

# **Lehrveranstaltungen**

# **Statik 3 + 4**

## **(Stabtragwerke)**

Vorlesungen und Übungen  
des Lehrstuhls für Statik der TUM

gehalten WS 1988/89 bis SS 1999  
von o. Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich  
und Mitarbeitern

## **Statik 3 + 4 (Stabtragwerke)**

Teil 1: Vorlesungsumdruck und Manuskriptseiten

Teil 2: Beispiele aus Übungen

Teil 3: Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen

## **Gliederung der Lehrveranstaltungen Baustatik 3/4** (Studienjahr 1998/99)

### **1. Einführung**

- 1.1 "Klassische Statik" – "Computerstatik"
- 1.2 Modellbildung
- 1.3 Grundgleichungen
- 1.4 Methoden
- 1.5 Studienbegleitende Computerprogramme

### **2. Räumliche Tragwerke**

- 2.1 Räumliche Stabtragwerke
  - 2.1.1 Grundlegende Beziehungen zur Torsion
  - 2.1.2 Räumlich beanspruchter Brückenträger
- 2.2 Trägerroste
  - 2.2.1 Idealisierung von Tragwerken im Brückenbau und im Hochbau
  - 2.2.2\* Berechnung einer zweistegigen Plattenbalkenbrücke mit einem Trägerrostmodell
  - 2.2.3\* Vergleich eines torsionssteifen Hohlkastens mit einem torsionsweichen Plattenbalken gleicher Biegesteifigkeit
  - 2.2.4\* Einfluß der Laststellung in Querrichtung des Systems
- 2.3\* Allgemeines zum Prinzip der virtuellen Arbeit
  - 2.3.1\* Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) für den Balken
  - 2.3.2\* Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte in Gestalt des Arbeitssatzes der Statik
  - 2.3.3\* Das Prinzip der virtuellen Kräfte als Lösungsverfahren am Gesamtsystem
- 2.4\* Vergleich des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV) mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) am Balken

### **3. Übertragungsverfahren**

- 3.1 Einführung
- 3.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren des Balkenelements
- 3.3 Rechengang des Übertragungsverfahrens am Beispiel des Trägers mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit
- 3.4 Träger auf nachgiebigen Lagern mit eingepprägten Sprunggrößen
- 3.5\* Hinweise zur Berechnung von Trägern mit Zwischenbedingungen
- 3.6\* Herleitung von Übertragungsmatrix und Lastvektoren durch Integration des Differentialgleichungssystems 1.Ordnung
- 3.7 Übertragungsmatrizen und Lastvektoren für spezielle Trägerarten
- 3.8 Eigenschaften und numerisches Verhalten des Übertragungsverfahrens
- 3.9\* Rechnerorientierte Aufbereitung

\* Skriptteile im Anhang

## **4 Weggrößenverfahren mit einem Freiheitsgrad: Drehwinkelverfahren**

- 4.1 Einführung, Vergleich der Vorgehensweise beim Kraftgrößenverfahren mit dem Weggrößenverfahren
- 4.2 Bezeichnungen und Definitionen
- 4.3 Durchlaufträger als Einführungsbeispiel
- 4.4 Balkenelement mit verschieblichen Knoten

## **5 Allgemeines Weggrößenverfahren**

- 5.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Grundlage des Weggrößenverfahrens
- 5.2 Steifigkeitswerte von Stäben – Steifigkeitsmatrix
  - 5.2.1 Herleitung der Biegeanteile mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen
  - 5.2.2 Herleitung der Biegeanteile aus der Übertragungsmatrix
  - 5.2.3 Näherungsweise Ermittlung der Biegeanteile durch Ansätze
  - 5.2.4 Herleitung der Längskraftanteile der Steifigkeitsmatrix
  - 5.2.5 Zusammenfassung zur Steifigkeitsmatrix des Biegeträgers unter Normalkraftbeanspruchung (Theorie I. Ordnung)
- 5.3 Transformation von Zustandsgrößen
- 5.4 Knotengleichgewicht unter Berücksichtigung der Systemgeometrie
- 5.5 Systemberechnung am Beispiel eines ebenen Rahmens
- 5.6 Programmtechnische Realisierung
- 5.7 Kopplung von Freiheitsgraden (Teilelimination)

## **6. Spezielle Tragsysteme**

- 6.1 Ebene Fachwerke
  - 6.1.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen
  - 6.1.2 Beispiele zum Tragverhalten
- 6.2 Träger auf elastischer Bettung
  - 6.2.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen
  - 6.2.2 Beispiele zum Tragverhalten
- 6.3 Ebene Rahmen
  - 6.3.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen
  - 6.3.2 Beispiele zum Tragverhalten
- 6.4 Trägerroste
  - 6.4.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen
- 6.5 Kreisringträger
  - 6.5.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen
  - 6.5.2 Beispiele zum Tragverhalten
- 6.6 Kreisbogenträger
  - 6.6.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

## **7. Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken (Theorie II.Ordnung)**

- 7.1 Einführung
  - 7.1.1 Nichtlinearitäten in den grundlegenden Beziehungen der Statik
  - 7.1.2 Einführende Beispiele
  - 7.1.3 Grundlagen – Theorie II. Ordnung
- 7.2 Grundgleichungen des ebenen Stabes (Theorie II.Ordnung)
  - 7.2.1 Definition von Transversal- und Longitudinalkräften
  - 7.2.2 Lokale Form (Differentialgleichung)
  - 7.2.3 Globale Form – Prinzip der virtuellen Verschiebungen
  - 7.2.4 Äquivalenz: Prinzip der virtuellen Verschiebungen – Differentialgleichung
- 7.3 Elementeigenschaften nach Theorie II.Ordnung
  - 7.3.1 Übersicht: Wege zur Ermittlung von Element-Eigenschaften
  - 7.3.2 Ermittlung der Stabsteifigkeiten  $k$  mittels Ansätzen
  - 7.3.3 Ermittlung von  $k$  und  $U$  mittels analytischer Lösung der Differentialgleichungen
  - 7.3.4 Ermittlung von  $k$  und  $U$  mittels direkter Reihenintegration
- 7.4 Systemberechnung nach dem Weggrößenverfahren Th. II. O.
- 7.5 Beispiele zum Tragverhalten
- 7.6 Theorie II. Ordnung in den baustoffbezogenen Normen
- 7.7 Verzweigungsprobleme
  - 7.7.1 Bedingung für Gleichgewichtsverzweigung
  - 7.7.2 Ermittlung der Verzweigungslasten
- 7.8 Allgemeines Stabilitätskriterium
- 7.9 Geometrisch nichtlineare Theorie (Beispiele)

## **8. Theorie und Berechnung dünner Platten – Einführung**

- 8.1 Definitionen und Tragverhalten
- 8.2 Grundgleichungen
- 8.3 Spezielle Lösungen für Kreis- und Kreisringplatten
- 8.4 Spezielle Lösungen für Rechteckplatten
- 8.5 Näherungsverfahren
- 8.6 Einflußflächen

## Literatur zu Baustatik 3/4

### Lehrbücher

#### Stabstatik:

- [1] *Pflüger, A.*: Statik der Stabtragwerke, Springer Verlag, Berlin 1978.
- [2] *Pflüger, A., Spitzer, H.*: Beispielrechnungen zur Statik der Stabtragwerke, Springer Verlag, Berlin 1984.
- [3] *Rothe, A.*: Stabstatik für Bauingenieure, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1980.
- [4] *Lawo, M., Thierauf, G.*: Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik, Teil 1 Statik, Vieweg 1980.
- [5] *Rothert, H., Gensichen, V.*: Nichtlineare Stabstatik, Springer Verlag, Berlin 1987.
- [6] *Timoshenko, S.P., Young, D.H.*: Theory of Structures, McGraw Hill, 1965.
- [7] *Krätzig, W.B., Wittek, U.*: Tragwerke 1, Springer, 1990.
- [8] *Krätzig, W.B.*: Tragwerke 2, Springer, 1990.

#### Flächentragwerke:

- [9] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke. Springer Verlag Wien 1963 (6.Auflage)
- [10] *Marguerre, K., Woernle, H.T.*: Elastische Platten, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1975.
- [11] *Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S.*: Theory of Plates and Shells, McGraw Hill 1959.
- [12] *Gould, Phillip L.*: Analysis of Shells and Plates. Springer Verlag, New York 1988.

### Nachschlage- und Tabellenwerke

- [13] *Duddeck, H. ; Ahrens, H.* : Statik der Stabtragwerke. Betonkalender 1988 Teil I (77. Jahrgang). Ernst und Sohn Berlin 1988, 295–429.
- [14] *Ahrens, H.; Duddeck, H.* : Berechnung von Stabtragwerken. Betonkalender 1980 Teil II (69. Jahrgang). Ernst und Sohn Berlin 1980, 511–618.
- [15] *Hees, G., Pohlmann, G.*: Baustatik. In "Hütte, Taschenbücher der Technik", Bd. IV, Konstruktiver Ingenieurbau 1: Statik, Springer Verlag, Berlin 1988.
- [16] *Schneider K.-J. (Hrsg.)*: Bautabellen. Werner Ingenieur-Texte, Düsseldorf 1988.

## Literaturhinweise für Durchlaufträger und Rahmen

Standard-Tabellenwerke für Durchlaufträger und ebene Rahmen :

- [1] *Duddeck H., Ahrens H.*: Statik der Stabtragwerke. Betonkalender 1982,1985,1988 I. Berlin: Ernst u. Sohn  
-> Nachschlagewerk : Einfeldträger gelenkig gelagert oder eingespannt, Volleinspannmomente, Belastungsglieder, Tafeln der  $\omega$ -Zahlen, Stabsteifigkeiten Theorie I./II. Ordnung, elastisch gebettete Stäbe, Durchlaufträger mit 2 bis 6 Feldern und feldweiser Belastung, ein- und mehrfeldrige Rahmen, Kehlbalkendächer
- [2] *Kleinlogel A., Haselbach W.*: Belastungsglieder. Ernst u. Sohn Berlin
- [3] *Kleinlogel A., Haselbach W.*: Rahmenformeln. 14.Auflage Ernst u. Sohn Berlin 1967 -> einhüftige Rahmen, einfeldrige Rahmen mit verschiedenen Steifigkeiten für geneigte, geknickte oder gebogene Stiele und Riegel
- [4] *Kleinlogel A., Haselbach A.*: Mehrfeldrahmen. Ernst u. Sohn, Band I, 7.Auflage 1959, Band II, 7.Auflage 1963, Berlin
- [5] *Schneider K.-J. (Hrsg.)*: Bautabellen. Werner Ingenieur-Texte Düsseldorf  
-> Einfeldträger gelenkig gelagert oder eingespannt, Volleinspannmomente, Belastungsglieder, Tafeln der  $\omega$ -Zahlen, Durchlaufträger mit 2 bis 5 Feldern und feldweiser Belastung, einfeldrige Rahmen
- [6] *Szymczyk J.*: Bogen. Arkady Warschau / Pergamon Press Oxford 1961  
-> Parabel- und Kreisbögen mit Einzellasten, Einzelmomenten und verteilten Lasten
- [7] *Wölfer K.-H.*: Elastisch gebettete Balken und Platten. Zylinderschalen. 4.Auflage Bauverlag Wiesbaden 1978
- [8] *Zellerer E.*: Durchlaufträger Schnittgrößen. 8.Auflage Ernst u. Sohn Berlin 1964 -> Durchlaufträger mit 2 bis 5 Feldern mit unterschiedlichen Stützweiten und Steifigkeiten und feldweiser Belastung
- [9] *Zellerer E.*: Durchlaufträger, Schnittgrößen für Kragarmbelastung. Ernst u. Sohn Berlin 1969

## **1. Einführung**

### **1.1 "Klassische Statik" – "Computerstatik"** (Tafelanschrieb)

### **1.2 Modellbildung** (Tafelanschrieb)

### **1.3 Grundgleichungen** (Tafelanschrieb)

### **1.4 Methoden** (Tafelanschrieb)

### **1.5 Studienbegleitende Computerprogramme** (Tafelanschrieb)

1 an der Tafel groß schreiben

## Statik 3 (2V + 1Ü)

Wandstich / <sup>Secter</sup> A. Besten Eisele Rayoldes  
Di  $10^{15} - 11^{45}$  N 1189

Di  $14^{15} - 15^{45}$  N 1190 } im  
Lehrveranstaltung } freiwilliges Tutorium } Wechsel

Inhalt vgl. Handbuch, aufbauend auf Statik 1+2

(Kraftgrößenverfahren, abschließen)

Räumliche Systeme

Übertragungsverfahren

Weißgrößenverfahren (1. Teil)

## Systematisches Aufbauen

des Formelgleichungen  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dgl. (lokal)} \\ \text{Arbeitsprinzip (global)} \end{array} \right.$

des Methoden  $\left\{ \begin{array}{l} \text{genaue Lösung} \\ \text{Näherungen} \end{array} \right.$

## Modellbildung

Systemmodell

Verstehen des Tragverhaltens

Bedeutung des Falls d. Bauinj.-wesen

Statik, Kernfach im BI

Ziel : Beanspruchungen in Strukturen  
übertragbar auch auf andere Probleme

Baustelle

Wasserschiffanlagen

Roboter

anwendbar  
, ~~übertragbar~~ auf MB

Luftfahrt

Wandel der Statik

Einsatz des Rechners

keine Last des Fahrmanns, vgl. Auto

Anforderungen des Projekts

nicht Grundlagen, keine Reduktion

Benutzungsvermögen, Kontrollen

Tragverhaltensstudien

Einkreisung des Rechners

Lernen, nicht nur "Wie"

verstehen auch "Warum"

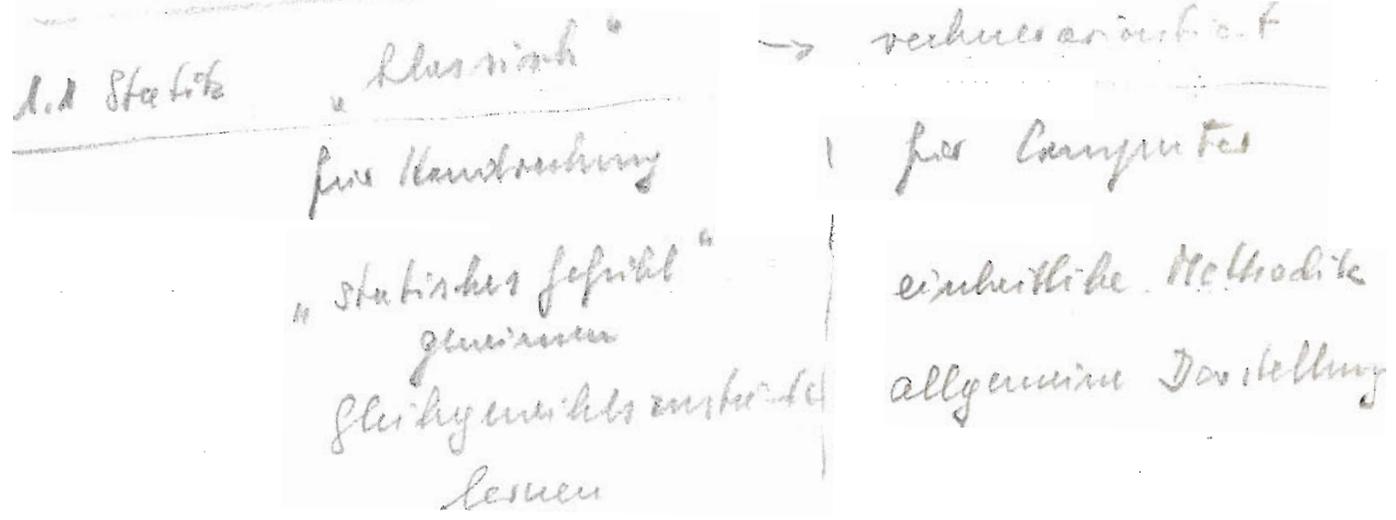
Wz: Bestimmung der Grundlagen  
(weniger Rezepturen)  
Verständnis der Zusammenhänge

Lehrveranstaltung als Einheit

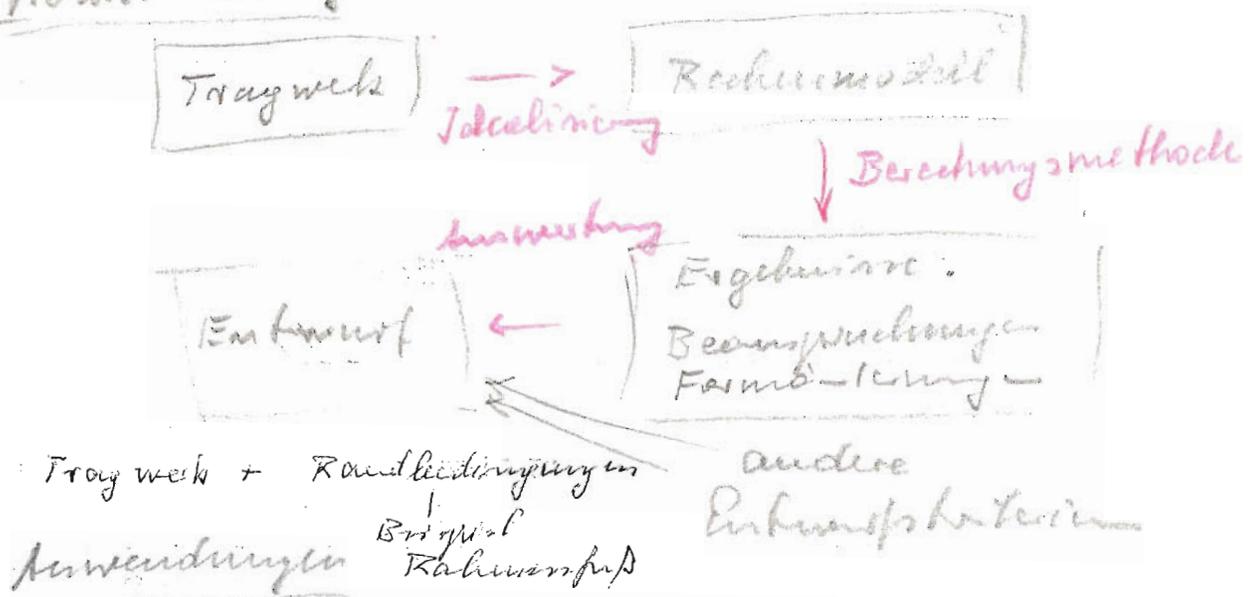
Auswertung als Arbeitsauftrag, Strukturplan

Zwischenfragen: erweiternd

1. Einführung



1.2 Modellbildung



Konstruktiver Tragwerksbau  
Grundbau, Tunnelbau  
Verkehrswege

aber auch:  
Fahrwegbau  
Luft- und Raumfahrt

1.5 Formelgleichungen des Balkens

(ebene Biegung + Torsion)



$\bar{p}_x$	$N$	$\epsilon$	$u$
$\bar{p}_z$	$Q$	$\gamma$	$w$
$(\bar{m}_y)$	$M$	$\alpha$	$\varphi$

lokale Formelgleichungen (Dgl.)

$$\begin{aligned}
 -\bar{p}_x &= N' & N &= EA \epsilon & \epsilon &= u' \\
 -\bar{p}_z &= Q' & -\bar{p}_z &= M'' & M &= EI \alpha & \alpha &= -w'' \\
 (-\bar{m}_y) &= M' - Q
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{aligned}
 Q &= k B A \gamma \\
 M &= EI \alpha
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \gamma &= w' + \varphi \\
 \alpha &= \varphi'
 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned}
 \alpha &= -w''
 \end{aligned} \right\}$$

Gleichgewicht

Stoffgesetz

Kinematik  
(Grenzwert  
Verträglichkeit)

globale Formelgleichungen (Arbeitsansatz)

Prinzip der virtuellen Verdrängungen (PvV)

$$\int (\delta \epsilon N + \delta \alpha M) dx - \int (\delta u \bar{p}_x + \delta w \bar{p}_z) = 0$$

oder

$$- \int (\delta N \epsilon + \delta M \alpha) dx + \sum (\delta P_x \bar{u} + \delta P_z \bar{w}) = 0$$

Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

# 1.4 Methoden der Statik

Grundgleichungen	Kraftverformverf.	Wegverformverf.	Überlagerungsverf.
Gleichgewicht + stat. R.B. oder $P \vee V$	Versweg zu erfüllen	Bestimmungsgleichung	Bestimmungsgleichung
Stoffgesetz	bekannt	bekannt	bekannt
Geom. Verformbeding. + geom. R.B. (Kinematik + kinem. R. B.) oder $P \vee K$	Bestimmungsgleichungen	Versweg zu erfüllen	Bestimmungsgleichung

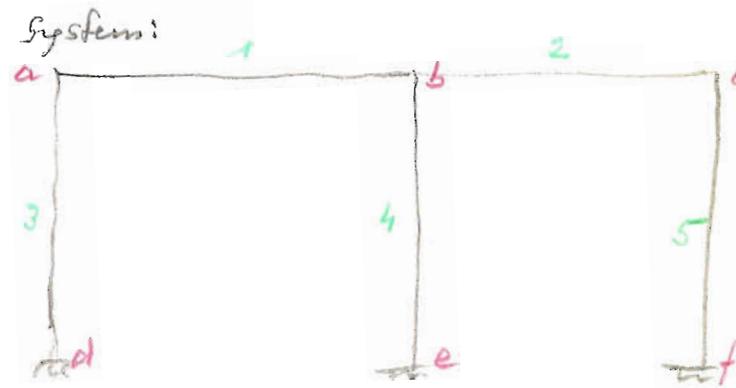
## Strukturberechnung mit Element-Konzept

$$\text{Struktur} = \sum \text{Stäbe } (1-D)$$

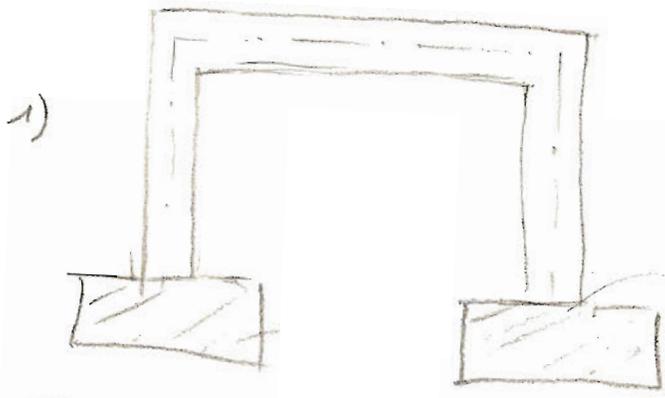
oder

$$\text{System} = \sum \text{Elemente (allgemein)}$$

Beispiel: ebenes Rahmen

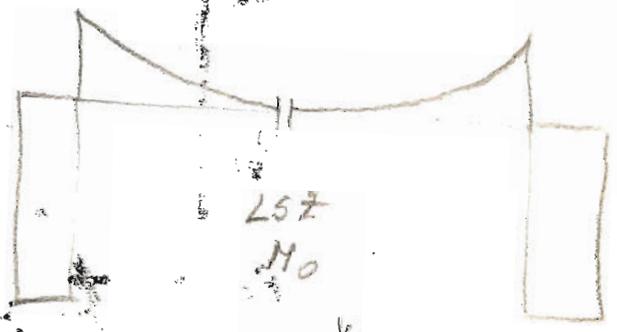
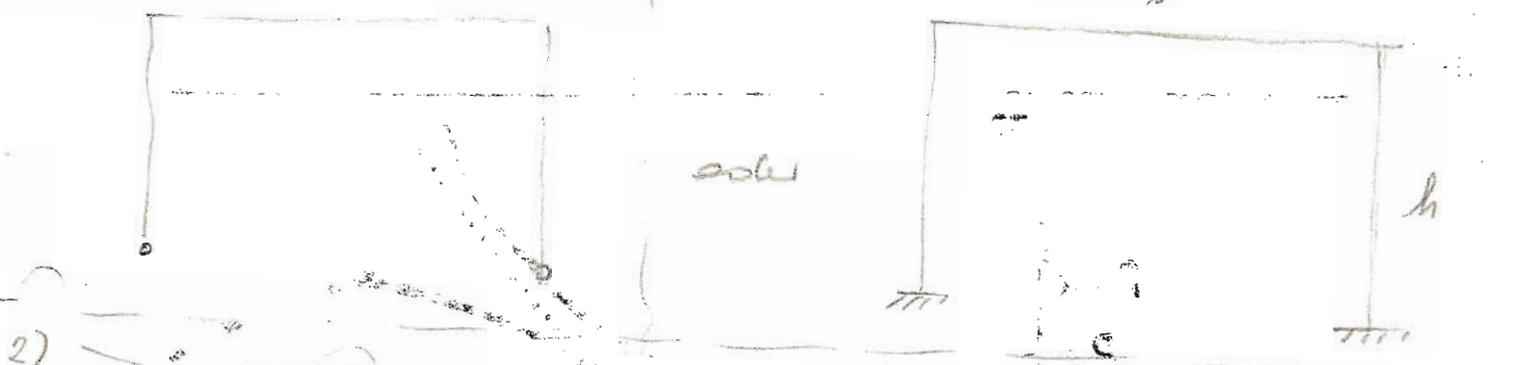


5 Stäbe  
6 Knoten



Rahmen  
z.B. Stahlbeton  
Stahl

Bild  
Höherfundament  
H

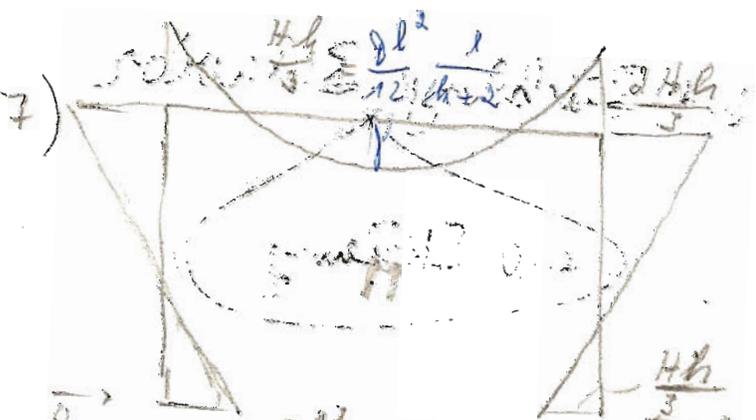


4)



5)  $\Delta_{ik}$   $\Delta_{io}$   $\left\langle \begin{matrix} EI, EA \\ EI, EA \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \infty$

6) Lösung

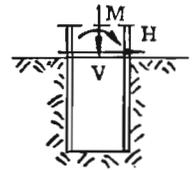


$$H = \frac{ql^2}{4h(k+2)}; k = \frac{72}{4} \frac{b}{o}$$

Moment auf der Zugseite antragen

# Stützenfüße und -verankerungen Köcherfundamente für eingespannte Stützen

SFK E 1



## Erläuterungen



Bild 1 Köcherfundamente für eingespannte Stützen

### 1. Voraussetzungen

Köcherfundamente finden im allgemeinen Stahlhochbau, speziell im Stahlhallenbau Verwendung, um Stahlstützen im Betonfundament biegesteif einzuspannen. Dabei wird nach Bild 1 im Betonfundament eine Aussparung vorgesehen, in welche die Stahlstütze eingesetzt und nach dem Ausrichten bei der Montage mit Beton vergossen wird. Bei einer solchen Ausführung ist es gegenüber sonst üblichen Lösungen mit Ankerbarren nicht erforderlich, Verankerungsmaterial und Montagepersonal für den ordnungsgemäßen Einbau in die Betonfundamente weit vor Beginn der eigentlichen Stahlbauarbeiten auf die Baustelle zu senden, was insbesondere bei Exportaufträgen sehr vorteilhaft ist.

Die Tabellen mit den für die angegebenen Fundamentlasten M, V und H erforderlichen Einspanntiefen f gelten unter folgenden Voraussetzungen:

- vorwiegend ruhende Beanspruchung der Stützen
- volle Einspannung des Stützenfußes im Betonfundament
- Walzprofile nach DIN 1025, Blatt 2; 3 und 5, im Nennhöhenbereich 200 bis 600 mm aus St 37 nach DIN 17 100
- Betongüte für das Betonfundament B 25 nach DIN 1045
- Belastungen aus Lastfall HZ entsprechend DIN 18 801 (unter der Annahme, daß die Fundamentlasten M und H primär aus Zusatzlasten resultieren)

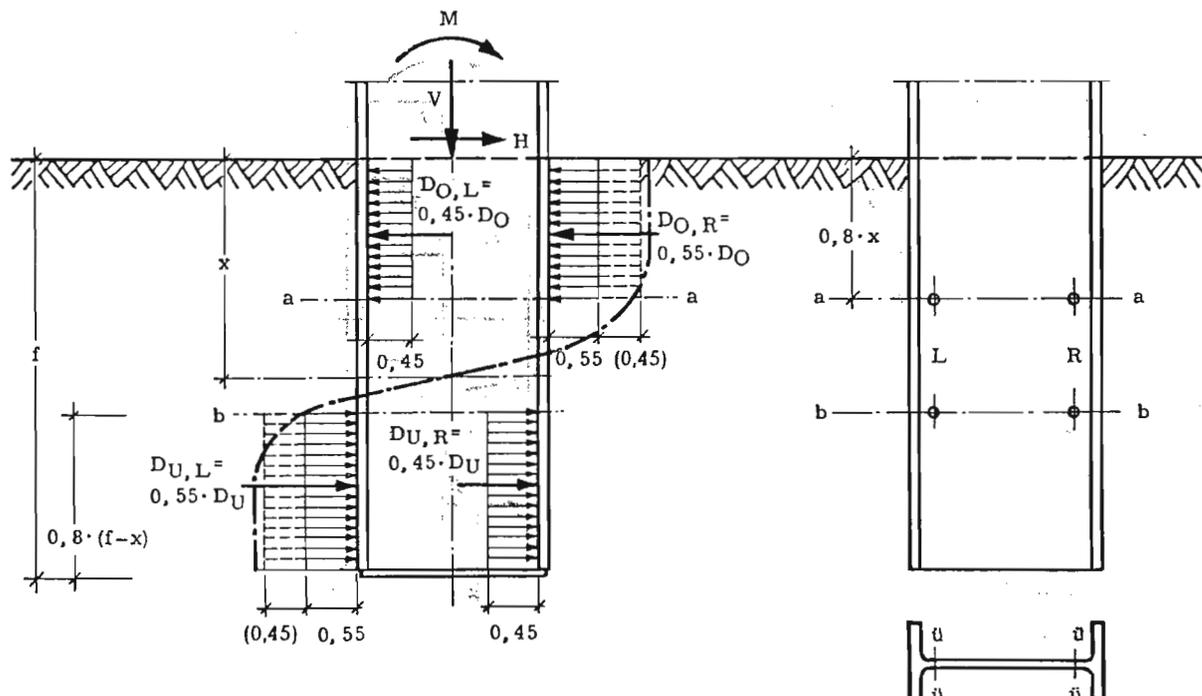
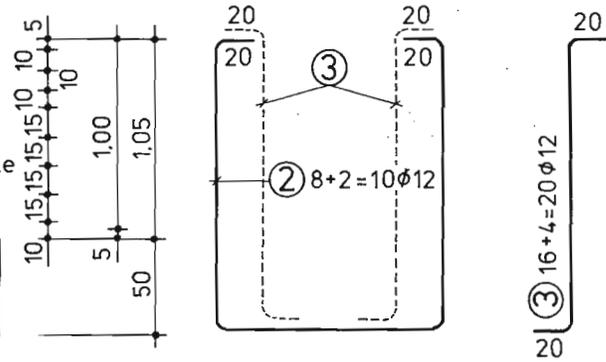
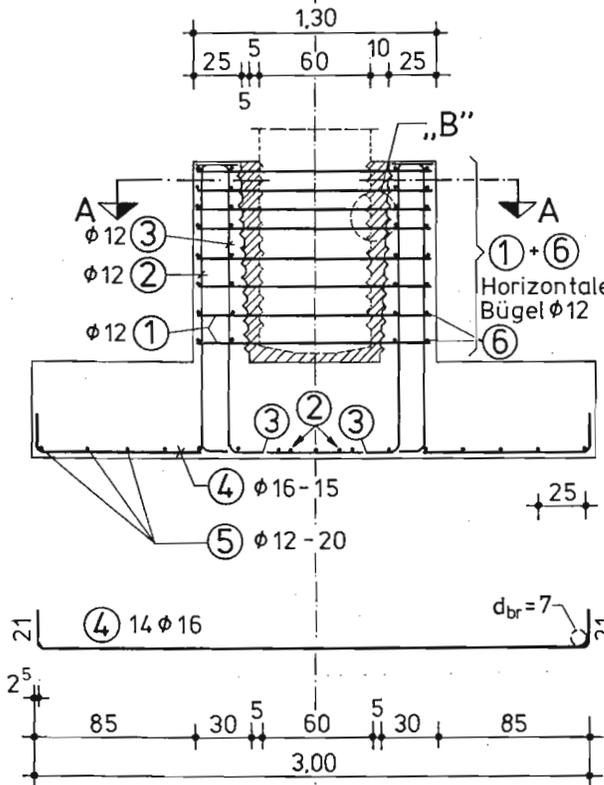


Bild 2 Verteilung der Betonpressung auf die Stützenflansche

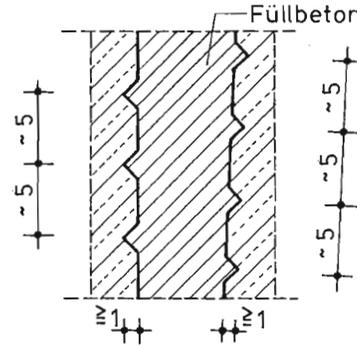


⑦ Bügelbewehrung im Stützenfuß  
 $\phi 8, s_{b\ddot{u}} \leq 20 \text{ cm} (d_{sl} \geq 20 \text{ mm})$

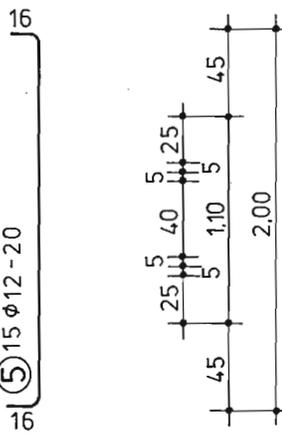
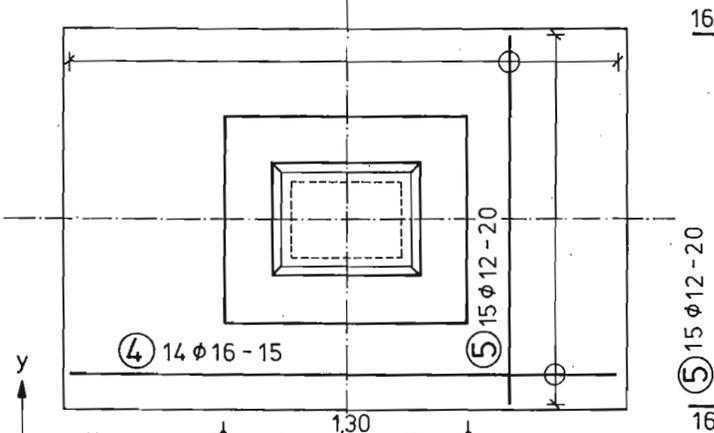
Längsschnitt



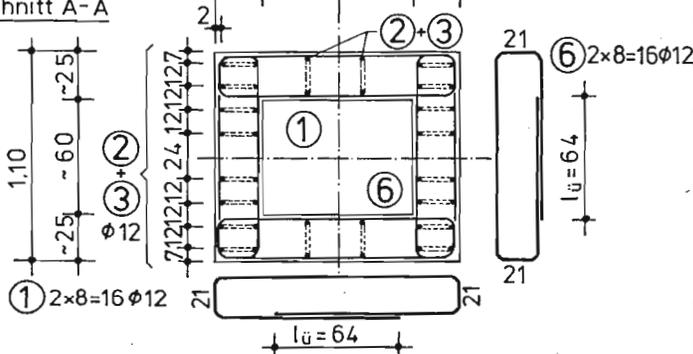
Detail „B“ Profilierung der Schalflächen



Draufsicht mit Fundamentplattenbewehrung



Schnitt A-A



Beispiel 19

Köcherfundament

Fall A (rauhe Schalflächen)

DARSTELLUNG DER BEWEHRUNG

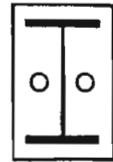
BAUSTOFFE : B 25, Bst III

BETONDECKUNG : 2cm (KÖCHER)

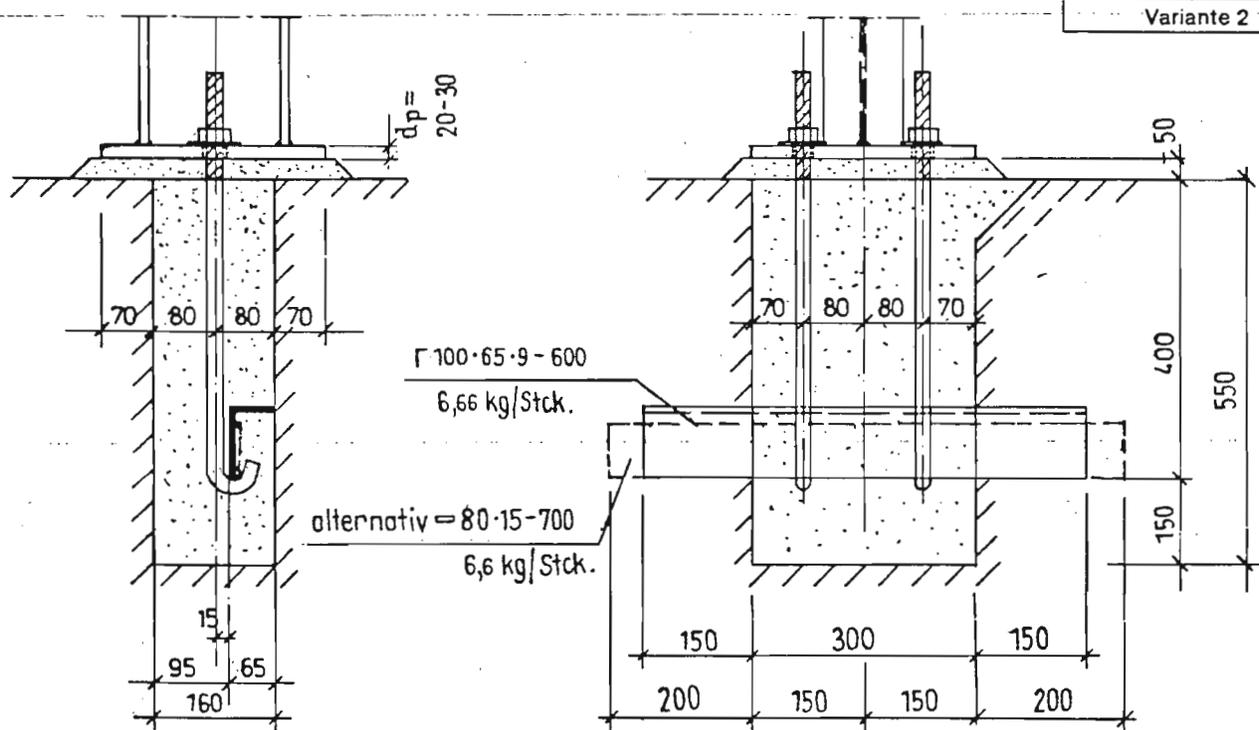
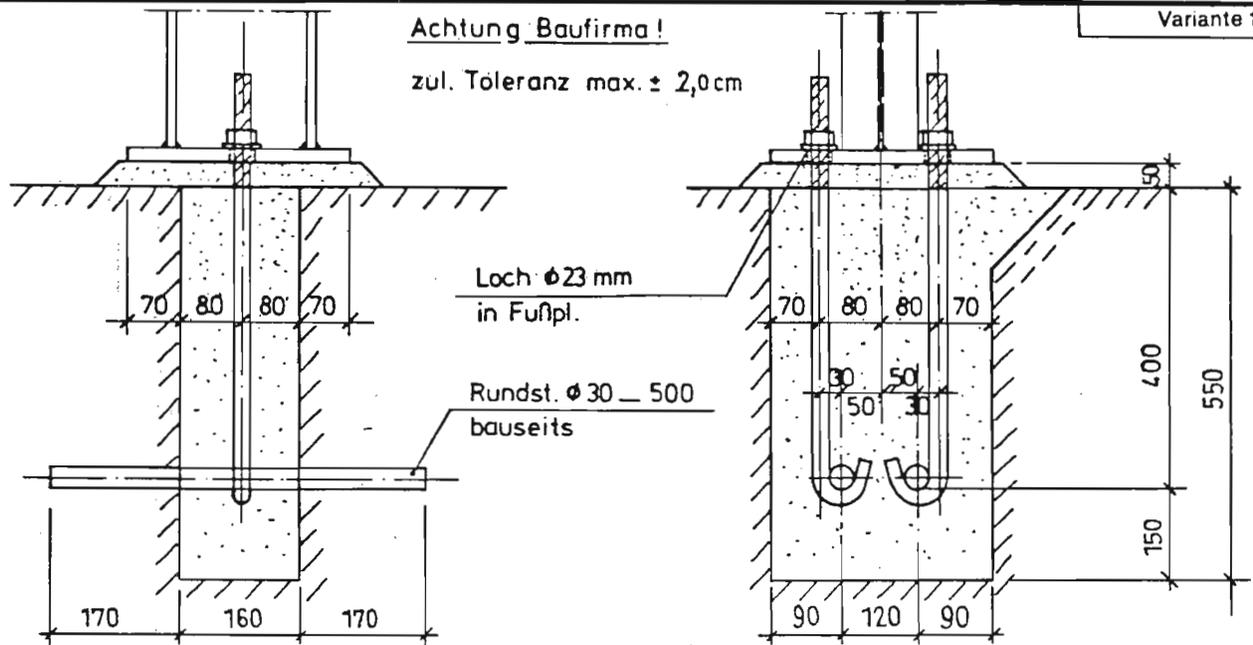
2,5cm (FUNDAMENTPLATTE)

Stützfüße und -verankerungen  
Fundamentverankerungsplan  
(gelenkige Auflager)

SF V 23  
30



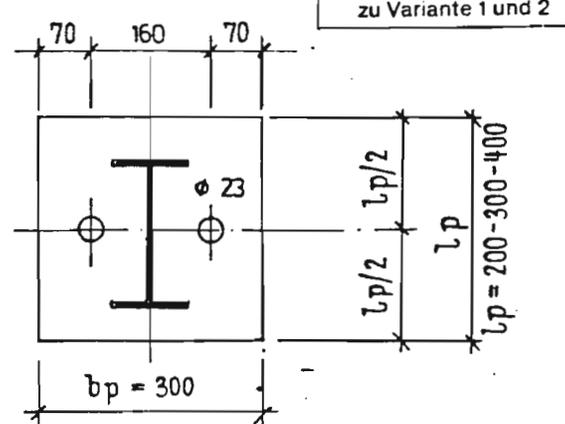
Abmessungen (Maße in mm)



Anker M 20-550 nach Blatt SF A 20  
Ankerlochdurchmesser: 23  
 $b_p = 300$   
 $l_p = 200-300-400$   
 $d_p = 20-30$

Pro Stütze 2 Pakete U-Bleche mit 50 mm Gesamtdicke  
abgeben; U-BI. 70 · 50-300 lg; 8,4 kg/Paket

Zulässige Betonpressung nach DIN 1045 für  
Bn 25: zul  $\sigma_B = 0,833$   
Bn 35: zul  $\sigma_B = 1,095$  (kN/cm<sup>2</sup>)



## 1.5 Studiengleitender Computereinsatz

Frage: Rechner zu Hause PC; Apple, Atari

Univerit: z.Z. 2 CIP - Kurse PC  
Weststationen

Weitere CIP - Kurs im Bam

Lehrprogramme: CAL (Computer Analysis Language)

DLT (Durchlaufkette)

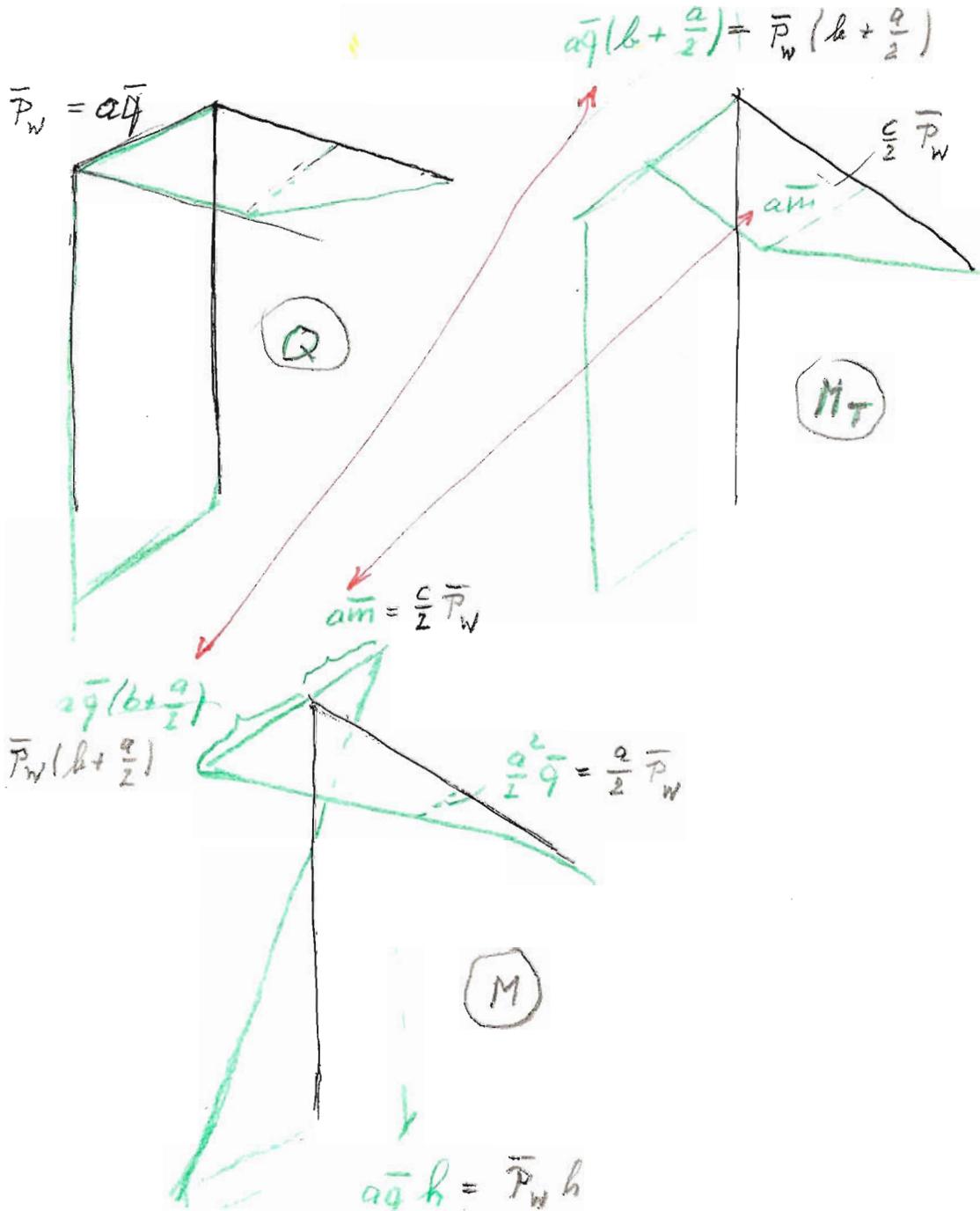
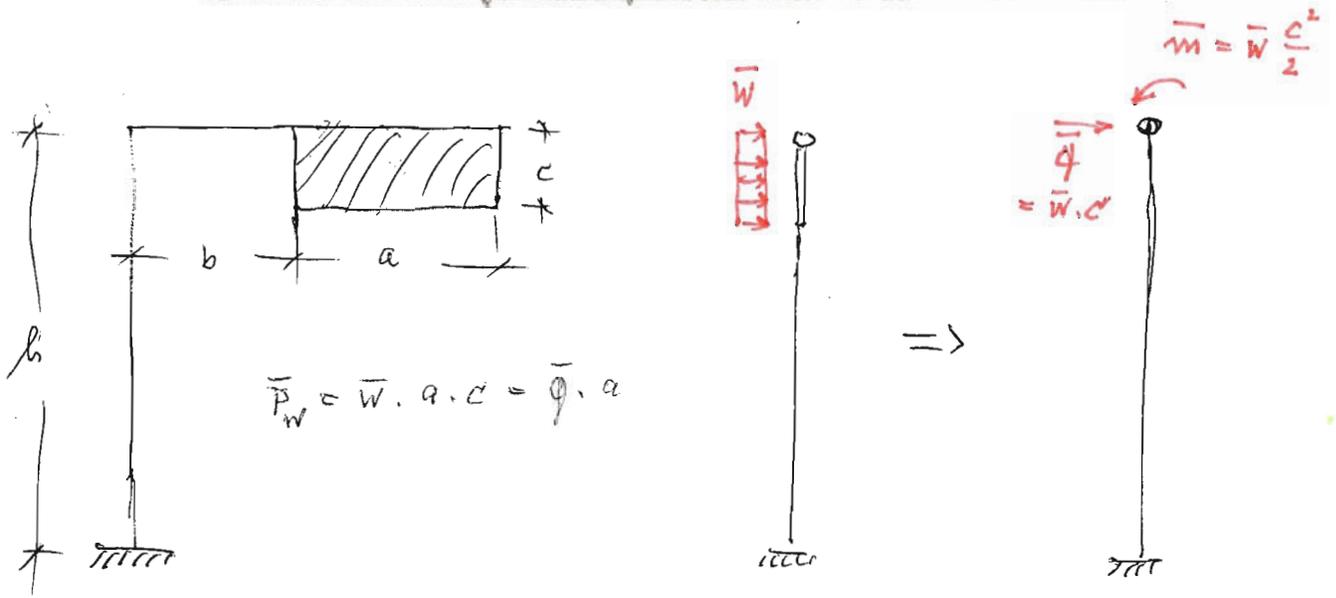
EBRAH

Fließrechner u.a.

auch Seminar und Studienarbeit

2.4.2d. Räumliche Tragwerke

Brückenbeispiel: Ankeranschlag



## 2. Räumliche Tragwerke

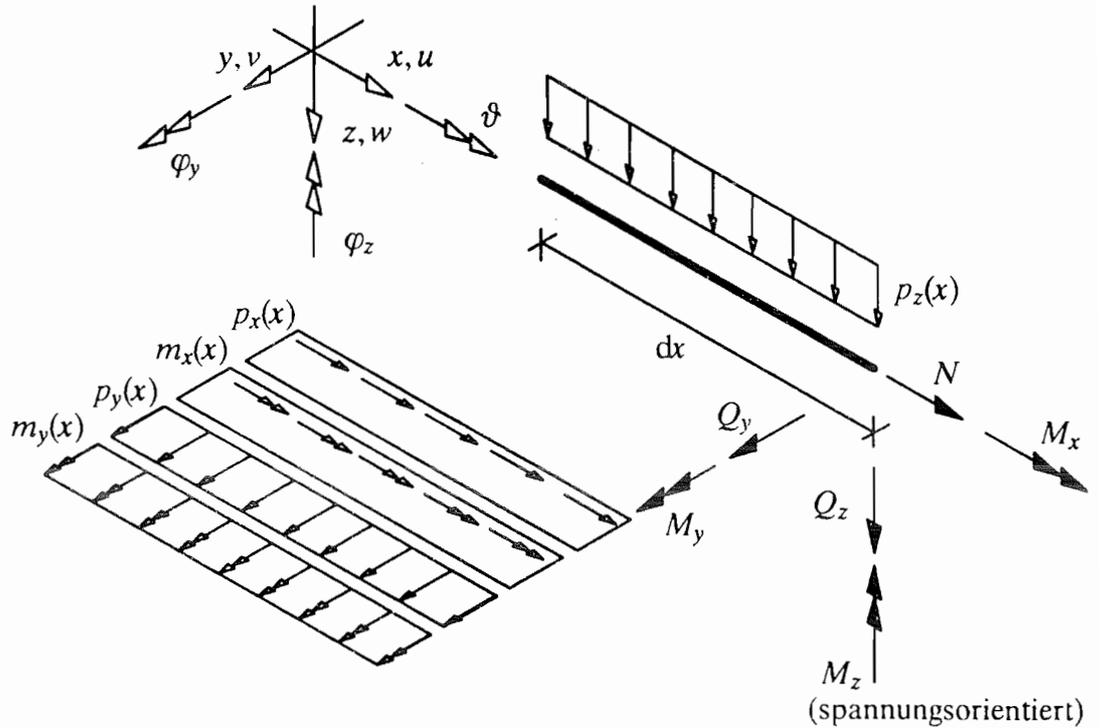
### 2.1 Räumliche Stabtragwerke

#### 1. Koordinatensysteme

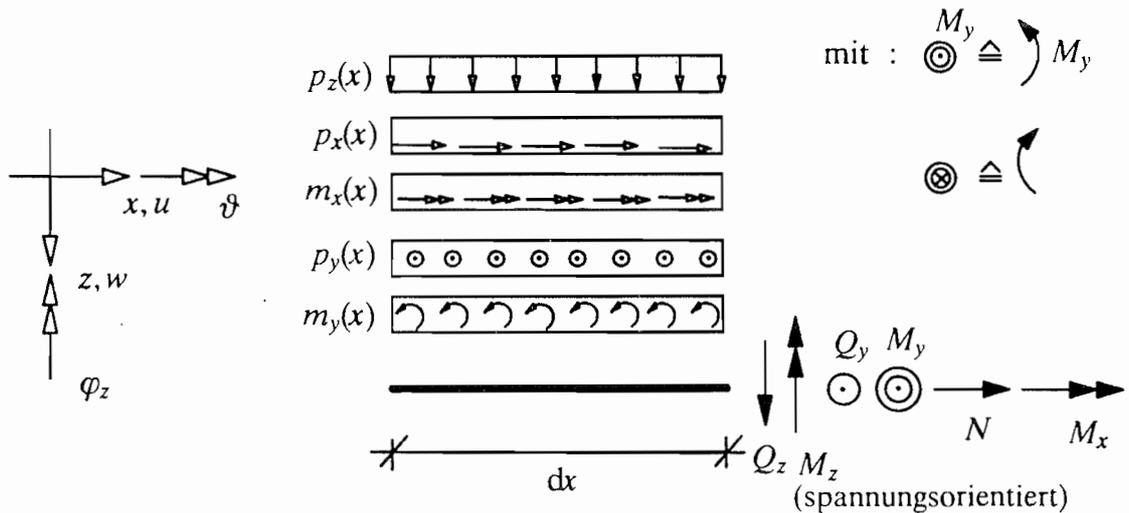
Bei aus mehreren Teilen zusammengesetzten Tragwerken ist zwischen einem *globalen* und einem *lokalen Koordinatensystem* zu unterscheiden. Das lokale Koordinatensystem ist an ausgezeichneten Achsen des einzelnen Bauteils orientiert. Die Hauptachsen eines Stabquerschnittes und die Stablängsachse sind in der Regel für Stabsysteme die entsprechenden lokalen Koordinatenachsen.

#### 2. Positive Lasten, Schnitt- und Weggrößen am positiven Schnittufer eines räumlich beanspruchten Stabelements (in lokalen Koordinaten)

räumliche Darstellung :



Darstellung als Projektion in negativer y-Richtung :



3. Freiheitsgrade eines räumlichen Systems

Ein Knoten im räumlichen System hat demnach 6 Freiheitsgrade der Verschiebungen und Verdrehungen. Diesen Weggrößen sind sechs Kraftgrößen zugeordnet (konjugiert). Zur statisch bestimmten Lagerung eines räumlichen Stabes sind folglich 6 Kraftgrößen erforderlich, die die sechs Verschieblichkeiten behindern. Entsprechend lassen sich Abzählkriterien für räumliche Systeme analog den ebenen Systemen ableiten (siehe Vorlesung aus der Technischen Mechanik/Kapitel A VIII). Die Anwendung des Abzählkriteriums wird jedoch im allgemeinen weniger empfohlen !

4. Symbole für räumliche Tragwerke : Lager und Verschiebungsmechanismen

				Bezeichnung
				vorgegebene Kraftgröße(n) sich einstellende Verschiebungen
				unversch. gelenkiges Auflager $M_x, M_y, M_z$   $A_x, A_y, A_z$ $\vartheta, \varphi_y, \varphi_z$   $u, v, w$
				einseitig versch. gelenkiges Aufl. $A_x, M_x, M_y, M_z$   $A_y, A_z$ $u, \vartheta, \varphi_y, \varphi_z$   $v, w$
				allseitig versch. gelenkiges Aufl. $A_x, A_y, M_x, M_y, M_z$   $A_z$ $u, v, \vartheta, \varphi_y, \varphi_z$   $w$
				starre Einspannung —   $A_x, A_y, A_z, M_x, M_y, M_z$ —   $u, v, w, \vartheta, \varphi_y, \varphi_z$
				Gabellager ...   ... $M_x$ ... ...   ... $\vartheta$ ...
				Kugelgelenk $M_x, M_y, M_z$   $N_x, Q_y, Q_z$ $\Delta\vartheta, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$   $\Delta u, \Delta v, \Delta w$
				Torsionsgelenk $M_x$   $N_x, Q_y, Q_z, M_y, M_z$ $\Delta\vartheta$   $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$

(siehe auch Vorlesung aus der Technischen Mechanik/Kapitel B VI)

5. Zum Torsionsmoment  $M_x$

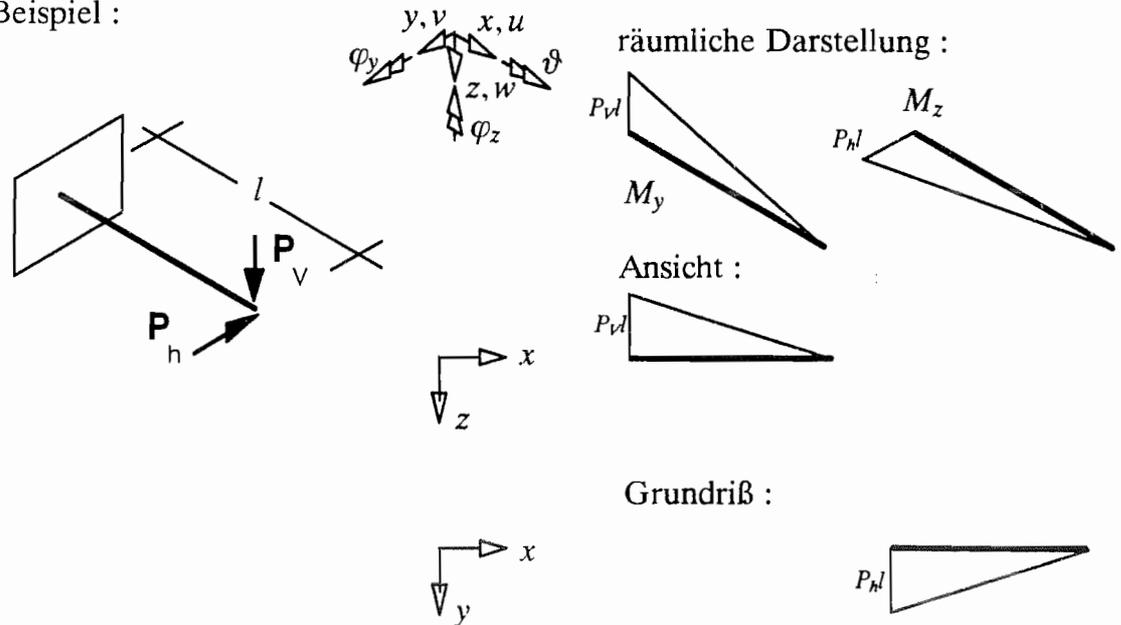
Die Annahmen und Voraussetzungen der *de St. Venant'schen Torsion* können beispielsweise den Vorlesungen aus der Technischen Mechanik und aus dem Stahlbau entnommen werden.

Die Differentialgleichung für die *de St. Venant'sche Torsion* lautet :  $M_x = GI_T \vartheta'$ .  
Dabei stellt  $\vartheta'$  die *Verwindung* und  $\vartheta$  die *Verdrehung* dar.

6. Darstellung von Zustandslinien

Die Darstellung von *Normal- und Querkräften* sowie *Torsionsmomenten* muß stets mit Vorzeichen erfolgen. Das Vorzeichen orientiert sich an der positiven Schnittgrößendefinition. In welche Richtung positive bzw. negative Größen anzutragen sind, ist damit nicht festschreibbar und somit jedem einzelnen freigestellt. Im Gegensatz dazu sind die *Biegemomente* stets auf der Seite der gezogenen Faser darzustellen. Die Angabe eines Vorzeichens erübrigt sich damit in der räumlichen Darstellung. Wird dagegen eine projizierte Darstellung gewählt, so ist für Biegemomente, deren Drehvektor in der Projektionsebene liegt, die Angabe eines Vorzeichens unter Angabe der positiv definierten Richtung unerlässlich.

Beispiel :



7. Betrachtungen zum Tragverhalten

7.1 Allgemeines

Zur Beurteilung des Tragverhaltens eines Systems ist es sehr wichtig, Überlegungen zu dessen Verformungsverhalten anzustellen. Sie erleichtern beispielsweise die Festlegung des statischen Hauptsystems bei der Berechnung mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens. Für die Wahl des Hauptsystems kann es ferner von Vorteil sein, durch Lösen von Bindungen das System im Hinblick auf den Grad der statischen Bestimmtheit soweit zu reduzieren, bis bekannte (ggf. statisch bestimmte) Teilsysteme erkennbar sind.

7.2 Ebene räumliche Systeme

Bei ebenen räumlichen Systemen läßt sich die Belastung in einen *Belastungsanteil in der Tragwerksebene* und einen *Belastungsanteil senkrecht zur Tragwerksebene* zerlegen. Damit treten jeweils nur entsprechende Verformungen in bzw. senkrecht zur Tragwerksebene auf. Der Belastungsanteil senkrecht zur Tragwerksebene führt zur Tragwirkung eines *Trägerrostes*.

7.3 Achsensymmetrische räumliche Systeme

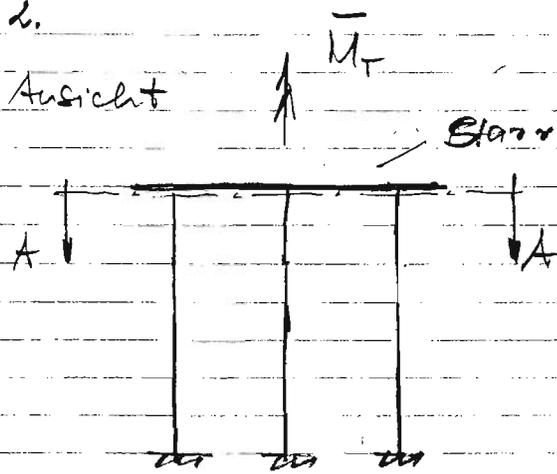
Die Belastung von achsensymmetrischen räumlichen Systemen läßt sich analog der von ebenen Systemen in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Beanspruchungszustand zerlegen. Für die Berechnung der einzelnen Beanspruchungszustände sind Überlegungen zum Verformungsverhalten wiederum sehr hilfreich. Es können analoge Schlußfolgerungen für den *Ansatz von Kraft- und Weggrößen* wie bei ebenen Systemen *aus dem Verformungsverhalten bezüglich der Symmetrie- bzw. Antimetrieachsen* gezogen werden.

Räumliche Tragwerke:

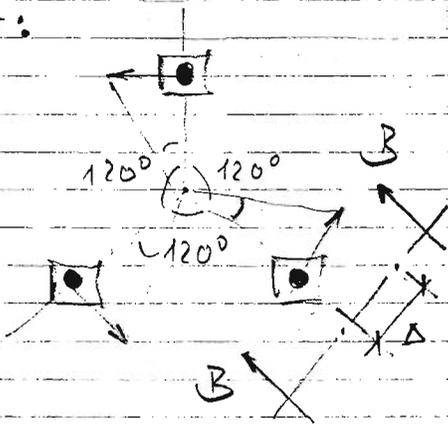
Voraussetzung: Bezug auf Querschnittshauptachsen

	Normalkraft	Torsion	Biegung	zweiachsige Biegung
Verschiebung	$u$	$\vartheta$	$w$ $\varphi$	$v, w$ $\varphi_y$ $\varphi_z$
Schnittkraft	$N$	$M_T$	$Q$ $M$	$Q_y, Q_z$ $M_y$ $M_z$
Steifigkeit	$EA$	$GI_T$	$(GA')$ $EI$	$EI_y$ $EI_z$
Kinematik	$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u'$	} $M_T = GI_T \vartheta'$	$(\gamma = w' + \varphi)$ $\kappa = \varphi' = -w''$	$\kappa_y = \varphi_y' = -w''$ $\kappa_z = \varphi_z' = -v''$
Stoffgesetz	$N = EA\varepsilon$		$(Q = GA'\gamma)$ $M = EI\kappa$	$M_y = EI_y \kappa_y$ $M_z = EI_z \kappa_z$
Gleichgewicht	$N' + \bar{p}_x = 0$	$M_T' + \bar{m}_x = 0$	$M' - Q = 0$ $Q' + \bar{p}_z = 0$	$M_y' - Q_z = 0$ $Q_z' + \bar{p}_z = 0$ $M_z' - Q_y = 0$ $Q_y' + \bar{p}_y = 0$
DGL	$EAu'' + \bar{p}_x = 0$	$GI_T \vartheta'' + \bar{m}_x = 0$	$EIw'''' - \bar{p}_z = 0$	$EI_y w'''' - \bar{p}_z = 0$ $EI_z v'''' - \bar{p}_y = 0$
$\delta W_i$ (virtuelle innere Arbeit)	$\int_x \delta \varepsilon N dx =$ $\int_x \delta u' EAu' dx$	$\int_x \delta \vartheta' M_T dx =$ $\int_x \delta \vartheta' GI_T \vartheta' dx$	$\int_x \delta \kappa M dx =$ $\int_x \delta w'' EIw'' dx$	$\int (\delta \kappa_y M_y + \delta \kappa_z M_z) dx$ $= \int_x (\delta w'' EI_y w'' + \delta v'' EI_z v'') dx$
$\delta W_i^*$ (virt. innere Ergänzungsarbeit)	$\int_x \delta N \varepsilon dx =$ $\int_x \delta N \frac{N}{EA} dx$	$\int_x \delta M_T \vartheta' dx =$ $\int_x \delta M_T \frac{M_T}{GI_T} dx$	$\int_x \delta M \kappa dx =$ $\int_x \delta M \frac{M}{EI} dx$	$\int (\delta M_y \kappa_y + \delta M_z \kappa_z) dx$ $= \int_x (\delta M_y \frac{M_y}{EI_y} + \delta M_z \frac{M_z}{EI_z}) dx$

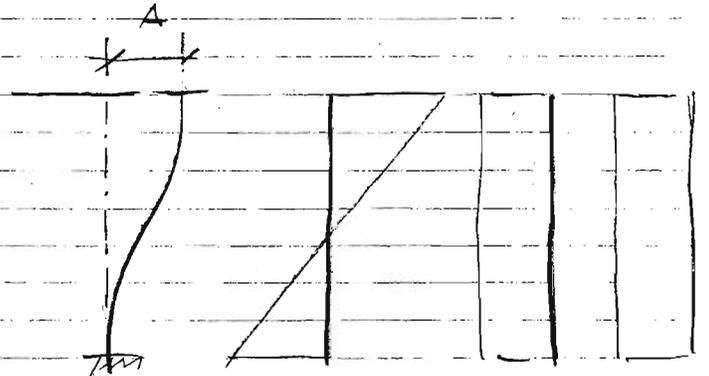
2.



A-A:



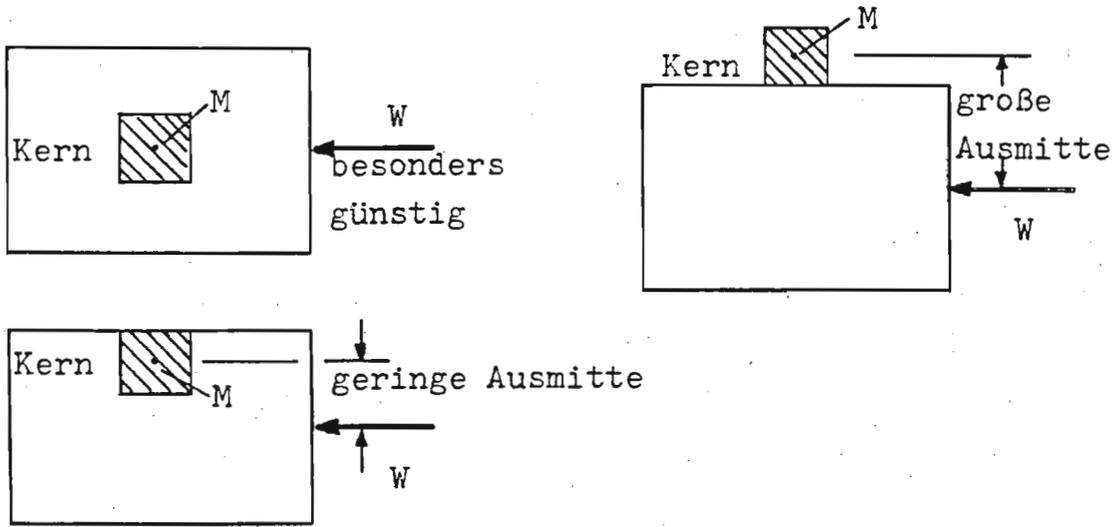
B-B



3.

M  $M_T$  Q

Beispiele für Kernanordnungen



Kernanordnungen mit verschiedenen Ausmitten der Windlastresultierenden

(BK 75, Teil II, Bild 2.12)

Bernhard Schreffler

Zur Berechnung aussteifender Systeme allgemeiner Art von Hochhäusern [34]

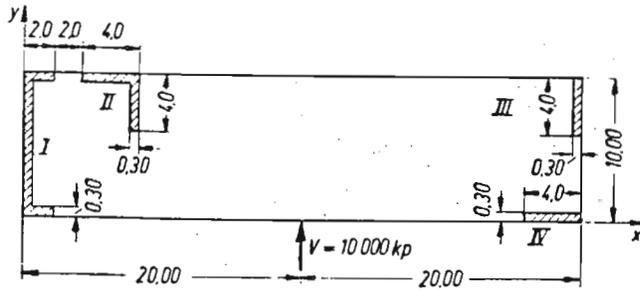


Bild 4. Koordinaten und Querschnittswerte zum Zahlenbeispiel 1

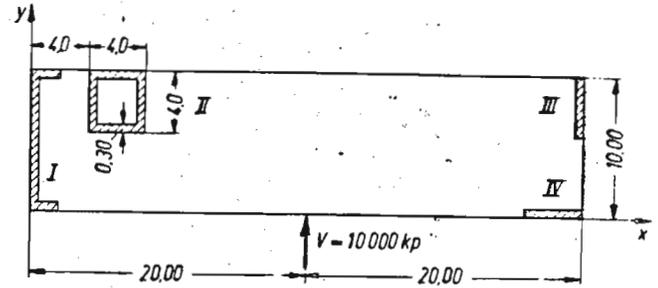


Bild 7. Abmessungen zum Zahlenbeispiel 2

Vergleich zwischen aussteifenden Systemen mit und ohne Kern

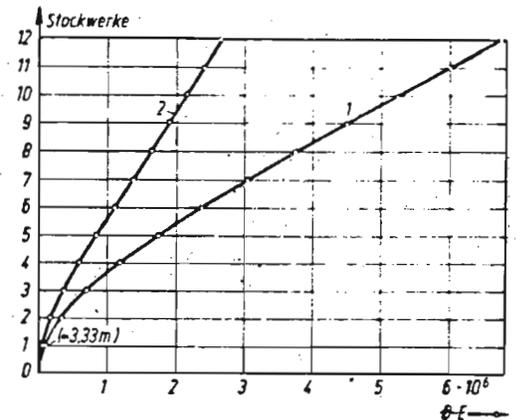


Bild 11. Verlauf des Drehwinkels mit der Höhe für Beispiel 1 und 2 Lastfall 2

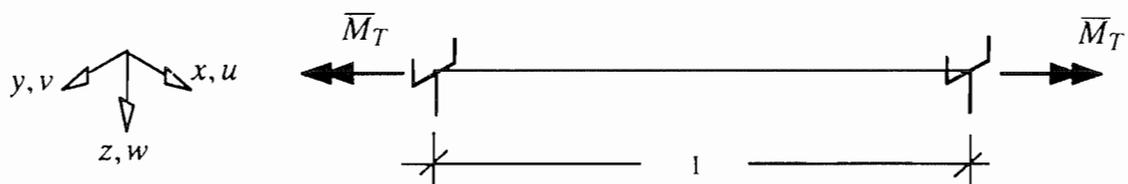
## 2.1.1 Grundlegende Beziehungen zur Torsion (Torsion ohne Wölbbehinderung) (St. Venant'sche Torsion)

Voraussetzung: Unter Torsionslasten treten im Stab nur Schubspannungen, jedoch keine Normalspannungen auf.

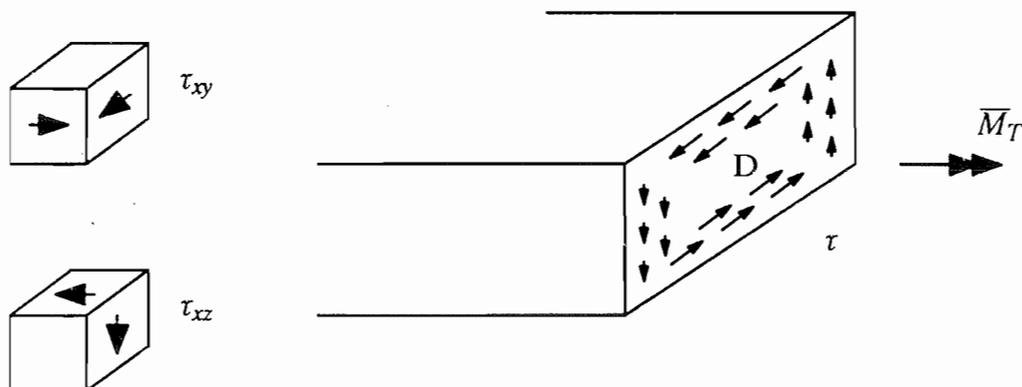
Normalspannungen treten nur dann nicht auf, wenn die Verschiebungen in Längsrichtung des Stabes (Verwölbung der Querschnitte) nicht behindert werden. Behinderung der freien Verwölbung kann durch Einspannungen, Veränderung des Torsionsmomentes (z.B. durch Angriff von Einzeltorsionsmomenten), Querschnittsveränderungen etc. gegeben sein. In diesen Fällen ist die sogenannte Wölbkraft-Torsion anzuwenden.

### System und Bezeichnungen

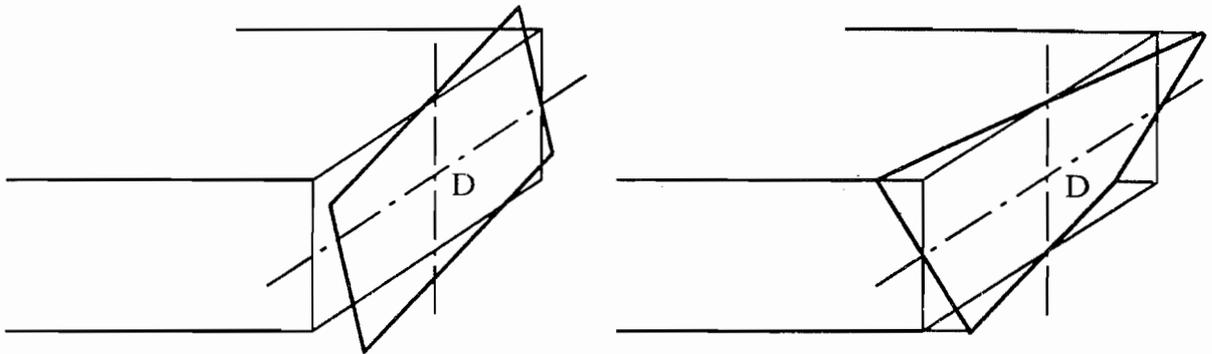
#### Koordinaten



#### Spannungen



### Verschiebungen



Verschiebung in y-z-Richtung :  
Verdrehung

+

Verschiebung in x-Richtung :  
Verwölbung

Verdrehung  $\vartheta$  erfolgt um die Drillachse, die mit dem Schubmittelpunkt des Querschnitts zusammenfällt. Ausnahme: durch konstruktive Maßnahmen (z.B. Festhalten eines bestimmten Querschnittspunktes) erzwungene Drehachse.

Verwölbung  $u$  erzeugt eine allgemein gekrümmte Fläche des verformten Querschnitts; d.h. die Bernoulli-Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte kann im Rahmen der Torsionstheorie nicht verwendet werden.

### Bezeichnungen

$x, y, z$	rechtwinkliges Koordinatensystem
$u, v, w$	Verschiebungen in $x, y, z$ -Richtung
$\vartheta$	Stabdrehwinkel
$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$	Verwindung
$\omega(y, z)$	Einheitsverwölbung, durch $u = -\vartheta'\omega$ definiert
$M_T$	Torsionsmoment
$I_T$	Torsions-Trägheitsmoment
$G$	Schubmodul
$GI_T$	Torsions-StEIFigkeit

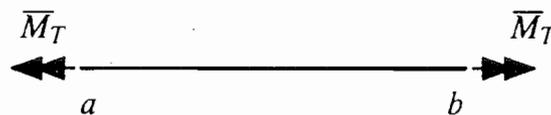
Grundgleichungen (Längsrichtung):

Voraussetzungen

1. Querschnittsform bleibt erhalten (nur bei Biegung !)
2. Linear elastischer Werkstoff
3. Linear geometrische Beziehungen; d.h. Verschiebungen sind klein gegen Querschnittsabmessungen
4. Gerader Träger ohne Querschnittsänderungen
5. Torsionsmoment konstant

Annahme: Verschiebungszustand kann allein durch Verdrehung der Stabachse beschrieben werden; die Verwölbungen können sich dabei frei ausbilden (kein Wölbzwang).

Reine Torsionsbeanspruchung:



$$u = -\omega(y, z) \vartheta'$$

Kinematik:

$$\gamma_{xy} = -\vartheta' (\omega_{,y} + z)$$

$$\gamma_{xz} = -\vartheta' (\omega_{,z} - y)$$

Werkstoffgesetz:

$$M_T = GI_T \vartheta'$$

Gleichgewicht:

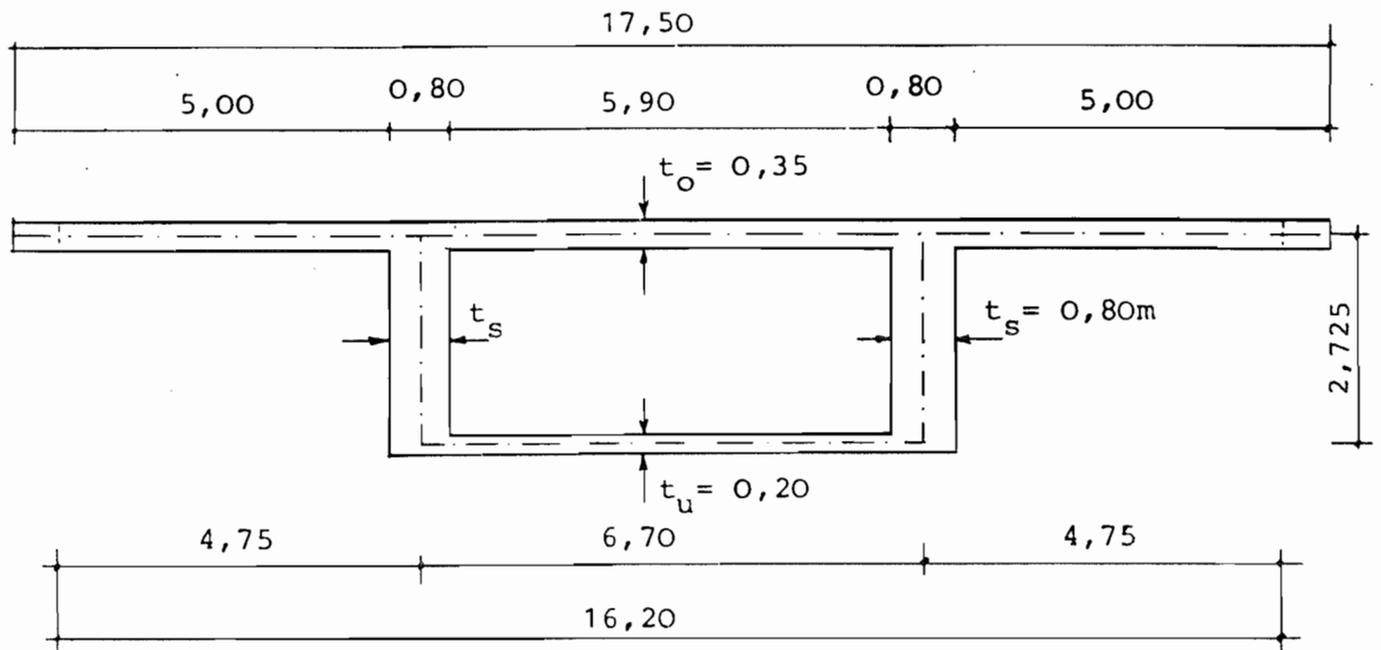
$$M_T' + \bar{m}_T = 0$$

oder als Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$-\delta W = \int_x M_T \delta\vartheta' dx - \int_x \bar{m}_T \delta\vartheta dx - \bar{M}_T \delta\vartheta \Big|_a^b = 0$$

$$= \int_x GI_T \vartheta' \delta\vartheta' dx - \int_x \bar{m}_T \delta\vartheta dx - \bar{M}_T \delta\vartheta \Big|_a^b = 0$$

# Querschnittswerte - Torsionsträgheitsmoment



1. Hohlkasten:

2. Bredt'sche Formel: 
$$J_T = \frac{4F_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

$$F_m = 6,7 \cdot 2,725 = 18,26 \text{ m}^2$$

$$\oint \frac{ds}{t} = 2 \cdot 2,725/0,8 + 6,7/0,2 + 6,7/0,35 = 69,13$$

$$J_{T1} = \frac{4 \cdot 18,26^2}{69,13} = 19,29 \text{ m}^4$$

2. Rechteckquerschnitte: 
$$J_T = \frac{1}{3} n_1 b^3 h$$

Fahrbahnplatte 
$$J_{TF} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0,35^3 \cdot (5,0 + 5,9 + 5,0) = 0,23 \text{ m}^4$$

Steg 
$$J_{TS} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,83 \cdot 0,8^3 \cdot 3,0 = 0,85 \text{ m}^4$$

Bodenplatte 
$$J_{TB} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0,2^3 \cdot 5,9 = 0,02 \text{ m}^4$$

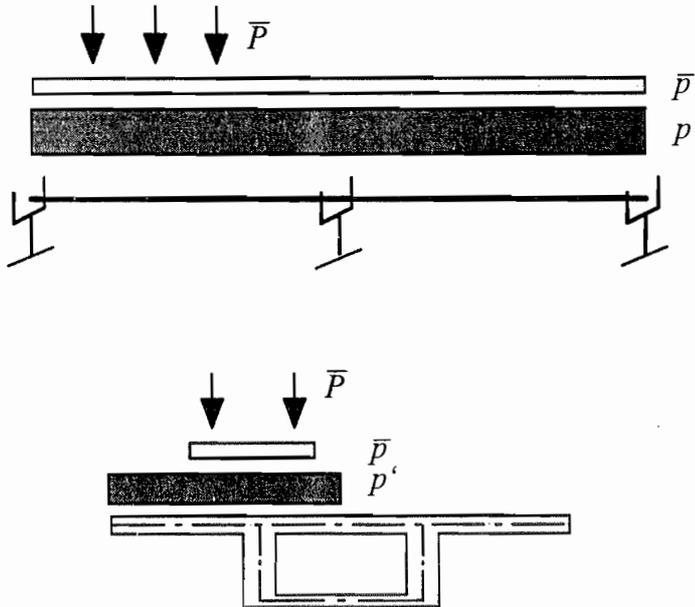
$$J_{T2} = 0,23 + 0,85 + 0,02 = 1,10 \text{ m}^4$$

$$J_T = J_{T1} + J_{T2} = 20,39 \text{ m}^4$$

## 2.1.2 Räumlich beanspruchter Brückenträger

*Kombinierte Biege- und Torsionsbeanspruchung*

Lastannahmen für Straßen- und Wegbrücken nach DIN 1072



Schwingbeiwert  $\varphi = 1,40 - 0,008 \cdot 45 = 1,04$  in Längsrichtung  
 $\varphi = 1,40 - 0,008 \cdot 5,40 = 1,36$  in Querrichtung

Hauptspur  $p_{\varphi} = \varphi \cdot 5 \text{ kN/m}^2$

außerhalb der Hauptspur  $p'_{\varphi} = \varphi \cdot 3 \text{ kN/m}^2$

Überlast  $\bar{P} = \varphi \cdot \frac{1}{6} (600 - 18 \cdot 5,0) = \varphi \cdot \frac{510}{6} \text{ kN}$

Die zur Hohlkastenachse unsymmetrisch wirkende Belastung  $p(z)$  wird auf den Schubmittelpunkt transformiert.

### Schnittgrößen

### Spannungen

$N, M_y$



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z$$

$Q_z$



$$\tau_B = \frac{Q_z S(z)}{J_B b}$$

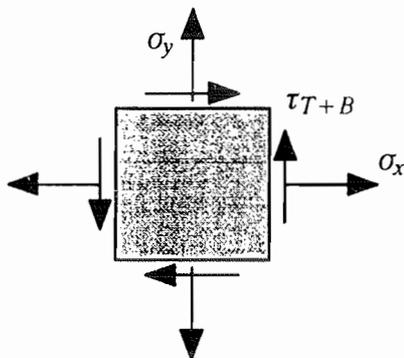
$M_T$



$$\tau_T = \frac{M_T}{W_T}$$

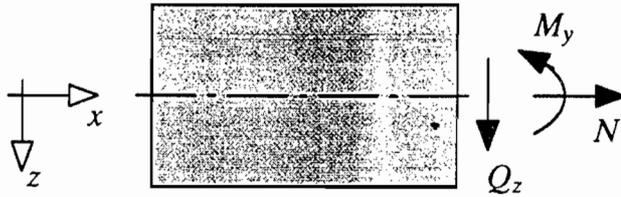
Hauptzugspannung bzw.  
Hauptdruckspannung

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{T+B}^2}$$

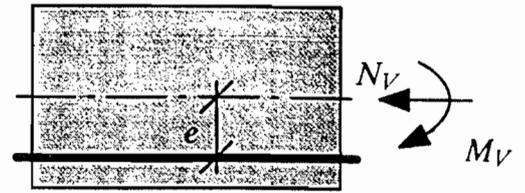


$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{T+B}^2}$$

**Belastung**



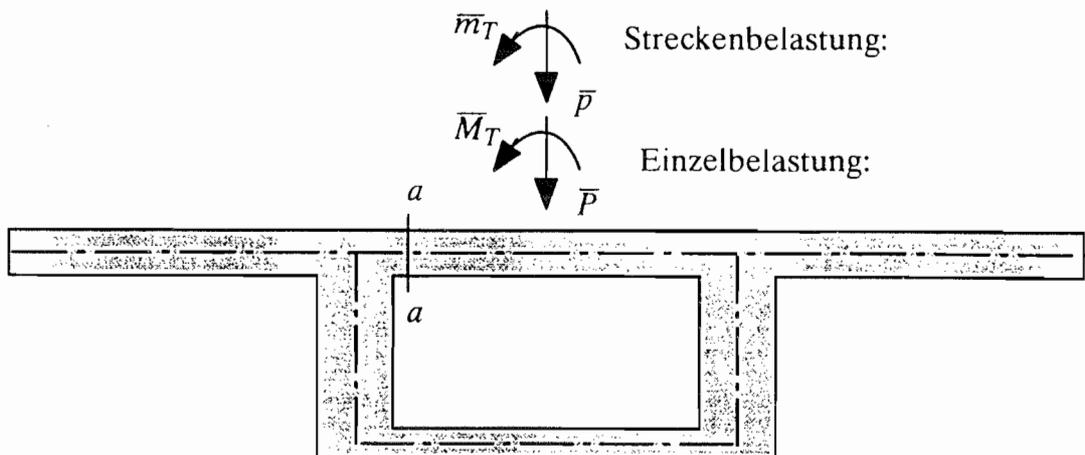
**Vorspannung**



$$N_V = V$$

$$M_V = V e$$

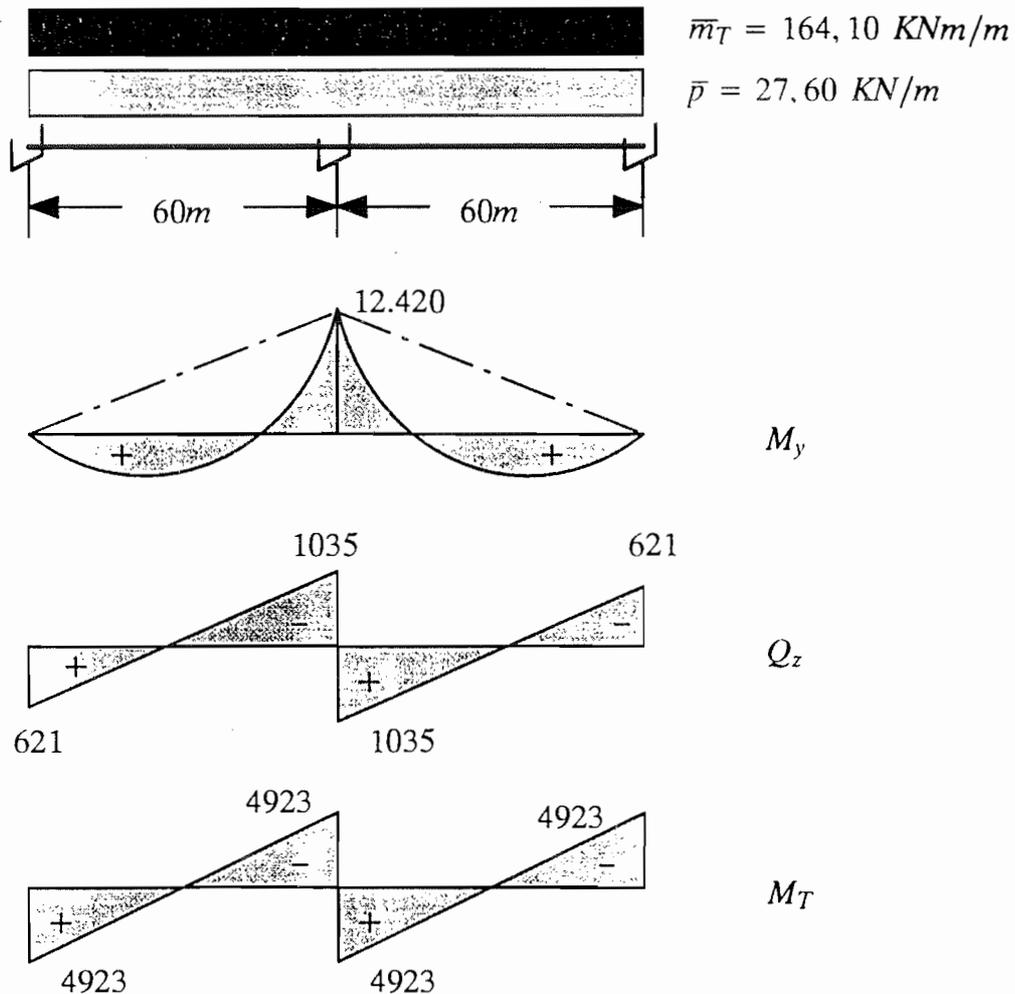
$$\sigma_x = \frac{N_{g+v+p}}{A} + \frac{M_{y,g+v+p}}{J_y} z$$

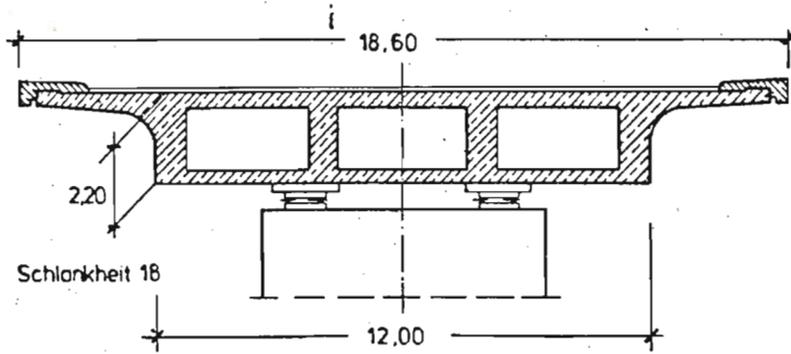


Ermittlung der Schnittkräfte:

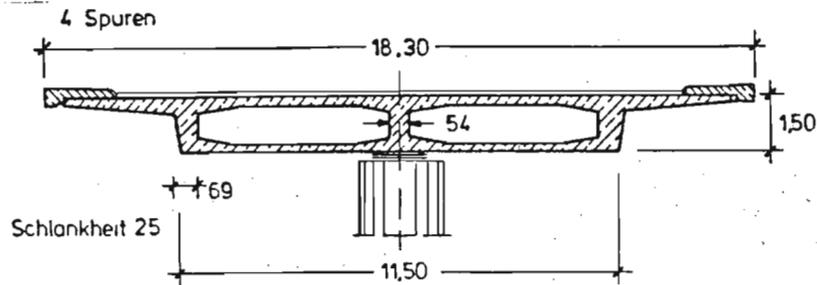
Die Systemberechnung erfolgt unter Verwendung der Grundgleichungen der Biegung und Torsion des Stabes

- a) Bestimmung der Querschnittswerte für  
Biegung  $I_B$   
Torsion  $I_T$   
Querkraft  $S(z)$
- b) Berechnung der Verformungen der Stabachse  
Vertikalverschiebung  $w$   
Biegeverdrehung  $\varphi_y$   
Verdrehung der Stabachse  $\vartheta$
- c) Ermittlung der Schnittkräfte  
Biegemoment  $M_y$   
Querkraft  $Q_z$   
Torsionsmoment  $M_T$

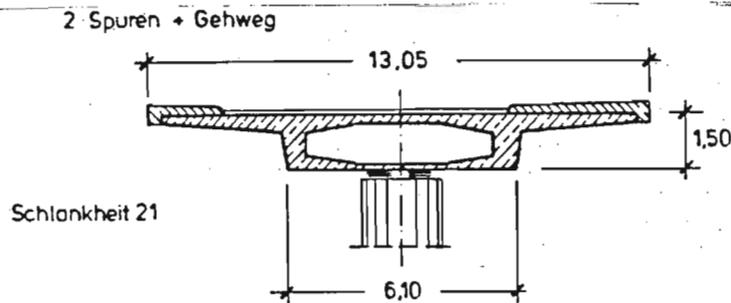




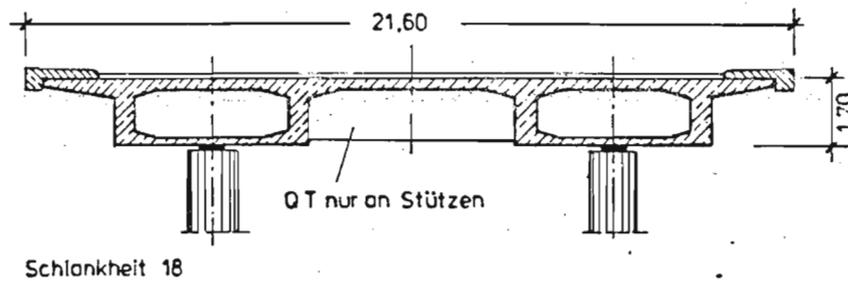
Dreizelliger Hohlkasten für vierspurige Straße, Spannweite bis rd. 39 m. Grenze der Schlankheit etwa 30



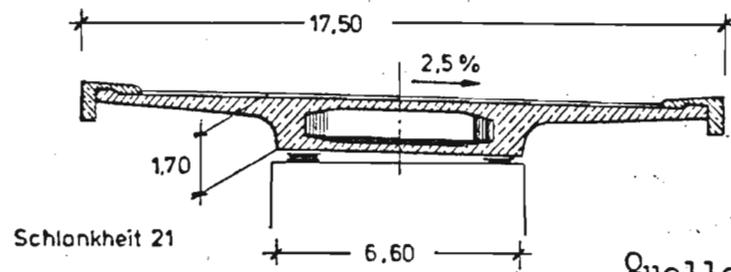
Zweizelliger, sehr flacher Hohlkasten für vierspurige Straße, Spannweiten 36 - 38 m



Einzelliger Hohlkasten für zweispurige Straße, z. B. für Abzweigung, Spannweiten rd. 32 m

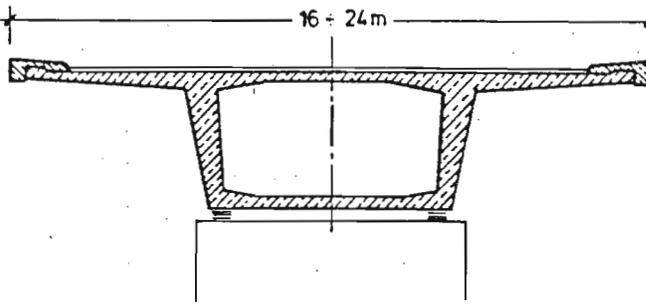


Zwei einzellige Hohlkasten für zwei Stützenreihen

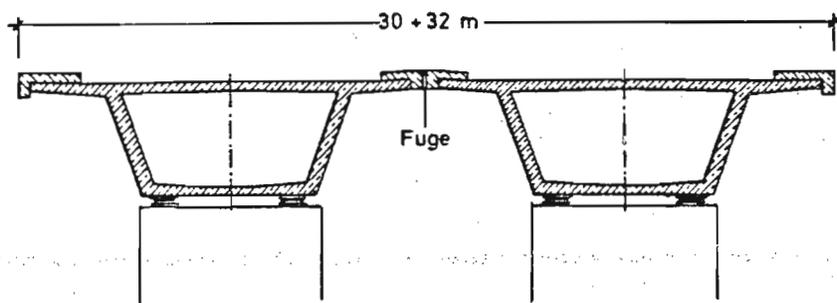


Quelle: [12]

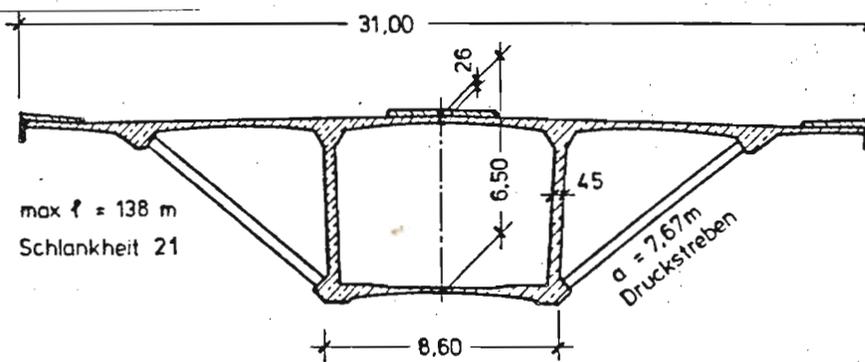
Schmaler Hohlkasten mit weit auskragender Platte, am Rand ausgesteift durch hohen Gesimsträger



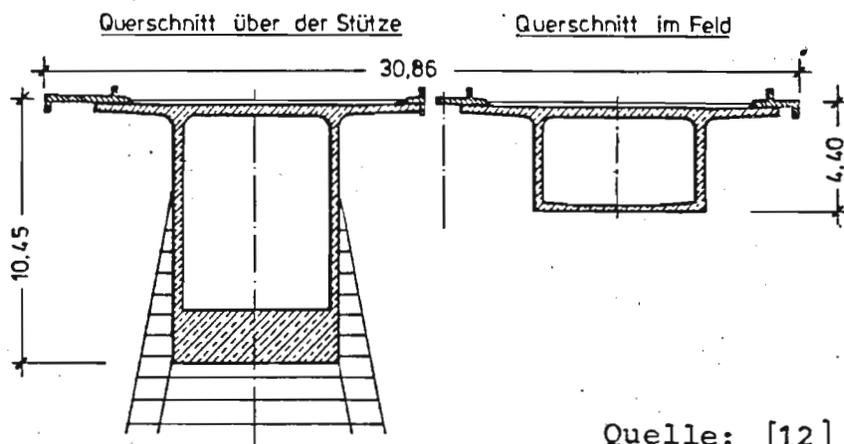
Typischer Querschnitt für Taktschiebverfahren, Spannweiten 40 - 70 m  
 Schlankheit 12 bis 16 ohne Hilfspfeiler, 16 bis 26 mit Hilfspfeiler in  $l/2$ , geneigter Steg vermindert Spannweite der Bodenplatte und Pfeilerbreite. Variable Stegdicke entspricht dem Verlauf der Querbiegemomente aus Einspannung der Fahrbahnplatte.



Zwei Kastenträger durch Mittelfuge getrennt für Autobahnbrücke. Rüstung und Schalung kann zweimal eingesetzt werden. Nachteilig sind die Doppelpfeiler



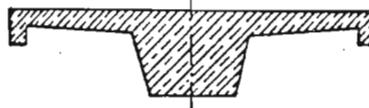
Ein schmaler Kastenträger für ganze Autobahnbreite, auskragende Fahrbahn mit Druckstreben gestützt. Nur für große Spannweiten geeignet. (Kochertalbrücke Geislingen 1977 - 79, Entwurf Wayss & Freytag)



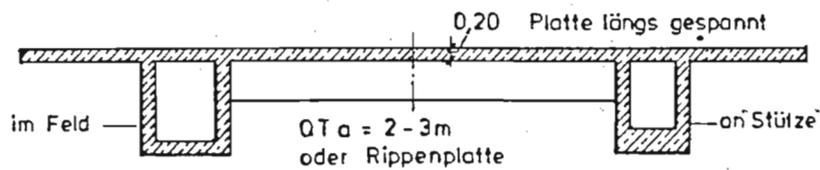
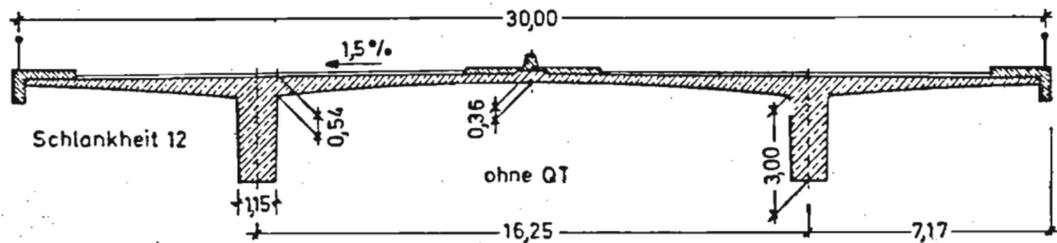
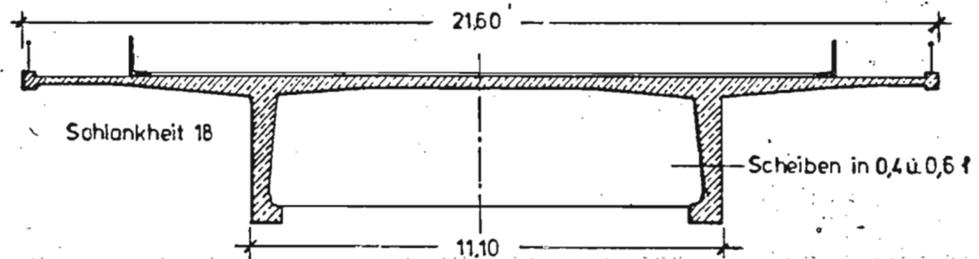
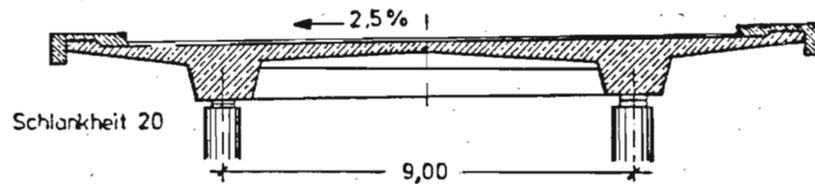
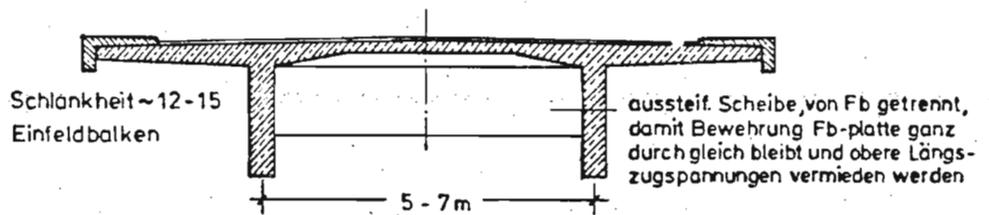
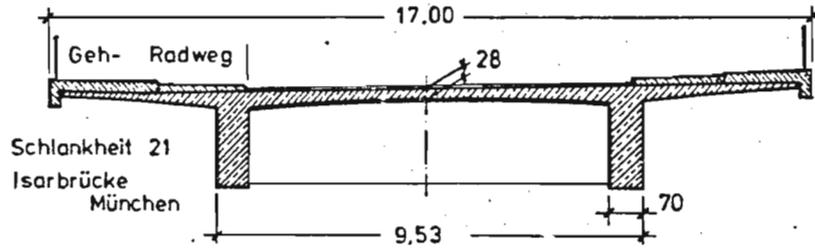
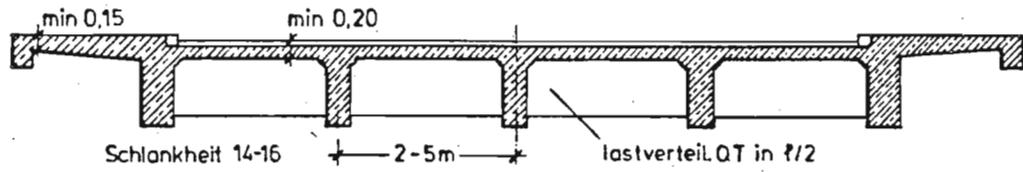
Quelle: [12]

Querschnitte der Rheinbrücke Bendorf, max  $l = 205$  m. Zwei Hohlkasten nebeneinander. Stegdicke 370 mm (Entwurf Dywidag)

# Typische Brückenquerschnitte mit Plattenbalken

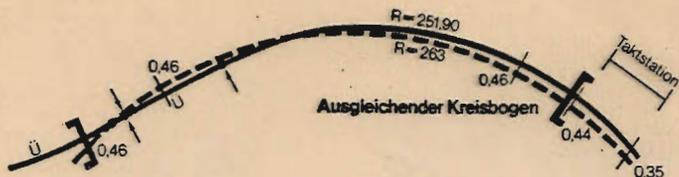


Querschnitt einer einfachen Fußgängerbrücke

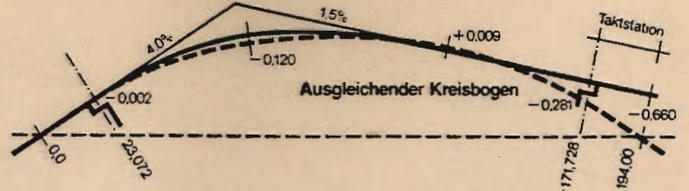


Quelle: Leonhardt [12]

Grundriß Brücke

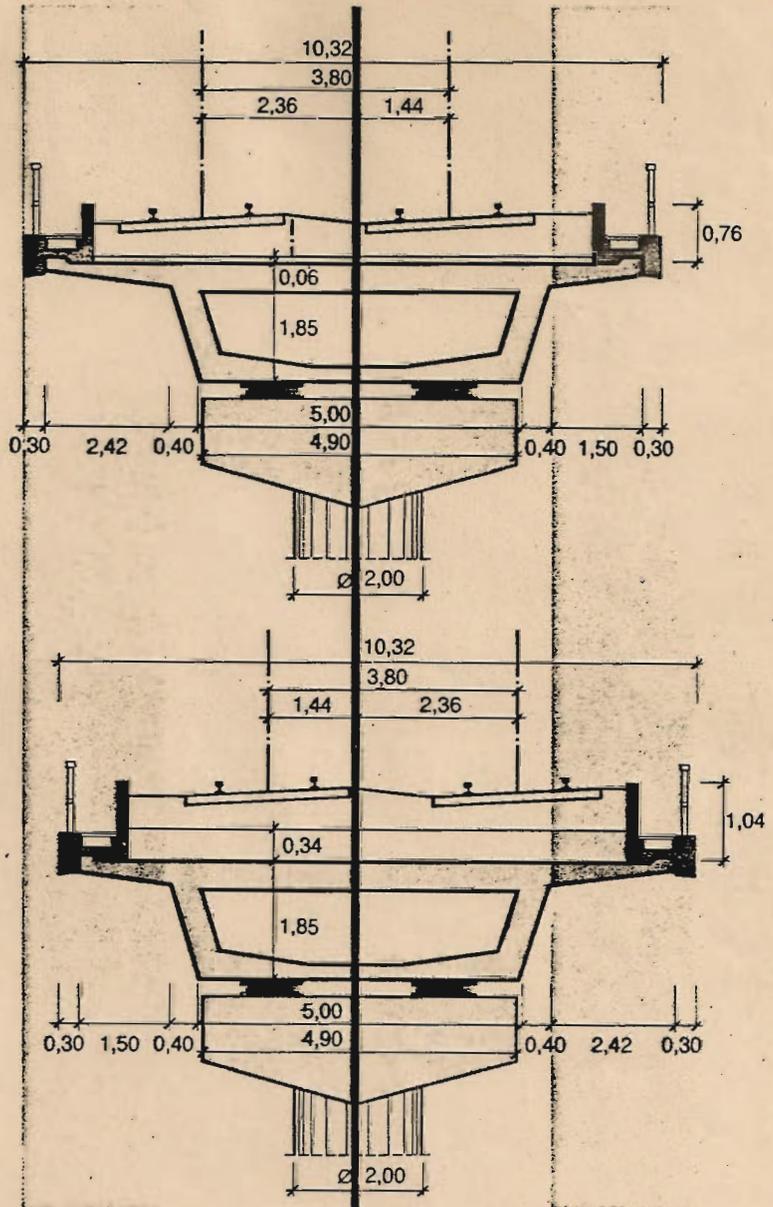


Aufriß Brücke



Grundriß Kreisbogen

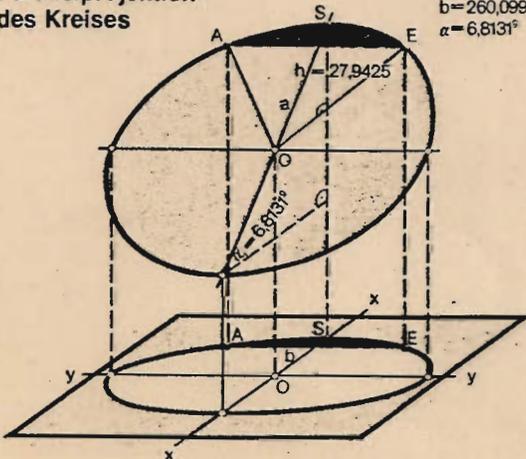
Aufriß Kreisbogen



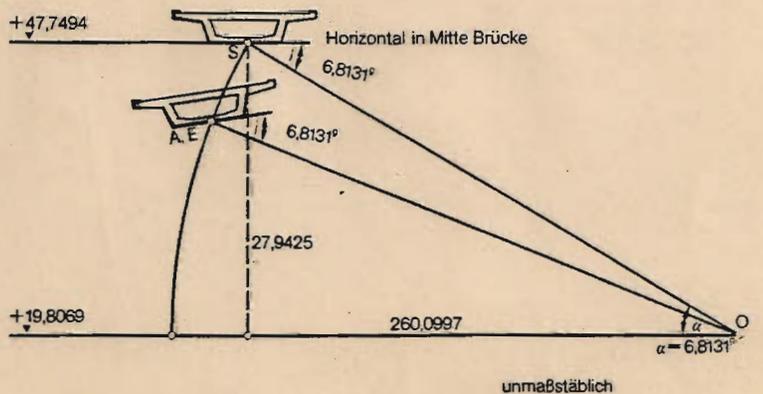
Abweichung Gleisachse - Brückenachse

Ellipse als senkrechte Parallelprojektion des Kreises

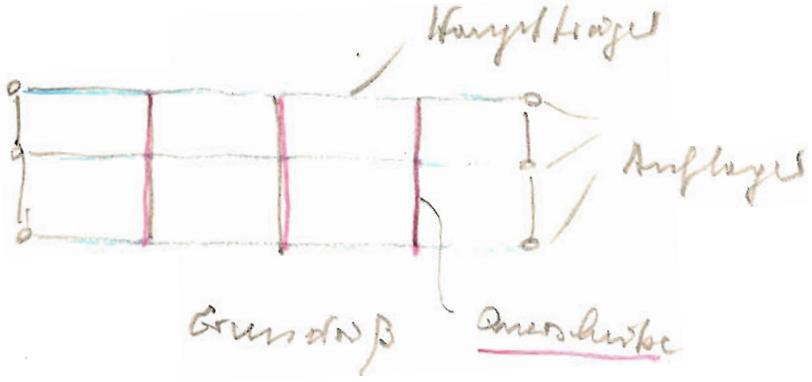
$a = 261,5964$   
 $b = 260,0997$   
 $\alpha = 6,8131^\circ$



Querneigung und Verdrehung für Hohlkasten

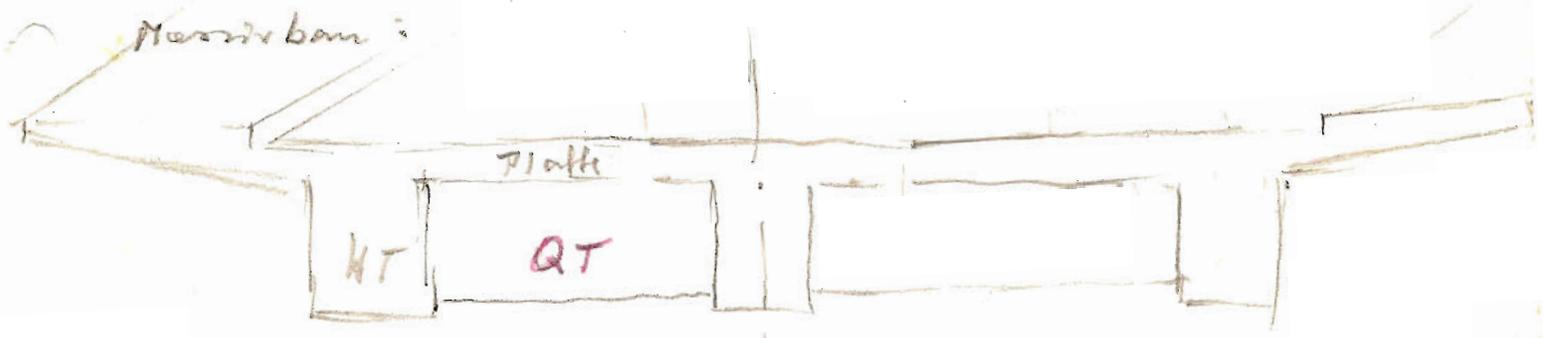


Tropfroste (Küchenrinne)



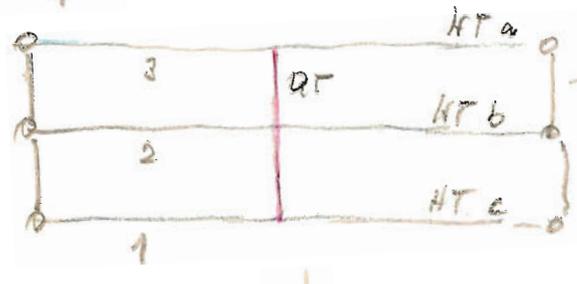
Anwendung: Brückenbau, Hochbau

Modellbildung für Brücken



Feldstützweite → Längsstützweite  
 mittigere Breite  
 HT, QT durchwech  
 HT, QT durchstuf

> Verbruch 5.4  
 Querverfestung durch Biegung der Querstübe  
 Beispiel:



End quer überstreben  
 damit fest und quer verstreift  
 bei festem verstreift

z Biehung

# Querschnittszahlen



$J_R = 1$       Grenzfall



Einflusszahlen

↓  
 $1/3 k_b$       Querschnittszahl HT A  
 ↑      ↑  
 2-st.      1-st.      1-st.      1-st.      1-st.



$1/3 k_b$       Querschnittszahl HT B

d. h. Belastung P auf a  $\rightarrow M_{aa} = \frac{5}{6} M(P)$

$M_{ba} = \frac{1}{3} M(P)$

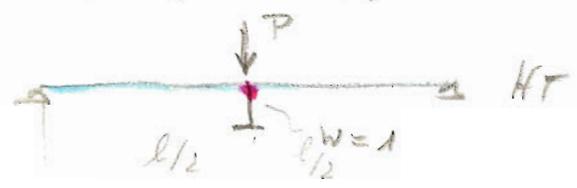
$M_{ca} = -\frac{1}{6} M(P)$

genau eine frei Tragende  
 mit 1 Ankeranker

starr  $\rightarrow$  Näherung

bei einem RT:

Halbhöhe = Stützweite als Lastfeder



$P = k_p w_p$   
 ↑  
 Stützweite

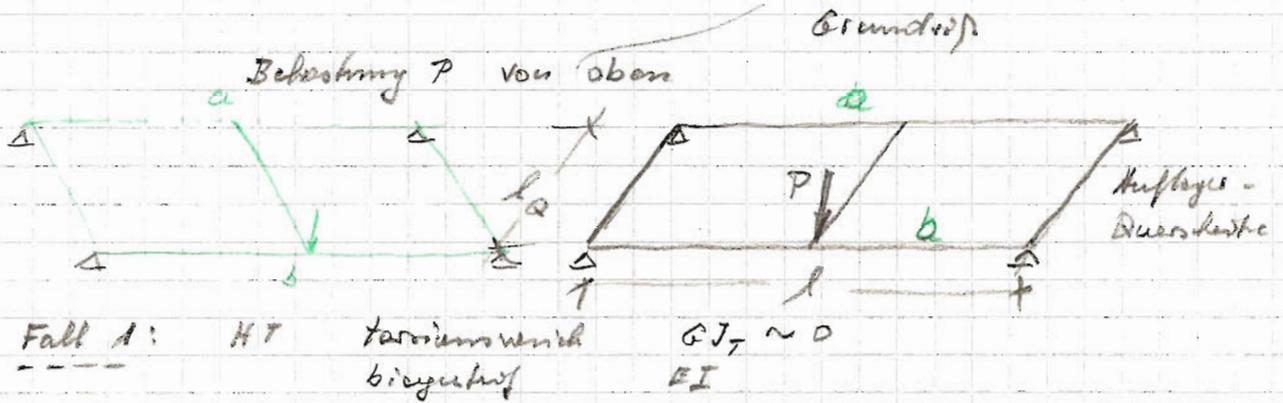
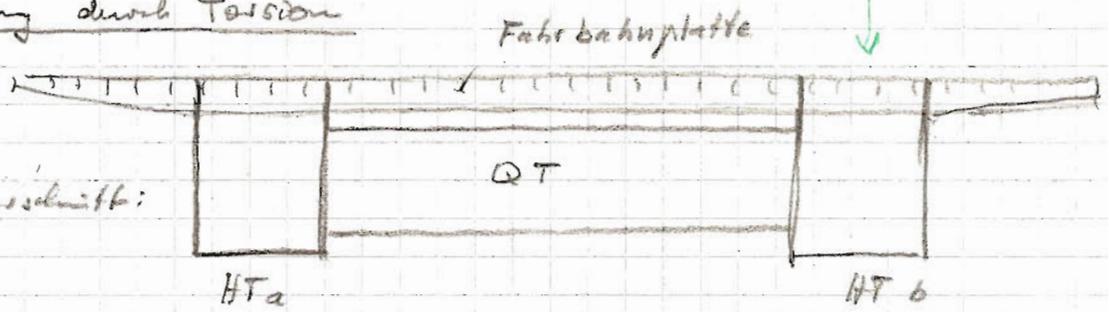
$\frac{P}{l} = 1 \rightarrow w_p \rightarrow k_p = \frac{1}{w_p} \left( = \frac{48 EI}{l^3} \right)$

$\Rightarrow$   $k_p$  Ersatzfeder

Quersverteilung durch Torsion

Beispiel:

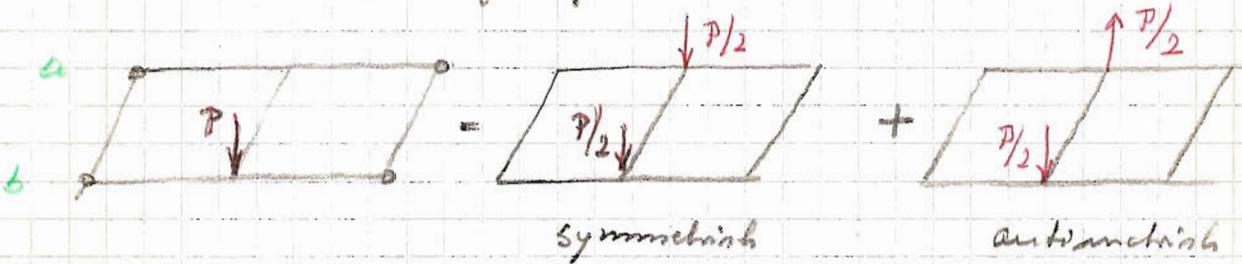
Brückengussstück:



Biegung: Trage  $a$ :  $M \equiv 0$   
Trage  $b$ :  $\max M = \frac{Pl}{4}$

d.h. keine Quersverteilung auf HT a  
Quersverteilung erst ab 3HT

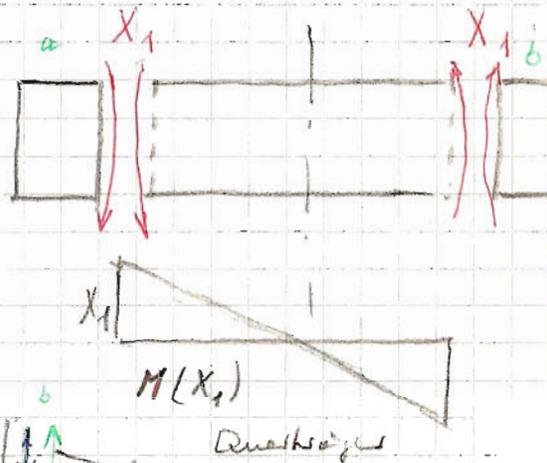
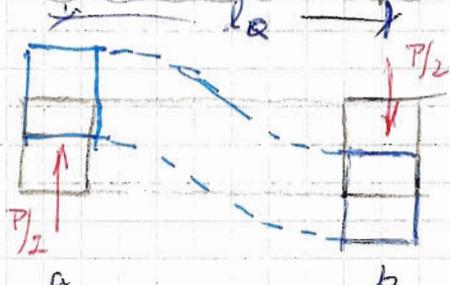
Fall 2: HT Torsionssteif  
biegesteif  $GJ_T$   
 $EI$



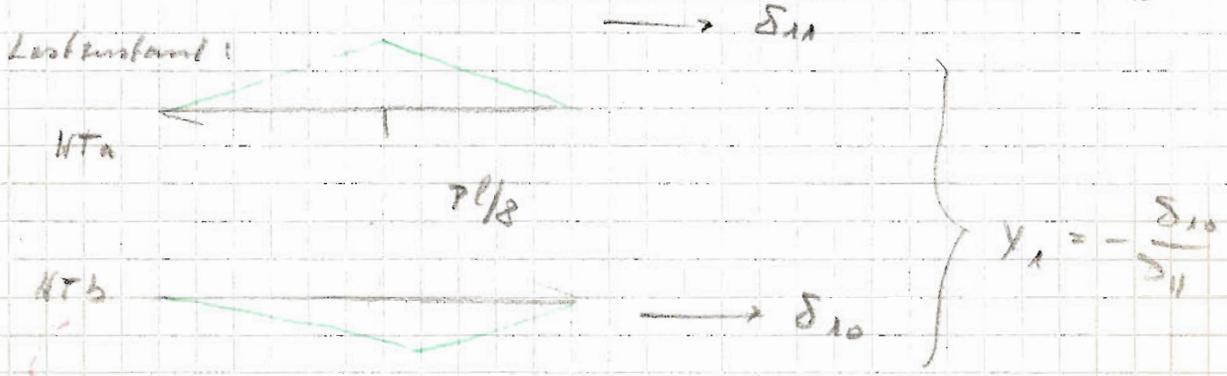
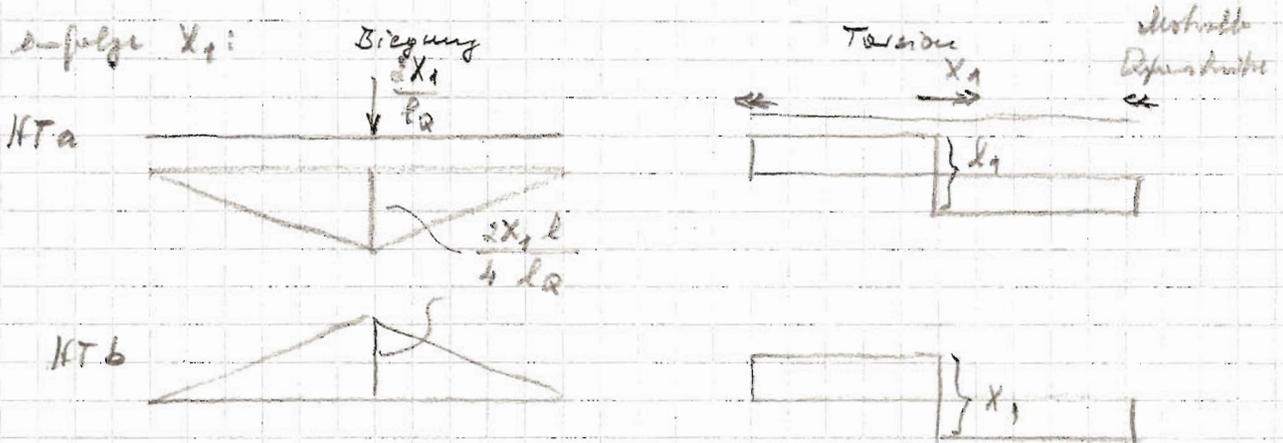
symmetrischer Lastfall:

Biegung: Trage  $a$  und  $b$ : je  $\max M = \frac{Pl}{8}$

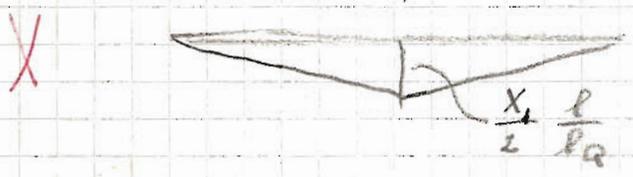
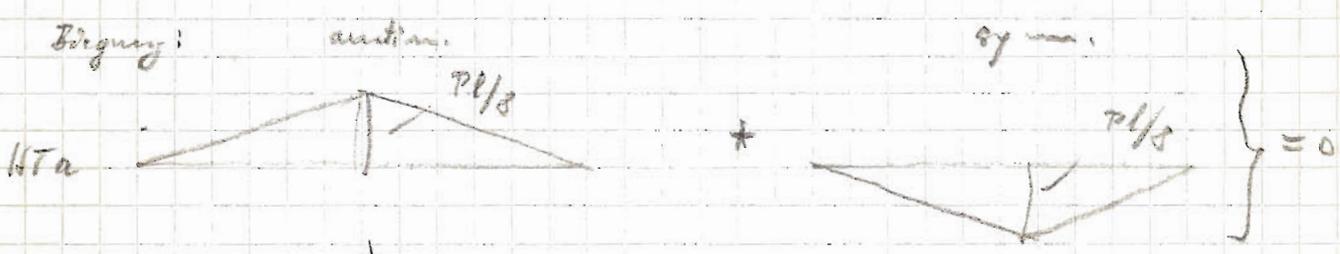
antisymmetrischer Lastfall (keine Quersverteilung)



Ableitungsansatz:  $\delta_{11} = \int \left( \frac{M \delta M}{EI} + \frac{M_T \delta M_T}{GJ_T} \right) dx$  wobei alle NT mit AT



$X_1$  bewirkt Umverteilung durch Torsionssteifigkeit des NT



Torsion:  $\leftarrow \rightarrow X_1 \leftarrow$

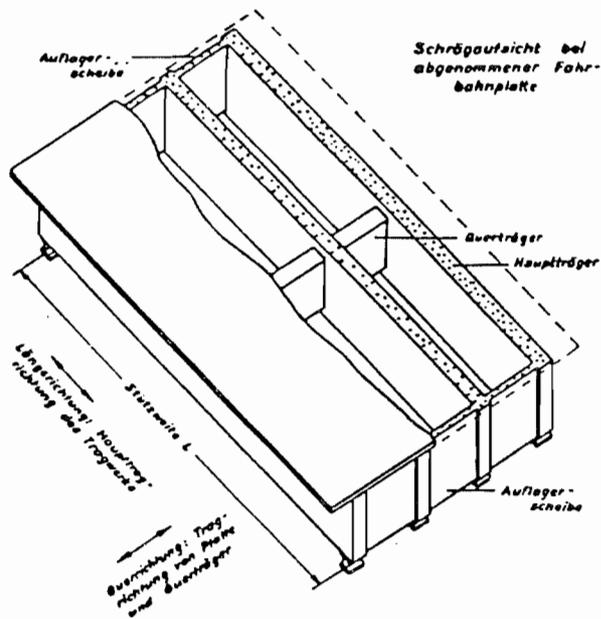
Träger a behält sich an der Lastabhängig

Träger b wird entlastet

Diskussion: Umverteilung bei NT nur möglich, wenn HT torsionssteif

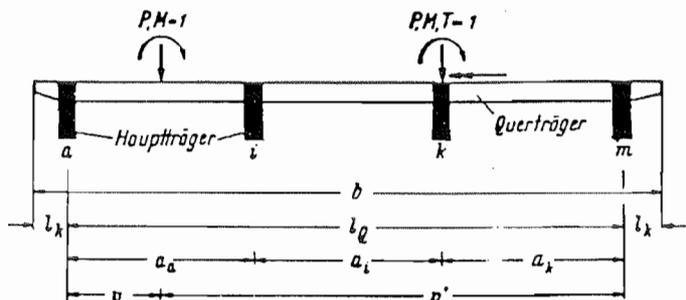
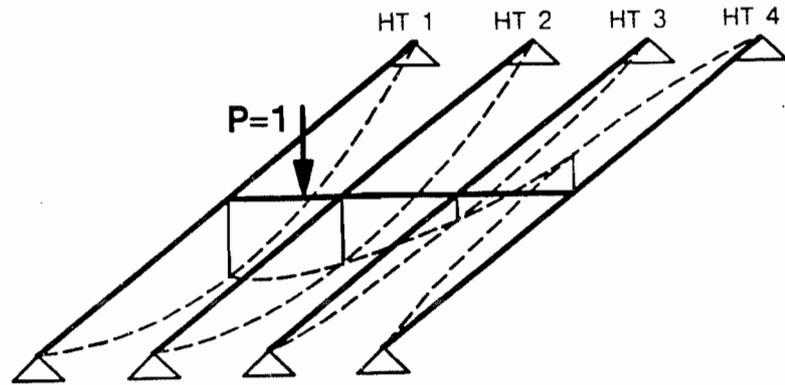
e.B. Stahlkästen

## 2.2 Trägerroste



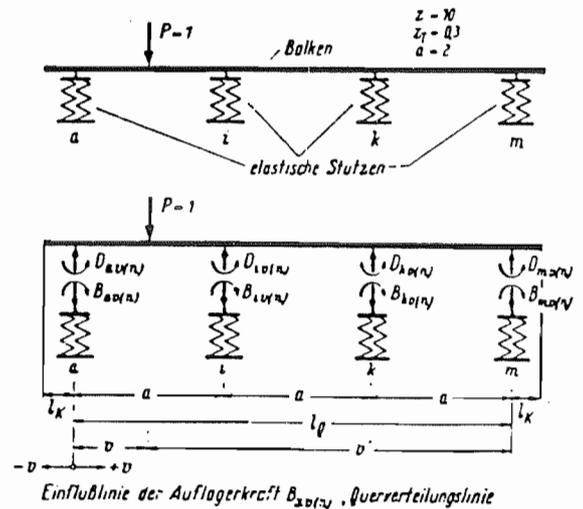
Brückensystem im Schrägbild  
(4 Hauptträger, 1 Querträger)

Stabmodell eines Brückensystems  
(4 Hauptträger, 1 Querträger)



Brückensystem im Querschnitt  
(4 Hauptträger)

Querverteilungslinien am Stabmodell :  
Hauptträger durch Senkfedern ersetzt  
(4 Hauptträger)



Einflusslinie der Auflagerkraft  $B_{20}(x)$ . Querverteilungslinie

Einflusslinie der Auflagerkraft  $B_{10}(x)$ . Querverteilungslinie

Einflusslinie des Auflagereinspannmomentes  $D_{20}(x)$

Einflusslinie des Auflagereinspannmomentes  $D_{10}(x)$

Quellennachweise :

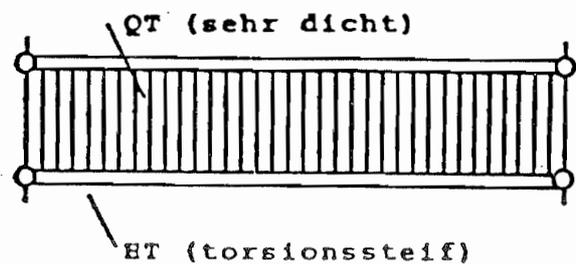
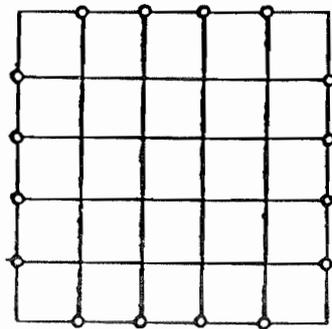
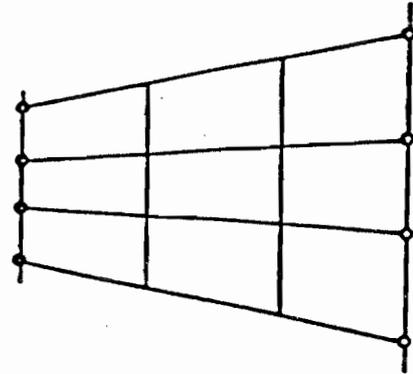
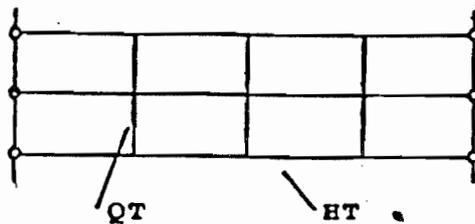
Homberg, H.; Trenks, K. : Drehsteife Kreuzwerke. Springer Verlag Berlin 1962

Leonhardt, F.; Andrä, W. : Die vereinfachte Trägerrostberechnung . J. Hofmann Verlag Stuttgart 1950

Trost, H. : Lastverteilung in Plattenbalckenbrücken. Werner Verlag Düsseldorf 1961

## 2.2.1 Idealisierung von Tragwerken im Brückenbau und im Hochbau

Systeme: z.B.:



im Grundriß

### Begriff der "Mittragenden Breite"

Verschiedene Bauwerke - z.B. moderne Brücken - sind genau nur als zusammengesetzte Flächentragwerke zu berechnen. Zur Verringerung des Rechenaufwands werden solche Systeme häufig auf eine Struktur idealisiert, die aus eindimensionalen Elementen zusammengesetzt ist.

## Torsionssteifigkeit im gerissenen Zustand (Zustand II)

Entwicklung der Biege- und Torsionssteifigkeiten mit zunehmendem Beanspruchungsgrad  
(Aus Leonhardt, Vorlesung über Massivbau, 4. Teil, Springer-Verlag 1976, Seite 140):

Zustand I: Stahlbetonbauteil im ungerissenen Zustand.

Zustand II: Stahlbetonbauteil im gerissenen Zustand. Unter Belastung kommt es im Stahlbeton zur Rißbildung. Durch die Rißbildung wird die Tragwirkung des Betonstahls aktiviert.

$K_T$  und  $K_B$ : Torsions- und Biegesteifigkeit des Stahlbetonbauteils.

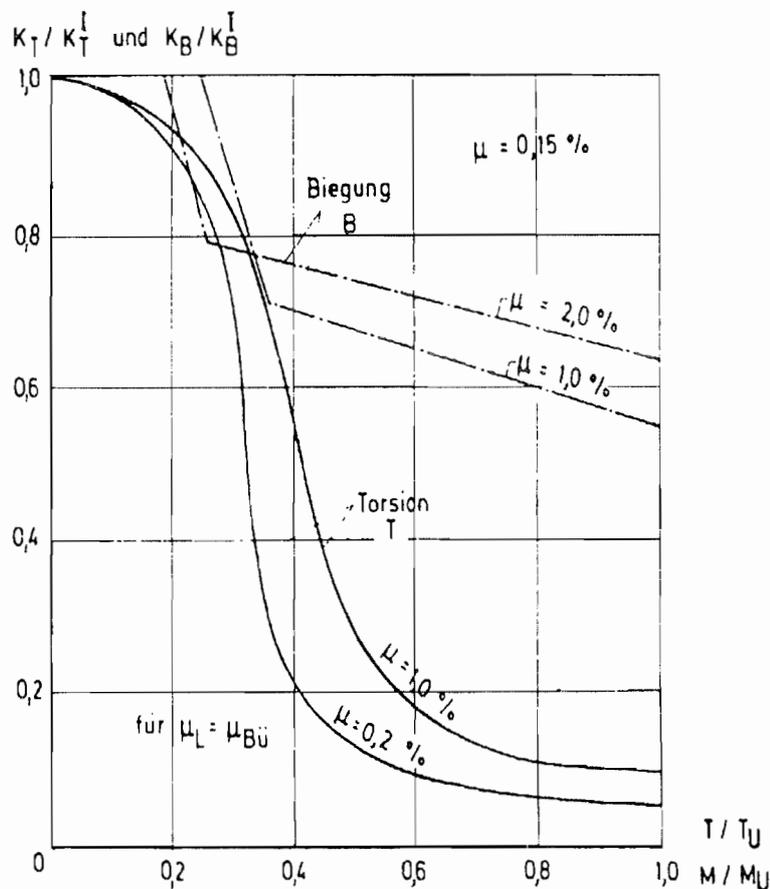
$K_T^I$  und  $K_B^I$ : Torsions- und Biegesteifigkeit des Stahlbetonbauteils im Zustand I.

$M$  und  $T$ : Biege- und Torsionsmoment.

$M_U$  und  $T_U$ : Biege- und Torsionsmoment im Bruchzustand.

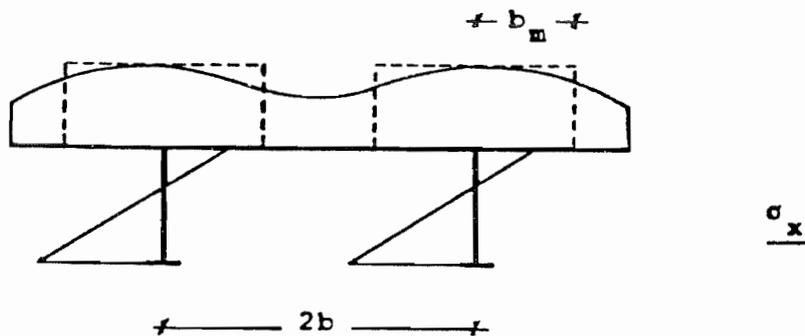
$\mu_L$ : Bewehrungsgrad der Biegezugbewehrung.

$\mu_{Bü}$ : Bewehrungsgrad der Schubbewehrung (Bügelbewehrung).



Aus dem Diagramm ist ersichtlich, daß Biegesteifigkeit und Torsionssteifigkeit mit wachsender Beanspruchung abnehmen. Grund dafür ist die fortschreitende Rißbildung mit zunehmender Beanspruchung. Allerdings fällt die Torsionssteifigkeit bis auf 10% von  $K_T^I$  ab, die Biegesteifigkeit hingegen vermindert sich nur bis auf ca. 60% von  $K_B^I$ .

So wird die tatsächlich über den Querschnitt veränderliche Spannungsverteilung in einem Deckblech einer Brücke oder der Deckplatte eines Plattenbalkens über den Begriff der mittragenden Breite zurückgeführt auf eine idealisierte konstante Spannungsverteilung mit gleichem Maximalwert und geringerer Plattenbreite.

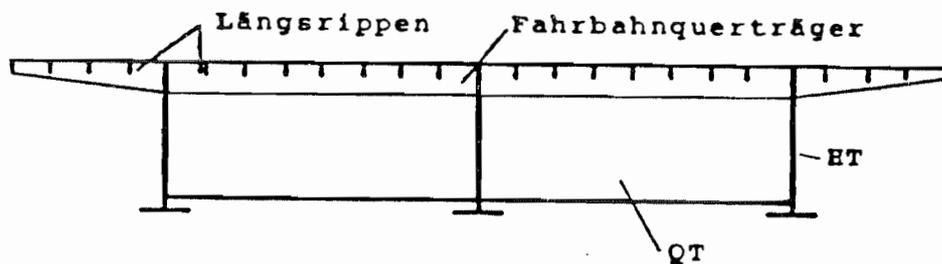


Berechnung von  $b_m$  z.B. nach DIN 1078  
DIN 1045

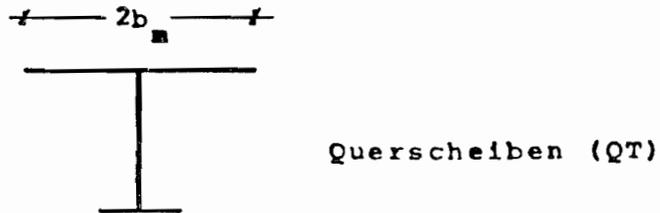
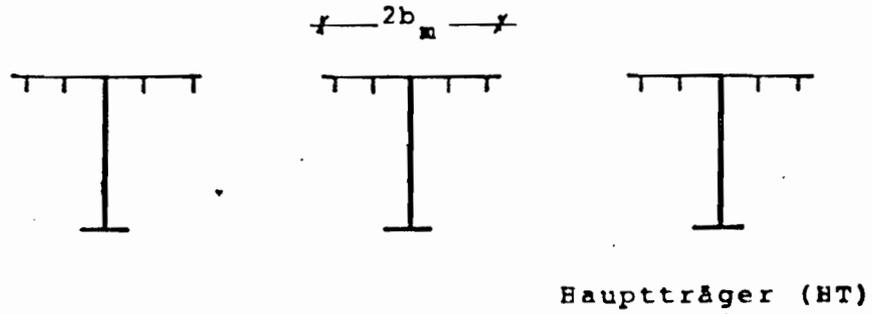
Idealisierung von Brücken:

(II.) Deckbrücke mit torsionsweichem HT:

Querschnitt

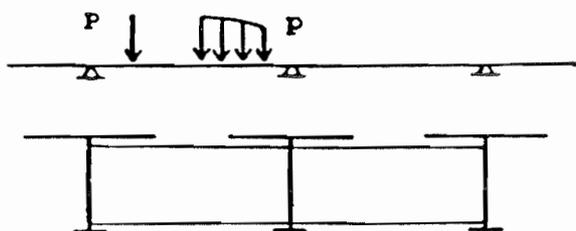
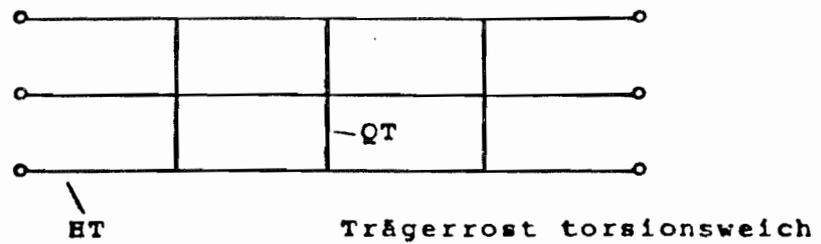


idealisiert: (nur für Berechnung des Haupttragwerks)



Die Fahrbahnquerträger sind meist sehr viel weicher und werden deshalb vernachlässigt bzw. das Trägheitsmoment der Querscheibe wird erhöht (anteilig der Fahrbahnquerträger, die im Bereich der Querscheibe liegen)

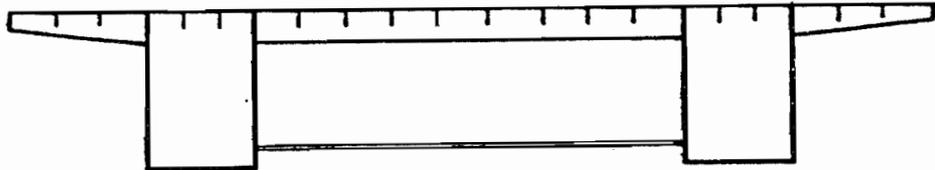
idealisiertes Haupttragwerk:



Aufteilung der zwischen den Hauptträgern angreifenden Belastung:

(2) Deckbrücke mit torsionssteifem HT:

Querschnitt

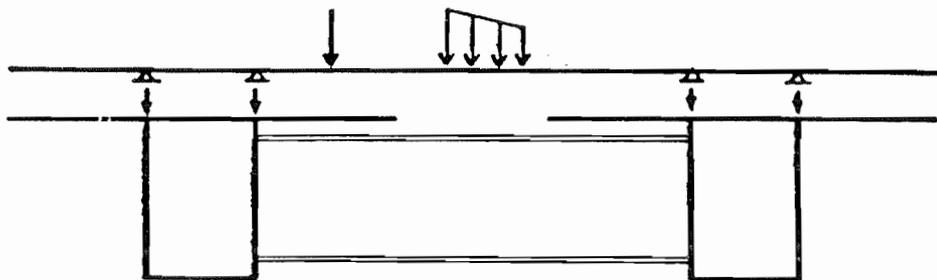


idealisierte Querschnitt:

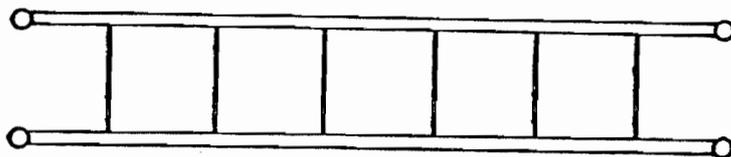
torsionssteife HT

torsionsweiche QT

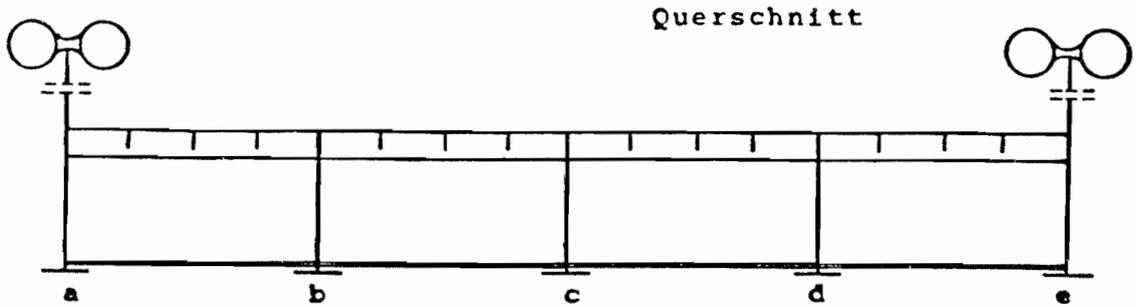
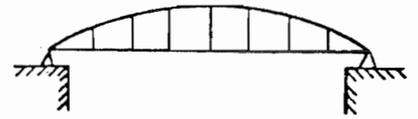
Aufteilung der Last



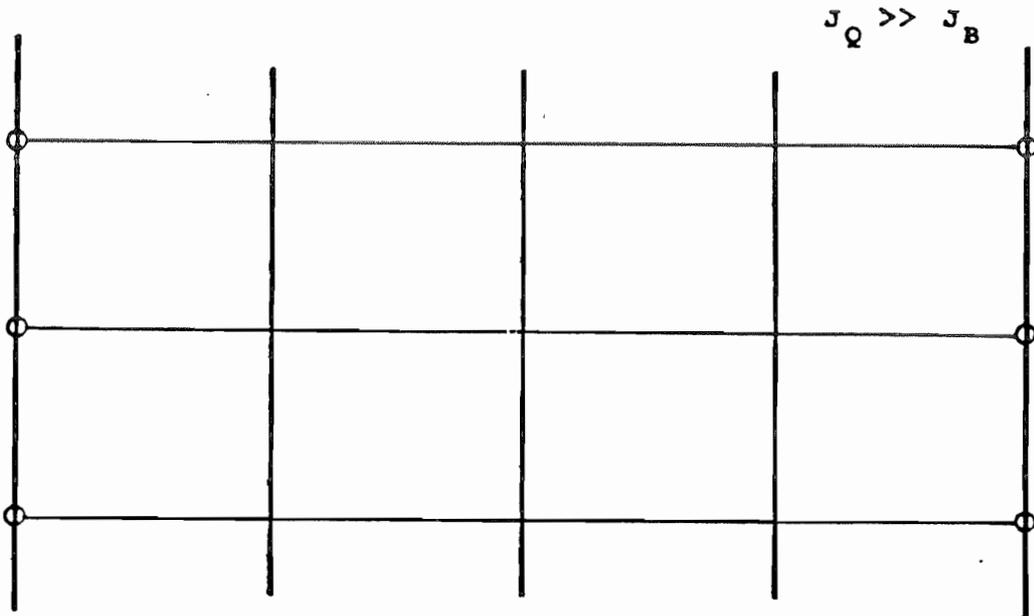
idealisiertes Haupttragwerk:



(3) Bogenbrücke mit angehängter Fahrbahn



Äußere Hauptträger an Bogen aufgehängt,  
bilden im Verhältnis zu inneren HT  
steife Scheibe

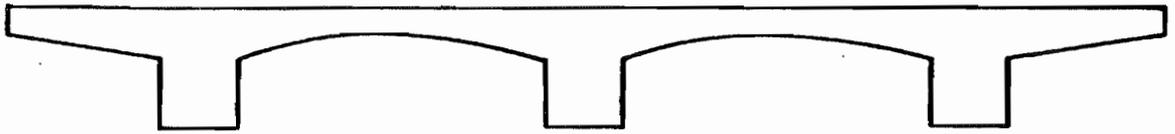


Tragwirkung für Lasten quer (auf Bogen),  
die dazwischen liegenden Längsträger haben  
funktional lastverteilenden Sinn

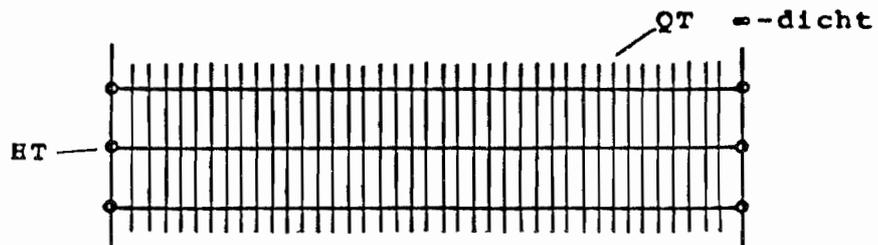
innere HT  $\rightarrow$  QT des Trägerrosts  
QT  $\rightarrow$  HT des Trägerrosts

(4) Plattenbalkenbrücke

Querschnitt



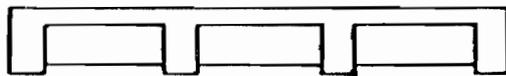
idealisierte Querschnitt ähnlich 1, jedoch torsionssteife HT.



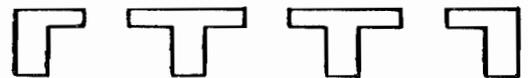
Fahrbahnplatte als =-dicht liegende QT

Idealisierung im Hochbau

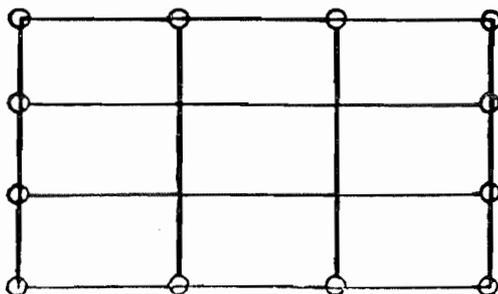
(5) Decke mit Unterzügen (bzw. Plattenbalken)



Querschnitt



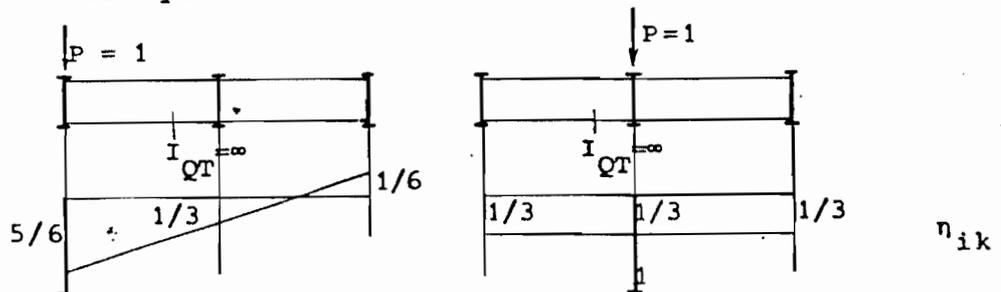
idealisiert: HT, QT torsionssteif



Trägerrost  
(ringsum aufgelagert)

Wirkung : lastverteilend insbesondere für Verkehrslasten (SLW)

Lastverteilungsfaktoren  $\eta_{ik}$  ; geben an, welchen Lastanteil die HT des Systems, erhalten ; z.B.:



Beanspruchung der Träger:

Torsionssteife Balken:

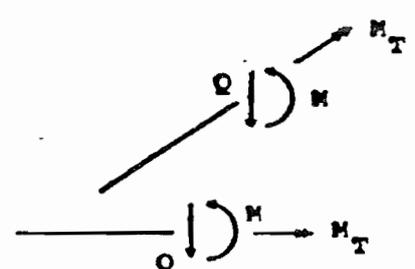
$$\underline{x} = \{ w \quad \phi \quad \theta \quad ; \quad Q \quad M \quad M_T \}$$

Biegung + Torsion  
(ohne Wölbkrafttorsion)

Torsionsweiche Balken:

$$\underline{x} = \{ w \quad \phi \quad ; \quad Q \quad M \}$$

Biegung  
(i.a. ohne Längskraft)

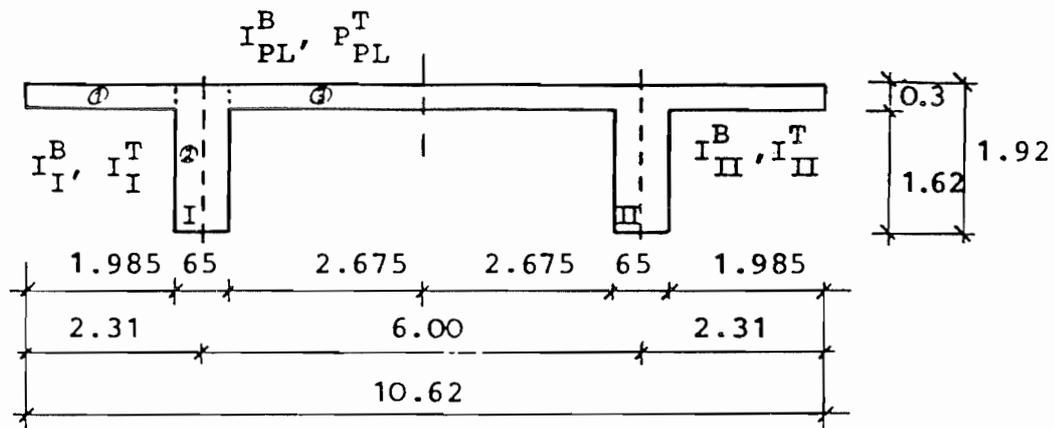


## Anhang zu Kap. 2 Räumliche Tragwerke

### 2.2.2 Berechnung einer zweistegigen Plattenbalkenbrücke mit einem Trägerrostmodell

Vergleich verschiedener Steifigkeiten von Längs- und Querträgern.

#### Querschnitt



#### Querschnittswerte

Trägheitsmoment des HT:  $I_I^B, I_{II}^B$

mitwirkende Plattenbreite:  $b_m, L/b_o = 38/0.65 = 58$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} : d/d_o = 0.30/1.92 = 0.156 \\ b_1/L = 1.985/38 = 0.052 \end{array} \right\} \frac{b_{m1}}{b_1} = 1.00$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{3} : d/d_o = 0.30/1.92 = 0.156 \\ b_2/L = 2.675/38 = 0.07 \end{array} \right\} \frac{b_{m2}}{b_2} = 1.00$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b_{m1}}{b_1} = 1.00 \\ \frac{b_{m2}}{b_2} = 1.00 \end{array} \right\} b_m = 5.31m$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b_o}{b} = \frac{0.65}{5.31} = 0.122 \\ \frac{d}{d_o} = \frac{0.30}{1.92} = 0.156 \end{array} \right\} \mu = 220 \cdot 10^{-4} \quad \text{n. BK.}$$

$$I_I^B = I_{II}^B = \mu \cdot b \cdot d_o^3 = 220 \cdot 10^{-4} \cdot 5.31 \cdot 1.92^3 = 0.83m^4$$

Torsionsträgheitsmoment:  $I_I^T, I_{II}^T$

$$\textcircled{1} : h/b = 1.985/0.30 = 6.62 \rightarrow \eta_1^1 = 0.904$$

$$\textcircled{2} : h/b = 1.92/0.65 = 2.95 \rightarrow \eta_1^2 = 0.784$$

$$\textcircled{3} : h/b = 2.675/0.30 = 8.92 \rightarrow \eta_1^3 = 0.928$$

$$I_I^T = I_{II}^T = \frac{1}{3}(0.904 \cdot 1.985 \cdot 0.30^3 + 0.784 \cdot 1.92 \cdot 0.65^3 + 0.928 \cdot 2.675 \cdot 0.30^3) \\ = 0.176 = 0.18 \text{ m}^4$$

Plattenträgheitsmoment:  $I_{PL}^B, I_{PL}^T$

$$I_{PL}^B = \frac{1.00 \cdot 0.30^3}{12} = 0.00225 \text{ m}^4/\text{m}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{1.00}{0.3} = 3.333$$

$$I_{PL}^T = \frac{1}{3} \cdot 1.00 \cdot 0.30^3 \cdot 0.807 = 0.00726 \text{ m}^4/\text{m}$$

Wegen des Abfalles der Torsionssteifigkeit im Spannungszustand

$$II: I_{PL}^T = \frac{1}{4} I_{PL}^T = 0.001815$$

Trägheitsmomente für einen 2m breiten Plattensteifen:

$$I_{PL}^B = 0.0045 \text{ m}^4$$

$$I_{PL}^T = 0.00363 \text{ m}^4$$

Materialdaten:

$$E = 3.40 \cdot 10.000 \text{ Mp/m}^2 = 34 \cdot 1000 \text{ MN/m}^2$$

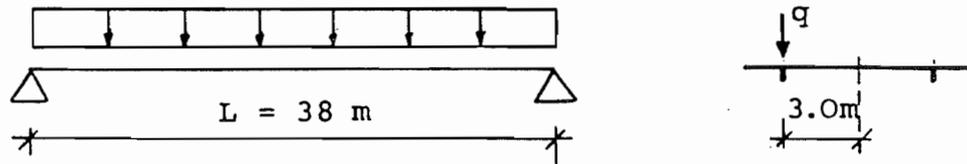
$$G = 0.42 E = 14 \cdot 280 \text{ MN/m}^2$$

Auflagerbedingungen:

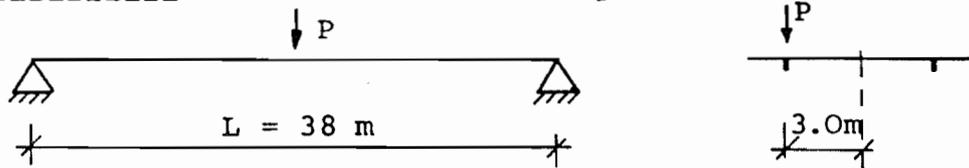
Die Endquerträger bewirken eine torsionsstarre Einspannung der Hauptträger.

