

Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung

C. Stummer

IAPG / FESG No. 25

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2006

Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung

C. Stummer

IAPG / FESG No. 25

München 2006

ISSN 1437-8280

ISBN-10: 3-934205-24-0, ISBN-13: 978-3-934205-24-6

Hinweis: Eine PDF-Version dieser Arbeit mit farbigen Abbildungen ist erhältlich unter
<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/veroeffentlichung/schriftenreihe/schriftenreihe.php>

Adressen:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/>

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

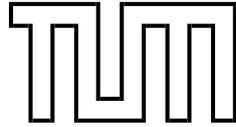
D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23191

Telefax: +49-89-289-23178

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~fesg/>



Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

**Analyse der
Gradiometergleichungen
der GOCE
Satellitenmission zur
Schwerefeldbestimmung**

Diplomarbeit

Claudia Stummer

Betreuer: Dr.-Ing. Thomas Gruber
Abgabe: Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Instrumente	3
2.1	Schweregradiometer und GPS-Empfänger	3
2.2	<i>Drag control</i> - und <i>angular control</i> - System	5
2.3	Beschleunigungsmesser	10
2.4	Konfiguration der Beschleunigungsmesser	11
3	Fehlerfreies Gradiometer-Messsystem	13
3.1	Prinzip der Gradiometrie	13
3.2	Beobachtungsgleichung	18
3.3	Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser . .	20
3.4	<i>Common mode</i> Beschleunigungen	21
3.5	<i>Differential mode</i> Beschleunigungen	24
3.6	Winkelbeschleunigungen	26
3.7	Schweregradienten	28
4	Allgemeine Überlegungen zum fehlerfreien Gradiometer-Messsystem	31
4.1	Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser . .	31
4.1.1	CS-S-Beschleunigungen aus 'Referenzgradienten'	31
4.1.2	Beschleunigungen aus E2E-Simulation	37
4.2	<i>Common mode</i> und <i>differential mode</i> Beschleunigungen	42
4.2.1	<i>Common</i> - und <i>differential mode</i> aus Referenzdaten	42
4.2.2	<i>Common</i> - und <i>differential mode</i> aus E2E-Simulation	42
4.3	Schweregradienten	46
4.3.1	Referenzschweregradienten	46
4.3.2	Schweregradienten aus E2E-Simulation	48

5	Instrumentenfehler von GOCE	53
5.1	<i>Bias</i>	53
5.2	Skalierungsfehler	61
5.3	Misalignment	66
5.4	Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen	70
5.5	Zusammenfassung der Instrumentenfehler	71
5.6	Versatz zwischen Mittelpunkt Gradiometer und Massenzentrum Satellit . .	72
5.6.1	<i>Offset</i> in x-Richtung	72
5.6.2	<i>Offsets</i> in allen drei Richtungen	76
6	Fehlerfortpflanzung	81
6.1	Genauigkeiten der <i>common mode</i> - und <i>differential mode</i> Beschleunigungen	82
6.2	Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen	83
6.3	Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten	84
6.4	Genauigkeiten der Schweregradienten	86
6.5	Fehleranalyse	87
6.6	Fehlerfortpflanzung mit Instrumentenfehlern	93
7	Zusammenfassung und Schlussbemerkungen	99
A.	Partielle Ableitungen	103
A.1	Fehlerfortpflanzung auf Winkelbeschleunigungen	103
A.2	Fehlerfortpflanzung auf Schweregradienten	104
A.3	Fehlerfortpflanzung auf messbare Beschleunigungen (mit Instrumentenfehlern)	105
	Glossar	107
	Literaturverzeichnis	109

Kapitel 1

Einleitung

Im Frühjahr 2007 soll der Satellit GOCE, als erste Mission des ESA „Living Planet“ Programms gestartet werden. Der Name GOCE steht dabei für „Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer Mission“, was zu Deutsch bedeutet: „Mission zur Erforschung des Schwerefeldes (der Erde) und der mittleren Ozeanzirkulation“. Mit Hilfe von GOCE soll also der mittlere bzw. statische Anteil des Erdschwerefeldes und des Geoids mit der bestmöglichen räumlichen Auflösung und Genauigkeit bestimmt werden. Bei GOCE steht somit vor allem das Messen der bisher nicht genau bekannten mittleren bis kurzen Wellenlängen im Vordergrund. Die Missionsdauer von GOCE beträgt insgesamt 20 Monate. Die eigentlichen Messphasen dauern allerdings nur zweimal sechs Monate. Es wird deshalb nicht möglich sein zeitliche Veränderungen im Schwerefeld der Erde zu analysieren. Es soll ein quasi - stationäres, sprich mittleres Geoid abgeleitet werden. Die optimale Ergänzung zu GOCE stellt somit seine Vorgängermission GRACE dar, welche die langen und mittleren Wellenlängen des Erdschwerefeldes und seine zeitlichen Veränderungen hochgenau bestimmt. Das neue, von GOCE abgeleitete Schwerefeldmodell und Geoid wird nicht nur in der Geodäsie, sondern auch in den Bereichen der Geophysik, Ozeanographie und Glaziologie wertvolle neue Erkenntnisse liefern. So wird es z.B. möglich sein, Höhensysteme global mit annähernd *cm*-Genauigkeit zusammenzuschließen. Ausgehend von der Bedeutung der Abkürzung GOCE können zwei Hauptanwendungen unterschieden werden. Das sind zum Einen, die direkt aus dem Erdschwerefeld erkennbaren Dichteanomalien der Lithosphäre und des Oberen Mantels, welche auf Massenanomalien schließen lassen. Zum Anderen wird es möglich die detaillierte Geoidoberfläche von der aus Satellitenaltimetrie gewonnenen Ozeanoberfläche zu trennen. Die Differenz dieser beiden Flächen wird als mittlere Ozeantopographie bezeichnet und lässt direkte Rückschlüsse auf die Ozeanzirkulation zu. Voraussetzung für das Erreichen dieser eben genannten wichtigen wissenschaftlichen Ziele ist die Bestimmung des Schwerefeldes auf $10^{-6} g$ (bzw. $1 mGal$) und des Geoids auf 1-2 *cm* genau. Die räumliche Auflösung muss gleichzeitig mindestens 100 *km* betragen und die Ergebnisse müssen frei von systematischen Fehlern in den langen Wellenlängen gehalten werden. Ob es mit GOCE tatsächlich möglich sein wird dementsprechend gute Ergebnisse zu liefern, hängt v. a. vom Schwere-Sensorsystem an Bord des Satelliten ab. Das Herzstück dieses Systems stellt ein hochgenaues Gradiometer dar. Dieses Instrument besteht aus sechs Akzelerometern und ermöglicht es die Gradienten des Erdschwerefeld-

des aus den gemessenen Beschleunigungsdifferenzen zu bestimmen. Mit GOCE wird zum ersten Mal ein Gradiometer im Weltraum eingesetzt. Auch das komplette System, welches das Gradiometer, einen GPS-Receiver, sowie ein aktives *drag-free* - und Lagekontrollsystem miteinander verbindet stellt eine absolute Neuentwicklung dar. Es müssen daher im Vorfeld der Mission neue Algorithmen zur Datenauswertung entwickelt werden. Um das komplexe Messsystem verstehen zu können, ist es besonders wichtig das GOCE-Gradiometer, mit seinen Messergebnissen und erreichbaren Genauigkeiten genau zu kennen. Die Analyse der Gradiometergleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Messungen des Gradiometers und den gesuchten Größen darstellen, ist das Thema der vorliegenden Arbeit. Diese gliedert sich in die folgenden Abschnitte:

In Kapitel 2 wird neben dem Zusammenwirken von Gradiometrie und *satellite-to-satellite tracking* bei GOCE v.a. das Schwere-Gradiometer selbst, mit seinen Bestandteilen und deren Anordnung behandelt.

Nach einer kurzen Einführung in das Prinzip der Gradiometrie im Weltraum werden in Kapitel 3 ausgehend von der grundlegenden Gradiometer-Beobachtungsgleichung wichtige Größen, wie Winkelbeschleunigungen und Schweregradienten im fehlerfreien Messsystem abgeleitet.

In Kapitel 4 werden alle wichtigen Größen des Gradiometers aus Daten des GOCE *end-to-end* Simulators berechnet und mit Referenzwerten verglichen, welche sich aus dem vorhandenen Schwerefeld ableiten lassen.

Die in Kapitel 3 hergeleiteten Gradiometergleichungen für das fehlerfreie Messsystem, werden in Kapitel 5 um verschiedene Fehlerterme erweitert. Dabei wird v.a. auf die Instrumentenfehler von GOCE eingegangen.

In Kapitel 6 werden verschiedene Fehlerfortpflanzungen für das GOCE-Messsystem (sowohl mit, als auch ohne Instrumentenfehler) durchgeführt. Dies ermöglicht es, die Auswirkung der einzelnen Instrumentenfehler auf die Genauigkeiten der Schweregradienten zu untersuchen.

Kapitel 2

Instrumente

Um die GOCE-Gradiometergleichungen analysieren und sinnvoll interpretieren zu können, was ab Kapitel 3 geschieht werden zunächst in diesem Kapitel die wichtigsten Instrumente von GOCE vorgestellt. Nach der Beschreibung des Zusammenspiels der beiden Hauptinstrumente des Satelliten, also des Gradiometers und des GPS-Empfängers (Abschnitt 2.1) wird auf *drag control**- und das *angular control**-System von GOCE eingegangen (Abschnitt 2.2). Die beiden letzten Abschnitte dieses Kapitels (2.3 und 2.4) dienen der Beschreibung des Schweregradiometers selbst, welcher das Herzstück der GOCE-Mission darstellt. Nur mit der Kenntnis über seine Funktionsweise und seinen Aufbau können später die Gradiometergleichungen verstanden werden. Der Hauptzweck des Schweregradiometers ist die Bestimmung der drei Hauptdiagonalelemente des Schwere-Gradienten-Tensors, was durch Messung der Differenz zwischen Beschleunigungen möglich wird. Das Gradiometer besteht deshalb aus mehreren Beschleunigungsmessern, deren Anordnung in Abschnitt 2.4 gezeigt wird und auf deren Prinzip in Abschnitt 2.3 eingegangen wird.

2.1 Schweregradiometer und GPS-Empfänger

Bei GOCE kommen zwei Messtechniken zur Bestimmung des Schwerfeldes zum Einsatz. Diese sind zum Einen Satellitengradiometrie und zum Anderen *satellite-to-satellite tracking* (SST*) mit Hilfe des GPS-Empfängers (vgl. [ESA, 1999]).

Bei der Gradiometrie werden mit drei Beschleunigungsmesser-Paaren, welche sich in einem gewissen Abstand voneinander entfernt befinden und so das 3-D Gradiometer formen (siehe Abschnitt 2.4) Beschleunigungsdifferenzen gemessen. Diese stellen die grundlegenden Beobachtungen der Messmission dar und sind proportional zum Schweregradienten in Richtung der Verbindungslinie der je zwei Sensoren. Das GOCE-Gradiometer ermöglicht es das Schwerfeld erstmals direkt aus dem Weltraum zu beobachten. Aufgrund der niedrigen Flughöhe (ca. 250 km) und durch das *drag control* System (siehe Abschnitt 2.2) wird es möglich, das Schwerfeld mit einer weit höheren Auflösung zu berechnen als es bisher global möglich war. Das Schweregradiometer kann aber, aufgrund seiner kurzen Basislinien und seiner beschränkten Messbandbreite nur die mittleren bis kurzen Wellenlängen des

*Alle Begriffe die mit diesem Symbol gekennzeichnet sind, sind im Glossar aufgeführt.

Erdschwerefeldes hoch genau bestimmen. Die obere Grenze der Messbandbreite liegt bei 100 mHz , was einer Auflösung¹ von ca. 80 km und einem maximalen Entwicklungsgrad der Kugelfunktionskoeffizienten von ca. $L = 250$ entspricht. Die untere Grenze wird mit 5 mHz definiert, was bedeutet, dass das Gradiometer erst ungefähr ab Grad² $L = 13$ der Kugelflächenfunktion verwertbare Beiträge zum Schwerefeld liefert.

Das ist der Grund, weshalb zusätzlich *satellite-to-satellite tracking* im *high-low* Modus (SST-hl*) angewandt wird. Bei dieser Methode erfolgt die Positionsbestimmung eines tief fliegenden Satelliten (*low*), hier GOCE, durch Empfang von Mikrowellensignalen, welche von GPS-Satelliten auf weit höheren und bekannten Bahnen (*high*) ausgesandt werden. Die Schwerefeldinformation wird aus der anschließenden Bahnanalyse gewonnen und kann bis zu einem Grad von mindestens $L = 60$ der Kugelflächenfunktion verwendet werden. Bei der Festlegung des Schwerefeldes wird deshalb über einen relativ großen Wellenlängenbereich Information aus beiden Messmethoden herangezogen.

Abbildung 2.1 zeigt das GOCE Messprinzip mit Kombination aus *satellite-to-satellite tracking* (SST-hl) und *satellite gravity gradiometry* (SGG*). Weil die Schwere nach Au-

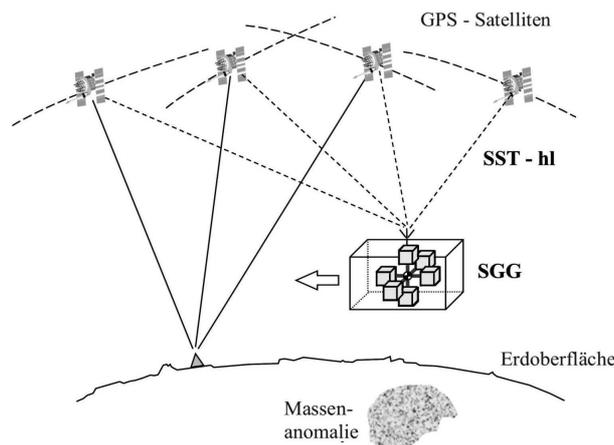


Abb. 2.1: SST-hl und SGG

ßen quadratisch abnimmt, bedeutet eine niedrige Flugbahn ein starkes Signal und damit auch eine hohe Genauigkeit. Mit Abnahme der Flughöhe steigen allerdings auch die Störeffekte durch den Luftwiderstand. Dies gilt sowohl für Gradiometrie als auch für SST.

Beim SST-hl benötigt man unabhängige Messungen der nicht-gravitativen Kräfte um das Schweresignal vom Gesamtsignal trennen zu können. Bei GOCE wird ohnehin mit Hilfe des *drag control* Systems versucht den Satelliten frei vom Einfluss nicht-gravitativer Kräfte zu halten. Es verbleibt jedoch ein gewisses Störsignal, welches das *drag control* System nicht beseitigen kann. Dieses zeigt sich in den *common mode* Beschleunigungen (siehe 3.4), welche das Gradiometer als eine Art Nebenprodukt liefert. Des Weiteren müssen auch in der Gradiometrie die gewonnenen Schweregradienten einer genauen Position zugeordnet werden können, was mit der Bahnbestimmung aus den SST-hl-Daten möglich wird.

¹Auflösung [km] \approx Fluggeschwindigkeit $[\frac{\text{km}}{\text{s}}]$ / Frequenz [Hz]; Fluggeschwindigkeit GOCE $\approx 7.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

²maximaler Entwicklungsgrad $L \approx (20000 \text{ km}) / \text{Auflösung [km]}$

2.2 Drag control- und angular control- System

In diesem Abschnitt wird das Gesamtmesssystem von GOCE mit allen wichtigen Instrumenten vorgestellt. Abbildung 2.2 soll dabei das Zusammenwirken der einzelnen Instrumente veranschaulichen. Da im vorigen Abschnitt bereits das Zusammenwirken von Gradiometer und GPS-Empfänger behandelt wurde, soll nun speziell auf die beiden Kontrollsysteme von GOCE (*drag control* und *angular control*) eingegangen werden. Diese beiden Systeme werden benötigt, da auf den Satelliten sowohl translatorische, als auch rotatorische Kräfte wirken.

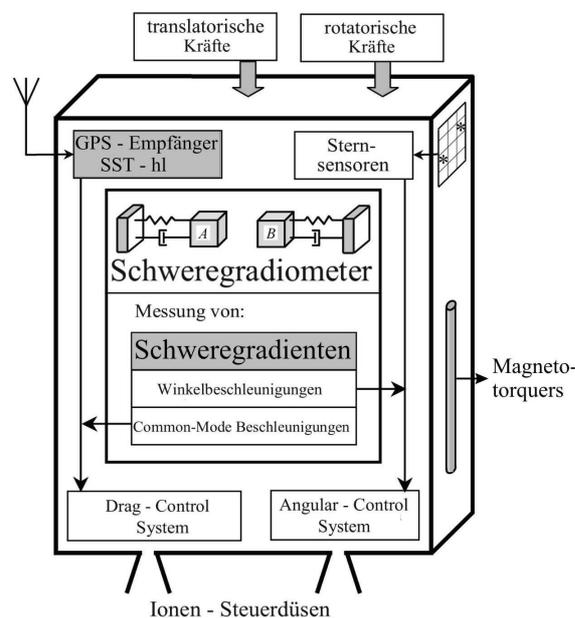


Abb. 2.2: Gesamtmesssystem

Im Folgenden sind die einzelnen Instrumente mit ihren wesentlichen Aufgaben aufgeführt:

- **Schwergradiometer:**

- Messung der Schwergradienten (v.a. Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix) im Instrumentensystem (GRF*) und innerhalb der Messbandbreite (MBW*)
- Messung der Winkelbeschleunigungen (hochgenau um y-Achse; weniger genau um x- und z-Achse) (u.a. für das *angular control* System)
- Messung der *common mode* Beschleunigungen für das *drag control* System

- **GPS-Empfänger:**

Messung der Position entlang des gesamten Orbits mit *cm*-Genauigkeit

- **Sternsensoren:**

Messung der Orientierung im Inertialsystem (hochgenau für niedrige Frequenzen)

- **Drag Control System mit zwei Ionen-Triebwerken:**

- Verwendung der *common mode* Beschleunigungen des Gradiometers als Kontrollsignal
- Nachsteuerung mit Hilfe der beiden Ionen-Triebwerke

- **Angular Control System mit magnetotorquers* (Magnetfeldresonanzspulen):**

- Basierend auf Winkelbeschleunigungen der Sternsensoren und des Gradiometers
- Nachsteuerung mit Hilfe der *magnetotorquers*

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erklärt, sind die beiden wichtigsten Instrumente des Systems das Gradiometer und der GPS-Receiver. Das Gradiometer dient vor allem der Bestimmung der Schweregradienten. Zusätzlich liefert es aber auch wichtige Information für das aktive Lagekontrollsystem von GOCE (*angular control*) und das *drag control* System.

Letzteres soll den Satelliten mit Hilfe von zwei Ionen-Triebwerken in Flugrichtung *drag-free*, also frei vom Einfluss nicht-gravitativer Kräfte halten. Das System basiert auf den sogenannten *common mode* Beschleunigungen* (siehe Abschnitt 3.4), welche das Gradiometer liefert. Diese Form der Beschleunigungen ist deshalb enorm wichtig für die gesamte GOCE-Messmission und wird unter anderem in Abschnitt 3.4 noch ausführlicher behandelt. Hier sei noch erwähnt, dass laut [ESA, 1999] die genannte *drag*-Kontrolle in Flugrichtung (x-Achse) über alle Frequenzen benötigt wird, da in dieser Richtung die meisten Störkräfte auftreten. Auch entlang der y-Achse (also senkrecht zur Flugbahn) wird das *drag control* System, aufgrund der Kopplung mit der x-Achse geringfügig benötigt. In radialer Richtung (z-Achse) sind die auftretenden Abweichungen auch ohne *drag*-Kontrolle vernachlässigbar klein.

Wie bereits erwähnt, liefert das Gradiometer ebenfalls Information für die *angular control* des Satelliten, also für das Lagekontrollsystem. Die Information besteht in diesem Fall aus Winkelbeschleunigungen, welche sich aus den Gradiometermessungen ableiten lassen und deshalb nur innerhalb der Messbandbreite (MBW) des Gradiometers die gewünschte Genauigkeit gewährleisten. Genaue Winkelgeschwindigkeiten in den Frequenzen unterhalb der MBW liefern die Sternsensoren von GOCE. Die Information aus dem Gradiometer und aus den Sternsensoren wird deshalb in einem komplexen Algorithmus (*angular rate reconstruction*) gemeinsam verarbeitet um die Winkelgeschwindigkeiten über alle Frequenzen bestmöglich rekonstruieren zu können. Die eigentliche Steuerung bzw. Drehung erfolgt mit Hilfe von Magnetfeldresonanzspulen (*magnetic torquer* bzw. *magnetotorquer*).

Um die Funktionsweise dieser *magnetic torquer* zu verstehen, wird an dieser Stelle kurz das Prinzip einer stromdurchflossenen Spule im Magnetfeld (nach [Bergmann-Schäfer, 1987]),

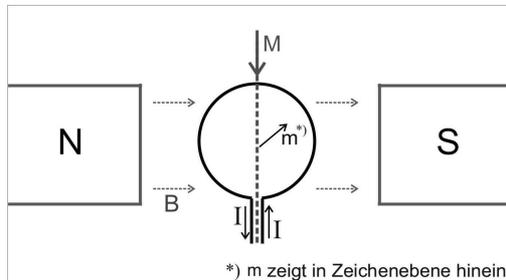


Abb. 2.3: stromdurchflossene Spule im Magnetfeld

mit Hilfe von Abbildung 2.3 erklärt. Jede stromdurchflossene Spule besitzt ein so genanntes magnetisches Moment m . Im Magnetfeld der Flussdichte B wirkt auf die Spule das Drehmoment $M = m \times B$, (vgl. "Rechte-Hand-Regel") welches versucht den Vektor des magnetischen Moments in Richtung der Feldlinien auszurichten. Stimmen diese beiden Richtungen bereits überein ergibt sich kein wirksames Drehmoment. Sind die beiden Richtungen dagegen orthogonal, so ergibt sich das maximale Drehmoment.

An Bord von GOCE befinden sich drei solche stromdurchflossene Spulen (*magnetic torquer*). Diese sind parallel zu den drei Achsen des GRF ausgerichtet. D.h. also es gibt einen *x-Torquer* in x-Richtung (annähernd Flugrichtung), einen *y-Torquer* in y-Richtung (annähernd senkrecht zur Flugbahn) und einen *z-Torquer* in z-Richtung (annähernd radial). Die Möglichkeit ein Drehmoment zu erzeugen und damit den Satelliten nach zu steuern besteht nur dann, wenn die Feldlinien des Erdmagnetfeldes mit dem magnetischen Moment einer der Resonanzspulen senkrechte Komponenten aufweisen.

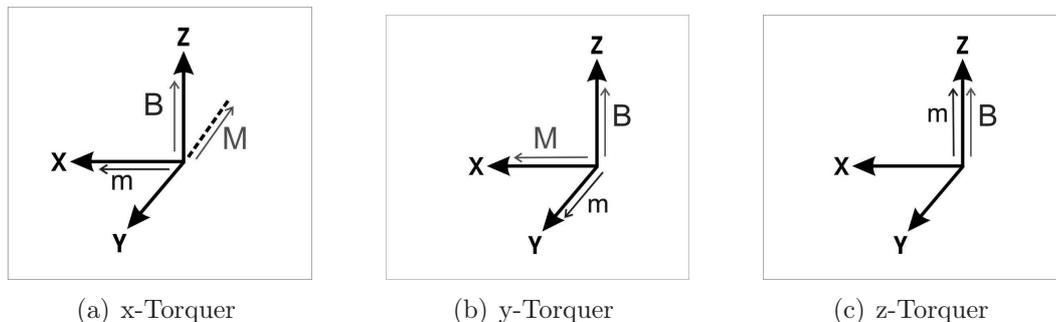


Abb. 2.4: *magnetic torquer* im Magnetfeld (B) der Erde im Bereich der Pole

In Abbildungen 2.4 und 2.5 ist die Lage der Magnetfeldlinien der Erde bezüglich der Ausrichtung des Satelliten (x-Achse: Flugrichtung; y-Achse: senkrecht zur Flugbahn; z-Achse: radial) dargestellt. Abbildungen 2.4 zeigen die Situation für den Überflug über einen der Pole³. In diesem Bereich sind die Feldlinien nahezu radial gerichtet. Abbildung 2.4(a) zeigt

³Nach [Bergmann-Schäfer, 1987] ist die Verbindung der Magnetpole der Erde (= magnetische Achse) gegenüber der Rotationsachse der Erde um ca. 20° verkippt. Wird hier von den Polen der Erde gesprochen, so handelt es sich also genau genommen nicht um die geographischen, sondern um die magnetischen Pole der Erde.

den in x-Richtung angeordneten *magnetic torquer* (mit magnetischem Moment m). Es ergibt sich in diesem Fall ein Drehmoment M um die y-Achse (*pitch*). Der *magnetic torquer* in y-Richtung erzeugt ein Drehmoment M um die x-Achse (*roll*), (siehe Abbildung 2.4(b)). Wie in Abbildung 2.4(c) verdeutlicht, kann der *z-Torquer* im Bereich der Pole nicht zur Lagekontrolle verwendet werden. Sein magnetisches Moment m zeigt in z-Richtung und fällt somit mit den Feldlinien der Erde (annähernd) zusammen. Im Bereich der Pole ist also die Korrektur um die z-Achse (*yaw*) nicht möglich.

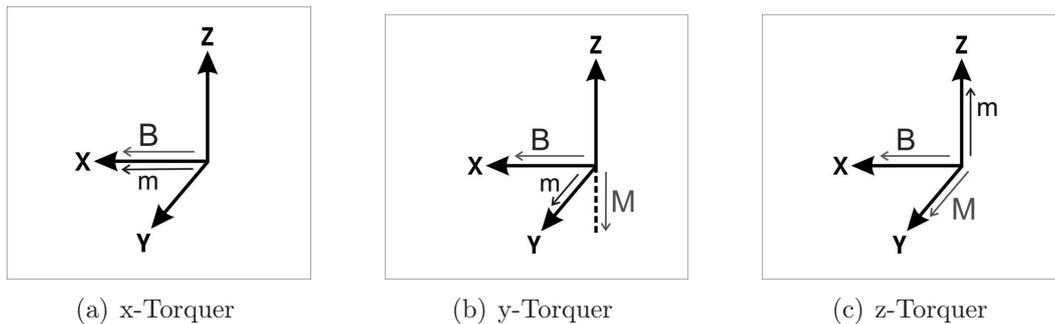


Abb. 2.5: Magnetic Torquer im Magnetfeld (B) der Erde im Bereich des Äquators

Im Bereich des Äquators verlaufen die Feldlinien annähernd parallel zur x-Richtung (Flugrichtung). Es ergibt sich also in diesem Fall kein Drehmoment für den *x-Torquer* (siehe Abbildung 2.5(a)) und die Korrektur um *roll* ist im Bereich des Äquators unmöglich. Während nun der *y-Torquer* ein Drehmoment um *yaw* (z-Achse) erzeugt (vgl. Abbildung 2.5(b)), ergibt sich für den *z-Torquer* ein Drehmoment um *pitch* (vgl. Abbildung 2.5(c)). Mit Hilfe der einfachen ‘‘Rechte-Hand-Regel‘‘ kann also bereits abgeschätzt werden, wann der Einsatz der *magnetic torquer* zur Lagekorrektur von GOCE prinzipiell möglich bzw. unmöglich ist.

Abbildung 2.6 zeigt die Winkel zwischen den einzelnen Achsen des instrumentenfesten Systems (GRF) und dem nominellen Bahnsystem (LORF*) als Ergebnis einer ESA *end-to-end* Simulation für gut zwei GOCE Umläufe, [VISSER (pers. Mitteilung)]. Die geographische Breite ist im Bogenmaß angegeben, die Winkel selbst dagegen in Grad. Wie man sieht wurde in der Simulation für die Drehung um die z-Achse der größte Wert von ca. 3° zugelassen. *Roll* schwankt ungefähr zwischen -1° und $+0.5^\circ$, während die Drehung um *pitch* mit maximal $+0.5^\circ$ am kleinsten ist. Es fällt auf, dass die maximale Ablenkung von *yaw* stets im Bereich des Äquators auftritt. *Roll* und *pitch* haben die maximalen Abweichungen dagegen kurz nach dem Überflug über den Äquator.

Eine Auswirkung dieser kontinuierlichen Lageänderung des Satelliten bezüglich seiner Bahn erläutert Abschnitt 3.6. Laut [ESA, 1999] wird das *angular control* System in den niedrigen Frequenzen, d.h. unterhalb der Messbandbreite und um alle drei Achsen benötigt.

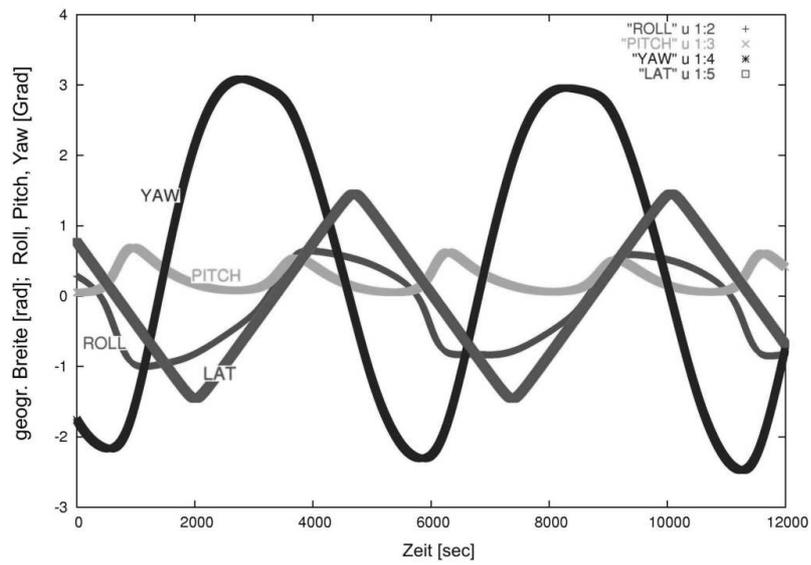


Abb. 2.6: Abweichungen des GRF zum nominellen Bahnsystem

2.3 Beschleunigungsmesser

Wie in Abschnitt 2.1 bereits erwähnt, besteht das Gradiometer aus mehreren Beschleunigungsmessern. In diesem Abschnitt soll deshalb ihre Funktionsweise erläutert werden. Ein Beschleunigungsmesser besteht vereinfacht aus einem Gehäuse, in dessen Mitte sich eine Testmasse befindet, (vgl. [ESA, 1999]). Das Prinzip der Beschleunigungsmessung beruht auf der Messung der Kräfte, die nötig sind, diese Testmasse berührungsfrei im Zentrum des Gehäuses zu halten.

Eine servo-gesteuerte elektrostatische Aufhängung mit sechs Freiheitsgraden kontrolliert dabei die Testmasse in Bezug auf Translationen und Rotationen. Die eigentliche Messung erfolgt über das Abgreifen von Kapazitätsunterschieden, welche direkt von Bewegungen der Testmasse hervorgerufen werden. Nach Verstärkung dieser Unterschiede, werden sie korrigiert indem das elektrische Potential der Elektroden so lange angepasst wird, bis kein Kapazitätsunterschied mehr vorhanden ist.

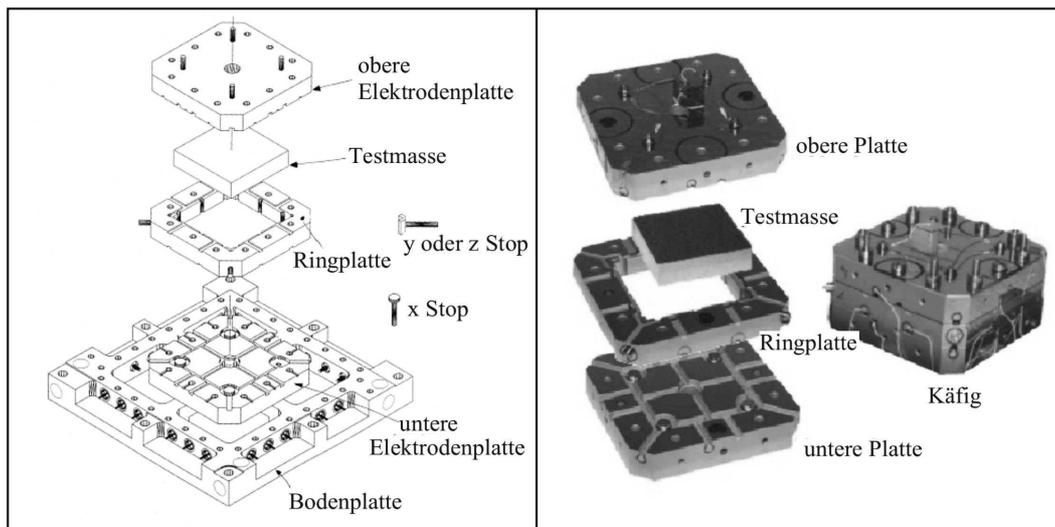


Abb. 2.7: GOCE Akzelerometer schematisch (links) und real (rechts)

Abbildung 2.7 zeigt einen GOCE-Beschleunigungsmesser. Gut zu erkennen ist die $4 \times 4 \times 1 \text{ cm}$ große Testmasse aus Platin-Rhodium in der Mitte, deren Masse 0.32 kg beträgt. Die Elektroden sind Titanglass Keramikscheiben, wohingegen das Gehäuse aus Invar besteht. Die Formgenauigkeit eines solchen GOCE-Beschleunigungsmessers liegt bei ca. $1 \mu\text{m}$. Weil bei Tests auf der Erde stets eine Achse der Schwerkraft unterliegt, besitzt jeder GOCE-Beschleunigungsmesser nur zwei hochgenaue Achsen von $10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Für die dritte Achse, welche sich senkrecht zur Bodenplatte befindet und somit die Testmasse auf ihrer schmalen Seite (1 cm) durchstößt ergibt sich eine geringere Genauigkeit von $10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Im nächsten Kapitel wird aufgezeigt wie die einzelnen Beschleunigungsmesser innerhalb des Gradiometers angeordnet sind, um für die wichtigen Messgrößen die besten Ergebnisse zu erzielen.

2.4 Konfiguration der Beschleunigungsmesser

In diesem Abschnitt soll die Anordnung der Instrumente innerhalb des GOCE-Gradiometers dargestellt werden. Abbildung 2.8 zeigt die Konfiguration der sechs Beschleunigungsmesser A_1 bis A_6 . Jedes Paar identischer Instrumente, welche von einer 50 cm langen Ba-

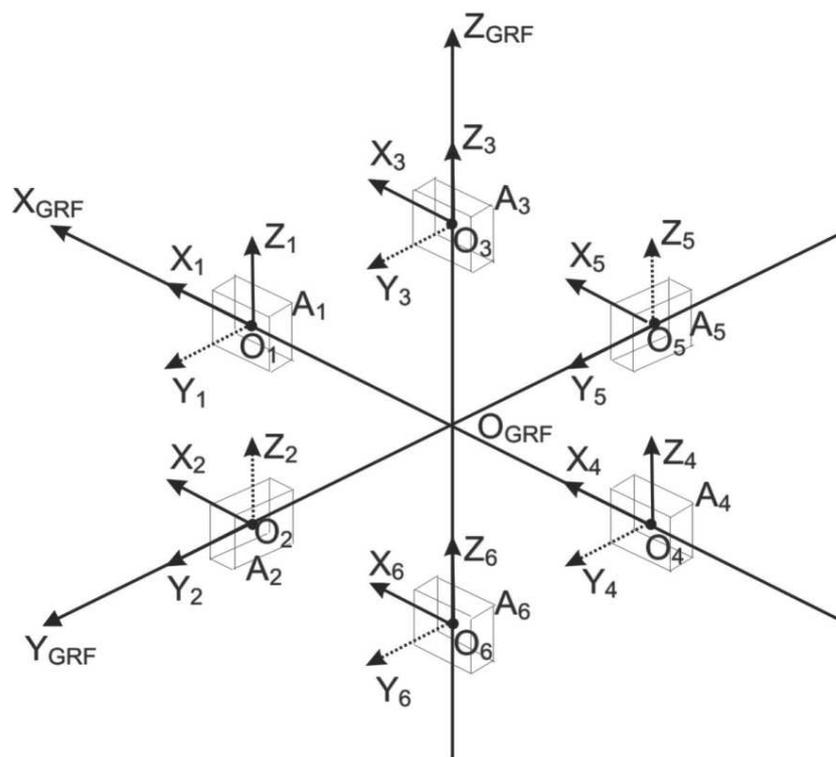


Abb. 2.8: Anordnung der Akzelerometer des GOCE-Gradiometers

sislinie getrennt werden bilden einen sogenannten Gradiometerarm oder ein einachsiges Gradiometer. Dies sind also die Paare A_1 und A_4 , A_2 und A_5 , sowie A_3 und A_6 . Die drei Gradiometerarme stehen nominal senkrecht aufeinander und haben ihren Ursprung nominal in einem gemeinsamen Punkt, welcher wiederum nominal im Massenzentrum des Satelliten liegt. Das Koordinatensystem, welches durch die Basislinien der drei einachsigen Gradiometer aufgespannt wird bezeichnet man als Gradiometer Referenz System oder kurz GRF (*gradiometer reference frame*). Das GRF ist das Koordinatensystem in dem alle Beobachtungen des Gradiometers stattfinden. Dabei zeigt die x-Achse annähernd in Flugrichtung, die y-Achse ist annähernd senkrecht zur Flugbahn und die z-Achse ergänzt das Rechtssystem, ist also nahezu radial nach außen. Neben dem GRF besitzt jeder Beschleunigungsmesser auch ein eigenes Koordinatensystem, das so genannte Akzelerometer Referenz System, kurz ARF* (*accelerometer reference frame*). Dieser hat seinen Ursprung in der Mitte des jeweiligen Beschleunigungsmessers und stimmt stets in einer Richtung mit der Basislinie eines einachsigen Gradiometers überein. Die restlichen zwei Achsen bilden ein Rechtssystem und sind parallel zu den zwei verbleibenden Gradiometerarmen. Abbildung 2.8 zeigt auch die Lage der zwei hochgenauen und der weniger genauen Achse.

Letztere ist jeweils als gestrichelte Linie dargestellt. Diese Anordnung wurde gewählt um nicht nur die drei Hauptdiagonalelemente des Gradiententensors sondern auch die Winkelgeschwindigkeit um die Achse senkrecht zur Flugbahn möglichst genau bestimmen zu können. Die numerische Untersuchung der Auswirkung der unterschiedlichen Sensitivitäten der Beschleunigungsmesserachsen stellt einen wesentlichen Teil dieser Arbeit dar und wird in Kapitel 6 behandelt. Bevor eine solche Analyse möglich wird, muss zunächst der analytische Zusammenhang zwischen den Messgrößen und den gewünschten Ergebnisgrößen hergeleitet werden. Dies passiert im folgenden Kapitel.

Kapitel 3

Fehlerfreies Gradiometer-Messsystem

Nachdem nun die Funktionsweise der wichtigen Instrumente an Bord von GOCE bekannt ist, soll in diesem Kapitel das Formelwerk vorgestellt werden, welches das „fehlerfreie“ Gradiometer-Messsystem beschreibt. „Fehlerfrei“ soll in diesem Zusammenhang zum Ausdruck bringen, dass es sich hierbei um Formeln handelt, welche nur dann Gültigkeit besitzen, wenn die nominelle Konfiguration der Beschleunigungsmesser (vgl. Abschnitt 2.4) innerhalb des Gradiometers eingehalten wird. Ergeben sich Abweichungen von dieser idealen Anordnung müssen die Formeln erweitert werden, was in Kapitel 5 geschieht. Für die Herleitung und das Verständnis der grundlegenden Beobachtungsgleichung der Gradiometrie im Weltraum dient nachfolgender Abschnitt 3.1.

3.1 Prinzip der Gradiometrie

Wie in [Rummel, 1985] gezeigt wird, kann das Prinzip der Gradiometrie im Weltraum mit Hilfe einer einfachen Messanordnung (siehe Abbildung 3.1) erklärt werden. Noch ausführlicher wird dieses Thema in [Rummel, 1986] behandelt.

