

**Lehrstuhl für Baumechanik
Fakultät für Bauingenieur – und Vermessungswesen
Technische Universität München**

Gekoppelte Probleme der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

Bei der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität
München zur Erlangung der Lehrbefähigung eingereichte

Habilitationsschrift

Vorgelegt von

Dr.-Ing. Stefan Helmut Lutzenberger

Fachmentorat:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger
Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Müller
Prof. Dr. Bernd Simeon

Tag der Einreichung:
10.5.2006

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent und als selbständig tätiger Ingenieur in den Jahren 2002-2006.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für sein Vertrauen, die fachliche Unterstützung und seine Anregungen bei der Fertigstellung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger danke ich für die Leitung des Fachmentorats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Müller möchte ich herzlich für seine Diskussionsbereitschaft bei der Fertigstellung der Arbeit danken.

Bei Herrn Prof. Dr. Bernd Simeon bedanke ich mich für die wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Meinen Kollegen und ehemaligen Kollegen Karen Arlt, Dr.-Ing. Jutta Gehrman, Dr.-Ing. Stefan Lenz, Dr.-Ing. Kai Müller, Dr.-Ing. Markus Schneider und Dipl.-Ing. Georg Frühe gilt der Dank für die gute Zusammenarbeit und ihre Diskussionsbereitschaft. Ganz besonders danke ich meiner Kollegin Dr.-Ing. Jutta Gehrman für ihr Korrekturlesen der Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern für ihre Förderung und ihre ständige Unterstützung.

Für Christine, meine Familie und meine Freunde.

Stefan Lutzenberger

1	Einleitung	1
1.1	Aufgabenstellungen der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion	1
1.2	Literatur zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion	3
1.3	Zielsetzung	4
1.4	Vorgehen und Aufbau der Arbeit.....	5
2	Beschreibung strukturdynamischer Systeme	7
2.1	Hamiltonsches Prinzip	8
2.2	Verallgemeinertes Hamiltonsches Prinzip	8
2.3	Methoden zur Beschreibung strukturdynamischer Systeme	9
2.3.1	Klassifizierung strukturdynamischer Systeme.....	9
2.3.2	Methoden/Modelle zur Beschreibung strukturdynamische Systeme.....	12
3	Kopplung von Modellen	18
3.1	Nebenbedingungen	19
3.2	Kopplungsstrategien	19
3.2.1	Kopplung von Systemen über Lagrangesche Multiplikatoren.....	19
3.2.2	Kopplung über nichtkonservative Kräfte.....	24
3.2.3	Penalty - Verfahren.....	24
3.2.4	Augmented Lagrange Verfahren	25
3.2.5	Transformation auf Minimalkoordinaten	26
3.3	Wahl des Verfahrens	27
3.4	Beschreibung gekoppelter Systeme über das „Verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip“	27
3.5	Mathematische Wertung	29
3.5.1	Index	30
3.5.2	Indexreduktion.....	32
3.5.3	Konsistenz der Anfangswerte der DAE.....	32
3.5.4	Lösbarkeit der DAE.....	33
3.6	Zusammenfassung.....	33
4	Beschreibung der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion (Relativbewegung von Modellen)	34
4.1	Nebenbedingungen für Fahrzeug – Fahrweg Interaktion.....	34
5	Stabilitätsanalyse der Zeitintegration differentiell-algebraischer strukturdynamischer Systeme	38
5.1	Überblick, Zieldefinition	38
5.2	Strukturdynamische Integrationsverfahren.....	39
5.2.1	Allgemeine Anforderungen	39
5.2.2	Zeitintegrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen.....	41
5.2.3	Zeitintegrationsverfahren für differentiell-algebraische Systeme.....	43
5.3	Vorgehensweise	44
5.3.1	Differentiell-algebraische Formulierung	44
5.3.2	Stabilitätsanalyse	46

5.4	Stabilitätsuntersuchung	46
5.4.1	Index 3 Systeme	47
5.4.2	Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 2	55
5.4.3	Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 1	61
5.4.4	Index 2 Systeme	66
5.4.5	Index 2 Systeme, indexreduziert auf Index 1	69
5.4.6	Index 1 Systeme	72
5.5	Übertragung auf gekoppelte Probleme	75
5.6	Zusammenfassung	78
6	Entwicklung von Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische DAE	80
6.1	Einleitung	80
6.1.1	Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren.....	80
6.1.2	Zeitintegration differentiell-algebraischer Systeme.....	80
6.1.3	Entwicklung von Zeitintegrationsverfahren	81
6.2	Index 1 Systeme	82
6.3	Index 2 Systeme	82
6.4	Index 3 Systeme	82
6.4.1	Differential algebraic integration of structural dynamic systems 1 (DAISY1)	83
6.4.2	Differential algebraic integration of structural dynamic systems 2 (DAISY2)	88
7	Kopplung dynamisch kondensierter Modelle	91
7.1	Dynamische Kondensation	91
7.2	Begriffe	92
7.3	Anforderungen an Systeme	93
7.4	Ankopplung reduzierter Modelle	93
7.4.1	Ankopplung über die dynamische Flexibilität.....	93
7.4.2	Ankopplung über die dynamische Steife	94
7.5	Günstige Wahl der Kenngröße im Hinblick auf numerische Fourierrücktransformation	95
7.6	Numerische Umsetzung der Faltung	100
7.7	Zeitintegration der retardierten DAE (RDAE)	109
7.7.1	Index	109
7.7.2	Vergleich von Zeitintegrationsverfahren	110
7.8	Vorgehensweise bei diskretisierten Teilsystemen	112
7.8.1	Dynamische Flexibilität G_{dyn}	114
7.8.2	Dynamische Steifigkeit K_{dyn}	115
7.9	Vorgehensweise bei kontinuierlichen Teilsystemen	117
7.10	Bewertung	118
8	Interaktion Magnetschwebfahrzeuge – Fahrwegträger	119
8.1	Regelungstechnik	119
8.1.1	Regelkreise	120
8.1.2	Eigenschaften von Regelkreisen.....	124
8.1.3	Auslegung des Reglers	126

8.2	Magnetschwebefahrzeug	128
8.2.1	Modellierung von Fahrzeug und Fahrweg.....	129
8.2.2	Tragmagnete.....	129
8.2.3	Reglerentwurf.....	131
8.3	Kopplung der relativbewegten Systeme.....	133
8.4	Zeitintegration.....	134
8.5	Anwendungsbeispiel	134
8.6	Zusammenfassung.....	137
9	Interaktion Eisenbahn – elastischer Untergrund.....	139
9.1	Fahrzeugmodell.....	140
9.2	Elastisch gebetteter Balken	141
9.2.1	Finite Elemente Diskretisierung, Wellenreflexion	141
9.2.2	Beschreibung der einseitig unendlichen elastisch gelagerten Balken.....	142
9.2.3	Anbindung der einseitig unendlichen elastisch gelagerten Balken.....	145
9.3	Simulationsrechnung	146
9.4	Zusammenfassung.....	150
10	Zusammenfassung.....	151
10.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	151
10.2	Ausblick	154
	Literaturverzeichnis.....	155

Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

c	Dämpferkonstante
d	Differentiation
d_i	Differentiationsindex
f	Funktion, Frequenz
$\underline{\mathbf{f}}$	Vektor aller innerhalb des Systems wirkenden Kräfte (ohne Zwangskräfte)
$\underline{\mathbf{f}}_c$	Vektor der Zwangskräfte
g	Nebenbedingung, Fundamentallösung, Greensche Funktion, Impulsreaktionsfunktion
h	Hauptsystem
i	Imaginäre Einheit
k	Federsteifigkeit, Wellenzahl
k_p	Ersatzfedersteifigkeit
l	Länge
m	Masse, Ordnung der Differentialgleichung
p_i	Störungsindex
q	generalisierte Koordinate
$\underline{\mathbf{q}}$	Vektor der Randlasten
r	Fahrbahnrauheit
s	Spaltabstand
t	Zeit
v	Geschwindigkeit
$\underline{\mathbf{w}}$	Vektor aller Verschiebungsgrößen (mit Lagrangeschen Operatoren)
x	x-Koordinate
$\underline{\mathbf{x}}$	Zustandsvektor
y	y-Koordinate
$\underline{\mathbf{y}}$	Messvektor
z	z-Koordinate
$\underline{\mathbf{z}}$	Vektor der Störgrößen

A	Fläche
$A(t)$	zeitabhängige Ansatzfunktion
$\underline{\underline{A}}$	Vergrößerungsmatrix
C	Konstante, Ansatzfunktion für Durchbiegung im Inneren eines Elements
$\underline{\underline{C}}$	Dämpfungsmatrix, Rückführmatrix
$\underline{\underline{C}}^*$	generalisierte Dämpfungsmatrix
E	Elastizitätsmodul
E_{kin}	kinetische Energie
E_{pot}	potentielle Energie
F	Last
G	Schubmodul, Flexibilität (Frequenzbereich)
$\underline{\underline{G}}$	Stelleingangsmatrix
$\underline{\underline{G}}^T$	Matrix der Zwangskräfte
$\underline{\underline{H}}$	Messmatrix
I	Trägheitsmoment, Stromstärke
$\underline{\underline{I}}$	Einheitsmatrix, Jordansche Normalform
J	Funktional
K	Steife (Frequenzbereich), Konstante
$\underline{\underline{K}}$	Steifigkeitsmatrix
L	Lagrangefunktion, Differentialoperator, Induktivität
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$N(x)$	Ansatzfunktionen (ortsabhängig)
P	Koppelkraft
$\underline{\underline{Q}}_c$	Steuerbarkeitsmatrix
$\underline{\underline{Q}}_b$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\underline{\underline{Q}}$	Wichtungsmatrix der Zustandsgrößen
$\underline{\underline{R}}$	Wichtungsmatrix der Stellgrößen
R	Ohmscher Widerstand
R_{nc}	nichtkonservative Kräfte
T	Periodendauer, kinetische Energie
U	potentielle Energie, (Strom-)Spannung
W	Arbeit
W_{virt}	virtuelle Arbeit
$\underline{\underline{X}}$	Vektor der Zeitschrittgrößen
Y	Admittanz (Frequenzbereich)
Z	Impedanz (Frequenzbereich)

Griechische Buchstaben

α	Parameter
β	Parameter
γ	Parameter
δ	Variation
η	Vergleichskurve
λ	Lagrangescher Multiplikator, Eigenwert
μ	Massebelegung
μ_0	Induktionskonstante
ρ	spektraler Radius
σ	Spannung
ω	Eigenkreisfrequenz
ζ	Lehrsches Dämpfungsmaß, bezogene Länge
Ω	Gebiet
Γ	Gebietsrand

Indizes

a	Außen
i, j, l, o	Laufvariablen
i	Innen
k	Koppel-
nc	Nicht konservativ

Symbole

$\circ \rightarrow \bullet$	Fouriertransformation
$\bullet \rightarrow \circ$	Inverse Fouriertransformation
∂	partielle Ableitung
'	Ableitung nach Ort
$\dot{}$	Ableitung nach Zeit
$\bar{}$	Einheitsgröße
\times	Faltung
—	Vektor
=	Matrix

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellungen der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

Die Fahrzeug – Fahrweg Interaktion beschäftigt sich mit dem Zusammenwirken von Fahrzeugen und elastischen Tragstrukturen. Aufgabenstellungen dafür existieren in vielen Bereichen des Straßenverkehrs, sowie für spurgebundene Fahrzeuge wie Eisenbahn, Straßenbahn und Magnetschwebbahn, aber auch beim Landevorgang von Flugzeugen.

Ziel bei der Betrachtung der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion ist es, die an Fahrzeug und Fahrweg auftretenden Schwingungen und Beanspruchungen zu berechnen.

Die dynamischen Kräfte können höhere Belastungen, akustische Probleme sowie Erschütterungen im Untergrund bedingen. Sie können zu Verschleiß an den Bauteilen führen. Im ungünstigsten Fall können sie sogar die Fahrsicherheit gefährden.

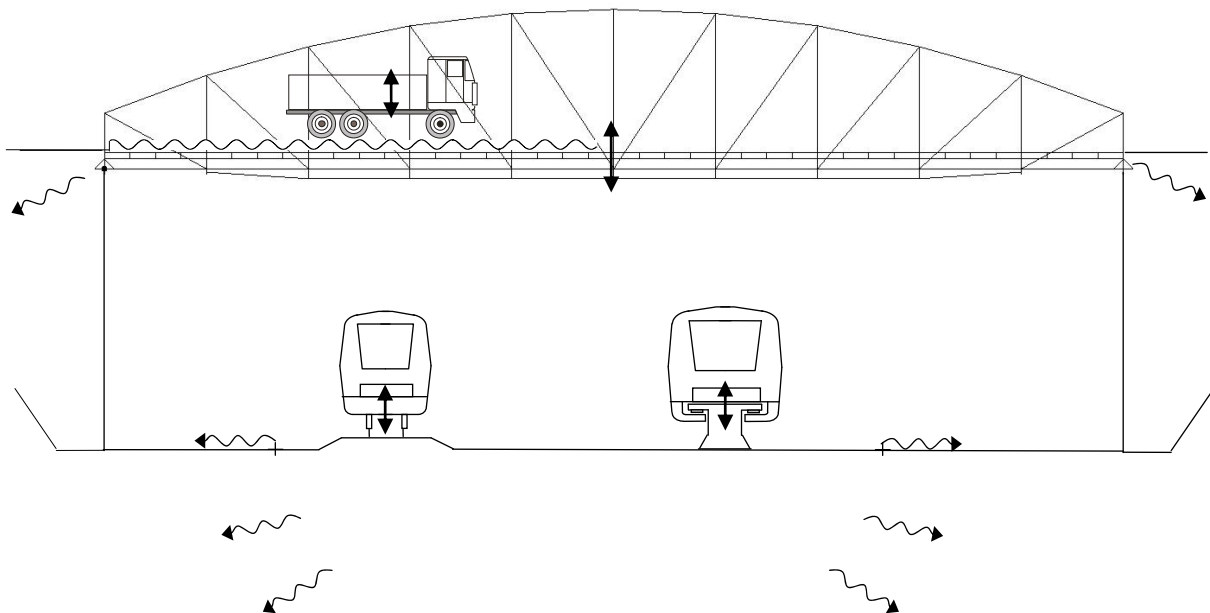


Abbildung 1.1: Aufgabenstellungen der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

Die Fahrzeuge werden durch die Rauheit des Fahrwegs oder durch Fahrwegübergänge wie z.B. Dehnungsfugen an Brücken in Schwingungen versetzt. Geometrische Regelmäßigkeiten im Fahrweg, wie z.B. regelmäßig angeordnete Schwellen unter einem Gleis oder aufeinander folgende Brücken gleichen Typs und gleicher Spannweite, können das Fahrzeug periodisch anregen. Die entstehenden Fahrzeugschwingungen bedingen erhöhte und dynamisch variierende Radlasten. Fällt die Anregungsfrequenz mit einer Eigenfrequenz des Fahrzeugs zusammen, so kommt es zur resonanten Anregung und auftretende Schwingungen sind besonders groß. Die Fahrzeugschwingungen können

- erhöhte Beanspruchung der Bauteile des Fahrzeugs sowie bei lange andauernden Schwingungen Materialermüdung bewirken,
- Verschleiß an den Rädern und Radunrundheiten hervorrufen
- des Fahrkomfort beeinträchtigen,
- Körperschall hervorrufen.

Für die Anregung des Fahrwegs kommen verschiedene Mechanismen in Betracht. Die Schwingungen des Fahrzeugs bedingen dynamische Radlasten welche eine Anregung des Fahrwegs bewirken. Daneben sind maßgeblich Stoß- und Resonanzeffekte ursächlich. Erstere resultieren aus schnell aufgebrachten Belastungen, wie sie durch das plötzliche Ansteigen der dynamischen Radlasten bei Sprüngen im Fahrweg auftreten. Bei hohen Fahrgeschwindigkeiten und kurzen Tragsstrukturen wird die Gewichtskraft des Fahrzeugs so schnell auf den Fahrweg aufgebracht, dass diese ebenfalls stoßartigen Charakter besitzt. Eine resonante Anregung des Fahrwegs kann auch durch Regelmäßigkeiten im Lastbild des Fahrzeugs, welche zusammen mit der Fahrgeschwindigkeit eine harmonische Anregung bewirken, auftreten.

Die Fahrwegstruktur wird dadurch ebenfalls zu Schwingungen angeregt, die dynamischen Beanspruchungen am Fahrweg steigen an. Über den Fahrweg werden die Schwingungen in den Untergrund weitergeleitet, wobei der Fahrweg hier wie ein mechanischer Filter wirkt. Die Tragstruktur wirkt, infolge ihrer inneren Dämpfung und der geometrischen Abstrahldämpfung des Bodens in der Regel dämpfend auf das Fahrzeug.

Auf Seiten des Fahrwegs können folgende Probleme auftreten:

- Erhöhte Belastungen am Fahrweg (bei Brücken werden diese häufig mittels des dynamischen Schwingbeiwertes, dem Verhältniswert von dynamischen zu statischen Beanspruchungen, charakterisiert)
- Schallabstrahlung des Fahrwegs
- Verschleiß am Fahrweg (z.B. Riffelbildung an Schienen)
- Setzungen des Schotters, Bildung von Hohllagen unter Schwellen
- Setzungen im Untergrund
- Eintrag von Erschütterungen in den Untergrund und Ausbreitung der Erschütterungen

Auch wenn viele Aufgaben der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion durch vereinfachte Ersatzmodelle behandelt werden, so erfordern bestimmte Aufgabestellungen Simulationsberechnungen am gekoppelten Systems Fahrzeug – Fahrweg.

Dazu wird das Gesamtsystem in geeignete Teilsysteme zerlegt. Die Teilsysteme werden durch geeignete physikalische Ersatzmodelle abgebildet. An die Modellbildung wird die Anforderung gestellt, dass ein Modell die physikalischen Wirkungen genau genug wiedergeben und dabei so einfach wie möglich sein soll. Wie komplex die Systeme modelliert werden hängt stark von der zu beantwortenden Fragestellung ab. Dies kann von der Modellierung eines Fahrzeugs über seine statischen Radlasten oder als Einmassenschwinger bei der Bestimmung der Schwingungsantwort einer Brücke bis hin zur detaillierten Modellierung der Räder bei Fragen der Kontaktmechanik reichen.

Die Beschreibung kann im Zeitbereich oder im Frequenzbereich erfolgen. Im Frequenzbereich sind die dominierenden Eigenschaften häufig besser identifizierbar, der Anwendungsbereich ist jedoch begrenzt.

Im Fall streuender Parameter der beteiligten Systeme ist man auf stochastische Untersuchungen angewiesen.

1.2 Literatur zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

Im Folgenden werden Standardwerke zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion aufgeführt. Weiterführende Literatur zu speziellen Fragestellungen wird in den betreffenden Kapiteln genannt.

Verschiedene ein- zwei und dreidimensionale Probleme werden von [Fryba 1972] behandelt. Dabei wird die Bewegung von Lasten und einfachen Fahrzeugmodellen über Balken, elastisch gelagerten Balken, Platten und den elastischen Halbraum untersucht. Der Schwerpunkt des Buches liegt in der Entwicklung analytischer Lösungen für die einzelnen Probleme und der Beschreibung wichtiger Effekte. In einem weiteren Werk [Fryba 1996] beschäftigt sich der Autor speziell mit der Dynamik von Eisenbahnbrücken.

Mit der Interaktion Fahrzeug – Straße beschäftigt sich [Cebon 2000]. Ein Schwerpunkt liegt in der Bewertung der Straßenschädigung.

Eine ausführliche Behandlung der Boden – Bauwerk Interaktion wird in den Büchern [Wolf 1985] und [Wolf 1988] behandelt. Der gleiche Autor entwickelt in [Wolf 2003] eine neue Methodik zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Böden und der Boden – Bauwerk Interaktion.

1996 rief die Deutsche Forschungsgemeinschaft das Schwerpunktprogramm 1015 „Systemdynamik und Langzeitverhalten von Fahrwerk, Gleis und Untergrund“ ins Leben. Ziele waren ein besseres Verständnis der dynamischen Interaktion zwischen Eisenbahn und Untergrund und des Langzeitverhaltens des gesamten Systems [Popp, Schiehlen 2003].

Die Ausbreitung von Schall und Erschütterungen im Schienenverkehr wird in [Müller, Möser 2003] behandelt.

Kontaktmechanische Fragestellungen wie die Beschreibung der Kopplung von Modellen, die Kontaktkinematik und die Diskretisierung der Kontaktstellen werden in [Wriggers 2002] besprochen.

In den einschlägigen Normen sind für Straßenbrücken DIN 1072 und Eisenbahnbrücken DS 804 Schwingfaktoren vorgegeben, mit welchen die statischen Lasten beaufschlagt werden. Erschütterungen im Bauwesen sind in der DIN 4150 geregelt.

1.3 Zielsetzung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt im Bereich der Methodenentwicklung und der Absicherung der Berechnungsmethoden. Um räumliche, diskretisierte Modelle abzubilden und um nichtlineare Vorgänge beschreiben zu können, wird die Kopplung im Zeitbereich beschrieben.

Zunächst wird eine spezielle Beschreibung [Lutzenberger 2002] allgemeingültig formuliert werden, so dass damit die Kopplung unterschiedlicher Methoden beschrieben werden kann.

Basis ist die Beschreibung als differentiell – algebraisches System, da diese Formulierung universell anwendbar, die genaue Erfüllung der Nebenbedingung ermöglicht und einfach einsetzbar ist. Die Zeitintegration derartiger Systeme bereitet Schwierigkeiten [Lutzenberger 2002]. Diese Probleme treten hauptsächlich bei Verwendung von Rauheitsfunktionen in der Nebenbedingung auf und spielen deshalb bei der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion eine besonders große Rolle.

Wenngleich für vereinfachte Systeme Untersuchungen existieren, blieben Fragestellungen bis jetzt unbeantwortet. So liegt ein Schwerpunkt der Arbeit auf:

- einer Stabilitätsanalyse differentiell – algebraischer Systeme,
- der Identifikation der Mechanismen auftretender Störungen
- und der Entwicklung von Zeitintegrationsverfahren welche eine stabile Zeitintegration ermöglichen und gleichzeitig möglichst geringe Störungen ins Gleichungssystem einbringen.

Ein wichtiges Themenfeld der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion ist die Beschreibung des gekoppelten Systems Eisenbahn – Oberbau – Halbraum. Die zu beschreibenden Gebiete sind in Fahrtrichtung sehr weit ausgedehnt. Hier stellt sich ein Skalenproblem, da gleichzeitig eine feine Diskretisierung des Schwellenabstandes vonnöten ist:

- wie können Gebiete mit großer Ausdehnung sinnvoll beschrieben werden? Eine mögliche Modellreduktion ist geeignet zu formulieren und in eine gekoppelte Simulation numerisch günstig mit einzubringen.

Aktuell stehen mit geregelten Komponenten ausgestattete Fahrzeuge und Magnetschwebbahnen am Beginn der Anwendung. Zur Beschreibung dieser Systeme stellen sich speziell folgende Fragen:

- wie können geregelte Systeme mit dem entwickelten Algorithmus beschrieben werden?

1.4 Vorgehen und Aufbau der Arbeit

Der **erste Teil** der Arbeit behandelt die methodischen Grundlagen zur Beschreibung und Kopplung der Teilsysteme. Wichtige strukturdynamische Methoden werden in kurzer Form diskutiert und gegenübergestellt. Die gewählte Form der Kopplung über Lagrangesche Multiplikatoren wird auf die Relativbewegung der Kopplung erweitert.

In **Kapitel 2** wird eine einheitliche Formulierung für gekoppelte strukturdynamische Systeme diskutiert. Diese basiert auf dem Hamiltonschen Prinzip, welches einfach auf nichtkonservative Kräfte erweitert werden kann. Die schwache Formulierung des Gleichgewichts hat den Vorteil, dass sie einen direkten Zugang zur Anwendung von Diskretisierungsverfahren wie auch zur Entwicklung der Differentialgleichungen bietet. Darauf aufbauend werden analytischen Lösungen oder die Anwendung von Integraltransformationmethoden präsentiert. Die wichtigsten strukturdynamischen Verfahren wie z. B. die Finite Elemente Methode oder Integraltransformationmethoden werden in kurzer Form diskutiert und gegenübergestellt.

Verschiedene Kopplungsmethoden werden in **Kapitel 3** untersucht und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile bewertet. Dabei erweist sich die Kopplung über Lagrangesche Nebenbedingungen bzw. die Ankopplung über nichtkonservative Kräfte als günstige Strategie. Die Kopplung von Systemen kann in das Hamiltonsche Prinzip integriert werden und führt zum "erweiterten Hamiltonschen Prinzip". Damit liegt eine Formulierung zur konsistenten Beschreibung unterschiedlicher Modelle und deren Kopplung vor. Die entstehenden Bewegungsgleichungen sind differentiell – algebraische Gleichungen, die höhere Anforderungen an die Lösbarkeit als Differentialgleichungen stellen. Die wichtigsten mathematischen Voraussetzungen werden zusammengestellt.

Kapitel 4 beschreibt ein Verfahren zur Relativbewegung von Körpern, welches auf dem erweiterten Hamiltonschen Prinzip basiert.

Im **zweiten Teil** wird die Zeitintegration der differentiell-algebraischen Gleichungen besprochen und es werden problemangepasste Zeitintegrationsverfahren entwickelt.

Zunächst wird in **Kapitel 5** die Stabilität der Zeitintegration analysiert. Dabei werden der Untersuchung die populärsten strukturdynamischen Methoden, die α – Methoden, zugrunde gelegt. Über eine spezielle Formulierung können über die Vergrößerungsmatrix allgemeingültige Aussagen für die relevanten differentiell - algebraischen Systeme getroffen werden. Darüber hinaus wird der Mechanismus studiert, welcher zur Entstehung von Störungen führt.

Auf Basis der hier gewonnenen Einsichten werden in **Kapitel 6** Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische, differentiell algebraische Systeme entwickelt.

Der **dritte Teil** der Arbeit beschäftigt sich mit der Problematik der sehr großen zu beschreibenden Gebiete bei der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion. Bei Hochgeschwindigkeitsbahnen muss bei einer Fahrgeschwindigkeit von 300 km/h ein Gebiet von mehr als 400 m Länge abgebildet werden, um 5 s der Fahrt eines Zuges berechnen zu können. Eine geeignete Strategie, die dynamische Kondensation von Modellen, wird in **Kapitel 7** behandelt. Das Teilsystem Boden kann dabei über mehrere Bezugsgrößen wie Steifigkeit oder Impedanz beschrieben werden. Das Kapitel untersucht, welche Art der Beschreibung der Teilsysteme günstig ist und wie die Ankopplung über Faltungsintegrale vorteilhaft beschrieben werden kann.

Mit den Anwendungsbeispielen in **Teil vier** wird die Übertragung der Formulierung gekoppelter relativbewegter Systeme, deren Zeitintegration und zu lösender numerischer Probleme auf Beispiele der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion gezeigt. Fahrzeug und Fahrweg werden deshalb durch einfache, übersichtliche Modelle abgebildet. Die Vorgehensweise kann aber problemlos auf detaillierte und komplizierte Modelle erweitert werden.

Kapitel 8 zeigt die Interaktion einer Magnetschwebbahn mit Fahrwegträgern. Dazu werden zunächst erforderliche regelungstechnische Grundlagen zusammengefasst. Die Beschreibung der regelten Tragemagnete des Fahrzeugs führt auf eine Bestimmungsgleichung für die Kontaktkraft, die in einem mechanischen Sinn als Nebenbedingung interpretiert werden kann. Unter Verwendung der Methoden aus dem ersten Teil der Arbeit kann die Ankopplung über nichtkonservative Kräfte und die Relativbewegung über zeitvariante Nebenbedingungen beschrieben werden.

In **Kapitel 9** wird die Interaktion eines Zuges und des Untergrundes simuliert. Hierbei soll die Ankopplung dynamisch reduzierter Modelle und die Anwendung der entwickelten Zeitintegrationsverfahren auf differentiell – algebraische Gleichungen hohen Schwierigkeitsgrades gezeigt werden.

2 Beschreibung strukturdynamischer Systeme

In der Strukturmechanik existieren unterschiedliche Methoden zur Berechnung von Strukturen wie die Finite Elemente Methode, die Randelemente Methode oder die Mehrkörpermethode.

Die Herleitung dieser Methoden kann über verschiedene gleichwertige Grundprinzipien der „analytischen Mechanik“ wie z.B. das Hamiltonsche Prinzip, das Prinzip der virtuellen Arbeit (Formulierung über die skalare Größen Energie mit der Arbeit als Postulat am Beginn) oder die Prinzipien der „synthetischen Mechanik“ (vektorielle Impuls- und Drehimpulsbilanzen mit dem Kräfte- und Momentengleichgewicht als Postulat am Beginn) erfolgen. Die Prinzipien der „analytischen Mechanik“ haben im Zusammenhang mit der Bestimmung von Näherungslösungen (FEM, BEM) gegenüber den synthetischen Prinzipien Vorteile, da sie einen direkten Zugang zu Ermittlung schwacher Lösungen (Näherungslösungen) bieten. Genauso ist die Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen darüber möglich.

In dieser Arbeit wird das Hamiltonsche Prinzip, erweitert um nichtkonservative Kräfte, das „verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip“ nach [Riemer, Wauer, Wedig 1993] (vgl. auch [Simeon 2000]), als Grundlage zur Beschreibung der verschiedenen Methoden an den Anfang gestellt. Im Vergleich zum Prinzip der virtuellen Arbeit hat diese Formulierung den Vorteil, dass die Bewegungsgleichungen unter Verwendung der kinetischen Energie, welche oft einfacher als die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte formuliert werden kann, aufgestellt werden. Das Hamiltonsche Prinzip hat darüber hinaus den Vorteil, dass es auf elektrische oder elektromagnetische Felder erweitert werden kann.

Aufbauend auf dem verallgemeinerten Hamiltonschen Prinzip können wichtige strukturdynamische Methoden wie die Finite Element Methode, die Randelementmethode oder Herleitung der Bewegungsgleichungen und deren analytische bzw. semi-analytische Lösung über Integraltransformationmethoden abgeleitet werden. Die verschiedenen Methoden werden in Kapitel 2.3 in kurzer Form vorgestellt und klassiert.

Ebenfalls kann, aufbauend auf der gewählten Formulierung, die Kopplung von Modellen über verschiedene Strategien beschrieben werden. Damit liegt eine Ausgangsbasis zur konsistenten Beschreibung unterschiedlicher Modelle und deren Kopplung vor.

2.1 Hamiltonsches Prinzip

Eine Grundlage zur Beschreibung strukturdynamischer Systeme ist das Hamiltonsche Prinzip.

Hamiltonsches Prinzip:

Die Bewegung eines Systems zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 ist derart, dass das Linienintegral (Funktional) J

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L = T - U \quad (2.1)$$

($L =$ Lagrange Funktion, $T =$ kinetische Energie, $U =$ potentielle Energie) ein Extremum für die durchlaufene Bahn ist.

Als Funktional J wird eine Funktion bezeichnet, die von anderen Funktionen (hier: Bewegung $q(t)$) abhängt. Das Hamiltonsche Prinzip ist ein Integralprinzip, da es das Integral über die gesamte Bewegung eines Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 betrachtet.

Die zu lösende Aufgabe ist es, diejenige Bahnkurve q zu bestimmen, welche das Funktional J minimiert. Zur Bestimmung dieses Extremwerts ist es erforderlich sich der Variationsrechnung zu bedienen

2.2 Verallgemeinertes Hamiltonsches Prinzip

Die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ist auf elastische Körper beschränkt. Durch eine Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips um das Prinzip der virtuellen Arbeiten können auch nicht-konservative Systeme beschrieben werden. Das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip ([Riemer, Wauer, Wedig 1993]) ergibt sich, wenn elastische Anteile über das Prinzip der virtuellen Arbeiten in das Hamiltonsche Prinzip eingebracht werden.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt + \int_{t_0}^{t_1} W_{virt,i} dt + \int_{t_0}^{t_1} W_{virt,a} dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + W_{virt,i} + W_{virt,a}) dt = 0 \rightarrow \quad (2.2)$$

Die virtuelle Arbeit $W_{virt,a}$ der äußeren Kräfte umfasst dabei die Arbeit $W_{virt,a,nc}$ aller nichtkonservativen Kräfte $F_{a,nc}$ und die Arbeit $W_{virt,a,c}$ aller konservativen äußeren Kräfte $F_{a,c}$, welche an der Oberfläche des Körpers angreifen. Die virtuelle Arbeit $W_{virt,i}$ der inneren Kräfte umfasst dabei die Arbeit $W_{virt,i,nc}$ aller nichtkonservativen Kräfte $F_{i,nc}$ (z.B. Dämpfungskräfte) und die Arbeit $W_{virt,i,c}$ aller konservativen inneren Kräfte $F_{i,c}$ (z.B. elastische Rückstellkräfte), im Inneren des Körpers. Die virtuellen Arbeiten ergeben sich jeweils aus dem Skalarprodukt von Kraft und virtueller generalisierter Verschiebung δq_i .

Bei der Variation des Systems wird die Zeit „festgehalten“¹. Man kann sich die variierte Bahnkurve deshalb als Folge von virtuellen Verschiebungen der Bahnkurve $q(t)$ vorstellen. Da jede virtuelle Verrückung zu einem festen Zeitpunkt stattfindet, ergibt sich für jeden Zeitpunkt t eine virtuelle Arbeit δW der innerhalb bzw. auf das System wirkenden Kräfte.

2.3 Methoden zur Beschreibung strukturdynamischer Systeme

Strukturdynamische Systeme werden über (partielle) Differentialgleichungen beschrieben. Dabei sind als Randbedingungen geometrische Randbedingungen und zeitliche Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Man spricht daher von Anfangsrandwertproblemen. Zwangbedingungen können in diskreter oder kontinuierlicher Form vorliegen.

Die Systeme in der Strukturdynamik sind sehr vielfältig und haben unterschiedliche Charakteristika. Die Frage wie Systeme am besten zu modellieren sind lässt sich nicht allgemeingültig beantworten. Die Modellierung ist immer von den Eigenschaften des Systems bei einer konkreten Fragestellung abhängig. An die Modellbildung werden die Anforderungen gestellt, dass ein Modell die physikalischen Wirkungen genau genug wiedergeben und dabei so einfach wie möglich sein soll.

2.3.1 Klassifizierung strukturdynamischer Systeme

Hilfreich für die Modellierung ist es die Systeme zunächst zu klassieren. So ist eine Einteilung in kontinuierliche – diskrete und begrenzte – unbegrenzte Systeme mit einfachen - komplizierten Geometrien, Randbedingungen und Lasten möglich. Auch kann hinsichtlich des Frequenzgehaltes der Problemstellung: niedrig (Elastizität der Körper kann vernachlässigt werden / Elastizität der Körper kann nicht vernachlässigt werden) – hoch (Verhalten über statistische Untersuchung zu beschreiben) unterschieden werden. Eine andere Klassierung gelingt über die Anzahl an Freiheitsgraden. Hier können Einfreiheitsgradsysteme und Mehrfreiheitsgradsysteme unterschieden werden.

Die Lösung der die Systeme beschreibenden partiellen Differentialgleichungen erfordert eine räumliche wie auch eine zeitliche Integration. Dazu stehen viele Verfahren zur Verfügung, wie z.B.:

- Analytische Lösungen
- Integraltransformationmethoden (ITM)
- Mehrkörpersysteme (MKS)
- Finite Elemente Methode (FEM)
- Randelemente Methode (BEM)
- Statistische Energie Analyse (SEA)
- Hybride Verfahren, welche verschiedene Methoden miteinander kombinieren

¹ Es findet keine Variation der Zeit, sondern es finden lediglich Variationen nach dem Ort statt.

Alle Verfahren haben dabei ihre spezifischen Stärken und Schwächen. Die folgende Abbildung gibt einen Überblick über die Anwendung, der in der Strukturdynamik gebräuchlichen Methoden.

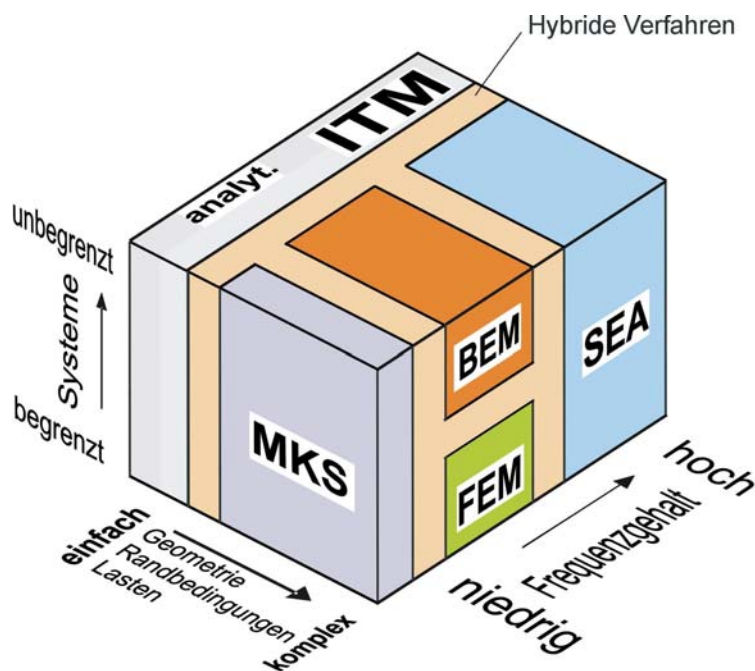


Abbildung 2.1: Strukturdynamische Methoden nach [Müller 2006]

Die Auswahl der Methoden ist darüber hinaus auch entscheidend vom Materialverhalten (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, isotrop / anisotrop) abhängig. Mögliche Fragestellungen bei der Modellbildung sind z.B.:

- Kann durch räumliche Diskretisierung der Körper als starrer Körper vereinfacht werden?
- Sind analytische Lösungen möglich oder können Integraltransformationmethoden angewandt werden?
- Sind die Bereiche begrenzt oder unbegrenzt?
- Ist das Materialverhalten linear/nichtlinear, homogen/inhomogen bzw. isotrop/anisotrop?
- Ist eine Beschreibung in statistischen Parametern erforderlich?

Damit können für strukturdynamische Fragestellungen günstige Methoden gewählt werden. Die folgende Abbildung mit Beispielen für strukturdynamische Systeme soll dies verdeutlichen:

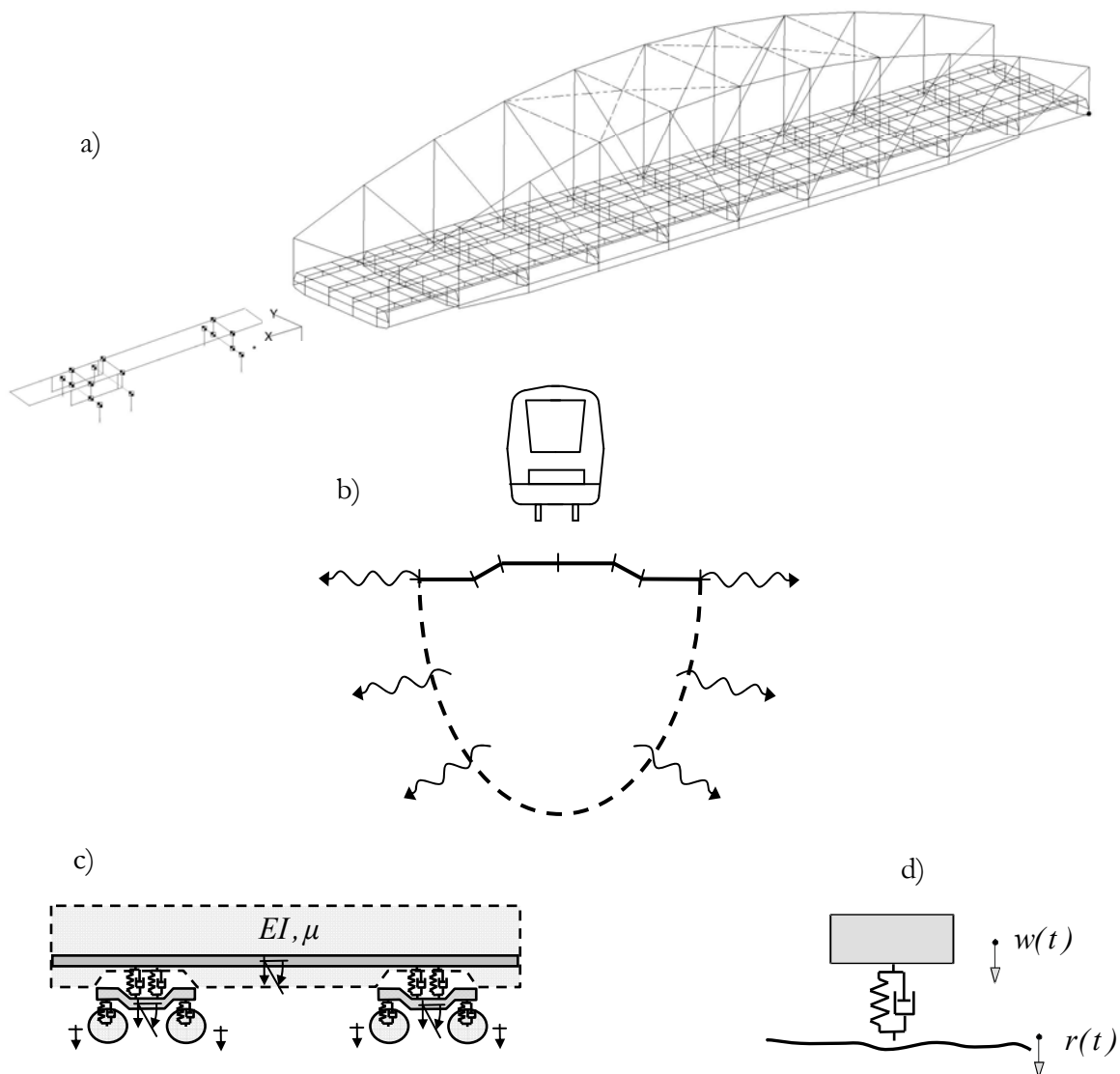


Abbildung 2.2: Beispiele strukturdynamischer Systeme

Abbildung 2.2 a) zeigt ein Problem der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion: die Bestimmung der dynamischen Belastung einer Brücke infolge der Überfahrt eines LKW. Beide Systeme haben eine komplexe Geometrie und komplexe Randbedingungen und begrenzte Abmessungen. Die elastischen Verformungen der LKW Rahmens sowie der Bestandteile der Brücke können i.d.R. für die niederfrequente Berechnung der Strukturantwort der Brücke nicht vernachlässigt werden. Beide Systeme wurden daher als FE-Modelle, der LKW wurde aufgrund der Nichtlinearität der Federung als nichtlineares FE-Modell mit relativ wenigen Freiheitsgraden, die Brücke als lineares FE-Modell (im Bereich kleiner Verformungen) mit vielen Freiheitsgraden modelliert. Damit können im niederfrequenten Bereich die Vibrationen des LKW und die dynamische Belastung der Brücke bestimmt werden. Soll z.B. die Schallabstrahlung im hochfrequenten Bereich bestimmt werden, so müsste die Brücke über eine andere, hierfür besser geeignete Methodik (SEA) beschrieben werden.

Abbildung 2.2 b) zeigt ein anderes Problem der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion: die Wellenausbreitung im Halbraum (mittlerer Frequenzbereich) infolge der Überfahrt eines Zuges. Für den Zug gelten dabei die gleichen Überlegungen wie zuvor für den LKW. Der zur Seite und nach unten hin unbegrenzte Halbraum besitzt eine relativ einfache Geometrie, so dass zur Beschreibung prinzipiell Integraltransformationmethoden oder die Randelementmethode (BEM), welche die Wellenabstrahlung ins Unendliche abbilden, herangezogen werden können. Die Modellierung des Halbraums ist kaum über eine FE Modellierung möglich, da an den Gebietsgrenzen des Modells Wellenreflexionen entstehen, welche die Lösung verfälschen können (eine Verbesserung dieses Problems gelingt über semi-infinite Elemente). Soll nichtlineares Verhalten des Bodens im Bereich hoher Spannungskonzentrationen abgebildet werden, so wird häufig eine getrennte Modellierung im Nahfeldbereich (FE) und im Fernfeldbereich (ITM, BEM) gewählt.

Die Unterscheidung nach dem Frequenzgehalt des Problems ist in Abbildung 2.2 c) dargestellt. Während im niederfrequenten Bereich der Eisenbahnwaggon ausschließlich über miteinander verbundene starre Körper (MKS) beschrieben werden kann, gilt dies im Bereich ab ca. 20 Hz nicht mehr. Hier ist die Elastizität des Wagenkastens (z.B. über FE) zu berücksichtigen. Man benötigt also die Verwendung zweier unterschiedlicher Methoden in einem Modell.

Ist man jedoch nur an der generellen Vertikaldynamik des Fahrzeugs interessiert, so kann als einfachstes vertikaldynamisches Modell ein Einmassenschwinger gewählt werden (Abbildung 2.2 d)). Hierfür können eventuell analytische Lösungen angegeben werden, welche auch zur Verifikation komplexerer Modelle verwendet werden können.

Speziell für Fragen der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion ist es häufig notwendig, verschiedene Verfahren miteinander zu koppeln.

Je nach Art der Fragestellung ist eine Beschreibung im Zeit- oder Frequenzbereich sinnvoll.

2.3.2 Methoden/Modelle zur Beschreibung strukturdynamische Systeme

Im Folgenden werden die wichtigsten strukturdynamischen Methoden vorgestellt:

2.3.2.1 Analytische Lösungen

Die exakte Lösung einer Differentialgleichung, die sich explizit als Formel ausdruck angeben lässt wird analytische Lösung genannt. Analytische Lösungen stellen einen direkten Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Systems her und zeigen die maßgebenden Effekte klar auf. Die gefundenen Lösungen gelten für beliebige Randwerte. Variationen der Randwerte und der Parameter können einfach durchgeführt werden. Damit ist es möglich einen tieferen Einblick in die Funktionsweise technischer Prozesse zu gewinnen.

Analytische Lösungen lassen sich meist nur bei einfachen Geometrien, einfachen Anfangsbedingungen und einfachen Lasten finden. Vielfach ist es jedoch sinnvoll für ein vorgegebenes Problem durch Vernachlässigung von verschiedenen Termen eine sehr einfache Gleichung zu gewinnen, die einer analytischen Lösung zugänglich ist. Damit lassen sich die Ergebnisse einer komplexen numerischen Berechnung überprüfen.

Teilweise können zur Lösung der Gleichungen Integraltransmutationsverfahren eingesetzt werden. Für die meisten Probleme ist man auf numerische Methoden angewiesen.

2.3.2.2 Integraltransmutationsmethoden (ITM):

Grundlagen der Integraltransmutationsmethoden sind in [Bracewell 2000] (Fouriertransmutation), [Chui 1992], [Daubechies 1992] (Wavelettransmutation), und [Grundmann 1999], [Grundmann, Trommer 2001] (Anwendung auf die Beschreibung des Halbraums) beschrieben.

Mittels Integraltransmutationsmethoden können Anfangs- Randwert-Probleme in einem transformierten Gebiet einfach analytisch gelöst werden. Die Funktionen werden vom Ausgangsraum (z.B.: x, y, z, t) in einen anderen Raum (k_x, k_y, k_z, ω) transformiert. Die transformierte Funktion $F(k_x, k_y, k_z, \omega)$ ist nun von k_x, k_y, k_z und ω abhängig:²

$$f(x,y,z,t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(k_x, k_y, k_z, \omega).$$

Wichtige Integraltransmutations sind die Fourier - Transmutations, die Laplace - Transmutations und die Wavelettransmutation. Die Fouriertransmutation ist z.B. über

$$\begin{aligned} f(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(k_x) : \quad F(k_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ik_x x} dx \\ F(k_x) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(x) : \quad f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x) \cdot e^{ik_x x} dk_x \end{aligned} \quad (2.3)$$

definiert. Ein großer Vorteil der Fouriertransmutation ist, dass im transformierten Bereich Differentiationen zu Multiplikationen reduziert werden.

$$f^n(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (i k_x)^n F(k_x) \quad (2.4)$$

So kann die Fouriertransmutation auf die Differentialgleichung eines Problems angewandt werden. Wird die (noch zu bestimmende Funktion $f, f = \text{Lösung des Problems}$) und ihre Ableitungen fouriertransformiert, so verschwinden die Ableitungen. Partielle Differentialgleichungen können so zu gewöhnlichen Differentialgleichungen oder sogar zu algebraischen Gleichungen transformiert werden.

Die algebraischen Gleichungen im transformierten Raum können wesentlich einfacher als die Differentialgleichungen im Originalraum gelöst werden. Für eine Lastfunktion $P(\omega)$ ergibt sich die Antwort des Systems $W(k_x, k_y, k_z, \omega)$ im transformierten Raum. Die ITM können darüber hinaus benutzt werden, um Fundamentallösungen $g(x, y, z, t)$ ³ zu bestimmen. Wird das System anstatt mit

² Funktionen im Originalraum werden im Weiteren mit Kleinbuchstaben, Funktionen im transformierten Raum mit Großbuchstaben bezeichnet

³ Als Fundamentallösung einer DGL wird die Antwort infolge eines Dirac-Impulses für ein unendlich ausgedehntes Gebiet (d.h. ohne Berücksichtigung von RB) bezeichnet. Im Unterschied dazu wird die Lösung für ein bestimmtes Gebiet mit speziellen Randbedingungen als "Greensche Funktion" bezeichnet.

einer Lastfunktion $P(\omega)$ mit einer Einheitslast $\bar{1}^4$ belastet, so erhält man die Fundamentallösung des Problems.

Die folgende Skizze zeigt die Vorgehensweise bei Anwendung der Fouriertransformation:

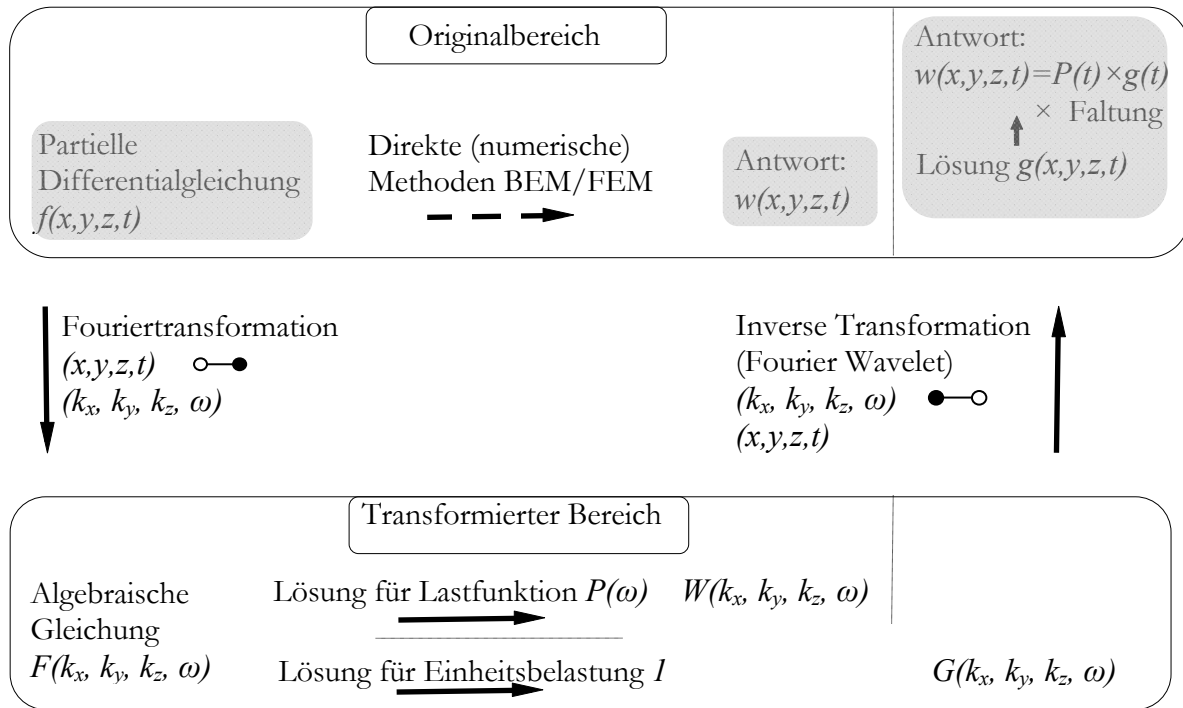


Abbildung 2.3: Lösung von Differentialgleichungen im transformierten Raum

Schwierigkeiten treten bei komplizierten Anfangs- bzw. Randbedingungen auf. Da diese ebenfalls in den Frequenzraum transformiert werden müssen, werden die Transformation und die Lösung der Gleichungen ungleich schwieriger. Die Anwendung von Integraltransformationmethoden ist i. d. R auf reguläre Geometrien beschränkt. Die Kombination mit FE kann diese Beschränkung im Prinzip aufheben ([Zirwas 1996], [Rastandi 2003]).

Vorteile der Integraltransformationmethoden sind, dass sie numerisch effizient sind, eine fehlerkontrollierte Vorgehensweise erlauben und Sensitivitätsbetrachtungen zugänglich sind. Die Lösung kann im transformierten Raum visualisiert werden. Dies führt zu einem tieferen Verständnis der physikalischen Natur des Problems. Gekoppelte Probleme können im transformierten Bereich ebenfalls einfach beschrieben und gelöst werden (z.B. [Lenz 2003]). Ein weiterer Vorteil der Fouriertransformation ist, dass bewegte Lasten über das Verschiebungstheorem einfach beschrieben werden können [Müller 1989].

⁴ Ein Dirac Impuls im Originalbereich $\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(z-z_0) \cdot \delta(t-t_0)$ entspricht im transformierten Bereich einer Einheitslast $\bar{1}$

2.3.2.3 Mehrkörpersystem (MKS):

Eine zusammenfassende Darstellung der Dynamik von Mehrkörpersystemen findet sich z.B. in [Pfeiffer 1992], eine Darstellung im Hinblick auf die Modellierung von Fahrzeugen in [Kortüm, Lugner 1994].

Die Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) dient zur Modellierung von mechanischen Systemen, die im Vergleich zu ihren Bewegungen nur kleine Deformationen aufweisen. Die Körper werden dann als massebehaftete starre Körper modelliert. Diese Massen sind über masselose Federn, Dämpfer sowie Gelenke miteinander verbunden.

In der Regel wird zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers ein körperfestes Koordinatensystem eingeführt. Die Bewegung eines Körpers „I“ relativ zu einem anderen Körper „0“ kann über die Bahnbewegung des Koordinatenursprungs und die Drehbewegung um den Koordinatenursprung dargestellt werden. Die Beschreibung der Bewegungsgleichungen kann über die Eulerschen Gleichungen unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehungen erfolgen.

Infolge dieser Modellierung, bei der die elastischen Eigenschaften der Körper nicht berücksichtigt werden, reduzieren sich die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese sind aufgrund der großen Bewegungen und der nichtlinearen Eigenschaften der Federn oder Dämpfer häufig stark nichtlinear. Um relevante Deformationen der einzelnen Körper berücksichtigen zu können, wurde die Methode der elastischen Mehrkörpersysteme (EMKS) entwickelt.

Je höher der betrachtete Frequenzbereich wird, desto weniger gilt die Annahme starrer Körper. Im Bereich der Eigenfrequenzen der Körper verhalten sich diese elastisch. Die Modellierung der Körper als starre Körper ist deshalb im unteren Frequenzbereich sinnvoll. Bei LKW liegt die Grenzfrequenz, ab der die elastischen Verformungen des Rahmens relevant werden, bei ca. 20 Hz.

Zur Beschreibung von Mehrkörpermodellen werden oft algebraische Zwangsbedingungen zum Schließen der kinematischen Ketten verwendet, was zu differentiell-algebraischen Gleichungssystemen führt.

2.3.2.4 Finite Element Methode (FEM):

Grundlegende Darstellungen der Finite Elemente Methode finden sich in den Werken von [Bathe 1986] und [Hughes 2000].

Die Finite Elemente Methode basiert auf einer schwachen Formulierung der Bewegungsgleichung z.B. über das Hamiltonsche Prinzip oder das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Die Körper werden in kleine Elemente unterteilt. Das Verschiebungsfeld wird über geometrische Freiheitsgrade (Verschiebungen, Verdrehung) q_i an den Knoten der Elemente und über elementweise Ansatzfunktionen $N_i(x)$, welche den realen und den virtuellen Verschiebungsverlauf approximieren, beschrieben.

Wird dieser angenäherte Verschiebungsverlauf in die schwache Form der Bewegungsgleichung eingesetzt, so bleiben als Unbekannte die Freiheitsgrade. Das Gleichungssystem kann nach den unbekanntem geometrischen Freiheitsgraden gelöst werden. Der Verschiebungsverlauf ergibt sich schließlich aus den Freiheitsgraden und den Ansatzfunktionen.

Zur Bestimmung der Schnittgrößen, der Spannungen und der Dehnungen müssen die Ansatzfunktionen (numerisch) abgeleitet werden. Die Genauigkeit der Schnittgrößen ist deswegen geringer als die der Verschiebungen.

Bei dieser Beschreibung ergibt sich eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden (insbesondere für mehrdimensionale Probleme), welche die numerische Lösung des Gleichungssystems aufwändig macht. So sind Sensitivitätsuntersuchungen umfangreich. Bei dynamischen Vorgängen muss das Gleichungssystem zu jedem Zeitpunkt gelöst werden. Bei unendlichen Gebieten müssen künstlich Gebietsränder erzeugt werden. An diesen Gebietsrändern treten Wellenreflexionen auf, welche das Ergebnis unbrauchbar machen können. Außerdem benötigt man zur Wahl der Netzgröße Informationen über den Frequenzinhalt der Lösung und die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung.

Die Gleichungen zeigen nicht mehr direkt, welche Phänomene charakteristisch für das betrachtete Problem sind.

Andererseits ist die Finite Elemente Methode die am universellsten verwendbare Methode. Es können beliebige Geometrien, Randbedingungen und Lastsituationen beschrieben werden. Aufwändige nichtlineare Materialmodelle, beliebige Nichtlinearitäten und Inhomogenitäten können beschrieben werden. Das Lösen des Gleichungssystems vereinfacht sich dadurch, dass die Systemmatrix bei günstiger Wahl der Freiheitsgrade Bandstruktur besitzt. Die Finite Element Methode ist weit verbreitet, gut erforscht und besitzt in der Ingenieurausbildung einem hohen Stellenwert.

2.3.2.5 Randelementmethode (BEM):

Die Randelementmethode ist z.B. in den Büchern von [Brebbia, Walker 1980], [Hartmann 1987], oder [Gaul, Kögl, Wagner 2003] dargestellt. Die Randelementmethode hat ihren Namen aus der Tatsache, dass hier die Diskretisierung lediglich entlang des Gebietsrandes erfolgt.

Die Randelementmethode wird i.d.R. über das Prinzip der gewichteten Residuen aus der Differentialgleichung des Systems hergeleitet. Als Wichtungslösung wird die Fundamentallösung w^* verwendet. Ziel der Vorgehensweise ist es die Näherungslösung \hat{w} zu bestimmen. Das globale Residuum lautet

$$R_{\Omega} = \int_{\Omega} (L\hat{w} - \underline{P}) \cdot \underline{w}^* d\Omega = 0 \quad (2.5)$$

Der Differentialoperator L wird dabei auf die Näherungslösung angewandt. Ziel ist es den Differentialoperator auf die Wichtungsfunktion zu übertragen und das Integral, welches über das gesamte Gebiet zu berechnen ist, auf ein Randintegral (Integration über den Rand) zu überführen. Dies gelingt durch m -fache partielle Integration und m -fache Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (hier für zweidimensionale Probleme).

Dabei entstehende Terme mit den Ableitungen der Näherungslösung \hat{w} und der Wichtungsfunktion w^* können als Randlasten \hat{q} bzw. q^* und interpretiert werden. Die entstehende Gleichung:

$$R_{\Omega} = \int_{\Omega} [p \cdot w^* - p^* \cdot \hat{w}] d\Omega + \int_{\Gamma} [\hat{q} \cdot w^* - q^* \cdot \hat{w}] d\Gamma = 0. \quad (2.6)$$

kann als Satz von Betti interpretiert werden. Mit der Filterwirkung des Dirac Impulses ρ^* ergibt sich (für statische Problemstellungen):

$$R_{\Omega} = \int_{\Omega} p \cdot w^* d\Omega - c \cdot \hat{w}(\chi, \xi) + \int_{\Gamma} [\hat{q} \cdot w^* - q^* \cdot \hat{w}] d\Gamma = 0. \quad (2.7)$$

Der Faktor c ist abhängig von der Geometrie. Unbekannte Größen (\hat{w} und \hat{q}) treten nur noch unter Randintegralen auf. Somit muss nur der Rand diskretisiert⁵ werden. Nun ermittelt man die Residuen entlang des Randes für verschiedene Stelle (Knoten) und approximiert die Randverschiebungen und Randkräfte über die Knotenverschiebungen und Ansatzfunktionen.

Dies führt auf n Gleichungen für n Randknoten (jeweils Kraft und Verschiebung), die zusammen mit den Randbedingungen gelöst werden können. Die Verschiebung im Feld ergibt sich aus einer weiteren Anwendung des Bettischen Prinzips, wobei der Dirac Impuls auf die Stelle, für welche die Verschiebung ermittelt wird, gelegt wird. Die Filterwirkung extrahiert die gesuchte Verschiebung.

Bei dynamischen Problemen werden die Randelementgleichungen aus der Bewegungsdifferentialgleichung des Systems hergeleitet. Die Grundlösung ergibt sich aus dem (transienten) Dirac – Impuls. Im Zeitbereich enthält die Randintegralbeschreibung nun ein Faltungsintegral. Die unbekannt Randgrößen sind so zu bestimmen, dass die Randbedingungen zu allen Zeitpunkten erfüllt sind. Dies erfordert eine Diskretisierung in der Zeit.

Einschränkungen bei Benutzung der Randelementmethode ergeben sich daraus, dass diese auf der Fundamentallösung eines Systems basiert. Die Fundamentallösung kann für manche anisotropen, inhomogenen od. nichtlinearen Probleme nicht gefunden werden bzw. diese existiert nicht. Abhilfe schaffen hier spezielle Formulierungen wie die dual reciprocity method [Partridge et al 1992].

Bei der Randelementmethode wird nur der Rand diskretisiert. Es ergeben sich somit wesentlich weniger Freiheitsgrade als bei Verwendung der Finiten Element Methode. Auf der anderen Seite sind die Systemmatrizen voll besetzt und unsymmetrisch (durch geänderte Formulierungen ist es möglich eine symmetrische Steifigkeitsmatrix zu erhalten z.B. [Meier et al 1991]. Die einzelnen Elemente der Systemmatrix sind komplizierter zu ermitteln als bei der Methode der Finiten Elemente.

Da die Abstrahlbedingungen leicht einzuhalten sind (ohne dass der Körper unendlich weit diskretisiert werden muss), ist die Randelementmethode gut geeignet, um unendlich ausgedehnte oder einseitig unendlich ausgedehnte Probleme zu beschreiben. Mit der Randelementmethode können praktisch beliebige Geometrien modelliert werden. Die Berechnung der Spannungen erfolgt innerhalb eines Gebiets durch analytische Differentiation (nicht durch numerische Differentiation wie bei FE). Die Genauigkeit bei der Ermittlung von Spannungen ist größer als bei Verwendung der Finite Elemente Methode.

⁵ Verschiebungen und die Randkräfte entlang des Randes werden über Knotenverschiebungen und Ansatzfunktionen beschrieben. Dieser Vorgang wird Diskretisierung genannt. Der einfachste Fall einer Diskretisierung ist es Knoten in der Mitte jedes Elements anzuordnen und eine über das Element konstante Ansatzfunktion einzuführen.

