

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Risikobewertung von modernen
Lebensversicherungsprodukten am
Beispiel von dynamischen
Drei-Topf-Hybriden**

**Risk Estimation of modern Life Insurance Products
using the example of dynamic three-pot-hybrids**

Diplomarbeit

von

Johannes Rusche

Themensteller: Prof. Dr. T. Klein

Betreuer: B. Thiel, F. Geislinger

Abgabetermin: 15. Februar 2012

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 15. Februar 2012

Danksagung

Zu allererst möchte ich mich bei Herrn Prof. Klein bedanken. Zum einen für die Bereitschaft das von meiner Seite aus vorgeschlagene Thema anzunehmen. Diese war nicht selbstverständlich, zumal das Diplomarbeitsthema nicht direkt in seinem Forschungsgebiet anzusiedeln ist.

Was Thema betrifft, habe ich am meisten von den Hinweisen von Herrn Thiel profitiert. Mit seiner Expertise im Bereich des Risikomanagements konnte er mir schon anfangs eine Richtung zeigen. Auch wenn aufgrund der großen örtlichen Distanz die Anzahl der Treffen nicht hoch war, so waren sie doch sehr hilfreich. Vielen Dank dafür!

Gar nicht zustande gekommen wäre die Arbeit ohne Herrn Geislinger, der mit seinem ökonomischen Sachverstand die Problematik des dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts erkannte und daraus die Idee entwickelte, ein Diplomarbeitsthema zu formen. Darüber hinaus war er jederzeit ein hilfsbereiter Ansprechpartner und ein wertvoller Verbündeter bei auftauchenden Problemen unterschiedlichster Art. Merci!

Außerdem bin ich meinen Eltern zu Dank verpflichtet, die mich nicht nur während der Diplomarbeit, sondern über die gesamte Studiumsdauer gefördert und unterstützt haben.

Zu guter Letzt will ich auch meiner Freundin Romea danken. Nicht nur für die seelische Unterstützung, sondern auch für die entgegen gebrachte Toleranz für die anstrengende Zeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Ziel der Diplomarbeit	2
1.3	Aufbau der Arbeit	2
1.4	Literaturüberblick	3
2	Lebensversicherungsmathematik	4
2.1	Stochastisches Modell	4
2.2	Leibrenten	8
2.3	Nettoprämien	10
2.4	Nettodeckungskapital	12
2.5	Bruttoprämien	13
3	Funktionsweise der dynamischen Drei-Topf-Hybride	15
3.1	Eigenschaften des Produkts	15
3.2	Erklärung des Umschichtungsalgorithmus	16
3.3	Optimalität des Umschichtungsalgorithmus	18
3.4	Ein graphisches Beispiel zur Umschichtung	25
4	Solvency II	27
4.1	Solvency II - die Grundstruktur	27
4.2	Stand der Diskussion und SCR-Modellierungs- ansätze	30
4.3	Risikoidentifikation beim dynamischen Hybridprodukt im Rahmen von Sol- vency II	31
4.3.1	Versicherungstechnische Risiken	31
4.3.2	Ausfallrisiko der Bank	32
4.3.3	Marktrisiko im Allgemeinen	32
4.3.4	Aktienrisiko	33
4.3.5	Umschichtungsrisiko	33
4.3.6	Liquiditätsrisiko	34
4.3.7	Zinsgarantierisiko	35
4.3.8	Zinsänderungsrisiko	35
4.3.9	Fazit der Risikoidentifikation und Folgen daraus	36

5	Risikomodellierung	37
5.1	Kapitalmarktmodell	38
5.1.1	Modellierung von Aktienkursen	38
5.1.2	Modellierung der sicheren Anlage	40
5.1.3	Grundlagen der Finanzmathematik	41
5.1.4	Arbitragefreiheit des Binomialmodells	44
5.1.5	Mehrperiodisches Binomialmodell	46
5.2	Einbettung des Produkts in den Kapitalmarkt	48
5.3	Cashflow-Modellierung	50
5.3.1	Cashflow-Erläuterung	50
5.3.2	Cashflow-Modellannahmen	53
5.3.3	Ausgleich des Sterblichkeitsrisikos im Kollektiv	54
5.3.4	Mathematische Formulierung des Cashflows	55
6	Cashflow-Simulation	61
6.1	Motivation der Startwerte	61
6.2	Ein deterministisches Beispiel zum Einstieg	64
6.3	Stochastische Simulationen	68
7	Cashflow-Hedging	72
7.1	Theorie	72
7.2	Konstruktion einer Hedgingstrategie	73
7.3	Optimierung der Variablen dieser Hedgingstrategie	76
7.4	Ergebnisse des Hedgings	79
8	Fazit	84

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verteilung der gestutzten Restlebensdauer eines 30-jährigen (eigene Darstellung)	7
2.2	Entwicklung des Nettodeckungskapitals, der Prämienbarwerte und der Leistungsbarwerte in der Aufschubzeit (eigene Darstellung)	13
3.1	Beispielhafter 18-monatiger Verlauf der Verteilung eines Kundenguthabens (eigene Darstellung)	25
4.1	Solvency II - Bilanz (vgl. EIOPA [9])	28
4.2	SCR-Modulstruktur (vgl. EIOPA [9, S. 90])	29
5.1	Zweiperiodischer Binomialbaum (eigene Darstellung)	40
6.1	Beispielhafte 30-monatige Aktienkursentwicklung mit 30 % Volatilität p. a. (eigene Darstellung)	64
6.2	Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf der Topfverteilungen - Rohentwicklung (eigene Darstellung)	65
6.3	Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf der Topfverteilungen - mit Ausscheidevektor (eigene Darstellung)	66
6.4	Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf des Cashflows (eigene Darstellung)	67
6.5	Beispielhafte monatliche Aktienrenditen mit 30 % Volatilität p. a. (eigene Darstellung)	68
6.6	Cashflowquantile bei 30 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)	69
6.7	Quantile des relativen Cashflows bei 30 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)	70
7.1	Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 20 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)	81
7.2	Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 30 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)	82
7.3	Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 40 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)	83

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Beschreibung
ALM	Asset Liability Management
ASM	Available Solvency Margin (anrechenbare Eigenmittel)
CPPI	Constant Proportion Portfolio Insurance
Def.	Definition
DK	Deckungskapital
EIOPA	European Insurance and Occupational Pensions Authority
EU	Europäische Union
FF	Freie Fonds
f. s.	fast sicher
GF	Garantiefonds
GDV	Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft
max	maximiere
MCR	Minimumkapitalanforderungen
min	minimiere
Mio. €	Millionen Euro
NEP	Nettoeinmalprämie
QIS	Quantitative Impact Studies
p. a.	per annum
PIIGS	Portugal, Italien, Irland, Griechenland, Spanien
RBC	Risk Based Capital Modell
SCR	Solvenzkapitalanforderungen
T. €	Tausend Euro
u. d. N.	unter der Nebenbedingung
Vor.	Voraussetzung

Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung	Seite
$\mathbb{1}$	Indikatorfunktion	18
A_x	Erwartungswert von W	8
$A_{x:n}^{\overline{1}}$	Nettoeinmalprämie	10
$\ddot{a}_{x:n}$	vorschüssige temporäre Leibrente der Dauer n	9
\ddot{a}_x	vorschüssige lebenslängliche Leibrente, Erwartungswert von Y	8
$\ddot{a}_x^{(12)}$	Nettoeinmalprämie einer lebenslänglichen Rente bei monatlicher Zahlung	9
$\ddot{a}_{x:n}^{(12)}$	vorschüssige temporäre Leibrente der Dauer n bei monatlicher Zahlung	11
α	α -Kosten	13
β	β -Kosten	13
$B(t^+)$	gezahlter Beitrag zum Zeitpunkt t^+	16
$B^j(t)$	vom j -ten Kunden gezahlter Beitrag zum Zeitpunkt t	58
$B_{sum}(t)$	Summe aller bis zum Zeitpunkt t gezahlten Beiträge	16
$B_{sum}^j(t)$	Summe aller vom j -ten Kunden bis zum Zeitpunkt t gezahlten Beiträge	59
γ	γ -Kosten	13
C	Contingent Claim	43
\tilde{C}	diskontierter Claim	44
$CF(t)$	Wert des Cashflows zum Zeitpunkt t	35; 56
$CF_{rel}(t)$	Wert des relativen Cashflows zum Zeitpunkt t	71
$CF^{\mathcal{H}}(t)$	Wert des gehedgten Cashflows zum Zeitpunkt t	77
$D_{mac} = D(r)$	Macauley-Duration	35
D_{mod}	modifizierte Duration	35
d	down-Faktor	39
Δ	Barwert der Differenz zwischen zukünftigen Leistungen und zukünftigen Prämien	12
δ	Substitution: $v := e^{-2\delta}$	8
Δt	Diskretisierung der Zeit	48
\mathbb{E}	Erwartungswert	5
e	Eulersche Zahl	8
\dot{e}_x	Lebenserwartung eines x -jährigen	5
e_x	gestutzte Lebenserwartung eines x -jährigen	6

Symbol	Beschreibung	Seite
η	Anzahl der betrachteten versicherten Personen	55
η_t	Anzahl der versicherten Personen im Bestand im Zeitraum $(t - 1; t]$	57
f	Bewertungsfunktion eines Contingent Claims	48
\mathcal{F}_t	Filtration	39
$G_x(t)$	Verteilungsfunktion der zukünftigen Lebensdauer	4
g_x	Dichte der Verteilungsfunktion G_M	4
$\mathcal{G}_x(z)$	unterjährige Verteilungsfunktion der Sterblichkeit	7
γ	Gamma-Kosten	13
Γ	Wert eines ψ -Quantils	78
\mathcal{H}	Hedging-Strategie allgemein	75
h	Handelsstrategie	42
h_t^X	Anzahl an Aktien im Portfolio	43
h_t^S	Anteil der sicheren Anlage am Gesamtportfolio	43
$I(t + 1)$	das zur Absicherung der Erlebensfallgarantie mindestens erforderliche Vermögen	16
I_{DK}	Deckungskapital-Sicherungslinie	27
I_{GF}	Garantiefonds-Sicherungslinie	27
i	Mindestgarantieverzinsung	7
$K = K_x$	ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer	5
k	Laufparameter von K oder X	5; 40
L_η	Verluste des Versicherers, bei η Verträgen im Bestand	55
l	Zählparameter des Zählprozesses N	46
λ	Konstante, die das Hedgingvolumen angibt	75
λ_{opt}	das optimale λ	78
ln	natürlicher Logarithmus	5
$M = M_x$	zukünftige Lebensdauer eines x-jährigen	4
$m_{sto}(t)$	Anteil des Bestands, der im Zeitraum $(t - 1; t]$ storniert wurde	58
$m_{tod}(t)$	Anteil des Bestands, der im Zeitraum $(t - 1; t]$ verstorben ist	58
μ	Sterblichkeitsintensität	5
N_t	Binomialzählprozess	47
N_T^η	Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt T	56
n	Versicherungsdauer in Jahren (bis zum Tod oder zum Garantiezeitpunkt)	9
O	Auszahlung einer Erlebensfallversicherung	10
Ω	Zustandsraum	39
ω	Ereignis in Ω	7
$Opt_{\mathcal{H}}$	Optimierungsproblem, das die optimale Strategie \mathcal{H} sucht	77

Symbol	Beschreibung	Seite
P	Wahrscheinlichkeit unter \mathcal{P}	43
\mathcal{P}	Realworld-Wahrscheinlichkeitsmaß	39
$P_{x:n}^1$	jährliche Nettoprämie	10
$P_{x:n}^{12}$	monatliche Nettoprämie	11
$P_{x:n}^a$	jährliche ausreichende Prämie	13
p	Realworld-Wahrscheinlichkeit von „up“	39
p_x^k	Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person noch k Jahre zu überleben	4
$\Phi^{\mathcal{H}}(t)$	durch das Hedging \mathcal{H} induzierter Portfolioprozess	76
π^C	Preis eines Contingent Claims	44
$\pi_{\rho \cdot X_t}^{Call}(t)$	Preis einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt t bei einem Strikepreis von $\rho \cdot X_t$ mit einmonatiger Laufzeit	75
$\pi^{\mathcal{H}}$	Preis des Hedgings \mathcal{H}	79
Π	stochastischer Prozess für arbitragefreien Preis von C	44
Pr	Wahrscheinlichkeit	4
ψ	Quantilwahrscheinlichkeit	77
$PV(B_{sum}(t))$	Erlebensfallbarwert von $B_{sum}(t)$ (bis zum Garantiezeitpunkt - insb. nicht stochastisch)	16
q	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „up“	45
kq_x	Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person innerhalb von k Jahren zu sterben	4
Q	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit im Allgemeinen	44
\mathcal{Q}	risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß	43
R	Wachstumsprozess der Aktienanlage	40
r	jährlicher Zins einer risikolosen Anlage	35
r_{CRR}	Zins der risikolosen Anlage S pro Zeiteinheit	40
ρ	Verhältnis von Strikepreis zu Aktienkurs	74
S_t	Wert der risikolosen Anlage zum Zeitpunkt t	31
\tilde{S}	Preisprozess der diskontierten Anlage S	44
s	Laufparameter der Funktion G oder des Zuwachsprozesses R	5; 39
σ_X	Kapitalmarktvolatilität bzw. Standardabweichung von X	47
$\sigma(X)$	Sigma-Algebra von X	39
t	Handelszeitpunkt oder allgemeine Zeitangabe	16; 50
t^+	Beginn eines Monats ($t; t + 1$)	16
t^-	Ende des Monats ($t - 1; t$)	16
T	Fälligkeit, Endzeitpunkt	48; 51
$\tau_{GF}^j(t)$	Anzahl der Aktien, die den Garantiefondstopf des Kunden j im Zeitraum $(t - 1; t]$ abbilden	60
$\tau_{FF}^j(t)$	Anzahl der Aktien, die den Freien Fondstopf des Kunden j im Zeitraum $(t - 1; t]$ abbilden	60
$\Theta^{\mathcal{H}}$	Durchschnittskosten eines Hedgings \mathcal{H}	80

Symbol	Beschreibung	Seite
U_{Call}	Strike-Preis einer Call-Option	49
U_{Put}	Strike-Preis einer Put-Option	49
u	„up“-Faktor	39
Var	Varianz	7
v	Diskontierungsfaktor	8
${}_k V_{x:n}$	Nettodeckungskapital	12
$V_{GF}^j(t^-)$	Garantiefondsvermögen des j-ten Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	60
$V_{FF}^j(t^-)$	Freies Fondsvermögen des j-ten Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	60
$V_{DK}^j(t^-)$	Deckungskapitalvermögen des j-ten Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	61
$V_{GF}^{\eta_i}(t^-)$	kumuliertes Garantiefondsvermögen aller Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	60
$V_{FF}^{\eta_i}(t^-)$	kumuliertes Vermögen der Freien Fonds aller Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	60
$V_{DK}^{\eta_i}(t^-)$	kumuliertes Deckungskapitalvermögen aller Kunden zum Zeitpunkt t^- (vor einer Umschichtung)	60
$V_{GF}^{opt}(t^+)$	optimales Vermögen im GF nach einer Umschichtung	18
$V_{FF}^{opt}(t^+)$	optimales Vermögen im FF nach einer Umschichtung	18
$V_{DK}^{opt}(t^+)$	optimales Vermögen im DK nach einer Umschichtung	18
$V_{GF}^j(t^+)$	Vermögen des j-ten Kunden im GF nach einer Umschichtung	59
$V_{FF}^j(t^+)$	Vermögen des j-ten Kunden im FF nach einer Umschichtung	59
$V_{DK}^j(t^+)$	Vermögen des j-ten Kunden im DK nach einer Umschichtung	59
$V(t^-)$	Vermögen zum Ende des Monats ($t - 1, t$)	16
$V(t^+)$	Vermögen zum Beginn des Monats ($t, t + 1$)	16
$V_{GF}^{\eta_i}(t^+)$	Vermögen in den Garantiefonds aller Kunden nach einer Umschichtung	59
$V_{FF}^{\eta_i}(t^+)$	Vermögen in den Freien Fonds aller Kunden nach einer Umschichtung	59
$V_{DK}^{\eta_i}(t^+)$	Vermögen im Deckungskapital aller Kunden nach einer Umschichtung	59
$V^{\eta_i}(t)$	gesamtes Vertragsvermögen aller Kunden zum Zeitpunkt t	59
$V^j(t)$	Vertragsvermögen des j-ten Kunden zum Zeitpunkt t	59
V_t^h	Wertprozess	42
$V_{\mathcal{H}}^{Call}(t)$	Payoff der Hedgingstrategie \mathcal{H} zum Zeitpunkt t	77
\tilde{V}_t^h	diskontierter Wertprozess	42
V^C	Wert eines Contingent Claims	45

Symbol	Beschreibung	Seite
W	Zufallsvariable des durch die Sterblichkeit bedingten Diskontfaktors	8
w	Restlaufzeit bis zum Garantiezeitpunkt, vom Zeitpunkt t (in Monaten)	16
$w^j(t)$	Restvertragslaufzeit des j -ten Kunden bis zum Garantiezeitpunkt, ausgehend vom Zeitpunkt t (in Monaten)	59
X	stochastischer Prozess, Binomialprozess	39; 40
X_t	Wert der Aktienanlage zum Zeitpunkt t	39; 40
\tilde{X}_t	diskontierter Preisprozess	42
x	Alter allgemein oder Eintrittsalter	4; 16
ξ	Schwellenwert der Hedging-Strategie	76
ξ_{opt}	das optimale ξ	81
Y	Barwert einer lebenslänglichen vorschüssigen lebenslänglichen Leibrente	8
y	diskontierter Zinswert	8
Z_x	Restlebensdauer eines x -jährigen im Sterbejahr	6
z	unterjähriger Anteil eines Jahres	7

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Versicherungsbranche sieht sich seit einigen Jahren vielfältigen Veränderungen sowohl der wirtschaftlichen Realitäten als auch der rechtlichen bzw. institutionellen Konditionen ausgesetzt. Einerseits sind z. B. beim Kapitalanlagegeschäft der Versicherer nach wie vor die Folgen der weltweiten Finanzkrise 2008 erkennbar. Auf der anderen Seite ergeben sich neue Herausforderungen aus der Änderung wichtiger Rahmenbedingungen. Hier ist neben zahlreichen Überarbeitungen des Versicherungsaufsichtsgesetzes, die im Jahr 2008 erfolgte Novellierung des Versicherungsvertragsgesetzes zu nennen. Auf EU-Ebene sind die Diskussionen zu Solvency II weit fortgeschritten und die Grundprinzipien eines neuen Konzepts der Versicherungsaufsicht und der Kapitalausstattung stehen weitgehend fest. Solvency II ist eine europäische Aufsichtsrichtlinie, die nach dem Vorbild des Pendantes der Bankenbranche - Basel II (inzwischen Basel III) - aus folgenden drei Säulen besteht:

- (i) Die Erfüllung von Solvenzkapitalanforderungen
- (ii) Die Gewährleistung eines qualitativen Risikomanagements
- (iii) Die Berichterstattungspflichten jedes einzelnen Versicherungsunternehmens

Im Jahr 2013 wird Solvency II als Richtlinie bereits gelten, gesetzlich in Kraft tritt sie vermutlich aber erst in 2014. Die Finanzkrise und ihre Auswirkungen (Stichwort PIIGS) erhöhen die Relevanz eines quantitativen Risikomanagements weiter. Diese Entwicklungen bleiben nicht ohne Auswirkungen auf das Produktangebot der Lebensversicherungsbranche. Nicht zuletzt als Folge der Marktliberalisierung Mitte der 90er Jahre entstanden bei der Suche nach einer optimalen Verknüpfung von Sicherheit und hoher Rendite für den Kunden, bei finanzierbarer Risikobelastung des Versicherers, zunehmend komplexere Produkte. Dies gipfelte im Jahr 2006, als erstmals ein sogenanntes dynamisches Drei-Topf-Hybrid-Produkt auf den Markt kam. Bei dieser Kombination von klassischer Lebensversicherung und fondsgebundenem Produkt wird das Kundenguthaben auf drei Töpfe aufgeteilt: Das konventionelle Vermögen (auch Deckungskapital genannt), den Garantiefonds und die freie Fondsanlage ohne Garantien. Dabei wird monatlich zwischen den drei Töpfen umgeschichtet. Die dynamische Umschichtung des untersuchten Produkts hat

für den Versicherer die Folge, dass die hier möglicherweise auftretenden Risiken zu erkennen, zu bewerten und danach angemessen handzuhaben sind.

1.2 Ziel der Diplomarbeit

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die Risiken, die mit diesem Produkt aus Versicherungsunternehmenssicht entstehen können, zu identifizieren, zu messen und zu bepreisen. Nachdem die Risiken identifiziert worden sind, soll hierzu ein Kapitalmarktmodell entwickelt werden, womit diese gemessen werden können. Im Rahmen dieses Kapitalmarktmodells können dann die versicherungstechnischen Cashflows, die durch das Produkt entstehen, stochastisch simuliert werden. Für die Bepreisung der enthaltenen Garantien und Optionen sollen diese Cashflows gehedgt werden. Die Kosten dieses Hedgings können als Pricing herangezogen werden.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Kapitel 2 erklärt die lebensversicherungsmathematischen Grundlagen.

Kapitel 3 erläutert Funktionsweise des Umschichtungsalgorithmus des untersuchten Produkts und liefert einen Beweis von dessen Optimalität.

Kapitel 4 behandelt die zukünftig geltenden aufsichtsrechtlichen Rahmenbedingungen und die Ausprägung der Risikoarten bei den dynamischen Drei-Topf-Hybriden.

Kapitel 5 beschreibt das verwandte mathematische Modell und erklärt wie der Cashflow definiert wird.

Kapitel 6 zeigt auf wie realitätsnahe Bestandsdaten eines Versicherungsunternehmens in das Modell integriert wurden und wie daraus Cashflows simuliert wurden.

Kapitel 7 handelt von der Optimierung und anschließenden Anwendung einer Cashflow-Hedging-Strategie.

Kapitel 8 liefert eine ökonomische Interpretation der in Kapitel 7 erzielten Ergebnisse und würdigt sie im Hinblick auf die ursprüngliche Problemstellung.

1.4 Literaturüberblick

In der Wissenschaft wurde die Risikoquantifizierung von dynamischen Drei-Topf-Hybridprodukten bisher lediglich aus einzelvertraglicher Kundensicht durchgeführt. Hier ist MM² Volatium zu erwähnen - ein Modell zur stochastischen Simulation von Altersvorsorgeprodukten. Die Morgen & Morgen GmbH wollte damit eine Vergleichbarkeit von Lebensversicherungsprodukten aus Kundensicht schaffen. Als problematisch erweist sich hierbei aber die darin getroffene Annahme, dass für alle zu vergleichenden Tarife dieselben Fondskosten unterstellt werden. Da dieses Modell nicht die Unternehmenssicht fokussiert, ist es bei der hier betrachteten Fragestellung nur indirekt hilfreich.

Die Bewertung von Lebensversicherungen in Form von fondsgebundenen oder klassischen Produkten wurde hingegen schon sehr ausführlich diskutiert. Während bei der Modellierung von fondsgebundenen Versicherungen, wie z. B. bei Brennan und Schwartz [3] die Kapitalmarktmodellierung und insbesondere die Aktienkursmodellierung im Vordergrund stand, konzentrierten sich Modellierungen von klassischen Lebensversicherungen wie z. B. bei Kling [22] auf Unsicherheiten bzgl. Storno, Überschussbeteiligung, Zinsentwicklung und dem daraus folgenden Wert von Garantien und Optionen.

Ein komplettes Modell, das alle wichtigen Risiken des dynamischen Drei-Topf-Hybridprodukts aus Unternehmenssicht beinhaltet, existiert von Seiten der EIOPA [9] noch nicht. Gegenstand aktueller Diskussionen sind allerdings die Wechselwirkungen eines dynamischen Drei-Topf-Hybriden mit dem restlichen Bestand, die Berechnung des Solvenzkapitalbedarfs aus Solvency II - Sicht und erste Ansätze zur Modellierung des Umschichtungsrisikos (vgl. Ruß und Reuß [30] und Kochanski und Karnarski [23]).

Kapitel 2

Lebensversicherungsmathematik

Dieses Kapitel soll dem Leser die wahrscheinlichkeitstheoretische Fundierung der Lebensversicherungsmathematik nahe bringen. Darin wird insbesondere der Begriff „Deckungskapital“ definiert, der wiederum für das Verständnis des Deckungskapitaltopfes des dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts essentiell ist.

Auf die in diesem Kapitel enthaltenen Notationen wird danach nicht mehr Bezug genommen, um dem der Lebensversicherungsmathematik vertrauten Leser die Möglichkeit zu geben, dieses Kapitel überspringen zu können.

Sämtliche Definitionen und Bemerkungen dieses Kapitels sind an Gerber [17] angelehnt. Das zugrundegelegte stochastische Modell beruht darauf, dass die zukünftige Lebensdauer einer neugeborenen Person durch eine Zufallsvariable modelliert wird. Um damit auch rechnen zu können, werden einige Annahmen bzgl. dieser Zufallsvariable gemacht, die im Folgenden ausgeführt werden. Darauf aufbauend werden außerdem die für das Risikomodell essentiellen Begriffe „Nettoprämie“ und „Deckungsrückstellung“ eingeführt.

2.1 Stochastisches Modell

Definition 2.1 (Die Lebensdauer eines x -jährigen). *Sei x das Alter einer bestimmten Person. Die zukünftige Lebensdauer wird mit M oder genauer M_x bezeichnet. M_x ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $G_x(t)$. Für ein festes t ist also $G_x(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der x -Jährige innerhalb von t Jahren sterben wird:*

$$G_x(t) = {}_tq_x := \Pr(M_x \leq t), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Im Folgenden wird die Verteilung von M als bekannt vorausgesetzt. Außerdem wird angenommen, dass sie stetig ist und eine Wahrscheinlichkeitsdichte $g_x(t) = G'_x(t)$ besitzt. Für die Dichte gilt dann

$$g_x(t) dt = \Pr(t < M_x < t + dt). \quad (2.2)$$

Analog dazu ist ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ die t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -jährigen.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der x -Jährige nach Erreichen des Alters $x + s$ weitere t Jahre leben wird, gegeben, dass er dieses Alter erreicht, wird mit ${}_t p_{x+s}$ bezeichnet:

$${}_t p_{x+s} = \Pr(M_x > s + t | M_x > s) = \frac{1 - G_x(s + t)}{1 - G_x(s)}. \quad (2.3)$$

Analog dazu ist

$${}_t q_{x+s} = \Pr(M_x \leq s + t | M_x > s) = \frac{G_x(s + t) - G_x(s)}{1 - G_x(s)}. \quad (2.4)$$

Daraus folgen unmittelbar

$${}_{s+t} p_x = 1 - G_x(s + t) = [1 - G_x(s)] \frac{1 - G_x(s + t)}{1 - G_x(s)} = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s} \quad (2.5)$$

und

$${}_{s+t} q_x = G_x(s + t) - G_x(s) = [1 - G_x(s)] \frac{G_x(s + t) - G_x(s)}{1 - G_x(s)} = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s}. \quad (2.6)$$

Aufgrund von Gleichung (1.5) gilt dann

$${}_k p_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} \dots p_{x+k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

Definition 2.2 (Die Lebenserwartung eines x -Jährigen). *Die Lebenserwartung eines x -Jährigen ist*

$$\dot{e}_x = \mathbb{E}[M_x] = \int_0^\infty t g_x(t) dt = \int_0^\infty [1 - G_x(t)] dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt. \quad (2.8)$$

Definition 2.3 (Die Sterblichkeitsintensität). *Die Sterblichkeitsintensität des x -Jährigen im Alter $x+t$ ist definiert als*

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1 - G_x(t)] = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x. \quad (2.9)$$

Ein für die Auswertung einfacherer Ansatz zur Approximation der Lebenserwartung lässt sich wie folgt definieren:

Definition 2.4 (Die gestutzte Restlebensdauer eines x -Jährigen). *Sei $K = \lfloor M \rfloor$ die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer. Die Verteilung von K folgt aus der Verteilung von M wie folgt:*

$$\begin{aligned} \Pr(K_x = k) &= \Pr(k < M_x \leq k + 1) \\ &= \Pr(M_x \leq k + 1 | M_x > k) \cdot \Pr(M_x > k) \\ &= {}_k p_x \cdot q_{x+k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

für $k = 0, 1, \dots$, d. h. die Verteilung der diskreten Zufallsvariable K ist bestimmt durch Wahrscheinlichkeiten q_{x+k} und ${}_k p_x$.

Der Erwartungswert von K heißt gestutzte Lebenserwartung des x -jährigen und wird mit e_x bezeichnet. Es ist also

$$e_x := E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k {}_k p_x q_{x+k} \quad (2.11)$$

oder

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(K_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x. \quad (2.12)$$

Der Vorteil dieses Ansatzes besteht auch darin, dass lediglich Annahmen über die Verteilung von K gemacht werden müssen.

Definition 2.5 (Sterbetafel). *Eine Sterbetafel ist im Wesentlichen eine Tabelle von einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten, durch die dann die Verteilung von K definiert ist. Dadurch ließe sich auch in weiterer Folge eine Verteilung für M konstruieren. Sterbetafeln werden für bestimmte Gruppen konstruiert, welche gemäß Merkmalen wie Geschlecht, Rasse, Generation, Art der Versicherung definiert sind. Innerhalb einer solchen Gruppe kann das anfängliche Alter x eine bedeutende Rolle spielen.*

Beispiel 1. *Es soll nun eine konkrete Verteilung von K ausgerechnet werden. Wir setzen die Gleichung (2.7) in die Gleichung (2.10) ein, und erhalten:*

$$\Pr(K_x = k) = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+k-1} q_{x+k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wir betrachten nun einen 30-jährigen Mann, d. h. wir suchen

$$\Pr(K_{30} = k) = p_{30} p_{31} p_{32} \cdots p_{30+k-1} q_{30+k}$$

für $k = 1, 2, 3, \dots$. Das Ergebnis ist in der Abbildung 2.1 auf den folgenden Seite dargestellt.

