

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

**Simultane Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und
großskaligen Meeresspiegelschwankungen aus Satellitenaltimeterdaten**

Martha Baumgartner

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.- Prof. Dr.- Ing. Holger Magel

Prüfer der Dissertation:

- | | |
|---|---|
| m | 1. Univ.- Prof. Dr.- Ing. Reinhard Rummel |
| m | 2. Univ.- Prof. Dr.- Ing. Günter Hein, |
| m | Universität der Bundeswehr München |
| m | 3. Hon.- Prof. Dr.- Ing. Hermann Drewes |

Die Dissertation wurde am 24.07.2000 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
am 23.04.2001 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Schätzverfahren	8
2.1	Parameterschätzung	8
2.2	Grundlagen der Bayes-Statistik	10
2.3	Hypothesentests	12
3	Satellitenaltimetrie	14
3.1	Satellitenbewegung	14
3.2	Grundprinzip der Satellitenaltimetrie	16
3.3	Aufbereitung der Altimetermeßdaten	21
4	Schwerefeldkorrekturen	24
4.1	Darstellung des Erdschwerefeldes	24
4.2	Ableitung von Schwerefeldkorrekturen aus Satellitenbahnstörungen	27
4.3	Radialer Bahnfehler	29
5	Meeresspiegelschwankung	34
5.1	Klassifizierung der Meeresspiegelbewegungen	34
5.2	Modellierung der Meeresspiegelschwankung	36
5.2.1	Dynamische Modellierung	36
5.2.2	Kinematische Modellierung	40
5.2.2.1	rms-Variabilität	41
5.2.2.2	Harmonische Analyse	42
5.2.2.3	Empirische Orthogonal-Funktions-Analyse	43
5.3	Anwendung der Methoden	48
5.3.1	Topex/Poseidon-Daten	48
5.3.2	Zusammenstellung der Ergebnisse	49
6	Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung	56
6.1	Zusammenstellung der Beobachtungen und der Schätzgrößen	56
6.1.1	Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen	56
6.1.2	Zusammenhang zwischen Kreuzungspunktdifferenzen und Schwerefeldkorrekturen	60
6.1.3	Zusammenhang zwischen Kreuzungspunktdifferenzen und Meeresspiegelschwankung	62
6.1.4	Einführung von Zusatzinformation	63
6.2	Schätzung	64
6.2.1	Schätzung der Schwerefeldkorrekturen	66
6.2.2	Schätzung der Meeresspiegelschwankung	67
6.2.3	Kombinierte Schätzung	69
6.2.4	Kombinierte Schätzung mit Zusatzinformation	70
6.3	Zusammenstellung der Ergebnisse	71
7	Ausblick	82
	Symbolverzeichnis	83
	Abkürzungsverzeichnis	86
	Literaturverzeichnis	89

Zusammenfassung

Mit einer langen Beobachtungsreihe von Altimeterdaten lassen sich klimarelevante Fragen über globale Veränderungen der großskaligen Meeresströmungen und des Meeresspiegels über einen längeren Zeitraum klären. Da die Meßgenauigkeit der Altimetrie bisher nicht ausreicht, um Veränderungen im Millimeterbereich mit einer Mission zu erfassen, ist eine Verknüpfung mehrerer aufeinanderfolgender Altimetermissionen erforderlich. Zu der Kombination verschiedener, nicht notwendigerweise zeitgleicher Altimetermissionen leistet diese Arbeit einen Beitrag, indem eine Methode entwickelt wird, aus Kreuzungspunktdifferenzen über Zeitspannen von wenigen Tagen bzw. mehreren Monaten in einer Kreuzungspunktanalyse Schwerfeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung simultan zu schätzen. Mit Hilfe der Kreuzungspunkte ist eine Verbesserung des Schwerfeldes solange möglich, wie sich in den Satellitenbahnen radiale Bahnfehler wegen des unzureichend genau modellierten Schwerfeldes abbilden. Der Zusammenhang der Schwerfeldkorrekturen mit dem radialen Bahnfehler wird nach der Methode von Rosborough erklärt.

Die Altimetermissionen Geosat, ERS1 und Topex/Poseidon decken gemeinsam einen Zeitraum von über 15 Jahren ab. Allerdings befindet sich zwischen Geosat und ERS1 eine Missionslücke von etwa zwei Jahren. Die Kreuzungspunktanalyse wird daher insofern erweitert, daß zur Überbrückung einer Altimeterdatenlücke zusätzlich Meereshöhen aus einem hydrodynamischen Simulationsmodell eingeführt werden. Die theoretischen Ableitungen werden an einem Beispiel numerisch getestet.

Summary

Based on a long time series of altimetry data, climate relevant issues in connection with longterm global changes of large-scale ocean currents and sea level can be analysed. Since altimetry is not accurate enough to measure changes in the millimeter range with one single altimetric mission, a combination of successive altimetry missions is necessary. In this thesis paper a method is presented to combine different missions even if they are not performed at the same time. In a simultaneous crossover analysis with crossover differences over time periods of a few days or some months, corrections of gravity field and sea level change are estimated. A correction of the gravity field by crossovers is possible as long as satellite tracks show radial orbit errors caused by remaining errors in the gravity field models. Gravity field corrections and radial orbit errors are described according to Rosborough's method.

Altimetry missions Geosat, ERS1 and Topex/Poseidon, all combined, cover a period of more than 15 years, but there are some gaps between these missions. Therefore, crossover analysis is extended by sea level heights of a hydrodynamic simulation model for bridging a gap in altimetry data. This theory is numerically tested by way of an example. The proposed approach is validated by applying it to a real data set.

1. Einleitung

Das Verhalten der Ozeane und die Entwicklung des Klimas sind eng miteinander verbunden. So beeinflussen einerseits die Veränderungen des globalen Meeresspiegels und der bedeutenden Meeresströmungen das Klima der Erde, andererseits hat eine globale Klimaänderung Einfluß auf das Verhalten der Ozeane. Besonders die Frage nach einem globalen Meeresspiegelanstieg ist in das Interesse der Öffentlichkeit gerückt, da z.B. Deichbrüche und Überschwemmungen große volkswirtschaftliche Schäden zur Folge haben können. Mit der Satellitenaltimetrie, die innerhalb weniger Tage global Meereshöhen über einem Referenzellipsoid liefert, gibt es eine Meßmethode, die synoptische Information über den Meeresspiegel liefert, d.h. einen zeitlich umfassenden und räumlich globalen Überblick innerhalb kurzer Zeit bietet. Allerdings reicht die Meßgenauigkeit der Satellitenaltimetrie bisher nicht aus, um globale Veränderungen des Meeresspiegels von wenigen Millimetern pro Jahr mit einer Satellitenmission zu erfassen. Mit einer langen Beobachtungsreihe von Altimeterdaten, die durch eine Verknüpfung mehrerer aufeinander folgender Altimetermissionen zu erzeugen ist, ließe sich dennoch ein langfristiger Trend, d.h. ein Ansteigen oder Absinken des Meeresspiegels, feststellen. Die Kombination verschiedener Altimetermissionen ist die generelle Motivation, zu der diese Arbeit einen Schritt beiträgt.

Neben der Erfassung von Meeresspiegelschwankungen eignet sich die Satellitenaltimetrie auch zur Verbesserung der Erdschwerefeldmodelle. Zur Schätzung von Schwerefeldkorrekturen aus den Messungen der Satellitenaltimetrie können Höhendifferenzen in Kreuzungspunkten sich schneidender Satellitenspuren verwendet werden, die Bahnfehler und Meeresspiegelschwankung enthalten. Bisherige Ansätze (von z.B. [VAN GYSEN und COLEMAN 1997, SCHRAMA 1989, ROSBOROUGH 1986]) zur Berechnung des Schwerefeldes aus Altimetermessungen berücksichtigen nur diejenigen Kreuzungspunkte, bei denen die Meeresspiegelschwankung minimal ist, d.h. Kreuzungspunkte zweier zeitlich nah aufeinander folgender Messungen. In dieser Arbeit wird eine Methode entwickelt, in der Kreuzungspunkte über große Zeitunterschiede verwendet werden, um mehrere nicht notwendigerweise zeitgleiche Altimetermissionen zu verknüpfen und eine lange Beobachtungsreihe von Altimeterdaten zu erhalten. Dabei wird die zu berücksichtigende Meeresspiegelschwankung simultan mit den Schwerefeldkorrekturen aus Kreuzungspunktdifferenzen geschätzt. Ein exemplarischer Test des Verfahrens erfolgt mit den Daten einer Mission, nämlich Topex/Poseidon. Die Problematik der Kombination verschiedener Missionen wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Mit der Verknüpfung verschiedener Missionen beschäftigt sich die neu gegründete *Subcommission on Multi-Mission Satellite Altimetry (ScoMMSA)* der *Commission on International Coordination of the Space Techniques for Geodesy and Geodynamics (CSTG)*.

Schwerefeld und Meerestopographie

Die Bestimmung des Erdschwerefeldes gehört zu den Hauptaufgaben der physikalischen Geodäsie, da sich aus dem Schwerefeld Rückschlüsse auf die physikalische Form der Erde ziehen lassen. Auch zur Satellitenbahnbestimmung ist eine genaue Kenntnis des Erdschwerefeldes erforderlich. Eine mittlere Meeresoberfläche, auf die außer dem Schwerefeld der Erde keine Kräfte wirken bildet sich nach einer Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes aus. In diesem Fall gäbe es keine Strömungen und der Meeresspiegel würde sich in jedem Punkt senkrecht zur Lotrichtung ausrichten. Atmosphäre, Wind, Luftdruck, Reibungskräfte, Temperatur- und Dichteunterschiede verursachen jedoch Bewegungen des Wassers in den Ozeanen. Bewegen sich die Wassermassen, so werden sie infolge der Erdrotation von der Corioliskraft abgelenkt. Zudem verhindern Kontinente die ungestörte Bewegung der Wassermassen, so daß Strömungen und Zirkulationen entstehen. Die dadurch bedingte Abweichung des Meeresspiegels vom Geoid, einer speziellen Niveaufäche des Erdschwerefeldes in mittlerer Meeresspiegelhöhe, wird als Meerestopographie bezeichnet. Mit der Meerestopographie lassen sich dynamische Prozesse der Ozeane verfolgen.

Satellitenaltimetrie

In der Satellitenaltimetrie läßt sich aus der Laufzeit von Radarimpulsen die Entfernung des Satelliten zur Meeresoberfläche bestimmen. Mit bekannter Satellitenhöhe über einem Referenzellipsoid folgen aus der Differenz zwischen der Satellitenhöhe und der gemessenen Entfernung Meereshöhen über dem Ellipsoid. Die Meßwerte sind um instrumentelle, atmosphärische und geophysikalische Einflüsse zu korrigieren und die Position des Satelliten aus möglichst präziser Bahnbestimmung zu berechnen. Beschränkungen in der Genauigkeit der altimetrischen Höhe folgen neben ungenauen Korrekturen der Messungen aus dem bislang unzureichend genau bekannten Erdschwerefeld, welches primär die Flugbahn des Satelliten beeinflusst und damit keine exakte Berechnung der Satellitenposition erlaubt. Derzeit ist eine Genauigkeit der altimetrischen Höhen von unter 5 cm erreichbar. Zeitliche Änderungen der Meeresoberfläche von wenigen Millimetern pro Jahr sind daher nicht signifikant erkennbar.

Um trotz der beschränkten Meßgenauigkeit der Altimetrie säkulare (langzeitliche) Meeresspiegelveränderun-

gen im Millimeterbereich festzustellen, sind Beobachtungen möglichst langer Zeitreihen auszuwerten. Einzelne Satellitenmissionen haben allerdings nur eine Dauer von wenigen Jahren und unterscheiden sich in ihrer Missionscharakteristik. Eine Verknüpfung mehrerer Missionen verschiedener Erderkundungssatelliten würde zu einer langen Beobachtungsreihe führen. Aufgrund unterschiedlichen Missions- und Satellitendesigns, sowie wegen der Bahnvermessung mit verschiedenen Meßsystemen variiert die Genauigkeit, mit der die Satellitenbahnen bestimmt werden können. Diese Umstände bewirken, daß aus jeder Mission ein eigenes Höhenniveau folgt und die Höhen untereinander Differenzen von bis zu einem Dezimeter aufweisen. Die Kombination zweier Missionen kann über eine gemischte Kreuzungspunktanalyse erfolgen. Dabei werden die gemessenen Meereshöhen an den Schnittpunkten sich kreuzender Satellitenspuren verglichen und deren Höhendifferenzen minimiert. Im Idealfall müßten die Höhen des selben Ortes identisch sein. In der Realität spiegeln sich aber Modell-, Meß- und Bahnfehler, sowie zwischen zwei zeitlich weit auseinander liegenden Messungen Meeresspiegelveränderungen in einer Höhendifferenz wider. In gemischten Kreuzungspunktdifferenzen zwischen verschiedenen Satelliten zeichnet sich zusätzlich die Differenz der Bahnfehler der Satelliten ab. Liegen die zu kombinierenden Missionen weit auseinander sind Kreuzungspunkte über große Zeitunterschiede zu bilden, deren Differenzen zusätzlich zu den Bahnfehlern die Meeresspiegelbewegungen enthalten. Gegenüber bisherigen Ansätzen, in denen nur der Bahnfehler in einer Kreuzungspunktanalyse geschätzt wird, besteht das Ziel dieser Arbeit darin, Bahnfehler und Meeresspiegelveränderung simultan zu schätzen. Hier bleibt jedoch die Problematik der Vereinheitlichung verschiedener Missionen unbehandelt, das Verfahren wird nur anhand der Daten von Topex/Poseidon getestet. Zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen ist es erforderlich die Meeresspiegelbewegung zu modellieren, d.h. mathematisch oder physikalisch zu beschreiben. In dieser Arbeit werden nur großskalige und dominante Strukturen über 300 km Ausdehnung mathematisch modelliert, da kleinere Bewegungen sich zum einen über lange Zeiträume herausmitteln und zum anderen wegen des Spurabstandes der Satelliten, z.B. bei Topex/Poseidon von 315 km am Äquator, nicht erkannt werden können.

Die Altimetermissionen Geosat, ERS1 und Topex/Poseidon decken gemeinsam einen Zeitraum von über 15 Jahren ab. Allerdings befindet sich zwischen Geosat und ERS1 eine Missionslücke von etwa 2 Jahren, für die keine Altimeterdaten vorliegen.

Ozeanographie

Zur Überbrückung dieser Datenlücke werden Meereshöhen aus dem hydrodynamischen Simulationsmodell *Parallel Ocean and Climate Model* (POCM) der Ozeanographen Semtner und Chervin [SEMTNER und CHERVIN 1996] übernommen. Hydrodynamische Modelle basieren auf Lösungen von Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten, den sogenannten Navier-Stokes'schen Differentialgleichungen. In die Berechnungen fließen ozeanographische Messungen, sowie Wind- und Luftdruckfelder ein. Zu den ozeanographischen Meßverfahren gehören Pegelmessungen an den Küsten, sowie Wasserstandsbestimmungen aus Temperatur, Druck und Salzgehalt und Strömungsmessungen entlang einzelner Routen von Forschungsschiffen, an Bojen und Verankerungen. Die Wasserstände (Meereshöhen) beziehen sich auf eine bestimmte Tiefenschicht, für die keine Bewegung des Wassers angenommen wird. Diese im Englischen mit *level of no motion* bezeichnete Schicht wird in jedem Ozean in einer anderen Tiefenlage vermutet, weshalb die Wasserstände nur innerhalb einzelner Ozeanbecken relativ zueinander vergleichbar sind. Die Gewinnung von Meßreihen entlang der Schiffsrouten, auch Schnitte genannt, ist sehr kosten- und zeitaufwendig. Außerdem erfolgen die mehrere Monate dauernden Messungen eines Schnittes meist nur in den Sommermonaten der Nord- und Südhalbkugel, da im Winter Stürme die Messungen erschweren. Im Gegensatz zu diesen räumlich und zeitlich beschränkten Messungen liefert die Altimetrie in kurzer Zeit global absolute Meereshöhen über einem Referenzellipsoid, welche ozeanübergreifend vergleichbar sind. Allerdings läßt sich mit der Altimetrie nur die Oberfläche der Meere vermessen, aber keine Information über darunter liegende Schichten gewinnen.

Trennung von Geoid und Meerestopographie

Altimetrische Höhen lassen sich in Geoidundulation und Meerestopographie aufspalten. Eine Trennung der beiden Größen ist nicht ohne weiteres möglich, da die bisherige Kenntnis des Geoids mit Fehlern von bis zu 1–2 m [RUMMEL 1993] nicht ausreicht, um die Meerestopographie zu berechnen. Umgekehrt ist die Meerestopographie aus ozeanographischen Abschätzungen nur relativ zu dem level-of-no-motion mit einer Genauigkeit von 20–30 cm [RUMMEL 1993] bekannt. Bis auf diese Genauigkeit kann das Geoid somit direkt aus den altimetrischen Höhen berechnet werden. Eine vollständige Trennung ist unter diesen Voraussetzungen nicht möglich, weshalb [RUMMEL 1993] den Versuch der Trennung von Geoid und Meerestopographie als "Münchhausen-Problem" bezeichnet. Verschiedene Ansätze zur Trennung von Geoidundulation und Meerestopographie wurden z.B. von [ENGELIS und RAPP 1984, ENGELIS 1985, WAGNER 1986, TAPLEY et al. 1988, SCHRAMA 1989, WAGNER 1989, DENKER und RAPP 1990, MARSH et al. 1990, NEREM et al. 1990, NEREM et al. 1994b, TAPLEY et al. 1994a, HÜCKELHEIM 1994] untersucht. Die Meerestopographie ist für die Ozeanographie eine wichtige Größe zur Un-

tersuchung der Ozeandynamik, während sie für die Geodäsie bei der Geoidbestimmung eine Störung darstellt. Von den neuen Schwerefeldmissionen CHAMP (*CHAllenging Mini-satellite Payload*) [REIGBER 1998], GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) [BALMINO et al. 1998] und GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Experiment*) [MÜLLER et al. 1998] werden wesentliche Verbesserungen der Kenntnis des Schwerefeldes erwartet. Mit einem verbesserten Schwerefeld werden zum einen die Satellitenbahnen genauer bestimmbar und zum anderen das Geoid eventuell so genau bekannt, daß aus den altimetrischen Höhen die Meerestopographie direkt berechnet werden kann.

Um derzeit trotz der Münchhausen-Problematik aus Altimeterdaten das Schwerefeld zu verbessern, werden Kreuzungspunkte gebildet. In den Kreuzungspunkten nehmen die Geoidhöhen für beide Spuren den gleichen Wert an. Bei der Differenzbildung entfällt theoretisch der Anteil des Schwerefeldes. Praktisch bleibt aber der Bahnfehler erhalten, der auf eine unzureichend genaue Kenntnis des Schwerefeldes zurückzuführen ist. Die Eigenschaft, daß sich der Bahnfehler für auf- und absteigende Bahnen unterscheidet, nützt man in der Kreuzungspunktanalyse zur Schätzung von Schwerefeldkorrekturen. Mit Hilfe der Kreuzungspunkte ist eine Verbesserung des Schwerefeldes nur solange möglich, wie sich in den Satellitenbahnen noch radiale Bahnfehler wegen des unzureichend genau modellierten Schwerefeldes abbilden. In bisherigen Arbeiten von [KLOKOCNIK et al. 1995, SCHRAMA 1989, ROSBOROUGH 1986] wurden Schwerefeldkorrekturen aus Kreuzungspunkten mit minimalen Meeresspiegelbewegungen berechnet, während in dieser Arbeit erstmals Geoid und Meeresspiegelschwankung allein aus Kreuzungspunktdifferenzen simultan geschätzt werden. Verschiedene Konzepte hierzu stellen [SCHMIDT und BOSCH 1995] vor.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel:

Zu Anfang werden die Grundlagen der hier verwendeten Schätzverfahren in Kapitel 2 zusammengestellt. Kapitel 3 beinhaltet die Satellitenbewegung und beschreibt die Grundzüge der Satellitenaltimetrie. Hierbei wird die Altimetermission Topex/Poseidon besonders hervorgehoben, da mit deren Daten die kombinierte Schätzung simuliert wird.

Der formale Zusammenhang von Erdschwerefeld und Satellitenbahn wird in Kapitel 4 erläutert. Für die Höhenmessung der Altimetersatelliten ist die radiale Komponente der Satellitenbahn von besonderer Bedeutung. Der Zusammenhang des verbleibenden radialen Bahnfehlers mit Schwerefeldkorrekturen wird nach der Methode von [ROSBOROUGH 1986] erklärt.

In Kapitel 5 folgen auf eine kurze Einleitung in die Bewegung des Meeresspiegels dynamische und kinematische Ansätze für ihre Modellierung. Mit drei unabhängigen kinematischen Verfahren wird die Meeresspiegelschwankung aus altimetrischen Höhen modelliert und das numerisch günstigere Modell zur anschließenden gemeinsamen Schätzung von Bahnfehler und Meeresspiegelschwankungen in Kapitel 6 verwendet.

Zur simultanen Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankungen in Kapitel 6 werden die Meereshöhen der Altimetermission Topex/Poseidon und des hydrodynamischen Modells POCM in eine Kreuzungspunktanalyse eingeführt. Nach einer Auswahl der Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen werden deren Zusammenhänge mit den Schätzgrößen hergeleitet. Zur Überbrückung der Lücke an Altimeterdaten wird eine zusätzliche Beobachtungsgleichung und die dafür notwendige Zusatzinformation aus hydrodynamischen Daten aufgestellt. Mit den ausgewählten Kreuzungspunktdifferenzen werden zunächst die Schwerefeldkorrekturen und die Meeresspiegelschwankung getrennt und anschließend kombiniert mit und ohne Zusatzinformation geschätzt. Die Ergebnisse der vier Schätzungen stehen in Abschnitt 6.3.

Durch eine Bestimmung der Meeresspiegelveränderung und des Erdschwerefeldes liefert diese Arbeit einen Beitrag zur Erforschung der Kombination mehrerer nicht zeitgleicher Missionen. Mit einer langen Zeitreihe (etwa 15 Jahre) an Meereshöhen in einem einheitlichen Höhenbezugssystem liegt eine gute Basis vor, den Nachweis über säkulare Meeresspiegelschwankungen zu führen.

Die Arbeit schließt nach einer Beurteilung der Ergebnisse mit einem Ausblick (Kapitel 7).

2. Schätzverfahren

In diesem Kapitel werden die im Titel der Arbeit angesprochenen hier verwendeten Schätzverfahren kurz vorgestellt. Dabei soll vor allem die Notation festgelegt werden.

2.1 Parameterschätzung

Im folgenden werden die Grundlagen der Ausgleichsrechnung vorgestellt, auf denen die Modellierung der Meeresspiegelbewegung in Kapitel 5 und die gemeinsame Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelvariabilität in Kapitel 6 basiert. Vektoren und Matrizen werden durch fett geschriebene Buchstaben dargestellt. Der Vektor $\mathbf{b} = (b_i)$ besteht aus $i = 1, \dots, n$ Elementen b_i . Die Dimension eines Vektors wird mit $\mathbf{b}_{(n)}$, die Dimension einer Matrix wird mit $\mathbf{A}_{(\text{Zeile}, \text{Spalte})}$ angegeben. Das Symbol $\hat{}$ bedeutet, daß $\hat{b}_i$ geschätzt wird.

Zur mathematischen Beschreibung der funktionalen und stochastischen Zusammenhänge zwischen den Beobachtungen b_i mit $i = 1, \dots, n$ und den zu schätzenden Unbekannten x_j mit $j = 1, \dots, u$, wobei $n \geq u$ vorausgesetzt wird, ist ein Funktionalmodell und ein stochastisches Modell erforderlich.

Das *Funktionalmodell* beschreibt die funktionalen Beziehungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_i)$ und den Schätzwerten $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_j)$ der Unbekannten $\mathbf{x} = (x_j)$ in der Form von Beobachtungsgleichungen

$$\hat{b}_i = b_i + \hat{v}_i = f_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad . \quad (2.1)$$

In Ausgleichungsproblemen erfüllen die Beobachtungen b_i die Beobachtungsgleichungen nicht streng. Für die Beobachtungen werden daher Verbesserungen $\hat{v}_i$ eingeführt, so daß die Beobachtungsgleichungen erfüllt werden. Das *stochastische Modell* beschreibt die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen b_i in Form des Erwartungswerts $\mathbf{E}(\mathbf{b})$ und der Varianz-Kovarianzmatrix oder Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{b})$

$$\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.2)$$

Die Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{b})$ der Beobachtungen setzt sich aus dem Produkt der positiv-definiten Gewichtskoeffizientenmatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{b}\mathbf{b}(n,n)}$ und des Varianzfaktors σ_o^2

$$\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \sigma_o^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{b}\mathbf{b}} \quad (2.3)$$

zusammen. Eine *positiv-definite* Matrix besitzt nur positive Diagonalelemente. Die Inverse der Matrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ wird als Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{b}\mathbf{b}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}^{-1} \quad (2.4)$$

bezeichnet. Für gleich genaue und unkorrelierte Beobachtungen wird $\mathbf{Q}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ gleich der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ gesetzt.

Ausgleichungsprinzip

Um die n Verbesserungen $\hat{v}_i$ und die u Schätzwerte $\hat{x}_j$ der unbekannten Parameter x_j zu ermitteln, wird eine Ausgleichung nach einem vorgegebenen Prinzip durchgeführt. Das Prinzip kann durch eine Zielfunktion L_p mit $p \in \{1, \dots, \infty\}$ beschrieben werden. Für $p = 1$ erhält man mit $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_i)$ die L_1 -Norm-Schätzung, bei der mit $|\hat{\mathbf{v}}| = \min$ die Absolutbeträge der Verbesserungen minimiert werden. Im folgenden wird der Fall $p = 2$, die L_2 -Norm-Schätzung diskutiert, die wegen $\hat{\mathbf{v}}' \hat{\mathbf{v}} = \min$ auch als *Methode der kleinsten Quadrate* bezeichnet wird. Das Minimierungsproblem $\hat{\mathbf{v}}' \hat{\mathbf{v}} = \min$ gilt nur für unkorrelierte und gleich genaue Beobachtungen. Mit Hinzunahme des stochastischen Modells folgt die allgemeine Zielfunktion der Methode der kleinsten Quadrate

$$\hat{\mathbf{v}}' \mathbf{P}_{\mathbf{b}\mathbf{b}} \hat{\mathbf{v}} = \min \quad . \quad (2.5)$$

Schätzung

Die ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{b}_i$ müssen die Beobachtungsgleichungen (2.1) für die ausgeglichenen Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ erfüllen. Ist der Zusammenhang zwischen den Beobachtungen b_i und den Unbekannten $\hat{x}_i$ nicht linear, führt die Anwendung der Taylorentwicklung

$$f_i(\hat{\mathbf{x}}) = f_i(\hat{\mathbf{x}}) + f_i'(\hat{\mathbf{x}}) \Delta \hat{\mathbf{x}} + \dots \quad (2.6)$$

mit Abbruch nach dem zweiten Term zu linearen Beobachtungsgleichungen. Anstelle der Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ werden dann die Zuschläge $\Delta\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}}$ zu den Näherungswerten $\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}} = (\overset{\circ}{x}_j)$ geschätzt, so daß die Unbekannten aus

$$\hat{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}} + \Delta\hat{\mathbf{x}} \quad (2.7)$$

folgen. Die n Beobachtungsgleichungen lauten damit

$$b_i + \hat{v}_i = f_i(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}}) + f'_i(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}})\Delta\hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (2.8)$$

Die Jakobi- oder Designmatrix $\mathbf{A}_{(n,u)} = (a_{ij})$ enthält die partiellen Ableitungen

$$f'_i(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}}) = \frac{\partial f_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \quad f'_i(\overset{\circ}{x}_j) = \frac{\partial f_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_j} = a_{ij} \quad (2.9)$$

der Beobachtungsgleichungen nach den Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ an der Stelle der Näherungswerte $\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}}$. Die Differenzen zwischen den Beobachtungen b_i und den Funktionswerten an der Stelle der Näherungswerte $\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}}$ wird als Widerspruchsvektor $\mathbf{w} = (w_i)$ mit $w_i = b_i - f_i(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}})$ eingeführt. Damit wird das Gleichungssystem (2.8) zu

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w} \quad . \quad (2.10)$$

Nach Einsetzen der Gleichung (2.10) in die Zielfunktion (2.5) ergibt sich

$$(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w})' \mathbf{P}_{\mathbf{bb}} (\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) = \min \quad . \quad (2.11)$$

Um das Minimum zu bestimmen, wird (2.11) nach $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ differenziert und gleich Null gesetzt. Man erhält somit

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{w} \quad . \quad (2.12)$$

Setzt man voraus, daß die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N}_{(u,u)} = \mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A} \quad (2.13)$$

regulär und damit invertierbar ist, folgt die Lösung

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{w} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{w} \quad (2.14)$$

für die Zuschläge $\Delta\hat{\mathbf{x}}$. Mit den Zuschlägen wird aus den Verbesserungen $\hat{\mathbf{v}}$ (2.10) mit der Redundanz $r = n - u$ der Varianzfaktor $\hat{\sigma}_o^2$ a posteriori

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\hat{\mathbf{v}}}{r} \quad (2.15)$$

geschätzt. Damit ergibt sich die Dispersionsmatrix $\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}})$ der Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}_o^2 (\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A})^{-1} = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{N}^{-1} \quad . \quad (2.16)$$

Die Standardabweichungen $\hat{\sigma}_{\hat{x}_j}$ der geschätzten Unbekannten berechnen sich aus der Wurzel der Varianzen, die auf der Hauptdiagonale der Dispersionsmatrix stehen.

Normalgleichungssystem für mehrere Arten an Unbekannten

Für zwei Arten an Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}_{(u)} = [\hat{\mathbf{x}}_{1(u_1)}, \hat{\mathbf{x}}_{2(u_2)}]$ läßt sich die Jakobimatrix $\mathbf{A}_{(n,u)}$ in zwei Blockmatrizen $\mathbf{A}_{1(n,u_1)}$ und $\mathbf{A}_{2(n,u_2)}$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \quad (2.17)$$

zerlegen, wobei $u = u_1 + u_2$. Die Berechnung von $\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}$ nach (2.13) führt mit der Zerlegung (2.17) zu der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}'_2\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_2\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.18)$$

Auch die Matrix $\mathbf{N}_{(u,u)}$ läßt sich damit in vier Blockmatrizen $\mathbf{N}_{11(u_1, u_1)}$, $\mathbf{N}_{12(u_1, u_2)}$, $\mathbf{N}_{21(u_2, u_1)}$ und $\mathbf{N}_{22(u_2, u_2)}$ aufspalten, wobei $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{N}_{21}'$ ist.

Die Inversion einer regulären Matrix $\mathbf{N}$ in obiger Form läßt sich, falls $\mathbf{N}_{22}^{-1}$ existiert, mit

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21} \quad (2.19)$$

folgendermaßen berechnen

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & -\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{N}_{22}^{-1} + \mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

bzw. für den Fall, daß $\mathbf{N}_{11}^{-1}$ existiert, mit

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} \quad (2.21)$$

zu

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} + \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1} & -\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}\mathbf{S}_2^{-1} \\ -\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1} & \mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

berechnen. Die Blockmatrizen von $\mathbf{N}^{-1}$ werden im folgenden mit

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{N}}_{11} & \bar{\mathbf{N}}_{12} \\ \bar{\mathbf{N}}_{21} & \bar{\mathbf{N}}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

bezeichnet. Sie haben dieselben Dimensionen wie die Blockmatrizen der Normalgleichungsmatrix. Es gilt zu überprüfen, ob $\mathbf{N}_{11}$ oder $\mathbf{N}_{22}$ regulär, d.h. invertierbar ist. Für den Fall, daß weder $\mathbf{N}_{11}$ noch $\mathbf{N}_{22}$ regulär ist wird im folgenden Abschnitt die Möglichkeit der Inversion des Normalgleichungssystems unter Anwendung der Bayes-Statistik erläutert. Generell ist eine voll besetzte Matrix wesentlich aufwendiger zu invertieren, als eine schwach besetzte Matrix mit einfacher Struktur.

2.2 Grundlagen der Bayes-Statistik

Die Beobachtungen b_i sind zufällige Ereignisse und werden vollständig durch die gemeinsame Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion aller Beobachtungen beschrieben. Meist begnügt man sich mit der Angabe des Erwartungswertes sowie der Varianzen und Kovarianzen. In der Bayes-Statistik hingegen wird mit den Verteilungen der Beobachtungen und der Unbekannten gerechnet. Zusätzliche Informationen aus den Beobachtungen oder bereits vorhandene (a priori) Vorinformationen über die unbekannten Parameter werden in den Auswertevorgang der Ausgleichsrechnung mit einbezogen.

Allgemein sei ein Zufallsvektor $\mathbf{y} = (y_i)$ mit $i = 1, \dots, n$ Elementen eine n -dimensionale Zufallsvariable und besitze die multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\mathbf{y})$. Anstelle der Bezeichnung Wahrscheinlichkeitsverteilung benutzt man auch die Begriffe Wahrscheinlichkeitsdichte, Dichtefunktion oder kurz Wahrscheinlichkeit, Verteilung und Dichte.

Der *Satz von Bayes* verbindet die Verteilungen zweier Zufallsvariablen. Sind zwei zufällige Ereignisse als Zufallsvektoren $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p(\mathbf{y})$ und $p(\mathbf{z})$ gegeben und ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{z}|\mathbf{y})$ von $\mathbf{z}$ bekannt, so kann die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ von $\mathbf{y}$ mit

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{y})p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{z})} \quad (2.24)$$

berechnet werden [HILBERT 1989] (S. 371). Unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ versteht man die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses $\mathbf{y}$ unter der Bedingung, daß das Ereignis $\mathbf{z}$ bereits eingetreten ist. Setzt man die gegebenen Werte des Zufallsvektors $\mathbf{z}$ in $p(\mathbf{z})$ ein, erhält man einen konstanten Wert für $p(\mathbf{z})$ und der Satz von Bayes kann als Proportionalitätsbeziehung

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z}) \sim p(\mathbf{z}|\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) \quad (2.25)$$

formuliert werden. Ist der Zufallsvektor $\mathbf{y}$ z.B. normalverteilt, mit dem Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma}$, gilt die multivariate Normalverteilung

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})} \quad (2.26)$$

[KOCH 1997] (S. 127) und es wird hierfür die Schreibweise $\mathbf{y} \in N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ verwendet.

Im folgenden wird die Bayes-Statistik auf ein lineares Modell

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{b}|\sigma_o^2) = \sigma_o^2 \mathbf{I} \quad (2.27)$$

mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{b}|\sigma_o^2)$ des Beobachtungsvektors $\mathbf{b} = (b_i)$ mit $i = 1, \dots, n$ Beobachtungen unter der Bedingung, daß σ_o^2 gegeben ist, angewandt. In diesem Fall wird von gleich genauen Beobachtungen ausgegangen, d.h. in (2.3) wird $\mathbf{Q}_{\mathbf{bb}} = \mathbf{I}$ gesetzt. Für ein nichtlineares Modell ist die Beobachtungsgleichung erst nach (2.8) zu linearisieren und gemäß (2.10) tritt dann $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ anstelle von $\hat{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{w}$ anstelle von $\mathbf{b}$. Der Beobachtungsvektor $\mathbf{b}$ übernimmt jetzt die Rolle des Zufallsvektors $\mathbf{z}$ und anstelle von $\mathbf{y}$ werden die unbekannten Parameter $\mathbf{x}$ und $\tau = \frac{1}{\sigma_o^2}$ eingeführt. Die Beziehung (2.25) lautet damit

$$p(\mathbf{x}, \tau|\mathbf{b}) \sim p(\mathbf{b}|\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau) \quad . \quad (2.28)$$

Bei $p(\mathbf{b}|\mathbf{x}, \tau)$ handelt es sich um die Verteilung des Beobachtungsvektors $\mathbf{b}$ unter der Bedingung, daß Werte für $\mathbf{x}$ und τ gegeben sind. Man nennt diese Funktion auch Likelihoodfunktion und setzt dafür üblicherweise die multivariate Normalverteilung gemäß (2.26) an. Mit Einsetzen des Erwartungswertes und der Dispersionsmatrix aus (2.27) gilt für die Beobachtungen demnach die Verteilung

$$p(\mathbf{b}|\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi\tau^{-1}}} e^{-\frac{\tau}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{Ax})'(\mathbf{b}-\mathbf{Ax})} \quad . \quad (2.29)$$

Die a priori Dichte $p(\mathbf{x}, \tau)$ stellt die Verteilung der Unbekannten dar. Liegt Vorinformation über die unbekannten Parameter vor, wird diese in die Verteilung eingeführt und $p(\mathbf{x}, \tau)$ als bekannt angenommen. Man spricht in diesem Zusammenhang von informativer Dichte. Liegt keine Vorinformation vor, spricht man von nichtinformativer Dichte und erhält die Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}$ für $\mathbf{x}$ streng nach (2.14) und $\hat{\sigma}_o^2$ für σ_o^2 näherungsweise nach (2.15) [KOCH 1990] (S. 64 ff.). Im folgenden wird eine informative Dichte eingeführt.

Sind $\mathbf{x}$ und τ voneinander unabhängig, setzt sich die Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}, \tau)$ aus

$$p(\mathbf{x}, \tau) = p(\mathbf{x}) p(\tau) \quad (2.30)$$

zusammen. Die unbekannten Parameter $\mathbf{x}$ sollen ebenfalls normalverteilt sein, d.h. $\mathbf{x} \in N(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{V})$ mit dem Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \tau^{-1}\mathbf{V}$. Nach (2.26) gilt dann

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{V}) = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi}\sqrt{\det(\tau^{-1}\mathbf{V})}} e^{-\frac{\tau}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad . \quad (2.31)$$

Die positiv definite Matrix $\mathbf{V}$ und der Vektor $\boldsymbol{\mu}$ sind die Vorinformationen für $\mathbf{x}$. Von τ wird angenommen, daß es der Gamma (G)-Verteilung unterliegt, d.h. $\tau \in G(c, d)$. Damit gilt

$$p(\tau) = p(\tau|c, d) = \frac{c^d \tau^{d-1} e^{-c\tau}}{\Gamma(d)} \sim \tau^{d-1} e^{-c\tau} \quad \text{für } c > 0, d > 0, 0 < \tau < \infty \quad (2.32)$$

[KOCH 1990] (S. 170) mit den Vorinformationen c und d und der Gamma-Funktion $\Gamma(d)$.

Mit Einsetzen von (2.31) und (2.32) in (2.30) folgt unter Vernachlässigung der konstanten Anteile die Proportionalitätsbeziehung

$$p(\mathbf{x}, \tau|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, c, d) \sim \tau^{\frac{n}{2}+d-1} e^{-\frac{\tau}{2}((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})+2c)} \quad . \quad (2.33)$$

Die a posteriori Werte für die Unbekannten haben die gleiche Verteilung wie die a priori Werte [KOCH 1990] (S. 27). Somit ist $p(\mathbf{x}, \tau|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, c, d)$ eine Normal-Gamma (NG)-Verteilung.

Bis auf einen Proportionalitätsfaktor ist die bedingte Verteilung der Unbekannten $p(\mathbf{x}, \tau|\mathbf{b})$ aus dem Produkt von $p(\mathbf{b}|\mathbf{x}, \tau)$ aus (2.29) und $p(\mathbf{x}, \tau)$ aus (2.33) nach (2.28) berechenbar.

Unter Vernachlässigung des konstanten Faktors erhält man die Proportionalitätsbeziehung

$$p(\mathbf{x}, \tau|\mathbf{b}) \sim \tau^{\frac{n+u}{2}+d-1} e^{-\frac{\tau}{2}(2c+(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})+(\mathbf{b}-\mathbf{Ax})'(\mathbf{b}-\mathbf{Ax}))} \quad , \quad (2.34)$$

welche ebenfalls eine NG-Verteilung darstellt.

Allgemein gilt für die Normal-Gamma Verteilung der unbekannten Parameter $\mathbf{x}$ und τ

$$p(\mathbf{x}, \tau | \mathbf{V}_o, \boldsymbol{\mu}_o, c_o, d_o) \sim \tau^{\frac{n}{2} + d_o - 1} e^{-\frac{\tau}{2} (2c_o + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_o)' \mathbf{V}_o^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_o))} \quad (2.35)$$

für $c_o > 0, d_o > 0, 0 < \tau < \infty, -\infty < x_i < \infty$

[KOCH 1990] (S. 183). Nach Ausmultiplizieren des Exponenten von (2.34) ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich mit (2.35) die zugehörigen Parameter der NG-Verteilung zu

$$\boldsymbol{\mu}_o = (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{V}_o = (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} \quad (2.37)$$

$$c_o = \frac{1}{2}(2c + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x})'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}) + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})'(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})) \quad (2.38)$$

$$d_o = \frac{n + 2d}{2} \quad (2.39)$$

mit den Vorinformationen $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, c, d$ [KOCH 1990] (S. 27).

Um aus der gemeinsamen Verteilung von $\mathbf{x}, \tau | \mathbf{b}$ die Schätzwerte zu berechnen, werden zur Trennung der beiden Größen die Randverteilungen von $\mathbf{x} | \mathbf{b}$ und $\tau | \mathbf{b}$ durch Integration der gemeinsamen Verteilung über die jeweils andere Variable gebildet [KOCH 1988] (S. 105). Als Ergebnis erhält man für $\mathbf{x} | \mathbf{b}$ eine multivariate t -Verteilung und für $\tau | \mathbf{b}$ eine Gammaverteilung [KOCH 1990] (S. 173-175). Das erste Moment der Verteilung (Erwartungswert $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_o = \hat{\mathbf{x}}$) ist der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ der Unbekannten $\mathbf{x}$ und das zweite Moment die Dispersionsmatrix $\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}})$. Daraus folgt als Ergebnis der Bayes-Schätzung

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.40)$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{1}{n + 2d - 2}(2c + (\boldsymbol{\mu} - \hat{\mathbf{x}})'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})'(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})) \quad (2.41)$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}_o^2(\mathbf{A}'\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} \quad (2.42)$$

[KOCH 1990] (S. 70), [SCHMIDT 1995].

Im allgemeinen Fall mit einer Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_{bb}$ lauten die Schätzwerte $\hat{\mathbf{x}}$ und die Dispersionsmatrix $\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}})$ entsprechend (2.40-2.42)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{P}_{bb}\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{bb}\mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \quad (2.43)$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{1}{n + 2d - 2}(2c + (\boldsymbol{\mu} - \hat{\mathbf{x}})'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})'\mathbf{P}_{bb}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})) \quad (2.44)$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}_o^2(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{bb}\mathbf{A} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} \quad (2.45)$$

[KOCH 1990] (S. 70). Eine Beschreibung mit Anwendung der Bayes-Statistik in der Satellitenaltimetrie ist in [HÜCKELHEIM 1994] zu finden.

Die Anwendung der Bayes-Statistik ermöglicht durch Einführen der Vorinformation auch eine Lösung bei Konfigurationsdefekten. Ist z.B. wegen singulärer Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N} = \mathbf{A}'\mathbf{A}$ die zu (2.12) analoge Gleichung

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{b} \quad (2.46)$$

nicht lösbar, ist (2.14) nicht berechenbar. Wendet man hingegen (2.40-2.42) oder (2.43-2.45) an, erhält man durch die Addition einer positiv definiten Matrix $\mathbf{V}^{-1}$ ein eindeutig lösbares Gleichungssystem. Diese Eigenschaft wird bei der Schätzung der Meeresspiegelschwankungen aus Kreuzungspunktdifferenzen in Kapitel 6 genutzt.

2.3 Hypothesentests

Zur Behandlung von Ausreißern und zum Glätten der Meßdaten (siehe Kapitel 5.3.2) werden Signifikanz- und Ausreißertests angewendet. Hypothesentests dienen zum Testen vorhandener Information über die unbekannten Parameter. Die allgemeine Hypothese lautet Nullhypothese H_o gegen Alternativhypothese H_1

$$H_o : \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mathbf{H}\mathbf{x} \neq \mathbf{z} \quad (2.47)$$

mit der Matrix $\mathbf{H}_{(t,u)}$ und dem Vektor $\mathbf{z}_{(t)}$, wobei t die Anzahl der zu testenden Parameter und u die Anzahl der Unbekannten ist. Die Testgröße und der Fraktilwert (Schwellwert) für Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese werden im folgenden erläutert.

Aus dem Vergleich des Schätzwertes der Quadratsumme der Residuen

$$\Omega = \hat{\mathbf{v}}' \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{bb}} \hat{\mathbf{v}} \quad (2.48)$$

einer vermittelnden Ausgleichung mit dem Schätzwert einer vermittelnden Ausgleichung unter der Restriktion R der Nullhypothese läßt sich die Größe Ω_R ableiten, die die Änderung von Ω durch Hinzunahme der Nullhypothese angibt. Das Verhältnis

$$\frac{\Omega_R/t}{\Omega/(r-t)} \quad (2.49)$$

besitzt im Fall der Annahme der Nullhypothese die Fisher-Verteilung $F_{(t,r-t)}$, mit der Redundanz $r = n - u$. Daraus läßt sich die Testgröße T berechnen, mittels derer über den Hypothesentest entschieden wird

$$T = \frac{1}{t\hat{\sigma}_0^2} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w})' [\mathbf{H}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}']^{-1} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) \quad (2.50)$$

Zur Entscheidung über die Annahme der Nullhypothese wird der Fraktilwert $F_{(1-\alpha,t,r)}$ mit dem Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) α herangezogen. Die Fraktilwerte der F -Verteilung mit einem Variationsbereich von Null bis Unendlich sind z.B. in [SACHS 1974] (S. 116), [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW 1980] (S. 77-79) vertafelt. Die Nullhypothese wird für $T \leq F_{(1-\alpha,t,r)}$ angenommen, andernfalls abgelehnt.

Signifikanztest

Der Test einer Unbekannten x_i mit $t = 1$ lautet als Spezialfall der allgemeinen Hypothese

$$H_0 : x_i = z_i \quad \text{gegen} \quad H_1 : x_i \neq z_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, u\} \quad (2.51)$$

Ausgehend vom allgemeinen Hypothesentest gilt

$$\mathbf{H} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad ,$$

wobei der Wert 1 in der i -ten Spalte von $\mathbf{H}$ steht. Somit ergibt sich die Testgröße aus (2.50) zu

$$T = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} (\hat{x}_i - z_i) \frac{1}{q_{\hat{x}_i \hat{x}_i}} (\hat{x}_i - z_i) = \frac{(\hat{x}_i - z_i)^2}{\hat{\sigma}_{\hat{x}_i}^2} \quad (2.52)$$

Die Testgröße T ist F -verteilt, d.h. $T \in F_{(1,r)}$. Alternativ kann beim Test einer einzigen Unbekannten $\sqrt{T}$ als Testgröße betrachtet werden. $\sqrt{T}$ unterliegt der Studentverteilung $t_{(r)}$. Die Studentverteilung ist symmetrisch, d.h. $t_{(\frac{\alpha}{2},r)} = t_{(1-\frac{\alpha}{2},r)}$. Die Fraktilwerte der Studentverteilung sind z.B. in [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW 1980] (S. 74) tabelliert. Die Nullhypothese wird angenommen, wenn $|\sqrt{T}| \leq t_{(1-\frac{\alpha}{2},r)}$ ist, andernfalls wird die Alternativhypothese angenommen.

Ein Sonderfall des Signifikanztests ist der Test der Unbekannten gegen Null, d.h. für $z_i = 0$. Die Testgröße wird damit zu

$$\sqrt{T} = \frac{\hat{x}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{x}_i}} \quad (2.53)$$

Ausreißertest

In einem Ausreißertest sollen grob falsche Werte einer Meßreihe gefunden werden.

Um Ausreißer mittels einer Parameterschätzung aufzudecken, wird folgende Hypothese eingeführt

$$H_0 : \max \left| \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \right| = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \max \left| \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \right| \neq 0 \quad (2.54)$$

Entschieden werden kann nach Baarda:

$$\max \left| \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \right| > t_{1-\alpha,\infty} \quad \text{wobei} \quad \hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \sigma_{v_i} \quad (2.55)$$

Die Nullhypothese wird abgelehnt und die Alternativhypothese angenommen, wenn der Beobachtungswert grob falsch, d.h. ein Ausreißer ist.

3. Satellitenaltimetrie

Altimetrie setzt sich aus dem lateinischen Wort *altus* = *hoch, tief* und dem griechischen Wort *μέτρον* = *Maß, Strecke* zusammen. *Satellitenaltimetrie* steht allgemein für die Höhenmessung von Satelliten zur Erdoberfläche mittels Messung der Laufzeit eines Radarimpulses. Da Wasserflächen im Gegensatz zu Landflächen den vom Satelliten ausgesandten Radarimpuls besonders gut reflektieren, beschränkt sich die Anwendung der Altimetrie in der Regel auf die Messungen zur Meeresoberfläche.

3.1 Satellitenbewegung

Erderkundungssatelliten bewegen sich auf bestimmten Bahnen um die Erde. Die Erde rotiert unter der Satellitenbahn, wodurch die *Satellitenspur* (senkrechte Projektion der Satellitenbahn auf die Erdoberfläche) im Laufe der Zeit die Erde überstreicht. Die Form und Lage der Bahn, sowie die Flughöhe und -geschwindigkeit der Satelliten werden geeignet gewählt. Die Satellitenbewegung wird im raumfesten geozentrischen Koordinatensystem beschrieben, das durch den Himmelsäquator, den Himmelspol und den Frühlingspunkt definiert ist. Der *Frühlingspunkt* ist der Schnittpunkt der aufsteigenden *Ekliptik* (scheinbare Spur der Sonne um die Erde) mit dem Himmelsäquator.

Die geometrische Konstellation von *Geozentrum* O (Massenmittelpunkt der Erde), *Topozentrum* T (Beobachtungsstation) und Satellit S ist in Abb. 3.1 dargestellt. Die drei Vektoren $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ und $\boldsymbol{\rho}$ bilden ein Dreieck, auf dem die geometrische Grundgleichung der Satellitengeodäsie basiert

$$\mathbf{r} - \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad .$$

Die Koordinaten der Beobachtungsstation werden als bekannt angenommen und damit auch der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{R}$. Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{\rho}$ vom Topozentrum zum Satelliten wird zu beliebigen Zeitpunkten gemessen. Der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}$ des Satelliten variiert mit der Bewegung des Satelliten um die Erde. Wird $\mathbf{r}$ zu jedem Zeitpunkt bestimmt und werden die Positionen des Satelliten zu den einzelnen Zeitpunkten aneinandergereiht, läßt sich die Bahn des Satelliten mit $\mathbf{r}(t)$ beschreiben. Im folgenden wird $\mathbf{r}(t)$ durch $\mathbf{r}$ abgekürzt. Eine Station kann den Satelliten immer nur über ein kurzes Bahnstück verfolgen, so daß zur Bestimmung der gesamten Bahn mehrere Stationen notwendig sind, die möglichst gleichmäßig über die ganze Erde verteilt sein sollten.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz besagt, daß zwei Körper (in diesem Falle seien Erde und Satellit als homogene Kugeln betrachtet) eine Anziehungskraft (Gravitationskraft) $\mathbf{G}$ aufeinander ausüben (vgl. z.B. [KUCHLING 1989] (S.138))

$$\mathbf{G} = \frac{G_e M_e m_s}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.1)$$

mit G_e = Gravitationskonstante der Erde

M_e = Punktmasse der Erde

m_s = Punktmasse des Satelliten (3.2)

$$r = |\mathbf{r}| \quad .$$

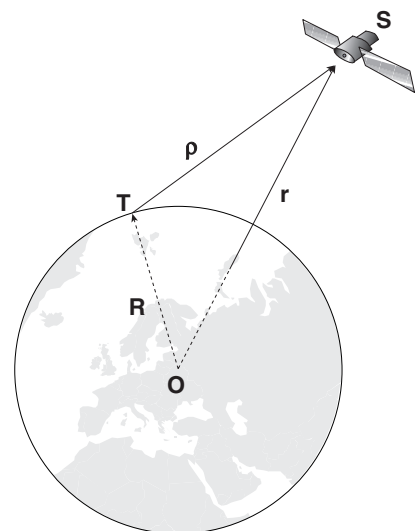


Abb. 3.1: geometrische Konstellation von Geozentrum O , Topozentrum T und Satellit S .

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz lautet die Bewegungsgleichung eines Satelliten [SCHNEIDER 1990] (S. 8)

$$m_s \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \sum_i \mathbf{K}_i \quad \text{mit} \quad |\mathbf{K}_i| \ll |\mathbf{G}| \quad , \quad (3.3)$$

worin $\ddot{\mathbf{r}}$ die Beschleunigung des Satelliten bedeutet. Die Gravitationskraft $\mathbf{G}$ des Zentralfeldes der Erde hat einen wesentlich größeren Einfluß auf die Satellitenbewegung als die Störkräfte $\mathbf{K}_i$. Zu den Störkräften zählen neben den Gravitationsanteilen, die aus der Abweichung vom Zentralfeld resultieren, Gezeitenkräfte anderer Himmelskörper, nichtgravitative Volumenkräfte (z.B. Magnetfelder), Oberflächenkräfte (z.B. Strömungswiderstand, Strahlungsdruck der Sonne) und relativistische Effekte.

Ungestörte Satellitenbewegung

Betrachtet man die Bewegung eines Satelliten unter alleiniger Einwirkung des Gravitationspotentials der Erde als Zentralkörper, reduziert sich Gleichung (3.3) nach Einsetzen von (3.1) [SCHNEIDER 1990] (S. 269) zu

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G_e M_e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{G}}{m_s} \quad (3.4)$$

Die zweifache Integration der vektoriellen Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert die Keplerbahn $\mathbf{r}(t)$ (reduziertes Zweikörperproblem) [SCHNEIDER 1990] (S. 269). Bei zweimaliger Integration einer Differentialgleichung mit dreidimensionalen Vektoren erhält man sechs Integrationskonstanten, welche üblicherweise durch die sechs Keplerelemente α_i mit $i = 1, \dots, 6$ festgelegt werden (siehe Tabelle 3.1).

