

# Kinematische Analyse eines ebenen 2RPR PPR -Manipulators

Thomas, Stigger; Manfred L., Husty

Leopold Franzens Universität Innsbruck, AB Geometrie und CAD  
thomas.stigger@student.uibk.ac.at, manfred.husty@uibk.ac.at

## Kurzfassung

In diesem Beitrag wird der ebene 2RPR PPR-Manipulator analysiert. Im Fokus dieser Analyse steht die direkte Kinematik, die allgemein und anhand eines konkreten Beispiels betrachtet wird. Das Beispiel wird anschaulich im kinematischen Bildraum dargestellt. Weiteres Augenmerk wird auf die Singularitäten des Manipulators gelegt, damit ein ungewollter Durchgang durch eine singuläre Lage vermieden werden kann. Ein singularitätenfreier Wechsel zwischen Lösungen der direkten Kinematik wird beispielhaft gezeigt. Abgeschlossen wird die Arbeit mit dem Betrachten der möglichen Auswirkungen des Gelenkspiels in einem der Beine.

## Abstract

The analysis of the 2 RPR PPR -Manipulator in this contribution includes the direct kinematics in general and also in a concrete example using algebraic constraint equations that allow a geometric interpretation of the results in the so called kinematic image space. The equation describing all singularities of the manipulator can be computed completely general, i.e. without resorting to numerical values of design variables. In the kinematic image space the surface of the singularities for the example can be visualized. Non singular

assembly mode change is shown and the last part of the paper is devoted to the analysis of the effects of backlashes in the joints.

## 1 Einleitung

Ebene parallele Manipulatoren sind seit den 90 Jahren des vorigen Jahrhunderts Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Bei diesen Manipulatoren wird eine bewegte Platte (=Endeffektor) durch eine Anzahl -meist drei- Beine mit der festen Basis verbunden. Deshalb werden diese Manipulatoren auch manchmal als ebene Versionen der bekannten Stewart-Gough Plattform bezeichnet. Die Beine selbst können verschiedenartig aufgebaut sein. Sie bestehen aus Kombinationen von Dreh- und Schubgelenken von denen eines aktiv und die restlichen passiv sind. Je nachdem aus welchen Arten von Gelenken ein Bein besteht und auch welches der Gelenke aktiv ist ergibt sich eine große Anzahl von verschiedenen Manipulatoren deren kinematisches Verhalten sehr unterschiedlich ist. Beispielhaft für Arbeiten über diese Manipulatoren seien das aus einer Diplomarbeit hervorgegangene Buch von Chao und Zombor-Murray [1] und die Dissertation von J. Hayes [2] genannt in denen die direkte Kinematik und auch die Singularitäten von verschiedensten ebenen Parallelmanipulatoren diskutiert wurden. In diesen beiden Arbeiten kann auch eine umfangreiche Sammlung von einschlägiger Literatur eingesehen werden.

## 2 Geometrie

Der in dieser Arbeit untersuchte ebene Parallelmanipulator besteht aus einer Basis und einer bewegten Plattform die durch zwei RPR (Revolute-Prismatic-Revolute= Dreh-Schub-Drehgelenk) Beine und ein PPR (Prismatic-Prismatic-Revolute= Schub-Schub-Drehgelenk) Bein miteinander verbunden sind. Die beiden RPR-Beine sind mit den passiven Drehgelenken an Basis und Plattform befestigt. Das prismatische Gelenk ist aktiv. Beim PPR-Bein sind das zweite Schubgelenk und das letzte Drehgelenk passiv und mit Basis und Plattform verbunden. Das erste Schubgelenk ist aktiv. Der Manipulator besitzt daher drei ebene Freiheitsgrade und kann innerhalb eines durch das Design bestimmten Arbeitsraumes frei bewegt werden.

Um den ebenen 2 RPR PPR - Manipulator zu spezifizieren sollen zuerst die Bezeichnungen festgelegt werden (Abbildung 1). Die Großbuchstaben definieren Ankerpunkte des Manipulators in der Basis und beziehen sich auf das feste Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Ankerpunkt „A“ zusammenfällt. Die Kleinbuchstaben beziehen sich auf die Gelenkspunkte der Plattform, die im bewegten Koordinatensystem angegeben werden, dessen Ursprung im Gelenkpunkt „a“ liegt.