System und Belastung

Lastfall 1: Streckenlast  $q = 10 \text{ Mp/m} = 0.1 \text{ MN/m}$



Lastfall 2: Einzellast  $P = 190 \text{ Mp} = 1,9 \text{ MN}$



Berechnung als Trägerrost mit Plattenstreifen - QT

Ergebnisse der Trägerrost berechnung für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse

Variante	$I_{PL}^B \text{ m}^4$	$I_{PL}^T \text{ m}^4$	$I_{HT}^T \text{ m}^4$	$I_{HT}^T \text{ m}^4$
A	0.0045	0.00363	0.83	0.18
B	0.0045	0.00363	0.83	0.18/4
C	0.0045/1000	0.00363/1000	0.83	0.18
E	0.0045*1000	0.00363*1000	0.83	0.18

Bemerkungen:

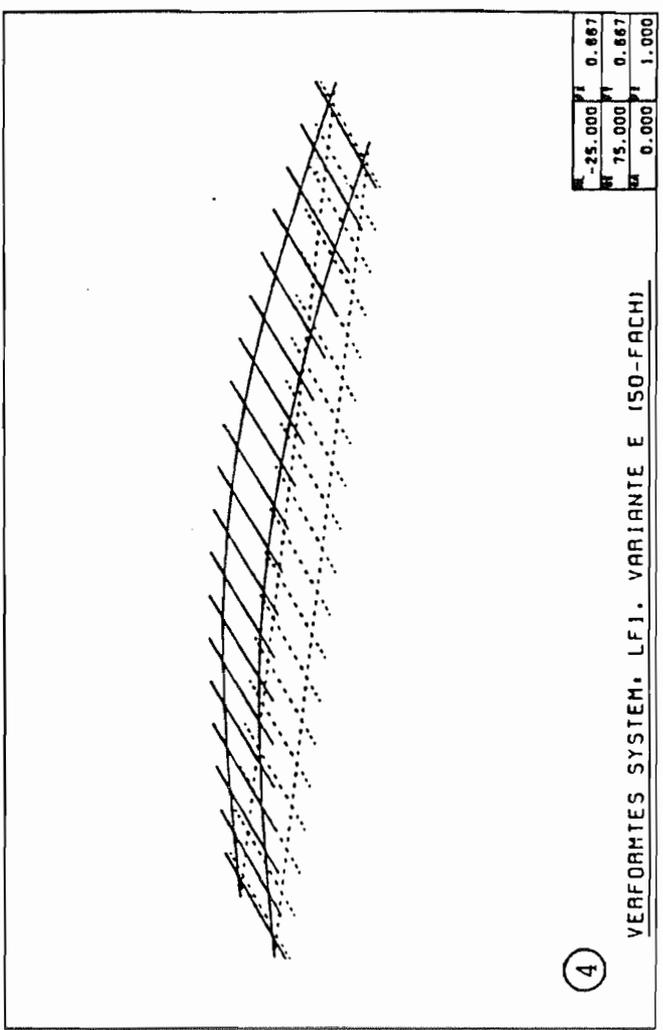
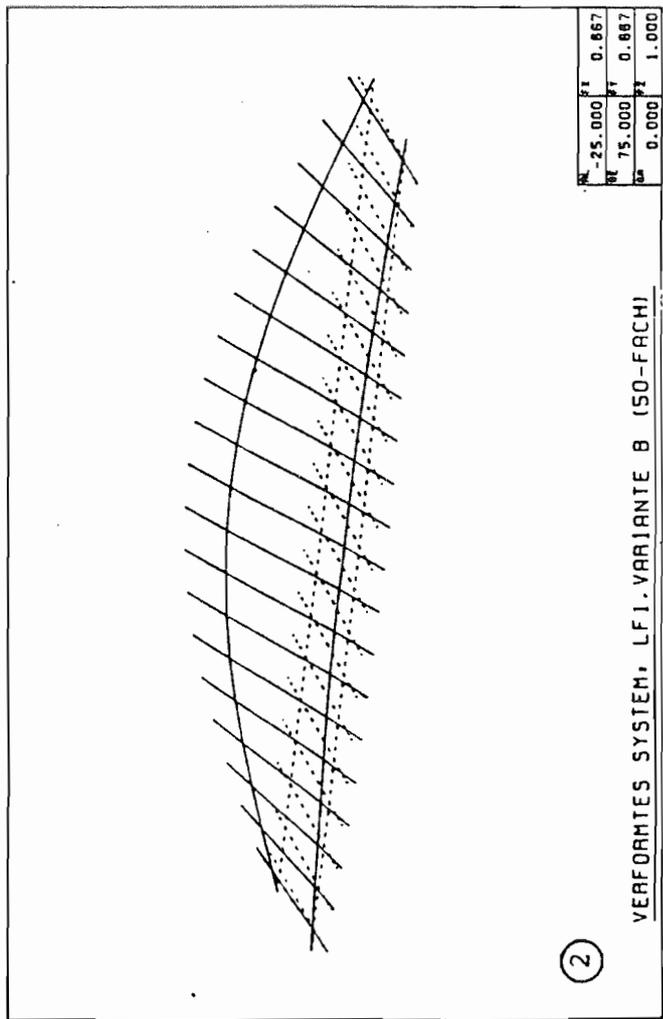
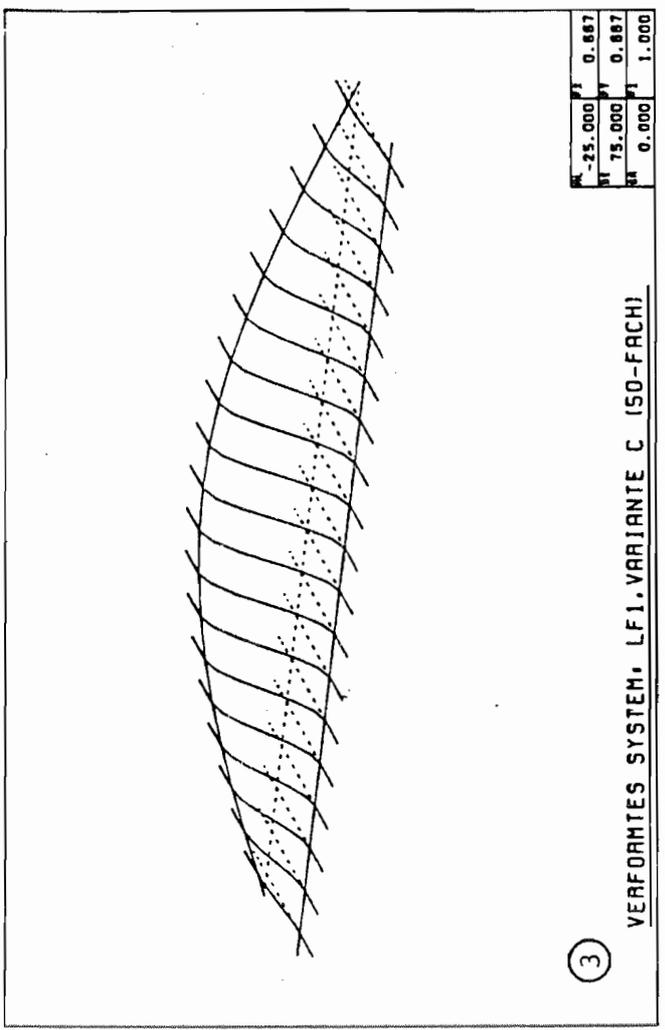
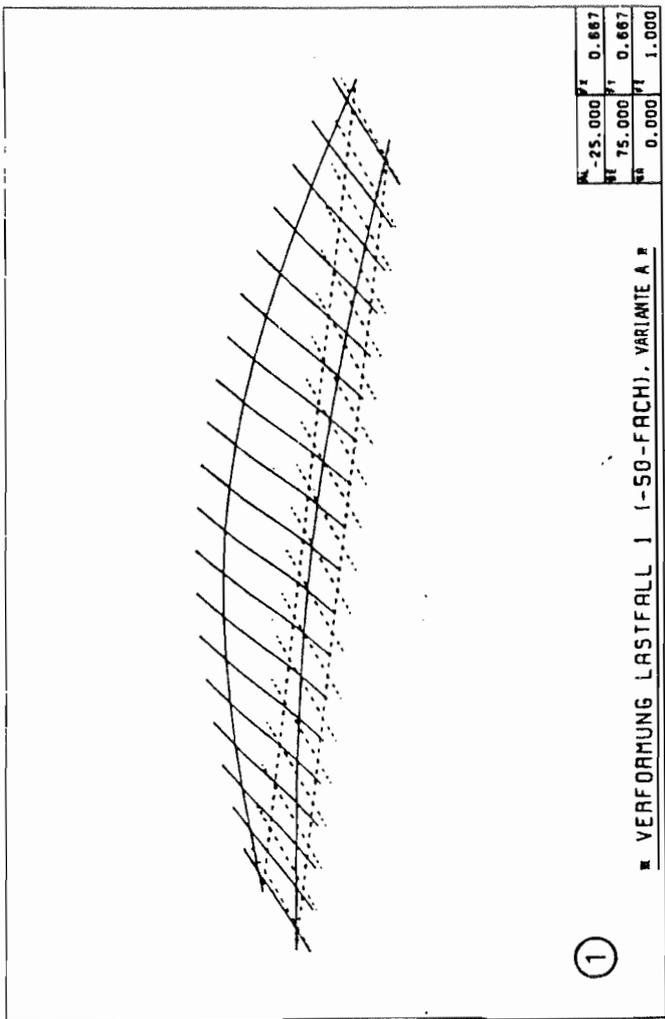
Variante A beschreibt die tatsächlichen Verhältnisse.

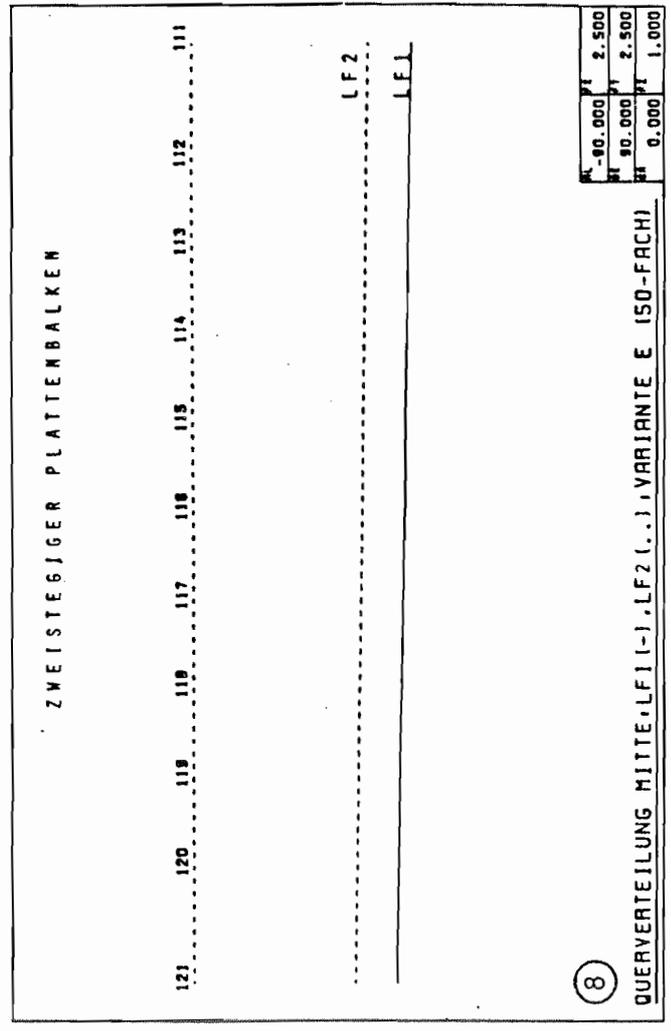
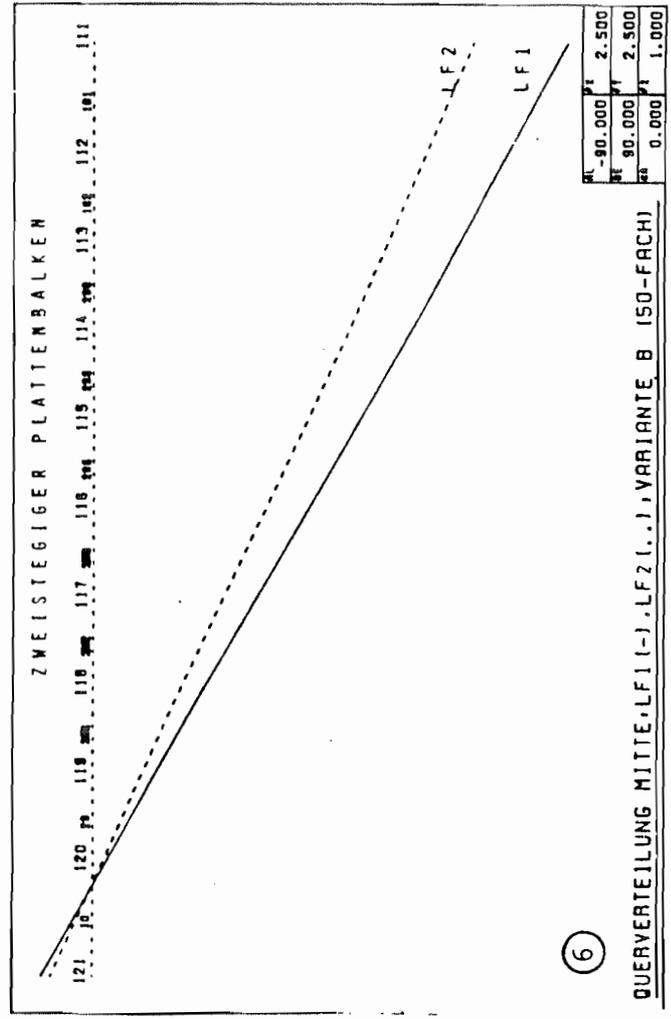
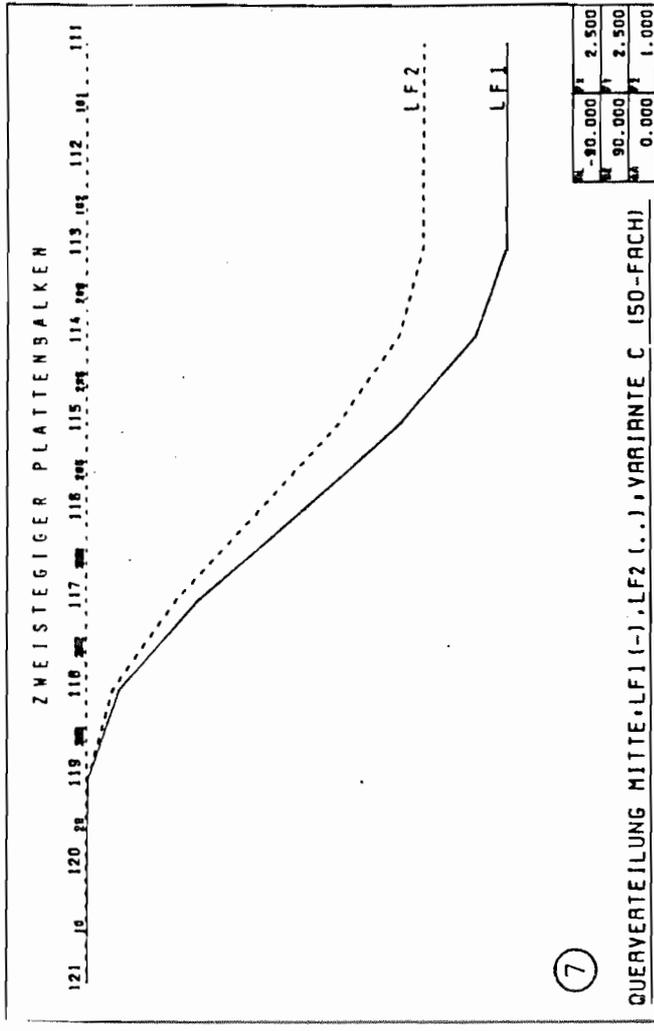
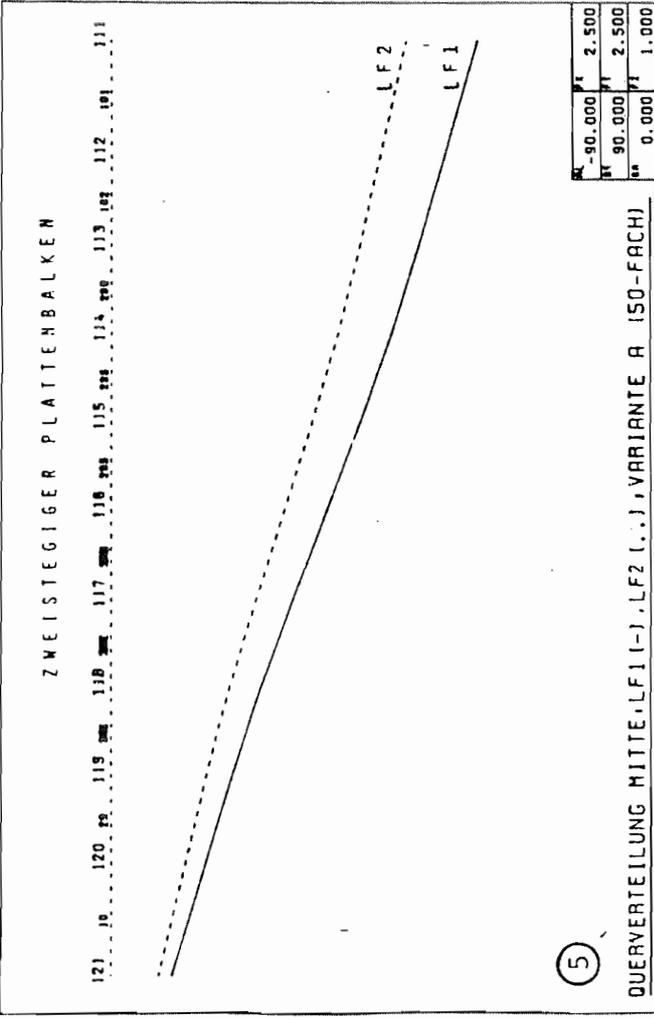
Variante B zeigt den Einfluß des Abfalles der Torsionssteifigkeit im Zustand II auf die Schnittgrößen und Verformungen.

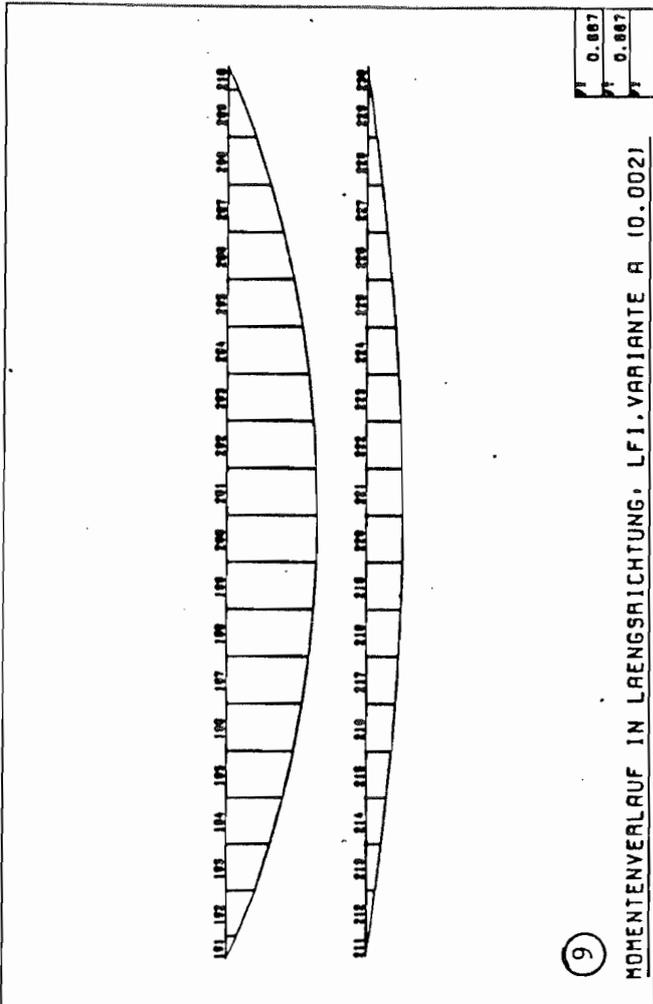
Variante C zeigt das Tragverhalten bei sehr geringer Plattensteifigkeit (1/1000).

Variante E zeigt das Tragverhalten bei sehr großer Plattensteifigkeit (\*1000).

Darstellung der Schnitt- und Verformungsgrößen bei den einzelnen Varianten:

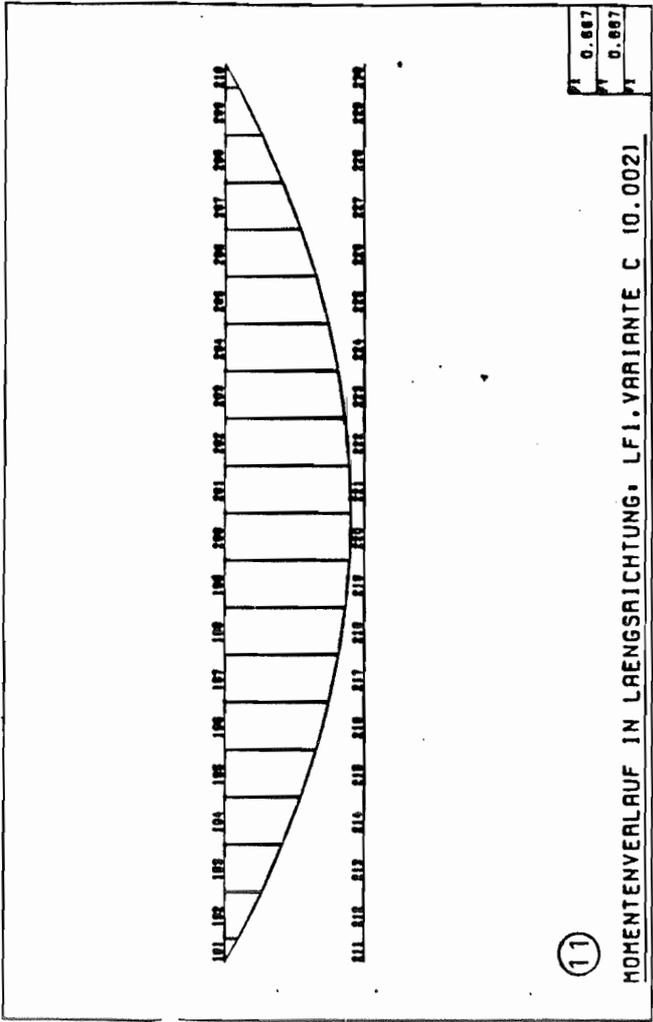






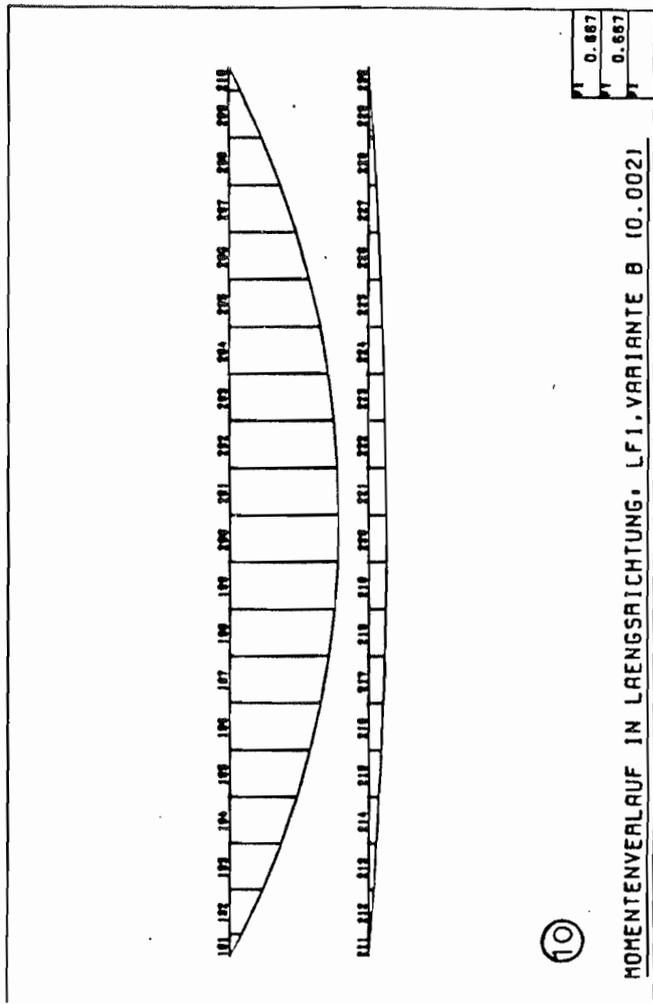
9

MOMENTENVERLAUF IN LAENGSRICHTUNG, LF1.VARIANTE A (0.002)



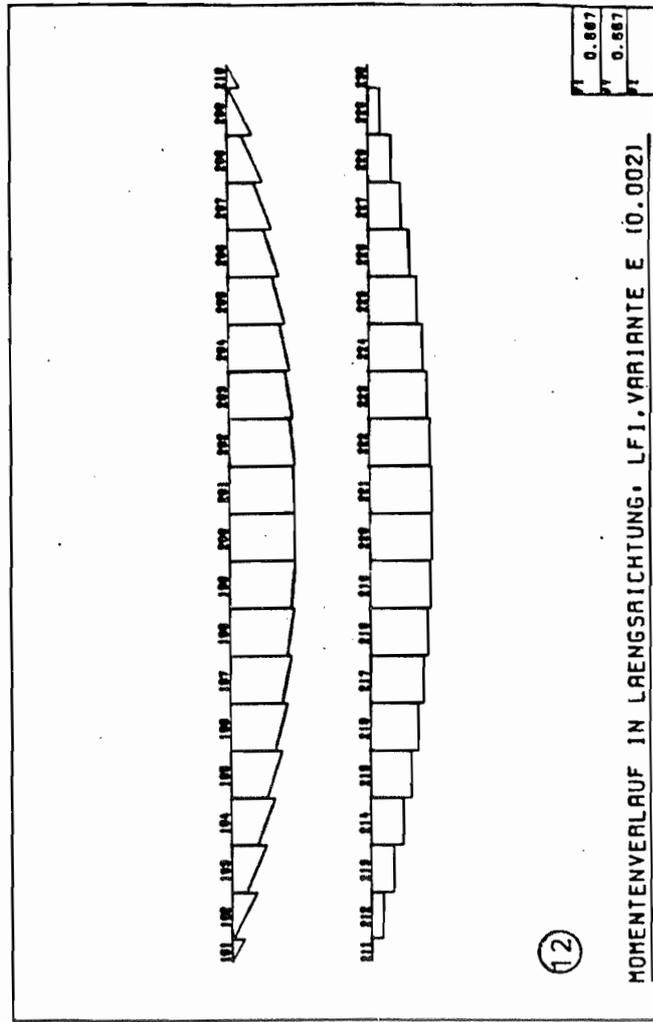
11

MOMENTENVERLAUF IN LAENGSRICHTUNG, LF1.VARIANTE C (0.002)



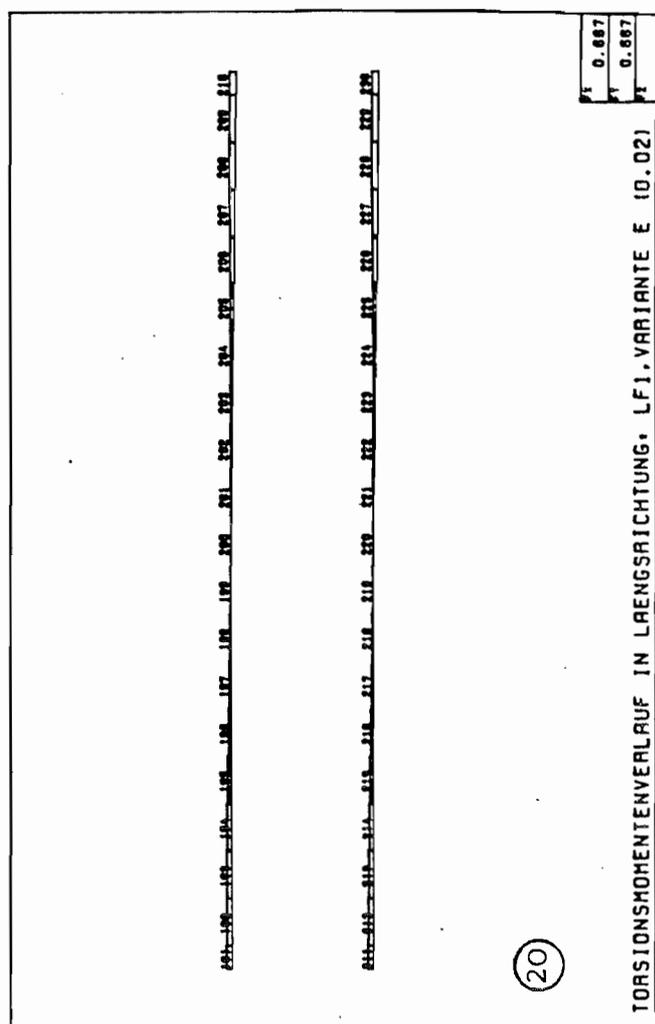
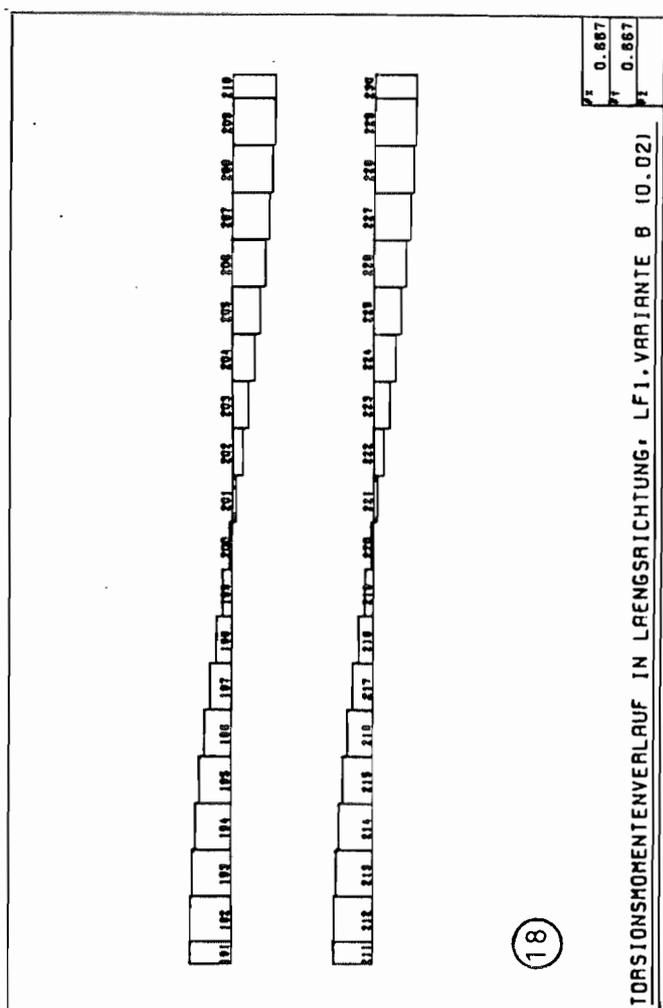
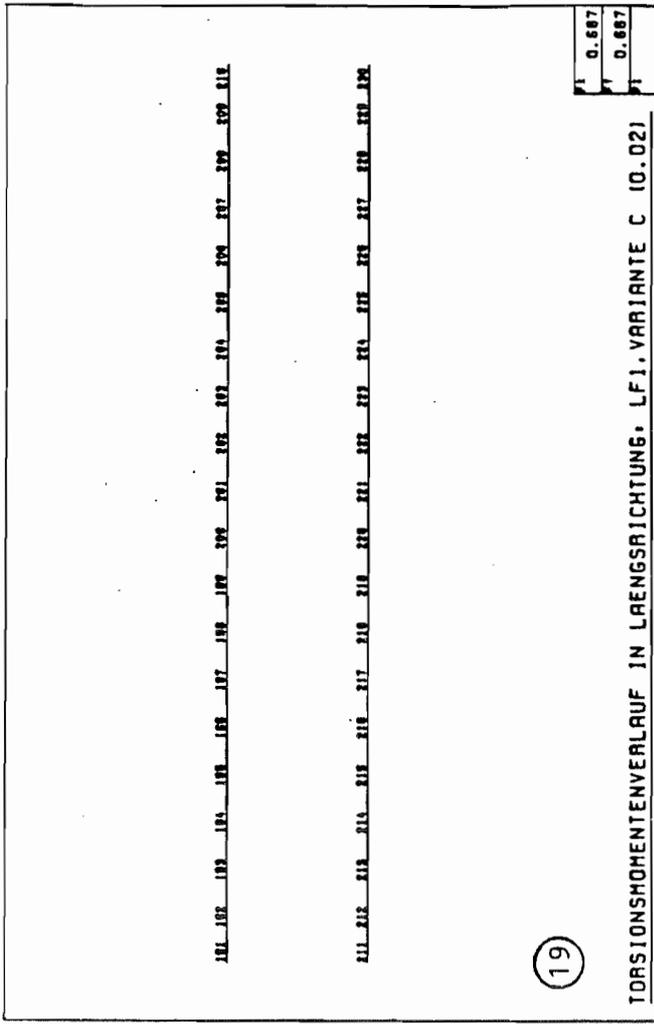
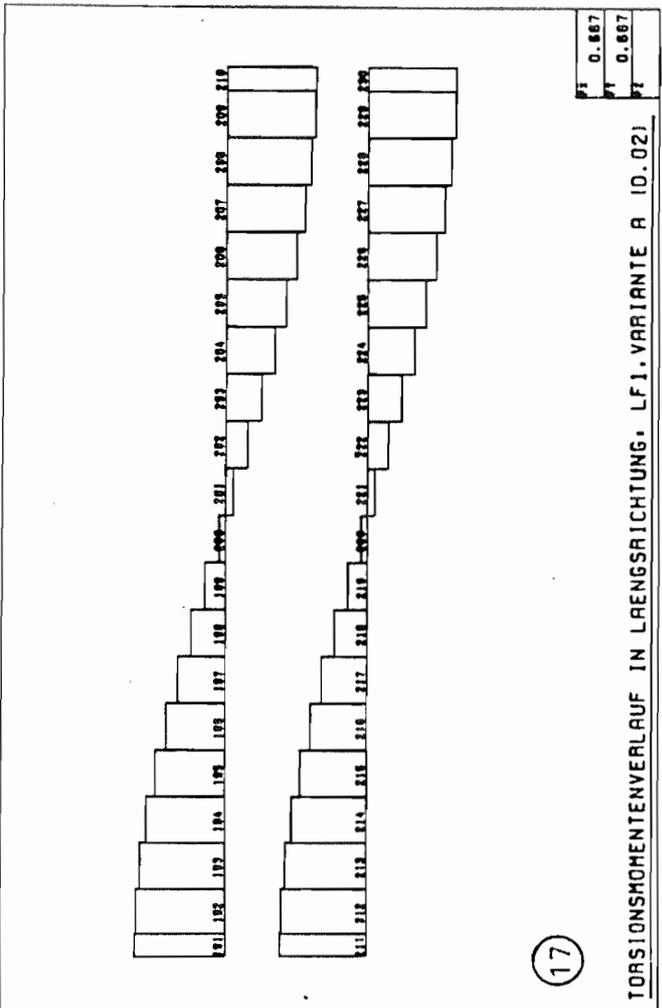
10

MOMENTENVERLAUF IN LAENGSRICHTUNG, LF1.VARIANTE B (0.002)



12

MOMENTENVERLAUF IN LAENGSRICHTUNG, LF1.VARIANTE E (0.002)

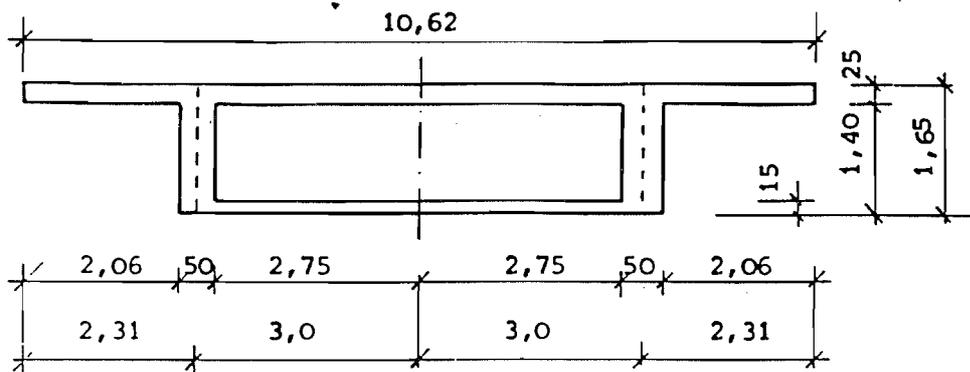


## 2.2.3 Vergleich eines torsionssteifen Hohlkastens mit einem torsionsweichen Plattenbalken gleicher Biegesteifigkeit.

(Es wird der Plattenbalkenquerschnitt aus Kap. 2.3.3.2 verwendet)

Hohlkasten als Einfeldträger, L = 38 m

Querschnitt



Querschnittswerte Biegung

	b * d	F	e	e · F	e <sup>2</sup> · F	I <sub>o</sub>
FbPL	10,62 · 0,25	2,655	0			0,0138
HT	2 · 0,50 · 1,40	1,40	0,828	1,155	0,9529	0,2287
BPL	5,5 · 0,15	0,825	1,45	1,1963	1,7346	0,0015
		4,88		2,3513	2,6875	0,2440

$$e_s = 2,3513 / 4,88 = 0,4818 \text{ m}$$

$$I_s = 2,6875 + 0,2440 - 0,4818 \cdot 2,3513 = 1,798 \text{ m}^4$$

Zur Abdeckung der Steifigkeitsverluste infolge Ribbildung in der Bodenplatte wird mit den 0,9 - fachen Werten gerechnet

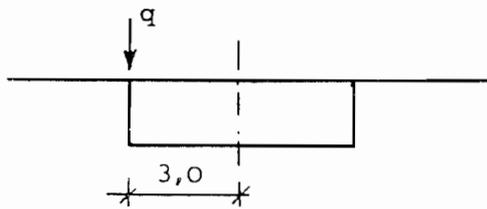
$$I_s = 0,9 \cdot 1,798 \text{ m}^4 = 1,62 \text{ m}^4 \quad (\hat{=} \text{Plattenbalken}) \quad \text{Siehe 2.3.3.2 } (I_I^B + I_{II}^B)$$

Querschnittswerte Torsion

$$I_T = \frac{4(6,0 \cdot 1,45)^2}{\frac{6}{0,25} + \frac{6}{0,15} + 2 \cdot \frac{1,40}{0,5}} = \frac{302,76}{24 + 40 + 5,6} = 4,35 \text{ m}^4$$

$$I_T^{\text{red}} = 0,85 \cdot I_T = 3,7 \text{ m}^4$$

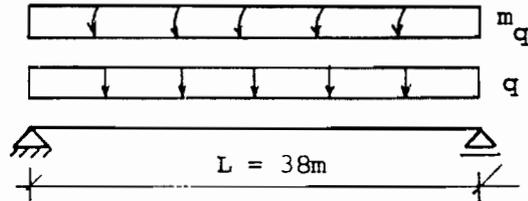
Ermittlung der Belastung



$$q = 10 \text{ Mp/m} = 0,1 \text{ MN/m}$$

$$m_q = 10 \cdot 3 = 30 \text{ Mpm/m} = 0,3 \text{ MNm/m}$$

System



gabelgelagerter Einfeldträger, Vernachlässigung von Wölbkrafttorsion und Profilverformung.

Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen

aus Biegung

$$M_{\max} = 10 \cdot 38^2 / 8 = 1,805 \text{ Mpm} = 18,05 \text{ MNm}$$

$$Q_{\max} = 10 \cdot 38 / 2 = 190 \text{ Mp} = 1,9 \text{ MN}$$

$$w_{\max} = \frac{18,05 \cdot 38^2}{9,6 \cdot 34000 \cdot 1,62} = 0,049 \text{ m}$$

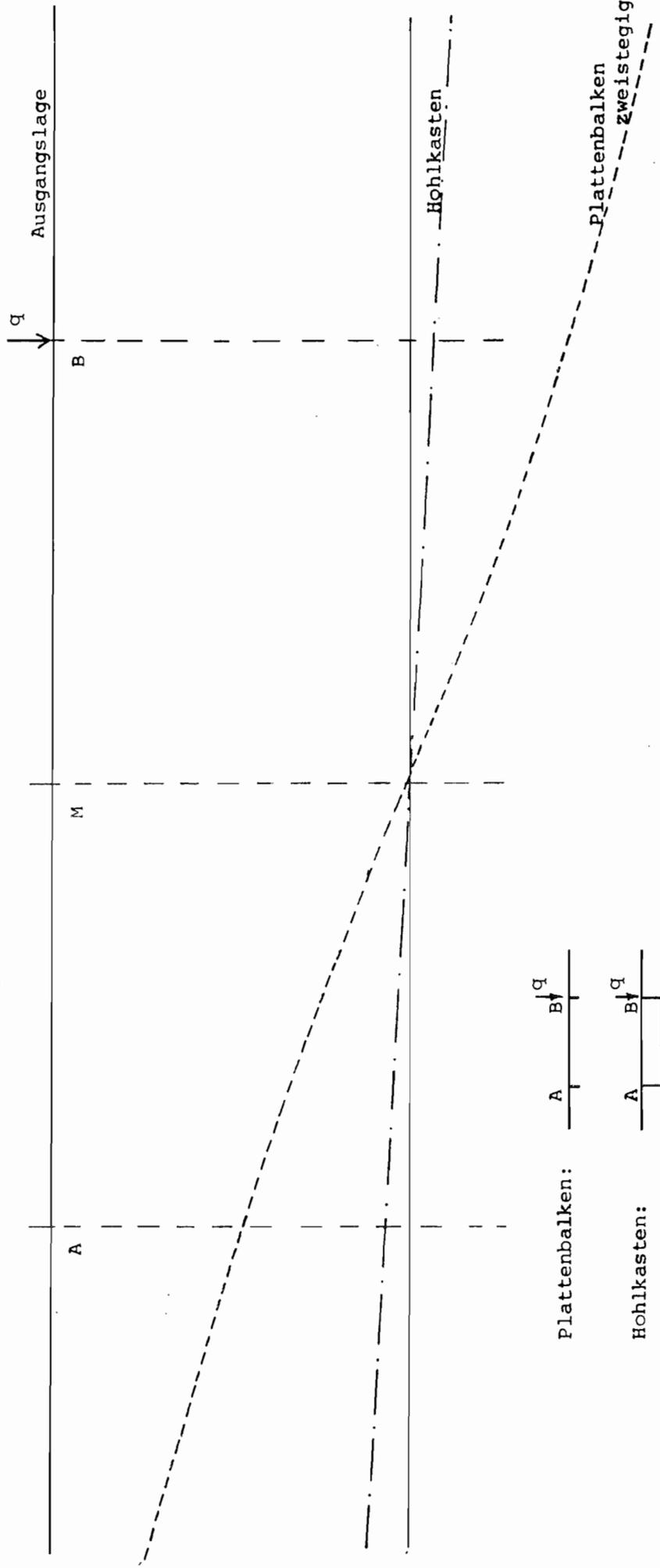
aus Torsion

$$M_T = 30 \cdot 38 / 2 = 570 \text{ Mp} = 5,7 \text{ MN}$$

$$\vartheta_m = \frac{5,7 \cdot 38}{4 \cdot 14280 \cdot 3,7} = 0,00102 \text{ (0,0058 beim Plattenbalken)}$$

Vergleich: Zweistegiger Plattenbalken - Hohlkasten (o. Profilverformung) bei gleicher

Biegesteifigkeit

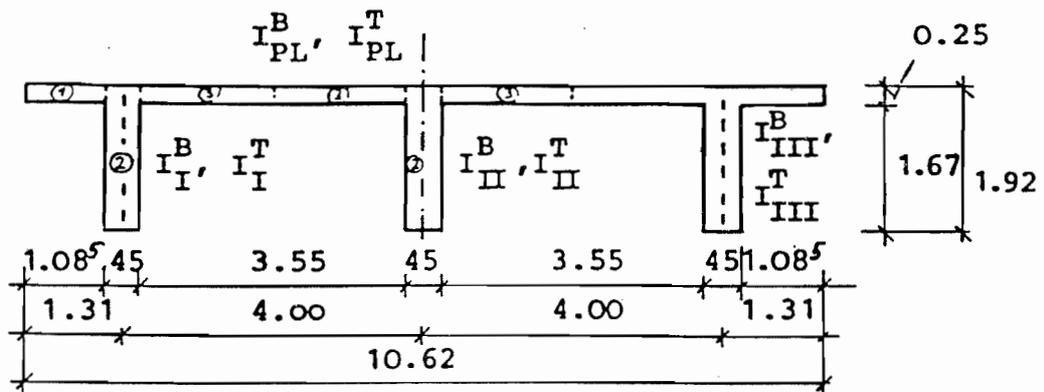


QUERVERTEILUNG MITTE

## 2.2.4 Einfluß der Laststellung in Querrichtung des Systems

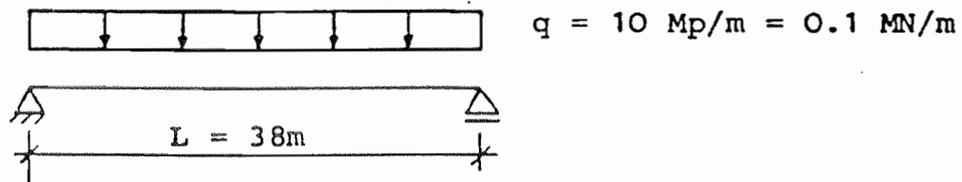
Dreistegiger Plattenbalken als Einfeldträger,  $L = 38 \text{ m}$

Querschnitt



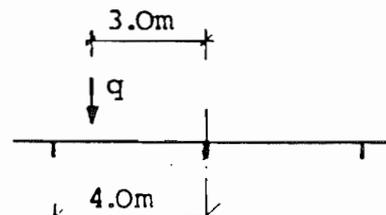
System und Belastung

Längsrichtung:



Querrichtung:

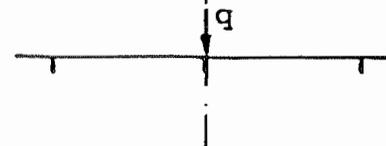
Lastfall 1 :



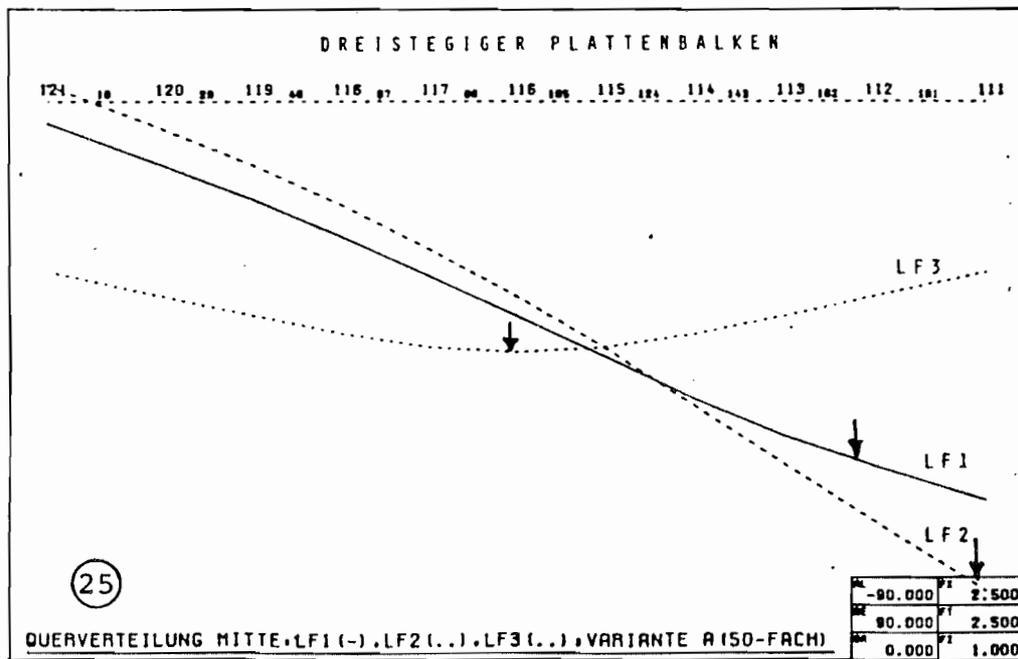
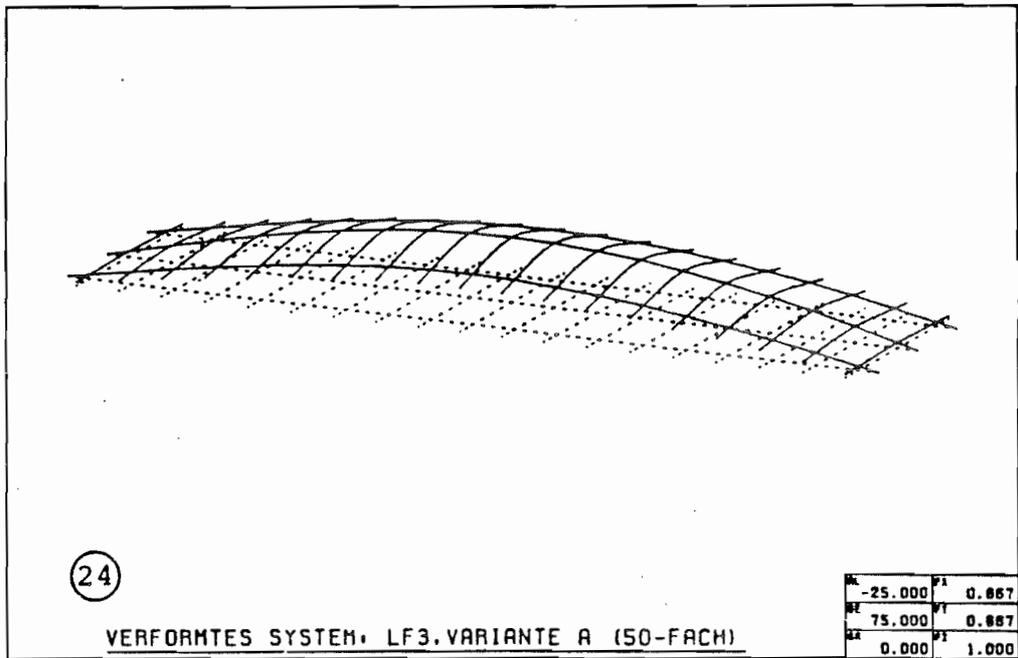
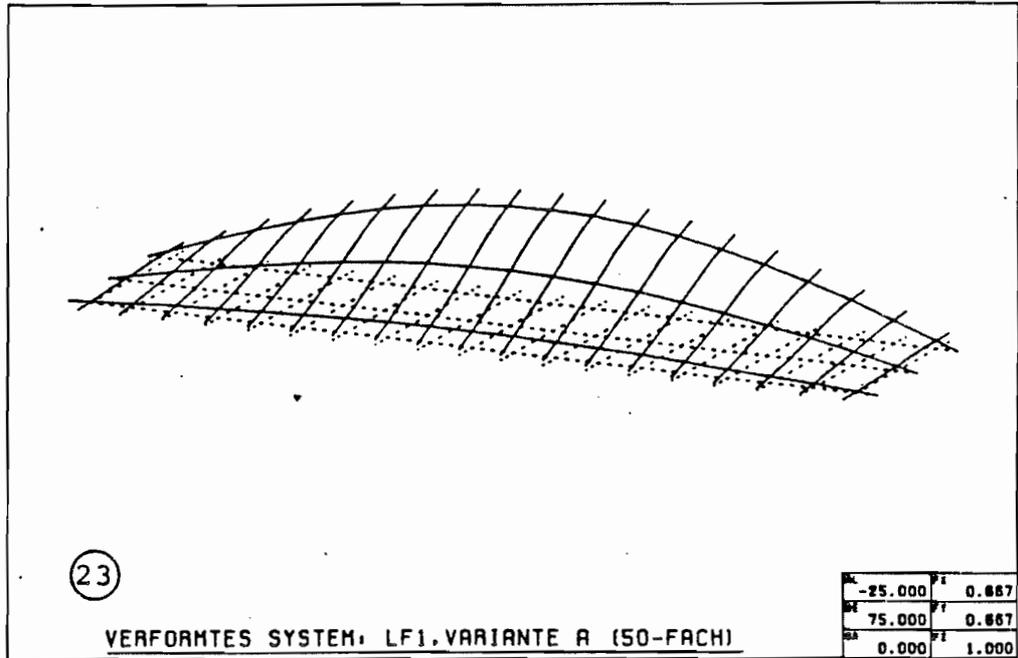
Lastfall 2 :

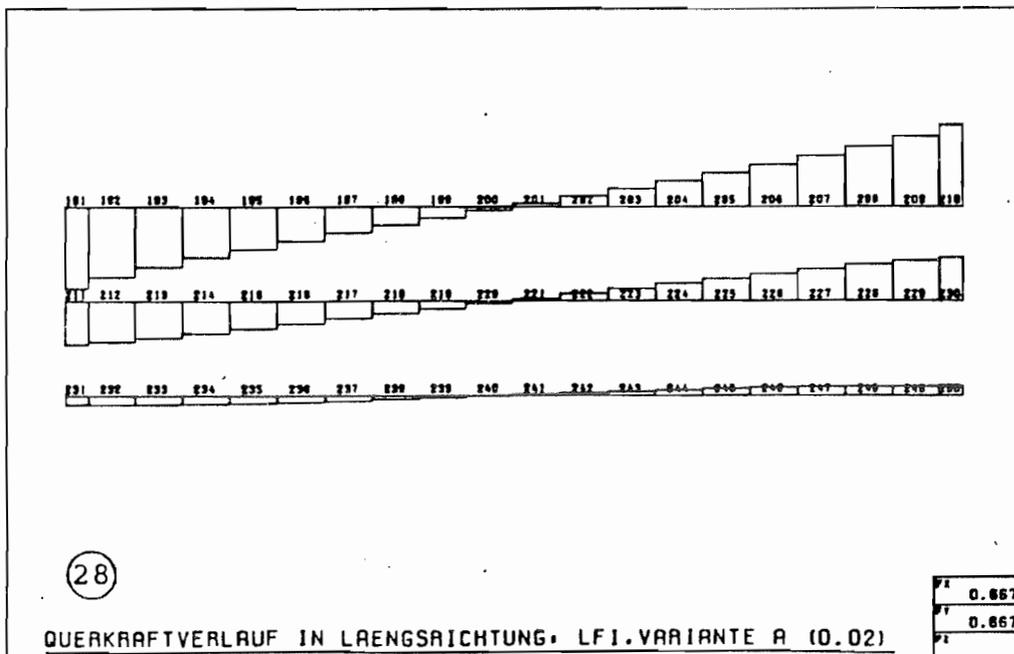
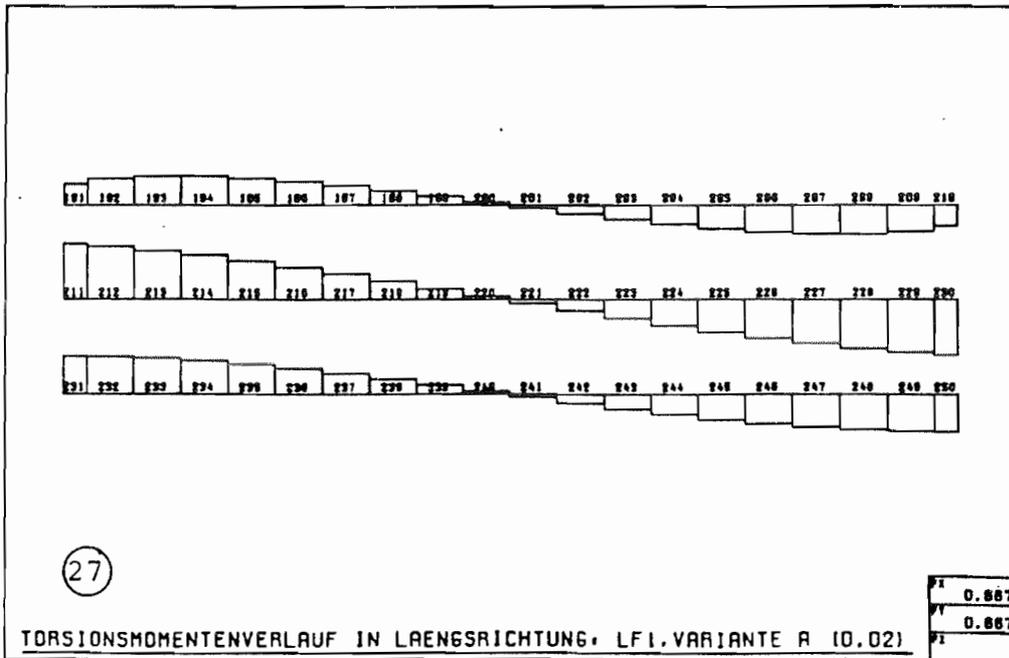
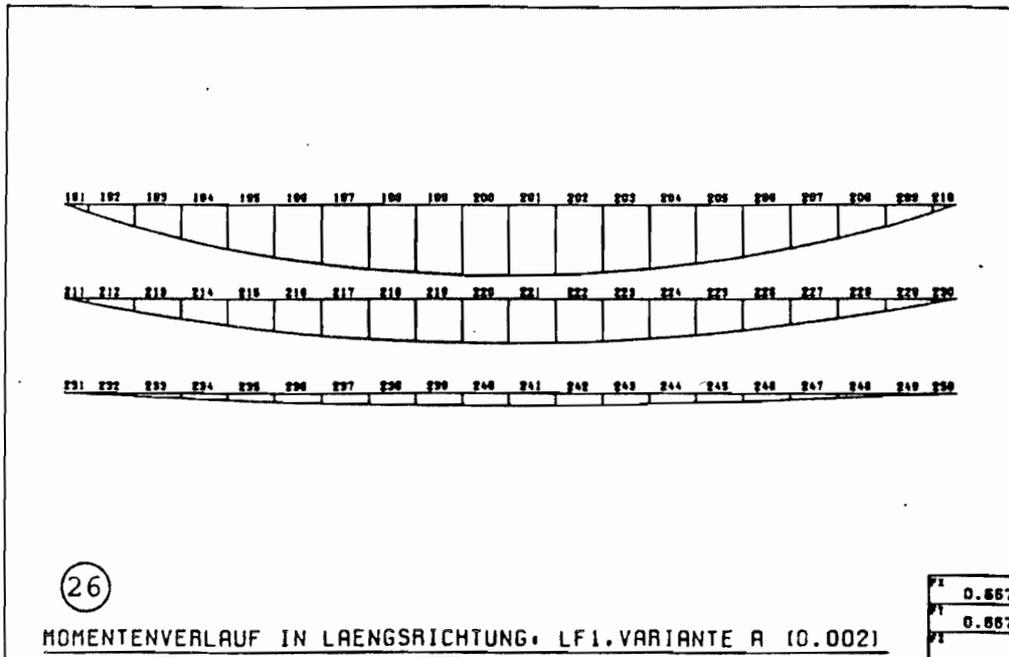


Lastfall 3 :

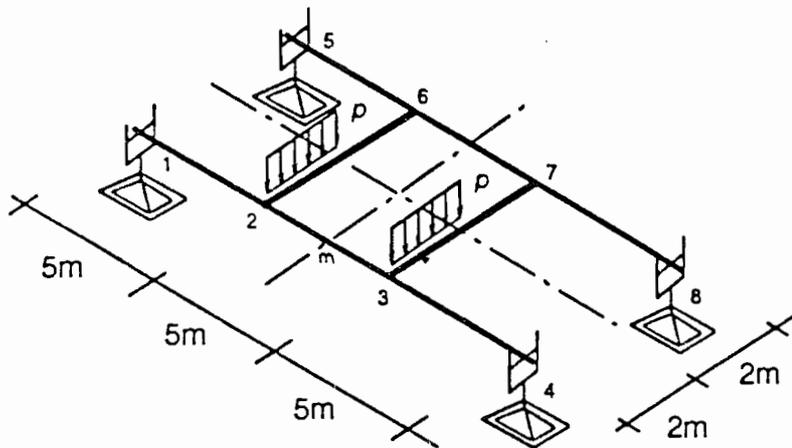


Berechnung als Trägerrost mit Plattenstreifen - QT

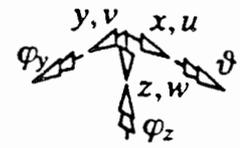




Ergebnisse der Berechnung eines Trägerrosts :



lokales KOS:

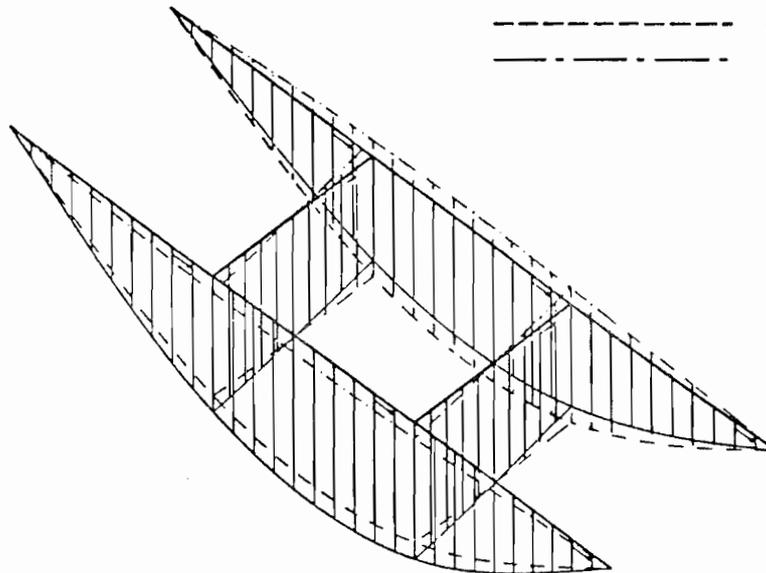


$$EI_y = 100 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

$$GI_T = 50 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

$$p = 20 \text{ kN/m}$$

Biegelinie :

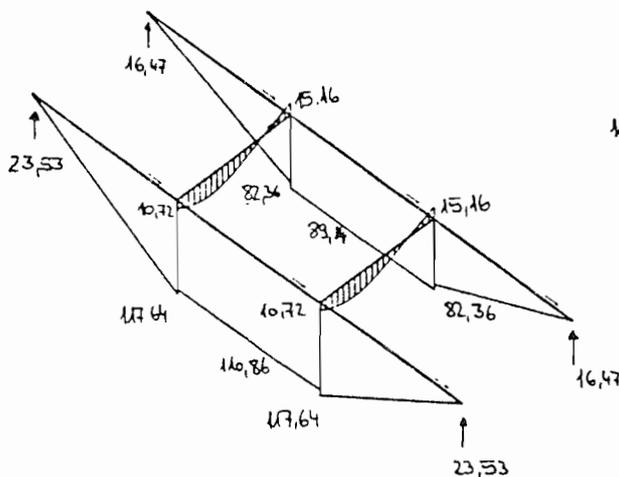


$$w_m^S = 23,96 \text{ mm}$$

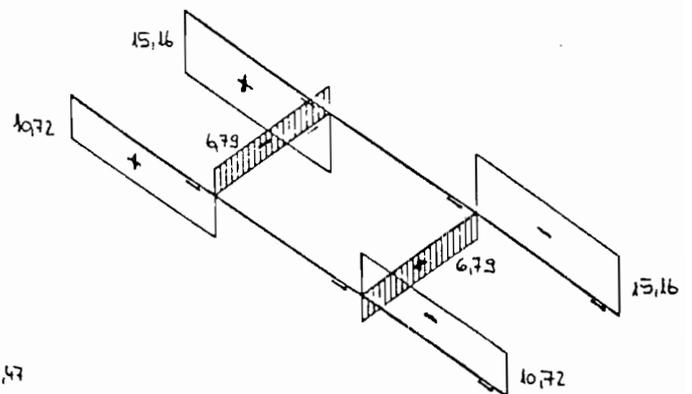
$$w_m^A = \pm 3,17 \text{ mm}$$

$$w_m = 27,13 \text{ mm}$$

Biegemomente : [kNm]



Torsionsmomente : [kNm]



## Anhang zu Kap. 2: Ergänzung zum Kraftgrößenverfahren

### 2.3 Allgemeines zum Prinzip der virtuellen Arbeit

Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, daß für hinreichend kleine (infinitesimale) Änderungen z.B. des Verschiebungszustands sich der Kräftezustand in einem mechanischen System nicht ändert, und umgekehrt:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_i + \delta W_a = 0. & \text{PvV} \\ \text{oder } \delta W^* &= \delta W_i^* + \delta W_a^* = 0. & \text{PvK} \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zum Energiesatz der Mechanik, nach dem die in einem abgeschlossenen mechanischen System aufgespeicherte Energie (oder Arbeit)  $E = E_{kin} + E_{pot} + E_{el} = \text{konstant}$  bleibt und deshalb für die Änderung der Energie  $dE=0$  gelten muß. Die in einem System zu Beginn eines Belastungsvorgangs vorhandene Energie kann Null sein (in der Statik übliche Annahme für den Sonderfall in Ruhe befindlicher, spannungsfreier Bauteile  $W=0$ ), muß aber nicht. Dies gilt z.B. für Bauteile mit Eigenspannungen aus plastischen Vorverformungen oder ungleichmäßiger Erwärmung.

#### 2.3.1 Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) für den Balken

Lokale Formulierung (DGL'n)

Globale Formulierung  
(Integral über Gesamtsystem)

Geometrische Verträglichkeit  
+  
Geom. Randbedingungen

Prinzip der virtuellen Kräfte  
(Prinzip der konjugierten  
virtuellen Arbeiten)



$$\delta W^* = \delta W_a^* + \delta W_i^* = \sum_k \delta F_k \bar{w}_k - \int (\delta M \kappa + \delta N \varepsilon) dx - \sum_j \delta F_{F_j} w_j = 0$$

eingeprägte  
Verschiebungen

Balken

Federn

Die konjugierte virtuelle Arbeit  $dW^*$  ist für beliebige virtuelle (äußere und innere) Kräfte dann, und nur dann gleich Null, wenn der Verschiebungszustand, auf dem die Kräfte Arbeit leisten, geometrisch verträglich ist und die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

Voraussetzung ist, daß die virtuellen Kräfte im Gleichgewicht sind und die statischen Randbedingungen erfüllen.

#### 2.3.2 Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte in Gestalt des Arbeitssatzes der Statik

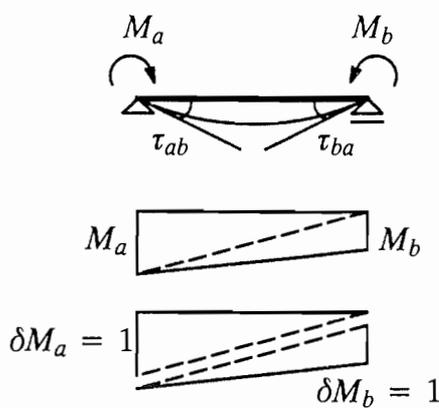
(Zur Berechnung von Einzelverschiebungen  $\bar{w}_n$ , siehe auch Baustatik 2)

$\delta F = \delta P + \delta A$  Aus praktischen Gründen werden die virtuellen äußeren Kräfte aufgeteilt in die zur gesuchten Verschiebungsgröße korrespondierende Kraft  $\delta P$  und in Reaktionskräfte  $\delta A$  an den Auflagern.

$$\delta P_n \bar{w}_n = \int_x \left( \delta M \left( \frac{M}{EI} + \bar{\kappa}_T \right) + \delta N \left( \frac{N}{EA} + \bar{\varepsilon}_T \right) \right) dx + \sum_j \delta F_{F_j} \frac{F_{F_j}}{k_{w_j}} - \sum_l \delta A_l \bar{w}_l$$

Balken Federn Stützensenkung

Beispiel: Stabendverdrehungen infolge Randmomenten



$$\tau_{ab} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{M_a}{EI} \cdot l + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{M_b}{EI} \cdot l$$

$$\tau_{ba} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{M_a}{EI} \cdot l + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{M_b}{EI} \cdot l$$

in Matrixschreibweise:  $v = f \cdot s$

$$\begin{bmatrix} \tau_{ab} \\ \tau_{ba} \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}$$

f ...Nachgiebigkeitsmatrix

2.3.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte als Lösungsverfahren am Gesamtsystem

Das PvK lautet für ebene Rahnen gemäß Abschnitt 2.2.2, wenn vorgegebene Verschiebungen nur an den Auflagern zugelassen werden:

$$\delta W^* = - \int \left[ \delta M \left( \frac{M}{EI} + \bar{\kappa}_T \right) + \delta N \left( \frac{N}{EA} + \bar{\epsilon}_T \right) \right] dx \quad (\text{ohne Querkraftanteile})$$

$$- \sum_j \delta F_{Fj} \frac{F_{Fj}}{k_{Wj}} + \sum_l \delta A_l \bar{w}_l = 0 \quad (*)$$

- Dabei bedeuten:  $\bar{\kappa}_T$  : eingeprägte Verkrümmung des wirklichen =  $\alpha_0 \frac{\Delta T}{h}$   
Zustandes aus Temperatur
- $\bar{\epsilon}_T$  : eingeprägte Verzerrung des wirklichen Zustandes  
aus Temperatur =  $\alpha_T \cdot T$
- $\delta A$  : die der vorgeschriebenen Widerlagersenkung  
zugeordnete Auflagerkraft des virtuellen  
Kräftezustands

Der wirkliche Kräftezustand wird wie folgt aufgebaut:

$$M(x) = M_0(x) + \sum_r M_r(x) \cdot X_r \quad ; \quad \text{dazu} \quad F_{Fj} = F_{Fj,0} + \sum_r F_{Fj,r} \cdot X_r$$

$$N(x) = N_0(x) + \sum_r N_r(x) \cdot X_r \quad ; \quad A_l = A_{l,0} + \sum_r A_{l,r} \cdot X_r$$

Die Kräftesysteme  $M_0(x)$  und  $N_0(x)$  sind mit der äußeren Last im Gleichgewicht. Daraus folgt, daß die linear unabhängigen Gleichgewichtssysteme  $M_r(x)$  und  $N_r(x)$  Eigenspannungszustände sein müssen.

Die gesamten Verkrümmungen des wirklichen Zustands erhält man also zu:

$$\kappa(x) = \frac{1}{EI} (M_0 + \sum_r M_r \cdot X_r) + \bar{\kappa}_T = \frac{M_0}{EI} + \sum_r \frac{M_r}{EI} \cdot X_r + \bar{\kappa}_T$$

Analog folgt für die Verzerrungen:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{EA} (N_0 + \sum_r N_r \cdot X_r) + \bar{\varepsilon}_T = \frac{N_0}{EA} + \sum_r \frac{N_r}{EA} \cdot X_r + \bar{\varepsilon}_T$$

Nunmehr wählt man als virtuellen Kräftezustand:

$$\begin{aligned} \delta M &= \sum_r M_r \cdot \delta X_r & \delta N &= \sum_r N_r \cdot \delta X_r \\ \delta F_{Fj} &= \sum_r F_{Fj,r} \cdot \delta X_r & \delta A_l &= \sum_r A_{l,r} \cdot \delta X_r \end{aligned}$$

Geht man damit in (\*), so folgt:

$$\begin{aligned} & \int_x \left[ \sum_i (M_i \delta X_i) \left( \frac{M_0}{EI} + \sum_r \left( \frac{M_r}{EI} \cdot X_r \right) + \bar{\kappa}_T \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_i (N_i \delta X_i) \left( \frac{N_0}{EA} + \sum_r \left( \frac{N_r}{EA} \cdot X_r \right) + \bar{\varepsilon}_T \right) \right] dx \\ & + \sum_j \left[ \sum_r F_{Fj,r} \cdot \delta X_r \right] \frac{1}{k_{wj}} \left[ F_{Fj,0} + \sum_r F_{Fj,r} \cdot X_r \right] \\ & - \sum_l \left[ \sum_r A_{l,r} \cdot \delta X_r \right] \bar{w}_l = 0 \end{aligned}$$

Umordnung ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_i \delta X_i \left\{ \int_x \left[ M_i \left( \sum_r \frac{M_r}{EI} \cdot X_r + \frac{M_0}{EI} + \bar{\kappa}_T \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + N_i \left( \sum_r \frac{N_r}{EA} \cdot X_r + \frac{N_0}{EA} + \bar{\varepsilon}_T \right) \right] dx \right. \\ \quad \left. + \sum_j F_{Fj} \frac{1}{k_{wj}} \left[ F_{Fj,0} + \sum_r F_{Fj,r} \cdot X_r \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_l A_{l,i} \bar{w}_l \right\} = 0 \end{aligned}$$

Das i-te Summenglied lautet ausgeschrieben:

$$\delta X_i \left\{ \int_x \left[ M_i \frac{M_1}{EI} X_1 + M_i \frac{M_2}{EI} X_2 + \dots + M_i \frac{M_n}{EI} X_n + M_i \frac{M_0}{EI} + M_i \bar{\kappa}_T \right. \right. \\ \left. \left. + N_i \frac{N_1}{EA} X_1 + N_i \frac{N_2}{EA} X_2 + \dots + N_i \frac{N_n}{EA} X_n + N_i \frac{N_0}{EA} + N_i \bar{\epsilon}_T \right] dx \right. \\ \left. + \sum_j \left[ F_{Fj,i} \frac{1}{k_{wj}} F_{Fj,0} + \frac{F_{Fj,i}}{k_{wj}} F_{Fj,1} X_1 + \dots + \frac{F_{Fj,i}}{k_{wj}} F_{Fj,n} X_n \right] \right. \\ \left. - \sum_l A_{li} \bar{w}_l \right\} = 0$$

$$\delta X_i \left\{ X_1 \int_x \left( M_i \frac{M_1}{EI} + N_i \frac{N_1}{EA} \right) dx + \dots + X_r \int_x \left( M_i \frac{M_r}{EI} + N_i \frac{N_r}{EA} \right) dx + \dots + X_n \int_x \left( M_i \frac{M_n}{EI} + N_i \frac{N_n}{EA} \right) dx \right. \\ \left. + X_1 \sum_j F_{Fj,i} \frac{F_{Fj,1}}{k_{wj}} + \dots + X_r \sum_j F_{Fj,i} \frac{F_{Fj,r}}{k_{wj}} + \dots + X_n \sum_j F_{Fj,i} \frac{F_{Fj,n}}{k_{wj}} \right. \\ \left. + \int_x \left( M_i \frac{M_0}{EI} + M_i \bar{\kappa}_T + N_i \frac{N_0}{EA} + N_i \bar{\epsilon}_T \right) \right. \\ \left. + \sum_j F_{Fj,i} \frac{F_{Fj,0}}{k_{wj}} - \sum_l A_{li} \bar{w}_l \right\} = 0$$

Für beliebige  $\delta X_i$  müssen die Klammerausdrücke für sich verschwinden. Dies führt auf folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \delta_{10} &= 0 ; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \delta_{20} &= 0 ; \\ &\vdots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \delta_{n0} &= 0 ; \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise :

$$[ \delta_{ik} ] [ X_k ] + [ \delta_{i0} ] = [ 0 ]$$

$$\mathbf{F} \mathbf{X} + \mathbf{F}_0 = 0$$

## 2.4 Vergleich des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV) mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) am Balken

Grundgleichungen des Biegebalkens:

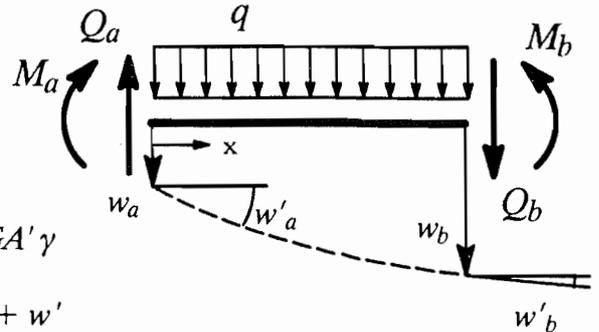
Gleichgewicht:  $Q' + \bar{q} = 0$   
 $M' - Q = 0$

Werkstoffgesetz:  $M = EI\kappa$  ;  $Q = GA'\gamma$

Kinematik:  $\kappa = \varphi'$  ;  $\gamma = \varphi + w'$   
 oder  
 $\gamma = 0 \rightarrow \varphi = -w'$  ;  $\kappa = -w''$

Randbedingungen:

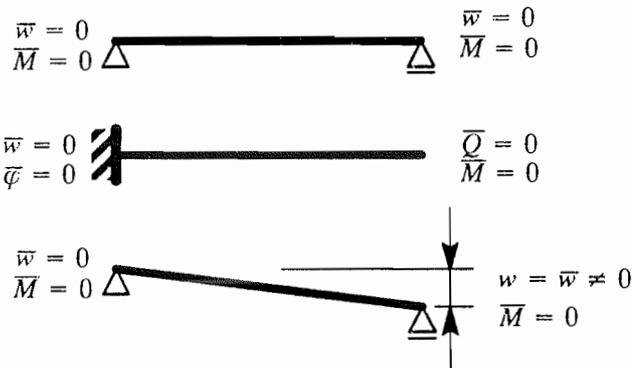
Kräfte:  $Q = \bar{Q}$  ;  $M = \bar{M}$   
 Verschiebungen:  $w = \bar{w}$  ;  $\varphi = \bar{\varphi}$



Überstrichene Größen sind vorgeschriebene oder eingeprägte Größen (die auch Null sein können). Vorgeschriebene Weggrößen  $\bar{w}$  ungleich Null sind z.B. Stützensenkungen, vorgeschriebene Kraftgrößen gleich Null entsprechen einem „freien Rand“.

Am Rand können entweder Kräfte oder Verschiebungen vorgeschrieben werden. Man kann die Berandung also aufteilen in einen Teil mit Kräfte-Randbedingungen und einen mit Verschiebung-Randbedingungen. Die „Oberfläche“ eines Balkens zwischen den Lagern gehört auch zur Berandung, und zwar zu dem Teil, an dem Kräfte vorgeschrieben werden (Streckenlasten oder lastfrei).

Beispiele für verschiedene Arten von Randbedingungen:



**Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen:**

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_a = 0.$$

$$\delta W_i = - \int_x (M\delta\kappa + Q\delta\gamma) dx$$

$$\delta W_a = \int_x \bar{p}_z \delta w dx + \sum_k \bar{P}_{zk} \delta w_n + \bar{Q} \delta w \Big|_a^b + \bar{M} \delta \varphi \Big|_a^b$$

Im Feld
Knotenlasten
vorgegebene Randlasten

Äußere Arbeit wird nur von eingepägten Kräften auf den Wegen der virtuellen Verschiebungen geleistet. Treten Einzellasten im Feld auf, muß das Integral um die Summe der Einzelarbeiten ergänzt werden. Diese Anteile werden im Folgenden aber nicht weiter verfolgt und sind jeweils sinngemäß zu ergänzen.

Anforderungen an die virtuellen Verschiebungen (Nebenbedingungen):

$\delta\kappa = \delta\varphi'$	$\delta\gamma = \delta\varphi + \delta w'$	im Feld	Ein zulässiger virtueller Verschiebungszustand muß verträglich sein und dort, wo geometrische Randbedingungen vorliegen, verschwinden.
$\delta(w + \bar{w}) = \delta w = 0$		am Auflager	
$\delta(\varphi + \bar{\varphi}) = \delta\varphi = 0$			

$$-\delta W = \int_x [M\delta\kappa + Q\delta\gamma - \bar{p}_z \delta w] dx - \bar{Q} \delta w \Big|_a^b - \bar{M} \delta \varphi \Big|_a^b = 0$$

**PvV**  
(am Balken)

ausgedrückt in Weggrößen

Zur Ableitung der zugehörigen Grundgleichungen führt man die Nebenbedingungen des virtuellen Verschiebungszustands als formale Erweiterung des Arbeitsprinzips ein (unterstrichene Terme):

$$-\delta W = \int_x [M\delta\kappa + Q\delta\gamma - \bar{p}_z \delta w] dx - \bar{Q} \delta w \Big|_a^b - \bar{M} \delta \varphi \Big|_a^b - \int_x [M[\delta\kappa - d\varphi'] + Q[\delta\gamma - \delta\varphi - \delta w']] dx = 0$$

Partielle Integration:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$  zur Elimination der Ableitungen bei den virtuellen Größen (siehe z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik)

$$-\delta W = - \int_x \bar{p}_z \delta w - \bar{Q} \delta w \Big|_a^b - \bar{M} \delta \varphi \Big|_a^b + M \delta \varphi \Big|_a^b - \int_x M' \delta \varphi dx + Q \delta w \Big|_a^b - \int_x Q' \delta w dx = 0$$

Sortieren nach den virtuellen Verschiebungen:

$$-\delta W = - \int_x [\delta\varphi [M' - Q] + \delta w [Q' + \bar{p}_z]] dx + \delta\varphi [M - \bar{M}] \Big|_a^b + \delta w [Q - \bar{Q}] \Big|_a^b = 0$$

Gleichgewichtsbedingungen
Kräfte- und Randbedingungen

Für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\delta w$  ist die virtuelle Arbeit  $\delta W$  nur dann gleich Null, wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern jeder für sich verschwinden. Das sind aber gerade die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen. Man kann also folgern:

Ein Körper ist mechanisch nur im Gleichgewicht, wenn unter zulässigen virtuellen Verschiebungen die virtuelle Arbeit verschwindet.

**Das Prinzip der virtuellen Kräfte:**  $\delta W^* = \delta W_i^* + \delta W_a^* = 0.$

$$\delta W_i^* = - \int_x (\delta M \kappa + \delta Q \gamma) dx$$

Im Feld

$$\delta W_a^* = \delta Q \overline{w} \Big|_a^b + \delta M \overline{\varphi} \Big|_a^b$$

Vorgegebene Auflagerverschiebungen

Äußere Arbeit wird nur auf den Wegen vorgegebener Verschiebungen von korrespondierenden virtuellen Kräften geleistet. Vorgegebene Verschiebungen sind Einzelweggrößen, z.B. Stützensenkungen von Auflagern ("am Rand"), deshalb entfällt hier das Linienintegral.

Anforderungen an die virtuellen Kräfte (Nebenbedingungen):

$$\begin{aligned} \delta M' - \delta Q &= 0 & \delta Q' &= 0 & \text{im Feld} \\ \delta Q &= 0 & \delta M &= 0 & \text{am Rand} \end{aligned}$$

Ein zulässiger virtueller Kräftezustand muß im Gleichgewicht sein und dort, wo statische Randbedingungen vorliegen, verschwinden. Deshalb treten hier keine Lastterme auf (Es handelt sich also um eine Art Eigenspannungszustand).

$$-\delta W^* = \int_x [\delta M \kappa + \delta Q \gamma] dx - \delta Q \overline{w} \Big|_a^b - \delta M \overline{\varphi} \Big|_a^b = 0$$

**PvK**  
(am Balken)

ausgedrückt in Kraftgrößen

Zur Ableitung der zugehörigen Grundgleichungen führt man die Nebenbedingungen des virtuellen Kräftezustands als formale Erweiterung des Arbeitsprinzips ein (unterstrichene Terme):

$$\begin{aligned} -\delta W^* &= \int_x [\delta M \kappa + \delta Q \gamma] dx - \delta Q \overline{w} \Big|_a^b - \delta M \overline{\varphi} \Big|_a^b \\ &+ \int_x [\delta M' - \delta Q] \varphi + \delta Q' w \, dx = 0 \end{aligned}$$

Partielle Integration:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

zur Elimination der Ableitungen bei den virtuellen Größen (siehe z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik)

$$\begin{aligned} -\delta W^* &= \int_x [\delta M \kappa + \delta Q \gamma] dx - \delta Q \overline{w} \Big|_a^b - \delta M \overline{\varphi} \Big|_a^b \\ &+ \delta M \overline{\varphi} \Big|_a^b - \int_x \delta M \varphi' dx - \int_x \delta Q \varphi dx + \delta Q w \Big|_a^b - \int_x \delta Q w' dx = 0 \end{aligned}$$

Sortieren nach den virtuellen Kraftgrößen:

$$-\delta W^* = \int_x [\delta M [\kappa - \varphi'] + \delta Q [\gamma - \varphi - w']] dx + \delta M [\varphi - \overline{\varphi}] \Big|_a^b + \delta Q [w - \overline{w}] \Big|_a^b = 0$$

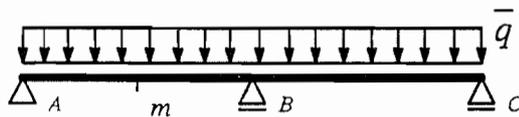
Verträglichkeitsbedingungen geom. Randbedingungen

Für beliebige virtuelle Kraftzustände ist die konjugierte virtuelle Arbeit  $\delta W^*$  nur dann gleich Null, wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern jeder für sich verschwinden. Das sind aber gerade die Verträglichkeitsbedingungen (Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen) und geometrischen Randbedingungen. Man kann also folgern:

Die Formänderungen eines Körpers erfüllen nur dann die Verträglichkeitsbedingungen, wenn unter zulässigen virtuellen Kräften die konjugierte virtuelle Arbeit  $\delta W^* = 0$  ist.

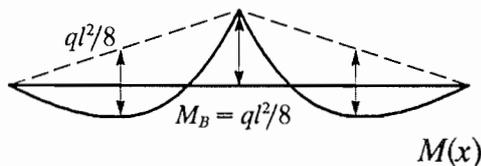
Die "Arbeitssätze" der Statik : Berechnung von Einzelverformungen bzw. -kräften.

**PvV**

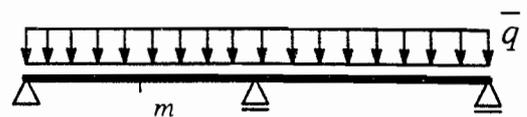


Gesucht ist das Moment an der Stelle m

**Annahme:** Die wirkliche Spannungsverteilung im System sei bereits bekannt.

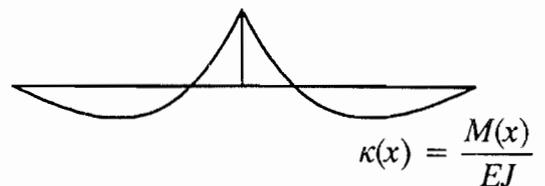


**PvK**



Gesucht ist die Durchbiegung an der Stelle m

**Annahme:** Die wirkliche Dehnungsverteilung im System sei bereits bekannt.

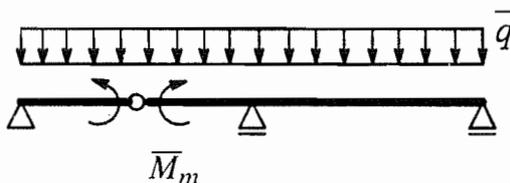


Dann kann die Arbeitsgleichung nach den verbleibenden Randgrößen aufgelöst werden. Dazu ist die gesuchte Einzelgröße als äußere, eingeprägte Größe aufzufassen und der virtuelle Zustand in Abhängigkeit von der zur gesuchten Größe korrespondierenden Einzelgröße zu wählen.

$$-\delta W = \int_x [M\delta\kappa - \bar{q}\delta w]dx - \bar{Q}\delta w|_a^b - \bar{M}\delta\varphi|_a^b = 0$$

$$\text{z.B.: } \bar{M}_m\delta\varphi = \int_x [\kappa EJ\delta\kappa - \bar{q}\delta w]dx \rightarrow \bar{M}_m$$

Freischneiden der gesuchten Kraftgröße und Ansetzen als äußere Last  $M=\bar{M}$ .



$$-\delta W^* = \int_x [\delta M\kappa]dx - \delta Q\bar{w}|_a^b - \delta M\bar{\varphi}|_a^b = 0$$

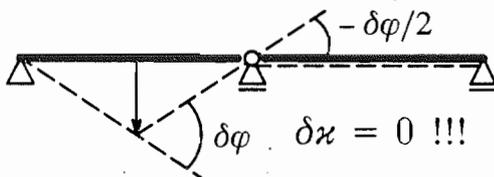
$$\text{z.B.: } \delta M_m\bar{\varphi} = \int_x \delta M \frac{M}{EI} dx \rightarrow \bar{\varphi}_m$$

Die gesuchte Weggröße kann als äußere, von den Lasten eingeprägte aufgefaßt werden  $w=\bar{w}$ .



Da der virtuelle Zustand als Nebenbedingung nur die zugehörigen Grundgleichungen (Verträglichkeit **oder** Gleichgewicht) erfüllen muß, sonst aber unabhängig vom wirklichen Zustand sein kann, genügt es diesen an einem möglichst einfachen (z.B. statisch bestimmten) Ersatzsystem zu bilden -> **Reduktionsatz !!**

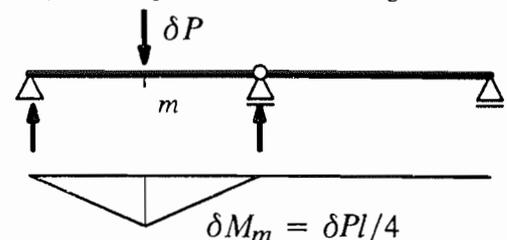
Ansatz einer virtuellen Verschiebung mit zu  $\bar{M}_m$  korrespondierender Weggröße  $\delta\varphi$ :



Arbeitssatz:

$$\begin{aligned} \delta\varphi M_m &= \int \bar{q}\delta w dx - M_B\delta\varphi/2 \\ &= \frac{1}{2}\bar{q}\frac{\delta\varphi}{2}l - \frac{ql^2}{8}\frac{\delta\varphi}{2} \rightarrow M_m = \frac{ql^2}{16} \end{aligned}$$

Ansatz eines virtuellen Kräftesystems mit zu  $\bar{w}_m$  korrespondierender Kraftgröße  $\delta P$ :



Arbeitssatz:

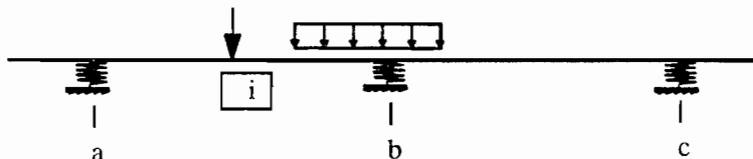
$$\begin{aligned} \delta P w_m &= \frac{5}{12}\delta P \frac{l}{4} \frac{ql^2}{8} \frac{l}{8} EJ - \frac{1}{4}\delta P \frac{l}{4} \frac{ql^2}{8} \frac{l}{8} EJ \\ &\rightarrow w_m = \frac{2}{384} \frac{ql^4}{EJ} \end{aligned}$$

### 3. Das Übertragungsverfahren für querbelastete gerade Stabzüge

#### 3.1 Einführung

Bei statisch bestimmten Systemen lassen sich die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen alleine ermitteln. Zur anschließenden Berechnung von Verschiebungen sind kinematische Beziehungen und ein Stoffgesetz notwendig.

Zur Berechnung von Kraft – und Weggrößen statisch unbestimmter Systeme sind die Beziehungen des Gleichgewichts, der Kinematik und eines Stoffgesetzes gleichzeitig notwendig.



$$1. \text{ Gleichgewicht} \quad \begin{aligned} Q' + \bar{p}_z &= 0 \\ M' - Q + \bar{m}_y &= 0 \end{aligned}$$

$$2. \text{ Kinematik} \quad \begin{aligned} \varphi &= -w' \\ \kappa &= \varphi' \end{aligned}$$

$$3. \text{ Stoffgesetz} \quad \begin{aligned} M &= EI(\kappa - \bar{\kappa}) \\ \bar{\kappa} &= \frac{\alpha_t \Delta T}{h} + \kappa_k + \kappa_s + \kappa_{PI} \end{aligned}$$

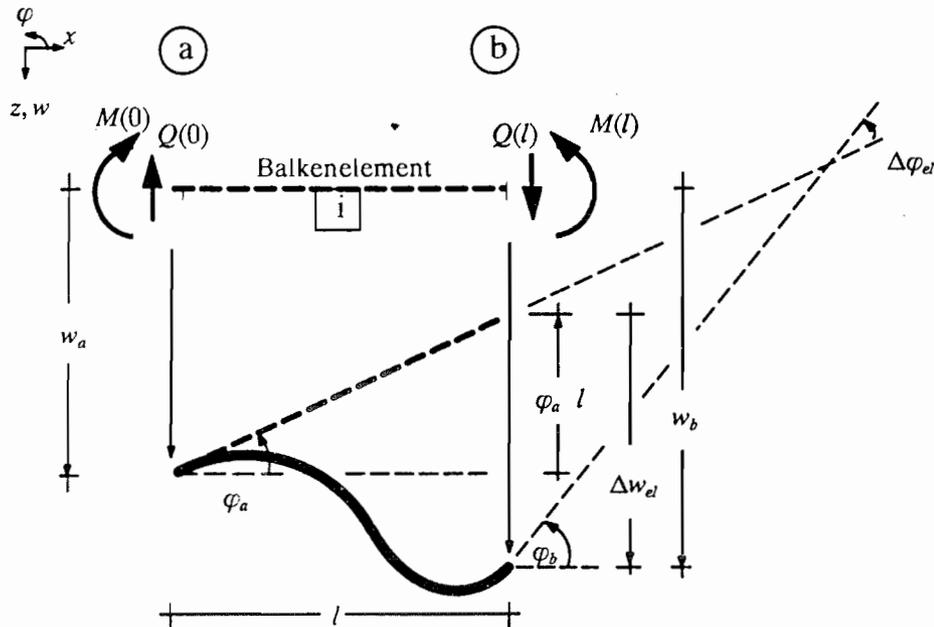
Komplexe Stabtragwerke sind für eine statische Berechnung gedanklich in Elemente zu gliedern, deren Tragverhalten durch geeignete mathematische Formulierungen erfaßt werden kann. Für die Systemberechnung stehen im wesentlichen folgende Methoden zur Verfügung :

- Kraftgrößenverfahren ( handrechnungsorientiert, in Baustatik 2 behandelt )
- Weggrößenverfahren ( rechnerorientiert, in Baustatik 4 zu besprechen )
- Übertragungsverfahren ( rechnerorientiert, im folgenden herzuleiten )

Bei den beiden ersten Verfahren verknüpfen die Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix die Schnittkräfte eines Stabelements mit den Verschiebungen . Im Gegensatz dazu werden beim Übertragungsverfahren alle Zustandsgrößen (Schnittkräfte und Verschiebungen) vom Elementende eines Stabes mit denen vom Elementanfang durch die sogenannte Übertragungsmatrix verknüpft, das Randwertproblem auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt.

### 3.2 Übertragungsmatrix und Lastvektoren des Balkenelements

#### 3.2.1. Geometrie und Zustandsgrößen



**Gleichgewicht :**

$$Q(l) = Q(0)$$

$$M(l) = Q(0) l + M(0)$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} Q(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{s}_b = \mathbf{U}_{ss} \mathbf{s}_a$$

**Kinematik :**

$$w_b = w_a - \varphi_a l + \Delta w_{el}$$

$$\varphi_b = \varphi_a + \Delta \varphi_{el}$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta w_{el} \\ \Delta \varphi_{el} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{U}_{vv} \mathbf{v}_a + \Delta \mathbf{v}$$

Der erste Anteil liefert Starrkörperverschiebungen, der zweite die Verschiebungen des Stabendes (bezogen auf den Stabanfang), die aus elastischen Formänderungen stammen.

Ermittlung der elastischen Verschiebungsanteile  $\Delta v$  mit Hilfe des Arbeitssatzes :

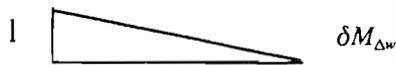
$\Delta w_{el}$  und  $\Delta \varphi_{el}$  lassen sich als Verschiebung und Verdrehung des rechten Endes eines links eingespannten Kragarms berechnen (Reduktionsatz) .



Der lineare Momentenverlauf am **unbelasteten** Träger setzt sich aus einem konstanten und einem linear veränderlichen Anteil zusammen. (Belastungen werden unter 3.2.3 erfaßt.)



Momentenfläche infolge  $\delta P = 1$



Momentenfläche infolge  $\delta M = 1$



$$\Delta w_{el} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{6} l^3 Q(0) + \frac{1}{2} l^2 M(0) \right)$$

$$\Delta \varphi_{el} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} l^2 Q(0) + l M(0) \right)$$

In Matrizenschreibweise :

$$\begin{bmatrix} \Delta w_{el} \\ \Delta \varphi_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-l^3}{6EI} & \frac{-l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{U}_{vs} \mathbf{s}_a$$

### 3.2.2 Die Übertragungsmatrix des im Felde unbelasteten Balkenelements

Die im Abschnitt 3.1.1 hergeleiteten Gleichungen lassen sich wie folgt zusammenfassen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{vv} & \mathbf{U}_{vs} \\ \mathbf{U}_{sv} & \mathbf{U}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{s}_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_b = \mathbf{U} \mathbf{z}_a$$

$\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b$  : Zustandsvektoren

$\mathbf{U}$  : Übertragungsmatrix

Ausgeschrieben :

$$\begin{bmatrix} w(l) \\ \varphi(l) \\ Q(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l & -\frac{l^3}{6EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 1 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ \varphi(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix}$$

Kinematik  
+ Stoffgesetz

Gleichgewicht

$$\mathbf{z}_b = \mathbf{U} \mathbf{z}_a$$

Anmerkung zur mechanischen Bedeutung der Untermatrizen von  $\mathbf{U}$  :

$\mathbf{U}_{vv}$  : Anteile der Starrkörperverschiebungen

$\mathbf{U}_{vs}$  : Nachgiebigkeitsmatrix des links eingespannten Kragträgers

$\mathbf{U}_{sv}$  : hier = 0 ; sonst Einfluß einer Dreh - oder Senkbettung im Gleichgewicht

$\mathbf{U}_{ss}$  : Gleichgewichtsbedingungen

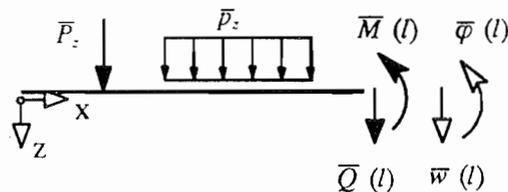
### 3.2.3 Lastspalten

Ist das Trägerfeld durch Einzel- oder Linienkräfte, Einzel- oder Linienmomente oder durch eine eingeprägte Krümmung ( aus Temperatur, Kriechen, Schwinden, Plastizität usw. ) belastet, so ist die Grundbeziehung des Abschnitts 3.2.2 um den Lastvektor  $\bar{z}(x)$ , bzw.  $\bar{z}(l)$  zu erweitern:

$$z_b = U z_a + \bar{z}$$

Den Zuwachs der Zustandsgrößen von  $x=0$  nach  $x=l$  ermittelt man durch Aufsummieren der Zuwächse aus den einzelnen Belastungen, mit

$\bar{w}(l)$ ,  $\bar{\varphi}(l)$ ,  $\bar{Q}(l)$ ,  $\bar{M}(l)$  ..... Zuwächse der Zustandsgrößen aus Belastung.



Aus den Grundbeziehungen am Träger ( s. Abschnitt 3.1 ) erhält man :

$$Q' + \bar{p}_z = 0 \quad : \quad \bar{Q}(l) = - \int_0^l \bar{p}_z(x) dx$$

$$M' - Q + \bar{m}_y = 0 : \quad \bar{M}(l) = \int_0^l [ \bar{Q}(x) - \bar{m}_y(x) ] dx$$

$$\varphi' = \frac{M}{EI} + \bar{\kappa} \quad : \quad \bar{\varphi}(l) = \int_0^l [ \frac{1}{EI} \bar{M}(x) + \bar{\kappa}(x) ] dx$$

$$w' = -\varphi \quad : \quad \bar{w}(l) = - \int_0^l \bar{\varphi}(x) dx$$

Für eine konstante Linienlast  $\bar{p}_z = \bar{p}$  erhält man :

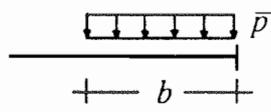
$$\bar{Q}(l) = -\bar{p} l$$

$$\bar{M}(l) = \int_0^l -\bar{p} x \, dx = -\frac{1}{2} l^2 \bar{p}$$

$$\bar{\varphi}(l) = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} x^2 \bar{p}\right) dx = -\frac{1}{EI} \frac{1}{6} l^3 \bar{p}$$

$$\bar{w}(l) = -\int_0^l \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} x^3 \bar{p}\right) dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{24} l^4 \bar{p}$$

Diese Ergebnisse finden sich (mit  $l = b$ ) in Zeile 3 der folgenden Tabelle der Lastvektoren. (vgl. "Zusammenstellung zur Berechnung von Stabtragwerken")

Belastung Stababschnitt $i$	Komponenten des Lastvektors $\bar{z}^i$			
	$\bar{w}(l)$	$\bar{\varphi}(l)$	$\bar{Q}(l)$	$\bar{M}(l)$
⋮				
	$\frac{\bar{p} b^4}{24EI}$	$-\frac{\bar{p} b^3}{6EI}$	$-\bar{p} b$	$-\frac{\bar{p} b^2}{2}$
⋮				

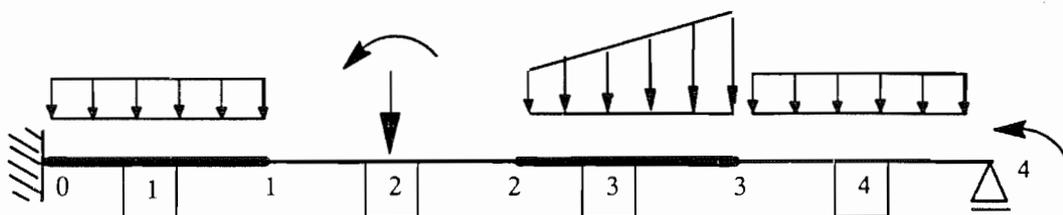
### 3.3 Rechengang des Übertragungsverfahrens am Beispiel des Trägers mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit

#### 3.3.1 Grundgedanke der Übertragung

Die Zustandsgrößen  $z_b$  am Ende eines Trägerabschnitts werden ausgedrückt in Abhängigkeit von den Anfangswerten  $z_a$  und einer eventuell vorhandenen Feldbelastung  $\bar{z}^i$ :

$$z_b = U^i z_a + \bar{z}^i$$

Am Tragwerk:



$$z_1 = U^1 z_0 + \bar{z}^1$$

$$z_2 = U^2 z_1 + \bar{z}^2$$

$$z_3 = U^3 z_2 + \bar{z}^3$$

$$z_4 = U^4 z_3 + \bar{z}^4$$

Anmerkung: Hochgestellte Indizes beziehen sich auf das Feld und tiefgestellte auf den Knoten. Beginnt man die Knotennummerierung mit dem Index 0, so überträgt die Matrix  $U^n$  auf das Abschnittsende  $z_n$ .

Ohne Feldbelastung ergibt sich das folgende typische Rechenschema:

$$z_4 = U^4 U^3 U^2 U^1 z_0 = U_{ges} z_0$$

Die Übertragungsmatrizen werden nur multiplikativ miteinander verknüpft. Auch bei hochgradig statisch unbestimmten Problemen tritt keine Vergrößerung des Gleichungssystems auf, wie z.B. beim Kraftgrößenverfahren. Stattdessen wird das ursprüngliche Randwertproblem durch mehrmaliges Lösen des Anfangswertproblems gelöst.

Erster Durchlauf

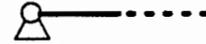
Der Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  des Biegebalkens enthält stets paarweise konjugierte Größen  $w-Q$  bzw.  $\phi-M$ , von denen nur jeweils eine als Randbedingung am Anfang des Trägers vorgeschrieben werden kann. Der Anfangsvektor  $\mathbf{z}_0$  enthält somit zu Beginn der Berechnung noch zwei unbekannte Größen.

Beispiele :



$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{Q}_0 \\ \hat{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{M}_0 \end{bmatrix}$$

oder



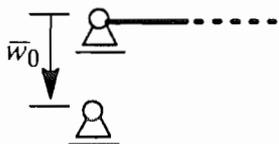
$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix}$$

oder

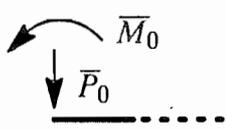


$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{bmatrix}$$

Bei inhomogenen Randbedingungen, z.B. Stützensenkungen oder Randlasten, ist der Anfangsvektor um diese Terme zu ergänzen:



$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{P}_0 \\ -\bar{M}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_0$$

Im allgemeinen läßt sich der Anfangsvektor  $\mathbf{z}_0$  also aufteilen in die noch unbekannt-ten Größen  $\mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{z}}_0$  und einen "Lastanteil"  $\mathbf{B}_0$ , der bei homogenen Randbedingungen entfällt.

Der Zustandsvektor am Ende des ersten Abschnitts kann jetzt mit Hilfe der Übertragungsmatrix  $U^1$  und des Lastvektors  $\bar{z}^1$  durch die am Anfang vorhandenen und im Feld hinzukommenden Lasten und eingepprägten Weggrößen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} z_1 &= U^1 z_0 + \bar{z}^1 \\ &= U^1(A_0 \hat{z}_0 + B_0) + \bar{z}^1 \\ &= (U^1 A_0) \hat{z}_0 + (U^1 B_0 + \bar{z}^1) \\ &= A_1 \hat{z}_0 + B_1 \end{aligned}$$

Am Ende des zweiten Abschnitts erhält man analog

$$\begin{aligned} z_2 &= U^2 z_1 + \bar{z}^2 \\ &= U^2(A_1 \hat{z}_0 + B_1) + \bar{z}^2 \\ &= A_2 \hat{z}_0 + B_2 \end{aligned}$$

Diese Entwicklung führt man in Schritten bis zum n-ten Abschnitt durch :

$$z_n = A_n \hat{z}_0 + B_n$$

Die Matrix  $A_n$  besitzt dieselbe Ordnung wie die Matrix  $A_0$  (4x2) und läßt sich als Folge von Matrizenprodukten darstellen :

$$A_n = U^n U^{n-1} U^{n-2} \dots U^2 U^1 A_0$$

Für den Lastvektor  $B_n$  kann man schreiben :

$$B_n = U^n [U^{n-1} [U^{n-2} \dots [U^2 [U^1 B_0 + \bar{z}^1] + \bar{z}^2] + \dots + \bar{z}^{n-2}] + \bar{z}^{n-1}] + \bar{z}^n$$

Die Berechnung des Zustandsvektors  $z_n$  wird wesentlich einfacher und übersichtlicher, als es die allgemeine Form von  $A_n$  und  $B_n$  vermuten lassen, wenn man die Übertragungsmatrizen und Lastvektoren im folgenden Multiplikationsschema ausschreibt:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\mathbf{z}_0} = \boxed{\mathbf{A}_0} \boxed{\hat{\mathbf{z}}_0} + \boxed{\mathbf{B}_0} \\
 \boxed{\mathbf{z}_1} = \boxed{\mathbf{U}^1} \boxed{\mathbf{A}_1} \boxed{\hat{\mathbf{z}}_0} + \boxed{\mathbf{B}_1} \quad \text{mit} \\
 \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{U}^1 \mathbf{A}_0 \\
 \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{U}^1 \mathbf{B}_0 + \bar{\mathbf{z}}^1 \\
 \boxed{\mathbf{z}_2} = \boxed{\mathbf{U}^2} \boxed{\mathbf{A}_2} \boxed{\hat{\mathbf{z}}_0} + \boxed{\mathbf{B}_2} \quad \text{mit} \\
 \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{U}^2 \mathbf{A}_1 \\
 \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{U}^2 \mathbf{B}_1 + \bar{\mathbf{z}}^2 \\
 \boxed{\mathbf{z}_n} = \boxed{\mathbf{U}^n} \boxed{\mathbf{A}_n} \boxed{\hat{\mathbf{z}}_0} + \boxed{\mathbf{B}_n} \quad \text{mit} \\
 \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{U}^n \mathbf{A}_{n-1} \\
 \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{U}^n \mathbf{B}_{n-1} + \bar{\mathbf{z}}^n
 \end{array}$$

Nach dem ersten Durchlauf erhält man den Zustandsvektor  $\mathbf{z}_n$  am Ende des Tragwerks in Abhängigkeit von den Anfangswerten  $\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{z}}_0$  und vom Lastvektor  $\mathbf{B}_n$ . In  $\mathbf{z}_n$  sind wie in  $\mathbf{z}_0$  zwei Komponenten unbekannt und zwei bekannt (aus den Randbedingungen). Es stehen somit genau zwei Bedingungsgleichungen am Trägerende zur Bestimmung der Unbekannten  $\hat{\mathbf{z}}_0$  vom Trägeranfang zur Verfügung. Sortiert man die Komponenten in  $\mathbf{z}_n$  so um, daß die bekannten Größen in  $\bar{\mathbf{z}}_n$  und die verbleibenden unbekanntenen Größen in  $\hat{\mathbf{z}}_n$  zusammengefaßt sind, so ergibt sich folgende Darstellung der Gleichungen am Trägerende:

$$\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_n \\ \hat{\mathbf{z}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \end{bmatrix}_n [\hat{\mathbf{z}}_0] + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}_n$$

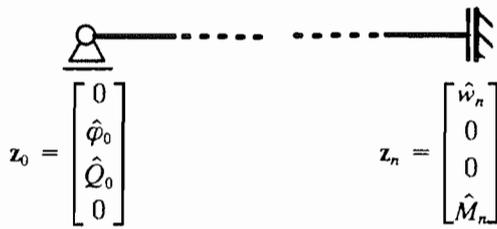
Die unbekanntenen Anfangsgrößen errechnen sich aus

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{a}_1^{-1} [\bar{\mathbf{z}}_n - \mathbf{b}_1],$$

damit folgen die verbleibenden Unbekanntenen am Trägerende direkt zu:

$$\hat{\mathbf{z}}_n = \mathbf{a}_2 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}_2 .$$

**Beispiel:**



$$\begin{bmatrix} \hat{w}_n \\ 0 \\ 0 \\ \hat{M}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_n$$

Gleichungssystem für die unbekanntenen Anfangsbedingungen:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{z}}_n = \mathbf{a}_1 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{z}}_0$$

Unbekannte Randgrößen am Trägerende

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_n \\ \hat{M}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

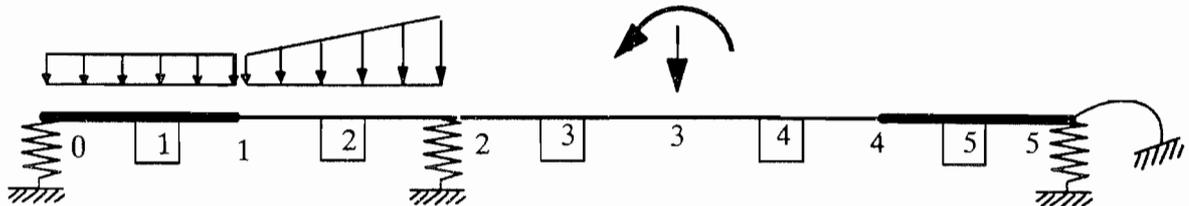
$$\hat{\mathbf{z}}_n = \mathbf{a}_2 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}_2$$

Zweiter Durchlauf: Die Zustandsgrößen an allen Zwischenknoten können der Reihe nach durch Einsetzen der jetzt bekannten Anfangswerte  $\hat{\mathbf{z}}_0$  in das Multiplikationsschema gewonnen werden.

### 3.4 Träger auf nachgiebigen Lagern und mit eingepägten Sprunggrößen

#### 3.4.1 Übertragung örtlicher Wirkungen mit Punktmatrizen

Durch eingepägte Einzellasten, Weg- und Drehfedern, sowie durch eingepägte Verschiebungen treten in den Zustandslinien Sprünge auf. An diesen Orten wird zweckmäßigerweise eine Abschnittsgrenze angeordnet. Die Unterscheidung der Zustandsvektoren links und rechts einer Abschnittsgrenze mit Sprunggrößen erfolgt durch den hochgestellten Abschnittsindex.

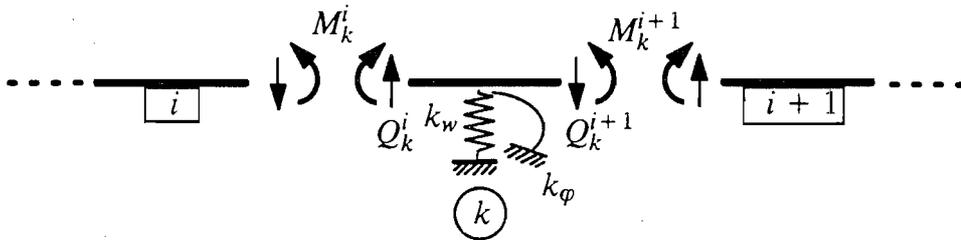


$$\mathbf{U}^2 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \bar{\mathbf{z}}_2^3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{z}_2^2$$

$$\mathbf{U}^3 \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \\ \bar{\mathbf{z}}_3^4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3 \mathbf{z}_3^3$$

Der Zusammenhang zwischen den Vektoren beidseits einer Abschnittsgrenze wird durch Gleichgewichts-, bzw. kinematische Bedingungen gewonnen, die in einer sogenannten Punktmatrix (oder Transformationsmatrix)  $\mathbf{T}$  zusammengefaßt werden können. Die Zustandsgrößen werden dabei stets im lokalen Koordinatensystem des jeweiligen Abschnitts angeschrieben (betrifft vor allen geknickte Träger).

a) Federn



Gleichgewicht am Knoten:

$$\sum V = 0 = Q_k^{i+1} - Q_k^i - k_w w_k$$

$$\sum M = 0 = M_k^{i+1} - M_k^i - k_\varphi \varphi_k$$

Kinematik:

$$w_k = w_k^i = w_k^{i+1}$$

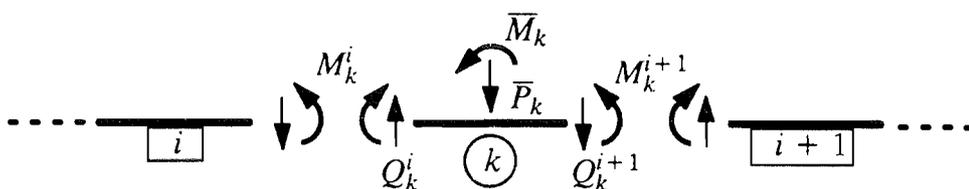
$$\varphi_k = \varphi_k^i = \varphi_k^{i+1}$$

Zusammenfassung der Beziehungen in der Punktmatrix  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}_k^{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}_k^i$$

$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i$$

b) Eingeprägte Sprunggrößen: Knotenlasten und gegenseitige Verschiebungen bzw. Verdrehungen

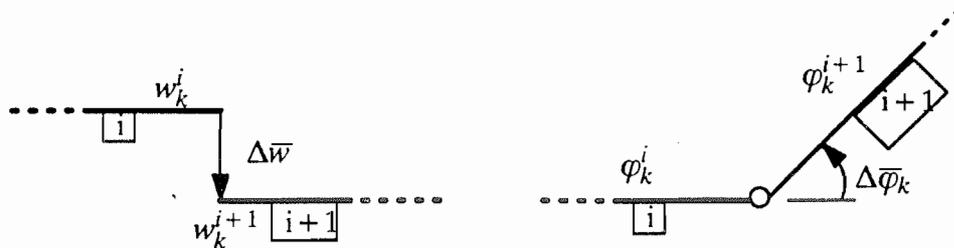


Knotenlasten:

$$\sum V = 0 = Q_k^{i+1} - Q_k^i + \bar{P}_k$$

$$\sum M = 0 = M_k^{i+1} - M_k^i + \bar{M}_k$$

Eingeprägte gegenseitige Verschiebungen verwendet man zur Ermittlung der Einflußlinien für Kraftgrößen:



$$\text{Kinematik: } w_k^{i+1} = w_k^i + \Delta \bar{w}_k$$

$$\varphi_k^{i+1} = \varphi_k^i + \Delta \bar{\varphi}_k$$

Faßt man die eingeprägten Sprunggrößen mit eventuell gleichzeitig vorhandenen Federn zusammen, so erhält man für den Punkt eine analoge Übertragungsbeziehung wie für das Feld:

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}_k^{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}_k^i + \begin{bmatrix} \Delta \bar{w} \\ \Delta \bar{\varphi} \\ -\bar{P} \\ -\bar{M} \end{bmatrix}_k$$

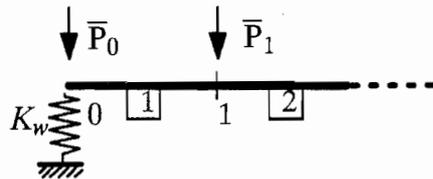
$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$$

Die elastischen Eigenschaften des Knotens (Federn) übertragen sich mit einer Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_k$ . Ergänzt wird diese Übertragungsbeziehung – wie im Feld – durch eine Lastspalte für die eingeprägten Größen.

Nunmehr kann die globale Berechnung, wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt, durchgeführt werden, wenn an den Abschnittsgrenzen mit örtlichen Wirkungen die Transformation mit der Punktmatrix eingeschaltet wird.

Am Beispiel des Trägers von Seite 6 wird jetzt noch gezeigt, wie eine Feder am Trägeranfang mit Hilfe einer Punktmatrix oder alternativ direkt im Anfangsvektor berücksichtigt werden kann:

Fall 1: Anfangsvektor mit Federn



$$Q_0 = k_w w_0$$

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_w & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{P} \\ 0 \end{bmatrix}$$

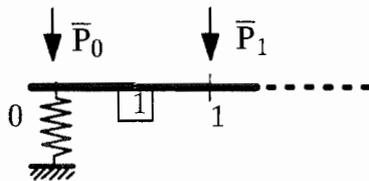
$$\mathbf{z}_0^1 = \mathbf{A}_0^1 \hat{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}_0$$

$$\mathbf{z}_1^1 = \mathbf{A}_1^1 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_1^1$$

(Zustandsvektor des Abschnitts 1 am Knoten 1)

Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen am freien Rand liefert direkt den richtigen Anfangsvektor.

Fall 2: Verwendung des Anfangsvektors für den freien Rand und die Punktmatrix für den ersten Übertragungsschritt



$$\mathbf{z}_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

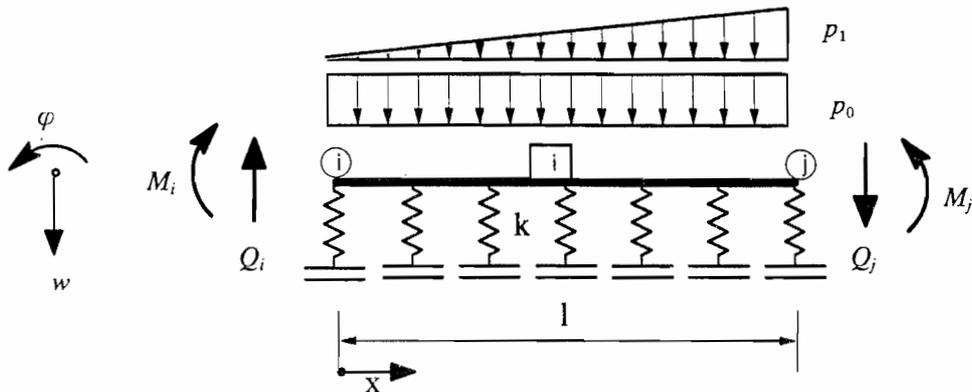
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_w & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 & -\bar{P}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0^1 = \mathbf{T}_0 \mathbf{z}_0^0 = \mathbf{A}_0^1 \hat{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}_0$$

u.s.w.

### 3.7 Übertragungsmatrizen für spezielle Trägerarten

#### 3.7.1 Balken auf elastischer Bettung



$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \dots \text{ charakteristische Länge des gebetteten Trägers}$$

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\kappa}(x) \\ -\bar{p}_z(x) \\ -\bar{m}_y(x) \end{bmatrix} \rightarrow \text{z.B. Temperaturgradient}$$

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{z}(x) + \bar{\mathbf{r}}(x)$$

Allg. Lösung : 
$$\mathbf{z}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt \stackrel{!}{=} \mathbf{U}(x) \mathbf{z}(0) + \bar{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \left[ \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + e^{\mathbf{A}x} e^{-\mathbf{A}x} \bar{\mathbf{r}}(x) \right]$$

Nachweis der Richtigkeit (durch Einsetzen in das Dgl. System) :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{A} \mathbf{z}(x) + \bar{\mathbf{r}}(x) \\ \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + e^{\mathbf{A}x} e^{-\mathbf{A}x} \bar{\mathbf{r}}(x) &= \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + \bar{\mathbf{r}}(x) \end{aligned}$$

**Numerische Lösung durch Reihenentwicklung :**

Somit folgt für  $z(x) = U(x) z(0) + \bar{z}(x)$  unter Verwendung der Reihenentwicklung für die Matrizenfunktion  $e^{Ax}$ :

$$1. \quad U(x) = e^{Ax} = I + \frac{1}{1!} Ax + \frac{1}{2!} A^2 x^2 + \frac{1}{3!} A^3 x^3 + \frac{1}{4!} A^4 x^4 + \dots$$

2. Für  $\bar{r}(x) = \text{konst.}$  (konstante Streckenlast im Feld) ergibt sich:

$$\bar{z}(x) = e^{Ax} \int_0^x e^{-At} \bar{r}(t) dt = e^{Ax} \left[ e^{-At} \cdot (-A^{-1}) \right]_0^x \cdot \bar{r} = -(\mathbf{I} - e^{Ax}) A^{-1} \bar{r}$$

Die Lastspalte  $\bar{z}$  kann ohne die Bestimmung der Inversen  $A^{-1}$  ermittelt werden, indem man die Reihenentwicklung für  $e^{Ax}$  mit der Inversen durchmultipliziert:

$$\bar{z}(x) = x \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2!} Ax + \frac{1}{3!} A^2 x^2 + \frac{1}{4!} A^3 x^3 + \frac{1}{5!} A^4 x^4 + \dots \right) \bar{r}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{EI^2} \\ -\frac{k^2}{EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{EI} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{EI^2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{EI^2} & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{EI} & 0 & 0 \\ -\frac{k^2}{EI} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{EI} & 0 \\ \frac{k}{EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{EI} \\ 0 & -k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k}{EI^2} & 0 \\ -\frac{k^2}{EI^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k^2}{EI^2} \\ 0 & \frac{k^2}{EI} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{EI} \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} \frac{k^2}{EI^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{EI^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k^2}{EI^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k^2}{EI^2} \end{bmatrix}$$

Übertragungsmatrix :

$$U = e^{Al} = I + \frac{1}{1!}Al + \frac{1}{2!}A^2l^2 + \frac{1}{3!}A^3l^3 + \frac{1}{4!}A^4l^4 \dots$$

$$U^i = \left[ \begin{array}{cc|cc} A(l) & -B(l) & -\frac{D(l)}{EI} & -C \frac{(l)}{EI} \\ 4 \lambda^4 D(l) & A(l) & \frac{C(l)}{EI} & B \frac{(l)}{EI} \\ \hline 4 \lambda^4 B(l) EI & -4 \lambda^4 C(l) EI & A(l) & -4 \lambda^4 D(l) \\ 4 \lambda^4 C(l) EI & -4 \lambda^4 D(l) EI & B(l) & A(l) \end{array} \right]$$

Unter Verwendung der Reihenentwicklung ergeben sich für:

$$A(l) = 1 - \frac{l^4 k}{24 EI} + \frac{l^8 k^2}{40320 EI^2} - \frac{l^{12} k^3}{479001600 EI^3} \dots$$

$$B(l) = 1 - l + \frac{l^5}{120} \cdot \frac{k}{EI} + \dots$$

$$C(l) = 1 - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{1}{EI} + \frac{l^6}{720} \cdot \frac{k}{EI^2} + \dots$$

$$D(l) = 1 - \frac{l^3}{6} \cdot \frac{1}{EI} + \frac{l^7}{5040} \cdot \frac{k}{EI^2} + \dots$$

Analytisch gelöst ergeben sich folgende Elemente :

$$A(x) = \cos \lambda x \cosh \lambda x \qquad B(x) = \frac{1}{2\lambda} (\sin \lambda x \cosh \lambda x + \cos \lambda x \sinh \lambda x)$$

$$C(x) = \frac{1}{2\lambda^2} \sin \lambda x \sinh \lambda x \qquad D(x) = \frac{1}{4\lambda} (\sin \lambda x \cosh \lambda x - \cos \lambda x \sinh \lambda x)$$

Lastvektoren :

konstante Streckenlast  $p_0$

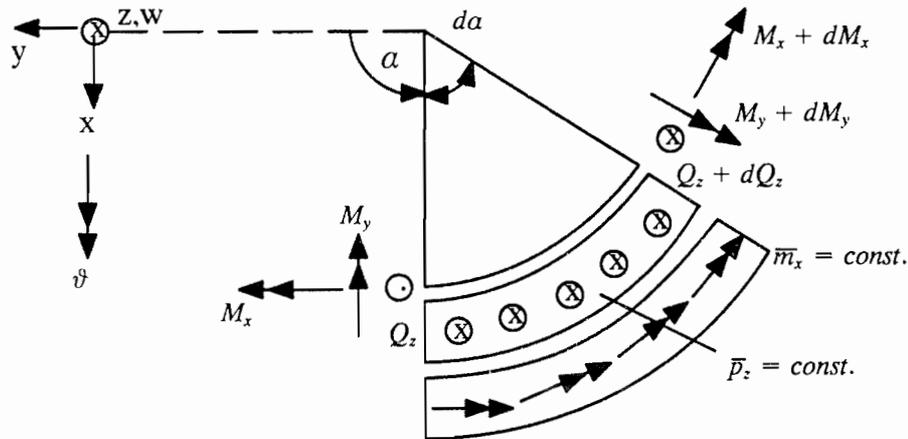
linear ansteigende Streckenlast  $p_1$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{k} (1 - A(l)) \\ -\frac{p_0}{EI} D(l) \\ -\frac{p_0}{EI} B(l) \\ -\frac{p_0}{EI} C(l) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{k} \left(1 - \frac{B(l)}{l}\right) \\ -\frac{p_1}{kl} (1 - A(l)) \\ -\frac{p_1}{l} C(l) \\ -\frac{p_1}{l} D(l) \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.7.2 Kreisringträger

#### Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :



mit:

$$\frac{d(\dots)}{da} = (\dots)'$$

Gleichgewicht:

$$\bar{p}_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dQ_z}{da} \quad \bar{m}_x = -\frac{1}{r} \cdot \left( \frac{dM_x}{da} + M_y \right) \quad Q_z = \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{dM_y}{da} - M_x \right)$$

Kinematik und Stoffgesetz:

$$M_y = -\frac{EI}{r} \cdot \left( \frac{w''}{r} + \vartheta \right) \quad M_x = \frac{GI_T}{r} \cdot \left( \vartheta' - \frac{w'}{r} \right)$$

Differentialgleichungen:

$$EIw'''''' + 2EIw'''' + EIw'' = -r^4 \frac{EI}{GI_T} \bar{p}_z$$

$$GI_T \cdot \vartheta = \frac{GI_T w'''' + (EI + 2GI_T) w'' - r^4 \frac{GI_T}{EI} \bar{p}_z - r^3 \left( 1 + \frac{GI_T}{EI} \right) \bar{m}_x}{-r \left( \frac{EI}{GI_T} + 1 \right)}$$

Gewöhnliches Differentialgleichungssystem für den Kreisringträger :

$$\frac{d}{da} \begin{bmatrix} w(a) \\ \varphi(a) \\ \vartheta(a) \\ Q_z(a) \\ M_y(a) \\ M_x(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{r} & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & GI_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(a) \\ \varphi(a) \\ \vartheta(a) \\ Q_z(a) \\ M_y(a) \\ M_x(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{p}_z(a) \\ 0 \\ -\bar{m}_x(a) \end{bmatrix} ; \quad ds = r \cdot da$$

$$\mathbf{z}'(a) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(a) + \bar{\mathbf{r}}(a)$$

Allg. Lösung :  $\mathbf{z}(a) = e^{\mathbf{A}a} \mathbf{z}(0) + e^{\mathbf{A}a} \int_0^a e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt \stackrel{!}{=} \mathbf{U}(a) \mathbf{z}(0) + \bar{\mathbf{z}}$

Übertragungsmatrix für ein Kreisringelement mit dem Öffnungswinkel  $\alpha$ :

$$U = e^{\mathbf{A}a} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{A}a + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 a^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 a^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 a^4 \dots$$

$$\mathbf{U} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -r \sin \alpha & \mp r (1 - \cos \alpha) & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \cos \alpha & \pm \sin \alpha & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & \mp \sin \alpha & \cos \alpha & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \alpha & \cos \alpha & \pm \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \mp r (1 - \cos \alpha) & \mp \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right]$$

Unter Verwendung der Reihenentwicklung für die Matrizenfunktion  $e^{A\alpha} = U(\alpha)$  ergeben sich z. B. für :

$$A_{11} = -\frac{1}{6}a^3 \frac{r^3}{EI} + \frac{1}{120} \frac{a^5 r^3 (2GI + EI)}{GI EI} - \frac{1}{5040} a^7 r^3 \frac{(3GI + 2EI)}{GI EI} + \dots$$

$$A_{12} = -\frac{1}{2} \frac{a^2 r^2}{EI} + \frac{1}{24} \frac{a^4 r^2 (2GI + EI)}{GI EI} - \frac{1}{720} \frac{a^6 r^2 (3GI + 2EI)}{GI EI} + \dots$$

$$A_{13} = -\frac{1}{6} \frac{a^3 r^2 (EI + GI)}{GI EI} + \frac{1}{60} \frac{a^5 r^2 (GI + EI)}{GI EI} - \frac{1}{1680} \frac{a^7 r^2 (GI + EI)}{GI EI} + \dots$$

Analytisch gelöst ergeben sich folgende Elemente:

$$\varepsilon = \frac{GI_T}{EI} ; \alpha \text{ im Bogenmaß einsetzen}$$

$$A_{22} = -\frac{r}{2GI_T} [(1 - \varepsilon) \sin \alpha - (1 + \varepsilon) a \cos \alpha]$$

$$A_{11} = \frac{r^3}{2GI_T} [2a - (3 + \varepsilon) \sin \alpha + (1 + \varepsilon) a \cos \alpha]$$

$$A_{23} = \mp \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} [ra \sin \alpha]$$

$$A_{12} = \frac{r^2}{2GI_T} [2(1 - \cos \alpha) - (1 + \varepsilon) a \sin \alpha]$$

$$A_{31} = \mp \frac{r^2(1 + \varepsilon)}{2GI_T} [\sin \alpha - a \cos \alpha]$$

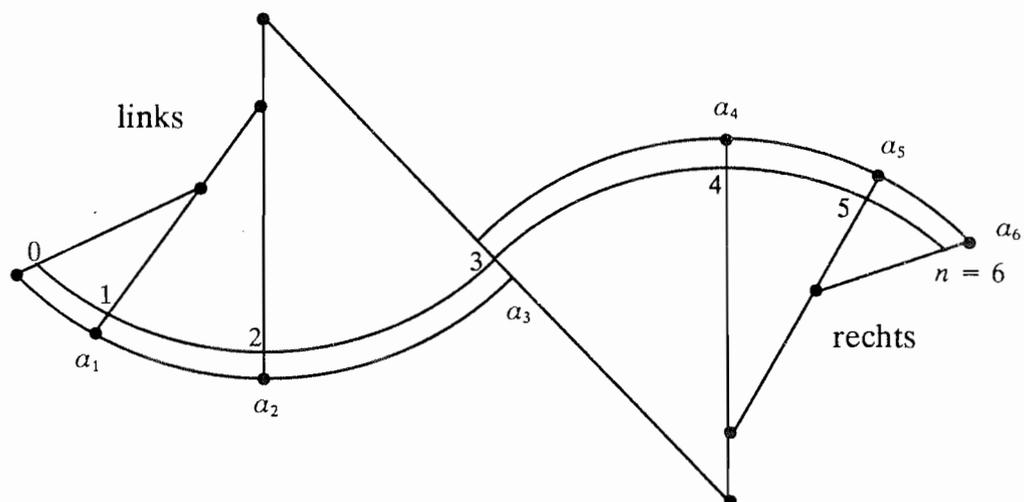
$$A_{13} = \mp \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} r^2 [\sin \alpha - a \cos \alpha]$$

$$A_{32} = \pm \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} [ra \sin \alpha]$$

$$A_{21} = -\frac{r^2}{2GI_T} [2(1 - \cos \alpha) - (1 + \varepsilon) a \sin \alpha]$$

$$A_{33} = \frac{r}{2GI_T} [(1 - \varepsilon) \sin \alpha + (1 + \varepsilon) a \cos \alpha]$$

oberes Vorzeichen = Linkskrümmung  
unteres Vorzeichen = Rechtskrümmung



Lastvektoren :

- konstante Streckenlast  $\bar{p}_0$

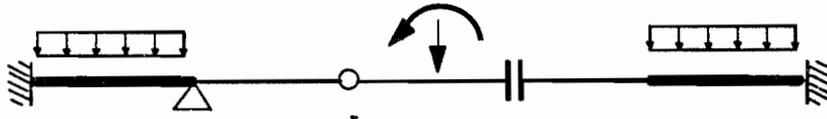
$$\bar{z} = \bar{p}_0 \left[ \begin{array}{c} \frac{r^4}{2GI_T} [ 2 (2 + \varepsilon) (1 - \cos a) - (1 + \varepsilon) a \sin a - a^2 ] \\ - \frac{r^3}{2GI_T} [ (3 + \varepsilon) \sin a - (1 + \varepsilon) a \cos a - 2a ] \\ \pm \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} r^3 [ 2 (1 - \cos a) - a \sin a ] \\ \hline - r a \\ - r^2 (1 - \cos a) \\ \pm r^2 (a - \sin a) \\ 1 \end{array} \right]$$

- konstantes Streckentorsionsmoment  $\bar{m}_0$

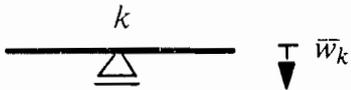
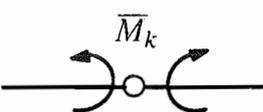
$$\bar{z} = \bar{m}_0 \left[ \begin{array}{c} \pm \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} r^3 [ 2 (1 - \cos a) - a \sin a ] \\ \mp \frac{1 + \varepsilon}{2GI_T} r^2 [ \sin a - a \cos a ] \\ \frac{r^2}{2GI_T} [ 2\varepsilon (1 - \cos a) - (1 + \varepsilon) a \sin a ] \\ \hline 0 \\ \mp r (1 - \cos a) \\ - r \sin a \\ 1 \end{array} \right]$$

## Anhang zu Kap. 3 Übertragungsmatrizen

### 3.5 Hinweise zur Berechnung von Trägern mit Zwischenbedingungen

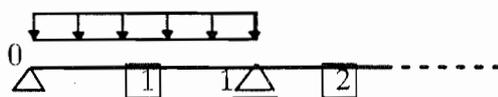


An Orten, an denen Verschiebungsgrößen (durch Lagerbedingungen) oder Schnittgrößen (durch Gelenke) vorgeschrieben sind, weist die zugeordnete konjugierte Größe einen Sprung auf. Die Sprunggröße ist eine zusätzliche Unbekannte.

	vorgegebene Größe	konjugierte Größe
	$w_k = \bar{w}_k$	$\Delta Q_k$
	$\varphi_k = \bar{\varphi}_k$	$\Delta M_k$
	$Q_k = \bar{Q}_k$	$\Delta w_k$
	$M_k = \bar{M}_k$	$\Delta \varphi_k$

Die vorgeschriebenen Schnittgrößen sollten nicht mit vorgeschriebenen (eingepägten) Knotenlasten verwechselt werden, die in den entsprechenden Lastvektoren stehen müssen. Hier sind vorgeschriebene Komponenten des Zustandsvektors selbst gemeint, deren konjugierte Größen dann einen Sprung aufweisen (z.B. die Querkraft an Auflagern), dessen Betrag zunächst noch unbekannt ist. Mit Hilfe der im Knoten vorgeschriebenen Größe läßt sich eine Eliminationsgleichung für die zusätzliche Unbekannte aufstellen.

Beispiel:



$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_0$$

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1^1 &= \mathbf{U}^1 \mathbf{z}_0 + \bar{\mathbf{z}}^1 = \\ &= \mathbf{U}^1 (\mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_0) + \bar{\mathbf{z}}^1 = \\ &= \mathbf{A}_1^1 \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{B}_1^1 \end{aligned}$$

Zustandsvektor am  
Ende des Abschnitts 1:

$$\mathbf{z}_1^1 = \begin{bmatrix} w_1^1 \\ \varphi_1^1 \\ Q_1^1 \\ M_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Zwischenbedingung  $w_1^1 = a_{11}\hat{\varphi}_0 + a_{12}\hat{Q}_0 + b_1 = \bar{w}_1 (= 0)$

Nutzt man diese Bedingungsgleichung, so läßt sich eine der beiden Unbekannten in  $\hat{\mathbf{z}}_0$  eliminieren. Da es im Prinzip egal ist, welcher Freiwert eliminiert wird, sollte man systematisch vorgehen und z.B. immer den ersten Freiwert eliminieren. Es ergibt sich folgende Eliminationsgleichung:

$$\hat{\varphi}_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\hat{Q}_0 - \frac{b_1 - \bar{w}_1}{a_{11}}$$

Setzt man die Eliminationsgleichung in  $\mathbf{z}_1^1$  ein, so erkennt man, daß immer ein Vielfaches der ersten Spalte von den verbleibenden anderen Spalten subtrahiert wird. Die Faktoren ergeben sich aus der Eliminationsgleichung.

Die Übertragung über den Auflagerpunkt mit der Gleichung  $Q_1^2 = Q_1^1 + \Delta Q_1$  führt die Sprunggröße  $\Delta Q_1$  als neue Unbekannte ein. Damit stellt sich der Zustandsvektor hinter dem Auflager wie folgt dar:

$$\begin{bmatrix} w_1^2 \\ \varphi_1^2 \\ Q_1^2 \\ M_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (a_{12} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{11}) \\ 0 & (a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{12}) \\ 1 & (a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{13}) \\ 0 & (a_{42} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{14}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \frac{b_1 - \bar{w}_1}{a_{11}}a_{11} \\ b_2 - \frac{b_1 - \bar{w}_1}{a_{11}}a_{12} \\ b_3 - \frac{b_1 - \bar{w}_1}{a_{11}}a_{13} \\ b_4 - \frac{b_1 - \bar{w}_1}{a_{11}}a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_1^2 = \mathbf{A}_1^2 \hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{B}_1^2$$

Die weitere Übertragung erfolgt wie unter Punkt 3.3.1 und 3.3.2 beschrieben. Treten neue Zwischenbedingungen auf, so ist statt der normalen multiplikativen Übertragung der gerade beschriebene Eliminationsvorgang zu wiederholen. An jedem Knoten mit einer Zwischenbedingung wird die aktuelle Unbekannte der ersten Spalte durch die neue Sprunggröße ersetzt.

Am Ende der Übertragung werden die dann aktuellen Unbekannten aus den Randbedingungen bestimmt.

Der zweite Durchlauf mit den richtigen Anfangswerten liefert dann auch die Werte der unterwegs ausgetauschten unbekanntenen Größen.

### 3.6 Herleitung von Übertragungsmatrix und Lastvektoren durch Integration des Dgl.-Systems 1.Ord.

(siehe Vorlesung Numerische Ingenieurmethoden)

#### 3.6.1 Matrizen ; Matrizenfunktionen

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C} \neq \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\frac{d}{dx} \mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \dots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{n1}}{dx} & \dots & \dots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b \mathbf{A}(x) dx = \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(x) dx & \int_a^b a_{12}(x) dx & \dots & \int_a^b a_{1n}(x) dx \\ \int_a^b a_{21}(x) dx & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b a_{n1}(x) dx & \dots & \dots & \int_a^b a_{nn}(x) dx \end{bmatrix}$$

Erinnerung : Potenzreihenentwicklung von Funktionen

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \dots$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \dots$$

Festlegung : Reihen von Matrizenfunktionen

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \frac{1}{5!}A^5 \dots$$

$$\sin A = \frac{1}{1!}A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 \dots$$

$$\cos A = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \frac{1}{6!}A^6 \dots$$

Rechnen mit Matrizenfunktionen

$$1. \quad e^A e^B =$$

$$\begin{aligned} & \left( I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \right) \left( I + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots \right) \\ &= I + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \dots \\ & \quad + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{1!}AB + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{3!}AB^3 + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{2!}A^2B + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!}A^2B^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{3!}A^2B^3 + \dots \\ & \quad + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{3!} \frac{1}{1!}A^3B + \frac{1}{3!} \frac{1}{2!}A^3B^2 + \dots \\ & \quad + \frac{1}{4!}A^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{I} + \frac{1}{1!}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{3!}(\mathbf{B}^3 + 3\mathbf{AB}^2 + 3\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{A}^3) \\
 &\quad + \frac{1}{4!}(\mathbf{B}^4 + 4\mathbf{AB}^3 + 6\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 + 4\mathbf{A}^3\mathbf{B} + \mathbf{A}^4) \\
 &\quad + \dots \\
 &= \mathbf{I} + \frac{1}{1!}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad \text{wenn } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad ;$$

2. Für  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$  gilt

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

wegen

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\text{Formal : } e^{\mathbf{A}} (e^{\mathbf{A}})^{-1} = \mathbf{I} = e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}}$$

3. Die Entwicklung

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!}\mathbf{A}x + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2x^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3x^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4x^4 + \dots$$

konvergiert für konstante  $\mathbf{A}$  und beliebige  $x$ .

$$4. \quad \frac{d}{dx}e^{\mathbf{A}x} = \frac{d}{dx}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{1!}\mathbf{A}x + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2x^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3x^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4x^4 + \dots\right)$$

$$\frac{d}{dx}e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x}$$

### 3.6.2 Dgl. System 1.Ordnung des Biegeträgers; Lösung

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\kappa}(x) \\ -\bar{p}_z(x) \\ -\bar{m}_y(x) \end{bmatrix} \rightarrow \text{z.B. Temperaturgradient}$$

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{z}(x) + \bar{\mathbf{r}}(x)$$

Allg. Lösung : 
$$\mathbf{z}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt \stackrel{!}{=} \mathbf{U}(x) \mathbf{z}(0) + \bar{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \left[ \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + e^{\mathbf{A}x} e^{-\mathbf{A}x} \bar{\mathbf{r}}(x) \right]$$

Nachweis der Richtigkeit (durch einsetzen in das Dgl. System) :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{A} \mathbf{z}(x) + \bar{\mathbf{r}}(x) \\ \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + e^{\mathbf{A}x} e^{-\mathbf{A}x} \bar{\mathbf{r}}(x) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt + \bar{\mathbf{r}}(x) \end{aligned}$$

#### Numerische Lösung durch Reihenentwicklung :

Somit folgt für  $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U}(x) \mathbf{z}(0) + \bar{\mathbf{z}}(x)$  unter Verwendung der Reihenentwicklung für die Matrizenfunktion  $e^{\mathbf{A}x}$  :

1. 
$$\mathbf{U}(x) = e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{A}x + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 x^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 x^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 x^4 + \dots$$

2. Für  $\bar{\mathbf{r}}(x) = \text{konst.}$  (konstante Streckenlast im Feld) ergibt sich:

$$\bar{\mathbf{z}}(x) = e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt = e^{\mathbf{A}x} \left[ e^{-\mathbf{A}t} \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \right]_0^x \cdot \bar{\mathbf{r}} = -(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}x}) \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{r}}$$

Die Lastspalte  $\bar{\mathbf{z}}$  kann ohne die Bestimmung der Inversen  $\mathbf{A}^{-1}$  ermittelt werden, indem man die Reihenentwicklung für  $e^{\mathbf{A}x}$  mit der Inversen durchmultipliziert:

$$\bar{\mathbf{z}}(x) = x \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}x + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^2 x^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^3 x^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^4 x^4 + \dots \right) \bar{\mathbf{r}}$$

Die Durchführung der Reihenentwicklung ergibt :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^4$$

$$e^{\mathbf{A}l} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!}\mathbf{A}l + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2l^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3l^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4l^4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -l & -\frac{l^3}{6EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 1 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 \end{bmatrix}$$

vergl. Abschnitt 4.2.2

Im Sonderfall des Biegebalkens bricht die Reihenentwicklung nach dem vierten Reihenglied ab, weil die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für Biegung  $EI w'''' = 0$  eine Potenzreihe dritten Grades ist (kubisches Polynom).

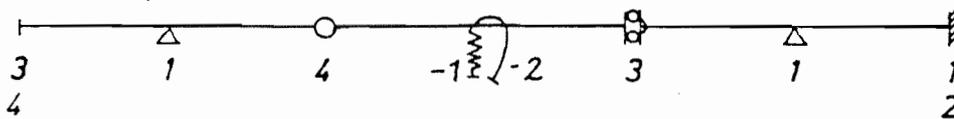
Bei anderen Problemen (z.B. gebetteter Balken, Kreisringträger etc.) läßt sich die analytische Lösung nur als unendliche Reihe darstellen, die in der Praxis aufgrund eines Fehlerkriteriums abgebrochen werden muß. Die so gewonnenen Übertragungsmatrizen können als numerische Näherung der exakten Lösung verwendet werden.

