

Zur Anwendung der elektro-mechanischen beziehungsweise -akustischen Analogien auf elektroakustische Wandler

E. Terhardt (Fachgebiet Akustische Kommunikation, Techn. Univ. München)

1. Einleitung

Die Hauptdomäne der elektromechanischen und -akustischen Analogien liegt in der Repräsentation "inhomogener" Systeme durch analoge "homogene" Systeme – beispielsweise der Darstellung eines elektroakustischen Wandlers durch ein analoges elektrisches Netzwerk. Eine Untersuchung ergibt, daß die eine der beiden hauptsächlich benutzten Analogien, nämlich die sogenannte Kraft-Strom-Analogie, für eben diesen Zweck unbrauchbar ist, weil sie im allgemeinen zu Ergebnissen mit falschem Vorzeichen führt. Diese Behauptung wird im folgenden bewiesen und begründet.

2. Potentialgrößen und Flußgrößen

Für die Gültigkeit von Analogien erweist sich der Unterschied zwischen Schwingungsgrößen des Potentialtyps und solchen des Flußtyps als entscheidend. Die Unterscheidung dieser beiden Größenarten ist *de facto* üblich. Sie kommt insbesondere in der Unterscheidung von Impedanzen und Admittanzen zum Ausdruck. Der Quotient einer Potentialgröße und einer Flußgröße wird als Impedanz bezeichnet, sein Kehrwert als Admittanz. Eine für die Gültigkeit von Analogien wichtige Konsequenz dieses Unterschieds besteht darin, daß allein die Flußgrößen Information über die Richtung des instantanen Energieflusses tragen, während die Potentialgrößen in dieser Hinsicht indifferent sind.

Dies sei mit Hilfe der in Fig.1 dargestellten Definitionen für elektrische, mechanische und akustische Schwingungsgrößen, die an einem Systemtor wirksam sind, verdeutlicht.

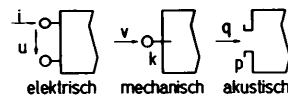


Fig.1. Vorzeichendefinition an Systemtoren.

Die horizontalen Pfeile kennzeichnen die als positiv angesehenen Richtungen der Stromstärke, der Schnelle und des Schallflusses. Eine elektrische Spannung wird als positiv bezeichnet, wenn zwischen der durch den Strompfeil gekennzeichneten Strom-Eingangsklemme des Tors und der anderen Klemme ein positiver Potentialunterschied besteht. Eine Kraft wird als positiv bezeichnet, wenn sie die mechanische Klemme des Tors in das System hinein zu bewegen sucht (Schubkraft). Ein Schalldruck wird als positiv bezeichnet, wenn es sich um Überdruck (im Gegensatz zu Sog) handelt. Weiterhin wird vereinbart, daß ein positiver Wert des Produkts ui bzw. kv bzw. pq anzeigt, daß der instantane Energiefluß in das Tor hinein gerichtet ist.

Diese Festsetzungen sind zwar hinsichtlich der im einzelnen gewählten Zusammenhänge zwischen mathematischem Vorzeichen und Pfeilrichtung willkürlich, nicht aber hinsichtlich der Art und Weise, wie die Schwingungsgrößen u , k und p einerseits und i , v und q andererseits spezifiziert werden. Der letztere Aspekt ist durch die physikalische Natur der betreffenden Größen vorgegeben. Daher besteht zwischen den beiden Gruppen in der Tat ein fundamentaler Unterschied und es ist nicht zulässig, ein- und dieselbe Schwingungsgröße nach Belieben einmal als Potential-, ein andermal als Flußgröße zu behandeln. Insbesondere sind die Vorzeichen der Potentialgrößen davon unabhängig, ob der instantane Energiefluß ins Tor hinein oder heraus gerichtet ist. Die Information

über die instantane Richtung des Energieflusses wird also in der Tat allein durch die Flußgrößen vermittelt.

3. Allgemeine Bedingungen für die Gültigkeit von Analogien linearer Zweitore

Im folgenden werden die Konsequenzen des Unterschieds zwischen Potential- und Flußgrößen am Beispiel des allgemeinen linearen Zweitores Fig.2 untersucht und verdeutlicht. Potentialgrößen einer beliebigen physikalischen Art werden mit p , Flußgrößen mit q bezeichnet.

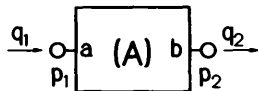


Fig.2. Das allgemeine Zweitor.