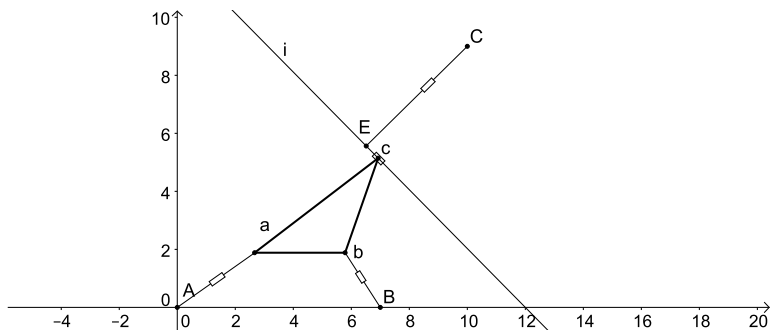


Abb. 1: Schematische Darstellung des ebenen 2RPR PPR - Manipulators

Der feste Winkel zwischen den beiden Geraden, die vom PPR -Bein vorgegeben sind, kann beliebig gewählt werden. In dieser Arbeit wird ein rechter Winkel angenommen.

### 3 Direkte Kinematik

Den ersten Punkt der Analyse des ebenen 2 RPR PPR -Manipulators stellt die direkte Kinematik dar. Bei der direkten Kinematik einer Stewart-Gough Plattform sind alle möglichen Positionen des Endeffektors gesucht, die durch die gegebenen Abmessungen bei vorgegebenen Gelenkskoordinaten möglich sind.

Zur mathematischen Beschreibung werden die Punkte im festen Koordinatensystem mit den homogenen Koordinaten  $X_0 : X_1 : X_2$  und im bewegten Koordinatensystem mit  $1 : x : y$ . beschrieben. Nun werden die Bewegungsmöglichkeiten der Beine ausgehend von ihren Ankerpunkten in der

Basis festgelegt. Konkret bedeutet das, dass die beiden RPR -Beine bei fixierten, vorgegebenen Gelenkskoordinaten einen Kreis um ihren jeweiligen Ankerpunkt beschreiben und das PPR -Bein eine Gerade beschreibt. Mathematisch bedeutet dies allgemein

$$\text{Kreis} : C_0(X_1^2 + X_2^2) - 2MX_0X_1 - 2NX_0X_2 + CX_0^2 = 0 \quad (1)$$

für die Kreisgleichung mit dem Mittelpunkt  $1 : M : N$  und Radius  $R$ , wobei zur Abkürzung  $C = M^2 + N^2 - R^2$  geschrieben wurde. Für  $C_0 = 0$  erhält man die Gleichung einer Geraden

$$\text{Gerade} : CX_0 - 2MX_1 - 2NX_2 = 0. \quad (2)$$

Die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2x_0x_3+2x_1x_2}{x_0^2+x_1^2} & \frac{x_0^2-x_1^2}{x_0^2+x_1^2} & -\frac{2x_0x_1}{x_0^2+x_1^2} \\ \frac{-2x_0x_2+2x_1x_3}{x_0^2+x_1^2} & \frac{2x_0x_1}{x_0^2+x_1^2} & \frac{x_0^2-x_1^2}{x_0^2+x_1^2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

beschreibt die Transformation vom bewegten Koordinatensystem in die Basis<sup>1</sup>. Wenn nun ein Punkt  $P(1 : x : y)$  des bewegten Systems auf einem Kreis bzw. einer Geraden des festen Systems bewegt werden soll, so müssen seine Koordinaten, multipliziert mit der Transformationsmatrix, die Kreis- bzw Geradengleichung erfüllen. Damit erhält man die Bedingungsgleichungen für eine Kreis- bzw. Geradenführung (vgl. [3]).