3 Kopplung von Modellen

Für manche Problemstellungen ist es nicht oder nur schwer möglich, das Problem in seiner Gesamtheit mit einem Modell zu beschreiben. Gewöhnlich unterteilt man dann das Gesamtsystem in mehrere Teilsysteme und beschreibt jedes Teilsystem in einem eigenen Modell. Anschließend werden die Modelle untereinander gekoppelt. Diese Vorgehensweise hat folgende Vorteile:

- Enthalten die Teilsysteme unterschiedliche physikalische Effekte, so kann jedes Teilsystem getrennt über ein problemangepasstes Modell beschrieben werden.
- Große Modelle können in Teilsysteme unterteilt werden. Die Teilsysteme können dann reduziert werden. Dies ist z.B. sinnvoll, wenn Nichtlinearitäten nur in Teilbereichen auftreten. Eine andere Anwendung ist die Kopplung von detailliert abzubildenden Strukturen (Oberbau) und von unendlich ausgedehnten Strukturen (Untergrund).
- Die Zeitintegration der gekoppelten Systeme wird oft getrennt durchgeführt (Co - Simulation, staggered methods). Dabei sind die Systeme getrennt beschrieben.
- Bei Problemen der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion oder bei Kontaktproblemen bewegen sich die Systeme relativ zueinander. Dadurch ändern sich die zu koppelnden Freiheitsgrade mit der Zeit. Jeder Zeitschritt bedürfte dann einer eigenen Beschreibung in den gerade aktuellen generalisierten Koordinaten.
- Geschlossene kinematische Ketten (vor allem bei Mehrkörpersystemen) können über offene kinematische Ketten und eine implizite Schließnebenbedingung beschrieben werden. Dies ist bei der computerorientierten Aufbereitung häufig der Fall.
- Die Zwangskräfte werden im Rechenablauf mit berechnet und müssen nicht durch eine Nachlaufrechnung bestimmt werden.

Die Modelle werden i.d.R. zunächst getrennt voneinander beschrieben und anschließend über Nebenbedingungen gekoppelt. Die Kopplung kann über mehrere Methoden beschrieben werden. Verschiedene Strategien zur Kopplung von Modellen sind z.B. in [Wriggers 2002] zusammengefasst.

3.1 Nebenbedingungen

Es werden folgende Arten von Nebenbedingungen g unterschieden:

- Holonome⁶ Nebenbedingungen beschreiben die Kopplung über die Koordinaten selbst (sie enthalten keine Ableitungen der Koordinaten). z.B.
 $q_1 = q_2 \rightarrow g: q_1 - q_2 = 0.$
- Nichtholonome Nebenbedingungen enthalten Ableitungen der Koordinaten, z.B.
 $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \rightarrow g: \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0.$
- Skleronome⁷ Nebenbedingungen sind zeitunabhängige holonome Nebenbedingungen, z.B. $q_1 = 0.$
- Rheonome⁸ Nebenbedingungen sind zeitabhängige holonome Nebenbedingungen, z.B. $q_1(t) = A_1(t) \cdot q_2(t).$

3.2 Kopplungsstrategien

3.2.1 Kopplung von Systemen über Lagrangesche Multiplikatoren

3.2.1.1 Vorgehensweise

Bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren werden die Modelle zunächst getrennt voneinander, über ihre jeweiligen generalisierten Koordinaten, beschrieben⁹ und anschließend über Nebenbedingungen gekoppelt. Dabei entstehen überzähligen Koordinaten, da anstatt des gemeinsamen Koppel-freiheitsgrades für jedes Teilsystem eine eigene Koordinate verwendet wird. Die Koordinaten werden dann als redundant¹⁰ bezeichnet.

⁶ griechisch holos nomos = ganzes Gesetz

⁷ griechisch skleros nomos = starres Gesetz

⁸ griechisch rheos nomos = fließendes Gesetz

⁹ Die Teilsysteme werden über ihre jeweiligen generalisierten Koordinaten nach Hamilton beschrieben. Die überzähligen Koordinaten entstehen dadurch, dass an der Koppelstelle kein einheitlicher Freiheitsgrad, sondern für jedes Teilsystem eigene Freiheitsgrade verwendet werden.

¹⁰ lat. *redundare*: im Überfluss vorhanden sein.

Die Kopplung über die Kopplungsnebenbedingungen kann über Lagrangesche Multiplikatoren λ in den Formalismus nach Hamilton eingearbeitet werden.

Zur Kopplung werden beide¹¹ Modelle, das Hauptsystem h (n_h Freiheitsgrade) und das Teilsystem t (n_t Freiheitsgrade) über ihre generalisierten Freiheitsgrade q_h und q_t beschrieben. Die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips aus beiden Systemen ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a}] dt = 0 \quad (3.1)$$

3.2.1.1.1 Holonome Nebenbedingungen:

Im Falle holonomer Nebenbedingungen kann die Kopplung als Erweiterung des Hamilton Formalismus über Nebenbedingungen beschrieben werden.

Dabei wird die Nebenbedingung g in das Hamiltonsche Prinzip integriert. Eine Lagerung entlang der Kontaktfläche Γ_k kann über die Nebenbedingung $g: q_i = 0$ die Kopplung zweier Systeme über die Nebenbedingung $g: q_i - q_j = 0$ beschrieben werden. Die Nebenbedingung ist bei einer punktuellen Kopplung an der Koppelstelle, bei einer linienhaften Kopplung entlang der Koppellinie bzw. bei einer flächenhaften Kopplung entlang der Kontaktfläche definiert.

Beispiel:

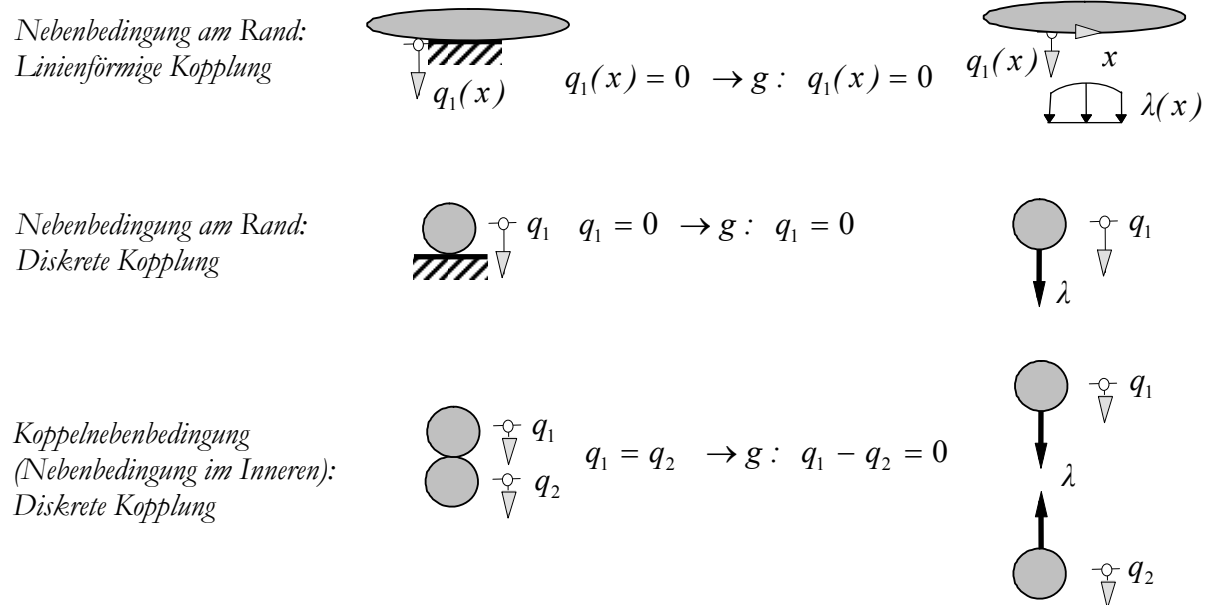


Abbildung 3.1: Beispiele für gekoppelte Systeme

¹¹ bei mehr als zwei Modellen ist die Vorgehensweise analog

Das Potential der Nebenbedingung g wird über $\lambda \cdot g$ gebildet. Dabei entspricht λ bei

- einer diskreten (punktuellen) Kopplung der Kontaktkraft P
- der Kopplung entlang einer Linie der Kontakt-Linienlast p
- einer Kontaktfläche der Kontaktspannung σ .

Die Orientierung von λ ergibt sich aus der Nebenbedingung. Ist die zu λ gehörige Koordinate mit positivem (negativem) Vorzeichen in der Nebenbedingung enthalten, so ist λ in Richtung (entgegengesetzt zu) der Koordinate orientiert (s. Beispiel).

Bei kontinuierlichem Kontakt gilt die Nebenbedingungen entlang der Kontaktoberfläche Γ_k . Die Nebenbedingung wird in ihrer schwachen Form formuliert, um konsistent zur gewählten Schreibweise zu bleiben.

Solange die Nebenbedingung erfüllt ist, gilt:

$$\int_{\Gamma_k} g \, d\Gamma = 0 \quad \text{und damit} \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_k} \delta(\lambda \cdot g \, d\Gamma) \, dt = 0 \quad (3.2)$$

mit

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_k} \delta(\lambda \cdot g \, d\Gamma) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_k} \lambda \cdot \delta g \, d\Gamma \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_k} \delta \lambda \cdot g \, d\Gamma \, dt = 0. \quad (3.3)$$

Der erste Anteil liefert die Beiträge der Kontaktkraft zum Kräftegleichgewicht. Der zweite Anteil ergibt die Nebenbedingung g .

Wird (3.2) zu (3.1) hinzuaddiert (Null darf ja immer hinzuaddiert werden) so erhält man die „verallgemeinerten Hamiltonschen Gleichungen“ erweitert um die Lagrangeschen Multiplikatoren:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a} + \int_{\Gamma_k} \delta \lambda \cdot g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \lambda \cdot \delta g \, d\Gamma \right] dt = 0. \quad (3.4)$$

(3.4) kann dann wiederum in Anteile der generalisierten Koordinaten und der Lagrangeschen Multiplikatoren aufgespalten werden, welche unabhängig voneinander variiert werden können. Dabei ist zu beachten, dass für das Teilsystem keine redundanten Koordinaten und analog dazu auch keine überzähligen Nebenbedingungen verwendet werden.

Bei mehreren Kontaktbedingungen wird analog dazu vorgegangen.

Die entsprechenden Eulerschen Gleichungen lauten für die n_h Freiheitsgrade q_h des Hauptsystems, die n_t Freiheitsgrade q_t des Teilsystems und n_l Nebenbedingungen g_l ($l=1, 2, \dots, n_l$) :

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_h(\dot{q}_h)}{\partial \dot{q}_h} \right) + \frac{W_{h,virt,i}}{\delta q_h} + \frac{W_{h,virt,a}}{\delta q_h} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot \frac{\partial g_l}{\partial q_h} &= 0 & h=1,2,\dots,n_h & \quad (3.5) \\
 -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_t(\dot{q}_t)}{\partial \dot{q}_t} \right) + \frac{\delta W_{t,virt,i}}{\delta q_t} + \frac{\delta W_{t,virt,a}}{\delta q_t} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot \frac{\partial g_l}{\partial q_t} &= 0 & t=1,2,\dots,n_t & \\
 g_l &= 0 & l=1,2,\dots,n_l &
 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist die Orientierung von λ_l ersichtlich. Um eine konsistente Formulierung zu erhalten, muss λ_l einen positiven Arbeitsbeitrag erbringen. λ_l wirkt in Richtung von (entgegengesetzt zu) q_h , wenn q_h mit positivem (negativem) Vorzeichen in g_l enthalten ist.

Wird (3.5) mit $-l$ multipliziert so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_h(\dot{q}_h)}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{W_{h,virt,i}}{\delta q_h} &= \frac{W_{h,virt,a}}{\delta q_h} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot \frac{\partial g_l}{\partial q_h} & h=1,2,\dots,n_h & \quad (3.6) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_t(\dot{q}_t)}{\partial \dot{q}_t} \right) - \frac{\delta W_{t,virt,i}}{\delta q_t} &= \frac{\delta W_{t,virt,a}}{\delta q_t} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot \frac{\partial g_l}{\partial q_t} & t=1,2,\dots,n_t & \\
 g_l &= 0 & l=1,2,\dots,n_l &
 \end{aligned}$$

Die Variation $\delta \lambda \cdot g_l$ ergibt dabei formal wiederum die Nebenbedingung g_l . g_l ist hier in den jeweiligen Kontaktpunkten $\Gamma_{k,l}$ definiert.

Beispiel: Zwei gekoppelte Massen, die untere ist auf einem viskosen Dämpfer gelagert.

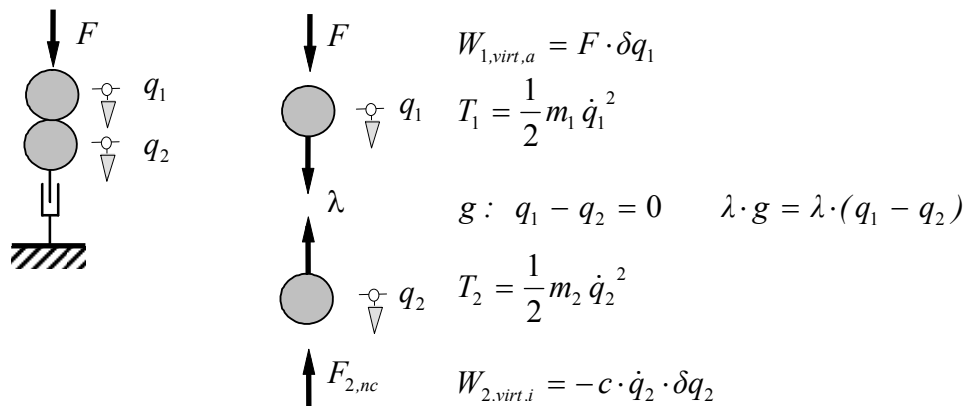


Abbildung 3.2: Beispiel: gekoppeltes System

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1(\dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{W_{1,virt,a}}{\delta q_1} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial q_1} \rightarrow m_1 \cdot \ddot{q}_1 = F + \lambda \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{W_{2,virt,i}}{\delta q_2} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial q_2} \rightarrow m_2 \cdot \ddot{q}_2 + c \cdot \dot{q}_2 = -\lambda \\
 g &= 0 & q_1 - q_2 &= 0
 \end{aligned}$$

3.2.1.1.2 Nichtholonome Nebenbedingungen

Im Falle nichtholonomer Nebenbedingungen kann keine allgemeingültige Strategie angegeben werden. Enthält die Beschreibung des Systems l nichtholonome Nebenbedingungen der Form

$$\sum_h^{n_h} a_{hl} \cdot \dot{q}_h + \sum_t^{n_t} a_{tl} \cdot \dot{q}_t = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n_l \quad (3.7)$$

lauten die Eulerschen Gleichungen wiederum für diskretisierte Systeme mit diskreten Kontaktpunkten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_h(\dot{q}_h)}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{W_{h,virt,i}}{\delta q_h} &= \frac{W_{h,virt,a}}{\delta q_h} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot a_{hl} & h = 1, 2, \dots, n_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_t(\dot{q}_t)}{\partial \dot{q}_t} \right) - \frac{\delta W_{t,virt,i}}{\delta q_t} &= \frac{\delta W_{t,virt,a}}{\delta q_t} + \sum_{l=1}^{n_l} \lambda_l \cdot a_{tl} & t = 1, 2, \dots, n_t \\ \sum_h^{n_h} a_{hl} \cdot \dot{q}_h + \sum_t^{n_t} a_{tl} \cdot \dot{q}_t &= 0 & l = 1, 2, \dots, n_l \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2.1.2 Wertung des Verfahrens

Beim Verfahren der Lagrange Multiplikatoren werden die Nebenbedingungen in das Gleichungssystem mit eingebracht. Die Nebenbedingungen werden damit exakt erfüllt.

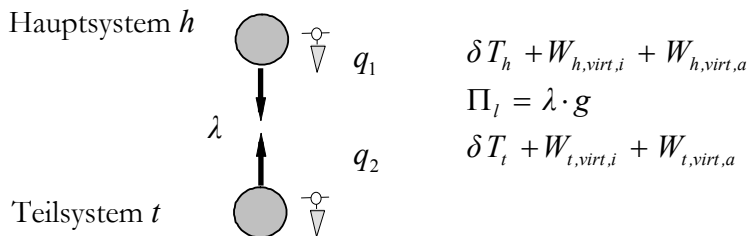


Abbildung 3.3: Kopplung über Lagrange Multiplikatoren

Dabei tritt als zusätzlicher Freiheitsgrad die Kontaktkraft P im Gleichungssystem auf. Damit werden die Kontaktkräfte direkt aus der Lösung des Gleichungssystems berechnet und bedürfen keiner Nachlaufrechnung. Dadurch erhöht sich allerdings die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems auf: $n_{ges} = n_h + n_t + n_l$ (n_h = Anzahl der Freiheitsgrade Hauptsystem, n_t = Anzahl der Freiheitsgrade Teilsystem, n_l = Anzahl der Nebenbedingungen).

Es entsteht ein hybrides Gleichungssystem, das sowohl Verschiebungsgrößen als auch die Kontaktkräfte enthält. Da diese stark unterschiedliche Werte annehmen, empfiehlt es sich die Kontaktkräfte über einen Skalierungsfaktor ins Gleichungssystem einzubringen, um ein gut konditioniertes Gleichungssystem zu erhalten. Die Größe des Skalierungsfaktors kann nach dem Verhältniswert von Größe der Kontaktkraft/Amplitude auftretender Verschiebungen gewählt werden. Zur Lösung der Gleichungen werden aufgrund der Nullelemente auf der Diagonalen spezielle Verfahren wie die Pivot-Suche benötigt.

Das entstehende hybride Gleichungssystem wird im mathematischen Sinn als differentiell-algebraisches Gleichungssystem charakterisiert, da es sich aus den Differentialgleichungen der Systeme und den algebraischen Nebenbedingungen (Gleichungen, welche keine Ableitungen enthalten) zusammensetzt.

3.2.2 Kopplung über nichtkonservative Kräfte

Schwierigkeiten bei der Beschreibung der Kopplung ergeben sich dann, wenn die Nebenbedingungen weder holonom noch in der speziellen nichtholonomen Form (3.7) vorliegen. Dies ist z.B. bei der Regulationsnebenbedingung (Kapitel 8) der Fall. Hier sind in der Nebenbedingung die Lagekoordinaten und gleichzeitig Ableitungen davon enthalten ($\dot{P}_{dyn}(t) = -k_{rP} P_{dyn}(t) + k_{rs} \dot{s}(t) + k_{rs} s(t)$).

Die Ankopplung gelingt jedoch problemlos über das Hamiltonsche Prinzip wenn in der Nebenbedingung die Koppelkraft explizit enthalten ist. Die Arbeit der (nichtkonservativen) Kraft wird zusätzlich zum Potential von Teil- und Hauptssystem berücksichtigt. Die Bestimmungsgleichung der Kraft P ergibt die noch fehlende Gleichung.

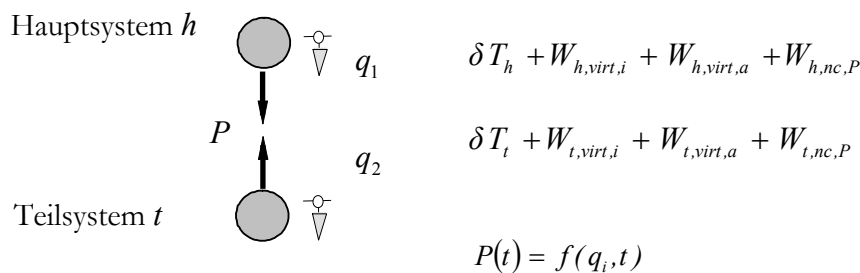


Abbildung 3.4: Kopplung über nichtkonservative Kräfte

Das Verfahren ist analog dem Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren und erweitert dieses.

3.2.3 Penalty - Verfahren

Das Penalty - Verfahren kann hier anschaulich als Einführen einer Feder zwischen den Kontaktpunkten gedeutet werden. Wird die Nebenbedingung verletzt, so wird die Feder aktiviert und erzeugt einen rückstellenden Straf- (penalty-) Term.

Die verallgemeinerten Hamiltonschen Gleichungen (3.4) erweitern sich um den Penalty - Term (Penalty Faktor ϵ):

$$\delta \Pi = \delta \left(\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot g^2 \right). \tag{3.9}$$

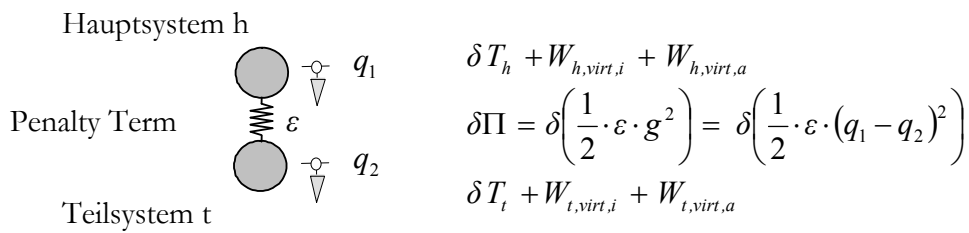


Abbildung 3.5: Kopplung über das Penalty Verfahren

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a} + \delta \Pi] dt = 0 \quad (3.10)$$

Die Qualität der Lösung hängt von der Größe des Penalty - Faktors ab. Bei einem unendlich großen Penalty - Faktor (unendlich steife Feder) wird die Nebenbedingung richtig abgebildet. Je kleiner der Penalty - Faktor gewählt wird, umso schlechter wird die Nebenbedingung erfüllt und die Qualität der Lösung reduziert sich. Der Penalty Term versucht ja lediglich eine verletzte Nebenbedingung wieder richtig zu stellen.

Die Penalty Faktoren führen zu zusätzlichen Einträgen in der Steifigkeitsmatrix. Hohe Penalty Faktoren führen zu einer schlechten Konditionierung des Gleichungssystems. Der Penalty – Faktor darf daher nicht zu groß gewählt werden. Damit müssen aber auch Fehler bei der Nebenbedingung in Kauf genommen werden. Die Wahl des Penalty - Faktors ist also schwierig.

Für die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems gilt: $n_{ges} = n_h + n_t$.

Bei Verwendung zeitvarianter Koeffizienten (vgl. Lagrange Multiplikatoren) kann die Relativbewegung zweier Modelle abgebildet werden.

3.2.4 Augmented Lagrange Verfahren

Das Augmented Lagrange Verfahren ist eine Kombination aus den Lagrange Multiplikatoren und dem Penalty – Verfahren. Die verallgemeinerten Hamiltonschen Gleichungen (3.4) erweitern sich um die Lagrange Multiplikatoren und den Penalty - Term (Penalty Faktor ϵ):

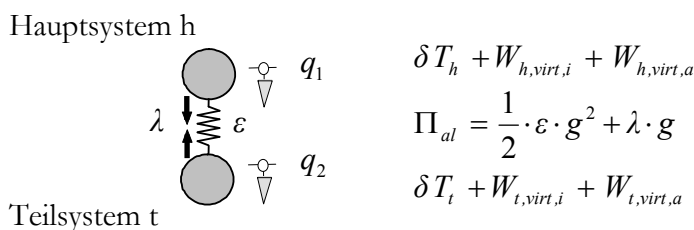


Abbildung 3.6: Kopplung über das Augmented Lagrange Verfahren

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a} + \delta \Pi_{al}] dt = 0 \quad (3.11)$$

Die Bestimmung der Lagrange Multiplikatoren erfolgt iterativ über zwei Schritte. Zunächst werden die Lagrange Multiplikatoren geschätzt. In einem ersten Schritt wird das Gleichgewicht aus (3.11) bestimmt, wobei die Lagrange Multiplikatoren unverändert bleiben. Damit wird der Wert von g berechnet. Dies entspricht der Vorgehensweise des Penalty – Verfahrens, wenn die Lagrange Multiplikatoren als äußere Last betrachtet werden.

Mit dem so berechneten Wert von g werden in einem zweiten Schritt die Lagrange Multiplikatoren verbessert: Die berechnete Verschiebung g wird auf die Lagrange Multiplikatoren übertragen.

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i - \varepsilon \cdot g \quad (3.12)$$

Mit den verbesserten Lagrange Multiplikatoren wird dann wiederum der neue Wert für g berechnet. Dies wird so lange fortgesetzt, bis die Zwangsbedingung g innerhalb einer sehr kleinen Toleranz erfüllt ist.

Für die Anzahl Freiheitsgrade des Gesamtsystems ist wie beim Penalty - Verfahren: $n_{ges} = n_h + n_t$. Die Zwangsbedingung wird nun besser erfüllt. Durch die iterative Vorgehensweise kann auch mit kleineren Penalty – Faktoren ε gerechnet werden. Das Gleichungssystem ist numerisch ohne besondere Schwierigkeiten zu lösen, wobei auch die Koppelkräfte bestimmt werden. Die Relativbewegung kann wiederum durch zeitvariante Koeffizienten realisiert werden.

Nachteilig ist hier, dass zu Lösung mehrere Iterationsschleifen vonnöten sind, wodurch das Verfahren sehr aufwändig wird.

3.2.5 Transformation auf Minimalkoordinaten

Die Nebenbedingungen g verknüpfen die unbekanntenen Freiheitsgrade der Modelle an der Koppelstelle. Lassen sich die Koppelfreiheitsgrade eines Modells durch diejenigen des anderen Modells ersetzen, so kann die Nebenbedingung „direkt“ in das Gleichungssystem eingebracht werden. Jede Nebenbedingung ermöglicht die Reduktion um einen Freiheitsgrad. Die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert sich um die Anzahl Nebenbedingungen: $n_{ges} = n_h + n_t - n_l$. Dieses Vorgehen kann in Form einer Transformation durchgeführt werden.

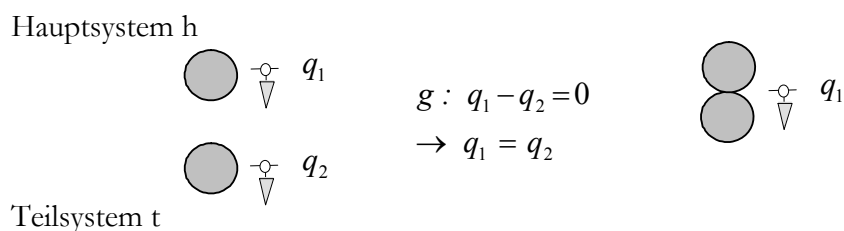


Abbildung 3.7: Transformation auf Minimalkoordinaten

Bei diesem Verfahren werden die Nebenbedingungen exakt erfüllt. Bei der numerischen Lösung treten keine besonderen Schwierigkeiten wie bei den oben genannten Verfahren auf.

Nachteilig ist lediglich die durchzuführende Transformation. Ändern sich die Koppelpunkte wie bei der Relativbewegung von Modellen fortlaufend, muss die Transformation in jedem Zeitschritt neu durchgeführt werden.

3.3 Wahl des Verfahrens

In dieser Arbeit wird die Kopplung über Lagrangesche Multiplikatoren bzw. die Ankopplung über nichtkonservative Kräfte verwendet. Diese Vorgehensweise hat folgende Vorteile:

- die Nebenbedingung wird richtig erfasst.
- es können sowohl holonome wie spezielle Arten nichtholonome Nebenbedingungen behandelt werden. Die Ankopplung über nichtholonome Nebenbedingungen, welche die Kontaktkraft explizit enthalten, kann über nichtkonservative Kräfte erfolgen.
- die Bewegungsgleichungen können in beiden Fällen mit einem einheitlichen Verfahren („verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip“) für beliebige gekoppelte strukturdynamische Probleme aufgestellt werden.
- das Gleichungssystem kann ohne vorherige Transformation integriert werden.
- eine Iteration über die Nebenbedingung ist nicht erforderlich

Die Vorgehensweise ist im nächsten Abschnitt (3.4) zusammengefasst.

Bei der Zeitintegration treten jedoch Schwierigkeiten auf, die in Kapitel 5 analysiert werden. Auf Basis der dabei gewonnenen Erkenntnisse werden in Kapitel 6 Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische Systeme vorgeschlagen.

3.4 Beschreibung gekoppelter Systeme über das „Verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip“

Die verallgemeinerten Hamiltonschen Gleichungen gekoppelter Systeme lauten (3.4):

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a} + \int_{\Gamma_k} \delta \lambda \cdot g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \lambda \cdot \delta g \, d\Gamma \right] dt = 0$$

Die starke Form der Differentialgleichung bezüglich der Zeit wird über eine partielle Integration nach der Zeit erhalten. Auf diese Differentialgleichung können Näherungstechniken¹² angewandt werden. Außerdem ist es möglich die Differentialgleichung der Bewegung in ihrer starken Form bezüglich des Ortes durch partielle Integration nach dem Ort und Anwendung der Grundprinzipien der Variationsrechnung zu entwickeln. Daraus können analytische Lösungen entwickelt werden, alternativ können Integraltransformationstechniken angewandt werden.

Diese Strategie hat den Vorteil, dass damit auch die Kopplung von Systemen, welche mit unterschiedlichen Methoden beschrieben sind, konsistent formuliert werden kann. Die Vorgehensweise ist in der folgenden Skizze dargestellt:

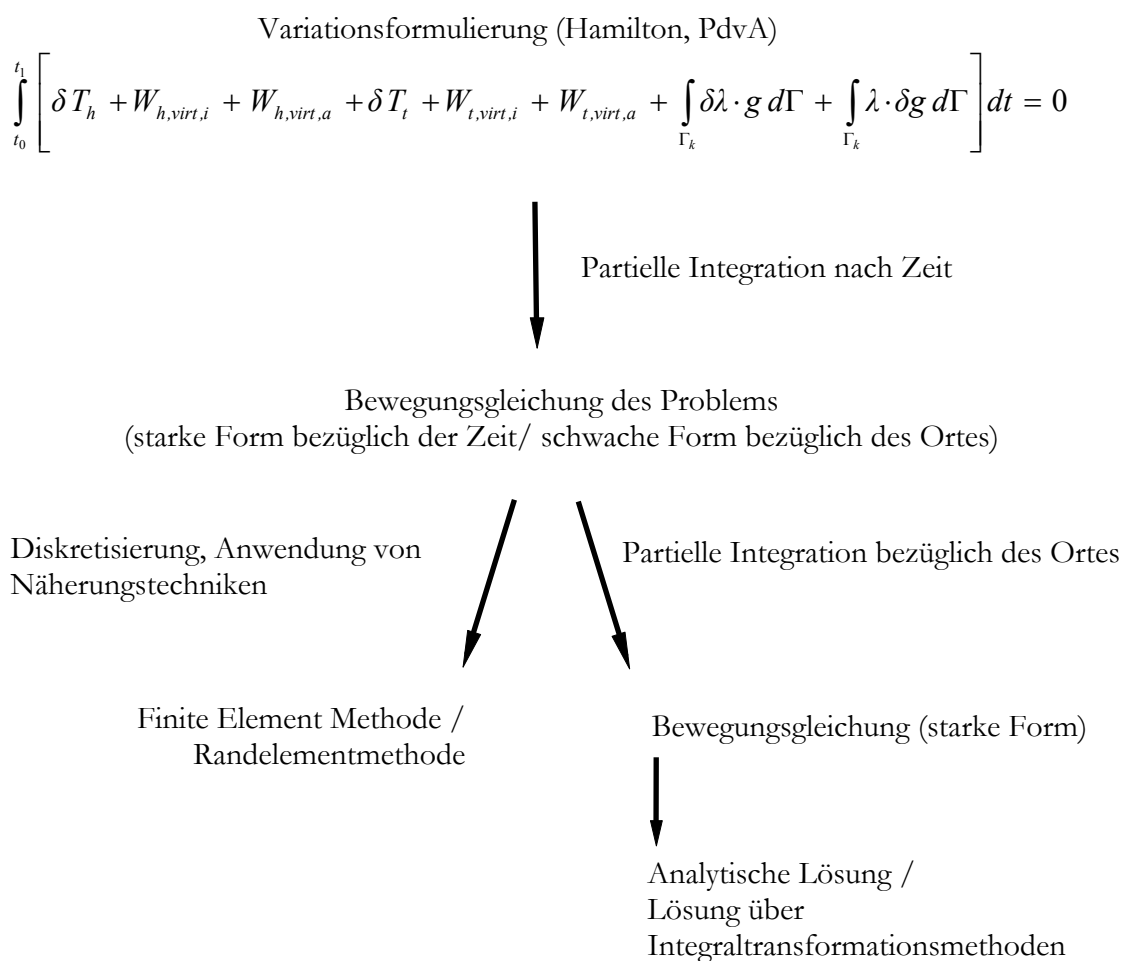


Abbildung 3.8: Formulierung der Bewegungsgleichungen aus der Variationsformulierung

¹² Für die Methode der Finiten Elemente werden für q_i und δq_i abschnittsweise Ansatzfunktionen definiert, welche die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Bei der Methode der Randelemente erfolgt zunächst eine partielle Integration. Als Wichtungsfunktionen werden Fundamentallösungen verwendet.

Bei der Formulierung gekoppelter Probleme ist es nicht erforderlich alle Systeme über das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip (3.4) zu beschreiben. Genauso gut kann mit einer anderen Beschreibung begonnen werden, solange die Vorgehensweise konsistent ist. So ist es bei analytischen Lösungen sicher einfacher bei der Differentialgleichung des Systems anstatt bei der Variation des Potentials zu beginnen. In dieser Arbeit werden die verallgemeinerten Hamiltonschen Gleichungen nur deswegen an den Anfang gestellt, um zu einer einheitlichen Darstellung zu gelangen.

Die entstehenden Gleichungssysteme setzen sich nun aus (partiellen) Differentialgleichungen und den algebraischen¹³ Nebenbedingungen zusammen. Damit ergibt sich ein System (partieller) differential-algebraischer Gleichungen (P)DAE. Derartige Systeme bereiten bei der Zeitintegration besondere Schwierigkeiten. Dies wird im nächsten Abschnitt diskutiert

Bei den hier betrachteten Problemen der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion besitzen die Fahrzeuge diskrete Aufstandspunkte. Damit ist die Kopplung eines diskreten Koppelpunktes mit einer kontinuierlichen Struktur zu beschreiben. Bei kontinuierlich gekoppelten Systemen erfolgt die Integration entlang des Randes über $\lambda \cdot \delta g$ anhand der Diskretisierung der Lagrange Multiplikatoren eines Körpers. Dieser Körper wird als „Master“-Körper bezeichnet.

3.5 Mathematische Wertung

Die entstehenden Gleichungssysteme enthalten neben den Differentialgleichungen zusätzlich die algebraischen Gleichungen der Nebenbedingungen. Für algebraische Gleichungen ist in diesem Sinne kennzeichnend, dass sie keine Ableitungen der Freiheitsgrade enthalten. Das entstehende Gleichungssystem wird als „algebraische Differentialgleichungen“ (differential algebraic equations, DAE) charakterisiert. Einen Überblick über mathematische Grundlagen von DAE geben [Brenan, Campbell, Petzold 1989].

Im Folgenden erfolgt eine Zusammenstellung der wichtigsten Grundlagen mechanischer DAE. Eine ausführlichere Darstellung wird in [Lutzenberger 2002] gegeben.

DAE, bei denen ein Teil der Gleichungen in seiner expliziten¹⁴ Form und der andere Teil in seiner impliziten¹⁵ Form angegeben wird, bezeichnet man als semi-explizite DAE. Die algebraischen Gleichungen sind hier nicht explizit formulierbar, da sie keine Ableitungen der Lagekoordinaten enthalten:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{q}}} &= \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}) + \underline{\mathbf{G}}^T(\underline{\mathbf{q}}) \underline{\lambda} \\ \underline{\mathbf{0}} &= \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

¹³ Gleichungen, welche keine Ableitungen enthalten

¹⁴ Bezeichnung der Darstellung einer Funktion über $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$

¹⁵ Bezeichnung der Darstellung einer Funktion über $F(x_1, \dots, x_n) = 0$

mit $\underline{\mathbf{M}}$ = Massenmatrix (positiv semidefinit), $\underline{\mathbf{f}}$ = Vektor aller innerhalb des Systems wirkenden, oder von außen auf das System aufgebrachten Kräfte mit Ausnahme der Lagrangeschen Multiplikatoren, $\underline{\mathbf{q}}$ = Vektor der unbekanntes Lagekoordinaten der Systeme, $\underline{\lambda}$ = Lagrangesche Multiplikatoren, $\underline{\mathbf{G}}^T$ = Matrix der Zwangskräfte und $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}})$ = Zwangsbedingungen des Systems.

Die Zeitintegration von DAE ist schwieriger als die gewöhnlicher Differentialgleichungen (Kapitel 5). Sie kann infolge schlecht konditionierter linearer Gleichungssysteme zu großen numerischen Schwierigkeiten führen. Unbedingt stabile Zeitintegrationsverfahren können instabil werden [Eich, Führer 1995]. Deswegen können klassische Lösungsmethoden nur für bestimmte Typen von DAE verwendet werden.

3.5.1 Index

Das grundlegende Konzept zum Verständnis von DAE ist deren Index. Dabei wird zwischen mehreren Arten des Index unterschieden, die wichtigsten sind der Differentiationsindex und der Störungsindex.

Der Differentiationsindex eines algebraischen Differentialgleichungssystems dient als ein qualitatives Maß für den Unterschied einer DAE zu einer DGL und ist damit ein Maß für die Schwierigkeiten, die bei der numerischen Lösung des algebraischen Differentialgleichungssystems zu erwarten sind [Arnold 2001].

Die Grundidee der Definition des Differentiationsindex ist die Überführung des algebraischen Differentialgleichungssystems in ein System gewöhnlicher Gleichungen.

Definition 3.1: Die minimale Anzahl an Differentiationen der Gleichung (3.13) oder eines Teils davon, die nötig sind, um Gleichung (3.13) durch algebraische Umformungen in ein explizites gewöhnliches Gleichungssystem zu überführen, entspricht dem Differentiationsindex d_i .

Bei semi-expliziten DAE vereinfacht sich die Indexbestimmung. Hier genügt es, den algebraischen Teil zu differenzieren.

Während der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen entstehen infolge der Diskretisierung des numerischen Verfahrens sog. Diskretisierungsfehler. Bei der Implementierung in Gleitpunktarithmetik kommen Rundungsfehler und gegebenenfalls Fehler durch Abbruch der iterativen Lösung nichtlinearer Gleichungen hinzu [Arnold 1998]. Der Störungsindex p_i misst die Sensitivität der Lösung $\mathbf{z}(t)$ der DAE gegenüber diesen unvermeidlichen Störungen im algebraischen Differentialgleichungssystem sowie gegenüber Störungen in den Anfangswerten (nichtkonsistente Anfangswerte). Damit können die während der numerischen Integration einer DAE auftretenden Störungen analysiert werden.

Definition 3.2: Gleichung (3.13) besitzt längs einer Lösung $\underline{q}(t)$ auf dem Intervall $[t_0; t_e]$ den Störungsindex $p_i=k$, wenn k die kleinste natürliche Zahl ist, so dass für alle Funktionen $\underline{\tilde{q}}(t)$, die einen Defekt $\underline{\delta}$

$$F(t, \underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{q}}') = \underline{\delta}(t)$$

haben, im Intervall $[t_0; t_e]$ die Ungleichung

$$\|\underline{q}(t) - \underline{\tilde{q}}(t)\| \leq C(\|\underline{q}(t_0) - \underline{\tilde{q}}(t_0)\| + \max_{t_0 \leq \xi \leq t} \|\underline{\delta}(\xi)\| + \dots + \max_{t_0 \leq \xi \leq t} \|\underline{\delta}(\xi)\|)$$

gilt, solange der Ausdruck auf der rechten Seite hinreichend klein bleibt. C bezeichnet hierbei eine Konstante die nur von F und der Länge des Integrationsintervalls abhängig ist.

Die höchste Ordnung der in der Ungleichung vorkommenden Ableitung des Defektes $\underline{\delta}(t)$ bestimmt den Störungsindex. Der Störungsindex beträgt für gewöhnliche Differentialgleichungen $p_i=0$ [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996]. In der Regel besitzen bei mechanischen Systemen der Störungsindex und der Differentiationsindex den gleichen Wert.

Der Index kann auch aus der mechanischen Beschaffenheit des Modells an den Kontaktpunkten bestimmt werden. Besitzen alle Freiheitsgrade der Kontaktbedingung Massenanteile, so gehen die Beschleunigungen aller Freiheitsgrade in die Bestimmungsgleichung des Lagrangeschen Parameters ein. Der Index beträgt dann 3. Liegt an mindestens einem Freiheitsgrad der Kontaktbedingung kein Masselement, dafür aber eine viskose Dämpfung vor, so geht in die Bestimmungsgleichung des Lagrangeschen Parameters lediglich die Geschwindigkeit dieses Freiheitsgrades ein. Dies bewirkt einen Index von 2. Fehlt auch die viskose Dämpfung, so ist der entsprechende Freiheitsgrad nur über die Verschiebung und die dazugehörige Steifigkeit am Lagrangeschen Parameter beteiligt. Der Index beträgt nun 1.

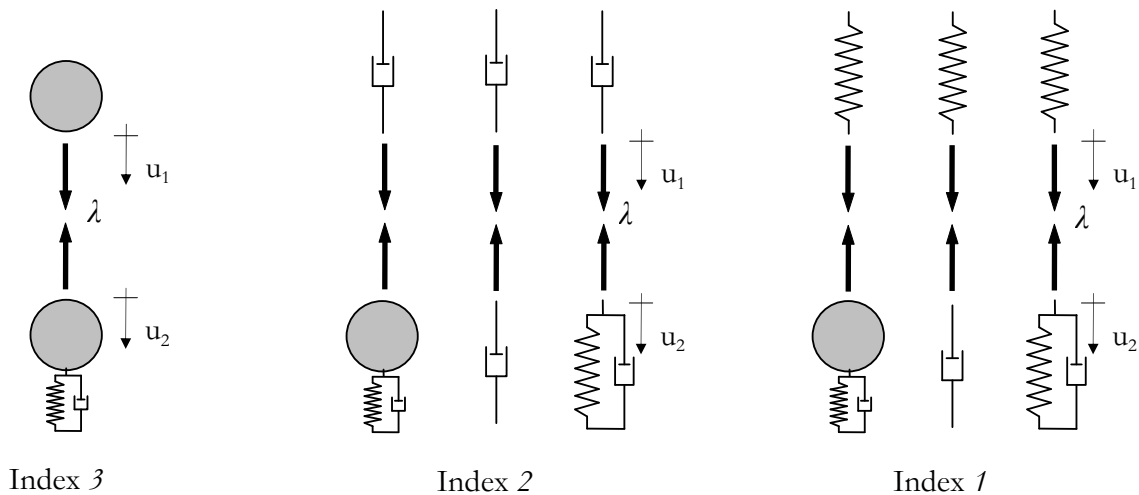


Abbildung 3.9: Systeme mit Index 3, 2 und 1

Bei mehreren Nebenbedingungen ist der maximale Index aller Nebenbedingungen maßgebend für den Index des Systems. Mechanische Systeme haben in der Regel einen Index zwischen 1 und 3 [Lutzenberger 2002].

3.5.2 Indexreduktion

Durch die Differentiation der Nebenbedingung kann der Index von DAE reduziert werden. Jede Ableitung bewirkt eine Reduktion des Index um 1. Durch eine Differentiation der (Verschiebungs-) Nebenbedingung ergibt sich eine Geschwindigkeitsnebenbedingung. Der Index reduziert sich um 1. Nach einer weiteren Differentiation der Nebenbedingung ergibt sich diese auf Beschleunigungsebene. Der Index reduziert sich um 2. Die DAE mit Index 0, welche sich aus der entsprechenden Anzahl an Differentiationen ergibt, wird auch „zugrunde liegende Differentialgleichung“ genannt.

Bei der Zeitintegration der indexreduzierten DAE wird anstatt der Lagebedingung nun die Geschwindigkeits- (Beschleunigungs-) Nebenbedingung eingehalten. Die Lagebedingungen werden jedoch nicht mehr exakt erfüllt, da während des Integrationsprozesses Rundungs- und Abbruchfehler auftreten. In jedem Zeitschritt kommen so Abweichungen von der Solllage hinzu. Diese wachsen im Lauf der Integration an. Dieser Effekt wird Abdriften der Lösung („drift-off Effekt“) genannt.

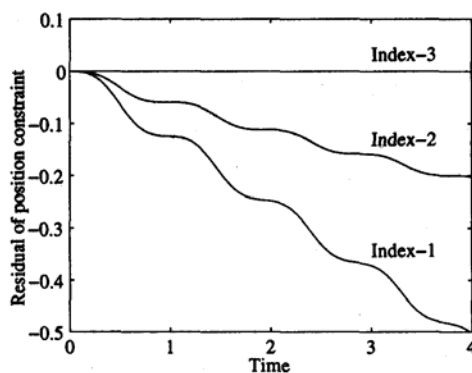


Abbildung 3.10: Abdriften der Pendelaufhängung von der Ausgangslage
aus: [Eich-Soellner, Führer 1998]

3.5.3 Konsistenz der Anfangswerte der DAE

Die Lösung $\underline{q}(t)$ der DAE (3.13) erfordert, dass die durch die Lagerung vorgegebenen Zwangsbedingungen erfüllt sind:

$$\underline{g}(\underline{q}(t)) = 0. \quad (3.14)$$

Eine Index 3 DAE kann durch ein- bzw. zweimalige Differentiation nach der Zeit in eine Formulierung mit dem Index 2 bzw. Index 1 überführt werden. Durch dreimalige Differentiation ergibt sich die „zugrundeliegende“ gewöhnliche Differentialgleichung. Die Index 1, Index 2, Index 3 Formulierungen des zugrundeliegenden mechanischen Systems sind dabei mathematisch äquivalent. Das bedeutet, dass für einen konsistenten Anfangswert $\underline{q}(t_0)$ die Lösung $\underline{q}(t)$ der zugrundeliegenden Differentialgleichung auf den durch die Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsnebenbedingungen definierten Mannigfaltigkeiten liegt. Die beiden letzteren Nebenbedingungen werden auch „versteckte“ Nebenbedingungen genannt, da sie in der Formulierung des Index 3 Systems nicht explizit auftreten [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996]. Damit sind folgende Zwangsbedingungen zu erfüllen:

Definition 3.2: *Konsistente Anfangswerte*

Anfangswerte $(\underline{\mathbf{q}}_0, \underline{\dot{\mathbf{q}}}_0, \underline{\boldsymbol{\lambda}}_0)$ für die Bewegungsgleichung (3.13) heißen *konsistent mit den Bewegungsgleichungen*, wenn sie die Anfangsbedingungen auf Lageebene $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}}(t))=0$

auf Geschwindigkeitsebene $\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}}(t))=0$

und auf Beschleunigungsebene $\frac{d^2}{dt^2} \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}}(t))=0$ erfüllen.

Inkonsistente Anfangsbedingungen bringen eine Anfangsstörung in das Gleichungssystem ein.

3.5.4 Lösbarkeit der DAE

Damit eine DAE analytisch lösbar ist, müssen mehrere Voraussetzungen erfüllt sein. Vgl. [Arnold 2001].

Satz 3.1: Gegeben seien stetige Funktionen $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{nq} \times \mathbb{R}^{nq} \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$, $\mathbf{M}: \mathbb{R}^{nq} \rightarrow \mathbb{R}^{nq} \times \mathbb{R}^{nq}$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{nq} \rightarrow \mathbb{R}^{n\lambda}$, für die gilt:

- $\mathbf{g}(\underline{\mathbf{q}})$ ist (d_g-1) -mal stetig differenzierbar,
- $\underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{q}})$ ist für beliebige $\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{nq}$ symmetrisch, positiv semi-definit und auf dem Nullraum von $\underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{q}})$ positiv definit.
- $\underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{q}}) := \frac{d \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{q}})}{d \underline{\mathbf{q}}}$ hat für beliebige $\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{nq}$ Vollrang,
- \mathbf{f} , $\underline{\mathbf{M}}$ und $\mathbf{g}_{,qq}$ sind global Lipschitz-stetig bezüglich $\underline{\mathbf{q}}$.

Wenn die Anfangswerte $\underline{\mathbf{q}}_0, \underline{\mathbf{v}}_0, \underline{\boldsymbol{\lambda}}_0$ konsistent mit den Bewegungsgleichungen sind, dann hat das Anfangswertproblem (3.13) mit den Anfangswerten $\underline{\mathbf{q}}(0) = \underline{\mathbf{q}}_0, \underline{\mathbf{v}}(0) = \underline{\mathbf{v}}_0, \underline{\boldsymbol{\lambda}}(0) = \underline{\boldsymbol{\lambda}}_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[0, T]$.

3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Strategien zur Kopplung von Modellen diskutiert. Dabei erweist sich die Kopplung über Lagrangesche Multiplikatoren als geeignete Vorgehensweise. Die Bewegungsgleichungen gekoppelter strukturdynamischer Probleme können einheitlich über des „verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip“ beschrieben werden. Die entstehenden Bewegungsgleichungen sind dann jedoch i.d.R. keine (partiellen) Differentialgleichungen mehr, sondern (partielle) algebraische Differentialgleichungen. Zu deren Lösung sind spezielle Voraussetzungen zu beachten.

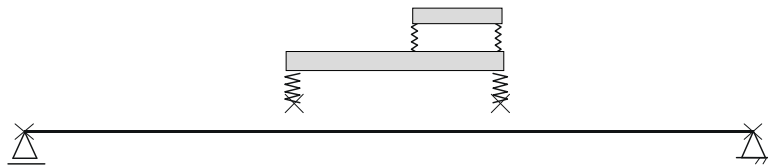
Die Problematik der Zeitintegration dieser Systeme wird in den folgenden Kapiteln 5 und 6 untersucht.

4 Beschreibung der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion (Relativbewegung von Modellen)

4.1 Nebenbedingungen für Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

In der vorliegenden Arbeit wird die Kopplung mit folgenden Annahmen betrachtet

- Es wird die Kopplung eines diskreten Koppelpunkts des Fahrzeuges mit der kontinuierlichen Struktur des Fahrwegs untersucht.



- Das Fahrzeug bewegt sich auf einer vorgegebenen Bahn mit festgelegter Geschwindigkeit v .
- Es wird die Kopplung entlang der Oberfläche des Fahrwegs betrachtet (eine vollständige Kopplung im Raum kann durch analoges Einführen der z -Koordinate realisiert werden).

Im Weiteren werden alle Bezugnahmen auf das Fahrzeug mit dem Index i , diejenigen zum Fahrweg mit dem Index j gekennzeichnet. Zur Unterscheidung, welche Freiheitsgrade z_i des Fahrzeuges mit dem Fahrweg in Kontakt sind, werden neue Bezeichnungen eingeführt. Die n_{zk} (**K**ontakt-) Freiheitsgrade z_k des Fahrzeuges haben Kontakt zum Fahrweg, die restlichen n_{zs} (**S**ystem-) Freiheitsgrade z_s des Fahrzeuges haben keinen Kontakt zum Fahrweg. Dabei gilt natürlich: $n_i = n_{zk} + n_{zs}$. Analoges gilt für die Fahrwegfreiheitsgrade w_i . Die n_{wk} (**K**ontakt-) Freiheitsgrade w_k des Fahrwegs kommen während der Überfahrt in Kontakt mit dem Fahrzeug, die n_{ws} (**S**ystem-) Freiheitsgrade w_s des Fahrwegs haben keinen Kontakt zum Fahrzeug. Hier gilt: $n_j = n_{wk} + n_{ws}$.

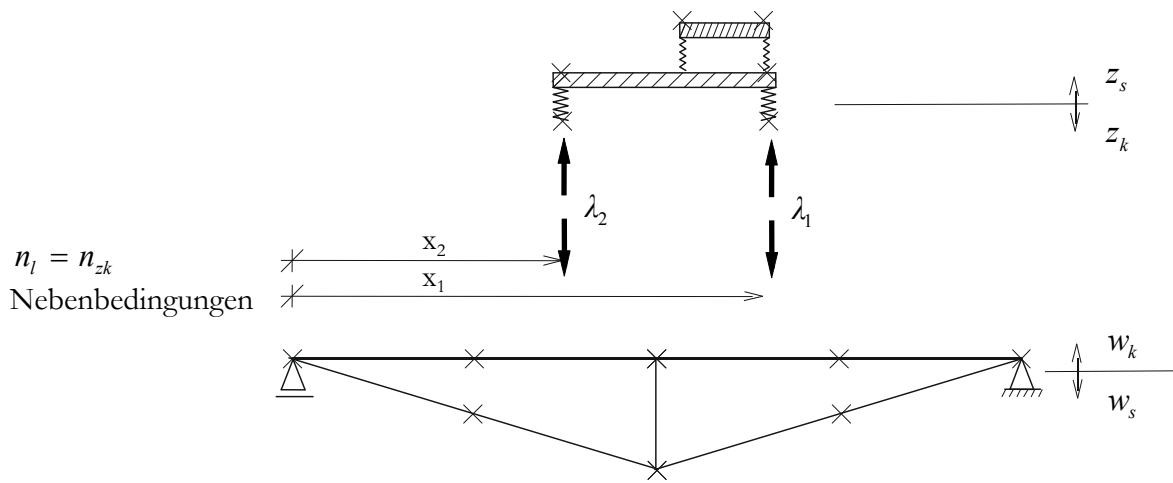


Abbildung 4.1: verwendete Bezeichnungen bei der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion

Die Nebenbedingungen werden für die Koppelpunkte des Fahrzeugs aufgestellt. Damit existieren n_{zk} Nebenbedingungen für die n_{zk} Kontaktpunkte des Fahrzeugs ($n_{zk}=n_l$) und auch n_{zk} Kontaktkräfte. Während der Relativbewegung kommen die Kontaktpunkte des Fahrzeugs mit unterschiedlich vielen Kontaktfreiheitsgraden des Fahrwegs in Berührung. Die Position des Koppelpunktes wird über (x_{zk}/y_{zk}) beschrieben.

Die Kopplung beider Modelle erfolgt über die Nebenbedingung:

$$z_{zk}(t) = w(x_{zk}, y_{zk}, t) \tag{4.1}$$

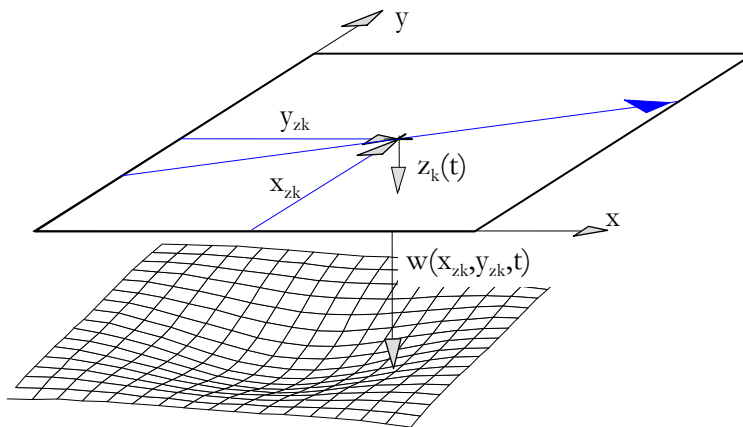


Abbildung 4.2: Durchsenkung des Fahrwegs

Die Ortskoordinaten x_{zk} und y_{zk} des Fahrzeugs sind dabei von der Fahrgeschwindigkeit und der Zeit abhängig. Für eine konstante Fahrgeschwindigkeit in x - und y - Richtung v_x, v_y gilt:

$$x_{zk}(t) = v_x \cdot t + x_{k,0}, \quad y_{zk}(t) = v_y \cdot t + y_{k,0} \tag{4.2}$$

und damit für die Durchsenkung des Fahrzeugaufstandspunktes

$$z_k(t) = w(x_{zk}(v_x, t), y_{zk}(v_y, t), t). \quad (4.3)$$

Ist die Oberfläche der Fahrbahn diskretisiert, so kann die Diskretisierung auf die Nebenbedingung übertragen werden:

$$z_{zk}(t) = \sum_{wk=1}^{n_{wk}} A_{wk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) \cdot w_k(t). \quad (4.4)$$

A_{wk} = Ansatzfunktion für die Diskretisierung des Fahrwegs.

Dabei wird über alle Freiheitsgrade w_k summiert (jeweils Verdrehfreiheitsgrade und Verschiebungsfreiheitsgrade), deren Einflussfläche die Bahn des Kontaktpunktes z_k schneidet.

Richtiger wäre hier anstatt der Ansatzfunktion A_{wk} die Einflussfunktion für die entsprechende Knotenschnittgröße zu verwenden. Die ist nach dem Prinzip von Müller - Breslau identisch mit der Einflussfunktion der Durchsenkung infolge einer Knotenweggröße. Da die genauen Einflussfunktionen nicht immer bekannt sind, empfiehlt es sich die bereits zur Diskretisierung der Oberfläche verwendeten Ansatzfunktionen zu verwenden. Die Beschreibung ist dann konsistent.

Die Berechnung der Durchsenkung des Fahrzeugaufstandpunktes nach (4.4) wird genauer, wenn die zusätzliche Durchsenkung $w_{k,d}$ infolge der Belastung im Inneren des Elements berücksichtigt wird. Diese entspricht der Durchsenkung an einem volleingespannten Element. Dies soll an einem zweidimensionalen Euler-Bernoulli Balkenelement verdeutlicht werden:

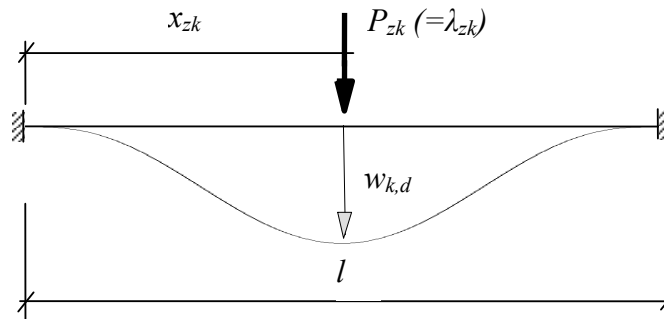


Abbildung 4.3: Durchsenkung aus direkter Belastung

Diese Durchsenkung lautet:

$$w_{k,d}(x_{zk}, t) = \frac{P_{zk}(t) x_{zk}^3}{3EI} \left[1 - \left(\frac{x_{zk}}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x_{zk}}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x_{zk}}{l} \right) \right]. \quad (4.1)$$

$$w_{k,d}(t) = \sum_{zk=1}^{n_{zk}} P_{zk}(t) \cdot C_{zk,zk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) \quad (4.5)$$

Die Nichtberücksichtigung von $w_{k,d}$ kann bei konstanter Elementierung des Fahrwegs eine harmonische Anregung des Fahrzeugs verursachen und damit das Ergebnis verfälschen.

Daneben tragen auch die auftretenden Trägheitskräfte zu einer zusätzlichen Verformung $w_{k,a}$ bei. Dieser Anteil ist jedoch gering und kann i.d.R. vernachlässigt werden.

Eine Rauheit r der Fahrbahn unter dem k -ten Kontaktpunkt $r_k(t)$ kann einfach in die Nebenbedingung integriert werden. Die Nebenbedingung g lautet dann:

$$g : z_k(t) - \sum_{wk=1}^{n_{wk}} A_{wk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) \cdot w_k(t) - \sum_{zk=1}^{n_{zk}} P_{zk}(t) \cdot C_{zk,zk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) - r_k(t) = 0. \quad (4.6)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den erweiterten Hamiltonschen Gleichungen

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T_h + W_{h,virt,i} + W_{h,virt,a} + \delta T_t + W_{t,virt,i} + W_{t,virt,a} + \int_{\Gamma_k} \delta \lambda \cdot g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \lambda \cdot \delta g \, d\Gamma \right] dt = 0$$

und (4.6).

Unter Verwendung der Eulerschen Gleichungen ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{z}_i)}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L(z_i)}{\partial z_i} &= \frac{\delta W_{i,nc}}{\delta z_i} + \sum_{zk}^{n_{zk}} \lambda_{zk} \cdot \frac{\partial g_{zk}}{\partial z_i} & i = 1, 2, \dots, n_z \quad (4.7) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{w}_j)}{\partial \dot{w}_j} \right) - \frac{\partial L(w_j)}{\partial w_j} &= \frac{\delta W_{j,nc}}{\delta w_j} + \sum_{zk=1}^{n_{zk}} \lambda_{zk} \cdot \frac{\partial g_{zk}}{\partial w_j} & j = 1, 2, \dots, n_w \\ z_k(t) &= \sum_{wk=1}^{n_{wk}} A_{wk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) \cdot w_k(t) + \sum_{zk=1}^{n_{zk}} \lambda_{zk}(t) \cdot C_{zk,zk}(x_{zk}(t), y_{zk}(t)) + r_k(t) & zk = 1, 2, \dots, n_{zk}. \end{aligned}$$

5 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration differentiell-algebraischer strukturdynamischer Systeme

5.1 Überblick, Zieldefinition

In diesem Kapitel wird die Zeitintegration von strukturdynamischen Systemen untersucht. Strukturdynamische Systeme unterscheiden sich in ihrer Charakteristik von anderen dynamischen Systemen wie z.B. Mehrkörpersystemen. Ihre Zeitintegration erfordert Verfahren, die auf ihre speziellen Eigenheiten zugeschnitten sind (Kapitel 5.2).

Auch die Zeitintegration differentiell-algebraischer Systeme bereitet größere Probleme im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es können sowohl Störungen in den Berechnungsergebnisse wie auch Instabilitäten auftreten.

Beispiel:

Die Zeitintegration des dargestellten Einmassenschwingers in seiner differentiell-algebraischen Formulierung mit dem Newmark- β Verfahren ($\beta=1/4$, $\gamma=1/2$) zeigt einen (schwach) instabilen und von Störungen überlagerten Verlauf der dynamischen Radlast P . Dies ist erstaunlich, da das Newmark- β Verfahren ($\beta=1/4$, $\gamma=1/2$) für gewöhnliche Differentialgleichungen unbedingt stabil ist.

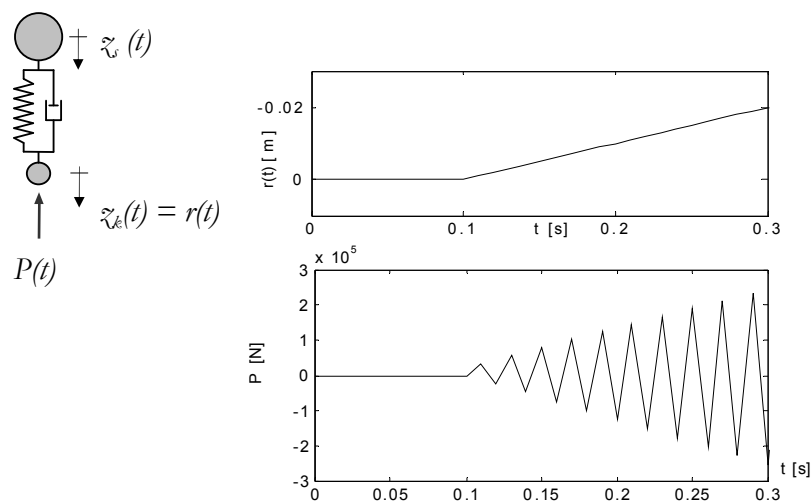


Abbildung 5.1: Einmassenschwinger unter Anregung $r(t)$ und berechnete dynamische Radlast P

In diesem Kapitel wird zunächst die Stabilität der Zeitintegration mit dem Ziel, Stabilitätskriterien herzuleiten, untersucht. Darüber hinaus sollen die bei der Zeitintegration auftretenden Effekte wie die hochfrequenten Störungen sowie die Wirkung der Indexreduktion geklärt werden. Dies wird für Systeme mit Index 3, 2 und 1 durchgeführt.

Bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen kann aufgrund deren modaler Entkoppelbarkeit die Stabilitätsanalyse an einem Einmassenschwinger durchgeführt werden. Im Gegensatz dazu sind differentiell-algebraische Gleichungssysteme praktisch nicht mehr über die reellen Eigenwerte modal entkoppelbar [Lutzenberger 2002]. Mögliche Entkopplungen über eine Transformationsmatrix [Cardona, Géradin 1989], [Farhat, Crivelli, Geradin 1995] und [Lutzenberger 2002] sind nur auf ungedämpfte Systeme anwendbar. Um Stabilitätskriterien für DAE herzuleiten wird deshalb in diesem Kapitel ein anderer Weg beschritten. Es wird eine matrizielle Darstellung differentiell - algebraischer Systeme mit Nebenbedingungen am Systemrand verwendet (Kapitel 5.3.1). Das Vorgehen bei der Stabilitätsanalyse wird im Kapitel 5.3.2 gezeigt.

Die Analyse der Zeitintegration eines differentiell algebraischen Systems mit Nebenbedingungen am Systemrand erfolgt im Kapitel 5.4. Dabei wird nach dem Index der Systeme unterschieden.

Systeme mit Nebenbedingungen im Inneren (gekoppelte Systeme) haben eine andere Struktur des Gleichungssystems. Dies wird in Kapitel 5.5 untersucht.

5.2 Strukturdynamische Integrationsverfahren

5.2.1 Allgemeine Anforderungen

Als strukturdynamische Systeme werden alle Systeme bezeichnet, bei denen die Ermittlung der Spannungen und der Deformationen (dynamische Antwort) infolge beliebiger dynamischer Lasten im Vordergrund steht.

Strukturdynamische Systeme besitzen im Allgemeinen sehr viele Freiheitsgrade, weswegen der numerische Aufwand zur Lösung naturgemäß hoch ist. Die Beschreibung und Lösung ortsdiskreter Systeme erfolgt i.d.R. über Differentialgleichungen 2. Ordnung. Wird die Differentialgleichung 2. Ordnung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung transformiert, so verdoppelt sich die Anzahl der Unbekannten und der Aufwand zur numerischen Lösung steigt stark an. Integrationsverfahren, welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung integrieren, sind deshalb zu bevorzugen.

Implizite Gleichungen bedingen einen höheren Lösungsaufwand als explizite Gleichungen. Nach dem Theorem von Dahlquist sind nur implizite Zeitintegrationsverfahren in der Klasse der linearen Mehrschrittverfahren unbedingt stabil. Im Gleichungssystem sollte kein weiterer Satz impliziter Gleichungen mehr vorhanden sein, da dieser den Aufwand wegen des erforderlichen Zwischenspeicherns sowie der notwendigen Matrizenoperationen erhöhen würde.

Oft sind die Charakteristiken der Struktur unbekannt oder nicht genau bestimmbar. So kann der E-Modul der Betonfahrbahn einer Brücke in einem breiten Bereich streuen. Auch kann er über die Länge der Fahrbahn variieren. Dies bedeutet dass mit Unsicherheiten behaftete Parameter anstatt der genauen Werte (solange keine stochastischen Verfahren zum Einsatz kommen [Gehrmann 2001]) verwendet werden müssen. Daneben sind strukturelle Details oft unbekannt. Auch sind die hohen Eigenwerte oft physikalisch nicht richtig abbildbar (z.B. bei einer FE - Diskretisierung, bei der hohe Eigenformen über das gewählte Raster nicht mehr richtig abgebildet werden können). Diese Faktoren begrenzen die Berechnungsgenauigkeit stark.

Seitens der Berechnungsmethodik sind Methoden mit der Genauigkeit 2. Ordnung Methoden der Genauigkeit 1. Ordnung überlegen. Unbedingt stabile Mehrschrittmethoden mit der Genauigkeit 3. Ordnung existieren nach Dahlquist's Theorem nicht. Deshalb wird die Verwendung von Methoden mit der Genauigkeit 2. Ordnung empfohlen.

Aufgrund der vielen Freiheitsgrade haben diese Systeme Eigenwerte von niedrigen bis hin zu sehr hohen Frequenzen. Strukturdynamische Systeme können deshalb als steife Systeme charakterisiert werden. Infolge der Modellungenauigkeiten sind speziell die hohen Eigenwerte ungenau berechenbar. Auch ist oft nur die Systemantwort im unteren Frequenzbereich von Interesse. Bedingt stabile Algorithmen müssen aus Gründen der Stabilität jedoch auf die höchste auftretende Frequenz abgestimmt werden, was zu kleinen Zeitschrittgrößen und einem hohen Rechenaufwand führt. Dies spricht für die Verwendung von unbedingt stabilen (impliziten) Integrationsverfahren.

Die Systemantwort im hohen Frequenzbereich kann aufgrund der obigen Gründe nicht mehr genau berechnet werden. Daneben können zusätzlich hochfrequente Störungen bei nichtlinearen und bei differentiell-algebraischen Systemen auftreten. Eine steuerbare Dissipation hoher Frequenzen dämpft die unerwünschten Anteile hoher Frequenzen aus der Antwort heraus.

Bei nicht selbst startenden Verfahren wird ein zusätzliches Verfahren zur Gewinnung der Startwerte benötigt. Dies muss ebenfalls analysiert werden, ob es selbst oder in Interaktion mit dem eigentlichen Verfahren stabil ist. Daneben erhöht ein zusätzliches Verfahren den Programmieraufwand. Da nicht selbst startende Verfahren Werte von mehr als 2 Zeitpunkten benötigen, erhöht dies den Aufwand an zwischenzuspeichernden Daten.

Danach sollte ein Zeitschrittalgorithmus folgende Eigenschaften erfüllen [Hughes 2000]:

- Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung
- Maximal ein Satz impliziter Gleichungen je Zeitschritt
- Genauigkeit 2. Ordnung
- Unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen.
- Steuerbare numerische Dissipation hoher Frequenzen
- Selbst startend, d.h. es wird kein anderes Verfahren zur Gewinnung der Startwerte benötigt.

5.2.2 Zeitintegrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Bekannte strukturdynamische Integrationsverfahren sind: Das Generalized - α Verfahren [Chung, Hulbert 1993], das Newmark Verfahren [Newmark 1959], das Hilber-Hughes-Taylor- α Verfahren [Hilber, Hughes, Taylor 1977], das Wood-Bossak-Zienkiewicz- α (WBZ- α) [Wood, Bossak, Zienkiewicz 1980], das Houbolt Verfahren, das Verfahren nach Park und die Wilson- Θ Methode.

Eine Zusammenstellung strukturdynamischer Integrationsverfahren findet sich in sich [Bathe 1986] und [Hughes 2000]. Ein modernes Verfahren mit ausgezeichneten Eigenschaften ist das Generalized - α Verfahren. Es besitzt den zusätzlichen Vorteil, dass mehrere andere Verfahren daraus abgeleitet werden können. Das Newmark Verfahren z.B. wird über $\alpha_f = \alpha_m = 0$ erhalten.

5.2.2.1 Generalized- α Verfahren

Das Generalized- α Verfahren integriert die Bewegungsgleichung 2. Ordnung. Die unbekanntenen Verformungsgrößen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ werden unter Annahme eines Beschleunigungsverlaufs über eine Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt.

Durch die Wahl eines Beschleunigungsverlaufs $\ddot{w}(t)$ können die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Ende eines Zeitschritts ($\dot{w}_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t}$) durch die Startwerte am Beginn des Zeitschritts (\dot{w}_t, w_t) und einen integralen Ausdruck ermittelt werden. Das Vorgehen beim Generalized- α Verfahren ist dabei identisch dem Verfahren nach Newmark:

$$\dot{w}_{t+\Delta t} = (w_{t+\Delta t} - w_t)\kappa_6 - \dot{w}_t\kappa_4 - \ddot{w}_t\kappa_5 \quad (5.1)$$

$$\ddot{w}_{t+\Delta t} = (w_{t+\Delta t} - w_t)\kappa_1 - \dot{w}_t\kappa_2 - \ddot{w}_t\kappa_3 \quad (5.2)$$

mit:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{\Delta t^2 \beta} & \kappa_2 &= \frac{1}{\Delta t \beta} & \kappa_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 \\ \kappa_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1 & \kappa_5 &= \frac{\gamma \Delta t}{2\beta} - \Delta t & \kappa_6 &= \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht wird innerhalb des Zeitschrittes formuliert. Dabei wird eine Linearkombination aus Anfangs- und Endzustand der jeweiligen Größe verwendet. Für die Beschleunigungen wird dafür der Faktor α_m , für die restlichen Größen der Faktor α_f verwendet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{M}}} [(1 - \alpha_m)\ddot{w}_{t+\Delta t} + \alpha_m \ddot{w}_t] + \underline{\underline{\mathbf{C}}} [(1 - \alpha_f)\dot{w}_{t+\Delta t} + \alpha_f \dot{w}_t] + \\ + \underline{\underline{\mathbf{K}}} [(1 - \alpha_f)w_{t+\Delta t} + \alpha_f w_t] = (1 - \alpha_f)\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t+\Delta t} + \alpha_f \underline{\underline{\mathbf{P}}}_t \end{aligned} \quad (5.3)$$

Als einzige Unbekannte verbleibt $w_{t+\Delta t}$. Das Gleichungssystem kann nach $w_{t+\Delta t}$ aufgelöst werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 w_{t+\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 w_t + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_3 \dot{w}_t + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_4 \ddot{w}_t + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_5 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}\kappa_1(1 - \alpha_m) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\kappa_6(1 - \alpha_f) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}(1 - \alpha_f) \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}\kappa_1(1 - \alpha_m) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\kappa_6(1 - \alpha_f) - \underline{\underline{\mathbf{K}}}\alpha_f \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_3 &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}\kappa_2(1 - \alpha_m) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\kappa_4 - \alpha_f - \kappa_4 \alpha_f) \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_4 &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}(\kappa_3 - \alpha_m - \kappa_3 \alpha_m) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\kappa_5(1 - \alpha_f) \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_5 &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t+\Delta t}(1 - \alpha_f) + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_t \alpha_f \end{aligned}$$

Für das Generalized- α Verfahren mit optimalen Eigenschaften (Genauigkeit 2. Ordnung) lautet die Stabilitätsbedingung bei der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen nach [Chung, Hulbert 1993]:

$$0 \leq \rho_\infty \leq 1 \quad (5.5)$$

ρ_∞ entspricht dabei dem spektralen Radius bei unendlich hohen Frequenzen. Die weiteren Parameter ergeben sich aus ρ_∞ zu:

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad \alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f. \quad (5.6)$$

Die Stabilitätskriterien des Newmark- β Verfahrens sind:

$$\gamma \geq 0.5 \quad \text{und} \quad \beta \geq 0.25 (\gamma + 0.5)^2 \quad (5.7)$$

Anmerkung 1: [Rappolder 2001] untersucht den optimalen spektralen Radius in Abhängigkeit der physikalischen Dämpfung. Für strukturdynamische Modelle lassen sich für $\Delta t/T < 0.1$ mit $0.62 < \rho_\infty < 0.82$ hervorragende Ergebnisse erzielen. $\Delta t/T < 0.1$ ergibt sich dabei aus der Forderung, dass die größte vorkommende Eigenfrequenz (kleinste Periodendauer T) durch 10 Zeitschritte abgetastet wird. Mit $\rho_\infty < 0.82$ ($\gamma = 0.6$) besitzt Generalized- α praktisch keine numerische Dämpfung. Die Periodenverlängerung ist minimal und praktisch genau so groß wie bei der Trapezregel (Verfahren mit kleinsten Fehler). Bei physikalisch gedämpften Modellen kann das Generalized- α Verfahren sogar genauere Ergebnisse als die Trapezregel liefern.

Anmerkung 2: Die Stabilitätsüberlegung des Generalized- α Verfahrens begründet sich auf Basis des spektralen Radius ρ . Dieser entspricht dem maximalen Eigenwert λ_i der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} : $\rho = \max\{|\lambda_i|\}$. Damit ein Zeitintegrationsverfahren unbedingt stabil ist, muss der spektrale Radius $\rho \leq 1$ sein. Im Falle mehrfacher Eigenwerte gilt einschränkend: $\rho < 1$.

Die Vergrößerungsmatrix des Generalized- α Verfahrens besitzt im ungedämpften Fall die beiden komplex konjugierten Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ sowie den Eigenwert λ_3 . Bei freier Verschiebbarkeit ($k=0$) gilt für die Periodendauer der Bewegung: $T \rightarrow \infty$ und damit $\Omega = \Delta t/T = 0$. In diesem Fall lautet die Vergrößerungsmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1. & 1. & \frac{0.50 (\rho_\infty - 1.) \rho_\infty}{(\rho_\infty - 2.) (\rho_\infty + 1.)} \\ 0. & 1. & \frac{0.50 (\rho_\infty - 1.)}{\rho_\infty - 2.} \\ 0. & 0. & \frac{2. \rho_\infty - 1.}{\rho_\infty - 2.} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = (2\rho_\infty - 1)/(\rho_\infty - 2)$. Damit liegt für $\Omega=0$ der doppelte Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ vor. Mit der freien physikalischen Verschiebungsmöglichkeit des Systems wird die Zeitintegration (schwach) instabil.

Für $\Omega > 0$ sind die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ komplex konjugiert. Damit treten keine doppelten Eigenwerte auf. Die Zeitintegration bleibt stabil. Eigenwerte mit $T \rightarrow \infty$ werden im Folgenden nicht mehr betrachtet.

5.2.3 Zeitintegrationsverfahren für differentiell-algebraische Systeme

Die meisten Lösungsverfahren existieren für differentiell-algebraische Systeme 1. Ordnung. Einen Überblick über Lösungstechniken geben z.B. [Hairer, Wanner 2002], [Brenan, Campbell, Petzold 1989] und [Rentrop, Strehmel, Weiner 1996]. Für strukturdynamische Problemstellungen ist die direkte Integration der DAE 2. Ordnung aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden vorzuziehen. Eine Transformation auf die DAE 1. Ordnung verdoppelt die Anzahl der Unbekannten und erhöht damit den Rechenaufwand beträchtlich. Für DAE 2. Ordnung sind bisher nur wenige Untersuchungen vorhanden:

[Cardona, Geradin 2000] untersuchen die Zeitintegration ungedämpfter Index 3 Systeme mit dem Generalized- α Verfahren. Sie zeigen, dass das Verhalten des Algorithmus bei unendlich hohen Frequenzen eine entscheidende Rolle für die Qualität der numerischen Lösung spielt und leiten ein Stabilitätskriterium für ungedämpfte Systeme her. Bei der Zeitintegration treten die Störungen in der Lösung nach wie vor auf. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die auftretenden Störungen aufgrund der numerischen Dämpfung des Verfahrens abklingen.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Transformation der algebraischen Differentialgleichung auf die zugrunde liegende Differentialgleichung. Unter Verwendung der Nebenbedingung auf Beschleunigungsebene kann die algebraische Differentialgleichung auf ihre zugrunde liegende gewöhnliche Differentialgleichung transformiert werden. Hier sind die Lagrangeschen Parameter nicht mehr enthalten. Auf die zugrunde liegende Differentialgleichung kann jede numerische Integrationstechnik angewandt werden. Da die Beschleunigungsnebenbedingungen und nicht die Lagenebenbedingungen in die Formulierung eingehen, ergibt sich ein Abdriften der numerischen Lösung. Deshalb wird die numerische Lösung auf die Lagemannigfaltigkeit projiziert. Das sich ergebende Gleichungssystem kann über eine Newton-Iteration gelöst werden [Yen, Petzold, Raha 1996].

In [Lutzenberger 2002] werden Stabilitätskriterien für die Zeitintegration ungedämpfter Index 3 und Index 1 Systeme bei Zeitintegration mit dem Generalized- α Verfahren hergeleitet. Es wird gezeigt, dass der Index der DAE durch das Einführen einer steifen, zwischengeschalteten Feder auf den Wert 1 reduziert werden kann. Das Abdriften ist dabei minimal. Diese Indexreduktionstechnik und die Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung werden verglichen und es wird gezeigt, dass beide sinnvoll für strukturdynamische Probleme angewendet werden können.

5.3 Vorgehensweise

5.3.1 Differentiell-algebraische Formulierung

Im Folgenden wird ein viskos gedämpftes differentiell-algebraisches System mit einer Nebenbedingung am Rand betrachtet. Damit kann die Wirkungsweise dieser Nebenbedingung prinzipiell untersucht werden. Die vorgestellten Überlegungen können auf Systeme mit mehreren Nebenbedingungen analog übertragen werden. Für Systeme mit inneren Nebenbedingungen sind weitere Überlegungen notwendig. Diese werden in Kapitel 5.5 gezeigt.

Bei der Formulierung des Systems werden die Freiheitsgrade getrennt. Der Koppelpunkt wird, separat von den übrigen Systemkoordinaten \underline{z}_s , über den Freiheitsgrad z_k beschrieben. m_u , c_u und k_u bezeichnen die zum Freiheitsgrad z_k gehörige skalare Masse, Dämpfung und Steifigkeit. Der Freiheitsgrad z_k ist über die Vektoren \underline{m} , \underline{c} und \underline{k} an die Freiheitsgrade des Systems \underline{z}_s gekoppelt. \underline{M} , \underline{C} und \underline{K} bezeichnen die Massenmatrix, die Dämpfungsmatrix und die Steifigkeitsmatrix des dynamischen Systems. Der Lagrangesche Parameter λ entspricht der Koppelkraft P . Die angreifenden Lasten werden mit \underline{F} , eine Rauheitsfunktion in der Nebenbedingung mit r bezeichnet.

Die allgemeine differentiell algebraische Beschreibung lautet wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & -\underline{m} & \underline{0} \\ -\underline{m}^T & m_a & 0 \\ \underline{0}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{z}}_s \\ \ddot{z}_k \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C} & -\underline{c} & \underline{0} \\ -\underline{c}^T & c_u & 0 \\ \underline{0}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{z}}_s \\ \dot{z}_k \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & -\underline{k} & \underline{0} \\ -\underline{k}^T & k_u & 1 \\ \underline{0}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_s \\ z_k \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\underline{M}_{ges} \underline{\ddot{w}} + \underline{C}_{ges} \underline{\dot{w}} + \underline{K}_{ges} \underline{w} = \underline{P}_{ges} \quad (5.10)$$

Das Gleichungssystem (5.9) enthält matrizielle (\underline{M} , \underline{C} und \underline{K}), vektorielle (\underline{c} , \underline{k} und \underline{m}) und skalare (m_a , c_u , k_u) Größen. Die folgende Abbildung skizziert das den Untersuchungen zugrunde liegende Modell:

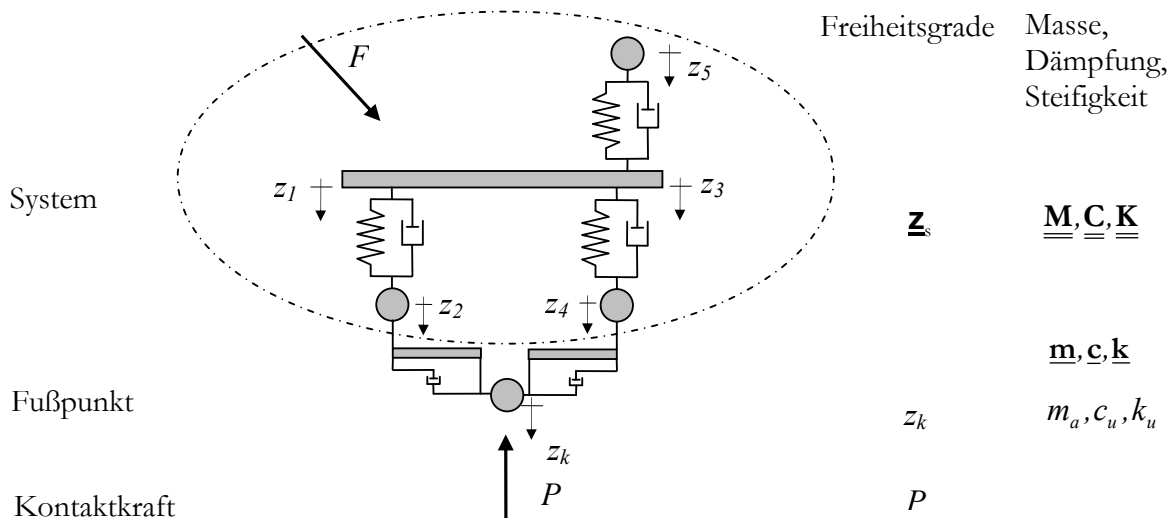


Abbildung 5.2: Differentiell-algebraisches Modell

Die Freiheitsgrade haben eine unterschiedliche physikalische Bedeutung. Damit im Gleichungssystem lediglich Verschiebungsgrößen auftreten, wird anstatt der Kraft P die Verschiebung $w_p = P/k_p$ eingeführt. Da die Kraft P und die Verschiebungen \underline{z}_s und z_k von stark unterschiedlicher Größenordnung sind, ist es sinnvoll dies durch die Wahl von k_p auszugleichen, um so ein gut konditioniertes Gleichungssystem zu erhalten. k_p kann aus dem Quotient von erwarteter Koppelkraft und den Verschiebungen abgeschätzt werden (z.B. $k_p = 1 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^9$).

Beispiel: Die gewählte Darstellung soll an einem Zweimassenschwinger anschaulich dargestellt werden. Dessen Bewegungsdifferentialgleichung lautet:

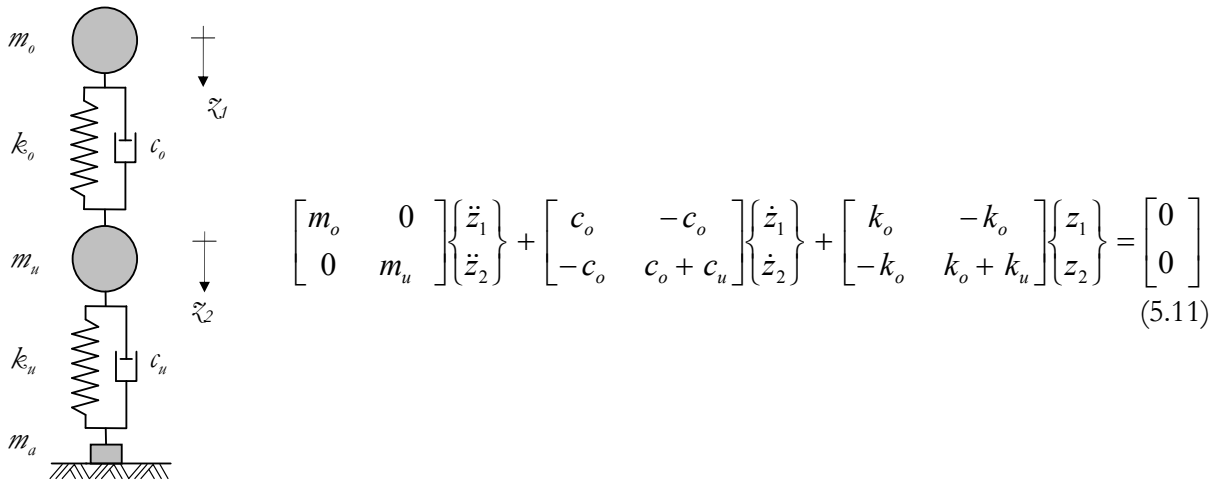
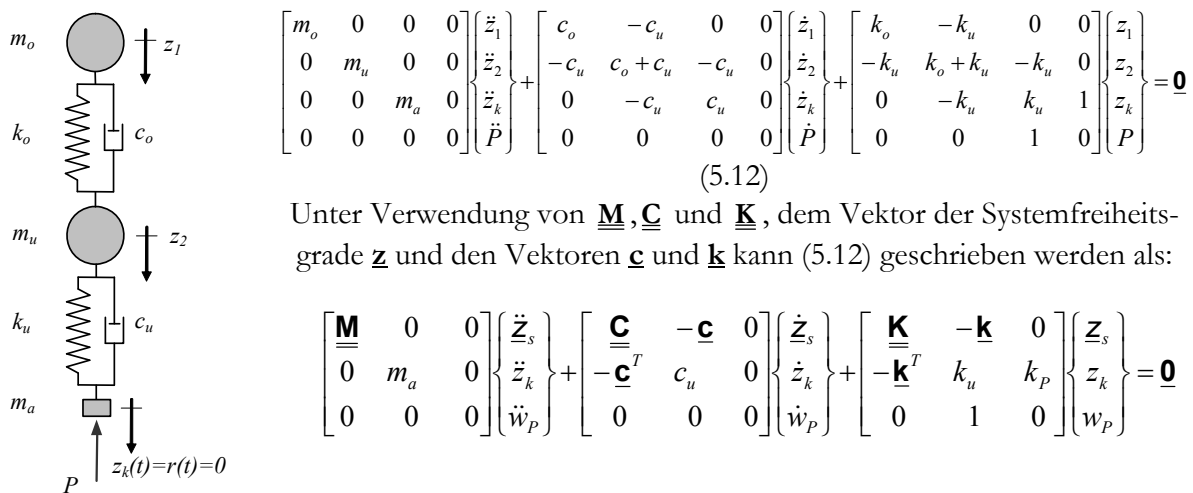


Abbildung 5.3: dynamisches Modell des Zweimassenschwingers und dessen Differentialgleichung

Die Einführung der Freiheitsgrade z_k für die Fußpunktverschiebung und P für die Koppelkraft führt mittels der algebraischen Nebenbedingung ($z_k = 0$) auf ein differentiell-algebraisches System.



Unter Verwendung von $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{C}}$ und $\underline{\mathbf{K}}$, dem Vektor der Systemfreiheitsgrade $\underline{\mathbf{z}}$ und den Vektoren $\underline{\mathbf{c}}$ und $\underline{\mathbf{k}}$ kann (5.12) geschrieben werden als:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}} & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{z}_k \\ \ddot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} & -\underline{\mathbf{c}} & 0 \\ -\underline{\mathbf{c}}^T & c_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \dot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & -\underline{\mathbf{k}} & 0 \\ -\underline{\mathbf{k}}^T & k_u & k_p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_s \\ z_k \\ w_p \end{Bmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

Abbildung 5.4: Erweiterung des dynamischen Modells in differentiell-algebraischer Formulierung. Detaillierte und symbolische Schreibweise

5.3.2 Stabilitätsanalyse

Die Stabilitätsuntersuchung wird anhand des Generalized- α Verfahrens durchgeführt. Die Gleichung (5.9) wird nun mit dem Generalized- α Verfahren diskretisiert und so umgeformt, dass auf der linken Gleichungsseite die Zeitschrittgrößen $\underline{\mathbf{X}}_{t+\Delta t}$ am Ende des Zeitintervalls und auf der rechten Gleichungsseite die Zeitschrittgrößen $\underline{\mathbf{X}}_t$ am Beginn des Zeitintervalls stehen. Die Vergrößerungsmatrix bestimmt dann die Änderung der Größen $\underline{\mathbf{X}}$ von einem Zeitschritt zu nächsten.

$$\underline{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}}_t \quad \underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \Delta t \dot{\mathbf{w}} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Die Stabilität eines Zeitschrittverfahrens kann anhand der Vergrößerungsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ beurteilt werden. Aus der Vergrößerungsmatrix werden die Eigenwerte bestimmt. Besitzt die Vergrößerungsmatrix Eigenwerte $\lambda_i > 1$, so wächst zumindest ein Teil der Zeitschrittgrößen von Zeitschritt zu Zeitschritt an. Das allgemeine Stabilitätskriterium wird über den spektralen Radius ρ formuliert

$$\rho = \max \{ |\lambda_i| \} \quad (5.14)$$

Der spektrale Radius ρ entspricht dem maximalen Betrag aller Eigenwerte λ_i der Vergrößerungsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$. Die Zeitintegration wird als stabil bezeichnet, falls gilt:

$$\begin{aligned} \rho &\leq 1 \quad \forall t \quad \text{für einfache Eigenwerte} \\ \rho &< 1 \quad \forall t \quad \text{für mehrfache Eigenwerte} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Diese Stabilitätsbedingung wird zur Herleitung von Stabilitätskriterien verwendet

Die Interpretation der bei numerischen Berechnungen auftretenden Effekte ist anhand des Generalized- α Verfahrens aufgrund der vielen Parameter des Verfahrens schwierig und soll deswegen anhand eines einfacheren Verfahrens erfolgen. Das einfachste der aus dem Generalized- α Verfahren ableitbaren Verfahren ist das Newmark- β Verfahren mit $\beta = 1/4$ und $\gamma = 1/2$. Es wird lediglich über zwei Parametern beschrieben, was die Interpretation der Ergebnisse vereinfacht. Da beide Verfahren eng verwandt sind, kann damit auf auftretende Effekte beim Generalized- α Verfahren geschlossen werden.

5.4 Stabilitätsuntersuchung

Der Index mechanischer Systeme kann 3, 2 oder 1 betragen und kann durch die Differentiation der Nebenbedingung, die sog. Indexreduktion, reduziert werden. Deshalb können sechs differentiell-algebraische Systeme unterschieden werden:

- Index 3 System,
- Index 3 System, indexreduziert auf Index 2,
- Index 3 System, indexreduziert auf Index 1,
- Index 2 System,
- Index 2 System, indexreduziert auf Index 1,
- Index 1 System.

5.4.1 Index 3 Systeme

5.4.1.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Gleichungssystem (5.10) entspricht bereits einem Index 3 System. Die Diskretisierung ergibt:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ \dot{z}_{k_{t+\Delta t}} \\ \dot{w}_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \dot{z}_{k_t} \\ \dot{w}_{P,t} \end{bmatrix} + \left((1-\gamma) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \ddot{z}_{k_t} \\ \ddot{w}_{P,t} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ \ddot{z}_{k_{t+\Delta t}} \\ \ddot{w}_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} \right) \Delta t \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ z_{k_{t+\Delta t}} \\ w_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{s}_t} \\ z_{k_t} \\ w_{P,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \dot{z}_{k_t} \\ \dot{w}_{P,t} \end{bmatrix} \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \ddot{z}_{k_t} \\ \ddot{w}_{P,t} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ \ddot{z}_{k_{t+\Delta t}} \\ \ddot{w}_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} \right) \Delta t^2 \quad (5.17)$$

$$\mathbf{M}_{\text{ges}} \begin{bmatrix} (1-\alpha_m) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ \ddot{z}_{k_{t+\Delta t}} \\ \ddot{w}_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} + \alpha_m \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \ddot{z}_{k_t} \\ \ddot{w}_{P,t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{\text{ges}} \begin{bmatrix} (1-\alpha_f) \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ z_{k_{t+\Delta t}} \\ w_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{s}_t} \\ z_{k_t} \\ w_{P,t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{\text{ges}} \begin{bmatrix} (1-\alpha_f) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_{t+\Delta t}} \\ \dot{z}_{k_{t+\Delta t}} \\ \dot{w}_{P,t+\Delta t} \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}_t} \\ \dot{z}_{k_t} \\ \dot{w}_{P,t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

Die Untersuchung der Stabilität erfolgt anhand der homogenen Differentialgleichung. Zunächst werden die Formeln (5.16) - (5.18) umgeformt.

$$\underline{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}_t \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \Delta t \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}} \\ \Delta t^2 \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}} \\ z_k \\ \Delta t \dot{z}_k \\ \Delta t^2 \ddot{z}_k \\ \mathbf{w}_p \\ \Delta t \dot{w}_p \\ \Delta t^2 \ddot{w}_p \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4) & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12} \kappa_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{1}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{13} & C_{14} / \Delta t & C_{15} / \Delta t^2 & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{13} \kappa_6 \Delta t & C_{14} \kappa_6 & C_{15} \kappa_6 / \Delta t & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{13} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{14} \kappa_1 \Delta t & C_{15} \kappa_1 & \frac{1}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{w}}}_{1,1} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{d}w}}_{1,1} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{d}dw}}_{1,1} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_p} (-\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{2,1}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{w}}}_{2,1}) \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_p} (-\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{2,1}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{d}w}}_{2,1}) \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_p} (-\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{2,1}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 + \underline{\underline{\mathbf{d}dw}}_{2,1}) \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \left(-\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,2}} \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} + \underline{\underline{\mathbf{w}}}_{1,2} \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{d}w}}_{1,2} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12} &= (\underline{\underline{\mathbf{w}dt}_{1,1}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{d}dw}}_{1,2} \end{aligned}$$

$$C_{13} = \frac{1}{(1-\alpha_f)k_p} \left(-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{10} - \underline{w}dt_{2,2} \frac{\alpha_f}{(\alpha_f-1)} + w_{2,2} \right)$$

$$C_{14} = \frac{1}{(1-\alpha_f)k_p} \left(-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{10} + dw_{2,2} \right)$$

$$C_{15} = \frac{1}{(1-\alpha_f)k_p} \left(-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{12} + ddw_{2,2} \right)$$

$$\underline{w}dt_{1,1} = \underline{M} (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) + \underline{C} (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) + \underline{K} (1 - \alpha_f)$$

$$\underline{w}dt_{1,2} = -\underline{m} (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) - \underline{c} (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) - \underline{k} (1 - \alpha_f)$$

$$\underline{w}dt_{2,1} = -\underline{m}^T (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) - \underline{c}^T (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) - \underline{k}^T (1 - \alpha_f)$$

$$\underline{w}dt_{2,2} = \underline{m}_a (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) + \underline{c}_u (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) + \underline{k}_u (1 - \alpha_f)$$

$$\underline{w}_{1,1} = \underline{M} (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) + \underline{C} (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) - \underline{K} \alpha_f$$

$$\underline{w}_{1,2} = -\underline{m} (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) - \underline{c} (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) + \underline{k} \alpha_f$$

$$\underline{w}_{2,1} = -\underline{m}^T (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) - \underline{c}^T (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) + \underline{k}^T \alpha_f$$

$$w_{2,2} = \underline{m}_a (\kappa_1 - \kappa_1 \alpha_m) + \underline{c}_u (\kappa_6 - \kappa_6 \alpha_f) - \underline{k}_u \alpha_f$$

$$\underline{d}w_{1,1} = \underline{M} (\kappa_2 - \kappa_2 \alpha_m) + \underline{C} (\kappa_4 - \kappa_4 \alpha_f - \alpha_f)$$

$$\underline{d}w_{1,2} = -\underline{m} (\kappa_2 - \kappa_2 \alpha_m) - \underline{c} (\kappa_4 - \kappa_4 \alpha_f - \alpha_f)$$

$$\underline{d}w_{2,1} = -\underline{m}^T (\kappa_2 - \kappa_2 \alpha_m) - \underline{c}^T (\kappa_4 - \kappa_4 \alpha_f - \alpha_f)$$

$$dw_{2,2} = \underline{m}_a (\kappa_2 - \kappa_2 \alpha_m) + \underline{c}_u (\kappa_4 - \kappa_4 \alpha_f - \alpha_f)$$

$$\underline{d}d\underline{w}_{1,1} = \underline{M} (\kappa_3 - \kappa_3 \alpha_m - \alpha_m) + \underline{C} (\kappa_5 - \kappa_5 \alpha_f)$$

$$\underline{d}d\underline{w}_{1,2} = -\underline{m} (\kappa_3 - \kappa_3 \alpha_m - \alpha_m) - \underline{c} (\kappa_5 - \kappa_5 \alpha_f)$$

$$\underline{d}d\underline{w}_{2,1} = -\underline{m}^T (\kappa_3 - \kappa_3 \alpha_m - \alpha_m) - \underline{c}^T (\kappa_5 - \kappa_5 \alpha_f)$$

$$ddw_{2,2} = \underline{m}_a (\kappa_3 - \kappa_3 \alpha_m - \alpha_m) + \underline{c}_u (\kappa_5 - \kappa_5 \alpha_f)$$

Die Elemente $\underline{\mathbf{A}}_{1,1}$ - $\underline{\mathbf{A}}_{3,3}$ von $\underline{\mathbf{A}}$ sind selbst Matrizen, die Elemente $\underline{\mathbf{A}}_{1,4}$ - $\underline{\mathbf{A}}_{3,9}$ und $\underline{\mathbf{A}}_{4,1}$ - $\underline{\mathbf{A}}_{9,3}$ stellen Vektoren dar. Alle restlichen Elemente sind skalare Größen.

Die Vergrößerungsmatrix kann durch Zusammenfassen der Untermatrizen in folgende vereinfachte Form gebracht werden:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{zs,zs} & \underline{\mathbf{A}}_{zs,zk} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{A}}_{zk,zk} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{A}}_{P,zs} & \underline{\mathbf{A}}_{P,zk} & \underline{\mathbf{A}}_{P,P} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Die Elemente $\underline{\mathbf{A}}_{1,1}$ - $\underline{\mathbf{A}}_{3,3}$ bilden dabei die Untermatrix $\underline{\mathbf{A}}_{zs,zs}$. $\underline{\mathbf{A}}_{zs,zs}$ gibt an, wie die Freiheitsgrade des Systems im neuen Zeitschritt $\mathbf{z}_{s,t+\Delta t}$ von den Werten im letzten Zeitschritt $\mathbf{z}_{s,t}$ abhängen. Die Vergrößerungsmatrix, die sich durch die Diskretisierung der gewöhnlichen Differentialgleichung ergibt, ist damit identisch mit $\underline{\mathbf{A}}_{zs,zs}$.

Zur Stabilitätsanalyse sind zunächst die Eigenwerte der Vergrößerungsmatrix zu bestimmen. Aufgrund der Struktur von $\underline{\mathbf{A}}$ setzen sich die Eigenwerte $EW(\underline{\mathbf{A}})$ wie folgt zusammen:

$$EW(\underline{\mathbf{A}}) = EW(\underline{\mathbf{A}}_{zs,zs}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{zk,zk}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{p,p}) \quad (5.22)$$

Damit eine stabile Zeitintegration möglich ist, müssen die Eigenwerte aller Untermatrizen das Stabilitätskriterium (5.15) erfüllen.

Für $\underline{\mathbf{A}}_{zs,zs}$ ist dies durch die Einhaltung des Stabilitätskriteriums für gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben. Für alle Eigenwerte λ_i gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, doppelte Eigenwerte treten nicht auf.

$$0 \leq \rho_\infty \leq 1 \quad (5.23)$$

Damit sind noch die Eigenwerte von $\underline{\mathbf{A}}_{zk,zk}$ und $\underline{\mathbf{A}}_{p,p}$ zu betrachten. Diese sind:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_4 &= \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} \\ \lambda_2 = \lambda_5 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta} \\ \lambda_3 = \lambda_6 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 - \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Werden weiter die Anforderungen gestellt, dass das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung, eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen sowie eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen besitzt (5.6), lassen sich die Eigenwerte umformen zu:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -\rho_\infty. \quad (5.25)$$

Die sich daraus ergebende Stabilitätsbedingung für die Untermatrizen $\underline{\mathbf{A}}_{zk,zk}$ und $\underline{\mathbf{A}}_{p,p}$

$$0 \leq \rho_\infty < 1 \quad (5.26)$$

ist strenger als die Stabilitätsbedingung für die Untermatrix $\underline{\mathbf{A}}_{zz}$ und gewährleistet damit die stabile Zeitintegration des differentiell-algebraischen Index 3 Systems.

Damit verbietet sich im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen der nichtdissipative Fall ($\rho_\infty = 1$).

Es ergeben sich die gleichen Stabilitätsanforderungen wie für ungedämpfte differentiell-algebraische Systeme mit Index 3 ([Lutzenberger 2002]).

Im Falle mehrerer Nebenbedingungen erweitert sich die Vergrößerungsmatrix je Nebenbedingung um die Dimension 6. Die Eigenwerte $\lambda_1 - \lambda_6$ treten n -fach auf. Dies ändert nichts an den Stabilitätskriterien.

5.4.1.2 Analyse auftretender Effekte

Zur Analyse der auftretenden Effekte wird das Newmark- β Verfahren mit $\beta=1/4$ und $\gamma=1/2$ verwendet. Da dieses Verfahren nur über die beiden Parameter β und γ beschrieben wird ($a_j=0, a_m=0$) ist hier die Vergrößerungsmatrix übersichtlicher als bei den anderen Verfahren. Dieses Verfahren besitzt zwar den spektralen Radius $\rho_\infty = 1$ und ist deswegen für Index 3 Probleme instabil. Jedoch spielt dies zur Interpretation der auftretenden Effekte keine Rolle. Aufbauend auf den hier gewonnenen Erkenntnissen lassen sich auch die Effekte bei der Integration mit dem Generalized- α Verfahren erklären. Bei Einhaltung der Stabilitätskriterien werden die Berechnungsergebnisse dann stabil und auftretende Störfrequenzen werden gedämpft.

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ lautet für das Newmark- β Verfahren:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_2 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{10} & \underline{\mathbf{C}}_{11} / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{12} / \Delta t^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}} \right) \kappa_6 \Delta t & \left(\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4 \right) & \left(\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5 \right) / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{10} \kappa_6 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{11} \kappa_6 & \underline{\mathbf{C}}_{12} \kappa_6 / \Delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}} \right) \kappa_1 \Delta t^2 & \left(\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2 \right) \Delta t & \left(\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3 \right) & \underline{\mathbf{C}}_{10} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{11} \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{12} \kappa_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{13} & C_{14} / \Delta t & C_{15} / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_6 \kappa_6 & \underline{\mathbf{C}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{13} \kappa_6 \Delta t & C_{14} \kappa_6 & C_{15} \kappa_6 / \Delta t & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 \kappa_1 & C_{13} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{14} \kappa_1 \Delta t & C_{15} \kappa_1 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Betrachtet man die Struktur von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, so ist gut zu erkennen, dass der Vektor

$\left[z_{k \ n \Delta t} \ \dot{z}_{k \ n \Delta t} \ \ddot{z}_{k \ n \Delta t} \right]$ nach n Zeitschritten nur von $\left[z_{k_0} \ \dot{z}_{k_0} \ \ddot{z}_{k_0} \right]$ abhängt. $\left[P_{dyn,0} \ \dot{P}_{dyn,0} \ \ddot{P}_{dyn,0} \right]$ wie auch $\left[\underline{\mathbf{z}}_{s_0} \ \underline{\dot{\mathbf{z}}}_{s_0} \ \underline{\ddot{\mathbf{z}}}_{s_0} \right]$ haben keinen Einfluss.

Um die Ausbreitung von Störungen zu untersuchen ist es notwendig, die n -te Potenz der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ zu bestimmen.

$$\underline{\underline{\mathbf{z}}}_{k_n \Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n \underline{\underline{\mathbf{z}}}_{k_0} \quad (5.28)$$

Die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ besitzt den doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = -I$, und ist daher nicht diagonalisierbar.

Die n -te Potenz der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ kann über die Jordansche Normalform $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ berechnet werden.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^n \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad (5.29)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

Damit ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^n \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2(-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 8n(-1)^n - 4(-1)^n & 4n(-1)^n & (-1)^n \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$z_{kn\Delta t}$, $\dot{z}_{kn\Delta t}$ und $\ddot{z}_{kn\Delta t}$ ergeben sich zu:

$$z_{kn\Delta t} = 0 \quad (5.31)$$

$$\dot{z}_{kn\Delta t} = (-1)^n \dot{z}_{k0} \quad (5.32)$$

$$\ddot{z}_{kn\Delta t} = 4n(-1)^n \frac{\dot{z}_{k0}}{\Delta t} + (-1)^n \ddot{z}_{k0} \quad (5.33)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass:

- z_k für ein homogenes System zu Null wird (im inhomogenen Fall ergibt sich z_k aus der Anregung r_n im aktuellen Zeitschritt). z_k besitzt kein Gedächtnis. Jeder Wert von z_k ist im nächsten Zeitschritt bereits vergessen. z_k ist stabil und frei von Störungen.
- die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{z}_k zeigt Oszillationen, indem sie in jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt. Die Berechnung von \dot{z}_k ist stabil, da \dot{z}_k begrenzt ist.
- die Fußpunktbeschleunigung \ddot{z}_k zeigt sowohl Oszillationen wie auch eine schwache Instabilität aufgrund des Summanden $n(-1)^n$.

Die negativen Werte der Vergrößerungsmatrix auf der Hauptdiagonalen bewirken ein Alternieren der Zeitschrittgrößen von einem Zeitschritt zum nächsten. Dies bewirkt die hochfrequenten Störungen in der Systemantwort.

Die Größen $\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t}$, $\dot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t}$ und $\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t}$ sind sowohl von $\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} \ t}$, $\dot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t}$ und $\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t}$ wie auch von z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k abhängig. Dabei gilt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t} \\ \Delta t \dot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t+\Delta t} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{EMS} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} \ t} \\ \Delta t \dot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t} \\ \Delta t^2 \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s} \ t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{10} & \underline{\mathbf{C}}_{11} / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{12} / \Delta t^2 \\ 2\underline{\mathbf{C}}_{10} & 2\underline{\mathbf{C}}_{11} / \Delta t & 2\underline{\mathbf{C}}_{12} / \Delta t^2 \\ 4\underline{\mathbf{C}}_{10} & 4\underline{\mathbf{C}}_{11} / \Delta t & 4\underline{\mathbf{C}}_{12} / \Delta t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k \ t} \\ \Delta t \dot{z}_{k \ t} \\ \Delta t^2 \ddot{z}_{k \ t} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Die in \ddot{z}_k entstehenden Störungen und Instabilitäten werden über den Vektor $\underline{\mathbf{m}}$ auf $\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}}$, $\dot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s}}$ und $\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s}}$ übertragen. Daher sind zunächst nur diejenigen Freiheitsgrade betroffen, welche über eine gemeinsame Masse mit dem Freiheitsgrad z_k verbunden sind. Am unempfindlichsten gegen Störungen sind die Verschiebungen $\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}}$. Die (in der Regel sehr kleine) Zeitschrittgröße Δt geht in diese nicht ein. Die Beschleunigung $\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_{\mathbf{s}}$ ist stärker betroffen, da $1/\Delta t^2$ hier eingeht.

Problematisch ist die Berechnung der Lagrangeschen Parameter P_{dyn} . P_{dyn} ist an \ddot{z}_k gekoppelt und zeigt deshalb das gleiche Lösungsverhalten. P_{dyn} zeigt sowohl Oszillationen wie auch eine schwache Instabilität. In \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} werden die auftretenden Störungen nochmals verstärkt. Beide sind instabil.

Diese Effekte spiegeln sich in den numerischen Vergleichsrechnungen wieder. Dazu wird das dynamische Modell eines Einmassenschwingers mit Index 3 verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird die Koordinate des Fußpunktes mit u bezeichnet.

Die Anregung erfolgt durch eine nach 0.1 s beginnende linear veränderliche Fußpunktanregung. Am Beginn der linearen Fußpunktanregung tritt ein Knick in der Anregung auf. Dieser bewirkt eine Störung im Gleichungssystem, da die Anregungsfunktion hier nicht zweimal stetig differenzierbar ist. In den folgenden Zeitschritten zeigt sich die Auswirkung dieser Störung.

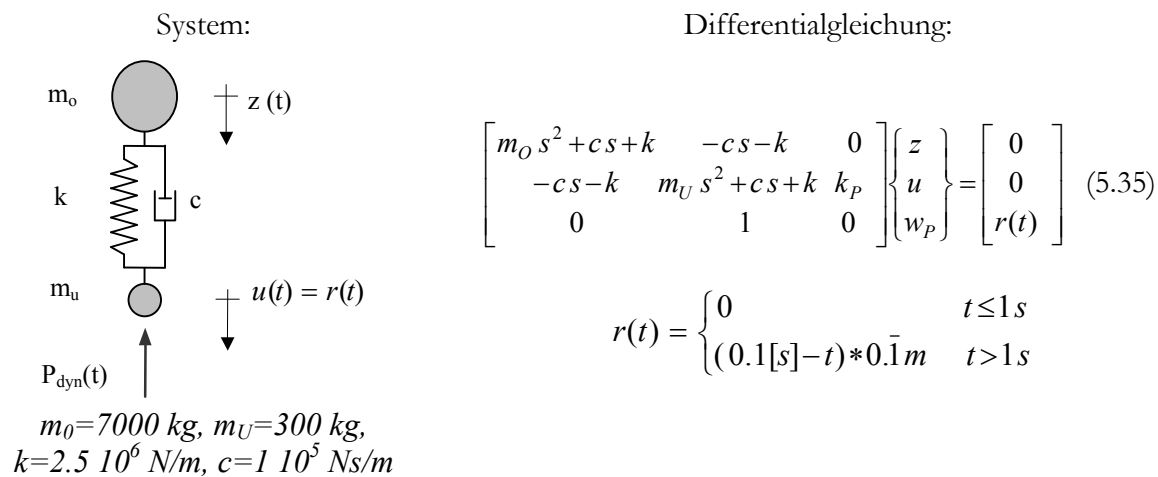


Abbildung 5.5: Einmassenschwinger mit Index 3

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta=1/4$, $\gamma=1/2$ und $\Delta t=0.01$ s und ergibt für die Systemfreiheitsgrade (z , u , P_{dyn}) sowie deren erste (\dot{z} , \dot{u} , \dot{P}_{dyn}) und zweite Ableitungen (\ddot{z} , \ddot{u} , \ddot{P}_{dyn}):

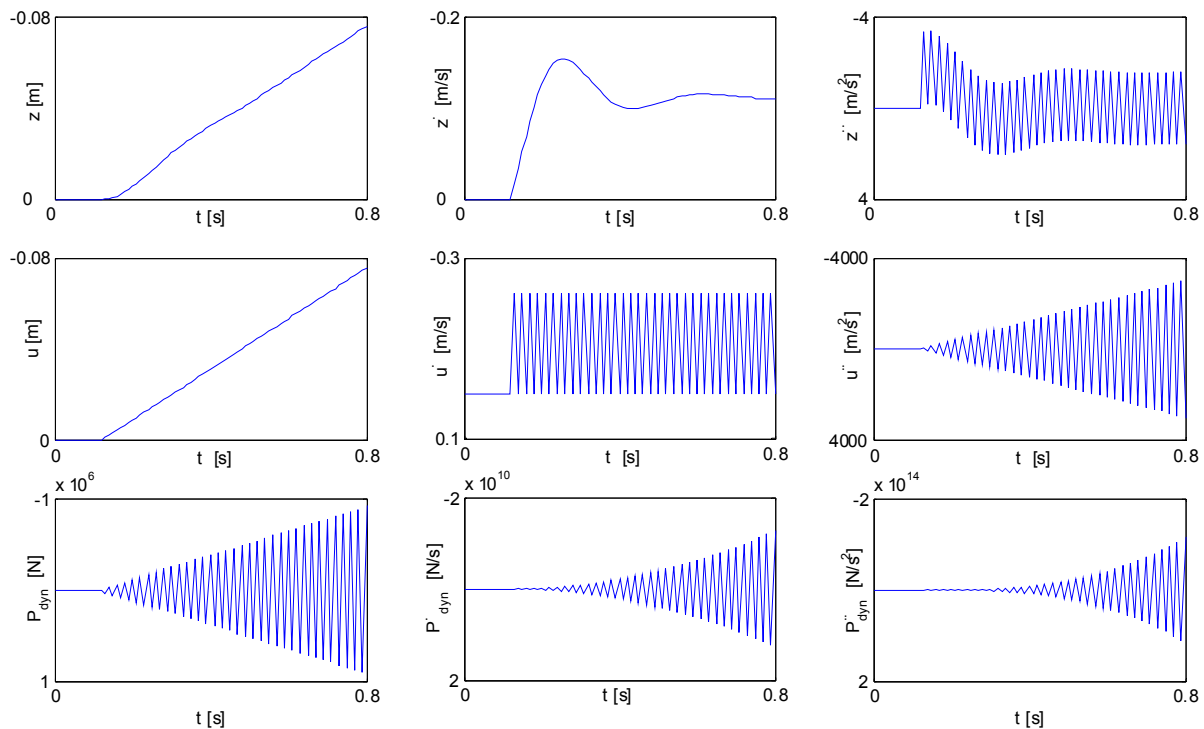


Abbildung 5.6: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Index 3 Systems

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wachsen die instabilen Zeitverläufe nicht mehr gegen unendlich an. Die Zeitintegration wird stabil. Störungen treten zwar ebenfalls auf, jedoch bedämpft die numerische Dämpfung des Generalized- α Verfahrens diese. Das Generalized- α Verfahren ist für Index 3 Probleme daher besser geeignet. Ermöglicht aber keine störungsfreie Zeitintegration.

5.4.2 Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 2

Die Indexreduktion erfolgt durch die Ableitung der Nebenbedingung. Die Nebenbedingung wird nichtholonom:

$$\dot{u} = \dot{r} \quad (5.36)$$

Die Indexreduktion kann problemlos in die matrizielle Formulierung eingearbeitet werden. Die letzte Zeile des Gleichungssystems (Nebenbedingung) enthält nun das Element „I“ in der Dämpfungsmatrix anstatt in der Steifigkeitsmatrix. Die matrizielle Formulierung der homogenen Gleichung lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & -\underline{\underline{\mathbf{m}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{m}}}^T & m_a & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \underline{\underline{\dot{z}}}_k \\ \underline{\underline{\dot{w}}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & -\underline{\underline{\mathbf{c}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{c}}}^T & c_u & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\dot{z}}}_s \\ \underline{\underline{\dot{z}}}_k \\ \underline{\underline{\dot{w}}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{k}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{k}}}^T & k_u & k_p \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \underline{\underline{z}}_k \\ \underline{\underline{w}}_p \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (5.37)$$

5.4.2.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Die Stabilitätsanalyse wird analog zu dem letzten Abschnitt durchgeführt. Durch die Diskretisierung der Bewegungsgleichung mit dem Generalized- α Verfahren ergibt sich die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ zu:

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} =$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_4) & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_3) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & \frac{\beta - \gamma + \alpha_f \gamma}{(\alpha_f - 1) \gamma} & \frac{\gamma - 2\beta}{2\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \gamma} & \frac{\gamma - 1}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{23} \kappa_6 \Delta t & C_{24} \kappa_6 & C_{25} \kappa_6 / \Delta t & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{23} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{24} \kappa_1 \Delta t & C_{25} \kappa_1 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mit: } \underline{C}_{20} &= (\underline{w}dt_{1,1})^{-1} (-\underline{w}dt_{1,2} + \underline{w}_{1,2}) \\
 \underline{C}_{21} &= (\underline{w}dt_{1,1})^{-1} \left(-\underline{w}dt_{1,2} \frac{\kappa_4 - \alpha_f - \alpha_f \kappa_4}{\kappa_6(1 - \alpha_f)} + d\underline{w}_{1,2} \right) \\
 \underline{C}_{22} &= (\underline{w}dt_{1,1})^{-1} \left(-\underline{w}dt_{1,2} \frac{(\gamma - 2\beta) dt^2}{2\gamma} + d\underline{d}w_{1,2} \right) \\
 C_{23} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f)k_p} (-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{20} - \underline{w}dt_{2,2} + w_{2,2}) \\
 C_{24} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f)k_p} \left(-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{21} - \underline{w}dt_{2,2} \frac{\beta - \gamma + \alpha_f \gamma}{(\alpha_f - 1)\gamma} + dw_{2,2} \right) \\
 C_{25} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f)k_p} \left(-\underline{w}dt_{2,1} \underline{C}_{22} - \underline{w}dt_{2,2} \frac{\gamma - 2\beta}{2\gamma} \Delta t^2 + ddw_{2,2} \right)
 \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen einzelner Elemente vereinfacht sich die Vergrößerungsmatrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zk} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,zs} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,zk} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Daraus berechnen sich die Eigenwerte $EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ zu:

$$EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}), EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}), EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}) \quad (5.40)$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$ entspricht wiederum der Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ eines Einmassenschwingers. Für alle Eigenwerte λ_i von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$ gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, doppelte Eigenwerte treten nicht auf. Der Eigenwert „1“ tritt nicht auf ($0 < \Omega < \infty$).

Für die Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}$ sind die Eigenwerte zu bestimmen. Diese sind:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \lambda_4 = \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} \\
 \lambda_2 &= 1 \\
 \lambda_3 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \\
 \lambda_5 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta} \\
 \lambda_6 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 - \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta}. \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Mit den Anforderungen, dass das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung, eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen sowie eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen besitzt (5.6), lauten diese Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{3\rho_\infty - 1}{\rho_\infty - 3}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -\rho_\infty. \quad (5.42)$$

Die sich daraus ergebende Stabilitätsbedingung für die Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}$

$$0 \leq \rho_\infty < 1 \quad (5.43)$$

ist strenger als die Stabilitätsbedingung für die Untermatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$ und gewährleistet damit die stabile Zeitintegration der vom Index 3 auf den Index 2 reduzierten DAE.

Damit verbietet sich wiederum der nichtdissipative Fall ($\rho_\infty = 1$) im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das Stabilitätskriterium ist identisch zu dem des Index 3 Systems.

Die während der Berechnung auftretenden Diskretisierungs- und Rundungsfehler können sich aufsummieren und theoretisch ein Abdriften der Lagekoordinaten bewirken. In praktischen Versuchen mit einem realistischen Rauheitsprofil und einer Integration mit dem Generalized- α Verfahren mit 1500 Zeitschritten ergab sich ein Abdriften von $7 \cdot 10^{-17}$. Dies liegt im Bereich der numerischen Rechengenauigkeit und kann für praktische Anwendungen vernachlässigt werden.

5.4.2.2 Analyse auftretender Effekte

Die sich ergebende Vergrößerungsmatrix bei der Anwendung des Newmark- β Verfahrens lautet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \kappa_6 \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_4 \right) & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_5 \right) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_6 / \Delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \kappa_1 \Delta t^2 & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_2 \right) \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_3 \right) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{23} \kappa_6 \Delta t & C_{24} \kappa_6 & C_{25} \kappa_6 / \Delta t & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{23} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{24} \kappa_1 \Delta t & C_{25} \kappa_1 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Der Vektor $\begin{bmatrix} z_{k n \Delta t} \\ \dot{z}_{k n \Delta t} \\ \ddot{z}_{k n \Delta t} \end{bmatrix}$ ist nach n Zeitschritten nur von $\begin{bmatrix} z_{k 0} \\ \dot{z}_{k 0} \\ \ddot{z}_{k 0} \end{bmatrix}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ abhängig

$$z_{k n \Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n z_{k 0} \quad (5.45)$$

mit:

$$\mathbf{A}_{\equiv z_k, z_k}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(-1)^n & (-1)^n \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Damit ergeben sich $[z_{k\ n\Delta t} \ \dot{z}_{k\ n\Delta t} \ \ddot{z}_{k\ n\Delta t}]$ zu:

$$\dot{z}_{k\ n\Delta t} = 0 \quad (5.47)$$

$$z_{k\ n\Delta t} = z_{k0} \quad (5.48)$$

$$\ddot{z}_{k\ n\Delta t} = (-1)^n \ddot{z}_{k0} \quad (5.49)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass:

- \dot{z}_k der Anregung \dot{r} im aktuellen Zeitschritt entspricht. \dot{z}_k ist stabil und frei von Störungen.
- die Fußpunktauslenkung u verändert sich nur über die Anregung und ist daher stabil. Im homogenen Fall ist z_k konstant und entspricht z_{k0} .
- die Fußpunktbeschleunigung \ddot{z}_k zeigt Oszillationen, indem sie in jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt. Die Berechnung von \ddot{z}_k ist jedoch stabil.

Die Größen $\mathbf{z}_s\ t+\Delta t$, $\dot{\mathbf{z}}_s\ t+\Delta t$ und $\ddot{\mathbf{z}}_s\ t+\Delta t$ sind sowohl von $\mathbf{z}_s\ t$, $\dot{\mathbf{z}}_s\ t$ und $\ddot{\mathbf{z}}_s\ t$ wie auch von z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k abhängig. \ddot{z}_k ist im Gegensatz zum Index 3 System stabil. Damit sind die Lagekoordinaten ohne Nebenbedingungen stabil. Störungen treten infolge Kopplung an \ddot{z}_k nach wie vor auf.

Vorteilhafter gestaltet sich auch die Berechnung der Lagrangeschen Parameter. P_{dyn} ist wieder an z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k gekoppelt und daher störungsbehaftet, aber stabil. Die Berechnung von \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} ist instabil. \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} haben jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung der anderen Größen.

Durch die einmalige Indexreduktion verringern sich die Störungen in den Größen \dot{z}_k , \mathbf{z}_s , $\dot{\mathbf{z}}_s$ und $\ddot{\mathbf{z}}_s$. \ddot{z}_k und die Lagrangeschen Parameter P_{dyn} werden stabil berechnet.

Numerische Vergleichsrechnungen bestätigen die gewonnenen Erkenntnisse ($u=z_k$).

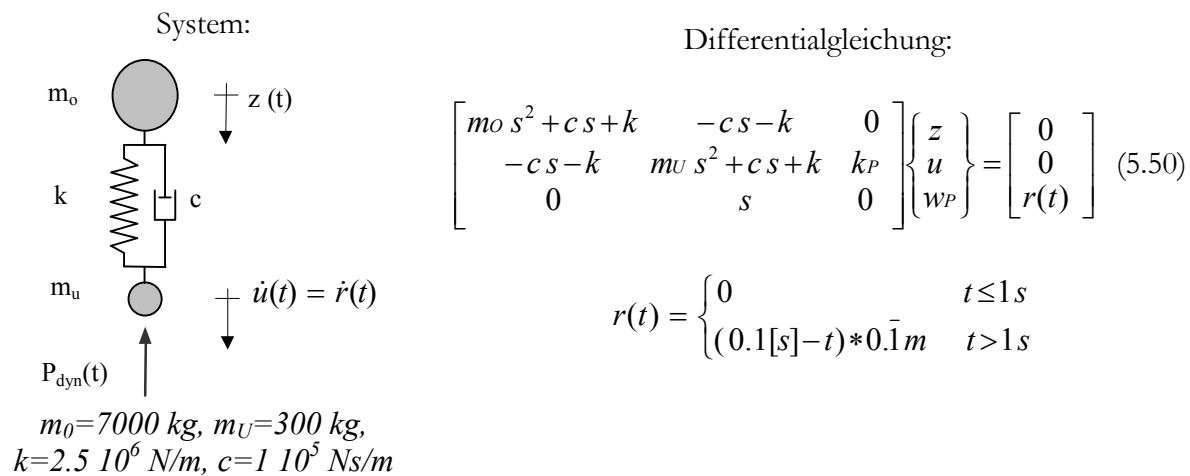


Abbildung 5.7: Einmassenschwinger mit Index 3, indexreduziert auf Index 2

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ und $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. Die Ergebnisse für die Systemfreiheitsgrade (z , u , P_{dyn}) sowie deren erste (\dot{z} , \dot{u} , \dot{P}_{dyn}) und zweite Ableitungen (\ddot{z} , \ddot{u} , \ddot{P}_{dyn}) sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

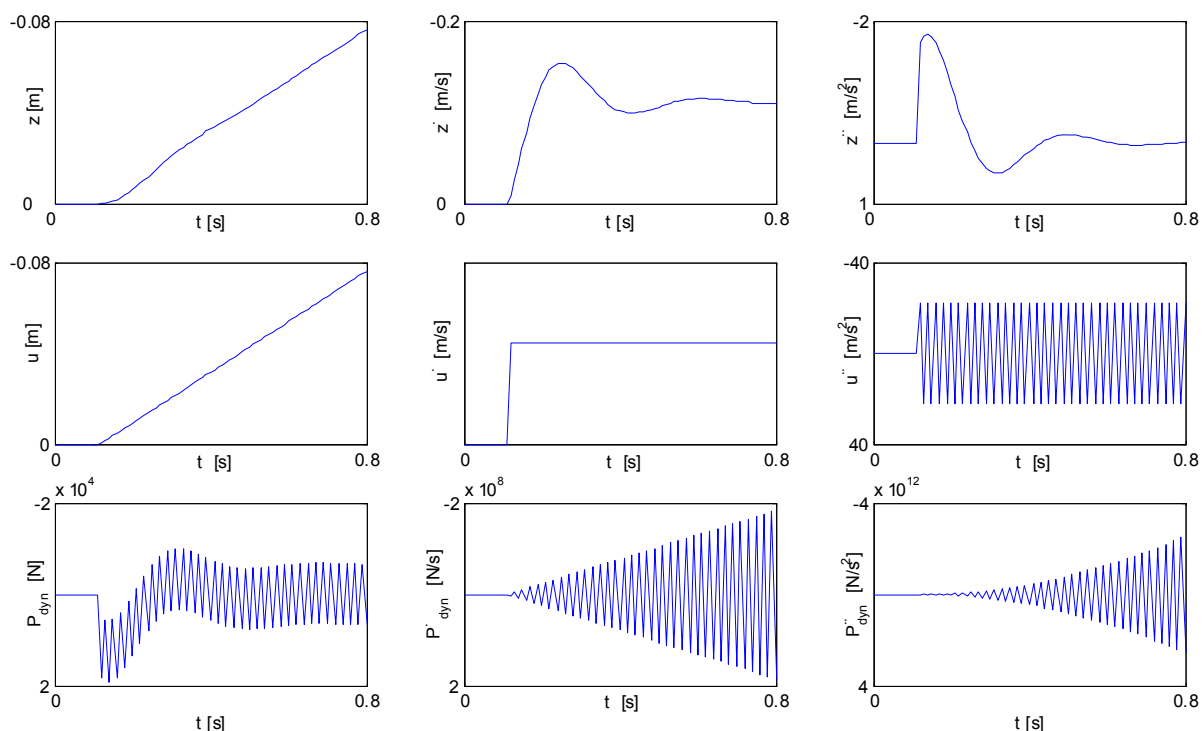


Abbildung 5.8: Zeitintegration des Einmassenschwingers mit Index 3, indexreduziert auf Index 2

Obwohl die Zeitintegration hier mit dem Newmark- β Verfahren instabil ist, ist die Lösung für die Lagekoordinaten wie auch für P_{dyn} stabil.

