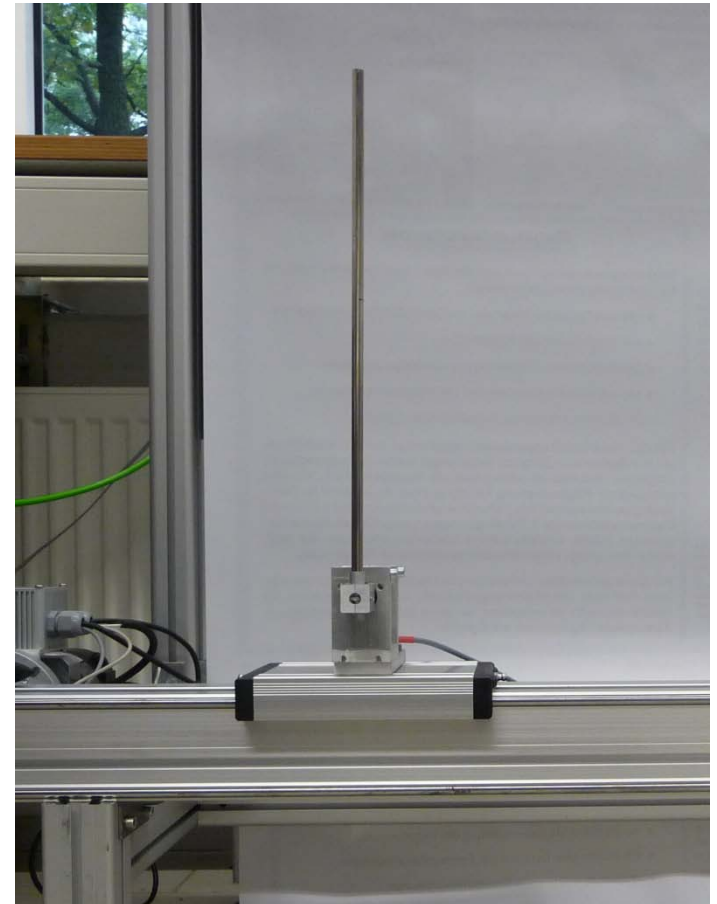




IDA-PBC Entwurf für das reibungsbehaftete inverse Pendel

Sergio Delgado, Paul Kotyczka
GMA Workshop, Anif
17.09.2012



Gliederung

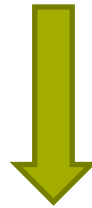
- IDA-PBC für (unteraktuierte) mechanische Systeme
- Dissipationsbedingung
- Veränderte Ziel-Energiefunktion
- Beispiel: Inverses Pendel
- Simulationen
- Experimente
- Zusammenfassung und Ausblick

IDA-PBC für (unteraktuierte) mechanische Systeme

Mechanisches System mit

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p + V(q)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H(q, p) \\ \nabla_p H(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$



$$u = u(q, p)$$

**Gewünschtes System mit
neuer Energie:**

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d(q)^{-1}p + V_d(q)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_1 \\ -J_1^T & J_2 - R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d(q, p) \\ \nabla_p H_d(q, p) \end{bmatrix}$$

IDA-PBC für (unteraktuierte) mechanische Systeme

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d(q)^{-1}p + V_d(q)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_1 \\ -J_1^T & J_2 - R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d(q, p) \\ \nabla_p H_d(q, p) \end{bmatrix}$$

Falls:

$$\nabla_q V_d(q)|_{q^*} = 0 \quad M_d(q) > 0$$

$$\nabla_q^2 V_d(q)|_{q^*} > 0 \quad R_2(q) \geq 0$$

Dann:

Ruhelage $(q^*, 0)$ **stabil**

Ljapunow Fkt:

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d(q)^{-1}p + V_d(q)$$

$$\dot{H}_d(q, p) = -p^T M_d^{-1} R_2 M_d^{-1} p$$

Dissipationsbedingung

Restriktionsgleichungen

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & J_1 \\ -J_1^T & J_2 - R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}$$

Erste Zeile: $J_1 = M^{-1} M_d$

Zweite Zeile: $(G_{\perp} G = 0)$

$$G_{\perp} (\nabla_q V - J_1^T \nabla_q V_d) = 0 \quad \text{(P)}$$

$$G_{\perp} (\nabla_q (\frac{1}{2} p^T M^{-1} p) - J_1^T \nabla_q (\frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p)) = 0 \quad \text{(K)}$$

$$G_{\perp} (RM^{-1} p + (J_2 - R_2) M_d^{-1} p) = 0 \quad \text{(D)} \quad G_{\perp} R \neq 0$$