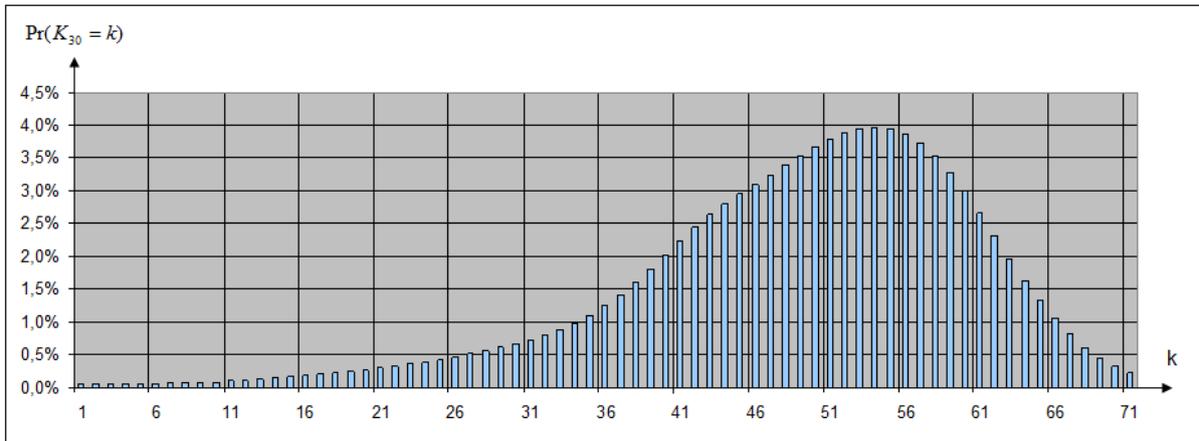
Definition 2.6 (Die Restlebensdauer einer Person im Sterbejahr). *Um die Zufallsvariablen M und K zu verknüpfen, wird die unterjährige Restlebensdauer einer Person eingeführt als*

$$Z_x = M_x - K_x. \quad (2.13)$$

Die Zufallsvariable Z hat eine stetige Verteilung, die zwischen 0 und 1 konzentriert ist. Wenn wir ihren Erwartungswert mit $\frac{1}{2}$ approximieren und in obiger Gleichung den Erwartungswert bilden, so erhalten wir die Näherung

$$\frac{1}{2} \approx \dot{e}_x - e_x. \quad (2.14)$$

Abbildung 2.1: Verteilung der gestutzten Restlebensdauer eines 30-jährigen (eigene Darstellung)



Die einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten q_x und p_x wurden der Sterbetafel der deutschen Aktuarvereinigung [8] entnommen. Nicht betrachtet wurde der rechte Rand der Verteilung, d. h. das Erreichen des 102. Lebensjahres. Das Schlussalter der Sterbetafel ist $\omega = 100$, woraus die Wahrscheinlichkeit des Erreichens des 102. Lebensjahres mit unter 0,5 % beziffert werden kann und daher vernachlässigbar klein ist.

Interessant ist der Fall, in dem die bedingte Verteilung Z (gegeben K) unabhängig von K ist. Dann ist nämlich

$$\Pr(Z \leq z | K = k) = \frac{{}_z q_{x+k}}{q_{x+k}} \tag{2.15}$$

eine von k unabhängige Verteilungsfunktion $\mathcal{G}_x(z)$, $0 \leq z \leq 1$, d. h.

$${}_z q_{x+k} = \mathcal{G}_x(z) \cdot q_{x+k} \quad \forall k = 0, 1, \dots \tag{2.16}$$

Wird insbesondere $\mathcal{G}_x(z) = z$ vorausgesetzt (Gleichverteilung zwischen 0 und 1), so ist obige Approximation exakt. Überdies erhalten wir dann aus $Z_x = M_x - K_x$ sofort einen Zusammenhang zwischen den Varianzen von M und K :

$$\text{Var}(M) = \text{Var}(K) + \frac{1}{12} \tag{2.17}$$

An den Annahmen 'K und Z unabhängig' und 'Z gleichverteilt zwischen 0 und 1' wird von nun an festgehalten.

Definition 2.7 (Die unterjährige Sterbewahrscheinlichkeit). *Eine Sterbetafel gestattet es, die Verteilung von K auszurechnen. Um daraus die Verteilung von M erhalten zu können, werden die Annahmen aus vorangegangener Definition genutzt. Durch Interpolation zwischen $z=0$ und $z=1$ sehen wir dann, dass*

$${}_z q_x = z q_x \tag{2.18}$$

Folglich ist

$${}_z p_x = 1 - z q_x \quad (2.19)$$

und aus der Definition der Sterblichkeitsintensität folgt

$$\mu_{x+z} = \frac{q_x}{1 - z q_x}. \quad (2.20)$$

2.2 Leibrenten

Um Nettoprämien berechnen zu können, sind einige Vorüberlegungen von Nöten: i bezeichne den Zins, $v = \frac{1}{1+i}$ den Diskontierungsfaktor und $y = \frac{i}{1+i}$ der diskontierte Wert des am Jahresende bezahlten Zinses i . Zunächst wird die Zufallsvariable W mit

$$W = v^{K+1}, \quad K = 0, 1, \dots \quad (2.21)$$

definiert. Die möglichen Werte von W sind also v, v^2, v^3, \dots , und die Verteilung von W folgt aus Gleichung (2.21) und der Verteilung aus K :

$$\Pr(W = v^{k+1}) = \Pr(K = k) = {}_k p_x q_{x+k}. \quad (2.22)$$

Der Erwartungswert von W ist

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[v^{K+1}] = A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (2.23)$$

Die Varianz von W berechnet sich durch

$$\text{Var}(W) = \mathbb{E}[Z^2] - A_x^2 = \mathbb{E}[e^{-2\delta(K+1)}], \quad (2.24)$$

wobei „ v “ durch „ $e^{-2\delta}$ “ substituiert wurde und „ Z “ die unterjährige Restlebensdauer einer Person ist.

Definition 2.8 (Die vorschüssige lebenslängliche Leibrente). *Wir betrachten nun eine vorschüssige, lebenslängliche Leibrente, die aus Zahlungen von je 1 besteht. Die Zahlungen finden also zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, K$ statt. Der Barwert dieser Rente ist*

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \ddot{a}_{K+1|}. \quad (2.25)$$

Die Verteilung der Zufallsvariable Y ist gegeben durch

$$\Pr(Y = \ddot{a}_{k+1|}) = \Pr(K = k) = {}_k p_x q_{x+k}. \quad (2.26)$$

Die lebenslängliche vorschüssige Leibrente \ddot{a}_x ist gegeben durch

$$\ddot{a}_x := \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{k+1|} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x. \quad (2.27)$$

Für die Berechnung der Varianz von Y wird die Gleichung

$$\ddot{a}_{K+1|} = \ddot{a}_{\infty|} - v^{K+1} \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{y} - v^n \frac{1}{y} = \frac{1 - v^n}{y} \quad (2.28)$$

genutzt. Dabei ist

$$\ddot{a}_{\infty|} = 1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{y}. \quad (2.29)$$

Daraus folgt

$$\text{Var}(Y) = \frac{\text{Var}(Z)}{y^2} = \frac{\mathbb{E}[e^{-2\delta(K+1)}]}{y^2}. \quad (2.30)$$

Definition 2.9 (Die vorschüssige temporäre Leibrente der Dauer n). *Analog zu Gleichung (2.27) ist die vorschüssige temporäre Leibrente der Dauer n ist definiert als*

$$\ddot{a}_{x:n|} := \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x. \quad (2.31)$$

Definition 2.10 (Die unterjährige Bezahlung). *Für die unterjährige Zahlung, bei der uns später insbesondere die Monatliche interessieren wird, betrachten wir nun den Fall, in dem Zahlungen von je $\frac{1}{12}$ zu den Zeitpunkten $0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots$ gemacht werden, solange der anfänglich x -jährige noch lebt. Die Nettoeinmalprämie dieser (lebenslänglichen) Rente wird mit dem Symbol $\ddot{a}_x^{(12)}$ bezeichnet. Unter der Annahme der Gleichverteilung von u und Unabhängigkeit von K und Z (siehe Def. der Restlebensdauer im Sterbejahr) gilt:*

$$\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{y i}{y^{(12)} i^{(12)}} \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(12)}}{y^{(12)} i^{(12)}}, \quad (2.32)$$

wobei $i^{(12)} = 12 \cdot [(1 + i)^{1/12} - 1]$ den nominellen Zins und $y^{(12)} = \frac{i^{(12)}}{1 + i^{(12)}/12}$ die nominelle Vorauszinsrate bezeichnet.

Die Nettoeinmalprämie einer temporären Rente mit monatlicher Zahlung kann wie folgt berechnet werden:

$$\ddot{a}_{x:n|}^{(12)} = \ddot{a}_x^{(12)} - {}_n p_x v^n \ddot{a}_{x+n}^{(12)}. \quad (2.33)$$

2.3 Nettoprämien

Zur Herleitung der Nettoprämien muss zu Beginn der Vertragslaufzeit folgendes versicherungstechnische Äquivalenzprinzip erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Verluste}] &= \text{Summe aller erbrachten Leistungen} - \text{Summe aller gezahlter Beiträge} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Zu beachten ist, dass die Nettoprämien durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt sind. Dazu brauchen wir eine weitere Bedingung an den Zahlungsmodus, z. B. durch Forderung konstanter Prämienzahlungsweise oder einer Einmalprämie.

Definition 2.11 (Die Nettoeinmalprämie). *Die einfachste Form der Nettoprämie ist die Nettoeinmalprämie (NEP). Der Rest des Kapitels wird auf den Fall einer reinen Erlebensfallversicherung beschränkt. Bei einer Dauer von n Jahren werde das Kapital in der Höhe von 1 im Erlebensfall (und nichts bei vorzeitigem Ableben) ausbezahlt:*

$$O = \begin{cases} 0 & \text{für } K = 0, 1, \dots, n - 1, \\ v^n & \text{für } K \geq n. \end{cases} \tag{2.35}$$

Die NEP wird mit $A_{x:n}^1$ bezeichnet und beträgt

$$\mathbb{E}[O] = A_{x:n}^1 = v^n {}_n p_x. \tag{2.36}$$

Aus der Formel für die Varianz einer Bernoulli-Verteilung erhalten wir direkt

$$\text{Var}(O) = v^{2n} {}_n p_x {}_n q_x. \tag{2.37}$$

Beispiel 2. *Für einen 30-jährigen Mann mit Vertragslaufzeit $n = 37$ Jahre und einem unterstellten Rechnungszins von 2,25 % ist*

$$A_{30:37}^1 = \frac{1}{(1,0225)^{37}} {}_{37} p_{30} = \frac{1}{(1,0225)^{37}} p_{30} p_{31} p_{32} \dots p_{66} \approx 0,3612$$

und

$$\text{Var}(O) = \frac{1}{(1,0225)^{2 \cdot 37}} {}_{37} p_{30} {}_{37} q_{30} \approx 0,002858.$$

Definition 2.12 (Die jährliche Nettoprämie). *Wir interessieren uns nun für jährliche Nettoprämien $P_{x:n}^1$. Der Verlust des Versicherers ist in diesem Fall*

$$L = \begin{cases} -P_{x:n}^1 \ddot{a}_{K+1} & \text{für } K = 0, 1, \dots, n - 1 \\ v^n - P_{x:n}^1 \ddot{a}_n & \text{für } K \geq n, \end{cases} \tag{2.38}$$

wobei K wieder die gestutzte zukünftige Lebensdauer bezeichnet. Die Verteilung von L ist diskret auf $n+1$ Punkten konzentriert:

$$\begin{aligned} \Pr(L = -P_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_{K+1]}) &= {}_k p_x q_{x+k} \quad \text{für } K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \text{und } \Pr(L = v^n - P_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n]) &= {}_n p_x \quad \text{für } K = n. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aus dem Äquivalenzprinzip folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_{k+1]} \cdot {}_k p_x q_{x+k} = (v^n - P_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n]) \cdot {}_n p_x. \quad (2.40)$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$P_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n] = \frac{A_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n]}{\overset{1}{\ddot{a}}_{x:n]} = \frac{v^n {}_n p_x}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x}. \quad (2.41)$$

Beispiel 3. Um auf das vorangegangene Beispiel wieder zurück zu kommen, betrachten wir wieder $x = 30$, $n = 37$ und $v = \frac{1}{1,0225}$. Die jährliche Nettoprämie beläuft sich demnach auf

$$P_{30:37] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n] = \frac{v^{37} {}_{37} p_{30}}{\sum_{k=0}^{36} v^k {}_k p_{30}} \approx 0,01469.$$

Definition 2.13 (Die monatliche Nettoprämie). Wenn wir die konstante monatliche Nettoprämie $P_{x:n]^{(12)}}$ berechnen wollen, dann ist aus der Formel (2.39) lediglich „ $\overset{1}{\ddot{a}}_{x:n]$ “ durch „ $12 \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}_{x:n]}$ “ zu ersetzen. Die monatliche Nettoprämie beläuft sich demnach auf

$$\begin{aligned} P_{x:n]^{(12)}} &= \frac{A_{x:n] \cdot \overset{1}{\ddot{a}}_n]}{12 \cdot \overset{(12)}{\ddot{a}}_{x:n]} \\ &= \frac{\frac{1}{12} v^n {}_n p_x}{\overset{(12)}{\ddot{a}}_x - {}_n p_x v^n \overset{(12)}{\ddot{a}}_{x+n}} \\ &= \frac{\frac{1}{12} v^n {}_n p_x}{\left(\frac{y^i}{y^{(12)} i^{(12)}} \overset{(12)}{\ddot{a}}_x - \frac{i-i^{(12)}}{y^{(12)} i^{(12)}} \right) - {}_n p_x v^n \left(\frac{y^i}{y^{(12)} i^{(12)}} \overset{(12)}{\ddot{a}}_{x+n} - \frac{i-i^{(12)}}{y^{(12)} i^{(12)}} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{12} v^n {}_n p_x}{\left(\frac{y^i}{y^{(12)} i^{(12)}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x - \frac{i-i^{(12)}}{y^{(12)} i^{(12)}} \right) - {}_n p_x v^n \left(\frac{y^i}{y^{(12)} i^{(12)}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+n} - \frac{i-i^{(12)}}{y^{(12)} i^{(12)}} \right)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Beispiel 4. Wir bleiben bei dem Beispiel $x = 30$, $n = 37$ und $v = \frac{1}{1,0225}$. Die monatliche Nettoprämie beläuft sich demnach auf

$$P_{30:37]^{(12)}} = 0,001239.$$

2.4 Nettodeckungskapital

Es wurde festgestellt, dass zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses Äquivalenz zwischen Prämien und Leistungen gefordert wird. Zu einem späteren Zeitpunkt besteht im Allgemeinen aber keine Äquivalenz mehr. Zu einem Zeitpunkt t wird die Zufallsvariable ${}_t\Delta$ als die Differenz zwischen dem Barwert der zukünftigen Leistungen und dem Barwert der zukünftigen Prämien definiert. Das Nettodeckungskapital (auch Deckungsrückstellung genannt) zum Zeitpunkt t wird mit ${}_tV$ bezeichnet und ist definiert als der bedingte Erwartungswert von ${}_t\Delta$ gegeben $M > t$. In den in der Praxis auftretenden Versicherungsformen ist in der Regel der Erwartungswert von ${}_t\Delta$ positiv oder allenfalls null, da der Versicherte ein Interesse an der Fortsetzung der Versicherung haben soll. Im Erwartungswert übertrifft also der Barwert der zukünftigen Leistungen den Barwert der zukünftigen Prämien. Zur Kompensation sollte daher der Versicherer das Deckungskapital ${}_tV$ bereitstellen oder „reservieren“.

Definition 2.14 (Das Nettodeckungskapital). *Es seien k die bereits zurückgelegte Vertragslaufzeit, $P_{x:n}^1$ die jährliche (konstante) Nettoprämie, $A_{x+k:n-k}^1$ der Barwert der künftigen Versicherungsleistungen, $\ddot{a}_{x+k:n-k}$ die vorschüssige temporäre Leibrente der Dauer $n-k$ und ${}_kV_{x:n}^1$ die Deckungsrückstellung (d. h. der Wert der Versicherung zum Zeitpunkt t) im Alter $x+k$. Dann muss gemäß der verallgemeinerten Äquivalenzgleichung gelten:*

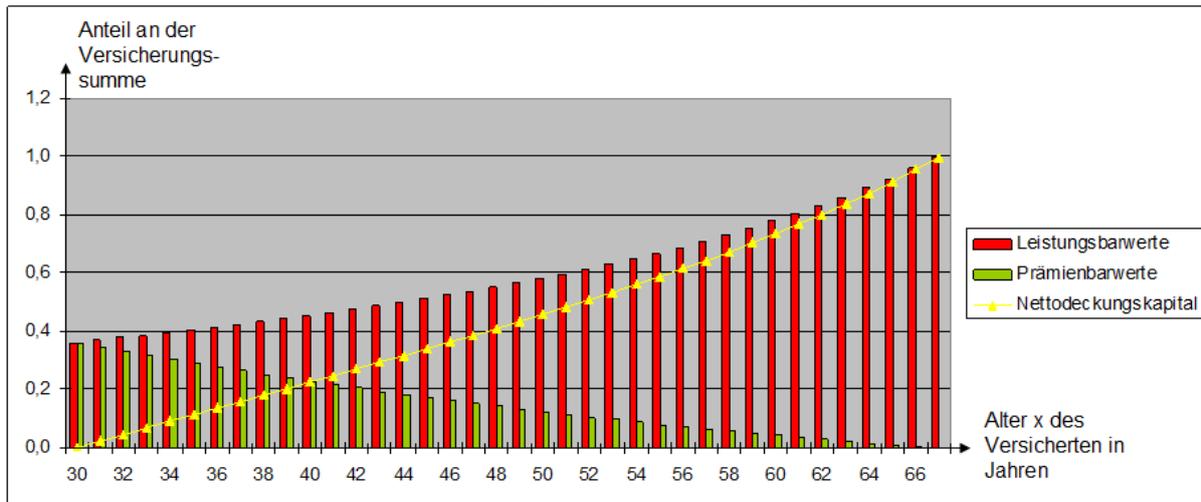
$${}_kV_{x:n}^1 + P_{x:n}^1 \ddot{a}_{x+k:n-k} = A_{x+k:n-k}^1, \quad , k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.43)$$

Das durch das verallgemeinerte Äquivalenzprinzip bestimmte Deckungskapital ${}_kV_x$ heißt prospektives Deckungskapital.

Beispiel 5. *Wir wollen in dem bekannten Beispiel ($x = 30$, $n = 37$, $v = \frac{1}{1,0225}$ und $P_{30:37}^1 = 0,01469$) den Verlauf des Nettodeckungskapital in der Aufschubzeit bei jährlicher Prämienzahlung berechnen. Gesucht ist also:*

$${}_kV_{30:37}^1 = A_{30+k:37-k}^1 - P_{30:37}^1 \ddot{a}_{30+k:37-k}, \quad \text{für jedes } k = 0, 1, \dots, 37.$$

Abbildung 2.2: Entwicklung des Nettodeckungskapitals, der Prämienbarwerte und der Leistungsbarwerte in der Aufschubzeit (eigene Darstellung)



Hier ist die Entwicklung der Deckungsrückstellung zu erkennen, die sich aus der Differenz zwischen Leistungsbarwerten und Prämienbarwerten ergibt. Betrachtet wurde nur die Aufschubzeit, also die Zeitpunkte von Vertragsbeginn bis Renteneintrittsalter.

2.5 Bruttoprämien

Es wurden bisher ausschließlich Nettoprämien betrachtet. Um eine ausreichende Prämie zu erhalten, müssen auch die Kosten des Versicherungsunternehmens, die durch den Vertragsabschluss entstehen, mit einbezogen werden:

- (i) Abschlusskosten, α -Kosten
- (ii) Inkassokosten, β -Kosten
- (iii) Verwaltungskosten, γ -Kosten .

Definition 2.15 (Die ausreichende Prämie). Die jährliche ausreichende Prämie $P_{x:n}^a$ ergibt sich aus der Bedingung, dass

$$P_{x:n}^a \cdot \ddot{a}_{x:n} = A_{x:n} + \alpha + \beta P_{x:n}^a \ddot{a}_{x:n} + \gamma \ddot{a}_{x:n}. \tag{2.44}$$

Daraus folgt, dass

$$P_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:n}}{(1 - \beta) \ddot{a}_{x:n}}. \tag{2.45}$$

Beispiel 6. Ein letztes Mal wird unser bekanntes Beispiel herangezogen, um die ausreichende Prämie zu veranschaulichen. Es werden Abschlusskosten von $\alpha = 5\%$, Verwaltungskosten von $\beta = 1,6\%$ und Inkassokosten von $\gamma = 1,5\%$ unterstellt. Die ausreichende Prämie beläuft sich somit auf

$$P_{30:37}^a = \frac{A_{30:37} + 0,05 + 0,015 \cdot \ddot{a}_{30:37}}{(1 - 0,016) \ddot{a}_{30:37}} = 0,03223 .$$

Bemerkung. Die von Kunden zu zahlende Tarif- oder Bruttoprämie wird außer von den Faktoren, die bei der Berechnung der ausreichenden Prämie eine Rolle spielen, noch von folgenden weiteren Einflussgrößen bestimmt:

- (i) Stückkostenzuschlag
- (ii) Risikozuschlag
- (iii) Rundungsvorschriften .

Kapitel 3

Funktionsweise der dynamischen Drei-Topf-Hybride

3.1 Eigenschaften des Produkts

Bei dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkten handelt es sich um eine fondsgebundene Rentenversicherung auf ein Leben mit aufgeschobener Rentenzahlung, garantierter Erlebensfalleistung mit garantiertem Verrentungsfaktor und flexiblem Rentenbeginn. Bei Tod in der Aufschubzeit wird das aktuelle Kundenguthaben, also mindestens die derzeitige Garantie ausbezahlt. Für die garantierte Erlebensfalleistung kann ein (auch anteiliger) Beitragserhalt der für den Vertrag gezahlten Beiträge vereinbart werden. Der Rest der Arbeit ist jedoch der Einfachheit halber auf den vollen Beitragserhalt beschränkt.

Es erfolgt monatlich eine automatisierte Aufteilung des Vertragsvermögens auf die Vermögenstöpfe 'Klassisches Deckungskapital' (DK), 'Garantiefonds' (GF) und 'Freie Fonds' (FF). Dabei wird ein spezieller Garantiefonds zugrunde gelegt, der jeweils zum Monatsende einen festgelegten Anteil (üblicherweise 80 %) des zum Ende des Vormonats gültigen Kurswertes des Garantiefonds garantiert. Mit Hilfe der Unterschranke und der Option, das Vermögen durch Umschichtung ins Deckungskapital zu sichern, kann eine Garantie zum Vertragsende abgebildet werden.

Der Garantiefonds wird in der Realität durch den sogenannten Constant-Proportion-Portfolio-Insurance (CPPI) - Algorithmus gemanaged. Dieser Mechanismus trägt durch tägliche Portfolioanpassungen dafür Sorge, dass die Nichtunterschreitung der 80 %-Hürde eingehalten wird. Für dieses Extra werden Fondskosten vom Kunden verlangt. Wie der CPPI genau funktioniert, ist hier nicht weiter von Interesse, da der Garantiefonds später alternativ modelliert wird. Für Details sei aber auf Albrecht und Maurer [1, S. 616] verwiesen. In diesem Kapitel wird zunächst davon ausgegangen, dass der Garantiefonds tatsächlich maximal 20 % an Wert pro Monat verlieren kann, ohne dass dem Kunden dabei Kosten entstehen.

Die Idee des dritten Topfes besteht darin, dass neben der Gewährleistung der Garantie - durch Investieren in das klassische Deckungskapital und den Garantiefonds - das dafür nicht benötigte Vermögen renditeträchtiger angelegt werden kann. Dabei hat der Kunde je nach Risikoaversion die Wahl zwischen verschiedenen Fondsgruppen, wie z. B. Aktien, Immobilien- oder Rentenfonds. Aufgrund der Volatilität der Fondskurse und der sich

daraus ergebenden Änderungen im Kundenportfolio ist eine monatliche Neuausrichtung nötig, um die Garantie sicherstellen zu können. Diese periodische Umschichtung folgt immer demselben Algorithmus.

Wir betrachten nun den Monatsübergang vom t -ten zum $t + 1$ -ten Monat: Um den Ablauf transparenter zu machen, werden die Bezeichnungen t^- für das Ende des Monats $(t - 1, t)$ und t^+ für den Beginn des Monats $(t, t + 1)$ eingeführt. Zum Ende eines Monats werden dem Kundenvermögen Kosten entnommen und etwaige fällige Leistungen ausbezahlt. Dem Monatsübergang t wird kein Ereignis zugeordnet. Zu Beginn des neuen Monats werden dann die Umschichtungen durchgeführt und danach die Beiträge eingezogen. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die versicherungstechnischen Kosten und die Fondsmanagementkosten vernachlässigt. Während eines Monats beeinflusst das Versicherungsunternehmen die Zusammensetzung eines Kundenportfolios nicht. Der Wert eines einzelnen Topfes kann sich im Falle des DK durch Verzinsung und im Falle von GF oder FF durch Entwicklungen der Fondskurse jedoch während eines Monats sehr wohl ändern.

3.2 Erklärung des Umschichtungsalgorithmus

Für die Darstellung des Umschichtungsmechanismus werden nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

Bezeichnung	Beschreibung
x	Eintrittsalter
n	Versicherungsdauer (in Jahren) bis zum Garantiezeitpunkt
$w(t)$	Restlaufzeit bis zum Garantiezeitpunkt, ausgehend vom Zeitpunkt t (in Monaten)
$B(t^+)$	gezahlter Beitrag zum Zeitpunkt t^+
$B_{sum}(t)$	Summe aller bis zum Zeitpunkt t gezahlten Beiträge
$I(t + 1)$	das zur Garantiegewährleistung nötige Vermögen
i	Garantieverzinsung
PV	Barwert
$V_{DK}(t^-)$	klassisches Deckungskapital zum Ende des Monats $(t - 1, t)$
$V_{GF}(t^-)$	Garantiefondsvermögen zum Ende des Monats $(t - 1, t)$
$V_{FF}(t^-)$	Vermögen im Freien Fonds zum Ende des Monats $(t - 1, t)$
$V(t^-)$	Vermögen zum Ende des Monats $(t - 1, t)$
$V(t^+)$	Vermögen zum Beginn des Monats $(t, t + 1)$
$V_{DK}(t^+)$	Vermögen im klassischen Deckungskapitaltopf zum Beginn des Monats $(t, t + 1)$
$V_{GF}(t^+)$	Vermögen im Garantiefonds zum Beginn des Monats $(t, t + 1)$
$V_{FF}(t^+)$	Vermögen im Freien Fonds zum Beginn des Monats $(t, t + 1)$

Bemerkung. Alle Variablen aus dieser Tabelle haben Werte ≥ 0 .

Zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t = 1, \dots, T - 1$ gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} & V_{DK}(t^-) + V_{GF}(t^-) + V_{FF}(t^-) + B((t-1)^+) \\ &= V(t^-) = V(t^+) \\ &= V_{DK}(t^+) + V_{GF}(t^+) + V_{FF}(t^+). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aus letzterer Gleichung und obiger Bemerkung folgen direkt die oberen Schranken

$$\begin{aligned} & V_{DK}(t^+) \leq V(t^+) \quad , \\ & V_{GF}(t^+) \leq V(t^+) \quad \text{und} \\ & V_{FF}(t^+) \leq V(t^+) \quad , \\ & \forall t = 0, \dots, T - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Gleichungen (3.1) sind folgendermaßen zu interpretieren: Zum Ende eines Monats wird geprüft, wieviel die Teilvermögen der einzelnen Töpfen wert sind. Die Summe dieser drei Positionen plus dem vorschüssig gezahlten Monatsbeitrag ergeben die zur Verfügung stehende Geldmenge $V(t^-)$. Da während des Monatsübergangs nichts passiert, kann zum Zeitpunkt t^+ die gleiche Geldmenge verwendet werden, um gemäß dem Umschichtungsalgorithmus die drei Topfgrößen neu zu bestimmen.

Dafür muss zunächst berechnet werden wieviel Vermögen für die Garantiegewährleistung notwendig ist. Dieser Betrag, der mit $I(t+1)$ bezeichnet wird, ist so hoch, dass er in einem Monat gerade ausreicht, um die Summe der bisher gezahlten Beiträge zum Ende der Laufzeit garantieren zu können.

Das klassische Deckungskapital wird mit dem garantierten Zinssatz von $i = 2,25\%$ pro Jahr verzinst. Dies entspricht der bis 31.12.2011 gesetzlich vorgeschriebenen Mindestgarantieverzinsung für das Neugeschäft. Zum 1.1.2012 wurde i vom Gesetzgeber um 0,5 Prozentpunkte verringert. Der Rest der Arbeit ist jedoch auf den für den Bestand noch gültigen alten Zinssatz beschränkt. Die Wertentwicklung des Deckungskapitaltopfes während eines Monats ist somit durch $\frac{V_{DK}((t+1)^-)}{V_{DK}(t^+)} = (1+i)^{(1/12)}$ gegeben.

Wir betrachten nun den Fall, dass das Kundenvermögen ausschließlich in den Deckungskapitaltopf umgeschichtet wird und diese Verteilung bis zum Ende der Vertragslaufzeit fixiert wird. Dann ist bereits zum Zeitpunkt t bekannt wieviel Vermögen zum Endzeitpunkt T vorhanden sein wird. Umgekehrt kann also auch ausgehend von den bekannten Parametern $B_{sum}(t)$, i und t berechnet werden, wie groß $I(t+1)$ sein muss. Dieser Wert ist somit der finanzmathematische Barwert (PV) der bisher gezahlten Beiträge multipliziert mit dem monatlichen Garantiezins:

$$\begin{aligned} I(t+1) &= 1,0225^{(1/12)} \cdot PV(B_{sum}(t)) \\ &= 1,0225^{\frac{1}{12}} \cdot 1,0225^{(-\frac{w(t)}{12})} \cdot B_{sum}(t) \\ &= 1,0225^{\frac{1-w(t)}{12}} \cdot B_{sum}(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Der deterministische finanzmathematische Barwert ist zu unterscheiden vom lebensversicherungsmathematischen Barwert, bei dem die Biometrie und somit stochastische Größen

mit einfließen. Mathematisch ausgedrückt handelt es sich bei der Entwicklung eines Kundenguthabens um einen Markovprozess.

Definition 3.1 (Umschichtungsalgorithmus). *Der Umschichtungsalgorithmus ist für alle $t = 0, \dots, T - 1$ folgendermaßen definiert:*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad V_{FF}^{opt}(t^+) &:= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)\}} \cdot [V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8}] \\
 (ii) \quad V_{GF}^{opt}(t^+) &:= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1)}{0,8} + \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\
 (iii) \quad V_{DK}^{opt}(t^+) &:= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} .
 \end{aligned}$$

3.3 Optimalität des Umschichtungsalgorithmus

Die Grundidee des dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts kann durch ein Optimierungsproblem beschrieben werden: Zu einem Zeitpunkt t soll das Kundenvermögen in $(t + 1)^-$ und somit die monatliche Rendite des Kundenportfolios im Monat $(t, t + 1)$ unter der Nebenbedingung der Garantiegewährleistung maximiert werden. Als Zielfunktion dient dabei $[V_{FF}(t^+) - V_{DK}(t^+)]$, wobei einerseits unterstellt wird, dass die Fondstöpfe innerhalb eines Monats eine höhere zu erwartende Rendite haben als die des Deckungskapitaltopfes. Und andererseits wird angenommen, dass die zu erwartende Rendite des Freien Fonds größer als die des Garantiefonds ist. Statt mit Erwartungswerten zu arbeiten, wird einfach der Anteil des Freien Fonds am Kundenvermögen maximiert und der des Deckungskapitaltopfes minimiert.