Ein Abdriften des Fußpunktes tritt praktisch nicht auf. Die Größe des Abdriftens liegt im Bereich der Rechengenauigkeit:

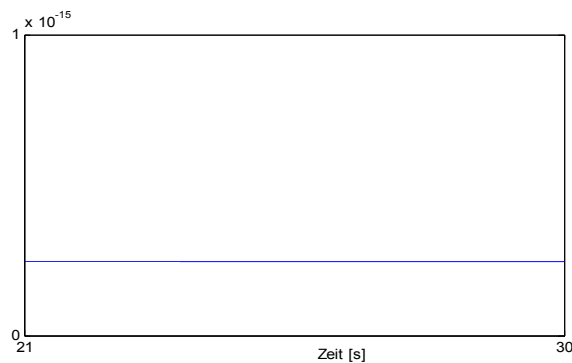


Abbildung 5.9: Abdriften des Kontaktpunktes u nach Anregung durch ein Rauheitsprofil¹⁶ nach $t = 30s$

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration stabil. Andererseits ist \dot{z}_k nicht mehr störungsfrei. In \dot{z}_k treten jetzt sehr kleine Störungen mit unendlich hohen Frequenzen auf. Da das Generalized- α Verfahren jedoch für hohe Frequenzen eine numerische Dämpfung in das System einbringt, werden diese wie auch die unendlich hohen Störfrequenzen in z_k , P_{dyn} , \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} gedämpft.

¹⁶ Das Rauheitsprofil der Belleville Brücke [Lutzenberger 2002]

5.4.3 Index 3 Systeme, indexreduziert auf Index 1

Die Indexreduktion auf den Index I ergibt sich durch zweimalige Differentiation der Nebenbedingung. Diese lautet nun:

$$\ddot{z}_k = \dot{r} \quad (5.51)$$

und ist wiederum nichtholonom. In matrizieller Schreibweise lautet die homogene Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & -\underline{\underline{\mathbf{m}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{m}}}^T & m_a & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & -\underline{\underline{\mathbf{c}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{c}}}^T & c_u & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{z}}}}_s \\ \dot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{k}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{k}}}^T & k_u & k_p \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ z_k \\ w_p \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (5.52)$$

5.4.3.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Hier ergibt sich die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ zu:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_4) & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_3) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} \kappa_1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & 1 & \frac{2\beta - 1 + \alpha_m}{2(\alpha_m - 1)} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 1 & \frac{\alpha_m \beta + \beta \gamma - \beta}{(\alpha_m - 1) \beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 & \frac{\alpha_m}{\alpha_m - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{33} & C_{34} / \Delta t & C_{35} / \Delta t^2 & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{33} \kappa_6 \Delta t & C_{34} \kappa_6 & C_{35} \kappa_6 / \Delta t & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{33} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{34} \kappa_1 \Delta t & C_{35} \kappa_1 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Mit:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} = (\underline{\underline{\mathbf{w}}}_{dt_{1,1}})^{-1} (-\underline{\underline{\mathbf{w}}}_{dt_{1,2}} + \underline{\underline{\mathbf{w}}}_{1,2})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} = (\underline{\underline{\mathbf{w}}}_{dt_{1,1}})^{-1} (-\underline{\underline{\mathbf{w}}}_{dt_{1,2}} \Delta t + \underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{w}}}_{1,2})$$

$$\begin{aligned}
 \underline{C}_{32} &= (\underline{wdt}_{1,1})^{-1} \left(-\underline{wdt}_{1,2} \frac{2\beta + \alpha_m - 1}{2(\alpha_m - 1)} \Delta t^2 + \underline{ddw}_{1,2} \right) \\
 C_{33} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_P} \left(-\underline{wdt}_{2,1} \underline{C}_{30} - \underline{wdt}_{2,2} + w_{2,2} \right) \\
 C_{34} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_P} \left(-\underline{wdt}_{2,1} \underline{C}_{31} - \underline{wdt}_{2,2} \Delta t + \underline{dw}_{2,2} \right) \\
 C_{35} &= \frac{1}{(1 - \alpha_f) k_P} \left(-\underline{wdt}_{2,1} \underline{C}_{32} - \underline{wdt}_{2,2} \frac{2\beta + \alpha_m - 1}{2(\alpha_m - 1)} \Delta t^2 + \underline{ddw}_{2,2} \right)
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Struktur von $\underline{\mathbf{A}}$ berechnen sich die Eigenwerte $EW(\underline{\mathbf{A}})$ aus

$$EW(\underline{\mathbf{A}}) = EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zs}, \underline{zs}}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zk}, \underline{zk}}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{P}, \underline{P}}) \quad (5.54)$$

$\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zs}, \underline{zs}}$ entspricht ebenfalls der Vergrößerungsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ eines Einmassenschwingers. Die Eigenwerte von $(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zs}, \underline{zs}})$ führen auf die Stabilitätsüberlegungen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Im Folgenden werden nur die Eigenwerte $EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zk}, \underline{zk}})$ und $EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{P}, \underline{P}})$ betrachtet. Diese sind:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \\
 \lambda_3 &= \frac{\alpha_m}{\alpha_m - 1} \\
 \lambda_4 &= \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} \\
 \lambda_5 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta} \\
 \lambda_6 &= \frac{4\beta - 2\gamma - 1 - \sqrt{1 + 4\gamma^2 - 16\beta + 4\gamma}}{4\beta}.
 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Die Anforderungen, dass das Generalized- α Verfahren die Genauigkeit 2. Ordnung, eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen sowie eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen besitzt, führen auf:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty - 2}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -\rho_\infty. \quad (5.56)$$

Das zweifach indexreduzierte System besitzt einen doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2} = 1$. Damit ist die Zeitintegration instabil (schwache Instabilität). Dieser doppelte Eigenwert gehört zu $EW(\underline{\mathbf{A}}_{\underline{zk}, \underline{zk}})$ und bewirkt das Abdriften der Lagekoordinaten.

5.4.3.2 Analyse auftretender Effekte

Die sich ergebende Vergrößerungsmatrix bei der Anwendung des Newmark- β Verfahrens lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4) & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{30} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{31} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{32} \kappa_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 1 & 1 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{33} & C_{34} / \Delta t & C_{35} / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{33} \kappa_6 \Delta t & C_{34} \kappa_6 & C_{35} \kappa_6 / \Delta t & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{33} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{34} \kappa_1 \Delta t & C_{35} \kappa_1 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Wiederum ist der Vektor $[z_{k n \Delta t} \quad \dot{z}_{k n \Delta t} \quad \ddot{z}_{k n \Delta t}]$ nach n Zeitschritten nur von $[z_{k 0} \quad \dot{z}_{k 0} \quad \ddot{z}_{k 0}]$ abhängig. Um die Ausbreitung von Störungen zu untersuchen, ist es notwendig, die n -te Potenz der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ zu bestimmen.

$$z_{k n \Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n z_{k 0} \quad (5.58)$$

Die n -te Potenz der Matrix wird über die Jordansche Normalform $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ berechnet

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^n \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \quad (5.59)$$

mit $\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Damit ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}^n = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{J}}}^n \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & n & n/2 - 1/4 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$[z_{k n \Delta t} \quad \dot{z}_{k n \Delta t} \quad \ddot{z}_{k n \Delta t}]$ ergeben sich zu:

$$\ddot{z}_{k n \Delta t} = 0 \quad (5.61)$$

$$\dot{z}_{k n \Delta t} = \dot{z}_{k 0} \quad (5.62)$$

$$z_{k n \Delta t} = z_{k 0} + n \Delta t \dot{z}_{k 0} \quad (5.63)$$

Damit ist

- die Berechnung von \ddot{z}_k stabil. $\ddot{z}_{k n}$ ergibt sich aus der zweiten Ableitung der Anregung r im aktuellen Zeitschritt.
- die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{z}_k stabil. Sie verändert sich nur über die Anregung. Im homogenen Fall ist $\dot{z}_{k n}$ konstant und entspricht exakt $\dot{z}_{k 0}$. Es tritt damit für \dot{z}_k kein Abdriften auf.
- z_k schwach instabil, da es mit der Anzahl der Zeitschritte linear anwächst. Dies bewirkt das Abdriften des Radaufstandspunktes.

Die Größen $\mathbf{z}_{\mathbf{s} t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} t+\Delta t}$ und $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} t+\Delta t}$ sind sowohl von $\mathbf{z}_{\mathbf{s} t}$, $\dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} t}$ und $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s} t}$ wie auch von z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k abhängig. In z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k treten zwar keine Störungen auf, jedoch bewirkt die schwache Instabilität in z_k ein Abdriften von der Nulllage. Dieses Abdriften überträgt sich auf $\mathbf{z}_{\mathbf{s}}$, $\dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}}$ und $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{s}}$. Damit sind die Lagekoordinaten ohne Nebenbedingungen ebenfalls schwach instabil.

Unvorteilhafter gestaltet sich die Berechnung der Lagrangeschen Parameter. P_{dyn} ist jetzt frei von Störungen. Da P_{dyn} an z_k gekoppelt ist, driftet auch P_{dyn} ab. \dot{P}_{dyn} wird von Oszillationen überlagert und driftet ab, \ddot{P}_{dyn} zeigt ein Abdriften und sich aufschaukelnde Oszillationen. \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} haben jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung der anderen Größen.

Die hier gezeigten Effekte bestätigen sich durch numerische Vergleichsrechnungen:

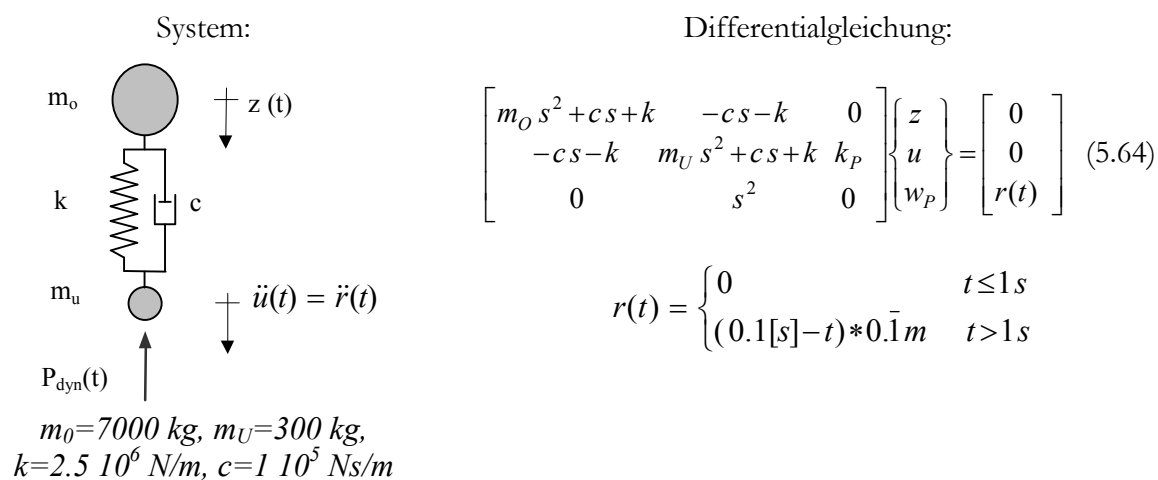


Abbildung 5.10: Einmassenschwinger mit Index 3, indexreduziert auf Index 1

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta=1/4$, $\gamma=1/2$ und $\Delta t=0.01$ s.

Die Zeitintegration mittels des Newmark- β Verfahrens ergibt für die Systemfreiheitsgrade (z , u , P_{dyn}) sowie deren erste (\dot{z} , \dot{u} , \dot{P}_{dyn}) und zweite Ableitungen (\ddot{z} , \ddot{u} , \ddot{P}_{dyn}):

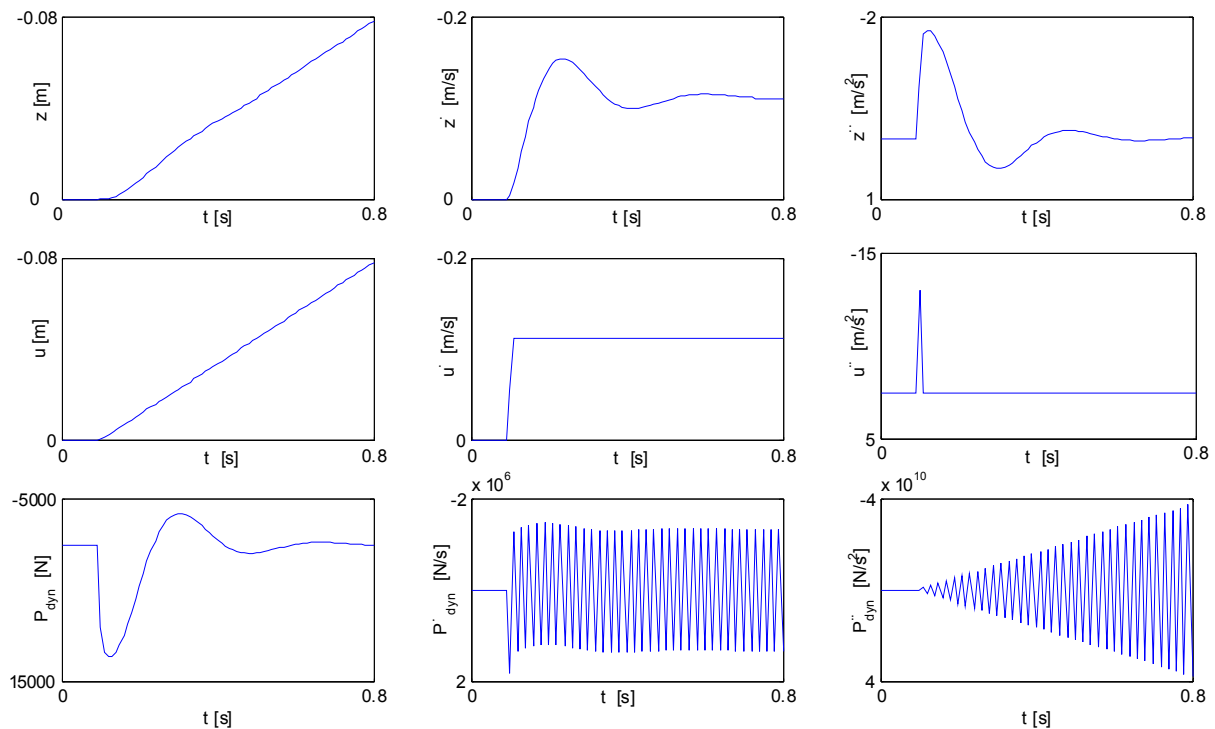


Abbildung 5.11: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingers mit Index 3, indexreduziert auf Index 1

Die Zeitintegration mit der Anregung durch das Rauheitsprofil Belleville ergibt für das Abdriften des Fußpunktes u die erwartete schwache Instabilität. Erstaunlich ist, dass das Abdriften extrem gering ist. Nach 3000 Zeitschritten ist ein Abdriften von ca. $8 \cdot 10^{-13}$ zu beobachten.

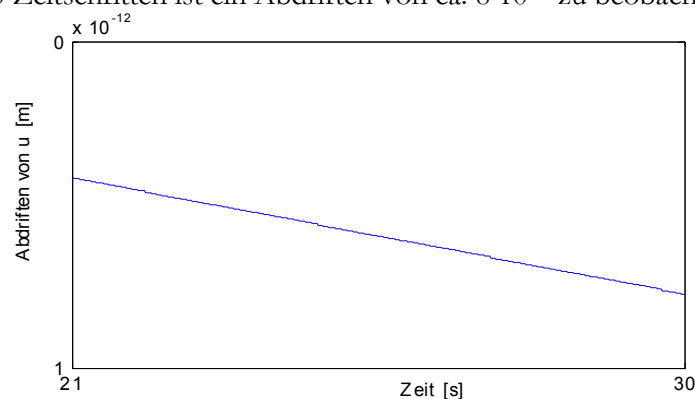


Abbildung 5.12: Abdriften des Fußpunktes u nach Anregung durch das Rauheitsprofil Belleville

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration ebenfalls nicht stabil, da dieses für Frequenzen $f \rightarrow 0$ keine numerische Dämpfung besitzt. Störungen mit unendlich hohen Frequenzen treten zwar auf, werden aber durch die numerische Dämpfung des Verfahrens gedämpft. Für $\alpha_m \neq 0$, gilt $\ddot{z}_{kn\Delta t} = 0$ (5.61) nicht mehr. Dies verstärkt das Abdriften.

Index 3 Systeme sind schwierig zu integrieren. Die Zeitintegration erfordert engere Stabilitätskriterien als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Indexreduktion durch ein- bzw. zweimalige Differentiation der Nebenbedingung verringert die Instabilitäten und Störungen. Das Abdriften bleibt sehr klein.

5.4.4 Index 2 Systeme

Bei Index 2 Systemen liegt am Freiheitsgrad der Koppelbedingung keine Masse vor. In matrizieller Form lautet die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{z}_k \\ \ddot{w}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} & -\underline{\mathbf{c}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{c}}^T & c_u & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \dot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & -\underline{\mathbf{k}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{k}}^T & k_u & k_p \\ \underline{\mathbf{0}}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_s \\ z_k \\ w_p \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad (5.65)$$

5.4.4.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ lautet für das Index 2 System:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_2 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{10} & \underline{\mathbf{C}}_{11} / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{12} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4) & (\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{10} \kappa_6 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{11} \kappa_6 & \underline{\mathbf{C}}_{12} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ (\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3) & \underline{\mathbf{C}}_{10} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{11} \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{12} \kappa_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{13} & C_{14} / \Delta t & C_{15} / \Delta t^2 & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_6 \kappa_6 & \underline{\mathbf{C}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{13} \kappa_6 \Delta t & C_{14} \kappa_6 & C_{15} \kappa_6 / \Delta t & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\mathbf{C}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 \kappa_1 & C_{13} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{14} \kappa_1 \Delta t & C_{15} \kappa_1 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Die Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{p,p}$ sind identisch zum Index 3 System. Damit ergeben sich die gleichen Eigenwerte und demzufolge auch das gleiche Stabilitätskriterium:

$$0 \leq \rho_\infty < 1. \quad (5.67)$$

Damit verbietet sich wiederum der nichtdissipative Fall ($\rho_\infty = 1$) im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

5.4.4.2 Analyse auftretender Effekte

Die sich ergebende Vergrößerungsmatrix bei der Anwendung des Newmark- β Verfahrens auf das Index 2 System:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}\right) \kappa_6 \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4\right) & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5\right) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} \kappa_6 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}}\right) \kappa_1 \Delta t^2 & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2\right) \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3\right) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{10} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{11} \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{13} & C_{14} / \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{13} \kappa_6 \Delta t & C_{14} \kappa_6 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{13} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{14} \kappa_1 \Delta t & 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ besitzt prinzipiell die gleiche Struktur wie beim Index 3 System. Damit treten prinzipiell die gleichen Effekte auf. Im Unterschied zum Index 3 System sind $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12}=0$ und $C_{15}=0$.

$\underline{\underline{\mathbf{z}}}_s$, $\underline{\dot{\mathbf{z}}}_s$ und $\underline{\ddot{\mathbf{z}}}_s$ und P_{dyn} sind nicht mehr an $\underline{\ddot{\mathbf{z}}}_k$ gekoppelt. Diese Größen werden daher von Oszillationen (infolge Kopplung an $\underline{\dot{\mathbf{z}}}_k$) überlagert, sind jedoch stabil. Die Berechnung von $\underline{\dot{P}}_{dyn}$ und $\underline{\ddot{P}}_{dyn}$ ist nach wie vor instabil. Beide haben jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung der anderen Größen.

Die hier gezeigten Effekte bestätigen sich durch numerische Vergleichsrechnungen:

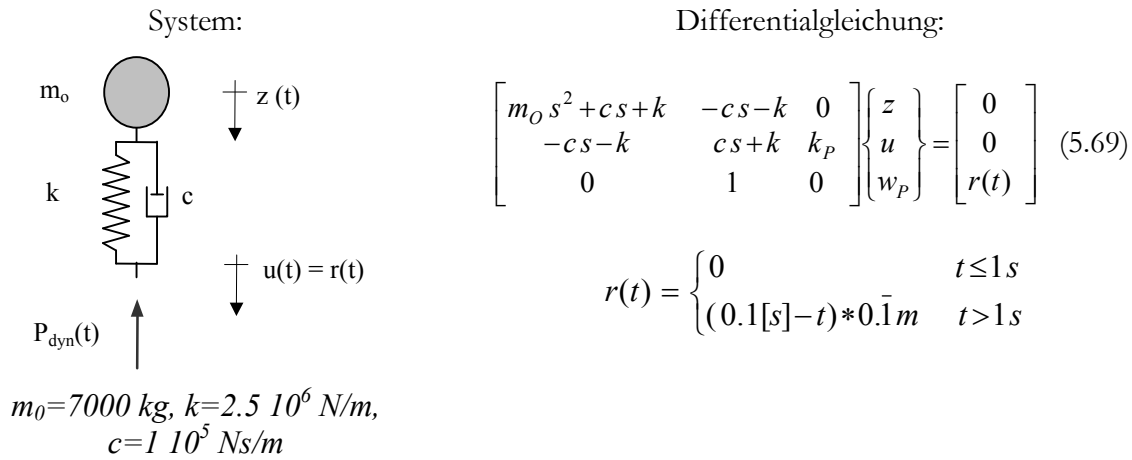


Abbildung 5.13: Einmassenschwinger mit Index 2

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ und $\Delta t = 0.01 \text{ s}$:

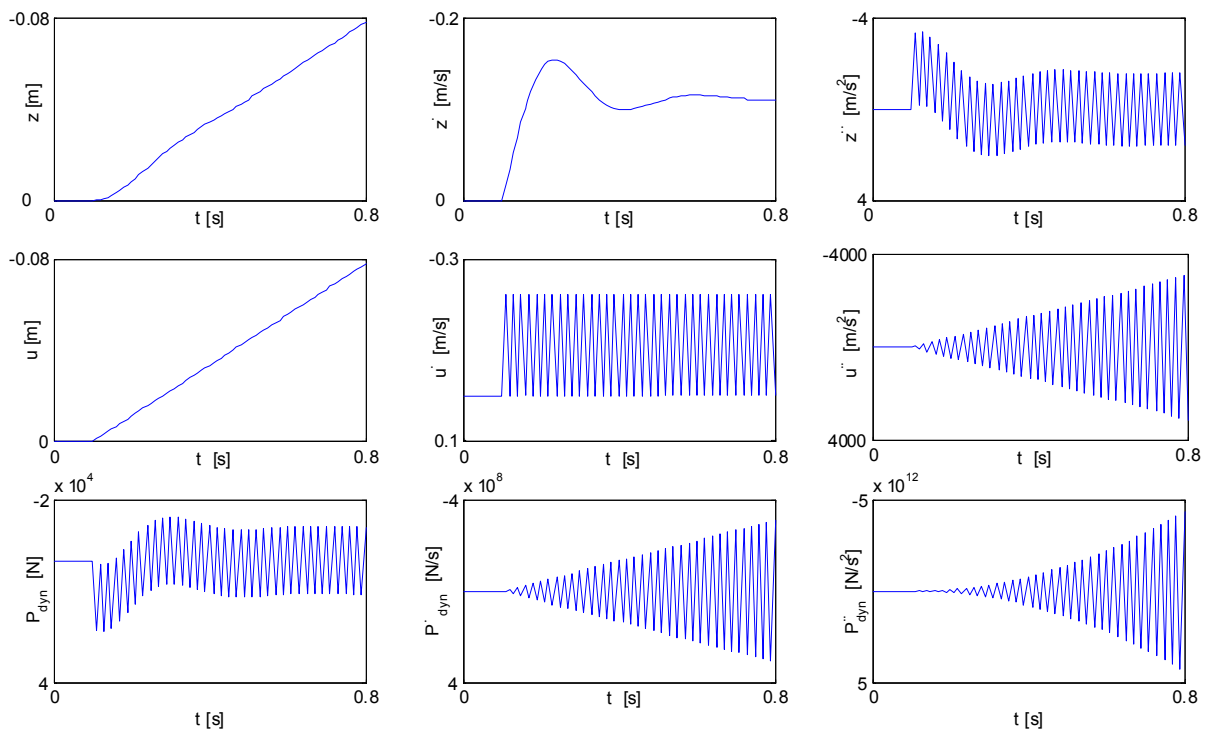


Abbildung 5.14: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingers mit Index 2

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration auch für \dot{P}_n und \ddot{P}_n stabil. Die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen treten ebenfalls auf, werden aber durch die numerische Dissipation des Verfahrens gedämpft.

5.4.5 Index 2 Systeme, indexreduziert auf Index 1

Die matrizielle Formulierung der homogenen Gleichung lautet nun:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{z}}}}_s \\ \underline{\underline{\dot{z}}}_k \\ \underline{\underline{\dot{w}}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & -\underline{\underline{\mathbf{c}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{c}}}^T & c_u & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{z}}}}_s \\ \underline{\underline{\dot{z}}}_k \\ \underline{\underline{\dot{w}}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{k}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{k}}}^T & k_u & k_p \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ z_k \\ w_p \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (5.70)$$

5.4.5.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ nach Diskretisierung mit dem Generalized- α Verfahren lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_4 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_5 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_2 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_3 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} \kappa_1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & \frac{\beta - \gamma + \alpha_f \gamma}{(\alpha_f - 1) \gamma} & \frac{\gamma - 2\beta}{2\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \gamma} & \frac{\gamma - 1}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{23} \kappa_6 \Delta t & C_{24} \kappa_6 & C_{25} \kappa_6 / \Delta t & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{23} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{24} \kappa_1 \Delta t & C_{25} \kappa_1 & \frac{1}{(\alpha_f - 1) \beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Hier ergeben sich die gleichen Eigenwerte wie für das einmal indexreduzierte Index 3 System. Die Zeitintegration ist stabil, falls:

$$0 \leq \rho_\infty < 1 \quad (5.72)$$

Damit verbietet sich wiederum der nichtdissipative Fall ($\rho_\infty = 1$) im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Die während der Berechnung auftretenden Diskretisierungs- und Rundungsfehler können sich aufsummieren und theoretisch ein Abdriften der Lagekoordinaten bewirken. In praktischen Versuchen mit einem realistischen Rauheitsprofil und einer Integration mit dem Generalized- α Verfahren mit 1500 Zeitschritten ergab sich ein Abdriften von $7 \cdot 10^{-17}$. Für praktische Anwendungen kann dies vernachlässigt werden.

5.4.5.2 Analyse auftretender Effekte

Die sich ergebende Vergrößerungsmatrix bei der Anwendung des Newmark- β Verfahrens lautet:

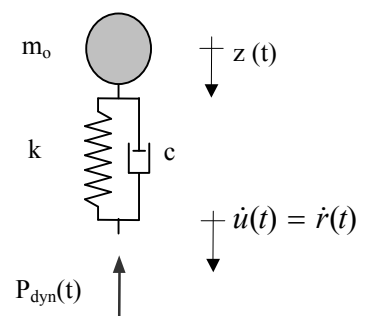
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \kappa_6 \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_4 \right) & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_5 \right) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_6 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \kappa_1 \Delta t^2 & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_2 \right) \Delta t & \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_3 \right) & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & C_{23} \kappa_6 \Delta t & C_{24} \kappa_6 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & C_{23} \kappa_1 \Delta t^2 & C_{24} \kappa_1 \Delta t & 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ besitzt prinzipiell die gleiche Struktur wie beim einfach indexreduzierten Index 3 System. Damit treten prinzipiell die gleichen Effekte auf.

Einziger Unterschied ist, dass jetzt durch das Newmark- β Verfahren gilt: $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{12}=0$ und $C_{15}=0$. $\underline{\mathbf{z}}_s$, $\underline{\dot{\mathbf{z}}}_s$ und P_{dyn} sind nicht mehr an $\ddot{\mathbf{z}}_k$ gekoppelt. Diese Größen werden daher nicht mehr von Oszillationen überlagert. Weiter ist $\underline{\dot{P}}_{dyn}$ von Störungen überlagert, jedoch stabil. $\underline{\dot{P}}_{dyn}$ ist nach wie vor instabil. Beide haben jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung der anderen Größen.

Die hier gezeigten Effekte bestätigen sich durch numerische Vergleichsrechnungen:

System:



Differentialgleichung:

$$\begin{bmatrix} m_0 s^2 + c s + k & -c s - k & 0 \\ -c s - k & c s + k & k_p \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ u \\ w_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \text{ s} \\ (0.1[s] - t) * 0.1 \text{ m} & t > 1 \text{ s} \end{cases}$$

$m_0 = 7000 \text{ kg}$, $k = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$,
 $c = 1 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$

Abbildung 5.15: Einmassenschwinger mit Index 2, indexreduziert auf Index 1

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta=1/4$, $\gamma=1/2$ und $\Delta t=0.01$ s.

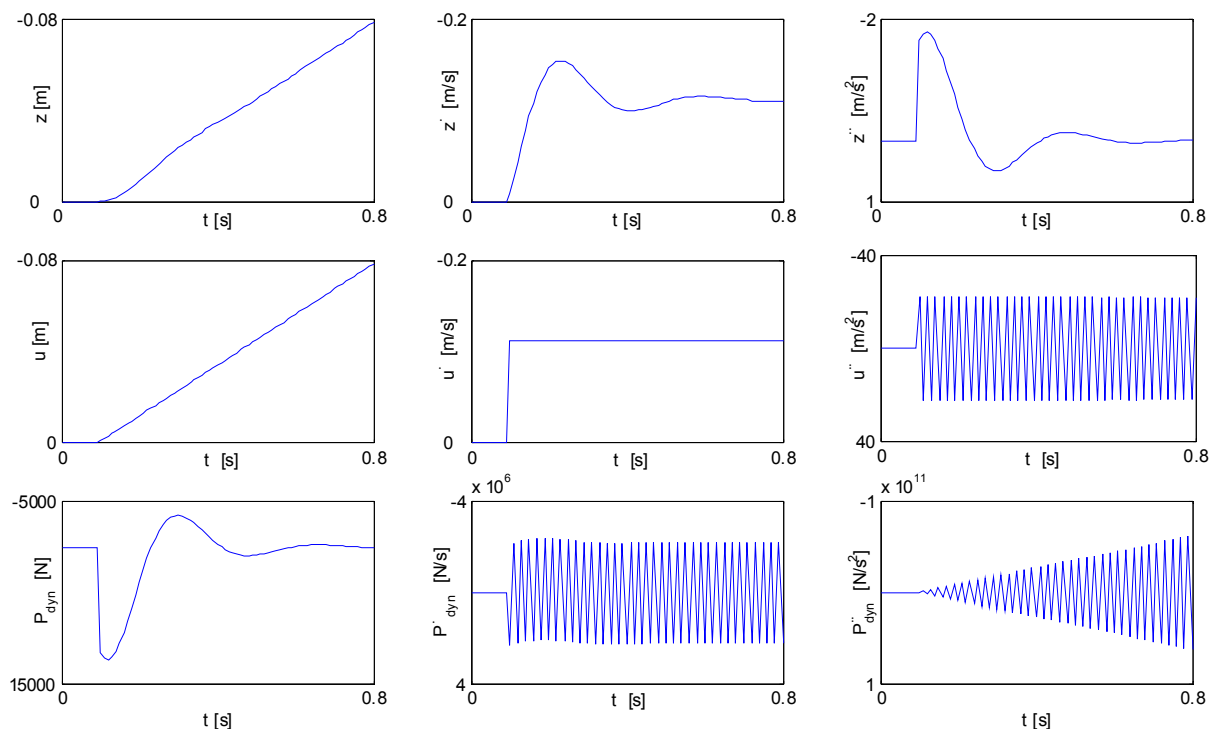


Abbildung 5.16: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingers mit Index 2, indexreduziert auf Index 1

Ein Abdriften des Fußpunktes tritt ebenfalls praktisch nicht auf:

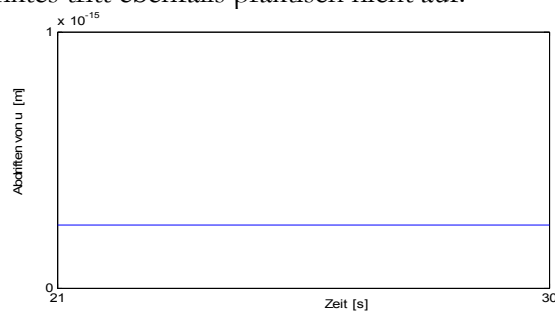


Abbildung 5.17: Abdriften von u nach Anregung durch das Rauheitsprofil Belleville

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so sind $\underline{\mathbf{z}}_s$, $\dot{\underline{\mathbf{z}}}_s$, $\ddot{\underline{\mathbf{z}}}_s$ und P_{dyn} nun wieder von Störungen überlagert, jedoch stabil. Die Zeitintegration für \dot{P}_n wird stabil. Die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen werden aber durch die numerische Dissipation des Verfahrens gedämpft.

Index 2 Systeme erfordern die gleichen Stabilitätskriterien wie Index 3 Systeme. Numerische Störungen sind hier schwächer ausgeprägt. Die Indexreduktion wirkt sich positiv hinsichtlich der Störungen aus.

5.4.6 Index 1 Systeme

Bei Index 1 Systemen liegt am Freiheitsgrad der Koppelbedingung weder eine Masse noch eine viskose Dämpfung vor. In matrizieller Form lautet die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{z}}}_s \\ \dot{z}_k \\ \dot{w}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{k}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{k}}}^T & k_u & k_p \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_s \\ z_k \\ w_p \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (5.75)$$

5.4.6.1 Stabilitätsanalyse der Zeitintegration

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_4) & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_5) / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \kappa_3) & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \frac{1}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_f}{\alpha_f - 1} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_6 / \Delta t & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_7 \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Da die Nebenbedingung wiederum auf Lageebene formuliert ist, ergeben sich die gleichen Eigenwerte der Vergrößerungsmatrix wie beim Index 3 und Index 2 System. Die Zeitintegration ist stabil, falls:

$$0 \leq \rho_\infty < 1 \quad (5.77)$$

Wie erwartet ergibt sich das gleiche Stabilitätskriterium wie bei Betrachtung des entkoppelten Systems in [Lutzenberger 2002]. Damit verbietet sich wiederum der nichtdissipative Fall ($\rho_\infty = 1$) im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

5.4.6.2 Analyse auftretender Effekte

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{A}}$ bei der Anwendung des Newmark- β Verfahrens lautet:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1 & \underline{\underline{C}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{C}}_3 / \Delta t^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\underline{\underline{C}}_1 - \underline{\underline{I}}) \kappa_6 \Delta t & (\underline{\underline{C}}_2 \kappa_6 - \underline{\underline{I}} \kappa_4) & (\underline{\underline{C}}_3 \kappa_6 - \underline{\underline{I}} \kappa_5) / \Delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\underline{\underline{C}}_1 - \underline{\underline{I}}) \kappa_1 \Delta t^2 & (\underline{\underline{C}}_2 \kappa_1 - \underline{\underline{I}} \kappa_2) \Delta t & (\underline{\underline{C}}_3 \kappa_1 - \underline{\underline{I}} \kappa_3) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{C}}_5 & \underline{\underline{C}}_6 / \Delta t & \underline{\underline{C}}_7 / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\underline{C}}_5 \kappa_6 \Delta t & \underline{\underline{C}}_6 \kappa_6 & \underline{\underline{C}}_7 \kappa_6 / \Delta t & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ \underline{\underline{C}}_5 \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\underline{C}}_6 \kappa_1 \Delta t & \underline{\underline{C}}_7 \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

In der Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{A}}$ sind nun $[z_k \ \dot{z}_k \ \ddot{z}_k]$ und $[\underline{\underline{z}}_s \ \underline{\underline{\dot{z}}}_s \ \underline{\underline{\ddot{z}}}_s]$ vollständig entkoppelt.

$z_{k n \Delta t}$, $\dot{z}_{k n \Delta t}$ und $\ddot{z}_{k n \Delta t}$ ergeben sich zu:

$$z_{k n \Delta t} = 0 \quad (5.79)$$

$$\dot{z}_{k n \Delta t} = (-1)^n \dot{z}_{k0} \quad (5.80)$$

$$\ddot{z}_{k n \Delta t} = 4n(-1)^n \frac{\dot{z}_{k0}}{\Delta t} + (-1)^n \ddot{z}_{k0} \quad (5.81)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass

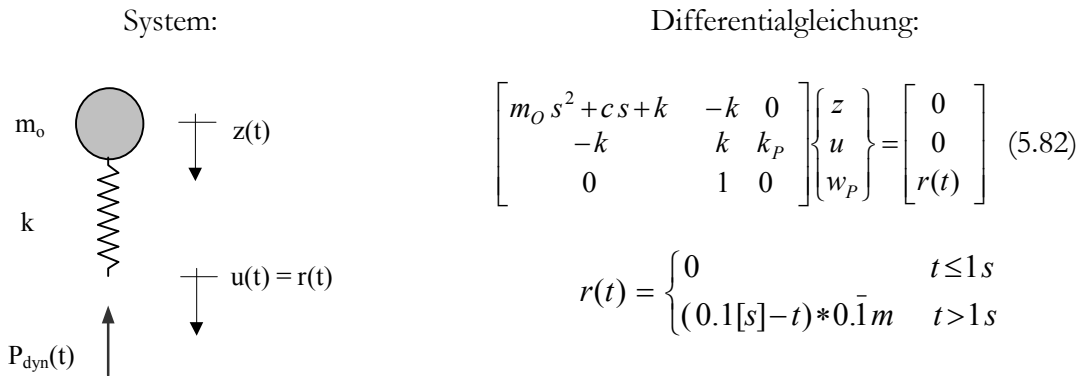
- z_{kn} der Anregung r_n im aktuellen Zeitschritt entspricht, welche hier jedoch nicht betrachtet wird. z_k ist stabil und frei von Störungen.
- die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{z}_k zeigt Oszillationen, indem sie in jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt. Die Berechnung von \dot{z}_k ist stabil, da \dot{z}_k begrenzt ist.
- \ddot{z}_k zeigt sowohl Oszillationen wie auch eine schwache Instabilität.

Die Größen $\underline{\underline{z}}_s$, $\underline{\underline{\dot{z}}}_s$ und $\underline{\underline{\ddot{z}}}_s$ sind entkoppelt und entsprechen der Vergrößerungsmatrix eines Einmassenschwingers. Damit sind $\underline{\underline{z}}_s$, $\underline{\underline{\dot{z}}}_s$ und $\underline{\underline{\ddot{z}}}_s$ störungsfrei und stabil.

P_{dyn} , \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} sind nur noch an $\underline{\underline{z}}_s$, $\underline{\underline{\dot{z}}}_s$ und $\underline{\underline{\ddot{z}}}_s$ gekoppelt. P_{dyn} wird daher nicht mehr von Oszillationen überlagert und ist stabil. In \dot{P}_{dyn} entstehen Oszillationen, \dot{P}_{dyn} bleibt aber stabil. \ddot{P}_{dyn} ist von Oszillationen überlagert und schwach instabil.

Obwohl die Zeitintegration mit dem Newmark- β Verfahren instabil ist, ist die Lösung für die Lagekoordinaten wie auch für P_{dyn} und \dot{P}_{dyn} stabil. Lediglich \ddot{P}_{dyn} ist schwach instabil, beeinflusst aber keine weiteren Größen.

Die hier gezeigten Effekte bestätigen sich durch numerische Vergleichsrechnungen:



$m_0 = 7000 \text{ kg}$, $k = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$,
 $c = 1 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$

Abbildung 5.18: Einmassenschwinger mit Index 1

Die Zeitintegration erfolgt mittels des Newmark- β Verfahrens mit $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ und $\Delta t = 0.01 \text{ s}$.

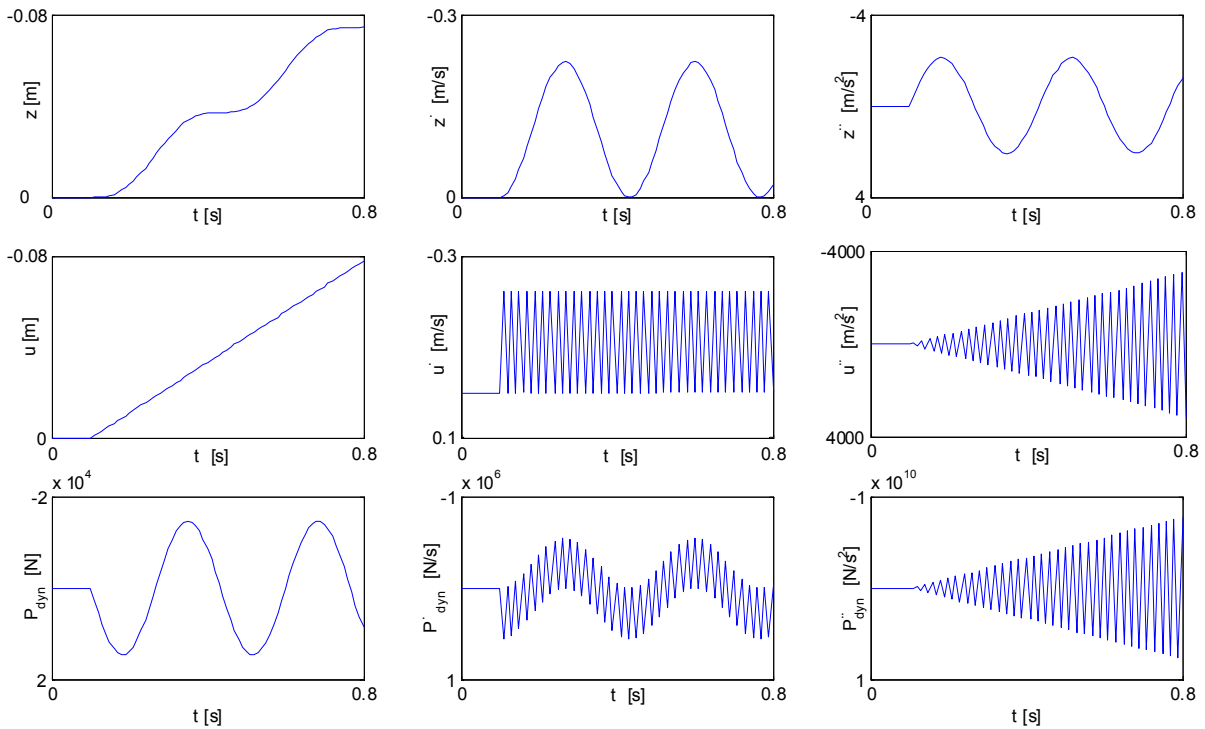


Abbildung 5.19: Berechnungsergebnisse: Zeitintegration des Einmassenschwingers mit Index 1

Wird statt des Newmark- β Verfahrens das Generalized- α Verfahren verwendet, so wird die Zeitintegration auch für \ddot{P}_{dyn} und \ddot{z}_k stabil. Die Störungen mit den unendlich hohen Frequenzen sind nach wie vor vorhanden, werden aber durch die numerische Dissipation des Verfahrens gedämpft.

5.5 Übertragung auf gekoppelte Probleme

Bis hierhin wurden Nebenbedingungen für einzelne Freiheitsgrade betrachtet.

$$g : z_k = 0 \tag{5.83}$$

Es ist jedoch weit häufiger, dass Nebenbedingungen Freiheitsgrade im Inneren miteinander koppeln, wie dies bei der Kopplung von Systemen der Fall ist.

$$g : z_k - w_k = 0 \tag{5.84}$$

z_k kennzeichnet die Lagekoordinaten an einem System, w_k die Lagekoordinaten am anderen System. Infolge dieser Kopplung ergibt sich eine andere Struktur der Gleichungssysteme. In der Nebenbedingung wird z_k durch $z_k - w_k$ ersetzt.

Um diese Fragestellung zu klären, wird zunächst ein allgemeines dynamisches System betrachtet. Für die Stabilitätsanalyse ist es ausreichend, das homogene System zu betrachten.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{z}}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{z}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{z}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \tag{5.85}$$

Nach Einführung des Differentialoperators $s = d/dt$ lautet die Bewegungsgleichung:

$$(\underline{\underline{\mathbf{M}}} s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}} s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}) \underline{\underline{\mathbf{z}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \tag{5.86}$$

Nun wird das System in zwei Teilsysteme Ω_z und Ω_w unterteilt. Die Freiheitsgrade z_k und w_k liegen an der Schnittstelle von beiden Teilsystemen.

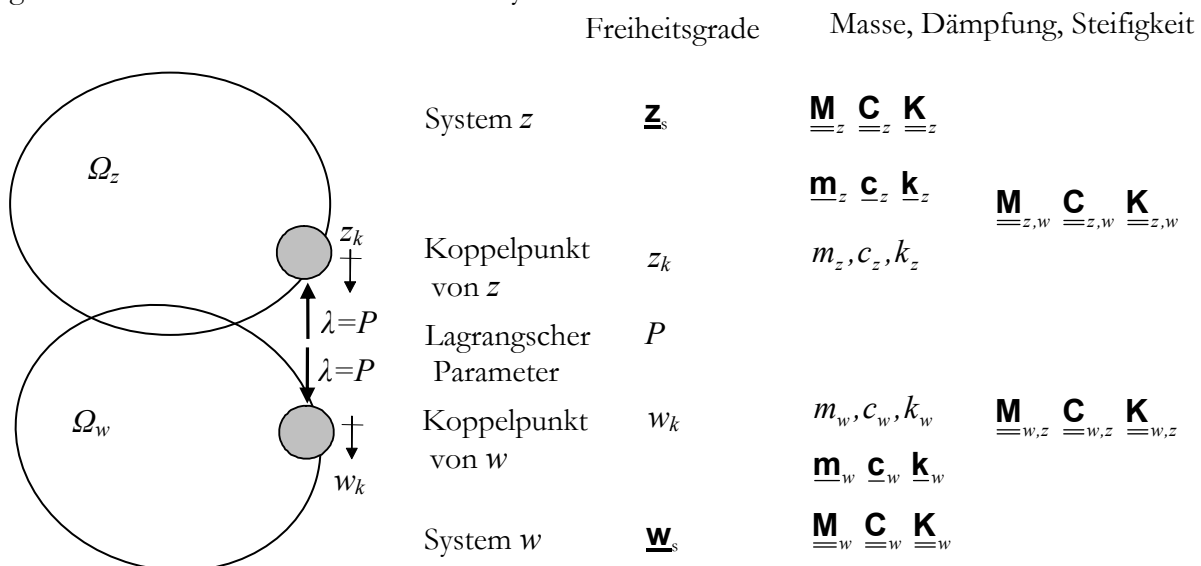


Abbildung 5.20: Gekoppelte dynamische Systeme

Dabei bedeuten:

$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_z$ $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_z$ $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_z$ die Massen-, die Dämpfungs- und die Steifigkeitsmatrix des Teilsystems Ω_z .

$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_w$ $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_w$ $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_w$ die Massen-, die Dämpfungs- und die Steifigkeitsmatrix des Teilsystems Ω_w .

$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{z,w}$ $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{z,w}$ $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{z,w}$ und $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{w,z}$ $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{w,z}$ $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{w,z}$ Kopplung zwischen Ω_z und Ω_w .

$\underline{\underline{\mathbf{m}}}_z$ $\underline{\underline{\mathbf{c}}}_z$ $\underline{\underline{\mathbf{k}}}_z$ ($\underline{\underline{\mathbf{m}}}_w$ $\underline{\underline{\mathbf{c}}}_w$ $\underline{\underline{\mathbf{k}}}_w$) die Ankopplung von z_k (w_k) an Ω_z (Ω_w).

$m_z, c_z, k_z, m_w, c_w, k_w$ die den Koppelfreiheitsgraden zugehörige Masse, Dämpfung und Steifigkeit

Die Kopplung beider Systeme wird über die Nebenbedingung g

$$g: \quad z_k - w_k = 0 \quad (5.87)$$

beschrieben. Die Bewegungsgleichung lautet damit:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_z s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_z s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_z & -\underline{\underline{\mathbf{m}}}_z s^2 - \underline{\underline{\mathbf{c}}}_z s - \underline{\underline{\mathbf{k}}}_z & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{z,w} s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{z,w} s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{z,w} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{m}}}_z^T s^2 - \underline{\underline{\mathbf{c}}}_z^T s - \underline{\underline{\mathbf{k}}}_z^T & m_z s^2 + c_z s + k_z & 0 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 1 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 0 & m_w s^2 + c_w s + k_w & -\underline{\underline{\mathbf{m}}}_w^T s^2 - \underline{\underline{\mathbf{c}}}_w^T s - \underline{\underline{\mathbf{k}}}_w^T & -1 \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{w,z} s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{w,z} s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{w,z} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & -\underline{\underline{\mathbf{m}}}_w s^2 - \underline{\underline{\mathbf{c}}}_w s - \underline{\underline{\mathbf{k}}}_w & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_w s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_w s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_w & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 1 & -1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ z_k \\ w_k \\ \underline{\underline{\mathbf{w}}}_s \\ P \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (5.88)$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{M}}} s^2 + \underline{\underline{\mathbf{C}}} s + \underline{\underline{\mathbf{K}}}) \underline{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Nun wird ein Koordinatensystem $\underline{\underline{\mathbf{y}}}_1$ eingeführt: Der Freiheitsgrad z_k wird durch $z_k - w_k$ ersetzt.

$$\underline{\underline{\mathbf{y}}}_1 = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ w_k \\ \underline{\underline{\mathbf{w}}}_s \\ z_k - w_k \\ P \end{Bmatrix} \quad (5.89)$$

Der Übergang vom Koordinatensystem $\underline{\underline{\mathbf{w}}}$ auf das Koordinatensystem $\underline{\underline{\mathbf{y}}}_1$ kann über eine Transformation mit der Transformationsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$ beschrieben werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{y}}}_1 \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 1 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 1 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 0 & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

\underline{y}_1 ist dabei eine Basis für den Raum \underline{w} . Die Koordinatentransformation von \underline{w} auf \underline{y}_1 sowie die Linksmultiplikation mit $\underline{\Phi}_1^T$ liefert:

$$\underline{\Phi}_1^T (\underline{M} s^2 + \underline{C} s + \underline{K}) \underline{\Phi}_1 \underline{y}_1 = \underline{0} \quad (5.91)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_z s^2 + \underline{C}_z s + \underline{K}_z & -\underline{m}_z s^2 - \underline{c}_z s - \underline{k}_z & \underline{M}_{z,w} s^2 + \underline{C}_{z,w} s + \underline{K}_{z,w} & -\underline{m}_z s^2 - \underline{c}_z s - \underline{k}_z & \underline{0} \\ -\underline{m}_z^T s^2 - \underline{c}_z^T s - \underline{k}_z^T & (m_z + m_w) s^2 + (c_z + c_w) s + (k_z + k_w) & -\underline{m}_w^T s^2 - \underline{c}_w^T s - \underline{k}_w^T & m_z s^2 + c_z s + k_z & 0 \\ \underline{M}_{w,z} s^2 + \underline{C}_{w,z} s + \underline{K}_{w,z} & -\underline{m}_w^T s^2 - \underline{c}_w^T s - \underline{k}_w^T & \underline{M}_w s^2 + \underline{C}_w s + \underline{K}_w & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{m}_z^T s^2 - \underline{c}_z^T s - \underline{k}_z^T & m_z s^2 + c_z s + k_z & 0 & m_z s^2 + c_z s + k_z & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{z}_s \\ w_k \\ \underline{w}_s \\ z_k - w_k \\ P \end{Bmatrix} = \underline{0} \quad (5.92)$$

Werden \underline{z}_s , w_k und \underline{w}_s zu den Systemkoordinaten $\underline{z}_{\text{sys}}$ zusammengefasst, so kann die Beschreibung vereinfacht werden zu:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{\text{sys}} s^2 + \underline{C}_{\text{sys}} s + \underline{K}_{\text{sys}} & -\underline{m}_{\text{sys},z-w} s^2 - \underline{c}_{\text{sys},z-w} s - \underline{k}_{\text{sys},z-w} & \underline{0} \\ -\underline{m}_{\text{sys},z-w}^T s^2 - \underline{c}_{\text{sys},z-w}^T s - \underline{k}_{\text{sys},z-w}^T & m_z s^2 + c_z s + k_z & 1 \\ \underline{0} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{z}_{\text{sys}} \\ z_k - w_k \\ P \end{Bmatrix} = \underline{0}. \quad (5.93)$$

Dabei ist:
$$\left\{ -\underline{m}_{\text{sys},z-w} s^2 - \underline{c}_{\text{sys},z-w} s - \underline{k}_{\text{sys},z-w} \right\} = \begin{bmatrix} -\underline{m}_z s^2 - \underline{c}_z s - \underline{k}_z \\ m_z s^2 + c_z s + k_z \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

In der Gesamtsteifigkeitsmatrix ist die schon bekannte Darstellung des Gesamtsystems enthalten.

Damit erhält man die gleiche Struktur des Gleichungssystems wie bei Nebenbedingungen am Rand. Die in diesem Kapitel ermittelten Stabilitätskriterien gelten damit auch für gekoppelte Systeme.

Die Aussagen zu auftretenden Störungen können analog übertragen werden.

Aus der Darstellung (5.93) ergibt sich, dass sich die Lagrangeschen Parameter bei Systemen mit Nebenbedingungen im Inneren, wie bei den Systemen mit Nebenbedingungen am Rand, aus einer „Nachlaufberechnung“ ergeben, nachdem die Lagekoordinaten des Systems berechnet sind. Sie beeinflussen die Lagekoordinaten nicht.

Die Systemfreiheitsgrade $\underline{z}_{\text{sys}}$ sind über die Modellparameter des oberen Systems an der Koppelstelle mit der Verschiebungsdifferenz $z_k - w_k$ verbunden.

In die Bestimmungsgleichung für P gehen ebenfalls die Modellparameter des oberen Systems ein. Der Index des derart transformierten Systems richtet sich nun allein nach den Modellparametern des oberen Systems an der Koppelstelle.

5.6 Zusammenfassung

Ziel dieses Kapitels war es, Stabilitätskriterien für die Integration mechanischer, differentiell – algebraischer Systeme 2. Ordnung mit α -Verfahren zu bestimmen. Darüber hinaus sollte eine Erklärung für die bei der Zeitintegration auftretenden Phänomene wie Störungen mit hohen Frequenzen [Lutzenberger 2002] gefunden werden.

Tatsächlich konnten für alle relevanten Systeme Stabilitätskriterien gefunden werden. Darüber hinaus konnten alle bei der Zeitintegration auftretenden Effekte geklärt werden. Durch vergleichende Untersuchung wurde das Verhalten der mechanischen Modelle mit Index 3, 2 und 1 sowie die Wirkungsweise der Indexreduktion gezeigt. Als Zeitschrittverfahren wurde das Generalized- α Verfahren verwendet. Dieses besitzt die besten spektralen Charakteristika aller bekannten Verfahren. Darüber hinaus können die populärsten strukturdynamischen Verfahren direkt aus ihm abgeleitet werden.

Die Zeitintegration von DAE mit Ausnahme zweifach indexreduzierter (zweimalige Differentiation der Nebenbedingung) DAE ist stabil, falls

$$0 \leq \rho_\infty < 1 \quad (5.95)$$

$$\text{mit:} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad \alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (5.96)$$

Hier zeigt sich, dass das Verhalten des Algorithmus bei unendlich hohen Frequenzen von entscheidender Bedeutung für die Stabilität der Zeitintegration ist. Dies bestätigt die Erkenntnis aus [Lutzenberger 2002], dass diese Systeme Eigenkreisfrequenzen mit $\omega \rightarrow \pm\infty$ besitzen. Beträgt der spektrale Radius des Verfahrens für $\omega \rightarrow \infty$ $\rho_\infty = 1$, so wird die Zeitintegration instabil. Ist der spektrale Radius für $\omega \rightarrow \infty$ kleiner als 1 (numerische Dissipation ist vorhanden), so ist die Integration stabil.

Die Zeitintegration zweifach indexreduzierter DAE mit dem Generalized- α Verfahren ist immer instabil. Hier ist zusätzlich das Verhalten des Algorithmus für Eigenfrequenzen $\omega \rightarrow 0$ entscheidend für die Stabilität der Zeitintegration. Das Generalized- α Verfahren besitzt hier den spektralen Radius 1. Diese schwache Instabilität äußert sich im linearen Abdriften der Lagekoordinaten von den Auflagern. Angesichts des äußerst geringen Abdriftens des Generalized- α Verfahrens ($8 \cdot 10^{-13}$ nach 3000 Zeitschritten) kann das Generalized- α Verfahren hier gut angewandt werden.

Mit Hilfe der Vergrößerungsmatrix des Newmark- β Verfahrens konnten alle bei der Zeitintegration auftretenden Phänomene erklärt werden. Die unendlich hohen Störfrequenzen entsprechen einer Bildungsvorschrift in den Lagekoordinaten mit Nebenbedingungen (z_k):

$$w_{n\Delta t} = (-1)^n w_0. \quad (5.97)$$

Die zusätzlich zu den Störfrequenzen auftretenden Instabilitäten ergeben sich durch:

$$w_{n\Delta t} = n(-1)^n w_0 C. \quad (5.98)$$

Bei allen Systemen ohne durchgeführte Indexreduktion sind die Fußpunktgeschwindigkeiten \dot{z}_k von Störungen überlagert, die Fußpunktbeschleunigungen \ddot{z}_k sind zusätzlich instabil. Nach einmaliger Indexreduktion sind nur noch die Fußpunktbeschleunigungen \ddot{z}_k von den Störungen betroffen. Die Fußpunktgeschwindigkeiten \dot{z}_k sind störungsfrei. Nach zweimaliger Indexreduktion treten keine Störeffekte in z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k mehr auf. Nach einmaliger Indexreduktion existiert praktisch kein Abdriften, nach zweimaliger Indexreduktion ergibt sich ein lineares Abdriften der Lagekoordinaten.

Dies gilt auch für das Generalized- α Verfahren allgemein.

Die Lagekoordinaten ohne Nebenbedingungen (\underline{z}_s) werden in der Vergrößerungsmatrix über die Vergrößerungsmatrix eines Einmassenschwingers aus sich selbst und aus einer Kopplung an z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k berechnet. Nur im Falle einer Kopplung an \ddot{z}_k ($\underline{m} \neq \underline{0}$) kann \underline{z} beim Index β System instabil werden.

Die Lagrangeschen Parameter (P_{dyn}) sind an die Lagekoordinaten mit Nebenbedingungen gebunden. Die Modellierung des Aufstandspunkts mit lediglich Federelementen (Index 1 System) ist in diesem Sinne am günstigsten. Die Lagrangeschen Parameter berechnen sich dann lediglich aus der Fußpunktauslenkung z_k . Da diese stabil und störungsfrei ist, gilt dies ebenfalls für P_{dyn} . Bei der Modellierung des Aufstandspunkts mit lediglich Feder- und Dämpferelementen (Index 2 System) sind die Lagrangeschen Parameter über den Dämpfer an die Fußpunktgeschwindigkeit \dot{z}_k gekoppelt. Die darin vorhandenen Störungen übertragen sich auf P_{dyn} . P_{dyn} bleibt stabil. Sind am Fußpunkt auch Massenelemente vorhanden, so sind die Lagrangeschen Parameter an die Fußpunktbeschleunigungen \ddot{z}_k gekoppelt. P_{dyn} ist dann ebenfalls von Störungen überlagert und wird instabil. Verbessert sich infolge einer Indexreduktion durch Differentiation der Nebenbedingung die Lösungsqualität für z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k , so wirkt sich dies gleichermaßen positiv auf P_{dyn} aus. Für \dot{P}_{dyn} wie \ddot{P}_{dyn} sind die Zusammenhänge ungünstiger. Es gelten die gleichen Störungsausbreitungsmechanismen wie für z_k , \dot{z}_k und \ddot{z}_k . Anders als bei z_k verbessert die Indexreduktion diese Zusammenhänge jedoch nicht. In P_{dyn} vorhandene Störungen führen so zu einer Instabilität in \dot{P}_{dyn} . In \dot{P}_{dyn} vorhandene Störungen führen so zu einer Instabilität von \ddot{P}_{dyn} . Positiv hinsichtlich der Stabilität der Lagekoordinaten wirkt sich aus, dass P_{dyn} , \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} deren Berechnung nicht beeinflussen.

Systeme mit Nebenbedingungen im Inneren zeigen die gleichen Effekte wie Systeme mit Nebenbedingungen am Rand. Die Ergebnisse sind analog übertragbar.

Auf Basis dieser Erkenntnisse soll im nächsten Kapitel ein geeignetes Zeitintegrationsverfahren entwickelt werden.

6 Entwicklung von Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische DAE

6.1 Einleitung

6.1.1 Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren

Anforderungen an Zeitintegrationsverfahren für strukturdynamische Systeme wurden in (Kapitel 5.2.1) diskutiert. Danach sollte ein Zeitschrittalgorithmus folgende Eigenschaften erfüllen [Hughes 2000]:

- Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung
- Maximal ein Satz impliziter Gleichungen je Zeitschritt
- Genauigkeit 2. Ordnung
- Unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen
- Steuerbare numerische Dissipation hoher Frequenzen
- Selbst startend, d.h. es wird kein anderes Verfahren zur Gewinnung der Startwerte benötigt.

6.1.2 Zeitintegration differentiell-algebraischer Systeme

Bei der Zeitintegration von differentiell – algebraischen Gleichungen sind zur Vermeidung von Instabilitäten die Stabilitätskriterien enger zu wählen (Kapitel 5.4). Daneben treten bei der Integration häufig Störungen auf. Die Störfrequenzen treten je nach dem Index der DAE in den Lagekoordinaten mit Festhaltungen z_k und den Lagrangeschen Parametern λ , sowie in deren Geschwindigkeiten $\dot{z}_k, \dot{\lambda}$ und Beschleunigungen $\ddot{z}_k, \ddot{\lambda}$ auf und überlagern die Berechnungsergebnisse. Günstig sind Verfahren, bei denen diese Störungen klein sind und durch numerische Dämpfung rasch herausgedämpft werden. Verfahren wie das Generalized- α Verfahren, welche eine numerische Dissipation besitzen, dämpfen diese Störfrequenzen zwar, sind aber nicht in der Lage, deren Entstehung zu verhindern.

Für die Integration von differentiell – algebraischen Systemen ist ein zusätzliches Kriterium wichtig:

- Möglichst kleine Störungen in den Berechnungsergebnissen.