Gestaltelemente der Bahnellipse	große Halbachse numerische Exzentrizität	a e
Lageelemente der Bahn	Inklination Rektaszension des aufsteigenden Knotens Argument des Perigäums	i Ω ω
Epoche	Zeitpunkt des Perigäumdurchgangs	τ

Tab. 3.1: Keplerelemente

Die Ellipse der Satellitenbahn ist durch die große Halbachse a und die Exzentrizität e definiert. Die Lageelemente i, Ω, ω der Keplerbahn sind in Abb. 3.2 dargestellt. Die *Inklination* i ist der Winkel zwischen aufsteigender Satellitenbahn und Äquatorebene. Bei einer Inklination kleiner als 90° ist die Satellitenbewegung *prograd* (im Sinn der Erddrehung) und zwischen 90° und 180° *retrograd* (im Gegensinn der Erddrehung). Ω ist die *Rektaszension* (Länge) des *aufsteigenden Bahnknotens* K (Schnittpunkt der Äquatorebene der Erde mit der Satellitenbahnebene an der Stelle der aufsteigenden Satellitenspur) bezüglich des erdfesten Koordinatensystems. Der Winkel zwischen dem aufsteigenden Bahnknoten und dem *Perigäum* (erdnächster Punkt der Satellitenbahn) ist das *Argument des Perigäums* ω . Die Satellitenposition zum Zeitpunkt t wird über die Zeitdifferenz zur *Epoche* τ (Zeitpunkt des Satellitendurchgangs durch das Perigäum) über die *mittlere Anomalie* M

$$M = \bar{n}(t - \tau) \quad (3.5)$$

mit der *mittleren Bewegung* (Winkelgeschwindigkeit)

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{G_e M_e}{a^3}} \quad (3.6)$$

festgelegt. Statt der mittleren Anomalie M kann die wahre Anomalie ν , die in Abbildung 3.2 dargestellt ist, verwendet werden.

Gestörte Satellitenbewegung

Die tatsächliche Bahn des Satelliten weicht von der Keplerbahn ab. Die Störkräfte $\mathbf{K}_i$ (Gleichung 3.3) beschleunigen den Satelliten in unterschiedliche Richtungen. Je nach Flughöhe, Form und Oberflächenbeschaffenheit des Satelliten wirken die einzelnen Störkräfte unterschiedlich stark. Eine kurze Beschreibung der Störkräfte, die auf Altimetersatelliten mit einer geringen Flughöhe von 800–1300 km wirken, soll einen Eindruck vermitteln, welche Kräfte berücksichtigt werden müssen und wie komplex die Störkraftmodelle werden können. Die Güte der Modelle bedingt die Bahnbestimmungsgenauigkeit. Eine ausführliche Behandlung der Störkräfte ist [BALMINO 1993, FELTENS 1991, SCHNEIDER 1990, DOW 1988] zu entnehmen. Folgende Störbeschleunigungen wirken auf Altimetersatelliten:

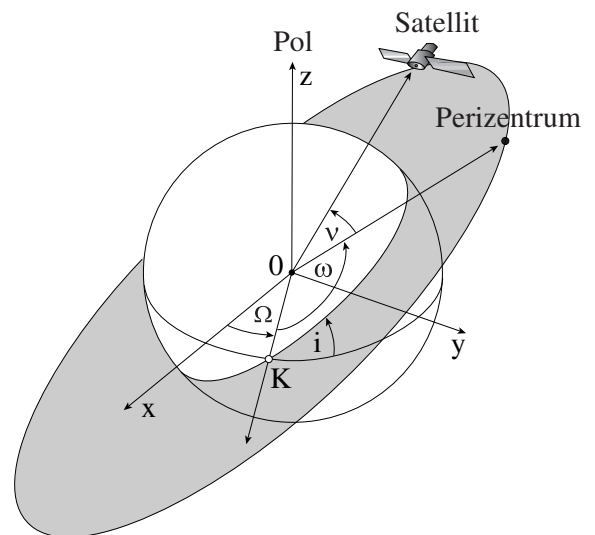


Abb. 3.2: Prinzipskizze der Satellitenbewegung

- Den größten Einfluß auf die Satellitenbahn haben, wie bereits erwähnt, *gravitative Kräfte*. Das vom Zentralfeld der Erde abweichende Gravitationsfeld ist die wesentliche Ursache für die von einer Keplerbahn abweichende Satellitenbahn.
- Die Anziehungskräfte dritter Körper, wie Sonne, Mond und Planeten wirken auf die Erde und den Satelliten.
- Während des Durchfluges durch die Hochatmosphäre (bis in 2000 Kilometer Höhe) erfährt ein niedrigfliegender Satellit einen *Strömungswiderstand*. Die atmosphärische Reibung (*air drag*) wird durch den Aufprall von Luftpartikeln verursacht.
- Mit zunehmender Flughöhe werden Satelliten vom Sonnenwind, einer Partikelstrahlung gebremst. Die Wirkung des *Strahlungsdrucks der Sonne* ist abhängig von der Strahlungsintensität, von der Einfallsrichtung der Strahlung und der dargebotenen effektiven Oberfläche des Satelliten.
- Unter *Erdalbedo* versteht man die von der Erde reflektierte Sonnenstrahlung. Diese oft auch als indirekter Sonnenstrahlungsdruck bezeichnete Strahlung ist abhängig von der Wolkenverteilung, der Meteorologie, der Atmosphäre, dem Erdschatten und der Beschaffenheit der Erdoberfläche. Eis- und Wasserflächen zeigen ein anderes Reflexionsverhalten als Landflächen. Die Wärmestrahlung der Erde im Infrarotbereich ist in diesem Zusammenhang ebenfalls nicht zu vernachlässigen.
- Ferner ist die *thermische Emission* zu nennen. Wird Strahlung absorbiert, erfährt der Satellit an der Sonnenseite eine Erwärmung. Folglich kann von der Sonnenseite mehr thermische Energie abgestrahlt werden als von der Schattenseite, wodurch der Satellit eine Beschleunigung in Richtung der Schattenseite erfährt. Bei der Modellierung gilt zu beachten, daß Erwärmung und Abkühlung mit zeitlichen Verzögerungen erfolgen und daß der Satellit sich um die eigene Achse dreht.

Die Störbeschleunigungen werden zu einem Vektor $\mathbf{s}$ zusammengefaßt und in die Bewegungsgleichung (3.4) hinzugefügt. Dadurch ergibt sich die vollständige Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G_e M_e}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{s} = \frac{\mathbf{G}}{m_s} + \sum_i \frac{\mathbf{K}_i}{m_s} \quad (3.7)$$

Die Lösung dieser Gleichung in analytischer Form ist laut [SCHNEIDER 1990] (S. 276) bisher nicht mit einer den Beobachtungen entsprechenden Qualität möglich. Eine ausreichend genaue Lösung gelingt nur mit numerischen Verfahren. In der Praxis wird daher meist die numerische Bahnintegration als Randwert- oder Anfangswertaufgabe angewandt. Eine ausführliche Darstellung dazu wird in [SCHNEIDER 1990] (S. 471 ff.) gegeben. Auch wenn eine analytische Lösung unzureichend genau ist, kann sie dennoch zur Gewinnung von Schwerefeldkorrekturen aus gestörten Satellitenbahnen verwendet werden, wie in Kapitel 4 beschrieben wird.

Konzeption von Altimetermissionen

Die Nutzbarkeit eines Satelliten als Trägerplattform für Sensoren der Erdbeobachtung hängt von der Bahncharakteristik ab. Für Altimetermissionen werden Satellitenbahnen mit einer geringen Exzentrizität bevorzugt, um die Variation der vertikalen Komponente der Bahn, die für eine Höhenmessung ausschlaggebend ist, gering zu halten. Die große Halbachse bestimmt mit Gleichung (3.6) die mittlere Bahngeschwindigkeit und damit die Spurendichte innerhalb eines Satellitenzyklus. Ein *Zyklus* besteht aus der Zahl an Umläufen bis der Satellit wieder den selben Ort auf der Erdoberfläche entlang der selben Spur überfliegt und die Bahn sich in sich selbst schließt. Während eines Zyklus überdeckt die Satellitenspur die Erde in einem gleichmäßigen Spurenmuster. In Abb. 3.3 ist das Spurenbild des Satelliten Topex/Poseidon eines Zyklus von 10 Tagen zu sehen. Die Inklination der Satellitenbahn bestimmt die Breite der geographischen Überdeckung. Eine Inklination von 66° der Topex/Poseidon Bahn hat demzufolge eine Breitenüberdeckung von 66° . Die Anforderungen an die Konzeption von Altimetermissionen sind in [PARKE et al. 1987, BALMINO 1993] und [KLOKOCNIK et al. 1994] (S. 18 ff.) beschrieben.

3.2 Grundprinzip der Satellitenaltimetrie

Das Altimeter des Satelliten sendet Radarimpulse mit Frequenzen im Ku- und C-Band [13.5 GHz, 5 GHz] in Nadirrichtung, senkrecht zur Erde aus. Der Satellit wird dabei mit Hilfe einer Sternkamera senkrecht zum Referenzellipsoid ausgerichtet. Der ausgesandte Impuls wird an der Meeresoberfläche reflektiert, stark verformt

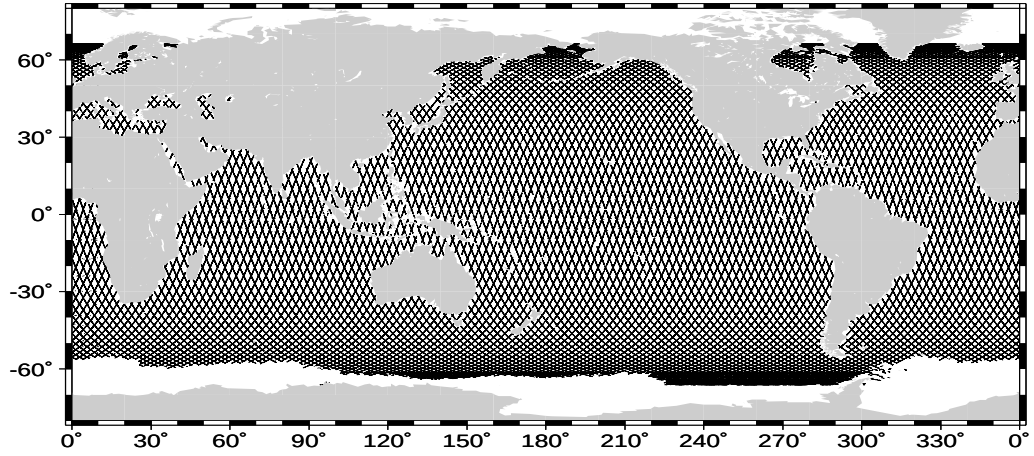


Abb. 3.3: Spurenbild der Topex/Poseidon-Mission eines Zyklus von 10 Tagen

und abgeschwächt im Antennensystem des Satelliten wieder empfangen. Aus der Laufzeit Δt der Radarwelle ergibt sich, im idealisierten Fall eines Vakuums, die Höhe H_{alt} des Satelliten über der Meeresoberfläche aus

$$H_{alt} = \frac{c\Delta t}{2}, \quad (3.8)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Beim Lauf durch die Atmosphäre erfahren die Radarwellen, wie alle elektromagnetischen Wellen, jedoch Laufzeitverzögerungen. An der Meeresoberfläche wird der Radarstrahl wegen des Öffnungswinkels (Strahlbreite) von einem kreisförmigen Gebiet (Reflektionsgebiet, *Footprint*) reflektiert. Der zurückkehrende Impuls repräsentiert einen Mittelwert über das Reflektionsgebiet. Je nach Wellenhöhe hat der Footprint einen unterschiedlichen Durchmesser von mehreren Kilometern. Bei ruhiger, glatter See ist das Reflektionsgebiet kleiner als bei rauher See, da die Flanken hoher Wellen das Altimetersignal auch fernab vom Zentrum des Meßkegels reflektieren [PARKE und WALSH 1995, CHELTON et al. 1989]. Eine Neigung der Meeresoberfläche in dem Footprint führt dazu, daß der Radarimpuls nicht direkt in Nadirrichtung (senkrechte Projektion) reflektiert wird. Aus der Laufzeit, der Intensität und der Form der reflektierten Radarimpulse kann neben der Entfernung des Satelliten zur Meeresoberfläche auch der Seegang in Form von Wellenhöhe und Windgeschwindigkeit an der Meeresoberfläche ermittelt werden [SEEBER 1989].

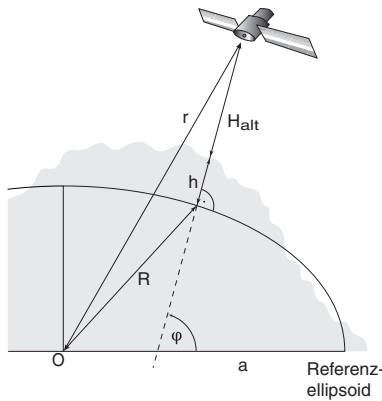


Abb. 3.4: Geometrie der Altimetermessung.

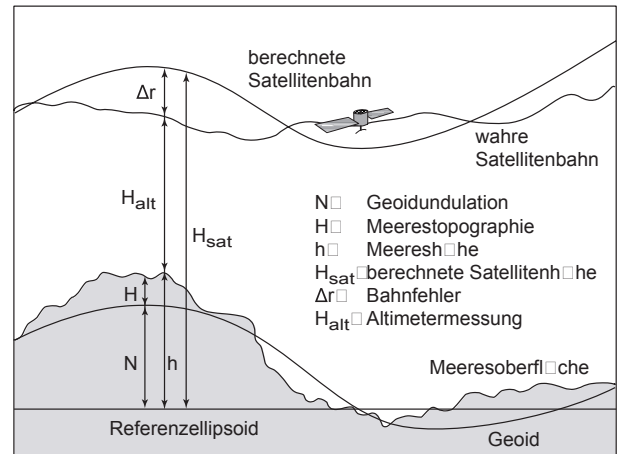


Abb. 3.5: Prinzipskizze der Altimetrie.

Aus der gemessenen Altimeterentfernung H_{alt} vom Satelliten zur Meeresoberfläche wird die *altimetrische Höhe* h

$$h = r - R - H_{alt} \quad (3.9)$$

über dem Referenzellipsoid abgeleitet, wobei wegen der Abplattung des Ellipsoids ein Korrekturterm $C = \frac{R}{8} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^4 \sin^2 \varphi$ [RUMMEL 1993], mit der geographischen Breite φ und der Exzentrizität e , erforderlich ist (siehe Geometrie in Abb. 3.4). Die Größenordnung von C variiert zwischen 0 und 5 m. Der Korrekturterm wird vorab bei der Berechnung der Satellitenhöhe H_{sat} über dem Referenzellipsoid berücksichtigt.

Aus der Satellitenhöhe H_{sat} über dem Referenzellipsoid und den Messungen H_{alt} ergibt sich unter Berücksichtigung des Bahnfehlers Δr und des Korrekturterms v (vgl. Abb. 3.5) die altimetrische Höhe

$$h = (H_{sat} - \Delta r) - (H_{alt} + v) \quad (3.10)$$

über dem Referenzellipsoid. Der *Bahnfehler* Δr bezeichnet die Abweichung der tatsächlichen Flugbahn von der berechneten Bahn. Dieser Modellierungsfehler der Satellitenbahn ist zum größten Teil durch die ungenaue Kenntnis des Erdschwerefeldes (siehe Abschnitt 3.1) bedingt. In dem Korrekturterm v sind unter anderem Laufzeitfehler und instrumentelle Meßfehler zusammengefaßt, die in Abschnitt 3.3 näher erläutert werden.

Als weitere Größe läßt sich aus der Prinzpskizze 3.5 die *Meerestopographie* H

$$H = h - N \quad (3.11)$$

ableiten. Diese Abweichung der aktuellen Meeresoberfläche vom *Geoid*, einer Niveaufläche des Erdschwerefeldes (dargestellt durch die *Geoidundulation* N , der Höhe des Geoids über dem Ellipsoid), hat eine Größenordnung von bis zu zwei Meter.

Altimetermissionen

Die ersten experimentellen Altimetermessungen fanden mit Skylab im Jahre 1973 statt. Es folgten 1975 bzw. 1978 die Missionen Geos3 und Seasat, sowie sieben Jahre später der *GEOdetic SATellite* (Geosat) des amerikanischen Militärs U.S. Navy. Beginnend mit dem ersten mit einem Altimeter ausgestatteten europäischen Satellit *European Remote Sensing Satellite* (ERS1) der europäischen Raumfahrtbehörde *European Space Agency* (ESA) wurden seit 1991 mehrere Satellitenmissionen mit Radaraltimetern ausgestattet. Nach einer kurzen Tandemphase mit ERS1 führt der 1995 gestartete ERS2 diese Mission mit den gleichen Bahnparametern weiter. Ein Jahr nach dem Start von ERS1 folgte Topex/Poseidon. Im Gegensatz zu ERS1, der andere Meßsysteme zur Erderkundung wie z.B. ein Synthetic Aperture Radar (SAR) an Bord hat, ist die Topex/Poseidon-Mission eine reine Altimetermission. Der im Februar 1998 gestartete Geosat-Follow-On (GFO) ist, wie der Name schon sagt, der Nachfolger von Geosat. Für 2001 ist die (ESA-) Envisat-Mission und die Jason-Mission als Nachfolgeprojekt von Topex/Poseidon geplant. Das Balkendiagramm in Abb. 3.6 gibt eine Übersicht über die Missionsdauer, Tabelle 3.2 über die Charakteristiken der Missionen.

Mission	Start (Monat, Jahr)	Höhe (km)	Inklination (Grad)	Zyklen (Tage)	Bahnverfolgungs- systeme	Altimeter- genauigkeit (m)
Skylab	1973	435	130			1
Geos3	April 1975 - Nov. 1978	840	115	37	SLR, Doppler	0.5
Seasat	Juni - Okt. 1978	800	108.0	3,17	SLR	0.1
Geosat	März 1985 - Jan. 1990	780	108.0	17	Doppler	0.07
ERS-1	Juli 1991 - April 1996	780	98.5	3,35,168	SLR	0.05
Topex/ Poseidon	August 1992	1336	66.04	10	SLR, GPS, Doris	0.02
ERS-2	April 1995	780	98.5	35	SLR, Prare	0.05
GFO	Februar 1998	800	108	17	GPS	0.04
Envisat	geplant	780	98.5	35	SLR, Doris	0.02
Jason	geplant	1336	66	10	Doris, GPS, SLR	0.03

Tab. 3.2: Missionsübersicht (Stand Mai 2000)

Mission	Strahl- breite	Footprint (km)	Frequenz (GHz)	Umläufe pro Zyklus	Spurabstand am Äquator (km)
Geosat	2.0°	~ 9	13.5	244	164
ERS-1	2.6°	6-20	13.8	43, 501, 2411	930/80/17
Topex/ Poseidon	1.1° 2.7°	2-12	13.6, 5.3 13.65	127	315

Tab. 3.3: Tabelle mit technischen Daten von Geosat, ERS1 und Topex/Poseidon [SEEBER 1993]

Skylab und Seasat hatten eine sehr kurze Altimetrie-Missionsdauer. Die innere Meßgenauigkeit von Skylab und Geos3 war im Vergleich zu der folgender Missionen noch relativ ungenau (vgl. Tabelle 3.2). Mit hinreichender Meßgenauigkeit sind deshalb nur die Daten der Satelliten Geosat, ERS1, ERS2 und Topex/Poseidon

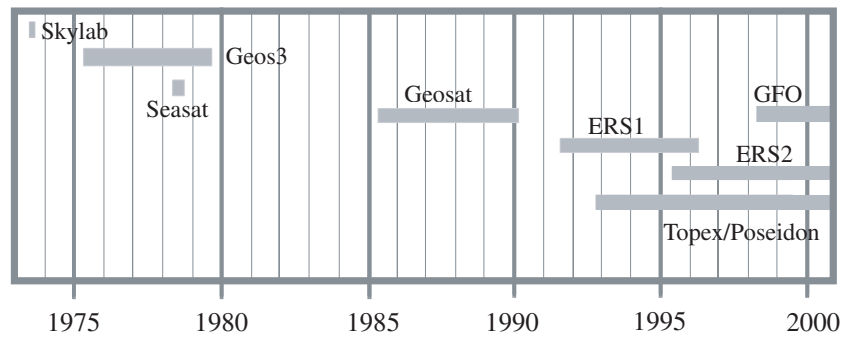


Abb. 3.6: *Historie und Entwicklung der Altimetermissionen. Stand 1.1.2000.*

nutzbar. Auf die Altimetermission Topex/Poseidon wird detaillierter eingegangen, da deren Daten in dieser Arbeit verwendet werden.

Die Abb. 3.7, 3.8 und 3.9 verdeutlichen die unterschiedlichen Spurenabstände der Missionen beispielhaft an einem Ausschnitt in der Karibik. Dargestellt sind die Spurbilder von ERS1, der zwei unterschiedliche Satellitenzyklen in vier Missionsphasen hat, und das Spurbild von Topex/Poseidon. Lücken in dem regelmäßigen Muster entstehen durch den Datenausfall entlang einzelner Spuren.

Topex/Poseidon

Die Mission Topex/Poseidon ist ein gemeinsames Unternehmen der französischen Raumfahrtbehörde *Centre National d'Etudes Spatiales* (CNES) und der amerikanischen Raumfahrtbehörde *National Aeronautics and Space Administration* (NASA). Im August 1992 wurde der Satellit auf eine nahezu kreisförmige Bahn (Exzentrizität $e=0.000095$) mit einer Inklination von 66.04° und einer großen Halbachse von 7714.43 km befördert. Durch die Flughöhe von 1336 km über dem Äquator ist eine hohe Bahngenauigkeit erreichbar, da in dieser Höhe die Atmosphäre den Satelliten nicht mehr so stark beeinflusst.

Mit den Messungen des ersten Satellitenzyklus wurde am 23.9.1992 begonnen. Die Satellitenbahn ist so konfiguriert, daß nach 10 Tagen (exakt 9.9156 Tagen) die selbe Spur, innerhalb eines Kilometers, wieder überflogen wird. Ein Satellitenzyklus mit einer nicht ganztägigen Zahl hat den Vorteil, daß gleiche Orte nicht immer zur gleichen Tageszeit überstrichen werden und dadurch Gezeiteneffekte erkannt werden können. Bei fehlerhafter Gezeitenkorrektur führt das allerdings zu Fehlern in den altimetrischen Höhen, die durch Überlagerung der Gezeitenfrequenz mit der Abtastrate entstehen [SCHLAX und CHELTON 1994]. Mit den Topex/Poseidon-Daten wurde eine Reihe von Gezeitenmodellen entwickelt z.B. [SCHRAMA und RAY 1994, MA et al. 1994, SCHRAMA 1996, FOREMAN et al. 1998]. Ein Vergleich der Topex/Poseidon Gezeitenmodelle ist in [ANDERSEN et al. 1995, SHUM et al. 1997] zu finden. Das derzeit neueste Gezeitenmodell aus Topex/Poseidon-Daten ist das *Global Ocean Tide modell* (GOT99.2) von [RAY 1999]. In den 10 Tagen umrundet der Satellit 127 mal die Erde mit einer Umlaufdauer von knapp zwei Stunden. Der Spurenzwischenraum zweier benachbarter auf- bzw. absteigender Halbumläufe beträgt am Äquator 315 km und bei 60° Breite die Hälfte. Die Meßwiederholrate von 1 Hz ergibt in Flugrichtung am Boden alle 6 km eine Messung.

Topex steht für *ocean TOPography EXperiment* und ist ein *Zweifrequenzaltimeter* der NASA. Gesendet werden Impulse von 3.125 ns mit Frequenzen im Ku- und C-Band, bei 13.6 GHz (Wellenlänge ca. 2 cm) bzw. bei 5.3 GHz (Wellenlänge ca. 5 cm). Dank der Zweifrequenzmessung läßt sich der Effekt der Ionosphäre (siehe Kapitel 3.3) ermitteln.

Poseidon ist ein *Einfrequenzaltimeter* von CNES, das sich die Antenne mit dem Ku-Band des Topex Altimeters



Abb. 3.10: *Topex/Poseidon. Der Satellit wiegt 2169 kg und hat die Abmessungen $5.5 \times 6.6 \times 11.5$ m.*

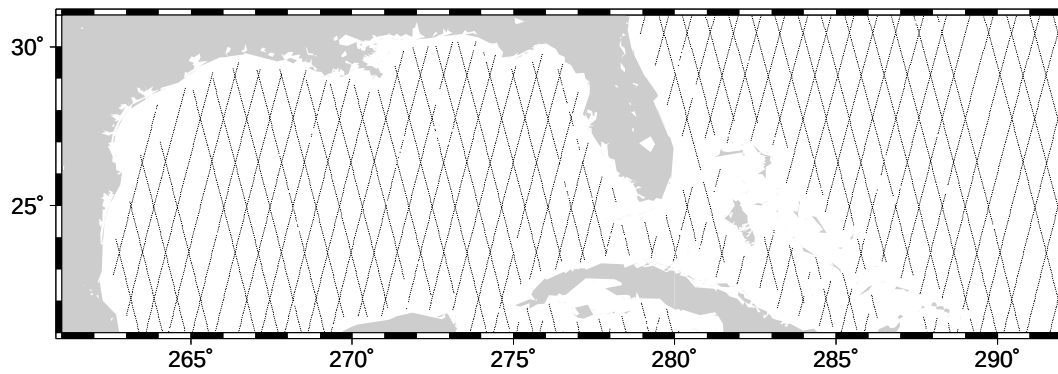


Abb. 3.7: Spurenbild von ERS1 eines 35-Tage Satellitenzyklus.

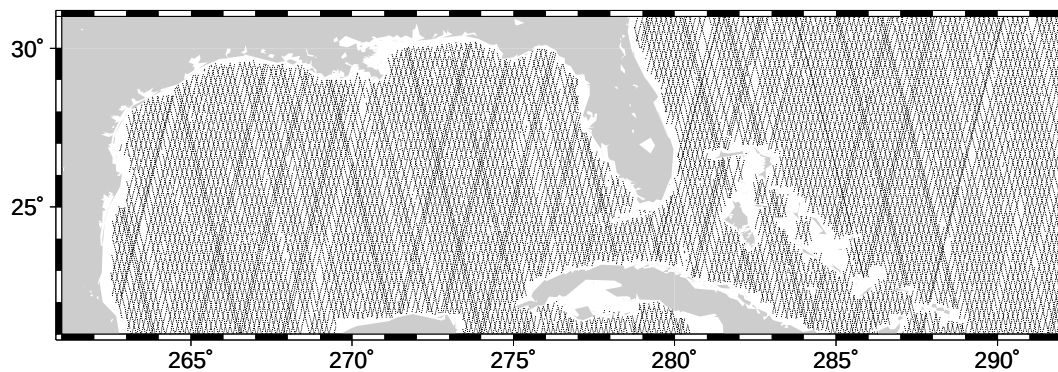


Abb. 3.8: Spurenbild von ERS1 eines 168-Tage Satellitenzyklus.

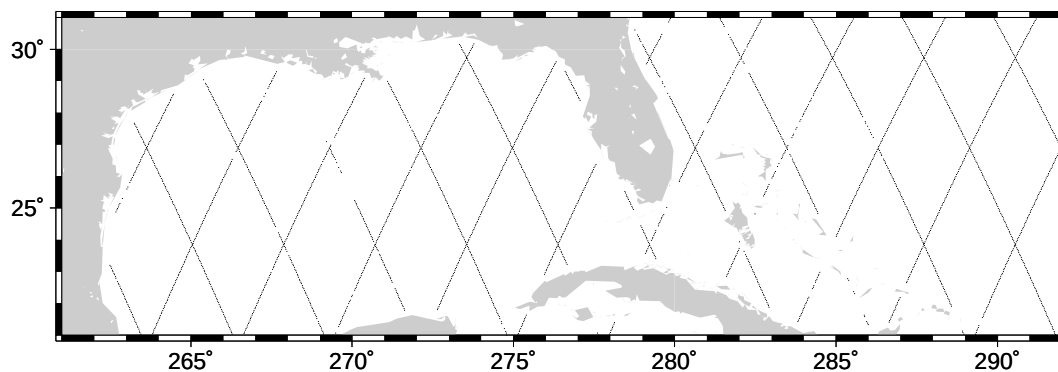


Abb. 3.9: Spurenbild eines 10-Tage Satellitenzyklus von Topex/Poseidon.

der NASA bei 13.65 GHz teilt. Das Altimeter wird nur zeitweise (ca. 10 % der Zeit) eingeschaltet, um neue Technologien zu prüfen. Ionosphären Daten werden während dieser Zeit aus den Messungen des Bahnverfolgungssystems *Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite* (DORIS) abgeleitet.

Neben dem Poseidon-Altimeter ist ein zweites experimentelles Gerät, der *Global Positioning System Demonstration Receiver* (GPSDR) zu einer experimentellen Anwendung der präzisen Bahnbestimmung mit GPS [MELBOURNE et al. 1994, BERTIGER et al. 1994] an Bord. Der Satellit wird von den Systemen DORIS und *Satellite Laser Ranging* (SLR) verfolgt [AVISO 1992]. Die Genauigkeit der Messungen (tracking) liegt bei DORIS zwischen 0.5 und 1.0 mm/s, bei SLR zwischen 0.5 und 5 cm und bei GPS bei 50 cm. Der radiale Bahnfehler liegt laut [TAPLEY et al. 1994b] bei 3–4 cm. Mit dem *Topex Mikrowellen Radiometer* (TMR) wird der Wasserdampfgehalt der Troposphäre entlang des Altimeterstrahls bestimmt.

Ziel der Topex/Poseidon Mission ist es, Kenntnisse über die globale großskalige Dynamik der Ozeane zu bekommen. Mit Messungen über mehrere Jahre können Informationen über Oberflächenströmungen, Gezeiten, Wellen und Ozeanzirkulationen gewonnen sowie Interaktionen mit anderen Prozessen der Erde erkannt werden. Für eine ausführliche Beschreibung siehe [AVISO 1992, FU et al. 1994, ZIEGER et al. 1995].

3.3 Aufbereitung der Altimetermeßdaten

Wie in Kapitel 3.2 bereits erwähnt, sind die gemessenen Entfernungen H_{alt} um instrumentelle Fehler zu korrigieren und die meteorologisch und geophysikalisch bedingten Effekte zu berücksichtigen. Erst nach Anbringen der Korrekturen erhält man genaue Entfernungen vom Massenmittelpunkt des Satelliten zur Meeresoberfläche. Der Korrekturterm v aus (3.10) setzt sich wie folgt zusammen:

$$v = v_{alti} + v_{iono} + v_{feucht} + v_{trocken} + v_{regen} + v_{otide} + v_{etide} + v_{ptide} + v_{mz} + v_{baro} \quad (3.12)$$

mit Korrekturen wegen folgender Ursachen

v_{alti}	= Altimeterbias
v_{iono}	= Ionosphäre
v_{feucht}	= Troposphäre, Feuchtanteil
$v_{trocken}$	= Troposphäre, Trockenanteil
v_{regen}	= Regen
v_{otide}	= Ozeangezeiten
v_{etide}	= Erdgezeiten
v_{ptide}	= Polgezeiten
v_{mz}	= Meereszustand (sea state bias oder elektromagnetischer Bias)
v_{baro}	= inverser Barometer-Effekt

Die Korrekturgrößen werden für den Nutzer in den Datensätzen (*Geophysical Data Records*, GDRs) aufgezeichnet und aufbereitet. Die Einflüsse (3.12) auf eine Altimetermessung lassen sich in drei Gruppen einteilen:

- Instrumentenbedingte Ungenauigkeiten des Altimeters
- Störungen des Radarimpulses beim Lauf durch die Atmosphäre
- Beiträge, die aus der Reflexion an der momentanen Meeresoberfläche resultieren.

Im folgenden werden die drei Fehlergruppen näher beschrieben.

Instrumentenbedingte Ungenauigkeiten:

Instrumentelle Fehlereinflüsse (Altimeterbias) werden laut [SCHRAMA 1989] erfaßt durch die

Massenzentrumskorrektur des Altimeters,
da das Phasenzentrum der Altimeterantenne nicht im Massenmittelpunkt des Satelliten ist.

Instrumentenbias und -drift

Neben dem Rauschen (Noise) weist das Altimeter einen Versatz (Bias) und/oder eine Drift auf. Diese Größen werden bei der Kalibrierung während des Überfluges über Meßplattformen [CHRISTENSEN et al. 1994, MENARD et al. 1994] und Bojen [BORN et al. 1994] bestimmt.

Korrektur des Zeitversatzes (*time bias*)

Uhrenversatz zwischen der Satellitenuhr und den Uhren der Beobachtungsstationen.

Atmosphäreneinflüsse auf die Radarwellen:

Die Entfernung zwischen Satellit und Meeresoberfläche wird über die Laufzeit von Radarwellen ermittelt. Beim Lauf durch die Atmosphäre werden die Radarwellen entsprechend ihrer Wellenlänge von folgenden Einflüssen abgelenkt:

Die *Ionosphäre*, eine Schicht von etwa 90 bis 1000 km Höhe, verlangsamt den Radarimpuls proportional zur Anzahl freier Elektronen und invers proportional zum Quadrat der Sendefrequenz. Die Anzahl freier Elektronen ist am Tag größer als bei Nacht und im Winter größer als im Sommer. Die Intensität steigt mit dem Sonnenstand [CALLAHAN 1984]. Dieser Effekt kann die gemessene Entfernung bei den von Altimetern genutzten Frequenzen im GHz-Bereich um bis zu 20 cm verlängern. Da die Ionosphäre *dispersiv*, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen frequenzabhängig ist, läßt sich deren Einfluß mit einer Zweifrequenzmessung bestimmen. Bei dem Zweifrequenz-Altimeter Topex wird der Einfluß direkt bestimmt [IMEL 1994]. Bei dem

Ursache der Gezeitenkomponente	Symbol	Periode (h)	Gewicht ($M_2 = 100$)
Hauptkomponente Mond halbtägig	M_2	12.42	100
Hauptkomponente Sonne halbtägig	S_2	12.00	46.6
Größere elliptische Mondkomponente	N_2	12.66	19.2
Luni-solar halbtägig	K_2	11.97	12.7
Luni-solar eintägig	K_1	23.93	58.4
Hauptkomponente Mond eintägig	O_1	25.82	41.5
Hauptkomponente Sonne eintägig	P_1	24.07	19.4

Tab. 3.4: Einige Hauptgezeitenkomponenten [BEARMAN 1989]. Der größten Partialtide M_2 ist das Gewicht 100 zugrunde gelegt. Die anderen Tiden sind darauf bezogen. Die Indizes 1 bzw. 2 bezeichnen eintägige bzw. halbtägige Tiden.

Einfrequenz-Altimeter Poseidon müssen die Werte aus den Bahnverfolgungsmessungen von DORIS, das selbst mit zwei Frequenzen arbeitet übernommen werden. Eine andere Möglichkeit wäre die Ionosphäre aus Modellen wie z.B. Bent [BENT und LLEWELLYN 1973] zu bestimmen.

Die *Troposphäre*, eine Schicht von 100 km Höhe bis zur Erdoberfläche, beeinflusst die Ausbreitungsrichtung und -geschwindigkeit der Radarwellen. Es wird zwischen einem trockenen und feuchten Troposphäreneinfluß unterschieden. Der Trockenanteil der Troposphäre ist abhängig vom Atmosphärendruck längs des Weges, der Feuchtanteil vom Wasserdampfdruck. Die vom Altimeter ausgesendeten Radarimpulse erfahren beim Durchlaufen dieser Schicht eine Ablenkung an Gasparkeln und Wasserdampfteilchen. Die Anzahl dieser Teilchen ist abhängig von der Temperatur- und Dichteverteilung längs des Strahlweges. Mit Hilfe von Refraktionskoeffizienten lassen sich diese Anteile mit meteorologischen Modellen bestimmen. Die Gase verlangsamen die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Radarwellenzuges. Der Korrekturterm des Trockenanteils der Troposphäre besitzt nur geringe Schwankungen und beträgt ungefähr 2.30 m. Der Einfluß des Wasserdampfs ist variabler und schwierig zu bestimmen. Er erzeugt einen Höhenfehler von 6 bis 30 cm [AVISO 1996a].

Regen und *atmosphärische Flüssigkeiten* behindern, in Abhängigkeit von Wolkendichte und -dicke, die Ausbreitung der Radarwellen und schwächen das Signal ab [TOURNADRE und MORLAND 1997]. Die Laufzeitverzögerung durch die Feuchtigkeit der Atmosphäre bleibt aber meist unter einem Zentimeter und kann daher vernachlässigt werden. Starker Regen hingegen führt zu komplettem Datenverlust.

Geophysikalische Einflüsse auf die Meeresoberfläche:

Das Reflexionsverhalten der Radarwellen an der Meeresoberfläche wird durch den aktuellen Zustand der Meeresoberfläche und die Eindringtiefe der Radarwellen ins Wasser bestimmt. Die geophysikalischen Einflüsse auf die Meeresoberfläche, wie die Gezeiten, Luftdruckschwankungen, saisonal veränderlichen Strömungen und sonstigen Schwankungen, werden im folgenden kurz erläutert:

Die *Ozeangezeiten* lassen sich durch eine Summe einzelner Schwingungen (Partialtiden) beschreiben, welche aus der Relativbewegung von Erde, Sonne und Mond abgeleitet werden. Aus einem Satz an sechs Grundfrequenzen (aufgelistet in Tabelle 3.4), die aus der Gravitation von Sonne und Mond resultieren, folgen aus Linearkombinationen alle Gezeitenfrequenzen. [CARTWRIGHT und EDDEN 1973] haben über 400 Partialtiden tabelliert. Für die Erfassung von 95% des Gezeitenpotentials genügen die 13 größten Partialtiden [LAMBECK 1988] (S. 134). Am dominantesten ist die *lunare* (vom Mond erzeugte) Partialtide M_2 , die deshalb in Tabelle 3.4 mit dem Gewicht 100 belegt ist. Sie wäre die einzige lunare Gezeitenkomponente, würde der Mond die Erde auf einer kreisförmigen Bahn umrunden. Die Abweichung von einer streng kreisförmigen Bahn erzeugt die N_2 - und L_2 -Komponenten. Die größte *solare* (sonnenerzeugte) Partialtide ist mit S_2 bezeichnet. Sie entspricht M_2 und das Pendant der N_2 ist die T_2 . Auf den offenen Ozeanen beträgt der Tidenhub weniger als einen Meter, kann aber in Küstennähe bis zu einigen Metern erreichen [TORGE 1975] (S. 61). Die Gezeiten verformen die Wassermassen, den Meeresgrund und das damit verbundene Festland. Die Reaktion der Erde auf die Ozeangezeiten wird als *Gezeitenauflast* (ocean loading) bezeichnet. Die Summe von Ozeangezeiten und Auflasteffekten bilden die elastischen Ozeangezeiten. [MELCHIOR 1978, ZHAROV et al. 1996, CARTWRIGHT 1993, CARTWRIGHT und RAY 1990, MCCARTHY 1996].

Auch die Erdmassen (inklusive Meeresgrund) reagieren auf den Einfluß äußerer Gravitationskräfte. Eine Berechnung der *Ergezeiten* ist in [CARTWRIGHT und EDDEN 1973, CARTWRIGHT und TAYLER 1971] beschrieben. Bei der Modellierung der Deformation des Meeresgrundes bleiben bisher jedoch die sich darüber befindenden Wassermassen unberücksichtigt [WAHR 1979].

Polbewegungen und Veränderungen der Rotationsgeschwindigkeit der Erde erzeugen Variationen der Zentrifugalkraft der Erde, wodurch ebenfalls Gezeiten entstehen [TORGE 1975] (S.51). Angetrieben durch eine jährliche

Schwingung und den Chandler Wobble ändert sich die Lage des Pols mit Perioden von 12 und 14 Monaten [LAMBECK 1988] (S.150). Das verursacht eine Deformation von ca. 1–2 cm pro Jahr. Aus den jeweiligen Koordinaten des Pols errechnen sich die *Polgezeiten* [WAHR 1985].

Der *Meereszustand* oder Seegang wird mit dem *sea state* (auch *elektromagnetischen*) *Bias* berücksichtigt. Wellentäler und Wellenberge bedingen ein unterschiedliches Reflektionsverhalten der Radarwellen. Aufgrund der schüsselförmigen Oberfläche reflektieren Wellentäler elektromagnetische Strahlung stärker als Wellenberge. In großen Footprints erscheint folglich das Mittel der Messungen stärker zu den Wellentälern hin verschoben, wodurch anscheinend größere Entfernungen gemessen werden. Die Größe wird in Abhängigkeit von der *signifikanten Wellenhöhe* (SWH), die aus dem Mittelwert von 30% der höchsten Wellen über ein vorgegebenes Zeitintervall gewonnen wird, angegeben. Empirische Werte belaufen sich z.B. bei Geosat auf ungefähr 2% [HAYNE und HANCOCK 1990], bei ERS1 auf 5% und bei Topex/Poseidon auf 2 – 4% der SWH [GASPAR et al. 1994]. In [COTTON und CARTER 1994] ist eine Bestimmung der SWH aus den drei Altimetermissionen beschrieben.

Mit dem *inversen Barometermodell* wird der Einfluß des Luftdrucks auf die Meeresoberfläche beschrieben. Ein Druckanstieg der Atmosphäre von einem Millibar verursacht ein Absinken der Meeresoberfläche von annähernd einem Zentimeter. Die momentanen Korrekturen des Barometereffekts werden aus meteorologisch bestimmten Luftdruckwerten abgeleitet. Es gilt zu berücksichtigen, daß die Meeresoberfläche nicht instantan auf äußere Einflüsse reagiert. Der *inverse Barometereffekt* kann bis zu 20 oder 30 cm betragen. In [WUNSCH und STAMMER 1997] findet sich eine Beschreibung des Effekts, in [FU et al. 1994] eine Untersuchung aus Topex/Poseidon-Daten. Die Korrektur des inversen Barometer-Effektes v_{baro} ist umstritten und wird oft nicht angebracht. Auch in dieser Arbeit wird er nicht angebracht.

In Tabelle 3.5 sind die Modellierungsgenauigkeiten der oben genannten Effekte zusammengestellt. Die Genauigkeiten der nicht in Tabelle 3.5 aufgeführten Größen hängen von den jeweils verwendeten Modellen ab. Der Gesamtfehler *rss* (*root sum square*) ergibt sich aus der Wurzel der Quadratsumme aller n Einzelfehler f_m

$$rss = \sqrt{\sum_{m=0}^n f_m^2} \quad (3.13)$$

[KLOKOCNIK et al. 1994] (S. 71). Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle zur Korrektur der Altimeterdaten sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

Fehlerquelle	Ungenauigkeit für Topex/Poseidon (cm)	Dekorrelationsdistanz (km)
Meßrauschen (Noise)	2.0	20
Instrumentenbias	2.0	viele Tage
Ionosphäre	1.3/2.0	20
Troposphäre trocken	0.7	1000
Troposphäre feucht	1.2	50
Meereszustand	2.0	20-1000
Gesamt (rss)	3.9	

Tab. 3.5: Fehlerbudget der Korrekturterme. Die Werte sind [TAPLEY et al. 1994b] entnommen. Mit der Dekorrelationsdistanz wird der Abstand bezeichnet, für den die Messungen statistisch nicht mehr voneinander abhängen [ZLOTNICKI 1994].

4. Schwerefeldkorrekturen

Eine spezielle Niveaufläche des Erdschwerefeldes bildet das Geoid, das näherungsweise mit dem mittleren Meeresspiegel zusammenfällt [HEISKANEN und MORITZ 1979]. In der Altimetrie verbindet das Geoid als physikalische Referenzfläche physikalisch definierte Meereshöhen mit vom Satelliten abgeleiteten geometrischen Meereshöhen (siehe Abb. 3.5). Im Gegensatz zu den altimetrischen Meereshöhen über einem mathematischen Referenzellipsoid, läßt sich aus Meereshöhen über dem Geoid (Meerestopographie) die Fließrichtung des Wassers erkennen.

Das Erdschwerefeld beeinflusst die Satellitenbahn, weshalb sich Modellierungsfehler des Erdschwerefeldes in einem Bahnfehler bemerkbar machen. Deshalb sind aus Analysen des Satellitenbahnfehlers Korrekturen des Schwerefeldmodells möglich. Der formale Zusammenhang von radialem Bahnfehler und Schwerefeldkorrekturen wird in diesem Kapitel beschrieben.

4.1 Darstellung des Erdschwerefeldes

Die Massenverteilung der Erde bestimmt das Erdschwerefeld. Der innere Aufbau und die Verteilung der Erdmassen in Kern und Mantel erzeugen den langwelligen Anteil des Schwerefeldes. Anomalien bezüglich einer homogenen Massenverteilung vor allem in der Lithosphäre verursachen den kurzwelligen Anteil des Erdschwerefeldes. Die Meeresoberfläche richtet sich hauptsächlich nach der Schwerkraft, d.h. senkrecht zur Lotrichtung aus. Wegen der unregelmäßig verteilten Erdmassen zeigt die Lotrichtung meist nicht zum Geozentrum. Da sich der Meeresspiegel nach dem Schwerefeld der Erde ausrichtet, bilden sich Tiefseegräben, Gebirgsketten und geotektonische Bruchzonen des Meeresbodens in der Meeresoberfläche ab. Diese Strukturen sind in den Altimeterdaten erkennbar (siehe Abb. 4.1) und erlauben daher Rückschlüsse auf das Schwerefeld.

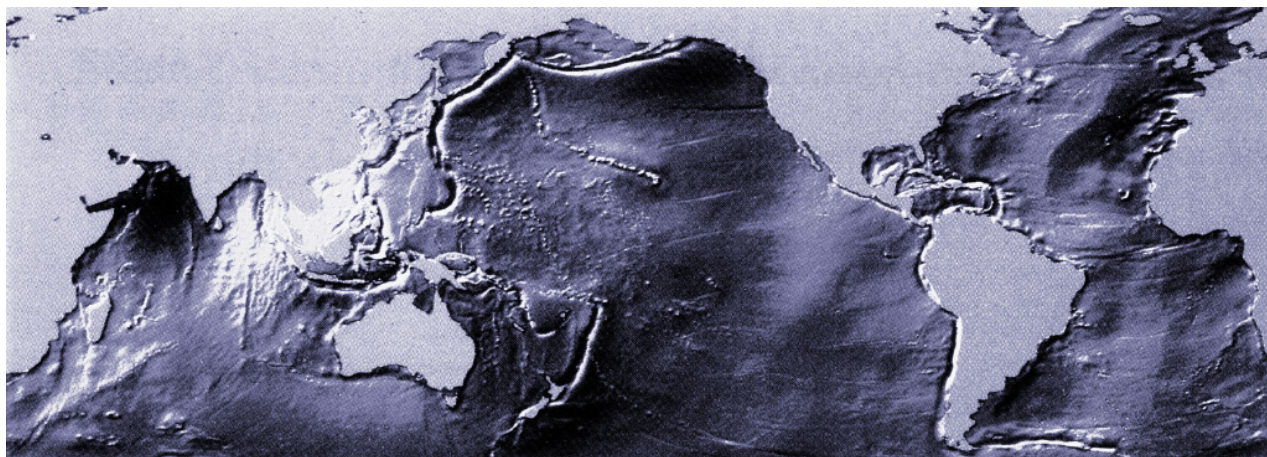


Abb. 4.1: Meeresoberfläche aus Altimetermessungen. Die Abb. 4.1 entstand aus den Daten eines 35-Tage Zyklus von ERS1. Von dem Meereshöhenraster ist ein langwelliges Geoid (bis zu einem Entwicklungsgrad $N = 10$) abgezogen und eine Schattierung über den Winkel der Flächennormalen eines jeden Gitterpunktes zu einer Lichtquelle gerechnet [ANZENHOFER et al. 1992, BOSCH 1993].

Da die Bewegung eines Satelliten vom Erdschwerefeld geprägt wird, kann durch die Analyse von Satellitenbahnen das Schwerefeld in den langwelligen Bereichen bestimmt werden. Die kurzwelligen Strukturen des Schwerefeldes sind aus Gravimetermessungen an der Erdoberfläche ermittelbar. Je nach der Art der Datengewinnung lassen sich Schwerefeldmodelle in Satellitenmodelle und Kombinationsmodelle klassifizieren.

Satellitenmodelle werden aus Analysen von Bahnbeobachtungen abgeleitet. Entsprechend ihrem Bahncharakter (Bahnneigung, Exzentrizität und große Halbachse) reagieren Satelliten unterschiedlich auf das Schwerefeld. Deshalb sollten möglichst viele verschiedene Satellitenbahnen beobachtet und zur Analyse herangezogen werden. Die Gleichung (3.4) zeigt, daß der Einfluß des Schwerefeldes auf den Satelliten mit dem Quadrat der Entfernung r abnimmt. Aufgrund der Satellitenflughöhe und der globalen Überdeckung eignen sich Satellitendaten zur Gewinnung des langwelligen Anteils des Geoids (bis zu typischerweise einem Entwicklungsgrad $N = 70$) [BOUMAN 1997]. Niedrigfliegende Satelliten werden stärker vom Schwerefeld beeinflusst als hochfliegende Satelliten und sind daher besser zur Schwerefeldbestimmung geeignet. Die Bahnen niedrig fliegender Satelliten werden aber von schwer modellierbaren Atmosphäreneinwirkungen gestört und sind daher schwieriger zu bestimmen.

Kombinationsmodelle haben in der Regel eine höhere Auflösung (bis $N = 360$). Dabei werden die Normalgleichungen von Satellitenbeobachtungen und terrestrischen Beobachtungen kombiniert. Die Punktanordnung der mit Gravimetern terrestrisch gemessenen Schwerewerte ist hierbei jedoch unregelmäßig und weit gestreut. Zudem sind Art und Genauigkeit der Meßdaten verschieden, da mit unterschiedlichen Meßgeräten und –methoden beobachtet wird. Über den Ozeanen läßt sich neben Gravimetermessungen an Bord von Schiffen der kurzweilige Teil des Schwerefeldes auch aus einheitlichen Altimetermeßdaten gewinnen [RAPP 1993]. Das zur Zeit beste Erdschwerefeldmodell dieser Art ist das EGM96 (Earth Gravitational Model 1996) bis $N = 360$ mit einer Genauigkeit von unter einem Meter [LEMOINE et al. 1998].

Das Schwerefeld W der Erde setzt sich aus dem Gravitationspotential V der Erde und dem aus der Erdrotation resultierenden Zentrifugalpotential Z zusammen

$$W = V + Z \quad (4.1)$$

[RUMMEL 1992] (S. 5.7). Das Zentrifugalpotential

$$Z = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (4.2)$$

kann als bekannt vorausgesetzt werden, da die Rotationsgeschwindigkeit ω sehr genau bekannt ist. Wäre die Erde ein Zentralkörper mit homogener Masse, würde das Gravitationspotential V für eine homogene Kugel gelten

$$V = \frac{G_e M_e}{r} \quad (4.3)$$

Die Größen sind bereits in Abschnitt 3.1 erläutert. Da die Erde jedoch keine homogene Kugel ist, eignet sich Gleichung (4.3) nicht zur Beschreibung des wahren Gravitationspotentials der Erde. Im Außenraum der Erde läßt sich das Gravitationspotential V in Kugelfunktionen [RUMMEL 1992] (S. 3.11) entwickeln

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{G_e M_e}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (4.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi, \lambda &= \text{Breite, Länge} \\ R &= \text{mittlerer Äquatorradius} \\ n, m &= \text{Grad, Ordnung der Entwicklung} \\ \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm} &= \text{normierte harmonische Koeffizienten} \\ \bar{P}_{nm} &= \text{normierte Legendre Funktionen (siehe Anhang)} \end{aligned}$$

Maßstab, Ursprung und Orientierung des Koordinatensystems sind durch die folgenden sieben niederen Koeffizienten festgelegt:

- Der Maßstab wird durch den Zentralkörperanteil bestimmt. Deshalb gilt $\bar{C}_{00} = 1$.
- Liegt der Ursprung des Koordinatensystems im Geozentrum, werden die Koeffizienten $\bar{C}_{10} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$.
- Entspricht die z -Achse der Achse des größten Trägheitsmoments, werden die Koeffizienten $\bar{C}_{21} = \bar{S}_{21} = 0$. Je nach Wahl des Koordinatensystems nehmen diese Koeffizienten Werte ungleich Null an.
- Fallen alle drei Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammen, wird zusätzlich $\bar{S}_{22} = 0$. Diese Bedingung ist im erdfesten System nicht erfüllt, da die x -Achse durch den Meridian von Greenwich festgelegt wird.

Gleichung (4.4) ist eine Reihe mit unendlich vielen Potentialkoeffizienten $\bar{C}_{nm}$ und $\bar{S}_{nm}$, mit deren Kenntnis man über eine Beschreibung des Gravitationsfeldes der Erde verfügen würde. Für numerische Berechnungen muß die Reihe jedoch an einem Entwicklungsgrad N abgebrochen werden.

Mit dem Normalpotential

$$U(\varphi, \lambda, r) = \frac{G_e M_e}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) + Z \quad (4.5)$$

wird das Erdschwerefeld bis zum Grad N beschrieben. Für das Potential U wird die gleiche Festlegung des Koordinatensystems wie für V angenommen. Die Koeffizienten $\bar{c}_{nm}$ und $\bar{s}_{nm}$ sind Modellkoeffizienten. Für $m = 0$ sind wegen $\sin m\lambda = 0$ die Koeffizienten $\bar{S}_{n0} = \bar{s}_{n0} = 0$ und es gibt daher maximal $(N+1)^2$ Koeffizienten $\bar{c}_{nm}$ und $\bar{s}_{nm}$. Hier wurde das GRS80 verwendet, d.h. nur die Koeffizienten $\bar{c}_{20}$, $\bar{c}_{40}$, $\bar{c}_{60}$ und $\bar{c}_{80}$ sind besetzt, alle anderen Koeffizienten sind gleich Null. Bei den Schwerefeldmodellen ist der Abbruchfehler wegen des beschränkten Entwicklungsgrades N zu beurteilen. Der Informationsgehalt der Koeffizienten eines Grades kann über die Gradvarianzen

$$c_n(\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm}) = \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm}^2 + \bar{s}_{nm}^2) \quad (4.6)$$

[RUMMEL 1992] (S. 12.6) ermittelt werden. Generell nimmt die Größe der Koeffizienten mit steigendem Entwicklungsgrad N ab. Der Entwicklungsgrad N bestimmt das räumliche Ausflösungsvermögen des Normalpotentials, das durch die Wellenlänge λ

$$\lambda = \frac{2\pi R}{N} \quad (4.7)$$

ausgedrückt wird [RUMMEL 1992] (S. 12.9). Die Differenz des Schwerefeldes W zum berechneten Normalpotential U wird als Störpotential T

$$T = W - U \quad (4.8)$$

bezeichnet [RUMMEL 1992] (S. 8.3 ff.). Der Zentralkörperanteil (4.3), für den die Satellitenbewegung einer Keplerbahn folgt, ist mit einer so hohen Genauigkeit (auf 10^{-8} bezüglich des Erdradius) bekannt, daß er bei der Differenzbildung, ebenso wie das bekannte Zentrifugalfeldpotential (4.2), entfällt. Damit ergibt sich die Reihendarstellung des Störpotentials T zu

$$T(\varphi, \lambda, r) = \frac{G_e M_e}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (4.9)$$

Aus dem Vergleich von (4.4) mit (4.5) ergeben sich die Koeffizienten des Störpotentials

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{nm} &= \bar{C}_{nm} - \bar{c}_{nm} & \text{für } n \leq N & \quad \text{und} \quad \Delta \bar{C}_{nm} &= \bar{C}_{nm} & \text{für } n > N \\ \Delta \bar{S}_{nm} &= \bar{S}_{nm} - \bar{s}_{nm} \end{aligned}$$

Für diese Koeffizienten werden Korrekturen δC_{nm} und δS_{nm} als Zuschläge aus den Bahnfehlern geschätzt (Kapitel 6). Diese Größen werden fortan als *Schwerefeldkorrekturen* δC_{nm} und δS_{nm} bezeichnet.