Satz 3.2 (Optimalität des Umschichtungsalgorithmus). *Sei $t \in \{0, \dots, T - 1\}$. Es seien die Größen $I(t + 1)$ und $V(t^+)$ gegeben. Unter der Voraussetzung, dass die Wertentwicklung des Deckungskapitaltopfes innerhalb eines Monats $(t, t + 1)$ definiert ist durch*

$$\frac{V_{DK}((t + 1)^-)}{V_{DK}(t^+)} = 1,0225^{(1/12)} , \quad (3.4)$$

und der maximale Verlust des Garantiefondsvermögens im Monat $(t, t + 1)$ begrenzt ist durch

$$\frac{V_{GF}(t^+) - V_{GF}((t + 1)^-)}{V_{GF}(t^+)} \leq 0,2 , \quad (3.5)$$

ist der Umschichtungsalgorithmus für jedes $t = 0, \dots, T - 1$ die Lösung des folgenden Optimierungsproblems:

$$\max [V_{FF}(t^+) - V_{DK}(t^+)] \quad (\text{Rendite des Kundenportfolios}) \quad (3.6)$$

$$\text{u. d. N.} \quad V((t + 1)^-) \geq I(t + 1) \quad (\text{Garantiegewährleistung}) \quad (3.7)$$

$$0 \leq V_{DK}(t^+) \leq V(t^+) \quad (\text{Zulässigkeit des DK-Volumens}) \quad (3.8)$$

$$0 \leq V_{FF}(t^+) \leq V(t^+) \quad (\text{Zulässigkeit des FF-Volumens}) \quad (3.9)$$

$$0 \leq V_{GF}(t^+) \leq V(t^+) \quad (\text{Zulässigkeit des GF-Volumens}). \quad (3.10)$$

Beweis 3.3 (des Satzes).

Aus der Voraussetzung folgt zunächst

$$\min\{V((t+1)^-) \quad = \quad 0,8 \cdot V_{GF}^{opt}(t^+) + 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}^{opt}(t^+)\}. \quad (3.11)$$

Motiviert durch die Def. 3.1 unterscheiden wir für den Beweis die Fälle

$$0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1) \quad \text{und} \quad 0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1). \quad (3.12)$$

1. Fall: $0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)$

Es folgt unmittelbar, dass $V_{DK}^{opt}(t^+) = 0$ gilt.

(i) Wir zeigen, dass die Def. 3.1 die Bedingung (3.7) erfüllt:

$$\begin{aligned} V((t+1)^-) &\geq \min\{V((t+1)^-)\} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} 0,8 \cdot V_{GF}^{opt}(t^+) + 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}^{opt}(t^+) \\ &\stackrel{\text{Def.3.1}}{=} 0,8 \cdot \mathbf{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1)}{0,8} \\ &\quad + 0,8 \cdot \mathbf{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\ &\quad + 1,0225^{(1/12)} \cdot 0 \\ &= 0,8 \cdot \frac{I(t+1)}{0,8} + 0 + 0 = I(t+1). \end{aligned}$$

\Rightarrow Def. 3.1 erfüllt (3.7), womit die Garantie gewährleistet ist.

(ii) Wir zeigen, dass $V_{FF}^{opt}(t^+)$ die Ungleichungen (3.9) erfüllt:

$$\begin{aligned}
 V_{FF}^{opt}(t^+) &\stackrel{\text{Def.3.1}}{=} \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)\}} \cdot \left[V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8} \right] \\
 &= V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8} \\
 &\geq \frac{I(t+1)}{0,8} - \frac{I(t+1)}{0,8} = 0 \\
 \\
 V_{FF}^{opt}(t^+) &= V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8} \\
 &\leq V(t^+).
 \end{aligned}$$

(iii) Wir zeigen, dass $V_{GF}^{opt}(t^+)$ die Ungleichungen (3.10) erfüllt:

$$\begin{aligned}
 V_{GF}^{opt}(t^+) &\stackrel{\text{Def.3.1}}{=} \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) \geq I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1)}{0,8} \\
 &\quad + \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\
 &= \frac{I(t+1)}{0,8} + 0 > I(t+1) > 0 \\
 \\
 V_{GF}^{opt}(t^+) &= \frac{I(t+1)}{0,8} \leq V(t^+).
 \end{aligned}$$

(iv) Für den Beweis der Optimalität betrachten wir die Zielfunktion $V_{FF}(t^+)$ und zeigen, dass $V_{FF}^{opt}(t^+) = V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8}$ der maximale Zielfunktionswert ist. Dies weisen wir nach, indem wir via Widerspruchsbeweis zeigen, dass die Ungleichung (3.7) eine aktive Nebenbedingung ist.

Wir addieren ein beliebiges $\epsilon > 0$ zu $V_{FF}^{opt}(t^+)$ und erhalten ein alternatives $V_{FF}^*(t^+)$:

$$\begin{aligned}
 V_{FF}^*(t^+) &= V_{FF}^{opt}(t^+) + \epsilon \\
 &= V(t^+) - \frac{I(t+1)}{0,8} + \epsilon.
 \end{aligned}$$

Daraus und aus $V_{FF}^{opt}(t^+) + V_{GF}^{opt}(t^+) = V(t^+)$ resultiert

$$\begin{aligned}
 V_{GF}^*(t^+) &= V_{GF}^{opt}(t^+) - \epsilon \\
 &= \frac{I(t+1)}{0,8} - \epsilon.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun unter Verwendung von (3.11), dass $V_{GF}^*(t^+)$ die Garantienebenbedingung verletzt:

$$\begin{aligned}
 V((t+1)^-) &\geq \min\{V((t+1)^-)\} \\
 &\stackrel{(3.11)}{\equiv} 0,8 \cdot V_{GF}^*(t^+) + 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}^{opt}(t^+) \\
 &= 0,8 \cdot \left[\frac{I(t+1)}{0,8} - \epsilon \right] + 0 \\
 &= I(t+1) - 0,8 \cdot \epsilon \\
 &\stackrel{\epsilon > 0}{<} I(t+1) \quad \not\leq.
 \end{aligned}$$

Es handelt sich also bei (3.7) um eine aktive Nebenbedingung.

$\Rightarrow V_{FF}^{opt}(t^+)$ ist bereits maximal.

q.e.d.

2. Fall: $0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)$

Es folgt unmittelbar, dass $V_{FF}^{opt}(t^+) = 0$ gilt.

(i) Wir zeigen, dass die Def. 3.1 die Bedingung (3.7) erfüllt:

$$\begin{aligned}
 V((t+1)^-) &\geq \min\{V((t+1)^-)\} \\
 &\stackrel{(3.11)}{\equiv} 0,8 \cdot V_{GF}^{opt}(t^+) + 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}^{opt}(t^+) \\
 &\stackrel{Def.3.1}{\equiv} 0 + 0,8 \cdot \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\
 &\quad + 1,0225^{(1/12)} \cdot \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &= \frac{0,8 \cdot I(t+1) - 0,8 \cdot 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\
 &\quad - \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot 0,8 \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\
 &= \frac{0,8 \cdot I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot I(t+1)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} = I(t+1).
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Def. 3.1 erfüllt (3.7), womit die Garantie gewährleistet ist.

(ii) Wir zeigen, dass $V_{DK}^{opt}(t^+)$ die linke Ungleichung in (3.8) erfüllt:

$$\begin{aligned} V_{DK}^{opt}(t^+) &\stackrel{\text{Def. 3.1}}{=} \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V(t^+) < I(t+1)\}} \cdot \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\ &= \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} > \frac{I(t+1) - I(t+1)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} = 0. \end{aligned}$$

(iii) Wir zeigen, dass $V_{GF}^{opt}(t^+)$ die rechte Ungleichung in (3.10) erfüllt:

Dafür zeigen wir zunächst, dass die Summe aus den in Def. 3.1 definierten Größen das Gesamtvermögen $V(t^+)$ ist.

$$\begin{aligned} V^{opt}(t^+) &= V_{GF}^{opt}(t^+) + V_{DK}^{opt}(t^+) \\ &= \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} + \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \quad (3.13) \\ &= \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\ &= V(t^+). \end{aligned}$$

Zusammen mit $V_{DK}^{opt}(t^+) > 0$ aus ii) folgt unmittelbar $V_{GF}^{opt}(t^+) < V(t^+)$.

(iv) Wir zeigen nun simultan, dass $V_{DK}^{opt}(t^+)$ die rechte Ungleichung in (3.8) und $V_{GF}^{opt}(t^+)$ die linke Ungleichung in (3.10) erfüllt:

Dafür schätzen wir zunächst $\min(V((t+1)^+))$ mit Hilfe der Voraussetzung nach oben ab:

$$\begin{aligned} \min(V((t+1)^+)) &= 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}(t^+) + 0,8 \cdot V_{GF}(t^+) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}(t^+) + 0,8 \cdot (V(t^+) - V_{DK}(t^+) - V_{FF}(t^+)) \\ &\leq 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}(t^+) + 0,8 \cdot (V(t^+) - V_{DK}(t^+)) \\ &= V(t^+) \cdot \left[1,0225^{(1/12)} \cdot \frac{V_{DK}(t^+)}{V(t^+)} + 0,8 \cdot \left(1 - \frac{V_{DK}(t^+)}{V(t^+)} \right) \right] \\ &\leq 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+). \end{aligned}$$

Zusammen mit der in i) bewiesenen Aussage, dass Def. 3.1 die Nebenbedingung (3.7) erfüllt, gilt folglich

$$I(t+1) = \min(V((t+1)^+)) \leq 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+).$$

Damit können wir $V_{DK}^{opt}(t^+)$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} V_{DK}^{opt}(t^+) &= \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\ &\leq \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} = V(t^+). \end{aligned}$$

Analog können wir $V_{GF}^{opt}(t^+)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} V_{GF}^{opt}(t^+) &= \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\ &\geq \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} = 0. \end{aligned}$$

(v) Für den Beweis der Optimalität betrachten wir die Zielfunktion $-V_{DK}(t^+)$ und zeigen, dass $V_{DK}^{opt}(t^+) = \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8}$ der maximale Zielfunktionswert ist. Dies weisen wir nach, indem wir via Widerspruchsbeweis zeigen, dass die Ungleichung (3.7) eine aktive Nebenbedingung ist.

Wir subtrahieren ein beliebiges $\epsilon > 0$ von $V_{DK}^{opt}(t^+)$ und erhalten ein alternatives $V_{DK}^*(t^+)$:

$$\begin{aligned} V_{DK}^*(t^+) &= V_{DK}^{opt}(t^+) - \epsilon \\ &= \frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} - \epsilon. \end{aligned}$$

Daraus und aus (3.13) resultiert

$$\begin{aligned} V_{GF}^*(t^+) &= V_{GF}^{opt}(t^+) + \epsilon \\ &= \frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} + \epsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun unter Verwendung von (3.11), dass $V_{GF}^*(t^+)$ die Garantienebenbedingung verletzt:

$$\begin{aligned} V((t+1)^-) &\geq \min\{V((t+1)^-)\} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} 0,8 \cdot V_{GF}^*(t^+) + 1,0225^{(1/12)} \cdot V_{DK}^*(t^+) \\ &= 0,8 \cdot \left[\frac{I(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} + \epsilon \right] \\ &\quad + 1,0225^{(1/12)} \cdot \left[\frac{I(t+1) - 0,8 \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} - \epsilon \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0,8 \cdot 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+) - 0,8 \cdot I(t+1)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &+ \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot I(t+1) - 0,8 \cdot 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &+ (0,8 - 1,0225^{(1/12)}) \cdot \epsilon \\
 &= \frac{0,8 \cdot 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+) - 0,8 \cdot I(t+1)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &+ \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot I(t+1) - 0,8 \cdot 1,0225^{(1/12)} \cdot V(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &+ (0,8 - 1,0225^{(1/12)}) \cdot \epsilon \\
 &= \frac{1,0225^{(1/12)} \cdot I(t+1) - 0,8 \cdot I(t+1)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8} \\
 &+ (0,8 - 1,0225^{(1/12)}) \cdot \epsilon \\
 &= I(t+1) + (0,8 - 1,0225^{(1/12)}) \cdot \epsilon \underbrace{<}_{\epsilon > 0} I(t+1) \quad \zeta.
 \end{aligned}$$

Es handelt sich also bei (3.7) um eine aktive Nebenbedingung.

$\Rightarrow V_{DK}^{opt}(t^+)$ ist bereits minimal.

q.e.d.

q.e.d.

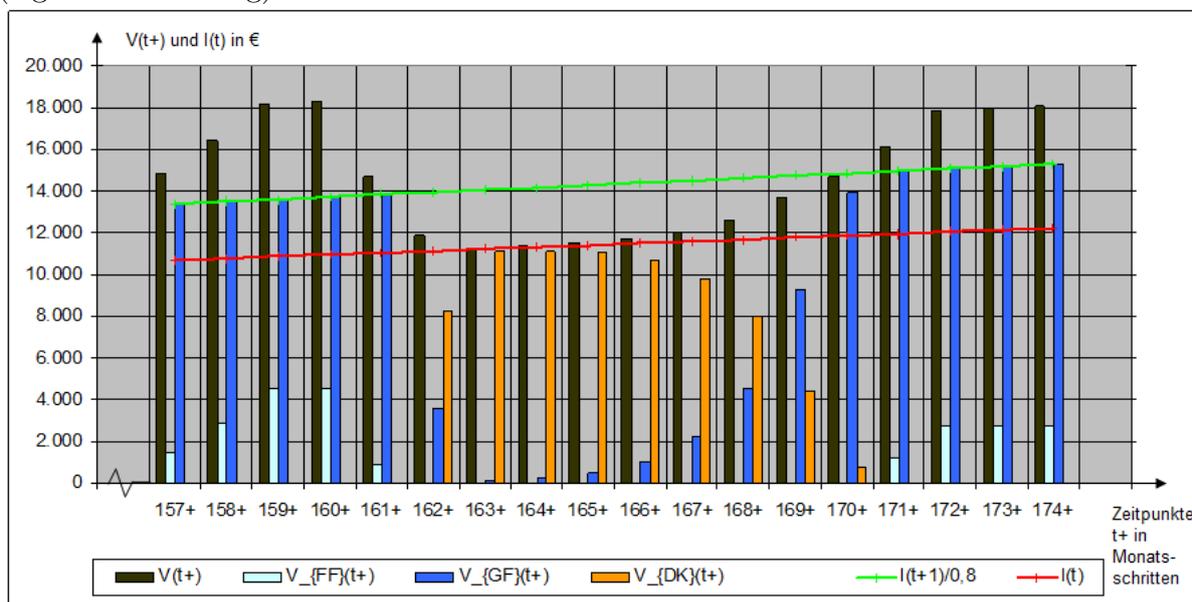
Bemerkung. Da es sich also tatsächlich um die optimalen Aufteilungen in Def. 3.1 handelt, können die hochgestellten „*opt*“ weggelassen werden. Die Bezeichnungen $V_{FF}(t^+)$, $V_{GF}(t^+)$ und $V_{DK}(t^+)$ werden von nun an gleichbedeutend mit den in Def. 3.1 erklärten Aufteilungen verwendet.

3.4 Ein graphisches Beispiel zur Umschichtung

Folgende Grafik zeigt einen beispielhaften Verlauf eines Kundenguthabens unter den Annahmen:

- (i) Vertragsdauer $n = 30$ Jahre
- (ii) Eintrittsalter $x = 37$ Jahre
- (iii) Restlaufzeit $w(156) = 204$ Monate = 17 Jahre
- (iv) konstanter monatlicher Beitrag $B(t) = 100$ Euro
- (v) Vernachlässigung der Kosten
- (vi) Mindestgarantiezins von 2,25 % p. a.
- (vii) sehr volatile Fondskurse (um Umschichtungen hervor zu heben)
- (viii) nur Umschichtungen in den kommenden 18 Monaten, d. h. $t = 157, \dots, 174$, werden betrachtet .

Abbildung 3.1: Beispielhafter 18-monatiger Verlauf der Verteilung eines Kundenguthabens (eigene Darstellung)



Neben dem Kundenguthaben V in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t^+ sind dessen Aufteilungen auf die drei Töpfe FF, GF und DK abgebildet. Zu jedem Zeitpunkt $t^+ = 157^+, \dots, 174^+$, also direkt nach einer Umschichtung, ergeben die kumulierten Säulen der drei Töpfe gerade wieder $V(t^+)$.

Außerdem ist die DK-Sicherungslinie dargestellt. Sie folgt der Funktion

$$I_{DK}(t) = I(t). \quad (3.14)$$

Das garantierte monatliche Verlustminimum von 20% des Garantiefonds und der Umschichtungsalgorithmus stellen stets sicher, dass sich das Vermögen $V(t)$ oberhalb dieser Sicherungslinie befindet.

Die GF-Sicherungslinie wird hingegen durch die Funktion

$$I_{GF}(t) = \frac{I(t+1)}{0,8} \quad (3.15)$$

beschrieben. Diese Linie gibt das momentan maximal benötigte Garantiefonds-Volumen an. Hinzu kommt, dass sie in Kombination mit $V(t^+)$ ein Indikator dafür ist, ob sich Guthaben im Deckungskapital oder in den Freien Fonds befindet. Damit kann also die Indikatorfunktion aus dem Umschichtungsalgorithmus (Def. 3.1) bzw. die zentrale Fallunterscheidung (3.12) im Beweis auch geometrisch interpretiert werden.

Kapitel 4

Solvency II

Nachdem im vorigen Kapitel die Funktionsweise der dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkte erläutert wurde, können wir nun den Fokus auf die daraus resultierenden Risiken richten. Zunächst wird der rechtliche Rahmen (Solvency II) etwas umfänglicher als in der Einleitung beleuchtet. Im Anschluss daran können die entstehenden Risikoarten identifiziert werden.

4.1 Solvency II - die Grundstruktur

Solvency II als ein auf drei Säulen beruhendes Gesamtkonzept für die Sicherheitskapitalausstattung und die Aufsicht umfasst u. a. folgende Punkte (Säule I):

- Im Hinblick auf ihre intern und extern begründete Risikolage sollen Versicherungsunternehmen mit einer möglichst geringen Ruinwahrscheinlichkeit tätig sein. Solvency II erfasst daher Einzelrisiken und aggregiert sie zu einem Gesamtrisiko (vgl. Farny [11, S. 842]). Soweit es um die Betrachtung der Eigenkapitalausstattung geht, ist die Idee mit dem sogenannten Risk Based Capital Modell (RBC) vergleichbar.
- Solvency II hat (auch) das Ziel, Versicherungsunternehmen anzuregen, eigene Risikomanagementsysteme (sogenannte interne Modelle) zu entwickeln.

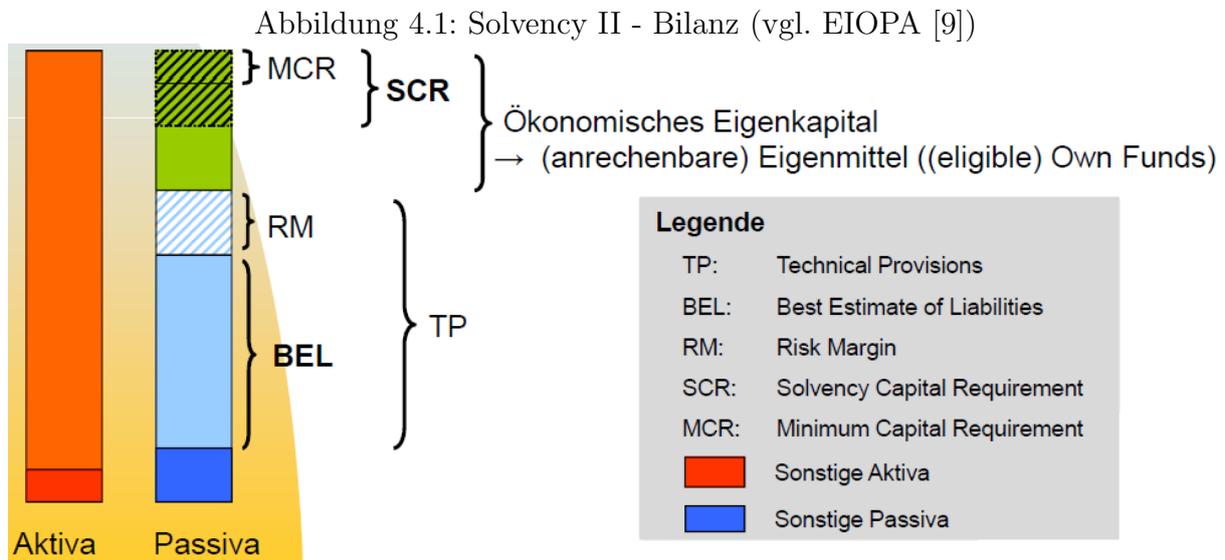
Zur Ermittlung der erforderlichen Eigenkapitalausstattung ist ein Verfahren mit zwei Stufen vorgesehen.

- (i) Stufe 1: Ein Mindestkapital (Minimum Capital Requirement - MCR) ähnlich der Solvabilitätsspanne nach dem Vorbild des Vorgängers Solvency I
- (ii) Stufe 2: Das höhere Zielkapital bzw. Solvenzkapital (Solvency Capital Requirement - SCR).

Diesen Kapitalanforderungen werden die sogenannten anrechnungsfähigen Eigenmittel (Available Solvency Margin - ASM) gegenübergestellt.

Die Anforderungen an Solvency II sind erfüllt, wenn ASM das geforderte bzw. nötige Solvenzkapital SCR übersteigt. Liegt ASM über MCR aber unter SCR werden Maßnahmen

der Aufsichtsbehörde ausgelöst. Unterschreitet ASM (auch) MCR, muss ein Restrukturierungsplan vorgelegt werden, in dem die Wiederherstellung der (Mindest-) Kapitalanforderung beschrieben wird. Wird die MCR-Schwelle nachhaltig unterschritten, kommt es zum Entzug der Erlaubnis des Geschäftsbetriebes durch die Aufsichtsbehörde (vgl. Farny [11, S.844 f]).

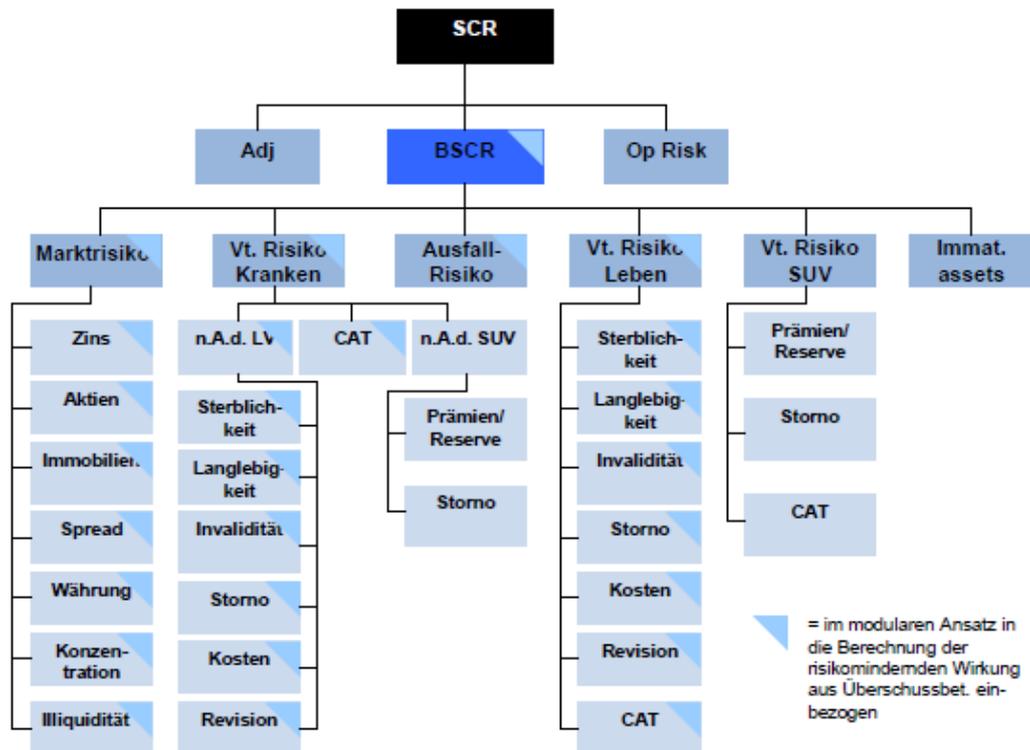


Diese Graphik verschafft einen Überblick über die Solvency II - Bilanz. Dabei ist der Soll-Fall abgebildet, d. h. das ökonomische Eigenkapital (ASM) ist größer als MCR und auch größer als SCR.

Die Sollgröße SCR kann entweder im Rahmen eines sogenannten Standardmodells oder unter Verwendung eines internen Modells berechnet werden.

„Der Solvenzkapitalbedarf (SCR) als Ausdruck der Soll-Solvabilität soll in beiden Varianten die individuelle Gesamtrisikolage des einzelnen Versicherungsunternehmens berücksichtigen. Zu diesem Zweck werden zunächst einzelne Risikoarten und deren Solvenzkapitalbedarf ermittelt, wobei die Erfassungsmodelle, die Gliederung der Einzelrisiken, das verwendete Risikomaß und ein Konfidenzniveau festgelegt werden; letzteres gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit (z. B. 99,5 %) die Solvabilitätsmittel nach einem Jahr noch positiv sind, ihr Komplementärwert (z. B. 0,5 %) ist somit Ausdruck einer einjährigen Verlustwahrscheinlichkeit. Im nächsten Schritt werden die Einzelrisiken bzw. deren Solvenzbedarf unter Beachtung von Korrelationen zur Berücksichtigung interner Risikoausgleichseffekte zum Gesamtrisiko des Versicherungsunternehmens bzw. zum Gesamtsolvvenzkapitalbedarf aggregiert“ (vgl. Farny [11, S. 840 f]).

Abbildung 4.2: SCR-Modulstruktur (vgl. EIOPA [9, S. 90])



Die angesprochenen Risikoarten werden im Standardmodell durch Module abgegrenzt, deren Aufteilung hier ersichtlich ist.

Die Solvenzkapitalanforderungen können auch nach einem internen Modell berechnet werden. Dieses muss der Aufsicht zur Überprüfung und Zertifizierung vorgelegt werden. Die Zertifizierung hat zur Voraussetzung, dass das interne Modell das Risikoprofil des Unternehmens besser als das Standardmodell abbildet. Zudem sind die Standards betreffend der Kalibrierung, Validierung und Dokumentation der statistischen Methoden einzuhalten. Motivation zur Verwendung eines internen Modells ist auch, dass durch die passgenauere Risikoabbildung der Eigenkapitalbedarf geringer ist als bei einem Standardmodell mit seiner „One-size-fits-all-Philosophie“.

Der errechnete Solvenzkapitalbedarf wird dann fortlaufend mit den verfügbaren Eigenmitteln (ASM) abgeglichen. In der zweiten Säule werden Governance-Prozesse definiert. Diese Säule umfasst insbesondere die aufsichtsbehördliche Prüfung interner Risikomodelle und schließt die Qualitätsprüfung des Risikomanagementsystems mit ein. Die dritte Säule sieht Offenlegungsanforderungen zur Schaffung von Markttransparenz und Marktdisziplin sowohl gegenüber der Aufsicht als auch gegenüber der Öffentlichkeit vor.

Der (Teil-) Prozess aus der ersten Säule umfasst auch Risiken, die aus Garantien und Optionsrechten entstehen. Als Beispiel kann hier die „Umschichtungsoption“ des Versicherungsnehmers im hier untersuchten Produkt dienen. Diese Option hängt, nicht wie im eigentlichen Sinne, von der Entscheidung des Kunden, sondern viel mehr von der

Kapitalmarktentwicklung ab. Aus Versicherungsunternehmenssicht sind die zukünftigen Zahlungsströme in beiden Fällen nicht deterministisch.

4.2 Stand der Diskussion und SCR-Modellierungsansätze

Es zeigt sich, dass noch keine dezidierten Vorgaben zur Berücksichtigung der Umschichtungsoption bei dynamischen Hybridprodukten im Rahmen der SCR-Berechnung durch das von EIOPA gegebene Standardmodell existieren. Auch von Seiten des Gesamtverbands der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) können dazu keine Angaben gemacht werden.

Ruß und Reuß [30] schlagen in einem ersten Schritt eine Modellierung als statisches Hybridprodukt vor. Kombiniert wird dies mit einem Zerlegungsansatz, der aktuelles Guthaben und zukünftige Beiträge aufteilt. Außerdem werden fondsgebundene und konventionelle Komponente separat betrachtet. Dieser Ansatz wird aber der Dynamik der Umschichtungen nicht gerecht und kann somit nicht als zufriedenstellende Lösung angesehen werden.

Des Weiteren postulierte Menzel [26], dass der konventionelle Lebensversicherungsbestand dem Bestand der dynamischen Drei-Topf-Hybride die vom Wert her nicht vernachlässigbar kleine Option verkauft, die Rechnungszinsgarantie zu nutzen. Er modelliert diese Option mittels einer Receiver-Swaption. Laut Hull [21, S. 790] bezeichnet Swaption die Option in einen Zins-Swap mit spezifizierter Zinsrate einzutreten. Als Zins-Swap wird wiederum der Tausch einer fixierten Zinsrate zu einem bestimmten Nennwert für eine flexible Zinsrate für den gleichen Nennwert verstanden (vgl. Hull [21, S. 783]). Eine Swaption ist also eine Kombination aus Call-Option und Swap, für die eine Prämie gezahlt werden muss. Daraus berechnet Menzel exemplarisch dessen Preis. Die Grundaussage des Artikels bleibt allerdings, dass die Wechselwirkungen der Bestände offene Fragen bzgl. deren Handhabung aufwerfen.

Auf diesen Artikel hin erwiderte Siebert [32], dass die Modellierung mit Receiver Swaptions den Optionspreis überbewerte und zudem auch die „ähnliche“ Option, die vom konventionellen Bestand gekauft wird, vernachlässige.

Diese Meinung vertreten auch Ruß und Reuß [30, S. 18], wobei sie es auch anhand von Zahlenbeispielen belegen. Deren Modellannahme ist ein separates Sicherungsvermögen für dynamische Hybridprodukte, die regelbasierte Ausübung der Option und die Bewertung auf Basis von Monte Carlo Simulationen.