Im letzten Kapitel wurde die Zeitintegration von DAE mit jeweils unterschiedlichem Index vor und nach der Indexreduktion mit α -Verfahren analysiert und es konnten Stabilitätskriterien abgeleitet werden. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse dienen zur Entwicklung geeigneter Zeitintegrationsverfahren.

6.1.3 Entwicklung von Zeitintegrationsverfahren

Um die Anforderungen in Kapitel 6.1.1 und Kapitel 6.1.2 zu erfüllen, ist die Entwicklung eines geeigneten Verfahrens nötig. Als Grundlage wird das Generalized - α Verfahren gewählt. Dieses Verfahren erfüllt die Anforderungen an strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren und besitzt gute spektrale Charakteristiken.

Der Index (Differentiationsindex d_i) ist das maßgebende Kriterium für Schwierigkeiten, die bei der Lösung der DAE zu erwarten sind. Die Zeitintegrationsverfahren werden dem Index der DAE angepasst.

Ein wichtiges Kriterium für das Integrationsverfahren ist es Störungen in der Lösung zu vermeiden. Die Entstehung der Störungen lässt sich gut anhand der Vergrößerungsmatrix verfolgen (Kapitel 5.4). Die Werte auf der Hauptdiagonalen der Vergrößerungsmatrix geben an, wie sich die Zeitschrittgrößen nach einer Störung auf sich selbst abbilden. Gilt z.B. $\dot{z}_{k+\Delta t} = -1 (\dot{z}_{k_t})$, so ändert \dot{z}_k in jedem Zeitschritt das Vorzeichen, wodurch eine hochfrequente Störung verursacht wird. Aus der Vergrößerungsmatrix lässt sich auch die Weiterleitung der Störungen erkennen. Die in \dot{z}_k entstehenden Störungen werden auf \ddot{z}_k weitergeleitet. In \ddot{z}_k verstärken sich die Störungen durch die negative Werte auf der Hauptdiagonalen. Die Störungen in $[\dot{z}_k, \ddot{z}_k]$ werden auf $[\underline{z}_s, \dot{\underline{z}}_s, \ddot{\underline{z}}_s]$ und $[[P, P, \ddot{P}]]$ übertragen. In $[[P, P, \ddot{P}]]$ tritt eine erneute Verstärkung auf. Ziel ist es deshalb die Entstehung bzw. Verstärkung der Störungen in $[\dot{z}_k, \ddot{z}_k]$ sowie $[[P, P, \ddot{P}]]$ möglichst gering zu halten.

Die Zeitintegration kann anhand des Ausgangssystems (mit Nebenbedingung auf Lageebene) oder des einfach bzw. zweifach indexreduzierten Systems erfolgen. Die Zeitintegration der einfach indexreduzierten DAE ist am günstigsten. Im Vergleich zum Ausgangssystem treten weniger Störungen auf. Ein Abdriften der Lagekoordinaten wie beim zweifach indexreduzierten System tritt noch nicht auf.

Der weit häufigste Fall gekoppelter Systeme ist die Formulierung der Kopplung über Lagrangesche Nebenbedingungen auf Lageebene (z.B. $z_k=0$). Dieser Fall wird im Folgenden betrachtet (für andere Kopplungsbeschreibungen können die Ergebnisse sinngemäß übertragen werden). Störungen entstehen infolge von Diskretisierungsfehlern und infolge nicht ausreichend oft differenzierbarer Lastfunktionen. Den größten Einfluss besitzt die Rauheit $r(t)$ in der Nebenbedingung. Störungen (nicht ausreichende Differenzierbarkeit) in der Nebenbedingung gehen in der (d_i-1) -ten Ableitung in die Lösung ein. Auch kleine Störungen können große Fehler im Ergebnis verursachen. Die Rauheitsfunktion sollte deswegen (d_i-1) -mal stetig differenzierbar sein. Störungen in den Lastfunktionen $F(t)$ der Gleichgewichtsbedingungen haben einen wesentlich geringeren Einfluss. Hier ist eine (d_i-3) -malige stetige Differenzierbarkeit ausreichend.

Die Darstellung erfolgt anhand von Systemen mit Festhaltungen am Rand. Für Systeme mit Festhaltungen im Inneren gilt das gleiche, da sie auf obige Form transformiert werden können.

6.2 Index 1 Systeme

Die Zeitintegration von Index 1 Systemen mit dem Generalized - α Verfahren ist für $0 \leq \rho_\infty < 1$ unbedingt stabil. Störungen treten lediglich in den Ableitungen der Kontaktkoordinaten \dot{z}_k, \ddot{z}_k und den Ableitungen der Lagrangeschen Parameter $\dot{P}_{dyn}, \ddot{P}_{dyn}$ auf (Abbildung 5.19). Werden als Berechnungsergebnisse die Ableitungen der Kontaktkoordinaten \dot{z}_k, \ddot{z}_k und der Kontaktkräfte $\dot{P}_{dyn}, \ddot{P}_{dyn}$ benötigt, so können diese störungsreduzierter durch Nachdifferentiation bestimmt werden. An die Rauheitsfunktion $r(t)$ müssen keine besonderen Anforderungen gestellt werden.

6.3 Index 2 Systeme

Index 2 Systeme verursachen bei der Zeitintegration größere Probleme als Index 1 Systeme. Die Zeitintegration von Index 2 Systemen mit dem Generalized - α Verfahren ist für $0 \leq \rho_\infty < 1$ unbedingt stabil. Zur Minimierung auftretender Störungen muss die Rauheitsfunktion $r(t)$ einmal stetig differenzierbar sein.

Störungen treten während der Zeitintegration lediglich in den Ableitungen der Kontaktkoordinaten \dot{z}_k, \ddot{z}_k und den Ableitungen der Lagrangeschen Parameter P_{dyn}, \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} sowie in den zweiten Ableitungen der Systemkoordinaten $\ddot{\mathbf{z}}_s$ auf (Abbildung 5.14).

Die Störungen in \dot{z}_k, P_{dyn} und $\ddot{\mathbf{z}}_s$ können durch Differentiation der Nebenbedingung behoben werden. Ein Abdriften tritt dabei praktisch nicht auf (Abbildung 5.16).

Werden als Berechnungsergebnisse die zweiten Ableitungen der Kontaktkoordinaten \ddot{z}_k und die Ableitungen der Lagrangeschen Parameter $\dot{P}_{dyn}, \ddot{P}_{dyn}$ benötigt, so können diese störungsreduzierter durch Nachdifferentiation bestimmt werden.

6.4 Index 3 Systeme

Index 3 Systeme sind am schwierigsten zu integrieren. Die Zeitintegration von Index 3 Systemen mit dem Generalized - α Verfahren ist für $0 \leq \rho_\infty < 1$ unbedingt stabil. Zur Minimierung auftretender Störungen muss die Rauheitsfunktion $r(t)$ zweimal stetig differenzierbar sein.

Störungen treten während der Zeitintegration in den Ableitungen der Kontaktkoordinaten \dot{z}_k, \ddot{z}_k , den Lagrangeschen Parametern P_{dyn} und deren Ableitungen \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} sowie in den zweiten Ableitungen der Systemkoordinaten $\ddot{\mathbf{z}}_s$ auf (Abbildung 5.6).

Durch Differentiation der Nebenbedingung erhält man das indexreduzierte System mit dem Index 2. Es treten Störungen in den zweiten Ableitungen der Kontaktkoordinaten \ddot{z}_k , den Lagrangeschen Parametern P_{dyn} und deren Ableitungen \dot{P}_{dyn} und \ddot{P}_{dyn} auf (Abbildung 5.8). Eine weitere Ableitung der Nebenbedingung würde eine störungsfreie Integration der Lagrange Parameter ermöglichen, jedoch kann bei rheonomen (zeitabhängigen) Nebenbedingungen nicht mehr sichergestellt werden, dass das Abdriften minimal bleibt. Deswegen wird ein anderer Weg beschrieben. Für das einfach indexreduzierte Index 3 System werden die Verfahrensparameter so gewählt, dass auftretende Störungen möglichst geringe Auswirkungen haben.

Hier werden zwei verschiedene Verfahren vorgeschlagen:

- DAISY1
- DAISY2

6.4.1 Differential algebraic integration of structural dynamic systems 1 (DAISY1)

Ziel dieses Kapitels ist es ein möglichst störungsfreies und genaues Integrationsverfahren zu entwickeln. Der Entwicklung liegen die Stabilitätskriterien und die Erkenntnisse hinsichtlich des Mechanismus der Störungsausbreitung aus dem letzten Kapitel zugrunde.

Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren wurden zur Integration von Differentialgleichungen entwickelt und sind für diese Aufgabenstellung sehr gut geeignet. Differentiell algebraische Systeme enthalten neben den Differentialgleichungen der Systemfreiheitsgrade algebraische Gleichungen und Bestimmungsgleichungen für die Kontaktkraft. Für beide letzteren sind strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren schlecht geeignet.

Störungen im Gleichungssystem ergeben sich aufgrund von Diskretisierungs- und Rundungsfehlern. Die Vergrößerungsmatrix zeigt, dass diese von Zeitschritt zu Zeitschritt weitergeleitet werden. Maßgeblich verantwortlich dafür sind negative Werte auf Hauptdiagonalen der Vergrößerungsmatrix. Ziel des Verfahrens ist es nun in den Mechanismus der Weiterleitung der Störungen einzugreifen. Dazu werden die Parameter des Verfahrens günstig gewählt, so dass die negativen Werte auf der Hauptdiagonalen möglichst verschwinden. Die Wahl der Parameter wird jedoch dadurch eingeschränkt, da diese nach wie vor den Anforderungskriterien an das Zeitintegrationsverfahren genügen müssen.

So treten Störungen in der algebraischen Gleichung der DAE (5.38) sowie bei den Bestimmungsgleichungen der Lagrangeschen Parameter auf. Maßgebend hierfür sind die Matrizen $\mathbf{A}_{zk,zk}$ und

$$\mathbf{A}_{P,P}^{17}.$$

¹⁷ Die Vergrößerungsmatrix des Index 2 Systems, indexreduziert auf das Index 1 System besitzt eine ähnliche Struktur (5.71). Das Verfahren kann deswegen auch auf Index 2 Systeme angewandt werden.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta - \gamma + \alpha_f \gamma}{(\alpha_f - 1)\gamma} & \frac{\gamma - 2\beta}{2\gamma} \\ 0 & \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_f - 1)\gamma} & \frac{\gamma - 1}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

Zur Minimierung der Störungen im algebraischen Teil werden die Parameter des Generalized- α Verfahrens gewählt zu:

$$\alpha_f = 0, \quad \alpha_m = -0.5, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 0.5. \quad (6.2)$$

Dabei ist das Kriterium für die Genauigkeit 2. Ordnung

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (6.3)$$

eingehalten.

Negative Werte auf der Hauptdiagonalen von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}$ lassen sich mit diesen Parametern nicht vollständig vermeiden.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_f}{(\alpha_f - 1)} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{\beta - \gamma}{\beta} & \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \\ \frac{1}{(\alpha_f - 1)\beta} & \frac{-1}{\beta} & \frac{2\beta - 1}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Da \dot{P} und \ddot{P} die anderen Zeitintegrationsgrößen nicht beeinflussen können sie, ohne Einbußen an die Genauigkeit der Lagekoordinaten, aus der Nachdifferentiation von P und \dot{P} bestimmt werden.

$$\dot{P} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{\Delta t}, \quad \ddot{P} = \frac{\dot{P}_{t+\Delta t} - \dot{P}_t}{\Delta t}. \quad (6.5)$$

Weiterhin ist es sinnvoll vor der Zeitintegration die dynamische Lasten mit einem Skalierungsfaktor zu belegen $P = w_p * k_p$ (k_p Skalierungsfaktor z.B. $k_p = 1 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^9$), um so ein gut konditioniertes Gleichungssystem zu erhalten.

Das sonstige Vorgehen ist analog dem Generalized- α Verfahren.

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ des DAISY1 – Verfahrens lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}} & \left(2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t - \underline{\mathbf{I}} \right) & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 - \underline{\mathbf{I}} & \left(2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 / \Delta t - 2 \underline{\mathbf{I}} \right) & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 / \Delta t^2 & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{20} & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{21} / \Delta t & 2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & -1 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Hieraus lässt sich erkennen, dass \underline{z}_k und P nun störungsfrei integriert werden, da sämtliche negativen Einträge auf der Hauptdiagonalen verschwinden.

Durch Zusammenfassen einzelner Elemente zu Untermatrizen vereinfacht sich die Vergrößerungsmatrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zk} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,zs} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,zk} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Daraus berechnen sich die Eigenwerte $EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ zu:

$$EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}), EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}), EW(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}) \quad (6.8)$$

Die Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ kann in einen Teil aufgespalten werden, welcher die gewöhnliche Differentialgleichung repräsentiert, und in einen Teil, welcher für die algebraische Nebenbedingung und die Lagrangeschen Parameter steht.

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$ entspricht der Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ eines Einmassenschwingers. Für alle Eigenwerte λ_i von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zs,zs}$ gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, doppelte Eigenwerte sowie der Eigenwert „1“ treten nicht auf ($0 < \Omega < \infty$).

Die Eigenwerte der Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{zk,zk}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P,P}$ sind:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \quad (6.9)$$

Der Eigenwert „1“ tritt nur einfach auf. Alle weiteren Eigenwerte sind „<1“. Die Zeitintegration ist stabil.

Die Genauigkeit von Integrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen wird neben der Ordnung des Verfahrens über die Periodenverlängerung und die numerische Dämpfung beschrieben [Bathe 1986]. Diese sind für verschiedene strukturdynamische Verfahren in den nächsten Grafiken dargestellt.

Periodenverlängerung $(\bar{T} - T) / T$

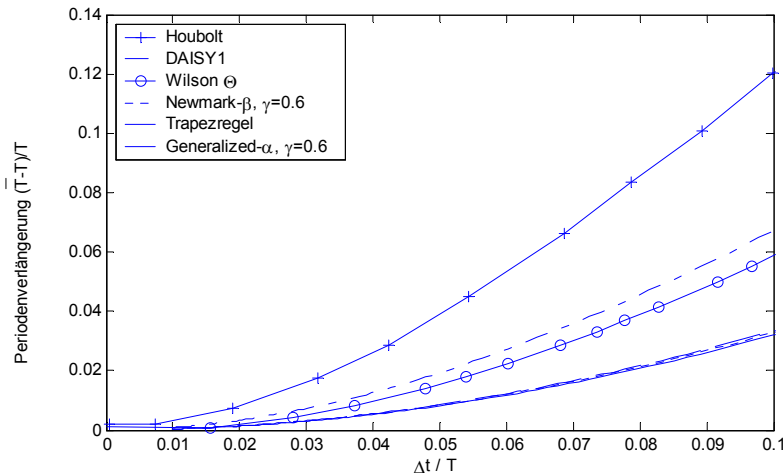


Abbildung 6.1: Periodenverlängerung: Vergleich verschiedene Verfahren

Numerische Dämpfung:

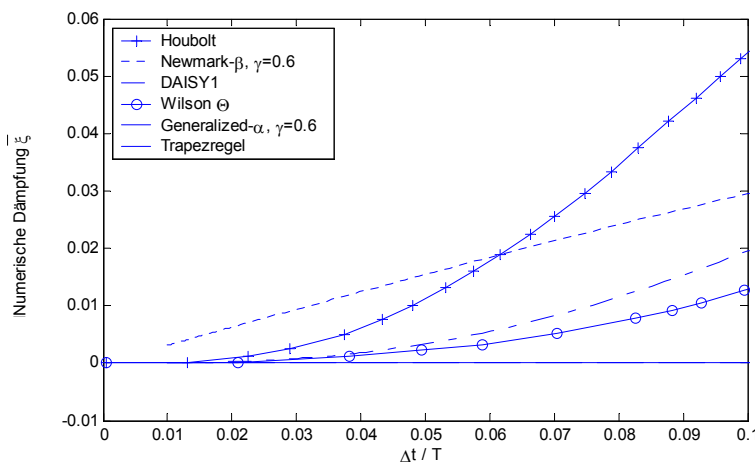


Abbildung 6.2: Numerische Dämpfung: Vergleich verschiedene Verfahren

Das Verfahren besitzt gute spektrale Charakteristiken. Es wird eine Zeitschrittgröße von $\Delta t / T < 0.1$ vorgeschlagen.

Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens zeigt die folgende Berechnung eines Einmassenschwingers mit den Generalized- α Verfahren und mit DAISY1. Das dargestellte System entspricht dabei einem vereinfachten Modell eines LKW, welches häufig in der Literatur für Simulationen verwendet wird. Da die Größe der Störungen von der Dämpferkonstante c abhängt, wurde diese zur Verdeutlichung der auftretenden Effekte sehr groß gewählt. Die Anregung erfolgt über einen Knick in der Fahrbahn, der ebenfalls sehr groß gewählt wurde. Die Zeitintegration erfolgte mit $\Delta t = 0.01$ s.

Der Knick in der Rauheitsfunktion verletzt die Anforderung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit und bringt deswegen Störungen ins Gleichungssystem ein. Damit können Auswirkungen von Störungen untersucht werden.

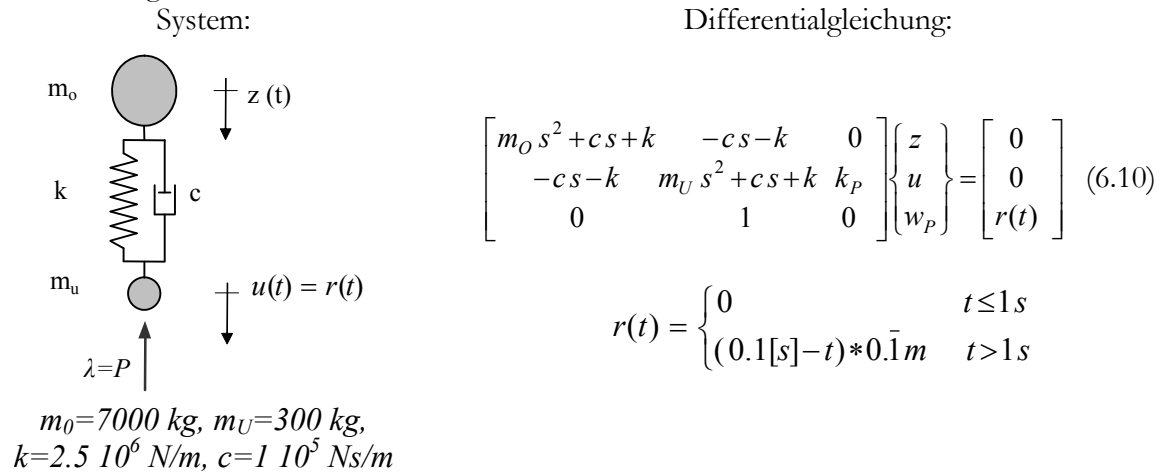


Abbildung 6.3: Einmassenschwinger mit Index 3

Die Berechnung liefert folgendes Ergebnis:

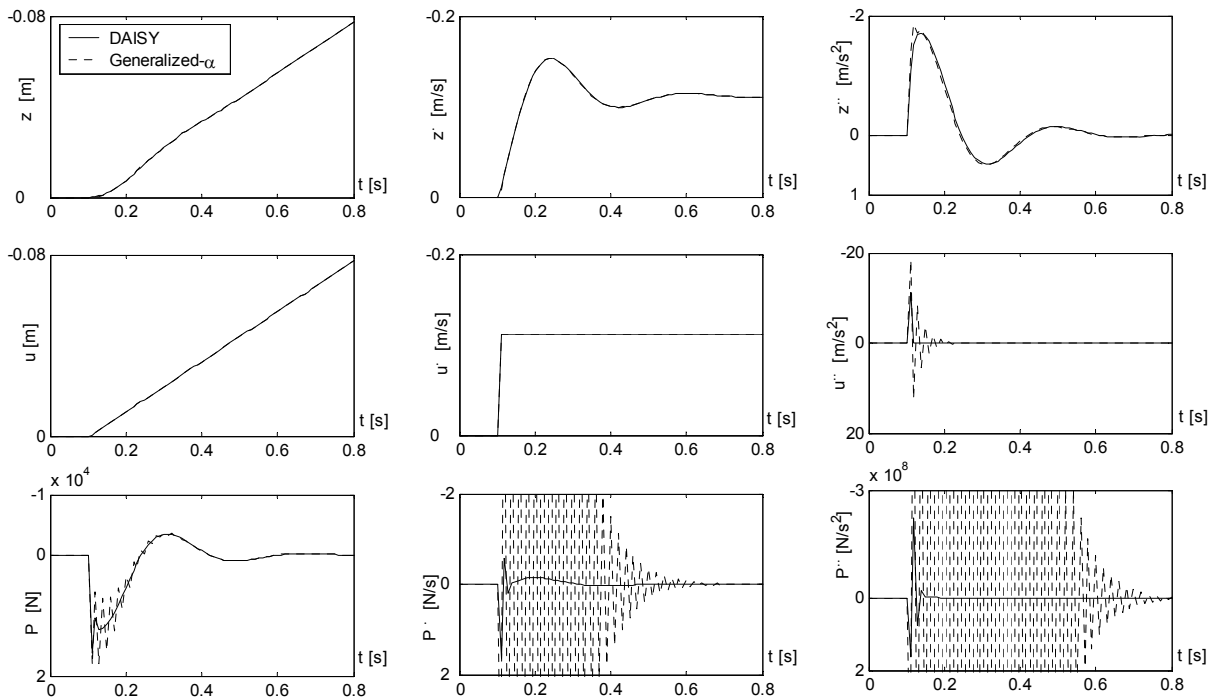


Abbildung 6.4: Vergleich Generalized- α Verfahren, DAISY1

Beim Generalized- α Verfahren sind nur die Zeitintegrationsgrößen z , \dot{z} , u und \dot{u} frei von Störungen. In allen anderen Zeitintegrationsgrößen treten Störungen auf, die zum Teil langsam abklingen. Mit DAISY1 treten kurzzeitige kleinere Störungen in P , \dot{P} und \ddot{P} auf, die aber sehr schnell abklingen.

Mit DAISY1 steht ein leistungsfähiges Verfahren zur Integration strukturdynamischer differentiell-algebraischer Systeme zur Verfügung. Die Zeitintegration erfolgt stabil und praktisch störungsfrei. Die Anforderungen an strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren sind eingehalten. Lediglich die numerische Dissipation ist nicht steuerbar. Das Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung. Die bei der Zeitintegration auftretenden Fehler wie Periodenverlängerung und numerische Dämpfung sind vergleichbar mit anderen strukturdynamischen Verfahren.

6.4.2 Differential algebraic integration of structural dynamic systems 2 (DAISY2)

Die Charakteristika von DAISY1 können weiter verbessert werden, indem für die Systemfreiheitsgrade und für die Kontaktfreiheitsgrade/Lagrangeschen Parameter verschiedene Integrationen verwendet werden.

Ziel des Verfahrens ist es die Entstehung der Störungen in den Lagekoordinaten mit Festhaltungen und den Lagrangeschen Parametern zu verhindern. Dies ist durch eine analoge Vorgehensweise zum Verfahren DAISY1 möglich. Für die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen hingegen wird eine möglichst genaue Zeitintegration angestrebt. Hier werden die Parameter nicht vorgegeben, sondern im Sinne des Generalized- α Verfahren variabel gehalten. Die numerische Dissipation ist damit für die Zeitintegration der Lagekoordinaten ohne Festhaltung steuerbar. Die Genauigkeit des Verfahrens wird höher als bei Verfahren DAISY1. Störungen in den Lagekoordinaten mit Nebenbedingungen und in den Lagrangeschen Parametern werden mit der gleichen Qualität integriert.

Die Wahl unterschiedlicher Verfahrensparameter für die verschiedenen Freiheitsgrade ist möglich, da sich die Koordinaten z_k direkt aus der Nebenbedingung berechnen lassen. Ist z_k bekannt, so ergeben sich die Lagekoordinaten ohne Festhaltungen \underline{z}_s direkt aus den oberen Zeilen des Gleichungssystems. Die Lagekoordinaten mit Festhaltungen wirken hierbei als Fußpunktanregung, da sie bereits bestimmt sind. In einer Nachlaufrechnung werden dann aus den mittleren Zeilen des Gleichungssystems die Lagrangeschen Parameter P bestimmt. Bei gekoppelten Problemen wird analog verfahren.

Für die Zeitintegration muss zunächst sichergestellt werden, dass die Rauheitsfunktion $r(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Bei der Zeitintegration wird die Gleichgewichtsbetrachtung zwischen den Zeitschritten durchgeführt. Dabei wird eine Linearkombination aus Anfangs- und Endzustand der jeweiligen Größe verwendet. Für die Beschleunigungen wird dafür der Faktor α_m (bzw. α_{mk}), für die restlichen Größen der Faktor α_f (bzw. α_{fk}) verwendet.

$$\alpha_{fk} = 0, \quad \alpha_{mk} = -0.5, \quad \gamma_k = 1, \quad \beta_k = 0.5 \quad (6.11)$$

Da \dot{P} und \ddot{P} die anderen Zeitintegrationsgrößen nicht beeinflussen, können sie aus der Differentiation aus P gewonnen werden:

$$\dot{P} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{\Delta t} \quad (6.12)$$

$$\ddot{P} = \frac{\dot{P}_{t+\Delta t} - \dot{P}_t}{\Delta t} \quad (6.13)$$

Die Parameter für \underline{z} werden günstigerweise über den Spektralradius ρ_∞ (für $\Delta t/T \rightarrow \infty$) bestimmt. Damit das Generalized- α Verfahren unbedingt stabil ist, die Genauigkeit 2. Ordnung sowie eine maximale Dämpfung hoher Frequenzen und eine minimale Dämpfung niedriger Frequenzen besitzt muss gelten:

$$0 \leq \rho_\infty \leq 1 \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad \alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (6.14)$$

Die Vergrößerungsmatrix des Verfahrens lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_2 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_3 / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{20} & \underline{\mathbf{C}}_{21} / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{22} / \Delta t^2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}} \right) \kappa_6 \Delta t & \left(\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_4 \right) & \left(\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_6 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_5 \right) / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{20} \kappa_6 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{21} \kappa_6 & \underline{\mathbf{C}}_{22} \kappa_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\mathbf{C}}_1 - \underline{\mathbf{I}} \right) \kappa_1 \Delta t^2 & \left(\underline{\mathbf{C}}_2 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_2 \right) \Delta t & \left(\underline{\mathbf{C}}_3 \kappa_1 - \underline{\mathbf{I}} \kappa_3 \right) & \underline{\mathbf{C}}_{20} \kappa_1 \Delta t^2 & \underline{\mathbf{C}}_{21} \kappa_1 \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_{22} \kappa_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & \underline{\mathbf{0}}^T & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & -1 & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{C}}_5 & \underline{\mathbf{C}}_6 / \Delta t & \underline{\mathbf{C}}_7 / \Delta t^2 & C_{23} & C_{24} / \Delta t & C_{25} / \Delta t^2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Die Eigenwerte der Vergrößerungsmatrix setzen sich aus den Eigenwerten der Untermatrizen $\underline{\mathbf{A}}_{z_s, z_s}$, $\underline{\mathbf{A}}_{z_k, z_k}$ und $\underline{\mathbf{A}}_{p, p}$ zusammen:

$$EW(\underline{\mathbf{A}}) = EW(\underline{\mathbf{A}}_{z_s, z_s}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{z_k, z_k}), EW(\underline{\mathbf{A}}_{p, p}) \quad (6.16)$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{z_s, z_s}$ entspricht der Vergrößerungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ eines Einmassenschwingers. Für alle Eigenwerte λ_i von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{z_s, z_s}$ gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, doppelte Eigenwerte sowie der Eigenwert „1“ treten nicht auf ($0 < \Omega < \infty$, $0 \leq \rho_\infty \leq 1$).

Für die Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{z_k, z_k}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{P, P}$ sind die Eigenwerte zu bestimmen. Diese sind:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3,4,5,6} = 0$$

Der Eigenwert "1" tritt nur einfach auf. Alle weiteren Eigenwerte sind „<1“. Die Zeitintegration ist stabil.

\dot{z}_k ergibt sich nur noch aus der Anregung im aktuellen Zeitschritt, welche hier nicht betrachtet wird. Auftretende Störungen verschwinden schnell. Die störungsfreie Integration von $\underline{\mathbf{z}}_s$, $\underline{\dot{\mathbf{z}}}_s$ und $\underline{\ddot{\mathbf{z}}}_s$ ist damit ebenfalls gewährleistet.

Die Berechnung des Systems nach (Abbildung 6.3) zeigt die Leistungsfähigkeit des Verfahrens:

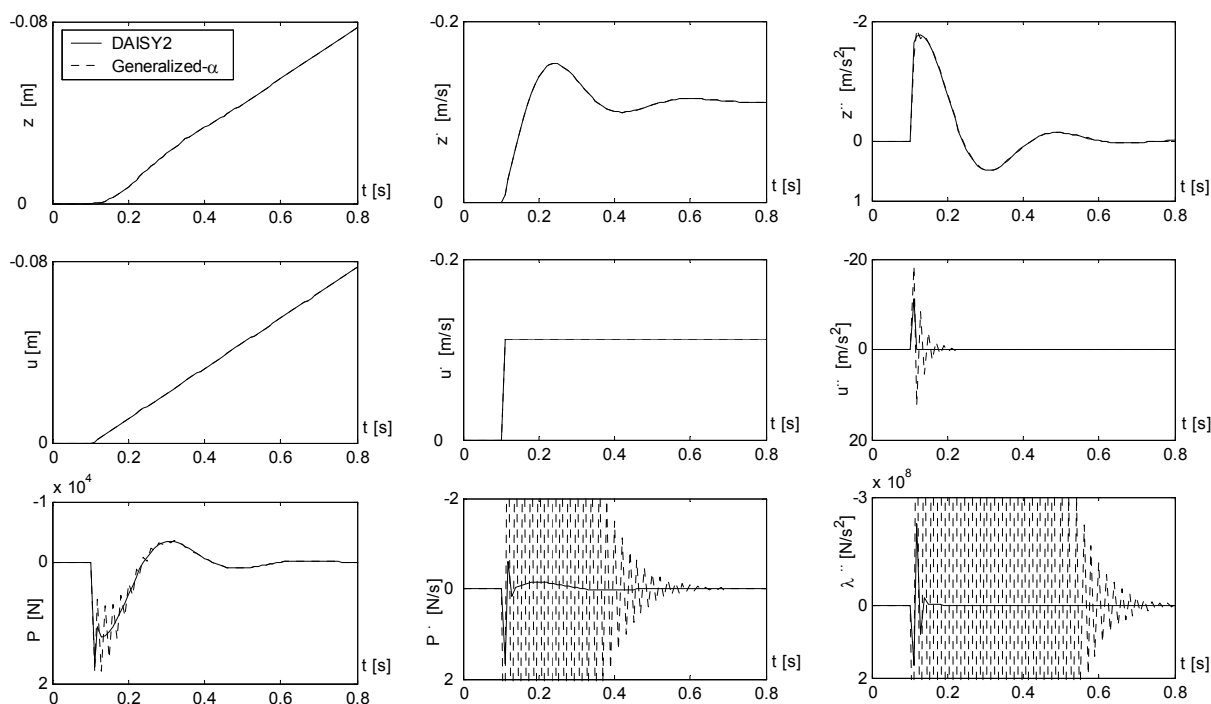


Abbildung 6.5: Vergleich Generalized- α Verfahren, DAISY2

Beim Generalized- α Verfahren sind nur die Zeitintegrationsgrößen z , \dot{z} , u und \dot{u} frei von Störungen. In allen anderen Zeitintegrationsgrößen treten Störungen auf, die zum Teil langsam abklingen. Mit DAISY2 treten kurzzeitige kleinere Störungen in P , \dot{P} und \ddot{P} auf, die aber sehr schnell abklingen.

Die Zeitintegration mit DAISY2 erfolgt stabil und praktisch störungsfrei. Alle Anforderungen an strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren sind hier eingehalten. Das Verfahren besitzt die Genauigkeit 2. Ordnung. Die bei der Zeitintegration auftretenden Fehler wie Periodenverlängerung und numerische Dämpfung sind im Vergleich zu anderen strukturdynamischen Verfahren sehr klein. DAISY2 ist ein extrem leistungsfähiges Verfahren zur Integration strukturdynamischer differentiell-algebraischer Systeme.

7 Kopplung dynamisch kondensierter Modelle

Große Modelle bedürfen eines hohen numerischen Aufwandes zur Lösung der Gleichungssysteme. Eine mögliche Strategie zur Reduzierung des Aufwandes zur Lösung der Systeme ist die Unterteilung in ein Hauptsystem und in Teilsysteme. Die Teilsysteme können dann dynamisch kondensiert werden. Die Dimension der Teilsysteme kann so deutlich reduziert werden. Anschließend werden die kondensierten Teilsysteme wieder an das Hauptsystem angekoppelt.

In Kapitel 7.1 wird die dynamische Kondensation von Modellen diskutiert. Die Ankopplung reduzierter Modelle an das Hauptsystem kann über verschiedene Kenngrößen erfolgen (Kapitel 7.2, 7.5) und bedingt unterschiedliche Strategien (Kapitel 7.4). Weiter werden numerische Verfahren untersucht (Kapitel 7.6).

Die Vorgehensweise ist vom betrachteten System abhängig, da nicht jedes System für diese Technik geeignet ist (Kapitel 7.3).

Im Weiteren wird die Vorgehensweise speziell für diskrete (bzw. diskretisierte) Teilsysteme (Kapitel 7.8) und kontinuierliche Teilsysteme (Kapitel 7.9) gezeigt. Hierbei wird die Kopplung an diskreten Stellen untersucht.

7.1 Dynamische Kondensation

In der Statik ist für die Kondensation der Begriff der Substrukturtechnik gebräuchlich. Dabei wird ein Modell in ein Hauptsystem und in lineare Teilsysteme unterteilt. Das Hauptsystem und das Teilsystem besitzen gemeinsame Freiheitsgrade, die sog. Koppelfreiheitsgrade. Nun ersetzt man die Teilsysteme durch ihre Wirkung, die sie auf das Hauptsystem ausüben. Diese Wirkung kann über die Steifigkeit des Teilsystems (Verhältnis der Kontaktkräfte zu den Verschiebungen) entlang der Koppelfuge charakterisiert werden. Das Teilsystem wird auf eine Steifigkeit entlang der Koppelfuge „kondensiert“. Die Informationen über die Teilsysteme werden über diese Steifigkeit in das Hauptsystem eingebracht. Die Berechnung erfolgt am Hauptsystem. Es liegen nur noch die Freiheitsgrade des Hauptsystems vor, diese werden berechnet. Anschließend werden die Teilsysteme gelöst um die Verschiebungen im Teilsystem zu erhalten. Für kontinuierlich gekoppelte Systeme gilt dies analog.

Die Reduktion der einzelnen Teilsysteme auf ihre Steifigkeit ist in der Dynamik komplizierter, da die (beschleunigungsabhängigen) Trägheits- und die (geschwindigkeitsabhängigen) Dämpfungsterme mit zu berücksichtigen sind.

7.2 Begriffe

Die dynamische Wirkung der Teilsysteme kann über verschiedene Kenngrößen im Frequenzbereich¹⁸ ausgedrückt werden:

- Die Impedanz Z beschreibt den Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft P und der Geschwindigkeit V des Kontaktknotens.

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{V(\omega)} \quad (7.1)$$

- Die Admittanz H beschreibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit V des Kontaktknotens und der Kontaktkraft P . H ist die Inverse zu Z .

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{P(\omega)} \quad (7.2)$$

- Die dynamische Steifigkeit K_{dyn} beschreibt den Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft und der Verschiebung der Kontaktknoten. Mit der dynamischen Steifigkeit kann für eine gegebene Verschiebung direkt (d.h. ohne Inversion des Gleichungssystems) die dazugehörige Last berechnet werden. Die dynamische Steifigkeit kann als der Widerstand eines Systems gegen eine einwirkende harmonische Kraft P mit der Frequenz ω interpretiert werden. W ist die (frequenzabhängige) Antwort des Systems im eingeschwungenen Zustand.

$$K_{dyn}(\omega) = \frac{P(\omega)}{W(\omega)} \quad (7.3)$$

- Die dynamische Flexibilität (Nachgiebigkeit) G_{dyn} beschreibt den Zusammenhang zwischen der Verschiebung des Kontaktknotens W und der Kontaktkraft. G_{dyn} ist die Inverse von K_{dyn} .

$$G_{dyn}(\omega) = \frac{W(\omega)}{P(\omega)} \quad (7.4)$$

Zur Bestimmung dieser Kenngrößen werden zunächst die Teilsysteme in den Frequenzraum transformiert. Alle Kenngrößen, sind im Frequenzbereich in der Regel komplex. Nur wenn Kraft und Geschwindigkeit (Verschiebung) in Phase oder gegenphasig sind, werden die Kenngrößen G , K , Z und H reell.

Der Realteil der Impedanz Z entspricht dem Widerstand (dissipativer Teil), der Imaginärteil der Reaktanz (reaktiver Teil). Für die dynamische Steifigkeit gilt dies umgekehrt.

Da im Frequenzbereich die Ableitungen der Freiheitsgrade verschwinden, kann über diese Größen die Kopplung von Systemen direkt beschrieben werden. Die Kenngrößen eignen sich daher gut,

¹⁸ Größen im Frequenzbereich werden zur besseren Unterscheidbarkeit durch Großbuchstaben, Größen im Zeitbereich durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet.

um die Eigenwerte gekoppelter Systeme zu bestimmen. Die Kopplung im Zeitbereich kann nach der Fourierrücktransformation der Kenngrößen in den Zeitbereich erfolgen. Bei der Fourierrücktransformation ist die Kausalitätsbedingung zu beachten. Die Kenngrößen liefern dann Aussagen über das Verhalten des Teilsystems ohne dass dabei die Differentialgleichung im Zeitbereich gelöst werden muss. (Die Methodik kann als Kombination von Zeit- und Frequenzbereichsmethodik interpretiert werden.)

7.3 Anforderungen an Systeme

Die Methodik eignet sich gut für transiente, gedämpfte Teilsysteme. Bei schwach gedämpften Teilsystemen steigt der Aufwand für die numerische Fourierrücktransformation stark an, da diese über die lange Zeitdauer bis zum fast vollständigen Abklingen des Signals durchgeführt werden muss. Sehr günstig in diesem Zusammenhang sind Wellenausbreitungsvorgänge im Halbraum. Hier wird durch die geometrische Abstrahlung die eingetragene Energie schnell dissipiert.

7.4 Ankopplung reduzierter Modelle

Im Folgenden wird die Vorgehensweise für die Flexibilität G und die Steife K für ein Einfreiheitsgrad Teilsystem kurz dargestellt. Bei Verwendung der Admittanz H bzw. Impedanz Z ergeben sich ähnliche Zusammenhänge.

7.4.1 Ankopplung über die dynamische Flexibilität

Zunächst wird das betrachtete System in den Frequenzbereich transformiert (s. Kapitel 2.3.2.2). Im Frequenzbereich ergibt sich die Verschiebung aus dem Produkt aus der Flexibilität $G(\omega)$ und der Last $P(\omega)$. Die Flexibilität $G(\omega)$ beschreibt dabei das Verhalten des Systems:

$$W(\omega) = G(\omega) \cdot P(\omega) . \quad (7.5)$$

Im Zeitbereich entspricht dies einem Faltungsintegral. Die Fourierrücktransformierte $g(t)$ der im Frequenzbereich bestimmten Flexibilität $G(\omega)$ kann als die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls (=Impulsreaktionsfunktion) interpretiert werden:

$$w(t) = \int_{\tau=0}^t g(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t g(\tau) \cdot P(t-\tau) d\tau . \quad (7.6)$$

Anstatt der Bewegungsgleichung des Teilsystems ist nun die (algebraische, retardierte) Verschiebungsbedingung (7.6) zu erfüllen. Diese kann problemlos in die Kopplungsnebenbedingung einge-

setzt werden. Das Gleichungssystem ergibt sich aus den Gleichungen des Hauptsystems und der Kopplungsnebenbedingung (welche das Verhalten des Teilsystems enthält).

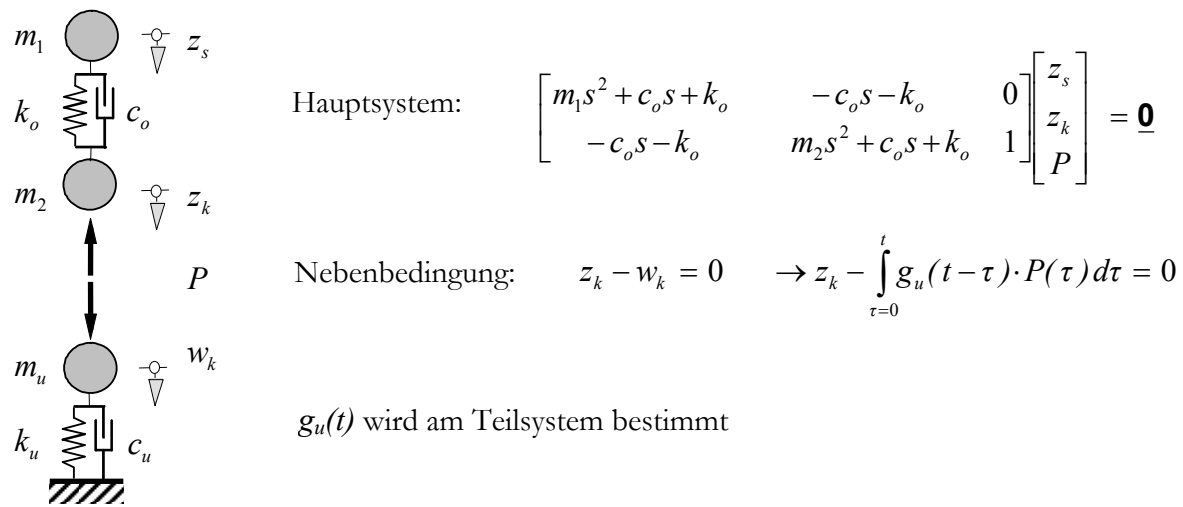


Abbildung 7.1: Ankopplung des Teilsystems über die Flexibilität

Für die Anzahl Freiheitsgrade des Gesamtsystems gilt: $n_{ges} = n_h + n_l$ (n_l = Anzahl der Nebenbedingungen). Das Gleichungssystem setzt sich aus den Differentialgleichungen des Hauptsystems und der retardierten algebraischen Nebenbedingung zusammen. Es kann daher als retardiertes differentiell algebraisches Gleichungssystem (RDAE) gekennzeichnet werden.

7.4.2 Ankopplung über die dynamische Steife

Für die Steifigkeit K gilt analog:

$$P(\omega) = K(\omega) \cdot w(\omega) . \tag{7.7}$$

Im Zeitbereich entspricht dies wiederum einer Faltung:

$$P(t) = \int_{\tau=0}^t k(t-\tau) \cdot w(\tau) dt = \int_{\tau=0}^t k(\tau) \cdot w(t-\tau) dt \tag{7.8}$$

Die Fourierreücktransformierte $k(t)$ der im Frequenzbereich bestimmten Steife $K(\omega)$ entspricht der Kraft, die auf ein System aufgebracht werden muss, damit dieses eine Einheitsverschiebung erfährt (Einheitsverschiebungskraft).

Da die Koppelkraft direkt vorliegt, kann bei gekoppelten Problemen die Gleichung (7.8) in das Gleichungssystem des Hauptsystems eingesetzt werden. Eine extra Nebenbedingung ist nicht mehr nötig.

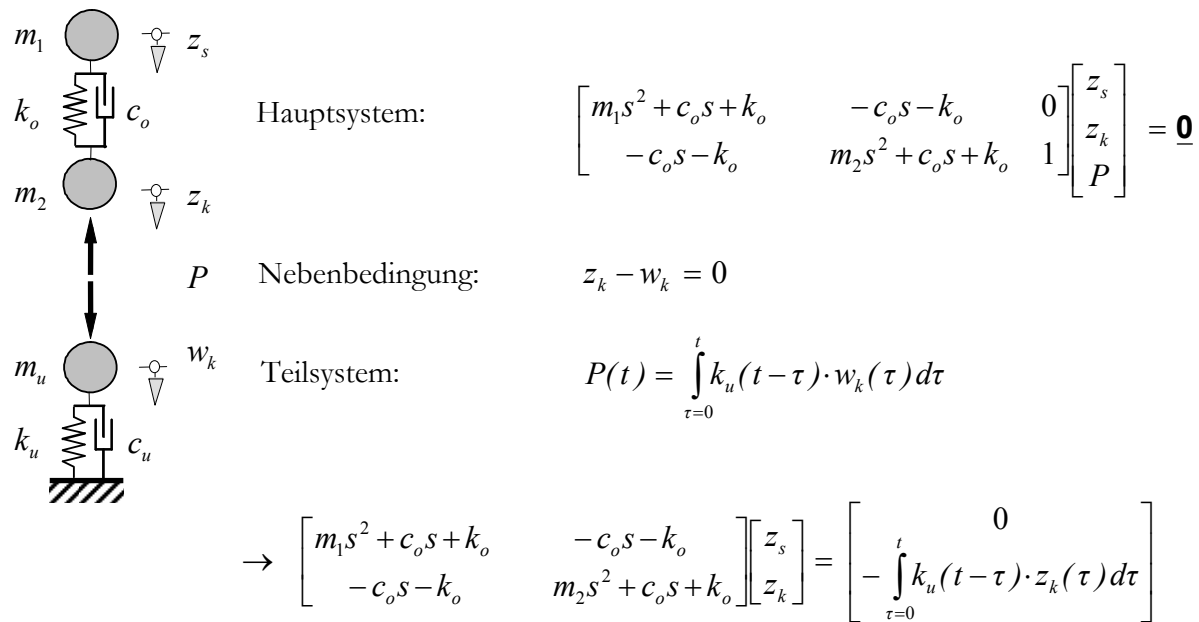


Abbildung 7.2: Ankopplung des Teilsystems über die Steife

Das Gesamtsystem hat die gleiche Dimension wie das Hauptsystem $n_{ges} = n_h$. Das Gleichungssystem setzt sich aus den Differentialgleichungen des Hauptsystems und der retardierten Last zusammen. Es kann daher als retardiertes Differentialgleichungssystem (RDGL) gekennzeichnet werden.

7.5 Günstige Wahl der Kenngröße im Hinblick auf numerische Fourierrücktransformation

Die numerische Fourierrücktransformation der Flexibilität kann in der Regel gut durchgeführt werden. So lautet die Flexibilität eines Einmassenschwingers:

$$G_{\text{dyn,T}}(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega c + k} \quad (7.9)$$

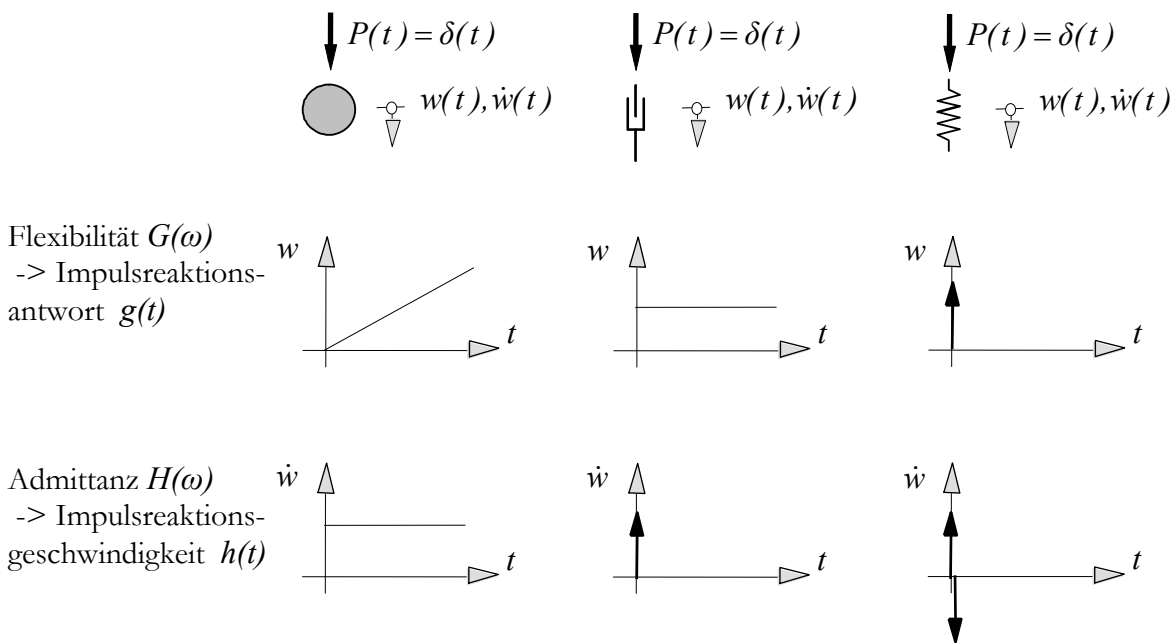
Die Flexibilität $G(\omega)$ klingt mit hohen (Kreis-)Frequenzen ω schnell ab. Die maßgeblichen Anteile von $G(\omega)$ befinden sich im unteren Frequenzbereich. Bei der numerischen Fourierrücktransformation muss der Frequenzbereich nach oben begrenzt werden. Die Abschneidefehler aus dieser Begrenzung des Frequenzbereichs sind damit klein. Bei kontinuierlichen Systemen ist das Abklingverhalten von G nicht mehr so stark ausgeprägt.

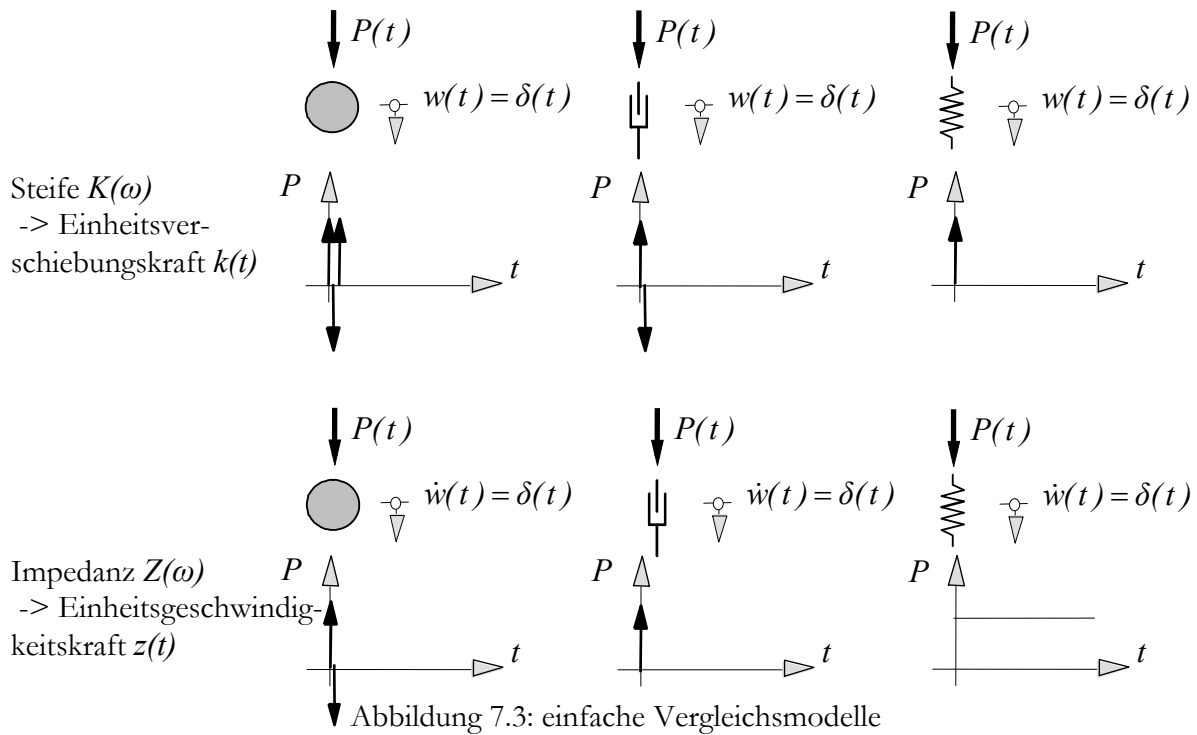
Bei Verwendung der Steife $K(\omega)$ ergeben sich jedoch häufig Schwierigkeiten bei der numerischen inversen Fouriertransformation. Für einen Einmassenschwinger ist die dynamische Steife:

$$K_{\text{dyn,T}}(\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k \tag{7.10}$$

Die Steife nimmt mit hohen Frequenzen zu. Bei der numerischen Fourierrücktransformation muss der Frequenzbereich nach oben begrenzt werden, womit die großen Anteile der Steife unberücksichtigt bleiben. Damit kann die Steife nicht mehr richtig abgebildet werden. Bei kontinuierlichen Systemen können die hochfrequenten Anteile von K ebenfalls relevant sein.

Wann Schwierigkeiten bei der numerischen inversen Fouriertransformation auftreten, kann anhand von einfachen Ersatzsystemen abgeschätzt werden. Dazu sind in der folgenden Abbildung die Impulsreaktionsfunktionen bzw. die Einheitsverschiebungskräfte für verschiedene einfache Teilsysteme an der Koppelstelle dargestellt. Tritt in der jeweiligen Antwort w , \dot{w} oder P ein Dirac - Impuls (bzw. Ableitungen davon) auf, so ist davon auszugehen, dass dieses System mit der entsprechenden Methodik kaum numerisch beschrieben werden kann. Der Impuls bzw. Ableitungen davon besitzen Anteile mit sehr hohen Frequenzen im Spektrum, was einer numerischen inversen Fouriertransformation Probleme bereitet. Die unendlich steilen Flanken bei einem Dirac - Impuls sind numerisch bei der Fourierrücktransformation schlecht beschreibbar

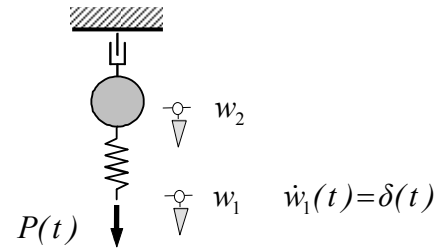
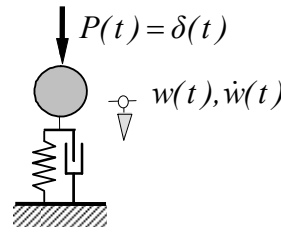




Die Abbildung zeigt, dass ein Teilsystem, das am Koppelpunkt eine Masse oder einen viskosen Dämpfer enthält, über die Flexibilität im Zeitbereich gut beschrieben werden kann. Liegt eine Masse am Koppelpunkt vor, so kann das System ebenfalls über die Admittanz beschrieben werden. Eine Feder (und kein Dämpfer bzw. keine Masse am Koppelpunkt) ermöglicht die Beschreibung über die Impedanz im Zeitbereich.

Beispiel: Beschreibung von Systemen über Flexibilität/Impedanz

Teilsystem
 $m=1000\text{kg}$
 $k=2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
 $c=2.5 \cdot 10^2 \text{ Ns/m}$



DGL:

$$m \cdot \ddot{w} + c \cdot \dot{w} + k \cdot w = P(t) = \delta(t)$$

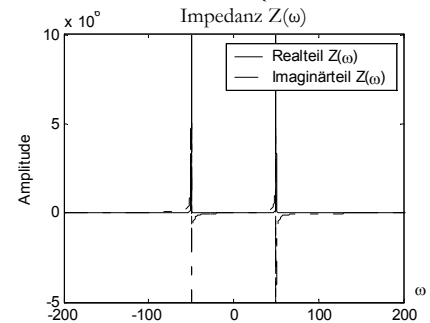
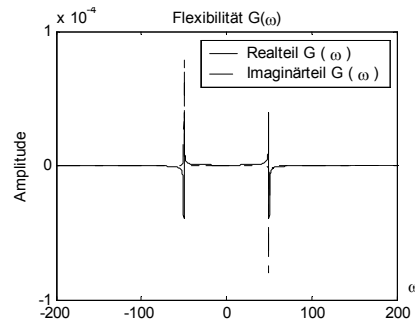
$$m \cdot \ddot{w}_2 + c \cdot \dot{w}_2 + k \cdot w_2 - k \cdot w_1 = 0$$

$$k \cdot w_1 - k \cdot w_2 = P(t)$$

Beschreibung im Frequenzbereich

$$G_{dyn}(\omega) = \frac{W(\omega)}{P(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega c + k}$$

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{i\omega} \left(k - \frac{k^2}{k - m \cdot \omega^2} \right)$$



Analytische Lösung

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$\delta = c/2m$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \delta^2 / \omega^2}$$

Impulsreaktionsfunktion g(t)

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) \quad t > 0$$

Einheitsgeschwindigkeitskraft z(t)

$$z(t) = k \cdot \cos(\omega_d \cdot t) \cdot e^{-\delta t} \quad t > 0$$

Numerische Rücktransformation

$$n = 2^{19}, T_{max} = 524.288 \text{ s}, \Delta t = 0.001 \text{ s}, df = 0.0019 \text{ Hz}$$

Vergleich analytische und numerische Lösung

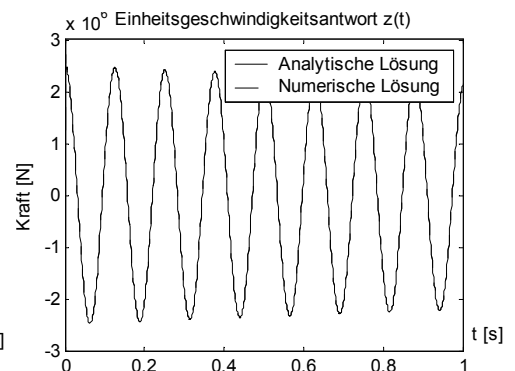
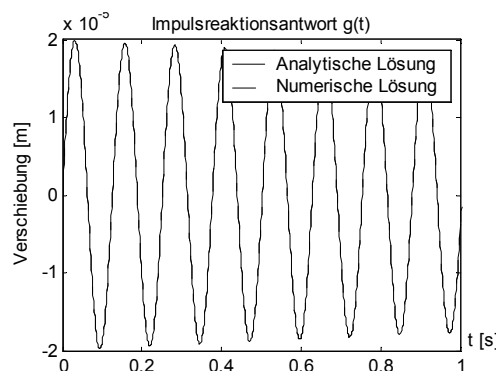


Abbildung 7.4: Beispiele zur Bestimmung der Zeitantwort

Einzig der Anfangssprung wird beim zweiten System nicht richtig abgebildet und es treten kleine Störungen auf. Da dieser Wert im Faltungsintegral bei jedem Zeitschritt mit der aktuellen Last multipliziert wird, ergeben sich in jedem Zeitschritt neue Fehler. Der Fehler ist unabhängig von der Anzahl der Datenpunkte n bei der Fourierrücktransformation.

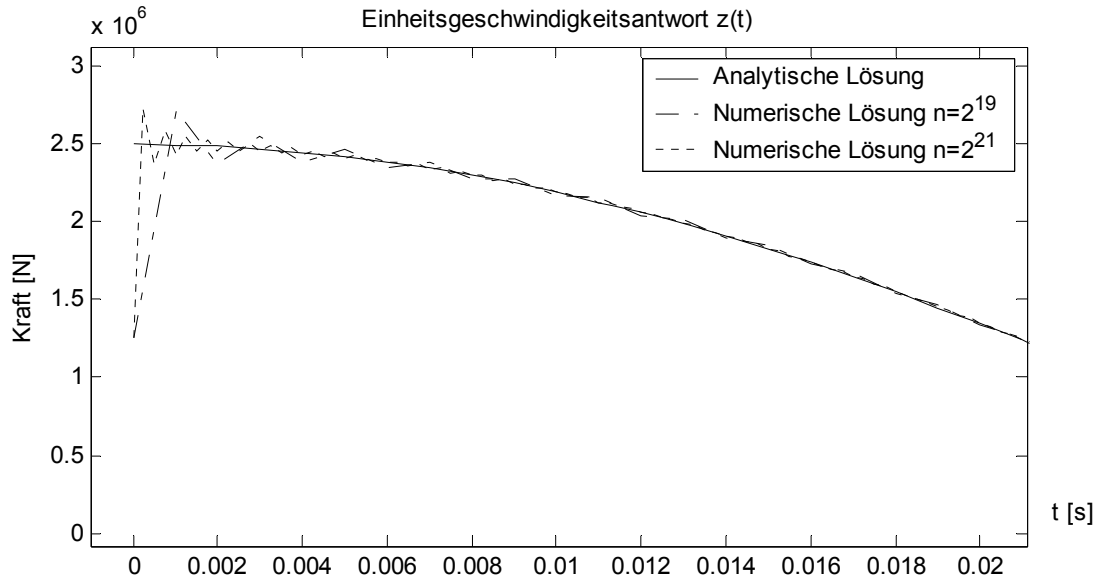


Abbildung 7.5: numerischer Fehler bei Anfangssprung $z(t)$

Bei kontinuierlichen Systemen ist die Masse über die Ausdehnung verteilt. Die Wirkung der Masse muss daher erst durch die sich ausbreitenden Wellen aktiviert werden. Ein einwirkender Impuls bewirkt daher eine sofortige Verschiebung. Das Systemverhalten liegt qualitativ zwischen dem einer diskreten Masse und dem eines viskosen Dämpfers.

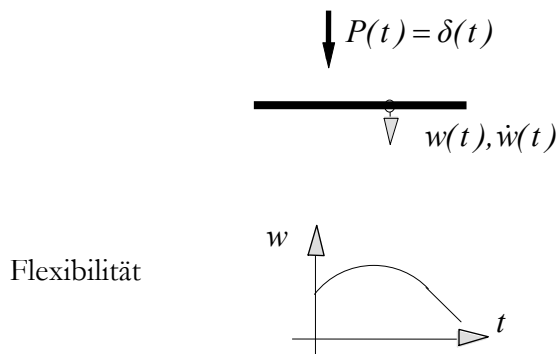


Abbildung 7.6: Impulsantwort eines kontinuierlichen Systems

Da die Masse im Lauf der Zeit aktiviert wird, ist die Beschreibung über ihre Flexibilität bzw. ihre Admittanz numerisch schwieriger als im Fall diskreter Systeme. Eine mögliche Strategie ist in Kapitel 7.6 erläutert.

7.6 Numerische Umsetzung der Faltung

In der Regel ist es nicht möglich die Faltungsintegrale analytisch zu lösen. Die numerische Lösung erfolgt durch Diskretisierung und numerische Integration. Das Vorgehen wird beispielhaft für die Impulsreaktionsfunktion $g(t)$ gezeigt:

$$w(t) = \int_{\tau=0}^t g(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau \tag{7.11}$$

Die Diskretisierung erfolgt durch Abtastung in konstanten Zeitintervallen $\Delta\tau$. Danach werden die Verläufe von $g(t-\tau)$ und $P(\tau)$ approximiert, i. d. R. durch Annahme eines konstanten Werts über den Zeitschritt (Mittelwert). Die Annäherung durch einen linearen Verlauf wäre genauer [Linhard 2005], zeigt jedoch, dass dies zu instabilen Berechnungsergebnissen führen kann.

