

Modellordnungsreduktion für parametrische nichtlineare mechanische Systeme mittels erweiterter simulationsfreier Basen und Hyperreduktion

Christopher Lerch¹ und Christian H. Meyer²

¹Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen,
Lehrstuhl für Regelungstechnik, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching, Deutschland

²Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen,
Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching, Deutschland
E-Mail: {christopher.lerch, christian.meyer}@tum.de

Abstract *Mit Hilfe von nichtlinearer Modellordnungsreduktion lässt sich die Rechenzeit zur Lösung von nichtlinearen Bewegungsgleichungen mechanischer Strukturen deutlich reduzieren. Ein entscheidender Bestandteil solcher Methoden ist die Berechnung einer geeigneten Reduktionsbasis. Dabei sind vor allem solche Verfahren gefragt, welche ohne die Ausführung von Trainingssimulationen des unreduzierten Modells – simulationsfrei – auskommen. Der vorliegende Beitrag beschreibt ein verallgemeinertes Verfahren zur simulationsfreien Berechnung von Reduktionsbasen mittels Taylorreihenentwicklung, leitet das weit verbreitete Verfahren der modalen Ableitungen als Spezialfall ab und erweitert das lineare moment matching durch Krylow-Ableitungen auf nichtlineare Systeme. Daneben gibt der Beitrag einen Überblick zu Hyperreduktionsmethoden, die eine weitere zentrale Rolle bei der Reduktion des nichtlinearen Kraftterms, welcher den geometrischen Nichtlinearitäten der mechanischen Struktur entstammt, einnehmen. Reduktionsverfahren mit Berücksichtigung von Parameterabhängigkeiten werden in diesem Beitrag nicht im Detail betrachtet. Die vorgestellten Methoden können jedoch unmittelbar auf eine Teilmenge vorhandener Ansätze zur Modellordnungsreduktion von parametrischen Systemen übertragen werden. Dies bildet ein weiteres Ziel des gemeinsamen Forschungsprojektes der beiden Autoren.*

Stichwörter *mechanische Systeme, geometrische Nichtlinearität, projektive Modellordnungsreduktion, modales Abschneiden, modale Ableitungen, moment matching, Krylow-Ableitungen, Hyperreduktion, DEIM, ECSW*

1 Einleitung

In den letzten Jahren finden sich in der Technik zunehmend leistungsfähigere mechanische Komponenten, wie zum Beispiel die in Automobil-, Luft- und Raumfahrtanwendungen eingesetzten Leichtbaustrukturen, wieder. Auch aktive Strukturen, die über geeignete Sensoren, Aktoren und Regler während des Betriebs gezielt beeinflusst werden können, etwa um Schwingungen aktiv zu dämpfen, sind Trend jüngerer Entwicklungen. Insgesamt lassen sich diese Strukturen unter dem Begriff der *smart structures* zusammenfassen.

Für Entwurf, Auslegung und Analyse solcher Strukturen kommen häufig Simulationen basierend auf Finite-Elemente-Methoden zum Einsatz. Die dabei zu lösenden Gleichungen sind im Allgemeinen nichtlinearer Natur und besitzen eine große Anzahl von Unbekannten. Dies bedeutet für das Lösen dieser Gleichungen zumeist einen großen Rechenaufwand, den es vor allem bei Optimierungsaufgaben sowie Echtzeitanwendungen zu vermeiden gilt.

Um den Rechenaufwand zu verringern, können Verfahren zur Modellordnungsreduktion (englisch model order reduction oder kurz MOR) eingesetzt werden. Während MOR-Verfahren für lineare Systeme bereits gut verstanden sind, besteht für die Reduktion von nichtlinearen Systemen noch weiterer Forschungsbedarf. Hierbei müssen drei Hauptaspekte berücksichtigt werden: Wie bei linearen Systemen kann die Anzahl der Unbekannten für nichtlineare Systeme über eine Projektion auf einen durch eine Reduktionsbasis aufgespannten Unterraum verringert werden. Die Herausforderung hierbei besteht darin, eine geeignete Reduktionsbasis zu ermitteln, welche sowohl die relevante nichtlineare Systemdynamik abbilden als auch leicht berechnet werden kann. Bisher benötigen viele solcher Methoden aufwändige Trainingssimulationen des unreduzierten Modells. Ziel ist es daher, Methoden zu entwickeln, die von Simulationen des unreduzierten Modells unabhängig – simulationsfrei – sind. Dies brächte die Vorteile mit sich, dass die hohe Rechenzeit für Trainingssimulationen wegfällt und die Reduktionsbasis von den vom Benutzer gewählten Trainingsbedingungen unabhängig würde.

Eine weitere Herausforderung besteht in der Reduktion des nichtlinearen Terms, welcher der geometrischen Nichtlinearität des Systems entstammt. Eine reine Projektion reicht hier nicht aus, um die Rechenzeit für seine Auswertung signifikant zu verringern. Stattdessen wird auf sogenannte Hyperreduktionsmethoden zurückgegriffen. Auch hier sind Verfahren gefragt, die ohne Trainingssimulationen des unreduzierten Modells auskommen.

Zuletzt sollen die entwickelten simulationsfreien MOR-Verfahren auch auf parametrische Systeme erweitert werden. Parameter können dabei Geometrie-, Material- oder sonstige Systemeigenschaften widerspiegeln, die zur Auslegung dienen. Damit wäre auch die Möglichkeit geschaffen, Optimierungsaufgaben, zum Beispiel von Geometrie oder idealen Sensor- und Aktorplatzierungen, bei deutlich verringertem Rechenaufwand durchzuführen.

Für die genannten Herausforderungen werden im Forschungsprojekt *Model Order Reduction of Parametric Non-Linear Mechanical Systems for Influencing Vibrations*, welches zum Schwerpunktprogramm 1897 *Calm, Smooth and Smart – Novel Approaches for Influencing Vibrations by Means of Deliberately Introduced Dissipation* der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG – SPP 1897) gehört, Lösungen erarbeitet.

Der vorliegende Beitrag wird näher auf die genannten Herausforderungen eingehen und einige Lösungsansätze vorstellen. Abschnitt 2 führt dabei in die projektive Modellordnungsreduktion ein, indem die Vorgehensweise zunächst für lineare Systeme dargestellt und anschließend auf nichtlineare übertragen wird. Abschnitt 3 beschreibt ein verallgemeinertes Verfahren zur simulationsfreien Ermittlung von Reduktionsbasen mittels Taylorreihenentwicklung. Beispielhaft wird das Verfahren auf das moment matching und das modale Abschneiden angewandt und durch ein Anwendungsbeispiel illustriert. Abschnitt 4 beschreibt schließlich Hyperreduktionsmethoden, wobei auf zwei bekannte Verfahren genauer eingegangen wird. Abschnitt 5 fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen kurzen Ausblick.

2 Projektive Modellordnungsreduktion für parametrische mechanische Systeme

2.1 Lineare Systeme

Klassisch werden die in der Strukturdynamik auftretenden Probleme mit linearen Finite-Elementen ortsdiskretisiert. Dies führt auf das von den Designparametern $\mathbf{p} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ abhängige Anfangswertproblem mit semidiskreter Systemdynamik zweiter Ordnung (inklusive Ausgangs-

gleichung) [1,2]

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}) \ddot{\mathbf{q}}(t) + D(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{q}}(t) + K(\mathbf{p}) \mathbf{q}(t) &= B(\mathbf{p}) \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{y}(t) = C(\mathbf{p}) \mathbf{q}(t), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{o}_q, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{o}_{\dot{q}}, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

mit den generalisierten Koordinaten bzw. Knotenverschiebungen $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^N$, externen Kräften $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^m$, Systemausgängen $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix $M(\mathbf{p}), D(\mathbf{p}), K(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, Eingangsmatrix $B(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N \times m}$ sowie Ausgangsmatrix $C(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{p \times N}$. $N \in \mathbb{N}$ ist hierin die Problemdimension bzw. die Anzahl an unbekanntem Knotenverschiebungen. Die Designparameter \mathbf{p} können Geometrie-, Material- oder sonstige Systemeigenschaften wie Randbedingungen widerspiegeln.

Laplace-Transformation von Gleichung (1) und Auflösen nach dem Laplace-transformierten Systemausgang $\mathbf{Y}(s)$ liefert die Übertragungsfunktion

$$G(s; \mathbf{p}) = C(\mathbf{p}) (K(\mathbf{p}) + sD(\mathbf{p}) + s^2M(\mathbf{p}))^{-1} B(\mathbf{p}) \stackrel{1}{=} \sum_{i=0}^{\infty} -M_i^{s_0}(\mathbf{p}) (s - s_0)^i \quad (2)$$

mit den sogenannten Momenten

$$M_i^{s_0}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{i!} \left. \frac{d^i G(s; \mathbf{p})}{ds^i} \right|_{s_0}. \quad (3)$$

Häufig werden zur Auflösung der Systemgeometrie wesentlich mehr Finite-Elemente benötigt als zur Erfassung der eigentlichen Systemdynamik. Daher kann angenommen werden, dass sich die Lösungstrajektorie $\mathbf{q}(t) \forall t \in [0, T]$ nur in einem Unterraum $\mathcal{V}(\mathbf{p}) = \text{colspan}\{\mathbf{V}(\mathbf{p})\} \subseteq \mathbb{R}^N$ bewegt. Das Originalsystem (1) kann also auf diesen Unterraum projiziert werden,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \approx \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r(t). \quad (4)$$

$\mathcal{V}(\mathbf{p})$ wird dabei von den Spalten der Matrix $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N \times n}$, der Reduktionsbasis, aufgespannt. Die reduzierten Koordinaten $\mathbf{q}_r(t) \in \mathbb{R}^n$ approximieren mit wesentlich geringerer Problemdimension $n \in \mathbb{N}$, $n \ll N$, die Dynamik des Originalsystems. $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in \mathbb{R}^N$ erfasst den dabei gemachten Approximationsfehler.