Die allgemeine Bedingungsgleichung ergibt sich mit

$$\begin{aligned} &4C_0xx_0x_3 - 4C_0xx_1x_2 - 4C_0x_0x_2y - 4C_0x_1x_3y - 2Mxx_0^2 + 2Mxx_1^2 \\ &+ 4Mx_0x_1y - 4Nx_0x_1 - 2Nx_0^2y + 2Nx_1^2y + 4C_0x_2^2 + 4C_0x_3^2 \quad (4) \\ &- 4Mx_0x_3 - 4Mx_1x_2 + 4Nx_0x_2 - 4Nx_1x_3 + Rx_0^2 + Rx_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Nun werden die Koordinaten der Gelenkpunkte aller drei Beine eingesetzt und damit erhält man ein Gleichungssystem, bestehend aus drei Bedingungsgleichungen quadratisch in den Bewegungsparametern  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

<sup>1</sup>Grundlegendes zu dieser algebraischen Darstellung der ebenen Bewegungen kann in [3] nachgelesen werden.

Zur Lösung des Systems wird die Differenz aus den beiden Kreisgleichungen gebildet, womit die beiden Variablen  $x_2$  und  $x_3$  nur mehr bilinear auftreten. Dies ist bei der Bedingungsgleichung der Geraden ohnehin schon der Fall. Die beiden Gleichungen können nun nach  $x_2$  und  $x_3$  gelöst werden, aus einer der ursprünglichen Gleichungen lässt sich danach  $x_1$  bestimmen. Wie in Husty [3] gezeigt, können maximal sechs Lösungen auftreten.

### 3.1 Beispiel

Anschaulicher wird die Vorgehensweise anhand eines Beispiels. Es werden konkrete Zahlenwerte für die Koordinaten der Ankerpunkte sowie für die Beinlängen verwendet, welche den Tabellen 1 und 2 entnommen werden können. Nach Einsetzen der Koordinaten aus Tab.2 und Tab.1 ergeben

Bezeichnung	x-Koordinate	y-Koordinate
A	0	0
B	7	0
C	10	9
a	0	0
b	0	5
c	7	10

Tab. 1: Koordinaten der Anker- und Gelenkspunkte

Bezeichnung	Wert
Radius Bein A	10
Radius Bein B	12.56
Steigung Bein C	13.25

Tab. 2: Beinlängen

sich die drei Bedingungsgleichungen

$$H_1 : -100x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 100 = 0 \quad (5)$$

$$H_2 : -88x_1^2 - 48x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_3 - 228 = 0 \quad (6)$$

$$H_3 : \frac{1}{362} (1364x_1^2 \sqrt{181} - 80x_1x_2 \sqrt{181} - 72x_1x_3 \sqrt{181} + 296x_1 \sqrt{181} + 72x_2 \sqrt{181} - 80x_3 \sqrt{181} - 9593x_1^2 + 84 \sqrt{181} - 9593) \sqrt{181} = 0 \quad (7)$$

Die beiden Kreisbedingungsgleichungen sind mit den Gleichungen 5 und 6 angegeben. Gleichung 7 ist die etwas umfangreichere Geradenbedingungsgleichung. Es ist ersichtlich, dass in den Gleichungen der Kreise  $x_2$  und  $x_3$  quadratisch sind. Durch Bilden der Differenz von 5 und 6 ergibt sich, dass die beiden Variablen  $x_2$  und  $x_3$  nur noch bilinear auftreten. In der Geradengleichung sind die Variablen  $x_2$  und  $x_3$  ohnehin nur bilinear vorhanden. Diese beiden Variablen werden aus der Differenzgleichung und der Geradengleichung gelöst und nach Einsetzen in 5 wird nun, wie in Abschnitt 3 erläutert,  $x_1$  berechnet und es ergeben sich für dieses Beispiel sechs reelle Lösungen.

$$x_1 = \{-1.0878919, -.79150760, -.49099818, \\ -.45561388, .49313162, 1.7635434\} \quad (8)$$

Wird für  $x_1$  die erste Lösung aus Gleichung 8 verwendet, ergibt sich für  $x_2$  und  $x_3$

$$x_2 = 1.059032801, x_3 = -7.312056755. \quad (9)$$

Somit ist die Aufgabe der direkten Kinematik gelöst. Es können nun die Gelenkpunktkoordinaten für sämtliche Lösungen im festen Koordinatensystem angegeben werden.

