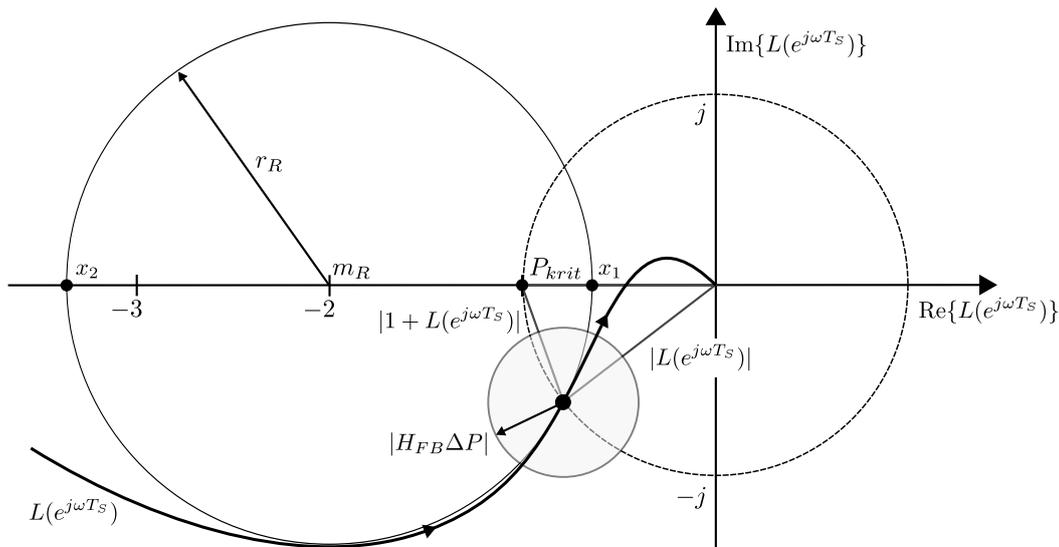


Abbildung 3.7: NYQUIST-Diagramm mit additiver Modellunsicherheit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises und Apolloniuskreis

additiver Modellunsicherheit liegt in einem Kreis um diesen Punkt. Der Radius des Kreises entspricht dem Betrag des Produkts aus additiver Modellunsicherheit und Impulsübertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers bei der entsprechenden Kreisfrequenz.

Der Betragsabstand der nominellen Ortskurve des offenen Regelkreises zum kritischen Punkt im NYQUIST-Diagramm entspricht der Strecke $|1 + L(z)|$. Der Regelkreis ist stabil, solange der Betrag des Produkts aus additiver Modellunsicherheit und Impulsübertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers kleiner ist als der Betragsabstand der nominellen Ortskurve des offenen Regelkreises zum kritischen Punkt:

$$|H_{FB}(z)\Delta P(z)| < |1 + L(z)| \quad (3.36)$$

Die Ungleichung 3.36 gestattet eine quantitative Aussage über die tolerierbare Modellunsicherheit des Regelkreises und ist nach [5, S. 92], [73] und [67] das grundlegende Kriterium zur Überprüfung der robusten Stabilität einer Regelung:

Theorem 3.3 Stabilitätskriterium für robuste Stabilität

Ist der aus der nominalen Regelstrecke $P(z)$ und dem *Feedback*-Regler $H_{FB}(z)$ gebildete Regelkreis stabil und ist die Anzahl der Pole außerhalb des Einheitskreises von $P(z)$ und $P'(z)$ identisch, dann ist der Regelkreis genau dann robust stabil, wenn die Ungleichung 3.36 für $|z| = 1$ erfüllt ist. ■

An dieser Stelle sei ergänzt, das es sich bei der Ungleichung 3.36 gewissermaßen um eine „worst-case“-Betrachtung handelt und somit das Theorem 3.3 ein konservatives Stabilitätskriterium darstellt. Aufgrund der Modellunsicherheit kann die Ortskurve des offenen Regelkreises jeden Punkt des Kreises mit Radius $|H_{FB}(z)\Delta P(z)|$ durchlaufen - und demnach

sogar den Abstand der Ortskurve zum kritischen Punkt vergrößern. Ist in einer Applikation die Art der Modellunsicherheit bekannt, so kann diese in den Stabilitätsuntersuchungen mit berücksichtigt werden. Im allgemeinen Fall wird die erforderliche relative Genauigkeit des Modells für robuste Stabilität berechnet, indem die Ungleichung 3.36 durch die nominelle Impulsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises nach Gleichung 3.9 dividiert wird [5, S. 92].

$$\left| \frac{\Delta P(z)}{P(z)} \right| < \left| \frac{1 + L(z)}{L(z)} \right| \quad (3.37)$$

Der inverse Ausdruck der rechten Seite zur Berechnung der erforderlichen relativen Genauigkeit ergänzt die Sensitivitätsfunktion zu Eins und wird als komplementäre Sensitivitätsfunktion $T(z)$ bezeichnet. Die Impulsübertragungsfunktion der komplementären Sensitivität beschreibt in Gleichung 3.8 den Einfluss von Messfehlern im Rückkoppelzweig der Regelung auf die Ausgangsgröße der Regelstrecke. Im Regelkreis mit einem Freiheitsgrad entspricht diese Impulsübertragungsfunktion zugleich dem Folgeregelverhalten des geschlossenen Regelkreises.

$$T(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} \quad (3.38)$$

Der Maximalwert der komplementären Sensitivität ist eine weitere charakteristische Kenngröße eines Regelkreises und wird in [23] allgemein mit der ∞ -Norm berechnet:

$$\|T\|_{\infty} := \sup_{\omega} |T(e^{j\omega T_S})| \quad (3.39)$$

Im NYQUIST-Diagramm wird der Betrag der komplementären Sensitivität für eine beliebige Kreisfrequenz aus dem Verhältnis der Abstände von einem Punkt der Ortskurve des offenen Regelkreises zum Ursprung beziehungsweise zum kritischen Punkt ermittelt.

$$|T(e^{j\omega T_S})| = \frac{|L(e^{j\omega T_S})|}{|1 + L(e^{j\omega T_S})|} \quad (3.40)$$

Die geometrischen Orte im NYQUIST-Diagramm, an denen alle beliebigen komplementären Sensitivitätsfunktionen den gleichen Betrag annehmen, werden durch einen Apolloniuskreis dargestellt. Der Radius $r_R(e^{j\omega_x T_S})$ und der Mittelpunkt $m_R(e^{j\omega_x T_S})$ eines Apolloniuskreises für eine beliebige Kreisfrequenz ω_x wird aus dem Betrag der komplementären Sensitivitätsfunktion bei dieser Kreisfrequenz berechnet [35]:

$$r_R(e^{j\omega_x T_S}) = \frac{|T(e^{j\omega_x T_S})|}{|T(e^{j\omega_x T_S})|^2 - 1} \quad (3.41)$$

$$m_R(e^{j\omega_x T_S}) = -\frac{|T(e^{j\omega_x T_S})|^2}{|T(e^{j\omega_x T_S})|^2 - 1} \quad (3.42)$$

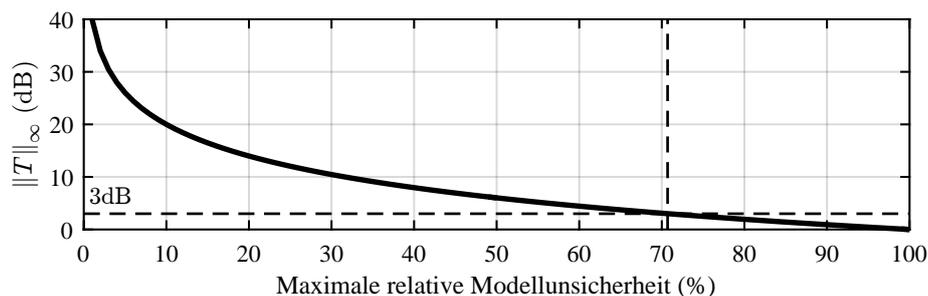


Abbildung 3.8: Zusammenhang der Maximalwerte der komplementären Sensitivität und der relativen Modellabweichung

In Abbildung 3.7 auf Seite 53 ist beispielhaft ein Apolloniuskreis für einen konstanten Betrag der komplementären Sensitivitätsfunktion von $|T(e^{j\omega_{CO}T_s})| = \sqrt{2}$ ($\hat{=} 3$ dB) bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises dargestellt. Der kleinste von der Ortskurve des offenen Regelkreises tangierte Apolloniuskreis bestimmt den Maximalwert der komplementären Sensitivität. Die maximale relative Modellunsicherheit für robuste Stabilität muss nach Ungleichung 3.37 kleiner sein als der reziproke Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion.

$$\max \left| \frac{\Delta P(z)}{P(z)} \right| < \|T\|_{\infty}^{-1} \quad (3.43)$$

Aufgrund diesen Zusammenhangs wird der Maximalwert der komplementären Sensitivität als Robustheitsmaß der Regelung bei einer additiven Modellunsicherheit der Regelstrecke verwendet. In Abbildung 3.8 ist der Zusammenhang der maximalen relativen Modellunsicherheit und dem Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion dargestellt. Für eine Regelung mit dem Verlauf der Ortskurve des offenen Regelkreises in Abbildung 3.7 ist beispielsweise robuste Stabilität mit einer tolerierbaren Modellunsicherheit von $< 70,7$ Prozent garantiert.

Bei spezifizierbarer relativer Modellunsicherheit kann die daraus resultierende maximale komplementäre Sensitivität als Entwurfsziel für den Regelkreis vorgegeben werden. Der Apolloniuskreis kennzeichnet den Bereich, welcher von der Ortskurve des offenen Regelkreises nicht durchlaufen werden darf. Die dadurch garantierte Amplitudenreserve am Schnittpunkt x_1 des Apolloniuskreises mit der reellen Achse wird aus dem Mittelpunkt und dem Radius des Apolloniuskreises berechnet:

$$A_M(x_1) = \frac{1}{|x_1|} = \frac{1}{|m_R + r_R|} \Rightarrow A_M(x_1) = 1 + \|T\|_{\infty}^{-1} \quad (3.44)$$

Der Apolloniuskreis in Abbildung 3.7 wird von der Ortskurve des offenen Regelkreises nicht durchlaufen, dadurch ist eine Amplitudenreserve des Regelkreises von wenigstens $A_M(x_1) = 1,707$ ($\hat{=} 4,65$ dB) sichergestellt. Die garantierte Phasenreserve entspricht dem eingeschlos-

senen Winkel zwischen der negativen reellen Achse und einer Geraden die vom Ursprung zum Schnittpunkt von Einheitskreis und Apolloniuskreis verläuft. An der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises ω_{CO} gilt für den Betragsabstand zum Ursprung der komplexen Ebene

$$|L(e^{j\omega_{CO}T_S})| = 1$$

und somit beträgt der Betragsabstand zum kritischen Punkt nach Gleichung 3.40 am Schnittpunkt der beiden Kreise

$$|1 + L(e^{j\omega_{CO}T_S})| = \|T\|_{\infty}^{-1}. \quad (3.45)$$

Der garantierte Phasenrand ist somit nur vom vorgegebenen Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion abhängig und kann mit dem Halbwinkelsatz ([9]) berechnet werden.

$$\sin \frac{\Phi_M}{2} = \frac{\|T\|_{\infty}^{-1}}{2} \Rightarrow \Phi_M(\|T\|_{\infty}) = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{1}{2\|T\|_{\infty}} \right) \quad (3.46)$$

Die Vorgabe der Maximalwerte der Sensitivitätsfunktion und der komplementären Sensitivitätsfunktion $\|S\|_{\infty}$ und $\|T\|_{\infty}$ führen somit zu einer definierten Amplituden- und Phasenreserve der nominellen Ortskurve des offenen Regelkreises. Die Anforderungen an diese charakteristischen Größen des Regelkreises werden im folgenden Abschnitt für den Entwurf der Regleralgorithmen im Rahmen dieser Arbeit formuliert.

3.4 Anforderungen

Für eine robuste Auslegung der Regelkreise werden im Design der Regleralgorithmen die Maximalwerte der Sensitivitätsfunktion sowie der komplementären Sensitivitätsfunktion berücksichtigt. Als Entwurfsziel soll der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion $\|S\|_{\infty}$ auf 3 dB begrenzt werden. Der zulässige Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion $\|T\|_{\infty}$ für einen Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden wird anhand der Modellunsicherheit der nominellen Regelstrecke im folgenden Kapitel diskutiert. Für einen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad beschreibt die komplementäre Sensitivitätsfunktion zugleich das Folgeregelverhalten des geschlossenen Regelkreises und wird dadurch typischerweise auf einen Maximalwert von 1 dB begrenzt. Mit den Maximalwerten als Robustheitsmasse wird entsprechend den Gleichungen 3.29, 3.30, 3.44 und 3.46 ein Amplituden- und Phasenrand A_M und Φ_M der Ortskurve des offenen Regelkreises garantiert. Unter Einhaltung dieser Maximalwerte soll durch geeignete Regleralgorithmen ein möglichst großer Gegenkopplungsbereich der Regelung entstehen.

Die typischen Verläufe des Betrags der Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises, der Sensitivitätsfunktion sowie der komplementären Sensitivitätsfunktion sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Die Regelung bewirkt nur im Gegenkopplungsbereich eine Unterdrückung der im

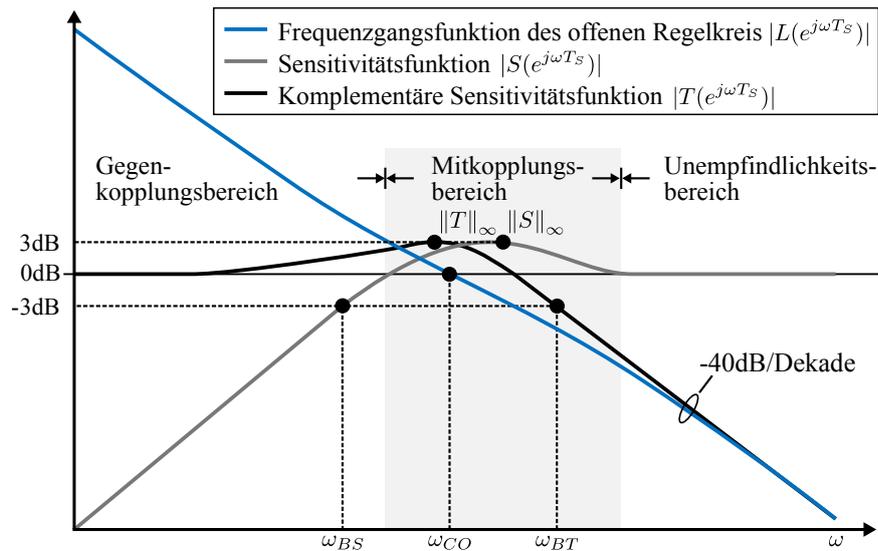


Abbildung 3.9: Charakteristische Frequenzgangsfunktionen eines Regelkreises

Regelkreis eingreifenden Störgrößen. Im Rahmen dieser Arbeit soll mit einer Beschleunigungsregelung das Störverhalten eines mechanisch steifen Antriebs verbessert werden. Dementsprechend wird dieser Frequenzbereich als Bandbreite der Regelung definiert:

Definition 3.4 Bandbreite der Regelung

Gefordert wird eine Störunterdrückung durch die Regelung von mindestens 3 dB ($\cong 1/\sqrt{2}$). Diese Anforderung ist erfüllt, solange der Betrag der Sensitivitätsfunktion unter dieser Schranke liegt:

$$|S(e^{j\omega T_s})| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die obere Grenze des Frequenzbereichs ω_{BS} für den diese Bedingung erfüllt ist wird Bandbreite der Regelung genannt. ■

Die Forderung eines großen Gegenkopplungsbereich ist gleichbedeutend mit einer möglichst hohen Amplitudendurchtrittsfrequenz ω_{CO} des offenen Regelkreises. Die Störunterdrückung wird mit hohen Werten der Kreisverstärkung des offenen Regelkreises in der Regel durch ein integrierendes Regelkreiselement erreicht. Für die Einhaltung der Maximalwerte ist der Betragsabstand der Ortskurve des offenen Regelkreises zum kritischen Punkt in der komplexen Ebene ausschlaggebend.

Dieser Zusammenhang führt zu einer grundlegenden Restriktion beim Design und der Parametrierung der Regleralgorithmen: Wird beispielsweise die Kreisverstärkung des offenen Regelkreises durch eine Proportionalverstärkung erhöht, so führt dies zwangsläufig zu einer Reduktion des Phasen- und Amplitudenrands. Mit Korrekturgliedern z.B. zur Phasenhebung wird der Amplitudengang des offenen Regelkreises gleichermaßen proportional zur Frequenz

angehoben. Der Amplitudenrand wird dadurch reduziert und die Tiefpasscharakteristik der Regelstrecke im entsprechenden Frequenzbereich kompensiert. Entsprechend Gleichung 3.25 wird dadurch der Unempfindlichkeitsbereich der Regelung zu höheren Frequenzen verschoben. Im Frequenzbereich über der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises resultieren daraus die Anforderungen

- einer Begrenzung der Amplitudenanhebung durch die Regleralgorithmen
- und eines (monotonen) Amplitudenabfalls mit mindestens 40 dB je Dekade.

Der Einfluss von Messfehlern im Rückkoppelzweig der Regelschleife auf die Regelgröße wird entsprechend Gleichung 3.8 durch die komplementäre Sensitivitätsfunktion des Regelkreises beschrieben. Im Gegen- und Mitkopplungsbereich wird die Regelgröße durch Messfehler maßgeblich beeinflusst. Dieser Frequenzbereich wird als Bandbreite der komplementären Sensitivität definiert:

Definition 3.5 *Einfluss von Messfehlern*

Die Regelgröße wird durch Messfehler maßgeblich beeinflusst, solange diese im Regelkreis mit mindestens -3 dB ($\hat{=} 1/\sqrt{2}$) verstärkt werden. Dies ist erfüllt, solange der Betrag der komplementären Sensitivitätsfunktion über dieser Schranke liegt:

$$\left| T(e^{j\omega T_s}) \right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die obere Grenze des Frequenzbereichs ω_{BT} für den diese Bedingung erfüllt ist wird Bandbreite der komplementären Sensitivitätsfunktion genannt. ■

In einem Regelkreis mit einem Freiheitsgrad beschreibt die Bandbreite der komplementären Sensitivitätsfunktion zugleich die Bandbreite des Folgeregelverhaltens des geschlossenen Regelkreises.

4 Regelung mechanisch steifer Antriebe

In diesem Kapitel erfolgt die Modellierung einer dreiphasigen permanentmagneterregten Synchronmaschine (PMSM) im rotorfesten d/q-Koordinatensystem und eines Pulswechselrichters mit Spannungszwischenkreis. Darauf aufbauend erfolgt die Beschreibung und Parametrierung der Regelungsalgorithmen für mechanisch steife Antriebe. Für die Positionsregelung wird eine kaskadierte Regelungsstruktur verwendet. Diese besteht bei rotatorischen Antrieben aus einer Positions-, Drehzahl- und Stromregelung. Die Rückführgröße für den Drehzahlregelkreis wird aus der gemessenen Position berechnet. Die Umsetzung der Regelungsalgorithmen in der Regeleinrichtung erfolgt entsprechend den zeitlichen Anforderungen in Software auf einem Microcontroller oder in digitaler Hardware z.B. mit einem FPGA oder ASIC. Das dabei zugrunde gelegte Antriebssystem ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Als elektrische Maschinen werden vorzugsweise permanentmagneterregte Synchronmaschinen mit Dauermagneten aus Seltenerd-Magneten verwendet [31, S. 343]. Aufgrund der hohen erreichbaren Energiedichte der Dauermagnete zeichnen sich diese Antriebe durch eine kleine Eigenmasse, einem kleinen Rotorträghheitsmoment und einem günstigen Wirkungsgrad aus [91, S. 55]. Der magnetische Fluss und das Drehmoment der permanentmagneterregten Synchronmaschine werden in feldorientierter Regelung über den Längs- und Querstrom der Maschine im rotorfesten Koordinatensystem geregelt. Der Feldwinkel für die Koordinatentransformation der feldorientierten Regelung wird aus dem Positionsmesswert berechnet.

Der Leistungsfluss der Antriebsmaschine wird mit einem Pulswechselrichter mit Spannungszwischenkreis gesteuert. Für Antriebsregelungen im industriellen Umfeld werden aufgrund der hohen Sperrspannungen IGBT-Leistungshalbleiter eingesetzt, deren Schaltfrequenz typischerweise zwischen 2 kHz und 32 kHz liegt [4]. Die Ansteuersignale für die Leistungselektronik werden mit einer Pulsweitenmodulation (PWM) nach dem Unterschwingungsverfahren erzeugt. Für eine Abtastung der Grundwelle des Maschinenstroms ist die Strommessung mit dem dreieckförmigen Trägersignal der Pulsweitenmodulation synchronisiert. Die Implementierung erfolgt auf einem FPGA.

Der Positionsmesswert wird in der Folgeelektronik entsprechend Kapitel 2.1 aus den sinusförmigen Messsignalen durch Zählen der Nulldurchgänge und Unterteilung in einer Signalperiode berechnet. Die Signalfrequenz der sinusförmigen Messsignale \vec{u}_{MS} eines Winkelmessgerätes wird entsprechend Gleichung 2.35a aus der Anzahl der Signalperioden in einer Umdrehung und der Drehzahl des Antriebs berechnet. Bei hohen Drehzahlen erreicht die Frequenz der

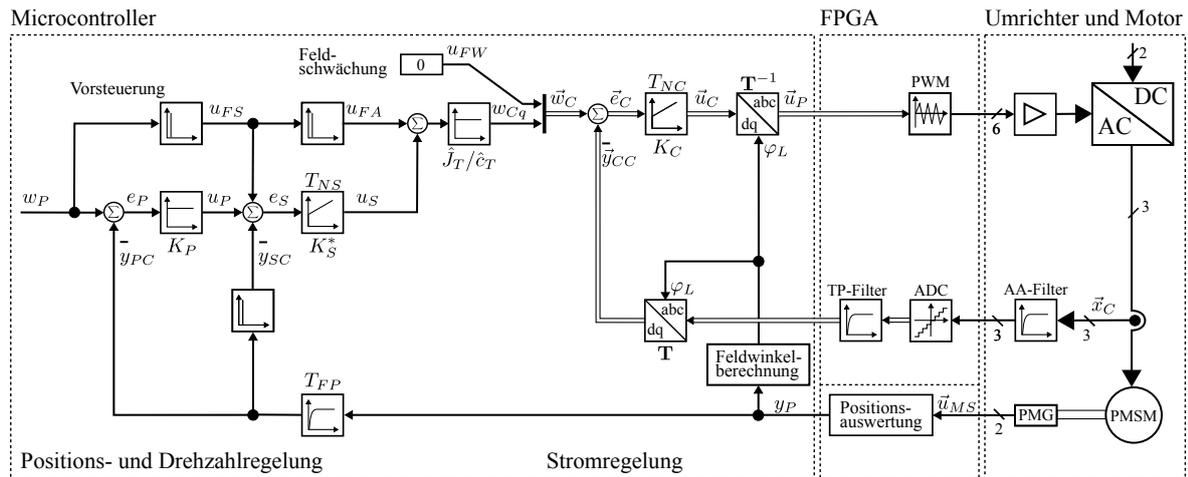


Abbildung 4.1: Antriebssystem zur Regelung mechanisch steifer Servoantriebe

Messsignale von Positionsmessgeräten mit optoelektronischen Abtastprinzipien den dreistelligen kHz-Bereich. Für die Erfassung der Nulldurchgänge der Messsignale ist eine entsprechend hohe Abtastrate der Auswertelektronik erforderlich. Dies wird durch eine Realisierung der Auswertelektronik in einem FPGA erreicht.

4.1 Steuerung des Leistungsflusses

Der Leistungsfluss der permanentmagneterregten Synchronmaschine wird mit einem Pulsrichter mit Spannungszwischenkreis gesteuert. Das symmetrische Drehfeld eines dreisträngigen elektrischen Motors wird aus den zeitabhängigen Referenzwerten der Phasenspannungen u_A , u_B und u_C mit Effektivwert U_{eff} erzeugt. „Üblicherweise sollen die Phasenspannungen ein symmetrisches Dreiphasensystem bilden, bestehend aus 3 um je eine Drittelperiode versetzten, identischen sinusförmigen Signalen.“ [52, S. 136]

$$u_{A,Soll}(t) = \sqrt{2}U_{eff} \sin(\omega_{El}t) \quad (4.1a)$$

$$u_{B,Soll}(t) = \sqrt{2}U_{eff} \sin\left(\omega_{El}t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.1b)$$

$$u_{C,Soll}(t) = \sqrt{2}U_{eff} \sin\left(\omega_{El}t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (4.1c)$$

Bei Synchronmaschinen resultiert die elektrische Kreisfrequenz der Phasenspannungen ω_{El} aus der Polpaarzahl z_P und der Drehzahl n_{Mo} des Motors.

$$\omega_{El} = \omega_{Mo}z_P \quad \text{mit } \omega_{Mo} = 2\pi n_{Mo} \quad (4.2)$$

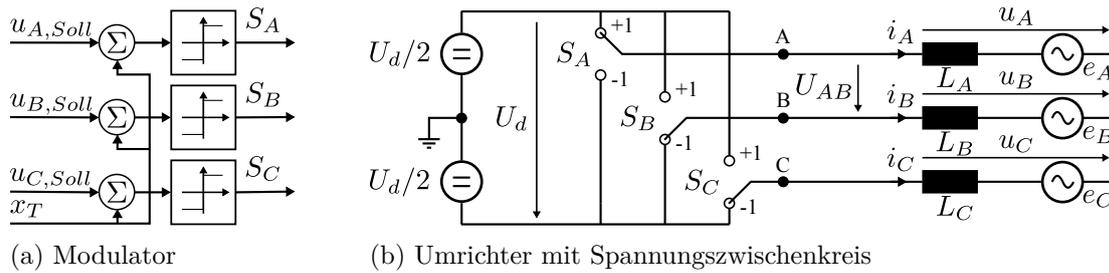


Abbildung 4.2: Erzeugung eines symmetrischen Dreiphasensystems zur Speisung einer permanentmagneterregten Synchronmaschine mit einer dreiphasigen Brückenschaltung und dem Pulsweitenmodulationsverfahren [52, S. 135]

Bei Umrichtern mit Spannungszwischenkreis ist „ein geeignetes Stromregelverfahren notwendig, welches das Pulsmuster im Wechselrichter und damit die erforderliche Statorspannung in Amplitude und Phasenlage festlegt“. [93, S. 666] Der Modulator in Abbildung 4.2a erzeugt aus den Referenzwerten der Phasenspannungen die Ansteuersignale S_A , S_B und S_C für die Leistungshalbleiter des Spannungspulsumrichters. Die Pulserzeugung erfolgt nach dem Verfahren der Pulsweitenmodulation (PWM) mit einem symmetrischen Dreiecksignal x_T . Dieses Trägerverfahren stammt ursprünglich aus der Nachrichtentechnik und zählt in der Antriebstechnik, mit der Raumvektormodulation, zu dem am häufigsten eingesetzten Verfahren zur Generierung der Ansteuersignale bei Spannungspulsumrichter [93, S. 690]. In [52, S. 83 ff.] und [93, S. 666 ff.] sind die grundlegenden Verfahren zur Pulserzeugung für Stromrichter mit Spannungszwischenkreis ausführlich erläutert.

In Abbildung 4.2b ist der dreiphasige Umrichter mit Spannungszwischenkreis und angeschlossener symmetrischer Last dargestellt. Der Spannungszwischenkreis wird mit zwei Gleichspannungsquellen mit gemeinsamen Bezugspunkt (\perp) abgebildet. Die IGBT-Leistungshalbleiter sind vereinfachend mit Schalter ersetzt. Je nach Schalterstellung liegt die Hälfte der Zwischenkreisspannung $U_d/2$ mit positiven oder negativen Vorzeichen an den Phasenausgängen A, B und C an. Die Referenzspannungen nach Gleichung 4.1 werden im zeitlichen Mittel einer Periode des Trägersignals der Pulsweitenmodulation T_{PWM} über das Tastverhältnis der Schalterstellung am Ausgang des Umrichters eingestellt. Der zeitliche Mittelwert der Potentialdifferenz zwischen einem Phasenausgang und dem gemeinsamen Bezugspunkt wird als Mittelpunktspannung bezeichnet.

Die permanentmagneterregte Synchronmaschine entspricht einer symmetrischen, gleichtaktkomponentenfreien Last. Dabei wird angenommen, dass die Summe der drei Gegenspannungen e_A , e_B und e_C Null ist und die drei Statorinduktivitäten L_A , L_B und L_C identisch sind. Der Sternpunkt der Maschine ist nicht mit dem Bezugspunkt des Zwischenkreises verbunden, dadurch kann das Sternpunktpotential innerhalb einer Periode der Pulsweitenmodulation variieren. Die Sternpunktspannung enthält jedoch keinen Grundschwungsanteil und somit sind die Mittelpunkt- und Phasenspannungen identisch [52, S. 357 ff.].

Ein Umrichter mit Spannungszwischenkreis zur Speisung einer dreiphasigen Maschine ist als Erweiterung des Pulsrichters mit einphasigen Ausgang zu verstehen [91]. Exemplarisch wird deshalb in Abbildung 4.3 der typische Signalverlauf eines Einphasen-Wechselrichters dargestellt und nachfolgend erläutert. Für die Referenzspannung gilt $u_A = -u_B$. Der Modulator arbeitet nach dem Prinzip des *Single Edge Sampling*. Dabei werden die Referenzspannungen zu Beginn einer Periode des Trägersignals abgetastet (\blacktriangle) und sind für die folgende Periode wirksam [52, S. 115 ff.]. Innerhalb dieser Periode werden die Schaltzeitpunkte der Leistungshalbleiter aus den Schnittpunkten des Trägersignals mit den Referenzspannungen ermittelt (\star). Aufgrund des rechteckförmigen Verlaufs der verketteten Spannung ist die Grundwelle des Leiterstroms von einem näherungsweise dreieckförmigen Stromripple überlagert. Für eine Grundwellenabtastung des Leiterstroms wird die Strommessung mit den Scheitelwerten des Trägersignals des Modulators (\blacksquare) synchronisiert.

Innerhalb einer Periode der Pulsweitenmodulation erfolgt die Spannungsausgabe mit zwei identischen Spannungszeitflächen. Jeweils die Hälfte der Referenzspannung wird symmetrisch um die Nulldurchgänge des Trägersignals verteilt. Die zeitliche Verzögerung der Spannungsausgabe in Bezug auf den Zeitpunkt der Änderung der Referenzspannung ist mit einer Totzeit modellierbar. Der Modulationsgrad M hat einen Einfluss auf den Amplitudengang des Modulators, die Abtastperiode beeinflusst den Amplituden- und Phasenterm des Modulators. Das Kleinsignalverhalten eines Pulsweitenmodulators mit symmetrischen Trägersignal wird nach [19, S. 318ff.] mit folgender Frequenzgangfunktion beschrieben:

$$F_{PWM,Sym}(j\omega) = \frac{\bar{u}(j\omega)}{u(j\omega)} = \cos\left(\frac{\omega M T_{PWM}}{2}\right) e^{-j\omega T_{PWM}/2} \quad (4.3)$$

Mit der Frequenzgangfunktion des Modulators wird der Zusammenhang des Mittelwerts der Ausgangsspannung in einer Periode $\bar{u}(j\omega)$ und der abgetasteten Referenzspannung $u(j\omega)$ als Funktion der Kreisfrequenz ω beschrieben. Für regelungstechnische Betrachtungen wird die Pulsweitenmodulation üblicherweise mit der Übertragungsfunktion eines Abtast-Halteglieds nullter Ordnung $G_H(s)$ modelliert (vergl. [2], [91]).

$$G_H(s) = \frac{\bar{u}(s)}{u(s)} = \frac{1 - e^{-sT_{PWM}}}{T_{PWM}s} \quad (4.4)$$

Diese Modellierung basiert auf der Annahme, dass die Referenzspannung über eine Periode der Pulsweitenmodulation am Ausgang der Spannungspulswechselrichters konstant eingestellt wird. Im zeitlichen Mittel einer Periode der Pulsweitenmodulation ist diese Näherung erfüllt. Für einen Vergleich mit der Frequenzgangfunktionen des Modulators nach Gleichung 4.3 wird die Frequenzgangfunktion des Abtast-Halteglieds nullter Ordnung $G_H(j\omega)$ aus Gleichung 4.4 für $s = j\omega$ berechnet:

$$G_H(j\omega) = \frac{\bar{u}(j\omega)}{u(j\omega)} = \text{si}\left(\frac{\omega T_{PWM}}{2}\right) e^{-j\omega T_{PWM}/2} \quad (4.5)$$

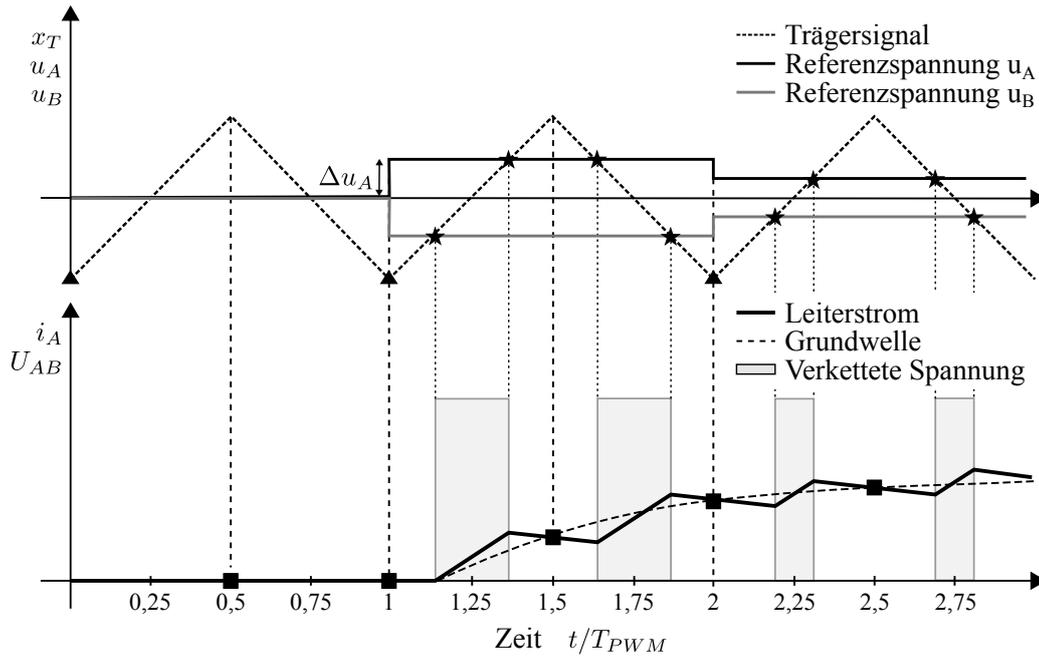


Abbildung 4.3: Kleinsignalverhalten eines Spannungszwischenkreisumrichters

In den Gleichungen 4.3 und 4.5 ist der Phasenterm identisch. In beiden Fällen beträgt die Phasenverzögerung eine halbe Periode der Pulsweitenmodulation. Die periodisch auftretenden Nullstellen ω_N der Frequenzgangfunktion des Modulators variieren mit dem Modulationsgrad und der Periodendauer des Trägersignals. Die Lage der ersten Nullstelle wird mit folgender Gleichung beschrieben:

$$\omega_N(M, T_{PWM}) = \frac{\pi}{M T_{PWM}}, \quad \omega_N \in [\omega_{PWM}/2, \infty] \text{ für } 0 \leq M \leq 1 \quad (4.6)$$

Für $M = 0,5$ liegt die erste Nullstelle der beiden Frequenzgangfunktionen bei der Abtastfrequenz des Modulators $\omega_{PWM} = 2\pi/T_{PWM}$. Bei diesem Modulationsgrad ist der Unterschied im Amplitudengang der beiden Frequenzgangfunktionen für $\omega < \omega_{PWM}$ vernachlässigbar. Aufgrund des Einflusses des Modulationsgrads wird der Amplitudengang des Modulators im Allgemeinen nur im niedrigen Frequenzbereich $\omega < 0,1\omega_{PWM}$ durch ein Abtast-Halteglied korrekt beschrieben.

Für eine regelungstechnische Modellierung des Modulators als Abtast-Halteglied stellt die Amplitudenabweichung im Rahmen dieser Arbeit keine relevante Einschränkung dar: Typischerweise liegt die Amplitudendämpfung des Modulators bei den üblichen Abtastfrequenzen ohnehin deutlich über den Eckfrequenzen des elektrischen Teilsystems eines Servoantriebs. Somit kann der Amplitudenunterschied zwischen Abtast-Halteglied und Modulator als Modellabweichung im höheren Frequenzbereich aufgefasst werden.

4.2 Permanentmagneterregte Synchronmaschine

Die Regelung von dreiphasigen Maschinen erfolgt üblicherweise mit einer feldorientierten Regelung im rotorfesten Koordinatensystem. Dabei wird die permanentmagneterregte Synchronmaschine nach dem Prinzip der Grundwellenverkettung modelliert. Die dabei getroffenen Annahmen ermöglichen die mathematische Beschreibung einer Drehfeldmaschine mit der Raumzeigerdarstellung. Für regelungstechnische Betrachtungen wird die Übertragungsfunktion der permanentmagneterregten Synchronmaschine durch eine Transformation der Maschinengleichungen im rotorfesten Koordinatensystem in den LAPLACE-Bereich gebildet.

4.2.1 Raumzeigerdarstellung

Durch die Raumzeigerdarstellung können die physikalischen Größen einer dreiphasigen Drehfeldmaschine als komplexe Zeigergröße in ein zweiachsiges Koordinatensystem überführt werden. Insbesondere wird die Raumzeigerdarstellung für die Statorspannungen u , die Statorströme i und die Statorflüsse Ψ der Drehfeldmaschine angewendet. Voraussetzung für eine Darstellung als Raumzeiger ist, dass die Summe der physikalischen Größen des dreiphasigen Systems $x_A(t)$, $x_B(t)$ und $x_C(t)$ zu jeden Zeitpunkt gleich Null ist:

$$0 = x_A(t) + x_B(t) + x_C(t) \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.7)$$

Im symmetrischen, dreiphasigen System sind nur zwei der drei physikalischen Größen unabhängig, dadurch ist eine Beschreibung des System mit zwei Größen möglich. Die Transformation der Momentanwerte des Stators in ein statorfestes α/β -Koordinatensystem erfolgt mit dem komplexen Drehzeiger \underline{a} :

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (4.8)$$

Der Statorraumzeiger \vec{x}_1^S wird durch die Multiplikation der Momentanwerte der physikalischen Größen des dreiphasigen Systems mit dem komplexen Drehzeiger berechnet. Dabei wird nach Kovács und Rácz in [60] die räumliche Anordnung des dreiphasigen Systems mit dem Exponenten des komplexen Drehzeigers berücksichtigt:

$$\vec{x}_1^S = \frac{2}{3} \left(x_A(t)\underline{a}^0 + x_B(t)\underline{a}^1 + x_C(t)\underline{a}^2 \right) \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.9)$$

Der Vorfaktor $2/3$ ist eine Transformationskonstante, welche für eine amplitudeninvariante Transformation des dreiphasigen Systems in ein zweiachsiges Koordinatensystem erforderlich ist. In der verwendeten Nomenklatur beschreibt der Index 1 eine Statorgröße und der Index 2 eine Rotorgröße. Weiter kennzeichnet der Hochindex S den Statorraum und L den Rotorraum. Der Übersichtlichkeit halber wird im Folgenden auf eine explizite Kennzeichnung der Zeitabhängigkeit der Größen verzichtet. Der Real- und Imaginärteil $x_{1\alpha}^S$ und $x_{1\beta}^S$ des komplexen Statorraumzeigers wird im statorfesten α/β -Koordinatensystem folgendermaßen

dargestellt:

$$\vec{x}_1^S = x_{1\alpha}^S + jx_{1\beta}^S \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.10)$$

Die Transformation eines mehrphasigen Systems in ein zweiachsiges Koordinatensystem wird als CLARK-Transformation bezeichnet [18]. Dabei wird die Transformation des dreiphasigen Systems in ein zweiachsiges Koordinatensystem mit einer Matrixoperation realisiert. Die Transformationsmatrix der CLARK-Transformation \mathbf{T}_1 wird berechnet, indem in Gleichung 4.9 der komplexe Drehzeiger mit der EULER'schen Formel ersetzt wird:

$$\begin{bmatrix} x_{1\alpha}^S \\ x_{1\beta}^S \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi/3) & \cos(4\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \sin(4\pi/3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_1} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.11)$$

Aus dem statorfesten Koordinatensystem wird der Raumzeiger mit einer Koordinatentransformation in das rotorfeste d/q -Koordinatensystem transformiert. Der eingeschlossene Winkel zwischen den reellen Achsen der beiden Koordinatensystemen entspricht dabei dem Transformationswinkel φ_L :

$$\vec{x}_1^L = \vec{x}_1^S e^{-j\varphi_L} \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.12)$$

In Abbildung 4.4 auf Seite 66 ist ein Raumzeiger im stator- und rotorfesten Koordinatensystem dargestellt. Die Transformation mit Gleichung 4.12 entspricht einer Rotation des Koordinatensystems um den Transformationswinkel φ_L . Die Länge des Raumzeigers wird durch die Transformation nicht verändert. Die Drehmatrix \mathbf{T}_2 wird berechnet indem der Drehoperator $e^{-j\varphi_L}$ in Gleichung 4.12 mit der EULER'schen Formel substituiert wird. Die Berechnung der Komponenten des Raumzeigers im d/q -Koordinatensystem x_{1d}^L und x_{1q}^L folgt aus der Multiplikation der Drehmatrix mit den Komponenten des statorfesten Koordinatensystems aus Gleichung 4.10:

$$\begin{bmatrix} x_{1d}^L \\ x_{1q}^L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi_L & \sin \varphi_L \\ -\sin \varphi_L & \cos \varphi_L \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_2} \cdot \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^S \\ x_{1\beta}^S \end{bmatrix} \text{ mit } x : u, i, \Psi \quad (4.13)$$

Durch eine Multiplikation der Matrizen \mathbf{T}_2 und \mathbf{T}_1 wird die Koordinatentransformation mit der Transformationsvorschrift \mathbf{T} zusammengefasst. Die direkte Transformation des dreiphasigen Statorsystems in das rotorfeste d/q -Koordinatensystem wird als PARK-Transformation bezeichnet [78].

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_L) & \cos(\varphi_L - 2\pi/3) & \cos(\varphi_L - 4\pi/3) \\ -\sin(\varphi_L) & -\sin(\varphi_L - 2\pi/3) & -\sin(\varphi_L - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

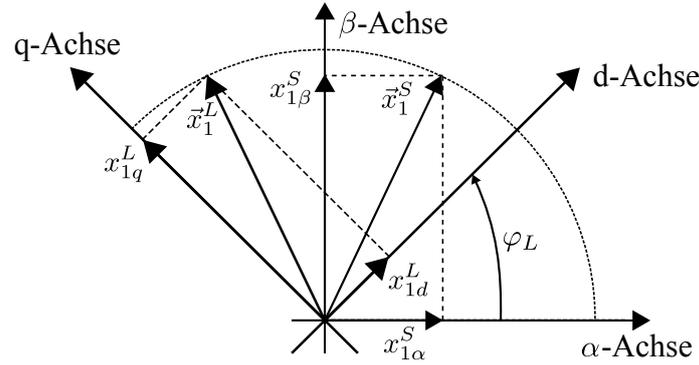


Abbildung 4.4: Raumzeigerdarstellung im stator- und rotorfesten Koordinatensystem

Die Rücktransformation des Raumzeigers aus dem rotorfesten d/q -Koordinatensystem in das dreiphasige Statorsystem erfolgt durch Invertierung der Transformationsvorschrift. Aufgrund der Orthogonalität der Drehmatrix ist die inverse Matrix gleich der transponierten Matrix $\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{T}_2^T$. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des dreiphasigen Systems (Gl. 4.7) entspricht die Inverse der Transformationsmatrix der CLARK-Transformation der transponierten Matrix $\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1^T$. Die Transformationsvorschrift für die Rücktransformation \mathbf{T}^{-1} wird durch Multiplikation der beiden transponierten Matrizen berechnet:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{T}_2^T = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_L) & -\sin(\varphi_L) \\ \cos(\varphi_L - 2\pi/3) & -\sin(\varphi_L - 2\pi/3) \\ \cos(\varphi_L - 4\pi/3) & -\sin(\varphi_L - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.2.2 Antriebsmodell in dq-Koordinaten

In Abbildung 4.5 ist der Querschnitt einer permanentmagneterregten Synchronmaschine mit einem Polpaar im stator- und rotorfesten Koordinatensystem dargestellt. Das dreiphasige Wicklungssystem des Stators wird von einem symmetrischen Drehspannungssystem versorgt. Der Rotor der Maschine ist als rotationssymmetrischer Vollpolläufer mit oberflächenmontierten Permanentmagneten ausgeführt. Weiterhin werden für die Modellierung der Maschine die folgenden Randbedingungen angenommen [92]:

- Der magnetische Fluss des Permanentmagneten ist konstant und temperaturunabhängig. Der Streufluss ist vernachlässigbar.
- Im Rotor können keine Wirbelströme fließen.
- Die verteilten Wicklungen werden durch konzentrierte Wicklungen ersetzt.
- Die Magnetisierungskennlinie des Eisens ist linear und die Sättigung des Eisens wird vernachlässigt.

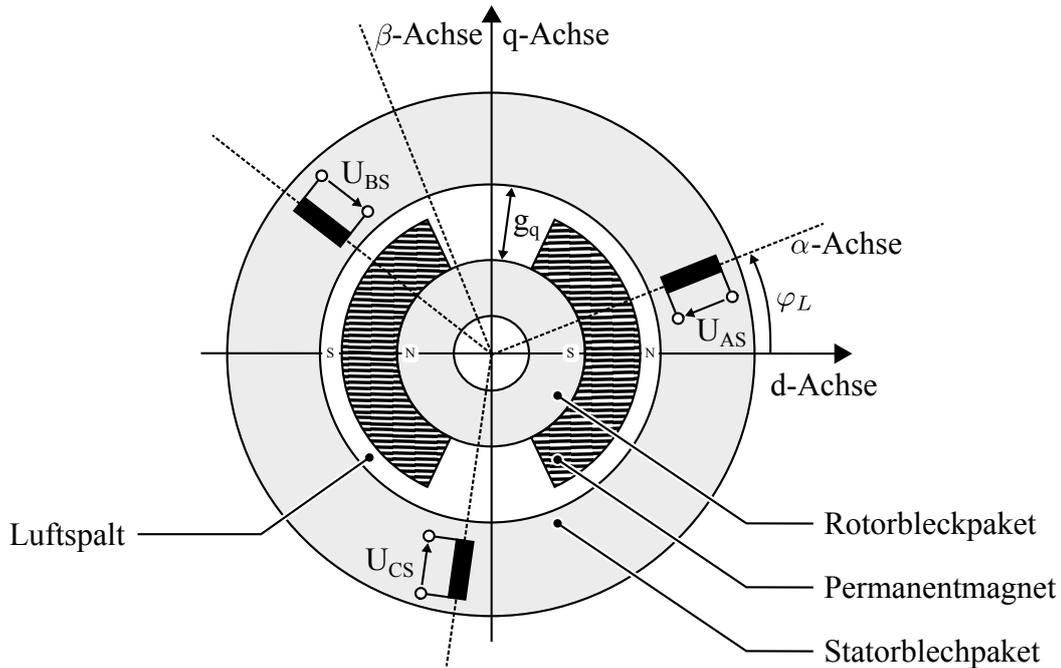


Abbildung 4.5: Querschnitt einer zweipoligen Synchronmaschine mit oberflächenmontierten Permanentmagneten im stator- und rotorfesten Koordinatensystem

In der Raumzeigerdarstellung hat die Spannungsgleichung des Statorsystems einer allgemeinen Drehfeldmaschine im statorfesten Koordinatensystem nach [93, S. 761] die Form:

$$\vec{u}_1^S(t) = R_1 \vec{i}_1^S(t) + \frac{d\vec{\Psi}_1^S(t)}{dt} \quad (4.16)$$

Die Transformation der Spannungsgleichung in das rotorfeste d/q -Koordinatensystem erfolgt mit dem Transformationswinkel $\varphi_L(t)$. Dieser entspricht der Summe des Rotorlageanfangswinkel zum Zeitpunkt Null φ_{L0} und dem zeitabhängigen Integral der elektrischen Winkelgeschwindigkeit des Rotors $\omega_{El}(t)$:

$$\varphi_L(t) = \varphi_{L0} + \int_0^t \omega_{El}(\tau) d\tau \quad (4.17)$$

Der Transformationswinkel und die Amplitude des Statorflusses sind zeitvariant. Diese Zeitabhängigkeit muss bei der Transformation der Spannungsgleichung 4.16 in das rotorfeste d/q -Koordinatensystem bei der Differentiation des Statorflusses berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\vec{\Psi}_1^S(t)e^{-j\varphi_L(t)}\right)}{dt} &= \frac{d\left(\left(\vec{\Psi}_1^S(t)e^{-j\varphi_L(t)}\right) \cdot e^{j\varphi_L(t)}\right)}{dt} \cdot e^{-j\varphi_L(t)} \\ &= \left(\frac{d\vec{\Psi}_1^L(t)}{dt} \cdot e^{j\varphi_L(t)} + \vec{\Psi}_1^L(t) \cdot \frac{de^{j\varphi_L(t)}}{dt}\right) \cdot e^{-j\varphi_L(t)} \\ &= \frac{d\vec{\Psi}_1^L(t)}{dt} + j \frac{d\varphi_L(t)}{dt} \vec{\Psi}_1^L(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der erste Term in Gleichung 4.18 beschreibt eine Spannungsinduktion aufgrund einer Amplitudenänderung und der zweite Term aufgrund einer Positionsänderung. [93, S. 432] Somit folgt für die Spannungsgleichung im rotorfesten d/q -Koordinatensystem:

$$\vec{u}_1^L(t) = R_1 \vec{i}_1^L(t) + \frac{d\vec{\Psi}_1^L(t)}{dt} + j\omega_{El}(t)\vec{\Psi}_1^L(t), \quad \text{mit } \omega_{El}(t) = \frac{d\varphi_L(t)}{dt} \quad (4.19)$$

Der amplituden- und zeitinvariante Fluss des Permanentmagneten $\vec{\Psi}_{PM} = [\Psi_{PM} \ 0]^T$ ist in Richtung der reellen Achse des rotorfesten Koordinatensystems orientiert. Die gesamte Flussverkettung im rotorfesten Koordinatensystem $\vec{\Psi}_1^L$ der permanentmagneterregten Synchronmaschine resultiert aus dem Stromfluss im Stator und dem konstanten Fluss des Permanentmagneten [92]:

$$\vec{\Psi}_1^L(t) = \mathbf{L}_1 \vec{i}_1^L(t) + \vec{\Psi}_{PM} \quad (4.20)$$

Mit der zeitinvarianten Induktivitätsmatrix

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

folgt für die d/q -Komponenten der gesamten Flussverkettung $\Psi_d(t)$ und $\Psi_q(t)$:

$$\Psi_{1d}^L(t) = L_d i_{1d}^L(t) + \Psi_{PM} \quad (4.22a)$$

$$\Psi_{1q}^L(t) = L_q i_{1q}^L(t) \quad (4.22b)$$

Alle Gleichungen liegen nun im rotorfesten Koordinatensystem vor. Dadurch wird der Übersichtlichkeit halber im Folgenden auf die explizite Kennzeichnung einer Statorgröße (Index 1) und des Rotorkoordinatensystems (Hochindex L) verzichtet. Die Raumzeiger der Statorgrößen \vec{u} , \vec{i} und $\vec{\Psi}$ werden in der Spannungsgleichung 4.19 mit den Komponenten des rotorfesten d/q -Koordinatensystems ersetzt:

$$u_d(t) = R_1 i_d(t) + \frac{d\Psi_d(t)}{dt} - \omega_{El}(t)\Psi_q(t) \quad (4.23a)$$

$$u_q(t) = R_1 i_q(t) + \frac{d\Psi_q(t)}{dt} + \omega_{El}(t)\Psi_d(t) \quad (4.23b)$$

Die d/q -Komponenten der gesamten Statorflussverkettung werden mit den Gleichungen 4.22a und 4.22b substituiert und die Spannungsgleichung in die Zustandsform überführt:

$$L_d \frac{di_d(t)}{dt} = u_d(t) - R_1 i_d(t) + L_q \omega_{El}(t) i_q(t) \quad (4.24a)$$

$$L_q \frac{di_q(t)}{dt} = u_q(t) - R_1 i_q(t) - L_d \omega_{El}(t) i_d(t) - \omega_{El}(t) \Psi_{PM} \quad (4.24b)$$

Im rotorfesten Koordinatensystem wird nach [93, S. 763] das Luftspaltmoment $m_{Mo}(t)$ einer Drehfeldmaschine aus dem Kreuzprodukt der Flussverkettung und dem Strom berechnet:

$$\begin{aligned} m_{Mo}(t) &= \frac{3}{2} z_p \left(\vec{\Psi}(t) \times \vec{i}(t) \right) \\ &= \frac{3}{2} z_p (\Psi_d(t) i_q(t) - \Psi_q(t) i_d(t)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mit den Gleichungen für die d/q -Komponenten der Flussverkettung 4.22a und 4.22b folgt nach [93, S. 845] für das Luftspaltmoment der permanentmagneterregten Synchronmaschine:

$$m_{Mo}(t) = \frac{3}{2} z_p (\Psi_{PM} i_q(t) + (L_d - L_q) i_d(t) i_q(t)) \quad (4.26)$$

Der erste Term in der Drehmomentgleichung beschreibt den proportionalen Zusammenhang zwischen Querstrom und dem Luftspaltmoment der Maschine. Der zweite Term beschreibt den Reluktanzeinfluss aufgrund unterschiedlicher Induktivitäten in Richtung der d/q -Komponenten. Diese sind von der Anzahl der Windungen der Statorwicklung und dem jeweiligen Widerstand des magnetischen Kreises abhängig.

Die relative Permeabilität von Elektroblechen liegt im Bereich von $\mu_{r,Fe} = 10^3 \dots 10^4$ und ist signifikant größer als die relative Permeabilität von Luft ($\mu_{r,Lu} \approx 1$). Bei Maschinen mit kurzen Eisenwegen dominiert deshalb der Luftspalt zwischen Stator und Rotor den Widerstand des magnetischen Kreises und folglich auch die Induktivität.

Die bei permanentmagneterregten Synchronmaschinen eingesetzten NdFeB Seltenerdwerkstoffe der Permanentmagnete haben eine relative Permeabilität von $\mu_{r,PM} = 1,1$, und liegen somit im Bereich der relativen Permeabilität von Luft. Mit oberflächenmontierten Magneten kann demnach über den gesamten Rotorumfang näherungsweise ein konstanter Luftspalt zwischen Rotor und Stator angenommen werden [31]. Der magnetische Widerstand im Luftspalt ist somit in d/q -Richtung identisch. Bei einer permanentmagneterregten Drehfeldmaschine mit oberflächenmontierten Magneten ohne Reluktanzeinflüsse gilt somit $L_d = L_q$ und damit für das Luftspaltmoment der Maschine:

$$m_{Mo}(t) = \frac{3}{2} z_p \Psi_{PM} i_q(t) \quad (4.27)$$

Die Drehmomentkonstante c_T der Maschine beschreibt den proportionalen Zusammenhang zwischen erzeugtem Luftspaltmoment und den drehmomentbildenden Querstrom:

$$c_T = \frac{m_{Mo}(t)}{i_q(t)} = \frac{3}{2} z_p \Psi_{PM} \quad (4.28)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Drehmomentkonstante mit den Datenblattangaben des Maschinenherstellers am Nenn-Betriebspunkt aus dem Effektivwert des Stroms und den dabei abgegebenen Drehmoment errechnet. Die Bewegungsgleichung der Mechanik eines me-

chanisch steifen Servoantriebs lautet:

$$J_T \frac{d\omega_{Mo}(t)}{dt} = m_{Mo}(t) - m_L(t) \quad (4.29)$$

In der Bewegungsgleichung wird das zu beschleunigende Massenträgheitsmoment mit J_T und das Lastmoment mit $m_L(t)$ berücksichtigt. Die Differenz aus Luftspaltpmoment und Lastmoment wird als Beschleunigungsmoment bezeichnet und ist die Ursache für eine Bewegung des Antriebs. Die Winkelbeschleunigung des Motors $\alpha_{Mo}(t)$ wird aus dem Beschleunigungsmoment und dem Massenträgheitsmoment des Antriebs mit

$$\alpha_{Mo}(t) = \frac{m_{Mo}(t) - m_L(t)}{J_T} \quad (4.30)$$

berechnet. Somit wird durch eine Regelung der Winkelbeschleunigung eines mechanisch steifen Antriebs unmittelbar die bewegungsverursachende Größe beeinflusst. Der Einfluss des im Allgemeinen unbekanntes und zeitvarianten Lastmoments auf die Regelgröße kann dadurch reduziert werden. Der Differentialoperator der Winkelposition des Motors $\varphi_{Mo}(t)$ entspricht bei rotatorischen Antrieben der Winkelgeschwindigkeit des Antriebs $\omega_{Mo}(t)$:

$$\frac{d\varphi_{Mo}(t)}{dt} = \omega_{Mo}(t) \quad (4.31)$$

Das Blockschaltbild der permanentmagneterregten Synchronmaschine wird aus den Gleichungen 4.24 und 4.27 bis 4.31 gebildet und ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Aufgrund der Verkopplung der Koordinatensysteme entspricht das regelungstechnische Model der permanentmagneterregten Synchronmaschine dem eines nichtlinearen Mehrgrößensystems. Üblicherweise wird für den Entwurf einschleifiger Regelkreise die nichtlineare Verkopplung der d/q -Koordinaten sowie die Gegeninduktion mit einer Ein/Ausgangs-Linearisierung beziehungsweise einer Störgrößenaufschaltung kompensiert [71]. Die Vorsteuergrößen in d/q -Richtung u_{Fd} und u_{Fq} werden aus den aktuellen Zustandsgrößen und den nominellen Parametern der Maschine berechnet:

$$u_{Fd}(t) = -\omega_{El}(t) i_q(t) L_1 \quad (4.32a)$$

$$u_{Fq}(t) = \omega_{El}(t) (\Psi_{PM} + i_d(t) L_1) \quad (4.32b)$$

Mit der Spannungsvorsteuerung zur Entkopplung der d/q -Komponenten entspricht das Gleichungssystem der permanentmagneterregten Synchronmaschine dem einer Gleichstrommaschine. Dabei ist das elektrische Teilsystem der d/q -Komponenten identisch. Die Störgrößenaufschaltung zur Kompensation der induzierten Spannung reduziert die Rückwirkungen dynamischer Bewegungsvorgänge auf das elektrische Teilsystem der Maschine.

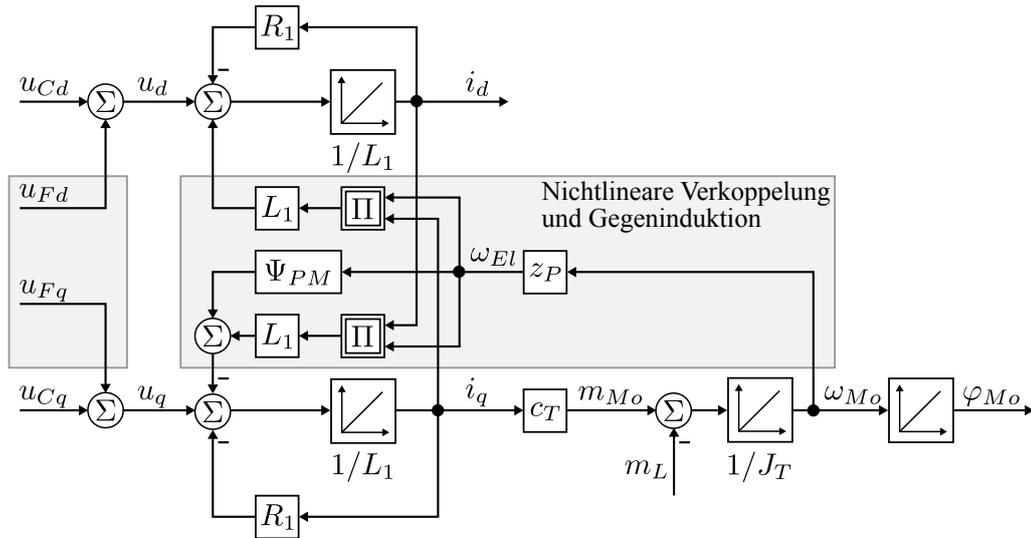


Abbildung 4.6: Blockschaltbild einer permanentmagneterregten Synchronmaschine ohne Relektanzeinflüsse im rotorfesten d/q -Koordinatensystem

Mit dem Differentiationssatz der LAPLACE-Transformation

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot f(s) - f(t = 0^+) \quad (4.33)$$

wird die Zeitableitung einer Funktion $f'(t)$ in den Frequenzbereich transformiert. Zum Zeitpunkt $t = 0^+$ soll sich das System in Ruhelage befinden und die Zustandsgrößen der Maschine gleich Null sein. Mit einer als ideal angenommenen Spannungsvorsteuerung zur E/A-Linearisierung wird das Blockschaltbild der permanentmagneterregten Synchronmaschine in Abbildung 4.6 durch zwei entkoppelte Übertragungsfunktionen beschrieben. In Längsrichtung entspricht die Übertragungsfunktion $G_{Sd}(s)$ dem elektrischen Teilsystem der Maschine und somit einem Tiefpass erster Ordnung. In Querrichtung setzt sich die Übertragungsfunktion $G_{Sq}(s)$ aus dem elektrischen und dem mechanischen Teilsystem zusammen:

$$G_{Sd}(s) = \frac{I_d(s)}{U_d(s)} = \frac{1/R_1}{1 + T_1 s} \quad (4.34a)$$

$$G_{Sq}(s) = \frac{\varphi_{Mo}(s)}{U_q(s)} = \frac{1/R_1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{c_T}{J_T s^2} \quad (4.34b)$$

In beiden Gleichungen beschreibt $T_1 = L_1/R_1$ die Zeitkonstante des Statorwicklungssystems. Die Systemdynamik des mechanischen Teilsystems eines ideal steif angenommenen Servoantriebs wird durch eine zweifache Integration beschrieben. Tatsächlich resultiert bei einer endlichen Steifigkeit der Kopplung des Antriebs mit dem Bearbeitungsprozess ein schwingungsfähiges System. Die Eigenschaften dieser Ankopplung werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

4.3 Elastische Kopplung im Antriebsstrang

Die Kopplung zwischen Antriebsmaschine und Lastprozess wird als drehelastische Kopplung einer Arbeits- und Lastmaschine modelliert. Dabei wird die Verbindung zwischen Antriebs- und Lastmaschine als nichtlineare mechanische Drehfeder mit der Torsionssteifigkeit c_φ und der Materialdämpfung in Torsionsrichtung d_φ modelliert. Die Verbindung selbst wird als masselos angenommen.