3.9 Rechner-orientierte Aufbereitung

Trägerbeschreibung

durch Kennziffern:

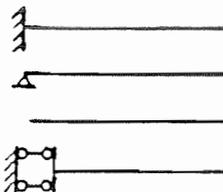
KENN = 1	$w = \bar{w}$	-1 = Dehnfeder
2	$\varphi = \bar{\varphi}$	-2 = Drehfeder
3	$Q = 0$	
4	$M = 0$	



Randbedingung

bekannt

unbekannt



$v (=0), \varphi (=0)$
$v, M$
$M, Q$
$\varphi, Q$

$M, Q$
$\varphi, Q$
$v, \varphi$
$v, M$

Lastanteile: 
$$\begin{bmatrix} \bar{q}l^4/24 EI \\ -\bar{q}l^3/6 EI \\ -\bar{q}l \\ -\bar{q}l^2/2 \end{bmatrix}$$

Streckenlast

$$\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Einflußlinien  
für Q      für M

Programmablauf (einfacher Stabzug mit Zwischenstützungen)

---

Eingabe: Anzahl der Felder, Zwischenbedingungen

Anfangs- }  
Zwischen- } Bedingungen  
End- }

je Feder: Federkonstanten

je Stütze: Knoten-Verschiebungen (Stützensenkungen)

je Feld: Länge, Steifigkeit, Last

---

Erster Durchlauf

für alle Felder: { Aufbau  $\underline{U}^i$ , Lastanteil  
Multiplikation

je Stützung: { wenn Feder: Aufbau  $\underline{T}^c$   
(wenn Knick: "  $\underline{T}$ )  
Multiplikation

{ wenn Bedingung: Ablösen der Freiwerte  
Umformen in  $\underline{V}$

---

Am Stabende: Gleichungssystem aufbauen und lösen

(→ vollständiger Anfangsvektor)

Zweiter Durchlauf und Ausgabe

z<sub>a</sub> aufbauen

Ablauf wie 1. Durchlauf, jedoch mit  
z anstatt v

statt Ablösen: Zwischengrößen bestimmen

Zwischengrößen ausdrucken

---

3.9.1 Programm DLTK

aufgestellt für Stabzüge

Streckenlasten

Einzellasten

Einflußlinien

Liste des FORTRAN-Quellprogramms

Beschreibung der verwendeten  
Bezeichnungen

Eingabe-Beschreibung

```
PROGRAM DLTK
*****
*
*   Programm zur Berechnung von Durchlauftraegern mit einachsiger
*   Biegung nach dem Uebertragungsverfahren.
*
*   TECHNISCHE UNIVERSITAET MUENCHEN
*   LEHRSTUHL FUER STATIK
*
*                                     Wilfried Ostermann, 29.11.1984
*****
PARAMETER (LSPZ = 2000,MZ = 5,IN = 14,IDPW = 2)
DIMENSION INT(LSPZ),N(IN)
CHARACTER UEBS * 80
COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST
DATA INT/LSPZ*0.0/
NST = 1
CALL DATEI (KEIN,KAUS,NST)
IF (NST .EQ. 999) GOTO 999
*
*   Das Unterprogramm PARAM liest die allgemeinen Parameter des
*   zu berechnenden Traegers.
CALL PARAM (NEL,NZW,KENN,KEFL,UEBS)
*
*   Das Unterprogramm SPEICH berechnet die aktuellen Adressen der
*   Felder im INT-Vektor.
CALL SPEICH (NEL,NZW,NZ,MZ,MS,LSPZ,N,IN,IDPW)
*
IF (NEL .EQ. 0) GOTO 999
*
CALL DLT (INT(N(1)),INT(N(2)),INT(N(3)),INT(N(4)),INT(N(5)),
+ INT(N(6)),INT(N(7)),INT(N(8)),INT(N(9)),INT(N(10)),INT(N(11)),
+ INT(N(12)),INT(N(13)),INT(N(14)),NEL,NZW,NZ,MZ,MS,KENN,KEFL,UEBS)
*
CALL DATEI(KEIN,KAUS,NST)
999 STOP 'Hauptprogramm DLT'
END
*
SUBROUTINE DLT (ITB,EL,ELS,EI,QL,QR,EP,EM,SV,FS,U,Z,GZW,H,NEL,NZW,
+ NZ,MZ,MS,KENN,KEFL,UEBS)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:NZ+NEL+1),EL(NEL),ELS(0:NEL),EI(NEL),QL(NEL),
+ QR(NEL),EP(0:NEL),EM(0:NEL),SV(-1:NZ+2),FS(NZ),U(MZ,MZ),
+ Z(MZ,MS),GZW(0:NZ,2),H(MZ)
CHARACTER UEBS*80
*
*   Das Unterprogramm EINGA liest die Beschreibung des Traegers.
CALL EINGA (ITB,EL,EI,QL,QR,EP,EM,SV,FS,NEL,NZW,NZ,KENN)
*
*   Das Unterprogramm PROTK schreibt ein Protokoll der
*   eingegebenen Werte.
CALL PROTK(ITB,EL,EI,QL,QR,EP,EM,SV,FS,NEL,NZW,NZ,KENN,KEFL,
+ UEBS)
*
IEL = 0
*
*   Das Unterprogramm ANFV baut die Zustandsmatrix am Anfang des
*   Traegers im ersten Durchlauf auf.
CALL ANFV (ITB,EP,EM,SV,Z,NEL,NZ,MZ,MS)
*
IZW = 0
DO 10 I = 1,NEL+NZW
IF (ITB(I) .EQ. 0) THEN
    IEL = IEL+1
*
*   Das Unterprogramm FELD uebertraegt die Zustandgroessen vom
*   linken zum rechten Rand des Abschnitts.
CALL FELD (EL,ELS,EI,QL,QR,EP,EM,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IEL,
+ KENN,KEFL)
*
ELSE IF (ITB(I) .LE. -1) THEN
    IZW = IZW+1
*
```

```
*      Das Unterprogramm FEDER uebertraegt die Zustandsgroessen
*      ueber ein elastisches Lager.
*      CALL FEDER (ITB,FS,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*
*      ELSE
*      IZW = IZW+1
*
*      Das Unterprogramm ZWIBED loest die Freiwerte an den
*      Zwischenbedingungen ab.
*      CALL ZWIBED (ITB,SV,U,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*
*      END IF
10 CONTINUE
*
*      Das Unterprogramm GLEILO loest das Gleichungssystem nach
*      dem ersten Durchlauf.
*      CALL GLEILO (ITB,SV,Z,NEL,NZW,NZ,MZ,MS,X1,X2)
*
*      Das Unterprogramm FREIWE berechnet die abgelosten Freiwerte.
*      CALL FREIWE (ITB,GZW,NEL,NZW,NZ,MZ,MS,X1,X2)
*
*      IEL = 0
*      MS = 1
*
*      Das Unterprogramm gibt den Kopf der Tabelle aus.
*      CALL AUSGAB (ELS,Z,NEL,NZW,MZ,MS,KENN,IEL,1)
*
*      Das Unterprogramm RANFV berechnet im zweiten Durchlauf den
*      Anfangsvektor.
*      CALL RANFV (ITB,EP,EM,SV,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,X1)
*
*      IF (ITB(1) .EQ. 0)
*      + CALL AUSGAB (ELS,Z,NEL,NZW,MZ,MS,KENN,IEL,2)
*
*      IZW = 0
*      DO 20 I = 1,NEL+NZW
*      IF (ITB(I) .EQ. 0) THEN
*      IEL = IEL+1
*
*      Das Unterprogramm FELD uebertraegt die Zustandsgroessen vom
*      linken zum rechten Rand des Abschnitts.
*      CALL FELD (EL,ELS,EI,QL,QR,EP,EM,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IEL,
*      + KENN,KEFL)
*
*      ELSE IF (ITB(I) .LE. -1) THEN
*      IZW = IZW+1
*
*      Das Unterprogramm FEDER uebertraegt die Zustandsgroessen
*      ueber ein elastisches Lager.
*      CALL FEDER (ITB,FS,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*
*      ELSE
*      IZW = IZW+1
*
*      Das Unterprogramm RZWIBE addiert die Freigroessen an
*      Stellen mit Zwischenbedingungen.
*      CALL RZWIBE (ITB,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*
*      END IF
*
*      Das Unterprogramm gibt eine Zeile der Tabelle mit den
*      berechneten Ergebnissen aus.
*      IF (ITB(I) .EQ. 0 .OR. ITB(I+1) .EQ. 0)
*      + CALL AUSGAB (ELS,Z,NEL,NZW,MZ,MS,KENN,IEL,2)
*
*      20 CONTINUE
*      RETURN
*      END
*      SUBROUTINE PARAM (NEL,NZW,KENN,KEFL,UEBS)
*****
*      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
*      CHARACTER *80 UEBS
*      COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST
*** Lesen der Parameter von der Eingabedatei
*      READ (KEIN,10) UEBS,NEL,NZW,KENN,KEFL
10 FORMAT (A80/4I5)
*      RETURN
*      END
```

```
*****
SUBROUTINE SPEICH (NEL,NZW,NZ,MZ,MS,LSPZ,N,IN,IDPW)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION N(IN)
MS = (MZ-1)/2+1
IF (NZW .EQ. 0) THEN
  NZ = 1
ELSE
  NZ = NZW
END IF
*** ITB(0:NZ+NEL+1) (I) Zuordnungsvektor
N(1) = 1
*** EL(NEL) (DP) Laenge des Elements
N(2) = N(1)+(NEL+NZ+2)
*** ELS(0:NEL) (DP) Laengensumme
N(3) = N(2)+(NEL)*IDPW
*** EI(NEL) (DP) Biegesteifigkeit
N(4) = N(3)+(NEL+1)*IDPW
*** QL(NEL) (DP) Lastordinate links
N(5) = N(4)+NEL*IDPW
*** QR(NEL) (DP) Lastordinate rechts
N(6) = N(5)+NEL*IDPW
*** P (0:NEL) (DP) Einzellast im Knoten rechts
N(7) = N(6)+(NEL)*IDPW
*** EM(0:NEL) (DP) Einzelmoment im Knoten rechts
N(8) = N(7)+(NEL+1)*IDPW
*** SV(-1:NZ+2) (DP) Stuezenverschiebung
N(9) = N(8)+(NEL+1)*IDPW
*** FS(NZ) (DP) Federsteifigkeit
N(10) = N(9)+(NZ+4)*IDPW
*** U(MZ,MZ) (DP) Uebertragungsmatrix
N(11) = N(10)+NZ*IDPW
*** Z(MZ,MS) (DP) "Zustandsvektor"
N(12) = N(11)+MZ*MZ*IDPW
*** GZW(0:NZ,2) (DP) Gleichung der abgelosten Freiwerte
N(13) = N(12)+MZ*MS*IDPW
*** H(MZ) (DP) Hilfsspeicher
N(14) = N(13)+(NZ+1)*2*IDPW
*** Berechnung des maximalen Speicherplatzbedarfs
NTOT = N(IN)+MZ*IDPW
IF (NTOT .GT. LSPZ) THEN
  WRITE(*,10) NTOT
10  FORMAT(///,50('#'),/, '# Fehler: Speicherplatzmangel !',13X,
+ '#',/, '# Speicher INT(LSPZ) ist kleiner als ',15,5X, '#',/,
+ 50('#'))
  NEL = 0
END IF
RETURN
END
SUBROUTINE EINGA(ITB,EL,EI,QL,QR,EP,EM,SV,FS,NEL,NZW,NZ,KENN)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),EL(NEL),EI(NEL),QL(NEL),QR(NEL),
+ EP(0:NEL),EM(0:NEL),SV(-1:NZ+2),FS(NZ),EIN(4)
COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST
*** Lesen der Traegerbeschreibung von der Eingabedatei
READ(KEIN,1000) LB1,LB2,SV(-1),SV(0)
ITB(0) = LB1*10+LB2
READ(KEIN,1000) LB1,LB2,SV(NZW+1),SV(NZW+2)
ITB(NEL+NZW+1) = LB1*10+LB2
IF (NZW .EQ. 0) THEN
  DO 10 I = 1,NEL
10  ITB(I) = 0
  GOTO 60
END IF
KNOA = 0
IZW = 1
I = 1
20 CONTINUE
*** Lesen der Zwischenbedingungen
READ (KEIN,2000) KNOT,IZWIB,EIN(1),KDIF,KANZ
```

```
30 IF (KNOT .EQ. KNOA) THEN
    ITB(I) = IZWIB
    IF (IZWIB .EQ. 1 .OR. IZWIB .EQ. 2) SV(IZW) = EIN(1)
    IF (IZWIB .EQ. -1 .OR. IZWIB .EQ. -2) FS(IZW) = EIN(1)
    IZW = IZW + 1
    ASSIGN 20 TO J
    IF (KANZ .NE. 0) THEN
        KNOT = KNOT+KDIF
        ASSIGN 30 TO J
        KANZ = KANZ-1
    END IF
    IF (IZW .GT. NZW) ASSIGN 40 TO J
    GOTO 50
END IF
ASSIGN 30 TO J
KNOA = KNOA+1
40 ITB(I) = 0
50 I = I+1
    IF (I .LE. NZW+NEL) GOTO J
*** Lesen der Elemente
60 I = 1
70 READ (KEIN,3000) IEL,EIN(1),EIN(2),EIN(3),EIN(4),IDIF,IANZ
    IF (IANZ .EQ. 0) IANZ = 1
    DO 80 J = 1,IANZ
        EL(IEL) = EIN(1)
        EI(IEL) = EIN(2)
        QL(IEL) = EIN(3)
        QR(IEL) = EIN(4)
        IEL = IEL+IDIF
80 I = I+1
    IF (I .LE. NEL) GOTO 70
*** Lesen der Knotenbelastung
    IF (KENN .EQ. 0) THEN
        I = 0
90 READ(KEIN,4000) KNOT,EIN(1),EIN(2),KDIF,KANZ
        IF(KNOT .EQ. -1) RETURN
        IF (KANZ .EQ. 0) KANZ = 1
        DO 100 J = 1,KANZ
            EP(KNOT) = EIN(1)
            EM(KNOT) = EIN(2)
            KNOT = KNOT+KDIF
100 I = I+1
        IF (I .LE. NEL) GOTO 90
    END IF
    RETURN
1000 FORMAT(2I5,2F10.0)
2000 FORMAT(2I5,F10.0,T46,2I5)
3000 FORMAT(I5,4F10.0,T46,2I5)
4000 FORMAT(I5,2F10.0,T46,2I5)
END
SUBROUTINE PROTK (ITB,EL,EI,QL,QR,EP,EM,SV,FS,
+ NEL,NZW,NZ,KENN,KEFL,UEBS)
*****
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    CHARACTER UEBS*80,EFL*3
    DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),EL(NEL),EI(NEL),QL(NEL),QR(NEL),
+ EP(0:NEL),EM(0:NEL),SV(-1:NZ+2),FS(NZ)
    COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST
    IF (KENN .EQ. 1) EFL = ' w '
    IF (KENN .EQ. 2) EFL = ' phi '
    IF (KENN .EQ. 3) EFL = ' Q '
    IF (KENN .EQ. 4) EFL = ' M '
*** Ausgabe der Parameter
    WRITE(KAUS,110) UEBS
    IF (KENN .EQ. 0) THEN
        WRITE(KAUS,120)
    ELSE
        WRITE(KAUS,130) EFL,KEFL
    END IF
    WRITE(KAUS,140) NEL,NZW
*** Ausgabe der Anfangsbedingungen
    LB1 = ITB(0)/10
    LB2 = ITB(0)-LB1*10
    WRITE(KAUS,150) LB1,SV(-1),SV(0),LB2
*** Ausgabe der Endbedingungen
    LB1 = ITB(NEL+NZW+1)/10
    LB2 = ITB(NEL+NZW+1)-LB1*10
    WRITE(KAUS,160) NEL,LB1,SV(NZW+1),SV(NZW+2),LB2
```

```
*** Ausgabe der Zwischenpunkte
IF (NZW .NE. 0) THEN
  WRITE(KAUS,170)
  KNOT = 0
  IZW = 0
  DO 10 I = 1,NEL+NZW
    IF (ITB(I) .NE. 0) THEN
      IZW = IZW+1
      WRITE(KAUS,180) KNOT,ITB(I),FS(IZW),SV(IZW)
    ELSE
      KNOT = KNOT+1
    END IF
  10 CONTINUE
END IF
*** Ausgabe der Abschnitte (mit Linienlasten)
WRITE(KAUS,190)
DO 20 IEL = 1,NEL
  WRITE(KAUS,200) IEL,EL(IEI),EI(IEI),QL(IEI),QR(IEI)
20 CONTINUE
*** Ausgabe der Knotenlasten
IF (KENN .EQ. 0) THEN
  WRITE(KAUS,210)
  DO 30 IEL = 0,NEL
    30 WRITE(KAUS,220) IEL,EP(IEI),EM(IEI)
  END IF
110 FORMAT('1'//////,10X,40('*'),/,10X,'*',38X,'*',/,
+ 10X,'* Durchlauftraegerprogramm DLT* ',/,
+ 10X,'*',7X,'-Uebertragungsverfahren-',7X,'*',/,
+ 10X,'*',38X,'*/10X,40('*'),///,10X,A80,///10X,
+ '**** EINGABEWERTE ****')
120 FORMAT(/,10X,'**** Statische Berechnung ****')
130 FORMAT(/,10X,'*** Einflusslinie fuer ',A3,' am Knoten ',I4)
140 FORMAT(/,10X,'Anzahl der Elemente',16('.'),I4,/,
+ 10X,'Anzahl der Zwischenbedingungen...',I4)
150 FORMAT(/,10X,'*** Randbedingungen ***'//,10X,
+ 'Anfangsbedingung:',/,10X,'Knoten',5X,'Typ',10X,
+ 'Lagerverschiebung',4X,'Lagerverdrehung'//,13X,'0',3X,I6,15X,
+ F10.5,9X,F10.5,/,17X,I6)
160 FORMAT(/,10X,'Endbedingung:',/,10X,'Knoten',5X,'Typ',10X,
+ 'Lagerverschiebung',4X,'Lagerverdrehung'//,10X,I4,3X,I6,15X,
+ F10.5,9X,F10.5,/,17X,I6)
170 FORMAT(/,10X,'*** Zwischenbedingungen ***'//,50X,'vorgegebene'
+ /10X,'Knoten',5X,'Typ',6X,'Federkonstante',5X,'Verschiebung'/)
180 FORMAT(10X,I4,4X,I5,9X,F12.3,5X,E12.5)
190 FORMAT(/,10X,'*** Elemente ***'//,10X,'Element',5X,'Laenge',12X,
+ 'EI',13X,'qr',11X,'ql'/)
200 FORMAT(10X,I4,4X,F10.2,5X,F12.1,3X,F10.2,3X,F10.2)
210 FORMAT(/,10X,'*** Knotenlasten ***'//,10X,'Knoten',12X,'P',
+ 15X,'M'/)
220 FORMAT(10X,I4,7X,F10.2,6X,F10.2)
RETURN
END
SUBROUTINE ANFV (ITB,EP,EM,SV,Z,NEL,NZ,MZ,MS)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),EP(0:NEL),EM(0:NEL),SV(-1:NZ+2),
+ Z(MZ,MS)
CALL MDCON (Z,MZ,MS,0,0.0D0)
LB1 = ITB(0)/10
LB2 = ITB(0)-LB1*10
*** Zustandsmatrix mit den Anfangsbedingungen besetzen
IF (LB1 .LT. LB2) THEN
  IH = LB1
  LB1 = LB2
  LB2 = IH
END IF
IF (LB1 .EQ. 4 .AND. LB2 .EQ. 3) THEN
  LB1 = 3
  LB2 = 4
END IF
J = NG(LB1)
K = NG(LB2)
Z(J,1) = 1.0
Z(K,2) = 1.0
```

```

*** Lastspalte der Zustandsmatrix besetzen
Z(1,3) = SV(-1)
Z(2,3) = SV(0)
Z(3,3) = -EP(0)
Z(4,3) = -EM(0)
Z(5,3) = 1.0
RETURN
END
SUBROUTINE FELD (EL,ELS,EI,QL,QR,EP,EM,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IEL,
+
+ KENN,KEFL)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION EL(NEL), ELS(0:NEL),EI(NEL),QL(NEL),QR(NEL),EP(0:NEL),
+
+ EM(0:NEL),U(MZ,MZ),Z(MZ,MS),H(MZ)
CALL MDCON (U,MZ,MZ,1,1.0D0)
ELS(IEL) = ELS(IEL-1)+EL(IEL)
*** Uebertragungsmatrix mit geometrischen Werten besetzen
U(1,2) = -EL(IEL)
U(1,3) = -(EL(IEL)**3/(6.0*EI(IEL)))
U(1,4) = -(EL(IEL)**2/(2.0*EI(IEL)))
U(2,3) = -U(1,4)
U(2,4) = EL(IEL)/EI(IEL)
U(4,3) = EL(IEL)
*** Lastspalte der Uebertragungsmatrix besetzen
IF (KENN .EQ. 0) THEN
U(1,5) = (4.0*QL(IEL)+QR(IEL))*EL(IEL)**4/(120.0*EI(IEL))
U(2,5) = -(3.0*QL(IEL)+QR(IEL))*EL(IEL)**3/(24.0*EI(IEL))
U(3,5) = -(1.0*QL(IEL)+QR(IEL))*EL(IEL)/(2.0)-EP(IEL)
U(4,5) = -(2.0*QL(IEL)+QR(IEL))*EL(IEL)**2/(6.0)-EM(IEL)
ELSE
*** Lastspalte fuer Einflusslinien besetzen
IF (IEL .EQ. KEFL) THEN
U(NG(KENN),5) = -1.0
IF (KENN .GE. 3) U(NG(KENN),5) = 1.0
END IF
END IF
CALL MDMUL(U,Z,Z,H,MZ,MZ,MS)
RETURN
END
SUBROUTINE FEDER (ITB,FS,U,Z,H,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),FS(NZ),U(MZ,MZ),Z(MZ,MS),H(MZ)
CALL MDCON (U,MZ,MZ,1,1.0D0)
IF (ITB(I) .EQ. -1) THEN
*** Stuetzfedern
U(3,1) = FS(IZW)
ELSE
*** Drehfedern
U(4,2) = FS(IZW)
END IF
CALL MDMUL(U,Z,Z,H,MZ,MZ,MS)
RETURN
END
SUBROUTINE ZWIBED (ITB,SV,U,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),SV(-1:NZ+2),U(MZ,MZ),Z(MZ,MS),
+
+ GZW(0:NZ,2)
*** Berechnung der Gleichung zum Abloesen des Freiwertes
GZW(IZW,1) = Z(ITB(I),1)/Z(ITB(I),2)
GZW(IZW,2) = -(SV(IZW) -Z(ITB(I),3))/Z(ITB(I),2)
*** Umordnen der Zustandsmatrix
DO 10 J = 1,4
Z(J,1) = Z(J,1) - GZW(IZW,1) *Z(J,2)
Z(J,3) = Z(J,3) - GZW(IZW,2) *Z(J,2)
10 Z(J,2) = 0.0
*** Besetzen der Zustandsmatrix mit neuem Freiwert
KI = NG(ITB(I))
Z(KI,2) = 1.0
RETURN
END
SUBROUTINE GLEILO (ITB,SV,Z,NEL,NZW,NZ,MZ,MS,X1,X2)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),SV(-1:NZ+2),Z(MZ,MS)
COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST

```

```
*** Stuetzenverschiebung am Ende des Traegers
Z(1,3) = Z(1,3)-SV(NZW+1)
Z(2,3) = Z(2,3)-SV(NZW+2)
*** Berechnung der Determinante des Gleichungssystems
J = ITB(NZW+NEL+1)/10
K = ITB(NZW+NEL+1)-J*10
DET = Z(J,1)*Z(K,2)-Z(J,2)*Z(K,1)
IF (ABS(DET) .GT. 1.0D-10) GOTO 20
PRINT 10
WRITE(KAUS,10)
10 FORMAT (' **** Gleichungssystem singulaer ****')
*** Berechnung der unbekanntenen Freiwerte
20 X1 = Z(J,2)*Z(K,3)/DET-Z(J,3)*Z(K,2)/DET
X2 = -Z(J,1)*Z(K,3)/DET+Z(J,3)*Z(K,1)/DET
RETURN
END
SUBROUTINE FREIWE (ITB,GZW,NEL,NZW,NZ,MZ,MS,X1,X2)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),GZW(0:NZ,2)
IG = 0
IZW = 0
*** Suchen der Zwischenpunkte mit Freiwerten
IF( NZW .EQ. 0) GOTO 20
DO 10 J = 1, NZW+NEL
IF (ITB(J) .NE. 0) IZW = IZW+1
*** Berechnen der Freiwerte
IF (ITB(J) .GE. 1) THEN
GZW(IZW,1) = -GZW(IZW,1)*X1-GZW(IZW,2)
GZW(IG,1) = GZW(IZW,1)
IG = IZW
END IF
10 CONTINUE
20 GZW(IG,1) = X2
RETURN
END
SUBROUTINE RANFV (ITB,EP,EM,SV,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,X1)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),EP(0:NEL),EM(0:NEL),SV(-1:NZ+2),
+Z(MZ,MS),GZW(0:NZ,2)
CALL MDCON (Z,MZ,MS,0,0.0D0)
*** Belegen des Anfangsvektors mit den Lastgroessen
Z(1,1) = SV(-1)
Z(2,1) = SV(0)
Z(3,1) = -EP(0)
Z(4,1) = -EM(0)
Z(5,1) = 1.0
*** Belegen des Anfangsvektors mit den berechneten Freiwerten am
*** Anfang
LB1 = ITB(0)/10
LB2 = ITB(0)-LB1*10
IF (LB1 .LT. LB2) THEN
IH = LB1
LB1 = LB2
LB2 = IH
END IF
IF(LB1 .EQ. 4 .AND. LB2 .EQ. 3) THEN
LB1 = 3
LB2 = 4
END IF
J = NG(LB1)
K = NG(LB2)
Z(J,1) = Z(J,1)+X1
Z(K,1) = Z(K,1)+GZW(0,1)
RETURN
END
SUBROUTINE RZWIBE (ITB,Z,GZW,NEL,NZ,MZ,MS,IZW,I)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ITB(0:(NZ+NEL+1)),Z(MZ,MS),GZW(0:NZ,2)
KI = NG(ITB(I))
Z(KI,1) = Z(KI,1)+GZW(IZW,1)
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE AUSGAB (ELS,Z,NEL,NZW,MZ,MS,KENN,I,IAUS)
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ELS(0:NEL),Z(MZ)
COMMON /EA/KEIN,KAUS,NST
GOTO (10,40),IAUS
10 WRITE(KAUS,20)
20 FORMAT(////,T11,'**** ERGEBNISSE ****')
WRITE(KAUS,30)
30 FORMAT(//,T10,5X,'x',5X,6X,'Q',6X,6X,'M',6X,
+ 6X,'w',6X,5X,'phi'/)
RETURN
40 IF (KENN .EQ. 0) THEN
WRITE(KAUS,50) ELS(I),(Z(NG(J)),J=1,4)
50 FORMAT(T10,2X,F7.2,2X,F11.2,2X,F11.2,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3)
ELSE
WRITE(KAUS,60) ELS(I),Z(1)
60 FORMAT(T10,2X,F7.2,28X,F11.4)
END IF
RETURN
END
SUBROUTINE MDMUL (A,B,C,H,L,M,N)
*****
* Das Unterprogramm fuehrt eine Matrizenmultiplikation aus
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(L,M),B(M,N),C(L,M),H(L)
DO 40 I = 1,N
DO 20 K = 1,L
SUM = 0.0
DO 10 J = 1,M
10 SUM = SUM + A(K,J) * B(J,I)
20 H(K) = SUM
DO 30 K = 1,L
30 C(K,I) = H(K)
40 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE MDCON (A,L,M,NST,AKON)
*****
* Vorbesetzen einer Matrix:
* NST <= 0 : A(i,k) = AKON
* NST > 0 : A(i,i) = AKON ,A(i,k) = 0.0
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(L,M)
DO 30 I = 1,L
DO 30 K = 1,M
IF (NST) 10,10,20
10 A(I,K) = AKON
GOTO 30
20 A(I,K) = 0.0D0
IF (I .EQ. K) A(I,I) = AKON
30 CONTINUE
RETURN
END
INTEGER FUNCTION NG(I)
*****
* NG ermittelt den konjugierten Wert einer Bedingung.
* Zuordnung : Verschiebung -----> Kraftgroesse
* Kraftgroesse -----> Verschiebung
J = 2
IF (J-I) 10,20,20
10 NG = I-J
RETURN
20 NG = I+J
RETURN
END
SUBROUTINE DATEI (KEIN,KAUS,NST)
*****
* Unterprogramm zum oeffnen und schliessen von Dateien.
CHARACTER*12 EINDAT,AUSDAT,EDA,ADA
LOGICAL EX
EDA = 'Eingabedatei'
ADA = 'Ausgabedatei'
IF (NST .EQ. 0) GOTO 70

```

```
10 PRINT 20,EDA
20 FORMAT (///' Geben Sie den Namen der ',A,' ein :')
   READ 30, EINDAT
30 FORMAT(A8)
   I = INDEX (EINDAT,' ')
   EINDAT(I:I+3) = '.EIN'
   INQUIRE (FILE = EINDAT,EXIST = EX)
   IF (.NOT.EX) THEN
     PRINT 40,EINDAT
40   FORMAT(///' Die Datei ',A,' ist nicht vorhanden,'
+     /' geben Sie die Datei neu ein!')
     GOTO 10
   END IF
   OPEN (UNIT=5,FILE=EINDAT,ERR=80)
   KEIN = 5
   NST = 0
50 PRINT 20,ADA
   READ 30,AUSDAT
   I = INDEX (AUSDAT,' ')
   AUSDAT(I:I+3) = '.AUS'
   INQUIRE (FILE=AUSDAT,EXIST=EX)
   IF (EX) THEN
     PRINT 60 ,AUSDAT
60   FORMAT(///' Die Datei ',A,' ist schon vorhanden, '/
+     ' soll die Datei ueberschrieben werden?(ja = 1/nein = 0)')
     READ(*,*,ERR=50,END=50)ICLEAN
     IF (ICLEAN .EQ. 0) GOTO 50
   END IF
   OPEN(UNIT=6,FILE=AUSDAT)
   KAUS = 6
   RETURN
70 CLOSE (UNIT= KEIN,STATUS='KEEP')
   CLOSE (UNIT= KAUS,STATUS='KEEP')
   RETURN
80 PRINT 90 ,EINDAT
90 FORMAT(///' Die Datei ',A,' konnte nicht bearbeitet werden.'
+     /' Ueberpruefen Sie die Datei!')
   NST = 999
   RETURN
END
```

B E S C H R E I B U N G   D E R   V E R W E N D E T E N  
B E Z E I C H N U N G E N

Variable	Typ	Beschreibung
DET	DOUBLE	Determinante des Gleichungssystems
EFL	CHARACTER	Beschreibung der gesuchten Einflusslinie
EI (NEL)	DOUBLE	Biegesteifigkeit des Elements
EIN (4)	DOUBLE	Hilfsspeicher fuer die Eingabe
EM (0:NEL)	DOUBLE	Einzelmoment in den Knoten
EP (0:NEL)	DOUBLE	Einzellast in den Knoten
EL (NEL)	DOUBLE	Laenge des Elements
ELS (0:NEL)	DOUBLE	Summe der Elementlaengen
FS (NZ)	DOUBLE	Federsteifigkeit
GZW (0:NZ,2)	DOUBLE	Gleichung zur Berechnung der Freiwerte an den Knoten mit Zwischenbedingungen
IANZ	INTEGER	Anzahl gleicher Elemente bei der Generierung
IDIF	INTEGER	Differenz der Elementnummern bei der Generierung
IDPW	INTEGER	Anzahl der INTEGER-Worte in einem DOUBLE PRECISION-Wort
IEL	INTEGER	Zaehler fuer die Elemente
IN	INTEGER	Anzahl der Felder in INT-Feld
INT (LSPZ)	INTEGER	INTEGER-Feld zur dynamischen Feldvereinbarung
ITB (0:NZ+NEL+1)	INTEGER	Traegerbeschreibung
IZW	INTEGER	Zaehler der Zwischenpunkte
IZWIB	INTEGER	Kennzahl der Zwischenpunkte
KANZ	INTEGER	Anzahl der Knoten bei der Knotengenerierung
KAUS	INTEGER	UNIT-Nummer der Ausgabedatei
KDIF	INTEGER	Differenz der Knotennummern bei der Knotengenerierung
KEIN	INTEGER	UNIT-Nummer der Eingabedatei
KENN	INTEGER	Kennzahl der Berechnung
KNOA	INTEGER	Aktuelle Knotennummer
KNOT	INTEGER	Eingegebene Knotennummer

Variable	Typ	Beschreibung
LB1	INTEGER	Lagerbedingung 1 der Randbedingungen
LB2	INTEGER	Lagerbedingung 2 der Randbedingungen
LSPZ	INTEGER	Anzahl der INTEGER-Worte im INT-Feld
MS	INTEGER	Anzahl der Spalten der Matrix Z
MZ	INTEGER	Anzahl der Zeilen der Matrix Z
N (IN)	INTEGER	Anfangspunkt der Teilfelder im INT-Feld
NEL	INTEGER	Anzahl der Elemente
KEFL	INTEGER	Knotennummer fuer die gesuchte Einflusslinie
NST	INTEGER	Steuergroesse fuer die Dateienverwaltung
NTOT	INTEGER	Anzahl der benoetigten Speicherplaetze im INT-Feld
NZ	INTEGER	Benoetigte Feldgroesse fuer die Zwischenpunkte
NZW	INTEGER	Anzahl der Zwischenpunkte
OL (NEL)	DOUBLE	Lastordinate der Streckenlast am linken Rand des Elements
OR (NEL)	DOUBLE	Lastordinate der Streckenlast am rechten Rand des Elements
SV (-1:NZ+2)	DOUBLE	Vorgegebene Stuetzenverschiebung des Zwischenpunktes
U (MZ, MS)	DOUBLE	Uebertragungsmatrix
UEBS	CHARACTER	Ueberschrift-Text
X1	DOUBLE	Ungekannte X1
X2	DOUBLE	Unbekannte X2
Z (MZ, MS)	DOUBLE	Zustandsvektor

E I N G A B E - B E S C H R E I B U N G F U E R D A S  
D U R C H L A U F T R A E G E R P R O G R A M M

KARTE	SPALTEN	FORMAT	BESCHREIBUNG
*1*	1 - 80	A80	Ueberschrift - Text
*2*	1 - 5	15	NEL = Anzahl der Elemente
	6 - 10	15	NZW = Anzahl der Zwischenbedingungen
	11 - 15	15	KENN = Art der Berechnung
			KENN = 0 Berechnung fuer einen statischen Lastfall = 1 Einflusslinie fuer Verschiebung = 2 Einflusslinie fuer Verdrehung = 3 Einflusslinie fuer Querkraft = 4 Einflusslinie fuer Biegemoment
	16 - 20	15	KEFL = Knotennummer fuer den Ort der Einflusslinie
*3*	1 - 5	15	LB1 = 1. Lagerbedingung am Anfang
	6 - 10	15	LB2 = 2. Lagerbedingung am Anfang
			Folgende Lagerbedingungen stehen zur Verfuegung:
			LBn = 1 Verschiebung w = const(=0.0) = 2 Verdrehung phi = const(=0.0) = 3 Querkraft Q = 0.0 = 4 Moment M = 0.0
	11 - 20	F10.0	SV1 = Lagerverschiebung am Anfang
	21 - 30	F10.0	SV2 = Lagerverdrehung am Anfang
*4*	1 - 5	15	LB1 = 1. Lagerbedingung am Ende
	6 - 10	15	LB2 = 2. Lagerbedingung am Ende
			Folgende Lagerbedingungen stehen zur Verfuegung:
			LBn = 1 Verschiebung w = const(=0.0) = 2 Verdrehung phi = const(=0.0) = 3 Querkraft Q = 0.0 = 4 Moment M = 0.0
	11 - 20	F10.0	SV1 = Lagerverschiebung am Ende
	21 - 30	F10.0	SV2 = Lagerverdrehung am Ende

KARTE	SPALTEN	FORMAT	BESCHREIBUNG
*5*	Fuer jede Zwischenbedingung I = 1...NZW		
	1 - 5	I5	KNOT = Knotennummer fuer den Ort der Zwischenbedingung *)
	6 - 10	I5	ITB = Art der Zwischenbedingung
			ITB = -2 Drehfeder = -1 Dehnfeder = 1 Verschiebung w = const(=0.0) = 2 Verdrehung phi = const(=0.0) = 3 Querkraft Q = 0.0 = 4 Moment M = 0.0
	11 - 20	F10.0	FS(I) = Federkonstante bzw. SV(I) = vorgegebene Verschiebung/Verdrehung
	46 - 50	I5	KDIF = Knotendifferenz bei gleichen Zwischenbedingungen
	51 - 55	I5	KANZ = Anzahl der gleichen Zwischenbedingungen
			*) Anmerkung: Die Knoten muessen in aufsteigender Reihenfolge eingegeben werden.
*6*	Fuer jedes Element I = 1...NEL		
	1 - 5	I5	IEL = Nummer des Elements
	6 - 15	F10.0	EL(I) = Laenge des Elements
	16 - 25	F10.0	EI(I) = Biegesteifigkeit
	26 - 35	F10.0	QL(I) = Lastordinate der Streckenlast links
	36 - 45	F10.0	QR(I) = Lastordinate der Streckenlast rechts
	46 - 50	I5	IDIF = Differenz der Elementnummern bei gleichen Elementen
	51 - 55	I5	IANZ = Anzahl der gleichen Elemente
*7*	Fuer jeden belasteten Knoten I = 1...K		
	1 - 5	I5	KNOT = Knotennummer des belasteten Knoten  Die Eingabe der Knotenbelastungen wird mit -1 abgeschlossen.
	6 - 15	F10.0	EP(I) = Einzellast am Knoten
	16 - 25	F10.0	EM(I) = Einzelmoment am Knoten
	46 - 50	I5	KDIF = Differenz der Knotennummern bei gleicher Knotenbelastung
	51 - 55	I5	KANZ = Anzahl der gleichen Knotenbelastung

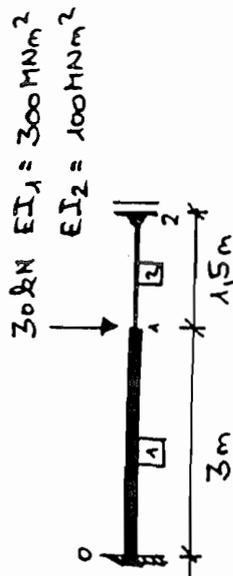
**Programm DLTK (Version 1984) :**

**Besonderheiten :**

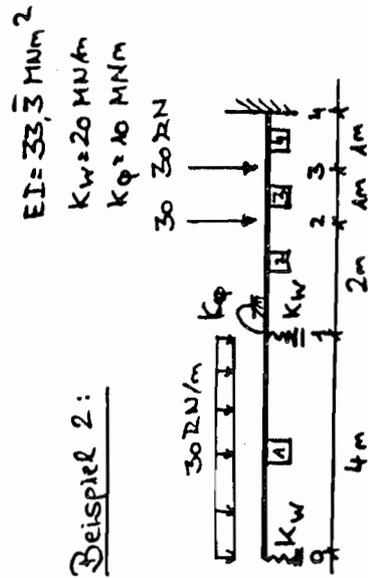
- *Ein- und Ausgabedateien* : Die Dateinamen werden vom Programm automatisch mit dem Extender .....EIN bzw. ....AUS versehen.
- *Anzahl der Elemente* : An den Angriffstellen von Einzellasten sind Abschnittsgrenzen einzuführen.
- *Anzahl der Zwischenbedingungen* : Zwischenbedingungen sind an Lagern, Federn, Gelenken und sonstigen eingepprägten Zustandsgrößen einzugeben. Greifen an einem Knoten mehrere Federn an, so ist für jede von ihnen eine Zeile für die entsprechende Zwischenbedingung einzugeben. Federn am Trägeranfang und Trägerende sind als Zwischenbedingungen zu behandeln.
- *Elementbeschreibung* : Mehrere gleichartige Elemente können mittels **IDIF** bzw. **IANZ** erzeugt werden. Kommt ein Abschnitt nur einmal vor, so sind die beiden Werte mit **0** bzw. als *blanc* einzugeben.
- *Knotenbeschreibung* : Mehrere gleichartige Knoten können mittels **KDIF** bzw. **KANZ** erzeugt werden. Kommt ein Knoten nur einmal vor, so sind die beiden Werte mit **0** bzw. als **BLANC** einzugeben.
- *Abschluß der Eingabe* : Die Eingabe ist i.A. mit einer Knotenzeile anzugeben, wobei die Zeile vollständig sein muß und für die Knotennummer den Wert -1 aufweisen muß. Ein **RETURN** nach der Knotennummer führt i.A. zu einem Fehler (für nachfolgende Werte **0** bzw. als **BLANC** eingeben !)

**Beispiele :**

Beispiel 1:



Beispiel 2:



C>TYPE DLTK1.EIN

BAUSTATIK 3 : UEBUNG 89/90 : BEISPIEL 1 :

TITEL	SYSTEM	ANFANG	ENDE	ABSCHN1	ABSCHN2	KNOTEN1	KNOTEN2	SCHLUSS
2	0	0	0					
1	2	0.0	0.0					
2	3		0.0					
1	3.0	300.0	0.0	0.0	0.0	0	0	
2	1.5	100.0	0.0	0.0	0.0	0	0	
1	100.0	0.0	0.0			0	1	
-1	0	0				0	0	

C>TYPE DLTK2.EIN

BAUSTATIK 3 : UEBUNG 89/90 : BEISPIEL 2 :

TITEL	SYSTEM	ANFANG	ENDE	ZWIB1,2	ZWIBED3	ABSCHN1	ABSCHN2	ABS 3,4	KNO 2,3	SCHLUSS
4	3	0	0							
3	4									
1	2	0.0	0.0						1	2
0	-1	20.0								
1	-2	10.0								
1	4.0	33.333333	30.0			30.0	0.0		0	
2	2.0	33.333333	0.0			0.0	0.0		0	
3	1.0	33.333333	0.0			0.0	0.0		1	2
2	30.0	0.0							1	2
-1	0								0	0

```

*****
*                                     *
*   Durchlauftraegerprogramm DLTK   *
*   -Uebertragungsverfahren-       *
*                                     *
*****

```

BAUSTATIK 3 : UEBUNG 89/90 : BEISPIEL 1 :

\*\*\*\* EINGABEWERTE \*\*\*\*

\*\*\*\* Statische Berechnung \*\*\*\*

Anzahl der Elemente..... 2  
Anzahl der Zwischenbedingungen..... 0

\*\*\* Randbedingungen \*\*\*

Anfangsbedingung:

Knoten	Typ	Lagerverschiebung	Lagerverdrehung
0	1	0.00000	0.00000
	2		

Endbedingung:

Knoten	Typ	Lagerverschiebung	Lagerverdruehung
2	2	0.00000	0.00000
	3		

\*\*\* Elemente \*\*\*

Element	Laenge	EI	qr	ql
1	3.00	300.0	0.00	0.00
2	1.50	100.0	0.00	0.00

\*\*\* Knotenlasten \*\*\*

Knoten	P	M
0	0.00	0.00
1	100.00	0.00
2	0.00	0.00

\*\*\*\* ERGEBNISSE \*\*\*\*

x	Q	M	w	phi
0.00	100.00	-240.00	0.000E+00	0.000E+00
3.00	0.00	60.00	2.100E+00	-9.000E-01
4.50	0.00	60.00	2.775E+00	1.350E-15

C>A:DLTK

Geben Sie den Namen der Eingabedatei ein :DLTK1

Geben Sie den Namen der Ausgabedatei ein :DLTK1

Die Datei DLTK1.AUS ist schon vorhanden, soll die Datei ueberschrieben werden?(ja = 1/nein = 0) 1

STOP Hauptprogramm DLT

```

*****
*                                     *
*   Durchlauftraegerprogramm DLTK   *
*   -Uebertragungsverfahren-       *
*                                     *
*****

```

BAUSTATIK 3 : UEBUNG 89/90 : BEISPIEL 2 :

\*\*\*\* EINGABEWERTE \*\*\*\*

\*\*\*\* Statische Berechnung \*\*\*\*

Anzahl der Elemente..... 4  
Anzahl der Zwischenbedingungen..... 3

\*\*\* Randbedingungen \*\*\*

Anfangsbedingung:

Knoten	Typ	Lagerverschiebung	Lagerverdrehung
0	3	0.00000	0.00000
	4		

Endbedingung:

Knoten	Typ	Lagerverschiebung	Lagerverdrehung
4	1	0.00000	0.00000
	2		

\*\*\* Zwischenbedingungen \*\*\*

Knoten	Typ	Federkonstante	vorgegebene Verschiebung
0	-1	20.000	0.00000E+00
1	-1	20.000	0.00000E+00
1	-2	10.000	0.00000E+00

\*\*\* Elemente \*\*\*

Element	Laenge	EI	qr	ql
1	4.00	33.3	30.00	30.00
2	2.00	33.3	0.00	0.00
3	1.00	33.3	0.00	0.00
4	1.00	33.3	0.00	0.00

\*\*\* Knotenlasten \*\*\*

Knoten	P	M
0	0.00	0.00
1	0.00	0.00
2	30.00	0.00
3	30.00	0.00
4	0.00	0.00

\*\*\*\* ERGEBNISSE \*\*\*\*

x	Q	M	w	phi
0.00	54.07	0.00	2.704E+00	-2.205E+00
4.00	-65.93	-23.70	3.820E+00	1.173E+00
4.00	10.47	-11.97	3.820E+00	1.173E+00
6.00	-19.53	8.98	1.774E+00	1.083E+00
7.00	-49.53	-10.55	6.535E-01	1.059E+00
8.00	-49.53	-60.08	5.209E-15	-5.933E-16

Berechnungsschema für das Übertragungsverfahren am geraden querbelasteten Stabzug :

1.Durchlauf :				2.Durchlauf :			
$U^i$ bzw. $T_k$	$X_1 = a_{11}$	$X_2 = a_{12}$	Last (übertragen)	Abschnittbelastung $\bar{z}^i$ bzw. $\bar{z}_k$	Last (einschl. Abschnittbelastung) $B$	Abschnittbelastung $\bar{z}^i$ bzw. $\bar{z}_k$	
$w$	$a_{11}$	$a_{12}$	$b_1$				$w_0$
$\phi$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_2$				$\phi_0$
$Q$	$a_{31}$	$a_{32}$	$b_3$				$Q_0$
$M$	$a_{41}$	$a_{42}$	$b_4$				$M_0$
$U^1$	$U^1 a_{01} = a_{11}$	$U^1 a_{02} = a_{12}$	$U^1 B_0$	$\bar{z}^1$	$U^1 B_0 + \bar{z}^1 = B_1$		$w_{1l}$
$\phi$							$\phi_{1l}$
$Q$							$Q_{1l}$
$M$							$M_{1l}$
$T_1$	$T_1 a_{11}$	$T_1 a_{12}$	$T_1 B_1$	$\bar{z}_1$	$T_1 B_1 + \bar{z}_1$	$\bar{z}_1$	$z_{1r}$
$U^2$							$z_{2l}$
	$A_i$				$B_i$		
$U^n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	$U^n B_{n-1}$	$\bar{z}^n$	$B_n$	$\bar{z}_n$	$z_n$

**Berechnungsschema für das Übertragungsverfahren am geraden querbelasteten Stabzug :**

	1.Durchlauf :					2.Durchlauf :		
	$X_1 =$	$X_2 =$	Last (übertragen)	Abschnitt- belastung $\bar{z}^i$ bzw. $\bar{z}_k$	Last (einschl. $\bar{z}$ )	Abschnitt- belastung $\bar{z}^i$ bzw. $\bar{z}_k$		
$U^i$ bzw. $T_k$	$a_1$	$a_2$			$B_1$		$\bar{z}_k$	
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								

**Berechnungsschema für das Übertragungsverfahren am geraden querbelasteten Stabzug :**

	1.Durchlauf :					2.Durchlauf :		
	$X_1 =$	$X_2 =$	Last (übertragen)	Abschnitt- belastung $\bar{Z}^i$ bzw. $\bar{Z}_k$	Last (einschl. $\bar{Z}$ )	Abschnitt- belastung $\bar{Z}^i$ bzw. $\bar{Z}_k$		
$U^i$ bzw. $T_k$	$a_1$	$a_2$	$B$	$\bar{Z}^i$ bzw. $\bar{Z}_k$	$B$	$\bar{Z}^i$ bzw. $\bar{Z}_k$	$Z_{--}$	
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								
$w$								
$\phi$								
$Q$								
$M$								

Berechnungsschema für das Übertragungsverfahren am geraden querbelasteten Stabzug :

		1. Durchlauf:				2. Durchlauf:			
		$X_1 = \infty$	$X_2 = M_0$	Last (übertragen)	Abschnittbelastung $\bar{z}'$ bzw. $\bar{z}_k$	Last (einschl. $\bar{z}$ )	Abschnittbelastung $\bar{z}'$ bzw. $\bar{z}_k$	Abschnittbelastung $\bar{z}'$ bzw. $\bar{z}_k$	$z_{--}$
		$a_1$	$a_2$			$B_-$			
$w$	$\phi$	0	0	0					0
$Q$	$M$	1	0	0					100
		0	1	0					-240
$w$	$\phi$	1	-3	-0,015	-0,015				2,10
$Q$	$M$	0	1	0,015	0,015	0	0	0	-0,90
		0	0	1	0	0	0	0	100
		0	0	3	1				60
$w$	$\phi$	1	1	-0,015	-0,015				2,10
$Q$	$M$	0	1	0,015	0,015	0	0	0	-0,90
		0	0	1	0	0	0	0	100
		0	0	3	1				60
$w$	$\phi$	1	1	-0,015	-0,015				2,10
$Q$	$M$	0	1	0,015	0,015	0	0	0	-0,90
		0	0	1	0	-100	-100	-100	100
		0	0	3	1	0	0	0	60
$w$	$\phi$	1	-1,5	-0,05625	-0,05625	+0,5625	0	0,5625	2,775
$Q$	$M$	0	1	0,0125	0,0125	-1,125	0	-1,125	0
		0	0	1	0	-100	0	-100	0
		0	0	1,5	1	-150	0	-150	60

Feld 1

Punkt 1

Feld 2

Berechnungsschema für das Übertragungsverfahren am geraden querbelasteten Stabzug :

		1. Durchlauf:				2. Durchlauf:				
		$X_1 = W_0$	$X_2 = \varphi_0$	Last (übertragen)	Abschnittbelastung $Z^i$ bzw. $Z_k$	Last (einschl. $Z$ )	Abschnittbelastung $Z^i$ bzw. $Z_k$	Abschnittbelastung	$Z$	
		$a_1$	$a_2$			$B$			$Z$	
$w$	<p>Beispiel 2</p> <p><math>U^i</math> bzw. <math>T_k</math></p>	1	0	0					2,7037	
$\phi$		0	1	0						-2,2050
$Q$		20	0	0	0					54,074
$M$		0	0	0	0					0
$w$		-5,4	-4	0	9,6	9,6	9,6	-5,7800	9,6	3,8200
$\phi$		4,8	1	0	-9,6	-9,6	-9,6	10,7728	-9,6	1,1728
$Q$		20	0	0	-120	-120	-120	54,074	-120	-65,926
$M$		80	0	0	-240	-240	-240	116,296	-240	-237,04
$w$		-5,4	-4	9,6	0	9,6	0	3,8200	0	3,8200
$\phi$		4,8	1	-9,6	0	-9,6	0	1,1728	0	1,1728
$Q$		-88	-80	72	0	72	0	10,474	0	10,474
$M$		128	10	-336	0	-336	0	-11,976	0	-11,976
$w$		-27,16	15,2	105,6	1,35	106,95	1,35	-1,25485	1,35	0,0015
$\phi$		-0,96	-17,0	-32,64	-2,25	-34,89	-2,25	2,2495	-2,25	-0,0006
$Q$		-88,0	-80,0	72,0	-60	12,0	-60	10,474	-60	-49,526
$M$		-224	-310	-48,0	-90	-138,0	-90	29,321	-90	-60,079

[mm]  
[%]  
[kN]  
[kNm]

PUNKTO

FELD 1

PUNKT A

FELD 2

```

start
noecho
$ Uebung Statik 3 - Uebertragungsverfahren
$ Beispiel 1

$ Uebertragungsmatrix Feld 1 eingeben:
load,U1,4,4
1 -3 -0.015 -0.015
0 1 0.015 0.010
0 0 1 0
0 0 3 1
print,U1

$ Punktmatrix Knoten 1 (Einheitsmatrix)
zero,T1,4,4,1,0
print,T1

$ Lastspalte fuer Einzellast (am Knoten 1)
load,TL1,4,1
0
0
-100
0
print,TL1

$ Uebertragungsmatrix Feld 2 eingeben:
load,U2,4,4
1 -1.5 -0.005625 -0.01125
0 1 0.011250 0.01500
0 0 1 0
0 0 1.5 1
print,U2

$ Anfangsvektor W=0, phi=0
load,A0,4,2,
0 0
0 0
1 0
0 1
zero,B0,4,1,0,0,
print,A0

$ Erster Durchlauf des Uebertragungsverfahrens

mult,U1,A0,A11
mult,U1,B0,B11

mult,T1,A11,A12
mult,T1,B11,B12
add,B12,TL1

mult,U2,A12,A2
mult,U2,B12,B2

print,A2
print,B2

$ Bedingungsgleichungen am Traegerende
$ aus den Randbedingungen phi=0, Q=0

$ Aussortieren der entsprechenden Zeilen und
$ und Spalten aus z2 = A2 z0d + B2 mit Hilfe

```

\$ der Matrix RB, die an den Stellen der vorge-  
\$ schriebenen Randgroessen mit Einsen besetzt ist.

load, RB, 4, 4

0 0 0 0

0 1 0 0

0 0 1 0

0 0 0 0

mult, RB, A2, AGL

mult, RB, B2, BGL

\$ Lastspalte auf die rechte Seite bringen

scale, BGL, -1.0

PRINT, AGL

PRINT, BGL

\$ Loesen des unsymmetrischen Gleichungssystems

\$ Ermitteln der unbekanntten Anfangswerte ZOD

\$ Symmetrisieren

tran, AGL, AGLT

MULT, AGLT, AGL, AGLS

MULT, AGLT, BGL, BGLS

\$ Loesen des Gleichungssystems

dup, BGLS, ZOD

SOLVE, AGLS, ZOD

PRINT, ZOD

\$ Aufbau des vollstaendigen Anfangsvektors

\$ und zweiter Durchlauf

mult, A0, ZOD, Z0

mult, U1, Z0, Z11

mult, T1, Z11, Z12

add, Z12, TL1

mult, U2, Z12, Z2

print, Z0

print, Z11

print, Z12

print, Z2

RETURN

----- Verbleibender Speicherplatz = 200000

>> START

----- Verbleibender Speicherplatz = 200000

>> NOECHO

A U S G A B E D E R M A T R I X <U1 >

S-Nr =	1	2	3	4
Z-Nr 1	1.0000	-3.0000	-0.0150	-0.0150
Z-Nr 2	0.0000	-1.0000	0.0150	0.0100
Z-Nr 3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	0.0000	0.0000	3.0000	1.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <T1 >

S-Nr =	1	2	3	4
Z-Nr 1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z-Nr 2	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
Z-Nr 3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <TL1 >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	0.0000
Z-Nr 2	0.0000
Z-Nr 3	-100.0000
Z-Nr 4	0.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <U2 >

S-Nr =	1	2	3	4
Z-Nr 1	1.0000	-1.5000	-0.0056	-0.0113
Z-Nr 2	0.0000	1.0000	0.0113	0.0150
Z-Nr 3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	0.0000	0.0000	1.5000	1.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <A0 >

S-Nr =	1	2
Z-Nr 1	0.0000	0.0000
Z-Nr 2	0.0000	0.0000
Z-Nr 3	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	0.0000	1.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <A2 >

S-Nr =	1	2
Z-Nr 1	-0.0769	-0.0413
Z-Nr 2	0.0712	0.0250
Z-Nr 3	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	4.5000	1.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <B2 >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	0.5625
Z-Nr 2	-1.1250
Z-Nr 3	-100.0000
Z-Nr 4	-150.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <AGL >

S-Nr =	1	2
Z-Nr 1	0.0000	0.0000
Z-Nr 2	0.0712	0.0250
Z-Nr 3	1.0000	0.0000
Z-Nr 4	0.0000	0.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <BGL >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	0.0000
Z-Nr 2	1.1250
Z-Nr 3	100.0000
Z-Nr 4	0.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <ZOD >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	100.0000
Z-Nr 2	-240.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <ZO >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	0.0000
Z-Nr 2	0.0000
Z-Nr 3	100.0000
Z-Nr 4	-240.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <Z11 >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	2.1000
Z-Nr 2	-0.9000
Z-Nr 3	100.0000
Z-Nr 4	60.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <Z12 >

S-Nr =	1
--------	---

Z-Nr	1	2.1000
Z-Nr	2	-0.9000
Z-Nr	3	0.0000
Z-Nr	4	60.0000

A U S G A B E D E R M A T R I X <Z2 >

S-Nr =		1
Z-Nr	1	2.7750
Z-Nr	2	0.0000
Z-Nr	3	0.0000
Z-Nr	4	60.0000

## Literatur zum Übertragungsverfahren

- [1] *Avramidis, I.*: Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen für den elastisch gebetteten Zug- und Druckstab nach Theorie II.Ordnung. Die Bautechnik (1982) 99–104, 140–143
- [2] *Falk, S.*: Biegen und Schwingen des mehrfeldrigen Balkens. Abh. Braunschweig Wiss. Ges 7 (1955) 74–94
- [3] *Falk, S.*: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv 24 (1956) 216–232
- [4] *Kersten, R.*: Das Reduktionsverfahren der Baustatik. 2.Auflage, Springer Verlag Berlin 1982
- [5] *Pestel, E.C., Leckie, F.A.*: Matrix Method in Elastomechanics. Mc Graw Hill Book Comp. 1963
- [6] *Petersen, C.*: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger. Die Bautechnik 42 (1965)
- [7] *Petersen, C.*: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für gekrümmte Träger. Der Bauingenieur 41 (1966)
- [8] *Usuki, T.*: Übertragungsmatrizen des Balkens auf elastischer Bettung bei Wirkung der Quer- und Axialbelastung unter Berücksichtigung der Schubverformung. Bautechnik (1979) 205–209
- [9] *Wunderlich, W.*: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Diss. Hannover 1966

## 4. Weggrößenverfahren mit einem Freiheitsgrad: Drehwinkelverfahren

### 4.1 Einführung (Tafelanschrieb), Vergleich der Vorgehensweise beim Kraftgrößenverfahren mit dem Weggrößenverfahren

#### 4.1.1 Vorgehensweise beim Kraftgrößenverfahren (siehe Baustatik 2)

##### 1. Modellbildung :

- Statisches System und Vorgaben, Elemententeilung
- Geometrie und Stabkennwerte (Längen, Steifigkeiten EI, EA)
- Lasten, vorgegebene Verschiebungen, Temperaturbeanspruchungen u.ä.

##### 2. Hauptsystem wählen (i.d.R. statisch bestimmt)

- Statisch unbestimmte Kräfte  $X_k$  einführen

##### 3. Lastspannungszustand :

- muß *Gleichgewicht* erfüllen

$$\longrightarrow \begin{matrix} M_0, N_0, Q_0 \\ \varphi_0, u_0, w_0 \end{matrix}$$

##### 4. Einheitsspannungszustände :

- müssen *Gleichgewicht* erfüllen
- müssen *voneinander linear unabhängig* sein

$$\longrightarrow \begin{matrix} M_k, N_k, Q_k \\ \varphi_k, u_k, w_k \end{matrix}$$

##### 5. Ermittlung der **Nachgiebigkeiten** und **Lastanteile** :

- mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte

$$\longrightarrow \delta_{ik}, \delta_{i0}, (F, F_0)$$

##### 6. Lösen des algebraischen Gleichungssystems :

- *geometrische Verträglichkeit*

$$\text{mit } [\delta_{ik}][X_k] + [\delta_{i0}] = [0]$$

bzw.

$$\longrightarrow \boxed{F X + F_0 = 0}$$

##### 7. Ermittlung der endgültigen **Kraftgrößen** :

- *Superpositionsprinzip*

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots = S_0 + \sum_k S_k X_k$$

$$\text{z.B.: } M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots$$

$$Q = \frac{M_r - M_l}{L} + f(\bar{q})$$



##### 8. Ermittlung der **Weggrößen** (Formänderungen) :

- Knotenwerte der Verschiebungen mit dem P.v.K. (Reduktionssatz)
- Verlauf im Feld ergänzen (Teilbiegelinien "einhängen",  $\omega$ -Tafeln)

##### 9. Kontrollen :

- Gleichgewicht am Gesamttragwerk (Schnitte legen)
- Verträglichkeiten an den Stellen  $k$  :  $\delta_k=0$  (mit Reduktionssatz)

##### 10. Beurteilung und Weiterverarbeitung der Ergebnisse (Bemessung etc.)

#### 4.1.2 Vorgehensweise beim Weggrößenverfahren

1. **Modellbildung :**

- System und Elemententeilung
- Geometrie und Stabkennwerte (Längen, Steifigkeiten)
- Lasten, vorgegebene Verschiebungen, Temperaturbeanspruchungen u.ä.

2. **Hauptsystem** (System mit unverschieblichen Knoten) :

- geometrisch Unbestimmte  $V_k$  des Systems  $\longrightarrow V$

3. **Lastzustand :**

- Lasten, vorgegebene Verschiebungen, Temperaturbeanspruchungen u.ä.
- muß *geometrische Verträglichkeit* erfüllen  $\longrightarrow v_0 : \varphi_0, u_0, w_0$   
 $M_0, N_0, Q_0$

4. **Einheitsverschiebungszustände :**

- müssen *geometrische Verträglichkeit* erfüllen
- müssen *voneinander linear unabhängig* sein  $\longrightarrow v_k : \varphi_k, u_k, w_k$   
 $M_k, N_k, Q_k$

5. Ermittlung der **Steifigkeiten** und **Lastanteile :**

- für jedes Stabelement (mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen)  
 $\longrightarrow k, \bar{p}^0$

6. **algebraisches Gleichungssystem** (*Gleichgewichtsbedingungen*) :

- für das System (Aufstellen und Lösen)  $\longrightarrow K V = \bar{P}$
- mit  $\bar{P} = \bar{P}^* - \bar{P}^0$   $\longrightarrow \boxed{K V = \bar{P}^* - \bar{P}^0}$

7. Ermittlung der endgültigen **Weggrößen :**

- Knotenwerte bekannt (durch  $V$ )
- Verlauf im Feld ergänzen

8. Ermittlung der **Kraftgrößen :**

- Kraftgrößen an Stabenden aus
- Verlauf im Feld ergänzen

$$\boxed{\tilde{p}^i = \bar{k}^i \tilde{v}^i + \bar{p}^{i0}}$$

9. **Kontrollen :**

- Verträglichkeit und Gleichgewicht am Gesamttragwerk
- Knotengleichgewicht (Schnitte), Verträglichkeiten an den Stellen  $k$

10. **Beurteilung** und **Weiterverarbeitung** der Ergebnisse (Bemessung etc.)

**4.2 Beziehungen und Definitionen**  
(Tafelanschrieb)

**4.3 Durchlaufträger als Einführungsbeispiel**  
(Tafelanschrieb)

**4.4 Balkenelement mit verschieblichen Knoten**  
(Tafelanschrieb)

## 5 Allgemeines Weggrößenverfahren (WGV)

### 5.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) als Grundlage des Weggrößenverfahrens

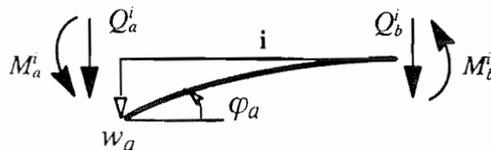
(Tafelanschrieb)

### 5.2 Steifigkeitswerte von Stäben – Steifigkeitsmatrix

Im folgenden Abschnitt sind alle Größen im lokalen Koordinatensystem des Stabes dargestellt.

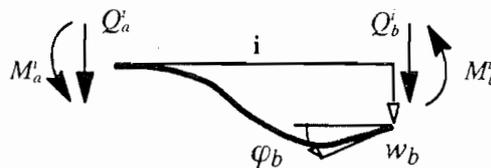
#### 5.2.1 Herleitung der Biegeanteile mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen: (Exakte Lösung auf der Grundlage der Differentialgleichung des Biegeträgers)

Anwendung der grundlegenden Beziehungen aus den Kapiteln 4 und 5.3 :  
(ohne Lastanteile; Vorzeichen-Definition 2) :



$$\mathbf{p}_a = \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{aa} \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{ba} \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{p}_a = \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{ab} \mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{bb} \mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

5.2.2 Herleitung der Biegeanteile aus der Übertragungsmatrix :

(a) *Übertragungsmatrix  $\mathbf{U}^i$* :  $\mathbf{z}_b = \mathbf{U}^i \mathbf{z}_a + \bar{\mathbf{z}}^i$  (Vorzeichen-Definition 1)

$$\mathbf{z}_b^i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_b \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ Q_a \\ M_a \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{vv} & \mathbf{U}_{vs} \\ \mathbf{U}_{sv} & \mathbf{U}_{ss} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{s}_a \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{s}} \end{bmatrix}^i$$

(b) *Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$* :  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$  (Vorzeichen-Definition 2)

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ M_a^0 \\ Q_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a^0 \\ \mathbf{p}_b^0 \end{bmatrix}^i$$

(c) *Überführung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{U}^i$  in eine Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$*  :  
(Vorzeichen-Definition 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b &= \mathbf{U}_{vv} \mathbf{v}_a + \mathbf{U}_{vs} \mathbf{s}_a + \bar{\mathbf{v}} & \mathbf{s}_a &= \mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{v}_b - \mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{U}_{vv} \mathbf{v}_a - \mathbf{U}_{vs}^{-1} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{s}_b &= \mathbf{U}_{sv} \mathbf{v}_a + \mathbf{U}_{ss} \mathbf{s}_a + \bar{\mathbf{s}} & \mathbf{s}_b &= \mathbf{U}_{sv} \mathbf{v}_a + \mathbf{U}_{ss} (\mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{v}_b - \mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{U}_{vv} \mathbf{v}_a - \mathbf{U}_{vs}^{-1} \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_a \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{U}_{vv} & \mathbf{U}_{vs}^{-1} \\ \mathbf{U}_{sv} - \mathbf{U}_{ss} \mathbf{U}_{vs}^{-1} \mathbf{U}_{vv} & \mathbf{U}_{ss} \mathbf{U}_{vs}^{-1} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{vs}^{-1} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{U}_{ss} \mathbf{U}_{vs}^{-1} \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}^i$$

(d) *Übergang von Vorzeichen-Definition 1 zu Vorzeichen-Definition 2 :*

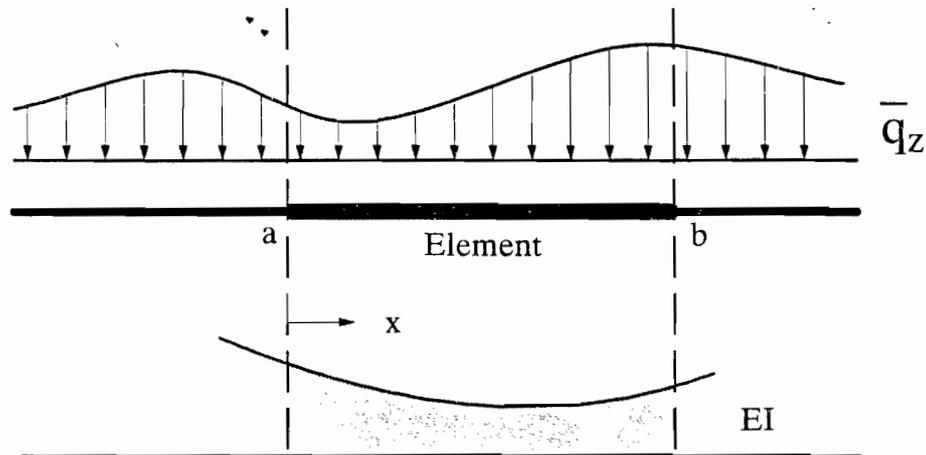
$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_b \end{bmatrix}^i = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_a \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix}^i$$

5.2.3 Näherungsweise Ermittlung der Biegeanteile durch Ansätze :

Im folgenden werden Matrizen und Vektoren entweder durch Fettdruck oder durch Unterstreichung gekennzeichnet.

Ermittlung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  auf der Grundlage von Verschiebungsansätzen im Sinne der Methode der Finiten Elemente :

Diese Methode eignet sich auch für Stäbe mit veränderlichen Steifigkeiten.



Da die genaue Lösung des Problems häufig nicht bekannt ist, wird je Element ein Näherungsansatz für die Biegelinie  $w(x)$  gewählt.

Wahl des Verschiebungsansatzes :

Für den Verlauf von  $w(x)$  im Element  $i$  wird angenommen:

$$w(x) = \hat{w}_0 + \hat{w}_1 x + \hat{w}_2 x^2 + \hat{w}_3 x^3$$

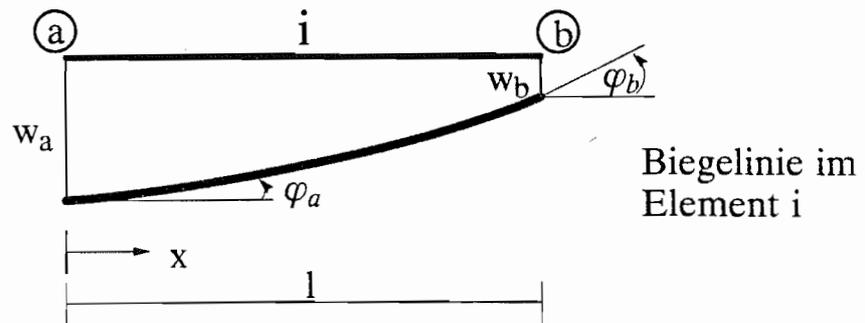
$$w(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_u(x) \quad \hat{\mathbf{w}} \quad = \quad \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{N}_u^T(x)$$

mit :  $\mathbf{N}_u(x)$  : Ansatzfunktion (gewählt)  
 $\hat{\mathbf{w}}$  : generalisierte Freiwerte des Ansatzes (unbekannt)  
 (allgemeine Konstanten, z.B. Koeffizienten eines Polynomansatzes)

Ersetzen der allgemeinen Freiwerte des Verschiebungsansatzes durch die Knotenverschiebungen:

Die Steifigkeitsmatrix stellt die Beziehung zwischen Knotenkräften und -verschiebungen her; deshalb soll  $w(x)$  als Funktion der Knotenverschiebungen dargestellt werden.



Vektor der Knotenverschiebungen:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a = -w'_a \\ w_b \\ \varphi_b = -w'_b \end{bmatrix}$$

Der Verlauf von  $w(x)$  soll jetzt in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen  $\mathbf{v}$  (diskrete Werte) dargestellt werden.

Dazu sind die Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}'_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

entsprechend umzurechnen. Zusätzlich werden die Werte der Koordinaten der Knotenpunkte eingesetzt:

$$x = x_a = 0 : \quad w_a = \mathbf{N}_{ua} \hat{\mathbf{w}} \quad \varphi_a = -\mathbf{N}'_{ua} \hat{\mathbf{w}}$$

$$x = x_b = l : \quad w_b = \mathbf{N}_{ub} \hat{\mathbf{w}} \quad \varphi_b = -\mathbf{N}'_{ub} \hat{\mathbf{w}}$$

oder

$$\begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{N}}_u \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

$\mathbf{v}$  : Vektor der Weggrößen  $w$  und  $\varphi$  an den Stabenden (diskrete Werte).

Die inverse Beziehung ist :

$$\hat{w} = \hat{N}_u^{-1} v = G v$$

$\hat{w} \dots$  generalisierte Freiwerte des Ansatzes  
 $v \dots$  diskrete Knotenverschiebungen

$$G = \hat{N}_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & 2/l & 3/l^2 & 1/l \\ 2/l^3 & -1/l^2 & -2/l^3 & -1/l^2 \end{bmatrix}$$

Einsetzen in  $w(x)$  liefert:

$$w(x) = N_u(x) \cdot \hat{w} = N_u(x) \cdot G \cdot v = N(x) \cdot v$$

Diese Matrix  $N$  stellt die Interpolation zwischen den Knoten dar. Ihre Komponenten werden auch als "Formfunktion" bezeichnet.

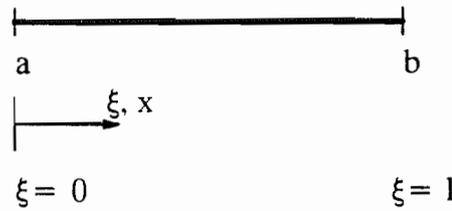
Alternative : 'anschauliche' Wahl der Interpolationsfunktionen

Die Interpolation  $N$  kann nicht nur durch systematische Inversion von  $\hat{N}_u$  gefunden werden, sondern in vielen Fällen auch auf anschauliche Weise, z.B.:

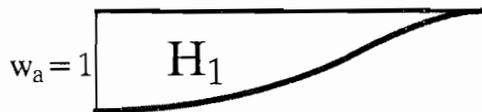
$$w(x) = w_a H_1(x) + l \varphi_a H_2(x) + w_b H_3(x) + l \varphi_b H_4(x)$$

$H_i(x)$  sind in diesem Fall Hermite'sche Interpolationspolynome.

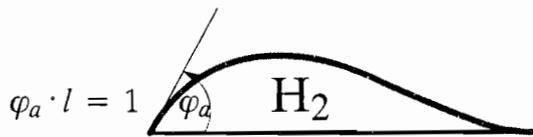
Mit normierten lokalen Koordinaten  $\xi = x/l$  :



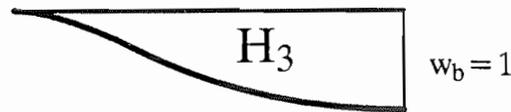
$$\xi = \frac{x}{l}$$



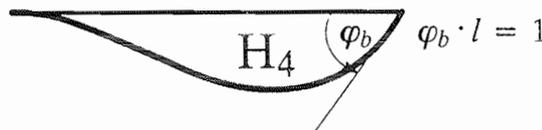
$$w(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_a +$$



$$+ (-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_a l +$$



$$+ (3\xi^2 - 2\xi^3) w_b +$$



$$+ (\xi^2 - \xi^3) \varphi_b l$$

$$w(\xi) = H_1 \cdot w_a + H_2 \cdot (\varphi_a \cdot l) + H_3 \cdot w_b + H_4 \cdot (\varphi_b \cdot l)$$

Die Hermite'schen Interpolationspolynome liegen tabelliert in mathematischen Handbüchern vor.

Die gleichen Formfunktionen berechnet man mit einem Ansatz in normierten Koordinaten wie folgt:

Der Ausdruck

$$\mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a l \\ w_b \\ \varphi_b l \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_u(\xi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 \\ -3 & 2l & 3 & l \\ 2 & -l & -2 & -l \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

ist einzusetzen in :

$$w(\xi) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{v}^i = \mathbf{N}_u(\xi) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}^i$$

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in die Grundgleichungen

Mit  $w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}$  :

Kinematik :  $\kappa = -w''$  (Krümmung)

Werkstoffgesetz :  $M = EI\kappa$

= >  $M = -EI \mathbf{N}_u''(x) \mathbf{G} \mathbf{v}$

mit  $\mathbf{N}_u''(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} =: \mathbf{B}_u(x)$

Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (= Gleichgewicht) :

$-(\delta W_i + \delta W_a) = 0$  (virtuelle innere Arbeit + virtuelle äußere Arbeit) = 0

Virtuelle Arbeit am Gesamtsystem

$$- \sum_{\text{Elemente}} \left[ \underbrace{- \int_a^b EI \kappa \delta \kappa dx}_{\mathbf{M}(x)} + \underbrace{\int_a^b \bar{q}_z \delta w dx}_{\text{Streckenlasten}} + \underbrace{[\bar{M} \delta \varphi + \bar{P}_z \delta w]_a^b}_{\text{Einzellasten an den Stabenden a bzw. b}} \right] = 0$$

Anteil eines Elements i

$$-(\delta W_i + \delta W_a)^i = \underbrace{\int_a^b EI \kappa \delta \kappa dx}_{\mathbf{M}(x)} - \underbrace{\int_a^b \bar{q}_z \delta w dx}_{\text{Streckenlasten}} - \underbrace{[\bar{M} \delta \varphi + \bar{P}_z \delta w]_a^b}_{\text{Einzellasten an den Stabenden a bzw. b}}$$

Nach Einsetzen von

$\delta \kappa(x) = -\delta w'' = -\mathbf{N}_u''(x) \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{v} = -\mathbf{B}_u(x) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = -\delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{B}_u^T(x)$

$\delta w(x) = \mathbf{N}_u(x) \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{N}_u^T(x)$

(dabei wird die virtuelle Verschiebung affin zur wirklichen Verschiebung gewählt)

folgt (ohne Randmoment  $\bar{M}$ ) je Element:

$$-(\delta W_i + \delta W_a)^i = \int_a^b \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \mathbf{B}_u^T(x)}_{\delta \kappa(x)} \underbrace{EI \mathbf{B}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}}_{\kappa(x)} dx - \int_a^b \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \mathbf{N}_u^T(x)}_{\delta w(x)} \underbrace{\bar{q}_z(x)}_{\delta w} dx - \delta \mathbf{v}^T \bar{P}_z$$

Da  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{G}$  diskrete Werte und keine Funktionen in  $x$  enthalten, gilt für den *Anteil des Elements  $i$  an der gesamten virtuellen Arbeit* :

$$-(\delta W_i + \delta W_a)^i = \delta \mathbf{v}^{iT} \left[ \underbrace{\mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{B}_u^T(x) EI \mathbf{B}_u(x) dx}_{\mathbf{k}^i} \mathbf{v} - \underbrace{\left[ \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}_u^T(x) \bar{\mathbf{q}}_z(x) dx + \bar{\mathbf{P}}_z \right]}_{\mathbf{p}^{i0}} \right]^i$$

oder mit  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{N}''(x) = \mathbf{B}_u(x)\mathbf{G}$  ,  $\mathbf{N}(x) = \mathbf{N}_u(x)\mathbf{G}$  und  $\mathbf{B}^T = \mathbf{G}^T \mathbf{B}_u^T$  ,  $\mathbf{N}^T = \mathbf{G}^T \mathbf{N}_u^T$

$$-(\delta W_i + \delta W_a)^i = \delta \mathbf{v}^{iT} \left[ \underbrace{\int_a^b \mathbf{B}^T(x) EI \mathbf{B}(x) dx}_{\mathbf{k}^i} \mathbf{v} - \underbrace{\left[ \int_a^b \mathbf{N}^T(x) \bar{\mathbf{q}}_z(x) dx + \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_z \right]}_{\mathbf{p}^{i0}} \right]^i$$

$$-(\delta W_i + \delta W_a)^i = \delta \mathbf{v}^{iT} [\mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}] = \delta \mathbf{v}^{iT} \mathbf{p}^i$$

Die wesentlichen *Zusammenhänge am Element* lauten im *lokalen Koordinatensystem* damit :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

$$\mathbf{k}^i = \int_a^b \mathbf{B}^T(x) EI \mathbf{B}(x) dx \quad \text{mit } \mathbf{B}(x) = \mathbf{N}''(x), \text{ wobei } w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{v}^i = \mathbf{N}_u(x)\mathbf{G}\mathbf{v}^i$$

$$\mathbf{p}^{i0} = - \int_a^b \mathbf{N}^T(x) \bar{\mathbf{q}}_z(x) dx - \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{P}}_z$$

$\mathbf{k}^i$  Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$

$\mathbf{v}^i$  Spaltenmatrix der Weggrößen an den Stabenden des Elements  $i$

$\mathbf{p}^i$  Spaltenmatrix der Kraftgrößen an den Stabenden des Elements  $i$  (in Vorzeichen-Definition 2)

$\mathbf{p}^{i0}$  Spaltenmatrix der negativen Knotenlasten des Elements  $i$  (enthält Anteile aus Strecken- und Einzellasten ( $\bar{\mathbf{q}}_z$  und  $\bar{\mathbf{P}}_z$ ); entspricht den Kraftgrößen an den Stabenden des geometrisch bestimmten Systems)

$\mathbf{N}(x)$  Matrix der Ansatzfunktionen für die Weggrößen im Element  $i$  (Formfunktionen, Interpolationsfunktionen)

$\mathbf{N}_u(x)$  Spaltenmatrix der Ansatzfunktion für die Verschiebung  $w(x)$

Berechnung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  mit dem gewählten Verschiebungsansatz :

Ansatzfunktion :  $w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}^i$  mit  $\mathbf{N}_u(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$

$\mathbf{v}^{iT} = [w_a \ \varphi_a \ w_b \ \varphi_b]^T$

$\mathbf{k}^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u \ dx] \mathbf{G}$

$\mathbf{p}^{iT} = (\mathbf{k}^i \mathbf{v}^i)^T = [Q_a \ M_a \ Q_b \ M_b]^T$

für  $EI = \text{konstant}$  gilt :  $\mathbf{B}_u(x) = \mathbf{N}_u''(x) = \frac{d^2 \mathbf{N}_u(x)}{dx^2} \rightarrow [0 \ 0 \ 2 \ 6x]$

$$\mathbf{B}_u^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \end{bmatrix} \Rightarrow \int_0^l \mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u \ dx = EI \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u \ dx] \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Multiplikationsschema :

	[B]
[A]	[AB]

$$\int_0^l \mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u \ dx = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/l^2 & 2/l^3 \\ 0 & -1 & 2/l & -1/l^2 \\ 0 & 0 & 3/l^2 & -2/l^3 \\ 0 & 0 & 1/l & -1/l^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}^i$$

Berechnung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  mit dem gewählten Verschiebungsansatz (in normierten lokalen Koordinaten) :

Ansatzfunktion :  $w(\xi) = \mathbf{N}_u(\xi) \mathbf{G} \mathbf{v}^i$  mit  $\mathbf{N}_u(\xi) = [1 \ \xi \ \xi^2 \ \xi^3]$

$\mathbf{v}^{iT} = [w_a \ \varphi_a \ w_b \ \varphi_b]^T$

$\mathbf{k}^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u dx] \mathbf{G}$

$\mathbf{p}^{iT} = (\mathbf{k}^i \mathbf{v}^i)^T = [Q_a \ M_a \ Q_b \ M_b]^T$

für  $EI = \text{konstant}$  gilt :  
mit  $dx = l d\xi$  :

$\mathbf{B}_u^T(\xi) = \mathbf{N}_u''^T(\xi)$   $\mathbf{B}_u(\xi) = \mathbf{N}_u''(\xi) = \frac{d^2 \mathbf{N}_u(\xi)}{l^2 d\xi^2} \rightarrow \frac{1}{l^2} [0 \ 0 \ 2 \ 6\xi]$

$$\rightarrow \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6\xi \end{bmatrix} \Rightarrow \int_0^l \mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u dx = EI \int_0^l \frac{1}{l^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12\xi \\ 0 & 0 & 12\xi & 36\xi^2 \end{bmatrix} l d\xi$$

$$= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u dx] \mathbf{G}$$

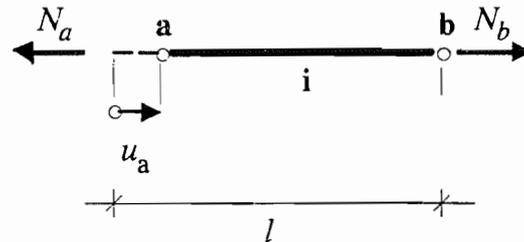
Multiplikationsschema :

$\int_0^l \mathbf{B}_u^T EI \mathbf{B}_u dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$	$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 \\ -3 & 2l & 3 & l \\ 2 & -l & -2 & -l \end{bmatrix}$
$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -l & 2l & -l \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & l & -l \end{bmatrix}$	$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}^i$

5.2.4 Herleitung der Längskraftanteile der Steifigkeitsmatrix :

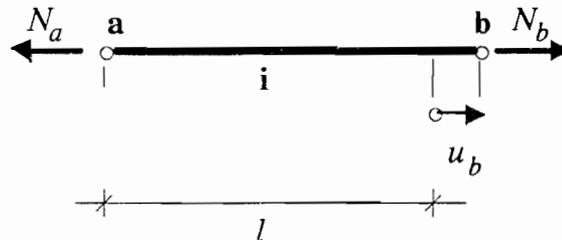
(a) in Vorzeichen-Definition 1 :

- Normalkräfte infolge  $u_a$  :



$$N_a = N_b = N(x) = EA\varepsilon = \frac{EA}{l} \Delta l = -\frac{EA}{l} u_a$$

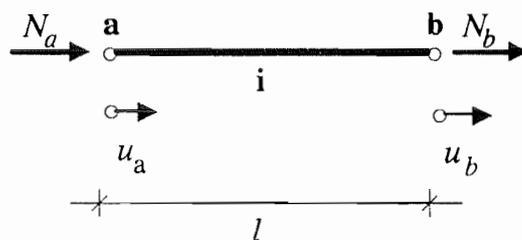
- Normalkräfte infolge  $u_b$  :



$$N_a = N_b = N(x) = EA\varepsilon = \frac{EA}{l} \Delta l = \frac{EA}{l} u_b$$

(b) in Vorzeichen-Definition 2 - Weggrößenverfahren :

- Normalkräfte infolge  $u_a$  und  $u_b$  :



$$N_a = \frac{EA}{l} (u_a - u_b) \quad N_b = \frac{EA}{l} (-u_a + u_b)$$

- Normalkräfte infolge äußerer Belastung :

siehe Kraftgrößen  $\tilde{\mathbf{p}}^{i0}$  an den Stabenden aus Belastung des Elements in der Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke

- Normalkräfte im Weggrößenverfahren : (  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$  )

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} N_a^0 \\ N_b^0 \end{bmatrix}^i$$

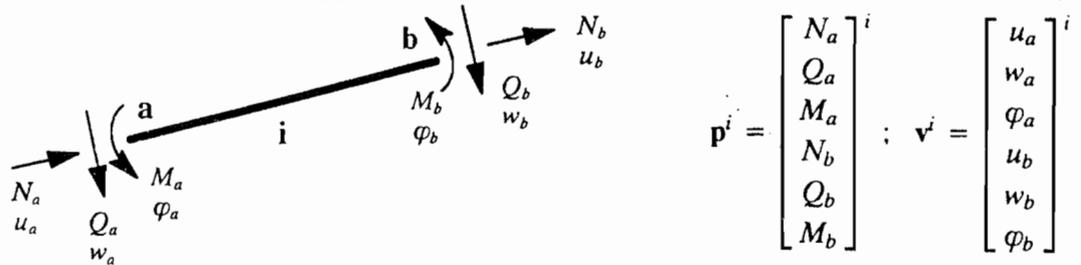
5.2.5 Zusammenfassung zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  des Biegeträgers unter Normalkraftbeanspruchung (Theorie I. Ordnung) :

siehe 'Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke'

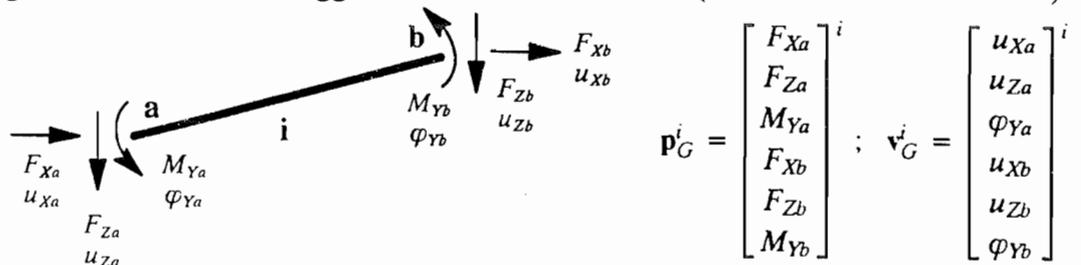
### 5.3 Transformation von Zustandsgrößen

Transformationen am Element  $i$  eines ebenen Rahmens  
zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem :

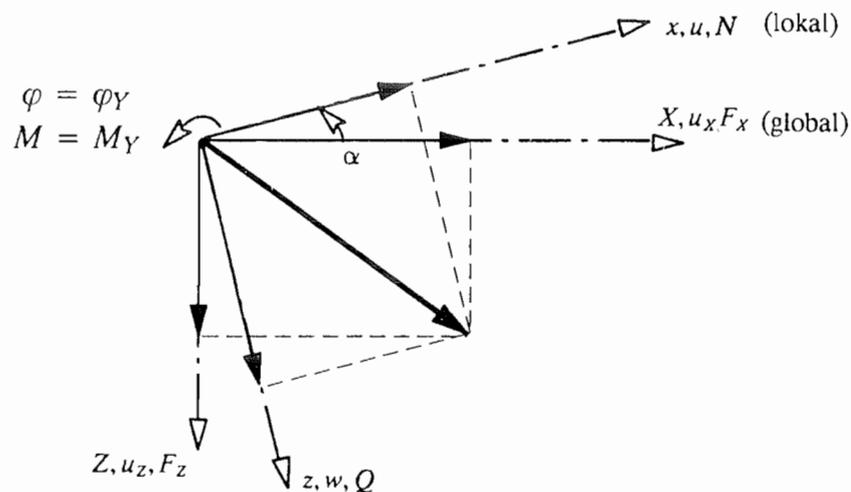
- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- Transformation der Komponenten eines Vektors (an einem Knoten a oder b) :



lokal ← global	global ← lokal
$u = u_x \cos \alpha - u_z \sin \alpha$	$u_x = u \cos \alpha + w \sin \alpha$
$w = u_x \sin \alpha + u_z \cos \alpha$	$u_z = -u \sin \alpha + w \cos \alpha$
$\varphi = \varphi_Y$	$\varphi_Y = \varphi$
-----	
$N = F_x \cos \alpha - F_z \sin \alpha$	$F_x = N \cos \alpha + Q \sin \alpha$
$Q = F_x \sin \alpha + F_z \cos \alpha$	$F_z = -N \sin \alpha + Q \cos \alpha$
$M = M_Y$	$M_Y = M$

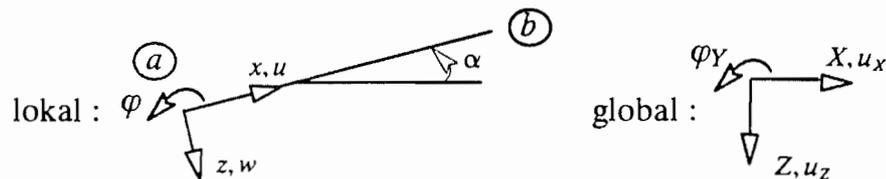
- Transformationsmatrix  $T^i$ :

$$T^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^i = \left[ \begin{array}{c|c} T_{aa} & T_{ab} \\ \hline T_{ba} & T_{bb} \end{array} \right]^i$$

In anderen Ebenen oder im Raum (mit dem Koordinatensystem XYZ) ist die Transformationsmatrix T mit anderen Werten besetzt.

Die Transformation der Zustandsgrößen ist orthogonal; damit gilt:  $T^{-1} = T^T$ .

- Transformation vom globalen ins lokale Koordinatensystem (und umgekehrt)



Verschiebungsgrößen:

$$v^i = T^i v_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \quad v_G^i = T^{iT} v^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

Kraftgrößen (Elementknotenkräfte, Stabendschnittgrößen):

$$p^i = T^i p_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \quad p_G^i = T^{iT} p^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\text{mit} \quad p^i = k^i v^i + p^{i0} \quad \Rightarrow \quad T^{iT} p^i = T^{iT} k^i T^i v_G^i + T^{iT} p^{i0}$$

$$k^i \text{ (lokal)} \quad k_G^i = T^{iT} k^i T^i \text{ (global)}$$

Die vier Untermatrizen von  $k^i$  können jeweils für sich transformiert werden (nur für Handrechnung in dieser Form zweckmäßig!):

$$k^i = \left[ \begin{array}{c|c} k_{aa} & k_{ab} \\ \hline k_{ba} & k_{bb} \end{array} \right]^i \quad \text{z.B.} \quad k_{aa}^i = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^i$$

$$k_G^i = \left[ \begin{array}{c|c} k_{aa_G} & k_{ab_G} \\ \hline k_{ba_G} & k_{bb_G} \end{array} \right]^i$$

$$\text{z.B.} \quad k_{aa_G}^i = \begin{bmatrix} k_{11} \cos^2 \alpha + k_{22} \sin^2 \alpha & (k_{22} - k_{11}) \cos \alpha \sin \alpha & k_{23} \sin \alpha \\ (k_{22} - k_{11}) \cos \alpha \sin \alpha & k_{11} \sin^2 \alpha + k_{22} \cos^2 \alpha & k_{23} \cos \alpha \\ k_{32} \sin \alpha & k_{32} \cos \alpha & k_{33} \end{bmatrix}^i$$

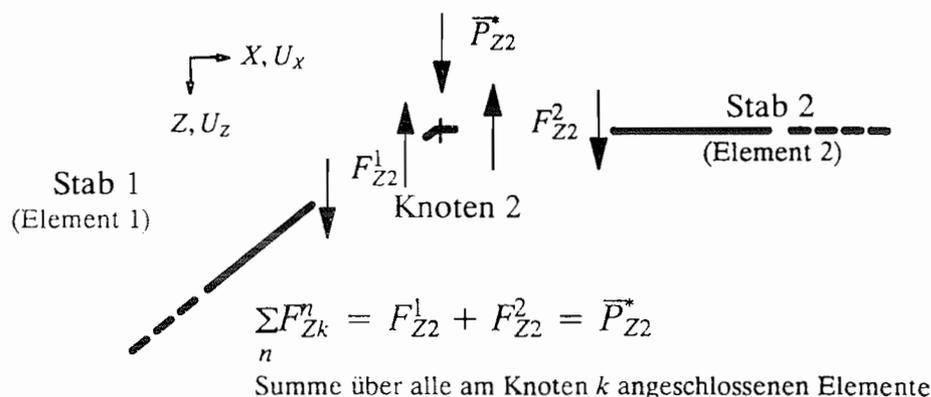
Anmerkung: In Rechenprogrammen wird die Elementsteifigkeitsmatrix  $k_G^i$  im globalen Koordinatensystem nicht nach den obigen Formeln besetzt, sondern durch Matrizenmultiplikation in der Form  $k_G^i = T^{iT} k^i T^i$  bestimmt.

### 5.4 Knotengleichgewicht unter Berücksichtigung der Systemgeometrie

Zur Berechnung der unbekanntenen Knotenverschiebungen (und Knotenverdrehungen) ist an jedem Knoten das Gleichgewicht in Richtung der nicht durch starre Festhaltungen behinderten Weggrößen aufzustellen. Diese Knotenverschiebungen ('*Freiheitsgrade*') werden fortlaufend durchnummeriert; ihre Nummer bezeichnet damit gleichzeitig die jeweilige Gleichgewichtsbedingung (Zeile des Gleichungssystems bzw. der *Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems*).

Die Gleichgewichtsgleichungen können durch einen Rundschnitt um den Knoten oder mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ermittelt werden. Hierzu wird als Information benötigt, welche Stabendschnittgrößen (bzw. Elementknotenkräfte) zu welchen Gleichgewichtsgleichungen einen Beitrag liefern. Diese Zuordnung kann direkt aus der 'Systemgeometrie' durch Zuordnen der einzelnen Elemente zu den angrenzenden Knoten gewonnen werden ('*Inzidenztafel Stab-Knoten*').

Am folgenden Beispiel wird die der Verschiebung  $U_{Zk}$  zugeordnete Gleichgewichtsgleichung  $\sum V = 0$  aufgestellt (bezogen auf globale Koordinaten) :



Für die Kraftgrößen  $p_G^i$  an den Element- bzw. Stabenden werden dann die Elementsteifigkeitsmatrix  $k_G^i$ , die Knotenverschiebungen  $v_{k_G}^i$  und die Volleinspannschnittgrößen  $p_G^{i0}$  eingesetzt (siehe Abschnitt 5.4.2); dies erfolgt nach der Transformation in die *globalen* Koordinatenrichtungen (in *Vorzeichen-Definition 2*).

Durch Bildung des Gleichgewichts an allen Knoten ergibt sich das gesamte Gleichungssystem :

$$\mathbf{K} \mathbf{V} + \bar{\mathbf{P}}^0 = \bar{\mathbf{P}}^* \quad \text{beziehungsweise:} \quad \boxed{\mathbf{K} \mathbf{V} = \bar{\mathbf{P}}}$$

Darin bedeutet:

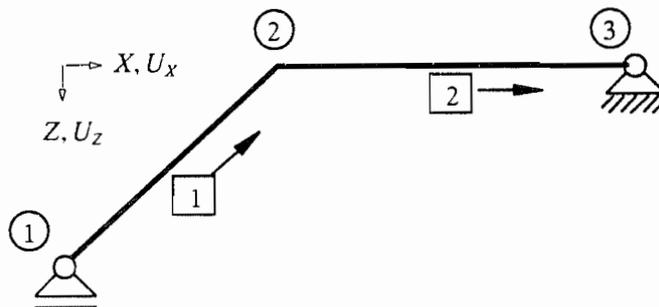
- $\mathbf{K}$  Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems
- $\mathbf{V}$  Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen (und -verdrehungen)
- $\bar{\mathbf{P}}^0$  Spaltenmatrix der Kraftgrößen an den Elementenden aus Elementbelastungen
- $\bar{\mathbf{P}}^*$  Spaltenmatrix der direkten Knotenlasten
- $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{P}}^0$  Summe aller Knotenlasten (rechte Seite).

Starre Festhaltungen ( als Bestandteil der *Auflagerbedingungen*) des Systems können bereits dadurch berücksichtigt werden, daß in den Inzidenztafeln die zugehörigen Verschiebungen (Verdrehungen) unterdrückt werden.

Alternativ hierzu können in den Inzidenztafeln zunächst alle Freiheitsgrade erhalten sein, so daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix nach der Addition der Elemente noch keine Randbedingungen enthält (und somit noch singulär ist). In einem zweiten Schritt müssen dann die globalen Festhaltungen dadurch eingebaut werden, daß in der Gesamtsteifigkeitsmatrix (und in der Lastspalte) die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen werden (vgl. Abschnitt 5.4.5).

Federn sind als eigene Elemente (nicht als Randbedingungen) bei der Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu berücksichtigen.

Beispiel zur Erfassung der Systemgeometrie bei der Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix :



(a) Zuordnungstafel Stab-Knoten (Inzidenztafel) :

Stab $i$	Knoten $a$	Knoten $b$
1	1	2
2	2	3

(b) Numerierung der Freiheitsgrade (einschl. Randbedingungen) :

Knoten	$U_{Xk}$	$U_{Zk}$	$\Phi_{Yk}$
1	1	0	2
2	3	4	5
3	0	0	6

(c) Zuordnungstafel Weggrößen an den Stabenden – Knotenfreiheitsgrade :  
 (aus a und b)

Nr. ID der Weggrö- ße	$ID_1$	$ID_2$	$ID_3$	$ID_4$	$ID_5$	$ID_6$
	$u_a^i$	$w_a^i$	$\varphi_a^i$	$u_b^i$	$w_b^i$	$\varphi_b^i$
1	1	0	2	3	4	5
2	3	4	5	0	0	6
	Stabanfang (Knoten a)			Stabende (Knoten b)		

### 5.5 Systemberechnung am Beispiel eines ebenen Rahmens

#### Idealisierung :

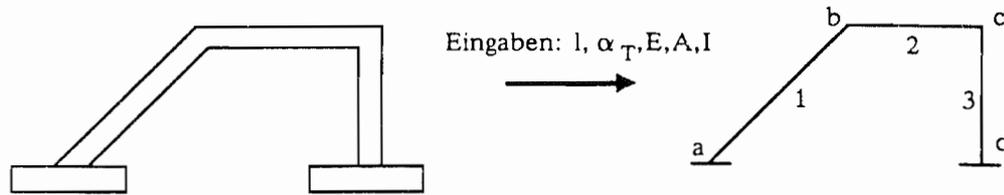


Bild 1: Rahmen mit Idealisierung zum statischen System

Das System besteht aus drei Elementen und vier Knoten; gesucht ist der Verlauf der Zustandsgrößen über die Elemente und deren Werte an den Knoten. Die Schnittgrößen eines Elements  $i$  sind in der Spaltenmatrix  $s^i$  aufgelistet, ebenso die zugeordneten Verzerrungen in  $\varepsilon^i$  und die Verschiebungen bzw. die Verdrehung in  $v^i$ . Diese Zustandsgrößen haben über das Element einen veränderlichen Verlauf :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix}^i & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \gamma(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix}^i & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix}^i \\
 s^i(x) & & \varepsilon^i(x) & & u^i(x)
 \end{array} \quad \text{Element } i$$

#### Diskretisierung :

Als Unbekannte der Diskretisierung werden die Weggrößen (Verschiebungen und Verdrehungen) der Knoten gewählt. Um den kontinuierlichen Verlauf über das Element mit den diskreten Knotengrößen in Verbindung zu bringen, führt man die Randgrößen der Elemente ein; sie werden mit den Spaltenmatrizen  $p^i$  für die Kraftgrößen und  $v^i$  für die Weggrößen am Elementrand bezeichnet. Die entsprechenden unbekanntenen Größen am Knoten werden mit  $P_k$  bzw.  $V_k$ , die eingepprägten mit  $\bar{P}_k$  bzw.  $\bar{V}_k$  bezeichnet. (Siehe Abschnitt 5.4.1).

Elementrand :

Knoten :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} F_X \\ F_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_k & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} u_X \\ u_Z \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_k & & \begin{bmatrix} \bar{P}_X \\ \bar{P}_Z \\ \bar{M}_Y \end{bmatrix}_k & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} U_X \\ U_Z \\ \Phi_Y \end{bmatrix}_k & & \begin{bmatrix} \bar{U}_X \\ \bar{U}_Z \\ \bar{\Phi}_Y \end{bmatrix}_k & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} P_X \\ P_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_k \\
 P_{kG} & & v_{kG} & & \bar{P}_k & & V_k & & \bar{V}_k & & P_k \\
 \text{Kraftgrößen} & & \text{Weggrößen} & & \text{eingepprägte} & & \text{unbekannte} & & \text{eingepprägte} & & \text{unbekannte} \\
 & & & & \text{Kraftgrößen} & & \text{Weggrößen} & & \text{Weggrößen} & & \text{Kraftgrößen}
 \end{array}$$

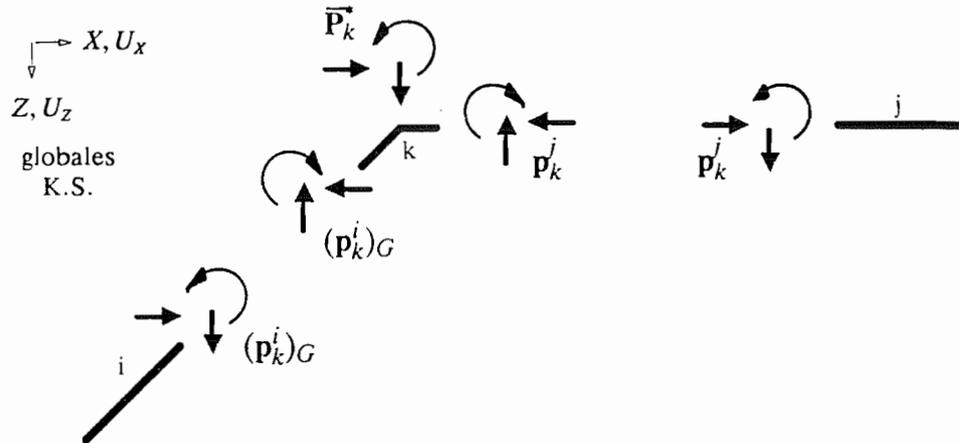


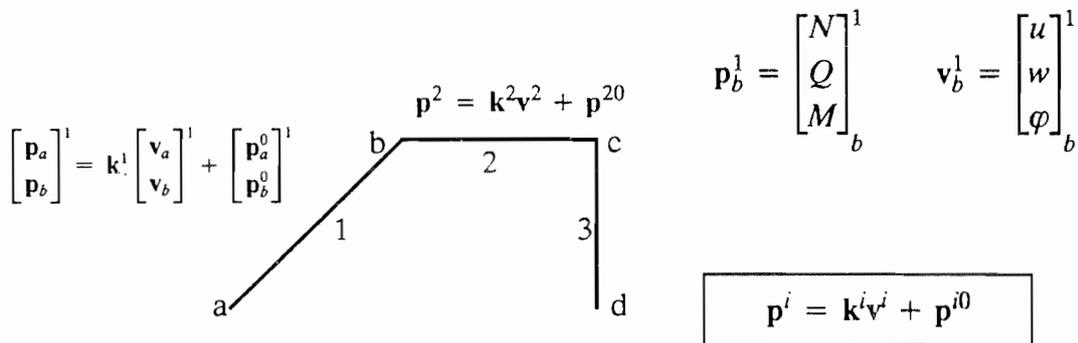
Bild 2: Rundschnitt um den Knoten  $k$ , positive Kraftgrößen  $\mathbf{p}_k^i$  am Elementrand und positive Knotenlasten  $\bar{\mathbf{P}}_k$

### Elementmatrizen :

Um den Zusammenhang zwischen Rand- und Feldgrößen eines Elementes herzustellen, macht man einen Ansatz  $\mathbf{N}(x)$ , der den funktionalen Verlauf im Element erfaßt und der multiplikativ mit den noch unbekanntenen Randwerten  $\mathbf{v}^i$  verknüpft wird:

$$\mathbf{u}^i(x) = \mathbf{N}^i(x) \mathbf{v}^i \quad \text{Interpolation}$$

Die Elementeigenschaften lassen sich dann durch die Beziehung zwischen den Kraftgrößen und den Weggrößen an den Elementrändern angeben. Diese Koeffizienten sind ein Maß für die Steifigkeit des betreffenden Elements. Sie geben an, welche Kräfte für eine Einheitsverschiebung des Elementrandes erforderlich sind. In Matrizenanordnung spricht man von der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$ . Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  kann näherungsweise durch Einsetzen der gewählten Ansätze in die Grundgleichungen gewonnen werden und ist im allgemeinen noch auf ein lokales Elementkoordinatensystem bezogen. (Siehe Abschnitt 5.4.2).



lokale Elementsteifigkeiten  $\mathbf{k}^i$   
und 'Volleinspannschnittgrößen'  $\mathbf{p}^{i0}$

Bild 3: Elementeigenschaften

**Transformation am Element :**

Für den Zusammenbau zum System ist noch die Transformation vom *lokalen* Koordinatensystem des Elements auf ein einheitliches Gesamtkoordinatensystem – das sog. *globale* Koordinatensystem – vorzunehmen. (Siehe Abschnitt 5.4.3).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} && \text{(lokal)} \\
 \mathbf{v}^i &= \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i && \text{(lokal} \leftarrow \text{global)} \quad \mathbf{v}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i && \text{(global} \leftarrow \text{lokal)} \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i && \text{(lokal} \leftarrow \text{global)} \quad \mathbf{p}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i && \text{(global} \leftarrow \text{lokal)} \\
 \mathbf{k}^i &&& \text{(lokal)} \quad \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i && \text{(global} \leftarrow \text{lokal)} \\
 &&& \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i = (\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T})^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0} && \text{(global} \leftarrow \text{lokal)}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} \quad \text{(global)}$$

Im globalen Koordinatensystem lautet die grundlegende Beziehung des Weggrößenverfahrens am Element  $i$  :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_X \\ F_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_a^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix}^i \cdot \begin{bmatrix} u_X \\ u_Z \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_a^i + \begin{bmatrix} F_X^0 \\ F_Z^0 \\ M_Y^0 \end{bmatrix}_a^i \\
 \begin{bmatrix} F_X \\ F_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_b^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix}^i \cdot \begin{bmatrix} u_X \\ u_Z \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_b^i + \begin{bmatrix} F_X^0 \\ F_Z^0 \\ M_Y^0 \end{bmatrix}_b^i \\
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}
 \end{aligned}$$

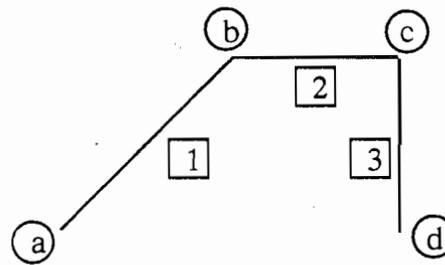
Die Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_G^i$  (im globalen Koordinatensystem) und  $\mathbf{k}^i$  (im lokalen Koordinatensystem) sind symmetrisch. Sie sind singulär, wenn die Randbedingungen noch nicht eingearbeitet sind.

**Gleichungssystem und Nachlaufberechnung :**

In der weiteren Systemberechnung des Weggrößenverfahrens bildet man das Gleichgewicht der Kraftgrößen im Knoten. Am Beispiel des Rahmens ist an allen Knoten (vgl. Bild 2) die Summe der Kraftgrößen an den Rändern aller benachbarter Elemente und der Knotenlasten zu bilden. (Siehe Abschnitt 5.4.4).

Gleichgewicht am Knoten :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_a^1)_G &= \bar{\mathbf{P}}_a \\ (\mathbf{p}_b^1)_G + (\mathbf{p}_b^2)_G &= \bar{\mathbf{P}}_b \\ (\mathbf{p}_c^2)_G + (\mathbf{p}_c^3)_G &= \bar{\mathbf{P}}_c \\ (\mathbf{p}_d^3)_G &= \bar{\mathbf{P}}_d \end{aligned}$$



Verträglichkeit : Element - Knoten :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_a^1)_G &= \mathbf{V}_a \\ (\mathbf{v}_b^1)_G &= (\mathbf{v}_b^2)_G = \mathbf{V}_b \\ (\mathbf{v}_c^2)_G &= (\mathbf{v}_c^3)_G = \mathbf{V}_c \\ (\mathbf{v}_d^3)_G &= \mathbf{V}_d \end{aligned}$$

Bild 4: Zuordnung Stäbe - Knoten und Zusammenbau des statischen Systems

*Da das Bilden des Knotengleichgewichts grundsätzlich in globalen Koordinaten erfolgt, wird der Index  $(\cdot)_G$  im folgenden Bild 5 weggelassen.*

Die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbeziehungen liefern mit Hilfe der grundlegenden Beziehungen am Element für die einzelnen Knoten des Systems :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_a^1 &= \mathbf{k}_{aa}^1 \mathbf{v}_a^1 + \mathbf{k}_{ab}^1 \mathbf{v}_b^1 + \mathbf{p}_a^{10} = \mathbf{k}_{aa}^1 \mathbf{V}_a + \mathbf{k}_{ab}^1 \mathbf{V}_b + \mathbf{p}_a^{10} = \bar{\mathbf{P}}_a^* \\ \mathbf{p}_b^1 + \mathbf{p}_b^2 &= \mathbf{k}_{ba}^1 \mathbf{v}_a^1 + \mathbf{k}_{bb}^1 \mathbf{v}_b^1 + \mathbf{p}_b^{10} + \\ &+ \mathbf{k}_{bb}^2 \mathbf{v}_b^2 + \mathbf{k}_{bc}^2 \mathbf{v}_c^2 + \mathbf{p}_b^{20} = \mathbf{k}_{ba}^1 \mathbf{V}_a + \mathbf{k}_{bb}^1 \mathbf{V}_b + \mathbf{p}_b^{10} + \\ &+ \mathbf{k}_{bb}^2 \mathbf{V}_b + \mathbf{k}_{bc}^2 \mathbf{V}_c + \mathbf{p}_b^{20} = \bar{\mathbf{P}}_b^* \end{aligned}$$

etc.

The diagram shows a matrix equation for the global system. On the left, a matrix  $\mathbf{K}$  is shown with three elements  $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3$  arranged in a grid. This is multiplied by a vector  $\mathbf{V}$  of nodal displacements  $\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_b, \mathbf{V}_c, \mathbf{V}_d$ . The result is equal to a vector  $\bar{\mathbf{P}}^*$  of nodal forces  $\bar{\mathbf{P}}_a^*, \bar{\mathbf{P}}_b^*, \bar{\mathbf{P}}_c^*, \bar{\mathbf{P}}_d^*$  minus a vector  $\bar{\mathbf{P}}^0$  of fixed-end forces  $\mathbf{p}_a^{10}, \mathbf{p}_b^{10} + \mathbf{p}_b^{20}, \mathbf{p}_c^{20} + \mathbf{p}_c^{30}, \mathbf{p}_d^{30}$ . The final result is a vector  $\bar{\mathbf{P}}$  of nodal forces  $\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b, \bar{\mathbf{P}}_c, \bar{\mathbf{P}}_d$ .

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{P}}^0 = \bar{\mathbf{P}}$$

Bild 5: Singuläres Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der Randbedingungen

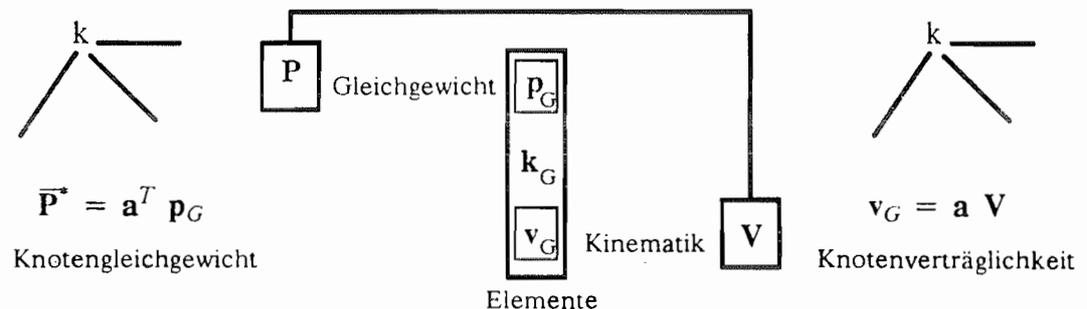
Mit dem Ersetzen der Kraftgrößen  $\mathbf{p}_G$  der Elementränder durch deren korrespondierende Weggrößen  $\mathbf{v}_G$  treten die Steifigkeitskoeffizienten  $k_{ik}$  in Erscheinung.

Durch die kinematische Verträglichkeit in den Knoten, verbindet man die Randgrößen  $p_{kG}^i$  und  $v_{kG}^i$  der Elemente mit den Knotenweggrößen  $V_k$ , den Unbekannten des Gleichungssystems. Das Knotengleichgewicht stellt sich jetzt als eine Überlagerung der Steifigkeiten benachbarter Elemente zur Systemmatrix  $K$  dar.

Nach dem Einsetzen der Randbedingungen kann dieses lineare Gleichungssystem nach den Unbekannten  $V_k$  aufgelöst werden. Für die Bemessung sind jedoch die Schnittgrößen erforderlich. Diese sind noch über eine Nachlaufrechnung aus den Verschiebungen über die Kraftgrößen  $p^i = k^i v^i + p^{i0}$  (Vorzeichen-Definition 2) zu bestimmen. Bevor der Verlauf im Feld ergänzt wird, hat eine Umrechnung von Vorzeichen-Definition 2 in Vorzeichen-Definition 1 zu erfolgen.

**Schematische Darstellung der Bildung des maßgeblichen Gleichungssystems (Gesamtsteifigkeitsmatrix) :**

Der durch die Systemberechnung erfaßte Zusammenhang der Knotenkraftgrößen  $p_G$  und der Knotenweggrößen  $v_G$  mit der Überlagerung der Elementsteifigkeiten  $k_G$  zur Systemsteifigkeitsmatrix  $K$  ist in Bild 6 als Schema wiederholt. Dabei erfaßt die Matrix  $a$  die Systemgeometrie (Topologie des Systems); sie gibt die Zuordnung von Elementen und Knoten wieder. (Siehe Abschnitt 5.4.1).



$$p_G = \begin{bmatrix} 1 \\ p_G^1 \\ p_G^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ ist die Spaltenmatrix aller Kraftgrößen an den Elementrändern}$$

$$v_G = \begin{bmatrix} 1 \\ v_G^1 \\ v_G^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ ist die Spaltenmatrix aller Verschiebungen an den Elementrändern}$$

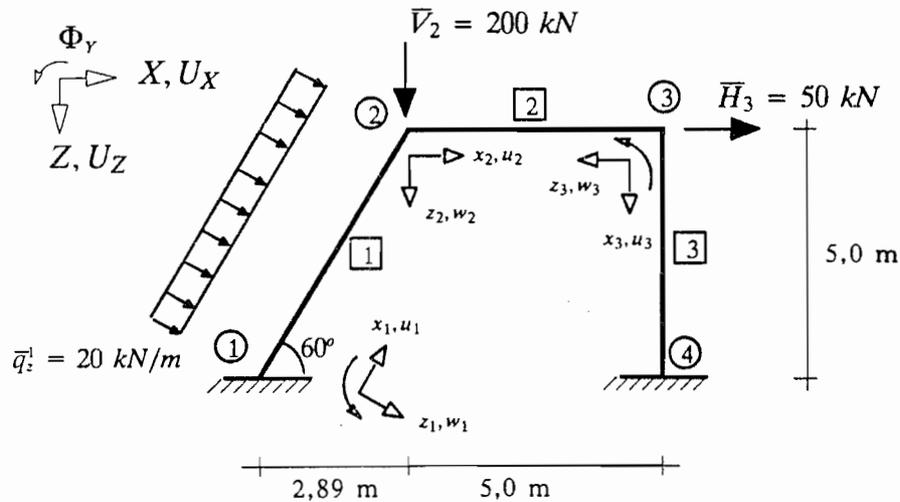
Bild 6: Schema der Systemberechnung

### Beispiel der Berechnung eines ebenen Rahmens :

#### Allgemeiner Ablauf der Berechnung :

- (a) System und Belastung → 'Modellbildung'
- (b) Ermittlung der Elementmatrizen  $\mathbf{k}^i$  und Lastvektoren  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Feldbelastung  
(→ Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke)
- (c) Transformation der Elementgrößen vom lokalen ins globale Koordinatensystem  
(  $\mathbf{k}^i, \mathbf{p}^{i0} \rightarrow \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i, \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0}$  )
- (d) Aufbau des Gleichungssystems :
  - Zusammenstellung der Weggrößen  $\mathbf{V}$  der Knoten
  - Zuordnung der Zustandsgrößen an den Stabenden und an den Knoten :  
Systemgeometrie und Gleichgewicht → Gleichgewicht und Verträglichkeit
  - Aufbau des Gleichungssystems ohne Berücksichtigung der Randbedingungen durch Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_G^i$  zur Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  (Gleichgewicht im globalen Koordinatensystem)
  - Aufbau des Lastvektors  $\bar{\mathbf{P}}$  aus Knotenlasten  $\bar{\mathbf{P}}^*$  und Feldbelastungen  $\bar{\mathbf{p}}_G^0$
  - Einbringen der Randbedingungen durch Streichen von Zeilen und Spalten  
(sofern die Randbedingungen nicht bereits beim Aufbau des Gleichungssystems berücksichtigt wurden)
- (e) Lösung des algebraischen Gleichungssystems zur Ermittlung der unbekanntenen Weggrößen  $\mathbf{V}$  der Knoten (im globalen Koordinatensystem)
- (f) Nachlaufberechnung zur Ermittlung der Kraft- und Weggrößen am Element
  - Weggrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements :  $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i$
  - Kraftgrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements :  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$   
bzw. mit :  $\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$  und daraus  $\mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i$
  - Berechnung der Zustandsgrößen im Feld :  
Übertragung der Kraftgrößen an den Stabenden von Vorzeichen-Definition 2 in Vorzeichen-Definition 1. Anschließend Verlauf im Feld ergänzen (Baustatische Methode bzw. Übertragungsverfahren)
  - graphische Darstellung der Zustandslinien
- (g) Kontrollen der Berechnung :
  - Beurteilung der Ergebnisse – Plausibilitätsüberlegungen
  - Kontrolle des globalen Gleichgewichts am Gesamtsystem
  - Kontrolle des Gleichgewichts in einzelnen Knoten
  - Kontrolle von Gleichgewicht und Verträglichkeit an einzelnen Elementen

(a) System und Belastung → 'Modellbildung'



$E = 210\,000\text{ MN/m}^2$       Stab 1 :  $I = 0.00025\text{ m}^4$      $A = 0.015\text{ m}^2$  (HEB 300)  
 Stab 2 :  $I = 0.00025\text{ m}^4$      $A = 0.015\text{ m}^2$  (HEB 300)  
 Stab 3 :  $I = 0.00015\text{ m}^4$      $A = 0.012\text{ m}^2$  (HEB 260)

Berechnung des Systems für 2 Lastfälle :

LF 1 :  $\bar{q} = 20\text{ kN/m}$

LF 2 :  $\bar{V}_2 = 200\text{ kN}$     und  $\bar{H}_3 = 50\text{ kN}$

(b) Ermittlung der Elementmatrizen  $\mathbf{k}^i$  und Lastvektoren  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Feldbelastung :

lokale Steifigkeitsmatrix Element 1 :  $\mathbf{k}^1$  ( $i=1, a=1, b=2$ ) :

$$\mathbf{k}^i = \begin{matrix} & \begin{matrix} (u_a) & (w_a) & (\varphi_a) & (u_b) & (w_b) & (\varphi_b) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (N_a) \\ (Q_a) \\ (M_a) \\ (N_b) \\ (Q_b) \\ (M_b) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 545.596 & 0.000 & 0.000 & -545.596 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3.274 & -9.450 & 0.000 & -3.274 & -9.450 \\ 0.000 & -9.450 & 36.373 & 0.000 & 9.450 & 18.187 \\ -545.596 & 0.000 & 0.000 & 545.596 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3.274 & 9.450 & 0.000 & 3.274 & 9.450 \\ 0.000 & -9.450 & 18.187 & 0.000 & -9.450 & 36.373 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 10^3$$

Lastvektor aus Feldbelastung Element 1 :  $\mathbf{p}^{i0}$  ( $i=1, a=1, b=2$ ) :

$$\mathbf{p}^{i0} = \begin{matrix} \begin{matrix} (N_a^0) \\ (Q_a^0) \\ (M_a^0) \\ (N_b^0) \\ (Q_b^0) \\ (M_b^0) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.00 \\ -57.74 \\ 55.56 \\ 0.00 \\ -57.74 \\ -55.56 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{Lastfall 1})$$

lokale Steifigkeitsmatrix Element 2 :  $\mathbf{k}^2$  ( $i=2, a=2, b=3$ ) :

$$\mathbf{k}^i = \begin{matrix} & \begin{matrix} (u_a) & (w_a) & (\varphi_a) & (u_b) & (w_b) & (\varphi_b) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (N_a) \\ (Q_a) \\ (M_a) \\ (N_b) \\ (Q_b) \\ (M_b) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 630.000 & 0.000 & 0.000 & -630.00 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.040 & -12.600 & 0.000 & -5.040 & -12.600 \\ 0.000 & -12.600 & 42.000 & 0.000 & 12.600 & 21.000 \\ -630.000 & 0.000 & 0.000 & 630.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5.040 & 12.600 & 0.000 & 5.040 & 12.600 \\ 0.000 & -12.600 & 21.000 & 0.000 & 12.600 & 42.000 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 10^3$$

Lastvektor aus Feldbelastung Element 2 :  $\mathbf{p}^{20}$  entfällt (identisch 0) in Lastfall 1 und 2.

lokale Steifigkeitsmatrix Element 3 :  $\mathbf{k}^3$  ( $i=3, a=3, b=4$ ) :

$$\mathbf{k}^i = \begin{matrix} & (u_a) & (w_a) & (\varphi_a) & (u_b) & (w_b) & (\varphi_b) \\ \begin{matrix} (N_a^i) \\ (Q_a^i) \\ (M_a^i) \\ (N_b^i) \\ (Q_b^i) \\ (M_b^i) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 504.000 & 0.000 & 0.000 & -504.00 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3.024 & -7.560 & 0.000 & -3.024 & -7.560 \\ 0.000 & -7.560 & 25.200 & 0.000 & 7.560 & 12.600 \\ -504.000 & 0.000 & 0.000 & 504.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3.024 & 7.560 & 0.000 & 3.024 & 7.560 \\ 0.000 & -7.560 & 12.600 & 0.000 & 7.560 & 25.200 \end{bmatrix} & \end{matrix} \cdot 10^3$$

Lastvektor aus Feldbelastung Element 3 :  $\mathbf{p}^{30}$  entfällt (identisch 0) in Lastfall 1 und 2.

(c) Transformation der Elementgrößen vom lokalen ins globale Koordinatensystem :

$$(\mathbf{k}^i, \mathbf{p}^{i0} \rightarrow \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i, \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0})$$

Transformationsmatrix Element 1 :  $\mathbf{T}^1$  ( $\alpha = 60^\circ$ ) :

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.8660 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8660 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & -0.8660 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8660 & 0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_G^1$  und Lastvektor  $\mathbf{p}_G^{10}$  von Element 1 im globalen Koordinatensystem : ( $i=1, a=1, b=2$ )

$$\mathbf{k}_G^i = \begin{matrix} & (u_{xa}) & (u_{za}) & (\varphi_{ya}) & (u_{xb}) & (u_{zb}) & (\varphi_{yb}) \\ \begin{matrix} (F_{Xa}^i) \\ (F_{Za}^i) \\ (M_{Ya}^i) \\ (F_{Xb}^i) \\ (F_{Zb}^i) \\ (M_{Yb}^i) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 138.854 & -234.832 & -8.184 & -138.854 & 234.832 & -8.184 \\ -234.832 & 410.015 & -4.725 & 234.832 & -410.015 & -4.725 \\ -8.184 & -4.725 & 36.373 & 8.184 & 4.725 & 18.187 \\ -138.854 & 234.832 & 8.184 & 138.854 & -234.832 & 8.184 \\ 234.832 & -410.015 & 4.725 & -234.832 & 410.015 & 4.725 \\ -8.184 & -4.725 & 18.187 & 8.184 & 4.725 & 36.373 \end{bmatrix} & \end{matrix} \cdot 10^3, \mathbf{p}_G^{i0} = \begin{bmatrix} -50.00 \\ -28.87 \\ 55.56 \\ -50.00 \\ -28.87 \\ -55.56 \end{bmatrix}$$

(Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem siehe Multiplikationsschema auf Beiblatt)

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 2 entfällt, da lokales und globales Koordinatensystem identisch sind.

Transformationsmatrix Element 3 :  $\mathbf{T}^3$  ( $\alpha = -90^\circ$ ) :

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Multiplikationsschema zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^i$  im globalen Koordinatensystem :

Element 1 : (i=1)

$$\begin{array}{c}
 \text{Multiplikationsschema für Matrizen :} \\
 \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{[B]} & \\ \hline \mathbf{[A]} & \mathbf{[AB]} \end{array} \right]
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{10^{-3} \bar{k}} = \begin{bmatrix} 545.596 & 0.000 & 0.000 & -545.596 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3.274 & -9.450 & 0.000 & -3.274 & -9.450 \\ 0.000 & -9.450 & 36.373 & 0.000 & 9.450 & 18.187 \\ -545.596 & 0.000 & 0.000 & 545.596 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3.274 & 9.450 & 0.000 & 3.274 & 9.450 \\ 0.000 & -9.450 & 18.187 & 0.000 & 9.450 & 36.373 \end{bmatrix}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{T^v} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.8660 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8660 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & -0.8660 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8660 & 0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{10^{-3} T^v T \bar{k}} = \begin{bmatrix} 272.798 & 2.835 & -8.184 & -272.798 & -2.835 & -8.184 \\ -472.500 & 1.637 & -4.725 & 472.500 & -1.637 & -4.725 \\ 0.000 & -9.450 & 36.373 & 0.000 & 9.450 & 18.187 \\ -272.798 & -2.835 & 8.184 & 272.798 & 2.835 & 8.184 \\ 472.500 & -1.637 & -4.725 & -472.500 & 1.637 & 4.725 \\ 0.000 & -9.450 & 18.187 & 0.000 & 9.450 & 36.373 \end{bmatrix}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{= T^v T} \\
 \mathbf{= 10^{-3} T^v T \bar{k}}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{= 10^{-3} T^v T \bar{k} T^v = 10^{-3} k^i}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 138.854 & -234.832 & -8.184 & -138.854 & 234.832 & -8.184 \\ -234.832 & 410.015 & -4.725 & 234.832 & -410.015 & -4.725 \\ -8.184 & -4.725 & 36.373 & 8.184 & 4.725 & 18.187 \\ -138.854 & 234.832 & 8.184 & 138.854 & -234.832 & 8.184 \\ 234.832 & -410.015 & 4.725 & -234.832 & 410.015 & 4.725 \\ -8.184 & -4.725 & 18.187 & 8.184 & 4.725 & 36.373 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Steifigkeitsmatrix Element 3 im globalen Koordinatensystem :  $\mathbf{k}_G^3$  ( $i=3, a=3, b=4$ )

$$\mathbf{k}_G^i = \begin{matrix} & (u_{xa}) & (u_{za}) & (\varphi_{ya}) & (u_{xb}) & (u_{zb}) & (\varphi_{yb}) \\ \begin{matrix} (F_{xa}) \\ (F_{za}) \\ (M_{ya}) \\ (F_{xb}) \\ (F_{zb}) \\ (M_{yb}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3.024 & 0.000 & 7.560 & -3.024 & 0.000 & 7.560 \\ 0.000 & 504.000 & 0.000 & 0.000 & -504.00 & 0.000 \\ 7.560 & 0.000 & 25.200 & -7.560 & 0.000 & 12.600 \\ -3.024 & 0.000 & -7.560 & 3.024 & 0.000 & -7.560 \\ 0.000 & -504.000 & 0.000 & 0.000 & 504.000 & 0.000 \\ 7.560 & 0.000 & 12.600 & -7.560 & 0.000 & 25.200 \end{bmatrix} & 10^3, \end{matrix}$$

(d) Aufbau des Gleichungssystems :

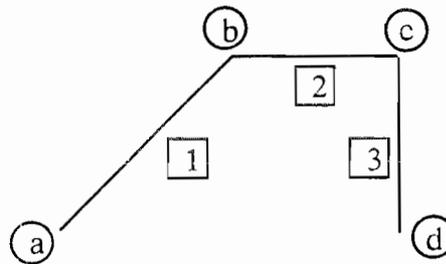
- Zusammenstellung der Weggrößen  $\mathbf{V}$  der Knoten

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} U_{X1} \\ U_{Z1} \\ \Phi_{Y1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} U_{X2} \\ U_{Z2} \\ \Phi_{Y2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} U_{X3} \\ U_{Z3} \\ \Phi_{Y3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} U_{X4} \\ U_{Z4} \\ \Phi_{Y4} \end{bmatrix}$$

- Zuordnung der Zustandsgrößen an den Stabenden und an den Knoten :  
Systemgeometrie und Gleichgewicht  $\rightarrow$  Gleichgewicht und Verträglichkeit

Gleichgewicht am Knoten :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_1^1)_G &= \bar{\mathbf{P}}_1 \\ (\mathbf{p}_2^1)_G + (\mathbf{p}_2^2)_G &= \bar{\mathbf{P}}_2 \\ (\mathbf{p}_3^2)_G + (\mathbf{p}_3^3)_G &= \bar{\mathbf{P}}_3 \\ (\mathbf{p}_4^3)_G &= \bar{\mathbf{P}}_4 \end{aligned}$$



Verträglichkeit : Element - Knoten :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1^1)_G &= \mathbf{V}_1 \\ (\mathbf{v}_2^1)_G &= (\mathbf{v}_2^2)_G = \mathbf{V}_2 \\ (\mathbf{v}_3^2)_G &= (\mathbf{v}_3^3)_G = \mathbf{V}_3 \\ (\mathbf{v}_4^3)_G &= \mathbf{V}_4 \end{aligned}$$

Bild : Zuordnung Stäbe - Knoten und Zusammenbau der Elemente zum statischen System

- Aufbau des Gleichungssystems ohne Berücksichtigung der Randbedingungen durch Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_G^i$  zur Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  (Gleichgewicht im globalen Koordinatensystem)

Einsetzen der grundlegenden Beziehungen am Element in Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen (der Index  $(\cdot)_G$  wurde hier wieder weggelassen) :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^1 &= \mathbf{k}_{11}^1 \mathbf{v}_1^1 + \mathbf{k}_{12}^1 \mathbf{v}_2^1 + \mathbf{p}_1^{1o} = \mathbf{k}_{11}^1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{k}_{12}^1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{p}_1^{1o} = \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \mathbf{p}_2^1 + \mathbf{p}_2^2 &= \mathbf{k}_{21}^1 \mathbf{v}_1^1 + \mathbf{k}_{22}^1 \mathbf{v}_2^1 + \mathbf{p}_2^{1o} + \\ &+ \mathbf{k}_{22}^2 \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{k}_{23}^2 \mathbf{v}_3^2 + \mathbf{p}_2^{2o} = \mathbf{k}_{21}^1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{k}_{22}^1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{p}_2^{1o} + \\ &+ \mathbf{k}_{22}^2 \mathbf{V}_2 + \mathbf{k}_{23}^2 \mathbf{V}_3 + \mathbf{p}_2^{2o} = \bar{\mathbf{P}}_2 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

- Aufbau des Lastvektors  $\bar{P}$  aus Knotenlasten  $\bar{P}^*$  und Feldbelastungen  $\bar{p}_G^0$

$$K \cdot V = \bar{P}^* - \bar{P}^0 = \bar{P}$$

Bild : Singuläres Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der Randbedingungen

- Einbringen der Randbedingungen durch Streichen von Zeilen und Spalten :  
 $V_1 = V_4 = 0$

$$K \cdot V = \bar{P}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_{22G}^1 + k_{22G}^2 & k_{23G}^2 \\ k_{32G}^2 & k_{33G}^2 + k_{33G}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{bmatrix}$$

Lastvektoren des Systems :  $\bar{P} = \bar{P}^* - \bar{P}^0$

$$\begin{matrix} (F_{x2}) \\ (F_{z2}) \\ (M_{y2}) \\ (F_{x3}) \\ (F_{z3}) \\ (M_{y3}) \end{matrix} \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -50.00 \\ -28.87 \\ -55.56 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +50.00 \\ +28.87 \\ +55.56 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{LF 1 :}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 200.00 \\ 0.00 \\ 50.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \text{LF 2 :}$$

(e) Lösung des algebraischen Gleichungssystems zur Ermittlung der unbekannt Weggrößen  $V$  der Knoten (im globalen Koordinatensystem)

Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K$  :

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (F_{x2}) \\ (F_{z2}) \\ (M_{y2}) \\ (F_{x3}) \\ (F_{z3}) \\ (M_{y3}) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} (U_{x2}) \\ (U_{z2}) \\ (\Phi_{y2}) \\ (U_{x3}) \\ (U_{z3}) \\ (\Phi_{y3}) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 138.854 & -234.832 & 8.184 & -630.000 & 0 & 0 \\ +630.000 & 0 & 0 & & & \\ -234.832 & 410.015 & 4.725 & 0 & -5.040 & -12.600 \\ 0 & +5.040 & -12.600 & & & \\ 8.184 & 4.725 & 36.373 & 0 & 12.600 & 21.000 \\ 0 & -12.600 & +42.000 & & & \\ -630.000 & 0 & 0 & 630.000 & 0 & 0 \\ (F_{x3}) & & & +3.024 & 0 & +7.560 \\ 0 & -5.040 & 12.600 & 0 & 5.040 & 12.600 \\ (F_{z3}) & & & 0 & +504.000 & 0 \\ 0 & -12.600 & 21.000 & 0 & 12.600 & 42.000 \\ (M_{y3}) & & & +7.560 & 0 & +25.200 \end{bmatrix}$$

'resultierendes' lineares Gleichungssystem :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (F_{x2}) \\ (F_{z2}) \\ (M_{y2}) \\ (F_{x3}) \\ (F_{z3}) \\ (M_{y3}) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} (U_{x2}) \\ (U_{z2}) \\ (\Phi_{y2}) \\ (U_{x3}) \\ (U_{z3}) \\ (\Phi_{y3}) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 768.854 & -234.832 & 8.184 & -630.000 & 0.000 & 0.000 \\ -234.832 & 415.055 & -7.875 & 0.000 & -5.040 & -12.600 \\ 8.184 & -7.875 & 78.373 & 0.000 & 12.600 & 21.000 \\ -630.000 & 0.000 & 0.000 & 633.024 & 0.000 & 7.560 \\ 0.000 & -5.040 & 12.600 & 0.000 & 509.040 & 12.600 \\ 0.000 & -12.600 & 21.000 & 7.560 & 12.600 & 67.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ W_2 \\ \Phi_2 \\ U_3 \\ W_3 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \bar{P}$$

Vektor der unbekannt Weggrößen :  $V$  aus  $KV = \bar{P} \rightarrow V = K^{-1}\bar{P}$

$$V = \begin{bmatrix} U_{x2} \\ U_{z2} \\ \Phi_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{z3} \\ \Phi_{y3} \end{bmatrix} \quad \text{LF 1 : } V = \begin{bmatrix} 7.2190 \\ 4.1572 \\ 0.4111 \\ 7.1865 \\ 0.0350 \\ -0.1641 \end{bmatrix} 10^{-3} \quad \text{LF 2 : } V = \begin{bmatrix} 18.5128 \\ 10.9474 \\ -0.9160 \\ 18.5006 \\ 0.1253 \\ 0.2341 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

(f) Nachlaufberechnung zur Ermittlung der Kraft- und Weggrößen am Element  
(exemplarisch hier nur für Lastfall 1 und Element 1)

- Weggrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements 1 :  $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i$

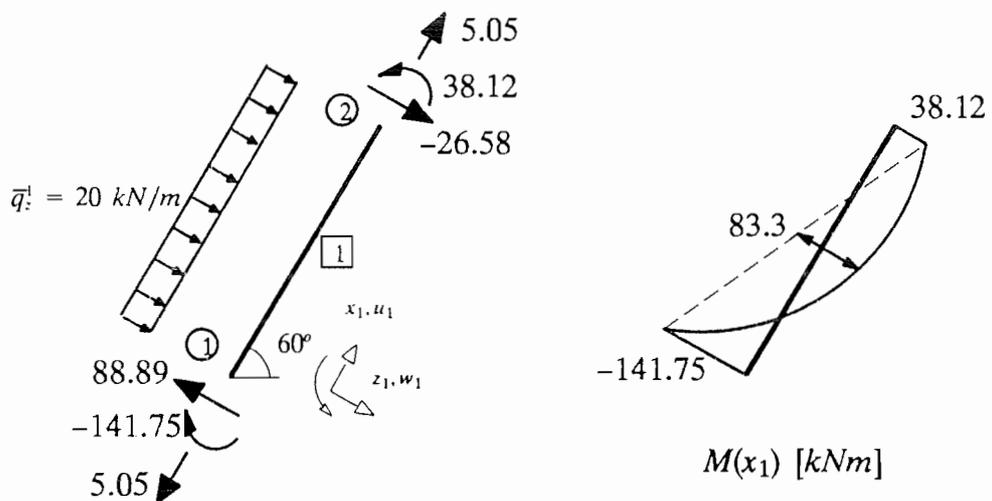
$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^1 \mathbf{v}_G^1 = \mathbf{T}^1 \begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Z1} \\ \varphi_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Z2} \\ \varphi_{Y2} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 7.2190 \\ 4.1572 \\ 0.4111 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0093 \\ 8.3304 \\ 0.4111 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

- Kraftgrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements 1 :  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$   
(Vorzeichen-Definition 2) :

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0093 \\ 8.3304 \\ 0.4111 \end{bmatrix} 10^{-3}; \mathbf{k}^1 \mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} -5.05 \\ -31.15 \\ 86.20 \\ 5.05 \\ 31.15 \\ 93.67 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^{i0} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -57.74 \\ 55.56 \\ 0.00 \\ -57.74 \\ -55.56 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} -5.05 \\ -88.89 \\ 141.75 \\ 5.05 \\ -26.58 \\ 38.12 \end{bmatrix}$$

alternative Berechnung mit :  $\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$  und  $\mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i$

- Berechnung der Zustandsgrößen im Feld (Vorzeichen-Definition 1) :

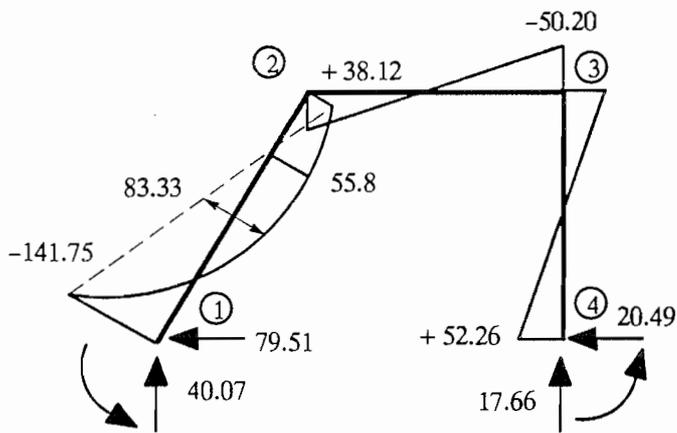


- Für Element 2 entfallen sämtliche Transformationen; Weg- und Kraftgrößen sind daher im lokalen und globalen Koordinatensystem identisch :  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_G^2, \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_G^2$ .

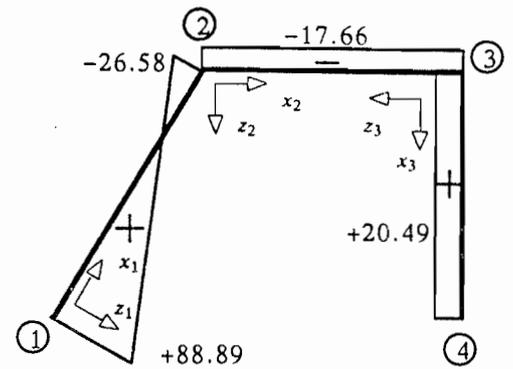
- Für Element 3 können die Schnittgrößen in analoger Weise wie bei Element 1 ermittelt werden.

- Die Auflagerreaktionen sind in den Knoten 1 und 4 aus den Stabendschnittgrößen in globalen Koordinaten zu berechnen.

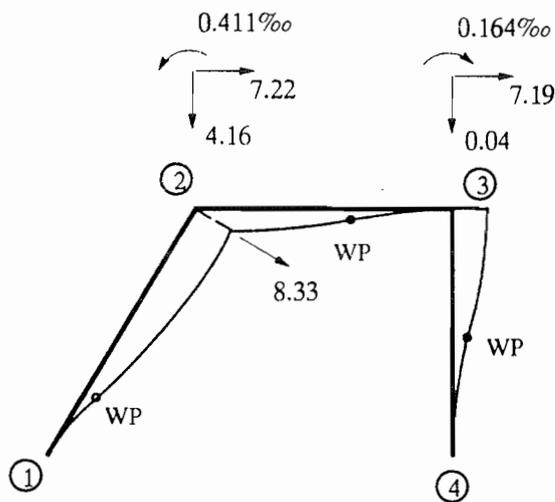
- graphische Darstellung der Zustandslinien im Lastfall 1 :



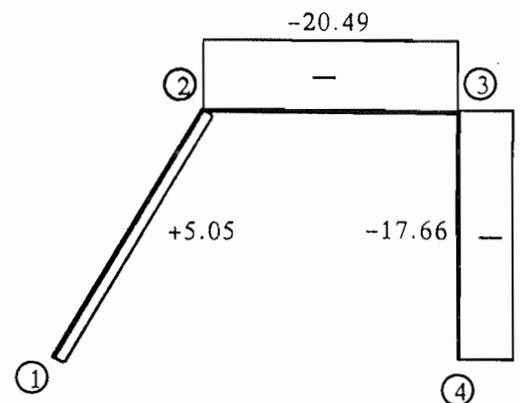
M [kNm]  
 Auflagerreaktionen [kN] [kNm]



Q [kN]

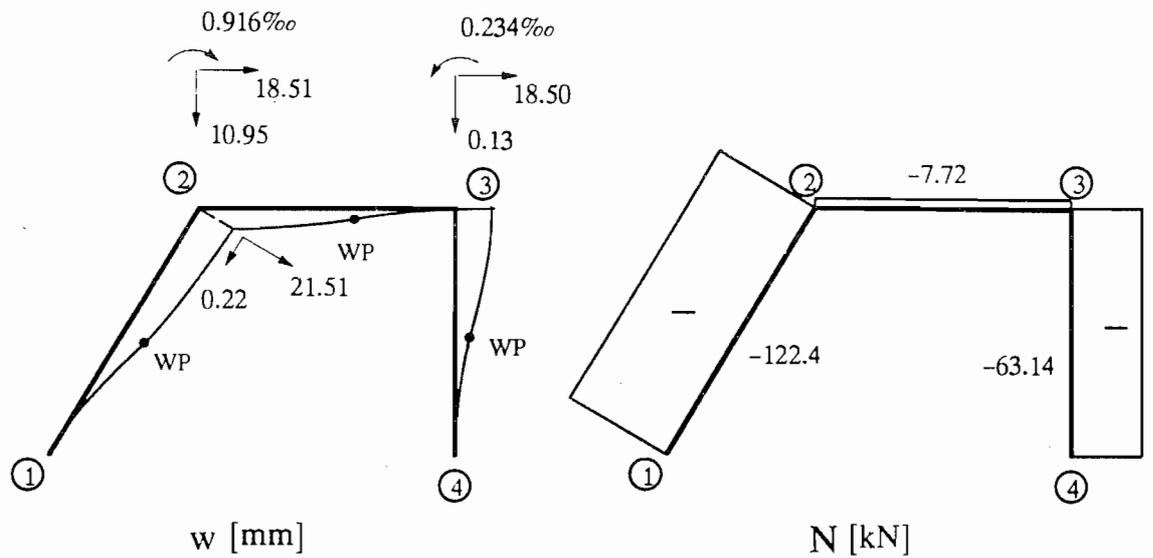
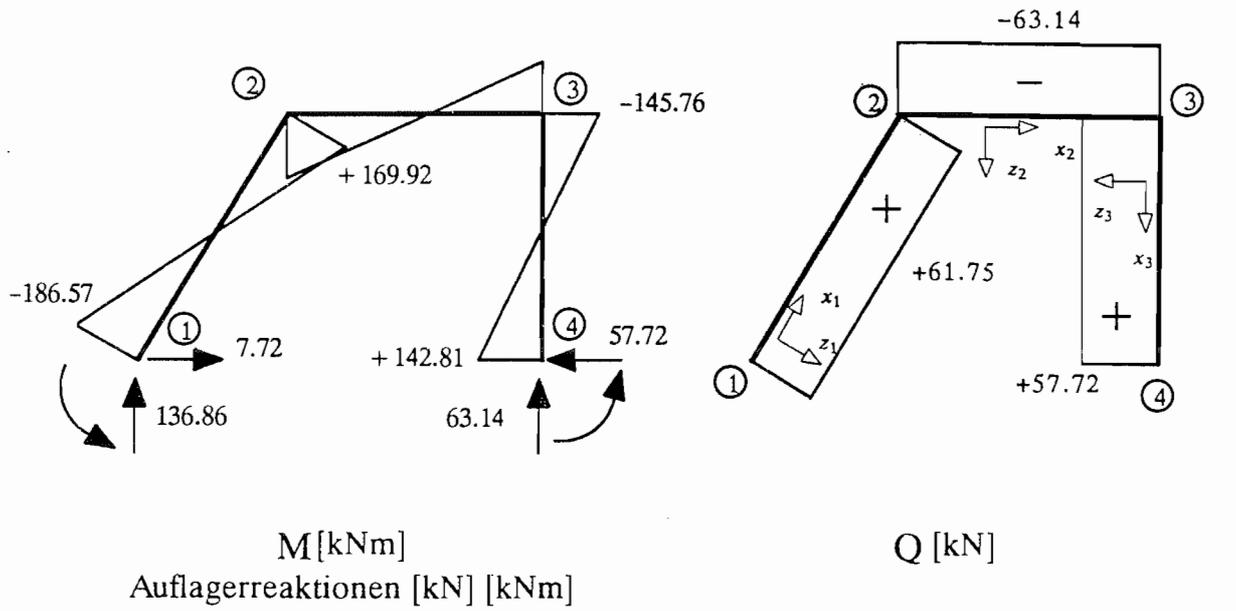


w [mm]



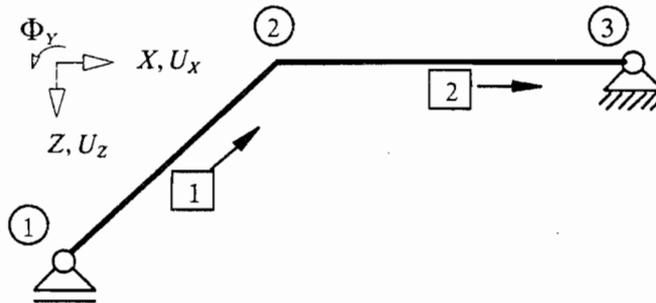
N [kN]

- graphische Darstellung der Zustandslinien im Lastfall 2 :



### 5.6 Programmtechnische Realisierung

Beispiel zur Erfassung der Systemgeometrie bei der Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix :



(a) Zuordnungstafel Stab-Knoten (Inzidenztafel) :

Stab $i$	Knoten $a$	Knoten $b$
1	1	2
2	2	3

(b) Numerierung der Freiheitsgrade (einschl. Randbedingungen) :

Knoten	$U_x$	$U_z$	$\Phi_Y$
1	1	0	2
2	3	4	5
3	0	0	6

(c) Zuordnungstafel Weggrößen an den Stabenden - Knotenfreiheitsgrade :  
(aus a und b)

Nr. ID der Weggröße Stab $i$	Stabanfang (Knoten $a$ )			Stabende (Knoten $b$ )		
	$ID_1$	$ID_2$	$ID_3$	$ID_4$	$ID_5$	$ID_6$
	$u_{xa}$	$u_{za}$	$\varphi_{Ya}$	$u_{xb}$	$u_{zb}$	$\varphi_{Yb}$
1	1	0	2	3	4	5
2	3	4	5	0	0	6

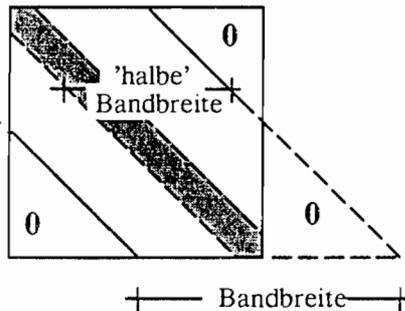
(d) Bildung von Gesamtsteifigkeitsmatrix und Lastvektoren :

<b>Gesamtsteifigkeitsmatrix <math>\mathbf{K}</math> und Lastvektoren <math>\bar{\mathbf{P}}</math> mit <math>\mathbf{0}</math> besetzen</b>
Schleife über alle Stäbe bzw. Elemente $i$
Schleife über alle Zeilen der Elementsteifigkeitsmatrix $j = 1, 2, \dots, 6$ (Zeilen des Gleichungssystems - Kraftgrößen)
Schleife über alle Spalten der Elem.-steif.-matrix $k = 1, 2, \dots, 6$ (Spalten des Gl.-systems - Weggrößen)
<b>Gesamtsteifigkeitsmatrix <math>\mathbf{K}</math> :</b> <span style="float: right;"><math>K_{ID_j, ID_k} := K_{ID_j, ID_k} + k_{jk}^i</math></span>
Schleife über alle Lastfälle $l = 1, 2, \dots$
Lastvektoren aus Elementlasten $\bar{\mathbf{P}}^0$ : <span style="float: right;"><math>\bar{P}_{ID_j, J}^0 := \bar{P}_{ID_j, J}^0 + p_{j, J}^{l0}</math></span>
Schleife über alle Freiheitsgrade $n = 1, 2, \dots$
Schleife über alle Lastfälle $l = 1, 2, \dots$
gesamte Lastvektoren $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{P}}^0$ : <span style="float: right;"><math>\bar{P}_{nJ} = \bar{P}_{nJ}^* - \bar{P}_{nJ}^0</math></span>

Eigenschaften der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K$  :

$K$  ist symmetrisch und positiv definit.

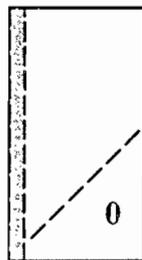
$K$  weist eine Bandstruktur auf :



Bandbreite hängt von der Numerierung der Knoten ab;

sie wird von dem Stab bestimmt, der den größten Unterschied der Knotenindices in der ID-Matrix aufweist.

Zur Einsparung von Speicherplatz ist von der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K$  nur die halbe Bandbreite abzuspeichern.

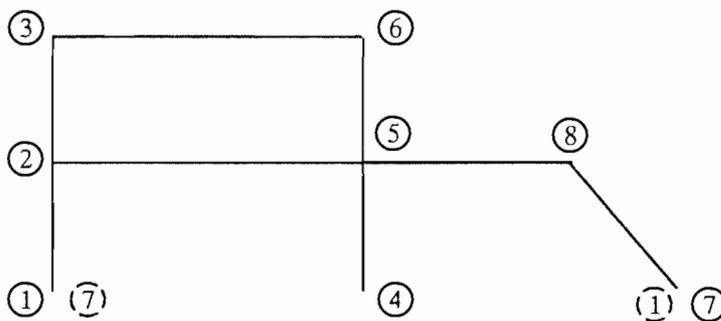


+'halbe' Bandbreite

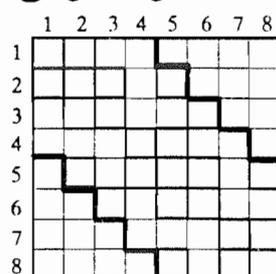
Lösung des Gleichungssystems mit speziellen Routinen :

→ Gleichungslöser (häufig aus Programmbibliotheken)

Beispiel einer günstigen und einer ungünstigen Numerierung der Knoten :



○ günstig : → Bandstruktur

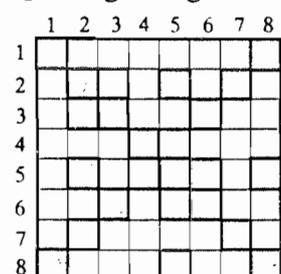


→ Weggrößen  
↓ Kraftgrößen



Untermatrix mit der Dimension der Anzahl der Freiheitsgrade eines Knotens

○ ungünstig :



## 5.7 Kopplung von Freiheitsgraden (Teilelimination)

### 5.7.1 Kopplung auf Elementebene (Tafelanschrieb )

### 5.7.2 Kopplung auf Systemebene ( Tafelanschrieb )

### 5.7.3 Zwischenbedingungen bei Gelenken

Gelenke am Stabende :

Beispiel : unbelasteter Stab mit Gelenk in  $b$  :

$$\begin{bmatrix} N_a^i \\ Q_a^i \\ M_a^i \\ \hline N_b^i \\ Q_b^i \\ M_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \hline | & | \\ \hline | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ \hline u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{0}}$$
  

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \hline | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \end{bmatrix}$$

Auf Grund der Bedingung  $M_b = p_2 = 0$  läßt sich die konjugierte Weggröße  $v_2 = \varphi_b$  durch die Weggrößen  $v_1$  ausdrücken :

Es ergibt sich für die unbekannte Weggröße :  $v_2 = -k_{22}^{-1} k_{21} v_1$

Die unbekannt Kraftgrößen an den Stabenden lauten damit :

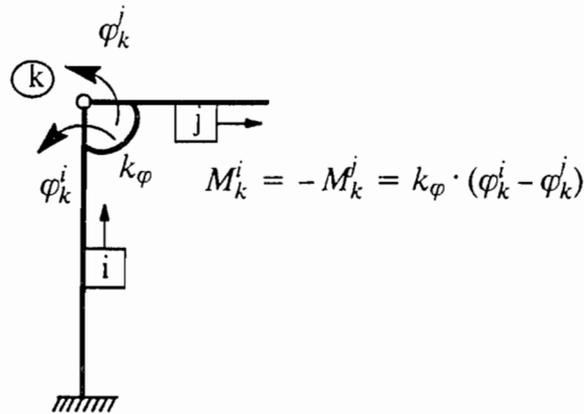
$$p_1 = \underbrace{(k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{21})}_{k_{red}} v_1$$

Die grundlegende Beziehung am Element geht über in :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \hline | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \end{bmatrix} = 0$$

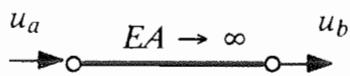
Gelenk in einem Systemknoten :

Beispiel : Systemknoten mit Drehfeder:



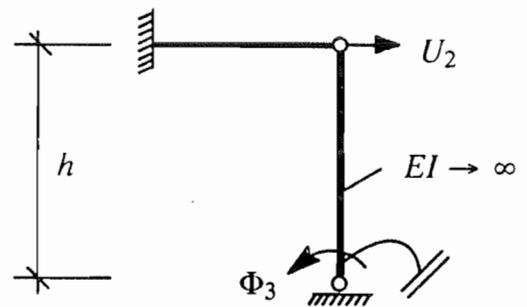
5.7.4 Kinematische Kopplung von Freiheitsgraden

am Element



$$u_a = u_b$$

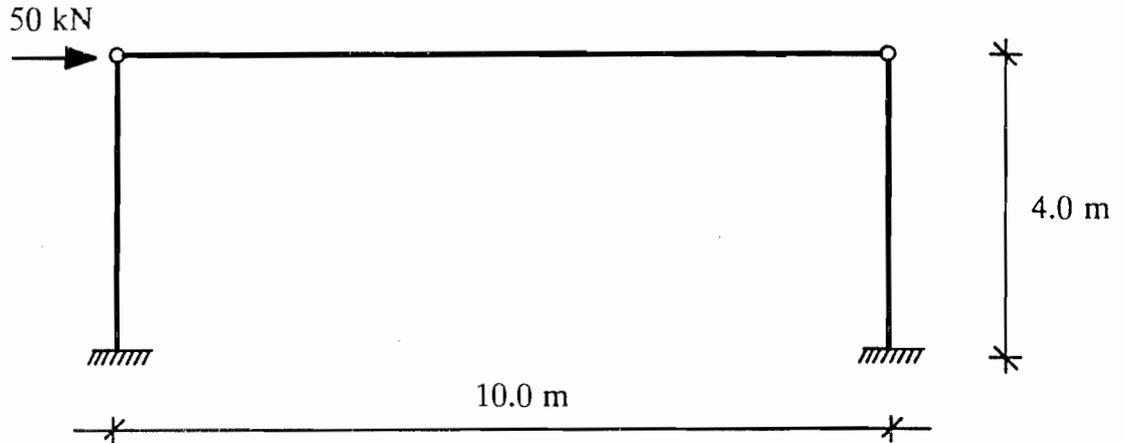
am System



$$\Phi_3 = \frac{-U_2}{h}$$

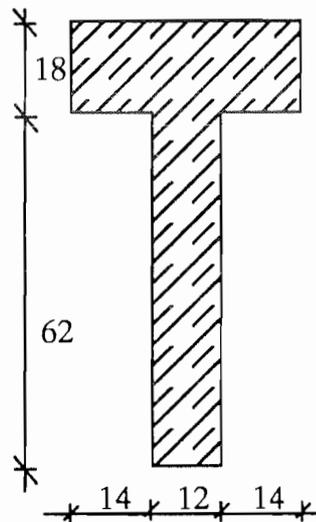
Darstellung des Problems am Beispiel

System und Belastung eines Hallenrahmens



Querschnittswerte für Ausführung in Stahlbeton B35 :

Riegel:



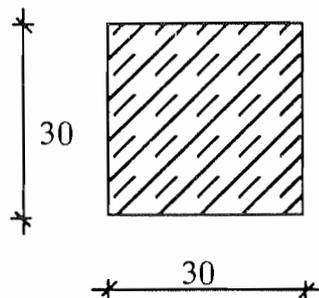
$$A = 1464 \text{ cm}^2$$

$$I = 843211 \text{ cm}^4$$

$$E = 34000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow EA &= 4978 \text{ MN} \\ EI &= 287 \text{ MNm}^2 \end{aligned} \right\} \frac{EA}{EI} = 17,3$$

Stütze:



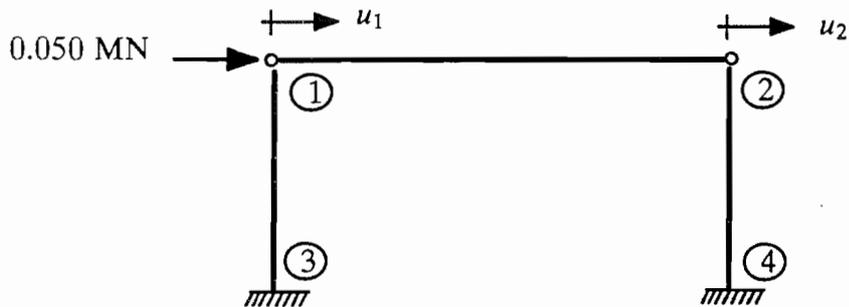
$$A = 900 \text{ cm}^2$$

$$I = 67500 \text{ cm}^4$$

$$E = 34000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

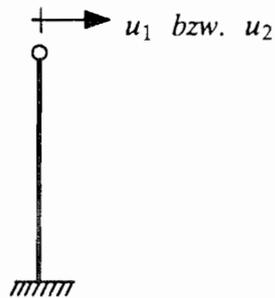
$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow EA &= 3060 \text{ MN} \\ EI &= 23 \text{ MNm}^2 \end{aligned} \right\} \frac{EA}{EI} = 133$$

Berechnung des Systems mit dem Weggrößenverfahren :



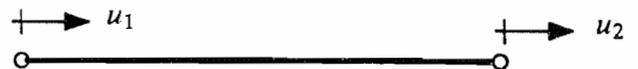
Der Riegel erhält in diesem Lastfall weder Biegemomente noch Querkräfte. Aus Gleichgewichtsgründen erhalten demnach die Stiele keine Normalkräfte, was dazu führt, daß in den Knoten 1 und 2 keine vertikale Verschiebungen auftreten.

Elementsteifigkeit der Stützen :



$$k^S = \begin{bmatrix} \frac{3EI^S}{h^3} \end{bmatrix}$$

Elementsteifigkeit des Riegels :



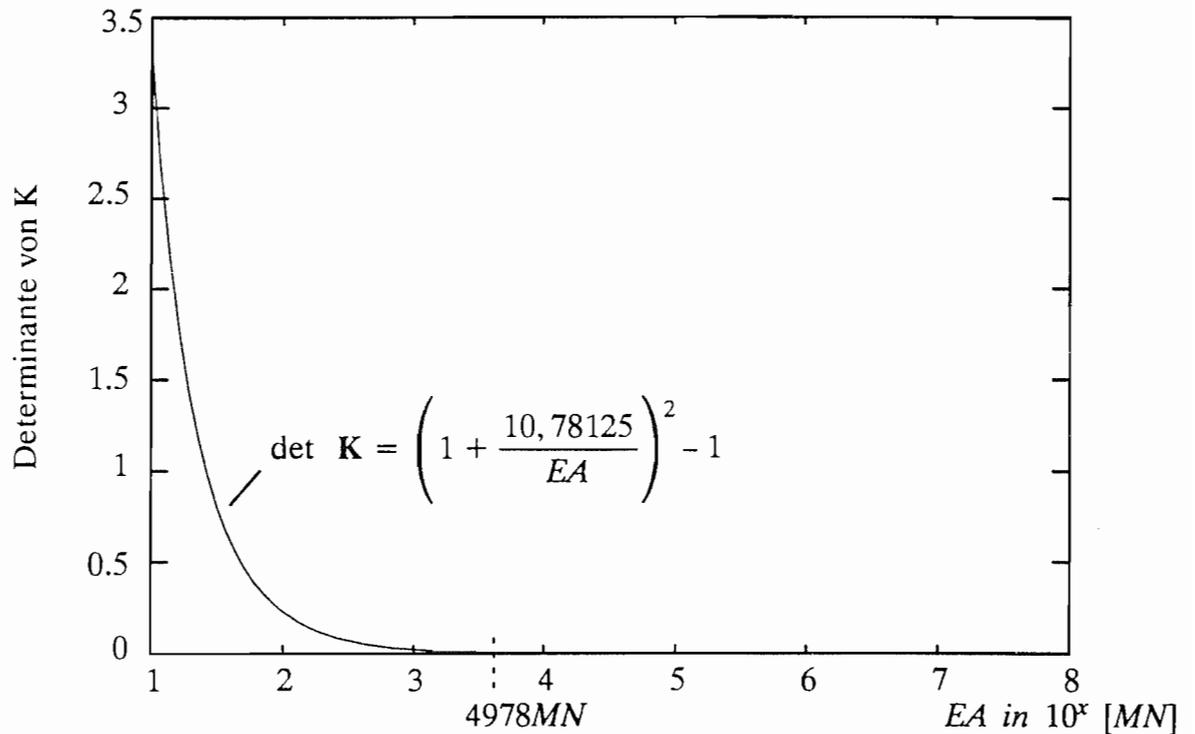
$$k^R = \begin{bmatrix} \frac{EA^R}{l} & -\frac{EA^R}{l} \\ -\frac{EA^R}{l} & \frac{EA^R}{l} \end{bmatrix}$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix, mit  $\frac{l}{EA^R}$  durchmultipliziert :

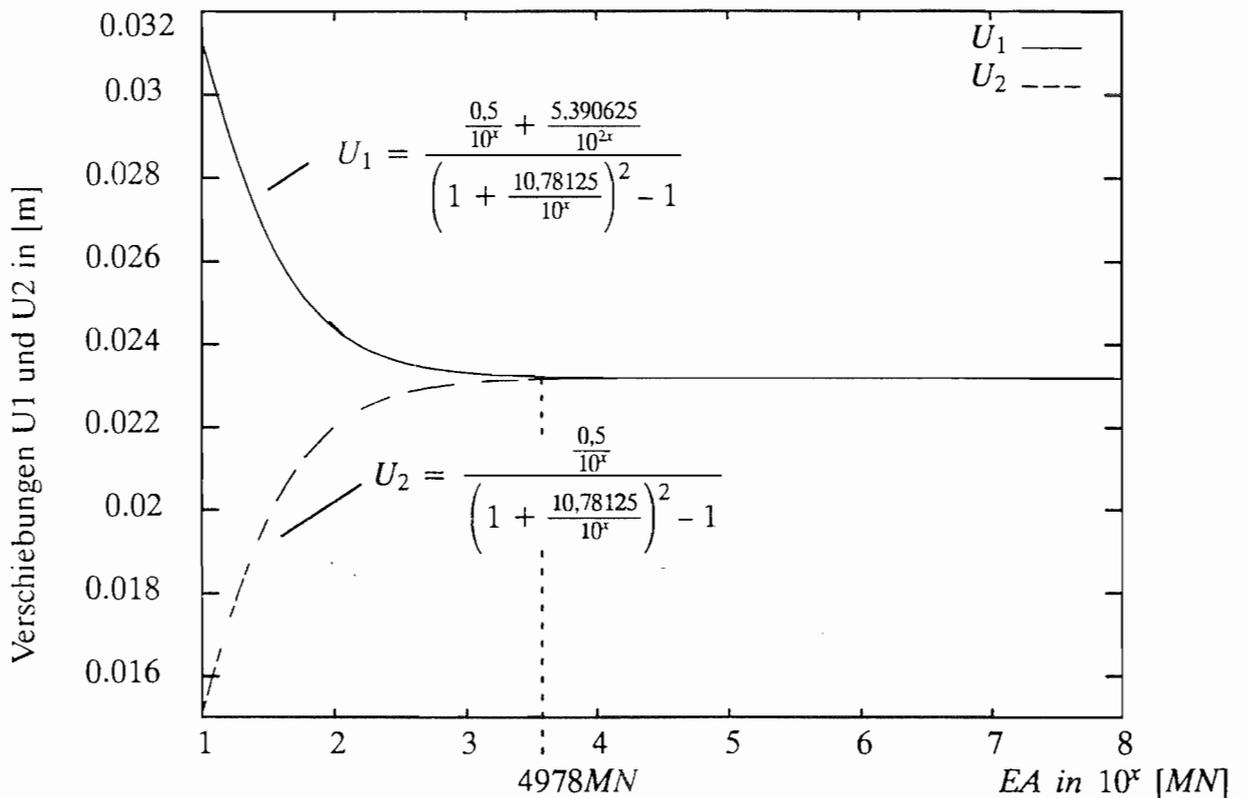
$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{EI^S}{EA^R} \frac{3l}{h^3} & -1 \\ -1 & 1 + \frac{EI^S}{EA^R} \frac{3l}{h^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05 \frac{l}{EA^R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K} \quad \mathbf{V} \quad = \quad \mathbf{\bar{P}}$

Determinante der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  für  $EI^S = \text{konst} = 23 \text{ MNm}^2$  und  $EA^R = 10^x \text{ MN}$ :



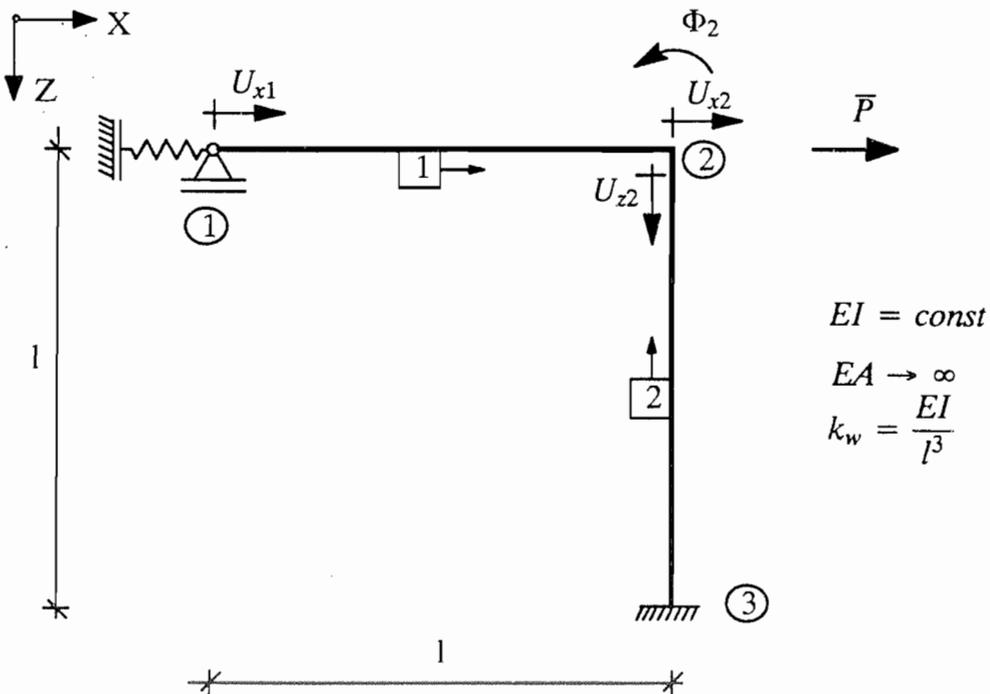
Verschiebungen  $U_1$  und  $U_2$  für  $EI^S = \text{konst} = 23 \text{ MNm}^2$  und  $EA^R = 10^x \text{ MN}$ :



- Folgerung: 1. Durch kinematische Kopplung: Rechenzeiterparnis  
2. Numerische Instabilität für  $\det \mathbf{K} \rightarrow 0$

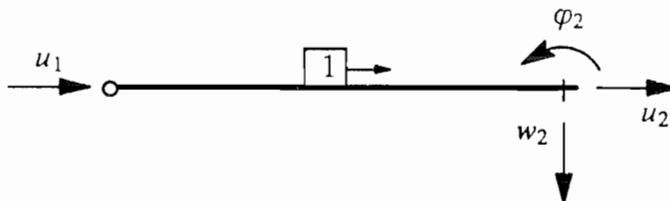
Vorgehen bei der Berechnung: Einbau der kinematischen Abhängigkeiten auf Elementebene

Statisches System :



Elementsteifigkeiten :

Stab 1 :



$$u_1 = u_2 \quad \text{wegen} \quad EA \rightarrow \infty$$

$$w_2 = 0 \quad \text{wegen} \quad EA \rightarrow \infty$$

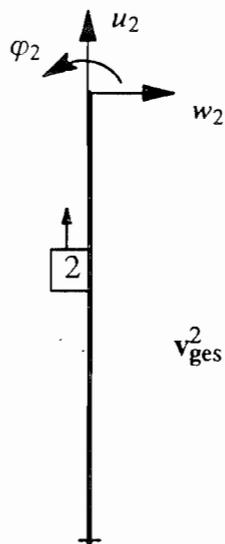
$$\mathbf{v}_{\text{ges}}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^1 \cdot \mathbf{v}_{\text{red}}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{x1} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } u_1 \hat{=} U_{x1} \\ \text{mit } \varphi_2 \hat{=} \Phi_2 \end{array}$$

Streichen der EA-Terme in der Elementsteifigkeit  $\mathbf{k}^1$ :

$$\mathbf{k}^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_{\text{red}}^1 = \mathbf{R}^{1T} \mathbf{k}^1 \mathbf{R}^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} U_{x1} & \Phi_2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3EI}{l} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Stab 2:



$$u_2 = 0 \quad \text{wegen} \quad EA \rightarrow \infty$$

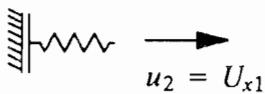
$$\mathbf{v}_{\text{ges}}^2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^2 \cdot \mathbf{v}_{\text{red}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{x1} \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } w_2 \hat{=} U_{x1} \\ \text{mit } \varphi_2 \hat{=} \Phi_2 \end{array}$$

Streichen der EA-Terme in der Elementsteifigkeit  $k^2$ :

$$k^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hline 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$k^2_{\text{red}} = R^{2T} k^2 R^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} U_{x1} & \Phi_2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hline \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

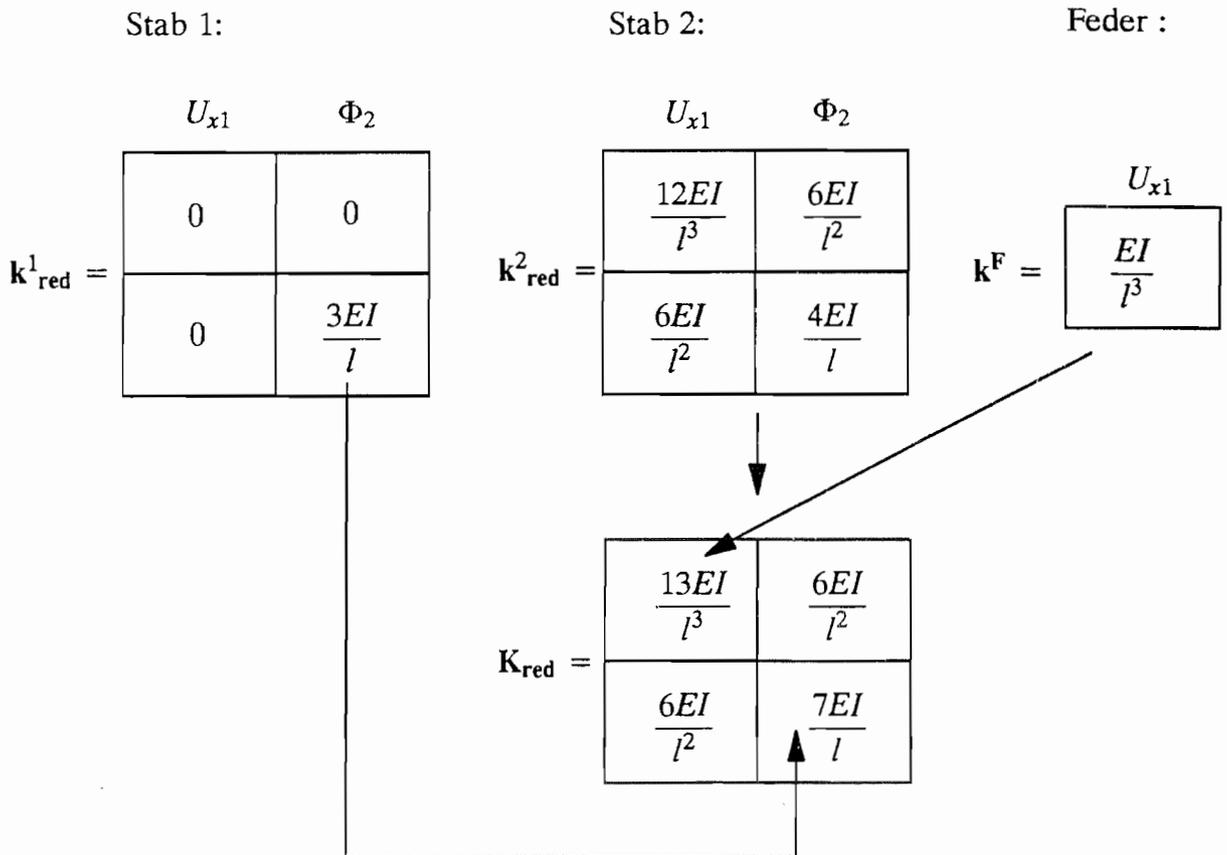
Feder :



$$u_2 = U_{x1}$$

$$k^F = \boxed{\frac{EI}{l^3}}$$

Aufstellen der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den reduzierten Elementsteifigkeiten :



Aufstellen des Knotenlastvektors :

$\bar{P}$  wirkt an Ort und in Richtung von  $U_{x2}$ . Wegen  $U_{x2} = U_{x1}$  ist somit die Platzierung von  $\bar{P}$  im Knotenlastvektor festgelegt.