Einsetzen von Ansatz (4) in Gleichung (1) führt zu einem überbestimmten Gleichungssystem mit n Unbekannten und N Gleichungen,

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}) \ddot{\mathbf{q}}_r(t) + D(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{q}}_r(t) + K(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r(t) &= B(\mathbf{p}) \mathbf{F}(t) + \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{y}(t) \approx \mathbf{y}_r(t) = C(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r(t), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei alle in Zusammenhang mit dem Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ entstehenden Terme im Residuum $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^N$ zusammengefasst werden.

Zur Berechnung einer Lösung wird Gleichung (5) auf den allgemeinen Unterraum $\mathcal{W}(\mathbf{p}) = \text{colspan}\{W\}$ mit $W(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ projiziert. Die spezielle Wahl $W(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})$ führt zu einer orthogonalen Projektion, welche die Galerkin-Bedingung $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{V}(\mathbf{p})$ bzw. $\mathbf{V}^T(\mathbf{p}) \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ erfüllt und damit variationale Konsistenz² garantiert.

¹Taylorreihenentwicklung der Übertragungsfunktion um den komplexen Entwicklungspunkt $s_0 \in \mathbb{C}$.

²Durch Variation von Gleichung (4), $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r(t)$, folgt direkt $\delta \mathbf{q}^T(t) = \delta \mathbf{q}_r^T(t) \mathbf{V}^T(\mathbf{p})$. Daher verlangt $\delta \mathbf{q}^T(t) \mathbf{F}_{\text{int}}(t) \mathbf{q}^T(t)$ direkt $\delta \mathbf{q}_r^T(t) \mathbf{V}^T(\mathbf{p}) \mathbf{F}_{\text{int}}(t) \mathbf{V}(\mathbf{p}) \mathbf{q}_r^T(t)$.

Reduzierte Systemdynamik und -ausgang ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathbf{V}^\top(\mathbf{p}) \mathbf{M}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{M}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \ddot{\mathbf{q}}_r(t) + \underbrace{\mathbf{V}^\top(\mathbf{p}) \mathbf{D}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{D}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \dot{\mathbf{q}}_r(t) + \underbrace{\mathbf{V}^\top(\mathbf{p}) \mathbf{K}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{K}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \mathbf{q}_r(t) \\ & = \underbrace{\mathbf{V}^\top(\mathbf{p}) \mathbf{B}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{B}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{y}_r(t) = \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{C}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \mathbf{q}_r(t).$$

Auch hierfür lassen sich Übertragungsfunktion

$$\mathbf{G}_r(s; \mathbf{p}) = \mathbf{C}_r(\mathbf{p}) (\mathbf{K}_r(\mathbf{p}) + s \mathbf{D}_r(\mathbf{p}) + s^2 \mathbf{M}_r(\mathbf{p}))^{-1} \mathbf{B}_r(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{\infty} -\mathbf{M}_{r,i}^{s_0}(\mathbf{p}) (s - s_0)^i, \quad (7)$$

und Momente

$$\mathbf{M}_{r,i}^{s_0}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{i!} \left. \frac{d^i \mathbf{G}_r(s; \mathbf{p})}{ds^i} \right|_{s_0} \quad (8)$$

berechnen.

Die Modellordnungsreduktion von linearen mechanischen Systemen lässt sich somit auf die Berechnung der Reduktionsbasis $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ reduzieren. Auf zwei hierfür mögliche und in der Literatur etablierte Ansätze wird in Abschnitt 3 im Zuge der Erweiterung auf nichtlineare Systeme näher eingegangen.

2.2 Geometrisch-nichtlineare Systeme

Die Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten in der Modellierung durch quadratisches Green-Lagrange Dehnungsmaß (mit zweitem Piola-Kirchhoff Spannungsmaß) in der FE-Formulierung ermöglicht es, auch große Verformungen von mechanischen Strukturen abbilden zu können. Als Beispiel wäre hier die Durchbiegung einer Platte, um mehr als ihre Dicke anzuführen. Die nichtlineare Systemdynamik (inklusive Systemausgang) erweitert sich zu [1,2]

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{q}(t); \mathbf{p}) = \mathbf{B}(\mathbf{p}) \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}) \mathbf{q}(t) \quad (9)$$

mit den nun nichtlinearen internen Kräften $\mathbf{f}(\mathbf{q}(t); \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$.

Diese kann um einen beliebigen Verschiebungswert \mathbf{q}_0 — möglicherweise handelt es sich hierbei um den stationären Endwert, also den statischen Verschiebungsanteil $\mathbf{q}_0 =: \mathbf{q}_s(\mathbf{p})$ — linearisiert werden,

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \Delta \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{p}) \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{q}_0; \mathbf{p}) \Delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{p}) \mathbf{F}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}) \quad (10)$$

mit $\Delta \mathbf{q}(t) := \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0$ und tangentialer Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}; \mathbf{p}) := \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}; \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Für das linearisierte System (10) lassen sich ein reduziertes System (6) sowie entsprechend Gleichungen (2) und (3) bzw. (7) und (8) Übertragungsfunktionen und Momente an der Stelle \mathbf{q}_0 formulieren.

³Taylorreihenentwicklung der Übertragungsfunktion um den komplexen Entwicklungspunkt $s_0 \in \mathbb{C}$.

Unter Berücksichtigung einer entsprechend erweiterten Basis $\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})$ soll Ansatz (4) auch auf die Reduktion der Problemdimension des nichtlinearen Modells (9) von $N \in \mathbb{N}$ auf $\widehat{n} \in \mathbb{N}$, wobei auch $\widehat{n} \ll N$, angewendet werden. Die Systemgleichung wird dazu mit Hilfe der Reduktionsbasis $\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N \times \widehat{n}}$ und den reduzierten Koordinaten $\widehat{\mathbf{q}}_r(t) \in \mathbb{R}^{\widehat{n}}$ auf den Unterraum $\widehat{\mathcal{V}}(\mathbf{p}) = \text{colspan}\{\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})\}$ projiziert,

$$\mathbf{q}(t) = \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r(t) + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \approx \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r(t). \quad (11)$$

Orthogonale Projektion mit Erfüllung der Galerkin-Bedingung, $\widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ bzw. $\widehat{\mathbf{r}}(t) \perp \widehat{\mathcal{V}}(\mathbf{p})$, garantiert abermals variationale Konsistenz³. Im Residuum $\widehat{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^N$ wurden dabei wiederum alle in Zusammenhang mit dem Approximationsfehler $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \in \mathbb{R}^N$ entstehenden Terme zusammengefasst. Reduzierte Systemdynamik und -ausgang ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} & \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{M}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{M}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \ddot{\widehat{\mathbf{q}}}_r(t) + \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{D}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{D}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \dot{\widehat{\mathbf{q}}}_r(t) + \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r(t); \mathbf{p})}_{=: \mathbf{f}_r(\widehat{\mathbf{q}}_r(t); \mathbf{p})} \\ & = \underbrace{\widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{B}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{B}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{y}_r(t) = \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})}_{=: \mathbf{C}_r(\mathbf{p}) = \text{const.}} \widehat{\mathbf{q}}_r(t).$$

Der Vergleich von nichtlinearer (12) und linearer Projektion (6) zeigt die beiden grundsätzlichen Unterschiede und damit neuen Problemstellungen auf:

1. Die entsprechend erweiterte Reduktionsbasis $\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})$ muss gefunden werden.
2. Die Auswertung der nichtlinearen Kräfte $\mathbf{f}_r(\widehat{\mathbf{q}}_r(t); \mathbf{p}) := \widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r(t); \mathbf{p})$ muss darüber hinaus beschleunigt werden, da diese nach wie vor über die vollständige Elementdomäne (Dimension N) assembliert und ausgewertet werden müssen — und dies sowohl in jedem Zeit- als auch Iterationsschritt.

Modellordnungsreduktion für nichtlineare Systeme verlangt also nach Kombination von Projektion mit sogenannter Hyperreduktion. Auf beide Aufgabenstellungen wird im Folgenden genauer eingegangen.

2.3 Kommentar zur Berücksichtigung von Parameterabhängigkeiten

Die Berücksichtigung von Parameterabhängigkeiten $\cdot(\mathbf{p})$ führt auf das Problem sogenannter parametrischer Modellordnungsreduktion, kurz pMOR. Eine umfassende Zusammenfassung zu diesem Thema kann in [3] gefunden werden. Möglich sind sowohl die Berechnung von globalen als auch lokalen Reduktionsbasen und bei Letzterem die Interpolation zwischen lokal berechneten Basen oder den bereits lokal reduzierten Systemen (siehe z.B. [4–6]). Viele Methoden sind unmittelbar mit den nachfolgend präsentierten Ansätzen kombinierbar und verwenden (meist) fest gewählte Parameterstützstellen $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, i_{\max}$. Daher kann im Folgenden auf die explizite Darstellung von Parameterabhängigkeiten verzichtet werden. Eine detailliertere Betrachtung ist für einen späteren Zeitpunkt geplant.