Siebert [32] schreibt zu einer Separierung allerdings, dass dies „auch nur die Kosten der Absicherung für beide Teilbestände erhöhen würde“ und dass sie „aufsichtsrechtlich sogar bedenklich sein könnte, da hierdurch das Neugeschäft unzulässigerweise von den Garantien des Bestandes befreit würde“. Das Umschichtungsrisiko selbst definiert Siebert zwar nicht konkret, bescheinigt den impliziten Optionen der Versicherungsnehmer aber einen sehr komplexen und schwierig zu bewertenden Charakter. Insbesondere geht er auf Be-

grenzung des Umschichtungsvolumens ein, die zu einer günstigen Verringerung der dezierten Prozyklizität der Anlagestrategie und somit zu einer signifikanten Reduktion des Umschichtungsrisikos führt. Details des angewandten Modells wurden allerdings nicht veröffentlicht.

Kochanski und Karnarski [23] veröffentlichten „Solvency capital requirement for hybrid products“. Dieses Paper beschäftigt sich in der Wissenschaft erstmalig ausführlich mit dem Thema, inwiefern SCR bei dem hier betrachteten Produkt berechnet werden könnte. Insofern orientiert es sich an den noch unklaren Vorgaben von Solvency II und versucht diese Lücke zu schließen. Im Gegensatz dazu fokussiert die Diplomarbeit mehr einen Ansatz, der risikoreduzierende Managementregeln entwickelt. Diese Idee wird auch im Fazit von Kochanski und Karnarski [23] noch aufgegriffen, womit diese Diplomarbeit eine gute Ergänzung dazu darstellen kann.

4.3 Risikoidentifikation beim dynamischen Hybridprodukt im Rahmen von Solvency II

In diesem Kapitel wird der erste Schritt einer Risikobewertung gemacht - die Risikoidentifikation. Ein Risiko kann dadurch entstehen, dass eine Option bei der Kalkulation der Prämie nicht beachtet und/oder angemessen eingepreist wird (vgl. Gatzert und Schmeiser [15, S. 2]). „Dies wurde häufig in der Vergangenheit vernachlässigt, insbesondere weil eine Messung bzw. Bewertung mit traditionellen aktuariellen Methoden nicht möglich war“ (vgl. Babbel und Santomero [2, S.242]). Insofern sollte die Bewertung der Umschichtungsoption ein Ansatzpunkt im Risikomanagement eines Versicherungsunternehmens sein. Neben den Optionen müssen auch die durch das Produkt gegebenen Garantien bepreist werden.

Durch das Anbieten eines dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts sieht sich ein Versicherungsunternehmen folgenden wesentlichen Risiken ausgesetzt: Versicherungstechnische Risiken (z. B. Storno-, Sterblichkeits- und Langlebighkeitsrisiko des Versicherungsnehmers), Ausfallrisiko (z. B. einer Bank oder Rückversicherung) und Marktrisiken (hier insbesondere Aktien-, Umschichtungs-, Liquiditäts- und Zinsrisiko), die im Nachfolgenden kurz dargelegt werden.

4.3.1 Versicherungstechnische Risiken

Als Stornorisiko wird die Unsicherheit einer möglichen vorzeitigen Kündigung des Vertrages durch den Versicherungsnehmer bezeichnet.

Unter dem Sterblichkeitsrisiko wird bei dem hier untersuchten Produkt die Unsicherheit der möglichen vorzeitigen Auszahlung der derzeitigen Garantie aufgrund von Tod des Versicherungsnehmers verstanden. Im Gegensatz zu einigen der Marktrisiken kann

das Sterblichkeitsrisiko aber im Kollektiv ausgeglichen werden, worauf im Kapitel 5.3.3 ausführlich eingegangen wird.

Diese beiden Risiken sind bei dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkten im Vergleich zu klassischen Lebensversicherungsprodukten geringer, da das Kundenkapital sich zum Zeitpunkt eines vorzeitigen Vertragsendes (aufgrund von Tod oder Storno) nicht notwendigerweise ausschließlich im Deckungskapitaltopf befinden muss.

Das Langlebigkeitsrisiko ist das Risiko, dass die in der Beitragskalkulation unterstellten Überlebenswahrscheinlichkeiten unter den Werten der eingetretenen relativen Überlebenshäufigkeiten liegen. Dadurch muss der Versicherer länger als kalkuliert Renten auszahlen.

Die Quantifizierung dieser drei genannten versicherungstechnischen Risiken sind für die Lebensversicherungsbranche übliche Probleme, wofür in der Wissenschaft bereits aufwendige Modelle entwickelt wurden. Die SCR-Berechnungen für diese Module unterscheiden sich beim hier betrachteten Produkt auch nicht grundlegend von den klassischen Lebensversicherungen. Insofern sei hier auf die Technical Specifications von EIOPA [9] verwiesen. Wir konzentrieren uns daher mehr auf das Problem, wie die Marktrisiken bei dynamischen Hybrid-Produkten bewertet werden können.

4.3.2 Ausfallrisiko der Bank

Zunächst ist auch das Ausfallrisiko der Bank, die die 20 %-Verlustschanke garantiert (siehe Kapitel 3), von Interesse. „Ausfallrisiko bedeutet die Gefahr eines Verlustes, weil Gläubiger teilweise oder vollständig ihren Zahlungen nicht nachkommen oder weil Sachwerte und Wertpapiere an Wert verlieren oder wertlos werden“ (vgl. Gabler-Online [13]). Bei einer Insolvenz der Bank würde der Verlust, der über die Schwelle von 20 % hinaus geht, auch noch beim Kunden bleiben. Infolgedessen besteht für das Versicherungsunternehmen zwar kein finanzielles, wohl aber ein Reputationsrisiko. Dieses kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Für die Bewertung des Ausfallrisikos der Bank können Ratings von z. B. Standard & Poor's herangezogen werden. In welchem Maße dann daraus ein Reputationsrisiko entsteht, lässt sich nur schwer modellieren, da es vom Kundenverhalten abhängt. Diese beiden Risiken werden daher für die Risikoquantifizierung später vernachlässigt um die anderen mathematisch etwas leichter handhabbaren Risiken zu fokussieren.

4.3.3 Marktrisiko im Allgemeinen

Das Marktrisiko entsteht „durch mögliche Schwankungen der Marktpreise für Vermögenswerte (besonders Kapitalanlagen), Verbindlichkeiten und Finanzinstrumente“ (vgl. Farny [11, S. 557]). Es ist bei Solvency II durch ein eigenes Modul adressiert. Die große Bedeutung dieser Risikokategorie ist nicht zuletzt auf die Finanzkrise zurückzuführen.

Den Ergebnissen der Quantitative Impact Studies 5 (QIS 5) zufolge rühren bei Lebensversicherungsunternehmen deutlich mehr als 80 % des benötigten Solvenzkapitals vom Marktrisiko (vgl. EIOPA [9]). Dieses Modul wird daher nun ausführlicher beschrieben. Durch die Dynamik des dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts ist der Stellenwert des Anteils dieses Risikoteilbereichs deutlich höher zu bewerten als bei anderen Lebensversicherungsprodukten. Dadurch dass die einzelnen Kundenvermögen eines dynamischen Dreitopf-Hybrid-Bestands von denselben Garantiefonds abhängen, hat das Marktrisiko einen „high impact - low probability“ - Charakter.

Das Marktrisiko beinhaltet zwar auch Teilbereiche wie Immobilien-, Spread-, Währungs- und Konzentrationsrisiko, die im Allgemeinen bei den Kapitalanlagen des Versicherers eine Rolle spielen. Jedoch haben sie bei dem hier betrachteten Produkt keine nennenswerten Wechselwirkungen mit anderen hier im Kapitel 4.3 aufgeführten Risiken oder dem Umschichtungsalgorithmus. Wir konzentrieren uns daher auf die wesentlichen, teils miteinander verwobenen Risiken des dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkts. Darunter fällt z. B. das Aktienrisiko.

4.3.4 Aktienrisiko

Als Aktienrisiko werden mögliche Kursschwankungen bezeichnet, die den Wert der Kapitalanlagen mindern können.

Das Versicherungsunternehmen muss bei den dynamischen Drei-Topf-Hybriden für das sich im Deckungskapitaltopf befindende Kundenvermögen mindestens den Garantiezins erwirtschaften. Infolgedessen müssen die Prämien des hier untersuchten Tarifs angelegt werden, woraufhin sich das Volumen der Aktiva erhöht. Da die Aktien im Normalfall nur ein geringer Anteil der Aktiva sind, ist das Aktienrisiko aktivseitig überschaubar.

Viel entscheidender bei dem hier betrachteten Produkt ist aber, dass sich das Aktienrisiko auch auf die Passivseite auswirkt. Durch Kursschwankungen der Fonds kommt es zu Umschichtungen, die wiederum ein Risiko darstellen können.

Laut Ruß und Reuß [30, S. 26] ist noch nicht klar, inwiefern die Kombination von Aktienrisiko und Umschichtungsrisiko bei der Berechnung der SCR berücksichtigt wird.

4.3.5 Umschichtungsrisiko

Anders als bei klassischen oder rein fondsgebundenen Lebensversicherungen existiert neben den schon genannten Risikoarten bei dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkten auch das sogenannte Umschichtungsrisiko. Darunter soll zunächst nur das Risiko verstanden werden, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt sehr viel Kundenvermögen umgeschichtet wird.

Zum einen kann es durch Verschlechterung der Kapitalmarktsituation zu einer Umschichtung in Richtung konventionellem Deckungskapitaltopf kommen. Hierbei gilt natürlich wie schon im vorigen Kapitel ausführlich beschrieben: je gravierender der Verlust des

Fondswerts desto stärker der Grad der Umschichtung. Aus Sicht des Versicherungsunternehmens bedeutet das, dass genau dann zusätzliches Kapital zur Verfügung steht, wenn es sich gerade nicht anbietet in den Markt zu investieren. Dieses Kapital sollte aber derart angelegt werden, dass mindestens der Garantiezins erwirtschaftet wird. Die Situation ist genau dann problematisch, wenn der Zins am Kapitalmarkt unterhalb der Garantieverzinsung liegt. Eine wichtige Frage bei der Neuanlage ist auch, mit welcher Duration dies geschehen soll. Die auf das Konzept von Frederic Macauley zurückgehende absolute Duration D beschreibt die mittlere Laufzeit eines Wertpapiers.

„Die einfachste Kennzahl eines Wertpapiers, dessen Wert sich aus seinen zukünftigen Cashflows ergibt ist seine mittlere Laufzeit. Zu dem Mittelwert tragen die Zeiten bis zur Fälligkeit jedes einzelnen Cashflows mit bestimmten Gewichten bei. Das Gewicht einer Laufzeit ist gerade der Anteil ihres Cashflows am Barwert des Papiers, also der Barwert des Cashflows geteilt durch den Barwert des gesamten Papiers.“ (vgl. Deutsch [7, S. 70]). Die absolute Duration D ergibt sich also in Abhängigkeit vom Zins r als

$$D(r) = D_{mac}(r) = \frac{\sum_{t=1}^T t \cdot CF_t \cdot (1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^T CF_t \cdot (1+r)^{-t}}, \quad (4.1)$$

wobei t die Zeit in Jahren und $CF_t (> 0)$ die Cashflows der Aktiva in Abhängigkeit vom Jahr t angibt. Die absolute Duration ist somit ein approximatives Maß für die absolute Barwertänderung bei absoluter Zinsänderung.

Um praxisrelevantere Aussagen mit diesem Konzept machen zu können, wird häufig die modifizierte Duration herangezogen. Sie gibt die relative Barwertänderung bei absoluter Zinsänderung an und wird berechnet durch

$$D_{mod} = \frac{D_{mac}}{1+r}. \quad (4.2)$$

Es besteht also ein starker Zusammenhang zwischen Umschichtungs- und Zinsänderungsrisiko (Kapitel 4.3.8).

Zum anderen ist es natürlich auch möglich, dass ein großer Kurssprung dazu führt, dass sehr viel Guthaben aus dynamischen Drei-Topf-Hybriden vom Deckungskapital in Fonds verschoben wird. Infolgedessen steht dem Versicherungsunternehmen aber deutlich weniger Kapital zur Verfügung, woraus wiederum Liquiditätsrisiken (Kapitel 4.3.6) entstehen können.

4.3.6 Liquiditätsrisiko

Ein Liquiditätsrisiko kann entstehen, wenn unerwartete Zahlungsverpflichtungen eintreten (vgl. Farny [11, S. 60]). Problematisch wird es insbesondere dann, wenn eine Kapitalanlage zu genau diesem Zeitpunkt nicht oder nur mit erheblichen Wertabschlägen veräußerbar ist. Das Liquiditätsrisiko wird in der Praxis häufig unterschätzt und damit unterbewertet, da eine eingeschränkte Liquidität bei vielen Kapitalanlagen erst in Marktkrisen sichtbar wird (vgl. Gabler [14, S. 401]).

Gerade bei dem hier betrachteten Produkt sollte das Liquiditätsrisiko nicht unterschätzt werden. Es liegt insbesondere dann vor, wenn in kurzer Zeit viel Deckungskapital aufgelöst werden muss, um das Kundenguthaben in Fonds investieren zu können. Dies geschieht genau dann, wenn sich die einzelnen Kundenvermögen innerhalb eines Monats exorbitant erhöhen, was nur durch eine stark positive Entwicklung der Fondskurse induziert werden kann.

Im Zuge einer Finanzkrise kann es besonders zu Liquiditätsproblemen kommen. Beispielsweise dann, wenn ein Versicherer Staatsanleihen veräußern will, sich aber aufgrund der allgemeinen Geldknappheit kein Käufer findet. Bei Betrachtung der dynamischen Drei-Topf-Hybride muss ein Versicherungsunternehmen bei der Anlage von Kapital, welches gerade aus dem Garantiefonds in das Deckungskapital geflossen ist, nicht nur auf dessen Rendite, sondern auch auf dessen Liquidität bzw. Duration achten.

4.3.7 Zinsgarantierisiko

Das Zinsgarantierisiko bezeichnet das Risiko eines Versicherungsunternehmens, den bei der Prämienkalkulation unterstellten Rechnungszins nicht zu erwirtschaften. Dies Risiko existiert, weil sich die Höhe des Kapitalmarktzinses ändern kann.

4.3.8 Zinsänderungsrisiko

Hierbei muss unterschieden werden zwischen einem Zinsanstieg und einem Zinsrückgang. Ersterer ist für einen Lebensversicherer von Bedeutung aufgrund des einhergehenden erhöhten Stornorisikos. Im Besonderen geht bei dynamischen Drei-Topf-Hybriden eine Zinserhöhung aber meist mit mittelfristig steigenden Aktienindizes einher, sodass auch die Kurse der Fonds der Kunden tendenziell ansteigen. Dadurch wird der Anreiz eines Kunden, seinen Vertrag zu kündigen aber wieder verringert. Ein Zinsrückgang beschreibt hingegen die mögliche Situation, dass die Höhe des Kapitalmarktzinses sinkt und infolgedessen die Aktiva des Versicherers eine geringere Rendite erzielen. Das Zinsrückgangsrisiko ist mit 48% Bestandteil des Marktrisikos nach Angaben der QIS 5 (vgl. EIOPA [9]) der mit Abstand größte. Es ist für dynamische Drei-Topf-Hybride besonders relevant, da das Versicherungsunternehmen aufgrund der Umschichtungen häufiger Kapital neu anlegen oder liquide machen muss. Es hängt also auch stark mit dem Umschichtungsrisiko zusammen. Das Zinsänderungsrisiko spielt insbesondere beim Asset-Liability-Matching (ALM) eine entscheidende Rolle.

Mit dem Begriff ALM werden laut Farny [11, S. 880ff] in Theorie und Praxis nach wie vor verschiedene Sachverhalten verbunden. Die wichtigsten sind folgende:

- (i) Asset-Liability-Management als integrierte, gesamtunternehmerische Finanzierungs- politik für alle Arten von Mittelherkünften (Kapital, „Liabilities“) bzw. bzw. Mit- telverwendungen (Vermögen, „Assets“), insbesondere bei Lebensversicherungen;

- (ii) versicherungstechnisches Asset-Liability-Management als integrierte Finanzierungs- politik für die versicherungstechnischen Verpflichtungen und für die diesen entspre- chenden Kapitalanlagen oder als integrierte Jahresabschlusspolitik für die versiche- rungstechnischen Passiva und die Kapitalanlagen in der Bilanz und die daraus flie- ßenden Erträge und Aufwendungen;
- (iii) portfolioorientiertes Asset-Liability-Management als integrierte Finanzierungs- politik für den Versicherungsbestand und den Kapitalanlagebestand.

Im Bereich der Lebensversicherung beeinflusst die Produktgestaltung (z. B. über den Ga- rantiezins) entsprechende Anforderungen an das Rendite-/Risikoprofil der Assets. In ei- nem fortdauernden Prozess werden gleichzeitig Anlagen und Verbindlichkeiten auf ihre Renditen bzw. Zinsen und ihre zeitliche Staffelung untersucht. Daraus wird die Strategie entwickelt, mit der bei vorgegebenen Risikogrenzen die finanziellen Ziele erreicht werden (vgl. Gehrig und Zimmermann [16]). Genauer gesagt werden dabei die Durationen der Anlagen betrachtet.

4.3.9 Fazit der Risikoidentifikation und Folgen daraus

Das Umschichtungsrisiko hängt zum einen sehr stark vom Aktienrisiko ab und anderer- seits kann es auch nur dann wirklich als Risiko bezeichnet werden, wenn daraus ein Zins- oder Liquiditätsrisiko entsteht. Dadurch dass das Umschichtungsrisiko kaum von den an- deren drei genannten Risiken zu separieren ist, erweist sich dessen exklusive Bewertung als schwierig. Dass bisher keine Modelle hierfür entwickelt worden sind, liegt vermutlich auch daran, dass die Bewertung aufgrund der Nichtlinearitäten und Pfadabhängigkeiten nicht gerade einfach ist. Die daraus resultierenden Modellrisiken sollten also auch nicht unterschätzt werden.

Aus diesen Gründen wird nun ein Modell entwickelt, das in der Begrifflichkeit von Sol- vency II ein partielles internes Modell ist. Hierfür betrachten wir die Verbindlichkeiten des Versicherungsunternehmens und richten uns nach dem Artikel 75.2 des Solvency II Level-1-Textes (vgl. European Union [10, S. 46]): „The best estimate shall be equal to the probability-weighted average of future cashflows, taking account of the time value of money (expected present value of future cashflows), using the relevant risk-free interest rate term structure. The calculation of the best estimate shall be based upon current and credible information and realistic assumptions and be performed using adequate actuarial methods and statistical techniques.“

Wir betrachten also die zukünftigen Cashflows, die durch das Produkt induziert werden und bewerten das darin enthaltene Risiko.

Kapitel 5

Risikomodellierung

Nachdem die Problematik im Zusammenhang mit der Risikoquantifizierung (Kapitel 4.2) erörtert wurde und einige mathematische Grundlagen bereit gestellt wurden, wird nun der Fokus auf die Erstellung eines Risikomodells gerichtet.

Die Idee des Risikomodells ist es, mit Hilfe von modellierten Aktienkursen Umschichtungen zu simulieren, die zusammen mit den Prämien und Leistungen einen Cashflow generieren. Die Volatilität dieses Cashflows stellt - wie in Kapitel 4.3 schon erläutert wurde - ein Risiko für das Versicherungsunternehmen dar. Um dieses quantifizieren zu können, werden die simulierten Cashflows gehedgt. Dadurch kann das Versicherungsunternehmen Risiken, die durch die dynamische Drei-Topf-Hybrid-Produkte induziert wurden, verringern und sich teilweise dagegen absichern. Teilweise, weil a priori nicht klar ist, ob eine absolute Absicherung („perfekter Hedge“) gegen das Umschichtungsrisiko und den damit verbundenen Risiken existiert. Falls nicht, wird das Hedging dann so konzipiert werden, dass es SCR minimiert. Für das residuale Risiko muss dann aber immer noch SCR berechnet werden - beispielsweise mit dem Modell von Kochanski und Karnarski [23] - auch wenn dieses Residuum-SCR signifikant geringer ausfällt als das SCR ohne Hedging. Der in Kapitel 4 angesprochene Preis der Garantien und Optionen entspricht dann den Kosten des Hedgings plus den Kapitalkosten für das Residuum-SCR. Dadurch dass ein Residuum-SCR verbleibt, sind die Kosten des Hedgings somit eine Maßzahl, über die der marktkonsistente Preis des Risikos „nur“ angenähert werden kann.

Für diesen Ansatz sind außerdem zwei wichtige Dinge zu beachten:

- (i) Falls die Absicherung in der Praxis nicht durchgeführt wird, stellt sich erst recht die Frage wie hoch SCR dann anzusetzen ist.
- (ii) Die Absicherung beruht auf der Annahme, dass Finanzderivate zu jedem Zeitpunkt handelbar sind, was in der Realität - insbesondere in Finanzmarktkrisen - nicht der Fall sein muss.

Auch wenn dieser Ansatz mit Nachteilen verbunden ist, so sind andere Ansätze (außer der von Kochanski und Karnarski [23]) ob der hohen Komplexität des betrachteten Produkts zu oberflächlich. Beispielsweise wäre die Berechnung des Umschichtungsvolumen zwar ein logischer erster Schritt. Die Höhe des Umschichtungsvolumen korreliert aber nur schwach mit der Höhe des echten Schadens bzw. Verlusts, da nicht jede Umschichtung

per se von Nachteil für den Versicherer sein muss. Eine Verknüpfung mit dem Wert der gegebenen Zinsgarantie und somit die Betrachtung der Höhe der Kapitalanlagezinsen ist hierbei ein weiterer essentieller Punkt, der unbeachtet bleibt.

Um überhaupt einzelvertragliche Umschichtungen simulieren zu können, benötigen wir zunächst ein Kapitalmarktmodell, das im folgenden Unterkapitel erläutert wird. Darauf aufbauend werden in Kapitel 5.2 die drei Töpfe des Produkts in dieses Modell eingebettet. Im Anschluss daran können die aus dem dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkt resultierenden Cashflows modelliert werden.

5.1 Kapitalmarktmodell

Für die Kapitalmarktmodellierung wird das auf die Namensgeber Cox et al. [6] zurückgehende CRR-Modell verwandt. Dieses diskrete Modell besteht aus einer Aktienanlage und einer sicheren Anlage.

Auch wenn dies eine Vereinfachung der Realität darstellt, hat es zahlreiche Vorteile: Es kann so kalibriert werden, dass es keine risikolosen Gewinnmöglichkeiten (Arbitrage - mehr dazu später) zulässt. Darauf aufbauend können dann Optionspreise relativ einfach berechnet werden. Dies wird neben der Modellierung der drei Töpfe auch beim Hedging von Vorteil sein.

5.1.1 Modellierung von Aktienkursen

Als erstes wird in das Modell die Möglichkeit einer Aktienanlage eingeführt. Aktienkurse werden üblicherweise mit Hilfe von stochastischen Prozessen modelliert.

Definition 5.1 (Stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess X ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathbb{K}}$ mit $\mathbb{K} \subset [0, \infty)$.*

Definition 5.2 (Wahrscheinlichkeitsraum). *Die Zufallsvariablen X_t sind im CRR-Modell auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=1, \dots, T}, (\mathcal{P}))$ definiert. Dabei ist $\Omega = \{u, d\}$ der Zustandsraum, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ für $t = 0, \dots, T$ die Filtration und*

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{ll} p, & \text{für } \frac{X_t}{X_{t-1}} = u \\ 1 - p & \text{für } \frac{X_t}{X_{t-1}} = d \end{array} \right\}$$

das Wahrscheinlichkeitsmaß für $t = 1, \dots, T$.

Das Ereignis „ d “ steht für „down“, also eine Abwärtsbewegung und „ u “ für „up“, also eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses. Infolgedessen gilt $u > 1$ und $d < 1$.

Definition 5.3 (Filtration). Die von X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=1,\dots,T}$ ist definiert durch eine aufsteigende Familie von Unter- σ -Algebren von \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t), \forall t = 0, \dots, T .$$

Anschaulich bedeutet das einerseits, dass \mathcal{F}_t die Information bis zum Zeitpunkt t ist. Zum anderen heißt das, dass alle Informationen über die (hier als zufällig angenommenen) Aktienkursbewegungen nur von X und nicht von externen Zufallsquellen kommen.

Definition 5.4 (Adaptiert). Ein stochastischer Prozess X heißt adaptiert bzgl. der Filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t = 0, \dots, T\}$, falls jede Zufallsvariable X_t bzgl. \mathcal{F}_t -messbar ist.

Der Prozess X ist also an \mathcal{F} adaptiert.

Im CRR-Modell ist $\mathbb{K} = \mathbb{N}$, d. h. X ist ein diskreter stochastischer Prozess. Genauer gesagt handelt es sich um einen geometrischen Binomialprozess, weshalb das CRR-Modell auch unter dem Namen Binomialmodell bekannt ist.

Definition 5.5 (Geometrischer Binomial-Prozess). $X = (X_t)_{t=1,\dots,T}$ heißt geometrischer Binomial-Prozess mit Parameter $p \in (0, 1)$, falls für alle $t = 1, \dots, T$ die relativen Zuwächse $R_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$, $R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{X_t}$, $R_{t+2} = \frac{X_{t+2}}{X_{t+1}}$, ... der Zufallsvariablen X_t unabhängig identisch verteilt und unabhängig vom konstanten Anfangswert X_0 sind.

Dieser Prozess hat dann die Form

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} \cdot R_t \\ &= X_0 \cdot \prod_{k=1}^t R_k, \\ &\forall t = 1, \dots, T . \end{aligned} \tag{5.1}$$

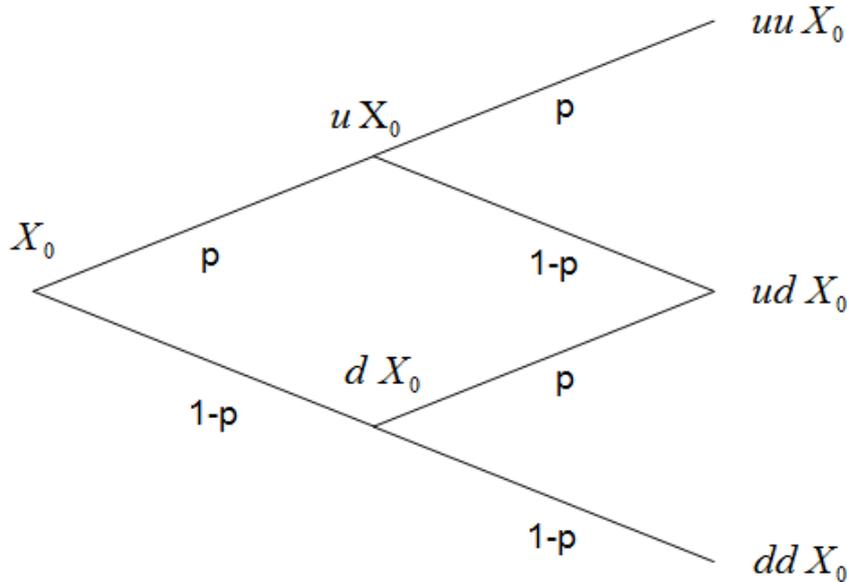
Darauf mit welcher Wahrscheinlichkeit „ u “ und „ d “ eintreten bzw. wie der Parameter p gewählt wird, wird später noch eingegangen.

Es wurde bisher nur angenommen, dass die Zufallsvariablen X_t einem Binomial-Prozess folgen. Damit der Baum nicht zu groß wird, wird außerdem gefordert, dass er rekombinierend ist, d. h. eine Aufwärtsbewegung, die auf eine Abwärtsbewegung folgt, erzeugt nach diesen zwei Perioden dieselbe Wertänderung wie eine Abwärtsbewegung, die auf eine Aufwärtsbewegung folgt. In Formeln ausgedrückt heißt das

$$X_0 \cdot u \cdot d = X_0 \cdot d \cdot u .$$

Durch diese Bedingung verringert sich die Anzahl der Knoten nach t Zeitschritten von 2^t auf $t + 1$, was aus numerischer Sicht deutlich attraktiver ist. Wie ein Baum mit zwei Zeitschritten aussieht, ist auf der folgenden Seite dargestellt.

Abbildung 5.1: Zweiperiodischer Binomialbaum (eigene Darstellung)



Der Baum beschreibt die möglichen Pfade der Aktienkursentwicklung zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ (von links nach rechts). An den Knoten des Baums sind die Aktienkurse erkennbar. An jeder Kante können die bedingten Wahrscheinlichkeiten abgelesen werden. Rekombinierend heißt hier, dass zum Aktienkurs „ $ud X_0$ “ zwei verschiedene Pfade führen.

5.1.2 Modellierung der sicheren Anlage

In unserem Kapitalmarktmodell soll es außerdem möglich sein, Geld risikolos zu einem konstanten Zinssatz r_{CRR} pro Zeiteinheit anlegen zu können. Es wird hier somit die Annahme einer flachen Zinsstrukturkurve gemacht. Da dies eine starke Vereinfachung darstellt, wäre an diesem Punkt als erstes anzusetzen, wenn das Modell realitätsnäher (und somit noch aufwendiger) werden soll. Dafür würde sich z. B. das Zinsmodell von Cox et al. [5] anbieten.

Diese Anlage wird hier nun aber durch ein Bankkontoprozess $S_t = \{S_t : t = 0, \dots, T\}$ modelliert, wobei S_t ein vorhersehbarer stochastischer Prozess mit $S_0 = 1$ ist.

$$S_t = (1 + r_{CRR}) \cdot S_{t-1} = (1 + r_{CRR})^t \cdot S_0. \tag{5.2}$$

Definition 5.6 (Vorhersehbar). *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=1, \dots, T}$ heißt vorhersehbar bzgl. $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t = 0, \dots, T\}$, falls jede Zufallsvariable X_t messbar bzgl. \mathcal{F}_{t-1} ist.*

Wir wissen sogar zum Zeitpunkt $t = 0$ wie groß der Zuwachs von S zum jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ sein wird. Ein vorhersehbarer Prozess ist immer adaptiert.

5.1.3 Grundlagen der Finanzmathematik

Ausgehend von der sicheren Anlage S kann nun der diskontierte Preisprozess definiert werden:

Definition 5.7 (Diskontierter Preisprozess). *Der diskontierte Preisprozess \tilde{X}_t ist definiert als*

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= \frac{X_t}{S_t} \\ &= X_0 \cdot \prod_{s=1}^t \frac{R_s}{1 + r_{CRR}} \\ &\quad \forall t = 0, \dots, T.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Anhand der zwei unterschiedlichen Anlagen X und S kann ein Investor verschiedene Handelsstrategien verfolgen.

Definition 5.8 (Handelsstrategie). *Eine Handelsstrategie ist hier definiert als ein zwei-dimensionaler Vektor von vorhersehbaren stochastischen Prozessen.*

$$h_t = (h_t^S; h_t^X),\tag{5.4}$$

Dabei beschreibt h_t die Position des Investors in jedem Wertpapier im Zeitintervall $(t-1, t]$, $t = 1, \dots, T$. Ferner steht h_t^X für die Anzahl der Aktien, und h_t^S für den Anteil der sicheren Anlage, die der Investor nach einer potentiellen Positionsänderung zur Zeit $t-1$, $t = 1, \dots, T$ besitzt. Das Paar $h_t = (h_t^S, h_t^X)$ heißt Portfolio in der Periode $(t-1, t]$.