Die Satellitenbeschleunigung ergibt sich aus dem Gradienten ∇ des Gravitationspotentials V (4.4) nach dem geozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V \quad (4.10)$$

[TORGE 1975] (S. 135), [RUMMEL 1992] (S. 2.8). Die Lösung dieser Differentialgleichung 2. Ordnung in analytischer Form ist laut [SCHNEIDER 1990] (S. 276) bisher nicht mit einer den Beobachtungen entsprechenden Qualität möglich. Zur Untersuchung des Schwerefeldeinflusses auf bestimmte Bahnelemente ist bereits eine Näherung der analytischen Lösung wertvoll. Da in dieser Arbeit der formale Zusammenhang von radialen Bahnfehlern und Schwerefeldkoeffizienten wichtig ist, wird im folgenden der Einfluß des Störpotentials auf die einzelnen Keplerelemente dargestellt. Die Gleichung (4.10) entspricht der Bewegungsgleichung (3.7). Dabei wird fortan angenommen, daß die Störkräfte $\mathbf{K}_i$ in (3.3) ausreichend genau modelliert werden können und der Vektor $\mathbf{s}$ in Gleichung (3.7) ausschließlich aus dem Störpotential T resultiert. Die Gleichung (4.10) wird daher im folgenden anstatt nach dem Gravitationspotential V nach dem Störpotential T gelöst.

4.2 Ableitung von Schwerefeldkorrekturen aus Satellitenbahnstörungen

Zur Untersuchung der Auswirkungen des Störpotentials auf die einzelnen Bahnelemente wird eine analytische Störungstheorie aufgestellt. Die Satellitenbahn $\mathbf{r}(t)$ folgt aus der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.10). Für nahezu kreisförmige Bahnen, die nicht länger als zehn Tage sind und nur durch das Gravitationsfeld gestört werden, können lineare (periodische) Störungsgleichungen angewendet werden [SCHRAMA 1989]. Die allgemeine Lösung einer linearen inhomogenen Differentialgleichung besteht aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW 1980] (S. 483). Ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bekannt, d.h. man kennt die Integrationskonstanten α_i , läßt sich eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden, indem man die Konstanten als Funktion der Zeit $\alpha_i(t)$ darstellt und das inhomogene lineare Gleichungssystem nach den Ableitungen der Koeffizientenfunktionen $\frac{d\alpha_i(t)}{dt}$ löst. Dieses Verfahren der *Variation der Konstanten* wird häufig bei der Satellitenbahnbestimmung angewendet. Die zu (4.10) gehörende homogene Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{G_e M_e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \quad (4.11)$$

hat als Lösung eine strenge Keplerbewegung (3.4). Als zu variierende Integrationskonstanten werden, wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, üblicherweise die Keplerelemente (Tabelle 3.1) benützt. Den Zusammenhang zwischen Störpotential T und den zeitlichen Veränderungen (Variationen) der Bahnelemente stellen die *Lagrange'schen Störungsgleichungen* her [KAULA 1966] (S. 29) und [SCHNEIDER 1990] (S. 277 ff.):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial T}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2e} \frac{\partial T}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{\bar{n}a^2e} \frac{\partial T}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\bar{n}a^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{\bar{n}a^2e} \frac{\partial T}{\partial e} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{\bar{n}a^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{1}{\bar{n}a^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}a^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= \bar{n} - \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2e} \frac{\partial T}{\partial e} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial T}{\partial a} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zur Erklärung der Parameter siehe Kapitel 3.1.

Diese sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung stellen die Variationen der Satellitenbewegung in den Keplerelementen dar und sind anstelle der Differentialgleichung 2. Ordnung (4.10) zu lösen. Das Störpotential T (4.9) ist bisher in Abhängigkeit von Radius r , Breite φ und Länge λ gegeben. Um T nach den Keplerelementen ableiten zu können, muß das Störpotential als Funktion der Bahnelemente $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ ausgedrückt werden. Der Übergang des Störpotentials T als Funktion der Kugelkoordinaten in eine Funktion der Bahnelemente erfolgt über die Beschreibung einzelner Komponenten von T mit den Neigungsfunktionen $F_{nmp}(i)$, den Exzentrizitätsfunktionen $G_{npq}(e)$ und der Funktion $S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta)$

$$T_{nm} = \frac{G_e M_e R^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) \quad (4.13)$$

[KAULA 1966] (S. 37), [LAMBECK 1988] (S. 236), [SEEBER 1989] (S. 92) und [SCHNEIDER 1979] (S. 288). p und q sind Laufindizes, θ die Sternzeit Greenwich. Die Funktion T besteht aus der Summe der Komponenten T_{nm}

$$T = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n T_{nm} \quad (4.14)$$

Zur Berechnung der Funktionen $F_{nmp}(i)$ und $G_{npq}(e)$ sei auf [KAULA 1966] (S. 34–38) und [SCHNEIDER 1990] (S. 288 ff.) verwiesen. Da nur Korrekturen des Störpotentials geschätzt werden, setzt sich die Funktion

$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) = S_{nmpq}(\psi)$ aus den Verbesserungen δC_{nm} und δS_{nm} der Potentialkoeffizienten $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ zusammen. Mit dem Argument

$$\psi = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) \quad (4.15)$$

stellt die Funktion

$$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) = \begin{cases} \delta C_{nm} \cos \psi + \delta S_{nm} \sin \psi & \text{für } n - m \text{ gerade} \\ -\delta S_{nm} \cos \psi + \delta C_{nm} \sin \psi & \text{für } n - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.16)$$

den Zusammenhang von den Bahnelementen ω, M, Ω , der Sternzeit Greenwich θ und den Verbesserungen δC_{nm} und δS_{nm} der Potentialkoeffizienten $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ her. Eine Diskussion des Arguments ψ aus (4.15) ist [SCHNEIDER 1990, SCHNEIDER 1979, SCHEINERT 1996] zu entnehmen. Einfachheitshalber werden die Funktionen ohne ihre Argumente geschrieben durch $F_{nmp} = F_{nmp}(i), G_{npq} = G_{npq}(e)$ und $S_{nmpq} = S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) = S_{nmpq}(\psi)$.

Die partiellen Ableitungen von T_{nm} (4.13) nach den Keplerelementen sind in die Lagrange'schen Störungsgleichungen (4.12) einzusetzen. Unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Störungen unabhängig voneinander und die Elemente ω, Ω, M für kurze Bahnen zeitlich unveränderlich sind, können die Keplerelemente i, a, e bei der Integration in den Funktionen $F_{nmp}, G_{npq}, S_{nmpq}$ als konstant angenommen werden. Die Integration der Störungsgleichungen (4.12) über ein bestimmtes Zeitintervall von t_0 bis t [HEISKANEN und MORITZ 1979] (S. 347) für einen spezifischen Term T_{nm} führt zu den Einzelstörungen $\Delta \alpha_i$ der Keplerelemente $\alpha_i = a, e, i, \omega, \Omega, M$ [KAULA 1966] (S. 40), [SCHNEIDER 1990] (S. 302)

$$\begin{aligned} \Delta a_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{2F_{nmp} G_{npq} (n - 2p + q)}{\bar{n} a^{n+2} \dot{\psi}} S_{nmpq} \\ \Delta e_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{F_{nmp} G_{npq} (1 - e^2)^{1/2} [(1 - e^2)^{1/2} (n - 2p + q) - (n - 2p)]}{\bar{n} a^{n+3} e \dot{\psi}} S_{nmpq} \\ \Delta \omega_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{(1 - e^2)^{1/2} e^{-1} F_{nmp} (\partial G_{npq} / \partial e) - \cot i (1 - e^2)^{-1/2} (\partial F_{nmp} / \partial i) G_{npq}}{\bar{n} a^{n+3} \dot{\psi}} \tilde{S}_{nmpq} \\ \Delta i_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{F_{nmp} G_{npq} [(n - 2p) \cos i - m]}{\bar{n} a^{n+3} (1 - e^2)^{1/2} \sin i \dot{\psi}} S_{nmpq} \\ \Delta \Omega_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{(\partial F_{nmp} / \partial i) G_{npq}}{\bar{n} a^{n+3} (1 - e^2)^{1/2} \sin i \dot{\psi}} \tilde{S}_{nmpq} \\ \Delta M_{nmpq} &= G_e M_e R^n \frac{[-(1 - e^2) e^{-1} (\partial G_{npq} / \partial e) + 2(n + 1) G_{npq}] F_{nmp}}{\bar{n} a^{n+3} \dot{\psi}} \tilde{S}_{nmpq} \quad , \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei die Ableitung

$$\dot{\psi} = (n - 2p)\dot{\omega} + (n - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \quad (4.18)$$

aus (4.15) folgt. Die Störungsgleichungen $\Delta \alpha_{i,nmpq}$ aus (4.17) für die Keplerelemente α_i sind von den Funktionen S_{nmpq} , bzw. von $\tilde{S}_{nmpq}$ abhängig, welche die zeitlichen Änderungen der Störungen über das Argument ψ beschreiben. $\tilde{S}_{nmpq}$ ist das Integral von S_{nmpq} [SCHNEIDER 1990] (S. 302)

$$\tilde{S}_{nmpq} = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} S_{nmpq}(\psi) d\psi \quad . \quad (4.19)$$

Unter Zusammenfassung der Faktoren vor S_{nmpq} bzw. vor $\tilde{S}_{nmpq}$ zu $C_{nmpq}^{\alpha_i} = C_{nmpq}^{\alpha_i}(a, e, i, \dot{\omega}, \dot{\theta}, \dot{\Omega}, \dot{M})$ kann das Gleichungssystem (4.17) vereinfacht dargestellt werden

$$\Delta \alpha_{i,nmpq} = \begin{cases} C_{nmpq}^{\alpha_i} S_{nmpq} & \text{für } \alpha_i = a, e, i \\ C_{nmpq}^{\alpha_i} \tilde{S}_{nmpq} & \text{für } \alpha_i = \omega, \Omega, M \end{cases} \quad (4.20)$$

Die Gesamtstörung $\Delta \alpha_i$ eines Bahnelements α_i ergibt sich dann durch Überlagerung der Einzelstörungen $\Delta \alpha_{i,nmpq}$

$$\Delta \alpha_i = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta \alpha_{i,nmpq} \quad . \quad (4.21)$$

Die Störanteile $\Delta \alpha_i$ werden zur Berechnung des radialen Bahnfehlers im folgenden Abschnitt verwendet.

4.3 Radialer Bahnfehler

Nachdem die Korrekturen v aus (3.12) an die Altimetermeßwerte angebracht sind, verbleibt in den altimetrischen Höhen hauptsächlich der Fehler zwischen modellierter und wirklicher Satellitenbahn mit einer Größenordnung zwischen 30 cm und 2 m [RUMMEL 1993]. In der Altimetrie wird diese Abweichung als *radialer Bahnfehler* bezeichnet, weil Bahnen von Altimetersatelliten mit einer Exzentrizität $e < 0.001$ nahezu kreisförmig sind. Den Hauptanteil des radialen Bahnfehlers verursacht das Störpotential T . Der geozentrische Abstand r des Satelliten wird durch die Bahngleichung [SCHNEIDER 1990] (S. 272)

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (4.22)$$

beschrieben. Die exzentrische Anomalie E läßt sich durch die mittlere Anomalie M

$$M = E - e \sin E \quad (4.23)$$

ausdrücken, die über Gleichung (3.5) mit dem Keplerelement τ verbunden ist. Für eine kleine Exzentrizität e kann der zweite Summand vernachlässigt und $M \simeq E$ gesetzt werden [RUMMEL 1993, SCHRAMA 1989, WAGNER 1985]. Damit wird r zu

$$r \simeq a(1 - e \cos M). \quad (4.24)$$

Der radiale Bahnfehler Δr ergibt sich aus der Linearisierung der Entfernung r

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial r}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial r}{\partial M} \Delta M \quad (4.25)$$

Setzt man die partiellen Ableitungen von r (4.24) nach den Elementen a, e und M ein, liefert (4.25) das Ergebnis

$$\Delta r \simeq \Delta a - (a \Delta e + e \Delta a) \cos M + a e \Delta M \sin M \quad (4.26)$$

Da bei der Substitution von E durch M in Gleichung (4.23) der Term $e \sin E$ komplett vernachlässigt wird, hat [ROSBOROUGH 1986] einen anderen Weg vorgeschlagen, der im folgenden skizziert und in dieser Arbeit verwendet wird.

Reihenentwicklung von $\cos E$

Eine andere Möglichkeit $\cos E$ aus (4.22) in Abhängigkeit von M auszudrücken ist die Entwicklung des Ausdrucks $\cos E$ in eine Reihe. Dadurch ist ein gezielter Ausschluß einzelner Komponenten möglich. Für kleine Exzentrizitäten kann die gerade Funktion $\cos E$ in eine Fourierreihe

$$\cos E = \frac{A_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos sM \quad (4.27)$$

um M mit den Fourierkoeffizienten A_0 und A_s

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos E \, dM \quad (4.28)$$

$$A_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos E \cos sM \, dM \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

entwickelt werden. Mit der Ableitung $dM = (1 - e \cos E) \, dE$ nach (4.23) wird aus (4.28)

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos E (1 - e \cos E) \, dE = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos E \, dE - \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 E \, dE = -e \quad (4.30)$$

Die partielle Integration von A_s (4.29) liefert

$$A_s = \frac{1}{s\pi} \left[\cos E \sin sM \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \sin E \sin sM \, dE \quad .$$

Der erste Summand wird für die eingesetzten Integrationsgrenzen zu Null. Folgende Umformungen des Integranden des zweiten Summanden und Anwendung der Additionstheoreme liefert

$$\begin{aligned}
A_s &= \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \sin E \sin sM \, dE \\
&= \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\sin E \sin sM + \sin E \sin sM) + \frac{1}{2} (\cos sM \cos E - \cos sM \cos E) \right] dE \\
&= \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\sin E \sin sM + \cos sM \cos E) - \frac{1}{2} (\cos sM \cos E - \sin E \sin sM) \right] dE \\
&= \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(sM - E) \, dE - \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(sM + E) \, dE
\end{aligned}$$

und weiter nach Ersetzen von M durch (4.23)

$$A_s = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(s-1)E - se \sin E] \, dE - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(s+1)E - se \sin E] \, dE \right\} . \quad (4.31)$$

Diese Form von A_s kann durch Bessel-Funktionen erster Art erfaßt werden [SMART 1960] (S. 39). Die Bessel-Funktionen J_n erster Art und Ordnung n sind definiert durch [BALMINO 1993] (S. 249), [ABRAMOWITZ und STEGUN 1970]

$$J_n(se) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE - se \sin E) \, dE , \quad (4.32)$$

wobei

$$J'_n(se) = \frac{dJ_n(se)}{de} = \frac{n}{2} [J_{n-1}(se) - J_{n+1}(se)] . \quad (4.33)$$

Ersetzt man in den Bessel-Funktionen n durch $s-1$ bzw. $s+1$ und setzt diese in (4.31) ein, wird A_s zu

$$A_s = \frac{1}{s} [J_{s-1}(se) - J_{s+1}(se)] = \frac{2}{s^2} J'_s(se) . \quad (4.34)$$

Die Ergebnisse für A_0 (4.30) und A_s (4.34) in (4.27) eingesetzt, liefern

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s^2} J'_s(se) \cos sM . \quad (4.35)$$

Ersetzen von $\cos E$ in (4.22) durch (4.35) führt zu dem von [ROSBOROUGH und TAPLEY 1987] verwendeten Ausdruck

$$r = a \left(1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} J'_s(se) \cos sM \right) . \quad (4.36)$$

Definiert man H_0 und H_s durch

$$H_0 = 1 + \frac{e^2}{2} \text{ und } H_s = -\frac{2e}{s^2} J'_s(se) \text{ für } s = 1, 2, \dots, \infty , \quad (4.37)$$

läßt sich Gleichung (4.36) wie folgt schreiben

$$r = a \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cos sM . \quad (4.38)$$

Der radiale Bahnfehler Δr ergibt sich nach Einsetzen der partiellen Ableitungen von r (4.38) nach a, e, M in die linearisierte Form (4.25) zu

$$\Delta r = \Delta a \sum_{s=0}^{\infty} H_s \cos sM + \Delta e a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial H_s}{\partial e} \cos sM - \Delta M a \sum_{s=0}^{\infty} s H_s \sin sM \quad (4.39)$$

[ROSBOROUGH 1986] (S. 22). Diese Form des radialen Bahnfehlers ist im Gegensatz zu (4.26) eine strenge Linearisierung, da hier keine Vernachlässigung wie in (4.24 mit 4.23) vorgenommen wird. Die folgende Ableitung ist nicht auf kreisförmige Bahnen beschränkt.

Linearkombination

Einsetzen der linearen Anteile Δa_{nmpq} , Δe_{nmpq} , ΔM_{nmpq} aus (4.17) in der Notation von (4.20) in (4.39) ergibt eine Komponente

$$\Delta r_{nmpqs} = C_{nmpq}^a S_{nmpq} H_s \cos sM + C_{nmpq}^e S_{nmpq} a \frac{\partial H_s}{\partial e} \cos sM - C_{nmpq}^M \tilde{S}_{nmpq} a s H_s \sin sM \quad (4.40)$$

des Bahnfehlers Δr , die für jede Kombination der Indizes n, m, p, q, s gilt. Mit den Definitionen

$$S_{nmpq} \cos sM = \frac{1}{2} (S_{nmp(q+s)} + S_{nmp(q-s)}) \quad (4.41)$$

$$\tilde{S}_{nmpq} \sin sM = \frac{1}{2} (S_{nmp(q-s)} - S_{nmp(q+s)}) \quad (4.42)$$

[ROSBOROUGH 1986] (S. 23), wird (4.40) zu

$$\begin{aligned} \Delta r_{nmpqs} = & \frac{1}{2} (C_{nmpq}^a H_s + a C_{nmpq}^e \frac{\partial H_s}{\partial e} + a C_{nmpq}^M s H_s) S_{nmp(q+s)} \\ & + \frac{1}{2} (C_{nmpq}^a H_s + a C_{nmpq}^e \frac{\partial H_s}{\partial e} - a C_{nmpq}^M s H_s) S_{nmp(q-s)} \quad . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Der Laufindex s gilt bisher für den Bereich $s \in [0 ; \in[$. Ändert man nun den Bereich in $s \in] - \infty ; \infty[$, läßt sich der Term Δr_{nmpqs} durch die erste Zeile von (4.43) darstellen. Die Zusammenfassung des Ausdrucks vor $S_{nmp(q+s)}$ zu C_{nmpqs}^r erlaubt die Schreibweise

$$\Delta r_{nmpqs} = C_{nmpqs}^r S_{nmp(q+s)} \quad . \quad (4.44)$$

Der gesamte Bahnfehler Δr ergibt sich aus der Summe der Einzelkomponenten Δr_{nmpqs}

$$\Delta r = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Delta r_{nmpqs} \quad (4.45)$$

vergleiche (4.21). Die Gleichung resultiert aus der Linearisierung von Gleichung (4.38), weswegen man den Vorgang als lineare Störungsrechnung bezeichnet.

Die linearen Anteile Δa , Δe , ΔM aus (4.17) enthalten Entwicklungen der Exzentrizitätsfunktion G_{npq} . Für nahezu kreisförmige Bahnen brauchen nicht alle Terme von G_{npq} berücksichtigt werden. Je kleiner der Wert der Exzentrizität wird, desto weniger Summenglieder von q und s müssen berücksichtigt werden [ROSBOROUGH 1986] (S. 25). Für kreisförmige Bahnen mit $e = 0$ wird nur der Term mit $q = 0$ und $s = 0$ verwendet. Damit ergibt sich der führende Term der radialen Bahnstörung zu

$$\Delta r = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n C_{nmp}^r S_{nmp}(\psi) \quad (4.46)$$

[ROSBOROUGH 1986] (S. 25), wobei z.B. $C_{nmp}^r = C_{nmp00}^r$ abgekürzt wird. Das Argument ψ aus (4.15) wird für $q = 0$ zu

$$\psi = (n - 2p)(\omega + M) + m(\Omega - \theta) \quad . \quad (4.47)$$

Diese Form von ψ zeigt den Zusammenhang von Satellitenbewegung ($\omega + M$) und Erddrehung ($\Omega - \theta$). Die Greenwicher Sternzeit θ stellt die Verbindung vom raumfesten zum erdfesten Referenzsystem her. Das erdfeste geozentrische Koordinatensystem (Abb. 4.2) ist durch die Vektoren e_1, e_2, e_3 festgelegt, wobei e_1 durch den Meridian von Greenwich und e_3 durch den Pol läuft. Das System rotiert mit der Erde, weshalb die Bewegung ($\Omega - \theta$) eine Frequenz von ungefähr einem Tag hat. In die Satellitenbahnebene, definiert durch die Bahn des Satelliten, wird ein zwei-dimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung im Geozentrum und positiver x-Achse in Richtung des aufsteigenden Bahnknotens K gelegt. Die Satellitenbahn ist in dem so definierten Koordinatensystem für ($\omega + M$) im 1. und 4. Quadranten aufsteigend und für ($\omega + M$) im 2. und 3.

Quadranten absteigend. (Für eine Approximation erster Ordnung der Exzentrizität darf die wahre Anomalie ν durch die mittlere Anomalie M ersetzt werden.)

Darstellung des Bahnfehlers in Abhängigkeit von Länge λ und Breite φ

Die Funktion S_{nmp} ist nach (4.16) von ψ und damit von den Variablen ω, M, Ω und von θ abhängig. Der Zusammenhang zwischen den Bahnelementen und der geographischen Länge λ und Breite φ im erdfesten System läßt sich aus dem in F rechtwinklig sphärischen Dreieck KFS aus Abb. 4.2 ableiten. Der Fußpunkt F ist der Schnittpunkt des Meridians durch die augenblickliche Satellitenprojektion S mit dem Äquator.

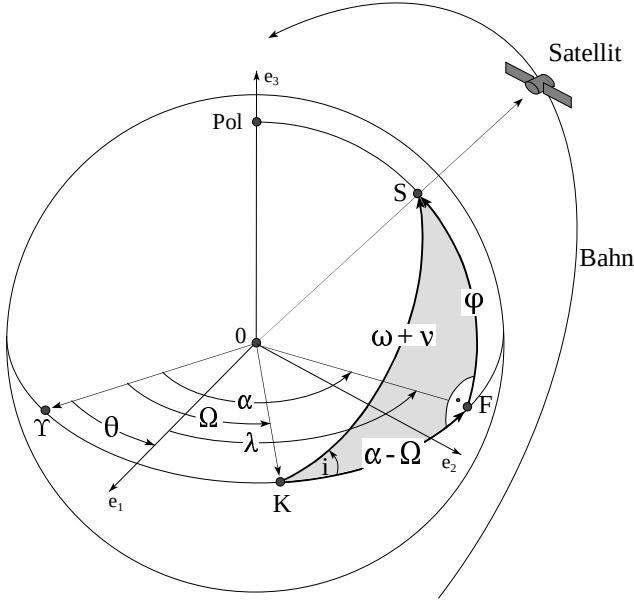


Abb. 4.2: Rechtwinklig sphärisches Dreieck KFS auf der Einheitskugel

Υ	=	Frühlingspunkt
α	=	Rektaszension
$\Omega - \theta$	=	Länge des aufsteigenden Bahnknotens
$\lambda; \varphi$	=	Länge und Breite des Satelliten
S	=	Satellitenprojektion
K	=	aufsteigender Bahnknoten
F	=	Fußpunkt
O	=	Geozentrum
$K - S$	=	Satellitenspur

Der Abb. 4.2 lassen sich die Beziehungen

$$\Omega - \theta = \lambda - (\alpha - \Omega) \quad (4.48)$$

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + M) \quad (4.49)$$

$$\cos(\alpha - \Omega) = \frac{\cos(\omega + M)}{\cos \varphi} \quad (4.50)$$

entnehmen, wobei die wahre Anomalie ν durch die mittlere Anomalie M approximiert wird. Daraus folgt [SCHNEIDER 1990] (S. 288)

$$\sin(\omega + M) = \frac{\sin \varphi}{\sin i} \quad (4.51)$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = \frac{\sin(\omega + M) \cos i}{\cos \varphi} \quad (4.52)$$

Mit den Beziehungen (4.48 - 4.52) lassen sich die Größen ω, M, Ω mit den trigonometrischen Additionstheoremen in λ, φ überführen. Ersetzt man in $S_{nmp}(\omega, M, \Omega, \theta)$ (4.16) die Größen ω, M, Ω durch Ausdrücke von λ und φ wird $S_{nmp}(\varphi, \lambda)$ zu

$$S_{nmp}(\varphi, \lambda) = U_{nmp}^c(\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \pm U_{nmp}^s(\delta C_{nm} \sin m\lambda - \delta S_{nm} \cos m\lambda) \quad (4.53)$$

[ROSBOROUGH 1986]. Die Funktionen U_{nmp}^c und U_{nmp}^s sind im Anhang erklärt. Die Indizes c bzw. s stehen für eine in φ gerade bzw. ungerade Funktion. Die Einführung von (4.53) in (4.46) ergibt mit der Definition

$$Q_{nm}^c(a, i, \varphi) := \sum_{p=0}^n C_{nmp}^r U_{nmp}^c \quad \text{und} \quad Q_{nm}^s(a, i, \varphi) := \sum_{p=0}^n C_{nmp}^r U_{nmp}^s \quad (4.54)$$

den radialen Bahnfehler Δr zu

$$\begin{aligned} \Delta r = & \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^c (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \\ & \pm \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s (\delta C_{nm} \sin m\lambda - \delta S_{nm} \cos m\lambda) \end{aligned} \quad (4.55)$$

[ROSBOROUGH 1986] (S. 86). Die Funktionen $Q_{nm}^c = Q_{nm}^c(a, i, \varphi)$ und $Q_{nm}^s = Q_{nm}^s(a, i, \varphi)$ sind von der Satellitenbahngeometrie abhängig und werden durch die große Halbachse a , die Inklination i und die geozentrische Breite φ definiert.

Die hier beschriebene Vorgehensweise zur Berechnung des radialen Bahnfehlers (4.55) ist eine Approximation, die aus einer Reihe von Linearisierungen und Vereinfachungen entsteht und letztlich nur für streng kreisförmige Bahnen ($e = 0$) abgeleitet wurde. Für elliptische Bahnen wird das System wesentlich komplizierter (siehe [KAULA 1966]).

Ein Umlauf läßt sich in einen aufsteigenden (von Süd nach Nord verlaufenden) und einen absteigenden (von Nord nach Süd verlaufenden) Halbumlaufl aufteilen. Das Vorzeichen vor dem zweiten Term (4.55) ist für aufsteigende Halbumläufe a (ascending) positiv und für absteigende Halbumläufe d (descending) negativ (wegen $(\omega + M)$ im 1. und 4. bzw. im 2. und 3. Quadranten). Aus der Gleichung (4.55) kann der radiale Bahnfehler Δr^a für aufsteigende Bahnen und der Bahnfehler Δr^d für absteigende Bahnen mit

$$\Delta r^a = \Delta\gamma + \Delta\delta \quad \text{und} \quad \Delta r^d = \Delta\gamma - \Delta\delta \quad (4.56)$$

unterschieden werden, wobei die Ausdrücke

$$\Delta\gamma = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^c(a, i, \varphi) (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \quad (4.57)$$

$$\Delta\delta = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s(a, i, \varphi) (\delta C_{nm} \sin m\lambda - \delta S_{nm} \cos m\lambda) \quad (4.58)$$

den mittleren und den variablen Bahnfehleranteil angeben. Der mittlere Bahnfehleranteil wird auch als geographisch korrelierter Bahnfehler bezeichnet [SANDWELL et al. 1986]. Im Gegensatz zu dem mittleren Bahnfehleranteil $\Delta\gamma$ ist der variable Bahnfehleranteil $\Delta\delta$ abhängig von auf- und absteigenden Bahnen. Diese Eigenschaft macht man sich in der Analyse von Kreuzungspunktdifferenzen zu nutze, um den radialen Bahnfehler zu bestimmen. Näheres dazu in Kapitel 6.

5. Meeresspiegelschwankung

Eine mittlere Meeresoberfläche, die nur durch das Schwerfeld der Erde bestimmt ist und auf die keine äußeren Kräfte wie Wind und Luftdruckschwankungen wirken, würde sich einer Niveaufläche des Erdschwerfeldes, dem Geoid, angleichen. Die Wechselwirkung mit der Atmosphäre und zufällige Ereignisse, wie z.B. Erdbeben, beeinflussen aber die Ozeane und setzen die Wassermassen in Bewegung. Sobald sich die Wassermassen bewegen, lenkt infolge der Erdrotation die Corioliskraft die Wassermassen ab und Strömungen entstehen. Die Strömungen werden an den Kontinenten und am Meeresboden in ihrer Ausbreitung gehindert, wodurch die Meeresströmungen zusätzlich beeinflusst werden. Die dadurch entstehende Abweichung der aktuellen Meeresoberfläche von dem Geoid bezeichnet man, wie in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt, als *Meerestopographie*. Da sich die Meerestopographie auf eine physikalische Referenzfläche bezieht, läßt sich mit dieser Größe die Ozeandynamik untersuchen. Die Meerestopographie ist räumlich und zeitlich veränderlich, und läßt sich in einen konstanten und einen variablen Teil zerlegen.

Der *konstante Anteil*, eine generelle immer vorhandene Zirkulation der Ozeane, ist auf Dichteunterschiede der Wassermassen infolge der unterschiedlichen Erwärmung durch die Sonne in den Tropen und in höheren Breiten sowie auf Winddruck durch permanente Winde zurückzuführen. Auf die bewegten Wassermassen wirkt, wie oben erwähnt, die Corioliskraft und an den Kontinenten werden die Wassermassen in ihrer Bewegung gehindert und abgelenkt. Auf diese Weise bilden sich die großen westlichen Randströmungen wie der Golfstrom, oder der Kuroschio aus.

Der *variable Anteil* setzt sich aus zeitlichen und räumlichen Veränderungen der generellen Strömungen zusammen. Zeitliche Auswirkungen auf die Meeresoberfläche haben z.B. die Atmosphäre mit Wind, Luftdruck und Temperaturschwankungen sowie Erdbeben und Gezeiten.

5.1 Klassifizierung der Meeresspiegelbewegungen

In diesem Abschnitt wird nur eine Einleitung in die Thematik der Ozeandynamik gegeben. Für vertiefte Ausführungen sei auf [PEDLOVSKY 1987, BROWN et al. 1995, POND und PICKARD 1986, PICKARD und EMERY 1984, DIETRICH et al. 1992, WUNSCH 1993] verwiesen. Zunächst wird der variable Anteil der Meerestopographie betrachtet.

Klassifizierung der Strömungen

Die Meereströmungen lassen sich nach verschiedenen Kriterien klassifizieren, z.B. nach

- der Geschwindigkeit,
- der räumlichen Ausdehnung und
- den Kräften, die die Meeresströmungen auslösen und beeinflussen (siehe Abschnitt 5.2.1).

In diesem Abschnitt werden die Strömungen nach der räumlichen Ausdehnung eingeteilt, siehe dazu auch die Tabelle 5.1. Neben kleinskaligen Phänomenen wie z.B. Turbulenzen gibt es Strömungen mit Ausdehnungen von nur drei Kilometern bis zu großräumigen Hauptströmungen von über 1000 Kilometer Ausdehnung. Ihrer Größe nach teilt man die Strömungen in klein-, mittel- oder großskalige Bewegungen ein. Kleinskalige Bewegungen haben räumliche Ausdehnungen unter 50 Kilometern. Mittelskalige Strömungen mit Dimensionen zwischen 50 und 200 Kilometern entstehen durch Wechselwirkungen des Wassers mit der Atmosphäre oder mit Wassermassen unterschiedlicher Temperaturen oder Fließgeschwindigkeiten. Die Wirbel erhalten je nach Beeinflussung eine unterschiedliche Drehrichtung und können relativ schnell über ein Ozeanbecken wandern (einige Kilometer pro

Bezeichnung	Amplitude [cm]	Ausdehnung [km]
äquatoriale Strömung	30	5000
westliche Randströmung	130	100 -1000
östliche Randströmung	30	100 -1000
Mittelskalige Wirbel	25–100	100
Kleinskalige Wirbel	50	3

Tab. 5.1: Einteilung der Strömungen nach der räumlichen Ausdehnung [RUMMEL 1993].

Tag), bis sie sich auflösen. In vielen Gebieten entstehen immer wieder solche Wirbel, aber auch völlig zufällige und unvorhersagbare Bewegungen sind möglich.

Großskalige Bewegungen, mit Ausmaßen über tausend Kilometern verändern sowohl Ort als auch Intensität im Laufe von Jahren. Ob ihre Bewegungen Grund oder Folge klimatischer Veränderungen sind, ist jedoch meist unklar. Zu dieser Gruppe gehört auch der *El Niño* (spanisch, das Christkind), eine unregelmäßig alle etwa vier bis fünf Jahre zur Weihnachtszeit im tropischen Pazifik auftretende Strömung, die auf atmosphärische Druckanomalien im Ozean–Atmosphäre System zurückzuführen ist [LAUER 1997, BOULANGER und MENKES 1995].

Wegen des großen Spurensabstandes von Topex/Poseidon und wegen des Ziels der Erfassung globaler Meeresspiegelschwankungen werden in dieser Arbeit nur großskalige, dominante Bewegungen der Meeresoberfläche betrachtet.

Großskalige Zirkulationsströmungen an der Meeresoberfläche

Den konstanten Anteil der Meerestopographie, die Oberflächenzirkulation der Ozeane zeigt die Abb. 5.1. Die

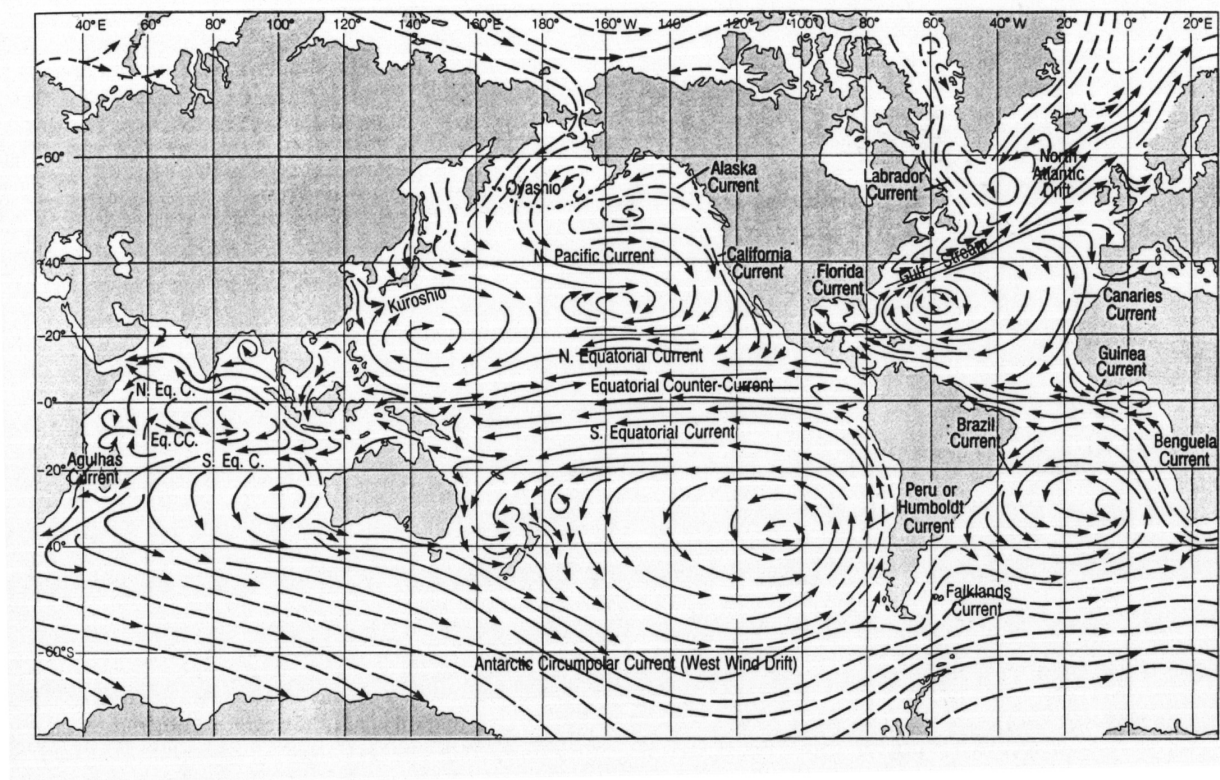


Abb. 5.1: Globales Oberflächenströmungssystem [BROWN et al. 1995]. Durchgezogene Linien stellen warme Strömungen dar, gestrichelte Linien kalte Strömungen.

Karte beruht auf einer großen Zahl von Einzelmessungen, meist aus Messungen der Besteckversetzung von Schiffen über lange Zeiträume. Kurzperiodische Effekte sind daher herausgefiltert. In Regionen, wo regelmäßig viele Schiffe verkehren, z.B. entlang der Hauptrouten im Nordatlantik und Nordpazifik, sind die Informationen zuverlässiger als in den übrigen Regionen. Hauptauslöser der dargestellten Strömungen ist die tangentielle Schubkraft des Windes mit Wirkung der Corioliskraft. Folgende Grundzüge der Meeresströmungen zeigen sich in der Karte:

- Im Nordatlantik und Nordpazifik existieren jeweils große Zirkulationsströmungen im Uhrzeigersinn, im Südatlantik, Südpazifik und südlichen Indischen Ozean im Gegenuhrzeigersinn.
- Die äquatorialen Regionen der drei Ozeane zeigen ein ähnliches Verhalten: Eine westwärts gerichtete Strömung nördlich und südlich des Äquators, die im Atlantik und Pazifik durch eine ostwärts fließende

äquatoriale Gegenströmung getrennt werden. Im Indischen Ozean existiert ebenfalls eine Gegenströmung, die aber wegen der veränderlichen Windrichtung nicht über das ganze Jahr hinweg auftritt.

- Die antarktische Region wird vom Zirkumpolarstrom, einer ostwärts fließenden Strömung geprägt.

Das Schmelzen der Eisvorräte, Änderungen der Windfeldstärke und Dichteänderungen des Wassers rufen Änderungen der Strömungsverhältnisse hervor. Die Dichteänderung (durch Temperatur- und Salzgehaltsänderung) bewirkt eine Volumenänderung der Wassermassen (*sterischer Effekt*). [GILSON et al. 1998] haben diesen Einfluß in altimetrischen Höhen aus Topex/Poseidon-Daten untersucht.

5.2 Modellierung der Meeresspiegelschwankung

Zur gemeinsamen Schätzung von Meeresspiegelschwankung und Schwerefeldkorrekturen (in Kapitel 6) werden Vorinformationen über die Schwankung des Meeresspiegels benötigt. Dazu ist diese erst in geeigneter Weise zu modellieren. Zur Modellierung gibt es

- dynamische,
- kinematische und
- kombinierte

Ansätze. Ein dynamischer Ansatz beschreibt die Bewegungen durch physikalische Gesetze und berücksichtigt die verursachenden Kräfte. Die Ursachen der Bewegungen sind jedoch nicht immer ausreichend oder einfach zu klären. In Abschnitt 5.2.1 ist ein solcher Ansatz kurz erläutert, weil die Modelldaten eines hydrodynamischen Modells bei der kombinierten Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung in Kapitel 6 als Zusatzinformation eingeführt werden.

In einem kinematischen Ansatz beschreibt man die vorherrschenden Bewegungen mit mathematischen Modellen, ohne die physikalischen Ursachen (Kräfte) zu berücksichtigen. Mit Altimetermessungen stehen innerhalb kurzer Zeiträume global Meereshöhen zur Verfügung, aus denen die Bewegungen der Meeresoberfläche analytisch (geometrisch) beschrieben werden können. Nachteil der kinematischen Modellierung ist die Vernachlässigung der physikalischen Zusammenhänge. In Abschnitt 5.2.2 mit Unterkapiteln werden drei kinematische Ansätze beschrieben, die in Abschnitt 5.3.2 numerisch untersucht werden. Ein kinematisches Modell wird anschließend in Kapitel 6 zur Beschreibung der Modellparameter zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung verwendet.

Kombinierte Ansätze verbinden dynamische und kinematische Verfahren. Die dynamischen Bewegungsgleichungen werden als zusätzliche Bedingungsgleichungen in kinematische Modelle oder umgekehrt eingeführt [HEITZ 1986]. [SCHMIDT und BOSCH 1995, ARENT 1993, HÜCKELHEIM 1994] beschreiben verschiedene kombinierte Verfahren.

5.2.1 Dynamische Modellierung

In diesem Abschnitt werden ansatzweise die physikalischen Grundlagen der Meeresspiegelbewegungen, sowie die Lösung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten dargestellt. Vereinfachungen der Navier-Stokes'schen Differentialgleichung werden für stationäre Strömungen durch geostrophische Bewegungsgleichungen approximiert. Traditionell schätzen Ozeanographen geostrophische Meeresströmungen aus der dynamischen Topographie. In den folgenden Schritten werden Ursachen und Wirkungen der Strömungen ansatzweise beschrieben. Das Zusammenspiel der Kräfte und Einflüsse auf die Ozeane ist vielfältig und komplex und bei weitem noch nicht vollständig erforscht. Eine detailliertere Behandlung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Literaturhinweise wurden bereits zu Anfang von Abschnitt 5.1 gegeben.

Beschreibung der Kräfte

Die verschiedenen Kräfte, die Meeresströmungen verursachen, unterscheidet man in *primäre Kräfte*, die Strömungen auslösen und erhalten, und *sekundäre Kräfte*, die bewegte Wassermassen beeinflussen, aber keine Bewegung hervorrufen. Zu den primären Kräften gehören:

- Die Gravitationskraft der Erde, der Sonne und des Mondes; erstere erzeugt ein inneres Druckfeld in den Ozeanschichten; die luni-solaren Kräfte lösen die Gezeiten aus.
- Die senkrecht zur Meeresoberfläche gerichtete Druckkraft der Atmosphäre.

- Die tangential zur Meeresoberfläche gerichtete Schubkraft des Windes. Die Energie des Windes überträgt sich durch Reibung von der Atmosphäre auf die Ozeanoberfläche.
- Die Sonnenenergie: die Sonne erwärmt die Atmosphäre und die oberen Ozeanschichten. Warme Medien dehnen sich aus und haben daher einen geringeren Druck und geringere Dichte. Verdunstung und Niederschlag, sowie Gefrieren und Schmelzen der Eisschichten in den polaren Regionen bedingen Änderungen des Salzgehalts. Temperatur- und Salzgehaltvariationen erzeugen Dichteänderungen, wodurch es zu *thermohalinen* Strömungen kommt.
- Andere Kräfte, wie z.B. seismische Kräfte, unterseeische Erdbeben und Vulkanismus, die seismische Wellen erzeugen.

Die sekundären Kräfte wirken erst, wenn die Wassermassen in Bewegung sind.

- Die Corioliskraft sowie
- Reibungskräfte

lenken die Bewegungen ab.

Reibungen finden statt zwischen:

Luft und Wasser :

[EKMAN 1905] hat die Kräfteübertragung des Windes auf verschiedene Tiefenschichten, unter den Annahmen beschrieben, daß ein konstanter Wind ungestört über einen unendlich ausgedehnten homogenen Ozean streicht. Der Wind erzeugt durch Reibung eine Strömung an der Meeresoberfläche, die wiederum durch Reibung an die tieferliegende Schicht weitergegeben wird. Derselbe Vorgang setzt sich in die Tiefe fort. Da die bewegten Massen von der Corioliskraft abgelenkt werden, bilden die Bewegungen eine Spirale (Ekman-Spirale) [BROWN et al. 1995] (S. 36). Die Strömungsstärke hängt von der Windstärke, der geographischen Breite und den physikalischen Eigenschaften der Wasserschichten ab. Die Strömungsgeschwindigkeit ist an der Meeresoberfläche maximal und nimmt mit zunehmender Tiefe ab. Die Annahmen der Ekman-Strömung sind stark idealisiert.

Wasser und Wasser:

Unterschiedliche Geschwindigkeiten benachbarter Wasserschichten beeinflussen die Strömungen. Dabei wird der eigentlichen Strömung, die sich relativ gleichmäßig bewegt, eine kurze aber kräftige Geschwindigkeitsschwankung überlagert. Die Wassermassen durchmischen sich stark bei diesem Prozeß. Unterschiedliche Geschwindigkeiten sowie Reibungen inhomogener Wasserschichten generieren turbulente Strömungen.

Wasser und Meeresboden:

Bodennahe Strömungen erfahren eine Bodenreibung. In starken Tiefenstromgebieten, wie z.B. der Antarktis, werden die Tiefenströmungen durch die Bodentopographie (unterseeische Gebirge und Tiefseegräben) beeinflusst.

Die physikalischen Auswirkungen der Reibungskräfte sind nur in wenigen speziellen Fällen bekannt.

Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

Zur Beschreibung der Ozeandynamik sind die Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten zu lösen. Die Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes auf die im Meer wirkenden Kräfte führt auf die *Navier-Stokes'sche Bewegungsgleichung*

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{m}(\mathbf{K}_G + \mathbf{R}) \quad (5.1)$$

mit

- $\mathbf{V}$ = Geschwindigkeitsvektor
- ρ = Dichte
- ∇p = Druckgradient
- $\mathbf{g}$ = Schwerebeschleunigung
- $\mathbf{K}_G$ = Gezeitenkräfte
- $\mathbf{R}$ = Reibungskräfte
- m = Einheitsmasse .

Diese Gleichung gilt in einem Inertialsystem, das für ozeanographische Zwecke mit einem raumfesten geozentrischen kartesischen Koordinatensystem realisiert wird. Die Transformation von (5.1) in ein topozenrisches Koordinatensystem, dessen x -, y - und z -Achse nach Osten, Norden und zum Geozentrum gerichtet sind, liefert die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, welche in vereinfachter Form folgendermaßen lauten

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - fv + R_x \quad (5.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fu + R_y \quad (5.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + R_z \quad (5.4)$$

[DIETRICH et al. 1992] (S. 280), mit dem Coriolisparameter

$$f = 2\omega \sin \varphi \quad , \quad (5.5)$$

wobei

φ = Breite

ω = Rotationsgeschwindigkeit der Erde

u, v, w = Geschwindigkeitskomponenten bzgl. der x -, y -, z -Achse

R_x, R_y, R_z = Beschleunigungskomponenten infolge von Reibungen .

Die umgekehrte Ablenkungsrichtung der Corioliskraft auf Nord- und Südhalbkugel wird durch die Funktion $\sin \varphi$ ausgedrückt (auf der Nordhalbkugel ist $\sin \varphi > 0$, auf der Südhalbkugel ist $\sin \varphi < 0$).

Zwei Bedingungen sind zu erfüllen:

- Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.6)$$

besagt, daß die Massen erhalten bleiben müssen, d.h. Zufluß und Abfluß müssen sich die Waage halten.

- Randbedingung:

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v und w müssen an den Grenzflächen, wie z.B. den Meeresböden, entlang der Küsten und an der Meeresoberfläche realistisches Verhalten aufweisen.

Derzeit sind noch keine geschlossenen Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen möglich. Für langwellige bzw. großräumige und langperiodische (jährliche, halbjährliche oder jahreszeitliche), sogenannte *stationäre Meeresströmungen*, sind Vereinfachungen der hydrodynamischen Gleichungen zulässig.

Geostrophische Strömung

Im einfachsten Fall wird ein homogener Ozean zugrundegelegt, auf den außer der Schwerkraft keine äußeren Kräfte einwirken. Wird zudem die Corioliskraft nur durch den horizontalen Druckgradienten kompensiert, ist die Strömung in geostrophischem Gleichgewicht [BROWN et al. 1995, ZANDBERGEN 1990, DIETRICH et al. 1992] (S. 296).

Ausgehend von den Navier–Stokes’schen–Bewegungsgleichungen (5.2, 5.3, 5.4), mit den Annahmen

- einer konstanten horizontalen Strömung

$$du/dt = dv/dt = 0 \quad , \quad (5.7)$$

- verschwindend kleiner Komponenten R_x, R_y, R_z der Reibungskräfte

$$R_x = R_y = R_z = 0 \quad , \quad (5.8)$$

- und unter Vernachlässigung vertikaler Bewegungen $w \approx 0$

erhält man die geostrophischen Bewegungsgleichungen (5.9, 5.10)

$$u = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.9)$$

$$v = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.10)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (5.11)$$

Strömungen mit räumlichen Ausdehnungen von mehr als 50 km und Zeitskalen über mehrere Tage erfüllen diese Annahmen näherungsweise. Die Gleichung (5.11) beschreibt einen Zustand des hydrostatischen Gleichgewichtes zwischen dem vertikalen Druckgradienten und der Schwerkraft. Ihr ist zu entnehmen, daß das Druckfeld eine Funktion der Wassertiefe z und der Dichteverteilung $\frac{1}{\rho}$ ist.

Ein Druckfeld p unter realen Bedingungen ist jedoch kaum zu berechnen. Es baut sich aus Wind, Atmosphäre und innerer Massenverteilung auf. Das vom Wind erzeugte vertikale Druckfeld ist schwer zu modellieren. Der atmosphärische Druck verursacht den sogenannten inversen Barometer-Effekt. Bei einem Druckanstieg von 1 mbar sinkt die Meeresoberfläche um ca. 1 cm. Dieser Effekt ist bezüglich der Reaktionszeit und der Dauer noch nicht ausreichend erforscht. In der Praxis werden vertikaler Wind- und atmosphärischer Druck vernachlässigt. Für eine Mittelwertbildung über lange Zeiträume stellt das durch die Tiefe, Temperatur und Dichte erzeugte hydrostatische Druckfeld eine gute Näherung des totalen Druckfeldes dar.

Als Referenzfläche für die Meereshöhe z wird in der Ozeanographie, wie schon erwähnt, eine Tiefenschicht der Ozeane angenommen, in der sich die Wassermassen nicht bewegen (*level-of-no-motion*). Diese Ebene, sofern sie überhaupt existiert, hat jedoch keine gleichbleibende Tiefenlage innerhalb und zwischen den Ozeanen. Nach [POND und PICKARD 1986] liegt die Nullfläche im Pazifik bei 1000-dezibar (in ca. 1000 m Tiefe) bzw. im Atlantik bei 1000 - 2000-dezibar (in ca. 1000 - 2000 m Tiefe). Im Falle, daß die Referenzfläche tatsächlich bzw. ausreichend genau das level-of-no-motion darstellt, sind u und v absolute Größen.

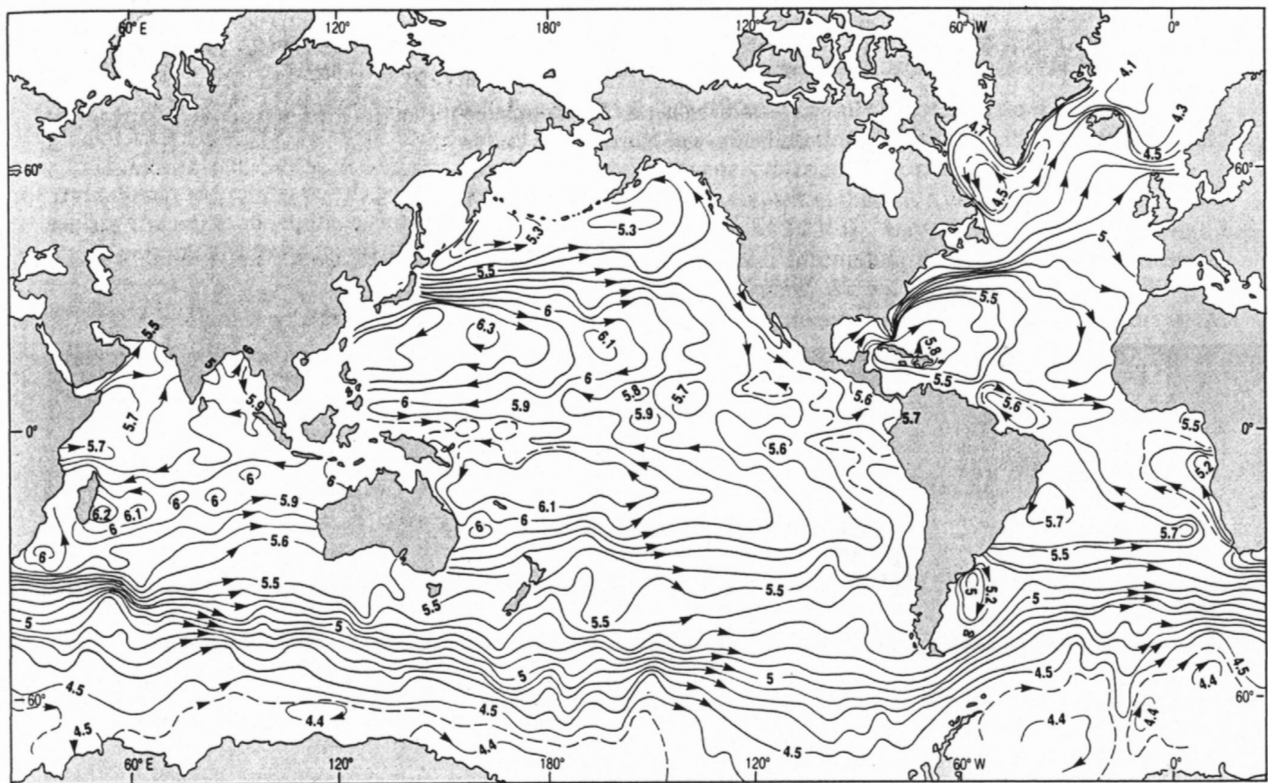


Abb. 5.2: Dynamische Meerestopographie bezüglich der Schicht mit einem Druck von 1 500 dezibar. Einheit sind dynamische Meter². 4.4 bis 6.4 dynamische Meter entsprechen einem Relief von 2 geometrischen Metern [BROWN et al. 1995] (S. 57).