³Durch Variation von Gleichung (11), $\mathbf{q}(t) = \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r(t)$, folgt direkt $\delta \mathbf{q}^T(t) = \delta \widehat{\mathbf{q}}_r^T(t) \widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p})$. Daher verlangt $\delta \mathbf{q}^T(t) \mathbf{F}_{\text{int}}(t) \mathbf{q}^T(t)$ direkt $\delta \widehat{\mathbf{q}}_r^T(t) \widehat{\mathbf{V}}^T(\mathbf{p}) \mathbf{F}_{\text{int}}(t) \widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) \widehat{\mathbf{q}}_r^T(t)$.

3 Simulationsfreie Berechnung von Reduktionsbasen

Im Folgenden wird von einem fest gewählten Parametersatz $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ ausgegangen und damit auf die explizite Darstellung von Parameterabhängigkeiten verzichtet.

3.1 Ansatz zur Erweiterung linearer auf nichtlineare Basen

Aktuell werden zur Identifikation von nichtlinearen Reduktionsbasen meist simulationsbasierte Methoden, sogenannte proper orthogonal decomposition (POD)-Methoden verwendet (siehe z.B. [7]). Sehr intuitiv können diese als Minimierungsprozess interpretiert werden. Im Gegenzug sind jedoch numerisch und zeitlich aufwändige Trainingssimulationen bei voller Ordnung N und fester Wahl des Krafteingangssignals $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0(t)$ erforderlich. Die Qualität der Reduktion kann nur für diesen Eingang garantiert werden.

Ziel dieses Projekts ist daher die Entwicklung von simulationsfreien Methoden, welche vollständig auf Trainingssimulationen und die damit verbundene Wahl des Eingangs verzichten und eine allgemeinere Qualitätsaussage zulassen. Zentrale Idee hierfür ist eine Erweiterung der Basen für das lineare bzw. linearisierte Modell um zusätzliche nichtlineare Information.

Ansatz (4), für das linearisierte System (10) als

$$\Delta \mathbf{q}(t) \approx \mathbf{V}(\mathbf{q}_0) \Delta \mathbf{q}_r(t) = \sum_{m=1}^n \mathbf{v}_m(\mathbf{q}_0) \eta_m(t)$$

mit reduzierten Koordinaten $\Delta \mathbf{q}_r(t) = [\eta_1(t) \ \eta_2(t) \ \dots \ \eta_n(t)]^T$ formuliert, wird unter Berücksichtigung einer veränderlichen Basis $\mathbf{V}(\mathbf{q}(t))$ auf das nichtlineare System (9) übertragen,

$$\Delta \mathbf{q}(t) \approx \mathbf{V}(\mathbf{q}(t)) \Delta \mathbf{q}_r(t) = \sum_{m=1}^n \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \eta_m(t).$$

Dieser Ansatz kann in einer Taylorreihe um den zuvor für die Linearisierung (10) gewählten Punkt \mathbf{q}_0 entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}(t) &= \Delta \mathbf{q}(t)|_{\mathbf{q}_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \eta_l(t) + \dots \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) \eta_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} + \frac{\partial \mathbf{v}_k(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \right) \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{6} \left(\left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_l(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \right) \right) \Big|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \eta_l(t) \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) \eta_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_j(t) \eta_k(t) \eta_l(t) + \dots \end{aligned}$$

(13)

Die Ableitungen hierin ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \eta_j(t)} \left(\sum_{m=1}^n \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \eta_m(t) \right) \right|_{\mathbf{q}_0} \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \eta_m(t) + \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t)} \right) \Big|_{\mathbf{q}_0} = \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) \\
\left. \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \left(\sum_{m=1}^n \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \eta_m(t) \right) \right|_{\mathbf{q}_0} \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \eta_m(t) + \frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_k(t)} + \frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t)} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \frac{\partial^2 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \right) \Big|_{\mathbf{q}_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} + \frac{\partial \mathbf{v}_k(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \right) \Big|_{\mathbf{q}_0} \\
\left. \frac{\partial^3 \Delta \mathbf{q}(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \left(\sum_{m=1}^n \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \eta_m(t) \right) \right|_{\mathbf{q}_0} \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial^3 \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \eta_m(t) + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_l(t)} \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_k(t)} \right. \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \frac{\partial^2 \eta_m(t)}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t)} + \frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \frac{\partial^2 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_l(t)} \\
&\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \frac{\partial^2 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} + \mathbf{v}_m(\mathbf{q}(t)) \frac{\partial^3 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right) \Big|_{\mathbf{q}_0} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_l(t)} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_l(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} \right) \Big|_{\mathbf{q}_0},
\end{aligned}$$

wobei es zu beachten gilt, dass hier eine Auswertung an der Stelle $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ den reduzierten Koordinaten $\eta_1(t) = \eta_2(t) = \dots = \eta_n(t) = 0$ entspricht und die Ableitungen die Werte $\frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t)} = 1$ für $m = j$ sonst $\frac{\partial \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t)} = 0$, $\frac{\partial^2 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t)} = 0$ sowie $\frac{\partial^3 \eta_m(t)}{\partial \eta_j(t) \partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} = 0$ annehmen. Der Abbruch der Reihenentwicklung (13) nach Termen erster und zweiter Ordnung führt auf die Näherung

$$\Delta \mathbf{q}(t) \approx \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) \eta_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_{jk}(t).$$

Basierend hierauf wird die erweiterte Reduktionsbasis mit entsprechenden reduzierten Koordinaten definiert,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{V}} &=: \left[\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_0) \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{q}_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n(\mathbf{q}_0) \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \cdots \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \right], \\
\widehat{\mathbf{q}}_r(t) &= \left[\eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \cdots \quad \eta_n(t) \quad \left. \eta_{11}(t) \quad \eta_{12}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nn}(t) \right]^T.
\end{aligned}$$

Die erweiterte Basis $\widehat{\mathbf{V}}$ kombiniert somit die Basisvektoren des linearen bzw. linearisierten Systems \mathbf{V} und deren Ableitungen, was zu zusätzlichen Freiheitsgraden $\eta_{jk}(t)$ führt. Die Basisvektorableitung $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0}$ erfasst hierin die Änderung des Basisvektors $\mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0)$ bei geringer

Auslenkung des Systems in Richtung von Basisvektor $\mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0)$ und somit den Verhaltensanteil zweiter Ordnung.

Anmerkung Ein Abbruch der Reihenentwicklung (13) nach den Termen dritter Ordnung,

$$\Delta \mathbf{q}(t) \approx \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) \eta_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_{jk}(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \eta_{jkl}(t),$$

ist ebenfalls möglich. Die erweiterte Basis und die reduzierten Koordinaten werden dementsprechend als

$$\widehat{\mathbf{V}} =: \left[\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_0) \cdots \left| \left. \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdots \left| \left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1^2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t) \partial \eta_2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdots \left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_2(t) \partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdots \left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n^2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_r(t) = \left[\eta_1(t) \cdots \left| \eta_{11}(t) \cdots \left| \eta_{111}(t) \quad \eta_{112}(t) \quad \cdots \quad \eta_{121}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nnn}(t) \right| \right]^T$$

definiert, was zu einer zusätzlichen Berücksichtigung des Verhaltensanteil dritter Ordnung durch die zweiten Basisvektorableitungen führt. Die zweite Basisvektorableitung $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \right|_{\mathbf{q}_0}$ erfasst die Änderung der ersten Basisvektorableitung $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0}$ bei geringer Auslenkung des Systems in Richtung von Basisvektor $\mathbf{v}_l(\mathbf{q}_0)$.

Näherungen, Basen und entsprechende reduzierte Koordinaten noch höherer Ordnung wären ebenfalls denkbar.

Der vorgestellte, allgemein formulierte Ansatz wird im Folgenden zur Erweiterung von modalem Abschneiden und linearem moment matching genutzt, kann aber ohne Einschränkung auch auf alle weiteren Methoden zur Basisberechnung übertragen werden.

3.2 Anwendung auf modales Abschneiden

Die Lösungen des quadratischen Eigenwertproblems für das linearisierte System (10)

$$(\mathbf{K}(\mathbf{q}_0) - \omega_j^2(\mathbf{q}_0) \mathbf{M}) \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

mit Wahl

$$\mathbf{v}_j^T(\mathbf{q}_0) \mathbf{M} \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{v}_j^T(\mathbf{q}_0) \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0) = \omega_j^2(\mathbf{q}_0)$$

liefern die n linearen Basisvektoren.

Durch Ableitung von Gleichung (14) nach der entsprechenden reduzierten Koordinate, $\frac{\partial \text{Gl. (14)}}{\partial \eta_k(t)}$, erhält man unter Vernachlässigung von Trägheitseffekten die unter dem Namen modale Ableitungen bekannten Basisvektorableitungen [7–13]

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} = - \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{v}_j(\mathbf{q}_0), \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, j,$$

wobei hier $\left. \frac{\partial \mathbf{v}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_k(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_j(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \forall j, k = 1, \dots, n$ symmetrisch sind und daher die Wahl

$k = 1, \dots, j$ ausreichend ist. Dies führt zu $\frac{n(n+1)}{2}$ weiteren Basisvektoren zweiter Ordnung.