Mit Hilfe dieser Handelsstrategie entsteht ein Wertprozess, der hier definiert ist als

Definition 5.9 (Wertprozess).

$$V_0^h = h_1^S + h_1^X \cdot X_0 \quad , t = 0\tag{5.5}$$

und

$$V_t^h = h_t^S \cdot S_t + h_t^X \cdot X_t \quad , \forall t = 1, \dots, T.\tag{5.6}$$

Darauf aufbauend ist der diskontierte Wertprozess $\tilde{V}_t^h = \{V_t^h : t = 0, \dots, T\}$ ein stochastischer Prozess, der definiert ist durch

Definition 5.10 (Diskontierter Wertprozess).

$$\tilde{V}_0^h = h_1^S + h_1^X \cdot \tilde{X}_0 \quad , t = 0\tag{5.7}$$

und

$$\tilde{V}_t^h = h_t^S + h_t^X \cdot \tilde{X}_t \quad , \forall t = 1, \dots, T.\tag{5.8}$$

Definition 5.11 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie). *Eine Handelsstrategie $h = (h^S, h^X)$ heißt selbstfinanzierend, falls*

$$\tilde{V}_t^h = h_{t+1}^S + h_{t+1}^X \cdot \tilde{X}_t \quad , \forall t = 1, \dots, T - 1 . \quad (5.9)$$

Bemerkung. *Anschaulich bedeutet das, dass außer den durch X und S erklärten Änderungen des Portfoliowerts kein Kapital hinzugefügt oder abgezogen wird.*

Definition 5.12 (Arbitrage). *Ein Arbitrageportfolio ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die folgenden Beziehungen genügt:*

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0(h) &\leq 0 , \\ \tilde{V}_T^h &\geq 0 \quad \mathcal{P} - f. s. , \\ P(\tilde{V}_T^h > 0) &> 0 . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Definition 5.13 (Martingal). *Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ heißt Martingal unter dem Maß \mathcal{Q} , falls*

- (i) $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ adaptierter Prozess
- (ii) $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(|X_t|) < \infty, \forall t \in \mathbb{N}$
- (iii) $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \forall s \leq t$.

Definition 5.14 (Contingent Claim). *Eine nicht-negative Zufallsvariable C auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=1, \dots, T}, P)$ heißt europäischer Contingent Claim. Ein europäischer Contingent Claim C heißt Derivat der zugrunde liegenden Anlage X falls C bzgl. der durch den Preisprozess $(X_t)_{t=0, \dots, T}$ erzeugten σ -Algebra messbar ist.*

Definition 5.15 (Erreichbar). *Ein Contingent Claim C heißt erreichbar oder auch replizierbar, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie h existiert, dessen terminaler Portfoliowert C gleicht, d. h.*

$$C = V_T^h = h_T^S S_T + h_T^X X_T \quad P\text{-f. s. .}$$

Die Strategie h heißt dann replizierende Strategie oder Hedging für C .

Resultierend daraus ist ein Contingent Claim C genau dann erreichbar, wenn der entsprechend diskontierte Claim $\tilde{C} = \frac{C}{S_T}$ von folgender Form ist:

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= h_T^S \Pi_T + h_T^X \tilde{X}_T \\ &= \tilde{V}_T \\ &= \tilde{V}_0 + \sum_{t=1}^T h_t^X (\tilde{X}_t - \tilde{X}_{t-1}),\end{aligned}$$

für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie h . In diesem Fall heißt h auch replizierende Strategie. Dabei steht Π_0 für den arbitragefreien Preis.

Definition 5.16 (Arbitragefreier Preis). *Eine reelle Zahl $\pi^{\tilde{C}}$ heißt arbitragefreier Preis eines diskontierten Claims \tilde{C} , falls ein adaptierter stochastischer Prozess Π existiert, für den gilt:*

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \pi^{\tilde{C}}, \\ \Pi_t &\geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, T-1, \text{ und} \\ \Pi_T &= \tilde{C},\end{aligned}$$

sodass das erweiterte Kapitalmarktmodell mit dem Preisprozess $\tilde{S}, \tilde{X}, \Pi$ arbitragefrei ist.

Bemerkung. *Ein arbitragefreier Preis $\pi^{\tilde{C}}$ eines diskontierten Claims \tilde{C} ist also per Definition ein Preis zu dem \tilde{C} zum Zeitpunkt $t = 0$ ohne Einführung von Arbitragemöglichkeiten in dem Markt gehandelt werden kann: Falls \tilde{C} für $\pi^{\tilde{C}}$ verkauft wird, kann weder der Käufer noch der Verkäufer eine Investmentstrategie finden, die jedes Risiko eliminiert und gleichzeitig die Möglichkeit offen lässt, Gewinne zu erzielen.*

Es wird nun vorausgesetzt, dass jeder Contingent Claim erreichbar ist. Märkte, in denen dies gilt, heißen vollständig.

Satz 5.17 (Fundamentalsatz des Asset Pricings).

- (i) *Das Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn die Menge \mathcal{Q} aller äquivalenten Martingalmaße nichtleer ist. In diesem Fall existiert ein $Q^* \in \mathcal{Q}$ mit endlicher Dichte dQ^*/dQ .*
- (ii) *Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Fall ist die Anzahl an Elementen in $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ durch $(d+1)^T$ nach oben beschränkt.*

Für die eher umfangreichen Beweise der beiden Aussagen sei auf Föllmer und Schied [12, S. 270 f. bzw. S. 287 f.] verwiesen.

Aus obigen Annahmen und Definitionen folgt:

Satz 5.18. *Der Wert V_t^C eines Contingent Claims zur Zeit $t = 0, \dots, T$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}
 V_t^C &= V_t^h \\
 &= h^S t \cdot S_t + h^X t \cdot X_t \\
 &= S_t \cdot \mathbb{E}_Q[\tilde{C}_T | \mathcal{F}_t] \\
 &= S_t \cdot \mathbb{E}_Q\left[\frac{C_T}{S_T} | \mathcal{F}_t\right] \quad \forall Q \in \mathcal{Q}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.1.4 Arbitragefreiheit des Binomialmodells

Satz 5.19. *Das CRR-Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $u > 1 + r_{CRR} > d$ gilt. In diesem Fall existiert ein eindeutiges Martingal-Maß \mathcal{Q} . Dieses Maß ist dadurch gekennzeichnet, dass die Zufallsvariablen R_1, \dots, R_T unter \mathcal{Q} unabhängig sind und die Randverteilung*

$$\begin{aligned}
 Q(R_t = u) &= q \\
 &= \frac{1 + r_{CRR} - d}{u - d} \\
 &\quad \forall t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

haben.

Beweis 5.20. (Föllmer und Schied [12, p.292])

Ein Maß \mathcal{Q} auf (Ω, \mathcal{F}) ist genau dann ein Martingal-Maß, wenn der diskontierte Preisprozess unter \mathcal{Q} ein Martingal ist, d. h.

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_t &= \mathbb{E}_Q[\tilde{X}_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\
 &= \tilde{X}_t \cdot \mathbb{E}_Q\left[\frac{R_{t+1}}{1 + r_{CRR}} | \mathcal{F}_t\right] \\
 &\quad \mathcal{Q}\text{-f. s. } \forall t = 0, \dots, T - 1.
 \end{aligned}$$

Diese Identität ist äquivalent zur Gleichung

$$\begin{aligned} 1 + r_{CRR} &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[R_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= u \cdot \mathbb{Q}(R_{t+1} = u | \mathcal{F}_t) + d \cdot \mathbb{Q}(R_{t+1} = d | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbb{Q}(R_{t+1} = u | \mathcal{F}_t)(\omega) &= q \\ &= \frac{1 + r_{CRR} - d}{u - d} \\ &\text{für } \mathcal{Q}\text{-fast jedes } \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Aber dies gilt genau dann, wenn die Zufallsvariablen R_1, \dots, R_T unabhängig sind unter \mathcal{Q} mit der gemeinsamen Verteilung $\mathbb{Q}(R_t = u) = q$. Insbesondere kann es höchstens ein Martingalmaß für X geben. Falls das Marktmodell arbitragefrei ist, existiert ein äquivalentes Martingal-Maß \mathcal{Q} . Die Bedingung $\mathcal{Q} \approx \mathcal{P}$ impliziert

$$q = \mathbb{Q}(R_1 = u) \in (0, 1),$$

was genau dann gilt, wenn $u > 1 + r_{CRR} > d$.

Falls umgekehrt $u > 1 + r_{CRR} > d$ kann ein Maß $\mathcal{Q} \approx \mathcal{P}$ auf (Ω, \mathcal{F}) wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{Q}(\omega) := q^l \cdot (1 - q)^{T-l} > 0,$$

wobei l die Anzahl des Auftretens der „ u “ in ω bezeichnet. Unter \mathcal{Q} sind X_1, \dots, X_T und damit R_1, \dots, R_T unabhängige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{Q}(R_t = u) = q$ und somit ist \mathcal{Q} ein äquivalentes Martingalmaß. q.e.d.

Bemerkung. Für das Maß \mathcal{Q} gilt also:

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[X_1]}{1 + r_{CRR}} = \frac{q \cdot u \cdot X_0 + (1 - q) \cdot d \cdot X_0}{1 + r_{CRR}} = X_0.$$

Unter diesem Maß \mathcal{Q} sind folglich die diskontierten Preise der Aktien Martingale.

Bemerkung. Das Binomialmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn ein Martingal-Maß existiert.

Mit diesen Annahmen kann ausgehend vom aktuellen Aktienkurs X_0 der Erwartungswert und die Varianz von X_1 wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[X_1] = q \cdot X_0 \cdot u + (1 - q) \cdot X_0 \cdot d \tag{5.13}$$

und

$$\text{Var}_{\mathcal{Q}}(X_1) = q \cdot u^2 + (1 - q) \cdot d^2 - [q \cdot u + (1 - q) \cdot d]^2. \tag{5.14}$$

5.1.5 Mehrperiodisches Binomialmodell

Um weitere Aussagen über das Modell bei mehreren Perioden treffen zu können, wird der Zählprozess $N = \{N_t : t = 0, \dots, T\}$ mit $N_t = \sum_{s=1}^t \mathbb{1}_{\{R_s=u\}}$ für $t = 0, \dots, T$ eingeführt. N_t sei binomial verteilt mit

$$\begin{aligned} Q(N_t = l) &= Q\left(\sum_{s=1}^t \mathbb{1}_{\{R_s=u\}} = l\right) \\ &= \binom{t}{l} \cdot q^l \cdot (1-q)^{t-l}, \\ &\quad \forall l = 0, \dots, t. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Der Erwartungswert und die Varianz von N_t werden bekanntlich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[N_t] &= t \cdot q, \\ &\quad \forall t = 1, \dots, T, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathcal{Q}}[N_t] &= t \cdot q \cdot (1-q), \\ &\quad \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bemerkung. *Der Preisprozess der Aktie ist also*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 \cdot u^{N_t} \cdot d^{t-N_t}, \\ &\quad \forall t = 1, \dots, T \end{aligned} \tag{5.18}$$

und

$$\begin{aligned} Q(X_t = X_0 \cdot u^l \cdot d^{t-l}) &= Q(N_t = l) \\ &= \binom{t}{l} \cdot q^l \cdot (1-q)^{t-l}, \\ &\quad \forall l = 0, \dots, t. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Bisher sind die Parameter „ u “ und „ d “ noch nicht eindeutig bestimmt. Um sie zu spezifizieren, werden sie üblicherweise an eine z. B. durch eine Index-Historie gegebene Volatilität angepasst. Der Vorschlag von Cox et al. [6] ist daher folgender:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (5.20)$$

und

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (5.21)$$

wobei σ die Standardabweichung bzw. Volatilität und somit die Wurzel der annualisierten Varianz und Δt die gewählte Diskretisierung des Jahres ist. Diese Wahl ist konsistent mit der in Kapitel 5.1.1 diskutierten rekombinierenden Eigenschaft des Binomialbaums. Für eine monatliche Betrachtung $T = \frac{1}{12}$ wurde die Diskretisierung $\Delta t = \frac{T}{500} = \frac{1}{6000}$ gewählt. Das heißt, dass während eines Monats bis zu 500 Auf- und Abbewegungen des Aktienkurses X_t möglich sind. Damit sind genügend Zeitschritte vorhanden, um die möglichen Auswirkungen auf die Umschichtungen zu erklären. Hierbei sei erwähnt, dass bei gleicher Volatilität und gleicher Drift die Kursentwicklung im Binomialmodell gegen die Kursentwicklung im Black-Scholes-Modell konvergiert. Der jährliche risikolose Zins wird mit $r = 0,03$ angesetzt. Der Zins einer Periode im CRR-Modell ist dann

$$r_{CRR} = e^{r \cdot \Delta t} - 1 = e^{\frac{r}{6000}} - 1. \quad (5.22)$$

Satz 5.21. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{F}_t -messbare Funktion und $C = f(X_T)$ ein Contingent Claim mit Fälligkeit T . Dann ist der Preis π_0^C eines europäischen Contingent Claims zur Zeit $t = 0$ im Binomialmodell gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi_0^C &= \frac{1}{(1 + r_{CRR})^T} \cdot \mathbb{E}_Q[f(S_T)] \\ &= \frac{1}{1 + r_{CRR}} \cdot \sum_{l=0}^T f(X_0 \cdot u^l \cdot d^{T-l}) \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l} \end{aligned} \quad (5.23)$$

für eine geeignete Funktion g .

Korollar 5.22. Eine europäische Put-Option mit Ausübungspreis U und Fälligkeit T hat einen Payoff von

$$V_T^{Put(U)} = \max[(U_{Put} - X_T); 0] = (U_{Put} - X_T)^+. \quad (5.24)$$

Die Funktion g ist daher $f(x) = (U_{Put} - x)^+$ und der Preis $\pi_0^{Put(U)}$ zur Zeit $t = 0$ somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi_0^{Put(U)} &= V_0^{Put(U)} \\ &= \frac{1}{(1 + r_{CRR})^T} \cdot \sum_{l=0}^T (U_{Put} - X_0 \cdot u^l \cdot d^{T-l})^+ \cdot \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Korollar 5.23. *Eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis U und Fälligkeit T hat einen Payoff von*

$$V_T^{Call(U)} = \max[(X_T - U_{Call}); 0] = (X_T - U_{Call})^+ \quad (5.26)$$

Die Funktion g ist daher $f(x) = (x - U_{Call})^+$ und der Preis $\pi_0^{Call(U)}$ zur Zeit $t = 0$ somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi_0^{Call(U)} &= V_0^{Call(U)} \\ &= \frac{1}{(1 + r_{CRR})^T} \cdot \sum_{l=0}^T (U_{Call} - X_0 \cdot u^l \cdot d^{T-l})^+ \cdot \binom{T}{l} q^l (1 - q)^{T-l}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nun könnte argumentiert werden, dass das Binomialmodell zu simpel ist, um die Realität hinreichend nahe abzubilden. Jedoch konvergieren die so berechneten Optionspreise im CRR-Modell mit steigender Diskretisierungsfineinheit gegen denen im Black-Scholes-Modell. Dieses unterstellt wiederum, dass der Aktienkurs einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Einen Beweis für die Konvergenz liefert z. B. Föllmer und Schied [12, S. 302 ff].

5.2 Einbettung des Produkts in den Kapitalmarkt

Nachdem der Kapitalmarkt beschrieben wurde, muss das dynamische Drei-Topf-Hybrid-Produkt noch darin eingebettet werden.

Das Vermögen, das sich zum Zeitpunkt t im Topf „Deckungskapital“ befindet, bedarf keiner direkten Abbildung im Kapitalmarkt, da es sich dabei um Kapital handelt, das der Versicherer am Kapitalmarkt anlegen kann. Die Aktiva des Versicherungsunternehmens werden aber hier nicht modelliert.

Neben der Abhängigkeit vom Kapitalmarkt ist der Garantiefonds durch einen maximalen monatlichen Verlust von 20 % und einer geringeren Rendite als der Freie Fonds charakterisiert. Wie schon in Kapitel 3 erwähnt wurde, wird dies durch den CPPI-Algorithmus bewerkstelligt.

Eine Nachbildung dessen ist allerdings mit hohem Aufwand verbunden, sodass hier eine alternative Modellierung verwendet wird. Diese sieht ein Portfolio vor, das aus der im CRR-Modell beschriebenen Aktienanlage X und einer europäischen Put-Option auf die Aktienanlage X mit einer Fälligkeit von einem Monat und einem Ausübungspreis (Ausübungspreis) von $U_{Put}(t) = 0,8 \cdot X_{t-1}$ besteht. Dadurch kann das Portfolio „Aktie+Putoption“ innerhalb eines Monats nicht unter 80 % des ursprünglichen Wertes fallen. Die Kosten dieser Putoption werden vom Kundenportfolio abgezogen.

Der Freie Fonds soll mit Hilfe der Aktienanlage X und dem Kauf einer europäischen Call Option auf die Aktie modelliert werden. Diese Kombination erhöht die Renditemöglichkeiten bei höherem Risiko. Die Fälligkeit soll hier auch einen Monat betragen und der

Ausübungspreis einen Wert $U_{Call}(t) = 1,1 \cdot X_{t-1}$ haben. Im Gegensatz zu dem Garantiefonds kann der Versicherungskunde in der Realität je nach Ausprägung der eigenen Risikoaversion die Art des Freien Fonds wählen. Da das hier betrachtete Kapitalmarktmodell aber keine Immobilien- und Rentenfonds beinhaltet, ist die Wahl des Kunden in dem Modell auf Aktienfonds beschränkt.

Durch die Form der Modellierung der beiden Fondstöpfe wird eine starke Korrelation unterstellt, die der in der Realität ebenso vorliegenden Eigenschaft Rechnung trägt.

Mit den gewählten Parametern aus Kapitel 5.1 hat der Preis der Put-Option bei einer annualisierten Volatilität von $\sigma = 30\%$, einem Underlying Preis $X_0 = 100$, einem Strikepreis $U = 0,8 \cdot X_0$ und einer Laufzeit von einem Monat folgenden Wert:

$$\pi_{0,8 \cdot X_0}^{Put}(0) = V^{Put}(0) = 0,011 \quad (5.28)$$

und der Preis der Call-Option analog

$$\pi_{1,1 \cdot X_0}^{Call}(0) = V^{Call}(0) = 1,66. \quad (5.29)$$

Infolgedessen wird das Kundenvermögen $V_{GF}(t^+)$ bzw. $V_{FF}(t^+)$ bei einer Umschichtung mit folgender Portfoliostruktur investiert:

$$h_{GF} := \{Aktienanteil; Putoptionsanteil\} = \left\{ \frac{100}{100,011}; \frac{0,011}{100,011} \right\}, \quad (5.30)$$

$$h_{FF} := \{Aktienanteil; Calloptionsanteil\} = \left\{ \frac{100}{101,66}; \frac{0,66}{101,66} \right\}. \quad (5.31)$$

Die hier berechneten Optionspreise sollen an dieser Stelle nur exemplarisch dazu dienen ein Gefühl für die Wertverhältnisse zu bekommen. Für die Simulation sind noch deutlich mehr Optionspreisberechnungen von Nöten. Allerdings wird an der einmonatigen Laufzeit von nun an festgehalten.

Bisher beschrieb die Variable t in diesem Kapitel die Zeit, wobei die Schrittlänge bzw. die Diskretisierung anfangs noch nicht festgelegt war. Für die monatliche Aktienkursimulation fiel dann die Wahl auf 500 Zeitschritte pro Monat. Die unterschiedlichen Aktienkursentwicklungen während eines Monats interessieren nun aber nicht mehr im Detail, da immer nur monatlich umgeschichtet wird. D. h., dass die Variable t nun wieder wie in Kapitel 3 verwendet werden kann, sprich mit monatlicher Schrittweite. T wird dann der Endzeitpunkt des gesamten Betrachtungszeitraums der Cashflowsimulation sein.

5.3 Cashflow-Modellierung

In diesem Unterkapitel wird die Modellierung der durch die dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkte induzierten Cashflows aus Sicht des Versicherungsunternehmens dargestellt. Zunächst soll erläutert werden, wie diese Cashflows in der Realität aussehen, um davon ausgehend vereinfachende Annahmen zu treffen. Diese Modellannahmen sollen die Realität hinreichend genau abbilden, aber gleichzeitig das Ziel verfolgen die Komplexität der Bewertung des Risikos zu minimieren.

5.3.1 Cashflow-Erläuterung

Bei den Zahlungsströmen ist als Erstes zwischen Ein- und Auszahlungen bezogen auf das Konto des Versicherers zu unterscheiden. Außerdem gibt es auch noch Zahlungen, die den Kontostand des Versicherers nicht direkt beeinflussen. Sie sollen der Vollständigkeit halber zwar erläutert werden, fließen aber nicht in den Cashflow explizit mit ein.

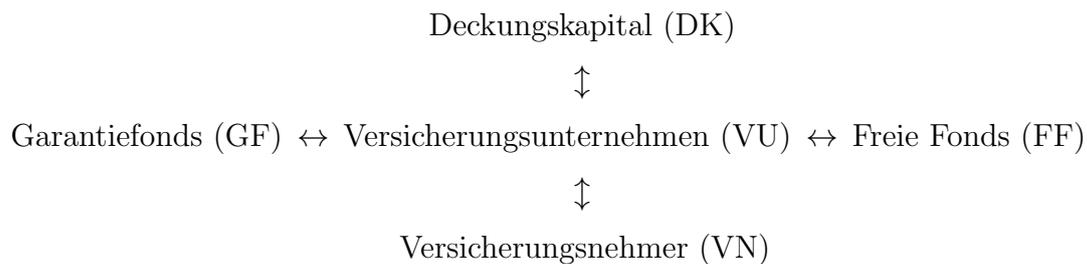
Beim Cashflow wird das gesamte Deckungskapitalvermögen, also das kumulierte Deckungskapital aller Versicherungsnehmer als Teil des Konto des Versicherers interpretiert. Das sich darauf befindende Geld ist während der Vertragslaufzeit im Besitz des Versicherers. Dieses Kapital ist zwar Eigentum des Versicherungsnehmers, kann aber selbst vom Versicherer unabhängig von dem Produkt am Kapitalmarkt angelegt werden. Die Verpflichtung des Versicherungsunternehmens besteht vielmehr darin, für die temporär in den Deckungskapitaltöpfen investierten Kundenvermögen die Garantieverzinsung zu gewährleisten. In diesem Zusammenhang muss das Sicherungsvermögen stets größer sein als das Deckungskapital.

Definition 5.24 (Sicherungsvermögen). *Das Sicherungsvermögen - also die Gesamtheit der Vermögenswerte des Versicherers - muss die versicherungstechnischen Rückstellungen, Verbindlichkeiten und Rechnungsabgrenzungsposten bedecken. Dem Sicherungsvermögen sind laufend Beträge in der Höhe zuzuführen und vorschriftsmäßig, d. h. in qualifizierten Kapitalanlagen gemäß § 54 VAG (vgl. Lipowsky [24, S. 717 ff.]) und §§ 1 ff. AnlV zu investieren, wie es dem voraussichtlichen Anwachsen des Solls dieses Vermögens gemäß §66 Ia VAG (vgl. Lipowsky [24, S. 806]) entspricht. Demnach muss das Sicherungsvermögen mindestens die Summe folgender Posten bedecken:*

- (i) die Beitragsüberträge;
- (ii) die Deckungsrückstellung;
- (iii) die Rückstellung für
 - (a) noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle und Rückkäufe,
 - (b) erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung,
 - (c) unverbrauchte Beiträge aus ruhenden Versicherungsverträgen;
- (iv) die Teile der Rückstellung für erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung, die auf bereits festgelegte, aber noch nicht zugewiesene Überschussanteile entfallen;

- (v) die Verbindlichkeiten aus dem selbst abgeschlossenen Versicherungsgeschäft gegenüber Versicherungsnehmern;
- (vi) die als Prämie eingenommenen Beiträge, die ein VU zu erstatten hat, wenn ein Versicherungsvertrag nicht zustande gekommen ist oder aufgehoben wurde.

Folgendes Diagramm gibt einen Überblick darüber, in welche Richtungen während der Vertragslaufzeit Kapitalflüsse stattfinden können.



Aus Risikomanagementsicht hat es Sinn, die einzelnen Flüsse in drei Gruppen aufzuteilen: Zuflüsse, Abflüsse und Zahlungen, die keinen direkt Einfluss auf das Sicherungsvermögen haben. Bei Kapitalbewegungen, die Käufe oder Verkäufe von Fonds beinhalten, entstehen Transaktionskosten, die zu Lasten des Kunden gehen. Im Detail sehen die Kapitalflüsse so aus:

- (i) Einzahlungen (\rightarrow DK bzw. \rightarrow VU) setzen sich zusammen aus:
- dem Verkauf von Garantiefondsanteilen, der aus einer Umschichtung zugunsten des Deckungskapitals resultiert ($\text{GF} \rightarrow \text{VU} \rightarrow \text{DK}$);
 - dem Verkauf von Freien Fondsanteilen, der aus einer Umschichtung zugunsten des Deckungskapitals resultiert ($\text{FF} \rightarrow \text{VU} \rightarrow \text{DK}$);
 - den Bruttobeiträgen der Versicherten, die in das Deckungskapital fließen ($\text{VN} \rightarrow \text{VU} \rightarrow \text{DK}$);
 - einem Kostenausgleich, der alle versicherungstechnischen Kosten beinhaltet ($\text{VN} \rightarrow \text{VU}$).
- (ii) Die Auszahlungen ($\text{DK} \rightarrow$ bzw. $\text{VU} \rightarrow$) sind hingegen:
- der Kauf von Garantiefondsanteilen, der aus einer Umschichtung vom Deckungskapital resultiert ($\text{DK} \rightarrow \text{VU} \rightarrow \text{GF}$);
 - der Kauf von Freien Fondsanteilen, der aus einer Umschichtung vom Deckungskapital resultiert ($\text{DK} \rightarrow \text{VU} \rightarrow \text{FF}$);

- (c) die Überschussbeteiligungen am Gewinn des Versicherungsunternehmens (VU \rightarrow FF);
 - (d) die Auflösungen aus der Rückstellung für Beitragsrückerstattung (VU \rightarrow FF);
 - (e) die Auszahlungen, die durch eine Auflösung eines Vertrags (aufgrund von Storno, Tod oder Ende der Vertragslaufzeit) induziert sind (DK \rightarrow VU \rightarrow VN).
- (iii) Zahlungen, die keinen direkten Einfluss auf das Sicherungsvermögen haben (VU ist im Einzelflussdiagramm nur mittelbar betroffen) sind
- (a) der Verkauf von Garantiefondsanteilen, der aus einer Auflösung des Vertrags folgt (GF \rightarrow VU \rightarrow VN);
 - (b) der Verkauf von Freien Fondsanteilen, der aus einer Auflösung des Vertrags folgt (FF \rightarrow VU \rightarrow VN);
 - (c) der Kauf von Freien Fondsanteilen, der aus einer Umschichtung von Garantiefondsanteilen resultiert (GF \rightarrow VU \rightarrow FF);
 - (d) der Kauf von Garantiefondsanteilen, der aus einer Umschichtung von Freien Fondsanteilen resultiert (FF \rightarrow VU \rightarrow GF).

Der gesamte Cashflow wird im Wesentlichen von drei Zufallsgrößen bestimmt, nämlich der Kapitalmarktentwicklung, dem Stornoverhalten und der Sterblichkeit der Versicherungsnehmer. Diese können in der Realität aber nicht alle am Markt repliziert werden. So existieren am Kapitalmarkt beispielsweise noch keine Absicherungsmöglichkeiten gegen das Sterblichkeits- oder Langlebigkeitsrisiko. Damit der Zahlungsstrom bewertet werden kann, sind also vereinfachende Annahmen nötig. Wichtig dabei ist, dass die Annahmen die Größenordnung des Risikos nicht beeinflussen. Hierbei ist zu bemerken, dass speziell für dieses Produkt die Risiken, die aus der Kapitalmarktentwicklung resultieren, das größte Gewicht haben. Infolgedessen kann bei den anderen Größen eher auf eine aufwendige Modellierung verzichtet werden.

5.3.2 Cashflow-Modellannahmen

Es werden nun folgende Annahmen gemacht:

- (i) Die Transaktionskosten des Kapitalmarkts sollen konstant gleich null sein. Diese Kosten würden das Modell nur unnötig komplizierter bzw. aufwendiger machen, da sie das Risiko nicht beeinflussen. Darüber hinaus sollen die Kapitalmarktanlagen und somit auch die Fonds zu jeder Zeit in beliebiger Anzahl handelbar sein.
- (ii) Die versicherungstechnischen Kosten werden vernachlässigt. Es wird also angenommen, dass die kalkulatorischen Kosten den tatsächlichen Kosten entsprechen. Außerdem wird die Überschussbeteiligung vernachlässigt. Überschussbeteiligungen werden bei der Modellierung von klassischen Lebensversicherungsverträgen gewöhnlich mit betrachtet, bei den dynamischen Drei-Topf-Hybriden kann aber nur Überschuss auf den Anteil des Kapitals, der im Mittel im Deckungskapitaltopf investiert war, gewährt werden. Somit ist eine Modellierung der Überschussbeteiligung von weitaus geringerer Relevanz.
- (iii) Bei allen Verträgen soll die Garantieverzinsung $i = 2,25\%$ per annum betragen. Statt Renten werden nur einmalige Kapitalabfindungen unterstellt: Dadurch dass alle in der Realität über den Betrachtungszeitraum hinausgehenden Verpflichtungen auf selbigen projiziert werden, wird das Modell geschlossen. Darüber hinaus wird die Berechnung einfacher, da die Sterblichkeit in der Verrentungsphase nicht mehr als stochastischer Unsicherheitsfaktor mit einfließt. Es werden ausschließlich monatliche Nettoprämien verlangt. Dies ist auch konsistent zur Vernachlässigung der versicherungstechnischen Kosten.
- (iv) Es gibt kein Neugeschäft: dies ist zwar keine realistische Annahme, jedoch käme bei einer Integration des Neugeschäfts in das Modell ein weiterer Unsicherheitsfaktor hinzu. Es ist a priori nicht klar, wieviel und wie lange für dieses Produkt Neugeschäft betrieben wird. Bei der Bewertung des Risikos soll nur interessieren, wie hoch das Risiko ist, das aus dem jetzigen Bestand resultieren kann. Infolgedessen verringert sich automatisch im Zeitverlauf durch Tod und Storno die Bestandsgröße, die wiederum auch den Cashflow beeinflusst. Dies ist eine in der der Wissenschaft übliche Annahme. Anders wird dies im Übrigen in Solvency II gehandhabt, bei dem das Neugeschäft für das erste Jahr noch mit unterstellt wird.
- (v) Das Storno wird als deterministisch angenommen. Genauer gesagt wird ein Stornovektor verwendet werden, der die Realität gut abbildet. Das Stornorisiko, sprich die Abweichungen der realen Ist-Daten von diesem Vektor, wird damit nicht stochastisch modelliert. Das Stornoverhalten der Kunden sei unabhängig von der momentanen Vermögensaufteilung auf die drei Töpfe. Auch diese Annahme ist realistisch, da die Alternativen am Kapitalmarkt zu dem Versicherungsvertrag ähnlich attraktiv sind.
- (vi) Die Sterblichkeit geht nicht als stochastische Größe in die Berechnung ein. Stattdessen wird mit den Erwartungswerten gerechnet. Diese Annahme vernachlässigt zwar das Sterblichkeitsrisiko, welches aber letztlich im Kollektiv ausgeglichen werden kann, worauf jetzt eingegangen wird.