Ein Modell der drehelastischen Kopplung ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Über die drehelastische Verbindung zwischen Antriebs- und Lastmaschine wird das Torsionsmoment M_φ übertragen. Die reale Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems der Positionsregelstrecke $G'_{S2}(s)$ beschreibt das Übertragungsverhalten des drehmomentbildenden Motorstroms I_q auf die Position φ_{Mo} des Antriebs. Der Integrationsbeiwert der Starrkörperverschiebung wird mit der Summe der beiden Massenträgheitsmomente von Arbeits- und Lastmaschine J_{Mo} und J_L sowie der Drehmomentkonstante c_T gebildet. Die drehelastische Kopplung der beiden Massen führt zu einem schwingungsfähigen System [93, S. 945ff.].

$$G'_{S2}(s) = \frac{\varphi_{Mo}(s)}{I_q(s)} = \underbrace{\frac{c_T}{(J_{Mo} + J_L) s^2}}_{\text{Starrkörperverschiebung}} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{J_L}{c_\varphi} s^2}{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{J_{Mo} J_L}{(J_{Mo} + J_L) c_\varphi} s^2}}_{\text{schwingungsfähiges System}} \quad (4.35)$$

Die Tilgungsfrequenz des mechanischen Teilsystems im Zählerterm der Übertragungsfunktion der Positionsregelstrecke wird durch die Parameter der Lastmaschine und der drehelastischen Kupplung bestimmt. Die Resonanzfrequenz resultiert aus der Kopplung der beiden Massenträgheitsmomente. Die Kennkreisfrequenzen der Tilgung und der Resonanz $\omega_{0,T}$ und $\omega_{0,R}$ werden aus der Torsionssteifigkeit und des jeweils wirksamen Massenträgheitsmoment berechnet. Dabei gilt, dass die Eigenkreisfrequenz der Resonanz stets größer ist als die Eigenkreisfrequenz der Tilgung.

$$\omega_{0,T} = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_L}} \quad (4.36a)$$

$$\omega_{0,R} = \sqrt{\frac{(J_{Mo} + J_L) c_\varphi}{J_{Mo} J_L}} \quad (4.36b)$$

Mit der Modellierung der realen Positionsregelstrecke werden zwei Ziele verfolgt: Zum einen wird damit eine sinnvolle obere Schranke für den Verlauf der komplementären Sensitivität aus der relativen Modellabweichung ermittelt. Außerdem wird am Prüfstand der Lastprozess mit einer angekoppelten Lastmaschine nachgebildet. Damit hat die Übertragungsfunktion der drehelastischen Verbindung einen signifikanten Einfluss auf das übertragene Torsionsmoment zwischen den beiden Maschinen.

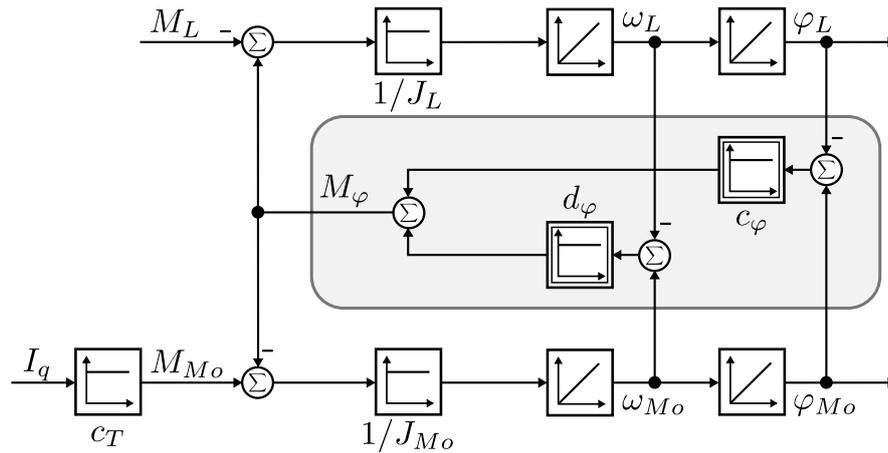


Abbildung 4.7: Modell einer dreh-elastischen Wellenkopplung zwischen Antriebs- und Lastmaschine

4.3.1 Dämpfungseigenschaften eines Elastomerzahnkranzes

„In der Antriebstechnik sowie im Fahrzeugbau werden elastomere Bauteile in der Regel eingesetzt, um schwingungstechnischen Problemstellungen (Dämpfung von Dauerschwingungen, Resonanzdurchfahrten etc.) zu begegnen.“ [96, S. 1] Ein weiteres Anwendungsgebiet von Wellenkupplungen mit einem Elastomerzahnkranz ist der Ausgleich eines Wellenversatzes im Antriebsstrang. Die dabei von Wellenkupplungen mit Elastomerzahnkranz verrichtete Dämpfungsarbeit wird als verhältnismäßige Dämpfung Ψ bezeichnet und liegt bei Zahnkränzen aus Polyurethan zwischen 0,75 bis 0,8. Die Dämpfungseinstellung erfolgt über verschiedene Elastomerhärten der Zahnkränze [62].

Die Materialdämpfung in Torsionsrichtung der drehelastischen Verbindung zwischen Antriebs- und Lastmaschine resultiert im Wesentlichen aus der Dämpfung des Elastomerzahnkranzes. Die Materialdämpfung wird entsprechend der DIN 740 Teil 2 aus der Resonanz-Kennkreisfrequenz des gekoppelten Systems, der dynamischen Drehfedersteifigkeit der Kupplung c_φ^{dyn} sowie der verhältnismäßigen Dämpfung berechnet [1].

$$d_\varphi = \frac{\Psi c_\varphi^{dyn}}{2\pi\omega_{0,R}} \quad (4.37)$$

Die dynamische Drehfedersteifigkeit von Elastomerbauteilen ist von prozessbedingten Einflussfaktoren wie der Belastungsamplitude, der Frequenz der Belastung, der Temperatur des Bauteils, etc. abhängig. Die Herstellerangaben zur dynamischen Drehfedersteifigkeit von Elastomer-Kupplungen sind somit nur an bestimmten Betriebspunkten gültig [96, S. 27ff.]. Demnach resultiert die nichtlineare Materialdämpfung der Wellenkopplung aus der Abhängigkeit des Parameters von der Resonanz-Eigenkreisfrequenz der gekoppelten Antriebe sowie von der dynamischen Drehfedersteifigkeit.

4.3.2 Modellunsicherheit

Wird als nominelles Modell des mechanischen Teilsystems der Positionsregelstrecke ein mechanisch steifer Antrieb gewählt, so resultiert daraus eine unstrukturierte Modellunsicherheit. Zur Auslegung einer robusten Regelung soll entsprechend Gleichung 3.43 eine obere Schranke für die komplementäre Sensitivität der Positionsregelung analytisch abgeleitet werden. Für diesen Zweck wird die relative Modellabweichung aus dem Verhältnis der Modellabweichung und dem nominellen Modell der Positionsregelstrecke gebildet. Durch Umformung mit Gleichung 3.31 kann die Berechnung auf das Verhältnis von realen Modell und nominellen Modell der Positionsregelstrecke zurückgeführt werden.

$$\max \left| \frac{\Delta G_{S2}(s)}{G_{S2}(s)} \right| = \max \left| \frac{G'_{S2}(s)}{G_{S2}(s)} - 1 \right| < \|T\|_{\infty}^{-1} \quad (4.38)$$

Die nominelle Übertragungsfunktion des mechanischen Teilsystems $G_{S2}(s)$ eines mechanisch steif gekoppelten Servoantriebs wird durch die nominelle Drehmomentkonstante \hat{c}_T , dem nominellen Massenträgheitsmoment \hat{J}_T sowie der zweifachen Integration beschrieben.

$$G_{S2}(s) = \frac{\varphi_{Mo}(s)}{I_q(s)} = \frac{\hat{c}_T}{\hat{J}_T s^2} \quad (4.39)$$

Ein analytischer Zusammenhang für die relative Modellunsicherheit des mechanischen Teilsystems der Positionsregelstrecke wird mit dem realen Modell der Positionsregelstrecke mit drehelastischer Verbindung zwischen Antriebsmaschine und angekoppelter Last aus Gleichung 4.35 und dem nominellen Modell nach Gleichung 4.39 berechnet.

$$\begin{aligned} \max \left| \frac{c_T}{(J_{Mo} + J_L) s^2} \cdot \frac{1 + \frac{d_{\varphi}}{c_{\varphi}} s + \frac{J_L}{c_{\varphi}} s^2}{1 + \frac{d_{\varphi}}{c_{\varphi}} s + \frac{J_{Mo} J_L}{(J_{Mo} + J_L) c_{\varphi}} s^2} \right| &< \|T\|_{\infty}^{-1} \\ \max \left| \frac{c_T \hat{J}_T}{\hat{c}_T (J_{Mo} + J_L)} \cdot \frac{1 + \frac{d_{\varphi}}{c_{\varphi}} s + \frac{J_L}{c_{\varphi}} s^2}{1 + \frac{d_{\varphi}}{c_{\varphi}} s + \frac{J_{Mo} J_L}{(J_{Mo} + J_L) c_{\varphi}} s^2} - 1 \right| &< \|T\|_{\infty}^{-1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Das Massenträgheitsmoment des Motors ist konstant und wird als bekannt vorausgesetzt. Der Übersichtlichkeit halber wird das Verhältnis von Last-Massenträgheitsmoment und Motor-Massenträgheitsmoment mit

$$\chi_J = J_L / J_{Mo} \quad (4.41)$$

substituiert. Üblicherweise wird das Verhältnis der Massenträgheitsmomente von Motor und Last bei der Dimensionierung eines Servoantriebs einer Produktionsmaschine bereits berücksichtigt. Bezogen auf das abgegebene Drehmoment des Motors wird das maximale Beschleunigungsvermögen bei mechanisch steifen Antrieben erreicht, wenn das Massenträgheitsmoment der angekoppelten Last in der gleichen Größenordnung wie das Massenträgheitsmoment des Motors liegt [41, S 38ff.]. In [80, S. 28ff.] wird für das Erreichen hoher Beschleunigungswerte

ein Verhältnis der Massenträgheitsmomente von $\chi_J = 1 \dots 10$ als Obergrenze beschrieben.

$$\max \left| \frac{c_T \hat{J}_T}{\hat{c}_T J_{Mo} (1 + \chi_J)} \cdot \frac{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{\chi_J J_{Mo}}{c_\varphi} s^2}{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{J_{Mo} \chi_J}{(1 + \chi_J) c_\varphi} s^2} - 1 \right| < \|T\|_\infty^{-1} \quad (4.42)$$

Ohne angekoppelte Lastmaschine soll die parametrische Unsicherheit gleich Null sein. Dies wird mit der Wahl

$$\hat{J}_T = J_{Mo} \quad (4.43)$$

und

$$\hat{c}_T = c_T \quad (4.44)$$

erreicht. Die nominelle Drehmomentkonstante wird mit Gleichung 4.28 aus den Nenndaten des Antriebs berechnet. Mit der daraus resultierenden Gleichung ist die Analyse des Einfluss der Last-Ankopplung bei mechanisch steifen Antrieben als auch bei drehelastisch gekoppelten Antrieben möglich.

$$\max \left| \frac{1}{1 + \chi_J} \cdot \frac{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{\chi_J J_{Mo}}{c_\varphi} s^2}{1 + \frac{d_\varphi}{c_\varphi} s + \frac{J_{Mo} \chi_J}{(1 + \chi_J) c_\varphi} s^2} - 1 \right| < \|T\|_\infty^{-1} \quad (4.45)$$

Ein mechanisch steifer Antrieb wird mit dem Grenzfall $c_\varphi \rightarrow \infty$ beschrieben. Der Maximalwert der komplementären Sensitivität wird demnach aus den Verhältnis der Massenträgheitsmomente von Antriebs- und Lastmaschine berechnet.

$$\left| \frac{-\chi_J}{1 + \chi_J} \right| < \|T\|_\infty^{-1} \quad (4.46)$$

Die drehelastische Verbindung zwischen Arbeits- und Lastmaschine führt in der Umgebung der Resonanz-Kennkreisfrequenz zu einer Überhöhung im Amplitudengang der Positionsregelstrecke. Die relative Modellabweichung erreicht in diesem Bereich ihren Maximalwert.

Für den betrachteten Prüfstand mit drehelastisch gekoppelter Antriebs- und Lastmaschine ist das nominelle Modell, das reale Modell sowie die daraus berechnete relative Modellsicherheit in Abbildung 4.8 dargestellt. Die Parameter für die analytische Berechnung der Frequenzgangfunktionen sind in Tabelle 4.1 dokumentiert und stammen aus den Herstellerangaben der jeweiligen Komponenten. Der Amplitudengang der nominellen und der realen Positionsregelstrecke wurde mit Messungen am Prüfstand verifiziert. Dabei wurde an einzelnen Frequenzpunkten mit einer sinusförmigen Strom-Sollwertvorgabe das Amplitudenverhältnis aus der gemessenen Position und dem Querstrom gebildet.

Zur Verifikation des nominellen Modells der Positionsregelstrecke wurden Messungen an einem ungekoppelten Antrieb ohne zusätzliche Anbauteile durchgeführt. Die Modellvorstellung

Tabelle 4.1: Parameter der drehelastischen Kopplung

Parameter	Symbol	Wert
Massenträgheitsmoment Antriebsmaschine	J_{Mo}	$6,3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Drehmomentkonstante	c_T	$0,64 \text{ Nm/A}$
Massenträgheitsmoment Lastmaschine	J_L	$6,3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Drehfedersteifigkeit	c_φ	4000 Nm/rad
Verhältnismäßige Dämpfung	Ψ	$0,75$
Dynamische Drehfedersteifigkeit	c_φ^{dyn}	1000 Nm/rad
Materialdämpfung	d_φ	$0,105 \text{ Nm/rad/s}$

der realen Positionsregelstrecke wurde mit gekoppelten Antriebs- und Lastmaschinen überprüft. Die durchgeführten Messungen bestätigen prinzipiell den Verlauf der analytischen Frequenzgangsfunktion. Allerdings ist jeweils das gemessene Amplitudenverhältnis geringfügig größer als das berechnete Amplitudenverhältnis des analytischen Modells der Positionsregelstrecke. Demzufolge ist die tatsächliche Streckenverstärkung und somit auch der Integrationsbeiwert des mechanischen Teilsystems größer als die aus den Datenblattangaben berechnete Streckenverstärkung:

$$\frac{c_T}{J_T} > \frac{\hat{c}_T}{\hat{J}_T} \quad (4.47)$$

Im Frequenzbereich unter der Kennkreisfrequenz der Tilgung $\omega \ll \omega_{0,T}$ verhält sich das reale Modell wie ein mechanisch steifer Antrieb mit zusätzlichen Last-Massenträgheitsmoment. Zwischen der Kennkreisfrequenz der Tilgung und der Resonanz $\omega_{0,T} < \omega < \omega_{0,R}$ wird diese Lastmasse abgekoppelt. Somit wirkt im Frequenzbereich über der Kennkreisfrequenz der Tilgung $\omega \gg \omega_{0,R}$ nur noch das Massenträgheitsmoment des Motors.

Für die Maximalwerte der komplementären Sensitivität wird im Folgenden zwischen zwei Frequenzbereichen unterschieden: Im niedrigen Frequenzbereich wird der Maximalwert mit Gleichung 4.46 über das Verhältnis der Massenträgheitsmomente berechnet. Im Frequenzbereich der Lastabkopplung wird der Maximalwert der komplementären Sensitivität aus der Amplitudenüberhöhung bei der Resonanz-Eigenkreisfrequenz bestimmt.

Somit bildet der Amplitudengang der inversen Frequenzgangsfunktion der relativen Modellabweichung im Prinzip die Obergrenze für den Verlauf der Frequenzgangsfunktion der komplementären Sensitivität. Damit ist für die dargestellte Positionsregelstrecke ein Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion von 6 dB im niedrigen Frequenzbereich zulässig. Für die robuste Stabilität des Regelkreises ist entscheidend, dass der Regler im Bereich der Kennkreisfrequenz der Resonanz dämpfend wirkt.

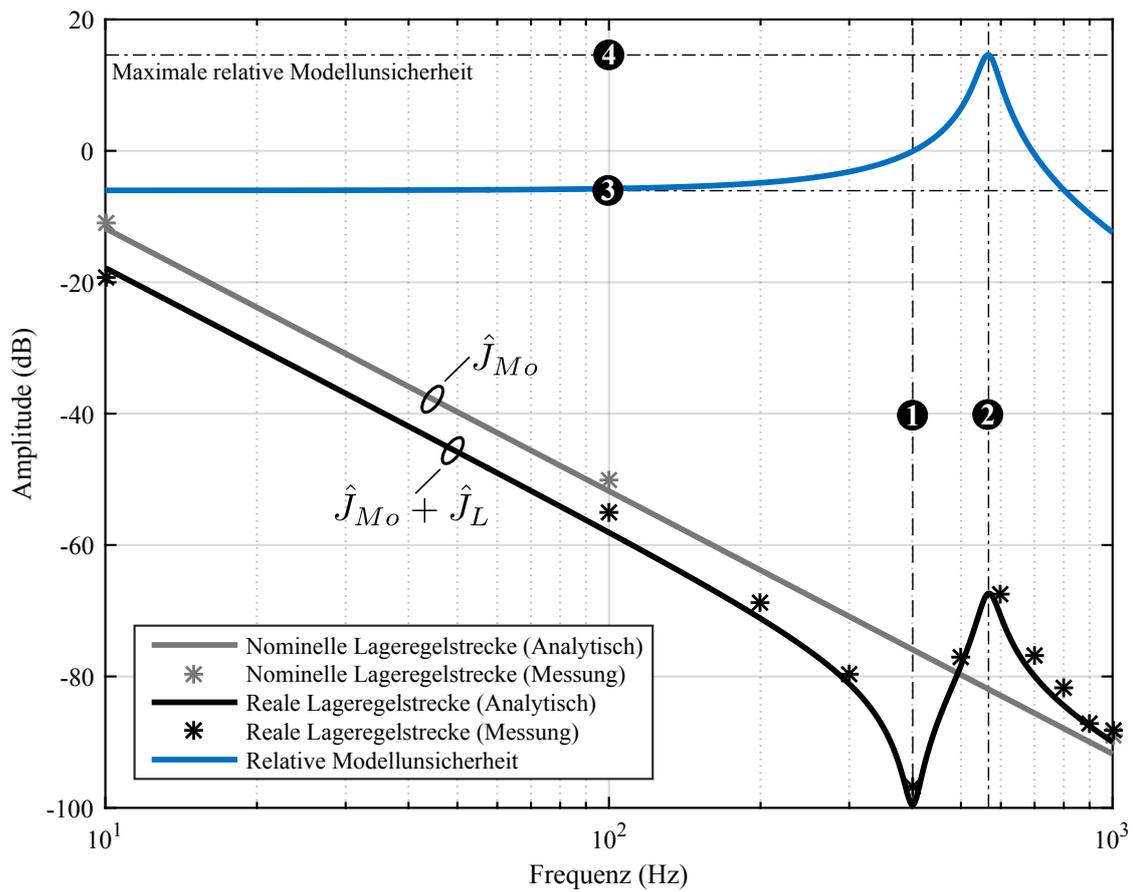


Abbildung 4.8: Modellunsicherheit des nominellen Modells der Positionsregelstrecke

- ❶ Kennfrequenz der Tilgung $f_{0,T} = 401$ Hz
- ❷ Kennfrequenz der Resonanz $f_{0,R} = 567$ Hz
- ❸ Maximale relative Modellunsicherheit (steif gekoppelt) $\|T\|_{\infty}^{-1} = -6$ dB
- ❹ Maximale relative Modellunsicherheit (dreh-elastisch gekoppelt) $\|T\|_{\infty}^{-1} = 14,58$ dB

4.4 Digitale Regelung

Die Art der zeitdiskreten Realisierung elementarer Regelkreiselemente wie Integratoren, Differentiatoren, Regler oder Filter hat signifikante Auswirkungen auf den Verlauf deren Frequenzgangsfunktion. Für die Beurteilung der Stabilität eines Regelkreises müssen demnach exakte zeitdiskrete Modelle dieser Systeme vorliegen. Im folgenden Abschnitt werden die Impulsübertragungsfunktionen sowie die Frequenzgangsfunktionen der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Regelkreiselemente eingeführt und deren Eigenschaften diskutiert.

4.4.1 Integration und Differentiation

Backward-Euler

Die BACKWARD-EULER-Approximation kann auf die numerische Integration einer zeitabhängigen Funktion $u(t)$ mit einer Rechteck-Näherung der einzelnen Integrationsabschnitte zurückgeführt werden (Abbildung 4.9 (a)). Die äquidistante Schrittweite der numerischen Integration entspricht der Abtastperiode T_S der digitalen Regelung.

$$y(t) = \int u(t)dt \approx T_S \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(t_k) \quad (4.48)$$

Die Fläche eines Rechtecks wird in jeden Abtastschritt mit dem aktuellen Funktionswert $u(t_k)$ und der Dauer einer Abtastperiode berechnet. Eine rekursive Berechnung des Integrals ist mit einer Differenzgleichung möglich.

$$y[k] = y[k-1] + u[k]T_S, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } u[k], \quad y[k] = 0 \quad \forall k \leq 0 \quad (4.49)$$

Die Differenzgleichung der Rechteck-Integration wird mit der Rückwärts-Schiebeoperation $u[k-n] \circ \bullet u(z)z^{-n}$ bzw. $y[k-n] \circ \bullet y(z)z^{-n}$ in den z -Bereich transformiert und daraus die Impulsübertragungsfunktion der Rechteck-Integration $H_{1I}^{BE}(z)$ gebildet.

$$\begin{aligned} y(z) &= y(z)z^{-1} + u(z)T_S \\ \Rightarrow H_{1I}^{BE}(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{T_S}{1-z^{-1}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die Impulsübertragungsfunktion der Differentiation $H_{1D}^{BE}(z)$ entspricht der inversen Impulsübertragungsfunktion der Rechteck-Integration und wird BACKWARD-EULER-Differentiation oder als Rückwärtsdifferenzenverfahren bezeichnet [69, S. 614].

$$H_{1D}^{BE}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1-z^{-1}}{T_S} \quad (4.51)$$

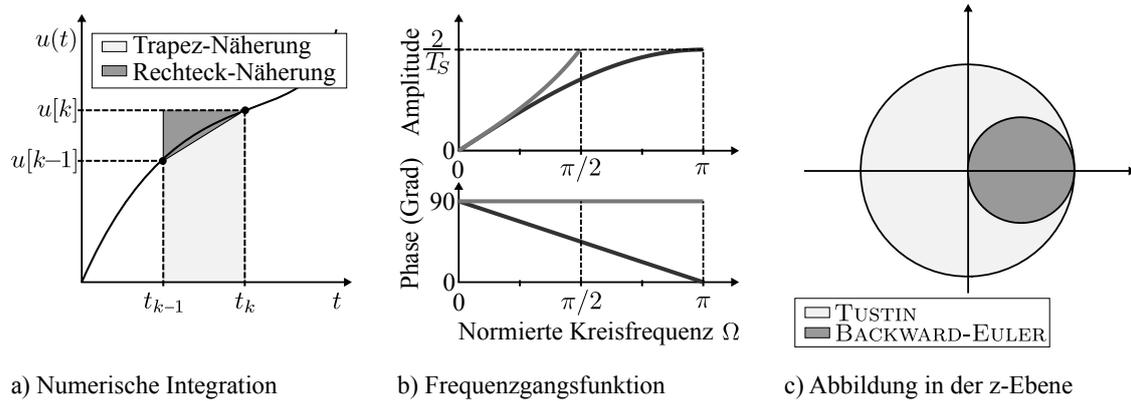


Abbildung 4.9: Eigenschaften der BACKWARD-EULER- und TUSTIN-Approximation der komplexen Kreisfrequenz

Für die Berechnung der Frequenzgangsfunktion $H_{1D}^{BE}(j\omega)$ der BACKWARD-EULER-Differentiation wird in Gleichung 4.51 der z-Operator mit $z = e^{j\omega T_S}$ ersetzt.

$$H_{1D}^{BE}(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{1 - e^{-j\omega T_S}}{T_S} \quad (4.52)$$

Mit der EULER-Identität $2j \sin(\omega T_S/2) = e^{j\omega T_S/2} - e^{-j\omega T_S/2}$ wird die Frequenzgangsfunktion der Differentiation in einen Term aus Amplitude und Phase umgeformt.

$$H_{1D}^{BE}(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{2}{T_S} \sin(\omega T_S/2) e^{j(\pi - \omega T_S)/2} \quad (4.53)$$

Der Amplitudengang der BACKWARD-EULER-Differentiation hat den Verlauf der Sinusfunktion. Die maximale Verstärkung durch die Differentiation wird bei der NYQUIST-Frequenz erreicht und beträgt $2/T_S$. Nur im niedrigen Frequenzbereich, für $\omega \rightarrow 0$, führt die Differentiation zu der idealen Phasendrehung von 90 Grad. Im weiteren Verlauf ist die Phasenverzögerung linear von der Frequenz abhängig und erreicht bei der NYQUIST-Frequenz die maximale Verzögerung von 90 Grad. D.h. die Phasendrehung durch die Differentiation ist bei dieser Frequenz gleich Null. Der Phasenverlauf entspricht damit nach [82] dem des idealen, realisierbaren zeitdiskreten Differentiators. Die Frequenzgangsfunktion ist in Abbildung 4.9 (b) dargestellt.

Mit der Transformation werden die Polstellen eines stabilen zeitkontinuierlichen Systems im Einheitskreis der z-Ebene abgebildet (Abbildung 4.9 (c)). Das daraus resultierende zeitdiskrete System ist somit ebenfalls stabil. Mit der Transformation ist es möglich ein instabiles zeitkontinuierliches System in einem stabilen zeitdiskreten System abzubilden. Die BACKWARD-EULER-Approximation wird in der Regel verwendet um eine zeitkontinuierliche Integration bzw. Differentiation in der digitalen Regelung zu realisieren. Gründe hierfür sind insbesondere der geringe Ressourcenaufwand sowie der lineare Verlauf der Phase.

Tustin-Approximation

Die TUSTIN-Approximation kann auf die numerische Integration einer zeitabhängigen Funktion $u(t)$ mit einer Trapez-Näherung der einzelnen Integrationsabschnitte zurückgeführt werden (Abbildung 4.9 (a)). Dabei entspricht die äquidistante Schrittweite der numerischen Integration der Abtastperiode T_S der digitalen Regelung. Die Näherung der Integration erfolgt mit einer unendlichen Summe [9, S. 511].

$$y(t) = \int_0^\infty u(t)dt \approx \frac{T_S}{2} \left(u(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u(t_k) \right) \quad (4.54)$$

Eine rekursive Berechnung der Trapez-Näherung ist mit einer Differenzgleichung aus dem aktuellen und dem letzten Funktionswert $u[k]$ und $u[k-1]$ möglich.

$$y[k] = y[k-1] + \frac{T_S}{2} (u[k] + u[k-1]), \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.55)$$

Die Differenzgleichung der Trapez-Integration wird mit der Rückwärts-Schiebeoperation $u[k-n] \circ \bullet u(z)z^{-n}$ bzw. $y[k-n] \circ \bullet y(z)z^{-n}$ in den z -Bereich transformiert und daraus die Impulsübertragungsfunktion der Trapez-Integration $H_{1I}^{TA}(z)$ gebildet.

$$\begin{aligned} y(z) &= y(z)z^{-1} + \frac{T_S}{2} (u(z) + u(z)z^{-1}) \\ \Rightarrow H_{1I}^{TA}(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{T_S}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Die Impulsübertragungsfunktion der Differentiation $H_{1D}^{TA}(z)$ entspricht der inversen Impulsübertragungsfunktion der Trapez-Integration und wird als TUSTIN-Approximation (TA) oder Bilinear-Transformation bezeichnet.

$$H_{1D}^{TA}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{2}{T_S} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (4.57)$$

Für die Berechnung der Frequenzgangsfunktion $H_{1D}^{TA}(j\omega)$ der TUSTIN-Approximation wird in Gleichung 4.57 der z -Operator mit $z = e^{j\omega T_S}$ ersetzt.

$$H_{1D}^{TA}(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{2}{T_S} \frac{1 - e^{-j\omega T_S}}{1 + e^{-j\omega T_S}} \quad (4.58)$$

Die daraus resultierende Gleichung wird mit der EULER-Identität

$$j \tan(\omega T_S/2) = \frac{e^{j\omega T_S/2} - e^{-j\omega T_S/2}}{e^{j\omega T_S/2} + e^{-j\omega T_S/2}}$$

vereinfacht und in einen Term aus Amplitude und Phase umgeformt. Der Amplitudenverlauf des Differentiators entspricht der Tangensfunktion, aufgrund der Polstelle bei der NYQUIST-Frequenz wächst der Amplitudengang bei dieser Frequenz über alle Grenzen. Die Phasenver-

zögerung der TUSTIN-Approximation ist unabhängig von der Frequenz und beträgt 90 Grad.

$$H_{1D}^{TA}(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{2}{T_S} \tan(\omega T_S/2) e^{j\pi/2} \quad (4.59)$$

Der Verlauf der Frequenzgangsfunktion der TUSTIN-Approximation ist in Abbildung 4.9 (b) dargestellt. Die maximale Amplitudenverstärkung der BACKWARD-EULER-Differentiation wird mit der TUSTIN-Approximation bereits bei $\omega T_S = \pi/2$ erreicht.

Die TUSTIN-Approximation wird zur Transformation zeitkontinuierlicher Systeme $G(s)$ in ein äquivalentes zeitdiskretes System $H(z)$ verwendet. Dabei wird in der Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen Systems die komplexen Kreisfrequenz s mit Gleichung 4.58 substituiert:

$$H(z) \approx G(s) \left| s = \frac{2}{T_S} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right. \quad (4.60)$$

Mit der Transformation werden die Polstellen eines stabilen zeitkontinuierlichen Systems im Einheitskreis der z -Ebene abgebildet (Abbildung 4.9 (c)). Das daraus resultierende zeitdiskrete System ist somit ebenfalls stabil.

Die TUSTIN-Approximation führt zu einer Verzerrung der Frequenzachse. Dadurch stimmen beispielsweise bei approximierten zeitdiskreten Bandpass- oder Kerb-Filtern die Frequenzen für das Durchlass- bzw. Sperrband nicht mehr mit Frequenzgang der zeitkontinuierlichen Filterfunktion überein. Mit einer modifizierten TUSTIN-Approximation kann der Frequenzgang des zeitkontinuierlichen Filters an einer Kreisfrequenz ω_1 exakt approximiert werden. Dieses Verfahren wird in der Literatur als *Frequency-Prewarping* bezeichnet und wird z.B. in [5, S. 295ff.] beschrieben.

$$H(z) \approx G(s) \left| s = \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T_S/2)} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right. \quad (4.61)$$

Der Vorfaktor für das *Frequency-Prewarping* der TUSTIN-Approximation kann als modifizierte Abtastperiode interpretiert werden. Demnach kann die Diskretisierung einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion mit der TUSTIN-Approximation nach Gleichung 4.60 erfolgen. Als Parameter in der Impulsüberübertragungsfunktion wird anstelle der Abtastperiode der digitalen Regelung die modifizierte Abtastperiode T_S^* nach Gleichung 4.62 verwendet.

$$T_S^* = \frac{2 \tan(\omega_1 T_S/2)}{\omega_1} \quad (4.62)$$

4.4.2 PI-Regler

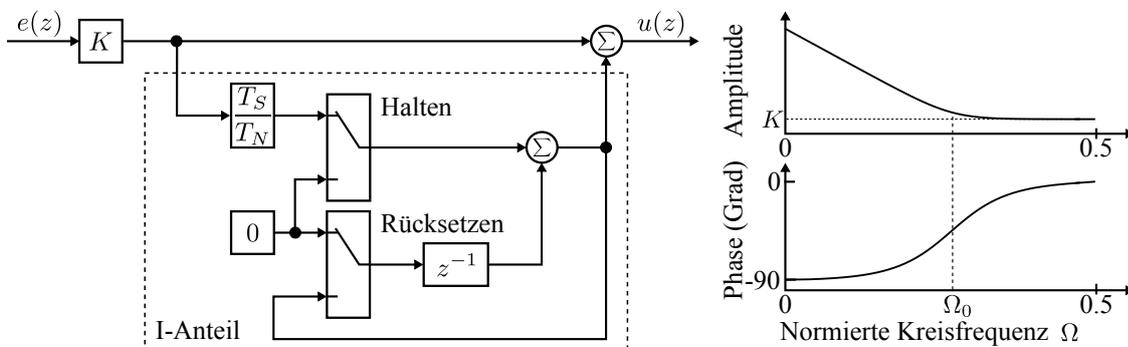
Eine Realisierungsmöglichkeit eines digitalen Proportional- und Integral (PI)-Reglers mit Halte- und Rücksetzfunktion des Integralanteils ist in Abbildung 4.10a dargestellt. Die Stellgröße $u(z)$ wird aus der Regelabweichung $e(z)$ mit der Proportionalverstärkung K und dem Integralanteil mit der Nachstellzeit T_N berechnet. Überschreitet die Stellgröße die Stellbereichsgrenzen wird mit der Haltefunktion der Integralanteil begrenzt und so ein Reglerüberlauf vermieden. Für definierte Anfangsbedingungen wird mit der Rücksetzfunktion das Speicherregister des Integrators gelöscht. Das nichtlineare Verhalten des PI-Reglers durch die Halte- und Rücksetzfunktion des Integralanteils wird in der Analyse und dem Design der Regleralgorithmen nicht berücksichtigt. Der Integralanteil des Reglers wird mit einer Rechtecknäherung nach Gleichung 4.50 realisiert. Damit folgt für die Impulsübertragungsfunktion des digitalen PI-Reglers $H_{PI}(z)$:

$$H_{PI}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{K \left(\left(1 + \frac{T_S}{T_N}\right) z - 1 \right)}{z - 1} \quad (4.63)$$

Der Frequenzgang des digitalen PI-Reglers ist in Abbildung 4.10b als Funktion der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T_S$ bis zur NYQUIST-Frequenz dargestellt. Der Amplitudengang des Reglers fällt aufgrund des I-Anteils monoton mit 20 dB pro Dekade bis zur Nullstelle Ω_0 der Impulsübertragungsfunktion. Im Frequenzbereich $\Omega > \Omega_0$ wird der Integrator durch die Nullstelle kompensiert und es wirkt nur die Proportionalverstärkung K des Reglers. Weiterhin wird die aus dem Integralanteil resultierende Phasenverzögerung von 90 Grad durch die Nullstelle kompensiert.

Die Lage der Nullstelle in der komplexen Ebene wird mit der Definition des z -Operators nach Gleichung 3.1 berechnet. Die Nullstelle tritt bei der normierten Kreisfrequenz $\Omega_0 = \omega_0 T_S$ auf und wird durch die Nachstellzeit und die Abtastperiode beeinflusst.

$$\Omega_0 = \ln \left(1 + \frac{T_S}{T_N} \right) \quad (4.64)$$



(a) Model mit Halte- und Rücksetzmöglichkeit

(b) BODE-Diagramm

Abbildung 4.10: Digitaler PI-Regler

4.4.3 Tiefpassfilter

Tiefpassfilter werden in dieser Arbeit zur Filterung der gemessenen Größen im Rückführzweig eingesetzt. Die Filterung bewirkt eine zusätzliche Phasenverzögerung im offenen Regelkreis und reduziert die Stabilitätsreserve des Regelkreises. Um die eingebrachte Phasenverzögerung gering zu halten wird der zeitdiskrete Filter aus der Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Tiefpassfilters 1. Ordnung $G_F(s)$ mit der Filterzeitkonstanten T_F gebildet.

$$G_F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + T_F s} \quad (4.65)$$

Die Impulsübertragungsfunktion des Filters $H_F(z)$ wird mit der TUSTIN-Approximation der komplexen Kreisfrequenz nach Gleichung 4.60 berechnet. Das Verhältnis aus Filterzeitkonstante und Abtastperiode der digitalen Regelung wird mit $\chi_F = T_F/T_S$ substituiert.

$$H_F(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 + 2\frac{T_F}{T_S} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{(1 + 2\chi_F)z + (1 - 2\chi_F)} \quad (4.66)$$

4.4.4 Korrekturglied zur Phasenhebung

Mit einem Korrekturglied zur Phasenhebung wird die Phasenverzögerung eines Signals im Regelkreis in einem definierbaren Frequenzbereich reduziert. Damit einhergehend ist ab der phasenhebenden Wirkung des Korrekturglieds eine Anhebung des Amplitudengangs. Typischerweise wird ein solches Korrekturglied in der Rückführung verwendet um die Phasenreserve im Bereich der Amplitudendurchtrittsfrequenz des Regelkreises zu erhöhen. Die Übertragungsfunktion eines phasenhebenden Korrekturglieds $G_{PA}(s)$ wird z.B. in [67, S. 321ff.] eingeführt:

$$G_{PA}(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \chi_0 \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}, \quad \text{mit } T_1 > T_2 \quad (4.67)$$

Die Amplituden- und Phasenhebung des Korrekturglieds resultiert aus der Nullstelle der Übertragungsfunktion. Mit der Polstelle wird die Wirkung der Nullstelle kompensiert. Die Lage der Null- und Polstellen wird mit den Zeitkonstanten T_1 und T_2 parametrisiert. Die Verstärkung des Netzwerks wird mit dem Vorfaktor χ_0 definiert. Mit der Parametrisierung $\chi_0 = T_2/T_1$ ist die Verstärkung des Korrekturglieds für $s \rightarrow \infty$ gleich Eins, dies führt zu einer Absenkung des Amplitudengangs im niederfrequenten Bereich. Die Impulsübertragungsfunktion eines Korrekturglieds zur Phasenhebung $H_{PA}(z)$ wird mit der TUSTIN-Approximation der komplexen Kreisfrequenz nach Gleichung 4.60 berechnet. Das Verhältnis der Zeitkonstanten T_1 und T_2 zur Abtastperiode der digitalen Regelung wird mit $\chi_1 = T_1/T_S$ beziehungsweise $\chi_2 = T_2/T_S$ substituiert. Die grundlegenden Eigenschaften der Frequenzgangsfunktion eines phasenhebenden Korrekturglieds sind in [69, S. 278ff.] beschrieben.

$$H_{PA}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \chi_0 \frac{(1 + 2\chi_1)z + (1 - 2\chi_1)}{(1 + 2\chi_2)z + (1 - 2\chi_2)} \quad (4.68)$$

4.5 Kaskadenregelung

In einer kaskadierten Regelungsstruktur wird in jeder Kaskade eine Zustandsgröße des Antriebs geregelt. Bei mechanisch steifen Antrieben entsprechen diese der magnetischen Energie der elektrischen Maschine, der Drehzahl bzw. Geschwindigkeit des Antriebs sowie bei positionsgeregelten Antrieben der Position des Antriebs. Die Regelung der magnetischen Energie erfolgt im innersten Regelkreis über den feldbildenden Längsstrom und den drehmomentbildenden Querstrom der Maschine. Dem überlagert ist eine Regelschleife zur Regelung der Drehzahl bzw. Geschwindigkeit des Servoantriebs. Die Positionsregelung erfolgt im äußersten Regelkreis der Kaskadenstruktur. Eine eingreifende Störgröße wird mit der unmittelbar darauf folgenden Zustandsgröße erfasst und in der entsprechenden Regelschleife kompensiert. Voraussetzungen für den Aufbau einer Kaskadenregelung sind nach [93, S. 121],

- dass die Regelstrecke als eine Kettenschaltung rückwirkungsfreier Teilsysteme modelliert werden kann
- und die Regelgrößen gemessen werden können.

Um Kosten und Bauraum zu reduzieren, wird die Rückführgröße für den Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelkreis üblicherweise aus der gemessenen Position berechnet. Prinzipiell entspricht dies einer PID-Regelungsstruktur, mit welcher zwei Zustandsgrößen gleichzeitig geregelt werden können, um eine Regelschleife einzusparen. Die typische Regelungsstruktur eines mechanisch steifen Antriebs entspricht somit einer zweischleifigen Kaskadenregelung.

Bei der Auslegung einer Regelung in Kaskadenstruktur muss die Bandbreite der unterlagerten Regelschleifen berücksichtigt werden. Zwangsläufig nimmt dadurch die erreichbare Bandbreite in den Regelkreisen von innen nach außen ab [27, S. 292ff.]. Damit ist die Bandbreite der inneren Stromregelschleife stets höher als die der äußeren Drehzahl- bzw. Positionsregelschleife. Dieser grundlegende Aspekt ist insbesondere nachteilig, da die Prozesskraft bzw. das Prozessdrehmoment als wichtigste Störgröße eines mechanisch steifen Antriebs mit der niedrigeren Bandbreite des überlagerten Drehzahlregelkreises kompensiert werden muss.

4.5.1 Stromregelkreis

Die Stromregelung wird im rotorfesten d/q -Koordinatensystem für den feldbildenden Längsstrom und den drehmomentbildenden Querstrom mit jeweils einem PI-Regler realisiert. Dabei werden die Rückführgrößen der beiden Regler aus den gemessenen Phasenströmen und der PARK-Transformation nach Gleichung 4.14 berechnet. Die Rücktransformation der berechneten Reglerstellgrade in das dreiphasige Statorsystem erfolgt mit der inversen PARK-Transformation nach Gleichung 4.15. Somit ist die Modellierung der Stromregelung ausschließlich im rotorfesten d/q -Koordinatensystem möglich.

Das Blockschaltbild der Stromregelung in Abbildung 4.11 ist für den Längs- und Querstrom

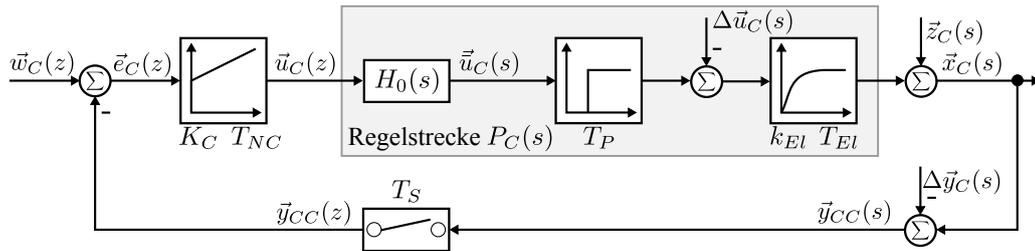


Abbildung 4.11: Blockschaltbild der Stromregelung im rotorfesten Koordinatensystem

der Maschine gleichermaßen gültig. Der Sollwert wird für den Längs- und Querstrom mit $\vec{w}_C(z) = [w_{Cd}; w_{Cq}]^T$ unabhängig voneinander vorgegeben. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der Spannungsstellbereich der Maschine betrachtet, in diesem Bereich gilt für den Sollwert des Längsstroms $w_{Cd}(z) = 0$. Die Sollwertvorgabe für den drehmomentbildenden Querstrom $w_{Cq}(z)$ wird aus der Stellgröße des überlagerten Regelkreises und der Vorsteuerung gebildet. Die Regelabweichung der Stromregelung $\vec{e}_C(z) = [e_{Cd}; e_{Cq}]^T$ wird aus der Differenz der Führungsgröße $\vec{w}_C(z)$ und der abgetasteten Regelgröße $\vec{y}_{CC}(z) = [y_{Cd}; y_{Cq}]^T$ berechnet:

$$\vec{e}_C(z) = \vec{w}_C(z) - \vec{y}_{CC}(z) \quad (4.69)$$

Die Stellgröße $\vec{u}_C(z) = [u_{Cd}; u_{Cq}]^T$ wird durch den Regelalgorithmus des zeitdiskreten PI-Reglers aus der Regelabweichung mit Gleichung 4.63 berechnet.

Die Störgröße $\vec{z}_C(s)$ wirkt am Streckenausgang auf die Regelgröße $\vec{x}_C(s) = [x_{Cd}; x_{Cq}]^T$ und wird für die Betrachtung der Sensitivitätsfunktion der Stromregelung eingeführt. Eine Versorgungsstörung $\Delta\vec{u}_C(s)$ greift am Eingang des elektrischen Teilsystems an und resultiert beispielsweise aus einer fehlerhaften Spannungsvorsteuerung, Spannungsfehler des Umrichters (vergl. [93, S. 704 ff.]) oder einer Abweichung von der nominellen Zwischenkreisspannung. Das Sensorrauschen und die ADC-Quantisierung der Regelgröße wird mit der additiven Störgröße $\Delta\vec{y}_C(s)$ in der Rückkoppelung modelliert.

Die Ausführung der Regelungsalgorithmen ist mit dem Trägersignal des Modulators synchronisiert, dadurch ist die Abtastzeit T_S der digitalen Regelung gleich einer Periode der Pulsweitenmodulation.

$$T_S = T_{PWM} \quad (4.70)$$

Die Synchronisation der Ausführung der Regelungsalgorithmen mit dem Trägersignal des Modulators ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Der aktuelle Reglerstellgrad wird zu Beginn einer Periode des Trägersignals (\blacktriangle) in den Modulator übernommen und ist für eine Periode gültig. Die Ausführung des Regelungsalgorithmus erfolgt in der Mitte einer Periode der Pulsweitenmodulation (\blacksquare). Die Verzögerungszeit zwischen dem Abtastzeitpunkt der Regelung und der Übernahme der Stellgradänderung im Modulator wird mit einem Totzeitelement mit der

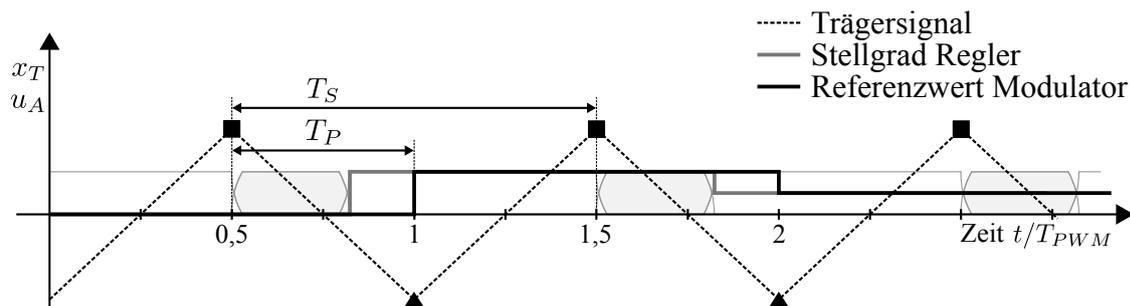


Abbildung 4.12: Synchronisation der Ausführung der Regelungsalgorithmen mit dem Trägersignal des Modulators

- Strommessung und Ausführung der Regleralgorithmen
- ▲ Übernahme des aktuellen Stellgrads in den Modulator

Verarbeitungstotzeit T_P beschrieben und ist für die Berechnung der Regelungsalgorithmen auf dem Microcontroller erforderlich. Im Allgemeinen wird die Verarbeitungstotzeit durch ein ganzzahliges Vielfaches n der Abtastperiode und einen Differenzterme δT_S ausgedrückt [8, S. 304]:

$$T_P = (n + \delta) T_S \quad (4.71)$$

Im betrachteten System beträgt die Verarbeitungstotzeit eine halbe Abtastperiode und somit sind in Gleichung 4.71 die Parameter $n = 0$ und $\delta = 0,5$.

Modellbildung

Der Spannungspulsumrichter wird entsprechend Gleichung 4.4 mit einem Halteglied mit der Abtastperiode T_S approximiert. Das elektrische Teilsystem der permanentmagneterregten Synchronmaschine wird im d/q-Koordinatensystem mit einem Verzögerungselement erster Ordnung modelliert. Die stationäre Streckenverstärkung k_{El} wird im Wesentlichen durch den Widerstand der Statorwicklung und den Durchlasswiderständen der Insulated Gate Bipolar Transistoren (IGBT)-Leistungshalbleiter und der Freilaufdioden des Umrichters beeinflusst. Die elektrische Zeitkonstante wird aus der Induktivität L_1 und der stationären Streckenverstärkung mit $T_{El} = L_1 k_{El}$ berechnet. Die Übertragungsfunktion der Stromregelstrecke $P_C(s)$ wird aus der Serienschaltung aus Halteglied, Totzeit- und Verzögerungselement gebildet:

$$P_C(s) = \frac{x_C(s)}{u_C(s)} = \frac{1 - e^{-sT_S}}{s} \cdot e^{-sT_P} \cdot \frac{k_{El}}{1 + sT_{El}} \quad (4.72)$$

Für den Entwurf und die Analyse der digitalen Stromregelung wird die Übertragungsfunktion der Stromregelstrecke in den z -Bereich transformiert. Die Multiplikation mit e^{-sT_S} entspricht einer Rechtsverschiebung der Ausgangsfolge um einen Abtastschritt und kann daher mit dem

Verschiebungsoperator z^{-1} vor die z -Transformation gezogen werden [69, S. 563]:

$$P_C(z) = \frac{x_C(z)}{u_C(z)} = k_{El} (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ e^{-sT_P} \cdot \frac{1/T_{El}}{s(1/T_{El} + s)} \right\} \quad (4.73)$$

Die Verarbeitungstotzeit ist kleiner als die Abtastperiode der Regelung. Mit der modifizierten z -Transformation \mathcal{Z}_m werden die Signalwerte zwischen zwei Abtastzeitpunkten ermittelt [93, S. 178]:

$$P_C(z) = \frac{x_C(z)}{u_C(z)} = k_{El} (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1/T_{El}}{s(1/T_{El} + s)} \right\}_{m=0.5} \quad (4.74)$$

Mit $m = 1 - \delta = 0,5$ folgt aus der Transformationstabelle in [8, S. 315] für die Impulsübertragungsfunktion der Stromregelstrecke:

$$P_C(z) = \frac{x_C(z)}{u_C(z)} = k_{El} \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-0,5T_S/T_{El}}}{z - e^{-T_S/T_{El}}} \right) \quad (4.75)$$

Das Verhältnis der Abtastperiode der Regelung zur elektrischen Zeitkonstante wird mit $\chi_S = T_S/T_{El}$ ersetzt. Nach einigen Umformungen ergibt sich für die Impulsübertragungsfunktion der Stromregelstrecke $P_C(z)$:

$$P_C(z) = \frac{x_C(z)}{u_C(z)} = k_{El} \frac{\overbrace{(1 - e^{-0,5\chi_S})}^{a_0} z + \overbrace{(e^{-0,5\chi_S} - e^{-\chi_S})}^{a_1}}{z(z - e^{-\chi_S})} \quad (4.76)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - e^{-0,5\chi_S} \\ a_1 &= e^{-0,5\chi_S} - e^{-\chi_S} = e^{-0,5\chi_S} (1 - e^{-0,5\chi_S}) \end{aligned}$$

wird die Impulsübertragungsfunktion der Stromregelstrecke übersichtlich dargestellt:

$$P_C(z) = \frac{x_C(z)}{u_C(z)} = k_{El} \frac{a_0 z + a_1}{z(z - e^{-\chi_S})} \quad (4.77)$$

Die Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises $L_C(z)$ ist das Produkt der Impulsübertragungsfunktionen der Stromregelstrecke und des PI-Reglers nach Gleichung 4.63:

$$L_C(z) = \frac{x_C(z)}{e_C(z)} = \frac{K_C \left(\left(1 + \frac{T_S}{T_{NC}}\right) z - 1 \right) k_{El} (a_0 z + a_1)}{z - 1} \frac{1}{z(z - e^{-\chi_S})} \quad (4.78)$$

Die Parametrierung des zeitdiskreten PI-Reglers erfolgt mit der Proportionalverstärkung K_C sowie der Nachstellzeit T_{NC} des Integralanteils.

Parametrierung

Mit der Stromregelung wird die Dynamik des Kraft- bzw. Drehmomentaufbaus eines Servoantriebs erhöht. Dafür wird mit einer Parametrierung nach dem Betragsoptimum der „langsame“ Pol der Stromregelstrecke durch die Nullstelle des Reglers kompensiert [93, S. 46 ff.]. Dementsprechend wird die Nachstellzeit des PI-Reglers in Gleichung 4.78 aus der Lage der Polstelle der Stromregelstrecke im z -Bereich berechnet. Mit dieser Parametrierung hat der Frequenzgang des offenen Stromregelkreises in einem großen Frequenzbereich das Verhalten eines Integrators und der Amplitudengang fällt monoton mit 20 dB pro Dekade. Mit der Pol-/Nullstellenkürzung und der Substitution $K_C^* = K_C k_{El}$ vereinfacht sich die Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises zu:

$$L_C(z) = \frac{x_C(z)}{e_C(z)} = K_C^* \frac{a_0 z + a_1}{z(z-1)} = K_C^* a_1 \frac{a_0/a_1 z + 1}{z(z-1)} \quad (4.79)$$

mit $T_{NC} = \frac{T_S}{e^{\chi_S} - 1}$

Die Verarbeitungstotzeit und das Verhältnis der Abtastzeit der Regelung zur elektrischen Zeitkonstante beeinflussen die Lage der Nullstelle z_0 der Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises. Bei Synchronmaschinen mit oberflächenmontierten Permanentmagneten ist die elektrische Zeitkonstante üblicherweise größer als die typischen Abtastzeiten der Regelung. Für $\chi_S \ll 1$ liegt die reelle Nullstelle in der Umgebung von $z_0 = -1$:

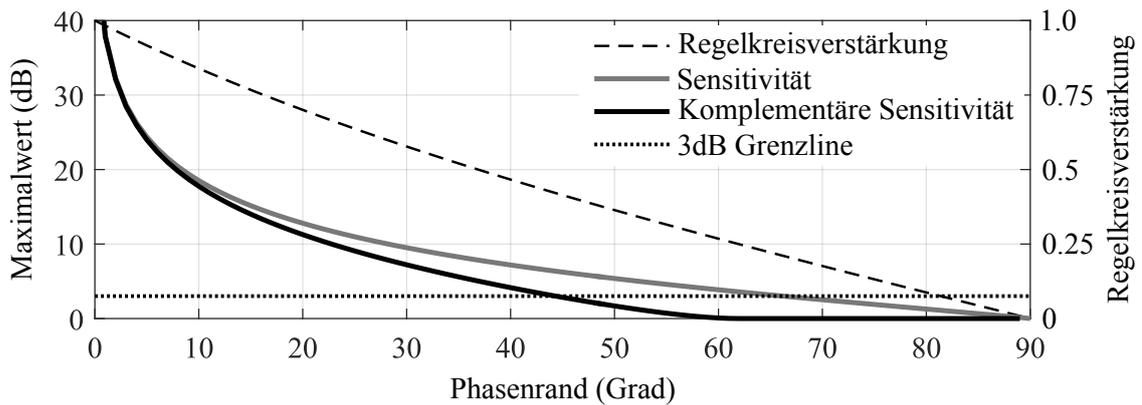
$$z_0 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{e^{-0,5\chi_S} (1 - e^{-0,5\chi_S})}{1 - e^{-0,5\chi_S}} = -e^{-0,5\chi_S} \approx -e^0 = -1 \quad (4.80)$$

Die Herleitung einer Parametrierungsvorschrift für die Proportionalverstärkung der Stromregelung erfolgt unter der Voraussetzung, dass die Näherung $a_1/a_0 \approx 1$ hinreichend erfüllt ist. Die normierte Proportionalverstärkung des Stromreglers K_C^* sowie der Koeffizient a_1 aus der modifizierten z -Transformation werden der Einfachheit halber mit der Regelkreisverstärkung des offenen Stromregelkreises $\tilde{K}_C = K_C^* \cdot a_1$ substituiert. Mit der Näherung $z_0 \approx -1$ folgt für die Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises:

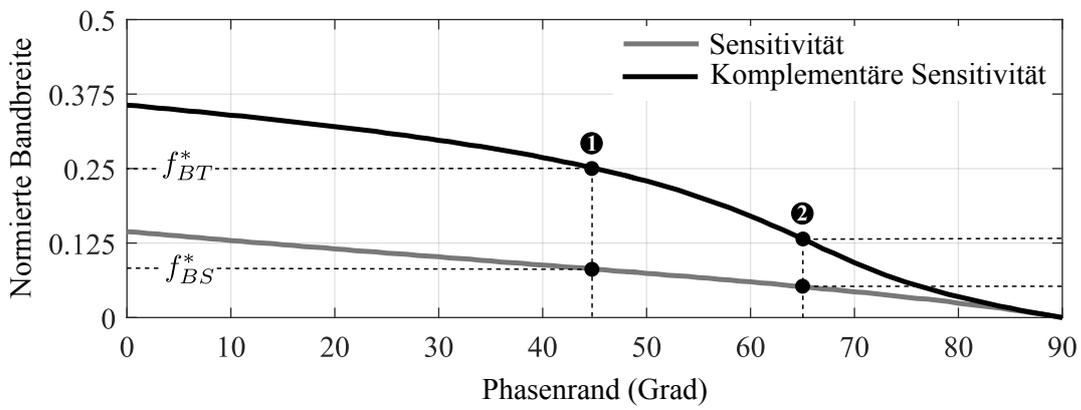
$$L_C(z) = \frac{x_C(z)}{e_C(z)} = \tilde{K}_C \frac{z+1}{z(z-1)} \quad (4.81)$$

Bei der Parametrierung der Proportionalverstärkung der Stromregelung soll eine frei wählbare Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises berücksichtigt werden. Dafür ist es zweckmäßig aus der vereinfachten Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises nach Gleichung 4.81 die Frequenzgangsfunktion mit $z = e^{j\omega T_S}$ zu berechnen. Mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T_S$ wird die Frequenzgangsfunktion unabhängig von der Abtastperiode dargestellt:

$$L_C(j\Omega) = \frac{\tilde{K}_C}{\tan(\Omega/2)} \cdot e^{j(3\pi/2 - \Omega)} \quad (4.82)$$



(a) Regelkreisverstärkung und Maximalwerte der Sensitivitätsfunktionen



(b) Normierte Bandbreite der Stromregelung

Abbildung 4.13: Eigenschaften der Stromregelung bei Vorgabe einer Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises

Der Phasengang des offenen Stromregelkreises ist unabhängig von der Regelkreisverstärkung. Die normierte Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Stromregelkreises $\Omega_{CO} = \omega_{CO} T_S$ wird aus der Definition 3.3 der Phasenreserve Φ_{MC} und dem Phasenterm aus Gleichung 4.82 berechnet:

$$\Omega_{CO} = \frac{\pi}{2} - \Phi_{MC} \quad (4.83)$$

Der Betrag der Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises ist bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz gleich Eins $|L_C(\Omega_{CO})| = 1$. Damit wird die Regelkreisverstärkung aus der normierten Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Stromregelkreises berechnet:

$$\tilde{K}_C = \tan(\Omega_{CO}/2) \quad (4.84)$$

In Abbildung 4.13a ist der Funktionsverlauf von Gleichung 4.84 für theoretisch realisierbare Werte des Phasenrands $\Phi_{MC} \in [0^\circ; 90^\circ]$ im Wertebereich der Regelkreisverstärkung $\tilde{K}_C \in [1; 0]$ dargestellt.

Sensitivität und geschlossener Regelkreis

Die Sensitivitätsfunktion der Stromregelung $S_C(z)$ wird mit Gleichung 3.18 und der Impulsübertragungsfunktion der offenen Stromregelstrecke aus Gleichung 4.81 berechnet. Mit der bereits eingeführten Näherung $a_0/a_1 \approx 1$ folgt für die Sensitivitätsfunktion:

$$S_C(z) = \frac{x_C(z)}{z_C(z)} = \frac{1}{1 + L_C(z)} = \frac{z(z-1)}{z^2 + (\tilde{K}_C - 1)z + \tilde{K}_C} \quad (4.85)$$

Die Stromregelung erfolgt mit einem Regelkreis mit einem Freiheitsgrad. Dadurch entspricht die Führungs-Impulsübertragungsfunktion der Stromregelung $H_{CC}(z)$ der komplementären Sensitivitätsfunktion der Stromregelung $T_C(z)$:

$$T_C(z) = \frac{x_C(z)}{w_C(z)} = \frac{L_C(z)}{1 + L_C(z)} = \frac{\tilde{K}_C(z+1)}{z^2 + (\tilde{K}_C - 1)z + \tilde{K}_C} = H_{CC}(z) \quad (4.86)$$

Damit sind die Impulsübertragungsfunktion der Sensitivität und der komplementären Sensitivität ausschließlich von der Regelkreisverstärkung und somit vom vorgegebenen Phasenrand des offenen Stromregelkreises abhängig. Eine analytische Umformung der Impulsübertragungsfunktionen 4.85 und 4.86 in Frequenzgangsfunktionen mit Betrag und Phase führt zu keinem aussagekräftigen Ergebnis. Aus diesem Grund wurden die Maximalwerte und die Bandbreiten der Frequenzgangsfunktionen numerisch für die theoretisch realisierbaren Werte der Phasenreserve ermittelt.