Es ergeben sich die erweiterte Reduktionsbasis und entsprechende reduzierte Koordinaten

$$\widehat{\mathbf{V}} =: \left[\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_0) \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{q}_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n(\mathbf{q}_0) \left| \left. \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}_2(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \cdots \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_r(t) = \left[\eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \cdots \quad \eta_n(t) \left| \eta_{11}(t) \quad \eta_{21}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nn}(t) \right| \right]^T$$

mit einer reduziertern Ordnung von $\widehat{n} = n + \frac{n(n+1)}{2}$.

3.3 Anwendung auf moment matching

Wird der lineare Unterraum als Krylow-Unterraum, also die linearen Basisvektoren als Krylow-Richtungen [14–19]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0) &= -\mathbf{B}, \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \mathbf{V}_2(\mathbf{q}_0) &= -\mathbf{D}_{s_0} \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0), \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0) &= -\mathbf{D}_{s_0} \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}_0) - \mathbf{M} \mathbf{V}_{j-2}(\mathbf{q}_0), \quad j = 3, \dots, q_0 \end{aligned} \quad (15)$$

bei allgemeiner Dämpfung ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$) bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0) &= -\mathbf{B}, \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0) &= -\mathbf{M} \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}_0), \quad j = 2, \dots, q_0 \end{aligned} \quad (16)$$

und bei proportionaler ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}(\mathbf{q}_0)$) oder fehlender Dämpfung ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) gewählt, so können in Abhängigkeit des Parameters q_0 die in Tabelle 1 genannte Anzahl an Momenten (3) und (8) des linearisierten Systems (10) zur Übereinstimmung gebracht werden. Hierin sind Basisblock $\mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0) = [\mathbf{v}_{(j-1)m+1}(\mathbf{q}_0) \ \cdots \ \mathbf{v}_{(j-1)m+m}(\mathbf{q}_0)]$, $\mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) := \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) + s_0 \mathbf{D} + s_0^2 \mathbf{M}$ und $\mathbf{D}_{s_0} := \mathbf{D} + 2s_0 \mathbf{M}$ mit dem zu wählenden komplexen Entwicklungspunkt $s_0 \in \mathbb{C}$. m ist die Dimension des Eingangs $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^m$.

Tabelle 1: Anzahl übereinstimmender Momente

Dämpfung	α	β	s_0	einseitig		zweiseitig
				unsymmetrisch	symmetrisch*	
allgemein ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$)	—	—		q_0	$2q_0$	$2q_0$
proportional ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$)	> 0	≥ 0		q_0	$2q_0$	$2q_0$
	$= 0$	> 0	$\neq 0$	q_0	$2q_0$	$2q_0$
			$= 0$	$2q_0$	$4q_0$	$4q_0$
keine ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$)	—	—	$\neq 0$	q_0	$2q_0$	$2q_0$
			$= 0$	$2q_0$	$4q_0$	$4q_0$

* $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$, $\mathbf{C}^T = \mathbf{B}$

Die Basisvektorableitungen — Krylow-Ableitungen — berechnen sich bei allgemeiner Dämpfung ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$) durch $\frac{\partial \text{Gl. (15)}}{\partial \eta_k(t)}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0), \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{D}_{s_0} \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_2(\mathbf{q}_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{D}_{s_0} \frac{\partial \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}_{j-2}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0), \quad j = 3, \dots, q_0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

bzw. bei proportionaler ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}(\mathbf{q}_0)$) oder fehlender Dämpfung ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) durch $\frac{\partial \text{Gl. (16)}}{\partial \eta_k(t)}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0), \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0), \\ &\quad j = 2, \dots, q_0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich Basis und entsprechende reduzierte Koordinaten

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{V}} &=: \left[\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_0) \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{q}_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n(\mathbf{q}_0) \mid \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_2(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \right] \\ \widehat{\mathbf{q}}_r(t) &= \left[\eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \cdots \quad \eta_n(t) \mid \eta_{11}(t) \quad \eta_{12}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nn}(t) \right]^T \end{aligned}$$

mit redzierter Ordnung $\widehat{n} = n + n^2 = mq_0 + (mq_0)^2$.

Anmerkung Die zweiten Basisvektorableitungen — zweite Krylow-Ableitungen — ergeben sich bei allgemeiner Dämpfung ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$) durch $\frac{\partial^2 \text{Gl. (15)}}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}, \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{V}_2(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{D}_{s_0} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_2(\mathbf{q}_0) \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}, \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{D}_{s_0} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{j-2}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0) \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}, \\ &\quad j = 3, \dots, q_0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

und bei proportionaler ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}(\mathbf{q}_0)$) oder fehlender Dämpfung ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) durch $\frac{\partial^2 \text{Gl. (16)}}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_1(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}, \\ \mathbf{K}_{s_0}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} &= -\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{j-1}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \mathbf{V}_j(\mathbf{q}_0) \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \frac{\partial \mathbf{V}_j(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}, \\ &\quad j = 2, \dots, q_0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Die zusätzliche Berücksichtigung von zweiten Krylow-Ableitungen resultiert in der erweiterten Basis und entsprechenden reduzierten Koordinaten

$$\widehat{\mathbf{V}} =: \left[\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n(\mathbf{q}_0) \quad \left| \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \left| \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_1^2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad \cdots \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}_n(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_n^2(t)} \right|_{\mathbf{q}_0} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_r(t) = \left[\eta_1(t) \quad \cdots \quad \eta_n(t) \quad \left| \quad \eta_{11}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nn}(t) \quad \left| \quad \eta_{111}(t) \quad \cdots \quad \eta_{nnn}(t) \right. \right]^T$$

mit einer redzierten Ordnung von $\widehat{n} = n + n^2 + n^3 = m_{q_0} + (m_{q_0})^2 + (m_{q_0})^3$.

3.4 Implementierung

Für die Implementierung ist entweder eine exakte Berechnung und Assemblierung der Ableitungen der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}$ auf Elementbasis oder aber, wie in dieser Arbeit angewandt, eine numerische Approximation über einen zentralen Finite-Differenzen-Quotienten möglich,

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \approx \frac{\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0)) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0 - \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0))}{2\delta \eta_k}. \quad (17)$$

Anmerkung Selbiges gilt für die zweiten Ableitungen der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0}$. Auch hier ist eine exakte Berechnung auf Elementbasis oder eine numerische Approximation über zentrale Finite-Differenzen-Quotienten möglich,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}(\mathbf{q}(t))}{\partial \eta_k(t) \partial \eta_l(t)} \Big|_{\mathbf{q}_0} \approx \frac{1}{2\delta \eta_l} \left(\frac{\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0) + \delta \eta_l \mathbf{v}_l(\mathbf{q}_0)) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0 - \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0) + \delta \eta_l \mathbf{v}_l(\mathbf{q}_0))}{2\delta \eta_k} - \frac{\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0) - \delta \eta_l \mathbf{v}_l(\mathbf{q}_0)) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0 - \delta \eta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{q}_0) - \delta \eta_l \mathbf{v}_l(\mathbf{q}_0))}{2\delta \eta_k} \right). \quad (18)$$

3.5 Beispiel Dreifachbogen

Zur Veranschaulichung werden im Folgenden die Ergebnisse bei *rein projektiver Reduktion – ohne Hyperreduktion* – für das zweidimensionale Finite-Elemente-Modell eines Dreifachbogens, wie in Abbildung 1 zu sehen, gezeigt. Durch eine Diskretisierung mit 2024 Dreieckselementen, Total Lagrangian-Formulierung und quadratische Ansatzfunktionen, ergeben sich $N = 2690$ Knotenverschiebungen in x - und y -Richtung. Die Abmessungen des Dreifachbogens betragen 31.0 m in der Breite und 11.0 m in der Höhe. Als Material wurde Stahl mit den Eigenschaften $\rho = 7.9e3 \text{ kg/m}^3$, $E = 2.1e11 \text{ N/m}^2$ und $\nu = 0.3$ gewählt. Das Modell berücksichtigt keinerlei Dämpfung, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Es liegt lediglich numerische Dämpfung vor, bedingt durch numerische Zeitintegration mit dem generalized- α -Schema und Wahl von dessen Parameter zu $\rho_\infty = 0.9$.