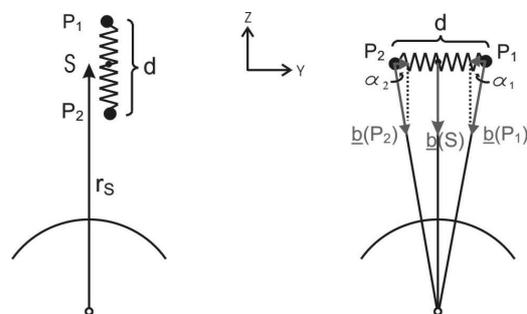


Abb. 3.1: Vertikale (links) und horizontale (rechts) Messanordnung von zwei mit einer Feder verbundenen Probmassen

Zunächst sei die linke Abbildung, also die vertikale Anordnung betrachtet. Es handelt sich dabei um zwei im Abstand d durch eine sehr empfindliche Feder getrennte Testmassen. Auf den Schwerpunkt S der Messanordnung, welcher sich im freien Fall um die Erde befindet wirkt die Schwerebeschleunigung

$$\underline{b}(S) = \nabla V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

also der Gradient des Gravitationspotentials V mit den Komponenten $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$ und $V_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. In diesem Abschnitt sei für das Gravitationspotential V der Erde stets die Näherung

$$V(S) = \frac{GM}{r_s} \quad (3.2)$$

verwendet, was der Annahme eines homogenen, kugelförmigen Schwerefeldes entspricht. GM steht für die Gravitationskonstante mal der Masse der Erde und r_s beschreibt den Radialabstand von S vom Schwerpunkt der Erde. Mit dieser Annahme wird Gleichung 3.1 zu

$$\underline{b}(S) = -\frac{GM}{r_s^2} e_z. \quad (3.3)$$

Hierbei ist e_z ein radial von der Erde weg gerichteter Einheitsvektor in S . Ist die Messanordnung bezüglich der Erde radial orientiert, so wirkt auf die Testmasse in P_1 , die Beschleunigung

$$\underline{b}(P_1) \approx \underline{b}(S) + \left. \frac{\partial \underline{b}}{\partial r_i} \right|_S r_i^{(P_1)} = \underline{b}(S) + \underline{G} \cdot \underline{r}^{(P_1)}. \quad (3.4)$$

Es handelt sich hierbei um eine Taylorentwicklung mit S als Entwicklungspunkt, wobei r_i die Koordinatenunterschiede in x, y und z-Richtung von P_1 bezüglich des Schwerpunktes beschreiben.

$$\underline{G} = \frac{\partial \underline{b}}{\partial r_i} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ist die Matrix der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials V oder auch der Gradient der Schwerebeschleunigung \underline{b} . Dies ist der Grund weshalb \underline{G} auch häufig mit Gradientenmatrix bezeichnet wird und das Messsystem den Namen Gradiometer trägt. Auf Grund der gewählten Orientierung, sowie der Annahme eines kugelförmigen Schwerefeldes ergeben

sich sowohl die Koordinatenunterschiede r_x und r_y , als auch alle Elemente der Gradientenmatrix, mit Ausnahme von V_{zz} zu Null. Mit $V_{zz} = \frac{2GM}{r_s^3}$ erhält man für die Beschleunigung in P_1

$$\underline{b}(P_1) \approx \underline{b}(S) + \underline{G} \cdot \underline{r}^{(P_1)} = -\frac{GM}{r_s^2} + \frac{2GM}{r_s^3} \cdot r_z^{(P_1)} . \quad (3.6)$$

Für die Probemasse in P_2 lautet der analoge Ausdruck für die dort wirkende Schwerebeschleunigung

$$\underline{b}(P_2) \approx \underline{b}(S) + \underline{G} \cdot \underline{r}^{(P_2)} . \quad (3.7)$$

Der Beschleunigungsunterschied zwischen P_1 und P_2 , nämlich

$$\underline{db} = \underline{b}(P_1) - \underline{b}(P_2) = \underline{G} (\underline{r}^{(P_1)} - \underline{r}^{(P_2)}) \quad (3.8)$$

ergibt sich somit in dem gewählten Beispiel zu

$$db_z = \frac{2GM}{r_s^3} d . \quad (3.9)$$

D.h. die Feder wird mit der Kraft $m \frac{GM}{r_s^2} \frac{2d}{r_s}$ gedehnt, wobei $m = m_1 = m_2$ die Masse der beiden Testkörper sei. Es zeigt sich also, dass die lokale Veränderung im Erdschwerefeld nachgewiesen werden kann durch Kopplung zweier sich ursprünglich im freien Fall befindlichen Probemassen. Nur der Schwerpunkt der Anordnung befindet sich tatsächlich im freien Fall.

Wird die Messanordnung aus Abbildung 3.1 (links) nicht vertikal, sondern horizontal ausgerichtet, wie in Abbildung 3.1 (rechts), so ergibt sich eine differentielle Kraft zum Schwerpunkt hin, nämlich die Projektion von $\underline{b}(P_1)$ bzw. $\underline{b}(P_2)$ auf die x- und y- Achse. In y-Richtung gilt

$$\begin{aligned} db_y &= \underline{b}(P_1) \cdot (-\underline{e}_y) - \underline{b}(P_2) \cdot \underline{e}_y \\ &\approx \frac{GM}{r_s^2} (-\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{GM}{r_s^2} \left(-\frac{d}{r_s} - \frac{d}{r_s} \right) = \frac{GM}{r_s^3} d . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Orientierung in x-Richtung lässt sich ein analoger Ausdruck finden. Es folgt, dass bei horizontaler Orientierung eine Kontraktion der Feder eintritt, welche halb so groß ist wie die Dehnung in vertikaler Lage.

Gleichung 3.8 kann somit allgemein geschrieben werden als

$$\underline{db} = \underline{G} (\underline{r}^{(P_1)} - \underline{r}^{(P_2)}) = \frac{GM}{r_s^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (\underline{r}^{(P_1)} - \underline{r}^{(P_2)}) . \quad (3.11)$$

Zusätzlich kann eine Drehung der Messanordnung um die x-Achse, um einen beliebigen Winkel α zugelassen werden. Die zugehörige Drehmatrix lautet:

$$\underline{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

\underline{G} wird in gedrehter Lage mit Gleichung 3.12 zu

$$\underline{G}' = \underline{R}_x(\alpha) \underline{G} \underline{R}_x^T(\alpha) = \frac{GM}{r_s^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 3 \sin^2 \alpha) & \frac{3}{2} \sin 2\alpha \\ 0 & \frac{3}{2} \sin 2\alpha & -(1 - 3 \cos^2 \alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Bei Betrachtung von $V_{z'z'} = -\frac{GM}{r_s^3}(1 - 3 \cos^2 \alpha)$, erhält man für die Ausgangslage $\alpha = 0^\circ$: $V_{z'z'} = V_{zz} = 2\frac{GM}{r_s^3}$ und für $\alpha = 90^\circ$: $V_{z'z'} = V_{yy} = -\frac{GM}{r_s^3}$.

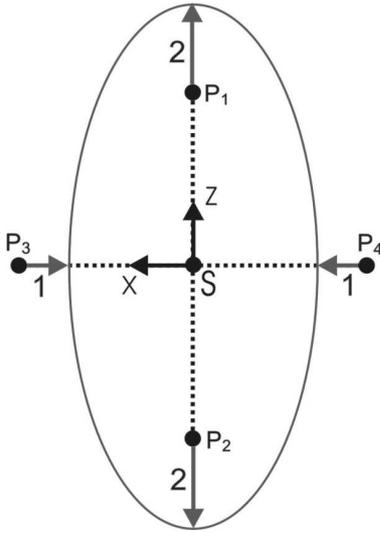


Abb. 3.2: Gezeitenellipse

Für eine komplette Rotation von $\alpha = 0^\circ$ über 90° , 180° , 270° und schließlich wieder 0° , ergibt sich eine Ellipse oder räumlich ein Ellipsoid. Abbildung 3.2 soll dieses durch die Gezeitenwirkung der Erde im Schwerpunkt S verursachte Gezeitenellipsoid (bzw. -Ellipse) veranschaulichen. Es befinden sich vier identische Massepunkte P_1 bis P_4 im selben Abstand vom Schwerpunkt S . Die beiden entlang der x-Achse angeordneten Punkte P_3 und P_4 werden zum Schwerpunkt S hingezogen. Die beiden Punkte P_1 und P_2 dagegen, welche in radialer Richtung (z-Achse) angeordnet sind, erfahren eine Beschleunigung von S weg, welche doppelt so groß ist wie die Anziehung der Massen in P_3 und P_4 . Man kann sich also die gesamte Geometrie des Erdschwerefeldes veranschaulicht denken durch ein System von Gezeitenellipsoiden im Außenraum der Erde mit veränderlicher Form und Orientierung.

Das Gedankenexperiment hat gezeigt, dass der Schweregradient aus der Differenz zweier Beschleunigungen im Abstand d abgeleitet werden kann. V_{zz} ergibt sich z.B. zu

$$V_{zz} \approx \frac{db_z(P_1) - db_z(P_2)}{d} = 2\frac{GM}{r_s^3}.$$

Die Messung der Diagonalglieder von \underline{G} , also von V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} erfolgt durch die longitudinale Anordnung zweier Beschleunigungsmesser längs der Basis P_3P_4 . Abbildung 3.3(a) zeigt dieses Messprinzip.

Die gemischten Ableitungen V_{xy} , V_{xz} und V_{yz} können durch eine transversale Anordnung bezüglich der Basis, wie sie Abbildung 3.3(b) zeigt gemessen werden. Abbildungen 3.3(a) und 3.3(b) stellen den Sachverhalt stark vereinfachend dar.



Abb. 3.3: Messanordnung für die Bestimmung der Schweregradienten

Im Falle der GOCE-Akzelerometer werden keine Federn zur eigentlichen Messung verwendet, sondern es handelt sich um kapazitive Beschleunigungsmesser, wie in Kapitel 2 Abschnitt 2.3 erklärt. Das Grundprinzip der Messung ist in beiden Fällen aber das Gleiche.

Bei den bisherigen Betrachtungen zur Gradiometrie im Weltraum wurde von drei wesentlichen Vereinfachungen ausgegangen. Zum einen wurde für das Schwerefeld der Erde das Zentralfeld einer homogenen Kugel mit dem Potential $V = \frac{GM}{r_s}$ verwendet. Für die Realität ist dieses Modell allerdings viel zu ungenau. Schließlich sollen gerade die Abweichungen davon und somit die regionalen Variationen im Erdschwerefeld untersucht werden. Es ergibt sich somit insbesondere eine volle Gradientenmatrix \underline{G} .

Zum zweiten wurde davon ausgegangen, dass das Gradiometer nur gravitativen Einflüssen ausgesetzt ist. In der Wirklichkeit wirken allerdings stets eine Reihe von nicht-gravitativen Kräften auf den Satelliten, wie Luftwiderstand und Strahlungsdruck der Sonne. Bei GOCE wird deshalb versucht die Gradiometermessungen mit Hilfe des aktiven *drag control* Systems frei von diesen störenden Kräften zu halten.

Außerdem wurde als dritte Vereinfachung bisher angenommen, dass das Gradiometer seine Orientierung im Raum beibehält, obwohl sich das Messsystem in Wirklichkeit in Rotation befindet. Es ist deshalb nötig die Beschleunigungsmessung im bewegten Koordinatensystem zu betrachten. Es sei ein lokales, bewegtes Bezugssystem mit den orthogonalen Basisvektoren e_1 , e_2 und e_3 definiert, wobei ein Paar von Beschleunigungsmessern P und Q des gesamten Gradiometersystems z.B. entlang e_2 der Richtung der y -Achse orientiert sei. Diese Anordnung ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Das Dreibein rotiert bezüglich eines raumfes-

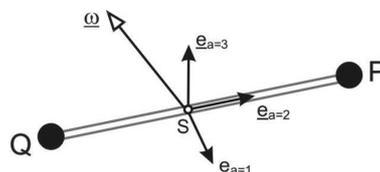


Abb. 3.4: Paar von Beschleunigungsmessern im bewegten Koordinatensystem

ten Bezugssystems um den Vektor $\underline{\omega}$. Es spielt dabei keine Rolle, ob der Schwerpunkt S , so wie in Abbildung 3.4 auf der Verbindungsline PQ liegt.

Für den messbaren Beschleunigungsvektor in P ergibt sich somit im bewegten System

$$\begin{aligned} \underline{b}(P) &= \nabla_P V - \nabla_S V - \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_P - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_P) = \\ &= \nabla_S V + \underline{G} \cdot \underline{r}_P - \nabla_S V - \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_P - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_P) . \\ &= \underline{G} \cdot \underline{r}_P - \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_P - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_P) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Gleichung besagt, dass nicht nur der Unterschied im Gradienten des Gravitationspotentials bezüglich des Schwerpunktes gemessen wird, sondern auch die Zentrifugalbeschleunigung $-\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_P)$ und die Kreiselbeschleunigung $-\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}_P$ aufgrund der raschen Veränderung des Drehvektors $\underline{\omega}$.

3.2 Beobachtungsgleichung

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, finden alle Beobachtungen des Gradiometers im GRF statt. Innerhalb dieses Rahmens gilt die Beobachtungsgleichung 3.14 für ein bewegtes System, wie sie im vorhergehenden Abschnitt hergeleitet wurde. Auch die abgeleiteten Größen, welche in diesem Kapitel behandelt werden gelten im GRF. Außerdem wird die Annahme getroffen, dass keine Fehlereinflüsse, wie Verschiebungs- und Skalierungsfaktoren der Beschleunigungsmesser, Fehlaufrichtungen, Ablagen zum Massenzentrum, o.ä. vorhanden sind. Erst in Kapitel 5 erfolgt eine Erweiterung des Formelwerks um die genannten Fehler. Im Fall von GOCE ist noch zu beachten in welche Richtung, d.h. mit welchem Vorzeichen

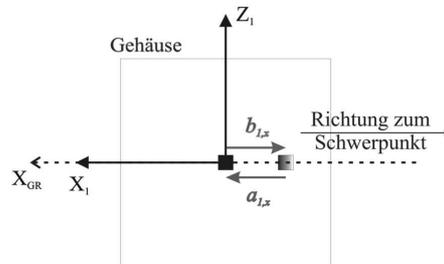


Abb. 3.5: wirksame ($b_{1,x}$) und gemessene Beschleunigung ($a_{1,x}$)

die Beschleunigungen abgegriffen werden (vgl. dazu auch Abschnitt 2.3). Abbildung 3.5 soll dies am Beispiel des GOCE-Akzelerometers A1 veranschaulichen.

Es wirkt die gravitative Beschleunigung $b_{1,x}$ zum Schwerpunkt des Messsystems, was die Testmasse geringfügig in eben diese Richtung auslenkt. Gemessen wird aber nicht diese Auslenkung selbst, sondern die Kräfte die nötig sind, um die Testmasse in die Ausgangsposition zurückzuführen. D.h. die eigentliche Messung erfolgt in die entgegengesetzte Richtung der Beschleunigung, nämlich für A1 weg vom Schwerpunkt des Systems. Der GOCE Akzelerometer liefert somit die Beschleunigung $a_{1,x} = -b_{1,x}$. Durch Vorzeichenwechsel in Gleichung 3.14 erhält man also die grundlegende Beobachtungsgleichung für die GOCE Akzelerometermessungen

$$\underline{a} = -\underline{G} \cdot \underline{r} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \quad (3.15)$$

mit:

\underline{a} Vektor der gemessenen Beschleunigung auf die Testmasse

\underline{G} Gradienten-Matrix

\underline{r} Vektor des Abstands zum Massenzentrum

$\underline{\omega}$ Winkelgeschwindigkeits-Vektor

$\underline{\dot{\omega}}$ Winkelbeschleunigungs-Vektor

und:

Term 1: lineare Beschleunigung der Testmasse, hervorgerufen durch Schwerepotential

Term 2: lineare Beschleunigung der Testmasse, verursacht durch Winkelbeschleunigung

Term 3: Zentrifugalbeschleunigung, hervorgerufen durch Winkelgeschwindigkeit

Mit der vollen Darstellung der einzelnen Komponenten von Gleichung 3.15

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}; \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}; \quad \underline{\dot{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix}; \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

lässt sich Term 2 folgendermaßen umformen

$$\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_y r_z - \dot{\omega}_z r_y \\ \dot{\omega}_z r_x - \dot{\omega}_x r_z \\ \dot{\omega}_x r_y - \dot{\omega}_y r_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Mit der analogen Umformung für Term 3,

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) &= \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \omega_x \omega_y r_y - \omega_y^2 r_x - \omega_z^2 r_x + \omega_x \omega_z r_z \\ \omega_y \omega_z r_z - \omega_z^2 r_y - \omega_x^2 r_y + \omega_x \omega_y r_x \\ \omega_x \omega_z r_x - \omega_x^2 r_z - \omega_y^2 r_z + \omega_y \omega_z r_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

welcher die Zentrifugalbeschleunigung beschreibt ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left\{ - \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

oder kurz

$$\underline{a} = \left(-\underline{G} + \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega}\underline{\Omega} \right) \cdot \underline{r}. \quad (3.20)$$

Aus ihr können die einzelnen Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser abgelesen werden, was das Thema des nächsten Abschnitts ist.

3.3 Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser

Wie in Abschnitt 2.4 bereits erwähnt, bilden im GOCE Gradiometer je zwei gegenüberliegende Akzelerometer einen Gradiometerarm (siehe Abbildung 2.8). Mit den Basislinienlängen L_x, L_y, L_z der drei einachsigen Gradiometer ergeben sich für die Beschleunigungsmesser A1 bis A6 die folgenden Abstandsvektoren \underline{r} zum Massenzentrum.

$$\begin{aligned} A_1 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{L_x}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & A_4 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{L_x}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_2 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L_y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; & A_5 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L_y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_3 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L_z}{2} \end{pmatrix}; & A_6 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_z}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aus Gleichung 3.19 des vorherigen Abschnitts erhält man durch Einsetzen der jeweiligen Abstände 3.21 die insgesamt 18 Beobachtungsgleichungen für die sechs GOCE-Beschleunigungsmesser.

$$\begin{aligned} a_{1,x} &= (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \frac{L_x}{2} & ; & & a_{4,x} &= -(-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \frac{L_x}{2} \\ a_{1,y} &= (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_x}{2} & ; & & a_{4,y} &= -(-V_{yx} - \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_x}{2} \\ a_{1,z} &= (-V_{zx} - \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_x}{2} & ; & & a_{4,z} &= -(-V_{zx} - \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_x}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
a_{2,x} &= (-V_{xy} - \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_y}{2} & ; & & a_{5,x} &= -(-V_{xy} - \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_y}{2} \\
a_{2,y} &= (-V_{yy} - \omega_x^2 - \omega_z^2) \frac{L_y}{2} & ; & & a_{5,y} &= -(-V_{yy} - \omega_x^2 - \omega_z^2) \frac{L_y}{2} \\
a_{2,z} &= (-V_{zy} + \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \frac{L_y}{2} & ; & & a_{5,z} &= -(-V_{zy} + \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \frac{L_y}{2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,x} &= (-V_{xz} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_z}{2} & ; & & a_{6,x} &= -(-V_{xz} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_z}{2} \\
a_{3,y} &= (-V_{yz} - \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \frac{L_z}{2} & ; & & a_{6,y} &= -(-V_{yz} - \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \frac{L_z}{2} \\
a_{3,z} &= (-V_{zz} - \omega_x^2 - \omega_y^2) \frac{L_z}{2} & ; & & a_{6,z} &= -(-V_{zz} - \omega_x^2 - \omega_y^2) \frac{L_z}{2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Den Messungen $a_{1,x}$ bis $a_{6,z}$ wurden dabei die Farben grün und rot zugewiesen, um auf einfache Weise zu sehen, welche Achsen hoch genau (grün) und welche Achsen weniger genau (rot) gemessen werden. Diese Farbgebung wird bei der nachfolgenden Ableitung weiterer Größen fortgesetzt und ermöglicht so bereits erste Überlegungen zur Genauigkeit des Messsystems. In Kapitel 6 werden diese Überlegungen schließlich numerisch überprüft. Wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, benötigt man für die Messung der Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix eine longitudinale Messanordnung. V_{xx} tritt deshalb in den Gleichungen 3.22 in den Beschleunigungen $a_{1,x}$ und $a_{4,x}$ längs der x-Achse, V_{yy} in $a_{2,y}$ und $a_{5,y}$ (Gleichungen 3.23) entlang der y-Achse und V_{zz} in $a_{3,z}$ und $a_{6,z}$ entlang der z-Achse auf (Gleichungen 3.24). Die Messung von V_{xy} , V_{xz} und V_{yz} erfolgt nach Abschnitt 3.1 über eine transversale Anordnung bezüglich der Basislinie. So tritt z.B. V_{xy} zum Einen im Gradiometerpaar 1-4 (x-Achse) jeweils in y-Richtung ($a_{1,y}$ und $a_{4,y}$ in Gleichungen 3.22) und somit senkrecht zur Basislinie 1-4 auf. Zum Anderen findet man V_{xy} auch transversal zur Basislinie 2-5 (y-Achse) in den Beschleunigungen $a_{2,x}$ und $a_{5,x}$ der Gleichungen 3.23.

3.4 Common mode Beschleunigungen

Es wurde bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, dass für das *drag control* System von GOCE *common mode* Beschleunigungen des Gradiometers benötigt werden. Diese Form der Beschleunigungen lässt sich direkt aus den Akzelerometermessungen (Formeln 3.22 bis 3.24) ableiten. Es gilt dabei die

$$\text{Ausgangsgleichung: } a_{c,l,k,i} = \frac{1}{2} (a_{l,i} + a_{k,i})$$

mit:

- l Nummer des ersten Beschleunigungsmessers
- k Nummer des zweiten Beschleunigungsmessers
- i Richtung (x, y, z)

Die *common mode* Beschleunigungen sind also der Mittelwert der gemessenen Beschleunigungen entlang der drei Achsen des GRF. Gemittelt wird dabei jeweils zwischen den Beschleunigungen auf einem Gradiometerarm. Es ergeben sich also insgesamt neun *common mode* Beschleunigungen:

$$\begin{aligned}
 a_{c,1,4,x} &= \frac{1}{2} (a_{1,x} + a_{4,x}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \frac{L_x}{2} + \frac{1}{2} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2 + V_{xx} + \omega_y^2 + \omega_z^2) = 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 a_{c,1,4,y} &= \frac{1}{2} (a_{1,y} + a_{4,y}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_x}{2} + \frac{1}{2} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y + V_{yx} - \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y) = 0
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 a_{c,1,4,z} &= \frac{1}{2} (a_{1,z} + a_{4,z}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{zx} - \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_x}{2} + \frac{1}{2} (-V_{zx} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-V_{zx} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z + V_{zx} - \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z) = 0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$a_{c,2,5,x} = \frac{1}{2} (a_{2,x} + a_{5,x}) = 0 \tag{3.28}$$

$$a_{c,2,5,y} = \frac{1}{2} (a_{2,y} + a_{5,y}) = 0 \tag{3.29}$$

$$a_{c,2,5,z} = \frac{1}{2} (a_{2,z} + a_{5,z}) = 0 \tag{3.30}$$

$$a_{c,3,6,x} = \frac{1}{2} (a_{3,x} + a_{6,x}) = 0 \tag{3.31}$$

$$a_{c,3,6,y} = \frac{1}{2} (a_{3,y} + a_{6,y}) = 0 \tag{3.32}$$

$$a_{c,3,6,z} = \frac{1}{2} (a_{3,z} + a_{6,z}) = 0 \tag{3.33}$$

Wie man sieht ergeben alle neun *common mode* Beschleunigungen per Definition Null. Dies gilt hier allerdings nur, weil die angegebenen Formeln lediglich das Schwerfeld und die Drehkräfte enthalten. Das soll heißen, es wird angenommen, dass keinerlei Störkräfte

auf den Satelliten wirken. Weil dies aber in der Realität der Fall ist, kann man davon ausgehen, dass die detektierten Signale in den *common mode* Beschleunigungen gerade die nicht-gravitativen Kräfte widerspiegeln.

Abbildung 3.6 soll veranschaulichen welche Auswirkung das Auftreten von translativen Störkräften (z.B. aufgrund von Luftwiderstand) auf das Messsystem hat. Der Satellit bewegt sich (annähernd) in x-Richtung des GRF. Der größte Luftwiderstand tritt somit genau entgegen der x-Richtung auf, wodurch GOCE leicht „abgebremst“ wird. (In Wirklichkeit sinkt der Satellit ab und wird dadurch sogar schneller.) Der Einfachheit halber kann man sich vorstellen der Satellit erfährt eine leichte Verschiebung in negativer x-Richtung, gegenüber seiner ursprünglichen Position. (Die ursprüngliche Position ist die Position, in der sich GOCE ohne translative Kräfte befände. Sie ist in Abbildung 3.6 schwarz dargestellt.) Die translativen Kräfte wirken auf die Außenhaut des Satelliten, wodurch dieser komplett, d.h. inklusive seiner Akzelerometer nach hinten versetzt wird. (Die Situation nach der Verschiebung ist in der Abbildung grün dargestellt.)

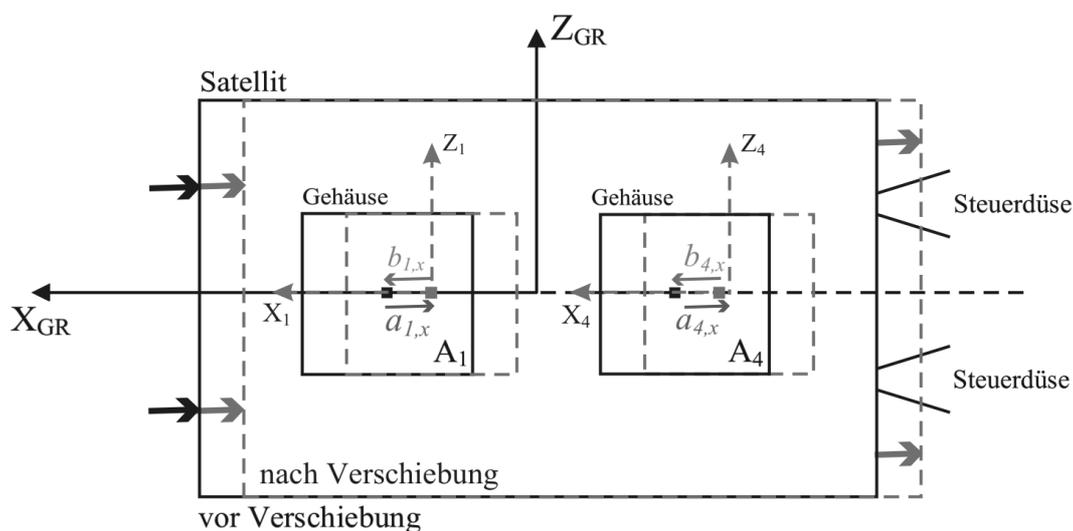


Abb. 3.6: *Common mode* Signal aufgrund translativer Kräfte

Entscheidend für die Messung ist das Verhalten der beiden Testmassen innerhalb der Akzelerometer. Diese versuchen zunächst in ihrer ursprünglichen Position zu verbleiben bzw. ihre Geschwindigkeit beizubehalten (Trägheitsgesetz, erstes Newtonsches Axiom). Während sich der Satellit und damit auch die Gehäuse der Beschleunigungsmesser bereits in der „grünen“ Lage befinden, sind die Testmassen der Akzelerometer (hier A_1 und A_4) noch in ihrer Ausgangslage (schwarz). Aus der Sicht des Gehäuses bewegen sich die Testmassen also in x-Richtung und es wirken die scheinbaren Beschleunigungen $b_{1,x}$ und $b_{4,x}$, wobei gilt $b_{1,x} = b_{4,x}$. Die Akzelerometer messen, wie in Abschnitt 3.2 bereits erklärt (vgl. Abbildung 3.5) nicht die eigentliche Auslenkung einer Testmasse, sondern die Kräfte, welche nötig sind um die Testmasse in das Zentrum des Gehäuses zurückzuführen. Akzelerometer A_1 und A_4 detektieren deshalb jeweils die Beschleunigungen $a_{1,x}$ und $a_{4,x}$, welche gleich groß sind. (Es gilt außerdem $a_{1,x} = -b_{1,x}$ und $a_{4,x} = -b_{4,x}$.)

Durch Mittelung erhält man die zugehörige *common mode* Beschleunigung

$$a_{c,1,4,x} = \frac{1}{2} (a_{1,x} + a_{4,x}) = \frac{1}{2} (a_{1,x} + a_{1,x}) = a_{1,x} .$$

$a_{c,1,4,x}$ ergibt sich also nicht wie in Gleichung 3.25 zu Null, sondern entspricht der translationalen Kraft, welche auf den Satelliten wirkt. Mit der *common mode* Beschleunigung als Eingangsinformation kann das *drag control* System den Satelliten mit Hilfe der Ionen-Düsen entsprechend nachsteuern.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass in x-Richtung die größten Störkräfte auftreten. Es ist deshalb in dieser Richtung besonders wichtig den Satelliten *drag-free* zu halten. Die Farbgebung in den Formeln 3.25 bis 3.33 weist darauf hin, dass alle *common mode* Beschleunigungen in Flugrichtung (x-Richtung) mit den hoch sensitiven Beschleunigungsmesserachsen bestimmt werden. In dieser Hinsicht wurde die Anordnung der Akzelerometerachsen also optimal gewählt.

Zu beachten ist auch, dass der Luftwiderstand nicht nur in Flugrichtung wirkt (z.B. „lift“ in z-Richtung). Es ist deshalb nötig, den *common mode* auch in die restlichen beiden Richtungen hoch genau bestimmen zu können. Für die y-Richtung ist dies nur einmal, nämlich entlang Gradiometerarm 2-5 (Gleichung 3.29) möglich. In z-Richtung kann der *common mode* zweimal hoch genau gemessen werden (Gleichungen 3.27 und 3.33).

Man darf bei den Überlegungen die Abweichung des GRF vom nominellen Bahnsystem, die bereits in Abschnitt 2.2 in Abbildung 2.6 gezeigt wurde nicht vernachlässigen. Aufgrund dieser Abweichung werden in den *common mode* Beschleunigungen in y- und z-Richtung (des GRF) ebenfalls Teile der Störkräfte, welche in Flugrichtung (x-Richtung des LORF) wirken gemessen. Die Bestimmung dieser Komponenten wird dadurch deutlich wichtiger und stellt möglicherweise einen einschränkenden Faktor des Gesamtmesssystems dar.

3.5 Differential mode Beschleunigungen

Wie das Gedankenexperiment (siehe Abschnitt 3.1) mit der Messanordnung von zwei mit einer Feder verbundenen Probemassen (vgl. Abbildung 3.1) gezeigt hat, stellen in der Satellitengradiometrie Differenzen zwischen Beschleunigungen die wesentlichen Messgrößen dar. Um später die Schweregradienten berechnen zu können, müssen also zunächst die richtigen Differenzen, oder *differential mode* Beschleunigungen* gebildet werden. Zu beachten ist in ihrer

Ausgangsgleichung: $a_{d,l,k,i} = \frac{1}{2} (a_{l,i} - a_{k,i})$

mit:

- l Nummer des ersten Beschleunigungsmessers
- k Nummer des zweiten Beschleunigungsmessers
- i Richtung (x, y, z)

dass nicht nur die Differenzen zwischen den gemessenen Beschleunigungen entlang der drei Achsen gebildet werden, sondern dass das Ergebnis zusätzlich halbiert wird. Wie man sieht unterscheidet sich die Ausgangsgleichung der *differential mode* Beschleunigungen lediglich um ein Vorzeichen von der Formel für die *common mode* Beschleunigungen. Die insgesamt neun *differential mode* Beschleunigungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 a_{d,1,4,x} &= \frac{1}{2} (a_{1,x} - a_{4,x}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \frac{L_x}{2} - \frac{1}{2} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-2V_{xx} - 2\omega_y^2 - 2\omega_z^2) = \frac{L_x}{2} (-V_{xx} - \omega_y^2 - \omega_z^2) \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{d,1,4,y} &= \frac{1}{2} (a_{1,y} - a_{4,y}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \frac{L_x}{2} - \frac{1}{2} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-2V_{yx} + 2\dot{\omega}_z + 2\omega_x \omega_y) = \frac{L_x}{2} (-V_{yx} + \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{d,1,4,z} &= \frac{1}{2} (a_{1,z} - a_{4,z}) = \\
 &= \frac{1}{2} (-V_{zx} - \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \frac{L_x}{2} - \frac{1}{2} (-V_{zx} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \left(-\frac{L_x}{2} \right) = \\
 &= \frac{L_x}{4} (-2V_{zx} - 2\dot{\omega}_y + 2\omega_x \omega_z) = \frac{L_x}{2} (-V_{zx} - \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

$$a_{d,2,5,x} = \frac{1}{2} (a_{2,x} - a_{5,x}) = \frac{L_y}{2} (-V_{xy} - \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) \quad (3.37)$$

$$a_{d,2,5,y} = \frac{1}{2} (a_{2,y} - a_{5,y}) = \frac{L_y}{2} (-V_{yy} - \omega_x^2 - \omega_z^2) \quad (3.38)$$

$$a_{d,2,5,z} = \frac{1}{2} (a_{2,z} - a_{5,z}) = \frac{L_y}{2} (-V_{zy} + \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \quad (3.39)$$

$$a_{d,3,6,x} = \frac{1}{2} (a_{3,x} - a_{6,x}) = \frac{L_z}{2} (-V_{xz} + \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \quad (3.40)$$

$$a_{d,3,6,y} = \frac{1}{2} (a_{3,y} - a_{6,y}) = \frac{L_z}{2} (-V_{yz} - \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \quad (3.41)$$

$$a_{d,3,6,z} = \frac{1}{2} (a_{3,z} - a_{6,z}) = \frac{L_z}{2} (-V_{zz} - \omega_x^2 - \omega_y^2) \quad (3.42)$$

Analog zum *common mode* erhält man auch hier sechs hochgenaue Beschleunigungen (grün) und drei weniger genau bestimmbare (rot). Letztere sind für Gradiometerarm 1-4 die

y-Komponente, für Gradiometerarm 2-5 die z-Achse und für Gradiometerarm 3-6 erneut die y-Komponente. Die Beschleunigungen $a_{d,1,4,x}$, $a_{d,2,5,y}$ und $a_{d,3,6,z}$, welche longitudinale Messungen entlang der Gradiometerarme darstellen und somit die wichtigen Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} beinhalten, setzen sich also ausschließlich aus hochgenauen Messungen zusammen. Auch in dieser Hinsicht ist die gewählte Anordnung der Akzelerometerachsen also optimal.

3.6 Winkelbeschleunigungen

Mit Gleichung 3.15 (Term 2 und Term 3) ist bereits bekannt, dass die Komponenten des Schweretensors nicht direkt beobachtet werden können, sondern zusätzlich Anteile der Kreisel- und Zentrifugalbeschleunigung gemessen werden. Um letztendlich die Schweregradienten berechnen zu können werden zunächst Beschleunigungsdifferenzen gebildet, vgl. Abschnitt 3.5. Der Vektor der Beschleunigungsdifferenz zwischen Akzelerometer l und k lautet in Matrixschreibweise (vgl. Gleichung 3.20)

$$\underline{a}_l - \underline{a}_k = \left(-\underline{G} + \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega}\underline{\Omega} \right) \cdot (\underline{r}_l - \underline{r}_k) . \quad (3.43)$$

Für den Grenzübergang $d\underline{r} = \underline{r}_l - \underline{r}_k \rightarrow 0$ folgt

$$\lim_{d\underline{r} \rightarrow 0} \left(\frac{\underline{r}_l - \underline{r}_k}{d\underline{r}} \right) = \underline{\Lambda} = -\underline{G} + \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega}\underline{\Omega} . \quad (3.44)$$

$\dot{\underline{\Omega}}$ ist schiefsymmetrisch, während sowohl \underline{G} als auch $\underline{\Omega}\underline{\Omega}$ symmetrisch sind (vgl. Gleichung 3.19). Damit wird eine Trennung in den symmetrischen Anteil

$$\underline{\Lambda}_1 = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda} + \underline{\Lambda}^T) = -\underline{G} + \underline{\Omega}\underline{\Omega} \quad (3.45)$$

und den schiefsymmetrischen Anteil

$$\underline{\Lambda}_2 = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda} - \underline{\Lambda}^T) = \dot{\underline{\Omega}} \quad (3.46)$$

möglich. Aus Gleichung 3.46 erhält man also die Winkelbeschleunigungen des GOCE Gradiometers. Diese werden im Folgenden komponentenweise, unter Beachtung der unterschiedlichen Sensitivitäten der Beschleunigungsmesserachsen angegeben.

Für die Winkelbeschleunigung um die x-Achse erhält man aus 3.39 und 3.41 zunächst

$$\dot{\omega}_x = \frac{2a_{d,2,5,z}}{L_y} + V_{zy} - \omega_y\omega_z \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_x = -\frac{2a_{d,3,6,y}}{L_z} - V_{yz} + \omega_y\omega_z . \quad (3.47)$$

Für die endgültige Berechnung von $\dot{\omega}_x$ werden diese beiden Formeln addiert

$$2\dot{\omega}_x = -\frac{2a_{d,3,6,y}}{L_z} - V_{yz} + \omega_y\omega_z + \frac{2a_{d,2,5,z}}{L_y} + V_{zy} - \omega_y\omega_z \quad (3.48)$$

und durch 2 geteilt (Mittelbildung):

$$\dot{\omega}_x = -\frac{a_{d,3,6,y}}{L_z} + \frac{a_{d,2,5,z}}{L_y} \quad (3.49)$$

Analog lässt sich die Winkelbeschleunigung um die y-Achse aus den Gleichungen 3.36 und 3.40 ableiten:

$$\dot{\omega}_y = -\frac{2a_{d,1,4,z}}{L_x} - V_{zx} + \omega_x\omega_z \quad ; \quad \dot{\omega}_y = \frac{2a_{d,3,6,x}}{L_z} + V_{xz} - \omega_x\omega_z \quad (3.50)$$

$$2\dot{\omega}_y = -\frac{2a_{d,1,4,z}}{L_x} - V_{zx} + \omega_x\omega_z + \frac{2a_{d,3,6,x}}{L_z} + V_{xz} - \omega_x\omega_z \quad (3.51)$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{a_{d,1,4,z}}{L_x} + \frac{a_{d,3,6,x}}{L_z} \quad (3.52)$$

Die Winkelbeschleunigung um die z-Achse erhält man aus den Formeln 3.35 und 3.37:

$$\dot{\omega}_z = \frac{2a_{d,1,4,y}}{L_x} + V_{yx} - \omega_x\omega_y \quad ; \quad \dot{\omega}_z = -\frac{2a_{d,2,5,x}}{L_y} - V_{xy} + \omega_x\omega_y \quad (3.53)$$

$$2\dot{\omega}_z = -\frac{2a_{d,1,4,y}}{L_x} + V_{yx} - \omega_x\omega_y - \frac{2a_{d,2,5,x}}{L_y} - V_{xy} + \omega_x\omega_y \quad (3.54)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{a_{d,1,4,y}}{L_x} - \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y} \quad (3.55)$$

Wie man durch die Farbgebung in Gleichungen 3.49 und 3.55 sieht, fließt in die Berechnung von $\dot{\omega}_x$ (rot) und $\dot{\omega}_z$ (rot) jeweils mindestens eine „schlechte“ (rote) *differential mode* Beschleunigung mit ein, welche somit die Genauigkeit des Ergebnisses maßgeblich bestimmt. Nur $\dot{\omega}_y$ (grün) (Gleichung 3.52) berechnet sich aus ausschließlich hochgenauen *differential mode* Beschleunigungen (grün).

Diese Tatsache, d.h. die hochgenaue Bestimmung von $\dot{\omega}_y$ innerhalb der Messbandbreite des Gradiometers ist einer der Hauptgründe für die gewählte Konfiguration der Akzelerometerachsen (siehe Abschnitt 2.4). Die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_y$ ist besonders wichtig, weil sich der gesamte Satellit bzw. der GRF pro Umlauf einmal um die y-Achse dreht. Gäbe es keine Abweichungen zwischen GRF und LORF, würden auch die y-Achsen der beiden Koordinatensysteme zusammenfallen und es würden folglich nur sehr kleine Winkelgeschwindigkeiten um die x- und z-Achse auftreten.

Wie Abbildung 2.6 aber zeigt, existieren Abweichungen zwischen GRF und LORF. Die Verkippung um die z-Achse (*yaw*) weist dabei die größte Schwankung, zwischen $\pm 3^\circ$ auf, während die *roll*-Komponente (Drehung um x-Achse) stets zwischen $\pm 1^\circ$ liegt. Um die Geschwindigkeit der Drehung um die y-Achse des nominellen Bahnsystems (LORF) zu bestimmen, benötigt man daher auch die beiden schlechter bestimmten Komponenten (*roll* und *yaw*). Die genaue Rekonstruktion dieser beiden Winkelgeschwindigkeiten (ω_x und ω_z) spielt daher eine größere Rolle, als bei Annahme des Idealfalls, bei dem GRF und das nominelle Bahnsystem zusammenfallen.

Bei der Rekonstruktion der Winkelgeschwindigkeiten (*angular rate reconstruction*) wird deshalb versucht alle drei Komponenten bestmöglich zu bestimmen. Die *angular rate reconstruction* stellt einen Algorithmus dar, welcher die Winkelbeschleunigungen des Gradiometers gemeinsam mit den Winkelgeschwindigkeiten der Sternsensoren verarbeitet. Die Information des Gradiometers liefert dabei wertvolle Beiträge für die mittleren bis hohen Frequenzen (innerhalb MBW), wohingegen die Information der Sternkameras für die Bestimmung der niedrigen Frequenzen benötigt wird.

3.7 Schweregradienten

Sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_x , ω_y und ω_z (bzw. $\underline{\Omega}$) durch Integration der Winkelbeschleunigungen oder aus der *angular rate reconstruction* bekannt, lassen sich die Schweregradienten im GRF durch Einsetzen in Gleichung 3.43 berechnen.