Die Maximalwerte der Sensitivität und der komplementären Sensitivität sind in Abbildung 4.13a dargestellt. Erwartungsgemäß wird der Maximalwert der beiden Frequenzgangsfunktionen mit zunehmender Phasenreserve kleiner. Ab einem Phasenrand von 60 Grad ist der Maximalwert der komplementären Sensitivität konstant bei 0 dB. Entsprechend der Einführung der komplementären Sensitivität beträgt die tolerierbare relative Modellunsicherheit (Gl. 3.43) ab diesem Phasenrand 100 Prozent. Demnach weist der Regelkreis ab einem Phasenrand ≥ 60 Grad eine hohe Robustheit auf. Die 3 dB-Grenzlinie unterschreitet die komplementäre Sensitivität ab einem Phasenrand von 45 Grad und die Sensitivität ab einem Phasenrand von 65 Grad. Aufgrund der Maximalwerte der Sensitivitätsfunktionen wird mindestens eine Phasenreserve von 45 Grad gefordert.

Die -3 dB-Bandbreite der Sensitivität f_{BS} sowie der komplementären Sensitivität f_{BT} wird gemäß den Definitionen 3.4 und 3.5 aus dem Amplitudengang der entsprechenden Frequenzgangsfunktionen berechnet. In Abbildung 4.13b sind die dabei ermittelten Bandbreiten mit dem Zusammenhang

$$f_{Bx}^* = f_{Bx}/f_S$$

auf die Abtastrate des Reglers normiert. Prinzipiell führt bei beiden Frequenzgangsfunktionen eine Erhöhung der Phasenreserve zu einer geringeren Bandbreite. Ein sinnvoller Kompromiss

Tabelle 4.2: -3 dB-Bandbreite der Stromregelung bei einer Phasenreserve von 45 Grad (Abb. 4.13b Linie ❶) und 65 Grad (Abb. 4.13b Linie ❷) für eine Abtastrate von 16 kHz

Übertragungsfunktion	Phasenrand Φ_{MC}	Bandbreite f_{Bx}^* (normiert)	Bandbreite f_{Bx} $f_S = 16$ kHz
Sensitivität	45 Grad	0,081	1,3 kHz
Komplementäre Sensitivität	45 Grad	0,25	4,0 kHz
Sensitivität	65 Grad	0,052	832 Hz
Komplementäre Sensitivität	65 Grad	0,132	2,1 kHz

zwischen den Maximalwerten der Sensitivitätsfunktionen und der erreichbaren Bandbreite in der Stromregelung wird mit einem Phasenrand zwischen 45 Grad und 65 Grad erreicht. Die Bandbreite der komplementären Sensitivität und somit der geschlossenen Stromregelung ist in diesem Bereich besonders sensitiv auf Änderungen der Phasenreserve: Durch eine Erhöhung der Phasenreserve um 20 Grad wird Bandbreite um nahezu 50 % reduziert.

Die Bandbreite für eine konkrete Abtastrate f_S der Regelung wird durch Entnormierung der Bandbreite mit $f_{Bx} = f_{Bx}^* f_S$ berechnet. In Tabelle 4.2 sind die erreichbaren -3 dB-Bandbreiten bei einer Phasenreserve von 45 Grad und 65 Grad für eine Abtastrate von 16 kHz dargestellt.

Experimentelle Verifikation

In Abbildung 4.14 sind experimentell ermittelte Frequenzgangsfunktionen der Stromregelung für eine vorgegebene Phasenreserve von 65 Grad dargestellt. Die Vorgehensweise bei der experimentellen Ermittlung der Frequenzgangsfunktionen ist im Anhang B beschrieben.

Aus dem Betragsgang der Stromregelstrecke wurden die stationäre Streckenverstärkung k_{EI} und die Zeitkonstante T_{EI} des elektrischen Teilsystems ermittelt. Entsprechend der Modellierung des elektrischen Teilsystems als Verzögerungselement 1. Ordnung resultiert der Amplitudenabfall mit 20 dB je Dekade ab der -3 dB-Eckfrequenz $f_{EI} = 1/(2\pi T_{EI})$ (vergl. Abb. 4.14, Linie ❶).

Die Regelkreisverstärkung wurde mit Gleichung 4.84 für eine Phasenreserve von 65 Grad bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises berechnet. Für eine Abtastrate von 16 kHz beträgt diese $f_{CO} = 1,1$ kHz (vergl. Abb. 4.14, Linie ❷). Die Proportionalverstärkung des PI-Stromreglers folgt aus der Rücksubstitution mit $K_C = \tilde{K}_C / (k_{EI} a_1)$. Die Parameter der Stromregelung sind in Tabelle 4.3 dargestellt.

Die charakteristischen Frequenzen der analytischen Auslegung in Tabelle 4.2 werden durch die experimentell ermittelten Frequenzgangsfunktionen bestätigt (vergl. Abb. 4.14, Linie ❸ und ❹). Der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion beträgt 3 dB und im Führungsverhalten ist der Betragsgang im gesamten Frequenzbereich ≤ 0 dB. Damit ist dem vorstellten Verfahren die Parametrierung einer zeitdiskreten Stromregelung unter Berücksichtigung einer definierbaren Stabilitätsreserve möglich.

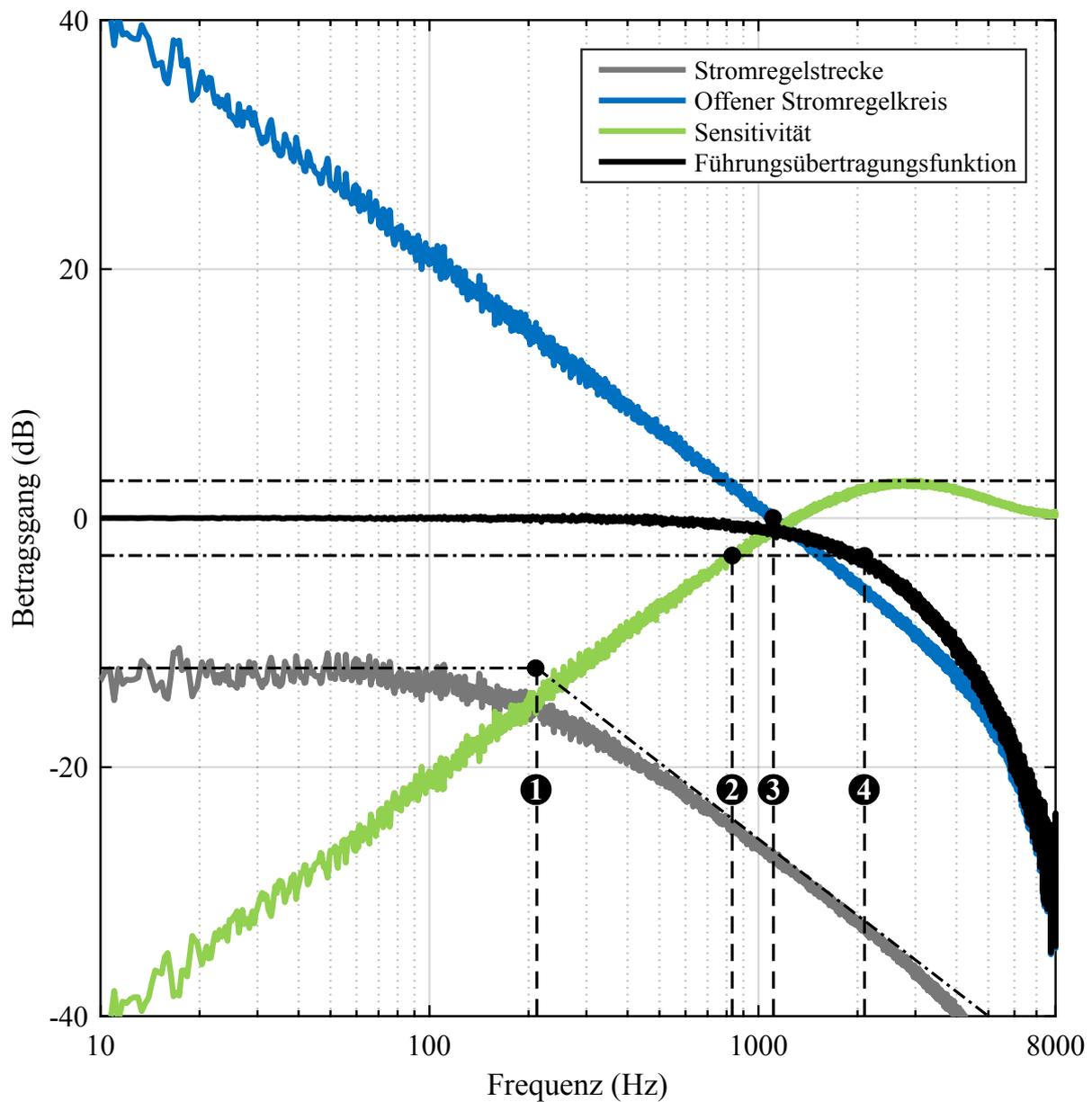


Abbildung 4.14: BODE Diagramm mit experimentell ermittelten Frequenzgangsfunktionen des Stromregelkreises

- ❶ -3 dB-Eckfrequenz des elektrischen Teilsystems $f_{El} = 212$ Hz
- ❷ -3 dB-Bandbreite der Sensitivität $f_{BS} = 832$ Hz
- ❸ Amplitudendurchtrittsfrequenz $f_{CO} = 1,1$ kHz
- ❹ -3 dB-Bandbreite des Führungsverhaltens $f_{BT} = 2,1$ kHz

Tabelle 4.3: Parameter der Stromregelung

Parameter	Symbol	Wert
Streckenverstärkung	k_{El}	$0,25 \text{ 1}/\Omega$
Elektrische Zeitkonstante	T_{El}	$750 \mu\text{s}$
Verarbeitungstotzeit	T_P	$31,25 \mu\text{s}$
Regelkreisverstärkung	\tilde{K}_C	$0,2217$
Normierte Proportionalverstärkung	K_C^*	$5,43$
Proportionalverstärkung	K_C	$21,72 \text{ V}/\text{A}$
Nachstellzeit	T_{NC}	$750 \mu\text{s}$

4.5.2 Drehzahl- und Positionsregelkreis

Im Rahmen dieser Arbeit wird als Bandbreite der unterlagerten Stromregelung die -3 dB-Bandbreite der Sensitivitätsfunktion für die Auslegung der Positionsregelschleife herangezogen. In diesem Frequenzbereich wird durch die Regelung gewährleistet,

- dass die im Stromregelkreis eingreifenden Störgrößen $\vec{z}_C(j\omega)$ und $\vec{u}_C(j\omega)$ mit mindestens 3 dB unterdrückt werden,
- für den Amplitudengang des Folgeregelverhaltens näherungsweise $|F_{CC}(j\omega) \approx 1|$ gilt
- und die Phasenverzögerung des Folgeregelverhaltens linear mit der Frequenz zunimmt.

Bei einer Parametrierung der Stromregelung gemäß Kapitel 4.5.1 wird für die technisch sinnvollen Werte der Phasenreserve von 45 bis 65 Grad eine normierte -3 dB-Bandbreite der Sensitivitätsfunktion zwischen $\omega_{BS}^* \approx 0,33 \dots 0,51$ erreicht (vergl. Tab. 4.2). In der kaskadierten Regelungsstruktur ist die realisierbare Bandbreite der überlagerten Positionsregelschleife zwangsläufig kleiner als die der unterlagerten Stromregelung. Digitale Regler können nach [5, S. 300] mit zeitkontinuierlichen Reglern approximiert werden, wenn das Produkt aus Abtastperiode T_S und Amplitudendurchtrittsfrequenz ω_{CO} folgende Bedingung erfüllt:

$$T_S \omega_{CO} \approx 0,15 \dots 0,5 \quad (4.87)$$

Die Ausführung der überlagerten Regelkreise erfolgt mit der Abtastperiode T_S der Stromregelung. Somit wird mit Berücksichtigung der Bandbreite der Stromregelung die Bedingung in Gleichung 4.87 für eine zeitkontinuierliche Approximation der Regelkreise erfüllt. Die Beschreibung und Auslegung der äußeren Regelkreise erfolgt deshalb im Frequenzbereich als Funktion der komplexen Kreisfrequenz s .

Das Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber wird auf eine Kennzeichnung der Frequenzabhängigkeit der Signale verzichtet. Die Rückführgröße für den Drehzahlregelkreis $y_{SC}(s)$ wird aus dem Positionsmesswert berechnet. Für die Beurteilung der Stabilitätseigenschaften einschleifiger Regelkreise werden alle mit dem Messwert eines Sensors durchgeführten

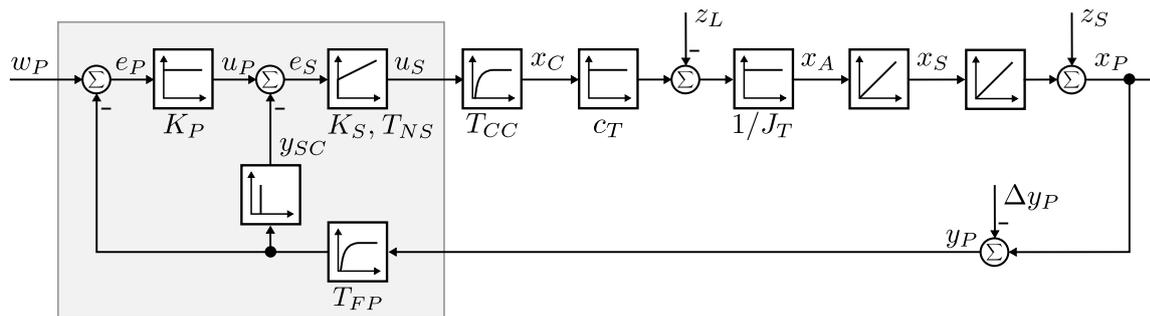


Abbildung 4.15: Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs

Operationen in einem Regelalgorithmus zusammengefasst. Der äußere Drehzahl- und Positionsregelkreis kann damit auf eine Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden zurückgeführt werden.

Die Übertragungsfunktion des Vorsteuer-Filters $G_{FF}^K(s)$ entspricht in einer Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden - ohne weitere Maßnahmen zur Vorsteuerung - einem PI-Regler. Mit dieser Übertragungsfunktion wird das Übertragungsverhalten einer Sollwertvorgabe $w_P(s)$ auf die Stellgröße $u_S(s)$ des Positionsreglers beschrieben. Das Ziel dieser Arbeit ist die Verbesserung des Störverhaltens eines mechanisch steifen Antriebs. Somit ist insbesondere die Übertragungsfunktion des *Feedback*-Reglers $G_{FB}^K(s)$ relevant. Diese beschreibt das Übertragungsverhalten der gemessenen Position $y_P(s)$ auf die Stellgröße des Reglers und hat in der Positionsregelschleife die Regelungsstruktur eines PID-Reglers. Der Hochindex K wird im folgenden für eine Kennzeichnung der Regler der „klassischen“ Kaskadenregelung verwendet.

$$G_{FF}^K(s) = \frac{u_S(s)}{w_P(s)} = \frac{K_P K_S (1 + T_{NS}s)}{T_{NS}s} \quad (4.88a)$$

$$G_{FB}^K(s) = \frac{u_S(s)}{y_P(s)} = \frac{K_P K_S \left(1 + \frac{1}{K_P}s\right) (1 + T_{NS}s)}{T_{NS}s(1 + T_{FP}s)} \quad (4.88b)$$

Der Signalfilter mit der Filterzeitkonstante T_{FP} im Rückkoppelzweig der berechneten Position ist erforderlich um die Amplitudenanhebung des PID-Reglers bei hohen Frequenzen zu kompensieren. Die Implementierung des Signalfilters erfolgt mit Gleichung 4.66 als zeitdiskreter Tiefpassfilter 1. Ordnung.

Für die schwingungsfähige Regelstrecke in Abbildung 4.15 mit I2T1-Charakteristik sind in der Literatur verschiedene Verfahren für die Auslegung der Kaskadenregelung bekannt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Vorteil der sukzessiven Inbetriebnahme der Kaskadenregelung auch für die Auslegung der Regelkreise angewendet. Aus diesem Grund wird im ersten Schritt die Parametrierung des Drehzahlregelkreises beschrieben. Die Parametrierung der

Proportionalverstärkung K_P der Positionsregelung erfolgt im zweiten Schritt mit geschlossenem Drehzahlregelkreis.

Parametrierung der Drehzahlregelung

Die Auslegung der Drehzahlregelung erfolgt mit der Methode des symmetrischen Optimums. Die Tiefpasscharakteristik der Stromregelung, des Signalfilters im Rückkoppelzweig und der Berechnung der Drehzahl aus Positionsmesswerten wird mit einem Verzögerungsglied 1. Ordnung $G_\Sigma(s)$ mit der Summenzeitkonstante T_Σ approximiert.

Die Phasenverzögerung der Stromregelung beträgt bei der -3 dB-Bandbreite der Sensitivitätsfunktion 45 Grad (Linie ② in Abbildung 4.14). Aus diesem Grund wird für die Approximation der Stromregelung mit einem Verzögerungsglied 1. Ordnung die Ersatzzeitkonstante der Stromregelung T_{CC} aus der -3 dB-Bandbreite der Sensitivität mit $T_{CC} = 1/(2\pi f_{BS})$ berechnet. Die Berechnung der Drehzahl aus Positionsmesswerten mit der BACKWARD-EULER-Differentiation führt nach Gleichung 4.53 zu einer linearen Phasenverzögerung, und wird durch ein Totzeitelement beschrieben. Das Totzeitelement wird mit der PADÉ-Approximation wiederum als Verzögerungselement 1. Ordnung angenähert. [67, S. 271]

$$G_\Sigma(s) = \frac{1}{1 + T_\Sigma s} \approx \frac{1}{1 + T_{CC}s} \frac{1}{1 + T_{FP}s} e^{-sT_S/2} \quad (4.89)$$

$$\text{mit } T_\Sigma = T_{CC} + T_{FP} + T_S/2$$

Die Regelung der daraus resultierenden IT1-Regelstrecke erfolgt mit einem PI-Regler mit der Proportionalverstärkung K_S und der Nachstellzeit T_{NS} . Der Integrationsbeiwert der Regelstrecke und die Proportionalverstärkung des Reglers werden mit der normierten Proportionalverstärkung $K_S^* = K_S c_T / J_T$ substituiert. Die Übertragungsfunktion des offenen Drehzahlregelkreises $L_S(s)$ wird aus dem Produkt des PI-Reglers und der Regelstrecke gebildet:

$$L_S(s) = \frac{K_S^* (1 + T_{NS}s)}{T_{NS}s} \frac{1}{(1 + T_\Sigma)s} \quad (4.90)$$

Mit der Nachstellzeit des PI-Reglers wird die Phasenhebung durch die Nullstelle des PI-Reglers bei niedrigen Frequenzen parametrieren. Das Verzögerungsglied der Regelstrecke führt zu einer Phasenabsenkung bei hohen Frequenzen. Die Amplitudendurchtrittsfrequenz wird mit der normierten Proportionalverstärkung festgelegt. Bei einer Auslegung der Drehzahlregelung mit der Methode des symmetrischen Optimums wird unmittelbar die Phasenreserve des Regelkreises Φ_{MS} bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises ω_{CO} parametrieren. Der Designparameter χ_{SO} zur Parametrierung der Drehzahlregelung wird aus der geforderten Phasenreserve berechnet [69, S. 466].

$$\chi_{SO} = \frac{1 + \sin(\Phi_{MS})}{\cos(\Phi_{MS})} \quad (4.91)$$

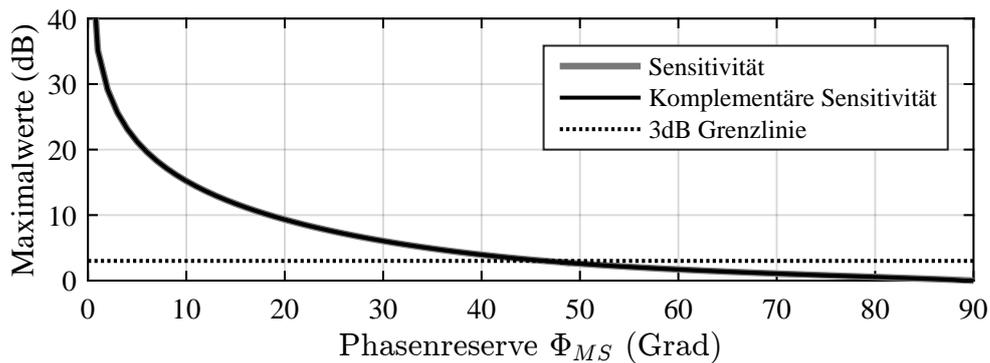


Abbildung 4.16: Maximalwerte der Sensitivität und der komplementären Sensitivität der Drehzahlregelung bei Vorgabe einer Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz

Damit folgt für die normierte Proportionalverstärkung und die Nachstellzeit des PI-Reglers:

$$K_S^* = \frac{1}{\chi_{SO} T_\Sigma} \quad (4.92)$$

$$T_{NS} = \chi_{SO}^2 T_\Sigma \quad (4.93)$$

Die Übertragungsfunktion der Sensitivitätsfunktion der Drehzahlregelung $S_S(s)$ wird aus der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises berechnet.

$$S_S(s) = \frac{x_S(s)}{z_S(s)} = \frac{1}{1 + L_S(s)} = \frac{T_{NS} s^2}{K_S^*} \frac{1 + T_\Sigma s}{1 + T_{NS} s + \frac{T_{NS}}{K_S^*} s^2 + \frac{T_{NS} T_\Sigma}{K_S^*} s^3} \quad (4.94)$$

Das Folgeregelverhalten des geschlossenen Drehzahlregelkreises entspricht der komplementären Sensitivitätsfunktion $T_S(s)$ und wird aus der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises berechnet.

$$T_S(s) = \frac{x_S(s)}{w_S(s)} = \frac{L_S(s)}{1 + L_S(s)} = \frac{1 + T_{NS} s}{1 + T_{NS} s + \frac{T_{NS}}{K_S^*} s^2 + \frac{T_{NS} T_\Sigma}{K_S^*} s^3} \quad (4.95)$$

Die Maximalwerte der Sensitivitätsfunktion sowie der komplementären Sensitivitätsfunktion sind in Abbildung 4.16 für die theoretisch möglichen Werte der Phasenreserve dargestellt. Bei einer Auslegung nach der Methode des symmetrischen Optimums sind die Maximalwerte der Sensitivität und der komplementären Sensitivität für eine bestimmte Phasenreserve identisch. Typischerweise wird für die Drehzahlregelung von Servoantrieben in Produktionsmaschinen eine Phasenreserve größer 60 Grad gefordert. Mit dieser Parametrierung ist das Überschwingen bei einer sprunghaftigen Sollwertvorgabe < 10 Prozent. Dieses Kriterium wird bei einer Auslegung mit der Methode des symmetrischen Optimums mit $\chi_{SO} = 4$ erfüllt.

Parametrierung der Positionsregelung

Für die Auslegung der Positionsregelung wird die unterlagerte Drehzahlregelung als Verzögerungsglied 1. Ordnung approximiert. Die Zeitkonstante wird durch die Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Drehzahlregelkreises bestimmt und wird aus der normierten Proportionalverstärkung mit $T_{SC} = 1/K_S^*$ berechnet.

$$T_S(s) = \frac{x_S(s)}{w_S(s)} \approx \frac{1}{1 + T_{SC}s} \quad (4.96)$$

Aufgrund des integrierenden Verhaltens der Regelstrecke ist stationäre Genauigkeit der Positionsregelung bereits mit einem P-Regler gegeben. Die Übertragungsfunktion des offenen Positionsregelkreises $L_P(s)$ wird aus dem Produkt der Proportionalverstärkung des Reglers K_P und dem vereinfachten Streckenmodell berechnet.

$$L_P(s) = \frac{K_P}{(1 + T_{SC}s)s} \quad (4.97)$$

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Positionsregelkreises $T_P(s)$ wird aus der Übertragungsfunktion des offenen Positionsregelkreises gebildet und entspricht einem Verzögerungsglied 2. Ordnung mit Dämpfungsgrad δ_P und Kennkreisfrequenz ω_{0P} .

$$T_P(s) = \frac{x_P(s)}{w_P(s)} = \frac{L_P(s)}{1 + L_P(s)} = \frac{\frac{K_P}{T_{SC}}}{s^2 + \underbrace{\frac{1}{T_{SC}}}_{2\delta_P\omega_{0P}} s + \underbrace{\frac{K_P}{T_{SC}}}_{\omega_{0P}^2}} \quad (4.98)$$

Mit einem Koeffizientenvergleich werden die Gleichungen für die Parametrierung der Übertragungsfunktion des geschlossenen Positionsregelkreises ermittelt:

$$2\delta_P\omega_{0P} = \frac{1}{T_{SC}} \Rightarrow \omega_{0P} = \frac{1}{2\delta_P T_{SC}} \quad (4.99a)$$

$$\omega_{0P}^2 = \frac{K_P}{T_{SC}} = \left(\frac{1}{2\delta_P T_{SC}}\right)^2 \Rightarrow K_P = \frac{1}{4\delta_P^2 T_{SC}} \quad (4.99b)$$

Somit wird die Proportionalverstärkung aus der Vorgabe eines Dämpfungsgrads für den geschlossenen Positionsregelkreis und der Ersatzzeitkonstanten der geschlossenen Drehzahlregelung berechnet. Diese wird für überschwingungsfreies Positionieren des geschlossenen Positionsregelkreises zu Eins gewählt.

Berechnung des Vorsteuerfilters

Gemäß Gleichung 3.7 kann der Vorsteuerfilter $G_{FF}(s)$ aus dem inversen Modell der nominalen Positionsregelstrecke nach Gleichung 4.39 und dem *Feedback*-Reglers der Kaskadenregelung nach Gleichung 4.88b berechnet werden. Aufgrund der hohen Bandbreite des ge-

geschlossenen Stromregelkreises wird dieses Teilsystem nicht in der Berechnung der inversen Regelstrecke berücksichtigt.

$$G_{FF}(s) = \frac{u_{FF}(s)}{w_P(s)} = (P(s))^{-1} + G_{FB}^K(s) \approx (G_{S2}(s))^{-1} + G_{FB}^K(s) \quad (4.100)$$

Mit der kaskadierten Regelungsstruktur wird die Vorsteuerfunktion realisiert, indem aus der Soll-Position $w_P(s)$ Vorsteuergrößen für die unterlagerten Drehzahl- und Querstromregelkreise $u_{FS}(s)$ und $u_{FC}(s)$ des Antriebs abgeleitet werden. Die Soll-Drehzahl entspricht der ersten Zeit-Ableitung der Soll-Position. Wird nur der Drehzahlregelkreises vorgesteuert, ist die Struktur des Vorsteuerfilters und des Feedback-Reglers identisch. Die Übertragungsfunktion der geschlossenen Positionsregelung entspricht in diesem Fall der komplementären Sensitivitätsfunktion.

$$u_{FS}(s) = w_P(s)s \quad (4.101)$$

Die zweite Zeit-Ableitung der Soll-Position entspricht der Soll-Beschleunigung $u_{FA}(s)$ des Antriebs. Diese Vorsteuergröße wird mit den nominellen Streckenparametern in einen äquivalenten Sollwert für den Stromregler umgerechnet. Dieser Term entspricht in der Vorsteuerfunktion dem inversen Modell der nominellen Positionsregelstrecke.

$$u_{FC}(s) = \frac{\hat{J}_T}{\hat{c}_T} \underbrace{w_P(s)s^2}_{u_{FA}(s)} \quad (4.102)$$

4.5.3 Stabilität des Positionsregelkreises

Das vorgestellte zeitkontinuierliche Verfahren zur Auslegung der Positions- und Drehzahlregelung wird lediglich zur Parametrierung der Regler verwendet. Für eine Untersuchung der Stabilität des äußeren Positionsregelkreises wird die Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L(j\omega)$ mit der zeitdiskreten Realisierung des *Feedback*-Regler aus Gleichung 4.88b und der Frequenzgangsfunktion der Regelstrecke $P(j\omega)$ gebildet. Die Frequenzgangsfunktion der Regelstrecke wird aus der Impulsübertragungsfunktion der geschlossenen Stromregelung aus Gleichung 4.86 sowie der nominellen Übertragungsfunktion eines mechanisch steifen Antriebs aus Gleichung 4.39 mit $z = e^{j\omega T_s}$ bzw. $s = j\omega$ berechnet.

$$L(j\omega) = H_{FB}^K(j\omega)P(j\omega) = H_{FB}^K(j\omega)H_{CC}(j\omega)G_{S2}(j\omega) \quad (4.103)$$

Die Ortskurve des offenen Regelkreises ist in Abbildung 4.17 für die Parameter in Tabelle 4.4 dargestellt. Die Frequenzgangsfunktion der Sensitivität des Positionsregelkreises $S(j\omega)$ wird aus der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises und Gleichung 3.18 berechnet.

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = \frac{1}{1 + H_{FB}^K(j\omega)H_{CC}(j\omega)G_{S2}(j\omega)} \quad (4.104)$$

Der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion beträgt 1,63 dB und wird entsprechend Gleichung 3.28 aus dem minimalen Abstand der Ortskurve zum kritischen Punkt berechnet. Der Maximalwert der komplementären Sensitivität wird nach Gleichung 3.39 aus dem Verhältnis der Strecken von einem Punkt der Ortskurve zum Ursprung bzw. zum kritischen Punkt im NYQUIST-Diagramm gebildet. Der Maximalwert der komplementären Sensitivität wird bei der Kreisfrequenz $\omega_{T_{Max}}$ erreicht:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{\omega} \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = \frac{|L(j\omega_{T_{Max}})|}{|1 + L(j\omega_{T_{Max}})|} \quad (4.105)$$

Für mechanisch steife Antriebe kann damit mit Gleichung 4.46 eine Obergrenze für das zulässige Verhältnis der Massenträgheitsmomente von Last und Motor angegeben werden:

$$\chi_J < \frac{1}{\|T\|_{\infty} - 1} \quad (4.106)$$

Der Maximalwert der komplementären Sensitivität beträgt 1,46 bzw. 3,26 dB. Folglich ist mit der vorgestellten Parametrierung bei mechanisch steifen Antrieben ein Verhältnis der Massenträgheitsmomente von $\chi_J < 2,17$ zulässig.

Die Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung mit unterlagerter Stromregelung sind in Abbildung 4.18 für die vorgestellte Auslegung dargestellt. Die -3 dB-Bandbreite der Positionsregelung im Führungsverhalten beträgt ohne weitere Maßnahmen zur Vorsteuerung 64 Hz (Linie ❶). Mit dem Vorsteuerfilter nach Gleichung 4.100 kann die Bandbreite im Führungsverhalten signifikant angehoben werden, allerdings resultiert daraus in einem weiten Frequenzbereich eine Überhöhung des Amplitudengangs (gestrichelte Linie). Im Positionsregelkreis eingreifende Störgrößen, wie das Prozessdrehmoment, werden mit mindestens 3 dB bis zu einer Frequenz von 92 Hz (Linie ❷) unterdrückt. Im Gegenkopplungsbereich kann die Störunterdrückung durch die Regelung mit einer Tangente angenähert werden. Der Betragsgang der Tangente wird für kleine Frequenzen aus der Sensitivitätsfunktion $S(j\omega)$ der Positionsregelung abgeleitet. Mit der beschriebenen Parametrierung des *Feedback*-Reglers wird die Steigung der Tangente auf den Designparameter des symmetrischen Optimums und der Summenzeitkonstante zurückgeführt. Demnach wird das Störverhalten eines mechanisch steifen Antriebs im Wesentlichen durch die Parametrierung der Drehzahlregelung beeinflusst.

$$|S(\omega \ll \omega_{BS})| = \frac{T_{NS}\omega^3}{K_S^* K_P} = 4\chi_{SO}^4 T_{\Sigma}^3 \omega^3 \quad (4.107)$$

Die Amplitudendurchtrittsfrequenz der offenen Positionsregelschleife ist mit Linie ❸ gekennzeichnet und beträgt 170 Hz. Für die Analyse der Auswirkungen von Positionsmessfehler im Regelkreis ist die Frequenzgangsfunktion der komplementären Sensitivität ausschlaggebend. Demnach haben diese bis zur Eckfrequenz der komplementären Sensitivität bei 280 Hz (Linie ❹) einen Einfluss von wenigstens -3 dB auf die Regelgröße.

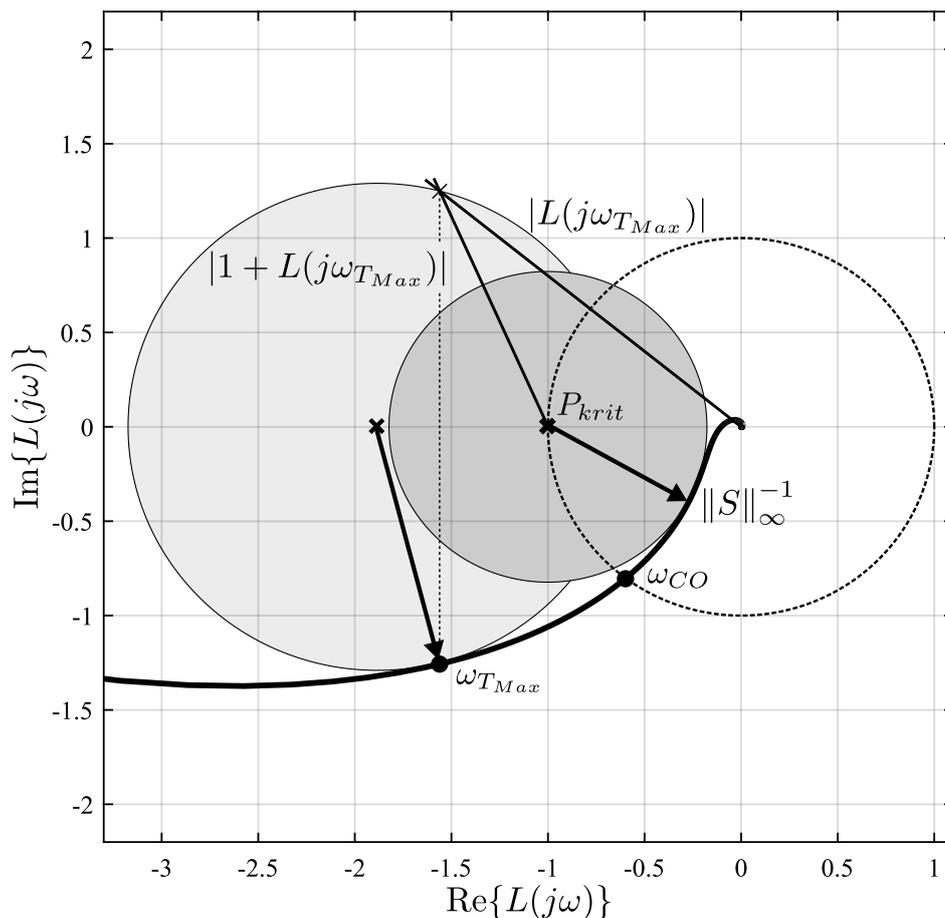


Abbildung 4.17: NYQUIST-Diagramm der Positionsregelung mit Kreisen für eine konstante maximale Sensitivität und komplementäre Sensitivität

Tabelle 4.4: Parameter der Positionsregelung

Parameter	Symbol	Wert
Abtastperiode	T_S	62,5 μ s
Stromregelkreisverstärkung (normiert)	\tilde{K}_C	0,2217
Filterzeitkonstante Signalfilter Position	T_{FP}	62,5 μ s
Summenzeitkonstante	T_Σ	250 μ s
Designparameter Symmetrisches Optimum	χ_{SO}	4
Proportionalverstärkung Drehzahlregelung	K_S^*	1000 1/s
Nachstellzeit Drehzahlregelung	T_{NS}	4 ms
Proportionalverstärkung Positionsregelung	K_P	250 1/s

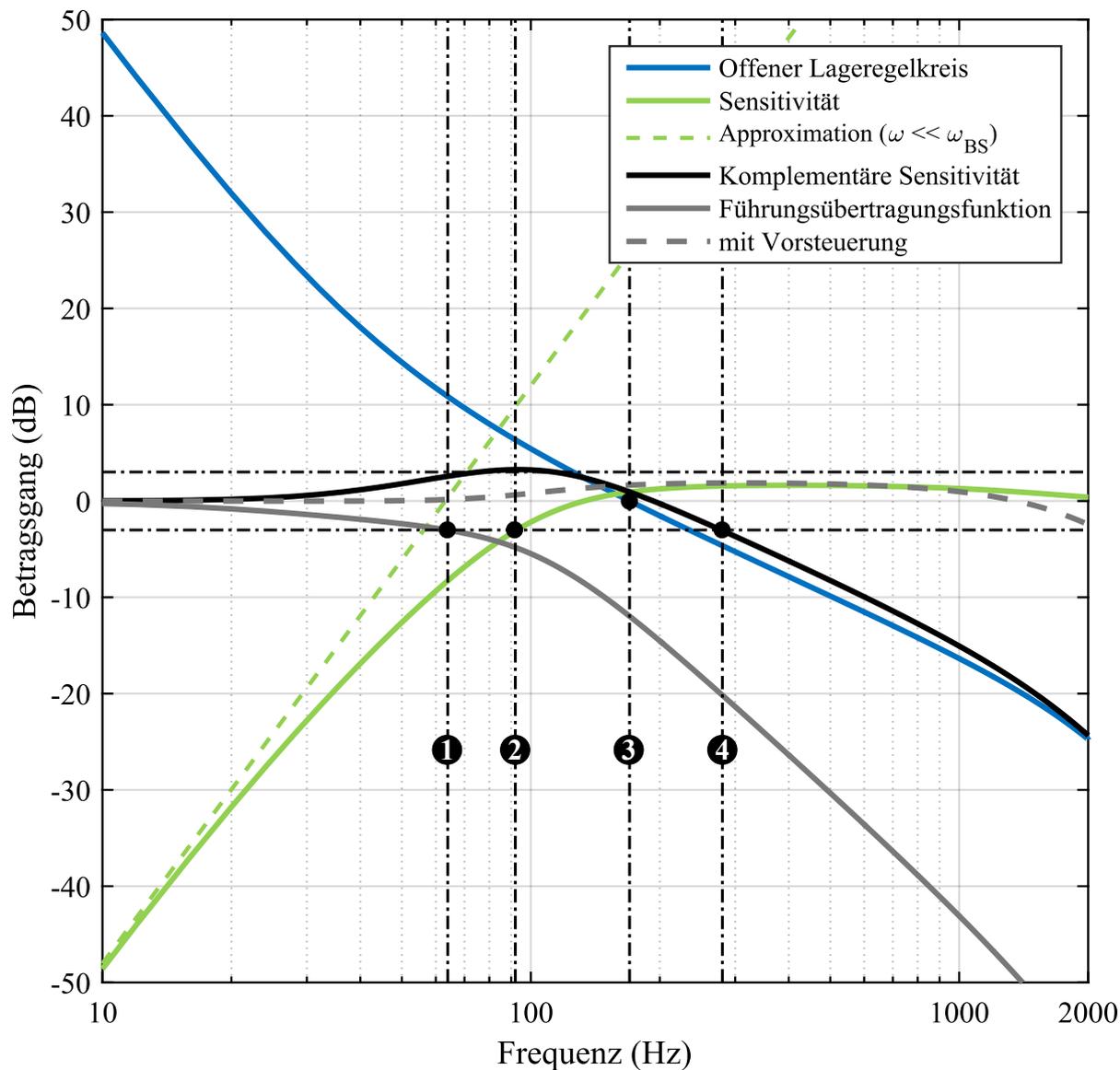


Abbildung 4.18: Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung mit unterlagerter Stromregelung

- ❶ -3 dB-Bandbreite der Führungsübertragungsfunktion $f_{PC} = 64$ Hz
- ❷ -3 dB-Bandbreite der Sensitivität $f_{BS} = 92$ Hz
- ❸ Amplitudendurchtrittsfrequenz $f_{CO} = 170$ Hz
- ❹ -3 dB-Bandbreite der komplementären Sensitivität $f_{BT} = 280$ Hz

Die beschriebene Parametrierung der äußeren Positionsregelschleife sowie der unterlagerten Stromregelung führen zu einer stabilen und robusten Auslegung der Kaskadenregelung. Eine Erhöhung der relativ niedrigen Bandbreite im Führungsverhalten der Positionsregelung ist mit Maßnahmen zur Vorsteuerung möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird vorrangig die Verbesserung des Störverhaltens eines mechanisch steifen Antriebs untersucht. Aus diesem Grund werden keine weiterführenden Methoden zur Vorsteuerung betrachtet.

Mit der gewählten Parametrierung werden im Stromregelkreis eingreifende Störgrößen bis zu einer Frequenz von 850 Hz mit mindestens 3 dB unterdrückt. In der überlagerten Positionsregelschleife wird bei gleicher Abtastperiode der Regelung diese Störunterdrückung nur bis zu einer Frequenz von 92 Hz erreicht. Somit könnte das Störverhalten eines mechanisch steifen Antriebs signifikant verbessert werden, wenn das im Regelkreis eingreifende Prozessdrehmoment in der innersten Regelschleife kompensiert wird. Diese Störgröße hat einen Einfluss auf

- das Beschleunigungsdrehmoment
- und die Winkelbeschleunigung

des Servoantriebs. Prinzipiell könnte mit einem Sensor jede der genannten Größen erfasst werden und, nach Umrechnung in einen äquivalenten Strom-Sollwert, im innersten Regelkreis zur Störgrößenkompensation aufgeschaltet werden [93, S. 116]. Die Integration eines zusätzlichen Sensors in ein Antriebssystem führt zu Kosten und benötigt Bauraum. Um mechanische Resonanzen in der Messkette zu verhindern muss zudem eine konstruktiv oftmals aufwändige mechanisch steife Anbindung des Sensors an den Servoantrieb gewährleistet sein.

Es ist daher naheliegend die Beschleunigung aus den Messwerten des ohnehin vorhandenen Positionsmessgerätes zu berechnen. Aus diesem Grund wird im folgenden Teil der Arbeit untersucht, inwiefern eine Verbesserung des Störverhalten eines mechanisch steifen Antriebs mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten möglich ist. Die kaskadierte Regelungsstruktur bestehend aus einer Positionsregelung mit zwei Freiheitsgraden und unterlageter Stromregelung wird dabei als Ausgangspunkt der Untersuchung und als Referenzverfahren verwendet.

5 Methoden zur Berechnung der Beschleunigung

Für die Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten werden die in Abbildung 5.1 dargestellten Methoden analysiert und praxisnah verglichen. Die Verfahren mit endlicher Impulsantwort (FIR) und unendlicher Impulsantwort (IIR) basieren auf unterschiedlichen numerischen Approximation der idealen zeitkontinuierlichen Differentiation.

Mit einer Systembeschreibung und den Ein- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke können mit Beobachtern die Zustandsgrößen des physikalischen Systems geschätzt werden. In mechanisch steifen Antrieben reduziert sich dies auf das mechanische Teilsystem mit dem drehmomentbildenden Strom als Eingangsgröße und der Position als Ausgangsgröße. Ein Schätzwert der Beschleunigung des Antriebs wird in der Beobachterstruktur für die Schätzung der Geschwindigkeit bzw. der Drehzahl des Antriebs berechnet.

Von den aufgeführten Methoden wird jeweils die Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung - von der tatsächlichen Beschleunigung $x_A(j\omega)$ auf die berechnete Beschleunigung $y_{AC}(j\omega)$ - betrachtet. Identisch ist dabei für alle Verfahren der zeitkontinuierliche Streckenanteil. Für eine harmonische Analyse der Beschleunigungsermittlung im Frequenzbereich wird die Beschleunigung mit Amplitude \hat{x}_A und Kreisfrequenz ω als komplexwertige Zeigergröße als Funktion der Zeit t eingeführt.

$$x_A(j\omega) = \hat{x}_A e^{j\omega t} \quad (5.1)$$

Die Position des Antriebs $x_P(j\omega)$ resultiert aus der zweifachen, zeitkontinuierlichen Integration der Beschleunigung. Für die Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten ist nur die Positionsänderung relevant. Aus diesem Grund werden Anfangswerte an dieser

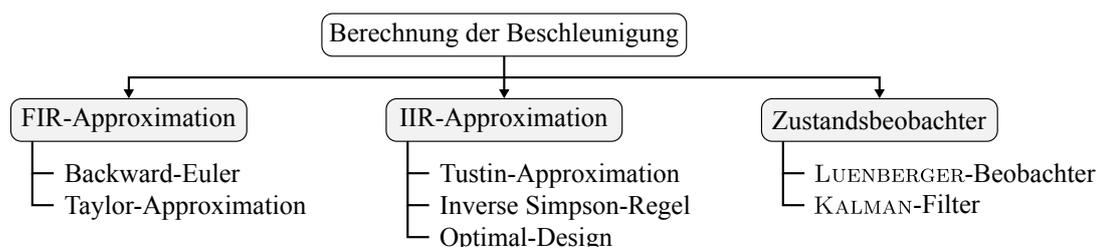


Abbildung 5.1: Methoden zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten

Stelle nicht berücksichtigt In einem Zwischenschritt wird die Drehzahl bzw. Geschwindigkeit $x_S(j\omega)$ des Antriebs berechnet.

$$x_S(j\omega) = \int x_A(j\omega) dt = \hat{x}_A \int e^{j\omega t} dt = \frac{x_A(j\omega)}{j\omega} \quad (5.2a)$$

$$x_P(j\omega) = \int x_S(j\omega) dt = \frac{\hat{x}_A}{j\omega} \int e^{j\omega t} dt = \frac{x_A(j\omega)}{(j\omega)^2} \quad (5.2b)$$

Die Frequenzgangfunktion des zeitkontinuierlichen Teils der Beschleunigungsermittlung $F_{2I}(j\omega)$ wird aus den Quotienten der Position und der Beschleunigung gebildet.

$$F_{2I}(j\omega) = \frac{x_P(j\omega)}{x_A(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2} \quad (5.3)$$

Die Frequenzgangfunktion der idealen zeitkontinuierlichen Differentiation zur Berechnung der ersten bzw. zweiten Ableitung eines Signals $F_{1D}^{ideal}(j\omega)$ bzw. $F_{2D}^{ideal}(j\omega)$ resultiert aus der inversen Frequenzgangfunktion der jeweiligen Integration. Aufgrund der Spiegelsymmetrie eines zeitdiskreten Systems kann diese Eigenschaft maximal bis zur NYQUIST-Frequenz realisiert werden.

$$F_{1D}^{ideal}(j\omega) = j\omega = j2\pi f; \quad \text{für } f \leq f_{Nyquist} = f_S/2 \quad (5.4a)$$

$$F_{2D}^{ideal}(j\omega) = (j\omega)^2 = (j2\pi f)^2; \quad \text{für } f \leq f_{Nyquist} = f_S/2 \quad (5.4b)$$

Für eine normierte Darstellung werden die Frequenzgangfunktionen der idealen zeitdiskreten Differentiation durch die Abtastrate bzw. das Quadrat der Abtastrate des Digitalrechners dividiert. Mit der anschließenden Substitution $\Omega = 2\pi fT_S$ erfolgt die Beschreibung der beiden Frequenzgangfunktionen $F_{1D}^*(j\Omega)$ und $F_{2D}^*(j\Omega)$ als Funktion der normierten Kreisfrequenz.

$$F_{1D}^*(j\Omega) = j \frac{2\pi f}{f_S} = j\Omega; \quad \text{für } |\Omega| \leq \pi \quad (5.5a)$$

$$F_{2D}^*(j\Omega) = \frac{(j2\pi f)^2}{f_S^2} = -\Omega^2; \quad \text{für } |\Omega| \leq \pi \quad (5.5b)$$

Der Amplituden- und Phasengang der idealen zeitdiskreten Differentiation ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Berechnung der 1. Ableitung resultiert aus einer linearen frequenzabhängigen Verstärkung der Positionsmesswerte mit einer Phasenverschiebung von 90 Grad. Die Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten wird mit einer quadratischen frequenzabhängigen Verstärkung und einer Phasenverschiebung von 180 Grad erreicht.

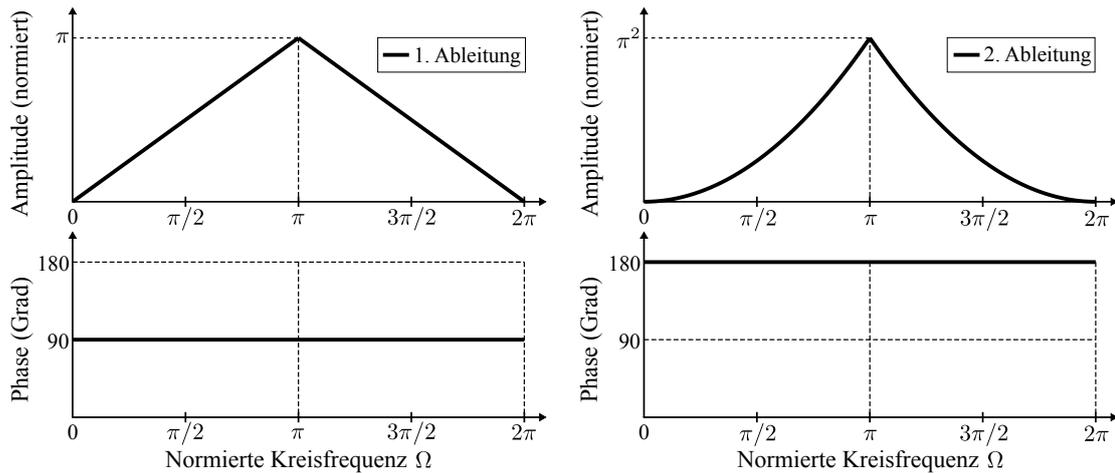


Abbildung 5.2: Amplituden- und Phasengang der idealen zeitdiskreten Differentiation zur Berechnung der 1. und 2. Ableitung eines Signals

5.1 Numerische Verfahren zur Berechnung der 2. Ableitung

Die Ermittlung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Position $x_P(j\omega)$ resultiert entsprechend Gleichung 5.3 aus einer zweifachen, zeitkontinuierlichen Integration der Beschleunigung $x_A(j\omega)$. Gemäß Kapitel 2.2.1 ist der berechnete Positionsmesswert $y_P(j\omega)$ von einem Positionsmessfehler $\Delta y_P(j\omega)$ überlagert. Der Positionsmesswert wird in der Auswerteelektronik berechnet und mit der Abtastperiode T_S der digitalen Regelung abgetastet. Der Positionsmessfehler wird mit der zeitdiskreten Differentiation nach Gleichung 5.4b frequenzabhängig verstärkt und überlagert den berechneten Beschleunigungsmesswert $y_{AC}(j\omega)$. Die maximale Verstärkung des Positionsmessfehlers nimmt quadratisch mit der Abtastrate der digitalen Regelung zu. Dieser Aspekt muss bei der Beurteilung der Verfahren zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten berücksichtigt werden.

$$y_{AC}(j\omega) = y_P(j\omega) (j\omega)^2 = x_A(j\omega) + \Delta y_P(j\omega)\omega^2; \text{ für } f \leq f_S/2 \quad (5.6)$$

Die Berechnung der Beschleunigung wird in diesem Abschnitt durch die Serienschaltung zweier Differentiatoren zur Berechnung der 1. Ableitung realisiert.

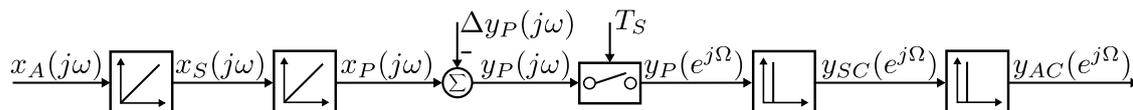


Abbildung 5.3: Ermittlung der Beschleunigung mit einer zweifachen numerischen Differentiation aus der gemessenen Position

5.1.1 Approximation durch Filter mit endlicher Impulsantwort (FIR)

Die Impulsübertragungsfunktion eines Filters mit endlicher Impulsantwort $H_{FIR}(z)$ hat nur Polstellen im Ursprung. Ein solches System hat keine Rückkoppelung der Ausgangsgröße und wird auch als *nichtrekursiv* bezeichnet [61, S. 265]. Die Lage der Nullstellen wird mit den Koeffizienten a_{i1} und a_{i2} festgelegt. Die Implementierung erfolgt als System 2. Ordnung, höhere Ordnungen werden durch eine Kaskadierung K mehrerer Teilsysteme 2. Ordnung erreicht. Mit dem Vorfaktor A wird die proportionale Verstärkung des Filters definiert.

$$H_{FIR}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = A \cdot \prod_{i=1}^K (1 - z^{-1}a_{i1}) (1 - z^{-1}a_{i2}) \quad (5.7)$$

Das Blockschaltbild eines Teilsystems einer Filterstruktur mit endlicher Impulsantwort ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Für die Realisierung des Filters sind zwei Speicherregister, drei Multiplikationen sowie jeweils eine Addition und eine Subtraktion erforderlich.

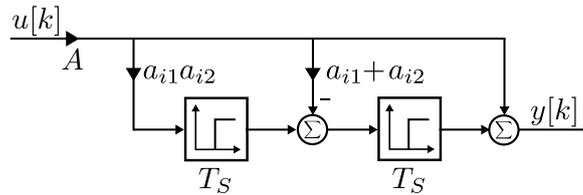


Abbildung 5.4: Filterstruktur mit endlicher Impulsantwort (FIR)

Backward-Euler

Das wohl bekannteste Verfahren zur numerischen Berechnung der Ableitung einer Funktion ist die BACKWARD-EULER-Differentiation (BE). Das Verfahren wurde bereits in Kapitel 4.4.1 beschrieben und wird im Rahmen dieser Arbeit zur Berechnung der Rückführgröße des Drehzahlregelkreises aus Positionsmesswerten verwendet. Die Frequenzgangsfunktion zur Berechnung der zweiten Ableitung $F_{2D}^{BE}(j\omega)$ wird durch eine Serienschaltung zweier Differentiatoren zur Berechnung der ersten Ableitung nach Gleichung 4.52 berechnet.

$$F_{2D}^{BE}(j\omega) = \frac{y_{AC}(j\omega)}{x_P(j\omega)} = \left(F_{1D}^{BE}(j\omega)\right)^2 = \frac{1 - 2e^{-j\omega T_S} + e^{-2j\omega T_S}}{T_S^2} \quad (5.8)$$

Die Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung wird durch eine Multiplikation der Gleichungen 5.3 und 5.8 berechnet.

$$\frac{y_{AC}(j\omega)}{x_A(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2} \frac{(1 - e^{-j\omega T_S})^2}{T_S^2} \quad (5.9)$$

Die Gleichung wird mit der EULER-Identität $2j \sin(\omega T_S/2) = e^{j\omega T_S/2} - e^{-j\omega T_S/2}$ vereinfacht und in einen Amplituden- und Phasenterm umgeformt.

$$\begin{aligned} \frac{y_{AC}(j\omega)}{x_A(j\omega)} &= \frac{1}{(j\omega)^2} \frac{\left(e^{-j\omega T_S/2} \left(e^{j\omega T_S/2} - e^{-j\omega T_S/2} \right) \right)^2}{T_S^2} \\ &= \left(\frac{2 \sin(\omega T_S/2)}{\omega T_S} \right)^2 \cdot e^{-j\omega T_S} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Das Übertragungsverhalten der Beschleunigungsermittlung wird mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T_S$ unabhängig von der Abtastperiode beschrieben. Der Amplitudenterm der Beschleunigungsermittlung wird der Sinus cardinalis-Funktion $\text{sinc}(\Omega/2) = \sin(\Omega/2) / (\Omega/2)$ substituiert.

$$\frac{y_{AC}(\Omega)}{x_A(\Omega)} = \text{sinc}^2(\Omega/2) \cdot e^{-j\Omega} \quad (5.11)$$

Folglich führt die zweifache Differentiation des Positionsmesswertes mit dem BACKWARD-EULER-Verfahren in der Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung zu einem linearen Phasenterm mit einer Phasenzögerung von 180 Grad bei der NYQUIST-Frequenz. Für die Implementierung der Differenzgleichung zur Berechnung der zweiten Ableitung eines Signals ist ein Teilsystem des allgemeinen FIR-Filters erforderlich.

$$y_{AC}[k] = \frac{1}{T_S^2} (y_P[k] - 2y_P[k-1] + y_P[k-2]) \quad (5.12)$$

Taylor-Reihenentwicklung höherer Ordnung

Mit TAYLOR-Reihen höherer Ordnung wird eine hohe Genauigkeit bei der Approximation des Differentialquotienten erreicht. Diese werden insbesondere dann verwendet, wenn die numerische Differentiation in einen großen Frequenzbereich eingesetzt wird [57].

Eine FIR-Filterstruktur mit symmetrischer Impulsantwort wird mit folgender Impulsübertragungsfunktion $H_N(z)$ beschrieben, dabei beschreibt N die Filterordnung und a_n die Koeffizienten des Filters:

$$H_N(z) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} (z^n - z^{-n}) \quad (5.13)$$

Die Frequenzgangsfunktion des allgemeinen FIR-Filters wird mit $z = e^{j\Omega}$ berechnet und anschließend mit der EULER-Identität $2j \sin(n\Omega) = e^{jn\Omega} - e^{-jn\Omega}$ umgeformt.

$$F_N(e^{j\Omega}) = j \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\Omega) \quad (5.14)$$

Die ideale zeitdiskrete Differentiation zur Berechnung der 1. Ableitung aus Gleichung 5.5a soll durch die Frequenzgangsfunktion des allgemeinen FIR-Filters der Ordnung N mit einer

TAYLOR-Reihe (TR) approximiert werden.

$$F_{1D}^{TR}(\Omega) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\Omega) \approx \Omega \quad (5.15)$$

Mit der TAYLOR-Reihe soll insbesondere der Funktionsverlauf des idealen Differentiators bei niedrigen Frequenzen mit einer hohen Genauigkeit approximiert werden. Dies wird mit einer Entwicklung der TAYLOR-Reihe der Sinus-Funktion um den Punkt $\Omega = 0$ erreicht.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die TAYLOR-Reihe der Sinus-Funktion führt zu einer Potenzreihe in welcher ausschließlich die ungeraden Potenzen der normierten Kreisfrequenz Ω enthalten sind. Für die Approximation des idealen zeitdiskreten Differentiators werden die N Potenzreihen überlagert. Die Koeffizienten S_{2m+1} für $m \geq 0$ der daraus resultierenden Funktion werden aus der Summe der entsprechenden Koeffizienten der N Potenzreihen gebildet. Die normierte Kreisfrequenz wird genau dann korrekt approximiert, wenn ausschließlich der lineare Term der normierten Kreisfrequenz vorhanden ist.

$$\begin{aligned} F_{1D}^{TR}(\Omega) &= S_1\Omega + S_3\Omega^3 + \dots \approx \Omega \\ \Rightarrow S_1 &= 1 \text{ und } S_3 = \dots = S_{2N-1} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Beispiel: Approximation des idealen zeitdiskreten Differentiators mit $N = 2$

Der Frequenzgang der idealen zeitdiskreten Differentiation wird mit einem symmetrischen FIR-Filter der Ordnung $N = 2$ approximiert. Die TAYLOR-Reihen der Sinus-Funktionen werden entsprechend Gleichung 5.16 für $x = \Omega$ und $x = 2\Omega$ gebildet.

$$\begin{aligned} F_{1D}^{TR}(\Omega) &= a_1 \sin(\Omega) + a_2 \sin(2\Omega) \\ &= a_1 \left(\Omega - \frac{\Omega^3}{3!} + \frac{\Omega^5}{5!} - \dots \right) + a_2 \left(2\Omega - \frac{8\Omega^3}{3!} + \frac{32\Omega^5}{5!} - \dots \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Um die Koeffizienten a_1 und a_2 zu bestimmen ist eine Entwicklung der TAYLOR-Reihe bis zum zweiten Reihenglied ausreichend.

$$F_{1D}^{TR}(\Omega) = \underbrace{(a_1 + 2a_2)}_{=1} \Omega - \overbrace{\frac{(a_1 + 8a_2)}{3!}}^{=0} \Omega^3 \quad (5.19)$$

Mit den bereits formulierten Bedingungen berechnen sich die Koeffizienten zu $a_1 = 4/3$ und $a_2 = -1/6$. Die um Null symmetrische Impulsübertragungsfunktion $H_2(z)$ wird entsprechend Gleichung 5.13 gebildet.

$$H_2(z) = \frac{2}{3} (z^1 - z^{-1}) - \frac{1}{12} (z^2 - z^{-2}) \quad (5.20)$$

Mit einer Rechtsverschiebung um zwei Abtastzeitpunkte durch eine Multiplikation mit z^{-2} wird die Impulsübertragungsfunktion in ein kausales System überführt. Die Impulsübertragungsfunktion der Taylor-Approximation der idealen zeitdiskreten Differentiation $H_{1D}^{TR}(z)$ wird unter Berücksichtigung der Abtastzeit berechnet.

$$\begin{aligned} H_{1D}^{TR}(z) &= \frac{1}{T_S} \left(\frac{2}{3} (z^{-1} - z^{-3}) - \frac{1}{12} (z^0 - z^{-4}) \right) \\ &= \frac{-1/12 + 2/3z^{-1} - 2/3z^{-3} + 1/12z^{-4}}{T_S} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Aufgrund der hohen Ordnung der Impulsübertragungsfunktion sind zur Berechnung der ersten Ableitung bereits 2 Teilsysteme der FIR-Filterstruktur erforderlich. Entsprechend ist zur Berechnung der zweiten Ableitung eine Kaskadierung von vier Teilsystemen erforderlich. Neben den deutlich erhöhten Ressourcenaufwand gegenüber der BACKWARD-EULER-Differentiation wirkt sich die hohe Systemordnung vor allem nachteilig auf den Phasengang des Differentiators aus.