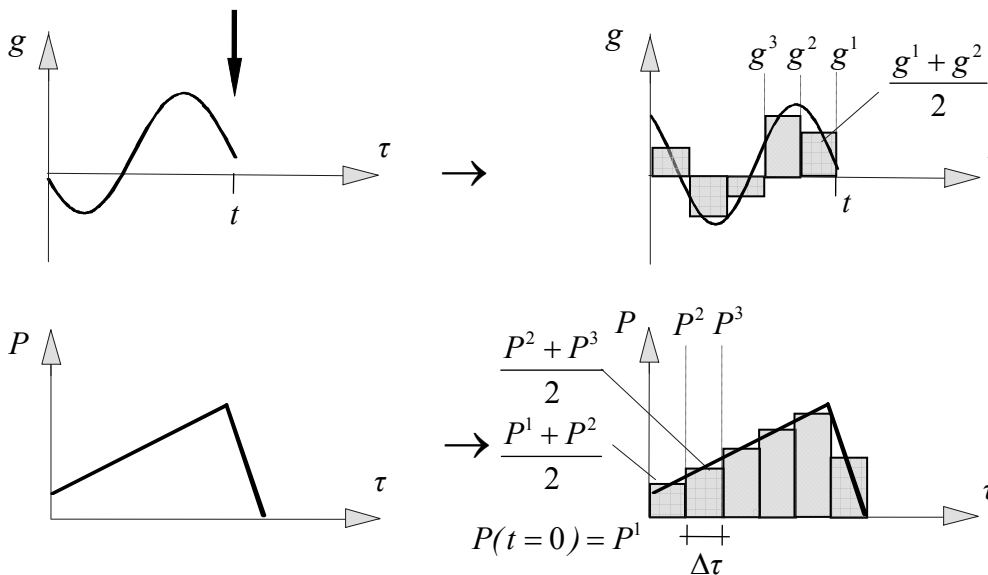


Abbildung 7.7: Bestimmung der Systemantwort aus der Impulsreaktionsfunktion g

$$w^{i+1} = \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot \frac{g^{i-k+1} + g^{i-k+2}}{2} \cdot \Delta t =$$

$$w^{akt} = \underbrace{P^{i+1}}_{p^{akt}} \cdot \underbrace{\frac{g^1 + g^2}{4}}_k \cdot \Delta t + \underbrace{\frac{P^i}{2} \cdot \frac{g^1 + g^2}{2} \cdot \Delta t + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot \frac{g^{i-k+1} + g^{i-k+2}}{2} \cdot \Delta t}_{w^{hist}} \tag{7.12}$$

Die aktuelle Verschiebung w^{i+1} am Ende des i -ten Zeitschritts berechnet sich aus der aktuellen Koppelkraft P^{akt} multipliziert mit einem Steifigkeitsterm und aus Verschiebungen infolge der Kontaktkraft zu früheren Zeitpunkten w^{hist} ¹⁹.

¹⁹ Die Impulsreaktionsfunktion g kann für $t=0$ von Null verschiedene Werte annehmen. Das gilt ebenso für g_s .

Bei dieser Vorgehensweise müssen sowohl für $g(t-\tau)$ wie auch $P(\tau)$ die Verläufe approximiert werden, bevor über das Produkt $g(t-\tau) \cdot P(\tau)$ integriert werden kann. Günstiger ist es die Integration „vorzuziehen“ und zunächst über die Impulsreaktionsfunktion g zu integrieren. Man erhält aus dem Integral über die Impulsreaktionsfunktion die Sprungreaktionsfunktion $g_s(t-\tau)$. Zur Berechnung der Antwort muss noch zusätzlich ein Anteil infolge des Anfangssprunges $P^1 \cdot g_s(t)$ berücksichtigt werden. Damit ergibt sich die Antwort

$$w(t) = P^1 \cdot g_s(t) + \int_{\tau=0}^t g_s(t-\tau) \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (7.13)$$

und die Ableitung der Antwort nach der Zeit zu

$$\dot{w}(t) = P^1 \cdot \dot{g}_s(t) + \int_{\tau=0}^t \dot{g}_s(t-\tau) \cdot \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (7.14)$$

Bei der numerischen Berechnung werden die Funktionswerte von g_s am Ende des Zeitschritts mit dem approximierten Verlauf über die Kontaktkraft multipliziert. Diese Vorgehensweise ist in der nächsten Skizze dargestellt:

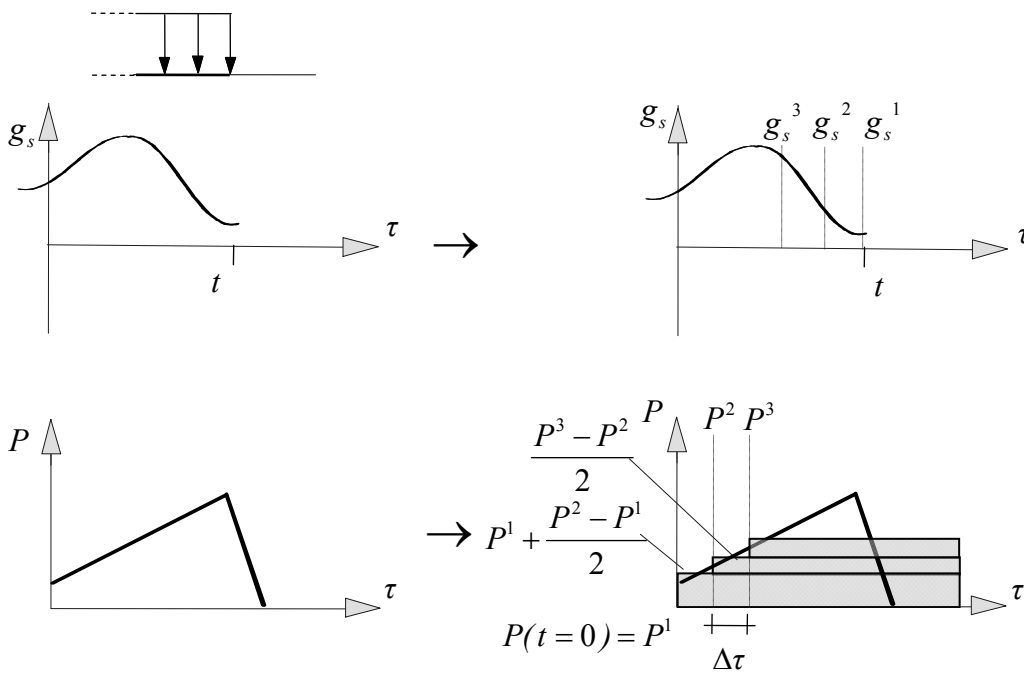


Abbildung 7.8: Bestimmung der Systemantwort aus dem Faltungintegral über die Sprungreaktionsfunktion g_s

Für die numerische Umsetzung ist es günstiger die Lastfunktion in Rechtecklasten aufzuteilen. In diesem Fall ergibt sich die Antwort dann aus dem Faltungsintegral über die Rechteckreaktionsfunktion g_R .

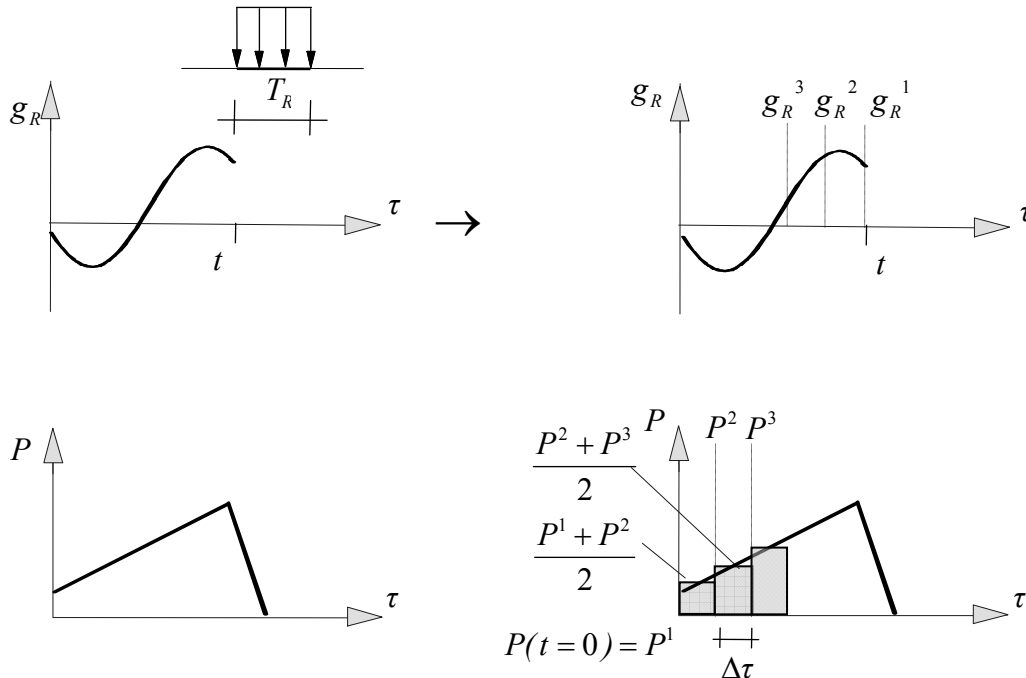


Abbildung 7.9: Bestimmung der Systemantwort aus dem Faltungsintegral über die Rechteckreaktionsfunktion g_R

Die obigen Formeln können auf diese Strategie leicht übertragen werden. g_R^l kennzeichnet im Folgenden immer die Rechteckreaktionsfunktion **nach** Einwirkung der ersten Rechteckfunktion. Die Auslenkung w ergibt sich aus

$$w^{i+1} = \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_R^{i-k+1} =$$

$$\underbrace{w^{akt}}_{w^{akt}} = \underbrace{P^{i+1}}_{P^{akt}} \cdot \underbrace{\frac{g_R^1}{2}}_k + \underbrace{P^i \cdot \frac{g_R^1}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_R^{i-k+1}}_{w^{hist}} \quad (7.15)$$

und die Geschwindigkeit aus:

$$\dot{w}^{i+1} = \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot \dot{g}_R^{i-k+1} =$$

$$\underbrace{\dot{w}^{akt}}_{w^{akt}} = \underbrace{P^{i+1}}_{P^{akt}} \cdot \underbrace{\frac{\dot{g}_R^1}{2}}_k + \underbrace{P^i \cdot \frac{\dot{g}_R^1}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot \dot{g}_R^{i-k+1}}_{w^{hist}} \quad (7.16)$$

Interpretation: Die Impulsreaktionsfunktion entspricht der Antwort eines Systems infolge Belastung durch einen Dirac- Impuls

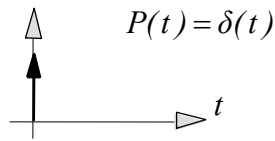


Abbildung 7.10: Belastung durch Dirac-Impuls

Die Rechteckreaktionsfunktion ergibt sich infolge Belastung über eine Einheitsrechtecklast mit der Einwirkungsdauer T_R :

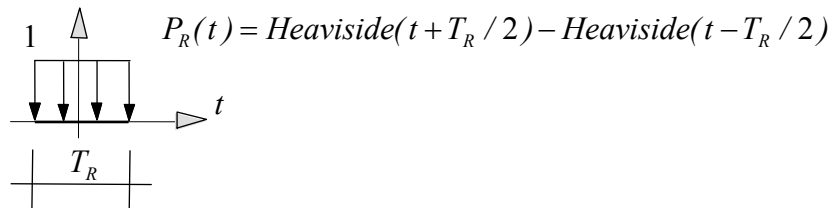


Abbildung 7.11: Belastung durch Rechtecklast

Im Zeitbereich kann die Rechtecklast formal über

$$P_R(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \delta(\tau) \cdot P_R(t - \tau) dt \tag{7. 17}$$

beschrieben werden. Diese Faltung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich. Daher kann die Rechteckantwort durch Multiplikation der Flexibilität $G(\omega)$ (Fouriertransformierte der Impulsreaktionsantwort) und der Fouriertransformierten der Rechteckfunktion im Frequenzbereich bestimmt werden. Die analytisch bestimmbare Flexibilität $G(\omega)$ muss daher vor der Fourierrücktransformation lediglich mit einem „Spaltsinus“ multipliziert werden.

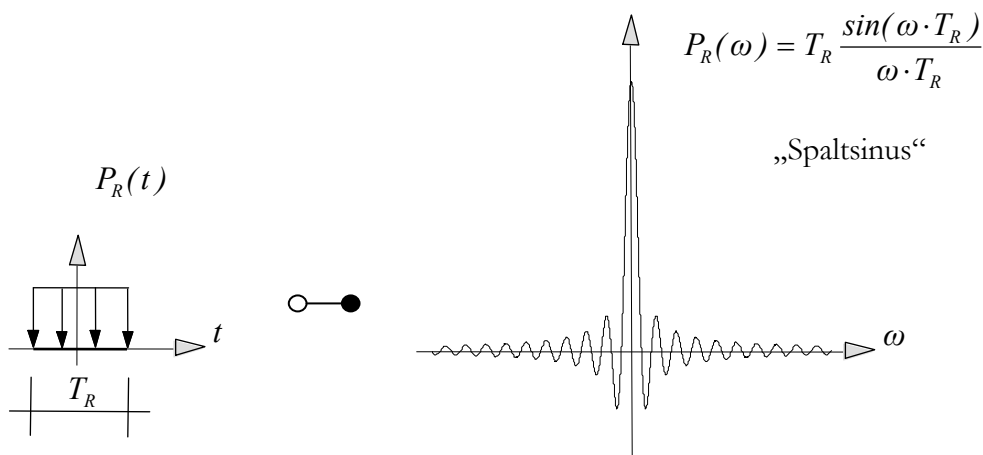


Abbildung 7.12: Rechtecklast und Spaltsinus

Der Spaltsinus klingt mit $1/\omega$ ab und verbessert so das Abklingverhalten von $G(\omega)$ im Frequenzbereich ebenfalls. Diejenigen Vergleichsmodelle in Abbildung 7.3, deren Systemantwort ein Dirac Impuls war (was einer im Frequenzbereich konstanten Funktion entspricht) können nun integriert werden. Die Rechteckreaktionsantwort nach Ende der Einwirkung wird bei Verwendung einer Rechteckfunktion erhalten, die von $[-T_R;0]$ wirkt.

Ein verbessertes Abklingverhalten kann auch durch Multiplikation mit einer Exponentialfunktion erreicht werden. Bei der numerischen Berechnung des Faltungsintegrals muss dann aber immer noch der Verlauf der Antwortfunktion approximiert werden. Deswegen ist die Verwendung der Rechteckreaktionsfunktion günstiger.

Numerische Berechnungsergebnisse der Systemantwort unter Verwendung einer Impulsreaktionsfunktion und einer Rechteckreaktionsfunktion werden im Folgenden gegenübergestellt, um beide Vorgehensweisen miteinander zu vergleichen. Dabei wird ein Wellenausbreitungsvorgang an einem Stab und eine Schwingung an einem Einmassenschwinger untersucht, um die Eignung der Verfahren für verschiedene Systeme studieren zu können.

1. Wellenausbreitung und Reflexion im Stab

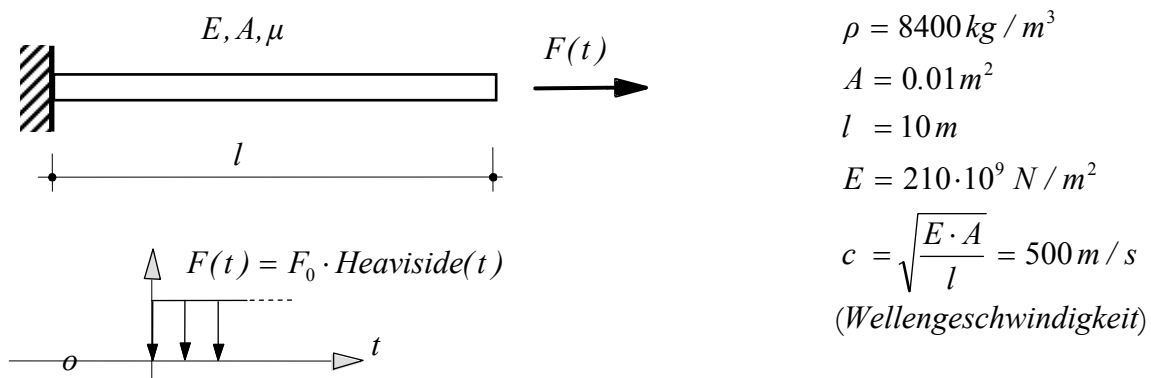


Abbildung 7.13: Beispiel: Wellenausbreitung im Stab

Die analytische Lösung u_l der Stabendverschiebung für diesen Lastfall kann z.B. über die Methode der Randlelemente hergeleitet werden (wobei der „Rand“ hier lediglich aus den Enden des Stabes besteht):

$$\begin{aligned}
 u_l &= \frac{1}{mc} \cdot F_0 \cdot t & t < \frac{2 \cdot l}{c} \\
 u_l &= \frac{1}{mc} \cdot F_0 \cdot \left(\frac{2 \cdot l}{c} - t \right) & \frac{2 \cdot l}{c} < t < \frac{4 \cdot l}{c} \\
 u_l &= \frac{1}{mc} \cdot F_0 \cdot t & \frac{4 \cdot l}{c} < t < \frac{6 \cdot l}{c}
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

Der analytische Verlauf von $g(t)$ und $g_R(t)$ sind in der nächsten Abbildung dargestellt:

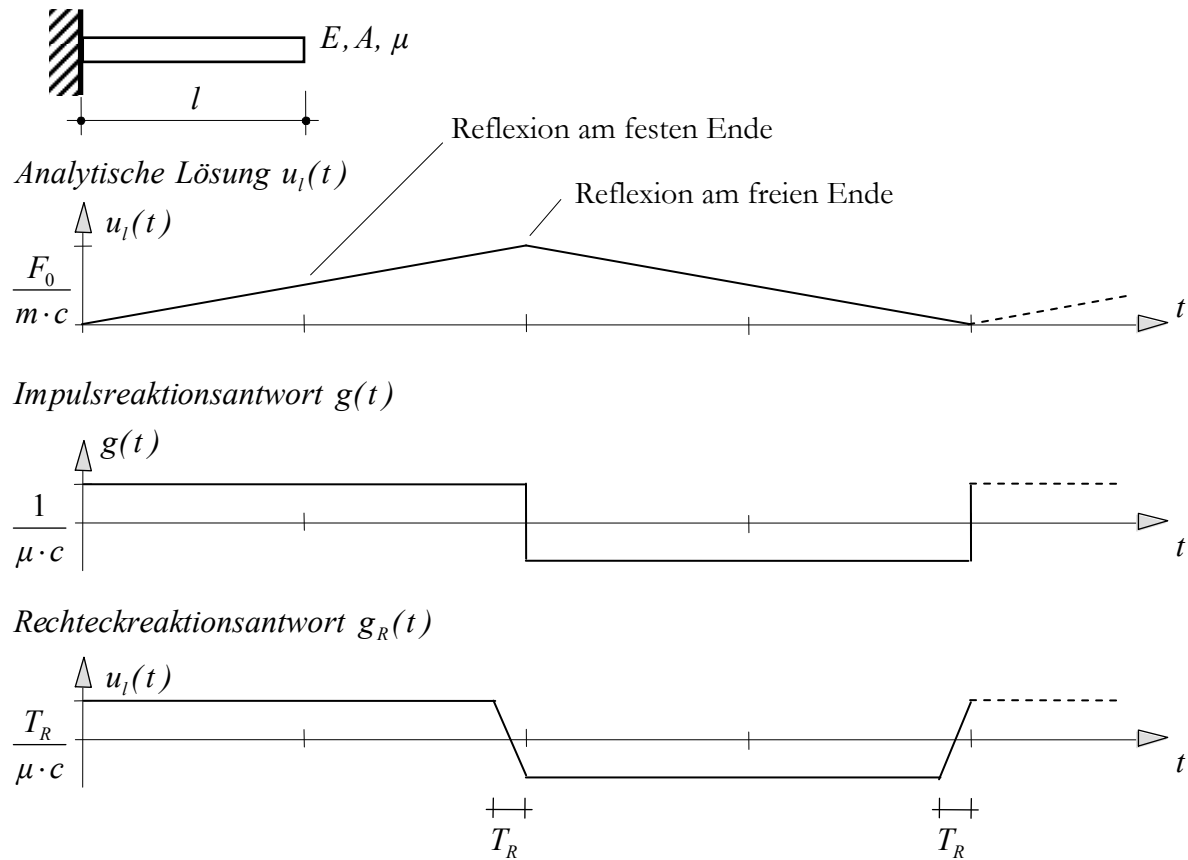


Abbildung 7.14: Beispiel: Wellenausbreitung im Stab: Analytische Lösung, Impuls- und Rechteckreaktionsantwort

Die berechneten Antworten sind in der nächsten Abbildung dargestellt. Die Zeitschrittgröße wurde dabei mit $\Delta t = 0.0015$ s im Vergleich zur Laufzeit der Stoßwelle sehr grob gewählt. Eine hin- und rücklaufende Welle wird dabei über ca. 5 Stützstellen berechnet.

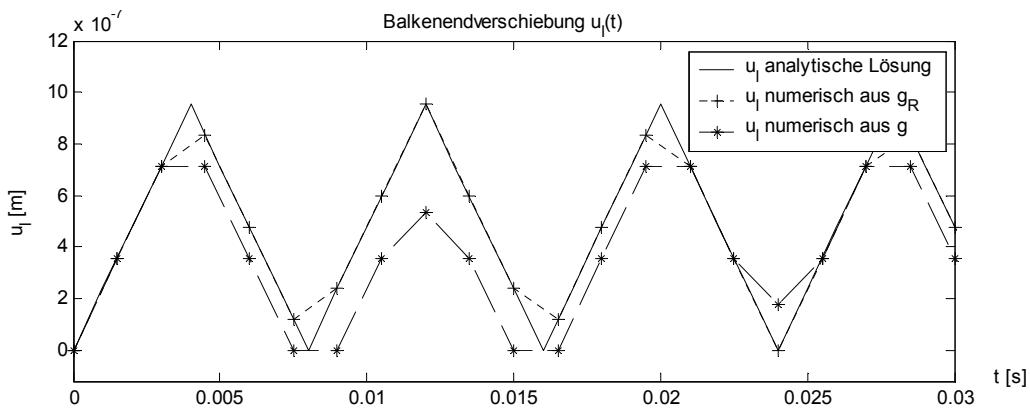
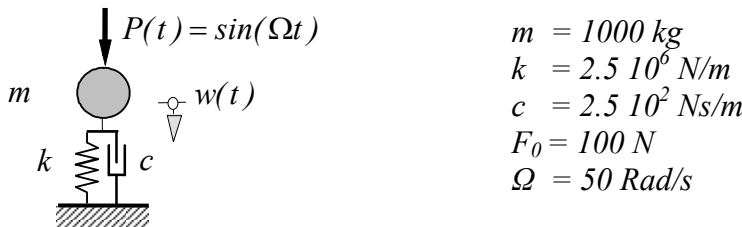


Abbildung 7.15: Beispiel: Wellenausbreitung im Stab: Vergleich von analytischer und numerischer Lösung

Die numerische Berechnung mit der analytischen Rechteckreaktionsfunktion $g_R(t)$ liefert in den Stützstellen das exakte Ergebnis. Abweichungen ergeben sich, wenn die Werte zwischen den Stützstellen linear interpoliert werden und dabei die Zeitpunkte der Wellenreflexion nicht bestimmt werden. Dass analytische und numerische Lösung übereinstimmen, liegt daran, dass der (konstante) Lastverlauf zwischen den Stützstellen richtig interpoliert wird. Da die Integration vorgezogen wurde, werden keine weiteren Näherungen eingeführt.

Dahingegen weichen die numerischen Berechnungsergebnisse bei Verwendung der analytischen Impulsreaktionsfunktion $g(t)$ von der richtigen Lösung ab. Hier wird zusätzlich der Verlauf von $g(t)$ approximiert. Die Sprünge in $g(t)$ können dabei nicht richtig abgebildet werden. Eine Verkleinerung der Schrittweite verbessert das Berechnungsergebnis.

2. Schwingung eines Einfreiheitsgradsystems, Anregung in Resonanz



$$g(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$g_R(t) = - \frac{(-\sin(\omega_D \cdot t) \cdot t + \sin(\omega_D \cdot t) \cdot t \cdot \text{Heaviside}(t) - \sin(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot T_R \cdot e^{\delta \cdot t})}{m \cdot \omega_D} \cdot \exp(-\delta \cdot t)$$

Abbildung 7.16: Beispiel: Einmassenschwinger unter resonanter Anregung

Die Zeitschrittgröße wurde , bei einer Periodendauer der Schwingung von ca. 0.12 s, zu $\Delta t=0.01 \text{ s}$ gewählt.

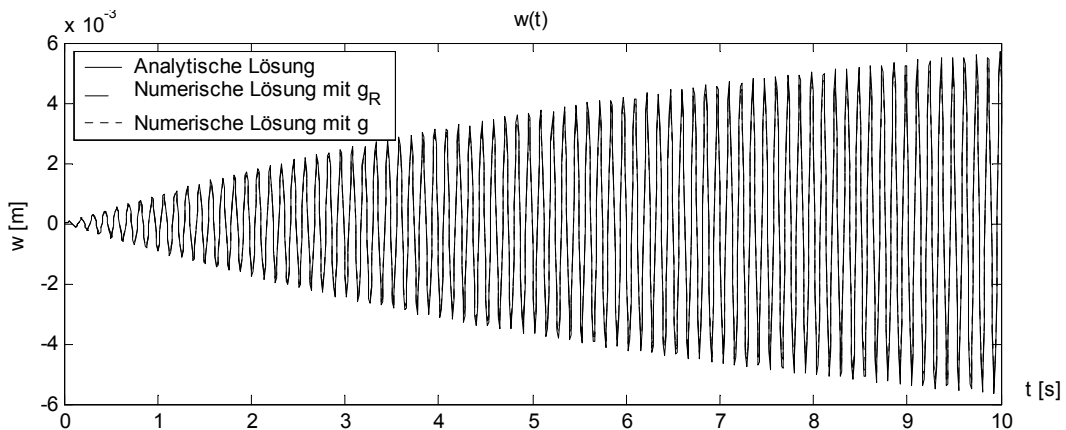


Abbildung 7.17: Beispiel: Einmassenschwinger: Vergleich analytische und numerische Lösung

Die Übereinstimmung ist wiederum sehr gut. Nach 10 s beträgt die Abweichung bei der Verwendung von $g_R(t)$ ca. 5% und bei Verwendung von $g(t)$ ca. 6.5 %. Die Rechteckreaktionsfunktion $g_R(t)$ liefert nicht mehr das exakte Ergebnis, da bei Diskretisierung der Last P numerische Fehler entstehen.

Das Verfahren hat den Vorteil, dass die Schwingungsantwort infolge einer resonanten Anregung gut berechnet werden kann. Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren bilden die Periodendauer eines Schwingers nicht richtig ab, sondern verlängern die Periodendauer der Schwingung. Eine resonante Anregung kann dann nur z.B. dadurch berechnet werden, dass die Periodenverlängerung (falls möglich) über Modifikation der Anregungsfrequenz mit berücksichtigt wird, oder indem die Zeitschrittgröße extrem fein gewählt wird. Die Zeitintegration mit der gleichen Zeitschrittgröße wie oben mit dem Newmark – β Verfahren mit $\beta=0.25$ und $\gamma=0.5$ führt zu einer Schwebung infolge der geringfügig unterschiedlichen Anregungs- und Eigenfrequenz und zu deutlich abweichenden Ergebnissen.

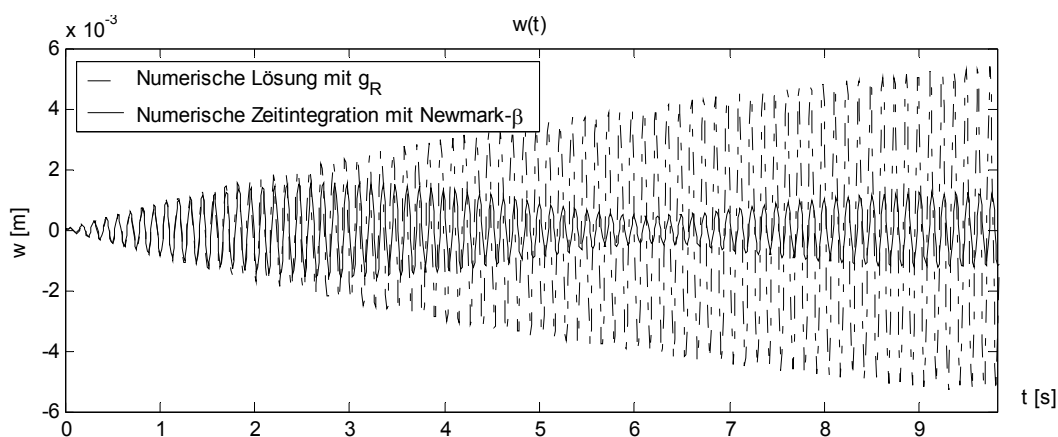


Abbildung 7.18: Beispiel: Einmassenschwinger: Vergleich Lösung mit Rechteckreaktionsfunktion und Zeitintegration mit Newmark- β Verfahren

In den bisherigen Beispielen wurden jeweils die analytischen Funktionen für die Impulsantwort und die Rechteckantwort verwendet. In der Regel wird man auf numerisch zu gewinnende Funktionen zurückgreifen. Diese sind in der Regel gut bestimmbar. Schwierigkeiten können bei der Bestimmung der Impulsantwort auftreten, wenn diese bei $t=0$ einen von Null abweichenden Wert besitzt, wie dies bei Wellenausbreitungsvorgängen auftritt (vgl. Abbildung 7.5). In der folgenden Abbildung ist der Vergleich von $z_R(t)$ für das gleiche Beispiel dargestellt. Bei Verwendung der Rechteckfunktion stimmen nun analytische und numerische Lösung praktisch vollständig überein. Der Anfangswert wird sehr genau berechnet.

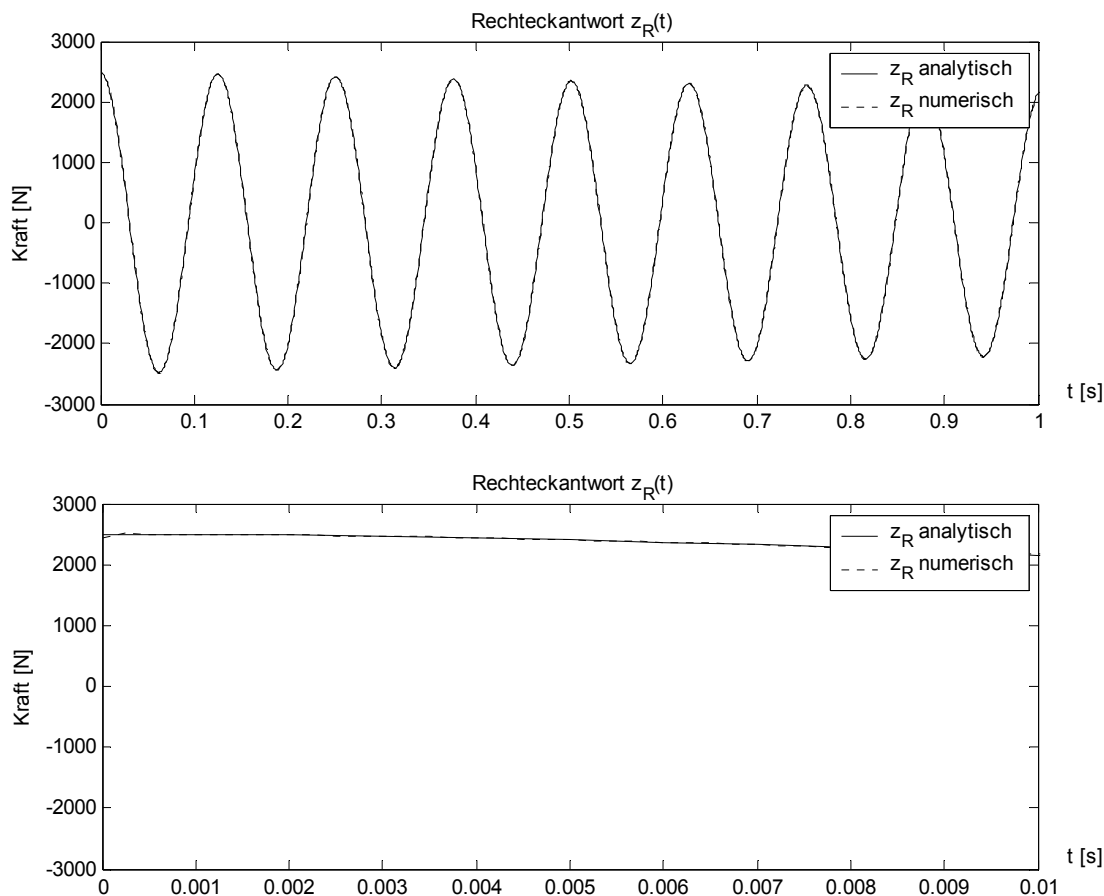


Abbildung 7.19: Vergleich numerische und analytische Lösung von $z_R(t)$
 $n = 2^{21}$, $T_{max} = 524.288$ s, $\Delta t = 0.00025$ s, $\Delta f = 0.0019$ Hz $T_R = 0.001$ s

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die numerische Berechnung des Faltungsintegrals über die Rechteckreaktionsfunktion deutliche Vorteile bietet. Die numerische Bestimmung der Rechteckreaktionsfunktion ist sehr genau. Bei der Berechnung des Faltungsintegrals treten lediglich Fehler infolge der Lastdiskretisierung auf. Die Zeitschrittgröße sollte daher so gewählt werden, dass die Charakteristik der Last und der Rechteckreaktionsfunktion genau genug abgetastet werden (z.B. 10 Zeitschritte je Periodendauer).

Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Ankopplung von Systemen anhand diskreter und kontinuierlicher Systeme gezeigt.

7.7 Zeitintegration der retardierten DAE (RDAE)

Die Ankopplung des reduzierten Teilsystems kann formal über nichtkonservative Kräfte erfolgen (Kapitel 2.4.2). Die sich ergebende Nebenbedingung lautet für die Impulsreaktionsfunktion

$$g : z_k(t) - w_k(t) = z_k(t) - \int_{\tau=0}^t g(t-\tau) \cdot P(\tau) dt = 0 \tag{7.19}$$

7.7.1 Index

Der Index der DAE ergibt sich aus der Art der Nebenbedingung und den Eigenschaften der Modelle an der Koppelstelle.

Hier muss zwischen der Faltung mit Impulsreaktionsfunktion und Rechteckreaktionsfunktion unterschieden werden. Wird das Faltungsintegral über die Impulsreaktionsfunktion formuliert, und ist $g(0) \neq 0$ so ergibt sich nach der zweiten Ableitung der Nebenbedingung bereits ein Term für \dot{P} .

$$\frac{dg}{dt} : \dot{z}_k(t) - \dot{w}_k(t) = \dot{z}_k(t) - \int_{\tau=0}^t \dot{g}(t-\tau) \cdot P(\tau) dt - g(0) \cdot P(t) = 0 \tag{7.20}$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} : \ddot{z}_k(t) - \ddot{w}_k(t) = \ddot{z}_k(t) - \int_{\tau=0}^t \ddot{g}(t-\tau) \cdot P(\tau) dt - \dot{g}(0) \cdot P(t) - g(0) \cdot \dot{P}(t) = 0 \tag{7.21}$$

Der Index hat dann höchstens den Wert 2.

Der Index beträgt 1, wenn an dem über das Faltungsintegral anzukoppelnden System lediglich ein Federelement vorliegt. Dann führt bereits die einmalige Ableitung der Nebenbedingung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. In allen anderen Fällen beträgt der Index 2.

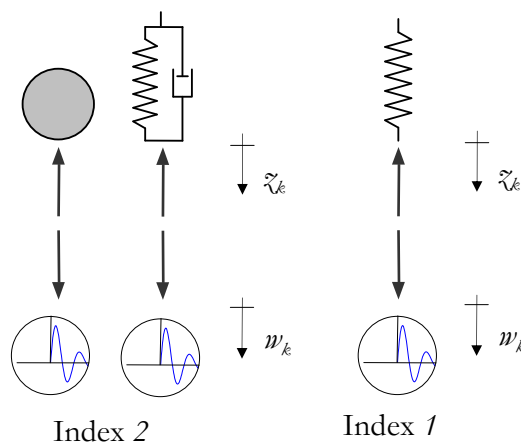


Abbildung 7.20: Index über ein Faltungsintegral angekoppelter Systeme

Gilt $g(0)=0$ oder wird das Faltungsintegrals über die Rechteckreaktionsfunktion formuliert, treten diese günstigen Eigenschaften nicht auf. Der Index hat den gleichen Wert wie bei der direkten Kopplung von Haupt – und Teilsystem über Lagrangesche Multiplikatoren.

7.7.2 Vergleich von Zeitintegrationsverfahren

Das numerische Verhalten von retardierten differentiell-algebraischen Systemen wird anhand eines Zweimassenschwingers untersucht. Dabei wird der untere Einmassenschwinger durch seine Rechteckreaktionsfunktion $g_R(t)$ beschrieben. Die Rechteckreaktionsfunktion wird über eine inverse Fouriertransformation numerisch bestimmt.

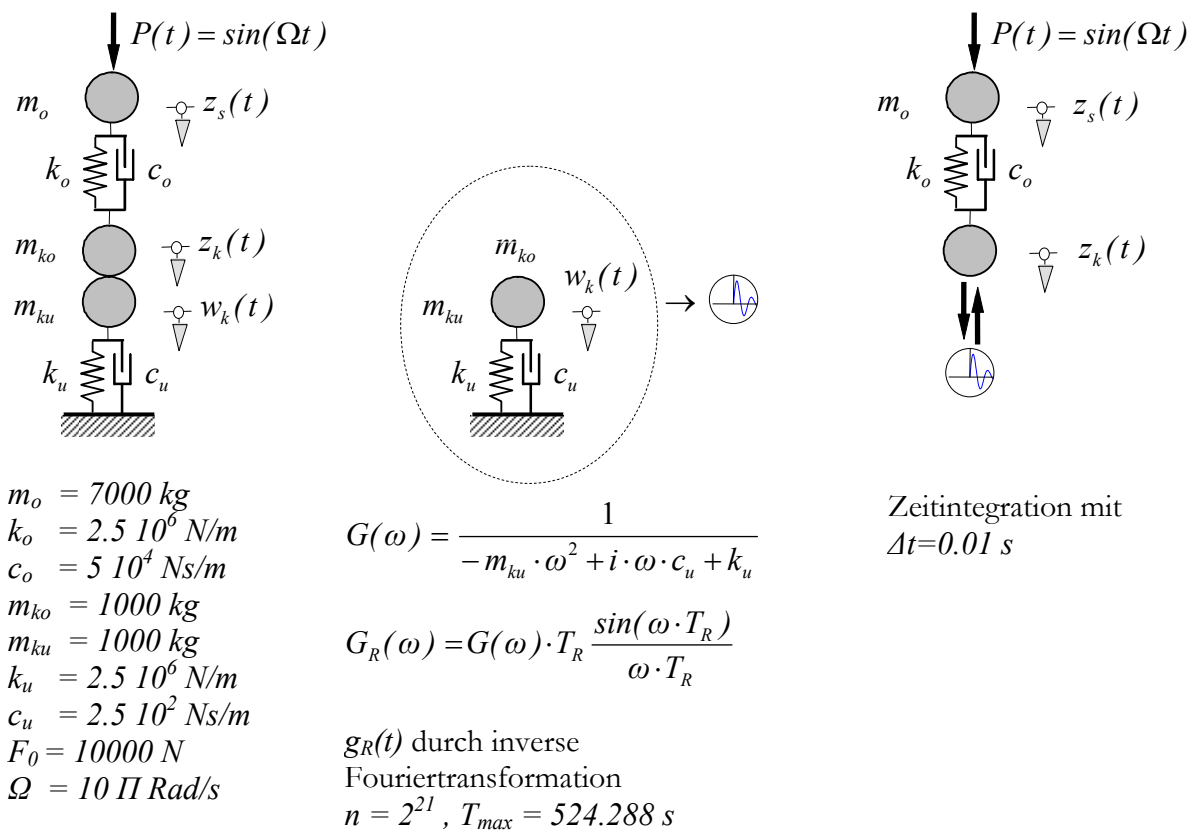


Abbildung 7.21: Betrachtetes System

Die Genauigkeit der Zeitintegration wird anhand eines Zweimassenschwingers mit der analytischen Lösung verglichen. Die Systemanregung erfolgt über eine harmonische Last auf die obere Masse. Der sinus-förmige Verlauf der Last bringt eine Anfangsstörung in das Gleichungssystem ein. Störungen infolge einer Kraftanregung sind jedoch unkritisch [Lutzenberger 2002]. Die analytische Lösungen wird der numerischen Lösung mittels des Generalised – α und des DAISY1 Verfahrens gegenübergestellt. Zur numerischen Auswertung des Faltungsintegrals wurde die Rechteckreaktionsantwort verwendet.

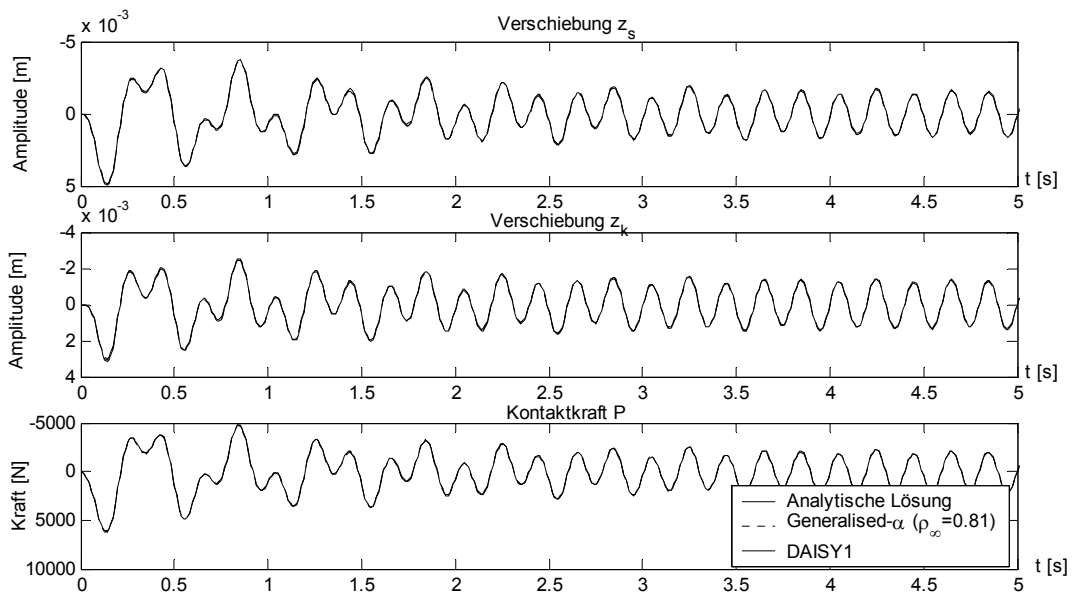


Abbildung 7.22: Vergleich der Lösungen

Die verschiedenen Lösungen stimmen sehr gut überein. Wie erwartet treten keine Störungen auf.

Als nächstes wird deswegen zwischen den beiden Kontaktmassen ein Rauheitsverlauf in Form einer Rampenfunktion aufgebracht. Dieser verletzt die Anforderung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit und bringt deswegen Störungen ins Gleichungssystem ein. In der analytischen Lösung würde hier ein Dirac - Impuls auftreten. Dieser kann bei der numerischen Zeitintegration nicht ausreichend abgebildet werden.

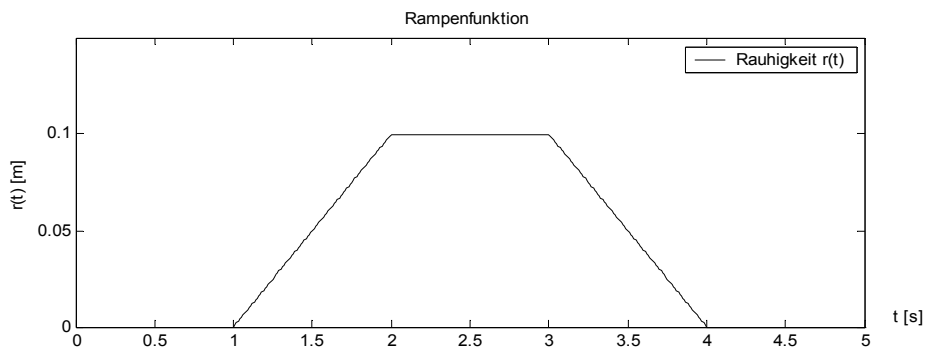


Abbildung 7.23: Rampenfunktion

Hier wird die Zeitintegration mittels des Generalised - α und des DAISY1 Verfahrens verglichen.

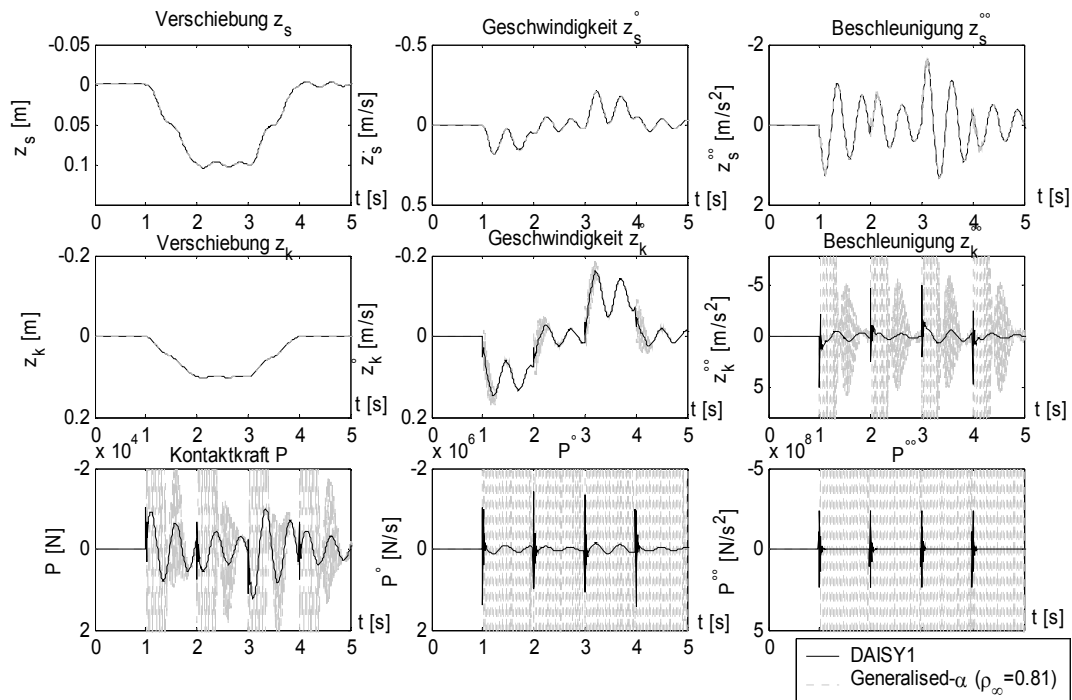


Abbildung 7.24: Vergleich der Lösungen

Es zeigen sich die gleichen Charakteristiken wie bei den direkt gekoppelten Systemen. An den Rampenübergängen treten Störungen auf. Beim Generalized- α Verfahren sind nur die Zeitintegrationsgrößen z_s, \dot{z}_s, z_k frei von Störungen. In allen anderen Zeitintegrationsgrößen treten Störungen auf, die zum Teil langsam abklingen. Im DAISY Verfahren treten kurzzeitige kleinere Störungen in P, \dot{P} und \ddot{P} auf, die jedoch schnell herausgedämpft werden.

Das Verhalten von retardierten differentiell-algebraischen Systemen ist ähnlich dem differentiell-algebraischer Systeme.

7.8 Vorgehensweise bei diskretisierten Teilsystemen

Die Bewegungsgleichungen der Teilsysteme j ergeben sich aus dem erweiterten Hamiltonschen Prinzip, bzw. den Eulerschen Gleichungen. Zur besseren Unterscheidung der Bezeichnungen werden die Freiheitsgrade q_i des Hauptsystems i in (**K**ontakt-)Freiheitsgrade z_k und in die restlichen (**S**ystem-) Freiheitsgrade z_s unterteilt. Die Freiheitsgrade q_j des Teilsystems j werden in (**K**ontakt-) Freiheitsgrade w_k und die (**S**ystem-) Freiheitsgrade w_s unterteilt.

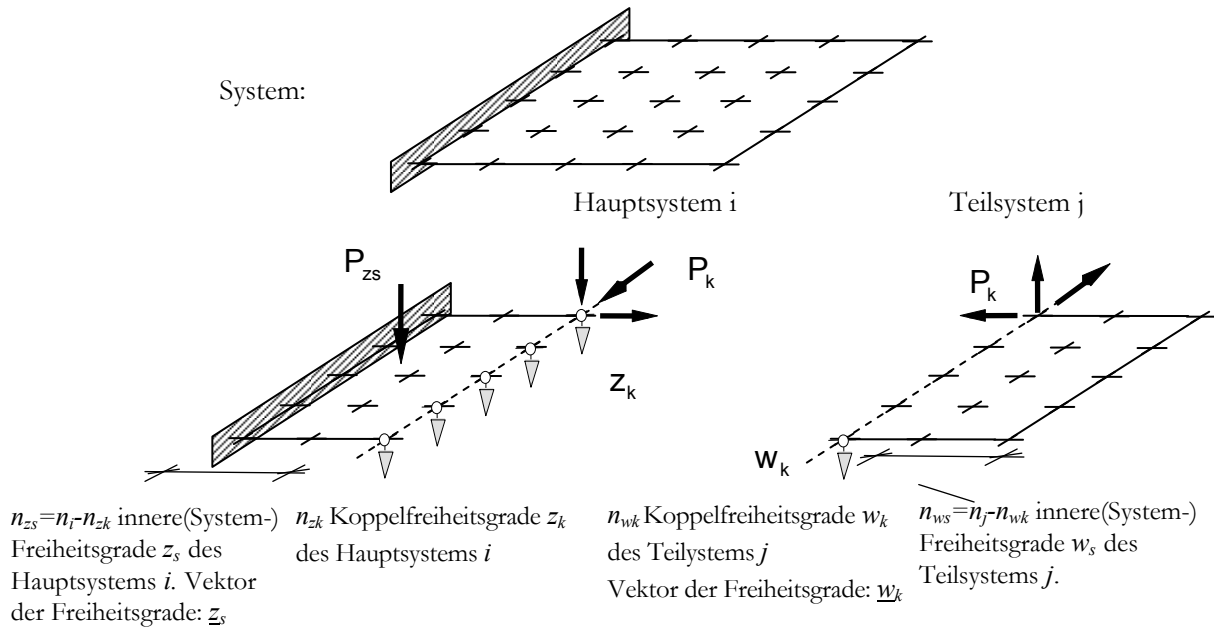


Abbildung 7.25: verwendete Bezeichnungen gekoppelter Systeme

Unter Verwendung der Nebenbedingung $w_k = z_k$ werden die Koppelkoordinaten einheitlich mit w_k bezeichnet. Die Gleichungen des Teilsystems können dann später direkt in die Gleichungen des Hauptsystems eingesetzt werden.

Das Teilsystem ist über die n_k Koppelfreiheitsgrade ($\mathbf{w}_k =$ Vektor der Koppelfreiheitsgrade) mit dem Hauptsystem verbunden. Das Teilsystem wird hier so gewählt, dass die $n_{ws} = n_j - n_{w_k}$ inneren Freiheitsgrade sowie die Koppelfreiheitsgrade nicht durch äußere Lasten beansprucht sind. Äußere Lasten \mathbf{P}_{zs} wirken lediglich auf das Hauptsystem. In der Koppelfuge treten die Kontaktkräfte \mathbf{P}_k auf.

Das Teilsystem wird über seine statische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T , die Dämpfungsmatrix \mathbf{C}_T und die Massenmatrix \mathbf{M}_T beschrieben. Getrennt nach den Freiheitsgraden entlang des Koppelrandes w_k und den Freiheitsgraden im Inneren w_s ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{T,kk} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{T,ks} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{T,sk} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{T,ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_k \\ \ddot{\mathbf{w}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{T,kk} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{T,ks} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{T,sk} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{T,ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_k \\ \dot{\mathbf{w}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{T,kk} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{T,ks} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{T,sk} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{T,ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Dementsprechend lauten die Gleichungen für das Hauptsystem:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{H,ss} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{H,sk} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{H,ks} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{H,kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_s \\ \ddot{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{H,ss} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{H,sk} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{H,ks} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{H,kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_s \\ \dot{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{H,ss} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{H,sk} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{H,ks} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{H,kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_s \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zs} \\ \mathbf{P}_k \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Die Ankopplung des Teilsystems kann über die Flexibilität oder die Steife des Teilsystems realisiert werden.

7.8.1 Dynamische Flexibilität $\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn}}$

Mit der dynamischen Flexibilität $\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}$ ($\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}$ ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion mit Singularitäten an den Nullstellen von $\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T}$).

$$\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}(\omega) \underline{\mathbf{P}}_T(\omega) = \underline{\mathbf{W}}_T(\omega) \quad \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}(\omega) = \left(\underline{\mathbf{M}}_T + i\omega \underline{\mathbf{C}}_T - \omega^2 \underline{\mathbf{K}}_T \right)^{-1} = \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T}(\omega)^{-1} \quad (7.24)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Teilsystems (7.22) zu:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T,kk}(\omega) & \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T,ks}(\omega) \\ \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T,sk}(\omega) & \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T,s}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{P}}_k(\omega) \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{W}}_k(\omega) \\ \underline{\mathbf{W}}_s(\omega) \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Dieses Gleichungssystem kann einfach nach $\underline{\mathbf{W}}_k$ gelöst werden:

$$\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) \cdot (-\underline{\mathbf{P}}_k(\omega)) = \underline{\mathbf{W}}_k(\omega) \quad (7.26)$$

mit der Flexibilitätsmatrix $\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) = \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T,kk}(\omega)$ (Dimension: $n_k \times n_k$).

Wird das Hauptsystem genauso wie das Teilsystem im Frequenzbereich beschrieben, so kann das Teilsystem an die Steifigkeits- oder Flexibilitätsmatrix des Hauptsystems angekoppelt werden. Die Kopplung mit dem Teilsystem erzeugt einen Eintrag in der Flexibilitätsmatrix für die Freiheitsgrade P_k . Diese Darstellung im Frequenzraum eignet sich zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen des Gesamtsystems.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},H,ss}(\omega) & \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},H,sk}(\omega) \\ \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},H,ks}(\omega) & \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},H,kk}(\omega) + \underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{zs}(\omega) \\ \underline{\mathbf{P}}_k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z}}_s(\omega) \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Damit kann die Kopplung im Frequenzbereich beschrieben werden. Zur Kopplung im Zeitbereich wird $\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}$ fourierrücktransformiert. Dies muss eventuell numerisch erfolgen.

$$\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) \bullet \circ \underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn},T}^*(t) \quad (7.28)$$

$\underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn},T}^*$ kann als Einheitsimpulsantwort interpretiert werden.

Die einzelnen Elemente j der i -ten Zeile geben an, welche Verschiebungen $g(t)$ an den Knoten j infolge eines δ Impulses am Knoten i zum Zeitpunkt $t=0$ entstehen.

Weiter gilt:

$$\underline{\mathbf{w}}_k(t) = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn,T}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\mathbf{P}}_k(\tau) d\tau = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn,T}}^*(\tau) \cdot \underline{\mathbf{P}}_k(t-\tau) d\tau \quad (7.29)$$

Das gekoppelte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_{\text{H}\text{s}s} & \underline{\mathbf{M}}_{\text{H}\text{s}k} \\ \underline{\mathbf{M}}_{\text{H}k\text{s}} & \underline{\mathbf{M}}_{\text{H}k k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{\underline{\mathbf{w}}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{\text{H}\text{s}} & \underline{\mathbf{C}}_{\text{H}\text{s}k} \\ \underline{\mathbf{C}}_{\text{H}k\text{s}} & \underline{\mathbf{C}}_{\text{H}k k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \dot{\underline{\mathbf{w}}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{H}\text{s}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{H}\text{s}k} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\text{H}k\text{s}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{H}k k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_s \\ \underline{\mathbf{w}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{\text{H}} \\ \underline{\mathbf{P}}_k \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\underline{\mathbf{w}}_k(t) = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn,T}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\mathbf{P}}_k(\tau) d\tau = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{g}}_{\text{dyn,T}}^*(\tau) \cdot \underline{\mathbf{P}}_k(t-\tau) d\tau$$

Es liegt wiederum eine retardierte DAE (RDAE) vor.

7.8.2 Dynamische Steifigkeit $\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn}}$

Daneben kann die Ankopplung des Teilsystems über die Steife des Teilsystems realisiert werden. Unter Verwendung der dynamischen Steifigkeit $\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}$

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}(\omega) = \underline{\mathbf{M}}_{\text{T}} + i\omega \underline{\mathbf{C}}_{\text{T}} - \omega^2 \underline{\mathbf{K}}_{\text{T}} \quad (7.31)$$

ergeben die Bewegungsgleichungen des Teilsystems (7.22) zu

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,kk}}(\omega) & \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,ks}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,sk}}(\omega) & \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,ss}}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{W}}_k(\omega) \\ \underline{\mathbf{W}}_s(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{P}}_k(\omega) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,ss}}(\omega)$ entspricht dabei der Steifigkeit der an den Koppelfreiheitsgraden starr gelagerten Platte.

Das Gleichungssystem kann nach $\underline{\mathbf{P}}_k$ gelöst werden:

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}^*(\omega) \underline{\mathbf{W}}_k(\omega) = -\underline{\mathbf{P}}_k(\omega) \quad (7.33)$$

mit der Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}^*(\omega)$ (Dimension: $n_k \times n_k$)

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}^*(\omega) = \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,kk}}(\omega) - \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,ks}}(\omega) \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,ss}}^{-1}(\omega) \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T,sk}}(\omega) \quad (7.34)$$

$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn,T}}^*(\omega)$ ist die Inverse von $\underline{\mathbf{G}}_{\text{dyn,T}}^*(\omega)$

$\underline{\mathbf{K}}_T^*$ ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion mit Singularitäten an den Nullstellen von

$$\det(\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T,ss}(\omega)) = \det(\underline{\mathbf{M}}_{T,ss} + i\omega \underline{\mathbf{C}}_{T,ss} - \omega^2 \underline{\mathbf{K}}_{T,ss}) = 0 \quad (7.35)$$

Über das Konzept der dynamischen Impedanz oder die Craig-Bampton Methode [Craig-Bampton 1968] kann $\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T}^*(\omega)$ über eine Superposition der Eigenschwingformen bei festgehaltenem Rand und der statischen Verschiebungsformen bei Einheitsverschiebungen am Rand ermittelt werden.

Wird das Hauptsystem genauso wie das Teilsystem im Frequenzbereich beschrieben, so kann das Gesamtsystem nach Einsetzen der Nebenbedingung direkt in matrizieller Form wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},H,ss}(\omega) & \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},H,sk}(\omega) \\ \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},H,ks}(\omega) & \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},H,kk}(\omega) + \underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z}}_s(\omega) \\ \underline{\mathbf{W}}_k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{zs}(\omega) \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Die Kopplung mit dem Teilsystem erzeugt einen Eintrag in der Steifigkeitsmatrix für die Freiheitsgrade w_k . Diese Darstellung im Frequenzraum eignet sich zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen des Gesamtsystems.

Für Berechnungen im Zeitbereich wird die Steifigkeitsmatrix in den Zeitbereich fourierrücktransformiert:

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{dyn},T}^*(\omega) \bullet \circ \underline{\mathbf{k}}_T^*(t). \quad (7.37)$$

$\underline{\mathbf{k}}_T^*$ (Dimension $n_{wk} \times n_{wk}$) kann als Einheitsverschiebungskraft interpretiert werden. Die einzelnen Elemente j der i -ten Zeile geben an, welche zeitabhängigen Kräfte an den Knoten j infolge einer δ Einheitsverschiebung am Knoten i entstehen.

Damit gilt:

$$\underline{\mathbf{P}}_k(t) = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{k}}_T^*(t-\tau) \cdot \underline{\mathbf{w}}_k(\tau) d\tau = - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{k}}_T^*(\tau) \cdot \underline{\mathbf{w}}_k(t-\tau) d\tau. \quad (7.38)$$

Zur Kopplung beider Systeme kann (7.38) in die Gleichung des Hauptsystems (7.23) eingesetzt werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}}_{H\text{ss}} & \underline{\mathbf{M}}_{H\text{sk}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{H\text{ks}} & \underline{\mathbf{M}}_{H\text{kk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \ddot{\underline{\mathbf{w}}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{H\text{s}} & \underline{\mathbf{C}}_{H\text{sk}} \\ \underline{\mathbf{C}}_{H\text{ks}} & \underline{\mathbf{C}}_{H\text{kk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{z}}}_s \\ \dot{\underline{\mathbf{w}}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{H\text{s}} & \underline{\mathbf{K}}_{H\text{sk}} \\ \underline{\mathbf{K}}_{H\text{ks}} & \underline{\mathbf{K}}_{H\text{kk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_s \\ \underline{\mathbf{w}}_k \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_s \\ - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{k}}_T^*(t-\tau) \cdot \underline{\mathbf{w}}_k(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_s \\ - \int_{\tau=0}^t \underline{\mathbf{k}}_T^*(\tau) \cdot \underline{\mathbf{w}}_k(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

Das entstehende Gleichungssystem kann als retardierte Differentialgleichung oder Integrodifferentialgleichung gekennzeichnet werden.

7.9 Vorgehensweise bei kontinuierlichen Teilsystemen

Bei kontinuierlichen Teilsystemen können die Kenngrößen über Integraltransformationmethoden wie auch über die Randelementmethode bestimmt werden.

Die folgende Skizze zeigt die Vorgehensweise für Integraltransformationmethoden:

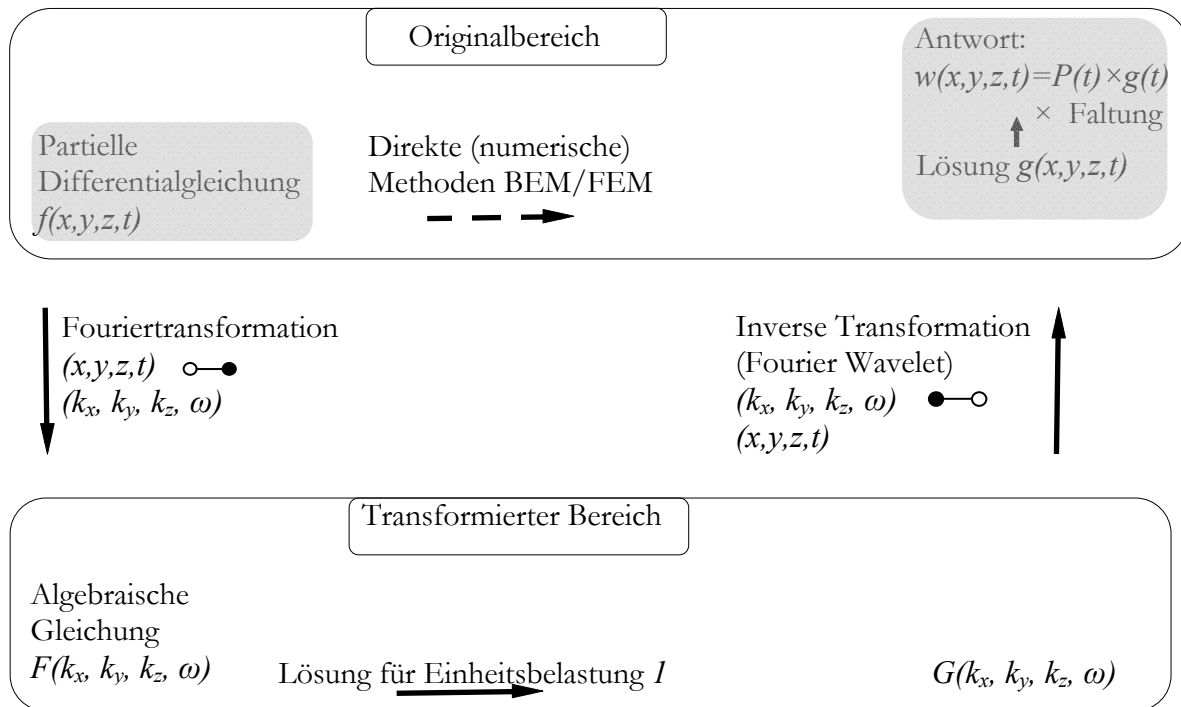


Abbildung 7.26: Formulierung der Bewegungsgleichungen aus der Variationsformulierung

Die Differentialgleichungen werden in den Wellenzahl-/Frequenzraum transformiert und dort für eine Dirac - Last gelöst. Bei Verwendung der Rechteckreaktionsantwort wird die Lösung noch mit dem Spaltsinus multipliziert. Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert die Impuls- bzw die Rechteckreaktionsantwort.