Für die drei Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} entspricht dies einer Umformung der Gleichungen 3.34, 3.38 und 3.42 :

$$V_{xx} = -\frac{2a_{d,1,4,x}}{L_x} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \quad (3.56)$$

$$V_{yy} = -\frac{2a_{d,2,5,y}}{L_y} - \omega_x^2 - \omega_z^2 \quad (3.57)$$

$$V_{zz} = -\frac{2a_{d,3,6,z}}{L_z} - \omega_x^2 - \omega_y^2 \quad (3.58)$$

V_{xy} erhält man durch Umformung der Gleichungen 3.35 und 3.37 und anschließende Mittelung:

$$\begin{aligned} V_{yx} &= -\frac{2a_{d,1,4,y}}{L_x} + \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y ; & V_{xy} &= -\frac{2a_{d,2,5,x}}{L_y} - \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y \\ V_{xy} &= \frac{1}{2}(V_{yx} + V_{xy}) = -\frac{a_{d,1,4,y}}{L_x} - \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y} + \omega_x\omega_y \end{aligned} \quad (3.59)$$

Analog ergibt sich V_{xz} aus den Formeln 3.36 und 3.40:

$$\begin{aligned} V_{zx} &= -\frac{2a_{d,1,4,z}}{L_x} - \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z ; & V_{xz} &= -\frac{2a_{d,3,6,x}}{L_z} + \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z \\ V_{xz} &= \frac{1}{2}(V_{zx} + V_{xz}) = -\frac{a_{d,1,4,z}}{L_x} - \frac{a_{d,3,6,x}}{L_z} + \omega_x\omega_z \end{aligned} \quad (3.60)$$

V_{yz} erhält man aus Gleichungen 3.39 und 3.41:

$$\begin{aligned} V_{zy} &= -\frac{2a_{d,2,5,z}}{L_y} + \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z ; & V_{yz} &= -\frac{2a_{d,3,6,y}}{L_z} - \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z \\ V_{yz} &= \frac{1}{2}(V_{zy} + V_{yz}) = -\frac{a_{d,2,5,z}}{L_y} - \frac{a_{d,3,6,y}}{L_z} + \omega_y\omega_z \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die drei Hauptdiagonalglieder (grün) können also hochgenau bestimmt werden. Dies gilt allerdings nur, wenn alle Winkelgeschwindigkeiten nach der *angular rate reconstruction*

entsprechend genau bekannt sind. Wäre keine Zusatzinformation aus den Sternsensoren vorhanden, und die Schweregradienten könnten nur aus den mit dem Gradiometer bestimmten Winkelgeschwindigkeiten festgelegt werden, wären alle sechs Komponenten des Schweretensors rot und damit nur unzureichend genau. Man sieht also bereits jetzt, dass die genaue Bestimmung aller drei Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors von entscheidender Bedeutung für das gesamte Messsystem ist. Dieser Gedanke wird in Kapitel 6 noch eingehender untersucht. Bei Annahme genau bekannter Winkelgeschwindigkeiten kann neben V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} auch der Gradient V_{xz} hochgenau bestimmt werden. Nur die restlichen zwei Elemente von G , nämlich V_{xy} und V_{zy} erscheinen in den Formeln rot und sind somit schlechter bestimmt.

Die numerische Betrachtung dieser und weiterer Genauigkeitseigenschaften ist Thema von Kapitel 6.

Es wurden nun bereits sämtliche Formeln hergeleitet, welche die Berechnung der Schweregradienten aus den gemessenen Beschleunigungen im „fehlerfreien“ System ermöglichen. Zum Abschluss dieses Kapitels soll mit Hilfe der folgenden zwei Tabellen ein Überblick gegeben werden, welche Größen zunächst auf die Berechnung der drei Winkelbeschleunigungen (Tabelle 3.7) und anschließend auf die Berechnung der einzelnen Schweregradienten (Tabelle 3.8) Einfluss haben. Die Symbole in den Tabellen haben dabei folgende Bedeutung:

- + direkte Beziehung zwischen Einfluss- und Berechnungsgröße
- × Einfluss über Rotationsterm
- grün (z.B. $a_{d,1,4,x}$) hochgenau bestimmbare *differential mode* Beschleunigung
- rot (z.B. $a_{d,1,4,y}$) weniger genau bestimmbare *differential mode* Beschleunigung

Zusätzlich sind die hochgenau bestimmbaren Größen (z.B. ω_y oder V_{xx}) gelb hinterlegt.

	$a_{d,1,4,x}$	$a_{d,1,4,y}$	$a_{d,1,4,z}$	$a_{d,2,5,x}$	$a_{d,2,5,y}$	$a_{d,2,5,z}$	$a_{d,3,6,x}$	$a_{d,3,6,y}$	$a_{d,3,6,z}$	L_x	L_y	L_z	Stern-Sensoren
$\dot{\omega}_x$						+		+			+	+	
$\dot{\omega}_y$			+				+			+		+	
$\dot{\omega}_z$		+		+						+	+		

Tab. 3.7: Einfluss auf Winkelbeschleunigungen

In [Bouman, 2006] befindet sich eine ähnliche Tabelle zur Darstellung des Einflusses auf die Schweregradienten. Es soll damit ein Zusammenhang zwischen der externen Kalibration, wie sie für die Gradienten verwendet wird und der internen (*in-flight*) Kalibration für die *differential mode* Beschleunigungen hergestellt werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll nicht weiter auf die verschiedenen Kalibrationsmethoden eingegangen werden. Es sei nur darauf hingewiesen, dass die nachfolgenden Aussagen durchaus auch für die Kalibration von GOCE von Bedeutung sind.

	$a_{d,1,4,x}$	$a_{d,1,4,y}$	$a_{d,1,4,z}$	$a_{d,2,5,x}$	$a_{d,2,5,y}$	$a_{d,2,5,z}$	$a_{d,3,6,x}$	$a_{d,3,6,y}$	$a_{d,3,6,z}$	L_x	L_y	L_z	Stern-Sensoren
V_{xx}	+	x	x	x			x			+/x	x	x	x
V_{yy}		x		x	+	x		x		x	+/x	x	x
V_{zz}			x			x	x	x	+	x	x	+/x	x
V_{xy}		+	x	+		x	x	x		+/x	+/x	x	x
V_{xz}		x	+	x		x	+	x		+/x	x	+/x	x
V_{yz}		x	x	x		+	x	+		x	+/x	+/x	x

Tab. 3.8: Einfluss auf Schweregradienten

Mit Tabellen 3.8 und 3.7 können folgende Aussagen getroffen werden:

- Eine der hochgenauen *differential mode* Beschleunigungen $a_{d,1,4,x}$, $a_{d,2,5,y}$ und $a_{d,3,6,z}$ hat jeweils nur Einfluss auf V_{xx} , V_{yy} oder V_{zz} (hochgenau). Es besteht kein Einfluss auf die Winkelbeschleunigungen.
- Die hochgenauen *differential mode* Beschleunigungen $a_{d,1,4,z}$ und $a_{d,3,6,x}$ haben direkten Einfluss auf V_{xz} (hochgenau) und auf $\dot{\omega}_y$ (hochgenau). Deshalb indirekter Einfluss auf V_{xx} , V_{zz} , V_{xy} und V_{yz} , vgl. Gleichungen 3.56, 3.58, 3.59 und 3.61.
- *Differential mode* Beschleunigungen $a_{d,2,5,x}$ (hochgenau) und $a_{d,1,4,y}$ (ungenau) haben direkten Einfluss auf V_{xy} (ungenau) und auf $\dot{\omega}_z$ (ungenau). Deshalb indirekter Einfluss auf V_{xx} , V_{yy} , V_{xz} und V_{yz} , vgl. Gleichungen 3.56, 3.57, 3.60 und 3.61.
- Die ungenauen *differential mode* Beschleunigungen $a_{d,2,5,z}$ und $a_{d,3,6,y}$ haben direkten Einfluss auf V_{yz} (ungenau) und auf $\dot{\omega}_x$ (ungenau). Deshalb indirekter Einfluss auf V_{yy} , V_{zz} , V_{xy} und V_{xz} , vgl. Gleichungen 3.57, 3.58, 3.59 und 3.60.
- Basislinienlänge L_x hat direkten Einfluss auf V_{xx} , V_{xy} und V_{xz} , sowie auf $\dot{\omega}_y$ und $\dot{\omega}_z$. Über diese Rotationsterme besteht indirekter Einfluss auf alle Schweregradienten.
- Basislinienlänge L_y hat direkten Einfluss auf V_{yy} , V_{xy} und V_{yz} , sowie auf $\dot{\omega}_x$ und $\dot{\omega}_z$. Über diese Rotationsterme besteht indirekter Einfluss auf alle Schweregradienten.
- Basislinienlänge L_z hat direkten Einfluss auf V_{zz} , V_{xz} und V_{yz} , sowie auf $\dot{\omega}_x$ und $\dot{\omega}_y$. Über diese Rotationsterme besteht indirekter Einfluss auf alle Schweregradienten.
- Die Messungen der Sternsensoren haben Einfluss auf alle Winkelgeschwindigkeiten und somit auch indirekt auf alle Schweregradienten.

Im nachfolgenden Kapitel werden die bisher hergeleiteten Formeln auf zweierlei Datensätze angewandt. Dies ermöglicht den Vergleich der Daten und soll zum allgemeinen Verständnis des GOCE-Messsystems beitragen.

Kapitel 4

Allgemeine Überlegungen zum fehlerfreien Gradiometer-Messsystem

In diesem Kapitel finden allgemeine Überlegungen zu den bisher aufgestellten Gradiometergleichungen statt. Betrachtet werden dazu zwei unterschiedliche Datensätze.

- Der erste Datensatz basiert auf Schweregradienten, welche direkt aus einem bekannten Schwerefeldmodell berechnet wurden und deshalb näherungsweise als fehlerfreie oder ideale GOCE-Gradiometermessergebnisse angesehen werden können. Aus diesen Gradienten wurden die wichtigen Größen des Messsystems, also die einzelnen Beschleunigungen pro Akzelerometer, sowie die *common-* und *differential mode* Beschleunigungen rückgerechnet. Dieser Datensatz wird im Folgenden mit „CS-S“ bezeichnet und dient als Referenz für den zweiten Datensatz.
- Beim zweiten Datensatz handelt es sich um *common-* und *differential mode* Beschleunigungen aus dem GOCE *end-to-end* Simulator der ESA. Ausgehend von diesen Daten können wieder die restlichen wichtigen Größen, also in diesem Fall die einzelnen Beschleunigungen pro Akzelerometer und die Schweregradienten berechnet werden. Man kann davon ausgehen, dass diese Ergebnisse sehr gut die künftigen echten GOCE Messungen repräsentieren. Der Einfachheit halber werden diese Daten nachfolgend stets mit „E2E“ bezeichnet.

4.1 Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser

4.1.1 CS-S-Beschleunigungen aus 'Referenzgradienten'

Es sollen hier zunächst die einzelnen CS-S-Beschleunigungen je Akzelerometer betrachtet werden, welche von den 'Referenzgradienten' abgeleitet wurden. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe der Beobachtungsgleichungen 3.22, 3.23 und 3.24. Da in diesen Gleichungen

nicht nur die gegebenen Gradienten vorkommen, sondern auch Winkelgeschwindigkeiten, Winkelbeschleunigungen sowie die Basislinienlängen, mussten für diese Größen realistische Werte gefunden werden. Es wurden folgende Annahmen verwendet:

1. Winkelgeschwindigkeiten
$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.17 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Winkelbeschleunigungen
$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Basislinienlängen $L_x = L_y = L_z = 0.5 \text{ m}$

Diesen Annahmen liegen folgende Überlegungen zugrunde:

- (Annahme 1) GOCE soll sich während eines Umlaufs genau einmal um sich selbst, genauer um die Achse senkrecht zur Bahnebene (y-Achse) drehen. Damit wird erreicht, dass stets dieselbe Seite des Satelliten der Erde und die gegenüberliegende Seite stets der Sonne zugewandt ist. Hauptgrund für die Wahl dieser erdgerichteten Orientierung (im Gegensatz zu einer inertialen Orientierung, vgl. [Müller, 2001]) ist die Möglichkeit die drei Hauptdiagonalterme im „lokalen System“, mit $V_{xx} \approx 1500 E$, $V_{yy} \approx 1500 E$ und $V_{zz} \approx 3000 E$ sauber messen zu können. Die konstante Winkelgeschwindigkeit um die y-Achse berechnet sich näherungsweise aus der GOCE-Flughöhe von ca. 250 km mit Hilfe der Formel

$$\omega_y \approx \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}} \tag{4.1}$$

mit:

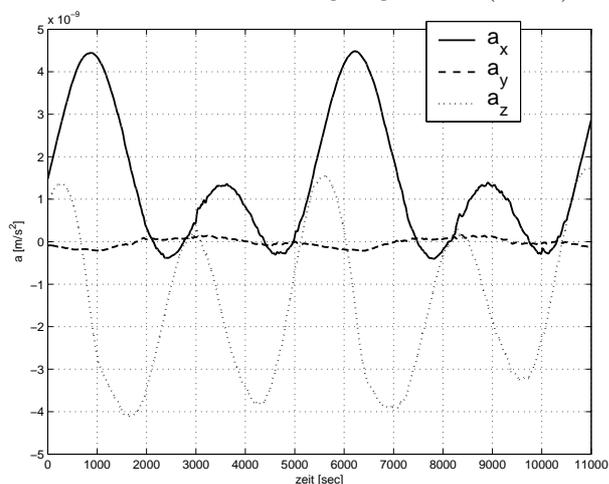
- GM Produkt aus Gravitationskonstante mal Masse der Erde $\approx 3.988 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$
- R mittlerer Erdradius $\approx 6380 \text{ km}$
- h GOCE-Flughöhe $\approx 250 \text{ km}$

- (Annahme 1) Neben der Drehung um die y-Achse sollen nominell keine weiteren Drehungen auftreten. Dass dies in der Realität nicht ganz zutrifft wurde bereits in Abschnitt 2.2 mit Abbildung 2.6 gezeigt. Die auftretenden Winkelgeschwindigkeiten um die x- und z-Achse sind allerdings sehr viel kleiner als ω_y und wurden für die Berechnung deshalb gleich Null gesetzt.
- (Annahme 2) Da alle Winkelgeschwindigkeiten als konstant bzw. Null angenommen werden, müssen als Konsequenz die Winkelbeschleunigungen gleich Null gesetzt werden.

- (Annahme 3) Der Wert von 0.5 m für die Basislinienlängen entspricht der nominellen Vorgabe des GOCE-Gradiometers. Es werden hierbei also jegliche Fehljustierungen oder mögliches Dehnungsverhalten bei Temperaturschwankungen vernachlässigt.

In Abbildungen 4.1 bis 4.6 sind die einzelnen CS-S-Beschleunigungen für alle sechs Akzelerometer graphisch dargestellt.

Abb. 4.1: Beschleunigungen A1 (ideal)

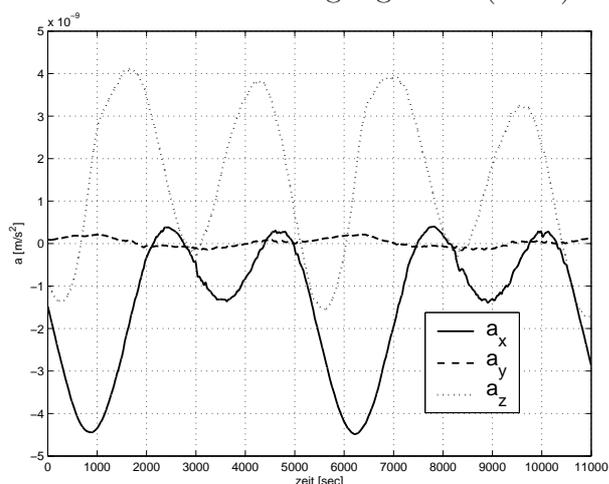


	Mittelwert	RMS ¹
$a_{1,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.395827	1.515018
$a_{1,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-0.023109	0.100876
$a_{1,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1.499003	1.783860

	Maximum	Minimum
$a_{1,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	4.484517	-0.402654
$a_{1,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.157904	-0.213915
$a_{1,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.732565	-4.112600

¹RMS: *root mean square*

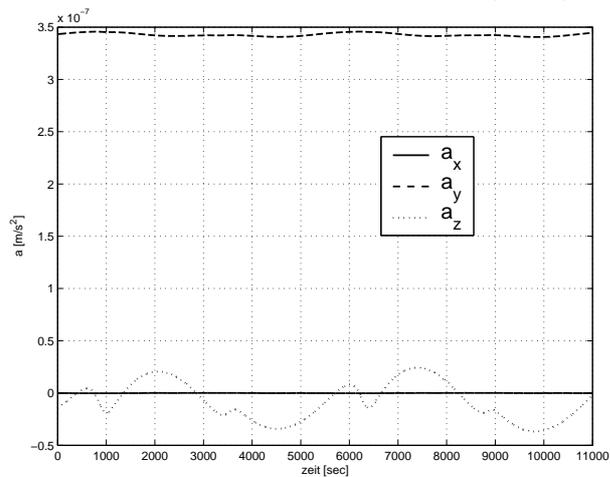
Abb. 4.2: Beschleunigungen A4 (ideal)



	Mittelwert	RMS
$a_{4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1.395827	1.515018
$a_{4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.023109	0.100876
$a_{4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.499003	1.783860

	Maximum	Minimum
$a_{4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.402654	-4.484517
$a_{4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.213915	-0.157904
$a_{4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	4.112600	-1.732565

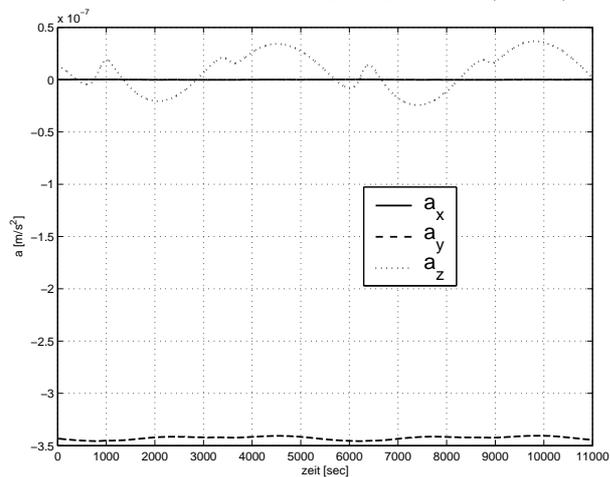
Abb. 4.3: Beschleunigungen A2 (ideal)



	Mittelwert	RMS
$a_{2,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-0.023109	0.100876
$a_{2,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	342.763543	1.540950
$a_{2,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-7.924718	18.093131

	Maximum	Minimum
$a_{2,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.157904	-0.213915
$a_{2,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	345.702170	340.552232
$a_{2,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	24.170541	-36.777497

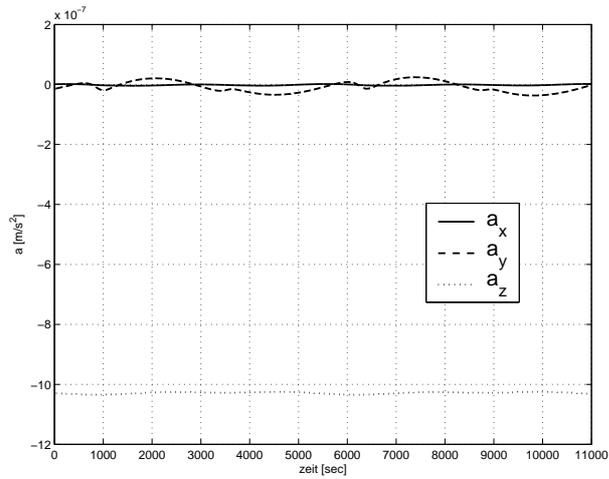
Abb. 4.4: Beschleunigungen A5 (ideal)



	Mittelwert	RMS
$a_{5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.023109	0.100876
$a_{5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-342.763543	1.540950
$a_{5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	7.924718	18.093131

	Maximum	Minimum
$a_{5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.213915	-0.157904
$a_{5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-340.552232	-345.702170
$a_{5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	36.777497	-24.170541

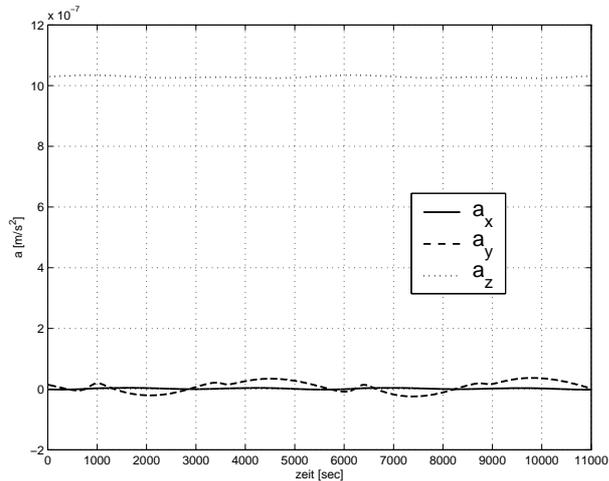
Abb. 4.5: Beschleunigungen A3 (ideal)



	Mittelwert	RMS
$a_{3,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1.499003	1.783860
$a_{3,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-7.924718	18.093131
$a_{3,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1028.609370	3.030816

	Maximum	Minimum
$a_{3,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.732565	-4.112600
$a_{3,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	24.170541	-36.777497
$a_{3,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1024.741661	-1034.636176

Abb. 4.6: Beschleunigungen A6 (ideal)



	Mittelwert	RMS
$a_{6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.499003	1.783860
$a_{6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	7.924718	18.093131
$a_{6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1028.609370	3.030816

	Maximum	Minimum
$a_{6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	4.112600	-1.732565
$a_{6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	36.777497	-24.170541
$a_{6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1034.636176	1024.741661

Zu sehen sind jeweils Zeitreihen von 11000 Sekunden, was ca. zwei Umläufen des Satelliten entspricht. Die genaue Umlaufsdauer² von GOCE beträgt bei einer Flughöhe von 250 km 5370 Sekunden. Auch alle weiteren Darstellungen dieses Kapitels beziehen sich auf den genannten Zeitraum um einen Vergleich der Ergebnisse zu ermöglichen. Im Folgenden seien verschiedene Aspekte der Abbildungen 4.1 bis 4.6 diskutiert:

- Nach Abschnitt 3.1, in dem bereits das Prinzip der Gradiometrie im Weltraum erklärt wurde, treten nur Beschleunigungen relativ zum Schwerpunkt auf. Deshalb, und aufgrund der gewählten Anordnung und Orientierung des Gradiometers unterscheiden sich die einzelnen Beschleunigungen x, y und z der Gradiometerpaare 1-4, 2-5 und 3-6 in Abbildungen 4.1 bis 4.6 erwartungsgemäß jeweils nur durch das Vorzeichen. Es gilt also z.B. $a_{1,x} = -a_{4,x}$. Beschleunigungsmesser 1, 2 und 3 sind jeweils in positive Achsrichtung um die halbe Basislinienlänge vom Ursprung entfernt; A4, A5 und A6 dagegen in die negative Richtung, vgl. Formeln 3.21.
- In den Beobachtungsgleichungen der einzelnen Beschleunigungen (Gleichungen 3.22 bis 3.24) treten die Hauptdiagonalterme der Gradientenmatrix jeweils in der longitudinalen Anordnung auf (siehe auch Abschnitt 3.1). Das ist für Gradiometerarm 1-4 die x-Richtung, für Achse 2-5 die y-Richtung und für Beschleunigungsmesserpaar 3-6 die z-Richtung. Weil die Hauptdiagonalelemente von \underline{G} sehr viel größer sind als die restlichen Elemente der Gradientenmatrix, liegt die Vermutung nahe, dass gerade diese longitudinalen Messungen auch deutlich die größten Messsignale liefern. Bei Betrachtung der Abbildungen 4.1 bis 4.6, insbesondere der von 4.1 und 4.2 fällt jedoch auf, dass dies nicht immer der Fall ist. Grund dafür ist Term 3 der grundlegenden Beobachtungsgleichung 3.15, d.h. es wird neben dem Gravitationspotential relativ zum Schwerpunkt zusätzlich die Zentrifugalbeschleunigung gemessen. Letztere drückt sich aus in ω_y^2 . (ω_x und ω_z wurden gleich Null angenommen.) Durch Quadrieren der Formel 4.1 erhält man $\omega_y^2 \approx \frac{GM}{(R+h)^3} \approx 1368.9 \cdot 10^{-9} \frac{1}{s^2}$. Außerdem ist aus Abschnitt 3.1 bereits bekannt, dass näherungsweise³ gilt $V_{xx} \approx V_{yy} \approx -\frac{GM}{r^3}$, $V_{zz} \approx 2\frac{GM}{r^3}$. Daraus folgt $\omega_y^2 \approx -V_{xx} \approx -V_{yy} \approx \frac{1}{2}V_{zz}$. Die Zentrifugalbeschleunigung wirkt sich deshalb folgendermaßen auf die drei longitudinalen Messungen aus:
 - x-Richtung (Abbildungen 4.1 und 4.2, Gleichungen 3.22):
 $a_{1,x}$ beträgt dem Betrag nach maximal nur ca. $4.5 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$ und besitzt somit dieselbe Größenordnung wie $a_{1,y}$. Grund dafür ist die Größe von V_{xx} . Dieses schwankt nämlich zwischen $-1386.8 E$ und $-1367.3 E$ und besitzt somit dem Betrag nach dieselbe Größenordnung wie ω_y^2 , jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Für $a_{1,x}$ und $a_{4,x}$ (vgl. Gleichungen 3.22) ergibt sich so die Größenordnung von $10^{-9} \frac{m}{s^2}$.
 - y-Richtung (Abbildungen 4.3 und 4.4, Gleichungen 3.23):
 In Gleichungen 3.23 für die Berechnung von $a_{2,y}$ und $a_{5,y}$ geht ω_y^2 nicht ein.

²Umlaufsdauer $T[s] = \frac{2\pi}{\omega_y[\frac{rad}{s}]}$

³Als Näherung wurde das Schwerefeld der Erde mit dem Zentralfeld einer homogenen Kugel ersetzt und angenommen, dass keine nicht-gravitativen Kräfte auf den Satelliten wirken.

Die Größe der genannten Signale, von maximal ca. $346 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$ spiegelt deshalb direkt die Größe von V_{yy} mal $\frac{1}{4}$ ($\frac{L_y}{2} = 0.25 \text{ m}$) wider. (Maximaler Betrag von $V_{yy} \approx 1386 \text{ E}$, siehe Abschnitt 4.3, Abbildung 4.19)

– z-Richtung (Abbildungen 4.5 und 4.6, Gleichungen 3.24):

In $a_{3,z}$ und $a_{6,z}$ in Gleichungen 3.24 geht ω_y^2 mit gleichem Vorzeichen ein wie der Gradient V_{zz} , welcher ungefähr doppelt so groß ist wie V_{xx} oder auch ω_y^2 . Es ergibt sich somit für $a_{3,z}$ und $a_{6,z}$ eine Größenordnung von $10^{-6} \frac{m}{s^2}$. (Maximaler Betrag von $a_{3,z} \approx 1035 \text{ E}$)

- Alle restlichen Signale, also die transversalen Messungen der Nicht-Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix sind von Größenordnung $10^{-8} \frac{m}{s^2}$ oder kleiner.

4.1.2 Beschleunigungen aus E2E-Simulation

Nachdem nun mit Abbildungen 4.1 bis 4.6 das Aussehen der 'idealen' CS-S-Beschleunigungen bekannt ist, sollen in diesem Abschnitt die E2E-Beschleunigungen gezeigt werden, welche aus den *common-* und *differential mode* Beschleunigungen des GOCE *end-to-end* Simulators berechnet wurden. Die Rückrechnung erfolgte dabei durch Addition bzw. Subtraktion der Formeln 3.25 bis 3.33 (für die *common mode* Beschleunigungen) mit den Formeln 3.34 bis 3.42 (für die *differential mode* Beschleunigungen).

Die einzelnen Beschleunigungen der Akzelerometer $A1$, $A2$ und $A3$ erhält man dabei über Addition, gemäß:

$$\begin{aligned} a_{c,l,k,i} &= \frac{1}{2}(a_{l,i} + a_{k,i}) \\ a_{d,l,k,i} &= \frac{1}{2}(a_{l,i} - a_{k,i}) \end{aligned}$$

$$a_{c,l,k,i} + a_{d,l,k,i} = \frac{1}{2}a_{l,i} + \frac{1}{2}a_{l,i} + \frac{1}{2}a_{k,i} - \frac{1}{2}a_{k,i} = a_{l,i} \quad (4.2)$$

Durch Subtraktion lassen sich die einzelnen Beschleunigungen der Akzelerometer $A4$, $A5$ und $A6$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_{c,l,k,i} &= \frac{1}{2}(a_{l,i} + a_{k,i}) \\ a_{d,l,k,i} &= \frac{1}{2}(a_{l,i} - a_{k,i}) \end{aligned}$$

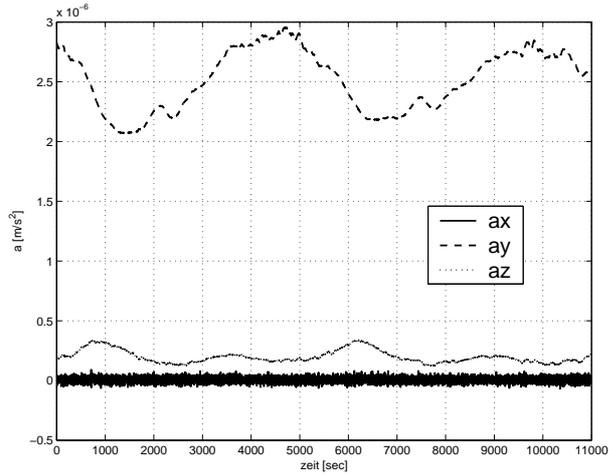
$$a_{c,l,k,i} - a_{d,l,k,i} = \frac{1}{2}a_{l,i} - \frac{1}{2}a_{l,i} + \frac{1}{2}a_{k,i} + \frac{1}{2}a_{k,i} = a_{k,i} \quad (4.3)$$

Es gelten dabei die Abkürzungen der Abschnitte 3.4 und 3.5, also

- l Nummer des ersten Beschleunigungsmessers
- k Nummer des zweiten Beschleunigungsmessers
- i Richtung (x, y, z)

Die folgenden Abbildungen 4.7 bis 4.12 zeigen die aus den E2E-Simulationsdaten rückgerechneten Beschleunigungen für alle sechs Akzelerometer.

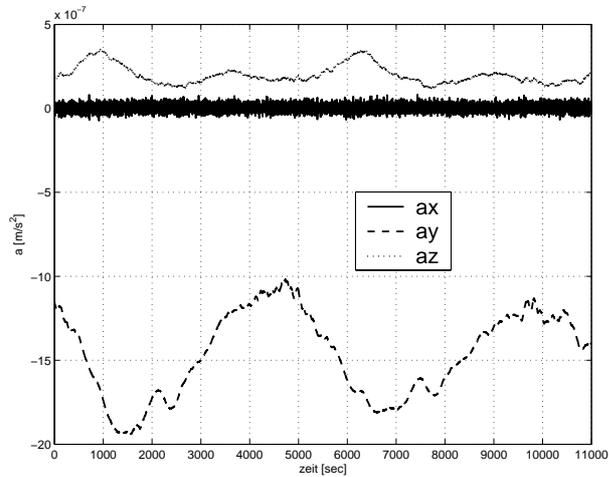
Abb. 4.7: Beschleunigungen A1 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{1,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	6.286918	20.927137
$a_{1,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2518.349094	251.353821
$a_{1,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	198.478342	53.011010

	Maximum	Minimum
$a_{1,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	90.901149	-69.220102
$a_{1,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2957.240144	2061.187978
$a_{1,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	337.462532	120.632610

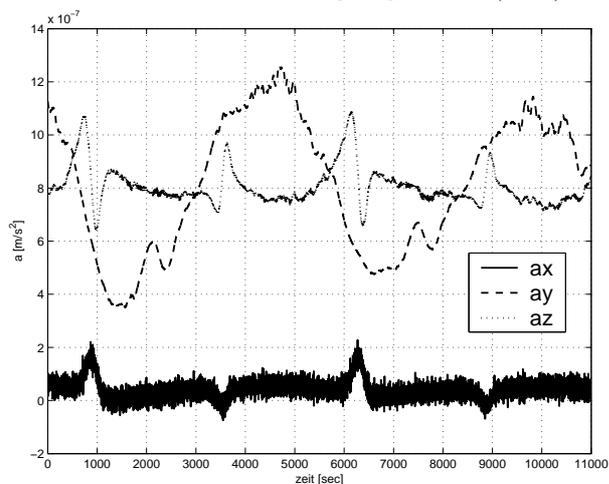
Abb. 4.8: Beschleunigungen A4 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	3.953188	20.926036
$a_{4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1462.896759	251.761397
$a_{4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	199.501957	54.460702

	Maximum	Minimum
$a_{4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	82.178975	-73.131132
$a_{4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1015.573060	-1939.597130
$a_{4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	348.673996	119.790009

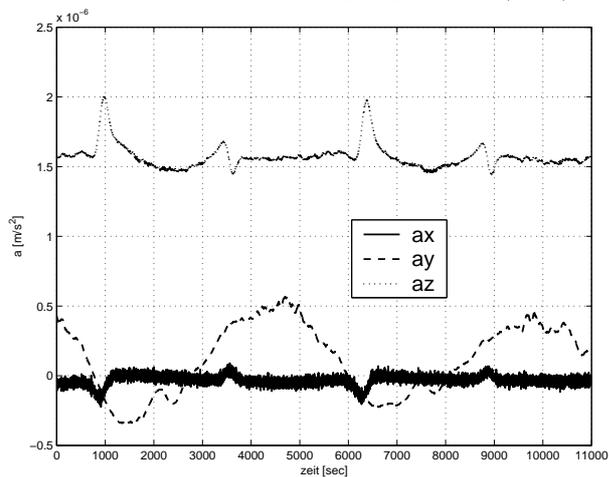
Abb. 4.9: Beschleunigungen A2 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{2,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	41.942763	35.784907
$a_{2,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	816.141134	250.985054
$a_{2,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	804.388563	71.942903

	Maximum	Minimum
$a_{2,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	227.765523	-74.212332
$a_{2,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1257.448851	350.324132
$a_{2,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1090.577056	638.107431

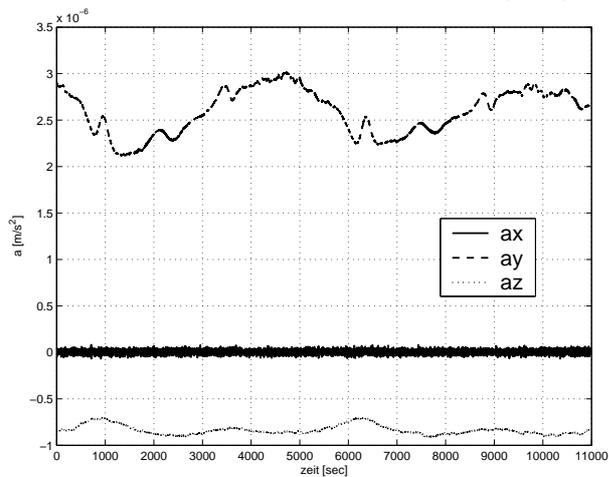
Abb. 4.10: Beschleunigungen A5 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-31.892211	35.866644
$a_{5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	119.713342	251.790117
$a_{5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1572.410439	88.823272

	Maximum	Minimum
$a_{5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	90.090118	-224.080924
$a_{5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	564.276571	-348.207683
$a_{5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2000.136587	1441.357818

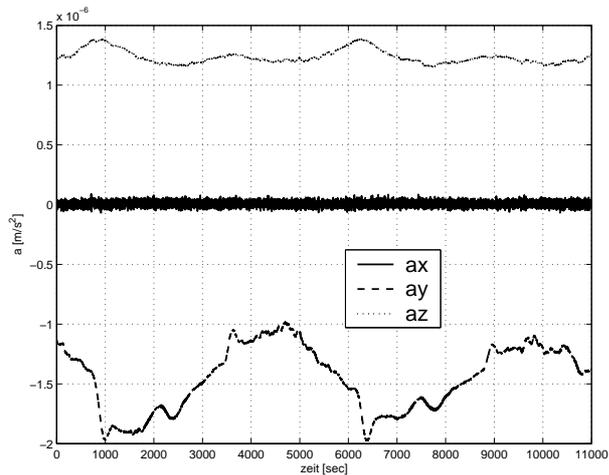
Abb. 4.11: Beschleunigungen A3 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{3,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	4.293512	20.900247
$a_{3,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2590.081360	239.297487
$a_{3,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-835.634638	50.091657

	Maximum	Minimum
$a_{3,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	81.965556	-68.122871
$a_{3,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	3019.695794	2117.063378
$a_{3,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-705.152385	-911.020291

Abb. 4.12: Beschleunigungen A6 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	6.693479	21.012936
$a_{6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1449.127339	271.563847
$a_{6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1235.797287	57.283955

	Maximum	Minimum
$a_{6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	90.531161	-68.501766
$a_{6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-983.395210	-1978.402175
$a_{6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1386.074976	1153.522757

Bei Betrachtung der Darstellungen 4.7 bis 4.12 fällt Verschiedenes auf:

- Die Messungen mit den weniger genauen Akzelerometerachsen, also für $A1$, $A4$, $A3$ und $A6$ die y -Achse und für $A2$ und $A5$ die z -Achse sind nicht wie bei den einzelnen CS-S-Beschleunigungen klein gegenüber den restlichen Komponenten. Sie überschreiten die Beschleunigungen entlang den Gradiometerarmen teilweise um mehrere Größenordnungen, wobei sie im Bereich von $10^{-6} \frac{m}{s^2}$ liegen. Dies lässt bereits an dieser Stelle die Vermutung zu, dass die schlechteren Achsen die Genauigkeit des Gesamtmesssystems erheblich beeinträchtigen könnten. Die Anordnung der Akzelerometer des Gradiometers wurde so gewählt, dass diese schlecht bestimmten Beschleunigungen zumindest möglichst wenig Einfluss auf die wichtigen zu bestimmenden Größen, also die Winkelgeschwindigkeit um die y -Achse und die drei Hauptdiagonalterme der Gradientenmatrix haben.
- Außerdem erkennt man, dass die Beschleunigungen entlang der x -Achsen für alle Akzelerometer relativ klein sind (maximal $228 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$ für $a_{2,x}$) und 'verrauscht' aussehen. Dieser Verlauf ist auf den Einsatz des *drag control* Systems zurückzuführen, welches basierend auf den *common mode* Beschleunigungen fortlaufend der Ablenkung des Satelliten in x -Richtung durch äußere Störkräfte entgegensteuert. Trotz dieses Systems bleibt die maximale Beschleunigung in x -Richtung von ca. $228 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$ zwei Größenordnungen über der maximalen CS-S-Beschleunigung, gerechnet aus den 'Referenzgradienten'.
- Bei den besagten CS-S-'Referenzgradienten' hat man gut die symmetrische Verteilung der Beschleunigungen um Null erkennen können, (vgl. Abschnitt 4.1.1). So liegt z.B. in Abbildungen 4.3 und 4.4 $a_{2,y}$ im Mittel bei ca. $3.4 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ und $a_{5,y}$ im Mittel bei ca. $-3.4 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$. Die beiden Werte liegen somit ca. $6.8 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ auseinander. In den E2E-Beschleunigungen beträgt $a_{2,y}$ im Mittel ca. $8.2 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ und $a_{5,y}$ im Mittel ca. $1.2 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$. D.h. der Unterschied zwischen diesen beiden Beschleunigungen, von ca. $7 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ ist gerundet gleich dem Unterschied der entsprechenden CS-S-'Referenzbeschleunigungen'. Es sind diese Differenzen der Beschleunigungen, oder auch *differential mode* Beschleunigungen (siehe Abschnitt 4.2) welche benötigt werden zur Bestimmung der Schweregradienten. D.h. also die Gradienten können, trotz des Versatzes, oder auch *bias* der Beschleunigungen korrekt bestimmt werden. Der genannte Versatz, welcher auf äußere Störkräfte zurückzuführen ist zeigt sich explizit bei Mittelung der beiden jeweiligen Beschleunigungen, also in den *common mode* Beschleunigungen. Dies ist allerdings bereits Thema des nächsten Abschnitts.

4.2 *Common mode* und *differential mode* Beschleunigungen

4.2.1 *Common-* und *differential mode* aus Referenzdaten

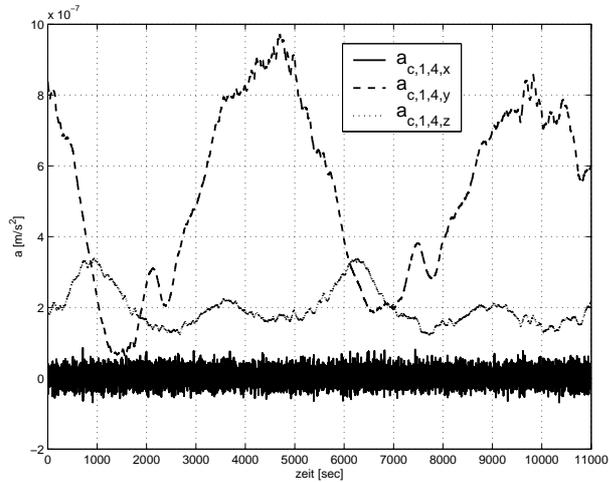
Zunächst soll an dieser Stelle auf die 'idealen' (CS-S) *common mode* Beschleunigungen eingegangen werden. Die Berechnung dieser *common mode* Beschleunigungen erfolgt mit den Formeln aus Abschnitt 3.4 durch Mittelbildung der einzelnen Beschleunigungen. Laut Formeln 3.25 bis 3.33 sind die *common mode* Beschleunigungen stets Null. Es sei nochmals erwähnt, dass alle Gleichungen des Kapitels 3 nur für den 'Idealfall' gelten, d.h. die Formeln berücksichtigen weder äußere Störkräfte, die auf den Satelliten wirken, noch irgendwelche Instrumentenfehler.