$U_{x2} = U_{x1}$  wegen  $EA \rightarrow \infty$

$$\bar{\mathbf{P}}^* = \begin{bmatrix} \bar{P} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots U_{x1} \\ \dots \Phi_2 \end{matrix}$$

Aufstellen und Lösen des reduzierten Gleichungssystems :

$$\begin{bmatrix} \frac{13EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{7EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}_{red} \quad \mathbf{V}_{red} \quad \bar{\mathbf{P}}_{red}$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_{red} = \begin{bmatrix} \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ \frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

Nachlaufrechnung :

Wegen  $EA \rightarrow \infty$  wurden in den Elementsteifigkeiten alle EA-Terme gestrichen. Aus diesem Grund ist es jetzt auch nicht möglich, mit Hilfe der Elementsteifigkeiten die Normalkräfte zu berechnen.

Zur Berechnung der Normalkräfte müssen Gleichgewichtsbedingungen am System und an den Knoten angestellt werden.

Stab 1 :

$$\mathbf{v}^1_{ges} = \mathbf{R}^1 \mathbf{v}^1_{red} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ \frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ 0 \\ -\frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

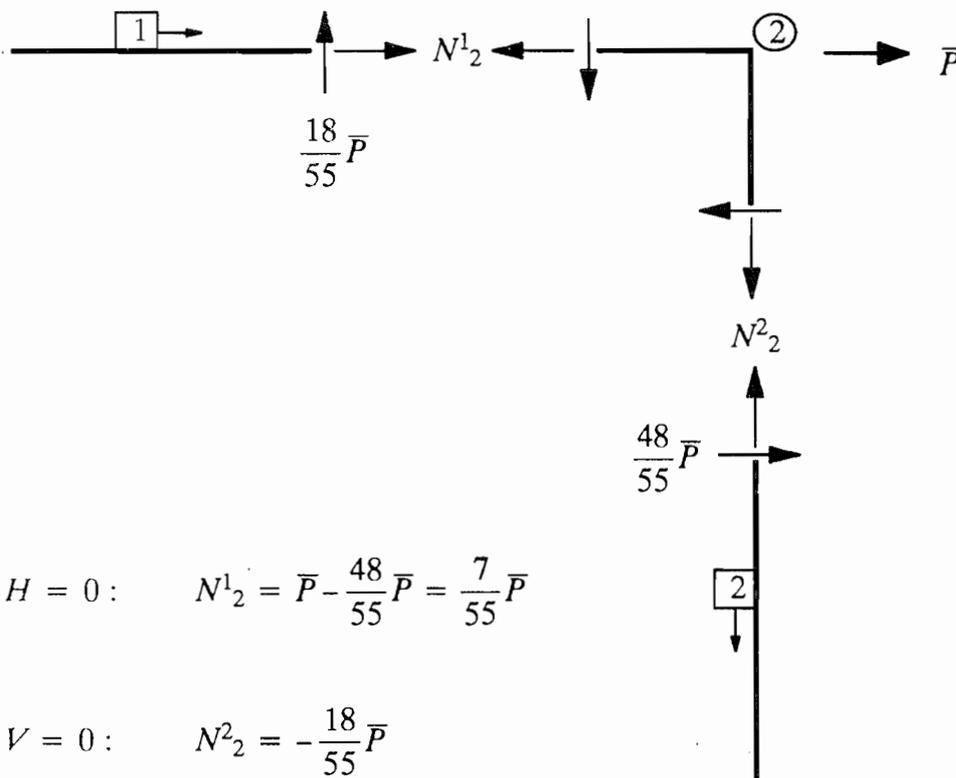
$$\begin{bmatrix} N^1_1 \\ N^1_2 \\ Q^1_2 \\ M^1_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{EA}{l}} & \cancel{-\frac{EA}{l}} & 0 & 0 \\ \cancel{-\frac{EA}{l}} & \cancel{\frac{EA}{l}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ 0 \\ -\frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{18}{55} \bar{P} \\ -\frac{18}{55} \bar{P} l \end{bmatrix} \quad (\text{VZ II})$$

Stab 2 :

$$\mathbf{v}_{\text{ges}}^2 = \mathbf{R}^2 \mathbf{v}_{\text{red}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ -\frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ -\frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_2^2 \\ Q_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7 l^3 \bar{P}}{55 EI} \\ -\frac{6 l^2 \bar{P}}{55 EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{48}{55} \bar{P} \\ \frac{18}{55} \bar{P} l \end{bmatrix} \quad (\text{VZ II})$$

Gleichgewicht am Knoten 2 zur Berechnung der Normalkräfte:



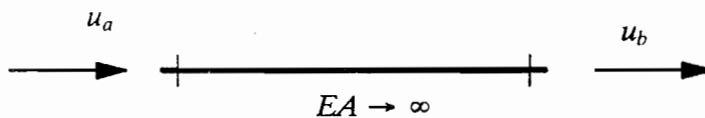
$$\sum H = 0: \quad N_1^2 = \bar{P} - \frac{48}{55} \bar{P} = \frac{7}{55} \bar{P}$$

$$\sum V = 0: \quad N_2^2 = -\frac{18}{55} \bar{P}$$

### 5.7.5 Verschiedene Arten der kinematischen Kopplung

#### 1. Fall : $EA \Rightarrow \infty$

Ein dehnstarrer Stab koppelt die Längsverschiebungen an den Stabenden:

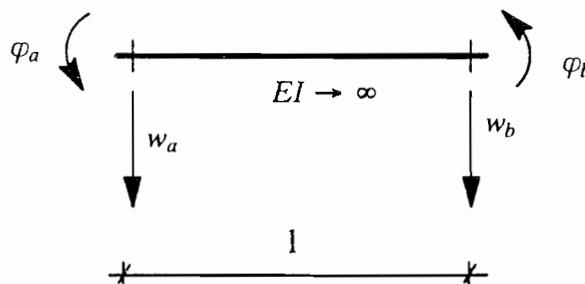


$$\Rightarrow u_a = u_b$$

Starrkörper-Verschiebung

#### 2. Fall : $EI \Rightarrow \infty$

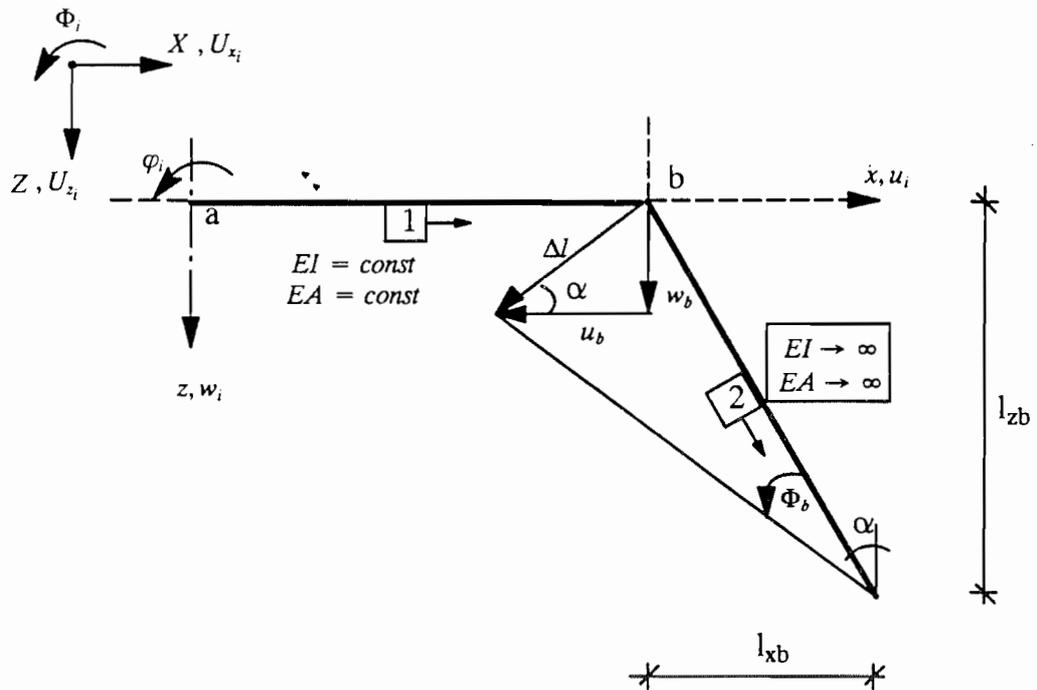
Ein biegestarrer Stab koppelt die Querverschiebungen an den Stabenden mit den Knotenverdrehungen an den Stabenden :



$$\Rightarrow \varphi_a = \varphi_b = -\frac{(w_b - w_a)}{l}$$

Starrkörper-Verdrehung

3. Fall : schräger Stab mit  $EI \rightarrow \infty, EA \rightarrow \infty$



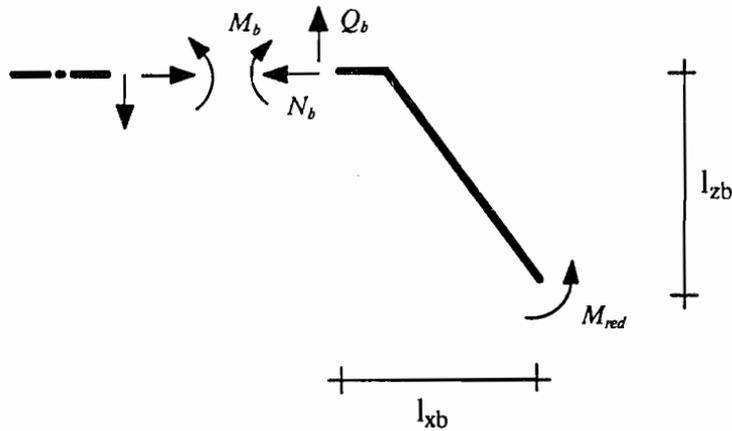
$$\Delta l \equiv l \cdot \Phi_b$$

$$u_b = -\Delta l \cos \alpha = -l \Phi_b \frac{l_{zb}}{l} = -l_{zb} \Phi_b$$

$$w_b = +\Delta l \sin \alpha = +l \Phi_b \frac{l_{xb}}{l} = +l_{xb} \Phi_b$$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ w_a \\ \phi_a \\ u_b \\ w_b \\ \phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -l_{zb} \\ 0 & 0 & 0 & l_{xb} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ W_a \\ \Phi_a \\ \Phi_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{R}^1 \cdot \mathbf{v}_{red}^1$$



$$M_{red} = M_b + l_{xb} Q_b - l_{zb} N_b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_{zb} & l_{xb} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \\ N_b \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \\ M_{red} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{1T} \cdot \mathbf{p}^1 = \mathbf{p}_{red}^1$$

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{R}^1 \cdot \mathbf{v}_{red}^1 \quad \mathbf{R}^{1T} \cdot \mathbf{p}^1 = \mathbf{p}_{red}^1$$

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{k}^1 \mathbf{v}^1 + \bar{\mathbf{p}}^1$$

$$\mathbf{p}_{red}^1 = \mathbf{R}^{1T} \cdot \mathbf{p}^1 = \mathbf{R}^{1T} \cdot \mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{v}^1 + \mathbf{R}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{p}}^1$$

$$\mathbf{p}_{red}^1 = \underbrace{\mathbf{R}^{1T} \cdot \mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{R}^1}_{\mathbf{k}_{red}^1} \cdot \mathbf{v}_{red}^1 + \mathbf{R}^{1T} \cdot \bar{\mathbf{p}}^1$$

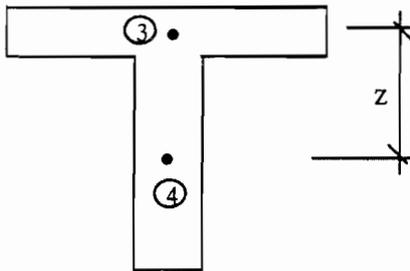
Formelzusammenstellung:

$$\mathbf{k}_{red}^i = \mathbf{R}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{R}^i$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{red}^i = \mathbf{R}^{iT} \bar{\mathbf{p}}^i$$

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{v}_{red}^i$$

4. Fall : starrer Hebelarm am Beispiel des Plattenbalkens



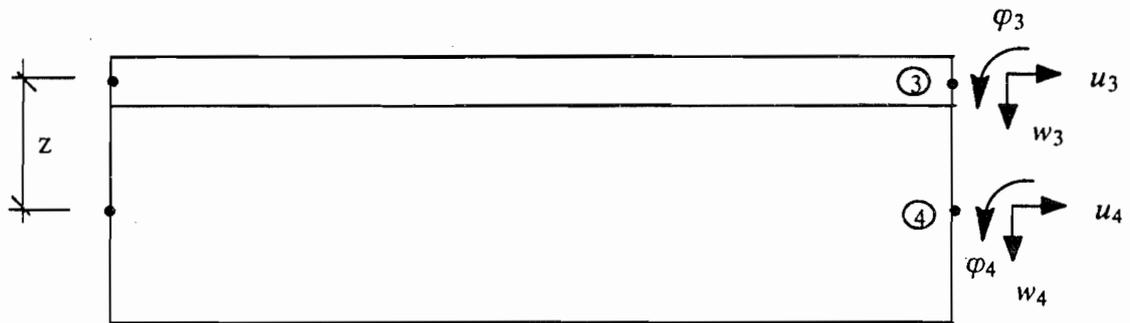
unabhängige Freiheitsgrade :  $[u_3, w_3, \varphi_3]$

abhängige Freiheitsgrade :  $[u_4, w_4, \varphi_4]$

$$u_4 = u_3 + z \cdot \varphi_3$$

$$w_4 = w_3$$

$$\varphi_4 = \varphi_3$$



lineare Transformation :

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

5.7.8

5.7.4

5.7.5 Statistische Kondensation (Anfedern)

Zur Reduktion von Freiheitsgraden

≅ systematisches Lösen des Gleichungssystems

Ersetzen eines Stabes durch Ersatzfedern



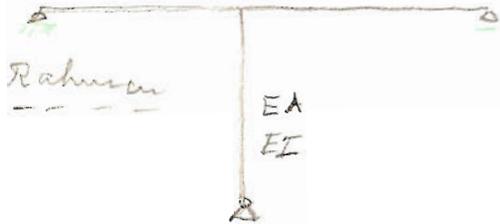
$$M_a = \frac{EI}{l} (4\psi_a + 2\psi_b + 6\psi)$$

$$M_a = \frac{EI}{l} (3\psi_a + 3\psi)$$

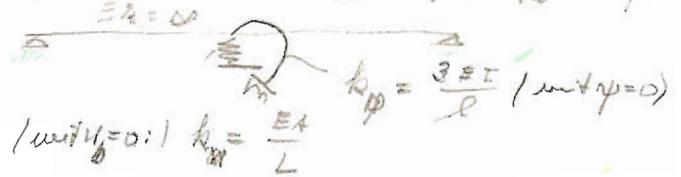
$$\epsilon_2 = 0$$

$$k_{\psi} = \frac{3EI}{l} \quad (\text{mit } \psi=0)$$

$$(\text{mit } \psi=0) \quad k_{\psi} = \frac{EA}{L}$$



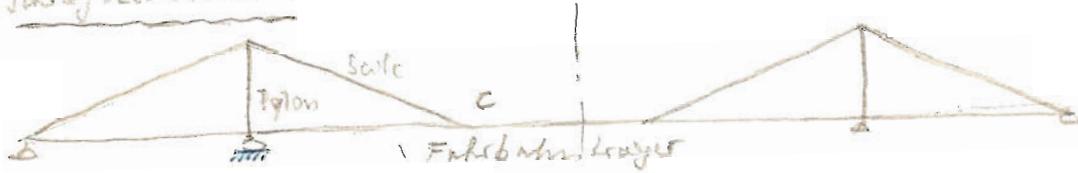
⇒



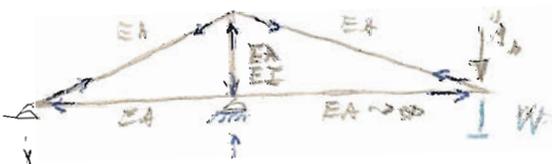
Ersetzen eines Stabes

zu 5.7.6 Aufedern, statische Kondensation durch Federn

Schrägschubbrücke:



→ Ersetzen des Schubgestells der Seite und des Pylons durch vertikale Federn



$$F_c = k_c w_c$$

$$k_c w_c = 1$$

$$k_c = 1/w_c$$

Ersatzfeder = Steifigkeit

$w_c$  aus  
Knotenverschiebung

„Koppelfedern“:

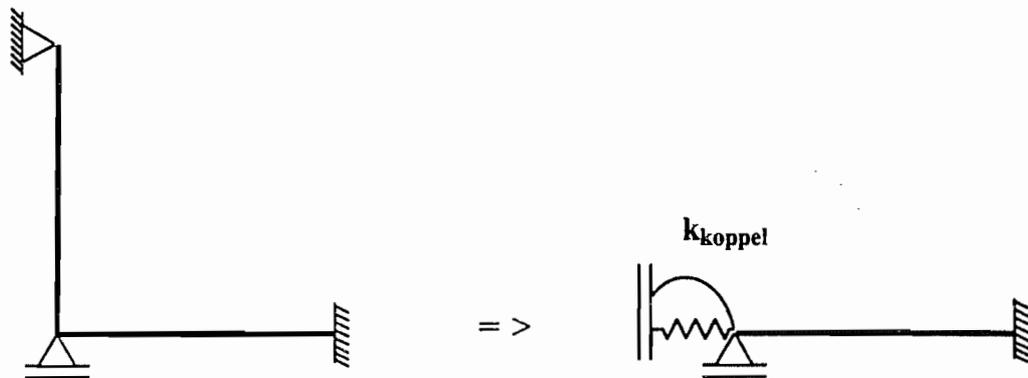


⇓



wird als Einzelfedern im idealisierten

### 5.7.6 Anfedern, statische Kondensation



Ersetzen eines Tragwerkteils durch eine Koppelfeder.

### 5.7.7 Substrukturtechnik ( Tafelanschieb )

Zu 6: spezielle Tragwerke

große  
Index

Tragwerk	Weg- und Kraftgrößen		in „Zusammenstellung von Berechnungsunkertypen $\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{U}, \mathcal{U}$ “	
	lokal		global	
Fachwerk eben --- Türmchen 6.1	$u$	$N$	$u_x$ $u_z$ $u_x$ $u_y$ $u_z$	$F_x$ $F_z$ $F_x$ $F_y$ $F_z$
Träger auf elastischer Bettung 6.2	$w$ $\varphi$	$Q$ $M$	$u_z$ $\phi_y$	$F_z$ $M_y$
Ebene Rahmen 6.3	$u$ $w$ $\varphi$	$N$ $Q$ $M$	$u_x$ $u_z$ $\phi_y$	$F_x$ $F_z$ $M_y$
Trägerrost 6.4	$w$ $\varphi$ $\alpha$	$Q$ $M$ $M_x$	$u_z$ $\phi_y$ $\phi_x$	$F_z$ $M_y$ $M_x$
Bogen 6.5	$u$ $w$ $\varphi$	$N$ $Q$ $M$	$u_x$ $u_z$ $\phi_y$	$F_x$ $F_z$ $M_y$
Ringträger 6.6	$w$ $\varphi$ $\alpha$	$Q$ $M$ $M_r$	$u_z$ $\phi_y$ $\phi_x$	$F_z$ $M_y$ $M_x$
Räumliches Rahmen 6.7	$u$ $u$ $w$ $\varphi_x$ $\varphi_y$	$N$ $Q_y$ $Q_z$ $M_x$ $M_y$	$u_x$ $u_y$ $u_z$ $\phi_x$ $\phi_y$	$F_x$ $F_y$ $F_z$ $M_x$ $M_y$

Kap. 1, S. 3-5

Kap. 2, S. 6-12

Kap. 3, S. 15-18

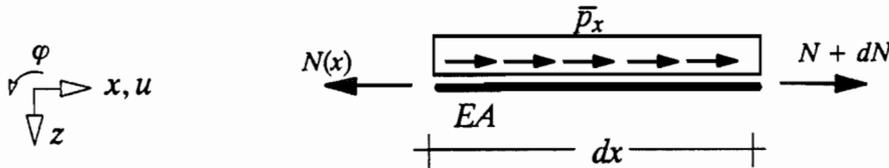
Kap. 19, S. 19-33

## 6. Spezielle Tragsysteme

### 6.1 Ebene Fachwerke

#### 6.1.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :



$$\bar{p}_x = -\frac{dN}{dx} \quad ; \quad N = EA (u' - \bar{\epsilon})$$

Dgl. :  $(EA u')' + \bar{p}_x - (EA \bar{\epsilon})' = 0$   
(Lösung der Differentialgleichung siehe Baustatik 1/2)

PvV. :  $\int_{(l)} \delta u' EA u' dx - \int_{(l)} [\delta u \bar{p}_x + \delta u' EA \bar{\epsilon}] dx + [\delta u(x) N(x)]_0^l = 0$   
(p, k, v siehe Zusammenstellung von Ber.-unterlagen Baustatik 3/4)

Besonderheiten bei der Modellbildung bei Fachwerksystemen :

Beim idealen Fachwerk wird davon ausgegangen, daß alle Stäbe gelenkig an den Knoten angeschlossen sind. Für die konstruktive Ausbildung gilt allerdings :

- Die Gurte von Fachwerksystemen werden in der Regel durchlaufend ausgebildet.
- Die Anschlüsse der Stäbe an den Knoten von Fachwerken sind in der Regel weder gelenkig noch starr. Sie sind je nach Art der Verbindungsmittel mehr oder weniger nachgiebig. Es entstehen sogenannte 'Nebenspannungen'.

Verfahren zur Berechnung von Fachwerken :

- Statisch bestimmte Fachwerke : mittels Gleichgewichtsgleichungen  
(→ Ritter'sches Schnittverfahren; → Baustatik 1/2)
- Weggrößenverfahren  
(→ Baustatik 3/4 : Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen)
- Kraftgrößenverfahren (→ Baustatik 2)
- Näherungslösung:

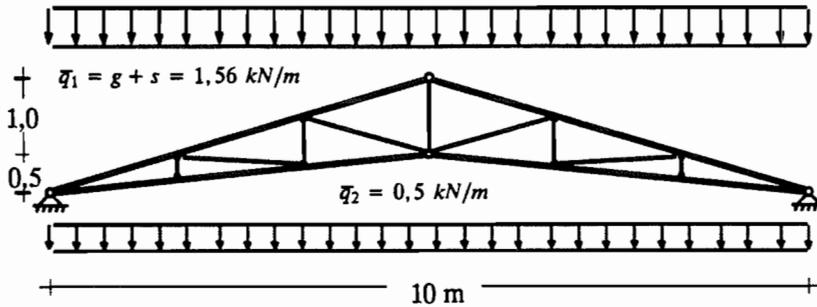
In den Gurten wird näherungsweise die durchlaufende Wirkung von der Fachwerkwirkung entkoppelt (Variante 2 in Abschnitt 6.1.2) :

- Berechnung der Normalkräfte über ein Gelenkfachwerk (Idealisierung)
- Berechnung der Momente in den Gurten am Modell des Durchlaufträgers

### 6.1.2 Beispiele zum Tragverhalten

#### Beispiel : Nagelbinder aus Holz :

(a) System :



$E = 10000 \text{ MN/m}^2$

Gurte :

$A = 0,05 * 0,15 \text{ m}^2$

Diagonalen, Pfosten :

$A = 0,05 * 0,10 \text{ m}^2$

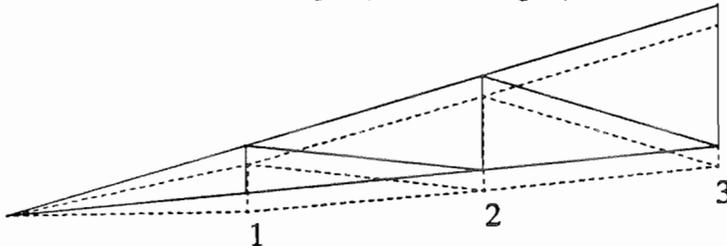
(b) Berechnungsmodelle :

Variante 1 : Berechnung mit durchlaufenden Gurten

Variante 2 : Berechnung der Normalkräfte am Gelenkfachwerk  
Berechnung der Momente am Durchlaufträger

(c) Berechnungsergebnisse (Darstellung am halben System) :

Verschiebungen (Stabsehnenfigur) :



———— unverformtes System

----- verformte Stabsehnen

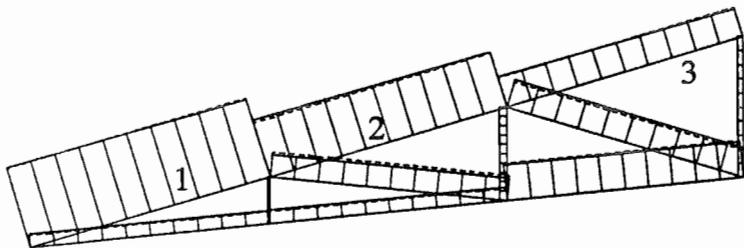
$w_1 = 4,36 \text{ mm}$        $w_1 = 4,43 \text{ mm}$

$w_2 = 4,99 \text{ mm}$        $w_2 = 4,88 \text{ mm}$

$w_3 = 4,80 \text{ mm}$        $w_3 = 4,75 \text{ mm}$

(Variante 1)      (Variante 2)

Normalkräfte :



———— durchlaufende Gurte  
(Variante 1)

$N_1 = -28,68 \text{ kN}$

$N_2 = -20,58 \text{ kN}$

$N_3 = -10,50 \text{ kN}$

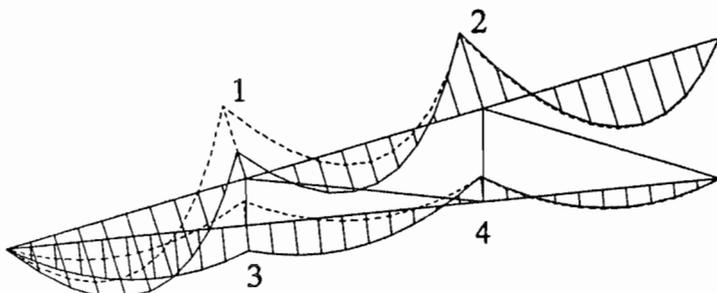
----- Gelenkfachwerk  
(Variante 2)

$N_1 = -28,42 \text{ kN}$

$N_2 = -19,46 \text{ kN}$

$N_3 = -10,50 \text{ kN}$

Momente :



———— durchlaufende Gurte  
(Variante 1)

$M_1 = -0,10 \text{ kNm}$

$M_2 = -0,45 \text{ kNm}$

$M_3 = +0,14 \text{ kNm}$

$M_4 = -0,15 \text{ kNm}$

----- unversch. Durchlaufträger  
(Variante 2)

$M_1 = -0,43 \text{ kNm}$

$M_2 = -0,43 \text{ kNm}$

$M_3 = -0,14 \text{ kNm}$

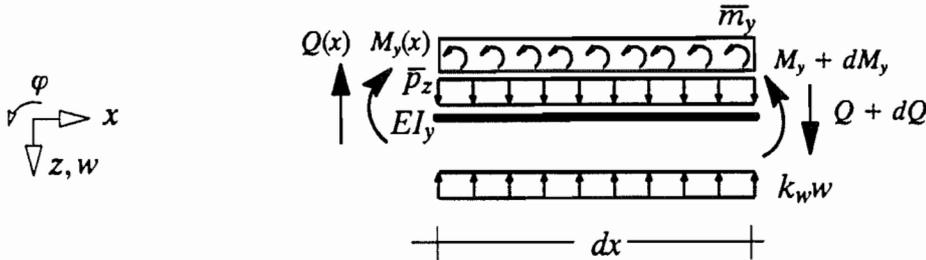
$M_4 = -0,14 \text{ kNm}$

## 6.2 Träger auf elastischer Bettung

### 6.2.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :

*Biegung um die lokale y-Achse :*



$$Q = \frac{dM_y}{dx} + \bar{m}_y \quad ; \quad \bar{p}_z = -\frac{dQ}{dx} + k_w w \quad ; \quad M_y = -EI_y (w'' + \bar{\kappa})$$

Dgl. :  $(EI_y w''')' + k_w w - \bar{p}_z - \bar{m}_y' + (EI_y \bar{\kappa})'' = 0$   
(Lösung der Differentialgleichung siehe Orlov, Saxenhofer [6.2 / 2] )

PvV. :  $\int_{(l)} [\delta w'' EI_y w'' + \delta w k_w w] dx - \int_{(l)} [\delta w \bar{p}_z - \delta w' \bar{m}_y - \delta w'' EI_y \bar{\kappa}] dx$   
 $- [\delta w(x) Q(x) - \delta w'(x) M_y(x)]_0^l = 0 \quad (\varphi = -w' , \kappa = -w'')$   
 (p, k, v siehe Avramidis [6.2 / 1], Saal, G., Saal, H. [6.2 / 4] )

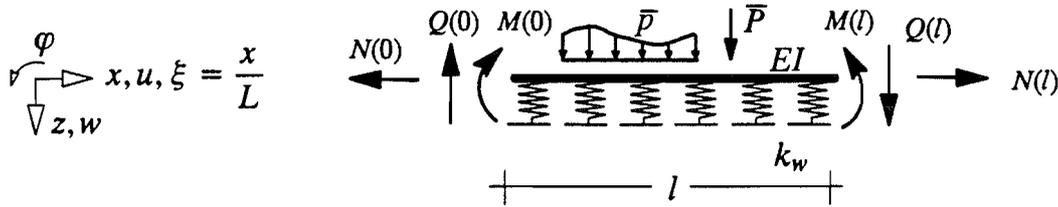
Verfahren zur Berechnung von Trägern auf elastischer Bettung :

- Analytische Verfahren : Kraftgrößenverfahren, Weggrößenverfahren, Übertragungsverfahren (siehe Avramidis [6.2 / 1], Saal, Saal [6.2 / 4] )
- Numerische Verfahren : Integration des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung (siehe Baustatik 3 : Übertragungsverfahren für spezielle Probleme), Methode der Finiten Elemente (siehe Duddeck, Ahrens [2.4 / 1] )
- Tafelwerke (siehe Wölfer [6.2 / 5] )

Anwendungsgebiete von Trägern auf elastischer Bettung :

- Berechnung von Gründungskörpern (Fundamentbalken, Fundamentplatten, Pfahlgründungen)
- Berechnung von Gleiskörpern (Eisenbahnoberbau)
- Berechnung von U-Bahn-Röhren, Brunnen, Schächten
- Anwendung auf Probleme mit analogem Aufbau der Differentialgleichungen (Querverteilung in Trägerrosten und Kastenträgern, Schalenberechnungen)

Lösungen für den nach einer bzw. nach beiden Seiten unendlich langen Träger



kennzeichnende Größen :

- $EI$  Biegesteifigkeit des gebetteten Trägers [Kraft \* Länge<sup>2</sup>]
- $l$  Länge des gebetteten Trägers [Länge]
- $k_w$  Bettungsmodul [Kraft/Länge<sup>2</sup>]
- $L = \sqrt[4]{4EI/k_w}$  charakteristische Länge des gebetteten Trägers [Länge]
- $l/L \geq 4 \rightarrow$  'langer' Balken (Lösungen siehe unten) [-]
- $l/L \leq 4 \rightarrow$  'kurzer' Balken [-]
- $\xi = \frac{x}{L}$  dimensionslose Koordinate [-]

analytische Lösungen für den 'langen' Träger :  $l/L \geq 4$

$L = \sqrt[4]{4EI/k_w}$

	$\lambda^* = \frac{a}{L}$				
	$\xi \geq \lambda^*$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$
$w(\xi)$	$\frac{-\bar{p} L^4}{8EI} (D_\xi - D_{\xi-\lambda^*})$	$\frac{\bar{P}}{2L k_w} A_\xi$	$\frac{-\bar{M}}{L^2 k_w} B_\xi$	$\frac{2\bar{P}}{L k_w} D_\xi$	$\frac{2\bar{M}}{L^2 k_w} C_\xi$
$\varphi(\xi)$	$\frac{-\bar{p} L^3}{8EI} (A_\xi - A_{\xi-\lambda^*})$	$\frac{\bar{P}}{L^2 k_w} B_\xi$	$\frac{\bar{M}}{L^3 k_w} C_\xi$	$\frac{2\bar{P}}{L^2 k_w} A_\xi$	$\frac{4\bar{M}}{L^3 k_w} D_\xi$
$Q(\xi)$	$\frac{\bar{p} L}{4} (C_\xi - C_{\xi-\lambda^*})$	$\frac{-\bar{P}}{2} D_\xi$	$\frac{\bar{M}}{2L} A_\xi$	$-\bar{P} C_\xi$	$\frac{2\bar{M}}{L} B_\xi$
$M(\xi)$	$\frac{\bar{p} L^2}{4} (B_\xi - B_{\xi-\lambda^*})$	$\frac{\bar{P} L}{4} C_\xi$	$\frac{-\bar{M}}{2L} D_\xi$	$-\bar{P} L B_\xi$	$-\bar{M} A_\xi$
	beidseits unendlich langer Träger			einseitig unendl. langer T.	

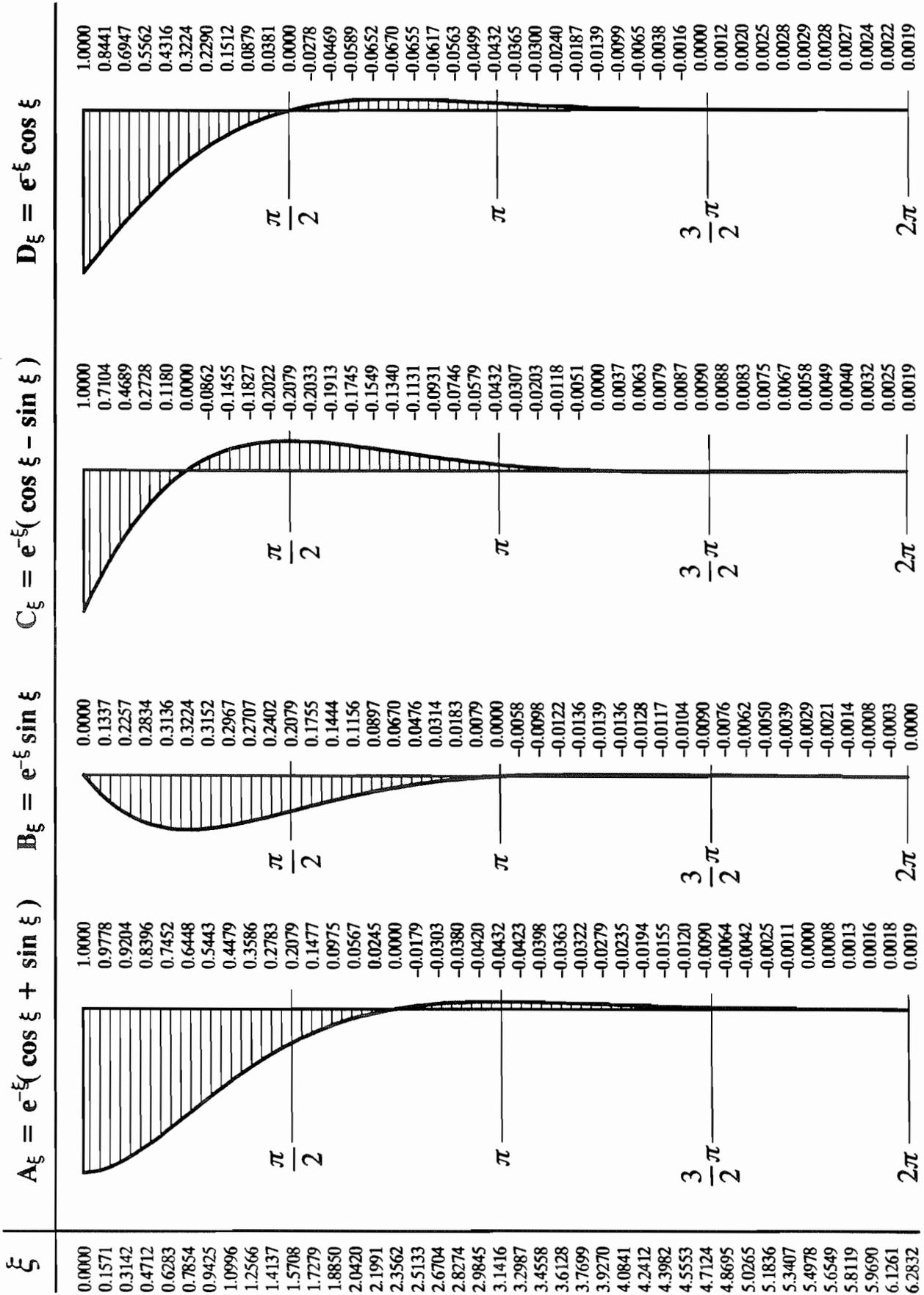
Hilfsfunktionen  $A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi$  :  $A_\xi = e^{-\xi}(\cos \xi + \sin \xi)$        $B_\xi = e^{-\xi} \sin \xi$

$C_\xi = e^{-\xi}(\cos \xi - \sin \xi)$        $D_\xi = e^{-\xi} \cos \xi$

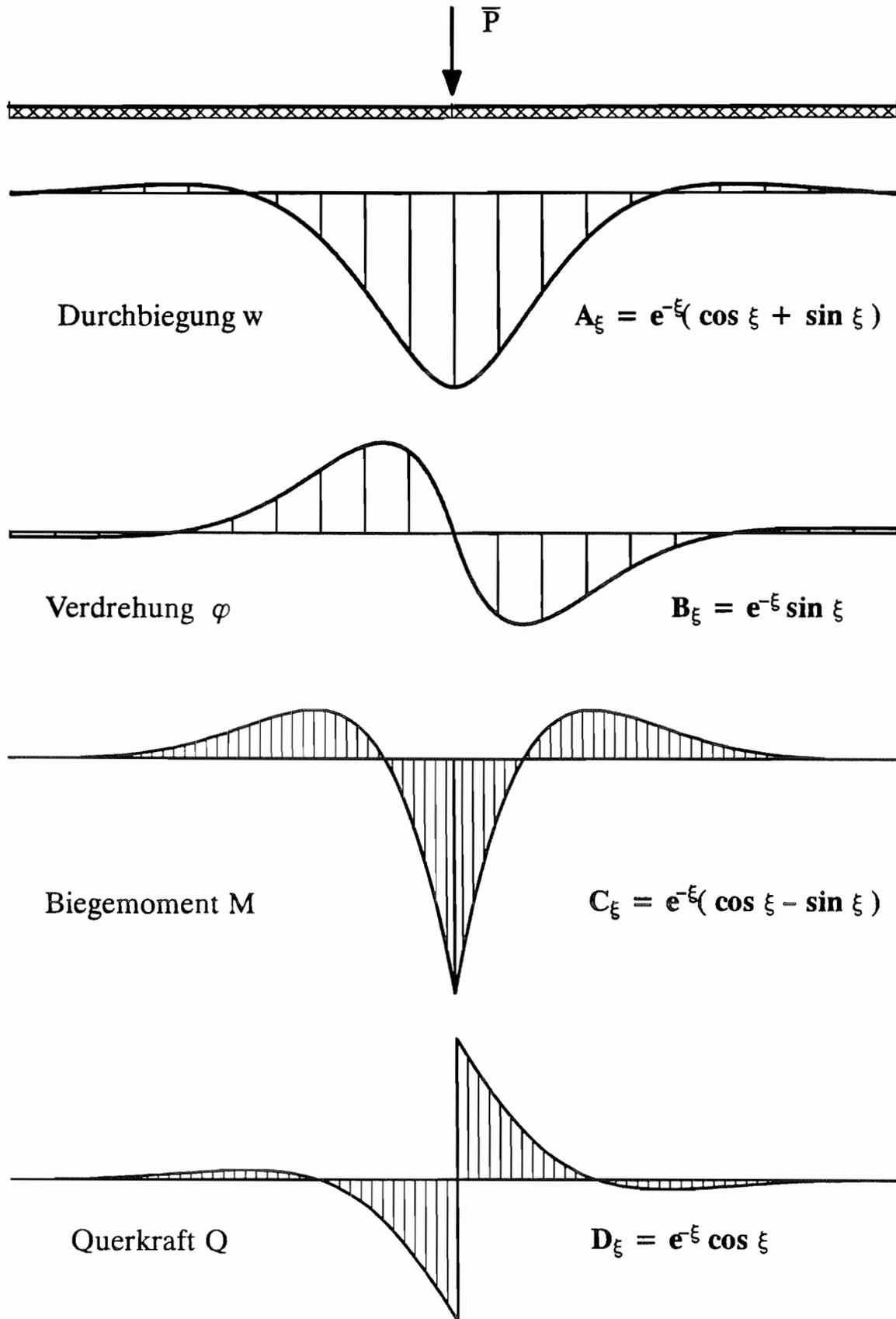
Lösung für den unendlich langen Träger unter Gleichlast  $\bar{p}$  :

$w(\xi) = \bar{p}/k_w, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad Q(\xi) = 0, \quad M(\xi) = 0$

Verlauf der Hilfsfunktionen  $A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi$  :

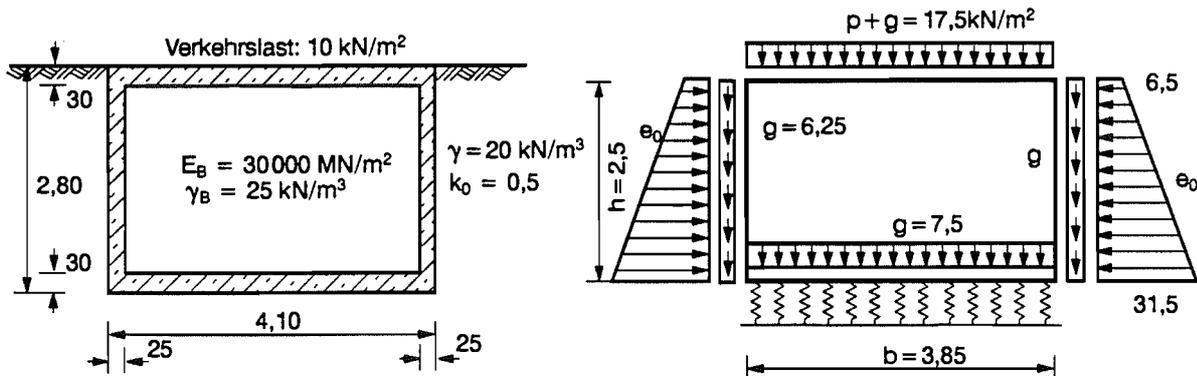


Verlauf der Zustandsgrößen eines unendlich langen Trägers mit einer Einzellast:



## 6.2.2 Beispiele zum Tragverhalten

### Beispiel Kanalquerschnitt :



#### (a) Modellbildung :

Bettungsmodul  $k_w$  : z.B. nach: Wölfer, Elastisch gebettete Balken und Platten

$k_w = 10 \text{ MN/m}^2$  fester Lehm oder Geschiebemergel  
 $k_w = 100 \text{ MN/m}^2$  dicht gelagerter Sand, Naturschotter

Maße:  $h = 2,80 - 2 \cdot 0,30/2 = 2,50 \text{ m}$   
 $b = 4,10 - 2 \cdot 0,25/2 = 3,85 \text{ m}$

Lasten: Riegel  $g = 0,30 \cdot 25 = 7,5 \text{ kN/m}^2$   
 $p = 10,0 \text{ kN/m}^2$

Stiele oben  $\sigma_z = 10 + 0,15 \cdot 20 = 13 \text{ kN/m}^2$   
 $e_o = K_0 \cdot \sigma_z = 0,5 \cdot 13 = 6,5 \text{ kN/m}^2$   
 unten  $\sigma_z = 13 + 2,5 \cdot 20 = 63 \text{ kN/m}^2$   
 $e_o = K_0 \cdot \sigma_z = 0,5 \cdot 63 = 31,5 \text{ kN/m}^2$   
 $g = 0,25 \cdot 25 = 6,25 \text{ kN/m}^2$

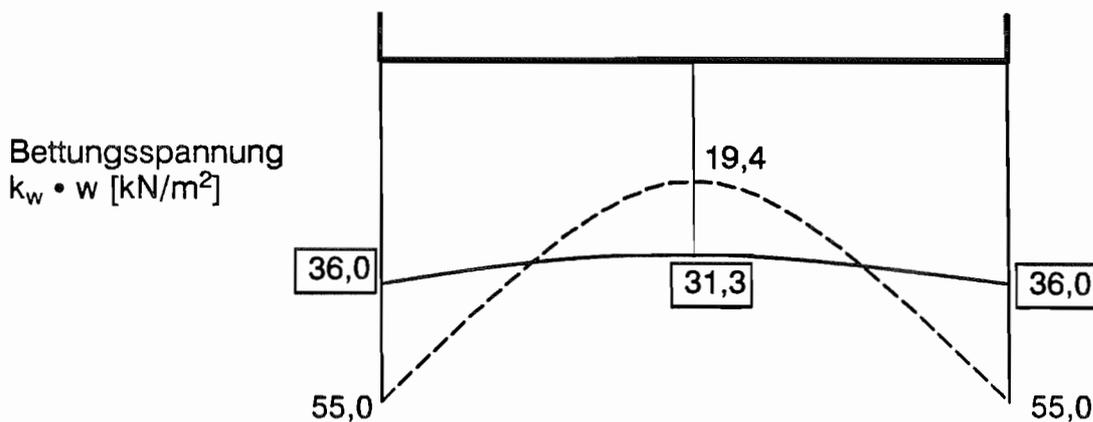
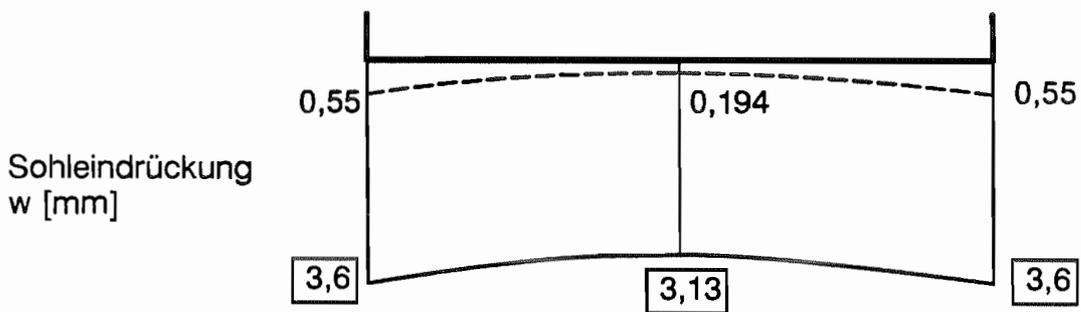
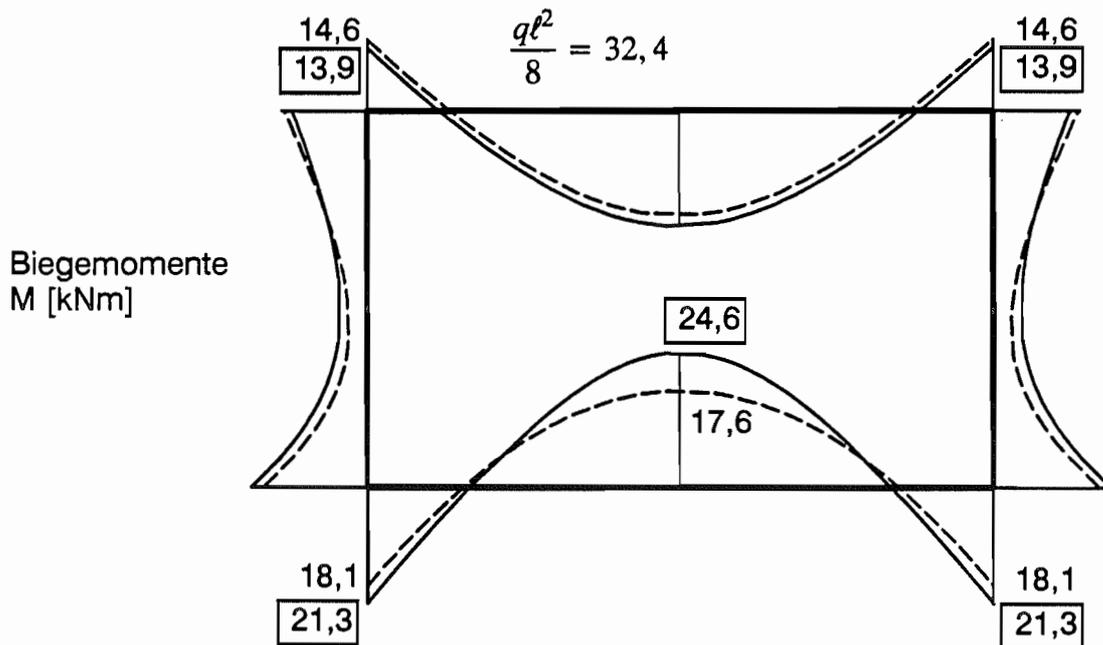
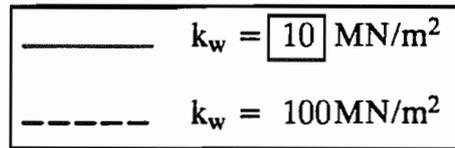
Steifigkeiten:  $EI_s = 30000 \cdot 0,25^3/12 = 39,1 \text{ MNm}^2/\text{m}$   
 $EI_r = 30000 \cdot 0,30^3/12 = 67,5 \text{ MNm}^2/\text{m}$

Bodenplatte: elastisch gebetteter Balken

$$\text{charakteristische Länge } L = \frac{1}{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{4 EI_r}{k_w}}$$

$k_w = 10$ :  $L = 2,28 \text{ m}$   $b/L = 3,85/2,28 = 1,69$   
 $k_w = 100$ :  $L = 1,28 \text{ m}$   $b/L = 3,85/1,28 = 3,00$

(b) Berechnungsergebnisse :



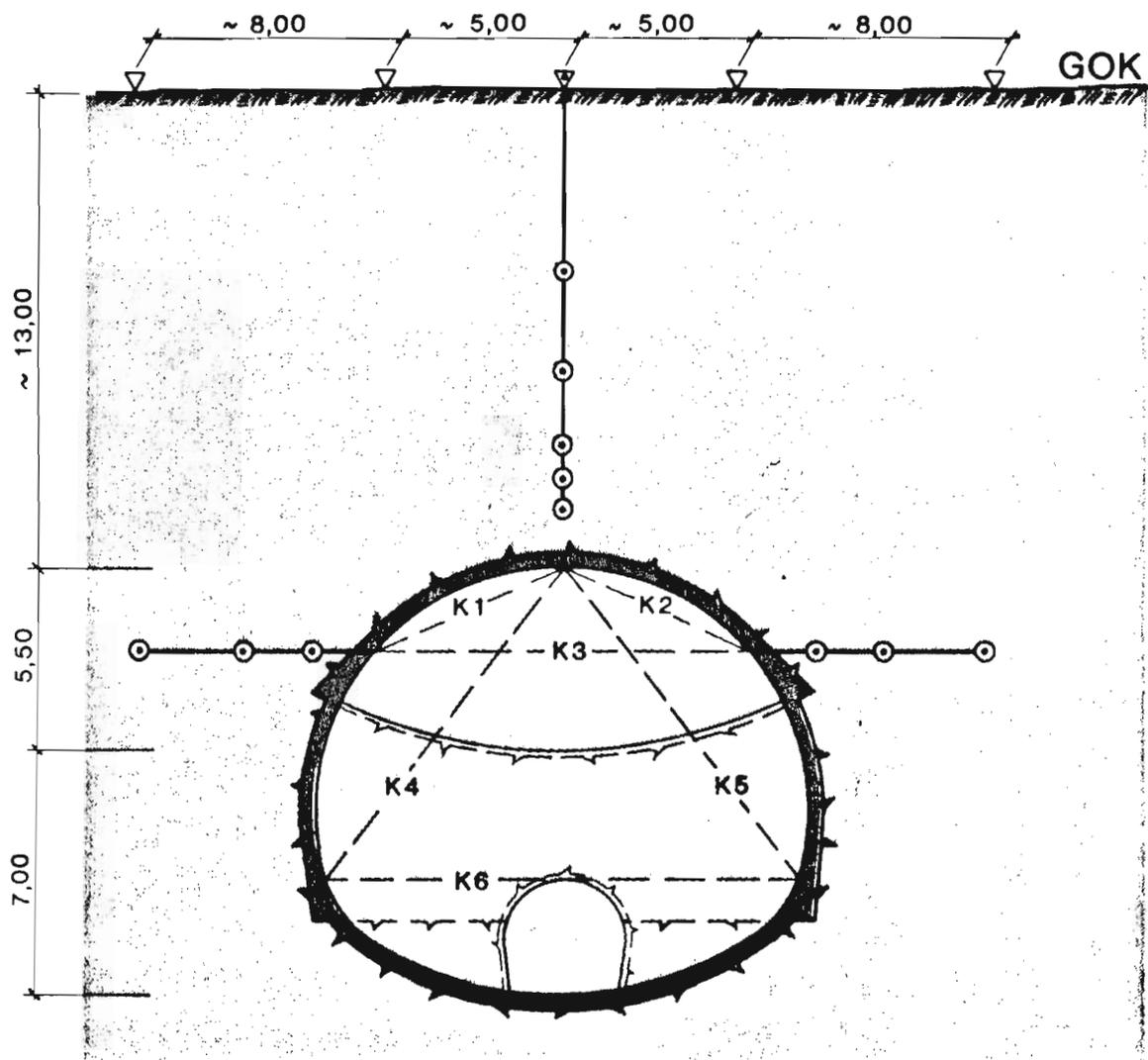


Bild 23: Meßquerschnitt im Großraum Mannheim.

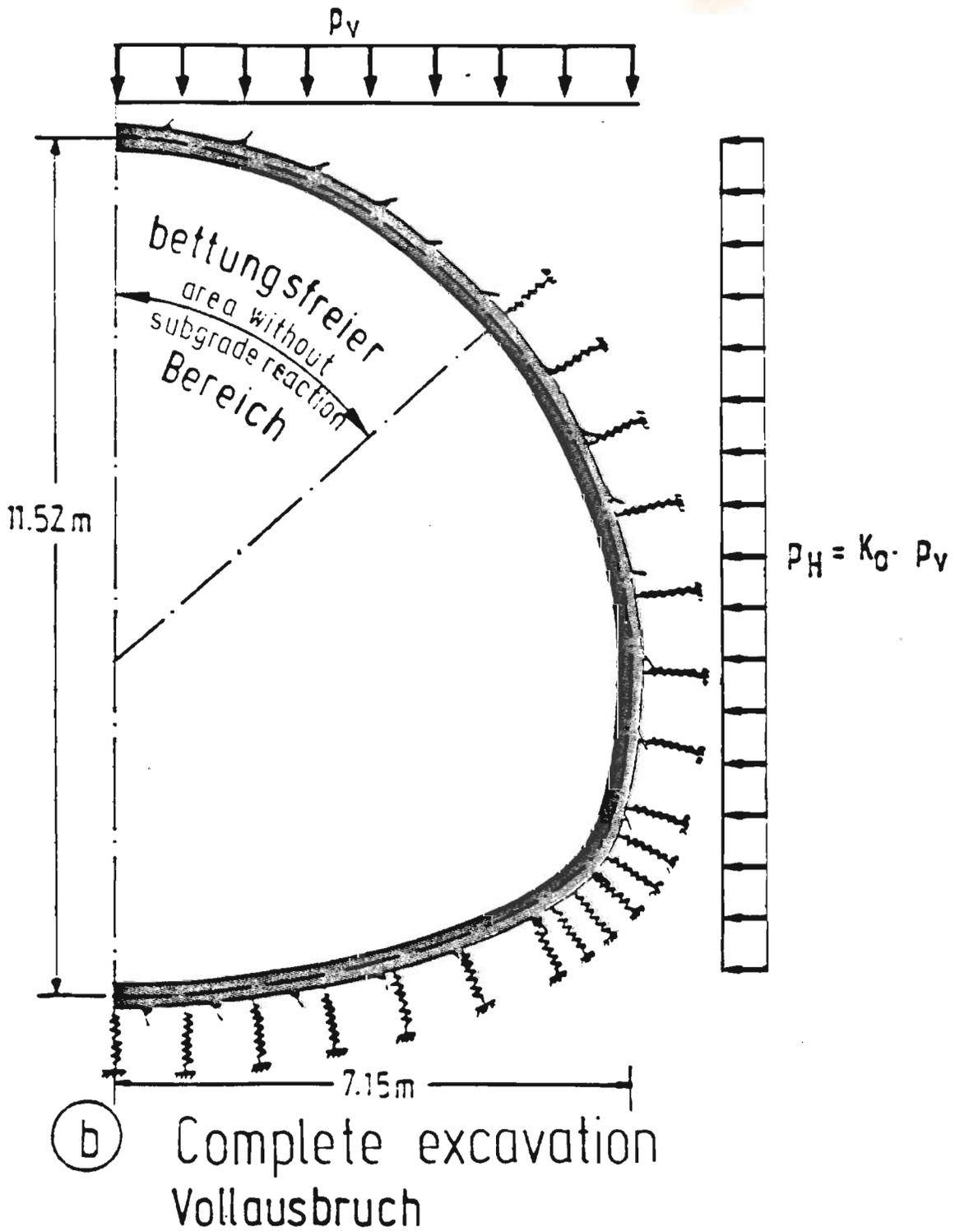
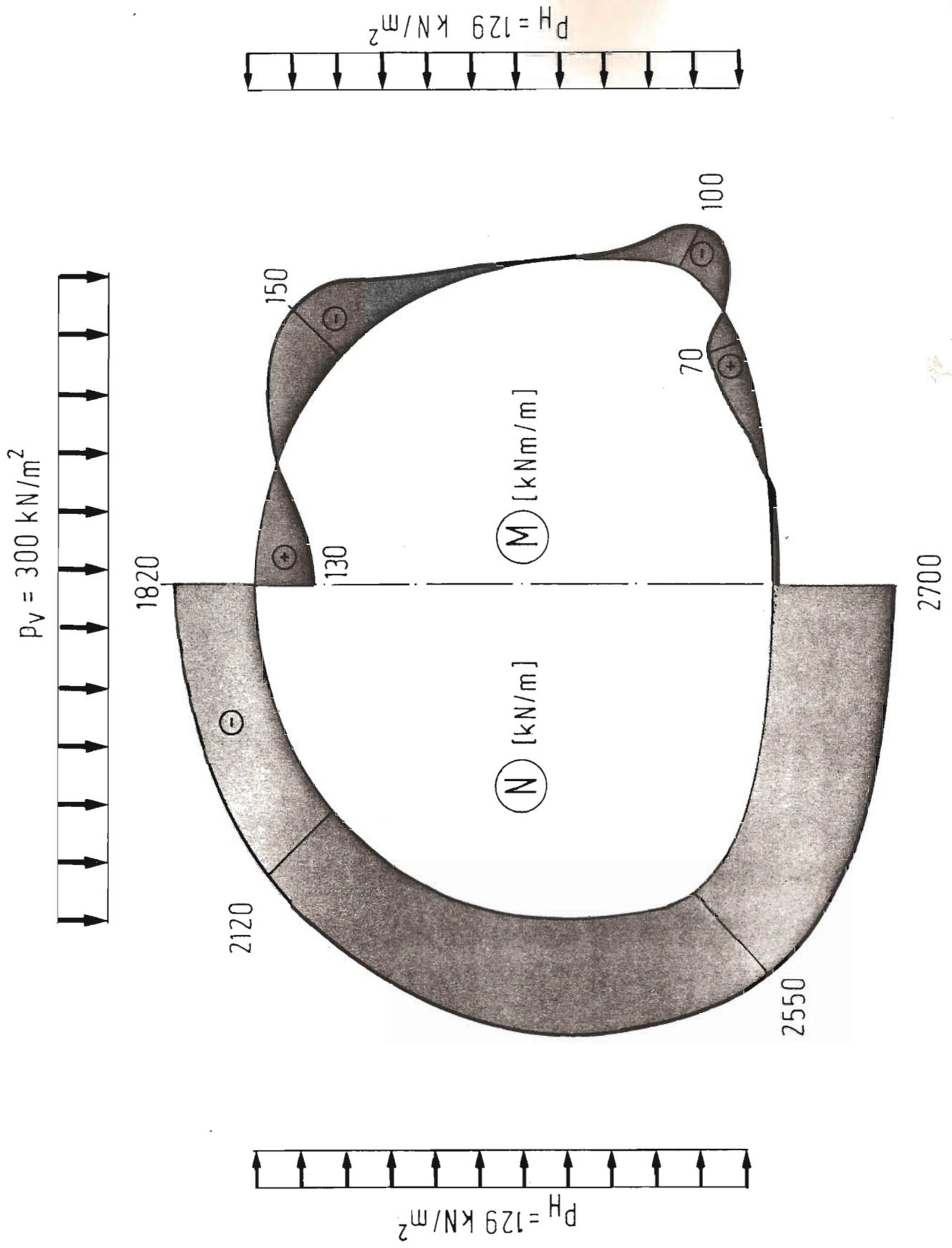


Bild 7: Berechnungen nach dem Bettungsmodulverfahren, statisches System.

Bild 9: Vollaussbruch: Nach dem Bettungsmodulverfahren ermittelte Schnittgrößen in der Außenschale.

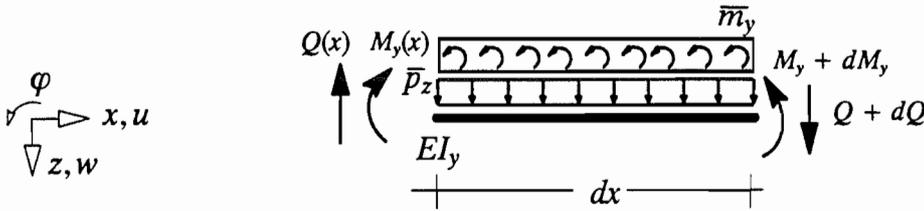


### 6.3 Ebene Rahmen

#### 6.3.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :

*Biegung um die lokale y-Achse :*



$$Q = \frac{dM_y}{dx} + \bar{m}_y \quad ; \quad \bar{p}_z = -\frac{dQ}{dx} \quad ; \quad M_y = -EI_y (w'' + \bar{\kappa})$$

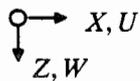
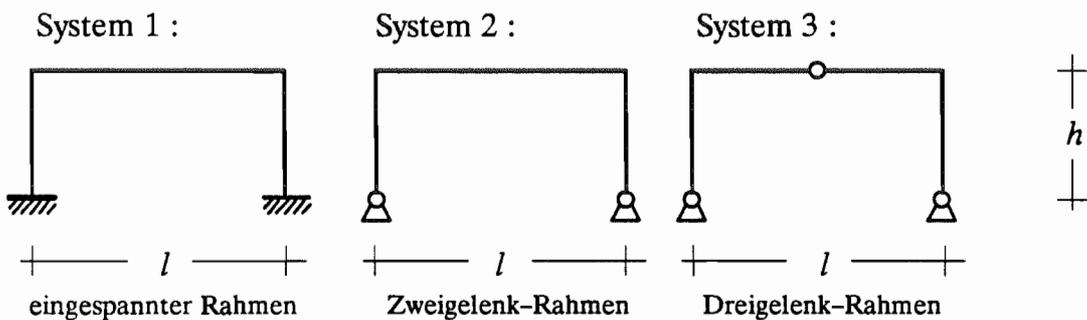
Dgl. :  $(EI_y w'')'' - \bar{p}_z - \bar{m}_y' + (EI_y \bar{\kappa})' = 0$   
(Lösung der Differentialgleichung siehe Baustatik 1/2)

PvV. :  $\int_{(l)} \delta w'' EI_y w'' dx - \int_{(l)} [\delta w \bar{p}_z - \delta w' \bar{m}_y - \delta w'' EI_y \bar{\kappa}] dx$   
 $- [\delta w(x) Q(x) - \delta w'(x) M_y(x)]_0^l = 0$  ( $\varphi = -w'$ ,  $\kappa = -w''$ )

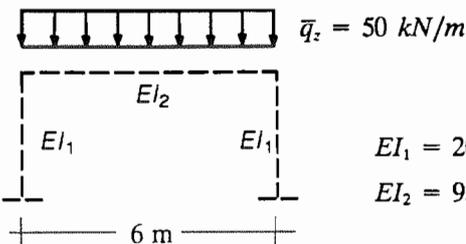
(p, k, v siehe Zusammenstellung von Ber.-unterlagen Baustatik 3/4)

#### 6.3.2 Beispiele zum Tragverhalten

Einfeldriger Rahmen : Auswirkungen verschiedener statischer Systeme :



Lastfall 1 :

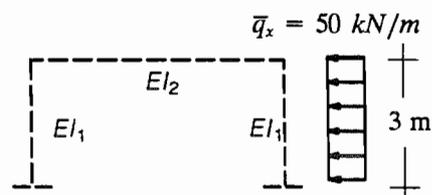


$$EI_1 = 20,25 \text{ MNm}^2$$

$$EI_2 = 93,75 \text{ MNm}^2$$

$$k = \frac{I_2 h}{l I_1} = 2,31$$

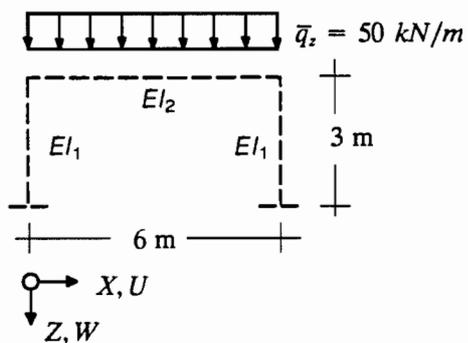
Lastfall 2 :



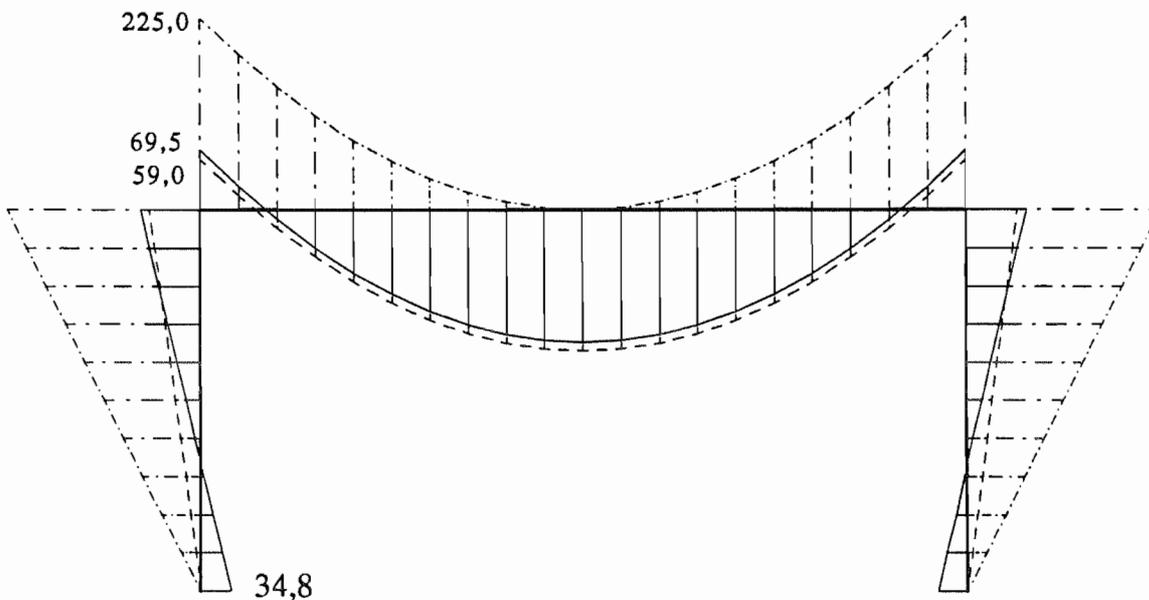
*Lastfall 1 :*

- eingespannter Rahmen
- - - - - Zweigelenk-Rahmen
- · - · - Dreigelenk-Rahmen

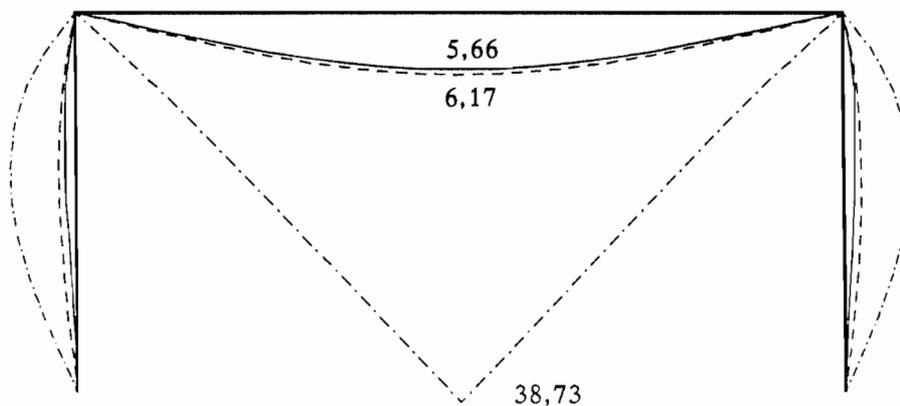
$$k = \frac{I_2 h}{I_1 l} = 2,31$$



Momente in [kNm] :



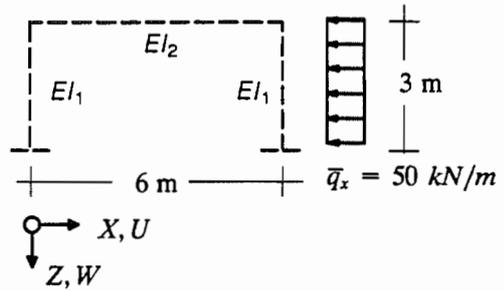
Biegelinien in [mm] :



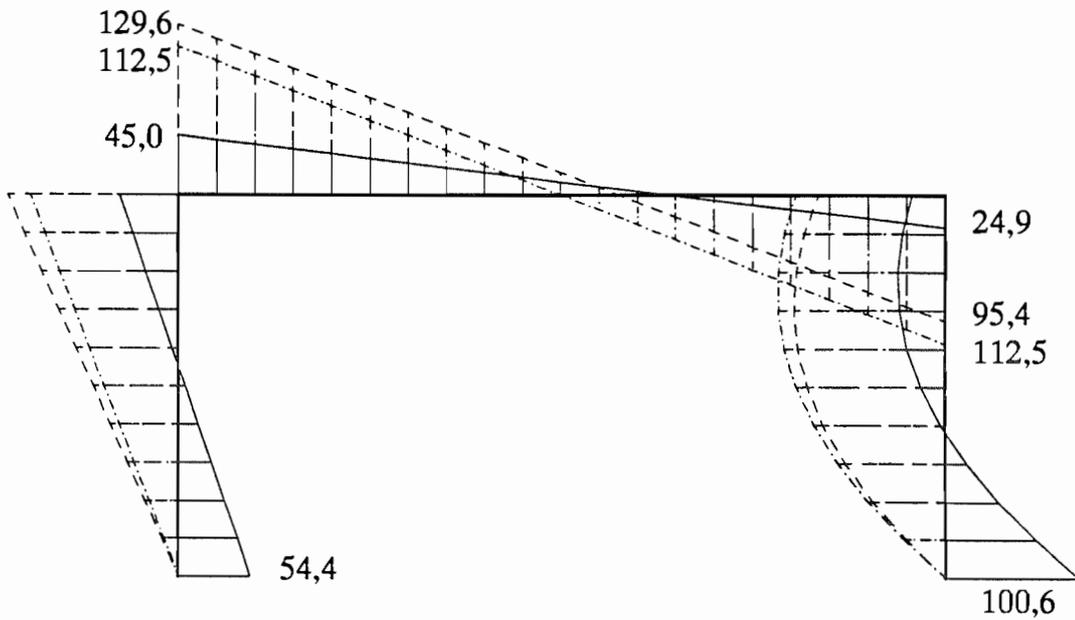
*Lastfall 2 :*

- eingespannter Rahmen
- - - - - Zweigelenk-Rahmen
- · - · - Dreigelenk-Rahmen

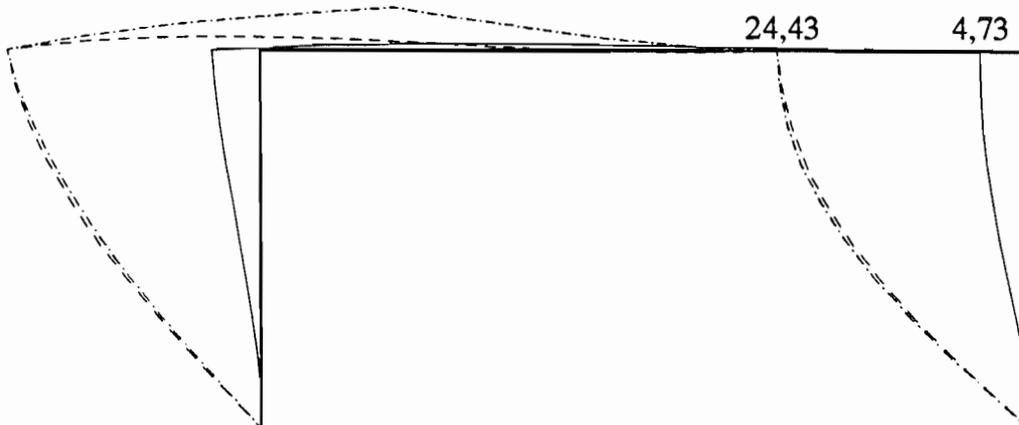
$$k = \frac{I_2 h}{I_1 l} = 2,31$$



Momente in [kNm] :

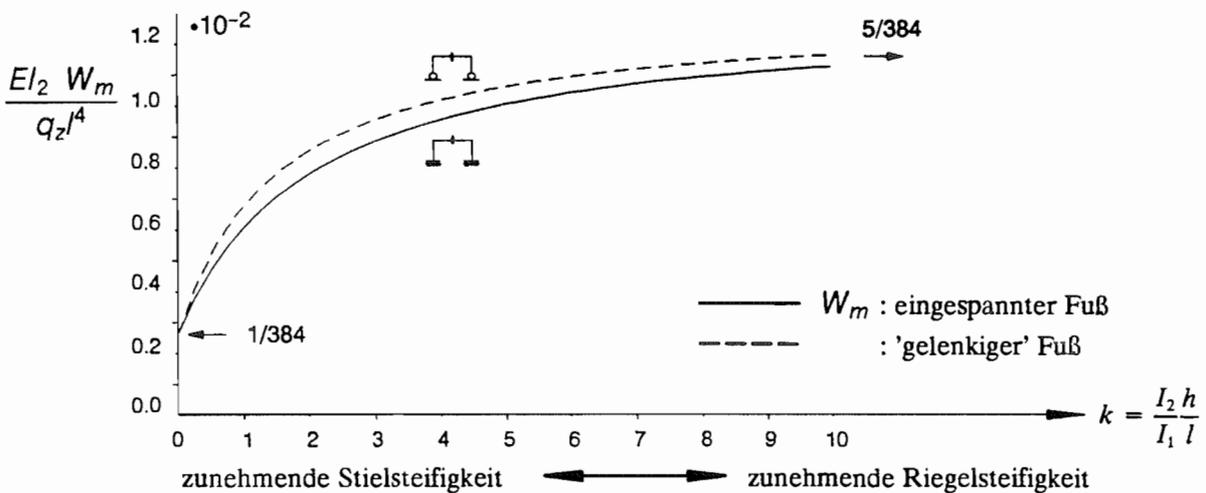
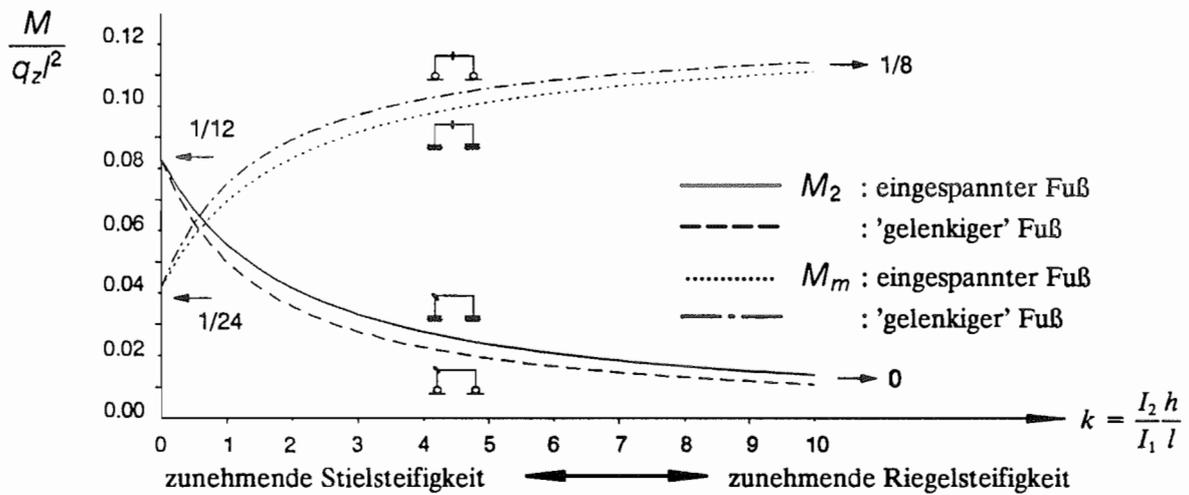
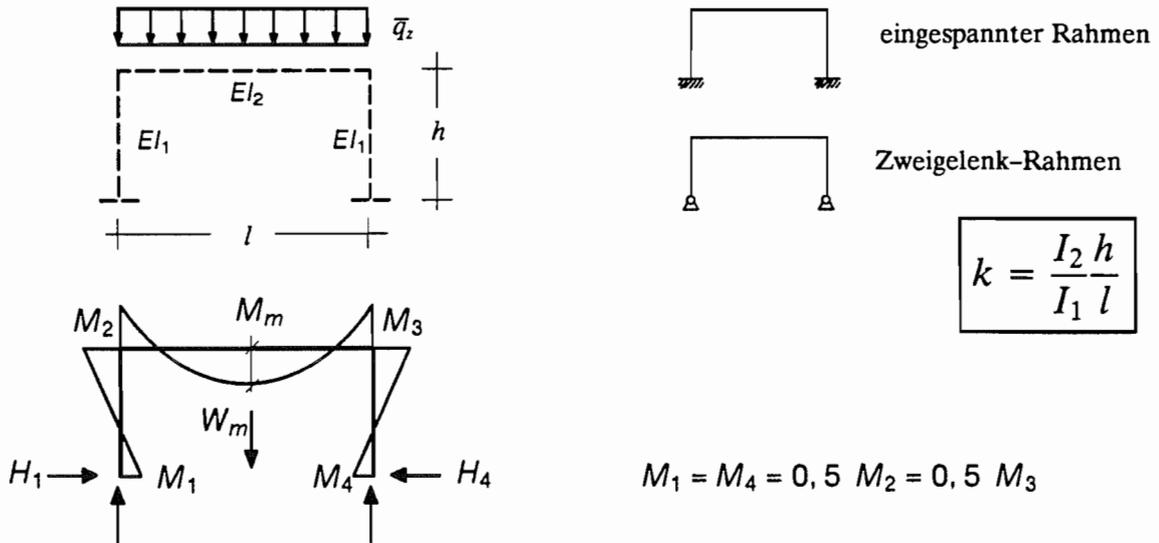


Biegelinien in [mm] :

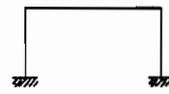
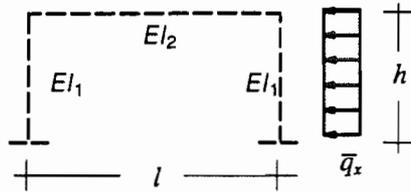


Einfeldriger Rahmen : Auswirkungen verschiedener Steifigkeitsverhältnisse :

Lastfall 1 :



Lastfall 2 :

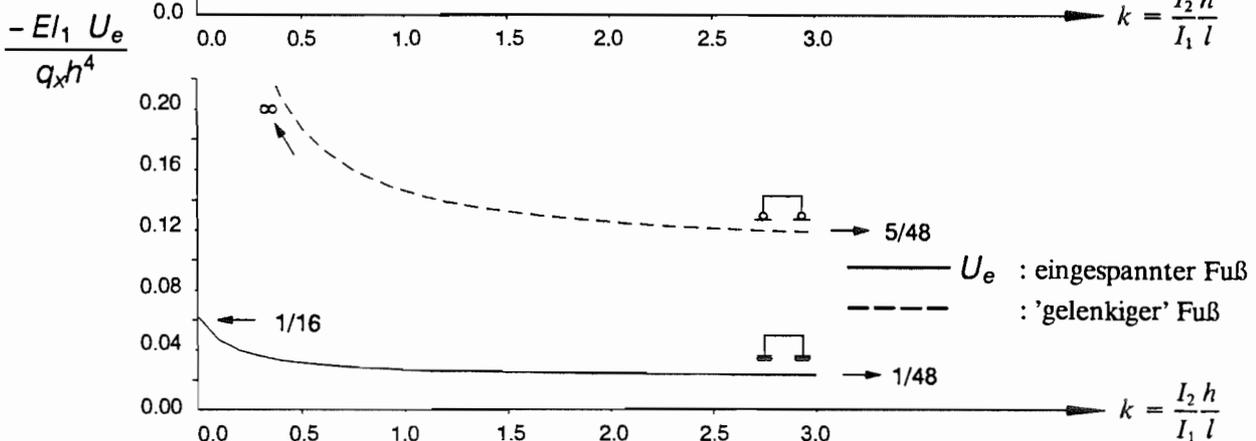
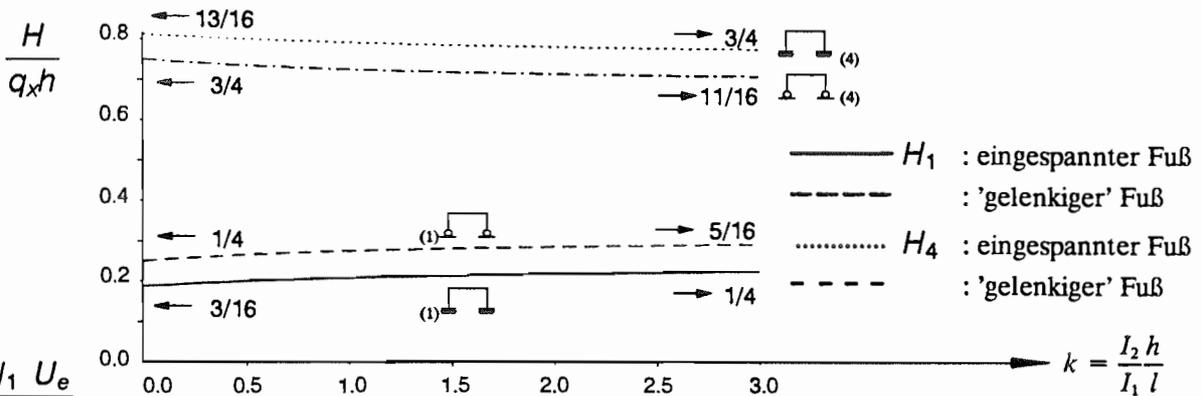
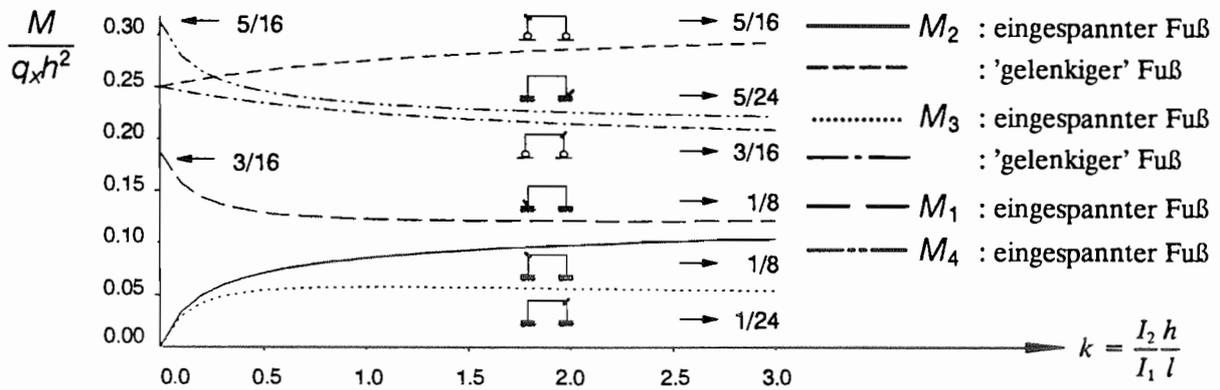
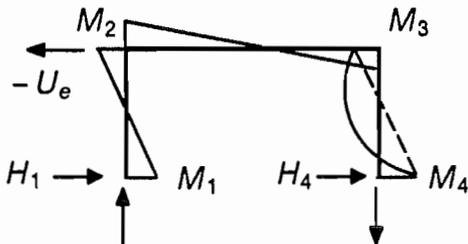


eingespannter Rahmen



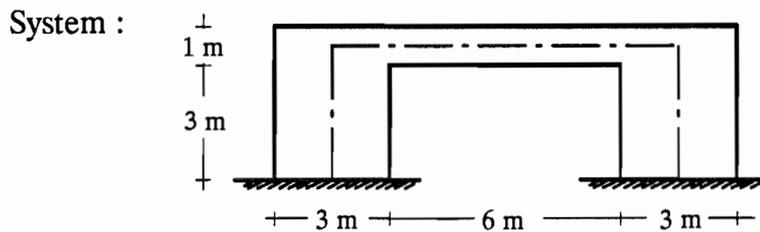
Zweigelenk-Rahmen

$$k = \frac{I_2 h}{I_1 l}$$

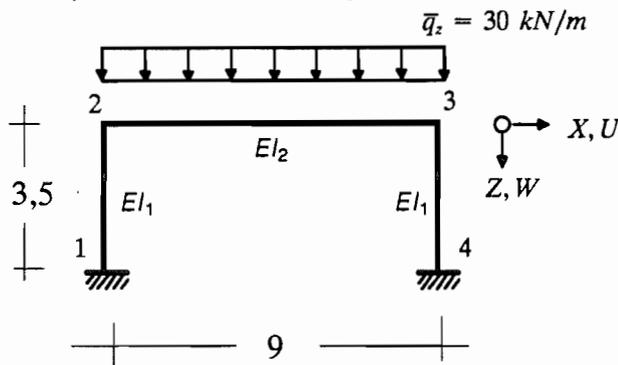


zunehmende Stielsteifigkeit ← → zunehmende Riegelsteifigkeit

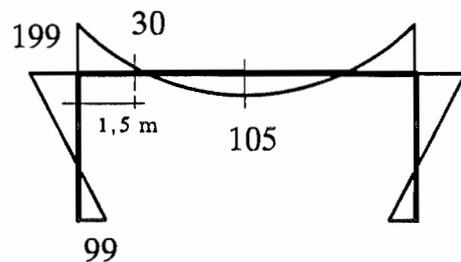
Beispiel einfeldriger Rahmen – Untersuchung von Rahmenecken :



Stabsystem und Belastung :

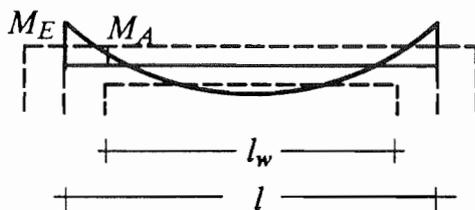


Momentenverlauf in [kNm] :



Das Stabmodell liefert bei den vorliegenden Abmessungen unzureichende Ergebnisse, da in den Rahmenecken eine Scheibentragwirkung vorliegt.

Nach [3] lassen sich die Ergebnisse aus einer Berechnung ohne Berücksichtigung der Scheibentragwirkung in den Rahmenecken unter bestimmten Voraussetzungen umrechnen.



Näherung :

$$M_A \approx \left( \frac{l_w}{l} \right)^2 M_E$$

Literatur :

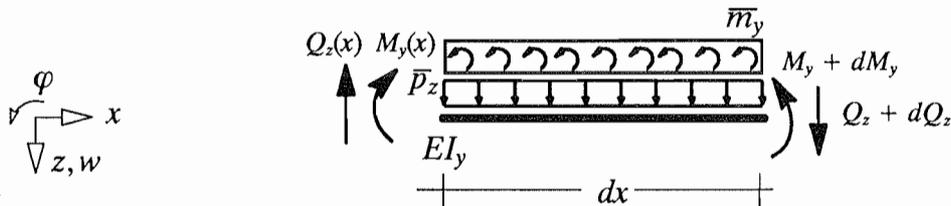
- [1] Schikora, K. ; Ostermeier, B. : Querbiegung gedrungener Querschnitte. aus : Beiträge zur Statik und Dynamik der Tragwerke III. Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I (TUM) Heft 22, München 1988
- [2] Schollerer, G. : Parameterstudien an biegesteifen Rahmenecken mit Hilfe des Finite-Element-Programms SET. Diplomarbeit Nr. 207 Fachgebiet Baustatik (TUM), München 1986
- [3] Kany, M. : Empfehlungen zur Berechnung und Konstruktion von Tunnelbauten. Bautechnik 55 (1978), 300-304
- [4] Bargstädt, H.-J.; Duddeck, H. : Beanspruchungsabhängige Steifigkeiten dicker Stahlbetonrahmen. Bautechnik 66 (1989), 337-342

## 6.4 Trägerroste

### 6.4.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :

*Biegung um die lokale y-Achse :*



$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} + \bar{m}_y \quad ; \quad \bar{p}_z = -\frac{dQ_z}{dx} \quad ; \quad M_y = -EI_y (w'' + \bar{\kappa})$$

Dgl. :  $(EI_y w'')' - \bar{p}_z - \bar{m}_y' + (EI_y \bar{\kappa})'' = 0$

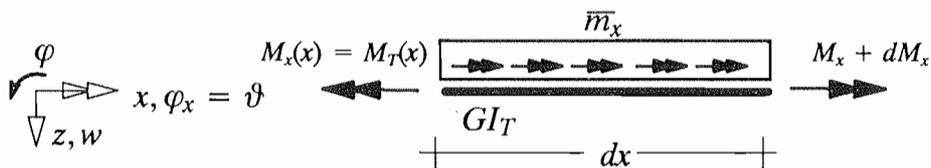
(Lösung der Differentialgleichung siehe Baustatik 1/2)

PvV. :  $\int_{(l)} \delta w'' EI_y w'' dx - \int_{(l)} [\delta w \bar{p}_z - \delta w' \bar{m}_y - \delta w'' EI_y \bar{\kappa}] dx$

$$- [\delta w(x) Q_z(x) - \delta w'(x) M_y(x)]_0^l = 0 \quad (\varphi = -w', \quad \kappa = -w'')$$

(p, k, v siehe Zusammenstellung von Ber.-unterlagen Baustatik 3/4)

*St. Venantsche Torsion (um die lokale x-Achse) :*



$$\bar{m}_x = -\frac{dM_x}{dx} \quad ; \quad M_x = GI_T \vartheta'$$

Dgl. :  $(GI_T \vartheta')' + \bar{m}_x = 0$

(Lösung der Differentialgleichung siehe Baustatik 3)

PvV. :  $\int_{(l)} \delta \vartheta' GI_T \vartheta' dx - \int_{(l)} \delta \vartheta \bar{m}_x dx + [\delta \vartheta(x) M_x(x)]_0^l = 0$

(p, k, v siehe Zusammenstellung von Ber.-unterlagen Baustatik 3/4)

Verfahren zur Berechnung von Trägerrosten :

(a) Weggrößenverfahren

(→ Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen Baustatik 3/4)

(b) Kraftgrößenverfahren

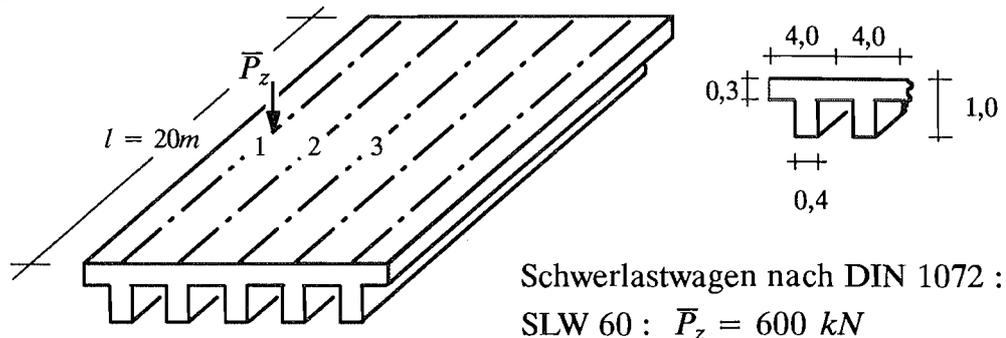
(→ Literatur zum Kraftgrößenverfahren : Baustatik 3/4 Kapitel 2.4)

(c) Verwendung von Tafelwerken (→ Querverteilungszahlen [6.4 / 1] )

### 6.4.2 Beispiele zum Tragverhalten:

Beispiel : Städtische Straßenbrücke (mit 5 Längsträgern) :

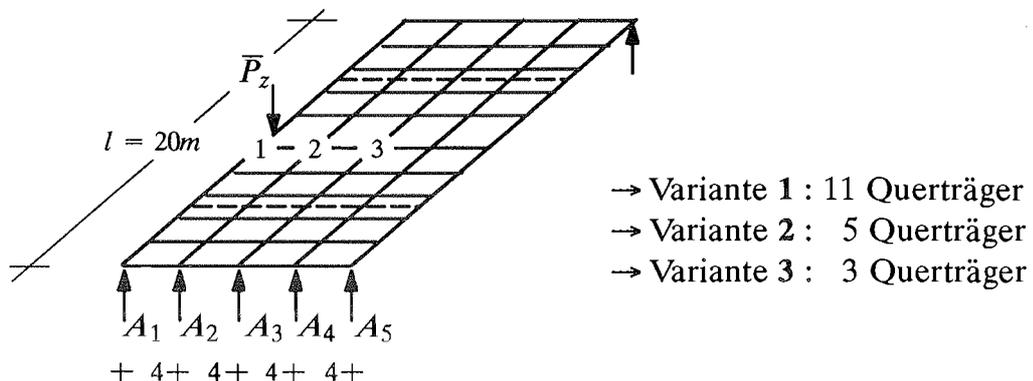
(a) System :



+ 2+ 4+ 4+ 4+ 4+ 2+

Berechnung für verschiedene Laststellungen in Feldmitte : Hauptträger 1,3

(b) Modellbildung : → Trägerrost mit 5 Längsträgern (Plattenbalken)



Querschnittswerte (Berechnung mit Hilfe von Querschnittstabellen) :

5 Längsträger (HT) :	$I_y = 0,0193 * 4,0 * 1,0^3$	$= 0,0772 \text{ m}^4$
	$I_T \approx (4,0 * 0,3^3 + 0,8 * 0,4^3)/6$	$= 0,0265 \text{ m}^4$
11 Querträger (QT) :	$I_y = (2,0 * 0,3^3)/12$	$= 0,0045 \text{ m}^4$
	$I_T \approx (2,0 * 0,3^3)/6$	$= 0,0090 \text{ m}^4$
5 Querträger (QT) :	$I_y = (4,0 * 0,3^3)/12$	$= 0,0090 \text{ m}^4$
	$I_T \approx (4,0 * 0,3^3)/6$	$= 0,0180 \text{ m}^4$
3 Querträger (QT) :	$I_y = (10,0 * 0,3^3)/12$	$= 0,0255 \text{ m}^4$
	$I_T \approx (10,0 * 0,3^3)/6$	$= 0,0450 \text{ m}^4$
Endquerträger (EQT) :	$I_y = (0,5 * 1,0^3)/12$	$= 0,0417 \text{ m}^4$
	$I_T \approx 0,246 * 1,0 * 0,5^3$	$= 0,0308 \text{ m}^4$

Anmerkungen : Beim Ersatzmodell des Trägerrostes für eine Platte ist die Drillsteifigkeit  $I_T$  des Plattenquerschnitts mit der Dicke  $t$  je zur Hälfte auf Längs- und Querträger zu verteilen; es ergibt sich damit der oben verwendete Ausdruck :  $I_T = (b * h^3)/6$ .

Zur Berücksichtigung des gerissenen Zustands II bei Stahlbeton ist die Biegesteifigkeit  $I_y$  und vor allem die Torsionssteifigkeit  $I_T$  abzumindern.

Bei Variante 1 wird auch der Fall untersucht, daß für den Endquerträger zur Vereinfachung die selben Querschnittswerte wie im Feldbereich verwendet werden.

(c) Berechnungsergebnisse Laststellung 1 :  drillsteif  drillweich

Bei Variante 1 wird auch der Fall untersucht, daß für den Endquerträger zur Vereinfachung die selben Querschnittswerte wie im Feldbereich verwendet werden (EQT = QT).

Variante 1 : 11 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 1									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	261,4	45,4	12,7	-6,4	-12,8	25,67	2003,0
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	=QT	254,0	56,1	12,1	-8,4	-13,8	27,22	2062,0
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	257,3	49,8	15,0	-8,6	-13,5	26,90	2085,4
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	219,2	106,2	11,7	-18,9	-18,3	33,82	2456,9

Variante 2 : 5 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 1									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	265,0	43,1	9,1	-7,5	-9,7	26,58	2031,8
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	262,7	46,0	10,0	-8,8	-9,9	27,33	2079,0
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	228,5	98,1	5,1	-18,4	-13,2	34,59	2478,8

Variante 3 : 3 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 1									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	262,4	45,6	10,5	-7,4	-11,1	27,13	1974,2
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	262,4	45,6	10,5	-7,4	-11,1	27,13	1974,2
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	234,4	87,1	8,0	-14,7	-14,7	33,67	2339,9

Die maximalen Durchbiegungen und Momente treten jeweils unter der Einzel-  
last auf.

Berechnungsergebnisse Laststellung 3 :     drillsteif     drillweich

Variante 1 : 11 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 3									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-9,0	104,7	108,7	104,7	-9,0	14,65	1328,9
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	=QT	-5,6	103,4	104,4	103,4	-5,6	15,22	1347,4
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-7,6	107,2	100,8	107,2	-7,6	15,18	1370,9
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11,5	93,8	89,4	93,8	11,5	18,18	1530,8

Variante 2 : 5 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 3									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-11,4	101,9	118,9	101,9	-11,4	15,37	1310,0
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-10,9	104,2	113,5	104,2	-10,9	15,73	1332,3
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4,9	94,2	101,9	94,2	4,9	19,11	1514,8

Variante 3 : 3 Querträger (davon 2 Endquerträger)

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 3									
Berechnungsart			Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment
HT	QT	EQT	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-5,9	88,9	133,9	88,9	-5,9	14,95	1095,24
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-5,9	88,9	133,9	88,9	-5,9	14,95	1095,24
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7,9	80,1	124,0	80,1	7,9	17,82	1238,6

Die maximalen Durchbiegungen und Momente treten jeweils unter der Einzel-  
last auf.

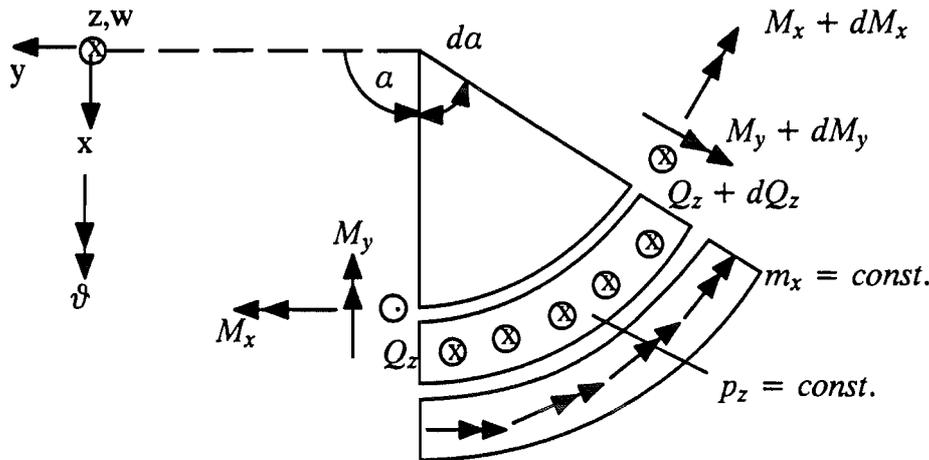
Grenzbetrachtungen :

Lastfall : $\bar{P}_z = 600 \text{ kN}$ in Feldmitte von Träger 3								
Berechnungsart	Auflagerkräfte [kN]					Durchbiegung	Moment	
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	max $w$ [mm]	max $M$ [kNm]	
QT $\infty$ biegesteif	60,0	60,0	60,0	60,0	60,0	8,64	600,0	
QT $\infty$ biegeweich	0	0	300,0	0	0	43,18	3000,0	

## 6.5 Kreisringträger

### 6.5.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :



mit:

$$\frac{d(\dots)}{da} = (\dots)'$$

$$\bar{p}_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dQ_z}{da}$$

$$\bar{m}_x = -\frac{1}{r} \cdot \left( \frac{dM_x}{da} + M_y \right)$$

$$M_y = -\frac{EI}{r} \cdot \left( \frac{w''}{r} + \vartheta \right)$$

$$M_x = \frac{GI_T}{r} \cdot \left( \vartheta' - \frac{w'}{r} \right)$$

$$Q_z = \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{dM_y}{da} - M_x \right)$$

Dgl.:

$$EIw^{VI} + 2EIw^{IV} + EIw^{II} = -r^4 \frac{EI}{GI_T} p_z$$

$$GI_T \cdot \vartheta = \frac{GI_T w'''' + (EI + 2GI_T) w'' - r^4 \frac{GI_T}{EI} p_z - r^3 \left( 1 + \frac{GI_T}{EI} \right) m_x}{-r \left( \frac{EI}{GI_T} + 1 \right)}$$

PvV.:

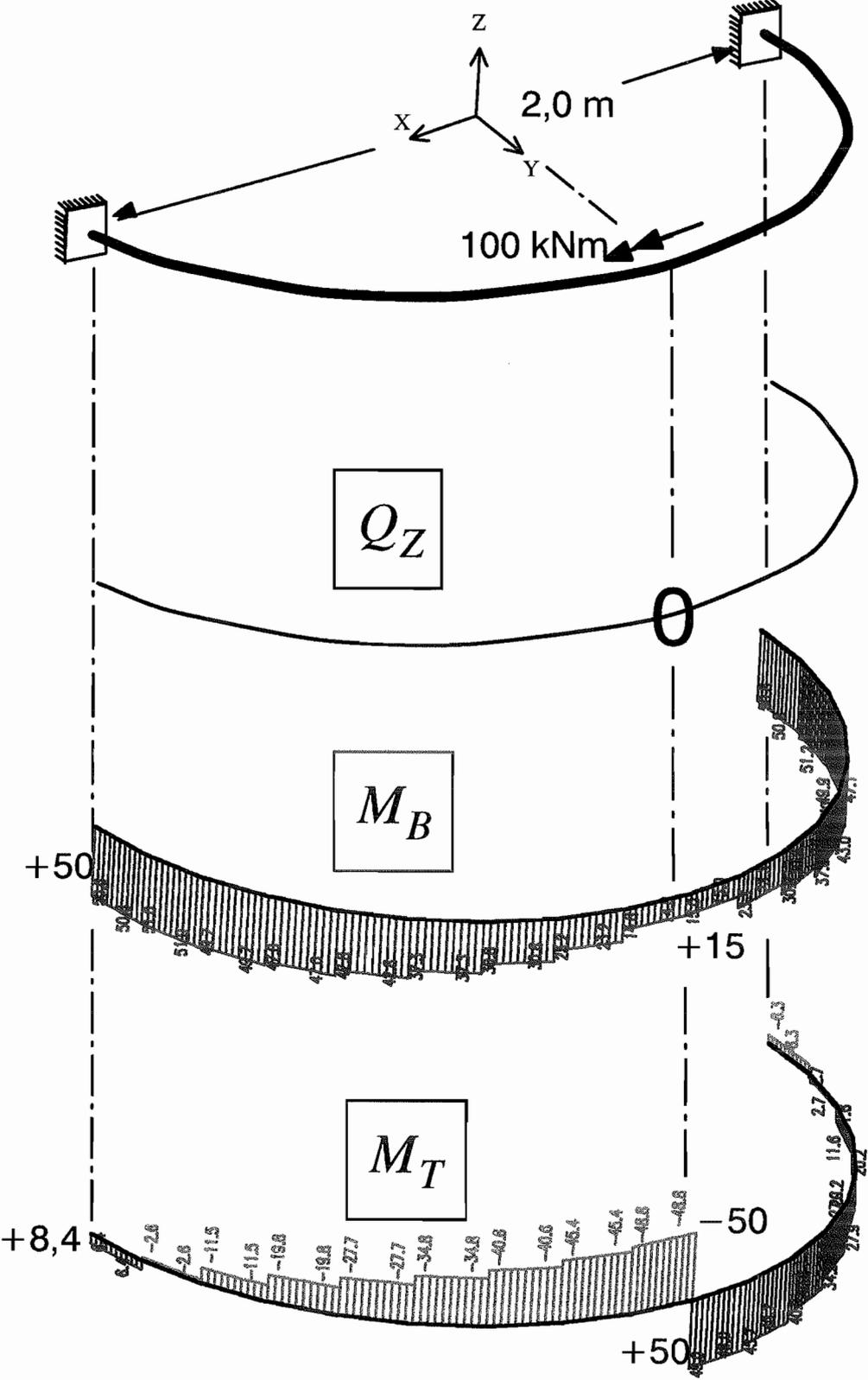
$$\int_{(s)} \left( \delta\vartheta + \frac{\delta w''}{r} \right) \frac{EI}{r^2} \left( \vartheta + \frac{w''}{r} \right) dx + \int_{(s)} \left( \delta\vartheta' + \frac{\delta w'}{r} \right) \frac{GI_T}{r^2} \left( \vartheta' + \frac{w'}{r} \right) dx -$$

$$- \int_{(s)} p_z \delta w dx - \int_{(s)} m_x \delta\vartheta dx = 0$$

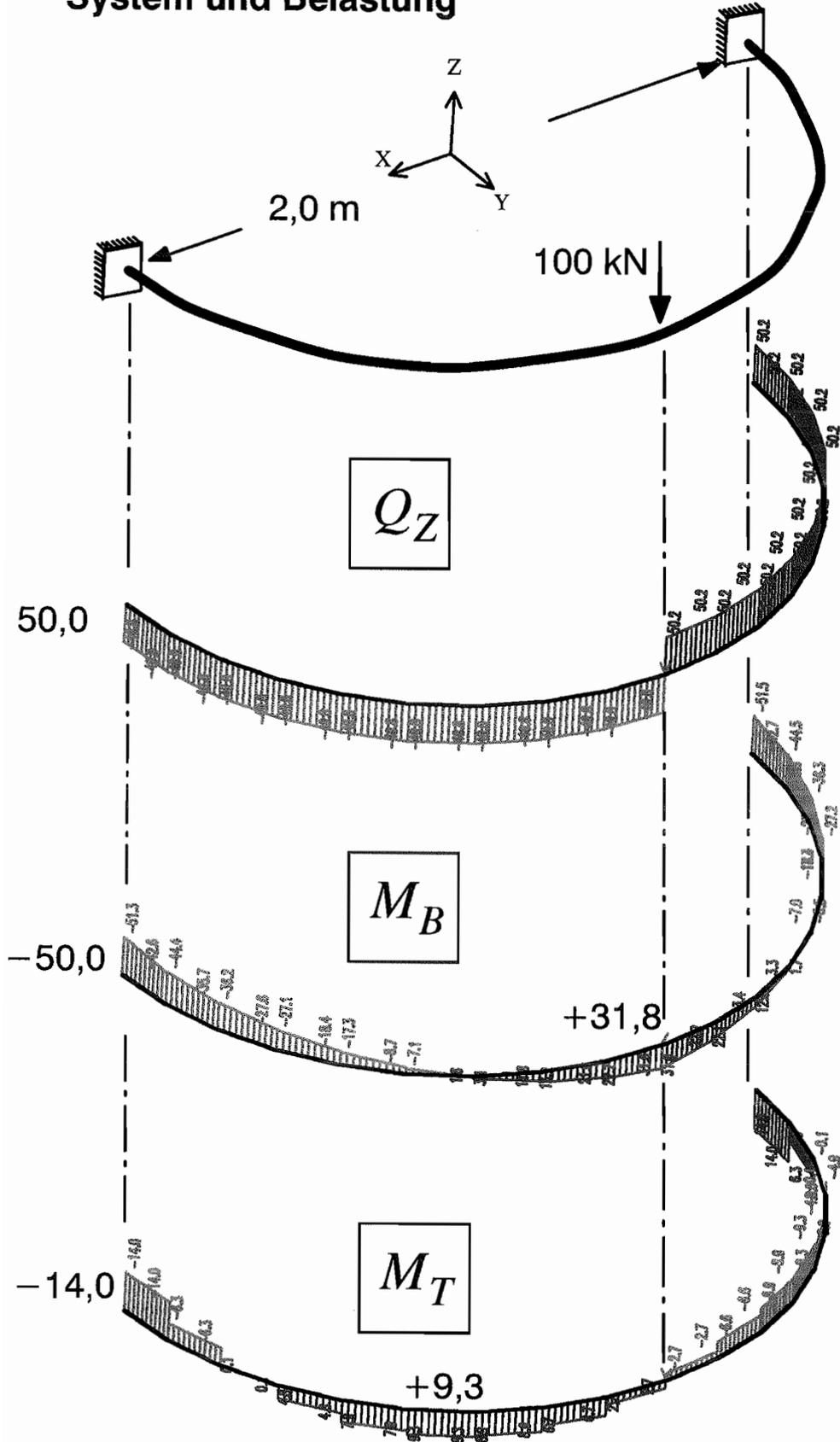
### Verfahren zur Berechnung von Kreisringträgern

- (a) Analytisches Verfahren: Lösung der Gleichung in G.Kiener/H.Kreuzinger: Differentialgleichungen und Energieausdrücke für Tragsysteme, deren Tragverhalten durch eindimensionale Berechnungsmodelle beschrieben werden kann, Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, TUM, Heft 23.
- (b) Übertragungsverfahren:  
(-> Baustatik 3/4 Kapitel 3.7)
- (c) Weggrößenverfahren:  
Wunderlich W., Beverengen G.: Geometrisch nichtlineare Theorie und Berechnung eben gekrümmter Stäbe, Bauingenieur 52 (1977), Seiten 225–237.  
Pilkey W., Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices, (1994), John Wiley & Sons, Inc.

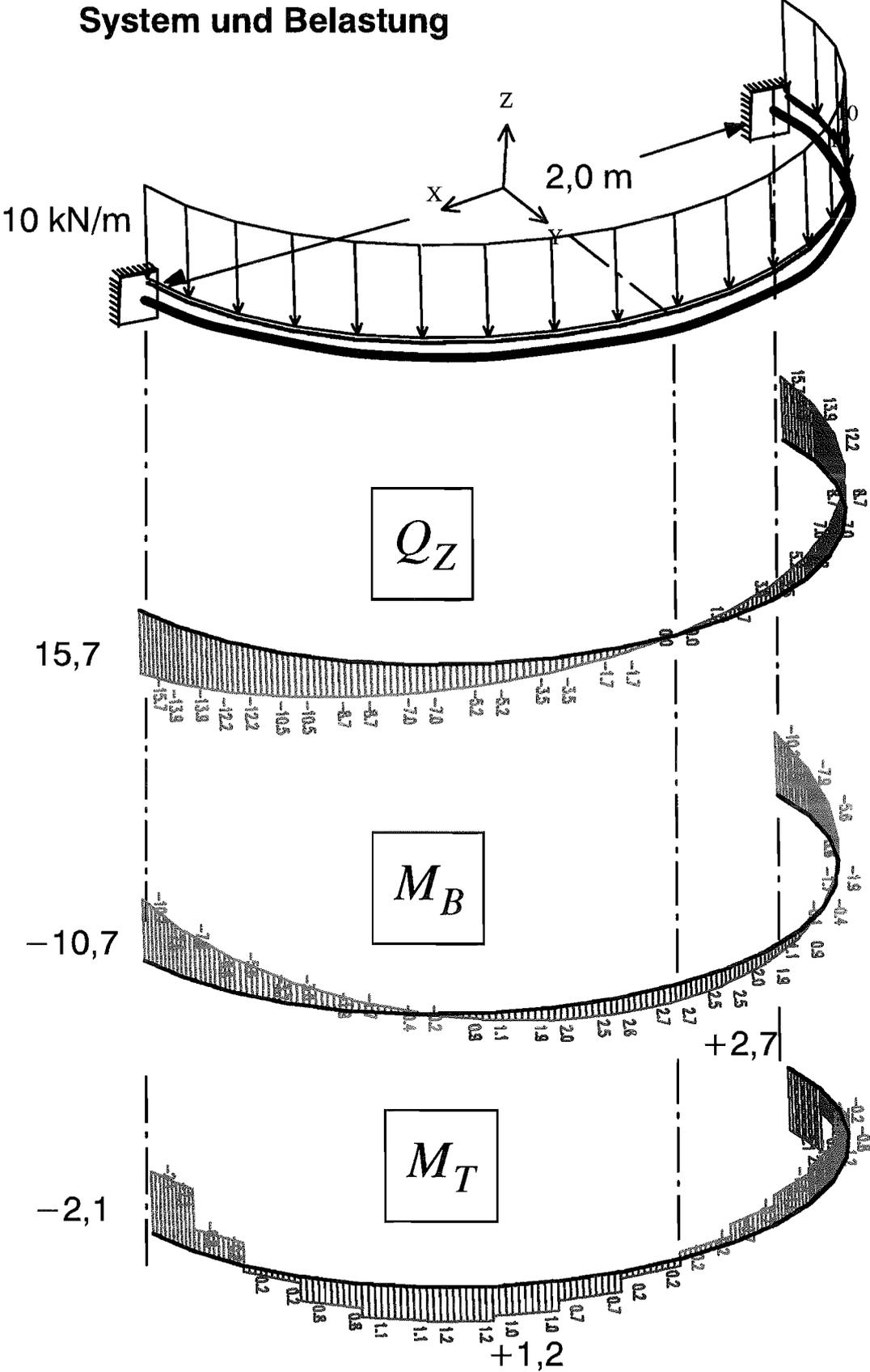
# System und Belastung



# System und Belastung



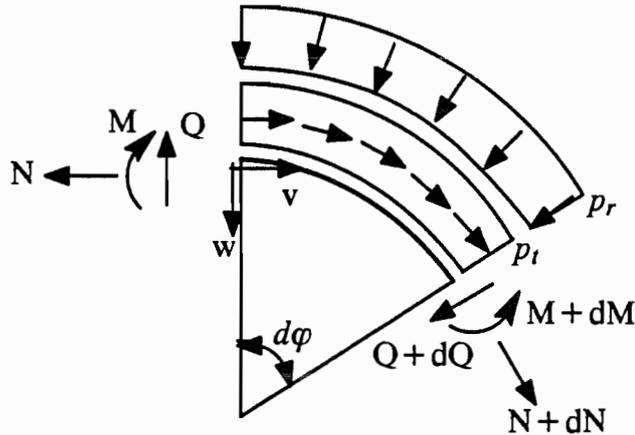
# System und Belastung



## 6.6 Kreisbogenträger

### 6.6.1 Grundlegende Beziehungen und Lösungen

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :



mit:

$$\frac{d(\dots)}{d\varphi} = (\dots)'$$

$$\bar{p}_r \cdot r = -\frac{dQ}{d\varphi} - N$$

$$\bar{p}_t \cdot r = -\frac{dN}{d\varphi} + Q$$

$$M = -EI \frac{w'' + w}{r^2}$$

$$N = EA \frac{v' - w - \frac{EI}{r^2 EA} \cdot (w'' + w)}{r}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Q \cdot r - N \cdot w'$$

Dgl.:

$$EIw^{VI} + 2w^{IV} + w^{II} = (p_r'' - p_t') \cdot r^4$$

$$EA v' = EA w + \frac{EI}{r^2} w'''' + \frac{2EI}{r^2} w'' + \frac{EI}{r^2} w - p_r \cdot r^2$$

PvV.:

$$\int_{(s)} (\delta w'' + \delta w) \frac{EI}{r^4} (w'' + w) dx + \int_{(s)} (\delta v' - \delta w) EA (v' - w) dx - \int_{(s)} p_r \delta w dx - \int_{(s)} p_t \delta v dx = 0$$

### Verfahren zur Berechnung von Kreisbogenträgern

- (a) **Analytisches Verfahren: Lösung der Gleichung in G.Kiener/H.Kreuzinger: Differentialgleichungen und Energieausdrücke für Tragsysteme, deren Tragverhalten durch eindimensionale Berechnungsmodelle beschrieben werden kann, Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, TUM, Heft 23.**
- (b) **Übertragungsverfahren:  
(-> Baustatik 3/4 Kapitel 3.7)**
- (c) **Weggrößenverfahren:  
Wunderlich W., Beverengen G.: Geometrisch nichtlineare Theorie und Berechnung eben gekrümmter Stäbe, Bauingenieur 52 (1977), Seiten 225-237.  
Pilkey W., Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices, (1994), John Wiley & Sons, Inc.**

## 6. Spezielle Tragwerke

### 6.2 Träger auf elastischer Bettung :

- [1] *Avramidis, I.* : Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen für den elastisch gebetteten Zug- und Druckstab nach der Theorie II. Ordnung. Bautechnik 59 (1982), 99-104, 140-142
- [2] *Orlov, G.; Saxenhofer, H.*: Balken auf elastischer Unterlage. Verlag Lee-  
mann Zürich 1963
- [3] *Petersen, C.*: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger. Die Bautechnik 42 ( 1965 )
- [4] *Saal G., Saal H.*: Grundformeln des Weggrößen- Übertragungsverfahrens für Stäbe. Der Stahlbau 50(1981), 134-142, Der Stahlbau 51(1982), 190-191
- [5] *Wölfer K.-H.*: Elastisch gebettete Balken und Platten. Zylinderschalen. 4.Auflage Bauverlag Wiesbaden 1978

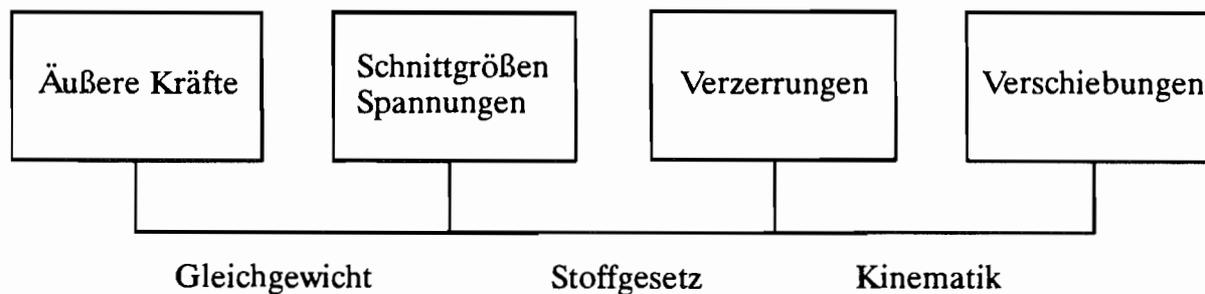
### 6.4 Trägerroste :

- [1] *Bares, R., Massonet, Ch.* : Analysis of Beam Grids and Orthotropic Plates by the Guyon-Massonet-Bares Method. Crosby Lockwood & Son Ltd. London 1966
- [2] *Homberg, H.; Trenks, K.* : Drehsteife Kreuzwerke. Springer Verlag Berlin 1962
- [3] *Leonhardt, F.; Andrä, W.* : Die vereinfachte Trägerrostberechnung . J. Hofmann Verlag Stuttgart 1950
- [4] *Trost, H.* : Lastverteilung in Plattenbalkenbrücken. Werner Verlag Düsseldorf 1961

## 7. Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken (Theorie II. Ordnung)

### 7.1 Einführung

#### 7.1.1 Nichtlinearitäten in den grundlegenden Beziehungen der Statik



In Abhängigkeit von der Art der Grundgleichungen (linear bzw. nichtlinear) läßt sich eine Gruppierung statischer Theorien bzw. Verfahren zur Untersuchung von Stabtragwerken angeben:

Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik	THEORIE bzw. VERFAHREN
l	l	l	Theorie I. Ordnung
nl	l	l	Theorie II. Ordnung*
nl	l	nl	Geometrisch nichtlineare Theorie
l	nl	l	Physikalisch nichtlineare Theorie
nl	nl	nl	Geometrisch und physikalisch nichtlineare Theorie

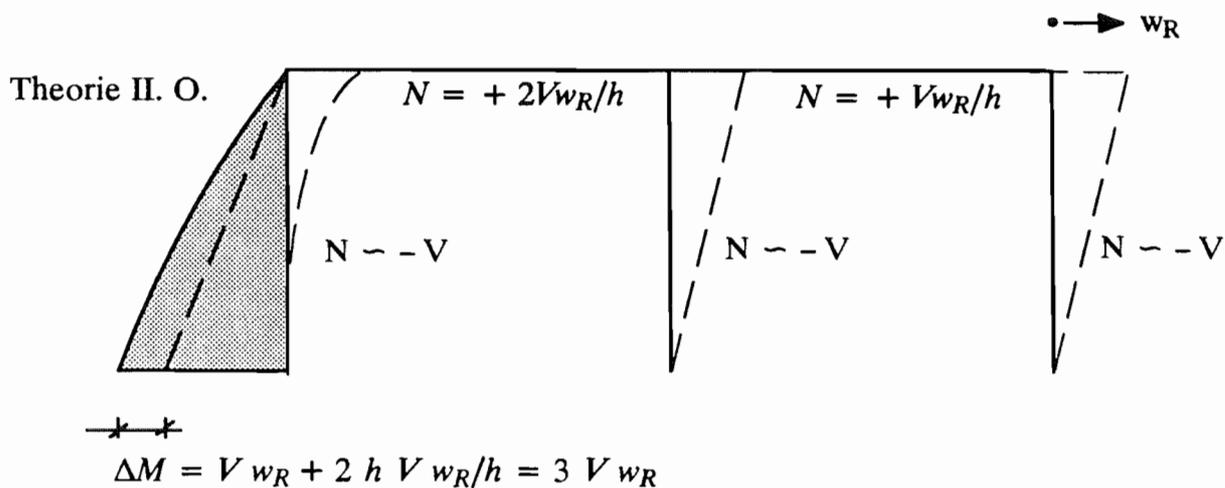
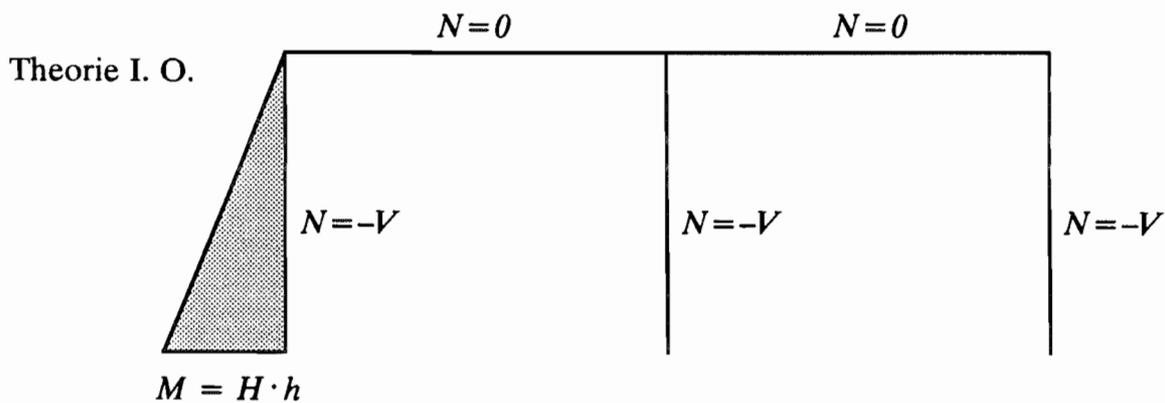
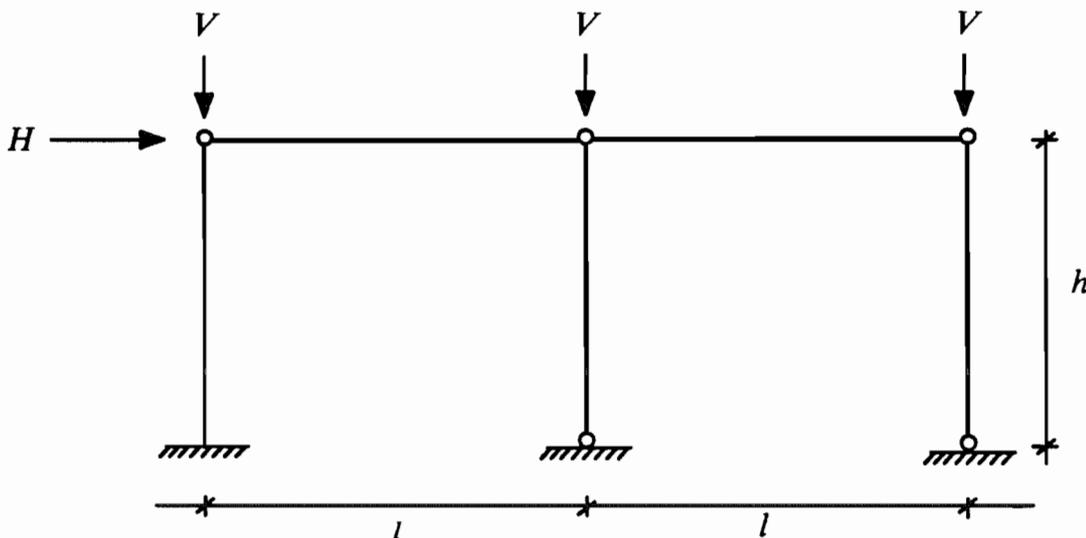
\* für Durchlaufträger, Trägerroste und (insbesondere verschiebliche) Rahmen mit großen Normalkräften.

Vergleich der verschiedenen Theorien und Verfahren

	<i>Theorie I. Ordnung</i>	<i>Theorie II. Ordnung</i>	<i>Nichtlineare Theorie</i>
Gleichgewicht bezogen auf	unverformtes System	verformtes System (nur Anteile von großem Einfluß berücksichtigt)	verformtes System
Kraft-Verschiebungs-Diagramm	linear	nichtlinear	nichtlinear
Superpositions-gesetz	gültig	nicht gültig	nicht gültig
DGL bzw. PvV	linear	linearisiert	nichtlinear
Sicherheit $v$ bezogen auf	Spannungen	Lasten (vgl. DIN 4114)	Lasten
Gleichgewichts-verzweigung	nicht möglich	homogenes Problem liefert Eigenwert	liefert Verhalten auch im überkritischen Bereich

7.1.2 Einführende Beispiele (vgl. Vorlesung)

Beispiel: Ebener Rahmen (Alle Stäbe sind dehnstarr,  $EA \rightarrow \infty$ ).



### 7.1.3 Grundlagen – Theorie II. Ordnung

#### Voraussetzungen :

Es gelten zunächst die üblichen Voraussetzungen und Linearisierungen der Stabstatik Theorie I. Ordnung : (*Materialgesetz und Kinematik sind linear*) :

- Querschnittsabmessungen klein gegenüber der Stablänge
- Material : homogen, isotrop, linear elastisch
- Belastung wirkt statisch und richtungstreu
- Formänderungen sind klein : infinitesimal kleine, auf die Stabachse bezogene Verschiebungen, Verdrehungen und Verzerrungen (Dehnungen, Verkrümmungen und Gleitungen) :  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ ;  $\cos \varphi \approx 1$
- Verformungen aus Querkraft (Gleitungen) werden vernachlässigt → Normalenhypothese, Ebenbleiben der Querschnitte :  $\varphi \approx -w'$ ;  $\kappa \approx -w''$ ; ( $\varepsilon \approx u'$ )
- Linear verteilte Querschnittsspannungen werden durch äquivalente Schnittgrößen ersetzt.

Im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung wird bei der Theorie II. Ordnung der *Gleichgewichtszustand am verformten System* betrachtet :

- Unterscheidung in Normal- und Querkräfte ( $N, Q$ ) einerseits sowie Longitudinal- und Transversalkräfte ( $L, T$ ) andererseits.
- Damit die Differentialgleichungen für  $u$  und  $w$  entkoppelt sind, muß die Longitudinalkraft  $L$  im Stababschnitt konstant sein und als bekannt angenommen werden. → Die nichtlineare Gleichgewichtsaufgabe wird dadurch iterativ gelöst.
- Vereinfachend gilt somit :  $L \approx N$ ;  $T \approx Q + (w' + w_0')N$  ( am pos. Schnittufer)

#### Anwendungsbereich :

- Systeme mit unverschieblichen Knoten und 'großen' Normalkräften :  
( $w'T \ll L$ ;  $w'Q \ll N$ ;  $T \ll L$ ;  $Q \ll N$ )
- Systeme mit verschieblichen Knoten, bei denen infolge Verschiebungen erhebliche Zusatzmomente entstehen.

#### Folgerungen für die praktische Berechnung :

- Die Stabkennzahlen  $\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$  sind für alle Stäbe als bekannt anzunehmen. Hierzu sind die Normalkräfte vorab nach Theorie I. Ordnung zu berechnen oder abzuschätzen.
- Lastfälle dürfen im allgemeinen *nicht* überlagert werden. *Das Superpositionsprinzip gilt im allgemeinen nicht mehr*; es dürfen nur Lastfälle mit gleichen Stabkennzahlen überlagert werden.
- Lasten bzw. Lastfälle sind zu maßgeblichen Lastkombinationen zusammenzufassen, die jeweils getrennt zu berechnen sind. Bei den Lasten sind die baustoffspezifischen Sicherheitsbeiwerte zu berücksichtigen. Entsprechende Vorverformungen aus Imperfektionen sind gegebenenfalls zu berücksichtigen.

- Beim Weggrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung sind Weggrößen die Rechenunbekannten. Diese geometrischen Unbekannten werden aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Einflüsse aus Normalkraftverformungen können häufig, wie bei Theorie I. Ordnung, vernachlässigt werden.
- Für Druckstäbe ist die Theorie II. Ordnung ein Gebot der Sicherheit.
- Für Zugstäbe ist die Theorie II. Ordnung eine Frage der Wirtschaftlichkeit.
- Für Stabkennzahlen  $\varepsilon \leq 0.5(1.0)$  genügt es im allgemeinen nur die Schiefstellungen ( $D'$ ), zu berücksichtigen, jedoch Anteile aus Verkrümmungen beim Gleichgewicht am verformten System zu vernachlässigen; d.h. es können die Werte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nach Theorie I. Ordnung verwendet werden.
- Für Stabkennzahlen  $\varepsilon \leq 1.0$  ist im allgemeinen eine Berechnung mit der geometrischen Matrix ( 1. Reihenglied der Taylor–Reihe ) ausreichend.
- Bei reiner Normalkraftbeanspruchung ohne Vorverformungen ist eine Stabilitätsuntersuchung erforderlich; es liegt dann kein Spannungsproblem, sondern ein Verzweigungsproblem vor.

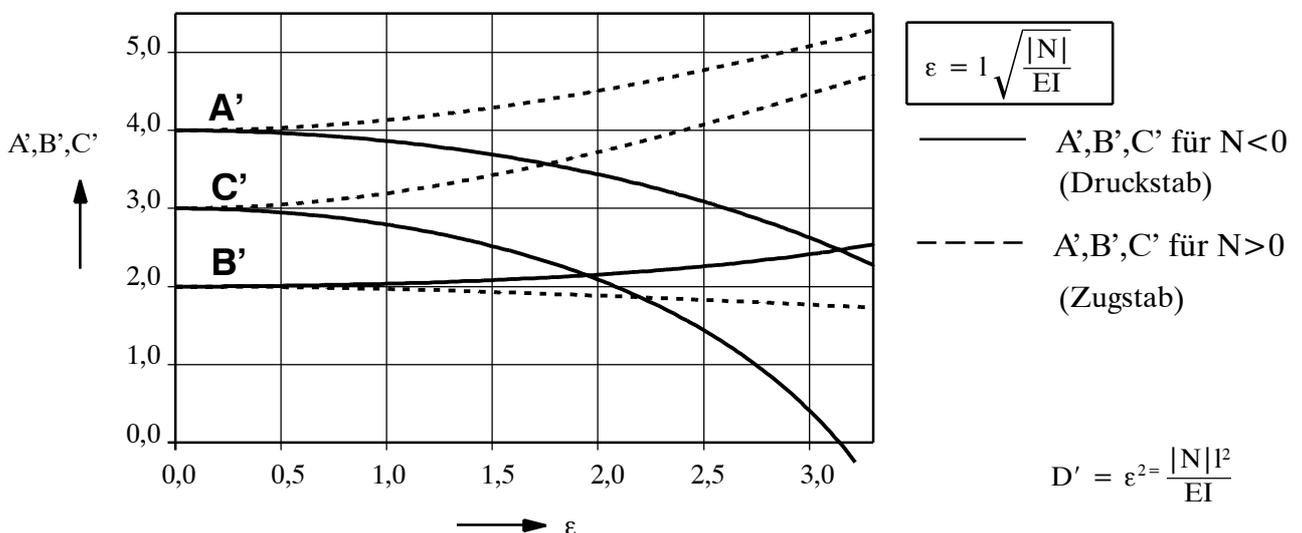
**Wesentlicher Vorteil des Weggrößenverfahrens gegenüber dem Kraftgrößenverfahren bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung :**

- 1) Die Berechnung ist leichter schematisierbar (Verträglichkeit ist am Grundelement einfacher zu erfüllen als Gleichgewicht)
- 2) Die Iteration der Normalkräfte konvergiert im allgemeinen schneller als die der Verschiebungen. (Normalkräfte sind einfacher abzuschätzen.)

**Wesentliche Unterschiede beim Weggrößenverfahren der Theorie II. Ordnung gegenüber Theorie I. Ordnung :**

Zu grundlegenden Beziehungen für das Weggrößenverfahren Theorie II. Ordnung (in Vorzeichen – Definition 2) siehe 'Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke' (Formelsammlung).

Die Stabendmomente werden in Abhängigkeit der Weggrößen an den Stabenden und der Stabkennzahl (Normalkraftbeanspruchung !) formuliert. Zur Abhängigkeit der dabei verwendeten Hilfwerte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  von der Stabkennzahl  $\varepsilon$  siehe folgende Abbildung :



## 7.2 Grundgleichungen des ebenen Stabes (Theorie II.Ordnung)

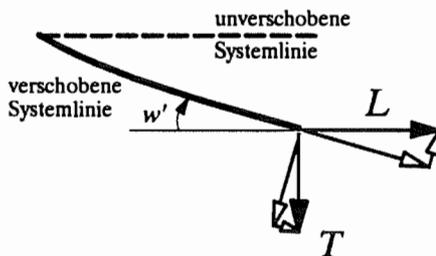
### 7.2.1 Definition von Transversal- und Longitudinalkräften

Im Gleichgewichtszustand sind die Normal- und Querkräfte  $N$  und  $Q$  gegenüber der Ausgangslage um den Winkel  $\varphi = -w'$  gedreht. Zusätzlich werden in der Theorie II. Ordnung die Longitudinal- und Transversalkräfte  $T$  und  $L$  eingeführt, die in Richtung der unverschobenen Systemlinie bzw. senkrecht dazu definiert sind.

Wegen der vorausgesetzten kleinen Verdrehungen gilt :

$$\sin w' \approx \tan w' \approx w' ; \cos w' \approx 1$$

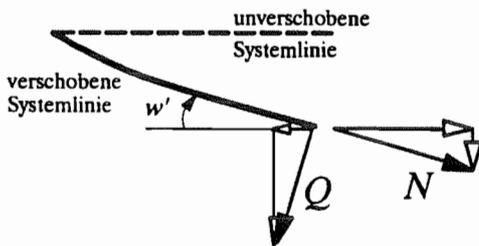
Der Zusammenhang zwischen  $N$  bzw.  $Q$  und  $T$  bzw.  $L$  ist durch eine lineare Transformation gegeben :



$$\begin{aligned} N &= L \cos w' + T \sin w' \\ N &\approx L + T w' \\ Q &= -L \sin w' + T \cos w' \\ Q &\approx -L w' + T \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w' & \sin w' & 0 \\ -\sin w' & \cos w' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ T \\ M \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} L &= N \cos w' - Q \sin w' \\ L &\approx N - Q w' \\ T &= N \sin w' + Q \cos w' \\ T &\approx N w' + Q \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} L \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w' & -\sin w' & 0 \\ \sin w' & \cos w' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}$$

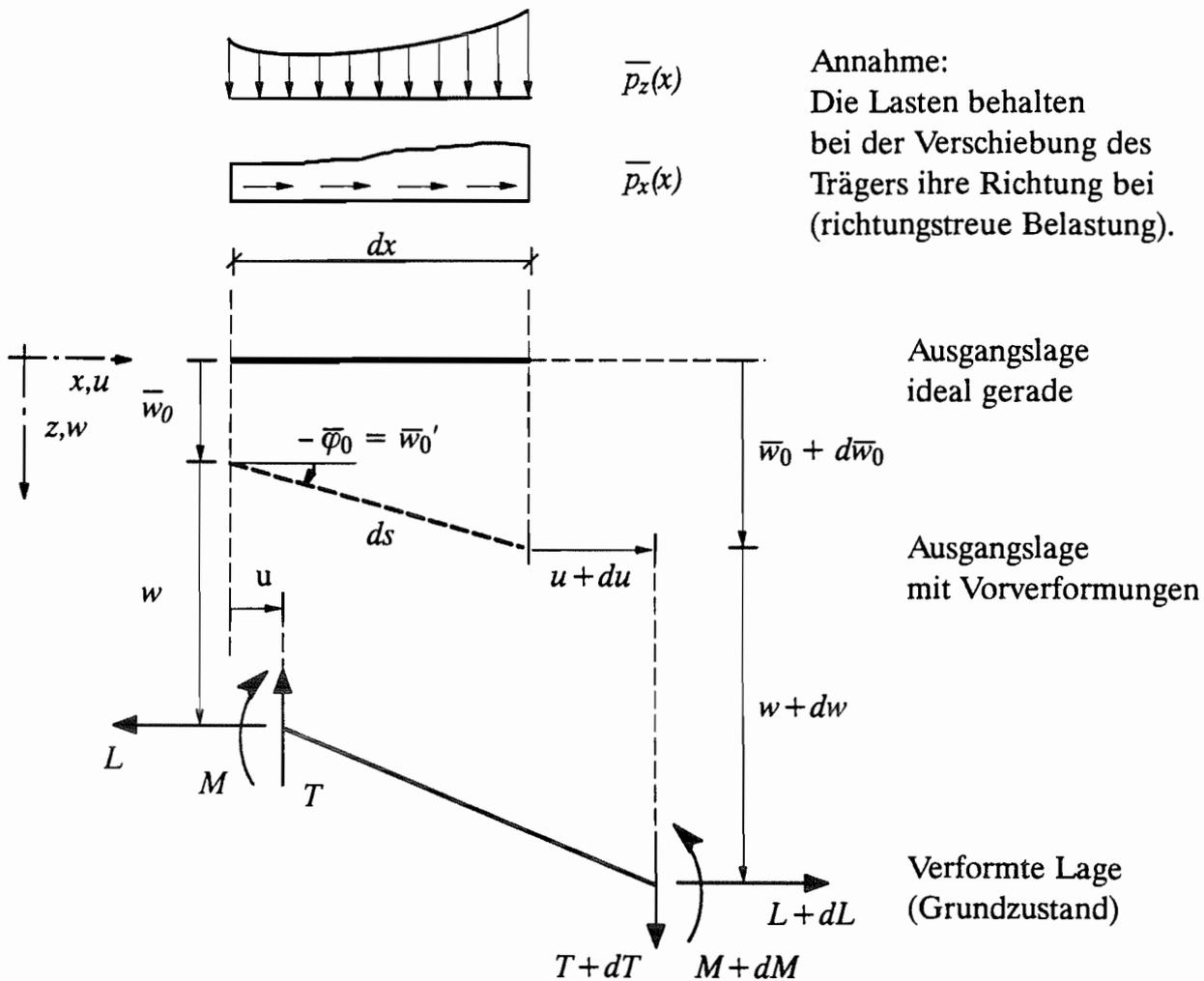
Wird ferner angenommen, daß gilt :  $T w' \ll L$  bzw.  $Q w' \ll N$ , so lautet der Zusammenhang zwischen  $N$  bzw.  $Q$  und  $T$  bzw.  $L$  :

$$\begin{aligned} L &\approx N \\ T &\approx Q + w' N \\ Q &\approx T - w' L \approx T - w' N = T + \varphi N \end{aligned}$$

Werden Vorverformungen berücksichtigt, so ist in obigen Beziehungen  $w' + w'_0$  anstelle von  $w'$  einzusetzen.

## 7.2.2 Lokale Form (Differentialgleichung)

### 7.2.2.1 Gleichgewicht am differentiellen Element



$$\Sigma M = 0 \rightarrow -M + (M + dM) - Tdx + L(dw + d\bar{w}_0) = 0$$

$$\rightarrow +dM - Tdx + L(dw + d\bar{w}_0) = 0$$

$$\rightarrow +\frac{dM}{dx}dx - Tdx + L\frac{dw + d\bar{w}_0}{dx}dx = 0$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} - \underbrace{(T - L(w' + \bar{w}'_0))}_Q = 0}$$

mit

$$L \cdot (w' + \bar{w}'_0) = -L \cdot (\varphi + \bar{\varphi}_0)$$

analog:

$$\Sigma L = 0 \rightarrow \frac{dL}{dx} + \bar{p}_x = 0$$

$$\Sigma T = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} + \bar{p}_z = 0$$

### 7.2.2.2 Kinematik

$$\kappa = \varphi'$$

$$\varepsilon = u'$$

$$\gamma = w' + \varphi \quad \gamma = 0 : \text{Bernoulli-Annahme liefert } \varphi = -w'$$

$$\kappa = -w''$$

### 7.2.2.3 Stoffgesetz

$$M = EI(\kappa - \bar{\kappa}) = EI(-w'' - \bar{\kappa}) \quad \bar{\kappa} \text{ vorgegebene Verkrümmung}$$

$$N = EA(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = EA(u' - \bar{\varepsilon}) \quad \bar{\varepsilon} \text{ vorgegebene Dehnungen}$$

z. B. aus Temperatur  
Schwinden

$$Q = k_s GA \gamma$$

Im Rahmen der Bernoulli-Hypothese werden die Schubverzerrungen vernachlässigt.

Für T folgt aufgrund der Definition:

$$T = Q - L\varphi \approx Q - N\varphi = \underbrace{k_s GA \gamma}_{\gamma = 0} - \underbrace{(EA\varepsilon)\varphi}_{-N^0} \approx -N^0\varphi.$$

(Bernoulli-  
hypothese)

( $N^0$  wird im Rahmen der Theorie II.Ordnung als bekannt vorausgesetzt)

### 7.2.2.4 Zusammenfassung der lokalen Grundgleichungen

a) als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

durch direkte Zusammenfassung der Beziehungen unter 7.2.2.1 bis 7.2.2.3 und Umordnen folgt:

Längswirkung:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} u \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \frac{1}{EA} \\ \vdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ -\bar{p}_x \end{bmatrix};$$

Querwirkung:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{EI} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ T \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\kappa} \\ -\bar{p}_z \\ L\bar{\varphi}_0' \end{bmatrix}.$$

$$z'(x) = A z(x) + \bar{r}(x)$$

b) als kondensierte Differentialgleichungen

Einsetzen von Kinematik und Stoffgesetz in die Gleichgewichtsbedingungen liefert:

$$\text{Längswirkung: } (EA u')' = -\bar{p}_x + EA \bar{\epsilon}';$$

$$\text{Querwirkung: } (EI w''')' - Lw'' = \bar{p}_z - EI \bar{\kappa}' - L \bar{\varphi}_0'.$$

Die beiden Systeme bzw. Differentialgleichungen sind nichtlinear über  $L - N = EAu'$  gekoppelt:

$$L \varphi - \underbrace{-EAu'w'}_{-N^0}.$$

Im Rahmen der Theorie II. Ordnung wird eine Entkopplung und Linearisierung dadurch erreicht, daß  $L - N^0$  als bekannt angenommen wird. Ihr Wert wird i.a. durch Bestimmen der Normalkräfte aus einer linearen Berechnung bestimmt. Reicht die Näherung nicht aus, kann in einer Iteration die Rechnung mit jeweils dem Ergebnis aus dem vorherigen Schritt solange wiederholt werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

### 7.2.2.5 Lösungen der Differentialgleichungen

#### a) Lösung des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

Analog der Vorgehensweise aus Kap. 4.6.2 folgt direkt die Lösung in Form der Übertragungsmatrix zu:

$$\mathbf{z}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}(0) + e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \bar{\mathbf{r}}(t) dt \stackrel{!}{=} \mathbf{U}(x) \mathbf{z}(0) + \bar{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{U}(x) = e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{A}x + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 x^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 x^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 x^4 + \dots$$

Lastanteile analog nach:

$$\bar{\mathbf{z}}(x) = x \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}x + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^2 x^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^3 x^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^4 x^4 + \dots \right) \bar{\mathbf{r}}$$

#### b) Lösung der kondensierten Differentialgleichungen

homogener Anteil der Querwirkung mit  $EI = \text{const.}$ :

$$EIw^{IV} - N^0 w'' = 0$$

für  $N^0 = -\bar{P}$  (Druck):

$$w(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{l} + C_3 \cos \varepsilon \frac{x}{l} + C_4 \sin \varepsilon \frac{x}{l}$$

für  $N^0 = \bar{P}$  (Zug):

$$w(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{l} + C_3 \cosh \varepsilon \frac{x}{l} + C_4 \sinh \varepsilon \frac{x}{l}$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} w(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{l} + C_3 \cos \varepsilon \frac{x}{l} + C_4 \sin \varepsilon \frac{x}{l} \\ w(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{l} + C_3 \cosh \varepsilon \frac{x}{l} + C_4 \sinh \varepsilon \frac{x}{l} \end{matrix}} \right\} \text{mit } \varepsilon^2 = l^2 \frac{|N^0|}{EI}$$

Lastanteile (= Partikularanteil der Dgl.) durch Variation der Konstanten, vgl. Höhere Mathematik.

### 7.2.3 Globale Form - Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W = \int (L\delta u' + T\delta w' + M\delta\varphi') dx - \int (\bar{p}_x\delta u + \bar{p}_z\delta w - L\bar{w}_0'\delta w' + EI\bar{\kappa}\delta\varphi') dx - [\bar{T}\delta w + \bar{M}\delta\varphi]_b^a = 0 ;$$

Näherungen:

$$L \approx N - Qw' \quad - \quad N = EAu' \quad (\text{vgl. 7.2.1 u. 7.2.2.3})$$

$$T \approx Q + Nw' \quad - \quad Nw' = \underbrace{EAu'w'}_{\text{nichtlinear}} \quad (\text{vgl. 7.2.2.3})$$

Theorie II.Ordnung:  $N^0$  wird als bekannt angenommen,  
z.B. aus linearer Lösung (vgl. 7.2.2.3)

Anteile der virtuellen inneren Arbeit, ausgedrückt in Weggrößen:

$$\delta W^i = \int (N\delta u' + N^0w'\delta w' + M\delta\varphi') dx$$

$$N = EAu' \quad M = EI\varphi' \quad \varphi = -w'$$

$$\delta W^i = \int (\underbrace{\delta u' EAu'}_{\text{Dehnung}} + \underbrace{\delta w' N^0w'}_{\text{Th. II.O}} + \underbrace{\delta w'' EIw''}_{\text{Biegung}}) dx$$

Lastanteile aus vorgegebenen (bekannten) Einwirkungen:

$$\delta W^a = - \int ( \underbrace{\bar{p}_x\delta u}_{\text{horizontale Streckenlast}} + \underbrace{\bar{p}_z\delta w}_{\text{vertikale Streckenlast}} - \underbrace{N^0\bar{w}_0'\delta w'}_{\text{Vorverformung}} + \underbrace{EI\bar{\kappa}\delta\varphi'}_{\text{Verkrümmung, z.B. Temperatur}} ) dx - \underbrace{[\bar{T}\delta w + \bar{M}\delta\varphi]_b^a}_{\text{Einzellasten an den Rändern}}$$

$$\delta W = \delta W^i + \delta W^a = 0 \quad \text{Prinzip der virtuellen Verschiebungen}$$

### 7.2.4 Äquivalenz: Prinzip der virtuellen Verschiebungen – Differentialgleichung

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Es wird nur die Querwirkung betrachtet.