Wenn eine Schwingungsgröße als Repräsentant einer anderen dienen soll, muß sie zu letzterer proportional sein. Weiterhin ist es zweckmäßig, das Paar der an einem Systemtor wirksamen Schwingungsgrößen so zu wählen, daß ihr Produkt eine Leistung ergibt. Unter diesen Voraussetzungen gibt es nur zwei verschiedene Analogiebeziehungen, nämlich diejenige, welche je zwei Potentialgrößen und zwei Flußgrößen einander proportional ansetzt und diejenige, welche je eine Potentialgröße proportional einer Flußgröße setzt. Setzt man der Einfachheit halber noch voraus, daß die Produkte der analogen Größenpaare – und damit die Augenblicksleistungen an den Systemtoren, welche einander entsprechen – einander gleich sein sollen, so wird jede der beiden Analogien durch einen einzigen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Die erste Analogie lautet

$$p^* = \alpha p, \quad (1a)$$

$$q^* = q/\alpha. \quad (1b)$$

Beispielsweise kann p^* eine elektrische Spannung sein, welche einer mechanischen Kraft p analog ist, wobei q^* eine der Schnelle q analoge Stromstärke ist.

Die zweite Analogie lautet

$$p^* = \beta q, \quad (2a)$$

$$q^* = p/\beta. \quad (2b)$$

Das allgemeine lineare Zweitor Fig.2 ist durch seine Kettenmatrix

$$(A) = (A)_{ab} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3)$$

vollständig beschrieben. Darin bedeuten A_{11} , A_{12} , usw. komplexe Frequenzfunktionen, nämlich die Koeffizienten der beiden Gleichungen

$$P_1 = A_{11}P_2 + A_{12}Q_2, \quad (4a)$$

$$Q_1 = A_{21}P_2 + A_{22}Q_2. \quad (4b)$$

Mit P_1 , P_2 usw. sind die Frequenzfunktionen oder Laplace-Transformierten der Zeitsignale p_1 , p_2 usw. bezeichnet.

Unabhängig von der physikalischen Art der Schwingungsgrößen und unabhängig davon, ob diejenigen am Tor a der gleichen Art sind wie diejenigen am Tor b, beschreiben

die Frequenzfunktionen $A_{\mu\nu}$ das lineare Zweitorsystem vollständig und für beide Übertragungsrichtungen. Vereinfacht man, daß Gl.(3) und (4) für die Übertragungsrichtung a-b gelten sollen – wie in Gl.(3) angedeutet – dann lautet die Kettenmatrix für die Übertragungsrichtung b-a

$$(A)_{ba} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei ΔA die Determinante der Matrix von Gl.(3) ist:

$$\Delta A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}. \quad (6)$$

Die Zweitorthorie ermöglicht die systematische Unterscheidung von Typen linearer Zweitore, beispielsweise übertragungssymmetrische, übertragungssymmetrische, nicht-reziproke und reziproke. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß ein Zweitor, welches einem anderen Zweitor analog sein soll, zumindest vom gleichen Typ sein muß. Speziell spielen in der Elektroakustik *reziproke* Zweitore eine herausragende Rolle; diese sind dadurch gekennzeichnet, daß die Determinante der Kettenmatrix $\Delta A = 1$ ist.

4. Analogien homogener linearer Zweitore

Als "homogen" wird im vorliegenden Zusammenhang ein Zweitor bezeichnet, dessen beide Tore demselben physikalischen Bereich angehören. Für die Repräsentation eines homogenen linearen Zweitores durch ein anderes homogenes Zweitor kann man erfahrungsgemäß die beiden Analogiebeziehungen Gl.(1) und (2) gleichermaßen anwenden, ohne auf formale Widersprüche zu stoßen. Es ist jedoch lehrreich, die Implikationen der beiden Analogien am folgenden Beispiel zu verfolgen.

Gegeben sei ein mechanisches Zweitor (Fig.3 oben). Nach der ersten Analogie gilt dafür das in Fig.3 mitte dargestellte elektrische Analogzweitor, in welches der Anschaulichkeit halber die Ströme beziehungsweise Spannungen mit den Bezeichnungen derjenigen mechanischen Größen eingetragen wurden, denen sie entsprechen. Auf dieselbe Weise ergibt sich nach der zweiten Analogie das in Fig.3 unten dargestellte elektrische Analogzweitor. Bei Umkehr der Übertragungsrichtung behalten die Kräfte ihre Vorzeichen bei, während sich diejenigen der Schnellen umkehren. Das nach der ersten Analogie gewonnene elektrische Analogzweitor (Fig.3 mitte) bildet diese Verhältnisse vollständig nach, denn die soeben für die Kräfte bzw. Schnellen gemachten Aussagen gelten ebenso für deren Analoga, die Spannungen und Ströme.