² dynamische Meter dyn m = $\frac{gz}{10}$ mit der Schwere g . 1 dyn m entspricht 1.02 m [DIETRICH et al. 1992] (S. 280)

Die geostrophischen Gleichungen versagen dort, wo Reibungskräfte eine signifikante Rolle spielen, wie dies in der Nähe des Äquators ($\pm 0.5^\circ$ Breite) der Fall ist. Dort verschwindet die Corioliskraft und die Reibungskräfte kompensieren das Druckfeld. Trotz der groben Vereinfachungen ist die geostrophische Methode ein bewährtes Verfahren zur Berechnung stationärer Meeresströmungen.

Simulationsmodelle

Zur Simulation von Meeresströmungen werden in ozeanographischen Modellen die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung sowie die Erhaltungsgleichungen für Temperatur und Salzgehalt in finite Differenzengleichungen umgeschrieben. Als Randbedingungen werden Wind, Temperatur, Salzgehalt und Geschwindigkeitsmessungen aus verschiedenen Schichten längs der gemessenen Profile in die Modelle eingeführt. Alternativ wird ab einem Anfangszustand, mit homogener Dichteverteilung und ohne Geschwindigkeiten innerhalb der Ozeanschichten, in festen Zeitabständen vorwärts integriert bis sich ein stabiler Zustand einstellt. Unrealistische Ergebnisse können durch falsche Einstellungen im Ozeanmodell entstehen. Die wichtigsten Fehlerquellen dabei sind: falsche Anfangsbedingungen, Verwendung gemittelter Datenfelder, unzureichende Auflösung und Vernachlässigung physikalischer Aspekte durch die Modellapproximation [STAMMER und WUNSCH 1994]. Der Endzustand wird mit ozeanographischen Beobachtungen verglichen, um die Realitätsnähe des Modells zu prüfen. Für detaillierte Ausführungen sei auf [POND und PICKARD 1986] verwiesen.

Beispiel: Parallel Ocean and Climate Modell (POCM)

Ein hydrodynamisches Simulationsmodell ist das globale Ozeanmodell *Parallel Ocean and Climate Modell* (POCM) von [SEMTNER und CHERVIN 1992, SEMTNER und CHERVIN 1996]. Es ist ein gekoppeltes Ozean-Klima Modell mit 20 Tiefenschichten. 1996 wurde ein Modellauf für den Zeitraum von 1987 bis 1996 mit einer Auflösung von 0.4° in der Länge bzw. $0.4^\circ \cos \varphi$ in der Breite durchgeführt. Während bei anderen Modellläufen Wärme- und Salzflüsse der oberen Schichten dem saisonalen Zyklus der Levitus-Daten [LEVITUS 1989] angepaßt waren, stammen die Oberflächenwärme- und Impulsflüsse bei diesem Modellauf vom *European Center for Medium-range Weather Forecast* (ECMWF). Der Impulsfluß beruht dabei auf den täglichen Windfeldern des Zeitraums 1987 bis 1996 (<http://vislab-www.nps.navy.mil/~rtt>). Das Modell beruht auf Volumenerhaltung, d.h. Höhenänderungen der Wasserstände werden durch Dichteänderungen kompensiert. Schwachstellen des Modells sind laut [STAMMER et al. 1996, TOKMAKIAN 1996]:

- Die Massenerhaltung durch Verdampfung von Wasser in den Tropen und Süßwasserzufluß ist nicht berücksichtigt.
- Die Variabilität ist unterschätzt, da nur täglich zwei Windwerte und monatliche Wärmeflüsse verwendet wurden.
- Die Bestimmung der Anfangs- und Randbedingungen bei der Modellinitialisierung war fehlerhaft.

Dennoch ist dieses Modell ein umfassendes hydrodynamisches Ozeanmodell, weshalb es in dieser Arbeit zur Überbrückung der Altimeterdatenlücke verwendet wird. Um Konsistenz mit den Altimeterdaten zu ermöglichen, wurden die Daten später auf den Topex/Poseidon 10-Tage-Wiederholzyklus interpoliert.

5.2.2 Kinematische Modellierung

Zur Untersuchung des Raum-Zeitverhaltens der Altimetermeßdaten und damit zur Modellierung der Meeresspiegelvariation müssen die Altimeterdaten in geeigneter Weise dargestellt werden. Hierzu eignen sich gleichmäßige Gitter mit äquidistanten Raum- und Zeitabständen. Die Bildung solcher als Meereshöhenraster bezeichneten Gitter wird zunächst beschrieben und in Kapitel 5.3.2 für Topex/Poseidon-Daten gezeigt. Anschließend werden drei unabhängige kinematische Verfahren zur mathematischen Modellierung der Meeresspiegelbewegung vorgestellt, die auf den Meereshöhenrastern basieren. Die Ergebnisse der Untersuchungen mit diesen drei Verfahren sind ebenfalls in Kapitel 5.3.2 zusammengestellt.

Erstellung von Meereshöhenrastern

Die altimetrischen Höhen, nach Gleichung (3.10) mit dem Korrekturterm aus Gleichung (3.12), liegen entlang der Satellitenspuren vor. Für graphische Darstellungen und zur Modellierung der Meeresspiegelschwankungen eignen sich regelmäßige Raster mit konstantem Gitterabstand. Deshalb werden die Meereshöhen auf die Gitterpunkte interpoliert.

Zur Berechnung der Höhe eines Gitterpunktes werden sämtliche Höhenwerte, die in dem gewünschten Beobachtungszeitraum innerhalb eines maximalen Einflußkreises s_{max} um den Gitterpunkt $P(x, y)$ liegen, in eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. Abschnitt 2.1) einbezogen. Als Funktionalmodell kann das Flächenmodell einer Ebene

$$f(\Delta x, \Delta y) = a_0 + a_1 \Delta x + a_2 \Delta y \quad ,$$

eines Hyperboloids

$$f(\Delta x, \Delta y) = a_0 + a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + a_3 \Delta x \Delta y$$

oder eine Fläche höheren Grades mit dem Gitterpunkt als Nullpunkt gewählt werden. Das gewählte Flächenmodell wird zur Interpolation für jeden Gitterpunkt genutzt. Für die Interpolation der Beobachtungen entlang der Satellitenspur auf ein Gitter hat sich die Ebene als stabiles Flächenmodell erwiesen. Flächen höherer Ordnung führten dagegen zu unerwünschten Randeffekten. Über den Abstand s_i zwischen Beobachtungspunkt und Gitterpunkt werden die Beobachtungen b_i mit der Funktion

$$p_i = \frac{c^2}{c^2 + s_i^2} \quad \text{mit} \quad c = \omega s_{max} \quad (5.12)$$

gewichtet. Die Konstante c setzt sich aus dem Radius s_{max} des maximalen Einflußkreises und einer Konstanten ω , die die Halbwertsbreite relativ zum Einflußkreis steuert, zusammen. Setzt man $\omega = 0.3$, so erreicht die Gewichtsfunktion bei $s_i = 0.3 s_{max}$ den Wert 0.5. Die Verteilung und Gewichtung der umliegenden Beobachtungen entscheidet über die Genauigkeit der interpolierten Gitterhöhe.

Für jeden Satellitenzyklus, also für jede globale Überdeckung der Erde mit einem Satellitenspurenmuster, wird ein Datensatz mit einem $1^\circ \times 1^\circ$ Meereshöhenraster erzeugt. Zur Gewichtung wird ein maximaler Einflußkreis von $s_{max} = 2^\circ$ und eine Halbwertsbreite von $\omega = 0.3$ gewählt. Für alle innerhalb eines Satellitenzyklus beobachteten Meereshöhen wird als Bezugszeitpunkt der mittlere Tag des jeweiligen Zyklus verwendet.

Gitterpunkte, die in Gebieten mit weniger als 200 m Wassertiefe, sogenannte Flachwasser- oder Schelfbereiche, oder über Land- oder Eisflächen liegen, werden mit einer Land-/Wasser-Maske ausgeschlossen. In Flachwasserbereichen können die Gezeiten nur schlecht modelliert werden, weshalb die altimetrischen Höhen dort nicht mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen sind. Außerdem werden die Altimetermessungen in Küstennähe unzuverlässig, weil in den großen Footprints Landflächen das reflektierte Signal verfälschen. Eine weitere Gebietsabgrenzung, z.B. von Regionen mit Treibeis, wie der Labradorsee im Nordatlantik, ist durch geschlossene Polygonzüge möglich, die die Land-/Wasser-Maske ergänzen.

Bei der Interpolation treten möglicherweise folgende Fehler auf:

- Am Äquator ist der Bahnspurabstand viel größer als in höheren Breiten. Folglich gehen am Äquator weniger Höhenwerte innerhalb eines konstanten Einflußkreises in die Interpolation einer Gitterhöhe ein.
- Bei Gitterpunkten, die nahe an den ausgesparten Flachwasserbereichen (< 200 m Tiefe) liegen, können sich Meßwerte aus dem Flachwasserbereich in dem Einflußkreis befinden. Ebenso können an Küsten mit kleinem Schelfgürtel über Land gemessene Höhen in den Einflußkreis der Interpolation fallen.
- In Gegenden mit wechselnder Eisbedeckung, wie z.B. der Labradorsee, treten trotz weitestgehendem Abschluß von Messungen über Eis Meßfehler auf. Außerdem liegen dann viel weniger Höhenwerte für die Interpolation im Einflußkreis.
- Eine sehr bewegte Bodentopographie (Tiefseegräben und -berge) zeichnet sich an der Meeresoberfläche ab (siehe Abb. 4.1). Die Altimeterdaten variieren dort besonders stark, wenn die Bahnspur nicht genau überflogen wird. Das kann bei der Interpolation zu ungenauen Gitterhöhen führen. Außerdem kann das einfache Flächenmodell die starke Variation der Meeresoberfläche nicht wiedergeben.

In den folgenden drei Verfahren dienen die Meereshöhenraster als Datengrundlage.

5.2.2.1 rms-Variabilität

Die Abweichung zwischen aktueller und mittlerer Meeresoberfläche wird statistisch anhand der Standardabweichung (2.15) beurteilt. Zur Vereinfachung wird die zeitliche Variation innerhalb eines Satellitenzyklusses

vernachlässigt und allen Meereshöhen der mittlere Zeitpunkt des Zyklusses zugeordnet. Der Mittelwert $\bar{h}_p$ berechnet sich für einen Gitterpunkt P aus den Meereshöhen h_{ip} über alle n Zeitpunkte t_i mit $i = 1, \dots, n$ zu

$$\bar{h}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ip} \quad . \quad (5.13)$$

Aus der Wurzel der quadratischen Abweichung der Beobachtungen h_{ip} zum Mittelwert $\bar{h}_p$ berechnet sich die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{h}_p - h_{ip})^2}{r}} \quad . \quad (5.14)$$

Die Redundanz beträgt $r = n - 1$, da mit dem Mittelwert nur eine Unbekannte zu schätzen ist. Der Wert der Standardabweichung kann als Maß für die Variabilität benutzt werden. In der amerikanischen Literatur wird meist anstelle der Standardabweichung die mittlere quadratische Abweichung *rms* (*root mean square*) verwendet

$$rms = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{h}_p - h_{ip})^2}{n}} \quad . \quad (5.15)$$

Bilder (z.B. Abb. 5.4), die den rms-Wert eines jeden Gitterpunktes auf einem Gitter darstellen, werden als rms-Variabilität bezeichnet.

5.2.2.2 Harmonische Analyse

In einer harmonischen Analyse wird der zeitliche Verlauf der Meereshöhen durch feste Schwingungen analysiert. Dabei werden K Schwingungen mit fest vorgegebenen Frequenzen angesetzt. Eine Grundschiwingung, z.B. eine Jahresschiwingung, wird mit $K-1$ anderen Schwingungen, z.B. Halb- und Vierteljahresschiwingungen, überlagert. Jede der Schwingungen ist durch Amplitude und Phase definiert. Die Amplitude gibt den Betrag, die Phase den Zeitpunkt der maximalen Auslenkung der Meeresoberfläche an. Bei entsprechend zahlreich vorliegenden Beobachtungswerten können Amplituden und Phasen der Schwingungen berechnet werden. Da es zudem von Interesse ist, ob der Meeresspiegel mit der Zeit linear ansteigt oder absinkt, wird ein linearer Term $D_1 t$ aus den Beobachtungen mit bestimmt.

Als allgemeiner Ansatz wird für jeden Gitterpunkt eine Überlagerung von K Schwingungen mit einer *Fourier-Reihe*, erweitert um einen linearen (säkularen) Anteil $D_1 t$,

$$f(t) = D_0 + D_1 t + \sum_{k=1}^K C_k \cos(\omega_k t - \varphi_k) \quad (5.16)$$

gewählt [KOCH und SCHMIDT 1994] (S.10 ff.), mit

- $f(t)$ = Funktionswert zur Zeit t
- D_0 = Konstante
- D_1 = Neigung
- C_k = Amplitude der k -ten Schwingung
- φ_k = Phase der k -ten Schwingung
- $\omega_k = 2\pi/T_k$ = Kreisfrequenz der k -ten Schwingung
- T_k = Periode der k -ten Schwingung

Die Frequenzen ω_k der Fourier-Reihe stellen ganzzahlige Vielfache der Frequenz der Grundschiwingung ω_0 dar

$$\omega_k = k\omega_0. \quad (5.17)$$

Die Anwendung des Additionstheorems auf Gleichung (5.16) ergibt

$$f(t) = D_0 + D_1 t + \sum_{k=1}^K (C_k \cos(\omega_k t) \cos \varphi_k + C_k \sin(\omega_k t) \sin \varphi_k)$$

und nach Zusammenfassen der konstanten Anteile zu

$$\begin{aligned} A_k &= C_k \cos \varphi_k \\ B_k &= C_k \sin \varphi_k \end{aligned}$$

wird die erweiterte Fourier-Reihe zu

$$f(t) = D_0 + D_1 t + \sum_{k=1}^K (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \quad . \quad (5.18)$$

Aus den Fourier-Koeffizienten A_k und B_k lassen sich wiederum Amplitude C_k und Phase φ_k aus

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_k = \arctan \frac{B_k}{A_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, K \quad (5.19)$$

berechnen.

Anstelle des kontinuierlichen Signals $f(t)$ liegen gemäß Gleichung (3.10) als Beobachtungen Meereshöhen h über einem Referenzellipsoid zu diskreten Zeitpunkten t_i mit $i = 1, \dots, n$ vor. Die Beobachtungen $h_i = h(t_i)$ sind mit Fehlern $\hat{v}_i$ behaftet.

$$f(t_i) = h_i + \hat{v}_i \quad .$$

Die Beobachtungsgleichung ergibt sich damit zu

$$h_i + \hat{v}_i = \hat{D}_0 + \hat{D}_1 t_i + \sum_{k=1}^K (\hat{A}_k \cos(\omega_k t_i) + \hat{B}_k \sin(\omega_k t_i)) \quad . \quad (5.20)$$

Als stochastisches Modell wird angenommen, daß alle Beobachtungen gleich genau und unkorreliert sind. Mit den Beobachtungen h_i werden die Koeffizienten $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{A}_k$ und $\hat{B}_k$ aus der Beobachtungsgleichung (5.20) für vorgegebene Frequenzen ω_k geschätzt (zur Ausgleichung siehe Kapitel 2.1). Diese Berechnungen werden für jeden Gitterpunkt $P(\varphi, \lambda)$ mit Breite φ und Länge λ eines Gitters mit g Punkten, repräsentiert durch den Index $p = 1, \dots, g$, getrennt angesetzt, so daß

$$h_{ip} + \hat{v}_{ip} = \hat{D}_{0p} + \hat{D}_{1p} t_i + \sum_{k=1}^K (\hat{A}_{kp} \cos(\omega_k t_i) + \hat{B}_{kp} \sin(\omega_k t_i)) \quad (5.21)$$

als Beobachtungsgleichung gilt. Die Koeffizienten werden in Hypothesentests (siehe Abschnitt 2.3) auf Signifikanz getestet. Unter der Voraussetzung, daß sich das Meer periodisch verhält, kann die Meereshöhe zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnet werden. Die Koeffizienten $\hat{D}_{0p}, \hat{D}_{1p}$ und die Fourier-Koeffizienten $\hat{A}_{kp}$ und $\hat{B}_{kp}$ repräsentieren die Meeresspiegelschwankung an jedem Gitterpunkt. Für ein Gitter mit g Punkten beschreiben also $(2K + 2)g$ Parameter die K Schwingungen. Bei einem globalen $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter mit ca. 32 000 Punkten erhält man damit 128 000 Parameter für den Modellansatz einer Schwingung. Diese große Parameterzahl kann beispielsweise durch eine Entwicklung der Koeffizienten in Kugelflächenfunktionen beschränkt werden. Dadurch wird je nach Entwicklungsgrad nochmals eine Glättung durchgeführt [KNUDSEN 1994]. Im nächsten Abschnitt wird eine weitere Methode zur Beschreibung der Meeresspiegelvariabilität vorgestellt.

5.2.2.3 Empirische Orthogonal-Funktions-Analyse

Die Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA), wird häufig in der Ozeanographie zur Beschreibung des Raum- und Zeitverhaltens physikalischer Felder unter dem Namen *Empirische Orthogonal-Funktions-Analyse* (EOF-Analyse) verwendet. Ein solches physikalisches Feld stellen die Meereshöhenraster aus Altimetermeßdaten oder POCM-Daten dar.

Bei einer Hauptkomponentenanalyse werden aus g korrelierten Ausgangssatensätzen mit jeweils n Einzelmessungen g neue unkorrelierte Datensätze gebildet. Im vorliegenden Fall setzt sich ein Datensatz aus den Meereshöhen h_i zu den Zeitpunkten t_i mit $i = 1, \dots, n$ an jedem Gitterpunkt $p = 1, \dots, g$ zusammen. In der Hauptkomponentenanalyse werden die Daten in räumliche und zeitliche Strukturen zerlegt. Im folgenden wird das Grundprinzip der Hauptkomponentenanalyse dargestellt. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [PREISENDORFER 1988, SCHMIDT 1999, KRAUS 1994] verwiesen. Anwendungen der Methode findet man z.B. in [HENDRICKS et al. 1996, FERON 1994, ANZENHOFER 1998].

Zunächst wird die Berechnung der Varianzen, Kovarianzen und Korrelationen für zwei beliebige Gitterpunkte P und Q , repräsentiert durch die Indizes $p, q = 1, \dots, g$, mit jeweils n unabhängigen und gleich gewichteten Beobachtungen gezeigt. Die Meßwerte h_i aus Gleichung (3.10) werden mit (5.13) auf den Mittelwert $\bar{h}_p$ des jeweiligen Datensatzes zentriert. Aus den Residuen

$$\hat{v}_{ip} = h_{ip} - \bar{h}_p \quad (5.22)$$

folgen die Varianzen $\hat{\sigma}_p^2$ und $\hat{\sigma}_q^2$ der Punkte P und Q

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \hat{v}_{ip}^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (h_{ip} - \bar{h}_p)^2 \quad , \quad r = n - 1 \quad (5.23)$$

sowie die Kovarianz $\hat{\sigma}_{pq}$ der Punkte untereinander

$$\hat{\sigma}_{pq} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \hat{v}_{ip} \hat{v}_{iq} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (h_{ip} - \bar{h}_p)(h_{iq} - \bar{h}_q) = \hat{\sigma}_{qp} \quad . \quad (5.24)$$

Die Redundanz beträgt $r = n - 1$, weil nur der Mittelwert als Unbekannte geschätzt wird. Die positive Wurzel der Varianz (5.23) ist identisch mit der Standardabweichung aus (5.14). Aus den Varianzen und der Kovarianz läßt sich die Korrelation der Punkte P und Q berechnen mit

$$\hat{\rho}_{pq} = \frac{\hat{\sigma}_{pq}}{\hat{\sigma}_p \hat{\sigma}_q} \quad , \text{ wobei } -1 \leq \hat{\rho}_{pq} \leq 1 \quad . \quad (5.25)$$

Für ein Gitter mit g Punkten bietet sich die Matrixschreibweise an. In die Matrix $\mathbf{H}_{(n,g)} = (\mathbf{h}_k)$ mit $k = 1, \dots, g$ werden spaltenweise g Datensätze mit je n Meereshöhen gestellt

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_k) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1g} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{ng} \end{pmatrix} \quad . \quad (5.26)$$

Die Datensätze müssen gleich groß sein, d.h. für jeden Gitterpunkt müssen zu allen n Zeitpunkten Meßwerte vorliegen. Die Mittelwerte (5.13) werden in die Matrix $\bar{\mathbf{H}}_{(n,g)}$ geschrieben, wobei die Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ aus n identischen Zeilen besteht, da die Werte für jeden Gitterpunkt über alle Zeitpunkte gemittelt werden. Die Residuenmatrix $\hat{\mathbf{V}}_{(n,g)}$ wird aus

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}} \quad (5.27)$$

gebildet und hat die Form

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \hat{v}_{11} & \hat{v}_{12} & \dots & \hat{v}_{1g} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{v}_{n1} & \hat{v}_{n2} & \dots & \hat{v}_{ng} \end{pmatrix} \quad . \quad (5.28)$$

Bei (5.27) handelt es sich um ein multivariates Ausgleichungsmodell [KOCH 1997] (S. 260), denn die Beobachtungsmatrix $\mathbf{H}$ enthält g Datensätze, für die gleichzeitig die jeweiligen Mittelwerte geschätzt werden. Daher lautet das zu dem Funktionalmodell (5.27) gehörende stochastische Modell

$$\mathbf{D}(\text{vec} \mathbf{H}) = \hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I} \quad . \quad (5.29)$$

Die Rechenregeln des Kronecker Produkts $\otimes$ sind im Anhang erklärt. Die Varianz-Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}_{(g,g)}$ folgt, aufgrund von (5.23, 5.24), aus der quadratischen Form

$$\hat{\Sigma} = \frac{\hat{\mathbf{V}}' \hat{\mathbf{V}}}{r} \quad , \quad r = n - 1 \quad (5.30)$$

mit

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} & \dots & \hat{\sigma}_{1g} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{g1} & \hat{\sigma}_{g2} & \dots & \hat{\sigma}_g^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (5.31)$$

Nach (5.25) zeigen sich in $\hat{\Sigma}$ die Korrelationen der residuellen Höhen zwischen den Gitterpunkten. Sind die Nebendiagonalelemente ungleich Null, sind die g Ausgangsdatensätze korreliert.

Die Matrix $\hat{\Sigma}$ wird aus der Matrix $\hat{\mathbf{V}}$ berechnet und besitzt maximal den Rang $\text{rg}\hat{\Sigma} = r$. Da $\hat{\Sigma}$ aus g Zeilen und g Spalten besteht und falls mit $g > r$ gleich viele oder mehr Gitterpunkte g als Zeitpunkte n vorliegen, handelt es sich um eine singuläre Matrix. Die Kovarianzmatrix ist daher nur positiv semidefinit [KOCH 1997] (S. 109), d.h. es gibt neben positiven Diagonalelementen auch Diagonalelemente gleich Null.

Eigenwertzerlegung von $\hat{\Sigma}$:

Die Korrelationen der Ausgangsdaten berechnen sich aus Gleichung (5.25) und sind im allgemeinen von Null verschieden. Mit einer Hauptkomponentenanalyse werden diese Korrelationen beseitigt, indem man die Varianz-Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}_{(g,g)}$ mit Hilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix $\mathbf{R}_{(g,g)}$ so umformt, daß eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}_{(g,g)}$ entsteht

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}'\hat{\Sigma}\mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}' = \mathbf{I} \quad . \quad (5.32)$$

Bei dieser Zerlegung der Varianz-Kovarianzmatrix handelt es sich um eine Eigenwertzerlegung [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW 1980]. Die entstandene Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ enthält die Eigenwerte λ_p , die Matrix $\mathbf{R}$ die zugeordneten Eigenvektoren $\mathbf{r}_p$. Der Zusammenhang zwischen Eigenwerten und Varianzen folgt aus der Spur (Summe der Hauptdiagonalelemente) $\text{sp}\mathbf{\Lambda}$ unter Berücksichtigung von (5.32)

$$\text{sp}\mathbf{\Lambda} = \text{sp}(\mathbf{R}'\hat{\Sigma}\mathbf{R}) = \text{sp}(\mathbf{R}\mathbf{R}'\hat{\Sigma}) = \text{sp}\hat{\Sigma} \quad . \quad (5.33)$$

Die Summe der Varianzen über alle Gitterpunkte ist somit gleich der Summe aller Eigenwerte

$$\sum_{p=1}^g \hat{\sigma}_p^2 = \sum_{p=1}^g \lambda_p \quad . \quad (5.34)$$

Daher repräsentiert der maximale Eigenwert den größten Anteil der Gesamtvarianz $\sum_{p=1}^g \hat{\sigma}_p^2$. Die Eigenwerte lassen sich der Größe nach sortieren

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq \dots \geq \lambda_g = 0 \quad . \quad (5.35)$$

Die kleinen Eigenwerte geben meist nur noch das Meßrauschen wieder und es gilt $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_g = 0$, da $\mathbf{\Lambda}$ positiv semidefinit ist.

Empirische Orthogonal-Funktionen (EOF)

Jedem Eigenwert ist ein Eigenvektor zugeordnet. Die Eigenvektoren werden in der Eigenvektormatrix $\mathbf{R}$ analog den entsprechenden Eigenwerten sortiert

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1g} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{g1} & r_{g2} & \dots & r_{gg} \end{pmatrix} \quad .$$

Die Matrix $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_k)$ mit $k = 1, \dots, g$ enthält wegen $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{I}$ zueinander orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{r}_{k(g,1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= (r_{11}, r_{21}, \dots, r_{g1}) \\ \mathbf{r}'_2 &= (r_{12}, r_{22}, \dots, r_{g2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

In der Literatur werden diese Eigenvektoren auch *empirische Orthogonal-Funktionen (EOF)* genannt. Empirisch, da die Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}$ nach (5.30) aus den Daten ermittelt wird.

Hauptkomponenten

Die Hauptkomponenten folgen aus der Erweiterung von $\hat{\mathbf{V}}$ um $\mathbf{R}\mathbf{R}' = \mathbf{I}$

$$\hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}\mathbf{R}' \quad .$$

Führt man eine Matrix $\mathbf{Z}_{(n,g)}$ mit

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{R} \quad (5.36)$$

ein, lautet die Residuenmatrix

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{Z}\mathbf{R}' = \sum_{k=1}^g \mathbf{z}_k \mathbf{r}'_k \quad . \quad (5.37)$$

Die Elemente der Matrix $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_k)$ werden *Hauptkomponenten* genannt. Da sie die zeitliche Verteilung der Daten wiedergeben, wird im folgenden auch von Zeitkomponenten gesprochen.

Dispersionsmatrix der Hauptkomponenten

Die Dispersionsmatrix der Elemente von $\mathbf{Z}$ (5.36) ergibt sich nach dem *Fehlerfortpflanzungsgesetz* (FFG). Das FFG [KOCH 1997] (S. 108) erlaubt allgemein aus Varianzen und Kovarianzen eines Zufallsvektors $\mathbf{x}$ die Varianzen und Kovarianzen von Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ des Zufallsvektors $\mathbf{x}$ abzuleiten. Das FFG gilt allgemein für eine Beziehung

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.38)$$

mit bekannter Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ des Vektors $\mathbf{x}$ und einer Matrix $\mathbf{A}$ konstanter Koeffizienten. Man erhält dann durch Fehlerfortpflanzung die Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{y})$ des Zufallsvektors $\mathbf{y}$ zu

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{A}' \quad . \quad (5.39)$$

Die Gleichung (5.36) besteht jedoch nicht aus Vektoren, wie in der oben dargestellten Form, sondern aus drei Matrizen $\mathbf{Z}_{(n,g)}$, $\mathbf{V}_{(n,g)}$ und $\mathbf{R}_{(g,g)}$. Um das FFG anwenden zu können, behilft man sich des *vec*-Operators, der aus einer rechteckigen Matrix $\mathbf{Z}_{(n,g)}$ einen Vektor $\text{vec}\mathbf{Z}_{(ng,1)}$ macht, indem alle Spalten untereinander geschrieben werden [KOCH 1997] (S. 44). Wendet man den *vec*-Operator auf Gleichung (5.36) an, ergibt sich

$$\text{vec}\mathbf{Z} = \text{vec}(\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}) = (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I}) \text{vec}\hat{\mathbf{V}} \quad , \quad (5.40)$$

mit dem Kronecker Produkt $\otimes$ und der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{(n,n)}$ [GRAFAREND und SCHAFFRIN 1993] (S. 419). Aus dieser Form läßt sich mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (5.39) die zugehörige Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z})$ errechnen

$$\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z}) = (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I}) \mathbf{D}(\text{vec}\hat{\mathbf{V}}) (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I})' \quad . \quad (5.41)$$

Die Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\text{vec}\hat{\mathbf{V}})$ berechnet sich aus (5.27) und reduziert sich für lange Beobachtungsreihen näherungsweise zu

$$\mathbf{D}(\text{vec}\hat{\mathbf{V}}) = \hat{\mathbf{\Sigma}} \otimes \mathbf{I} \quad (5.42)$$

[SCHMIDT 1999], mit der Varianz-Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{(g,g)}$ aus (5.30). Die Matrix (5.42) setzt man in Gleichung (5.41) ein und erhält

$$\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z}) = (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I}) (\hat{\mathbf{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}) (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I})' \quad . \quad (5.43)$$

Wegen $(\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I})' = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I})$ (siehe Rechenregeln im Anhang) wird obige Gleichung folgendermaßen umgeformt

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z}) &= (\mathbf{R}' \otimes \mathbf{I}) (\hat{\mathbf{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}) (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}) \\ &= (\mathbf{R}' \hat{\mathbf{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}) (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}) \\ &= (\mathbf{R}' \hat{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{R}) \otimes \mathbf{I} \quad . \end{aligned} \quad (5.44)$$

In der letzten Zeile läßt sich der erste Faktor des Kroneckerprodukts wegen der linken Gleichung von (5.32) durch die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}_{(g,g)}$ ersetzen und man erhält das Ergebnis zu

$$\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z}) = \mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{I} \quad . \quad (5.45)$$

Ausgeschrieben sieht die Diagonalmatrix $\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z})_{(ng,ng)}$ folgendermaßen aus

$$\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z})_{(ng,ng)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_g \mathbf{I} \end{pmatrix} . \quad (5.46)$$

Da $\mathbf{D}(\text{vec}\mathbf{Z})$ Blockdiagonalstruktur besitzt, sind die aus (5.36) resultierenden g Datensätze $\mathbf{z}_k$ unkorreliert, im Gegensatz zu den nach (5.29) korrelierten g Datensätzen $\mathbf{h}_k$ (5.26). Die Dispersionsmatrix (5.46) wird in Kapitel 6 zur Stützung der Schätzung der Hauptkomponenten verwendet.

Eigenmodi

Die Daten werden, wie erwähnt, durch eine Hauptkomponentenanalyse in räumliche und zeitliche Strukturen zerlegt. Die Vektoren $\mathbf{r}_k$ geben das räumliche Verhalten und die Hauptkomponenten, die Elemente der Matrix $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_k)$, das zeitliche Verhalten der Daten wieder. g Ausgangsdatsätze werden in g Strukturen zerlegt. Die einzelnen Strukturen werden *Eigenmodi* genannt. $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{z}_1$ sind die Empirische Orthogonal-Funktion und der Vektor der Hauptkomponenten des ersten Eigenmodus, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{z}_2$ die des zweiten Eigenmodus usw.. Der erste Eigenmodus hat den größten Informationsgehalt, weil $\mathbf{r}_1$ und damit auch $\mathbf{z}_1$ dem größten Eigenwert λ_1 zugeordnet sind.

Approximation

Durch eine Beschränkung der Zahl der Eigenmodi läßt sich die Datenmenge verringern. Der gewünschte Approximationsgrad bestimmt die Anzahl d der dominanten Eigenwerte λ_p , die zur Darstellung der Information verwendet werden sollen. Aus Gleichung (5.34) berechnet sich die Anzahl d für eine Approximation von z.B. 80 %

$$\frac{\sum_{p=1}^{d-1} \lambda_p}{\sum_{p=1}^g \hat{\sigma}_p^2} < 0.8 \leq \frac{\sum_{p=1}^d \lambda_p}{\sum_{p=1}^g \hat{\sigma}_p^2} . \quad (5.47)$$

Zur Approximation wird $\hat{\mathbf{V}}_d$ aus den ersten d Summanden von (5.37) berechnet. Daraus folgt eine genäherte Residuenmatrix $\hat{\mathbf{V}}_d$ für den vorgegebenen Approximationsgrad zu

$$\hat{\mathbf{V}}_d = \sum_{k=1}^d \mathbf{z}_k \mathbf{r}'_k . \quad (5.48)$$

Die Approximation $\tilde{\mathbf{H}}$ der Beobachtungen $\mathbf{H}$ erfolgt entsprechend Gleichung (5.27) durch

$$\tilde{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{V}}_d = \bar{\mathbf{H}} + \sum_{k=1}^d \mathbf{z}_k \mathbf{r}'_k . \quad (5.49)$$

Die Beobachtung h_{ip} für einen Punkt P zu einem bestimmten Zeitpunkt t_i wird mit der Summe von d Eigenmodi durch

$$\tilde{h}_{ip} = \bar{h}_p + z_{i1}r_{p1} + z_{i2}r_{p2} + \dots + z_{id}r_{pd} = \bar{h}_p + \sum_{k=1}^d z_{ik}r_{pk} \quad \text{mit } d \leq n \quad (5.50)$$

approximiert. Die n Zeitpunkte, g Gitterpunkte und d Eigenmodi des gewünschten Approximationsgrades bestimmen die zur Berechnung einer Meereshöhe $\tilde{h}_{ip}$ notwendige Anzahl an Parametern $dn + dg + g = dn + (d+1)g$. Die Meereshöhen können allerdings nur zu den Zeitpunkten, aus denen die Hauptkomponenten gerechnet worden sind, zurückgerechnet werden. Zum Beispiel gelten die Hauptkomponenten für die Topex/Poseidon-Daten jeweils für 10 Tage. Ist eine Meereshöhe zu einem beliebigen Zeitpunkt t_i gesucht, muß aus den benachbarten Komponenten interpoliert werden. Eine Beschränkung auf die größten Eigenwerte bietet die Möglichkeit, die Menge der Ausgangsdaten auf ein gewünschtes Maß zu reduzieren. Die Reduktion der Datenmenge bei geringem Informationsverlust ist der wesentliche Vorteil der Hauptkomponentenanalyse. Nachteile der Hauptkomponentenanalyse sind jedoch der große Rechenaufwand für die Transformation, sowie die Tatsache, daß fortan nicht mehr mit Originaldaten gearbeitet wird.

Handelt es sich um große Datenmengen mit entsprechend großer Matrix $\hat{\mathbf{\Sigma}}$, so ist eine Eigenwertzerlegung numerisch sehr aufwendig. Hier ist es zweckmäßiger, anstelle der Eigenwertzerlegung der Varianz-Kovarianzmatrix

$\hat{\Sigma}$, eine Singulärwertzerlegung der Residuenmatrix $\hat{\mathbf{V}}$ durchführen, und daraus Eigenwerte und Eigenvektoren abzuleiten. Da mindestens $g - n$ Eigenwerte gleich Null sind, genügt eine Bestimmung von n Singulärwerten.

Singulärwertzerlegung von $\hat{\mathbf{V}}$:

Bei der Durchführung einer Singulärwertzerlegung wird die transponierte Residuenmatrix $\hat{\mathbf{V}}'_{(g,n)}$ in drei Matrizen

$$\hat{\mathbf{V}}' = \mathbf{R}_1 \mathbf{W} \mathbf{U}' \quad (5.51)$$

zerlegt, unter den Bedingungen, daß

$$\mathbf{R}_1' \mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_{(n,n)} \text{ und } \mathbf{U}' \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (5.52)$$

gilt. Es entstehen eine Matrix $\mathbf{R}_{1(g,n)}$, eine Diagonalmatrix $\mathbf{W}_{(n,n)}$ der Singulärwerte, und eine Matrix $\mathbf{U}_{(n,n)}$. Um den Zusammenhang mit der Eigenwertzerlegung (5.32) zu erkennen, wird die Matrix der Eigenvektoren $\mathbf{R}_{(g,g)}$ in die zwei Matrizen $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ unterteilt. In $\mathbf{R}_{1(g,n)}$ stehen die zu den ersten n Eigenwerten, gesammelt in $\mathbf{\Lambda}_1$, gehörenden Eigenvektoren und in $\mathbf{R}_{2(g,g-n)}$ die zu den restlichen Eigenwerten, die gleich Null sind, gehörenden Eigenvektoren

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2] \quad (5.53)$$

Löst man (5.32) nach $\hat{\Sigma}$ auf, folgt mit (5.53)

$$\hat{\Sigma} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}' = [\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1' \\ \mathbf{R}_2' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1' \quad (5.54)$$

$\mathbf{\Lambda}_1$ enthält die ersten n der Größe nach sortierten Eigenwerte. Gleichung (5.51) eingesetzt in (5.30), ergibt wegen der zweiten Gleichung in (5.52) für $\hat{\Sigma}$

$$\hat{\Sigma} = \frac{\mathbf{R}_1 \mathbf{W} \mathbf{U}' \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{R}_1'}{r} = \frac{\mathbf{R}_1 \mathbf{W}^2 \mathbf{R}_1'}{r} \quad (5.55)$$

Der Vergleich der rechten Terme von (5.54) und (5.55) liefert den Zusammenhang der Singulär- und der Eigenwerte

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \frac{\mathbf{W}^2}{r} \quad (5.56)$$

Die Singulärwerte w_i der Diagonalmatrix $\mathbf{W}$ lassen sich also mit

$$\lambda_i = \frac{w_i^2}{r} \quad r = n - 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.57)$$

in die Eigenwerte λ_i der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}_1$ umrechnen.

Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, daß die EOF die Amplituden und die Hauptkomponenten die Phasenlage der Variabilität enthalten. Die nach Kapitel 5.2.2 erstellten Meereshöhenraster der Topex/Poseidon und POCM-Daten werden mit der Hauptkomponentenanalyse untersucht und den Ergebnissen der rms-Variabilität (aus Abschnitt 5.2.2.1) und der harmonischen Analyse (aus Abschnitt 5.2.2.2) gegenübergestellt.

5.3 Anwendung der Methoden

5.3.1 Topex/Poseidon-Daten

In dieser Arbeit werden die Daten der Satellitenmission Topex/Poseidon verwendet. Da es für Altimeterdaten keine festen Standards (Formate) gibt, werden die Schritte der Vorprozessierung der Altimetermeßdaten erläutert.

Die Topex/Poseidon-Daten werden von Aviso (*Archiving, Validation and Interpretation of Satellites Oceanographic data*) bezogen. Aviso ist eine von der französischen Raumfahrtbehörde CNES gegründete Institution mit Sitz in Toulouse (Frankreich), die die Daten von Satelliten, die ozeanographisch relevante Meßdaten liefern, verwaltet, aufbereitet und verteilt. Die ersten Topex/Poseidon-Daten waren 1995 von [AVISO 1992] erhältlich. Eine CD-Rom (650 MByte Speicherplatz) beinhaltete zwei Satellitenzyklen (ca. 500 MByte) und Dateien mit

Korrektur	Topex/Poseidon
Orbit	NASA JGM3 ³ Orbit
Ionosphäre	Zweifrequenzaltimeter für Topex/ Doris für Poseidon
Troposphäre (trocken)	von ECMWF ⁴
Troposphäre (feucht)	von TMR Radiometer
Ozeangezeiten	CSR3.0 [EANES und BETTADPUR 1995]
Erdgezeiten	[CARTWRIGHT und TAYLER 1971]
Polgezeiten	angewendet
Meereszustand	BM4 Formel [GASPAR et al. 1994]
Inverser Barometereffekt	von ECMWF

Tab. 5.2: von Aviso verwendete Korrekturmodelle [AVISO 1996b].

Kreuzungspunkten (ca. 37 KByte), Bahnephemeriden (ca. 43 KByte) und Korrekturtermen (vgl. Abschnitt 3.3) zu den Beobachtungen. Desweiteren wurden Informationen über Telemetrie, Inbetriebnahme der Instrumente und die Oszillatordrift, sowie über die Qualität der Altimetermessung und der geophysikalischen Parameter mitgeliefert. Instrumentelle Korrekturen (Kalibrationsfehler) und Bahnungenauigkeiten (Dopplerdrift) waren bereits berücksichtigt und die Altimetermeßdaten auf das Satellitenmassenzentrum reduziert. Das Anbringen der mitgelieferten Korrekturterme reduzierte die gewaltige Datenmenge (ca. 250 MByte pro Satellitenzyklus) auf ein Hundertstel (ca. 2.5 MByte).

Seit November 1996 veröffentlicht Aviso korrigierte Meereshöhen (CORSSH⁵: Corrected Sea Surface Heights) [AVISO 1996b], die bereits um all die genannten Effekte korrigiert und auf ein Referenzellipsoid bezogen sind. Die dabei verwendeten Modelle und Korrekturen sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt. Als Referenz wurde von Aviso das Topex Ellipsoid der NASA mit einem äquatorialen Radius von 6378.1363 km und einer Abplattung von $f=1/298.257$ gewählt. In den Dateien sind die Meßwerte sekundenweise mit Länge, Breite, korrigierter Meereshöhe, einer mittleren Meeresoberfläche und der inversen Barometerkorrektur angegeben. Die Zuordnung der Zyklennummer zum Datum findet man im Anhang in Tabelle 1.

5.3.2 Zusammenstellung der Ergebnisse

Mit den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Verfahren werden die Topex/Poseidon–Altimeterdaten und die hydrodynamischen Daten des Simulationsmodells *Parallel Ocean and Climate Model* (POCM) untersucht. Als Eingabedaten dienen die nach der in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Methode auf ein $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter interpolierten Meereshöhenraster. Dabei werden die Altimeterdaten und die hydrodynamischen Daten gleichermaßen behandelt.

Die Abb. 5.3 zeigt die aus Topex/Poseidon–Altimeterdaten eines Jahres abgeleiteten mittleren Meereshöhen. Die Konturlinien sind aus einem Meereshöhenraster mit einer $1^\circ \times 1^\circ$ -Auflösung ermittelt. Eine Gitterweite von 1° entspricht gemäß

$$d\lambda[km] = \frac{2\pi}{360^\circ} R \cos \varphi d\lambda[^\circ] \quad \text{und} \quad d\varphi[km] = \frac{2\pi}{360^\circ} R d\varphi[^\circ] \quad , \quad (5.58)$$

einer räumlichen Auflösung von ca. 20/55 km bei $\pm 80^\circ/60^\circ$ Breite bzw. 111 km am Äquator. Folglich können Strukturen, die größer als ungefähr 100 km sind, aufgelöst werden. Die Meereshöhen über dem Referenzellipsoid in Abb. 5.3 entsprechen bis auf die Meerestopographie, von ± 2 m, dem Geoid.

Die erstellten Meereshöhenraster werden mittels des in Abschnitt 2.3 beschriebenen Hypothesentests auf Ausreißer untersucht. Die Höhen werden dazu mit ihrem Median verglichen und gefundene Ausreißer durch den Medianwert ersetzt. Der *Median* ist der mittlere Wert einer der Größe nach geordneten Beobachtungsreihe. Im Gegensatz zum arithmetischen Mittel bleibt der Median von Ausreißern weitgehend unbeeinflusst [SACHS 1974] (S.74). Um die halb- und ganzjährigen Schwankungen der Meeresoberfläche nicht zu glätten, wird der Medianwert über einen möglichst kurzen Zeitraum berechnet. Bei Topex/Poseidon wird er über eine Reihe von fünf

³ Joint Gravity Model 3 [TAPLEY et al. 1996]

⁴ European Center for Medium-range Weather Forecast

⁵ The CORSSH products are supplied by the CLS Space Oceanography Division, Toulouse, France [AVISO 1996b, LETRAON et al. 1995, LETRAON und OGOR 1998]. The ERS products were generated as part of the proposal 'Joint analysis of ERS-1, ERS-2 and TOPEX/POSEIDON altimeter data for oceanic circulation studies selected in response to the Announcement of Opportunity for ERS-1/2 by the European Space Agency (Proposal code:A02.F105).'

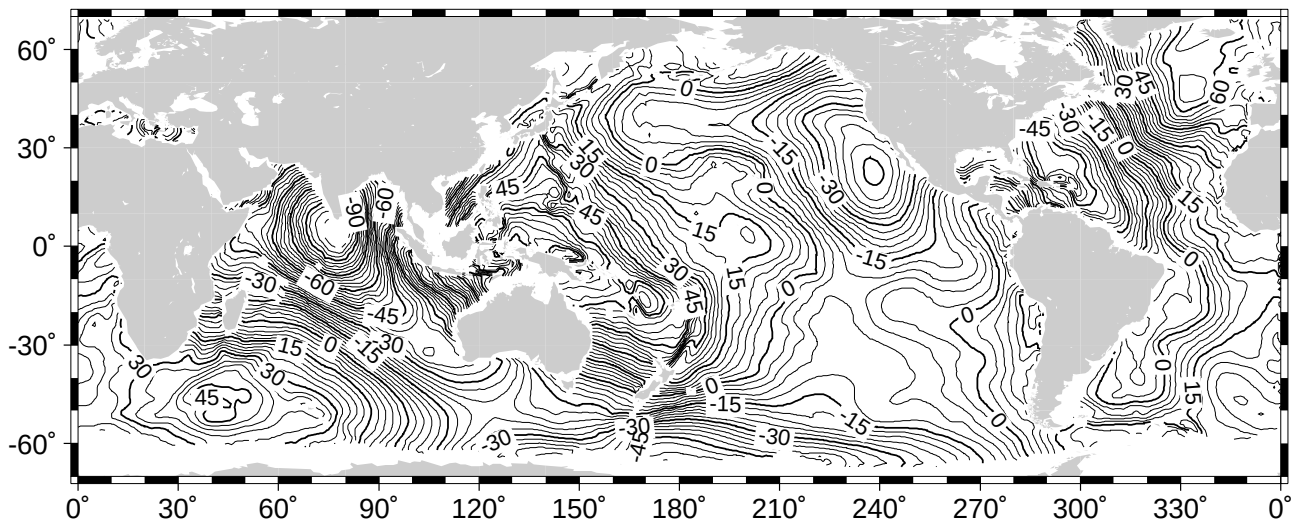


Abb. 5.3: Mittlere Meereshöhen (m) über einem Referenzellipsoid aus Topex/Poseidon-Daten des Zeitraumes 1.1.1994 bis 31.12.1994.

Zyklen, d.h. über einen Zeitraum von 50 Tagen gebildet. Als Signifikanzniveau für den Ausreißertest wurde $\alpha = 0.10$ gewählt.

Die Topex/Poseidon-Daten (siehe Abschnitt 5.3.1) erstrecken sich über einen Zeitraum von ca. fünf Jahren, vom 23.9.1992 bis zum 29.12.1997 (Zyklus 2 bis 195). Die hydrodynamischen Daten POCM liegen über einen Zeitraum von zehn Jahren vor, vom 1.1.1987 bis zum 31.12.1996.

rms-Variabilität

In der Abb. 5.4 sind die rms-Variabilitäten nach der in Abschnitt 5.2.2.1 beschriebenen Methode für Topex/Poseidon-Daten (links) und POCM-Daten (rechts) nebeneinandergestellt. Die Altimeterdaten zeigen Schwankungen mit Maximalwerten von 20 cm und vereinzelt Spitzen bis zu 30 cm, während die POCM-Daten generell geringere Werte aufweisen. Die Strukturen der Simulationsdaten POCM sind wesentlich ruhiger und glatter als die der gemessenen Topex/Poseidon-Daten. Beide Bilder weisen den Golfstrom, den Kuroschio und den Agulhasstrom als Gebiete mit stärkster Variabilität aus. In dem Altimeterbild ist außerdem der äquatoriale Gegenstrom im Pazifik deutlich zu sehen. Eine scheinbar große Variabilität zeigt sich an den Tiefseegräben und -bergen. Diese ist jedoch nicht auf Meeresspiegelschwankungen zurückzuführen, sondern auf die Auswirkung der sehr bewegten Bodentopographie. Große Neigungen des Meeresgrundes spiegeln sich, wie auch in Abb. 4.1 zu sehen ist, in abgeschwächter Form an der Meeresoberfläche wider. Wegen der Ungenauigkeit der Bahnspurwiederholung, des großen Spurenabstandes von Topex/Poseidon und einer Gittergröße von $1^\circ \times 1^\circ$ streuen die gemessenen Altimeterdaten dort stärker.

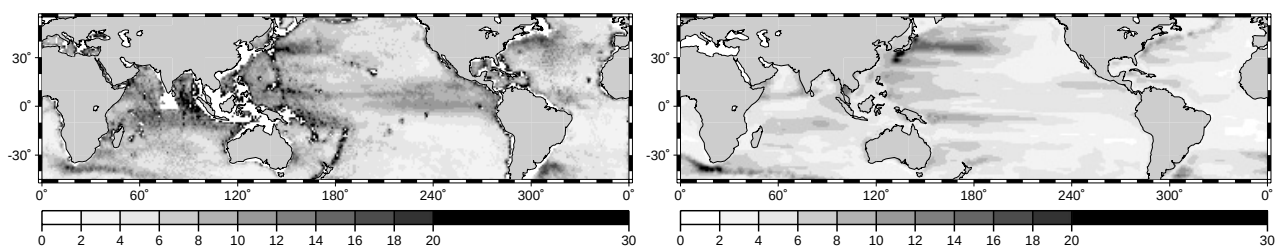


Abb. 5.4: rms-Variabilität der Topex/Poseidon-Daten (links) und der POCM-Daten (rechts) [cm].

Harmonische Analyse

Die beiden Datensätze werden mit einer harmonischen Analyse (siehe Abschnitt 5.2.2.2) auf eine Jahresschwingung mit einer Periode von $T = 365.25$ Tagen und eine Halbjahresschwingung mit einer Periode von $T = 182.625$ Tagen untersucht. In Abb. 5.5 zeigen die oberen Darstellungen die Amplitude und die unteren die zugehörigen Phasenlagen an jedem Gitterpunkt. Die Amplitudenwerte geben den Betrag der größten Variabilität, die Phasenwerte den zugehörigen Zeitpunkt an. Links ist die Jahresschwingung der Topex/Poseidon-Daten und rechts die Jahresschwingung der POCM-Daten dargestellt.

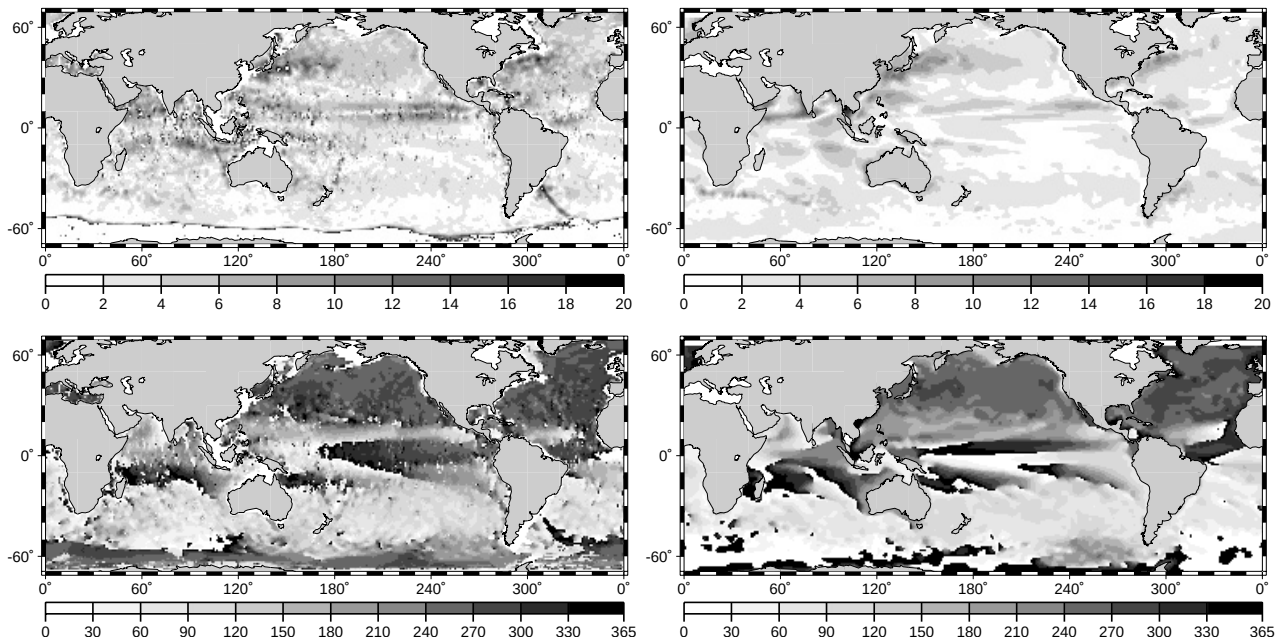


Abb. 5.5: Jahresschwingung der Topex/Poseidon-Daten (links) und der POCM-Daten (rechts) aus der harmonischen Analyse. Amplitude (cm) (oben) und Phasenlage (Tag des Jahres) (unten).

Die Jahresschwingung hat bei den Altimeterdaten Amplituden bis maximal 20 cm und bei den hydrodynamischen Daten bis 12 cm. Auf den offenen Ozeanen treten Amplituden bis zu 8 cm auf der Nordhalbkugel und bis zu 5 cm auf der Südhalbkugel auf. Diese Größenordnungen stimmen mit den Angaben von [KNUDSEN 1994] und [ANZENHOFER und GRUBER 1998] überein. Auf der Nordhalbkugel sind die Amplituden im Mittel um zwei Zentimeter größer als auf der Südhalbkugel. Mit den größten Amplituden von 10 bis 11 cm treten die westlichen Randströmungen, wie der Golfstrom und der Kuroschio, sowie der äquatoriale Gegenstrom deutlich hervor. Teilweise sind diese Strömungen nochmals mit Wirbeln von bis zu 8 cm überlagert. Die Phasenlage zeigt ein unterschiedliches Verhalten von Nord- und Südhalbkugel. Die Sonne heizt das Wasser im Sommer auf, wodurch sich dieses ausdehnt und der Meeresspiegel im Herbst, d.h. auf der Nordhalbkugel im September und auf der Südhalbkugel im März, die maximale Auslenkung erreicht. Im Winter ist das Gegenteil der Fall. Im Bereich der Antarktis ist die aus den Altimeterdaten abgeleitete Phasenlage nicht aussagekräftig, da in diesem Gebiet wegen großer Eisflächen zu wenige Meßwerte vorliegen und damit auch keine Amplituden geschätzt werden konnten.

Die Halbjahresschwingung hat hingegen kaum signifikante Amplitudenwerte und eine stark wechselnde Phasenlage. Daher wird auf die Darstellung der Halbjahresperiode verzichtet.