$\delta W = \int_0^l (\delta w' N^0 w' + \delta w'' EI w'') dx$	Biegeanteile
$- \int_0^l (\bar{p}_z \delta w - N^0 \bar{w}_0' \delta w' + EI \bar{\kappa} \delta \varphi') dx$	Einwirkungen
$- [\bar{T} \delta w + \bar{M} \delta \varphi]_0^l = 0$	Randanteile

$- \int_0^l N^0 w'' \delta w dx + [N^0 w' \delta w]_0^l$	Umformung durch partielle Integration
$+ \int_0^l EI w'' \delta w dx + [EI w'' \delta w']_0^l - [EI w''' \delta w]_0^l$	
$- \int_0^l \bar{p}_z \delta w dx$	
$- \int_0^l N^0 \bar{w}_0' \delta w dx + [N^0 \bar{w}_0' \delta w]_0^l$	
$+ \int_0^l EI \bar{\kappa}' \delta w dx + [EI \bar{\kappa} \delta w']_0^l - [EI \bar{\kappa}' \delta w]_0^l$	mit $\delta \varphi = -\delta w'$
$- [\bar{T} \delta w + \bar{M} \delta \varphi]_0^l = 0 ;$	

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left[ EIw^{IV} - N^0w'' - \bar{p}_z - N^0\bar{w}_0'' + EI\bar{\kappa}' \right] \delta w \, dx && \text{Umordnung} \\
 & + \underbrace{\left[ (-EIw'''' + N^0w' + N^0\bar{w}_0' - EI\bar{\kappa}') \delta w \right]_0^l}_T \\
 & + \underbrace{\left[ (-EIw'' + EI\bar{\kappa}) \delta \varphi \right]_0^l}_M && \text{mit } \delta \varphi = -\delta w' \\
 & - [\bar{T}\delta w + \bar{M}\delta \varphi]_0^l = 0 \quad ;
 \end{aligned}$$

Als globale Form von Gleichgewicht und stat. Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \underbrace{\left[ EIw^{IV} - N^0w'' - \bar{p}_z - N^0\bar{w}_0'' + EI\bar{\kappa}' \right] \delta w \, dx}_{\text{Gleichgewicht (Dgl.)}} \\
 & + \underbrace{\left[ (T - \bar{T})\delta w + (M - \bar{M})\delta \varphi \right]_0^l}_{\text{stat. Randbedingungen}} = 0 \quad ;
 \end{aligned}$$

### 7.3 Elementeigenschaften nach Theorie II.Ordnung

#### 7.3.1 Übersicht: Wege zur Ermittlung von Element-Eigenschaften (Steifigkeits- und Übertragungsmatrizen)

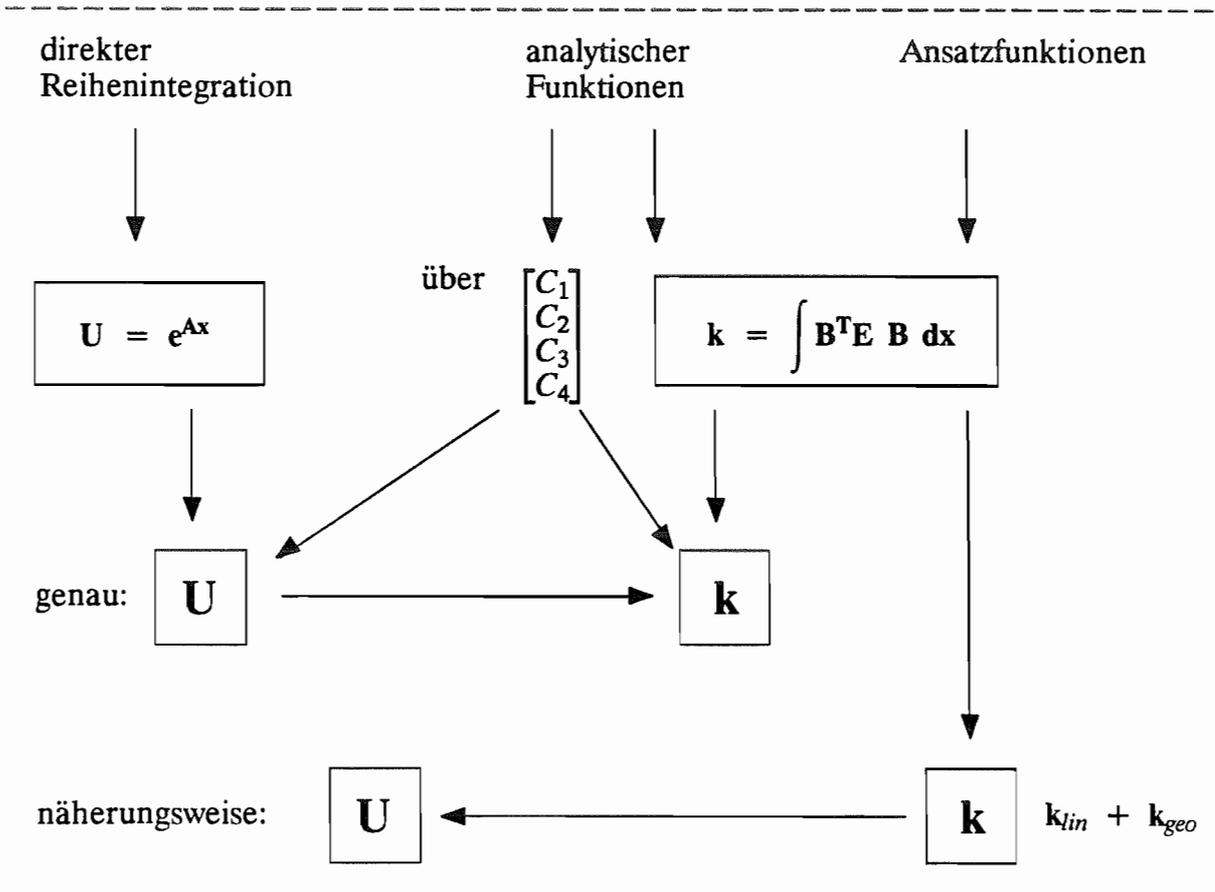
Definitionen:

<p>Übertragungsmatrix U</p> $z_b = U z_a + \bar{z}$ $\begin{bmatrix} v_a \\ \dots \\ s_a \end{bmatrix}$	<p>Steifigkeitsmatrix k</p> $p = k v + \bar{p}^0$ $\begin{bmatrix} v_a \\ \dots \\ v_b \end{bmatrix}$
---	---

Grundgleichungen:

Differentialgleichungen	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
-------------------------	---------------------------------------

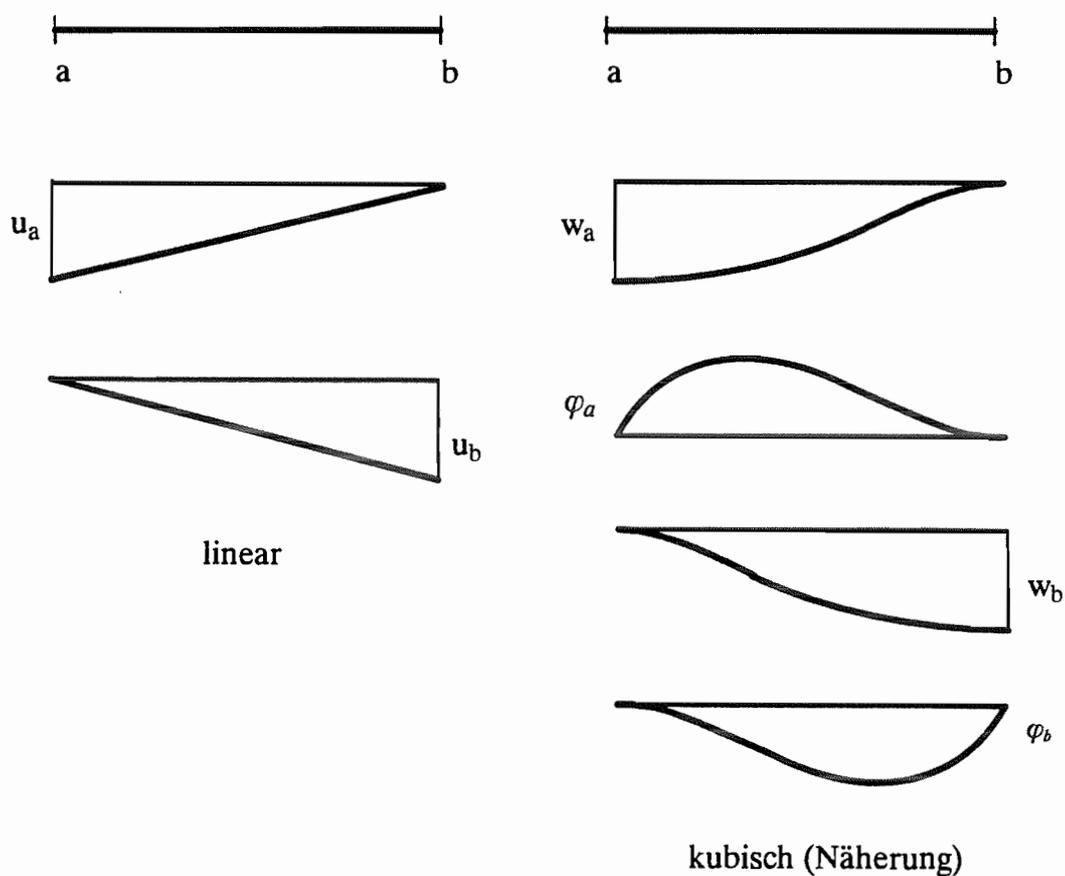
Lösung mittels:



### 7.3.2 Ermittlung der Stabsteifigkeiten $k$ mittels Ansätzen

Die Ermittlung der Stabsteifigkeiten nach Theorie II. Ordnung kann in jedem Fall – also auch, wenn keine analytische Lösung bekannt ist – durch Einsetzen von Ansatzfunktionen in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfolgen. Mit geschätzten Ansätzen ist dies ein Näherungsverfahren. Sind in Spezialfällen die analytischen Lösungen bekannt, ergeben sich die genauen Steifigkeitsmatrizen.

#### Näherungsansätze für die Verschiebungen (vgl. auch Kap. 5.4.2 für lineare Theorie)



$$u(x) = N_1 u_a + N_2 u_b$$

$$w(x) = N_3 w_a + N_4 \varphi_a + N_5 w_b + N_6 \varphi_b$$

Einsetzen in:

$$\int_x u' EA \delta u' dx \quad \int_x ( w'' EI \delta w'' + w' N^0 \delta w' ) dx$$

und Auswerten der Integrale  $\int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx$  ( $\mathbf{B}$  abgeleitete Ansätze) liefert die Steifigkeitsanteile ( $EA = \text{const.}, EI = \text{const.}$ ):

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{N^0}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 & \frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}l & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 & \frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix}$$

$k$  (linear)

$k$  (linear)

$k$  (nichtlinear)

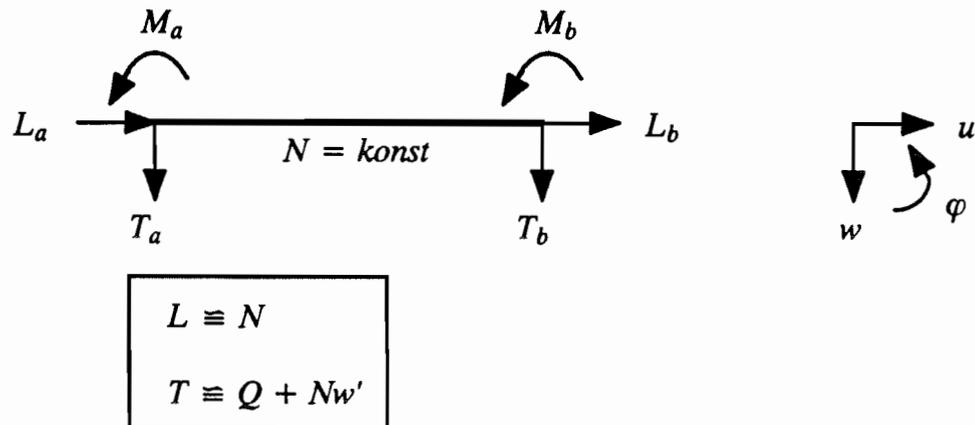
Theorie II. Ordnung  
"geometrische  
Steifigkeitsmatrix"

Längswirkung

Biege Wirkung

Zusammengefaßt:

Lokale Steifigkeitsmatrix für ein Balkenelement nach Theorie II. Ordnung aus dem PvV mit kubischem Verschiebungsansatz

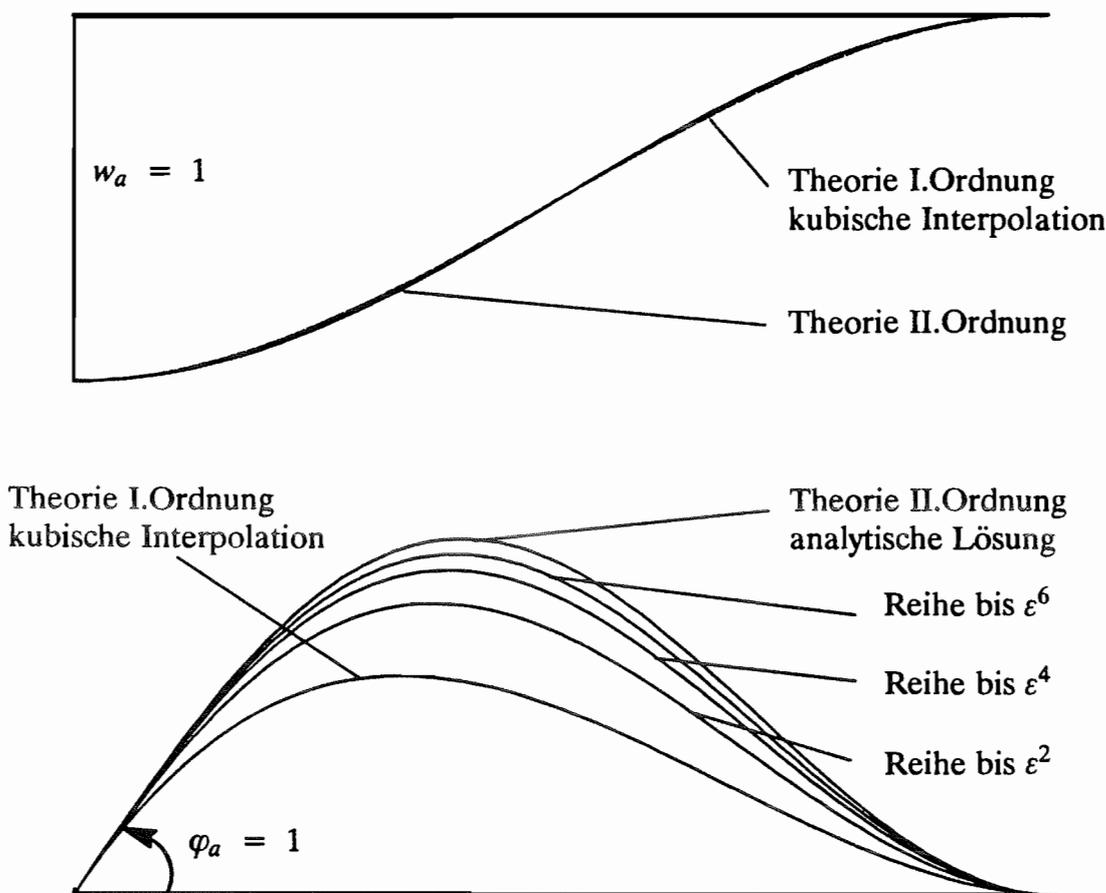


$L_a$	=	$\frac{EA}{l}$	0	0	$-\frac{EA}{l}$	0	0	$u_a$
$T_a$		0	$12 \frac{EI}{l^3} + \frac{6N}{5l}$	$-6 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N$	0	$-12 \frac{EI}{l^3} - \frac{6N}{5l}$	$-6 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N$	$w_a$
$M_a$		0	$-6 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N$	$4 \frac{EI}{l} + \frac{2}{15} Nl$	0	$6 \frac{EI}{l^2} + \frac{1}{10} N$	$2 \frac{EI}{l} - \frac{1}{30} Nl$	$\varphi_a$
$L_b$		$-\frac{EA}{l}$	0	0	$\frac{EA}{l}$	0	0	$u_b$
$T_b$		0	$-12 \frac{EI}{l^3} - \frac{6N}{5l}$	$6 \frac{EI}{l^2} + \frac{1}{10} N$	0	$12 \frac{EI}{l^3} + \frac{6N}{5l}$	$6 \frac{EI}{l^2} + \frac{1}{10} N$	$w_b$
$M_b$		0	$-6 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N$	$2 \frac{EI}{l} - \frac{1}{30} Nl$	0	$6 \frac{EI}{l^2} + \frac{1}{10} N$	$4 \frac{EI}{l} + \frac{2}{15} Nl$	$\varphi_b$

Analytische Ansätze für die Verschiebungen

Für den Stab mit konstantem EI existiert die genaue Lösung für die Theorie II.Ordnung nach Kap.7.2.

Die Einheitsverschiebungszustände für die Stabend-Weggrößen können aus der genauen Lösung in Form von analytischen Funktionen gewonnen werden. Ihr Verlauf ist nachstehend angegeben; (die Verläufe infolge  $w_b$  und  $\varphi_b$  sind analog):



Der Unterschied zum Verlauf aus kubischen Näherungsansätzen ist vor allem bei den Einheitszuständen für die Stabend-Verdrehungen erkennbar. Infolge der vorgegebenen Druckkraft wird die Kurve fülliger. Die zusätzlichen Kurven  $\epsilon^4$  und  $\epsilon^6$  entsprechen den analytischen Lösungen, wenn diese in eine Reihe nach  $\epsilon$  entwickelt werden und nach dem jeweiligen Glied abgebrochen sind.

Einsetzen der genauen Lösungen in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen liefert die auf der folgenden Seite dargestellten Steifigkeitsmatrizen.

lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Zugstab Theorie II. Ordnung):

$$N > 0$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l} & -(A' + B') \frac{EI}{l} & 0 & -[2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l} \\ A' \frac{EI}{l} & B' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l} \\ \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l} & -(A' + B') \frac{EI}{l} & 0 & -[2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l} \\ A' \frac{EI}{l} & B' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Hilfswerte  $A', B', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Zugstab Theorie II. Ordnung  $N > 0$ :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sinh \varepsilon - \varepsilon \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon}; \quad A' = 4 + \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 + \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon}; \quad B' = 2 - \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 - \dots$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon}; \quad A' + B' = 6 + \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 + \dots$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{N}{EI}$$

$$2(A' + B') + D' = \frac{-\varepsilon^3 \sinh \varepsilon}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon}$$

Die Werte  $A', B'$  entsprechen den Zahlen  $\alpha, \beta$  in: Duddeck, Ahrens: Statik der Tragwerke, Betonkalender 1985 I bzw. 1988 I.

Stabkennzahl  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich der Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung:

$$A' = 4 \quad B' = 2 \quad D' = 0$$

lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Druckstab Theorie II. Ordnung):

$$N < 0$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l} & -(A' + B') \frac{EI}{l} & 0 & -[2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l} \\ A' \frac{EI}{l} & B' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l} \\ \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l} & -(A' + B') \frac{EI}{l} & 0 & -[2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l} \\ A' \frac{EI}{l} & B' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Hilfswerte  $A', B', C', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Druckstab Theorie II. Ordnung  $N < 0$ :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}; \quad A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 - \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}; \quad B' = 2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 + \dots$$

$$C' = \frac{A'^2 - B'^2}{A'} = \frac{\varepsilon^2 \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon};$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{|N|}{EI};$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}; \quad A' + B' = 6 - \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 - \dots$$

$$C' - D' = \frac{\varepsilon^3 \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon};$$

$$2(A' + B') - D' = \frac{\varepsilon^3 \sin \varepsilon}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon};$$

Die Werte  $A', B', C'$  entsprechen den Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma$  in: Duddeck, Ahrens: Statik der Tragwerke, Betonkalender 1985 I bzw. 1988 I.

Stabkennzahl  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich der Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung:

$$A' = 4 \quad B' = 2 \quad C' = 3 \quad D' = 0$$

Die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen sind in der Formelzusammenstellung auch in Reihendarstellung angegeben. Die Auswertung dieser Reihen gestaltet sich wesentlich einfacher und numerisch stabiler als die Auswertung der in Funktionen geschriebenen Ausdrücke. Außerdem ist für Druck und Zug nicht in trigonometrische und hyperbolische Funktionen zu unterscheiden. Die jeweilige Reihendarstellung ergibt sich dadurch, daß in  $\varepsilon^2$  die unbekannte Längskraft  $N^0$  mit dem zugehörigen Vorzeichen eingesetzt wird.

Mit  $\varepsilon^2 = l^2 \frac{N}{EI}$  (N mit Vorzeichen einsetzen, Druck negativ) folgt:

$$A' = 4 + \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 + \dots$$

$$B' = 2 - \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 - \dots$$

$$A' + B' = 6 + \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 + \dots$$

$$D' = \varepsilon^2$$

Man erhält noch eine sehr gute Näherung, wenn man die Reihen nach dem zweiten Glied abbricht, solange  $\varepsilon^2 \leq 1.0$ , z.B.:

$$k_{22} = \underbrace{[2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3}}_{\text{exakt}} \cong \underbrace{[12 + 0,2\varepsilon^2 + \varepsilon^2] \frac{EI}{l^3}}_{\text{1. + 2. Reihenglied}} = \underbrace{12 \frac{EI}{l^3} + 1,2 \frac{N}{l}}_{\text{PvV mit kubischem Verschiebungsansatz}}$$

Die beiden ersten Reihenglieder der exakten Lösung stimmen genau mit der genäherten Steifigkeitsmatrix aus dem PvV überein. In der Praxis empfiehlt sich eine Rechnung mit der genäherten Matrix, weil die Koeffizienten leichter zu bestimmen sind. Außerdem läßt sich die Berechnung von Verzweigungslasten wesentlich vereinfachen.

Eine direkte Herleitung der Steifigkeiten aus den Lösungen durch Umordnen ist in Kapitel 7.3.3 angegeben.

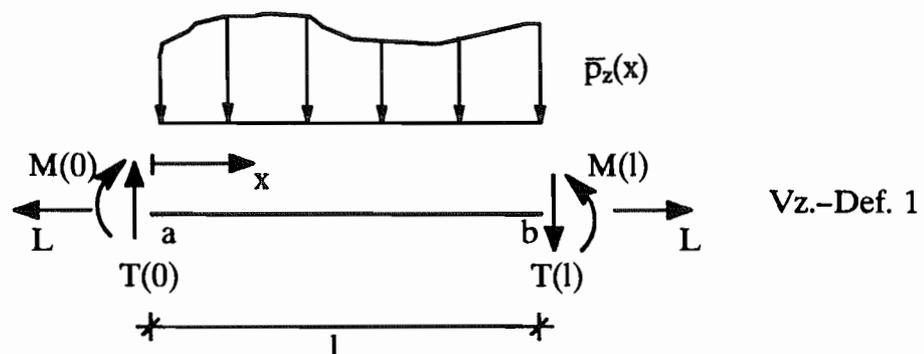
### 7.3.3 Ermittlung von k und U mittels analytischer Lösung der Differentialgleichungen

Für den Spezialfall des Stabes mit konstanten Biegesteifigkeiten EI existiert eine genaue Lösung für die Theorie II.Ordnung, vgl. Kap. 7.2, Querverwirkung. Damit ist auch der Verlauf aller Zustandsgrößen bekannt:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w(x) \\ \varphi(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w \\ -w' \\ -EIw''' + N^0 w' \\ -EIw'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} & c(x) & s(x) \\ 0 & \frac{-1}{l} & \frac{\varepsilon}{l} s(x) & -\frac{\varepsilon}{l} c(x) \\ 0 & \frac{N^0}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI\left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^2 c(x) & EI\left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^2 s(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} N_u \\ \dots \\ N_s \end{bmatrix} \mathbf{c}
 \end{aligned}$$

mit  $c(x) = \begin{Bmatrix} \cos \varepsilon \frac{x}{l} \\ \cosh \varepsilon \frac{x}{l} \end{Bmatrix}$ ,  $s(x) = \begin{Bmatrix} \sin \varepsilon \frac{x}{l} \\ \sinh \varepsilon \frac{x}{l} \end{Bmatrix}$  Druck  
Zug

Die in  $\mathbf{c}$  zusammengefaßten vier Freiwerte  $C_1$  bis  $C_4$  können nun durch die vier mechanisch anschaulichen Freiwerte der Stabenden  $\mathbf{v} = \{w_a \varphi_a w_b \varphi_b\}$  oder in anderer Anordnung direkt durch die vier Zustandsgrößen am Stabumfang  $\mathbf{z}_a = \{w \varphi T M\}_a$  ersetzt werden.

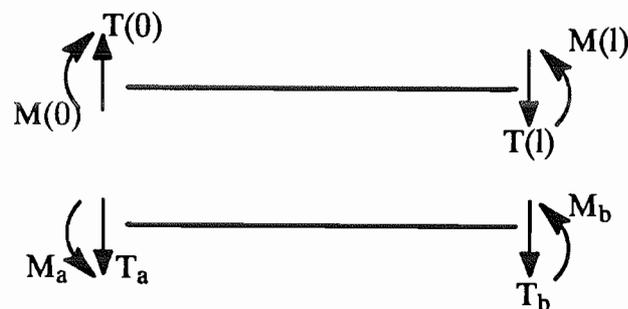


$$\begin{array}{c}
 \mathbf{z}_a \\
 \left[ \begin{array}{c|c} w(0) & w(l) \\ \varphi(0) & \varphi(l) \end{array} \right] \mathbf{v} \\
 \left[ \begin{array}{c|c} T(0) & T(l) \\ M(0) & M(l) \end{array} \right]
 \end{array}$$

Damit erhält man durch Umordnen der bekannten Lösung die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}$  oder die Übertragungsmatrix  $\mathbf{U}$ . Dazu müssen die in  $\mathbf{N}_u$  und  $\mathbf{N}_s$  enthaltenen Funktionsverläufe der Zustandsgrößen zunächst an den beiden Stabenden ausgewertet werden. Die diskreten Werte an den Stabenden sind analog  $\mathbf{N}_u$  und  $\mathbf{N}_s$  in  $\hat{\mathbf{N}}_u$  bzw.  $\hat{\mathbf{N}}_v$  und  $\hat{\mathbf{N}}_s$  (Vorzeichendef. 1) bzw.  $\hat{\mathbf{N}}_p$  (Vorzeichendef. 2) zusammengefaßt:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(0) \\ \varphi(0) \\ w(l) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_u(0) \\ \hat{\mathbf{N}}_u(l) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \hat{\mathbf{N}}_v \mathbf{c}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T(0) \\ -M(0) \\ T(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{N}}_s(0) \\ \hat{\mathbf{N}}_s(l) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \hat{\mathbf{N}}_p \mathbf{c}$$



Vorzeichendefinition 1 und 2

Die Steifigkeiten sind definiert durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{v} ,$$

oder ausgedrückt durch die Werte der analytischen Lösung an den beiden Stabenden:

$$\hat{\mathbf{N}}_p \mathbf{c} = \mathbf{k} \hat{\mathbf{N}}_u \mathbf{c} .$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{N}}_p \hat{\mathbf{N}}_u^{-1} .$$

Die Übertragungsmatrix ist definiert durch:

$$\mathbf{z}_b = \mathbf{U} \mathbf{z}_a ,$$

oder ausgedrückt durch die Werte der analytischen Lösung an den beiden Stabenden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_z(l) \\ \hat{\mathbf{N}}_s(l) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{N}}_z(l)} \mathbf{c} = \mathbf{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_z(0) \\ \hat{\mathbf{N}}_s(0) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{N}}_z(0)} \mathbf{c} = \mathbf{U} \mathbf{z}_a .$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{N}}_z(l) \hat{\mathbf{N}}_z^{-1}(0) .$$

Für die Übertragungsmatrix gilt direkt die gleiche Form, wenn statt der Gesamtlänge  $l$  eine beliebige Koordinate  $x$  längs des Stabes eingesetzt wird.

Eine entsprechende Umformung ist mit den aus den Einwirkungen folgenden Partikularanteilen (inhomogene Anteile) durchzuführen.

Die ausgeschriebene Form der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}$  und der Übertragungsmatrix  $\mathbf{U}$  sowie die entsprechenden Lastanteile für einige typische Einwirkungen sind auf den folgenden Seiten sowie in der Formelzusammenstellung angegeben.

Der Einfluß der Theorie II.Ordnung wird durch den Parameter

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N^0|}{EI}}$$

gekennzeichnet. Er enthält die Schlankheit  $l/i$  und die Längsdehnung  $N/EA$  des betrachteten Stabes

$$\varepsilon = \frac{l}{i} \sqrt{\frac{|N^0|}{EA}}$$

mit dem Trägheitsradius  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  des Stabes.

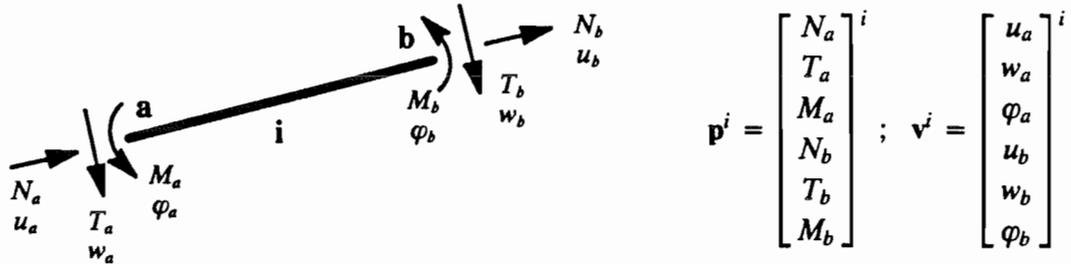
Für kleine Parameter  $\varepsilon$  weichen die Lösungen nach Theorie II.Ordnung nur wenig von denen nach Theorie I.Ordnung ab, im Grenzfall gehen z.B. die Koeffizienten von  $\mathbf{k}$  in die der linearen Steifigkeitsmatrix über.

**Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen**

- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



Druckstab (Theorie II. Ordnung)

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  :  $\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$  ;  $N < 0$

$$\bar{\mathbf{k}} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} & 0 & -[2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & A' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l^2} & B' \frac{EI}{l} \\ \hline & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & (A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & & & & A' \frac{EI}{l} \end{array} \right]$$

Hilfswerte  $A', B', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Druckstab Theorie II. Ordnung :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 - \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$B' = 2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 - \dots$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' + B' = 6 - \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 - \dots$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{|N|}{EI} ;$$

$$2 (A' + B') - D' = \frac{\varepsilon^3 \sin \varepsilon}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ; \quad 2(A' + B) - D' = 12 - \frac{6}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{700} \varepsilon^4 - \dots$$

Zum Verlauf der Hilfswerte in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  siehe nächste Seite

- Kraftgrößen an den Stabenden siehe z.B. Avramidis [2], Petersen [6] bzw. Abschnitt 5.2 in der Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen

**Zugstab (Theorie II. Ordnung)**

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  :  $\varepsilon = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$  ;  $N > 0$

$$\bar{\mathbf{k}}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} & & 0 & -[2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & A' \frac{EI}{l} & & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l^2} & B' \frac{EI}{l} \\ \hline & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & (A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & & & & A' \frac{EI}{l} \end{array} \right]$$

Hilfswerte  $A', B', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Zugstab Theorie II. Ordnung :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sinh \varepsilon - \varepsilon \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad A' = 4 + \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 + \dots$$

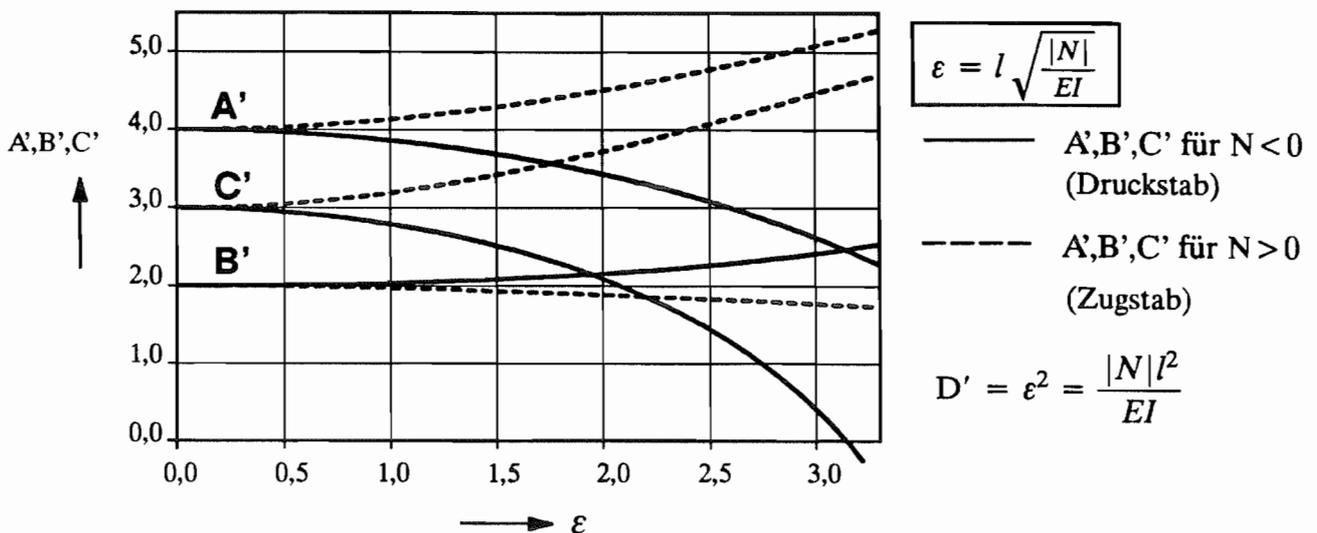
$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad B' = 2 - \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 - \dots$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad A' + B' = 6 + \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 + \dots$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{N}{EI}$$

$$2(A' + B') + D' = \frac{-\varepsilon^3 \sinh \varepsilon}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad 2(A' + B) - D' = 12 + \frac{6}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{700} \varepsilon^4 - \dots$$

Verlauf der Hilfswerte in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  :



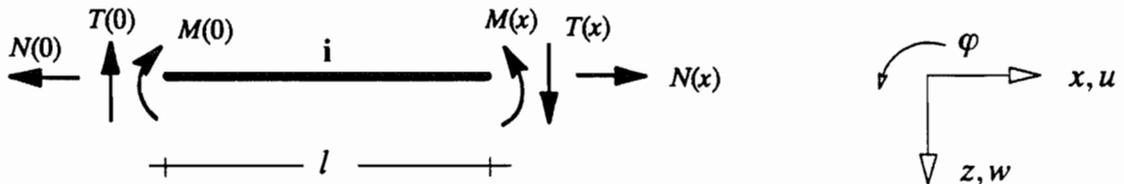
- Kraftgrößen an den Stabenden siehe z.B. Avramidis [2]

### Übertragungsmatrix und Lastvektor des prismatischen Trägers

- Grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \\ N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{\varphi}(x) \\ \bar{N}(x) \\ \bar{T}(x) \\ \bar{M}(x) \end{bmatrix}^i$$

### Druckstab (Theorie II. Ordnung)

- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  :  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$  ;  $N < 0$

( $l$  = Länge des Übertragungsabschnitts)

$$\mathbf{U}(x=l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l \sin \varepsilon}{\varepsilon} & | & 0 & -\frac{l^3 (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{EI \varepsilon^3} & -\frac{l^2 (1 - \cos \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} \\ 0 & 0 & \cos \varepsilon & | & 0 & \frac{l^2 (1 - \cos \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} & \frac{l \sin \varepsilon}{EI \varepsilon} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{l} \varepsilon \sin \varepsilon & | & 0 & \frac{l \sin \varepsilon}{\varepsilon} & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

- Lastvektoren siehe z.B. Avramidis [2], Petersen [6]

Zugstab (Theorie II. Ordnung)

- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  :  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}}$  ;  $N > 0$

(mit  $l =$  Länge des Übertragungsabschnitts)

$$U(x = l) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l \sinh \varepsilon}{\varepsilon} & 0 & \frac{l^3 (\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{EI \varepsilon^3} & \frac{l^2 (1 - \cosh \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} \\ 0 & 0 & \cosh \varepsilon & 0 & -\frac{l^2 (1 - \cosh \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} & \frac{l \sinh \varepsilon}{EI \varepsilon} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{l} \varepsilon \sinh \varepsilon & 0 & \frac{l \sinh \varepsilon}{\varepsilon} & \cosh \varepsilon \end{array} \right]$$

- Lastvektoren siehe z.B. Avramidis [2]

Die unter 7.3.3 angegebenen Steifigkeiten  $\mathbf{k}$  und Übertragungsmatrizen  $\mathbf{U}$  beruhen auf den genauen Lösungen des ebenen Stabes nach Theorie II.Ordnung ( $EI = \text{const.}$ ):

- zugrundeliegende Differentialgleichung:

$$EI w'''' - N w'' = \bar{p}_z + m'_y - EI \bar{\kappa}' - N w_o''$$

- Lösungsansatz:  $w(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{l} + C_3 \cosh \varepsilon \frac{x}{l} + C_4 \sinh \varepsilon \frac{x}{l} + w_p(x)$

### 7.3.4 Ermittlung von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{U}$ mittels direkter Reihenintegration

Für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung kann die Lösung gemäß Kap.7.2.2.4 und Kap. 7.2.2.5 immer durch eine Reihenentwicklung gewonnen werden. Für mechanisch anschauliche Unbekannte  $\mathbf{z}_a = \{ w \ \varphi \ T \ M \}_a$  ist die Integralmatrix des Stabendes, die die Lösungen enthält, als Übertragungsmatrix deutbar.

Die Umformung in die entsprechende Steifigkeitsmatrix des Stababschnitts ist aufgrund der jeweils anders angeordneten Freiwerte in einfacher Weise möglich, vgl. Abschnitt 5.4.2.2. Das Ergebnis ist eine Reihenentwicklung in  $\varepsilon^2$  und stimmt mit der unter 7.3.3 angegebenen Reihenentwicklung der Steifigkeitskoeffizienten überein.

## 7.4 Systemberechnung nach dem Weggrößenverfahren Th. II. O.

Die Überlagerung der Stabsteifigkeiten zum Gesamtsystem erfolgt in gleicher Weise wie für die lineare Theorie nach dem Weggrößenverfahren, vgl. Kap. 5.4.

*Rechenablauf:*

– System, Querschnittswerte, Längen etc. festlegen

– Theorie I.Ordnung

Grundlastfälle auflisten,  
ggf. als Haupt-, Zusatz- oder Sonderlast etc. (DIN 1052),  
bzw. als ständige, veränderliche oder außergewöhnliche Einwirkungen  
(DIN 18800 Teil 1) einstufen

Berechnung linear (Grundzustand)

Schnittgrößen des Grundzustandes, z.B.  $N^0$

– Theorie II.Ordnung (Superpositionsgesetz gilt nicht)

Lastkombinationen, Sicherheitsbeiwerte, Teilsicherheitsbeiwerte nach der maßgebenden Norm entsprechend festlegen

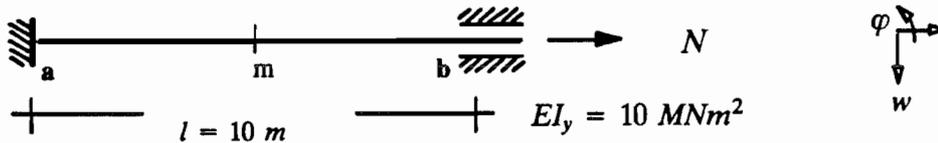
$\gamma$ -fache Lastkombinationen mit Vorverformungen, Vorkrümmungen, Imperfektionen aufbringen

Berechnung in Schritten je Kombinationslastfall

1.  $N^0 \rightarrow \varepsilon$  (je Element)
2. Steifigkeiten, Volleinspannschnittgrößen (je Element)  
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{lin} + \mathbf{k}_{geo}(\varepsilon)$$
3. Steifigkeiten des Gesamtsystems bilden
4. Gleichungssystem lösen
5. Stabendschnittgrößen ermitteln
6. Vergleich mit Annahme aus Schritt 1
7. Falls erforderlich: Schritt 1–6 mit verbesserten Werten für  $N^0$   
(Iteration, z.B. bei Seilkonstruktionen)
8. Nachlaufrechnung im Feld:
  - max M, zugeh. Q, zugeh. N
  - max N, zugeh. M, zugeh. Q, etc.

### 7.5 Beispiele zum Tragverhalten

'Einheitsverschiebungszustände' am beidseitig eingespannten Träger :



$$N = \pm 1000 \text{ kN}$$

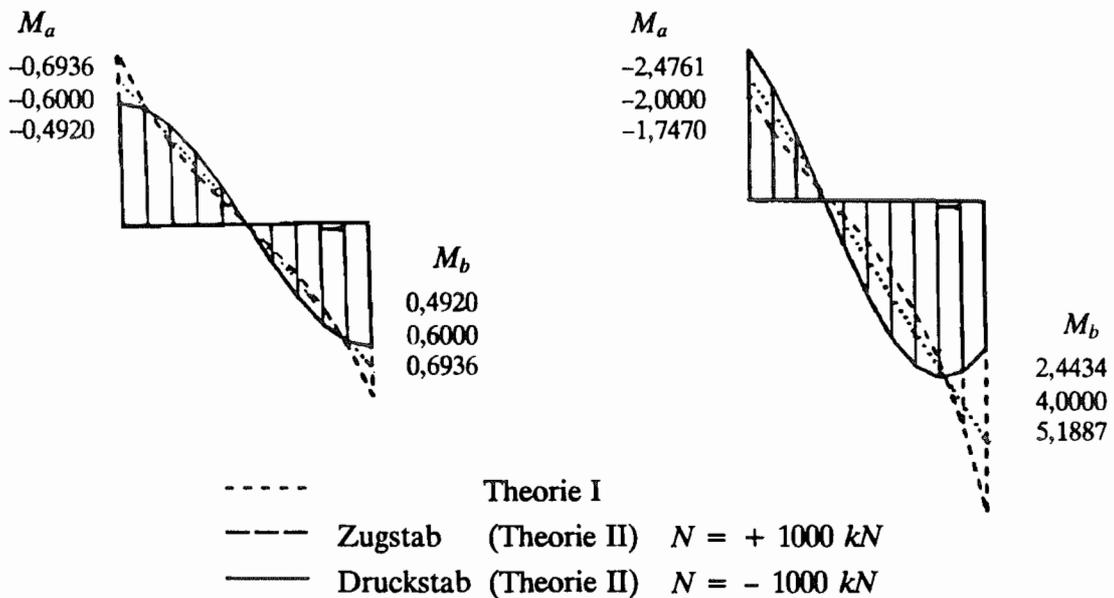
$$\text{Knicklast : } P_{krit} = \frac{EI \pi^2}{s_k^2} = \frac{4 EI \pi^2}{l^2} = 3948 \text{ kN}$$

$$\text{Stabkennzahl : } \varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 3,162$$

Verlauf des Biegemoments  $M$  [kNm] infolge

'Einheitsverschiebung'  $w_b = 1 \text{ mm}$

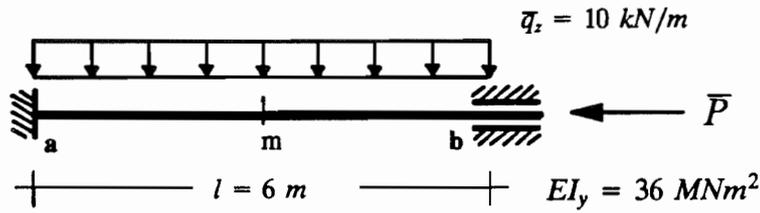
'Einheitsverdrehung'  $\varphi_b = 1 \text{ ‰}$



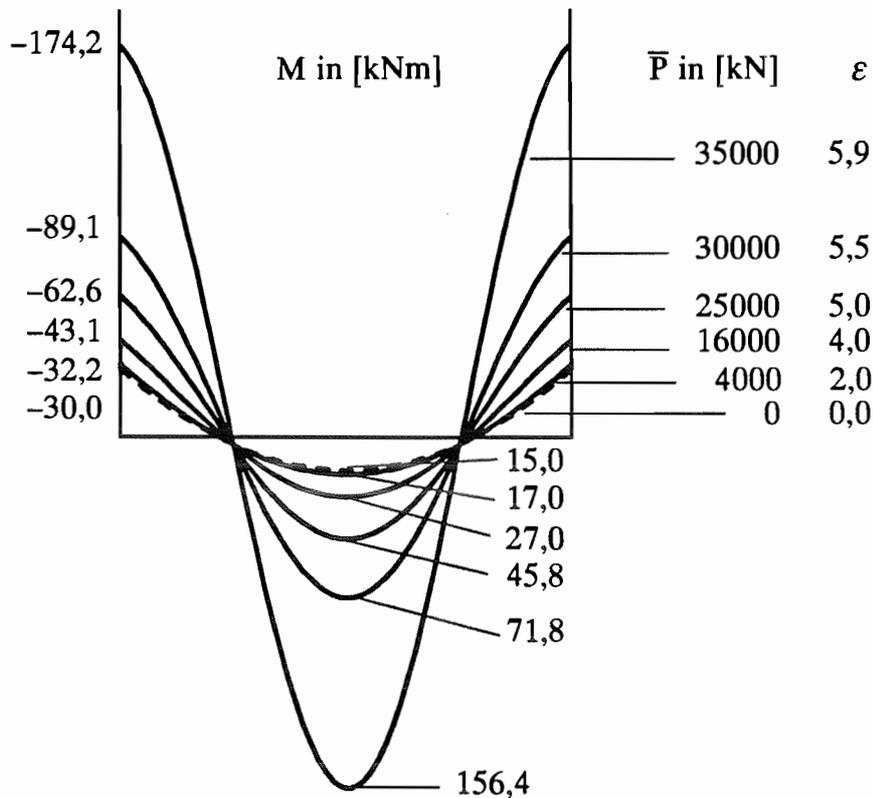
Folgerungen im Vergleich zur Theorie I. Ordnung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Druck} \\ \text{Zug} \end{array} \right\} : \text{Moment} \left\{ \begin{array}{l} \text{völliger} \\ \text{"gezogener"} \end{array} \right\} ; \text{Stab} \left\{ \begin{array}{l} \text{weicher} \\ \text{steifer} \end{array} \right\} .$$

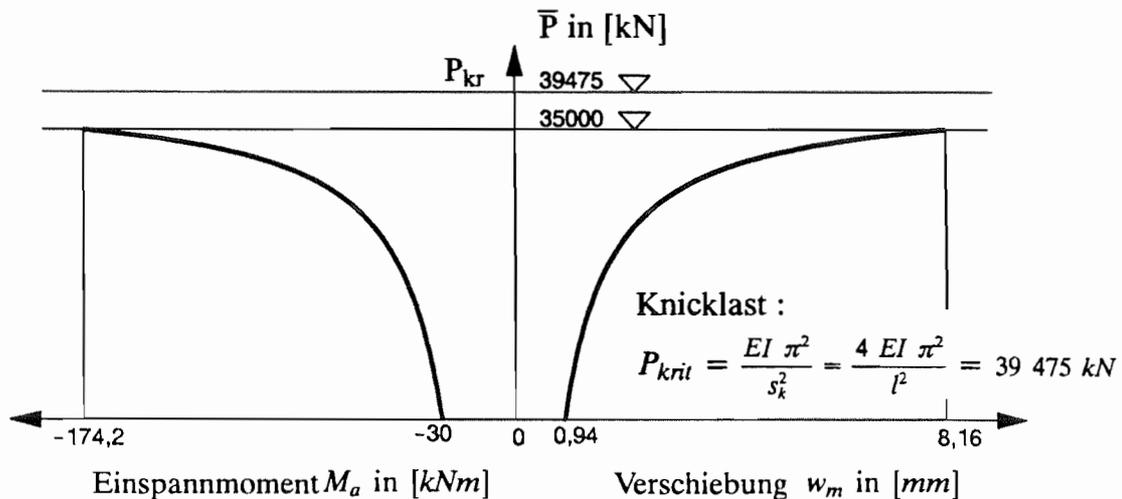
Beidseits eingespannter Träger unter Normalkraft und Querbelastung :



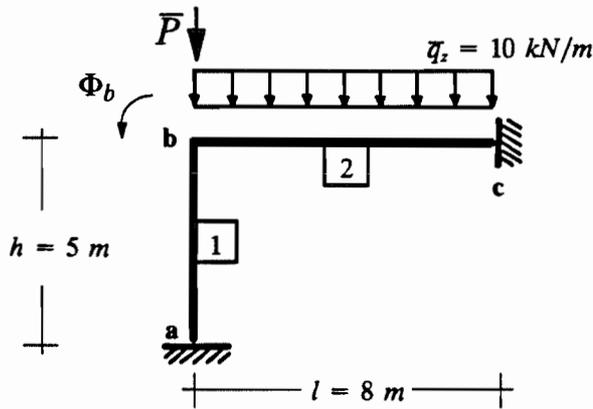
Verlauf des Biegemoments  $M$  bei Variation von  $\bar{P}$  ( $q_z = \text{konstant}$ ) :



Einspannmoment  $M_a$  und Verschiebung  $w_m$  bei Variation von  $\bar{P}$  ( $q_z = \text{konst.}$ ) :



Einhüftiger Rahmen : Variation der Stielnormalkraft



$$EI_1 = 7,5 \text{ MNm}^2$$

$$EI_2 = 15 \text{ MNm}^2$$

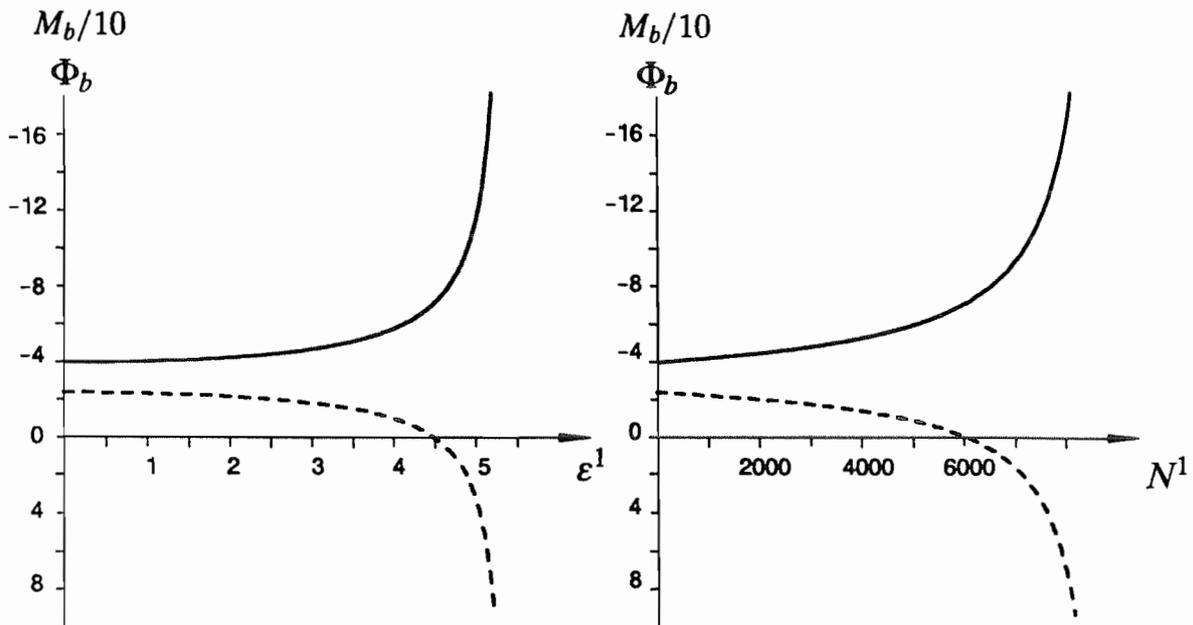
$$EA \rightarrow \infty$$

Abhängigkeit des Biegemoments  $M_b$  und der Knotenverdrehung  $\Phi_b$  bei Variation von  $\bar{P}$  ( $\bar{q}_z = \text{konstant}$ ):

$$M_b^1 = \frac{EI_1}{h} A' \varphi_b ; \quad M_b^2 = \frac{EI_2}{l} 4,0 \varphi_b + \frac{q_z l^2}{12} ; \quad \sum M_b = 0 \rightarrow \Phi_b$$

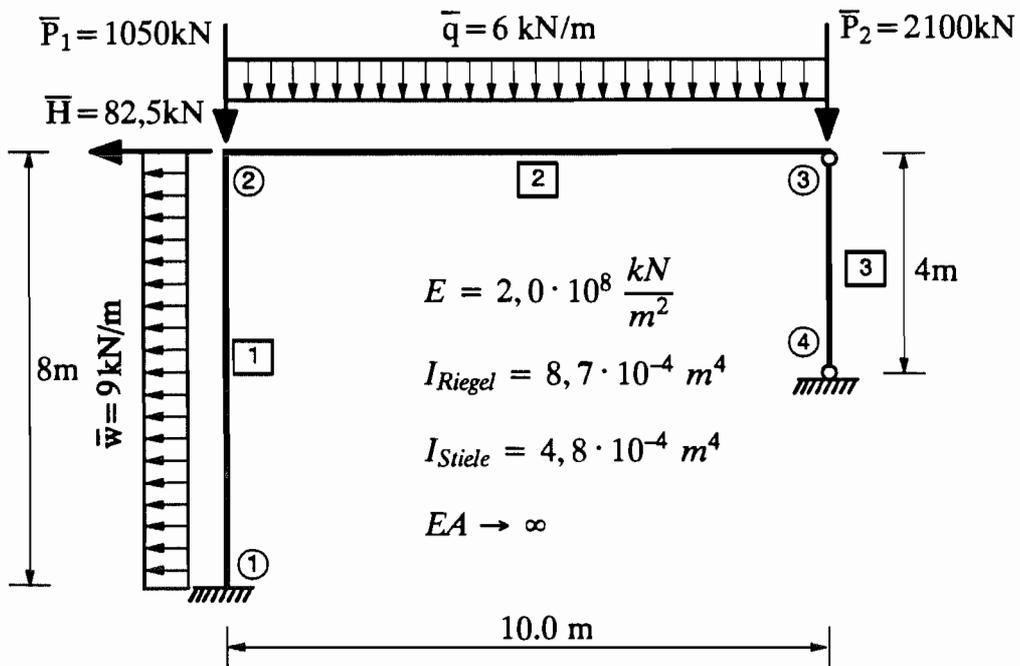
mit  $\varphi_b = \Phi_b ; \quad \varepsilon = l \sqrt{\frac{\bar{P}}{EI}}$  und  $A' = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}$

——  $\Phi_b$  in [o/oo]  
 - - - -  $M_b/10$  in [kNm] (+M erzeugt Zug an Innenseite)

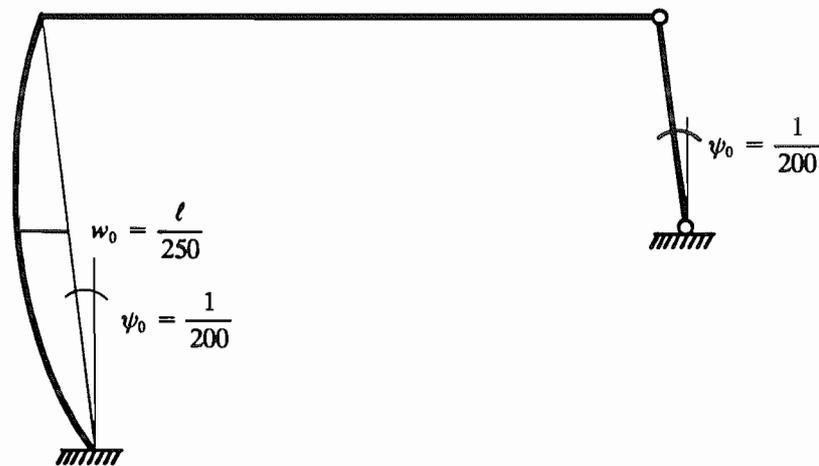


Mit zunehmendem  $\varepsilon^1$  wird der Stiel weicher und damit die elastische Einspannung des Riegels durch den Stiel geringer. Ein Vorzeichenwechsel bei  $A'$  bedingt den Vorzeichenwechsel bei  $M_b$ ; für  $\varepsilon^1 > 4,49$  muß der Riegel den Stiel stabilisieren, bevor das Eckmoment bei  $\varepsilon^1 \approx 5,43$  ins Unendliche ansteigt.

Verschieblicher Rahmen: Einfluß der Vorverformung



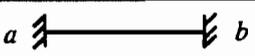
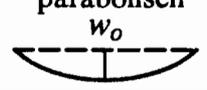
System mit Vorverformungen (in ungünstigster Richtung):



Vorverformungen können für die Berechnung der Biegemomente auch durch statisch gleichwertige Ersatzlastgruppen ersetzt werden. Man beachte, daß dabei aufgrund des Gleichgewichts sowohl die äquivalente Streckenlast als auch die Reaktionskräfte angesetzt werden müssen.

Vorverformung	Ersatzlast

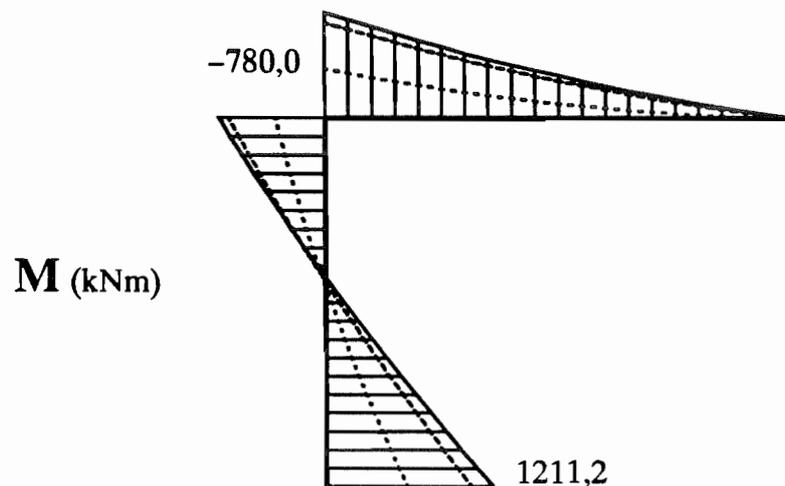
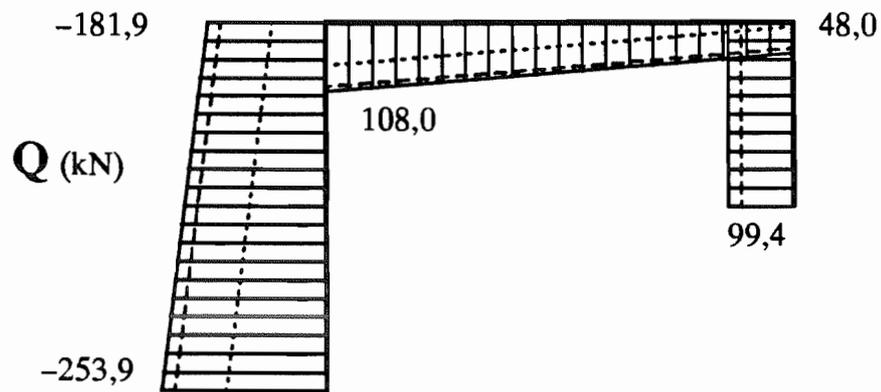
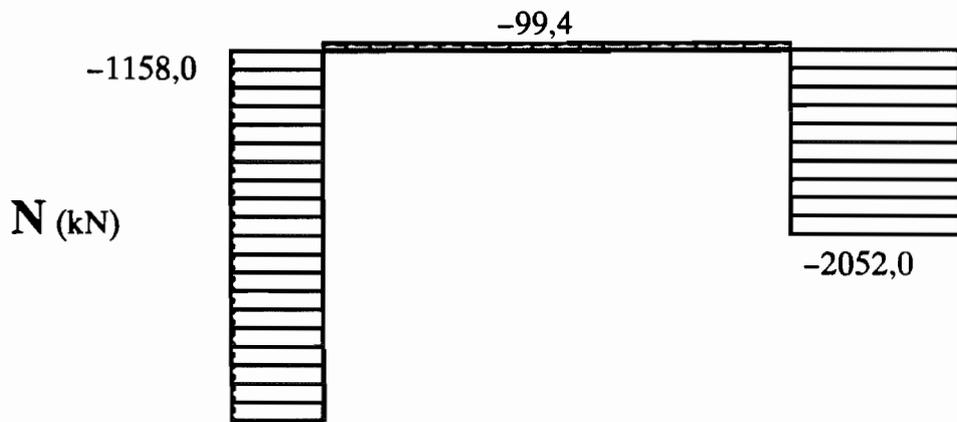
Hieraus ergeben sich die Knotenkraftgrößen nach Theorie II.Ordnung für  $N < 0$ :

	 Knotenkraftgrößen			
Vorverformung	$M_a^o$	$M_b^o$	$T_a^o$	$T_b^o$
parabolisch 	$-\frac{4}{A' + B'} N w_o$	$\frac{4}{A' + B'} N w_o$	0	0
Schiefstellung 	0	0	$-N \psi_o$	$N \psi_o$

Vergleich der Ergebnisse:

	Th. I. O.	Th. II. O.	
		ohne Vorverf.	mit Vorverf.
$U_2$	-0,07831	-0,15417	-0,17387
$\Phi^2$	0,00553	0,01210	0,013556
$M_1^1$	584,2	1055,5	1211,2
$M_2^1$	-363,8	-704,8	-780,0
$T_1^1$	-154,5	-233,9	-253,9
$T_2^1$	-82,5	-161,9	-181,9
$T_2^2$	66,4	100,5	108,0
$T_3^2$	6,4	40,5	48,00
$T_3^3$	0,0	79,4	99,4
$N^1$	-1116,4	-1150,5	-1158,0
$N^2$	0,0	-79,4	-99,4
$N^3$	-2093,6	-2059,5	-2052,0

Schnittgrößenverlauf:



- ..... Theorie I. Ordnung
- Theorie II. Ordnung ohne Vorverf.
- Theorie II. Ordnung mit Vorverf.

## 7.7 Verzweigungsprobleme

### 7.7.1 Bedingung für Gleichgewichtsverzweigung

Die Ermittlung von Verzweigungslasten des Gleichgewichts kann als Sonderfall der Berechnung nach Theorie II.Ordnung angesehen werden. Das zum Spannungsproblem Theorie II.Ordnung zugehörige Verzweigungsproblem ergibt sich aus der homogenen Lösung der Systemgleichungen (Gleichgewicht):

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{0} .$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist nur für bestimmte Werte – die Eigenwerte – möglich, die sich aus der Bedingung

$$\det \mathbf{K} = 0$$

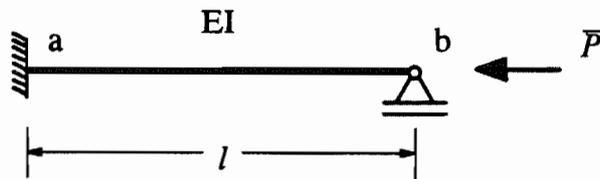
ergeben und mechanisch z. B. als Knickbedingung eines Stabes zu deuten sind, woraus die Knicklast als niedrigster Eigenwert folgt. Die zugehörigen Eigenformen sind die Knickfiguren. Neben dem niedrigsten Eigenwert können auch die höheren von Interesse sein, z.B., wenn symmetrische und antimetrische Knickfiguren zu unterscheiden sind.

### 7.7.2 Ermittlung der Verzweigungslasten

#### a) aus analytischer Lösung

Werden die nach Kapitel 7.3 aus der analytischen Lösung gewonnenen Elementsteifigkeiten verwendet, so führt die Bedingung  $\det \mathbf{K} = 0$  auf eine transzendente Gleichung, die im allgemeinen unendlich viele Lösungen hat. Die Bestimmung der Eigenwerte ist relativ aufwendig und ist nur bei einfachen Aufgabenstellungen noch gut überschaubar.

Beispiel:



Kinem. R.B.:

$$w_a = \varphi_a = 0$$

$$w_b = 0$$

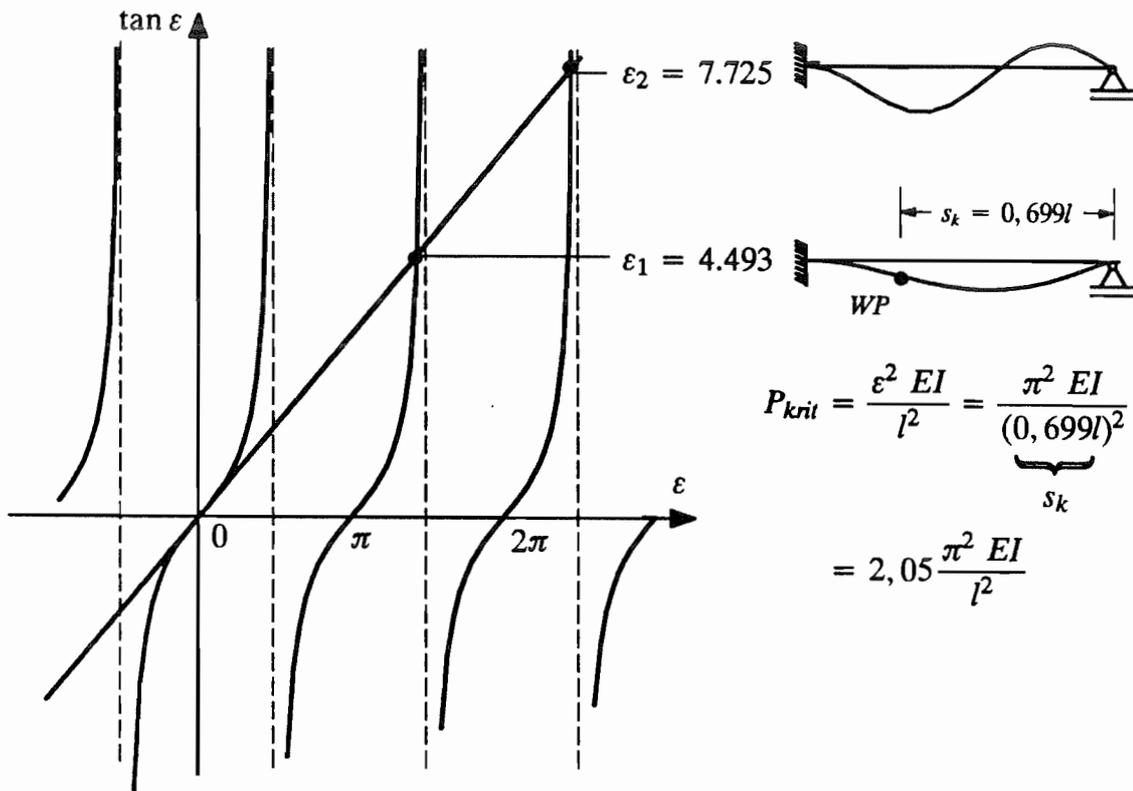
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} [2(A'+B')-D'] & -(A'+B')l & -[2(A'+B')-D'] & -(A'+B')l \\ -(A'+B')l & A'^2 & -(A'+B')l & -B'^2 \\ -[2(A'+B')-D'] & (A'+B')l & -[2(A'+B')-D'] & -(A'+B')l \\ -(A'+B')l & B'^2 & (A'+B')l & A'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_b \end{bmatrix};$$

$$\det K = 0 = \underbrace{\varphi_b \frac{EI}{l}}_{\neq 0} A'$$

$$\rightarrow A' = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon = 0$$

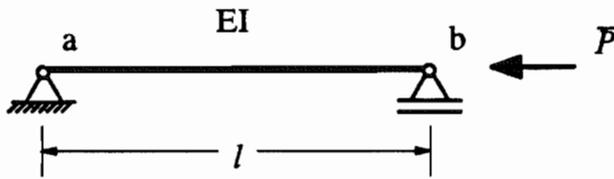
$\tan \varepsilon = \varepsilon$



$$P_{krit} = \frac{\varepsilon^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,699l)^2}$$

$$= 2,05 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Beispiel:



Kinem. R.B.:

$$w_a = 0$$

$$w_b = 0$$

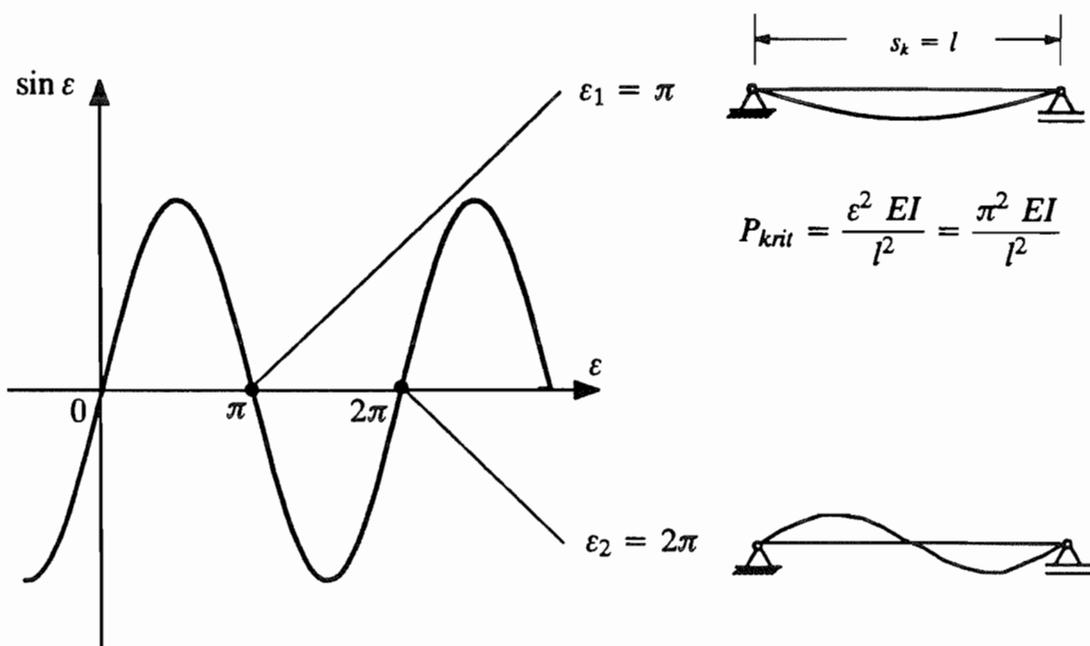
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -[2(A'+B')-D']-(A'+B')l & -[2(A'+B')-D']-(A'+B')l & (A'+B')l & B'l^2 \\ -(A'+B')l & A'l^2 & (A'+B')l & B'l^2 \\ -[2(A'+B')-D']-(A'+B')l & -[2(A'+B')-D']-(A'+B')l & (A'+B')l & A'l^2 \\ -(A'+B')l & B'l^2 & (A'+B')l & A'l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_a \\ 0 \\ \varphi_b \end{bmatrix};$$

$$\det K = 0 = \underbrace{\varphi_b \varphi_a \frac{EI^2}{l^2}}_{\neq 0} (A'^2 - B'^2) \quad | \cdot \frac{1}{A'}$$

$$\rightarrow \frac{A'^2 - B'^2}{A'} = C' = \frac{\varepsilon^2 \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon} = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon^2 \sin \varepsilon = 0$$

$\sin \varepsilon = 0$



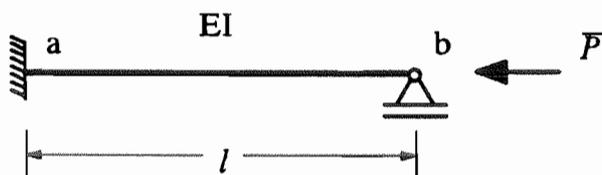
b) aus Näherungslösung

Statt der geschlossenen oder numerischen Lösung der transzendenten Gleichung  $\det \mathbf{K} = 0$  ist es meist einfacher, die Reihenentwicklung der Steifigkeitsmatrix zu verwenden. Aus den linearen Anteilen  $\mathbf{k}_{lin}$  und "geometrischen" Anteilen Theorie II. Ordnung  $\mathbf{k}_{geo}$  der Elementmatrizen ergibt sich durch Überlagerung mit dem Weggrößenverfahren die Systemsteifigkeit

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = (\mathbf{K}_{lin} + \lambda \mathbf{K}_{geo}) \mathbf{V} = 0$$

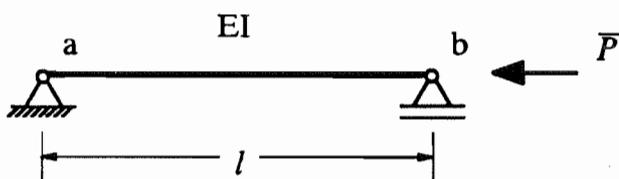
Die Anteile des Grundzustands (z. B.  $\varepsilon^2 = l^2 N^0/EI$ ) kann man für eine bestimmte Lastkombination ausklammern (Lastfaktor  $\lambda$ ). Die obige Darstellung entsteht, wenn man durch geeignete Wahl der Elementlänge ( $\varepsilon^2 \leq 1$ ) die Reihe nach dem zweiten Glied abbrechen kann. Dies entspricht der unter 7.3 beschriebenen Näherung mit kubischen Ansätzen.

Beispiel:



$$\det \mathbf{K} = 0 = \underbrace{\varphi_b \frac{EI}{l}}_{\neq 0} A' \quad \rightarrow A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2 = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon^2 = 30 \rightarrow \varepsilon_1 = 5,477$$



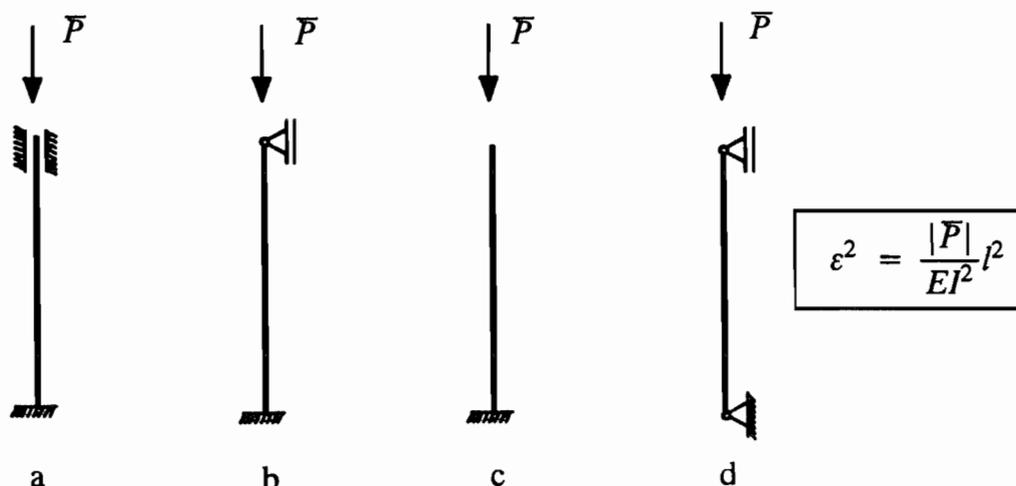
$$\det \mathbf{K} = 0 = \underbrace{\varphi_b \varphi_a \frac{EI^2}{l^2}}_{\neq 0} (A'^2 - B'^2)$$

$$\rightarrow A'^2 - B'^2 = \left(4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{60} \varepsilon^4 - \frac{6}{5} \varepsilon^2 + 12 = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon^2 = 12 \rightarrow \varepsilon_1 = 3,464$$

Ergebnisse bei unterschiedlicher Elemententeilung:



a	b	c	d	Anzahl der Elemente
-	30	2,486	12	1
40	20,686	2,480	9,945	2
39,775	20,323	2,467	9,874	4
39,478	20,191	2,467	9,870	exakt

### c) Inverse Iteration für Systeme

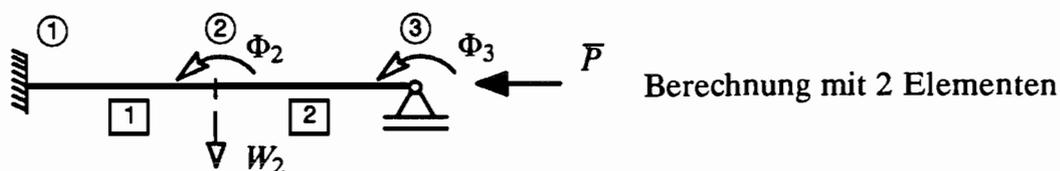
Die kritische Belastung  $\lambda_{kr}$  kann man als niedrigsten Eigenwert recht einfach durch sog. Inverse Vektor - Iteration bestimmen

$$\mathbf{K}_{lin} \mathbf{V}_i = -\lambda_{i-1} \mathbf{K}_{geo} \mathbf{V}_{i-1}$$

die immer gegen den betragsmäßig kleinsten Eigenwert  $\lambda_{min}$  konvergiert. Die Iteration kann mit einem beliebigen Startvektor  $\mathbf{V}_0$  und  $\lambda_0$  beginnen. Außerdem ist es zweckmäßig, den Vektor bei jedem Schritt auf eine konstante Länge, z. B.  $|\mathbf{V}_i| = 1$  zu normieren:

$$\mathbf{V}_i := \mathbf{V}_i / a \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i}$$

Beispiel:



Startwerte: 
$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} W_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \quad \lambda_0 = 1,0$$

Iterations- schritt	$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} W_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$	$\lambda_i$
1	$\begin{bmatrix} -0,2978 \\ 0,1804 \\ -0,9374 \end{bmatrix}$	11,1372
2	$\begin{bmatrix} -0,2477 \\ 0,2875 \\ -0,9684 \end{bmatrix}$	20,9943
3	$\begin{bmatrix} -0,2243 \\ 0,2971 \\ -0,9281 \end{bmatrix}$	20,7096
4	$\begin{bmatrix} -0,2206 \\ 0,3025 \\ -0,9272 \end{bmatrix}$	20,6877
5	$\begin{bmatrix} -0,2196 \\ 0,3040 \\ -0,9270 \end{bmatrix}$	20,6860
6	$\begin{bmatrix} -0,2194 \\ 0,3043 \\ -0,9269 \end{bmatrix}$	20,6859

Die Genauigkeit der Lösung hängt von der Länge der Elemente ab ( $\varepsilon^2 \leq 1$ ), wobei für die Berechnung der Verzweigungslasten meist ein wesentlich höherer Wert für N einzusetzen ist als bei einer Spannungsberechnung nach Theorie II.Ordnung. Die Näherung liefert i. a. einen Wert, der höher als die genaue kritische Last liegt.

## 7.8 Allgemeines Stabilitätskriterium

allgemein:

1. Festlegen eines ungestörten Zustandes (Grundzustand)
2. Störung → gestörter Zustand (Nachbarzustand)
3. Festlegen eines Merkmals ( das Zustand kennzeichnen soll)
4. Stabilitätsverhalten = Verhalten des Merkmals bei Störung  
(Festsetzung eines Maßes, das nicht überschritten werden soll)
5. Ungestörter Zustand stabil: Merkmal darf festgelegtes Maß  
nicht überschreiten  
sonst instabil

speziell in der Statik:

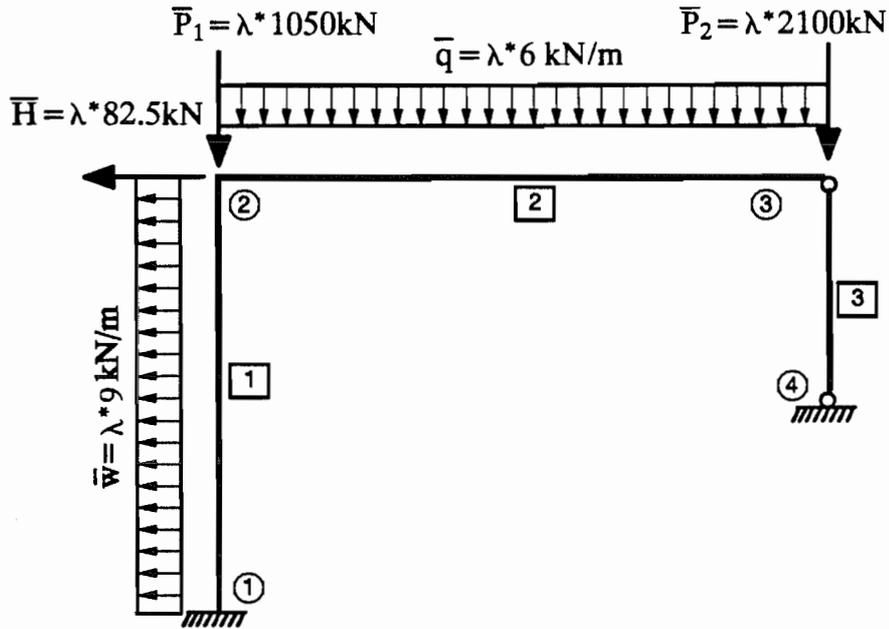
kleine Störung des Gleichgewichts (des Grundzustandes)  
→ Nachbarzustand

Merkmal: Verschiebungen

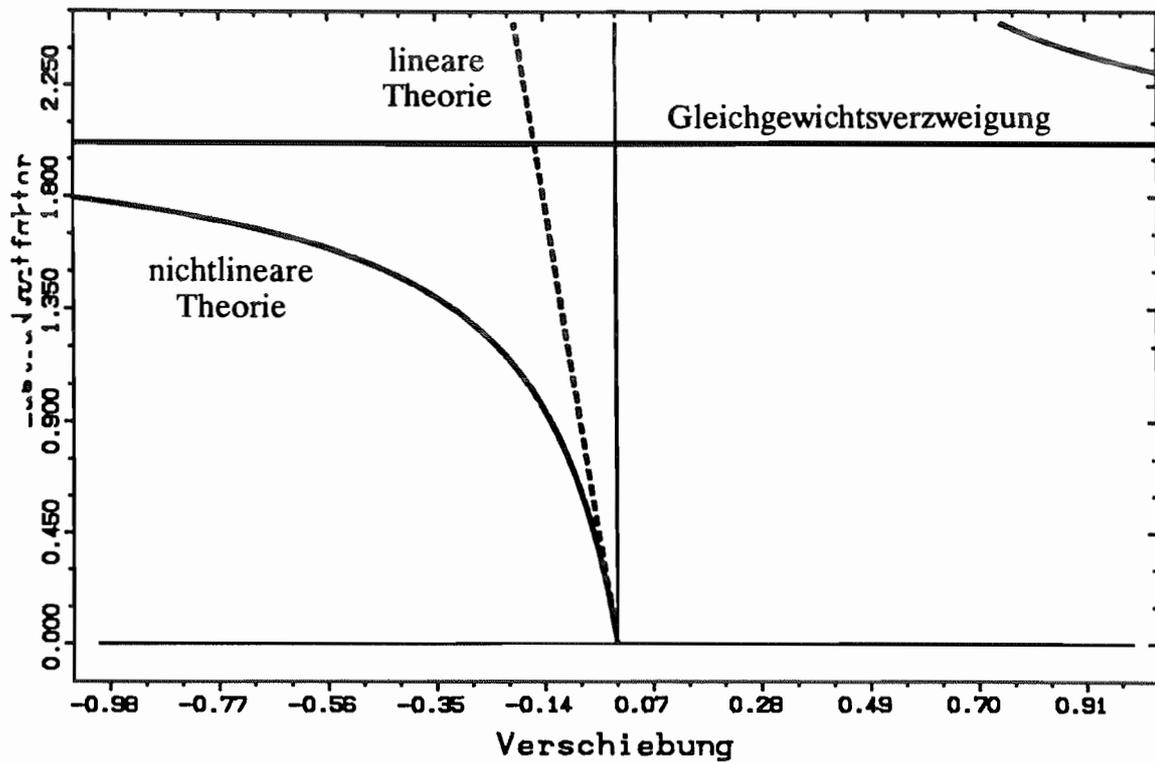
stabil: Verschiebungen dürfen festgelegtes Maß nicht  
überschreiten (bautechnisch mögliches Maß)

Grenzzustand = kritische Last

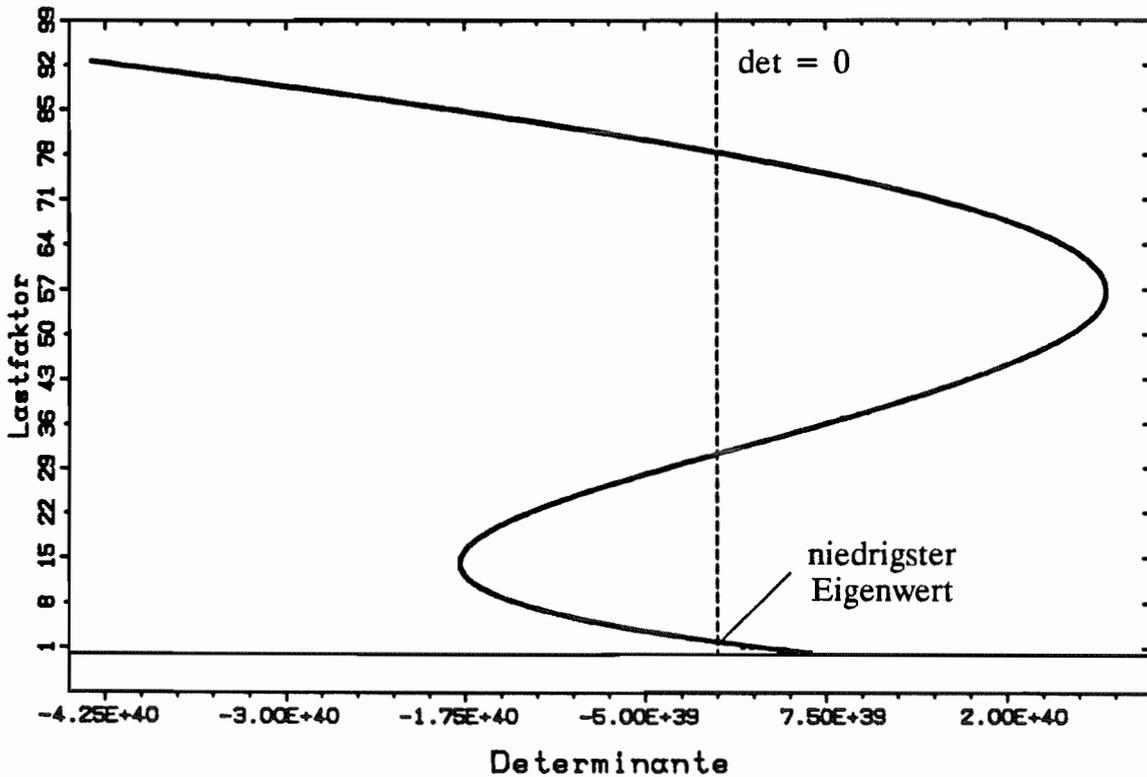
Beispiel zum allgemeinen Stabilitätsverhalten:



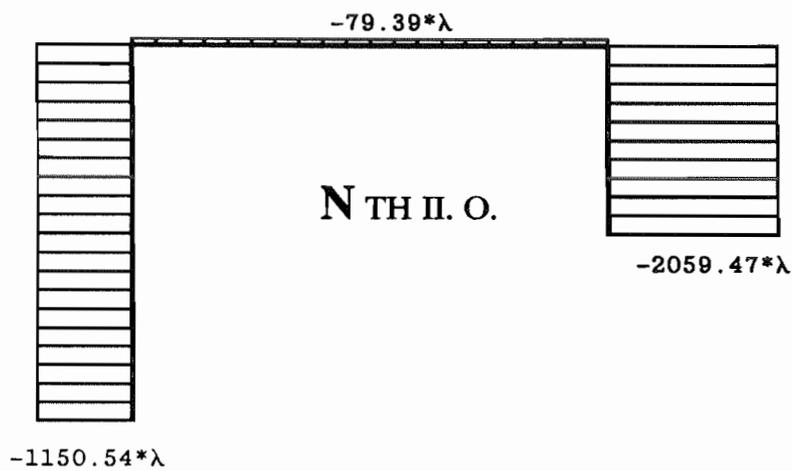
Verlauf der Verschiebung  $U_2$  bei Steigerung der Last:



Verlauf der Determinante des Spannungsproblems bei Laststeigerung:



Als Grundzustand kann näherungsweise entweder die Verteilung nach Theorie I.Ordnung (linearer Grundzustand) oder genauer nach Theorie II.Ordnung (nichtlinearer Grundzustand) dienen:



kleinster Eigenwert = 2,03

Das System wird instabil, wenn die Normalkraft um den Faktor 2,03 gesteigert wird, daraus folgt:

$$N_{kr}^1 = -2,03 \cdot 1150,5 = -2335,5 \text{ kN}$$

$$N_{kr}^2 = -2,03 \cdot 79,4 = -161,2 \text{ kN}$$

$$N_{kr}^3 = -2,03 \cdot 2059,5 = -4181,8 \text{ kN} .$$

Wird die Normalkraftverteilung der Theorie I. Ordnung zugrunde gelegt, wird das System instabil, wenn die Normalkraft um den Faktor 2,02 gesteigert wird, daraus folgt:

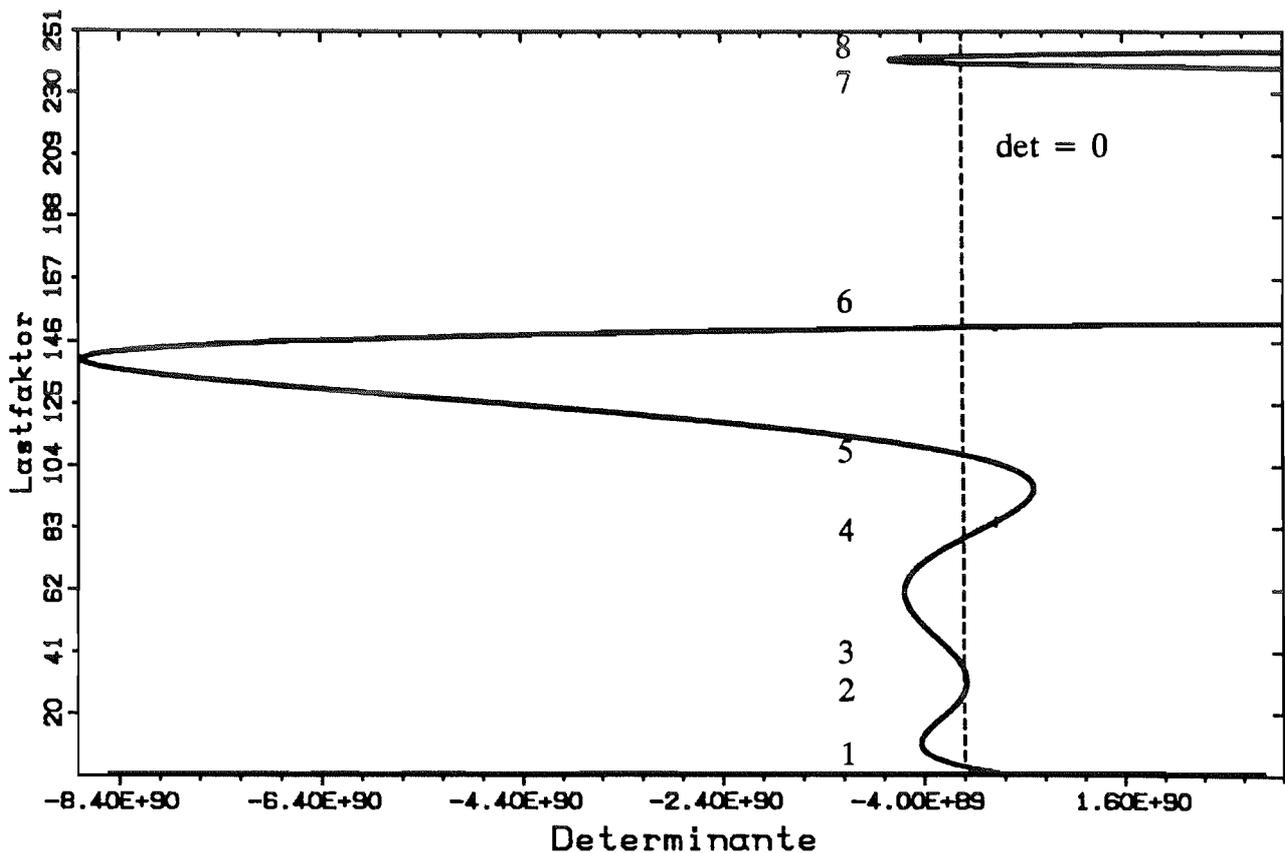
$$N_{kr}^1 = -2,02 \cdot 1116,4 = -2255,1 \text{ kN}$$

$$N_{kr}^2 = -2,02 \cdot 0,0 = 0,0 \text{ kN}$$

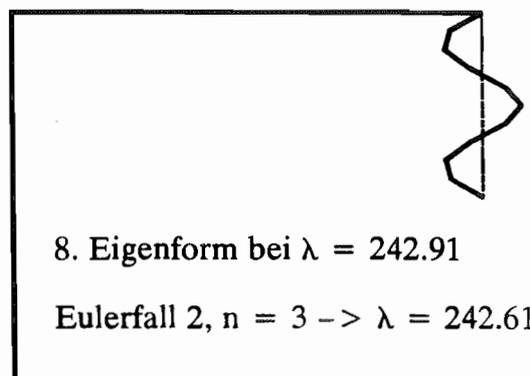
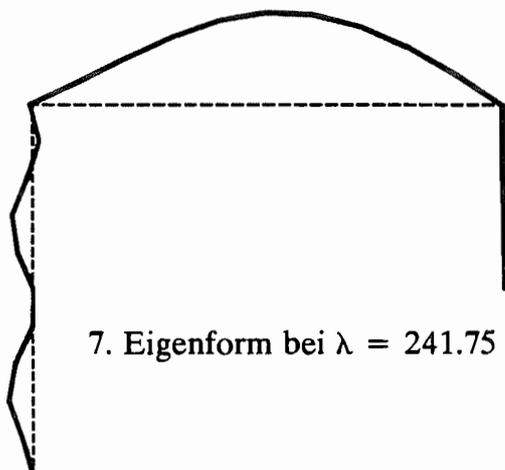
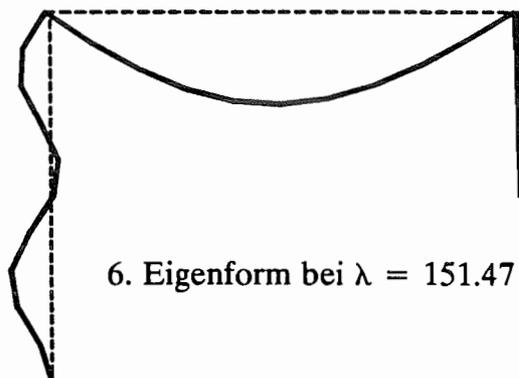
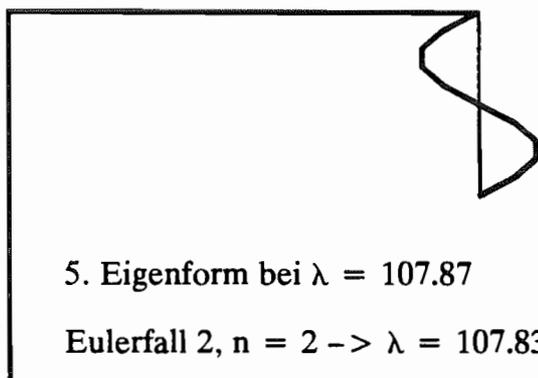
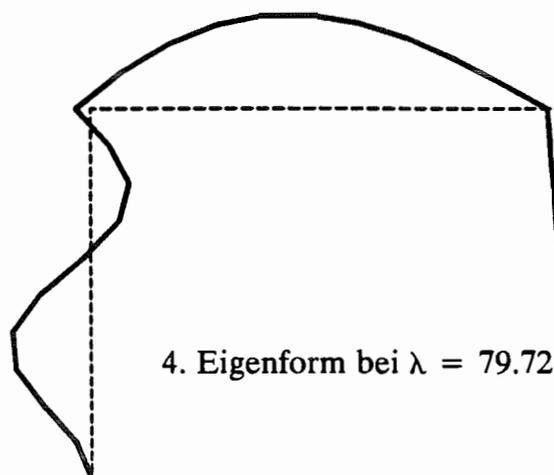
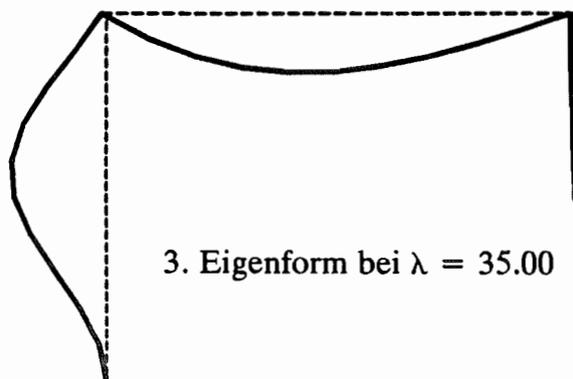
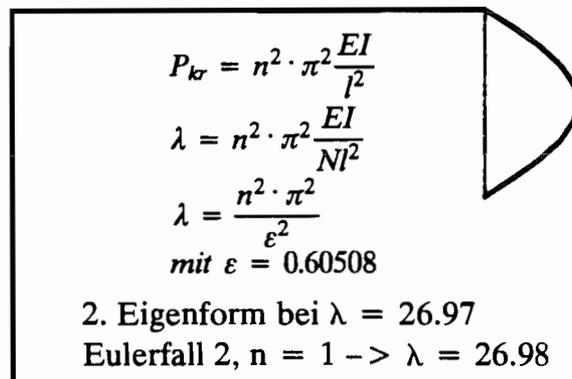
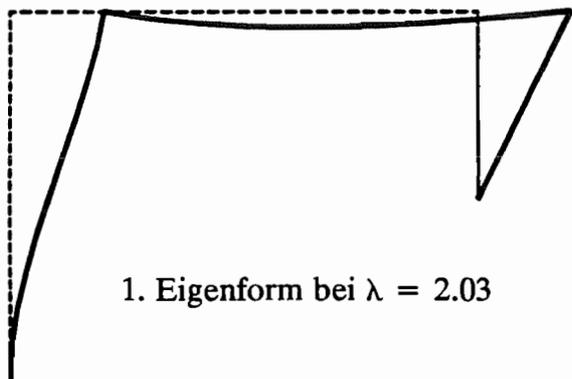
$$N_{kr}^3 = -2,02 \cdot 2093,6 = -4229,1 \text{ kN} .$$

Für die Abschätzung des Stabilitätsversagens ist also die Normalkraftverteilung nach Theorie I. Ordnung ausreichend.

Verlauf der Determinante bei Verwendung der analytischen Steifigkeitsbeziehung:

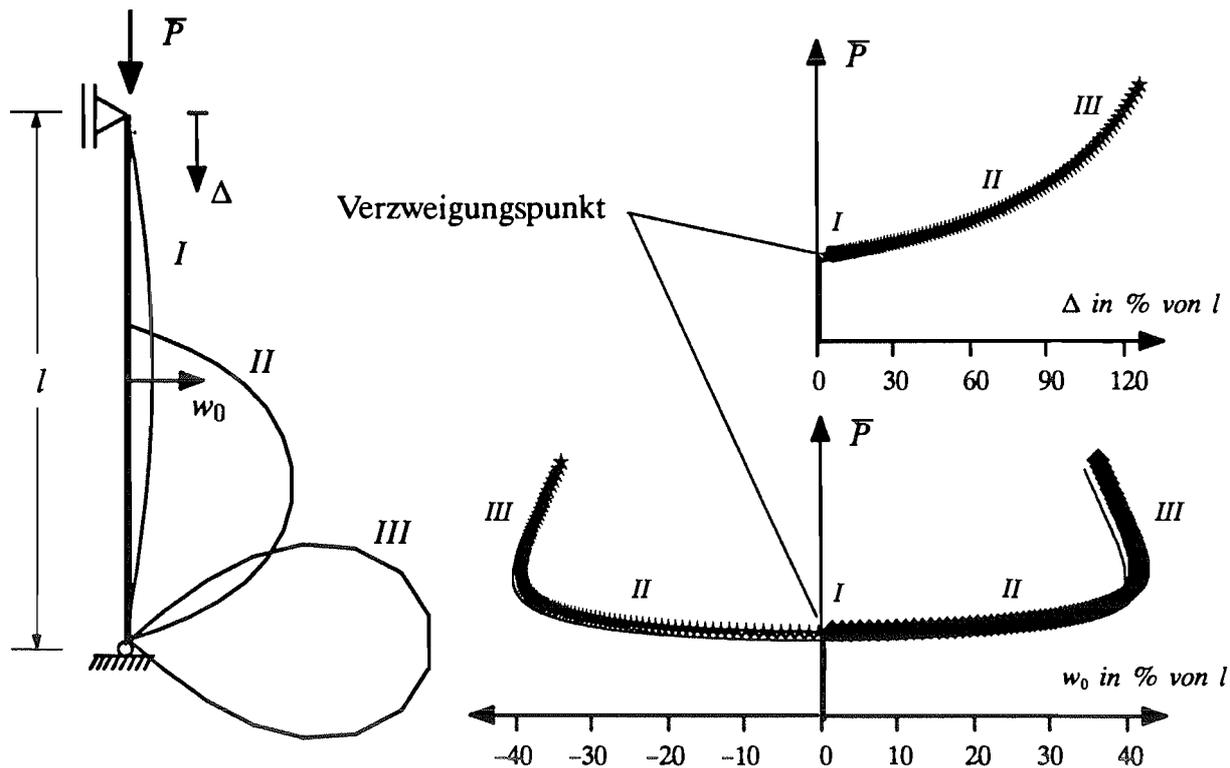


### Eigenformen des Eigenwertproblems

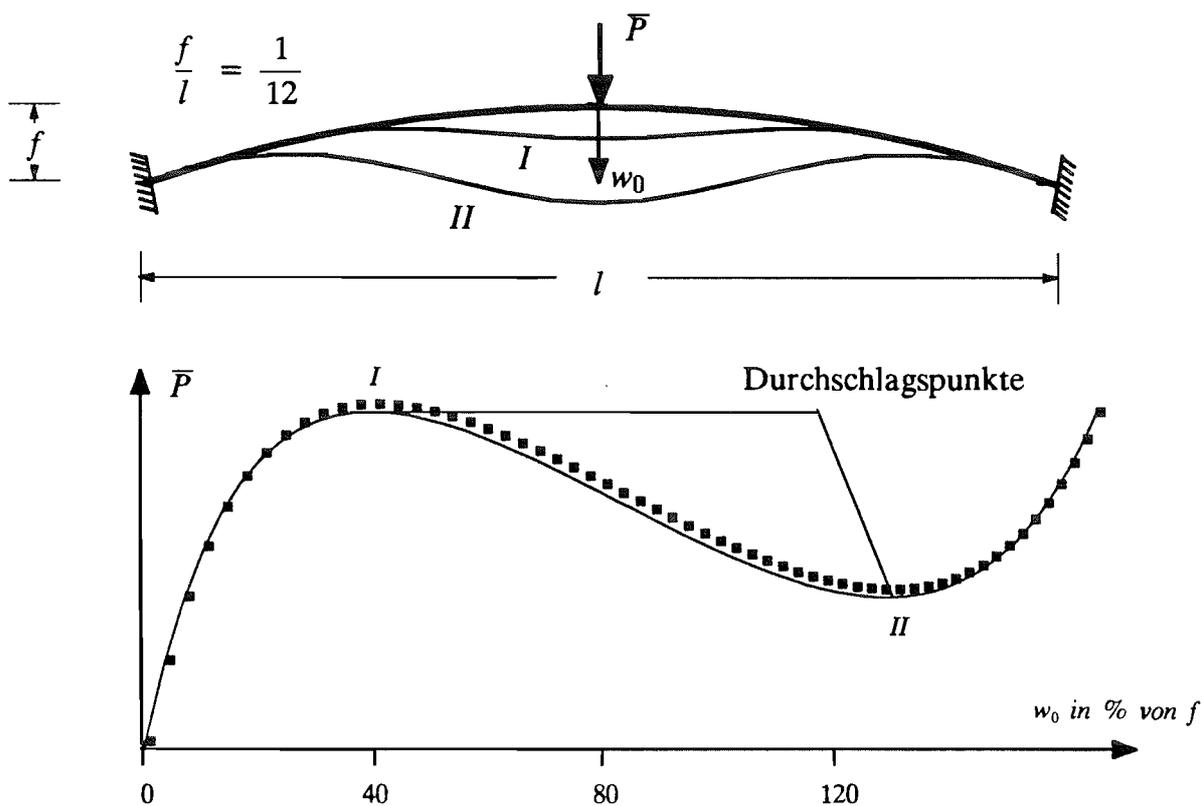


7.9 Geometrisch nichtlineare Theorie (Beispiele)

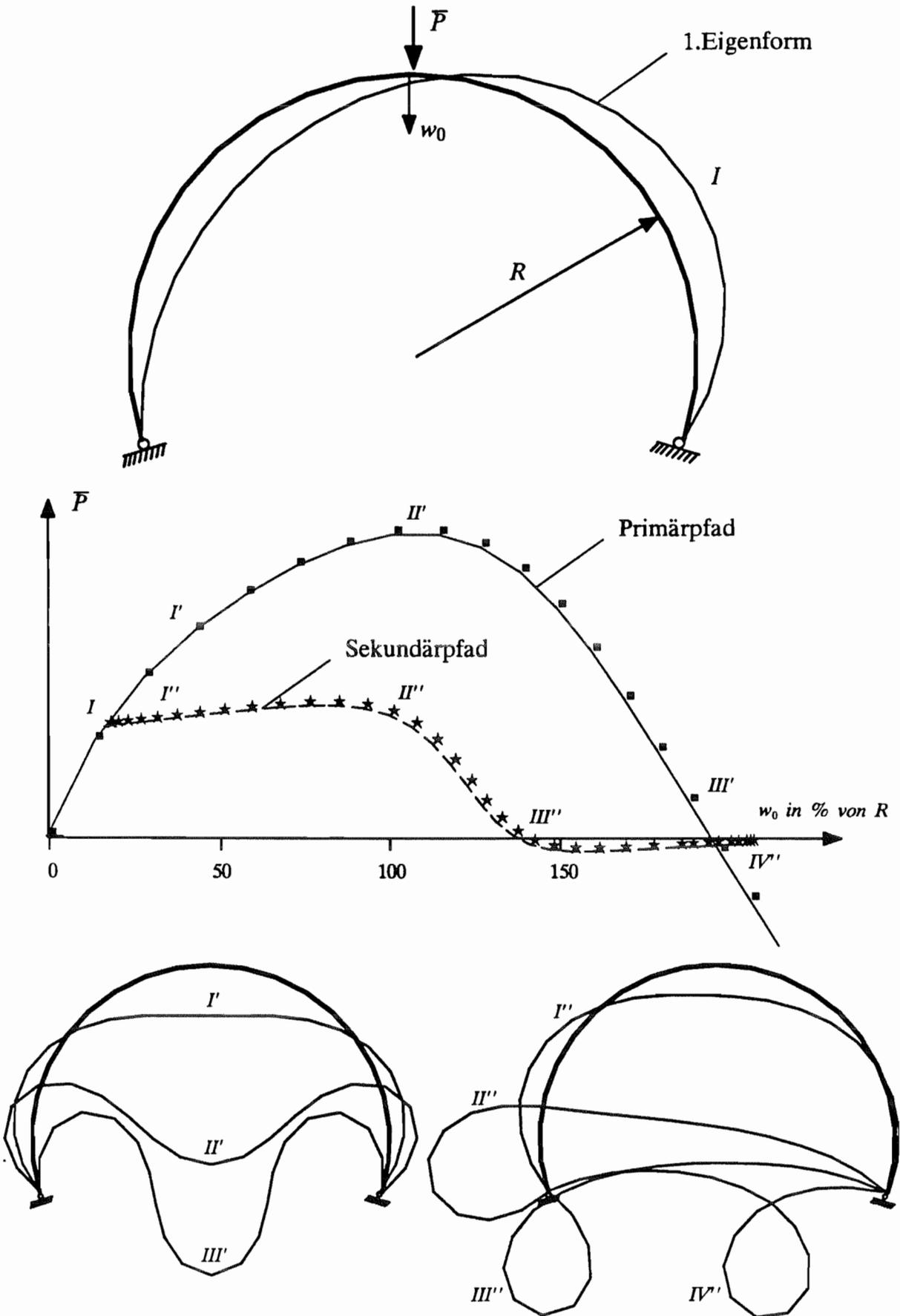
Elastika als Beispiel für Gleichgewichtsverzweigung:



Flacher Bogen als Beispiel für Durchschlagproblem:



Bogen als Beispiel für Verhalten im überkritischen Bereich:



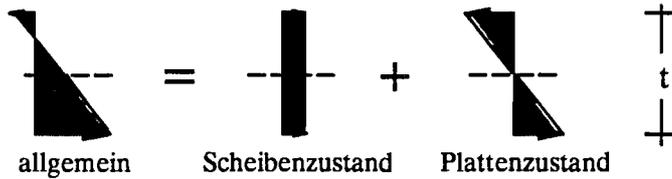
### 8. Theorie und Berechnung dünner Platten – Einführung

#### 8.1 Definitionen und Tragverhalten

#### 8.2 Grundgleichungen

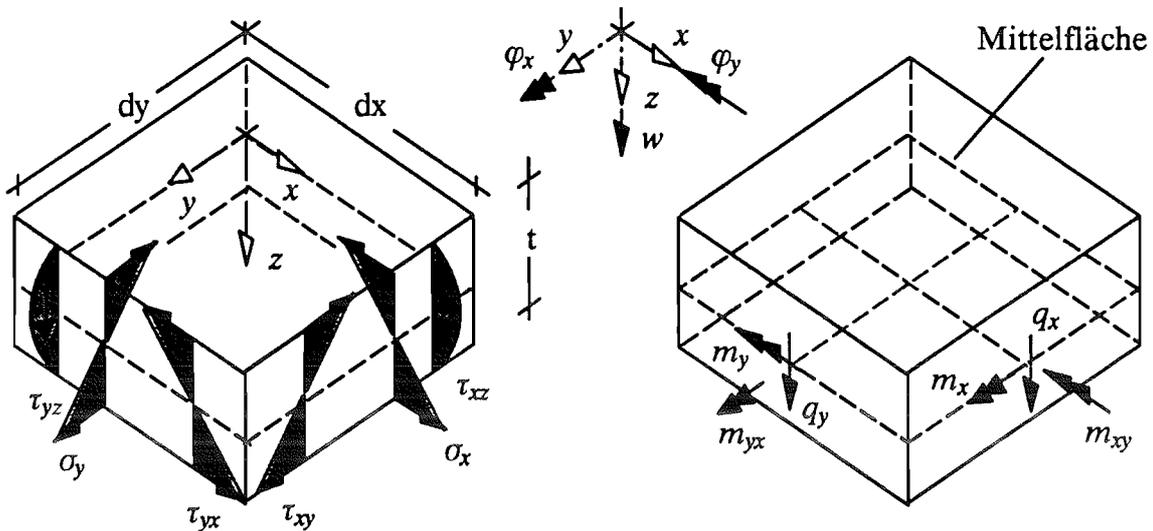
#### 8.2.1 Spannungen und Schnittkräfte

Spannungsverteilung über die Plattendicke t :



Positive Spannungen weisen am positiven Schnitufer in positive Koordinatenrichtung.

Plattenelement :



Biegemomente :  $m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz$        $m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz$

$\sigma_x = 12 \frac{m_x}{t^3} z$        $\sigma_y = 12 \frac{m_y}{t^3} z$

Drillmomente :  $m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz$        $m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} z dz$

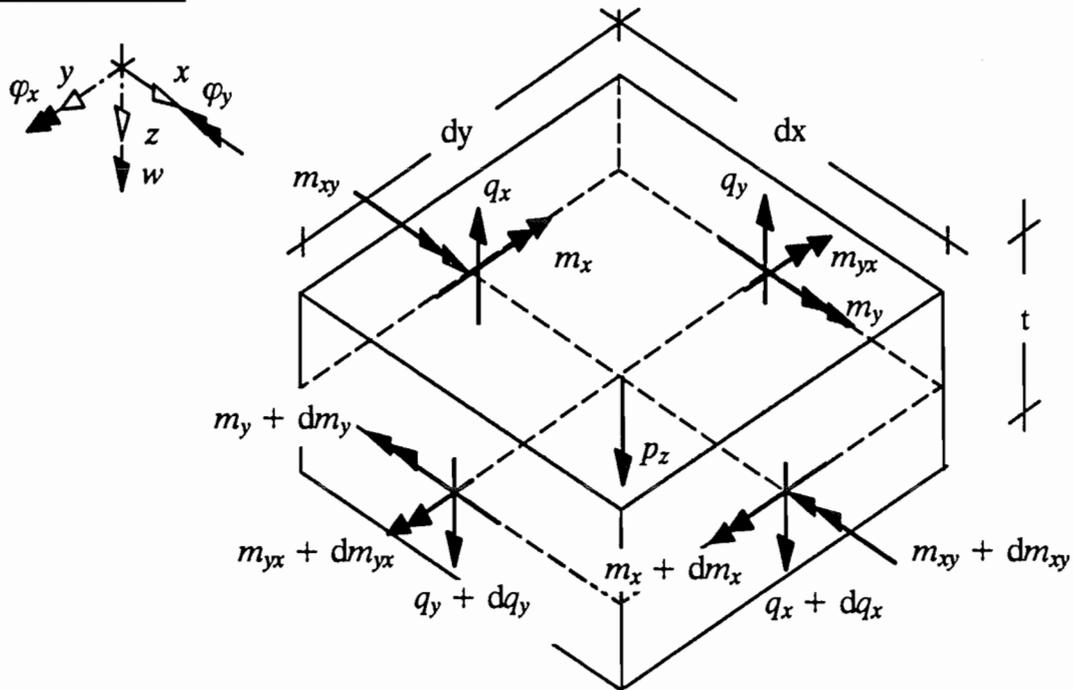
$\tau_{xy} = 12 \frac{m_{xy}}{t^3} z$        $\tau_{yx} = 12 \frac{m_{yx}}{t^3} z$

wegen  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  gilt :  $m_{xy} = m_{yx}$

Querkräfte :  $q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz$        $q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz$

$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{t^2 - 4z^2}{t^3} q_x$        $\tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{t^2 - 4z^2}{t^3} q_y$

## 8.2.2 Einwirkende Kraftgrößen am differentiellen Element

Plattenelement :

## 8.2.3 Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element

Plattenelement :

Gleichgewicht in z-Richtung :

$$-q_x dy + (q_x + dq_x) dy - q_y dx + (q_y + dq_y) dx + p_z dx dy = 0$$

$$\text{mit } dq_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0$$

$$\text{Gleichgewicht um die x-Achse : } \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0$$

$$\text{Gleichgewicht um die y-Achse : } \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0$$

Einsetzen der beiden letzten in die erste Gleichgewichtsbedingung :

$$\boxed{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p_z = 0}$$

8.2.4 Verschiebungs- Verzerrungs- Beziehungen

Unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen gilt allgemein: mit Normalenhypothese:

Balken:  $\kappa = \frac{d\varphi}{dx}$

$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$

Platte:  $\kappa_x = \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} = \varphi_{x,x}$

$\kappa_x = -\frac{\partial^2w}{\partial x^2} = -w_{,xx}$

$\kappa_y = \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = \varphi_{y,y}$

$\kappa_y = -\frac{\partial^2w}{\partial y^2} = -w_{,yy}$

$\kappa_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x})$

$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} = -w_{,xy}$

8.2.5 Stoffgesetz - Elastizität (unter Vernachlässigung der Schubverzerrungen)

Balken:  $\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{t}$

Platte:  $\kappa_x = \frac{12}{Et^3} (m_x - \nu m_y) + \alpha_T \frac{\Delta T}{t}$

$m_x = B \left[ (\kappa_x + \nu \kappa_y) - (1 + \nu) \alpha_T \frac{\Delta T}{t} \right]$   
 $m_y = B \left[ (\kappa_y + \nu \kappa_x) - (1 + \nu) \alpha_T \frac{\Delta T}{t} \right]$

$\kappa_y = \frac{12}{Et^3} (m_y - \nu m_x) + \alpha_T \frac{\Delta T}{t}$

$m_{xy} = B(1 - \nu) \kappa_{xy}$

$\kappa_{xy} = \frac{6}{Gt^3} m_{xy}$

$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

mit  $B = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$

8.2.6 Differentialgleichung : Einsetzen in Gleichgewichtsbedingungen

-> Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebungen

$q_x = -B \left( \frac{\partial^3w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3w}{\partial x \partial y^2} \right)$

$q_y = -B \left( \frac{\partial^3w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3w}{\partial x^2 \partial y} \right)$

$\frac{\partial^2m_x}{\partial x^2} = -B \left( \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4w}{\partial y^2 \partial x^2} \right)$

$\frac{\partial^2m_y}{\partial y^2} = -B \left( \frac{\partial^4w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4w}{\partial y^2 \partial x^2} \right)$

$\frac{\partial^2m_{xy}}{\partial x \partial y} = -B(1 - \nu) \frac{\partial^4w}{\partial x^2 \partial y^2}$

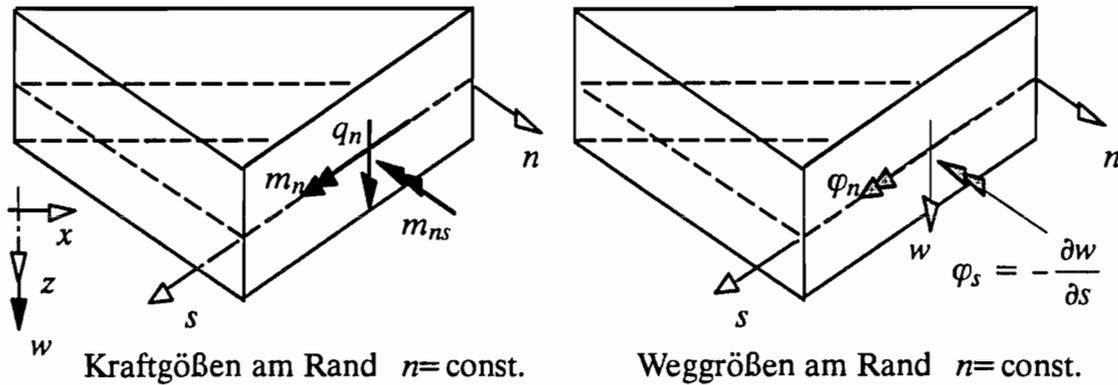
$\frac{\partial^2m_{yx}}{\partial y \partial x} = -B(1 - \nu) \frac{\partial^4w}{\partial x^2 \partial y^2}$

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{B}$$

Dabei stellt der Laplace-Operator  $\Delta$  eine Abkürzung der folgenden Differential-

operation dar :  $\Delta \dots = \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2}$

8.2.7 Randbedingungen – Kirchhoff'sche Ersatzscherkräfte



Längs des Plattenrandes  $n = \text{const.}$  liegen drei Paare konjugierter Randgrößen vor:

- $w$  korrespondiert mit  $q_n$
- $\varphi_s$  korrespondiert mit  $m_{ns}$
- $\varphi_n$  korrespondiert mit  $m_n$

Wegen der Normalenhypothese (Vernachlässigung der Schubverzerrungen) sind  $\varphi_s$  und  $w$  voneinander abhängig. Daher wird nach Kirchhoff die Wirkung von Querkräften und Drillmomenten am Plattenrand zusammengefaßt. Aus der Bedingung äquivalenter virtueller Arbeiten werden Ersatzscherkräfte eingeführt -> Kirchhoff'sche Ersatzscherkräfte.

Virtuelle Arbeit  $\delta W$  der Randschnittgrößen am Rand  $s$  :

$$\delta W = \int_s (\delta\varphi_s m_{ns} + \delta\varphi_n m_n + \delta w q_n) ds$$

Wegen der Vernachlässigung der Schubverformungen gilt :  $\varphi_s = -\frac{\partial w}{\partial s}$

$$\delta W = \int_s (\delta(-\frac{\partial w}{\partial s}) m_{ns} + \delta\varphi_n m_n + \delta w q_n) ds$$

Mit Hilfe der partiellen Integration des ersten Ausdrucks :

$$\int_s (\delta(-\frac{\partial w}{\partial s}) m_{ns} ds = \int_s \delta w \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} ds - [\delta w m_{ns}]_{s_1}^{s_2}$$

ergibt sich für die virtuelle Arbeit der Randschnittgrößen :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_s (\delta w \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} + \delta\varphi_n m_n + \delta w q_n) ds - [\delta w m_{ns}]_{s_1}^{s_2} = \\ &= \int_s \left[ \delta w (q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}) + \delta\varphi_n m_n \right] ds - [\delta w m_{ns}]_{s_1}^{s_2} \end{aligned}$$

Es werden eingeführt :

$$q_n^* = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$$

als Kirchhoff'sche Ersatzscherkräfte und

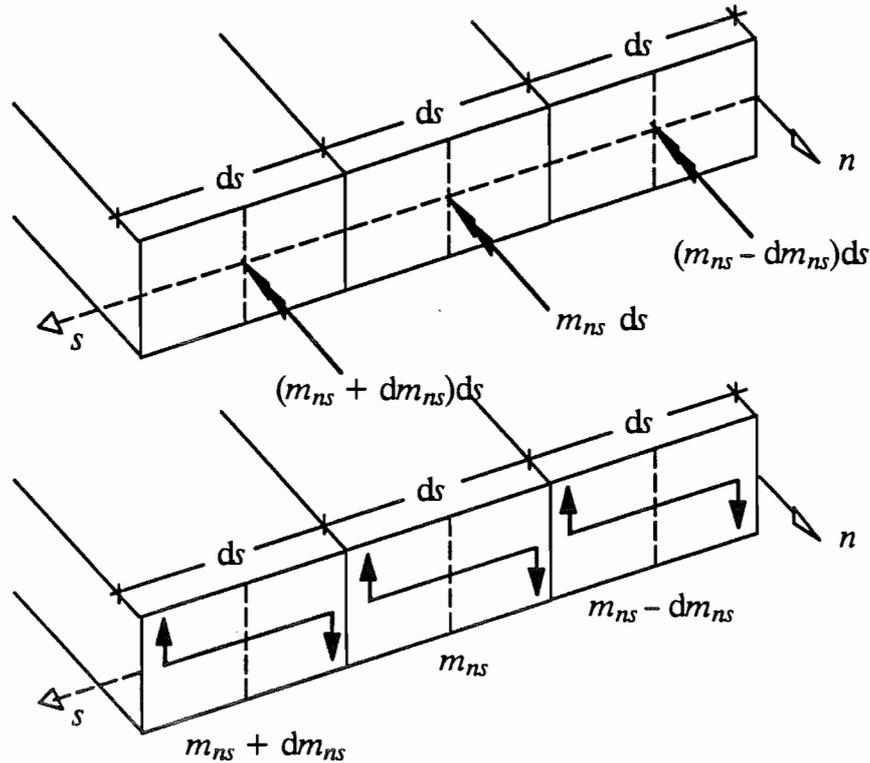
$$[m_{ns}]_{s_1}^{s_2}$$

als zusätzliche Eckkräfte je angrenzende Seite.

Die Änderung der Drillmomente liefert einen Beitrag zu den Ersatzscherkräften  $q_n^*$  bzw.  $q_s^*$ .

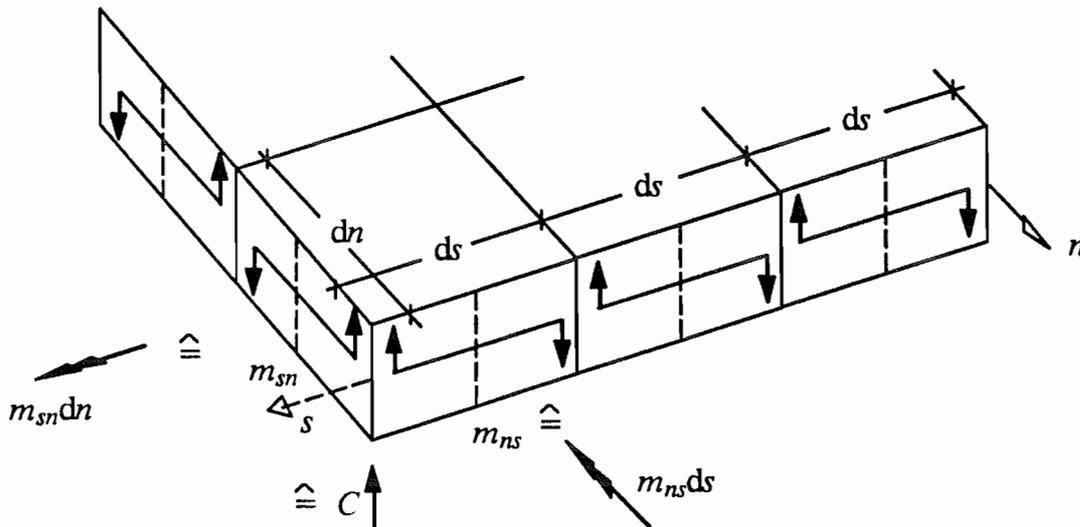
*Anschauliche Deutung der Kirchhoff'schen Ersatzkräfte :*

Die Drillmomente am Rand  $n = \text{const.}$  lassen sich gedanklich durch Kräftepaare im Abstand  $ds$  ersetzen



Die Veränderlichkeit der Drillmomente  $m_{ns}$  am Rand  $n = \text{const.}$  erzeugt in obiger Darstellung Einzelkräfte vom Wert  $dm_{ns}$  im Abstand  $ds$ . Diese Einzelkräfte können über den Rand  $n = \text{const.}$  und die jeweilige Länge  $ds$  verschmiert werden. Sie bewirken gegenüber den Querkräften  $q_n$  veränderte Randscherkräfte  $q_n^*$ . Analoges gilt für die Querkräfte  $q_s$  und die Randscherkräfte  $q_s^*$  am Rand  $s = \text{const.}$ , für den die Änderungen  $dm_{sn}$  maßgeblich sind.

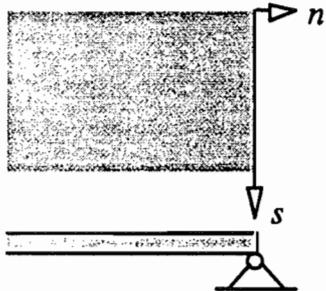
An den Ecken ergeben sich hieraus resultierende *Eckkräfte*  $C$  :



An der Ecke entstehen Einzelkräfte  $C = m_{ns} + m_{sn} = 2m_{sn}$ . Die positiv definierten Eckkräfte  $C$  wirken an der Ecke der beiden positiven Schnittufer nach oben. Ebenso wirken sie an der Ecke der beiden negativen Schnittufer nach oben; das heißt in diesen Ecken wird die Platte durch die positiven Eckkräfte gestützt. Treffen an einer Ecke ein positives und ein negatives Schnittufer zusammen, so wirkt das positiv definierte  $C$  nach unten.

Darstellung unterschiedlicher geometrischer und statischer Randbedingungen :

*gelenkig gelagerter Rand :*

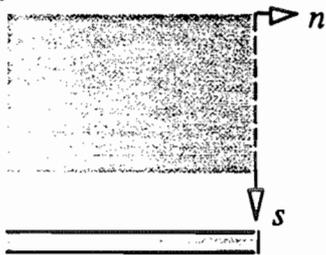


$$w = 0 \quad m_n = 0$$

Drillmomente können aufgenommen werden !

Auflagerkraft = Kirchhoff'sche Ersatzscherkraft

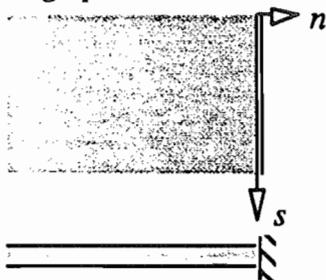
*freier Rand :*



$$m_n = 0 \quad q_n^* = 0$$

Die Summe aus der Querkraft  $q_n$  und der Änderung des Drillmoments  $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$  muß verschwinden !

*eingespannter Rand :*



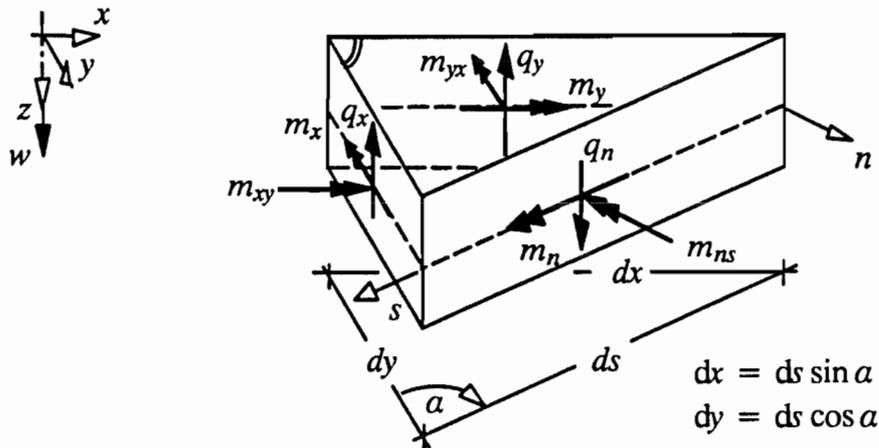
$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Die Drillmomente am Rand sind gleich 0,

$$\text{da } \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} = 0.$$

Auflager- und Querkräfte sind identisch.

## 8.2.8 Momententransformation - Hauptmomente



Gleichgewicht in z-Richtung :

$$q_n ds = q_x dy + q_y dx \quad \Rightarrow \quad q_n = q_x \cos a + q_y \sin a$$

Gleichgewicht um die s-Achse :

$$m_n ds = m_x \cos a dy + m_y \sin a dx + m_{xy} \sin a dy + m_{yx} \cos a dx$$

$$m_n ds = m_x \cos^2 a ds + m_y \sin^2 a ds + m_{xy} \sin a \cos a ds + m_{yx} \cos a \sin a ds$$

mit  $m_{xy} = m_{yx}$  aus  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ergibt sich :

$$m_n = m_x \cos^2 a + m_y \sin^2 a + 2m_{xy} \sin a \cos a$$

$$m_n = m_x \cos^2 a + m_y \sin^2 a + m_{xy} \sin 2a$$

Aus dem Gleichgewicht um die n-Achse ergibt sich :

$$m_{ns} = -m_x \cos a \sin a + m_y \sin a \cos a + m_{xy} \cos^2 a - m_{yx} \sin^2 a$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \frac{\sin 2a}{2} + m_{xy} \cos 2a$$

Die Bedingung  $m_{ns} = 0$  liefert die Hauptmomentenrichtungen unter dem Winkel  $a_0$  bzw.  $a_0 + 90^\circ$  gegen die y-Achse :

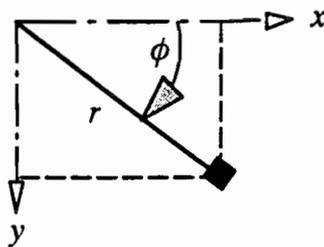
$$\tan(2a_0) = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

Obige Transformationsbeziehungen für  $m_n$  liefern unter Verwendung von  $a = a_0$  bzw.  $a_0 + 90^\circ$  die Hauptmomente  $m_I$  und  $m_{II}$ .

Sie ergeben sich zu :

$$m_{I,II} = \frac{1}{2}(m_x + m_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}$$

## 8.2.9 Koordinatentransformation : kartesische Koordinaten -&gt; Polarkoordinaten



$$x = r \cos \phi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \phi \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

Aus der partiellen Ableitung ergibt sich :

$$\frac{\partial \dots}{\partial x} = \frac{\partial \dots}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \dots}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Mit :  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \phi$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \sin \phi}{r^2} = \frac{-\sin \phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \phi}{r^2} = \frac{\cos \phi}{r}$$

ergibt sich  $\frac{\partial \dots}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial \dots}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \dots}{\partial \phi}$

$$\frac{\partial \dots}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial \dots}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \dots}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi}$$

Durch weitere Differentiationen folgt für den Operator  $\Delta$  in Polarkoordinaten

$$\Delta \dots = \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dots}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dots}{\partial r}$$

Für den Fall der *Rotationssymmetrie* entfallen alle Ableitungen nach  $\phi$ :  $\frac{\partial \dots}{\partial \phi} = 0$

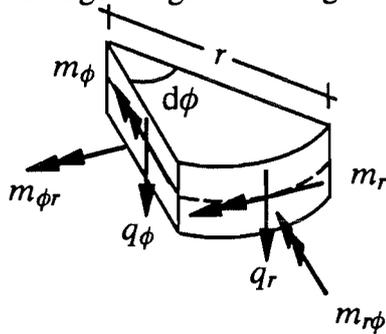
Die Differentialgleichung der Platte lautet in Polarkoordinaten für den Fall der

Rotationssymmetrie : 
$$\Delta \Delta w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p(r)}{B}$$

Sie kann für diesen Fall auch wie folgt formuliert werden :

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p(r)}{B} \quad \text{mit } \Delta \dots = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \dots}{dr} \right)$$

Die zugehörigen Schnittgrößen ergeben sich zu :



$$m_r = -B \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + (1 + \nu) a_T \frac{\Delta T}{t} \right]$$

$$m_\phi = -B \left[ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + (1 + \nu) a_T \frac{\Delta T}{t} \right]$$

$$q_r = \frac{dm_r}{dr} + \frac{1}{r} m_r - \frac{1}{r} m_\phi = -B \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right)$$

Aus Gründen der Rotationssymmetrie gilt :  $m_{r\phi} = m_{\phi r} = 0$  und  $q_\phi = 0$ .

Die *allgemeine Lösung* für die Biegefläche  $w$  einer rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatte mit dem Radius  $a$  lautet mit  $\varrho = \frac{r}{a}$  :

$$w = C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho + w_p$$

Dabei stellen die Lösungsanteile mit den Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  die *homogene Lösung* der Differentialgleichung dar. Sie sind aus den geometrischen und statischen Randbedingungen zu ermitteln.

Der Lösungsanteil  $w_p$  ist die *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung. Er wird durch die Feldbelastung der Kreisplatte bestimmt und kann hier unmittelbar durch Integration der Differentialgleichung gewonnen werden.

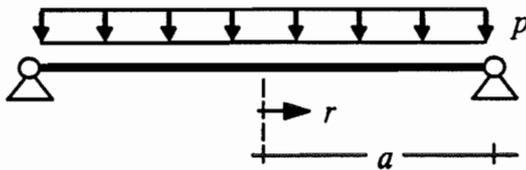
$$w_p = \frac{1}{B} \int_0^r \frac{dr}{r} \int_0^r r dr \int_0^r \frac{dr}{r} \int_0^r p r dr.$$

Bei der Differentiation der allgemeinen Lösung  $w = w(\varrho)$  ist zu beachten :

$$\frac{d...}{dr} = \frac{d...}{d\varrho} \frac{d\varrho}{dr} = \frac{1}{a} \frac{d...}{d\varrho}$$

## 8.3 Spezielle Lösungen für Kreis- und Kreisringplatten

Die gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast



$$B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\varrho = \frac{r}{a} \quad \text{mit } 0 \leq \varrho \leq 1$$

Mit der allgemeinen Lösung der DGL für die Biegefläche ergibt sich :

$$w(\varrho) = \frac{p a^4}{64 B} \varrho^4 + C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho$$

$$\frac{dw(\varrho)}{dr} = \frac{p a^3}{16 B} \varrho^3 + \frac{1}{a} \left( 2C_2 \varrho + C_3 \varrho (1 + 2 \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} \right)$$

$$\frac{d^2w(\varrho)}{dr^2} = \frac{3 p a^2}{16 B} \varrho^2 + \frac{1}{a^2} \left( 2C_2 + C_3 (3 + 2 \ln \varrho) - C_4 \frac{1}{\varrho^2} \right)$$

$$\frac{d^3w(\varrho)}{dr^3} = \frac{3 p a}{8 B} \varrho + \frac{1}{a^3} \left( 2C_3 \frac{1}{\varrho} + 2C_4 \frac{1}{\varrho^3} \right)$$

Da  $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \ln \varrho = -\infty$  und die Verschiebungen und Schnittgrößen in Plattenmitte endlich bleiben müssen, sind für den Fall  $\varrho \rightarrow 0$  die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  entsprechend zu bestimmen. Dabei kommt die Regel von L'Hospital zur Anwendung :

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho^2 \ln \varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\ln \varrho}{1/\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1/\varrho}{-2/\varrho^3} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{-\varrho^2}{2} = 0$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho \ln \varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\ln \varrho}{1/\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1/\varrho}{-1/\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (-\varrho) = 0$$

Die Randbedingungen lauten demnach :

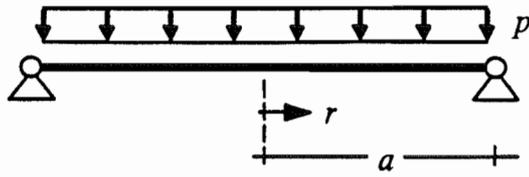
für  $\varrho = 0$ : (1)  $w(\varrho = 0) = \text{endlich}$  oder  $\frac{dw(0)}{dr} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

(2)  $m_r(\varrho = 0) = \text{endlich}$  oder  $q_r(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

für  $\varrho = 1$ : (3)  $w(\varrho = 1) = 0$

(4)  $m_r(\varrho = 1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{p a^4}{32B}$

in (3) eingesetzt  $\Rightarrow C_1 = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{p a^4}{64B}$



$$B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\varrho = \frac{r}{a} \quad \text{mit } 0 \leq \varrho \leq 1$$

Die Lösung für die Verschiebungen lautet demnach :

$$w(\varrho) = \frac{p a^4}{64 B} \left( \varrho^4 - \frac{3 + \nu}{1 + \nu} 2\varrho^2 + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right)$$

$$\frac{dw(\varrho)}{dr} = \frac{p a^3}{16 B} \left( \varrho^3 - \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \varrho \right)$$

für  $\varrho = 1$ :  $\frac{dw(1)}{dr} = -\frac{p a^3}{8B(1 + \nu)}$

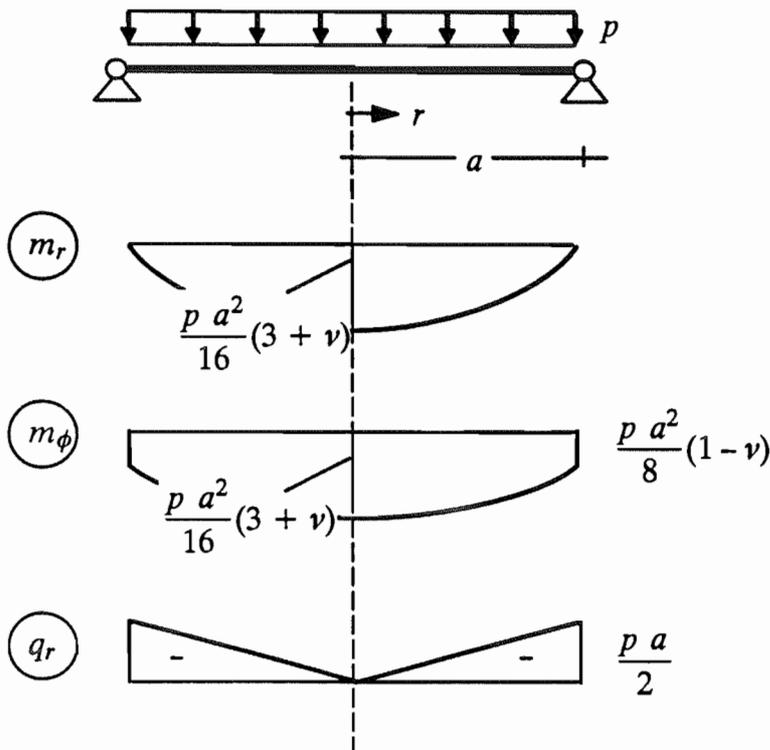
Lösung für die Schnittgrößen :

$$m_r(\varrho) = \frac{p a^2}{16} (3 + \nu)(1 - \varrho^2)$$

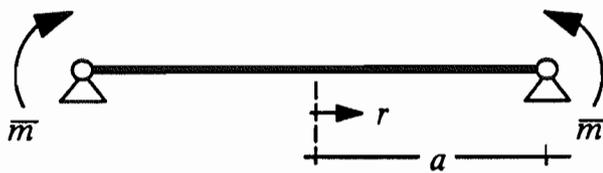
$$m_\phi(\varrho) = \frac{p a^2}{16} [(3 + \nu) - (1 + 3\nu)\varrho^2]$$

$$q_r = -\frac{p a}{2} \varrho = -\frac{p r}{2}$$

für  $\varrho = 0$  (Plattenmitte) :  $m_r = m_\phi = \frac{p a^2}{16} (3 + \nu)$



Die gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Randmomentenbelastung



$$B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\varrho = \frac{r}{a} \quad \text{mit } 0 \leq \varrho \leq 1$$

Da die Plattenfläche selbst unbelastet ist, gilt :  $w_p = 0$

Die Randbedingungen lauten :

für  $\varrho = 0$ : (1)  $w(\varrho = 0) = \text{endlich}$  oder  $\frac{dw(0)}{dr} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

(2)  $m_r(\varrho = 0) = \text{endlich}$  oder  $q_r(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

für  $\varrho = 1$ : (3)  $w(\varrho = 1) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

(4)  $m_r(\varrho = 1) = \bar{m} \Rightarrow C_2 = -\frac{a^2}{2B(1+\nu)}$

Die Lösung für die Verschiebungen lautet demnach :

$$w(\varrho) = \frac{a^2}{2B(1+\nu)}(1-\varrho^2)$$

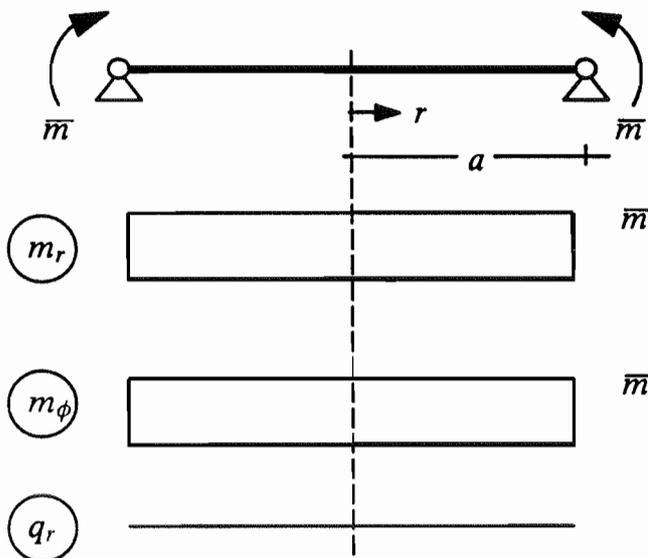
$$\frac{dw(\varrho)}{dr} = \frac{-a}{B(1+\nu)}\varrho$$

Die Lösung für die Schnittgrößen :

$$m_r(\varrho) = \bar{m} = \text{const.}$$

$$m_\phi(\varrho) = \bar{m} = \text{const.}$$

$$q_r = 0$$



## 8.4 Spezielle Lösungen für Rechteckplatten

### Lösungen mit Reihenansätzen :

Die äußeren Lasten werden ebenso wie die Biegefläche als Fourierreihen angesetzt. Es ergeben sich Beanspruchungen und Verschiebungen in Fourierreihendarstellung. Dabei kann die Entwicklung der Last in nur einer Koordinatenrichtung (einfache Reihenlösungen) oder in beiden Koordinatenrichtungen (Doppelreihenlösung) erfolgen (-> siehe Vertieferausbildung).

### Näherungslösungen und numerische Lösungen der Differentialgleichung :

Die Lösung der Differentialgleichung kann beispielsweise durch das Differenzenverfahren (Differentialle werden durch Differenzen ersetzt) oder sonstige numerische Berechnungsverfahren erfolgen (-> siehe Vertieferausbildung). Ergebnisse derartiger Berechnungen sind beispielsweise in den im Literaturverzeichnis angegebenen Tabellenwerken zu finden (siehe auch die folgenden Seiten dieses Abschnittes).

## 8.6 Näherungsverfahren

### Allgemein :

- Finite-Element-Methode
- Methode der Rand-Elemente
- Differenzenverfahren
- Mehrstellenverfahren
- Streifenmethode

### Für zusammengesetzte Plattensysteme :

- Momentenausgleichsverfahren
- Einspanngradverfahren

Auszüge aus Tafelwerken :

Czerny, F. : Tafeln für Rechteckplatten. z.B. Betonkalender 1987 Teil I

Voraussetzung : drillsteife Platten. Querdehnzahl  $\nu = 0$

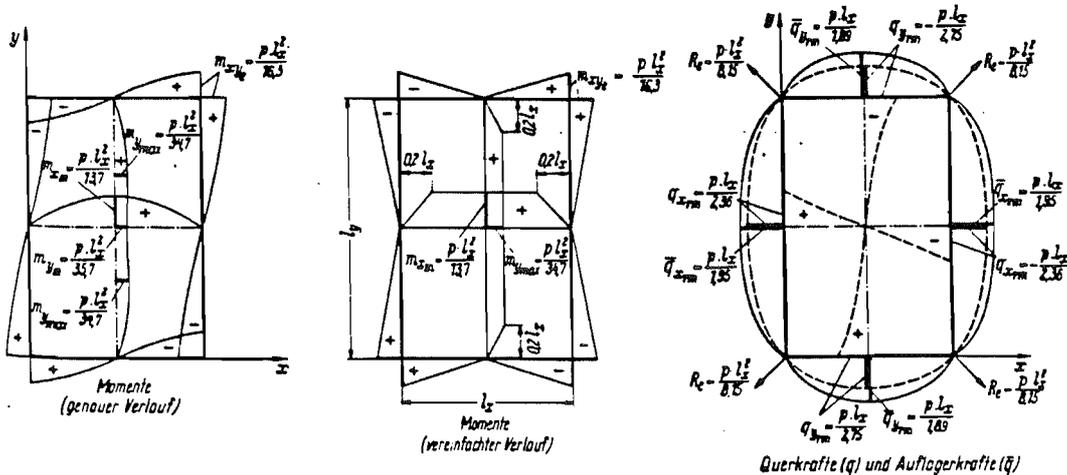
Vierseitig gelagerte Platten – gleichmäßig vollbelastet

2.2 Tafeln für gleichmäßig vollbelastete vierseitig gelagerte Rechteckplatten

2.2.1 Einspannungsfreie Lagerung der vier Ränder

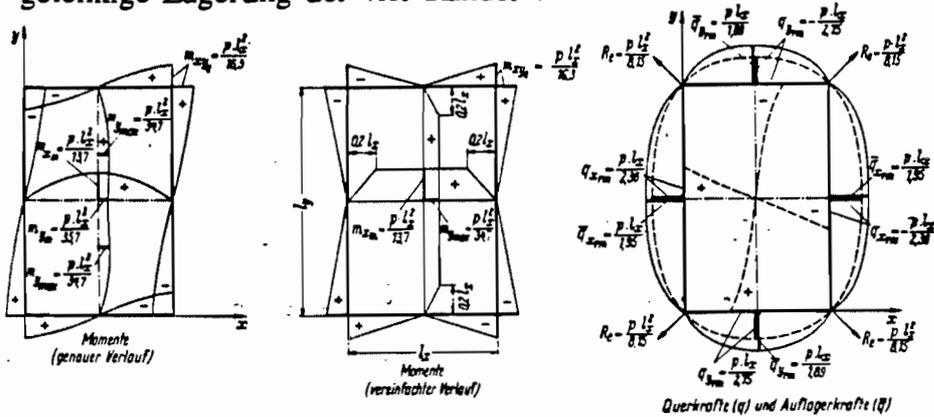
$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{sm} =$	27,2	24,5	22,4	20,7	19,1	17,8	16,8	15,8	15,0	14,3	13,7
$m_{smax} =$	27,2	27,5	27,9	28,4	29,1	29,9	30,9	31,8	32,8	33,8	34,7
$m_{sve} = \pm$	21,6	20,6	19,7	19,0	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	16,5	16,3
$R_e =$	10,8	10,3	9,85	9,5	9,2	8,95	8,75	8,55	8,4	8,25	8,15
$q_{srm} = \pm$	2,96	2,87	2,78	2,71	2,64	2,58	2,52	2,47	2,43	2,39	2,36
$q_{srm} =$	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,02	2,00	1,98	1,97	1,96	1,95
$q_{srm} = \pm$	2,96	2,92	2,89	2,86	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,75	2,75
$q_{srm} =$	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,90	1,89
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0487	0,0536	0,0584	0,0631	0,0678	0,0728	0,0767	0,0809	0,0850	0,0890	0,0927

$l_y : l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{sm} =$	13,7	13,2	12,7	12,3	11,9	11,5	11,3	11,0	10,8	10,6	10,4
$m_{smax} =$	34,7	35,4	36,1	36,7	37,3	37,9	38,5	38,9	39,4	39,8	40,3
$m_{sve} = \pm$	16,3	16,1	15,9	15,7	15,6	15,5	15,4	15,3	15,3	15,2	15,1
$R_e =$	8,15	8,05	7,95	7,85	7,8	7,75	7,7	7,65	7,65	7,6	7,55
$q_{srm} = \pm$	2,36	2,33	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,19	2,18	2,16	2,15
$q_{srm} =$	1,95	1,94	1,93	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92
$q_{srm} = \pm$	2,75	2,74	2,73	2,73	2,73	2,72	2,72	2,71	2,71	2,70	2,70
$q_{srm} =$	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,82	1,82
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0927	0,0963	0,0997	0,1029	0,1060	0,1093	0,1118	0,1145	0,1169	0,1195	0,1216

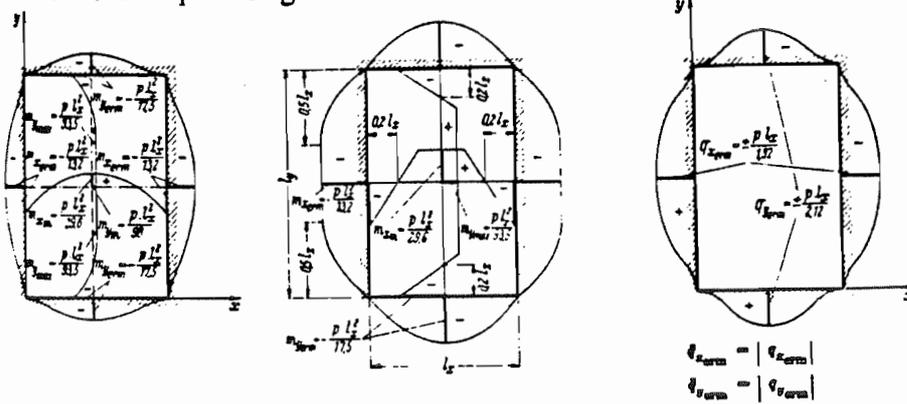


Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis  $l_y : l_x = 1,5$

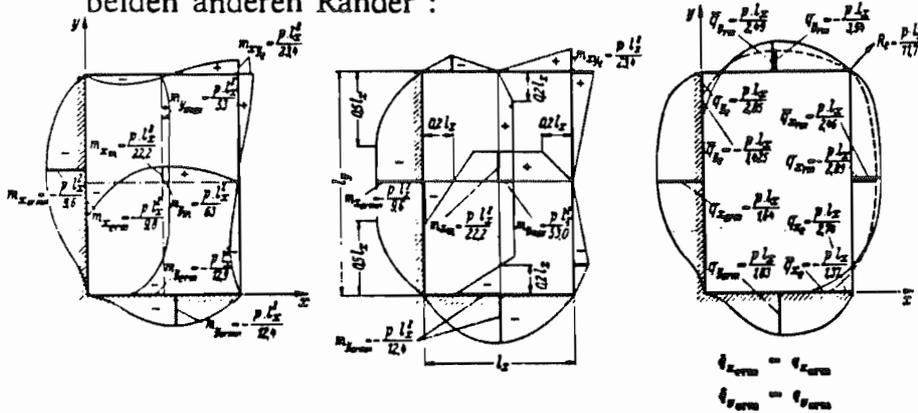
Gleichmäßig voll belastete vierseitig gelagerte Rechteckplatten ( $l_y : l_x = 1,5$ ):  
gelenkige Lagerung der vier Ränder :



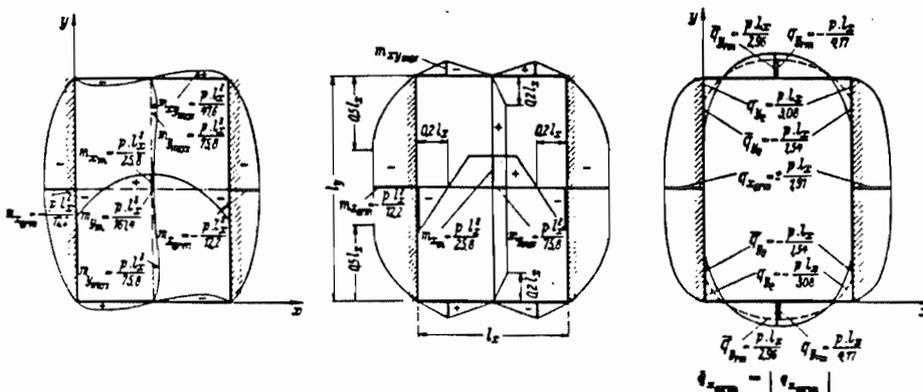
starre Einspannung der vier Ränder :



starre Einspannung von zwei benachbarten Rändern und gelenkige Lagerung der beiden anderen Ränder :



starre Einspannung von zwei gegenüberliegenden Rändern und gelenkige Lagerung der beiden anderen Ränder :



Stiglat, K., Wippel, H. : Platten. 3.Auflage Ernst & Sohn Berlin 1983

Voraussetzung : drillsteife Platten. Querdehnzahl  $\nu = 0$

Platte Nr. III/1/c

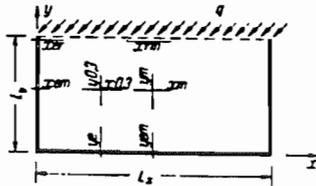
Linienlast  $q$  am Rand  $y = L_y$

$K = q \cdot L_x$

$M = \frac{K}{m}$

$w = \frac{K \cdot L_x^2}{k_w \cdot N}$

$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{x0}$	$m_{x1}$	$m_{x2}$	$m_{x3}$	$m_{x0,3}$	$m_{y0}$	$m_{y1}$	$m_{y2}$	$m_{y3}$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{y0,3}$	$m_{y1,3}$	$\frac{y}{L_y}$	$k_w$
0,25	-3,96	-15,0	31,2	93,6	75,5	-5,03	-6,16	-11,8	-	-	-13,9	-	-	260
0,30	-3,17	-13,0	18,8	53,2	55,0	-4,95	-6,43	-12,2	-	-	-14,3	-	-	180
0,40	-2,47	-11,6	10,8	28,5	41,2	-5,72	-8,16	-14,3	-	-	-16,5	-	-	130
0,50	-2,22	-11,8	8,45	22,4	39,4	-7,76	-11,8	-16,7	-	-	-19,6	-	-	110
0,60	-2,14	-13,0	7,62	21,4	42,7	-11,2	-18,6	-19,0	-	-	-23,0	-22,1	0,65	100
0,70	-2,12	-15,3	7,35	22,5	47,4	-18,7	-30,3	-21,0	-20,0	0,63	-26,4	-22,2	0,69	95
0,80	-2,14	-19,2	7,21	26,1	61,4	-32,9	-56,5	-23,6	-19,7	0,68	-30,6	-22,4	0,73	95
0,90	-2,16	-25,0	7,19	31,2	78,8	-64,1	-114	-26,8	-19,5	0,73	-35,5	-22,6	0,76	90
1,00	-2,19	-33,5	7,18	38,6	102	-130	-250	-30,7	-19,7	0,76	-41,6	-22,9	0,79	90
1,10	-2,21	-46,3	7,19	48,3	135	-270	-770	-36,0	-20,0	0,78	-49,5	-23,3	0,82	95
1,20	-2,24	-66,3	7,20	63,0	185	-	-	-42,6	-20,3	0,80	-59,5	-23,6	0,85	95
1,30	-2,27	-98,0	7,21	83,4	265	-	-	-51,0	-20,6	0,82	-72,5	-24,0	0,87	95
1,40	-2,31	-155	7,23	111	385	-	-	-62,1	-20,8	0,84	-87,8	-24,4	0,88	95
1,50	-2,34	-250	7,25	150	595	-	-	-76,5	-20,9	0,85	-110	-25,0	0,90	95
$\frac{x}{L_x}$	0; 1,0	0; 1,0	0,5	0,5	0,3; 0,7	0,5	0,3; 0,7	0,5	0,5	0,5	0,3; 0,7	0,3; 0,7	0,5	0,5
$\frac{y}{L_y}$	1,0	0,5	1,0	0,5	0,5	0	0	0,5	veränderlich	0,5	veränderlich	1,0	1,0	1,0



$\max M_{xy} = M_{x2}$

Platte Nr. III/1/d

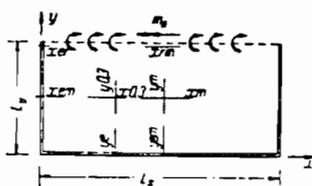
Randmoment  $m_x$  am Rand  $y = L_y$

$K = m_x$

$M = \frac{K}{m}$

$w = \frac{m_x \cdot L_x^2}{k_w \cdot N}$

$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{x0}$	$m_{x1}$	$\max m_{x2}$	$\frac{y}{L_y}$	$m_{y0}$	$m_{y1}$	$\min m_{y2}$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{y0,3}$	$m_{y1,3}$	$m_{y2}$	$m_{y3}$	$m_{y0,3}$	$k_w$
0,25	-0,61	-5,98	30,0	0,14	5,40	16,9	-	-	16,8	-1,52	-2,15	-1,32	-1,49	44
0,30	-0,57	-8,29	09,0	0,19	4,00	12,3	-7,00	0,05	16,4	-2,08	-3,38	-1,52	-1,73	37
0,40	-0,54	-4,76	23,2	0,29	3,14	10,6	-8,20	0,08	23,6	-6,05	-19,2	-2,01	-2,36	33
0,50	-0,55	15,4	12,2	0,39	3,07	14,1	-11,6	0,30	67,1	29,2	14,0	-2,60	-3,20	33
0,60	-0,56	7,91	7,82	0,47	3,18	29,4	-18,5	0,50	-112	8,03	8,74	-3,36	-4,35	34
0,70	-0,57	6,17	6,03	0,54	3,29	∞	-29,5	0,85	-28,4	6,90	8,85	-4,39	-5,95	35
0,80	-0,60	5,59	5,10	0,59	3,40	-36,1	-27,8	0,79	-24,7	7,55	10,3	-6,07	-8,55	36
0,90	-0,62	5,56	4,72	0,63	3,44	-21,3	-	0,21	-25,3	9,00	12,9	-8,62	-12,7	36
1,00	-0,64	5,94	4,52	0,66	3,48	-18,5	-	0,73	-26,3	12,7	18,6	-13,1	-20,2	37
1,10	-0,67	6,67	4,42	0,69	3,49	-17,5	-	-	-27,0	18,5	27,4	-21,7	-33,9	37
1,20	-0,69	7,55	4,37	0,72	3,50	-17,9	-	-	-30,3	27,8	40,8	-40,0	-71,5	38
1,30	-0,72	8,66	4,33	0,74	3,52	-18,7	-	-	-33,9	41,7	66,7	-100	-285	39
1,40	-0,74	10,2	4,31	0,76	3,53	-20,4	-	-	-39,2	66,7	110	∞	250	39
1,50	-0,77	12,4	4,31	0,77	3,54	-23,4	-	-	-45,9	115	190	130	125	40
$\frac{x}{L_x}$	0; 1,0	0; 1,0	0; 1,0	0,5	0,5	veränderlich	0,3; 0,7	0,5	0,3; 0,7	0,5	0,3; 0,7	0,5	0,3; 0,7	0,5
$\frac{y}{L_y}$	1,0	0,5	veränderlich	1,0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0,5	0,5	1,0	1,0



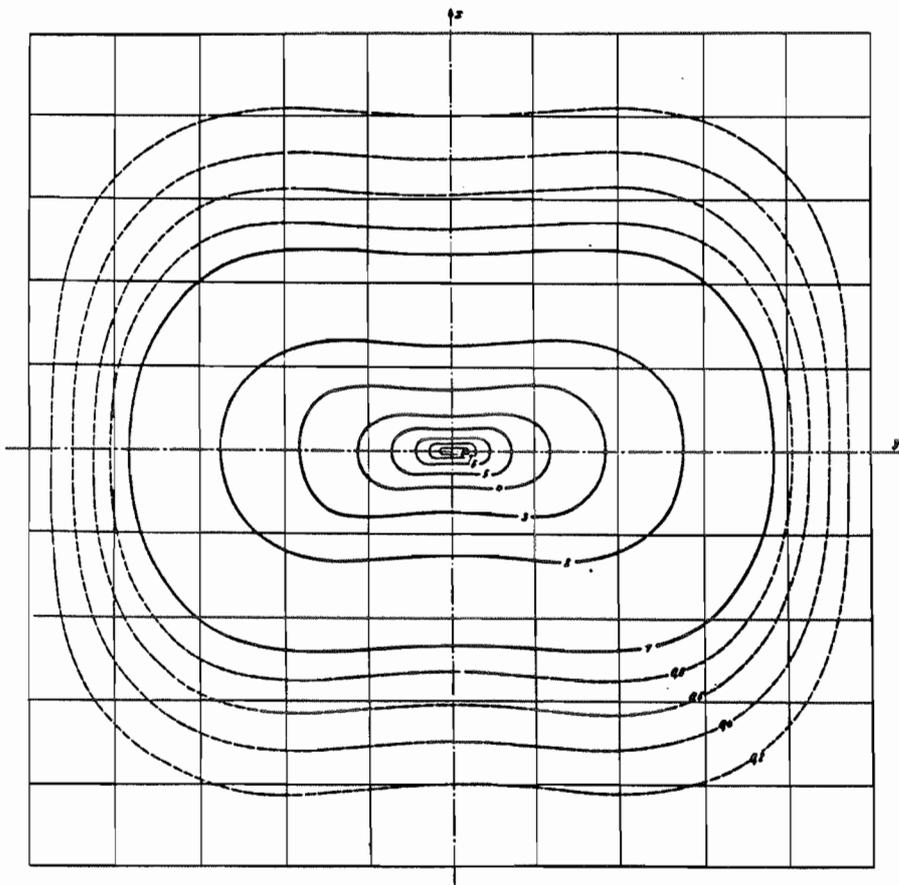
$\max M_{xy} = M_{x2}$

### 3.5 Einflußflächen

Analog den Einflußlinien für Stabtragwerke gibt es für ebene 2D-Tragwerke Einflußflächen, die Schnittgrößen, Verschiebungen oder Verdrehungen an einem konkreten Tragwerkspunkt (Einflußpunkt) infolge veränderlicher Laststellungen angeben. Die Ermittlung von Einflußflächen beruht auf den selben Grundlagen wie die von Einflußlinien. Die Auswertung hat bei Flächenlasten zweidimensional zu erfolgen; sie wird im allgemeinen numerisch durchgeführt. Die Einflußfelder werden in der Regel in Höhenschichtlinien dargestellt.

