

Konforme Abbildung als Bindeglied zwischen ebener und sphärischer Kinematik

Uwe Hanke*, Rudolf Neumann, Udo Willkommen**

* TU Dresden, Lehrstuhl für nichtlineare Festkörpermechanik
uwe.hanke@tu-dresden.de

** DREEBIT GmbH
udo.willkommen@dreebit.com

Kurzfassung

Der Einsatz interaktiver Geometrie-Software (IGS) ermöglicht die Wiederbelebung der klassischen, konstruktiven Methoden der Getriebeanalyse und Synthese. Die Gründe dafür liegen in der offenen Parametrisierung und graphischen Interaktion. Die zumeist für ebene Probleme zugeschnittenen Programme lassen damit nur die Behandlung ebener kinematischer Probleme zu. Der direkte Übergang zu räumlichen Problemstellungen ist mit Hilfe von CAD-Software möglich. Die enge Verwandtschaft sphärischer Problemstellungen zu ebenen Problemen ermöglicht eine interessante Vereinfachung: Durch den Einsatz der stereographischen Projektion sind sphärische Probleme auf die Ebene winkeltreu abbildbar (Konforme Abbildung). Eine weitere Besonderheit dieser Abbildung ist, dass Kreise als Kreise abgebildet werden. Das sind wesentliche Voraussetzungen, sphärische Probleme in übersichtlicher Form auf die Ebene abzubilden und mit einfachen konstruktiven Mitteln Synthese und Analysemethoden auf diese Fragestellungen zu übertragen. Der Beitrag gibt eine Übersicht über

den Funktionsumfang eines Werkzeugkastens zur Bearbeitung dieser Problemstellungen und gibt Beispiele für die Übertragung ebener Übertragungsgetriebe der VDI2727 auf sphärische Problemstellungen. Abschließend wird die Behandlung einer sphärischen Führungsaufgabe vorgestellt.

Abstract

Interactive geometry Software (IGS) enables a reactivation of the old graphical methods used in mechanism synthesis and analysis. The direct interaction enhance the process of clarification and understanding of kinematic properties. These methods are mainly developed for planar problems. The direct transfer into spatial problems is possible. Similarities between planar and spherical problems lead to an interesting simplification of spherical problems. By mapping the sphere onto the plane by using the stereographic projection circles are transformed into circles by preserving all angles. These are important properties by using planar IGS to deal with spherical objects. The projection also enhance the clarity of spherical problems. The next step is the transfer of planar kinematic structures and their properties to the sphere. The paper shows how tools looks like to scetch spherical task on the plane. Applications of a transfer of planar linkages to the sphere is presented for a function generation linkage and a guidance linkage.

1 Einleitung

Sphärische und ebene Kinematik teilen viele Gemeinsamkeiten. Beispielsweise schneiden sich alle Bewegungsachsen: bei der sphärischen Kinematik in einem endlichen Punkt, dem Kugelmittelpunkt und der ebenen Kinematik in einem in Achsrichtung unendlich entfernt liegenden Punkt. Daraus ist sofort das wesentliche Unterscheidungsmerkmal ableitbar: Im Unterschied zur sphärischen Kinematik sind in der ebenen Kinematik alle Achsen parallel. Das birgt praktikable Vorteile. Die kinematischen Sachverhalte sind invariant zur Lage entlang der Achse. Eine Projektion in eine zur Achsrichtung senkrechte Projektionsebene überführt die Achsen in Punkte. Zusammen bildet dies die Grundlage für graphische Verfahren, deren Bedeutung im Zuge der Entwicklung interaktiver Geometriesoftware

(IGS) [1–3] und parametrisierbarer CAD Systeme an Bedeutung gewinnt[4, 5]. Die Vorteile liegen in deren Anschaulichkeit. Mit diesen Werkzeugen ist der Konstrukteur in der Lage, die Erkenntnisse direkt in Bezug zu den konstruktiven Rahmenbedingungen zu setzen und zu bewerten.