Dissipationsbedingung

(Gómez-Estern, v.d. Schaft (2004))

$$G_{\perp} (RM^{-1} M_d + M_d M^{-1} R) G_{\perp}^T \geq 0$$

Dissipationsbedingung

$$G_{\perp}(\nabla_q V - J_1^T \nabla_q V_d) = 0 \quad \text{(P)}$$

$$G_{\perp}(\nabla_q(\frac{1}{2}p^T M^{-1}p) - J_1^T \nabla_q(\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}p)) = 0 \quad \text{(K)}$$

$$G_{\perp}(RM^{-1}p + (J_2 - R_2)M_d^{-1}p) = 0 \quad \text{(D)} \quad G_{\perp}R \neq 0$$

Dissipationsbedingung

(Gómez-Estern, v.d. Schaft (2004))

$$G_{\perp}(RM^{-1}M_d + M_dM^{-1}R)G_{\perp}^T \geq 0$$

Inverses Pendel: Keine Lösung der Restriktionsgleichungen, für die gilt

$$\nabla_q V_d(q)|_{q^*} = 0 \quad M_d(q) > 0$$

$$\nabla_q^2 V_d(q)|_{q^*} > 0 \quad R_2(q) \geq 0$$



Motivation

Linearisiertes System um $(q^*, 0)$ ist steuerbar.

$$\longrightarrow u = -K_q^T q - K_p^T p$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -M^{-1} \\ -Q - GK_q^T & -R - GK_p^T \end{bmatrix} \quad \text{Hurwitz}$$

Als PH System: $A_d = (J_0 - R_0)P_d^{-1}$

Die Ljapunow Gleichung

$$A_d P_d + P_d A_d^T = -2R_0, \quad R_0 \geq 0$$

kann nur dann eine Lösung der Form $P_d = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$

haben, falls die Dissipationsbedingung nicht verletzt wird

Falls die Dissipationsbedingung verletzt wird, hat die Ljapunow Gleichung

$$A_d P_d + P_d A_d^T = -2R_0, \quad R_0 \geq 0$$

eine vollbesetzte Lösung

$$P_d = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

Neue gewünschte Hamiltonfunktion

Basierend auf diesem Ergebnis, verwende die veränderte gewünschte Hamilton Funktion (Kotyczka, P; Delgado L., S. (2012))

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d(q)^{-1}p + V_d(q) + n_d(q)^T p$$

$$\begin{array}{c} \text{→} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}}_{J_d - R_d} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \end{array}$$

Restriktionsgleichungen:

$$W \nabla_p H_d + X \nabla_p H_d = M^{-1}p$$

$$G_{\perp} (Y \nabla_q H_d + Z \nabla_p H_d) = G_{\perp} (-\nabla_q H - RM^{-1}p)$$

Neue gewünschte Hamiltonfunktion

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}}_{J_d - R_d} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d(q)^{-1} p + V_d(q) + n_d(q)^T p$$

Löse:

$$W \nabla_p H_d + X \nabla_p H_d = M^{-1} p$$

$$G_{\perp} (Y \nabla_q H_d + Z \nabla_p H_d) = G_{\perp} (-\nabla_q H - R M^{-1} p)$$

Mit:

$$\nabla_q V_d(q)|_{q^*} = 0$$

$$\nabla^2 H_d(q, p)|_{(q^*, 0)} > 0$$

$$n_d(q^*) = 0$$

$$R_d(q) \geq 0$$

Lösung:



Wahl der freien Parameter:



Beispiel: Das inverse Pendel

Bewegungsgleichungen des inversen Pendels nach einer partiellen Linearisierung (engl. partial feedback linearization):

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ a \cos q \end{bmatrix}.$$

Mit:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T p + ag \cos q$$

Ziel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}}_{J_d - R_d} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

mit:

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p + V_d(q) + n_d(q)^T p$$

Beispiel: Das inverse Pendel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}}_{J_d - R_d} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T p + ag \cos q$$