5.3.3 Ausgleich des Sterblichkeitsrisikos im Kollektiv

Die Begründung der Vernachlässigung des Sterblichkeitsrisikos folgt den Argumenten von Møller [27], wobei zu erwähnen ist, dass dieser Ansatz erstmals von Brennan und Schwartz [3] verfolgt wurde. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll jeder Versicherungsnehmer genau einen Vertrag abgeschlossen haben. Somit können die Begriffe „Anzahl an Verträgen“ und „Anzahl an Kunden“ synonym verwendet werden. Der Zeitpunkt des in der Cashflowläuterung dargestellten Ausscheidens durch Tod hängt von der gestutzten Restlebensdauer K eines x -jährigen ab (siehe Kapitel 2.1). Die daraus resultierenden ungewissen zukünftigen Pfade der versicherten Leben werden nun durch dessen Erwartungswert ersetzt. Infolgedessen wird das Cashflow-Hedging reduziert auf eine Konstante mal dem durch die Entwicklung von X induzierten Cashflows. Dies funktioniert jedoch nur unter der ohnehin realitätsnahen Annahme, dass die Sterblichkeit unabhängig von der Kapitalmarktentwicklung ist. Davon wollen wir von nun an ausgehen.

Sei η die Anzahl der betrachteten versicherten Personen zum Zeitpunkt $t = 0$ und N_T^η die Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt T . Dann ist - unter der Annahme, dass alle Personen gleich alt sind -

$$\mathbb{E}[N_T^\eta] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\eta} \mathbb{1}_{\{K^j > T\}}\right] = \sum_{j=1}^{\eta} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{K^j > T\}}] = \eta \cdot {}_T p_x$$

und

$$\text{Var}(N_T^\eta) = \sum_{j=1}^{\eta} \text{Var}(\mathbb{1}_{\{K^j > T\}}) = \eta \cdot {}_T p_x \cdot (1 - {}_T p_x) .$$

Betrachten wir nun die Verluste L_η des Versicherers, die durch η Verträge entstehen. Um den Barwert davon berechnen zu können, werden neben der Konstanz des Zinses r auch Einmalprämien $A_{x:n}^1$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ gezahlt werden, unterstellt. $V(T)$ ist der aus Kapitel 3.2 bekannte Wert des Kundenportfolios zum Zeitpunkt T . Dann ist

$$L_\eta = \frac{1}{(1+r)^T} \cdot N_T^\eta \cdot V(T) - \eta \cdot A_{x:n}^1 . \quad (5.32)$$

Wir berechnen davon den Erwartungswert und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_\eta] &= \frac{1}{(1+r)^T} \cdot \mathbb{E}[N_T^\eta] \cdot \mathbb{E}[V(T)] - \eta \cdot A_{x:n}^1 \\ &= \eta \cdot \left\{ \frac{1}{(1+r)^T} \cdot {}_T p_x \cdot \mathbb{E}[V(T)] - A_{x:n}^1 \right\} . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{j=1}^{\eta} \mathbb{1}_{\{K^j > T\}} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{K^j > T\}}] = {}_T p_x \quad \mathcal{P}\text{-f. s. ,}$$

und zusammen mit der Gleichung (4.21)

$$\frac{1}{\eta} L_\eta \rightarrow \frac{1}{(1+r)^T} \cdot V(T) \cdot {}_T p_x - A_{x:n}^1 \quad \mathcal{P}\text{-f. s. für } \eta \rightarrow \infty . \quad (5.34)$$

Die hier getroffenen, vereinfachenden Annahmen wie z. B. konstante Verzinsung und Einmalprämienzahlungen haben keinen verstärkenden Einfluss darauf, dass das Sterblichkeitsrisiko im Kollektiv ausgeglichen werden kann.

Dieses Ergebnis kann wie folgt interpretiert werden: durch Erhöhung der Anzahl an Policen kann der Versicherer das Risiko, das durch die Unsicherheit bzgl. der Anzahl der verbliebenen Versicherten zur Zeit T herrührt, eliminieren. Im Gegensatz dazu kann das Versicherungsunternehmen die finanzielle Unsicherheit, die von der Anlage X und bei variablem Zins auch von S abhängt, nicht diversifizieren, weil alle Verträge an die gleichen Fonds gebunden sind. Selbst wenn die Anzahl der zugrunde liegenden Anlagen erhöht wird, so wird dessen Unabhängigkeit untereinander nie in dem Maße unterstellt werden können, wie es bei der Sterblichkeit von versicherten Leben der Fall ist.

5.3.4 Mathematische Formulierung des Cashflows

Von nun an wird der betrachtete Zeitraum der Cashflows auf 360 Monate fixiert. Wie in letzterem Unterkapitel erläutert, erklärt sich der Cashflow aus den Zu- und Abgängen des Sicherungsvermögens zum Monatswechsel. Folglich ist die monatliche Cashflowbetrachtung auch am sinnvollsten.

Resultierend aus all den oben gemachten Annahmen setzt sich der modellierte Cashflow zu einem bestimmten Zeitpunkt also folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Cashflow} = & \text{Prämien} \\ & - \text{Umschichtungen} \\ & - \text{Leistungen zum Vertragsende.} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Bemerkung. *Leistungen bei Vertragsende sind Auszahlungen aus dem Topf „Deckungskapital“ aufgrund der Beendigung von Verträgen durch Tod, Storno oder Übertritt in die Rentenphase. Auszahlungen aus den Fondstöpfen sind im Sinne des Cashflowmodells keine Leistung, da sie das Sicherungsvermögen nicht tangieren.*

Wie schon in Kapitel 3.2 erläutert wurde, sind die Vermögenswerte in den Töpfen nach einer Umschichtung abhängig vom Vermögenswert vor einer Umschichtung. Es wird daher wieder auf die darin verwendete Schreibweise beim Monatsübergang zurückgegriffen. Eine weitere Aufgliederung des Cashflows ist dann für alle $t = 1, \dots, T - 1$ folgende:

$$\begin{aligned} CF(t) = & \text{Summe der Nettoprämien aller Kunden im Monat } (t - 1; t] \\ & - \text{Nettokäufe von Garantiefonds zum Zeitpunkt } t^+ \\ & - \text{Nettokäufe von Freien Fonds zum Zeitpunkt } t^+ \\ & - \text{Summe des Deckungskapitals aller Kunden zum Zeitpunkt } t^- \\ & \cdot \text{Anteil der Verträge im Bestand, die im Zeitraum } (t - 1; t] \text{ beendet wurden.} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Bemerkung. Die Umschichtungen werden als Verbindlichkeiten interpretiert, da der Versicherer verpflichtet ist, das Kundenvermögen gemäß dem Umschichtungsalgorithmus anzulegen. Diese Verbindlichkeiten können positive oder negative Cashflowwerte hervorrufen. Wenn die kumulierten Nettofondskäufe zu einem Umschichtungszeitpunkt negativ sind, heißt das, dass die Fonds größtenteils verkauft werden, womit wieder mehr Kapital in das Deckungskapital fließt. Als Folge daraus entstehen in den meisten Fällen positive Cashflowwerte. Anders herum erzeugen positive kumulierte Nettofondskäufe tendenziell positive Cashflowwerte. Die Umschichtungen sind betragsmäßig der größte Term des Cashflows. Der Deckungskapitaltopf kommt hier deswegen nicht explizit vor, weil er sich komplementär zu den Fonds verhält. Alternativ wäre statt der Betrachtung der Nettofondskäufe auch eine Modellierung der Deckungskapitalabflüsse möglich gewesen.

Definition 5.25 (Nettofondskäufe). Die Nettofondskäufe lassen sich aus der Differenz $[(V_{GF}^{\eta_t}(t^+) + V_{FF}^{\eta_t}(t^+)) - (V_{GF}^{\eta_t}(t^-) + V_{FF}^{\eta_t}(t^-))]$ berechnen. Dabei steht $V_{GF}^{\eta_t}(t^-)$ für das kumulierte Garantiefondsvermögen aller Kunden zum Zeitpunkt t vor einer Umschichtung und $V_{GF}^{\eta_t}(t^+)$ für das Vermögen in den Garantiefonds aller Kunden nach einer Umschichtung. Für die Terme $V_{FF}^{\eta_t}(t^+)$ und $V_{FF}^{\eta_t}(t^-)$ gelten die Aussagen analog. Während der Subtrahend direkt von der Kapitalmarktentwicklung abhängt, ist der Minuend durch den Umschichtungsalgorithmus gegeben und wird somit nur indirekt von der Kapitalmarktentwicklung beeinflusst.

Während eines Monats, also zwischen t^+ und $(t+1)^-$ passiert nichts außer der Kapitalmarktentwicklung und den Bestandsgrößenänderungen. Andererseits sind unabhängig von t zu den Zeitpunkten t^- und t^+ die gleichen Aktienkurse und Bestandsgrößen zu beobachten. Bei den Variablen „Bestandsgröße η “ und „Aktienkurs X “ entspricht der Wert zum Zeitpunkt t^- also dem Wert zum Zeitpunkt t^+ .

Formeltechnisch kann der Cashflow also wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 CF(t) &= \sum_{j=1}^{\eta_t} B^j(t) \\
 &\quad - V_{GF}^{\eta_t}(t^+) + V_{GF}^{\eta_t}(t^-) \\
 &\quad - V_{FF}^{\eta_t}(t^+) + V_{FF}^{\eta_t}(t^-) \\
 &\quad - V_{DK}^{\eta_t}(t^-) \cdot [m_{sto}(t) + m_{tod}(t)],
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\forall t = 1, \dots, T-1, \forall t^+ = 1^+, \dots, (T-1)^+.$$

Für die Anfangs- und Endzeitpunkte gilt

$$CF(0) = \sum_{j=1}^{\eta_0} B^j(0), \tag{5.38}$$

bzw.

$$CF(T) = -V_{DK}^{\eta T}(T) \quad . \quad (5.39)$$

Die einzelnen Terme des Cashflows werden durch die folgende Definitionen erklärt.

Definition 5.26 (Leistungen zum Vertragsende). *Die Bestandsgröße η berechnet sich rekursiv durch die Bestandsgröße des Vormonats abzüglich eines Bestandsabgangs im Laufe des Monats $((t-1), t)$ der sich aus Storno oder Tod zusammensetzt:*

$$\begin{aligned} \eta_t &= \eta_{(t-1)} \cdot [1 - m_{sto}(t) - m_{tod}(t)] \ , \\ \forall t &= 1, \dots, T \ . \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die Summanden des Bestandsabgangs sind der Anteil $m_{sto}(t)$ des Bestands, der im Zeitraum $(t-1; t]$ storniert wurde und der Anteil $m_{tod}(t)$ des Bestands, der im Zeitraum $(t-1; t]$ durch Tod ausgeschieden ist. Beim Vektor $m_{tod}(t)$ wird angenommen, dass die Sterblichkeit jedes einzelnen Versicherten dem eines 30-jährigen entspricht. Dieser wird dann einfach wie in Kapitel 2.1 der DAV-Sterbetafel entnommen. Der andere Parameter sollte die Realität aber so gut wie möglich widerspiegeln. Folglich wird für den Faktor $m_{sto}(t)$ ein deterministischer Stornovektor verwendet, der eine Näherung für die in der Lebensversicherungswirtschaft beobachtbaren empirischen Werte ist. Während die Werte dieses Stornovektors im ersten Monat nach Vertragsbeginn bei ca. 1,3% liegen, sinken sie in den ersten 240 Monaten kontinuierlich auf einen Wert von ca. 0,1% und stagnieren auf diesem Niveau in den darauf folgenden 120 Monaten. Dieses Verhalten kann recht einfach durch eine fallende Exponentialfunktion approximiert werden.

Für das Modell werden also nach adäquaten Justierungen folgende Funktionen gewählt:

$$\begin{aligned} m_{sto}(t) &= e^{-4,2 \cdot \sqrt[5]{t}} \ , \\ \forall t &= 1, \dots, T \ , \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} m_{tod}(t) &= \frac{\sum_j^{\eta_{t-1}} \frac{1}{12} q_x^j}{\eta_{(t-1)}} \ , \\ \forall t &= 1, \dots, T \ . \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ausgehend von diesen Funktionen können für den 360-monatigen Zeitablauf Vektoren für die jeweiligen Ausscheideursachen berechnet werden.

Ansonsten wird hier noch die letzte Modellannahme getroffen, die darin besteht, dass alle betrachteten Versicherungsverträge eine Restlaufzeit von 30 Jahren haben sollen. Infolgedessen treten alle Versicherungsnehmer, die im Zeitraum $(0, T)$ nicht verstorben sind oder storniert haben, zum Zeitpunkt T ins Rentenalter ein.

Die Berechnung der monatlichen Nettoprämie $B^j(t)$ wurde bereits in Kapitel 2.3 hergeleitet.

Definition 5.27 (Kumulierte Vermögenswerte). *Die kumulierten Vermögen aller η_t Kunden der einzelnen Töpfe setzen sich zu den Zeitpunkten $t^+ = 0^+, \dots, (T-1)^+$ nach einer Umschichtung zusammen aus:*

$$V_{GF}^{\eta_t}(t^+) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{GF}^j(t^+), \quad (5.43)$$

$$V_{FF}^{\eta_t}(t^+) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{FF}^j(t^+), \quad (5.44)$$

$$V_{DK}^{\eta_t}(t^+) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{DK}^j(t^+). \quad (5.45)$$

Definition 5.28 (Einzelne Vermögenswerte nach einer Umschichtung). *Eine „Ebene“ tiefer ist die einzelvertragliche Aufteilung der Töpfe jedes Kunden j gemäß dem Umschichtungsalgorithmus in Kapitel 3.2 $\forall t^+ = 0^+, \dots, (T-1)^+$ wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} V_{FF}^j(t^+) &= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V^j(t^+) \geq I^j(t+1)\}} \cdot \left[V^j(t^+) - \frac{I^j(t+1)}{0,8} \right], \\ V_{GF}^j(t^+) &= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V^j(t^+) \geq I^j(t+1)\}} \cdot \frac{I^j(t+1)}{0,8} \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V^j(t^+) < I^j(t+1)\}} \cdot \frac{I^j(t+1) - 1,0225^{(1/12)} \cdot V^j(t^+)}{0,8 - 1,0225^{(1/12)}} \\ V_{DK}^j(t^+) &= \mathbb{1}_{\{0,8 \cdot V^j(t^+) < I^j(t+1)\}} \cdot \frac{I^j(t+1) - 0,8 \cdot V^j(t^+)}{1,0225^{(1/12)} - 0,8}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Das zur Absicherung der Erlebensfallgarantie mindestens erforderliche Vermögen des j -ten Kunden ist

$$I^j(t+1) = 1,0225^{\frac{1-w^j(t)}{12}} \cdot B_{sum}^j(t) \quad , \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad (5.47)$$

wobei $w^j(t)$ für die Restlaufzeit des j -ten Kunden bis zum jeweiligen Garantiezeitpunkt, ausgehend vom Zeitpunkt t , und $B_{sum}^j(t)$ für die Summe der vom j -ten Kunden bis zum Zeitpunkt t gezahlten Beiträge steht. Hierbei ist zu bemerken, dass zum Zeitpunkt 0 die Differenz $0,8 \cdot V^j(t^+) - I^j(t+1)$ aufgrund unterschiedlicher Startverteilungen nicht für alle Kunden j gleich groß ist, was uns in Kapitel 6.1 noch beschäftigen wird.

Definition 5.29 (Entwicklung der kumulierten Kundenvermögen im Laufe eines Monats). *Das gesamte Vermögen des j -ten Kunden zum Zeitpunkt t vor einer Umschichtung ist definiert durch*

$$\begin{aligned} V^j(t^-) &= V_{GF}^j(t^-) + V_{FF}^j(t^-) + V_{DK}^j(t^-) + B^j(t^-), \\ \forall t &= 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Die Werte der einzelnen Töpfe jeweils kumuliert über alle Kunden η_t sind zum Ende des Monats, also vor einer Umschichtung, zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$:

$$V_{GF}^{\eta_t}(t^-) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{GF}^j(t^-), \quad (5.49)$$

$$V_{FF}^{\eta_t}(t^-) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{FF}^j(t^-), \quad (5.50)$$

$$V_{DK}^{\eta_t}(t^-) = \sum_{j=1}^{\eta_t} V_{DK}^j(t^-). \quad (5.51)$$

Definition 5.30 (Entwicklung des Garantiefonds im Laufe eines Monats). *Die Wertentwicklung des Garantiefondstopfes des j -ten Kunden setzt sich zusammen aus dem Garantiefondsvermögen zum Zeitpunkt $(t-1)^+$ multipliziert mit der Summe aus dem Payoff der Put-Option und des Aktienkurszuwachses im Zeitraum $(t-1; t]$, wobei davon noch der Preis der Putoptionen subtrahiert wird:*

$$\begin{aligned} V_{GF}^j(t^-) &= \left\{ \frac{\max\{0, 8 \cdot X_{t-1} - X_t; 0\}}{X_{t-1}} + \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\} \cdot V_{GF}^j(t-1)^+, \\ &\quad - \pi_{0,8 \cdot X_{t-1}}^{Put}(t-1) \cdot \tau_{GF}^j(t) \\ &\quad \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die Anzahl $\tau_{GF}^j(t)$ der Aktien, die den Garantiefondstopf des Kunden j im Zeitraum $(t-1; t]$ abbilden, ergibt sich aus der Höhe des Garantiefondsvermögens zum Zeitpunkt $(t-1)$ nach der Umschichtung gebrochen durch die Summe aus dem Aktienkurs zum Zeitpunkt $(t-1)$ und dem Putpreis zum Zeitpunkt $(t-1)$:

$$\tau_{GF}^j(t) = \frac{V_{GF}^j(t-1)^+}{X_{t-1} + \pi_{0,8 \cdot X_{t-1}}^{Put}(t-1)}, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (5.53)$$

Definition 5.31 (Entwicklung des Freien Fonds im Laufe eines Monats). *Die Wertentwicklung des Freien Fonds verhält sich äquivalent zu der des Garantiefonds, lediglich die Payoffstruktur ist unterschiedlich:*

$$\begin{aligned} V_{FF}^j(t^-) &= \left\{ \frac{\max\{X_t - 1, 1 \cdot X_{t-1}; 0\}}{X_{t-1}} + \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\} \cdot V_{FF}^j(t-1)^+ \\ &\quad - \pi_{1,1 \cdot X_{t-1}}^{Call}(t-1) \cdot \tau_{FF}^j(t), \\ &\quad \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Analog zum Garantiefonds die Anzahl der Aktien für den Freien Fonds:

$$\tau_{FF}^j(t) = \frac{V_{FF}^j(t-1)^+}{X_{t-1} + \pi_{1,1 \cdot X_{t-1}}^{Put}(t-1)}, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (5.55)$$

Definition 5.32 (Entwicklung des Deckungskapitals im Laufe eines Monats). *Das Vermögen im Deckungskapitaltopf des j -ten Kunden berechnet sich rekursiv durch das Deckungskapitalvermögen nach einer Umschichtung zum Zeitpunkt $(t-1)^+$ verzinst mit dem monatlichen Garantiezins:*

$$\begin{aligned} V_{DK}^j(t^-) &= V_{DK}^j(t-1)^+ \cdot \sqrt[12]{1+i}, \\ \forall t &= 1, \dots, T, \quad \forall t^+ = 0^+, \dots, (T-1)^+. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Damit ist die Entwicklung des Cashflows vollständig erklärt. Der Cashflow hängt neben der Kapitalmarktentwicklung allerdings noch von den folgenden Eingangsgrößen ab, die zum Zeitpunkt $t = 0$ fixiert werden müssen:

$B^j(t^+)$, $B_{sum}^j(0) \forall j$ und $\forall t$, η_0 , $V_{GF}^j(0) \forall j$, $V_{FF}^j(0) \forall j$, $V_{DK}^j(0) \forall j$ und den bereits festgelegten Parametern i und r .

Kapitel 6

Cashflow-Simulation

6.1 Motivation der Startwerte

Für die Simulation wurden die noch nicht spezifizierten Parameter an Bestandsdaten eines Lebensversicherungsunternehmens angepasst. Diese Maßnahme dient einerseits der erhöhten Plausibilität der Simulationsergebnisse und andererseits dem größeren praktischen Nutzen der Ergebnisse. Dabei wurden zunächst die monatlichen Nettobeiträge $\sum_{j=1}^{\eta} B^j(t)$, die Summe der bisher gezahlten Nettobeiträge $\sum_{j=1}^{\eta} B_{sum}^j(0)$ und das derzeitige Gesamtvermögen aller Kunden $V^{\eta_0}(0)$ eins zu eins übernommen:

$$\sum_{j=1}^{\eta} B^j(t) = 2,5 \text{ Mio. Euro}, \quad (6.1)$$
$$\forall t = 0, \dots, T - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\eta} B_{sum}^j(0) = 37,3 \text{ Mio. Euro}, \quad (6.2)$$

$$V^{\eta_0}(0) = 44,5 \text{ Mio. Euro}. \quad (6.3)$$

Am Verhältnis $\frac{\sum_{j=1}^{\eta} B_{sum}^j(0)}{\sum_{j=1}^{\eta} B^j(0)}$ lässt sich ablesen, dass hier ein sehr junger Bestand vorliegt.

Eine entscheidende Frage ist nun, wie der Bestand für die Simulation zu wählen ist. Die Bestandsgröße der untersuchten Daten liegt bei ca. 40.000 Kunden. Dabei hat jeder einzelne Kunde ein unterschiedliches Startportfolio bzgl. der Größe der drei Töpfe, welches jeweils für die Simulation manuell festgelegt werden muss. Aufgrund von programmiertechnischen Limitierungen kann die Bestandsgröße also nicht so einfach direkt übernommen werden. Stattdessen wurde eine Bestandsverdichtung vorgenommen. Zunächst wurde untersucht wie stark der Einfluss des Verdichtungsgrades auf die Volatilität des Cashflows ist.

Ausgehend davon, dass der Bestand nur aus einem Kunden - mit obigen Startparametern - bestünde, zeigte sich, dass bei Verringerung des Verdichtungsgrades der Einfluss auf die Cashflowvolatilität stark abnahm. Um dies an einem Beispiel deutlich zu machen, betrachten wir vier verschiedene Varianten der Bestandsverdichtung: in Variante „A“ soll die

Bestandsgröße $\eta = 1$ sein, Variante „B“ hat $\eta = 5$, Variante „C“ $\eta = 10$ und Variante „D“ $\eta = 20$ Kunden. Die Verdichtungsgrade sind somit 40.000, 8.000, 4.000 bzw. 2.000. Die beobachteten durchschnittlichen Cashflowvarianzen lagen bei $1,3977 \cdot 10^{13}$, $1,1922 \cdot 10^{13}$, $1,1896 \cdot 10^{13}$ bzw. $1,1894 \cdot 10^{13}$. Diese Werte können folgendermaßen interpretiert werden: In Variante „A“ kann per Definition des Umschichtungsalgorithmus zu einem fixierten Zeitpunkt nur in maximal zwei Töpfen Kapital investiert sein, da aufgrund des Umschichtungsalgorithmus (vgl. Kapitel 3.2) entweder Freie Fonds oder Deckungskapital 0% Anteil am Kundenvermögen haben. Eine auf den Cashflow wirksame Aktienkursbewegung hat in dieser Variante also automatisch auf den kompletten Bestand Einfluss. Im Gegensatz dazu könnte in Variante „B“ der Bestand aus zwei Kunden mit jeweiliger Portfolioaufteilung „Garantiefonds und Freier Fonds“ und drei Kunden mit jeweiliger Portfolioaufteilung „Garantiefonds und Deckungskapital“ bestehen. Eine positive monatliche Aktienrendite hätte nun zwar Einfluss auf die Neuverteilung aller fünf Kundenvermögen, allerdings wäre der Cashflow bloß durch die Umschichtung von zwei Kundenportfolien betroffen. Der Einfluss des Diversifikationseffekts fällt beim Vergleich von „B“ und „C“ schon deutlicher geringer aus, da bei beiden Varianten das Gesamtvermögen aller Kunden auf alle drei Töpfe aufgeteilt sein kann. Die höhere Varianz des Cashflows in „C“ erklärt sich durch die genauere Diskretisierung.

Um zu verstehen, was damit gemeint ist, ist folgender Exkurs hilfreich:

Bemerkung. Für den Cashflow zum Zeitpunkt t wirksame Umschichtungen rühren nur von jenen Kunden, deren Portfolio zum Zeitpunkt $t - 1$ einen minimalen Anteil an Freien Fonds hatte. Je „näher“ sie an der Verteilung „100% GF, 0% FF, 0% DK“ waren, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass viel vom Garantiefonds zum Deckungskapital umgeschichtet wird. Dies entspricht positiven Cashflowtermen.

Auf der anderen Seite haben Kundenvermögen, die in etwa „80% GF, 0% FF, 20% DK“ verteilt sind, das größte Potential bzgl. Umschichtungen, aus denen negative Cashflowterme resultieren. Letztere Verteilung kann nicht exakt angegeben werden, da die Aufteilung auch noch von der Aktienvolatilität abhängt. Darauf wird aber später noch eingegangen.

Ökonomisch können diese Beobachtungen jedoch sofort interpretiert werden: Treiber der Umschichtungen sind allein die Kapitalmarktentwicklungen, sprich der Aktienkurs in dem Modell. Je höher der Anteil der Fonds, desto höher ist also die Umschichtung. Da der Verkauf von Freien Fonds zugunsten von Garantiefonds aber keine cashflowwirksame Umschichtung darstellt, ist schon erklärt, warum erstere Topfverteilung das größte Potential hat negative Cashflowterme zu generieren.

Bei der Begründung letzterer Verteilung muss beachtet werden, dass Deckungskapital im Kundenvermögen vorhanden sein muss, damit überhaupt in Richtung Fonds umgeschichtet werden kann. Unter dieser Nebenbedingung haben wiederum Kundenvermögen mit maximalem Garantiefondsvermögensanteil das größte Potential. Es handelt sich also um eine aktive Nebenbedingung, die sich komplementär zur Maximierung des Garantiefondsanteil verhält.

Diese Erkenntnisse werden später sehr nützlich sein, um effiziente Hedging-Strategien zu entwickeln.

Der verdichtete Bestand sollte also folgende Eigenschaft haben: das Verhältnis von Anzahl der Kunden, deren Portfolio sich in der Nähe einer dieser beiden „Hotspot-Verteilungen“

befindet, zu Bestandsgröße entspricht in etwa dem Verhältnis der Originaldaten. In der Sprache der Stochastik heißt das, dass die Verteilungsparameter - also insbesondere die Dichte der Verteilung der Kunden in Abhängigkeit der einzelnen Topfverteilungen - des verdichteten Bestands an die echten Daten „gefittet“ werden sollen.

Wie gut das gelingt, hängt von der Feinheit der Diskretisierung ab. Dass Variante „D“ nur marginal genauer als „C“ ist, lässt sich damit deuten, dass der gemachte Rundungsfehler mit sinkendem Verdichtungsgrad gegen null konvergiert.

Aufgrund obiger Überlegungen wurde die Variante „C“ - also zehn Kunden im Bestand ($\eta_0 = 10$) - gewählt. Dieser Kompromiss ist natürlich nach oben relaxierbar, sollte aber einen sehr geringen Einfluss auf die qualitativen Ergebnisse haben. Diese zehn „Modellkunden“ können auch als homogene Kundengruppen interpretiert werden, welche bei der Datengrundlage jeweils eine Mächtigkeit von 4.000 Kunden haben.

Daraufhin wurde die Verteilung der Kundentopfverteilungen im verdichteten Bestand an die Originaldaten angepasst:

Kunde j	$B^j(t)$ in T. €	$V^j(0)$ in T. €	$B_{sum}^j(0)$ in T. €	$\frac{V_{DK}^j(0)}{V^j(0)}$	$\frac{V_{GF}^j(0)}{V^j(0)}$	$\frac{V_{FF}^j(0)}{V^j(0)}$
1	250	4.450	4.500	0	70 %	30 %
2	250	4.450	5.180	0	80 %	20 %
3	250	4.450	6.670	0	100 %	0
4	250	4.450	6.880	20 %	80 %	0
5	250	4.450	7.050	30 %	70 %	0
6	250	4.450	7.393	50 %	50 %	0
7	250	4.450	7.565	60 %	40 %	0
8	250	4.450	7.735	70 %	30 %	0
9	250	4.450	7.907	80 %	20 %	0
10	250	4.450	8.079	90 %	10 %	0

Die monatlichen Nettobeiträge $B^j(t)$ und die Startvermögen $V^j(0)$ sind für alle Kunden j gleich hoch, sodass jeder einzelne Kunde gleich gewichtet wird. Daraufhin wurden die Summen der gezahlten Beiträge $B_{sum}^j(0)$ für jeden Kunden j so gewählt, dass die sich daraus ergebenden Topfaufteilungen $\frac{V_{DK}^j(0)}{V^j(0)}$, $\frac{V_{GF}^j(0)}{V^j(0)}$ und $\frac{V_{FF}^j(0)}{V^j(0)}$ einen Musterbestand aufbauen, dessen Verteilungsparameter denen des echten Bestandes ähneln. Dabei kann natürlich bemerkt werden, dass der Anteil der Freien Fonds am gesamten Bestand mit ca. 4% relativ gering ausfällt. Diese der Kapitalmarkthistorie geschuldete Schiefe der Verteilung ist keine einschränkende Annahme. Vielmehr ist es von Nöten, dass die Startverteilung in sich konsistent gewählt wird. Es wäre beispielsweise unlogisch, fünf Kundenguthaben zu 100% im Deckungskapital und die restlichen fünf Kundenvermögen ausschließlich mit hohen Anteilen an Freien Fonds starten zu lassen. Welche Aktienhistorie könnte denn eine solche Bestandsverteilung hervorgerufen haben?