Im Vergleich der Topex/Poseidon- und der POCM-Bilder stimmen die großräumigen Strukturen generell überein. Bei den Topex/Poseidon-Daten zeigen sich jedoch, ebenso wie in der rms-Variabilität, mehr Details, während die auf POCM-Daten basierenden Ergebnisse einen ruhigeren Verlauf mit geringeren Amplituden zeigen. Auch der äquatoriale Gegenstrom ist in den Ergebnissen der harmonischen Analyse aus den Altimeterdaten deutlich sichtbar.

Hauptkomponentenanalyse

In der Hauptkomponentenanalyse (siehe Abschnitt 5.2.2.3) werden die Daten in räumliche und zeitliche Strukturen (Eigenmodi) zerlegt. Die räumliche Struktur wird durch die Raumkomponente und die zeitliche Struktur durch die Hauptkomponente repräsentiert. Die ersten vier Eigenmodi aus Topex/Poseidon-Daten sind in Abb. 5.6 und aus POCM-Daten in Abb. 5.7 dargestellt.

Die Zeitreihen erstrecken sich bei Topex/Poseidon über 2000 Tage mit Beginn am 23.9.1992 und bei POCM über 3650 Tage mit Beginn am 1.1.1987. Die POCM Zeitreihe wurde bewußt für einen längeren Zeitraum gewählt, damit die Geosat-Mission zumindest teilweise in den Zeitrahmen fällt. Für das langfristige Ziel sollen die Geosat-Daten zu einer langen Beobachtungsreihe beitragen. Wie in Abschnitt 6.1.3 gezeigt wird, sind die Ergebnisse der EOF-Analysen der POCM-Daten nahezu unabhängig von der Länge der Zeitreihe. Die Grauwertbilder zeigen die Empirischen-Orthogonal-Funktionen (EOF), d.h. die räumlichen Komponenten, und die darunter liegenden Kurven die zugehörigen Hauptkomponenten, d.h. die Zeitkomponenten. Die Raumkomponente gilt für den ganzen Zeitraum, die Zeitreihe für das ganze Gitter. Zu einem beliebigen Zeitpunkt aus der Zeitreihe

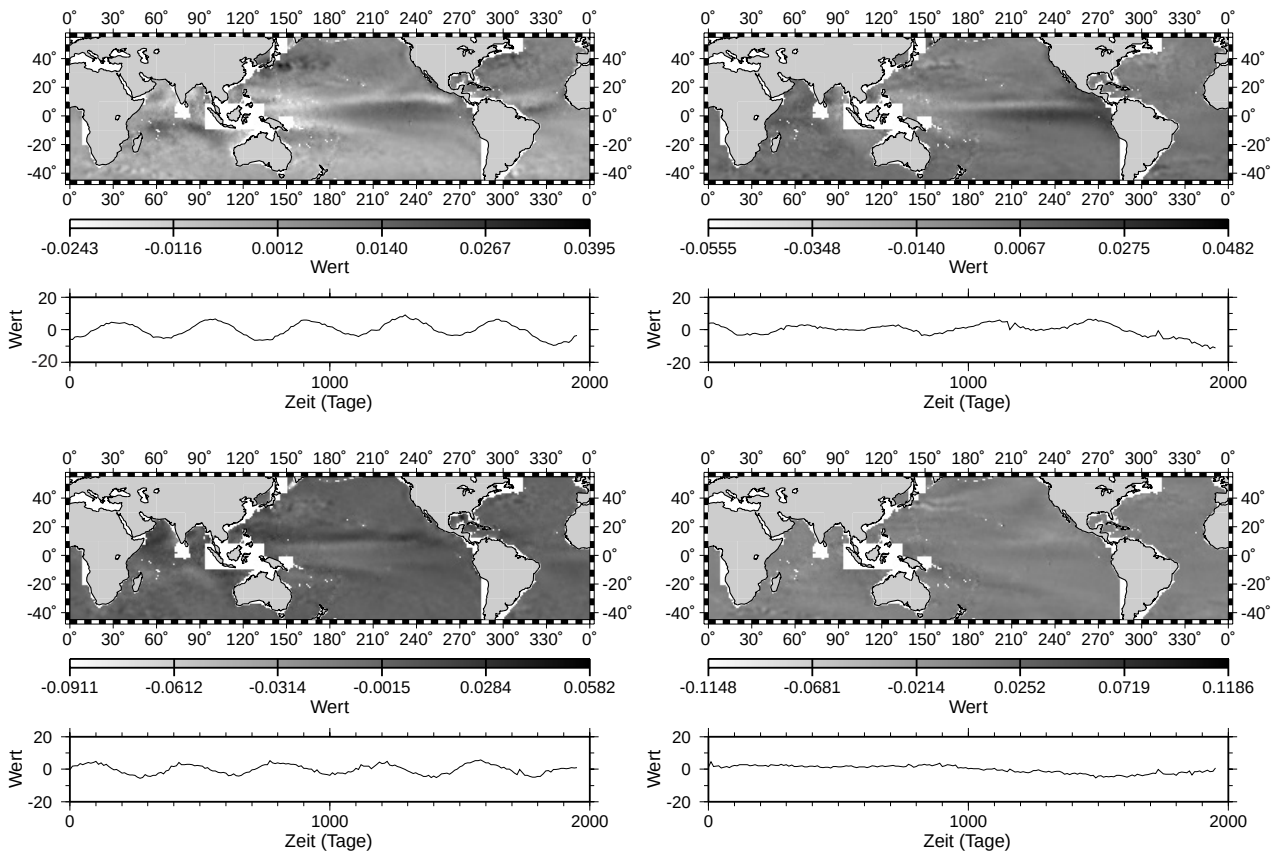


Abb. 5.6: Räumliche (Grauwertbilder) und zugehörige zeitliche Komponente (Kurven) des 1. Eigenmodus (links oben), des 2. Eigenmodus (rechts oben), des 3. Eigenmodus (links unten) und des 4. Eigenmodus (rechts unten) der Topex/Poseidon-Daten (1992-1997) über ein $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter. Das Produkt aus der räumlichen und der zeitlichen Komponente gibt die Variabilität in [m] wieder.

kann eine Gitterhöhe durch Multiplikation der entsprechenden Raum- und Hauptkomponente berechnet werden. Die Bilder sind nur über die Produkte von Raum- und Hauptkomponente vergleichbar. Das Produkt aus den Altimeterdaten und das aus den POCM-Daten hat die Einheit Meter.

Die Raumkomponenten der ersten vier Eigenmodi (in Abb. 5.6) nehmen Werte zwischen -0.03 und 0.04 an. Multipliziert mit den Zeitkomponenten der zugehörigen Eigenmodi, die Werte zwischen ± 10 einnehmen (Abb. 5.6) ergibt das eine Schwankung des Meeresspiegels von unter 30 cm. Der ersten drei Eigenmodi der Topex/Poseidon-Daten (in Abb. 5.6) zeigen in der Raumkomponente die großen Strömungen (äquatoriale Gegenströmung, Golf- und Kuroschioström) mit einer Jahresschwingung in der Hauptkomponente. Damit ist eine Übereinstimmung der Raumkomponente mit den Amplituden der Jahresschwingung aus der harmonischen Analyse und der Hauptkomponente mit der Phasenlage zu erkennen, wie weiter unten gezeigt wird. Die Raumkomponente des dritten Eigenmodus zeigt besonders die äquatoriale Gegenströmung, während die Raumkomponente des vierten Eigenmodus keine nennenswerten Strukturen mehr zeigt. Der erste Eigenmodus der POCM-Daten (in Abb. 5.7) zeigt eine ansteigende Zeitreihe. Das Einlaufen des Ozeanmodells ist also dominant. Simulationsmodelle benötigen eine gewisse Vorlaufphase, um einen stationären stabilen Zustand zu erreichen. Der zweite Eigenmodus stimmt hauptsächlich mit einer Jahresschwingung der Hauptkomponente mit der Jahresperiode aus der harmonischen Analyse überein.

In Tabelle 5.3 sind die Anteile der Eigenmodi am Gesamtinformationsgehalt in Prozent angegeben. Spalte 3 und 5 geben die Summe der Prozente der Eigenmodi an. In aufsteigender Reihenfolge der Eigenmodi nimmt der Informationsgehalt der Eigenmodi ab, d.h. der Prozentgehalt sinkt und die Prozentsumme steigt langsamer an. Die höheren Eigenmodi sind aufgrund der geringeren Prozentanteile nicht mehr so aussagekräftig und daher nicht mehr dargestellt.

Für eine Approximation der Meereshöhen von ca. 80% werden bei dem POCM-Datensatz die ersten 15 Eigenmodi und beim Topex/Poseidon-Datensatz die ersten 52 Eigenmodi benötigt. Um Meeresspiegelbewegungen aus Topex/Poseidon-Daten mit dem gleichen Approximationsgrad zu modellieren sind wesentlich mehr Eigenmodi notwendig, da gemessene Daten vielfältigere Information als simulierte Daten (POCM) besitzen.

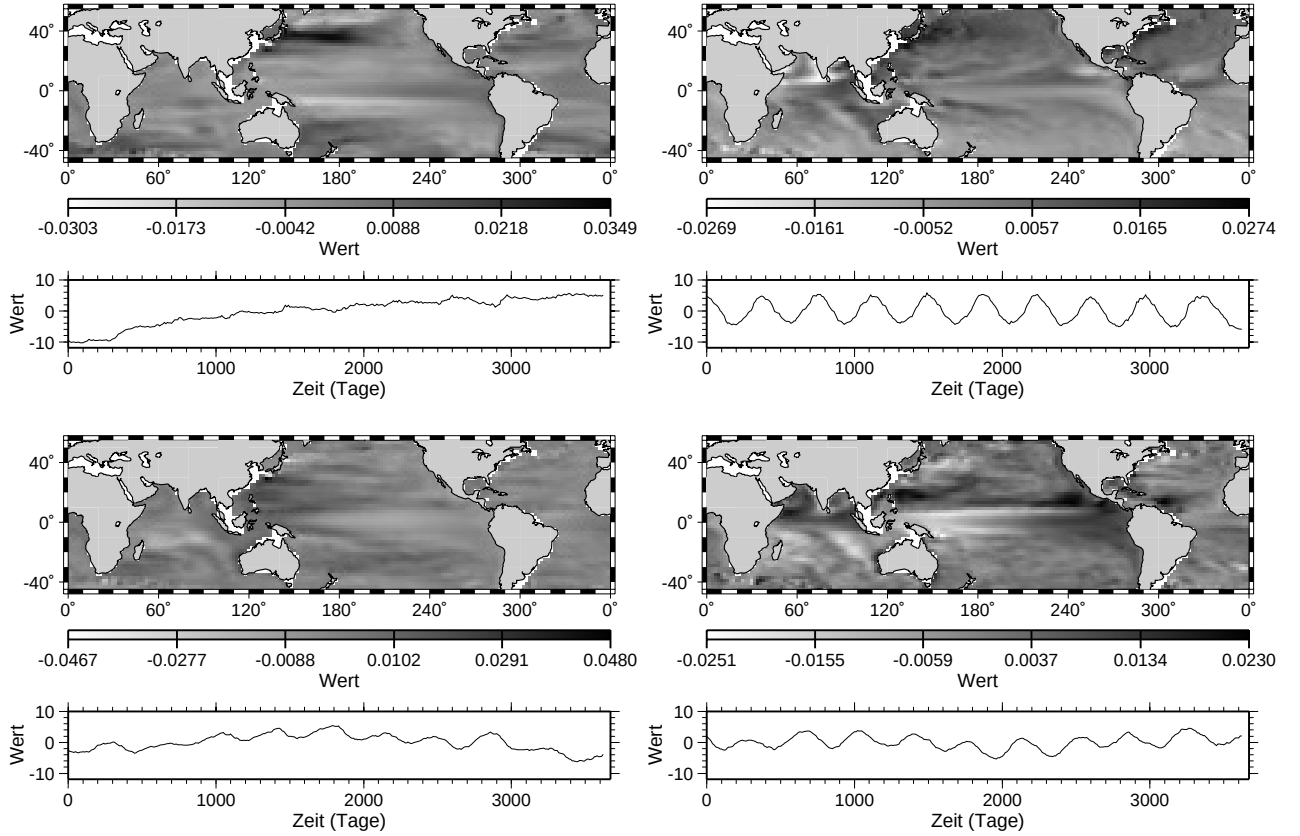


Abb. 5.7: Räumliche (Grauwertbilder) und zugehörige zeitliche Komponente (Kurven) des 1. Eigenmodus (links oben), des 2. Eigenmodus (rechts oben), des 3. Eigenmodus (links unten) und des 4. Eigenmodus (rechts unten) der POCM-Daten (1987-1996) über ein $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter. Das Produkt der räumlichen und zeitlichen Komponente gibt die Variabilität in [m] wieder.

Vergleich der Methoden

Die rms-Variabilität hat den einfachsten Modellansatz. Die gesamte Varianz wird über die Streuung angegeben. Als allereinfachstes Modell dient sie nur zur Überprüfung und Beurteilung der Ergebnisse aus den beiden anderen Methoden.

Die harmonische Analyse modelliert Meeresspiegelbewegungen nach fest vorgegebenen Schwingungen, während die Hauptkomponentenanalyse alle Bewegungen erfasst. Die harmonische Analyse basiert auf physikalischen Vorkenntnissen, d.h. bekannte Schwingungen werden untersucht. Die Ergebnisse sind gut zu interpretieren. Bei der Hauptkomponentenanalyse hingegen, als einem rein statistischen Verfahren, werden die vorherrschenden Bewegungen in dominante Strukturen zerlegt, die für das ganze Untersuchungsgebiet zutreffen. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den harmonischen Schwingungen und den Eigenmodi der EOF-Analyse zu gewährleisten, müssen durch eine Kreuzkorrelation die zugeordneten Eigenmodi, die gleiche Bewegungen wie die harmonische Analyse charakterisieren, festgestellt werden.

Die Raumkomponente $\mathbf{r}_1$ der Hauptkomponentenanalyse ist hoch korreliert mit der Amplitude der Jahresschwingung der harmonischen Analyse. Dies lässt sich aus einem Vergleich von (5.21) mit (5.37) zeigen. Setzt man für (5.21) nur eine Schwingung mit $K = 1$ an und verwendet die Form der Schwingungsgleichung (5.16), lautet die Gleichung einer harmonischen Schwingung unter Vernachlässigung des linearen Terms $D_{1p}t$

$$h_{ip} + \hat{v}_{ip} = \hat{D}_{0p} + \hat{C}_{1p} \cos(\omega_1 t_i - \hat{\varphi}_{1p}) \quad . \quad (5.59)$$

Die Konstante D_{0p} in (5.59) entspricht dem Mittelwert, der auf die linke Seite gebracht mit den Beobachtungen h_{ip} zu den Zeitpunkten $i = 1, \dots, n$ die Residuen $\hat{\mathbf{V}}_{(n,g)} = (h_{ip} - \hat{D}_{0p})$ gemäß (5.27) für $p = 1, \dots, g$ ergeben. Die Phasen $\hat{\varphi}_{1p}$ sollen ortsunabhängig durch einen Mittelwert φ_1 ersetzt werden. Die Gleichung der Jahresschwingung lautet damit

$$\hat{v}_{ip} = \hat{C}_{1p} \cos(\omega_1 t_i - \varphi_1) \quad . \quad (5.60)$$

Eigenmodus	Prozent- anteil POCM	Prozent- summe POCM	Prozent- anteil T/P	Prozent- summe T/P
1	26.67	26.67	31.65	31.65
2	15.55	42.22	8.36	40.02
3	9.77	51.99	4.56	44.57
4	6.41	58.40	3.85	48.42
5	6.00	64.40	2.62	51.03
6	2.67	67.07	2.19	53.22
7	2.24	69.30	1.83	55.05
8	1.96	71.26	1.54	56.59
9	1.76	73.02	1.40	57.99
10	1.52	74.53	1.22	59.20
11	1.43	75.97	1.06	60.26
12	1.38	77.35	0.99	61.26
13	1.22	78.57	0.94	62.19
14	1.03	79.59	0.88	63.07
15	0.93	80.52	0.84	63.90
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49			0.29	79.32
50			0.29	79.61
51			0.28	79.90
52			0.28	80.17

Tab. 5.3: Prozentanteil und -summe der einzelnen Eigenmodi für einen globalen POCM- und Topex/Poseidon (T/P)-Datensatz der Abb. 5.7 und 5.6 bis zum Approximationsgrad von 80%.

Schwingungen/ Eigenmodi	harmonische Analyse	Hauptkomponenten- Analyse
1	10 000	10 150
2	20 000	15 300
5	50 000	30 750
10	100 000	56 500
30	300 000	159 500
50	500 000	262 500

Tab. 5.4: Anzahl der Variablen, die zur Berechnung der Meereshöhe benötigt werden.

Als grobe Näherung ist dies nach Abb. 5.5 global möglich, da auf der Nord- bzw. Südhalbkugel die Phasenlage annähernd gleich, jedoch um etwa 180 Tage versetzt ist. Durch die Verwendung eines globalen Mittelwertes φ_1 der Phase nehmen die Amplituden auf der Südhalbkugel negative Werte an. Auch die Raumkomponenten in Abb. 5.6 besitzen negative Werte. In Matrizenform wird damit aus (5.60)

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{d}_1 \hat{\mathbf{c}}_1' \quad , \quad (5.61)$$

wenn $\mathbf{d}_{1(n)} = (\cos(\omega_1 t_i - \varphi_1))$ gesetzt wird und $\hat{\mathbf{c}}_{1(g)} = (\hat{C}_{1p})$ gilt. Anhand Gleichung (5.37) folgt aus der Hauptkomponentenanalyse der erste Eigenmodus aus

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{z}_1 \mathbf{r}_1' \quad . \quad (5.62)$$

Vergleicht man nun (5.61) mit (5.62), zeigt sich unter der Annahme $\hat{\mathbf{V}} \approx \hat{\mathbf{V}}_1$, daß die Raumkomponente $\mathbf{r}_1$ bis auf eine Konstante dem Vektor der Amplituden $\hat{\mathbf{c}}_1$ und der Vektor der Zeitkomponenten $\mathbf{z}_1$ des ersten Eigenmodus dem Term $\mathbf{d}_1$, d.h. der zeitlichen Variation, entspricht. Der Hauptanteil der Bewegung des Meeresspiegels wird durch eine Jahresschwingung abgedeckt. Wird also mit der harmonischen Analyse nur eine Jahresschwingung angesetzt, repräsentiert mit den vorangegangenen Überlegungen der erste Eigenmodus den Hauptanteil der jährlichen Schwankung des Meeresspiegels. Höhere Eigenmodi können jedoch auch Anteile der Jahresbewegung enthalten.

Zur Modellierung einer Schwingung mit der harmonischen Analyse ist der Rechenaufwand genau so groß wie für einen Eigenmodus mit der Hauptkomponentenanalyse. Allerdings sind mehr Eigenmodi zur Erfassung der Variabilität als feste Schwingungen notwendig. An einem Beispiel mit Topex/Poseidon-Daten auf einem Gitter

mit $g = 5000$ Punkten und $n = 150$ Satellitenzyklen (d.h. 150 Zeitpunkten) wird die Anzahl der Parameter, die zur Berechnung der Meereshöhen aus den Verfahren der harmonischen und der Hauptkomponenten-Analyse benötigt werden, in Tabelle 5.4 zusammengestellt. Mit zunehmender Zahl an Schwingungen und Eigenmodi zur Modellierung der Meereshöhen wird das Verhältnis der Parameteranzahl für die Hauptkomponentenanalyse günstiger.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die Hauptkomponentenanalyse günstiger zur Modellierung der Meeresspiegelschwankungen ist, da beliebige Bewegungen des Meeresspiegels aufgefangen werden können. In der Realität bewegt sich der Meeresspiegel nicht nur mit festen, bekannten Schwingungen, sondern auch mit zufälligen und willkürlichen Bewegungen.

Zur kombinierten Schätzung der Meeresspiegelbewegungen mit Schwerefeldkorrekturen in Kapitel 6 stellt sich die Frage, wie sich die Meereshöhen an beliebigen Punkten außerhalb der Gitterpunkte mit der Hauptkomponentenanalyse approximieren lassen. Da die Meereshöhen in einer bestimmten Auflösung auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ Gitter aus den Meereshöhenrastern berechnet sind, sind Meereshöhen außerhalb der Gitterpunkte aus benachbarten Gitterhöhen zu interpolieren. Ebenso gelten die Hauptkomponenten nur für die Zeitpunkte zu denen sie berechnet wurden. Bei Topex/Poseidon sind das jeweils alle 10 Tage. Sollen auch außerhalb dieser Zeitpunkte Meereshöhen berechnet werden, wie dies bei der Kombination mehrerer Missionen notwendig ist, müssen die Hauptkomponenten interpoliert werden.

6. Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung

In diesem Kapitel wird die gemeinsame Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankungen aus Altimeterdaten beschrieben. Dazu werden aus den Altimetermessungen Kreuzungspunktdifferenzen gebildet. *Kreuzungspunkte* sind Schnittstellen zweier sich schneidender Bahnbögen. Ein voller Umlauf des Satelliten um die Erde läßt sich in einen aufsteigenden und einen absteigenden Bahnbogen aufteilen. Aufsteigende Bahnen verlaufen von Süd nach Nord und absteigende Bahnen von Nord nach Süd. Wegen der Bahneigenschaften unterscheiden sich die Bahnfehler auf- und absteigender Bahnen, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wurde. Die zu zwei Zeitpunkten t_i und t_j mit $i, j = 1, \dots, n$ an den Kreuzungspunkten gemessenen altimetrischen Höhen sind aufgrund von Bahnfehlern Δr^a aufsteigender Bahnen a (für ascending) und Δr^d absteigender Bahnen d (für descending), sowie zusätzlich für $i \neq j$ wegen der Schwankung der Meereshöhen $h_i = h(t_i)$ und $h_j = h(t_j)$ nicht identisch. Die resultierenden Höhendifferenzen werden *Kreuzungspunktdifferenzen* $\Delta K_{ij}^{\alpha\delta} = \Delta K^{\alpha\delta}(t_i, t_j)$ genannt, wobei α und δ wahlweise für a und d stehen. Definiert man die Kreuzungspunktdifferenz zu

$$\Delta K_{ij}^{\alpha\delta} = (H_{sat}(t_i) - H_{alt}(t_i)) - (H_{sat}(t_j) - H_{alt}(t_j)) \quad (6.1)$$

ergibt sich mit Gleichung (3.10) für die Kreuzungspunktdifferenz folgende Beziehung zwischen radialen Bahnfehlern ($\Delta r^\alpha - \Delta r^\delta$) und Meeresspiegelschwankung ($h_i - h_j$)

$$\Delta K_{ij}^{\alpha\delta} + v_{ij}^{\alpha\delta} = (\Delta r^\alpha - \Delta r^\delta) + (h_i - h_j) \quad (6.2)$$

Die radialen Bahnfehler lassen sich, wie in Kapitel 4 beschrieben, durch Schwerefeldkorrekturen darstellen. Für die Schätzung der Meeresspiegelschwankung werden kinematische Modellgleichungen nach 5.2.2 benutzt.

Für das langfristige Ziel einer Verknüpfung mehrerer Missionen, wie Geosat, ERS1 und Topex/Poseidon ist die Meeresspiegelschwankung in Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeiträume zu berücksichtigen und der Zeitraum zwischen der Geosat und der ERS1 Mission zu überbrücken. Dazu können Daten eines hydrodynamischen Modells verwendet werden. In dieser Arbeit wird die simultane Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitunterschiede mit den Altimeterdaten eines Satelliten untersucht. Desweiteren wird die Überbrückung einer Altimeterdatenlücke mit den Daten des hydrodynamischen Simulationsmodells POCM (siehe Abschnitt 5.2.1) entwickelt. Für die Untersuchungen wurde der Datensatz von Topex/Poseidon (siehe Abschnitt 5.3.1) verwendet, der mit großer Genauigkeit über einen langen Zeitraum vorliegt. Um die Überbrückung einer Datenlücke mit hydrodynamischen Höhen zu überprüfen, wurde künstlich eine Lücke in dem vorhandenen Topex/Poseidon-Daten erzeugt. In einem weiteren Schritt ist das Verfahren mit mehreren Missionen zu testen.

Drei verschiedene Schätzungen werden durchgeführt:

- Schätzung der Schwerefeldkorrekturen aus Kreuzungspunktdifferenzen mit minimaler Zeitdifferenz
- Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über kleine und große Zeitdifferenzen
- Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über kleine und große Zeitdifferenzen und aus POCM-Meereshöhendifferenzen; mit und ohne Lücke in den Altimeterdaten

Zunächst werden die einzelnen Größen der obigen Beobachtungsgleichung (6.2) nochmals näher betrachtet.

6.1 Zusammenstellung der Beobachtungen und der Schätzgrößen

6.1.1 Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen

Als Beobachtungen für (6.2) werden Kreuzungspunktdifferenzen $\Delta K_{ij}^{\alpha,\delta}$ aus Altimetermessungen H_{alt} und Satellitenhöhen H_{sat} nach (6.1) abgeleitet.

Berechnung der Kreuzungspunktdifferenzen

Die Schnittpunktberechnung zweier Satellitenbahnbögen ist sehr rechenaufwendig. Deshalb wird der Schnittpunkt zuerst näherungsweise aus Musterbahnbögen gebildet, geprüft, ob er über Land oder Wasser liegt und

erst dann exakt aus den genauen Bahndaten berechnet, vergleiche auch [SCHRAMA 1989]. Die Kreuzungspunkt-berechnung erfolgt in drei Schritten:

- Erstellung von Musterbahnbögen
- Vorhersage der Kreuzungspunkt ereignisse und der Zeitpunkte mittels der Musterbögen
- numerische Berechnung mit aktuellen Daten.

Für jeden Halbumlauf eines Satelliten wird ein Musterbahnbogen mit je 200 Punkten nördlich und südlich des Äquatorübergangs erstellt. Die jeweiligen Positionen berechnen sich aus den nominellen Bahnparametern und werden im Sekundenabstand in bezug zum Zeitpunkt des Äquatorübergangs angegeben. Die Schnittpunkte λ_s, φ_s je zweier Musterbahnbögen werden als Funktion der Längendifferenz $\Delta\lambda$ der Äquatorübergänge tabelliert (vgl. Abb. 6.1). Entsprechend dem Zeitpunkt ihrer Äquatorübergänge werden die zu schneidenden Satellitenspuren den Musterbahnbögen zugeordnet und die entsprechenden Schnittpunkte mittels Tabelleninterpolation gefunden. Befindet sich der approximierte Schnittpunkt über Land, wird der nächste Schnittpunkt gebildet. Befindet er sich über Wasser, wird der Kreuzungspunkt ausgehend vom Näherungspunkt iterativ aus den aktuellen Bahndaten lage- und zeitmäßig exakt bestimmt. In der Regel hat zu dem errechneten Kreuzungspunkt ereignis keine Messung stattgefunden. Die Meereshöhen müssen daher aus den benachbarten Meereshöhen interpoliert werden. Sind genügend Meßpunkte in der Nachbarschaft des Kreuzungspunkt ereignisses vorhanden, so wird die Meereshöhe mit kubischen Polynomen zum Kreuzungspunkt ereignis auf beiden Spuren berechnet. Zuletzt wird die Differenz der beiden Meereshöhen gebildet. Das Struktogramm (Abb. 6.2) zeigt das Ablaufschema der Kreuzungspunkt berechnung. Eine genaue Beschreibung dieses Vorgangs ist in [BOSCH 1997] nachzulesen.

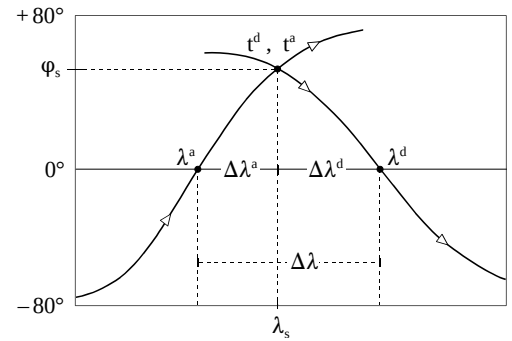


Abb. 6.1: Schnittpunkt (λ_s, φ_s) einer aufsteigenden (a) und einer absteigenden (d) Spur.

Auswahl der Kreuzungspunkte

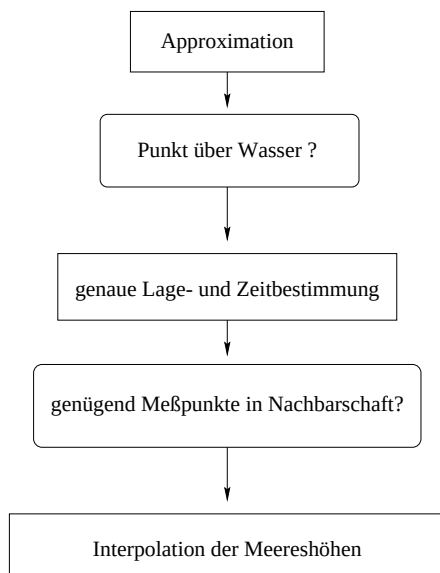


Abb. 6.2: Ablaufschema der Kreuzungspunkt berechnung

Die nahezu gleichmäßige Satellitenbewegung und Erdrotation erzeugen ein regelmäßiges Muster an Kreuzungspunkten entlang der Breitenkreise (siehe Abb. 3.3). Da Altimetersatelliten innerhalb kurzer Zeit die Erde mit einem dichten Netz auf- und absteigender Bahnsuren überdecken, ist die mögliche Vielfalt an Kreuzungspunkten groß. Kreuzungspunkte können aus den Spuren eines Satelliten (*einfache Kreuzungspunkte*) oder zweier Satelliten (*gemischte Kreuzungspunkte*) gebildet werden. Einfache Kreuzungspunkte gibt es zwischen auf- und absteigenden (ad), sowie zwischen ab- und aufsteigenden (da) Halbumläufen. Bei gemischten Kreuzungspunkten sind die Inklinationen der Satelliten und der Umlaufsinn der Satellitenbahnen (prograd/ retrograd) ausschlaggebend dafür, ob sich auf- mit absteigenden, bzw. auf- mit aufsteigenden Spuren und umgekehrt schneiden. Zum Beispiel haben Geosat ($i = 108^\circ$) und ERS1 ($i = 98,5^\circ$) retrograde Umlaufbahnen und Topex/Poseidon ($i = 66^\circ$) eine prograde Umlaufbahn. Daher ergeben sich für diese drei Missionen folgende Kombinationen an gemischten Kreuzungspunkten:

$$\text{Geosat-ERS1} : \Delta K^{a_g d_e}, \Delta K^{d_g a_e}$$

$$\text{Topex/Poseidon-Geosat} : \Delta K^{a_t a_g}, \Delta K^{d_t d_g}$$

$$\text{Topex/Poseidon-ERS1} : \Delta K^{a_t a_e}, \Delta K^{d_t d_e}, \Delta K^{a_t d_e}, \Delta K^{d_t a_e}$$

Die Indizes g stehen für Geosat, e für ERS1 und t für Topex/Poseidon. Gemischte Kreuzungspunktdifferenzen werden für das langfristige Ziel, der Kombination mehrerer Altimetermissionen benötigt. Da in dieser Arbeit, als erster Schritt in diese Richtung, die Überbrückung einer Datenlücke und die simultane Schätzung von Schwerfeldkorrekturen

und Meeresspiegelschwankung anhand einer Mission untersucht wird, werden nur einfache Kreuzungspunktdifferenzen verwendet. An den Kreuzungspunkten werden zu zwei Zeitpunkten t_i und t_j Meereshöhen an derselben Stelle der Meeresoberfläche berechnet. Je näher die beiden Zeitpunkte beieinander liegen, um so weniger hat sich der Meeresspiegel verändert. Kreuzungspunktdifferenzen mit geringen Zeitunterschieden von wenigen Tagen beinhalten deshalb zum größten Teil den Satellitenbahnfehler ($\Delta r^\alpha - \Delta r^\delta$), während Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdistanzen von mehreren Monaten zusätzlich Meeresspiegelschwankungen ($h_i - h_j$) enthalten. Durch gezielte Auswahl der Kreuzungspunkte läßt sich steuern, welchen Einfluß die Kreuzungspunktdifferenzen hauptsächlich widerspiegeln. Für die Verbesserung der Bahnbestimmung eignen sich folglich Kreuzungspunkte zweier kurz aufeinanderfolgender Zeitpunkte und zur Untersuchung von Meeresspiegelschwankungen Kreuzungspunkte mit großen Zeitabständen. In bisherigen Arbeiten zur Bahnverbesserung wurden nur Kreuzungspunkte mit möglichst geringen Zeitdifferenzen gebildet, um den Einfluß der Meeresspiegelschwankungen gering zu halten, siehe z.B. [VAN GYSEN und COLEMAN 1997, SCHRAMA 1989, CHANG-KOU und FU 1986, ROSBOROUGH 1986]. In dieser Arbeit werden erstmals aus Kreuzungspunktdifferenzen über kleine und große Zeitunterschiede Bahnfehler simultan mit Meeresspiegelschwankungen verbessert. Dabei sind die Kreuzungspunkte über Zeitunterschiede von wenigen Tagen zur Berechnung der Schwerefeldkorrekturen und die Kreuzungspunkte über große Zeitunterschiede zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung geeignet. Es stellt sich die Frage nach der richtigen Auswahl der Kreuzungspunkte, die nun behandelt wird.

Die folgenden Untersuchungen der Topex/Poseidon-Daten der Jahre 1992 bis 1996 (195 Zyklen) zeigen, daß Kreuzungspunkte innerhalb eines Satellitenzyklusses minimale Differenzen und über 180 Tage maximale Differenzen aufweisen, wenn sie über die Maximalstände des Meeresspiegels gebildet sind. Der Meeresspiegel bewegt sich nach Reduktion der geophysikalischen Effekte (Abschnitt 3.3) hauptsächlich mit einer Jahresschwingung (Kapitel 5) und verhält sich innerhalb von wenigen Tagen annähernd konstant. Folglich verursacht bei minimaler Zeitdifferenz fast nur der radiale Bahnfehler eine Differenz in den Kreuzungspunkten. Der Jahresgang des Meeresspiegels bildet sich auch in den Kreuzungspunktdifferenzen über größere Zeitdifferenzen ab, wie in den Abb. 6.3 und 6.4 zu sehen ist. Entsprechend der Sonneneinstrahlung hat der Meeresspiegel im Frühling maximale negative und im Herbst maximale positive Auslenkung. Auf der Nordhalbkugel ist der Meeresspiegelstand also im März minimal und im September maximal, während auf der Südhalbkugel mit den Jahreszeiten auch die Auslenkungen um ein halbes Jahr verschoben sind (siehe Abb. 5.5). Eine Ausnahme bildet das Jahr 1996, das sich wegen eines El Niño Ereignisses abnorm zu den anderen Jahren verhält.

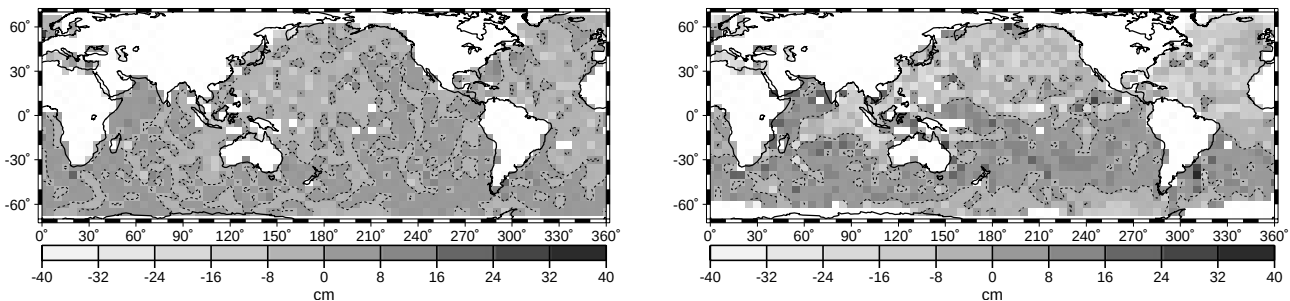


Abb. 6.3: Kreuzungspunktdifferenzen des Topex/Poseidon Zyklus 18 mit 18 (links) und 18 mit 36 (rechts).

In Abb. 6.3 sind exemplarisch die Differenzen von Kreuzungspunkten innerhalb des Zyklus 18 und über 180 Tage Differenz der Zyklen 18 mit 36 dargestellt. Zur flächigen Darstellung sind die Werte auf ein $5^\circ \times 5^\circ$ Gitter interpoliert. Während die Kreuzungspunktdifferenzen innerhalb von 10 Tagen (links in Abb. 6.3) unregelmäßig gestreut sind, zeigen die Kreuzungspunktdifferenzen über einem halben Jahr Zeitunterschied (rechts in Abb. 6.3) systematische Unterschiede der Nord- und Südhalbkugel mit größeren Amplituden.

In Abb. 6.4 werden die Häufigkeitsverteilungen der Höhenwerte über einige ausgewählte Zeitunterschiede in Histogrammen gezeigt. Steile Kurven mit großer Anzahl an Höhenwerten um den Nullwert weisen auf eine geringe Variabilität, flache Kurven mit großer Streuung hingegen auf eine starke Variabilität hin. Den Histogrammen aus Differenzen des Satellitenzyklus 18, der einen Zeitpunkt mit minimaler Meeresspiegelauslenkung auf der Nordhalbkugel am 10.3.93 repräsentiert, mit den Zyklen 18, 36, 54, 72 und 90 ist der Jahresverlauf deutlich zu entnehmen. Kreuzungspunkte mit einem Zeitunterschied von einem ganzzahligen Vielfachen eines Jahres haben minimale Höhendifferenzen, während Kreuzungspunktdifferenzen über Zeitunterschiede von einem halben Jahr, eineinhalb, zweieinhalb Jahren usw. die Meeresvariabilität mit doppelter Amplitude ausbilden. In Abb. 6.5 sind die globalen Mittelwerte (oben), sowie die globalen Standardabweichungen (unten) einer Reihe an Kreuzungspunktdifferenzen aufgetragen, die systematisch über je ein halbes Jahr, d.h. 18 Zyklen, gebildet sind. Auch hier zeigt sich, ebenso wie in der harmonischen Analyse der Kreuzungspunktdifferenzen in Abb. 6.6, eine deutliche Jahresschwingung.

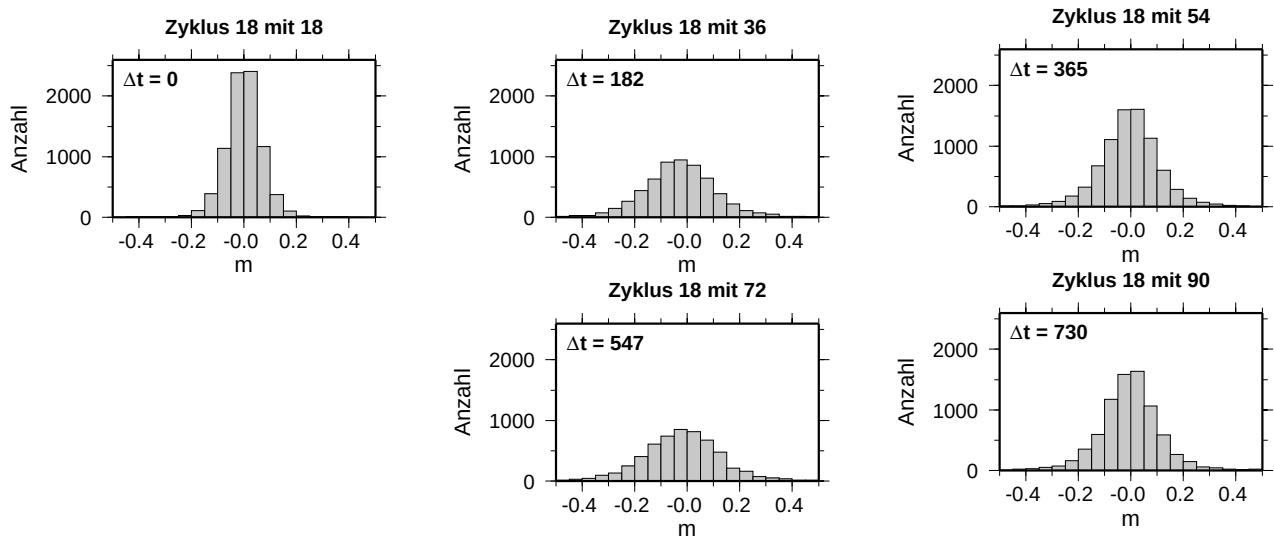


Abb. 6.4: Histogramme mit der Häufigkeitsverteilung der Kreuzungspunktdifferenzen für verschiedene Zeitdifferenzen Δt (Tage ± 5 Tage) von Topex/Poseidon mit einem 10-Tageszyklus.

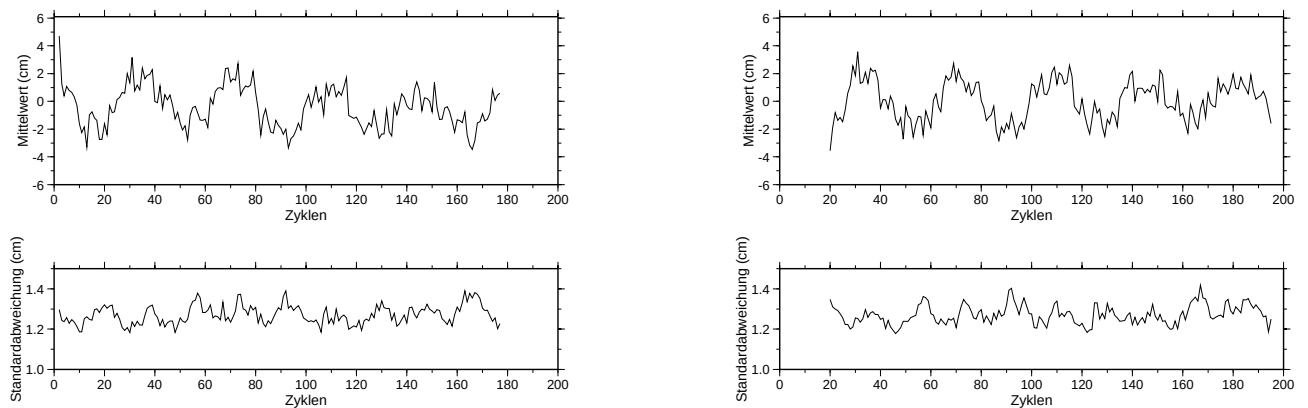


Abb. 6.5: Globaler Mittelwert (cm) (oben) und globale Standardabweichung (cm) (unten) einer Reihe an aufsteigenden Kreuzungspunktdifferenzen (links) und absteigenden Kreuzungspunktdifferenzen (rechts) über je 18 Topex/Poseidon Zyklen. Die linken Bilder enthalten eine Reihe an Kreuzungspunktdifferenzen von aufsteigenden minus absteigenden Bögen (Zyklen 2 mit 20, 3 mit 21, 4 mit 22, 5 mit 23 usw.), die rechten Bilder enthalten Kreuzungspunktdifferenzen von absteigenden minus aufsteigenden Bögen (Zyklen 20 mit 2, 21 mit 3, 22 mit 4 usw.). Die Differenzen werden auf der Abszisse jeweils den erstgenannten Zyklen zugeordnet, d.h. in dem linken Bild den Zyklen 2 bis 177 und in dem rechten Bild den Zyklen 20 bis 195.

Da in dieser Arbeit Bahnfehler simultan mit Meeresspiegelschwankungen verbessert werden sollen, werden zur gemeinsamen Schätzung sowohl Kreuzungspunkte über möglichst kurze Zeitabstände als auch über 180 Tage verwendet. In Abb. 6.7 ist die zeitliche Verteilung der ausgewählten Kreuzungspunkte beispielhaft für das Jahr 1994 gezeigt. Auf der Abszisse bzw. der Ordinate sind die Zeitpunkte der Kreuzungspunktereignisse in julianischem Datum 2000 (Skala in Tagen rückwärts vom 1.1.2000 gezählt) der auf- bzw. der absteigenden Halbumläufe aufgetragen. Die Skala läuft von -2200 bis -1800 julianischen Tagen (23.12.1993 bis 27.1.1995). Auf der Hauptdiagonalen bilden sich die Kreuzungspunkte innerhalb der Zyklen und zweier benachbarter Zyklen ab, auf den Nebendiagonalen Kreuzungspunkte über 180 Tage Zeitdifferenz. Diese Auswahl der Eingabedaten soll für die anschließende Schätzung eine stabile Struktur der Beobachtungen gewährleisten. Zwei Arten von Kreuzungspunktdifferenzen werden unterschieden und als Kreuzungspunkte vom

- Typ 1: Kreuzungspunkte mit minimaler Zeitdifferenz Δt ($\Delta t \leq 10$ Tage, innerhalb eines Zyklusses und zweier benachbarter Zyklen)
- Typ 2: Kreuzungspunkte mit 180 Tagen Zeitdifferenz ($175 \text{ Tage} \leq \Delta t \leq 185 \text{ Tage}$, 18 Zyklen Differenz bei Topex/Poseidon)

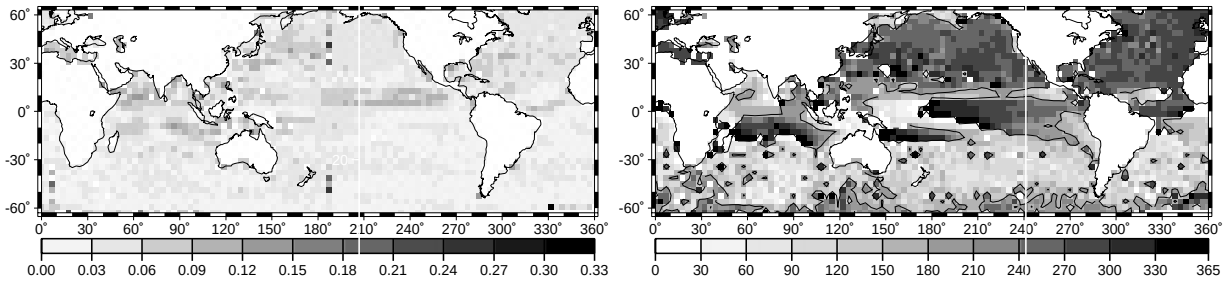


Abb. 6.6: Amplitude (m) (links) und Phase (Tag des Jahres) (rechts) der harmonischen Analyse der Kreuzungspunktdifferenzen von Topex/Poseidon Zyklen 2 bis 195.

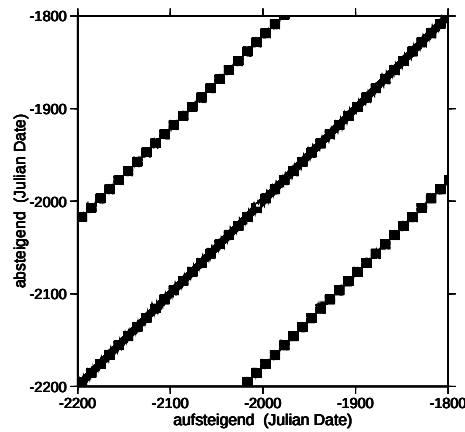


Abb. 6.7: Struktur der ausgewählten Kreuzungspunkte. Die Abszisse/Ordinate geben die Zeitpunkte der Kreuzungspunkte der aufsteigenden/absteigenden Halbumläufe in julianischem Datum (Skala in Tagen rückwärts vom 1.1.2000 gezählt) an.

bezeichnet. Zeitliche Mittelwerte je Gitterpunkt und Histogramme der Kreuzungspunktdifferenzen der Topex/Poseidon-Daten der Zyklen 2 bis 195, die als Beobachtungen für die folgende Schätzung ausgewählt werden, sind in Abb. 6.8 dargestellt. Dabei wird unterschieden in die Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 (linke Spalte) und Typ 2 (rechte Spalte).

In den nächsten zwei Abschnitten werden die Zusammenhänge der Kreuzungspunktdifferenzen mit den Schwerefeldkorrekturen (Abschnitt 6.1.2) und mit der Meeresspiegelschwankung (Abschnitt 6.1.3) getrennt vorgestellt. Dabei werden die Kreuzungspunktdifferenzen ausschließlich durch einen der beiden Effekte erklärt. In Abschnitt 6.2.3 werden dann die Modellgleichungen der getrennten Ansätze für eine gemeinsame Schätzung kombiniert.

6.1.2 Zusammenhang zwischen Kreuzungspunktdifferenzen und Schwerefeldkorrekturen

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Kreuzungspunktdifferenzen und Schwerefeldkorrekturen hergestellt. Die nachfolgenden Formeln beziehen sich auf [KLOKOCNIK et al. 1995]. Unter Vernachlässigung der Meeresspiegelschwankung und der Meßfehler werden die Kreuzungspunktdifferenzen $\Delta K_{ij}^{\alpha\delta}$ nur unter dem Aspekt der auf- und absteigenden Bahnfehlern Δr^a und Δr^d

$$\Delta K^{\alpha\delta} = (\Delta r^{\alpha} - \Delta r^{\delta}) \quad (6.3)$$

beschrieben. Die Indizes i und j sind für die Beschreibung der Kreuzungspunktdifferenzen mit Schwerefeldkorrekturen nicht erforderlich, da das Schwerefeld in dem derzeitigen Genauigkeitsbereich unabhängig von der Zeit betrachtet wird. Die Indizes α und δ stehen für a bzw. d und sollen auf- und absteigende Bahnen sich kreuzender Spuren vom ersten und gegebenenfalls zweiten Satelliten unterscheiden. Mit (4.56) gibt es folgende

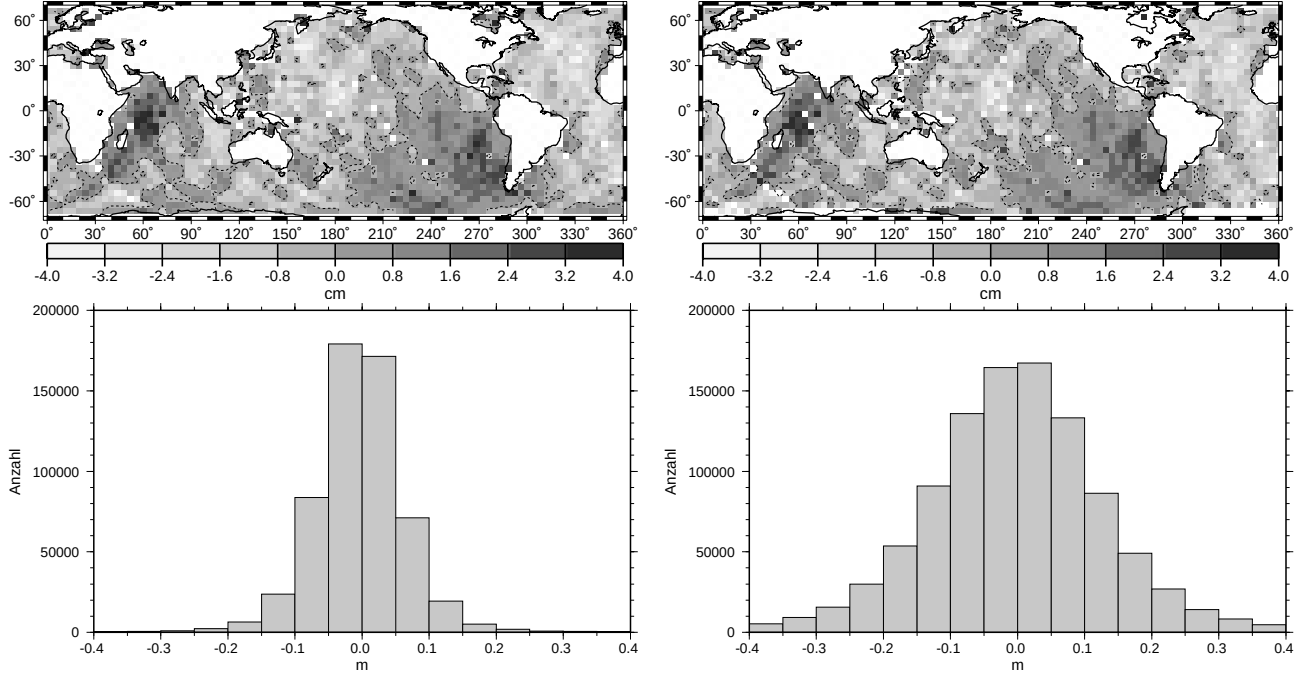


Abb. 6.8: Zeitliche Mittelwerte und Histogramme der Kreuzungspunktdifferenzen innerhalb der Zyklen (Typ 1, linke Spalte) und über 180 Tage (Typ 2, rechte Spalte) der Topex/Poseidon-Daten von Zyklus 2 bis 195.

Kombinationen bei einfachen Kreuzungspunkten

$$\begin{aligned}\Delta K^{ad} &= \Delta r^a - \Delta r^d = \Delta\gamma + \Delta\delta - (\Delta\gamma - \Delta\delta) = 2\Delta\delta \\ \Delta K^{da} &= \Delta r^d - \Delta r^a = \Delta\gamma - \Delta\delta - (\Delta\gamma + \Delta\delta) = -2\Delta\delta\end{aligned}\quad (6.4)$$

Die obigen Gleichungen enthalten nach (4.57) und (4.58) die zu schätzenden Schwerefeldkorrekturen $\delta\hat{C}_{nm}$ und $\delta\hat{S}_{nm}$. Damit ergeben sich die Beobachtungsgleichungen bei einfachen Kreuzungspunktdifferenzen zu

$$f^{ad} = \Delta K^{ad} + \hat{v}^{ad} = 2\Delta\delta = 2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s (\delta\hat{C}_{nm} \sin m\lambda - \delta\hat{S}_{nm} \cos m\lambda) \quad (6.5)$$

$$f^{da} = \Delta K^{da} + \hat{v}^{da} = -2\Delta\delta = -2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s (\delta\hat{C}_{nm} \sin m\lambda - \delta\hat{S}_{nm} \cos m\lambda) \quad (6.6)$$

Da diese Gleichungen die Koeffizienten Q_{nm}^c nicht mehr enthalten, sind keine zonalen Schwerefeldkoeffizienten ($m = 0$) aus einfachen Kreuzungspunktdifferenzen schätzbar. Auch läßt sich aus Kreuzungspunktdifferenzen eines Satelliten nur der variable Term $\Delta\delta$ bestimmen, während aus gemischten Kreuzungspunktdifferenzen zweier Satelliten k und l zusätzlich die Differenz $\Delta\gamma^k - \Delta\gamma^l$ ermittelt werden kann, wie aus den Kombinationen der gemischten Kreuzungspunkte nach (4.56)

$$\begin{aligned}\Delta K^{a_k d_l} &= \Delta r^{a_k} - \Delta r^{d_l} = (\Delta\gamma^k - \Delta\gamma^l) + (\Delta\delta^k + \Delta\delta^l) \\ \Delta K^{d_k a_l} &= \Delta r^{d_k} - \Delta r^{a_l} = (\Delta\gamma^k - \Delta\gamma^l) - (\Delta\delta^k + \Delta\delta^l) \\ \Delta K^{a_k a_l} &= \Delta r^{a_k} - \Delta r^{a_l} = (\Delta\gamma^k - \Delta\gamma^l) + (\Delta\delta^k - \Delta\delta^l) \\ \Delta K^{d_k d_l} &= \Delta r^{d_k} - \Delta r^{d_l} = (\Delta\gamma^k - \Delta\gamma^l) - (\Delta\delta^k - \Delta\delta^l)\end{aligned}\quad (6.7)$$

zu erkennen ist. Wegen unterschiedlichen Missions- und Satellitendesigns enthalten gemischte Kreuzungspunktdifferenzen Datumsunterschiede. Die dadurch bedingten Differenzen können durch Berücksichtigung von Datumsparametern aufgefangen werden. Allerdings sind die Datumsparameter zweier Missionen nicht absolut, sondern nur relativ zueinander bestimmbar. In dieser Arbeit unterbleibt eine Untersuchung der Schwerefeldkorrekturen in gemischten Kreuzungspunktdifferenzen; für deren Betrachtung sei z.B. auf [WAGNER et al. 1997a, VAN GYSEN und COLEMAN 1997] verwiesen.