Die CS-S *common mode* Beschleunigungen wurden aus den Referenzdaten und somit letztendlich aus dem idealen Schwerefeld berechnet. Sie enthalten deshalb ebenfalls keine solchen Fehler und ergeben sich tatsächlich zu Null. Auf ihre Darstellung konnte deshalb verzichtet werden.

Als nächstes seien die *differential mode* Beschleunigungen, also die wichtigen Beschleunigungsunterschiede näher betrachtet. Abschnitt 3.5 liefert die Formeln zu ihrer Berechnung. Aus diesen Formeln wird bereits ersichtlich, dass die *differential mode* Beschleunigungen im Idealfall nichts anderes sind, als die einzelnen Beschleunigungen der Akzelerometer A1, A2 und A3. So sind z.B. Formel 3.34 zur Berechnung von $a_{d,1,4,x}$ und die erste Gleichung von 3.22 zur Berechnung von $a_{1,x}$ identisch. Die *differential mode* Beschleunigungen aus den Referenzdaten weisen auch tatsächlich denselben Verlauf auf wie die einzelnen Beschleunigungen der Akzelerometer A1, A2 und A3. Zur Anschauung von $a_{d,1,4,i}$, $a_{d,2,5,i}$ und $a_{d,3,6,i}$ können somit $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ und $a_{3,i}$ in Abbildungen 4.1, 4.3 und 4.5 dienen.

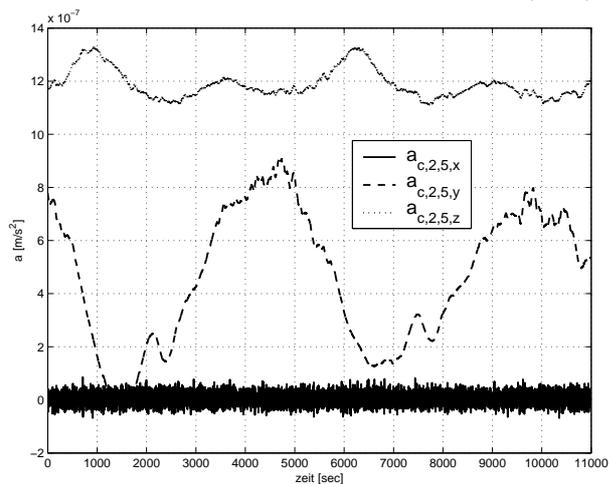
4.2.2 *Common-* und *differential mode* aus E2E-Simulation

In diesem Abschnitt werden die *common-* und *differential mode* Beschleunigungen, welche aus dem ESA *end-to-end* Simulator stammen dargestellt und diskutiert. Wie bereits erwähnt, spiegeln diese Größen die künftigen echten GOCE-Messungen sehr realistisch wider. Abbildungen 4.13, 4.14 und 4.15 zeigen zunächst die *common mode* Beschleunigungen für die drei Gradiometerpaare 1-4, 2-5 und 3-6. Im Anschluss folgen die *differential mode* Beschleunigungen in derselben Reihenfolge (Abbildungen 4.16, 4.17, 4.18).

Abb. 4.13: *common mode* Achse 1-4 (real)

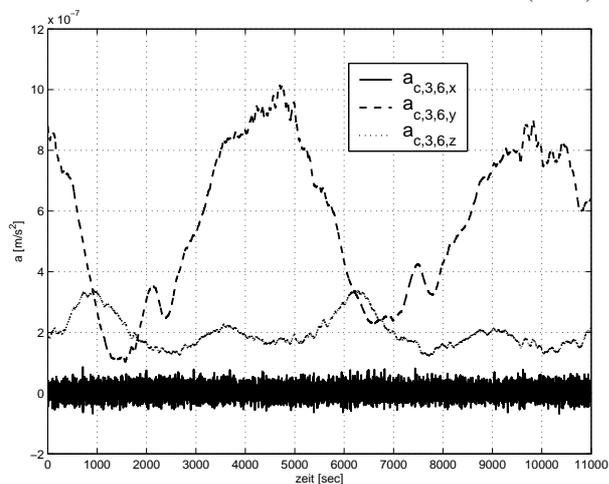
	Mittelwert	RMS
$a_{c,1,4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	5.120053	20.863856
$a_{c,1,4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	527.726168	251.387482
$a_{c,1,4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	198.990150	53.670920

	Maximum	Minimum
$a_{c,1,4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	85.884876	-68.674398
$a_{c,1,4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	970.695225	60.911823
$a_{c,1,4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	338.400724	120.211309

Abb. 4.14: *common mode* Achse 2-5 (real)

	Mittelwert	RMS
$a_{c,2,5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	5.025276	20.863766
$a_{c,2,5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	467.927238	251.384646
$a_{c,2,5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1188.399501	53.646612

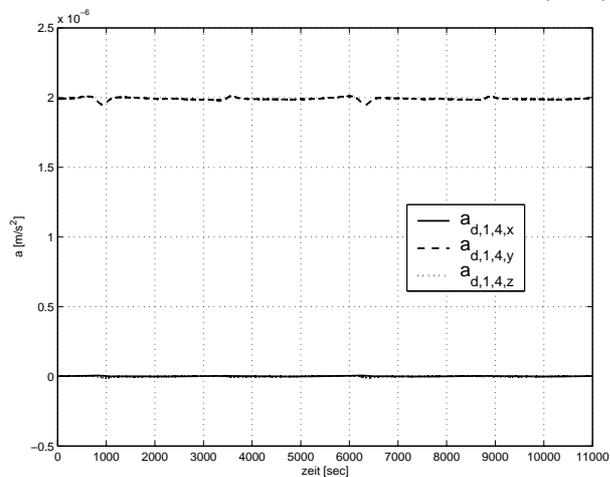
	Maximum	Minimum
$a_{c,2,5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	85.777592	-68.808901
$a_{c,2,5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	910.862711	1.058225
$a_{c,2,5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1327.619610	1109.414185

Abb. 4.15: *common mode* Achse 3-6 (real)

	Mittelwert	RMS
$a_{c,3,6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	5.493496	20.863767
$a_{c,3,6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	570.477011	251.381838
$a_{c,3,6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	200.081324	53.656630

	Maximum	Minimum
$a_{c,3,6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	86.248359	-68.312318
$a_{c,3,6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1013.498943	103.179575
$a_{c,3,6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	339.447708	121.251233

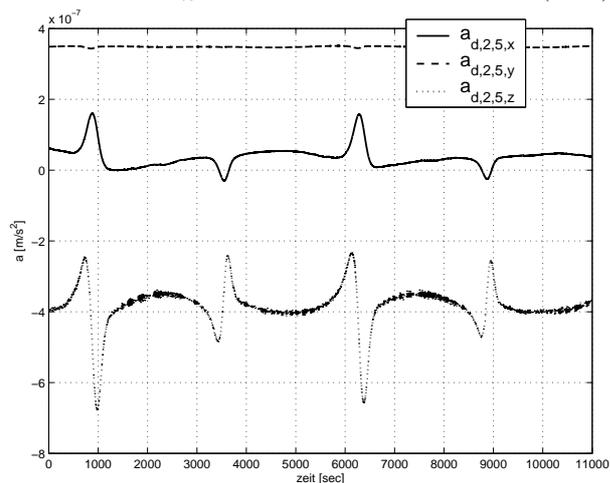
Abb. 4.16: differential mode Achse 1-4 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{d,1,4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1.166865	1.619121
$a_{d,1,4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	1990.622926	9.252349
$a_{d,1,4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-0.511808	2.738602

	Maximum	Minimum
$a_{d,1,4,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	5.796334	-0.880678
$a_{d,1,4,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2011.861577	1947.423345
$a_{d,1,4,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	3.996037	-12.232250

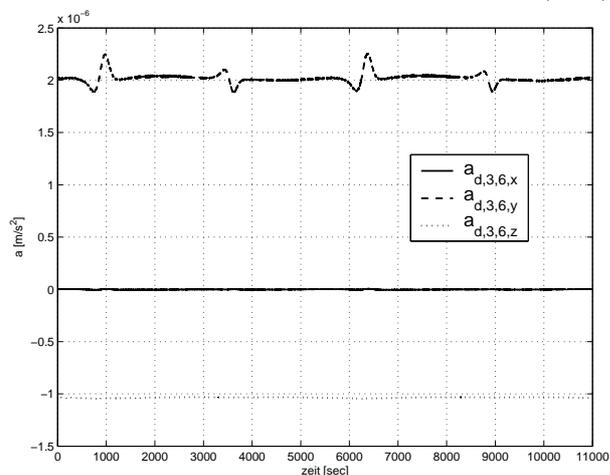
Abb. 4.17: differential mode Achse 2-5 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{d,2,5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	36.917487	29.123721
$a_{d,2,5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	348.213896	1.280696
$a_{d,2,5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-384.010938	60.454267

	Maximum	Minimum
$a_{d,2,5,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	160.836904	-30.455620
$a_{d,2,5,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	350.900545	343.333065
$a_{d,2,5,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-230.720099	-680.540325

Abb. 4.18: differential mode Achse 3-6 (real)



	Mittelwert	RMS
$a_{d,3,6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1.199984	1.971069
$a_{d,3,6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2019.604350	48.086138
$a_{d,3,6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1035.715962	4.034707

	Maximum	Minimum
$a_{d,3,6,x} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	5.421218	-5.618695
$a_{d,3,6,y} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	2254.804488	1881.527896
$a_{d,3,6,z} \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	-1031.655307	-1047.243096

Wie man sieht weichen die realistischen E2E *common mode* Beschleunigungen deutlich von ihrem Referenzwert Null ab. Auch die realistischen E2E *differential mode* Beschleunigungen weisen andere Werte als ihre Referenz (CS-S) auf. Im Folgenden sei der Verlauf der in Abbildungen 4.13 bis 4.18 gezeigten Signale genauer diskutiert:

- Alle *common mode* Beschleunigungen weisen in x-Richtung einen 'verrauschten' Verlauf, analog dem Verlauf der einzelnen Beschleunigungen in x-Richtung (vgl. Abbildungen 4.7 bis 4.12) auf. Es kommt somit erneut die Aktivität des *drag control* Systems in x-Richtung zum Ausdruck. Dieses hält die Beschleunigungen $a_{c,1,4,x}$, $a_{c,2,5,x}$ und $a_{c,3,6,x}$ mit maximal $86 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$ eine ganze Größenordnung kleiner als die übrigen *common mode* Beschleunigungen. Ein 'ideales' *drag control* System würde sämtliche translative Kräfte auf den Satelliten sofort und restlos und in alle drei Richtungen kompensieren. Der *common mode* würde in diesem Fall stets Null ergeben. Da der Satellit allerdings nur in x-Richtung kontrolliert wird, ergibt sich der relativ große Mittelwert der *common mode* Beschleunigungen in x-Richtung von ca. $5 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$.
- Der in Abschnitt 4.1.2 angesprochene *bias* der einzelnen Beschleunigungen, zeigt sich explizit in den *common mode* Beschleunigungen. So kann man ihn z.B. in Abbildung 4.14 mit $a_{c,2,5,y} = 4.7 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ direkt ablesen, während er aus Abbildungen 4.9 und 4.10 lediglich geschätzt werden konnte. Alle translativen Kräfte, welche auf den Satelliten wirken spiegeln sich im *bias* wieder.
- Der Mittelwert des *common mode* in y- und z-Richtung liegt im Bereich von $10^{-7} \frac{m}{s^2}$ bis $10^{-6} \frac{m}{s^2}$ und ist damit um zwei bis drei Größenordnungen größer als in x-Richtung ($10^{-9} \frac{m}{s^2}$). Grund dafür ist, dass das *drag control* System nur in x-Richtung arbeitet und damit auch nur den *common mode* in dieser Richtung klein hält. Am größten sind stets die Signale in den Richtungen der schlechteren Achsen. Dies sind für Gradiometerarm 1-4 und 3-6 die y-Achse und für Gradiometerarm 2-5 die z-Achse.
- Im *differential mode* fällt der *bias* der *common mode* Beschleunigungen weg. So beträgt z.B. $a_{d,2,5,y}$ durchschnittlich $3.5 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ und kommt damit dem CS-S 'Referenzwert' von $a_{2,y} = 3.4 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ sehr nahe. Ein Versatz sollte somit keinen Einfluss auf die letztendlich gesuchten Gradienten, welche sich aus den *differential mode* Beschleunigungen berechnen haben.
- Man erkennt in den y- und z-Komponenten der *common mode* Beschleunigungen eine gewisse Periodizität pro Umlauf. Während die Messungen in y-Richtung bei ca. 4500 sec und ca. 9800 sec für alle drei einachsige Gradiometer ein Maximum aufweisen, ergeben sich die Maxima der z-Komponenten jeweils bei ca. 1000 sec und ca. 6300 sec. Der Abstand zwischen diesen Extremalwerten beträgt damit stets ca. 5300 sec, was in etwa der Umlaufzeit von GOCE entspricht.
- Noch deutlicher als in den *common mode* Beschleunigungen, erkennt man diese Periodizität im *differential mode*. Grund für dieses deutliche Muster könnte die Abweichung GRF - LORF (siehe Abschnitt 2.2) sein. Auch die in Abbildung 2.6 dargestellten Verdrehungen, welche die Projektion von Messsignalen in unerwünschte Achsen bewirken, weisen Perioden von einem GOCE-Umlauf auf. Es sei allerdings

nochmals deutlich darauf hingewiesen, dass es sich hierbei lediglich um eine mögliche Begründung und nicht um eine fundierte Tatsache handelt.

4.3 Schweregradienten

In diesem Kapitel werden die Hauptzielgrößen der gesamten GOCE-Mission, also die Schweregradienten genauer betrachtet.

4.3.1 Referenzschweregradienten

In diesem Abschnitt werden die CS-S Schweregradienten, welche aus dem bekannten Schwerefeld berechnet wurden behandelt. Abbildungen 4.19 bis 4.21 zeigen die drei Diagonalelemente V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} . V_{xy} , V_{xz} und V_{yz} folgen in den Darstellungen 4.22 bis 4.24.

Abb. 4.19: Gradient V_{xx} (ideal)

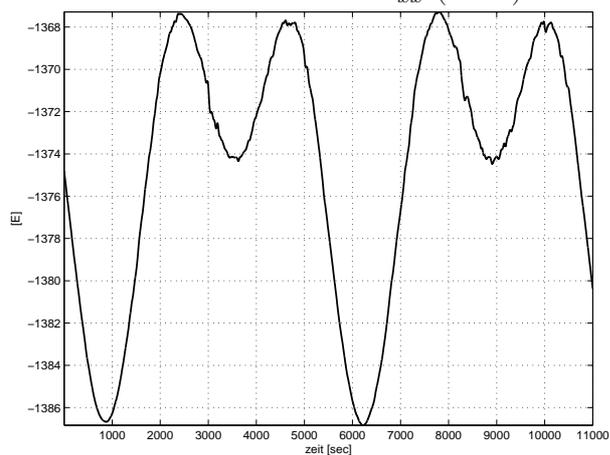


Abb. 4.20: Gradient V_{yy} (ideal)

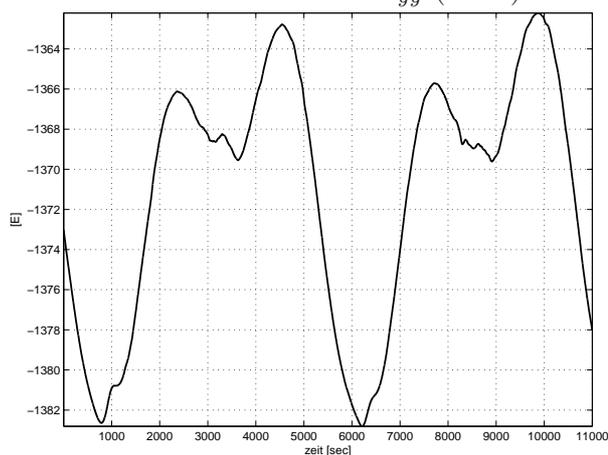
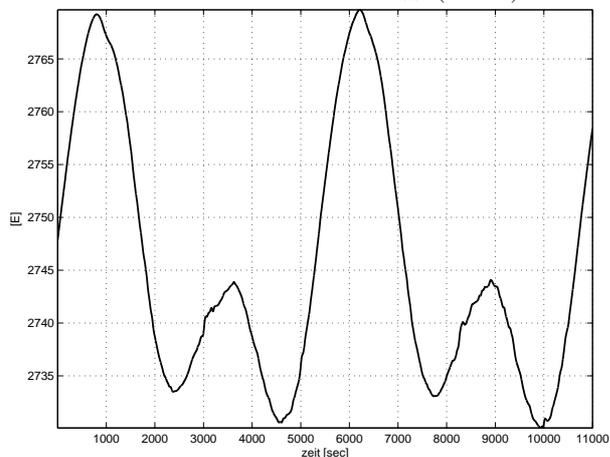
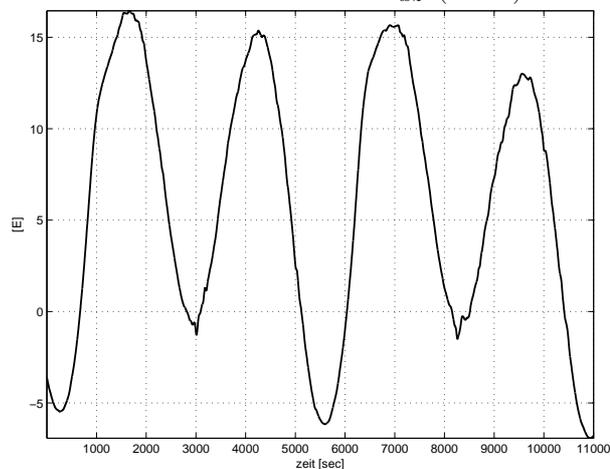
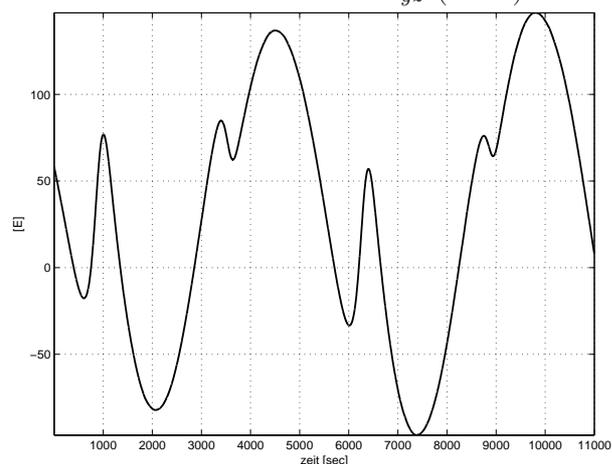


Abb. 4.21: Gradient V_{zz} (ideal)



	Mittelwert	RMS
$V_{xx}[E]$	-1374.483307	6.060073
$V_{yy}[E]$	-1371.054174	6.163799
$V_{zz}[E]$	2745.537480	12.123265

	Maximum	Minimum
$V_{xx}[E]$	-1367.289385	-1386.838070
$V_{yy}[E]$	-1362.208929	-1382.8086804
$V_{zz}[E]$	2769.644705	2730.066644

Abb. 4.22: Gradient V_{xy} (ideal)Abb. 4.23: Gradient V_{xz} (ideal)Abb. 4.24: Gradient V_{yz} (ideal)

	Mittelwert	RMS
$V_{xy}[E]$	0.092438	0.403505
$V_{xz}[E]$	5.996012	7.135440
$V_{yz}[E]$	31.698871	72.372525

	Maximum	Minimum
$V_{xy}[E]$	0.855660	-0.631618
$V_{xz}[E]$	16.450400	-6.930260
$V_{yz}[E]$	147.109986	-96.682165

Die Darstellungen zeigen die Größenordnungen der einzelnen Gradienten entlang der GOCE-Flugbahn (Flughöhe ca. 250 km). V_{xx} beträgt im Mittel für die Zeitreihe von gut zwei GOCE-Umläufen ca. $-1374 E$; V_{yy} beträgt ca. $-1371 E$; V_{zz} ca. $2746 E$. Die Nicht-Diagonalelemente von \underline{G} sind, wie erwartet sehr viel kleiner. V_{xy} bleibt stets unter einem E , V_{xz} schwankt um weniger als $25 E$ und V_{yz} liegt im Maximum knapp unter $150 E$.

Diese Werte können bei der Analyse der E2E Simulationsgradienten (Abschnitt 4.3.2) als Referenz dienen.

Weil die Gradientenmatrix spurfrei ist (siehe Abschnitt 3.1) soll der Betrag der Summe von V_{xx} und V_{yy} gleich dem Gradienten in z-Richtung sein. V_{zz} (Abbildung 4.19) beträgt im Mittel ca. 2746 E , was ungefähr der Summe aus Mittelwert von V_{xx} und V_{yy} entspricht. Um zu überprüfen, ob die Spurfreiheit tatsächlich zu jedem Zeitpunkt gegeben ist, genügt nicht die Betrachtung der Mittelwerte, sondern es muss die gesamte Zeitreihe betrachtet werden. Dies geschieht in Abbildung 4.25. Wie man sieht liegt die Spur der Gradientenmatrix im Bereich weniger 10^{-10} E . Diese extrem kleinen Werte, welche auf numerische Rechenungenauigkeiten zurückzuführen sind, bestätigen also die Annahme der Spurfreiheit.

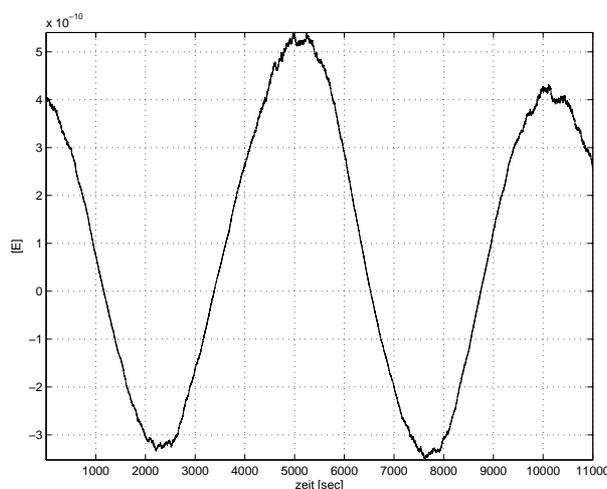


Abb. 4.25: Spur der Referenzgradienten

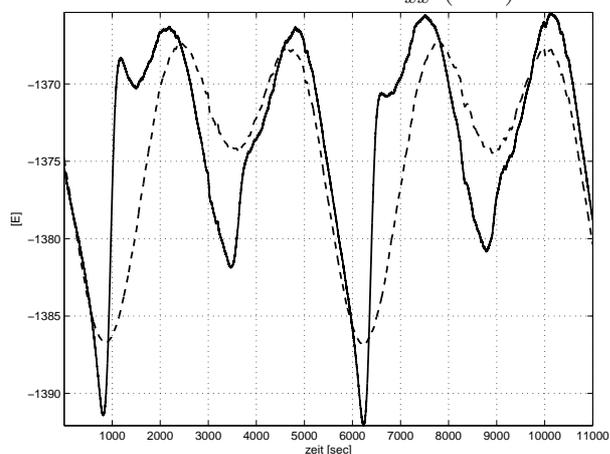
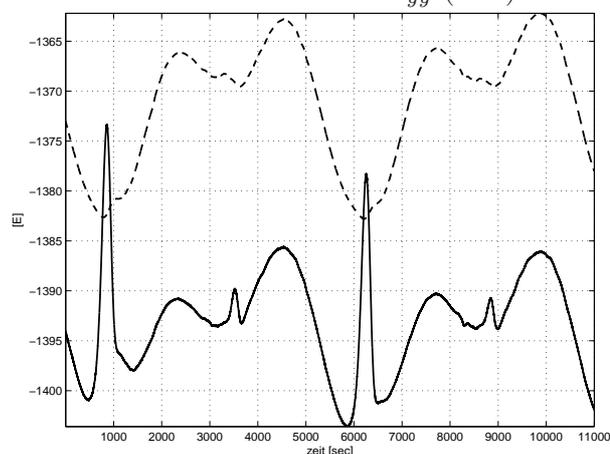
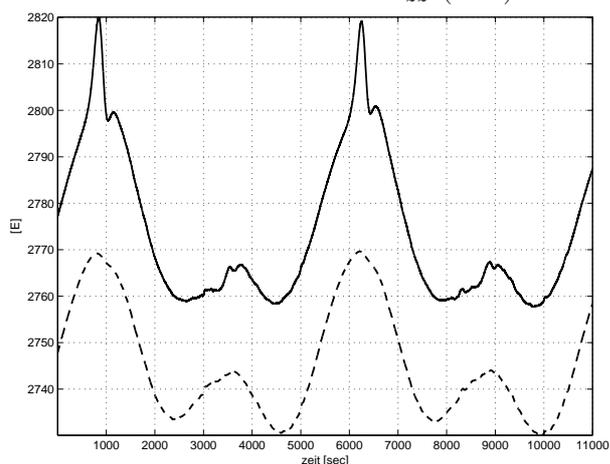
4.3.2 Schweregradienten aus E2E-Simulation

In diesem Abschnitt werden die Schweregradienten aus der E2E-Simulation gezeigt. Diese Ergebnisse sind besonders wichtig, da die Schweregradienten, v.a. die Hauptdiagonalelemente die letztendlich gesuchten Größen darstellen. Ihre Übereinstimmung mit der Referenz bzw. ihre Fehler zeigen somit die Möglichkeiten und Grenzen des Gesamtmesssystems. Die Berechnung der E2E-Gradienten erfolgte über die Formeln 3.56 bis 3.61 unter Verwendung folgender Werte:

- *differential mode* Beschleunigungen aus E2E-Simulation
- nomineller Wert von 0.5 m für die Basislinienlängen L_x , L_y , L_z
- nominelle Werte für Winkelgeschwindigkeiten⁴: $\omega_x = 0$, $\omega_y = 1.17 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$, $\omega_z = 0$

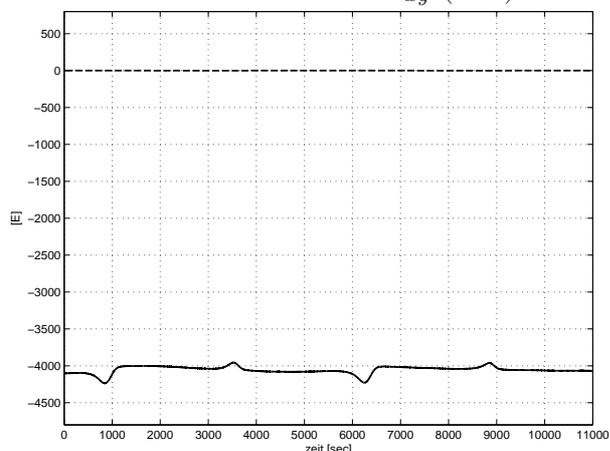
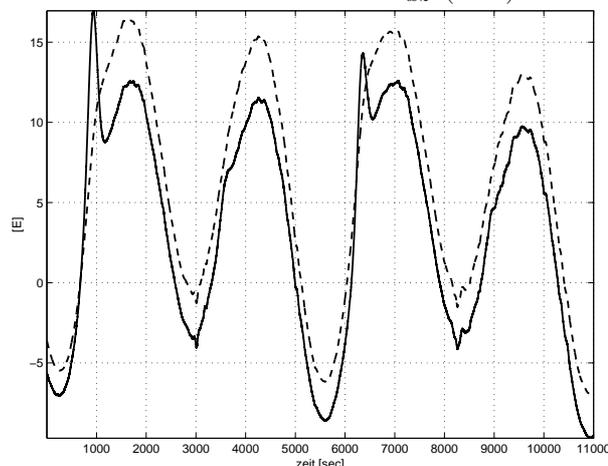
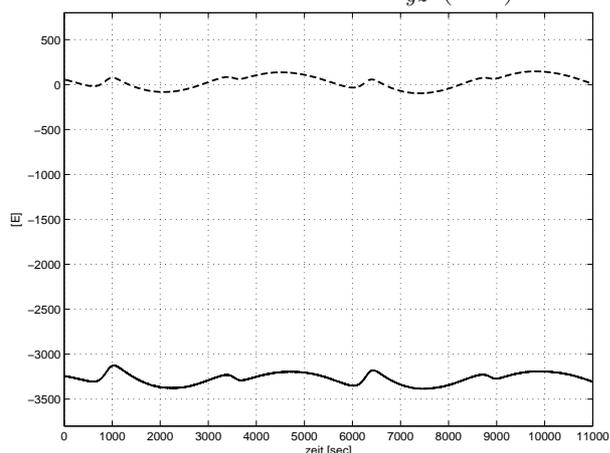
⁴Alternativ könnte man die Winkelgeschwindigkeiten durch Integration der Gradiometer-Winkelbeschleunigungen berechnen. Die auf diesem Weg berechneten Winkelgeschwindigkeiten weichen allerdings so stark von ihren nominellen Werten ab, dass eine sinnvolle Analyse unmöglich wird. Grund dafür ist die Vernachlässigung der Zusatzinformation aus den Sternsensoren, welche in die korrekte Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten (*angular rate reconstruction*) miteinfließt.

Die schwarzen Kurven in Abbildungen 4.26, 4.27 und 4.28 zeigen die E2E-Gradienten V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} . Die Nicht-Diagonalelemente der E2E-Gradientenmatrix sind in Abbildungen 4.29 bis 4.31 schwarz dargestellt. Um den direkten Vergleich mit ihren Referenzwerten zu ermöglichen, wurden die E2E-Gradienten jeweils gemeinsam mit den entsprechenden CS-S-Gradienten (blau, gestrichelt) dargestellt.

Abb. 4.26: Gradient V_{xx} (real)Abb. 4.27: Gradient V_{yy} (real)Abb. 4.28: Gradient V_{zz} (real)

	Mittelwert	RMS
$V_{xx}[E]$	-1373.440331	6.300081
$V_{yy}[E]$	-1392.855585	5.122782
$V_{zz}[E]$	2773.963850	16.138828

	Maximum	Minimum
$V_{xx}[E]$	-1365.473237	-1391.453830
$V_{yy}[E]$	-1373.332260	-1403.602181
$V_{zz}[E]$	2820.072386	2757.721229

Abb. 4.29: Gradient V_{xy} (real)Abb. 4.30: Gradient V_{xz} (real)Abb. 4.31: Gradient V_{yz} (real)

	Mittelwert	RMS
$V_{xy}[E]$	-3946.642223	48.635075
$V_{xz}[E]$	3.395702	6.850093
$V_{yz}[E]$	-3271.186824	62.502340

	Maximum	Minimum
$V_{xy}[E]$	-3846.350741	-4130.547474
$V_{xz}[E]$	16.390733	-9.545461
$V_{yz}[E]$	-3125.849613	-3385.783739

Bei der Betrachtung dieser Schweregradienten und dem Vergleich mit den CS-S-Gradienten als Referenz fällt Folgendes auf:

- Die Mittelwerte der drei Hauptdiagonalelemente ($V_{xx} \approx -1373 E$; $V_{yy} \approx -1393 E$; $V_{zz} \approx 2774 E$) stimmen gut mit den CS-S Referenzwerten überein. Schon in Abschnitt 3.7 wurde festgestellt, dass sich diese Elemente nur aus Messungen der hochgenauen Achsen ableiten lassen (grüne Darstellungen in Formeln 3.56 bis 3.58) und deshalb sehr genau bestimmbar sind. (Als Voraussetzung dafür wurde genannt, dass die Winkelgeschwindigkeiten genau genug rekonstruiert werden können.) Diese Annahme bestätigt sich somit.
- V_{xz} wurde in Formel 3.60 ebenfalls grün dargestellt. D.h. es wurde davon ausgegangen, dass auch dieser Gradient hochgenau bestimmbar ist. In Abbildung 4.29 sieht man, dass beide Kurven (V_{xz} E2E-Simulation (schwarz); V_{xz} Referenz (blau, gestrichelt)) einen ähnlichen Verlauf aufweisen und beide um gut 20 E schwanken. Damit bestätigt sich auch diese Annahme.

- V_{xy} und V_{yz} aus der E2E-Simulation haben viel zu große Werte. Sie liegen im Bereich von mehreren 1000 E . Die Referenzkurven zeigen aber, dass diese Elemente sehr viel kleiner (V_{xy} unter einem E und V_{yz} unter 150 E) liegen sollten. Die schlechtere Messgenauigkeit je einer Achse pro Beschleunigungsmesser ist Grund für diese erhebliche Beeinträchtigung des Messergebnisses. Die Ungenauigkeit in V_{xy} und V_{yz} wurde bei der Konfiguration der Akzelerometerachsen bewusst in Kauf genommen (rote Darstellung in Gleichungen 3.59 und 3.61) um die hohe Genauigkeit der restlichen Gradienten zu ermöglichen. Die Kenntnis der Hauptdiagonalelemente ist am wichtigsten, da diese Gradienten die meiste Information enthalten.
- In den Abbildungen 4.26 bis 4.31 erkennt man deutlich ein Muster mit Periode der GOCE-Umlaufzeit. Dieses Muster war bereits in den *differential mode* Beschleunigungen (z.B. in Abbildung 4.17) sichtbar. In Abschnitt 4.2.2 wurde dazu ein Erklärungsversuch, welcher auf der Abweichung GRF-LORF basiert geliefert.
- Als Kontrolle für die Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix kann ihre Spur (Abbildung 4.32) betrachtet werden. Die Betrachtung der Mittelwerte der Zeitreihen ist dafür nicht ausreichend. Laut Abbildung 4.32 beträgt die Spur der Simulationsgradienten zeitweise mehr als 50 E . Man sieht also, dass sogar die hochgenau bestimmten Hauptdiagonalelemente noch Fehler enthalten. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass bei der Berechnung der E2E-Schweregradienten Näherungswerte für die Winkelgeschwindigkeiten (nominelle Werte: $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = 1.17 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$) verwendet wurden. Die großen Fehler in der Spur der Simulationsgradienten lassen sich zum Teil auf diese Vereinfachung zurückführen.

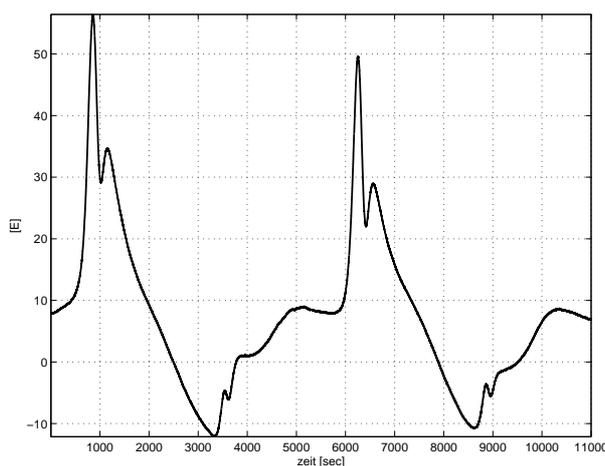


Abb. 4.32: Spur der Simulationsgradienten

Kapitel 5

Instrumentenfehler von GOCE

In Kapitel 3 wurde das „fehlerfreie“ GOCE-Messsystem beschrieben. In diesem Kapitel findet nun eine Erweiterung um die unterschiedlichen Fehlerquellen, welche bei der Gradiometrie auftreten statt. Betrachtet werden hierbei v.a. die instrumentenspezifischen Fehlerquellen, wie *bias* (Abschnitt 5.1) und Skalierungsfaktor der Beschleunigungsmesser (Abschnitt 5.2), sowie Misalignment/Misorientation (Abschnitt 5.3) und Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen (Abschnitt 5.4). In Abschnitt 5.6 wird zusätzlich der Versatz (*offset*) zwischen dem Mittelpunkt des Gradiometers und dem Massenzentrum des Satelliten (COM, *center of mass*) untersucht. Dieser Fehler zählt nach [ESA, 1999] zur Gruppe der *instrument-satellite coupling errors*, also den Fehlern, welche durch die Kopplung Gradiometer-Satellit zustandekommen. In [ESA, 1999] werden noch zwei weitere Fehlerarten, nämlich die satellitenspezifischen, sowie die *post-flight* Fehler genannt. Auf diese wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen.

Die in diesem Kapitel angegebenen Größenordnungen der einzelnen Fehlerterme sind, soweit nicht anders angegeben [Müller, 2001] entnommen.

5.1 *Bias*

Der *bias* der Beschleunigungsmesser ist der Versatz einer bestimmten „Soll-“Beschleunigung um eine unbekannt Konstante. Es handelt sich dabei um einen Fehlerbeitrag, welcher sich über den gesamten Frequenzbereich erstreckt. Er kann entlang der je drei Achsen der sechs GOCE Beschleunigungsmesser unterschiedlich sein. Es ergeben sich somit insgesamt 18 Größen $b_{l,i}$, wobei $l = 1 \dots 6$ für die Nummer des Beschleunigungsmessers steht und $i = x, y, z$ die Richtung angibt. Im „fehlerfreien“ Idealfall sind alle $b_{l,i} = 0$.

Addiert man die *bias* \underline{B}_l zu den tatsächlichen, fehlerfreien Beschleunigungen \underline{a}_l^{tat} , so erhält man die messbaren, wegen *bias* verfälschten Beschleunigungen \underline{a}_l^{gem} :

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{B}_l + \underline{a}_l^{tat} = \begin{pmatrix} b_{l,x} \\ b_{l,y} \\ b_{l,z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Diese Gleichung lässt sich auch für die messbare, differentielle Beobachtung $\underline{a}_{d,l,k}$ (kurz \underline{a}_d) und den messbaren *common mode* (\underline{a}_c) umformulieren. In Abschnitt 4.1.2 wurde bereits gezeigt, dass gilt $\underline{a}_l = \underline{a}_c + \underline{a}_d$ (Gleichung 4.2) und $\underline{a}_k = \underline{a}_c - \underline{a}_d$ (Gleichung 4.3). Für den *bias* \underline{B} gilt analog $\underline{B}_l = \underline{B}_c + \underline{B}_d$ und $\underline{B}_k = \underline{B}_c - \underline{B}_d$. Mit diesen Beziehungen, Gleichung 5.1 und unter Beachtung der Definitionen für *common-* und *differential mode* gilt für die differentielle Beobachtung

$$\begin{aligned}
\underline{a}_d^{gem} &= \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{gem} - \underline{a}_k^{gem}) = \\
&= \frac{1}{2}(\underline{B}_l + \underline{a}_l^{tat} - \underline{B}_k - \underline{a}_k^{tat}) = \\
&= \frac{1}{2}(\underline{B}_c + \underline{B}_d + \underline{a}_l^{tat} - \underline{B}_c + \underline{B}_d - \underline{a}_k^{tat}) = \\
&= \underline{B}_d + \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{tat} - \underline{a}_k^{tat}) = \\
&= \underline{B}_d + \underline{a}_d^{tat} .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nach analoger Rechnung erhält man für den *common mode*

$$\underline{a}_c^{gem} = \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{gem} + \underline{a}_k^{gem}) = \dots = \underline{B}_c + \underline{a}_c^{tat} . \tag{5.3}$$

Gleichungen 5.2 und 5.3 zeigen, dass der differentielle Anteil der *bias* \underline{B}_d komplett und ausschließlich in die *differential mode* Messung einfließt. Der gemeinsame Anteil der *bias* \underline{B}_c verfälscht dagegen ausschließlich den messbaren *common mode*.

Im Folgenden werden Spezialfälle behandelt, bei denen eine oder mehrere der Größen in Gleichungen 5.2 und 5.3 zu Null werden. Zunächst ist eine getrennte Betrachtung von gravitativen Messsignalen, wie die CS-S-Beschleunigungen (**Fall (a)**) und translativen Beschleunigungen (**Fall (b)**) sinnvoll. Diese Einteilung wird nicht nur für den *bias* getroffen, sondern gilt auch in den nachfolgenden Abschnitten, in denen Spezialfälle anderer Instrumentenfehler besprochen werden.