In diesem Zusammenhang ist es auch angebracht, noch einmal darauf hinzuweisen, dass unterstellt wurde, dass kein Neugeschäft existiert. Da auch sonst im Modell keine äußeren Einflüsse auf die Verteilung der Töpfe - abgesehen von den Aktienkursentwicklungen - möglich sind, haben die Topfverteilungen der einzelnen Kunden eine Tendenz dazu, sich der durchschnittlichen Topfverteilung des gesamten Bestandes anzunähern. Dies geschieht

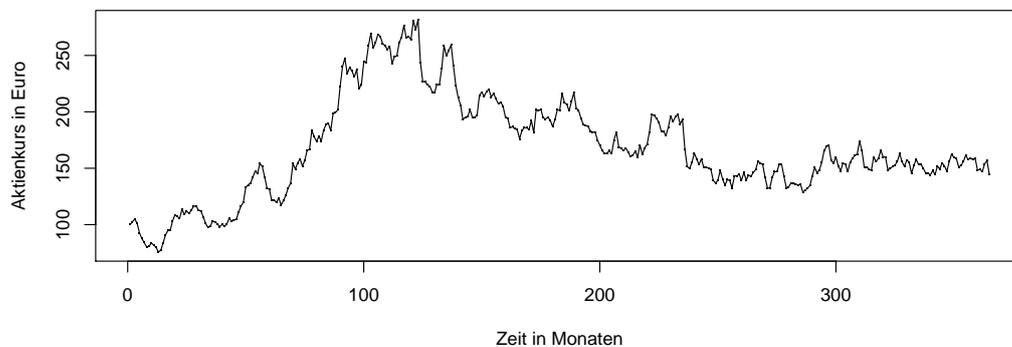
nämlich genau dann, wenn über den monatlichen Zeitverlauf kumulierte Kursstürze auftreten, weil so Kundenvermögen, die in Fonds investiert sind, sich sukzessive in Richtung Deckungskapitaltopf bewegen, während Kundenvermögen, die größtenteils im Deckungskapitaltopf investiert sind, nur geringfügig von der Aktienmarktbeziehung beeinträchtigt werden.

Der Simulation des Cashflows steht nun nur noch die Frage im Weg, inwiefern der in Kapitel 5.3.4 definierte Stornovektor m_{sto} und der Ausscheidevektor durch Tod m_{tod} bei einem zehnköpfigen Bestand in die Berechnung eingeht. Der pragmatischste und auch durchgeführte Weg dieses Problem in den Griff zu bekommen, ist es, den Cashflow zunächst roh - also ohne Vertragsbeendigungen - zu rechnen, und anschließend die beiden Vektoren und die daraus resultierenden Leistungen zu integrieren.

6.2 Ein deterministisches Beispiel zum Einstieg

Um später die Darstellungen der stochastisch modellierten Cashflows besser zu verstehen, ist es sinnvoll zunächst einen deterministischen Pfad zu betrachten. Daran sind die Zusammenhänge zwischen Aktienkursentwicklung, Umschichtungen und Cashflow bei weitem leichter nachvollziehbar.

Abbildung 6.1: Beispielhafte 30-monatige Aktienkursentwicklung mit 30 % Volatilität p. a. (eigene Darstellung)



Zu sehen ist ein simulierter Aktienkursverlauf, dessen Anfangswert ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X_0 = 100$ sein soll.

Der Aktienkurs wurde in R (vgl. R Development Core Team [29]) mittels Aktienrenditen mit folgendem Code simuliert:

```
{DeltaS <- function(t) {t <-
(100*(exp(0.3*sqrt(1/6000)))^sum(rbinom(500,1,0.49966776))
*((exp(-0.3*sqrt(1/6000)))^(500-sum(rbinom(500,1,0.50033224))))-100)/100}
```

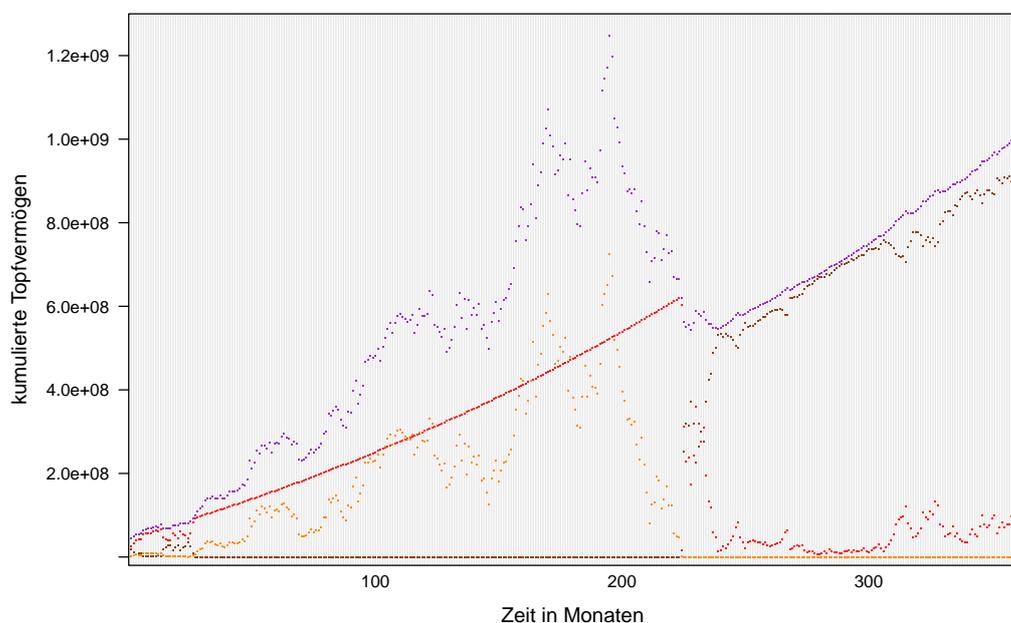
```

j=vector()
for(i in 1:361)
j[i]=DeltaS(1)}
J<- function(t) if (t==1){t<-100} else {t<- Jv[t-1]* (1+j[t])}
Jv<-vector()
for(i in 1:361)
Jv[i]=J(i)
Jv

```

Ausgehend von diesem einzelnen Szenario wird nun gezeigt, wie sich die Topfaufteilungen des Bestands ohne Ausscheidevektor entwickeln würden.

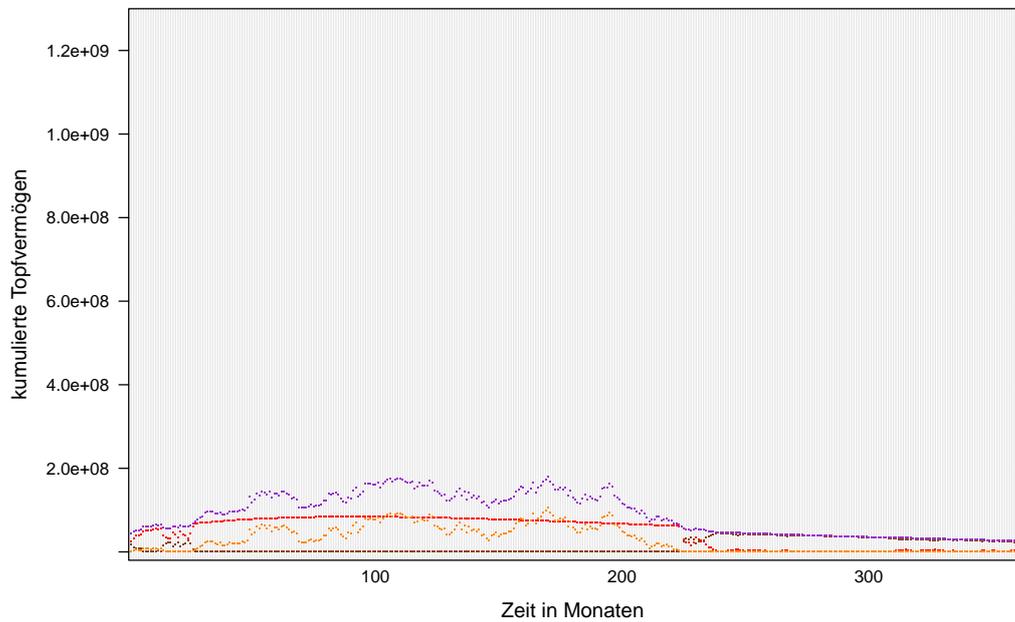
Abbildung 6.2: Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf der Topfverteilungen - Rohentwicklung (eigene Darstellung)



Dargestellt sind die Vermögen im **Deckungskapital** (in braun), **Garantiefonds** (in rot) und **Freien Fonds** (in orange) und als Summe dieser drei das **gesamte Vermögen** (in violett) des Bestandes - jeweils in Abhängigkeit der Zeit. Das Gesamtvermögen aller Kunden hat hier generell einen ansteigenden Trend, der aber bedingt durch die Kursstürze in den Monaten 173 bis 208 gedämpft wird.

Nun werden die durch Storno und Tod induzierten Effekte in der Bestandsgröße integriert.

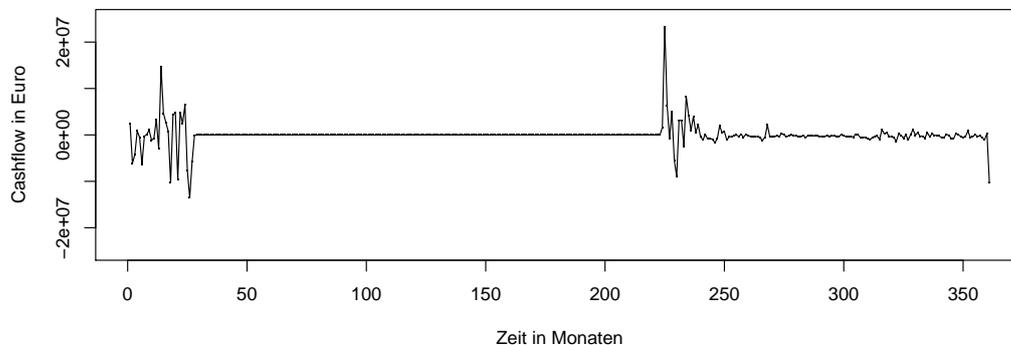
Abbildung 6.3: Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf der Topfverteilungen - mit Ausscheidevektor (eigene Darstellung)



Es gelten die gleichen Farbzusordnungen wie in Abb.6.2. Zu allererst fällt auf, dass die Vermögen um ein Vielfaches geringer ist, was auf den enorm großen Einfluss von Tod und Storno auf die Bestandsgröße während einem längeren Zeitraum zurück zu führen ist. Dieser Umstand wiegt nach einigen Jahren das Anwachsen der kumulierten Kundenvermögen (aufgrund der Beitragszahlungen) auf.

Ausgehend von diesem einen Aktienkurs ist der entsprechend Kapitel 5.3.4 definierte Cashflow in der Abbildung 6.4 zu sehen.

Abbildung 6.4: Beispielhafter deterministischer 30-monatiger Verlauf des Cashflows (eigene Darstellung)

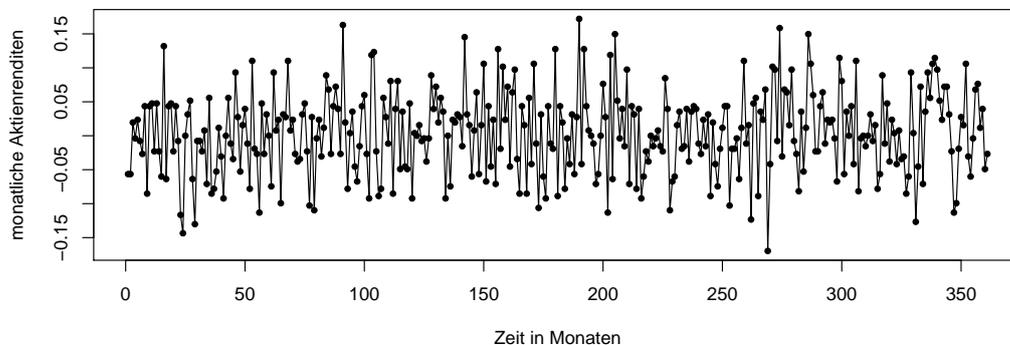


In der Abbildung 6.4 können mehrere Dinge beobachtet werden:

- (i) Der Cashflow kann sehr volatil sein.
- (ii) Hohe Cashflowvolatilität korreliert mit hohem Kundenvermögen
- (iii) Der Cashflow weist zum Zeitpunkt $t = 360$ einen negativen Wert auf, der auf die einmaligen Rentenauszahlungen zurückzuführen ist.
- (iv) Die Cashflowvolatilität hängt von den Topfverteilungen ab, da die Freien Fonds als Risikopuffer fungieren können. Hier ist in den Monaten 29 bis 223 der Extremfall eingetreten, dass jedes einzelne Kundenvermögen fast ausschließlich in Fonds investiert ist und somit Umschichtungen cashflowunwirksam bleiben - sprich das Sicherungsvermögen des Versicherer wird davon nicht berührt (vgl. Kapitel 5.3.1). Als Konsequenz daraus ist der Cashflow in diesen Zeiträumen fast null.
- (v) Die in ii) erwähnte Korrelation ist nur schwach, da sie von dem in iv) erklärten Effekt überlagert wird.

Eine notwendige Bedingung für die Cashflowvolatilität zu einem festen Zeitpunkt t ist also das Vorhandensein von einzelnen Kundenvermögensverteilungen, deren Freier Fonds Anteil zum Zeitpunkt $t - 1$ bei 0 oder fast 0 lag. Des Weiteren muss der Betrag der Aktienrendite des letzten Monats größer als 0 sein.

Abbildung 6.5: Beispielhafte monatliche Aktienrenditen mit 30 % Volatilität p. a. (eigene Darstellung)



In dieser Abbildung sind die monatlichen Aktienrenditen obigen Aktienkurses dargestellt. Zusammen mit Grafik 6.4 kann beobachtet werden, dass das Minimum des Cashflows in Abhängigkeit der Zeit keineswegs von der im Zeitablauf beobachtbaren maximalen monatlichen Aktienrendite herrühren muss. In diesem Beispiel befindet sich das Minimum des Cashflows in $t = 26$ mit einem Wert von $-13,5$ Mio. €, während die Aktienrendite des Monats $(25; 26]$ mit $5,2\%$ aber offensichtlich nicht die im Zeitablauf Größte ist. Mit umgekehrtem Vorzeichen gilt die Aussage ebenso wenig: Der maximale Cashflowwert beträgt $23,3$ Mio. € und ist in $t = 225$ zu beobachten. Die dies induzierende Aktienrendite beträgt $-2,3\%$ und ist auch nicht der minimal beobachtbare Wert im Zeitverlauf. Die Begründung dafür liegt in dem schon erwähnten Aspekt, dass je näher zu fixem t sich die einzelnen Kundenvermögensverteilungen an den in Kapitel 6.1 erläuterten jeweiligen „Hotspots“ befinden, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit eines betragsmäßig sehr hohen Cashflowwerts in $t + 1$.

6.3 Stochastische Simulationen

Nachdem die Zusammenhänge innerhalb eines Szenarios verinnerlicht wurden, können nun allgemeinere Betrachtungen in den Vordergrund rücken. Für die stochastischen Simulationen wurde ein Code in R (vgl. R Development Core Team [29]) geschrieben, der pro Szenario einen Cashflow über den 30-jährigen Zeitraum berechnet.

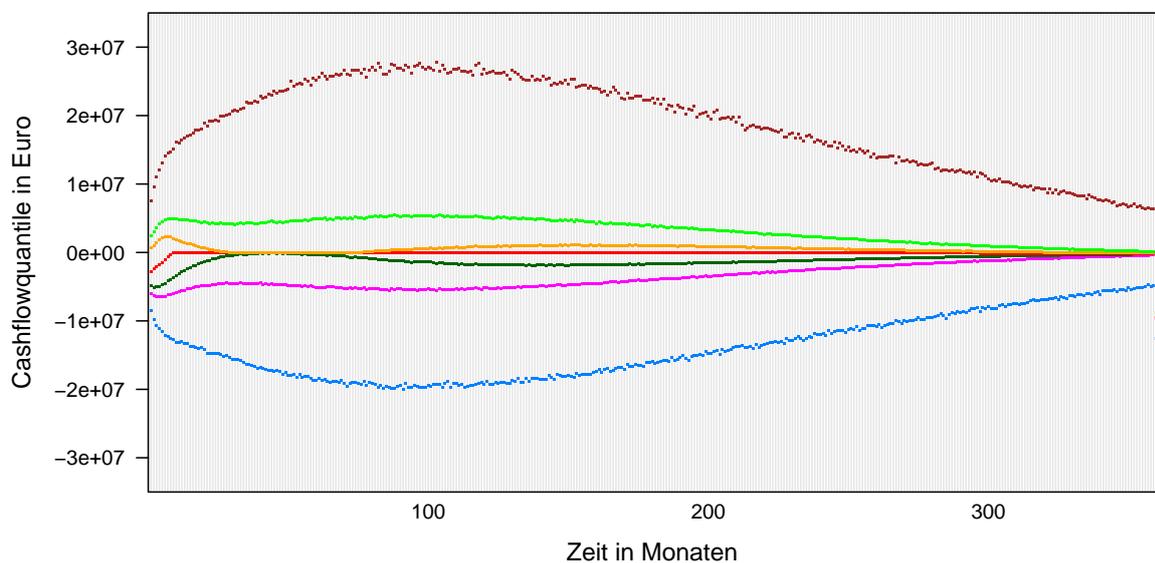
Als Inputparameter dienen der Umschichtungsalgorithmus aus Kapitel 3.2, der Kapitalmarkt aus Kapitel 5.1, die Produktmodellierung aus Kapitel 5.2, die Cashflowdefinition aus Kapitel 5.3.4 und die Startparameter aus Kapitel 6.1. Für die Wahl der Szenarienzahl sollte einerseits der Wert von 10.000 nicht unterschritten werden, um eine hinreichend große statistische Mächtigkeit zu erreichen und andererseits aber nur so viele Szenarien

betrachtet werden, dass der Rechner in handhabbarer Zeit auch Ergebnisse liefert. Dies gewärtigend lautete der gemachte Kompromiss 50.000 Szenarien. Die Laufzeit für die Berechnung der Cashflows betrug 9,7 Stunden, wobei ein 64-bit System, ein Intel Core i3-370M Prozessor und 4 GB DDR3 ram verwendet wurden.

Bei der stochastischen Cashflowanalyse hat es keinen Sinn mehr, einzelne Topfverteilungen oder Aktienkurse mit dem Cashflow in Verbindung zu bringen. Die in letzterem Unterkapitel auf elementarer Ebene gewonnenen Erkenntnisse können aber bei der Interpretation der Ergebnisse durchaus nützlich sein.

Ein adäquater Ansatz, um qualitative Schlüsse aus graphischen Darstellungen von stochastischen Simulationen ziehen zu können, ist es, Quantile der Verteilungen der 50.000 Cashflowszenarien zu fixierten Zeitpunkten zu betrachten.

Abbildung 6.6: Cashflowquantile bei 30% Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)



Für diese und die folgende Grafik sind die Quantile in den jeweils gleichen Farben dargestellt: 99,5% in braun, 90% in hellgrün, 80% in orange, 50% in rot, 20% in dunkelgrün, 10% in pink und 0,5% in blau.

Nun können Aussagen herausgelesen werden, die aus deterministischer Sicht nicht möglich waren. Solche sind z. B. :

- (i) „Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t liegt der Wert des Cashflows $CF(t)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5% oberhalb des 0,5%-Quantils“.
- (ii) Zwei zum Median (50% - Quantil) symmetrische Quantile können auch verknüpft werden: „Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t liegt der Wert des Cashflows $CF(t)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% innerhalb eines Korridors, dessen Untergrenze durch das 10%-Quantil und dessen Obergrenze durch das 90%-Quantil beschrieben wird“.

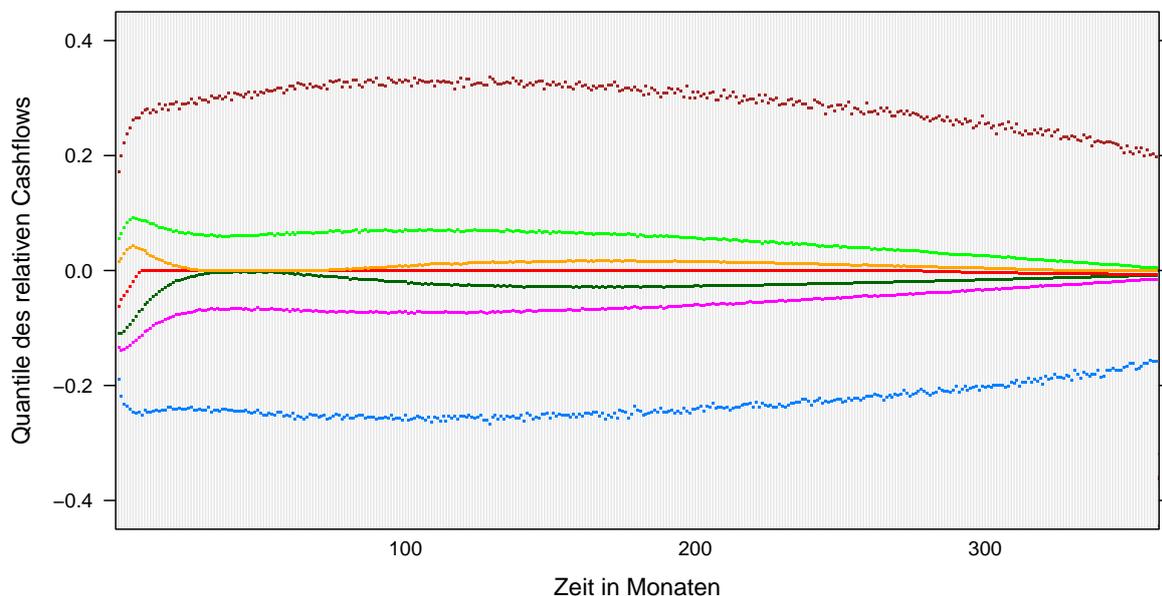
- (iii) Die Höhe des **Medians** ist in den ersten Monaten negativ, danach näherungsweise gleich null und im letzten Monat wieder negativ. Diese Aussagen können als Backtest der Simulation betrachtet werden. Erstere Aussage bedeutet, dass die Startverteilung - im Sinne Umschichtungsalgorithmus und des unterstellten konstanten Zinses r , an die auch die Drift der Aktie kalibriert ist - schief ist. Eine Umschichtung in Richtung Fonds ist also in den ersten Monaten wahrscheinlicher. Die zweite Aussage ist konsistent mit dem Äquivalenzprinzip (Gleichung 2.34), und Letztere mit der Entwicklung der Deckungsrückstellung in der Aufschubzeit (vgl. Abb. 2.2). Hierbei muss beachtet werden, dass der Erwartungswert des historischen Cashflows - also in der Zeit von Vertragsbeginn bis $t = 0$ - positiv gewesen sein muss.

Um die Darstellung unabhängiger von den unterstellten Anfangsbedingungen wie der Höhe der Nettomonatsbeiträge und dem Gesamtkundenvermögen zu Beginn zu machen, hilft die Betrachtung der relativen Cashflows. Um selbigen zu berechnen, wird der absolute Cashflow zum Zeitpunkt t ins Verhältnis zum Gesamtkundenvermögen zum Zeitpunkt $t-1$ gesetzt:

$$CF_{rel}(t) = \frac{CF(t)}{V_{t-1}}. \quad (6.4)$$

Diese Größe zeigt, gemessen am derzeitigen Gesamtkundenvermögen, dann bei Betrachtung stochastischer Simulationen insbesondere an, wie umfangreich die Umschichtung einen Monat später sein kann.

Abbildung 6.7: Quantile des relativen Cashflows bei 30% Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)



Die Quantildarstellung ist wieder 99,5% in braun, 90% in hellgrün, 80% in orange, 50% in rot, 20% in dunkelgrün, 10% in pink und 0,5% in blau.

Mithilfe dieser Grafik können den relativen Umschichtungsvolumina auch noch Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Auffallend ist hier das deutlich konstantere Verhalten der einzelnen Quantile im Zeitablauf im Vergleich zur absoluten Cashflowdarstellung. Insofern erlaubt diese Abbildung auch weitreichendere Schlüsse, da die qualitativen Ergebnisse unabhängig von der hier gemachten Modellannahme „kein Neugeschäft“ sind. Damit verbleiben die Kapitalmarktvolatilität und der Kapitalmarktzins als letzte treibende Parameter. Die Sensitivität der Ergebnisse bzgl. ersteren Inputs wird im folgenden Kapitel parallel zum Hedging untersucht werden.

Eine Eigenschaft, die die Abbildungen 6.6 und 6.7 gemeinsam haben, ist, dass das **99,5 %-Quantil** für fast alle $t = 1, \dots, 360$ betragsmäßig größer als das **0,5 %-Quantil** ist. Diese intuitiv nicht offensichtliche Eigenschaft kann aber durch die Asymmetrie der in Kapitel 6.1 angedeuteten „Hotspots“ erklärt werden:

Die Höhe der Umschichtung zum Zeitpunkt t korreliert mit der durchschnittlichen Höhe der Garantiefondstöpfe der einzelnen Kunden zum Zeitpunkt $t - 1$. Bei Umschichtungen in Richtung Fonds ist die Höhe der Garantiefondstöpfe aber zusätzlich mit der Nebenbedingung verknüpft, dass überhaupt Vermögen im Deckungskapitaltopf vorhanden ist, welches umgeschichtet werden kann. Dieser Logik folgend liegt die Obergrenze der Umschichtung in t bei $V^n(t-1)$, welche aber nur dann erreicht wird, wenn in $t-1$ das gesamte Kundenvermögen zu 100% im Garantiefonds war und der Fonds einen Verlust von 20% oder mehr innerhalb des Monats $(t-1, t)$ erfährt. Hingegen ist die Untergrenze, also die aus Umschichtungen resultierende maximale Zahlungsverpflichtung zu einem Zeitpunkt t , nicht analytisch berechenbar. Wird z. B. eine maximale monatliche Aktienrendite $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$ von 0,3 unterstellt, so würde die Untergrenze bei $-52\% \cdot V^n(t-1)$ liegen. Selbige wird logischerweise dann erreicht, wenn gilt:

$$V_{GF}^j(t-1) = 48\% \cdot V^j(t-1) \quad \forall j$$

und

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = 0,3.$$

Die Beträge dieser Extrema geben aber weder Aufschluss über deren Eintrittswahrscheinlichkeiten noch über die Verteilungen an den Rändern.

Kapitel 7

Cashflow-Hedging

7.1 Theorie

Mit Hilfe der Cashflowquantile (Abb. 6.6 und 6.7) konnte das Risikopotential zwar eingegrenzt werden, eine Quantifizierung des Risikos - also eine Bepreisung der enthaltenen Garantien und Optionen des Produkts - ist dies aber noch nicht. Wie schon in den vorigen Kapiteln angedeutet, soll dieser Preis mit einem Hedging ermittelt werden. Dabei muss zunächst einmal geklärt werden, was hier mit Hedging gemeint ist. Unter Hedging wird allgemein die Absicherung gegen Finanzrisiken verstanden, wobei diese Risiken in den meisten Fällen durch das eigene Portfolio und dessen mögliche Wertminderung im Zeitablauf induziert werden.

Es sollen allerdings hier nicht das eigene Kapitalmarktportfolio, sprich die Aktiva des Versicherungsunternehmens, sondern die durch die Verbindlichkeiten des dynamischen Drei-Topf-Hybrids erzeugten Cashflows „gehedgt“ werden. Ein Cashflow-Hedge hat das Ziel die Volatilität des Cashflows zu minimieren ohne dabei dessen Erwartungswert exorbitant klein werden zu lassen. Aufgrund der Struktur der Verbindlichkeiten kann der Cashflow sehr unterschiedliche Ausprägungen annehmen. Hier sei auch noch einmal auf das vorige Kapitel verwiesen: Obwohl der Median der Cashflowwerte zu jedem Zeitpunkt $t = 0, \dots, 359$ in etwa gleich null ist (vgl. Abb. 6.6), zeigt sich doch in der Abb. 6.4 ein Szenario mit einem sehr volatilen Cashflow. Der Grund dafür liegt darin, dass Käufe bzw. Verkäufe von Fonds die Hauptursache eines betragsmäßig hohen Cashflowwerts sind. Im Gegensatz zum klassischen Aktienportfolio-Hedging wird also nicht nur der prozentuale Verlust der Aktien, sondern der komplette Wert der Aktien gehedgt. Daraus resultierend kann beim Cashflow-Hedging kein perfekter Hedge - sprich vollständige Eliminierung des Risikos - existieren. Das Risiko des Cashflows muss außerdem auch aufgespalten werden: Einerseits existieren die durch negative Cashflowwerte entstehende Liquiditätsrisiken (vgl. Kapitel 4.3.6) und andererseits die durch positive Cashflowwerte entstehende Zinsrisiken (vgl. Kapitel 4.3.7 und 4.3.8).

Um ein Hedgeportfolio aufzubauen, das gegen beiden Risiken absichert, müssten also notwendigerweise dafür auch mindestens zwei Finanzinstrumente herangezogen werden. Wir konzentrieren uns im Folgenden aber auf den Versuch das Liquiditätsrisiko zu eliminieren. Dies wird nicht nur damit motiviert, dass der Preis für diesen Teil des Hedgings die positiven Cashflowwerte en passant auch verringert. Insofern ist es nur logisch Zinsrisiken in

einem zweiten Schritt zu behandeln. Des Weiteren wäre für das Hedging von Zinsrisiken eine stochastische Simulation der Zinsstrukturkurve von Nöten, was aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Von der Idee her wäre aber klar, dass dabei Derivate (z. B. Floorlets) gekauft würden, die gegen ein Abfallen des Kapitalmarktzinses unter das Niveau der Mindestgarantieverzinsung absichern.

7.2 Konstruktion einer Hedgingstrategie

Nun zum Liquiditätsrisiko:

Es wird ein dynamisches, effizientes Quantilhedging gesucht. Der Vorteil gegenüber einem varianzminimalen Hedging besteht darin, dass es sich auf die relevanten, also nur auf die betragsmäßig hohen negativen Cashflowwerte konzentrieren kann. Um eine effiziente Hedgingstrategie zu kreieren, müssen monatlich - den aktuellen Informationsstand nutzend - adäquat gewichtete, geeignete Derivate gekauft werden.

Intuitiv klar ist, dass bei einem effizienten Hedging eines Cashflows, der größtenteils durch monatlich hervorgerufene Umschichtungen induziert wird, mindestens monatliche Portfolioadjustierungen von Nöten sind.