6.1.3 Zusammenhang zwischen Kreuzungspunktdifferenzen und Meeresspiegelschwankung

Der zweite Term der rechten Seite von (6.2) stellt den Zusammenhang zwischen den Kreuzungspunktdifferenzen und der Meeresspiegelschwankung her. Hierbei wird zunächst der Aspekt der Bahnfehler vernachlässigt und die Kreuzungspunktdifferenz ausschließlich durch die Meeresspiegelschwankung erklärt. Die Indizes α und δ bleiben in diesem Abschnitt unberücksichtigt, da der Meeresspiegel unabhängig von auf- und absteigenden Satellitenbahnen ist. Erst im Abschnitt 6.2.3 werden die Beobachtungsgleichungen der Schwerefeldkorrekturen und der Parameter der Meeresspiegelschwankung kombiniert. Die Höhendifferenz ΔK_{ijp} an einem Kreuzungspunkt P soll durch die Meereshöhen h_{ip} und h_{jp} zu den Zeitpunkten t_i, t_j mit $i, j \in \{1, \dots, n | 175 \text{ Tage} \leq t_i - t_j \leq 185 \text{ Tage}\}$ und

$$\Delta K_{ijp} + v_{ij} = h_{ip} - h_{jp} \quad (6.8)$$

beschrieben werden. Aufgrund der Erkenntnisse in Abschnitt 5.3.2 werden die Meereshöhen h_{ip} und h_{jp} durch die EOF-Analyse (Abschnitt 5.2.2.3) modelliert. Dieses Modell beschreibt die Meereshöhen h_{iq} und h_{jq} an den Stellen der Gitterpunkte Q mit $q = 1, \dots, g$ zu zwei Zeitpunkten t_i und t_j nach (5.50) mit

$$h_{iq} = \bar{h}_q + \sum_{k=1}^d z_{ik} r_{qk} \quad \text{und} \quad h_{jq} = \bar{h}_q + \sum_{k=1}^d z_{jk} r_{qk}$$

aus den ersten d dominanten Eigenmodi mit den mittleren Meereshöhen $\bar{h}_q$ aus (5.13). Da die Kreuzungspunkte nicht mit den Gitterpunkten zusammenfallen, werden den Kreuzungspunkten P die nächstgelegenen Gitterhöhen Q zugewiesen, in deren Gitterblock sie fallen. An dem Kreuzungspunkt P mit $p = 1, \dots, f$ wird damit die Differenz der beiden Meereshöhen durch

$$\Delta K_{ijp} + v_{ij} = h_{ip} - h_{jp} = \sum_{k=1}^d (z_{ik} - z_{jk}) r_{pk} \quad (6.9)$$

beschrieben. Die Gleichung (6.9) gibt den Zusammenhang der Kreuzungspunktdifferenzen und der Meeresspiegelschwankung über Raum- und Zeitkomponenten an und kann als Beobachtungsgleichung für die Schätzung der Meeresspiegelschwankung herangezogen werden. Da die Schwankung des Meeresspiegels geschätzt werden soll, sind die Zeitkomponenten z_{ik} und z_{jk} zu schätzen. Dabei stellt sich die Frage, ob die Raumkomponenten r_{pk} als konstant betrachtet werden dürfen. Dazu wird zunächst das Raum- und Zeitverhalten der Eigenmodi untersucht.

Untersuchung der Beobachtungsgleichung an einem Simulationsdatensatz

Ziel der folgenden Untersuchung ist es, aus den Modellparametern der Gleichung (6.9) die zu schätzenden unbekannten Parameter zu extrahieren. Dabei wird die Idee verfolgt, die Raumkomponenten als bekannt anzunehmen und nur die Zeitkomponenten als unbekannte Parameter zu schätzen.

Für diese Voruntersuchung wird anstelle realer Meßreihen der POCM-Datensatz (siehe Abschnitt 5.2.1) herangezogen, weil ein simulierter Datensatz üblicherweise günstigere Eigenschaften aufweist. Die POCM Daten liegen über einen Zeitraum von 10 Jahren (1987 bis 1996) vor. Als Untersuchungsbereich wird im Nordatlantik ein Gebiet zwischen 280° und 350° Länge und zwischen 10° und 50° Breite gewählt. Für das betrachtete Gebiet sind 6 Eigenmodi für eine Approximation der Meeresspiegelbewegung von 80% notwendig.

Der erste Eigenmodus über die gesamten 10 Jahre, von 1987 bis 1996, ist in Abb. 6.9 dargestellt. Die Zeitkomponente weist in den zehn Jahren einen Jahresgang auf. Zu Beginn der Zeitreihe sind die Simulationsdaten noch nicht konsistent, wie in dem Anstieg der Zeitkomponente zu sehen ist. Simulationsmodelle benötigen eine gewisse Zeit, um in einen stabilen Zustand zu kommen, der sich nicht mehr mit der Zeit entwickelt. Erst wenn dieser als stationär bezeichnete Zustand erreicht ist, sind die Daten zuverlässig. Laut Abb. 6.9 können die Daten ab ungefähr dem 500. Tag als stationär angenommen werden.

Um das Verhalten unterschiedlicher Zeitreihen zueinander zu untersuchen, wird die Zehnjahres-Zeitreihe in verschiedene Zeitabschnitte aufgespalten und für jeden Zeitabschnitt eine EOF-Analyse durchgeführt. Vergleiche der Eigenmodi der kürzeren Zeitreihen mit den Eigenmodi der Zehnjahres-Zeitreihe zu den entsprechenden Zeiten zeigen hohe Korrelationen (nach 5.25) von über 0,9. Folglich stimmen die Komponenten zu 90% und besser überein. Detaillierte Strukturen der einzelnen Zeitreihen entsprechen den jeweiligen Abschnitten der langen Zeitreihe. Die Strukturen der Raumkomponenten aus der zehnjährigen Zeitreihe gleichen den Strukturen der Raumkomponenten kürzerer Zeitausschnitte.

Da die Raumkomponenten in den verschiedenen Zeitbereichen so gut übereinstimmen, werden sie für den gesamten Zeitraum als konstant angenommen. Zur Modellierung der Meereshöhen außerhalb des modellierten Zeitraumes werden daher nur die Zeitkomponenten (Hauptkomponenten) geschätzt. Mit dieser Erkenntnis wird die Beobachtungsgleichung zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen folgend formuliert

$$f_{ijp} = \Delta K_{ijp} + \hat{v}_{ijp} = \sum_{k=1}^d (\hat{z}_{ik} - \hat{z}_{jk}) r_{pk} \quad (6.10)$$

Die Zeitkomponenten $\hat{z}_{ik}$ und $\hat{z}_{jk}$ sind die zu schätzenden Unbekannten. Mit der Differenz der Zeitkomponenten $(\hat{z}_{ik} - \hat{z}_{jk})$ wird die Meeresspiegelschwankung in der kombinierten Schätzung (6.2) aufgefangen. Für die simultane Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelvariabilität aus Kreuzungspunktdifferenzen in Kapitel 6.2.3 werden die ersten d Eigenmodi verwendet, so daß a priori ein vorgegebener Prozentsatz der Variabilität abgedeckt ist.

Als Ergebnis dieser Voruntersuchung kann folglich zusammengefaßt werden: Es erweist sich als sinnvoll, die Raumkomponenten r_{pk} der EOF-Analyse eines Datensatzes zur Schätzung der Zeitkomponenten z_{ik}, z_{jk} und damit der Meeresspiegelschwankung aus einem anderen Datensatz zugrunde zu legen.

Selbstverständlich stimmen die Analysen über verschiedene Zeiträume der Topex/Poseidon-Meßdaten wegen zufälliger Effekte, wie beispielsweise eines El Niño Ereignisses, nicht so gut überein, wie die des POCM-Datensatzes. Dennoch wird an der oben beschriebenen Vorgehensweise festgehalten und die Vektoren $\mathbf{r}_k = (r_{pk})$ der Raumkomponenten r_{pk} aus der EOF-Analyse des Topex/Poseidon-Datensatzes der Zyklen 2 bis 195 als Grundlage zur Schätzung der Vektoren $\mathbf{z}_k = (z_{ik})$ der Zeitkomponenten z_{ik} aus Kreuzungspunktdifferenzen herangezogen.

6.1.4 Einführung von Zusatzinformation

Um Langzeitentwicklungen der Meeresoberfläche untersuchen zu können, soll eine möglichst lange Beobachtungsreihe aufgestellt werden. Die drei Missionen Geosat, ERS1 und Topex/Poseidon liefern Altimetermeßdaten für einen langen Zeitraum (1985 bis 1999, siehe Abb. 3.6). Allerdings fand zwischen dem Ende der Geosat Mission im Januar 1990 und dem Start der ERS1 Mission im Juli 1991 keine Altimetermission statt. Zur Überbrückung dieser Lücke an Altimeterdaten bieten sich, wie bereits erwähnt, ozeanographische Modelle an. Als solches wird das hydrodynamische Simulationsmodell POCM (siehe Abschnitt 5.2.1) ausgewählt.

Aus den POCM-Meereshöhen $\zeta_{iq} = \zeta_q(t_i)$ an den Gitterpunkten Q mit $q = 1, \dots, g$ lassen sich zu den Zeitpunkten t_i und t_j mit $i, j \in \{1, \dots, n | 175 \text{ Tage} \leq t_i - t_j \leq 185 \text{ Tage}\}$ ebenfalls Höhendifferenzen

$$\Delta \zeta_{ijq} = \zeta_{iq} - \zeta_{jq} \quad (6.11)$$

aufstellen. Die Meereshöhendifferenzen $\Delta \zeta_{ijq}$ könnten als a priori Information von den Kreuzungspunktdifferenzen ΔK_{ijp} der Altimeterdaten abgezogen werden. Es würden dann nur Abweichungen geschätzt. Hier wird jedoch ein anderer Weg beschritten, die Meereshöhendifferenzen aus POCM als Beobachtungen in eine zusätzliche Beobachtungsgleichung analog (6.10)

$$\Delta \zeta_{ijq} + \hat{v}_{ijq} = \sum_{k=1}^d (\hat{z}_{ik} - \hat{z}_{jk}) r_{qk} \quad (6.12)$$

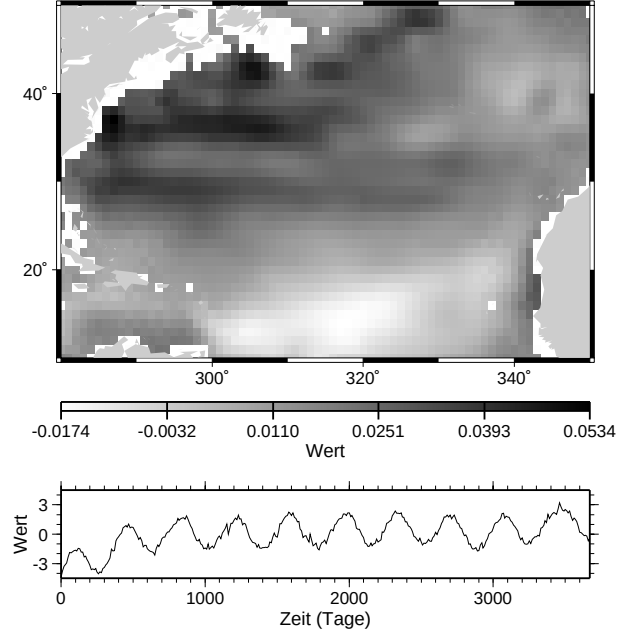


Abb. 6.9: *Erster Eigenmodus des POCM-Datensatzes vom 1.1.1987 (Zeitpunkt 0) bis 31.12.1996 (Zeitpunkt 3650) im Nordatlantik. Räumliche Komponente (oben) und zeitliche Komponente (unten).*

einzuführen. In der Beobachtungsgleichung (6.12) könnte ein Skalierungsfaktor zur Anpassung der verschiedenartigen Beobachtungen berücksichtigt werden, der dann als zusätzlicher unbekannter Parameter zu schätzen ist. Hierauf wird im folgenden jedoch verzichtet. Mit der zusätzlichen Beobachtungsgleichung wird die Schätzung der Meeresspiegelschwankung gestützt, indem die beiden Seitenbänder der Abb. 6.7 stabilisiert werden. Aus den POCM-Wasserständen werden Differenzen $\Delta\zeta_{ijq}$ mit je 180 Tagen Zeitunterschied für den gesamten Zeitraum der Untersuchung gebildet. Die POCM-Daten sind einem Modellauf von 1996 entnommen und liegen daher nur bis Ende 1996 vor. Das entspricht den Topex/Poseidon-Daten bis Zyklus 158. Damit liegen unabhängig von den Altimetermissionen Höhendifferenzen zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung vor.

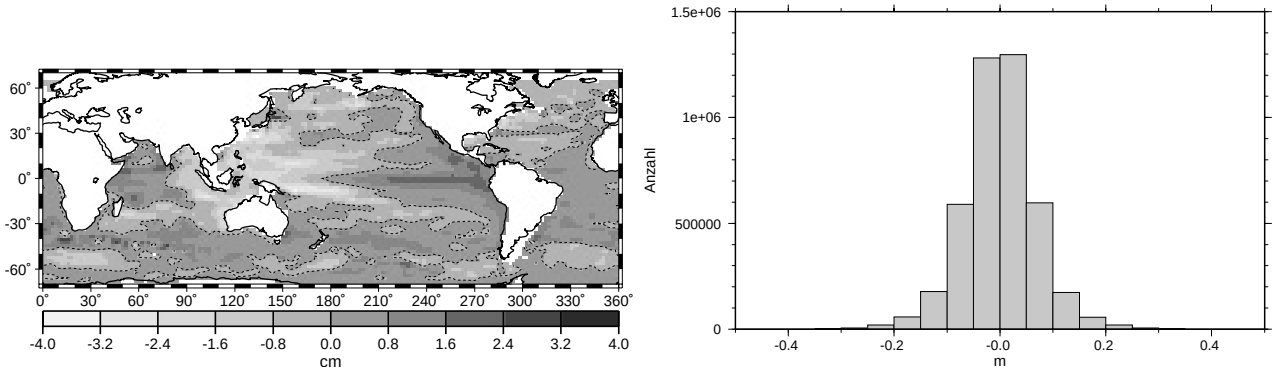


Abb. 6.10: Zeitliche Mittelwerte der POCM-Meereshöhendifferenzen (m) und Histogramm.

In Abb. 6.10 sind die zeitlichen Mittelwerte an jedem Gitterpunkt sowie ein Histogramm über alle POCM-Meereshöhendifferenzen, die in dieser Arbeit verwendet werden zu sehen. Im Vergleich zu dem Histogramm aus den Topex/Poseidon-Kreuzungspunktdifferenzen (Abb. 6.8, rechts) fällt auf, wie auch schon in Abschnitt 5.3.2, daß das Maß der Meeresspiegelschwankung in den POCM-Daten unterschätzt ist. Auch [STAMMER und WUNSCH 1994] geben an, daß die Variabilität bei POCM um ungefähr den Faktor zwei zu gering geschätzt wurde.

In dieser Arbeit wird das Verfahren der Überbrückung einer Datenlücke in den Daten von Topex/Poseidon der Zyklen 2 bis 195 mit den POCM-Höhendifferenzen getestet, indem in den Topex/Poseidon-Daten künstlich eine Lücke von einem Jahr (36 Zyklen) gelassen wird, welche willkürlich auf die Zyklen 101 bis 136 gelegt wurde.

6.2 Schätzung

In den Beobachtungsgleichungen (6.5, 6.6 und 6.10) sind die unbekannten Parameter bereits in linearer Form enthalten. Eine Linearisierung ist daher nicht erforderlich und anstelle der Zuschläge $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ (2.7) können die $\hat{\mathbf{x}}$ direkt geschätzt werden. An die Stelle des Widerspruchsvektors $\mathbf{w}$ tritt dann der Beobachtungsvektor $\mathbf{b}$. Nach dem allgemeinen Modell (2.10) und (2.3) lautet damit das Modell der Ausgleichung

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}(\mathbf{b}) = \sigma_o^2 \mathbf{P}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}^{-1} \quad . \quad (6.13)$$

Der Beobachtungsvektor $\mathbf{b}$ setzt sich aus den in Abschnitt 6.1 ausgewählten Kreuzungspunktdifferenzen $\Delta K_{ij}^{\alpha\delta}$ der Zeitpunkte t_i und t_j mit $\Delta t = t_i - t_j \leq 10$ Tage (Typ 1) und $175 \text{ Tage} \leq \Delta t \leq 185 \text{ Tage}$ (Typ 2) für auf- und absteigende (α, δ) Bahnen, sowie aus den POCM-Meereshöhendifferenzen $\Delta\zeta_{ij}$ über 180 Tage Zeitunterschied (Abschnitt 6.1.4), zusammen

$$\mathbf{b} = (\Delta K_{ij}^{\alpha\delta}, \Delta\zeta_{ij}) \quad . \quad (6.14)$$

Die Dimension $\bar{b}$ des Beobachtungsvektors $\mathbf{b}$ ergibt sich aus der Anzahl an Zeitpunkten n und Kreuzungspunkten f der ausgewählten Kreuzungspunkte vom Typ 1 innerhalb eines Zyklusses zu nf und innerhalb der benachbarten Zyklen zu $2nf$, sowie der Kreuzungspunkte vom Typ 2 zu $2(n-18)f$. Je nachdem welche Kreuzungspunkte für die Beobachtungsgleichungen verwendet werden ergibt sich die Länge des Beobachtungsvektors aus der Summe der entsprechenden Anteile. Werden die POCM-Differenzen hinzu genommen erhöht sich die Zahl um $2nf$. Vorerst dienen nur Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen, erst in Abschnitt 6.2.4 werden zur Überbrückung der Altimeterdatenlücke als zusätzliche Beobachtungen Meereshöhendifferenzen $\Delta\zeta_{ijp}$ des POCM-Modells eingeführt.

Der Unbekanntenvektor $\hat{\mathbf{x}}$ enthält die Vektoren $\delta\hat{\mathbf{C}}$ und $\delta\hat{\mathbf{S}}$ der unbekannten Schwerefeldkorrekturen $\delta\hat{C}_{nm}$ und $\delta\hat{S}_{nm}$, sowie den Vektor $\hat{\mathbf{z}}_k$ der unbekannten Zeitkomponenten $\hat{z}_{ik}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\hat{\mathbf{C}}, \delta\hat{\mathbf{S}} \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Die Zahl der Unbekannten für die Schwerefeldkorrekturen $\delta\hat{C}_{nm}$ und $\delta\hat{S}_{nm}$ mit $n = 0, \dots, N$ und $m = 0, \dots, n$ ergibt sich aus dem maximalen Entwicklungsgrad N . Die Anzahl aller möglichen Koeffizienten ist damit $(N+1)^2$. Mit einfachen Kreuzungspunktdifferenzen sind jedoch die zonalen Schwerefeldkoeffizienten mit $m = 0$ nicht schätzbar (6.5, 6.6), weshalb nur $N(N+1)$ Koeffizienten bestimmbar sind. Die Koeffizienten niedriger Ordnung bis $n = 2$, mit Ausnahme von $\delta\hat{C}_{22}$ und $\delta\hat{S}_{22}$, sind ebenfalls aus einer Mission nicht schätzbar, da diese sieben Koeffizienten das Datum festlegen (siehe Abschnitt 3.1). Somit reduziert sich die Anzahl der schätzbaren Koeffizienten auf $N(N+1) - 7$.

Für die Zeitkomponenten $\hat{z}_{ik}$ mit $i = 1, \dots, n$ Zeitpunkten und $k = 1, \dots, d$ Eigenmodi ergeben sich dn Unbekannte. Die Zeitkomponenten sind unabhängig von der Bahnstruktur und damit bei einfachen und gemischten Kreuzungspunktdifferenzen gleich, nur die Zeitpunkte der Kreuzungsereignisse sind entscheidend.

Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ der Unbekannten erhält die Dimension $\bar{x} = N(N+1) - 7 + dn$ bei einfachen Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen. Bei gemischten Kreuzungspunktdifferenzen können Datumstransformationsparameter mitgeschätzt werden und der Vektor der Unbekannten hat die Dimension $\bar{x} = (N+1)^2 + dn$. Fortan werden jedoch, wie erwähnt, nur einfache Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen verwendet.

Jakobimatrix

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}$ setzt sich nach (2.9) aus den Ableitungen der Beobachtungsgleichungen nach den Unbekannten zusammen. Für jede Unbekannte enthält die Matrix $\mathbf{A}$ eine Spalte und für jede Beobachtung eine Zeile. Der Beobachtungsvektor $\mathbf{b}$ enthält die Kreuzungspunktdifferenzen $\Delta K_{ij,p}^{ad}$ der Topex/Poseidon-Mission in folgender Reihenfolge

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & [\Delta K_{11,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{11,f}^{ad}, \Delta K_{22,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{22,f}^{ad}, \Delta K_{nn,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{nn,f}^{ad}, \\ & \Delta K_{12,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{12,f}^{ad}, \Delta K_{21,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{21,f}^{ad}, \Delta K_{23,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{23,f}^{ad}, \dots, \\ & \Delta K_{n-1,n,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{n-1,n,f}^{ad}, \Delta K_{1,18,1}^{ad}, \dots, \Delta K_{n-18,n,f}^{ad}]'. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Kreuzungspunkte werden jeweils in der Form ad gewählt, wobei $\Delta K_{ij}^{ad} = \Delta K_{ji}^{da}$ ist. Die Unbekannten $\delta\hat{C}_{nm}$, $\delta\hat{S}_{nm}$ und $\hat{z}_{ik}$ sind folgendermaßen sortiert

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = [\delta\hat{C}_{22}, \delta\hat{C}_{31}, \delta\hat{C}_{32}, \dots, \delta\hat{C}_{NN}, \delta\hat{S}_{22}, \delta\hat{S}_{31}, \dots, \delta\hat{S}_{NN}]' \quad (6.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = [\hat{z}_{11}, \hat{z}_{12}, \dots, \hat{z}_{1d}, \hat{z}_{21}, \dots, \hat{z}_{2d}, \dots, \hat{z}_{n1}, \dots, \hat{z}_{nd}]'. \quad (6.18)$$

Die Zeitpunkte i und j werden hierbei durch deren entsprechende Zyklennummer repräsentiert. Die Zuordnung der Zyklennummer zum bürgerlichen Datum ist der Tabelle 7 im Anhang zu entnehmen. Bei Beobachtungen von Typ 1 unterscheiden sich die Indizes i und j maximal um den Wert eins und bei Beobachtungen von Typ 2 um 18 Zyklen.

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}$ hat folglich die Dimension $\mathbf{A}_{(\bar{b}, \bar{x})}$. Aufgrund der zwei verschiedenen Gruppen an Unbekannten läßt sich $\mathbf{A}$ in zwei Blockmatrizen $\mathbf{A}_1(\bar{b}, \bar{x}_1)$ und $\mathbf{A}_2(\bar{b}, \bar{x}_2)$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \quad (6.19)$$

zerlegen mit $\bar{x}_1 = N(N+1) - 7$, $\bar{x}_2 = dn$ und $\bar{b} = nf + 2nf + 2(n-18)f$. $\mathbf{A}_1$ enthält die Ableitungen nach den Schwerefeldkorrekturen und $\mathbf{A}_2$ die Ableitungen nach den Zeitkomponenten.

Stochastisches Modell

Als Eingangsgrößen für das stochastische Modell werden die Standardabweichungen σ_b der Kreuzungspunkte aus der Kreuzungspunktberechnung verwendet. Die Beobachtungen werden als unkorreliert angenommen. Damit berechnen sich mit (2.3) und (2.4) die Gewichte p_{bb}

$$p_{bb} = \frac{1}{\sigma_b^2} \quad (6.20)$$

der Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_{\mathbf{bb}} = (p_{bb})$ mit $b = 1, \dots, \bar{b}$. Das stochastische Modell folgt nach (2.3) zu

$$\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \sigma_o^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{bb}}. \quad (6.21)$$

Das stochastische Modell für die POCM–Beobachtungen wird in Abschnitt 6.2.4 aufgestellt.

Normalgleichungssystem

Die Berechnung von $\mathbf{A}'\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}$ führt nach (2.18) mit der Zerlegung (6.19) zu der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}_{(\bar{x},\bar{x})}$. Die Matrix $\mathbf{N}$ läßt sich nach (2.18) in die vier Blockmatrizen $\mathbf{N}_{11}(\bar{x}_1,\bar{x}_1)$, $\mathbf{N}_{12}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, $\mathbf{N}_{21}(\bar{x}_2,\bar{x}_1)$ und $\mathbf{N}_{22}(\bar{x}_2,\bar{x}_2)$ aufspalten.

Zur Inversion von $\mathbf{N}$ ist nach (2.19 bis 2.22) zu überprüfen, ob die Matrix $\mathbf{N}_{11}$ oder die Matrix $\mathbf{N}_{22}$ invertierbar ist. Deshalb wird in den nächsten beiden Abschnitten die Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung zunächst einzeln untersucht. In einem weiteren Schritt (Abschnitt 6.2.3) werden die beiden Verfahren kombiniert und die Einzellösungen mit der kombinierten Lösung verglichen.

6.2.1 Schätzung der Schwerefeldkorrekturen

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}_1$ setzt sich im Falle einer reinen Schwerefeldlösung aus den Ableitungen der Beobachtungsgleichungen f^{ad} aus (6.5) und f^{da} aus (6.6) nach den Schwerefeldkorrekturen $\delta\hat{C}_{nm}$ und $\delta\hat{S}_{nm}$ zusammen. Die Ableitungen nach den Schwerefeldkorrekturen lauten bei einfachen Kreuzungspunkten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{ad}}{\partial \delta\hat{C}_{nm}} &= 2Q_{nm}^s \sin m\lambda & \frac{\partial f^{da}}{\partial \delta\hat{C}_{nm}} &= -2Q_{nm}^s \sin m\lambda \\ \frac{\partial f^{ad}}{\partial \delta\hat{S}_{nm}} &= -2Q_{nm}^s \cos m\lambda & \frac{\partial f^{da}}{\partial \delta\hat{S}_{nm}} &= 2Q_{nm}^s \cos m\lambda \end{aligned} \quad (6.22)$$

Lösung nach den Schwerefeldkorrekturen

Für die Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}_{11}$ gilt $\mathbf{N}_{11} = \mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_1$. Der radiale Bahnfehler Δr besteht nach (4.55) aus einer Linearkombination der Schwerefeldkorrekturen $\delta\hat{C}_{nm}$ und $\delta\hat{S}_{nm}$. Wegen der Differenzbildungen enthalten einfache Kreuzungspunktdifferenzen nach (6.4) nur den variablen Anteil $\Delta\delta$ des Bahnfehlers, den mittleren Bahnfehleranteil $\Delta\gamma$ hingegen nicht mehr. Folglich sind die Schwerefeldkorrekturen nicht mehr vollständig nach (6.5) und (6.6) schätzbar, da zwischen den Koeffizienten lineare Abhängigkeiten auftreten. Durch Hinzunahme zusätzlicher unabhängiger Information in Form von Pseudo–Beobachtungen kann dieser Rangdefekt beseitigt werden. Als Pseudo–Beobachtungen werden z.B. Schwerefeldkorrekturen $\delta C_{nm} = \delta S_{nm} = 0$ der Schwerefeldkoeffizienten C_{nm} und S_{nm} mit deren Gewichtung

$$w_{nm} = \frac{1}{\sigma_{nm}^2} \quad (6.23)$$

aus den Varianzen σ_{nm}^2 der Varianz–Kovarianzmatrix $\mathbf{D}(C_{nm}, S_{nm})$ des Schwerefeldmodells eingeführt, das zur Berechnung der Satellitenbahn genützt wurde. Dies führt zu der in Abschnitt 2.2 eingeführten Bayes–Statistik. Der Rangdefekt von $\mathbf{N}_{11}$ wird nach (2.43) durch die Addition der Inversen einer positiv definiten Matrix $\mathbf{W} = (w_{nm})$ zu dem Normalgleichungssystem behoben. Die Lösung des Normalgleichungssystem wird damit zu

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{A}_1 + \mathbf{W}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{b} + \mathbf{W}^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{x}}_1) = (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{W}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}'_1\mathbf{P}_{\mathbf{bb}}\mathbf{b}) \quad , \quad (6.24)$$

mit den Näherungswerten $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0}$ als Vorinformation für die zu schätzenden Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}_1$ (6.17). Aus den vollständigen Schwerefeldkorrekturen läßt sich der mittlere Bahnfehleranteil $\Delta\gamma$ im nachhinein nach (4.57) berechnen.

Als eine weitere Möglichkeit den durch das Fehlen des mittleren Bahnfehleranteils entstehenden Datumsdefekt zu beheben, haben [BOSCH et al. 1998, KLOKOCNIK et al. 1999, WAGNER et al. 1997b]. den mittleren Bahnfehler $\Delta\gamma = 0$ selbst als Pseudo–Beobachtungen verwendet, wobei sie aus strenger Fehlerfortpflanzung der Varianz–Kovarianzmatrix des *Joint Gravity Model 3* (JGM3) [TAPLEY et al. 1996] Genauigkeiten für das stochastische Modell ableiteten. Andere Möglichkeiten zur Behebung des Datumsdefekts bei der Berechnung des radialen Bahnfehlers aus Kreuzungspunktdifferenzen beschreiben z.B. [ENGELIS 1988, SCHRAMA 1992, VAN GYSEN und COLEMAN 1997].

Die Schwerefeldkorrekturen, die aus den radialen Bahnfehlern von Topex/Poseidon berechnet werden, gelten bezüglich des Schwerefeldmodells Joint Gravity Model 3, da die Bahnen von Topex/Poseidon mit dem JGM 3 berechnet sind. Dieses Erdschwerefeldmodell bis Grad und Ordnung 70 ist aus einer Kombination der *Joint*

Gravity Models 1 und 2 [NEREM et al. 1994a] [WAGNER et al. 1995] mit Hinzunahme von Bahnverfolgungsdaten der Satelliten Topex/Poseidon, Lageos1, Lageos2, Stella und Spot2 entstanden.

Bei gemischten Kreuzungspunktdifferenzen als Beobachtungen sind sowohl die absoluten Schwerefeldkorrekturen als auch der mittlere Bahnfehleranteil nach (4.57, 4.58) bestimmbar. Allerdings sind hierbei Datumsunterschiede wegen unterschiedlichen Missionsdesigns zu berücksichtigen. Untersuchungen hierzu gibt es von [KLOKOCNIK et al. 1995, KLOKOCNIK et al. 2000, MOORE und EHLERS 1993].

6.2.2 Schätzung der Meeresspiegelschwankung

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}_2$ setzt sich aus den Ableitungen der Beobachtungsgleichung (6.10) nach den Zeitkomponenten zusammen. Die Ableitungen der Beobachtungsgleichung f_{ij} nach den Zeitkomponenten $\hat{z}_{ik}$ des ersten Zeitpunktes t_i (links von 6.25) und nach den Zeitkomponenten $\hat{z}_{jk}$ des zweiten Zeitpunktes t_j (rechts von 6.25) im Kreuzungspunkt P lauten z.B. für den k -ten Eigenmodus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ij1}}{\partial \hat{z}_{ik}} &= r_{1k} & \frac{\partial f_{ij1}}{\partial \hat{z}_{jk}} &= -r_{1k} \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{\partial f_{ijp}}{\partial \hat{z}_{ik}} &= r_{pk} & \frac{\partial f_{ijp}}{\partial \hat{z}_{jk}} &= -r_{pk} \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{\partial f_{ijf}}{\partial \hat{z}_{ik}} &= r_{fk} & \frac{\partial f_{ijf}}{\partial \hat{z}_{jk}} &= -r_{fk} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Diese Ableitungen ergeben die Vektoren $\mathbf{r}_k = (r_{pk})$ bzw. $-\mathbf{r}_k = (-r_{pk})$. Aus den ersten d Eigenmodi ergibt sich mit $\mathbf{r}_k$ die Matrix $\mathbf{G}_{(f,d)}$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{r}_k) = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \dots \mathbf{r}_k \dots \mathbf{r}_d) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1d} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pk} & \dots & r_{pd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{f1} & r_{f2} & \dots & r_{fk} & \dots & r_{fd} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

bzw. mit $-\mathbf{r}_k$ die Matrix $-\mathbf{G}_{(f,d)}$ für die Schätzung der Zeitkomponenten $\mathbf{z}_k$. Da die Meeresspiegelschwankung unabhängig von den Satellitenbeobachtungen ist, gelten diese Ableitungen bei einfachen und gemischten Kreuzungspunkten, sowie für alle Kombinationen von α und δ .

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}_{2(\bar{b}, \bar{x}_2)}$ mit $\bar{x}_2 = dn$ ist schwach besetzt und setzt sich nach geschicktem Anordnen der Beobachtungen und Unbekannten aus den Matrizen $\mathbf{G}$ nach der in Abb. 6.11 dargestellten Struktur zusammen. $\mathbf{A}_2$ ist nur an den grau unterlegten Stellen gefüllt. Graue Kästchen stellen die Matrix $\mathbf{G}_{(f,d)}$ und schraffierte Kästchen die Matrix $-\mathbf{G} = (-\mathbf{r}_k)$ dar. Die Matrix $\mathbf{G}$ enthält d Raumvektoren $\mathbf{r}_k$ mit $k = 1, \dots, d$ mit deren Hilfe die Zeitkomponenten $\hat{\mathbf{z}}_k$ geschätzt werden. Im unteren Teil von $\mathbf{A}_2$ sind die von Null verschiedenen Blockmatrizen $\mathbf{G}$ bzw. $-\mathbf{G}$ wegen des Abstandes der Beobachtungen von einem halben Jahr um jeweils 18 Blockspalten (den 18 Zyklen, bzw. 180 Tagen entsprechend) getrennt. Die zu schätzenden Unbekannten zu den zwei Zeitpunkten t_i und t_j eines Kreuzungspunktereignisses hängen jeweils über die Matrix $\mathbf{G}$ bzw. $-\mathbf{G}$ mit den Beobachtungen zusammen, die sich durch den Faktor -1 ineinander überführen lassen. Daher sind die entsprechenden Zeilen in $\mathbf{A}_2$ linear abhängig.

Lösung nach den Hauptkomponenten

Die Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}_{22}$ berechnet sich aus $\mathbf{N}_{22} = \mathbf{A}_2' \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A}_2$. Der Einfachheit halber wird die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_{bb}$ zunächst durch die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ersetzt. Damit ergeben sich die in Abb. 6.11 abgebildeten Zahlenwerte -2,4,6,8, da nach (6.25) die Matrix $\mathbf{A}_2$ aus den orthonormalen Vektoren $\mathbf{r}_k$ und $-\mathbf{r}_k$ besteht, für die nach (5.32) gilt

$$\mathbf{r}_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = 0 \quad \text{mit} \quad i, j \in \{k = 1, \dots, d\} \quad , i \neq j \quad . \quad (6.27)$$

Die einfache Struktur von $\mathbf{A}_2' \mathbf{A}_2$ ist in Abb. 6.11 mit ihren Werten zu sehen. Bei der numerischen Berechnung wird die diagonale Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_{bb}$ nachträglich an $\mathbf{A}_2' \mathbf{A}_2$ angebracht und somit im folgenden berücksichtigt.

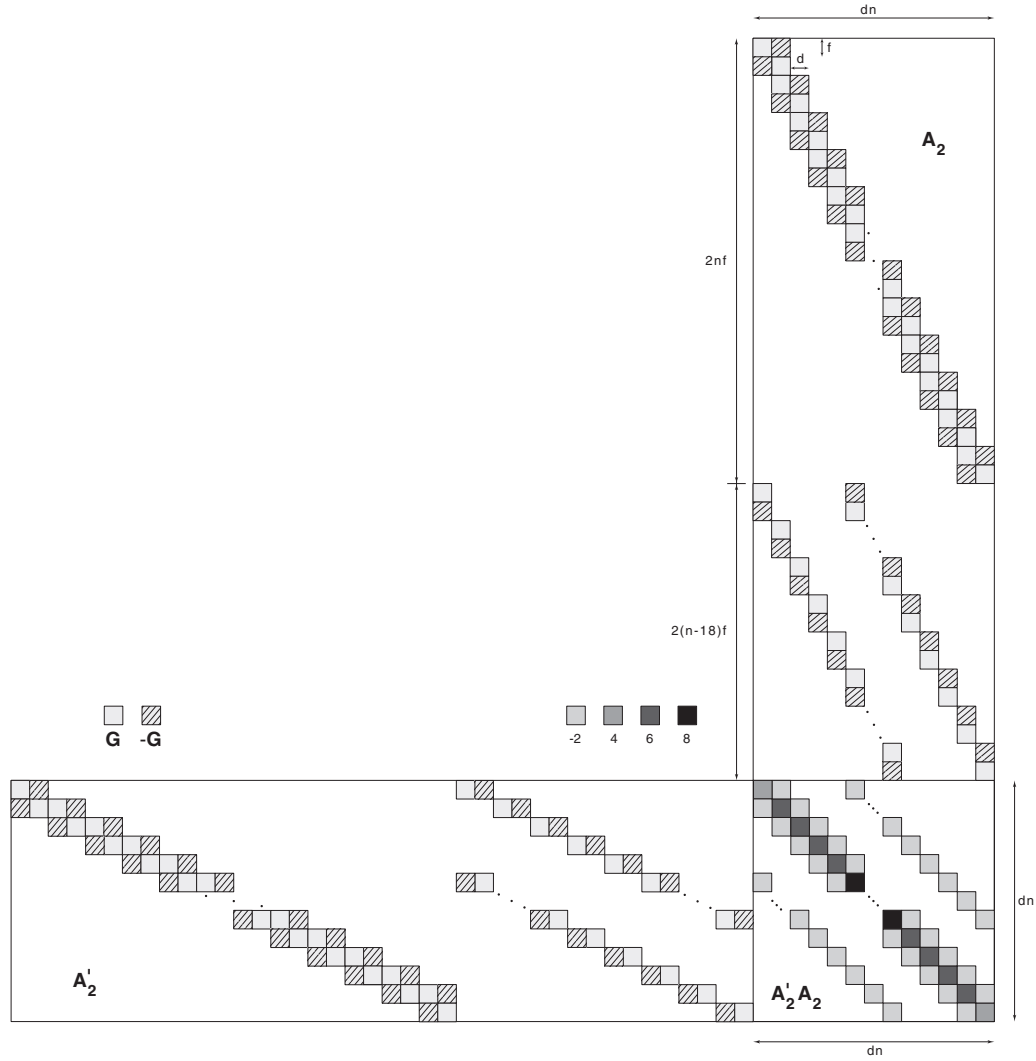


Abb. 6.11: Struktur der $\mathbf{A}_2$ -Matrix und von $\mathbf{A}_2' \mathbf{A}_2$.

Die Lösung von Gleichung

$$\mathbf{N}_{22} \hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_2' \mathbf{P}_{bb} \mathbf{b} \quad (6.28)$$

nach $\hat{\mathbf{z}}_k = (\hat{z}_{ik})$ erfolgt wiederum nach (2.43) durch Addition einer positiv definiten Matrix $\mathbf{V}^{-1}$ zu dem Normalgleichungssystem

$$\hat{\mathbf{z}}_k = (\mathbf{A}_2' \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A}_2 + \mathbf{V}^{-1})^{-1} (\mathbf{A}_2' \mathbf{P}_{bb} \mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_k^{\circ}) = (\mathbf{N}_{22} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} (\mathbf{A}_2' \mathbf{P}_{bb} \mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_k^{\circ}) \quad , \quad (6.29)$$

mit den Näherungswerten $\hat{\mathbf{z}}_k^{\circ}$ als Vorinformation für $\hat{\mathbf{z}}_k$. Als Näherungswerte werden die Zeitkomponenten der EOF-Analyse der Topex/Poseidon-Daten aus Abb. 5.6 verwendet. Eine solche Matrix $\mathbf{V}^{-1}$ läßt sich aus der Dispersionsmatrix $\mathbf{D}(\text{vec} \mathbf{Z})$ aus (5.45) gewinnen. Durch Aufspalten von $\mathbf{D}(\text{vec} \mathbf{Z})_{(nf, nf)}$ in zwei Blockmatrizen $\mathbf{V}_{(dn, dn)}$ mit den dominanten Eigenwerten $\lambda_i, i = 1, \dots, d$ und $\tilde{\mathbf{W}}_{((f-d)n, (f-d)n)}$ mit den restlichen Eigenwerten $\lambda_j, j = d+1, \dots, f$

$$\mathbf{D}(\text{vec} \mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{W}} \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

erhält man die Matrix $\mathbf{V}$ und durch Inversion

$$\mathbf{V}^{-1} = c \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{I}_{(n,n)} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{I}_{(n,n)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{I}_{(n,n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_d} \mathbf{I}_{(n,n)} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Eine Skalierung ist durch die Konstante c möglich.

6.2.3 Kombinierte Schätzung

Mit den Beobachtungsgleichungen (6.5) und (6.6) für den Zusammenhang von Schwerefeldkorrekturen und Kreuzungspunktdifferenzen sowie der Beobachtungsgleichung (6.10) für den Zusammenhang von Zeitkomponenten und Kreuzungspunktdifferenzen werden die Beobachtungsgleichungen zu

$$\Delta K_{ijp}^{ad} + \hat{v}_{ijp}^{ad} = 2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s (\delta \hat{C}_{nm} \sin m\lambda - \delta \hat{S}_{nm} \cos m\lambda) + \sum_{k=1}^d (\hat{z}_{ik} - \hat{z}_{jk}) r_{pk} \quad (6.32)$$

$$\Delta K_{ijp}^{da} + \hat{v}_{ijp}^{da} = -2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n Q_{nm}^s (\delta \hat{C}_{nm} \sin m\lambda - \delta \hat{S}_{nm} \cos m\lambda) + \sum_{k=1}^d (\hat{z}_{ik} - \hat{z}_{jk}) r_{pk} \quad (6.33)$$

kombiniert. Diese Beobachtungsgleichungen gelten für einfache Kreuzungspunktdifferenzen an einem Punkt P zu den Zeitpunkten t_i und t_j eines aufsteigenden (a) und eines absteigenden (d) Bahn Bogens.

Kombinierte Lösung

In der kombinierten Lösung werden die beiden Normalgleichungen der getrennten Ansätze zur Schätzung der Schwerefeldkorrekturen (6.24) und der Meeresspiegelschwankung (6.29) durch die Matrizen $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{A}'_1 \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A}_2$ und $\mathbf{N}_{21} = \mathbf{N}'_{12}$ miteinander verknüpft. Somit lautet das Normalgleichungssystem für die kombinierte Schätzung

$$\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} \quad (6.34)$$

mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{C}}, \delta \hat{\mathbf{S}} \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} + \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} + \mathbf{V}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_1 \mathbf{P}_{bb} \mathbf{b} + \mathbf{W}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{A}'_2 \mathbf{P}_{bb} \mathbf{b} + \mathbf{V}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{z}}_k \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Normalgleichungssystems erfolgt nach (2.14). Zur Inversion der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N}$ wird der Fall (2.20) mit den erweiterten Matrizen $\mathbf{N}_{11} + \mathbf{W}^{-1}$ und $\mathbf{N}_{22} + \mathbf{V}^{-1}$ anstelle von $\mathbf{N}_{11}$ und $\mathbf{N}_{22}$ verwendet. Geschicktes Sortieren von $\mathbf{A}_2$ ergibt nämlich, wie in Abb. 6.12 zu sehen ist, eine günstige Struktur von $\mathbf{N}_{22}$ und die Matrix $\mathbf{N}_{22} + \mathbf{V}^{-1}$ ist damit einfacher zu invertieren als die vollbesetzte Matrix $\mathbf{N}_{11} + \mathbf{W}^{-1}$.

Die Struktur des Normalgleichungssystems der kombinierten Schätzung ist in Abb. 6.12 dargestellt. Die Schätzung der Schwerefeldkorrekturen ist nur für die Länge der berechneten Bahnbögen sinnvoll. Die Schwerefeldkorrekturen werden also nur für die Kreuzungspunkte berechnet, die über Zeitspannen von wenigen Tagen (innerhalb der Satellitenzyklen mit sich selbst) gebildet werden. Das ergibt den in Abb. 6.12 dargestellten ersten Block mit nf Beobachtungen der Matrix $\mathbf{A}_1$. Der zweite Block mit $2nf$ Beobachtungen folgt aus den Kreuzungspunkten benachbarter Satellitenzyklen, für die sowohl Schwerefeldkorrekturen als auch Meeresspiegelparameter geschätzt werden können. Aus den Kreuzungspunktdifferenzen über ein halbes Jahr, im dritten Block mit $2(n-18)f$ Beobachtungen, wird nur die Meeresspiegelbewegung geschätzt, da diese gegenüber dem Bahnfehler dominiert.

Analog (2.10) berechnen sich die Verbesserungen nach

$$\hat{\mathbf{v}} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} - \mathbf{b} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} \quad (6.35)$$

Den Beobachtungen entsprechend werden auch die Verbesserungen in zwei Gruppen eingeteilt. Die Verbesserungen $\hat{\mathbf{v}}_{Ty p1}$ entstehen aus den Differenzen zu den Beobachtungen vom Typ 1 und die $\hat{\mathbf{v}}_{Ty p2}$ aus den Differenzen

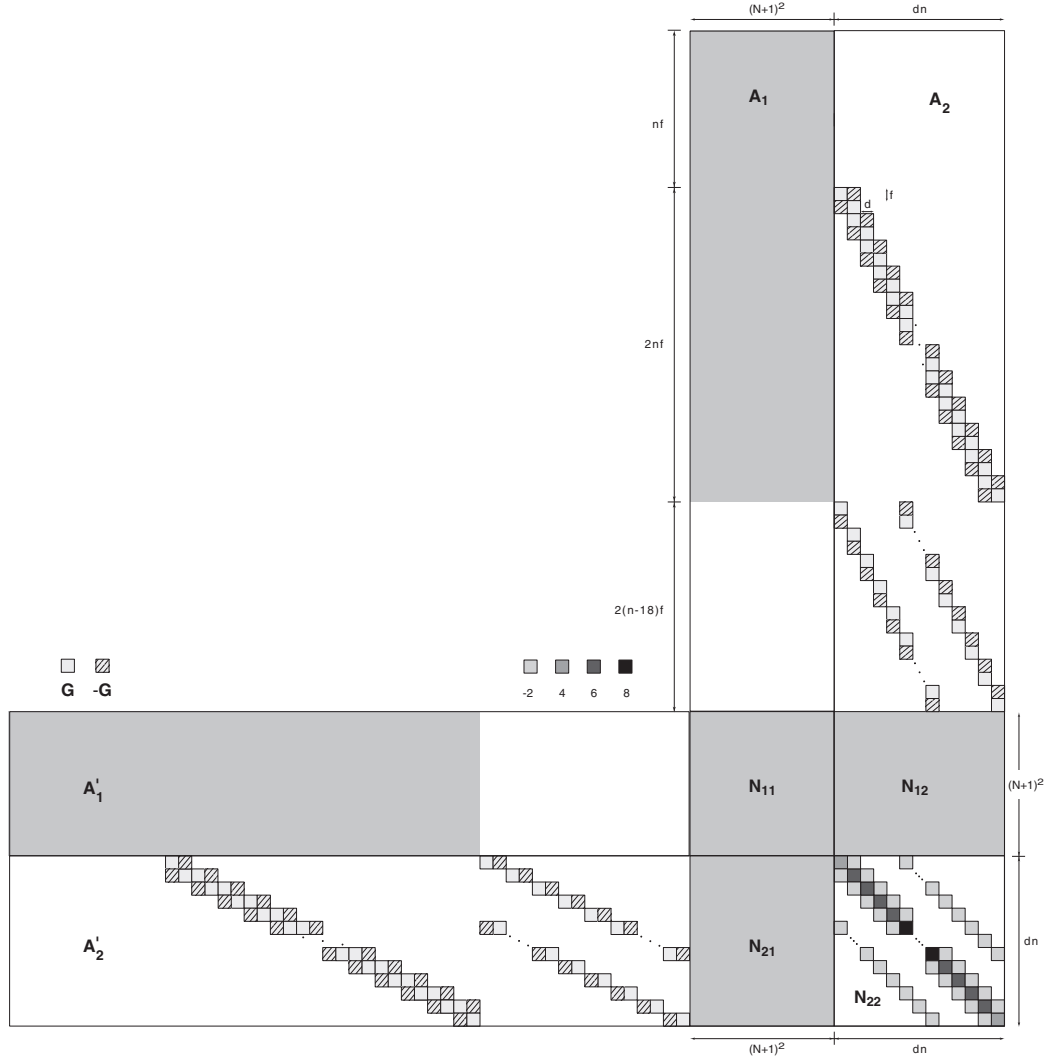


Abb. 6.12: Struktur des Normalgleichungssystems der kombinierten Schätzung.

zu den Beobachtungen vom Typ 2. Die verschiedenen Schätzungen werden im Abschnitt 6.3 anhand der ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{b}}$ über die Komponenten $\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$ und $\mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2$ verglichen. Mit dem Varianzfaktor $\hat{\sigma}_o^2$ a posteriori nach (2.44) ergeben sich die Genauigkeiten der Unbekannten nach (2.16) für die getrennten Schätzungen aus

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \hat{\sigma}_o^2 (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{W}^{-1})^{-1} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}_2) = \hat{\sigma}_o^2 (\mathbf{N}_{22} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} \quad (6.36)$$

und für die kombinierte Schätzung aus

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (6.37)$$

6.2.4 Kombinierte Schätzung mit Zusatzinformation

Zur Überbrückung einer Datenlücke zwischen verschiedenen Altimetermissionen wird zur Schätzung der Meeresspiegelschwankung die Beobachtungsgleichung (6.12) hinzugenommen. Dazu werden aus den Meereshöhen ζ_{ip} , ζ_{jp} der POCM-Daten Höhendifferenzen $\Delta\zeta_{ijp}$ nach (6.11) erzeugt, welche als Beobachtungen für die zusätzliche Beobachtungsgleichung dienen (siehe Abschnitt 6.1.4).

Das stochastische Modell für die POCM-Beobachtungen $\Delta\zeta = (\Delta\zeta_{ijp})$ wird zu

$$\mathbf{D}(\Delta\zeta) = \sigma_o^2 \mathbf{Q}_{\Delta\zeta\Delta\zeta} \quad (6.38)$$

wobei für die Berechnungen für $\mathbf{Q}_{\Delta\zeta\Delta\zeta}$ die Einheitsmatrix und für die Kovarianzmatrix $\mathbf{K}(\mathbf{b}, \Delta\zeta)$ die Nullmatrix gewählt wird.

Die Jakobimatrix $\mathbf{A}_1$ wird um die Ableitungen der zusätzlichen Beobachtungsgleichung (6.12) nach den Schwerefeldkorrekturen (links von 6.39) und die Jakobimatrix $\mathbf{A}_2$ um die Ableitungen nach den Hauptkomponenten (rechts von 6.39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \zeta_{ijp}}{\partial \delta \hat{C}_{nm}} &= 0 & \frac{\partial \Delta \zeta_{ijp}}{\partial \hat{z}_{ik}} &= r_{pk} \\ \frac{\partial \Delta \zeta_{ijp}}{\partial \delta \hat{S}_{nm}} &= 0 & \frac{\partial \Delta \zeta_{ijp}}{\partial \hat{z}_{jk}} &= -r_{pk} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ergänzt. Da als zusätzliche Beobachtungen Meereshöhendifferenzen über jeweils 180 Tage aus den POCM–Wasserständen dem System hinzugefügt werden, erhöhen sich die Werte ungleich Null der Matrix $\mathbf{N}_{22}$ durch die Multiplikation orthogonaler Eigenvektoren (EOF), im Vergleich zur Schätzung ohne Beobachtungen aus den POCM–Daten, jeweils im Betrag um den Wert 2.