Ergebnisse werden für die beiden Lastfälle

$$\mathbf{F}_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 4 \times 10^7 \text{ N} \cdot \sigma(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 4 \times 10^8 \text{ N} \cdot \sigma(t)$$

präsentiert, wobei die Sprungfunktion $\sigma(t)$ hierin durch $\sigma(t) = 0 \forall t < 0$ und $\sigma(t) = 1 \forall t \geq 0$ charakterisiert ist. Belastung, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1(t)$ bzw. $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_2(t)$, und Messung der jeweiligen Verschiebung, $\mathbf{q}_P(t) = \begin{bmatrix} q_{Px}(t) & q_{Py}(t) \end{bmatrix}^T$ bzw. $\mathbf{q}_{Pr}(t) = \begin{bmatrix} q_{Prx}(t) & q_{Pr}(t) \end{bmatrix}^T$, erfolgen am Punkt P. Statische Netzkonvergenzstudien wurden für beide Lastfälle durchgeführt. Bei der gewählten Diskretisierung mit 2024 Elementen liegen noch Abweichungen von -0.06% in x -

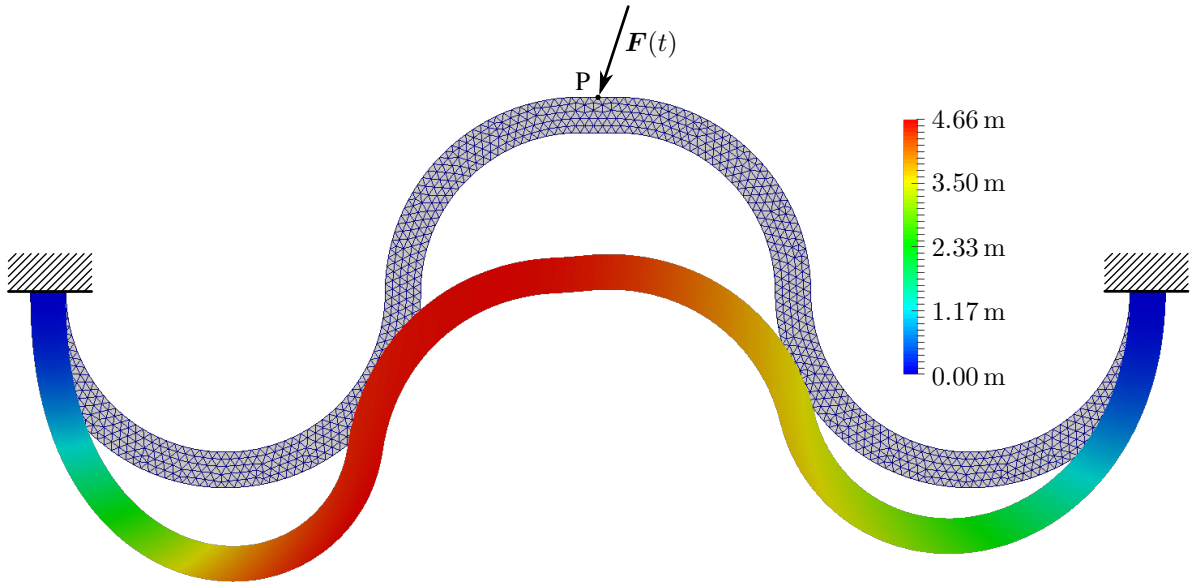


Abbildung 1: Statischer Verschiebungsanteil des Dreifachbogens bei $F(t) = F_2(t)$.

bzw. -0.26% in y -Richtung bei $F = F_1(\infty)$ und -0.73% in x - bzw. -3.85% in y -Richtung bei $F = F_2(\infty)$ vor.

Moden (M0), Modale Ableitungen (M1), Krylow-Richtungen (K0), Krylow-Ableitungen (K1) und zweite Krylow-Ableitungen (K2) wurden für die beiden Linearisierungspunkte $q_0 = q_s$, was dem stationären Endwert, also dem statischen Verschiebungsanteil entspricht, und $q_0 = 0$, was der unbelasteten Ausgangskonfiguration entspricht, berechnet und damit Reduktion und Simulation durchgeführt. Als komplexer Entwicklungspunkt für das moment matching wurde $s_0 = 0$ gewählt. Die notwendigen Parameter $\delta\eta_k$ und $\delta\eta_l$ der genutzten Finite-Differenzen-Approximationen (17) und (18) wurden dabei auf den fixen Wert 10^{-9} gesetzt. Es erfolgte jeweils erst die Berechnung der linearen Basisvektoren, anschließend die der ersten Basisvektorableitungen und dann gegebenenfalls noch die der zweiten Basisvektorableitungen. Neu berechnete Vektoren wurden jeweils bezüglich allen vorhergehend berechneten Basisvektoren orthogonalisiert. Am Ende erfolgte eine Orthogonalisierung der gesamten Basis bezüglich der Massenmatrix M .⁴ Als Vergleichsbasen dienen die jeweils zur tatsächlichen Belastung $F_1(t)$ bzw. $F_2(t)$ ermittelten optimalen POD-Basen (P).

Abbildungen 2 und 3 veranschaulichen beispielhaft die zu $F(t) = F_1(t)$ und $q_0 = q_s$ gehörigen Moden und Modalen Ableitungen bzw. Krylow-Richtungen und -Ableitungen mit 500-facher Überhöhung. Abbildungen 5–8 (Legende siehe Abbildung 4) zeigen die Entwicklung der relativen Fehler bei Erhöhung der reduzierten Ordnung \hat{n} für mögliche Kombinationen.

Es lassen sich folgende Beobachtungen machen:

- Die Wahl rein linearer Basen, M0 oder K0, für die Reduktion des nichtlinearen Systems ist nicht ausreichend. Zugehörige Fehler nehmen kaum ab bzw. stagnieren bei unbrauchbaren Werten nahe 100%.
- Bei ausreichend hoher reduzierter Ordnung eignen sich sowohl die Kombination von Moden und Modalen Ableitungen M0 + M1 sowie auch von Krylow-Richtungen und -Ableitungen K0 + K1 als Reduktionsbasis.

⁴Die gemischte Basis M0 + M1 + K0 + K1 wurde durch Vereinigung der Basen M0 + M1 und K0 + K1 vor der endgültigen Orthogonalisierung bezüglich Massenmatrix M gebildet.

- Die Kombination von Krylow-Richtungen und -Ableitungen K0 + K1 weist im Allgemeinen geringere Fehlerwerte auf als die Kombination Moden und Modale Ableitungen K0 + K1.
- Geeignet ist die Wahl $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_s$. Dies setzt jedoch entsprechende Kenntnisse bezüglich der tatsächlichen späteren Belastung $\mathbf{F}(t)$ voraus. Damit wiederum könnte auch versucht werden eine POD-Basis zu ermitteln. Weniger geeignet ist die Wahl $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$. Der Entwicklungspunkt sollte daher möglichst nahe am späteren statischen Verschiebungsanteil gewählt werden.
- Die Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung, wie z.B. die Kombination von Krylow-Richtungen, ersten und zweiten -Ableitungen K0 + K1 + K2 bringt keine nennenswerten Vorteile. Auch müssen die numerischen Approximationen der zweiten (18) und höheren Ableitungen der tangentialen Steifigkeitsmatrix kritisch gesehen werden.

Für weiterführende Aussagen sind tiefere Untersuchungen notwendig, welche zukünftig geplant sind.

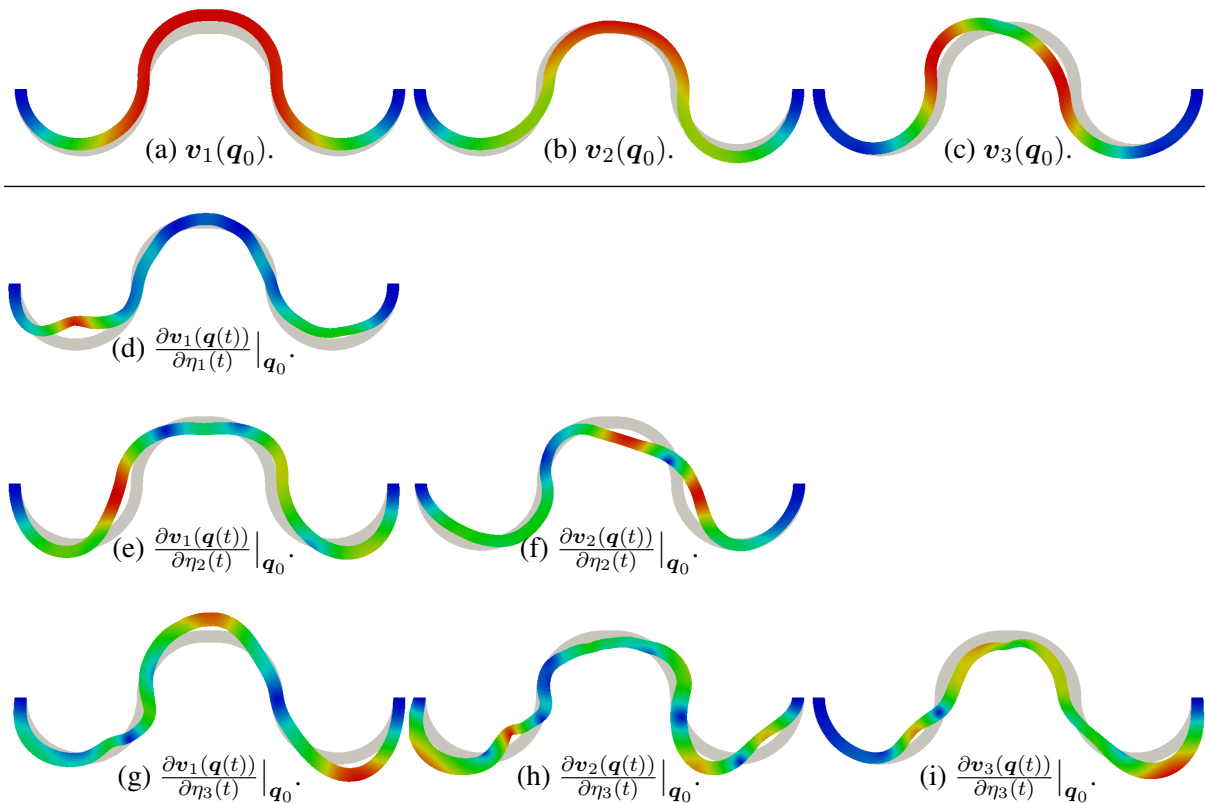


Abbildung 2: Moden und modale Ableitungen bei $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1(t)$ und $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_s$ mit 500-facher Überhöhung.