In **Fall (a)** werden stets die „idealen“ CS-S-Beschleunigungen (siehe Abschnitt 4.1.1) als tatsächliche, unverfälschte Beschleunigungen \underline{a}_l^{tat} (bzw. \underline{a}_k^{tat}) verwendet. Für sie gilt $\underline{a}_l = -\underline{a}_k$. Für die Einteilung in *common mode* und *differential mode* Anteil lässt sich daraus folgern: $\underline{a}_c^{tat} = 0$ und $\underline{a}_d^{tat} \neq 0 = \underline{a}_l^{tat} = \underline{a}_l$

Für **Fall (b)** wird stets eine translative Kraft $\underline{a}_{l,t} = \underline{a}_{k,t}$ für \underline{a}_l^{tat} (bzw. \underline{a}_k^{tat}) verwendet. Eine solche translative Beschleunigung wird z.B. durch nicht-gravitative Kräfte auf den Satelliten erzeugt und kann auch mit dem aktiven *drag control* System nicht vollständig beseitigt werden. In diesem Fall gilt schließlich für den *common mode* $\underline{a}_c^{tat} \neq 0 = \underline{a}_l^{tat} = \underline{a}_{l,t}$ und für den *differential mode* $\underline{a}_d^{tat} = 0$. Zusammenfassung:

Fall (a): CS-S-Beschleunigungen: $\underline{a}_l = -\underline{a}_k \Rightarrow \underline{a}_c^{tat} = 0$ und $\underline{a}_d^{tat} = \underline{a}_l$

Fall (b): translative Beschleunigung: $\underline{a}_{l,t} = \underline{a}_{k,t} \Rightarrow \underline{a}_c^{tat} = \underline{a}_{l,t}$ und $\underline{a}_d^{tat} = 0$

Darüber hinaus ist es sinnvoll zwischen den Fehlern mit gleichem Betrag und in gleiche Richtung (**Fall 1**) und den Fehlern mit gleichem Betrag und in entgegengesetzte Richtung (**Fall 2**) zu unterscheiden, weil Fehler mit beliebigen Werten stets auf diese Spezialfälle zurückgeführt werden können. Dies gilt nicht nur für den *bias*, sondern auch für die Instrumentenfehler in den nachfolgenden Abschnitten. Die Spezialfälle des *bias* lauten somit:

Fall B1(a): Bedingungen von Fall (a) und *bias* $\underline{B}_l = \underline{B}_k$

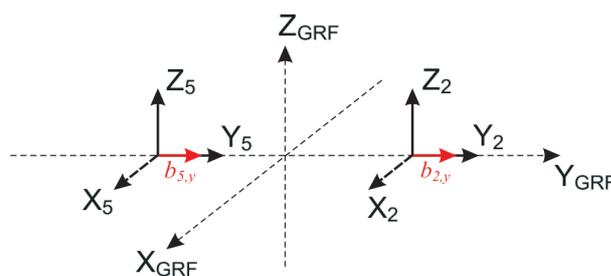
Fall B1(b): Bedingungen von Fall (b) und *bias* $\underline{B}_l = \underline{B}_k$

Fall B2(a): Bedingungen von Fall (a) und *bias* $\underline{B}_l = -\underline{B}_k$

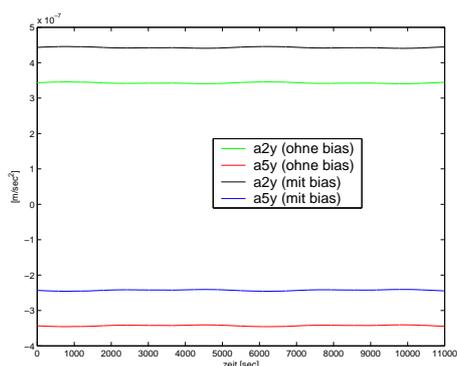
Fall B2(b): Bedingungen von Fall (b) und *bias* $\underline{B}_l = -\underline{B}_k$

Die vier Fälle werden am Beispiel des Gradiometerarms 2-5 in y-Richtung besprochen.

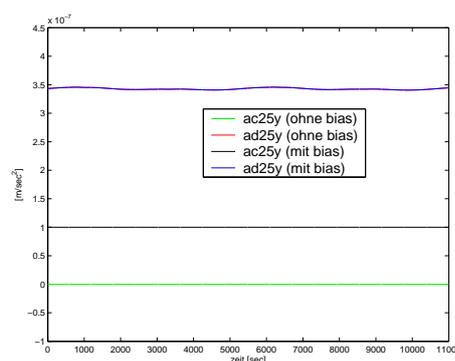
Fall B1(a):



(a) Akzelerometer A2 und A5 mit *bias* $b_{2,y} = b_{5,y}$



(b) Beschleunigungen a_{2y} und a_{5y} mit und ohne *bias*



(c) Auswirkung auf *common mode* Signal; *differential mode* unverändert

Abb. 5.1: Fall B1(a) - *bias* mit gleichem Betrag und in gleiche Richtung

Abbildung 5.1(a) zeigt *bias* $b_{2,y}$ und *bias* $b_{5,y}$ der Akzelerometer A2 und A5, welche gleich groß sind und jeweils in positive y-Richtung wirken. Um die Wirkung der *bias* auf die gemessenen Signale zu zeigen, wurden die „idealen“ CS-S-Beschleunigungen (Fall (a)) verwendet. Diese wurden in Abbildung 5.1(b), wie in Kapitel 4 für den Zeitraum von gut

zwei GOCE Umläufen (11000 *sec*) dargestellt ($a_{2,y}$ grün, $a_{5,y}$ rot). Zusätzlich wurde auf die beiden Beschleunigungen ein konstanter *bias* von $1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ addiert. Den Versatz um eben diesen Betrag zeigen die schwarze ($a_{2,y}$ mit *bias*) und die blaue Kurve ($a_{5,y}$ mit *bias*) in Abbildung 5.1(b).

Interessant ist vor allem die Auswirkung des *bias* auf die *common-* und *differential mode* Beschleunigungen. Diese zeigt Abbildung 5.1(c). Ohne *bias* sind alle *common mode* Beschleunigungen Null (grüne Kurve), da für die CS-S-Beschleunigungen gilt $a_{2,y} = -a_{5,y}$. $a_{c,y}^{tat}$ in Gleichung 5.3 ist damit Null und $a_{d,y}^{tat}$ (Gleichung 5.2) ist gleich $a_{2,y}$. Da in diesem Fall zusätzlich gilt $b_{2,y} = b_{5,y}$ wird $B_{d,y}$ zu Null und $B_{c,y}$ ist gleich $b_{2,y}$. Berechnet man den *common mode* aus den Beschleunigungen mit *bias*, ergibt sich die schwarze Kurve. Diese entspricht $a_{c,y}^{gem}$ in Gleichung 5.3 und beträgt genau $B_{c,y}$. Der *bias* zeigt sich also in diesem Fall eins zu eins in den *common mode* Beschleunigungen.

Im Gegensatz dazu bleiben die *differential mode* Beschleunigungen von den gleichmäßigen *bias* unberührt. $a_{d,y}^{tat}$ ändert sich nicht, da $B_{d,y} = 0$. In Abbildung 5.1(c) liegt deshalb die blaue Kurve ($a_{d,2,5,y}$ mit *bias*) genau über der roten ($a_{d,2,5,y}$ ohne *bias*), welche dadurch nicht sichtbar ist. Für Fall B1(a) gilt demnach, dass die Winkelbeschleunigungen und letztendlich die Schweregradienten trotz *bias* theoretisch fehlerfrei berechnet werden können.

Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen:
gleicher *bias*: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$
 $b_{2,y} = b_{5,y} \Rightarrow B_{c,y} = b_{2,y}$ und $B_{d,y} = 0$

(Gleichung 5.3) *common mode*: $a_{c,y}^{gem} = B_{c,y} + a_{c,y}^{tat} = b_{2,y} + 0 = b_{2,y}$
(Gleichung 5.2) *differential mode*: $a_{d,y}^{gem} = B_{d,y} + a_{d,y}^{tat} = 0 + a_{2,y} = a_{2,y}$

Fall B1(b):

In diesem Fall wirken wieder zwei gleiche *bias* $b_{2,y} = b_{5,y}$ in gleiche Richtung (vgl. Abbildung 5.1(a)). Diese werden nun an die translatorische Beschleunigung a_t angebracht. Weil gilt $B_{d,y} = 0$ und $B_{c,y} = b_{2,y}$ ergibt Gleichung 5.2 $a_{d,y}^{gem} = 0$, d.h. der *differential mode* bleibt unverändert gleich Null. Gleichung 5.3 lautet dann $a_{c,y}^{gem} = b_{2,y} + a_t$. Der *bias* schlägt sich in diesem Fall also komplett im *common mode* nieder.

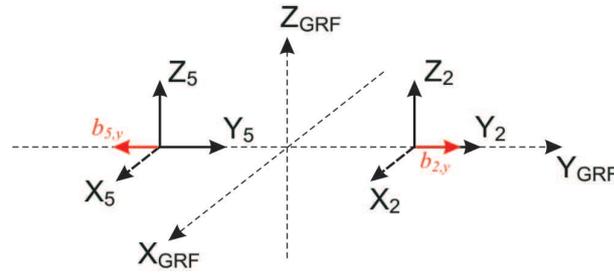
Zusammenfassung:

translative Beschleunigung:
gleicher *bias*: $a_{2,y} = a_{5,y} = a_t \Rightarrow a_{c,y}^{tat} = a_{2,y}$ und $a_{d,y}^{tat} = 0$
 $b_{l,i} = b_{k,i} \Rightarrow B_{c,y} = b_{2,y}$ und $B_{d,y} = 0$

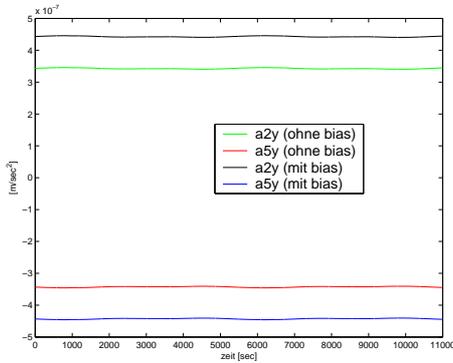
(Gleichung 5.3) *common mode*: $a_{c,y}^{gem} = B_{c,y} + a_{c,y}^{tat} = b_{2,y} + a_{2,y}$
(Gleichung 5.2) *differential mode*: $a_{d,y}^{gem} = B_{d,y} + a_{d,y}^{tat} = 0 + 0 = 0$

Um möglichen Verwechslungen vorzubeugen sei an dieser Stelle noch kurz ein Zusammenhang zu Abschnitt 4.1.2 hergestellt, in dem bereits ein *bias* erwähnt wurde. Dabei war allerdings nicht, wie hier der *bias* der einzelnen Beschleunigungsmesser $b_{l,i}$ gemeint, sondern es ging um den Versatz in den einzelnen E2E-Beschleunigungen aufgrund von translativen Kräften, welche auf den gesamten Satelliten wirken. Dieser Versatz entspricht in Fall B1(b) dem *common mode* Anteil \underline{a}_c^{tat} in Gleichung 5.3.

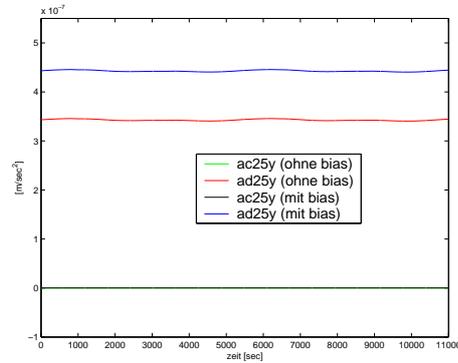
Fall B2(a):



(a) Akzelerometer A2 und A5 mit *bias* $b_{2,y} = -b_{5,y}$



(b) Beschleunigungen a_{2y} und a_{5y} mit und ohne *bias*



(c) Auswirkung auf *differential mode* Signal; *common mode* unverändert

Abb. 5.2: Fall B2(a) - *bias* mit gleichem Betrag und in entgegengesetzte Richtung

In diesem Fall haben die *bias* $b_{2,y}$ und $b_{5,y}$ den selben Betrag, wirken jedoch in die entgegengesetzte Richtung. $b_{2,y}$ tritt also z.B., wie in Abbildung 5.2(a) in positive y-Richtung auf, während $b_{5,y}$ in negative y-Richtung zeigt. Abbildung 5.2(b) zeigt neben den CS-S-Beschleunigungen ohne *bias* ($a_{2,y}$ grün, $a_{5,y}$ rot) auch die Beschleunigungen mit *bias* ($a_{2,y}$ schwarz, $a_{5,y}$ blau), wobei gilt $b_{2,y} = -b_{5,y} = 1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$.

Es gilt (Fall (a)) $a_{2,y} = -a_{5,y}$ und damit $a_{c,y}^{tat} = 0$ und $a_{d,y}^{tat} = a_{2,y}$. Weil nun zusätzlich gilt $b_{2,y} = -b_{5,y}$ ist $B_{c,y} = 0$ und $B_{d,y} = b_{2,y}$. Für Fall B2(a) ändern sich die *common mode* Beschleunigungen also nicht. In Abbildung 5.2(c) sind deshalb die beiden Kurven für den *common mode* $a_{c,2,5,y}$ ohne und mit *bias* (grün und schwarz) stets Null. Im Gegensatz zu

Fall B1(a) schlägt sich der *bias* nun im *differential mode* nieder. $a_{d,2,5,y}$ mit *bias* (blau) ist genau um den Betrag des *bias* ($1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$) von $a_{d,2,5,y}$ ohne *bias* (rot) verschoben. Ein solcher Instrumentenfehler fließt somit auch eins zu eins in die Berechnung der Winkelbeschleunigungen mit ein.

Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$
 entgegengesetzter *bias*: $b_{2,y} = -b_{5,y} \Rightarrow B_{c,y} = 0$ und $B_{d,y} = b_{2,y}$

(Gleichung 5.3) *common mode*: $a_{c,y}^{gem} = B_{c,y} + a_{c,y}^{tat} = 0 + 0 = 0$

(Gleichung 5.2) *differential mode*: $a_{d,y}^{gem} = B_{d,y} + a_{d,y}^{tat} = b_{2,y} + a_{2,y}$

Fall B2(b):

In diesem Fall werden die translativen Beschleunigungen $a_{2,y,t} = a_{5,y,t} = a_t$ mit *bias* $b_{2,y} = -b_{5,y}$ verfälscht. In diesem Fall ergibt sich analog zu Fall B2(a) $B_{c,y} = 0$ und $B_{d,y} = b_{2,y}$. Der *common mode* bleibt also unverändert, während der *bias* eins zu eins in die differentielle Beobachtung einfließt.

Zusammenfassung:

translative Beschleunigung: $a_{2,y} = a_{5,y} = a_t \Rightarrow a_{c,y}^{tat} = a_{2,y}$ und $a_{d,y}^{tat} = 0$
 entgegengesetzter *bias*: $b_{l,i} = -b_{k,i} \Rightarrow B_{c,y} = 0$ und $B_{d,y} = b_{2,y}$

(Gleichung 5.3) *common mode*: $a_{c,y}^{gem} = B_{c,y} + a_{c,y}^{tat} = 0 + a_{2,y} = a_{2,y}$

(Gleichung 5.2) *differential mode*: $a_{d,y}^{gem} = B_{d,y} + a_{d,y}^{tat} = b_{2,y} + 0 = b_{2,y}$

Im Allgemeinen trifft keiner der soeben besprochenen Spezialfälle exakt zu, sondern es treten *bias* auf, die unterschiedliche Beträge (ungleich Null) aufweisen und die entweder in gleiche Richtung oder entgegengesetzte Richtung wirken. Dieser allgemeine Fall lässt sich jedoch stets auf eine Kombination der Fälle B1 mit B2 zurückführen.

Die Untersuchungen haben bisher gezeigt, dass der *bias* unter gewissen Voraussetzungen keinen Einfluss auf die *differential mode* Beschleunigungen hat. Da es sich dabei allerdings um einen Spezialfall handelt, kann im Allgemeinen davon ausgegangen werden, dass sich jeder *bias* nicht nur direkt auf die jeweilige gemessene Beschleunigung, sondern auch auf die zugehörige *differential mode* Beschleunigung auswirkt. Um zu veranschaulichen, welche *differential mode* Beschleunigungen das konkret sind wurde Tabelle 5.3 angefertigt. Der Zusammenhang ist auch ohne die Tabelle sofort klar, da schon an den einzelnen Bezeichnungen der *differential mode* Beschleunigungen, z.B. $a_{d,1,4,x}$ abgelesen werden kann, welche Beschleunigungen und damit auch welcher *bias* bei der Berechnung mit eingehen (hier $a_{1,x}$ und $a_{4,x}$ bzw. $b_{1,x}$ und $b_{4,x}$). Die Farben geben dabei wieder die Genauigkeiten an. Grün steht für die hochgenauen Messungen, rot für die weniger genauen.

	$b_{1,x}$	$b_{4,x}$	$b_{1,y}$	$b_{4,y}$	$b_{1,z}$	$b_{4,z}$	$b_{2,x}$	$b_{5,x}$	$b_{2,y}$	$b_{5,y}$	$b_{2,z}$	$b_{5,z}$	$b_{3,x}$	$b_{6,x}$	$b_{3,y}$	$b_{6,y}$	$b_{3,z}$	$b_{6,z}$	
$a_{d,1,4,x}$	+	+																	
$a_{d,1,4,y}$			+	+															
$a_{d,1,4,z}$					+	+													
$a_{d,2,5,x}$							+	+											
$a_{d,2,5,y}$									+	+									
$a_{d,2,5,z}$											+	+							
$a_{d,3,6,x}$													+	+					
$a_{d,3,6,y}$															+	+			
$a_{d,3,6,z}$																	+	+	

Tab. 5.3: Einfluss auf *differential mode* Beschleunigungen

Tabellen 5.4 und 5.5 zeigen, auf welche Winkelbeschleunigungen und Schweregradienten sich die *bias* des Weiteren auswirken. Diese beiden Tabellen werden hier der Übersichtlichkeit halber angeführt. Es wäre auch möglich den Einfluss der *bias* auf die Winkelgeschwindigkeiten und Schweregradienten den Tabellen 3.7 und 3.8 mit der Zusatzinformation aus Tabelle 5.3 zu entnehmen.

Die Symbole haben folgende Bedeutung:

- + direkte Beziehung zwischen Einfluss- und Berechnungsgröße
- × Einfluss über Rotationsterm

Die hochgenau bestimmbaren Größen sind wiederum gelb hinterlegt.

	$b_{1,x}$	$b_{4,x}$	$b_{1,y}$	$b_{4,y}$	$b_{1,z}$	$b_{4,z}$	$b_{2,x}$	$b_{5,x}$	$b_{2,y}$	$b_{5,y}$	$b_{2,z}$	$b_{5,z}$	$b_{3,x}$	$b_{6,x}$	$b_{3,y}$	$b_{6,y}$	$b_{3,z}$	$b_{6,z}$
$\dot{\omega}_x$											+	+			+	+		
$\dot{\omega}_y$					+	+							+	+				
$\dot{\omega}_z$			+	+			+	+										

Tab. 5.4: Einfluss auf Winkelbeschleunigungen

	$b_{1,x}$	$b_{4,x}$	$b_{1,y}$	$b_{4,y}$	$b_{1,z}$	$b_{4,z}$	$b_{2,x}$	$b_{5,x}$	$b_{2,y}$	$b_{5,y}$	$b_{2,z}$	$b_{5,z}$	$b_{3,x}$	$b_{6,x}$	$b_{3,y}$	$b_{6,y}$	$b_{3,z}$	$b_{6,z}$
V_{xx}	+	+	×	×	×	×	×	×					×	×				
V_{yy}			×	×			×	×	+	+	×	×			×	×		
V_{zz}					×	×					×	×	×	×	×	×	+	+
V_{xy}			+	+	×	×	+	+			×	×	×	×	×	×		
V_{xz}			×	×	+	+	×	×			×	×	+	+	×	×		
V_{yz}					×	×					+	+	×	×	+	+		

Tab. 5.5: Einfluss auf Schweregradienten

Laut [Müller, 2001] gelten für den *bias* ähnliche Werte wie für das Instrumentenrauschen der GOCE Beschleunigungsmesser, also $4 \cdot 10^{-13} \frac{m}{s^2 \sqrt{Hz}}$ innerhalb der Messbandbreite und $10^{-7} \frac{m}{s^2}$ im sehr niederfrequenten Bereich. Das Instrumentenrauschen spiegelt die innere Genauigkeit der Beschleunigungsmesser wider.

5.2 Skalierungsfehler

Nachdem nun der *bias* behandelt wurde, wird als nächstes auf den Skalierungsfehler der Beschleunigungsmesser eingegangen. Durch den Skalierungsfehler werden „Soll“-Beschleunigungen mit einer unbekanntem Konstanten ($S = s + 1$) multipliziert. Auch dieser Fehler kann entlang jeder der drei Achsen der sechs Beschleunigungsmesser unterschiedlich sein. Es ergeben sich also, analog zum *bias*, insgesamt 18 Skalierungsfaktoren $s_{l,i}$, mit $l = 1 \dots 6$ (Nummer des Akzelerometers) und $i = x, y, z$ (Richtung), welche im fehlerfreien „Idealfall“ stets Null sind.

Unter der Annahme, dass neben den Skalierungsfaktoren keine anderen Fehler wirken, können die gemessenen Beschleunigungen \underline{a}_l^{gem} je Akzelerometer l mit Hilfe der Diagonalmatrix der Skalierungsfehler \underline{F}_l^s dargestellt werden als :

$$\underline{a}_l^{gem} = (\underline{I} + \underline{F}_l^s) \cdot \underline{a}_l^{tat} = \underline{F}_l^s \cdot \underline{a}_l^{tat} + \underline{a}_l^{tat} = \begin{pmatrix} s_{l,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{l,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{l,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

\underline{I} ist dabei eine 3×3 -Einheitsmatrix und \underline{F}_l^s beschreibt die Fehler für einen einzelnen Beschleunigungsmesser l . Gleichung 5.4 soll nun wieder für *differential mode* und *common mode* umformuliert werden. Für einen Fehlerterm \underline{F} (hier \underline{F}^s) gilt $\underline{F}_l = \underline{F}_c + \underline{F}_d$ und $\underline{F}_k = \underline{F}_c - \underline{F}_d$, mit

$$\underline{F}_c^s = \frac{1}{2}(\underline{F}_l + \underline{F}_k) = \begin{pmatrix} s_{c,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{c,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{c,z} \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_d^s = \frac{1}{2}(\underline{a}_l - \underline{a}_k) = \begin{pmatrix} s_{d,x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{d,y} & 0 \\ 0 & 0 & s_{d,z} \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Beziehungen, Gleichung 5.4 und den Definitionen für *common-* und *differential mode* gilt für die differentielle Beobachtung

$$\begin{aligned} \underline{a}_d^{gem} &= \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{gem} - \underline{a}_k^{gem}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_l \cdot \underline{a}_l^{tat} + \frac{1}{2} \underline{a}_l^{tat} - \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_k \cdot \underline{a}_k^{tat} - \frac{1}{2} \underline{a}_k^{tat} = \\ &= \frac{1}{2}(\underline{F}_c + \underline{F}_d) \underline{a}_l^{tat} - \frac{1}{2}(\underline{F}_c - \underline{F}_d) \underline{a}_k^{tat} + \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{tat} - \underline{a}_k^{tat}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_c \cdot \underline{a}_l^{tat} + \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_d \cdot \underline{a}_l^{tat} - \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_c \cdot \underline{a}_k^{tat} + \frac{1}{2} \cdot \underline{F}_d \cdot \underline{a}_k^{tat} + \underline{a}_d^{tat} = \\ &= \underline{F}_c (\underline{a}_l^{tat} - \underline{a}_k^{tat}) \frac{1}{2} + \underline{F}_d (\underline{a}_l^{tat} + \underline{a}_k^{tat}) \frac{1}{2} + \underline{a}_d^{tat} = \\ &= \underline{F}_c \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{F}_d \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{a}_d^{tat} \end{aligned} \quad (5.5)$$

und analog für den *common mode*

$$\underline{a}_c^{gem} = \frac{1}{2}(\underline{a}_l^{gem} + \underline{a}_k^{gem}) = \dots = \underline{F}_c \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{F}_d \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{a}_c^{tat}. \quad (5.6)$$

Wie man sieht, können bei vorhandenen Instrumentenfehlern auch translatorische Beschleunigungen \underline{a}_c^{tat} einen Fehlerbeitrag in der *differential mode* Beschleunigung (Gleichung

5.5) erzeugen. Analog gilt für den *common mode* (Gleichung 5.6), dass hier nun auch die differentielle Beobachtung \underline{a}_d^{tat} einen Fehlerbeitrag erzeugt.

Die Aufteilung in je einen *common mode* und einen *differential mode* Anteil gemäß Gleichungen 5.6 und 5.5 macht nicht nur für die Skalierungsfehler Sinn, sondern ebenfalls für alle anderen Fehler die als Produkt mit den tatsächlichen Beschleunigungen in die Messungen einfließen. Bei den Überlegungen zum Misalignment (Abschnitt 5.3) und zur Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen (Abschnitt 5.4) wird deshalb noch einmal darauf zurückgegriffen.

Auch für die Skalierungsfehler sind spezielle Ausnahmefälle denkbar. Diese sind meist gut mit den Spezialfällen des *bias* vergleichbar. Es wurde folgende Einteilung getroffen:

- Fall S1(a):** wirksame Beschleunigung $\underline{a}_l = -\underline{a}_k$ und $\underline{F}_l^s = \underline{F}_k^s$
Fall S1(b): translative Beschleunigung a_t auf Satellit und $\underline{F}_l^s = \underline{F}_k^s$
Fall S2(a): wirksame Beschleunigung $\underline{a}_l = -\underline{a}_k$ und $\underline{F}_l^s = -\underline{F}_k^s$
Fall S2(b): translative Beschleunigung a_t auf Satellit und $\underline{F}_l^s = -\underline{F}_k^s$

Diese vier Fälle werden wieder am Beispiel des Gradiometerarms 2-5 in y-Richtung erklärt.

Fall S1(a):

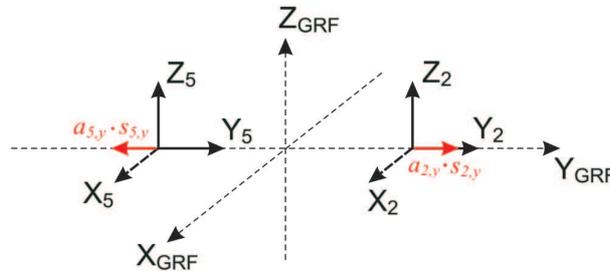


Abb. 5.6: Fall S1(a) - wirksame Beschleunigung $a_{2,y} = -a_{5,y}$ und $s_{2,y} = s_{5,y}$

In den Spezialfällen des *bias* wurden die roten Pfeile in Abbildungen 5.1(a) und 5.2(a) stets als *bias* interpretiert. Bei den Überlegungen zum Skalierungsfehler wird den roten Pfeilen in Abbildungen 5.7 bis 5.6 zum Teil unterschiedliche Bedeutung zugewiesen. Dies ist nötig, da die Skalierungsfaktoren stets als Produkt mit Beschleunigungen auftreten. In diesem Fall sind die roten Pfeile in Abbildung 5.6 als CS-S-Beschleunigungen mal die zugehörigen Skalierungsfaktoren zu interpretieren und es gilt $s_{2,y} = s_{5,y}$. Die roten Pfeile sind also dem Betrag nach gleich und zeigen in die entgegengesetzte Richtung, genau wie in Fall B2.

Für die Darstellung in Abbildung 5.2(b) wurde ein *bias* von $1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ festgesetzt. Um durch Skalierungsfaktoren einen Effekt ähnlicher Größe zu erzielen muss gelten $s_{2,y} = s_{5,y} \approx 0.29$. Fall S1(a) bewirkt somit, genau wie Fall B2 keine Änderung der *common mode* Beschleunigungen, sondern schlägt sich komplett in den differentiellen Beobachtungen nieder.

Wegen $a_{2,y} = -a_{5,y}$ gilt in Gleichungen 5.5 und 5.6 $a_{c,y}^{tat} = 0$. Aufgrund der Bedingung $s_{2,y} = s_{5,y}$ gilt $F_{d,y} = 0$ und $F_{c,y} = s_{2,y}$. In Gleichung 5.5 verbleibt der erste Term, welcher den messbaren *differential mode* verfälscht. Der *common mode* dagegen bleibt Null. Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$
gleiche Skalierungsfaktoren: $s_{2,y} = s_{5,y} \Rightarrow F_{c,y} = s_{2,y}$ und $F_{d,y} = 0$

(Gleichung 5.6) *common mode*:

$$a_c^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + a_{c,y}^{tat} = s_{2,y} \cdot 0 + 0 \cdot a_{2,y} + 0 = 0$$

(Gleichung 5.5) *differential mode*:

$$a_{d,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + a_{d,y}^{tat} = s_{2,y} \cdot a_{2,y} + 0 \cdot 0 = s_{2,y} \cdot a_{2,y} + a_{2,y}$$

Fall S1(b):

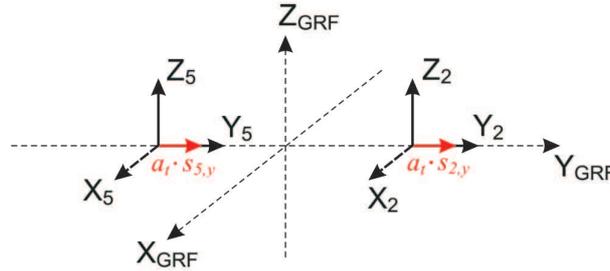


Abb. 5.7: Fall S1(b) - translativ Beschleunigung a_t auf Satellit und $s_{2,y} = s_{5,y}$

In diesem Fall werden die Beschleunigungen hervorgerufen durch translativ Kräfte auf die Außenhaut des Satelliten. In Abbildung 5.7 wirkt deshalb jeweils die gleiche Beschleunigung a_t auf Akzelerometer A2 und A5. Es gilt außerdem $s_{2,y} = s_{5,y}$. Die roten Pfeile haben somit gleichen Betrag und zeigen in die gleiche Richtung (positive y-Richtung), genau wie in Fall B1. Die Verschiebung der Kurven in Abbildung 5.1(b) (Fall B1) aufgrund der *bias* $b_{2,y}$ bzw. $b_{5,y}$ entspricht nun der Verschiebung aufgrund der skalierten translativ Kraft $a_t \cdot s_{2,y}$ (grüne Kurve zu schwarzer) bzw. $a_t \cdot s_{5,y}$ (rote Kurve zu blauer). Für Fall S1(b) ergibt sich, wie für Fall B1 keine Auswirkung auf den *differential mode*. Beim *common mode* ist zu beachten, dass dieser sich schon aufgrund der translativ Kraft allein, (wenn also gelten würde $s_{2,y} = s_{5,y} = 0$) entsprechend Fall B1(b) um a_t ändert. Sind nun zusätzlich die Skalierungsfehler $s_{2,y} = s_{5,y} \neq 0$ vorhanden, ergibt sich ein Versatz im *common mode* um das Produkt $a_t \cdot s_{2,y}$.

Dieses Ergebnis lässt sich auch mit den Formeln 5.5 und 5.6 bestätigen. Da dieselbe Kraft a_t auf A2 und A5 wirkt, gilt $a_{d,y}^{tat} = 0$. Außerdem gilt wegen $s_{2,y} = s_{5,y}$ auch $F_{d,y}^s = 0$. Der einzige Fehlerterm ungleich Null in den beiden Gleichungen ist also $F_{c,y} \cdot a_{c,y}^{tat}$.

Zusammenfassung:

translative Beschleunigung: $a_{2,y} = a_{5,y} = a_t \Rightarrow a_{c,y}^{tat} = a_t$ und $a_{d,y}^{tat} = 0$
 gleiche Skalierungsfaktoren: $s_{2,y} = s_{5,y} \Rightarrow F_{c,y} = s_{2,y}$ und $F_{d,y} = 0$

(Gleichung 5.6) *common mode*:

$$a_{c,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + a_{c,y}^{tat} = s_{2,y} \cdot a_t + 0 \cdot 0 + a_t = s_{2,y} \cdot a_t + a_t$$

(Gleichung 5.5) *differential mode*:

$$a_{d,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + a_{d,y}^{tat} = s_{2,y} \cdot 0 + 0 \cdot a_t + 0 = 0$$

Fall S2(a):

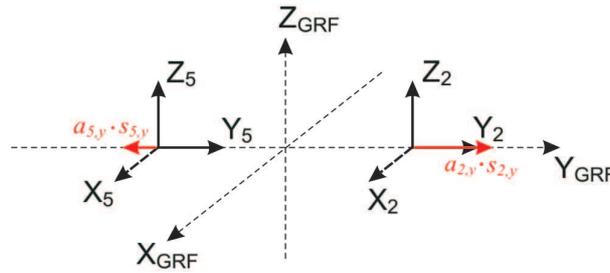


Abb. 5.8: Fall S2(a) - wirksame Beschleunigung $a_{2,y} = -a_{5,y}$ und $s_{2,y} = -s_{5,y}$

In diesem Fall stellen die roten Pfeile in Abbildung 5.8 die CS-S-Beschleunigungen $a_{2,y}$ und $a_{5,y}$ mal die zugehörigen Skalierungsfaktoren $s_{2,y}$ und $s_{5,y}$ dar. Es gilt bekanntlich $a_{2,y} = -a_{5,y}$. In diesem Fall gilt zusätzlich $s_{2,y} = -s_{5,y}$ für die Skalierungsfaktoren. Dadurch wird die Messung des Akzelerometers A2 im selben Maß „gedehnt“, wie die Messung von A5 „gestaucht“ wird. Die gemessenen Signale verschieben sich dadurch erneut beide, wie in Fall B1 in dieselbe Richtung. Um einen Versatz von ca. $1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$, ähnlich wie in Abbildung 5.1(b) zu erzeugen muss gelten $s_{2,y} \approx 0.29$ und $s_{5,y} \approx -0.29$.

Analog zu Fall B1 ergibt sich keine Änderung der differentiellen Beobachtung, wohl aber ein Versatz im *common mode*. Dieser beträgt ca. $1 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$ und schwankt leicht, da $a_{2,y}$ selbst nicht konstant ist.

Das Ergebnis wird nun wieder mit Gleichungen 5.5 und 5.6 überprüft. Wegen $a_{2,y} = -a_{5,y}$ gilt $a_{c,y}^{tat} = 0$ und wegen $s_{2,y} = -s_{5,y}$ wird $F_{d,y}$ zu $s_{2,y}$. $F_{c,y}$ ist dagegen gleich Null. Gleichung 5.5 wird damit zu $a_{d,y}^{gem} = a_{d,y}^{tat}$, d.h. der *differential mode* bleibt unverändert. In Gleichung 5.6 bleibt nur der zweite Term stehen, welcher die Änderung des *common mode* bewirkt.

Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$
 entgegengesetzte Skalierungsfaktoren: $s_{2,y} = -s_{5,y} \Rightarrow F_{c,y} = 0$ und $F_{d,y} = s_{2,y}$

(Gleichung 5.6) *common mode*:

$$a_{c,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + a_{c,y}^{tat} = 0 \cdot 0 + s_{2,y} \cdot a_{2,y} + 0 = s_{2,y} \cdot a_{2,y}$$

(Gleichung 5.5) *differential mode*:

$$a_{d,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + a_{d,y}^{tat} = 0 \cdot a_{2,y} + s_{2,y} \cdot 0 + a_{2,y} = a_{2,y}$$

Fall S2(b):

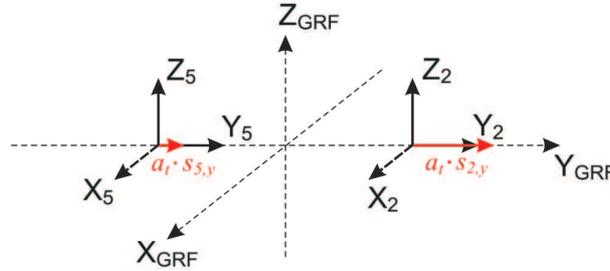


Abb. 5.9: Fall S2(b) - translativ Beschleunigung a_t auf Satellit und $s_{2,y} = -s_{5,y}$

In Abbildung 5.9 stellen die roten Pfeile die translativ Beschleunigung a_t mal den Skalierungsfaktor $s_{2,y}$ bzw. $s_{5,y}$ dar. Für die tatsächlichen Beschleunigungen gilt $a_{c,y}^{tat} = a_t$ und $a_{d,y}^{tat} = 0$. Es gilt zusätzlich $s_{2,y} = -s_{5,y}$. Damit ist $F_{c,y} = 0$ und $F_{d,y}$ wird zu $s_{2,y}$. Der *common mode* ändert sich in diesem Fall nicht. Die differentielle Beschleunigung (Gleichung 5.5) dagegen wird zu $s_{2,y} \cdot a_t$, also mit dem Skalierungsfaktor gedehnt (bzw. gestaucht).
Zusammenfassung:

translativ Beschleunigung: $a_{2,y} = a_{5,y} = a_t \Rightarrow a_{c,y}^{tat} = a_t$ und $a_{d,y}^{tat} = 0$
entgegengesetzte Skalierungsfaktoren: $s_{2,y} = -s_{5,y} \Rightarrow F_{c,y} = 0$ und $F_{d,y} = s_{2,y}$

(Gleichung 5.6) *common mode*:

$$a_{c,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + a_{c,y}^{tat} = 0 \cdot a_t + s_{2,y} \cdot 0 + a_t = a_t$$

(Gleichung 5.5) *differential mode*:

$$a_{d,y}^{gem} = F_{c,y} \cdot a_{d,y}^{tat} + F_{d,y} \cdot a_{c,y}^{tat} + a_{d,y}^{tat} = 0 \cdot 0 + s_{2,y} \cdot a_t + 0 = s_{2,y} \cdot a_t$$

Im Allgemeinen gelten die Bedingungen der Spezialfälle nicht. Die Skalierungsfehler wirken sich dann stets sowohl auf die *common-*, als auch auf die *differential mode* Beschleunigungen

aus. In Tabellen 5.3, 5.4 und 5.5 ist dargestellt, welche *differential mode* Beschleunigungen, Winkelbeschleunigungen und Schweregradienten von den einzelnen *bias* beeinflusst werden. Diese Tabellen gelten ebenfalls für die Skalierungsfaktoren, wenn darin lediglich die *bias* mit den entsprechenden Skalierungsfaktoren ersetzt werden, (also $b_{l,i}$ ersetzt mit $s_{l,i}$).

5.3 Misalignment

Ein Misalignmentfehler tritt auf, wenn die Beschleunigungsmesserachsen (ARF) nicht exakt achsenparallel, sondern leicht verdreht zu den Gradiometerachsen (GRF) liegen. Die messbaren Beschleunigungen \underline{a}_l^{gem} für Beschleunigungsmesser l erhält man mit der Misalignment-Matrix \underline{F}_l^{mis} gemäß:

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{F}_l^{mis} \cdot \underline{a}_l^{tat} + \underline{a}_l^{tat} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{l,z} & -\Phi_{l,y} \\ -\Phi_{l,z} & 0 & \Phi_{l,x} \\ \Phi_{l,y} & -\Phi_{l,x} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Die Winkel Φ_l in der Misalignment-Matrix geben die Verdrehungen in den drei Raumrichtungen an. Außerdem kann auch \underline{F}_l^{mis} in einen *common mode* Anteil

$$\underline{F}_c^{mis} = \frac{1}{2}(\underline{F}_l^{mis} + \underline{F}_k^{mis}) = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{c,z} & -\Phi_{c,y} \\ -\Phi_{c,z} & 0 & \Phi_{c,x} \\ \Phi_{c,y} & -\Phi_{c,x} & 0 \end{pmatrix}$$

und einen *differential mode* Anteil

$$\underline{F}_d^{mis} = \frac{1}{2}(\underline{F}_l^{mis} - \underline{F}_k^{mis}) = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{d,z} & -\Phi_{d,y} \\ -\Phi_{d,z} & 0 & \Phi_{d,x} \\ \Phi_{d,y} & -\Phi_{d,x} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

aufgeteilt werden. \underline{F}_c^{mis} beschreibt dabei Misalignments in gleicher Richtung, \underline{F}_d^{mis} Misalignments in unterschiedlicher Richtung. Aus Gleichung 5.7 folgt für die differentielle Beobachtung (Berechnung analog zu Gleichung 5.5)

$$\underline{a}_d^{mis} = \underline{F}_c^{mis} \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{F}_d^{mis} \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{a}_d^{tat} \quad (5.9)$$

und für den *common mode* (Berechnung analog zu Gleichung 5.6)

$$\underline{a}_c^{mis} = \underline{F}_c^{mis} \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{F}_d^{mis} \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{a}_c^{tat}. \quad (5.10)$$

Multipliziert man Gleichung 5.9 (*differential mode*) aus, ergibt sich z.B. in y-Richtung

$$a_{d,y}^{gem} = a_{d,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{d,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{c,z}^{tat}. \quad (5.11)$$

Für den *common mode* erhält man aus Gleichung 5.10 in y-Richtung

$$a_{c,y}^{gem} = a_{c,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{c,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{d,z}^{tat}. \quad (5.12)$$

Für die Misalignmentfehler sind folgende Spezialfälle interessant:

Fall M1: wirksame Beschleunigung $\underline{a}_l = -\underline{a}_k$ und $\underline{F}_l^{mis} = \underline{F}_k^{mis}$

Fall M2: wirksame Beschleunigung $\underline{a}_l = -\underline{a}_k$ und $\underline{F}_l^{mis} = -\underline{F}_k^{mis}$

Diese Fälle werden für Gradiometerarm 2-5 in y-Richtung und für Misalignmentwinkel $\Phi_{2,x}$ bzw. $\Phi_{5,x}$ besprochen. Es wird angenommen, dass alle anderen Winkel $\Phi_{l,i}$ bzw. $\Phi_{k,i}$ gleich Null sind. Die Überlegungen finden somit ausschließlich in der y-z-Ebene statt.