6.3 Zusammenstellung der Ergebnisse

Mit der in Abschnitt 6.1.1 getroffenen Auswahl an Kreuzungspunktdifferenzen werden nach der in Abschnitt 6.2 behandelten Theorie Schwerefeldkorrekturen und Zeitkomponenten der Meeresspiegelschwankung geschätzt. Drei Arten an Schätzung werden durchgeführt:

- Fall 1: Schätzung der Schwerefeldkorrekturen aus Kreuzungspunktdifferenzen mit minimaler Zeitdifferenz:**
 Zur alleinigen Schätzung von Schwerefeldkorrekturen werden einfache Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 der Topex/Poseidon–Zyklen 2 bis 195 verwendet. Da sich der Meeresspiegel innerhalb weniger Tage nur geringfügig ändert, beruhen diese Kreuzungspunktdifferenzen nahezu ausschließlich auf radialen Bahnfehlern, deren Hauptursache Modellierungsungenauigkeiten des Schwerefeldes sind. Als a priori Information werden zur Schätzung des mittleren Bahnfehleranteils die Varianzen der Koeffizienten des JGM3 zur Berechnung der Matrix $\mathbf{W}$ nach (6.23) eingeführt. Somit können mit der Beobachtungsgleichung (6.5) die Schwerefeldkorrekturen $\delta \hat{C}$ und $\delta \hat{S}$ nach Gleichung (6.24) aus einfachen Kreuzungspunktdifferenzen geschätzt werden.
- Fall 2: Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdifferenzen:**
 Für die kombinierte Schätzung der Schwerefeldkorrekturen mit den Parametern der Meeresspiegelschwankung werden Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und vom Typ 2 der Topex/Poseidon–Daten der Zyklen 2 bis 195 herangezogen. Die Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 2 über 180 Tage enthalten die maximale Schwankung des Meeresspiegels (Abschnitt 6.1). In einer vorangegangenen EOF–Analyse nach Abschnitt 5.2.2.3 wird anhand der Meereshöhenmodelle (Abschnitt 5.2.2) der Topex/Poseidon–Daten der Zyklen 2 bis 195 die Schwankung des Meeresspiegels in räumliche und zeitliche Strukturen (Eigenmodi) zerlegt. Da sich der Meeresspiegel räumlich annähernd konstant verhält, werden die Raumkomponenten (EOF) als feste Information in (6.32) eingeführt und die Zeitkomponenten $\hat{\mathbf{z}}_k$ mit (6.34) geschätzt. Die Zeitkomponenten aus der EOF–Analyse der Topex/Poseidon–Daten aus Abb. 5.6 dienen als Näherungswerte $\hat{\mathbf{z}}_k$, die als Vorinformation zur Schätzung der Unbekannten $\hat{\mathbf{z}}_k$ nach (6.29) verwendet werden.
- Fall 3 a/b: Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdifferenzen und aus POCM–Meereshöhendifferenzen; mit und ohne Lücke in den Altimeterdaten:**
 Die kombinierte Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Hauptkomponenten der Meeresspiegelschwankung wird um die zusätzliche Beobachtungsgleichung (6.12) erweitert. Als Beobachtungen werden Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon–Daten der Zyklen 2 bis 195, sowie POCM–Meereshöhendifferenzen der Zyklen 2 bis 158 verwendet. Desweiteren wird die Überbrückung einer Altimeterdatenlücke mit den POCM–Meereshöhendifferenzen untersucht. Dazu wird in den Topex/Poseidon–Daten künstlich eine Lücke von einem Jahr (36 Zyklen) gelassen, welche willkürlich auf die Zyklen 101 bis 136 festgelegt wird.

Die geschätzten Schwerefeldkorrekturen sind in den Abb. 6.16, 6.17, 6.20 und 6.23 mit je sieben Graphiken dargestellt:

Die Schmetterlingsdiagramme in der oberen Reihe der Abb. zeigen die geschätzten Schwerefeldkorrekturen $\delta \hat{C}$ und $\delta \hat{S}$ (links), die zur Darstellung mit dem Erdradius multipliziert wurden. Die zonalen Koeffizienten der

Ordnung $m = 0$ sind wegen (6.5) und (6.6) mit einfachen Kreuzungspunktdifferenzen ebenso wenig schätzbar, wie die das Datum festlegenden niederen Harmonischen. Die Zahl der signifikanten Stellen der geschätzten Schwerefeldkorrekturen geben die Schmetterlingsdiagramme in den Abb. rechts an. Die Zahl ermittelt sich aus

$$\log_{10}\left(\frac{|\delta\hat{C}_{nm}|}{\hat{\sigma}_{C_{nm}}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \log_{10}\left(\frac{|\delta\hat{S}_{nm}|}{\hat{\sigma}_{S_{nm}}}\right), \quad (6.40)$$

wobei die Schätzungen $\hat{\sigma}_{C_{nm}}$ und $\hat{\sigma}_{S_{nm}}$ aus der linken Gleichung von (6.36) folgen. Für positive Werte von (6.40) sind die Größen mit der entsprechenden Zahl an Stellen signifikant. Falls sich ein negativer Wert ergibt, ist der geschätzte Parameter nicht signifikant bestimmt. Die Entwicklung der Schwerefeldkorrekturen in Kugelfunktionen und die Umrechnung mit der Normalschwere γ in Geoidundulationen $N = \frac{T}{\gamma}$ führt zu den in der zweiten Reihe der Abb. dargestellten Verbesserungen des JGM3–Schwerefeldes.

Da die Satellitenbahnen von Topex/Poseidon mit dem JGM3–Schwerefeld berechnet sind, werden die Schwerefeldkorrekturen bezüglich der Koeffizienten des JGM3–Schwerefeldes berechnet. Das JGM3 hat mit einem Entwicklungsgrad von $N = 70$ nach Gleichung (4.7) eine Auflösung bis zur Wellenlänge 570 km. Anhand des Spurenabstandes von Topex/Poseidon mit 315 km am Äquator ist maximal ein Entwicklungsgrad von $N = 63$, also einer Wellenlänge von 630 km möglich. Weitere Einschränkungen hinsichtlich des Entwicklungsgrades ergeben sich aus der Flughöhe, sowie der fehlenden Bedeckung der Kontinente und Polregionen. Da die Berechnung für höhere Grade in zunehmenden Maße umfangreicher wird und hier der langwellige Anteil interessiert, wird nur bis Grad und Ordnung 10 entwickelt. Die Schwerefeldkoeffizienten von JGM3 bis Grad und Ordnung 10 sind in dem linken Bild der Abb. 6.13 dargestellt, wobei die Koeffizienten mit dem Erdradius multipliziert wurden. Das Bild rechts daneben zeigt das aus den Koeffizienten bis Grad und Ordnung 10 errechnete Geoid.

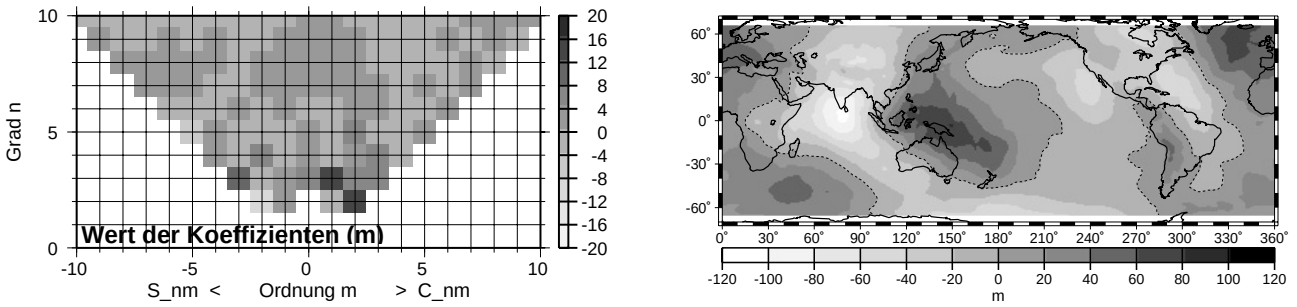


Abb. 6.13: Links: Schwerefeldkoeffizienten (m) bis Grad und Ordnung 10 von JGM3. rechts: JGM3–Geoid bis Grad und Ordnung 10.

Aus den geschätzten Schwerefeldkorrekturen leiten sich weitere vier Graphiken des radialen Bahnfehlers ab: Die Graphiken in der dritten Reihe der Abbildungen geben die auf- und absteigenden radialen Bahnfehler nach (4.56) an. Die vierte Reihe der Abbildungen enthält links den doppelten variablen Bahnfehleranteil nach (4.58) und rechts den mittleren Bahnfehleranteil nach (4.57). Der zweifache variable Bahnfehleranteil entspricht in geglätteter Version nach (6.4) den einfachen Kreuzungspunktdifferenzen. Das Bild kann also mit den Mittelwerten der Kreuzungspunktdifferenzen in den oberen Graphiken von Abb. 6.8 verglichen werden. Der mittlere Bahnfehleranteil kann aus einfachen Kreuzungspunktdifferenzen nur mit Verwendung von Zusatzinformation (Abschnitt 6.2.1) gewonnen werden.

Abbildung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der drei Arten an Schätzungen werden hier zusammengestellt:

Fall 1: Schätzung der Schwerefeldkorrekturen aus Kreuzungspunktdifferenzen mit minimaler Zeitdifferenz:

Die Abb. 6.16 und 6.14 zeigen die Ergebnisse der Schätzung zu Fall 1. Aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 der Topex/Poseidon-Daten der Zyklen 2 bis 195 wurden nur Schwerefeldkorrekturen geschätzt. Die geschätzten Korrekturen der Schwerefeldkoeffizienten (Abb. 6.16) bewegen sich im Bereich von ± 3 mm, was zu Verbesserungen von ± 3 cm des Geoids führt. Der radiale Bahnfehler von Topex/Poseidon beträgt weniger als drei Zentimeter (vgl. Abb. 6.16). Diese Größenordnung des Bahnfehlers geben auch [TAPLEY et al. 1994a] an.

In dem Histogramm der Residuen in Abb. 6.14 zeichnet sich im Vergleich zu dem Histogramm der Beobachtungen (Abb. 6.8) ein deutlicher Gewinn ab. Die Verbesserungen streuen weit weniger als die Beobachtungen.

Auch weisen die zeitlichen Mittelwerte in Abb. 6.14 die in Abb. 6.8 zu sehende Systematik nicht mehr auf. Dafür sind andeutungsweise die Satellitenspuren zu erkennen.

Fall 2: Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdifferenzen:

In den Abb. 6.17 bis 6.15 sind die Ergebnisse der simultanen Schätzung der Schwerefeldkorrekturen mit den Zeitkomponenten der ersten fünf Eigenmodi der Meeresspiegelschwankung gezeigt. Die Schätzung wurde mit den Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon-Daten der Zyklen 2 bis 195 durchgeführt. Die geschätzten Schwerefeldkorrekturen haben die gleiche Größenordnung wie die Schwerefeldkorrekturen, die aus der alleinigen Schätzung aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 folgen (Abb. 6.16). Die Zahl der signifikant geschätzten Koeffizienten ist allerdings deutlich geringer.

Die geschätzten Hauptkomponenten des ersten Eigenmodus sind als Kreuze und die ursprünglichen Hauptkomponenten des ersten Eigenmodus (Vorinformation) der EOF-Analyse als durchgezogene Linie in Abb. 6.18 dargestellt. Alle Hauptkomponenten sind signifikant geschätzt mit mittleren Fehlern im Bereich von ± 0.1 . Die geschätzten Hauptkomponenten weichen von den ursprünglichen Hauptkomponenten aus der EOF-Analyse um bis zu eine Einheit ab. Nach Multiplikation mit den Raumkomponenten (Abb. 5.6) entspricht dies einer Korrektur von $4 \text{ cm} \pm 4 \text{ mm}$. Die gute Übereinstimmung erklärt sich durch die Verwendung gleicher Daten. Beide Berechnungen stammen aus Topex/Poseidon-Daten, die lediglich unterschiedlich aufbereitet wurden, für die EOF-Analyse zu Meereshöhenmodellen (nach Abschnitt 5.2.2) und für die kombinierte Schätzung zu Kreuzungspunktdifferenzen.

Anhand der Differenz der Zeitpunkte, über die die Kreuzungspunkte gebildet worden sind, werden die Beobachtungen $\mathbf{b}$ in $\mathbf{b}_{T_{yp1}} = (\Delta K_{ij,T_{yp1}}^{ad})$ und $\mathbf{b}_{T_{yp2}} = (\Delta K_{ij,T_{yp2}}^{ad})$ unterschieden. Entsprechend werden nach Gleichung (6.35) die Verbesserungen ebenfalls in $\hat{\mathbf{v}}_{T_{yp1}}$ und $\hat{\mathbf{v}}_{T_{yp2}}$ aufgeteilt. In Abb. 6.19 sind für jeden Gitterpunkt die Mittelwerte der beiden Anteile $\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$ und $\mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2$ getrennt in Abhängigkeit von den Beobachtungen vom Typ 1 (obere Reihe) und Typ 2 (mittlere Reihe) zusammengestellt. Entsprechend Gleichung (6.35) ergibt die Summe von $\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$ (linkes oberes Bild von Abb. 6.19) und $\mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2$ (Bild links Mitte von Abb. 6.19) der Beobachtungen vom Typ 1 in Abzug der Beobachtungen $\mathbf{b}_{T_{yp1}}$ (linkes oberes Bild von Abb. 6.8) die Residuen $\hat{\mathbf{v}}_{T_{yp1}}$ (linkes unteres Bild von Abb. 6.19). Gleiches gilt für Typ 2, deren Bilder jeweils in der rechten Spalte der Abb. 6.19 und 6.8 stehen. Die Anpassung des Modells an die Beobachtungen zeigt sich in den Verbesserungen; in den Residuenplots sind die systematischen Strukturen von Abb. 6.8 weitestgehend aufgehoben.

Die Histogramme der geschätzten Verbesserungen (Abb. 6.15) zeigen im Vergleich zu den Histogrammen der Beobachtungen (Abb. 6.8) eine deutliche Verbesserung. Während die Beobachtungen vom Typ 1 und vom Typ 2 (links und rechts von Abb. 6.8) flache Kurven zeigen, bilden die Histogramme der Residuen vom Typ 1 und vom Typ 2 (links und rechts von Abb. 6.15) steilere Kurven mit mehr Werten um Null.

Zusätzlich zu dem Varianzfaktor $\hat{\sigma}_o^2$ a posteriori (2.44) werden ebenfalls für die zwei Arten an Beobachtungen $\Delta \mathbf{K}_{T_{yp1}}, \Delta \mathbf{K}_{T_{yp2}}$ Varianzfaktoren a posteriori $\hat{\sigma}_{o,T_{yp1}}^2, \hat{\sigma}_{o,T_{yp2}}^2$ geschätzt. Die Genauigkeiten a posteriori liegen unter 11 cm, wobei die Genauigkeit der Anpassung an die Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 mit bis zu 20 cm Differenz ca. 7 cm und an die Kreuzungspunkte vom Typ 2 mit bis zu 40 cm Differenz ca. 13 cm erreichen. Eine bessere Modellanpassung ist mit der Verwendung von nur fünf Eigenmodi nicht zu erwarten, da die ersten fünf Eigenmodi nur 50 % der Meeresspiegelschwankung (Tabelle 5.3) beschreiben. Es wurden nur fünf Eigenmodi gewählt um das Verfahren zu testen. Für genauere Betrachtungen sind selbstverständlich mehr Eigenmodi zu berücksichtigen.

Fall 3 a: Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdifferenzen und aus POCM-Meereshöhendifferenzen; ohne Lücke in den Altimeterdaten:

Die Ergebnisse der simultanen Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Zeitkomponenten der ersten fünf Eigenmodi unter Einbeziehung der $\Delta \zeta_{ij}$ werden in den Abb. 6.20 bis 6.22 gezeigt. Geschätzt wurde aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon-Daten der Zyklen 2 bis 195 und den POCM-Meereshöhendifferenzen der Zyklen 2 bis 158.

Die Schwerefeldkorrekturen (Abb. 6.20) unterscheiden sich in ihren Werten nicht stark von den bisherigen Schätzungen (Abb. 6.16 und 6.17). Mit Ausnahme der Koeffizienten $\delta \hat{C}_{22}, \delta \hat{S}_{22}, \delta \hat{S}_{33}, \delta \hat{C}_{44}$ sind alle Koeffizienten signifikant geschätzt.

Alle Hauptkomponenten sind signifikant mit mittleren Fehlern im Bereich von ± 0.2 geschätzt. Die geschätzten Hauptkomponenten des ersten Eigenmodus (Kreuze in Abb. 6.21) weichen auf der Ordinate um bis zu vier Einheiten von den Näherungswerten (durchgezogene Linie in Abb. 6.21) ab. Nach Multiplikation mit dem

Raumvektor des ersten Eigenmodus (Abb. 5.6) ergibt das eine Differenz zwischen den genäherten und geschätzten Hauptkomponenten von maximal $16 \text{ cm} \pm 8 \text{ mm}$ (bei einer Variabilität in den Kreuzungspunktdifferenzen von 40 cm). In Abb. 6.22 sind die Residuen in zeitlichen Mittelwerten je Gitterpunkt und in Histogrammen dargestellt.

Ab Zyklus 158 ohne die zusätzlichen Meereshöhendifferenzen aus POCM gleichen die geschätzten Hauptkomponenten wieder stärker der Vorinformation.

Fall 3 b: Simultane Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunktdifferenzen über große Zeitdifferenzen und aus POCM–Meereshöhendifferenzen; mit Lücke in den Altimeterdaten:

Die Ergebnisse der simultanen Schätzung der Schwerefeldkorrekturen und der Zeitkomponenten mit einer Lücke in den Altimeterdaten sind in den Abb. 6.23 bis 6.25 zu sehen. Die Topex/Poseidon–Daten wurden nicht durchgängig von Zyklus 2 bis 195 verwendet, sondern nur Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon–Daten der Zyklen 2 bis 100 und 137 bis 195. Die Lücke von 36 Zyklen (einem Jahr) in den Topex/Poseidon wird mit den POCM–Meereshöhendifferenzen der Zyklen 2 bis 158 überbrückt. Im Vergleich zur Schätzung ohne Lücke (Abb. 6.21) weichen die geschätzten Hauptkomponenten (Kreuze) von den Näherungswerten (durchgezogene Linie) in Abb. 6.24 an der Stelle der Lücke um ca. eine Einheit voneinander ab.

Unter Hinzunahme der POCM–Daten (in Abb. 6.21) weichen die geschätzten Hauptkomponenten um bis zu drei Einheiten, also bis zu 12 cm von den Näherungswerten ab. Die Lücke in den Altimeterdaten der Zyklen 100 bis 136 wird durch die POCM–Daten soweit gefüllt, daß die Struktur erhalten bleibt (siehe Abb. 6.24). Allerdings sind auch hier wiederum die Amplituden größer als bei der Schätzung mit ausschließlicher Verwendung der Topex/Poseidon–Daten (Abb. 6.18), jedoch kleiner als bei der Schätzung mit Hinzunahme der POCM–Daten (Abb. 6.21). An der Lücke weichen die geschätzten Hauptkomponenten um ca. zwei Einheiten, d.h. um 8 cm von der Vorinformation ab.

Damit ist die Überbrückung einer Lücke in den Altimeterdaten mit POCM–Meereshöhendifferenzen exemplarisch gelungen. Unter diesen relativ günstigen Voraussetzungen erweist sich diese Methode der simultanen Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung als geeignet. Selbstverständlich ist dieses Verfahren für verschiedene Missionen zu testen, um das langfristige Ziel der Erstellung einer langen Beobachtungsreihe zu erreichen.

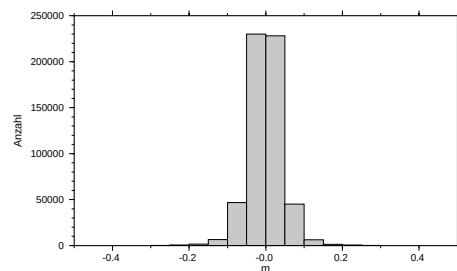
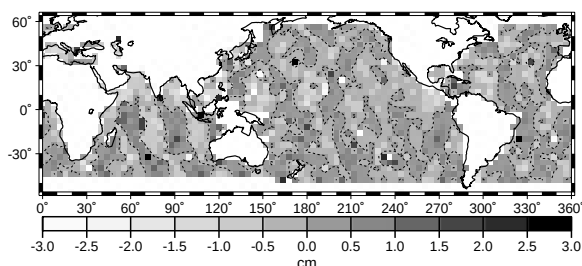


Abb. 6.14: (Fall 1) Residuen in zeitlichem Mittelwert (links) und Histogramm (rechts).

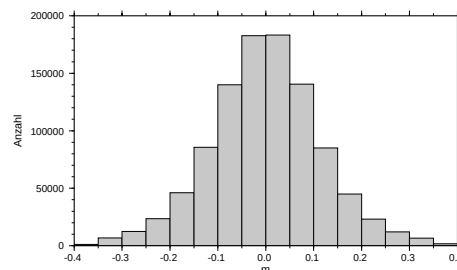
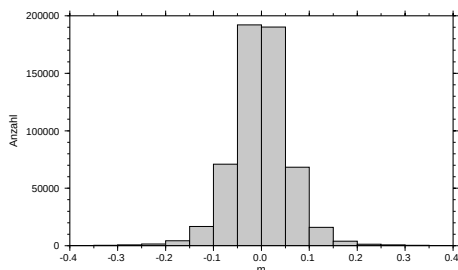


Abb. 6.15: (Fall 2) Histogramme der Verbesserungen vom Typ 1 (links) und vom Typ 2 (rechts).

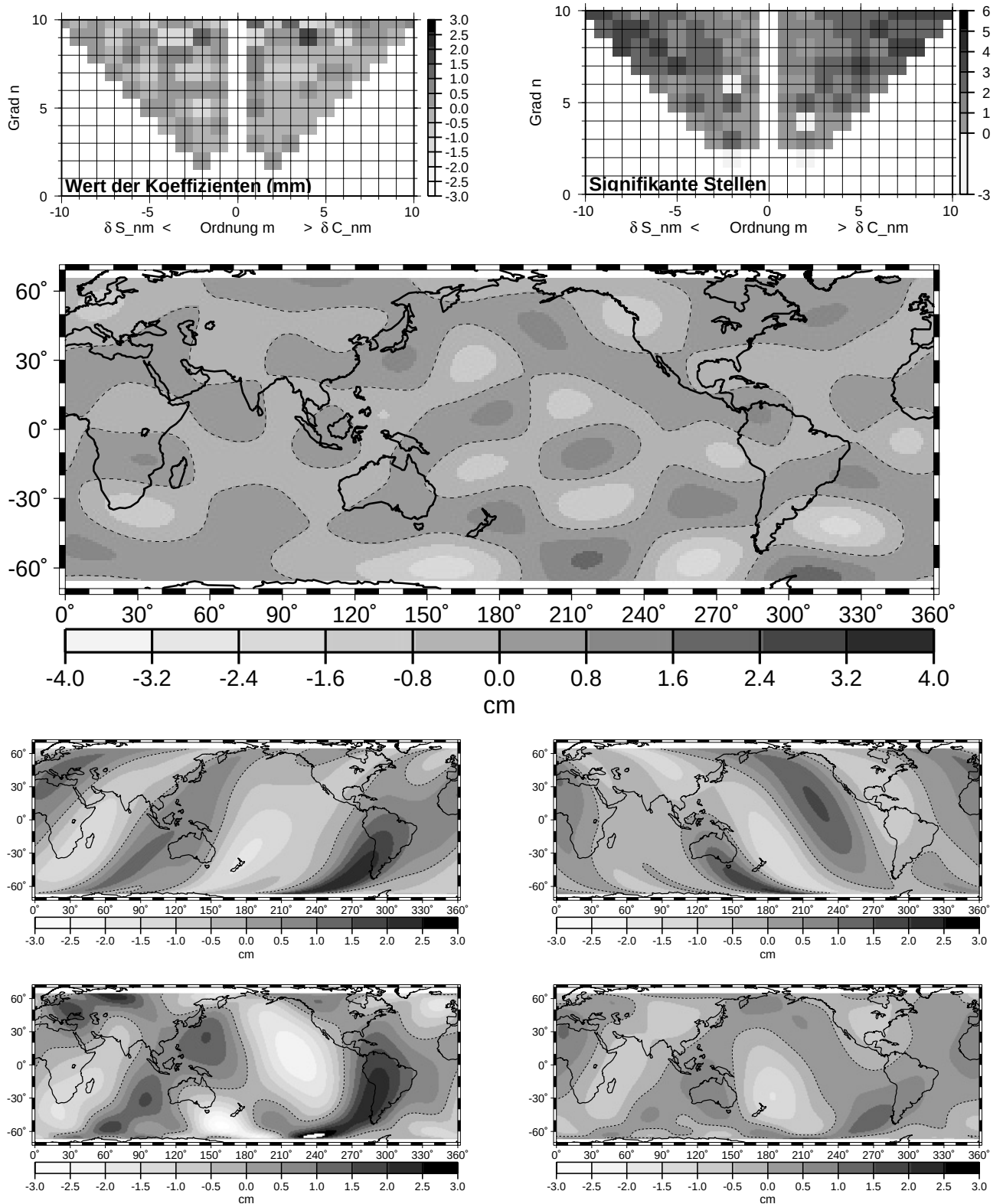


Abb. 6.16: (Fall 1) Schwerefeldkorrekturen bis Grad und Ordnung 10 aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 der Topex/Poseidon-Zyklen 2 bis 195. Oben: Schwerefeldkorrekturen (linke Graphik), Anzahl der signifikanten Stellen der geschätzten Schwerefeldkorrekturen (rechte Graphik); 2. Reihe: Korrekturen der Geoidundulationen des JGM3; 3. Reihe: Aufsteigender Bahnfehler (linke Graphik), Absteigender Bahnfehler (rechte Graphik); Unten: Doppelter variabler Bahnfehleranteil (linke Graphik), mittlerer Bahnfehleranteil (rechte Graphik). Die gestrichelte Linie gibt jeweils die Nulllinie an.

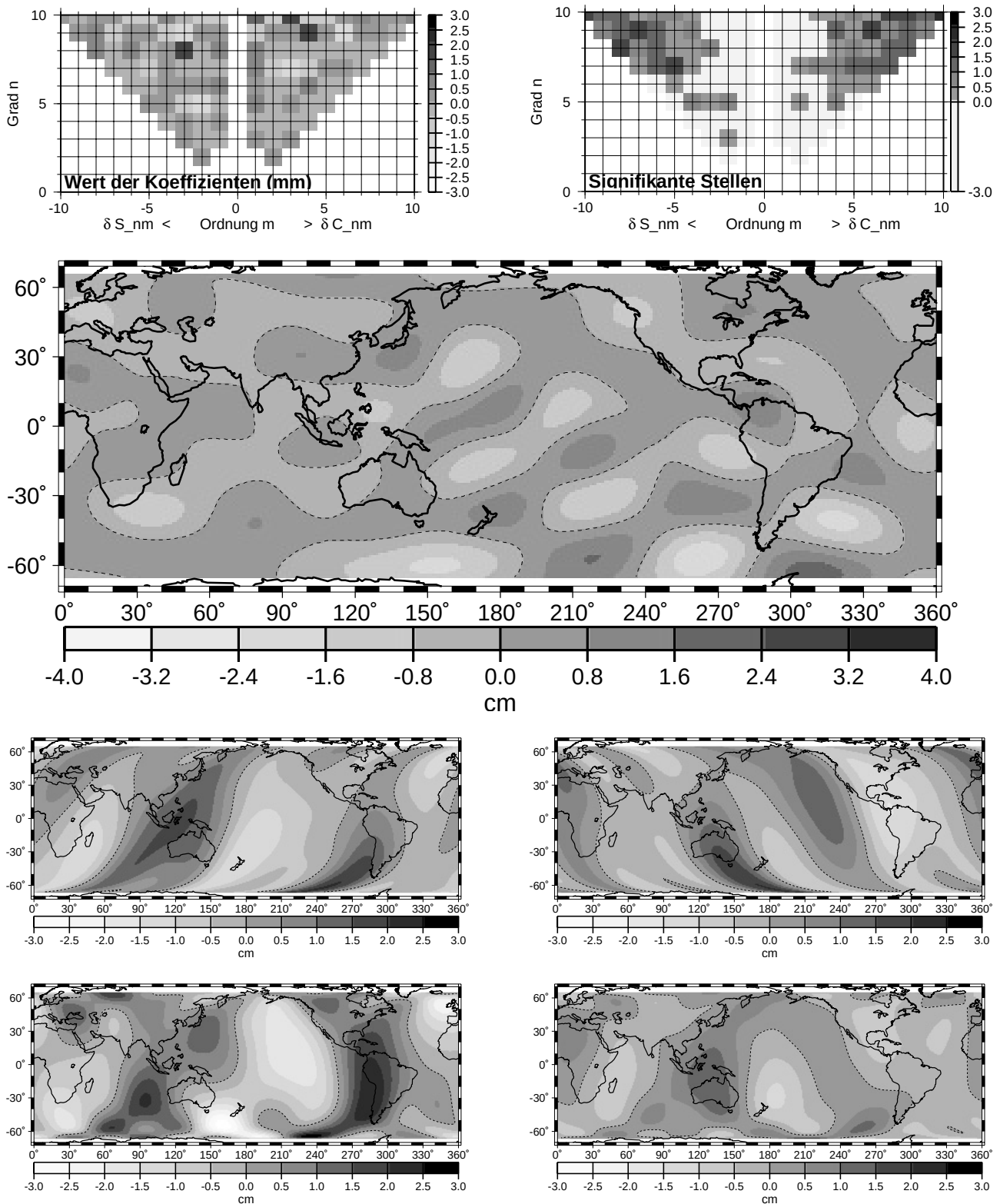


Abb. 6.17: (Fall 2) Schwerefeldkorrekturen bis Grad und Ordnung 10 simultan mit den Hauptkomponenten der ersten 5 Eigenmodi aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon-Zyklen 2 bis 195. Oben: Schwerefeldkorrekturen (linke Graphik), Anzahl der signifikanten Stellen der geschätzten Schwerefeldkorrekturen (rechte Graphik); 2. Reihe: Korrekturen der Geoidundulationen des JGM3; 3. Reihe: Aufsteigender Bahnfehler (linke Graphik), Absteigender Bahnfehler (rechte Graphik); Unten: Doppelter variabler Bahnfehleranteil (linke Graphik), mittlerer Bahnfehleranteil (rechte Graphik). Die gestrichelte Linie gibt jeweils die Nulllinie an.

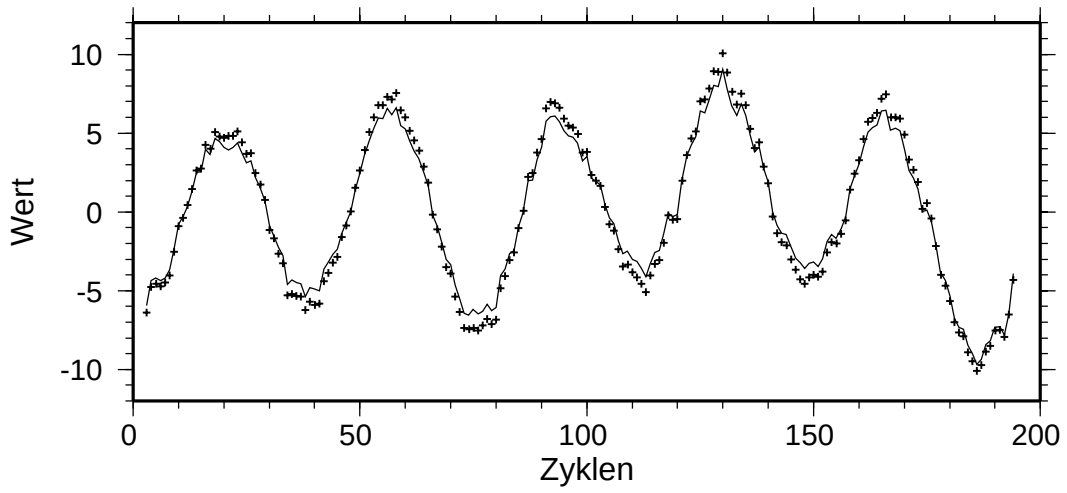


Abb. 6.18: (Fall 2) Hauptkomponenten des ersten Eigenmodus.

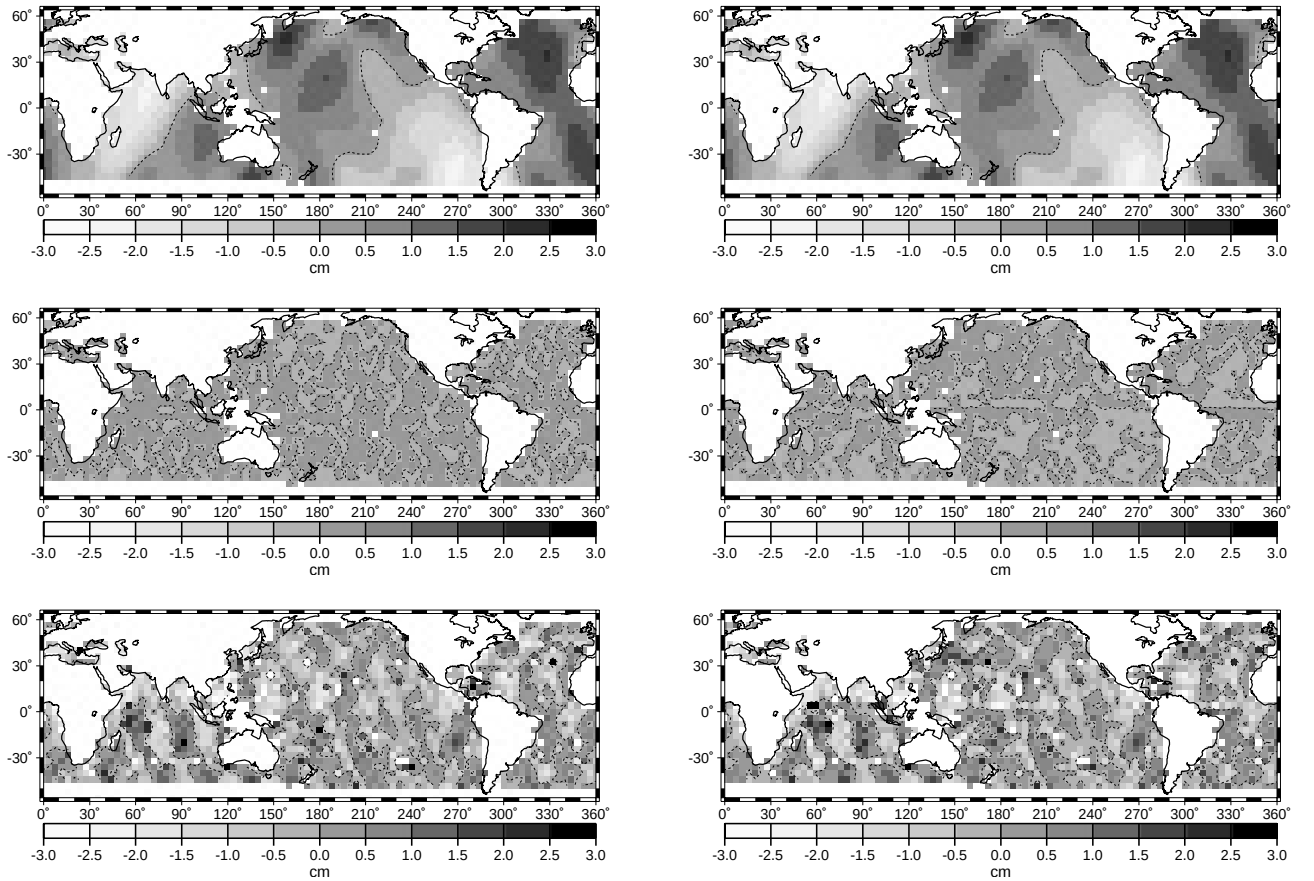


Abb. 6.19: (Fall 2) Die linke Spalte gibt jeweils die Komponenten bezüglich der Beobachtungen vom Typ 1 an, die rechte Spalte zu den Beobachtungen vom Typ 2. Oben: An jedem Gitterpunkt der Mittelwert von $\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$; Mitte: An jedem Gitterpunkt der Mittelwert von $\mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2$; Unten: An jedem Gitterpunkt der Mittelwert der Residuen $\hat{\mathbf{v}}$.

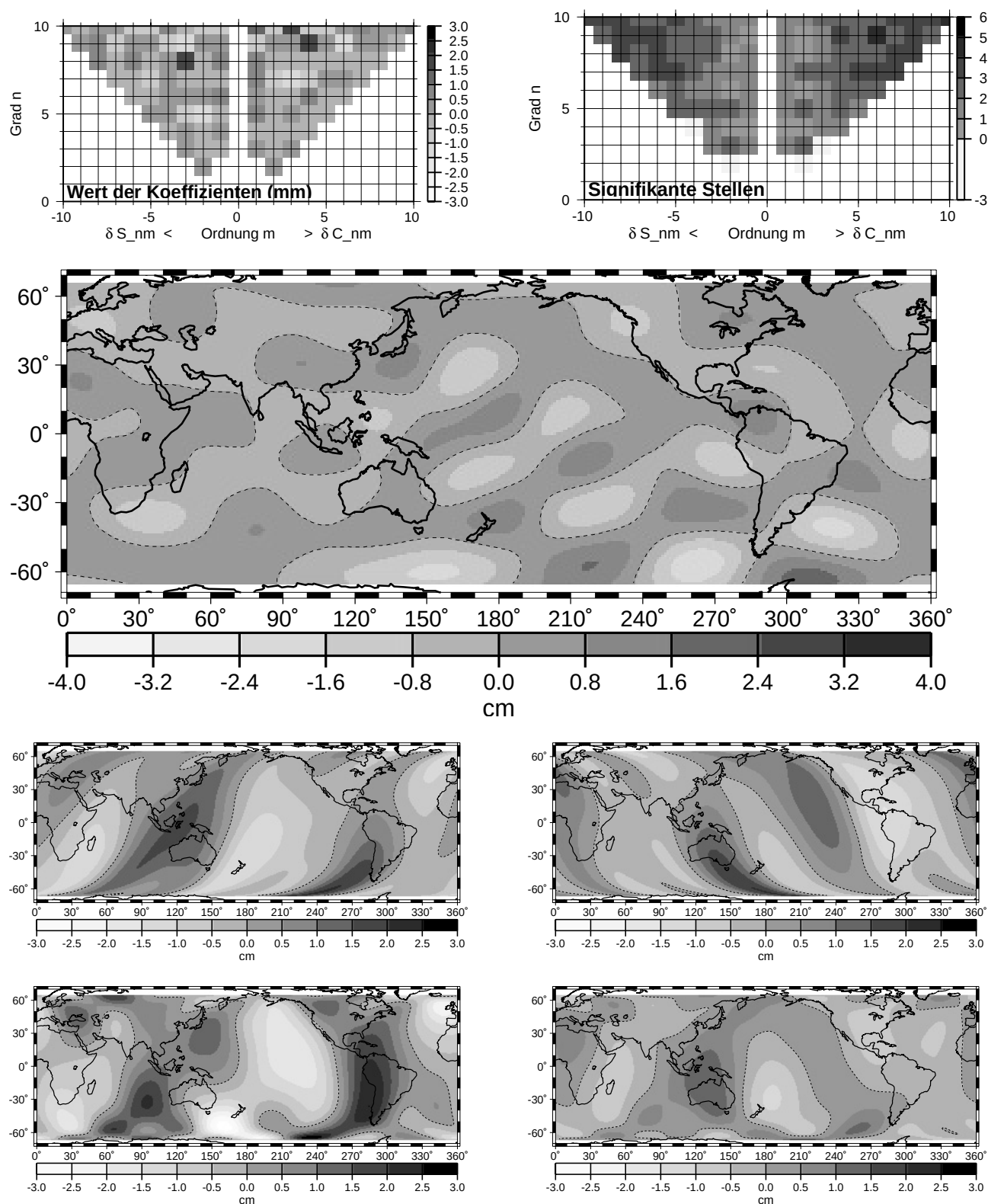


Abb. 6.20: (Fall 3 a) Schwerefeldkorrekturen bis Grad und Ordnung 10 simultan mit den ersten 5 Eigenmodi der Zeitkomponenten aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon-Zyklen 2 bis 195 und POCM-Meereshöhendifferenzen Zyklen 2 bis 158 geschätzt. Oben: Schwerefeldkorrekturen (linke Graphik), Anzahl der signifikanten Stellen der geschätzten Schwerefeldkorrekturen (rechte Graphik); 2. Reihe: Korrekturen der Geoidundulationen des JGM3; 3. Reihe: Aufsteigender Bahnfehler (linke Graphik), Absteigender Bahnfehler (rechte Graphik); Unten: Doppelte variabler Bahnfehleranteil (linke Graphik), mittlerer Bahnfehleranteil (rechte Graphik). Die gestrichelte Linie gibt jeweils die Nulllinie an.

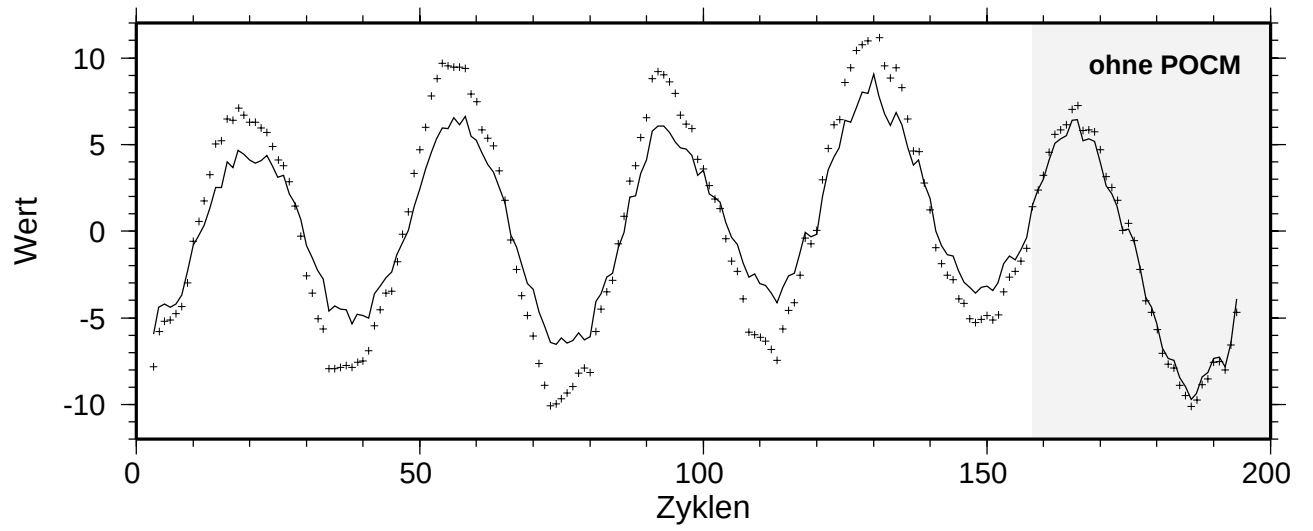


Abb. 6.21: (Fall 3 a) Zeitkomponenten des ersten Eigenmodus.

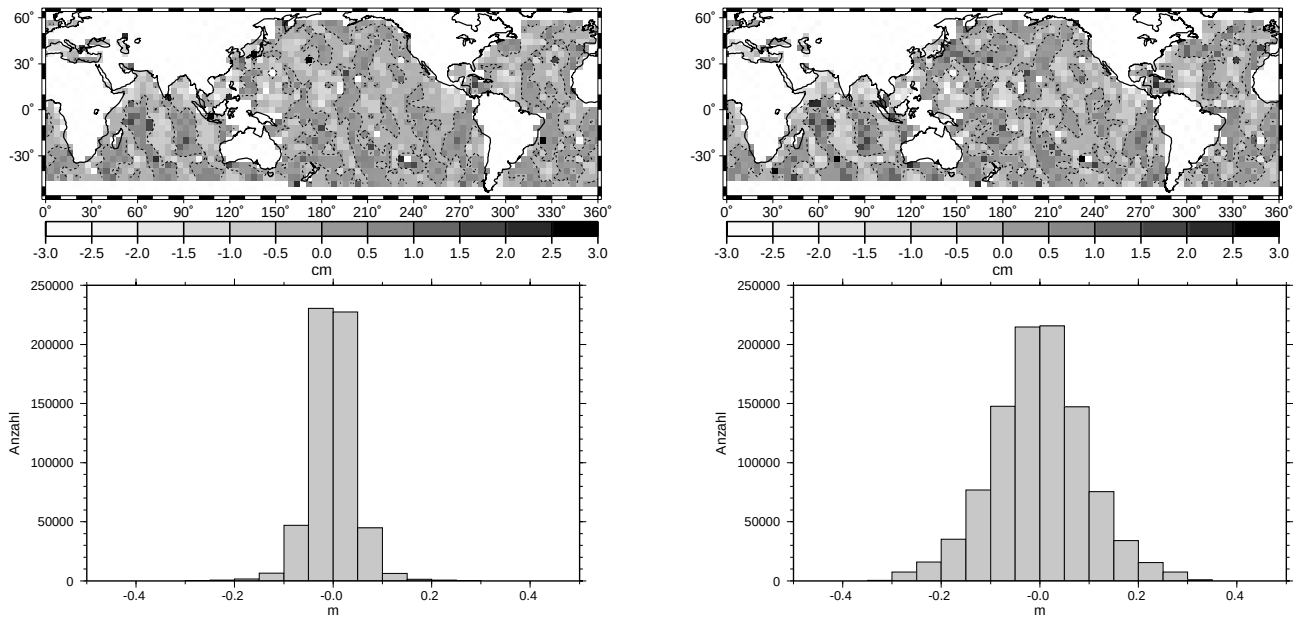


Abb. 6.22: (Fall 3 a) Zeitliche Mittelwerte je Gitterpunkt und Histogramme der Residuen $\hat{v}_{Typ1}$ (links) und der $\hat{v}_{Typ2}$ (rechts).

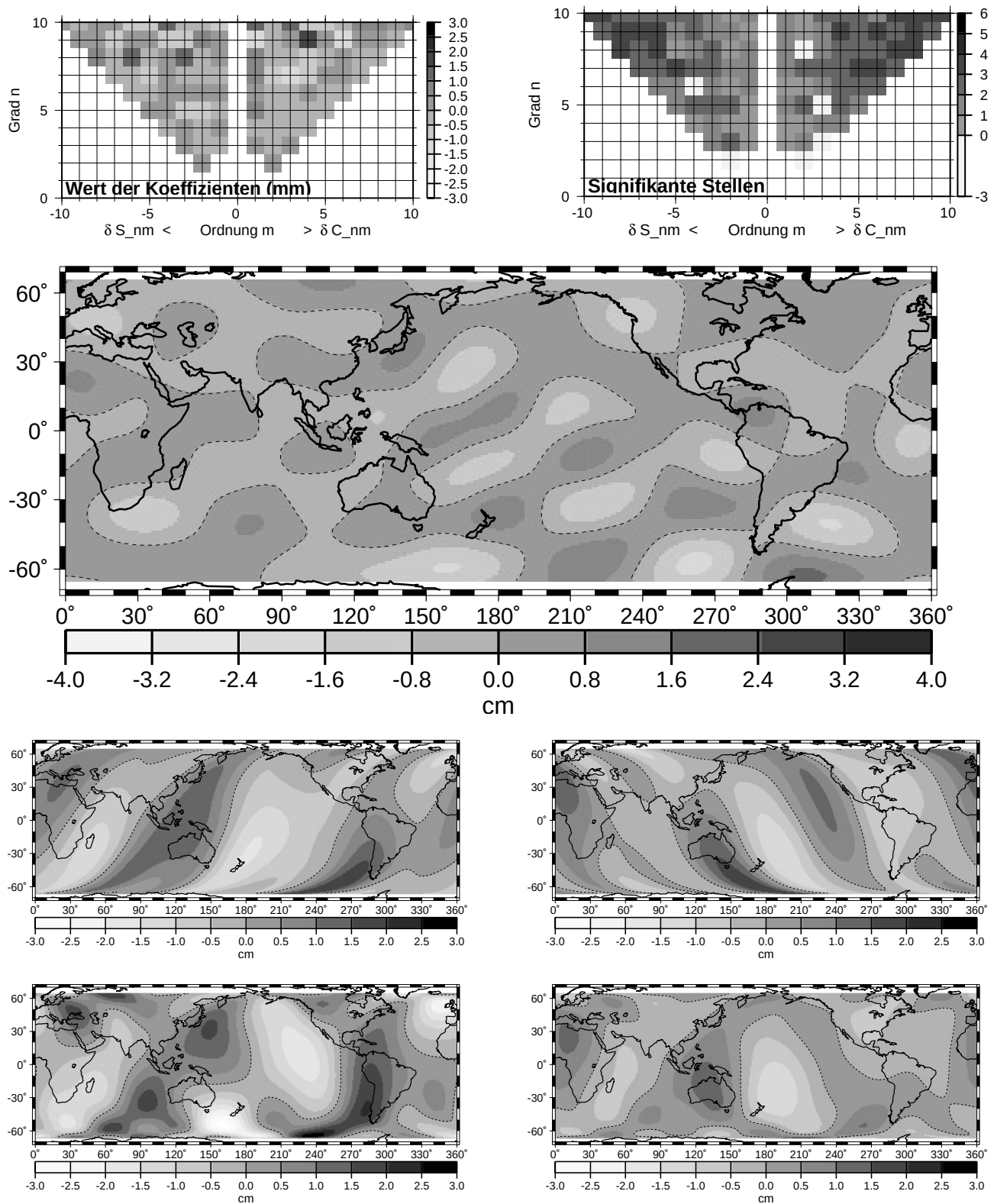


Abb. 6.23: (Fall 3 b) Schwerefeldkorrekturen bis Grad und Ordnung 10 simultan mit den ersten 5 Eigenmodi der Zeitkomponenten aus Kreuzungspunktdifferenzen vom Typ 1 und Typ 2 der Topex/Poseidon-Zyklen 2 bis 100 und 137 bis 195 und POCM-Meereshöhendifferenzen Zyklen 2 bis 158 geschätzt. Oben: Schwerefeldkorrekturen (linke Graphik), Anzahl der signifikanten Stellen der geschätzten Schwerefeldkorrekturen (rechte Graphik); 2. Reihe: Korrekturen der Geoidundulationen des JGM3; 3. Reihe: Aufsteigender Bahnfehler (linke Graphik), Absteigender Bahnfehler (rechte Graphik); Unten: Doppelter variabler Bahnfehleranteil (linke Graphik), mittlerer Bahnfehleranteil (rechte Graphik). Die gestrichelte Linie gibt jeweils die Nulllinie an.

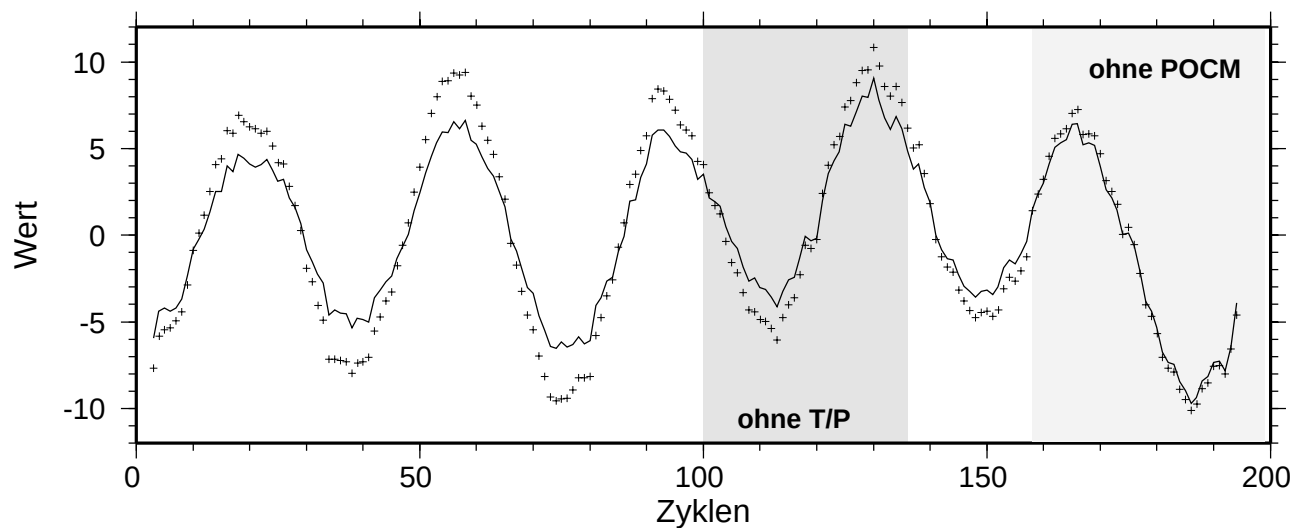


Abb. 6.24: (Fall 3 b) Zeitkomponenten des ersten Eigenmodus.

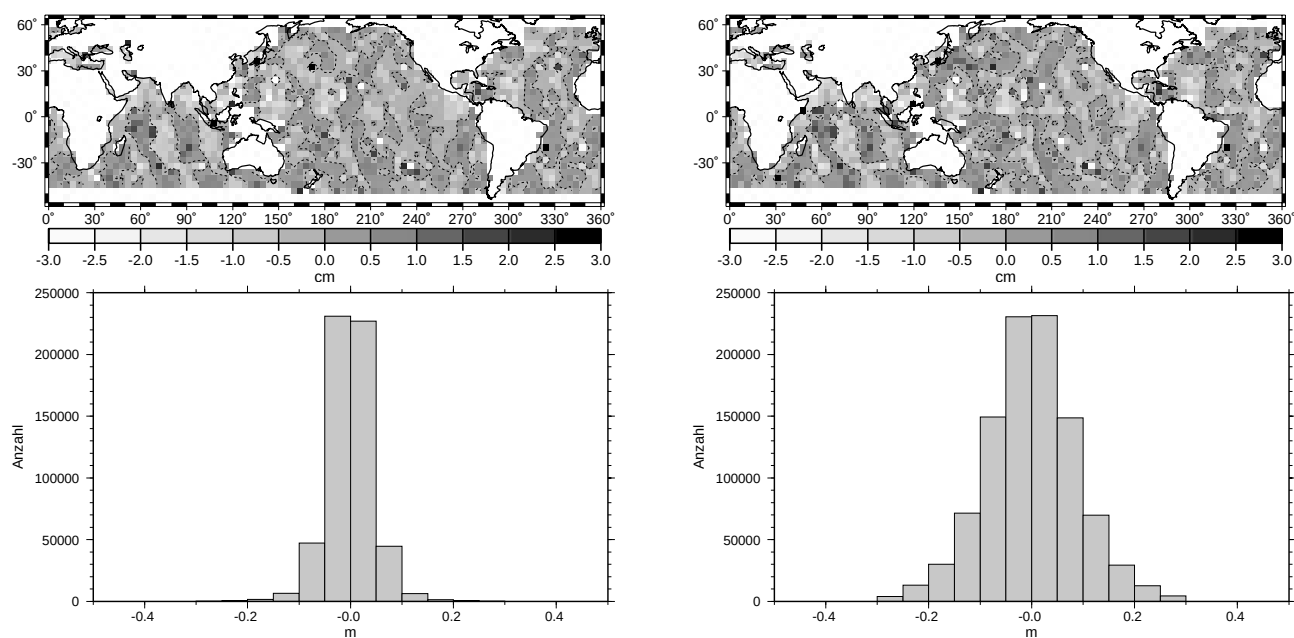


Abb. 6.25: (Fall 3 b) Zeitliche Mittelwerte und Histogramme der Residuen $\hat{v}_{Typ1}$ (links) und $\hat{v}_{Typ2}$ (rechts).

7. Ausblick

In dieser Arbeit wurden erstmals aus Kreuzungspunktdifferenzen über kleine und große Zeitunterschiede Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankung simultan geschätzt. Im Vergleich zu den bisherigen Arbeiten wurde mit den Schwerefeldkorrekturen gleichzeitig auch die Meeresspiegelschwankung aus Kreuzungspunkten über große Zeitdifferenzen geschätzt (siehe Kapitel 6).