Beispiel aus : Pucher, A. : Einflußfelder elastischer Platten. Springer Wien 1964

Voraussetzung : Querdehnzahl  $\nu = 0$



Tafel 28.  $m_0$ -Einflußfeld für die  
Feldmitte einer Rechteckplatte mit  
vier frei aufliegenden Rändern  
( $a/b = 1.0$ , 8  $\pi$ -fach)

## 8. Theorie und Berechnung dünner Platten – Einführung

### Literatur zur Theorie :

- [1] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke. Springer Verlag Wien 1963 (6.Auflage)
- [2] *Gould, Phillip L.*: Analysis of Shells and Plates. Springer Verlag New York 1988
- [3] *Marcus, H.*: Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pflzdecken. Springer Verlag Berlin 1932 (2. verb. Auflage)
- [4] *Markus, G.*: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung. W. Ernst Verlag Düsseldorf 1973
- [5] *Markus, G.*: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Werner Verlag Düsseldorf 1978 (3.Auflage)
- [6] *Rabich, R.*: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. in: Ingenieurtaschenbuch Bauwesen Band I Pfalz-Verlag Basel 1964
- [7] *Szilard, R.*: Theory and Analysis of Plates. Classical and numerical Methods. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974
- [8] *Zweiling, K.*: Biharmonische Polynome. Verlag Technik Berlin 1952

### Tabellenwerke :

- [9] *Bares, R.*: Berechnungstabellen für Platten und Scheiben. Bauverlag Wiesbaden 1979 (3. Auflage)  
-> durchlaufende Platten, kreisförmige Platten, elastisch gebettete Platten, orthotrope Platten, Eigenfrequenzen, Stabilität, Rechteckscheiben
- [10] *Bruckner, H.*: Elastische Platten. Vieweg Braunschweig 1977  
-> Plattenstreifen, Rechteckplatten, punktgestützte Platten, Halbkreisplatten mit Linien-, Einzel-, Teilflächenlasten
- [11] *Czerny, F.*: Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten. Betonkalender 1978, 1984, 1987, 1990 I.Teil  
-> drillsteife Platten mit Gleichlast und linear veränderlicher Last
- [12] *Pieper, K.; Martens, P.*: Durchlaufende vierseitig gestützte Platten im Hochbau. Beton- und Stahlbetonbau 6(1966) S.158-162.  
Zuschrift und Erwidern mit Ergänzung: Beton- und Stahlbetonbau 6(1967) S.150-151  
-> Schnelle, überschlägige Berechnung mit Tabellen für Hochbauplatten
- [13] *Pucher, A.*: *Einflußfelder elastischer Platten.* Springer Verlag Wien 1964 (3.Auflage)  
-> Einflußflächen für Rechteck- und Kreisplatten
- [14] *Rüsch, H.*: Berechnungstabellen für rechtwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 106 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1981 (7. Auflage)  
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)
- [15] *Rüsch, H.* : Berechnungstabellen für schiefwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 166 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1967  
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)

- [16] *Schleicher, C., Müller, K.*: Schiefe Einfeldplatten. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin 1962  
-> Zustandsflächen für Gleichlast: Maximalwerte, Höhenlinien, Trajektorien; Einflußflächen
- [17] *Schleicher, C., Wegener, B.*: Durchlaufende schiefe Platten. VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1968  
-> Zustands- und Einflußflächen für Zwei- und Dreifeldplatten (Gleichlasten, Linienlasten)
- [18] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Massive Platten. Betonkalender 1973, 1986, 1989 I.Teil  
-> Momente und Lagerkräfte für Rechteckplatten (u.a. drillweich) mit Gleich- und Einzellasten; Platten mit unterbrochener Stützung, mit Löchern, elastisch gebettete Platten, Bemessung von Bewehrungsnetzen, Vorspannung, Durchstanzen von Flachdecken, deckengleiche Unterzüge
- [19] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Platten. Ernst u. Sohn Berlin 1983 (3.Auflage)  
-> Momente und Lagerkräfte für Rechteckplatten, Plattenstreifen, punktgestützte Platten, drillweiche Platten für Flächen-, Linien- und Einzellasten, Randmomente

#### **Literatur zur Theorie der Scheiben :**

*Worch, G.*: Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie. Bautechnik Archiv (1949) 5

*Worch, G.*: Elastische Scheiben. Betonkalender 1963 II.Teil S.355

#### **Tabellenwerke zu Scheibentragwerken :**

*Pfeiffer, G.*: Berechnung und Bemessung von wandartigen Trägern. Werner Verlag Düsseldorf 1968

*Schleeh, W.*: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben). Betonkalender 1978, 1983 II.Teil

-> Krafteinleitungsprobleme, wandartige Träger, Kreisscheiben

8.4 Spezielle Lösungen für Rechteckplatten

Auszug aus: Stiglat, K., Wippel, H.: Platten. 3. Auflage Ernst & Sohn Berlin 1983

Voraussetzung: Querdehnzahl  $\nu = 0$

Platte Nr. 0/7A

Platte



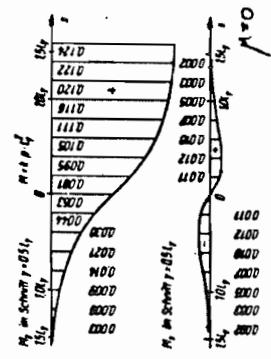
a) Gleichlast p

a 1. Halbfächenlast p

$M = k \cdot p \cdot L_y^2$



unbelastet      belastet



$M_y$  im Schnitt  $x=0.5L_y$   
 $M_x$  im Schnitt  $y=0.5L_y$

a 2. Teilflächenlast p



$K = p \cdot bL \cdot L_y$

für  $\frac{bL}{L_x} = 0$  ist  $K = q \cdot L_y$

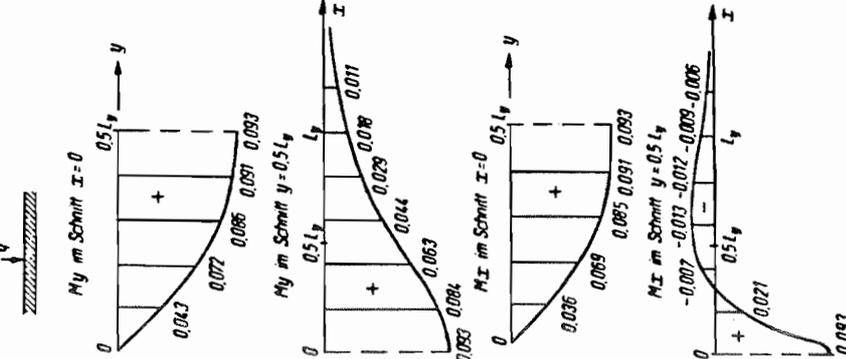
$q =$  Linienlast  $\left[ \frac{kN}{m} \right]$

$M = \frac{K}{8}$

$M_{ym} = \frac{K \cdot L_y}{8 \cdot b_{ym}}$

b) Linienlast q auf  $x = 0$

$M = k \cdot q \cdot L_y$



$M_y$  im Schnitt  $x=0$   
 $M_x$  im Schnitt  $y=0.5L_y$

$bL/L_y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	$> 3,0$
$b_{ym}/L_y$	1,35	1,35	1,36	1,37	1,39	1,42	1,45	1,49	1,53	1,57	1,62	1,72	1,91	2,26	3,10	$\frac{bL}{L_y}$
$m_{ym}$	10,8	10,8	10,9	11,0	11,1	11,4	11,6	11,9	12,2	12,6	12,9	13,8	15,3	18,1	24,8	$8 \cdot \frac{bL}{L_y}$
$m_{xm}$	11,1	12,4	14,2	16,4	19,0	22,1	25,8	30,0	35,0	40,8	47,6			$M_{xm} < \frac{pL_y^2}{50}$		

Für  $\frac{bL}{L_y} \approx 0,7$  Größtwert  $M_{xm} = 0,023 pL_y^2$

Platte Nr. IV/1/a

Gleichlast p

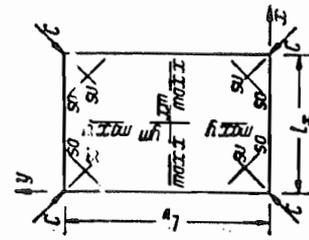
$K = p \cdot L_x \cdot L_y$

$M = \frac{K}{m}$

$C = \frac{K}{R}$

C > 0 Druck  
C < 0 Zug

$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{xm}$	$\max m_x$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{ym}$	$\max m_y$	$\frac{y}{L_y}$	R
0,50	115	80,6	0,18 u. 0,82	20,8	40,2		-15,1
0,55	86,2	70,3	0,20 u. 0,80	20,4	40,2		-14,0
0,60	68,8	62,1	0,23 u. 0,77	20,2	40,2		-13,1
0,65	56,8	54,1	0,27 u. 0,78	20,4	40,2		-12,4
0,70	48,3	47,5	0,33 u. 0,67	20,8	40,2		-11,9
0,75	42,2	42,1	0,41 u. 0,59	21,5	40,2		-11,5
0,80	37,5	37,4	0,48 u. 0,52	22,3	40,2		-11,2
0,85	34,0			23,3	40,2		-11,0
0,90	31,4			24,5	40,2		-10,8
0,95	29,1			25,8	40,2		-10,8
1,00	27,2			27,2	40,2		-10,8
1,10	24,6			30,7	40,2		-10,8
1,20	22,9			34,9	40,2		-11,0
1,30	21,8			40,2	40,2	0,45 u. 0,55	-11,4
1,40	21,0			46,2	45,9	0,35 u. 0,65	-11,8
1,50	20,6			53,6	52,1	0,30 u. 0,70	-12,2
1,60	20,3			62,3	57,8	0,25 u. 0,75	-12,7
1,70	20,2			72,3	63,5	0,23 u. 0,77	-13,3
1,80	20,4			84,1	69,4	0,20 u. 0,80	-13,9
1,90	20,6			98,5	74,9	0,19 u. 0,81	-14,5
2,00	20,8			115	80,6	0,18 u. 0,82	-15,1
$\frac{x}{L_x}$	0,5	veränderlich	veränderlich	0,5	0,5	0,5	0; 1,0
$\frac{y}{L_y}$	0,5	0,5	0,5	veränderlich	veränderlich	veränderlich	0; 1,0



$M_{10} = 0,5 C$   
 $M_{20} = 0,5 C$

Platte Nr. IV/2/a

Gleichlast p

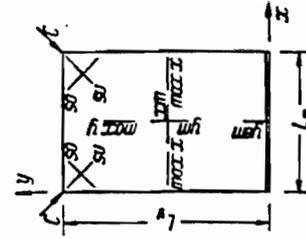
$K = p \cdot L_x \cdot L_y$

$M = \frac{K}{m}$

$C = \frac{K}{R}$

C > 0 Druck  
C < 0 Zug

$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{xm}$	$\max m_x$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{ym}$	$\max m_y$	$\frac{y}{L_y}$	R
0,50	335	118	0,13 u. 0,87	34,2	29,2		-22,4
0,55	221	108	0,14 u. 0,86	32,3	28,7		-20,4
0,60	160	96,2	0,16 u. 0,84	30,9	28,4		-18,8
0,65	121	87,8	0,18 u. 0,82	30,0	28,3		-17,5
0,70	96,8	78,3	0,20 u. 0,80	29,5	28,3	0,55	-16,4
0,75	79,5	70,5	0,22 u. 0,78	29,2	28,3	0,55	-15,6
0,80	67,0	63,1	0,26 u. 0,76	29,2	28,3	0,55	-14,9
0,85	57,6	56,1	0,33 u. 0,67	29,5	28,3	0,55	-14,2
0,90	50,8			29,5	28,3	0,55	-13,8
0,95	45,5			30,5	28,7	0,60	-13,4
1,00	41,2			31,4	29,4	0,60	-13,1
1,10	35,1			33,6	31,7	0,60	-12,8
1,20	31,1			36,6	34,7	0,60	-12,6
1,30	28,2			40,3	38,6	0,60	-12,6
1,40	26,4			45,0	43,2	0,65	-12,8
1,50	24,9			50,6	48,5	0,70	-13,1
1,60	24,0			57,1	54,0	0,75	-13,4
1,70	23,5			65,0	59,4	0,75	-13,9
1,80	23,1			74,2	65,2	0,75	-14,3
1,90	22,0			85,2	71,3	0,75	-14,8
2,00	22,8			97,6	77,6	0,80	-15,4
$\frac{x}{L_x}$	0,5	veränderlich	veränderlich	0,5	0,5	0,5	0; 1,0
$\frac{y}{L_y}$	0,5	0,5	0,5	veränderlich	veränderlich	veränderlich	1,0

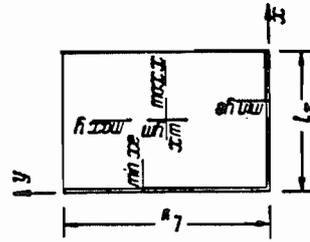


$M_{10} = M_{20} = 0,5 C$

Platte Nr. IV/4/a  
Gleichlast p

$$K = p \cdot L_x \cdot L_y \quad M = \frac{K}{m}$$

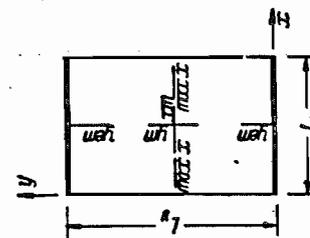
$\frac{L_y}{L_x}$	min $m_{zE}$	$\frac{y}{L_y}$	$m_{zm}$	max $m_z$	$\frac{x}{L_x}$	min $m_{yE}$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{ym}$	max $m_y$	$\frac{y}{L_y}$
0,50	-24,4	0,58	253	120	0,87	-16,8	0,55	35,8		
0,55	-22,2	0,58	172	106	0,85	-15,7	0,55	34,5		
0,60	-20,5	0,58	127	93,2	0,83	-15,0	0,55	33,7		
0,65	-19,0	0,58	101	82,8	0,80	-14,5	0,56	33,3		
0,70	-17,9	0,58	83,5	73,3	0,77	-14,1	0,56	33,5		
0,75	-16,9	0,58	70,8	65,0	0,72	-13,9	0,56	34,1		0,52
0,80	-16,1	0,58	61,5	57,8	0,68	-13,8	0,56	35,0		0,53
0,85	-15,5	0,58	54,9	51,7	0,65	-13,8	0,57	36,5		0,54
0,90	-15,0	0,57	50,1	47,0	0,62	-13,9	0,57	38,2		0,56
0,95	-14,6	0,57	46,3	43,2	0,61	-14,1	0,57	40,1		0,57
1,00	-14,3	0,57	42,7	40,2	0,59	-14,3	0,57	42,7		0,59
1,10	-13,0	0,57	38,6	37,2	0,56	-15,0	0,57	49,0		0,62
1,20	-13,8	0,57	36,0	35,0	0,54	-15,7	0,58	56,5		0,66
1,30	-13,9	0,56	34,4	34,0	0,52	-16,6	0,58	66,7		0,70
1,40	-11,0	0,56	33,8	33,5	0,51	-17,6	0,58	79,1		0,75
1,50	-14,3	0,56	33,2			-18,6	0,58	94,5		0,80
1,60	-14,7	0,56	33,5			-19,7	0,58	113		0,82
1,70	-15,1	0,55	33,8			-20,8	0,58	136		0,84
1,80	-15,6	0,55	34,4			-22,0	0,58	166		0,85
1,90	-16,2	0,55	35,0			-23,2	0,58	203		0,86
2,00	-16,8	0,55	35,8			-24,4	0,58	253		0,87
$\frac{x}{L_x}$		0	0,5	veränderlich	veränderlich		veränderlich	0,5	0,5	0,5
$\frac{y}{L_y}$		veränderlich	0,5	0,5	0				veränderlich	



Platte Nr. IV/3/a  
Gleichlast p

$$K = p \cdot L_x \cdot L_y \quad M = \frac{K}{m}$$

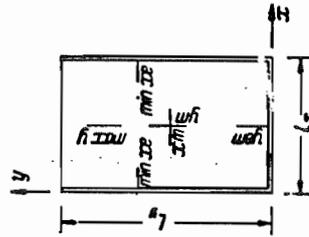
$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{zm}$	max $m_z$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{ym}$	$m_{ym}$
0,50	1175	154	0,11 u. 0,89	-24,0	48,2
0,55	635	140	0,12 u. 0,88	-21,9	44,4
0,60	400	128	0,14 u. 0,86	-20,0	41,5
0,65	275	118	0,15 u. 0,85	-18,6	39,3
0,70	200	108	0,16 u. 0,84	-17,5	37,7
0,75	151	99,0	0,18 u. 0,82	-16,7	36,5
0,80	121	90,7	0,19 u. 0,81	-16,0	35,7
0,85	100	82,8	0,21 u. 0,79	-15,4	35,1
0,90	84,2	75,5	0,24 u. 0,76	-14,9	34,8
0,95	72,5	68,3	0,27 u. 0,73	-14,6	34,8
1,00	63,3	61,7	0,30 u. 0,70	-14,3	35,1
1,10	50,7			-14,0	36,2
1,20	42,6			-13,8	38,0
1,30	37,0			-13,9	40,6
1,40	33,2			-11,0	44,0
1,50	30,6			-14,2	48,2
1,60	28,6			-14,7	53,4
1,70	27,2			-15,1	59,4
1,80	26,3			-15,7	66,8
1,90	25,4			-16,1	75,5
2,00	25,0			-16,8	85,4
$\frac{x}{L_x}$	0,5	veränderlich	veränderlich	0,5	0,5
$\frac{y}{L_y}$	0,5	0,5	0,5	0; 1,0	0,5



Platte Nr. IV/5/a  
Gleichlast p

$$K = p \cdot L_x \cdot L_y \quad M = \frac{K}{m}$$

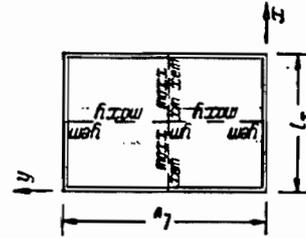
$\frac{L_y}{L_x}$	min $m_{xz}$	$\frac{y}{L_y}$	$m_{xm}$	$m_{ym}$	$m_{ym}$	max $m_y$	$\frac{y}{L_y}$
0,50	-24,6	0,57	202	-17,6	37,4	37,4	0,54
0,55	-22,5	0,57	149	-16,9	36,9	41,8	0,57
0,60	-20,9	0,57	112	-16,4	36,9	44,5	0,60
0,65	-19,6	0,57	88,5	-16,0	37,4	47,8	0,64
0,70	-18,5	0,57	73,7	-15,8	38,7	51,7	0,67
0,75	-17,6	0,57	64,3	-15,7	40,5	55,9	0,70
0,80	-17,0	0,57	57,2	-15,9	43,0		
0,85	-16,6	0,57	52,3	-16,3	46,1		
0,90	-16,3	0,57	48,8	-16,9	50,1		
0,95	-16,2	0,57	46,2	-17,5	55,0		
1,00	-16,2	0,57	44,1	-18,3	59,5		
1,10	-16,3	0,56	41,7	-19,5	72,8	66,4	0,75
1,20	-16,7	0,56	40,6	-20,9	90,3	78,2	0,79
1,30	-17,2	0,56	40,3	-22,6	114	89,6	0,82
1,40	-17,8	0,56	40,6	-24,4	144	101	0,85
1,50	-18,7	0,55	41,4	-26,3	183	113	0,87
1,60	-19,7	0,55	42,4	-28,0	230	126	0,88
1,70	-20,7	0,55	43,7	-29,8	300	140	0,89
1,80	-21,8	0,55	45,2	-31,5	390	156	0,89
1,90	-22,9	0,55	46,9	-33,2	520	174	0,90
2,00	-24,0	0,55	49,0	-35,4	715	194	0,90
$\frac{x}{L_x}$	0; 1,0		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$\frac{y}{L_y}$	veränderlich		0,5	0	0,5	veränderlich	



Platte Nr. IV/6/a  
Gleichlast p

$$K = p \cdot L_x \cdot L_y \quad M = \frac{K}{m}$$

$\frac{L_y}{L_x}$	$m_{xcm}$	$m_{xm}$	max $m_x$	$\frac{x}{L_x}$	$m_{ym}$	$m_{ym}$	max $m_y$	$\frac{y}{L_y}$
0,50	-35,0	525	210	0,22 u. 0,78	-24,0	50,0	50,0	
0,55	-31,9	325	188	0,23 u. 0,77	-22,2	47,1	95,6	0,48 u. 0,52
0,60	-29,2	220	167	0,27 u. 0,73	-21,0	45,4	117	0,41 u. 0,59
0,65	-27,0	162	147	0,32 u. 0,68	-20,1	44,5	140	0,34 u. 0,66
0,70	-25,0	126	125	0,39 u. 0,61	-19,4	44,4	157	0,29 u. 0,71
0,75	-23,4	104			-18,9	44,9	172	0,26 u. 0,74
0,80	-22,2	87,5			-18,7	46,1	186	0,24 u. 0,76
0,85	-21,2	76,0			-18,6	48,0	198	0,23 u. 0,77
0,90	-20,4	67,7			-18,7	50,3	210	0,22 u. 0,78
0,95	-19,8	61,8			-19,0	53,2		
1,00	-19,4	56,8			-19,4	56,8		
1,10	-18,8	50,7			-20,2	66,3		
1,20	-18,6	47,3			-21,5	79,0		
1,30	-18,8	45,3			-22,9	95,8		
1,40	-19,2	44,6			-24,5	119		
1,50	-19,8	44,4			-26,2	147		
1,60	-20,5	44,9			-28,0	188		
1,70	-21,2	45,7			-29,7	238		
1,80	-22,1	46,8			-31,5	310		
1,90	-23,0	48,2			-33,2	400		
2,00	-24,0	50,0			-35,0	525		
$\frac{x}{L_x}$	0	0,5	veränderlich	0,5	0,5	0,5	0,5	
$\frac{y}{L_y}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	veränderlich	



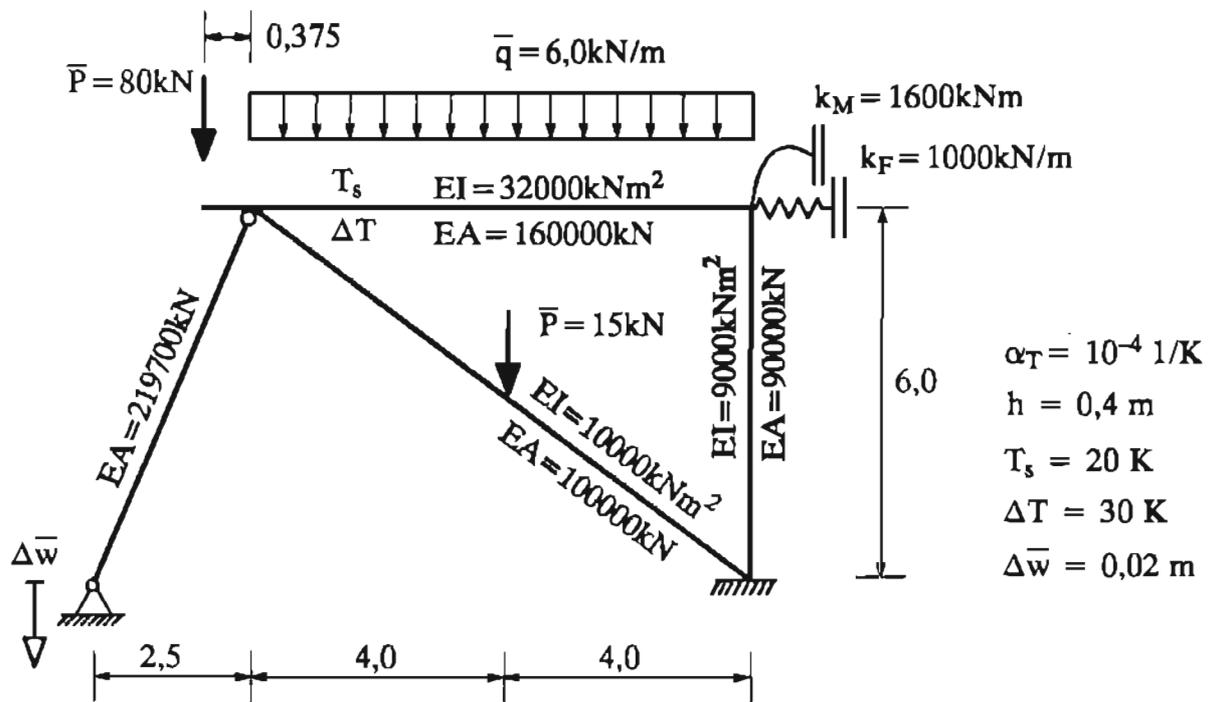
<b>Statik 3</b>		Wunderlich/Rapolder		<b>Vorlesungsplan</b>		<b>WS 1998/99</b>	
<b>Woche</b>	<b>Datum</b>	<b>Vorlesung</b>		<b>Übung</b>		<b>Seminar</b>	
		Di 10 <sup>15</sup> -11 <sup>45</sup>	Raum N 1179	Di 14 <sup>00</sup> -15 <sup>30</sup>	Raum N1190	Di 14 <sup>00</sup> -15 <sup>30</sup>	Raum N1190
<b>1</b>	3. Nov	V	Einführung (Dias) <b>Räumliche Tragwerke</b> Räumliche Stabtragwerke	V	2.1 Fortsetzung räuml. Tragwerke 2.1.1 Torsion 2.1.2 Räuml. beanspruchter Träger		
<b>2</b>	10. Nov	V	Trägerroste: Berechnung, Tragverhalten (Anhang)	Ü	Räumliche Tragwerke: - Allgemeines - Beispiel Trägerrost		
<b>3</b>	17. Nov	V	<b>3. Übertragungsverfahren,</b> 3.1/3.2 Einführung, Übertr.-matrix, .. 3.3 Rechengang	U	Beispiel: Räumliches Stabtragwerk		
<b>4</b>	24. Nov	V	Träger auf nachg. Lagerung MDLT-Vorführung Ü-matrix f. spez. Träger				Beispiel: Trägerrost
<b>5</b>	1. Dez	V	3.7 Ü-matrix spez. Träger (Forts.) <b>4. WGV (DWV)</b> 4.1/4.2 Einführung, Bez., Def.	Ü	ÜTV: - Allgemeines - Beispiel (Rechenverfahren) Vorbereitung des CAL-Seminars		
<b>6</b>	8. Dez	V	4.3 Einführungsbeispiel(DWV): Durchlaufträger Steifigkeitsmatrix	Ü	DWV - Einführungsbeispiel (Vergleich KGV - DWV)		
<b>7</b>	15. Dez	V	4.4 Balkenel. mit verschiebl. Knoten <b>5. Allg. Weggrößenverfahren</b> Einführung	U	DWV - unverschieblicher Rahmen (Federn, Kragarm, Biegelinie)		
	22. Dez	S	DWV - unverschieblicher Rahmen (N aus Knotengleichgewicht)				

	29. Dez		Weihnachten		Weihnachten	Weihnachten
	5. Jan		Weihnachten		Weihnachten	Weihnachten
<b>8</b>	12. Jan	V	5.1 PvV 5.2 Steifigkeitswerte von Stäben: Fachwerkstab, Biegung	U	WGV – Einführungsbeispiel	
<b>9</b>	19. Jan	V	5.2.1 Biegeanteile mit Hilfe PvV 5.2.3 Näherung mit Ansätzen			S WGV – Beispiel (Einzelfedern, Knoten-, El.-lasten)
<b>10</b>	26. Jan	V	5.3 Transformation (Dias) 5.4 Knotengleichgewicht 5.5 Systemberechnung (EBRAH)	Ü	WGV – Transformation	
<b>11</b>	2. Feb	V	5.5 Fortsetzung Systemberechnung (EBRAH) 5.6 Programmtechn. Realisierung			S WGV – Rahmen (Transformation)
<b>12</b>	9. Feb	V	5.7 Kopplung von Freiheits- graden	U	WGV – Beispiel (Anti-, Symmetrie)	
	16. Feb	V	Fasching		Fasching	Fasching
<b>13</b>	23. Feb	U	WGV – kinematische Kopplung (verschieblicher Rahmen)			S WGV – Beispiel (Transformation)

Statik 4		Wunderlich/Rapolder	Vorlesungsplan SS 1999
Woche	Datum	<b>Vorlesung</b> Di 9 <sup>30</sup> –11 <sup>00</sup> Raum N 1179	<b>Übung/Seminar</b> Di 15 <sup>00</sup> –16 <sup>30</sup> Raum N1190
<b>1</b>	4.Mai	5.7.7 Substrukturtechnik 6. <b>Spezielle Tragwerke</b> 6.1 Fachwerke	<b>Ü1:</b> WGV – Trägerrost
<b>2</b>	11.Mai	6.2 Elastische Bettung –6.4 Trägerrost (EBRAH, Dias, Kragarmmodell)	<b>Ü2:</b> WGV – Stützensenkung und kinem. Kopplung
<b>3</b>	18.Mai	6.5/6.6 Kreisring-/Kreisbogentr. (Dias) <b>7.Nichtlin. Berechn. v. Stabtragwerken</b> 7.1/7.2 Einführung/Grundgleichungen	<b>S1:</b> WGV – Rahmen, kinematische Kopplung
<b>4</b>	25.Mai	<b>Pfingsten</b>	<b>Pfingsten</b>
<b>5</b>	1.Juni	7.2 Grundgleichungen (Fortsetzung) 7.3 Elementeigenschaften n. Th. II O. 7.4 Systemberechnung n. dem WGV	<b>Ü3:</b> WGV – Theorie II.Ordnung (exakte Steifigkeitsmatrix)
<b>6</b>	8.Juni	7.2.3 PvV (Fortsetzung) 7.2.4 Äquivalenz: PvV – DGL 7.5 Bspe. zum Traghalten (EBRAH)	<b>Ü4:</b> WGV – Theorie II.Ordnung (genäherte Steifigkeitsmatrix)
<b>7</b>	15.Juni	7.6 Theorie II. Ordnung in den baustoffbezogenen Normen anhand von Beispielen	<b>Vertiefereinführung (Dias)</b> <b>Ü5:</b> WGV – Koppelfeder
<b>8</b>	22.Juni	7.7 Verzweigungsprobleme 7.8 Allgemeines Stabilitätskriterium 7.9 Geometrisch nichtlin. Theorie	<b>S2:</b> WGV – Theorie II. Ordnung
<b>9</b>	29.Juni	<b>Ü6:</b> WGV – Theorie II. Ordnung (Eigenwert- und Spannungsproblem)	<b>S3:</b> CAL88-Rechnerseminar – (Beispiel Rahmen)
<b>10</b>	6.Juli	<b>8 Theorie und Ber. dünner Platten</b> 8.1 Definition und Tragverhalten 8.2 Grundgleichungen (Dias, Modell)	<b>S4:</b> WGV – Theorie II. Ordnung –
<b>11</b>	13.Juli	8.2 Grundgleichungen (Fortsetzung) –8.2.7 Ersatzscherkräfte, Randbedingungen (Modell)	<b>Ü7:</b> Platten – Tragverhalten (Czerny –, Stiglat/Wippel – Tafeln)
<b>12</b>	20.Juli	8.2.8 Momententransformation 8.3–8.5 Spezielle Lösungen 8.6 Einflußflächen	<b>Ü8:</b> Berechnung durchlaufender Platten (Stiglat/Wippel, Pieper/Martens, Belastungsumordnung)
<b>13</b>	27.Juli		<b>S4:</b> Berechnung durchlaufender Platten (Stiglat/Wippel, Pieper/Martens)

## Berechnung eines Tragwerks nach dem WEGGRÖSSENVERFAHREN (WGV)

### System und Belastung:



Lastfall 1: Gleichlast  $\bar{q} = 6,0 \text{ kN/m}$  auf dem Obergurt,  $\bar{P} = 80 \text{ kN}$  auf dem Krz garm,  $\bar{P} = 15 \text{ kN}$  auf dem Diagonalstab.

Lastfall 2: gleichmäßige Temperatur  $T_s = 20 \text{ K}$  im Obergurt.

Lastfall 3: Temperaturdifferenz  $\Delta T = 30 \text{ K}$  im Obergurt.

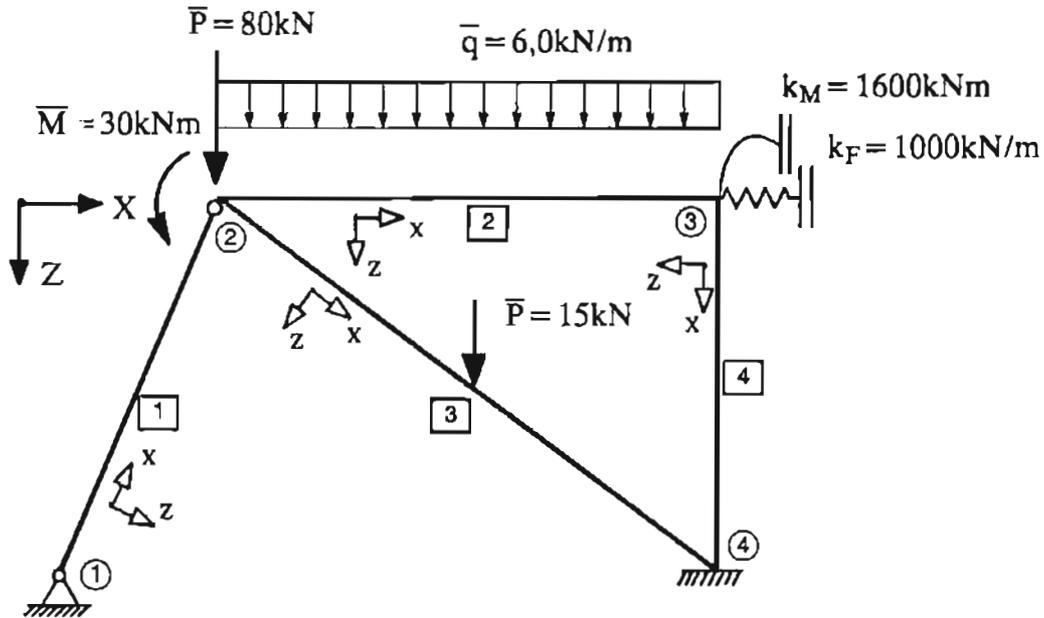
Lastfall 4: Stützensenkung  $\Delta \bar{w} = 0,02 \text{ m}$  am Auflager A.

Bemerkung: Die Berechnung dieses Beispiels wird zur Darstellung des Weggrößenverfahrens vollständig mit allen Zahlen durchgeführt. Diese Art der Berechnung ist nicht für die Handrechnung geeignet und sollte mit einem Matrizenprogramm (z.B. CAL88) durchgeführt werden.

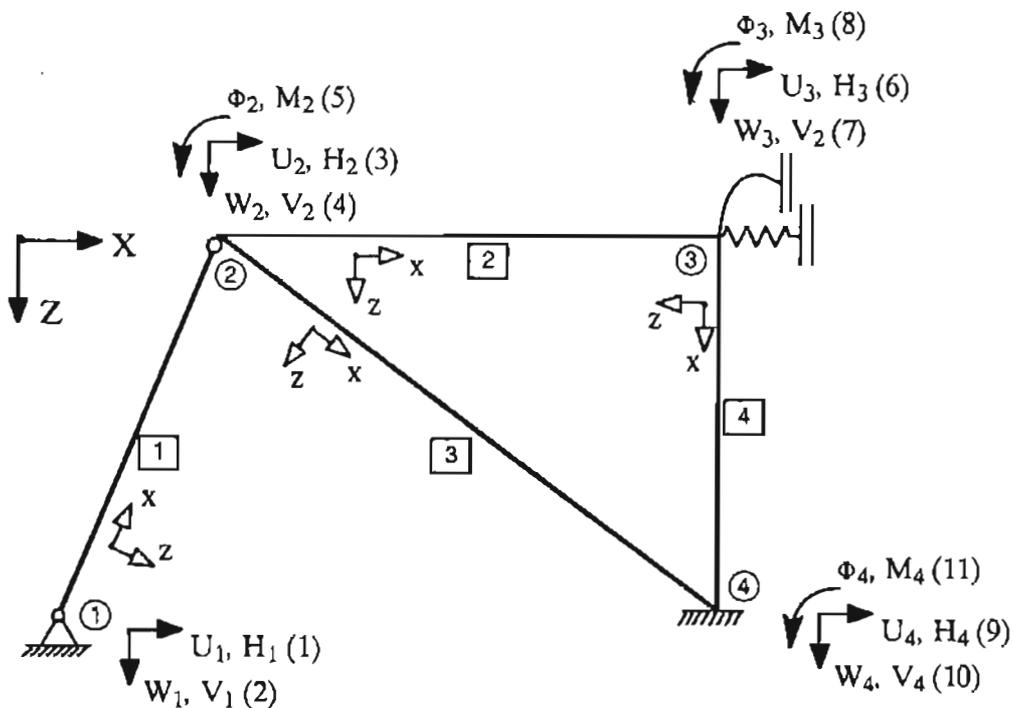
Mögliche Vereinfachungen bezüglich der Handrechnung werden in einem weiteren Beispiel gezeigt.

**Berechnung:**

1. Schritt: Untersuchen, ob Symmetrie oder Antimetrie vorliegt, dann neues System wählen.  
 (in diesem Fall keine Symmetrie vorhanden).  
 Statisch bestimmte Teilsysteme durch ihre Wirkung ersetzen.
2. Schritt: Numerierung der Knoten und der Stäbe  
 Wahl eines globalen (X, Y, Z) und für jedes Element ein lokales (x, y, z) Koordinatensystems



Antragen der globalen Knotenkräfte und Knotenverformungen

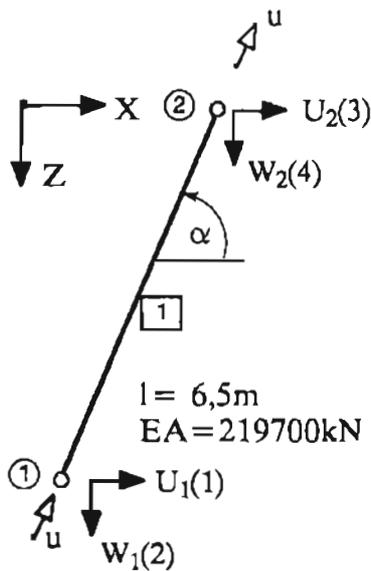


3. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.
4. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.
5. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Fachwerkelement)

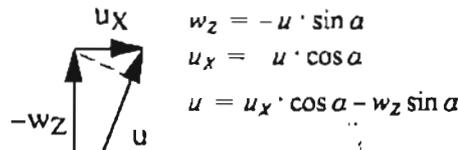
- Normalkräfte im Weggrößenverfahren : (  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$  )

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_a^0 \\ N_b^0 \end{bmatrix}^i$$



$$\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} 219700/6.5 & -219700/6.5 \\ -219700/6.5 & 219700/6.5 \end{bmatrix}$$

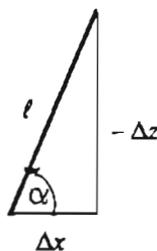
$$\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} (u_1) & (u_2) \\ 33800 & -33800 \\ -33800 & 33800 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_1^i) \\ (N_2^i) \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \mathbf{k}^1 \\ \mathbf{k}^1 \end{matrix}} \right\} \text{lokale Steifigkeitsmatrix}$$



$$\begin{aligned} w_z &= -u \cdot \sin \alpha \\ u_x &= u \cdot \cos \alpha \\ u &= u_x \cdot \cos \alpha - w_z \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_G^i = \begin{bmatrix} u_{xa} \\ w_{za} \\ u_{xb} \\ w_{zb} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \mathbf{v}_G^i$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\Delta x}{l} & \Delta x &= x_b - x_a \\ -\sin \alpha &= \frac{\Delta z}{l} & \Delta z &= z_b - z_a \end{aligned} \quad l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$$

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} (\Delta x/l) & (\Delta z/l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta x/l) & -(\Delta z/l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5/6.5 & -8/6.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5/6.5 & -8/6.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} 0.38462 & -0.92308 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.38462 & -0.92308 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \mathbf{T}^1 \\ \mathbf{T}^1 \end{matrix}} \right\} \text{Transformationsmatrix}$$

$\mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^i \mathbf{k}^i \mathbf{T}^{iT}$  (Transformation auf globale Koordinaten)

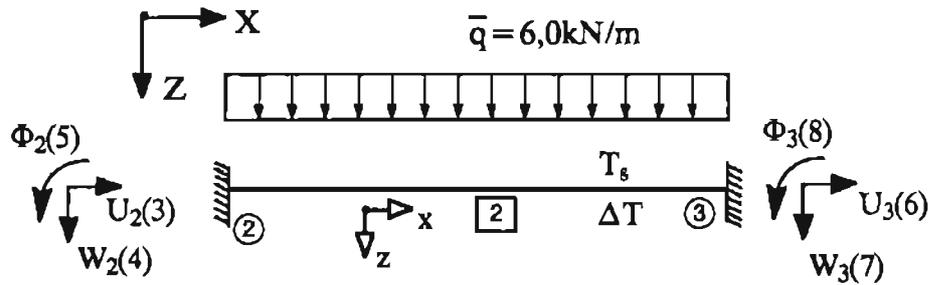
$$\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} 33800 & -33800 \\ -33800 & 33800 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} 0.38462 & -0.92308 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.38462 & -0.92308 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^1 \mathbf{T}^1 = \mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} 13000 & -31200 & -13000 & 31200 \\ -13000 & 31200 & 13000 & -31200 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x1}) \\ (w_{z1}) \\ (u_{x2}) \\ (w_{z2}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{T}^{1T} \mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000 & 12000 \\ -12000 & 28800 & 12000 & -28800 \\ -5000 & 12000 & 5000 & -12000 \\ 12000 & -28800 & -12000 & 28800 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{x1}^1) \\ (F_{z1}^1) \\ (F_{x2}^1) \\ (F_{z2}^1) \end{matrix} = \mathbf{k}_G^1$$

$$\begin{matrix} U_1(1) & W_1(2) & U_2(3) & W_2(4) \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \mathbf{k}_G^1 \\ \mathbf{k}_G^1 \end{matrix}} \right\} \text{globale Steifigkeitsmatrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)



$l = 8,0\text{m}$   
 $EI = 32000\text{kNm}^2$   
 $EA = 160000\text{kN}$   
 $\alpha_T = 10^{-4} 1/\text{K}$   
 $h = 0,4 \text{ m}$   
 $T_s = 20 \text{ K}$   
 $\Delta T = 30 \text{ K}$

$$k^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 0 & -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} & 0 & 12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$k^2_G = \begin{bmatrix} 180000/8 & 0.0 & 0.0 & -180000/8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12*32000/8/8/8 & -6*32000/8/8 & 0.0 & -12*32000/8/8/8 & -6*32000/8/8 \\ 0.0 & -6*32000/8/8 & 4*32000/8 & 0.0 & 6*32000/8/8 & 2*32000/8 \\ -180000/8 & 0.0 & 0.0 & 180000/8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -12*32000/8/8/8 & 6*32000/8/8 & 0.0 & 12*32000/8/8/8 & 6*32000/8/8 \\ 0.0 & -6*32000/8/8 & 2*32000/8 & 0.0 & 6*32000/8/8 & 4*32000/8 \end{bmatrix}$$

$$k^2_G = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 750 & -3000 & 0 & -750 & -3000 \\ 0 & -3000 & 18000 & 0 & 3000 & 8000 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 3000 & 0 & 750 & 3000 \\ 0 & -3000 & 8000 & 0 & 3000 & 18000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^i) & (F_{y2}^i) \\ (Q_2^i) & (F_{z2}^i) \\ (M_2^i) & (M_{y2}^i) \\ (N_3^i) & (F_{y3}^i) \\ (Q_3^i) & (F_{z3}^i) \\ (M_3^i) & (M_{y3}^i) \end{matrix}$$

lokale = globale  
Steifigkeitsmatrix

$U_2(3) \quad W_2(4) \quad \Phi_2(5) \quad U_3(6) \quad W_3(7) \quad \Phi_3(8)$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 2 entfällt, da lokales und globales Koordinatensystem identisch sind.

Gleichlast

$$P^{20}_{GLF1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \cdot l/2 \\ q \cdot l^2/12 \\ 0 \\ -q \cdot l/2 \\ -q \cdot l^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -6 \cdot 8/2 \\ 6 \cdot 8 \cdot 8/12 \\ 0.0 \\ -6 \cdot 8/2 \\ -6 \cdot 8 \cdot 8/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -24.0 \\ 32.0 \\ 0.0 \\ -24.0 \\ -32.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^{20}) & (F_{y2}^{20}) \\ (Q_2^{20}) & (F_{z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{y2}^{20}) \\ (N_3^{20}) & (F_{y3}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{z3}^{20}) \\ (M_3^{20}) & (M_{y3}^{20}) \end{matrix}$$

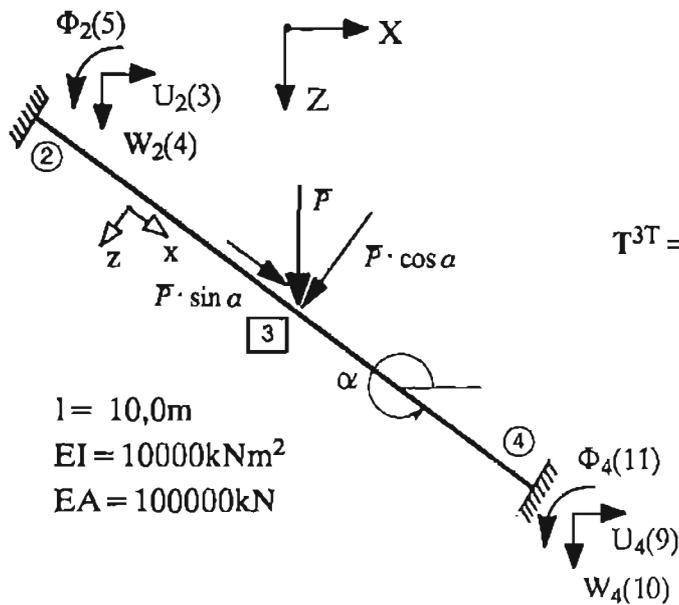
Temperatur

$$P^{20}_{GLF2} = \begin{bmatrix} EA \cdot \alpha_T \cdot T_s \\ 0 \\ 0 \\ -EA \cdot \alpha_T \cdot T_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160000 \cdot 10e^{-4} \cdot 20 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -160000 \cdot 10e^{-4} \cdot 20 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -320.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^{20}) & (F_{y2}^{20}) \\ (Q_2^{20}) & (F_{z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{y2}^{20}) \\ (N_3^{20}) & (F_{y3}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{z3}^{20}) \\ (M_3^{20}) & (M_{y3}^{20}) \end{matrix}$$

Temperaturdiff.

$$P^{20}_{GLF3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ EI \cdot \alpha_T \cdot \Delta T/h \\ 0 \\ 0 \\ -EI \cdot \alpha_T \cdot \Delta T/h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 32000 \cdot 10e^{-4} \cdot 30/0.4 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -32000 \cdot 10e^{-4} \cdot 30/0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 240.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -240.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^{20}) & (F_{y2}^{20}) \\ (Q_2^{20}) & (F_{z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{y2}^{20}) \\ (N_3^{20}) & (F_{y3}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{z3}^{20}) \\ (M_3^{20}) & (M_{y3}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Balkenelement)



$l = 10,0\text{m}$   
 $EI = 10000\text{kNm}^2$   
 $EA = 100000\text{kN}$

$$p^{30} = \begin{bmatrix} -15 \cdot 8 / 10 / 2 \\ -15 \cdot 8 / 10 / 2 \\ 15 \cdot 8 / 10 \cdot 10 / 8 \\ -15 \cdot 8 / 10 / 2 \\ -15 \cdot 8 / 10 / 2 \\ -15 \cdot 8 / 10 \cdot 10 / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.5 \\ -8.0 \\ 15.0 \\ -4.5 \\ -8.0 \\ -15.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_{21}^{30}) \\ (Q_{21}^{30}) \\ (M_{21}^{30}) \\ (N_{22}^{30}) \\ (Q_{22}^{30}) \\ (M_{22}^{30}) \end{matrix}$$

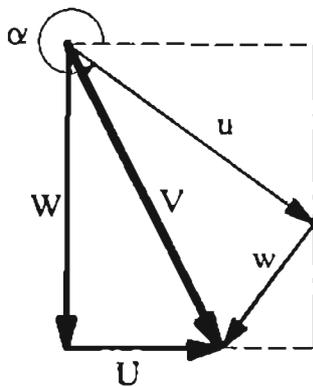
$$T^{3T} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ -7.5 \\ 15.0 \\ 0.0 \\ -7.5 \\ -15.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{21}^{30}) \\ (F_{22}^{30}) \\ (M_{21}^{30}) \\ (F_{23}^{30}) \\ (F_{24}^{30}) \\ (M_{22}^{30}) \end{matrix} = p^{30}_G$$

$$p_G^{i0} = T^{iT} p^{i0}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 100000/10 & 0.0 & 0.0 & -100000/10 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12 \cdot 10000/10/10/10 & -8 \cdot 10000/10/10 & 0.0 & -12 \cdot 10000/10/10/10 & -8 \cdot 10000/10/10 \\ 0.0 & -8 \cdot 10000/10/10 & 4 \cdot 10000/10 & 0.0 & 8 \cdot 10000/10/10 & 2 \cdot 10000/10 \\ -100000/10 & 0.0 & 0.0 & 100000/10 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -12 \cdot 10000/10/10/10 & 8 \cdot 10000/10/10 & 0.0 & 12 \cdot 10000/10/10/10 & 8 \cdot 10000/10/10 \\ 0.0 & -8 \cdot 10000/10/10 & 2 \cdot 10000/10 & 0.0 & -8 \cdot 10000/10/10 & 4 \cdot 10000/10 \end{bmatrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 10000.0 & 0.0 & 0.0 & -10000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 120.0 & -800.0 & 0.0 & -120.0 & -800.0 \\ 0.0 & -800.0 & 4000.0 & 0.0 & 800.0 & 2000.0 \\ -10000.0 & 0.0 & 0.0 & 10000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -120.0 & 800.0 & 0.0 & 120.0 & 800.0 \\ 0.0 & -800.0 & 2000.0 & 0.0 & 800.0 & 4000.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix}$$

lokale Steifigkeitsmatrix



$$T^i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\Delta x/l) & (\Delta z/l) & & & & \end{matrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad \Delta x = x_b - x_a$$

$$-\sin \alpha = \frac{\Delta z}{l} \quad \Delta z = z_b - z_a$$

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$$

$k_G^i = T^{iT} k^i T^i$  (Transformation auf globale Koordinaten)

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix

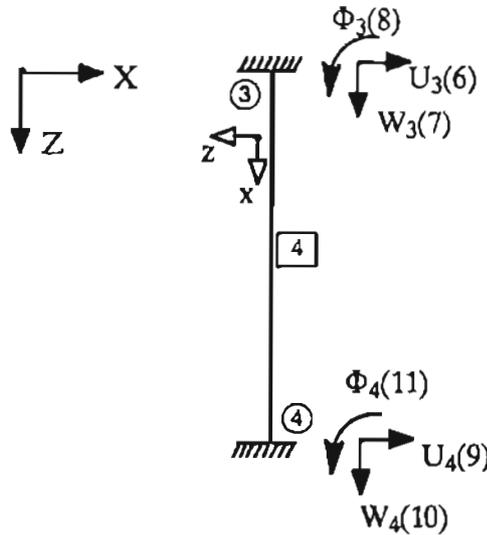
$$k^3 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & -800 & 0 & -120 & -800 \\ 0 & -800 & 4000 & 0 & 800 & 2000 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 800 & 0 & 120 & 800 \\ 0 & -800 & 2000 & 0 & 800 & 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000.0 & 8000.0 & 0.0 & -8000.0 & -8000.0 & 0.0 \\ -72.0 & 98.0 & -800.0 & 72.0 & -98.0 & -800.0 \\ 380.0 & -480.0 & 4000.0 & -380.0 & 480.0 & 2000.0 \\ -8000.0 & -8000.0 & 0.0 & 8000.0 & 8000.0 & 0.0 \\ 72.0 & -98.0 & 800.0 & -72.0 & 98.0 & 800.0 \\ 380.0 & -480.0 & 2000.0 & -380.0 & 480.0 & 4000.0 \end{bmatrix} = k^3 \cdot T^3 = r^3$$

$$T^{3T} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6443.2 & 4742.4 & 380.0 & -8443.2 & -4742.4 & 380.0 \\ 4742.4 & 3676.8 & -480.0 & -4742.4 & -3676.8 & -480.0 \\ 350.0 & -480.0 & 4000.0 & -380.0 & 480.0 & 2000.0 \\ -8443.2 & -4742.4 & -380.0 & 8443.2 & 4742.4 & -380.0 \\ -4742.4 & -3676.8 & 480.0 & 4742.4 & 3676.8 & 480.0 \\ 350.0 & -480.0 & 2000.0 & -380.0 & 480.0 & 4000.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{21}^3) \\ (F_{22}^3) \\ (M_{21}^3) \\ (F_{23}^3) \\ (F_{24}^3) \\ (M_{22}^3) \end{matrix} = k^3_G$$

globale Steifigkeitsmatrix

### Steifigkeitsmatrix Element 4 (Balkenelement)

$l = 6,0\text{m}$   
 $EI = 9000\text{kNm}^2$   
 $EA = 90000\text{kN}$

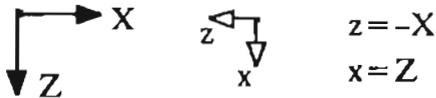


$$k^4 = \begin{bmatrix} 90000/6 & 0.0 & 0.0 & -90000/6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12*9000/6/6/6 & -8*9000/6/6 & 0.0 & -12*9000/6/6/6 & -6*9000/6/6 \\ 0.0 & -8*9000/6/6 & 4*9000/6 & 0.0 & 6*9000/6/6 & 2*9000/6 \\ -90000/6 & 0.0 & 0.0 & 90000/6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -12*9000/6/6/6 & 8*9000/6/6 & 0.0 & 12*9000/6/6/6 & 6*9000/6/6 \\ 0.0 & -6*9000/6/6 & 2*9000/6 & 0.0 & -6*9000/6/6 & 4*9000/6 \end{bmatrix}$$

$$k^4 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -1500 & 0 & -500 & -1500 \\ 0 & -1500 & 6000 & 0 & 1500 & 3000 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 1500 & 0 & 500 & 1500 \\ 0 & -1500 & 3000 & 0 & 1500 & 6000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_3) & (w_3) & (\varphi_3) & (u_4) & (w_4) & (\varphi_4) \end{matrix} \begin{matrix} (N_3^4) \\ (Q_3^4) \\ (M_3^4) \\ (N_4^4) \\ (Q_4^4) \\ (M_4^4) \end{matrix} \text{ lokale Steifigkeitsmatrix}$$

$$k_G^i = T^T k^i T^i$$

(Transformation auf globale Koordinaten)



$$T^4 = \begin{matrix} (x) & (z) & (\varphi) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Transformationsmatrix}$$

$$k^4 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -1500 & 0 & -500 & -1500 \\ 0 & -1500 & 6000 & 0 & 1500 & 3000 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 1500 & 0 & 500 & 1500 \\ 0 & -1500 & 3000 & 0 & 1500 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 \\ -500 & 0 & -1500 & 500 & 0 & -1500 \\ 1500 & 0 & 6000 & -1500 & 0 & 3000 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 \\ 500 & 0 & 1500 & -500 & 0 & 1500 \\ 1500 & 0 & 3000 & -1500 & 0 & 6000 \end{bmatrix} = k^4 * T^4 = r^4$$

$$T^{4T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x3}) & (w_{z3}) & (\varphi_{y3}) & (u_{x4}) & (w_{z4}) & (\varphi_{y4}) \end{matrix} \begin{matrix} (F_{y3}^4) \\ (F_{z3}^4) \\ (M_{y3}^4) \\ (F_{y4}^4) \\ (F_{z4}^4) \\ (M_{y4}^4) \end{matrix} = k^4_G$$

U<sub>3</sub>(6)    W<sub>3</sub>(7)    Φ<sub>3</sub>(8)    U<sub>4</sub>(9)    W<sub>4</sub>(10)    Φ<sub>4</sub>(11)

globale Steifigkeitsmatrix

6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\varphi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\varphi_{Yb})$
Element 1	1	2		3	4	
Element 2	3	4	5	6	7	8
Element 3	3	4	5	9	10	11
Element 4	6	7	8	9	10	11

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i = 0 \quad \sum_i F_{Zk}^i = 0 \quad \sum_i M_{Yk}^i = 0$$

		1 U <sub>1</sub>	2 W <sub>1</sub>	3 U <sub>2</sub>	4 W <sub>2</sub>	5 Φ <sub>2</sub>	6 U <sub>3</sub>	7 W <sub>3</sub>	8 Φ <sub>3</sub>	9 U <sub>4</sub>	10 W <sub>4</sub>	11 Φ <sub>4</sub>			
1	H <sub>1</sub>	5000	-12000	-5000.0	12000.0								El. 1 El. 2 El. 3 El. 4		
2	V <sub>1</sub>	-12000	28800	12000.0	-28800.0								El. 1 El. 2 El. 3 El. 4		
3	H <sub>2</sub>	-5000	12000	5000.0 20000.0 6443.2	-12000.0 0.0 4742.4	0 360	-20000	0	0	-6443.2	-4742.4	360.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4		
4	V <sub>2</sub>	12000	-28800	-12000.0 0.0 4742.4	28800.0 750.0 3678.8	-3000 -480	0	-750	-3000	-4742.4	-3678.8	-480.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4		
5	M <sub>2</sub>			0 360.0	-3000.0 -480.0	18000 4000	0	3000	8000	-360.0	480.0	2000.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4		
6	H <sub>3</sub>			-20000.0	0.0	0	20000 500 1000	0	0	1500	-500.0	0.0	1500.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4 Federn	
7	V <sub>3</sub>			0.0	-750.0	3000	0	750	3000					El. 1 El. 2 El. 3 El. 4	
8	M <sub>3</sub>			0.0	-3000.0	8000	0	3000	18000 1500	0	8000 1800	-1500.0	0.0	3000.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4 Federn
9	H <sub>4</sub>			-6443.2	-4742.4	-360	-500	0	-1500	6443.2 500.0	4742.4 0.0	-360.0 -1500.0		El. 1 El. 2 El. 3 El. 4	
10	V <sub>4</sub>			-4742.4	-3678.8	480	0	-15000	0	4742.4 0.0	3678.8 15000.0	480.0 0.0		El. 1 El. 2 El. 3 El. 4	
11	M <sub>4</sub>			360.0	-480.0	2000	1500	0	3000	-360.0	480.0	4000.0	8000.0	El. 1 El. 2 El. 3 El. 4	

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -12000 & 28800 & 12000.0 & -28800.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.6 & 360 & -20000 & 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & 360.0 & -4742.4 & 360.0 \\ 12000 & -28800 & -7257.6 & 33228.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3678.8 & -480.0 & -4742.4 & -480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 & -360.0 & 480.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21600 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1500.0 & -500.0 & 1500.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & 3000 & 23600 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 & -1500.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & -360 & -500 & 0 & -1500 & 6443.2 & 4742.4 & -1860.0 & 4742.4 & -1860.0 \\ 0 & 0 & -4742.4 & -3678.8 & 480 & 0 & -15000 & 0 & 4742.4 & 18678.8 & 480.0 & 4742.4 & 480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 3000 & -1860.0 & 480.0 & 10000.0 & -1860.0 & 10000.0 \end{bmatrix}$$

Überlagerung der Lastvektoren  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* - \mathbf{P}^0$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}}^{\text{LF1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 80 + 24 + 7.5 \\ 30 - 32 - 16.0 \\ 0 \\ 0 + 24 \\ 0 + 32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 + 7.5 \\ 0 \\ 0 + 15.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 111.5 \\ -17.0 \\ 0.0 \\ 24.0 \\ 32.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 7.5 \\ 0.0 \\ 15.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}}^{\text{LF2}} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -320.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 320.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}}^{\text{LF3}} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -240.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 240.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}} = \begin{matrix} & \text{LF1} & \text{LF2} & \text{LF3} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -320.0 & 0.0 \\ 111.5 & 0.0 & 0.0 \\ -17.0 & 0.0 & -240.0 \\ 0.0 & 320.0 & 0.0 \\ 24.0 & 0.0 & 0.0 \\ 32.0 & 0.0 & 240.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.5 & 0.0 & 0.0 \\ 15.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

8. Schritt: Einarbeiten der Randbedingungen

$$\mathbf{K}_{\text{ges}} = \begin{matrix} U_1=0 & W_1=0 & U_2=? & W_2=? & \Phi_2=? & U_3=? & W_3=? & \Phi_3=? & U_4=0 & W_4=0 & \Phi_4=0 \\ \begin{bmatrix} 3400 & 12000 & 5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 12000 & 28400 & 31443.2 & 28400.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.8 & 380 & -20000 & 0 & 0 & -8413.2 & -4742.4 & 380.0 \\ 12000 & -28400 & -7257.8 & 33228.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3875.8 & -480.0 \\ 0 & 0 & 380.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -330.0 & 480.0 & 2000.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21500 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1600.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & -3000 & 23800 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & 3443.2 & 4742.4 & 380 & 0 & 0 & 1500 & 3443.2 & 4742.4 & 1880.0 \\ 0 & 0 & 4742.4 & 3875.8 & 480 & 0 & 15800 & 0 & 4742.4 & 18875.0 & 480.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & 480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 8000 & 1880.0 & 480.0 & 1880.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (\Sigma H_1 = ?) \\ (\Sigma V_1 = ?) \\ (\Sigma H_2 = 0) \\ (\Sigma V_2 = 0) \\ (\Sigma M_2 = 0) \\ (\Sigma H_3 = 0) \\ (\Sigma V_3 = 0) \\ (\Sigma M_3 = 0) \\ (\Sigma H_4 = ?) \\ (\Sigma V_4 = ?) \\ (\Sigma M_4 = ?) \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 31443.2 & -7257.8 & 380.0 & -20000.0 & 0.0 & 0.0 \\ -7257.8 & 33228.8 & -3480.0 & 0.0 & -750.0 & -3000.0 \\ 380.0 & -3480.0 & 20000.0 & 0.0 & 3000.0 & 8000.0 \\ -20000.0 & 0.0 & 0.0 & 21500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0.0 & -750.0 & 3000.0 & 0.0 & 15750.0 & 3000.0 \\ 0.0 & -3000.0 & 8000.0 & 1500.0 & 3000.0 & 23800.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -320.0 & 0.0 \\ 111.5 & 0.0 & 0.0 \\ -17.0 & 0.0 & -240.0 \\ 0.0 & 320.0 & 0.0 \\ 24.0 & 0.0 & 0.0 \\ 32.0 & 0.0 & 240.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.5 & 0.0 & 0.0 \\ 15.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (\Sigma H_1 = ?) \\ (\Sigma V_1 = ?) \\ (\Sigma H_2 = 0) \\ (\Sigma V_2 = 0) \\ (\Sigma M_2 = 0) \\ (\Sigma H_3 = 0) \\ (\Sigma V_3 = 0) \\ (\Sigma M_3 = 0) \\ (\Sigma H_4 = ?) \\ (\Sigma V_4 = ?) \\ (\Sigma M_4 = ?) \end{matrix}$$

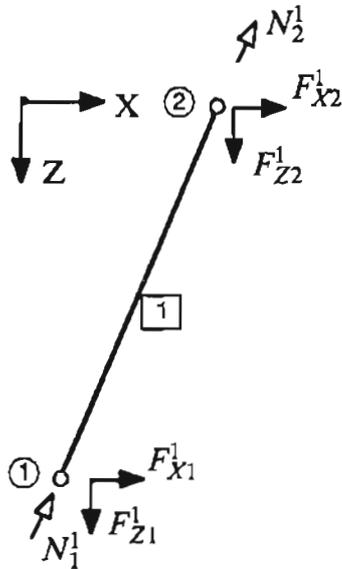
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & -320.0 & 0.0 \\ 111.5 & 0.0 & 0.0 \\ -17.0 & 0.0 & -240.0 \\ 0.0 & 320.0 & 0.0 \\ 24.0 & 0.0 & 0.0 \\ 32.0 & 0.0 & 240.0 \end{bmatrix}$$

9. Schritt: Lösen des Gleichungssystems  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$

$$\mathbf{V} = \begin{matrix} & \text{LF1} & \text{LF2} & \text{LF3} \\ \begin{bmatrix} 2.0148\text{E-}03 & -1.9023\text{E-}03 & -1.7520\text{E-}03 \\ 3.8791\text{E-}03 & -4.6958\text{E-}04 & -8.4747\text{E-}04 \\ -1.2291\text{E-}03 & 3.4822\text{E-}04 & -1.8799\text{E-}02 \\ 1.7378\text{E-}03 & 1.3188\text{E-}02 & -2.7853\text{E-}03 \\ 1.5701\text{E-}03 & 1.0740\text{E-}04 & 3.8584\text{E-}04 \\ 1.9356\text{E-}03 & -1.0295\text{E-}03 & 1.8582\text{E-}02 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (W_2) \\ (\Phi_2) \\ (U_3) \\ (W_3) \\ (\Phi_3) \end{matrix}$$

10. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

11. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen



**Knotenkräfte Element 1**

Berechnung der globalen Knotenkräfte

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i$$

$$k_G^1 = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000 & 12000 \\ -12000 & 28800 & 12000 & -28800 \\ -5000 & 12000 & 5000 & -12000 \\ 12000 & -28800 & -12000 & 28800 \end{bmatrix}$$

$$v_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7520E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8958E-04 & -8.4747E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (w_{Z1}) \\ (u_{X2}) \\ (w_{Z2}) \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36.4752 & 3.8786 & -1.4097 \\ -87.5408 & -9.3039 & 3.3832 \\ -36.4752 & -3.8786 & 1.4097 \\ 87.5408 & 9.3039 & -3.3832 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{X1}^1) \\ (F_{Z1}^1) \\ (F_{X2}^1) \\ (F_{Z2}^1) \end{matrix} = p_G^1$$

Transformation der globalen Knotenkräfte in lokale Knotenkräfte

$$p^i = T^i \cdot p_G^i$$

$$p_G^1 = \begin{bmatrix} 36.4752 & 3.8786 & -1.4097 \\ -87.5408 & -9.3039 & 3.3832 \\ -36.4752 & -3.8786 & 1.4097 \\ 87.5408 & 9.3039 & -3.3832 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{X1}^1) \\ (F_{Z1}^1) \\ (F_{X2}^1) \\ (F_{Z2}^1) \end{matrix}$$

$$T^1 = \begin{bmatrix} 0.38482 & -0.92308 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.38482 & -0.92308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 94.8356 & 10.0792 & -3.6651 \\ -94.8356 & -10.0792 & 3.6651 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_1^1) \\ (N_2^1) \end{matrix} = p^1$$

Transformation der globalen Verschiebungen in lokale Verschiebungen, Berechnung der Knotenkräfte im lokalen System.

$$v^i = T^i \cdot v_G^i \quad p^i = k^i \cdot v^i$$

$$v_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7520E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8958E-04 & -8.4747E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (w_{Z1}) \\ (u_{X2}) \\ (w_{Z2}) \end{matrix}$$

$$T^1 = \begin{bmatrix} 0.38482 & -0.92308 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.38482 & -0.92308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ -2.8058E-03 & -2.8820E-04 & 1.0844E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_1) \\ (u_2) \end{matrix} = v^1$$

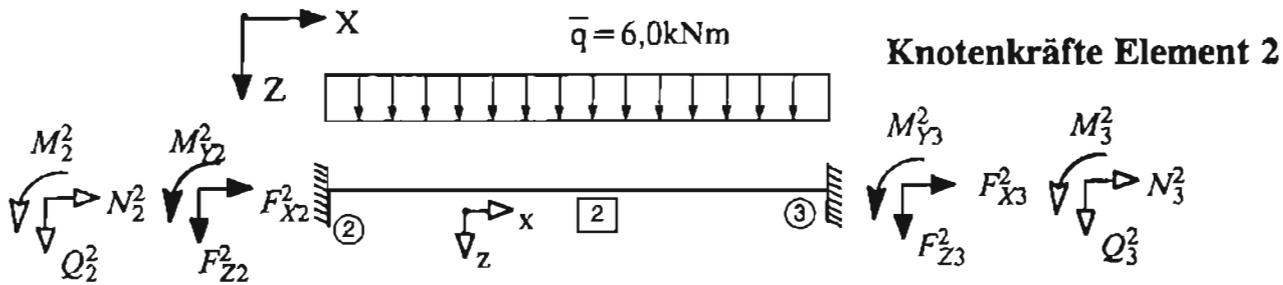
$$k^1 = \begin{bmatrix} 219700/8.5 & -219700/8.5 \\ -219700/8.5 & 219700/8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 94.8356 & 10.0792 & -3.6651 \\ -94.8356 & -10.0792 & 3.6651 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_1^1) \\ (N_2^1) \end{matrix} = p^1$$

Berechnung der lokalen Knotenkräfte mit Hilfe der Spannungsauswertematrix

$$p^i = k^i \cdot T^i \cdot v_G^i = r^i \cdot v_G^i$$

$$v_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7520E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8958E-04 & -8.4747E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (w_{Z1}) \\ (u_{X2}) \\ (w_{Z2}) \end{matrix}$$

$$r^1 = \begin{bmatrix} 19000 & -31200 & -13000 & 31200 \\ -13000 & 31200 & 13000 & -31200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 94.8356 & 10.0792 & -3.6651 \\ -94.8356 & -10.0792 & 3.6651 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_1^1) \\ (N_2^1) \end{matrix} = p^1$$



$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

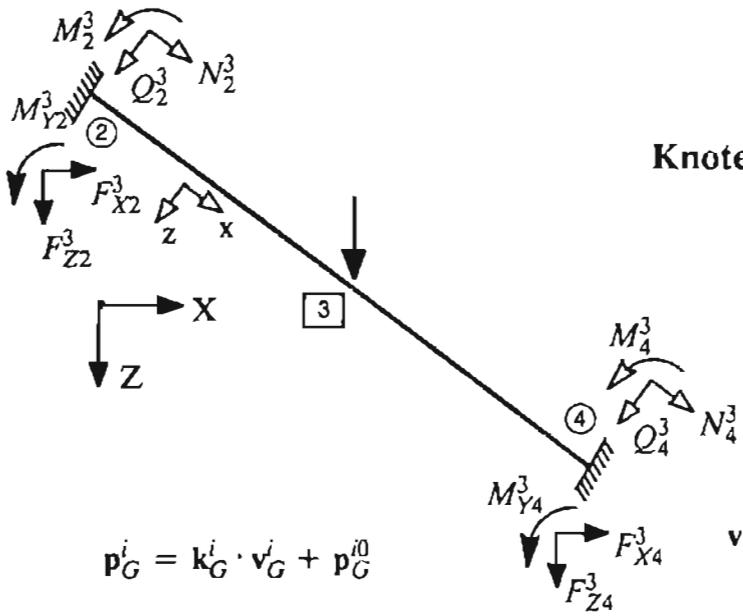
$$p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0}$$

$$v_G^2 = \begin{bmatrix} 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7620E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8858E-04 & -8.4747E-04 \\ -1.2291E-03 & 3.4822E-04 & -1.8789E-02 \\ 1.7878E-03 & 1.3188E-02 & -2.7853E-03 \\ 1.5701E-03 & 1.0740E-04 & 3.8684E-04 \\ 1.8566E-03 & -1.0295E-03 & 1.6582E-02 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) & (u_2) \\ (w_{z2}) & (w_2) \\ (\varphi_{y2}) & (\varphi_2) \\ (u_{x3}) & (u_3) \\ (w_{z3}) & (w_3) \\ (\varphi_{y3}) & (\varphi_3) \end{matrix}$$

$$k_G^2 = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 750 & -3000 & 0 & -750 & -3000 \\ 0 & -3000 & 16000 & 0 & 3000 & 8000 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 3000 & 0 & 750 & 3000 \\ 0 & -3000 & 8000 & 0 & 3000 & 16000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{x2}^2) & (N_2^2) \\ (F_{z2}^2) & (Q_2^2) \\ (M_{y2}^2) & (M_2^2) \\ (F_{x3}^2) & (N_3^2) \\ (F_{z3}^2) & (Q_3^2) \\ (M_{y3}^2) & (M_3^2) \end{matrix} = p_G^2$$

$$k^2 \cdot v^2 + p^{20} = p^2$$

$$\begin{bmatrix} 5.5401 & -301.7652 & 20.8654 \\ -0.4479 & 1.8111 & 5.7845 \\ -10.9470 & -0.9334 & -164.5815 \\ -5.5401 & 301.7652 & -20.8654 \\ 0.4479 & -1.8111 & -5.7845 \\ 14.5308 & -11.9550 & 118.3052 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 320.0 & 0.0 \\ -24.0 & 0.0 & 0.0 \\ 32.0 & 0.0 & 240.0 \\ 0.0 & -320.0 & 0.0 \\ -24.0 & 0.0 & 0.0 \\ -32.0 & 0.0 & -240.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5401 & 18.2348 & 20.8654 \\ -24.4479 & 1.8111 & 5.7845 \\ 21.0530 & -0.9334 & 75.4185 \\ -5.5401 & -18.2348 & -20.8654 \\ -23.5521 & -1.8111 & -5.7845 \\ -17.4894 & -11.9550 & -121.8948 \end{bmatrix} = p_G^2$$



Knotenkräfte Element 3

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$v_G^3 = \begin{bmatrix} 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7620E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8858E-04 & -8.4747E-04 \\ -1.2291E-03 & 3.4822E-04 & -1.8789E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) & (u_2) \\ (w_{z2}) & (w_2) \\ (\varphi_{y2}) & (\varphi_2) \\ (u_{x4}) & (u_4) \\ (w_{z4}) & (w_4) \\ (\varphi_{y4}) & (\varphi_4) \end{matrix}$$

Berechnung der globalen Knotenkräfte

$$k_G^3 = \begin{bmatrix} 8443.2 & 4742.4 & 380.0 & -8443.2 & -4742.4 & 360.0 \\ 4742.4 & 3878.8 & -480.0 & -4742.4 & -3878.8 & -480.0 \\ 380.0 & -480.0 & 4000.0 & -380.0 & 480.0 & 2000.0 \\ -8443.2 & -4742.4 & -360.0 & 8443.2 & 4742.4 & -360.0 \\ -4742.4 & -3678.8 & 480.0 & 4742.4 & 3678.8 & 480.0 \\ 360.0 & -480.0 & 2000.0 & -360.0 & 480.0 & 4000.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{x2}^3) & (N_2^3) \\ (F_{z2}^3) & (Q_2^3) \\ (M_{y2}^3) & (M_2^3) \\ (F_{x4}^3) & (N_4^3) \\ (F_{z4}^3) & (Q_4^3) \\ (M_{y4}^3) & (M_4^3) \end{matrix} = p_G^3$$

$$k^3 \cdot v^3 + p^{30} = p^3$$

$$\begin{bmatrix} 30.9352 & -14.3582 & -22.0751 \\ 24.4074 & -10.9149 & -2.4013 \\ -6.0530 & 0.9334 & -75.4185 \\ -30.9352 & 14.3582 & 22.0751 \\ -24.4074 & 10.9149 & 2.4013 \\ -3.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -7.5 & 0.0 & 0.0 \\ 15.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -7.5 & 0.0 & 0.0 \\ -15.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.9352 & -14.3582 & -22.0751 \\ 16.9074 & -10.9149 & -2.4013 \\ 8.9470 & 0.9334 & -75.4185 \\ -30.9352 & 14.3582 & 22.0751 \\ -31.9074 & 10.9149 & 2.4013 \\ -18.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} = p_G^3$$

Transformation der globalen Knotenkräfte in lokale Knotenkräfte

$$p^i = T^i \cdot p_G^i \quad p_G^3 = \begin{bmatrix} 30.9352 & -14.9582 & -22.0751 \\ 16.9074 & -10.9149 & -2.4013 \\ 8.9470 & 0.9334 & -75.4185 \\ -30.9352 & 14.9582 & 22.0751 \\ -31.9074 & 10.9149 & 2.4013 \\ -18.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{x2}^3) \\ (F_{z2}^3) \\ (M_{y2}^3) \\ (F_{x4}^3) \\ (F_{z4}^3) \\ (M_{y4}^3) \end{matrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34.8928 & -18.0355 & -19.1008 \\ -5.0352 & -0.1170 & 11.3240 \\ 8.9470 & 0.9334 & -75.4185 \\ -43.8928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -6.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -18.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^3$$

Transformation der globalen Verschiebungen in lokale Verschiebungen, Berechnung der Knotenkräfte im lokalen System.

$$v^i = T^i \cdot v_G^i \quad p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0} \quad v_G^3 = \begin{bmatrix} 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7520E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8956E-04 & -8.4747E-04 \\ -1.2281E-03 & 3.4822E-04 & -1.8799E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (w_{z2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x4}) \\ (w_{z4}) \\ (\varphi_{y4}) \end{matrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.9393E-03 & -1.8035E-03 & -1.9101E-03 \\ 1.8944E-03 & 7.6571E-04 & 3.7322E-04 \\ -1.2291E-03 & 3.4822E-04 & -1.8799E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_2) \\ (w_2) \\ (\varphi_2) \\ (u_4) \\ (w_4) \\ (\varphi_4) \end{matrix} = v^3$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & -800 & 0 & -120 & -600 \\ 0 & -600 & 4000 & 0 & 600 & 2000 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 800 & 0 & 120 & 600 \\ 0 & -600 & 2000 & 0 & 600 & 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39.3928 & -18.0355 & -19.1008 \\ 0.9648 & -0.1170 & 11.3240 \\ -6.0530 & 0.9334 & -75.4185 \\ -39.3928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -0.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -3.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^{3v}$$

$$\begin{bmatrix} 39.3928 & -18.0355 & -19.1008 \\ 0.9648 & -0.1170 & 11.3240 \\ -6.0530 & 0.9334 & -75.4185 \\ -39.3928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -0.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -3.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.5 & 0.0 & 0.0 \\ -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ 15.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.5 & 0.0 & 0.0 \\ -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ -15.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.8928 & -18.0355 & -19.1008 \\ -5.0352 & -0.1170 & 11.3240 \\ 8.9470 & 0.9334 & -75.4185 \\ -43.8928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -6.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -18.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^3$$

$$k^i \cdot v^i + p^{i0} = p^i$$

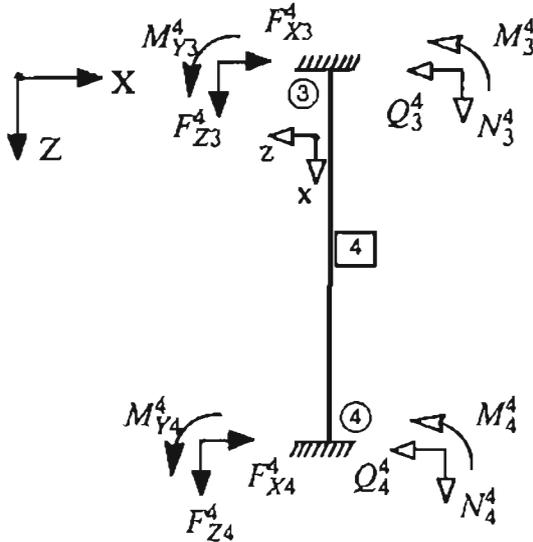
Berechnung der lokalen Knotenkräfte mit Hilfe der Spannungsauswertematrix

$$p^i = k^i \cdot T^i \cdot v_G^i + p^{i0} = r^i \cdot v_G^i + p^{i0} \quad v_G^3 = \begin{bmatrix} 2.0148E-03 & -1.8023E-03 & -1.7520E-03 \\ 3.8791E-03 & -4.8956E-04 & -8.4747E-04 \\ -1.2281E-03 & 3.4822E-04 & -1.8799E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (w_{z2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x4}) \\ (w_{z4}) \\ (\varphi_{y4}) \end{matrix}$$

$$r^3 = \begin{bmatrix} 8000.0 & 6000.0 & 0.0 & -8000.0 & -6000.0 & 0.0 \\ -72.0 & 96.0 & -800.0 & 72.0 & -96.0 & -600.0 \\ 360.0 & -480.0 & 4000.0 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 \\ -8000.0 & -6000.0 & 0.0 & 8000.0 & 6000.0 & 0.0 \\ 72.0 & -96.0 & 800.0 & -72.0 & 96.0 & 600.0 \\ 360.0 & -480.0 & 2000.0 & -360.0 & 480.0 & 4000.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39.3928 & -18.0355 & -19.1008 \\ 0.9648 & -0.1170 & 11.3240 \\ -6.0530 & 0.9334 & -75.4185 \\ -39.3928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -0.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -3.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^{3v}$$

$$\begin{bmatrix} 39.3928 & -18.0355 & -19.1008 \\ 0.9648 & -0.1170 & 11.3240 \\ -6.0530 & 0.9334 & -75.4185 \\ -39.3928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -0.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -3.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.5 & 0.0 & 0.0 \\ -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ 15.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.5 & 0.0 & 0.0 \\ -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ -15.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.8928 & -18.0355 & -19.1008 \\ -5.0352 & -0.1170 & 11.3240 \\ 8.9470 & 0.9334 & -75.4185 \\ -43.8928 & 18.0355 & 19.1008 \\ -6.9648 & 0.1170 & -11.3240 \\ -18.5948 & 0.2370 & -37.8212 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_2^3) \\ (Q_2^3) \\ (M_2^3) \\ (N_4^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^3$$

$$p^{3v} + p^{i0} = p^i$$



### Knotenkräfte Element 4

Berechnung der globalen Knotenkräfte

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i$$

$$k_G^4 = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 1500 & -500 & 0 & 1500 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 \\ 1500 & 0 & 8000 & -1500 & 0 & 3000 \\ -500 & 0 & -1500 & 500 & 0 & -1500 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 \\ 1500 & 0 & 3000 & -1500 & 0 & 6000 \end{bmatrix} \cdot v_G^4 = \begin{bmatrix} 1.7378E-03 & 1.3186E-02 & -2.7853E-03 \\ 1.5701E-03 & 1.0740E-04 & 3.8564E-04 \\ 1.9556E-03 & -1.0295E-03 & 1.8562E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X3}) \\ (w_{Z3}) \\ (\varphi_{Y3}) \\ (u_{X4}) \\ (w_{Z4}) \\ (\varphi_{Y4}) \end{matrix} = p^4_G = \begin{bmatrix} 9.8023 & 5.0488 & 23.4507 \\ 23.5521 & 1.8111 & 5.7845 \\ 14.3404 & 13.8021 & 95.1953 \\ -3.8023 & -5.0488 & -23.4507 \\ -23.5521 & -1.8111 & -5.7845 \\ 8.4735 & 18.8908 & 45.5087 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{X3}^4) \\ (F_{Z3}^4) \\ (M_{Y3}^4) \\ (F_{X4}^4) \\ (F_{Z4}^4) \\ (M_{Y4}^4) \end{matrix}$$

Transformation der globalen Verschiebungen in lokale Verschiebungen, Berechnung der Knotenkräfte im lokalen System.

$$v^i = T^i \cdot v_G^i \quad p^i = k^i \cdot v^i \quad v_G^4 = \begin{bmatrix} 1.7378E-03 & 1.3186E-02 & -2.7853E-03 \\ 1.5701E-03 & 1.0740E-04 & 3.8564E-04 \\ 1.9556E-03 & -1.0295E-03 & 1.8562E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X3}) \\ (w_{Z3}) \\ (\varphi_{Y3}) \\ (u_{X4}) \\ (w_{Z4}) \\ (\varphi_{Y4}) \end{matrix}$$

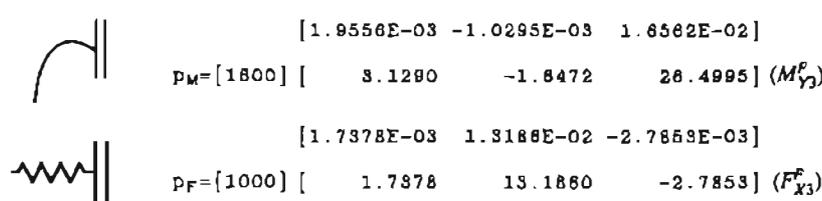
$$T^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot v_G^4 = \begin{bmatrix} 1.5701E-03 & 1.0740E-04 & 3.8564E-04 \\ -1.7378E-03 & -1.3186E-02 & 2.7853E-03 \\ 1.9556E-03 & -1.0295E-03 & 1.8562E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_3) \\ (w_3) \\ (\varphi_3) \\ (u_4) \\ (w_4) \\ (\varphi_4) \end{matrix} = v^4$$

$$k^4 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -1500 & 0 & -500 & -1500 \\ 0 & -1500 & 8000 & 0 & 1500 & 3000 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 1500 & 0 & 500 & 1500 \\ 0 & -1500 & 3000 & 0 & 1500 & 8000 \end{bmatrix} \cdot v^4 = \begin{bmatrix} 23.5521 & 1.8111 & 5.7845 \\ -3.8023 & -5.0488 & -23.4507 \\ 14.3404 & 13.8021 & 95.1953 \\ -23.5521 & -1.8111 & -5.7845 \\ 3.8023 & 5.0488 & 23.4507 \\ 8.4735 & 18.8908 & 45.5087 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_3^4) \\ (Q_3^4) \\ (M_3^4) \\ (N_4^4) \\ (Q_4^4) \\ (M_4^4) \end{matrix} = p^4$$

Berechnung der lokalen Knotenkräfte mit Hilfe der Spannungsauswertematrix

$$p^i = r^i \cdot v_G^i \quad v_G^4 = \begin{bmatrix} 1.7378E-03 & 1.3186E-02 & -2.7853E-03 \\ 1.5701E-03 & 1.0740E-04 & 3.8564E-04 \\ 1.9556E-03 & -1.0295E-03 & 1.8562E-02 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X3}) \\ (w_{Z3}) \\ (\varphi_{Y3}) \\ (u_{X4}) \\ (w_{Z4}) \\ (\varphi_{Y4}) \end{matrix}$$

$$r^4 = \begin{bmatrix} 0 & 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 \\ -500 & 0 & -1500 & 500 & 0 & -1500 \\ 1500 & 0 & 8000 & -1500 & 0 & 3000 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 \\ 500 & 0 & 1500 & -500 & 0 & 1500 \\ 1500 & 0 & 3000 & -1500 & 0 & 8000 \end{bmatrix} \cdot v_G^4 = \begin{bmatrix} 23.5521 & 1.8111 & 5.7845 \\ -3.8023 & -5.0488 & -23.4507 \\ 14.3404 & 13.8021 & 95.1953 \\ -23.5521 & -1.8111 & -5.7845 \\ 3.8023 & 5.0488 & 23.4507 \\ 8.4735 & 18.8908 & 45.5087 \end{bmatrix} \begin{matrix} (N_3^4) \\ (Q_3^4) \\ (M_3^4) \\ (N_4^4) \\ (Q_4^4) \\ (M_4^4) \end{matrix} = p^4$$



Zum Auftragen der Schnittgrößen sind die Kräfte von Vorzeichenkonvention II nach Vorzeichenkonvention I zu transformieren. Dazu müssen die Vorzeichen der Kräfte am Stabanfang vertauscht werden.

12. Schritt: Berechnung der Auflagerreaktionen  
Kontrolle der Ergebnisse

Auflagerreaktionen (global) Lastfall 1

$$A_{ges} = K_{ges} \cdot V_{ges} - P_{ges}$$

$$V_{ges} =$$

0.0000E+00	(U <sub>1</sub> )
0.0000E+00	(W <sub>1</sub> )
2.0148E-03	(U <sub>2</sub> )
3.8791E-03	(W <sub>2</sub> )
-1.2291E-03	(Φ <sub>2</sub> )
1.7378E-03	(U <sub>3</sub> )
1.5701E-03	(W <sub>3</sub> )
1.9556E-03	(Φ <sub>3</sub> )
0.0000E+00	(U <sub>4</sub> )
0.0000E+00	(W <sub>4</sub> )
0.0000E+00	(Φ <sub>4</sub> )

$$K_{ges} =$$

5000	-12000	-5000.0	12000.0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0	36.4752
-12000	28800	12000.0	-28800.0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0	-87.5408
-5000	12000	31443.2	-7257.8	360	-20000	0	0	-8443.2	-4742.4	360.0	0.0000
12000	-28800	-7257.8	33228.8	-3480	0	-750	-3000	-4742.4	-3676.8	-480.0	111.5000
0	0	360.0	-3480.0	20000	0	3000	8000	-360.0	480.0	2000.0	-17.0000
0	0	-20000.0	0.0	0	21500	0	1500	-500.0	0.0	1500.0	0.0000
0	0	0.0	-750.0	3000	0	15750	3000	0.0	-15000.0	0.0	24.0000
0	0	0.0	-3000.0	8000	1500	3000	23600	-1500.0	0.0	3000.0	32.0000
0	0	-8443.2	-4742.4	-360	-500	0	-1500	8843.2	4742.4	-1860.0	-34.7375
0	0	-4742.4	-3676.8	480	0	-15000	0	4742.4	18676.8	480.0	-47.9594
0	0	360.0	-480.0	2000	1500	0	3000	-1860.0	480.0	10000.0	4.8787

$\begin{bmatrix} 36.4752 \\ -87.5408 \\ 0.0000 \\ 111.5000 \\ -17.0000 \\ 0.0000 \\ 24.0000 \\ 32.0000 \\ -34.7375 \\ -47.9594 \\ 4.8787 \end{bmatrix}$	$-$	$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 111.5 \\ -17.0 \\ 0.0 \\ 24.0 \\ 32.0 \\ 0.0 \\ 7.5 \\ 16.0 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 36.4752 \\ -87.5408 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -34.7375 \\ -55.4594 \\ -10.1213 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} (\Sigma H_1) \\ (\Sigma V_1) \\ (\Sigma H_2) \\ (\Sigma V_2) \\ (\Sigma M_2) \\ (\Sigma H_3) \\ (\Sigma V_3) \\ (\Sigma M_3) \\ (\Sigma H_4) \\ (\Sigma V_4) \\ (\Sigma M_4) \end{matrix}$
---	-----	--	-----	---	--

$$K_{ges} \cdot V_{ges} - P_{ges} = A_{ges}$$

$$V_{ges}^T \cdot (K_{ges} \cdot V_{ges} - P_{ges}) = V_{ges}^T \cdot A_{ges} = ?$$

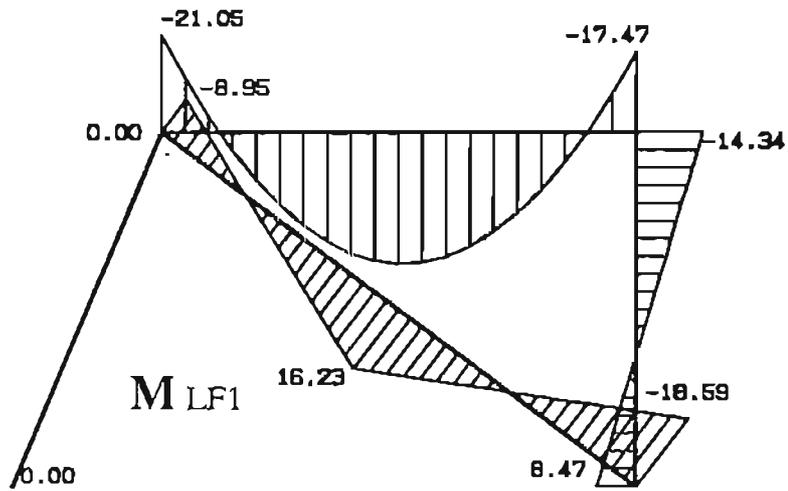
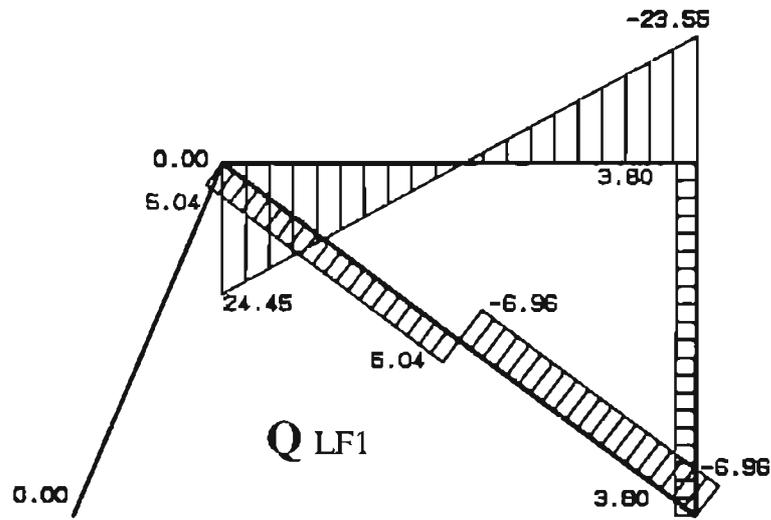
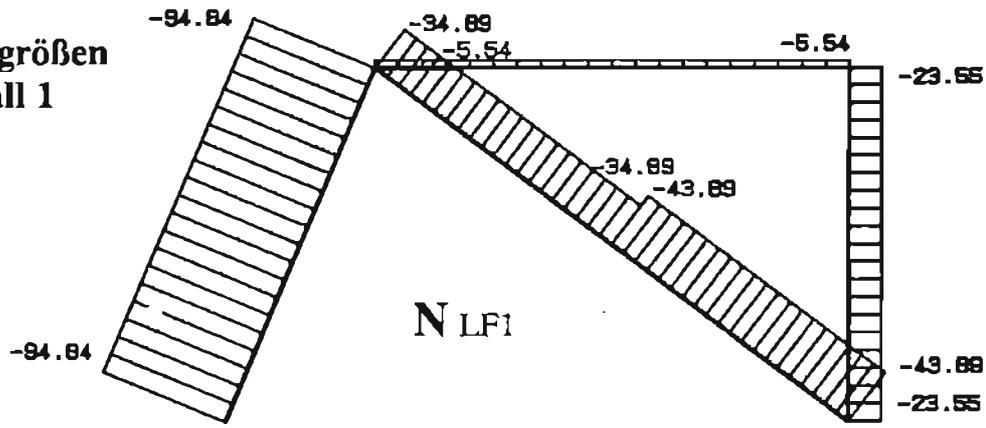
Kontrolle: Gleichgewicht am Knoten 2

	El. 1	El. 2	El. 3	
$(\Sigma H_2) \rightarrow F_{X2}^1 + F_{X2}^2 + F_{X2}^3 =$	-36.4752	+ 5.5401	+ 30.9352	= 0
$(\Sigma V_2) \rightarrow F_{Z2}^1 + F_{Z2}^2 + F_{Z2}^3 =$	87.5406	- 24.4479	+ 16.9074	= 80.0 = $\bar{P}$
$(\Sigma M_2) \rightarrow M_{Y2}^1 + M_{Y2}^2 + M_{Y2}^3 =$		21.0530	+ 8.9470	= 30.0 = $\bar{M}$

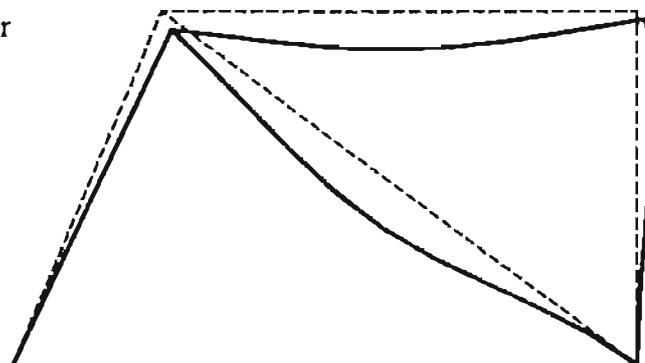
Kontrolle: Gleichgewicht am Knoten 3

	El. 2	El. 4	Federn	
$(\Sigma H_3) \rightarrow F_{X3}^2 + F_{X3}^4 + F_{X3}^f =$	-5.5401	+ 3.8023	+ 1.7378	= 0
$(\Sigma V_3) \rightarrow F_{Z3}^2 + F_{Z3}^4 =$	-23.5521	+ 23.5521		= 0
$(\Sigma M_3) \rightarrow M_{Y3}^2 + M_{Y3}^4 + M_{Y3}^f =$	-17.4694	+ 14.3404	+ 3.1290	= 0

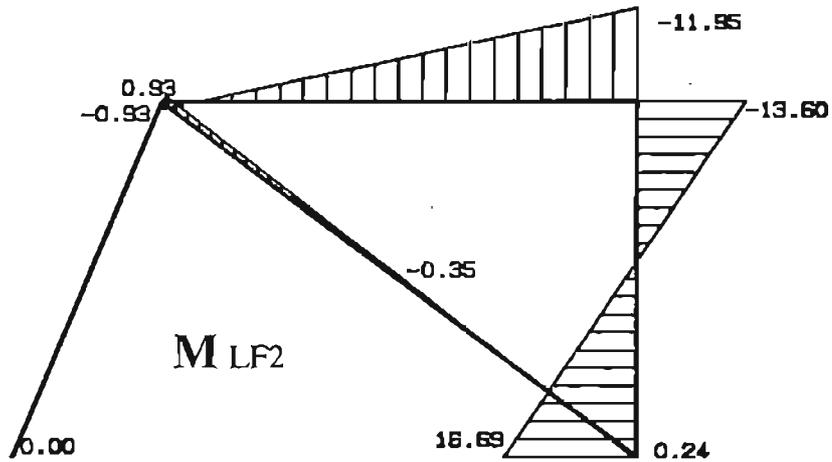
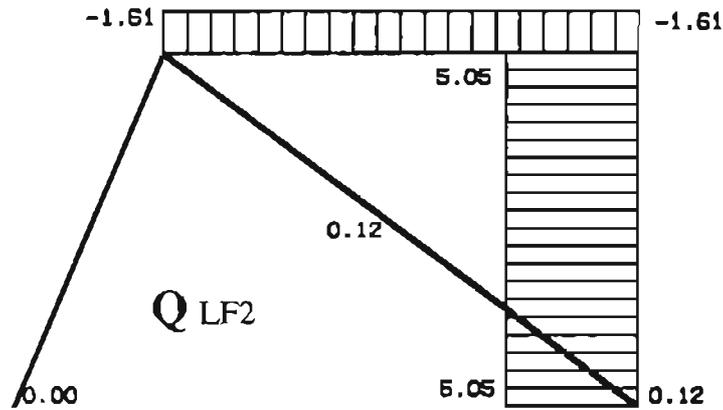
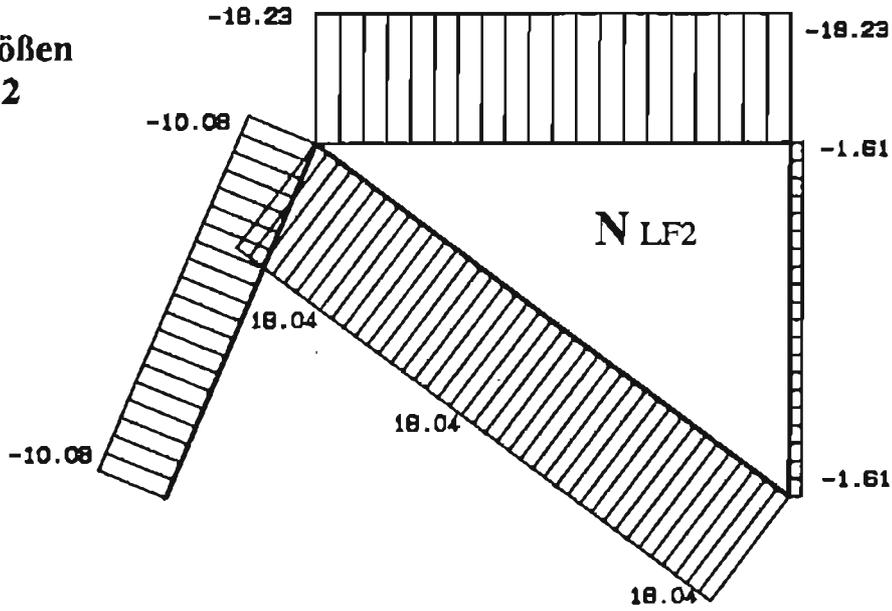
**Schnittgrößen  
 Lastfall 1**



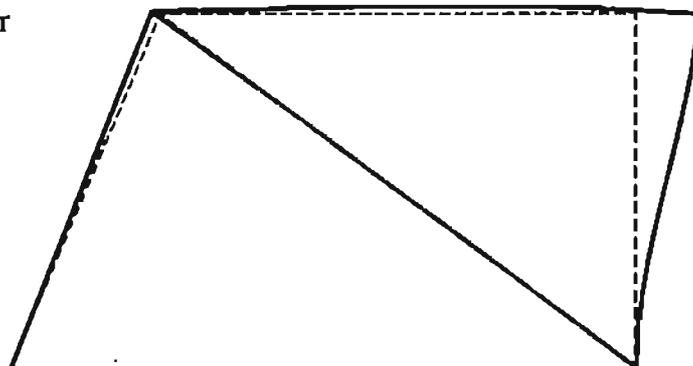
**Verschiebungsfigur**



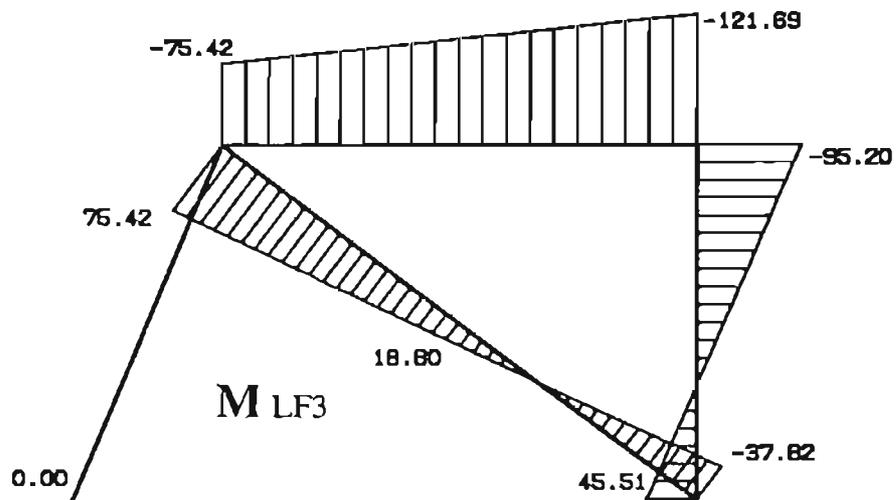
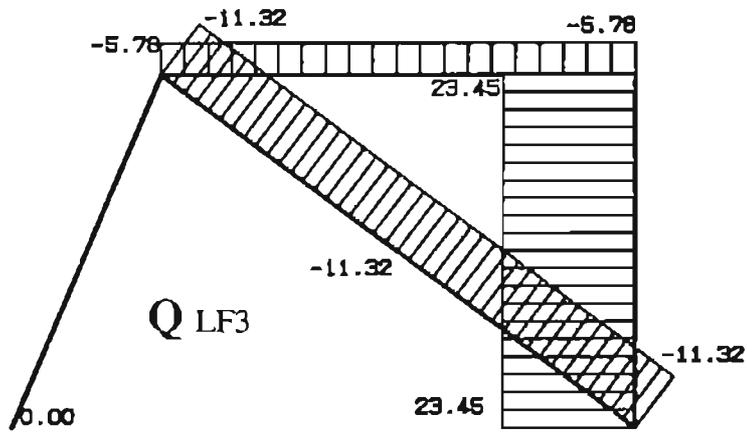
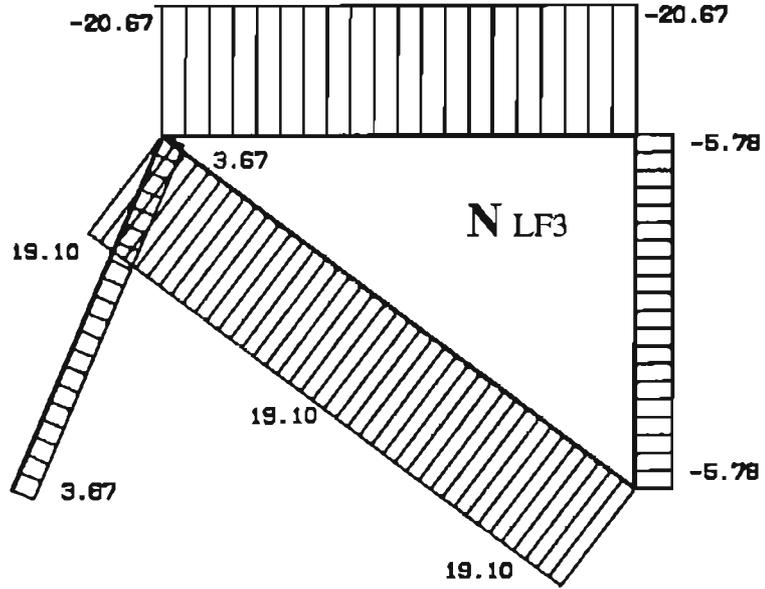
**Schnittgrößen  
 Lastfall 2**



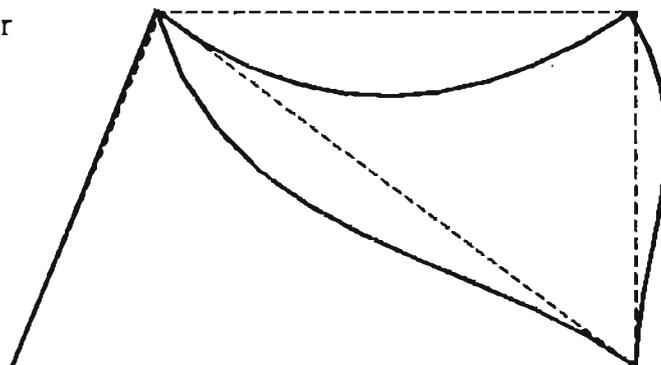
**Verschiebungsfigur**



**Schnittgrößen  
 Lastfall 3**



**Verschiebungsfigur**



### Berechnung Lastfall 4: Stützensenkung

1. Möglichkeit: Berechnung der Lastspalte durch Multiplikation der bekannten Verschiebung mit der Steifigkeitsmatrix.

$$K_{ges} \cdot (V + \Delta \bar{V})_{ges} = A_{ges} \quad K_{ges} \cdot V_{ges} + K_{ges} \cdot \Delta \bar{V}_{ges} = A_{ges}$$

mit

$$V_{ges} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2 \\ W_2 \\ \Phi_2 \\ U_3 \\ W_3 \\ \Phi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{V}_{ges} = \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta W_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_4 \\ \Delta W_4 \\ \Delta \Phi_4 \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{W} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.02 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -12000 & 28800 & 12000.0 & -28800.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.6 & 360 & -20000 & 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & 360.0 \\ 12000 & -28800 & -7257.6 & 33226.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3676.8 & -480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21500 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & 3000 & 23800 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & -360 & -500 & 0 & -1500 & 8943.2 & 4742.4 & -1860.0 \\ 0 & 0 & -4742.4 & -3676.8 & 480 & 0 & -15000 & 0 & 4742.4 & 18676.8 & 480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 3000 & -1860.0 & 480.0 & 10000.0 \end{bmatrix}$$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} 240.0 \\ -576.0 \\ -240.0 \\ 576.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{Lastspalte aus } \bar{V}_{ges}$$

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -12000 & 28800 & 12000.0 & -28800.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.6 & 360 & -20000 & 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & 360.0 \\ 12000 & -28800 & -7257.6 & 33226.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3676.8 & -480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21500 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & 3000 & 23800 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & -360 & -500 & 0 & -1500 & 8943.2 & 4742.4 & -1860.0 \\ 0 & 0 & -4742.4 & -3676.8 & 480 & 0 & -15000 & 0 & 4742.4 & 18676.8 & 480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 3000 & -1860.0 & 480.0 & 10000.0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (\Sigma H_1 = ?) \\ (\Sigma V_1 = ?) \\ (\Sigma H_2 = 0) \\ (\Sigma V_2 = 0) \\ (\Sigma M_2 = 0) \\ (\Sigma H_3 = 0) \\ (\Sigma V_3 = 0) \\ (\Sigma M_3 = 0) \\ (\Sigma H_4 = ?) \\ (\Sigma V_4 = ?) \\ (\Sigma M_4 = ?) \end{matrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 31443.2 & -7257.6 & 360.0 & -20000 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ -7257.6 & 33226.8 & -3480.0 & 0.0 & -750.0 & -3000.0 \\ 360.0 & -3480.0 & 20000.0 & 0.0 & 3000.0 & 8000.0 \\ -20000.0 & 0.0 & 0.0 & 21500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0.0 & -750.0 & 3000.0 & 0.0 & 15750.0 & 3000.0 \\ 0.0 & -3000.0 & 8000.0 & 1500.0 & 3000.0 & 23800.0 \end{bmatrix}$$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} 240.0 \\ -576.0 \\ -240.0 \\ 576.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (\Sigma H_1 = ?) \\ (\Sigma V_1 = ?) \\ (\Sigma H_2 = 0) \\ (\Sigma V_2 = 0) \\ (\Sigma M_2 = 0) \\ (\Sigma H_3 = 0) \\ (\Sigma V_3 = 0) \\ (\Sigma M_3 = 0) \\ (\Sigma H_4 = ?) \\ (\Sigma V_4 = ?) \\ (\Sigma M_4 = ?) \end{matrix} \quad P = \begin{bmatrix} -240.0 \\ 576.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{aus } K \cdot V = P \rightarrow V = \begin{bmatrix} -1.0193E-02 \\ 1.5500E-02 \\ 2.1406E-03 \\ -9.8118E-03 \\ -2.3680E-05 \\ 1.8587E-03 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (U_2) \\ (W_2) \\ (\Phi_2) \\ (U_3) \\ (W_3) \\ (\Phi_3) \end{matrix}$$

Berechnung der Schnittgrößen Lastfall 4

Element 1  $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{v}_G^i$   $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i$   $\mathbf{v}_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000\text{E}+00 & (u_{X1}) \\ 2.0000\text{E}-02 & (w_{Z1}) \\ -1.0193\text{E}-02 & (u_{X2}) \\ 1.5500\text{E}-02 & (w_{Z2}) \end{bmatrix}$

$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} 0.38462 & -0.82308 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.38462 & -0.82308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.8482\text{E}-02 & (u_1) \\ -1.8229\text{E}-02 & (u_2) \end{bmatrix} = \mathbf{v}^1$

$\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} 219700/8.5 & -219700/8.5 \\ -219700/8.5 & 219700/8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.8739 & (N_1^1) \\ 7.8789 & (N_1^1) \end{bmatrix} = \mathbf{p}^1$

Element 2  $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$   $\mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} -1.0193\text{E}-02 & (u_{X2}) \\ 1.5500\text{E}-02 & (w_{Z2}) \\ 2.1406\text{E}-03 & (\varphi_{Y2}) \\ -9.6118\text{E}-03 & (u_{X3}) \\ -2.3680\text{E}-05 & (w_{Z3}) \\ 1.8587\text{E}-03 & (\varphi_{Y3}) \end{bmatrix}$

$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 750 & -3000 & 0 & -750 & -3000 \\ 0 & -3000 & 18000 & 0 & 3000 & 8000 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 3000 & 0 & 750 & 3000 \\ 0 & -3000 & 8000 & 0 & 3000 & 16000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11.8298 & (N_2^2) \\ -0.3549 & (Q_2^2) \\ 2.5473 & (M_2^2) \\ 11.8298 & (N_3^2) \\ 0.3549 & (Q_3^2) \\ 0.2919 & (M_3^2) \end{bmatrix} = \mathbf{p}^2$

Element 3  $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{v}_G^i$   $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$   $\mathbf{v}_G^3 = \begin{bmatrix} -1.0193\text{E}-02 & (u_{X2}) \\ 1.5300\text{E}-02 & (w_{Z2}) \\ 2.1406\text{E}-03 & (\varphi_{Y2}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (u_{X4}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (w_{Z4}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (\varphi_{Y4}) \end{bmatrix}$

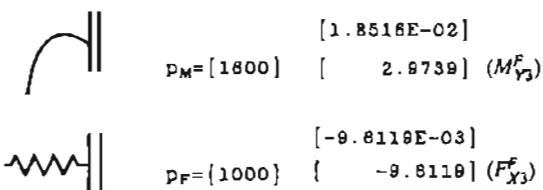
$\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.8 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1455\text{E}-03 & (u_2) \\ 1.8518\text{E}-02 & (w_2) \\ 2.1406\text{E}-03 & (\varphi_2) \\ 0.0000\text{E}+00 & (u_4) \\ 0.0000\text{E}+00 & (w_4) \\ 0.0000\text{E}+00 & (\varphi_4) \end{bmatrix} = \mathbf{v}^3$

$\mathbf{k}^3 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & -800 & 0 & -120 & -800 \\ 0 & -800 & 4000 & 0 & 800 & 2000 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 800 & 0 & 120 & 800 \\ 0 & -800 & 2000 & 0 & 800 & 4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.4550 & (N_3^3) \\ 0.9378 & (Q_3^3) \\ -2.5473 & (M_3^3) \\ -11.4550 & (N_4^3) \\ -0.9378 & (Q_4^3) \\ -6.8288 & (M_4^3) \end{bmatrix} = \mathbf{p}^3$

Element 4  $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{v}_G^i$   $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i$   $\mathbf{v}_G^4 = \begin{bmatrix} -9.6118\text{E}-03 & (u_{X3}) \\ -2.3680\text{E}-05 & (w_{Z3}) \\ 1.8587\text{E}-03 & (\varphi_{Y3}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (u_{X4}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (w_{Z4}) \\ 0.0000\text{E}+00 & (\varphi_{Y4}) \end{bmatrix}$

$\mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.3680\text{E}-05 & (u_3) \\ 9.6118\text{E}-03 & (w_3) \\ 1.8587\text{E}-03 & (\varphi_3) \\ 0.0000\text{E}+00 & (u_4) \\ 0.0000\text{E}+00 & (w_4) \\ 0.0000\text{E}+00 & (\varphi_4) \end{bmatrix} = \mathbf{v}^4$

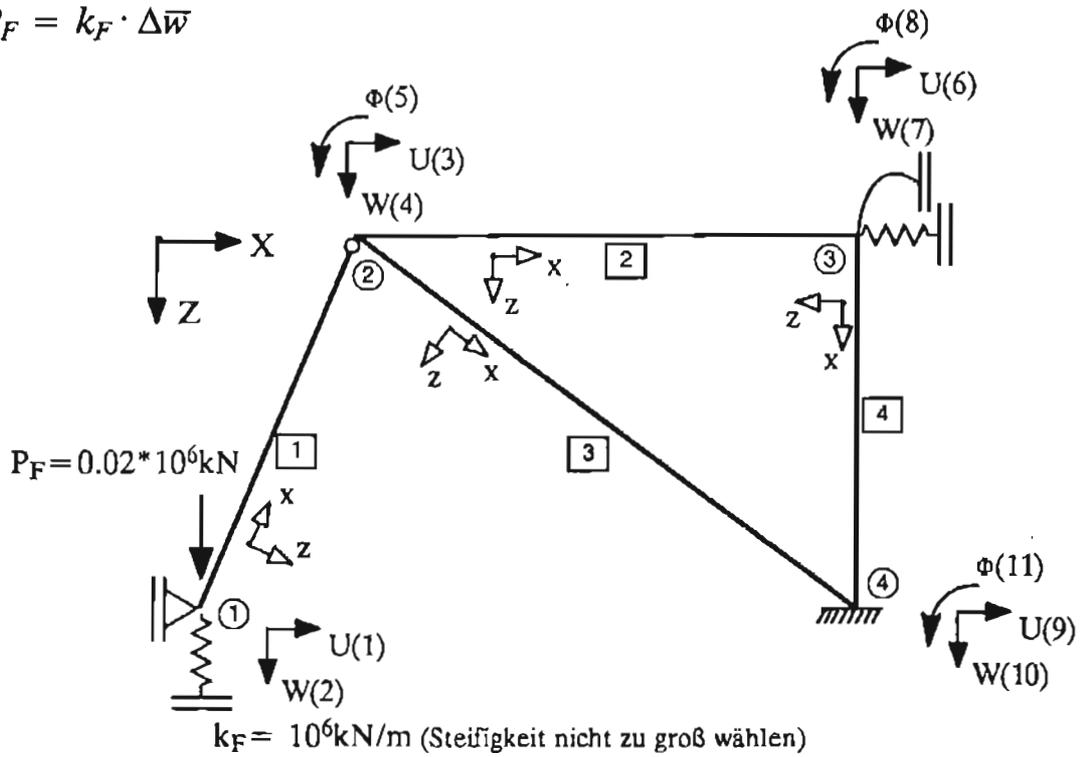
$\mathbf{k}^4 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -1500 & 0 & -500 & -1500 \\ 0 & -1500 & 8000 & 0 & 1500 & 3000 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 1500 & 0 & 500 & 1500 \\ 0 & -1500 & 3000 & 0 & 1500 & 8000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3549 & (N_3^4) \\ 2.0179 & (Q_3^4) \\ -3.2658 & (M_3^4) \\ 0.3549 & (N_4^4) \\ -2.0179 & (Q_4^4) \\ -8.8418 & (M_4^4) \end{bmatrix} = \mathbf{p}^4$



Zum Auftragen der Schnittgrößen sind die Kräfte von Vorzeichenkonvention II nach Vorzeichenkonvention I zu transformieren. Dazu müssen die Vorzeichen der Kräfte am Stabanfang vertauscht werden.

Berechnung des Lastfall Stützensenkung durch Einbau einer steifen Feder und einer zugehörigen Last, die in der Feder eine Verschiebung der Größe  $\Delta\bar{w}$  erzeugt.

$$P_F = k_F \cdot \Delta\bar{w}$$



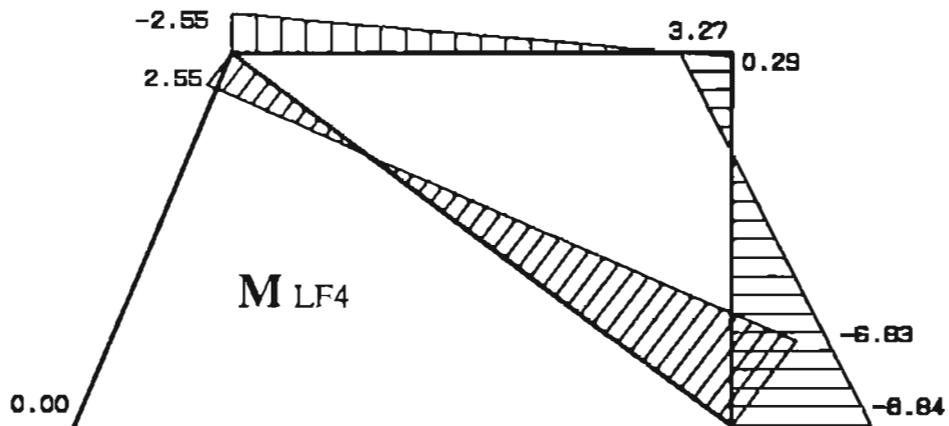
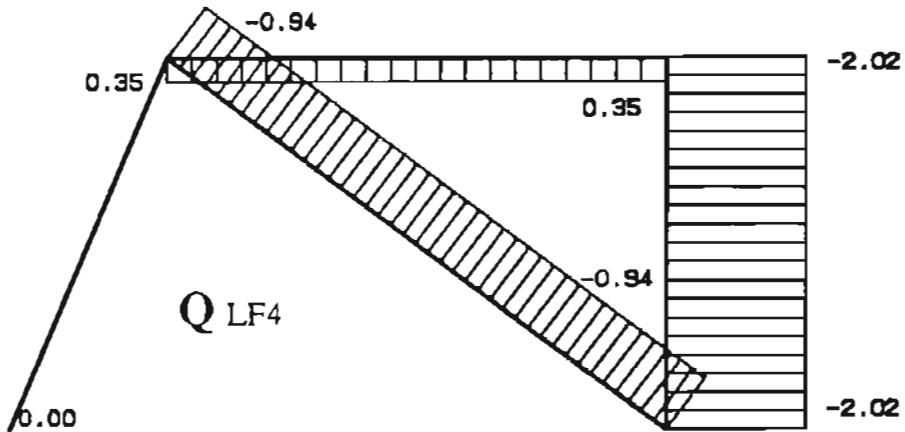
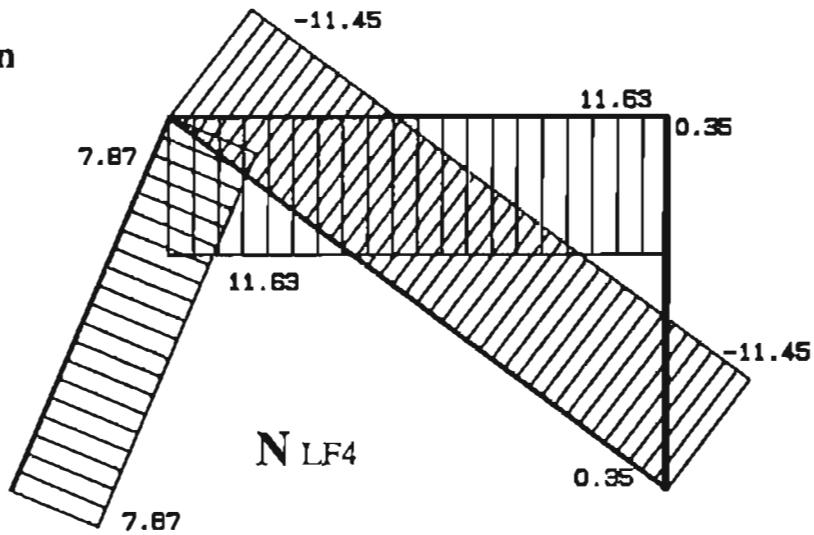
$$K_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -12000 & 28800 & 12000.0 & -28800.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & +10^8 & & & & & & & & \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.6 & 360 & -20000 & 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & 360.0 \\ 12000 & -28800 & -7257.6 & 33226.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3676.8 & -480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21500 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & 3000 & 23600 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & -360 & -500 & 0 & -1500 & 6943.2 & 4742.4 & -1860.0 \\ 0 & 0 & -4742.4 & -3676.8 & 480 & 0 & -15000 & 0 & 4742.4 & 18676.8 & 480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 3000 & -1860.0 & 480.0 & 10000.0 \end{bmatrix}$$

$$K_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} 5000 & -12000 & -5000.0 & 12000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -12000 & 1028800 & 12000.0 & -28800.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5000 & 12000 & 31443.2 & -7257.6 & 360 & -20000 & 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & 360.0 \\ 12000 & -28800 & -7257.6 & 33226.8 & -3480 & 0 & -750 & -3000 & -4742.4 & -3676.8 & -480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -3480.0 & 20000 & 0 & 3000 & 8000 & -360.0 & 480.0 & 2000.0 \\ 0 & 0 & -20000.0 & 0.0 & 0 & 21500 & 0 & 1500 & -500.0 & 0.0 & 1500.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -750.0 & 3000 & 0 & 15750 & 3000 & 0.0 & -15000.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.0 & -3000.0 & 8000 & 1500 & 3000 & 23600 & -1500.0 & 0.0 & 3000.0 \\ 0 & 0 & -6443.2 & -4742.4 & -360 & -500 & 0 & -1500 & 6943.2 & 4742.4 & -1860.0 \\ 0 & 0 & -4742.4 & -3676.8 & 480 & 0 & -15000 & 0 & 4742.4 & 18676.8 & 480.0 \\ 0 & 0 & 360.0 & -480.0 & 2000 & 1500 & 0 & 3000 & -1860.0 & 480.0 & 10000.0 \end{bmatrix}$$

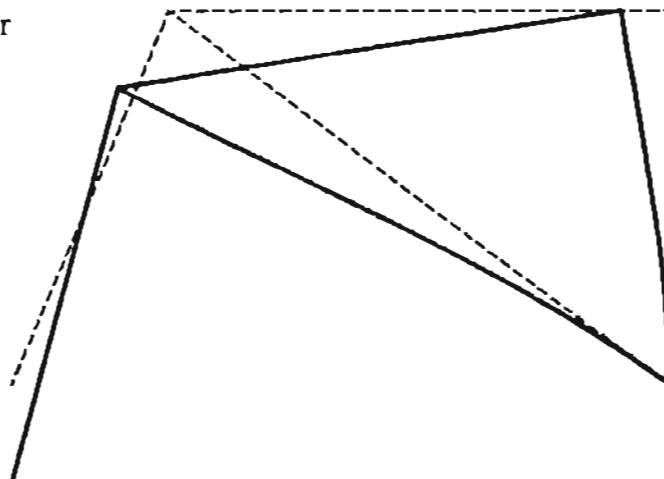
$$K = \begin{bmatrix} 1.0288\text{E}+08 & 1.2000\text{E}+04 & -2.8800\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 \\ 1.2000\text{E}+04 & 3.1443\text{E}+04 & -7.2576\text{E}+03 & 3.6000\text{E}+02 & -2.0000\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 \\ -2.8800\text{E}+04 & -7.2576\text{E}+03 & 3.3227\text{E}+04 & -3.4800\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+00 & -7.5000\text{E}+02 & -3.0000\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+03 \\ 0.0000\text{E}+00 & 3.6000\text{E}+02 & -3.4800\text{E}+03 & 2.0000\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+00 & 3.0000\text{E}+03 & 8.0000\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+03 \\ 0.0000\text{E}+00 & -2.0000\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 2.1500\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+00 & 1.5000\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+03 \\ 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & -7.5000\text{E}+02 & 3.0000\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+00 & 1.5750\text{E}+04 & 3.0000\text{E}+03 & 0.0000\text{E}+03 \\ 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & -3.0000\text{E}+03 & 8.0000\text{E}+03 & 1.5000\text{E}+03 & 3.0000\text{E}+03 & 2.3600\text{E}+04 & 0.0000\text{E}+03 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.0000\text{E}+04 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1.8993\text{E}-02 & (W_1) \\ -1.0180\text{E}-02 & (U_2) \\ 1.5495\text{E}-02 & (W_2) \\ 2.1398\text{E}-03 & (\Phi_3) \\ -9.6084\text{E}-03 & (U_3) \\ -2.3651\text{E}-05 & (W_3) \\ 1.8580\text{E}-03 & (\Phi_3) \end{bmatrix}$$

**Schnittgrößen  
 Lastfall 4**



**Verschiebungsfigur**



## Baustatik 3/4

```

START
* Steifigkeitsmatrix Element 1
FRAME K1 R1 E=1 I=0 A=210700 X=-2.5,0 Z=6,0
* Steifigkeitsmatrix Element 2
FRAME K2 R2 E=1 I=32000 A=180000 X=0,8 Z=0,0
* Lastspalte Element 2
LOAD P2 6 3
  0.0      -180000*10E-5*20    0.0
  8*8/2      0.0              0.0
-6*8*8/12    0.0             -32000*10E-5*30/0.4
  0.0      180000*10E-5*20    0.0
  6*8/2      0.0              0.0
  8*8*8/12    0.0             32000*10E-5*30/0.4
* Steifigkeitsmatrix Element 3
FRAME K3 R3 E=1 I=10000 A=100000 X=0,8 Z=0,6
* Lastspalte Element 2
LOAD P3L 6 3
  4.5
  6.0
-15.0
  4.5
  6.0
 15.0
LOAD T3 6 6
  0.8 0.8 0.0 0.0 0.0 0.0
-0.8 0.8 0.0 0.0 0.0 0.0
  0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
  0.0 0.0 0.0 0.8 0.8 0.0
  0.0 0.0 0.0 -0.8 0.8 0.0
  0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
TRAN T3 T3T
MULT T3T P3L P3
* Steifigkeitsmatrix Element 4
FRAME K4 R4 E=1 I=9000 A=90000 X=8,8 Z=0,6
* Aufbau der Inzidenztafel
LOADID ID NE=4 NF=6
  0 0 0 1 2 0
  1 2 3 4 5 6
  1 2 3 0 0 0
  4 5 6 0 0 0
* Aufbau der Gesamt-Steifigkeitsmatrix
ZERO KGES 6 6
ADDK KGES K1 ID N=1
ADDK KGES K2 ID N=2
ADDK KGES K3 ID N=3
ADDK KGES K4 ID N=4
* Federn
LOADID IDF NE=2 NF=1
  4
  6
LOAD KF 1 1
1000
LOAD KM 1 1
1600
ADDK KGES KF IDF N=1
ADDK KGES KM IDF N=2
* Aufbau des Gesamt-Lastvektors
LOAD PGES 6 3
  0
  80
  30
  0
  0
  0
ADDK PGES P2 ID N=2 ST=1
ADDK PGES P3 ID N=3 ST=1
P PGES
* Loesen des Gleichungssystems
DUP PGES VGES
SOLVE KGES VGES
P VGES
* Berechnung der Elementschnittgroessen
MEMFRC R1 VGES ID F1 N=1
P F1
MEMFRC R2 VGES ID F2 N=2
SUB F2 P2
P F2
MEMFRC R3 VGES ID F3 N=3
SUB F3 P3L
P F3
MEMFRC R4 VGES ID F4 N=4
P F4
MEMFRC KF VGES IDF F5 N=1
P F5
MEMFRC KM VGES IDF F6 N=2
P F6
RETURN

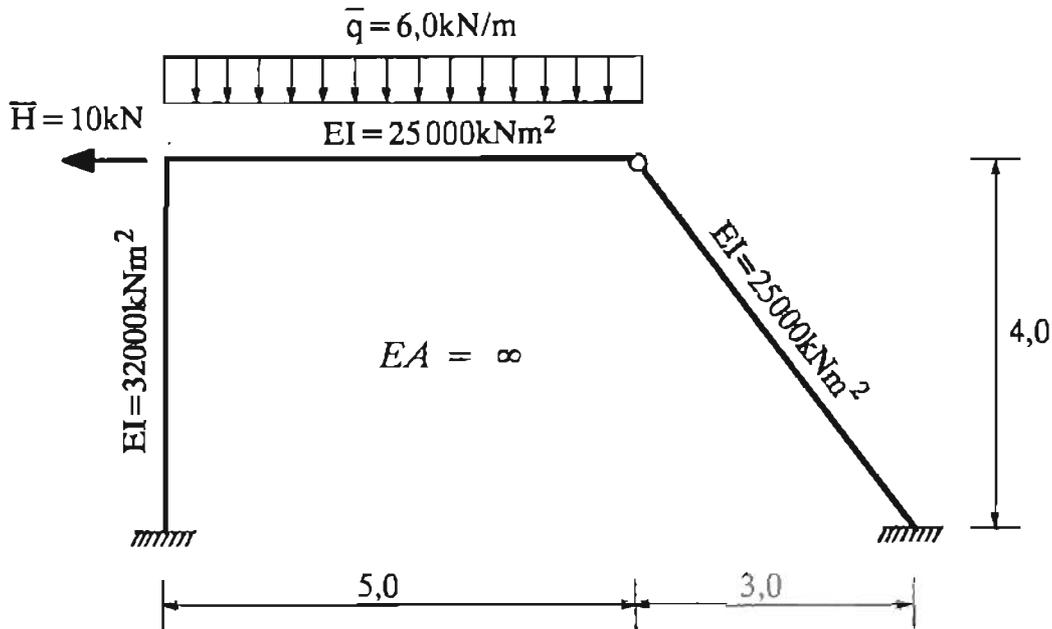
```

```
* Lastfall Stuetzensenkung
START
* Steifigkeitsmatrizen
FRAME K1 R1 E=1 I=0 A=210700 X=-2.5,0 Z=0,0
FRAME K2 R2 E=1 I=32000 A=180000 X=0,8 Z=0,0
FRAME K3 R3 E=1 I=10000 A=100000 X=0,8 Z=0,6
FRAME K4 R4 E=1 I=8000 A=90000 X=8,8 Z=0,6
* Federelement fuer Verschiebungsberechnung
FRAME K5 R5 E=1 I=0 A=1E+6 X=-2.5,-2.5 Z=6,7
* Aufbau der Inzidenztafel
LOADID ID NE=5 NF=6
0 1 0 2 3 0
2 3 4 5 6 7
2 3 4 0 0 0
5 6 7 0 0 0
0 0 0 0 1 0
* Aufbau der Gesamt-Steifigkeitsmatrix
ZERO KGES 7 7
ADDK KGES K1 ID N=1
ADDK KGES K2 ID N=2
ADDK KGES K3 ID N=3
ADDK KGES K4 ID N=4
ADDK KGES K5 ID N=5
* Federn
LOADID IDF NE=2 NF=1
5
7
LOAD KF 1 1
1000
LOAD KM 1 1
1600
ADDK KGES KF IDF N=1
ADDK KGES KM IDF N=2
* Aufbau des Gesamt-Lastvektors
LOAD PGES 7 1
2E4
0
0
0
0
0
0
* Loesen des Gleichungssystems
DUP PGES VGES
SOLVE KGES VGES
P VGES
* Berechnung der Elementschnittgroessen
MEMFRC R1 VGES ID F1 N=1
P F1
MEMFRC R2 VGES ID F2 N=2
P F2
MEMFRC R3 VGES ID F3 N=3
P F3
MEMFRC R4 VGES ID F4 N=4
P F4
MEMFRC KF VGES IDF F5 N=1
P F5
MEMFRC KM VGES IDF F6 N=2
P F6
RETURN
```



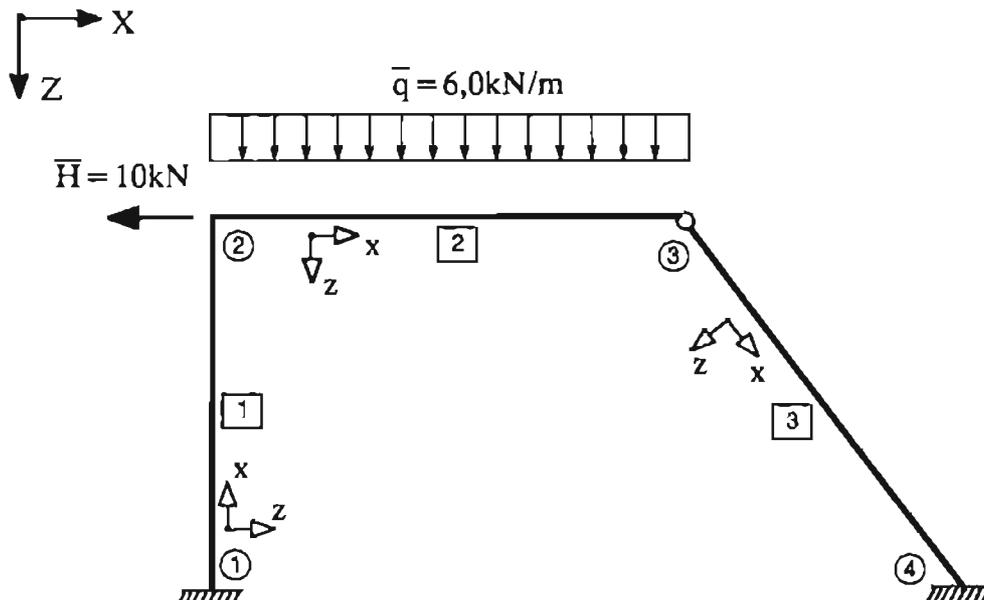
## Berechnung eines Tragwerks nach dem WEGGRÖSSENVERFAHREN (WGV) 2. Beispiel

### System und Belastung:

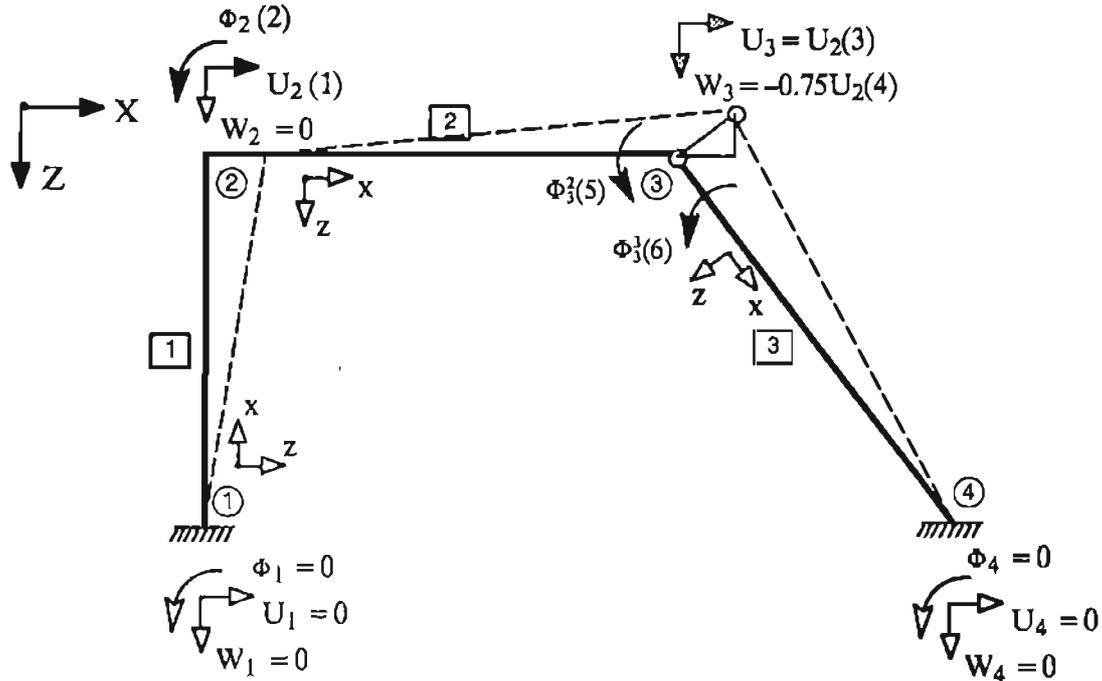


### Berechnung:

1. Schritt: Untersuchen, ob Symmetrie oder Antimetrie vorliegt, dann neues System wählen.  
 (in diesem Fall keine Symmetrie vorhanden).  
 Statisch bestimmte Teilsysteme durch ihre Wirkung ersetzen.
2. Schritt: Numerierung der Knoten und der Stäbe  
 Wahl eines globalen (X, Y, Z) und für jedes Element ein lokales (x, y, z) Koordinatensystems



3. Schritt: Antragen der globalen Knotenverformungen und feststellen der abhängigen Verschiebungen (evtl. mit Kinematik)

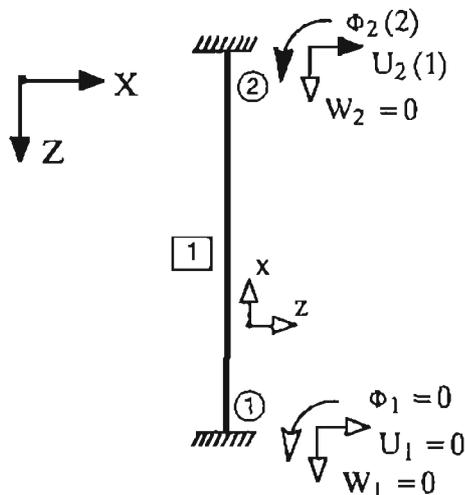


4. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.

5. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.

6. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

- Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)



$l = 4,0\text{m}$   
 $EI = 32000\text{kNm}^2$

$$k^i = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$k^1_G = \begin{bmatrix} 12 \cdot 32000 / 4^3 & -6 \cdot 32000 / 4^2 & -12 \cdot 32000 / 4^3 & -6 \cdot 32000 / 4^2 \\ -6 \cdot 32000 / 4^2 & 4 \cdot 32000 / 4 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 2 \cdot 32000 / 4 \\ -12 \cdot 32000 / 4^3 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 12 \cdot 32000 / 4^3 & 6 \cdot 32000 / 4^2 \\ -6 \cdot 32000 / 4^2 & 2 \cdot 32000 / 4 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 4 \cdot 32000 / 4 \end{bmatrix}$$

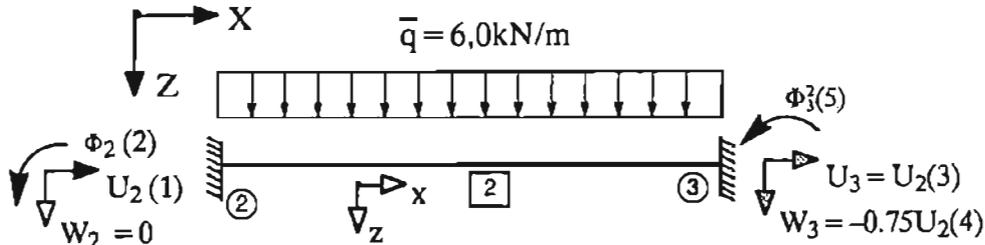
$$k^1_G = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -8000 & -12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 16000 \\ \text{###} & \text{###} & 8000 & 12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 32000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^i) & (F_{X1}^i) \\ (M_1^i) & (M_{Y1}^i) \\ (Q_2^i) & (F_{X2}^i) \\ (M_2^i) & (M_{Y2}^i) \end{matrix}$$

$U_1=0 \quad \phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \phi_2(2)$

lokale = globale  
Steifigkeitsmatrix

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)



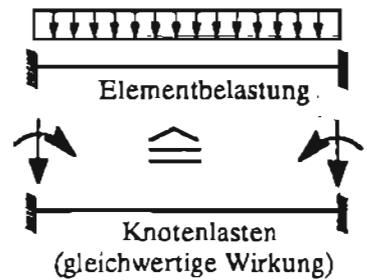
$l = 5,0\text{m}$

$EI = 25000\text{kNm}^2$

$$k^2_G = \begin{bmatrix} -2 \cdot 25000/5/5/5 & -8 \cdot 25000/5/5 & -12 \cdot 25000/5/5/5 & -8 \cdot 25000/5/5 \\ -8 \cdot 25000/5/5 & 4 \cdot 25000/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 2 \cdot 25000/5 \\ -12 \cdot 25000/5/5/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 12 \cdot 25000/5/5/5 & 8 \cdot 25000/5/5 \\ -8 \cdot 25000/5/5 & 2 \cdot 25000/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 4 \cdot 25000/5 \end{bmatrix}$$

$$k^2_G = \begin{bmatrix} \text{###} & -8000 & -2400 & -8000 \\ \text{###} & 20000 & 6000 & 10000 \\ \text{###} & 8000 & 2400 & 8000 \\ \text{###} & 10000 & 6000 & 20000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) & (F_{22}^2) \\ (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ (Q_3^2) & (F_{23}^2) \\ (M_3^2) & (M_{Y3}^2) \end{matrix}$$

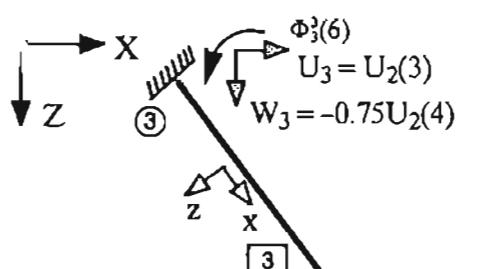
lokale = globale Steifigkeitsmatrix



Gleichlast  $p^2_G \text{ LFI} = \begin{bmatrix} -q \cdot l/2 \\ q \cdot l^2/12 \\ -q \cdot l/2 \\ -q \cdot l^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 5/2 \\ 8 \cdot 5 \cdot 5/12 \\ -8 \cdot 5/2 \\ -8 \cdot 5 \cdot 5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.0 \\ 12.5 \\ -15.0 \\ -12.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{22}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{Y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{23}^{20}) \\ (M_3^{20}) & (M_{Y3}^{20}) \end{matrix}$

$W_2 = 0 \quad \Phi_2(2) \quad -0.75U_2 \quad \Phi_3(5)$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Balkenelement)



$l = 5,0\text{m}$

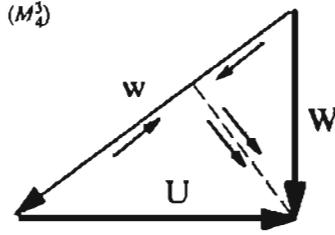
$EI = 25000\text{kNm}^2$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 12 \cdot 25000/5/5/5 & -8 \cdot 25000/5/5 & -12 \cdot 25000/5/5/5 & -8 \cdot 25000/5/5 \\ -8 \cdot 25000/5/5 & 4 \cdot 25000/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 2 \cdot 25000/5 \\ -12 \cdot 25000/5/5/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 12 \cdot 25000/5/5/5 & 8 \cdot 25000/5/5 \\ -8 \cdot 25000/5/5 & 2 \cdot 25000/5 & 8 \cdot 25000/5/5 & 4 \cdot 25000/5 \end{bmatrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 2400 & -8000 & \text{###} & \text{###} \\ -8000 & 20000 & \text{###} & \text{###} \\ -2400 & 8000 & \text{###} & \text{###} \\ -8000 & 10000 & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^3) \\ (M_3^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix}$$

lokale Steifigkeitsmatrix

$W = 0.6 \cdot w$   
 $U = -0.8 \cdot w$   
 $w = -0.8 \cdot U + 0.6 \cdot W$



(Transformation auf globale Koordinaten)

$k^i_G = T^T k^i T^i$

$$T^3 = \begin{bmatrix} (w) & (U) & (W) & (\Phi) \\ (\varphi) & -0.8 & 0.8 & 0.0 \\ & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix

$$k^3 = \begin{bmatrix} 2400 & -8000 & \text{###} & \text{###} \\ -8000 & 20000 & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1920 & 1440 & -8000 \\ 4800 & -3600 & 20000 \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} = k^3 \cdot T^3 = r^3$$

$$T^3 T^T = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.0 & \text{###} & \text{###} \\ 0.8 & 0.0 & \text{###} & \text{###} \\ 0.0 & 1.0 & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_{X3}) & (w_{Z3}) & (\varphi_{Y3}) & (u_{X4}) & (w_{Z4}) & (\varphi_{Y4}) \\ 1536 & -1152 & 4800 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ -1152 & 864 & -3600 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ 4800 & -3600 & 20000 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} = k^3_G$$

globale Steifigkeitsmatrix

$U_2 \quad -0.75U_2 \quad \Phi_3(6) \quad U_4 = 0 \quad W_4 = 0 \quad \Phi_4 = 0$

7. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\varphi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\varphi_{Yb})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	4	5
Element 3	3	4	6	0	0	0

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i \quad \sum_i F_{Zk}^i \quad \sum_i M_{Yk}^i$$

		1	2	3	4	5	6	
		$U_2$	$\Phi_2$	$U_3$	$W_3$	$\Phi^2_3$	$\Phi^3_3$	
1	$H_2$	6000	12000					El. 1 El. 2 El. 3
2	$M_2$	12000	32000 20000		6000	10000		El. 1 El. 2 El. 3
3	$H_3$			1536	-1152		4800	El. 1 El. 2 El. 3
4	$V_3$		6000	-1152	2400 884	6000	-3600	El. 1 El. 2 El. 3
5	$M^2_3$		10000		6000	20000		El. 1 El. 2 El. 3
6	$M^3_3$			4800	-3600		20000	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 6000 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12000 & 52000 & 0 & 6000 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 1536 & -1152 & 0 & 4800 \\ 0 & 6000 & -1152 & 3264 & 6000 & -3600 \\ 0 & 10000 & 0 & 6000 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 4800 & -3600 & 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

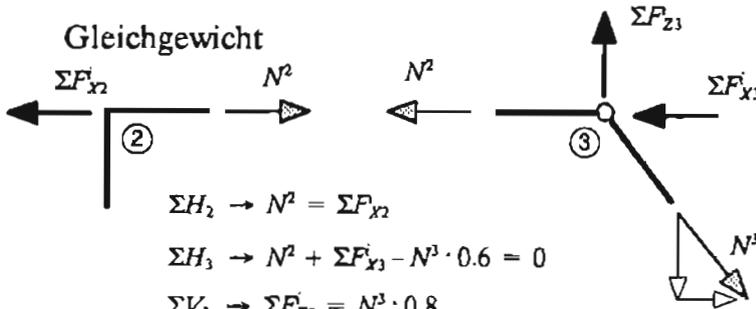
$$P_{ges} = \begin{matrix} P^* \\ P^0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -10.0 & + & 0.0 \\ 0.0 & - & 12.5 \\ 0.0 & + & 0.0 \\ 0.0 & + & 15.0 \\ 0.0 & + & 12.5 \\ 0.0 & + & 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.0 \\ -12.5 \\ 0.0 \\ 15.0 \\ 12.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem nicht lösbar, da die Freiheitsgrade abhängig sind.