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p + V_d(q) + n_d(q)^T p$$

Entwerfe zuerst linearen Regler und löse:

$$A_d P_d + P_d A_d^T = -2R_0, \quad R_0 > 0$$

Löse dann die Restriktionsgleichungen

$$W \nabla_p H_d + X \nabla_p H_d = M^{-1} p$$

$$G_{\perp} (Y \nabla_q H_d + Z \nabla_p H_d) = G_{\perp} (-\nabla_q H - R M^{-1} p)$$

und wähle freie Parameter so, dass

$$\nabla^2 H_d(q, p)|_{(q^*, 0)} = P_d^{-1} \quad (J_d - R_d)|_{(q^*, 0)} = A_d P_d$$

Beispiel: Das inverse Pendel

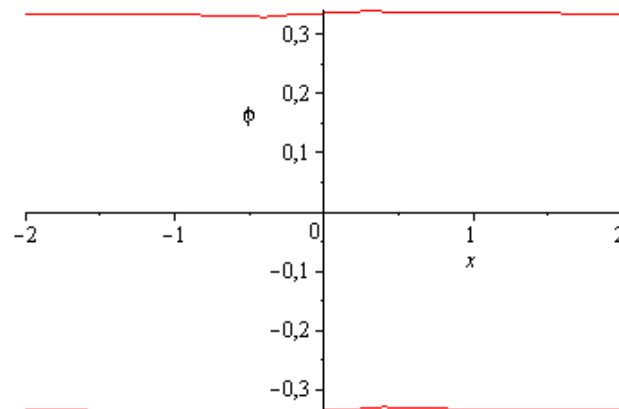
Dann stabilisiert das Regelgesetz:

$$u = G^+(Y\nabla_q H_d + Z\nabla_p H_d + \nabla_q H + RM^{-1}p)$$

die Ruhelage $(q^*, 0)$ asymptotisch und die Dynamik des geregelten Systems wird lokal approximiert durch:

$$\Delta\dot{x} = A_d\Delta x$$

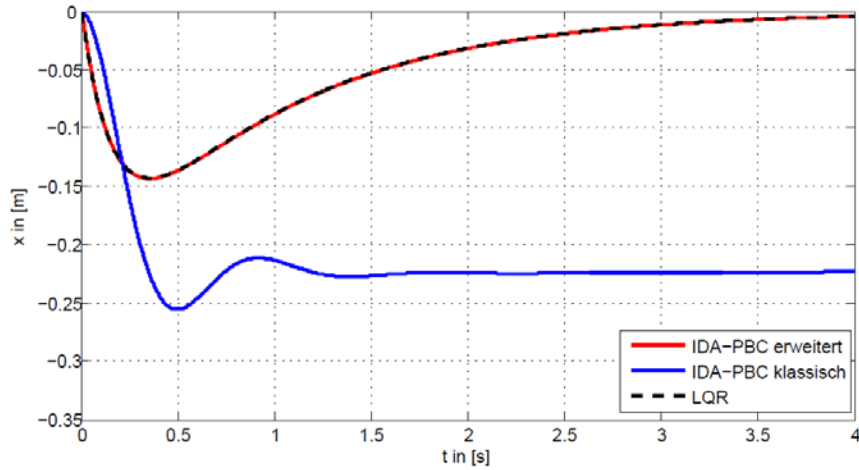
$H_d(q, p)$ und $R_d(q)$ sind positiv definit in einer Umgebung der Ruhelage $(q^*, 0)$.