5.1.2 Approximation durch Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR)

Die Pol- und Nullstellen einer Impulsübertragungsfunktion einer Filterstruktur mit unendlicher Impulsantwort $H_{IIR}(z)$ können an beliebiger Stelle in der z -Ebene platziert sein. Ein solches System wird auch als *rekursiv* bezeichnet. Die Lage der Nullstellen wird mit den Koeffizienten a_{i1} und a_{i2} festgelegt, die der Polstellen mit den Koeffizienten b_{i1} und b_{i2} . Die Implementierung der IIR-Filterstruktur erfolgt ebenfalls als kaskadierbares Teilsystem 2. Ordnung.

$$H_{IIR}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = A \cdot \prod_{i=1}^K \frac{(1 - z^{-1}a_{i1})(1 - z^{-1}a_{i2})}{(1 - z^{-1}b_{i1})(1 - z^{-1}b_{i2})} \quad (5.22)$$

Das Blockschaltbild eines Teilsystems einer Filterstruktur mit unendlicher Impulsantwort (IIR) ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Für die Realisierung des Filters sind zwei Speicherregister, fünf Multiplikationen, drei Additionen und zwei Subtraktionen erforderlich.

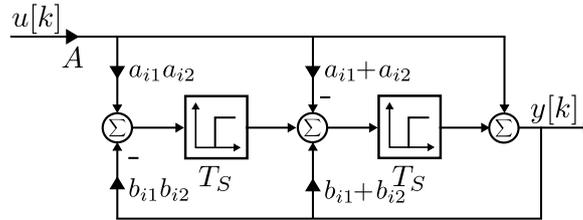


Abbildung 5.5: Filterstruktur mit unendlicher Impulsantwort (IIR)

Tustin-Approximation

Die TUSTIN-Approximation (TA) wurde bereits in Kapitel 4.4.1 für eine Näherung der Differentiation 1. Ordnung eingeführt. Die Frequenzgangsfunktion zur Berechnung der zweiten Ableitung mit der TUSTIN-Approximation $F_{2D}^{TA}(j\omega)$ erfolgt durch die Serienschaltung zweier Systeme 1. Ordnung nach Gleichung 4.58:

$$F_{2D}^{TA}(j\omega) = \frac{y_{AC}(j\omega)}{y_P(j\omega)} = \left(F_{1D}^{TA}(j\omega)\right)^2 = \left(\frac{2}{T_S} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T_S}}{1 + e^{-j\omega T_S}}\right)^2 \quad (5.23)$$

Die Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungs-Messkette wird durch eine Multiplikation der Gleichungen 5.3 und 5.23 berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{y_{AC}(j\omega)}{x_A(j\omega)} &= \frac{1}{(j\omega)^2} \left(\frac{2}{T_S} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T_S}}{1 + e^{-j\omega T_S}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{j\omega T_S} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T_S}}{1 + e^{-j\omega T_S}}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Gleichung wird mit der EULER-Identität

$$j \tan(\omega T_S/2) = \frac{e^{j\omega T_S/2} - e^{-j\omega T_S/2}}{e^{j\omega T_S/2} + e^{-j\omega T_S/2}}$$

vereinfacht. Mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega T_S$ wird das Übertragungsverhalten der Beschleunigungsermittlung unabhängig von der Abtastperiode beschrieben. Der daraus resultierende Amplitudenterm wird mit $\text{tanc}(x)/x$ substituiert.

$$\begin{aligned} \frac{y_{AC}(j\omega)}{x_A(j\omega)} &= \left(\frac{2}{j\omega T_S} \cdot \frac{j \tan(\omega T_S/2) e^{-j\omega T_S/2}}{e^{-j\omega T_S/2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2 \tan(\omega T_S/2)}{\omega T_S} \right)^2 \\ &= \text{tanc}^2(\Omega/2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Demnach führt die TUSTIN-Approximation zu keiner Phasenverzögerung bei der Berechnung der zweiten Ableitung eines Signals. Aufgrund der doppelten Polstelle der Impulsübertragungsfunktion bei der halben Abtastfrequenz wächst der Funktionswert bei dieser Frequenz über alle Grenzen. Die damit einhergehende Verstärkung von Positionsmessfehlern führt dazu, dass die TUSTIN-Approximation nicht zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten verwendet werden kann. Für die Implementierung der Differenzgleichung zur Berechnung der zweiten Ableitung ist ein Teilsystems 2. Ordnung der IIR-Filterstruktur erforderlich.

Inverse Simpson-Integrationsregel

Die SIMPSON-Regel (SR) beschreibt ein numerisches Integrationsverfahren. Dabei wird eine Funktion an mehreren Stützstellen mit einem Polynom zweiten Grades interpoliert und statt der Funktion das Interpolationspolynom integriert [58, S. 123]. Vorteile der SIMPSON-Regel sind die niedrige Ordnung und die hohe Genauigkeit des Integrationsverfahrens.

$$H_{II}^{SR}(z) = \frac{T_S (z^2 + 4z + 1)}{3(z^2 - 1)} \quad (5.26)$$

Ein Differentiator basierend auf der SIMPSON-Regel wird gebildet indem die Impulsübertragungsfunktion des Integrators invertiert wird [3].

$$\left(H_{II}^{SR}(z) \right)^{-1} = \frac{3(z^2 - 1)}{T_S (z^2 + 4z + 1)} \quad (5.27)$$

Die Impulsübertragungsfunktion des Differentiators hat zwei reelle Polstellen bei $z_{p1} = -0,268$ und $z_{p2} = -3,732$. Die zweite Polstelle liegt außerhalb des Einheitskreises und führt zu einem instabilen Systemverhalten. Eine Stabilisierung des Systems wird mit einer Spiegelung der Polstelle mit $z_{p2}^* = 1/z_{p2} = -0,268$ am Einheitskreis erreicht. Aufgrund dieser Spiegelung

wird eine Korrektur der stationären Verstärkung mit $1/3,732$ erforderlich.

$$H_{1D}^{SR}(z) = \frac{3(z^2 - 1)}{3,732T_S(z^2 + 0,5359z + 0,0718)} \quad (5.28)$$

Für die Berechnung der zweiten Ableitung mit der inversen SIMPSON-Regel werden zwei IIR-Filterstrukturen kaskadiert. Im niedrigen Frequenzbereich wird der Amplitudengang des idealen Differentiators durch die inverse SIMPSON-Regel approximiert. Die doppelte Polstelle der Impulsübertragungsfunktion führt im höheren Frequenzbereich zu einer Tiefpasswirkung und somit zu einer Abweichung vom Verlauf des idealen Differentiators. Der Einfluss von Positionsmessfehler auf die berechnete Beschleunigung wird dadurch reduziert.

Optimal-Design

In [82] werden die optimalen Koeffizienten der Impulsübertragungsfunktion eines zeitdiskreten Differentiators zur Berechnung der ersten Ableitung mit einer quadratischen Fehlerminimierung ermittelt. Dabei wird das Fehlerkriterium aus der Amplitudenabweichung zur idealen zeitdiskreten Differentiation an 21 gleichmäßig verteilten Stützpunkten gebildet. Für eine Kaskade ($K = 1$) einer IIR-Filterstruktur resultiert mit dem optimalen Design (OD) eines Differentiators zur Berechnung der ersten Ableitung folgende Impulsübertragungsfunktion $H_{1D}^{OD}(z)$ (aus [82, Tabelle 1]):

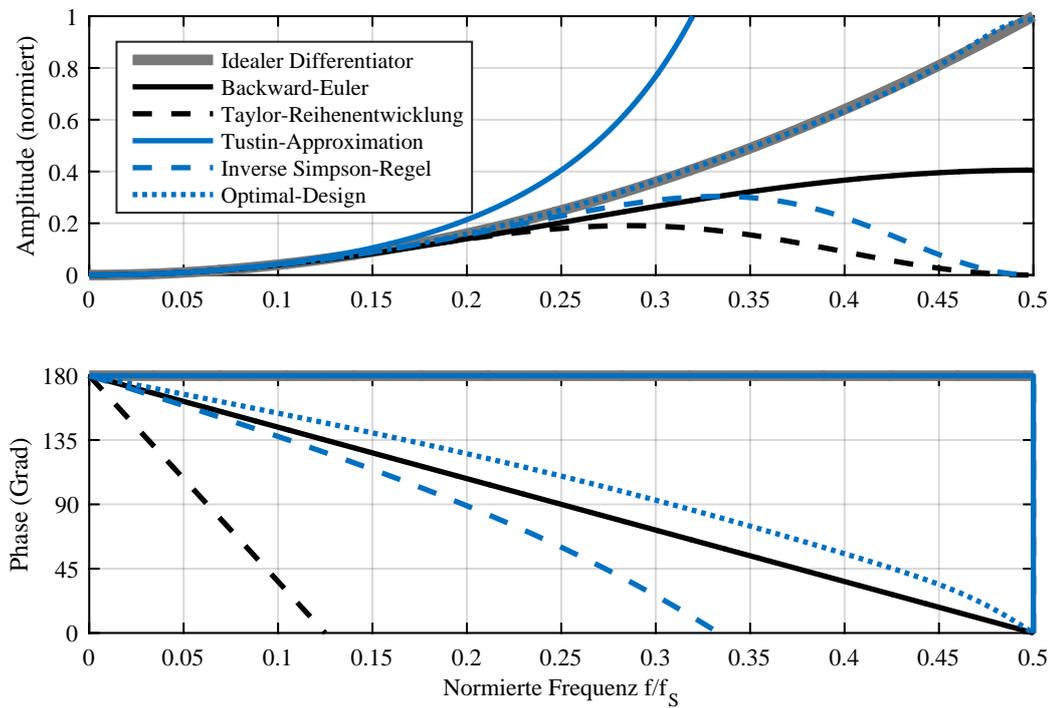
$$H_{1D}^{OD}(z) = \frac{0.3664\pi(z-1)(z+0.6708)}{T_S(z+0.1424)(z+0.716)} \quad (5.29)$$

Mit diesem Verfahren zur Approximation der idealen zeitdiskreten Differentiation ist der relative Fehler der Amplitudenabweichung im gesamten Frequenzbereich $< 1,2\%$. Nachteilig ist allerdings, dass bereits bei sehr kleinen Frequenzen eine Abweichung auftritt und somit die berechnete Beschleunigung im relevanten Frequenzbereich fehlerbehaftet ist. Für die Berechnung der zweiten Ableitung sind zwei Teilsysteme 2. Ordnung der IIR-Filterstruktur erforderlich.

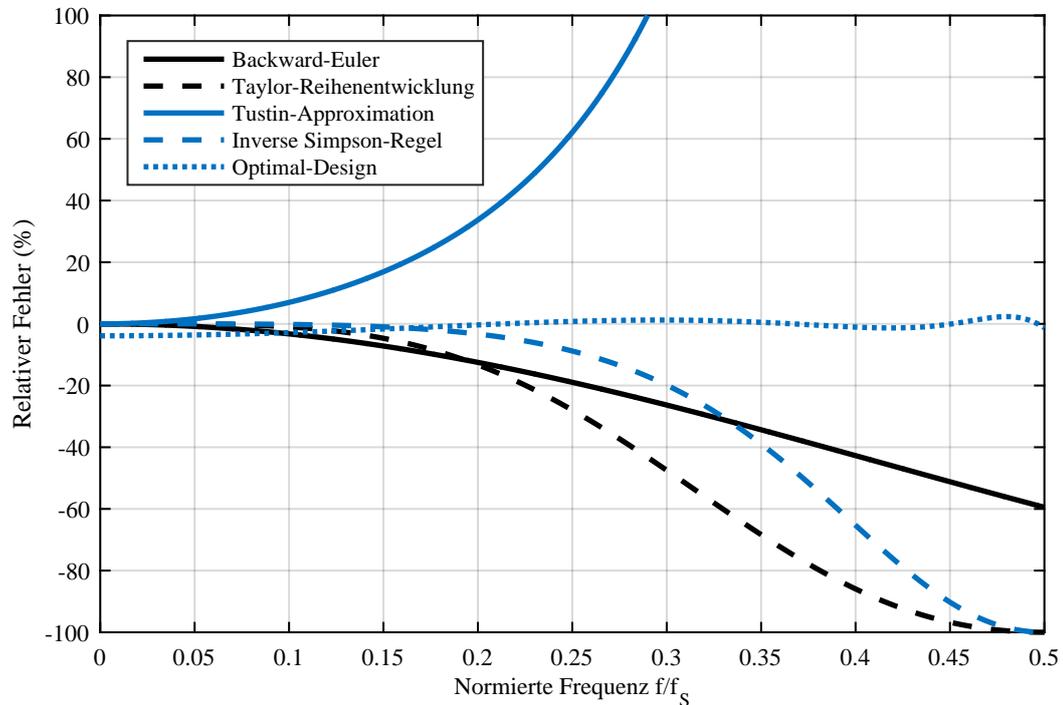
5.1.3 Bewertung der Verfahren

Die Frequenzgangsfunktionen der vorgestellten FIR- und IIR-Filterstrukturen zur numerischen Berechnung der zweiten Ableitung sind in Abbildung 5.6a dargestellt. Die Amplitude der Frequenzgangsfunktionen ist auf die Verstärkung der idealen zeitkontinuierlichen Differentiation bei der halben Abtastfrequenz mit $A_{Max} = (\pi/T_S)^2$ normiert. Als Bezugsgröße für die Normierung der Frequenzachse wurde die Abtastfrequenz gewählt.

Die Frequenzgangsfunktion der gesamten Beschleunigungsermittlung wird aus der zweifachen, zeitkontinuierlichen Integration nach Gleichung 5.3 und der Frequenzgangsfunktion des entsprechenden numerischen Verfahrens zur Berechnung der zweiten Ableitung berechnet. Der relative Fehler der Beschleunigungsermittlung $f_{MK}\%$ wird aus dem daraus resultieren-



(a) Frequenzgangsfunktion verschiedener Methoden zur Berechnung der zweiten Ableitung



(b) Relativer Fehler der Beschleunigungsermittlung

Abbildung 5.6: Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten mit verschiedenen numerischen Differentiationsverfahren

Tabelle 5.1: Bewertung numerischer Verfahren zur Berechnung der Beschleunigung

Differentiations-Methode	Amplitude	Phase	Verstärkung von Positionsmessfehler	Ressourcen-Aufwand
BACKWARD-EULER	+	+	-	+
TAYLOR-Reihenentwicklung	+	--	+	--
TUSTIN-Approximation	-	++	--	+
Inverse SIMPSON-Regel	+	+	+	-
Optimal Design	++	+	-	-

den Betragsgang berechnet und ist in Abbildung 5.6b dargestellt.

$$f_{MK\%} = (|F_{2I}(j\omega)F_{2D}(j\omega)| - 1) \cdot 100\% \quad (5.30)$$

Die Bewertung der numerischen Verfahren zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten ist in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Vorteilhaft erscheint dabei insbesondere die inverse SIMPSON-Regel zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten: Bei niedrigen Frequenzen wird der Amplitudengang des idealen Differentiators exakt approximiert. Die Phasenverzögerung in der Messkette ist bis 90 Grad bzw. bis zu einer Frequenz von 20 % der Abtastrate näherungsweise linear. Die maximale Verstärkung von Positionsmessfehlern resultiert bei einer von Frequenz $\approx 0,33f_S$ und beträgt $\approx 0,3A_{Max}$. Die vorteilhafte Amplitudendämpfung bei höheren Frequenzen resultiert aus der doppelten Polstelle der inversen SIMPSON-Regel.

Die Berechnung der Beschleunigung mit dem BACKWARD-EULER-Verfahren führt zu einer exakten Berechnung der Beschleunigungsamplitude bei niedrigen Frequenzen und zu einer linearen Phasenverzögerung von 180 Grad bei $0,5f_S$. Positionsmessfehler werden maximal mit $0,4A_{Max}$ bei der NYQUIST-Frequenz verstärkt. Dieser negative Aspekt kann mit einem nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung behoben werden. Insbesondere wenn dieser nach Gleichung 4.66 eine Nullstelle bei dieser Frequenz aufweist.

Ungeeignet sind für die Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten aufgrund der Phasenverzögerung die TAYLOR-Reihenentwicklung höherer Ordnung und aufgrund des Amplitudengangs mit der damit einhergehenden Verstärkung von Positionsmessfehlern die TUSTIN-Approximation.

5.2 Zustandsbeobachter

Die Messung aller Zustandsgrößen eines Antriebssystems ist in vielen Applikationen mit einem großen Aufwand verbunden, oder aus praktischen Gründen nicht möglich. Die Zustands-Schätzung mit einem LUENBERGER-Beobachter basiert auf der Messung der Ein- und Ausgangsgrößen eines Systems und einem möglichst exakten Modell der Strecke [66]. Dadurch reduziert sich bei einem vollständig beobachtbaren Single Input Single Output (SISO)-System der gesamte messtechnische Aufwand auf eine Messstelle.

Die Beschleunigung entspricht keiner Zustandsgröße des physikalischen Systems und wird folglich durch einen Zustandsbeobachter auch nicht geschätzt. Allerdings wird für die Schätzung der Drehzahl bzw. der Geschwindigkeit des Antriebs in einen Zwischenschritt auch die Beschleunigung berechnet. Im folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften dieser „geschätzten“ Beschleunigung, hinsichtlich der Eignung als Rückführgröße einer Beschleunigungsregelung, analysiert.

Das mechanische Teilsystem eines Servoantriebs wird mit den Gleichungen 4.29 und 4.31 als Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben. Die Zustandsbeschreibung eines SISO-Systems für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Durchgriff lautet:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.31a)$$

$$y_P(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \Delta y_P(t) \quad (5.31b)$$

Das Lastmoment des Antriebs wird in der Systemmatrix \mathbf{A} als zusätzlicher Zustand berücksichtigt. Mit dieser Erweiterung können Störgrößen durch den LUENBERGER-Beobachter stationär genau geschätzt werden. Die Beobachter-Struktur wird mit dieser Modifikation auch als Störgrößenbeobachter bezeichnet. Die Systemzustände werden mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ beschrieben. Der Strom als drehmomentbildende Eingangsgröße $u(t)$ wird mit der Eingangsmatrix \mathbf{B} in eine äquivalente Beschleunigung umrechnet. Die Ausgangsgröße entspricht der gemessenen Position. Diese wird aus dem Zustandsvektor und der Ausgangsmatrix \mathbf{C} gebildet, überlagert von einem Positionsmessfehler $\Delta y_P(t)$.

In der Zustandsbeschreibung des Beobachters werden die System-, Eingangs- und Ausgangsmatrix als Schätzgrößen $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ und $\hat{\mathbf{C}}$ gekennzeichnet. Der Beobachterfehler \hat{e}_P entspricht der Differenz der gemessenen Position und der geschätzten Position. Der Beobachterfehler wird mit dem Beobachter-Rückführvektor $\mathbf{L} = [l_1 \ l_2 \ l_3]^T$ multipliziert und für die Korrektur der Schätzung der Beobachter-Zustandsgrößen als zusätzlicher Term in der Zustandsbeschreibung des Beobachters berücksichtigt. Mit dieser Festlegung erfolgt eine Aufteilung der Differenti-

gleichung des Beobachters in ein nominelles Modell und einen Korrekturterm.

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \underbrace{\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t)}_{\text{nominelles Modell}} + \underbrace{\mathbf{L} \overbrace{(y_P(t) - \hat{y}_P(t))}^{\hat{e}_P(t)}}_{\text{Korrekturterm}} \\
&= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L} \left(y_P(t) - \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) \right) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{C}}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}y_P(t) \\
&= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}u(t) + \mathbf{L}y_P(t)
\end{aligned} \tag{5.32a}$$

$$\hat{y}_P(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{5.32b}$$

Die Systemzustände des Beobachters sind die geschätzte Geschwindigkeit bzw. Drehzahl des Antriebs $\hat{x}_S = \hat{x}_1$, die geschätzte Störgröße $\hat{z}_L = \hat{x}_2$ und die geschätzte Position $\hat{y}_P = \hat{x}_3$.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_S(t) \\ \hat{z}_L(t) \\ \hat{x}_P(t) \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

Mit der Festlegung $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ ist der Schätzfehler $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ des Beobachters die Differenz zwischen den tatsächlichen Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ und den geschätzten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{5.34}$$

Als Entwurfsziel für einen idealen Beobachter wird gefordert, dass die Schätzwerte des Beobachters den tatsächlichen Zustandsgrößen exakt entsprechen. Mit dieser Forderung gilt für den Schätzfehler des Beobachters:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0 \quad \forall t \tag{5.35}$$

Inwiefern diese Forderung tatsächlich erfüllbar ist wird anhand des Schätzfehlerverlaufs mit der Fehlerdifferentialgleichung beurteilt. Hierzu wird die Differenz der Differentialgleichungen des realen Systems und des Beobachters mit den Gleichungen 5.31 und 5.32 gebildet. Für die Berechnung der Fehlerdifferentialgleichung wird eine fehlerfreie Positionsmesswerterfassung, d.h. $\Delta y_P(t) \equiv 0$, angenommen. Mit der formulierten Forderung für den Schätzfehler in Gleichung 5.34 folgt für die Fehlerdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \left[(\mathbf{A} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{C}}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \Delta y_P(t)) \right] \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{L}\Delta y_P(t) \\
&= \hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{L}\Delta y_P(t)}_{\equiv 0}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Demnach kann der Schätzfehler des Beobachters asymptotisch zu Null gebracht werden, wenn die Eigenwerte λ_i der Systemmatrix des Beobachters einen negativen Realteil haben. Weiterhin werden folgende Festlegungen für die Wahl der Entwurfsparameter des Beobachters getroffen [73, S. 64 ff.]:

$$(i) \operatorname{Re}\lambda_i(\hat{\mathbf{A}}) < 0, \forall i \quad (ii) \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \quad (iii) \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \quad (iv) \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad (5.37)$$

Mit dieser Festlegung folgt für die Systemmatrix des Beobachters:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & -l_2 \\ 1 & 0 & -l_3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Mit der Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$ wird aus der nominellen Drehmomentkonstante \hat{c}_T und dem nominellen Massenträgheitsmoment \hat{J}_T die aus dem drehmomentbildenden Strom resultierende Beschleunigung des Antriebs berechnet. Als Eingangsgröße $u(t)$ des Beobachters kann dafür der Strom-Sollwert $w_{Cq}(t)$ bzw. der aktuell gemessene Strom $y_{CCq}(t)$ verwendet werden.

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{c}_T/\hat{J}_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Mit folgender Ausgangsmatrix $\hat{\mathbf{C}}$ wird der Schätzwert für die Position $\hat{x}_P(t)$ als Ausgangsgröße $\hat{y}_P(t)$ des Beobachters verwendet:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Aus der Zustandsbeschreibung des Beobachters können für die geschätzten Zustände folgende Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet werden:

$$\frac{d\hat{x}_1(t)}{dt} = \hat{x}_2(t) - l_1\hat{x}_3(t) + \frac{\hat{c}_T}{\hat{J}_T}u(t) + l_1y_P(t) \quad (5.41a)$$

$$\frac{d\hat{x}_2(t)}{dt} = -l_2\hat{x}_3(t) + l_2y_P(t) \quad (5.41b)$$

$$\frac{d\hat{x}_3(t)}{dt} = \hat{x}_1(t) - l_3\hat{x}_3(t) + l_3y_P(t) \quad (5.41c)$$

In einer digitalen Antriebsregelung erfolgt die Berechnung der Differentialgleichungen 5.41a-5.41c mittels einer numerischen Integration. Eine Schätzgröße für die Beschleunigung des Antriebs ist vor der Integration der Differentialgleichung 5.41a für die Zustandsgröße der Geschwindigkeit bzw. Drehzahl des Antriebs gegeben. Die Frequenzgangsfunktion des Beob-

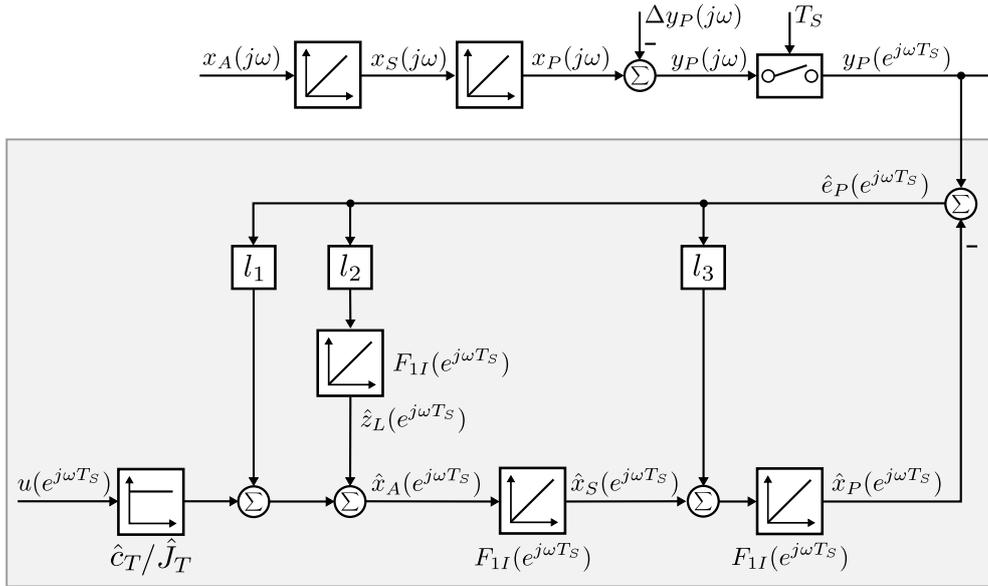


Abbildung 5.7: Zustandsbeobachter zur Berechnung der Beschleunigung

achters von der gemessenen Position auf die geschätzte Beschleunigung wird aus dem Blockschaltbild der Beschleunigungsermittlung mit Zustandsbeobachter in Abbildung 5.7 abgeleitet. Dabei wird die Frequenzgangsfunktion des Zustandsbeobachters zunächst allgemein, d.h. für beliebige Integrationsverfahren $F_{1I}(j\omega)$ berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{y_{AC}(j\omega)}{y_P(j\omega)} &= \frac{(l_1 + l_2 F_{1I}(j\omega))}{1 + F_{1I}(j\omega) \left(F_{1I}(j\omega) + l_3 (l_1 + l_2 F_{1I}(j\omega))^{-1} \right) (l_1 + l_2 F_{1I}(j\omega))} \\ &= \frac{l_1 + l_2 F_{1I}(j\omega)}{1 + l_3 F_{1I}(j\omega) + l_1 (F_{1I}(j\omega))^2 + l_2 (F_{1I}(j\omega))^3} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Mit der Wahl des numerischen Integrationsverfahren sowie des Beobachter-Rückführvektors kann das Übertragungsverhalten des Beobachters beeinflusst werden. Zunächst wird mit $F_{1I}(j\omega) = 1/j\omega$ von einer idealen zeitkontinuierlichen Integration ausgegangen und damit die Übertragungsfunktion $G_{2D}^{Beo}(s)$ als Funktion der komplexen Kreisfrequenz s berechnet. Die Übertragungsfunktion entspricht einer Differentiation 2. Ordnung mit anschließender $PDT3$ -Filterung des differenzierten Signals.

$$G_{2D}^{Beo}(s) = \frac{y_{AC}(s)}{y_P(s)} = \frac{l_1 s^2 (s + l_2/l_1)}{s^3 + l_3 s^2 + l_1 s + l_2} \quad (5.43)$$

Das dynamische Verhalten des Filters wird mit den Beobachter-Rückführkoeffizienten festgelegt. Die Nullstelle der Übertragungsfunktion berechnet sich aus den Rückführkoeffizienten l_1 und l_2 mit $s_0 = -l_2/l_1$.

KALMAN-Filter können zur Schätzung nicht messbarer Zustandsgrößen als auch zur Filterung stark gestörter Messsignale eingesetzt werden. Die Struktur von KALMAN-Filter und LUENBERGER-Beobachter sind identisch. Die beiden Verfahren unterscheiden sich lediglich in der Methodik, mit welcher die regelungstechnischen Eigenschaften vorgegeben werden. Die Filter-Matrix eines KALMAN-Filters wird für eine optimale Filterung der gestörten Messsignale aus den Kovarianzmatrizen des Prozess- und Sensorrauschens bestimmt. Bei einem LUENBERGER-Beobachter wird die Dynamik mit einer Vorgabe der Soll-Polstellen der Beobachter-Struktur definiert. Um ein schnelles Abklingen des Beobachter-Fehlers zu gewährleisten müssen die Polstellen des zeitkontinuierlichen Beobachters weit in der linken Halbebene liegen. Damit der Einfluss verrauschter Messwerte auf die geschätzten Zustandsgrößen vernachlässigbar ist, muss dies bei der Wahl der Dynamik des Beobachters entsprechend berücksichtigt werden [73, S. 88 ff.].

Für die Berechnung der optimalen Filter-Matrix des KALMAN-Filters wird die Kovarianzmatrix des Prozessrauschens benötigt. Häufig wird dazu die spektrale Leistungsdichte des Prozessrauschens in Servoantrieben experimentell ermittelt bzw. die optimale Filterwirkung durch Variation dieser Matrix iterativ festgelegt. Aufgrund der höheren Transparenz des Verfahrens wird im Rahmen dieser Arbeit die Methode der Polvorgabe des LUENBERGER-Beobachters verwendet. Als Soll-Polynom $N_{Soll}^{Beo}(s)$ für die Wahl der freien Parameter des Beobachter-Rückführvektors wird eine dreifache reelle Polstelle bei $s_p = -\omega_b$ angesetzt.

$$N_{Soll}^{Beo}(s) = (s + \omega_b)^3 = s^3 + 3\omega_b s^2 + 3\omega_b^2 s + \omega_b^3 \quad (5.44)$$

Die Elemente des Beobachter-Rückführvektors werden mit einem Koeffizientenvergleich des Soll-Polynoms und des charakteristischen Polynoms der Übertragungsfunktion des Beobachters aus Gleichung 5.43 berechnet.

$$\begin{aligned} s^0 &\Rightarrow l_2 = \omega_b^3 \\ s^1 &\Rightarrow l_1 = 3\omega_b^2 \\ s^2 &\Rightarrow l_3 = 3\omega_b \end{aligned}$$

Folglich führt eine Erhöhung der Bandbreite des Beobachters zu größeren Werten der Elemente des Beobachter-Rückführvektors. Der Positionsmessfehler wird gemäß Gleichung 5.31 mit dem Beobachter-Rückführvektor verstärkt. Eine Erhöhung der Bandbreite des Beobachters ist demnach einhergehend mit einer stärkeren Gewichtung der Positionsmessfehler in der Zustandsschätzung.

Um die Rückführ-Koeffizienten des Beobachters zu bestimmen sind keine Streckenparameter erforderlich. Eine parametrische Unsicherheit der Regelstrecke hat jedoch Auswirkungen auf die Eingangsmatrix des Beobachters. Folglich wird bei einer parametrischen Unsicherheit die aus dem drehmomentbildenden Motorstrom resultierende Beschleunigung falsch berechnet.

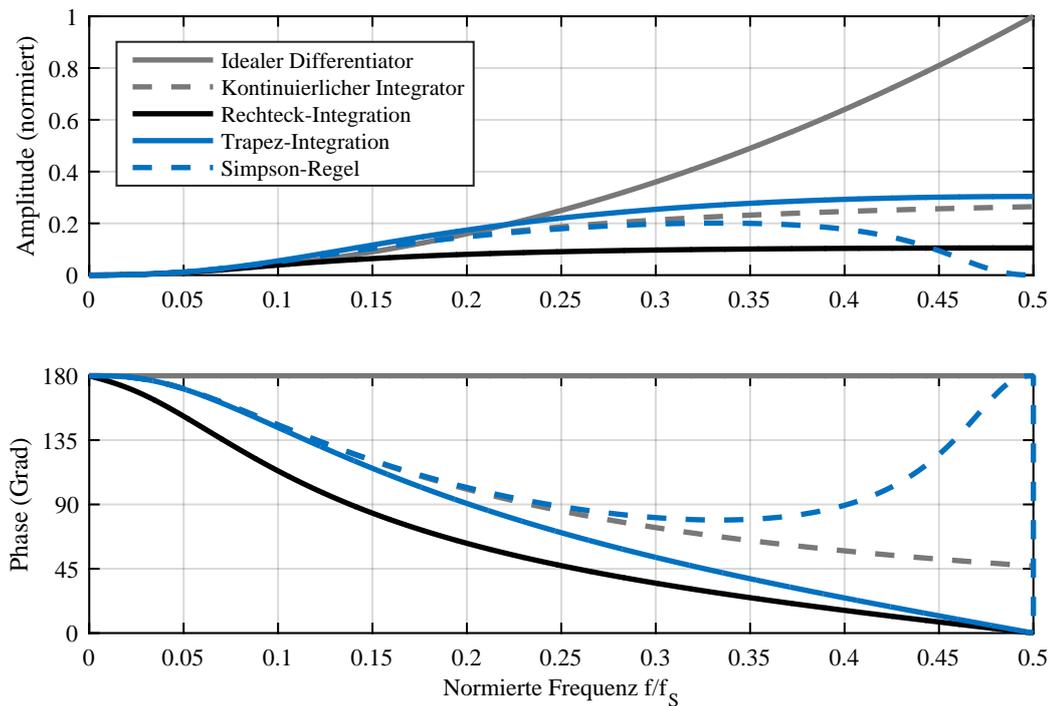
Mit der geschätzten Beschleunigung als Rückführgröße einer Beschleunigungsregelung soll insbesondere das Störverhalten des Servoantriebs bezüglich auftretenden Prozesskräften und Prozessdrehmomenten verbessert werden. Dafür ist das Übertragungsverhalten von der gemessenen Position auf den Schätzwert der Beschleunigung relevant. Ein Schätzfehler aufgrund einer parametrischen Unsicherheit der Eingangsmatrix wird mit diesem Übertragungsverhalten kompensiert.

Die Zustandsgrößen werden durch Integration aus den Differentialgleichungen 5.41a, 5.41b und 5.41c berechnet. Dadurch hat das numerische Integrationsverfahren Einfluss auf das Übertragungsverhalten des Beobachters. Die Frequenzgangfunktionen der Beschleunigungsermittlung mit Zustandsbeobachter sind in Abbildung 5.8a für die numerischen Integrationsverfahren in Tabelle 5.2 dargestellt. In den berechneten Frequenzgangfunktionen wurden nur die Integrationsverfahren variiert. Der Beobachter-Rückführvektor wurde für das ideale zeitkontinuierliche Integrationsverfahren mit einer dreifachen Polstelle des Soll-Polynoms bei $\omega_b = 1/T_S$ berechnet. Mit der Wahl dieser Polstelle liegt die 90 Grad Phasenverzögerung des Beobachters im gleichen Frequenzbereich wie die der numerischen Verfahren zur Berechnung der zweiten Ableitung und führt somit zu einer Vergleichbarkeit der beiden Konzepte.

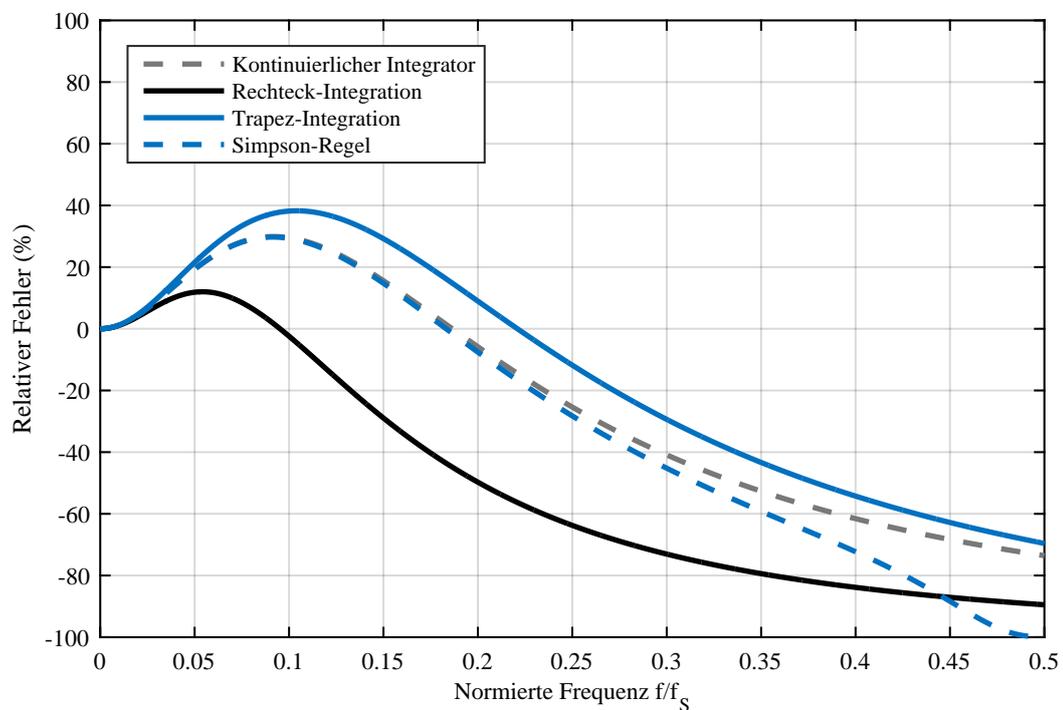
Der relative Fehler der Beschleunigungsermittlung mit Zustandsbeobachter in Abbildung 5.8b wurde wie im vorherigen Abschnitt mit Gleichung 5.30 berechnet. Dabei hat die Nullstelle der Übertragungsfunktion des Beobachters und das numerische Integrationsverfahren einen signifikanten Einfluss auf den relativen Fehler der Beschleunigungsermittlung: Die Amplitudenanhebung durch die Nullstelle verursacht im niedrigen Frequenzbereich, je nach Integrationsverfahren, einen relativen Fehler zwischen 10 % und 40 %. Damit ist mit der Struktur eines Störgrößenbeobachters nur die Schätzung einer stationären Beschleunigung fehlerfrei möglich. Vorteilhaft ist die Filterwirkung des Störgrößenbeobachters bei höheren Frequenzen: Die maximale Verstärkung von Positionsmessfehlern entsteht mit der Trapez-Integration bei der NYQUIST-Frequenz und ist auf $\approx 0,3A_{Max}$ limitiert. Zusammenfassend ist aufgrund der Amplitudenüberhöhung bei niedrigen Frequenzen eine Schätzung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten mit der untersuchten Struktur eines Störgrößenbeobachters als Rückführgröße für eine Beschleunigungsregelschleife nicht sinnvoll.

Tabelle 5.2: Numerische Integrationsverfahren

Methode	Impulsübertragungsfunktion
Rechteck-Integration	$H_{II}^{BE}(z) = \frac{T_S}{1 - z^{-1}}$ (Gl. 4.50)
Trapez-Integration	$H_{II}^{TA}(z) = \frac{T_S}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ (Gl. 4.56)
SIMPSON-Regel	$H_{II}^{SR}(z) = \frac{T_S}{3} \frac{(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-2})}$ (Gl. 5.26)



(a) Frequenzgangfunktion des Beobachters von der gemessenen Position auf die Schätzgröße der Beschleunigung



(b) Relativer Fehler der Beschleunigungsermittlung

Abbildung 5.8: Schätzung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten mit verschiedenen Integrationsverfahren

5.3 Differentiation mit nachgeschalteten Filter

Idealerweise sollen durch den Algorithmus zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten folgende Anforderungen erfüllt werden:

1. Exakte Approximation des Amplitudengangs der idealen zeitkontinuierlichen Differentiation zur Berechnung der zweiten Ableitung
2. Möglichst geringe und lineare Phasenverzögerung
3. Keine Verstärkung von Positionsmessfehlern

Die Anforderungen 1. und 3. sind gegensätzlicher Natur, somit kann in einem beliebigen Frequenzbereich des Abtastbandes höchstens eine der genannten Anforderungen erfüllt werden. Die berechnete Beschleunigung wird als Rückführgröße einer Beschleunigungsregelung zur Verbesserung des Störverhaltens von mechanisch steifen Antrieben verwendet. Dementsprechend müssen die Anforderungen 1. und 2. zumindest im Nutzsinalbereich der Beschleunigungsrückführung näherungsweise erfüllt sein. Für die Definition des Nutzsinalbereichs der berechneten Beschleunigung wird die üblicherweise verwendete Charakterisierung der Bandbreite eines Sensors aufgegriffen. Typischerweise wird die Frequenzabhängigkeit eines Sensors als Verzögerungsglied modelliert. Als Bandbreite wird dementsprechend die Frequenz bei der -45 Grad Phasenverzögerung bzw. des -3 dB Amplitudenabfalls spezifiziert.

Die Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals wird aus der Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung $F_{AC}(j\omega)$ bestehend aus der zweifachen zeitkontinuierlichen Integration und der zeitdiskreten Berechnung der Beschleunigung nach folgender Definition ermittelt:

Definition 5.1 Nutzbandbreite der berechneten Beschleunigung

Innerhalb der Nutzbandbreite der Beschleunigungsermittlung sei die Phasenverzögerung kleiner 45 Grad und die Amplitudendämpfung kleiner 3 dB. Diese Anforderung ist erfüllt, solange der Betrag und der Phasengang der Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung $F_{AC}(j\omega)$ über diesen Schranken liegt:

$$|F_{AC}(j\omega)| > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und}$$

$$\arg\{F_{AC}(j\omega)\} > -45 \text{ Grad}$$

Die obere Grenze des Frequenzbereichs ω_{AC} für den diese Bedingung erfüllt ist wird Nutzbandbreite der berechneten Beschleunigung genannt. ■

Mit einer BACKWARD-EULER-Differentiation ist bei niedrigen Frequenzen eine exakte Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten möglich. Weiterhin hat das Verfahren im gesamten Frequenzbereich einen linearen Phasengang. Nachteilig ist die Verstärkung von Positionsmessfehler im höheren Frequenzbereich. Eine Kompensation dieser Amplitudenanhebung

ist mit einem nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung möglich. Die Impulsübertragungsfunktion der BACKWARD-EULER-Differentiation und einem nachgeschalteten Tiefpassfilter $H_{2D}^{BEF}(z)$ wird durch eine Multiplikation der Gleichungen 4.51 und 4.66 gebildet.

$$H_{2D}^{BEF}(z) = \frac{y_{AC}(z)}{y_P(z)} = \left(\frac{z-1}{T_S z} \right)^2 \frac{z+1}{(1+2\chi_{FA})z + (1-2\chi_{FA})} \quad (5.45)$$

Die Charakteristik des Filters wird mit dem Verhältnis χ_{FA} der Filterzeitkonstante T_{FA} zur Abtastperiode der digitalen Regelung parametrisiert.

$$\chi_{FA} = \frac{T_{FA}}{T_S}, \quad \chi_{FA} \in \mathbb{R}^+ \quad (5.46)$$

Die maximale Verstärkung von Positionsmessfehlern V_{max} resultiert aus dem Frequenzgang der BACKWARD-EULER-Differentiation nach Gleichung 4.53 und beträgt $V_{max} = (2/T_S)^2$. In Abbildung 5.9 ist der normierte Maximalwert der Verstärkung als Funktion des Verhältnisses der Filterzeitkonstante zur Abtastzeit im Intervall $\chi_{FA} \in [0, 10]$ dargestellt. Mit dem nachgeschalteten Filter wird die Verstärkung von Positionsmessfehlern signifikant reduziert. Beispielsweise beträgt bei einer Abtastperiode von $62,5 \mu s$ die maximale Verstärkung von Positionsmessfehlern $1,024 \times 10^9$ oder bzw. 180,2 dB. Mit einem nachgeschalteten Filter mit der Filterzeitkonstante $T_{FA} = T_S$ wird die maximale Verstärkung auf $\approx 0,22 V_{max}$ reduziert.

Die Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung wird aus den Gleichungen 5.3 und 5.45 berechnet. Aus dem Verlauf der Frequenzgangsfunktion wird die Nutzbandbreite für verschiedene Verhältnisse der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode numerisch ermittelt. Für die Darstellung der Ergebnisse in Abbildung 5.9 ist die Nutzbandbreite der berechneten Beschleunigung auf die Abtastrate f_S der digitalen Regelung normiert. Demnach limitiert die Phasenverzögerung die erreichbare Nutzbandbreite in der Beschleunigungsermittlung und ist zwangsläufig $< 0,125 f_S$.

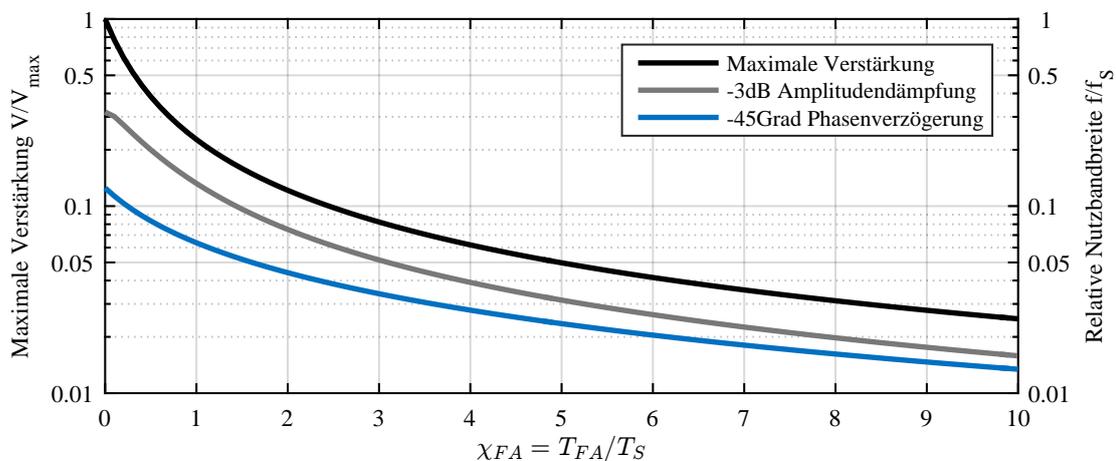


Abbildung 5.9: Charakteristische Größen der Beschleunigungsermittlung mit Filter

5.4 Signal-zu-Rausch-Abstand

Im folgenden Unterabschnitt wird der Einfluss der zweifachen, zeitdiskreten Differentiation auf das Positionsrauschen untersucht. Dieses wird durch die Berechnung der Beschleunigung verstärkt und überlagert folglich das berechnete Beschleunigungssignal. Analysiert wird dabei der erreichbare Abstand zwischen einer fiktiven Beschleunigungsamplitude und dem verstärkten Positionsrauschen.

Die spektrale Leistungsdichte eines stochastischen Eingangssignals $\Psi_{xx}(j\omega)$ wird auf das Ausgangssignal eines LTI-Systems $\Psi_{yy}(j\omega)$ mit dem Betragsquadrat der Frequenzgangsfunktion eines LTI-Systems $|G(j\omega)|^2$ frequenzabhängig übertragen. [61, S. 326ff.]

$$\Psi_{yy}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 \Psi_{xx}(j\omega) \quad (5.47)$$

Die spektrale Leistungsdichte entspricht der mittleren Rauschleistungsdichte nach Gleichung 2.34 und ist im gesamten Abtastband $\omega_S = 2\pi f_S$ konstant:

$$\Psi_{xx}(j\omega) = \bar{P}_Q = \text{konst.}, \quad \text{für } \omega \in [-\omega_S/2; +\omega_S/2] \quad (5.48)$$

Der Amplitudengang des Betragsquadrats der Frequenzgangsfunktion der BACKWARD-EULER-Differentiation nach Gleichung 5.8 ist ausschließlich von der Abtastperiode der digitalen Regelung abhängig:

$$\left| H_{2D}^{BE}(j\omega) \right|^2 = \left| \left(\frac{1 - e^{j\omega T_S}}{T_S} \right)^2 \right|^2 = \left| \frac{4}{T_S^2} \sin^2(\omega T_S/2) \right|^2 \quad (5.49)$$

Für die Beurteilung der Qualität des berechneten Beschleunigungssignals ist der Abstand einer beliebigen Beschleunigungsamplitude zum Maximalwert des verstärkten Positionsrauschens relevant. Der Maximalwert der Rauschleistung \hat{P}_Q resultiert bei der NYQUIST-Frequenz und wird aus der konstanten spektralen Leistungsdichte \bar{P}_Q nach Gleichung 2.34 und dem Quadrat des Maximalwerts der Verstärkung V_{max} der Frequenzgangsfunktion berechnet:

$$\hat{P}_Q = V_{max}^2 \bar{P}_Q, \quad \text{mit } V_{max} = 4/T_S^2 \quad (5.50)$$

Der Signal-zu-Rausch-Abstand $SQNR$ wird aus dem Verhältnis der Signalleistung der Beschleunigungsamplitude \hat{x}_A und dem Maximalwert der Rauschleistung ermittelt.

$$SQNR = \frac{\hat{x}_A^2}{2\hat{P}_Q} = \frac{\hat{x}_A^2}{2\bar{P}_Q V_{max}^2} \quad (5.51)$$

Als Referenz wird der Signal-zu-Rausch-Abstand eines als ideal angenommenen Beschleunigungssensors betrachtet. Unabhängig von den Eigenschaften des Sensors ist eine Quantisierung des Beschleunigungssignals für die Weiterverarbeitung in einer digitalen Regelung erforderlich. Folglich ist das digitalisierte Beschleunigungssignal von einem Quantisierungs-

rauschen überlagert. Bei einem Analog/Digital-Wandler mit sinusförmiger Vollaussteuerung ist der theoretisch erreichbare Signal-zu-Rausch-Abstand ausschließlich von der Wortbreite der A/D-Wandlung N_{ADC} abhängig.

$$SQNR = 1,5 \cdot 2^{2N_{ADC}} \quad (5.52)$$

In der Industrieautomation werden typischerweise Analog/Digital-Wandler mit 12 bis 14 Bit für die Digitalisierung von Messwerten eingesetzt. Der Messbereich des Beschleunigungssensors ist sinnvollerweise an die im regulären Betrieb auftretenden Beschleunigungsamplituden angepasst. Damit wird beispielsweise bei sinusförmiger Vollaussteuerung des Messbereichs eines 14 Bit Wandlers nach Gleichung 5.52 ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 86,04 dB erreicht. Für die Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten wird äquivalent dazu gefordert, dass im gesamten Abtastband ein Mindestabstand zwischen der Signalleistung der Beschleunigungsamplitude und dem verstärkten Positionsrauschen gegeben ist. Durch Umformung von Gleichung 5.51 kann die Beschleunigungsamplitude für ein gefordertes Signal-zu-Rausch-Verhältnis berechnet werden:

$$\hat{x}_A \geq \sqrt{2V_{max}^2 \bar{P}_Q SQNR} \quad (5.53)$$

Folglich sind zur Ermittlung der Beschleunigungsamplitude Angaben zu folgenden Parametern erforderlich:

- Minimaler Signal-zu-Rausch-Abstand $SQNR$ zwischen der Signalleistung der Beschleunigungsamplitude und dem Maximalwert des verstärkten Positionsrauschens
- Maximale Verstärkung des Positionsrauschens durch die Differentiation V_{max} und somit eine Angabe der Abtastperiode des digitalen Reglers
- Der spektralen Leistungsdichte des Positionsrauschens \bar{P}_Q

Die dabei berechnete Beschleunigungsamplitude entspricht dem Messbereichsendwert eines Analog/Digital-Wandlers mit sinusförmiger Vollaussteuerung für einen geforderten Signal-zu-Rausch-Abstand. Wird das Beschleunigungssignal aus Positionsmesswerten berechnet, so ist der berechnete Messbereichsendwert lediglich eine fiktive Größe: Im Gegensatz zu einem Beschleunigungssensor mit A/D-Wandlung ist die Berechnung größerer Beschleunigungsamplituden aus Positionsmesswerten ohne weitere Maßnahmen, wie beispielsweise einer Messbereichsanpassung, möglich. Ist die tatsächliche Beschleunigungsamplitude kleiner als der Messbereichsendwert, so reduziert sich der Signal-zu-Rausch-Abstand. Dies trifft für berechnete und gemessene Beschleunigungssignale gleichermaßen zu. Umgekehrt wird für größere Beschleunigungsamplituden der Signal-zu-Rausch-Abstand verbessert.

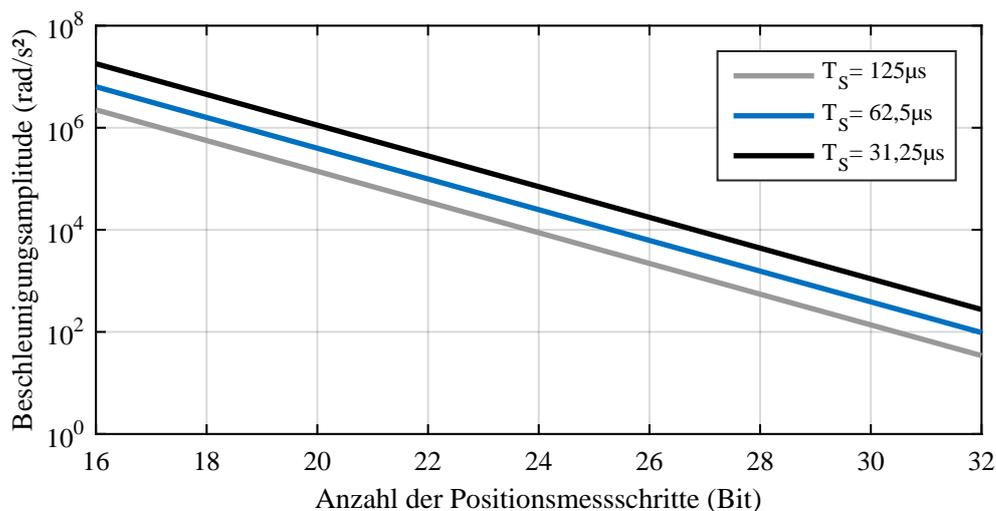


Abbildung 5.10: Nominelle Beschleunigungsamplitude bei einem vorgegebenen Signal-zu-Rausch-Abstand von 86,04 dB für verschiedener Abtastperioden der digitalen Regelung als Funktion der Positionsmessschritte

Die aus Gleichung 5.53 berechnete Beschleunigungsamplitude wird im folgenden als *nominelle Beschleunigungsamplitude* bezeichnet. Für eine Analyse der erreichbaren nominellen Beschleunigungsamplitude wird Gleichung 5.53 für verschiedene Parameterkombinationen des Signal-zu-Rausch-Abstands und der Abtastperiode der digitalen Regelung als Funktion der Positionsmessschritte ausgewertet.

Die Anzahl der Positionsmessschritte in einer Umdrehung wird aus der Anzahl der Signalperioden des Positionsmessgerätes und dem Unterteilungsfaktor der Auswerteelektronik berechnet. Aus der daraus resultierenden Positionsaufösung wird die spektrale Leistungsdichte des Positionsrauschens mit Gleichung 2.33 berechnet. Die Anzahl der Positionsmessschritte wurden im technisch sinnvollen Bereich zwischen 16 und 32 Bit variiert. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die spektrale Leistungsdichte des Positionsrauschens bereits eine Funktion der Abtastperiode der digitalen Regelung ist. Als minimaler Signal-zu-Rausch-Abstand wurde der theoretisch erreichbare Abstand eines 14 Bit Analog/Digital-Wandler vorgegeben. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Abbildung 5.10 für die Abtastperioden $125 \mu s$, $62,5 \mu s$ und $31,25 \mu s$ dargestellt.

Prinzipbedingt besteht ein Zusammenhang zwischen der Auflösung des Positionsmesswertes und der damit erreichbaren Auflösung des Beschleunigungssignals. Dementsprechend wird die nominelle Beschleunigungsamplitude mit einer zunehmenden Anzahl an Positionsmessschritten kleiner. In Servoantrieben werden typischerweise Beschleunigungsamplituden zwischen 10^4 und 10^5 rad/s^2 erreicht. Die untere Grenze dieser Beschleunigungsamplituden kann bei den untersuchten Abtastperioden mit einer Positionsaufösung von 24 bis 27 Bit gleichwertig

aus Positionsmesswerten berechnet werden. Gemäß Gleichung 5.50 ist der Maximalwert der Verstärkung in vierter Potenz von der Abtastperiode abhängig. Dies führt zu einer Restriktion bei der Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten: Eine Verkleinerung der Abtastperiode führt bei gleicher Positionsauflösung zu einer Vergrößerung der nominellen Beschleunigungsamplitude. Während die Nutzbandbreite des berechneten Beschleunigungssignals durch eine Verkleinerung der Abtastperiode erhöht wird.

Folglich ist eine Erhöhung der Nutzbandbreite der berechneten Beschleunigung mit gleichbleibender nomineller Beschleunigungsamplitude nur durch eine Erhöhung der Positionsauflösung möglich. Zusammenfassend ist bei typischen Abtastperioden eine Positionsauflösung von 24 Bit und größer zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten erforderlich. Die zum gegenwärtigen Zeitpunkt verfügbare Positionsauflösung optoelektronischer Positionsmessgeräte führt somit bei typischen Abtastperioden zu keiner Einschränkung hinsichtlich des erreichbaren Signal-zu-Rausch-Abstands.

6 Beschleunigungsregelung

Now, let us return to the origin of the motion control. The differential of position is speed. The differential of speed is acceleration. It is never current nor motor torque. This relation suggests that the current control loop is unreasonable from the viewpoint of the motion dynamics.

Yoichi Hori, University of Tokyo, 1988

Mit einer Regelung der Beschleunigung werden im Regelkreis eingreifende Lastdrehmomente und nichtlineare Reibungseffekte kompensiert, das Störverhalten von Servoantrieben wird damit automatisch verbessert [47]. Weiterhin wird z.B. in Steuerungen für Werkzeugmaschinen oder Robotern ein Sollwert für die Beschleunigung des Antriebs berechnet [86]. Dennoch hat sich die Stromregelung als innerster Regelkreis eines Servoantriebs über Jahrzehnte durchgesetzt. Die Wesentlichen Gründe dafür sind bzw. waren:

1. Mit einer Stromregelung wird die gespeicherte magnetische Energie als Zustandsgröße einer elektrischen Maschine unmittelbar geregelt.
2. Bei dreiphasigen elektrischen Maschinen entsprechen in feldorientierter Regelung die Stellgrößen der Längs- und Querstromregler den Referenzwerten für die Längs- und Querspannung der Maschine.
3. Mit einer unterlagerten Stromregelung kann das leistungselektronische Stellglied sowie die elektrische Maschine vor Überlast geschützt werden. Weiterhin wird durch die Stromregelung die nichtlineare Kennlinie der in industriellen Anwendungen typischerweise verwendeten IGBT-Leistungshalbleiter kompensiert.
4. Die Integration eines zusätzlichen Sensors zur Erfassung der Beschleunigung benötigt Bauraum und führt zu zusätzlichen Kosten.
5. Die Berechnung der Beschleunigung mittels einer Differentiation aus der gemessenen Drehzahl oder aus den Positionsmesswerten wird häufig abgelehnt, da die Differentiation zu einer "Verstärkung von Rauschen" führt.
6. Umrichter und Motor bilden häufig eine aufeinander abgestimmte und konfigurierte Einheit. Der Stromregler wird vom Hersteller des Antriebs anhand der elektrischen Parameter der Maschine vorkonfiguriert.

6.1 Konzepte einer Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten

In den folgenden Unterabschnitten wird, ausgehend von einer PI-Beschleunigungsregelung, das regelungstechnische Konzept einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten beschrieben. Die Berechnung der Beschleunigung erfolgt mit der in Kapitel 5.3 dargestellten Methode der zweifachen zeitdiskreten Differentiation mit nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung.