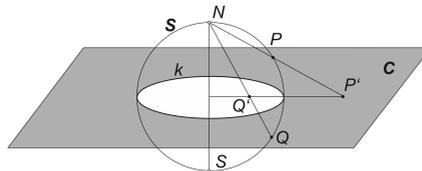


Abb. 1: Stereographische Projektion der Punkte P,Q auf der Sphäre **S** in Punkte **P',Q'** auf der Ebene **C**

Mit einigen Beschränkungen ist die Übertragung der Verfahren auf sphärische Problemstellungen möglich. Das direkt auf der Sphäre "zeichnen" wird schnell unübersichtlich und ist daher unpraktikabel. Ein Ausweg ist die Projektion sphärischer Sachverhalte in die Ebene. Dazu sind im Zuge der Kartierung der Erde verschiedene Verfahren entstanden. Das bekannteste Verfahren ist die Mercatorprojektion. Alle Verfahren geben ein verzerrtes Bild der Sphäre wieder. Ein aus getriebetechnischer Sicht sehr interessantes Verfahren ist die stereographische Projektion [6, 7] (s. Abb.1). Diese Projektion ist eine konforme Abbildung, die sphärische Objekte kreistreu und winkeltreu auf die Ebene projiziert. Das ermöglicht die direkte Interpretation der Ergebnisse und die für IGS und CAD übliche Verwendung von Kreisen, Punkten und Geraden. Unter diesem Gesichtspunkt ist die stereographische Projektion ein probates Mittel Sachverhalte auf der Sphäre in übersichtlicher Form auf die Ebene zu übertragen.

2 Die Stereographische Projektion als konforme Abbildung

2.1 Grundlagen

Wichtige geometrische Objekte der Ebene sind Punkte, Geraden und Kreise. Auf der Sphäre lassen sich zu diesen Klassen äquivalente Objekte zuordnen.

Geraden sind zu Großkreisen¹ und Kreise zu Kleinkreisen² äquivalent. Der Fakt, dass Geraden als Großkreise interpretierbar sind, führt auch zu der Erkenntnis, dass der Begriff "Parallelität" auf der Kugel keinen Sinn macht. Das hat weitreichende Folgen, die bei der Übertragung ebener Sachverhalte auf die Sphäre von Bedeutung sind. Es existiert keine Ähnlichkeit und damit beispielsweise kein Satz von Roberts. Die Winkelsumme bei Dreiecken ist $\neq 180^\circ$.

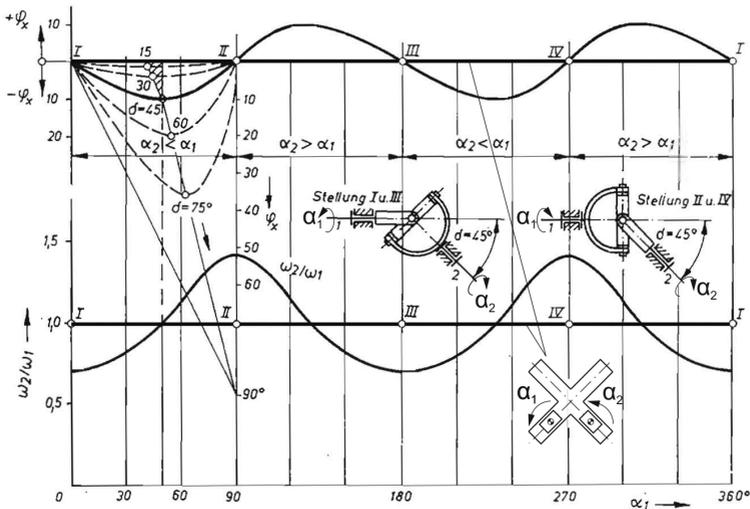


Abb. 2: Vergleich des Übertragungsverhalten von Kreuzschleife und Kardangelenk [8]

Der für den Ingenieur wichtigste Gesichtspunkt ist die Übertragbarkeit bekannter kinematischer Eigenschaften ebener Sachverhalte auf die Sphäre. Ein populäres Beispiel dafür ist die Oldham-Kupplung (Kreuzschleife in Abb. 2) und das sphärische Pandon, die Kardan-Kupplung (s. Abb. 2). Mit zunehmendem Achsenwinkel δ nimmt die Ungleichförmigkeit der Bewegungsübertragung, in Bezug zum Wert der Oldham Kupplung zu. Bei der Übertragbarkeit von Führungseigenschaften sind die Sachverhalte eindeu-