Fall M1:

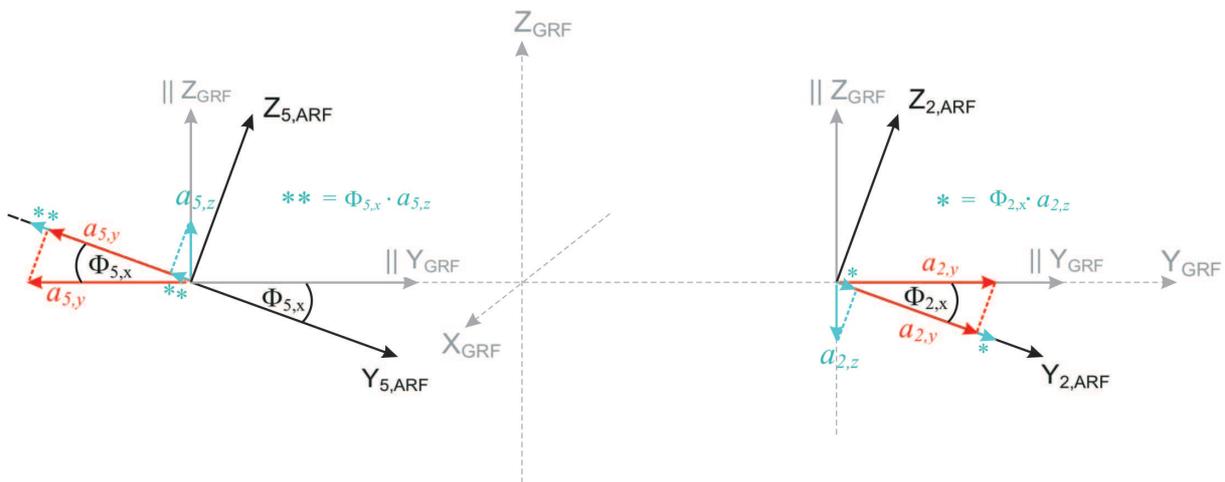


Abb. 5.10: Fall M1 - Misorientation um den Winkel Φ_x in gleicher Richtung

In Fall M1 sind die Beschleunigungsmesserachsen hinsichtlich der Verbindungslinie zwischen ihrem Mittelpunkt jeweils in die gleiche Richtung um einen Winkel Φ_x verdreht. Dieser Effekt wird auch als Misorientation bezeichnet. Abbildung 5.10 zeigt diesen Fall anhand der CS-S-Beschleunigungen $a_{2,y}$ und $a_{5,y}$ (rot). Bei idealer Konfiguration werden diese Beschleunigungen, welche entlang der y-Achse des GRF auftreten, auch exakt in dieser Richtung gemessen. GRF und ARF stimmen dann überein. Wie in Abbildung 5.10 dargestellt, tritt nun aber eine Verdrehung um $\Phi_{2,x} = \Phi_{5,x}$ der y-Achse des ARF gegenüber der y-Achse des GRF auf. Von $a_{2,y}$ bzw. $a_{5,y}$ kann also nur die Komponente entlang der y-Achse des ARF gemessen werden. Weil es sich bei $\Phi_{2,x}$ bzw. $\Phi_{5,x}$ um sehr kleine Winkel handelt, kann die Änderung des Betrags von $a_{2,y}$ bzw. $a_{5,y}$ durch die Drehung vernachlässigt werden. Nicht vernachlässigt werden darf jedoch die Komponente von $a_{2,z}$ bzw. $a_{5,z}$, welche in die y-Achse des ARF koppelt und somit in die Messung mit einfließt. Diese hellblau dargestellten Beschleunigungen vergrößern im konkreten Fall den Betrag der Messungen um jeweils $\Phi_{2,x} \cdot a_{2,z}$. Die Misorientierung zeigt sich nicht im *common mode*, jedoch im *differential mode*.

Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$
 gleiche Misalignmentwinkel Φ_x : $\Phi_{2,x} = \Phi_{5,x} \Rightarrow \Phi_{c,x} = \Phi_{2,x}$ und $\Phi_{d,x} = 0$
 restliche Misalignmentwinkel: $\Phi_{l,i} = \Phi_{k,i} = 0 \Rightarrow \Phi_{c,i} = \Phi_{d,i} = 0$

(Gleichung 5.12) *common mode*:

$$\begin{aligned} a_{c,y}^{gem} &= a_{c,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{c,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{d,z}^{tat} = \\ &= 0 - 0 \cdot 0 + \Phi_{2,x} \cdot 0 - 0 \cdot a_{2,x} + 0 \cdot a_{2,z} = 0 \end{aligned}$$

(Gleichung 5.11) *differential mode*:

$$\begin{aligned} a_{d,y}^{gem} &= a_{d,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{d,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{c,z}^{tat} = \\ &= a_{2,y} - 0 \cdot a_{2,x} + \Phi_{2,x} \cdot a_{2,z} - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{2,y} + \Phi_{2,x} \cdot a_{2,z} \end{aligned}$$

Fall M2:

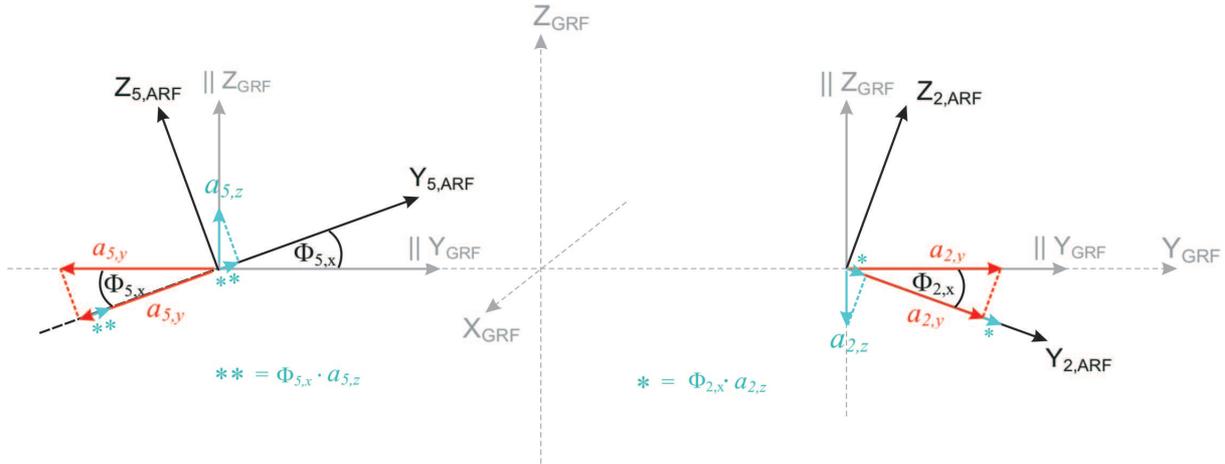


Abb. 5.11: Fall M2 - Misalignment um den Winkel Φ_x in entgegengesetzten Richtungen

Auch in diesem Fall wird die Auswirkung des Misalignments auf die CS-S-Beschleunigungen untersucht. Es gilt nun aber $\Phi_{2,x} = -\Phi_{5,x}$, d.h. Beschleunigungsmesser A2 ist um denselben Winkel nach rechts verdreht, wie A5 nach links verdreht ist. Insgesamt unterscheiden sich die beiden Achsen also um den Winkel $2\Phi_{2,x}$. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich $\Phi_{c,x} = 0$ und $\Phi_{d,x} = \Phi_{2,x}$. Für die CS-S-Beschleunigungen gilt bekanntlich $a_{l,i} = -a_{k,i}$ und damit $a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{l,i}$. Der mit Akzelerometer A2 messbare Betrag in y-Richtung wird um die Komponente von $a_{2,z}$ in y-Richtung des ARF, also $\Phi_{2,x} \cdot a_{2,z}$ (hellblau in Abbildung 5.11) vergrößert. Die Messung von Akzelerometer A5 wird dagegen um denselben Betrag verkleinert. Der Misalignmentfehler fließt deshalb in diesem Fall voll in den *common mode* und überhaupt nicht in die differentielle Beobachtung ein.

Zusammenfassung:

CS-S-Beschleunigungen: $a_{l,i} = -a_{k,i} \Rightarrow a_{c,i}^{tat} = 0$ und $a_{d,i}^{tat} = a_{2,i}$
 entgegengesetzte Misalignmentwinkel Φ_x : $\Phi_{2,x} = -\Phi_{5,x} \Rightarrow \Phi_{c,x} = 0$ und $\Phi_{d,x} = \Phi_{2,x}$
 restliche Misalignmentwinkel: $\Phi_{l,i} = \Phi_{k,i} = 0 \Rightarrow \Phi_{c,i} = \Phi_{d,i} = 0$

(Gleichung 5.12) *common mode*:

$$\begin{aligned} a_{c,y}^{gem} &= a_{c,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{c,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{d,z}^{tat} = \\ &= 0 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot a_{2,x} + \Phi_{2,x} \cdot a_{2,z} = \Phi_{2,x} \cdot a_{2,z} \end{aligned}$$

(Gleichung 5.11) *differential mode*:

$$\begin{aligned} a_{d,y}^{gem} &= a_{d,y}^{tat} - \Phi_{c,z} \cdot a_{d,x}^{tat} + \Phi_{c,x} \cdot a_{d,z}^{tat} - \Phi_{d,z} \cdot a_{c,x}^{tat} + \Phi_{d,x} \cdot a_{c,z}^{tat} = \\ &= a_{2,y} - 0 \cdot a_{2,x} + 0 \cdot a_{2,z} - 0 \cdot 0 + \Phi_{2,x} \cdot 0 = a_{2,y} \end{aligned}$$

In Tabelle 5.12 ist zusammengefasst, welche Fälle den *common mode* und welche den *differential mode* beeinflussen. Die ersten beiden Spalten bezeichnen den jeweiligen Fall und beschreiben noch einmal kurz die vorausgesetzten Bedingungen. Die letzten beiden Spalten zeigen, ob ein Einfluss auf den *common mode* (com.) bzw. auf den *differential mode* (diff.) besteht (ja) oder nicht (nein). Im allgemeinen Fall kann stets davon ausgegangen werden, dass die Fehler *bias*, Skalierungsfaktor und Misalignment die differentiellen Beschleunigungen verändern. Besonders interessant sind deshalb die Fälle B1(a), B1(b), S1(b), S2(a) und M2 in denen sich die Fehler nicht auf den *differential mode* und damit auch nicht auf die weitere Berechnung der Winkelbeschleunigungen auswirken.

Fall	Bedingungen		com.	diff.
B1(a)	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$b_{2,y} = b_{5,y}$	ja	nein
B1(b)	$a_{2,y} = a_{5,y} = a_t$	$b_{2,y} = b_{5,y}$	ja	nein
B2(a)	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$b_{2,y} = -b_{5,y}$	nein	ja
B2(b)	$a_{2,y} = a_{5,y} = a_t$	$b_{2,y} = -b_{5,y}$	nein	ja
S1(a)	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$s_{2,y} = s_{5,y}$	nein	ja
S1(b)	$a_{2,y} = a_{5,y} = a_t$	$s_{2,y} = s_{5,y}$	ja	nein
S2(a)	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$s_{2,y} = -s_{5,y}$	ja	nein
S2(b)	$a_{2,y} = a_{5,y} = a_t$	$s_{2,y} = -s_{5,y}$	nein	ja
M1	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$\Phi_{2,x} = \Phi_{5,x}$	nein	ja
M2	$a_{l,i} = -a_{k,i}$	$\Phi_{2,x} = -\Phi_{5,x}$	ja	nein

Tab. 5.12: Einfluss auf *common-* und *differential mode* in den Spezialfällen für *bias* (**B**), Skalierungsfehler (**S**) und Misalignment (**M**)

5.4 Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen

Sind die Akzelerometerachsen nicht exakt orthogonal zueinander, koppeln Signale einer Achse als Messung in eine andere Achse. Die messbaren Signale \underline{a}_l^{gem} erhält man, indem man zu den tatsächlichen, unverfälschten Beschleunigungen \underline{a}_l^{tat} das Produkt aus der symmetrischen Matrix \underline{F}_l^{nior} mit \underline{a}_l^{tat} addiert:

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{F}_l^{nior} \cdot \underline{a}_l^{tat} + \underline{a}_l^{tat} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{l,z} & \eta_{l,y} \\ \eta_{l,z} & 0 & \eta_{l,x} \\ \eta_{l,y} & \eta_{l,x} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{l,x}^{tat} \\ a_{l,y}^{tat} \\ a_{l,z}^{tat} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Mit der Matrix \underline{F}_l^{nior} können auch elektronische Kopplungen zweier Akzelerometerachsen erfasst werden. Dieser Effekt wird laut [Müller, 2001] auch häufig ‘‘Querkopplung‘‘ oder ‘‘Übersprechen‘‘ genannt.

Eine Zerlegung in *common mode* Anteil

$$\underline{F}_c^{nior} = \frac{1}{2}(\underline{F}_l^{nior} + \underline{F}_k^{nior}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{c,z} & \eta_{c,y} \\ \eta_{c,z} & 0 & \eta_{c,x} \\ \eta_{c,y} & \eta_{c,x} & 0 \end{pmatrix}$$

und *differential mode* Anteil

$$\underline{F}_d^{nior} = \frac{1}{2}(\underline{F}_l^{nior} - \underline{F}_k^{nior}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{d,z} & \eta_{d,y} \\ \eta_{d,z} & 0 & \eta_{d,x} \\ \eta_{d,y} & \eta_{d,x} & 0 \end{pmatrix}$$

ist wieder möglich.

Analog zur Herleitung in Abschnitt 5.2 für die Skalierungsfaktoren (Gleichungen 5.5 und 5.6) ergeben sich die messbaren *differential mode* Beschleunigungen unter Beachtung der Nicht-Orthogonalitäten zu

$$\underline{a}_d^{gem} = \underline{F}_c^{nior} \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{F}_d^{nior} \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{a}_d^{tat} \quad (5.14)$$

und die *common mode* Beschleunigungen zu

$$\underline{a}_c^{gem} = \underline{F}_c^{nior} \cdot \underline{a}_c^{tat} + \underline{F}_d^{nior} \cdot \underline{a}_d^{tat} + \underline{a}_c^{tat}. \quad (5.15)$$

Die Fehler aufgrund von Nicht-Orthogonalitäten sind gut mit den Misalignment-Effekten vergleichbar. Um Wiederholungen zu vermeiden wird deshalb an dieser Stelle auf die explizite Angabe von bestimmten Komponenten oder die Unterteilung in Spezialfälle verzichtet. Auch für die Genauigkeitsschranken gelten etwa dieselben Werte wie für das Misalignment.

5.5 Zusammenfassung der Instrumentenfehler

An dieser Stelle soll eine kurze Zusammenfassung der bisher einzeln betrachteten Instrumentenfehler von GOCE stattfinden. Die allgemeine Beobachtungsgleichung eines Akzelerometers l lautet bei vorhandenen Instrumentenfehlern

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{a}_l^{tat} + \underline{B}_l + \underline{F}_l^s \cdot \underline{a}_l^{tat} + \underline{F}_l^{mis} \cdot \underline{a}_l^{tat} + \underline{F}_l^{nior} \cdot \underline{a}_l^{tat} . \quad (5.16)$$

Die drei Matrizen für Skalierungsfehler, Misalignment und Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen können zu einer Matrix \underline{F} zusammengefasst werden

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{a}_l^{tat} + \underline{B}_l + \begin{pmatrix} s_{l,x} & \Phi_{l,z} + \eta_{l,z} & -\Phi_{l,y} + \eta_{l,y} \\ -\Phi_{l,z} + \eta_{l,z} & s_{l,y} & \Phi_{l,x} + \eta_{l,x} \\ \Phi_{l,y} + \eta_{l,y} & -\Phi_{l,x} + \eta_{l,x} & s_{l,z} \end{pmatrix} \cdot \underline{a}_l^{tat} . \quad (5.17)$$

Nach der Einteilung der Fehler in *common mode*- und *differential mode*-Anteil, lässt sich eine messbare *differential mode* Beschleunigung allgemein schreiben als

$$\underline{a}_d^{gem} = \underline{a}_d^{tat} + \underline{B}_d + (\underline{F}_c^s + \underline{F}_c^{mis} + \underline{F}_c^{nior}) \cdot \underline{a}_d^{tat} + (\underline{F}_d^s + \underline{F}_d^{mis} + \underline{F}_d^{nior}) \cdot \underline{a}_d^{tat} . \quad (5.18)$$

Der messbare *common mode* lautet

$$\underline{a}_c^{gem} = \underline{a}_c^{tat} + \underline{B}_c + (\underline{F}_c^s + \underline{F}_c^{mis} + \underline{F}_c^{nior}) \cdot \underline{a}_c^{tat} + (\underline{F}_d^s + \underline{F}_d^{mis} + \underline{F}_d^{nior}) \cdot \underline{a}_d^{tat} . \quad (5.19)$$

Die Matrizen für Skalierungsfehler, Misalignment und Nicht-Orthogonalität können wieder zusammengefasst werden. Es ergibt sich also \underline{F}_c für die gemeinsamen Fehler und \underline{F}_d für die differentiellen Fehler.

In [Alenia, 2004] wird auf die so genannte *gradiometer calibration* eingegangen. Bei dieser Form der Kalibration, welche sowohl am Boden als auch im Weltraum (Interne Kalibration) stattfindet, werden gewisse Parameter des Gradiometers genauer bestimmt. Die angesprochenen Parameter stehen in der sogenannten Kalibrationsmatrix, sowie der Quadratic Faktor Matrix. Sie gibt die Nichtlinearität des Systems näherungsweise wieder. Die Parameter der Quadratic Faktor Matrix können durch Spannungskorrekturen nahezu eliminiert werden. Dies ist bei den Elementen der Kalibrationsmatrix nicht möglich. Es handelt sich dabei um die in den vorigen Abschnitten beschriebenen Skalierungsfehler, Misalignments und Nicht-Orthogonalitäten der Akzelerometerachsen. Genau genommen enthält die Kalibrationsmatrix Elemente aus \underline{F}_c und \underline{F}_d , also die *common mode*- und *differential mode*-Anteile der genannten Instrumentenfehler.

5.6 Versatz zwischen Mittelpunkt Gradiometer und Massenzentrum Satellit

Wie bereits erwähnt, können Fehler auftreten obwohl das Gradiometer fehlerfrei arbeitet. Dies ist z.B. der Fall, wenn der Mittelpunkt des Gradiometers nicht exakt mit dem Massenzentrum des Satelliten zusammenfällt. Dieser Versatz (*offset*) kann mit den drei Komponenten o_x , o_y und o_z entlang der drei Achsen des GRF angegeben werden. Der Vektor o beschreibt also die Lage des Ursprungs des GRF in Bezug auf das Massenzentrum von GOCE.

Die Beobachtungsgleichung 3.19 des fehlerfreien Systems kann auch für die Berechnung der messbaren Beschleunigungen bei vorhandenem *offset* verwendet werden. Lediglich der Abstandsvektor \underline{r} muss für jeden der sechs Akzelerometer um den *offset* ergänzt werden, also

$$\begin{aligned}
 A_1 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{L_x}{2} + o_x \\ + o_y \\ + o_z \end{pmatrix}; & A_4 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{L_x}{2} + o_x \\ + o_y \\ + o_z \end{pmatrix} \\
 A_2 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + o_x \\ \frac{L_y}{2} + o_y \\ + o_z \end{pmatrix}; & A_5 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + o_x \\ -\frac{L_y}{2} + o_y \\ + o_z \end{pmatrix} \\
 A_3 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + o_x \\ + o_y \\ \frac{L_z}{2} + o_z \end{pmatrix}; & A_6 : \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + o_x \\ + o_y \\ -\frac{L_z}{2} + o_z \end{pmatrix}. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Laut [Floberghagen (pers. Mitteilung)] wird für GOCE der *offset* zwischen Mittelpunkt Gradiometer (O_{GRF}) und Massenzentrum Satellit (CoM) mit maximal

$$\begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0993198478594 \text{ m} \\ 0.0207904575393 \text{ m} \\ -0.0282438172959 \text{ m} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

angegeben. Der deutlich größte *offset* kann demnach in (negativer) x-Richtung auftreten.

5.6.1 *Offset* in x-Richtung

Um möglichst realitätsnahe Folgerungen zu ermöglichen und die Ausführungen dennoch möglichst einfach zu halten, wird in diesem Abschnitt angenommen, dass nur ein *offset* o_x in negativer x-Richtung auftritt. Die beiden anderen Komponenten o_y und o_z sind also gleich Null. Abbildung 5.13 soll diesen Fall, in dem das komplette Gradiometer um o_x vom Massenzentrum des Satelliten (CoM) verschoben ist veranschaulichen.

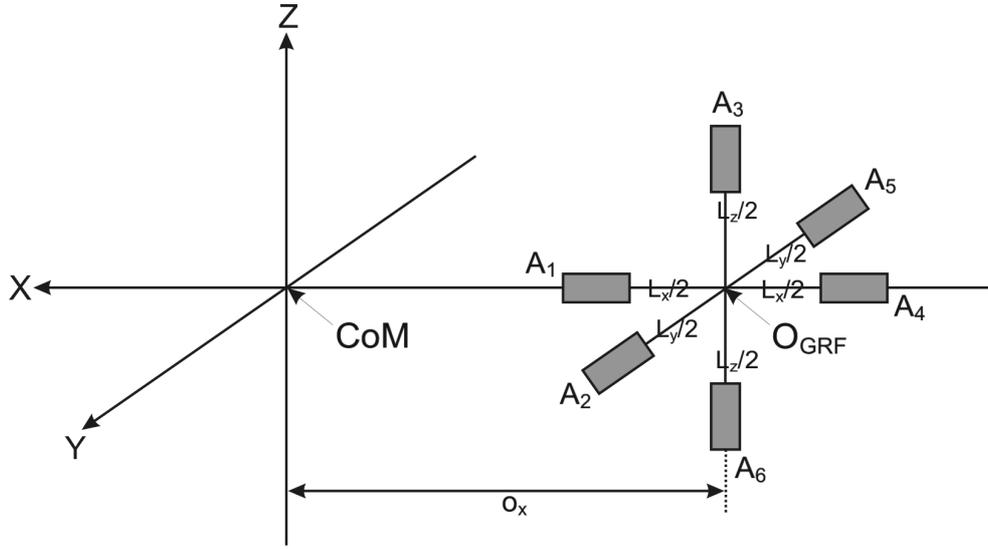


Abb. 5.13: Offset o_x zwischen Mittelpunkt des Gradiometers O_{GRF} und Massenzentrum des Satelliten CoM

Die Beobachtungsgleichungen für Akzelerometer A_1 , A_2 und A_3 ergeben sich dann durch Einsetzen der richtigen Abstandsvektoren (Gleichungen 5.20) zu

$$\underline{a}_1 = \frac{L_x}{2} \begin{pmatrix} -V_{xx} & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \\ -V_{xy} & +\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{xz} & -\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \end{pmatrix} + o_x \begin{pmatrix} -V_{xx} & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \\ -V_{xy} & +\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{xz} & -\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

$$\underline{a}_2 = \frac{L_y}{2} \begin{pmatrix} -V_{yx} & -\dot{\omega}_z & \omega_y\omega_x \\ -V_{yy} & -\omega_x^2 - \omega_z^2 \\ -V_{yz} & +\dot{\omega}_x & +\omega_y\omega_z \end{pmatrix} + o_x \begin{pmatrix} -V_{xx} & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \\ -V_{xy} & +\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{xz} & -\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$\underline{a}_3 = \frac{L_z}{2} \begin{pmatrix} -V_{zx} & \dot{\omega}_y & +\omega_z\omega_x \\ -V_{zy} & -\dot{\omega}_x & +\omega_z\omega_y \\ -V_{zz} & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} + o_x \begin{pmatrix} -V_{xx} & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \\ -V_{xy} & +\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{xz} & -\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Die Gleichungen für Akzelerometer A_4 , A_5 und A_6 unterscheiden sich von Gleichungen 5.22 bis 5.24 lediglich durch die Verwendung von $-\frac{L_i}{2}$ anstatt $\frac{L_i}{2}$.

Die Beschleunigungen auf der linken Seite stellen also die Messgrößen, bei vorhandenem *offset* o_x dar. Die Matrizen, welche mit der halben Basislinienlänge multipliziert werden sind die fehlerfreien Beschleunigungen, gemäß Gleichungen 3.22 bis 3.24. Nur durch den letzten Term, welcher für jeden der sechs Akzelerometer gleich lautet, verfälscht also der *offset* o_x die gemessenen Beschleunigungen. Die Beobachtungsgleichung unter vorhandenem *offset* o_x lautet damit allgemein

$$\underline{a}_i^{gem} = \underline{a}_i^{tat} + \underline{F}_x^{off} . \quad (5.25)$$

Wie bereits erwähnt, fließt der Fehler \underline{F}_x^{off} bei jeder Messung gleichermaßen ein. Der *offset* o_x hat deshalb keinen Einfluss auf die differentielle Beschleunigungsmessung. Im

common mode schlägt sich der Fehler \underline{F}_x^{off} dagegen komplett nieder. Die *common mode* Beschleunigungen werden bekanntermaßen für die *drag control* des Satelliten verwendet, bei der die nicht-gravitativen Kräfte (\underline{a}_{ng}) kompensiert werden sollen. Addiert man in Gleichungen 5.22 bis 5.24 die nicht-gravitativen Kräfte \underline{a}_{ng} , d.h. man nimmt an, dass diese nicht gleich Null sind, so lautet die Gleichung für den *common mode*

$$\frac{1}{2}(\underline{a}_l + \underline{a}_k) = \underline{a}_{ng} + \underline{F}_x^{off} . \quad (5.26)$$

Es wäre wünschenswert die Beschleunigungen \underline{a}_{ng} trotz des offset o_x bestimmen zu können. Aus diesem Grund werden in [Bouman, 2006] Linearkombinationen angegeben, welche die Fehler \underline{F}_x^{off} im *common mode* beseitigen. Für die Herleitung dieser Linearkombinationen müssen die Akzelerometer $A1$ und $A4$, welche auf der x-Achse liegen und die restlichen Akzelerometer, welche auf der y- bzw. z-Achse liegen getrennt betrachtet werden.

Akzelerometer auf der x-Achse:

Normalerweise werden bei der Bildung des *common mode* die beiden beteiligten Messungen jeweils mit Faktor $\frac{1}{2}$ gewichtet. Jetzt soll allerdings eine geeignete gewichtete Summe gefunden werden, bei der alle Terme außer den nicht-gravitativen Beschleunigungen beseitigt werden. Es soll also gelten:

$$f_1 \underline{a}_1 + f_2 \underline{a}_4 = \underline{a}_{x,ng} ; \quad f_1 + f_2 = 1 \quad (5.27)$$

Um die gesuchten Gewichtungsfaktoren f_1 und f_2 zu finden, wird zunächst \underline{a}_1 (Gleichung 5.22) und \underline{a}_4 in die linke Formel von 5.27 eingesetzt,

$$f_1 \underline{a}_{x,ng} + f_1 \frac{L_x}{2} \underline{M}_1 + f_1 o_x \underline{M}_2 + f_2 \underline{a}_{x,ng} + f_2 \left(-\frac{L_x}{2}\right) \underline{M}_1 + f_2 o_x \underline{M}_2 = \underline{a}_{x,ng} \quad (5.28)$$

wobei \underline{M}_1 bzw. \underline{M}_2 abkürzend für die erste bzw. zweite Matrix in Gleichung 5.22 steht. Es fällt auf, dass gilt $\underline{M}_1 = \underline{M}_2 (= \underline{M})$. Durch Kombination dieser Bedingung, sowie der rechten Gleichung von 5.27 mit Gleichung 5.28 erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \underline{a}_{x,ng} &= f_1 \underline{a}_{x,ng} + f_1 \frac{L_x}{2} \underline{M} + f_1 o_x \underline{M} + (1 - f_1) \underline{a}_{x,ng} - (1 - f_1) \left(\frac{L_x}{2}\right) \underline{M} + (1 - f_1) o_x \underline{M} \\ \underline{a}_{x,ng} &= f_1 \underline{a}_{x,ng} + f_1 \frac{L_x}{2} \underline{M} + f_1 o_x \underline{M} + \underline{a}_{x,ng} - f_1 \underline{a}_{x,ng} - \frac{L_x}{2} \underline{M} + f_1 \frac{L_x}{2} \underline{M} + o_x \underline{M} - f_1 o_x \underline{M} \\ \underline{a}_{x,ng} &= f_1 (\underline{a}_{x,ng} + \frac{L_x}{2} \underline{M} + o_x \underline{M} - \underline{a}_{x,ng} + \frac{L_x}{2} \underline{M} - o_x \underline{M}) + \underline{a}_{x,ng} - \frac{L_x}{2} \underline{M} + o_x \underline{M} \\ 0 &= f_1 (L_x \underline{M}) - \frac{L_x}{2} \underline{M} + o_x \underline{M} \\ f_1 &= \frac{\frac{L_x}{2} - o_x}{L_x} \end{aligned} \quad (5.29)$$

und

$$f_2 = 1 - f_1 = 1 - \frac{\frac{L_x}{2} - o_x}{L_x} = \frac{L_x - \frac{L_x}{2} + o_x}{L_x} = \frac{\frac{L_x}{2} + o_x}{L_x}. \quad (5.30)$$

Man erhält demnach die nicht-gravitativen Beschleunigungen entlang der x-Achse mit

$$a_{x,ng} = \left(\frac{\frac{L_x}{2} - o_x}{L_x} \right) a_1 + \left(\frac{\frac{L_x}{2} + o_x}{L_x} \right) a_4. \quad (5.31)$$

Man sieht, dass beide Gewichtsfaktoren im fehlerfreien Idealfall ($o_x = 0$), wenn also der Mittelpunkt des Gradiometers exakt mit dem Massenzentrum des Satelliten zusammenfällt $\frac{1}{2}$ betragen. Im Spezialfall $o_x = -\frac{L_x}{2}$ wird nur Akzelerometer A_1 , mit Gewichtsfaktor 1 verwendet. A_1 befindet sich in diesem Fall genau im CoM.

Akzelerometer auf der y- und z-Achse:

Auch für die y- und z-Achse kann nach [Bouman, 2006] eine Linearkombination gefunden werden, welche den Fehler \underline{F}_x^{off} aufgrund des *offset* o_x im *common mode* eliminiert. Dazu wird Gleichung 5.26 für die x-Achse formuliert, $a_{x,ng}$ aus Gleichung 5.31 eingesetzt und nach \underline{F}_x^{off} aufgelöst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_1 + a_4) &= a_{x,ng} + \underline{F}_x^{off} \\ \frac{1}{2}(a_1 + a_4) &= \left(\frac{\frac{L_x}{2} - o_x}{L_x} \right) a_1 + \left(\frac{\frac{L_x}{2} + o_x}{L_x} \right) a_4 + \underline{F}_x^{off} \\ \underline{F}_x^{off} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{L_x}{2} - o_x}{L_x} \right) a_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{L_x}{2} + o_x}{L_x} \right) a_4 \\ \underline{F}_x^{off} &= \left(\frac{L_x - L_x + 2o_x}{2L_x} \right) a_1 + \left(\frac{L_x - L_x - 2o_x}{2L_x} \right) a_4 \\ \underline{F}_x^{off} &= \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_1 - \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_4 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nun kann der Fehler \underline{F}_x^{off} im *common mode* (Gleichung 5.26) der y- und z-Achse einfach abgezogen werden, um die nicht-gravitativen Beschleunigungen in diesen Richtungen zu erhalten:

$$a_{y,ng} = \frac{1}{2}(a_2 + a_5) - \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_1 + \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_4 \quad (5.33)$$

$$a_{z,ng} = \frac{1}{2}(a_3 + a_6) - \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_1 + \left(\frac{o_x}{L_x} \right) a_4 \quad (5.34)$$

5.6.2 *Offsets* in allen drei Richtungen

Bei den bisherigen Überlegungen wurde angenommen, dass nur ein *offset* in x-Richtung auftritt, welcher den Fehler \underline{F}_x^{off} erzeugt. Mit Gleichung 5.21 ist allerdings bereits bekannt, dass bei GOCE tatsächlich *offsets* in allen drei Richtungen vorhanden sind. Es wird deshalb in diesem Abschnitt der allgemeine Fall, in dem sowohl o_x , o_y , als auch o_z ungleich Null sind behandelt.

Die Fehler \underline{F}_y^{off} und \underline{F}_z^{off} erhält man (analog zu \underline{F}_x^{off}) durch Einsetzen der richtigen Abstände (Gleichungen 5.20) in die Beobachtungsgleichung (3.19),

$$\underline{F}_x^{off} = o_x \begin{pmatrix} -V_{xx} & -\omega_y^2 - \omega_z^2 \\ -V_{xy} & +\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{xz} & -\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

$$\underline{F}_y^{off} = o_y \begin{pmatrix} -V_{xy} & -\dot{\omega}_z & +\omega_x\omega_y \\ -V_{yy} & & -\omega_x^2 - \omega_z^2 \\ -V_{zy} & +\dot{\omega}_x & +\omega_y\omega_z \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

$$\underline{F}_z^{off} = o_z \begin{pmatrix} -V_{xz} & +\dot{\omega}_y & +\omega_x\omega_z \\ -V_{yz} & -\dot{\omega}_x & +\omega_y\omega_z \\ -V_{zz} & & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Der gemeinsame Fehler \underline{F}^{off} kann als Summe der Fehler der einzelnen *offsets* geschrieben werden,

$$\underline{F}^{off} = \underline{F}_x^{off} + \underline{F}_y^{off} + \underline{F}_z^{off}. \quad (5.38)$$

Die Beobachtungsgleichung unter vorhandenem *offset* lautet allgemein (vgl. Gleichung 5.25)

$$\underline{a}_l^{gem} = \underline{a}_l^{tat} + \underline{F}^{off}. \quad (5.39)$$

Der Fehler \underline{F}^{off} fließt gleichermaßen in alle Messungen ein. Es gilt deshalb auch im allgemeinen Fall, dass die *differential mode* Beschleunigungen trotz *offset* fehlerfrei berechnet werden können. In den *common mode* fließt \underline{F}^{off} dagegen voll ein.

Im Folgenden soll durch Einsetzen der *offset*-Werte aus Gleichung 5.21 in Gleichungen 5.35 bis 5.37 gezeigt werden, wie groß der Fehler \underline{F}^{off} bei GOCE tatsächlich werden kann. Für die Berechnung werden die CS-S-Schweregradienten, sowie die nominellen Werte für die Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen (Definition siehe Abschnitt 4.1.1) eingesetzt. Zunächst werden die Fehler \underline{F}_x^{off} , \underline{F}_y^{off} und \underline{F}_z^{off} einzeln und anschließend gemeinsam betrachtet.

Fehler \underline{F}_x^{off} aufgrund *offset* in x-Richtung:

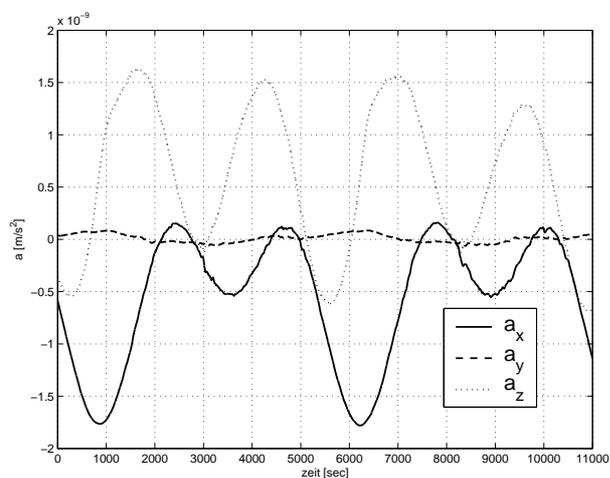


Abb. 5.14: Fehler aufgrund *offset* o_x

Abbildung 5.14 zeigt den Fehler \underline{F}_x^{off} , wie er allein aus dem *offset* $o_x = -0.0993198478594 \text{ m}$ resultiert. (Berechnung mit Gleichung 5.35.) Die rote Kurve zeigt den Fehler in x-Richtung, dessen Betrag maximal $1.8 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ groß ist. Der Fehler in z-Richtung (blau) liegt mit maximal $1.6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ in derselben Größenordnung. Nur der Fehler in y-Richtung (grün) ist mit maximal $8.5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ zwei Größenordnungen kleiner.

Fehler \underline{F}_y^{off} aufgrund *offset* in y-Richtung:

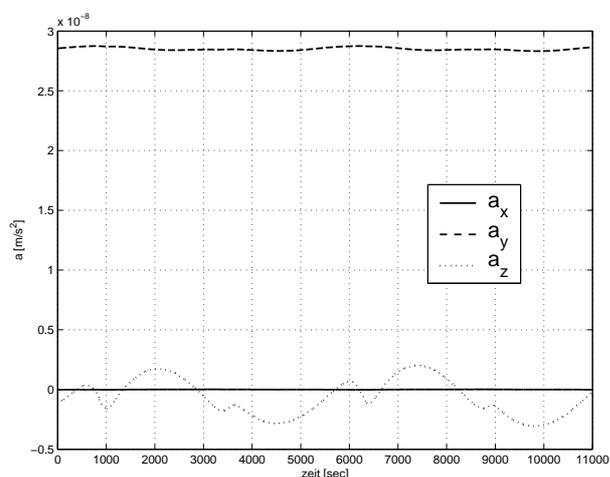


Abb. 5.15: Fehler aufgrund *offset* o_y

In Abbildung 5.15 ist der Fehler \underline{F}_y^{off} aufgrund von *offset* $o_y = 0.0207904575393 \text{ m}$ dargestellt. (Berechnung mit Gleichung 5.36.) In diesem Fall ist der Fehler in x-Richtung (rot) am kleinsten (Betrag maximal $1.8 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Der Betrag des Fehlers in z-Richtung (blau) ist maximal $3.1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ groß. Wie erwartet, ist bei vorhandenem *offset* o_y der Fehler in y-Richtung (grün) mit maximal $2.9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ am größten.

Fehler \underline{F}_z^{off} aufgrund *offset* in z-Richtung:

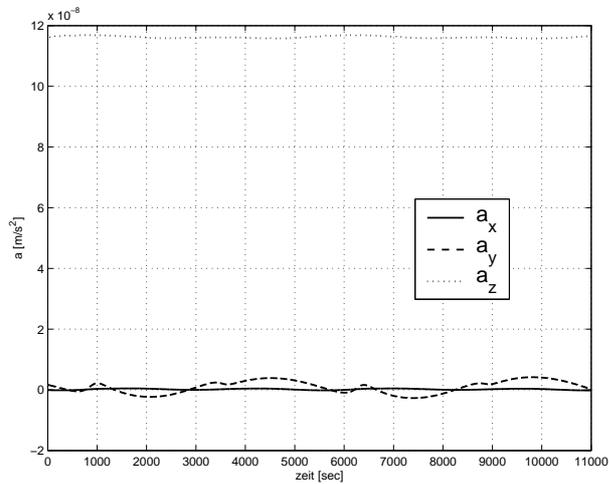


Abb. 5.16: Fehler aufgrund *offset* o_z

Abbildung 5.16 zeigt den Fehler \underline{F}_z^{off} , welcher auftritt, wenn nur der *offset* in z-Richtung ($o_z = -0.0282438172959$ m) vorhanden ist. (Berechnung mit Gleichung 5.37.) Der Fehler in x-Richtung (rot; maximal $4.6 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$) und der Fehler in y-Richtung (grün; maximal $4.2 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$) sind in diesem Fall deutlich kleiner als der Fehler in z-Richtung (blau; maximal $1.2 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$).

Fehler \underline{F}^{off} aufgrund *offset* in x-, y- und z-Richtung:

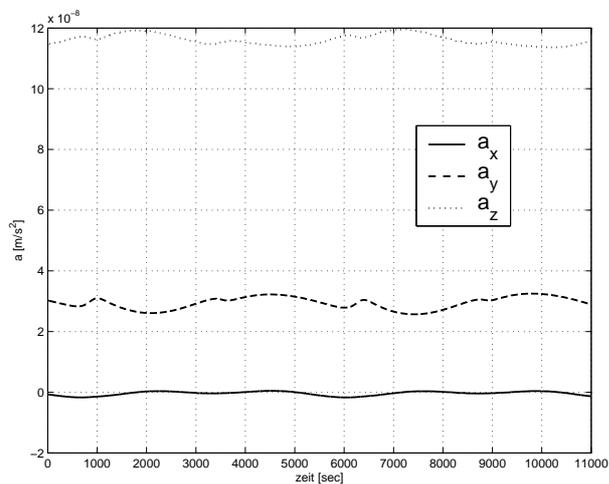


Abb. 5.17: Gemeinsamer Fehler aufgrund *offset* o_x , o_y und o_z

Abbildung 5.17 zeigt den Fehler \underline{F}^{off} aufgrund der *offsets* o_x , o_y und o_z von GOCE. Wie mit Gleichung 5.38 bereits bekannt ist, müssen lediglich die einzelnen Fehler \underline{F}_x^{off} , \underline{F}_y^{off} und \underline{F}_z^{off} addiert werden um \underline{F}^{off} zu erhalten. Wie man sieht, ergibt sich für GOCE somit insgesamt der kleinste Fehler in x-Richtung (rot; maximal $1.7 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$), obwohl der *offset* in dieser Richtung am größten ist. Der Fehler in y-Richtung (grün) beträgt maximal $3.3 \cdot 10^{-8} \frac{m}{s^2}$. Der größte Fehler ergibt sich in z-Richtung (blau; maximal $1.2 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$).