6.1.1 PI-Regelung

Das dynamische Verhalten der Beschleunigungsregelstrecke $P_A(j\omega)$ ist dem der Stromregelstrecke äquivalent. Die stationäre Streckenverstärkung unterscheidet sich um die Drehmomentkonstante sowie das Massenträgheitsmoment des Antriebs. Dadurch ist es naheliegend ebenfalls einen PI-Regler mit der Proportionalverstärkung K_A und der Nachstellzeit T_{NA} für die Regelung der Beschleunigung zu verwenden. Mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung wird die Störgröße z_L in der innersten Regelschleife erfasst und kompensiert. Das entsprechende Blockschaltbild einer Beschleunigungsregelung mit PI-Regler basierend auf Positionsmesswerten ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

Die Auslegung des PI-Reglers der Beschleunigungsregelschleife erfolgt äquivalent zu dem in Abschnitt 4.5.1 für den Stromregelkreis beschriebenen Verfahren nach dem Betragsoptimum und der Vorgabe einer Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz. Mit einer Substitution der Streckenparameter mit der normierten Regelkreisverstärkung

$$\tilde{K}_A = \frac{k_{ElcT} a_1}{J_T} \quad (6.1)$$

entspricht die Struktur der Impulsübertragungsfunktion der offenen Beschleunigungsregelschleife im Vorwärtszweig $L_A^F(z)$ der Impulsübertragungsfunktion des offenen Stromregelkreises nach Gleichung 4.81. Der Parameter a_1 resultiert aus der modifizierten z -Transformation der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Dabei wird entsprechend der vorgestellten Parametrierung der Stromregelung in Abschnitt 4.5.1 eine Näherung für die Lage der Nullstelle getroffen.

$$L_A^F(z) = \frac{x_A(z)}{e_A(z)} = \tilde{K}_A \frac{z + 1}{z(z - 1)} \quad (6.2)$$

Die Tiefpasscharakteristik der Beschleunigungsermittlung mit nachgeschalteten Filter im Rückführzweig der Beschleunigungsregelschleife führt, im Vergleich zur Stromregelung, zu einer zusätzlichen Herabsetzung der Phasenreserve des offenen Beschleunigungsregelkreises. Der Einfachheit halber wird an dieser Stelle der nachgeschaltete Tiefpassfilter nicht berücksichtigt. Die Frequenzgangsfunktion der offenen Beschleunigungsregelschleife $L_A(j\omega)$ wird aus der Impulsübertragungsfunktion des Vorwärtszweiges nach Gleichung 6.2 und der Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung aus Gleichung 5.10 als Funktion der normierten

Kreisfrequenz $\Omega = \omega T_S$ gebildet.

$$L_A(j\Omega) = \frac{y_{AC}(j\Omega)}{e_A(j\Omega)} = \frac{2\tilde{K}_A \sin(\Omega)}{\Omega^2} \cdot e^{j(3\pi/2-2\Omega)} \quad (6.3)$$

Die normierte Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Beschleunigungsregelkreises $\Omega_{Co} = \omega_{Co} T_S$ wird aus der Vorgabe einer Phasenreserve Φ_{MA} aus dem Phasenterm der Frequenzgangsfunktion des offenen Beschleunigungsregelkreises ermittelt:

$$\Omega_{Co} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \Phi_{MA} \right) \quad (6.4)$$

Demnach beträgt bei gleicher Phasenreserve die Amplitudendurchtrittsfrequenz in der Beschleunigungsregelschleife zwangsläufig nur die Hälfte der erreichbaren Amplitudendurchtrittsfrequenz der Stromregelung. Der zusätzliche Verlust an Phase durch den nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung ist dabei noch nicht berücksichtigt. Die normierte Regelkreisverstärkung der Beschleunigungsregelschleife wird mit der Bedingung für den Amplitudendurchtritt des offenen Kreises $|L_A(j\Omega_{Co})| = 1$ aus der normierten Amplitudendurchtrittsfrequenz und Gleichung 6.3 berechnet:

$$\tilde{K}_A = \frac{\Omega_{Co}^2}{2 \sin(\Omega_{Co})} \quad (6.5)$$

Diese Betrachtung ist für eine reine Beschleunigungsregelung ohne überlagerte Positionsregelung gültig. Entscheidend ist dabei, dass bei gleicher Phasenreserve die Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises und somit auch in guter Näherung die Bandbreite des geschlossenen Regelkreises, aufgrund der Phasenverzögerung der Beschleunigungsermittlung gegenüber einer Stromregelung halbiert wird. Bei identischer Amplitudendurchtrittsfrequenz ist die Phasenreserve der Beschleunigungsregelschleife - und folglich auch die Stabilitätsreserve des Regelkreises - somit zwangsläufig geringer als die der Stromregelung.

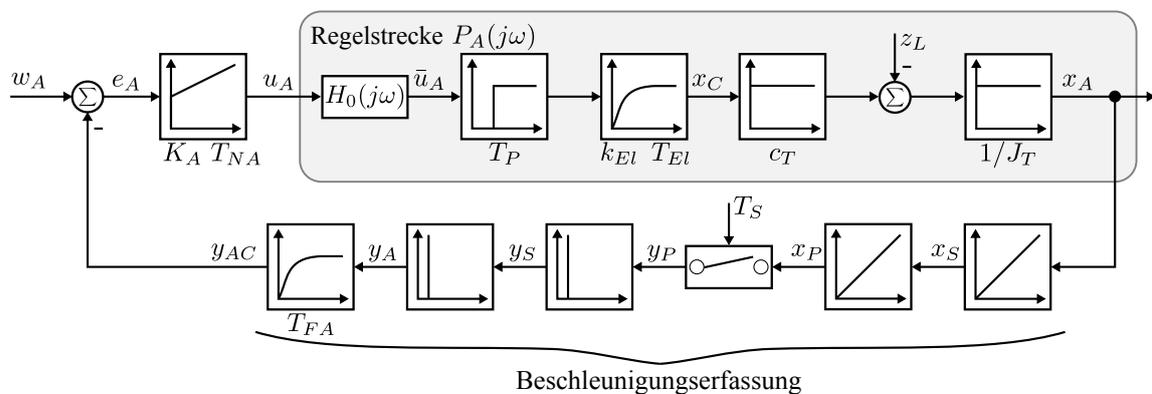


Abbildung 6.1: Blockschaltbild einer Beschleunigungsregelung mit PI-Regler basierend auf Positionsmesswerten

6.1.2 Smith-Prädiktor

Mit dem Regelungskonzept eines SMITH-Prädiktors kann der Regler für eine totzeitbehaftete Regelstrecke ausgelegt werden, als ob die Totzeit der Regelstrecke nicht vorhanden wäre [92, S. 125]. Dabei wird die Reaktion des totzeitfreien Teils der Regelstrecke mit einem Parallelmodell vorhergesagt und der Regelkreis mit einer Schätzgröße der Regelgröße geschlossen. Eine weitere Rückführgröße der Regelung wird aus Differenz aus der gemessenen Regelgröße und der verzögerten Schätzgröße gebildet. Mit dieser zweiten Rückführgröße werden Modellabweichungen und im Regelkreis eingreifende Störgrößen kompensiert. [67, S.468ff.]

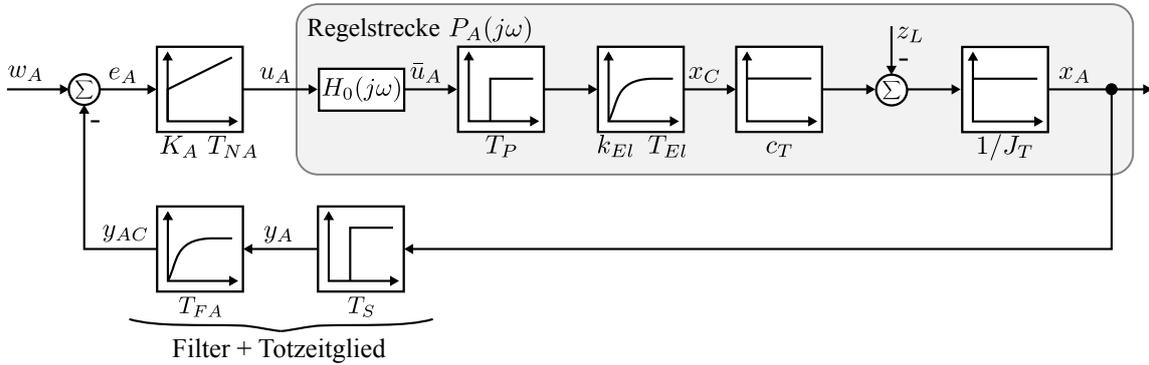
Die zusätzliche Phasenverzögerung im Rückführzweig der Beschleunigungsregelschleife resultiert aus der Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsermittlung. Der Amplitudengang der Beschleunigungsermittlung wird durch den nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung dominiert. Aus diesem Grund wird der Amplitudengang der zweifachen zeitdiskreten Differentiation aus Gleichung 5.10 vernachlässigt und die Differentiation mit dem Term der linearen Phasenverzögerung approximiert. Mit dieser Näherung setzt sich die Impulsübertragungsfunktion der Beschleunigungsregelschleife im Rückführzweig $L_A^B(z)$ aus einem linearen Verzögerungselement und dem nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung zusammen. Das entsprechende Blockschaltbild der Beschleunigungsregelung ist in Abbildung 6.2a dargestellt.

$$L_A^B(z) = \frac{y_{AC}(z)}{x_A(z)} \approx \frac{z + 1}{(1 + 2\chi_{FA})z + (1 - 2\chi_{FA})} \cdot z^{-1}; \quad \text{mit } \chi_{FA} = \frac{T_{FA}}{T_S} \quad (6.6)$$

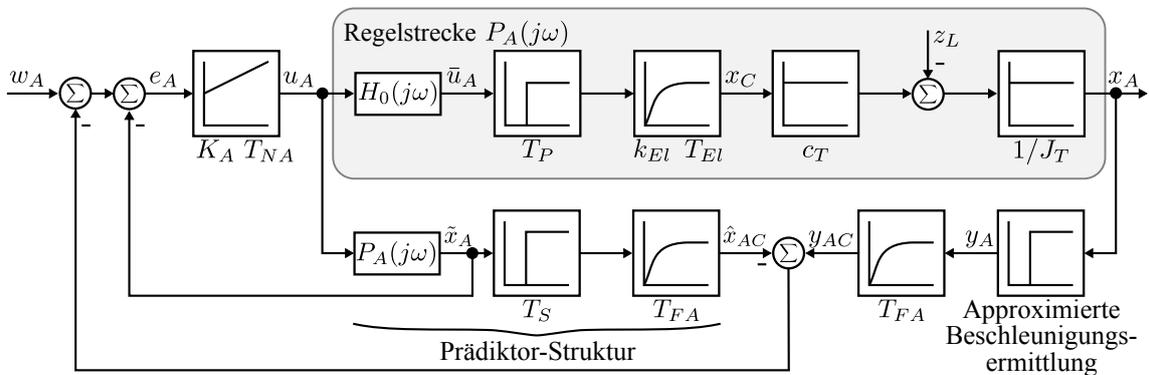
Wird das lineare Verzögerungselement im Rückführzweig der Beschleunigungsregelschleife als Totzeit der Regelstrecke betrachtet, so kann das Konzept des SMITH-Prädiktors auf die Beschleunigungsregelschleife übertragen werden. Folglich muss bei der Auslegung des Beschleunigungsreglers die lineare Phasenverzögerung der zweifachen zeitdiskreten Differentiation nicht weiter berücksichtigt werden. Aus der Stellgröße des Beschleunigungsreglers $u_A(z)$ und dem nominellen Modell der Beschleunigungsregelstrecke $\hat{P}_A(z)$ wird eine Schätzgröße für die Beschleunigung $\tilde{x}_A(z)$ in jeder Abtastperiode der digitalen Regelung berechnet. Das nominelle Modell wird aus der Impulsübertragungsfunktion der Stromregelstrecke $P_C(z)$ nach Gleichung 4.77, der nominellen Drehmomentkonstanten \hat{c}_T und dem nominellen Massenträgheitsmoment \hat{J}_T des Antriebs gebildet.

$$\hat{P}_A(z) = \frac{\tilde{x}_A(z)}{u_A(z)} = k_{El} \frac{a_0 z + a_1}{z(z - e^{-\chi s})} \frac{\hat{c}_T}{\hat{J}_T} \quad (6.7)$$

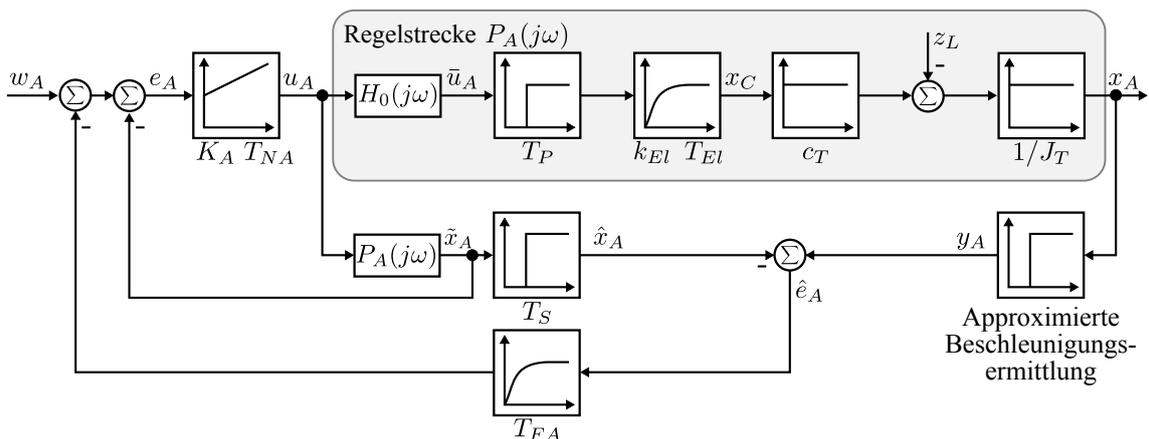
Der Schätzwert für die Beschleunigung wird nach Gleichung 6.6 um einen Abtastschritt verzögert und daraus die Differenz zur berechneten Beschleunigung gebildet. Die Differenz der beiden Signale wird in einer zweiten Rückführschleife dem Beschleunigungsregler zurückgeführt. Das Blockschaltbild der Beschleunigungsregelung mit der Prädiktor-Struktur ist in Abbildung 6.2b dargestellt. Sinnvollerweise wird der in beiden Zweigen identische nachgeschaltete Tiefpassfilter 1. Ordnung über den Summationspunkt verschoben (Abbildung 6.2c).



(a) Approximation der Beschleunigungsermittlung mit Totzeitglied



(b) Beschleunigungsregelung mit Prädiktor-Struktur



(c) Beschleunigungsregelung mit vereinfachter Prädiktor-Struktur

Abbildung 6.2: Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten mit einer Prädiktor-Regelungsstruktur zur Kompensation der Phasenverzögerung der zweifachen zeitdiskreten Differentiation

6.1.3 Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung

Mit einer einfachen Modifikation kann die Beschleunigungsregelung mit Prädiktor-Struktur auf die Regelungsstruktur eines Störgrößenbeobachters bzw. der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung überführt werden. Diese Regelungsstruktur besteht aus einer inneren Stromregelschleife, deren Sollwert durch eine Beschleunigungsrückführung beeinflusst wird. Das Blockschaltbild der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Verwendet man in der Prädiktor-Struktur in Abbildung 6.2c anstatt der Stellgröße des Beschleunigungsreglers den drehmoment-bildenden Motorstrom $x_C(z)$ als Eingangsgröße des Schätz-Modells $\hat{P}_A(z)$, so reduziert sich dieses bei mechanisch steifen Antrieben auf die nominellen Streckenparameter des mechanischen Teilsystems.

$$\hat{P}_A(z) = \frac{\tilde{x}_A(z)}{x_C(z)} = \frac{\hat{c}_T}{\hat{J}_T} \quad (6.8)$$

Aus dem gemessenen Motorstrom wird mit den nominellen Streckenparametern des mechanischen Teilsystems ein Schätzwert für die Beschleunigung $\tilde{x}_A(z)$ berechnet und dieser anschließend um einen Abtastschritt verzögert.

$$\hat{x}_A = \tilde{x}_A(z)z^{-1} \quad (6.9)$$

Der Kompensationsterm zur Störgrößenaufschaltung $\hat{e}_A(z)$ wird aus der Differenz des aus Positionsmesswerten differenzierten Beschleunigungssignals $y_A(z)$ und der verzögerten Schätzgröße der Beschleunigung $\hat{x}_A(z)$ berechnet.

$$\hat{e}_A(z) = y_A(z) - \hat{x}_A(z) \quad (6.10)$$

Der Kompensationsterm zur Störgrößenaufschaltung wird von

- der parametrische Unsicherheit der nominellen Streckenparameter,
- der im Beschleunigungsregelkreis eingreifenden Störgröße
- und dem Positionsmessfehler in der Beschleunigungsermittlung

beeinflusst. Mit dem nachgeschalteten Tiefpassfilter 1. Ordnung mit der Impulsübertragungsfunktion $H_{FA}(z)$ wird die Bandbreite des Kompensationsterms begrenzt. Die Rückführgröße zur Störgrößenaufschaltung wird entsprechend durch eine Filterung des Kompensationsterms berechnet:

$$\hat{e}_{AC}(z) = H_{FA}(z)\hat{e}_A(z) \quad (6.11)$$

Der gefilterte Kompensationsterm $\hat{e}_{AC}(z)$ wird als Rückführgröße für die Berechnung des Sollwerts der inneren Stromregelschleife verwendet. Dafür wird aus der Differenz der Soll-Beschleunigung $w_A(z)$ und dem gefilterten Kompensationsterm ein äquivalenter Stromsoll-

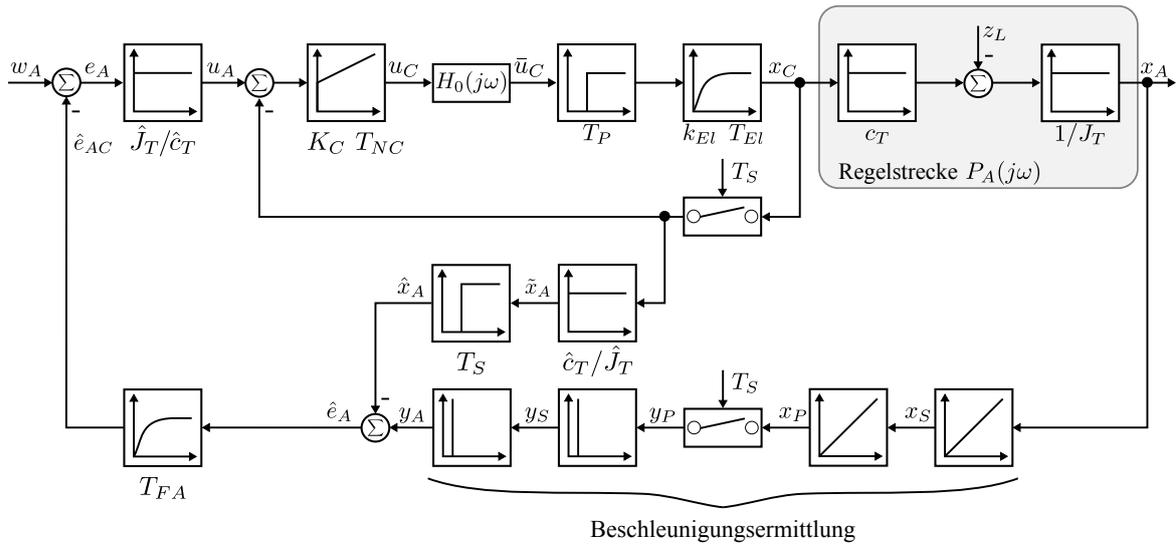


Abbildung 6.3: Blockschaltbild einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten

wert mit dem inversen nominellen Streckenmodell $\hat{P}_A^{-1}(z)$ berechnet:

$$u_A(z) = \hat{P}_A^{-1}(z) (w_A(z) - \hat{e}_{AC}(z)) \quad (6.12)$$

Das Rückführsignal des inneren Stromregelkreises $y_{syn}(z)$ kann durch Umformung mit den Gleichungen 6.8 bis 6.12 auf eine Hochpassfilterung des drehmoment-bildenden Motorstroms und eine Tiefpassfilterung der berechneten Beschleunigung zurückgeführt werden.

$$\begin{aligned} y_{syn}(z) &= x_C(z) + \hat{P}_A^{-1}(z) \hat{e}_{AC}(z) \\ &= \hat{P}_A^{-1}(z) H_{FA}(z) y_A(z) + (1 - H_{FA}(z) z^{-1}) x_C(z) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Folglich wird das synthetisierte Rückführsignal der inneren Stromregelschleife prinzipiell nach dem in [14] beschriebenen Verfahren gebildet. Die Unterschiede zwischen Gleichung 6.13 und 1.1 resultieren

- aus der zeitdiskreten Beschreibung des Regelkreises,
- der Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten und dem daraus resultierenden linearen Verzögerungselement
- sowie der Beschreibung der inneren Regelschleife als Stromregelkreis.

Mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird unter der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters $H_{FA}(z)$ die Beschleunigung des Antriebs geregelt und über dieser Grenzfrequenz der drehmoment-bildende Strom des Antriebs. Der Hochpassfilter des drehmoment-bildenden Motorstroms wird entsprechend Gleichung 6.13 aus der Impulsübertragungsfunktion des nachgeschalteten Tiefpassfilters 1. Ordnung und dem linearen Verzögerungselement

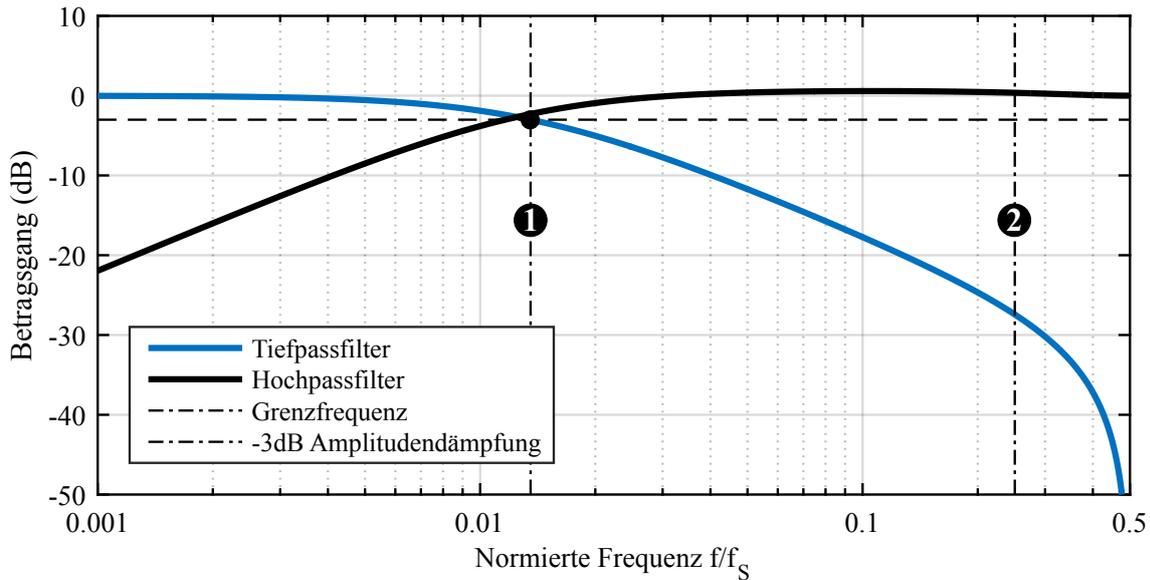


Abbildung 6.4: Amplitudengang des Tief- und Hochpassfilters

gebildet und hat die Impulsübertragungsfunktion

$$(1 - H_{FA}(z))z^{-1} = \frac{(1 + 2\chi_{FA})z^2 - 2\chi_{FA}z - 1}{z((1 + 2\chi_{FA})z + (1 - 2\chi_{FA}))}. \quad (6.14)$$

Der Amplitudengang der beiden Filter ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Für die Berechnung der Frequenzgangsfunktionen wurde ein Verhältnis der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode von $\chi_{FA} = 8$ gewählt. Die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters und somit auch die Frequenz der -3 dB Amplitudendämpfung des Beschleunigungssignals liegt dadurch bei $\approx 0,02f_S$ (Abb. 6.4, Linie ❶). Beispielsweise wird durch diese Parametrierung bei einer Abtastrate von 16 kHz eine Bandbreite der Beschleunigungsrückführung von 320 Hz erreicht. Für Frequenzen $> 0,25f_S$ knickt der Amplitudengang des Tiefpassfilters aufgrund der Nullstelle der Impulsübertragungsfunktion bei der NYQUIST-Frequenz signifikant ab (Abb. 6.4, Linie ❷). Der Einfluss von Messfehlern des Positionsmessgerätes im Regelkreis wird dadurch in diesem Frequenzbereich reduziert.

Ohne zusätzlichen Sensor für die Relativbeschleunigung des Antriebs müssen die Regelalgorithmen der Beschleunigungsregelung in der Stabilitätsanalyse der Positionsregelschleife mit berücksichtigt werden. Dabei wird im folgenden das Regelungskonzept der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung analysiert. Dieses Konzept erscheint insbesondere vorteilhaft, da der Strom als Zustandsgröße einer elektrischen Maschine weiterhin geregelt wird und somit kein Parallel-Modell des elektrischen Teilsystems erforderlich ist. Außerdem kann die Inbetriebnahme des Antriebs wie gewohnt in Stromregelung erfolgen und z.B. nur bei erhöhten Anforderungen an die dynamische Laststeifigkeit des Antriebs die Beschleunigungsregelung durch Parametrierung des nachgeschalteten Tiefpassfilters zugeschaltet werden.

6.2 Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung

In diesen Abschnitt wird das dynamische Verhalten der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung und die Auswirkungen einer parametrischen Unsicherheit anhand der Frequenzgangfunktionen der Regelschleifen analysiert.

6.2.1 Frequenzgangfunktionen der Strom- und Beschleunigungsregelschleifen

Stromregelschleife

Mit der vorgestellten Parametrierung wird die Stabilitätsreserve der Stromregelung durch die Hochpassfilterung in der Rückführung nicht beeinflusst. Der Verlauf der Ortskurven des offenen Kreises der klassischen Stromregelung und der mit Hochpassfilterung unterscheiden sich nur im niedrigen Frequenzbereich. Folglich wird im NYQUIST-Diagramm der minimale Betragsabstand zum kritischen Punkt nicht verändert.

Die Berechnung der Schätzgröße der Beschleunigung aus dem gemessenen Motorstrom wirkt wie eine zweite Rückführschleife für den geschlossenen Stromregelkreis. Ein vereinfachtes Blockschaltbild ist in Abbildung 6.5a dargestellt. Die Frequenzgangfunktion der geschlossenen Stromregelschleife mit einer zusätzlichen Rückführung $F'_{CC}(j\omega)$ wird aus der Frequenzgangfunktion der geschlossenen Stromregelung $F_{CC}(j\omega)$ und der zweiten Rückführschleife des gemessenen Motorstroms über den nachgeschalteten Tiefpassfilter $F_{FA}(j\omega)$ berechnet.

$$F'_{CC}(j\omega) = \frac{x_C(j\omega)}{w'_C(j\omega)} = \frac{F_{CC}(j\omega)}{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}} \quad (6.15)$$

Für eine Analyse der Auswirkungen dieser zweiten Rückführschleife wird die Stromregelung als ideal angenommen ($F_{CC}(j\omega) = 1$) und das Totzeitglied vernachlässigt. Für die Frequenzgangfunktion des Tiefpassfilters $F_{FA}(j\omega)$ wird die Frequenzgangfunktion eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung eingesetzt:

$$F'_{CC}(j\omega) = \frac{x_C(j\omega)}{w'_C(j\omega)} \approx \frac{1}{1 - F_{FA}(j\omega)} = \frac{1 + j\omega T_{FA}}{j\omega T_{FA}} \quad (6.16)$$

Damit hat die Frequenzgangfunktion der geschlossenen Stromregelung mit zweiter Rückführschleife die Eigenschaften eines Integrators, dessen Wirkung bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz

$$\omega_{FA} = \frac{1}{T_{FA}} \quad (6.17)$$

durch den Term im Zähler kompensiert wird. Folglich bewirkt der Integrator unterhalb der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters eine Anhebung der Kreisverstärkung im offenen Regelkreis und führt so zu einer Verbesserung des Störverhaltens. Für die Funktionsweise des Integrators im niedrigen Frequenzbereich ist es irrelevant ob die Rückkoppelschleife mit dem gemessenen Motorstrom oder dem Sollwert der Stromregelung geschlossen wird (Abb. 6.5b). Entsprechende Ergebnisse wurden in [107] vorgestellt.

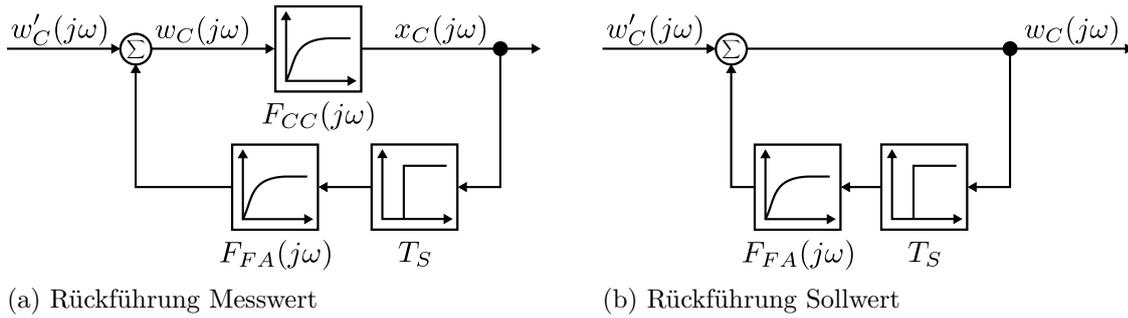


Abbildung 6.5: Blockschaltbild der Stromregelung mit zusätzlicher Rückführschleife

Beschleunigungsregelschleife

Die Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Beschleunigungsregelschleife $F_{AC}(j\omega)$ wird aus den Frequenzgangsfunktionen der geschlossenen Stromregelung mit zusätzlicher Rückführung, der Beschleunigungsermittlung und dem nachgeschalteten Filter berechnet. Der Übersichtlichkeit halber wird die parametrische Modellunsicherheit eines mechanisch steifen Antriebs mit

$$\Delta = \frac{\hat{J}_T c_T}{\hat{c}_T J_T} \quad (6.18)$$

substituiert.

$$F_{AC}(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{w_A(j\omega)} = \frac{\Delta F'_{CC}(j\omega)}{1 + \Delta F'_{CC}(j\omega) F_{FA}(j\omega) F_{2I}(j\omega) F_{2D}^{BE}(j\omega)} \quad (6.19)$$

Gemäß der eingeführten Näherung gilt für das dynamische Verhalten der Beschleunigungsermittlung

$$F_{2I}(j\omega) F_{2D}^{BE}(j\omega) \approx e^{-j\omega T_S}.$$

Die Frequenzgangsfunktion der Beschleunigungsregelschleife wird mit dieser Näherung und Gleichung 6.15 weiter vereinfacht.

$$F_{AC}(j\omega) = \frac{x_A(j\omega)}{w_A(j\omega)} \approx \frac{\Delta F_{CC}(j\omega)}{1 + F_{CC}(j\omega) F_{FA}(j\omega) e^{-j\omega T_S} (\Delta - 1)} \quad (6.20)$$

6.2.2 Parametrische Modellunsicherheit Δ

Die Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Beschleunigungsregelung im Führungsverhalten entspricht ohne Modellunsicherheit ($\Delta = 1$) der Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Stromregelung ohne zweite Rückführschleife. Der Einfluss einer parametrischen Modellunsicherheit auf den Amplitudengang der Beschleunigungsregelschleife ist frequenzabhängig. Im kleinen Frequenzbereich weisen die Frequenzgangsfunktionen der Stromregelung, des nachgeschalteten Tiefpassfilters und die Verzögerung um einen Abtastschritt ein ideales Übertragungsverhalten auf und führen somit zu keiner Amplitudendämpfung oder Phasenverzö-

gerung in der Beschleunigungsregelschleife. Der Grenzwert der Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Beschleunigungsregelschleife strebt für $\omega \rightarrow 0$ gegen Eins.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F_{AC}(j\omega) = \frac{\Delta}{1 + (\Delta - 1)} = 1 \quad (6.21)$$

Folglich wird eine parametrische Modellunsicherheit für Frequenzen $\omega \ll 1/T_{FA}$ durch die Beschleunigungsregelschleife kompensiert. Dies ist insbesondere in Kombination mit einer Vorsteuerung der Beschleunigung vorteilhaft: Die Beschleunigung des Antriebs folgt dem Sollwert, ein Eingriff der überlagerten Positionsregelung ist somit ausschließlich zur Kompensation eines eventuellen Schleppfehlers erforderlich.

Der nachgeschaltete Tiefpassfilter sperrt im Frequenzbereich über der Eckfrequenz $\omega \gg 1/T_{FA}$ und die Frequenzgangsfunktion des Filters ist näherungsweise Null. Damit ist die Beschleunigungsregelschleife wirkungslos und die parametrische Modellunsicherheit wirkt sich vollständig auf die Beschleunigung des Antriebs aus.

$$\lim_{F_{FA} \rightarrow 0} F_{AC}(j\omega) = \Delta F_{CC}(j\omega) \quad (6.22)$$

Die Maximalwerte des Amplitudengangs der geschlossenen Beschleunigungsregelschleife sind für verschiedene Parameterkombinationen der Modellunsicherheit Δ sowie Verhältnisse der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode χ_{FA} in Abbildung 6.6 dargestellt. Aufgrund der gewählten Modellierung ist die Analyse der Maximalwerte unabhängig von der Abtastperiode der Regelung. Demnach nimmt die Überhöhung der Frequenzgangsfunktion für Modellunsicherheiten $\Delta > 1$ signifikant zu. Der Maximalwert dieser Überhöhung nimmt mit einem zunehmenden Verhältnis der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode ab. Für Modellunsicherheiten $\Delta < 1$ ist der Maximalwert der Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Beschleunigungsregelschleife in einem weiten Bereich um 0 dB.

Die Parameterunsicherheit der Drehmomentkonstante ist gering im Gegensatz zur möglichen Variation des Last-Massenträgheitsmoments eines Antriebs. Mit der Annahme $\hat{c}_T = c_T$ wird die parametrische Modellunsicherheit im Wesentlichen auf das in Gleichung 4.41 eingeführte Verhältnis der Massenträgheitsmomente $\chi_J = J_L/J_{Mo}$ zurückgeführt. Die Schätzgröße für das Massenträgheitsmoment wird entsprechend Gleichung 4.43 gewählt. Damit gilt für die Modellunsicherheit mit dem Verhältnis der Massenträgheitsmomente:

$$\Delta = \frac{J_{Mo}}{J_{Mo} + J_L} = \frac{1}{1 + \chi_J} \leq 1, \quad \forall \chi_J \in \mathbb{R}^+ \quad (6.23)$$

Somit ergeben sich aus den Führungseigenschaften eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Beschleunigungsregelschleife keine Restriktionen für die Wahl der Filterzeitkonstante des nachgeschalteten Filters.

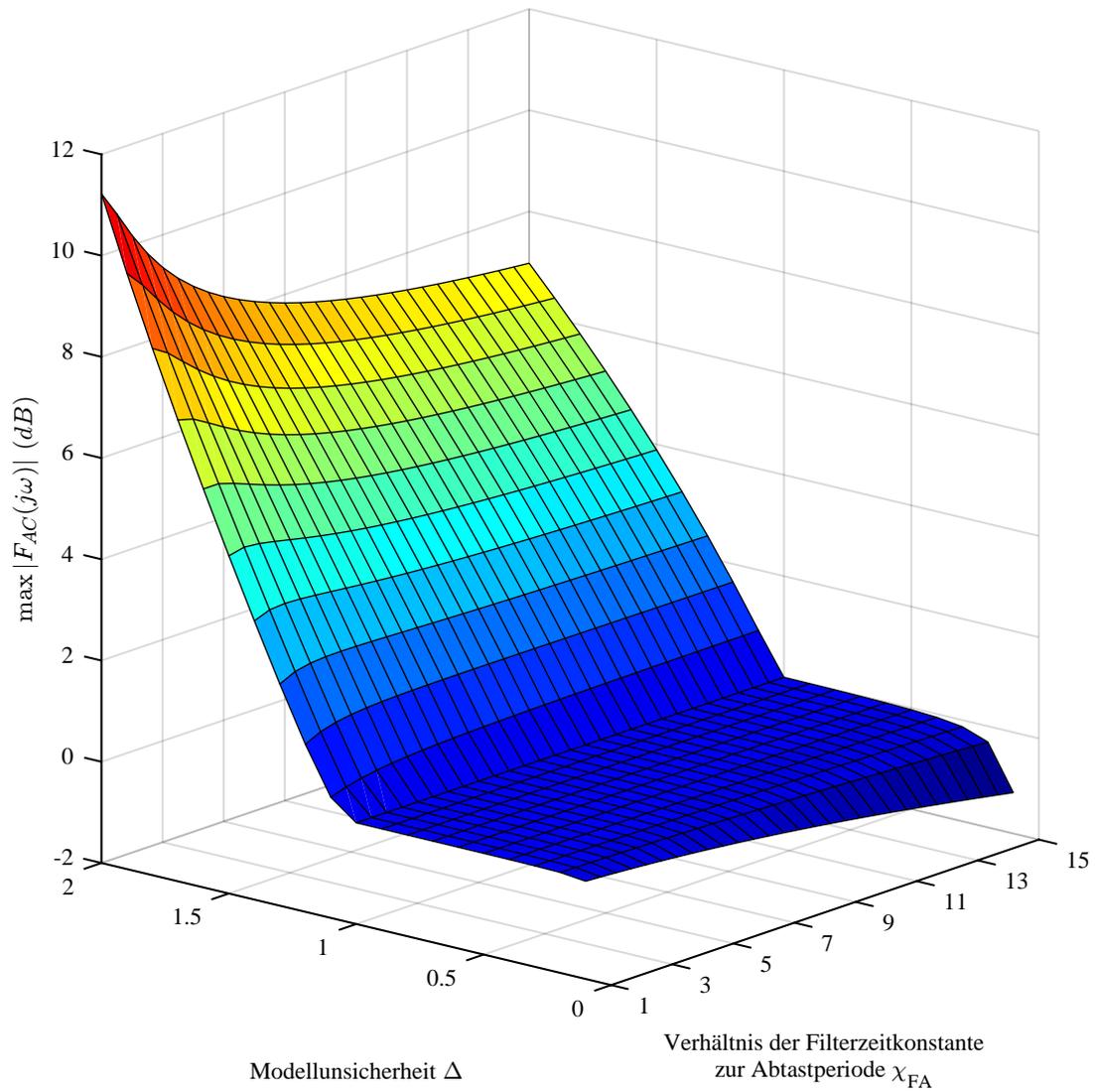


Abbildung 6.6: Maximalwerte der Beschleunigungsregelschleife im Führungsverhalten für verschiedene Filterparametrierungen und Modellunsicherheiten

6.3 Positionsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung

Das Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Regelung der Beschleunigung ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Bei der Parametrierung des Positionsreglers mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung ist zu beachten, dass anstelle der Proportionalverstärkung K_S nun die normierte Proportionalverstärkung K_S^* in die Reglergleichungen $H_{FF}^K(j\omega)$ und $H_{FB}^K(j\omega)$ einzusetzen ist. Damit entspricht die Stellgröße dieser Regler der Sollbeschleunigung des Antriebs. Für die Analyse der Eigenschaften der Positionsregelung mit einer unterlagerten Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten wird die zweifache BACKWARD-EULER-Differentiation und der nachgeschaltete Filter als zweite, parallele Rückführschleife des Positionsmesswertes berücksichtigt. Die Frequenzgangsfunktion des *Feedback*-Reglers mit unterlagerter Regelung der Beschleunigung $H_{FB}(j\omega)$ wird aus den Frequenzgangsfunktionen des *Feedback*-Reglers der klassischen Kaskadenregelung $H_{FB}^K(j\omega)$, der BACKWARD-EULER-Differentiation $F_{2D}^{BE}(j\omega)$ und dem nachgeschalteten Filter $F_{FA}(j\omega)$ gebildet.

$$H_{FB}(j\omega) = \frac{u_{FB}(j\omega) + \hat{e}_{AC}(j\omega)}{y_P(j\omega)} = H_{FB}^K(j\omega) + F_{2D}^{BE}(j\omega)F_{FA}(j\omega) \quad (6.24)$$

Die Parameter des *Feedback*-Reglers der klassischen Kaskadenregelung werden gemäß der vorgestellten Parametrierung in Kapitel 4.5.2 gewählt. Damit ist die Filterzeitkonstante und somit die Bandbreite der Beschleunigungsrückführung ein zusätzlicher Designparameter des *Feedback*-Reglers.

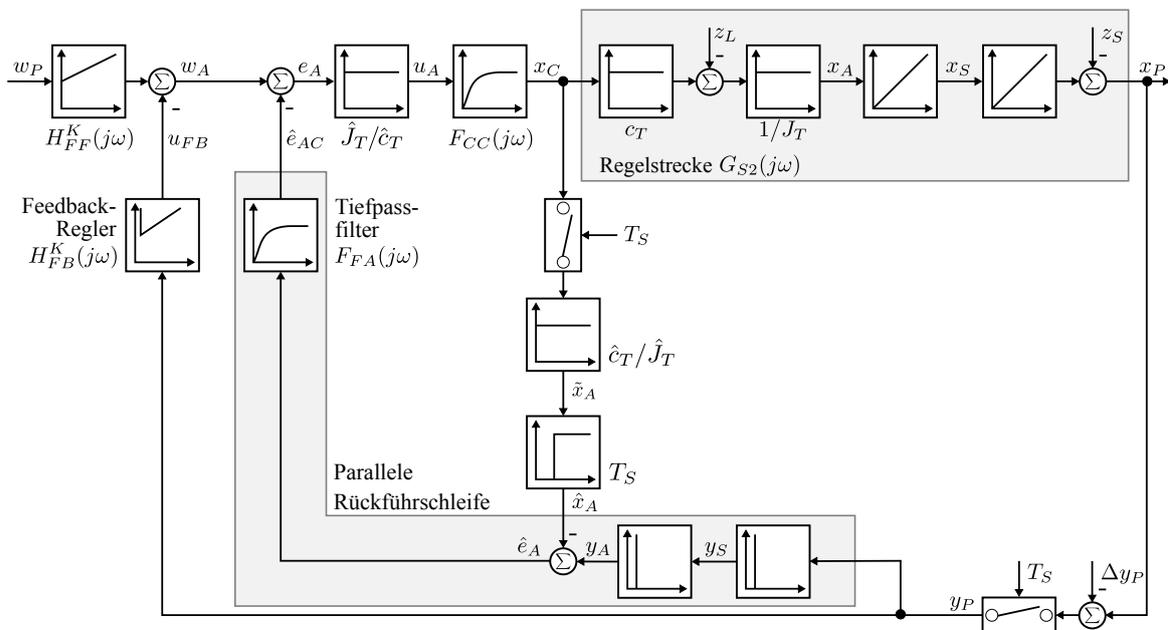


Abbildung 6.7: Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten

Berechnung der Vorsteuerfunktion Die Berechnung der Vorsteuerfunktion mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird gemäß Gleichung 3.7 aus dem inversen Modell der Regelstrecke und dem Feedback-Regler nach Gleichung 6.24 gebildet. Das inverse Modell der Positionsregelstrecke berücksichtigt dabei die Stromregelung mit zweiter Rückführschleife nach Gleichung 6.15 und das mechanische Teilsystem. Für die Berechnung der Vorsteuerfunktion wird vereinfachend für das Übertragungsverhalten der geschlossenen Stromregelung $F_{CC}(j\omega) = 1$ angenommen. Das inverse mechanische Teilsystem wird mit einer zweifachen BACKWARD-EULER-Differentiation nach Gleichung 5.8 approximiert.

$$\begin{aligned} H_{FF}(j\omega) &= (P(j\omega))^{-1} + H_{FB}(j\omega) \\ &\approx \left(1 - F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}\right) F_{2D}^{BE}(j\omega) + H_{FB}^K(j\omega) + F_{2D}^{BE}(j\omega)F_{FA}(j\omega) \\ &\approx \left(1 + F_{FA}(j\omega)\left(1 - e^{-j\omega T_s}\right)\right) F_{2D}^{BE}(j\omega) + H_{FB}^K(j\omega) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Demnach ist mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung eine Korrektur der berechneten Soll-Beschleunigung $u_{FA}(j\omega)$ in der Vorsteuerfunktion nach Gleichung 4.100 um den Ausdruck

$$u'_{FA}(j\omega) = u_{FA}(j\omega) \left(1 + \underbrace{F_{FA}(j\omega)\left(1 - e^{-j\omega T_s}\right)}_{\text{Korrekturterm}}\right) \quad (6.26)$$

erforderlich. Mit dem Korrekturterm werden die strukturellen Änderungen in der Regelstrecke, welche aus der zweiten Rückführung in der Stromregelschleife resultieren, auch in der Vorsteuerung berücksichtigt.

Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises Die Beurteilung der Stabilität und der Robustheit der Positionsregelung mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung erfolgt anhand der Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L(j\omega)$. Diese wird entsprechend dem Blockschaltbild in Abbildung 6.7 aus der Frequenzgangsfunktionen des *Feedback*-Reglers und der geschlossenen Stromregelung jeweils mit unterlagerter Regelung der Beschleunigung nach Gleichung 6.15 und 6.24 sowie der Frequenzgangsfunktion der Regelstrecke $G_{S2}(j\omega)$ berechnet. Die Multiplikation der realen Streckenparameter mit den inversen nominellen Streckenparametern wird der Übersichtlichkeit halber mit der parametrischen Modellunsicherheit Δ substituiert.

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= H_{FB}(j\omega)F'_{CC}(j\omega) \overbrace{F_{2I}(j\omega)}^{G_{S2}(j\omega)} \frac{c_T}{J_T} \frac{\hat{J}_T}{\hat{c}_T} \\ &= H_{FB}(j\omega)F'_{CC}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta \end{aligned} \quad (6.27)$$

Anhand der Frequenzgangsfunktion des offenen Positionsregelkreises wird der Einfluss des Verhältnisses der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode ohne Modellunsicherheit analysiert.

6.3.1 Sensitivität

In [100] erfolgt eine robuste Auslegung der Drehzahlregelung von DC-Servoantrieben mit unterlagerten Störgrößenbeobachter. Die Störgröße wird dabei mit einem inversen Modell der Drehzahlregelstrecke aus der gemessenen Drehzahl berechnet. Die daraus resultierende Regelungsstruktur wird auf einen Reglerentwurf mit zwei Freiheitsgraden (2DOF) zurückgeführt. Der Entwurf und die Analyse der Regelung erfolgt anhand eines zeitkontinuierlichen Modells der Regelungsstruktur und unter der Annahme einer idealen Differentiation zur Berechnung der Beschleunigung aus der gemessenen Drehzahl. Dabei wird insbesondere der Einfluss verschiedener Ordnungen und Filterzeitkonstanten des nachgeschalteten Tiefpassfilters auf den Verlauf der Sensitivitätsfunktion sowie der komplementären Sensitivität untersucht. Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen bei der Modellierung des Regelkreises wurde in den Untersuchungen keine Überhöhung im Verlauf der Sensitivitätsfunktion festgestellt. Dieses Ergebnis widerspricht der in Theorem 3.2 formulierten Aussage von BODE.

Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit die Analyse der Regelungsstruktur ohne signifikante Vereinfachungen durchgeführt. Die Kombination der zeitkontinuierlichen Regelstrecke und der zeitdiskreten Regelungsalgorithmen macht eine Beschreibung mit Frequenzgangsfunktionen erforderlich. Deren Berechnung und Auswertung erfolgt mit MATLAB[®].

Die Frequenzgangsfunktion der Sensitivitätsfunktion des Positionsregelkreises wird aus Gleichung 6.27 berechnet. Die Ableitung der Frequenzgangsfunktion ist im Anhang im Abschnitt C detailliert dargestellt. Ohne Modellunsicherheit ($\Delta = 1$) und der bereits eingeführten Näherung der Beschleunigungsermittlung mit $F_{2I}(j\omega)F_{2D}^{BE}(j\omega) \approx e^{-j\omega T_s}$ kann die Sensitivitätsfunktion des Positionsregelkreises als Sensitivitätsfunktion der ursprünglichen Positionsregelung nach Gleichung 4.104 und einem überlagerten Hochpass dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \frac{x_P(j\omega)}{z_S(j\omega)} = \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 + F_{CC}(j\omega)F_{FB}^K(j\omega)F_{2I}(j\omega)} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{1 + F_{CC}(j\omega)F_{FB}^K(j\omega)F_{2I}(j\omega)}}_{\text{Sensitivitätsfunktion Gl. 4.104}} \underbrace{\left(1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}\right)}_{\text{Hochpass}} \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Die Stromregelung und der nachgeschaltete Tiefpassfilter haben Tiefpasscharakteristik, das Totzeitglied führt zu einer zusätzlichen linearen Phasenverzögerung der Frequenzgangsfunktion des resultierenden Tiefpassfilters:

$$F_{TP}(j\omega) = F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s} \quad (6.29)$$

Die Frequenzgangsfunktion eines Hochpasses wird aus einem Tiefpass mit

$$F_{HP}(j\omega) = 1 - F_{TP}(j\omega) \quad (6.30)$$

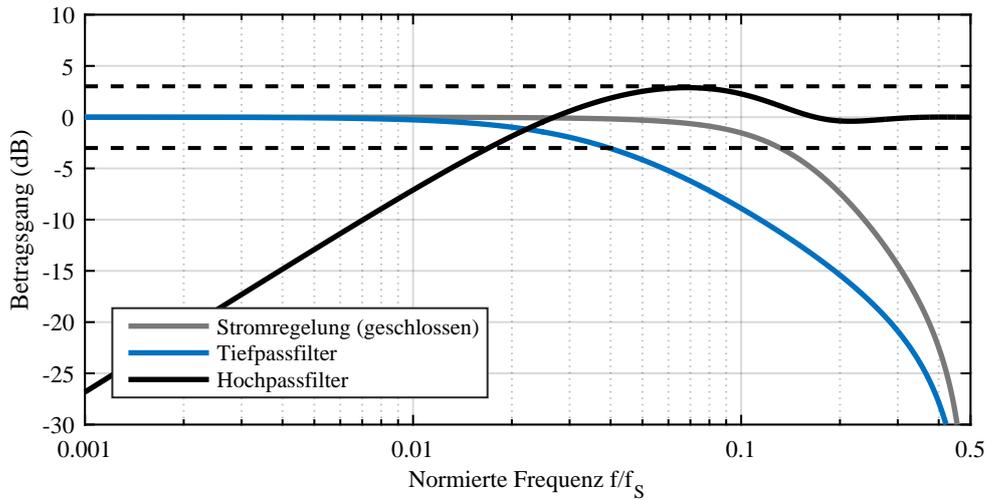


Abbildung 6.8: Betragsgang des Hochpassfilters zur Kompensation eingreifender Störgrößen im Positionsregelkreis durch die unterlagerte Beschleunigungsregelung

berechnet. Der Amplitudengang der Frequenzgangsfunktionen ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Dabei wurde die Stromregelung für eine Phasenreserve von 65 Grad mit einer normierten Regelkreisverstärkung von $\tilde{K}_C = 0,2217$ parametrisiert. Mit der gewählten Filterzeitkonstanten des nachgeschalteten Tiefpassfilters beträgt die maximale Überhöhung des resultierenden Hochpassfilters 3 dB und tritt im mittleren Frequenzbereich auf. Insgesamt entspricht der Amplitudengang des Hochpassfilters dem typischen Verlauf der Sensitivitätsfunktion eines Regelkreises.

Im Gegenkopplungsbereich kann die Störunterdrückung durch den Hochpassfilter mit einem Differentiator mit der Filterzeitkonstanten des nachgeschalteten Tiefpassfilters T_{FA} angenähert werden. Eine Tangente zur Approximation des Betragsgangs der Sensitivitätsfunktion im niedrigen Frequenzbereich $\omega < \omega_{BS}$ wird aus Gleichung 4.107 und der Näherung des Hochpassfilters berechnet. Somit wird durch die unterlagerte Beschleunigungsregelung die Unterdrückung von eingreifenden Störgrößen im niedrigen Frequenzbereich verbessert.

$$|S(\omega \ll \omega_{BS})| \approx \frac{T_{NS}\omega^3}{K_S^* K_P} \cdot T_{FA}\omega \quad (6.31)$$

Im Bereich der Überhöhung des Hochpassfilters $|F_{HP}(j\omega)| > 1$ führt die unterlagerte Beschleunigungsregelung zu einer Verstärkung der eingreifenden Störgröße. Überlagern sich die Frequenzbereiche der Überhöhung durch den Hochpassfilter und der Mitkoppelbereich der ursprünglichen Sensitivitätsfunktion, so wird der Betragsabstand zum kritischen Punkt und somit auch die Stabilitätsreserve des Regelkreises reduziert. Die maximale Überhöhung des Hochpassfilters und der Sensitivitätsfunktion sind in Abbildung 6.9 für verschiedene Verhältnisse der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode dargestellt.

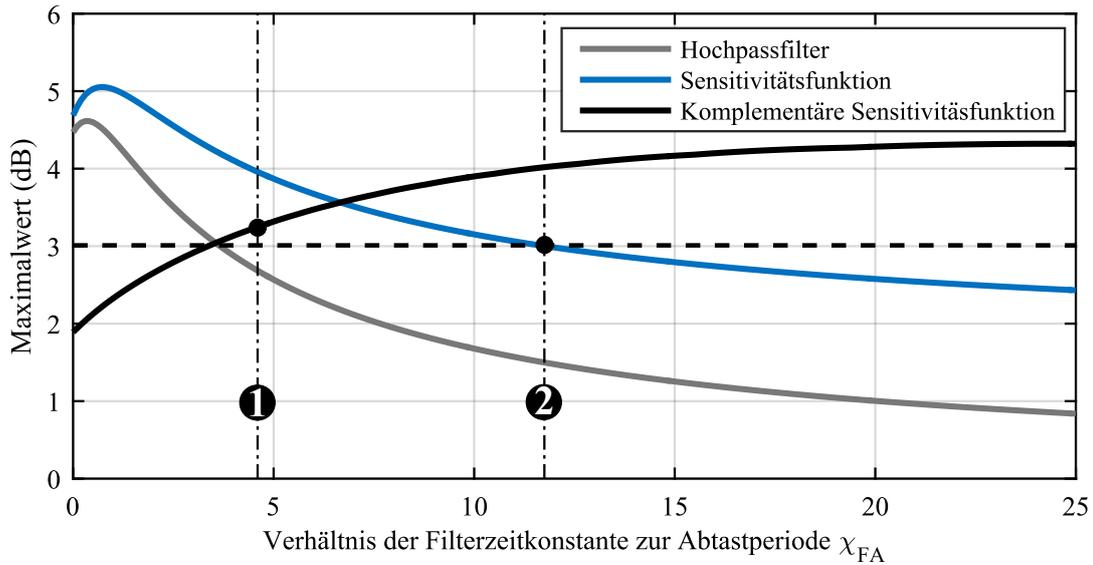


Abbildung 6.9: Maximalwerte des Hochpassfilters und der Sensitivitätsfunktion

- ❶ Maximalwert der komplementären Sensitivität der Positionsregelung mit unterlagerter Stromregelung ($\chi_{FA} = 4,6$)
- ❷ Spezifizierter Maximalwert der Sensitivitätsfunktion ($\chi_{FA} = 11,75$)

Wird beispielsweise für die Sensitivität der Positionsregelschleife eine obere Schranke von 3 dB spezifiziert, so muss das Verhältnis der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode bei der vorgestellten Parametrierung des Positionsreglers die Bedingung

$$\chi_{FA} \geq 11,75$$

erfüllen. Damit resultiert allein aus der Tatsache, dass die Rückführgröße für die unterlagerte Beschleunigungsregelung aus dem Positionsmesswert berechnet wird, eine Einschränkung bei der Parametrierung der Bandbreite des nachgeschalteten Filters und führt damit zwangsläufig zu einer Limitierung der Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals.

6.3.2 Robustheit

Die Robustheit der Positionsregelung mit unterlagerter Regelung der Beschleunigung wird Anhand der komplementären Sensitivitätsfunktion nach Gleichung 3.38 beurteilt. Die Berechnung der komplementären Sensitivitätsfunktion erfolgt aus der Frequenzgangsfunktion des offenen Positionsregelkreises nach Gleichung 6.27.

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \frac{H_{FB}(j\omega)F'_{CC}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta}{1 + H_{FB}(j\omega)F'_{CC}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta} \quad (6.32)$$

Die Maximalwerte der komplementären Sensitivitätsfunktion des Positionsregelkreises mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung sind in Abbildung 6.9

dargestellt. Mit einem zunehmenden Verhältnis der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode wird der Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion größer. Die Robustheit des Regelkreises gegenüber Unsicherheiten des nominellen Streckenmodells nimmt demnach ab. Mit der in Abschnitt 4.5.2 vorgestellten Parametrierung der klassischen Kaskadenregelung beträgt der Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion 3,26 dB. Bis zu einem Verhältnis der Filterzeitkonstanten zur Abtastzeit von

$$\chi_{FA} \leq 4,6$$

ist mit einer unterlagerten kombinierten Beschleunigungsregelung der Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion kleiner als in der klassischen Kaskadenregelung. Der Regelkreis hat damit eine größere Robustheit gegenüber Unsicherheiten des nominellen Streckenmodelles.

Begründet ist dies durch die strukturellen Änderungen im Regelkreises aufgrund der unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung. Mit dem Grenzfall $\chi_{FA} = 0$ ist die Frequenzgangsfunktion des nachgeschalteten Tiefpassfilter im gesamten Frequenzbereich gleich Eins. Damit wird die Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals ausschließlich durch die zeitdiskrete Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten begrenzt.

6.3.3 Auslegung

Die Wahl des Verhältnisses der Filterzeitkonstanten zur Abtastperiode ist folglich ein Kompromiss zwischen

- der Robustheit des Regelkreises
- und der Überhöhung der Sensitivitätsfunktion im Mitkopplungsbereich.

Entsprechend den formulierten Anforderungen in Abschnitt 3.4 soll im Rahmen dieser Arbeit der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion $\|S\|_{\infty}$ 3 dB nicht überschreiten. Dieses Designziel wird bei der vorgestellten Parametrierung der klassischen Kaskadenregelung (Tab. 4.4) mit einem Verhältnis der Filterzeitkonstanten zur Abtastperiode von $\chi_{FA} = 11,75$ erreicht. Bei einer Abtastperiode von $62,5 \mu\text{s}$ resultiert daraus eine Filterzeitkonstante von $\approx 734 \mu\text{s}$, beziehungsweise eine -3 dB-Grenzfrequenz des nachgeschalteten Tiefpassfilters von $216,7$ Hz (Tab. 6.1). Mit dieser Bandbreite der Beschleunigungsrückführung ist nach [64] bereits eine signifikante Verbesserung des Störverhaltens des Antriebs möglich. Gemäß Abbildung 6.9 beträgt der Maximalwert der komplementären Sensitivitätsfunktion $\|T\|_{\infty}$ bei diesem Verhältnis 4 dB.

Die Ortskurve des offenen Positionsregelkreises mit unterlagerten kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung in Abbildung 6.10 hat einen geringeren Abstand zum kritischen Punkt als die Ortskurve der klassischen Kaskadenregelung mit unterlagerten Stromregelung.

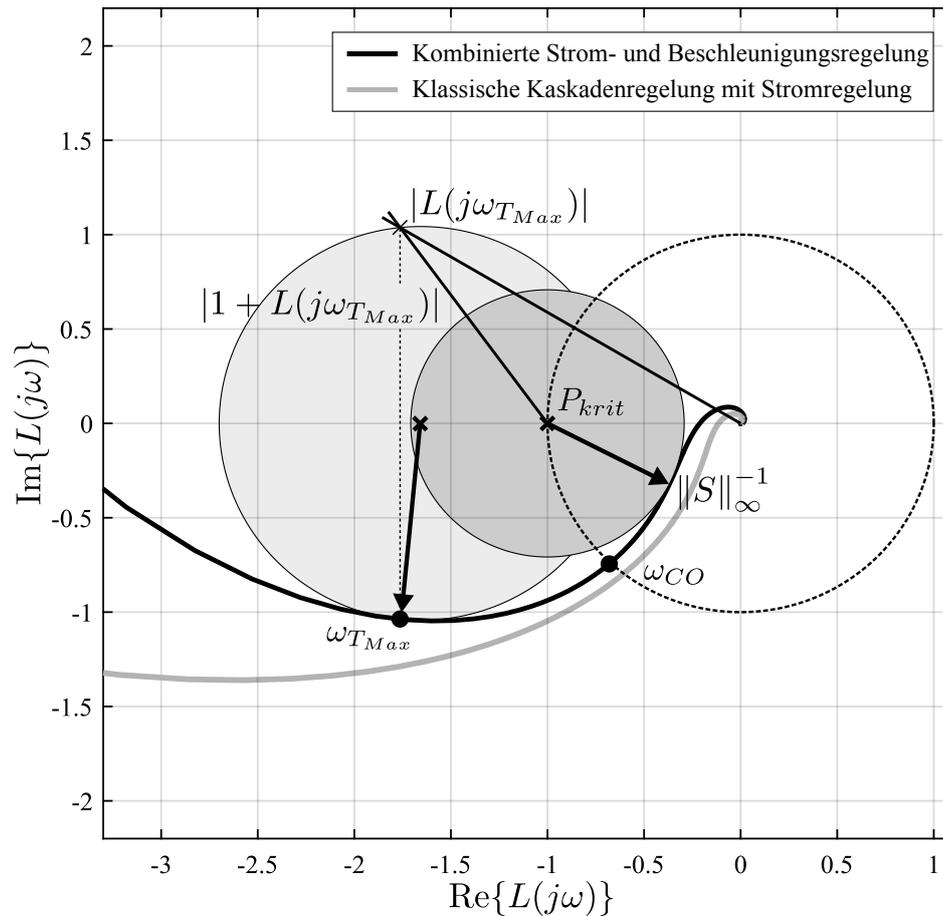


Abbildung 6.10: NYQUIST-Diagramm der Positionsregelung mit unterlagerter kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung

Für beide Regelungsverfahren wird der Betragsabstand der Ortskurve zum kritischen Punkt zwischen der Amplitudendurchtrittsfrequenz und der Phasendurchtrittsfrequenz des Regelkreises minimal. Die zweite Rückführung in der Stromregelschleife bewirkt im niedrigen Frequenzbereich ein zusätzliches Integratorverhalten im offenen Regelkreis. Daraus resultiert die auffällig unterschiedliche Krümmung der beiden Ortskurven für Frequenzen unter der Amplitudendurchtrittsfrequenz.