4 Hyperreduktion zur beschleunigten Auswertung des nichtlinearen Kraftterms

Die Projektion der nichtlinearen Bewegungsgleichung auf einen Unterraum verringert zwar die Anzahl der Unbekannten, reduziert jedoch nicht den Rechenaufwand, der für die Auswertung

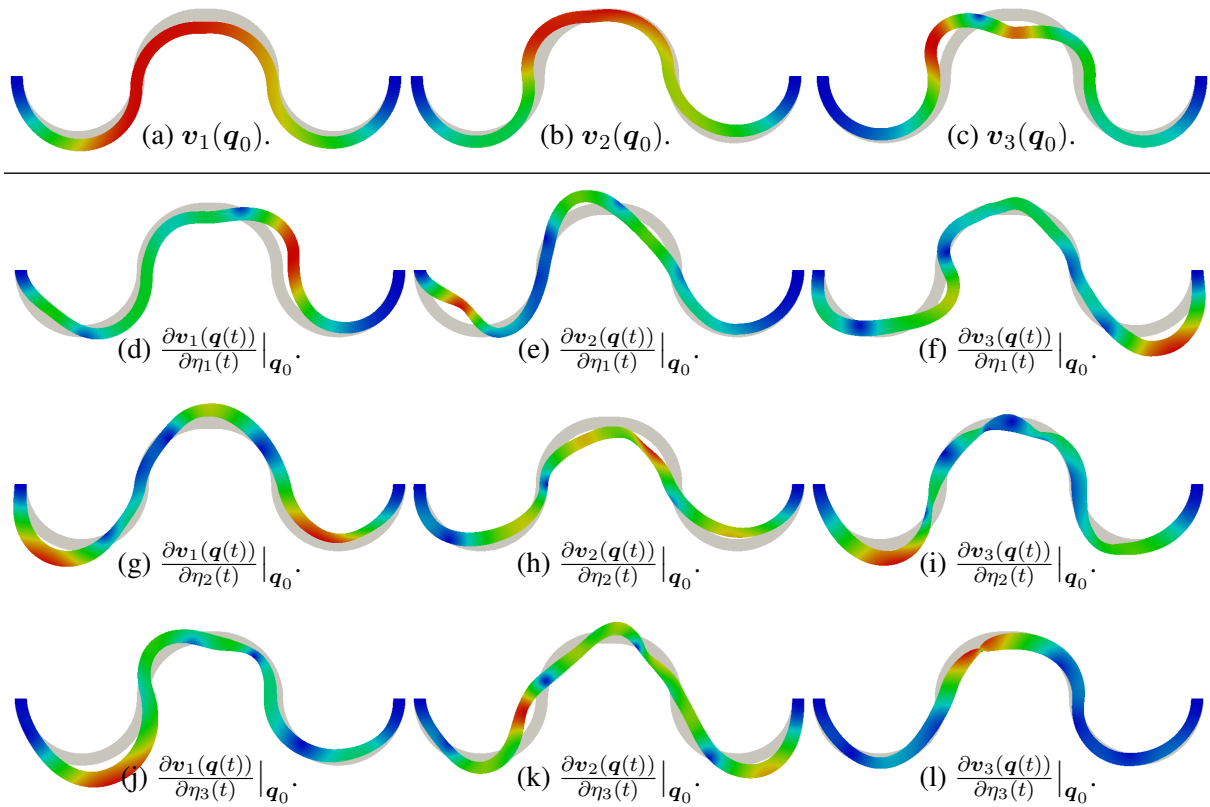


Abbildung 3: Krylow-Richtungen und -Ableitungen bei $F(t) = F_1(t)$ und $q_0 = q_s$ mit 500-facher Überhöhung.

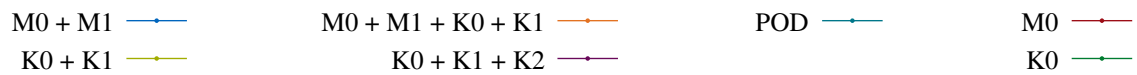


Abbildung 4: Legende zu Abbildungen 5 bis 8.

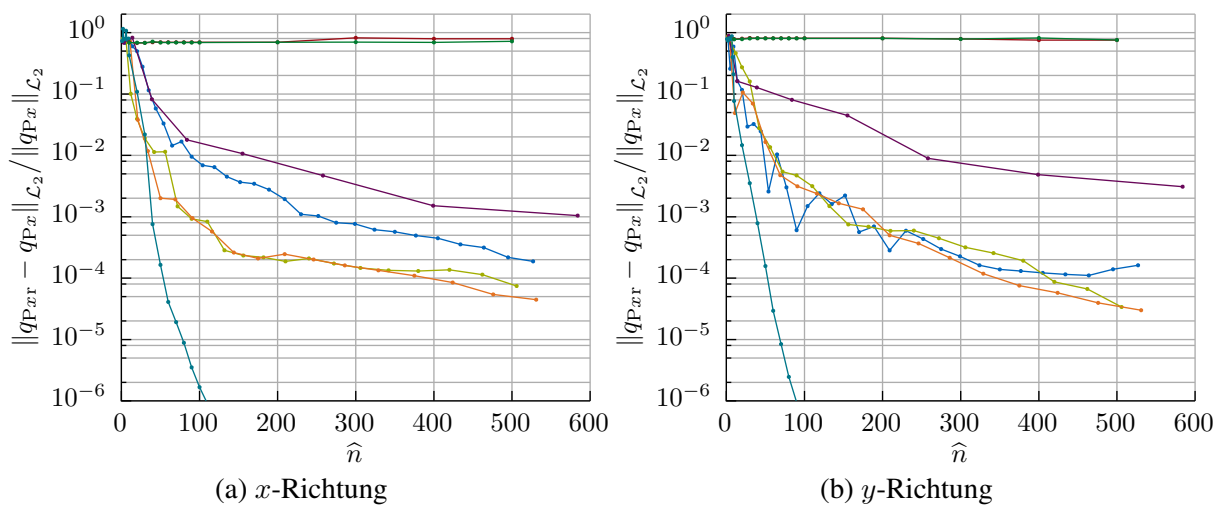
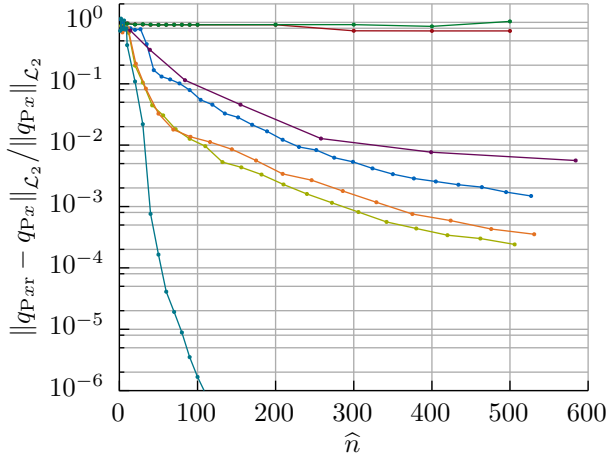
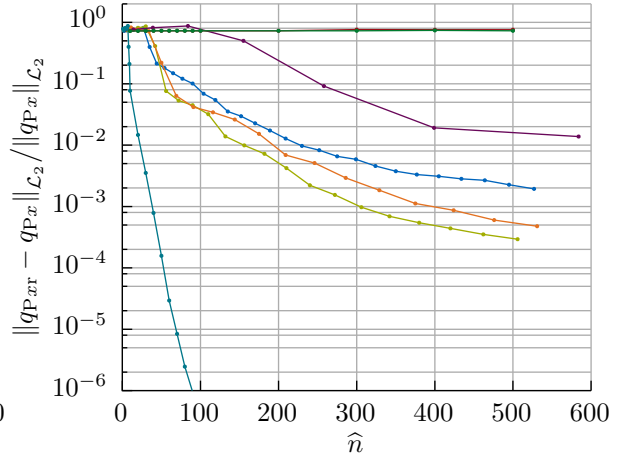


Abbildung 5: Relativer Fehler verschiedener Basen bei $F(t) = F_1(t)$ und $q_0 = q_s$.