7.10 Bewertung

Große Modelle bedürfen eines hohen numerischen Aufwandes zur Lösung der Gleichungssysteme. Eine mögliche Strategie zur Reduzierung des Aufwandes zur Lösung der Systeme ist die Unterteilung in ein Haupt- und in Teilsysteme.

Die Wahl der Kenngröße, in der das Teilsystem beschrieben werden soll, ist von der Charakteristik des Teilsystems abhängig (Abbildung 7.3). Daneben sind numerische Aspekte zu beachten:

- Bei der Berechnung der Kontaktkraft über das Faltungsintegral, unter Verwendung der Impedanz $Z(\omega)$, wird die Geschwindigkeit v benötigt. Diese ist i.d.R. numerisch schwieriger zu bestimmen als die Auslenkung w . Die Anwendung der Impedanz ist nur eingeschränkt möglich.
- Die dynamische Steifigkeit $K(\omega)$ kann kaum verwendet werden, da diese für fast alle Systeme durch hohe Anteile im Frequenzbereich dominiert wird (Abbildung 7.3), was Probleme für numerische Rücktransformation bereitet.
- Die Admittanz $H(\omega) = V(\omega)/P(\omega)$ führt auf numerisch günstige Ausdrücke, hat aber ebenfalls weniger Anwendungsgebiete (Abbildung 7.3).
- Die dynamische Nachgiebigkeit $G(\omega)$ ist numerisch gut umsetzbar und kann fast auf alle Systeme angewandt werden. Dies gilt insbesondere bei Verwendung der Rechteckreaktionsfunktion.

Die Ankopplung im Zeitbereich führt auf differentiell – algebraische oder retardierte differentiell – algebraische Systeme. Die Zeitintegration kann mit den entwickelten Zeitschrittverfahren gut durchgeführt werden. Für die numerische Umsetzung des Faltungsintegrals bietet sich die Verwendung der Rechteckreaktionsfunktion an. Diese kann im Frequenzbereich durch Multiplikation der Impulsreaktionsfunktion mit einem Spaltsinus gewonnen werden. Dies entspricht einem Vorziehen der Integration zur Impulsreaktionsantwort. Somit kann die Filterwirkung des Spaltsinus genutzt werden. Bei Berechnung des Faltungsintegrals ist dann lediglich eine Approximation der Last erforderlich (keine Approximation der Impulsreaktionsfunktion). Wird die Lastfunktion exakt abgebildet und die Rechteckreaktionsantwort genau bestimmt, so ergibt sich eine hervorragende Lösungsqualität. Durch die höhere Genauigkeit, sind bei der Zeitintegration größere Zeitschritte möglich (z.B. 10 Zeitschritte je Periodendauer). Bei Zeitintegration des Gesamtsystems muss der maßgebende Zeitschritt so gewählt werden, dass sowohl die Charakteristika des Gesamtsystems wie auch der Last genau genug abgebildet werden.

Resonante Anregung wird im Vergleich zu Zeitintegrationsverfahren besser abgebildet.

Zwar kann die Bestimmung der Rechteckreaktionsantwort numerisch aufwändig sein (vor allem bei ausgedehnten Systemen), diese muss aber lediglich einmal vor Beginn der Berechnung bestimmt werden.

Die Methodik eignet sich gut für transiente, im Zeitbereich schnell abklingende Teilsysteme. Die Fourierreücktransformation kann dann mit geringem numerischen Aufwand durchgeführt werden. Besonders Wellenausbreitungsvorgänge können damit gut beschrieben werden, da eine Systemantwort nur direkt nach Belastung vorhanden ist und die Schwingungsenergie schnell vom Ort der Kraftaufbringung wegtransportiert wird.

8 Interaktion Magnetschwebefahrzeuge – Fahrwegträger

In diesem Kapitel wird die Fahrzeug – Fahrweg Interaktion am Beispiel eines Magnetschwebefahrzeuges auf geregelte Fahrzeuge erweitert. Dazu werden zunächst Regelungstechnische Grundlagen zusammengefasst. Danach wird auf die Beschreibung des Fahrzeugs eingegangen. Die Fahrzeug – Fahrweg Interaktion wird anhand eines Beispielles gezeigt.

8.1 Regelungstechnik

Die Regelung ist ein technischer Vorgang in einem abgegrenzten System. Wirken von außen Störungen auf das System ein, so kann das System selbständig darauf reagieren. Es ändert sein Verhalten und kann dadurch den Ausgangszustand wiederherstellen. Diese Regelung verläuft anhand vorgegebener Gesetzmäßigkeiten.

Der Begriff der Regelung ist in der DIN 19226 wie folgt definiert:

„Das Regeln, die Regelung, ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die Regelgröße (die zu regelnde Größe) erfasst, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Kennzeichnend für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst.“

Im Unterschied dazu existiert der Begriff des Steuerns. Bei der Steuerung findet kein Soll-Istwert Vergleich statt. Die dafür nötige Rückmeldung fehlt oder findet nur sporadisch statt. Hier ist das Systems nicht in der Lage, seine Charakteristik selbständig zu ändern. Dies muss von außen erfolgen.

Im anglistischen Sprachraum wird der Begriff des Steuerns sehr zutreffend durch feedforward control und der Begriff des Regels durch feedback control beschrieben. Umgangssprachlich werden beide Begriffe oft verdreht. So handelt es sich beim „Steuern“ eines Autos um einen Regelungsvorgang, da der Fahrer selbständig auf Kursabweichungen reagiert. Ein „Lautstärkenregler“ an einer Stereoanlage hingegen passt die gewünscht Lautstärke nicht automatisch an.

8.1.1 Regelkreise

8.1.1.1 Struktur von Regelkreisen

Regelkreise werden für verschiedenste Aufgaben entworfen. Ihre Zusammensetzung kann daher aus unterschiedlichen Komponenten bestehen. Ein grundlegender, idealisierter Aufbau ist in der nächsten Abbildung skizziert:

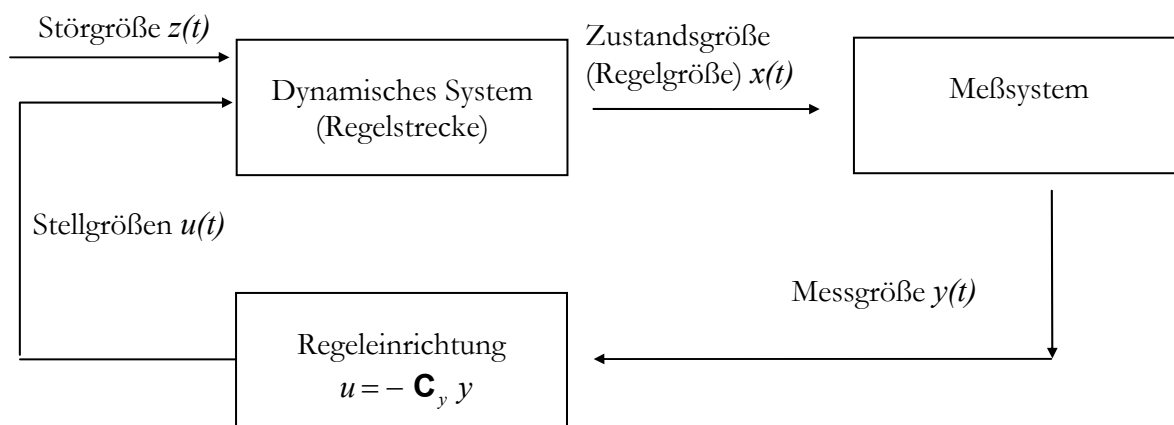


Abbildung 8.1: Regelkreis (Ausgangsrückführung)

Das zu regelnde System (Regelstrecke) ist eine abgeschlossene Anordnung, in der dynamische Prozesse ablaufen. Aus den Eingangsgrößen werden aufgrund physikalischer Gesetzmäßigkeiten die Ausgangsgrößen (Zustandsgrößen, Regelgrößen) $x(t)$ erzeugt.

Auf dieses System wirken Störgrößen $z(t)$ ein. Störgrößen sind bestenfalls ungenau bekannt, ihr zeitliches Verhalten kann nicht exakt vorhergesagt werden. Die Störgrößen bewirken, dass das System von seinem Idealzustand abweicht.

Im Regelkreis wird das dynamische Verhalten der Regelstrecke, die Regelgröße $x(t)$, daher fortlaufend erfasst.

Dies erfolgt durch die Messeinrichtung. Ihr kommt die Aufgabe zu, die Regelgrößen in eine andere Größe, die Messgröße $y(t)$, umzuformen, wie z.B. die Umformung der Beschleunigung einer Masse der Regelstrecke in eine elektrische Größe. Damit wird die weitere Auswertung erst ermöglicht. Oftmals können nicht alle Systemgrößen gemessen werden, da der Aufwand hierfür zu groß wäre. Man muss sich daher auf die Messung repräsentativer Größen beschränken. Die Dimension von $y(t)$ ist somit meist kleiner als die Dimension von $x(t)$.

Die Regeleinrichtung vergleicht die Messgröße $y(t)$ mit den Sollwerten. Weichen diese voneinander ab, berechnet sie nach vorgegebenen Gesetzmäßigkeiten, dem Regelgesetz, die erforderlichen Stellgrößen $u(t)$. Die Anzahl der Stellgrößen ist in der Regel kleiner als die Anzahl der Zustandsgrößen.

Das Stellglied wandelt die Stellgrößen $u(t)$ in mechanische Größen um, welche auf die Regelstrecke einwirken und diese im gewünschten Sinne beeinflussen. Das Stellglied wird in der Regel der Regelstrecke zugeschlagen und ist deshalb im Blockschema nicht extra aufgeführt.

Beispiel: Dieses Schema lässt sich gut an der Temperaturregelung eines Hauses verdeutlichen. Das Ziel der Regelung ist hier die Raumtemperatur konstant zu halten. Schwankungen in der Außentemperatur wirken als Störungen auf das System ein. Temperaturfühler in den Zimmern messen die sich einstellende Abweichung der Raumtemperatur vom Sollwert. Die Informationen der Temperaturfühler werden an die Heizung weitergeleitet. Die Änderung der Energiezufuhr bewirkt die gewünschte Korrektur der Raumtemperatur.

Erfolgt die Steuerung nicht anhand der Messgrößen $y(t)$ sondern direkt über die Zustandsgrößen $x(t)$ so spricht man von Zustandsrückführung.

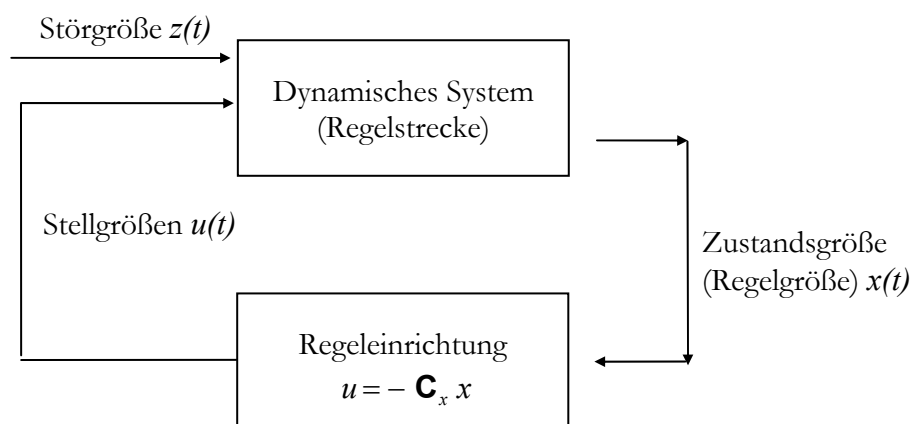


Abbildung 8.2: Regelkreis (Zustandsrückführung)

Können nicht alle Zustandsgrößen der Regelstrecke gemessen werden können, versucht man die nicht gemessenen Größen möglichst genau zu schätzen. Diese Aufgabe kommt dem Beobachter bzw. Filter zu. Der wohl am weitesten verbreitete Algorithmus zur Zustandsschätzung ist das Kalman-Bucy Filter.

8.1.1.2 Analyse der Regelkreise im Zeit- Frequenzbereich

In der Regelungstechnik verwendete Methoden zur Analyse von Regelkreisen sind die Frequenzbereichsmethodik und die Zeitbereichsmethodik. Die Analyse von Regelkreisen ist ähnlich zur Analyse strukturdynamischer Systeme.

Wichtige Kenngrößen für die Analyse im Zeitbereich sind:

- Die Übertragungsfunktion (Sprungreaktionsfunktion) gibt an, wie die Ausgangsgröße (Systemantwort) auf eine sprungförmige Belastung reagiert. Sie zeigt wie schnell sich das Ausgangssignal der statischen Reaktion annähert.
- Die Gewichtungsfunktion (Impulsreaktionsfunktion $g(t)$) ist die Antwort auf einen δ -Impuls. Mit der Gewichtungsfunktion kann über das Faltungsintegral die Systemantwort berechnet werden.

Der Übergang in den Frequenzbereich erfolgt mittels der Fourier Transformation oder der Laplace Transformation. Kenngrößen dabei sind:

- Der Frequenzgang (Flexibilität $G(\omega)$) zeigt das Systemverhalten in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz auf.
- Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion (=Frequenzgang bei Verwendung der Laplace Transformation) können im komplexen Pol-Nullstellen Bild angetragen werden.

8.1.1.3 Anforderungen an den Reglerentwurf

Der Entwurf eines Reglers zielt darauf ab, das System (Regelstrecke) durch die Stellgröße so zu beeinflussen, dass die messbaren Größen $y(t)$ sich den durch die Führungsgröße vorgegebenen Werten $w(t)$ annähern. Die Wirkung einer äußeren Störung $z(t)$ soll dabei unterdrückt werden.

Der Regler soll dabei vorgegebene Gütekriterien erfüllen. Die Güte der Regelung kann anhand von vier Anforderungen beurteilt werden [Lunze 2006]:

1. Stabilitätsanforderung:

Das geregelte System darf bei einem endlichen Störsignal $z(t)$ mit einem nur endlichen Ausgangssignal $y(t)$ antworten. Verschwinden alle Systemanregungen, so kehrt das System in seine Ruhelage zurück (Kapitel 8.1.2.3).

2. Forderung nach Störkompensation und Sollwertfolge

Für vorgegebene Klassen von Führungssignalen und Störsignalen soll die Regelgröße $y(t)$ der Führgröße $w(t)$ asymptotisch folgen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0 \quad (8.1)$$

3. Dynamikanforderung

Der dynamische Zusammenhang zwischen Führungsgröße bzw. Störgröße und der Regelgröße soll vorgegebene Güteanforderungen erfüllen. Die Dynamikanforderung legt das Übergangsverhalten fest und damit die Art und Weise, wie sich $y(t)$ an $w(t)$ annähert. Dabei werden z.B. Vorgaben für die Zeit bis zum Erreichen von 90 % des Endwertes, die Überschwingweite und die Überschwingzeit gemacht.

4. Robustheitsforderung

Die Forderungen (1-3) sollen trotz Unsicherheiten im Modell der Regelstrecke erfüllt werden. Die Unsicherheiten im Modell resultieren z.B. aus ungenau bekannten Parametern oder einer Linearisierung des Modells.

Die Robustheit ist bei geringen Abweichungen i.d.R gesichert, da der Regler die Stellgröße in Abhängigkeit der aktuellen Messgröße berechnet und so fortwährend versucht die Messgröße der Führgröße anzupassen.

8.1.1.4 Differentialgleichungen geregelter Systeme

Ungeregelte strukturdynamische Systeme werden im Allgemeinen über ihre Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben. Für lineare und zeitinvariante Systeme lautet diese:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\mathbf{w}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\mathbf{w}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{P}}_0 \quad (8.2)$$

mit : $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ = Massenmatrix, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ = Dämpfungsmatrix, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ = Steifigkeitsmatrix, $\underline{\mathbf{P}}_0$ = Lastvektor, $\underline{\mathbf{w}}$ = Vektor der unbekanntenen Größen des Systems

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird die Zeitabhängigkeit der Größen nur dort angegeben, wo dies das Verständnis erhöht.

Zur Untersuchung ist es hilfreich auf ein System erster Ordnung überzugehen. Mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{w}} \\ \dot{\underline{\mathbf{w}}} \end{bmatrix} \text{ erhält man} \quad \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}} \quad (8.3)$$

Dabei ist: $\underline{\mathbf{x}}$ = Zustandsvektor, $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ = Systemmatrix, $\underline{\mathbf{b}}$ = Lastvektor

$$\text{Mit: } \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}^{-1}}\underline{\mathbf{P}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{M}}^{-1}}\underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}^{-1}}\underline{\underline{\mathbf{C}}} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Die Darstellung geregelter Systeme mit Ausgangsrückführung lautet (vgl. Abbildung 8.1):

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{u}} \quad (8.5)$$

$$\underline{\mathbf{y}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}\underline{\mathbf{x}} \quad (8.6)$$

$$\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_y \underline{\mathbf{y}} \quad (8.7)$$

$$\rightarrow \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}_y \underline{\underline{\mathbf{H}}}\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}_y \underline{\underline{\mathbf{H}}}) \underline{\mathbf{x}} \quad (8.8)$$

Mit:

$\underline{\mathbf{u}}$ = Eingangsvektor

$\underline{\mathbf{y}}$ = Vektor der Messgrößen

$\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ = Stelleingangsmatrix

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_y$ = Rückführungsmatrix

$\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ = Messmatrix

Für die Zustandsrückführung ergibt sich:

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{u}} \quad (8.9)$$

$$\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x \underline{\mathbf{x}} \quad (8.10)$$

$$\rightarrow \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x \underline{\mathbf{x}} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x) \underline{\mathbf{x}} \quad (8.11)$$

8.1.2 Eigenschaften von Regelkreisen

Zwei wichtige Eigenschaften dynamischer Systeme sind deren Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit (Abschnitt 8.1.2.2) [Kortüm. Lugner 1994]. Ein System, bei dem alle Zustandsgrößen messbar und beeinflussbar sind, kann auch beliebig gesteuert werden kann. Eines der zentralen Probleme der Regelungstechnik jedoch ist es, dass diese Voraussetzungen meist nicht gegeben sind. Oft können nur wenige Zustandsgrößen gemessen und beeinflusst werden. Nun stellt sich die Frage, ob die gemessenen Größen ausreichen, um das Systemverhalten vollständig zu beschreiben (Beobachtbarkeit). Ist das Systemverhalten durch die Stellgrößen beliebig steuerbar, so spricht man von der Steuerbarkeit eines Systems. Anhand der Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit (8.1.2.2) lässt sich entscheiden, ob eine bestimmte Regelungsaufgabe überhaupt durchgeführt werden kann.

Daneben ist die Stabilität eine zentrale Eigenschaft von Systemen. Anhand der Stabilität lässt sich beurteilen, ob das Systemverhalten bei auftretenden Störungen stabil ist. Bei instabilen Systemen können Störungen ein Anwachsen der Systemantwort über alle Grenzen hinaus verursachen.

8.1.2.1 Steuerbarkeit eines System

Da die Anzahl der Stellgrößen $\underline{u}(t)$ in der Regel kleiner ist als die Anzahl der Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ stellt sich die Frage, ob sich das System durch die Stellgrößen in geeigneter Weise beeinflussen lässt. Die Untersuchung der Steuerbarkeit eines Systems erfolgt anhand des Systems

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}\underline{x} + \underline{G}\underline{u}, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \quad (8.12)$$

$\underline{x}(t_0)$ kennzeichnet den Anfangszustand.

Damit kann neben der Auswirkung der Steuergrößen auch die Auswirkung von Störgrößen untersucht und charakterisiert werden.

Definition 8.1: Das System (8.12) heißt steuerbar, wenn sein Zustand \underline{x} durch geeignete Wahl des Steuervektors $\underline{u}(t)$ in endlicher Zeit aus dem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 in den Endzustand \underline{x}_B bewegt werden kann.

Die Steuerbarkeit kann durch folgendes Kriterium überprüft werden:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{F}\underline{G} & \underline{F}^2\underline{G} & \dots & \underline{F}^{n-1}\underline{G} \end{bmatrix} = \text{Rang} \underline{Q}_c = n \quad (8.13)$$

\underline{Q}_c (Dimension $n \times n \cdot m$, $n = \text{Anzahl der Zustandsgrößen}$, $m = \text{Anzahl der Messgrößen}$) wird als Steuerbarkeitsmatrix bezeichnet. Die Forderung (8.13) ist gleichbedeutend zu:

$$\det \underline{Q}_c \neq 0 \quad (8.14)$$

8.1.2.2 Beobachtbarkeit eines Systems

Die Beobachtbarkeit eines Systems zeigt, ob das Systemverhalten über den Messvektor $\underline{y}(t)$ erfassbar ist.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}\underline{x} + \underline{G}\underline{u} \tag{8.15}$$

$$\underline{y} = \underline{H}\underline{x} \tag{8.16}$$

Definition 8.2: Das System (8.15), (8.16) heißt beobachtbar, wenn man bei bekanntem $\underline{u}(t)$ aus der Messung von $\underline{y}(t)$ über eine endliche Zeitspanne den Anfangszustand \underline{x}_0 eindeutig ermitteln kann, ganz gleich wo dieser liegt.

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \underline{H}^T & \underline{F}^T \underline{H}^T & (\underline{F}^T)^2 \underline{H}^T & \dots & (\underline{F}^T)^{n-1} \underline{H}^T \end{bmatrix} = \text{Rang} \underline{Q}_b^T = n \tag{8.17}$$

8.1.2.3 Stabilität

Der Stabilitätsbegriff kann für statische Systeme gut veranschaulicht werden (Abbildung 8.3). Zur Untersuchung der Stabilität wird das System in einer Nachbarlage betrachtet. Ergeben sich in der Nachbarlage Kraftwirkungen, die das System in die Ursprungslage zurückführen, so liegt ein stabiles Gleichgewicht vor. Führen die Kraftwirkungen in der Nachbarlage zu weiteren Auslenkungen, ist das Gleichgewicht instabil. Beim Vorliegen eines Gleichgewichtszustandes in der Nachbarlage spricht man von einem indifferenten Gleichgewicht.

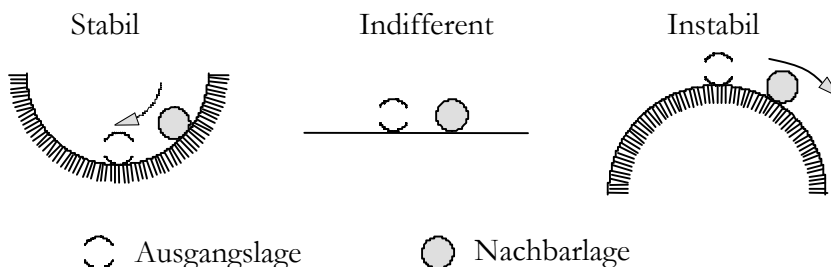


Abbildung 8.3: Gleichgewichtslagen von Systemen

Für die Stabilität dynamischer Systeme ist deren Verhalten gegenüber Anfangsstörungen (=Anfangsbedingungen) maßgebend. Der hierfür maßgebende Stabilitätsbegriff stammt aus der nichtlinearen Systemdynamik von M. A. Ljapunow 1893.

Definition 8.3: Das System (8.12) heißt stabil im Sinne von Ljapunow, wenn zu jedem Zeitpunkt t_0 und jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl δ existiert, so dass bei einer beliebigen Anfangsauslenkung $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ mit $|\underline{x}_0| < \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ für $t > t_0$ nur eine gestörte Bewegung $\underline{x}(t)$ mit $|\underline{x}(t)| < \varepsilon$ entsteht. Gilt zusätzlich $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0$, so nennt man die Gleichgewichtslage asymptotisch stabil.

Damit kann nicht nur die Stabilität stationärer Zustände sondern auch die Stabilität beliebiger Trajektorien beurteilt werden. Diese Stabilitätsdefinition veranschaulicht Abbildung 8.4:

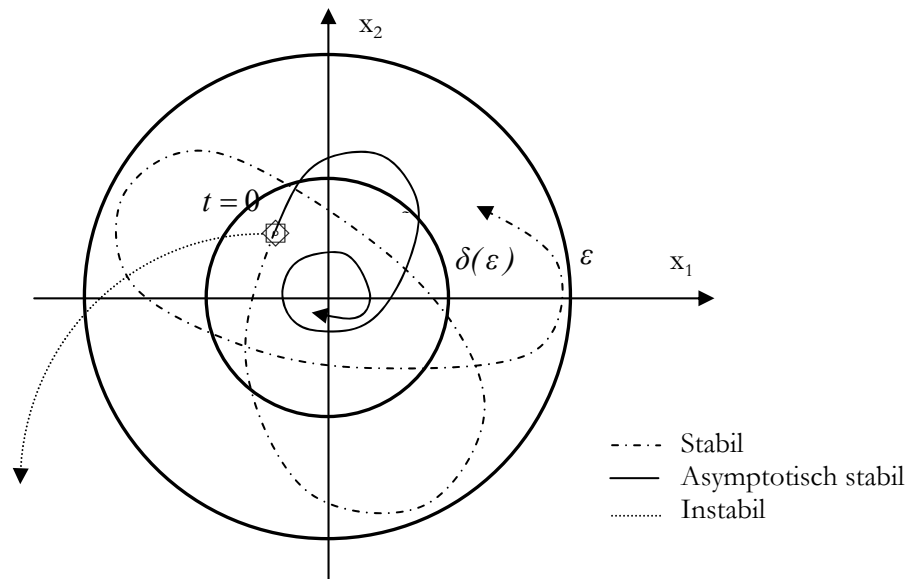


Abbildung 8.4: Stabilität

Ein System, das permanenten Störungen unterworfen ist, wird ein-angangsstabil genannt, wenn für jede beschränkte Anfangsbedingung und jede beschränkte Eingangsgröße auch der Ausgang beschränkt ist. Asymptotisch stabile Systeme sind gleichzeitig auch ein-angangsstabil.

Die Stabilitätsuntersuchung kann über die Ljapunow-Funktion erfolgen. Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten ist es jedoch ausreichend die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{F} zu betrachten. Es ergibt sich eine abklingende Bewegung, wenn alle Realteile der Eigenwerte $\lambda_j < 0$ sind:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\underline{\mathbf{F}}) < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (8.18)$$

Damit ist das System asymptotisch stabil und ein-angangsstabil.

Nach [Kortüm, Lugner 1994] ist das nichtlineare System zumindest asymptotisch stabil bei kleinen Störungen, falls das linearisierte System asymptotisch stabil ist.

8.1.3 Auslegung des Reglers

Für die Auslegung eines Regelkreises existieren mehrere Verfahren (z.B. Lunze 2005).

Ein wichtiges Kriterium zur Reglerauslegung sind die Eigenwerte des Regelkreises. Diese stellen sicher, dass der Regelkreis stabil ist ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$). Darüber hinaus wird durch die „Lage“ der Eigenwerte in der komplexen Ebene das dynamische Verhalten (Eigenfrequenzen, Dämpfung, Resonanzüberhöhung) des Regelkreises festgelegt. Mehrere Verfahren zielen deshalb auf die Verschiebung der Eigenwerte in den gewünschten Bereich ab (Konstruktion der Wurzelortskurve, Polzuweisung).

8.1.3.1 Optimalregler

Die Güteanforderungen können sich auch auf den Verlauf der Stell- und Regelgrößen über die Zeit beziehen. Dazu wird ein Gütefunktional J als Maß für die Güte des Regelkreises herangezogen. In das Gütefunktional gehen die quadratischen Abweichungen der Zustandsgrößen x vom gewünschten Zustand sowie der quadratischen Stellgrößen u (Maß für die Stellenergie) ein. Zur Wichtung von Regelzielen werden die Zustandsgrößen mit der Wichtungsmatrix $\underline{\underline{Q}}$, die Stellgrößen mit der Wichtungsmatrix $\underline{\underline{R}}$ gewichtet. Ziel des Entwurfs ist es eine Regelung zu finden, so dass das Funktional J

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \underline{\underline{Q}} x + u^T \underline{\underline{R}} u) dt \quad (8.19)$$

minimal wird (Optimalregler, Riccati Entwurf).

Definition 8.4: Optimalregler:

Gegeben sei eine vollständig steuerbare Regelstrecke

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F} \underline{x} + \underline{G} u \quad (8.20)$$

und ein Gütefunktional J (8.19) mit den Wichtungsmatrizen $\underline{\underline{Q}}$, $\underline{\underline{R}}$.

Die Lösung des Optimierungsproblems $\min J$ ist dann durch die Zustandsrückführung

$$\underline{u} = - \underline{C}_x \underline{x} \quad (8.21)$$

mit

$$\underline{C}_x = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{G}^{-T} \underline{P} \quad (8.22)$$

gegeben.

P ist dabei die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Riccati Gleichung

$$\underline{\underline{P}} \underline{G} + \underline{F}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{G} \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{G}^T \underline{P} + \underline{\underline{Q}} = \underline{0} \quad (8.23)$$

Der geschlossene Regelkreis ist dann automatisch asymptotisch stabil.

Dabei müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

$\underline{\underline{Q}}$ ist symmetrisch, positiv semidefinit.

$\underline{\underline{R}}$ ist symmetrisch, positiv definit.

Das Paar $(\underline{F}, \underline{Q}_0)$ ist vollständig beobachtbar, wobei \underline{Q}_0 aus der Zerlegung der Wichtungsmatrix $\underline{\underline{Q}}$ hervorgeht ($\underline{\underline{Q}} = \underline{Q}_0^T \underline{Q}_0$). Dies ist immer der Fall, wenn $\underline{\underline{Q}}$ positiv definit ist.

Das System $(\underline{F}, \underline{G})$ ist steuerbar.

Nach Einführung der regelungstechnischen Grundlagen werden diese im nächsten Kapitel beim Entwurf eines Reglers für Magnetschwebefahrzeuge angewandt.

8.2 Magnetschwebefahrzeug

Der Aufbau und die Kenngrößen von Magnetschwebefahrzeugen sind z.B. in [Kortüm, Lugner 1994] und [Popp 1978] beschrieben.

Für Magnetschwebefahrzeuge existieren zwei unterschiedliche Grundprinzipien:

- Das elektromagnetische Schwebeprinzip (EMS) basiert auf dem Prinzip der anziehenden Kräfte zwischen Magnet und ferromagnetischer Ankerschiene. Das Fahrzeug umschließt den Fahrweg und wird von den Magnetkräften von unten an den Fahrweg herangezogen. Die in Deutschland entwickelte Magnetschwebetechnologie basiert auf diesem Prinzip. Der Antrieb erfolgt über einen Langstator im Fahrweg (Abbildung 8.5).
- Das elektrodynamische Schwebeprinzip arbeitet mit den abstoßenden Kräften von supraleitenden Spulen im Fahrzeug und Reaktionsspulen im Fahrweg.

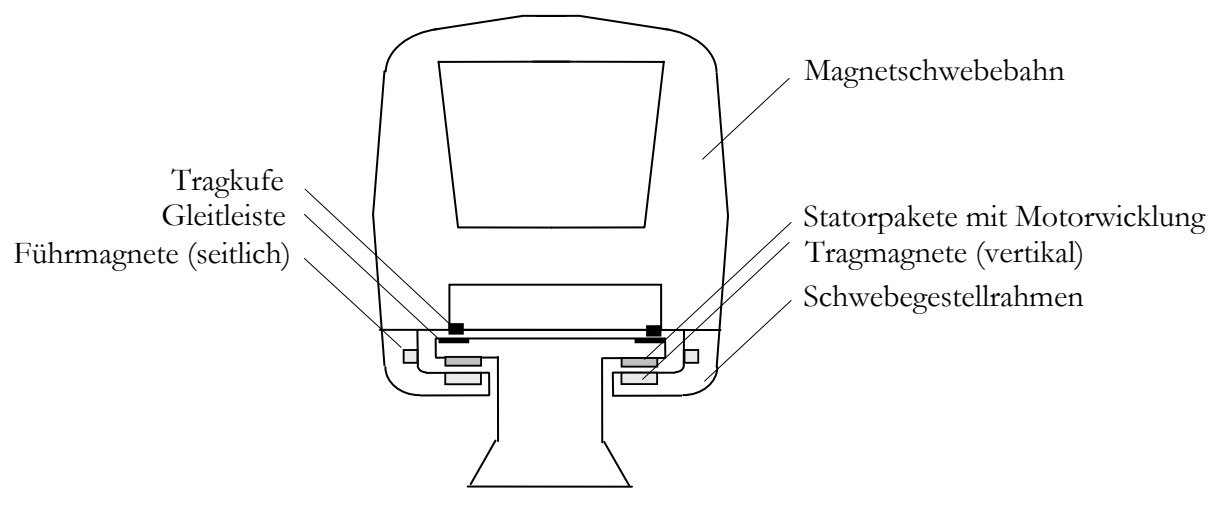


Abbildung 8.5: Magnetschwebefahrzeug nach dem elektromagnetischen Schwebeprinzip

Im Folgenden wird das elektromagnetische Schwebeprinzip betrachtet.

Die Magnetkräfte werden über einen Regelkreis gesteuert. Die Dynamikanforderungen sind dabei die Gewährleistung der Fahrsicherheit und des Fahrkomfort. Diese Ziele können durch einen möglichst gleich bleibenden Spalt zwischen Fahrzeug und Fahrweg und möglichst geringen Beschleunigungen des Wagenkastens beschrieben werden.

8.2.1 Modellierung von Fahrzeug und Fahrweg

In dieser Arbeit stehen die Beschreibung der Kopplung zwischen geregelterm Fahrzeug und Fahrweg, die Simulation der Relativbewegung und die Stabilität der Zeitintegration im Vordergrund. Als Zieldefinition der Untersuchungen sollen grundlegende Effekte studiert werden. Fahrzeug und Fahrweg werden deswegen über einfache Ersatzmodelle abgebildet. Das Fahrzeug wird als Massenpunkt mit parallel geschalteten Magnetstellgliedern mit einem gemeinsamen Angriffspunkt am Fahrweg abgebildet. Der Fahrweg wird als elastischer, massebehafteter Euler - Bernoulli Balken als Finite Element Modell realisiert. Die Erweiterung auf komplizierte Fahrzeug- und Fahrwegmodelle kann ohne weiteres mit der beschriebenen Methodik durchgeführt werden.

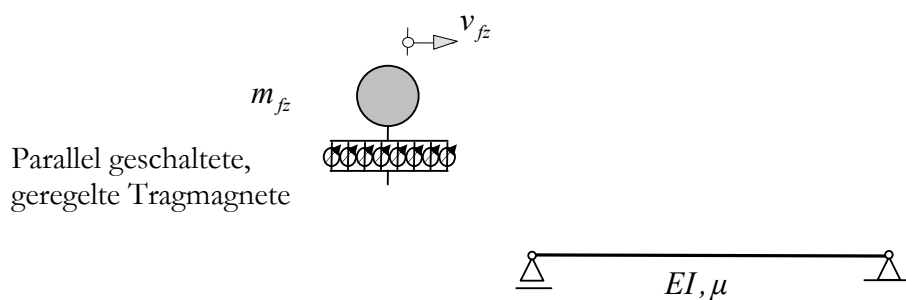


Abbildung 8.6: verwendete Modelle von Fahrzeug und Fahrweg

8.2.2 Tragmagnete

Die folgende Abbildung zeigt das Modell eines Tragmagneten

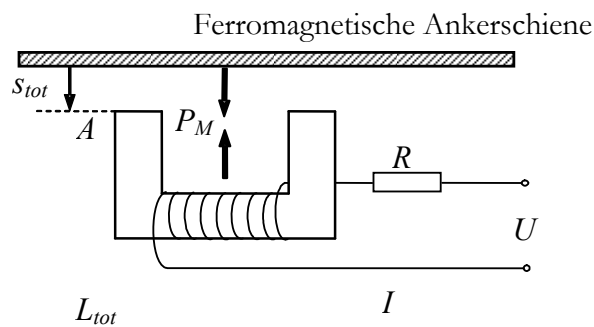


Abbildung 8.7: Modell eines Tragmagneten

Dabei entspricht U der angelegten Spannung, R dem Ohmschen Widerstand und I dem Strom. L_{tot} kennzeichnet die Summe der auftretenden Induktivitäten. s_{tot} entspricht dem Spalt zwischen Magnet und Ankerschiene und P_M der Magnetkraft.

Zur Beschreibung der Induktivität existieren verschiedene Modelle. Das einfachste davon berücksichtigt die Luftspaltinduktivität L_a .

$$L_{tot} = L_a = \frac{\mu_0 A n^2}{2 s_{tot}} \quad (8.24)$$

mit: A = Fläche eines Pols, n = Anzahl der Windungen, μ_0 = Induktionskonstante ($4 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ H/m}$).

Detailliertere Modelle finden sich z.B. in [Kortüm, Lugner 1994] und [Popp 1978]. Letztendlich führen diese Modelle nach Linearisierung der Gleichungen auf die gleiche Beschreibung (8.32).

Unter Verwendung der Induktivität L_{tot} ergibt sich für die Spannung $U(t)$ und die Kraft $P_M(t)$ zwischen Schiene und Magnet: Die Magnetkraft kann aus der Gleichheit von magnetischer Energie und Arbeit der Magnetkräfte bestimmt werden:

$$U(t) = RI + \frac{d}{dt} [L_{tot}(I, s_{tot}) I] \quad (8.25)$$

$$P_M(t) = - \frac{\partial}{\partial s_{tot}} \int_0^{I(t)} L_{tot}(I, s_{tot}) I dI \quad (8.26)$$

Durch Einsetzen der Luftspaltinduktivität (8.24) ergibt sich für die Spannung $U(t)$ und die Magnetkraft P_M :

$$U = RI + \frac{\mu_0 A n^2}{2} \left[\frac{dI}{dt} \frac{1}{s_{tot}} - \frac{I}{s_{tot}^2} \dot{s}_{tot} \right] \quad (8.27)$$

$$P_M = \frac{\mu_0 A n^2 I^2}{4 s_{tot}^2} \quad (8.28)$$

Aus (8.27) erkennt man direkt, dass derartige Systeme instabil sind. Eine Erhöhung des Spaltes führt zu einer Verringerung der Magnetkraft, so dass sich das System von der Solllage weg nach unten bewegt. Eine Verringerung des Spaltes führt zur Verstärkung der Magnetkraft und somit zu einer verstärkten Anziehung.

Diese Gleichungen sind nichtlinear. Zum Entwurf eines Reglers müssen sie, unter der Annahme dass sich nur kleine Abweichungen von der Solllage ergeben, linearisiert werden. Diese Annahme rechtfertigt sich für Magnetschwebefahrzeuge dadurch, dass die Bewegungen in vertikaler Richtung klein sind und Abweichungen von der Regelung schnell zurückgeführt werden. Die Linearisierung ist die Voraussetzung für mehrere Systemanalysen wie Stabilitätsbetrachtungen oder die Bestimmung der Eigenfrequenzen. Oft setzt die Reglerauslegung auch eine lineare Reglerstrecke voraus. Eine Absicherung ist dann durch die Simulation des nichtlinearen Modells möglich.

Die Linearisierung erfolgt durch eine Taylorreihenentwicklung bis zu den Termen erster Ordnung für die Auslenkungen, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen. Dabei werden die Schwankungen um die Gleichgewichtslage (gekennzeichnet mit Index $_0$ bzw. dem Index $_{stat}$) betrachtet:

$$\begin{aligned} U(t) &= u_0 + u(t), \quad I(t) = i_0 + i(t) \\ s_{tot}(t) &= s_0 + s(t), \quad P_M = P_{stat} + P_{dyn}(t) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Damit ergibt sich:

$$u = Ri + \frac{\mu_0 An^2}{2} \left[\frac{\dot{i}}{s_0} - \frac{i_0}{s_0^2} \dot{s} \right] = Ri + K_i \dot{i} - K_s \dot{s} \quad (8.30)$$

und

$$P_{dyn} = \frac{\mu_0 An^2}{2s_0} \left[\frac{i_0}{s_0} \dot{i} - \frac{i_0^2}{s_0^2} \dot{s} \right] = K_I \dot{i}(t) - K_S \dot{s} \quad (8.31)$$

Durch Umformen der Gleichungen (8.30) und (8.31) ist es möglich die Stromstärke zu eliminieren. Die Änderung der magnetischen Kontaktkraft ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{dyn}(t) &= \\ & -\frac{R}{K_I} P_{dyn}(t) - \frac{RK_S}{K_I} s(t) + \left(\frac{K_S K_I}{K_I} - K_S \right) \dot{s}(t) + \frac{K_I}{K_I} u(t) = \\ & -k_p P_{dyn}(t) - k_s s(t) + k_s \dot{s}(t) + k_u u(t) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Die Konstanten K_I, K_j, K_S können analytisch berechnet werden. Die Werte weichen dann jedoch von experimentell ermittelten Werten ab. Es ist daher sinnvoller gemessene Konstanten zu verwenden. Für einen Tragemagneten mit $P_{stat} = 8.34 \cdot 10^3 N$, $i_0 = 18 A$ and $s_0 = 0.014 m$ betragen diese nach [Gottzein, Lange 1973].

$$R = 2.5 \Omega, \quad K_I = 628 N/A, \quad K_S = 932 \cdot 10^3 N/A, \quad K_j = 0.65 Vs/A \text{ und } K_s = 966 Vs/m.$$

8.2.3 Reglerentwurf

Der Reglerentwurf wird aus Gründen der Übersichtlichkeit und Einfachheit an vereinfachten Systemen durchgeführt. Hierfür bietet sich das Modell einer geregelten Einzelmasse auf starrem Untergrund an. Der entstehende Reglerentwurf wird später am Gesamtsystem geprüft.

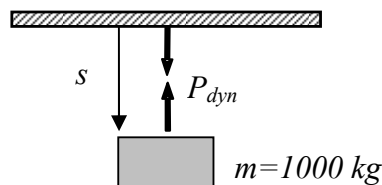


Abbildung 8.8: Modell für den Reglerentwurf: Tragemagnet mit Punktmasse

Die Bewegungsgleichungen für eine Einzelmasse auf starrem Untergrund lauten in der Zustandsform:

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ P_{dyn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/m \\ k_s & k_s & k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ P_{dyn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_u \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (8.33)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{G}} u \quad (8.34)$$

Das Systemverhalten ist zunächst instabil und bedarf daher eines Regelalgorithmus zu Stabilisierung. Eine Regelung kann unter Verwendung des Elektromagneten entworfen werden, dass eine notwendige Veränderung der Stellspannung aus den Zustandsgrößen bestimmt wird (Zustandsrückführung).

$$u = - \underline{\mathbf{C}}_x \underline{\mathbf{x}} \quad (8.35)$$

Der Regler wird als Optimalregler nach Kapitel 8.1.3.1 entworfen.

Die Wahl der Gewichtungsmatrizen $\underline{\mathbf{Q}}$, $\underline{\mathbf{R}}$ kann über

$$q_{ii} = \frac{1}{(x_{i,max})^2}, \quad q_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad r_{ii} = \frac{1}{(u_{i,max})^2}, \quad r_{ij} = 0 \quad (8.36)$$

erfolgen. Da nur eine Stellgröße vorliegt, ist r eine skalare Größe. Für die Fahrsicherheit ist der Spalt zwischen Fahrzeug und Fahrweg maßgebend. Die Variation des Spaltes s um die statische Solllage s_0 wird am stärksten gewichtet. Die Beschleunigung der Aufbaumasse wird schwach, die Geschwindigkeit der Aufbaumasse mit Null gewichtet. Vgl. [Breinl 1980]:

$s_{max} = 3.16 \cdot 10^6$, $\dot{s}_{max} = 1 \cdot 10^{-3}$, $P_{max} = \ddot{s}_{max} m = 1 \cdot 10^{-3}$, $u_{max} = 1$. Die Gewichtungsmatrizen ergeben sich dann zu:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 10^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad r = 1. \quad (8.37)$$

Das System ist vollständig steuerbar für $k_u \neq 0$

$$\underline{\mathbf{Q}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_u / m_u \\ 0 & -k_u / m_u & -p_k \cdot k_u / m_u \\ k_u & p_k \cdot k_u & (-k_s / m + p_k^2) \cdot k_u \end{bmatrix}, \quad \det(\underline{\mathbf{Q}}_c) = -\frac{k_u^3}{m_u} \quad (8.38)$$

$(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{Q}}_c)$ ist beobachtbar, da $\underline{\mathbf{Q}}_c$ positiv definit ist. Die Anforderung an r ist durch $r=1$ eingehalten.

Der Entwurf der Regelung erfolgt über Lösung der algebraischen Riccati- Gleichung. Die Gleichung wird nach P gelöst:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{G}}} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{r}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (8.39)$$

Damit lautet der Verstärkungsvektor $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x = \underline{\underline{r}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{-T} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} -3.17 \cdot 10^6 & -4.36 \cdot 10^4 & 0.296 \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

Die Gleichungen des geregelten Systems ergeben sich aus

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{x}}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbf{u}}} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_x \underline{\underline{\mathbf{x}}}$$

Die Eigenwerte der geregelten Systemmatrix lauten $\lambda_1 = -145.12$ $\lambda_{2,3} = -72.56 \pm 125.7 i$.

Das System ist stabil.

Da nur die Kraft geregelt wird, ändert sich beim geregelten System lediglich die letzte Zeile (Gleichung der Spaltregelung) im Vergleich zu (8.33)

$$\dot{P}_{dyn}(t) = -k_{rp} P_{dyn}(t) + k_{rs} \dot{s}(t) + k_{rs} s(t) \quad (8.41)$$

mit $k_{rs} = 3.0610^9$, $k_{rs} = 4.21 \cdot 10^7$, $k_{rp} = -2.90 \cdot 10^2$

Mechanisch kann diese Gleichung als Nebenbedingung interpretiert werden, welche einen Zusammenhang zwischen Spaltgrößen und der Kontaktkraft angibt.

Mit diesem Reglerentwurf sind die Anforderungen an die Fahrdynamik gut erfüllt, wie anhand des Amplitudengangs und der Übergangsfunktion gezeigt werden kann [Weissenfels 2004].

8.3 Kopplung der relativbewegten Systeme

Die Kopplung beider Systeme kann durch die Ankopplung über nichtkonservative Kräfte erfolgen. Den Spalt s berechnet sich aus der Durchsenkung des Fahrzeugaufstandspunktes $z_k(t)$, der Durchsenkung des Fahrwegs $w_k(t)$ und der Rauheit des Fahrwegs $r(t)$:

$$s(t) = z_k(t) - w_k(t) - r(t) \quad (8.42)$$

Eingesetzt in die Regelungsnebenbedingung (8.41) lautet diese:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{dyn}(t) = & -k_{rp} \cdot P_{dyn}(t) + k_{rs} \cdot \dot{z}_k(t) - k_{rs} \cdot \dot{w}_k(t) - k_{rs} \cdot \dot{r}(t) + \\ & + k_{rs} \cdot z_k(t) - k_{rs} \cdot w_k(t) - k_{rs} \cdot r(t) \end{aligned} \quad (8.43)$$

Damit liegt eine Nebenbedingung vor, die zur Kopplung der Systeme Fahrzeug und Fahrweg verwendet werden kann. Die Nebenbedingung ist nichtholonom. Die formale Beschreibung der Kopplung gelingt über die Ankopplung über nichtkonservative Kräfte. Die Relativbewegung kann nach Kapitel 4 über zeitvariante Ansatzfunktionen für den Fahrweg beschrieben werden.

8.4 Zeitintegration

Der Index des Systems ergibt sich aus der Nebenbedingung und der Charakteristika beider Systeme am Ort der Kopplung (Kapitel 3). Bei beiden Systemen liegen an den Koppelfreiheitsgraden Massenanteile vor. Die Nebenbedingung enthält bereits einen Anteil aus der Ableitung der Koppelkraft, so dass eine gewöhnliche Differentialgleichung vorliegt (DAE mit Index 0). Die Zeitintegration kann problemlos mit dem Generalized- α Verfahren durchgeführt werden.

8.5 Anwendungsbeispiel

Als Anwendungsbeispiel wird die Bewegung des Magnetschwebefahrzeugs über einen Fahrwegträger betrachtet.

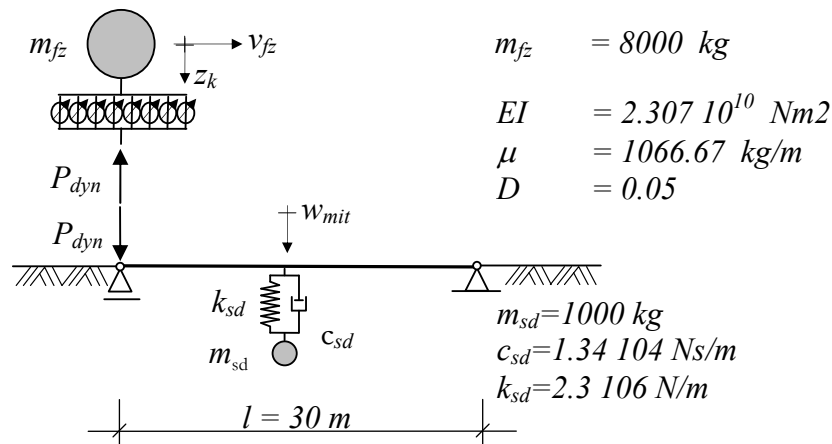


Abbildung 8.9: Simulationsmodell

Das Fahrzeug wird über 8 parallel geschaltete geregelte Massen und Regler (nach Kapitel 8.2.1) beschrieben. Aufgrund der Parallelschaltung ist der Spaltabstand für alle 8 Tragemagneten identisch. Mit $P_{dyn} = 8 \cdot P_i = P_{tot}$ und $m_v = 8 \cdot m_i = m_{tot}$ ergeben sich die Parameter des Regelungssystems 1 zu: $k_{rs} = 8 \cdot 3.0610^9$, $k_{rs} = 8 \cdot 4.21 \cdot 10^7$, $k_{rp} = 2.90 \cdot 10^2$.

Zum Vergleich wird ein zweites Regelgesetz mit $s_{max} = 1 \cdot 10^3$, $\dot{s}_{max} = 1 \cdot 10^{-3}$, $P_{max} = \ddot{s}_{max} m = 1 \cdot 10^{-3}$ und $u_{max} = 1$ entworfen. Die Parameter des Regelgesetzes 2 sind: $k_{rs} = 8 \cdot 3.71 \cdot 10^6$, $k_{rs} = 8 \cdot 5.18 \cdot 10^5$, $k_{rp} = 8 \cdot (-32.4)$. Dieses zweite Regelgesetz wichtet den Spaltabstand deutlich geringer als das Regelmodell 1. Es stellt daher einen stärkeren Kompromiss zwischen Spaltabstand und Regelspannung (Maß für aufgewendete Energie) dar.

Der Fahrwegträger wird als Finite Element Modell mit Euler Bernoulli Balken Elementen abgebildet. Mit den gegebenen Parametern beträgt seine erste Eigenfrequenz $f_1 = 8.12 \text{ Hz}$. Der Fahrwegträger ist in Feldmitte mit einem Schwingungsdämpfer ausgestattet. Dessen Parameter wurden nach Den Hartogs Kriterien gewählt.

Die Zeitintegration wird mittels des Generalized- α Verfahrens mit $\rho_\infty = 0.8181$ und $dt = 0.00025$ s durchgeführt.

Die Berechnungsergebnisse für die Mittendurchsenkung des Fahrwegs w_{mit} , die Durchsenkung der Fahrzeugmasse z_k und der dynamischen Kontaktkraft P_{dyn} für eine Fahrgeschwindigkeit von $v_{fz} = 121.75$ m/s sind in der nächsten Abbildung dargestellt.

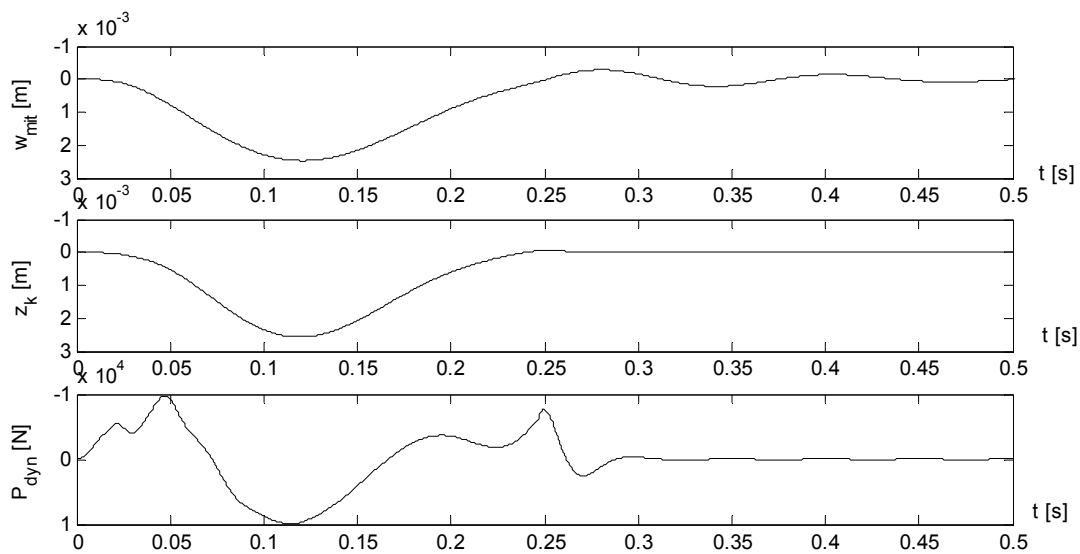


Abbildung 8.10: Mittendurchsenkung, Durchsenkung der Fahrzeugmasse und Kontaktkraft

Durch die starke Gewichtung des Spaltabstandes bei dem Reglerentwurf wurde ein Regelgesetz erhalten, das Abweichungen im Spalt sofort entgegenregelt. Das Fahrzeug folgt der Durchsenkung des Fahrwegs sehr gut. Nach $t=0.12$ s befindet sich das Fahrzeug in Feldmitte. Hier stimmen die Durchsenkung des Fahrwegs und die der Fahrzeugmasse sehr gut überein. Nachdem das Fahrzeug den Fahrwegträger wieder verlassen hat, schwingt der Fahrwegträger frei aus ($D=0.05$). Die Schwingungen des Fahrzeugs klingen infolge der hohen Dämpfung schnell ab.

Infolge der Belastung des Fahrwegträgers senkt dieser sich durch. Der geregelte Tragnagnet erzeugt daher zunächst eine negative Kraft (Zugkraft gemäß Abbildung 8.9), die das Fahrzeug ebenfalls nach unten zieht. Der Regler übersteuert diese Bewegung und bremst diese durch eine positive dynamische Kraft ab ca. $t=0.07$ s wieder ab. Im Bereich der Feldmitte verstärkt sich diese, da ab sich ab hier der Fahrweg unter dem Fahrzeug zunächst kaum noch durchsenkt und dann zum Auflager hin nach oben bewegt (Fahrzeug fährt bergauf). Auch hier tritt ein leichtes Übersteuern auf. Die maximale dynamische Kraft beträgt ca. 12% der statischen Kraft.

Der Vergleich beider Regelgesetze für die Durchsenkung der Fahrzeugmasse z_k und der dynamischen Kontaktkraft P_{dyn} für eine Fahrgeschwindigkeit von $v_{fz} = 121.75$ m/s ist in der nächsten Abbildung dargestellt.

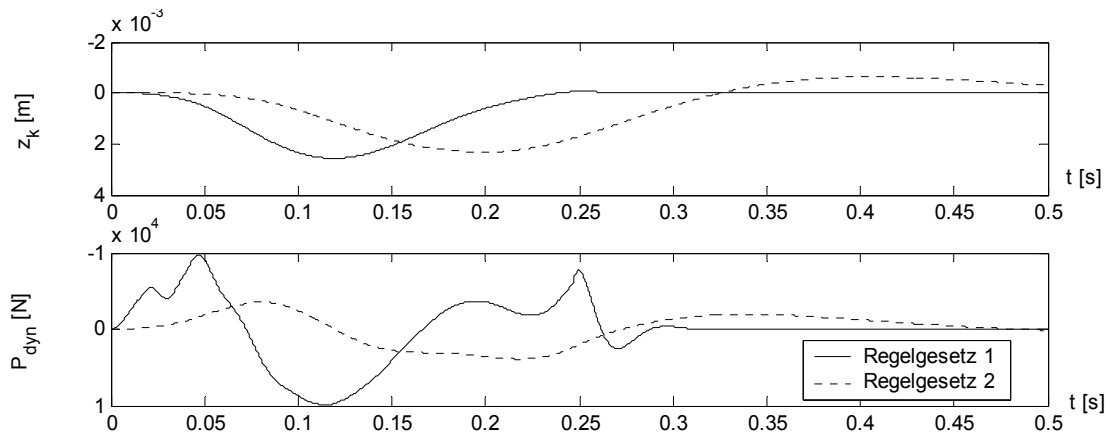


Abbildung 8.11: Vergleich: Durchsenkung der Fahrzeugmasse z_k und der dynamischen Kontaktkraft P_{dyn} für beide Regelgesetze

Hier ist gut erkennbar, dass Regelgesetz 1 ein deutlich besseres Führverhalten zeigt als Regelgesetz 2, bei dem der Spaltabstand nicht so stark gewichtet wurde. Das Regelgesetz 2 reagiert langsamer auf die Durchsenkung des Fahrwegs, ein Übersteuern ist nicht mehr zu erkennen. Die Dämpfung des Fahrzeugs ist geringer, das Ausschwingen des Fahrzeugs dauert länger. Die maximalen Regelkräfte sind deutlich geringer als beim Regelgesetz 1.

Die nächste Abbildung vergleicht für beide Regelgesetze die Mittendurchsenkung im Bezug zur (für beide Regelgesetze gleich großen) statischen Durchsenkung w_{mit}/w_{stat} des Fahrwegs. Die dynamische Antwort der Brücke ist bei der Überfahrt des Fahrzeugs mit Regelgesetz 2 zunächst größer. Sobald das Regelgesetz 1 übersteuert und zusätzliche Druckkräfte aufbringt kehrt sich dies schnell um. Regelgesetz 1 bringt im Bereich der Trägermitte hohe Druckkräfte (vgl. Abbildung 8.9) auf, so dass die Mittendurchsenkung hier größer ist.

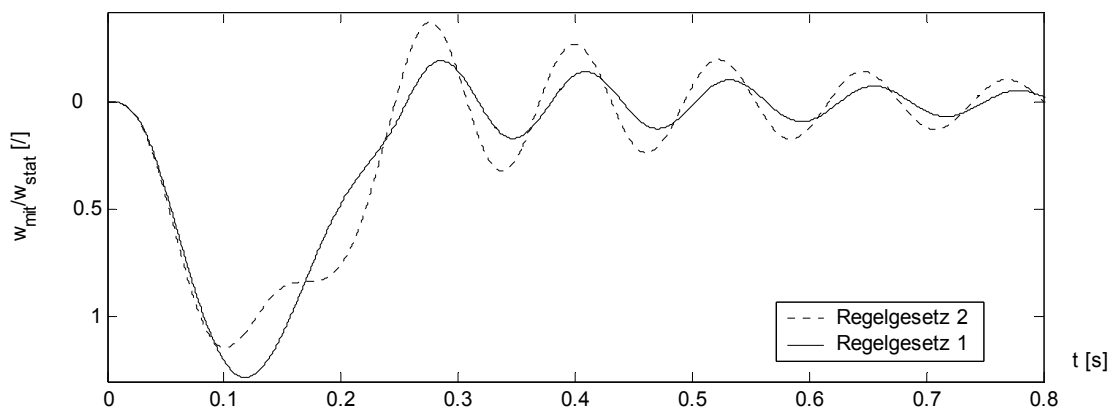


Abbildung 8.12: Vergleich: Mittendurchsenkung w_{mit}/w_{stat} für beide Regelgesetze

Die Mittendurchsenkung ist eine maßgebliche Kenngröße zur Dimensionierung. Aus ihr kann im Sinne einer Bemessung der Fahrwegträger ein dynamischer Vergrößerungsfaktor abgeleitet werden.

Die Darstellung des dynamischen Vergrößerungsfaktors über $k=l \cdot f_1 / v_{fz}$ wird als Antwortspektrum bezeichnet. Mit diesem können statische Durchbiegungen und Schnittgrößen multipliziert werden um die maximalen Werte für die Bemessung zu erhalten. Die nächste Abbildung vergleicht die dynamischen Vergrößerungsfaktoren φ ($\varphi = w_{\text{dyn,max}} / w_{\text{stat,max}}$) für unterschiedliche Lastszenarien: Die Überfahrt eines Fahrzeugs mit dem Regelgesetz 1 und 2 und die Überfahrt einer bewegten Last über den Fahrwegträger (mit bzw. ohne Schwingungsdämpfer).

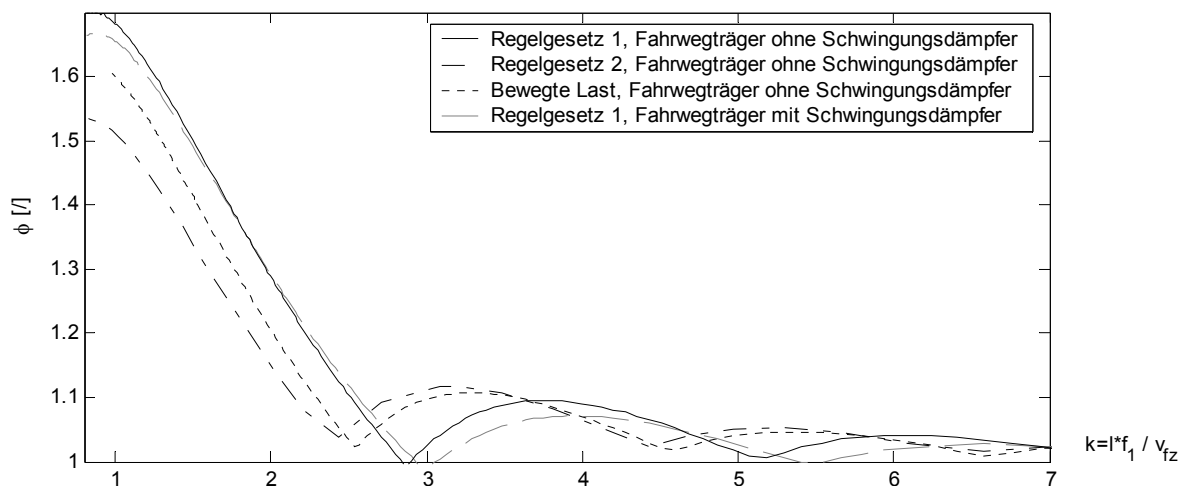


Abbildung 8.13: Vergleich: Schwingbeiwert φ für verschiedene Lastszenarien

Das Antwortspektrum der bewegten Last ist, infolge der starken Beteiligung der ersten Eigenform bei Überfahrt der Last, dem Antwortspektrum einer sinusförmigen Stoßbelastung vergleichbar.

Die Überfahrt des Fahrzeugs mit Regelgesetz 1 verursacht für hohe Geschwindigkeiten eine größere dynamische Antwort als die bewegte Last, insbesondere im Bereich des steilen Anstiegs von φ für $k < 2.5$. Ein Schwingungsdämpfer kann die dynamische Mittendurchsenkung des Fahrwegträgers aufgrund der stoßartigen Belastung nur geringfügig reduzieren. Das Regelgesetz 2 erbringt geringere dynamische Vergrößerungsfaktoren und kann daher als Fahrwegträger-, „freundlicher“ bezeichnet werden.