In Abschnitt 4.1.1 (Item 2; Seite 36) wurde bereits das Zustandekommen der Größenordnungen der einzelnen CS-S-Beschleunigungen mit Hilfe der Formeln 3.22 bis 3.24 diskutiert. Wesentlich ist dabei, dass das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit um die y-Achse (ω_y^2) mit ca. $1368.9 \frac{1}{s^2}$ dieselbe Größenordnung wie die Schweregradienten V_{xx} und V_{yy} besitzt. V_{zz} ist bekanntlich dem Betrag nach doppelt so groß wie z.B. V_{xx} .

Die Formeln zur Berechnung von \underline{F}_x^{off} , \underline{F}_y^{off} und \underline{F}_z^{off} (Gleichungen 5.35, 5.36 und 5.37) entsprechen genau den Formeln (3.22, 3.23 und 3.24) zur Berechnung der einzelnen CS-S-Beschleunigungen. Es wurden lediglich andere Abstandsvektoren (*offset* statt halber Basislinienlänge) eingesetzt. Die Überlegungen zu den Größenordnungen der CS-S-Beschleunigungen (Abschnitt 4.1.1) gelten somit auch für die Fehler aufgrund von *offsets*. So geht z.B. in die z-Komponente von \underline{F}_z^{off} (Formel 5.37) w_y^2 und V_{zz} mit gleichem Vorzeichen ein. Das ist der Grund, weshalb die z-Komponente in Abbildung 5.16 (blau) um zwei Größenordnungen größer ist, als die Fehler in die beiden anderen Richtungen und damit auch die einzige Fehlerkomponente in der Größenordnung von $10^{-7} \frac{m}{s^2}$ ist.

Die z-Komponente von \underline{F}^{off} (Abbildung 5.17; blau) liegt deshalb ebenfalls in der Größenordnung von $10^{-7} \frac{m}{s^2}$ und stellt somit den größten Fehler aufgrund *offset* bei GOCE dar. Die Untersuchung hat somit gezeigt, dass ein gewisser *offset* in x-Richtung einen wesentlich kleineren Fehler erzeugt als derselbe *offset* in y- oder v.a. z-Richtung. Im Fall von GOCE bewirkt der *offset* o_z den größten Fehler (stets in z-Richtung), obwohl o_z nicht den größten *offset* darstellt.

Kapitel 6

Fehlerfortpflanzung

In diesem Kapitel wird eine einfache Fehlerfortpflanzung ausgehend von den GOCE-Messgrößen bis hin zu den Schweregradienten durchgeführt. Zu beachten ist dabei, dass die angegebenen Genauigkeiten der Akzelerometerachsen von $1 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ für die beiden hochsensitiven Achsen und $1 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ für die weniger genaue Achse nur innerhalb der Messbandbreite von 5 mHz bis 100 mHz gelten. Die Formel zur Fehlerfortpflanzung in ihrer allgemeinen Form lautet:

$$\underline{K}_{yy} = \underline{A} \cdot \underline{K}_{xx} \cdot \underline{A}^T \quad (6.1)$$

mit

\underline{A} : Jakobi-Matrix

\underline{K}_{xx} : Kovarianzmatrix der Messgrößen

\underline{K}_{yy} : Kovarianzmatrix der Zielgrößen

Die Jakobi Matrix \underline{A} enthält dabei spaltenweise die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung nach allen Messgrößen. Existieren mehrere Beobachtungsgleichungen wird die A-Matrix um die entsprechenden Zeilen erweitert.

\underline{K}_{xx} , also die Kovarianzmatrix der Messgrößen enthält die Varianzen der Messgrößen auf der Hauptdiagonale. Zu beachten ist hierbei, dass die Reihenfolge der Messgrößen in \underline{K}_{xx} und \underline{A} gleich sein muss. Die restlichen Elemente von \underline{K}_{xx} stellen die entsprechenden Kovarianzen zwischen den Messgrößen dar. Sind die Genauigkeiten aller Messgrößen unabhängig voneinander gibt es keine Kovarianzen und \underline{K}_{xx} ergibt sich zu einer Diagonalmatrix.

Um letztendlich Genauigkeitsangaben über die Schweregradienten (siehe Abschnitt 6.4) treffen zu können, müssen zunächst die Fehler der *differential mode* Beschleunigungen berechnet werden (Abschnitt 6.1). Sind diese bekannt, erreicht man durch erneutes Anwenden des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (kurz FFG; Formel 6.1) die Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen, wie sie das Gradiometer liefert (siehe 6.2). Die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich entweder aus Integration der Winkelbeschleunigungen und erneute Anwendung des FFG (siehe 6.2) oder werden aus anderen Quellen

verwendet. (Mehr dazu in Abschnitt 6.5.) In Abschnitt 6.5 werden die Genauigkeitseigenschaften der Schweregradienten und der anderen abgeleiteten Größen (des fehlerfreien Systems) verschiedenen Analysen unterzogen. Um abschließend festzustellen, wie sich die einzelnen Instrumentenfehler auf die Genauigkeiten der Schweregradienten auswirken, wird die Fehlerfortpflanzung in Abschnitt 6.6 um die Instrumentenfehler aus Kapitel 5 erweitert.

6.1 Genauigkeiten der *common mode*- und *differential mode* Beschleunigungen

Das Gesetz der Fehlerfortpflanzung wird in diesem Abschnitt zunächst auf die *differential mode* Beschleunigungen angewandt. Ausgehend von ihrer allgemeinen Formel $a_{d,l,k,i} = \frac{1}{2}(a_{l,i} - a_{k,i})$ ergibt sich die zugehörige Jakobimatrix \underline{A} und die Kovarianzmatrix der Messgrößen \underline{K}_{xx} zu

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right); \quad \underline{K}_{xx} = \left(\begin{array}{cc} \sigma_{a_{l,i}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_{k,i}}^2 \end{array} \right). \quad (6.2)$$

Als Ergebnis der Fehlerfortpflanzung erhält man $\underline{K}_{yy} = \sigma_{a_{d,l,k,i}}^2$, also die Varianz der jeweiligen *differential mode* Beschleunigung $a_{d,l,k,i}$.

Unter Verwendung von $\sigma_{a_{l,i}} = 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ als Genauigkeitsmaß für die hochgenauen Achsen und $\sigma_{a_{k,i}} = 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ für die weniger genauen Achsen wurden die Standardabweichungen¹ der *differential mode* Beschleunigungen berechnet. Tabelle 6.1 zeigt die Ergebnisse der Berechnung.

Genauigkeiten <i>differential mode</i> $\left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	
$\sigma_{a_{d,1,4,x}}$	0.00071
$\sigma_{a_{d,1,4,y}}$	0.07071
$\sigma_{a_{d,1,4,z}}$	0.00071
$\sigma_{a_{d,2,5,x}}$	0.00071
$\sigma_{a_{d,2,5,y}}$	0.00071
$\sigma_{a_{d,2,5,z}}$	0.07071
$\sigma_{a_{d,3,6,x}}$	0.00071
$\sigma_{a_{d,3,6,y}}$	0.07071
$\sigma_{a_{d,3,6,z}}$	0.00071

Tab. 6.1: Genauigkeiten der *differential mode* Beschleunigungen

¹Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz.

Wie man sieht, liegt die Genauigkeit der *differential mode* Beschleunigungen, welche sich aus den weniger genauen Messungen zusammensetzen ($a_{d,1,4,y}$, $a_{d,2,5,z}$ und $a_{d,3,6,y}$) und deshalb bereits in Abschnitt 3.5 rot dargestellt wurden, wieder ungefähr bei $10^{-10} \frac{m}{s^2}$. Die restlichen *differential mode* Beschleunigungen, welche in Abschnitt 3.5 grün dargestellt wurden können wieder auf ca. $10^{-12} \frac{m}{s^2}$ genau bestimmt werden. Die exakten Zahlenwerte in Tabelle 6.1 zeigen sogar eine geringe theoretische Genauigkeitssteigerung durch die Bildung des *differential mode*. So ergeben sich z.B. $\sigma_{a_{d,1,4,y}}$ mit ca. $0.7 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ und $\sigma_{a_{d,1,4,z}}$ mit ca. $0.7 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ im Rahmen der Fehlerfortpflanzung durch Division der Genauigkeiten der einzelnen Beschleunigungen ($10^{-10} \frac{m}{s^2}$ und $10^{-12} \frac{m}{s^2}$) durch $\sqrt{2}$.

Bei der Fehlerberechnung der *common mode* Beschleunigungen ($a_{c,l,k,i} = \frac{1}{2}(a_{l,i} + a_{k,i})$) ergibt sich dieselbe K_{xx} -Matrix wie für die *differential mode* Beschleunigungen. Auch die A-Matrizen der beiden Größen sind bis auf ein Vorzeichen gleich ($\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ für *common mode*). Weil die Elemente der A-Matrix bei der Fehlerfortpflanzung quadratisch eingehen, hat das unterschiedliche Vorzeichen keinen Einfluss auf \underline{K}_{yy} . Die Genauigkeiten der *common mode* und *differential mode* Beschleunigungen sind somit identisch.

6.2 Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen

Sind die Genauigkeiten der *differential mode* Beschleunigungen bekannt, kann auf ihrer Grundlage die Fehlerfortpflanzung für die Winkelbeschleunigungen erfolgen. Im Folgenden sei für das Beispiel der x-Komponente

$$\dot{\omega}_x = -\frac{a_{d,3,6,y}}{L_z} + \frac{a_{d,2,5,z}}{L_y}$$

die Jakobi-Matrix \underline{A} und die Kovarianzmatrix der Messgrößen \underline{K}_{xx} mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_z} & \frac{1}{L_y} & \frac{a_{d,3,6,y}}{L_z^2} & -\frac{a_{d,2,5,z}}{L_y^2} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

und

$$\underline{K}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_{d,3,6,y}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_{d,2,5,z}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{L_z}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{L_y}^2 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

angegeben. Die Kovarianzmatrix der Zielgrößen \underline{K}_{yy} entspricht in diesem Fall $\sigma_{\dot{\omega}_x}^2$. Für die Berechnung der Genauigkeiten $\sigma_{\dot{\omega}_y}^2$ und $\sigma_{\dot{\omega}_z}^2$ der restlichen Winkelbeschleunigungen sei auf die partiellen Ableitungen in Anhang A.1 verwiesen.

Wie man an \underline{K}_{xx} sieht, hängt die Genauigkeit der Winkelbeschleunigungen neben den in vorigen Abschnitt berechneten Genauigkeiten der *differential mode* Beschleunigungen auch von der Genauigkeit der Basislinien ab. An den zugehörigen Stellen in der A-Matrix fließen die *differential mode* Beschleunigungen selbst ein und werden deshalb zur Berechnung der Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen benötigt. Im Folgenden werden stets die 'idealen' CS-S *differential mode* Beschleunigungen aus Abschnitt 4.2.2 (Zeitreihe mit 11000 *sec*) verwendet.

Unter der Annahme, dass die Basislinien mit ihren nominellen Werten fehlerfrei gegeben sind ($\sigma_{L_i} = 0$), haben die *differential mode* Beschleunigungen keinen Einfluss auf die Ergebnisse. Weil außerdem alle restlichen Größen der A- und K_{xx} -Matrix konstant sind, sind in diesem Fall auch die Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen (Tabelle 6.2) konstant.

Genauigkeiten Winkelbeschleunigungen	
$[\frac{rad}{s^2}] \cdot 10^{-9}$	
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 0$
$\sigma_{\dot{\omega}_x}$	0.20000
$\sigma_{\dot{\omega}_y}$	0.00200
$\sigma_{\dot{\omega}_z}$	0.14143

Tab. 6.2: Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen

Wie in Abschnitt 3.6 bereits gezeigt, fließen in $\dot{\omega}_x$ (rot) zwei ungenaue (rote) *differential mode* Beschleunigungen und in $\dot{\omega}_z$ (rot) eine ungenaue *differential mode* Beschleunigung ein. Dem entsprechend liegen die Genauigkeiten $\sigma_{\dot{\omega}_x}$ und $\sigma_{\dot{\omega}_z}$ auch nur im Bereich von $10^{-10} \frac{m}{s^2}$. Die schlechte Genauigkeit von $a_{d,1,4,y}$ bestimmt die Genauigkeit von $\dot{\omega}_z$ also maßgeblich. Nur $\dot{\omega}_y$ (grün) setzt sich aus zwei hochgenauen (grünen) *differential mode* Beschleunigungen zusammen und besitzt deshalb eine Genauigkeit im Bereich von $10^{-12} \frac{m}{s^2}$.

6.3 Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten

Wie bereits erwähnt, werden bei GOCE die Winkelgeschwindigkeiten nicht allein durch Integration der Winkelbeschleunigungen des Gradiometers berechnet, sondern es findet die so genannte *angular rate reconstruction* statt. Dieser Algorithmus bezieht zusätzlich Information aus den Sternsensoren mit ein und nimmt Rücksicht auf die jeweiligen empfindlichen Frequenzbereiche der Instrumente. Auf die *angular rate reconstruction* wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Um selbständig Genauigkeiten für die Winkelgeschwindigkeiten berechnen zu können, kann an dieser Stelle also nur eine Fehlerfortpflanzung auf die Winkelbeschleunigungen des Gradiometers angewandt werden.

Im Folgenden sei die Fehlerfortpflanzung wieder am Beispiel der x-Komponente explizit angegeben. Die Berechnung für die y- und z-Komponente verläuft analog.

Ausgehend von der Formel

$$\omega_x(t_{i+1}) = \omega_x(t_i) + \dot{\omega}_x(t_i)\Delta t \quad \text{mit} \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t; \quad i = 1 \dots 11000 \text{ sec} \quad (6.5)$$

können die Jakobi-Matrix \underline{A} und \underline{K}_{xx} abgeleitet werden,

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\underline{K}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_{\omega_x(t_i)}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_x(t_{i+1})}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

\underline{K}_{yy} entspricht in diesem Fall $\sigma_{\omega_x(t_{i+1})}^2$.

Δt beschreibt dabei das Zeitintervall zwischen zwei Messungen. Im Fall der CS-S-Beschleunigungen und damit auch der in Abschnitt 6.2 berechneten Winkelbeschleunigungen gilt $\Delta t = 1 \text{ sec}$.

Tabelle 6.3 zeigt die maximalen Fehler der Winkelgeschwindigkeiten, wie sie sich aus der Fehlerfortpflanzung am Ende der verwendeten Zeitreihe (nach 11000 *sec*) ergeben. Die Basislinienlängen wurden für diese Berechnung wieder als fehlerfrei ($\sigma_{L_i} = 0$) gegeben angenommen. Die benötigten Startwerte für die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten $\sigma_{\omega_x(t_1)}$, $\sigma_{\omega_y(t_1)}$ bzw. $\sigma_{\omega_z(t_1)}$ wurden ebenfalls gleich Null gesetzt. Man geht also davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 1$ die Winkelgeschwindigkeiten (idealerweise) fehlerfrei (z.B. aus den Sternsensoren) gegeben sind. Unter diesen Voraussetzungen liegen die Fehler der Winkelgeschwindigkeiten ω_x und ω_z im Bereich von $10^{-8} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. ω_y kann um zwei Größenordnungen besser, also auf $10^{-10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ genau bestimmt werden.

Genauigkeiten Winkelgeschwindigkeiten (Maximalwerte) $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] \cdot 10^{-9}$	
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 0$
σ_{ω_x}	20.97522
σ_{ω_y}	0.20975
σ_{ω_z}	14.83246

Tab. 6.3: Maximale Fehler der Winkelgeschwindigkeiten

Es sei noch einmal ausdrücklich erwähnt, dass sich diese Werte nur unter den genannten, theoretischen Voraussetzungen ergeben. In der Realität ergänzt Information aus den Sternsensoren die Winkelbeschleunigungen des Gradiometers. Während bei der hier beschriebenen Vorgehensweise ein quadratisches Wachsen der Fehler mit der Zeit entsteht, findet in Wirklichkeit ein regelmäßiges *up-date* über die Sternsensoren statt und es können so teilweise höhere Genauigkeiten für die Winkelgeschwindigkeiten erzielt werden. Darauf wird in Abschnitt 6.5 noch genauer eingegangen.

6.4 Genauigkeiten der Schweregradienten

Mit den bisher abgeleiteten Genauigkeiten ist es möglich eine Fehlerfortpflanzung für die gesuchten Schweregradienten selbst durchzuführen. Im Folgenden sei je ein Beispiel für die Berechnung eines Hauptdiagonalelementes und die Berechnung eines Nicht-Hauptdiagonalelementes gegeben. Die partiellen Ableitungen für die Fehlerfortpflanzung aller Schweregradienten sind in Anhang A.2 angegeben.

Beispiel Hauptdiagonalelement:
$$V_{xx} = -\frac{2 \cdot a_{d,1,4,x}}{L_x} - \omega_y^2 - \omega_z^2$$

Die wichtigen Größen der Fehlerfortpflanzung ergeben sich zu

$$\underline{A} = \left(-\frac{2}{L_x} \quad \frac{2 \cdot a_{d,1,4,x}}{L_x^2} \quad -2 \cdot \omega_y \quad -2 \cdot \omega_z \right), \quad (6.8)$$

$$\underline{K}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_{d,1,4,x}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{L_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\omega_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_z}^2 \end{pmatrix} \text{ und} \quad (6.9)$$

$$\underline{K}_{yy} = \sigma_{V_{xx}}^2.$$

Die Genauigkeit eines Hauptdiagonalelements hängt jeweils von der Genauigkeit einer *differential mode* Beschleunigung, einer Basislinienlänge und zweier Winkelgeschwindigkeiten ab.

Beispiel Nicht-Hauptdiagonalelement:
$$V_{yx} = -\frac{a_{d,1,4,y}}{L_x} - \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y} + \omega_x \omega_y$$

Die wichtigen Größen der Fehlerfortpflanzung sind in diesem Fall

$$\underline{A} = \left(-\frac{1}{L_x} \quad -\frac{1}{L_y} \quad \frac{a_{d,1,4,y}}{L_x^2} \quad \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y^2} \quad \omega_y \quad \omega_x \right), \quad (6.10)$$

$$\underline{K}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_{d,1,4,y}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_{d,2,5,x}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{L_x}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{L_y}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_y}^2 \end{pmatrix} \text{ und} \quad (6.11)$$

$$\underline{K}_{yy} = \sigma_{V_{yx}}^2.$$

Die Genauigkeit eines Nicht-Hauptdiagonalelements hängt jeweils von der Genauigkeit zweier *differential mode* Beschleunigungen, zweier Basislinienlängen und zweier Winkelgeschwindigkeiten ab.

Für die numerische Berechnung der Genauigkeiten der Schweregradienten werden die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 für die Genauigkeiten der *differential mode* Beschleunigungen verwendet. Die Basislinienlängen werden zunächst wieder fehlerfrei angenommen und für die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten werden die Ergebnisse von Abschnitt 6.3 eingesetzt. (In Abschnitt 6.5 werden zum Vergleich auch Werte aus anderen Quellen herangezogen.) Tabelle 6.4 zeigt die maximalen Fehler der Schweregradienten, die sich am Ende der Zeitreihe (nach 11000 *sec*) mit dieser Berechnung ergeben.

Genauigkeiten Schweregradienten (Maximalwerte) [E]	
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 0$
$\sigma_{V_{xx}}$	0.00287
$\sigma_{V_{yy}}$	0.00283
$\sigma_{V_{zz}}$	0.00287
$\sigma_{V_{xy}}$	0.14354
$\sigma_{V_{xz}}$	0.00200
$\sigma_{V_{yz}}$	0.20075

Tab. 6.4: Genauigkeiten der Schweregradienten

Den größten Einfluss auf die Genauigkeiten der Schweregradienten haben dabei die Fehler der *differential mode* Beschleunigungen. $\sigma_{a_{d,1,4,x}}$ (siehe K_{xx} -Matrix 6.9) hat also z.B. den größten Einfluss auf den Fehler von V_{xx} . $\sigma_{a_{d,1,4,y}}$ und $\sigma_{a_{d,2,5,x}}$ (siehe K_{xx} -Matrix 6.11) bestimmen maßgeblich die Genauigkeit von V_{xy} . In Abschnitt 3.7 wurden bereits die drei Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix sowie V_{xz} grün dargestellt, da in diese Größen nur hoch genaue (grüne) *differential mode* Beschleunigungen einfließen. Die Annahme, dass diese Elemente deshalb genauer bestimmbar sind bestätigt sich nun numerisch (vgl. Tabelle 6.4). Die genannten Elemente haben jeweils Genauigkeiten in der Größenordnung von mE . Die Genauigkeiten der restlichen Elemente, V_{xy} und V_{yz} liegen dagegen im Bereich von $\frac{1}{10} E$. Am schlechtesten bestimmbar ist nach Tabelle 6.4 V_{yz} . Grund dafür ist der Einfluss von zwei ungenauen (roten) *differential mode* Beschleunigungen (vgl. Formel 3.61).

6.5 Fehleranalyse

Zu Beginn dieses Abschnitts seien noch einmal die Voraussetzungen, die bei den bisherigen Berechnungen dieses Kapitels gelten zusammengestellt:

- i. Fehlerfreie Basislinien $\sigma_{L_x} = \sigma_{L_y} = \sigma_{L_z} = 0$
- ii. Winkelgeschwindigkeiten wie bei Berechnung der CS-S-Beschleunigungen, d.h.
 $\omega_x = 0$; $\omega_y = 1.17 \cdot 10^{-3}$; $\omega_z = 0$

iii. Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten aus FFG (Abschnitt 6.3)

Die Berechnung mit diesen Voraussetzungen wird im Folgenden stets als Fall 1 bezeichnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.5 (Fall 1) noch einmal zusammengestellt.

In diesem Abschnitt wird erneut das FFG zur Berechnung der Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen, Winkelgeschwindigkeiten und Schweregradienten angewandt. Es werden dabei die für Fall 1 gültigen Voraussetzungen abgeändert, um verschiedene Analysen durchführen zu können. Es werden konkret folgende Fragen untersucht:

1. Wie groß dürfen die Fehler der Basislinienlängen σ_{L_i} theoretisch sein, um die Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix auf $\frac{1}{1000} E$, $\frac{1}{100} E$ bzw. $\frac{1}{10} E$ genau bestimmen zu können?
2. Wirkt sich die Verwendung von realistischen Werten für die Winkelgeschwindigkeiten ω_x und ω_z , statt dem nominellen Wert Null merklich auf die Ergebnisse aus?
3. Welche Genauigkeiten erhält man für die Schweregradienten bei Verwendung (Festsetzen) von realistischen Werten (aus *angular rate reconstruction*) für die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten?

zu Frage 1)

Im Rahmen dieser Untersuchung soll festgestellt werden, mit welchem Fehler die Basislinienlängen gegeben sein dürfen, um die gewünschten Genauigkeiten $\frac{1}{1000} E$, $\frac{1}{100} E$ bzw. $\frac{1}{10} E$ für die Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix zu erhalten.

Tabelle 6.5 zeigt neben Fall 1, die Ergebnisse dreier weiterer Berechnungen. Die Voraussetzungen ii. und iii. von Fall 1 gelten dabei stets. Lediglich für die Genauigkeiten der Basislinienlängen (σ_{L_i}) gelten unterschiedliche Werte.

In Fall 2 sind die Basislinienlängen mit μm -Genauigkeit gegeben. Auch wenn V_{zz} in diesem Fall mit ca. $9 mE$ schon nahe an $\frac{1}{100} E$ liegt, so sind V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} und V_{xz} doch immer noch im Bereich von mE . Nur V_{xy} und V_{yz} liegen, wie auch schon in Fall 1 im Bereich von $\frac{1}{10} E$. Bei GOCE können nach diesen Berechnungen also alle wichtigen Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix theoretisch auf mE genau gemessen werden.

In Fall 3 gilt $\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-5} m$. Nur V_{xx} und V_{xz} haben jetzt Fehler von wenigen mE . Die Genauigkeiten der wichtigen Hauptdiagonalelemente V_{yy} und V_{zz} liegen bereits im $\frac{1}{100} E$ Bereich.

In Fall 4 haben die Basislinienlängen die Fehler $1 \cdot 10^{-4} m$. Während V_{yy} und V_{zz} in diesem Fall nur auf $\frac{1}{10} E$ genau bekannt sind, liegt V_{xx} noch immer im mE -Bereich. V_{xx} besitzt diese gute Genauigkeit, weil in seine Berechnung $a_{d,1,4,x}$ einfließt, sobald die Basislinienlängen nicht fehlerfrei gegeben sind und $a_{d,1,4,x}$ wesentlich kleiner ist als $a_{d,2,5,y}$ (für Berechnung von V_{yy}) oder $a_{d,3,6,z}$ (für Berechnung von V_{zz}).

	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 0$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-5}$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-4}$
$\omega_{x/z} \left[\frac{rad}{s} \right]$	$\omega_{x/z} = 0$	$\omega_{x/z} = 0$	$\omega_{x/z} = 0$	$\omega_{x/z} = 0$
$\sigma_{\dot{\omega}_x} \left[\frac{rad}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.20000	0.20000	0.20001	0.20108
$\sigma_{\dot{\omega}_y} \left[\frac{rad}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.00200	0.00200	0.00201	0.00307
$\sigma_{\dot{\omega}_z} \left[\frac{rad}{s^2} \right] \cdot 10^{-9}$	0.14143	0.14143	0.14143	0.14143
$\sigma_{\omega_x} \left[\frac{rad}{s} \right] \cdot 10^{-9}$	20.97522	20.97523	20.97555	21.00793
$\sigma_{\omega_y} \left[\frac{rad}{s} \right] \cdot 10^{-9}$	0.20975	0.20976	0.21021	0.25121
$\sigma_{\omega_z} \left[\frac{rad}{s} \right] \cdot 10^{-9}$	14.83246	14.83246	14.83246	14.83247
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00287	0.00287	0.00288	0.00459
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00283	0.00396	0.02780	0.27658
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00287	0.00875	0.08282	0.82771
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14354	0.14354	0.14354	0.14355
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.00200	0.00200	0.00201	0.00307
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20075	0.20075	0.20075	0.20175

Tab. 6.5: Auswirkung der Fehler der Basislinienlängen

Tabelle 6.6 fasst zusammen mit welchen Fehlern die Basislinienlängen L_i höchstens behaftet sein dürfen, um alle Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix V_{ii} mit den gewünschten Genauigkeiten zu erhalten. ($i = x, y, z$)

$\sigma_{V_{ii}}$	$\frac{1}{1000} E$	$\frac{1}{100} E$	$\frac{1}{10} E$
σ_{L_i}	$10^{-6} m$	$10^{-5} m$	$10^{-4} m$

Tab. 6.6: Zusammenfassung - Frage 1

zu Frage 2)

Es soll die Frage geklärt werden, ob sich die Genauigkeiten der Gradienten wesentlich ändern, wenn im Rahmen der Fehlerfortpflanzung statt der nominellen Werte ($\omega_x = \omega_z = 0$) realistischere Werte für die Winkelgeschwindigkeiten verwendet werden.

[Alenia, 2005] kann entnommen werden, dass bei Tests mit dem GOCE E2E-Simulator ω_x und ω_z maximal $1 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{s}$ betragen. Mit diesen Werten (und $\omega_y = 1.17 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$) wurde die Fehlerfortpflanzung weitere zweimal durchgeführt. Das Ergebnis dieser Berechnungen zeigt Tabelle 6.7 unter Fall 5 und Fall 6.

In Fall 5, wie auch schon in Fall 1 wurden die Basislinienlängen fehlerfrei vorausgesetzt (Voraussetzung i.). Die beiden genannten Fälle können somit gut miteinander verglichen werden. Die Winkelgeschwindigkeiten fließen sowohl bei der Berechnung der einzelnen Beschleunigungen (und damit auch in die *differential mode* Beschleunigungen), als auch bei

der Fehlerfortpflanzung für die Gradienten selbst ein. Da allerdings nur bei fehlerbehafteten Basislinienlängen die *differential mode* Beschleunigungen für die Fehlerfortpflanzung eine Rolle spielen (vgl. Formeln 6.3 und 6.4, sowie 6.8, 6.9, 6.10 und 6.11), ergibt sich für Fall 5 und Fall 1 kein Unterschied in den Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten. Die Winkelgeschwindigkeiten fließen direkt erst bei der Anwendung des FFG auf die Schweregradienten ein (Abschnitt 6.4). Tabelle 6.7 zeigt, dass sich die Genauigkeiten der Schweregradienten zwischen Fall 5 und Fall 1 nur um wenige mE unterscheiden und somit die Schweregradienten auch in Fall 5 auf mE genau bestimmbar sind.

In Fall 6 wurden, wie auch schon in Fall 2 die Genauigkeiten der Basislinien auf $1 \mu m$ gesetzt. Es macht deshalb Sinn diese beiden Fälle miteinander zu vergleichen. Die aufgrund unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeiten ebenfalls unterschiedlichen *differential mode* Beschleunigungen von Fall 6 und Fall 2 fließen nun bereits bei der Anwendung des FFG auf die Winkelbeschleunigungen ein (vgl. Abschnitt 6.2). Deshalb sind die Genauigkeiten der Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten in diesen beiden Fällen nicht identisch. Die Genauigkeiten der Schweregradienten unterscheiden sich allerdings auch bei Basislinienfehlern von $1 \mu m$ nur um wenige mE und sind auch noch immer auf mE genau bestimmbar.

	Fall 1	Fall 5	Fall 2	Fall 6
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 0$	$\sigma_{L_i} = 0$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-6}$
$\omega_{x/z} [\frac{rad}{s}]$	$\omega_{x/z} = 0$	$\omega_{x/z} = 1 \cdot 10^{-4}$	$\omega_{x/z} = 0$	$\omega_{x/z} = 1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{\dot{\omega}_x} [\frac{rad}{s^2}] \cdot 10^{-9}$	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
$\sigma_{\dot{\omega}_y} [\frac{rad}{s^2}] \cdot 10^{-9}$	0.00200	0.00200	0.00200	0.00200
$\sigma_{\dot{\omega}_z} [\frac{rad}{s^2}] \cdot 10^{-9}$	0.14143	0.14143	0.14143	0.14143
$\sigma_{\omega_x} [\frac{rad}{s}] \cdot 10^{-9}$	20.97522	20.97522	20.97523	20.97523
$\sigma_{\omega_y} [\frac{rad}{s}] \cdot 10^{-9}$	0.20975	0.20975	0.20976	0.20976
$\sigma_{\omega_z} [\frac{rad}{s}] \cdot 10^{-9}$	14.83246	14.83246	14.83246	14.83247
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00287	0.00413	0.00287	0.00413
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00283	0.00587	0.00396	0.00646
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00287	0.00508	0.00875	0.00971
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14354	0.14354	0.14354	0.14354
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.00200	0.00326	0.00200	0.00326
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20075	0.20075	0.20075	0.20075

Tab. 6.7: Verwendung von realistischen Werten für die Winkelgeschwindigkeiten

Die Untersuchungen haben insgesamt gezeigt, dass sich die Genauigkeiten der Schweregradienten nur unwesentlich ändern, wenn ω_x und ω_z nicht exakt gleich Null, sondern auf $1 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{s}$ gesetzt werden.

zu Frage 3)

Mit der dritten und letzten Untersuchung soll gezeigt werden, welche Genauigkeiten sich für die Schweregradienten ergeben, wenn die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten auf realistische Werte festgesetzt werden.

Tabelle 6.8 zeigt die laut [Alenia, 2005] maximalen Fehler der Winkelgeschwindigkeiten nach *angular rate reconstruction* in den jeweiligen Frequenzbereichen.

Frequenzbereich	Fall	σ_{ω_x}	σ_{ω_y}	σ_{ω_z}
100 <i>mHz</i> (oberes Ende MBW)	7	$1.0 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	$7.0 \cdot 10^{-10}$
5 <i>mHz</i> (unteres Ende MBW)	8	$8.5 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$
< 5 <i>mHz</i> (unterhalb MBW)	9	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$

Tab. 6.8: Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten

Mit diesen Werten können die Fälle 7, 8 und 9 (siehe Tabelle 6.9) berechnet werden. Die restlichen Parameter werden dabei wie für den bereits bekannten Fall 6, welcher als Vergleich dieser Untersuchung dienen soll festgesetzt. Es gilt also $\omega_x = \omega_z = 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und $\sigma_{L_i} = 1 \mu\text{m}$. In Fall 6 (vgl. Tabelle 6.9) werden die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten ω_x und ω_z auf wenige $10^{-8} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und σ_{ω_y} auf wenige $10^{-10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ geschätzt. Für die Hauptdiagonalelement der Gradientenmatrix und V_{xz} ergeben sich so nur Fehler im Bereich von mE .

	Fall 6	Fall 7	Fall 8	Fall 9
$\sigma_{L_i} [m]$	$\sigma_{L_i} = 1 \cdot 10^{-6}$			
$\omega_{x/z} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$\omega_{x/z} = 1 \cdot 10^{-4}$			
$\sigma_{\omega_x} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$20.97523 \cdot 10^{-9}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{\omega_y} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$0.20976 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{\omega_z} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$14.83247 \cdot 10^{-9}$	$7.0 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00413	0.00283	0.01187	1.17427
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00646	0.00394	0.01858	0.14148
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00971	0.00877	0.02140	1.17430
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14354	0.14143	0.17289	0.60393
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.00326	0.00200	0.00930	0.07074
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20075	0.20000	0.20347	0.62026

Tab. 6.9: Festsetzen der Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten auf realistische Werte

Neben Tabelle 6.9 soll Abbildung 6.1 die Ergebnisse der Fälle 7, 8 und 9 zusätzlich veranschaulichen. Die Abbildung zeigt die Genauigkeiten der Schweregradienten am oberen Ende der MBW (100 *mHz*, Fall 7), unteren Ende der MBW (5 *mHz*, Fall 8), sowie unterhalb

der MBW ($< 5 \text{ mHz}$, Fall 9). Für die Darstellung von Fall 9 wurde als Frequenz unterhalb der MBW 1 mHz festgesetzt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass in [Alenia, 2005] nicht explizit angegeben wird, bei welcher Frequenz ($< 5 \text{ mHz}$) die Angaben für diesen Fall gelten. Außerdem wurden in Abbildung 6.1 für eine möglichst einfache und dennoch realitätsnahe Darstellung die Ergebnisse zwischen den drei berechneten Frequenzen linear verbunden.

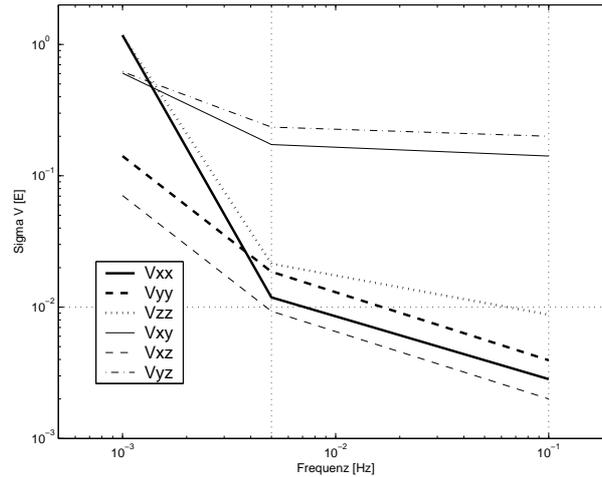


Abb. 6.1: Genauigkeiten der Schweregradienten für Fall 7, 8 und 9

Bei 100 mHz , dem oberen Ende der MBW (Fall 7) sind die Fehler der Winkelgeschwindigkeiten jeweils um eine Größenordnung kleiner als in Fall 6. Die Genauigkeiten der Schweregradienten sind in diesem Fall um weniger als $3 E$ kleiner als in Fall 7 und liegen somit noch immer im Bereich von mE .

In Fall 8, welcher am unteren Ende der MBW (bei 5 mHz) gilt, liegt nur σ_{ω_y} im Bereich von $10^{-9} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Die restlichen beiden Winkelgeschwindigkeiten sind dagegen um eine Größenordnung schlechter bestimmt. In diesem Fall haben alle drei wichtigen Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix bereits Fehler von wenigen $\frac{1}{100} E$.

In Fall 9 werden die Genauigkeiten der Winkelgeschwindigkeiten mit $5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ festgesetzt. Diese Werte gelten unterhalb der MBW des GOCE-Gradiometers, also für Frequenzen kleiner als 5 mHz . In diesem Fall sind V_{xx} und V_{zz} nur auf ganze E bekannt. Diese geringe Genauigkeit wird maßgeblich durch den Einfluss von ω_y bestimmt (vgl. Jakobi-Matrix 6.8). V_{yy} kann noch auf $\frac{1}{10} E$ genau bestimmt werden, weil bei der entsprechenden Fehlerfortpflanzung nur die Winkelgeschwindigkeiten ω_x und ω_z einfließen, welche eine Größenordnung kleiner sind als ω_y .

In Tabelle 6.10 sind die Größenordnungen der maximalen Fehler der Hauptdiagonalelemente V_{ii} der Gradientenmatrix, für die drei untersuchten Frequenzbereiche zusammengefasst.

Frequenzbereich	Fall	$\sigma_{V_{ii}}$
100 <i>mHz</i> (oberes Ende MBW)	7	$\frac{1}{1000} E$
5 <i>mHz</i> (unteres Ende MBW)	8	$\frac{1}{100} E$
< 5 <i>mHz</i> (unterhalb MBW)	9	1 <i>E</i>

Tab. 6.10: Zusammenfassung - Frage 3

6.6 Fehlerfortpflanzung mit Instrumentenfehlern

Bisher wurden die Formeln aus Kapitel 3 zur Fehlerfortpflanzung verwendet. Es werden darin neben dem Instrumentenrauschen selbst, keine weiteren Instrumentenfehler berücksichtigt. In diesem Abschnitt soll untersucht werden wie sich die Instrumentenfehler *bias*, Skalierungsfaktor, Misalignment und Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen auf die Genauigkeiten der Schweregradienten auswirken. Es wird deshalb eine Fehlerfortpflanzung, mit den genannten Instrumentenfehlern als Eichgrößen durchgeführt. Mit Gleichung 5.17 ist bereits der Zusammenhang zwischen unverfälschten und messbaren Beschleunigungen bei vorhandenen Instrumentenfehlern² bekannt. (Im fehlerfreien Fall sind beide Beschleunigungen identisch.) Durch Anwendung des FFG auf diesen Zusammenhang, erhält man zunächst Genauigkeiten für die einzelnen messbaren Beschleunigungen. Diese können in zweiten Schritt verwendet werden, um die Genauigkeiten der Schweregradienten bei vorhandenen Instrumentenfehlern gemäß den Abschnitten 6.1 bis 6.4 zu berechnen.

Die Fehlerfortpflanzung der Instrumentenfehler auf die einzelnen messbaren Beschleunigungen wird im Folgenden für die x-Komponente explizit dargestellt. (Komplette Darstellung siehe Anhang A.3). Die erste Zeile von Gleichung 5.17, welche die messbare Beschleunigung je Akzelerometer *l* in x-Richtung wiedergibt lautet ausmultipliziert:

$$a_{l,x}^{gem} = f = a_{l,x}^{tat} + b_{l,x} + s_{l,x} \cdot a_{l,x}^{tat} + (\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) \cdot a_{l,y}^{tat} + (-\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) \cdot a_{l,z}^{tat} \quad (6.12)$$

Für die Jakobi-Matrix werden die partiellen Ableitungen nach allen Messgrößen gebildet:

$$\frac{\partial f}{\partial a_{l,x}^{tat}} = 1 + s_{l,x} ; \quad \frac{\partial f}{\partial a_{l,y}^{tat}} = (\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) ; \quad \frac{\partial f}{\partial a_{l,z}^{tat}} = (-\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_{l,x}} = 1 ; \quad \frac{\partial f}{\partial b_{l,y}} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial b_{l,z}} = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_{l,x}} = a_{l,x}^{tat} ; \quad \frac{\partial f}{\partial s_{l,y}} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial s_{l,z}} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Phi_{l,x}} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial \Phi_{l,y}} = -a_{l,z}^{tat} ; \quad \frac{\partial f}{\partial \Phi_{l,z}} = a_{l,y}^{tat} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_{l,x}} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial \eta_{l,y}} = a_{l,z}^{tat} ; \quad \frac{\partial f}{\partial \eta_{l,z}} = a_{l,y}^{tat} \quad (6.17)$$

²Der Ausdruck Instrumentenfehler wird in diesem Abschnitt nicht für das Instrumentenrauschen, sondern stets als Überbegriff für *bias*, Skalierungsfaktor, Misalignment und Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen verwendet

\underline{K}_{xx} ist eine Diagonalmatrix mit den Varianzen der Messgrößen. Die Reihenfolge muss dabei der Anordnung in der Jakobi-Matrix entsprechen. Als Ergebnis der Fehlerfortpflanzung erhält man die durch Instrumentenfehler beeinflussten Genauigkeiten der Beschleunigungen in x-Richtung, $\underline{K}_{yy} = \sigma_{a_{i,x}}^2$.