Anschaulich kann die Lösung auch im kinematischen Bildraum, d.i. der Raum der Bewegungsparameter  $x_0 : x_2 : x_3 : x_1$ , betrachtet werden. Die Kreisgleichungen ergeben zwei Hyperboloide, wobei  $x_1$  für die Darstellung auf der  $z$ -Achse aufgetragen wird ( $x = \frac{x_2}{x_0}, y = \frac{x_3}{x_0}, z = \frac{x_1}{x_0}$ ). Die Geradengleichung ergibt ein hyperbolisches Paraboloid. Jene Punkte, an denen sich diese drei geometrischen Objekte schneiden, stellen die kinematischen Bilder der möglichen Bauformen des Manipulators für die angegebenen Gelenkskoordinaten dar. Mathematisch sind dies jene sechs Lösungen, welche sich durch Bestimmen von  $x_1, x_2$  und  $x_3$  aus den Bedingungsgleichungen ergeben haben. In Abbildung 2 sind die angegebenen Zusammenhänge dargestellt. Die Schnittpunkte sind als schwarze Punkte

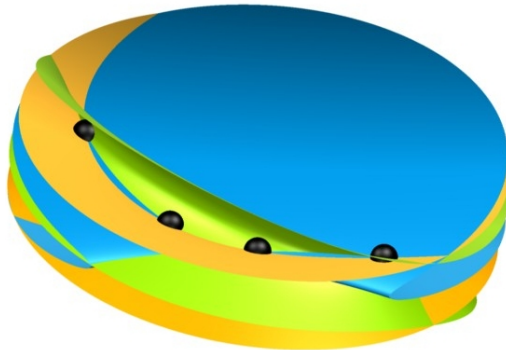


Abb. 2: Kinematischer Bildraum

eingetragen. Werden die Lösungen für  $x_1$  dazu genutzt die Positionen des Gelenkpunktes  $c$  zu bestimmen, kann dies auch dazu verwendet werden, sich seine Positionen auf der zweiten Geraden  $i$  des PPR -Beines anzusehen. Diese Positionen werden besonders nützlich bei der Betrachtung der Auswirkung des Gelenkspiels in diesem Bein sein. Abbildung 3 zeigt die sechs Lagen des Gelenkpunktes ( $c, c_1 \dots c_5$ ). Vier Lagen des bewegten Systems sind eingezeichnet. In den restlichen beiden Lagen kommt der Punkt  $c$  in  $c_2$ , bzw.  $c_3$  zu liegen. Diese Lagen sind relativ knapp beisammen und wurden nicht eingezeichnet um die Zeichnung nicht zu überladen. Die Tatsache, dass alle Lösungen für  $c$  auf der Geraden  $i$  liegen, dient gleichzeitig zur Überprüfung der gefundenen Lösungen. Die rot eingezeichnete Koppelkurve entsteht wenn die Bindung im Gelenkspunkt  $c$  aufgehoben wird. Man kann daher die direkte Kinematik auch so deuten: die möglichen Lagen des Gelenkpunktes  $c$ , bei vorgegebener Gelenkskoordinate im aktiven prismatischen Gelenk, sind durch den Schnitt der Koppelkurve mit der momentanen Lage der zweiten Geraden  $i$  des PPR -Beines gegeben.

Abschließend sei bemerkt, dass die direkte Kinematik ganz allgemein gelöst werden kann ohne die Design bzw. Gelenkparameter zu spezifizieren.