8. Schritt: Einbau der Nebenbedingung  
Verträglichkeit

$$\begin{aligned}
 u_{x2} &= U_2 \\
 \varphi_{y2} &= \Phi_2 \\
 u_{x3} &= U_2 \\
 w_{z3} &= -0.75 \cdot U_2 \\
 \varphi_{y3}^2 &= \Phi_3^2 \\
 \varphi_{y3}^3 &= \Phi_3^3
 \end{aligned}$$

	$(u_{x2})$	$(\varphi_{y2})$	$(u_{x3})$	$(w_{z3})$	$(\varphi_{y3}^2)$	$(\varphi_{y3}^3)$	
	8000	12000	0	0	0	0	
	12000	52000	0	6000	10000	0	
	0	0	1536	-1152	0	4800	
	0	6000	-1152	3264	8000	-3600	
	0	10000	0	6000	20000	0	
	0	0	4800	-3600	0	20000	



$$\begin{aligned}
 \Sigma H_2 &\rightarrow N^2 = \Sigma F_{x2} \\
 \Sigma H_3 &\rightarrow N^2 + \Sigma F_{x3} - N^3 \cdot 0.6 = 0 \\
 \Sigma V_3 &\rightarrow \Sigma F_{z3} = N^3 \cdot 0.8 \\
 \Sigma H_3 &\rightarrow N^2 + \Sigma F_{x3} - \Sigma F_{z3} \cdot \frac{0.6}{0.8} = 0 \\
 \Sigma H &\rightarrow \Sigma F_{x2} + \Sigma F_{x3} - \Sigma F_{z3} \cdot 0.75 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{ges} &= R \cdot V \\
 P_{ges} &= R^T \cdot P \\
 K_{ges} \cdot V_{ges} &= P_{ges} \\
 K_{ges} \cdot R \cdot V &= P_{ges} \\
 R^T \cdot K_{ges} \cdot R \cdot V &= R^T \cdot P_{ges} \\
 \boxed{K \cdot V} &= P
 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} (U_2) & (\Phi_2) & (\Phi_3^2) & (\Phi_3^3) \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x3}) \\ (w_{z3}) \\ (\varphi_{y3}^2) \\ (\varphi_{y3}^3) \end{matrix}$$

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 8000 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12000 & 52000 & 0 & 6000 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 1536 & -1152 & 0 & 4800 \\ 0 & 6000 & -1152 & 3264 & 8000 & -3600 \\ 0 & 10000 & 0 & 6000 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 4800 & -3600 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 & 12000 & 0 & 0 \\ 7500 & 52000 & 10000 & 0 \\ 2400 & 0 & 0 & 4800 \\ -3600 & 6000 & 8000 & -3600 \\ -4500 & 10000 & 20000 & 0 \\ 7500 & 0 & 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} \Sigma F_{x2} & \Sigma F_{x3} & \Sigma F_{z3} \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 & -0.75 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11100 & 7500 & -4500 & 7500 \\ 7500 & 52000 & 10000 & 0 \\ -4500 & 10000 & 20000 & 0 \\ 7500 & 0 & 0 & 20000 \end{bmatrix} = K$$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} -10.0 \\ -12.5 \\ 0.0 \\ 15.0 \\ 12.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 & -0.75 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21.25 \\ -12.50 \\ 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix} = P$$

9. Schritt: Lösen des Gleichungssystems  $K \cdot V = P$

$$V = \begin{bmatrix} -2.7898E-03 \\ 1.7564E-04 \\ -8.6017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \\ (\Phi_3^2) \\ (\Phi_3^3) \end{matrix}$$

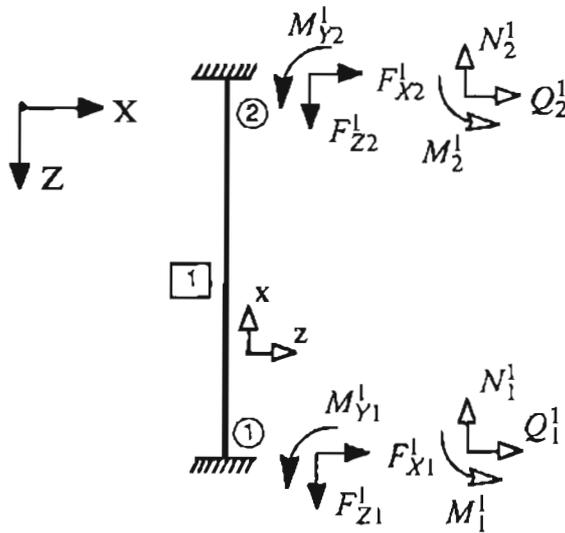
$$V = \begin{bmatrix} -2.7898E-03 \\ 1.7564E-04 \\ -8.6017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7898E-03 \\ 1.7564E-04 \\ -2.7898E-03 \\ 2.0773E-03 \\ -8.6017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x3}) \\ (w_{z3}) \\ (\varphi_{y3}^2) \\ (\varphi_{y3}^3) \end{matrix} = V_{ges}$$

10. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

11. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

### Knotenkräfte Element 1



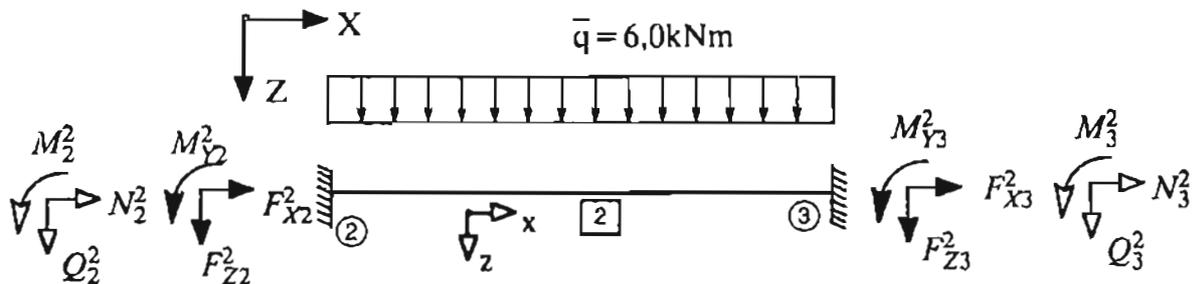
$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i$$

$$\mathbf{v}_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ -2.7698\text{E}-03 \\ 1.7584\text{E}-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x1}) \\ (\varphi_{y1}) \\ (u_{z2}) \\ (\varphi_{y2}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -6000 & -12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 16000 \\ \text{###} & \text{###} & 8000 & 12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 32000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.5109 \\ -30.4289 \\ -14.5109 \\ -27.6166 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^1) (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) (M_{Y1}^1) \\ (Q_2^1) (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^1$$

### Knotenkräfte Element 2



$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

$$\mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0000\text{E}+00 \\ 1.7584\text{E}-04 \\ 2.0773\text{E}-03 \\ -8.8017\text{E}-05 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) (w_{22}) \\ (\varphi_2) (\varphi_{y2}) \\ (w_3) (w_{23}) \\ (\varphi_3) (\varphi_{y3}) \end{matrix}$$

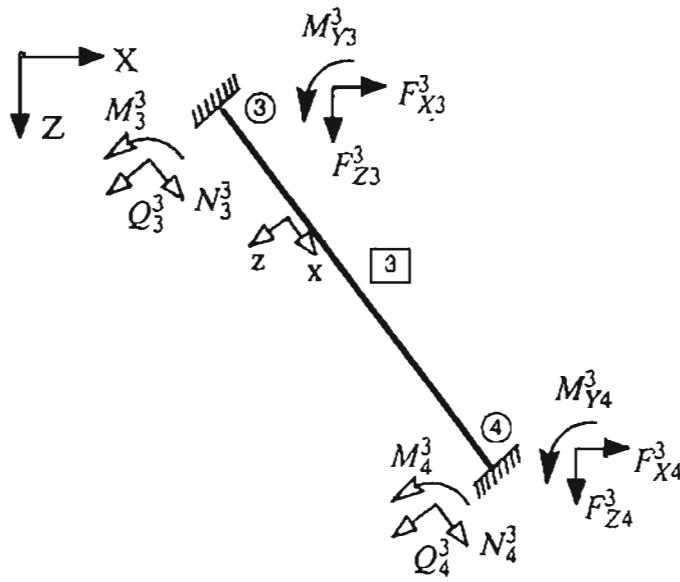
$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & -6000 & -2400 & -8000 \\ \text{###} & 20000 & 8000 & 10000 \\ \text{###} & 8000 & 2400 & 8000 \\ \text{###} & 10000 & 8000 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5233 \\ 15.1188 \\ 5.5233 \\ 12.5000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^2) (F_{Z2}^2) \\ (M_3^2) (M_{Y2}^2) \\ (Q_2^2) (F_{Z3}^2) \\ (M_2^2) (M_{Y3}^2) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^2$$

$$\begin{bmatrix} -5.5233 \\ 15.1188 \\ 5.5233 \\ 12.5000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15.0 \\ 12.5 \\ -15.0 \\ -12.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.5233 \\ 27.6166 \\ -9.4767 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^2) (F_{Z2}^2) \\ (M_3^2) (M_{Y2}^2) \\ (Q_2^2) (F_{Z3}^2) \\ (M_2^2) (M_{Y3}^2) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^2$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{p}_G^i$$

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i$$

### Knotenkräfte Element 3

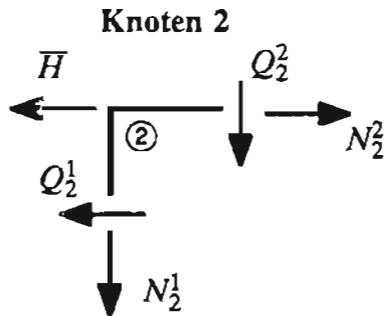


$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0.0 & \dots & \dots & \dots \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} v_G^3 = \begin{bmatrix} -2.7898E-03 \\ 2.0773E-03 \\ 1.0387E-03 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X3}) \\ (w_{Z3}) \\ (\varphi_{Y3}) \\ (u_{X4}) \\ (w_{Z4}) \\ (\varphi_{Y4}) \end{matrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 2400 & -8000 & \dots & \dots \\ -8000 & 20000 & \dots & \dots \\ -2400 & 8000 & \dots & \dots \\ -8000 & 10000 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0773 \\ 0.0000 \\ -2.0773 \\ -10.3888 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^3) \\ (M_3^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^3$$

### Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)



$$\sum H = 0 \rightarrow N_2^2 - H - Q_2^1 = 0$$

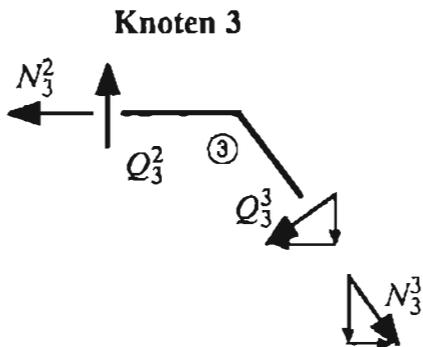
$$N_2^2 = +H + Q_2^1$$

$$N_2^2 = 10.0 - 14.51 = -4.51$$

$$\sum V = 0 \rightarrow N_2^1 + Q_2^1 = 0$$

$$N_2^1 = -Q_2^1$$

$$N_2^1 = -20.52$$



$$\sum H = 0 \rightarrow N_3^3 \cdot 0.6 - Q_3^1 \cdot 0.8 - N_3^2 = 0$$

$$N_3^3 = \frac{1}{0.6} (Q_3^1 \cdot 0.8 + N_3^2)$$

$$N_3^3 = \frac{1}{0.6} (-2.08 \cdot 0.8 - 4.51) = -10.29$$

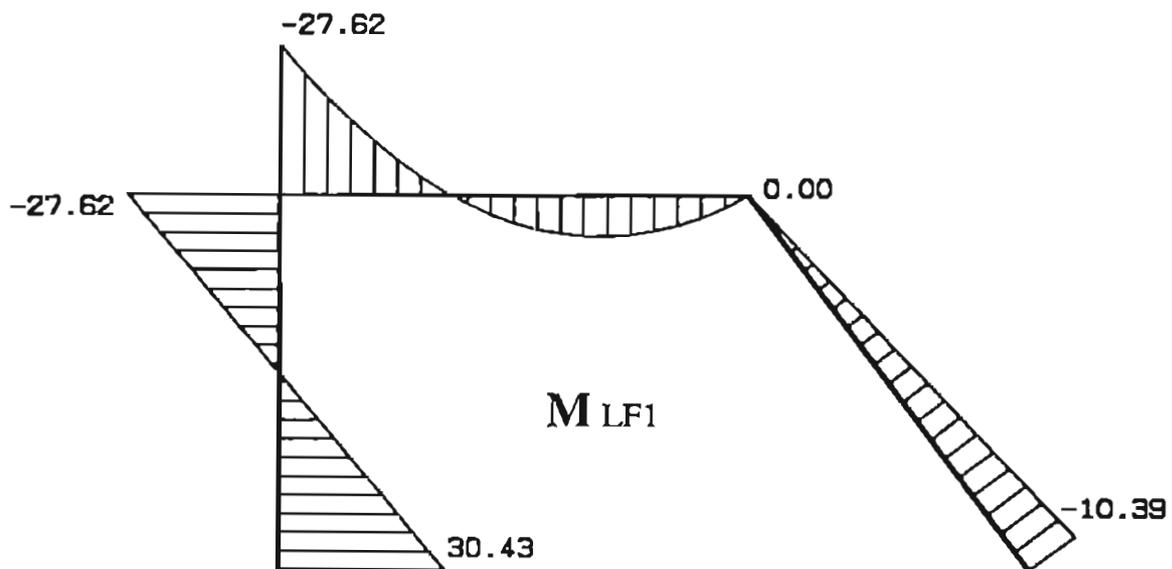
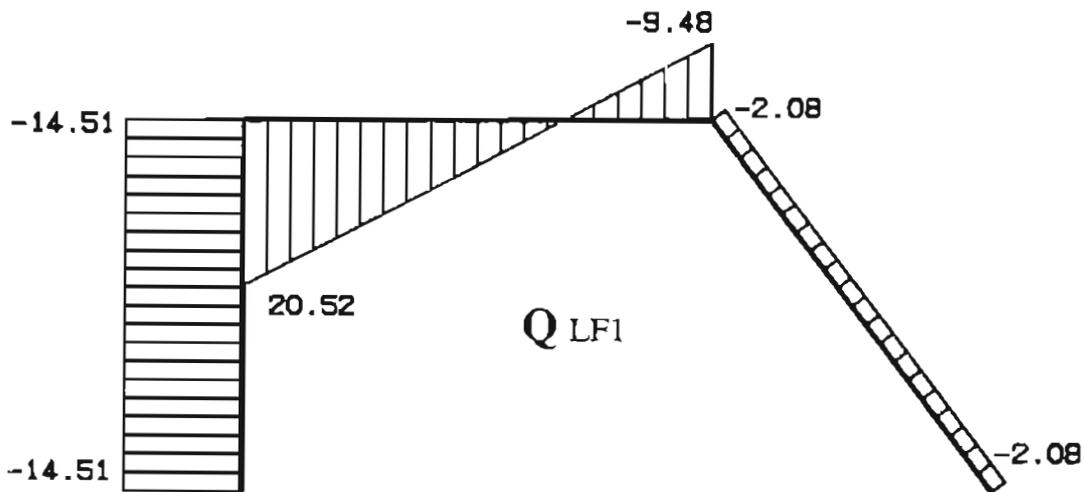
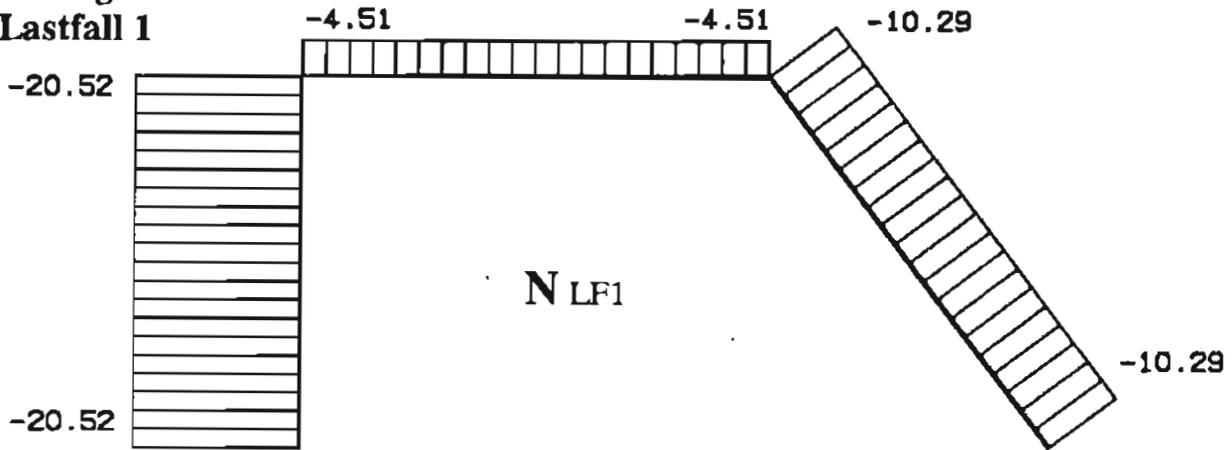
$$\sum V = 0 \rightarrow N_3^2 \cdot 0.8 + Q_3^2 \cdot 0.6 - Q_3^1 = 0$$

$$N_3^2 = \frac{1}{0.8} (-Q_3^2 \cdot 0.6 + Q_3^1)$$

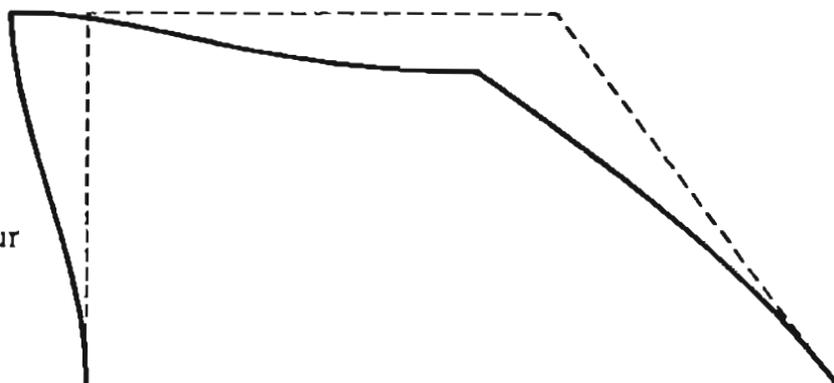
$$N_3^2 = \frac{1}{0.8} (0.6 \cdot 2.08 - 9.48) = -10.29$$

### Schnittgrößen

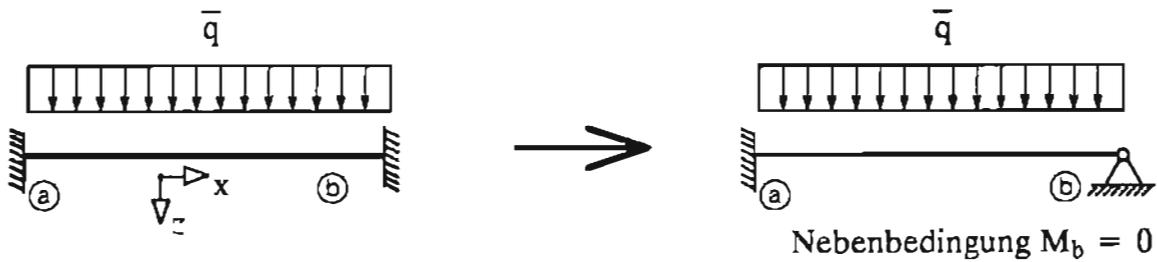
#### Lastfall 1



Verschiebungsfigur



### Steifigkeitsmatrix für Stab mit Gelenk



$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ \dots \\ M_b = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ M_a^0 \\ Q_b^0 \\ \dots \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_a \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ \dots & \dots \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ \dots \\ v_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_a^0 \\ \dots \\ p_b^0 \end{bmatrix}$$

$$p_a = k_{aa} \cdot v_a + k_{ab} \cdot v_b + p_a^0 \quad (1)$$

Matrix ausgeschrieben

$$p_b = k_{ba} \cdot v_a + k_{bb} \cdot v_b + p_b^0 = 0 \quad (2)$$

Umstellen der Gl. (2) auf die zu eliminierenden Verschiebungen.  
Berechnung von  $v_b$  wenn  $v_a$  bekannt.

$$v_b = -k_{bb}^{-1} (p_b^0 + k_{ba} \cdot v_a) \quad (3)$$

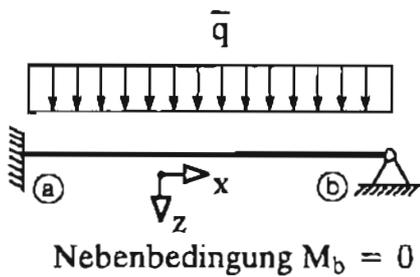
$$p_a = k_{aa} \cdot v_a - k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1} (p_b^0 + k_{ba} \cdot v_a) + p_a^0$$

Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (1)

$$p_a = (k_{aa} - k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1} \cdot k_{ba}) \cdot v_a + p_a^0 - k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1} \cdot p_b^0 \quad (4)$$

$$p_g = k_g \cdot v + p_g^0$$

**Beispiel**



$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & | & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & | & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & | & 6 \frac{EI}{l^2} \\ \hline -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & | & 4 \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ - \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot l^2}{12} \\ -\frac{q \cdot l}{2} \\ - \\ -\frac{q \cdot l^2}{12} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \frac{EI}{l^2} \\ 2 \frac{EI}{l} \\ 6 \frac{EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{4EI} \\ -\frac{3}{2l} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^{-1} & \\ & k_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^3} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^3} & 3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

$k_{aa}$                        $k_{ab}$                        $k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1}$                        $k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1} \cdot k_{ba}$                        $k_{gr}$

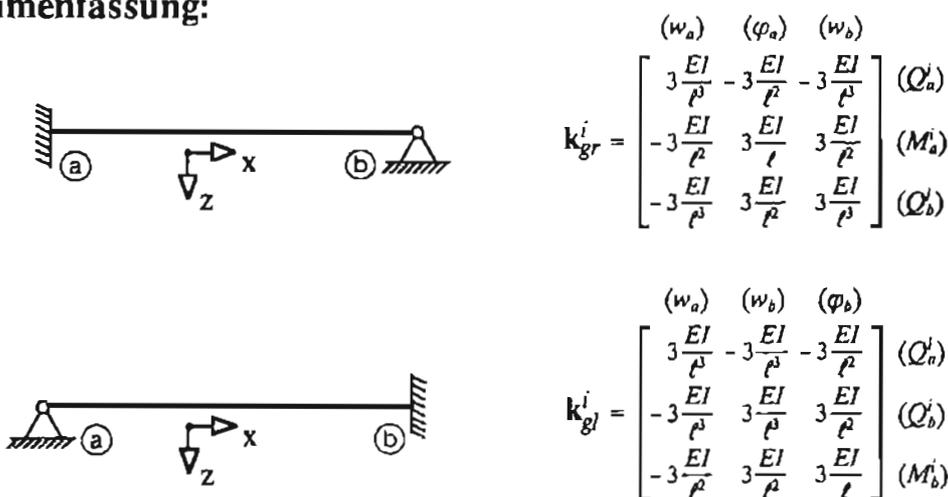
Lastvektor für Gleichlast:

$$\begin{bmatrix} -\frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot l^2}{12} \\ -\frac{q \cdot l}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \frac{EI}{l^2} \\ 2 \frac{EI}{l} \\ 6 \frac{EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{4EI} \\ -\frac{3}{2l} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{bb}^{-1} & \\ & p_b^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5q \cdot l}{8} \\ \frac{q \cdot l^2}{8} \\ -\frac{3q \cdot l}{8} \end{bmatrix}$$

$p_a^0$                        $k_{ab}$                        $k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1}$                        $k_{ab} \cdot k_{bb}^{-1} \cdot p_b^0$                        $p_{gr}^0$

Siehe Formelsammlung  
Drehwinkelverfahren

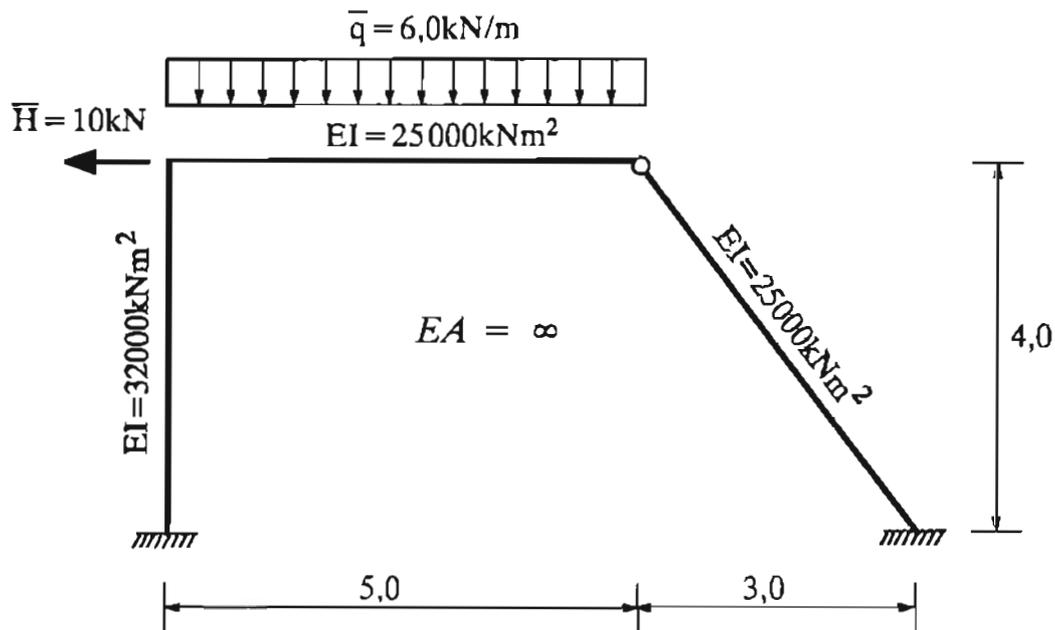
**Zusammenfassung:**



Die Lastvektoren entsprechen den Endschnittgrößen des einseitig eingespannten Stabes, wenn die Vorzeichendefinition 2 beachtet wird.

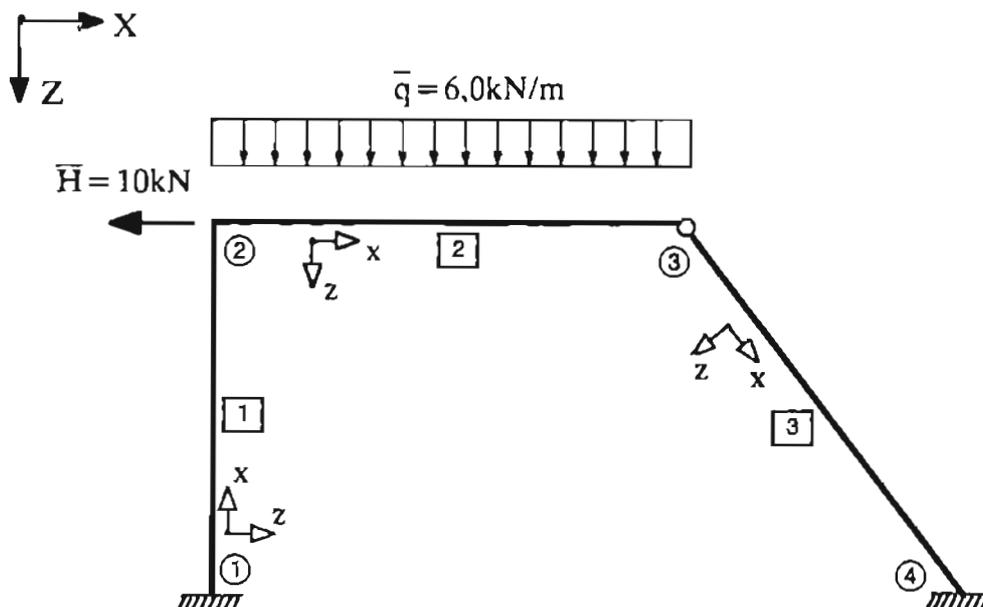
## Berechnung eines Tragwerks nach dem WEGGRÖSSENVERFAHREN (WGV) mit Gelenkelementen.

### System und Belastung:

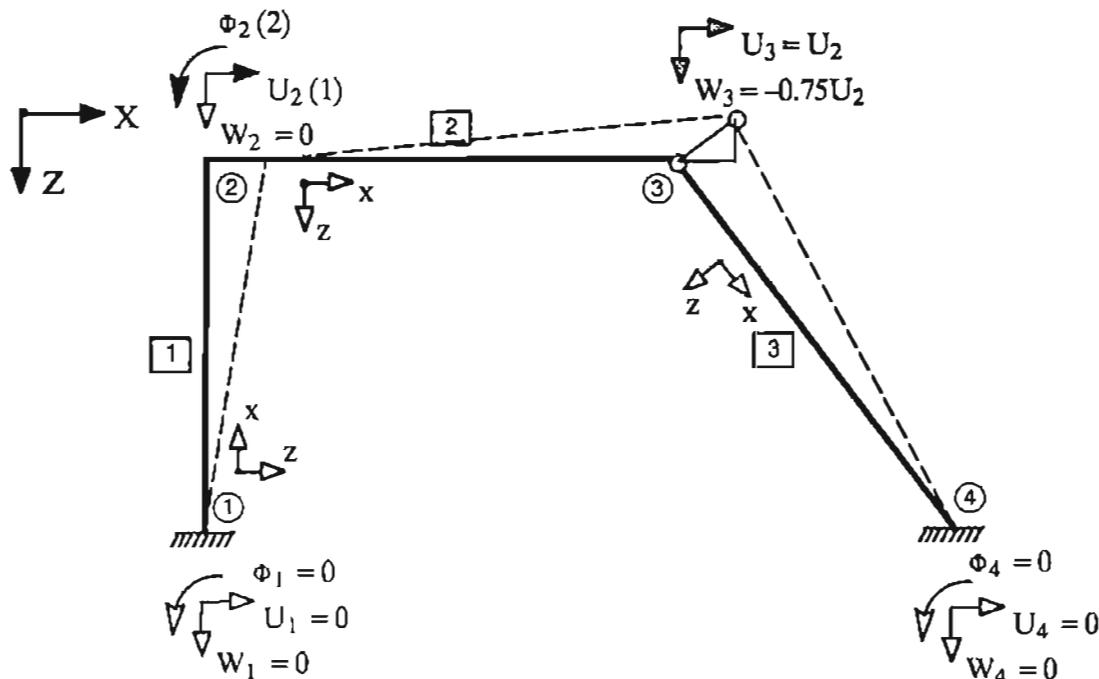


### Berechnung:

- Schritt: Untersuchen, ob Symmetrie oder Antimetrie vorliegt, dann neues System wählen. (in diesem Fall keine Symmetrie vorhanden).  
Statisch bestimmte Teilsysteme durch ihre Wirkung ersetzen.
- Schritt: Numerierung der Knoten und der Stäbe  
Wahl eines globalen (X, Y, Z) und für jedes Element ein lokales (x, y, z) Koordinatensystems



3. Schritt: Antragen der globalen Knotenverformungen und feststellen der abhängigen Verschiebungen (evtl. mit Kinematik)

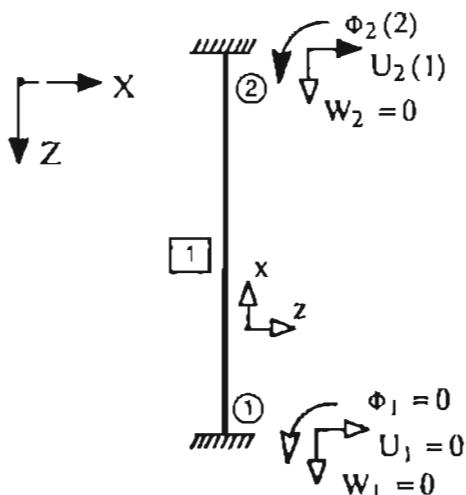


3. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.

4. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.

5. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

**Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)**



$l = 4,0\text{m}$   
 $EI = 32000\text{kNm}^2$

$$k^i = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

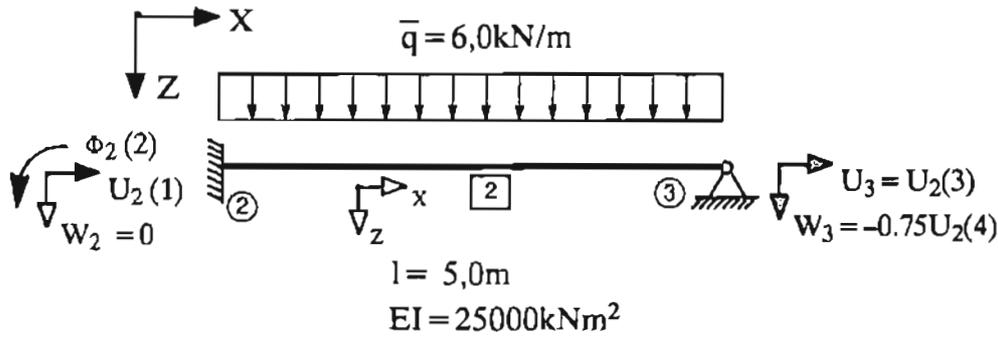
$$k^1_G = \begin{bmatrix} 12 \cdot 32000 / 4^3 & -6 \cdot 32000 / 4^2 & -12 \cdot 32000 / 4^3 & -6 \cdot 32000 / 4^2 \\ -6 \cdot 32000 / 4^2 & 4 \cdot 32000 / 4 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 2 \cdot 32000 / 4 \\ -12 \cdot 32000 / 4^3 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 12 \cdot 32000 / 4^3 & 6 \cdot 32000 / 4^2 \\ -6 \cdot 32000 / 4^2 & 2 \cdot 32000 / 4 & 6 \cdot 32000 / 4^2 & 4 \cdot 32000 / 4 \end{bmatrix}$$

$$k^1_G = \begin{bmatrix} \dots & \dots & -8000 & -12000 \\ \dots & \dots & 12000 & 16000 \\ \dots & \dots & 6000 & 12000 \\ \dots & \dots & 12000 & 32000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^i) & (F_{x1}^i) \\ (M_1^i) & (M_{y1}^i) \\ (Q_2^i) & (F_{x2}^i) \\ (M_2^i) & (M_{y2}^i) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$U_1 = 0 \quad \phi_1 = 0 \quad U_2(1) \quad \phi_2(2)$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)



$$k_G^2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 25000/5/5/5 & -3 \cdot 25000/5/5 & -3 \cdot 25000/5/5/5 \\ -3 \cdot 25000/5/5 & 3 \cdot 25000/5 & 3 \cdot 25000/5/5 \\ -3 \cdot 25000/5/5/5 & 3 \cdot 25000/5/5 & 3 \cdot 25000/5/5/5 \end{bmatrix}$$

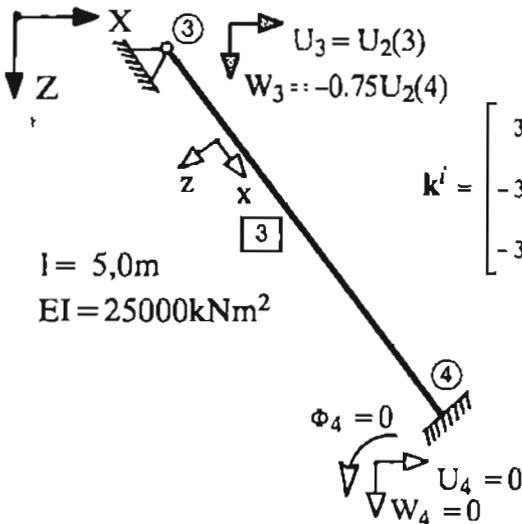
$$k^i = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$k_G^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & -3000 & -800 \\ \text{###} & 15000 & 3000 \\ \text{###} & 3000 & 800 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) & (F_{Z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ (Q_3^2) & (F_{Z3}^2) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

Gleichlast  $W_2=0 \quad \Phi_2(2) \quad -0.75U_2$

$$p_G^{20} \text{ LFI} = \begin{bmatrix} -5 \cdot q \cdot l/8 \\ q \cdot l^2/8 \\ -3 \cdot q \cdot l/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \cdot 5/8 \cdot 5 \\ 6 \cdot 5 \cdot 5/8 \\ -6 \cdot 5/8 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.75 \\ 18.75 \\ -11.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{Z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{Y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{Z3}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Balkenelement)



$$k^i = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

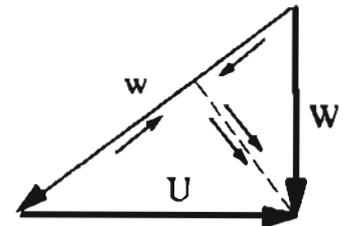
$$k^3 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 25000/5/5/5 & -3 \cdot 25000/5/5/5 & -3 \cdot 25000/5/5 \\ -3 \cdot 25000/5/5/5 & 3 \cdot 25000/5/5/5 & 3 \cdot 25000/5/5 \\ -3 \cdot 25000/5/5/5 & 3 \cdot 25000/5/5 & 3 \cdot 25000/5 \end{bmatrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 600 & \text{###} & \text{###} \\ -600 & \text{###} & \text{###} \\ -3000 & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} \quad \text{lokale Steifigkeitsmatrix}$$

$$W = 0.6 \cdot w$$

$$U = -0.8 \cdot w$$

$$w = -0.8 \cdot U + 0.6 \cdot W$$



(Transformation auf globale Koordinaten)

$$k_G^i = T^T k^i T$$

$$T^3 = \begin{matrix} (U) & (W) \\ (w) \end{matrix} \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \quad \text{Transformationsmatrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 600 & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -480 & 360 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} = k^3 * T^3 = r^3$$

$$T^{3T} = \begin{bmatrix} -0.8 & \text{###} & \text{###} \\ 0.6 & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_{X3}) & (w_{Z3}) & (u_{X4}) & (w_{Z4}) & (\phi_{Y4}) \\ 384 & -288 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ -288 & 216 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{Y3}^3) \\ (F_{Z3}^3) \\ (F_{Y4}^3) \\ (F_{Z4}^3) \\ (M_{Y4}^3) \end{matrix} = k_G^3$$

globale Steifigkeitsmatrix

$$U_2 \quad -0.75U_2 \quad U_4=0 \quad W_4=0 \quad \Phi_4=0$$

7. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\varphi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\varphi_{Yb})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	4	0
Element 3	3	4	0	0	0	0

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i \quad \sum_i F_{Zk}^i \quad \sum_i M_{Yk}^i$$

		1	2	3	4	
		$U_2$	$\Phi_2$	$U_3$	$W_3$	
1	$H_2$	8000	12000			El. 1 El. 2 El. 3
2	$M_2$	12000	32000 15000		3000	El. 1 El. 2 El. 3
3	$H_3$			384	-288	El. 1 El. 2 El. 3
4	$V_3$		3000	-288	800 216	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 8000 & 12000 & 0 & 0 \\ 12000 & 47000 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 384 & -288 \\ 0 & 3000 & -288 & 816 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} -10.0 & + & 0.0 \\ 0.0 & - & 18.75 \\ 0.0 & + & 0.0 \\ 0.0 & + & 11.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.00 \\ -18.75 \\ 0.00 \\ 11.25 \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem nicht lösbar, da die Freiheitsgrade abhängig sind.

8. Schritt: Einbau der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} u_{X2} &= U_2 \\ \varphi_{Y2} &= \Phi_2 \\ u_{X3} &= U_2 \\ w_{Z3} &= -0.75 \cdot U_2 \end{aligned}$$

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 8000 & 12000 & 0 & 0 \\ 12000 & 47000 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 384 & -288 \\ 0 & 3000 & -288 & 816 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & (U_2) & (\Phi_2) \\ \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ -0.75 & 0.00 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x3}) \\ (w_{z3}) \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} 8000 & 12000 & 0 & 0 \\ 12000 & 47000 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 384 & -288 \\ 0 & 3000 & -288 & 816 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 & 12000 \\ 9750 & 47000 \\ 800 & 0 \\ -900 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 & -0.75 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7275 & 9750 \\ 9750 & 47000 \end{bmatrix} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} -10.00 \\ -18.75 \\ 0.00 \\ 11.25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 & -0.75 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$$

9. Schritt: Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2.7698\text{E-}03 \\ 1.7564\text{E-}04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

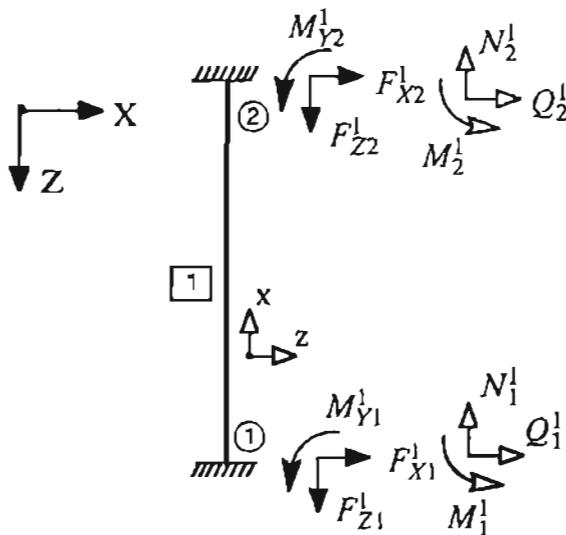
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2.7698\text{E-}03 \\ 1.7564\text{E-}04 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ -0.75 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7698\text{E-}03 \\ 1.7564\text{E-}04 \\ -2.7698\text{E-}03 \\ 2.0773\text{E-}03 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \\ (u_{x3}) \\ (w_{z3}) \end{matrix} = \mathbf{V}_{\text{ges}}$$

10. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

11. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

### Knotenkräfte Element 1



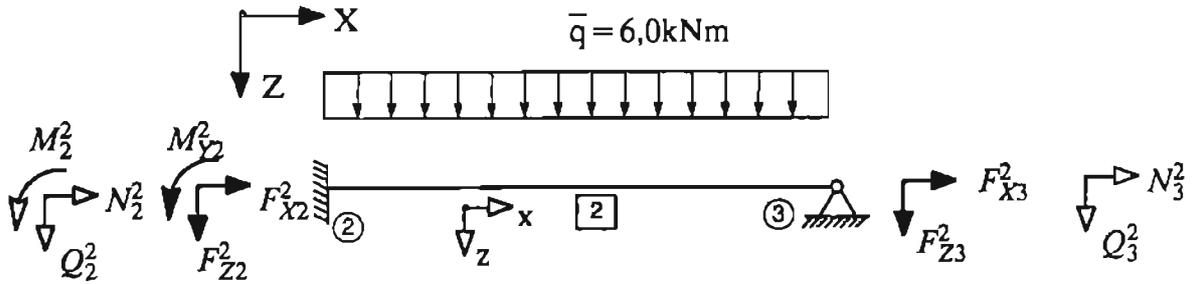
$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i$$

$$\mathbf{v}_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 \\ -2.7698\text{E-}03 \\ 1.7564\text{E-}04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x1}) \\ (\varphi_{y1}) \\ (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -8000 & -12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 18000 \\ \text{###} & \text{###} & 8000 & 12000 \\ \text{###} & \text{###} & 12000 & 32000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.5109 \\ -30.4269 \\ -14.5109 \\ -27.8168 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (Q_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{P}^1 = \mathbf{P}_G^1$$

### Knotenkräfte Element 2



$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0}$$

$$v_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0000E+00 \\ 1.7584E-04 \\ 2.0773E-03 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (w_{z2}) \\ (\varphi_2) & (\varphi_{y2}) \\ (w_3) & (w_{z3}) \end{matrix}$$

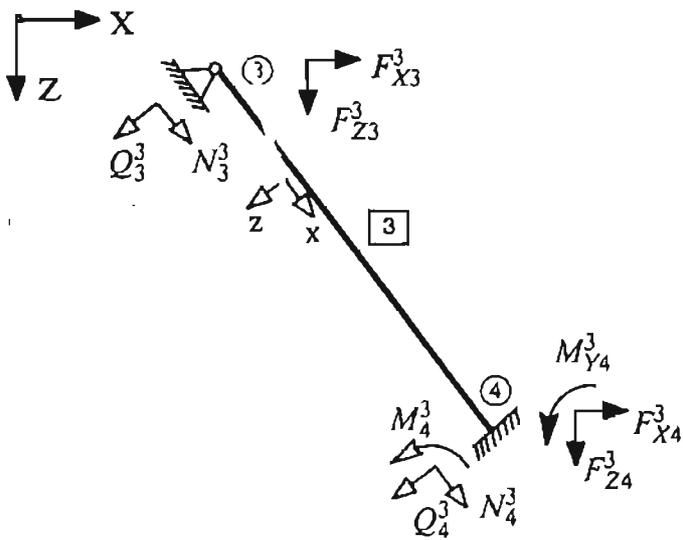
$$k_G^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & -3000 & -800 \\ \text{###} & 15000 & 3000 \\ \text{###} & 3000 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.7733 \\ 8.8668 \\ 1.7733 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (Q_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} = \begin{matrix} p_{Gv}^2 \\ p_v^2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.7733 \\ 8.8668 \\ 1.7733 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18.75 \\ 18.75 \\ -11.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.5233 \\ 27.6188 \\ -9.4767 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (Q_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} = \begin{matrix} p_G^2 \\ p^2 \end{matrix}$$

$$k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0} = p_G^i$$

$$k^i \cdot v^i + p^{i0} = p^i$$

### Knotenkräfte Element 3



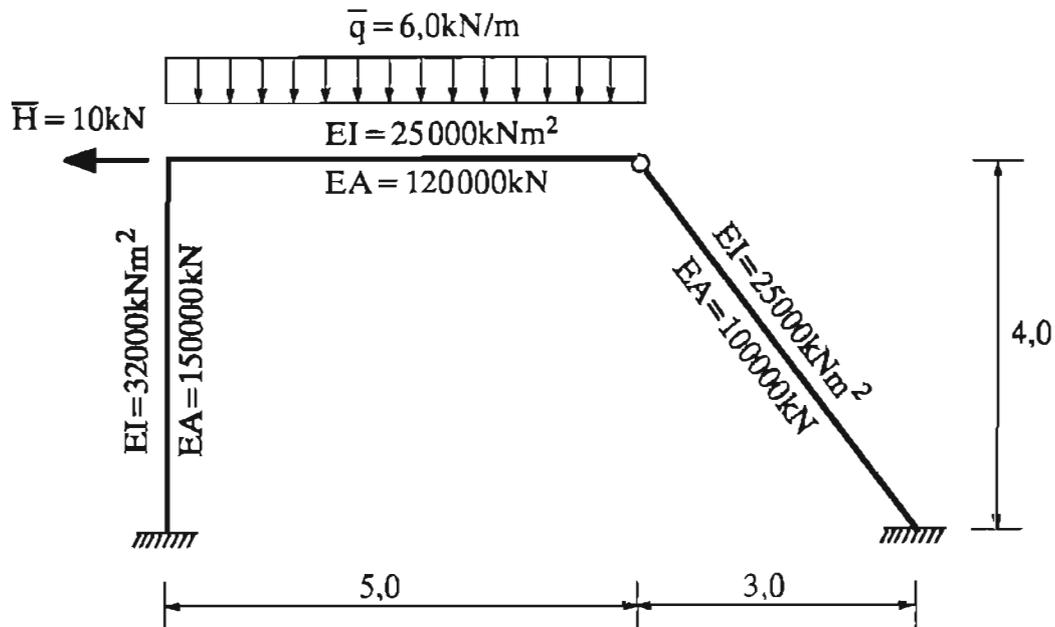
$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$v_G^3 = \begin{bmatrix} -2.7698E-03 \\ 2.0773E-03 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x3}) \\ (w_{z3}) \\ (u_{x4}) \\ (w_{z4}) \\ (\varphi_4) \end{matrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.4822E-03 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_3) \\ (w_4) \\ (\varphi_4) \end{matrix}$$

$$k^3 = \begin{bmatrix} 800 & \text{###} & \text{###} \\ -800 & \text{###} & \text{###} \\ -3000 & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0773 \\ -2.0773 \\ -10.3888 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_3^3) \\ (Q_4^3) \\ (M_4^3) \end{matrix} = p^3$$

## Vergleichsrechnung mit Dehnsteifigkeit



CAL88

START

```
FRAME K1 R1 E=1 I=32000 A=150000 X=0.0 Z=4.0
P K1
FRAME K2 R2 E=1 I=25000 A=120000 X=0.5 Z=0.0
P K2
```

```
LOAD P2 8 1
0.0
8*5/2
-8*5*5/12
0.0
8*5/2
8*5*5/12
P P2
```

```
FRAME K3 R3 E=1 I=25000 A=100000 X=5.8 Z=0.4
P K3
```

```
LOADID ID NE=3 NF=6
0 0 0 1 2 3
1 2 3 4 5 6
4 5 7 0 0 0
```

```
ZERO KGES 7 7
ADDK KGES K1 ID N=1
ADDK KGES K2 ID N=2
ADDK KGES K3 ID N=3
P KGES
```

```
LOAD PGES 7 1
-10
0
0
0
0
0
0
```

```
ADDK PGES P2 ID 2 1
P PGES
```

```
DUP PGES VGES
SOLVE KGES VGES
P VGES
```

```
MEMFRC R1 VGES ID F1 N=1
P F1
MEMFRC R2 VGES ID F2 N=2
P F2
SUB F2 P2
P F2
MEMFRC R3 VGES ID F3 N=3
P F3
```

RETURN

\*\*\* Technische Universitaet Muenchen                    Lehrstuhl fuer Statik \*\*\*  
 \*\*\* CAL-Ergebnisprotokoll                    -- Seite 1 --                    Datum : 4. 8.1989                    \*\*\*

----- Verbleibender Speicherplatz = 399804

>> START

----- Verbleibender Speicherplatz = 400000

>>

----- Verbleibender Speicherplatz = 400000

>> FRAME K1 R1 E=1 I=32000 A=150000 X=0,0 Z=4,0

++ Matrix <K1 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

++ Matrix <R1 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

	E	I	A	X	Z	L
1.0000E+00	3.2000E+04	1.5000E+05	0.0000E+00	4.0000E+00	4.0000E+00	
			0.0000E+00	0.0000E+00		

----- Verbleibender Speicherplatz = 399916

>> P K1

A U S G A B E   D E R   M A T R I X   <K1   >

S-Nr =	1	2	3	4	5	6
Z-Nr 1	6000.0000	0.0000	-12000.0000	-8000.0000	0.0000	-12000.0000
Z-Nr 2	0.0000	37500.0000	0.0000	0.0000	-37500.0000	0.0000
Z-Nr 3	-12000.0000	0.0000	32000.0000	12000.0000	0.0000	16000.0000
Z-Nr 4	-8000.0000	0.0000	12000.0000	6000.0000	0.0000	12000.0000
Z-Nr 5	0.0000	-37500.0000	0.0000	0.0000	37500.0000	0.0000
Z-Nr 6	-12000.0000	0.0000	16000.0000	12000.0000	0.0000	32000.0000

----- Verbleibender Speicherplatz = 399916

>> FRAME K2 R2 E=1 I=25000 A=120000 X=0,5 Z=0,0

++ Matrix <K2 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

++ Matrix <R2 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

	E	I	A	X	Z	L
1.0000E+00	2.5000E+04	1.2000E+05	0.0000E+00	0.0000E+00	5.0000E+00	
			5.0000E+00	0.0000E+00		

----- Verbleibender Speicherplatz = 399832

>> P K2

A U S G A B E   D E R   M A T R I X   <K2   >

S-Nr =	1	2	3	4	5	6
Z-Nr 1	24000.0000	0.0000	0.0000	-24000.0000	0.0000	0.0000
Z-Nr 2	0.0000	2400.0000	-8000.0000	0.0000	-2400.0000	-6000.0000
Z-Nr 3	0.0000	-8000.0000	20000.0000	0.0000	8000.0000	10000.0000
Z-Nr 4	-24000.0000	0.0000	0.0000	24000.0000	0.0000	0.0000
Z-Nr 5	0.0000	-2400.0000	8000.0000	0.0000	2400.0000	8000.0000
Z-Nr 6	0.0000	-8000.0000	10000.0000	0.0000	8000.0000	20000.0000

----- Verbleibender Speicherplatz = 399832

>>

----- Verbleibender Speicherplatz = 399832

>> LOAD P2 6 1

++ Matrix <P2 > mit 6 Zeilen und 1 Spalten erzeugt

----- Verbleibender Speicherplatz = 399820

>> P P2

A U S G A B E   D E R   M A T R I X   <P2   >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	0.0000
Z-Nr 2	15.0000
Z-Nr 3	-12.5000
Z-Nr 4	0.0000
Z-Nr 5	15.0000
Z-Nr 6	12.5000

----- Verbleibender Speicherplatz = 399820

>>

----- Verbleibender Speicherplatz = 399820

>> FRAME K3 R3 E=1 I=25000 A=100000 X=5,8 Z=0,4

++ Matrix <K3 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

++ Matrix <R3 > mit 6 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

	E	I	A	X	Z	L
1.0000E+00	2.5000E+04	1.0000E+05	5.0000E+00	0.0000E+00	5.0000E+00	
			8.0000E+00	4.0000E+00		

----- Verbleibender Speicherplatz = 399736

>> P K3

A U S G A B E   D E R   M A T R I X   <K3   >

S-Nr =	1	2	3	4	5	6
Z-Nr 1	8736.0000	8448.0000	4800.0000	-8736.0000	-8448.0000	4800.0000
Z-Nr 2	8448.0000	13664.0000	-3600.0000	-8448.0000	-13664.0000	-3600.0000
Z-Nr 3	4800.0000	-3600.0000	20000.0000	-4800.0000	3600.0000	10000.0000
Z-Nr 4	-8736.0000	-8448.0000	-4800.0000	8736.0000	8448.0000	-4800.0000

```
Z-Nr 5 -8448.0000 -13884.0000 3600.0000 8448.0000 13884.0000 3600.0000
Z-Nr 6 4800.0000 -3600.0000 10000.0000 -4800.0000 3600.0000 20000.0000
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399736
>>
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399736
```

```
>> LOADID ID NE=3 NF=6
++ Matrix <ID > mit 6 Zeilen und 3 Spalten erzeugt
```

```
Freiwert = 1: 2: 3: 4: 5: 6:
Element 1: 0 0 0 1 2 3
Element 2: 1 2 3 4 5 6
Element 3: 4 5 7 0 0 0
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399721
>>
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399721
```

```
>> ZERO KGES 7 7
++ Matrix <KGES > mit 7 Zeilen und 7 Spalten erzeugt
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
```

```
>> ADDK KGES K1 ID N=1
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
```

```
>> ADDK KGES K2 ID N=2
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
```

```
>> ADDK KGES K3 ID N=3
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
```

```
>> P KGES
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <KGES >

S-Nr =	1	2	3	4	5	6	7
Z-Nr 1	30000.0000	0.0000	12000.0000	-24000.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z-Nr 2	0.0000	39900.0000	-8000.0000	0.0000	-2400.0000	-6000.0000	0.0000
Z-Nr 3	12000.0000	-6000.0000	62000.0000	0.0000	8000.0000	10000.0000	0.0000
Z-Nr 4	-24000.0000	0.0000	0.0000	32736.0000	8448.0000	0.0000	4800.0000
Z-Nr 5	0.0000	-2400.0000	6000.0000	8448.0000	16064.0000	6000.0000	-3600.0000
Z-Nr 6	0.0000	-8000.0000	10000.0000	0.0000	6000.0000	20000.0000	0.0000
Z-Nr 7	0.0000	0.0000	0.0000	4800.0000	-3600.0000	0.0000	20000.0000

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
>>
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399666
```

```
>> LOAD PGES 7 1
++ Matrix <PGES > mit 7 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399653
```

```
>> ADDK PGES P2 ID 2 1
----- Verbleibender Speicherplatz = 399653
```

```
>> P PGES
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <PGES >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	-10.0000
Z-Nr 2	15.0000
Z-Nr 3	-12.5000
Z-Nr 4	0.0000
Z-Nr 5	15.0000
Z-Nr 6	12.5000
Z-Nr 7	0.0000

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399653
>>
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399653
```

```
>> DUP PGES VGES
++ Matrix <VGES > mit 7 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399640
```

```
>> SOLVE KGES VGES
Wert der Determinate = 1.18790E+30
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399640
```

```
>> P VGES
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <VGES >

S-Nr =	1
Z-Nr 1	-2.6990E-03
Z-Nr 2	5.4595E-04
Z-Nr 3	1.8443E-04
Z-Nr 4	-2.8148E-03
Z-Nr 5	2.7457E-03
Z-Nr 6	-1.0215E-04
Z-Nr 7	1.1688E-03

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399640
>>
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399640
```

```
>> MEMFRC R1 VGES ID F1 N=1
++ Matrix <F1 > mit 6 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
----- Verbleibender Speicherplatz = 399828
>> P F1
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <F1 >

```
S-Nr = 1
Z-Nr 1 20.4732
Z-Nr 2 14.2208
Z-Nr 3 -29.5187
Z-Nr 4 -20.4732
Z-Nr 5 -14.2208
Z-Nr 6 -27.3858
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399828
>> MEMFRC R2 VGES ID F2 N=2
++ Matrix <F2 > mit 6 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
----- Verbleibender Speicherplatz = 399816
>> P F2
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <F2 >

```
S-Nr = 1
Z-Nr 1 4.2208
Z-Nr 2 -5.4732
Z-Nr 3 14.8658
Z-Nr 4 -4.2208
Z-Nr 5 5.4732
Z-Nr 6 12.5000
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399816
>> SUB F2 P2
----- Verbleibender Speicherplatz = 399816
>> P F2
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <F2 >

```
S-Nr = 1
Z-Nr 1 4.2208
Z-Nr 2 -20.4732
Z-Nr 3 27.3858
Z-Nr 4 -4.2208
Z-Nr 5 -9.5288
Z-Nr 6 0.0000
```

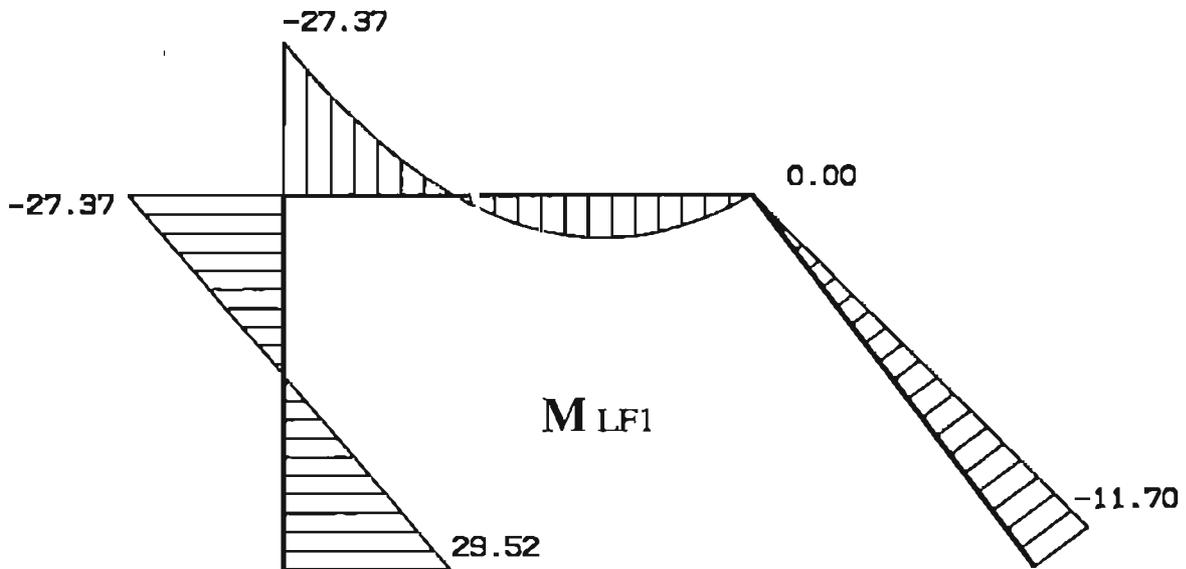
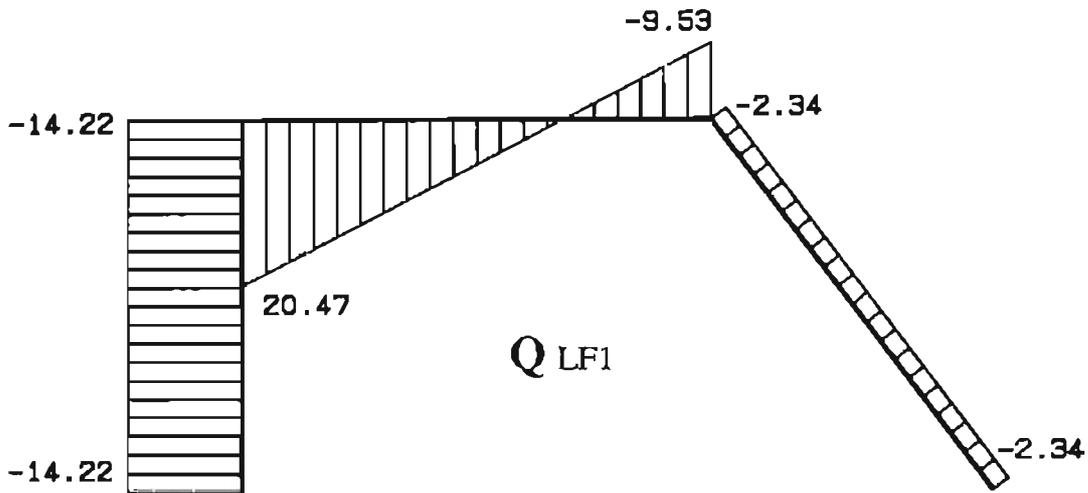
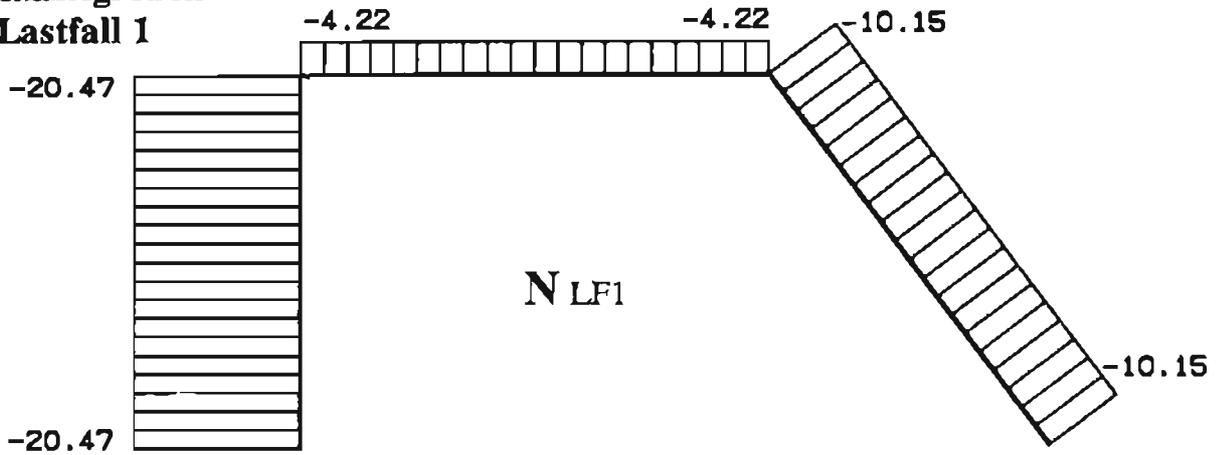
```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399816
>> MEMFRC R3 VGES ID F3 N=3
++ Matrix <F3 > mit 6 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
----- Verbleibender Speicherplatz = 399804
>> P F3
```

A U S G A B E D E R M A T R I X <F3 >

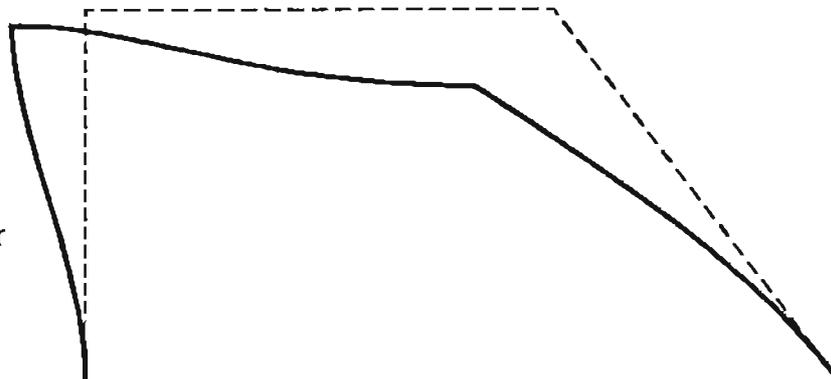
```
S-Nr = 1
Z-Nr 1 10.1539
Z-Nr 2 2.8398
Z-Nr 3 0.0000
Z-Nr 4 -10.1539
Z-Nr 5 -2.8398
Z-Nr 6 -11.8978
```

```
----- Verbleibender Speicherplatz = 399804
>>
----- Verbleibender Speicherplatz = 399804
>> RETURN
```

**Schnittgrößen**  
**Lastfall 1**



Verschiebungsfigur



## Statische Kondensation (Anfedern)

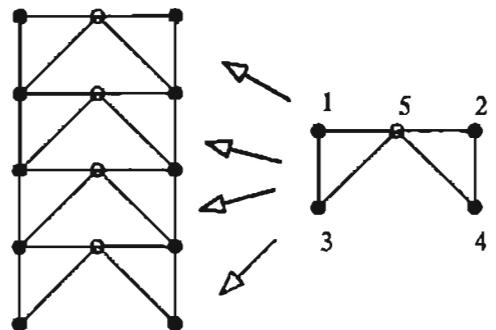
Zur Vereinfachung der Berechnung können Teilbereiche eines Tragwerks evtl. durch Federn ersetzt werden.

Ein Teilbereich wird in eine Feder gleicher Steifigkeit und somit gleicher Wirkung umgerechnet.

Die Belastungen innerhalb des Bereichs müssen so umgerechnet werden, daß sie in ihrer Wirkung Einzellasten an den Schnittstellen entsprechen.

Die Federsteifigkeit wird aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  des Teilbereichs gewonnen die äquivalenten Knotenlasten aus der Gesamlastspalte  $\mathbf{P}$  des Teilbereichs.

Ableitung von Makroelementen (Substrukturtechnik)  
Mehrere Elemente werden zu einem Makroelement zusammengesetzt.



$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_{aa} \cdot \mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{V}_b \quad (1)$$

Matrix ausgeschrieben

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{bb} \cdot \mathbf{V}_b \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\mathbf{P}_b - \mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{V}_a) \quad (3)$$

Umstellen der Gl. (2) auf die zu eliminierenden Verschiebungen.  
Berechnung von  $\mathbf{V}_b$  wenn  $\mathbf{V}_a$  bekannt.

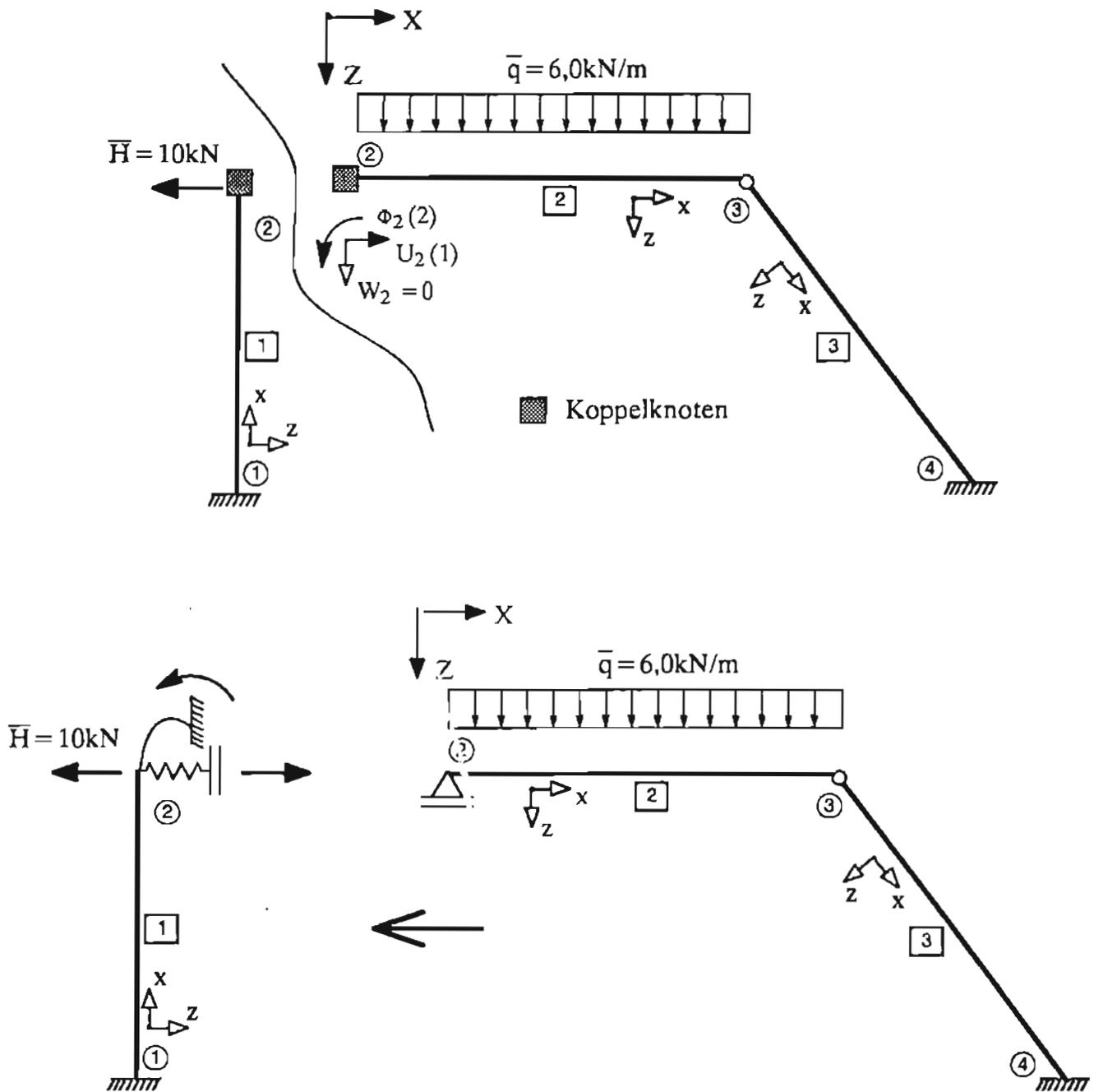
$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_{aa} \cdot \mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\mathbf{P}_b - \mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{V}_a) \quad \text{Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (1)}$$

$$\mathbf{P}_a = (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{K}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{ba}) \cdot \mathbf{V}_a + \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{K}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{P}_b$$

$$\mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{K}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{P}_b = (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \cdot \mathbf{K}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{ba}) \cdot \mathbf{V}_a \quad (4)$$

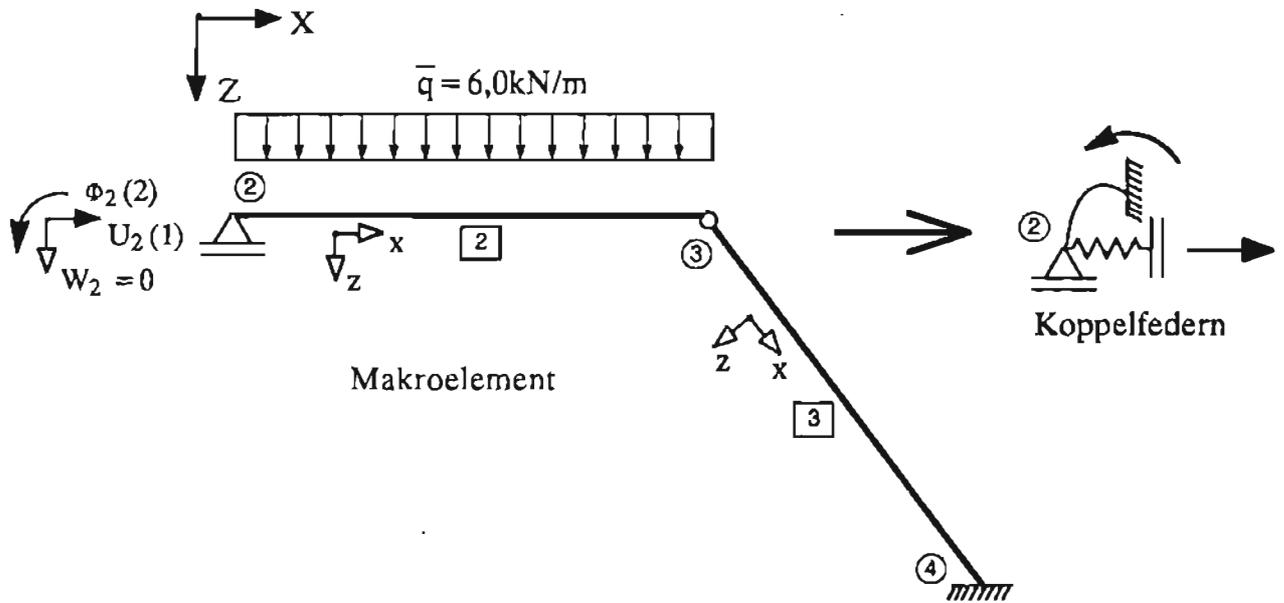
$$\mathbf{P}_{a_{neu}} = \mathbf{K}_{aa_{neu}} \cdot \mathbf{V}_a$$

## Vorgehensweise



1. Schritt: Loslösen des gewünschten Teilbereichs und Anfügen der Randbedingungen, die den Verformungen entsprechen, die am Hauptsystem behindert bzw. übergeben werden, d.h. es müssen die am Knoten auftretenden Verformungen als Systemfreiheitsgrade des Teilsystems auftreten.

**Teilstrukturen (Substrukturtechnik)**



2. Schritt: Steifigkeitsmatrix und Lastspalte des Teilsystems durch Überlagern ermitteln

$$K = \left[ \begin{array}{cc|cc} 5100 & -4500 & -4500 & 7500 \\ -4500 & 20000 & 10000 & 0 \\ \hline -4500 & 10000 & 20000 & 0 \\ 7500 & 0 & 0 & 20000 \end{array} \right] \quad P = \begin{bmatrix} -11.25 \\ -12.50 \\ \hline 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix}$$

3. Schritt: Kondensation der unabhängigen (nicht am Kopplungspunkt vorhandenen) Freiheitsgrade. (Umrechnen der Steifigkeitsmatrix in Koppelfedersteifigkeiten)

$$\begin{bmatrix} 5100 & -4500 \\ -4500 & 20000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4500 & 7500 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4500 & 10000 \\ 7500 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1275 & -2250 \\ -2250 & 15000 \end{bmatrix}$$

$K_{aa}$                    $K_{ab}$                    $K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1}$                    $K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot K_{ba}$                    $K_{aa}^S$

Koppelsteifigkeit für die Berechnung des Hauptsystems

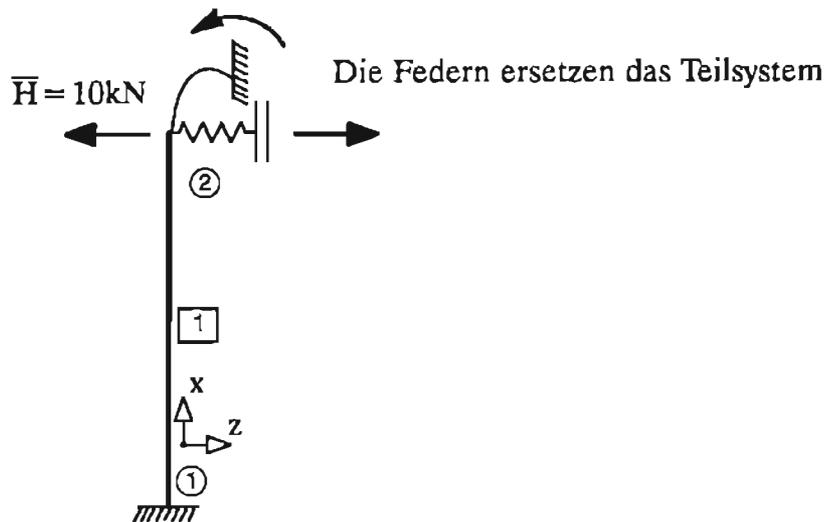
4. Schritt: Umrechnung der Belastung in Ersatzknotenlasten

$$\begin{bmatrix} -11.25 \\ -12.50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4500 & 7500 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix}$$

$P_a$                    $K_{ab}$                    $K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1}$                    $K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot P_b$                    $P_a^S$

Ersatzlasten

Hauptsystem:



Berechnung des Hauptsystems

$$\begin{bmatrix} 1275 & -2250 \\ -2250 & 15000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8000 & 12000 \\ 12000 & 32000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7275 & 9750 \\ 9750 & 47000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -8.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}_{aa}^S \quad \mathbf{k}^1 \quad \mathbf{K}_{neu} \quad \mathbf{P}_a^S \quad \mathbf{P}^* \quad \mathbf{P}_{neu}$

Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 7275 & 9750 \\ 9750 & 47000 \end{bmatrix} \mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} -18.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}_{neu} \quad \mathbf{P}_{neu}$

Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} -2.7698E-03 \\ 1.7564E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

Rückrechnung der Verschiebungen des Teilsystems

$$\begin{bmatrix} 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4500 & 10000 \\ 7500 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7698E-03 \\ 1.7564E-04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7203 \\ 20.7732 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_b \quad \mathbf{K}_{ba} \quad \mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{V}_a \quad \mathbf{P}_b - \mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{V}_a$

$$\begin{bmatrix} -1.7203 \\ 20.7732 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8.8017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}_{bb}^{-1} \quad \mathbf{V}_b$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2.7698E-03 \\ 1.7564E-04 \\ -8.8017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix}$$

### Statische Kondensation zur Reduktion der Unbekannten

$$K = \left[ \begin{array}{cc|cc} 11100 & 7500 & -4500 & 7500 \\ 7500 & 52000 & 10000 & 0 \\ \hline -4500 & 10000 & 20000 & 0 \\ 7500 & 0 & 0 & 20000 \end{array} \right] \quad P = \left[ \begin{array}{c} -21.25 \\ -12.50 \\ \hline 12.50 \\ 0.00 \end{array} \right]$$

$$K_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & K_{bb}^{-1} & & K_{ba} \\ \begin{bmatrix} 11100 & 7500 \\ 7500 & 52000 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} -4500 & 7500 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4500 & 10000 \\ 7500 & 0 \end{bmatrix} \\ K_{aa} & & K_{ab} & & K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot K_{ba} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 7275 & 9750 \\ 9750 & 47000 \end{bmatrix} = K_{aa_{neu}}$$

$$\begin{matrix} & & K_{bb}^{-1} & & P_b \\ \begin{bmatrix} -21.25 \\ -12.50 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} -4500 & 7500 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix} \\ P_a & & K_{ab} & & K_{ab} \cdot K_{bb}^{-1} \cdot P_b \end{matrix} = \begin{bmatrix} -18.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix} = P_{a_{neu}}$$

Gleichungssystem

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 7275 & 9750 \\ 9750 & 47000 \end{bmatrix} V_a = \begin{bmatrix} -18.4375 \\ -18.7500 \end{bmatrix}$$

$K_{aa_{neu}} \quad P_{a_{neu}}$

$$V_a = \begin{bmatrix} -2.7688E-03 \\ 1.7564E-04 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_1) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

Rückrechnung

$$\begin{matrix} & & & & V_a \\ & & & & \begin{bmatrix} -2.7688E-03 \\ 1.7564E-04 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12.50 \\ 0.00 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} -4500 & 10000 \\ 7500 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14.2203 \\ -20.7732 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1.7203 \\ 20.7732 \end{bmatrix} \\ P_b & & K_{ba} & & K_{ba} \cdot V_a & & P_b - K_{ba} \cdot V_a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & & P_b - K_{ba} \cdot V_a \\ & & & & \begin{bmatrix} -1.7203 \\ 20.7732 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5.0E-5 & 0.0E+0 \\ 0.0E+0 & 5.0E-5 \end{bmatrix} & & & & \begin{bmatrix} -8.6017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix} \\ K_{bb}^{-1} & & & & V_b \end{matrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -2.7688E-03 \\ 1.7564E-04 \\ -8.6017E-05 \\ 1.0387E-03 \end{bmatrix}$$

## Theorie II. Ordnung – (Vorlesung Abschnitt 7)

### Grundlagen :

#### Voraussetzungen :

Es gelten zunächst die üblichen Voraussetzungen und Linearisierungen der Stabstatik Theorie I. Ordnung : (*Materialgesetz und Kinematik sind linear*) :

- Querschnittsabmessungen klein gegenüber der Stablänge
- Material : homogen, isotrop, linear elastisch
- Belastung wirkt statisch und richtungstreu
- Formänderungen sind klein : infinitesimal kleine, auf die Stabachse bezogene Verschiebungen, Verdrehungen und Verzerrungen (Dehnungen, Verkrümmungen und Gleitungen) :  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$  ;  $\cos \varphi \approx 1$
- Verformungen aus Querkraft (Gleitungen) werden vernachlässigt → Normalen-  
hypothese, Ebenbleiben der Querschnitte :  $\varphi \approx -w'$  ;  $\chi \approx -w''$  ; ( $\varepsilon \approx u'$ )
- Linear verteilte Querschnittsspannungen werden durch äquivalente Schnittgrößen ersetzt.

Im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung wird bei der Theorie II. Ordnung der **Gleichgewichtszustand am verformten System** betrachtet :

- Unterscheidung in Normal- und Querkräfte ( $N, Q$ ) einerseits sowie Longitudinal- und Transversalkräfte ( $L, T$ ) andererseits.
- Damit die Differentialgleichungen für  $u$  und  $w$  entkoppelt sind, muß die Longitudinalkraft  $L$  im Stababschnitt konstant sein und als bekannt angenommen werden. → Die nichtlineare Gleichgewichtsaufgabe wird dadurch iterativ gelöst.
- Vereinfachend gilt somit :  $L \approx N$  ;  $T \approx Q + (w' + w_0')N$  ( am pos. Schnittufer)

#### Anwendungsbereich :

- Systeme mit unverschieblichen Knoten und 'großen' Normalkräften :  
( $w'T \ll L$  ;  $w'Q \ll N$  ;  $T \ll L$  ;  $Q \ll N$ )
- Systeme mit verschieblichen Knoten, bei denen infolge Verschiebungen erhebliche Zusatzmomente entstehen.

#### Folgerungen für die praktische Berechnung :

- Die Stabkennzahlen  $\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$  sind für alle Stäbe als bekannt anzunehmen. Hierzu sind die Normalkräfte vorab nach Theorie I. Ordnung zu berechnen oder abzuschätzen.
- Lastfälle dürfen im allgemeinen **nicht** überlagert werden. **Das Superpositionsprinzip gilt im allgemeinen nicht mehr**; es dürfen nur Lastfälle mit gleichen Stabkennzahlen überlagert werden.
- Lasten bzw. Lastfälle sind zu maßgeblichen Lastkombinationen zusammenzufassen, die jeweils getrennt zu berechnen sind. Bei den Lasten sind die baustoffspezifischen Sicherheitsbeiwerte zu berücksichtigen. Entsprechende Vorverformungen aus Imperfektionen sind gegebenenfalls zu berücksichtigen.
- Beim Weggrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung sind Weggrößen die Rechenunbekannten. Diese geometrischen Unbekannten werden aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Einflüsse aus Normalkraftverformungen können häufig, wie bei Theorie I. Ordnung, vernachlässigt werden.

- Für Druckstäbe ist die Theorie II. Ordnung ein Gebot der Sicherheit.
- Für Zugstäbe ist die Theorie II. Ordnung eine Frage der Wirtschaftlichkeit.
- Für Stabkennzahlen  $\varepsilon \leq 0.5(1.0)$  genügt es im allgemeinen nur die Schiefstellungen ( $D'$ ), zu berücksichtigen, jedoch Anteile aus Verkrümmungen beim Gleichgewicht am verformten System zu vernachlässigen; d.h. es können die Werte  $A', B', C'$  nach Theorie I. Ordnung verwendet werden.
- Für Stabkennzahlen  $\varepsilon \leq 1.0(2.5)$  ist im allgemeinen eine Berechnung mit der geometrischen Matrix ( 1. Reihenglied der Taylor-Reihe ) ausreichend.
- Bei reiner Normalkraftbeanspruchung ohne Vorverformungen ist eine Stabilitätsuntersuchung erforderlich; es liegt dann kein Spannungsproblem, sondern ein Verzweigungsproblem vor.

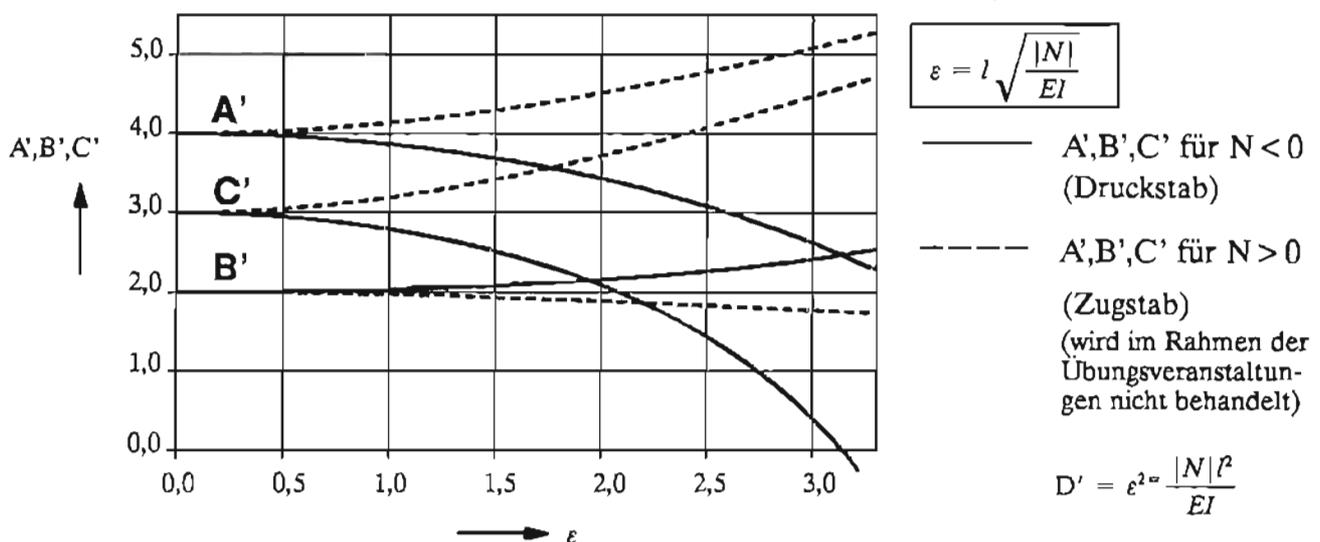
**Wesentlicher Vorteil des Weggrößenverfahrens gegenüber dem Kraftgrößenverfahren bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung :**

- 1) Die Berechnung ist leichter schematisierbar (Verträglichkeit ist am Grundelement einfacher zu erfüllen als Gleichgewicht)
- 2) Die Iteration der Normalkräfte konvergiert im allgemeinen schneller als die der Verschiebungen. (Normalkräfte sind einfacher abzuschätzen.)

**Wesentliche Unterschiede beim Weggrößenverfahren der Theorie II. Ordnung gegenüber Theorie I. Ordnung :**

- 1) Zu grundlegenden Beziehungen für das Weggrößenverfahren Theorie II. Ordnung (in Vorzeichen-Definition 2) siehe 'Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke' Abschnitt 5.3.

Die Stabendmomente werden in Abhängigkeit der Weggrößen an den Stabenden und der Stabkennzahl (Normalkraftbeanspruchung !) formuliert. Zur Abhängigkeit der dabei verwendeten Hilfwerte  $A', B', C'$  von der Stabkennzahl  $\varepsilon$  siehe folgende Abbildung :



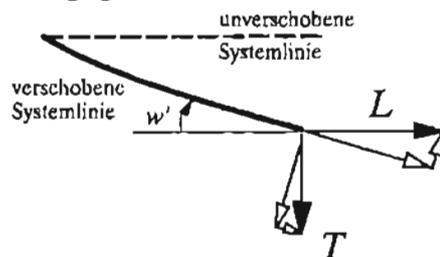
### Definition von Transversal- und Longitudinalkräften

Die Normal- und Querkräfte  $N$  und  $Q$  sind gegenüber der Ausgangslage um den Winkel  $\varphi = -w'$  gedreht. Aus rechen-technischen Gründen werden bei Theorie II. Ordnung die auf die unverschobene Systemlinie bezogenen Transversal- und Longitudinalkräfte  $T$  und  $L$  eingeführt.

Wegen der vorausgesetzten kleinen Verschiebungen gilt :

$$\sin w' \approx \tan w' \approx w' ; \cos w' \approx 1$$

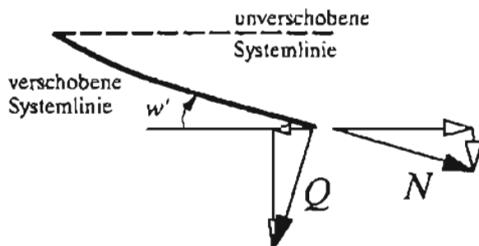
Der Zusammenhang zwischen  $N$  und  $Q$  und  $T$  und  $L$  ist durch eine lineare Transformation gegeben :



$$\begin{aligned} N &= L \cos w' + T \sin w' \\ N &\approx L + T w' \\ Q &= -L \sin w' + T \cos w' \\ Q &\approx -L w' + T \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w' & \sin w' & 0 \\ -\sin w' & \cos w' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ T \\ M \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} L &= N \cos w' - Q \sin w' \\ L &\approx N - Q w' \\ T &= N \sin w' + Q \cos w' \\ T &\approx N w' + Q \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} L \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w' & -\sin w' & 0 \\ \sin w' & \cos w' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}$$

Wird ferner angenommen, daß gilt :  $T w' \ll L$  bzw.  $Q w' \ll N$ , so lautet der Zusammenhang zwischen  $N$  und  $Q$  und  $T$  und  $L$  :

$$\begin{aligned} N &\approx L \\ T &\approx Q + w' N \\ Q &\approx T - w' L \approx T - w' N = T + \varphi N \end{aligned}$$

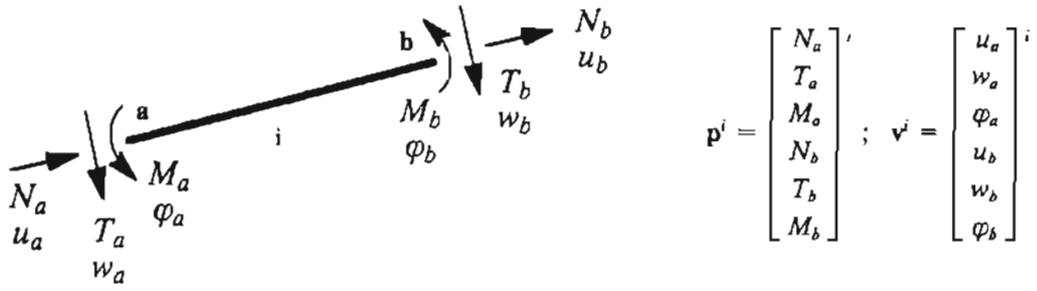
Werden Vorverformungen berücksichtigt, so ist in obigen Beziehungen  $w' + w_0'$  anstelle von  $w'$  einzusetzen.

**Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen**

- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



Druckstab ohne Bettung (Theorie II. Ordnung)

$$N < 0$$

Stabkennzahl  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$$

Hilfswerte  $A', B', C', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Druckstab Theorie II. Ordnung  $N < 0$  :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 - \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$B' = 2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 + \dots$$

$$C' = \frac{A'^2 - B'^2}{A'} = \frac{\varepsilon^2 \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon} ;$$

$$C' = 3 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{175} \varepsilon^4 - \dots$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{|N|}{EI} ;$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' + B' = 6 - \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 - \dots$$

$$C' - D' = \frac{\varepsilon^3 \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon} ;$$

$$C' - D' = 3 - \frac{6}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{175} \varepsilon^4 - \dots$$

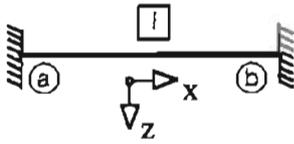
$$2(A' + B') - D' = \frac{\varepsilon^3 \sin \varepsilon}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ; \quad 2(A' + B') - D' = 12 - \frac{6}{5} \varepsilon^2 - \frac{1}{700} \varepsilon^4 - \dots$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich der Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung :

$$A' = 4 \qquad B' = 2 \qquad C' = 3 \qquad D' = 0$$

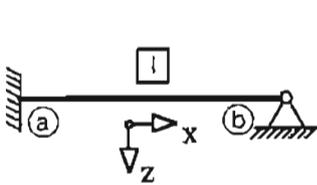
lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Druckstab Theorie II. Ordnung) aus der analytischen Lösung der Differentialgleichung:  $N < 0$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig eingespannten Stab:



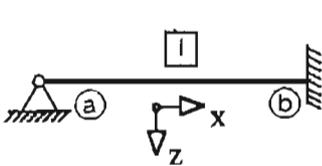
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \hline T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} [2(A' + B') - D'] & -(A' + B') l & | & -[2(A' + B') - D'] - (A' + B') l \\ -(A' + B') l & A'l^2 & | & (A' + B') l & B'l^2 \\ \hline -[2(A' + B') - D'] & (A' + B') l & | & [2(A' + B') - D'] & (A' + B') l \\ -(A' + B') l & B'l^2 & | & (A' + B') l & A'l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \hline w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ M_a^{0II} \\ \hline T_b^{0II} \\ M_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den links eingespannte, rechts gelenkig gelagerten Stab:



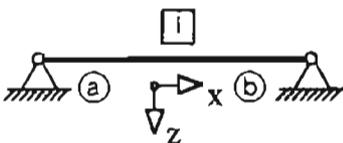
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \hline T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} C' - D' & -C'l & | & -(C' - D') \\ -C'l & C'l^2 & | & C'l \\ \hline -(C' - D') & C'l & | & C' - D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \hline w_b \\ M_b^{0II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ M_a^{0II} \\ \hline T_b^{0II} \\ M_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den rechts eingespannte, links gelenkig gelagerten Stab:



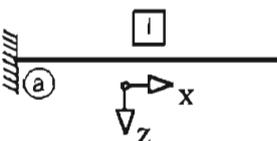
$$\begin{bmatrix} T_a \\ \hline T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} C' - D' & | & -(C' - D') & -C'l \\ \hline -(C' - D') & | & C' - D' & C'l \\ -C'l & | & C'l & C'l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \hline w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ \hline T_b^{0II} \\ M_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} T_a \\ \hline T_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -D' & | & D' \\ \hline D' & | & -D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \hline w_b \end{bmatrix}$$

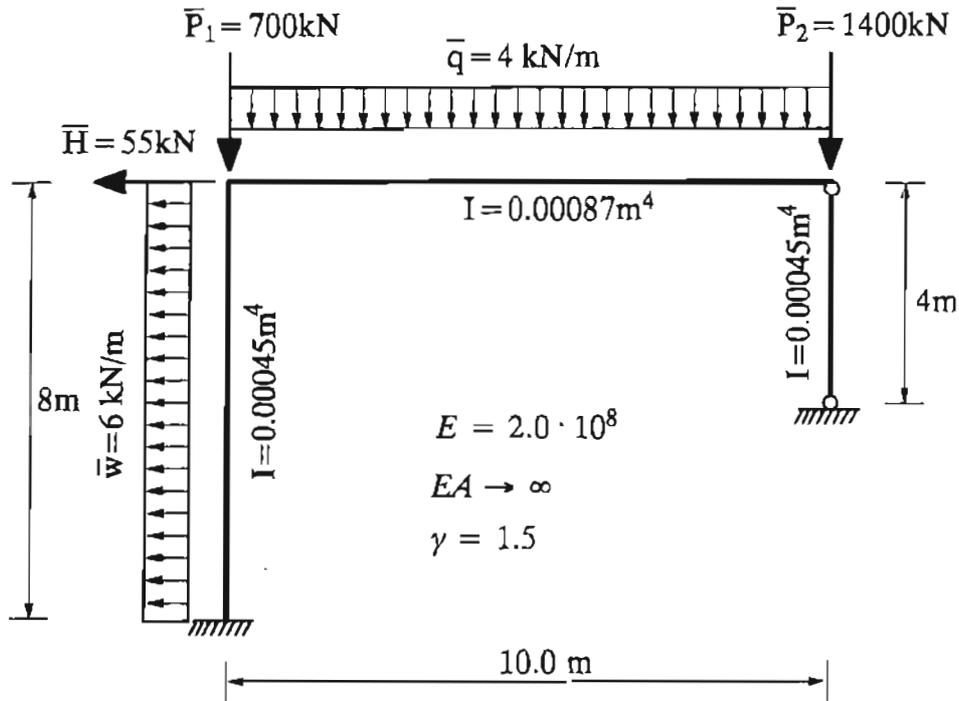
Steifigkeitsmatrix für den Kragarm:



$$[M_a] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} & | & l^2 \end{bmatrix} \cdot [\varphi_a] + [M_a^{0II}]$$

## Berechnung eines Tragwerks nach Theorie II. Ordnung (WGV)

### System und Belastung:

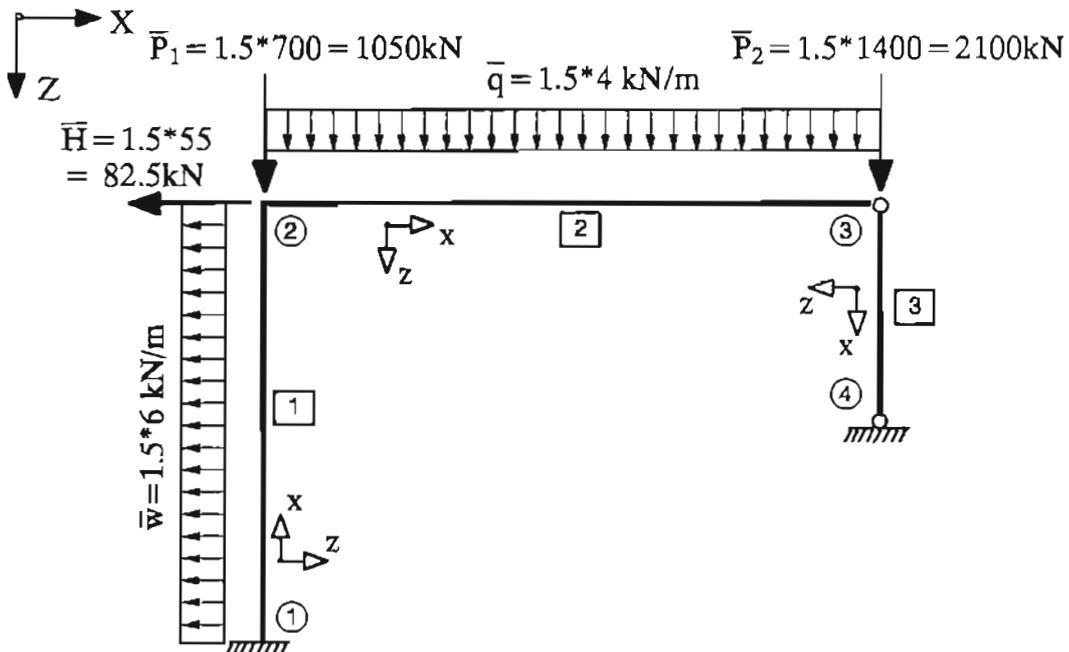


### 1. Berechnung nach Theorie I. Ordnung:

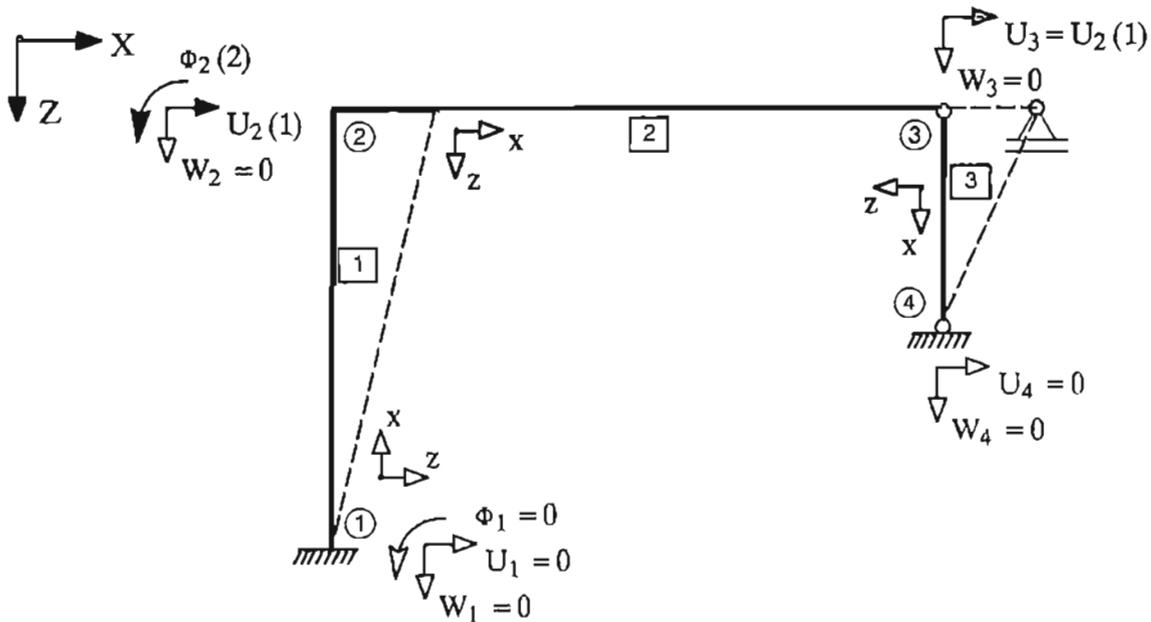
1. Schritt: Numerierung der Knoten und der Stäbe.

Wahl eines globalen (X, Y, Z) und für jedes Element eines lokalen (x, y, z) Koordinatensystems.

Multiplizieren der Lasten mit dem Sicherheitsbeiwert  $\gamma$

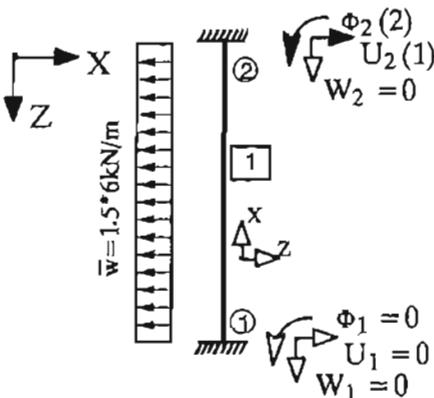


2. Schritt: Antragen der globalen Knotenverformungen und feststellen der abhängigen Verschiebungen (evtl. mit Kinematik)



3. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.
4. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.
5. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

**Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)**



$l = 8.0\text{m}$   
 $EI = 90000\text{kNm}^2$

$$k^i = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$k^1_G = \begin{bmatrix} 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -8 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 \\ -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 \end{bmatrix}$$

$$k^1_G = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -2108.375 & -8437.500 \\ \text{###} & \text{###} & 8437.500 & 22500.000 \\ \text{###} & \text{###} & 2108.375 & 8437.500 \\ \text{###} & \text{###} & 8437.500 & 45000.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (Q_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix}$$

lokale = globale Steifigkeitsmatrix

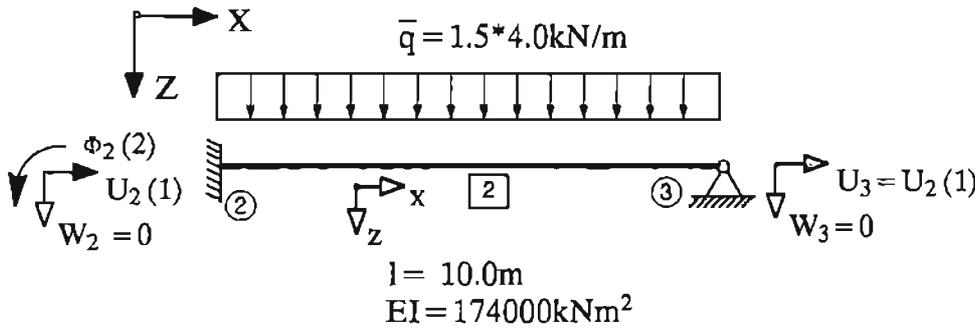
$U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

Gleichlast

$$p^{10}_G = \begin{bmatrix} -q \cdot l / 2 \\ q \cdot l^2 / 12 \\ -q \cdot l / 2 \\ -q \cdot l^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 8 / 2 \\ -9 \cdot 8 \cdot 8 / 12 \\ 9 \cdot 8 / 2 \\ 9 \cdot 8 \cdot 8 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0 \\ -48.0 \\ 36.0 \\ 48.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (Q_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)



$$k^2_G = \begin{bmatrix} 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \end{bmatrix}$$

$$k^i = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^3} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^3} & 3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

$$k^2_G = \begin{bmatrix} (w_2) & (\phi_2) & (w_3) \\ (w_{22}) & (\phi_{Y2}) & (w_{23}) \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) & (F_{Z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ (Q_3^2) & (F_{Z3}^2) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

$$W_2 = 0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3 = 0$$

Gleichlast

$$p^2_G = \begin{bmatrix} -5 \cdot q \cdot l / 8 \\ q \cdot l^2 / 8 \\ -3 \cdot q \cdot l / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 10 \cdot 5 / 8 \\ 8 \cdot 10 \cdot 10 / 8 \\ -8 \cdot 10 \cdot 3 / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{Z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{Y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{Z3}^{20}) \end{matrix}$$

### 6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\phi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\phi_{Yb})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	0	0

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i \quad \sum_i F_{Zk}^i \quad \sum_i M_{Yk}^i$$

	1	2	
	$U_2$	$\Phi_2$	
1 $H_2$	2109.375	8437.5	El. 1 El. 2
2 $M_2$	8437.5	45000 52200	El. 1 El. 2

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 2109.375 & 8437.50 \\ 8437.500 & 97200.00 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} P^* & P^0 \\ -82.5 & -36.0 & -0.0 \\ 0.0 & -48.0 & -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118.5 \\ -123.0 \end{bmatrix}$$

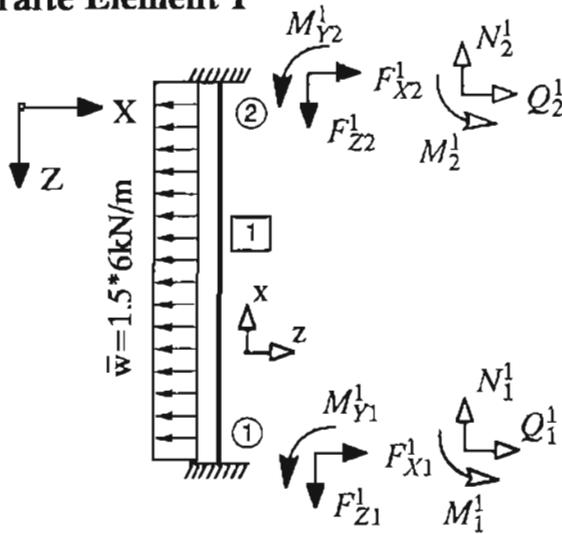
### 7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems $K \cdot V = P$

$$V = \begin{bmatrix} -0.07830544 \\ 0.00563191 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

8. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

9. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

**Knotenkräfte Element 1**



$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

$$\mathbf{v}_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.07830544 \\ 0.00553191 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x1}) \\ (\varphi_{y1}) \\ (u_{x2}) \\ (\varphi_{y2}) \end{matrix}$$

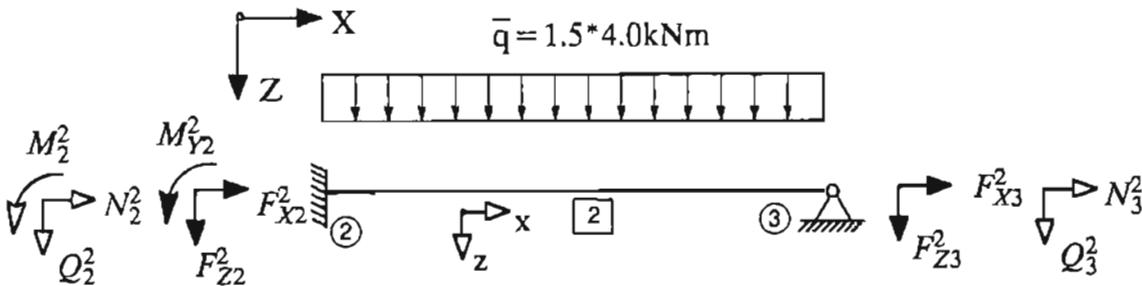
$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -2109.375 & -8437.5 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.500 & 22500.0 \\ \#\#\# & \#\#\# & 2109.375 & 8437.5 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.500 & 45000.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 118.5000 \\ -536.2340 \\ -118.5000 \\ -411.7660 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^1) (F_{x1}^1) \\ (M_1^1) (M_{y1}^1) \\ (Q_2^1) (F_{x2}^1) \\ (M_2^1) (M_{y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^1$$

$$\begin{bmatrix} 118.5000 \\ -536.2340 \\ -118.5000 \\ -411.7660 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36.0 \\ -48.0 \\ 36.0 \\ 48.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154.500 \\ -584.234 \\ -82.500 \\ -363.766 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1^1) (F_{x1}^1) \\ (M_1^1) (M_{y1}^1) \\ (Q_2^1) (F_{x2}^1) \\ (M_2^1) (M_{y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} =: \mathbf{P}_G^i$$

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i$$

**Knotenkräfte Element 2**



$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

$$\mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.00553191 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) (w_{z2}) \\ (\varphi_2) (\varphi_{y2}) \\ (w_3) (w_{z3}) \end{matrix}$$

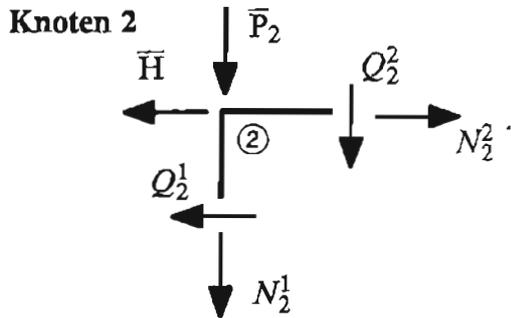
$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5220 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52200 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5220 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28.8766 \\ 288.7660 \\ 28.8766 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) (M_{y2}^2) \\ (Q_3^2) (F_{z3}^2) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^2$$

$$\begin{bmatrix} -28.8766 \\ 288.7660 \\ 28.8766 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66.3766 \\ 363.7660 \\ 6.3766 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^2) (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) (M_{y2}^2) \\ (Q_3^2) (F_{z3}^2) \end{matrix} = \mathbf{p}^2$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{P}_G^i$$

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i$$

**Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)**

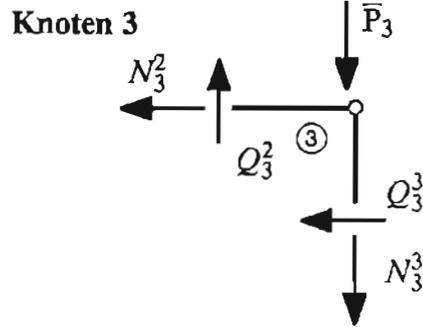


$$\sum H = 0 \rightarrow N_2^2 - \bar{H} - Q_2^1 = 0$$

$$N_2^2 = 82.5 - 82.5 = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow N_2^1 + Q_2^2 + \bar{P}_2 = 0$$

$$N_2^1 = -1050 - 66.376 = -1116.376$$

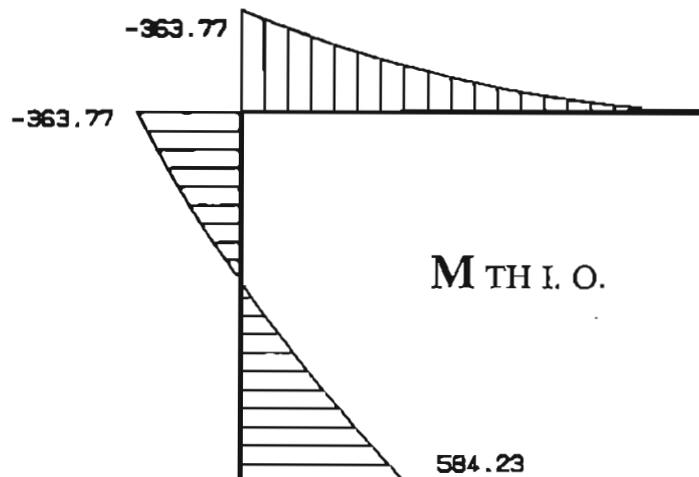
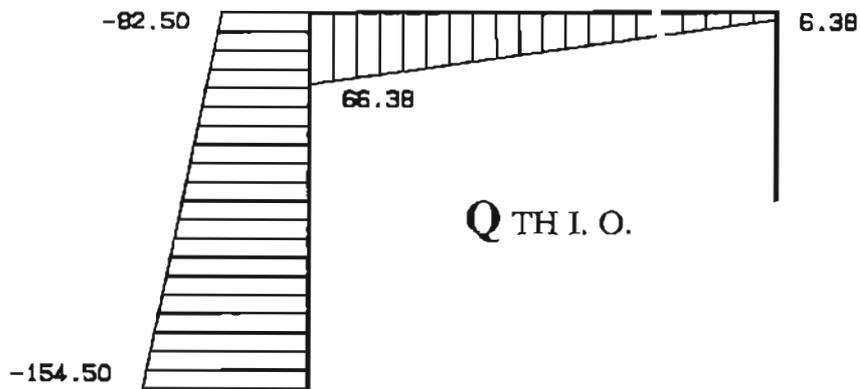
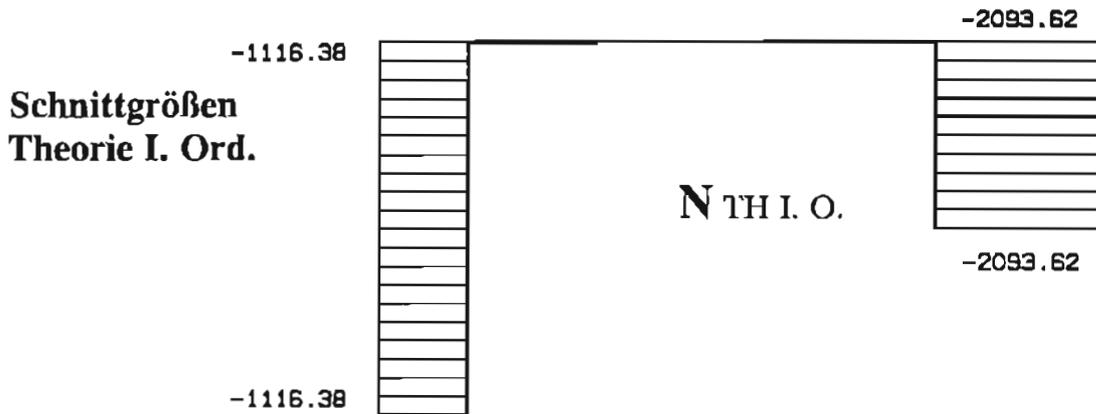


$$\sum H = 0 \rightarrow N_3^2 + Q_3^2 = 0$$

$$N_3^2 = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow N_3^3 - Q_3^3 + \bar{P}_3 = 0$$

$$N_3^3 = 6.3765 - 2100 = -2093.623$$

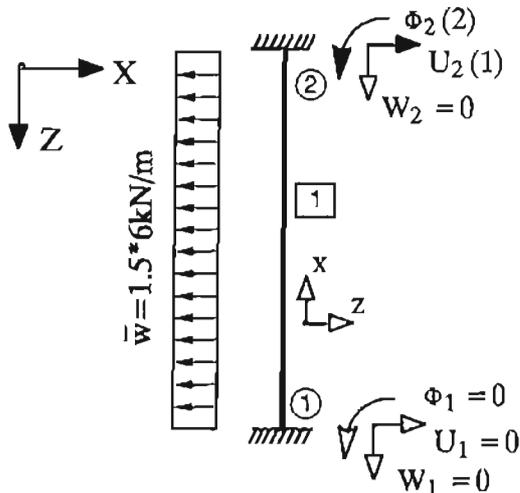


## 2. Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit analytischer Steifigkeitsmatrix

### 1. Iterationsschritt:

3. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.
4. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.
5. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)



$$l = 8.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -1116.376\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.89099$$

$$\begin{aligned} A' &= 3.89303 \\ B' &= 2.02713 \\ A' + B' &= 5.92018 \\ D' &= 0.78388 \\ 2*(A' + B') - D' &= 11.04648 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} 11.04648 * 90000 / 8 / 8 & -5.92018 * 90000 / 8 / 8 & -11.04648 * 90000 / 8 / 8 / \varepsilon & -5.92018 * 90000 / 8 / 8 \\ -5.92018 * 90000 / 8 / 8 & 3.89303 * 90000 / 8 & 5.92018 * 90000 / 8 / 8 & 2.02713 * 90000 / 8 \\ -11.04648 * 90000 / 8 / 8 / \varepsilon & 5.92018 * 90000 / 8 / 8 & 11.04648 * 90000 / 8 / 8 / \varepsilon & 5.92018 * 90000 / 8 / 8 \\ -5.92018 * 90000 / 8 / 8 & 2.02713 * 90000 / 8 & 5.92018 * 90000 / 8 / 8 & 3.89303 * 90000 / 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -1941.7805 & -8325.2250 \\ \text{###} & \text{###} & 8325.2250 & 22805.2125 \\ \text{###} & \text{###} & 1941.7805 & 8325.2250 \\ \text{###} & \text{###} & 8325.2250 & 43796.5875 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_1) & (\varphi_1) & (w_2) & (\varphi_2) \\ (u_{x1}) & (\varphi_{y1}) & (u_{x2}) & (\varphi_{y2}) \\ (T_1^1) & (F_{x1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{x2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{y2}^1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$U_1 = 0 \quad \Phi_1 = 0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

Der Elementlastvektor ändert sich durch die Normalkraft

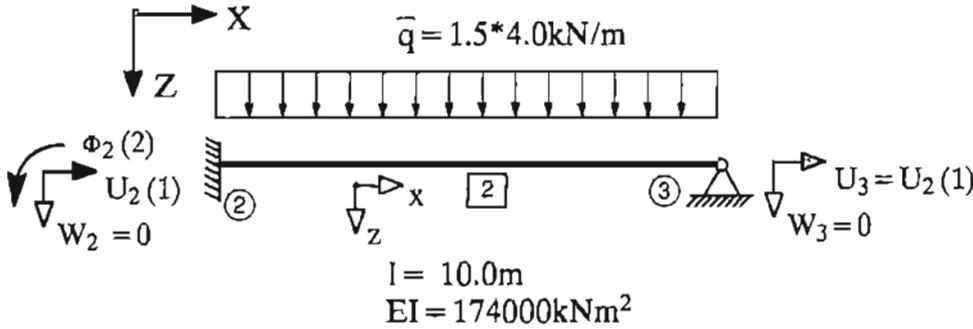
Gleichlast

$$\mathbf{p}_G^{10} = \begin{bmatrix} -q * l / 2 \\ q * l^2 / 2 * (A' + B') \\ -q * l / 2 \\ -q * l^2 / 2 * (A' + B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 * 8 / 2 \\ -9 * 8 * 8 / 2 / 5.92018 \\ 9 * 8 / 2 \\ 9 * 8 * 8 / 2 / 5.92018 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.8473 \\ 36.0000 \\ 48.8473 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{x1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{x2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)

N = 0 -> Berechnung nach Theorie I. Ordnung



$$k_G^2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \end{bmatrix}$$

$$k^i = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^3} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^3} & 3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

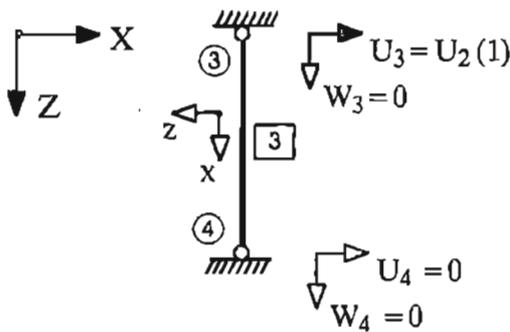
$$k_G^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & -5220 & \text{###} \\ \text{###} & 52200 & \text{###} \\ \text{###} & 5220 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (\phi_2) & (w_3) \\ (w_{z2}) & (\phi_{y2}) & (w_{z3}) \\ (Q_2^z) & (F_{z2}^z) & (Q_3^z) & (F_{z3}^z) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale} = \text{globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$W_2 = 0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3 = 0$

Gleichlast

$$p_G^{20} = \begin{bmatrix} -5 \cdot q \cdot l / 8 \\ q \cdot l^2 / 8 \\ -3 \cdot q \cdot l / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 10 \cdot 5 / 8 \\ 8 \cdot 10 \cdot 10 / 8 \\ -6 \cdot 10 \cdot 3 / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{z3}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)



$l = 4.0\text{m}$   
 $EI = 90000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$   
 $N = -2093.623 \text{ kN}$

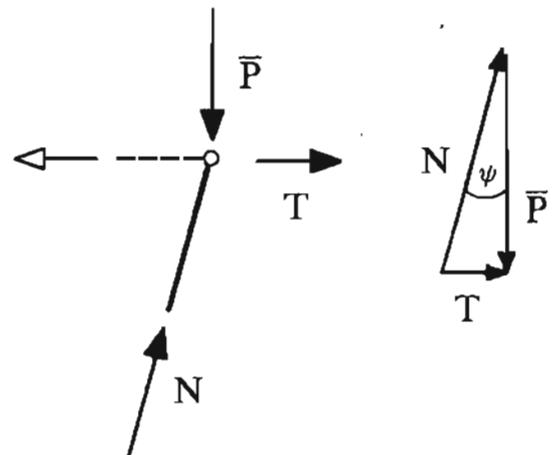
$$\epsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.61008$$

$D' = 0.37220$

$$k_G^3 = \begin{bmatrix} -0.37220 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 & 0.37220 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 \\ 0.37220 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 & -0.37220 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 \end{bmatrix}$$

$$k_G^3 = \begin{bmatrix} -523.4063 & \text{###} \\ 523.4063 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_3) & (w_4) \\ (u_{x3}) & (u_{x4}) \\ (T_3^x) & (F_{x3}^x) \\ (T_4^x) & (F_{x4}^x) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale} = \text{globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$U_3(1) \quad U_4 = 0$



Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 3 entfällt, da mit der negativen Einheitsmatrix transformiert wird. (  $X = -z$  )

6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\varphi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\varphi_{Yb})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	0	0
Element 3	1	0	0	0	0	0

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i \quad \sum_i F_{Zk}^i \quad \sum_i M_{Yk}^i$$

	1 $U_2$	2 $\Phi_2$	
1 $H_2$	1941.7605 -523.4083	8325.2250	El. 1 El. 2 El. 3
2 $M_2$	8325.2250	43796.5875 52200.0000	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 1418.3643 & 8325.2250 \\ 8325.2250 & 95996.5875 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} -82.5 & -38.0000 & -0.0 \\ 0.0 & -48.6473 & -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118.5000 \\ -123.6473 \end{bmatrix}$$

7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems  $K \cdot V = P$

$$V = \begin{bmatrix} -0.15477254 \\ 0.01213448 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

8. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

9. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

Knotenkräfte Element 1

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0}$$

$$k_G^1 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -1941.7605 & -8325.2250 \\ \text{###} & \text{###} & 8325.2250 & 22805.2125 \\ \text{###} & \text{###} & 1941.7605 & 8325.2250 \\ \text{###} & \text{###} & 8325.2250 & 43796.5875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199.5089 & (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ -1011.7888 & (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ -199.5089 & (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ -757.0673 & (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{bmatrix} = \begin{matrix} p_{Gv}^1 \\ p_v^1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 199.5089 \\ -1011.7888 \\ -199.5089 \\ -757.0673 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38.0000 \\ -48.6473 \\ 38.0000 \\ 48.6473 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235.5089 & (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ -1060.4341 & (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ -163.5089 & (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ -708.4200 & (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{bmatrix} = \begin{matrix} p^1 \\ p_G^1 \end{matrix}$$

$$k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0} = p_G^i$$

$$k^i \cdot v^i + p^{i0} = p^i$$

### Knotenkräfte Element 2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & (w_2) & (w_{z2}) \\ 0.01213448 & (\varphi_2) & (\varphi_{y2}) \\ 0.0 & (w_3) & (w_{z3}) \end{bmatrix}$$

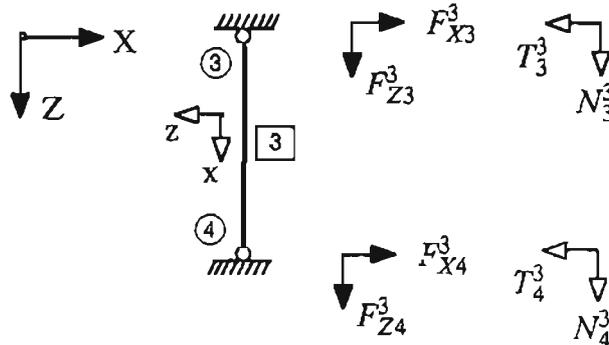
$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5220 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52200 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5220 & \#\#\# \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} -63.3420 & (Q_2^2) & (F_{z2}^2) \\ 633.4200 & (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ 63.3420 & (Q_3^2) & (F_{z3}^2) \end{bmatrix}
 = \mathbf{p}_{Gv}^2$$

$$\begin{bmatrix} -63.3420 \\ 633.4200 \\ 63.3420 \end{bmatrix}
 + \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix} -100.8420 & (Q_2^2) & (F_{z2}^2) \\ 708.4200 & (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ 40.8420 & (Q_3^2) & (F_{z3}^2) \end{bmatrix}
 = \mathbf{p}_G^2$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{p}_G^i$$

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i$$

### Knotenkräfte Element 3



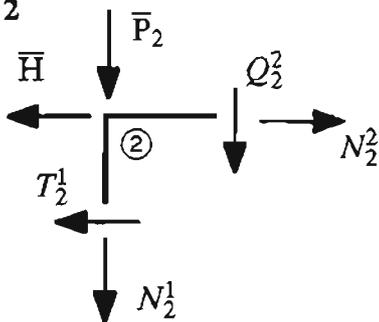
$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{v}_G^3 = \begin{bmatrix} -0.15477254 & (u_{X3}) & (-w_3) \\ 0.0 & (u_{X4}) & (-w_4) \end{bmatrix}
 \text{ (siehe Transformation)}$$

$$\mathbf{k}_G^3 = \begin{bmatrix} -523.4063 & \#\#\# \\ 523.4063 & \#\#\# \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 81.0089 & (F_{X3}^3) & (-T_3^3) \\ -81.0089 & (F_{X4}^3) & (-T_4^3) \end{bmatrix}
 = \mathbf{p}_G^3$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{p}_G^i$$

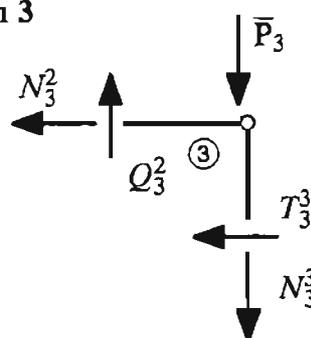
### Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)

Knoten 2



$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_2^2 - \bar{H} - T_2^1 = 0 \\
 N_2^2 &= 82.5 - 163.5089 = -81.0089 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_2^1 + Q_2^2 + \bar{P}_2 = 0 \\
 N_2^1 &= -1050 - 100.842 = -1150.842
 \end{aligned}$$

Knoten 3



$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_3^2 + T_3^3 = 0 \\
 N_3^2 &= -81.0089 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_3^3 - Q_3^2 + \bar{P}_3 = 0 \\
 N_3^3 &= 40.842 - 2100 = -2059.158
 \end{aligned}$$

## 2. Iterationsschritt:

### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)

$$l = 8.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -1150.842\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.90464$$

$$\begin{aligned} A' &= 3.88969 \\ B' &= 2.02799 \\ A' + B' &= 5.91768 \\ D' &= 0.81838 \\ 2*(A' + B') - D' &= 11.01698 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} 11.01698*90000/8/8/8 & -5.91768*90000/8/8 & -11.01698*90000/8/8/8 & -5.91768*90000/8/8 \\ -5.91768*90000/8/8 & 3.88969*90000/8 & 5.91768*90000/8/8 & 2.02799*90000/8 \\ -11.01698*90000/8/8/8 & 5.91768*90000/8/8 & 11.01698*90000/8/8/8 & 5.91768*90000/8/8 \\ -5.91768*90000/8/8 & 2.02799*90000/8 & 5.91768*90000/8/8 & 3.88969*90000/8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} (w_1) & (\varphi_1) & (w_2) & (\varphi_2) \\ (u_{X1}) & (\varphi_{Y1}) & (u_{X2}) & (\varphi_{Y2}) \\ \#\#\# & \#\#\# & -1936.5785 & -8321.7375 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8321.7375 & 22814.8875 \\ \#\#\# & \#\#\# & 1936.5785 & 8321.7375 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8321.7375 & 43759.0125 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

Gleichlast

$$\mathbf{p}_G^{10} = \begin{bmatrix} -q*1/2 \\ q*1^2/2*(A' + B') \\ -q*1/2 \\ -q*1^2/2*(A' + B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9*8/2 \\ -9*8*8/2/5.91768 \\ 9*8/2 \\ 9*8*8/2/5.91768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.6677 \\ 36.0000 \\ 48.6677 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)

$$l = 10.0\text{m}$$

$$EI = 174000\text{kNm}^2$$

$$N = -81.0089\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.21577$$

$$\begin{aligned} A' &= 3.99379 \\ C' &= 2.99068 \\ D' &= 0.04658 \\ C' - D' &= 2.94412 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} 2.94412*174000/10/10/10 & -2.99068*174000/10/10 & -2.94412*174000/10/10/10 \\ -2.99068*174000/10/10 & 2.99068*174000/10 & 2.99068*174000/10/10 \\ -2.94412*174000/10/10/10 & 2.99068*174000/10/10 & 2.94412*174000/10/10/10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} (w_2) & (\varphi_2) & (w_3) \\ (w_{22}) & (\varphi_{Y2}) & (w_{23}) \\ \#\#\# & -5203.7832 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52037.8320 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5203.7832 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_2^2) & (F_{22}^2) \\ (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{23}^2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$W_2=0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3=0$

Lastvektor Theorie II. Ordnung siehe Formelsammlung

Gleichlast

$$\mathbf{p}_G^{20} = \begin{bmatrix} -q*1/2*(1+1/A') \\ q*1^2/2A' \\ -q*1/2*(1-1/A') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8*10/2*(1+1/3.99379) \\ 8*10*10/2/3.99379 \\ -8*10/2*(1-1/3.99379) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5117 \\ 75.1188 \\ -22.4883 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_2^{20}) & (F_{22}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{Y2}^{20}) \\ (T_3^{20}) & (F_{23}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)

$$l = 4,0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -2059.158\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.60504$$

$$D' = 0.38607$$

$$k^3_G = \begin{bmatrix} -0.38607 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 & 0.38607 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 \\ 0.38607 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 & -0.38607 \cdot 90000 / 4 / 4 / 4 \end{bmatrix}$$

$$k^3_G = \begin{bmatrix} (w_3) & (w_4) \\ (u_{X3}) & (u_{X4}) \\ -514.7859 & ### \\ 514.7859 & ### \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_3^3) & (F_{X3}^3) \\ (T_4^3) & (F_{X4}^3) \end{matrix} \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$U_3(1) \quad U_4=0$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 3 entfällt, da mit der negativen Einheitsmatrix transformiert wird. ( $X = -z$ )

### 6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

	$U_2$	$\Phi_2$	
$H_2$	1938.5785	8321.7375	El. 1
	-514.7859		El. 2 El. 3
$M_2$	8321.7375	43759.0125	El. 1
		52037.8320	El. 2 El. 3

$$K_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} 1421.7928 & 8321.7375 \\ 8321.7375 & 95796.8445 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

$$P_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} P^* & P^0 \\ -82.5 & -38.0000 & -0.0000 \\ 0.0 & -48.8877 & -75.1188 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118.5000 \\ -123.7843 \end{bmatrix}$$

### 7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems $K \cdot V = P$

$$V = \begin{bmatrix} -0.15416771 \\ 0.01210018 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

### 8. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

### 9. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

### Knotenkräfte Element 1

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0}$$

$$v^1_G = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.15416771 \\ 0.01210018 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (\varphi_{Y1}) \\ (u_{X2}) \\ (\varphi_{Y2}) \end{matrix}$$

$$k^1_G = \begin{bmatrix} ### & ### & -1938.5785 & -8321.7375 \\ ### & ### & 8321.7375 & 22814.8875 \\ ### & ### & 1938.5785 & 8321.7375 \\ ### & ### & 8321.7375 & 43759.0125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 197.8834 \\ -1008.8790 \\ -197.8834 \\ -753.4514 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \begin{matrix} p^1_{Gv} \\ p^1_v \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 197.8834 \\ -1008.8790 \\ -197.8834 \\ -753.4514 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38.0000 \\ -48.8877 \\ 38.0000 \\ 48.8877 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233.8834 \\ -1055.5467 \\ -161.8834 \\ -704.7838 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \begin{matrix} p^1 \\ p^1_G \end{matrix}$$

$$k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0} = p_G^i$$

$$k^i \cdot v^i + p^{i0} = p^i$$

### Knotenkräfte Element 2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.01210018 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (w_{z2}) \\ (\varphi_2) & (\varphi_{y2}) \\ (w_3) & (w_{z3}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5203.7832 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52037.8320 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5203.7832 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -82.9667 \\ 629.6670 \\ 62.9667 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_2^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_{Gv}^2 \\ \mathbf{p}_v^2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -62.9667 \\ 629.6670 \\ 62.9667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 87.5117 \\ -75.1168 \\ 22.4883 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100.4784 \\ 704.7836 \\ 40.4784 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_2^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_G^2 \\ \mathbf{p}^2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} &= \mathbf{p}_G^i \\
 \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} &= \mathbf{p}^i
 \end{aligned}$$

### Knotenkräfte Element 3

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{v}_G^3 = \begin{bmatrix} -0.15416771 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{x3}) & (-w_3) \\ (u_{x4}) & (-w_4) \end{matrix} \quad (\text{siehe Transformation})$$

$$\mathbf{k}_G^3 = \begin{bmatrix} -514.7859 & \#\#\# \\ 514.7859 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79.3634 \\ -79.3634 \end{bmatrix} \begin{matrix} (F_{x3}^3) & (-T_3^3) \\ (F_{x4}^3) & (-T_4^3) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_G^3 \\ -\mathbf{p}^3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{p}_G^i$$

### Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)

#### Knoten 2

$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_2^2 - \bar{H} - T_2^2 = 0 \\
 N_2^2 &= 82.5 - 161.8636 = -79.3634 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_2^2 + T_2^2 + \bar{F}_2 = 0 \\
 N_2^2 &= -1050 - 100.4784 = -1150.4784
 \end{aligned}$$

#### Knoten 3

$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_3^3 + T_3^3 = 0 \\
 N_3^3 &= -79.3634 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_3^3 - T_3^3 + \bar{F}_3 = 0 \\
 N_3^3 &= 40.4784 - 2100 = -2059.5216
 \end{aligned}$$

### Vergleich der Ergebnisse

	Th. I. O.	Th. II. O. 1. Iteration	Th. II. O. 2. Iteration
$U_2$	-0.07830544	-0.15477254	-0.15416771
$\Phi^2$	0.00553191	0.01213448	0.01210018
$M_1^1$	584.2340	1060.4341	1055.5467
$M_2^1$	-363.7660	-708.4200	-704.7836
$T_1^1$	-154.5000	-235.5089	-233.8634
$T_2^1$	-82.5000	-163.5089	-161.8634
$T_2^2$	66.3766	100.8420	100.4784
$T_3^2$	6.3766	40.8420	40.4780
$T_3^3$	0.0000	81.0089	79.3634
$N^1$	-1116.3760	-1150.8420	-1150.4784
$N^2$	0.0000	-81.0089	-79.3634
$N^3$	-2093.6230	-2059.1580	-2059.5216

## Berechnung des Verlaufs der Zustandsgrößen

### 1. Übertragungsverfahren

$$z(x) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)} l\xi & -\frac{(\varepsilon\xi) - \sin(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)^3} \frac{(l\xi)^3}{EI} & -\frac{1 - \cos(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)^2} \frac{(l\xi)^2}{EI} \\ 0 & \cos(\varepsilon\xi) & \frac{1 - \cos(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)^2} \frac{(l\xi)^2}{EI} & \frac{\sin(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)} \frac{l\xi}{EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon\xi) \sin(\varepsilon\xi) \frac{EI}{l\xi} & \frac{\sin(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)} l\xi & \cos(\varepsilon\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ T_a \\ M_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \frac{(\varepsilon\xi)^2 - 2[1 - \cos(\varepsilon\xi)]}{2(\varepsilon\xi)^4} \frac{(l\xi)^4}{EI} \\ -q \frac{(\varepsilon\xi) - \sin(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)^3} \frac{(l\xi)^3}{EI} \\ -ql\xi \\ -q \frac{1 - \cos(\varepsilon\xi)}{(\varepsilon\xi)^2} (l\xi)^2 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Zustandsgrößen in der Mitte des Element 1 ( $\xi=0.5$ )

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ -233.8836 \\ 1055.5487 \end{bmatrix}$$

$$U^1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -3.8850 & -0.00011731 & -0.00008738 \\ 0.0000 & 0.89943558 & 0.00008738 & 0.00004294 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -4447.9798 & 3.8850 & 0.89943558 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.06480254 \\ 0.02489392 \\ -233.8836 \\ 45.5151 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.00105942 \\ 0.00105581 \\ 36.0000 \\ 70.7808 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06586196 \\ 0.02594973 \\ -197.8636 \\ 116.2959 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_1) \\ (\varphi_1) \\ (T_1) \\ (M_1) \end{matrix} = z_1$$

$$U^1 \cdot z_0 + \bar{z}^1 = z_1$$

Berechnung der Querkraft

$$Q = T - N \cdot w' = T + N \cdot \varphi$$

$$Q = -197.8636 - 1150.4784 \cdot 0.02594973 = -227.7182$$

Berechnung der Zustandsgrößen am Elementende 1 ( $\xi=1.0$ )

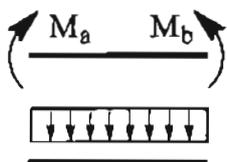
$$z_1 = \begin{bmatrix} -0.06586196 \\ 0.02594973 \\ -197.8636 \\ 116.2959 \end{bmatrix}$$

(Siehe Knoten 2)

$$U^2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -3.8850 & -0.00011731 & -0.00008738 \\ 0.0000 & 0.89943556 & 0.00008738 & 0.00004294 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -4447.9798 & 3.8850 & 0.89943558 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.15310806 \\ 0.01104431 \\ -197.8836 \\ -775.5847 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.00105942 \\ 0.00105581 \\ 36.0000 \\ 70.7808 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15416748 \\ 0.01210012 \\ -181.8836 \\ -704.7839 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) \\ (\varphi_2) \\ (T_2) \\ (M_2) \end{matrix} = z_2$$

$$U^2 \cdot z_1 + \bar{z}^2 = z_2$$

### 2. Berechnung nach Formelsammlung



$$M(\xi) = M_a \frac{\sin(\varepsilon\xi')}{\sin \varepsilon} + M_b \frac{\sin(\varepsilon\xi)}{\sin \varepsilon}$$

$$Q(\xi) = -\frac{M_a \varepsilon \cos(\varepsilon\xi')}{l \sin \varepsilon} + \frac{M_b \varepsilon \cos(\varepsilon\xi)}{l \sin \varepsilon}$$

$$M(\xi) = \frac{ql^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\cos[\varepsilon(0.5 - \xi)]}{\cos(0.5 \varepsilon)} - 1 \right]$$

$$Q(\xi) = ql \frac{\sin[\varepsilon(0.5 - \xi)]}{\varepsilon \cos(0.5 \varepsilon)}$$

$$M(0.5) = 586.7828 - 391.7922 - 78.6947 = 116.2959$$

$$Q(0.5) = -136.5522 - 91.1753 - 0.0000 = -227.7274$$

$$Q(1.0) = -151.8130 - 62.6516 + 38.6733 = -175.791$$

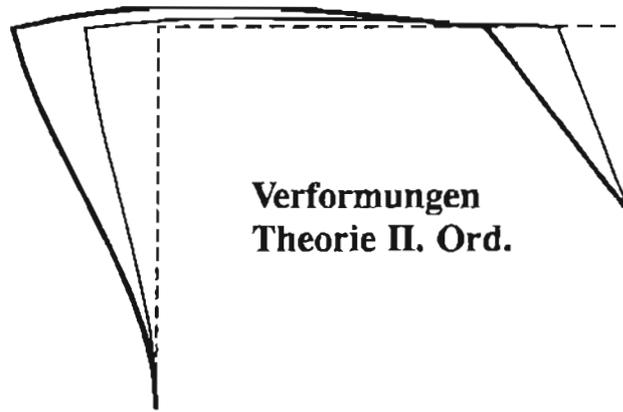
Berechnung nach Theorie I. Ordnung

$$M(0.5) = 1055.5467/2 - 704.7836/2 - 9 \cdot 8 \cdot 8/8$$

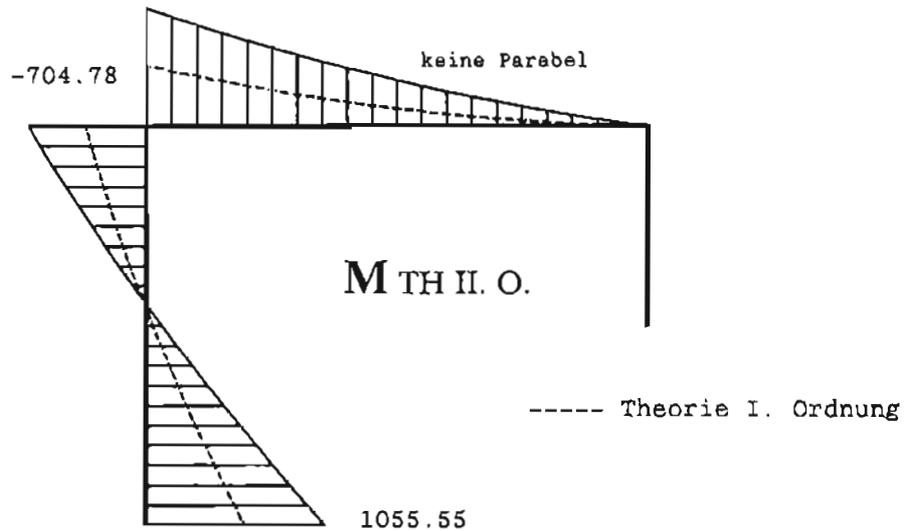
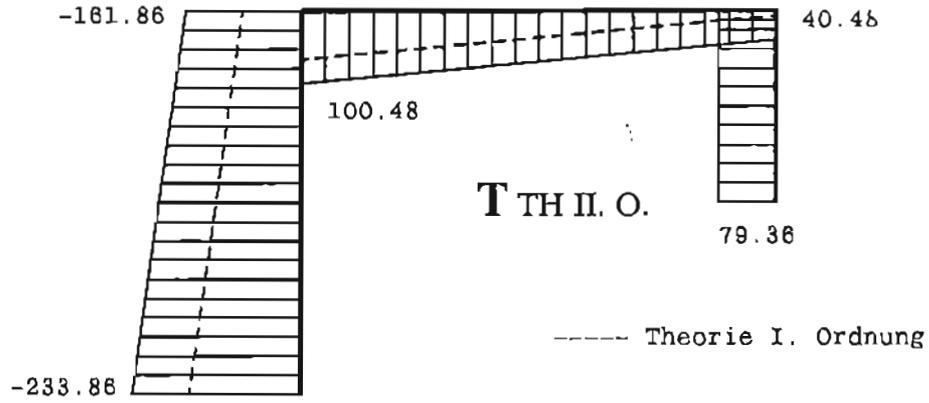
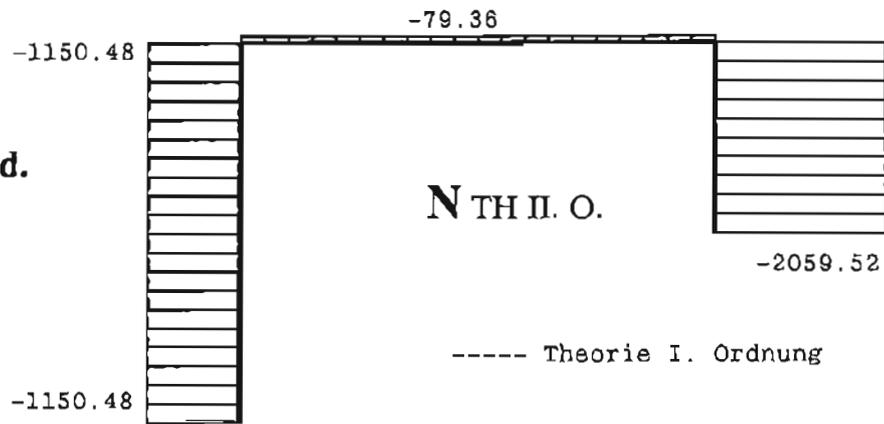
$$M(0.5) = 527.773 - 352.3919 - 72.0 = 103.3815$$

$$Q(0.5) = -233.8634/2 - 161.8634/2 = -116.9317 - 80.9317 = -197.8634$$

falsch



**Schnittgrößen  
Theorie II. Ord.**

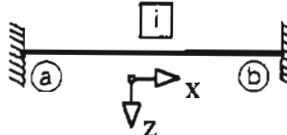


### Berechnung des Systems mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix

lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  nach Theorie II. Ordnung mit genäherter Lösung (Geometrische Matrix):

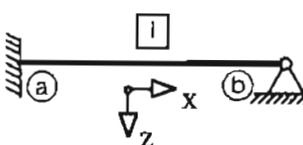
Steifigkeitsmatrix für den beidseitig eingespannten Stab:

N mit Vorzeichen einsetzen  
Druck -  
Zug +



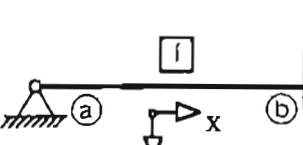
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \vdots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 & \frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}l & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 & \frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \vdots \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ M_a^0 \\ \vdots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Stab:



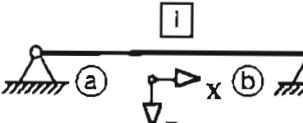
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \vdots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3l & -3 \\ -3l & 3l^2 & 3l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & 3l & 3 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5}l & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l^2 & \frac{1}{5}l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{5}l & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \vdots \\ w_b \\ T_b^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ M_a^0 \\ \vdots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den rechts eingespannten, links gelenkig gelagerten Stab:



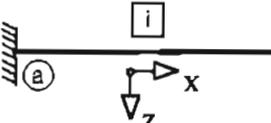
$$\begin{bmatrix} T_a \\ \vdots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3l \\ -3 & 3 & 3l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -3l & 3l & 3l^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5}l \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5}l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \vdots \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ \vdots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} T_a \\ \vdots \\ T_b \end{bmatrix} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \vdots \\ w_b \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den Kragarm:



$$[M_a] = \frac{N}{l} [l^2] \cdot [\varphi_a] + [M_a^0]$$

Ein Vergleich mit der analytischen Steifigkeitsmatrix ist möglich, wenn man in diese die Reihenentwicklung für die Koeffizienten  $A'$  und  $B'$  einsetzt.

Man erhält noch eine sehr gute Näherung, wenn man die Reihen nach dem zweiten Glied abbricht, solange  $\varepsilon^2 \leq 1.0$  ist. Dies kann man praktisch immer erzwingen durch eine Verkürzung

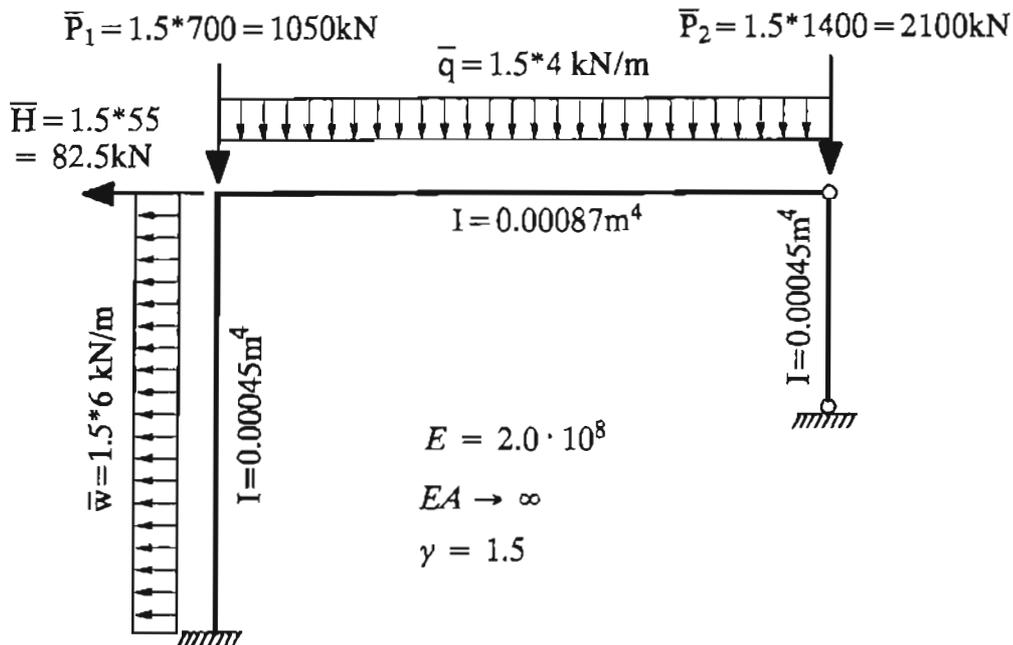
der Elementlänge  $l \cong 1.0 \sqrt{\frac{EI}{|N|}}$

### 3. Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit genäherter Steifigkeitsmatrix

#### Berechnung nach Theorie I. Ordnung wie vorher!

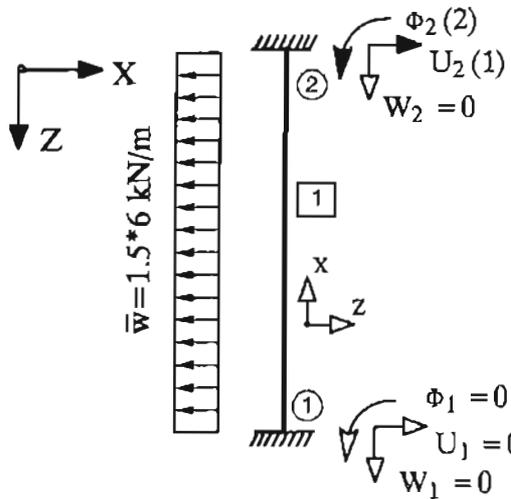
#### 1. Iterationsschritt:

#### System



1. Schritt: Numerierung der Knoten und der Stäbe  
Wahl eines globalen (X, Y, Z) und für jedes Element eines lokalen (x, y, z) Koordinatensystems.  
Multiplizieren der Lasten mit dem Sicherheitsbeiwert  $\gamma$
2. Schritt: Antragen der globalen Knotenverformungen und feststellen der abhängigen Verschiebungen (evtl. mit Kinematik)
3. Schritt: Berechnen der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren für jedes Element.
4. Schritt: Transformationsmatrix vom globalen ins lokale Koordinatensystem aufstellen.
5. Schritt: Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)



$$l = 8.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -1116.376\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.89099$$

$$k_{el}^1 = \begin{bmatrix} 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -6 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 \\ -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 \end{bmatrix}$$

$$k_{el}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -2109.3750 & -8437.5000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.5000 & 22500.0000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 2109.3750 & 8437.5000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.5000 & 45000.0000 \end{bmatrix}$$

$$k_{geo}^1 = -1116.376 \begin{bmatrix} 6/5/8 & -1/10 & -6/5/8 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 \cdot 8 & 1/10 & -1/30 \cdot 8 \\ -6/5/8 & 1/10 & 6/5/8 & 1/10 \\ -1/10 & -1/30 \cdot 8 & 1/10 & 2/15 \cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$k_{geo}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & 167.4565 & 111.6377 \\ \#\#\# & \#\#\# & -111.6377 & 297.7004 \\ \#\#\# & \#\#\# & -167.4565 & -111.6377 \\ \#\#\# & \#\#\# & -111.6377 & -1190.8017 \end{bmatrix}$$

$$k_G^1 = k_{el}^1 + k_{geo}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -1941.9185 & -8325.8623 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8325.8623 & 22797.7004 \\ \#\#\# & \#\#\# & 1941.9185 & 8325.8623 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8325.8623 & 43808.1983 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

$U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

Der Elementlastvektor ändert sich nicht!

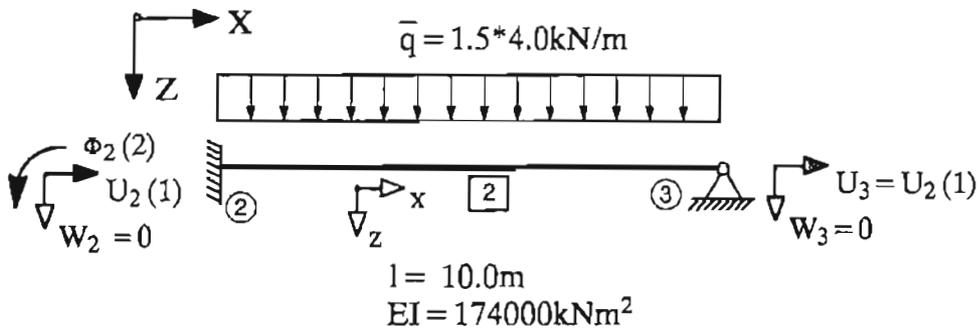
Gleichlast

$$p_G^{10} = \begin{bmatrix} -q \cdot l / 2 \\ q \cdot l^2 / 12 \\ -q \cdot l / 2 \\ -q \cdot l^2 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 8 / 2 \\ -9 \cdot 8 \cdot 8 / 12 \\ 9 \cdot 8 / 2 \\ 9 \cdot 8 \cdot 8 / 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.0000 \\ 36.0000 \\ 48.0000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)

$N = 0 \rightarrow$  Berechnung nach Theorie I. Ordnung



$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^i = \begin{bmatrix} 3 \frac{EI}{l^3} & -3 \frac{EI}{l^2} & -3 \frac{EI}{l^3} \\ -3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l} & 3 \frac{EI}{l^2} \\ -3 \frac{EI}{l^3} & 3 \frac{EI}{l^2} & 3 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & -5220 & \text{###} \\ \text{###} & 52200 & \text{###} \\ \text{###} & 5220 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (\varphi_2) & (w_3) \\ (w_{z2}) & (\varphi_{y2}) & (w_{z3}) \end{matrix} \begin{matrix} (Q_2^z) & (F_{z2}^z) \\ (M_2^z) & (M_{y2}^z) \\ (Q_3^z) & (F_{z3}^z) \end{matrix}$$

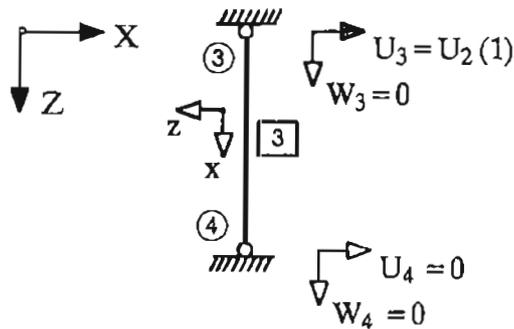
lokale = globale Steifigkeitsmatrix

$W_2 = 0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3 = 0$

Gleichlast

$$\mathbf{p}_G^{20} = \begin{bmatrix} -5 \cdot q \cdot l / 8 \\ q \cdot l^2 / 8 \\ -3 \cdot q \cdot l / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \cdot 10 \cdot 5 / 8 \\ 6 \cdot 10 \cdot 10 / 8 \\ -6 \cdot 10 \cdot 5 / 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{z3}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)



$l = 4.0\text{m}$   
 $EI = 90000\text{kNm}^2$   
 $N = -2093.6234\text{kN}$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.61008$$

$$\mathbf{k}_{geo}^3 = -2093.6234 \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^3 = \begin{bmatrix} -523.4058 & \text{###} \\ 523.4058 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_3) & (w_4) \\ (u_{x3}) & (u_{x4}) \end{matrix} \begin{matrix} (T_3^z) & (F_{x3}^z) \\ (T_4^z) & (F_{x4}^z) \end{matrix}$$

lokale = globale Steifigkeitsmatrix

$U_3(1) \quad U_4 = 0$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 3 entfällt, da mit der negativen Einheitsmatrix transformiert wird. ( $X = -z$ )

6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

Zuordnungstafel:	$(u_{Xa})$	$(w_{Za})$	$(\varphi_{Ya})$	$(u_{Xb})$	$(w_{Zb})$	$(\varphi_{Yb})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	0	0
Element 3	1	0	0	0	0	0

Gleichgewicht an jedem Knoten k:

$$\sum_i F_{Xk}^i \quad \sum_i F_{Zk}^i \quad \sum_i M_{Yk}^i$$

	1 $U_2$	2 $\Phi_2$	
1 $H_2$	1941.9185 -523.4059	8325.8623	El. 1 El. 2 El. 3
2 $M_2$	8325.8623	43809.1983 52200.0000	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{ges} = \begin{bmatrix} 1418.5127 & 8325.8623 \\ 8325.8623 & 96009.1983 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $P = P^* - P^0$

$$P_{ges} = \begin{bmatrix} -82.5 & -36.0000 & -0.0 \\ 0.0 & -48.0000 & -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118.5000 \\ -123.0000 \end{bmatrix}$$

7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems  $K \cdot V = P$  Lastspalte wie vorher

$$V = \begin{bmatrix} -0.15482228 \\ 0.01214497 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

8. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

9. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

Knotenkräfte Element 1

$$p_G^i = k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0}$$

$$p^i = k^i \cdot v^i + p^{i0}$$

$$v_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.15482228 \\ 0.01214497 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (\varphi_{Y1}) \\ (u_{X2}) \\ (\varphi_{Y2}) \end{matrix}$$

$$k_G^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -1941.9185 & -8325.8623 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8325.8623 & 22797.7004 \\ \#\#\# & \#\#\# & 1941.9185 & 8325.8623 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8325.8623 & 43809.1983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199.5349 \\ -1012.1515 \\ -199.5349 \\ -758.9875 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \begin{matrix} p_{Gv}^1 \\ p_v^1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 199.5349 \\ -1012.1515 \\ -199.5349 \\ -758.9875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.0000 \\ 38.0000 \\ 48.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235.5349 \\ -1060.1515 \\ -163.5349 \\ -708.9875 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \begin{matrix} p^1 \\ p_G^1 \end{matrix}$$

$$k_G^i \cdot v_G^i + p_G^{i0} = p_G^i$$

$$k^i \cdot v^i + p^{i0} = p^i$$

### Knotenkräfte Element 2

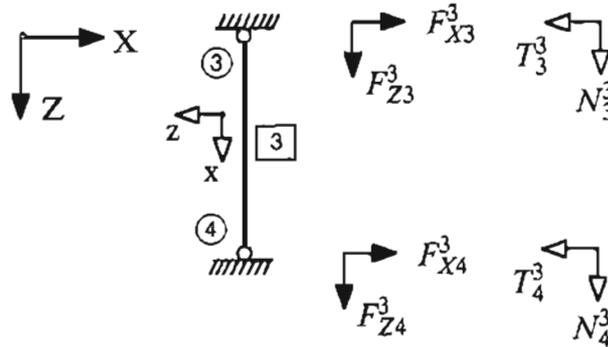
$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{v}_G^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.01214497 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (\varphi_{y2}) \\ (\varphi_{z2}) & (w_{z3}) \\ (w_3) & (w_{z3}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5220 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52200 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5220 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -63.3988 & (Q_2^2) & (F_{Z2}^2) \\ 633.9675 & (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ 63.3988 & (Q_3^2) & (F_{Z3}^2) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_{Gv}^2 \\ \mathbf{p}_v^2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -63.3988 \\ 633.9675 \\ 63.3988 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100.8968 & (Q_2^2) & (F_{Z2}^2) \\ 708.9675 & (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ 40.8968 & (Q_3^2) & (F_{Z3}^2) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_G^2 \\ \mathbf{p}^2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} &= \mathbf{p}_G^i \\
 \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} &= \mathbf{p}^i
 \end{aligned}$$

### Knotenkräfte Element 3



$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i
 \end{aligned}$$

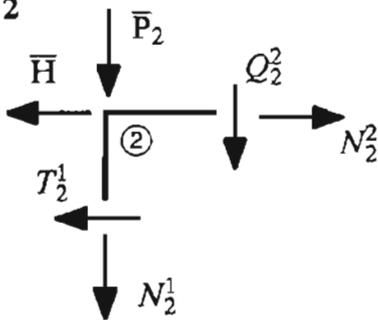
$$\mathbf{v}_G^3 = \begin{bmatrix} -0.15482228 & (u_{X3}) & (-w_3) \\ 0.0 & (u_{X4}) & (-w_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^3 = \begin{bmatrix} -523.4059 & \#\#\# \\ 523.4059 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81.0349 & (F_{X3}^3) & (-T_3^3) \\ -81.0349 & (F_{X4}^3) & (-T_4^3) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{p}_G^3 \\ -\mathbf{p}^3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{p}_G^i$$

### Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)

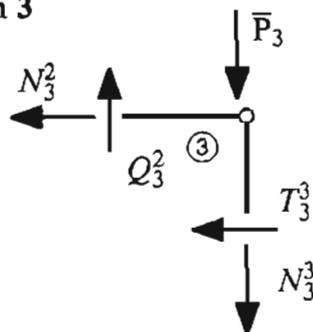
#### Knoten 2



$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_2^2 - \bar{H} - T_2^1 = 0 \\
 N_2^2 &= 82.5 - 163.5349 = -81.0349
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum V = 0 &\rightarrow N_2^1 + Q_2^2 + \bar{P}_2 = 0 \\
 N_2^1 &= -1050 - 100.8968 = -1150.8968
 \end{aligned}$$

#### Knoten 3



$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_3^2 + T_3^3 = 0 \\
 N_3^2 &= -81.0349
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum V = 0 &\rightarrow N_3^3 - Q_3^2 + \bar{P}_3 = 0 \\
 N_3^3 &= 40.8869 - 2100 = -2059.1032
 \end{aligned}$$

## 2. Iterationsschritt:

### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)

$$l = 8.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -1150.8968\text{kN}$$

$$\mathbf{k}_{el}^1 = \begin{bmatrix} 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -8 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 & 8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 \\ -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 8 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 & 8 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{el}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -2109.3750 & -8437.5000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.5000 & 22500.0000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 2109.3750 & 8437.5000 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8437.5000 & 45000.0000 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.90466$$

$$\mathbf{k}_{geo}^1 = -1150.8968 \begin{bmatrix} 6/5/8 & -1/10 & -8/5/8 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 \cdot 8 & 1/10 & -1/30 \cdot 8 \\ -8/5/8 & 1/10 & 6/5/8 & 1/10 \\ -1/10 & -1/30 \cdot 8 & 1/10 & 2/15 \cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{geo}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & 172.6345 & 115.0897 \\ \#\#\# & \#\#\# & -115.0897 & 306.9058 \\ \#\#\# & \#\#\# & -172.6345 & -115.0897 \\ \#\#\# & \#\#\# & -115.0897 & -1227.6232 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \mathbf{k}_{el}^1 + \mathbf{k}_{geo}^1 = \begin{bmatrix} \#\#\# & \#\#\# & -1938.7405 & -8322.4103 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8322.4103 & 22806.9058 \\ \#\#\# & \#\#\# & 1938.7405 & 8322.4103 \\ \#\#\# & \#\#\# & 8322.4103 & 43772.3768 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} \text{ lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

Gleichlast  $U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

$$\mathbf{p}_G^{10} = \begin{bmatrix} -q \cdot 1/2 \\ q \cdot 1^2/12 \\ -q \cdot 1/2 \\ -q \cdot 1^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 8/2 \\ -9 \cdot 8 \cdot 8/12 \\ 9 \cdot 8/2 \\ 9 \cdot 8 \cdot 8/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.0000 \\ 36.0000 \\ 48.0000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

### Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)

$$l = 10.0\text{m}$$

$$EI = 174000\text{kNm}^2$$

$$N = -81.0349\text{kN}$$

$$\mathbf{k}_{el}^2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{el}^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5220 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52200 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5220 & \#\#\# \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{geo}^2 = -81.0349 \begin{bmatrix} 6/5/10 & -1/5 & -8/5/10 \\ -1/5 & 1/5 \cdot 10 & 1/5 \\ -6/5/10 & 1/5 & 8/5/10 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.21580$$

$$\mathbf{k}_{geo}^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & 18.2070 & \#\#\# \\ \#\#\# & -162.0698 & \#\#\# \\ \#\#\# & -18.2070 & \#\#\# \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_G^2 = \begin{bmatrix} \#\#\# & -5203.7930 & \#\#\# \\ \#\#\# & 52037.9302 & \#\#\# \\ \#\#\# & 5203.7930 & \#\#\# \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_2^2) & (F_{Z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{Y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{Z3}^2) \end{matrix} \text{ lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

$W_2=0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3=0$

Gleichlast

$$\mathbf{p}_G^{20} = \begin{bmatrix} -5 \cdot q \cdot 1/8 \\ q \cdot 1^2/8 \\ -3 \cdot q \cdot 1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \cdot 10 \cdot 5/8 \\ 6 \cdot 10 \cdot 10/8 \\ -6 \cdot 10 \cdot 3/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_2^{20}) & (F_{Z2}^{20}) \\ (M_2^{20}) & (M_{Y2}^{20}) \\ (Q_3^{20}) & (F_{Z3}^{20}) \end{matrix}$$

### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)

$$\mathbf{k}_{geo}^3 = -2059.1032 \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$l = 4.0m$$

$$EI = 90000kNm^2$$

$$N = -2059.1032kN$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.60503$$

$$\mathbf{k}_G^3 = \begin{bmatrix} (w_3) & (w_4) \\ (u_{X3}) & (u_{X4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (T_3^3) & (F_{X3}^3) \\ (T_4^3) & (F_{X4}^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{lokale = globale} \\ \text{Steifigkeitsmatrix} \end{matrix}$$

$$U_3(1) \quad U_4=0$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 3 entfällt, da mit der negativen Einheitsmatrix transformiert wird. ( X = -z )

### 6. Schritt: Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)

	U <sub>2</sub>	Φ <sub>2</sub>	
H <sub>2</sub>	1936.7405	8322.4103	El. 1
	-514.7758		El. 2 El. 3
M <sub>2</sub>	8322.4103	43772.3768	El. 1
		52037.9302	El. 2 El. 3

$$\mathbf{K}_{ges} = \begin{bmatrix} 1421.9847 & 8322.4103 \\ 8322.4103 & 95810.3070 \end{bmatrix}$$

Überlagerung des Lastvektors  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* - \mathbf{P}^0$

$$\mathbf{P}_{ges} = \begin{bmatrix} -82.5 & -36.0000 & -0.0000 \\ 0.0 & -48.0000 & -75.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118.5000 \\ -123.0000 \end{bmatrix}$$

### 7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.15423151 \\ 0.01211329 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (\Phi_2) \end{matrix}$$

### 8. Schritt: Ermittlung der Elementverschiebungen

### 9. Schritt: Ermittlung der Knotenkraftgrößen

### Knotenkräfte Element 1

$$\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

$$\mathbf{v}_G^1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.15423151 \\ 0.01211329 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_{X1}) \\ (\varphi_{Y1}) \\ (u_{X2}) \\ (\varphi_{Y2}) \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_G^1 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & -1936.7405 & -8322.4103 \\ \text{###} & \text{###} & 8322.4103 & 22806.9058 \\ \text{###} & \text{###} & 1936.7405 & 8322.4103 \\ \text{###} & \text{###} & 8322.4103 & 43772.3768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 197.8947 \\ -1007.3113 \\ -197.8947 \\ -753.3505 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{p}_{Gv}^1$$

$$\begin{bmatrix} 197.8947 \\ -1007.3113 \\ -197.8947 \\ -753.3505 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.0000 \\ 36.0000 \\ 48.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233.8947 \\ -1055.3113 \\ -161.8947 \\ -705.3505 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{X1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{Y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{X2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{Y2}^1) \end{matrix} = \mathbf{p}_G^1$$

$$\mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{p}_G^i$$

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i$$

### Knotenkräfte Element 2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} \\
 \mathbf{k}_G^2 &= \begin{bmatrix} \text{###} & -5203.7930 & \text{###} \\ \text{###} & 52037.9302 & \text{###} \\ \text{###} & 5203.7930 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & (w_2) & (w_{22}) \\ 0.01211329 & (\varphi_2) & (\varphi_{\gamma 2}) \\ 0.0 & (w_3) & (w_{23}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -63.0350 & (T_2^2) & (F_{22}^2) \\ 630.3505 & (M_2^2) & (M_{\gamma 2}^2) \\ 63.0350 & (T_3^2) & (F_{23}^2) \end{bmatrix} = \mathbf{p}_{Gv}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} -63.0350 \\ 630.3505 \\ 63.0350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -37.5 \\ 75.0 \\ -22.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100.5350 & (T_2^2) & (F_{22}^2) \\ 705.3505 & (M_2^2) & (M_{\gamma 2}^2) \\ 40.5350 & (T_3^2) & (F_{23}^2) \end{bmatrix} = \mathbf{p}_G^2 \\
 &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{p}_G^i \\
 &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} = \mathbf{p}^i
 \end{aligned}$$

### Knotenkräfte Element 3

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{v}^i \\
 \mathbf{k}_G^3 &= \begin{bmatrix} -514.7758 & \text{###} \\ 514.7758 & \text{###} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.15423151 & (u_{x3}) & (-w_3) \\ 0.0 & (u_{x4}) & (-w_4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 79.3947 & (F_{x3}^3) & (-T_3^3) \\ -79.3947 & (F_{x4}^3) & (-T_4^3) \end{bmatrix} = \mathbf{p}_{Gv}^3 \\
 &= \mathbf{k}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{p}_G^i
 \end{aligned}$$

### Normalkräfte aus Gleichgewicht an den Knoten (VZK I)

#### Knoten 2

$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_2^2 - \bar{H} - T_3^2 = 0 \\
 N_2^2 &= 82.5 - 161.8947 = -79.3947 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_2^2 + T_3^2 + \bar{F}_2 = 0 \\
 N_2^2 &= -1050 - 100.5350 = -1150.5384
 \end{aligned}$$

#### Knoten 3

$$\begin{aligned}
 \sum H = 0 &\rightarrow N_3^2 + T_3^3 = 0 \\
 N_3^2 &= -79.3947 \\
 \sum V = 0 &\rightarrow N_3^2 - T_3^3 + \bar{F}_3 = 0 \\
 N_3^2 &= 40.5350 - 2100 = -2059.465
 \end{aligned}$$

### Vergleich der Ergebnisse

	Th. I. O.		Th. II. O. 1. Iteration		Th. II. O. 2. Iteration	
	analytisch	Näherung	analytisch	Näherung	analytisch	Näherung
$U_2$	-0.07830544	-0.15477254	-0.15482228	-0.15416771	-0.15423151	
$\Phi^2$	0.00553191	0.01213448	0.01214497	0.01210018	0.01211329	
$M_1^2$	584.2340	1060.4341	1060.1515	1055.5467	1055.3113	
$M_2^2$	-363.7660	-708.4200	-708.9675	-704.7836	-705.3505	
$T_1^2$	-154.5000	-235.5089	-235.5349	-233.8634	-233.8947	
$T_2^2$	-82.5000	-163.5089	-163.5349	-161.8634	-161.8947	
$T_3^2$	66.3766	100.8420	100.8968	100.4784	100.5350	
$T_4^2$	6.3766	40.8420	40.8968	40.4780	40.5350	
$T_3^3$	0.0000	81.0089	81.0349	79.3634	79.3947	
$N^1$	-1116.3760	-1150.8420	-1150.8968	-1150.4784	-1150.5350	
$N^2$	0.0000	-81.0089	-81.0349	-79.3634	-79.3947	
$N^3$	-2093.6230	-2059.1580	-2059.1032	-2059.5216	-2059.4650	

## CAL-Eingabedatei zur Berechnung des vorherigen Beispiels