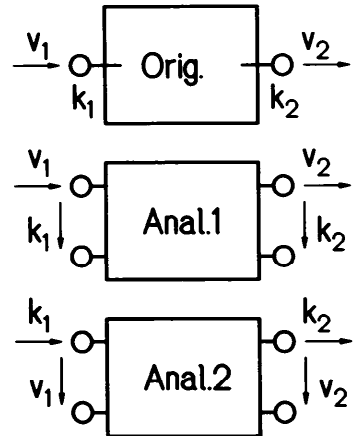


Fig.3. Die beiden elektrischen Ersatzbilder (mitte und unten) des oben dargestellten mechanischen Zweitores.

Beim Analogzweitor nach der zweiten Analogie ist diese unmittelbare Entsprechung nicht gegeben. Bei Richtungsumkehr behalten die elektrischen Spannungen abermals ihre Vor-

zeichen bei. Da sie aber die *Schnellen* des Originalzweitores repräsentieren und die letzteren bei Richtungsumkehr ihr Vorzeichen ändern, entsteht insofern eine physikalische Diskrepanz. Dieser "Fehler" wirkt sich bei der Darstellung eines homogenen Zweitores durch ein analoges homogenes Zweitor nur deshalb nicht aus, weil er durch einen weiteren "Fehler" wieder aufgehoben wird. Der letztere besteht darin, daß bei Richtungsumkehr die Ströme des Analogzweitores – also die Repräsentanten der Kräfte am Originalzweitor – ihre Richtung wechseln. Bezüglich der Darstellung eines homogenen Systems durch ein analoges homogenes System ist die zweite Analogie also physikalisch widersprüchlich, gleichwohl aber formal korrekt.

5. Analogien inhomogener linearer Zweitore

Anders liegt der Fall, wenn es gilt, die Analogien ihrem hauptsächlichlichen Zweck entsprechend einzusetzen, nämlich zur einheitlichen Darstellung eines *inhomogenen* Systems durch ein *homogenes* Analogsystem. Auch dieser Fall sei am Beispiel linearer Zweitore erörtert, wie folgt.

Während ein inhomogenes lineares Zweitor ebenfalls durch die Systemgleichungen Gl.(4a,b) bzw. die Kettenmatrix Gl.(3) vollständig beschrieben wird, gehören seine Ausgangsgrößen P_1, Q_1 dem einen physikalischen Bereich an, die Ausgangsgrößen P_2, Q_2 einem anderen. Um ein solches Zweitor durch ein *homogenes* Zweitor zu repräsentieren, dessen Ausgangsgrößen beispielsweise dem Bereich von P_1, Q_1 angehören, muß man die Ausgangsgrößen mit den Analogiebeziehungen Gl.(1) bzw. (2) sinngemäß transformieren. Führt man dies mit der ersten Analogie Gl.(1a,b) durch, so erhält man als Kettenmatrix des homogenen Ersatzzweitores

$$(A)^* = \begin{pmatrix} A_{11}/\alpha & \alpha A_{12} \\ A_{21}/\alpha & \alpha A_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Die Determinante dieser Matrix ist identisch mit derjenigen der Kettenmatrix des Originalzweitores, Gl.(6). Die erste Analogie ist demnach zumindest in dieser Beziehung widerspruchsfrei.

Nach der *zweiten Analogie* Gl.(2a,b) erhält man aus Gl.(4a,b) bzw. Gl.(3) durch Transformation der Ausgangsgrößen die Kettenmatrix

$$(A)^* = \begin{pmatrix} A_{12}/\beta & \beta A_{11} \\ A_{22}/\beta & \beta A_{21} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Diese hat die Determinante

$$\Delta A^* = A_{12} A_{21} - A_{11} A_{22} = -\Delta A. \quad (9)$$

Gl.(9) beweist die Unbrauchbarkeit der zweiten Analogie für den hier betrachteten Zweck. Das mit dieser Analogiebeziehung entstandene Ersatzzweitor ist nicht vom gleichen Typ wie das Originalzweitor, denn die Determinante der Kettenmatrix des Ersatzzweitores hat das entgegengesetzte Vorzeichen der Determinante des Originalsystems. Die Erklärung dieses Phänomens ist in der Tatsache zu sehen, daß bei einer Vertauschung von Potential- und Flußgrößen die Information über die Richtung des Energieflusses verloren geht.