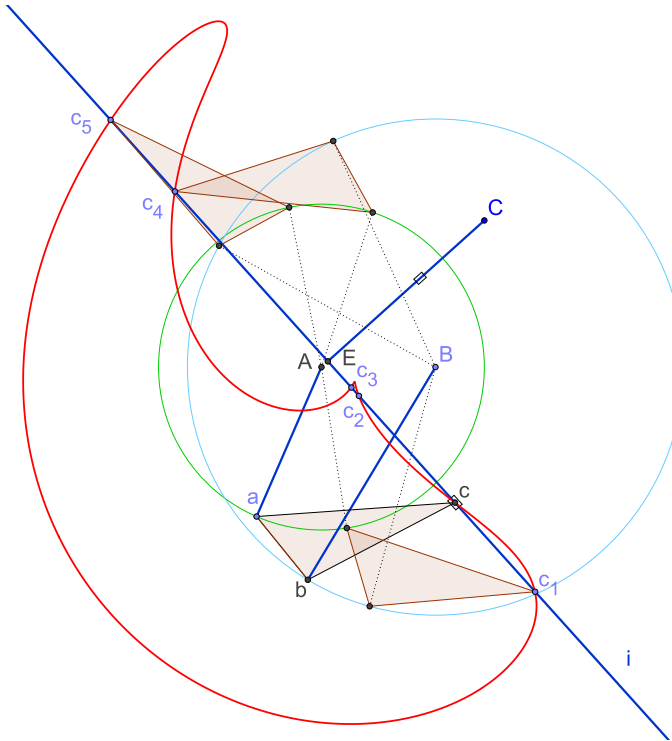


Abb. 3: Positionen des Gelenkpunktes  $c$  für unterschiedliche Bauformen

## 4 Singularitäten

Eine singuläre Lage kann, bezugnehmend auf Wohlhart [4], bedeuten, dass die Kräfte in den Beinen über alle Maße wachsen. Deshalb ist es von großer Bedeutung, die singulären Lagen eines Manipulators zu kennen, um diese vermeiden zu können.

Zur Bestimmung der Singularitäten werden die drei Bedingungsgleichungen und eine Normierungsbedingung verwendet. Da die Normierungsbedingung noch nicht explizit angegeben wurde, wird diese hier mit Gleichung 10



ergänzt.

$$x_0^2 + x_1^2 = 1 \quad (10)$$

Die vier Gleichungen werden zu einem System zusammengefasst und von diesem System wird die Jacobimatrix  $\mathbf{J}$  durch Ableitung nach den Bewegungsparametern  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$  gebildet. Der Manipulator ist in einer singulären Lage wenn die Determinante von  $\mathbf{J}$  verschwindet ( $\det \mathbf{J} = 0$ ). Diese Determinante kann für den 2RPR PPR Manipulator allgemein berechnet werden, ist jedoch sehr umfangreich und wird der Lesbarkeit halber erst beim konkreten Beispiel angegeben.

#### 4.1 Beispiel

Für die konkrete Bestimmung der Determinante müssen nur noch die Zahlenwerte der Designparameter in die im Kapitel 4 allgemein bestimmten Singularitätenfläche eingesetzt werden. Dies liefert

$$\begin{aligned} & -18944x_0^3x_2 + 15360x_0^2x_1x_2 + 274944x_0^2x_1x_3 - 25600x_0^2x_2^2 \\ & -23040x_0^2x_2x_3 + 180224x_0x_1^2x_2 + 803840x_0x_1^2x_3 - 23040x_0x_1x_2^2 \quad (11) \\ & -23040x_0x_1x_3^2 - 113664x_1^3x_3 - 23040x_1^2x_2x_3 + 25600x_1^2x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

für die Zahlenwerte aus der Tabelle 1. Diese Gleichung stellt im kinematischen Bildraum eine Fläche 4.Ordnung dar, die mit der Fernebene  $x_0 = 0$  eine doppelte Gerade und zwei einfache Geraden gemeinsam hat. Dies kann auch für die allgemeine Darstellung gezeigt werden und weist damit eine ähnliche Struktur wie im Falle des 3RPR-Manipulators auf (vgl. [5]). In Abbildung 4 ist die Singularitätenfläche dargestellt, die Baumodi für einen Satz gegebener Gelenkparameter (Lösungen der direkten Kinematik) sind als schwarze Punkte eingezeichnet.

## 5 Wechsel der Baumodi

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es möglich ist zwischen den Baumodi zu wechseln, ohne dabei die Fläche der Singularitäten zu schneiden. Dass ein derartiges Verhalten eines Manipulators möglich ist wurde erstmals von

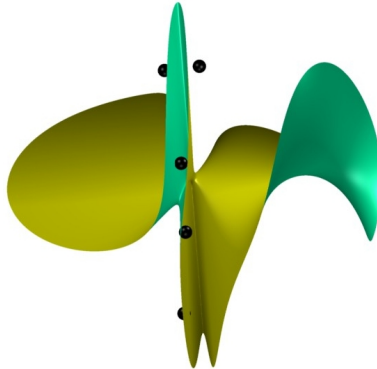


Abb. 4: Fläche der Singularitäten

Innocenti und Parenti-Castelli berichtet [6] und für den 3-RPR Manipulator in [7] ganz allgemein gezeigt.