Tabelle 6.1: Parameter der unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung für eine Abtastperiode von $62,5 \mu\text{s}$

Parameter	Symbol	Wert
Verhältnis der Filterzeitkonstante zur Abtastperiode	χ_{FA}	11,75
Zeitkonstante des nachgeschalteten Tiefpassfilters	T_{FA}	$734 \mu\text{s}$
-3 dB -Grenzfrequenz des Tiefpassfilters	$f_{-3 \text{ dB}}$	216,7 Hz

Die Amplitudengänge der charakteristischen Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung sind in Abbildung 6.11 dargestellt. Die -3 dB -Bandbreite der Störunterdrückung wird durch die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung um 52,17 Prozent von 92 Hz auf 140 Hz erhöht (vergl. Abb. 4.18 auf Seite 101 und 6.11 Linie ②). Ausschlaggebend dafür ist die Erhöhung der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises von 170 Hz auf 300 Hz durch das zusätzliche Integratorverhalten im Regelkreis (Linie ③).

Das Führungsverhalten des Regelkreis wird durch die unterlagerte kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung nicht beeinflusst. In beiden Fällen beträgt die -3 dB -Bandbreite ohne Vorsteuerung 64 Hz (Linie ①). Mit der Vorsteuerfunktion nach Gleichung 6.25 wird das Führungsverhalten im betrachteten Frequenzbereich stark verbessert.

Die Bandbreite der komplementären Sensitivitätsfunktion wird durch die unterlagerte kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung von 280 Hz auf 600 Hz mehr als verdoppelt. Folglich nimmt der Einfluss von Positionsmessfehler auf die Regelgröße, im Vergleich zur klassischen Kaskadenregelung mit unterlagerter Stromregelung, ebenfalls zu.

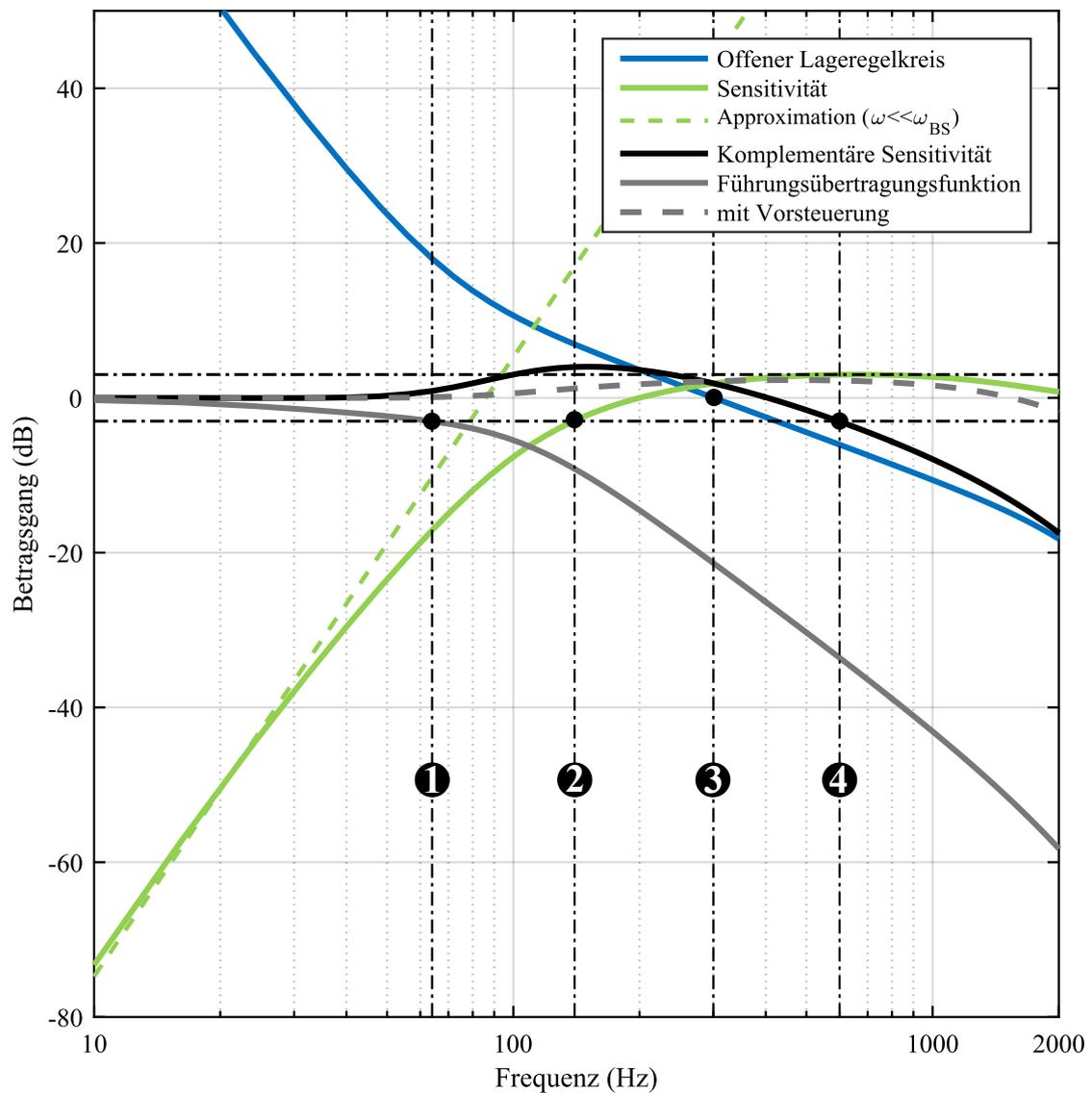


Abbildung 6.11: Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten

- ❶ -3 dB-Bandbreite der Führungsübertragungsfunktion $f_{PC} = 64$ Hz
- ❷ -3 dB-Bandbreite der Sensitivität $f_{BS} = 140$ Hz
- ❸ Amplitudendurchtrittsfrequenz $\omega_{CO} = 300$ Hz
- ❹ -3 dB-Bandbreite der komplementären Sensitivität $f_{BT} = 600$ Hz

6.4 Gleichlaufschwankungen

Als Gleichlaufschwankungen werden Oszillationen der Drehzahl- bzw. Geschwindigkeit eines Servoantriebs an einem quasi-stationären Betriebspunkt bezeichnet. Die Gleichlaufschwankungen werden durch Drehmoment- bzw. Kraftschwankungen im Antriebsstrang verursacht, welche durch die Regelung nicht oder nur in gewissen Bereichen kompensiert werden können oder durch Messfehler des Positionsmessgerätes angeregt werden. Drehmomentschwankungen des Motors resultieren zum Beispiel aus:

- Oberwellen in der Flussverkettung
- Rastdrehmomente
- Positionsmessfehler

Abweichungen von der vorgegebenen Drehzahl oder Geschwindigkeit führen in Produktionsmaschinen häufig zu einer Verschlechterung des Produktionsergebnisses. Beispielsweise resultiert bei der spanenden Bearbeitung in Werkzeugmaschinen aus höheren Gleichlaufschwankungen eine verringerte Oberflächengüte der gefertigten Teile. [105]

Die Ursachen und Kompensationsmöglichkeiten von Gleichlaufschwankungen aufgrund einer Drehmoment- bzw. Kraftwelligkeit des Motors werden z.B. in [71], [109] und [45] dargestellt. Im Folgenden wird der Wirkungsmechanismus der Messfehler in der Positionserfassung auf den Gleichlauf von Servoantrieben mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung untersucht. Das entsprechende Blockschaltbild eines drehzahlgeregelten mechanisch steifen Servoantriebs ist in Abbildung 6.12 dargestellt.

Im ersten Schritt wird in diesem Abschnitt die frequenzabhängige Verstärkung der Positionsmessfehler im Drehzahlregelkreis beschrieben. Anschließend wird der Einfluss von Positionsmessfehlern in einer Signalperiode auf die Gleichlaufschwankungen anhand der Signalqualität und der Anzahl an Signalperioden des Positionsmessgerätes analysiert.

6.4.1 Verstärkung der Positionsmessfehler

Die Frequenzgangsfunktion des *Feedback*-Reglers der Drehzahlregelung mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird aus zwei Termen gebildet: Üblicherweise erfolgt die Drehzahlregelung in der klassischen Kaskadenregelung mit einem PI-Regler nach Gleichung 4.63, die Rückführgröße dieses Regelkreises wird aus dem Positionsmesswert mit einer einfachen BACKWARD-EULER-Differentiation nach Gleichung 4.52 berechnet. Die Amplitudenanhebung durch die Differentiation wird durch einen Tiefpassfilter 1. Ordnung $F_{FS}(j\omega)$ nach Gleichung 4.66 mit der Filterzeitkonstanten T_{FS} begrenzt. Die Beschleunigungsrückführung wird durch eine zweifache BACKWARD-EULER-Differentiation

funktion resultieren aus dem beschriebenen Auslegungsverfahren der Drehzahlregelung nach dem symmetrischen Optimum für eine Abtastperiode von $62,5 \mu\text{s}$ und sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Für beide Regelungsverfahren werden Positionsmessfehler bis zur Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises ω_{CO} mit 20 dB/Dekade näherungsweise linear (Linie ❶) verstärkt. Die lineare Verstärkung der Positionsmessfehler im Frequenzbereich entspricht einer einfachen Differentiation der Positionsmessfehler im Zeitbereich. Folglich kann die resultierende Gleichlaufschwankung $\Delta x_S(t)$ aufgrund eines Positionsmessfehlers für die Frequenzen $\omega < \omega_{CO}$ durch Berechnung der Zeitableitung des Positionsmessfehlers $\Delta y_P(t)$ näherungsweise berechnet werden.

$$\Delta x_S(t) \approx \frac{d\Delta y_P(t)}{dt}, \quad \text{für } \omega < \omega_{CO} \quad (6.36)$$

Für $\omega \ll \omega_{CO}$ ist eine exakte Berechnung der Gleichlaufschwankungen durch die Differentiation des Positionsmessfehlers möglich. Die Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Drehzahlregelkreises mit klassischer Stromregelung wird aus der normierten Proportionalverstärkung des PI-Reglers näherungsweise mit

$$f_{CO} = \frac{K_S^*}{2\pi} \quad (\text{Linie ❷ in Abb. 6.13})$$

berechnet. Mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird die Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises zu höheren Frequenzen verschoben. Ursache ist das in Abschnitt 6.2.1 beschriebene Integratorverhalten der Stromregelung mit zweiter Rückführschleife. Die Amplitudendurchtrittsfrequenz mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung wird durch eine Überlagerung der normierten Proportionalverstärkung des PI-Reglers und der Grenzkreisfrequenz ω_{FA} des Tiefpassfilters berechnet.

$$f'_{CO} = \frac{K_S^* + \omega_{FA}}{2\pi} \quad (\text{Linie ❸ in Abb. 6.13})$$

Unterhalb der Amplitudendurchtrittsfrequenz wirkt der Drehzahlregelkreis noch nicht begrenzend, und die Gleichlaufschwankung aufgrund eines sinusförmigen Positionsmessfehlers nimmt mit der Frequenz zu. Ab der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises begrenzt die Bandbreite des *Feedback*-Reglers den Einfluss von Positionsmessfehlern im Regelkreis. Die Messfehlerverstärkung im Drehzahlregelkreis erreicht in diesem Frequenzbereich ihren Maximalwert. Dabei entspricht die maximale Verstärkung von Positionsmessfehlern im Drehzahlregelkreis näherungsweise der Kreisfrequenz beim Amplitudendurchtritt des offenen Regelkreises (Linie ❹ und ❺). Die Gleichlaufschwankung bleibt bis zur markierten Amplitudendurchtrittsfrequenz der Stromregelung (Linie ❻) näherungsweise konstant. Ab dieser Frequenz wird die Verstärkung der Positionsmessfehler durch den zusätzlichen Amplitudenabfall des Stromregelkreises gedämpft. [105] Die Nullstellen der beiden Tiefpassfilter bei der NYQUIST-Frequenz führen zu einem rapiden Abfall der Messfehlerverstärkung im Frequenzbereich über der Amplitudendurchtrittsfrequenz der Stromregelung.

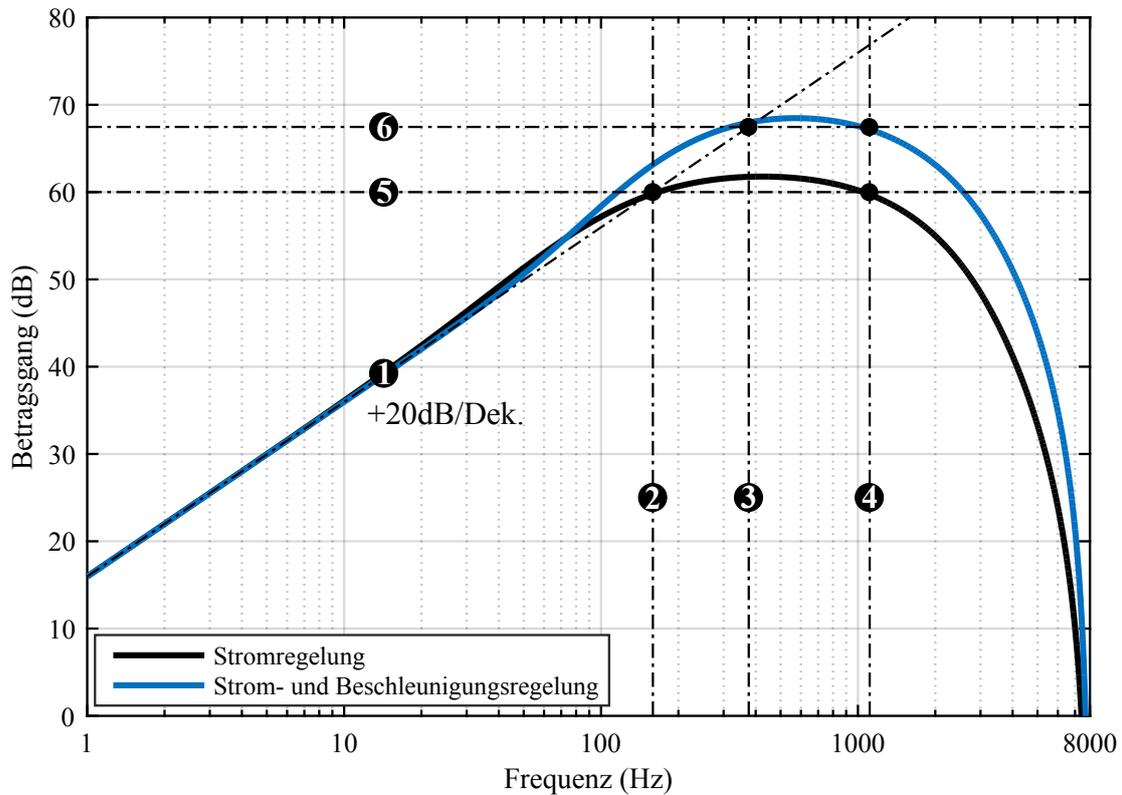


Abbildung 6.13: Einfluss von Positionsmessfehlern auf die Drehzahl eines Servoantriebs

- ② PI-Drehzahlregelung: $K_S^*/2\pi \approx 160$ Hz
- ③ PI-Drehzahlregelung u. Beschleunigungsrückführung: $(K_S^* + \omega_{FA})/2\pi \approx 376$ Hz
- ④ Stromregelung: $\Omega_{CO}/2\pi T_S = 1,11$ kHz

Tabelle 6.2: Parameter der Drehzahlregelung

Parameter	Symbol	Wert
Abtastperiode	T_S	$62,5 \mu\text{s}$
Stromregelkreisverstärkung (normiert)	\tilde{K}_C	0,2217
Filterzeitkonstante Signalfilter Beschleunigung	T_{FA}	$734 \mu\text{s}$
Filterzeitkonstante Signalfilter Drehzahl	T_{FS}	$62,5 \mu\text{s}$
Summenzeitkonstante	T_Σ	$250 \mu\text{s}$
Designparameter symmetrisches Optimum	χ_{SO}	4
Proportionalverstärkung Drehzahlregelung	K_S^*	1000 1/s
Nachstellzeit Drehzahlregelung	T_{NS}	4 ms

6.4.2 Einfluss der Signalqualität und der Anzahl an Signalperioden

Der Positionsmessfehler setzt sich nach Gleichung 2.9 aus einer Überlagerung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode Δy_{SP} und dem langperiodischen Messfehler Δy_{LP} zusammen. Gemäß dem in Abschnitt 2.3 eingeführten und verifizierten Modells werden die beiden Messfehler durch eine Überlagerung sinusförmiger Terme beschrieben. Dabei wird der Positionsmessfehler in einer Signalperiode von der Signalqualität χ_{SP} und der Anzahl an Signalperioden z_{SP} des Positionsmessgerätes beeinflusst. Im Frequenzbereich unterhalb der Amplitudendurchtrittsfrequenz wird die Gleichlaufschwankung aufgrund eines Positionsmessfehlers nach Gleichung 6.36 durch eine einfache Differentiation des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode aus Gleichung 2.19 berechnet.

$$\Delta x_S(t) \approx \frac{d\Delta y_{SP}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_{SD}=1}^{\infty} \Delta \hat{y}_{SP,i_{SD}} \sin(i_{SD}\varphi_{SP} + \varphi_{i_{SD}}) \right) \quad (6.37)$$

Bei quasi-konstanter Drehzahl des Antriebs ist die Frequenz der Messsignale näherungsweise konstant und der Signalperiodenwinkel ist entsprechend Gleichung 2.36 eine lineare Funktion der Zeit. Die Frequenz der Messsignale wird für ein Winkelmessgerät nach Gleichung 2.35a aus der Anzahl an Signalperioden und der Winkelgeschwindigkeit des Antriebs ω_{Mo} berechnet.

$$\begin{aligned} \Delta x_S(t) &\approx \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_{SD}=1}^{\infty} \Delta \hat{y}_{SP,i_{SD}} \sin(i_{SD}\omega_{Mo}z_{SP}t + \varphi_{i_{SD}}) \right) \\ &\approx \sum_{i_{SD}=1}^{\infty} \Delta \hat{y}_{SP,i_{SD}} \underbrace{i_{SD}\omega_{Mo}z_{SP}}_{\text{Verstärkung}} \cos(i_{SD}\omega_{Mo}z_{SP}t + \varphi_{i_{SD}}) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Durch die Differentiation wird die Amplitude eines Positionsmessfehler $\hat{y}_{SP,i_{SD}}$ mit

- dessen Ordnung i_{SD} ,
- der Winkelgeschwindigkeit des Antriebs ω_{Mo}
- und der Anzahl an Signalperioden z_{SP}

verstärkt. Die Gleichlaufschwankung resultiert aus einer Überlagerung der verschiedenen Ordnungen der Positionsmessfehler in einer Signalperiode. Damit wird die Amplitude einer Gleichlaufschwankung im Bereich der linearen Verstärkung der Positionsmessfehler aus der Amplitude des Positionsmessfehlers und der Anzahl der Signalperioden in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit des Antriebs berechnet.

$$\Delta \hat{x}_{S,i_{SD}} = \Delta \hat{y}_{SP,i_{SD}} i_{SD} \omega_{Mo} z_{SP}, \quad \text{für } \omega_{Mo} i_{SD} z_{SP} < \omega_{CO} \quad (6.39)$$

Um den Einfluss der Signalqualität auf die Gleichlaufschwankungen zu untersuchen wird angenommen, dass der Maximalwert des Positionsmessfehler in einer Signalperiode durch eine beliebige Ordnung i_{SD} des Positionsmessfehlers dominiert wird. Durch diese Annahme

wird der Maximalwert der Gleichlaufschwankung $\Delta\hat{x}_S$ mit Gleichung 2.2 und 2.12 auf die Signalqualität zurückgeführt.

$$\Delta\hat{x}_S = 2\pi \chi_{SP} i_{SD} \omega_{Mo}, \quad \text{für } \omega_{Mo} i_{SD} z_{SP} < \omega_{CO} \quad (6.40)$$

Die relative Gleichlaufschwankung des Antriebs ist folglich bis zur Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Drehzahlregelkreises näherungsweise konstant und ausschließlich von der Signalqualität und der Ordnung des Fehlers abhängig.

$$\frac{\Delta\hat{x}_S}{\omega_{Mo}} = 2\pi \chi_{SP} i_{SD}, \quad \text{für } \omega_{Mo} i_{SD} z_{SP} < \omega_{CO} \quad (6.41)$$

Mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird, im Vergleich zur klassischen Stromregelung, dieser Frequenzbereich in Abbildung 6.13 mehr als verdoppelt. Der Einfluss von Positionsmessfehlern auf die Gleichlaufeigenschaften eines Antriebs nimmt demnach mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung signifikant zu.

Die Auswirkungen der Signalqualität und der Anzahl an Signalperioden pro Umdrehung auf die Gleichlaufschwankung wurden, unabhängig von anderen Einflüssen, in einem weiten Drehzahlbereich mit einer analytischen Berechnung untersucht. Grundlage bilden dabei die Parameter des Drehzahlregelkreises in Tabelle 6.2 und die daraus berechnete Frequenzgangsfunktion der Messfehlerverstärkung im Drehzahlregelkreis nach Gleichung 6.35. In der analytischen Berechnung sind die Positionsmessfehler in einer Signalperiode gleichmäßig auf die Amplituden der 1. und 2. Ordnung verteilt. In Abbildung 6.14 ist das Ergebnis für Messgeräte mit 512 und 2048 Signalperioden pro Umdrehung, und einer Signalqualität von ± 1 Prozent sowie $\pm 0,1$ Prozent für eine unterlagerte Stromregelung (Abb. 6.14a) und die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung (Abb. 6.14b) dargestellt.

Die in den Abbildungen 6.14a und 6.14b markierten Flächen stellen für die jeweilige Signalqualität die durch Positionsmessfehler 1. und 2. Ordnung verursachten maximalen Gleichlaufschwankungen dar. In diesen Bereichen nehmen die Gleichlaufschwankungen entsprechend Gleichung 6.40 linear zu. Für eine Signalqualität von ± 1 Prozent resultiert in diesem Drehzahlbereich für einen Messfehler erster Ordnung eine relative Gleichlaufschwankung von $\approx 6,28$ Prozent und für den Positionsmessfehler 2. Ordnung von $\approx 12,56$ Prozent. Die Anzahl an Signalperioden pro Umdrehung und das unterlagerte Regelungsverfahren haben dabei keinen Einfluss. Der Maximalwert der Gleichlaufschwankung für eine beliebige Referenzdrehzahl in diesem Bereich ist ausschließlich von der Signalqualität des Messgerätes abhängig.

Die Begrenzung des linearen Anstiegs des Maximalwertes der Gleichlaufschwankungen durch den Regelkreis tritt ein, wenn die Frequenz des Positionsmessfehlers der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises entspricht:

$$i_{SD} n_{Mo} z_{SP} = f_{CO} \quad \Rightarrow \quad n_{Mo} = \frac{f_{CO}}{i_{SD} z_{SP}} \quad (6.42)$$

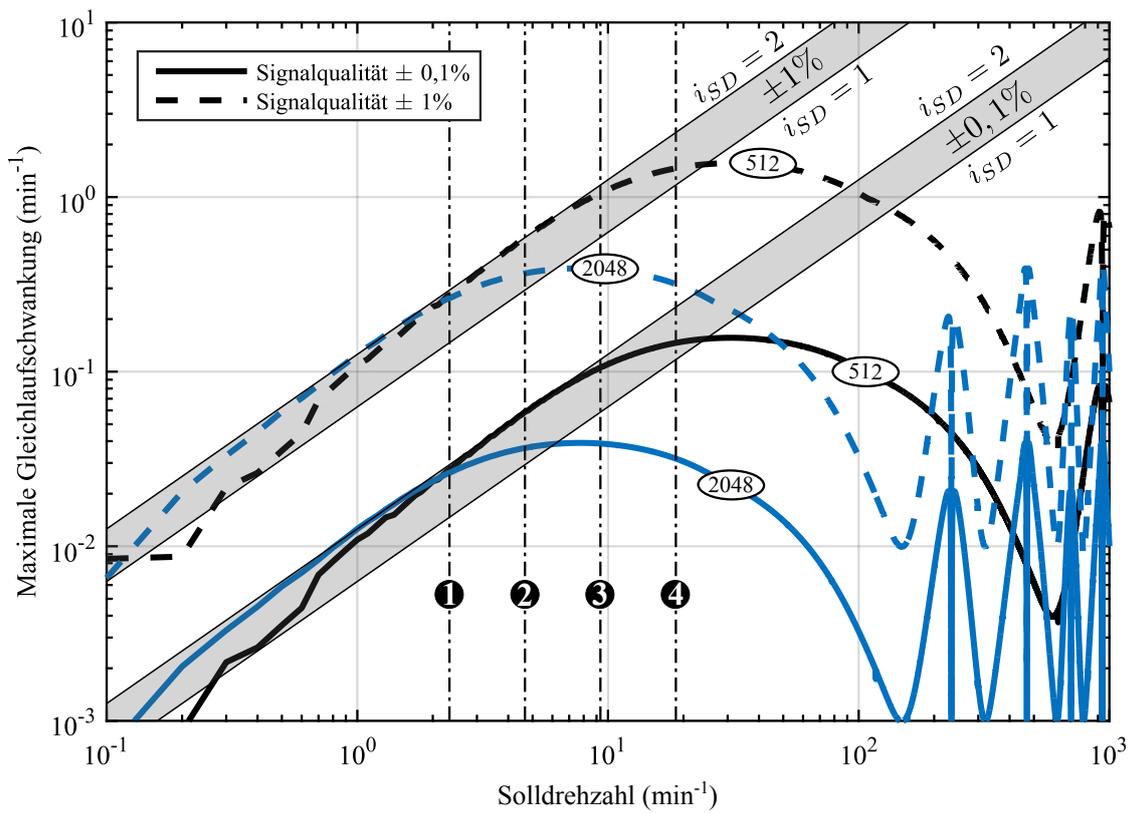
Folglich tritt die Begrenzung durch den Regelkreis bei dem Positionsmessgerät mit 2048 Signalperioden in einer Umdrehung bei niedrigen Drehzahlen ein, als bei dem Positionsmessgerät mit 512 Signalperioden in einer Umdrehung. Entsprechendes gilt für die Ordnung des Positionsmessfehlers.

Beispielsweise wirkt der Regelkreis bei einem Messgerät mit 2048 Signalperioden in einer Umdrehung für einen Messfehler 2. Ordnung mit einer unterlagerten Stromregelung bereits bei einer Solldrehzahl von $2,33 \text{ min}^{-1}$ (Linie ❶ in Abb. 6.14a) begrenzend. Hingegen erfolgt mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung ein linearer Anstieg der Gleichlaufschwankungen bis zu einer Solldrehzahl von $5,5 \text{ min}^{-1}$ (Linie ❶ in Abb. 6.14b). Damit tritt der positive Effekt der Begrenzung der Gleichlaufschwankungen durch den Regelkreis bei Messgeräten mit optoelektronischer Abtastung für beide Regelungsverfahren bereits bei sehr niedrigen Drehzahlen auf. Für das Positionsmessgerät mit 512 Signalperioden in einer Umdrehung tritt die Begrenzung der Gleichlaufschwankungen durch den Regelkreis für den Messfehler 2. Ordnung mit einer unterlagerten Stromregelung bei $9,3 \text{ min}^{-1}$ (Linie ❸ in Abb. 6.14a) und mit der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung bei 22 min^{-1} (Linie ❸ in Abb. 6.14b) ein. Die Linien ❷ und ❹ kennzeichnen die Begrenzung des Regelkreises für einen Positionsmessfehler 1. Ordnung.

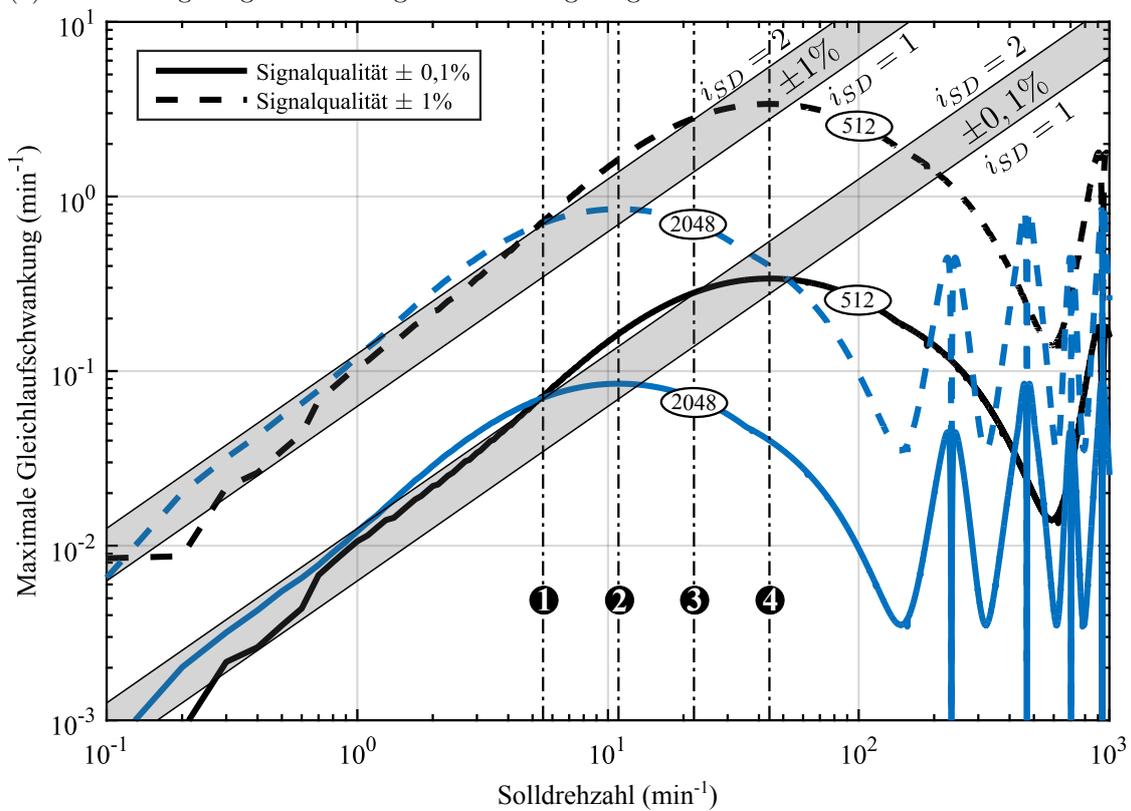
Bei hohen Drehzahlen ist die Frequenz der Messsignale (Gl. 2.35a) größer als die NYQUIST-Frequenz $f_{MS} \geq f_{Nyquist}$ und somit wird das Abtasttheorem verletzt. Dadurch werden die Positionsmessfehler für bestimmte Drehzahlen in das Nutzsinalband des Drehzahlregelkreises gespiegelt, und verursachen auch in diesem Drehzahlbereich Gleichlaufschwankungen. Eine Verringerung dieses Effektes ist durch einen Anti-Aliasing-Filter in der Auswertelektro-nik mit einer Grenzfrequenz bei der NYQUIST-Frequenz des Antriebsreglers möglich.

Die Signalqualität und die Anzahl an Signalperioden des Positionsmessgerätes sind maßgebliche Faktoren für das Gleichlaufverhalten eines Antriebs. Insbesondere in Servoantrieben mit in der Regel hohen Anforderungen an die Dynamik des Antrieb: Mit zunehmender Bandbreite im Drehzahlregelkreis wird auch der Drehzahlbereich vergrößert, in welchem die Gleichlaufschwankungen aufgrund eines Positionsmessfehlers in einer Signalperiode linear mit der Referenzdrehzahl ansteigen. Dabei ist es irrelevant ob die Erhöhung der Amplitudendurchtrittsfrequenz durch das Regelungsverfahren, eine Verkleinerung der Abtastperiode oder die Parametrierung der Regler erfolgt.

Bei den in Kapitel 2 untersuchten Positionsmessgeräten mit optoelektronischen und induktiven Abtastverfahren wurde für alle Messgeräte eine vergleichbare Signalqualität um $\pm 0,1$ Prozent ermittelt. Für das Positionsmessgerät mit induktiven Abtastverfahren mit 32 Signalperioden in einer Umdrehung wirkt der Drehzahlregelkreis mit unterlagerten kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung für einen Positionsmessfehler 2. Ordnung erst ab einer Drehzahl von $352,5 \text{ min}^{-1}$ begrenzend. Um bei vergleichbarer Signalqualität eine hohe Gleichlaufgüte zu erreichen sind folglich Messgeräte mit optoelektronischem Abtastverfahren, mit einer typischerweise hohen Anzahl an Signalperioden, anderen Abtastverfahren vorzuziehen.



(a) Drehzahlregelung mit unterlagerter Stromregelung



(b) Drehzahlregelung mit unterlagerter kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung

Abbildung 6.14: Gleichlaufschwankungen in Servoantrieben

7 Funktionsnachweis der unterlagerten Beschleunigungsregelung

7.1 Architektur des Prüfstands

Der Funktionsnachweis der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung erfolgt mit experimentellen Untersuchungen an einem Antriebsprüfstand mit einer Arbeits- und Lastmaschine (Abbildung 7.1). Die Nennleistung der permanentmagneterregten Synchronmaschinen beträgt 1,3 kW. Für eine kontrollierte Aufschaltung von Lastmomenten auf die Arbeitsmaschine werden die beiden baugleichen Synchronmotoren mit der Wellenkupplung ROTEX[®] GS mit dem Elastomerzahnkranz 64 Sh-D-GS von KTR drehelastisch verbunden. Die Steuerung des Leistungsflusses der beiden Maschinen erfolgt mit einem Spannungspulsumrichter bei einer Zwischenkreisspannung von 600 V. Für die Ausgangsstufe des dreiphasigen Umrichters wurde das 35 A IGBT-Module FP35R12W2T4 von Infineon verwendet [50]. Eine Übersicht der Architektur der untersuchten Antriebsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung ist in Abbildung 7.2 für eine Achse des Prüfstands dargestellt.

Die digitale Antriebsregelung wurde modellbasiert mit MATLAB[®] und Simulink[®] entwickelt und ist in einem modularen dSPACE[®] RCP System implementiert. Die Regelungsalgorithmen in C-Code wurden mit dem Embedded Coder[®] aus dem Simulink[®]-Modell des Antriebsreglers generiert und laufen auf dem *Processor Board* DS1007 des RCP-Systems. Dieses Board ist mit dem 2 GHz dual-core Prozessor P5020 der Freescale QorIQ[®]-Plattform ausgerüstet. Die Berechnungen auf dem Prozessor erfolgen mit einer 64 Bit-Gleitpunkt-Arithmetik. Die Rechenzeit für eine Achse des Antriebssystems beträgt $\approx 25 \mu\text{s}$. Diese relativ hohe Rechenzeit resultiert im Wesentlichen aus der Kommunikation des Prozessors mit den Erweiterungsmodulen über den internen PHS-Bus des RCP-Systems. Die Abtastperiode der digitalen Regelung wird aus der Frequenz des Trägersignals der Pulsweitenmodulation abgeleitet und beträgt $62,5 \mu\text{s}$. Die Regelungsalgorithmen von Antriebs- und Lastmaschine werden auf einem Kern des Prozessors in zwei *Interrupt Service Routinen (ISR)* um eine halbe Abtastperiode versetzt ausgeführt. Dadurch wird die Verarbeitungstotzeit der Regelungsalgorithmen der beiden Achsen auf eine halbe Abtastperiode begrenzt.

Als Schnittstelle des RCP-Systems zum Spannungspulsumrichter sowie zur Phasenstrommessung wird das *FPGA Base Board* DS5202 mit einem Xilinx[®] Spartan[®]-3 XC3S4000 FPGA und das Hardware-Erweiterungsmodul EV1048 eingesetzt. Mit dem *FPGA Base Board* wer-



Abbildung 7.1: Prüfstand mit drehelastisch gekoppelter Antriebs- und Lastmaschine

den die Ansteuersignale für die Leistungshalbleiter der beiden Spannungspulsrichter mit dem Verfahren der Pulsweitenmodulation erzeugt. Weiterhin werden

- die Triggersignale für eine synchronisierte Messung der Grundwelle der Phasenströme
- und die Interrupts für die Ausführung der Algorithmen auf dem Prozessorboard

vom Trägersignal der Pulsweitenmodulation auf dem *FPGA Base Board* abgeleitet. Die Phasenströme werden in einem Messbereich von ± 25 A mit den Sensitec Stromsensoren der Serie CDS4000 nach dem magnetoresistiven Messprinzip gemessen und mit einem Anti-Aliasing-Filter gefiltert [95]. Die synchronisierte Abtastung der Phasenströme von Antriebs- und Lastmaschine erfolgt mit 14 Bit Analog/Digital-Wandler nach dem *Regular-Sampling*-Prinzip. Um Messrauschen und Ausreißer in der Phasenstrommessung zu unterdrücken wird auf dem FPGA aus neun gleichmäßig um den Triggerzeitpunkt verteilten Messwerten mit einem zeitlichen Abstand von 100 ns der Median berechnet [28, S. 42ff.], [32, Kap. 3.1.4].

Die Einbindung des Modulators und der A/D-Wandler in das Simulink[®]-Modell zur Generierung von C-Code erfolgt mit der Bibliothek *AC Motor Control Solution* von dSPACE[®] [28]. Diese Bibliothek ermöglicht die Parametrierung zur Verfügung gestellter Standardfunktionen auf dem FPGA über ein Register. Durch die Verwendung der Standardfunktionen ist eine zeitsparende Anpassung des FPGAs an das jeweilige Antriebssystem möglich.

Die sinusförmigen Messsignale der Positionsmessgeräte mit einem nominellen Spitze-Spitze-Wert von 1 Volt werden mit dem *Incremental Encoder Board* DS3002 ausgewertet. Das Board verfügt über eine 4096-fache Unterteilung der Messsignale in einer Signalperiode und einem 32 Bit Positionszähler. Für die Auswerteelektronik ist eine maximale Eingangsfrequenz der Messsignale von 750 kHz spezifiziert. Daraus resultiert für das Referenzwinkelmeßgerät mit

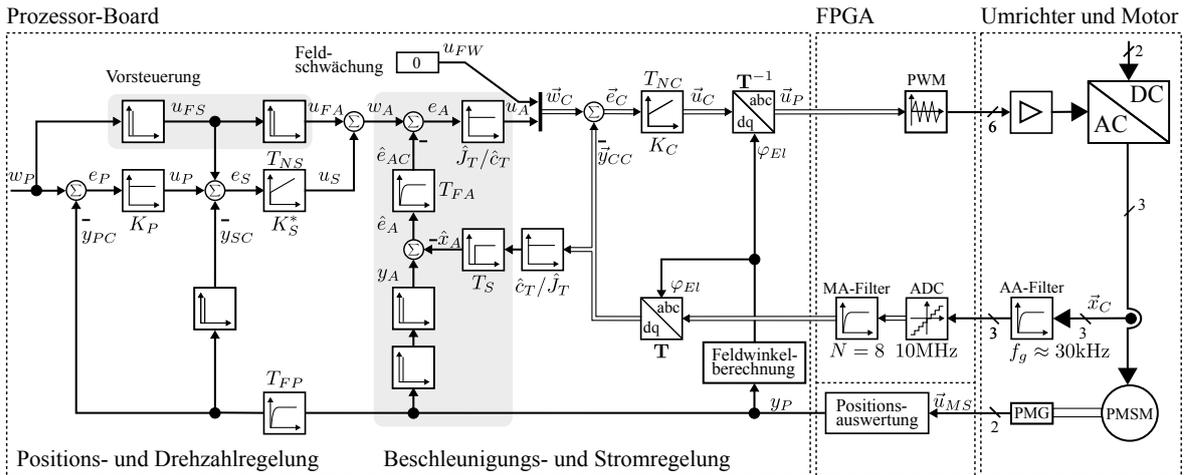


Abbildung 7.2: Antriebsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung

30 000 Signalperioden in einer Umdrehung aus Gleichung 2.35a eine maximale Drehzahl des Antriebs von 1500 min^{-1} . Der Zugriff auf die Positionsmesswerte im Register des Boards erfolgt über sequentielle Funktionsaufrufe innerhalb der ISR.

Der PI-Stromregler mit den Parametern K_C und T_{NC} wurde entsprechend Kapitel 4.5.1 nach dem Betragsoptimum und für einen Maximalwert der Sensitivitätsfunktion von 3 dB konfiguriert. Die daraus resultierenden Parameter der Stromregelung sind in Tabelle 4.3 auf Seite 93 zusammengefasst. Die überlagerten Positions- und Drehzahlregler mit den Parametern K_P , K_S^* , T_{NS} und T_{FP} wurden mit den in Abschnitt 4.5.2 ab Seite 93 beschriebenen zeitkontinuierlichen Entwurfsverfahren parametrisiert. Die Parameter der gesamten Positionsregelschleife sind in Tabelle 4.4 auf Seite 100 zusammengefasst. Für die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung wird mit der Filterzeitkonstanten T_{FA} lediglich ein weiterer Parameter eingeführt. Die Parametrierung des nachgeschalteten Tiefpassfilters 1. Ordnung erfolgte mit dem in Abbildung 6.9 auf Seite 145 dargestellten Zusammenhang für einen Maximalwert der Sensitivitätsfunktion der gesamten Positionsregelschleife von 3 dB.

Der Funktionsnachweis der unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung erfolgt mit dem Positionsmessgerät mit optoelektronischer Mehrfeldabtastung mit 2048 Signalperioden in einer Umdrehung. Das Messgerät weist entsprechend den Untersuchungen in Abschnitt 2.4.2 eine Signalqualität von $\chi_{SD} = \pm 0,13$ Prozent auf, weiterhin sind die Positionsmessfehler in einer Signalperiode nahezu gleichmäßig auf die 1. und 2. Ordnung des Positionsmessfehler verteilt (Abb. 2.8, Seite 35). Gemäß den Untersuchungen zum Gleichlaufverhalten in Abschnitt 6.4 wird bei diesem Messgerät der Einfluss von Positionsmessfehlern auf die Gleichlaufgüte des Antriebs durch die Bandbreite des Regelkreises bereits ab einer Drehzahl $> 11 \text{ min}^{-1}$ begrenzt. Mit der 4096-fach Unterteilung der Messsignale in einer Signalperiode wird eine Umdrehung des Antriebs mit 23 Bit aufgelöst.

7.2 Untersuchungen zum Führungsverhalten

In den experimentellen Untersuchungen zum Führungsverhalten eines Antriebssystems mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung werden folgende in dieser Arbeit diskutierten Eigenschaften validiert:

1. Gemäß Abschnitt 6.2.2 führt die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung innerhalb der Bandbreite des Tiefpassfilters zu einer Kompensation einer parametrischen Modellunsicherheit. Eine Abweichung der Parameter von realer und nomineller Regelstrecke wird durch die Beschleunigungsrückführung mit einer Anpassung des Sollwerts kompensiert. Folglich soll mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung die berechnete Beschleunigung innerhalb der Bandbreite des Tiefpassfilters der Sollwertvorgabe folgen.
2. Die Verstärkung des Positionsrauschen wird entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.3 durch einen nachgeschalteten Filter stark reduziert. Der in Abschnitt 5.4 beschriebene Abstand zwischen der Signalamplitude und dem frequenzabhängig verstärkten Positionsrauschen wird dadurch vergrößert.
3. Der Schleppfehler einer Positionsregelung durch Vorsteuerfehler aufgrund von Modellunsicherheiten wird durch die unterlagerte kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung im Gegenkopplungsbereich des Regelkreises reduziert. Voraussetzung dafür ist eine Anpassung der Vorsteuerfunktion mit dem in Abschnitt 6.3 beschriebenen Korrekturterm.

7.2.1 Kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung

Das Führungsverhalten der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wurde ohne Lastmaschine und somit ohne zusätzliche Anbauteile untersucht. Der Regelung wurde dabei eine sinusförmige Sollbeschleunigung $w_A(t)$ mit einer Amplitude von $10\,000\text{ rad/s}^2$ bei einer Frequenz von 100 Hz vorgegeben.

$$w_A(t) = 10\,000\text{ rad/s}^2 \sin(2\pi 100\text{ Hz} \cdot t) \quad (7.1)$$

Ohne die zusätzliche Beschleunigungsrückführung $\hat{e}_{AC}(t) \equiv 0$ in Abbildung 6.3 auf Seite 135 entspricht die regelungstechnische Struktur der einer klassischen Stromregelung mit einer gesteuerten Vorgabe der Beschleunigung. Die Sollwertvorgabe für die Stromregelung $w_{Cq}(t)$ wird aus der Sollbeschleunigung in Gleichung 7.1 und den nominellen Parametern der Regelstrecke aus Tabelle 4.1 auf Seite 76 berechnet.

$$w_{Cq}(t) = \left(w_A(t) - \underbrace{\hat{e}_{AC}(t)}_{\equiv 0} \right) \frac{\hat{J}_T}{\hat{c}_T} = 9,8\text{ A} \sin(2\pi 100\text{ Hz} \cdot t) \quad (7.2)$$

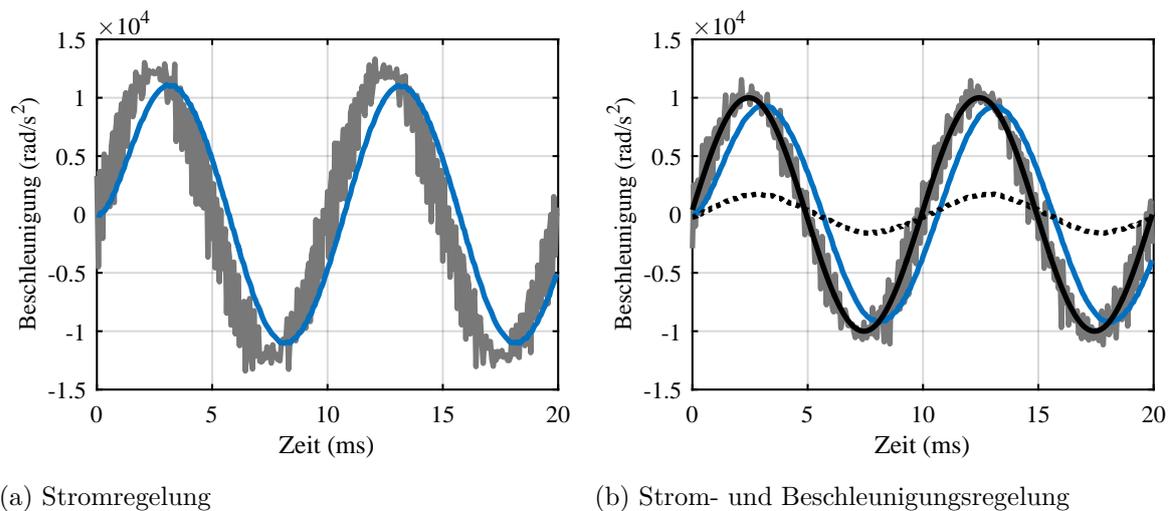


Abbildung 7.3: Signalverläufe in der Beschleunigungsregelschleife

$$\text{—} w_A(t) \quad \text{⋯} \hat{e}_{AC}(t) \quad \text{—} y_A(t) \quad \text{—} y_{AC}(t)$$

Der Verlauf der Beschleunigungssignale ist für die klassische Stromregelung und für die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung in den Abbildungen 7.3a und 7.3b dargestellt. Die berechnete Beschleunigungsamplitude ist mit der klassischen Stromregelung im Mittel um 20 Prozent größer als die theoretisch erwartete Amplitude. Diese Abweichung ist auf die in Abschnitt 4.3.2 bereits festgestellte Parameterunsicherheit der nominellen Streckenparameter zurückzuführen. Mit der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung erfolgt durch die Beschleunigungsrückführung eine kontinuierliche Anpassung der Sollwertvorgabe für den unterlagerten Stromregler: Die Parameterunsicherheit in der Beschleunigungsregelstrecke wird mit dem synthetisierten Rückführsignal $\hat{e}_{AC}(t)$ kompensiert. Demzufolge entspricht das regelungstechnische Verhalten eines mechanisch steifen Antriebs, innerhalb der Bandbreite des Beschleunigungssignals, dem nominellen Modell des Antriebs. Dadurch ergeben sich Vorteile gegenüber der klassischen Stromregelung für die Vorsteuerung eines Antriebs: Selbst bei einer parametrischen Unsicherheit folgt der Antrieb der Sollbeschleunigung aus der Bewegungsführung.

Auffällig ist in Abbildung 7.3 das stärker verrauschte ungefilterte Beschleunigungssignal $y_A(t)$ in der klassischen Stromregelung im Vergleich zur berechneten Beschleunigung mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung. Demnach wird durch die Beschleunigungsregelschleife die berechnete Beschleunigung in einem engeren Band geführt als im gesteuerten Betrieb der Stromregelung. Erreicht wird dies durch eine hochfrequente Variation der Stellgröße $u_{Cq}(t)$ des unterlagerten Stromreglers (vergl. Abbildung 7.4a und 7.4b).

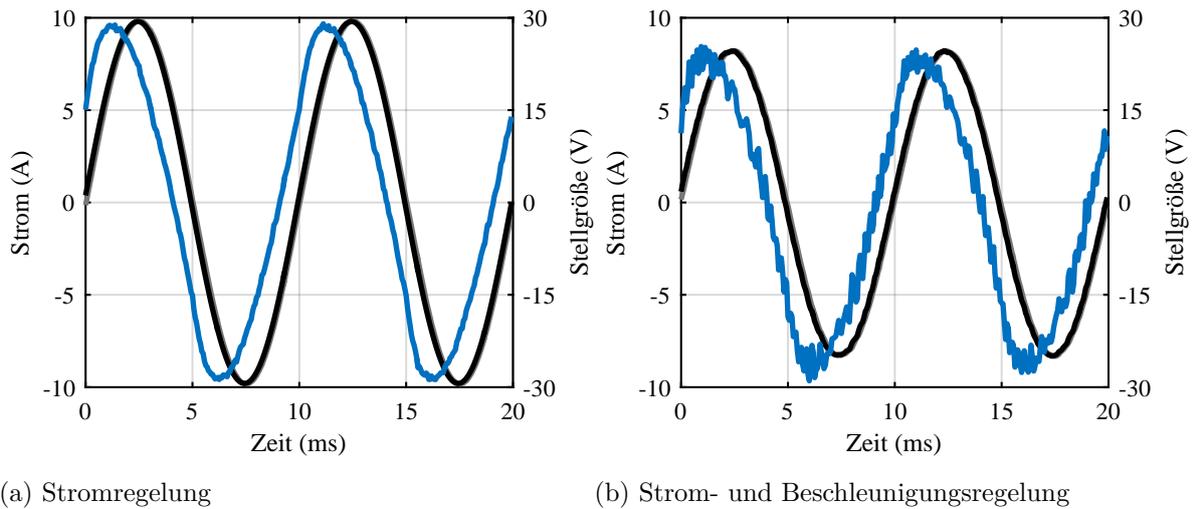


Abbildung 7.4: Signalverläufe in der Stromregelschleife

— w_{Cq} — y_{Cq} — u_{Cq}

7.2.2 Signal-zu-Rausch-Abstand

Die spektrale Leistungsdichte des Positionsrauschens wird nach Gleichung 5.47 mit dem Betragsquadrat der Frequenzgangfunktion der zweifachen zeitdiskreten Differentiation und dem nachgeschalteten Tiefpassfilter frequenzabhängig übertragen. Die frequenzabhängige Verstärkung des Positionsrauschens mit einer mittleren Rauschleistung von -175 dB nach Gleichung 2.34 aufgrund der zweifachen Differentiation ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Die maximale Verstärkung der BACKWARD-EULER-Differentiation zur Berechnung der zweiten Ableitung beträgt bei einer Abtastperiode der digitalen Regelung von $62,5 \mu\text{s}$

$$V_{max} = \left(\frac{4}{T_S^2} \right)^2 = 1,048 \times 10^{18} \text{ 1/s}^4 \text{ bzw. } 180,2 \text{ dB.}$$

Demnach wird das Positionsrauschen durch die Differentiation des Positionsmesswertes ohne einen nachgeschalteten Filter bei der NYQUIST-Frequenz auf einen Maximalwert von

$$-175 \text{ dB} + 180,2 \text{ dB} = 5,2 \text{ dB}$$

angehoben. Theoretisch resultiert aus der sinusförmigen Sollbeschleunigung nach Gleichung 7.1 mit einer Amplitude von $10\,000 \text{ rad/s}^2$ im Signalspektrum eine Amplitude mit 74 dB bei einer Frequenz von 100 Hz . Dadurch ergibt sich ohne den nachgeschalteten Tiefpassfilter bei der NYQUIST-Frequenz ein minimaler Signal-zu-Rausch-Abstand von $68,8 \text{ dB}$. Durch den nachgeschalteten Tiefpassfilter mit einem Verhältnis der Filterzeitkonstanten zur Abtastperiode von $\chi_{FA} = 11,75$ wird die Verstärkung der spektralen Rauschleistungsdichte des Positionsrauschens auf einen Maximalwert von $\hat{P}_Q = -28,6 \text{ dB}$ begrenzt. Der Abstand zwischen der Signalamplitude und dem Maximalwert der verstärkten spektralen Rauschleistungsdichte wird somit um $33,8 \text{ dB}$ auf $102,6 \text{ dB}$ verbessert.

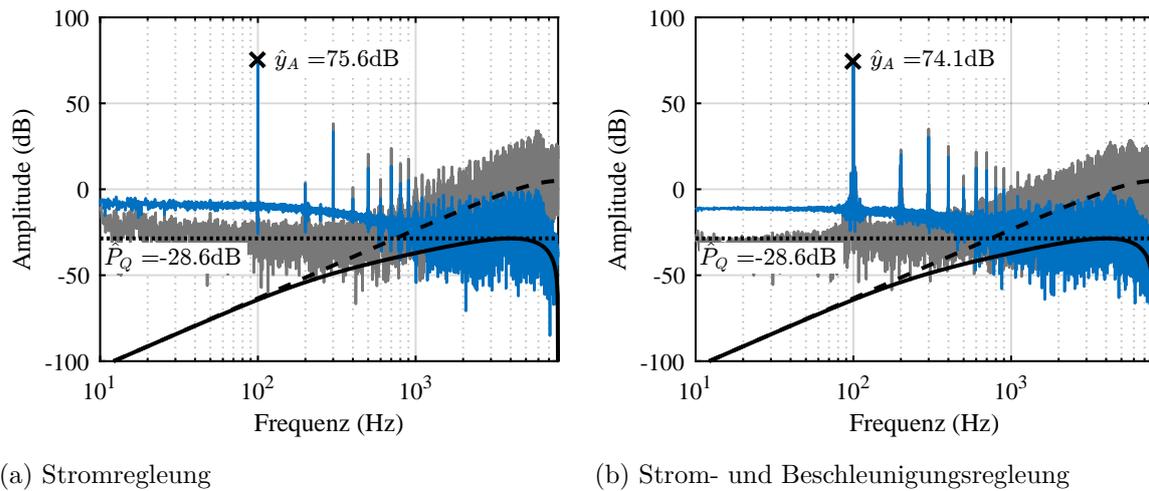


Abbildung 7.5: Amplitudenspektrum der berechneten Beschleunigung ohne und mit nachgeschalteter Tiefpassfilterung

..... ohne Filter — mit Filter — y_A — y_{AC}

Die entsprechenden Amplitudenspektren der berechneten Beschleunigungssignale ohne und mit Filterung y_A und y_{AC} sind in Abbildung 7.5a dargestellt. Die Ergebnisse bestätigen im Frequenzbereich > 1 kHz den beschriebenen Einfluss der Beschleunigungsermittlung auf das Positionsrauschen: Ohne nachgeschalteten Tiefpassfilter wird das Positionsrauschen bis zur NYQUIST-Frequenz verstärkt und dadurch der Signal-zu-Rausch-Abstand verringert.

Im Signalspektrum der berechneten Beschleunigung sind weitere Amplituden bei ganzzahligen Vielfachen der Signalfrequenz der sinusförmigen Sollwertvorgabe vorhanden. Diese Linienstörer treten bereits in der klassischen Stromregelung im gesamten Abtastband des gemessenen Stromes auf. Oberwellen im drehmomentbildenden Motorstrom führen zu einer Oszillation des erzeugten Drehmoments und beeinflussen folglich auch die Beschleunigung des Antriebs. Nicht-lineare Eigenschaften verschiedener Komponenten im Antrieb führen zu Signaloberwellen im erzeugten Drehmoment mit einem ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz des Motorstromes. Als Ursachen für die Signaloberwellen werden u.a. benannt,

- die nichtlineare Aussteuerung der Pulsweitenmodulation aufgrund der Wechselperzeit im Modulator zum Schutz des Spannungspulsumrichters vor einem Brückenkurzschluss (vergl. „*Dead-Time-Effect*“ z.B. in [75] und [53]),
- die Oberwellen der induzierten Gegenspannung welche aus einer nichtlinearen Flussverkettung der permanenterregten Synchronmaschine resultiert (z.B. in [45] und [97])
- sowie der nichtlineare Spannungsabfall an den IGBT-Leistungshalbleitern und den Freilaufdioden des Wechselrichters (z.B. in [108], [90] und [32]).

7.2.3 Positionsregelung mit Vorsteuerung der Sollbeschleunigung

Die Positionsregelung von Servoantrieben in Produktionsmaschinen erfolgt typischerweise mit ruck- und beschleunigungsbegrenzten Bewegungsprofilen [65]. Im einfachsten Fall wird eine ruckbegrenzte Bewegungsführung durch eine sinusförmige Referenztrajektorie mit der Amplitude \hat{w}_P und der Kreisfrequenz ω erreicht:

$$w_P(t) = \hat{w}_P \sin(\omega t) \quad (7.3)$$

Aus der Referenztrajektorie der Soll-Position $w_P(t)$ werden die Vorsteuergrößen für die Drehzahl und die Beschleunigung $u_{FS}(t)$ und $u_{FA}(t)$ des Antriebs abgeleitet. Der Sollwert für die Beschleunigung entspricht der zweiten Zeitableitung der Sollposition. Die Vorsteuergröße der Beschleunigung wird mit einer unterlagerten Stromregelung in einen äquivalenten Strom umgerechnet und unmittelbar dem Stromregler als Sollwert aufgeschaltet. Mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird die berechnete Sollbeschleunigung zusätzlich mit dem Term nach Gleichung 6.26 korrigiert.

$$u_{FA}(t) = \frac{d^2 w_P(t)}{dt^2} = -\hat{w}_P \omega^2 \sin(\omega t) \quad (7.4)$$

Die gewählte Frequenz der sinusförmigen Referenztrajektorie entspricht der -3 dB-Bandbreite der Positionsregelung im Führungsverhalten. Ohne Vorsteuerung der unterlagerten Regelkreise würde demnach die Amplitude der Regelgröße nur das $1/\sqrt{2}$ -fache des Sollwerts erreichen und somit ein signifikanter Schleppfehler entstehen. Die Amplitude der sinusförmigen Referenztrajektorie wurde so gewählt, dass die daraus resultierende Beschleunigung auf einen Scheitelwert von 5000 rad/s^2 begrenzt ist.

$$w_P(t) = 30,92 \text{ mrad} \cdot \sin(2\pi 64 \text{ Hz} \cdot t) \quad (7.5)$$

Die Untersuchungen zum Führungsverhalten der Positionsregelung mit Vorsteuerung der Sollbeschleunigung erfolgten mit gekoppelter und ungekoppelter Lastmaschine. Bei der vorgegebenen Frequenz der sinusförmigen Referenztrajektorie wird die Kopplung zwischen Antriebs- und Lastmaschine entsprechend dem Frequenzgang der Positionsregelstrecke in Abbildung 4.8 auf Seite 77 als „mechanisch steif“ betrachtet. Somit wurde der Einfluss einer parametrischen Unsicherheit in Antrieben in Kombination mit einer Vorsteuerung untersucht. Die Koppelung der beiden baugleichen Synchronmaschinen führt aufgrund des zusätzlichen Lastmassenträgheitsmoment nach Gleichung 6.18 zu einer Modellunsicherheit $\Delta \approx 0,5$. Weiterhin wurde in den bisherigen Untersuchungen festgestellt, dass die Modellunsicherheit des ungekoppelten Antriebs aufgrund der parametrischen Unsicherheit der Drehmomentkonstanten $\Delta \approx 1,2$ ist.

Die Positionsregelung mit Vorsteuerung erfolgte entsprechend dem Blockschaltbild in Abbildung 7.2 auf Seite 161 jeweils mit unterlagerten Stromregelung und kombinierter Strom-

und Beschleunigungsregelung. Die Sollbeschleunigung $w_A(t)$ für den unterlagerten Regelkreis wird aus der Vorsteuergröße $u_{FA}(t)$ und dem Stellgrad der P-PI-Positionsregelung $u_S(t)$ gebildet.

$$w_A(t) = u_{FA}(t) + u_S(t) \quad (7.6)$$

Als Gütekriterium der Positionsregelung mit Vorsteuerung wird der Schleppfehler $e_P(t)$ als Differenz zwischen Sollposition $w_P(t)$ und der gemessenen Position $y_P(t)$ ausgewertet.

$$e_P(t) = w_P(t) - y_P(t) \quad (7.7)$$

In den Abbildungen 7.6a bis 7.6d ist der Verlauf des Schleppfehlers und der Stellgröße der P-PI-Positionsregelung für eine Periode der sinusförmigen Referenztrajektorie mit einem Scheitelwert von 1,77 Grad im eingeschwungenen Zustand dargestellt. In beiden Lastfällen ist der Schleppfehler der Positionsregelung mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung geringer als mit einer reinen Stromregelung. Die Stellgröße der P-PI-Positionsregelung ist für beide Regelungsverfahren proportional zum Schleppfehler.