```

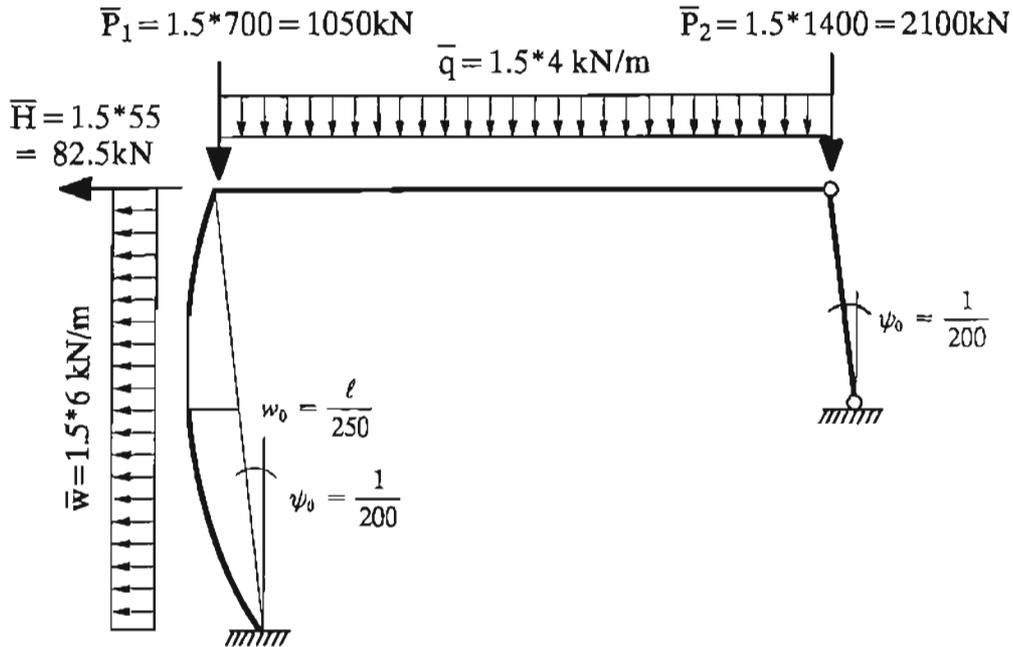
START
NOECHO N=0
*** BEISPIEL : RAHMEN ALS SPANNUNGSPROBLEM ***
LOADID L NE=3 NF=8
  0  0  0  1  2  3
  1  2  3  4  5  6
  4  5  7  0  0  8
LOAD N1 Z=1 S=1
0.000001
LOAD N2 Z=1 S=1
0.000001
LOAD N3 Z=1 S=1
0.000001
LOOP $MBEG N=4
$MBEG
FRAME K1 S1 KG1 SG1 E=2.0E8 A=1.6E2 I=4.5E-4 X=0,0 Z=8,0 N=N1(1) ST=1
FRAME K2 S2 KG2 SG2 E=2.0E8 A=2.0E2 I=8.7E-4 X=0,10 Z=0,0 N=N2(1) ST=1
FRAME K3 S3 KG3 SG3 E=2.0E8 A=1.6E2 I=4.5E-4 X=10,10 Z=0,4 N=N3(1) ST=1
FRAMEQ P1 PL1 PQ=-8 X=0,0 Z=8,0 E=2.0E8 I=4.5E-4 N=N1(1) ST=1
PRINT P1
PRINT PL1
FRAMEQ P2 PL2 PQ=6 X=0,10 Z=0,0 E=2.0E8 I=8.7E-4 N=N2(1) ST=1
PRINT P2
PRINT PL2
ADD K1 KG1
ADD S1 SG1
ADD K2 KG2
ADD S2 SG2
ADD K3 KG3
ADD S3 SG3
ZERO K Z=8 S=8
ADDK K K1 L N=1
ADDK K K2 L N=2
ADDK K K3 L N=3
ZERO PP Z=8 S=1
ADDK PP P1 L N=1 ST=1
ADDK PP P2 L N=2 ST=1
PRINT PP
LOAD P Z=8 S=1
-82.5
1050.0
  0.0
  0.0
2100.0
  0.0
  0.0
  0.0
ADD P PP
PRINT P
DUP P V
ECHO
SOLVE K V
NOECHO N=0
MEMFRC S1 V L F1 N=1
MEMFRC S2 V L F2 N=2
MEMFRC S3 V L F3 N=3
ADD F1 PL1
ADD F2 PL2
PRINT V
PRINT F1 L=1
  *** Schnittgroessen Element 1 ***
PRINT F2 L=1
  *** Schnittgroessen Element 2 ***
PRINT F3 L=1
  *** Schnittgroessen Element 3 ***
DUPSM F1 N1 1 1 4 1
DUPSM F2 N2 1 1 4 1
DUPSM F3 N3 1 1 4 1
NEXT $MBEG
RETURN

```

4. Vorverformungen bei Druckstäben Theorie II. Ordnung

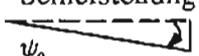
$N < 0$

System mit Vorverformungen

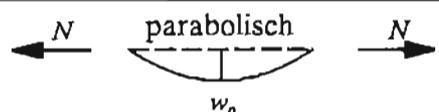
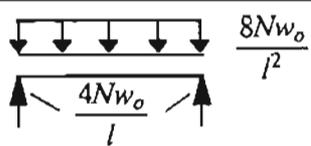
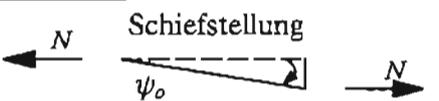
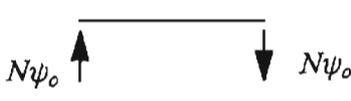


Belastung aus Vorverformungen :

$N < 0$

	$a \rightleftarrows b$ Knotenkraftgrößen			
Vorverformung	$M_a^e$	$M_b^e$	$T_a^e$	$T_b^e$
parabolisch 	$-\frac{4}{A' + B'} N w_0$	$\frac{4}{A' + B'} N w_0$	0	0
Schiefstellung 	0	0	$-N \psi_0$	$N \psi_0$

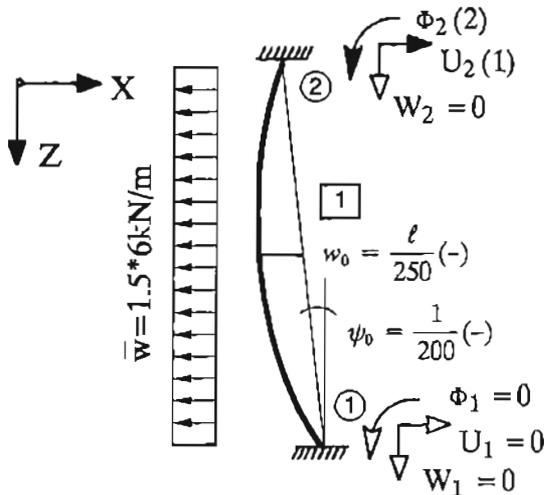
Vorverformungen können für die Berechnung der Biegemomente auch durch statisch gleichwertige Ersatzlastgruppen ersetzt werden (beachte, daß sowohl die Streckenlast als auch die Reaktionskräfte angesetzt werden müssen, wegen  $\Sigma V = 0$ ) :

Vorverformung	Ersatzlast
	
	

## Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit analytischer Steifigkeitsmatrix

### 1. Iterationsschritt:

#### Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)



$$l = 8.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -1116.376\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.89099$$

$$\begin{aligned} A' &= 3.89303 \\ B' &= 2.02713 \\ A' + B' &= 5.92016 \\ 2 * (A' + B') - D' &= 11.04646 \end{aligned}$$

Der Elementlastvektor ändert sich durch die Normalkraft

Gleichlast

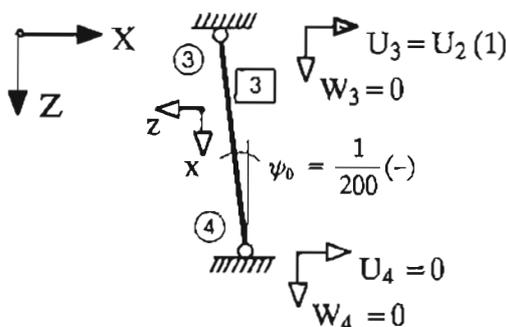
$$\mathbf{p}^{10}_G = \begin{bmatrix} -q \cdot l/2 \\ q \cdot l^2/2(A' + B') \\ -q \cdot l/2 \\ -q \cdot l^2/2(A' + B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 8/2 \\ -9 \cdot 8^2/2/5.92016 \\ 9 \cdot 8/2 \\ 9 \cdot 8^2/2/5.92016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.0000 \\ -48.8473 \\ 36.0000 \\ 48.8473 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Vorverformung

$$\mathbf{p}^{10}_G = \begin{bmatrix} -N \psi_0 \\ -4 \cdot N \cdot w_0 / (A' + B') \\ N \psi_0 \\ 4 \cdot N \cdot w_0 / (A' + B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1116.376 \cdot 1/200 \\ -4 \cdot 1116.376 \cdot 8/250/5.92016 \\ 1116.376 \cdot 1/200 \\ 4 \cdot 1116.376 \cdot 8/250/5.92016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5819 \\ -24.1372 \\ 5.5819 \\ 24.1372 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^{10}) & (F_{X1}^{10}) \\ (M_1^{10}) & (M_{Y1}^{10}) \\ (T_2^{10}) & (F_{X2}^{10}) \\ (M_2^{10}) & (M_{Y2}^{10}) \end{matrix}$$

Transformation von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

#### Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)



$$l = 4.0\text{m}$$

$$EI = 90000\text{kNm}^2$$

$$N = -2093.6234\text{kN}$$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.61008$$

$$\mathbf{p}^{30}_G = \begin{bmatrix} -N \psi_0 \\ N \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2093.6234 \cdot 1/200 \\ 2093.6234 \cdot 1/200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.4681 \\ 10.4681 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_3^3) & (F_{X3}^3) \\ (T_4^3) & (F_{X4}^3) \end{matrix}$$

Transformation mit der negativen Einheitsmatrix ( $X = -z$ )

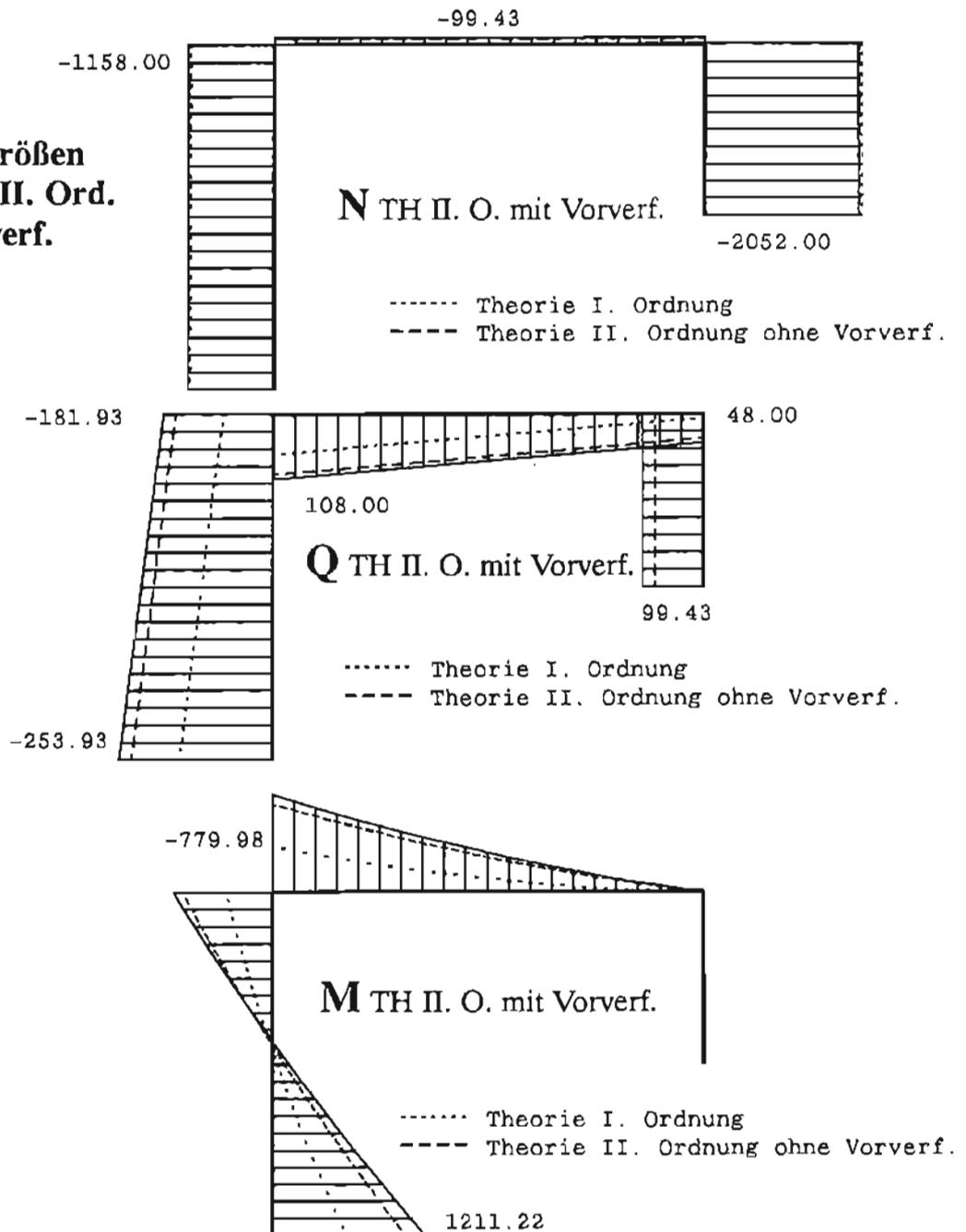
$$\mathbf{p}^{30}_G = \begin{bmatrix} 10.4681 \\ -10.4681 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_3^3) & (F_{X3}^3) \\ (T_4^3) & (F_{X4}^3) \end{matrix}$$

Beim ersten Iterationsschritt ist die weitere Rechnung mit den neuen Lastvektoren und den gleichen Steifigkeitsmatrizen, wie im vorherigen Fall durchzuführen. Beim zweiten Iterationsschritt ändern sich durch die Normalkräfte und die Verschiebungen sowohl Lastvektoren als auch die Steifigkeitsmatrizen. Die Ergebnisse der Rechnung sind auf der folgenden Seite dargestellt.

**Vergleich der Ergebnisse**

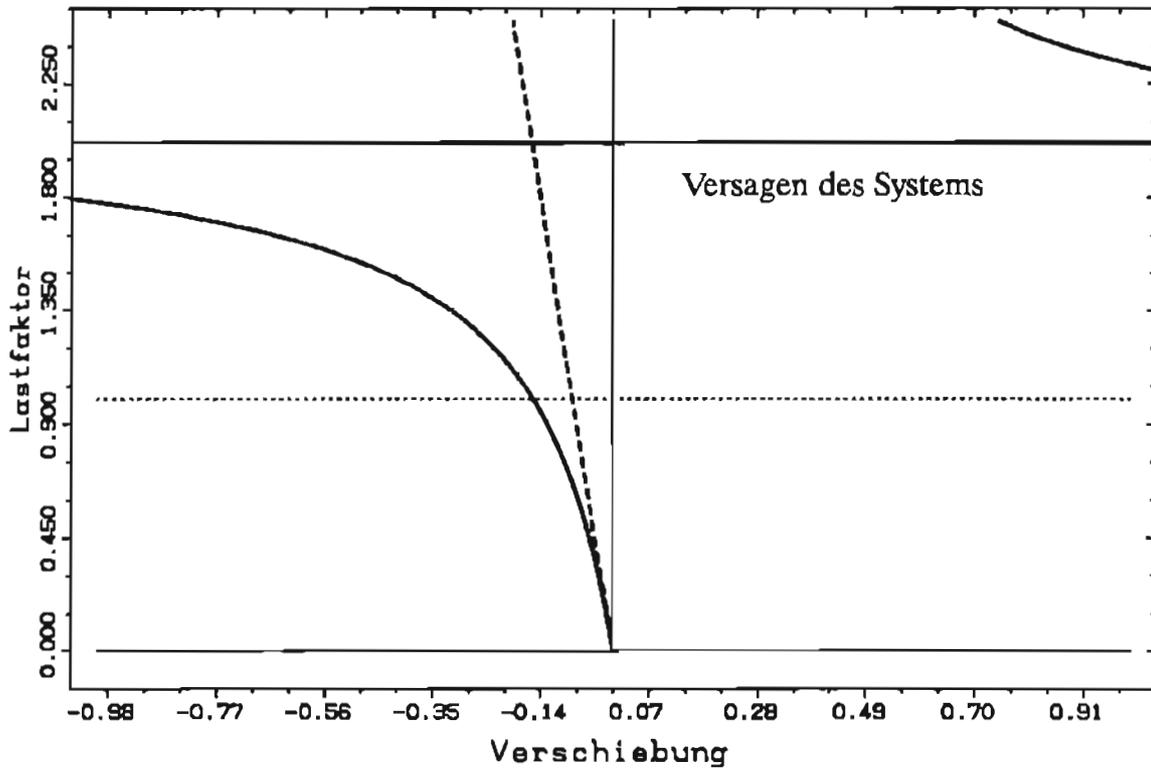
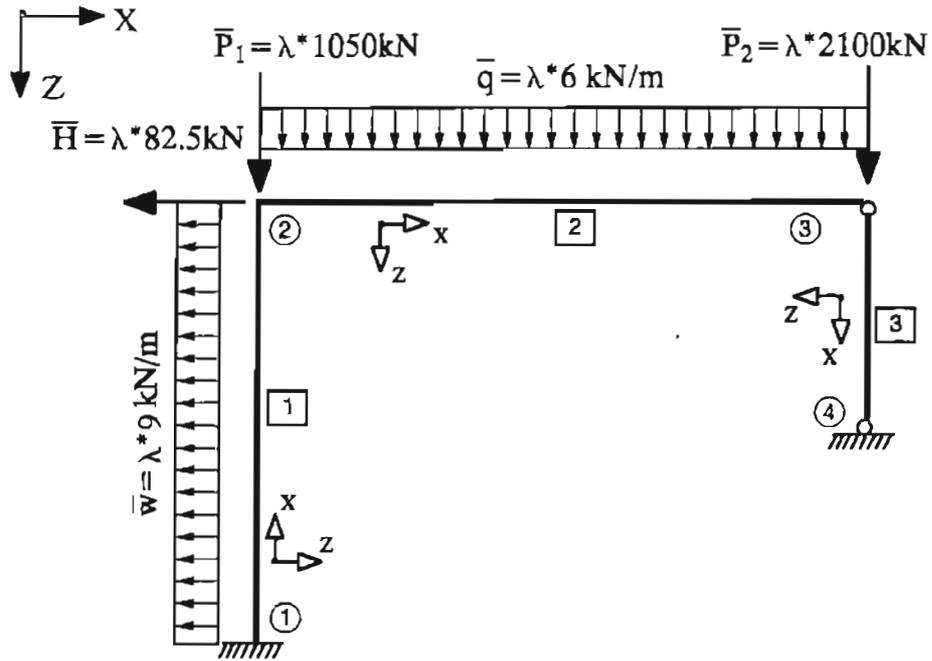
	Th. I. O.	Th. II. O. 2. Iteration	
		ohne Vorverf.	mit Vorverf.
$U_2$	-0.07830544	-0.15416771	-0.17387302
$\Phi^2$	0.00553191	0.01210018	0.01355568
$M_1^1$	584.2340	1055.5467	1211.2237
$M_2^1$	-363.7660	-704.7836	-779.9844
$T_1^1$	-154.5000	-233.8634	-253.9269
$T_2^1$	-82.5000	-161.8634	-181.9269
$T_2^2$	66.3766	100.4784	107.9984
$T_3^2$	6.3766	40.4780	47.9984
$T_3^3$	0.0000	79.3634	99.4269
$N^1$	-1116.3760	-1150.4784	-1157.9984
$N^2$	0.0000	-79.3634	-99.4269
$N^3$	-2093.6230	-2059.5216	-2052.0016

**Schnittgrößen  
Theorie II. Ord.  
mit Vorverf.**

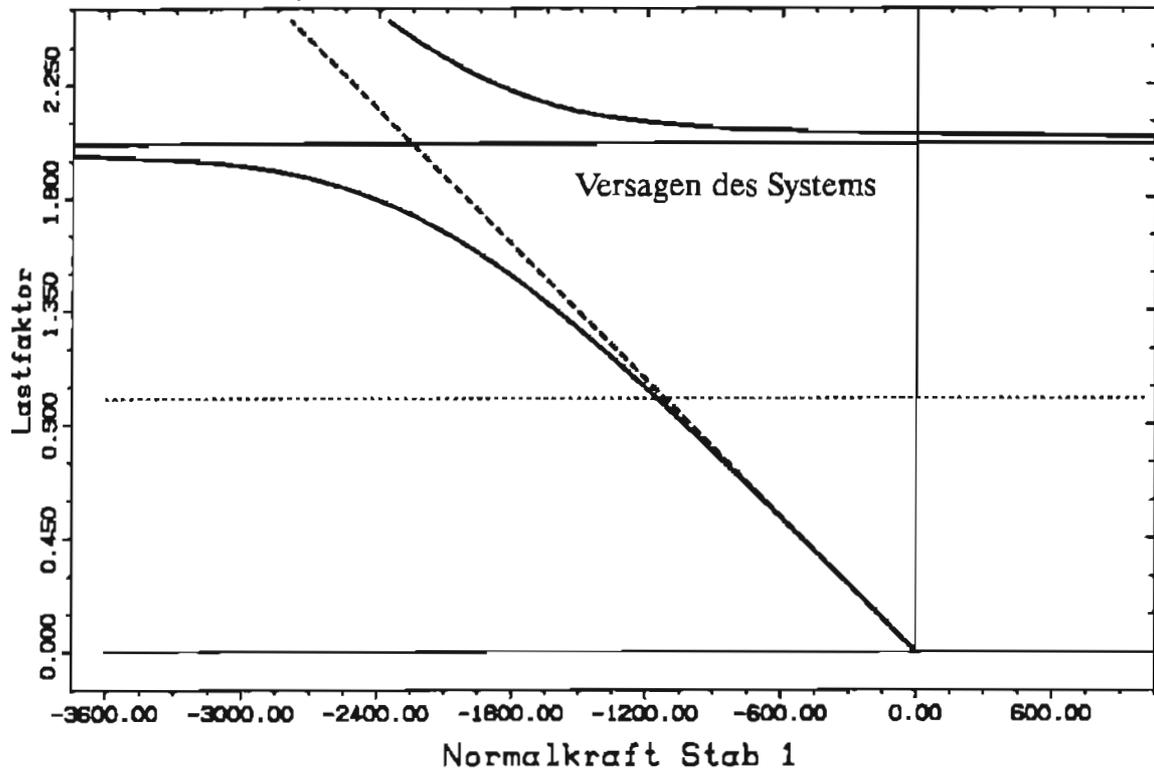


## 5. Berechnung eines Tragwerks nach Theorie II. Ordnung (WGV) Instabilitätsfall, Stabilitätskriterium, Knicklastberechnung (Eigenwertproblem)

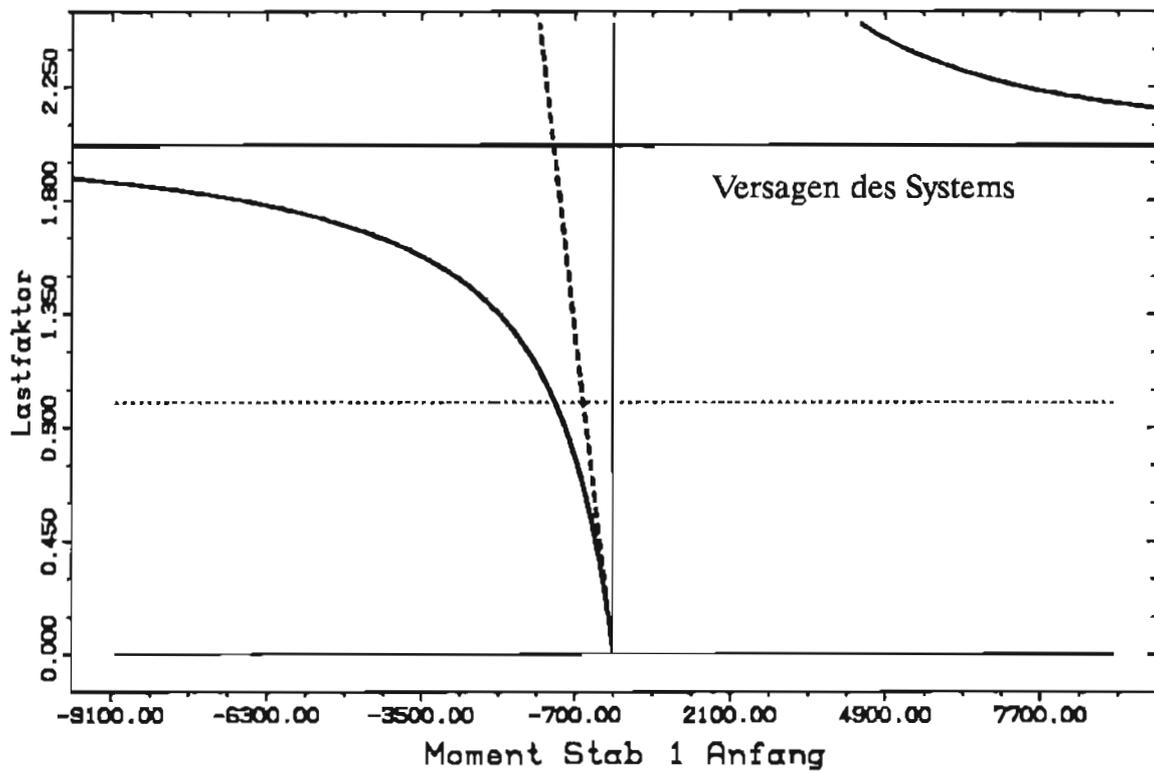
Motivation: Abgrenzung des zulässigen Bereiches vor dem Versagen des Systems



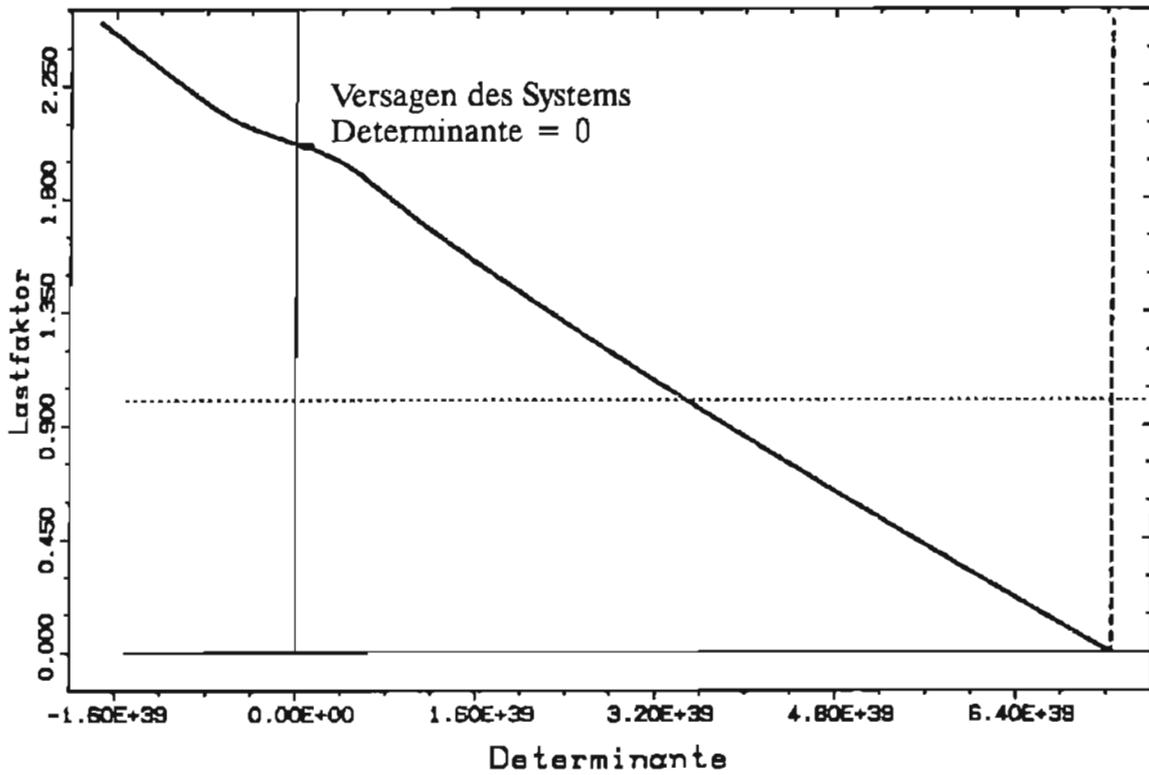
Verlauf der Verschiebung  $U_2$  bei Steigerung der Last



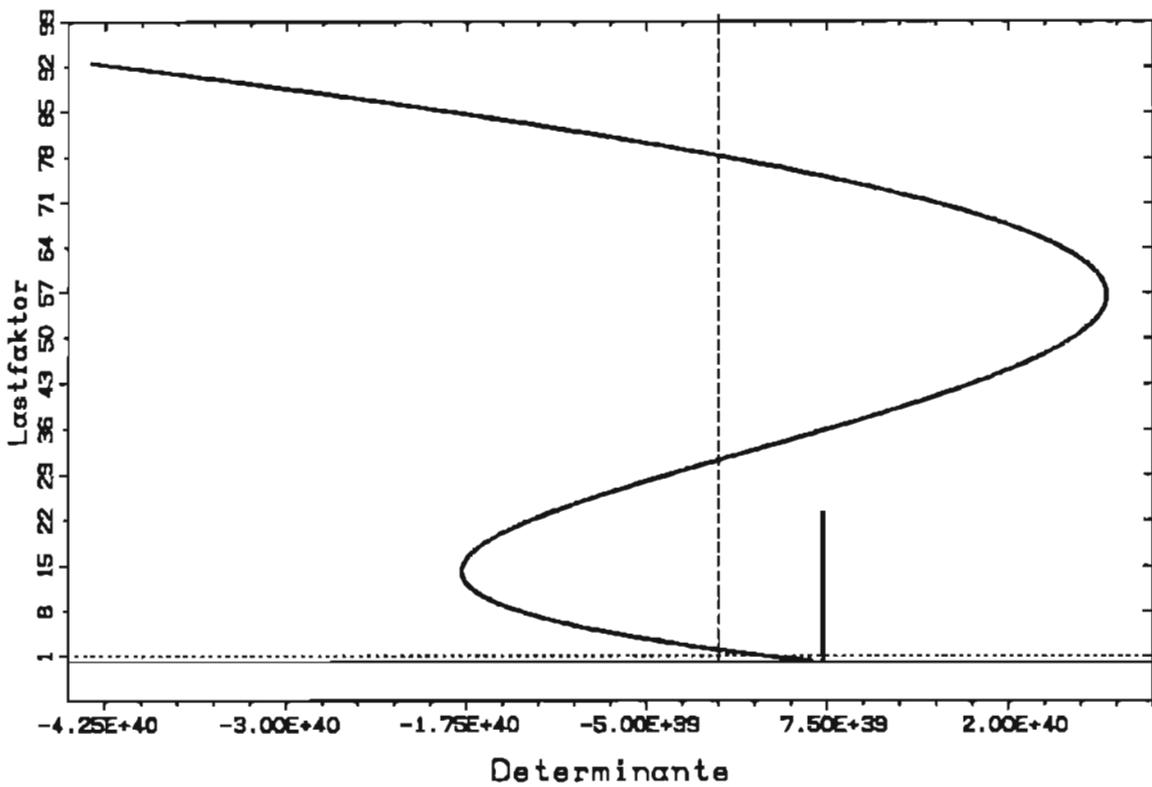
Verlauf der Normalkraft im Stab 1 bei Steigerung der Last



Verlauf des Einspannmoments im Stab 1 bei Steigerung der Last



Die Determinante gibt an, wann das System versagt.



Verlauf der Determinante des Spannungsproblems bei Laststeigerung

Das statische Indifferenzkriterium besagt:

Existiert neben dem Grundzustand bei gleicher Last ein Nachbarzustand, der sich ebenfalls im Gleichgewicht befindet, so ist der Grundzustand im indifferenten Gleichgewicht (Knicklast, Verzweigungspunkt)

Das Gleichgewicht des Grund- und Nachbarzustands wird durch die Steifigkeitsbeziehung beschrieben:

$$\text{Grundzustand: } \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}^G = \mathbf{P}_{kr}$$

$$\text{Nachbarzustand: } \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}^N = \mathbf{P}_{kr}$$

$$\text{Differenz: } \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

Der Verzweigungspunkt wird somit durch den homogenen Fall der Gleichgewichtsbedingungen beschrieben. Ein nichttrivialer Fall liegt dann vor, wenn die Determinante der Steifigkeitsmatrix verschwindet ( $\det \mathbf{K} = 0$ ). Es wird deshalb der Lastfaktor  $\lambda$  gesteigert und die Determinante beobachtet. Die Auswertung der Determinante kann über die charakteristische Gleichung der Steifigkeitsmatrix erfolgen. Die erste Nullstelle zeigt den kritischen Wert  $\mathbf{P}_{kr} = \lambda_{kr} \cdot \mathbf{P}$  an. (Dieses Vorgehen ist sehr aufwendig.)

Eigenwertuntersuchung:

In der Näherungslösung ist der Längskraftanteil über die geometrische Matrix  $\mathbf{K}_{geo}$  abgespalten. Damit kann der für alle Stabnormalkräfte gemeinsame Lastfaktor  $\lambda$  herausgezogen werden

$$[\mathbf{K}_{el} + \lambda \cdot \mathbf{K}_{geo}] \cdot \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{K}_{geo}$  enthält die Stabnormalkraft für die Referenzlast  $\mathbf{P}$  ( $\lambda = 1$ ).

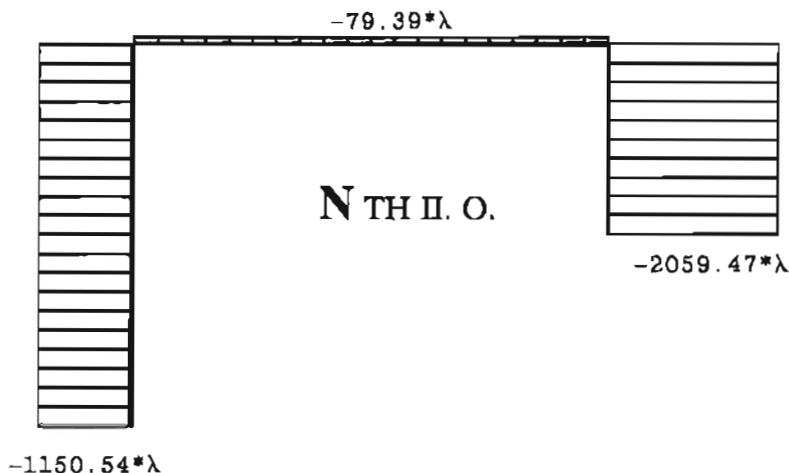
Die Gleichung stellt ein allgemeines Matrixeigenwertproblem dar und lässt sich mit bekannten Methoden berechnen.

Es führt auf:

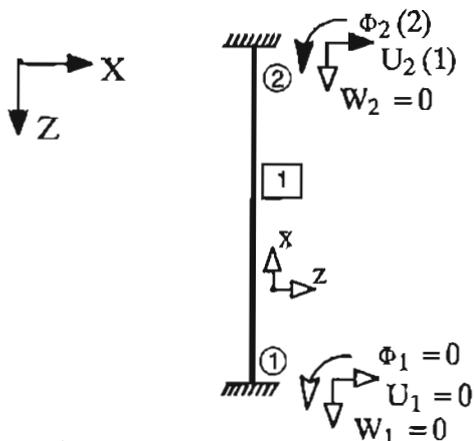
- den kritischen Lastfaktor  $\lambda_{kr}$  als niedrigsten Eigenwert des Systems. (Es können soviel Eigenwerte berechnet werden wie Freiheitsgrade vorhanden sind.)
- die Knickfigur als zugehörige Eigenform  $\Delta \mathbf{V}$ . (Ihre Amplitude ist unbestimmt und kann nach verschiedenen Regeln normiert werden.)

**System und Belastung:**

**Normalkraft  
Theorie II. Ord.  
nach 2. Iteration**



**Steifigkeitsmatrix Element 1 (Balkenelement)**



$l = 8.0\text{m}$   
 $EI = 90000\text{kNm}^2$   
 $N = -1150.5350\text{kN}$   
 $\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.90452$

$$\mathbf{k}_{el}^1 = \begin{bmatrix} 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & -6 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 \\ -12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 12 \cdot 90000 / 8 / 8 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 \\ -6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 2 \cdot 90000 / 8 & 6 \cdot 90000 / 8 / 8 & 4 \cdot 90000 / 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{el}^1 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2109.3750 & 8437.5000 \\ \dots & \dots & 8437.5000 & 45000.0000 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{x1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{x2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{y2}^1) \end{matrix}$$

lokale = globale Steifigkeitsmatrix

$U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

$$\mathbf{k}_{geo}^1 = -1150.5350 \cdot \lambda \begin{bmatrix} 8/5/8 & -1/10 & -8/5/8 & -1/10 \\ -1/10 & 2/15 \cdot 8 & 1/10 & -1/30 \cdot 8 \\ -8/5/8 & 1/10 & 8/5/8 & 1/10 \\ -1/10 & -1/30 \cdot 8 & 1/10 & 2/15 \cdot 8 \end{bmatrix}$$

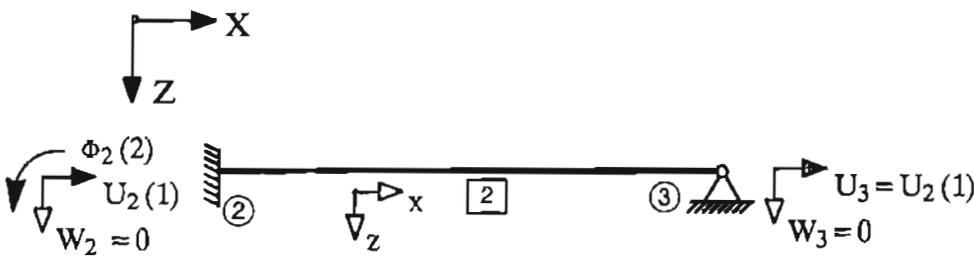
$$\mathbf{k}_{geo}^1 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -172.6808 & -115.0585 \\ \dots & \dots & -115.0585 & -1227.2374 \end{bmatrix} \begin{matrix} (T_1^1) & (F_{x1}^1) \\ (M_1^1) & (M_{y1}^1) \\ (T_2^1) & (F_{x2}^1) \\ (M_2^1) & (M_{y2}^1) \end{matrix}$$

lokale = globale Steifigkeitsmatrix

$U_1=0 \quad \Phi_1=0 \quad U_2(1) \quad \Phi_2(2)$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 1 entfällt, wenn beachtet wird, daß  $w_2 = U_2$  ist.

**Steifigkeitsmatrix Element 2 (Balkenelement)**



$l = 10.0\text{m}$   
 $EI = 174000\text{kNm}^2$   
 $N = -79.3947\text{kN}$

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.21361$$

$$\mathbf{k}_{el}^2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 \\ -3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 & 3 \cdot 174000 / 10 / 10 / 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{el}^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & 52200 & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (\varphi_2) & (w_3) \\ (w_{z2}) & (\varphi_{y2}) & (w_{z3}) \\ (T_2^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

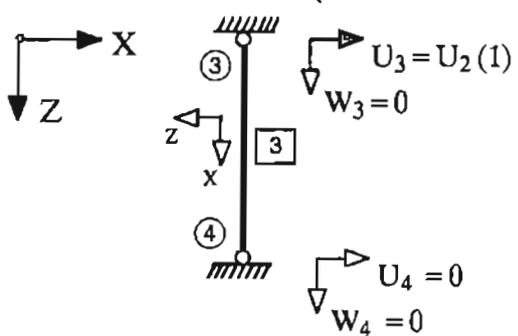
$W_2=0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3=0$

$$\mathbf{k}_{geo}^2 = -79.3947 \cdot \lambda \begin{bmatrix} 8/5/10 & -1/5 & -8/5/10 \\ -1/5 & 1/5 \cdot 10 & 1/5 \\ -8/5/10 & 1/5 & 8/5/10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{geo}^2 = \begin{bmatrix} \text{###} & \text{###} & \text{###} \\ \text{###} & -182.0898 & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_2) & (\varphi_2) & (w_3) \\ (w_{z2}) & (\varphi_{y2}) & (w_{z3}) \\ (T_2^2) & (F_{z2}^2) \\ (M_2^2) & (M_{y2}^2) \\ (T_3^2) & (F_{z3}^2) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

$W_2=0 \quad \Phi_2(2) \quad W_3=0$

**Steifigkeitsmatrix Element 3 (Fachwerkelement)**



$l = 4.0\text{m}$   
 $EI = 90000\text{kNm}^2$   
 $N = -2059.4650\text{kN}$

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = 0.60508$$

$$\mathbf{k}_{geo}^3 = -2059.4650 \cdot \lambda \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{geo}^3 = \begin{bmatrix} -514.8882 & \text{###} \\ \text{###} & \text{###} \end{bmatrix} \begin{matrix} (w_3) & (w_4) \\ (u_{x3}) & (u_{x4}) \\ (T_3^3) & (F_{x3}^3) \\ (T_4^3) & (F_{x4}^3) \end{matrix} \quad \text{lokale = globale Steifigkeitsmatrix}$$

$U_3(1) \quad U_4=0$

Transformation der Steifigkeitsmatrix von Element 3 entfällt, da mit der negativen Einheitsmatrix transformiert wird. (  $X = -z$  )

**Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix (Überlagerung)**

Zuordnungstafel:	$(u_{xa})$	$(w_{za})$	$(\varphi_{\gamma a})$	$(u_{xb})$	$(w_{zb})$	$(\varphi_{\gamma b})$
Element 1	0	0	0	1	0	2
Element 2	0	0	2	0	0	0
Element 3	1	0	0	0	0	0

**Zusammenbau der elastischen Steifigkeitsmatrix:**

	$U_2$	$\Phi_2$	
$H_2$	2109.3750	8437.5000	El. 1 El. 2 El. 3
$M_2$	8437.5000	45000.0000 52200.0000	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{el} = \begin{bmatrix} 2109.3750 & 8437.5000 \\ 8437.5000 & 97200.0000 \end{bmatrix}$$

**Zusammenbau der geometrischen Steifigkeitsmatrix:**

	$U_2$	$\Phi_2$	
$H_2$	-172.5803	-115.0535	El. 1 El. 2 El. 3
$M_2$	-115.0535	-1227.2374 -158.7883	El. 1 El. 2 El. 3

$$K_{geo} = \lambda^* \begin{bmatrix} -687.4465 & -115.0535 \\ -115.0535 & -1388.0287 \end{bmatrix}$$

Homogenes Gleichungssystem  $(K_{el} + \lambda \cdot K_{geo}) \cdot \Delta V = 0$

nur nicht triviale Lösung, wenn  $\det K = 0$

$$\det \left[ \begin{bmatrix} 2109.3750 & 8437.5000 \\ 8437.5000 & 97200.0000 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -687.4465 & -115.0535 \\ -115.0535 & -1388.0287 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} ke_{11} + \lambda kg_{11} & ke_{12} + \lambda kg_{12} \\ ke_{21} + \lambda kg_{21} & ke_{22} + \lambda kg_{22} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(ke_{11} + \lambda kg_{11}) \cdot (ke_{22} + \lambda kg_{22}) - (ke_{12} + \lambda kg_{12}) \cdot (ke_{21} + \lambda kg_{21}) = 0$$

$$ke_{11} \cdot ke_{22} + \lambda \cdot ke_{11} \cdot kg_{22} + \lambda \cdot kg_{11} \cdot ke_{22} + \lambda^2 \cdot kg_{11} \cdot kg_{22} - ke_{12} \cdot ke_{21} - \lambda \cdot ke_{12} \cdot kg_{21} - \lambda \cdot kg_{12} \cdot ke_{21} - \lambda^2 \cdot kg_{12} \cdot kg_{21} = 0$$

$$\lambda^2 (kg_{11} \cdot kg_{22} - kg_{12} \cdot kg_{21}) + \lambda (ke_{11} \cdot kg_{22} + kg_{11} \cdot ke_{22} - ke_{12} \cdot kg_{21} - kg_{12} \cdot ke_{21}) + (ke_{11} \cdot ke_{22} - ke_{12} \cdot ke_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 (kg_{11} \cdot kg_{22} - kg_{12}^2) + \lambda (ke_{11} \cdot kg_{22} + kg_{11} \cdot ke_{22} - 2 \cdot ke_{12} \cdot kg_{12}) + (ke_{11} \cdot ke_{22} - ke_{12}^2) = 0$$

$$939581.8959 \cdot \lambda^2 - 67801922.06 \cdot \lambda + 133839843.8 = 0 \quad | : 939581.8959$$

quadratische Ergänzung  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\lambda^2 - 72.1618\lambda + 142.4462 = 0$$

$$b = -72.1618/2 = -36.0809$$

$$b^2 = 1301.8314$$

$$\lambda^2 - 72.1618\lambda + 1301.8314 - 1159.3852 = 0$$

$$(\lambda - 36.0809)^2 = 1159.3852$$

$$\lambda - 36.0809 = \pm 34.0497$$

$$\lambda_1 = 36.0809 - 34.0497 = 2.0312$$

$$\lambda_2 = 36.0809 + 34.0497 = 70.1306$$

### kleinster Eigenwert = 2.0312

Das System wird instabil, wenn die Normalkraft um den Faktor 2.0312 gesteigert wird.  
daraus folgt:

$$N_{kr}^1 = -2.0312 \cdot 1150.54 = -2336.98kN$$

$$N_{kr}^2 = -2.0312 \cdot 79.39 = -161.26kN$$

$$N_{kr}^3 = -2.0312 \cdot 2059.47 = -4183.20kN$$

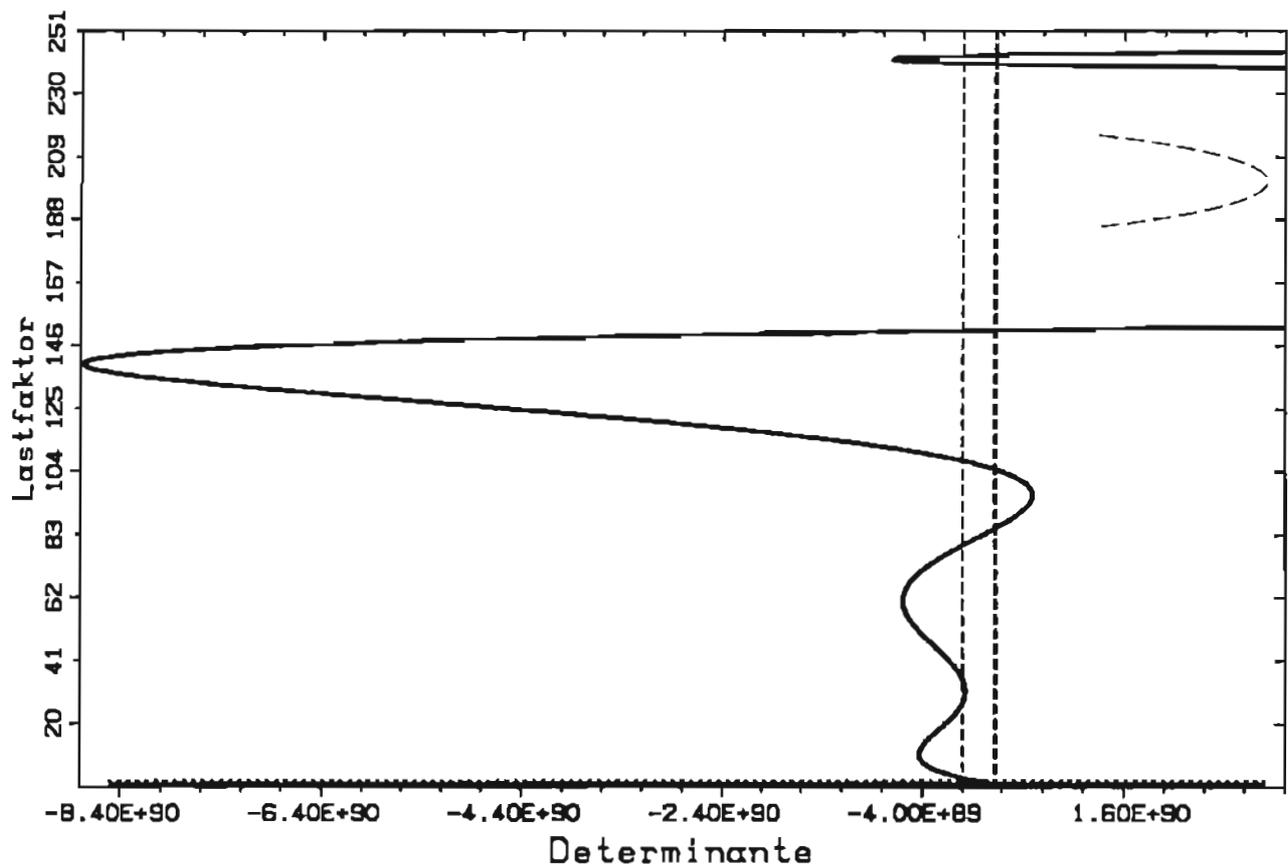
Wird die Normalkraftverteilung der Theorie I. Ordnung zugrunde gelegt, wird das System instabil, wenn die Normalkraft um den Faktor 2.0236 gesteigert wird.  
daraus folgt:

$$N_{kr}^1 = -2.0236 \cdot 1116.38 = -2259.08kN$$

$$N_{kr}^2 = -2.0236 \cdot 0.0 = 0.0kN$$

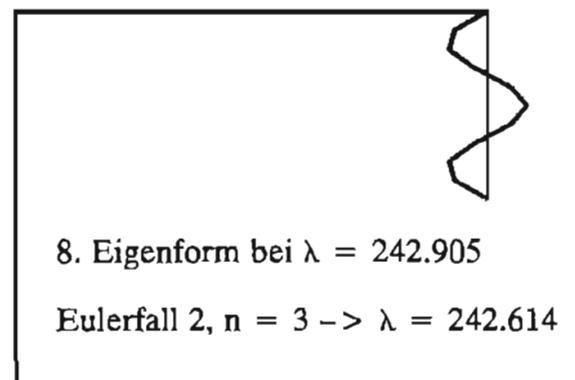
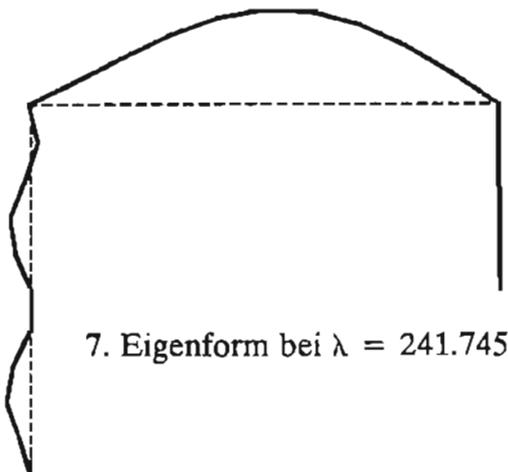
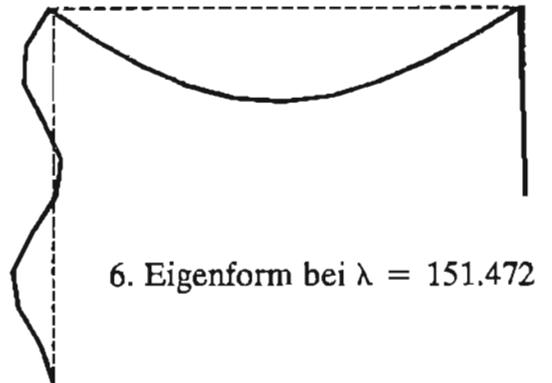
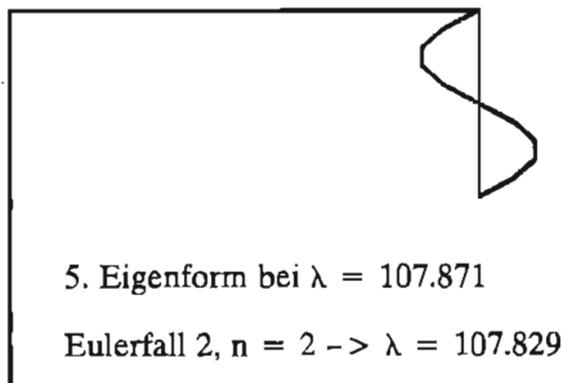
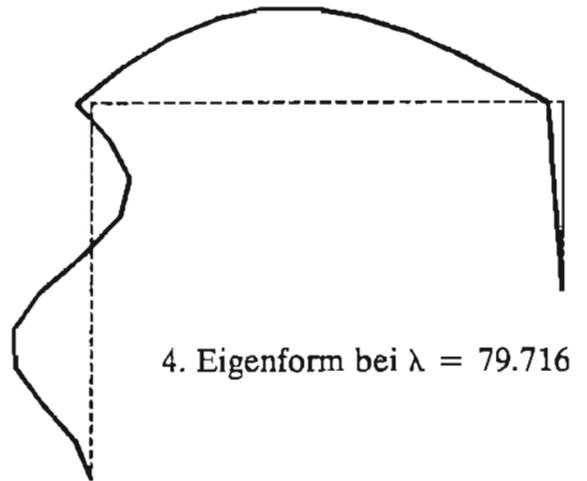
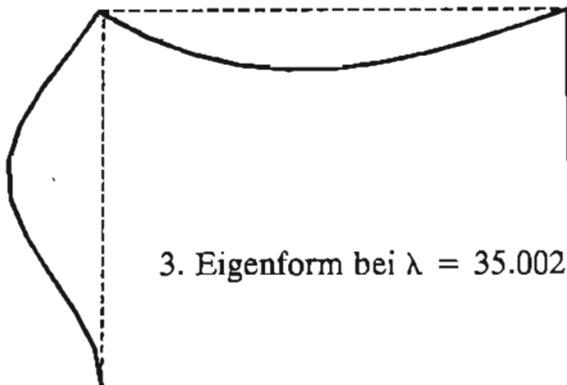
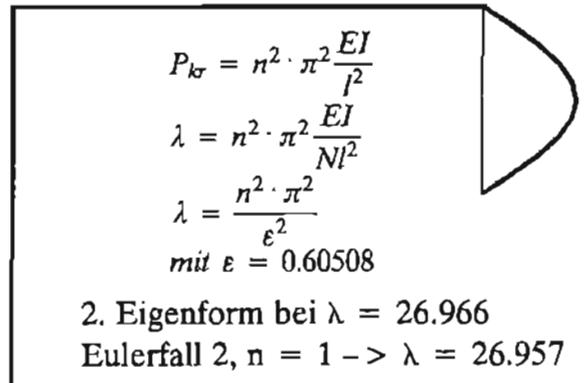
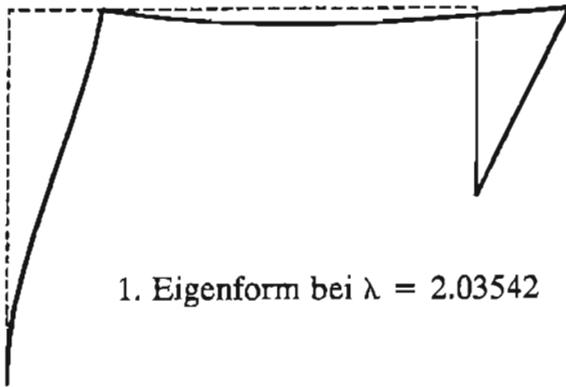
$$N_{kr}^3 = -2.0236 \cdot 2093.62 = -4236.60kN$$

daraus folgt, daß für die Abschätzung des Stabilitätsversagens die Normalkraftverteilung nach Theorie I. Ordnung ausreicht.



Verlauf der Determinante bei Einteilung in mehr Elemente und analytische Steifigkeitbeziehung

### Eigenformen des Eigenwertproblems



## CAL-Eingabedatei zur Berechnung des vorherigen Beispiels

```

START
*** BEISPIEL RAHMEN ALS VERZWEIGUNGSPROBLEM ***
LOADID L NE=3 NF=6
  0  0  0  1  2  3
  1  2  3  4  5  6
  4  6  7  0  0  8
LOAD N1 Z=1 S=1
-1150.835
LOAD N2 Z=1 S=1
-79.3947
LOAD N3 Z=1 S=1
-2059.4850
FRAME K1 S1 KG1 SG1 E=2.0E8 A=1.6E2 I=4.5E-4 X=0 0 Z=8 0 N=N1(1) ST=1
FRAME K2 S2 KG2 SG2 E=2.0E8 A=2.0E2 I=8.7E-4 X=0 10 Z=0 0 N=N2(1) ST=1
FRAME K3 S3 KG3 SG3 E=2.0E8 A=1.6E2 I=4.5E-4 X=10 10 Z=0 4 N=N3(1) ST=1
ZERO KE Z=8 S=8
ADDK KE K1 L N=1
ADDK KE K2 L N=2
ADDK KE K3 L N=3
ZERO KG Z=8 S=8
ADDK KG K1 L N=1
ADDK KG K2 L N=2
ADDK KG K3 L N=3

* Inverse Iteration zur Ermittlung des kleinsten Eigenwertes und
* Eigenvektoren des Matrizenpaars (Kel + lam * Kgso) dX = 0

* Die Matrizen KE und KG muessen in der CAL-Datenbasis vorhanden sein

DUPDG KE XT : Startvektor ( willkuerlich gewaehlt)
TRAN XT X
DUP KE KEX
ZERO EPS Z=1 S=1 RD=0.0001 RN=0.0
ZERO LAM Z=1 S=1 RD=1.0 RN=0.0
IZERO ITER Z=1 S=1 ID=1 IN=0
IZERO EINS Z=1 S=1 ID=1 IN=0
SOLVE KEX ST=2 : nur dreieckszerlegen der Matrix
LOOP $BEGIN N=100 : Anfang der inversen Iteration
$BEGIN
DUP LAM LAM1
MULT KG X KGX
SCALE KGX LAM
DUP KGX X : neue rechte Seite kgx = -lam * KG * X
SOLVE KEX X ST=3 : Gleichungslösung -> neuer Eigenvektor
TRAN X XT
MULT XT KGX XTKEK
MULT XT KG XTKG
MULT XTKG X XTKGX
SCALE XTKGX SF=-1.0
INVEL XTKGX
MULT XTKEK XTKGX LAM : neuer Eigenwert
PRINT LAM
SUB LAM1 LAM : Konvergenzkontrolle
DUP LAM LINV
INVEL LINV
MULT LAM1 LINV FEHLER
NORM FEHLER FNORM ST=1
IF $END FNORM LT EPS : gehe bei Konvergenz nach $END
ADD ITER EINS
SQREL XTKGX
SCALE XTKGX SF=-1.0
SCALE X XTKGX
NEXT $BEGIN : Schleifenende, gehe nach $BEGIN
$END
PRINT LAM : endgueltiger Eigenwert
PRINT X : Eigenvektor
PRINT ITER : Anzahl der Iterationsschritte
RETURN

```

```
DUPDG KE XT : Startvektor ( willkuerlich gewaehlt)
TRAN XT X
ZERO EPS Z=1 S=1 RD=0.0001 RN=0.0
ZERO LAM Z=1 S=1 RD=1.0 RN=0.0
IZERO ITER Z=1 S=1 ID=1 IN=0
IZERO EINS Z=1 S=1 ID=1 IN=0
SOLVE KE ST=2 : nur dreieckszerlegen der Matrix
LOOP $BEGIN N=100
$BEGIN : Anfang der inversen Iteration
DUP LAM LAM1
MULT KG X KGX
SCALE KGX LAM
DUP KGX X : neue rechte Seite kgx = -lam * KG * X
SOLVE KE X ST=3 : Gleichungsloesung -> neuer Eigenvektor
TRAN X XT
MULT XT KG XTKG
MULT XTKG X XTKGX
INVEL XTKGX
MULT XTKGX XTKGX LAM : neuer Eigenwert
SQREL LAM
SQREL LAM
PRINT LAM
SUB LAM1 LAM : Konvergenzkontrolle
DUP LAM LINV
INVEL LINV
MULT LAM1 LINV FEHLER
NORM FEHLER FNORM ST=1
IF $END FNORM LT EPS : gehe bei Konvergenz nach $END
ADD ITER EINS
NEXT $BEGIN : Schleifenende, gehe nach $BEGIN
$END
PRINT LAM : endgueltiger Eigenwert
PRINT X : Eigenvektor
PRINT ITER : Anzahl der Iterationsschritte
RETURN
```

## **Zusammenstellung von Berechnungsunterlagen für Stabtragwerke - Baustatik 3/4**

### **Definitionen und grundlegende Beziehungen**

## **Bemerkungen zu Festlegungen und Bezeichnungen :**

### **1. Koordinatensysteme :**

Es werden stets rechtshändige Koordinatensysteme verwendet. Die Achsen werden mit lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet. Die Unterscheidung zwischen lokalen und globalen Koordinatensystemen erfolgt mit Klein- und Großbuchstaben.

### **2. Unterscheidung von Zustandsgrößen am Element und im System :**

Zustandsgrößen können Verschiebungs- und/oder Kraftgrößen sein. Auf Elementebene werden die zugehörigen Spaltenvektoren und Matrizen mit Kleinbuchstaben beschrieben, auf Systemebene sind Großbuchstaben zu verwenden.

Zustandsgrößen am Element, die auf die globalen Systemkoordinaten transformiert werden, werden ebenfalls klein geschrieben, erhalten aber zusätzlich den Fußzeiger  $(\cdot)_G$ .

Die Größen  $N$ ,  $Q$  und  $M_T$  für Normalkräfte, Querkräfte und Drillmomente sind nur im lokalen Koordinatensystem der Stabelemente definiert.

### **2. Allgemeine Regeln für das Setzen von Zeigern :**

Der Bezug einer Größe auf ein Element (Abschnitt) wird durch einen hochgestellten Zeiger, der Bezug auf einen Knoten (Abschnittsgrenze) durch einen tiefgestellten Zeiger gekennzeichnet.

### **3. Bezeichnungen und positive Wirkungsrichtungen von Last- und Zustandsgrößen :**

Hinsichtlich der positiven Wirkungsrichtung von Zustandsgrößen ist zwischen Vorzeichen-Definition 1 und Vorzeichen-Definition 2 unterschieden :

*Vorzeichen-Definition 1* : Es werden *spannungsorientierte* Schnittgrößen verwendet. Diese Definition kommt stets bei der Beschreibung am differentiellen Element bzw. bei der Formulierung in Abhängigkeit von der unabhängigen Ortsvariablen zur Anwendung. Die Weggrößen sind wie die Schnittgrößen des positiven Schnittufers orientiert.

*Vorzeichen-Definition 2* : Es werden *koordinatenorientierte* Zustandsgrößen verwendet. Die Vorzeichen der Zustandsgrößen sind verfahrensbezogen bestimmt und nur an diskreten Punkten eines Tragwerks definiert.

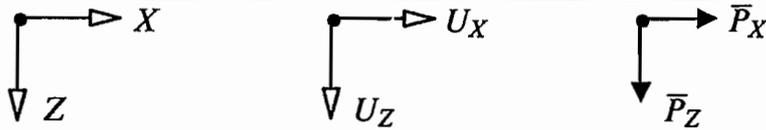
Lasten und eingeprägte Weg- und Verzerrungsgrößen werden durch einen oberen Querstrich gekennzeichnet. Die positiven Vektoren von eingepprägten Kraft- und Weggrößen sind wie die Achsen des Koordinatensystems orientiert.

### **4. Vereinbarungen für das Rechnen mit Matrizen :**

Matrizen sowie Spalten- und Zeilenvektoren werden **fett** dargestellt.

# 1. Fachwerk

## 1.1 Globales Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten :

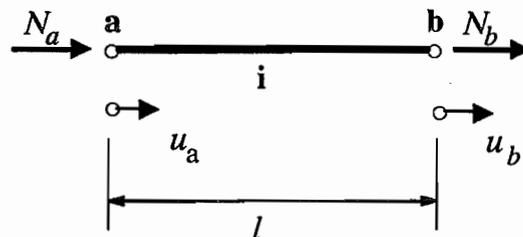


## 1.2 Grundlegende Beziehungen im Weggrößenverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- Zustandsgrößen am Element (Vorzeichen-Definition 2) :



- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden :

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{p}^{i0} = \begin{bmatrix} N_a^0 \\ N_b^0 \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{v}^i = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}^i$$

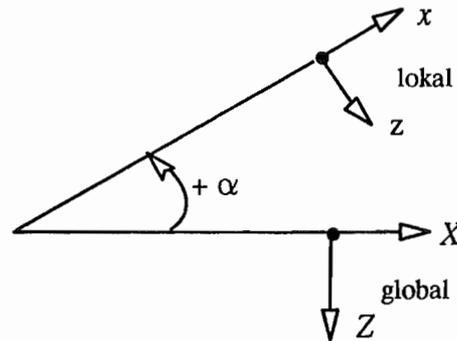
- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  :

$$\mathbf{k}^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^i$$

- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Belastung des Elements (VK 2) :

Last : $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$N_a^0$	$N_b^0$
$\bar{p}_x$	$-\frac{\bar{p}_x l}{2}$	$-\frac{\bar{p}_x l}{2}$
$\bar{p}_{x1}$ $\bar{p}_{x2}$	$-\frac{l}{6} ( 2 \bar{p}_{x1} + \bar{p}_{x2} )$	$-\frac{l}{6} ( \bar{p}_{x1} + 2 \bar{p}_{x2} )$
$\bar{P}_x$	$-\bar{P}_x \beta$	$-\bar{P}_x \alpha$
$\bar{\epsilon} = \alpha_T T$	$\bar{\epsilon} EA$	$-\bar{\epsilon} EA$

- Transformation vom globalen ins lokale Koordinatensystem (und umgekehrt) :



$$\mathbf{v}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal}) \quad \mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global})$$

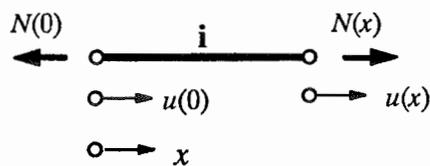
$$\mathbf{v}^i = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_G^i = \begin{bmatrix} u_{Xa} \\ u_{Za} \\ u_{Xb} \\ u_{Zb} \end{bmatrix}^i$$

### 1.3 Grundlegende Beziehungen im Übertragungsverfahren (Vorzeichen-Definition 1):

- grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ N(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{N}(x) \end{bmatrix}^i$$

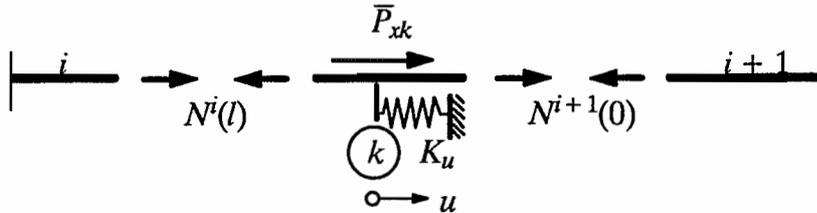
- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  :

$$\mathbf{U}^i(x=l) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{EA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^i$$

- grundlegende Beziehung an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$$

- Zustandsvektoren  $\mathbf{z}_k^i$ ,  $\mathbf{z}_k^{i+1}$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}_k$  an der Abschnittsgrenze  $k$  :



$$\mathbf{z}_k^i = \begin{bmatrix} u(l) \\ N(l) \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{z}_k^{i+1} = \begin{bmatrix} u(0) \\ N(0) \end{bmatrix}^{i+1} \quad \bar{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ -\bar{P}_{xk} \end{bmatrix}$$

- Punktmatrix an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K_u & 1 \end{bmatrix}_k$$

- Lastvektor infolge Lasten in Stabrichtung zwischen zwei Abschnittsgrenzen :

Last : $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$\bar{u}(\bar{x})$	$\bar{N}(\bar{x})$
$\bar{P}_x$	$-\frac{\bar{P}_x l^2}{2 EA}$	$-\bar{P}_x l$
$\bar{P}_{x1}$ $\bar{P}_{x2}$	$-\frac{l^2}{6 EA} (2\bar{P}_{x1} + \bar{P}_{x2})$	$-\frac{\bar{P}_{x1} + \bar{P}_{x2} l}{2}$
$\bar{P}_x$ a b	$-\frac{\bar{P}_x b}{EA}$	$-\bar{P}_x$
$\bar{\epsilon} = \alpha_T T$	$\bar{\epsilon} l$	0

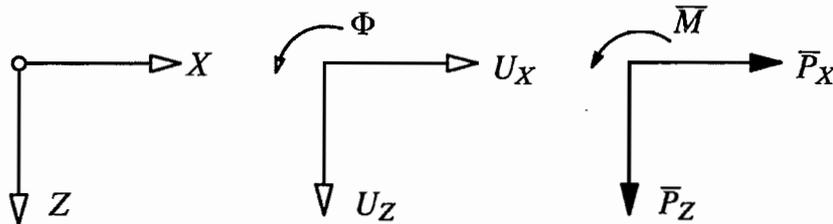
#### 1.4 Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1 :

$$N(\bar{x} = 0) = -N_a$$

$$N(\bar{x} = l) = +N_b$$

## 2. Ebener Rahmen in der X-Z-Ebene

### 2.1 Globales Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten :

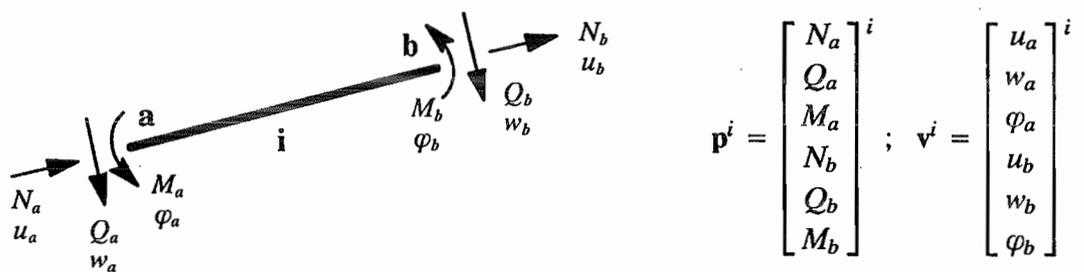


### 2.2 Grundlegende Beziehungen im Weggrößenverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

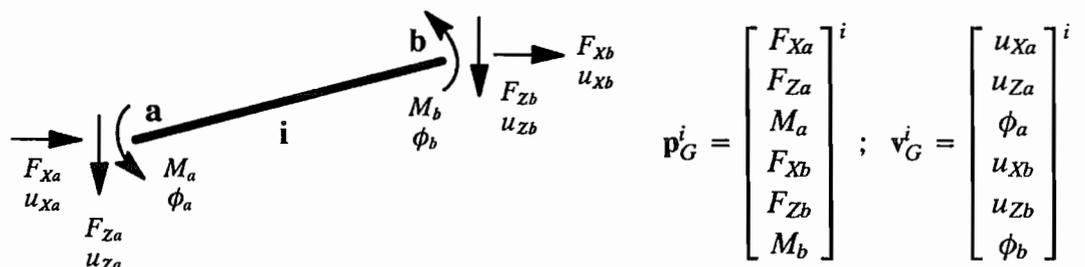
- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Belastung in Stabrichtung siehe 1.2
- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Belastung quer zur Stabachse siehe 2.3

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Theorie I. Ordnung) :

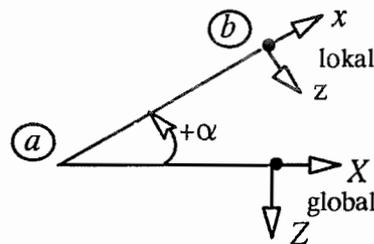
$$\tilde{\mathbf{k}}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} \end{array} \right]^i$$

- Transformation vom globalen ins lokale Koordinatensystem (und umgekehrt) :

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \quad \mathbf{v}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \quad \mathbf{p}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

$$\mathbf{k}^i \quad (\text{lokal}) \quad \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

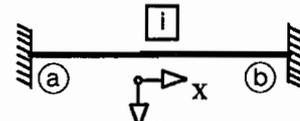


$$\mathbf{T}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^i$$

$$\mathbf{T}^{iT} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^i$$

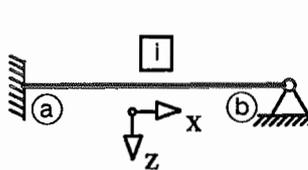
- lokale Steifigkeitsmatrix des Biegestabes für unterschiedliche Randbedingungen :

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig eingespannten Stab:



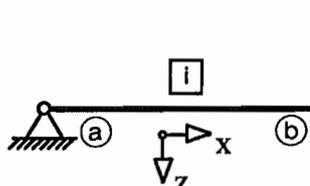
$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ \hline Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & | & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & | & 6l & 2l^2 \\ \hline -12 & 6l & | & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & | & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \hline w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ M_a^0 \\ \hline Q_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ \hline Q_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3l & | & -3 \\ -3l & 3l^2 & | & 3l \\ \hline -3 & 3l & | & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \hline w_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ M_a^0 \\ \hline Q_b^0 \end{bmatrix}$$

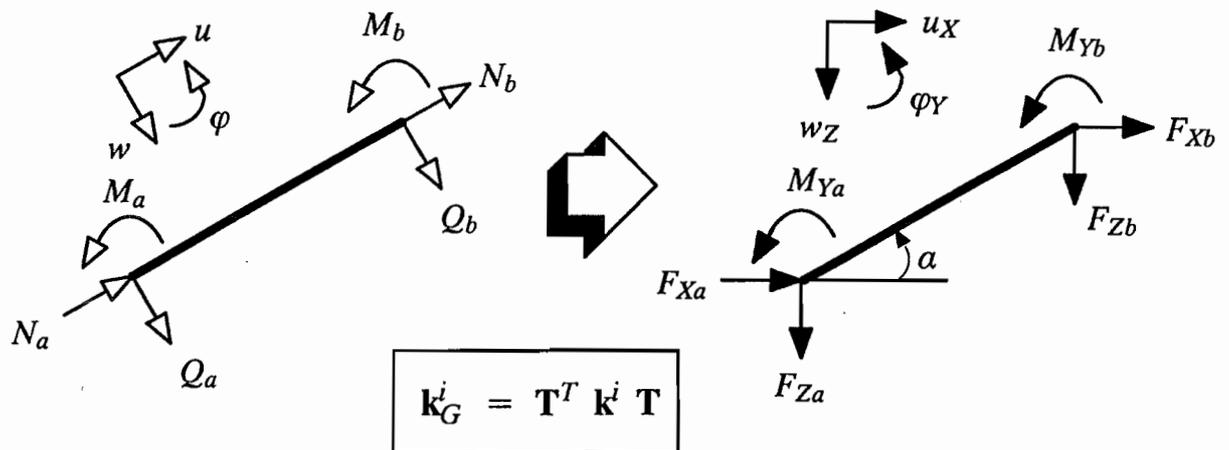
Steifigkeitsmatrix für den rechts eingespannten, links gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} Q_a \\ \hline Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & | & -3 & -3l \\ \hline -3 & | & 3 & 3l \\ -3l & | & 3l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \hline w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ \hline Q_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

**Lastspalten wie beim Drehwinkelverfahren, siehe Seite 11 bzw. S. 13 !**

## Transformation der Steifigkeitsmatrix von lokalen auf globale Koordinaten



Lokale Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}^i = \frac{EI}{l^3}$$

	$u_a$	$w_a$	$\varphi_a$	$u_b$	$w_b$	$\varphi_b$	
	$\gamma l^2$	0	0	$-\gamma l^2$	0	0	$N_a$
	0	12	$-6l$	0	$-12$	$-6l$	$Q_a$
	0	$-6l$	$4l^2$	0	$6l$	$2l^2$	$M_a$
	$-\gamma l^2$	0	0	$\gamma l^2$	0	0	$N_b$
	0	$-12$	$6l$	0	$12$	$6l$	$Q_b$
	0	$-6l$	$2l^2$	0	$6l$	$4l^2$	$M_b$

$$\gamma = \frac{EA}{EI}$$

Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^i$$

Spannungsauswertematrix für ein ebenes Stabelement  $r^i = k^i T$

	$u_{Xa}$	$w_{Za}$	$\varphi_{Ya}$	$u_{Xb}$	$w_{Zb}$	$\varphi_{Yb}$	
$r^i = \frac{EI}{l^3}$	$\gamma l^2 \cos \alpha$	$-\gamma l^2 \sin \alpha$	0	$-\gamma l^2 \cos \alpha$	$\gamma l^2 \sin \alpha$	0	$N_a$
	$12 \sin \alpha$	$12 \cos \alpha$	$-6l$	$-12 \sin \alpha$	$-12 \cos \alpha$	$-6l$	$Q_a$
	$-6l \sin \alpha$	$-6l \cos \alpha$	$4l^2$	$6l \sin \alpha$	$6l \cos \alpha$	$2l^2$	$M_a$
	$-\gamma l^2 \cos \alpha$	$\gamma l^2 \sin \alpha$	0	$\gamma l^2 \cos \alpha$	$-\gamma l^2 \sin \alpha$	0	$N_b$
	$-12 \sin \alpha$	$-12 \cos \alpha$	$6l$	$12 \sin \alpha$	$12 \cos \alpha$	$6l$	$Q_b$
	$-6l \sin \alpha$	$-6l \cos \alpha$	$2l^2$	$6l \sin \alpha$	$6l \cos \alpha$	$4l^2$	$M_b$

Transformierte Steifigkeitsmatrix für ein ebenes Stabelement  $k_G^i = T^T k^i T$

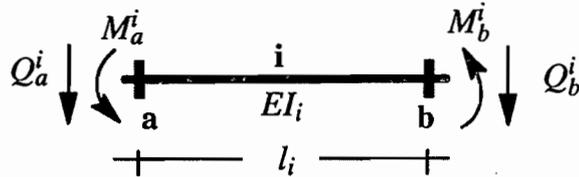
$$s = \sin \alpha$$

$$c = \cos \alpha$$

	$u_{Xa}$	$w_{Za}$	$\varphi_{Ya}$	$u_{Xb}$	$w_{Zb}$	$\varphi_{Yb}$	
$k_G^i = \frac{EI}{l^3}$	$\gamma l^2 c^2 + 12s^2$	$-\gamma l^2 cs + 12sc$	$-6ls$	$-\gamma l^2 c^2 - 12s^2$	$\gamma l^2 cs - 12sc$	$-6ls$	$F_{Xa}$
	$-\gamma l^2 cs + 12sc$	$\gamma l^2 s^2 + 12c^2$	$-6lc$	$\gamma l^2 cs - 12sc$	$-\gamma l^2 s^2 - 12c^2$	$-6lc$	$F_{Za}$
	$-6ls$	$-6lc$	$4l^2$	$6ls$	$6lc$	$2l^2$	$M_{Ya}$
	$-\gamma l^2 c^2 - 12s^2$	$\gamma l^2 cs - 12sc$	$6ls$	$\gamma l^2 c^2 + 12s^2$	$-\gamma l^2 cs + 12sc$	$6ls$	$F_{Xb}$
	$\gamma l^2 cs - 12sc$	$-\gamma l^2 s^2 - 12c^2$	$6lc$	$-\gamma l^2 cs + 12sc$	$\gamma l^2 s^2 + 12c^2$	$6lc$	$F_{Zb}$
	$-6ls$	$-6lc$	$2l^2$	$6ls$	$6lc$	$4l^2$	$M_{Yb}$

2.3 Grundlegende Beziehungen im Drehwinkelverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

- Grundformeln des beidseits biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :



Drehwinkel :

$\varphi$  Knotendrehwinkel

$\psi$  Stabsehnendrehwinkel

$$\psi = \frac{1}{l} (w_b - w_a)$$

$$M_a^i = \frac{EI_i}{l_i} (4\varphi_a + 2\varphi_b + 6\psi_i) + M_a^{i0}$$

$$M_b^i = \frac{EI_i}{l_i} (2\varphi_a + 4\varphi_b + 6\psi_i) + M_b^{i0}$$

$$Q_a^i = -\frac{EI_i}{l_i^2} (6\varphi_a + 6\varphi_b + 12\psi_i) + Q_a^{i0}$$

$$Q_b^i = \frac{EI_i}{l_i^2} (6\varphi_a + 6\varphi_b + 12\psi_i) + Q_b^{i0}$$

$$Q_a^i = -\frac{M_a^i + M_b^i}{l} - V_a$$

$$Q_b^i = \frac{M_a^i + M_b^i}{l} - V_b$$

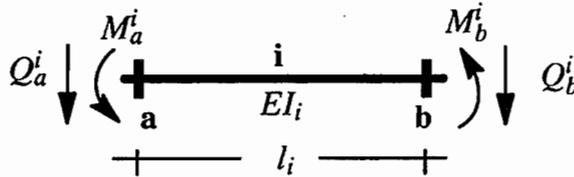
$V_a, V_b$  : Auflagerkräfte des beidseitig gelenkig gelagerten Trägers !!

- Kraftgrößen an den Stabenden des beidseits biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :

Last ; $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$M_a^{i0}$	$M_b^{i0}$	$Q_a^{i0}$	$Q_b^{i0}$
	$\bar{M}\beta(3\alpha - 1)$	$\bar{M}\alpha(3\beta - 1)$	$-\frac{\bar{M}}{l}6\alpha\beta$	$\frac{\bar{M}}{l}6\alpha\beta$
	$\bar{P}\alpha\beta^2$	$-\bar{P}b\alpha^2$	$-\frac{\bar{P}\beta^2}{l} * (1 + 2\alpha)$	$-\frac{\bar{P}\alpha^2}{l} * (1 + 2\beta)$
	$\frac{\bar{q}l^2}{12}$	$-\frac{\bar{q}l^2}{12}$	$-\frac{\bar{q}l}{2}$	$-\frac{\bar{q}l}{2}$
	$\frac{l^2}{60} * (3\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2)$	$-\frac{l^2}{60} * (2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2)$	$-\frac{l}{20} * (7\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2)$	$-\frac{l}{20} * (3\bar{q}_1 + 7\bar{q}_2)$
$\bar{\kappa} = \frac{\alpha_T \Delta T}{h}$ ; $\Delta T = T_u - T_o$ 	$EI\bar{\kappa}$	$-EI\bar{\kappa}$	0	0
$\Delta\bar{w} = \bar{w}_b - \bar{w}_a$ 	$\frac{6EI}{l^2} \Delta\bar{w}$	$\frac{6EI}{l^2} \Delta\bar{w}$	$-\frac{12EI}{l^3} \Delta\bar{w}$	$\frac{12EI}{l^3} \Delta\bar{w}$

## 2. Einflußlinien von Rahmen in der X-Z-Ebene

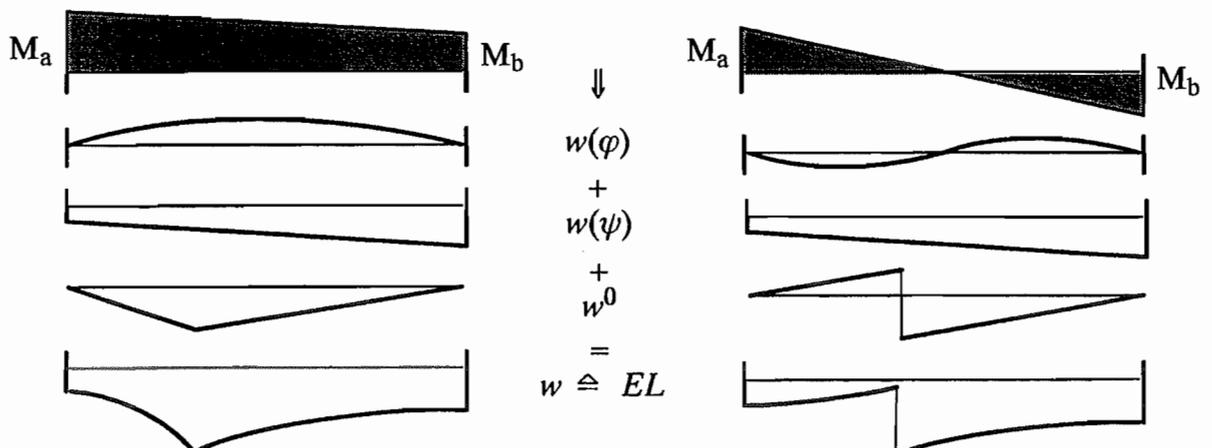
Berechnung von Einflußlinien mit dem Drehwinkelverfahren (Vorzeichen-Definition 2):



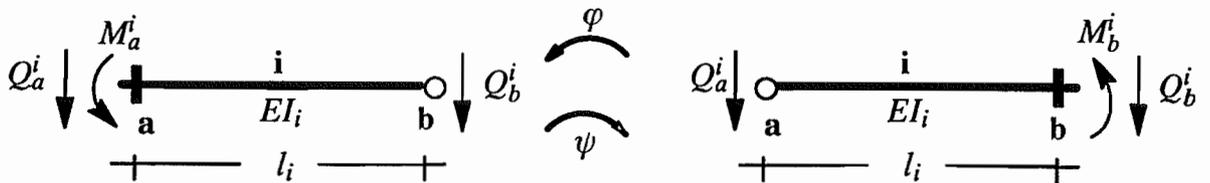
- Kraftgrößen an den Stabenden des beidseits biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$ :

Last ; $a = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$M_a^{i0}$	$M_b^{i0}$	$Q_a^{i0}$	$Q_b^{i0}$
	$\frac{2EI}{l}(3\beta - 1)$	$-\frac{2EI}{l}(3\alpha - 1)$	$\frac{6EI}{l^2}(a - \beta)$	$-\frac{6EI}{l^2}(a - \beta)$
	$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3}$	$-\frac{12EI}{l^3}$
	$\frac{4EI}{l}$	$\frac{2EI}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{6EI}{l^2}$
	$-\frac{2EI}{l}$	$-\frac{4EI}{l}$	$\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$
	$\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$-\frac{12EI}{l^3} \Delta w$	$\frac{12EI}{l^3} \Delta w$
	$-\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$-\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$\frac{12EI}{l^3} \Delta w$	$-\frac{12EI}{l^3} \Delta w$

Die Biegelinien aus Moment (z.B.  $\omega$ -Tabelle) und den Knotenverschiebungen sind mit der Einflußlinie des statisch bestimmten Einfeldträgers zu überlagern.



- Grundformeln des einseitig gelenkig, einseitig biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :



$$M_a^i = \frac{EI_i}{l_i} (3\varphi_a + 3\psi_i) + M_a^{i0}$$

$$M_b^i = 0$$

$$Q_a^i = -\frac{EI_i}{l_i^2} (3\varphi_a + 3\psi_i) + Q_a^{i0}$$

$$Q_b^i = +\frac{EI_i}{l_i^2} (3\varphi_a + 3\psi_i) + Q_b^{i0}$$

$$M_a^i = 0$$

$$M_b^i = \frac{EI_i}{l_i} (3\varphi_b + 3\psi_i) + M_b^{i0}$$

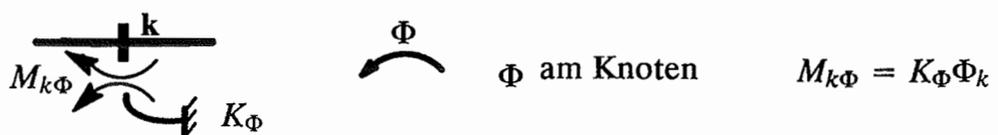
$$Q_a^i = -\frac{EI_i}{l_i^2} (3\varphi_b + 3\psi_i) + Q_a^{i0}$$

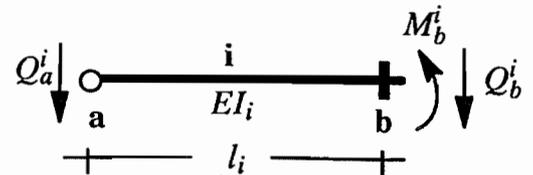
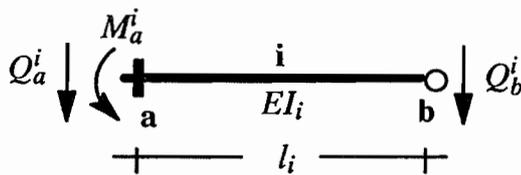
$$Q_b^i = +\frac{EI_i}{l_i^2} (3\varphi_b + 3\psi_i) + Q_b^{i0}$$

- Kraftgrößen an den Stabenden des einseitig gelenkig, einseitig biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  : (● Für das Gelenk am Stabende  $a$  gilt das umgekehrte Vorzeichen.)

Last $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$M_k^{i0}; k = a \text{ bzw. } b$	$Q_k^{i0}; k = a \text{ bzw. } b$	$Q_k^{i0}; k = b \text{ bzw. } a$
	$\bar{M} \frac{1-3\beta^2}{2}$	$-\frac{\bar{M}}{l} \frac{3(1-\beta^2)}{2}$ ●	$\frac{\bar{M}}{l} \frac{3(1-\beta^2)}{2}$ ●
	$\bar{P} a \beta \frac{(1+\beta)}{2}$ ●	$-\bar{P} \frac{3\beta - \beta^3}{2}$	$-\bar{P} (a - \frac{\beta - \beta^3}{2})$
	$\frac{\bar{q} l^2}{8}$ ●	$-\frac{5\bar{q} l}{8}$	$-\frac{3\bar{q} l}{8}$
	$\frac{l^2}{120} * (\bar{q}_1 + 7\bar{q}_2)$ ●	$-\frac{l}{40} * (16\bar{q}_1 + 9\bar{q}_2)$	$-\frac{l}{40} * (4\bar{q}_1 + 11\bar{q}_2)$
$\bar{\kappa} = \frac{\alpha_T \Delta T}{h}; \Delta T = T_u - T_o$ 	$\frac{3}{2} EI \bar{\kappa}$ ●	$-\frac{3}{2l} EI \bar{\kappa}$	$\frac{3}{2l} EI \bar{\kappa}$
$\Delta \bar{w} = \bar{w}_b - \bar{w}_a$ 	$\frac{3EI}{l^2} \Delta \bar{w}$	$-\frac{3EI}{l^3} \Delta \bar{w}$ ●	$\frac{3EI}{l^3} \Delta \bar{w}$ ●

Grundformeln für Drehfedern am Knoten  $k$  :





- Kraftgrößen an den Stabenden des einseitig gelenkig, einseitig biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :

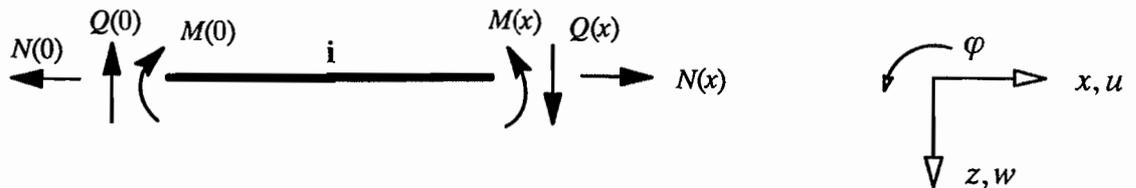
Last	$a = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$M_k^{i0} ; k = a \text{ bzw. } b$	$Q_a^{i0}$	$Q_b^{i0}$
		$\frac{3EI}{l}\beta$	$-\frac{3EI}{l^2}\beta$	$\frac{3EI}{l^2}\beta$
		$-\frac{3EI}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3}$	$-\frac{3EI}{l^3}$
		$\frac{3EI}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^2}$
		$\frac{3EI}{l^2}\Delta w$	$-\frac{3EI}{l^3}\Delta w$	$\frac{3EI}{l^3}\Delta w$
		$-\frac{3EI}{l^2}\Delta w$	$\frac{3EI}{l^3}\Delta w$	$-\frac{3EI}{l^3}\Delta w$
		$-\frac{3EI}{l}a$	$\frac{3EI}{l^2}a$	$-\frac{3EI}{l^2}a$
		$-\frac{3EI}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3}$	$-\frac{3EI}{l^3}$
		$-\frac{3EI}{l}$	$\frac{3EI}{l^2}$	$-\frac{3EI}{l^2}$
		$-\frac{3EI}{l^2}\Delta w$	$\frac{3EI}{l^3}\Delta w$	$-\frac{3EI}{l^3}\Delta w$
		$\frac{3EI}{l^2}\Delta w$	$-\frac{3EI}{l^3}\Delta w$	$\frac{3EI}{l^3}\Delta w$

## 2.4 Grundlegende Beziehungen im Übertragungsverfahren (Vorzeichen-Definition 1):

- Grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \\ N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{\varphi}(x) \\ \bar{N}(x) \\ \bar{Q}(x) \\ \bar{M}(x) \end{bmatrix}^i$$

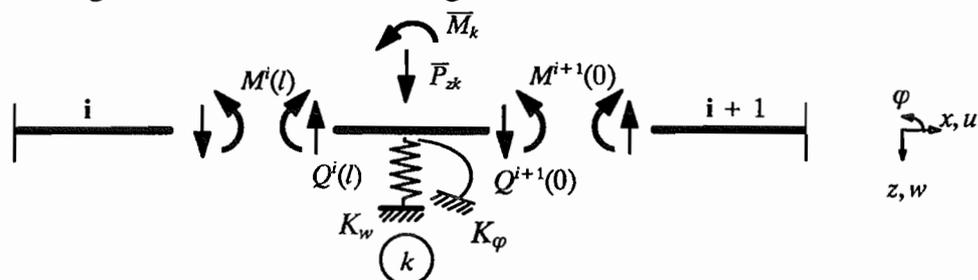
- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  :

$$\mathbf{U}^i(x=l) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l & 0 & -\frac{l^3}{6EI_y} & -\frac{l^2}{2EI_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l^2}{2EI_y} & \frac{l}{EI_y} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & 1 \end{array} \right]^i$$

- Grundlegende Beziehung an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$$

- Zustandsgrößen an der Abschnittsgrenze :



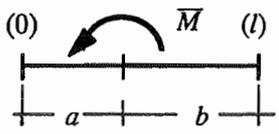
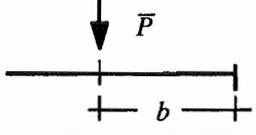
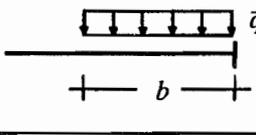
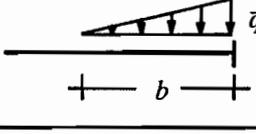
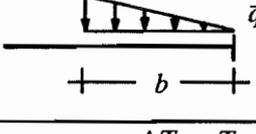
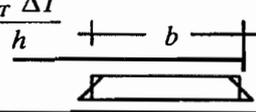
- Zustandsvektoren  $\mathbf{z}_k^i$ ,  $\mathbf{z}_k^{i+1}$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}_k$  an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{z}_k^i = \begin{bmatrix} u(l) \\ w(l) \\ \varphi(l) \\ N(l) \\ Q(l) \\ M(l) \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{z}_k^{i+1} = \begin{bmatrix} u(0) \\ w(0) \\ \varphi(0) \\ N(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix}^{i+1} \quad \bar{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{w}_k \\ \bar{\varphi}_k \\ -\bar{P}_{xk} \\ -\bar{P}_{zk} \\ -\bar{M}_k \end{bmatrix}$$

- Punktmatrix an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{T}_k = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_u & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_\varphi & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_k$$

- Lastvektor infolge Lasten quer zur Stabachse zwischen zwei Abschnittsgrenzen :

Belastung Stababschnitt $i$	Komponenten des Lastvektors $\bar{\mathbf{z}}^i$			
	$w(l)$	$\varphi(l)$	$Q(l)$	$M(l)$
	$\frac{\bar{M} b^2}{2EI_y}$	$-\frac{\bar{M} b}{EI_y}$	0	$-\bar{M}$
	$\frac{\bar{P} b^3}{6EI_y}$	$-\frac{\bar{P} b^2}{2EI_y}$	$-\bar{P}$	$-\bar{P} b$
	$\frac{\bar{q} b^4}{24EI_y}$	$-\frac{\bar{q} b^3}{6EI_y}$	$-\bar{q} b$	$-\frac{\bar{q} b^2}{2}$
	$\frac{\bar{q} b^4}{120EI_y}$	$-\frac{\bar{q} b^3}{24EI_y}$	$-\frac{\bar{q} b}{2}$	$-\frac{\bar{q} b^2}{6}$
	$\frac{\bar{q} b^4}{30EI_y}$	$-\frac{\bar{q} b^3}{8EI_y}$	$-\frac{\bar{q} b}{2}$	$-\frac{\bar{q} b^2}{3}$
$\bar{\kappa} = \frac{\alpha_r \Delta T}{h}$  $\Delta T = T_u - T_o$	$-\bar{\kappa} \frac{b^2}{2}$	$\bar{\kappa} b$	0	0

- Lastvektor infolge Lasten in Stabrichtung siehe Abschnitt 1.3

## 2.5 Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1 :

- lokale Schnittgrößen an der Stelle  $x$  in *Vorzeichen-Definition 1* :

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix}$$

- lokale Kraftgrößen an den Stabenden in *Vorzeichen-Definition 2* :

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a^i \\ \mathbf{p}_b^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_a^i = \begin{bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_b^i = \begin{bmatrix} N_b \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix}$$

- Übergang von *Vorzeichen-Definition 2* zu *Vorzeichen-Definition 1* :

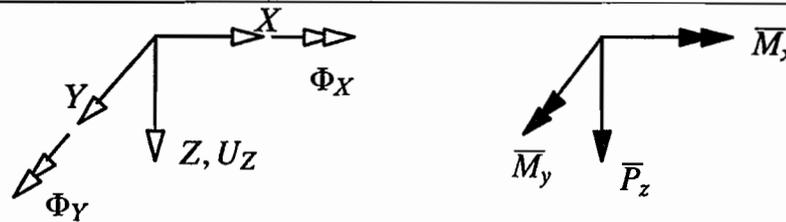
$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x=0) &= \mathbf{T}_a \mathbf{p}_a & \mathbf{T}_a &= -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}(x=l) &= \mathbf{T}_b \mathbf{p}_b & \mathbf{T}_b &= \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}(x=0) = \begin{bmatrix} N(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(x=l) = \begin{bmatrix} N(l) \\ Q(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_b \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix}$$

### 3. Trägerrost in der X-Y-Ebene

#### 3.1 Globales Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten :

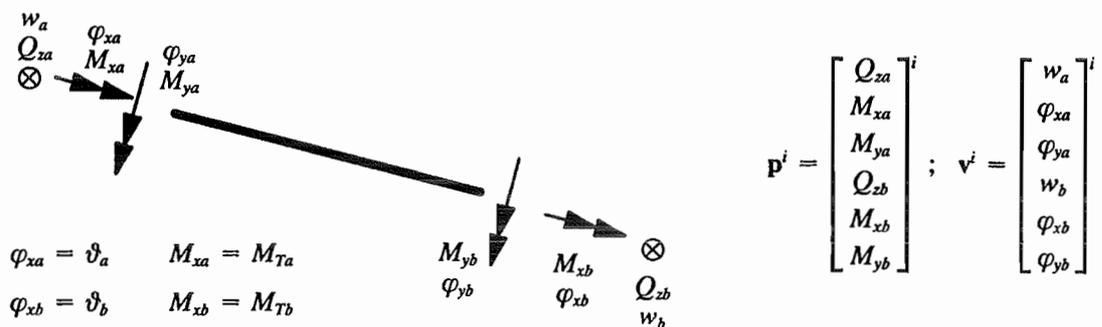


#### 3.2 Grundlegende Beziehungen im Weggrößenverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

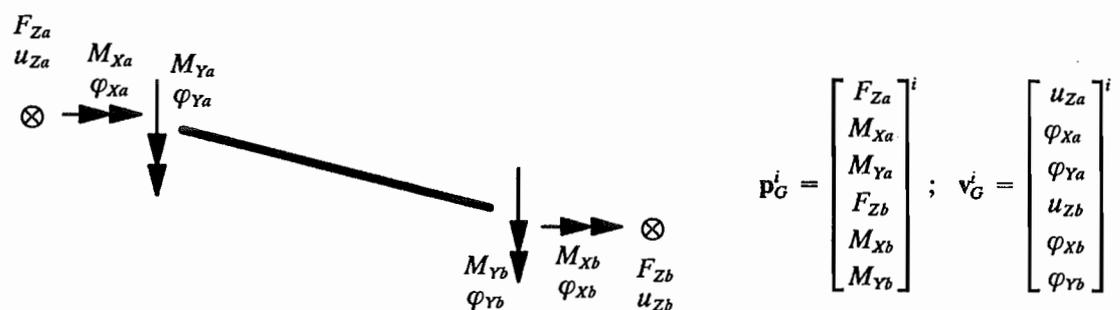
- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :

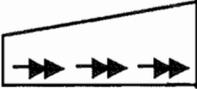
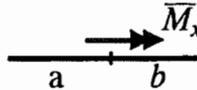


- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  :

$$k^i = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & | & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & | & 0 & -\frac{GI_T}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & | & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} \\ \hline -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & | & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & -\frac{GI_T}{l} & 0 & | & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & | & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix}^i$$

- Kraftgrößen an den Stabenden  $p^{i0}$  aus Belastung quer zur Stabachse siehe 2.3

- Kraftgrößen an den Stabenden  $p^{i0}$  aus Torsionsbelastung des Elements :

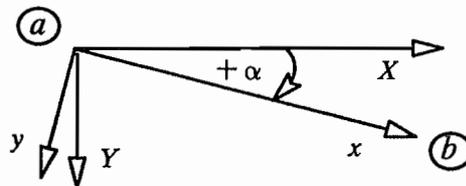
Last : $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$\bar{M}_{xa}^0$	$\bar{M}_{xb}^0$
	$-\frac{\bar{m}_x l}{2}$	$-\frac{\bar{m}_x l}{2}$
	$-\frac{l}{6} ( 2 \bar{m}_{x1} + \bar{m}_{x2} )$	$-\frac{l}{6} ( \bar{m}_{x1} + 2 \bar{m}_{x2} )$
	$-\bar{M}_x \beta$	$-\bar{M}_x \alpha$

- Transformation vom globalen ins lokale Koordinatensystem (und umgekehrt) :

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \qquad \mathbf{v}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i \quad (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) \qquad \mathbf{p}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$

$$\mathbf{k}^i \quad (\text{lokal}) \qquad \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i \quad (\text{global} \leftarrow \text{lokal})$$



$$\mathbf{T}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin a & \cos a \end{array} \right]^i$$

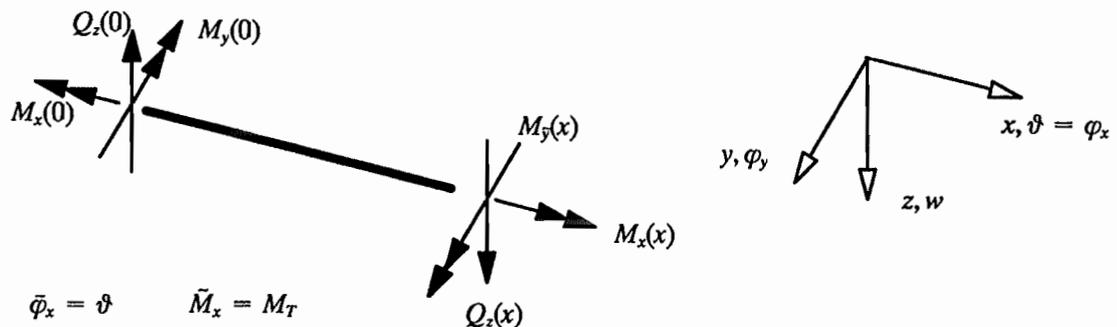
$$\mathbf{T}^{iT} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin a & \cos a \end{array} \right]^i$$

### 3.3 Grundlegende Beziehungen im Übertragungsverfahren (Vorzeichen-Definition 1):

- grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \vartheta(x) \\ \varphi_y(x) \\ Q_z(x) \\ M_x(x) \\ M_y(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{w}(x) \\ \bar{\vartheta}(x) \\ \bar{\varphi}_y(x) \\ \bar{Q}_z(x) \\ \bar{M}_x(x) \\ \bar{M}_y(x) \end{bmatrix}^i$$

- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  :

$$\mathbf{U}^i(x=l) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -l & -\frac{l^3}{6EI_y} & 0 & -\frac{l^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{GI_T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{l^2}{2EI_y} & 0 & \frac{l}{EI_y} \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & l & 0 & 1 \end{array} \right]^i$$

- grundlegende Beziehung an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\boxed{\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k}$$

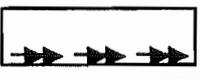
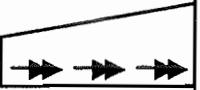
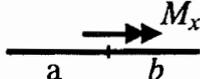
- Zustandsvektoren  $\mathbf{z}_k^i$ ,  $\mathbf{z}_k^{i+1}$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}_k$  an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{z}_k^i = \begin{bmatrix} w(l) \\ \vartheta(l) \\ \varphi_y(l) \\ Q_z(l) \\ M_x(l) \\ M_y(l) \end{bmatrix}^i \quad \mathbf{z}_k^{i+1} = \begin{bmatrix} w(0) \\ \vartheta(0) \\ \varphi_y(0) \\ Q_z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \end{bmatrix}^{i+1} \quad \bar{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\varphi}_y \\ -\bar{P}_z \\ -\bar{M}_x \\ -\bar{M}_y \end{bmatrix}_k$$

- Punktmatrix an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{T}_k = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_w & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_\vartheta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\varphi y} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_k$$

- Lastvektor infolge Torsionsbelastung zwischen zwei Abschnittsgrenzen :

Last : $\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}$	$\bar{\vartheta}(\bar{x})$	$\bar{M}_x(\bar{x})$
 $\bar{m}_x$	$-\frac{\bar{m}_x l^2}{2 GI_T}$	$-\bar{m}_x l$
 $\bar{m}_{x1}$ $\bar{m}_{x2}$	$-\frac{l^2}{6 GI_T} (2\bar{m}_{x1} + \bar{m}_{x2})$	$-\frac{\bar{m}_{x1} + \bar{m}_{x2}}{2} l$
 $\bar{M}_x$ a b	$-\frac{\bar{M}_x b}{GI_T}$	$-\bar{M}_x$

- Lastvektor infolge Lasten zwischen zwei Abschnittsgrenzen quer zur Stabrichtung (das heißt senkrecht zur Trägerrostebene) siehe Abschnitt 2.4

### 3.5 Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1 :

- lokale Schnittgrößen an der Stelle  $x$  in *Vorzeichen-Definition 1* :

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} Q_z(x) \\ \bar{M}_x(x) \\ M_y(x) \end{bmatrix}$$

- lokale Kraftgrößen an den Stabenden in *Vorzeichen-Definition 2* :

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a^i \\ \mathbf{p}_b^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_a^i = \begin{bmatrix} Q_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_b^i = \begin{bmatrix} Q_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \end{bmatrix}$$

- Übergang von *Vorzeichen-Definition 2* zu *Vorzeichen-Definition 1* :

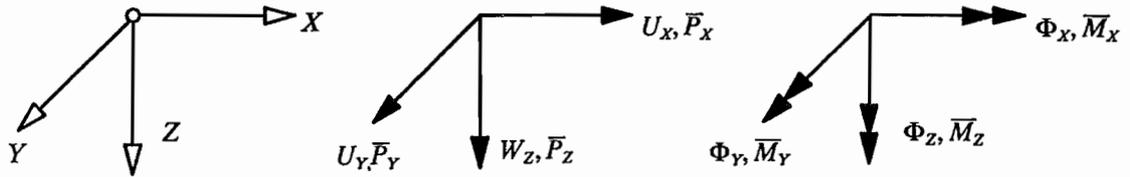
$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x=0) &= \mathbf{T}_a \mathbf{p}_a & \mathbf{T}_a &= -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}(x=l) &= \mathbf{T}_b \mathbf{p}_b & \mathbf{T}_b &= \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}(x=0) = \begin{bmatrix} Q_z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(x=l) = \begin{bmatrix} Q_z(l) \\ M_x(l) \\ M_y(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \end{bmatrix}$$

## 4. Räumlicher Rahmen

### 4.1 Globales Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten :

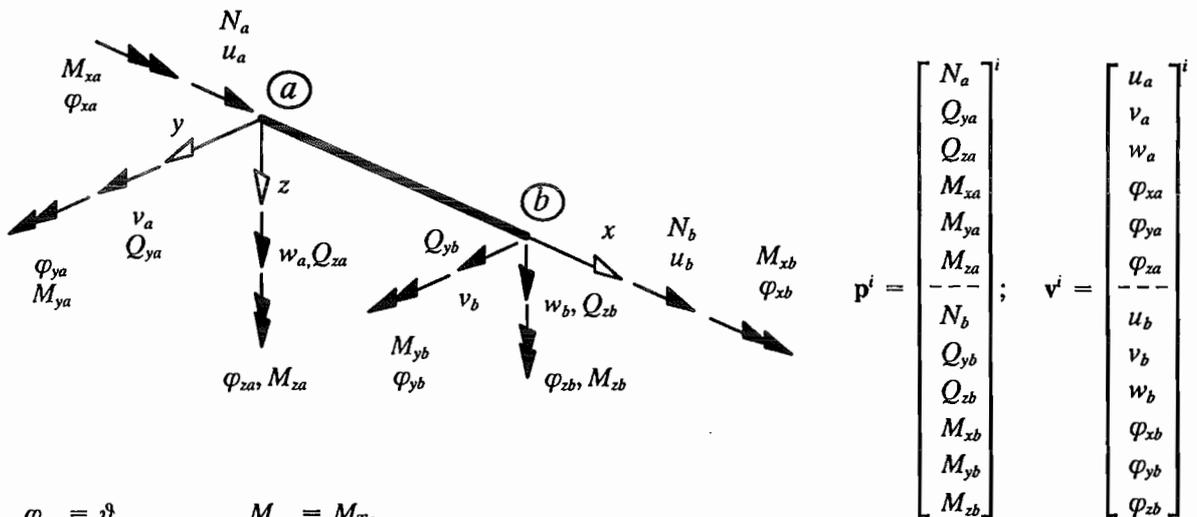


### 4.2 Grundlegende Beziehungen im Weggrößenverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



$$\varphi_{xa} = \vartheta_a \quad M_{xa} = M_{Ta}$$

$$\varphi_{xb} = \vartheta_b \quad M_{xb} = M_{Tb}$$

- globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :

$\mathbf{p}_G^i$  und  $\mathbf{v}_G^i$  analog mit den Kraftgrößen  $F_X, F_Y, F_Z, M_X, M_Y, M_Z$  und den Weggrößen  $U_X, U_Y, U_Z, \Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z$  an den Stabenden  $a$  und  $b$

- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Belastung in Stabrichtung siehe 1.2
- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Belastung quer zur Stabachse siehe 2.3
- Kraftgrößen an den Stabenden  $\mathbf{p}^{i0}$  aus Torsionsbelastung siehe 3.2

- lokale Steifigkeitsmatrix des räumlichen Elements  $i$  (Theorie I. Ordnung) :

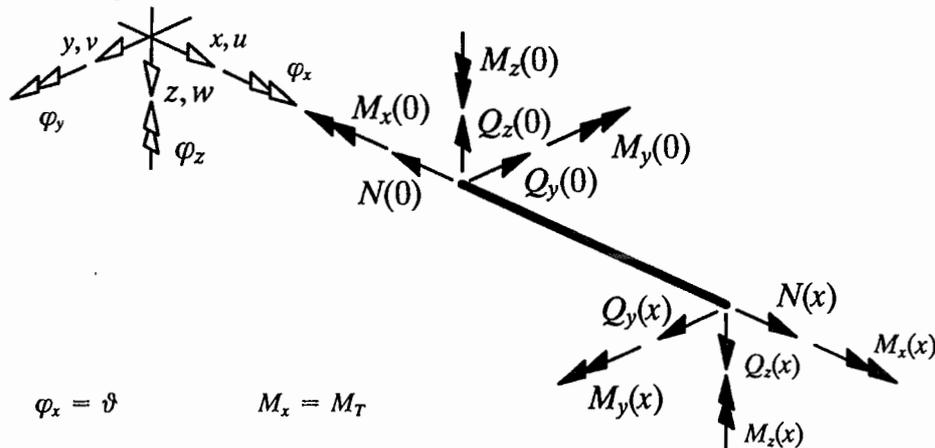
$$\begin{bmatrix}
 u_a & v_a & w_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} & \varphi_{za} & u_b & v_b & w_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} & \varphi_{zb} \\
 EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 12EI_z/\beta^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/\beta^2 & 0 & 12EI_z/\beta & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/\beta \\
 0 & 0 & 12EI_y/\beta^3 & 0 & 6EI_y/\beta^2 & 0 & 0 & -12EI_y/\beta & 0 & 0 & 6EI_y/\beta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & GI_T/l & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_T/l & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 6EI_y/\beta^2 & 0 & 4EI_y/l & 0 & 0 & 6EI_y/\beta & 0 & 2EI_y/l & 0 & 0 \\
 0 & 6EI_z/\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/l & 0 & -6EI_z/\beta & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l \\
 -EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12EI_z/\beta^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/\beta^2 & 0 & 12EI_z/\beta & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/\beta \\
 0 & 0 & -12EI_y/\beta^3 & 0 & -6EI_y/\beta^2 & 0 & 0 & -12EI_y/\beta & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/\beta \\
 0 & 0 & 0 & GI_T/l & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_T/l & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6EI_y/\beta^2 & 0 & -4EI_y/l & 0 & 0 & -6EI_y/\beta & 0 & -2EI_y/l & 0 & 0 \\
 0 & -6EI_z/\beta^2 & 0 & 0 & 0 & -4EI_z/l & 0 & 6EI_z/\beta & 0 & 0 & 0 & -2EI_z/l
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 N_a & Q_{ya} & Q_{za} & M_{xa} & M_{ya} & M_{za} & N_b & Q_{yb} & Q_{zb} & M_{xb} & M_{yb} & M_{zb} \\
 N_b & Q_{yb} & Q_{zb} & M_{xb} & M_{yb} & M_{zb}
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 u_a & v_a & w_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} & \varphi_{za} & u_b & v_b & w_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} & \varphi_{zb} \\
 N_a & Q_{ya} & Q_{za} & M_{xa} & M_{ya} & M_{za} & N_b & Q_{yb} & Q_{zb} & M_{xb} & M_{yb} & M_{zb}
 \end{bmatrix}$$

#### 4.3 Grundlegende Beziehungen im Übertragungsverfahren (Vorzeichen-Definition 1):

- Grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x) \\ \mathbf{s}(x) \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \text{---} \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \text{---} \\ N(x) \\ Q_y(x) \\ Q_z(x) \\ \text{---} \\ M_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}(x) \\ \bar{\mathbf{s}}(x) \end{bmatrix}^i$$

- Lastvektor infolge Lasten in Stabrichtung siehe Abschnitt 1.3
- Lastvektor infolge Lasten quer zur Stabachse siehe 2.4
- Lastvektor infolge Torsionsbelastung siehe 3.3
- Grundlegende Beziehung an der Abschnittsgrenze  $k$  :

$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$$



#### 4.4 Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1

- lokale Schnittgrößen an der Stelle  $x$  in Vorzeichen-Definition 1 :

$$s(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ Q_y(x) \\ Q_z(x) \\ M_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix}$$

- lokale Kraftgrößen an den Stabenden in Vorzeichen-Definition 2 :

$$p^i = \begin{bmatrix} p_a^i \\ p_b^i \end{bmatrix} \quad p_a^i = \begin{bmatrix} N_a \\ Q_{ya} \\ Q_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \end{bmatrix} \quad p_b^i = \begin{bmatrix} N_b \\ Q_{yb} \\ Q_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix}$$

- Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1 :

$$s(x=0) = T_a p_a$$

$$s(x=l) = T_b p_b$$

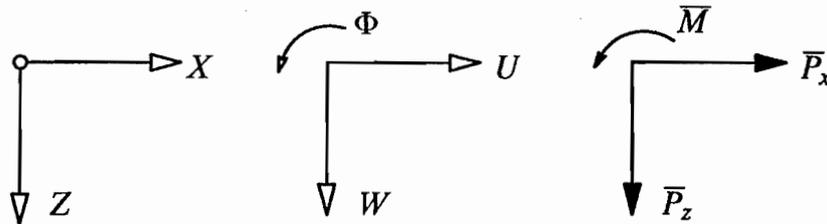
$$s(x=0) = \begin{bmatrix} N(0) \\ Q_y(0) \\ Q_z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \\ M_z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_a \\ -Q_{ya} \\ -Q_{za} \\ -M_{xa} \\ -M_{ya} \\ M_{za} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] p_a^i$$

$$s(x=l) = \begin{bmatrix} N(l) \\ Q_y(l) \\ Q_z(l) \\ M_x(l) \\ M_y(l) \\ M_z(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_b \\ Q_{yb} \\ Q_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ -M_{zb} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] p_b^i$$

## 5. Ebener Rahmen - Theorie II. Ordnung

### 5.1 Globales Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten :

Wie bei Theorie I. Ordnung:

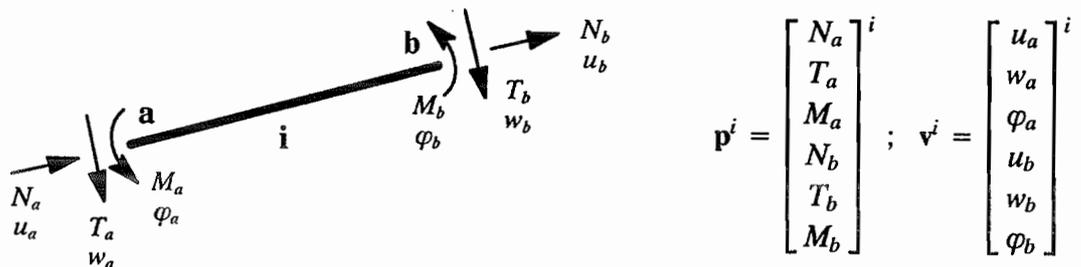


### 5.2 Grundlegende Beziehungen im Weggrößenverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

- Grundlegende Beziehung am Element  $i$  :

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$$

- lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



Die Transversalkraft  $T$  wirkt rechtwinklig zur *unverschobenen* Stabachse.  
Die Querkraft  $Q$  wirkt rechtwinklig zur *verschobenen* Stabachse.

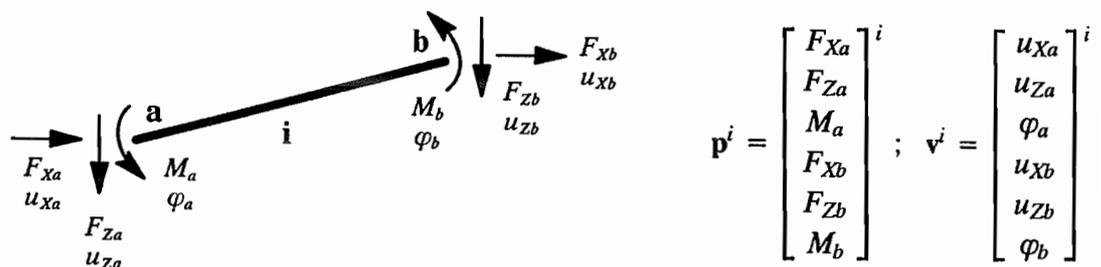
Für  $Q(x)$  ergibt sich in Vorzeichen-Definition 1 für den Druckstab mit

$$N = N_b = -N_a < 0 \text{ sowie } T_a, T_b \text{ in Vorz.-Def. 2 und } T(x) \text{ in Vorz.-Def. 1 :}$$

$$Q(x) = T(x) - N w' \quad ; \quad Q(x=0) = T(x=0) - N (-\varphi_a) = -T_a + N \varphi_a$$

$$Q(x=l) = T(x=l) - N (-\varphi_b) = +T_b + N \varphi_b$$

- globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Definition 2) :



- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Druckstab Theorie II. Ordnung) :

$$N < 0$$

$$\bar{k} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} & 0 & -[2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & A' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l^2} & B' \frac{EI}{l} \\ \hline & \text{symmetrisch} & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & [2(A' + B') - D'] \frac{EI}{l^3} & (A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & & & & A' \frac{EI}{l} \end{array} \right]$$

Hilfswerte  $A', B', C', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Druckstab Theorie II. Ordnung  $N < 0$  :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 - \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$B' = 2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 + \dots$$

$$C' = \frac{A'^2 - B'^2}{A'} = \frac{\varepsilon^2 \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon} ;$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{|N|}{EI} ;$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \varepsilon)}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

$$A' + B' = 6 - \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 - \dots$$

$$C' - D' = \frac{\varepsilon^3 \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon} ;$$

$$2 (A' + B') - D' = \frac{\varepsilon^3 \sin \varepsilon}{2 (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} ;$$

Die Werte  $A', B', C'$  entsprechen den Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma$  in :

Duddeck, Ahrens : Statik der Tragwerke , Betonkalender 1985 I bzw. 1988 I.

Stabkennzahl  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich der Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung :

$$A' = 4 \qquad B' = 2 \qquad C' = 3 \qquad D' = 0$$

Hilfswerte zur Berechnung der Stabendmomente in Abhängigkeit der Stabkennzahl

$\varepsilon = l \sqrt{\frac{ N }{EI}}$	für Druckstäbe Theorie II. Ordnung :					$N < 0$
$\varepsilon$	$A'$	$B'$	$A' + B'$	$C'$	$C' - D'$	$2(A' + B') - D'$
0.00	4.0000	2.0000	6.0000	3.0000	3.0000	12.0000
0.05	3.9997	2.0001	5.9997	2.9995	2.9970	11.9970
0.10	3.9987	2.0003	5.9990	2.9980	2.9880	11.9880
0.15	3.9970	2.0008	5.9977	2.9955	2.9730	11.9730
0.20	3.9947	2.0013	5.9960	2.9920	2.9520	11.9520
0.25	3.9917	2.0021	5.9937	2.9875	2.9250	11.9250
0.30	3.9880	2.0030	5.9910	2.9820	2.8920	11.8920
0.35	3.9836	2.0041	5.9877	2.9754	2.8529	11.8530
0.40	3.9786	2.0054	5.9840	2.9679	2.8079	11.8080
0.45	3.9729	2.0068	5.9797	2.9593	2.7568	11.7569
0.50	3.9666	2.0084	5.9750	2.9496	2.6996	11.6999
0.55	3.9595	2.0102	5.9697	2.9390	2.6365	11.6369
0.60	3.9518	2.0121	5.9639	2.9272	2.5672	11.5678
0.65	3.9434	2.0143	5.9576	2.9145	2.4920	11.4927
0.70	3.9342	2.0166	5.9508	2.9006	2.4106	11.4117
0.75	3.9244	2.0191	5.9435	2.8856	2.3231	11.3245
0.80	3.9139	2.0218	5.9357	2.8696	2.2296	11.2314
0.85	3.9027	2.0246	5.9274	2.8524	2.1299	11.1322
0.90	3.8908	2.0277	5.9185	2.8341	2.0241	11.0271
0.95	3.8782	2.0309	5.9092	2.8147	1.9122	10.9158
1.00	3.8649	2.0344	5.8993	2.7940	1.7940	10.7986
1.05	3.8508	2.0380	5.8889	2.7722	1.6697	10.6752
1.10	3.8360	2.0419	5.8779	2.7492	1.5392	10.5459
1.15	3.8205	2.0460	5.8665	2.7249	1.4024	10.4105
1.20	3.8043	2.0502	5.8545	2.6993	1.2593	10.2690
1.25	3.7873	2.0547	5.8420	2.6725	1.1100	10.1215
1.30	3.7695	2.0594	5.8289	2.6443	0.9543	9.9678
1.35	3.7510	2.0644	5.8153	2.6148	0.7923	9.8082
1.40	3.7317	2.0695	5.8012	2.5839	0.6239	9.6424
1.45	3.7116	2.0749	5.7865	2.5516	0.4491	9.4705
1.50	3.6907	2.0806	5.7713	2.5178	0.2678	9.2926
1.55	3.6690	2.0865	5.7555	2.4825	0.0800	9.1085
1.60	3.6466	2.0926	5.7392	2.4457	-0.1143	8.9184
1.65	3.6233	2.0990	5.7223	2.4072	-0.3153	8.7221
1.70	3.5991	2.1057	5.7048	2.3672	-0.5228	8.5197
1.75	3.5741	2.1127	5.6868	2.3253	-0.7372	8.3111

$N < 0$

$\varepsilon$	$A'$	$B'$	$A' + B'$	$C'$	$C' - D'$	$2(A' + B') - D'$
1.80	3.5483	2.1199	5.6682	2.2818	-0.9582	8.0964
1.85	3.5216	2.1275	5.6491	2.2364	-1.1861	7.8756
1.90	3.4940	2.1353	5.6293	2.1891	-1.4209	7.6486
1.95	3.4655	2.1434	5.6090	2.1398	-1.6627	7.4154
2.00	3.4361	2.1519	5.5880	2.0884	-1.9116	7.1761
2.05	3.4058	2.1607	5.5665	2.0349	-2.1676	6.9305
2.10	3.3745	2.1699	5.5444	1.9792	-2.4308	6.6788
2.15	3.3422	2.1794	5.5217	1.9211	-2.7014	6.4208
2.20	3.3090	2.1893	5.4983	1.8606	-2.9794	6.1566
2.25	3.2748	2.1996	5.4743	1.7974	-3.2651	5.8862
2.30	3.2395	2.2102	5.4498	1.7316	-3.5584	5.6095
2.35	3.2032	2.2213	5.4245	1.6629	-3.8596	5.3266
2.40	3.1659	2.2328	5.3987	1.5911	-4.1689	5.0373
2.45	3.1274	2.2447	5.3722	1.5162	-4.4863	4.7418
2.50	3.0878	2.2572	5.3450	1.4379	-4.8121	4.4400
2.55	3.0471	2.2701	5.3172	1.3560	-5.1465	4.1319
2.60	3.0052	2.2834	5.2887	1.2702	-5.4898	3.8174
2.65	2.9622	2.2974	5.2595	1.1804	-5.8421	3.4965
2.70	2.9178	2.3118	5.2297	1.0862	-6.2038	3.1693
2.75	2.8723	2.3268	5.1991	0.9873	-6.5752	2.8357
2.80	2.8254	2.3425	5.1679	0.8833	-6.9567	2.4957
2.85	2.7772	2.3587	5.1359	0.7739	-7.3486	2.1493
2.90	2.7276	2.3756	5.1032	0.6586	-7.7514	1.7965
2.95	2.6766	2.3932	5.0698	0.5369	-8.1656	1.4371
3.00	2.6242	2.4115	5.0357	0.4082	-8.5918	1.0713
3.05	2.5703	2.4305	5.0007	0.2720	-9.0305	0.6990
3.10	2.5148	2.4503	4.9651	0.1273	-9.4827	0.3201
3.15	2.4577	2.4709	4.9286	-0.0266	-9.9491	-0.0653
3.20	2.3990	2.4924	4.8914	-0.1906	-10.4306	-0.4572
3.25	2.3385	2.5148	4.8533	-0.3660	-10.9285	-0.8558
3.30	2.2763	2.5382	4.8145	-0.5540	-11.4440	-1.2610
3.35	2.2122	2.5626	4.7748	-0.7562	-11.9787	-1.6729
3.40	2.1463	2.5880	4.7343	-0.9744	-12.5344	-2.0914
3.45	2.0783	2.6146	4.6929	-1.2109	-13.1134	-2.5166
3.50	2.0083	2.6424	4.6507	-1.4682	-13.7182	-2.9486
3.55	1.9362	2.6714	4.6076	-1.7495	-14.3520	-3.3874
3.60	1.8618	2.7017	4.5636	-2.0587	-15.0187	-3.8329
3.65	1.7851	2.7335	4.5186	-2.4005	-15.7230	-4.2853
3.70	1.7060	2.7668	4.4727	-2.7811	-16.4711	-4.7445

$\varepsilon$	$A'$	$B'$	$A' + B'$	$C'$	$C' - D'$	$2(A' + B') - D'$
						$N < 0$
3.75	1.6243	2.8016	4.4259	-3.2079	-17.2704	-5.2107
3.80	1.5400	2.8382	4.3781	-3.6908	-18.1308	-5.6837
3.85	1.4528	2.8765	4.3293	-4.2427	-19.0652	-6.1638
3.90	1.3627	2.9168	4.2796	-4.8806	-20.0906	-6.6509
3.95	1.2695	2.9592	4.2287	-5.6280	-21.2305	-7.1450
4.00	1.1731	3.0037	4.1769	-6.5179	-22.5179	-7.6463
4.05	1.0732	3.0507	4.1239	-7.5981	-24.0006	-8.1547
4.10	0.9698	3.1001	4.0699	-8.9407	-25.7507	-8.6703
4.15	0.8624	3.1523	4.0147	-10.6596	-27.8821	-9.1931
4.20	0.7510	3.2074	3.9584	-12.9468	-30.5868	-9.7232
4.25	0.6353	3.2656	3.9009	-16.1515	-34.2140	-10.2607
4.30	0.5149	3.3273	3.8422	-20.9842	-39.4742	-10.8056
4.35	0.3897	3.3926	3.7823	-29.1462	-48.0687	-11.3579
4.40	0.2592	3.4619	3.7211	-45.9814	-65.3414	-11.9178
4.45	0.1231	3.5356	3.6586	-101.4543	-121.2568	-12.4852
4.50	-0.0191	3.6140	3.5949	683.7877	663.5377	-13.0603
4.55	-0.1678	3.6975	3.5297	81.3246	60.6221	-13.6431
4.60	-0.3234	3.7866	3.4632	44.0079	22.8479	-14.2337
4.65	-0.4867	3.8819	3.3952	30.4751	8.8526	-14.8321
4.70	-0.6582	3.9839	3.3257	23.4559	1.3659	-15.4385
4.75	-0.8387	4.0934	3.2548	19.1413	-3.4212	-16.0529
4.80	-1.0289	4.2112	3.1823	16.2070	-6.8330	-16.6754
4.85	-1.2299	4.3381	3.1082	14.0714	-9.4511	-17.3061
4.90	-1.4427	4.4751	3.0324	12.4389	-11.5711	-17.9451
4.95	-1.6685	4.6235	2.9550	11.1435	-13.3590	-18.5925
5.00	-1.9087	4.7845	2.8758	10.0844	-14.9156	-19.2484
5.05	-2.1651	4.9599	2.7948	9.1974	-16.3051	-19.9129
5.10	-2.4394	5.1514	2.7120	8.4389	-17.5711	-20.5861
5.15	-2.7340	5.3613	2.6272	7.7790	-18.7435	-21.2681
5.20	-3.0516	5.5921	2.5405	7.1959	-19.8441	-21.9590
5.25	-3.3953	5.8470	2.4517	6.6738	-20.8887	-22.6591
5.30	-3.7688	6.1296	2.3608	6.2004	-21.8896	-23.3684
5.35	-4.1770	6.4447	2.2677	5.7666	-22.8559	-24.0871
5.40	-4.6253	6.7977	2.1724	5.3651	-23.7949	-24.8152
5.45	-5.1210	7.1956	2.0747	4.9899	-24.7126	-25.5531
5.50	-5.6726	7.6472	1.9746	4.6364	-25.6136	-26.3009

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Zugstab Theorie II. Ordnung) :

$$N > 0$$

$$k = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} & 0 & -[2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & -(A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & A' \frac{EI}{l} & 0 & (A' + B') \frac{EI}{l^2} & B' \frac{EI}{l} \\ \hline & \text{symmetrisch} & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & [2(A' + B') + D'] \frac{EI}{l^3} & (A' + B') \frac{EI}{l^2} \\ & & & & & A' \frac{EI}{l} \end{array} \right]$$

Hilfswerte  $A', B', D'$  zur Berechnung der Steifigkeiten und Volleinspannschnittgrößen beim Zugstab Theorie II. Ordnung  $N > 0$  :

$$A' = \frac{\varepsilon (\sinh \varepsilon - \varepsilon \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad A' = 4 + \frac{2}{15} \varepsilon^2 - \frac{11}{6300} \varepsilon^4 + \dots$$

$$B' = \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad B' = 2 - \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{13}{12600} \varepsilon^4 - \dots$$

$$A' + B' = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cosh \varepsilon)}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon} ; \quad A' + B' = 6 + \frac{1}{10} \varepsilon^2 - \frac{1}{1400} \varepsilon^4 + \dots$$

$$D' = \varepsilon^2 = l^2 \frac{N}{EI}$$

$$2 (A' + B') + D' = \frac{-\varepsilon^3 \sinh \varepsilon}{2 (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \sinh \varepsilon}$$

Die Werte  $A', B'$  entsprechen den Zahlen  $\alpha, \beta$  in :

Duddeck, Ahrens : Statik der Tragwerke , Betonkalender 1985 I bzw. 1988 I.

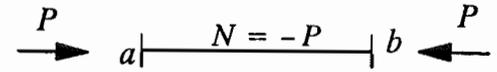
Stabkennzahl  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich der Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung :

$$A' = 4 \quad B' = 2 \quad D' = 0$$

- Kraftgrößen an den Stabenden  $\bar{p}^{i0}$  :



aus Belastung quer zur Stabachse :

$$N < 0$$

Momente	$M_a^o$	$M_b^o$	$M_a^o$
	$\frac{pl^2}{2(A' + B')}$	$-\frac{pl^2}{2(A' + B')}$	$\frac{pl^2}{2A'}$
	$\frac{pl^2}{6\varepsilon^2}(6 + B' - 2A')$	$-\frac{pl^2}{6\varepsilon^2}(2B' - A')$	$\frac{pl^2}{3\varepsilon^2}(3 - C')$
	$\frac{pl^2}{6\varepsilon^2}(2B' - A')$	$-\frac{pl^2}{6\varepsilon^2}(6 + B' - 2A')$	$\frac{pl^2}{6\varepsilon^2}[\frac{3\varepsilon^2}{A'} - 6 + 2C']$
Transversalkräfte	$T_a^o$	$T_b^o$	$T_a^o$
	$-\frac{pl}{2}$	$-\frac{pl}{2}$	$-\frac{pl}{2} - \frac{pl}{2A'}$
	$-\frac{pl}{3} - \frac{pl}{6\varepsilon^2}(A' + B' - 6)$	$-\frac{pl}{6} + \frac{pl}{6\varepsilon^2}(A' + B' - 6)$	$-\frac{pl}{3} - \frac{pl}{3\varepsilon^2}(3 - C')$
	$-\frac{pl}{6} + \frac{pl}{6\varepsilon^2}(A' + B' - 6)$	$-\frac{pl}{3} - \frac{pl}{6\varepsilon^2}(A' + B' - 6)$	$-\frac{pl}{6} - \frac{pl}{6}(\frac{3}{A'} - \frac{6}{\varepsilon^2} + \frac{2C'}{\varepsilon^2})$

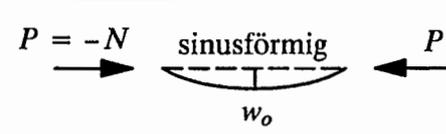
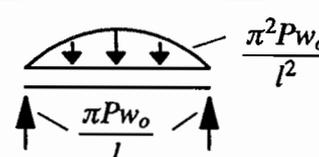
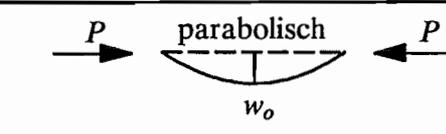
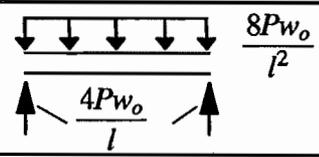
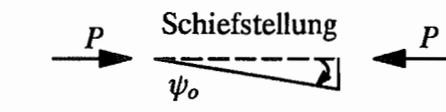
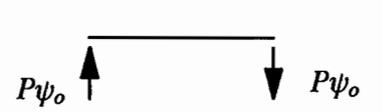
aus Vorverformungen :

$$N < 0$$

Momente	$M_a^o$	$M_b^o$	$M_a^o$
sinusförmig $w_o$	$\frac{(A' - B')\pi}{\pi^2 - \varepsilon^2} Pw_o$	$-M_a^o$	$\frac{C'\pi}{\pi^2 - \varepsilon^2} Pw_o$
parabolisch $w_o$	$\frac{4}{A' + B'} Pw_o$	$-M_a^o$	$\frac{4}{A'} Pw_o$
Schiefstellung $\psi_o$	0	0	0
Transversalkräfte	$T_a^o$	$T_b^o$	$T_a^o$   $T_b^o$
sinusförmig $w_o$	0	0	$-\frac{C'\pi}{l(\pi^2 - \varepsilon^2)} Pw_o$   $-T_a^o$
parabolisch $w_o$	0	0	$-\frac{4}{lA'} Pw_o$   $-T_a^o$
Schiefstellung $\psi_o$	$P\psi_o$	$-P\psi_o$	$P\psi_o$   $-P\psi_o$

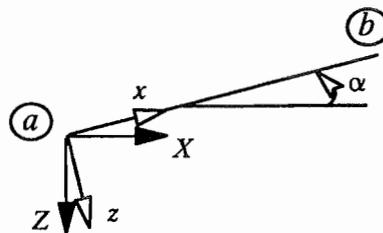
- Vorverformungen bei Druckstäben Theorie II. Ordnung  $N < 0$

Vorverformungen können für die Berechnung der Biegemomente auch durch statisch gleichwertige Ersatzlastgruppen ersetzt werden (beachte, daß sowohl die Streckenlast als auch die Reaktionskräfte angesetzt werden müssen, wegen  $\Sigma V=0$ ):

Vorverformung	Ersatzlast
$P = -N$  $w_0$	 $\frac{\pi^2 P w_0}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ $\frac{\pi P w_0}{l}$
 $w_0$	 $\frac{8 P w_0}{l^2}$ $\frac{4 P w_0}{l}$
 $\psi_0$	 $P \psi_0$

- Transformation vom globalen ins lokale Koordinatensystem (und umgekehrt) :  
(Wie bei Theorie I. Ordnung)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^i &= \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i & (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) & & \mathbf{v}_G^i &= \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i & (\text{global} \leftarrow \text{lokal}) \\
 \mathbf{p}^i &= \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i & (\text{lokal} \leftarrow \text{global}) & & \mathbf{p}_G^i &= \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i & (\text{global} \leftarrow \text{lokal}) \\
 \mathbf{k}^i && (\text{lokal}) & & \mathbf{k}_G^i &= \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i & (\text{global} \leftarrow \text{lokal})
 \end{aligned}$$

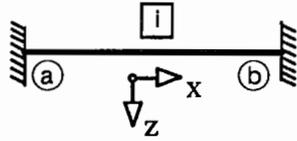


$$\mathbf{T}^i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]^i$$

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  (Druckstab Theorie II. Ordnung) aus der analytischen Lösung der Differentialgleichung für verschiedene Randbedingungen :

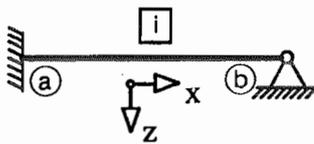
$$N < 0$$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig eingespannten Stab:



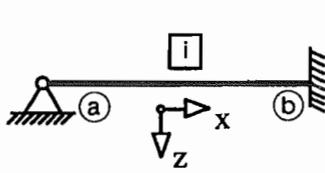
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} [2(A' + B') - D'] & -(A' + B') l & -[2(A' + B') - D'] & -(A' + B') l \\ -(A' + B') l & A'l^2 & (A' + B') l & B'l^2 \\ -[2(A' + B') - D'] & (A' + B') l & [2(A' + B') - D'] & (A' + B') l \\ -(A' + B') l & B'l^2 & (A' + B') l & A'l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ M_a^{0II} \\ T_b^{0II} \\ M_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Stab:



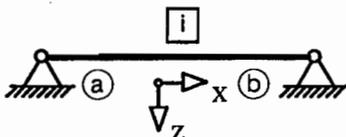
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} C' - D' & -C'l & -(C' - D') \\ -C'l & C'l^2 & C'l \\ -(C' - D') & C'l & C' - D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ M_a^{0II} \\ T_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den rechts eingespannten, links gelenkig gelagerten Stab:



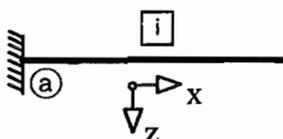
$$\begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} C' - D' & -(C' - D') & -C'l \\ -(C' - D') & C' - D' & C'l \\ -C'l & C'l & C'l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^{0II} \\ T_b^{0II} \\ M_b^{0II} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -D' & D' \\ D' & -D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \end{bmatrix}$$

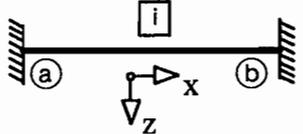
Steifigkeitsmatrix für den Kragarm:



$$[M_a] = \frac{EI}{l^3} \left[ -\frac{\varepsilon \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} l^2 \right] \cdot [\varphi_a] + [M_a^{0II}]$$

- lokale Steifigkeitsmatrix des Elements  $i$  nach Theorie II. Ordnung mit genäherter Lösung (Geometrische Matrix) für verschiedene Randbedingungen:

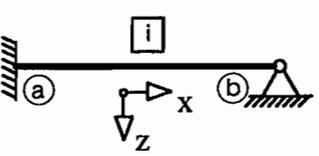
Steifigkeitsmatrix für den beidseitig eingespannten Stab:



N mit Vorzeichen einsetzen  
Druck -  
Zug +

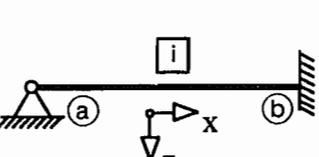
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \dots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 & \frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}l & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}l \\ -\frac{1}{10}l & -\frac{1}{30}l^2 & \frac{1}{10}l & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \dots \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ M_a^0 \\ \dots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Stab:



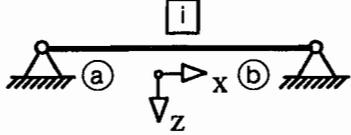
$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ \dots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3l & -3 \\ -3l & 3l^2 & 3l \\ \dots & \dots & \dots \\ -3 & 3l & 3 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5}l & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l^2 & \frac{1}{5}l \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{5}l & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ \dots \\ w_b \\ M_b^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ M_a^0 \\ \dots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den rechts eingespannten, links gelenkig gelagerten Stab:



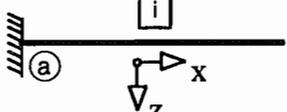
$$\begin{bmatrix} T_a \\ \dots \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3l \\ \dots & \dots & \dots \\ -3 & 3 & 3l \\ -3l & 3l & 3l^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5}l \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5}l \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l & \frac{1}{5}l^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} w_a \\ \dots \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^0 \\ \dots \\ T_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab:



$$\begin{bmatrix} T_a \\ \dots \\ T_b \end{bmatrix} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \dots & \dots \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \dots \\ w_b \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für den Kragarm:



$$[M_a] = \frac{N}{l} [l^2] \cdot [\varphi_a] + [M_a^0]$$

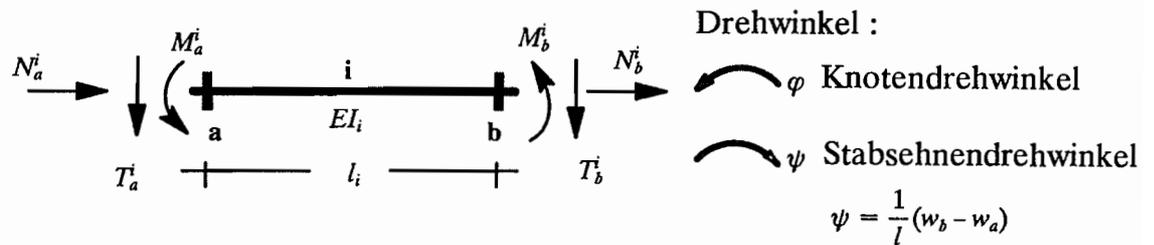
Anwendung der geometrischen Matrix für:

$$\varepsilon = 1 \sqrt{\frac{|N|}{EI}} \leq 1.00$$

5.3 Grundlegende Beziehungen im Drehwinkelverfahren (Vorzeichen-Definition 2) :

Druckstab Theorie II. Ordnung :  $N_b^i = -N_a^i = N$  mit  $N < 0$

- Grundformeln des beidseits biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :

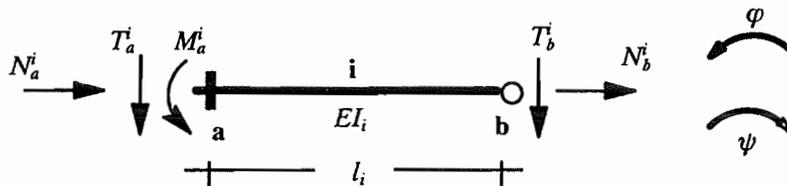


$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -\frac{A' + B'}{l} & -\frac{A' + B'}{l} & -\frac{2(A' + B') - D'}{l} \\ A' & B' & (A' + B') \\ \frac{A' + B'}{l} & \frac{A' + B'}{l} & \frac{2(A' + B') - D'}{l} \\ B' & A' & (A' + B') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^o \\ M_a^o \\ T_b^o \\ M_b^o \end{bmatrix}$$

$Q(x)$  in Vorzeichen-Definition 1:  $Q(x = 0) = -T_a + N \varphi_a$

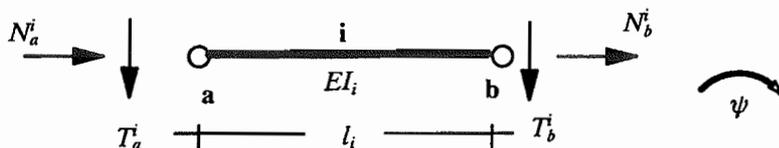
$Q(x = l) = +T_b + N \varphi_b$

- Kraftgrößen an den Stabenden aus Feldbelastungen siehe 5.2
- Grundformeln des einseitig gelenkig, einseitig biegesteif angeschlossenen Stabes  $i$  :



$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ T_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -\frac{C'}{l} & -\frac{C' - D'}{l} \\ C' & C' \\ +\frac{C'}{l} & +\frac{C' - D'}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a^o \\ M_a^o \\ T_b^o \end{bmatrix} \quad M_b = 0$$

- Grundformeln des beidseits gelenkig angeschlossenen Stabes  $i$  (Fachwerkstab ohne Feldbelastung) :



$$T_a = -N \psi = +\frac{EI}{l^2} D' \psi$$

$$T_b = +N \psi = -\frac{EI}{l^2} D' \psi$$

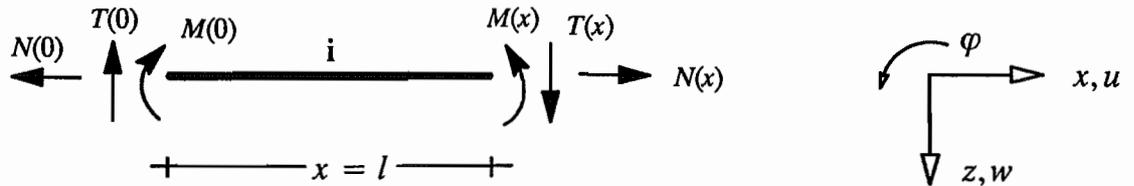
$$Q(x) \equiv 0$$

5.4 Grundlegende Beziehungen im Übertragungsverfahren (Vorzeichen-Definition 1):

- Grundlegende Beziehung am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \mathbf{U}^i(x) \mathbf{z}^i(0) + \bar{\mathbf{z}}^i(x)$$

- Zustandsgrößen am Stababschnitt (Vorzeichen-Definition 1) :



- Zustandsvektor  $\mathbf{z}^i(x)$  und Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}^i(x)$  am Stababschnitt  $i$  :

$$\mathbf{z}^i(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \\ N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix}^i \quad \bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{\varphi}(x) \\ \bar{N}(x) \\ \bar{T}(x) \\ \bar{M}(x) \end{bmatrix}^i$$

- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  (Druckstab Theorie II. Ordnung) :

( $l$  = Länge des Übertragungsabschnitts) :  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$   $N < 0$

$$U(x=l) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l \sin \varepsilon}{\varepsilon} & 0 & -\frac{l^3 (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{EI \varepsilon^3} & -\frac{l^2 (1 - \cos \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} \\ 0 & 0 & \cos \varepsilon & 0 & \frac{l^2 (1 - \cos \varepsilon)}{EI \varepsilon^2} & \frac{l \sin \varepsilon}{EI \varepsilon} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{l} \varepsilon \sin \varepsilon & 0 & \frac{l \sin \varepsilon}{\varepsilon} & \cos \varepsilon \end{array} \right]$$

- Übertragungsmatrix des Stababschnittes  $i$  (Zugstab Theorie II. Ordnung) :

( $l =$  Länge des Übertragungsabschnitts) :  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$   $N > 0$

$$U(x=l) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l \sinh \varepsilon}{\varepsilon} & 0 & \frac{l^3}{EI} \frac{(\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{\varepsilon^3} & \frac{l^2}{EI} \frac{(1 - \cosh \varepsilon)}{\varepsilon^2} \\ 0 & 0 & \cosh \varepsilon & 0 & -\frac{l^2}{EI} \frac{(1 - \cosh \varepsilon)}{\varepsilon^2} & \frac{l \sinh \varepsilon}{EI \varepsilon} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{l} \varepsilon \sinh \varepsilon & 0 & \frac{l \sinh \varepsilon}{\varepsilon} & \cosh \varepsilon \end{array} \right]$$

- Grundlegende Beziehung an der Abschnittsgrenze  $k$  (analog Theorie I. Ordnung) :

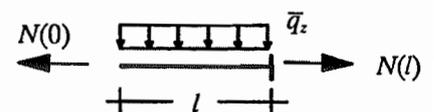
$$\mathbf{z}_k^{i+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$$

- Lastvektor  $\bar{\mathbf{z}}(x)$  infolge Lasten zwischen zwei Abschnittsgrenzen (siehe z.B. Petersen : Statik und Stabilität der Baukonstruktionen) :

$\bar{\mathbf{z}}(x)$  infolge einer Gleichlast  $\bar{q}_z$  :

( $l =$  Länge des Übertragungsabschnitts) :  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$   $N < 0$

$$\bar{\mathbf{z}}^i(x) = \begin{bmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{\varphi}(x) \\ \bar{N}(x) \\ \bar{T}(x) \\ \bar{M}(x) \end{bmatrix}^i ; \bar{\mathbf{z}}(l) = \bar{q}_z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l^4}{EI} \frac{\varepsilon^2 - 2(1 - \cos \varepsilon)}{2\varepsilon^4} \\ -\frac{l^3}{EI} \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^3} \\ 0 \\ -l \\ -\frac{l^2(1 - \cos \varepsilon)}{\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$



### 5.5 Übergang von Vorzeichen-Definition 2 zu Vorzeichen-Definition 1 :

Analog Theorie I. Ordnung:

- lokale Schnittgrößen an der Stelle  $x$  in *Vorzeichen-Definition 1* :

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix}$$

- lokale Kraftgrößen an den Stabenden in *Vorzeichen-Definition 2* :

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} p_a^i \\ p_b^i \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{p}_a^i = \begin{bmatrix} N_a \\ T_a \\ M_a \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{p}_b^i = \begin{bmatrix} N_b \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix}$$

- Übergang von *Vorzeichen-Definition 2* zu *Vorzeichen-Definition 1* :

$$\mathbf{s}(x=0) = \mathbf{T}_a \mathbf{p}_a ; \quad \mathbf{T}_a = -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

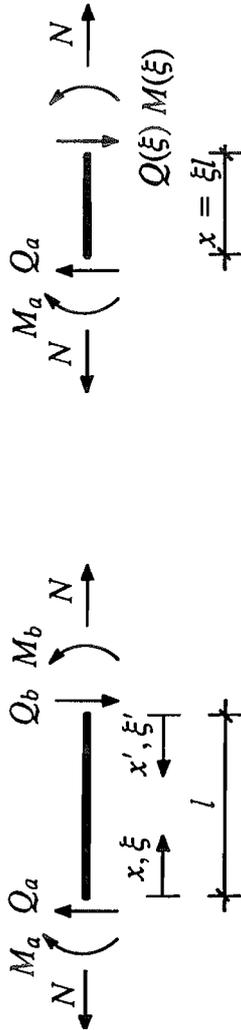
$$\mathbf{s}(x=l) = \mathbf{T}_b \mathbf{p}_b ; \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(x=0) = \begin{bmatrix} N(0) \\ T(0) \\ M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ T_a \\ M_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(x=l) = \begin{bmatrix} N(l) \\ T(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_b \\ T_b \\ M_b \end{bmatrix}$$

5.6 Schnittgrößen im Feld eines beliebig gelagerten Druckstabes (Theorie II. Ordnung)  $N < 0$

$$\varepsilon = l \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$$



$$\xi = \frac{x}{l}$$

$$\xi' = \frac{l-x}{l} = 1 - \xi$$

	$M(\xi) = + M_a \frac{\sin(\varepsilon \xi')}{\sin \varepsilon} + M_b \frac{\sin(\varepsilon \xi)}{\sin \varepsilon}$	$Q(\xi) = - \frac{M_a}{l} \frac{\varepsilon \cos(\varepsilon \xi')}{\sin \varepsilon} + \frac{M_b}{l} \frac{\varepsilon \cos(\varepsilon \xi)}{\sin \varepsilon}$
	$M(\xi) = \frac{ql^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\cos[\varepsilon(0,5-\xi)]}{\cos(0,5\varepsilon)} - 1 \right]$	$Q(\xi) = ql \frac{\sin[\varepsilon(0,5-\xi)]}{\varepsilon \cos(0,5\varepsilon)}$
	$M(\xi) = \frac{ql^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\sin(\varepsilon \xi)}{\sin \varepsilon} - \xi \right)$	$Q(\xi) = ql \left[ \frac{\cos(\varepsilon \xi)}{\varepsilon \sin \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right]$
	$M(\xi) = \frac{ql^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\sin(\varepsilon \xi')}{\sin \varepsilon} - \xi' \right)$	$Q(\xi) = ql \left[ - \frac{\cos(\varepsilon \xi')}{\varepsilon \sin \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right]$