Die Genauigkeiten in y- und z-Richtung lassen sich auf analogem Weg, durch Anwendung des FFG auf die zweite und dritte Zeile von Gleichung 5.17 finden. Wie bereits erwähnt, können die so berechneten Genauigkeiten verwendet werden um gemäß Abschnitt 6.1 die Genauigkeiten des *differential mode* bei vorhandenen Instrumentenfehlern zu berechnen. Zur Ableitung der wichtigen Genauigkeiten der Schweregradienten, kann wieder gemäß den Abschnitten 6.2 bis 6.4 verfahren werden.

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren zur Fehlerfortpflanzung mit Instrumentenfehlern wird mehrmals durchgeführt, um die Auswirkung der einzelnen Instrumentenfehler zu untersuchen. In den Ableitungen nach den Skalierungsfaktoren (Ableitungen 6.15), Misalignment-Winkeln (Ableitungen 6.16) und Nicht-Orthogonalitäts-Winkeln (Ableitungen 6.17) treten die unverfälschten Beschleunigungen $a_{l,i}^{tat}$ auf. Als Zahlenwerte für diese unverfälschten Beschleunigungen dienen die 'idealen' CS-S-Beschleunigungen aus Abschnitt 4.1.1 mit den Genauigkeiten $10^{-12} \frac{m}{s^2}$ (hochgenaue Achsen) bzw. $10^{-10} \frac{m}{s^2}$ (weniger genaue Achsen). Die Basislinien werden als fehlerfrei ($\sigma_{L_i} = 0$) bekannt angenommen.

Bias

Tabelle 6.11 zeigt die Genauigkeiten der Schweregradienten für den Fall, dass neben *bias* keine anderen Instrumentenfehler vorhanden sind. Da der *bias* linear in die Fehlerfortpflanzung eingeht (vgl. Ableitungen 6.14), werden keine Werte für den *bias* selbst benötigt. Lediglich die Genauigkeit mit der der *bias* bekannt ist, beeinflusst die Genauigkeiten der abgeleiteten Größen.

	Fall b1	Fall b2	Fall b3	Fall b4
$\sigma_{b_1} \left[\frac{m}{s^2} \right]$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-11}$
$\sigma_{b_2} \left[\frac{m}{s^2} \right]$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-9}$
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00503	0.00584	0.02901	0.04149
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00651	0.00829	0.02889	0.05894
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00584	0.00719	0.02916	0.05109
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14356	0.20300	0.14495	1.44258
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.00382	0.00460	0.02027	0.03272
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20076	0.28391	0.20176	2.01753

Tab. 6.11: Genauigkeiten der Schweregradienten bei vorhandenem *bias*

In Fall b1 wird angenommen, alle *bias* seien mit der Messgenauigkeit der guten Achsen, also $1 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ bekannt. Nach Anwendung des FFG auf Gleichung 5.17 ergeben sich die Fehler entlang aller hochgenauen Achsen zu $1.41425 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ und zu $1.00005 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ entlang

der weniger genauen Achsen. Alle Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix, sowie V_{xz} sind in diesem Fall noch auf mE genau bestimmbar. Dennoch werden die Genauigkeiten gegenüber dem fehlerfreien Fall (vgl. Fall 1; Abschnitt 6.5) um wenige mE verschlechtert. In Fall b2 werden die Fehler der *bias* entlang der guten Achsen (σ_{b_1}) wieder auf $1 \cdot 10^{-12} \frac{m}{s^2}$ gesetzt. Die Fehler der *bias* entlang der schlechten Achsen (σ_{b_2}) werden, analog zu den Fehlern der Beschleunigungen selbst um den Faktor 100 größer gewählt. Die Genauigkeiten der weniger genauen Achsen verschlechtern sich in diesem Fall auf $1.41421 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$. (Die Genauigkeiten der hochgenauen Achsen verändern sich gegenüber Fall b1 nicht.) Auch unter diesen Voraussetzungen bleiben die Standardabweichungen aller wichtigen Schweregradienten im mE -Bereich.

Fall b3 und b4 zeigen, dass eine Verschlechterung der Kenntnis der *bias* um den Faktor 10 (gegenüber den Fällen b1 und b2) auch die Fehler der Schweregradienten ungefähr um den Faktor 10 vergrößert.

Skalierungsfaktor

Die Genauigkeiten in Tabelle 6.12 ergeben sich, wenn ausschließlich Skalierungsfaktoren vorhanden sind. Da die Skalierungsfaktoren in Gleichung 5.17 als Produkt auftreten, werden zur Fehlerfortpflanzung Werte für die Skalierungsfaktoren selbst benötigt (vgl. Ableitungen 6.13). Der in [Müller, 2001] angegebene Wert von 10^{-2} für die Skalierungsfaktoren wird auch in dieser Arbeit verwendet.

	Fall s1	Fall s2	Fall s3	Fall s4
σ_{s_1}	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
σ_{s_2}	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00417	0.00417	0.00417	0.00426
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00600	0.00600	0.01125	0.01140
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00591	0.00591	0.02964	0.02969
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14498	0.14504	0.14498	0.15104
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.00329	0.00329	0.00329	0.00341
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20276	0.20290	0.20276	0.21670

Tab. 6.12: Genauigkeiten der Schweregradienten bei vorhandenem Skalierungsfehler

Sind alle Skalierungsfaktoren auf $1 \cdot 10^{-6}$ bekannt (Fall s1), können alle wichtigen Gradienten V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} auf mE genau bestimmt werden. Wie Fall s2 belegt, ändern sich die Genauigkeiten der Schweregradienten nur unwesentlich, wenn die Fehler der Skalierungsfaktoren (analog zum Fehler der *bias*) entlang der schlechten Achsen (σ_{s_2}) um den Faktor 100 größer gewählt werden.

In den Fällen s3 und s4 werden die Fehler der Skalierungsfaktoren gegenüber den Fällen s1 und s2 jeweils um den Faktor 10 vergrößert. Die Fehler von V_{xx} und V_{yy} liegen dann immer noch im mE -Bereich. Der Fehler von V_{zz} dagegen liegt bei wenigen $\frac{1}{100} E$. Grund dafür ist

der Einfluss der CS-S-Beschleunigungen $a_{3,z}^{tat}$ und $a_{6,z}^{tat}$, welche bekanntlich weitaus größer sind als die Beschleunigungen in x- oder y-Richtung. $a_{3,z}^{tat}$ und $a_{6,z}^{tat}$ fließen zunächst in die Genauigkeiten der messbaren Beschleunigungen $a_{3,z}^{gem}$ und $a_{6,z}^{gem}$ (vgl. Ableitungen 6.15) und letztendlich in die Genauigkeit von V_{zz} ein.

Misalignment und Nicht-Orthogonalität

Bei der Berechnung der Fälle m1 und m2 (Tabelle 6.13) wird angenommen, dass ausschließlich Misalignmentfehler vorhanden sind. Weil diese in Gleichung 5.17 als Produkt einfließen, werden zur Fehlerfortpflanzung Werte für die Misalignmentwinkel selbst benötigt (vgl. Ableitungen 6.13). Diese werden [Müller, 2001] mit 10^{-4} rad entnommen.

Die Fehlerfortpflanzung bei ausschließlich vorhandener Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen erzielt dieselben Ergebnisse wie die Fälle m1 und m2, da sich die Ableitungen 6.16 und 6.17 lediglich um ein Vorzeichen unterscheiden und die Nicht-Orthogonalitätswinkel laut [Müller, 2001] ebenfalls bei 10^{-4} rad liegen.

	Fall m1	Fall m2
$\sigma_{\Phi/\eta} [\text{rad}]$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00553	0.03706
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00603	0.01518
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00632	0.03794
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.14363	0.15257
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.01497	0.14618
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.20134	0.25289

Tab. 6.13: Genauigkeiten der Schweregradienten bei vorhandenem Misalignment

Wie Fall m1 zeigt können die wichtigen Schweregradienten V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} auf mE genau bestimmt werden, wenn die Misalignmentwinkel mit einer Genauigkeit von 10^{-5} rad bekannt sind. In Fall m2 sind die Fehler der Winkel um den Faktor 10 größer als in Fall m1. Die Schweregradienten V_{yy} und V_{zz} sind so nur noch auf $\frac{1}{100} E$ genau bestimmbar.

Gesamteffekt aller Instrumentenfehler

Mit den Untersuchungen zu den Instrumentenfehlern ist nun bekannt, wie groß die Standardabweichungen der einzelnen Instrumentenfehler sein dürfen, um die wichtigen Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix auf mE genau bestimmen zu können. Die Fälle b2, s2 und m1 erfüllen jeweils diese Bedingung. Tabelle 6.14 zeigt abschließend die Genauigkeiten der Schweregradienten, wenn alle Instrumentenfehler gleichzeitig vorhanden sind und die Werte der Fälle b2, s2 und m1 gelten. Wie man sieht, bleiben unter diesen Voraussetzungen, als Gesamteffekt aller Instrumentenfehler die wichtigen Schweregradienten

V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} auf mE genau bestimmbar.

	Fall z
$\sigma_{b_1} \left[\frac{m}{s^2} \right]$	$1 \cdot 10^{-12}$
$\sigma_{b_2} \left[\frac{m}{s^2} \right]$	$1 \cdot 10^{-10}$
σ_{s_1}	$1 \cdot 10^{-6}$
σ_{s_2}	$1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{\Phi} [rad]$	$1 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{\eta} [rad]$	$1 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{V_{xx}} [E]$	0.00785
$\sigma_{V_{yy}} [E]$	0.00862
$\sigma_{V_{zz}} [E]$	0.00944
$\sigma_{V_{xy}} [E]$	0.20419
$\sigma_{V_{xz}} [E]$	0.02118
$\sigma_{V_{yz}} [E]$	0.28626

Tab. 6.14: Genauigkeiten der Schweregradienten bei ausreichend bekannten Instrumentenfehlern

Kapitel 7

Zusammenfassung und Schlussbemerkungen

In diesem letzten Kapitel wird zunächst kurz das Ziel dieser Arbeit wiedergegeben. Im Anschluss folgt eine Zusammenfassung der einzelnen Kapitel dieser Arbeit. Abschließend werden mögliche weiterführende Arbeiten genannt.

Ziel der Arbeit war die vollständige Darstellung der Gradiometergleichungen unter Berücksichtigung der Instrumentenfehler und unter Berücksichtigung der jeweiligen Messgenauigkeit der einzelnen Beschleunigungsmesserachsen. Des Weiteren sollte eine numerische Fehleranalyse durch Fehlerfortpflanzung der einzelnen Effekte durchgeführt werden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass diese konkreten Ziele erreicht wurden und die Arbeit damit sowohl zum allgemeinen Verständnis des GOCE-Gradiometers, als auch des gesamten GOCE-Messsystems beiträgt.

Die ESA-Mission GOCE stellt die erste Satellitengradiometriemission dar. Ziel der Mission ist die Messung der Gravitationsgradienten auf mE genau, um daraus bei einer räumlichen Auflösung von mindestens 100 km auf der Erdoberfläche das Geoid mit einer Genauigkeit von $1\text{-}2\text{ cm}$ bestimmen zu können.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, welche **Instrumente** benötigt werden und wie sie angeordnet sein müssen um dieses Ziel zu erreichen. Da das GOCE-**Schweregradiometer** aufgrund seiner kurzen Basislinien und seiner beschränkten Messbandbreite nur die mittleren bis kurzen Wellenlängen des Erdschwerefeldes mit der geforderten Genauigkeit von wenigen mE bestimmen kann, ist die Kombination mit kontinuierlichen **GPS-Messungen** (SST-hl, für den langwelligeren Anteil) nötig. Neben den beiden Hauptinstrumenten von GOCE (Gradiometer und GPS-Empfänger) werden v.a. das **drag control-** und das **angular control-System** benötigt. Letzteres sorgt dafür, dass der Satellit die nominelle Lage, erdgerichtet, einhält. Verwendet wird dazu sowohl Information des Gradiometers (innerhalb MBW), als auch Information aus den Sternensensoren (für niederfrequenten Anteil). Die eigentliche Steuerung erfolgt mit Hilfe von drei Magnetfeldresonanzspulen (stromdurchflossene Spulen mit magnetischem Moment), welche im Magnetfeld der Erde ein

Drehmoment erzeugen. Das *drag control*-System sorgt dafür, dass der Satellit die Flughöhe beibehält. Die *common mode* Beschleunigungen des Gradiometers werden dabei als Kontrollsignal verwendet und nachgesteuert wird mit Hilfe von zwei Ionentriebwerken. Das GOCE-Gradiometer selbst, besteht aus sechs kapazitiven **Beschleunigungsmessern** mit folgender **Konfiguration**. Jedes Paar von Beschleunigungsmessern bildet einen Gradiometerarm. Die drei Gradiometerarme stehen nominell senkrecht aufeinander und bestimmen die Lage des instrumentenfesten Koordinatensystems (GRF, x-Achse (annähernd) in Flugrichtung, y-Achse (annähernd) senkrecht zur Bahnebene, z-Achse (annähernd) radial nach außen), in dem alle Messungen des Gradiometers stattfinden. Die einzelnen GOCE-**Beschleunigungsmesser** besitzen jeweils nur zwei hoch sensitive Achsen und eine schlechtere Achse. Um die drei Hauptdiagonalelemente der Gradientenmatrix, sowie die größte auftretende Winkelgeschwindigkeit (ω_y) ausreichend genau bestimmen zu können, wurden die einzelnen Akzelerometer folgendermaßen angeordnet:

- Gradiometerarm 1-4 (entlang x-Achse): schlechte Akzelerometerachsen in y-Richtung
- Gradiometerarm 2-5 (entlang y-Achse): schlechte Akzelerometerachsen in z-Richtung
- Gradiometerarm 3-6 (entlang z-Achse): schlechte Akzelerometerachsen in y-Richtung

Für das Verständnis der mathematischen Zusammenhänge wurde außerdem das **Prinzip der Gradiometrie** im Weltraum erklärt. Ausgehend vom Potential einer homogenen Kugel konnte gezeigt werden, dass die Geometrie des Erdschwerefeldes durch ein System von Gezeitenellipsoiden veranschaulicht werden kann. Die Schweregradienten können aus der Differenz zweier Beschleunigungen abgeleitet werden. Eine longitudinale Anordnung dient dabei der Messung der Diagonalglieder von \underline{G} . Die Nicht-Hauptdiagonalelemente können mit einer transversalen Anordnung bezüglich der Basis gemessen werden. Durch den Übergang ins bewegte Koordinatensystem wurde die grundlegende **Beobachtungsgleichung des fehlerfreien Gradiometer-Messsystems** (ohne Instrumentenfehler) hergeleitet. Anhand dieser Gleichung wurde festgestellt, dass neben der gravitativen Beschleunigung auch Rotationsterme, nämlich Zentrifugalbeschleunigung und Kreiselbeschleunigung gemessen werden. Durch Einsetzen der richtigen Abstandsvektoren konnten die Gleichungen für die einzelnen messbaren **Beschleunigungen in den je drei Richtungen pro Beschleunigungsmesser** aufgestellt werden. Unter Beachtung der unterschiedlichen Sensitivitäten wurde der *common mode*, also der Mittelwert der Beschleunigungen entlang den Gradiometerarmen gebildet. Aus den Formeln geht hervor, dass der *common mode* im fehlerfreien System stets Null ist. Dank dieser Erkenntnis konnte veranschaulicht werden, dass der *common mode* mögliche translative Beschleunigungen auf den Satelliten misst und deshalb als Eingangsinformation für das *drag control*-System dient. In Flugrichtung, in der die meisten translativen Störkräfte auftreten und es deshalb besonders wichtig ist den Satelliten *drag-free* zu halten können alle drei *common mode* Beschleunigungen hochgenau gemessen werden. Der *differential mode* berechnet sich aus der halben Differenz der Beschleunigungen entlang den Gradiometerarmen und wird zur weiteren Ableitung der Schweregradienten benötigt. Es wurde gezeigt, wie durch Trennung des symmetrischen vom anti-symmetrischen Teil der Messungen die **Winkelbeschleunigungen** aus dem *differential mode* berechnet werden können. In $\dot{\omega}_y$ fließen, wie gewünscht, nur hochgenaue Messungen ein. Mit den Winkelgeschwindigkeiten (aus der *angular rate reconstruction* oder

Integration der Winkelbeschleunigungen) können schließlich die Formeln zur Berechnung der gesuchten **Schweregradienten** aufgestellt werden. Bei der Analyse dieser Gleichungen konnte u.a. festgestellt werden, dass sowohl in V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} , als auch in V_{xz} nur hochgenaue *differential mode* Beschleunigungen einfließen.

Im Rahmen der **allgemeinen Überlegungen zum fehlerfreien Gradiometer-Messsystem** wurden die einzelnen **Beschleunigungen pro Akzelerometer**, sowie die **Schweregradienten** aus den *common mode* und *differential mode* Beschleunigungen einer **E2E-Simulation** berechnet und mit **Referenzwerten** verglichen. Die Referenzwerte, welche aus Schweregradienten rückgerechnet wurden, die auf einem bekannten Schwerefeldmodell basieren liefern selbst bereits wichtige Erkenntnisse, wie z.B. die Größenordnungen der einzelnen messbaren Beschleunigungen. Der Verlauf der E2E-Schweregradienten V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} und V_{xz} stimmt im betrachteten Zeitraum relativ gut mit den Referenzwerten überein. Die E2E-Gradienten V_{xy} und V_{yz} , in die jeweils mindestens eine ungenaue *differential mode* Beschleunigung einfließt weichen dagegen stark von ihren Referenzwerten ab.

Um die erforderlichen Messgenauigkeiten (mE) einzuhalten müssen gewisse Fehlereinflüsse beachtet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb das fehlerfreie Messsystem um die **Instrumentenfehler *bias*, Skalierungsfaktor, Misalignment und Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen** erweitert. Die einzelnen Fehler wurden dabei jeweils in einen *common mode* Anteil und einen *differential mode* Anteil aufgeteilt, was die Untersuchung von verschiedenen Spezialfällen ermöglichte. Für alle Instrumentenfehler außer dem *bias* gilt, dass gleichartige (*common mode*) Fehler (in zwei Akzelerometern, die zur Ableitung eines Gradienten benötigt werden) den *differential mode* von Beschleunigungen, die mit unterschiedlichem Vorzeichen detektiert werden (rotatorische Kräfte) verfälschen. Umgekehrt verfälschen entgegengesetzte (*differential mode*) Fehler den *differential mode* von Beschleunigungen, die mit gleichem Vorzeichen detektiert werden (translatorische Kräfte), vgl. [ESA, 1999]. Neben den Instrumentenfehlern wurde ein weiterer Fehler, nämlich der **offset zwischen dem Mittelpunkt des Gradiometers und Massen-zentrum des Satelliten** analysiert. Es wurde gezeigt, dass dieser Fehler grundsätzlich keinen Einfluss auf den *differential mode* hat. Nur die *common mode* Beschleunigungen sind davon betroffen. Für den Fall, dass nur ein *offset* in x-Richtung vorhanden ist, wurden Linearkombinationen hergeleitet, die den Fehler aufgrund *offset* auch im *common mode* eliminieren und damit die fehlerfreie Messung der nicht-gravitativen Kräfte ermöglichen. Realistische Maximalwerte für die *offsets* bei GOCE sind bekannt und wurden verwendet um den Fehler im *common mode* zu berechnen. Dabei konnte festgestellt werden, dass ein kleiner *offset* in z-Richtung größere Fehler erzeugt, als ein großer *offset* in x-Richtung.

Schließlich war es möglich die **Genauigkeiten** des *common mode*, des *differential mode*, der **Winkelbeschleunigungen**, der **Winkelgeschwindigkeiten**, sowie der **Schweregradienten** numerisch zu untersuchen. Als Missionsziel von GOCE wird die Bestimmung der Schweregradienten auf mE genau angegeben. Im Rahmen einer **Fehlerfortpflanzung** konnte ausgehend von den Messgenauigkeiten der hoch sensitiven und weniger sensitiven Akzelerometerachsen bestätigt werden, dass die Diagonalelemente von \underline{G} (ohne Instrumen-

tenfehler aus Kapitel 5) tatsächlich auf mE genau bestimmbar sind. Zum Schluss wurde die **Fehlerfortpflanzung** um die verschiedenen **Instrumentenfehler** aus Kapitel 5 erweitert. Es wurde untersucht wie genau die einzelnen Instrumentenfehler bekannt sein müssen, um die Schweregradienten immer noch mit der geforderten Genauigkeit (mE) bestimmen zu können. Abschließend wurde dieselbe Untersuchung für den Gesamteffekt aller Instrumentenfehler durchgeführt.

Auf Basis dieser Arbeit wäre es sinnvoll folgende **weiterführende Arbeiten** durchzuführen:

- Analyse der Fehlerquellen durch äußere Kräfte: Neben den in dieser Arbeit behandelten instrumentenspezifischen Fehlern könnten die Fehlerquellen durch äußere Kräfte untersucht werden. Zu den äußeren Kräften zählen gravitative Störungen (Gravitationsgradient der Erde, Einfluss durch Drittkörper, Eigengravitation) und nicht-gravitative Störungen, wie atmosphärische Einflüsse oder Kräfte, die durch das Steuerungssystem verursacht werden.
- Untersuchung des spektralen Verhaltens der verschiedenen Größen: Fehler wie Akzelerometerrauschen, Skalierungs- oder Misalignmentfehler könnten frequenzabhängig betrachtet werden, um die Auswirkung der einzelnen Fehler auf die Schweregradienten besser untersuchen zu können. Als Maß für die spektrale Aufteilung der Fehler könnten Fehlerspektraldichten berechnet werden.
- Fehlerfortpflanzung ausgehend von Fehlermaßen für die Gradienten: In dieser Arbeit wurden mit Hilfe einer Fehlerfortpflanzung aus vorgegebenen Fehlern der Eichgrößen (Instrumentenfehler aus Kapitel 5) die Genauigkeiten der Schweregradienten bestimmt. Um Grenzwerte für die zulässigen Genauigkeiten der Eichgrößen abschätzen zu können müsste man umgekehrt vorgehen. D.h. es müsste eine Fehlerfortpflanzung ausgehend von vorgegebenen Fehlermaßen für die Gradienten gerechnet werden.

A. Partielle Ableitungen

A.1 Fehlerfortpflanzung auf Winkelbeschleunigungen

$$\dot{\omega}_x = -\frac{a_{d,3,6,y}}{L_z} + \frac{a_{d,2,5,z}}{L_y}$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{a_{d,1,4,z}}{L_x} + \frac{a_{d,3,6,x}}{L_z}$$

$$\dot{\omega}_z = -\frac{a_{d,2,5,x}}{L_y} + \frac{a_{d,1,4,y}}{L_x}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_x}{\partial a_{d,3,6,y}} = -\frac{1}{L_z} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_x}{\partial a_{d,2,5,z}} = \frac{1}{L_y} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_x}{\partial L_z} = \frac{a_{d,3,6,y}}{L_z^2} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_x}{\partial L_y} = -\frac{a_{d,2,5,z}}{L_y^2}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_y}{\partial a_{d,1,4,z}} = -\frac{1}{L_x} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_y}{\partial a_{d,3,6,x}} = \frac{1}{L_z} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_y}{\partial L_x} = \frac{a_{d,1,4,z}}{L_x^2} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_y}{\partial L_z} = -\frac{a_{d,3,6,x}}{L_z^2}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial a_{d,2,5,x}} = -\frac{1}{L_y} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial a_{d,1,4,y}} = \frac{1}{L_x} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial L_y} = \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y^2} ; \quad \frac{\partial \dot{\omega}_z}{\partial L_x} = -\frac{a_{d,1,4,y}}{L_x^2}$$

A.2 Fehlerfortpflanzung auf Schweregradienten

$$V_{xx} = -\frac{2 \cdot a_{d,1,4,x}}{L_x} - \omega_y^2 - \omega_z^2$$

$$V_{yy} = -\frac{2 \cdot a_{d,2,5,y}}{L_y} - \omega_x^2 - \omega_z^2$$

$$V_{zz} = -\frac{2 \cdot a_{d,3,6,z}}{L_z} - \omega_x^2 - \omega_y^2$$

$$\frac{\partial V_{xx}}{\partial a_{d,1,4,x}} = -\frac{2}{L_x} ; \quad \frac{\partial V_{xx}}{\partial L_x} = \frac{2a_{d,1,4,x}}{L_x^2} ; \quad \frac{\partial V_{xx}}{\partial \omega_y} = -2\omega_y ; \quad \frac{\partial V_{xx}}{\partial \omega_z} = -2\omega_z$$

$$\frac{\partial V_{yy}}{\partial a_{d,2,5,y}} = -\frac{2}{L_y} ; \quad \frac{\partial V_{yy}}{\partial L_y} = \frac{2a_{d,2,5,y}}{L_y^2} ; \quad \frac{\partial V_{yy}}{\partial \omega_x} = -2\omega_x ; \quad \frac{\partial V_{yy}}{\partial \omega_z} = -2\omega_z$$

$$\frac{\partial V_{zz}}{\partial a_{d,3,6,z}} = -\frac{2}{L_z} ; \quad \frac{\partial V_{zz}}{\partial L_z} = \frac{2a_{d,3,6,z}}{L_z^2} ; \quad \frac{\partial V_{zz}}{\partial \omega_x} = -2\omega_x ; \quad \frac{\partial V_{zz}}{\partial \omega_y} = -2\omega_y$$

$$V_{xy} = -\frac{a_{d,1,4,y}}{L_x} - \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y} + \omega_x \omega_y$$

$$V_{xz} = -\frac{a_{d,1,4,z}}{L_x} - \frac{a_{d,3,6,x}}{L_z} + \omega_x \omega_z$$

$$V_{yz} = -\frac{a_{d,2,5,z}}{L_y} - \frac{a_{d,3,6,y}}{L_z} + \omega_y \omega_z$$

$$\frac{\partial V_{xy}}{\partial a_{d,1,4,y}} = -\frac{1}{L_x} ; \quad \frac{\partial V_{xy}}{\partial a_{d,2,5,x}} = -\frac{1}{L_y} ; \quad \frac{\partial V_{xy}}{\partial L_x} = \frac{a_{d,1,4,x}}{L_x^2} ; \quad \frac{\partial V_{xy}}{\partial L_y} = \frac{a_{d,2,5,x}}{L_y^2} ;$$

$$\frac{\partial V_{xy}}{\partial \omega_x} = \omega_y ; \quad \frac{\partial V_{xy}}{\partial \omega_y} = \omega_x$$

$$\frac{\partial V_{xz}}{\partial a_{d,1,4,z}} = -\frac{1}{L_x} ; \quad \frac{\partial V_{xz}}{\partial a_{d,3,6,x}} = -\frac{1}{L_z} ; \quad \frac{\partial V_{xz}}{\partial L_x} = \frac{a_{d,1,4,z}}{L_x^2} ; \quad \frac{\partial V_{xz}}{\partial L_z} = \frac{a_{d,3,6,x}}{L_z^2} ;$$

$$\frac{\partial V_{xz}}{\partial \omega_x} = \omega_z ; \quad \frac{\partial V_{xz}}{\partial \omega_z} = \omega_x$$

$$\frac{\partial V_{yz}}{\partial a_{d,2,5,z}} = -\frac{1}{L_y} ; \quad \frac{\partial V_{yz}}{\partial a_{d,3,6,y}} = -\frac{1}{L_z} ; \quad \frac{\partial V_{yz}}{\partial L_y} = \frac{a_{d,2,5,z}}{L_y^2} ; \quad \frac{\partial V_{yz}}{\partial L_z} = \frac{a_{d,3,6,y}}{L_z^2} ;$$

$$\frac{\partial V_{yz}}{\partial \omega_y} = \omega_z ; \quad \frac{\partial V_{yz}}{\partial \omega_z} = \omega_y$$

A.3 Fehlerfortpflanzung auf messbare Beschleunigungen (mit Instrumentenfehlern)

$$\begin{aligned} a_{l,x}^{gem} &= f_1 = a_{l,x}^{tat} + b_{l,x} + s_{l,x} \cdot a_{l,x}^{tat} + (\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) \cdot a_{l,y}^{tat} + (-\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) \cdot a_{l,z}^{tat} \\ a_{l,y}^{gem} &= f_2 = a_{l,y}^{tat} + b_{l,y} + s_{l,y} \cdot a_{l,y}^{tat} + (-\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) \cdot a_{l,x}^{tat} + (\Phi_{l,x} + \eta_{l,x}) \cdot a_{l,z}^{tat} \\ a_{l,z}^{gem} &= f_3 = a_{l,z}^{tat} + b_{l,z} + s_{l,z} \cdot a_{l,z}^{tat} + (\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) \cdot a_{l,x}^{tat} + (-\Phi_{l,x} + \eta_{l,x}) \cdot a_{l,y}^{tat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a_{l,x}^{tat}} &= 1 + s_{l,x} ; & \frac{\partial f_1}{\partial a_{l,y}^{tat}} &= (\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) ; & \frac{\partial f_1}{\partial a_{l,z}^{tat}} &= (-\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial b_{l,x}} &= 1 ; & \frac{\partial f_1}{\partial b_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_1}{\partial b_{l,z}} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{l,x}} &= a_{l,x}^{tat} ; & \frac{\partial f_1}{\partial s_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_1}{\partial s_{l,z}} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \Phi_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_1}{\partial \Phi_{l,y}} &= -a_{l,z}^{tat} ; & \frac{\partial f_1}{\partial \Phi_{l,z}} &= a_{l,y}^{tat} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_{l,y}} &= a_{l,z}^{tat} ; & \frac{\partial f_1}{\partial \eta_{l,z}} &= a_{l,y}^{tat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial a_{l,x}^{tat}} &= (-\Phi_{l,z} + \eta_{l,z}) ; & \frac{\partial f_2}{\partial a_{l,y}^{tat}} &= 1 + s_{l,y} ; & \frac{\partial f_2}{\partial a_{l,z}^{tat}} &= (\Phi_{l,x} + \eta_{l,x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial b_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_2}{\partial b_{l,y}} &= 1 ; & \frac{\partial f_2}{\partial b_{l,z}} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_2}{\partial s_{l,y}} &= a_{l,y}^{tat} ; & \frac{\partial f_2}{\partial s_{l,z}} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_{l,x}} &= a_{l,z}^{tat} ; & \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_{l,z}} &= -a_{l,x}^{tat} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \eta_{l,x}} &= a_{l,z}^{tat} ; & \frac{\partial f_2}{\partial \eta_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_2}{\partial \eta_{l,z}} &= a_{l,x}^{tat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial a_{l,x}^{tat}} &= (\Phi_{l,y} + \eta_{l,y}) ; & \frac{\partial f_3}{\partial a_{l,y}^{tat}} &= (-\Phi_{l,x} + \eta_{l,x}) ; & \frac{\partial f_3}{\partial a_{l,z}^{tat}} &= 1 + s_{l,z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial b_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_3}{\partial b_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_3}{\partial b_{l,z}} &= 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial s_{l,x}} &= 0 ; & \frac{\partial f_3}{\partial s_{l,y}} &= 0 ; & \frac{\partial f_3}{\partial s_{l,z}} &= a_{l,z}^{tat} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \Phi_{l,x}} &= -a_{l,y}^{tat} ; & \frac{\partial f_3}{\partial \Phi_{l,y}} &= a_{l,x}^{tat} ; & \frac{\partial f_3}{\partial \Phi_{l,z}} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \eta_{l,x}} &= a_{l,y}^{tat} ; & \frac{\partial f_3}{\partial \eta_{l,y}} &= a_{l,x}^{tat} ; & \frac{\partial f_3}{\partial \eta_{l,z}} &= 0 \end{aligned}$$

Glossar

angular control Lagekontrolle bzw. Lagekontrollsystem von GOCE. Das System arbeitet mit den Magnetfeldresonanzspulen und basiert auf Information (Winkelbeschleunigungen) des Gradiometers sowie der Sternsensoren. S.3

ARF Accelerometer Reference Frame. Dieses Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt des jeweiligen Beschleunigungsmessers. Die drei Achsen sind nominell stets parallel zu den Achsen des GRF (x-Achse parallel Verbindungslinie A4-A1; y-Achse parallel zur Verbindungslinie A5-A2; z-Achse parallel zur Verbindungslinie A6-A3) und fallen in je einer Richtung sogar mit der entsprechenden Achse des GRF zusammen. S.11

common mode Beschleunigungen Mittelwert der Beschleunigungen entlang der drei Achsen des GRF. Gemittelt wird dabei jeweils zwischen den Beschleunigungen auf einem Gradiometerarm; es ergeben sich somit insgesamt 9 *common mode* Beschleunigungen (jeweils 3 für die 3 Gradiometerarme). S.6

differential mode Beschleunigungen Hälfte der Differenz der Beschleunigungen entlang der drei Achsen des GRF. Abgezogen wird dabei immer die Beschleunigung des Akzelerometers, welcher sich in negativer Richtung vom Ursprung des GRF befindet (A4, A5, A6). Es ergeben sich insgesamt 9 *differential mode* Beschleunigungen (jeweils 3 für die 3 Gradiometerarme) S.24

drag control Kontrollsystem von GOCE, mit dem der Satellit mit Hilfe von Ionentriebwerken frei vom Einfluss nicht-gravitativer Kräfte gehalten werden soll. Als Eingangsinformation dienen GPS-Daten sowie die *common mode* Beschleunigungen des Gradiometers. S.3

GRF Gradiometer Reference Frame. Dieses instrumentenfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung nominell im Mittelpunkt des dreiachsigen Gradiometers. Die x-Achse zeigt (nominell) in Richtung der Verbindungslinie A4-A1, die y-Achse in Richtung A5-A2 und die z-Achse in Richtung A6-A3. S.5

LORF Local Orbit Reference Frame Dieses Koordinatensystem hat seinen Ursprung im aktuellen Massenzentrum des Satelliten. Die x-Achse zeigt in Richtung des momentanen Geschwindigkeitsvektors, die y-Achse steht senkrecht zur Bahnebene. Die z-Achse ergänzt das Rechtssystem und ist deshalb annähernd radial. S.8

- magnetotorquer** Magnetfeldresonanzspule. Stromdurchflossene Spule mit magnetischem Moment m , welche im Magnetfeld der Erde (mit Flussdichte B) ein Drehmoment $M = m \times B$ erzeugt. Dieses Drehmoment wird zur Lagekorrektur (*angular control*) von Satelliten verwendet. GOCE besitzt drei *magnetotorquer*. S.6
- MBW** *Measurement Bandwidth*. Frequenzbereich von 5 *mHz* bis 100 *mHz* in der das GOCE-Gradiometer hochgenau messen kann (Messbandbreite). S.5
- SGG** *Satellite Gravity Gradiometry*. Methode zur Bestimmung des Erdschwerefeldes durch Messung von Beschleunigungsunterschieden, welche den Ableitungen (Gradienten) des Schwerefeldes entsprechen. Diese Methode kommt mit GOCE erstmals zum Einsatz. S.4
- SST** *Satellite-to-Satellite Tracking*. Positionsbestimmung eines Satelliten relativ zu einem oder mehreren anderen Satelliten. Unterschieden wird zwischen *Satellite-to-Satellite High-Low Tracking* (SST-hl) und *Satellite-to-Satellite Low-Low Tracking* (SST-ll). In ersten Fall befinden sich die Bezugssatelliten auf weit höheren (GPS-)Bahnen (z.B. CHAMP). Im zweiten Fall befindet sich der Bezugssatellit ebenfalls auf einer niedrigen Flugbahn (z.B. GRACE). S.3
- SST-hl** *Satellite-to-Satellite High-Low Tracking*. Positionsbestimmung eines tieffliegenden Satelliten (z.B. GOCE), durch Empfang von Mikrowellensignalen, welche GPS-Satelliten auf weit höheren Bahnen aussenden. S.4

Literaturverzeichnis

Alenia (2004) *Gradiometer Calibration Plan*. Turin: Alenia Spazio, GO-PL-AI-0039

Alenia (2005) *Gradiometer Ground Processing Alaysis*. Turin: Alenia Spazio, GO-TN-AI-0068

Bergmann-Schäfer (1987) *Lehrbuch der Experimentalphysik - Band 2: Elektrizität und Magnetismus*. Berlin: de Gruyter

Bouman J (2006) *GOCE High Level Processing Facility: External Calibration of GOCE SGG data*. EGG-C, GO-TN-HPF-GS-0095

Drinkwater M, and Kern M (2005) *GOCE: Calibration and Validation Plan for L1b Data Products*. Noordwijk: ESA, CVP_L1b_v1_iss[1].0

ESA (1999) *The Four Candidate Earth Explorer Core Missions: Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation*. Noordwijk: ESA, ESA-SP-1233

Müller J (2001) *Die Satellitenmission GOCE: Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung*. München: DGK C 541, Dissertation

Rummel R (1985) *Satellitengradiometrie*. ZfV, **6**: 242-257

Rummel R (1986) *Satellite Gradiometry*. In: Süinkel H (ed) "Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy", Lecture Notes in Earth Sciences, Berlin: Springer, **7**: 317-363

**Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):**

- No. 1:** Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation*. ISBN-10 3-934205-00-3, ISBN-13 978-3-934205-00-0.
- No. 2:** Nitschke M. (1999). *SATLAB – Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*. ISBN-10 3-934205-01-1, ISBN-13 978-3-934205-01-7.
- No. 3:** Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. ISBN-10 3-934205-02-X, ISBN-13 978-3-934205-02-4.
- No. 4:** Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage*. ISBN-10 3-934205-03-8, ISBN-13 978-3-934205-03-1.
- No. 5:** Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB*. ISBN-10 3-934205-04-6, ISBN-13 978-3-934205-04-8.
- No. 6:** Dorobantu R. (1999). *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen*. ISBN-10 3-934205-05-4, ISBN-13 978-3-934205-05-5.
- No. 7:** Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000). *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000*. ISBN-10 3-934205-06-2, ISBN-13 978-3-934205-06-2.
- No. 8:** Rothacher M., Zebhauser B. (2000). *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München*. ISBN-10 3-934205-07-0, ISBN-13 978-3-934205-07-9.
- No. 9:** Ulrich M. (2000). *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze*. ISBN-10 3-934205-08-9, ISBN-13 978-3-934205-08-6.
- No. 10:** Seitz F. (2000). *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen*. ISBN-10 3-934205-09-7, ISBN-13 978-3-934205-09-3.
- No. 11:** Meyer F. (2000). *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars*. ISBN-10 3-934205-10-0, ISBN-13 978-3-934205-10-9.
- No. 12:** Peters T. (2001). *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde*. ISBN-10 3-934205-11-9, ISBN-13 978-3-934205-11-6.
- No. 13:** Egger D. (2001). *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie*. ISBN-10 3-934205-12-7, ISBN-13 978-3-934205-12-3.
- No. 14:** Steigenberger P. (2002). *MATLAB-Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung*. ISBN-10 3-934205-13-5, ISBN-13 978-3-934205-13-0.
- No. 15:** Schneider M. (2002). *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-14-3, ISBN-13 978-3-934205-14-7.
- No. 16:** Dorobantu R., Gerlach C. (2004). *Investigation of a Navigation-Grade RLG SIMU type iNAV-RQH*. ISBN-10 3-934205-15-1, ISBN-13 978-3-934205-15-4.
- No. 17:** Schneider M. (2004). *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren*. ISBN-10 3-934205-16-X, ISBN-13 978-3-934205-16-1.
- No. 18:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Theorie*. ISBN-10 3-934205-17-8, ISBN-13 978-3-934205-17-8.
- No. 19:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Praxis*. ISBN-10 3-934205-18-6, ISBN-13 978-3-934205-18-5.
- No. 20:** Fackler U. (2005). *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen*. ISBN-10 3-934205-19-4, ISBN-13 978-3-934205-19-2.
- No. 21:** Schneider M. (2005). *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-20-8, ISBN-13 978-3-934205-20-8.
- No. 22:** Egger D. (2006). *Sinus-Netzwerk*. ISBN-10 3-934205-21-6, ISBN-13 978-3-934205-21-5.
- No. 23:** Schneider M. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung unter Verwendung von Bilanzgleichungen für beliebige Observablen*. ISBN-10 3-934205-22-4, ISBN-13 978-3-934205-22-2.
- No. 24:** Mladek F. (2006). *Hydrostatische Isostasie*. ISBN-10 3-934205-23-2, ISBN-13 978-3-934205-23-9.
- No. 25:** Stummer C. (2006). *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung*. ISBN-10 3-934205-24-0, ISBN-13 978-3-934205-24-6.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter / Copies are available from:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21, D-80290 München, Germany

Telefon: +49-89-289-23190, Telefax: +49-89-289-23178, Email: rechel@bv.tum.de

Oder im Internet / Or via Internet:

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/veroeffentlichung/schriftenreihe/schriftenreihe.php>