Ohne angekoppelte Lastmaschine konnte der maximale Schleppfehler der Positionsregelung mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung gegenüber der klassischen Kaskadenregelung von $\pm 0,11$ Grad auf $\pm 0,03$ Grad um 72 Prozent reduziert werden.

Das zusätzliche Massenträgheitsmoment der angekoppelten Lastmaschine ($\Delta \approx 0,5$) hat einen signifikanten Einfluss auf die Stellgröße der P-PI-Positionsregelung. Mit einer unterlagerten Stromregelung wird mit der Stellgröße der P-PI-Positionsregelung dem Antrieb ein zusätzliches Drehmoment zur Beschleunigung des Last-Massenträgheitsmoment vorgegeben. Der maximale Schleppfehler beträgt $\pm 0,57$ Grad und die Amplitude der daraus resultierende Stellgröße $\approx 5700 \text{ rad/s}^2$. Eine Vorsteuerung der Referenztrajektorie über den drehmomentbildenden Motorstrom bringt demnach bei einer Modellunsicherheit nur einen geringen Vorteil. Mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung wurde ein maximaler Schleppfehler von $\pm 0,21$ Grad ermittelt. Der maximale Schleppfehler wurde somit gegenüber der klassischen Kaskadenregelung um 63 Prozent reduziert.

Die Ursache für den Schleppfehler mit der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung ist die gewählte Kreisfrequenz der Referenztrajektorie: Die Bedingung $\omega \ll 1/T_{FA}$ für eine Kompensation der parametrischen Modellunsicherheit nach Gleichung 6.21 ist bei der gewählten Kreisfrequenz nicht erfüllt. Dadurch hat die parametrische Modellunsicherheit bereits Auswirkungen auf das Übertragungsverhalten der Beschleunigungsregelschleife.

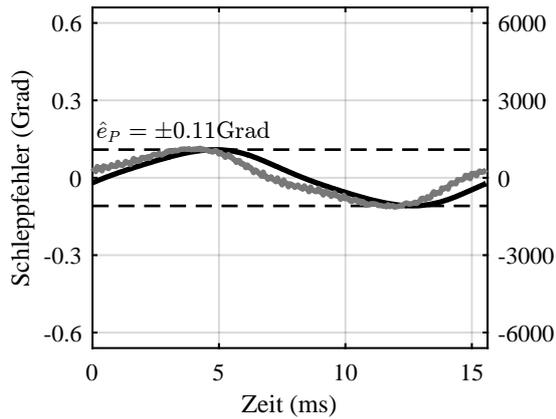
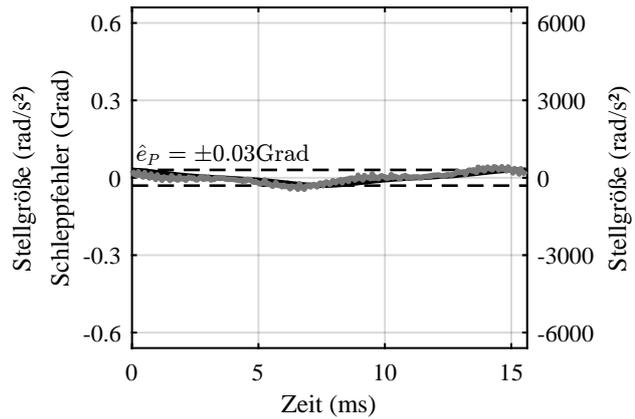
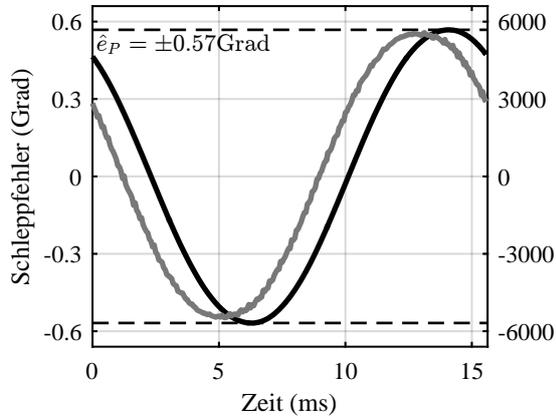
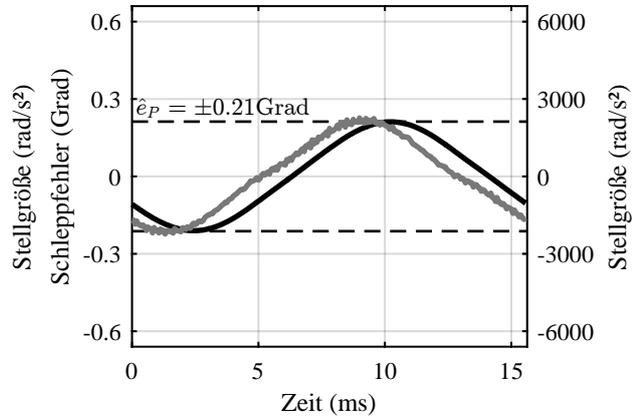
(a) Stromregelung ($\Delta \approx 1,2$)(b) Strom- und Beschleunigungsregelung ($\Delta \approx 1,2$)(c) Stromregelung ($\Delta \approx 0,5$)(d) Strom- und Beschleunigungsregelung ($\Delta \approx 0,5$)

Abbildung 7.6: Verlauf der Signale der P-PI-Positionsregelung

— $e_P(t)$ — $u_S(t)$

7.3 Untersuchungen zum Lastverhalten

Das Lastverhalten eines Antriebs mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird durch eine sinusförmige und durch eine sprungförmige Aufschaltung des Lastmoments untersucht. Durch die sinusförmige Belastung wird das Verhalten des Regelkreises bei verschiedenen Frequenzen analysiert. Die sprungförmige Belastung des Antriebs wird typischerweise verwendet um das Ausregelverhalten des Regelkreises zu untersuchen.

7.3.1 Sinusförmige Aufschaltung des Lastmoments

Dynamische Laststeifigkeit

Die Untersuchung der dynamischen Laststeifigkeit der Arbeitsmaschine erfolgt an drei charakteristischen Frequenzpunkten der Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung. Der Messpunkt $f_1 = 10$ Hz liegt im Gegenkopplungsbereich der Positionsregelung. An diesem Frequenzpunkt wird mit der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung eine Verbesserung der Störunterdrückung im Vergleich zur klassischen Kaskadenregelung erwartet. Die Messpunkte $f_2 = 140$ Hz und $f_3 = 280$ Hz liegen beide im Mitkopplungsbereich der Positionsregelung. In diesem Frequenzbereich führt die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung aufgrund des Wasserbett-Effekts zu einer Verschlechterung des Störverhalten. Eine Anregung im Unempfindlichkeitsbereich der Regelung ist aufgrund der drehelastischen Kopplung von Arbeits- und Lastmaschine nicht möglich.

In den Messungen der dynamischen Laststeifigkeit wurde die Arbeitsmaschine in Positionsregelung mit dem Sollwert $w_P(t) = 0, \forall t \geq 0$ betrieben. Der Antrieb wurde mit einer sinusförmigen Belastung durch die angekoppelte Lastmaschine aus der Ruhelage ausgelenkt. Im eingeschwungenen Zustand entspricht das Amplitudenverhältnis von Lastmoments M_L und der gemessenen Position der frequenzabhängigen dynamischen Laststeifigkeit $c_{dyn}(\omega)$ eines Servoantriebs.

$$c_{dyn}(\omega) = \frac{M_L(\omega)}{y_P(\omega)} \quad (7.8)$$

Die harmonische Belastung wird von der Lastmaschine in Stromregelung mit einer sinusförmigen Vorgabe des Querstroms erzeugt. Dabei entspricht die gewählte Amplitude der Sollwertvorgabe dem Nennstrom I_{qN} des Antriebs, die Belastung erfolgte somit mit dem Nennmoment.

$$w_{Cq}(t) = I_{qN} \sin(\omega \cdot t) \quad (7.9)$$

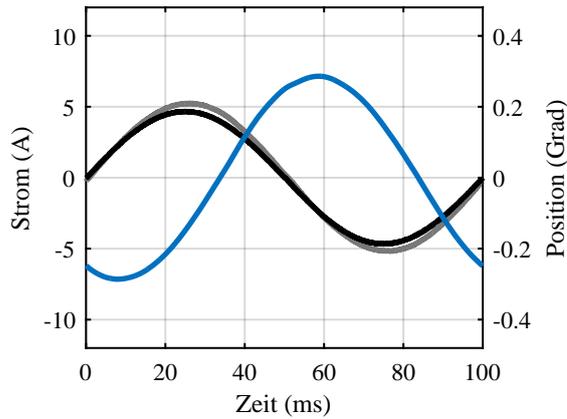
Im Frequenzbereich unter der Kennkreisfrequenz der Tilgung $\omega < \omega_{0,T}$ verhält sich der drehelastisch gekoppelte Antrieb wie ein mechanisch steifer Antrieb (vergl. Abbildung 4.8, Seite 77). Das abgegebene Drehmoment der Lastmaschine entspricht dem übertragenen Torsionsmoment und somit auch dem Lastmoment der Arbeitsmaschine.

Tabelle 7.1: Frequenzabhängige dynamische Laststeifigkeit c_{dyn}

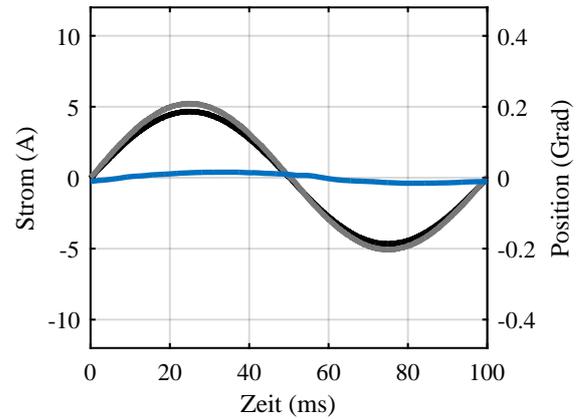
	$f = 10 \text{ Hz}$	$f = 140 \text{ Hz}$	$f = 280 \text{ Hz}$
Stromregelung	599,5 Nm/rad	565,1 Nm/rad	2054 Nm/rad
Strom- und Beschleunigungsregelung	10 953 Nm/rad	473 Nm/rad	1822 Nm/rad

Eine Messung des Torsionsmoments M_φ zwischen Antriebs- und Lastmaschine mit einem Drehmomentsensor zur Berechnung der dynamischen Laststeifigkeit ist nicht sinnvoll und auch nicht erforderlich: Zum einen werden durch die zwangsläufig drehelastische Anbindung des Sensors die Kennfrequenzen der Resonanz und der Tilgung der Kopplung zwischen Antriebs- und Lastmaschine weiter herabgesetzt. Der Frequenzbereich für eine mechanisch steife Betrachtung der Kopplung wird somit unnötig reduziert. Weiterhin hat sich gezeigt, dass das resultierende Drehmoment der Lastmaschine mit der Drehmomentkonstanten und dem Querstrom der Lastmaschine ausreichend genau berechnet werden kann. Insbesondere da sich ein Fehler in der Umrechnung auf alle Auswertungen gleichermaßen auswirkt.

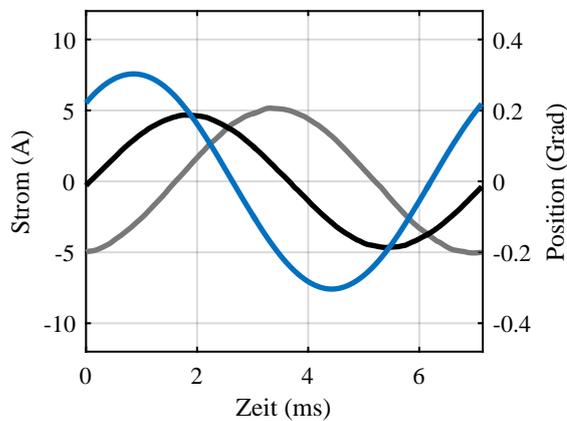
In Abbildung 7.7 ist der Verlauf des Querstrom von Arbeits- und Lastmaschine sowie die gemessene Position der Arbeitsmaschine für jeweils eine Periode der sinusförmigen Belastung dargestellt. Dabei werden die Ergebnisse der Positionsregelung mit einer unterlagerten Stromregelung (linke Spalte) und die Ergebnisse mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung (rechte Spalte) gegenüber gestellt. Im Gegenkopplungsbereich der Positionsregelung wird bei 10 Hz mit der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung eine 18-fach höhere dynamische Laststeifigkeit erreicht als mit der klassischen Regelungsstruktur. Die signifikante Verbesserung im Gegenkopplungsbereich wird durch eine geringere dynamische Laststeifigkeit im Mitkopplungsbereich der Positionsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung bei den Frequenzen 140 Hz und 280 Hz erreicht. Die experimentell ermittelte dynamische Laststeifigkeit an den drei Messpunkten ist in Tabelle 7.1 für die beiden untersuchten Regelungsverfahren aufgeführt. Demnach wird der beschriebene Wasserbett-Effekt im Regelkreis durch die experimentellen Untersuchungen bestätigt: Der signifikanten Verbesserung des Störverhaltens im relativ kleinen Frequenzbereich der Gegenkopplung steht eine Verschlechterung des Störverhaltens im Mitkopplungsbereich gegenüber. Somit ist die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung insbesondere vorteilhaft, wenn das Lastmoment überwiegend Frequenzanteile im Gegenkopplungsbereich der Positionsregelung aufweist.



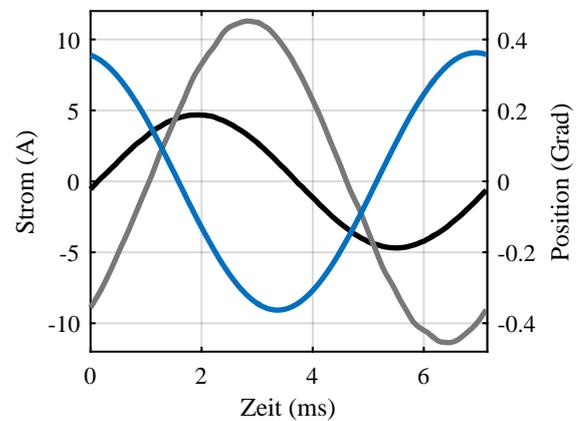
(a) Stromregelung (10 Hz)



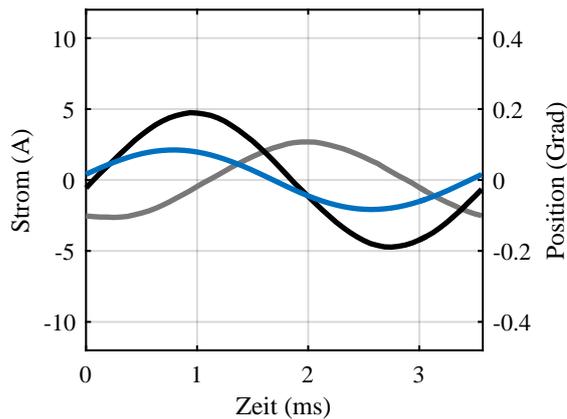
(b) Strom- und Beschleunigungsregelung (10 Hz)



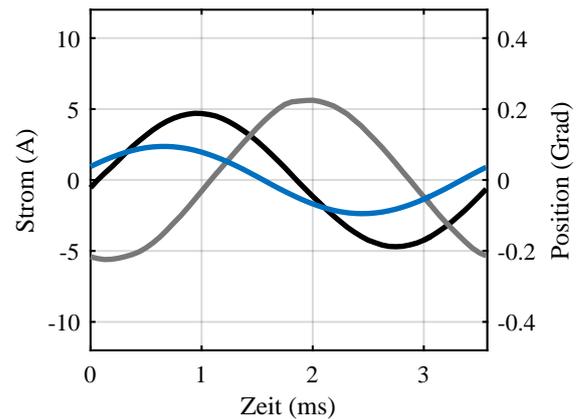
(c) Stromregelung (140 Hz)



(d) Strom- und Beschleunigungsregelung (140 Hz)



(e) Stromregelung (280 Hz)



(f) Strom- und Beschleunigungsregelung (280 Hz)

Abbildung 7.7: Verlauf der Positionsauslenkung und des Querstroms der Arbeitsmaschine für charakteristische Frequenzen der Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung bei sinusförmiger Belastung durch die Lastmaschine

— x_{Cq} (Lastmaschine) — x_{Cq} (Arbeitsmaschine) — y_P

Nachgiebigkeitsfrequenzgang

Die Nachgiebigkeit eines Antriebs entspricht der inversen dynamischen Laststeifigkeit (Gl. 7.8). Der Nachgiebigkeitsfrequenzgang wird mit der in Anhang B beschriebenen Methode vom abgegebenen Drehmoment der Lastmaschine auf die Position der Arbeitsmaschine berechnet. Dabei wird die Arbeitsmaschine in Positionsregelung mit dem Sollwert $w_P(t) = 0, \forall t \geq 0$ betrieben. Die Auslenkung der Arbeitsmaschine aus der Ruhelage erfolgt mit einer Aufschaltung eines Lastmoments durch eine sinusförmige Sollwertvorgabe des drehmomentbildenden Stroms der Lastmaschine mit einer linearer Erhöhung der Frequenz von 1 Hz auf 1000 Hz in 10 Sekunden. Die Umrechnung des Stroms der Lastmaschine in ein äquivalentes Lastmoment erfolgt mit der nominellen Drehmomentkonstanten der Synchronmaschine. In Abbildung 7.8 ist der Nachgiebigkeitsfrequenzgang der positionsgeregelten Arbeitsmaschine mit einer unterlagerten Stromregelung und einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung dargestellt.

Mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung wird die Nachgiebigkeit der Arbeitsmaschine im Vergleich zu einer unterlagerten Stromregelung bis zu einer Frequenz von ≈ 15 Hz um mehr als den Faktor 10 reduziert. Der Maximalwert der Nachgiebigkeit wird durch die unterlagerte Strom- und Beschleunigungsregelung von 4,2 mrad/Nm (Linie ❶) auf 2,3 mrad/Nm (Linie ❷) um ≈ 45 Prozent verringert. Im Mitkopplungsbereich der Regelung, im Frequenzbereich über den Linien ❸ und ❹, dominiert das Doppelintegratorverhalten der Regelstrecke (Linie ❺) den Verlauf des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs. Aufgrund des höheren Maximalwertes der Sensitivitätsfunktion ist die Nachgiebigkeit des Antriebs mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung in diesem Frequenzbereich etwas größer als mit einer unterlagerten Stromregelung.

Nach [88] wird durch eine Beschleunigungsregelung ein zusätzliches „elektronisches Massenträgheitsmoment“ in den Regelkreis eingebracht. Das zusätzliche Massenträgheitsmoment erhöht den Dämpfungsgrad des schwingungsfähigen Systems. Die Amplitudenüberhöhung bei der Resonanzfrequenz (Linie ❻) ist dadurch mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung geringer.

Demnach wird der Nachgiebigkeitsfrequenzgang eines Antriebs im Gegenkopplungsbereich durch die unterlagerte Beschleunigungsregelung signifikant verbessert. Ein weiterer Vorteil ist der höhere Dämpfungsgrad durch das zusätzliche „elektronische Massenträgheitsmoment“. Dem gegenüber steht eine Verschlechterung im Mitkopplungsbereich, welche mit dem Doppelintegratorverhalten der Regelstrecke gewichtet wird und dadurch nur geringe Auswirkungen hat.

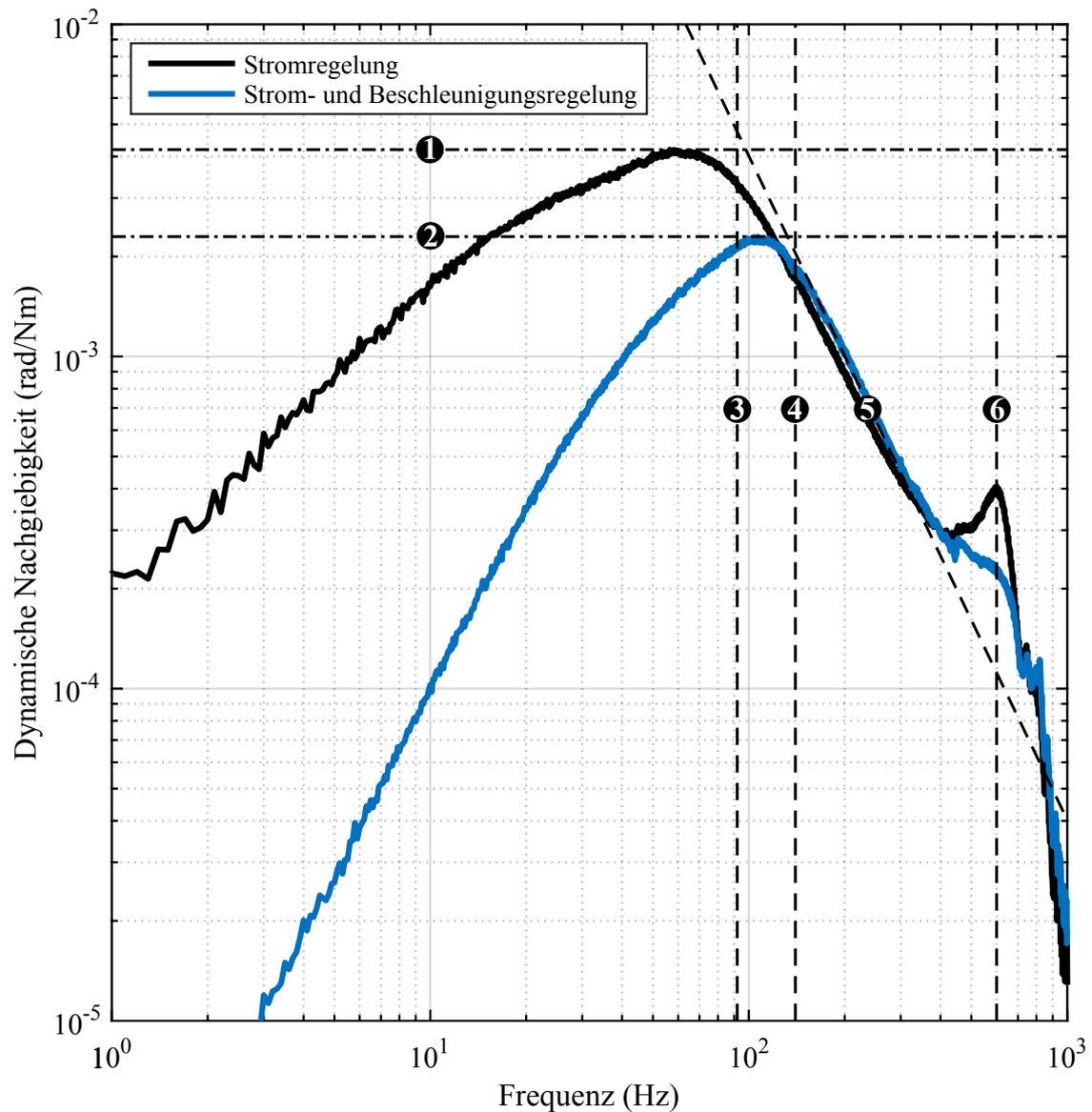


Abbildung 7.8: Nachgiebigkeitsfrequenzgang der positionsgeregelten Arbeitsmaschine

Maximalwert der Nachgiebigkeit

- ❶ mit unterlagerter Stromregelung 4,2 mrad/Nm
- ❷ mit unterlagerter Strom- und Beschleunigungsregelung 2,3 mrad/Nm

-3 dB-Bandbreite der Sensitivität

- ❸ mit unterlagerter Stromregelung $f_{BS} = 92$ Hz
- ❹ mit unterlagerter Strom- und Beschleunigungsregelung $f_{BS} = 140$ Hz
- ❺ Integratorverhalten der Regelstrecke
- ❻ Resonanzfrequenz des schwingungsfähigen Systems

7.3.2 Sprungförmige Aufschaltung des Lastmoments

Ein weiteres Gütekriterium für das Störverhalten eines positionsgeregelten Servoantriebs ist das Ausregelverhalten nach einer sprunghaften Aufschaltung eines Lastmoments. Dieses Testsignal wird am Prüfstand mit zwei gekoppelten Synchronmaschinen näherungsweise durch eine sprunghafte Änderung der Sollwertvorgabe für den drehmomentbildenden Motorstrom der Lastmaschine erreicht.

$$w_{Cq}(t) = I_{qN} \cdot \sigma(t), \text{ für } t \geq 0 \text{ (Lastmaschine)}$$

Aufgrund der drehelastischen Verbindung zwischen Arbeits- und Lastmaschine sowie der endlichen Stromanstiegsgeschwindigkeit ist eine sprunghafte Änderung des Drehmoments nur näherungsweise möglich. Aus der Aufschaltung des Lastmoments resultiert eine Beschleunigung und die Arbeitsmaschine wird aus der vorgegebenen Ruhelage $w_P(t) = 0, \forall t \geq 0$ ausgelenkt.

Der Verlauf der daraus resultierenden Beschleunigungssignale ist in Abbildung 7.9 dargestellt. Bei einer Belastung mit dem Nenn-Drehmoment resultiert an der Arbeitsmaschine mit klassischer Stromregelung eine Beschleunigungsamplitude von -4540 rad/s^2 . Mit einer unterlagerten Strom- und Beschleunigungsregelung wird die Beschleunigungsamplitude auf -3981 rad/s^2 begrenzt.

Der Stellgrad der P-PI-Kaskadenregelung entspricht in der gewählten Modellierung der Antriebsregelung der Sollbeschleunigung $w_A(t)$ der Arbeitsmaschine und wird mit einer unterlagerten Stromregelung unmittelbar in einen äquivalenten Sollwert für den drehmomentbildenden Stromregler $w_{Cq}(t)$ umgerechnet. Mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird der Sollwert für den drehmomentbildenden Stromregler aus der Differenz des Stellgrads der P-PI-Kaskadenregelung und der gefilterten Rückführgröße der Beschleunigungsregelschleife $\hat{e}_{AC}(t)$ gebildet.

$$\begin{aligned} w_{Cq}(t) &= \frac{\hat{J}_T}{\hat{c}_T} e_A(t) \\ &= \frac{\hat{J}_T}{\hat{c}_T} \begin{cases} w_A(t) & \text{(Stromregelung)} \\ w_A(t) - \hat{e}_{AC}(t) & \text{(Strom- und Beschleunigungsregelung)} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung erfolgte in der Arbeitsmaschine im Vergleich zur klassischen Stromregelung ein schnellerer Aufbau des drehmomentbildenden Motorstroms zur Kompensation des eingreifenden Lastmoments. Mit der Stellgröße des P-PI-Kaskadenreglers wird der Antrieb in die Ausgangslage zurück geführt. Durch die zusätzliche Beschleunigungsregelschleife wird das stationäre Störverhalten eines Servoantriebs grundlegend geändert: In der klassischen Kaskadenregelung werden eingreifende Lastmomente stationär mit dem Stellgrad der P-PI-Positionsregelung kompensiert. Mit einer Beschleunigungsregelung erfolgt die Kompensation des Lastmoments durch die gefilterte Rückführgröße

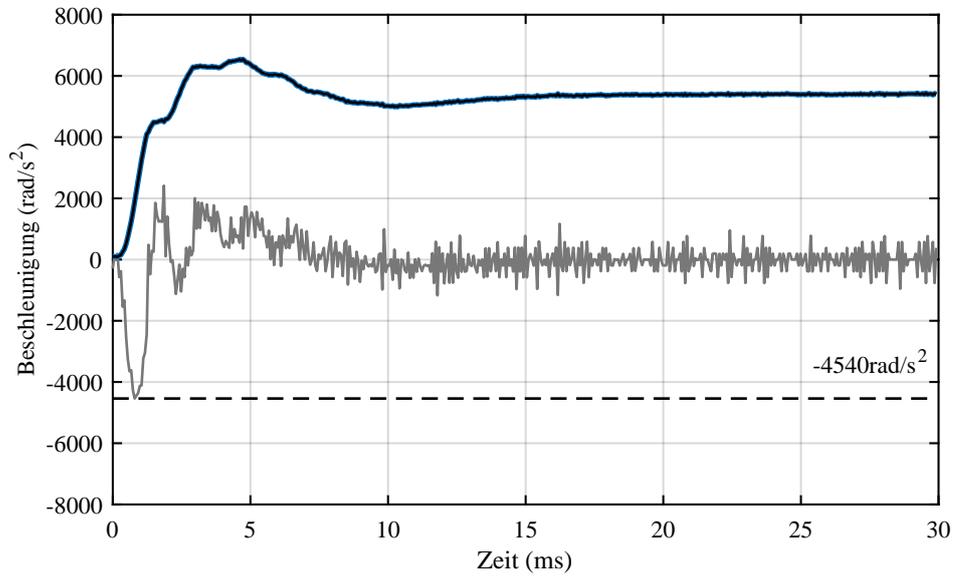
Tabelle 7.2: Charakteristische Größen des Störverhaltens eines positions-geregelten Servoantriebs bei sprungförmiger Lastaufschaltung

	T_{An}	T_{Aus}	$\max y_P $	c_{dyn}
Stromregelung	13,75 ms	≈ 30 ms	0,51 Grad	335 Nm/rad
Strom- und Beschleunigungsregelung	5,5 ms	≈ 20 ms	0,18 Grad	949 Nm/rad

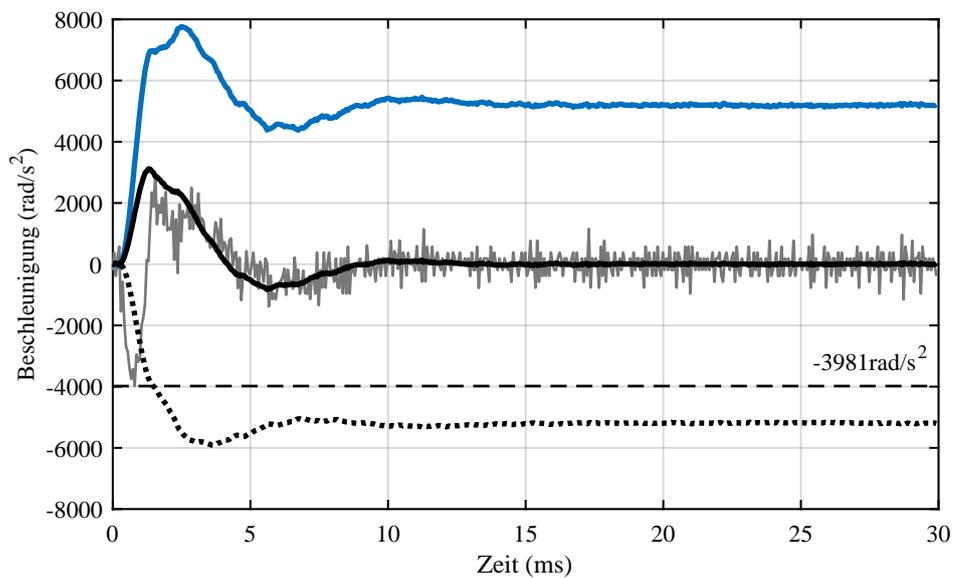
der Beschleunigungsregelschleife. Der Stellgrad der P-PI-Positionsregelung ist somit stationär gleich Null. Der daraus resultierende Positionsverlauf ohne und mit Beschleunigungsregelung ist in den Abbildungen 7.10a und 7.10b dargestellt.

Charakteristische Größen des Störverhaltens der Positionsregelung sind die Anregelzeit T_{an} , die Ausregelzeit T_{aus} sowie die maximale dynamische Auslenkung der gemessenen Position y_P aus der Ruhelage [91, S. 249]. Dabei entspricht die Anregelzeit dem Schnittpunkt der Wendetangente mit der Zeitachse bzw. dem Zeitpunkt des Nulldurchgangs des Graphen [93, S. 76]. Die Anregelzeit wurde mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung von 13,75 ms auf 5,5 ms um 60 Prozent reduziert. Äquivalent zu den Untersuchungen im vorherigen Abschnitt wurde die dynamische Laststeifigkeit aus dem Verhältnis des Lastmoments und der maximalen Auslenkung aus der Ruhelage berechnet. Die experimentell ermittelten charakteristischen Größen für das Störverhalten der positionsgeregelten Servoantriebe sind in Tabelle 7.2 gegenüber gestellt. Demnach konnte die dynamische Laststeifigkeit der Arbeitsmaschine mit einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung um den Faktor 2,8 verbessert werden.

Das Überschwingen der Position in Abbildung 7.10b während dem Ausregelvorgang resultiert aus dem reduzierten Betragsabstand der Frequenzgangfunktion des offenen Positionsregelkreises mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung zum kritischen Punkt im NYQUIST-Diagramm. In [107] wird eine Modifikation des nachgeschalteten Filters in der Beschleunigungsrückführung mit einem Korrekturglied zur Phasenhebung nach Gleichung 4.68 vorgeschlagen. In identischen Untersuchungen wird mit einer Phasenhebung im Bereich der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Positionsregelkreises ein Überschwingen der Position vollständig vermieden.



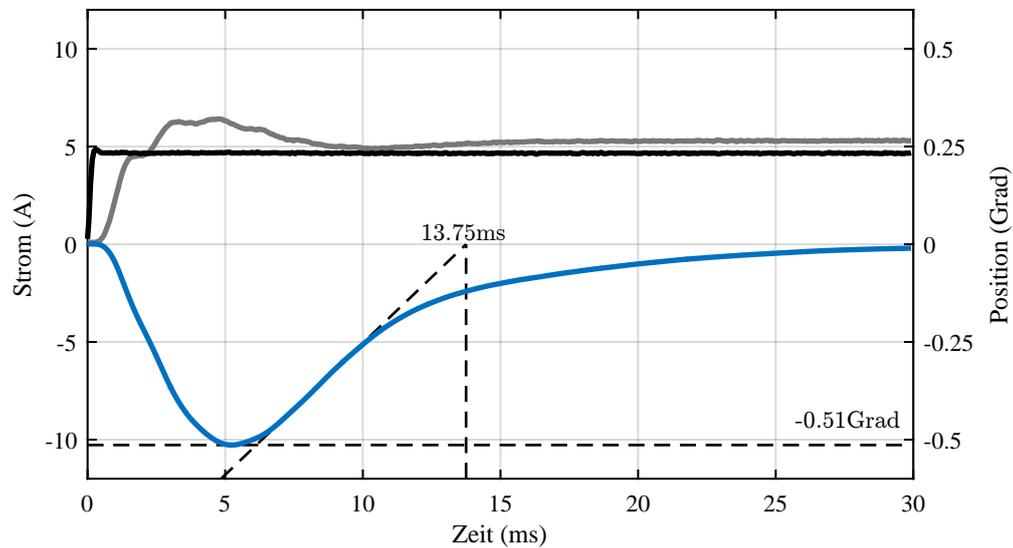
(a) Stromregelung



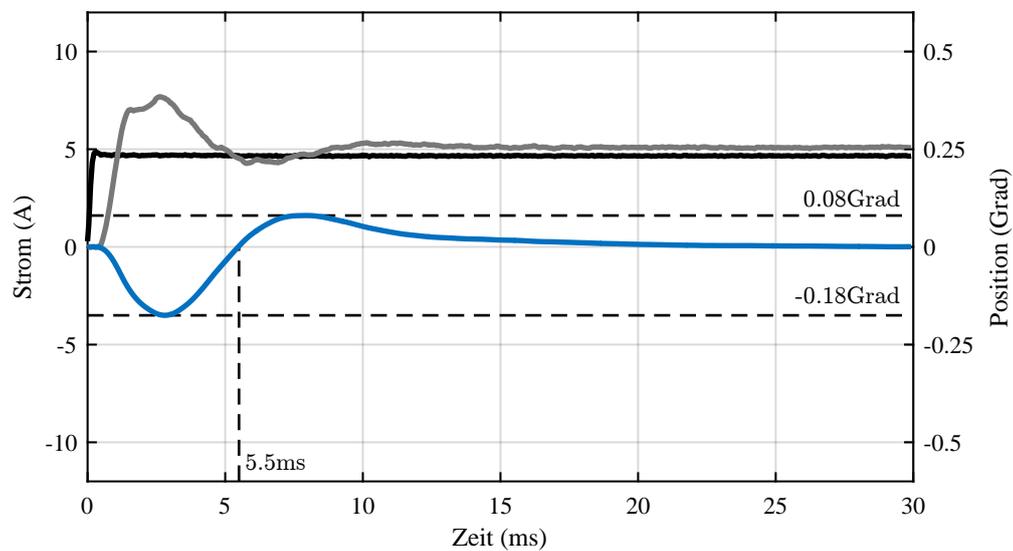
(b) Strom- und Beschleunigungsregelung

Abbildung 7.9: Beschleunigungssignale der Arbeitsmaschine bei sprunghörmiger Belastung

— w_A — y_A — e_A ···· \hat{e}_{AC}



(a) Stromregelung



(b) Strom- und Beschleunigungsregelung

Abbildung 7.10: Positionsauslenkung und des Querstroms der Arbeitsmaschine bei sprungförmiger Belastung

— x_{Cq} (Lastmaschine) — x_{Cq} (Arbeitsmaschine) — y_P

8 Abschlussbetrachtung

Im Rahmen der Arbeit wurde ein Modell des Positionsmessfehlers für Positionsmessgeräte mit sinusförmigen Messsignalen eingeführt und mit experimentellen Ergebnissen verifiziert. Das Modell berücksichtigt den Einfluss von Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode aufgrund nichtidealer Messsignale, langperiodischer Messfehler und Quantisierungsrauschen durch die A/D-Wandlung der Messsignale sowie die Wortbreite der Unterteilung auf den Positionsmessfehler. Bei der Berechnung abgeleiteter Größen aus dem Positionsmesswert, wie die Drehzahl oder die Beschleunigung des Antriebs, werden diese Positionsmessfehler frequenzabhängig verstärkt.

Bei der Berechnung der Beschleunigung mit einer zweifachen zeitdiskreten BACKWARD-EULER-Differentiation ist der Maximalwert der Verstärkung der Positionsmessfehler in zweiter Potenz von der Abtastperiode des digitalen Antriebsreglers abhängig. Die Nutzbandbreite des berechneten Beschleunigungssignals beträgt $0,125f_S$ und wird durch die Phasenverzögerung der Differentiation limitiert. Folgt auf die Differentiation eine Tiefpassfilterung der berechneten Beschleunigung wird die Verstärkung der Positionsmessfehler und die Nutzbandbreite gleichermaßen reduziert. Durch die Tiefpassfilterung der berechneten Beschleunigung wird der Signal-zu-Rausch-Abstand erhöht. Innerhalb der Nutzbandbreite des Beschleunigungssignals ist der erreichbare Signal-zu-Rausch-Abstand mit dem von Relativ-Beschleunigungssensoren nach dem Ferraris-Prinzip vergleichbar. Ausschlaggebend dafür ist die bei Positionsmessgeräten mit optoelektronischen Abtastverfahren erreichbare Positionsauflösung von typischerweise > 23 Bit und dem damit einhergehenden niedrigen Positionsruschen.

Mit einer unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung wird eine signifikante Verbesserung des Störverhaltens eines positionsgeregelten Servoantriebs bereits mit einer relativ niedrigen Nutzbandbreite der Beschleunigungsrückführung im Frequenzbereich von 100 bis 300 Hz erreicht. Bei den in Servoantrieben typischen Abtastraten von 8 bis 32 kHz führt folglich die erreichbare Nutzbandbreite der aus Positionsmesswerten berechneten Beschleunigung zu keiner Einschränkung.

Das erreichbare Maß der Verbesserung der Störunterdrückung wird im Wesentlichen durch die spezifizierten Anforderungen an die Stabilitätsreserve des Positionsregelkreises limitiert. Die Regelalgorithmen der Beschleunigungsrückführung führen in der Stabilitätsuntersuchung der Positionsregelung zu einer Verringerung des Betragsabstands zum kritischen Punkt. Mit

dem nachgeschalteten Tiefpassfilter wird der Maximalwert der Sensitivitätsfunktion auf die spezifizierten 3 dB begrenzt. Aufgrund des Wasserbett-Effekts ist die Verbesserung im Gegenkopplungsbereich einhergehend mit einer Vergrößerung des Mitkopplungsbereiches des Regelkreises. Folglich führt die kombinierte Strom- und Beschleunigungsregelung insbesondere zu einer Verbesserung, wenn das Signalspektrum der im Regelkreis eingreifenden Störgrößen auf den Gegenkopplungsbereich begrenzt ist.

Ein im Regelkreis eingreifendes sinusförmiges Lastmoment wird durch die Frequenzgangfunktion eines Doppelintegrators mit dem Massenträgheitsmoment des Motors als Integrationsbeiwert frequenzabhängig gewichtet. Höherfrequente Signalanteile des Lastmoments werden dadurch gedämpft und haben folglich einen geringen Einfluss auf die Position des Antriebs. Diese Eigenschaft wurde im Rahmen der Arbeit durch die Messung des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs bestätigt. Dabei wird mit der vorgestellten Parametrierung der Regelkreise durch die unterlagerte Strom- und Beschleunigungsregelung der Maximalwert der Nachgiebigkeit eines positionsgeregelten Antriebs um ≈ 45 Prozent gegenüber einer unterlagerten Stromregelung reduziert.

Für eine weitere Verbesserung des Störverhaltens ist der Einfluss unterschiedlicher Reglerstrukturen auf den Nachgiebigkeitsfrequenzgang und die Sensitivitätsfunktion analytisch darzustellen. Dadurch besteht die Möglichkeit, systematisch eine geeignete Reglerstruktur zu ermitteln mit welcher der Maximalwert der Nachgiebigkeit – unter Einhaltung einer spezifizierten Stabilitätsreserve – weiter reduziert werden kann.

Ein weiterer noch zu untersuchender Aspekt ist der Einfluss des zusätzlichen „elektronischen Massenträgheitsmoments“ auf die Höhe der Schwingungsamplitude an der Lastmaschine. Die Dämpfung der Schwingung an der Arbeitsmaschine ist nicht einhergehend mit einer Schwingungsdämpfung an der angekoppelten Last. Mit dieser Fragestellung erfolgt der Übergang zu mechanisch elastischen Antrieben. Eine systematische Untersuchung der Anwendbarkeit der unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung bei dieser Art von Antrieben ist noch offen.

Zusammenfassend wird mit einer auf Positionsmesswerten basierenden, unterlagerten kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung die dynamische Laststeifigkeit bzw. die Nachgiebigkeit eines positionsgeregelten Antriebs verbessert. Das Führungsverhalten wird durch die Beschleunigungsregelung nicht beeinflusst. Restriktionen ergeben sich aus der geringeren Stabilitätsreserve der Positionsregelschleife. Durch die Beschleunigungsregelung wird der Frequenzbereich mit einem Einfluss von Positionsmessfehlern im Regelkreis im Vergleich zur klassischen Kaskadenregelung erhöht. Voraussetzung für eine Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten ist bei den in Servoantrieben typischen Abtastfrequenzen bis 32 kHz die Verwendung hochauflösender optoelektronischer Positionsmessgeräte mit einer Signalqualität um $\chi_{SD} \approx \pm 0,1$ Prozent.

A Herleitung der Unterteilungswinkelfehler aufgrund nichtidealer Messsignale

A.1 Grundabweichungen

Normierte Messsignale $u_1^*(\varphi_{SP})$ und $u_2^*(\varphi_{SP})$ mit Grundabweichungen nach Gleichung 2.13:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (\text{A.1a})$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = U_{20}^* - \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (\text{A.1b})$$

Die Berechnung des Unterteilungswinkels φ_{SD} erfolgt mit der modifizierten Arkustangens-Funktion nach Gleichung 2.6 im ersten Quadranten aus den normierten Messsignalen mit Grundabweichungen:

$$\varphi_{SD} = \arctan\left(\frac{u_1^*}{-u_2^*}\right) = \text{atan2}\left(\frac{U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}{-U_{20}^* + \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}\right) \quad (\text{A.2})$$

Der Unterteilungswinkelfehler aufgrund von Messsignalen mit Grundabweichungen wird nach Gleichung 2.10 aus der Differenz des Signalperiodenwinkels und des Unterteilungswinkels gebildet:

$$\Delta\varphi_{SD} = \varphi_{SP} - \varphi_{SD} = \varphi_{SP} - \arctan\left(\frac{U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}{-U_{20}^* + \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}\right) \quad (\text{A.3})$$

Nach Umformung und Erweiterung der Gleichung mit $\tan(\dots)$ folgt mit den Additionstheoremen für Summen und Differenzen unterschiedlicher Winkel:

$$\begin{aligned} \frac{U_{10}^* + \hat{u}_1^* \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}{-U_{20}^* + \hat{u}_2^* \cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)} &= \tan(\varphi_{SP} - \Delta\varphi_{SD}) \\ &= \frac{\sin(\varphi_{SP} - \Delta\varphi_{SD})}{\cos(\varphi_{SP} - \Delta\varphi_{SD})} \\ &= \frac{\sin\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} - \cos\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}}{\cos\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} + \sin\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Amplitudenfehler

Die normierten Messsignale mit Amplitudenfehler $\hat{u}_1^* \neq \hat{u}_2^*$ ohne Nullpunktfehler und Phasenabweichung sind in Abbildung A.1 exemplarisch für $\hat{u}_1^* = 1,1$ und $\hat{u}_1^* = 0,9$ dargestellt. Für die mathematische Beschreibung der Messsignale mit Amplitudenfehler folgt:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = \hat{u}_1^* \sin(\varphi_{SP}) \quad (\text{A.5a})$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = -\hat{u}_2^* \cos(\varphi_{SP}) \quad (\text{A.5b})$$

Der Ansatz für die Berechnung des Unterteilungswinkelfehlers aufgrund einer Amplitudenabweichung folgt aus Gleichung A.4 mit den fehlerbehafteten Messsignalen aus den Gleichungen A.5a und A.5b:

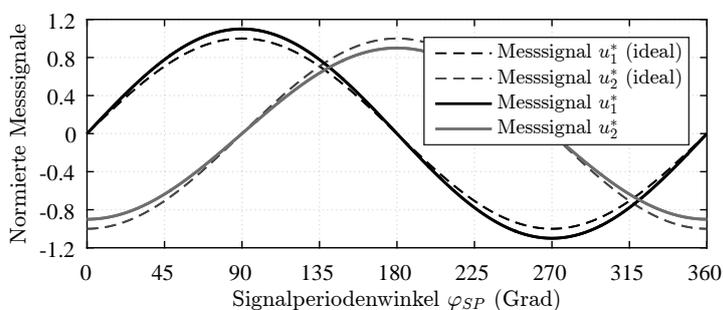
$$\frac{\hat{u}_1^* \sin(\varphi_{SP})}{\hat{u}_2^* \cos(\varphi_{SP})} = \frac{\sin \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} - \cos \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}}{\cos \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} + \sin \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}} \quad (\text{A.6})$$

Mit einer Division durch $\cos \Delta\varphi_{SD}$ und der Substitution von

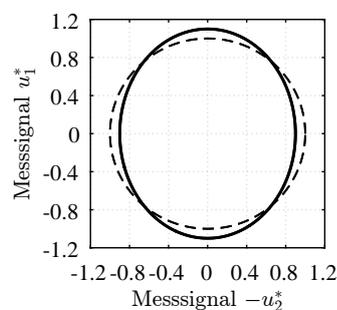
$$\sin \Delta\varphi_{SD} / \cos \Delta\varphi_{SD} = \tan \Delta\varphi_{SD}$$

wird die Gleichung umgeformt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^* \sin \varphi_{SP} (\cos \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} + \sin \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) &= \\ \hat{u}_2^* \cos \varphi_{SP} (\sin \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} - \cos \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) & \\ \Rightarrow \hat{u}_1^* \sin \varphi_{SP} (\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) &= \\ \hat{u}_2^* \cos \varphi_{SP} (\sin \varphi_{SP} - \cos \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) & \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$



(a) Messsignale in einer Signalperiode



(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.1: Messsignale mit Amplitudenfehler

Ausklammern und Isolieren der Terme mit $\tan \Delta\varphi_{SD}$:

$$\begin{aligned}
 & \hat{u}_1^* \sin \varphi_{SP} \cos \varphi_{SP} + \hat{u}_1^* \sin^2 \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} = \\
 & \hat{u}_2^* \cos \varphi_{SP} \sin \varphi_{SP} - \hat{u}_2^* \cos^2 \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} \\
 \Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} \left(\hat{u}_1^* \sin^2 \varphi_{SP} + \hat{u}_2^* \cos^2 \varphi_{SP} \right) = \sin \varphi_{SP} \cos \varphi_{SP} (-\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^*) \\
 \Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} = -\frac{(\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) \sin \varphi_{SP} \cos \varphi_{SP}}{\hat{u}_1^* \sin^2 \varphi_{SP} + \hat{u}_2^* \cos^2 \varphi_{SP}} \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

Anwenden der Winkelbeziehung für doppelte Winkel und Potenzen von trigonometrischen Funktionen und anschließende Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
 \tan \Delta\varphi_{SD} &= -\frac{(\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) \sin(2\varphi_{SP})/2}{\hat{u}_1^* (1 - \cos(2\varphi_{SP}))/2 + \hat{u}_2^* (1 + \cos(2\varphi_{SP}))/2} \\
 &= -\frac{(\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) \sin(2\varphi_{SP})}{\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^* - (\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) \cos(2\varphi_{SP})} \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Mit der Näherung für kleine Amplitudenabweichungen

$$\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^* \gg (\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*) \cos(2\varphi_{SP})$$

und der linearen Approximation der Tangensfunktion für kleine Winkel

$$\tan \Delta\varphi_{SD} \approx \Delta\varphi_{SD} \text{ für } |\Delta\varphi_{SD}| \leq 0,1439 \text{ rad}$$

folgt für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund unterschiedlicher Signalamplituden:

$$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\hat{u}_1^* - \hat{u}_2^*}{\hat{u}_1^* + \hat{u}_2^*} \sin(2\varphi_{SP}) \text{ rad} \quad (\text{A.10})$$

In Abbildung A.2 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.1 für die Approximation nach Gleichung A.10 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

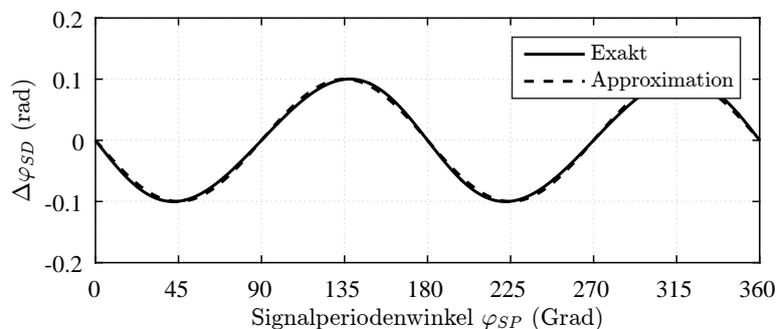


Abbildung A.2: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Amplitudenfehler

A.1.2 Nullpunktabweichung

Die normierten Messsignale mit Nullpunktfehler $U_{10}^*, U_{20}^* \neq 0$ ohne Amplitudenfehler und Phasenabweichung sind in Abbildung A.3 exemplarisch für $U_{10}^* = 0,1$ und $U_{20}^* = -0,1$ dargestellt. Für die mathematische Beschreibung der Messsignale mit Nullpunktfehler folgt:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = U_{10}^* + \sin(\varphi_{SP}) \quad (\text{A.11a})$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = U_{20}^* - \cos(\varphi_{SP}) \quad (\text{A.11b})$$

Der Ansatz für die Berechnung des Unterteilungswinkelfehlers aufgrund einer Amplitudenabweichung folgt aus Gleichung A.4 mit den fehlerbehafteten Messsignalen aus Gleichung A.11a und A.11b:

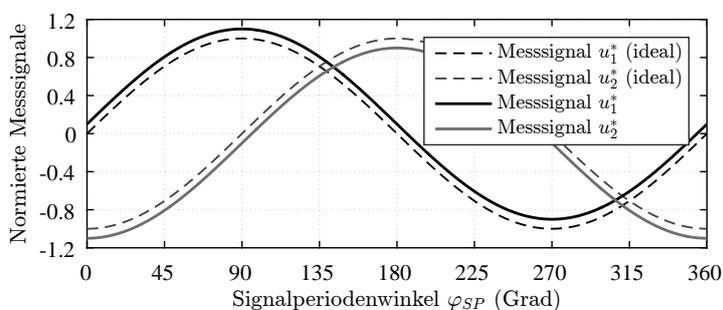
$$\frac{U_{10}^* + \sin(\varphi_{SP})}{-U_{20}^* + \cos(\varphi_{SP})} = \frac{\sin \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} - \cos \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}}{\cos \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} + \sin \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}} \quad (\text{A.12})$$

Mit einer Division durch $\cos \Delta\varphi_{SD}$ und der Substitution von

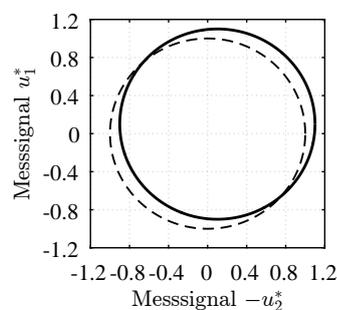
$$\sin \Delta\varphi_{SD} / \cos \Delta\varphi_{SD} = \tan \Delta\varphi_{SD}$$

wird die Gleichung umgeformt:

$$\begin{aligned} (U_{10}^* + \sin \varphi_{SP}) (\cos \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} + \sin \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) &= \\ (-U_{20}^* + \cos \varphi_{SP}) (\sin \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} - \cos \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) & \\ \Rightarrow (U_{10}^* + \sin \varphi_{SP}) (\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) &= \\ (-U_{20}^* + \cos \varphi_{SP}) (\sin \varphi_{SP} - \cos \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) & \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$



(a) Messsignale in einer Signalperiode



(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.3: Messsignale mit Nullpunktfehler

Ausklammern und Vereinfachen der Gleichung sowie Isolieren der Terme mit $\tan \Delta\varphi_{SD}$:

$$\begin{aligned}
 & U_{10}^* \cos \varphi_{SP} + U_{10}^* \sin \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} + \cos \varphi_{SP} \sin \varphi_{SP} + \sin^2 \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} = \\
 & - U_{20}^* \sin \varphi_{SP} + U_{20}^* \cos \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} + \cos \varphi_{SP} \sin \varphi_{SP} - \cos^2 \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} \\
 \Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} \left(U_{10}^* \sin \varphi_{SP} - U_{20}^* \cos \varphi_{SP} + \underbrace{\sin^2 \varphi_{SP} + \cos^2 \varphi_{SP}}_{=1} \right) = \\
 & - U_{10}^* \cos \varphi_{SP} - U_{20}^* \sin \varphi_{SP} - \underbrace{\cos \varphi_{SP} \sin \varphi_{SP} + \cos \varphi_{SP} \sin \varphi_{SP}}_{=0} \\
 \Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} = - \frac{U_{10}^* \cos \varphi_{SP} + U_{20}^* \sin \varphi_{SP}}{1 + U_{10}^* \sin \varphi_{SP} - U_{20}^* \cos \varphi_{SP}} \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Mit der Näherung für kleine Nullpunktabweichungen

$$\begin{aligned}
 |U_{10}^* \sin \varphi_{SP}| & \ll 1 \text{ und} \\
 |U_{20}^* \cos \varphi_{SP}| & \ll 1
 \end{aligned}$$

und der linearen Approximation der Tangensfunktion für kleine Winkel

$$\tan \Delta\varphi_{SD} \approx \Delta\varphi_{SD} \text{ für } |\Delta\varphi_{SD}| \leq 0,1439 \text{ rad}$$

folgt für den Unterteilungswinkelfehler:

$$\Delta\varphi_{SD} \approx - (U_{10}^* \cos \varphi_{SP} + U_{20}^* \sin \varphi_{SP}) \text{ rad} \tag{A.15}$$

In Abbildung A.4 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.3 für die Approximation nach Gleichung A.15 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

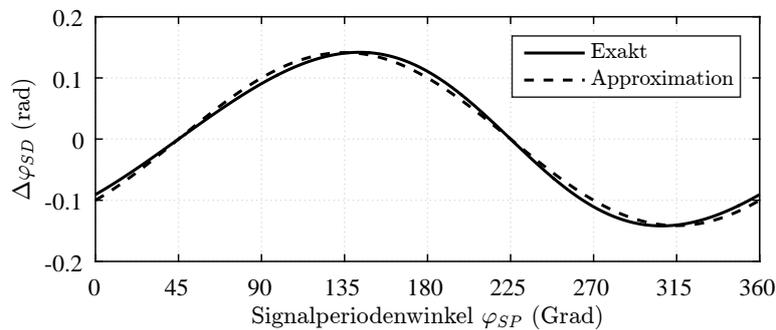


Abbildung A.4: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Nullpunktfehler

A.1.3 Phasenwinkelfehler

Die normierten Messsignale mit Phasenabweichung $\Delta\varphi_{PS} \neq 0$ ohne Amplituden- und Nullpunktfehler sind in Abbildung A.5 exemplarisch für eine Phasenabweichung von $\Delta\varphi_{PS} = 0,3\text{rad}$ dargestellt. Für die mathematische Beschreibung der Messsignale mit Phasenabweichung folgt:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = \sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (\text{A.16a})$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = -\cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right) \quad (\text{A.16b})$$

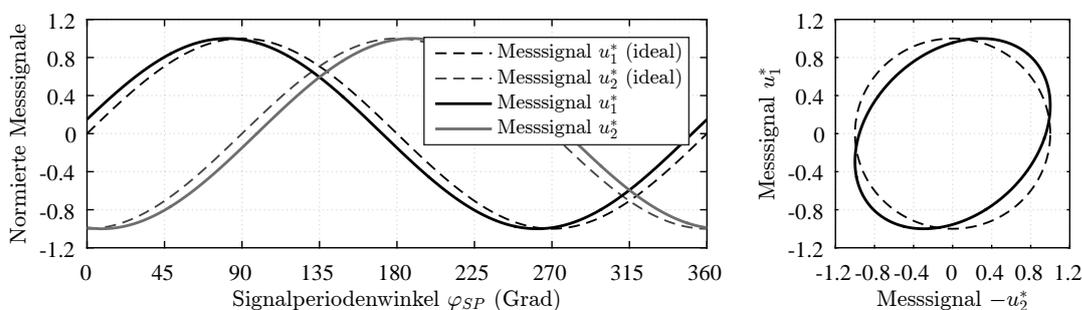
Der Ansatz für die Berechnung des Unterteilungswinkelfehlers aufgrund einer Phasenabweichung folgt aus Gleichung A.4 mit den fehlerbehafteten Messsignalen aus Gleichung A.16a und A.16b:

$$\frac{\sin\left(\varphi_{SP} + \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)}{\cos\left(\varphi_{SP} - \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}\right)} = \frac{\sin\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} - \cos\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}}{\cos\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} + \sin\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}}$$

$$\frac{\sin\varphi_{SP} \cos\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \cos\varphi_{SP} \sin\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}}{\cos\varphi_{SP} \cos\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \sin\varphi_{SP} \sin\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}} = \frac{\sin\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} - \cos\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}}{\cos\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} + \sin\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}} \quad (\text{A.17})$$

Mit einer Division durch $\cos\Delta\varphi_{SD}$ und der Substitution von

$$\sin\Delta\varphi_{SD}/\cos\Delta\varphi_{SD} = \tan\Delta\varphi_{SD}$$



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.5: Messsignale mit Phasenwinkelfehler

wird die Gleichung umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \left(\sin \varphi_{SP} \cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \cos \varphi_{SP} \sin \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\cos \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} + \sin \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) = \\
& \left(\cos \varphi_{SP} \cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \sin \varphi_{SP} \sin \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\sin \varphi_{SP} \cos \Delta\varphi_{SD} - \cos \varphi_{SP} \sin \Delta\varphi_{SD}) \\
\Rightarrow & \left(\sin \varphi_{SP} \cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \cos \varphi_{SP} \sin \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) = \\
& \left(\cos \varphi_{SP} \cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \sin \varphi_{SP} \sin \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\sin \varphi_{SP} - \cos \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

Division durch $\cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}$ und Substitution von $\sin \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} / \cos \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} = \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\sin \varphi_{SP} + \cos \varphi_{SP} \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) = \\
& \left(\cos \varphi_{SP} + \sin \varphi_{SP} \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\sin \varphi_{SP} - \cos \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Division durch $\cos \varphi_{SP}$ und Substitution von $\sin \varphi_{SP} / \cos \varphi_{SP} = \tan \varphi_{SP}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\tan \varphi_{SP} + \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (1 + \tan \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD}) = \\
& \left(1 + \tan \varphi_{SP} \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right) (\tan \varphi_{SP} - \tan \Delta\varphi_{SD}) \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