¹Großkreisdurchmesser = Sphärendurchmesser

²Kleinkreisdurchmesser < Sphärendurchmesser

tiger. Entsprechend der Überführung von Geraden zu Großkreisen und Kreise in Kleinkreise lassen sich gleiche Effekte zur Erzeugung von Übertragungsgetrieben ausnutzen. Als Beispiel sei der zyklodengesteuerte Doppelschieber genannt, bei dem zur Rasterzeugung die angenäherte Gerade einer Zykloide Verwendung findet. Das sphärische Gegenstück erzeugt ebenfalls eine schwingende Rast- in Rastbewegung (s. Abb.3). Mit Hilfe des Äquatorkreises k ist zu erkennen das die Glieder 2,3,4 des Getriebes in der Stellung auf der Nordhalbkugel befinden und das Glied 5 auf der Südhalbkugel. Die Achswinkel D_0D , DZ und der Schwenkwinkel κ_0 sind 90° .

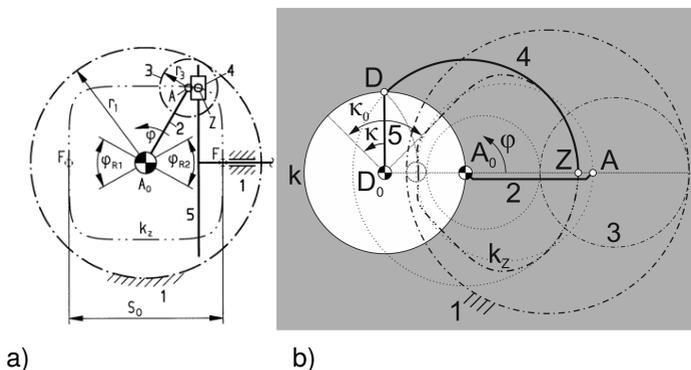


Abb. 3: Räderkoppelgetriebe (RKG) zur Erzeugung einer schwingenden Rast- in Rastbewegung: a) ebenes RKG [9] b) stereographische Projektion eines sphärischen RKG

2.2 Grundkonstruktionen der stereographischen Projektion

Die Projektionsebene schneidet die Sphäre im Äquator k zwischen Nord- und Südpol (s. Abb.4). Ein Strahl ausgehend vom Nordpol N schneidet die Sphäre in dem zu projizierenden Punkt A und die Projektionsebene C im projizierten Punkt A' . Der zum Punkt A auf der Sphäre gegenüberliegende Punkt B wird in B' projiziert, mit $B' = -1/\overline{A'}$. Allgemein gilt für die Projektion

Punkte der Sphäre $A = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{S}$ in Punkte der Ebene $A' = x + iy \in \mathbf{C}$:

$$A = (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \quad (1)$$

Die Punkte A,B liegen auf dem Großkreis c. Die Projektion von c ergibt den Kreis c'.

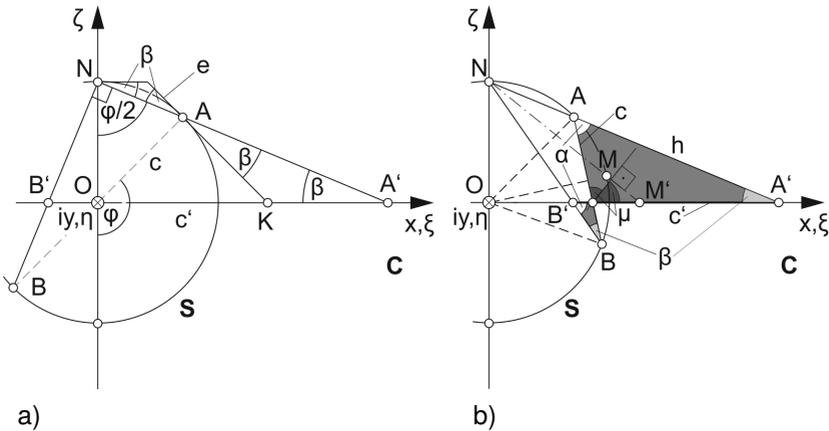


Abb. 4: Stereographische Projektion: a) eines Punktes A b) eines Kleinkreises c

Aus Abb. 4a) ist ersichtlich, dass die stereographische Projektion konform ist. Tangenten in A gehören zur Tangentialebene e. Die Spur K als Schnitt von e mit \mathbf{C} führt zu dem gleichschenkligen Dreieck AKA'. Damit gilt für Tangenten an A das gleiche Abbild wie für Tangenten am projizierten Punkt A' und damit die winkeltreue Abbildung.