Dieser singularitätenfreie Bauformenwechsel ist jedoch nicht beliebig möglich, da die Singularitätenfläche zwei Bereiche (Aspekte) des Arbeitsraumes voneinander trennt. Daher müssen erst zwei Baumodi gefunden werden, welche ineinander überführt werden können. Zwei zusammengehörige Lösungen können mathematisch durch Einsetzen der sechs Lösungen der direkten Kinematik in die Determinante von  $\mathbf{J}$  gefunden werden. Es stellt sich heraus, dass genau drei Lösungen positive Werte und drei Lösungen negative Werte der Determinante liefern. Dies bedeutet, dass je drei Lösungen der direkten Kinematik ineinander übergeführt werden können ohne auf dem dazwischen liegenden Weg in eine Singularität zu gelangen. Man kann aber auch visuell arbeiten und die Darstellung der Singularitätenfläche (Abb.4) verwenden und nachschauen welche Punktepaare verbunden werden können ohne die Singularitätenfläche zu schneiden. Es zeigt sich dabei, dass die Singularitätenfläche ein Loch besitzt durch welches man Punkte die zu gleichen Vorzeichenwerten der Determinante gehören miteinander durch einen zusammenhängenden Weg verbinden kann. Im vorliegenden Beispiel geschieht dies durch einen Polygonzug der aus zwei Strecken besteht. Dieser Polygonzug im kinematischen Bildraum entspricht im Cartesischen Raum der Zusammensetzung von zwei Drehungen um zwei

unterschiedliche Zentren. Diese Bewegung ist nur eine von vielen Möglichkeiten die beiden Baumodi durch eine kontinuierliche Bewegung ineinander überzuführen. Jede beliebige Kurve im kinematischen Bildraum die die beiden Punkte verbindet ohne die Singularitätenfläche zu schneiden würde dasselbe leisten.

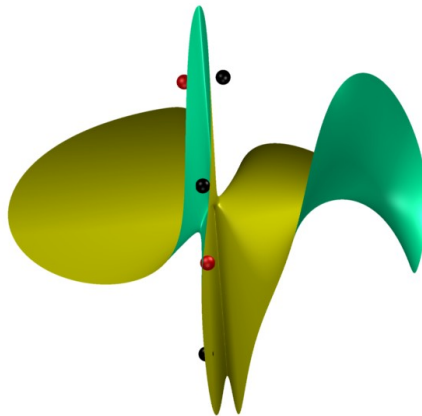


Abb. 5: Fläche der Singularitäten mit verbindbaren Baumodi

In Abbildung 5 sind die Singularitätenfläche, sowie die Baumodi als Punkte dargestellt. Die beiden roten Punkte stellen jene beiden Baumodi dar, welche mit dem Polygonzug im kinematischen Bildraum ineinander übergeführt werden.

Um mathematisch zu überprüfen, dass die Singularitätenfläche nicht geschnitten wird werden die beiden linearen Funktionen, die die beiden Strecken beschreiben in die Determinante von  $\mathbf{J}$  eingesetzt. Lässt sich keine Nullstelle finden, ist kein Schnitt vorhanden. Dass dieser Umstand gegeben ist, lässt sich leicht nachrechnen und anschaulich mit Abbildung 6 sicherstellen.