Ausklammern und Vereinfachen der Gleichung sowie Isolieren der Terme mit $\tan \Delta\varphi_{SD}$:

$$\begin{aligned}
& \tan \varphi_{SP} + \tan^2 \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} + \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \tan \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} = \\
& \tan \varphi_{SP} - \tan \Delta\varphi_{SD} + \tan^2 \varphi_{SP} \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} - \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \tan \varphi_{SP} \tan \Delta\varphi_{SD} \\
\Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} \left(1 + \tan^2 \varphi_{SP} + 2 \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \tan \varphi_{SP} \right) = \\
& \underbrace{\tan \varphi_{SP} - \tan \varphi_{SP}}_{=0} - \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} + \tan^2 \varphi_{SP} \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \\
\Rightarrow & \tan \Delta\varphi_{SD} = - \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \frac{1 - \tan^2 \varphi_{SP}}{1 + \tan^2 \varphi_{SP} + 2 \tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \tan \varphi_{SP}} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Für kleine Abweichungen der Phasenverschiebung der Messsignale von 90 Grad und kleine Unterteilungswinkelfehler kann die Tangensfunktion linear mit dem Argument approximiert werden:

$$\tan \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \approx \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \text{ für } \left| \frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \right| \leq 0,1439 \text{ rad und}$$

$$\tan \Delta\varphi_{SD} \approx \Delta\varphi_{SD} \text{ für } |\Delta\varphi_{SD}| \leq 0,1439 \text{ rad}$$

Damit folgt:

$$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \frac{1 - \tan^2 \varphi_{SP}}{1 + \tan^2 \varphi_{SP} + \Delta\varphi_{PS} \tan \varphi_{SP}} \quad (\text{A.22})$$

Weiter gilt für den Nenner der Gleichung

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \varphi_{SP} &\gg \Delta\varphi_{PS} \tan \varphi_{SP} \\ \Rightarrow 1 + \tan^2 \varphi_{SP} &\approx 1 + \tan^2 \varphi_{SP} + \Delta\varphi_{PS} \tan \varphi_{SP} \end{aligned}$$

und somit für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer Abweichung der Phasenverschiebung der Messsignale von 90 Grad:

$$\Delta\varphi_{SD} \approx -\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \frac{1 - \tan^2 \varphi_{SP}}{1 + \tan^2 \varphi_{SP}} = -\frac{\Delta\varphi_{PS}}{2} \cos(2\varphi_{SP}) \quad (\text{A.23})$$

In Abbildung A.6 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.5 für die Approximation nach Gleichung A.23 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

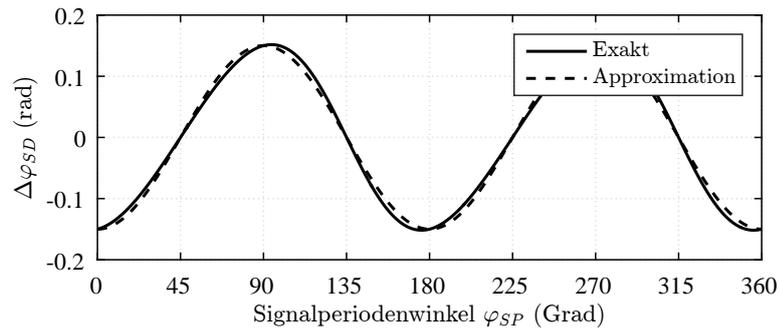


Abbildung A.6: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Phasenwinkelfehler

A.2 Signaloberwellen

Für die normierten Messsignale mit Signaloberwellen wird eine beliebige Ordnung m der Oberwellen mit der Amplitude \hat{u}_m^* angesetzt:

$$u_1^*(\varphi_{SP}) = \sin(\varphi_{SP}) + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \quad (\text{A.24a})$$

$$u_2^*(\varphi_{SP}) = -\cos(\varphi_{SP}) + \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{A.24b})$$

Der Ansatz für die Berechnung des Unterteilungswinkelfehlers aufgrund von Signaloberwellen der Messsignale folgt aus Gleichung A.4 mit den fehlerbehafteten Messsignalen aus Gleichung A.24a und A.24b:

$$\frac{\sin(\varphi_{SP}) + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP})}{\cos(\varphi_{SP}) - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} - \cos\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}}{\cos\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} + \sin\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}} \quad (\text{A.25})$$

Mit einer Division durch $\cos\Delta\varphi_{SD}$ und der Substitution von

$$\sin\Delta\varphi_{SD} / \cos\Delta\varphi_{SD} = \tan\Delta\varphi_{SD}$$

wird die Gleichung umgeformt:

$$\begin{aligned} & (\sin\varphi_{SP} + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP})) (\cos\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} + \sin\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}) = \\ & \left(\cos\varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \right) (\sin\varphi_{SP} \cos\Delta\varphi_{SD} - \cos\varphi_{SP} \sin\Delta\varphi_{SD}) \\ \Rightarrow & (\sin\varphi_{SP} + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP})) (\cos\varphi_{SP} + \sin\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD}) = \\ & \left(\cos\varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \right) (\sin\varphi_{SP} - \cos\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD}) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Ausklammern und Umformen der Gleichung führt zu:

$$\begin{aligned} & \sin\varphi_{SP} \cos\varphi_{SP} + \sin^2\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD} \\ & + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \sin\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD} = \\ & \sin\varphi_{SP} \cos\varphi_{SP} - \cos^2\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD} \\ & - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi_{SP} + \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \cos\varphi_{SP} \tan\Delta\varphi_{SD} \end{aligned}$$

Isolieren der Terme mit $\tan \Delta\varphi_{SD}$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \tan \Delta\varphi_{SD} \left(\underbrace{\sin^2 \varphi_{SP} + \cos^2 \varphi_{SP}}_{=1} + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi_{SP} \right) = \\
&\quad \underbrace{\sin \varphi_{SP} \cos \varphi_{SP} - \sin \varphi_{SP} \cos \varphi_{SP}}_{=0} \\
&\quad - \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP} \\
&\Rightarrow \tan \Delta\varphi_{SD} \left(1 + \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi_{SP} \right) = \\
&\quad - \hat{u}_m^* \sin(m\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} - \hat{u}_m^* \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP} \\
&\Rightarrow \tan \Delta\varphi_{SD} = -\hat{u}_m^* \frac{\sin(m\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} + \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP}}{1 + \hat{u}_m^* (\sin(m\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP} - \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi_{SP})} \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

Mit der Näherung für kleine Amplituden der Signaloberwellen

$$\left| \hat{u}_m^* \left(\sin(m\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP} - \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi_{SP} \right) \right| \ll 1 \quad (\text{A.28})$$

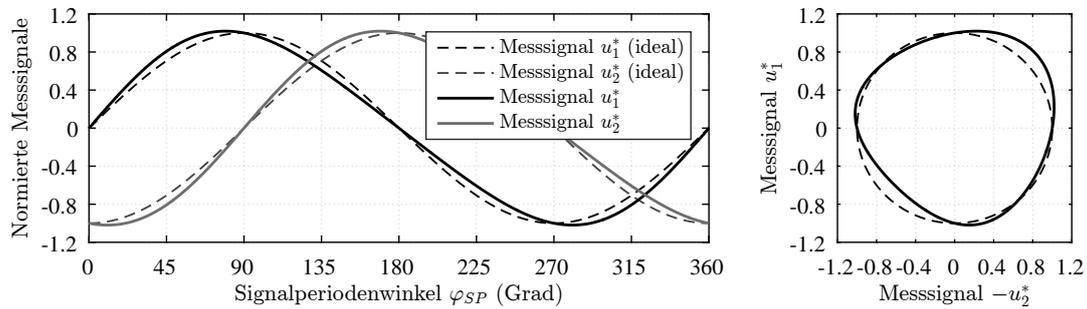
und der linearen Approximation der Tangensfunktion für kleine Winkel

$$\tan \Delta\varphi_{SD} \approx \Delta\varphi_{SD} \text{ für } |\Delta\varphi_{SD}| \leq 0,1439 \text{ rad}$$

folgt die allgemeine Lösung für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer überlagerten Signaloberwelle:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_{SD} &\approx -\hat{u}_m^* \left(\sin(m\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} + \sin\left(m\varphi_{SP} - m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP} \right) \\
&\approx -\hat{u}_m^* \left(\sin(m\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} \right. \\
&\quad \left. + \sin(m\varphi_{SP}) \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP} \right. \\
&\quad \left. - \cos(m\varphi_{SP}) \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi_{SP} \right) \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

A.2.1 Signaloberwelle 2. Ordnung



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.7: Messsignale mit Signaloberwelle 2. Ordnung

In Abbildung A.7 sind die Messsignale mit einer überlagerten Signaloberwelle der Ordnung $m = 2$ mit einer Amplitude $\hat{u}_2^* = 0,05$ dargestellt. Für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer Signaloberwelle der Ordnung $m = 2$ folgt aus Gleichung A.29:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{SD}(m = 2) &\approx -\hat{u}_2^* (\sin(2\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} \\
 &\quad + \underbrace{\sin(2\varphi_{SP}) \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)}_{=-1} \sin \varphi_{SP} - \cos(2\varphi_{SP}) \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}_{=0} \sin \varphi_{SP}) \\
 &\approx -\hat{u}_2^* (\sin(2\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} - \sin(2\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP}) \\
 &\approx -\frac{\hat{u}_2^*}{2} (\sin(\varphi_{SP}) - \cos(\varphi_{SP}) + \sin(3\varphi_{SP}) + \cos(3\varphi_{SP})) \quad (\text{A.30})
 \end{aligned}$$

In Abbildung A.8 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.7 für die Approximation nach Gleichung A.30 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

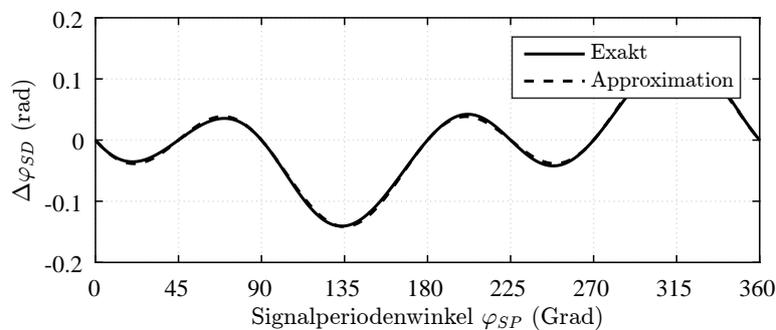
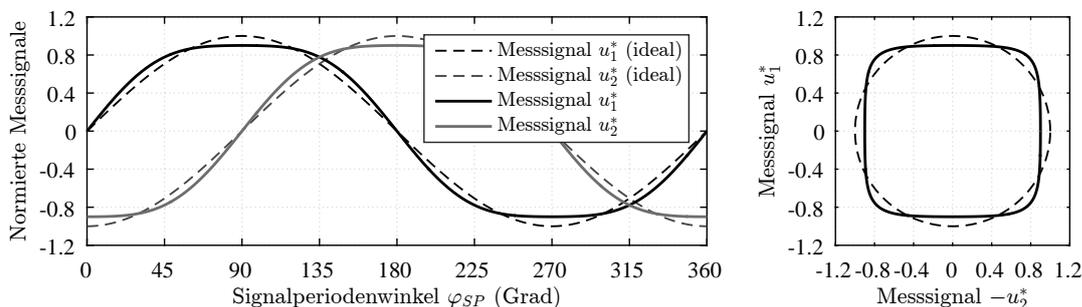


Abbildung A.8: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 2. Ordnung

A.2.2 Signaloberwelle 3. Ordnung



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.9: Messsignale mit Signaloberwelle 3. Ordnung

In Abbildung A.9 sind die Messsignale mit einer überlagerten Signaloberwelle der Ordnung $m = 3$ mit einer Amplitude $\hat{u}_3^* = 0,05$ dargestellt. Für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer Signaloberwelle der Ordnung $m = 3$ folgt aus Gleichung A.29:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{SD}(m=3) &\approx -\hat{u}_3^* (\sin(3\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} \\
 &\quad + \underbrace{\sin(3\varphi_{SP}) \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} \sin \varphi_{SP} - \cos(3\varphi_{SP}) \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} \sin \varphi_{SP}) \\
 &\approx -\hat{u}_3^* (\sin(3\varphi_{SP}) \cos \varphi_{SP} + \cos(3\varphi_{SP}) \sin \varphi_{SP}) \\
 &\approx -\frac{\hat{u}_3^*}{2} (\sin(2\varphi_{SP}) + \sin(-2\varphi_{SP}) + \sin(4\varphi_{SP}) + \sin(4\varphi_{SP})) \\
 &\approx -\hat{u}_3^* \sin(4\varphi_{SP}) \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

In Abbildung A.10 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.9 für die Approximation nach Gleichung A.31 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

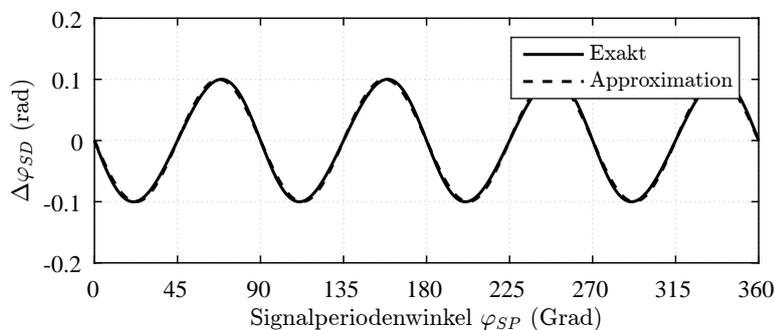
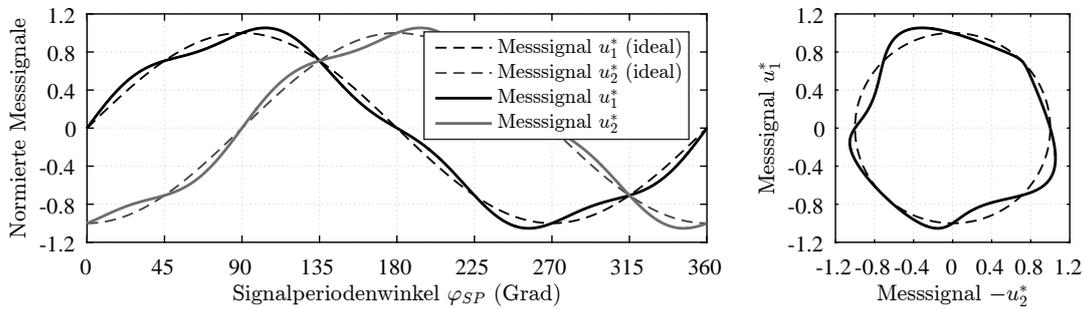


Abbildung A.10: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 3. Ordnung

A.2.3 Signaloberwelle 4. Ordnung



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.11: Messsignale mit Signaloberwelle 4. Ordnung

In Abbildung A.11 sind die Messsignale mit einer überlagerten Signaloberwelle der Ordnung $m = 4$ mit einer Amplitude $\hat{u}_4^* = 0,05$ dargestellt. Für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer Signaloberwelle der Ordnung $m = 4$ folgt aus Gleichung A.29:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{SD}(m=4) &\approx -\hat{u}_4^* (\sin(4\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} \\
 &\quad + \underbrace{\sin(4\varphi_{SP}) \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)}_{=1} \sin\varphi_{SP} - \cos(4\varphi_{SP}) \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}_{=0} \sin\varphi_{SP}) \\
 &\approx -\hat{u}_4^* (\sin(4\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} + \sin(4\varphi_{SP}) \sin\varphi_{SP}) \\
 &\approx -\frac{\hat{u}_4^*}{2} (\sin(3\varphi_{SP}) + \cos(3\varphi_{SP}) + \sin(5\varphi_{SP}) - \cos(5\varphi_{SP})) \quad (\text{A.32})
 \end{aligned}$$

In Abbildung A.12 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.11 für die Approximation nach Gleichung A.32 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

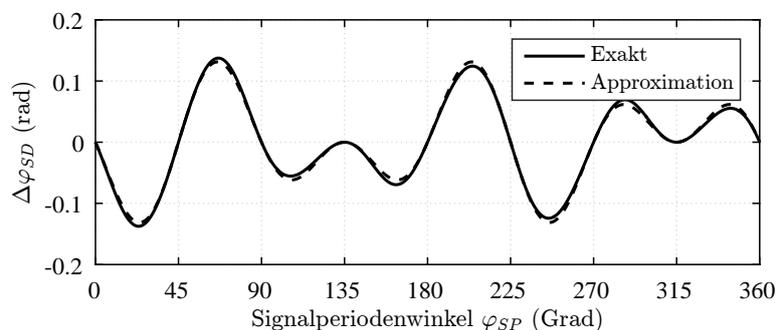
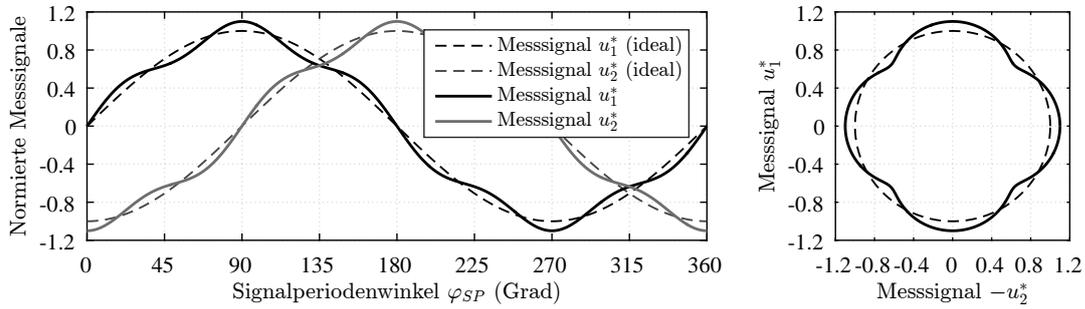


Abbildung A.12: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 4. Ordnung

A.2.4 Signaloberwelle 5. Ordnung



(a) Messsignale in einer Signalperiode

(b) Vektorielle Darstellung

Abbildung A.13: Messsignale mit Signaloberwelle 5. Ordnung

In Abbildung A.13 sind die Messsignale mit einer überlagerten Signaloberwelle der Ordnung $m = 5$ mit einer Amplitude $\hat{u}_5^* = 0,05$ dargestellt. Für den Unterteilungswinkelfehler aufgrund einer Signaloberwelle der Ordnung $m = 52$ folgt aus Gleichung A.29:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_{SD}(m=5) &\approx -\hat{u}_5^* (\sin(5\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} \\
 &\quad + \underbrace{\sin(5\varphi_{SP}) \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{=0} \sin\varphi_{SP} - \cos(5\varphi_{SP}) \underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{=1} \sin\varphi_{SP}) \\
 &\approx -\hat{u}_5^* (\sin(5\varphi_{SP}) \cos\varphi_{SP} - \cos(5\varphi_{SP}) \sin\varphi_{SP}) \\
 &\approx -\frac{\hat{u}_5^*}{2} (\sin(4\varphi_{SP}) - \sin(-4\varphi_{SP}) + \sin(6\varphi_{SP}) - \sin(6\varphi_{SP})) \\
 &\approx -\hat{u}_5^* \sin(4\varphi_{SP}) \tag{A.33}
 \end{aligned}$$

In Abbildung A.14 ist der Unterteilungswinkelfehler für die fehlerbehafteten Messsignale aus Abbildung A.13 für die Approximation nach Gleichung A.33 und der exakte, analytisch berechnete Verlauf dargestellt.

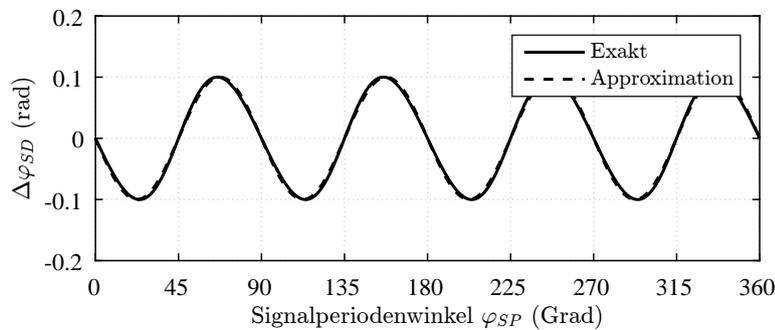


Abbildung A.14: Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 5. Ordnung

B Experimentelle Ermittlung der Frequenzgangsfunktionen

B.1 Diskrete Fourier-Transformation

Für eine experimentelle Ermittlung der Frequenzgangsfunktionen wird die Signalfrequenz f_{Sig} einer sinusförmigen Anregung von einem beliebigen Anfangswert f_A bis zu einem Endwert f_E linear erhöht. Dabei entspricht der maximal realisierbare Endwert der NYQUIST-Frequenz der digitalen Regelung.

$$w[n] = \hat{w} \sin(2\pi f_{Sig}[n]), \quad \text{mit } f_{Sig}[n] = f_A + \frac{f_E - f_A}{T_{FFT}} n T_S \quad (\text{B.1})$$

Die Anzahl der zu transformierenden Datenpunkte aus den Zeitbereich in den Frequenzbereich mit der diskreten Fourier-Transformation N_{FFT} wird aus der Messdauer T_{FFT} und der Abtastperiode T_S berechnet:

$$N_{FFT} = \frac{T_{FFT}}{T_S} \quad (\text{B.2})$$

Im Zeitbereich werden die abgetasteten Signale $s[n]$ mit der Laufvariable n gekennzeichnet:

$$n = 0 \dots (N_{FFT} - 1) \quad (\text{B.3})$$

Die Frequenzauflösung Δf des transformierten Signals wird aus der Abtastfrequenz $f_S = 1/T_S$ und der Anzahl der transformierten Datenpunkte berechnet:

$$\Delta f = \frac{f_S}{N_{FFT}} \quad (\text{B.4})$$

Mit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) werden die abgetasteten Zeitsignale $s[n]$ in den Frequenzbereich transformiert und mit $s[k]$ gekennzeichnet:

$$s[k] = \frac{1}{N_{FFT}} \sum_{n=0}^{N_{FFT}-1} s[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_{FFT}}} \quad (\text{B.5})$$

Der Skalierungsfaktor $1/N_{FFT}$ ist für eine korrekte Wiedergabe der Amplituden der Spektralkomponenten erforderlich. In der Transformationsvorschrift beschreibt die Laufvariable k

die Frequenzpunkte zwischen $f = 0 \dots f_S$ mit der Frequenzauflösung Δf :

$$k = 0 \dots (N_{FFT} - 1) \quad (\text{B.6})$$

B.2 Frequenzgangsfunktionen

Der Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises $H_C[k]$ wird für die N_{FFT} Frequenzpunkte aus den Spektralkomponenten der Sollwertvorgabe $w[k]$ und der abgetasteten Regelgröße $y[k]$ berechnet.

$$H_C[k] = \frac{y[k]}{w[k]} \quad (\text{B.7})$$

Für einen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad wird die Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L[k]$ aus der Regelabweichung $e[k] = w[k] - y[k]$ und somit aus der Sollwertvorgabe $w[k]$ und der abgetasteten Regelgröße $y[k]$ ermittelt.

$$L[k] = \frac{y[k]}{e[k]} = \frac{y[k]}{w[k] - y[k]} \quad (\text{B.8})$$

Die Frequenzgangsfunktion der Sensitivität und der komplementäre Sensitivität des Regelkreises wird aus dem Frequenzgang des offenen Regelkreises gebildet.

$$S[k] = \frac{1}{1 + L[k]} \quad (\text{B.9})$$

$$T[k] = \frac{L[k]}{1 + L[k]} \quad (\text{B.10})$$

Die Frequenzgangsfunktion der Regelstrecke $P[k]$ wird aus der Eingangsgröße $u[k]$ und der abgetasteten Ausgangsgröße ermittelt.

$$P[k] = \frac{y[k]}{u[k]} \quad (\text{B.11})$$

Die Darstellung der Frequenzgangsfunktionen erfolgt im BODE-Diagramm in Exponentialform. Der Betrag der komplexen Zahl wird mit dem Logarithmus zur Basis 10 dargestellt.

$$|s[k]| = 20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{\text{Re}\{s[k]\}^2 + \text{Im}\{s[k]\}^2} \right) \text{ in dB} \quad (\text{B.12})$$

Die Phase Φ der komplexen Zahl wird mit der Arkustangens-Funktion berechnet und in der Einheit Grad dargestellt.

$$\Phi[k] = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{s[k]\}}{\text{Re}\{s[k]\}} \right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{B.13})$$

C Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung mit unterlagerter Beschleunigungsregelung

Die Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung mit unterlagerter Beschleunigungsregelung wird entsprechend Gleichung 3.18 aus der Frequenzgangsfunktion des offenen Regelkreises $L(j\omega)$ berechnet.

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = \frac{1}{1 + F_{FB}(j\omega)F'_{CC}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta} \quad (\text{C.1})$$

Die Frequenzgangsfunktion der geschlossenen Stromregelung mit zweiter Rückführschleife $F'_{CC}(j\omega)$ wird mit dem Ausdruck in Gleichung 6.15 ersetzt und die resultierende Gleichung entsprechend umgeformt.

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{1 + F_{FB}(j\omega) \frac{F_{CC}(j\omega)}{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}} F_{2I}(j\omega)\Delta} \\ &= \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s} + F_{FB}(j\omega)F_{CC}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta} \\ &= \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 + F_{CC}(j\omega)(F_{FB}(j\omega)F_{2I}(j\omega)\Delta - F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s})} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Die Frequenzgangsfunktion des *Feedback*-Reglers $F_{FB}(j\omega)$ wird mit dem Term aus Gleichung 6.24 ersetzt:

$$S(j\omega) = \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 + F_{CC}(j\omega) \left((F_{FB}^K(j\omega) + F_{2D}^{BE}(j\omega)F_{FA}(j\omega)) F_{2I}(j\omega)\Delta - F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s} \right)} \quad (\text{C.3})$$

Ohne Modellunsicherheit ($\Delta = 1$) und der bereits eingeführten Näherung der Beschleunigungsermittlung mit $F_{2I}(j\omega)F_{2D}^{BE}(j\omega) \approx e^{-j\omega T_s}$ wird die Sensitivitätsfunktion des Positionsregelkreises weiter vereinfacht:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 + F_{CC}(j\omega) \left(F_{FB}^K(j\omega)F_{2I}(j\omega) + \underbrace{F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s} - F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}_{=0} \right)} \\ &= \frac{1 - F_{CC}(j\omega)F_{FA}(j\omega)e^{-j\omega T_s}}{1 + F_{CC}(j\omega)F_{FB}^K(j\omega)F_{2I}(j\omega)} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Photoelektrische Abtastung nach dem abbildenden Messprinzip	12
2.2	Phasenverschobene Messsignale und vektorielle Darstellung idealer Messsignale	13
2.3	Auswertelektronik zur Ermittlung des Positionsmesswertes	15
2.4	Messfehler eines rotatorischen Positionsmessgerätes mit 32 Signalperioden pro Umdrehung	17
2.5	Quantisierung in der Auswertelektronik durch die A/D-Wandlung und die Arkustangens-Berechnung	23
2.6	Unterteilungswinkelfehler durch die Quantisierung in der Auswertelektronik	25
2.7	Servoantrieb mit Referenzwinkelmessgerät	31
2.8	Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit optoelektronischer Mehrfeldabtastung	35
2.9	Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit optoelektronischer Einfeldabtastung	36
2.10	Positionsmessfehler eines Positionsmessgerätes mit induktiver Abtastung . . .	37
3.1	Zeitdiskrete einschleifige Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden	39
3.2	Regelkreis zur Untersuchung des vereinfachten NYQUIST-Kriteriums	43
3.3	NYQUIST-Diagramm zur Ermittlung der Amplituden- und Phasenreserve des offenen Regelkreises aus dem Verlauf der Ortskurve in der komplexen Ebene .	45
3.4	Wasserbett-Effekt der Sensitivitätsfunktion (Quelle: G. Stein, Respect the Unstable, [98])	49
3.5	NYQUIST-Diagramm mit Kreis für konstante maximale Sensitivität	50
3.6	Regelkreis mit additiver Modellunsicherheit $\Delta G(s)$	52
3.7	NYQUIST-Diagramm mit additiver Modellunsicherheit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises und Apolloniuskreis	53
3.8	Zusammenhang der Maximalwerte der komplementären Sensitivität und der relativen Modellabweichung	55
3.9	Charakteristische Frequenzgangsfunktionen eines Regelkreises	57
4.1	Antriebssystem zur Regelung mechanisch steifer Servoantriebe	60
4.2	Erzeugung eines symmetrischen Dreiphasensystems	61
4.3	Kleinsignalverhalten eines Spannungszwischenkreisumrichters	63
4.4	Raumzeigerdarstellung im stator- und rotorfesten Koordinatensystem	66

4.5	Querschnitt einer zweipoligen Synchronmaschine mit oberflächenmontierten Permanentmagneten im stator- und rotorfesten Koordinatensystem	67
4.6	Blockschaltbild einer permanentmagneterregten Synchronmaschine ohne Reluktanzeinflüsse im rotorfesten d/q -Koordinatensystem	71
4.7	Modell einer dreh-elastischen Wellenkopplung zwischen Antriebs- und Lastmaschine	73
4.8	Modellunsicherheit des nominellen Modells der Positionsregelstrecke	77
4.9	Eigenschaften der BACKWARD-EULER- und TUSTIN-Approximation der komplexen Kreisfrequenz	79
4.10	Digitaler PI-Regler	82
4.11	Blockschaltbild der Stromregelung im rotorfesten Koordinatensystem	85
4.12	Synchronisation der Ausführung der Regelungsalgorithmen mit dem Trägersignal des Modulators	86
4.13	Eigenschaften der Stromregelung bei Vorgabe einer Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises	89
4.14	BODE Diagramm mit experimentell ermittelten Frequenzgangsfunktionen des Stromregelkreises	92
4.15	Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs	94
4.16	Maximalwerte der Sensitivität und der komplementären Sensitivität der Drehzahlregelung bei Vorgabe einer Phasenreserve bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz	96
4.17	NYQUIST-Diagramm der Positionsregelung mit Kreisen für eine konstante maximale Sensitivität und komplementäre Sensitivität	100
4.18	Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung mit unterlagerter Stromregelung	101
5.1	Methoden zur Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten	103
5.2	Amplituden- und Phasengang der idealen zeitdiskreten Differentiation zur Berechnung der 1. und 2. Ableitung eines Signals	105
5.3	Ermittlung der Beschleunigung mit einer zweifachen numerischen Differentiation aus der gemessenen Position	105
5.4	Filterstruktur mit endlicher Impulsantwort (FIR)	106
5.5	Filterstruktur mit unendlicher Impulsantwort (IIR)	110
5.6	Berechnung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten mit verschiedenen numerischen Differentiationsverfahren	113
5.7	Zustandsbeobachter zur Berechnung der Beschleunigung	118
5.8	Schätzung der Beschleunigung aus Positionsmesswerten mit verschiedenen Integrationsverfahren	121
5.9	Charakteristische Größen der Beschleunigungsermittlung mit Filter	123
5.10	Nominelle Beschleunigungsamplitude bei einem vorgegebenen Signal-zu-Rausch-Abstand von 86,04 dB für verschiedener Abtastperioden der digitalen Regelung als Funktion der Positionsmessschritte	126

6.1	Blockschaltbild einer Beschleunigungsregelung mit PI-Regler basierend auf Positionsmesswerten	131
6.2	Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten mit einer Prädiktor-Regelungsstruktur zur Kompensation der Phasenverzögerung der zweifachen zeitdiskreten Differentiation	133
6.3	Blockschaltbild einer kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten	135
6.4	Amplitudengang des Tief- und Hochpassfilters	136
6.5	Blockschaltbild der Stromregelung mit zusätzlicher Rückführschleife	138
6.6	Maximalwerte der Beschleunigungsregelschleife im Führungsverhalten für verschiedene Filterparametrierungen und Modellunsicherheiten	140
6.7	Blockschaltbild der Positionsregelung eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten . .	141
6.8	Betragsgang des Hochpassfilters	144
6.9	Maximalwerte des Hochpassfilters und der Sensitivitätsfunktion	145
6.10	NYQUIST-Diagramm der Positionsregelung mit unterlagerter kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung	147
6.11	Frequenzgangsfunktionen der Positionsregelung mit unterlagerter Beschleunigungsregelung	149
6.12	Blockschaltbild der Drehzahlregelung eines mechanisch steifen Antriebs mit unterlagerter Beschleunigungsregelung basierend auf Positionsmesswerten . .	151
6.13	Einfluss von Positionsmessfehlern auf die Drehzahl eines Servoantriebes . . .	153
6.14	Gleichlaufschwankungen in Servoantrieben	157
7.1	Prüfstand mit drehelastisch gekoppelter Antriebs- und Lastmaschine	160
7.2	Antriebsregelung mit kombinierter Strom- und Beschleunigungsregelung . . .	161
7.3	Signalverläufe in der Beschleunigungsregelschleife	163
7.4	Signalverläufe in der Stromregelschleife	164
7.5	Amplitudenspektrum der berechneten Beschleunigung ohne und mit nachgeschalteter Tiefpassfilterung	165
7.6	Verlauf der Signale der P-PI-Positionsregelung	168
7.7	Verlauf der Positionsauslenkung und des Querstroms der Arbeitsmaschine für charakteristische Frequenzen der Sensitivitätsfunktion der Positionsregelung bei sinusförmiger Belastung durch die Lastmaschine	171
7.8	Nachgiebigkeitsfrequenzgang der positionsgeregelten Arbeitsmaschine	173
7.9	Beschleunigungssignale der Arbeitsmaschine bei sprungförmiger Belastung . .	176
7.10	Positionsauslenkung und des Querstroms der Arbeitsmaschine bei sprungförmiger Belastung	177
A.1	Messsignale mit Amplitudenfehler	182
A.2	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Amplitudenfehler	183

A.3	Messsignale mit Nullpunktfehler	184
A.4	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Nullpunktfehler	185
A.5	Messsignale mit Phasenwinkelfehler	186
A.6	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Phasenwinkelfehler	188
A.7	Messsignale mit Signaloberwelle 2.Ordnung	191
A.8	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 2. Ordnung .	191
A.9	Messsignale mit Signaloberwelle 3.Ordnung	192
A.10	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 3. Ordnung .	192
A.11	Messsignale mit Signaloberwelle 4.Ordnung	193
A.12	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 4. Ordnung .	193
A.13	Messsignale mit Signaloberwelle 5.Ordnung	194
A.14	Unterteilungswinkelfehler bei Messsignalen mit Signaloberwelle 5. Ordnung .	194

Tabellenverzeichnis

2.1	Unterteilungswinkelfehler für Grundabweichungen der Messsignale	21
2.2	Unterteilungswinkelfehler für verschiedene Ordnungen der Signaloberwellen der Messsignale	22
2.3	Charakteristische Daten der Positionsmessgeräte	31
4.1	Parameter der drehelastischen Kopplung	76
4.2	−3 dB-Bandbreite der Stromregelung für eine Abtastrate von 16 kHz	91
4.3	Parameter der Stromregelung	93
4.4	Parameter der Positionsregelung	100
5.1	Bewertung numerischer Verfahren zur Berechnung der Beschleunigung	114
5.2	Numerische Integrationsverfahren	120
6.1	Parameter der kombinierten Strom- und Beschleunigungsregelung	148
6.2	Parameter der Drehzahlregelung	153
7.1	Frequenzabhängige dynamische Laststeifigkeit c_{dyn}	170
7.2	Charakteristische Größen des Störverhaltens eines positions-geregelten Servo- antriebs bei sprungförmiger Lastaufschaltung	175

Abkürzungsverzeichnis

Regelungstechnik

LTI	Linear Time-Invariant
PI	Proportional- und Integral
ZOH	Halteglied nullter Ordnung
SISO	Single Input Single Output

Steuergerät, Umrichter und Motor

ASIC	Application Specific Integrated Circuit
FPGA	Field Programmable Gate Array
ADC	Analog to Digital Converter
PMSM	Permanenterregte Synchronmaschine
PMG	Positionsmessgerät
RCP	Rapid Control Prototyping
ISR	Interrupt Service Routine
NC	Numerical Control

Leistungselektronik und Modulation

IGBT	Insulated Gate Bipolar Transistoren
PWM	Pulsweitenmodulation

Digitale Signalverarbeitung

CORDIC	Coordinate Rotation Digital Computer
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
LSB	Least Significant Bit

FFT	Fast Fourier Transform (schnelle Fourier-Transformation)
FIR	Finite Impulse Response (System mit endlicher Impulsantwort)
IIR	Infinite Impulse Response (System mit unendlicher Impulsantwort)

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

\bar{P}_Q	Mittlere Rauschleistungsdichte des Positionsrauschens	rad^2/Hz
$\Delta\hat{y}_{LP,i_{LP}}$	Amplitude des langperiodischen Messfehlers	rad
$\Delta\hat{y}_{SP,i_{SD}}$	Amplitude des Unterteilungswinkelfehlers	rad
Δy_{LP}	Langperiodischer Positionsmessfehler	m,rad
Δy_P	Gesamter Positionsmessfehler	m,rad
Δy_{SP}	Positionsmessfehler in einer Signalperiode	m,rad
\hat{c}_T	Drehmomentkonstante (nominell)	Nm/A
\hat{J}_T	Massenträgheitsmoment (nominell)	kgm^2
\hat{u}_n	Nominelle Signalamplitude	V
\hat{u}_1^*	Amplitude Messsignal 1 (normiert)	-
\hat{u}_2^*	Amplitude Messsignal 2 (normiert)	-
\hat{u}_m^*	Amplitude einer Signaloberwelle der Ordnung m (normiert)	-
$a_{i_{SD}}$	Koeffizient der Fourier-Reihe des Unterteilungswinkelfehlers	-
$b_{i_{SD}}$	Koeffizient der Fourier-Reihe des Unterteilungswinkelfehlers	-
c_φ	Steifigkeit in Torsionsrichtung	Nm/rad
c_φ^{dyn}	Dynamische Drehfedersteifigkeit	Nm/rad
d_φ	Materialdämpfung in Torsionsrichtung	Nm/rad/s
d_φ	Torsionsmoment	Nm
f_{MS}	Frequenz der Messsignale	Hz
G_F	Übertragungsfunktion Tiefpassfilter (zeitkontinuierlich)	-
H_F	Übertragungsfunktion Tiefpassfilter (zeitdiskret)	-
i_{LP}	Ordnung des langperiodischen Messfehlers	-
i_{SD}	Ordnung der Oberschwingung des Positionsmessfehlers in einer Signalperiode	-
J_L	Massenträgheitsmoment (Lastmaschine)	kgm^2
K_P	Proportionalverstärkung Positionsregelung	1/s

K_S	Proportionalverstärkung Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung	A/rad/s, A/m/s
K_S^*	Proportionalverstärkung Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung (normiert)	1/s
K_C	Proportionalverstärkung Stromregelung	V/A
m^*	Ordnung einer Signaloberwelle (normiert)	-
N_{ADC}	Wortbreite A/D-Wandler	Bit
N_{ADC}	Wortbreite der A/D-Wandlung	Bit
n_{Mo}	Motordrehzahl	s ⁻¹
N_{SD}	Wortbreite der Unterteilung	Bit
P	Modell der Regelstrecke	-
P_Q	Rauschleistung des Positionsrauschens	rad ²
q_u	Spannungsauflösung	V
q_u	Spannungsauflösung	V
q_P	Positionsauflösung	m,rad
T_Σ	Summenzeitkonstante	s
T_S^*	Modifizierte Abtastperiode	s
T_{CC}	Ersatzzeitkonstante Stromregelung	s
T_{FA}	Filterzeitkonstante Beschleunigungssignal	s
T_{FP}	Filterzeitkonstante Signalfilter Position	s
T_F	Filterzeitkonstante Tiefpassfilter	s
T_{NC}	Nachstellzeit Stromregelung	s
T_{NS}	Nachstellzeit Drehzahl- bzw. Geschwindigkeitsregelung	s
u	Stellgröße der Regelung	-
u_1	Messsignal 1	V
u_1^*	Messsignal 1 (normiert)	-
u_2	Messsignal 2	V
u_2^*	Messsignal 2 (normiert)	-
U_M	Messbereich A/D-Wandler	V
U_M	Messbereich eines A/D-Wandlers	V
U_{10}^*	Nullpunktabweichung Messsignal 1 (normiert)	-
u_{1Q}^*	Quantisiertes Messsignal 1 (normiert)	-
U_{20}^*	Nullpunktabweichung Messsignal 2 (normiert)	-
u_{2Q}^*	Quantisiertes Messsignal 2 (normiert)	-
u_{FB}	Ausgangsgröße des Feedback-Reglers	-
u_{FF}	Ausgangsgröße des Vorsteuer-Filters	-
v_{Mo}	Geschwindigkeit eines Linearantriebs	m/s
x_P	Position	m,rad
x_{SP}	Signalperiode	m,rad
y_{AC}	Beschleunigung (berechnet)	rad/s ² , m/s ²

$y_{P,AK1}$	Position Abtastkopf 1	rad
$y_{P,AK2}$	Position Abtastkopf 2	rad
$y_{P,Ref}$	Position Referenzwinkelmessgerät	rad
y_P	Positionsmesswert	m,rad
y_{SP}	Position in einer Signalperiode	m,rad
z_{SP}	Anzahl der Signalperioden	-
z	Komplexe Frequenzvariable im z-Bereich	-

Griechische Buchstaben

χ_{FA}	Verhältnis der Filterzeitkonstante Beschleunigungssignal zu Abtastperiode	-
χ_F	Verhältnis Filterzeitkonstante zu Abtastperiode	-
χ_{SD}	Unterteilungsfaktor der Auswerteelektronik	-
χ_{SO}	Designparameter Drehzahlregelung	-
χ_{SP}	Signalqualität	%
$\Delta\varphi_{SD}$	Unterteilungswinkelfehler in einer Signalperiode	rad
δ_P	Dämpfung Positionsregelkreis	-
$\Delta\varphi_{PS}$	Phasenabweichung	rad
ϵ_u	Quantisierungsfehler A/D-Wandlung	V
ϵ_{u1}^*	Quantisierungsfehler Messsignal 1 (normiert)	-
ϵ_{u2}^*	Quantisierungsfehler Messsignal 2 (normiert)	-
ω_{0P}	Kennkreisfrequenz Positionsregelkreis	rad/s
$\omega_{0,R}$	Resonanz-Kennkreisfrequenz des mechanischen Teilsystems	rad/s
$\omega_{0,T}$	Tilgungs-Kennkreisfrequenz des mechanischen Teilsystems	rad/s
Φ_{MS}	Phasenreserve Drehzahlregelung	rad
Ψ	Verhältnismäßige Dämpfung	-
σ_u^2	Quantisierungsrauschleistung	V ²
σ_u^2	Quantisierungsrauschleistung A/D-Wandlung	V ²
φ_{iLP}	Phase des langperiodischen Messfehlers	rad
φ_{iSD}	Phase des Unterteilungswinkelfehlers	rad
φ_{SD}	Unterteilungswinkel	rad
φ_{SP}	Signalperiodenwinkel	rad

Literaturverzeichnis

- [1] Norm DIN 740-2 08 1986. *Antriebstechnik; Nachgiebige Wellenkupplungen; Begriffe und Berechnungsgrundlagen*
- [2] ACKERMANN, Jürgen: *Abtastregelung*. Bd. 1: Analyse und Synthese. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982
- [3] AL-ALAOUI, Mohamad A.: Novel IIR Differentiator from the Simpson Integration Rule. In: *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS* (1994)
- [4] ANKE, Dieter: *Leistungselektronik 2. überarbeitete Auflage*. Oldenburg Verlag München, 2000
- [5] ASTRÖM, Karl J. ; WITTENMARK, Björn: *Computer-controlled Systems*. Dover, 2011
- [6] BÄHR, Alexander: Systematic error correction methods for sinusoidal encoders and their application in servo control. In: *European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, 2003
- [7] BÄHR, Alexander: *Speed Acquisition Methods for High-Bandwidth Servo Drives (Drehzahlerfassungsmethoden für Servoantriebe hoher Bandbreite)*, Technische Universität Darmstadt Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Diss., 2004
- [8] BARKER, R.H.: The pulse transfer function and its application to sampling servo systems. In: *Proceedings of the IEE - Part IV: Institution Monographs*, 1952
- [9] BARTSCH, Hans-Jochen: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. Fachbuchverlag Leipzig, 2007
- [10] BASEL, C. von: Elektrische Drehbeschleunigungsmesser. In: *ATM Archiv für Technisches Messen* (1964)
- [11] BASLER, Stefan: *Encoder und Motor-Feedback-Systeme: Winkellage- und Drehzahlerfassung in der industriellen Automation*. Springer Vieweg, 2016
- [12] BERKEMER, Joachim: *Effektive Nutzung des Leistungspotentials von Direktantrieben bei Werkzeugmaschinen (Projekt EffeNDi) Impulsentkopplung, Beschleunigungsregelung, achsübergreifende Regelung und gekoppelte Simulation*. VDI Verlag, 2005
- [13] BODE, Hendrik W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. VAN NOSTRAND COMPANY, Inc., 1945

-
- [14] BOEHRINGER, Andreas ; SCHMIDT, Ralph: *Einrichtung und Verfahren zur Gewinnung eines dynamisch hochwertigen, teilweise synthetisierten Signals für die Beschleunigung des Läufers eines Antriebs. Deutsche Patentanmeldung Az. DE 198 51 003 A1*. 1998
- [15] BÜNTE, Andreas ; BEINEKE, Stefan: High-performance speed measurement by suppression of systematic resolver and encoder errors. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 51 (2004), Feb, Nr. 1, S. 49–53. <http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2003.822084>. – DOI 10.1109/TIE.2003.822084. – ISSN 0278–0046
- [16] CHEN, C.: High-order Taylor series approximation for efficient computation of elementary functions. In: *IET Computers & Digital Techniques* (2015)
- [17] CHEN, Wen-Hua ; YANG, Jun ; GUO, Lei ; LI, Shihua: Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods - An Overview. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2016)
- [18] CLARKE, Edith: *Circuit Analysis of A-C Power Systems. Vol. I: Symmetrical and Related Components*. J. Wiley & Sons, New York, 1943
- [19] CORRADINI, Luca ; MAKSIMOVIC, Dragan ; MATTAVELLI, Paolo ; ZANE, Regan: *Digital Control of High-Frequency Switched-Mode Power Converters*. IEEE Press Series on Power Engineering, 2015
- [20] DAABOUL, Yaser ; SCHUMACHER, Walter: High-Performance Position Evaluation for High Speed Drives via Systematic Error Correction Methods of Optical Encoders. In: *15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, 2013
- [21] DENNE, A. ; RAUSCH, H. ; FREISE, W.: Aufnehmer zur Messung schnell veränderlicher Drehbeschleunigungen und Drehmomente / Measuring of dynamic angular acceleration and torque. In: *tm - Technisches Messen* (1981)
- [22] DINECHIN, Florent D. ; ISTOAN, Matei: Hardware implementations of fixed-point Atan2. In: *22nd IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, 2015
- [23] DOYLE, John C. ; FRANCIS, Bruce A. ; TANNENBAUM, Allen R.: *Feedback Control Theory*. Macmillan, 1992
- [24] DR. JOHANNES HEIDENHAIN GMBH: *Vorrichtung zur Erzeugung oberwellenfreier periodischer Signale*. Traunreut, 1992
- [25] DR. JOHANNES HEIDENHAIN GMBH (Hrsg.): *Resultierende Positionsabweichung nach abschnittsweiser linearer Fehlerkompensation beim LIDA 400*. Traunreut: Dr. Johannes Heidenhain GmbH, Juli 2008
- [26] DR. JOHANNES HEIDENHAIN GMBH (Hrsg.): *Messgeräte für elektrische Antriebe*. Traunreut: Dr. Johannes Heidenhain GmbH, November 2016

- [27] DÖRRSCHEIDT, Frank ; LATZEL, Wolfgang: *Grundlagen der Regelungstechnik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1993
- [28] DSPACE GMBH (Hrsg.): *dSPACE AC Motor Control Solution, Release 13.2*. Paderborn, Deutschland: dSPACE GmbH, Dezember 2013
- [29] DSPACE GMBH (Hrsg.): *DS3001/DS3002 Incremental Encoder Interface Boards*. Paderborn, Deutschland: dSPACE GmbH, 2017
- [30] ERNST, Alfons: *Digitale Längen- und Winkelmeßtechnik: Positionsmeißsysteme für den Maschinenbau und die Elektronikindustrie, 3. Auflage*. Landsberg/Lech : verlag moderne industrie, 1998
- [31] FISCHER, Rolf: *Elektrische Maschinen*. Hanser Verlag München, 2009
- [32] FRIEDMANN, Jan T.: *Reduktion des Sensorikbedarfs in der industriellen Antriebstechnik*, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik der Technischen Universität München, Diss., 2016
- [33] GAMBACH, Herbert: *Servoantriebe mit unterlagerter Zweipunktregelung ihrer Drehbeschleunigung*, Institut für Leistungselektronik und Anlagentechnik der Universität Stuttgart, Diss., 1993
- [34] GARCIA, D. ; KARIMI, A. ; LONGCHAMP, R.: Robust PID Controller Tuning with Specification on Modulus Margin. In: *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, 2004
- [35] GEERING, H.P. ; SHAFAI, E.: *Regelungstechnik 2*. Institut für Mess- und Regelungstechnik, ETH Zürich, 2004
- [36] GIRONES, X. ; JULIA, C. ; PUIG, D.: Full Quadrant Approximations for the Arctangent Function. In: *IEEE Signal Processing Magazine* (2013)
- [37] GRAY, Robert M.: Quantization Noise Spectra. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 36 (1990), November, Nr. 6, S. 1220–1244
- [38] GRÖLING, Ch. ; DAABOUL, Y. ; LUX ; ORLIK, T. ; SCHUMACHER, W.: High-performance position evaluation of optical encoders via CORDIC algorithm and oversampling techniques on an FPGA. In: *13th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, 2009
- [39] HÄFFNER, Jürgen: *Reaktionsschnelle Linear-Direktantriebe mit unterlagerter Regelung ihrer Drehbeschleunigung*, Institut für Leistungselektronik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart, Diss., 2002

- [40] HAGIWARA, Nobumi ; SUZUKI, Yoshihisa ; MURASE, Hideaki: A Method of Improving the Resolution and Accuracy of Rotary Encoders Using a Code Compensation Technique. In: *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT* (1992)
- [41] HAGL, Rainer: *Elektrische Antriebstechnik 2. Auflage*. München : Hanser, 2015
- [42] HÜBNER ELEKTROMASCHINEN AG: *Vorrichtung zum Gewinnen weitgehend oberwellenfreier periodischer Signale*. 1995
- [43] HEYDEMANN, P. L. M.: Determination and correction of quadrature fringe measurement errors in interferometers. In: *Applied Optics Vol. 20, No. 5. 3382-3384* (1981)
- [44] HOFFMANN, Josef: *MATLAB und SIMULINK in Signalverarbeitung und Kommunikationstechnik*. ADDISON-WESLEY, 1999
- [45] HOLTZ, J. ; SPRINGOB, L.: Identification and compensation of torque ripple in high-precision permanent magnet motor drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (1996). – ISSN 0278–0046
- [46] HORI, Yoichi: A Novel Servo System Design Method Based on the Acceleration Control. In: *International Conference on Industrial Electronics (IECON)*, 1988
- [47] HORI, Yoichi: Disturbance Suppression on an Acceleration Control Type DC Servo System. In: *Power Electronics Specialists Conference (PESC)*, 1988
- [48] HÖSCHELER, B.: *Entwicklung eines Prüfstandes zur Echtzeitsimulation mechanischer Systeme unter Verwendung einer hochauflösenden Lageerfassung*, Technische Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Maschinen, Diss., 2001
- [49] HWANG, K. ; WANG, H. C. ; XU, Z.: Evaluating elementary functions with Chebyshev polynomials on pipeline nets. In: *IEEE 8th Symposium on Computer Arithmetic (ARITH)*, 1987
- [50] INFINEON TECHNOLOGIES AG (Hrsg.): *Technische Informationen IGBT-Module FP35R12W2T4*. Neubiberg: Infineon Technologies AG, Oktober 2013
- [51] J. R. RENÉ MAYER: High-Resolution of Rotary Encoder Analog Quadrature Signals. In: *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT* (1994)
- [52] JENNI, Felix ; WÜEST, Dieter: *Steuerverfahren für selbstgeführte Stromrichter*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1995
- [53] JEONG, Seung-Gi ; PARK, Min-Ho: The analysis and compensation of dead-time effects in PWM inverters. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (1991)

- [54] KAVANAGH, Richard C.: Probabilistic Learning Technique for Improved Accuracy of Sinusoidal Encoders. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2001)
- [55] KENNEL, Ralph: Encoders for Simultaneous Sensing of Position and Speed in Electrical Drives With Digital Control. In: *Conference Record of the Industry Applications Conference, 40th IAS Annual Meeting* Bd. 1, 2005. – ISSN 0197–2618, S. 731–736 Vol. 1
- [56] KENNEL, Ralph: Why Do Incremental Encoders Do a Reasonably Good Job in Electrical Drives with Digital Control? In: *Conference Record of the IEEE Industry Applications Conference, 41st IAS Annual Meeting* Bd. 2, 2006. – ISSN 0197–2618, S. 925–930
- [57] KHAN, I.R. ; OHBA, R.: New design of full band differentiators based on Taylor series. In: *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing* (1999)
- [58] KNORRENSCHILD, Michael: *Numerische Mathematik*. Hanser, 2010
- [59] KOREN, Israel ; ZINATY, Ofra: Evaluating: Elementary Functions in a Numerical Coprocessor Based on Rational Approximations. In: *IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS* (1990)
- [60] KOVÁCS, K.P. ; RÁCZ, I.: *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Bd.1 und 2*. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Budapest, 1959
- [61] KRESS, Dieter ; KAUFHOLD, Benno: *Signale und Systeme verstehen und vertiefen (1. Auflage)*. Vieweg + Teubner Verlag, 2010
- [62] KTR SYSTEMS GMBH (Hrsg.): *Antriebstechnik*. Rheine: KTR Systems GmbH, 2017. www.ktr.com
- [63] KUMMETZ, Jens ; BRÜCKNER, Hubert: Beschleunigungsrückführung für Direktantriebe auf der Basis hochauflösender Längenmessgeräte. In: *SPS/IPC/DRIVES Kongress*, 2008
- [64] LEHNER, Wof-Dieter: *Regelung von Vorschubachsen unter Verwendung der Relativbeschleunigung*, Universität Stuttgart, Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen, Diss., 2004
- [65] LIU, Steven: An On-line Reference-Trajectory Generator for Smooth Motion of Impulse-Controlled Industrial Manipulators. In: *7th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, 2002
- [66] LUENBERGER, David G.: Observing the State of a Linear System. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* (1964)
- [67] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1*. Springer, 2001

- [68] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2 - Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer, 2002
- [69] LUTZ, Holger ; WENDT, Wolfgang: *Taschenbuch der Regelungstechnik*. Verlag Harri Deutsch, 2010
- [70] LYONS, Richard: Another contender in the arctangent race. In: *IEEE Signal Processing Magazine* (2004)
- [71] MAIER, Sebastian: *Adaptive Kompensation sinusförmiger Störungen im Antriebsstrang von Robotern*, Fakultät für Informatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT), Diss., 2011
- [72] MALOBERTI, Franco: *Data Converters*. Springer, 2008
- [73] MÜLLER, Kai: *Entwurf robuster Regelungen*. Teubner, 1996
- [74] MOHTADI, C.: Bode's integral theorem for discrete-time systems. In: *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications* (1990)
- [75] MURAI, Y. ; WATANABE, T. ; IWASAKI, H.: Waveform Distortion and Correction Circuit for PWM Inverters with Switching Lag-Times. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* (1987)
- [76] OHISHI, Kiyoshi ; MIYAZAKI, Masaru ; FUJITA, Masahiro ; OGINO, Yasumasa: H^∞ Observer based Force Control without Force Sensor. In: *International Conference on Industrial Electronics (IECON)*, 1991
- [77] OHISHI, Kiyoshi ; NAKAO, Masato ; OHNISHI, Kouhei ; MIYACHI, Kunio: Microprocessor-Controlled DC Motor for Load-Insensitive Position Servo Systems. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (1987)
- [78] PARK, Robert H.: Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* (1929)
- [79] PELGROM, Marcel J.: *Analog-to-Digital Conversion*. Springer, 2010
- [80] PHILIPP, Werner: *Regelung mechanisch steifer Direktantriebe für Werkzeugmaschinen*, Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen, Universität Stuttgart, Diss., 1992
- [81] PROBST, A.: *Untersuchungen zur Verbesserung des Lastverhaltens elektrischer Antriebe am Beispiel einer mikrorechnergeregelten Asynchronmaschine*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 1994

- [82] RABINER, Lawrence R. ; STEIGLITZ, Kenneth: The Design of Wide-Band Recursive and Nonrecursive Digital Differentiators. In: *IEEE TRANSACTIONS ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS* (1970)
- [83] RAJAN, Sreeraman ; WANG, Sichun ; INKOL, Robert: Efficient Approximations for the Four-Quadrant Arctangent Function. In: *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*, 2006
- [84] RAJAN, Sreeraman ; WANG, Sichun ; INKOL, Robert ; JOYA, Alain: Efficient Approximations for the Arctangent Function. In: *IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZIN* (2006)
- [85] RODRIGUES, M. R. D. ; ZURAWSKI, J. H. P. ; GOSLING, J. B.: Hardware evaluation of mathematical functions. In: *IEE Proceedings E - Computers and Digital Techniques* (1981)
- [86] SABANOVIC, Asif ; OHNISHI, Kouhei: *Motion Control Systems*. John Wiley & Sons, 2011
- [87] SANCHEZ-BREA, Luis M. ; MORLANES, Tomas: Metrological errors in optical encoders. In: *Measurement Science and Technology* 19 (2008), Nr. 11. <http://stacks.iop.org/0957-0233/19/i=11/a=115104>
- [88] SCHMIDT, Peter B. ; LORENZ, Robert D.: Design Principles and Implementation of Acceleration Feedback to Improve Performance of dc Drives. In: *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRY APPLICATIONS* (1992)
- [89] SCHMIDT, Ralph: *Neue Beiträge zu Servoantrieben mit unterlageter Zweipunktregelung ihrer Drehbeschleunigung*, Institut für Leistungselektronik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart, Diss., 1999
- [90] SCHMIRGEL, Heiko ; KRAH, Jens O.: Compensation of Nonlinearities in the IGBT Power Stage of Servo Amplifiers through Feed Forward Control in the Current Loop. In: *PCIM Europe*, 2005
- [91] SCHÖNFELD, Rolf ; HOFMANN, Wilfried: *Elektrische Antriebe und Bewegungssteuerungen*. VDE Verlag GmbH, 2005
- [92] SCHRÖDER, Dierk: *Elektrische Antriebe - Grundlagen 4. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [93] SCHRÖDER, Dierk: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-89613-5>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-89613-5>. – ISBN 978-3-540-89612-8

-
- [94] SCHWARZ, Bernhard: *Beiträge zu reaktionsschnellen und hochgenauen Drehstrom-Positioniersystemen*, Institut für Leistungselektronik und Anlagentechnik der Universität Stuttgart, Diss., 1986
- [95] SENSITEC GMBH (Hrsg.): *CDS4025 MagnetoResistive Current Sensor*. Lahnu: Sensitec GmbH, Februar 2016
- [96] SPITZ, Martin: *Modellbasierte Lebensdauerprognose für dynamisch beanspruchte Elastomerbauteile*, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Diss., 2012
- [97] SPRINGOB, Lothar ; HOLTZ, Joachim: High-Bandwidth Current Control for Torque-Ripple Compensation in PM Synchronous Machines. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (1998)
- [98] STEIN, Gunter: Respect the Unstable. In: *IEEE Control Systems Magazine* (2003)
- [99] UKIL, A. ; SHAH, V. H. ; DECK, B.: Fast computation of arctangent functions for embedded applications: A comparative analysis. In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2011
- [100] UMENO, Takaji ; HORI, Yoichi: Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design. In: *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS* (1991)
- [101] VOLDER, Jack E.: The CORDIC Trigonometric Computing Technique. In: *IRE TRANSACTIONS ON ELECTRONIC COMPUTERS* (1959)
- [102] WECKERT, Marco ; WEISSER, Dominic ; ROTH-STIELOW, Jörg: Unterlagerte Beschleunigungsregelung zur Erhöhung der Störsteifigkeit von Linear Direktantrieben ohne zusätzliche Sensorik. In: *SPS/IPC/DRIVES Kongress*, 2008
- [103] WESTCOTT, J. H.: The Development of Relationships Concerning the Frequency Bandwidth and the Mean Square Error. In: *Automatic and Manual Control* (1952)
- [104] WILHELMY, Lothar ; SAWITZKI, Uwe: Der Rest ist Rauschen. In: *KEM Automatisierung* (1996)
- [105] WITTMANN, Josef ; HAGL, Rainer: Gleichlaufschankungen in Servoantrieben. In: *FORTSCHRITTE IN DER ANTRIEBS- UND AUTOMATISIERUNGSTECHNIK (FAA)*. Stuttgart, 2016
- [106] WITTMANN, Josef ; HAGL, Rainer: Positionsmessfehler in Servoantrieben. In: *Vereinigte Fachverlage, Mainz; Antriebstechnik* (2016), Januar-Februar

-
- [107] WITTMANN, Josef ; HAGL, Rainer ; KENNEL, Ralph: Hybrid Current and Acceleration Control of Servo Drives. In: *International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Renewable Energy and Energy Management PCIM Europe*, 2017
- [108] ZHAO, Hengbing ; WU, Q. M. J. ; KAWAMURA, A.: An accurate approach of nonlinearity compensation for VSI inverter output voltage. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* (2004)
- [109] ZHU, Z.Q. ; HOWE, D.: Influence of design parameters on cogging torque in permanent magnet machines. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 15 (2000), Dec, Nr. 4, S. 407–412. <http://dx.doi.org/10.1109/60.900501>. – DOI 10.1109/60.900501. – ISSN 0885–8969