Die Abbildung von Kleinkreisen ist ebenfalls kreistreu (s. Abb.4b). Der aus dem Kleinkreis c abgeleitete schiefe Kegel h wird von dem Kreis c definiert. Die zu c zugehörige Ebene schneidet den Kegel h mit dem gleichen Winkel wie die Projektionsebene \mathbf{C} . Daraus wird ersichtlich, dass die Projektion von c ebenfalls ein Kreis ist.

Die kreis- und winkeltreue Projektion ermöglicht die direkte Verwendung von IGS. Alle Grundkonstruktionen sind mittels Punkten, Kreisen und Geraden lösbar. Wichtige Grundkonstruktionen [10] sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tab. 1: Grundkonstruktionen

Nr	Skizze	Konstruktion
1		<p>geg.: k, A, B ges.: Großkreis k_{AB} $-1/\bar{A} \rightarrow k_{AB}$</p>
2		<p>geg.: k, A, B ges.: Kleinkreis c_{AB} mit Mittelpunkt A $k_{AB} \rightarrow l_{AS} \rightarrow t_{AB} \rightarrow A' \rightarrow c_{AB}$</p>
3		<p>geg.: k_{AB}, φ ges.: Großkreis $k_{AB'}$ aus k_{AB} in A um φ gedreht $-1/\bar{A} \rightarrow m \rightarrow l_{AM} \rightarrow l_{AM'} \rightarrow M' \rightarrow k_{AB'}$</p>
4		<p>geg.: k, A, B, c_{AB}, C ges.: Kleinkreis c_{CD} mit Mittelpunkt C und gleichem Durchmesser wie c_{AB} $k_{AC} \rightarrow k_{AP} \rightarrow P \rightarrow k_{CD} \rightarrow M \rightarrow c_{MP} \rightarrow D \rightarrow c_{CD}$</p>
5		<p>geg.: k, A, B ges.: Großkreis k_{CD} als "Mittelsenkrechte" zu A und B $k_{AC} \rightarrow k_{BC} \rightarrow C \rightarrow k_{AD} \rightarrow k_{BD} \rightarrow D \rightarrow k_{CD}$</p>

3 Anwendung

Eine Aufgabenstellung, die den Einsatz sphärischer Lösungen rechtfertigt, stammt aus der Beschichtungstechnik. Das Grundproblem ist die metallische Beschichtung becherförmiger Bauteile in einer Vakuumkammer (s. Abb.5a,b) unter Hochvakuum. Durch einen Elektronenstrahlverdampfer wird eine Dampfwolke erzeugt. Auf Bauteilen innerhalb der Wolke entstehen Kondensationskerne an denen sich in Folge weitere Partikel absetzen und so eine gleichmäßige Beschichtung stattfindet. Grundlage ist, dass alle vom Elektronenstrahlverdampfer ausgehende Strahlen keinen Schatten auf den zu beschichtenden Flächen bilden. Das Problem mit dem die DREEBIT GmbH konfrontiert war ist die innere Beschichtung becherförmiger Bauteile. Die daraus abgeleitete Aufgabe ist die Entwicklung eines Schwenkgetriebes das ein Schwenken um $\pm 45^\circ$ um die Längs (x)- und Querachse (y) ermöglicht (s. Abb. 5a,c). Der Antrieb soll direkt an der in der Dampfkammer zur Verfügung stehenden Welle gekoppelt werden.