Mit einer langen Beobachtungsreihe von Altimeterdaten lassen sich z.B. klimarelevante Fragen über die Veränderungen der großskaligen Meeresströmungen und des globalen Meeresspiegels untersuchen. Bei den neueren Missionen seit 1992 sind Verknüpfungen über gemischte Kreuzungspunkte leicht möglich, da mehrere Altimetermission stattfinden, die sich zudem zeitlich überlappen. Will man aber zeitlich noch etwas zurückgehen, ist es sinnvoll die Geosat-Mission miteinzubeziehen. Bei der Verknüpfung nicht zeitlich überlappender Altimetermissionen ergeben sich Kreuzungspunktdifferenzen mit großen Zeitunterschieden. Dadurch enthalten die Kreuzungspunktdifferenzen jedoch neben dem Bahnfehler auch die Meeresspiegelschwankung. Diese Arbeit beschreibt einen Weg, wie beide Komponenten gleichzeitig geschätzt werden können. Zusätzlich wird exemplarisch mit den Daten des Altimetersatelliten Topex/Poseidon und des hydrodynamischen Simulationsmodells *Parallel Ocean and Climate Model* (POCM) gezeigt, wie sich eine Altimeterdatenlücke überbrücken läßt. Ein anderer Weg zur Überbrückung einer Altimeterdatenlücke ist z.B. die Verwendung von Pegelregistrierungen [MITCHUM 1994]. Für die Zukunft bringt die Kombination mehrerer verschiedener Möglichkeiten vielleicht die stabilste Art einer Überbrückung der Datenlücke zwischen Geosat und ERS1. In einem weiteren Schritt ist die Verbindung mehrerer Missionen z.B. Topex/Poseidon mit ERS1 und Geosat zu untersuchen. Dabei sind insbesondere Datumsunterschiede zwischen den Missionen zu berücksichtigen. Verschiedene Satellitenmissionen beziehen sich auf unterschiedliche Koordinatensysteme, weshalb die Meßreihen verschiedener Satellitenmissionen unterschiedliche Datumsfestlegungen beinhalten können. Die Überbrückung der Missionslücke von etwa 2 Jahren zwischen Geosat und ERS1 ermöglicht das Aufstellen einer langen Beobachtungsreihe.

Sobald die neuen Schwerefeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE gestartet sind und eine genauere Kenntnis des Schwerefeldes liefern, erlauben die altimetrischen Höhen eine direkte Berechnung der Meerestopographie. Mit den unabhängigen Schwerefeldmissionen lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit validieren.

Mit einem verbesserten Schwerefeld sind zum einen die Satellitenbahnen genauer bestimmbar und zum anderen wird das Geoid so genau bekannt, daß Meereshöhen über einer einheitlichen Höhenbezugsfläche berechnet werden können. Das bietet der Ozeanographie die Möglichkeit, mit absoluten Höhen ozeanübergreifend zu arbeiten. Dadurch werden die ozeanographischen Untersuchungen unabhängig von einem level-of-no-motion, das in jedem Ozean mit einer anderen Tiefenlage angenommen wird und nur eine relative Berechnung innerhalb einzelner Ozeanbecken erlaubt. Somit liefert diese Arbeit auch einen vorbereitenden Beitrag zur Erforschung der globalen Ozeandynamik und des Klimas, der Zielstellung des World Ocean Circulation Experiments (WOCE), in dessen Rahmen diese Arbeit erstellt wurde.

Symbolverzeichnis

Schätzverfahren

$\mathbf{b} = (b_i)$	Beobachtungen $i = 1, \dots, n$
$\mathbf{x} = (x_j)$	Unbekannte $j = 1, \dots, u$
n	Anzahl der Beobachtungen
u	Anzahl der Unbekannten
$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = (\overset{\circ}{x}_j)$	Näherungswerte der Unbekannten
$\mathbf{v} = (v_i)$	Verbesserungen
$\mathbf{w} = (w_i)$	Widerspruchsvektor
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{A}$	Design- oder Jakobimatrix
$\mathbf{N}$	Normalgleichungsmatrix
$\mathbf{D}$	Dispersionsmatrix, Varianz-Kovarianzmatrix
r	Redundanz
$\mathbf{P}_{\text{bb}}$	Gewichtsmatrix
$\mathbf{Q}_{\text{bb}}$	Gewichtskoeffizientenmatrix
$\sigma_{\circ}^2$	Varianzfaktor
σ_i^2	Varianz
Σ	Kovarianzmatrix
μ	Erwartungswerte
$\mathbf{y}, \mathbf{z}$	Zufallsvektoren
$p(\mathbf{y})$	Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeit, Dichte
$p(\mathbf{y} \mathbf{z})$	bedingte Wahrscheinlichkeit von $\mathbf{y}$ unter der Bedingung von $\mathbf{z}$
$\tau = \frac{1}{\sigma_{\circ}^2}$	Gewichtsfaktor
$N(\mu, \Sigma)$	multivariate Normalverteilung
G	Gammaverteilung
NG	Normalgammaverteilung
$F_{(t, r-t)}$	Fisher-Verteilung
$F_{(1-\alpha, t, r)}$	Fraktilwert der Fisher-Verteilung
T	Testgröße
$t_{(r)}$	Studentverteilung
$t_{(1-\alpha, r)}$	Fraktilwert der Studentverteilung

Satellitenaltimetrie

$\mathbf{r}$	geozentrischer Ortsvektor des Satelliten
r	geozentrischer Abstand
R	Erdradius, geozentrischer Ortsvektor
ρ	topozentrischer Ortsvektor
$\mathbf{G}$	Gravitationskraft
$\mathbf{K}_i$	Störkräfte
$\mathbf{s}$	Störbeschleunigungen
G_e	Gravitationskonstante der Erde
M_e	Erdmasse
m_s	Satellitenmasse
a	große Halbachse
e	Exzentrizität
i	Inklination
Ω	Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens
K	aufsteigender Bahnknoten
ω	Argument des Perigäums
τ	Epoche, Zeitpunkt des Perigäums
M	mittlere Anomalie
E	exzentrische Anomalie
ν	wahre Anomalie

$\bar{n}$	Winkelgeschwindigkeit der Erde
H_{sat}	Höhe des Satelliten über dem Referenzellipsoid
H_{alt}	gemessene Altimeterhöhe
c	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Radarwelle
Δt	Laufzeit der Radarwelle
h	altimetrische Höhe, Meereshöhe über dem Referenzellipsoid
H	Meerestopographie (Abweichung der aktuellen Meeresoberfläche vom Geoid)
Δr	radialer Bahnfehler
v	altimetrischer Meßfehler
N	Geoidundulation
M_2, S_2, N_2, K_2	halbtägige Gezeitenfrequenzen
K_1, O_1, P_1	eintägige Gezeitenfrequenzen
rss	root sum square
f_m	Einzelfehler

Schwerefeldkorrekturen

T	Störpotential
U	Normalpotential
V	Gravitationspotential
W	Schwerefeld
Z	Zentrifugalpotential
N	maximaler Entwicklungsgrad
n	Grad
m	Ordnung
ω	Rotationsgeschwindigkeit der Erde
λ, φ	Länge, Breite
λ	Auflösung
$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$	normierte harmonische Koeffizienten
$\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm}$	Koeffizienten des Normalpotentials
$\bar{c}_n$	Gradvarianzen
$\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$	Schwerefeldkoeffizienten des Störpotentials
$\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$	Schwerefeldkorrekturen
$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$	normierte Legendrefunktion
$f(\varphi, \lambda)$	Funktionswert an einem Punkt mit Länge λ und Breite φ .
F_{nmp}	Neigungsfunktion
G_{npq}	Exzentrizitätsfunktion
S_{nmpq}	Funktion
ψ	Argument von S_{nmpq}
α_i	Keplerelemente $i = 1, \dots, 6$
$\Delta \alpha_{i,nmpq}$	Einzelstörungen der Keplerelemente
$\Delta \alpha_i$	Gesamtstörung der Keplerelemente
A_o, A_s	Fourierkoeffizienten
J_n	Besselfunktionen der Ordnung n
Θ	Sternzeit Greenwich
Υ	Frühlingspunkt
α	Rektaszension
$\Omega - \theta$	Länge des aufsteigenden Bahnknotens
$\lambda - \varphi$	Länge und Breite des Satelliten
S	Satellitenprojektion
K	aufsteigender Bahnknoten
F	Fußpunkt
O	Geozentrum
$K - S$	Satellitenspur
Q_{nm}^c	gerade Funktion $Q_{nm}^c(a, i, \varphi)$
Q_{nm}^s	ungerade Funktion $Q_{nm}^s(a, i, \varphi)$
U_{nm}^c	gerade Funktion (im Anhang)
U_{nm}^s	ungerade Funktion (im Anhang)
Δr^a	Bahnfehler der aufsteigenden Bahn

Δr^d	Bahnfehler der absteigenden Bahn
$\Delta \delta$	variabler Bahnfehleranteil
$\Delta \gamma$	mittlerer Bahnfehleranteil

Variabilität der Meeresoberfläche

$\mathbf{p}$	Druck
$\nabla \mathbf{p}$	Druckgradient
g	Schwerebeschleunigung
$\mathbf{K}_G$	Gezeitenkräfte
$\mathbf{R}$	Reibungskräfte
ρ	Dichte
$\mathbf{V}$	Geschwindigkeitsvektor
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten bzgl. der x-,y-,z-Achse
R_x, R_y, R_z	Beschleunigungskomponenten infolge der Reibung bzgl. der x-,y-,z-Achse
f	Coriolisparameter
ω	Halbwertsbreite
s_{max}	maximaler Einflußkreis
s_i	Einflußkreis
p_i	Gewichtsfunktion
P, Q	Gitterpunkte
p, q	Index für beliebige Gitterpunkte P, Q
g	Anzahl der Gitterpunkte
t_i, t_j	Zeitpunkte $i, j = 1, \dots, n$
n	Anzahl der Zeitpunkte, Anzahl der Beobachtungen pro Gitterpunkt
$\bar{h}_p$	Mittlere Meereshöhe am Gitterpunkt p über alle Zeiträume
$\mathbf{H} = (h_{pt})$	Meereshöhen
h_i	Beobachtungen (Meereshöhen) zum Zeitpunkt t_i
σ	Standardabweichung
rms	root mean square, mittlere quadratische Abweichung
k	Laufindex der Eigenmodi
K	Zahl der Schwingungen
D_o	Konstante
D_1	Neigung
A_k, B_k	Fourierkoeffizienten
C_k	Amplitude der k . Schwingung
φ_k	Phase der k . Schwingung
ω_k	Kreisfrequenz der k . Schwingung
T_k	Periode der k . Schwingung
σ_{pq}	Kovarianz der Punkte P und Q
ρ_{pq}	Korrelation der Punkte P und Q
$\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_{tk})$	Hauptkomponenten
$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_{pk})$	Raumkomponenten, Empirische Orthogonalfunktionen
$\bar{\mathbf{H}} = (\bar{h}_p)$	Mittlere Meereshöhen
$\mathbf{V}$	Residuenmatrix
Σ	Varianz-Kovarianzmatrix
Λ	Matrix mit Eigenwerten λ_p
λ_p	Eigenwert am Punkt P
d	maximale Anzahl der Eigenmodi für eine Beschreibung von z.B. 80% der Variabilität
$\mathbf{W} = (w_i)$	Matrix der Singulärwerte
w_i	Singulärwerte

Simultane Schätzung von Schwerefeldkorrekturen und Meeresspiegelschwankungen

ΔK_{ijp}^{ad}	Kreuzungspunkt eines auf- und absteigenden Bahnbogens zu den Zeitpunkten t_i, t_j
a	ascending, Kennzeichen für aufsteigenden Bahnbogen
d	descending, Kennzeichen für absteigenden Bahnbogen
k, l	Index für die Satelliten k und l

ζ_i	Meereshöhe aus POCM zum Zeitpunkt t_i
$\Delta\zeta_{ij}$	Meereshöhendifferenz der POCM–Meereshöhen der Zeitpunkte t_i, t_j
$\delta\hat{\mathbf{C}}, \delta\hat{\mathbf{S}}$	Vektoren der Schwerefeldkorrekturen
λ_s, φ_s	Länge, Breite des Schnittpunktes
Δt	Zeitdifferenz des Kreuzungspunktes
$\hat{\mathbf{x}}_1$	Unbekanntenvektor der Schwerefeldkorrekturen
$\hat{\mathbf{x}}_2$	Unbekanntenvektor der Zeitkomponenten
$\mathbf{b}$	Beobachtungsvektor (Kreuzungspunktdifferenzen und POCM–Meereshöhendifferenzen)
$\mathbf{G}$	Matrix innerhalb der Jakobimatrix
$\mathbf{A}_1$	Jakobimatrix der Schwerefeldkorrekturen
$\mathbf{A}_2$	Jakobimatrix der Zeitkomponenten
$\mathbf{N}_{11}$	Normalgleichungsmatrix der Schwerefeldkorrekturen
$\mathbf{N}_{22}$	Normalgleichungsmatrix der Zeitkomponenten
$\hat{\sigma}_{C_{nm}}, \hat{\sigma}_{S_{nm}}$	Standardabweichung der geschätzten Schwerefeldkorrekturen

Abkürzungsverzeichnis

Aviso	Archiving, Validating and Interpretation of Satellite Oceanographic data
CHAMP	CHAllenging Mini-satellite Payload
CNES	Centre National des Etudes Spatiales
CORSSH	CORRected Sea Surface Height
CSR	Center for Space Research
CSTG	Commission on International Coordination of the Space Techniques for Geodesy and Geodynamics
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
ECMWF	European Center for Medium-range Weather Forecast
EGM96	Earth Gravitational Model 1996
EOF	Empirische Orthogonal-Funktion
ERS	European Remote Sensing Satellite
ESA	European Space Agency
Geosat	GEOdetic SATellite
GFO	Geosat-Follow-On
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Experiment
GOT	Global Ocean Tide model
GPSDR	Global Positioning System Demonstration Receiver
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
JGM3	Joint Gravity Model 3
NASA	National Aeronautics and Space Administration
POCM	Parallel Ocean and Climate Model
PCA	Principal Component Analysis
rms	root mean square
rss	root sum square
scoMMSA	subcommission on Multi-Mission Satellite Altimetry
SLR	Satellite Laser Ranging
SWH	Signifikante WellenHöhe
TMR	Topex Microwave Radiometer
Topex	Ocean TOPography EXperiment
T/P	TOPEX/POSEIDON
WOCE	World OCean Experiment

Anhang

Ergänzung zu Kapitel 2.2: Rechenregeln des Kronecker Produkts

$$\text{vec}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{B}' \otimes \mathbf{I}) \text{vec} \mathbf{A} \quad (1)$$

[GRAFAREND und SCHAFFRIN 1993] (S. 419).

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}' \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \quad (3)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \quad (4)$$

[GRAFAREND und SCHAFFRIN 1993] (S. 410).

Ergänzung zu Kapitel 4: Legendre-Funktionen

Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_{nm}(\sin \varphi)$ können mit Rekursionsformeln [RUMMEL 1992] (S. A1.7) gebildet werden

$$P_{nn}(\sin \varphi) = (2n - 1) \cos \varphi P_{n-1,n-1}(\sin \varphi) \quad (5)$$

$$P_{n,n-1}(\sin \varphi) = (2n - 1) \sin \varphi P_{n-1,n-1}(\sin \varphi) \quad (6)$$

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \frac{2n-1}{n-m} \sin \varphi P_{n-1,m}(\sin \varphi) - \frac{n+m-1}{n-m} \sin \varphi P_{n-2,m}(\sin \varphi) \quad \text{für } m \neq n, n-1 \quad (7)$$

mit $P_{00} = P_0 = 1$.

Die normalisierten Legendre-Funktionen $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ folgen aus dem Produkt

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = H_{nm} P_{nm} \quad (8)$$

mit

$$H_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & \text{für } m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Ergänzung zu Kapitel 4.3: Funktionen $U_{nmp}^{c/s}$

$$U_{nmp}^c = \left(\cos^m \varphi \sin^{m+k} i \right)^{-1} \left[Y_k^c X_m^c + \frac{n-2p}{k} Y_k^s X_m^s \right] \quad (10)$$

$$U_{nmp}^s = \left(\cos^m \varphi \sin^{m+k} i \right)^{-1} \left[\frac{n-2p}{k} Y_k^s X_m^c - Y_k^c X_m^s \right] \quad (11)$$

wobei

$$Y_k^c = \sum_{j=0}^{k/2} \binom{k}{2j} (-1)^j (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{\frac{k}{2}-j} \sin^{2j} \varphi \quad (12)$$

$$Y_k^s = \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2j+1} (-1)^j (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{\frac{k-1}{2}-j} \sin^{2j+1} \varphi \quad (13)$$

$$X_m^c = \sum_{j=0}^{m/2} \binom{m}{2j} (-1)^j \cos^{2j} i (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{\frac{m}{2}-j} \sin^{2j} \varphi \quad (14)$$

$$X_m^s = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2j+1} (-1)^j \cos^{2j+1} i (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{\frac{m-1}{2}-j} \sin^{2j+1} \varphi \quad (15)$$

mit $k = |n - 2p|$. Die Indizes c bzw. s stehen in Anlehnung an Cosinus- und Sinusfunktionen für eine in φ gerade bzw. ungerade Funktion [ROSBOROUGH 1986] (S. 85 f.).

Ergänzung zu Kapitel 5.3.1: Zyklusnummern und Datum von Topex/Poseidon

Zyklus	Datum	julianisches Datum Epoche 2000	Zyklus	Datum	julianisches Datum Epoche 2000
2	3.10.92	-2646.5			
3	12.10.92	-2637.5			
4	22.10.92	-2627.5			
5	1.11.92	-2617.5			
6	11.11.92	-2607.5			
7	21.11.92	-2597.5			
8	1.12.92	-2587.5			
9	11.12.92	-2577.5			
10	21.12.92	-2567.5			
11	31.12.92	-2557.5			
12	10.1.93	-2547.5	48	2.1.94	-2190.5
13	20.1.93	-2537.5	49	12.1.94	-2180.5
14	30.1.93	-2527.5	50	22.1.94	-2170.5
15	8.2.93	-2518.5	51	31.1.94	-2161.5
16	18.2.93	-2508.5	52	10.2.94	-2151.5
17	28.2.93	-2498.5	53	20.2.94	-2141.5
18	10.3.93	-2488.5	54	2.3.94	-2131.5
19	20.3.93	-2478.5	55	12.3.94	-2121.5
20	30.3.93	-2468.5	56	22.3.94	-2111.5
21	9.4.93	-2458.5	57	1.4.94	-2101.5
22	19.4.93	-2448.5	58	11.4.94	-2091.5
23	29.4.93	-2438.5	59	21.4.94	-2081.5
24	9.5.93	-2428.5	60	1.5.94	-2071.5
25	19.5.93	-2418.5	61	11.5.94	-2061.5
26	29.5.93	-2408.5	62	21.5.94	-2051.5
27	7.6.93	-2399.5	63	30.5.94	-2042.5
28	17.6.93	-2389.5	64	9.6.94	-2032.5
29	27.6.93	-2379.5	65	19.6.94	-2022.5
30	7.7.93	-2369.5	66	29.6.94	-2012.5
31	17.7.93	-2359.5	67	9.7.94	-2002.5
32	27.7.93	-2349.5	68	19.7.94	-1992.5
33	6.8.93	-2339.5	69	29.7.94	-1982.5
34	16.8.93	-2329.5	70	8.8.94	-1972.5
35	26.8.93	-2319.5	71	18.8.94	-1962.5
36	5.9.93	-2309.5	72	28.8.94	-1952.5
37	15.9.93	-2299.5	73	7.9.94	-1942.5
38	25.9.93	-2289.5	74	16.9.94	-1933.5
39	4.10.93	-2280.5	75	26.9.94	-1923.5
40	14.10.93	-2270.5	76	6.10.94	-1913.5
41	24.10.93	-2260.5	77	16.10.94	-1903.5
42	3.11.93	-2250.5	78	26.10.94	-1893.5
43	13.11.93	-2240.5	79	5.11.94	-1883.5
44	23.11.93	-2230.5	80	15.11.94	-1873.5
45	3.12.93	-2220.5	81	25.11.94	-1863.5
46	13.12.93	-2210.5	82	5.12.94	-1853.5
47	23.12.93	-2200.5	83	15.12.94	-1843.5
			84	25.12.94	-1833.5

Tab. 1: Anfangszeitpunkte der ersten 84 T/P-Zyklen. Zuordnung der Zyklusnummern zum bürgerlichen und julianischen Datum.

Literaturverzeichnis

- [ABRAMOWITZ und STEGUN 1970] ABRAMOWITZ, M. und I. STEGUN, Hrsg. (1970). *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York.
- [ANDERSEN et al. 1995] ANDERSEN, P.H., K. ASKES und S. HAUGE (1995). *Precise ERS-1 orbit calculation*. Bulletin Geodesique, 69:92–99.
- [ANZENHOFER 1998] ANZENHOFER, M. (1998). *Zusammenhänge im System Ozean-Atmosphäre über die Analyse verschiedener Fernerkundungsdaten*. Scientific Technical Report STR98/11, Potsdam.
- [ANZENHOFER et al. 1992] ANZENHOFER, M., W. BOSCH, T. GRUBER und T. SPÖCKER (1992). *D-PAF quick-look sea surface monitoring with ERS-1 fast delivery altimeter data*. In: MONTAG, H. und C. REIGBER, Hrsg.: *Geodesy and Physics of the Earth*, Bd. 112, S. 87–91, Berlin. Springer Verlag.
- [ANZENHOFER und GRUBER 1998] ANZENHOFER, M. und T. GRUBER (1998). *Fully reprocessed ERS-1 altimeter data from 1992 to 1995: Feasibility of the detection of long-term sea level change*. J. Geophys. Res., 103(C4):8089–8112.
- [ARENT 1993] ARENT, N. (1993). *Ein quasi-geostrophisches Strömungsmodell zur Auswertung von Satelliten-Altimeterdaten*. Nr. 402 in *Reihe C*. Deutsche Geodätische Kommission, München.
- [AVISO 1992] AVISO (1992). *AVISO User Handbook: Merged TOPEX/POSEIDON Products*. Edition 2 AVI-NT-02-101-CN, Aviso.
- [AVISO 1996a] AVISO (1996a). *AVISO Handbook for Merged TOPEX/POSEIDON Products*. Technischer Bericht AVI-NT-02-101-CN, Edition 3.
- [AVISO 1996b] AVISO (1996b). *AVISO User Handbook: Corrected Sea Surface Heights (CORSSHs)*. Technischer Bericht AVI-NT-011-311-CN, Edition 2.0.
- [BALMINO 1993] BALMINO, G. (1993). *Orbit Choice and the Theory of Radial Orbit Error for Altimetry*. In: RUMMEL, R. und F. SANSONO, Hrsg.: *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 244–317. Springer Verlag, Berlin.
- [BALMINO et al. 1998] BALMINO, G., F. PEROSANZ, R. RUMMEL, N. SNEEUW, H. SÜNKEL und P. WOODWORTH (1998). *European Views on Dedicated Gravity Field Missions: GRACE and GOCE*. ESA, ESD-MAG-REP-CON-001.
- [BEARMAN 1989] BEARMAN, G., Hrsg. (1989). *Waves, Tides and Shallow-Water Processes*. Pergamon Press, Oxford.
- [BENT und LLEWELLYN 1973] BENT, R. und S. LLEWELLYN (1973). *Documentation and Description of the Bent Ionospheric Model*. Air Force Cambridge Research Laboratory, AD-772 733.
- [BERTIGER et al. 1994] BERTIGER, W.I., Y. BAR-SEVER, E. CHRISTENSEN, E. DAVIS, J. GUINN, B. HAINES, R. IBANEZ-MEIER, J. JEE, S. LICHTEN, W. MELBOURNE, R. MUELLERSCHOEN, T. MUNSON, Y. VIGUE, S. WU, T. YUNCK, B. SCHUTZ, P. ABUSALI, H. RIM, M. WATKINS und P. WILLIS (1994). *GPS precise tracking of TOPEX/POSEIDON: Results and implications*. J. Geophys. Res., 99(C12):24449–24464.
- [BORN et al. 1994] BORN, G.H., M. PARKE, P. AXELRAD, K. GOLD, J. JOHNSON, K. KEY, D. KUBITSCHKE und E. CHRISTENSEN (1994). *Calibration of the TOPEX/POSEIDON altimeter using a GPS buoy*. J. Geophys. Res., 99(C12):24517–24526.
- [BOSCH 1993] BOSCH, W. (1993). *Sea surface monitoring with ERS-1 35 day repeat*. Advanced Space Research, 13(11):11345–11352.
- [BOSCH 1997] BOSCH, W. (1997). *Geoid and orbit corrections from crossover satellite altimetry*. Interner Bericht WB/63/95/DGFI/I, DGFI, München.
- [BOSCH et al. 1998] BOSCH, W., J. KLOKOCNIK, C. WAGNER und J. KOSTELECKY (1998). *Geosat and ERS-1 datum offsets relative to TOPEX/Poseidon and geopotential corrections estimated simultaneously from dual-satellite crossover altimetry*. Deutsche Geodätische Kommission, Paper presented at IAG Sect. II Symposium Towards an Integrated Global Geodetic Observing System.

- [BOULANGER und MENKES 1995] BOULANGER, J.-P. und C. MENKES (1995). *Propagation and reflection of long equatorial waves in the Pacific Ocean during 1992-1993 El Nino*. J. Geophys. Res., 100(C12):25041–25059.
- [BOUMAN 1997] BOUMAN, J. (1997). *A Survey of Global Gravity Models*. DEOS Report 97.1, TU Delft, Delft.
- [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW 1980] BRONSTEIN, I.N. und K. SEMENDJAJEW (1980). *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt.
- [BROWN et al. 1995] BROWN, J., A. COLLING, D. PARK, J. PHILLIPS, D. ROTHERY und J. WRIGHT (1995). *Ocean Circulation*. Pergamon Press, Oxford.
- [CALLAHAN 1984] CALLAHAN (1984). *Ionospheric Variations Affecting Altimeter measurements: A Brief Synopsis*. Marine Geodesy, 8:249–263.
- [CARTWRIGHT 1993] CARTWRIGHT, D.E. (1993). *Theory of Ocean Tides with Application to Altimetry*. In: RUMMEL, R. und F. SANSON, Hrsg.: *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 100–143. Springer Verlag, Berlin.
- [CARTWRIGHT und EDDEN 1973] CARTWRIGHT, D.E. und A. EDDEN (1973). *Corrected tables of tidal harmonic*. Geophys. J. Roy. Astro. Soc., 33:253–264.
- [CARTWRIGHT und RAY 1990] CARTWRIGHT, D.E. und R. RAY (1990). *Oceanic Tides from GEOSAT Altimetry*. J. Geophys. Res., 95(C3):3069–3090.
- [CARTWRIGHT und TAYLER 1971] CARTWRIGHT, D.E. und R. TAYLER (1971). *New computations of the tide-generating potential*. Geophys. J. Roy. Astro. Soc., 23:45–74.
- [CHANG-KOU und FU 1986] CHANG-KOU, T. und L.-L. FU (1986). *On Crossover Adjustment in Satellite Altimetry and its Oceanographic Implications*. J. Geophys. Res., 91:2549–2554.
- [CHELTON et al. 1989] CHELTON, D.B., E. WALSH und J. MACARTHUR (1989). *Pulse compression and sea level tracking in satellite altimetry*. J. Atmos. Oceanic Tech., 6:407–438.
- [CHRISTENSEN et al. 1994] CHRISTENSEN, E.J., B. HAINES, S. KEIHM, C. MORRIS, R. NORMAN, G. PURCELL, B. WILLIAMS, B. WILSON, G. BORN, M. PARKE, S. GILL, C. SHUM, B. TAPLEY, R. KOLENKIEWICZ und R. NEREM (1994). *Calibration of TOPEX/POSEIDON at Platform Harvest*. J. Geophys. Res., 99(C12):24465–24485.
- [COTTON und CARTER 1994] COTTON, P.D. und D. CARTER (1994). *Cross Calibration of TOPEX, ERS-1, and Geosat wave heights*. J. Geophys. Res., 99(C12):25025–25033.
- [DENKER und RAPP 1990] DENKER, H. und R. RAPP (1990). *Geodetic and Oceanographic Results from the Analysis of 1 year of Geosat Data*. J. Geophys. Res., 95(C8):13151–13168.
- [DIETRICH et al. 1992] DIETRICH, G., K. KALLE, W. KRAUSS und G. SIEDLER (1992). *Allgemeine Meereskunde*. Gebrüder Borntraeger, Berlin.
- [DOW 1988] DOW, J.M. (1988). *Ocean Tides and Tectonic Plate Motions from Lageos*. Nr. 344 in *Reihe C*. Deutsche Geodätische Kommission, München.
- [EANES und BETTADPUR 1995] EANES, R. und S. BETTADPUR (1995). *The CSR3.0 Global Ocean Tide Model*. J. Atmos. Oceanic Tech., CSR-TM-95-06.
- [EKMAN 1905] EKMAN, V.W. (1905). *On the influence of the earth's rotation on ocean-currents*. Ark. Math. Astron. Fys., 2,11,1-53.
- [ENGELIS 1985] ENGELIS, T. (1985). *Global Ocean Circulation from Seasat Altimeter Data*. Marine Geodesy, 9:45–69.
- [ENGELIS 1988] ENGELIS, T. (1988). *On the simultaneous improvement of a satellite orbit and determination of sea surface topography using altimetric data*. manuscripta geodetica, 13:180–190.
- [ENGELIS und RAPP 1984] ENGELIS, T. und R. RAPP (1984). *Global Ocean Circulation Patterns Based on Seasat Altimeter Data and the GEM L2 Gravity Field*. Marine Geophysical Research, 7(G3):55–67.

- [FELTENS 1991] FELTENS, J. (1991). *Nichtgravitative Störeinflüsse bei der Modellierung von GPS-Erdumlaufbahnen*. Nr. 371 in *Reihe C*. Deutsche Geodätische Kommission, München.
- [FERON 1994] FERON, R. (1994). *Eddies and mean flow in the ocean, Applications of satellite altimetry*. Cip-Gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
- [FOREMAN et al. 1998] FOREMAN, M.G.G., W. CRAWFORD, J. CHERNIAWSKY, J. GARVER, L. CUYPERS und V. BELLANTYNE (1998). *Tidal correction of TOPEX/POSEIDON altimetry for sea surface elevation and current determination off the Pacific Coast of Canada*. J. Geophys. Res., 103(C12):27979–27998.
- [FU et al. 1994] FU, L.-L., E. CHRISTENSEN, C. YAMARONE, M. LEFEBVRE, Y. MENARD, M. DORRER und P. ESCUDIER (1994). *TOPEX/POSEIDON mission overview*. J. Geophys. Res., 99(C12):24369–24381.
- [GASPAR et al. 1994] GASPAR, P., F. OGOR, P. LETRAON und O. ZANIFE (1994). *Estimating the sea state bias of the TOPEX and POSEIDON altimeters from crossover differences*. J. Geophys. Res., 99(C12):24981–24994.
- [GILSON et al. 1998] GILSON, J., D. ROEMMICH, B. CORNUELLE und L.-L. FU (1998). *Relationship of TOPEX/POSEIDON altimetric height to steric height and circulation in the North Pacific*. J. Geophys. Res., 103(C12):27947–27965.
- [GRAFAREND und SCHAFFRIN 1993] GRAFAREND, E.W. und B. SCHAFFRIN (1993). *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*. Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- [VAN GYSEN und COLEMAN 1997] GYSEN, H. VAN und R. COLEMAN (1997). *On the satellite altimeter crossover problem*. Journal of Geodesy, 71:83–96.
- [HAYNE und HANCOCK 1990] HAYNE, G.S. und D. HANCOCK (1990). *Corrections for the Effects of Significant Wave Height and Attitude on Geosat Radar Altimeter Measurements*. J. Geophys. Res., 95(C3):2837–2842.
- [HEISKANEN und MORITZ 1979] HEISKANEN, W.A. und H. MORITZ (1979). *Physikal Geodesy*. Freeman, San Francisco.
- [HEITZ 1986] HEITZ, S. (1986). *Grundlagen kinematischer und dynamischer Modelle der Geodäsie*. Technischer Bericht 63, Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn.
- [HENDRICKS et al. 1996] HENDRICKS, J.R., R. LEBEN, G. BORN und C. KOBLINSKY (1996). *Empirical orthogonal function analysis of global TOPEX/POSEIDON altimeter data and implications for detection of global sea level rise*. J. Geophys. Res., 101:14131–14145.
- [HILBERT 1989] HILBERT, A. (1989). *Mathematik*. In: *Nachschlagewerk für Grundlagenfächer*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig.
- [HÜCKELHEIM 1994] HÜCKELHEIM, G. (1994). *Parameterschätzung in dynamischen Systemen für die Satelliten-Altmetrie*. Nr. 415 in *Reihe C*. Deutsche Geodätische Kommission, München.
- [IMEL 1994] IMEL, D.A. (1994). *Evaluation of the TOPEX/POSEIDON dual-frequency Ionosphere correction*. J. Geophys. Res., 99(C12):24895–24906.
- [KAULA 1966] KAULA, W. M. (1966). *Theory of Satellite Geodesy, Applications of Satellites to Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, Toronto.
- [KLOKOCNIK et al. 1995] KLOKOCNIK, J., J. KOSTELECKY und M. JANDOVA (1995). *Altimetry with dual-satellite crossovers*. manuscripta geodaetica, 20:82–95.
- [KLOKOCNIK et al. 1994] KLOKOCNIK, J., J. KOSTELECKY und D. KARASOVA (1994). *Satellite Altimetry - and its use in Geoscience*. Technischer Bericht 40(12), Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Zdiby.
- [KLOKOCNIK et al. 1999] KLOKOCNIK, J., C. WAGNER und J. KOSTELECKY (1999). *Spectral accuracy of JGM3 from satellite crossover altimetry*. Journal of Geodesy, 73:138–146.
- [KLOKOCNIK et al. 2000] KLOKOCNIK, J., C. WAGNER und J. KOSTELECKY (2000). *Residual errors in altimetry data detected by combinations of single- and dual-satellite crossovers*. Journal of Geodesy, 73:671–683.

- [KNUDSEN 1994] KNUDSEN, P. (1994). *Global low harmonic degree models of the seasonal variability and residual ocean tides from TOPEX/POSEIDON altimeter data*. J. Geophys. Res., 99(C12):24643–24655.
- [KOCH 1988] KOCH, K.R. (1988). *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Springer Verlag, Berlin.
- [KOCH 1990] KOCH, K.R. (1990). *Bayesian Inference with Geodetic Applications*. Lecture Notes in Earth Sciences. Springer Verlag, Berlin.
- [KOCH 1997] KOCH, K.R. (1997). *Parameterschätzung und Hypothesentests im linearen Modell*. Dümmler Verlag, Bonn.
- [KOCH und SCHMIDT 1994] KOCH, K.R. und M. SCHMIDT (1994). *Deterministische und stochastische Signale*. Dümmler Verlag, Bonn.
- [KRAUS 1994] KRAUS, K. (1994). *Photogrammetrie*. Dümmler Verlag, Bonn.
- [KUCHLING 1989] KUCHLING, H. (1989). *Taschenbuch der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Thun.
- [LAMBECK 1988] LAMBECK, K. (1988). *Geophysical Geodesy, the Slow Deformations of the Earth*. Clarendon Press, Oxford.
- [LAUER 1997] LAUER, W. (1997). *El Niño - Eine Meeresströmung verändert Klima und Umwelt*. Sitzungsbericht der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse. Bayrische Akademie der Wissenschaften, München.
- [LEMOINE et al. 1998] LEMOINE, F.G., S. KENYON, J. FACTOR, R. TRIMMER, N. PAVLIS, D. CHINN, C. COX, S. KLOSKO, S. LUTHCKE, M. TORRENCE, Y. WANG, R. WILLIAMSON, E. PAVLIS, R. RAPP und T. OLSON (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Technischer Bericht NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt.
- [LETRAON et al. 1995] LETRAON, P.Y.P., P. GASPAR, F. BOUYSSSEL und H. MAKHMARA (1995). *Using TOPEX/POSEIDON data to enhance ERS-1 orbit*. J. Atm. Ocean, 12(24):161–1170.
- [LETRAON und OGOR 1998] LETRAON, P.Y.P. und F. OGOR (1998). *ERS-1/2 orbit improvement using TOPEX/POSEIDON: The 2 cm challenge*. J. Geophys. Res., 103(C4):8045–8057.
- [LEVITUS 1989] LEVITUS, S. (1989). *Interpentadal Variability of Salinity in the Upper 150 m of the North Atlantic Ocean, 1970-1974 Versus 1955-1959*. J. Geophys. Res., 94(C7):9679–9685.
- [MA et al. 1994] MA, X.C., C. SHUM, R. EANES und B. TAPLEY (1994). *Determination of the ocean tides from the first year of TOPEX/POSEIDON altimeter measurements*. J. Geophys. Res., 99(C12):24809–24820.
- [MARSH et al. 1990] MARSH, J.G., C. KOBLINSKY, F. LERCH, S. KLOSKO, J. ROBBINS, R. WILLIAMSON und G. PATEL (1990). *Dynamic Sea Surface Topography, Gravity, and Improved Orbit Accuracies from the Direct Evaluations of Seasat Altimeter Data*. J. Geophys. Res., 95(C8):13129–13150.
- [MCCARTHY 1996] MCCARTHY, D.D. (1996). *IERS Conventions 1996*. IERS Technical note 21, Observatoire Paris, Paris.
- [MELBOURNE et al. 1994] MELBOURNE, W., E. DAVIS, T. YUNCK und B. TAPLEY (1994). *The GPS flight experiment on TOPEX/POSEIDON*. Geophys. Res. Lett., 21(19):2171–2174.
- [MELCHIOR 1978] MELCHIOR, P. (1978). *The tides of the Planet Earth*. Pergamon Press, Oxford.
- [MENARD et al. 1994] MENARD, Y., E. JEANSOU und P. VINCENT (1994). *Calibration of the TOPEX/POSEIDON altimeters at Lampedusa: Additional results at Harvest*. J. Geophys. Res., 99(C12):24487–24504.
- [MITCHUM 1994] MITCHUM, G.T. (1994). *Comparison of TOPEX sea surface heights and tide gauge sea levels*. J. Geophys. Res., 99(C12):24541–24553.
- [MOORE und EHLERS 1993] MOORE, P. und S. EHLERS (1993). *Orbital improvement of ERS-1 using dual crossover arc techniques with TOPEX/POSEIDON*. manuscripta geodaetica, 18:249–262.

- [MÜLLER et al. 1998] MÜLLER, J., R. DOROBANTU, C. GERLACH, H. OBERNDORFER, R. RUMMEL, N. SNEEUW, R. KOOP, P. VISSER, P. HOYNG, A. SELIG und M. SMIT (1998). *Simulation der Gravitationsfeldmission GOCE*. In: FREEDEN, W., Hrsg.: *Progress in Geodetic Science at GW98*, Geodätische Woche Universität Kaiserslautern, 12.-17.10.98, S. 114–121, Aachen. Shaker Verlag.
- [NEREM et al. 1994a] NEREM, R., F. LERCH, A. MARSHALL, E. PAVLIS, B. PUTNEY, B. TAPLEY, R. EANES, J. RIES, B. SCHUTZ, C. SHUM, M. WATKINS, S. KLOSKO, J. CHAN, S. LUTHCKE, G. PATEL, N. PAVLIS, R. WILLIAMSON, R. RAPP, R. BIANCALE und F. NOUEL (1994a). *Gravity Model Development for Topex/Poseidon: Joint Gravity Models 1 and 2*. J. Geophys. Res., 99(C12):24421–24447.
- [NEREM et al. 1990] NEREM, R., B. TAPLEY und C. SHUM (1990). *Determination of the ocean circulation using Geosat altimetry*. J. Geophys. Res., 95:3163–3179.
- [NEREM et al. 1994b] NEREM, R.S., E. SCHRAMA, C. KOBLINSKY und B. BECKLEY (1994b). *A preliminary evaluation of ocean topography from the TOPEX/POSEIDON mission*. J. Geophys. Res., 99(C12):24565–24583.
- [PARKE und WALSH 1995] PARKE, M. E. und E. J. WALSH (1995). *Altimeter Footprint Dimensions*. Marine Geodesy, 18(1-2):129–137.
- [PARKE et al. 1987] PARKE, M.E., B. HAINES, S. KEIHM, C. MORRIS, R. NORMAN, G. PURCELL, B. WILLIAMS, B. WILSON, G. BORN, M. PARKE, S. GILL, C. SHUM, B. TAPLEY, R. KOLENKIEWICZ und R. NEREM (1987). *On the choice of orbits for an altimetric Satellite to study ocean circulation and tides*. J. Geophys. Res., 92(C11):11693 ff.
- [PEDLOVSKY 1987] PEDLOVSKY, J. (1987). *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag, New York.
- [PICKARD und EMERY 1984] PICKARD, G.L. und W. EMERY (1984). *Descriptive Physical Oceanography*. Pergamon Press, Oxford.
- [POND und PICKARD 1986] POND, S. und G. PICKARD (1986). *Introductory Dynamical Oceanography*. Pergamon Press, Oxford.
- [PREISENDORFER 1988] PREISENDORFER, R. (1988). *Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- [RAPP 1993] RAPP, R.H. (1993). *Use of Altimeter Data in Estimating Global Gravity Models*. In: RUMMEL, R. und F. SANSONO, Hrsg.: *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 374–420. Springer Verlag, Berlin.
- [RAY 1999] RAY, R.D. (1999). *A Global Ocean Tide Model From TOPEX/POSEIDON Altimetry: GOT99.2*. Technischer Bericht NASA/TM-199-209478, Goddard Space Flight Center of Texas, Greenbelt.
- [REIGBER 1998] REIGBER, C. (1998). *CHAMP und GRACE- zwei Missionen mit deutscher Beteiligung zur verbesserten Schwerefeldmodellierung*. In: FREEDEN, W., Hrsg.: *Progress in Geodetic Science at GW98*, Geodätische Woche Universität Kaiserslautern, 12.-17.10.98, S. 134–139, Aachen. Shaker Verlag.
- [ROSBOROUGH 1986] ROSBOROUGH, G.W. (1986). *Satellite Orbit Perturbations due to the Geopotential*. Technischer Bericht CSR-86-1, University of Texas, Austin.
- [ROSBOROUGH und TAPLEY 1987] ROSBOROUGH, G.W. und B. TAPLEY (1987). *Radial, Transverse and Normal Satellite Position Perturbations due to the Geopotential*. J. Geophys. Res., 40.
- [RUMMEL 1992] RUMMEL, R. (1992). *Physical Geodesy*. Technische Universiteit Delft, Delft.
- [RUMMEL 1993] RUMMEL, R. (1993). *Principle of Satellite Altimetry and Elimination of Radial Orbit Errors*. In: RUMMEL, R. und F. SANSONO, Hrsg.: *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 190–243. Springer Verlag, Berlin.
- [SACHS 1974] SACHS, L. (1974). *Angewandte Statistik*. Springer-Verlag, Berlin.
- [SANDWELL et al. 1986] SANDWELL, D.T., D. MILBERT und B. DOUGLAS (1986). *Global Nondynamic Orbit Improvement for Altimetric Satellites*. J. Geophys. Res., 91(B9):9447–9451.
- [SCHEINERT 1996] SCHEINERT, M. (1996). *Zur Bahndynamik niedrig fliegender Satelliten*. Nr. 435 in Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission, München.

- [SCHLAX und CHELTON 1994] SCHLAX, G. und D. CHELTON (1994). *Aliased tidal errors in TOPEX/POSEIDON sea surface height data*. J. Geophys. Res., 99(C12):24761–24775.
- [SCHMIDT 1995] SCHMIDT, M. (1995). *Grundlagen der Bayes-Statistik*. Interner Bericht MS/64/95/DGFI, Abt. I, DGFI, München.
- [SCHMIDT 1999] SCHMIDT, M. (1999). *Approximate solution of normal equations by eigenvalue decomposition*. Journal of Geodesy, 73:109–117.
- [SCHMIDT und BOSCH 1995] SCHMIDT, M. und W. BOSCH (1995). *Long-Term Vertical Control in Satellite Altimetry, Deficiencies and Concepts*. Proceedings des Joint Meetings der International Gravity Commission (IGC) und der International Commission on the Geoid (ICG) 11.-17.9.94.
- [SCHNEIDER 1979] SCHNEIDER, M., Hrsg. (1979). *Himmelsmechanik*, Mannheim. DFG, Wissenschaftsverlag.
- [SCHNEIDER 1990] SCHNEIDER, M., Hrsg. (1990). *Satellitengeodäsie*, Mannheim. DFG, Wissenschaftsverlag.
- [SCHRAMA 1989] SCHRAMA, E.J.O. (1989). *The Role of Orbit Errors in Processing of Satellite Altimeter Data*. Technischer Bericht 33, Netherlands Geodetic Commission, Delft.
- [SCHRAMA 1992] SCHRAMA, E.J.O. (1992). *Some remarks on several definitions of geographically correlated orbit errors: consequences for satellite altimetry*. manuscripta geodaetica, 17:282–294.
- [SCHRAMA 1996] SCHRAMA, E.J.O. (1996). *Introduction of Tides in Geodesy*. In: *Lectures on Geophysics*, Bd. GE-115. Faculty of Geodetic Engineering, Delft University of Technology, Delft.
- [SCHRAMA und RAY 1994] SCHRAMA, E.J.O. und R. RAY (1994). *A preliminary tidal analysis of TOPEX/POSEIDON altimetry*. J. Geophys. Res., 99(C12):24799–24808.
- [SEEBER 1989] SEEBER, G. (1989). *Satellitengeodäsie*. de Gruyter, Berlin.
- [SEEBER 1993] SEEBER, G. (1993). *Satellite geodesy*. de Gruyter, Berlin.
- [SEMTNER und CHERVIN 1992] SEMTNER, A.J. und R. CHERVIN (1992). *Ocean general circulation from a global eddy-resolving model*. J. Geophys. Res., 97(C4):5493–5550.
- [SEMTNER und CHERVIN 1996] SEMTNER, A.J. und R. CHERVIN (1996). *1/4 Degree Parallel Ocean Climate Model or Semtner-Chervin*. <http://vislab-www.cc.nps.navy.mil/ftt/Welcome.html>.
- [SHUM et al. 1997] SHUM, C.K., P. WOODWORTH, O. ANDERSEN, G. EGBERT, O. FRANCIS, C. KING, S. KLOSKO, C. L. PROVOST, X. LI, J. MOLINES, M. PARKE, R. RAY, M. SCHLAX, D. STAMMER, C. TIERNEY, P. VINCENT und C. WUNSCH (1997). *Accuracy assessment of recent ocean tide models*. J. Geophys. Res., 102:25173–25194.
- [SMART 1960] SMART, W.M. (1960). *Celestial Mechanics*. Longman, London.
- [STAMMER et al. 1996] STAMMER, D., R. TOKMAKIAN, A. SEMTNER und C. WUNSCH (1996). *How well does a 1/4 degree global circulation model simulate large-scale oceanic observations?*. J. Geophys. Res., 101(C10):25779–25811.
- [STAMMER und WUNSCH 1994] STAMMER, D. und C. WUNSCH (1994). *Preliminary assessment of the accuracy and precision of TOPEX/POSEIDON altimeter data with respect to the large-scale ocean circulation*. J. Geophys. Res., 99(C12):24584–24604.
- [TAPLEY et al. 1994a] TAPLEY, B.D., P. CHAMBERS, C. SHUM, R. EANES, J. RIES und R. STEWART (1994a). *Accuracy assesement of the large-scale dynamic ocean topography from TOPEX/POSEIDON*. J. Geophys. Res., 99(C12):24605–24617.
- [TAPLEY et al. 1988] TAPLEY, B.D., R. NEREM, C. SHUM, J. RIES und D. YUAN (1988). *Determination of the General Circulation of the Oceans from a Joint Gravity Field Solution*. Geophys. Res. Lett., 15(10):1109–1112.
- [TAPLEY et al. 1994b] TAPLEY, B.D., J. RIES, G. DAVIS, R. EANES, B. SCHUTZ, C. SHUM, M. WATKINS, J. MARSHALL, R. NEREM, B. PUTNEY, S. KLOSKO, S. LUTHCKE, D. PAVLIS, R. WILLIAMSON und N. ZELENISKY (1994b). *Precision Orbit Determination for TOPEX/POSEIDON*. J. Geophys. Res., 99(C12):24383–24404.

- [TAPLEY et al. 1996] TAPLEY, B.D., M. WATKINS, J. RIES, G. DAVIS, R. EANES, S. POOLE, H. RIM, B. SCHUTZ, C. SHUM, R. NEREM, F. LERCH, J. MARSHALL, S. KLOSKO, N. PAVLIS und R. WILLIAMSON (1996). *The Joint Gravity Model 3*. J. Geophys. Res., 101(B12):28029–28049.
- [TOKMAKIAN 1996] TOKMAKIAN, R. (1996). *A Note on a Global Comparison of Tide Gauge Sea Levels with a Model's Sea Surface Heights*. http://vislab-www.nps.navy.mil/itt/paper/sea_level.html.
- [TORGE 1975] TORGE, W. (1975). *Geodäsie*. Sammlung Göschen de Gruyter.
- [TOURNADRE und MORLAND 1997] TOURNADRE, J. und J. MORLAND (1997). *The Effects of Rain on TOPEX/Poseidon Altimeter Data*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 35(5).
- [WAGNER 1985] WAGNER, C.A. (1985). *Radial Variations of a Satellite Orbit due to Gravitational Errors: Implications for Satellite Altimetry*. J. Geophys. Res., 90(B4):3027–3036.
- [WAGNER 1986] WAGNER, C.A. (1986). *Accuracy Estimate of Geoid and Ocean Topography Recovered Jointly from Satellite Altimetry*. J. Geophys. Res., 91(B1):453–461.
- [WAGNER 1989] WAGNER, C.A. (1989). *Comment on 'Determination of the General Ocean Circulation from a Jointly Gravity Field Solution'*. Geophys. Res. Lett., 16(4):335–336.
- [WAGNER et al. 1997a] WAGNER, C.A., J. KLOKOCNIK und R. CHENEY (1997a). *Making the connection between Geosat and TOPEX/Poseidon*. Journal of Geodesy, 71:273–281.
- [WAGNER et al. 1997b] WAGNER, C.A., J. KLOKOCNIK und J. KOSTELECKY (1997b). *Dual-satellite crossover latitude-lumped coefficients, their use in geodesy and oceanography*. Journal of Geodesy, 71:603–616.
- [WAGNER et al. 1995] WAGNER, C.A., J. KLOKOCNIK und C. TAI (1995). *Evaluation of JGM 2 Geopotential Errors from Geosat, TOPEX/Poseidon and ERS-1 Crossover Altimetry*. Adv. Space Res., 16(12):131–141.
- [WAHR 1979] WAHR, J.W. (1979). *The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless earth*. Technischer Bericht, University of Colorado, Dept. of Physics, Boulder.
- [WAHR 1985] WAHR, J.W. (1985). *Deformation of the Earth induced by oceanic tidal loading*. J. Geophys. Res. (Solid Earth), 90:9363–9368.
- [WUNSCH 1993] WUNSCH, C. (1993). *Physics of the Ocean Circulation*. In: RUMMEL, R. und F. SANSONO, Hrsg.: *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 10–99. Springer Verlag, Berlin.
- [WUNSCH und STAMMER 1997] WUNSCH, C. und D. STAMMER (1997). *Atmospheric Loading and the Oceanic Inverted Barometereffect*. Reviews of Geophysics, 35(1):79–107.
- [ZANDBERGEN 1990] ZANDBERGEN, R.C.A. (1990). *Satellite Altimeter Data Processing: From Theory to Practice*. Delft University Press, Delft.
- [ZHAROV et al. 1996] ZHAROV, V.N., S. MOLODENSKY, A. BRZEZINSKI, E. GROTEN und P. VARGA (1996). *The Earth and its Rotation, low frequency Geodynamics*. Wichmann, Heidelberg.
- [ZIEGER et al. 1995] ZIEGER, A. R., G. C. CLEVEN, E. S. DAVIS, F. S. SOLTIS und C. L. PURDY (1995). *Satellite/Sensors for Monitoring Earth's Oceans from Space*. Marine Geodesy, 18:1–24.
- [ZLOTNICKI 1994] ZLOTNICKI, V. (1994). *Seasonal Variability in Global Sea Level Observed with Geosat Altimetry*. Dissertation.

Dank

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Reinhard Rummel für die Betreuung dieser Arbeit und die stets hilfreiche Unterstützung.

Ebenfalls danke ich den Herren Prof. Dr.-Ing. Günter Hein und Prof. hon. Dr.-Ing. Hermann Drewes für die Übernahme des zweiten und dritten Korreferats. Herrn Dr.-Ing. Wolfgang Bosch danke ich für die Initiierung und Unterstützung dieser Arbeit. Bei Herrn Dr.-Ing. habil. Michael Schmidt möchte ich mich herzlich bedanken, seine Hilfe in zahlreichen Diskussionen trug wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei. Ferner sei auch allen anderen Mitarbeitern des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts gedankt, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben, insbesondere Herrn Dr. rer. nat. Michael Gerstl für die Hilfe beim Layout.

Meinen Eltern und meiner Großmutter möchte ich dafür danken, daß sie mir das Studium ermöglicht und mich stets in meiner wissenschaftlichen Arbeit bestärkt haben. Ebenso hat mich mein Mann Albert in jeder Hinsicht sehr unterstützt, wofür ich ihm herzlich danke.

Lebenslauf

Name: Martha Baumgartner, geb. Kiesmüller
Geburtstag: 14.09.1970
Geburtsort: München

Berufstätigkeit/Ausbildung:

seit Juni 2000	Referendarin der Vermessungsverwaltung und des Dienstes für Ländliche Entwicklung, Bayern
Jan. 1996 – Mai 2000	wissenschaftliche Angestellte am Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut, München
Nov.1990 – Okt. 1995	Studium des Vermessungswesens an der Technischen Universität München Harbert-Buchspende des Deutschen Vereins für Vermessungswesen e.V.
Sep. 1980 – Juni 1990	Gymnasium Dorfen
Sep. 1976 – Juli 1980	Grundschule Schwindkirchen

Auslandstätigkeiten:

März – Mai 2000	Antarktis- Expedition ANT XVII/3 auf FS Polarstern, Alfred Wegener Institut Bremerhaven
Sep. 1996	GPS-Meßkampagne in Griechenland, Institut für Angewandte Geodäsie (IfAG) Wettzell
Okt./Nov. 1995	Erstellung eines Festpunktfeldes im Colosseum, Deutsches Archeologisches Institut, Rom
Sep. 1995	GPS-Meßkampagne in der Türkei, IfAG Frankfurt
Juni 1995	GPS-Meßkampagne in der Ukraine, IfAG Leipzig
Sep. 1993	Auslandspraktikum am Institut Géographique National, Paris