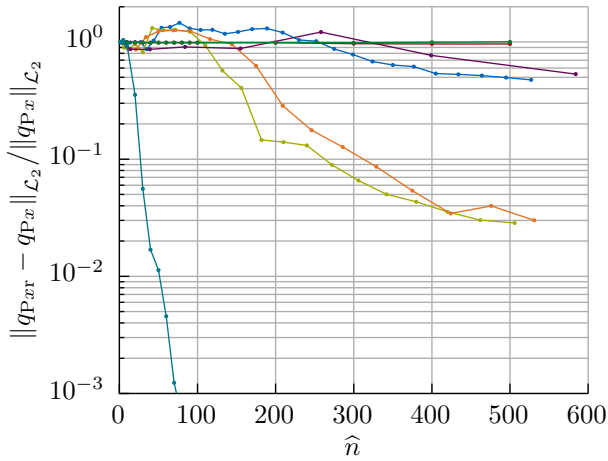


(a) x -Richtung

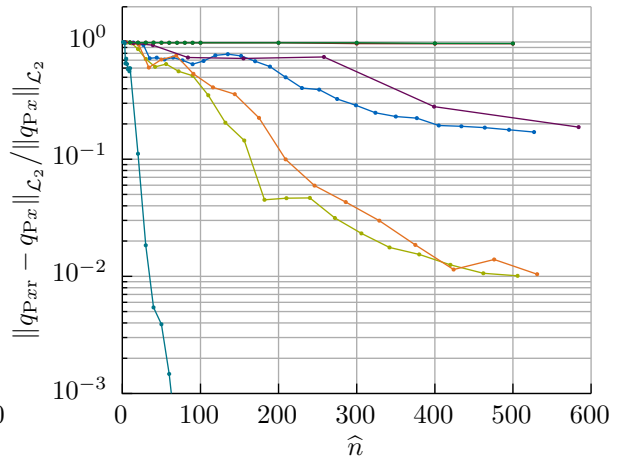


(b) y -Richtung

Abbildung 6: Relativer Fehler verschiedener Basen bei $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1(t)$ und $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$.

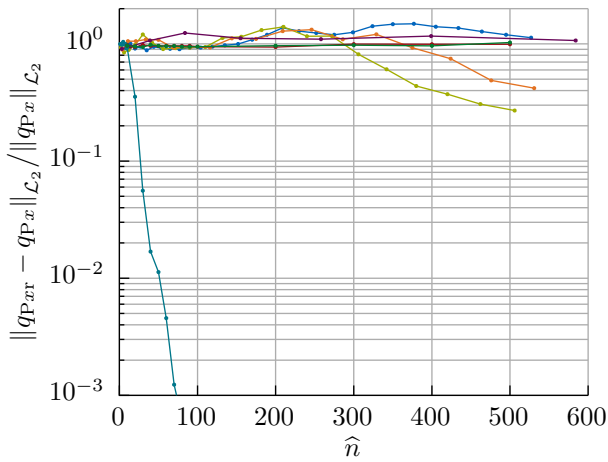


(a) x -Richtung

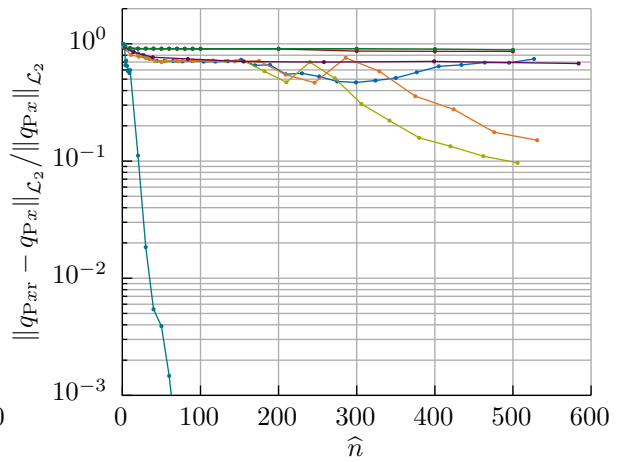


(b) y -Richtung

Abbildung 7: Relativer Fehler verschiedener Basen bei $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_2(t)$ und $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_s$.



(a) x -Richtung



(b) y -Richtung

Abbildung 8: Relativer Fehler verschiedener Basen bei $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_2(t)$ und $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$.

des nichtlinearen Terms benötigt wird. Der nichtlineare Kraftterm $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ hängt implizit von den Verschiebungen $\mathbf{q} = \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r$ ab und muss in der vollen Elementdomäne ausgewertet werden. Um den Rechenaufwand zu verringern werden sogenannte Hyperreduktionsmethoden angewendet.

4.1 Die Idee der Hyperreduktion

Der projizierte nichtlineare Kraftterm

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) = \sum_{e \in E} \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$$

ist eine Assemblierung aller Elementkräfte $\mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$. Hierbei ordnet \mathbf{B}_e die globalen Freiheitsgrade den lokalen Element-Freiheitsgraden zu.

Methoden zur Hyperreduktion verringern den Rechenaufwand, indem sie die Elementkräfte $\mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ nur auf einer Untermenge $\widetilde{E} \subset E$ aller Elemente auswerten und diese über den gesamten Kraftvektor extrapolieren.

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \widetilde{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) = \sum_{e \in \widetilde{E} \subset E} \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{L}_e \mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$$

beschreibt den hyperreduzierten nichtlinearen Kraftterm mit Extrapolation durch Operator \mathbf{L}_e . Die verschiedenen Hyperreduktionsmethoden unterscheiden sich in der Wahl der Elementuntermenge \widetilde{E} und des Extrapolationsoperators \mathbf{L}_e . Im Folgenden werden zwei verbreitete Methoden vorgestellt: die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) und die Methode Energy Conserving Sampling and Weighting (ECSW).

4.2 Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM)

Die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) nach [20, 21] wird nur auf den nichtlinearen Teil des projizierten Kraftterms angewendet. Das heißt, dass der nichtlineare Kraftterm zunächst in den linearen und den nichtlinearen Teil aufgespalten wird,

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) = \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{K} \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r + \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r).$$

Die Idee bei der DEIM ist, den nichtlinearen Kraftterm $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ durch eine Linearkombination von Kraftbasisvektoren \mathbf{U} , welche den Vektorraum $\mathcal{U} = \text{colspan}\{\mathbf{U}\}$ aufspannen, zu approximieren,

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) \approx \mathbf{U} \mathbf{c}(\widehat{\mathbf{q}}_r).$$

Diese Gleichung für $\mathbf{c}(\widehat{\mathbf{q}}_r)$ ist überbestimmt. Anders als bei Minimierung der kleinsten Fehlerquadrate wird hier nun eine boolesche Matrix \mathbf{P}^T vormultipliziert, so dass $\mathbf{P}^T \mathbf{U}$ regulär ist und

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) = \mathbf{P}^T \mathbf{U} \mathbf{c}(\widehat{\mathbf{q}}_r)$$

für $\mathbf{c}(\widehat{\mathbf{q}}_r)$ gelöst werden kann.

Der projizierte nichtlineare Kraftterm wird dann über

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) \approx \widehat{\mathbf{V}}^T \widetilde{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) = \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{K} \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r + \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{U} (\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} \left(\mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) \right) \quad (19)$$

approximiert.

Die boolesche Struktur von \mathbf{P}^T sorgt dafür, dass der letzte Faktor, $\mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$, nur einigen wenigen Zeilen von $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ entspricht. Anstatt die Operation $\mathbf{P}^T \mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ vollständig ausführen zu müssen, genügt es, nur diejenigen Elementkräfte $\mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ auszuwerten, die zu diesen Zeilen beitragen. Die zu diesen Elementkräften zugehörigen Elemente ergeben die Elementmenge $\widetilde{E} \subset E$. Durch die verringerte Anzahl an auszuwertenden Elementkräften $\mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ kann die Rechenzeit des reduzierten Systems deutlich verringert werden.

Um die Methode anwenden zu können, gilt es noch zwei offene Fragen zu klären: Wie kann eine gute Kraftbasis \mathbf{U} bestimmt und wie eine gute Elementmenge \widetilde{E} ausgewählt werden?

Eine Kraftbasis \mathbf{U} kann mit Hilfe einer Proper Orthogonal Decomposition von Trainingssimulationen ermittelt werden. Dazu werden zuerst nichtlineare Kraftvektoren $\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_{r,i})$ von verschiedenen Zeitschritten aus Simulationen am nicht hyperreduzierten Modell aufgezeichnet und als Spaltenvektoren in eine Matrix gespeichert. Mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung dieser Matrix lässt sich dann eine orthogonale Kraftbasis \mathbf{U} bilden, welche die dominantesten Teile des Krafraums enthält.

Nachdem eine geeignete Kraftbasis bestimmt worden ist, kann die Elementmenge \widetilde{E} gewählt werden. In [20] wird dazu ein iterativer Greedy-Algorithmus (siehe Algorithmus 1) vorgeschlagen, welcher eine Möglichkeit darstellt \mathbf{P} aus einer gegebenen Kraftbasis $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L]$ zu bestimmen. Anschließend kann der nichtlineare Kraftterm $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ mit Gleichung (19) approximiert und die Rechenzeit für dessen Auswertung verkürzt werden.

Require: $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L\}$

- 1: $\varphi_1 = \arg \max(|\mathbf{u}_1|)$
- 2: $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1]$, $\mathbf{P} = [e_{\varphi_1}]$, $\varphi = [\varphi_1]$
- 3: **for** $l = 2$ to L **do**
- 4: solve($\mathbf{P}^T \mathbf{U} \mathbf{c} = \mathbf{P}^T \mathbf{u}_l$)
- 5: $\mathbf{r} = \mathbf{u}_l - \mathbf{U} \mathbf{c}$
- 6: $\varphi_l = \arg \max(|\mathbf{r}|)$
- 7: $\mathbf{U} = [\mathbf{U} \ \mathbf{u}_l]$, $\mathbf{P} = [\mathbf{P} \ e_{\varphi_l}]$, $\varphi^T = [\varphi \ \varphi_l]$
- 8: **end for**

*Die Notation $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ steht hier für die Erweiterung von Matrix \mathbf{A} um die zusätzliche Spalte (= Vektor) \mathbf{b} .