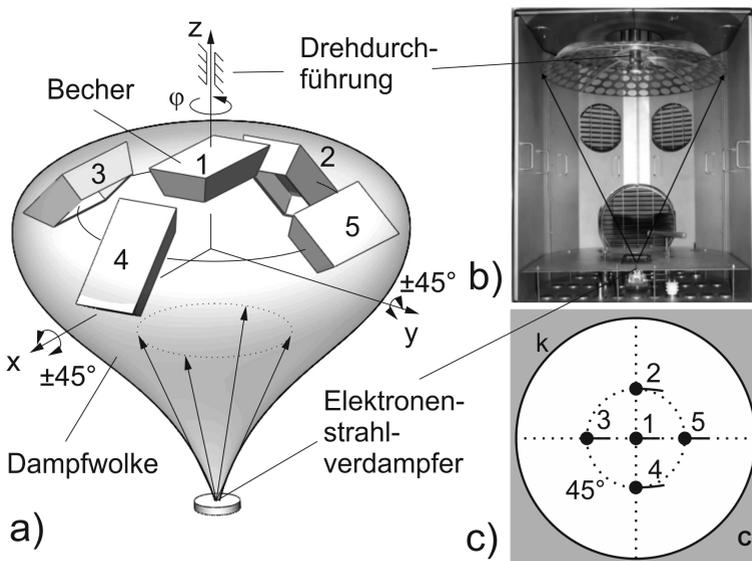


Abb. 5: Beschichtungsaufgabe: a) Prinzipskizze der Aufgabenstellung b) Vakuumkammer c) Aufgabenstellung in stereographischer Projektion

Die Grundidee zur Lösung der Aufgabenstellung ist Kopplung eines Führungszweischlages zur Becherführung an eine Koppelkurve. Der Führungszweischlag wird derart entworfen, das seine Achsen in der Mittelstellung (Lage 1) deckungsgleich zur Längs- als auch Querachse sind. Dabei vereinfacht sich die Aufgabe auf die Erzeugung einer Koppelkurve die alle 5 Gliedlagen enthält. Erste Vorschläge basieren auf einer Erzeugung von verschlungener Epizykloiden (a. Abb.6). Die Abmessungen x_0, y_0 werden beim "Überstülpen" der ebenen Getriebestrukturen auf die Sphäre zu Winkeln. Die Interpretation der Lösungsvorschläge zeigt, dass die einfach verschlungene Zyклоide (Räderübersetzung $i=1$) die Minimalanforderung erfüllt. Mit zunehmender Übersetzung sind technologische Verbesserungen in der Beschichtung zu erwarten.

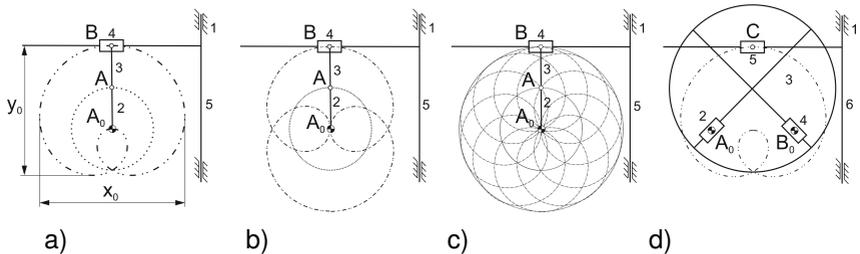


Abb. 6: Kreuzschieber angetrieben durch a) einfach, b) zweifach c) zehnfach verschlungene Epizykloiden und d) Kreuzschieber angetrieben durch Koppelkurve einer Kreuzschleife

Die Beschichtung erfolgt an allen in der Nähe der Wolke befindenden Bauteilen und damit auch an Verzahnung oder Kurven. Bevorzugte Lösungen sollten aus diesem Grund möglichst nur Drehgelenke aufweisen. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Verwendung der einfach verschlungene Zyклоide durch eine Doppelschleife zu empfehlen. Die Übertragung des Getriebes auf die Sphäre überführt die Schubgelenke in Drehgelenke (Großkreise). Der Achswinkel der Gliederachsen der Glieder 2,3 und 4 ist 90° . Die Wahl eines geeigneten Achswinkels A_0B_0 und zusätzliche Variation des Achswinkels der Koppel AB ermöglicht die Veränderung der zyклоidenähnlichen Koppelkurve derart, das eine Schwenkbewegung mit den gewünschten Winkeln $\kappa_0 = \theta_0 = 90^\circ$ möglich ist (Getriebeabmessungen:

$A_0B_0 = 50^\circ, A_0A = B_0B = D_0D = 90^\circ, AB = 60^\circ, DC = 115^\circ$, s. Abb.7). Die Abmessung von Glied 5 wurden so gewählt, das der Antrieb über die Drehdurchführung direkt an A_0 erfolgt.