8.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Interaktionssimulation von Magnetschwebbahnen untersucht. Die Beschreibung der Tragschweben und der Regelung ergeben eine Bestimmungsgleichung für die Kontaktkraft. Diese Gleichung kann in mechanischem Sinn als Nebenbedingung interpretiert werden. Die Kopplung der Modelle kann dann mittels der Kopplung über nichtkonservative Kräfte beschrieben werden. Damit kann die Simulation in die Simulationsstrategie der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion integriert werden. Mit dem Algorithmus zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion kann die Bewegung geregelter Fahrzeuge berechnet werden.

Bei der Zeitintegration wirkt sich die Struktur der Nebenbedingung günstig aus. Anstatt einer DAE entsteht ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (mit einer allerdings singulären

Massenmatrix). Die Zeitintegration bereitet keine außergewöhnlichen Schwierigkeiten und kann mit dem Generalized- α Verfahren durchgeführt werden. Spezielle Integrationsverfahren sind nicht nötig.

Neben den Magnetschwebbahnen existieren auch Fahrzeuge, die geregelte Komponenten enthalten. Hier ist die Beschreibung einfacher, da die Regelung direkt in die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs eingeht. Die Kopplung beider Systeme erfolgt über die Verschiebungsnebenbedingung.

9 Interaktion Eisenbahn – elastischer Untergrund

In diesem Kapitel wird als Anwendungsbeispiel die Bewegung eines Eisenbahnwaggons über einen unendlich langen, elastisch gebetteten Balken beschrieben. Der unendlich lange Balken wird für die Simulationsrechnungen in drei Teile unterteilt. Der mittlere Teil des Balkens, über den sich das Fahrzeug bewegt, wird als FE Modell abgebildet. Die links und rechts daran anschließenden einseitig unendlich langen Balken werden analytisch über einen Exponentialansatz im Frequenzbereich beschrieben und über ihre Flexibilität an den mittleren Balken angekoppelt. Das Fahrzeug wird als Mehrkörpersystem (MKS) modelliert:

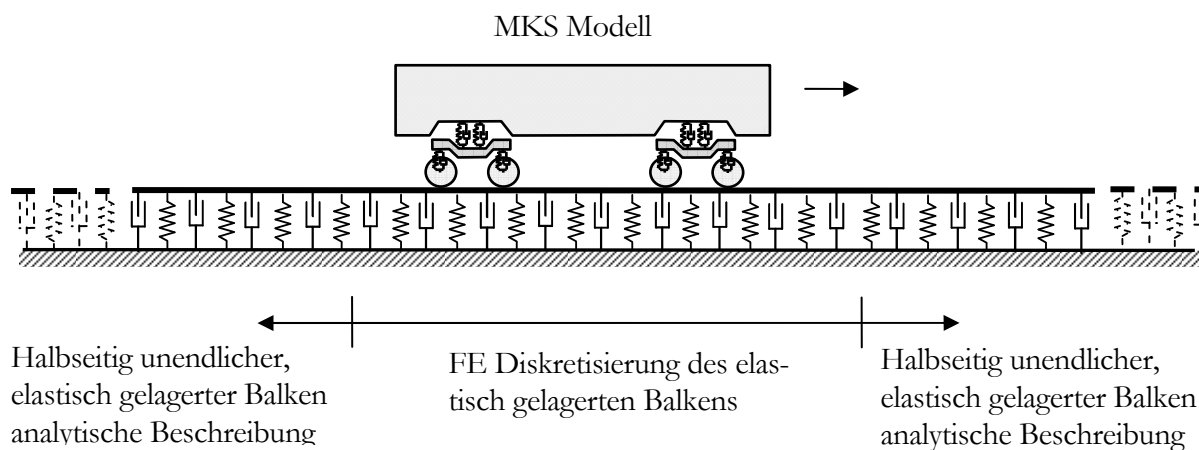


Abbildung 9.1: Simulationsmodell

Das Anwendungsbeispiel soll

- die Modellreduktion eines halbseitig unendlichen elastisch gebetteten Balkens über seine Flexibilität zeigen und die Anbindung des reduzierten Modells über die Impulsrechteckfunktion $g_R(t)$ an einem Beispiel darstellen. Ziel dieser Vorgehensweise ist es, die Wellenreflexion an den künstlich eingeführten Gebietsrändern des FE Modells zu verhindern („transmitting boundaries“).
- die Zeitintegration eines Index 3 Systems mit den entwickelten Zeitintegrationsverfahren an einem Beispiel aufzeigen.

9.1 Fahrzeugmodell

Das Fahrzeug wird als zweidimensionales, vertikaldynamisches Mehrkörpersystem nach [Ripke 1995] beschrieben. Das Fahrzeug besitzt in seiner differentiell – algebraischen Darstellung insgesamt 14 Freiheitsgrade. Zu den 10 Freiheitsgraden des Fahrzeugs kommen die vier Kontaktkräfte hinzu. Das Modell des Fahrzeugs und seine Parameter sind im Folgenden angegeben.

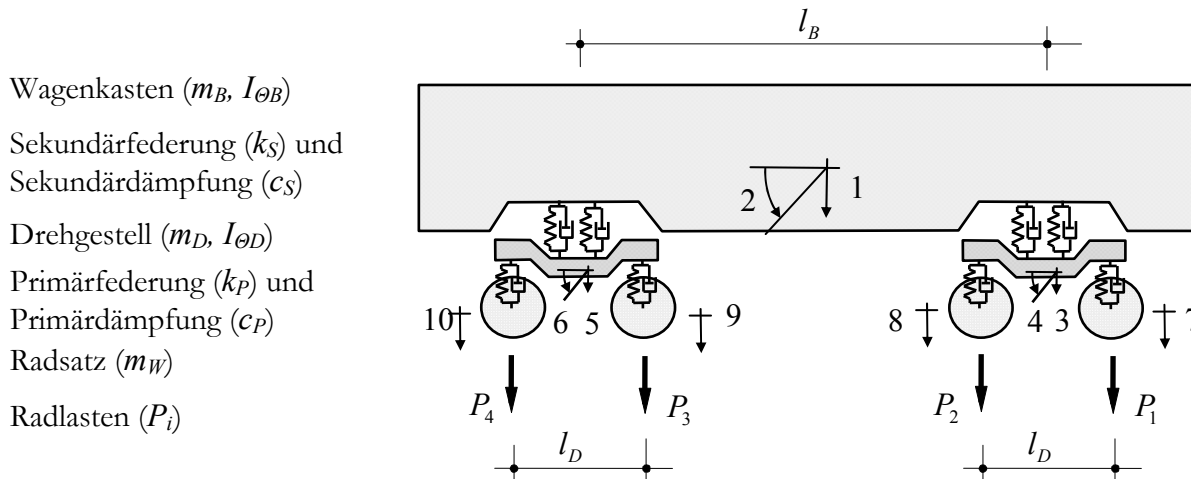


Abbildung 9.2: Fahrzeugmodell

Die Anbindung der Räder an das Gleis wird in der Regel über eine Hertzsche Kontaktfeder beschrieben. Die Berücksichtigung der Hertzschen Kontaktfeder würde jedoch den Index des differentiell – algebraischen Systems von 3 auf 1 reduzieren. Da hier die Zeitintegration eines Systems mit hohem Schwierigkeitsgrad gezeigt werden soll, wird bei der Simulationsrechnung auf die Kontaktfeder verzichtet.

Modellkomponente	Bez.	Wert	Einheit
Masse des Wagenkastens	m_B	$3,1 \cdot 10^4$	[kg]
Massenträgheitsmoment des Wagenkastens	$I_{\Theta B}$	$1,4 \cdot 10^6$	[kgm ²]
Sekundärsteifigkeit	k_S	$8,8 \cdot 10^5$	[N/m]
Sekundärdämpfung	c_S	$4,0 \cdot 10^4$	[Ns/m]
Masse des Drehgestells	m_D	$2,5 \cdot 10^3$	[kg]
Massenträgheitsmoment des Drehgestells	$I_{\Theta D}$	$1,0 \cdot 10^3$	[kgm ²]
Primärsteifigkeit	k_P	$13,2 \cdot 10^5$	[N/m]
Primärdämpfung	c_P	$2,4 \cdot 10^4$	[Ns/m]
Masse Radsatz	m_W	$1,8 \cdot 10^3$	[kg]
Abstand Auflager Wagenkasten	l_B	19,0	[m]
Abstand Auflager Drehgestell	l_D	2,7	[m]

Tabelle 9.1: Daten des Fahrzeugmodells

9.2 Elastisch gebetteter Balken

Die homogene Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens lautet:

$$EI \cdot w^{IV} + k \cdot w + c \cdot \dot{w} + \mu \cdot \ddot{w} = 0. \quad (9.1)$$

9.2.1 Finite Elemente Diskretisierung, Wellenreflexion

Der mittlere Teil des Balkens wird durch Finite Elemente diskretisiert. An den künstlich eingeführten Rändern des FE Modells treten unerwünschte Wellenreflexionen auf. Die folgende Abbildung zeigt die Durchsenkung des elastisch gelagerten Balkens infolge einer harmonischen Last in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t .

Die Parameter wurden dabei zu: $EI = 12,8 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, Massebelegung $\mu = 120,6 \text{ kg/m}$, Bettungsziffer $k = 1,8 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ und Dämpfungsziffer $c = 1 \cdot 10^4 \text{ Ns/m}^2$ gewählt. Die Zeitintegration erfolgte mit $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

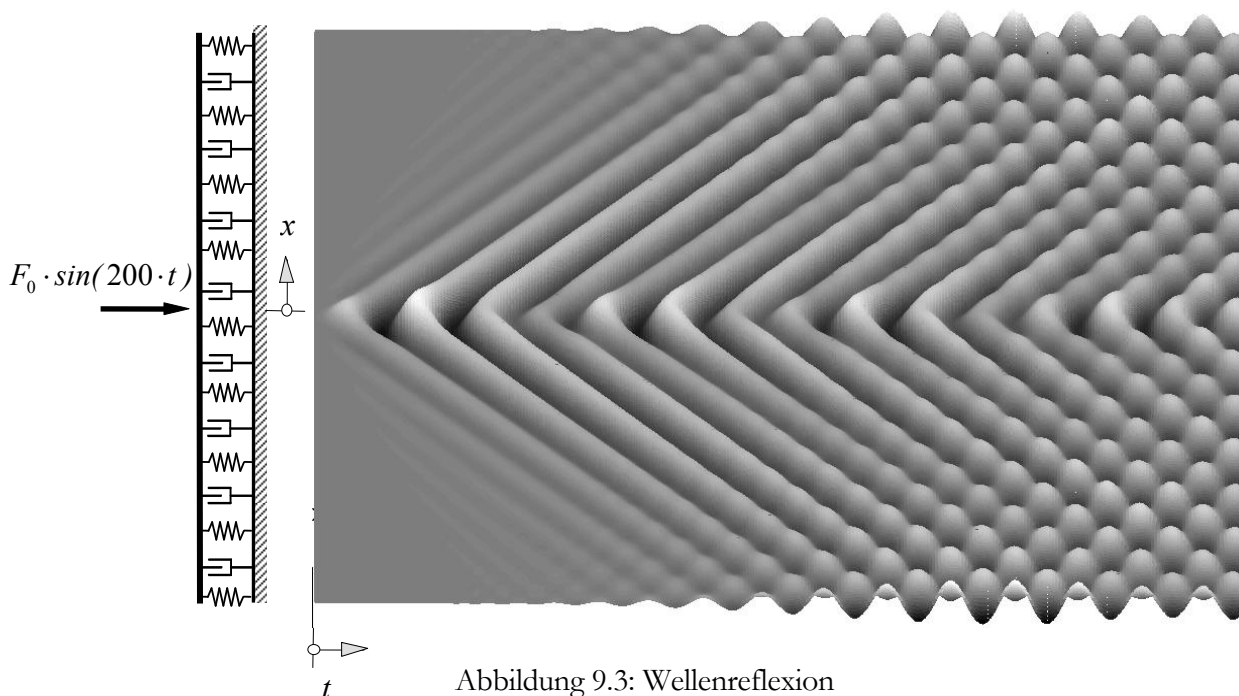


Abbildung 9.3: Wellenreflexion

Die Wellen breiten sich mit der Wellengeschwindigkeit c vom Ort der Lastaufbringung zu den Rändern hin aus. An den Rändern werden die Wellen reflektiert und es bilden sich schnell stehende Wellen aus.

9.2.2 Beschreibung der einseitig unendlichen elastisch gelagerten Balken

Die beiden daran anschließenden einseitig unendlichen Bereiche werden über ihre Flexibilität im Frequenzbereich beschrieben. Die Transformation der Differentialgleichung in den Frequenzbereich ergibt:

$$EI \cdot w^{IV} + (-\mu \cdot \omega^2 + i \cdot \omega \cdot c + k) \cdot w = 0. \quad (9.2)$$

Die Lösung erfolgt über den Exponentialansatz

$$w(x, \omega) = C \cdot e^{\kappa \cdot x}$$

mit

$$\kappa = \sqrt[4]{\lambda}, \quad \lambda = \frac{-\mu \cdot \omega^2 - i \cdot \omega \cdot c - k}{EI}. \quad (9.3)$$

Da $\sqrt[4]{\lambda}$ vier Lösungen besitzt, muss zur Lösung eine Fallunterscheidung nach den positiven/negativen Realteilen von λ getroffen werden.

Die kritische Kreisfrequenz ist: $\omega_{krit} = \sqrt{k/\mu}$. Ist $\omega > \omega_{krit}$, so liegt überkritische Anregung vor, bei $\omega < \omega_{krit}$ liegt unterkritische Anregung vor.

Die Flexibilitätsmatrix $\underline{\underline{G}}$ beschreibt das Verhältnis von Randverschiebung und Randverdrehung zu den Randschnittgrößen:

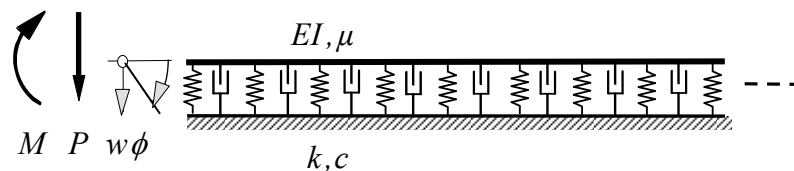


Abbildung 9.4: Modell zur Bestimmung der Flexibilität

Und ist wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} w(x=0, \omega) \\ \varphi(x=0, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{wP}(\omega) & G_{wM}(\omega) \\ G_{\varphi P}(\omega) & G_{\varphi M}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(x=0, \omega) \\ M(x=0, \omega) \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Die einzelnen Elemente der Flexibilitätsmatrix sind in der folgenden Abbildung getrennt nach Real- und Imaginärteil dargestellt. Dabei gilt: $G_{wM}(\omega) = G_{\phi P}(\omega)$.

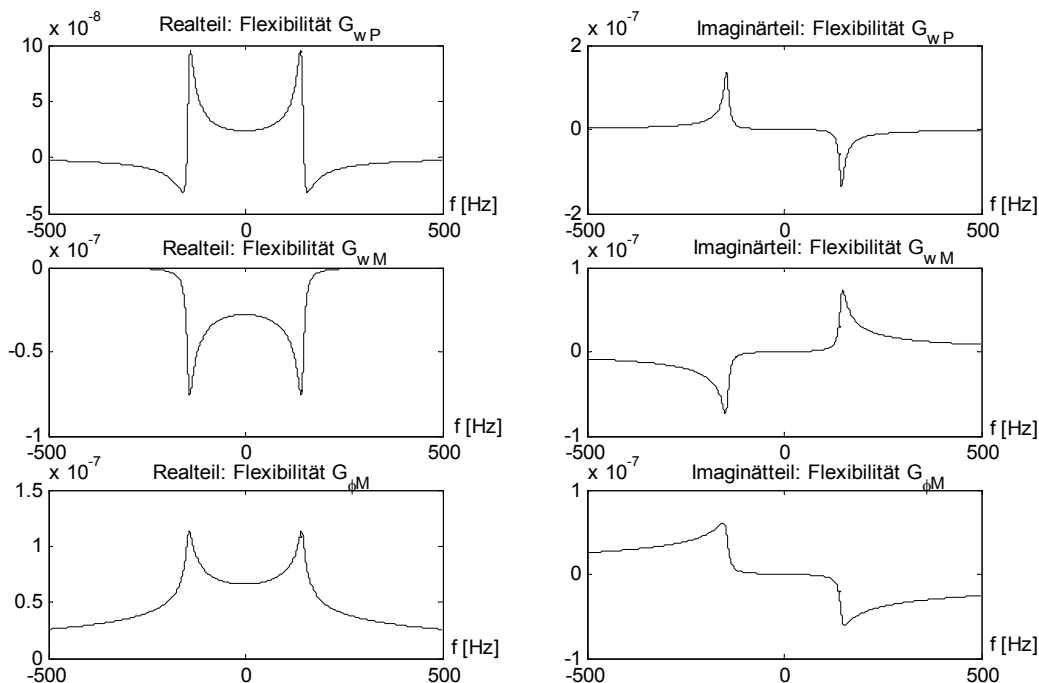


Abbildung 9.5: Flexibilität des einseitig unendlich langen Balkens

Im unterkritischen Bereich gilt für $c=0$ für den Imaginärteil der Flexibilität: $Im(\underline{\underline{\mathbf{G}}})=0$.

Die Multiplikation mit einer Rechteckfunktion mit (hier $T_R=0.001$ s) und die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert die Rechteckreaktionsfunktion. Dabei wird das Abklingen des Spaltsinus im Frequenzbereich mit $1/\omega$ ausgenutzt. Die Bereichsgrenzen im Frequenzbereich werden günstigerweise so gewählt, dass hier Nullstellen des Spaltsinus zu liegen kommen. Die folgende Abbildung zeigt die ermittelten Rechteckreaktionsfunktionen.

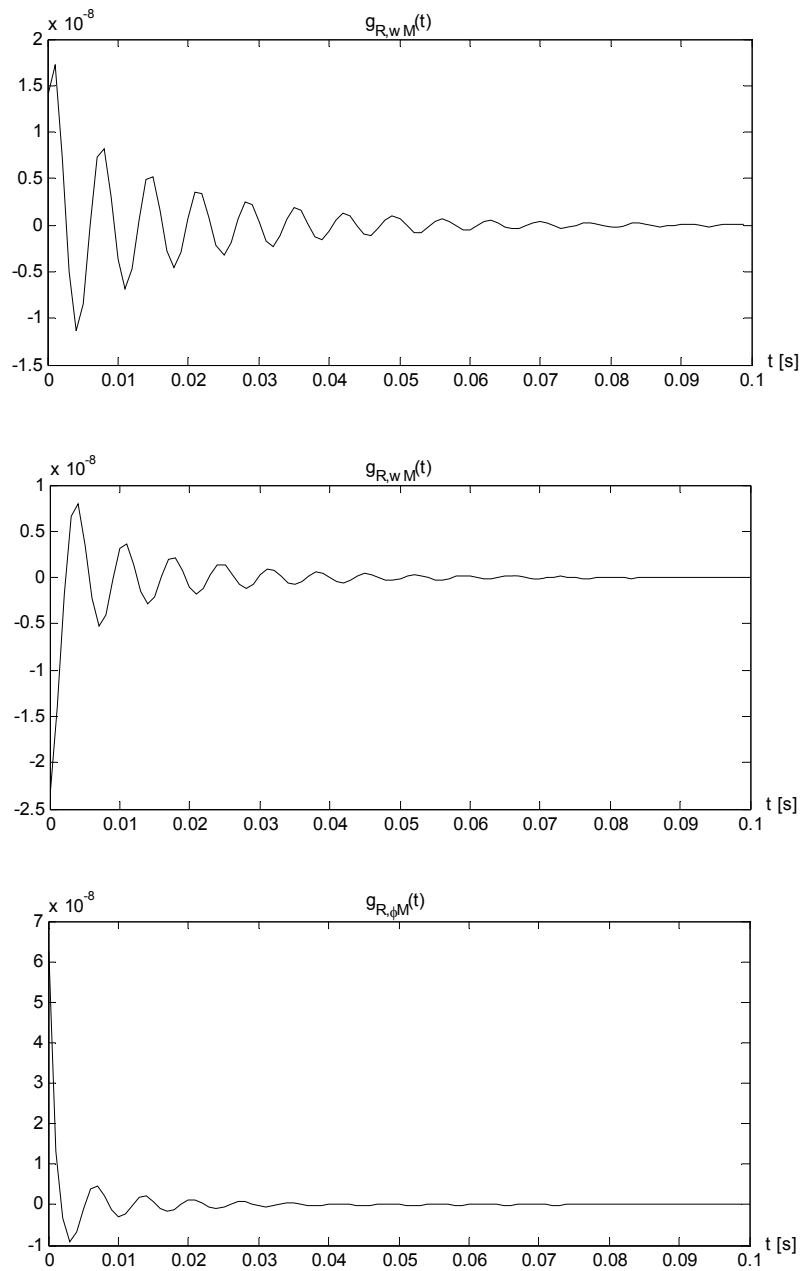


Abbildung 9.6: Rechteckreaktionsfunktionen

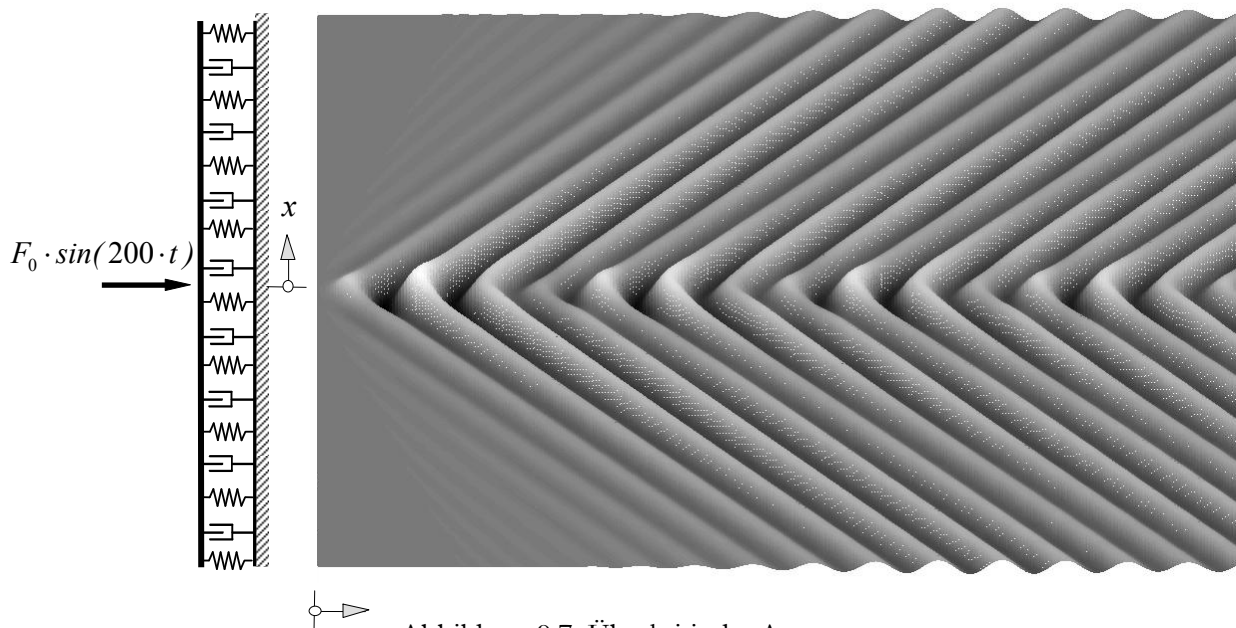
Der nicht vollständig glatte Verlauf resultiert aus der Diskretisierung von $\Delta t = 0.001$ s. Dies bedeutet aber keine Einbuße an Genauigkeit, da die Integration bereits in den Frequenzbereich vorgezogen wurde.

9.2.3 Anbindung der einseitig unendlichen elastisch gelagerten Balken

Mit den Rechteckreaktionsfunktionen ergeben sich die Randbedingungen für den mittleren, über Finite Elemente diskretisierten Balken, über Faltungen:

$$\begin{aligned}
 w_l^{i+1} &= \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_{R,wP}^{i-k+1} - \sum_{k=1}^i \frac{M^k + M^{k+1}}{2} \cdot g_{R,wM}^{i-k+1} \\
 \varphi_l^{i+1} &= -\sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_{R,\varphi P}^{i-k+1} + \sum_{k=1}^i \frac{M^k + M^{k+1}}{2} \cdot g_{R,\varphi M}^{i-k+1} \\
 w_r^{i+1} &= \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_{R,wP}^{i-k+1} + \sum_{k=1}^i \frac{M^k + M^{k+1}}{2} \cdot g_{R,wM}^{i-k+1} \\
 \varphi_r^{i+1} &= \sum_{k=1}^i \frac{P^k + P^{k+1}}{2} \cdot g_{R,\varphi P}^{i-k+1} + \sum_{k=1}^i \frac{M^k + M^{k+1}}{2} \cdot g_{R,\varphi M}^{i-k+1}
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die berechneten Antworten des mittleren, über Finite Elemente diskretisierten, elastisch gelagerten Balkens unter Berücksichtigung der Randbedingungen im Fall überkritischer Anregung.



An den Rändern tritt keine Wellenreflexion mehr auf. Die Antwort des Balkens besteht aus den nach außen laufenden Wellen. Stehende Wellen bilden sich nicht mehr aus.

Bei unterkritischer Anregung findet praktisch keine Wellenabstrahlung statt.

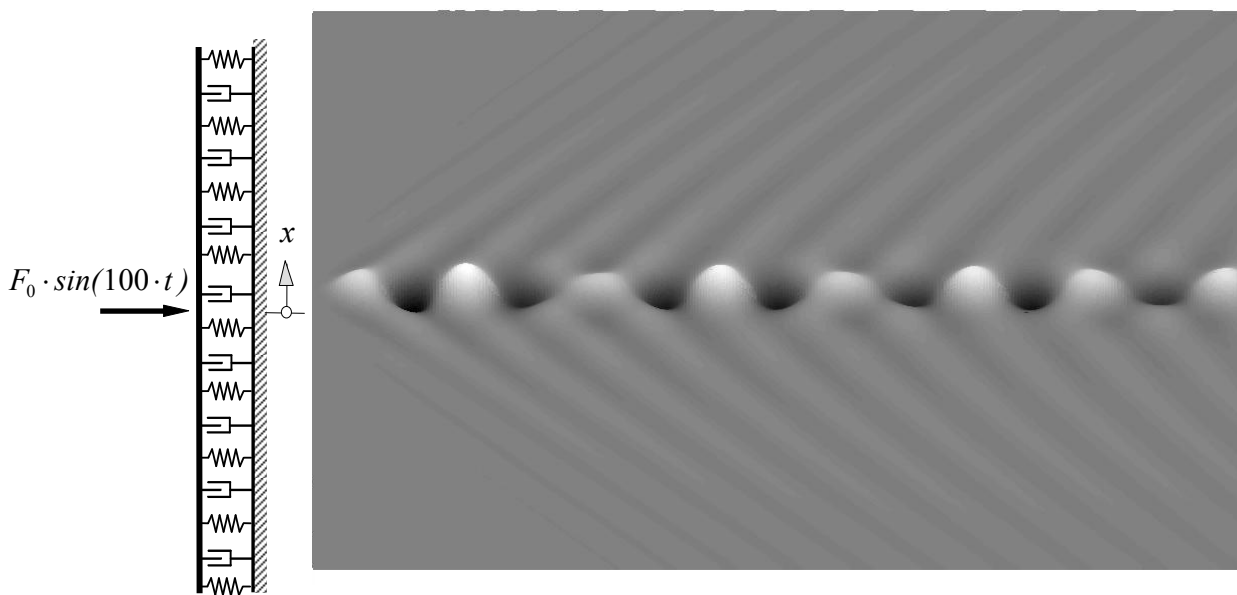


Abbildung 9.8: Unterkritische Anregung

In beiden Fällen zeigt sich, dass die Randbedingungen die Wellenreflexion an den künstlich eingeführten Rändern verhindern.

9.3 Simulationsrechnung

Mit beiden Systemen wird eine Interaktionsberechnung durchgeführt. Das Simulationsmodell ist in der nächsten Abbildung dargestellt:

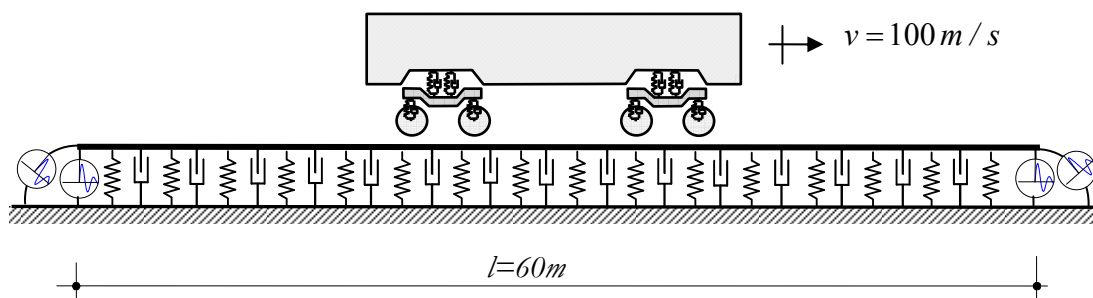


Abbildung 9.9: Simulationsmodell

Der Index der Problemstellung beträgt 3, da an den Koppelstellen beider Systeme Massenelemente vorhanden sind. Die Zeitintegration wird mittels des DAISY 1 - Verfahrens durchgeführt.

Als Anregung wird eine Fahrbahnrauheit in Form einer Mulde verwendet. Die Funktion der Mulde ist zweifach stetig differenzierbar.

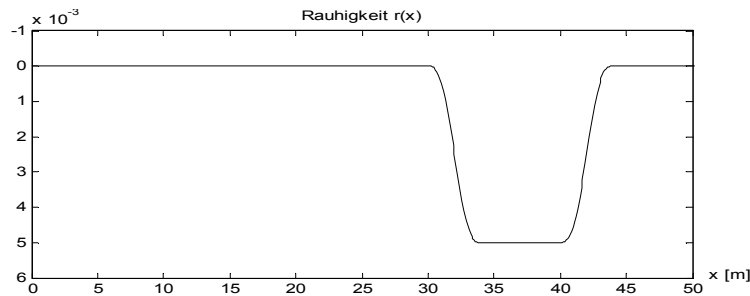


Abbildung 9.10: Rauheitsfunktion

Die Differentialgleichung des Finite Element Balkens und des Fahrzeugs lauten:

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{M}_{f_w} s^2 + \mathbf{C}_{f_w} s + \mathbf{K}_{f_w} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{M}_{f_z} s^2 + \mathbf{C}_{f_z} s + \mathbf{K}_{f_z} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A}_{1,1}(t) \quad \dots \quad \mathbf{A}_{1,n}(t) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{A}_{m,1}(t) \quad \dots \quad \mathbf{A}_{m,n}(t) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{C}_{1,1}(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}_{1,m}(t) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{C}_{m,1}(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}_{m,m}(t) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,m} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{z}_s \\ z_{k,1} \\ \vdots \\ z_{k,m} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{P}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m(t) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r_1(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \\ \hline \end{array}
 \quad (9.6)$$

Die Kopplung und die Relativbewegung wird über die Ansatzfunktionen $A(t)$ und $C(t)$ beschrieben. Die Ankopplung der einseitig unendlichen Balken erfolgt über (9.5).

Die Berechnungen werden mit folgenden Parametern durchgeführt: $EI = 12,8 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, Massebelegung $\mu = 120,6 \text{ kg/m}$, Bettungsziffer $k=1,8 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ und Dämpfungsziffer $c=1 \cdot 10^4 \text{ Ns/m}^2$. Die Interaktionsberechnung erfolgt mit $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Die Länge der Finite n Balkenelemente beträgt: $l_{Element} = 1,0 \text{ m}$.

Die Kontaktkräfte P sind numerisch am schwierigsten zu bestimmen. In der folgenden Abbildung sind die dynamischen Kontaktkräfte (ohne den statischen Anteil) für das erste und das zweite Rad des zweiten Drehgestells angegeben. Das erste Rad des Drehgestells erreicht die Mulde nach $t = 0.49 \text{ s}$, das zweite Rad des Drehgestells nach $t = 0.517 \text{ s}$. Beim Einfahren in die Mulde werden die Räder zunächst entlastet, die Radlasten reduzieren sich. Die hohen Radlasten in der Mulde resultieren aus der Beschleunigung der Radmassen nach oben. Ein Abheben der Räder tritt hier nicht auf, da die Summe aus statischer und dynamischer Radlast immer positiv ist.

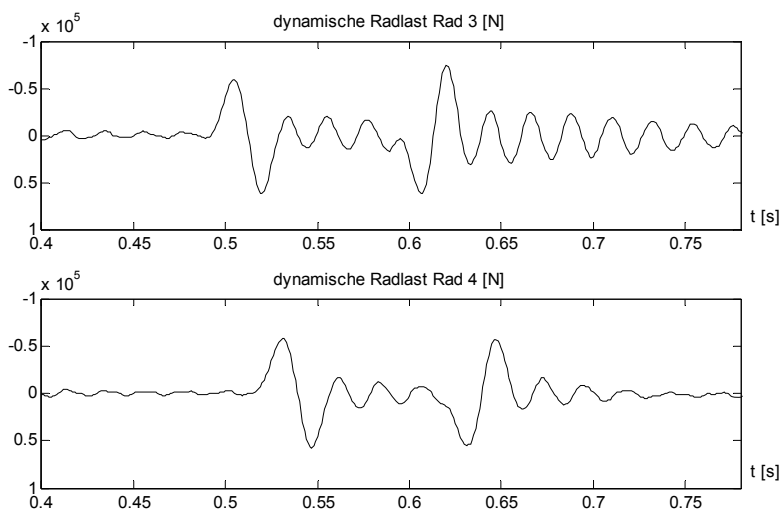


Abbildung 9.11: Radlasten Rad 3 und 4

Die Integration ist stabil und störungsfrei. Die Vibrationen in der Radlast gehören zur Schwingung des Rades in vertikaler Richtung. Die Verläufe für das erste Drehgestell sind fast identisch.

In der folgenden Abbildung ist die Durchsenkung des dritten Rades dargestellt. Die Schwankungen sind phasengleich mit den Radlasten.

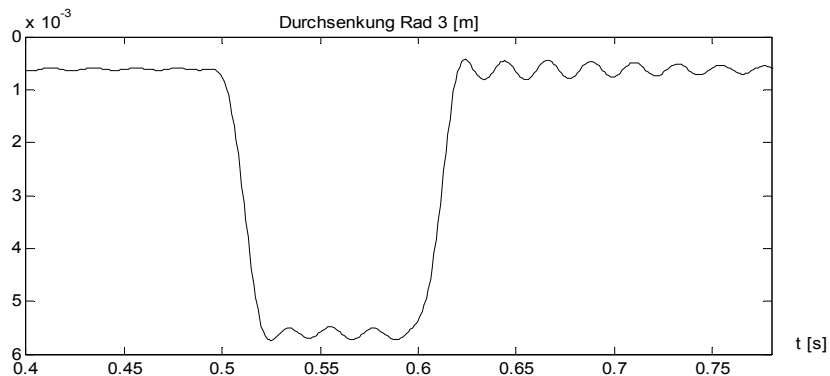


Abbildung 9.12: Durchsenkung Rad 3

In der folgenden Abbildung sind die Durchsenkung des Wagenkastens und die Durchsenkung des zweiten Drehgestells dargestellt. Das Drehgestell ist von den Schwingungen der Räder gut entkoppelt. Die Durchsenkung des Drehgestells folgt näherungsweise der Rauheit. Die Vibrationen der Räder treten am Drehgestell nicht mehr dominant in Erscheinung.

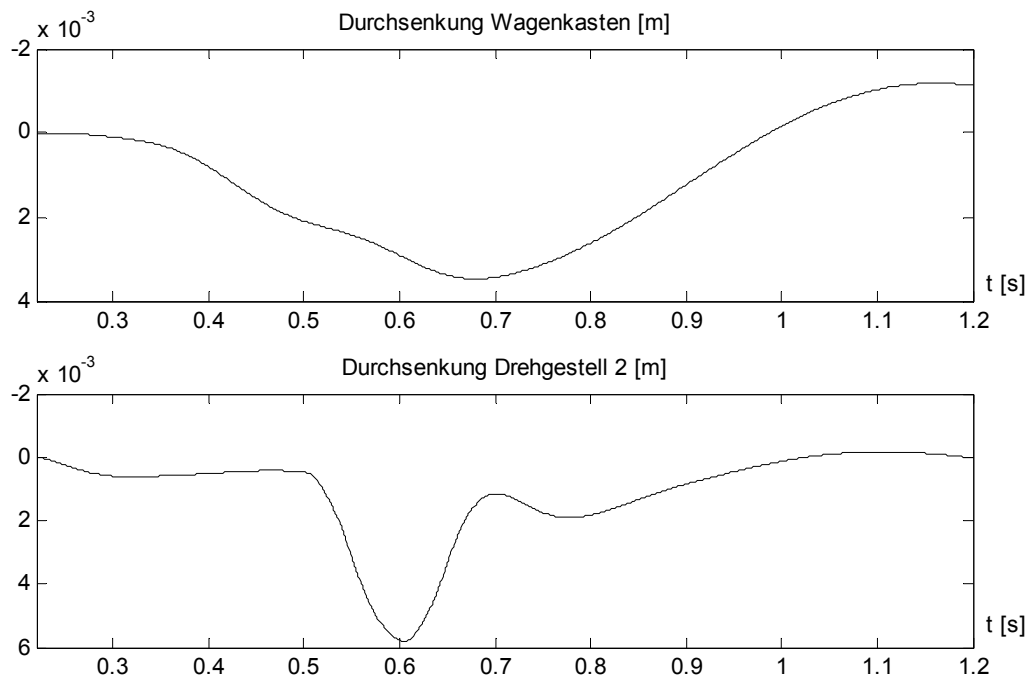


Abbildung 9.13: Durchsenkung des Wagenkastens und des zweiten Drehgestells

9.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel konnte die Anbindung von dynamisch reduzierten, einseitig unendlich langen Balken an ein Finite Elemente Modell erfolgreich realisiert werden. Die Ankopplung über die Rechteckreaktionsfunktionen führt auf Faltungsbeschreibungen. Mit dieser Methodik konnten Randbedingungen für den Finite Elemente Balken realisiert werden, so dass an den Rändern des Balkens keine Wellenreflexion mehr auftritt („transmitting boundaries“).

Anhand einer Simulationsrechnung konnte ein entwickeltes Zeitintegrationsverfahren auf ein Problem mit hohem Index (Index 3) angewandt werden. Die Zeitintegration konnte für alle Größen stabil und störungsfrei durchgeführt werden.

10 Zusammenfassung

10.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Kopplung von Modellen mit dem Hintergrund der Fahrzeug - Fahrweg Interaktion. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Methodenentwicklung und der Absicherung der Berechnungsmethoden.

Der Arbeit liegt die Beschreibung strukturdynamischer Modelle über das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip zugrunde. Aufbauend auf diese Beschreibung können die wichtigsten strukturdynamischen Methoden:

- Finite Elemente Methode
- Randelementemethode
- Mehrkörpersysteme
- Integraltransformationmethoden
- analytische Lösungen

abgeleitet werden.

Eine Erweiterung dieses Prinzips ermöglicht die Kopplung von Teilsystemen über Lagrangesche Multiplikatoren oder über die Kopplung über nichtkonservative Kräfte. Diese Beschreibung hat folgende Vorteile:

- Die Nebenbedingung wird richtig erfasst.
- Sowohl holonome als auch auftretende Formen nichtholonome Nebenbedingungen können damit beschrieben werden.
- Die Relativbewegung von Systemen kann über zeitabhängige Ansatzfunktionen beschrieben werden.
- Das Gleichungssystem kann ohne vorherige Transformation integriert werden.
- Eine Iteration über die Nebenbedingung ist nicht erforderlich
- Die programmtechnische Umsetzung ist sowohl über eigenentwickelte Programme als auch angedockt an kommerzielle Finite Element Programmpakete möglich.
- Die Bewegungsgleichungen können mit einem einheitlichen Verfahren, dem „erweiterten Hamiltonsche Prinzip“, für beliebige gekoppelte strukturdynamische Probleme aufgestellt werden:

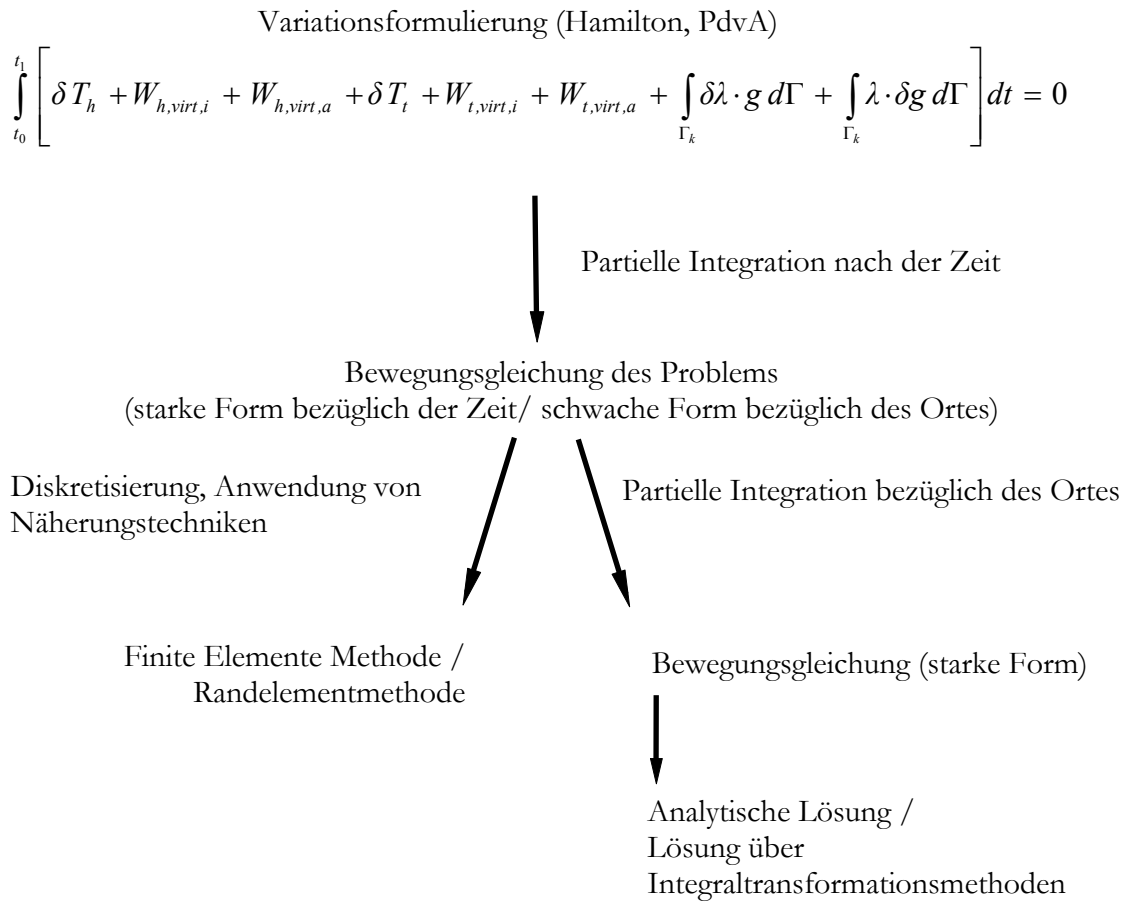


Abbildung 10.1: Formulierung der Bewegungsgleichungen aus der Variationsformulierung

Damit liegt eine konsistente Formulierung zur Beschreibung und zur Kopplung unterschiedlicher Modelle vor.

Die entstehenden Bewegungsgleichungen können als differentiell – algebraische Gleichungen charakterisiert werden. Differentiell algebraische Gleichungen stellen ein aktuelles Forschungsgebiet der Mathematik dar. Die Untersuchung der Stabilität der Zeitintegration in dieser Arbeit erbrachte Stabilitätskriterien und zeigte deutlich wichtige Effekte auf: Im Gleichungssystem sind unterschiedliche physikalische Größen gleichzeitig vorhanden. Die unbekanntenen Lagekoordinaten des Gleichungssystems berechnen sich zum Teil aus den algebraischen Koppelgleichungen. Strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren haben jedoch Schwierigkeiten bei der Beschreibung algebraischer Gleichungen, was zu Störungen oder auch Instabilitäten in den Lagekoordinaten führt. Die im Gleichungssystem ebenfalls vorhandenen Kontaktkräfte berechnen sich aus einer Differentiation der Lagekoordinaten. Da diese Operation bei der Zeitintegration numerisch durchgeführt wird verstärken sich die Störungen in den Kontaktkräften, Instabilitäten treten verstärkt auf.

Auf Basis dieser Erkenntnisse konnten strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren entwickelt werden, welche:

- eine stabile Zeitintegration ermöglichen,
- auftretende Störungen schnell herausdämpfen, ohne gleichzeitig eine hohe numerische Dämpfung in das Gleichungssystem einzubringen. Die numerische Dämpfung bleibt bei DAISY2 sogar weiterhin steuerbar.
- die Anforderungen an strukturdynamische Zeitintegrationsverfahren (Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung, maximal ein Satz impliziter Gleichungen je Zeitschritt, Genauigkeit 2. Ordnung, unbedingte spektrale Stabilität bei linearen Berechnungen, steuerbare numerische Dissipation hoher Frequenzen und selbst startend) erfüllen.

Eine weitere Schwierigkeit bei der Beschreibung der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion ist die große räumliche Ausdehnung der zu beschreibenden Modelle. Hierfür wurde die dynamische Kondensation der Modelle, deren Beschreibung über Kenngrößen wie die Impedanz, die Admittanz, die Steifigkeit und die Flexibilität erfolgen kann und die numerische Umsetzung der Ankopplung untersucht. Dabei zeigte sich, dass in den meisten Fällen die Beschreibung der Teilsysteme über ihre Flexibilität vorteilhaft ist. Die daraus bestimmten Impulsreaktionsfunktionen können von allen möglichen Beschreibungen i.d.R. numerisch am günstigsten ermittelt werden. Die Ankopplung im Zeitbereich führt auf Faltungsintegrale. Es zeigte sich, dass ein Vorziehen der Integration vom Faltungsintegral hin zur Bestimmung der Impulsreaktionsfunktionen numerisch Vorteile bringt. Vor allem ist die Bestimmung der Reaktionsfunktionen genauer möglich. Daneben wird die numerische Approximation der Reaktionsfunktionen beim Faltungsintegral in eine analytische Integration bei Bestimmung der Reaktionsfunktionen umgewandelt. Vergleichsrechnungen bestätigten den Vorteil dieses Verfahrens.

Die gewonnenen Einblicke konnten erfolgreich auf zwei Anwendungsbeispiele angewandt werden.

Die Interaktion eines Magnetschwebefahrzeugs mit seinen Fahrwegträgern kann unter Verwendung des beschriebenen Algorithmus simuliert werden. Die Beschreibung der geregelten Tragsysteme führt auf eine mechanische Nebenbedingung. Diese Nebenbedingung gestaltet den Index und damit den Schwierigkeitsgrad bei der Zeitintegration günstig. Die Simulationsrechnungen können problemlos durchgeführt werden.

Beim zweiten Anwendungsbeispiel, der Interaktion Eisenbahn – Oberbau, konnten die dynamische Modellreduktion und die Zeitintegration eines differentiell algebraischen Gleichungssystems mit Index 3 mittels der entwickelten Zeitintegrationsverfahren erfolgreich durchgeführt werden.

10.2 Ausblick

Die Arbeit liefert einen Beitrag zur Simulation gekoppelter Systeme. Die Modellreduktion ermöglicht es dabei Effekte auf verschiedenen Größenskalen einzubeziehen. Hier können Modelle mit verschiedenen Ortsskalen miteinander kombiniert und berechnet werden. Wichtige Fragestellungen wie z.B. Bodensetzungen unter dem Oberbau von Eisenbahnen erfordern eine Betrachtung von Effekten auf verschiedenen Zeitskalen [Grundmann, Gitterle, Lutzenberger 2004]. Ziel einer weiteren Untersuchung kann die methodische Absicherung dieser Vorgehensweise sein.

Viele Systeme in der Fahrzeug – Fahrweg Interaktion sind nichtlinear. Weitere Untersuchungen können zeigen welche Arten von Nichtlinearitäten differentiell algebraischer Systeme zuverlässig berechnet werden können.

Die Ankopplung eines Teilsystems über seine Flexibilität führt auf retardierte differentiell – algebraische Gleichungen. Eine Stabilitätsanalyse dieser Systeme müsste die Diskretisierung des Faltungsintegrals mit berücksichtigen und könnte die Methodik der Ankopplung von Teilsystemen absichern.

Literaturverzeichnis

- ALBRECHT, G.; LUTZENBERGER, S.; LUTZENS, J.: *Determination of global dynamic amplification factors and consequences to the design engineering of guide way beams*, 6th Japanese German Bridge Symposium, TU München, 2005.
- ARGYRIS, John; MLEJNEK, Hans-Peter: *Dynamics of Structures* Amsterdam (North-Holland) 1991.
- ARNOLD, Martin; SIMEON, Bernd: *The simulation of a pantograph and catenary: a PDAE approach* Darmstadt 1988.
- ARNOLD, M.: *A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems* In: *Applied numerical mathematics*, Jg. 1995, H. 18, S. 37-56.
- ARNOLD, Martin: *Zur Theorie und zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen für differentiell-algebraische Systeme von höherem Index* Düsseldorf (VDI-Verlag) 1998.
- ARNOLD, Martin: *Numerische Grundlagen von Simulationswerkzeugen der Fahrzeugsystemdynamik*, Seminar der Carl Crantz Gesellschaft 2001.
- BATHE, K.-J.: *Finite – Elemente - Methoden (Deutsche Übersetzung)* Berlin (Springer) 1986.
- BAUMGÄRTNER, W.; LUTZENBERGER, S.: *Interaktion LKW - Brücke: Simulation und Messung* In: *D-A-CH Tagung 2001*, Innsbruck, Jg. 2001
- BRACEWELL, R. N.: *The Fourier transform and its applications* Boston, Mass. (McGraw Hill) 2000.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S.: *Boundary-Element-Techniques in Engineering* London (Newnes-Butterworth) 1980.
- BREINL, Walter: *Entwurf eines unempfindlichen Tragregelsystems für ein Magnetschwebefahrzeug* Düsseldorf (VDI-Verlag) 1980.
- BRENAN, K. E.; CAMPBELL, S. L.; PETZOLD, L. R.: *Numerical solution of Initial-Value Problems in differential-Algebraic Equations* New York (North-Holland) 1989.
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik 5. Auflage* Zürich, Frankfurt a. M. (Harri Deutsch) 1965.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M.: *A Beam Finite Element Non-Linear Theory with Finite Rotations* In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Jg. 1988, S. 2403-2438.
- CARDONA, A.; GÉRADIN, M.: *Numerical Integration of Second Order Differential-Algebraic Systems in Flexible Mechanism Dynamics* In: *Computer Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, Jg. 1994, S. 501-529.
- GERADIN, M.; CARDONA, A.: *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach* New York, (J. Wiley & Sons) 2001.
- CHUI, C. K.: *An Introduction to Wavelets* San Diego, CA (Academic Press) 1992.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M.: *A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized-alpha Method* In: *Journal of applied mechanics*, Jg. 1993, H. 60, S. 371-375.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN J.: *Dynamics of Structures* New York (McGraw-Hill) 1993.
- DAHLQUIST, G.: *A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods* In: *BIT*, Jg. 1963, H. 3, S. 27-43.
- DAUBECHIES, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia (CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathematics) 1992.

- EICH-SOELLNER, Edda; FÜHRER, Claus: *Numerical methods in Multibody dynamics* Stuttgart (Teubner Verlag) 1998.
- FÖLLINGER, Otto: *Regelungstechnik* Heidelberg (Hüthig Buch Verlag) 1994.
- FRYBA, L.: *Vibration of solids and structures under moving loads* Groningen (Noordhoff International Publishing) 1972.
- FRYBA, L.: *Dynamics of railway Bridges* London (Thomas Telford) 1996.
- GAUL L.; KÖGL M.; WAGNER M.: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists* Berlin (Springer Verlag, ISBN 3-540-00463-7) 2003.
- GELLERT, Walter; KÄSTNER, Herbert; NEUBER, Siegfried: *Fachlexikon ABC Mathematik* (Harri Deutsch Thun, Frankfurt a. M., 1978.
- GITTERLE, M.: *FE - Interaktionssimulation Eisenbahn - Fahrweg unter Berücksichtigung fortschreitender Bodenschädigung im Untergrund* (Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München) 2004.
- GOLDSTEIN, Herbert: *Klassische Mechanik aus dem Englischen übersetzt und bearbeitet von Günter Gliemann* Wiesbaden (Aula-Verlag) 1991.
- GOTTZEIN, Evelin: *Das "Magnetische Rad" als autonome Funktionseinheit modularer Trag- und Führsysteme für Magnetbahnen* Düsseldorf (VDI-Verlag) 1984.
- GOTTZEIN, E.; LANGE, B.: *Magnetic suspension control systems for the MBB high speed train* In: *Automatica*, 11. Jg. (1975), S. 271-284.
- GROSS, Dietmar; HAUGER, Werner; SCHELL, Walter; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik 4 Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1993.
- GRUNDMANN, H.: *Dynamic interaction of structures with the subsoil* (Structural Dynamics - EURO DYN 99 Balkema, ISBN 90 5809 056 6) 1999.
- GRUNDMANN H.; GITTERLE, M.; LUTZENBERGER, S.: *Finite Element Simulation of the Interaction Train - Guide way and Evaluation of Progressing Soil Damage* (EUROMECH 452, Universität Halle, 2004, oral presentation) 2004.
- GRUNDMANN, H.; LENZ, S.; LUTZENBERGER S.: *Nonlinear SDOF-systems moving on a beam-halfspace-system"* (Eurodyn) 2002.
- GRUNDMANN, H.; TROMMER, E.: *Transform methods - what can they contribute to (computational) dynamics?* (Computers and Structures (79) 2091-2102) 2001.
- HAIRER, E; NORSETT, S. P.; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1993.
- HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard: *Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1996.
- HARTMANN, F.: *Methode der Randelemente* (Springer) 1987.
- HILLIGES, D.: *Fahrwege für Magnetschwebefahrzeuge unter dynamischer Beanspruchung* (Bauingenieur 51) 1976.
- HUGHES, Thomas J. R.: *The Finite Element Method* (Prentice-Hall International) 1987.
- HUGES, T. J. R.: *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* Mineola, New York (Dover Publications, Inc.) 2000.
- JUNG, V.: *Magnetisches Schweben* Berlin (Springer-Verlag) 1988.
- KORTÜM, W.: *Vehicle response on flexible track*. (International Conference on MAGLEV Transport Now and in the Future, IMechE) 1984.
- KORTÜM, W.; LUGNER, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen Einführung und Beispiele* Berlin (Springer-Verlag) 1994.

- LANG, Eugen: *Co-Simulationstechniken zur Fahrzeug – Fahrweg Interaktion und die Umsetzung in SIMPACK* TU München, Lehrstuhl für Baumechanik, Diplomarbeit 2001.
- LENZ, S.: *Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund unter Zuhilfenahme von Integraltransformationmethoden* (Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München) 2003.
- LIEB, M.: *Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung* TU München (Dissertation) 1997.
- LINHARD, J.: *Berechnung dynamischer Systeme unter Verwendung mit Impulsreaktionsfedern gekoppelter FE - Modelle* (Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München) 2005.
- LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2* (Springer) 2005.
- LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1* Berlin (Springer Verlag) 2006.
- LUTZENBERGER, S.: *Dynamic modelling of bridges and trucks* Delft 1997.
- LUTZENBERGER, S.: *Ein differentiell - algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug - Fahrweg Interaktion* (Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München) 2002.
- LUTZENBERGER, S.: *Time integration of structural dynamic DAE* (NUMDIFF 10, Universität Halle, 2003, oral presentation) 2003.
- LUTZENBERGER, S.: *Structural dynamic DAE and PDAE* (GAMM annual meeting, Luxemburg, 2005, oral presentation) 2005.
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Interaction of an instrumented truck crossing Belleville bridge* In: *Weigh-in-motion of Road Vehicles*, ed. B. Jacob, Hermes Science Publications, Jg. 1999
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Evaluation of measured bridge response due to an instrumented truck and free traffic* *Bridge Management four*, ed. Ryall, Parke, Harding London (Thomas Telford) 2000.
- LUTZENBERGER S.; BAUMGÄRTNER W.: *Interaktion an Straßenbrücken: Simulation mittels Finiter Elemente und vergleichende Messungen* In: *Arbeitsmaterialien zum Workshop "Fahrzeug – Fahrweg - Wechselwirkung"*, ed. Arnold M., DLR IB 532-01-04, Jg. 2001.
- LUTZENBERGER, S.; DINKEL, J.; BAUMGÄRTNER, W.: *PRISIM - Ein Softwaremodul zur Simulation der dynamischen Interaktion zweier relativ zueinander bewegter Finite Element Strukturen* In: *Deutschsprachige MSC - NASTRAN Anwenderkonferenz, Kloster Andechs*, Jg. 1998.
- LUTZENBERGER, S.; LUTZENS, J.: *Globale dynamische Reaktion der TRANSPRAPID Fahrwegträger auf bewegte Lasten und Bestimmung des Schwingbeiwerte ϕ* (5. Dresdner Fachtagung Transrapid, A-Z Druck Dresden) 2005.
- LUTZENBERGER, S.; OELSCHLEGEL, H.J.; BAUMGÄRTNER, W.: *Influence surfaces for stresses and strains at bridge components: Numerical modelling and experimental validation* *Modelling and Simulation in Civil Engineering: From Practice To Theory*", *Presse de l'école nationale des Ponts et Chaussées*" In: *Paris 2001*, ISBN 2-85978-348-2, Jg. 2002
- LUTZENBERGER, S.; WEIBENFELS, C.: *Coupling of moving, Actively controlled maglev vehicles and guide way systems, algorithm and simulation* (Eurodyn 2005) 2005.
- MEISINGER, Otto: *Beiträge zur Regelung einer Magnetschwebebahn auf elastischem Fahrweg*. (Dissertation, TU München) 1977.
- MEISINGER, Otto: *Simulation of a Single and Double-Span Guide way under Action of Moving MAGLEV Vehicles with constant force and Constant Gap* Nürnberg (Sonderdruck Schriftenreihe der Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule) 2002.
- MEYBERG, Kurt; VACHENAUER, Peter: *Höhere Mathematik II* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1991.
- MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden-Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten* TU München (Dissertation) 1989.
- MÜLLER, G.: *Skriptum zu structural dynamics*. 2006.

- MÜLLER, G.; LUTZENBERGER, S.: *Vibrations induced by Maglev-trains - a hybrid numerical-analytical-engineering approach* (6th Japanese German Bridge Symposium, TU München) 2005.
- MÜLLER, G.; LUTZENBERGER, S.: *Ein Verfahren zur Beschreibung der durch die Fahrzeugüberfahrt induzierten Erschütterungen bei Magnetschwebefahrzeugen* (5. Dresdner Fachtagung Transrapid A-Z Druck Dresden) 2005.
- NEWMARK, N. M.: *A method of computation for structural dynamics* In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Jg. 1959, H. 3, S. 67-94.
- PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C.A.; WROBEL L. C.: *The Dual Reciprocity boundary element method* (Communications in Numerical Methods in Engineering 13(2), 83-94) 1992.
- PETERSEN, C.: *Dynamik der Baukonstruktionen* Wiesbaden (Vieweg) 1996.
- PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik Aus der Reihe: Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 65* (Teubner Verlag) 1992.
- POPP, Karl: *Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen auf geständerten Fahrwegen* Düsseldorf (VDI-Verlag) 1978.
- POPP, K.: *Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen auf geständerten Fahrwegen Fortschritts-Berichte VDI-Z Reihe 12, Nr. 35* Düsseldorf 1979.
- POPP, K.; HABECK, R.; BREINL, W.: *Untersuchungen zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen auf elastischem Fahrweg* (Ingenieur-Archiv 46) 1997.
- POPP, Karl; SCHIEHLEN, Werner: *Dynamics of magnetically levitated vehicles on flexible guide ways Proc. IU-TAM Symp. on the Dynamics of Vehicles on Roads and Railway Tracks* Delft 1975.
- POPP, Karl; SCHIEHLEN, Werner (Eds.): *System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade* Berlin (Springer) 2003.
- RAPOLDER, Markus: *Parallele Finite – Element - Simulation der Bauwerk-Boden-Interaktion mit adaptiven Zeitintegrationsverfahren* TU München, Dissertation, 2001 Als Manuskript gedruckt.
- RASTANDI, J.I.: *Modelization of Dynamic Soil-Structure Interaction Using Integral Transform-Finite Element Coupling* TU München (Dissertation) 2003.
- RENTROP, P.; STEHMEL, K.; WEINER, R.: *Ein Überblick über Einschrittverfahren zur numerischen Integration in der technischen Simulation GAMM - Mitteilungen 1996, Heft 1* S. 9-43.
- RIEMER, M.; WAUER, J.; WEDIG, W.: *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik* Berlin (Springer-Verlag) 1993.
- RIPKE, B.: *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug - Gleis - Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik* (VDI Verlag) 1995.
- RUTISHAUSER, Heinz: *Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung* In: *Numerische Mathematik*, 2. Jg. (1960), S. 263-279.
- SCHACH, R.; JEHLE, P.; NAUMANN, R.: *Transrapid und Rad - Schiene – Hochgeschwindigkeitsbahn Ein gesamtlicher Systemvergleich* (Springer) 2006.
- SIMEON, Bernd: *Numerische Simulation gekoppelter Systeme von partiellen und differential - algebraischen Gleichungen in der Mehrkörperdynamik* (VDI Verlag) 2000.
- SINHA, P. K.: *Electromagnetic suspension: dynamics and control- (IEE control engineering series; v30) 1. Magnetic suspension* London (Peter Peregrinus Ltd.) 1987.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Einführung in die numerische Mathematik I* Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1972.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Einführung in die numerische Mathematik II* Berlin, Heidelberg, New York (Springer) 1973.
- WEIBENFELS, C.: *Kopplung von Magnetschwebbahnen mit elastischem Fahrweg: Reglerentwurf, Algorithmus und Simulation.* (Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München) 2004.

-
- WHIDBORNE J. F.: *Multi-objective robust control system design* In: *Proc. 25th Nathiagali Summer School on Physics and Contemporary Needs, Nathiagali, Pakistan*, Jg. 2000.
- WOLF, John P.: *Dynamic Soil-Structure Interaction* Englewood Cliffs (Prentice-Hall) 1986.
- WOLF, John P.: *Soil - Structure - Interaction Analysis in the time domain* Englewood Cliffs (Prentice-Hall) 1988.
- WOLF, John P.: *The Scaled Boundary Finite Element Method* (Wiley) 2003.
- WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O.C.: *An alpha modification of Newmark's method* In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Jg. 1980, H. 15, S. 1562-1566.
- WRIGGERS, P.: *Zur Berechnung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der Finite-Element-Methode* Universität Hannover, Dissertation 1981.
- WRIGGERS, P.: *Computational contact mechanics*. (John Wiley & Sons) 2002.
- ZHAO, F.; LOH, S. C.; MAY, J. A.: *Phase-Space Nonlinear Control Toolbox: The Maglev Experience* In: *HS'97: Fifth International Hybrid Systems Workshop, Notre Dame, IN*, Jg. 1997,
- ZRIWAS, G.: *Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Boden Wechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen* TU München (Dissertation) 1996.
- ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendung I* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer Verlag) 1984.
- ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen II* Berlin, Heidelberg, New York u.a. (Springer) 1986