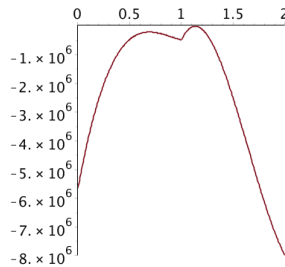


Abb. 6: Abstand der linearen Funktionen zur Singularitätenfläche

## 6 Auswirkungen des Gelenkspiels

Die Auswirkungen des Gelenkspiels können sehr markant sein und sollen hier unter Zuhilfenahme des konkreten Beispiels dargestellt werden. Angenommen wird ein Spiel im aktiven prismatischen Gelenk des PPR-Beins. Dies hat zur Folge, dass sich die Gerade  $i$  an der Plattform in durch das Spiel festgelegten Grenzen, vorstellbar als Band, frei bewegen kann. Dargestellt ist dieser Bereich in Abbildung 7. Besonders interessant ist dabei, dass bei diesem konkreten Beispiel die Koppelkurve innerhalb dieses Spiels den Punkt  $c$ , als Gelenkspunkt einer möglichen Bauform, und den Punkt  $c_2$  als Gelenkspunkt einer zweiten Bauform verbindet, ohne den Bereich zu verlassen. Überhaupt kann sich der Gelenkspunkt  $c$  innerhalb der beiden Punkte  $O_1$  und  $P_1$  durch das Spiel auf der Koppelkurve frei bewegen. Dies bedeutet in der Praxis, dass sowohl ein nicht beabsichtigter Baumoduswechsel als auch eine nicht zu tolerierende Beweglichkeit durch das Gelenkspiel hervorgerufen werden können.

## 7 Zusammenfassung

Die Arbeit zeigt auf, wie die direkte Kinematik eines 2RPP PPR-Manipulators unter Zuhilfenahme der Zwangsbedingungen im kinematischen Bildraum berechnet werden kann und gibt dazu ein konkretes Beispiel an. Das Ergebnis wurde im kinematischen Bildraum interpretiert. Die singulären Lagen wurden allgemein bestimmt und anhand des Beispiels kann die Singuläri-

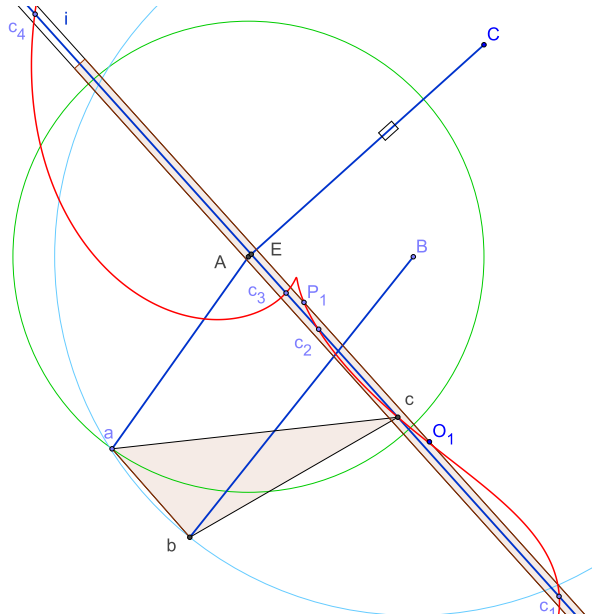


Abb. 7: Unsicherheitsbereich hervorgerufen durch das Gelenkspiel

tätenfläche konkret betrachtet werden. Aufbauend darauf wurde gezeigt, dass ein Baumoduswechsel durchgeführt werden kann ohne durch eine Singularität zu gehen. Das Spiel in den Gelenken wurde abschließend ebenso in die Analyse miteinbezogen und es wurde aufgezeigt, welche Probleme sich daraus ergeben und welche praktischen Auswirkungen dadurch nicht außer Betracht gelassen werden dürfen.

## Literatur

- [1] Chen, C. und Zsombor-Murray, P. *Direct Kinematics for All Planar Three-Legged Parallel Platforms*. Saarbrücken, Germany: VDM Verlag, 2009.
- [2] Hayes, M. „Kinematics of General Planar Stewart-Gough Platforms“. Diss. Montréal, Canada: Dept. of Mech. Eng., McGill University, 1999.

- [3] Husty, M. et al. *Kinematik und Robotik*. 1. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997, 365p. ISBN: 978-3-540-63181-1. DOI: 10.1007/978-3-642-59029-0.
- [4] Wohlhart, K. „Degrees of shakiness“. In: *Mechanism and Machine Theory* 34 (1999), S. 1103 –1126.
- [5] Husty, M. L. und Gosselin, C. „On the singularity surface of planar 3-RPR parallel mechanisms“. In: *Mech. Based Design of Structures and Machines* 34 (2008), S. 411–42.
- [6] Innocenti, C. und Parenti-Castelli, V. „Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators“. In: *J. Mech. Des.* 120 (1998), pp. 73.
- [7] Husty, M. „Non-singular assembly mode change in 3-RPR-parallel manipulators“. In: *Computational Kinematics*. Hrsg. von Andrés Kecskeméthy und Andreas Müller. Springer Verlag, 2009, S. 51–60.