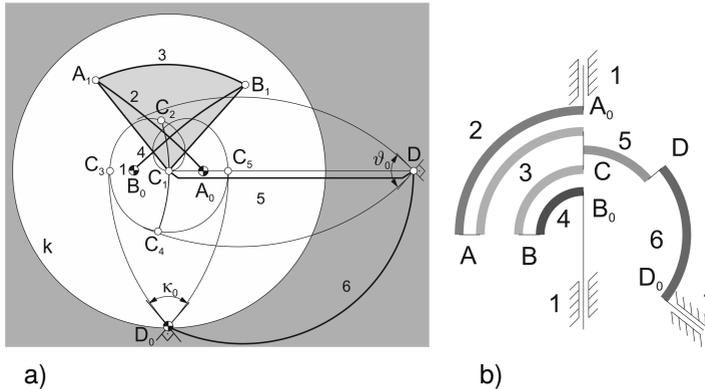


Abb. 7: Sechsgliedriges Führungsgetriebe zur Becherführung (Glied 5): a) Stereographische Projektion des Getriebes b) Schichtung

Bei der Konstruktion des Getriebes ist auf die Schichtung zu achten: Kurbel A_0A , Koppel AB und Kurbel B_0B sind umlaufende Glieder. Das bedeutet für die Schichtung der Glieder, die Koppel zweiteilig auszuführen. In dieser Form ist eine kollisionsfreie Bewegung aller Glieder möglich.

4 Zusammenfassung

Die stereographische Projektion ist kreis- und winkeltreu. Konkret heißt das mit Punkten, Geraden und Kreisen in der Ebene sphärische Sachverhalte veranschaulicht werden können. Das ist die Basis zur Übertragung ebener kinematischer Strukturen auf die Sphäre und das Studium der dadurch entstandenen Verzerrungen. Das diskutierte Beispiel zeigt das grundlegende Eigenschaften erhalten bleiben, was jedoch im Einzelfall zu prüfen ist. Ein Problem das diese Projektion nicht löst ist, das jeder Punkt einen Punkt auf der Gegenseite der Kugel und so auch jeder Kleinkreis sein Gegenstück hat. Der Anwender der Verfahren hat immer zu filtern welche Objekte zur "richtigen" Seite gehören. Ein versäumtes frühzeitiges filtern

führt auch hier zur gleichen Unübersichtlichkeit, wie sie aus den räumlichen Konstruktionen bekannt ist.

Literatur

- [1] Grothmann, R. *Zirkel und Lineal*. Katholische Universität Eichstätt. 2015-07-28. url: <http://zul.rene-grothmann.de>.
- [2] url: <https://www.geogebra.org/> (besucht am 30. 07. 2015).
- [3] url: <http://www.cinderella.de/tiki-index.php> (besucht am 30. 07. 2015).
- [4] Kerle, H. „Mit GeoGebra Getriebelehre neu entdecken und besser verstehen“. In: 10. Kolloquium Getriebetechnik. Hrsg. von Lena Zentner. Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 21–38. isbn: 978-3-86360-065-5.
- [5] Prause, I. et al. „Vergleich von dynamisch - interaktiver Geometriesoftware für die Maßsynthese von ebenen Getrieben“. In: 10. Kolloquium Getriebetechnik. Hrsg. von Lena Zentner. Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 39–56. isbn: 978-3-86360-065-5.
- [6] Mentrasti, L. „Rigid folding representation by the Stereographic Projection“. In: *Mechanism and Machine Theory* 86 (Jan. 2015). Hrsg. von Elsevier Ltd., S. 281–295. doi: 10.1016. url: www.elsevier.com/locate/mechmt (besucht am 01. 11. 2015).
- [7] Bagci, C. „Geometric methods for the synthesis of spherical mechanisms for the generation of functions, paths and rigid-body postions using conformal projections“. In: *Mechanism and Machine Theory* 19.1 (Jan. 1984). Hrsg. von Pergamon Press Ltd., S. 113–127. url: www.elsevier.com/locate/mechmt.
- [8] Luck, K. und Modler, K.-H. *Getriebetechnik. Analyse - Synthese - Optimierung*. Akademie-Verlag Berlin 1990, 1987. isbn: 3-05500534-1.
- [9] Beuth Verlag, Hrsg. *VDI-Richtlinie 2727-4. Lösung von Bewegungsaufgaben mit Getrieben Erzeugung von Schwingbewegungen mit Rast(en) Antrieb gleichsinnig drehend*. Düsseldorf, 2000.

- [10] Grothmann, R. *Elliptic and Hyperbolic Geometries*. Hrsg. von René Grothmann. Katholische Universität Eichstätt. 2014-11-11. url: <http://db-maths.nuxit.net/CARzine/articles/art156/>.