Algorithmus 1: Iterativer Algorithmus zur Bestimmung von \widetilde{E} für DEIM

4.3 Energy Conserving Sampling and Weighting (ECSW)

Die Energy Conserving Sampling and Weighting (ECSW) Methode [22, 23] ist eine Hyperreduktionsmethode, welche den nichtlinearen Kraftterm über

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r) \approx \widehat{\mathbf{V}}^T \widetilde{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{q}}_r) = \sum_{e \in \widetilde{E} \subset E} \xi_e^* \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$$

mit positiven skalaren Gewichtungsfaktoren ξ_e^* approximiert. Die Gewichtungsfaktoren ξ_e^* werden nach zwei Kriterien gewählt: Erstens sollen möglichst viele Gewichtungsfaktoren null sein, so dass nur wenige Elementkräfte $\mathbf{f}_e(\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_r)$ ausgewertet werden müssen. Zweitens soll die virtuelle Arbeit für ein Set von \widetilde{N} Trainingsverschiebungen $\{\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_{r,1} \dots \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{q}}_{r,\widetilde{N}}\}$ im hyperreduzierten System erhalten bleiben. Formal lässt sich dies als Minimierungsproblem

$$\boldsymbol{\xi}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Phi} \|\boldsymbol{\xi}\|_0$$

mit der Nebenbedingung

$$\Phi = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{|E|} : \|\mathbf{G}\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon \|\mathbf{b}\|_2, \boldsymbol{\xi}_i \geq 0\},$$

beschreiben, wobei

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \cdots & \mathbf{g}_{1|E|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{\tilde{N}1} & \cdots & \mathbf{g}_{\tilde{N}|E|} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{le} = \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{f}_e(\mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{q}}_{r,l})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\tilde{N}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_l = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{q}}_{r,l}) = \sum_{e=1}^{|E|} \mathbf{g}_{le}.$$

Da dieses Problem nur schwer gelöst werden kann, wird in [22] vorgeschlagen, es durch das leichtere Optimierungsproblem

$$\boldsymbol{\xi}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Upsilon} \|\mathbf{G}\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}\|_2^2, \quad \Upsilon = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{|E|} : \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}\}$$

zu ersetzen und mit dem ebenfalls in [22] beschriebenen *sparse non-negative least squares solver*, kurz *sparse-NNLS solver*, zu lösen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurden die Herausforderungen der Entwicklung eines Gesamtkonzepts zur projektiven Modellordnungsreduktion von nichtlinearen mechanischen Systemen herausgearbeitet. Eine Herausforderung ist dabei die Bestimmung geeigneter Reduktionsbasen, welche auch die dominierende nichtlineare Systemdynamik erfassen und simulationsfrei, unter Verzicht auf Trainingssimulationen des unreduzierten Modells, berechnet werden können. Dazu wurde ein allgemeines Verfahren vorgestellt, bei welchem lineare Reduktionsbasen durch den Ansatz einer Taylorreihenentwicklung um nichtlineare Information erweitert werden können. Zwei Spezialfälle, nämlich die Verwendung von modalem Abschneiden, erweitert mit wohl bekannten modalen Ableitungen, und die des moment matching, erweitert um Krylow-Ableitungen, wurden abgeleitet und am Beispiel eines Dreifachbogens illustriert. Zukünftig soll zusätzlich eine Optimierung bzw. gezielte Auswahl von Basisvektoren durch eine Reihe von charakteristischen Testlasten, \mathcal{H}_2 - oder \mathcal{H}_∞ -Fehlerbetrachtung (siehe z.B. [19]), subspace angles [24] oder Singulärwertzerlegung erfolgen. Das Verfahren soll ebenfalls für nichtlineare Zustandsraummodelle formuliert und erprobt werden.

Neben der Bestimmung von Reduktionsbasen ist die Hyperreduktion des nichtlinearen Kraftterms der wichtigste Bestandteil nichtlinearer Modellordnungsreduktion. Sie ermöglicht eine schnellere Auswertung des projektiv reduzierten nichtlinearen Kraftterms und ist damit essentiell für die Reduktion der Rechenzeit. Der vorliegende Beitrag erläuterte allgemein die Funktionsweise von Hyperreduktionsmethoden und ging dabei detaillierter auf den Unterschied zweier spezieller Hyperreduktionsmethoden, DEIM und ECSW, ein. Beide Methoden sind nach wie vor auf Trainingssimulationen mit unreduziertem Modell angewiesen. Der hyperreduzierte Kraftterm hängt damit von den Trainingsbedingungen ab. Es ist geplant, im Rahmen des Forschungsprojekts DFG – SPP 1897 auch simulationsfreie Hyperreduktionsmethoden zu entwickeln.

Das entwickelte Gesamtkonzept soll außerdem auf die in diesem Beitrag angesprochenen parametrischen Systeme erweitert werden.

Danksagung Die beiden Autoren bedanken sich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung dieser Arbeit im Rahmen des Projekts *Model Order Reduction of Parametric Nonlinear Mechanical Systems for Influencing Vibrations* innerhalb des Schwerpunktprogramms 1897 *Calm, Smooth and Smart – Novel Approaches for Influencing Vibrations by Means of Deliberately Introduced Dissipation* (DFG – SPP 1897).

Literatur

- [1] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *Its Basis and Fundamentals*, volume 1 of *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann (Elsevier), Oxford, UK, 7 edition, 2013.
- [2] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and D. Fox. *For Solid and Structural Mechanics*, volume 2 of *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann (Elsevier), Oxford, UK, 7 edition, 2014.
- [3] P. Benner, S. Gugercin, and K. Willcox. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. *SIAM Review*, 57(4):483–531, 2015.
- [4] H. Panzer, J. Mohring, R. Eid, and B. Lohmann. Parametric model order reduction by matrix interpolation. *at - Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik*, 58(8):475–484, 2010.
- [5] D. Amsallem and C. Farhat. An online method for interpolating linear parametric reduced-order models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2169–2198, 2011.
- [6] M. Geuss, H. Panzer, and B. Lohmann. On parametric model order reduction by matrix interpolation. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3433–3438. IEEE, 2013.
- [7] P. Tiso and D.J. Rixen. Reduction methods for MEMS nonlinear dynamic analysis. *Non-linear Modeling and Applications. Volume 2*, pages 53–65, 2011.
- [8] S.R. Idelsohn and A. Cardona. Recent advances in reduction methods in non linear structural dynamics. In *Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics 1984*, pages 475–482. University of Southampton, England, 1984.
- [9] S.R. Idelsohn and A. Cardona. A load-dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 20(1):203–210, 1985.
- [10] S.R. Idelsohn and A. Cardona. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3):253–279, 1985.
- [11] P.M.A. Slaats, J. de Jongh, and A.A.H.J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 54(6):1155–1171, 1995.
- [12] J. Barbič and D.L. James. Real-time subspace integration for St. Venant-Kirchhoff deformable models. *ACM Transactions on Graphics (TOG) – Proceedings of ACM SIGGRAPH 2005 TOG*, 24(3):982–990, 2005.

- [13] W. Witteveen and F. Pichler. Efficient model order reduction for the dynamics of nonlinear multilayer sheet structures with trial vector derivatives. *Shock and Vibration*, 2014:1–16, 2014.
- [14] S.B. Salimbahrami. Structure preserving order reduction of large scale second order models, 2005. Dissertation, Technische Universität München, München.
- [15] C.A. Beattie and S. Gugercin. Krylov-based model reduction of second-order systems with proportional damping. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, pages 2278–2283. IEEE, 2005.
- [16] S.B. Salimbahrami and B. Lohmann. Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2):385–405, 2006.
- [17] R. Eid, S.B. Salimbahrami, B. Lohmann, E.B. Rudnyi, and J.G. Korvink. Parametric order reduction of proportionally damped second-order systems. *Sensors and Materials*, 19(3):149–164, 2007.
- [18] H.K.F. Panzer. Model order reduction by Krylov subspace methods with global error bounds and automatic choice of parameters, 2014. Dissertation, Technische Universität München, München.
- [19] T. Wolf. \mathcal{H}_2 pseudo-optimal model order reduction, 2014. Dissertation, Technische Universität München, München.
- [20] S. Chaturantabut and Danny C Sorensen. Discrete empirical interpolation for nonlinear model reduction. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*, pages 4316–4321. IEEE, 2009.
- [21] P. Tiso, R. Dedden, and D.J. Rixen. A modified discrete empirical interpolation method for reducing non-linear structural finite element models. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 7B. 9th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*. ASME, 2013.
- [22] C. Farhat, P. Avery, T. Chapman, and J. Cortial. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(9):625–662, 2014.
- [23] C. Farhat, T. Chapman, and P. Avery. Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(5):1077–1110, 2015.
- [24] J.B. Rutzmoser, F.M. Gruber, and D.J. Rixen. A comparison on model order reduction techniques for geometrically nonlinear systems based on a modal derivative approach using subspace angles. In *Proceedings of the 11th International Conference on Engineering Vibration*, 2015.