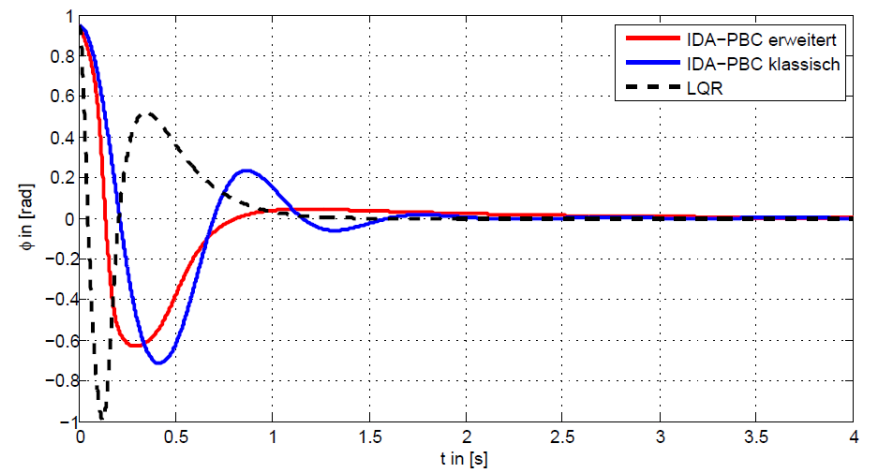
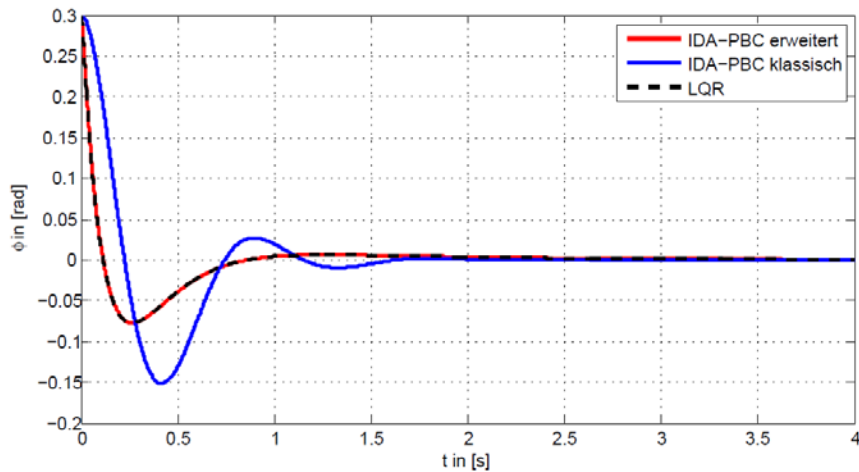
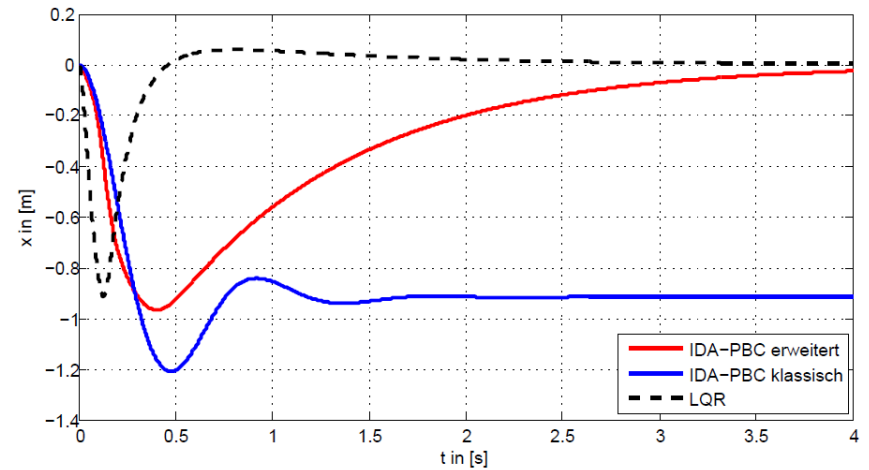
$$R_d(q) > 0$$

Simulationen

$$q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \end{pmatrix}, p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.95 \end{pmatrix}, p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Zusammenfassung und Ausblick

- **Überwindung der Dissipationsbedingung durch Hinzufügen eines Koppelterms zwischen Lagekoordinaten und Impulsen in die Energiefunktion**
- **Zusätzliche Parameter, die es erlauben, ein gewünschtes lokales Verhalten zu gewährleisten und somit eine mögliche Verbesserung des dynamischen Verhaltens ggü. der Standardvariante. Siehe dazu Simulationen und Experimente**

- **Optimierungsbedarf der noch verbleibenden freien Parameter**
- **Bessere Wahl der Ansatzfunktionen für die Lösung der Restriktionsgleichungen**
- **Interpretation: Lagrange'sche Betrachtungsweise, Koordinatentrafo ...**

- [1] Ortega, R.; Spong, M.-W.; Gomez-Estern, F.; Blankenstein, G.: Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **47** (2002), 1218 - 1233.
- [2] Gomez-Estern, F.; van der Schaft, A.-J.: Physical Damping in IDA-PBC Controlled Underactuated Mechanical Systems, *Eur. J. Control* **10** (2004), 451 - 468.
- [3] Kotyczka, P.: Local Linear Dynamics Assignment in IDA-PBC for Underactuated Mechanical Systems, In: *Proc. 50th IEEE Conf. Decision Control and Eur. Control Conf., Orlando* (2011), 6534 - 6539.
- [4] Kotyczka, P.; Delgado L., S.: On a generalized port-Hamiltonian representation for the control of damped underactuated mechanical systems, In: *Proc. IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods in Nonlinear Control, Bertinoro, Italy* (2012).