Geeignete Derivate sind jene, die an der Quelle des Risikos ansetzen. Hierbei muss herausgestellt werden, dass die Quelle des Liquiditätsrisikos, das durch negative Cashflowwerte entstehen kann, eine Kurssteigerung der Aktie X ist. Diese führt nämlich zu Umschichtungen der Kundenvermögen in Richtung der Fondstöpfe, sodass der Cashflow aus Versicherungsunternehmenssicht negativ wird. Infolgedessen fiel die Derivatwahl auf europäische Call-Optionen mit einmonatiger Laufzeit. Der Strikepreis U dieser Call-Option hat dabei maßgeblichen Einfluss auf die Effizienz des Hedgings. Dabei wird $U_{Call}(t) = \rho \cdot X_t$ gesetzt, wobei dann ρ das Verhältnis von Strikepreis der gekauften Calloption zum aktuellen Aktienkurs beschreibt. Dieses ρ , welches auf $(0, \infty)$ beschränkt ist, gilt es also u. a. zu optimieren.

Es sollte außerdem auch der Informationsstand zum Zeitpunkt t , also die derzeitigen Kundenvermögensaufteilungen auf die jeweiligen drei Töpfe genutzt werden. Wie schon in Kapitel 6.1 als „Hotspots“ erläutert, korreliert die Höhe des Garantiefondsvermögens bis zu einem gewissen Grad mit dem Umschichtungspotential. Dies gewärtigend kann die Höhe der kumulierten Garantiefondsvermögen als Maßzahl herangezogen werden, um zu bestimmen, wieviel Geld in das Hedgingportfolio zu investieren ist. Alleinstehend kann diese Vorgabe aber nicht zu einer optimalen Hedgingstrategie führen, da Kundenvermögen mit einfließen, deren Portfolio aufgrund ausschließlicher Investition in Fonds (z. B. zu 100 % im Garantiefonds) eine Deckungskapitalauflösung gar nicht erlaubt. Folglich bedarf es eines Filters, der nur die Garantiefondsvermögen addiert, die auch das Potential haben, das Deckungskapitalvermögen signifikant zu verringern. Der Begriff signifikant hängt davon ab, wie genau die Zielfunktion der Optimierung der Hedgingstrategie aussehen soll, wor-

auf später noch eingegangen wird. Der Filter wird mit einer Indikatorfunktion modelliert, dessen Argument die Bedingung ist, ob der Anteil des Deckungskapital am Vermögen eines einzelnen Kunden einen Schwellenwert ξ erreicht. Für die Optimierung der Hedgingstrategie gilt es also, einen Schwellenwert ξ zu finden, der angibt, ob die Höhe des Garantiefondsvermögens eines Kunden in die Hedgingposition mit einfließt oder nicht. Der Wert ξ ist aufgrund der Ausführungen in Kapitel 3.3 auf $[0, 1]$ beschränkt.

Nicht minder bedeutend ist die Wahl der Gewichtung λ . Dieser positive Faktor beeinflusst die Größe des Hedgingvolumens. Theoretisch hat diese Variable einen nach oben offenen Definitionsbereich. Dadurch dass Optionen (in einer long position) einen negativen Erwartungswert haben, ist aber intuitiv klar, dass ein infinitesimal großes λ nicht optimal sein kann.

Die Hedgingstrategie zu den Zeitpunkten $t = 0, \dots, 359$ wird nun wie folgt definiert:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]}{\pi_{\rho, X_t}^{Call}(t)}. \quad (7.1)$$

Hierbei gibt \mathcal{H} zum Zeitpunkt t an, wie viele Call-Optionen gekauft werden sollen. Im Zähler steht die dafür benötigte Geldmenge und im Nenner der Preis einer einzelnen Call-Option. Die in der Zeit dynamische Strategie $\mathcal{H}(t)$ hängt von den Variablen λ , ξ und ρ ab.

Damit der Strikepreis der Calloption bei der Optimierung dieser drei Variablen nicht für jeden Zeitpunkt t neu berechnet werden muss, wird die Strategie an dem Startwert des Aktienkurses $X_0 = 100$ normiert. Wir formen \mathcal{H} also wie folgt um:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]}{\pi_{\rho, X_t}^{Call}(t)} \cdot \overbrace{\frac{\pi_{\rho, X_t}^{Call}(t)}{\pi_{\rho, X_0}^{Call}(0)} \cdot \frac{X_0}{X_t}}^{=1}} \\ &= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]}{\pi_{\rho, X_0}^{Call}(0)} \cdot \frac{X_0}{X_t} \end{aligned} \quad (7.2)$$

für $t = 0, \dots, 359$.

Dies ist zulässig, weil der Calloptionspreis $\pi_{\rho, X_t}^{Call}(t)$ für jedes $t = 0, \dots, 360$ eine lineare Funktion vom Aktienkurs X_t ist. Nun können mit den Annahmen des CRR-Modells analog zu Kapitel 5.1 die benötigten Call-Optionspreise $\pi_{\rho, X_0}^{Call}(0)$ berechnet werden. Die Konstruktion der Hedgingstrategie \mathcal{H} erhebt keinen Anspruch auf Optimalität. Ein Beweis dessen wäre mit nicht mehr handhabbarem numerischem Aufwand verbunden. Dennoch lassen sich durch dieses Gerüst effiziente Strategien entwickeln, wie sich später auch noch herausstellen wird.

Ausgehend vom Kauf von $\mathcal{H}(t)$ Calloptionen hat der Hedger einen Monat später einen Payoff mit folgender Struktur:

$$\begin{aligned}
V_{\mathcal{H}}^{Call}(t+1) &= \mathcal{H}(t) \cdot \max[X_{t+1} - \rho \cdot X_t; 0] \\
&= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]}{\pi_{\rho \cdot X_0}^{Call}(0)} \cdot \frac{X_0}{X_t} \cdot \max[X_{t+1} - \rho \cdot X_t; 0] \\
&= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]}{\pi_{\rho \cdot X_0}^{Call}(0)} \cdot X_0 \cdot \max\left[\frac{X_{t+1}}{X_t} - \rho; 0\right]
\end{aligned} \tag{7.3}$$

für $t = 0, \dots, 359$.

Zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, 359$ passieren also jeweils zwei Dinge: Es werden Call-Optionen gekauft, um den Cashflow in $t + 1$ abzusichern, und es entstehen Payoffs aus den Call-Optionen, die in $t - 1$ gekauft wurden.

Dadurch entsteht ein durch das Hedging \mathcal{H} induzierter Portfolioprozess $\Phi^{\mathcal{H}}(t)$, der folgendermaßen aufgebaut ist:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\mathcal{H}}(t) &= V_{\mathcal{H}}^{Call}(t) - \mathcal{H}(t) \cdot \pi_{\rho \cdot X_t}^{Call}(t) \\
&= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_{t-1}} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j((t-1)^+)}{V^j((t-1)^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j((t-1)^+)]}{\pi_{\rho \cdot X_0}^{Call}(0)} \cdot X_0 \cdot \max\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} - \rho; 0\right] \\
&\quad - \lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_t} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(t^+)}{V^j(t^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(t^+)]
\end{aligned} \tag{7.4}$$

für $t = 1, \dots, 359$.

Im Zeitpunkt $t = 0$ ist eine Anfangsinvestition nötig, die sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\mathcal{H}}(0) &= -\mathcal{H}(0) \cdot \pi_{\rho \cdot X_0}^{Call}(0) \\
&= -\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_0} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(0)}{V^j(0)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(0)].
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Diese Anfangsinvestition ist für ein gegebenes λ nach unten beschränkt:

$$\Phi^{\mathcal{H}}(0) \geq -\lambda \cdot (1 - \xi) \cdot V^{\eta_0}(0). \tag{7.6}$$

Im Endzeitpunkt $t = 360$ wird zwar nichts mehr investiert, es können aber noch Payoffs entstehen:

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathcal{H}}(360) &= V_{\mathcal{H}}^{\text{Call}}(360) \\ &= \frac{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_{359}} [\mathbb{1}_{\{\frac{V_{DK}^j(359^+)}{V^j(359^+)} > \xi\}} \cdot V_{GF}^j(359^+)]}{\pi_{\rho \cdot X_0}^{\text{Call}}(0)} \cdot X_0 \cdot \max\left[\frac{X_{360}}{X_{359}} - \rho; 0\right].\end{aligned}\quad (7.7)$$

Zusammen genommen mit dem Cashflow $CF(t)$ aus Kapitel 5.3.4 berechnet sich der gehedgte Cashflow $CF^{\mathcal{H}}(t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}CF^{\mathcal{H}}(t) &= CF(t) + \Phi^{\mathcal{H}}(t) \\ &\text{für } t = 0, \dots, 360.\end{aligned}\quad (7.8)$$

7.3 Optimierung der Variablen dieser Hedgingstrategie

Nun ist es an der Zeit zu definieren, was genau das für den Cashflow optimale Hedging darstellt. Dabei stehen einem beim Quantilhedging zwei Möglichkeiten zur Auswahl:

- (i) die Minimierung der Wahrscheinlichkeit ψ zu gegebenem Wert Γ des ψ -Quantils
- (ii) die Maximierung des Werts Γ des ψ -Quantils bei fixierter Wahrscheinlichkeit $\psi \in (0; 1)$.

Die Wahl fiel auf ii), da bei ersterer Variante der Wert des ψ -Quantils schwer zu motivieren ist. Im Gegensatz dazu kann bei der Wahl der Wahrscheinlichkeit ψ das Vorbild Solvency II herangezogen werden, das ein Sicherheitsniveau von 99,5% fordert. Übertragen auf das Hedging der negativen Cashflowwerte heißt das, dass der Wert des 0,5%-Quantils $\Gamma_{0,5\%}$ des Cashflows $CF^{\mathcal{H}}$ zu jedem Zeitpunkt t maximiert werden soll. Da sich das Gerüst der Hedgingstrategie \mathcal{H} im Zeitverlauf nicht ändert, kann auch alternativ der Erwartungswert dieses Quantils maximiert werden. Dadurch wird die Dimension des Optimierungsproblems entscheidend verringert.

Das Optimierungsproblem lautet also:

$$\begin{aligned}Opt_{\mathcal{H}} : \\ \max \quad & \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}}(t))] \\ \text{u. d. N.} \quad & \xi \in [0; 1] \\ & \lambda \in (0; \infty) \\ & \rho \in (0; \infty).\end{aligned}\quad (7.9)$$

Dabei hängt die Funktion $\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}}(t))]$ von den drei zeitunabhängigen Variablen ρ , ξ und λ ab. Es handelt sich also hier um ein nichtlineares Optimierungsproblem, welches aber aufgrund der impliziten Stochastik nicht analytisch lösbar ist.

Um sich der Lösung zu nähern, ist nach folgendem numerischen Verfahren vorgegangen worden:

Zunächst wurde eine weitere Dimensionsreduktion durchgeführt, und zwar durch Fixierung der Variable ρ . Es ist wichtig, dass mit ρ begonnen wird, da die Zielfunktion von $Opt_{\mathcal{H}}$ am sensitivsten auf marginale Änderungen dieser Variable reagiert.

Nachdem $\rho = 1$ als Startwert gewählt wurde, vereinfacht sich das Optimierungsproblem $Opt_{\mathcal{H}}$ zu einem neuen Teiloptimierungsproblem:

$$\begin{aligned} Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1}} : \\ \max \quad & \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}_{\rho=1}}(t))] \\ \text{u. d. N.} \quad & \xi \in (0; 1) \\ & \lambda \in (0; \infty). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Das Problem $Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1}}$ kann nun weiter vereinfacht werden, indem ein geeigneter Startwert für ξ gewählt wird. Es wurde mit $\xi = 0, 1$ begonnen, da dies aus ökonomischer Sicht ein guter Schätzer ist.

Jetzt sind ρ und ξ fixiert und es kann mittels steilstem Abstiegsverfahren ein geeignetes λ gesucht werden. Dafür wird also $Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1}}$ weiter vereinfacht zu

$$\begin{aligned} Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1, \xi=0,1}} : \\ \max \quad & \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}_{\rho=1, \xi=0,1}}(t))] \\ \text{u. d. N.} \quad & \lambda \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Angenommen das Versicherungsunternehmen will maximal Kapital in Höhe der Hälfte des gesamten Kundenvermögens für den Aufbau des Hedgingportfolios investieren. Dann muss $\lambda \leq 0, 5$ sein. Es wurde also der Startwert $\lambda = 0, 5$ und eine Schrittweite in der Größe von $0, 01$ gewählt.

Nachdem ein optimales λ für dieses Teilproblem gefunden wurde, fokussieren wir wieder ξ und vergleichen zwei verschiedene Hedgingstrategien mit unterschiedlichen ξ , um folgendes Problem lösen zu können:

$$\begin{aligned} Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}}} : \\ \max \quad & \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}_{\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}}}(t))] \\ \text{u. d. N.} \quad & \xi \in (0; 1). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Dafür wird ausgehend von einem Startwert von $\xi = 0, 1$ ein effizienteres Hedging gesucht wird. Dabei wurde mit einer Schrittweite von $0, 01$ in Richtung des steilsten Abstiegs gesucht. Im Detail heißt das, dass $\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}_{\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,1}}(t))]$ mit $\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}_{\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,11}}(t))]$ verglichen wurde. Um überhaupt erst eine Vergleichbarkeit im Sinne von Effizienz herstellen zu können, benötigen wir eine weitere Maßzahl.

Dafür wurde der diskontierte Portfolioprozess $\Phi^{\mathcal{H}}$ heran gezogen, der als die Kosten $\pi^{\mathcal{H}}$ des Hedgings definiert wird:

$$\begin{aligned}\pi^{\mathcal{H}} &= \sum_{t=0}^T \frac{1}{(1+r)^{(t/12)}} \cdot \Phi^{\mathcal{H}}(t) \\ &= \sum_{t=0}^T \frac{1}{1,03^{(t/12)}} \cdot \Phi^{\mathcal{H}}(t).\end{aligned}\tag{7.13}$$

Wenn nun $\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,1}(t))] < \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,11}(t))]$ und $\pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,1} < \pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,11}$ gilt, so kann kein Vergleich im Sinne von Effizienz oder Optimalität angestellt werden. Es muss also noch bei der Strategie „ $\xi = 0, 11$ “ eine Feinkalibrierung des Parameters λ vorgenommen werden. Dieser Parameter wird um ein $\epsilon > 0$ erhöht und zwar derart, dass dann entweder

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,1}(t))] &< \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}+\epsilon, \xi=0,11}(t))] \\ \text{und } \pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}, \xi=0,1} &> \pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=\lambda_{opt}+\epsilon, \xi=0,11}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=0,5, \xi=0,1}(t))] &> \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=0,5+\epsilon, \xi=0,11}(t))] \\ \text{und } \pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=0,5, \xi=0,1} &< \pi^{\mathcal{H}\rho=1, \lambda=0,5+\epsilon, \xi=0,11}.\end{aligned}$$

gilt. Mit anderen Worten wird λ so kalibriert, dass sich eine dominierte Strategie herauskristallisiert, die dann eliminiert werden kann. Durch diesen Trick werden die Hedgingvolumina dieser beiden Strategien angeglichen, da ein Filter, dessen Schwellenwert $\xi = 0, 1$ beträgt, logischerweise ein höheres Hedgingvolumen zur Folge hat als ein Filter, dessen Schwellenwert $\xi = 0, 11$ beträgt. Dies ist zulässig, weil eine marginale Erhöhung von λ in der Nähe des optimalen λ keine Veränderung der Effizienz der Hedgingstrategie verursacht.

Für den Fall, dass sich $\mathcal{H}_{\rho=1, \lambda=0,5+\epsilon, \xi=0,11}$ als effizienter herausstellt, wird für dieses ξ das zugehörige optimale λ mittels steilstem Abstiegsverfahren gesucht. Diese Prozedur wurde dann solange sukzessive wiederholt bis sich ein optimales ξ einstellte. Damit ist das Teiloptimierungsproblem $Opt_{\mathcal{H}_{\rho=1}}$ gelöst.

Nun kann ρ modifiziert werden. Es wurde auch hier mit einer Schrittweite von 0,01 in absteigender Richtung gesucht, was damit begründet werden kann, dass größere ρ zu teuer sind. Es wird also das Teiloptimierungsproblem $Opt_{\mathcal{H}_{\rho=0,99}}$ betrachtet und analog verfahren. Dieses Verfahren wurde nun für alle Werte bis $\rho = 0, 8$ durchgeführt.

Summa summarum ergeben sich damit 21 mal ca. fünf, also in etwa 100 Teiloptimierungsprobleme. Für eine Optimalitätsabfrage eines Teiloptimierungsproblem wurden 10.000 Simulationsdurchläufe herangezogen. Um den Rechenaufwand zu optimieren, wurde der R-Code so modifiziert, dass er mehrere Teiloptimierungsprobleme simultan löst. Dennoch betrug die Laufzeit zur Optimierung aller Teilprobleme mehrere hundert Stunden. Der dafür relevante Teil des Codes ist im Anhang zu finden.

7.4 Ergebnisse des Hedgings

Nun werden wir uns der Optimierung des „großen“ Optimierungsproblems $Opt_{\mathcal{H}}$ widmen. Dafür betrachten wir die detaillierten Ergebnisse der einzelnen niederdimensionalen Teiloptimierungsprobleme, die in der folgenden Tabellen ersichtlich sind.

Während die Werte der zweiten Spalte „ ξ_{opt} “ die optimalen Schwellenwerte zu gegebenem ρ sind, beschreiben die Wert der dritten Spalte „ λ_{opt} “ die optimalen Faktoren zu gegebenem ρ und ξ . In Spalte 4 können die erwarteten Kosten des Hedgings abgelesen werden. Die Schwankungen dieser nicht-deterministischen Hedgingkosten werden mit der Standardabweichung $\sigma_{\pi^{\mathcal{H}}}$ gemessen, welche in der darauf folgenden Spalte erkennbar sind. In der sechsten Spalte kann der Zielfunktionswert, also das 0,5 %-Quantil des gehedgten Cashflows betrachtet werden. Zuletzt sind auch durchschnittlichen Kosten Θ interessant, die wie folgt definiert sind:

$$\Theta^{\mathcal{H}} = \frac{\pi^{\mathcal{H}}}{\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}}(t))] - \mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF(t))]} .$$

Wir fokussieren exemplarisch die Kapitalmarktvolatilität $\sigma_X = 0,2$. Hierbei ist der zu erwartende Wert des 0,5 %-Quantils des ungehedgten Cashflows

$$\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF_{\sigma=0,2}(t))] = -10,20 \text{ Mio. €} .$$

ρ	ξ_{opt}	λ_{opt}	$\pi^{\mathcal{H}}$	$\sigma_{\pi^{\mathcal{H}}}$	$\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF_{\sigma=0,2}^{\mathcal{H}}(t))]$	$\Theta^{\mathcal{H}}$
0,79	0,20	0,34	4,76	13,43	-7,31	1,65
0,80	0,20	0,34	4,79	14,03	-7,21	1,60
0,81	0,20	0,33	4,89	14,44	-7,12	1,59
0,82	0,19	0,34	5,45	15,87	-7,00	1,70
0,83	0,19	0,34	5,78	16,79	-6,88	1,74
0,84	0,19	0,34	6,17	17,84	-6,74	1,78
0,85	0,18	0,34	6,82	19,39	-6,58	2,06
0,86	0,18	0,34	7,44	20,79	-6,40	2,23
0,87	0,17	0,34	8,47	22,86	-6,19	2,42
0,88	0,17	0,34	9,68	24,85	-5,97	2,62
0,89	0,17	0,33	11,10	26,47	-5,72	3,11
0,90	0,16	0,33	13,93	29,96	-5,42	3,68
0,91	0,15	0,32	17,58	33,33	-5,12	4,35
0,92	0,14	0,30	22,08	36,38	-4,80	5,23
0,93	0,13	0,28	28,25	40,23	-4,48	4,94
0,94	0,13	0,27	36,90	45,79	-4,19	6,15
0,95	0,12	0,24	45,34	49,69	-3,98	7,29
0,96	0,10	0,21	55,45	54,24	-3,90	8,81
0,97	0,10	0,19	66,19	59,42	-3,94	10,59

Mit Hilfe dieser Tabelle kann das optimale Hedging abgelesen werden: Die Konfiguration „ $\rho = 0,96$, $\xi = 0,10$ und $\lambda = 0,21$ “ weist den betragsmäßig niedrigsten Cashflowquantilwert auf. Allerdings kann dieses Hedging im Hinblick auf die anderen in der Tabellen ersichtlichen Strategien nicht als kostengünstig bezeichnet werden. Zudem schwanken die Kosten bei steigendem ρ stärker um ihren jeweiligen Erwartungswert. Die Kosten sind in der Praxis eine äußerst relevante Größe. Um diese mit einzubeziehen, erweisen sich die Durchschnittskosten $\Theta^{\mathcal{H}}$ als adäquater Indikator eines effizienten Hedgings, da sie eine Relation zwischen Nutzen und Kosten herstellen. Die Hedgingstrategie mit den Parametern „ $\rho = 0,81$, $\xi = 0,20$ und $\lambda = 0,33$ “ hat die geringsten Durchschnittskosten. Der Hedger kann hier je nach Risikoappetit zwischen dieser und der optimalen (im Sinne des ursprünglichen Optimierungsproblems) Strategie wählen. Auch Kompromisse - also ρ -Werte zwischen $0,81$ und $0,96$ und ihre zugehörigen optimalen ξ und λ - haben ihre Berechtigung. Dieser Zusammenhang ist vergleichbar mit der Effizienzkurve („Efficient Frontier“) der Portfoliotheorie nach Markowitz [25]. Abzuraten ist allerdings beispielsweise von der Strategie „ $\rho = 0,97$, $\xi = 0,10$ und $\lambda = 0,19$ “, da sie von „ $\rho = 0,96$, $\xi = 0,10$ und $\lambda = 0,21$ “ dominiert wird.

Um zu eruieren wie sensitiv Güte und Kosten des Hedgings auf Änderungen der Kapitalmarktvolatilität σ reagieren, wurden insgesamt drei Inputparameter, nämlich $\sigma_X = 0,2$, $\sigma_X = 0,3$ und $\sigma_X = 0,4$, betrachtet.

Die folgende Tabelle zeigt jeweils in Abhängigkeit der Aktienvolatilität σ_X die optimale (opt.) und effizienzoptimale (eff.) Strategie mit ihren jeweiligen Kosten und Zielfunktionswerten. Abgesehen von den drei Hedgingvariablen und der Kapitalmarktvolatilität sind die Werte in Mio. € angegeben.

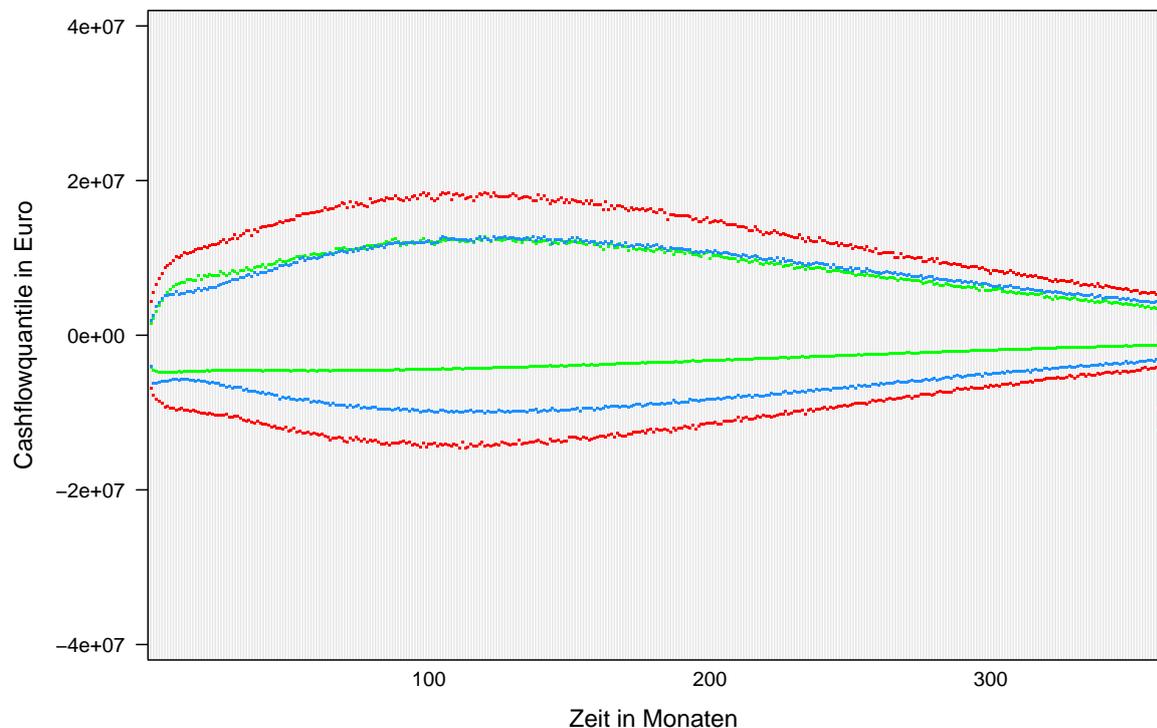
	$\sigma_X = 0,2$		$\sigma_X = 0,3$		$\sigma_X = 0,4$	
$\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF(t))]$	-10,2		-14,0		-17,2	
\mathcal{H}	opt.	eff.	opt.	eff.	opt.	eff.
ρ	0,96	0,81	0,95	0,70	0,95	0,70
ξ	0,10	0,20	0,14	0,27	0,18	0,27
λ	0,21	0,33	0,30	0,26	0,37	0,42
$\mathbb{E}[\Gamma_{0,5\%}(CF^{\mathcal{H}}(t))]$	-3,9	-7,1	-5,8	-10,8	-7,8	-13,1
$\mathbb{E}[\pi^{\mathcal{H}}]$	56,6	5,2	77,2	0,8	100,9	0,3
$\sqrt{Var}(\pi^{\mathcal{H}})$	54,6	14,5	72,7	8,9	85,6	18,2

Um die Ergebnisse etwas anschaulicher zu machen, wird wieder auf die aus Kapitel 6.3 bekannte Darstellungsform der Cashflowquantile zurückgegriffen. Bei einem Vergleich zwischen Cashflow mit und ohne Hedging mit allen betrachteten Quantilen wie in Abb. 6.6 würden die Abbildungen etwas unübersichtlich werden, sodass nun ausgewählte Quantile fokussiert werden.

Für die Abbildungen 7.1 ff gilt: Die **0,5% – bzw. 99,5% – Quantile des ursprünglichen Cashflows** sind in **rot** dargestellt. Gleichzeitig sind die **Quantile des optimal gehedgten Cashflows** in **grün** und die **Quantile des effizienzoptimalen Hedgings** in **blau** abgebildet.

Zuerst betrachten wir den Vergleich der Quantile der Cashflows bei einer Kapitalmarktvolatilität von 20 %.

Abbildung 7.1: Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 20 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)



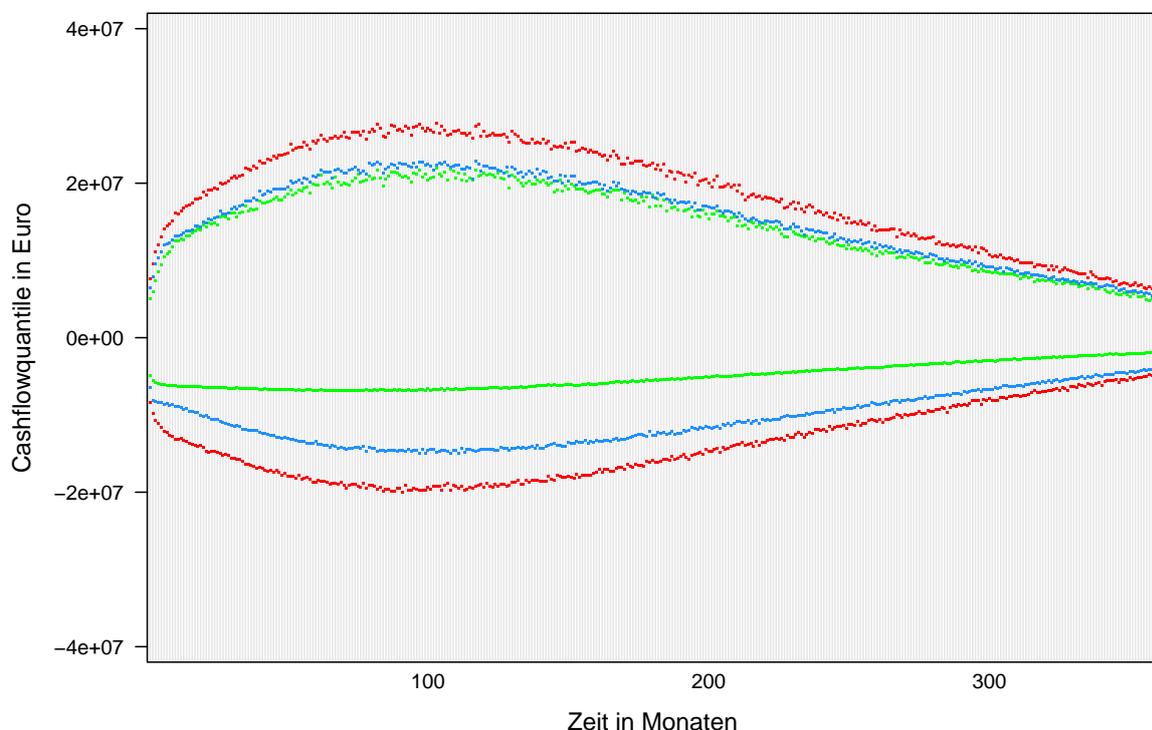
Dabei ist zunächst einmal zu beobachten, dass das gewünschte Primärziel des Hedging erfüllt ist: Die 0,5 %-Quantile des **effizienzoptimal** und des **optimal** gehedgten Cashflows sind für alle $t = 0, \dots, 360$ größer als das **0,5 %-Quantil des ursprünglichen Cashflows**. Die Abbildung 7.1 erlaubt durch die symmetrische Wahl der Quantile auch eine Indikation, in welchem Korridor sich der Cashflowwert zu gegebenem Sicherheitsniveau befindet. So liegt beispielsweise der Cashflowwert zu einem Sicherheitsniveau von 99 % in dem Korridor, der durch die **zwei roten Graphen** begrenzt ist. Genauso übertragbar sind die Interpretationen auf die gehedgten Cashflowwerte und deren Korridore, die sich zwischen **den Graphen in grün** bzw. **den Graphen in blau** befinden.

Außerdem ist zu erkennen, dass das **99,5 %-Quantil des ursprünglichen Cashflows** deutlich über dem **99,5 %-Quantil des optimal gehedgten** bzw. **effizienzoptimal gehedgten** liegt.

Die angewandte Hedgingstrategie, die ursprünglich das Liquiditätsrisiko reduzieren sollte, hat also einen nützlichen Nebeneffekt. Durch die Hedgingkosten werden die maximalen Cashflowwerte verringert, sodass en passant das Zinsrisiko auch gemindert wird.

Ausgehend von den hier diskutierten Hedgings kann das Versicherungsunternehmen aber immer noch entscheiden, ob ein Zinsrisikohedging zusätzlich von Nöten ist.

Abbildung 7.2: Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 30 % Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)

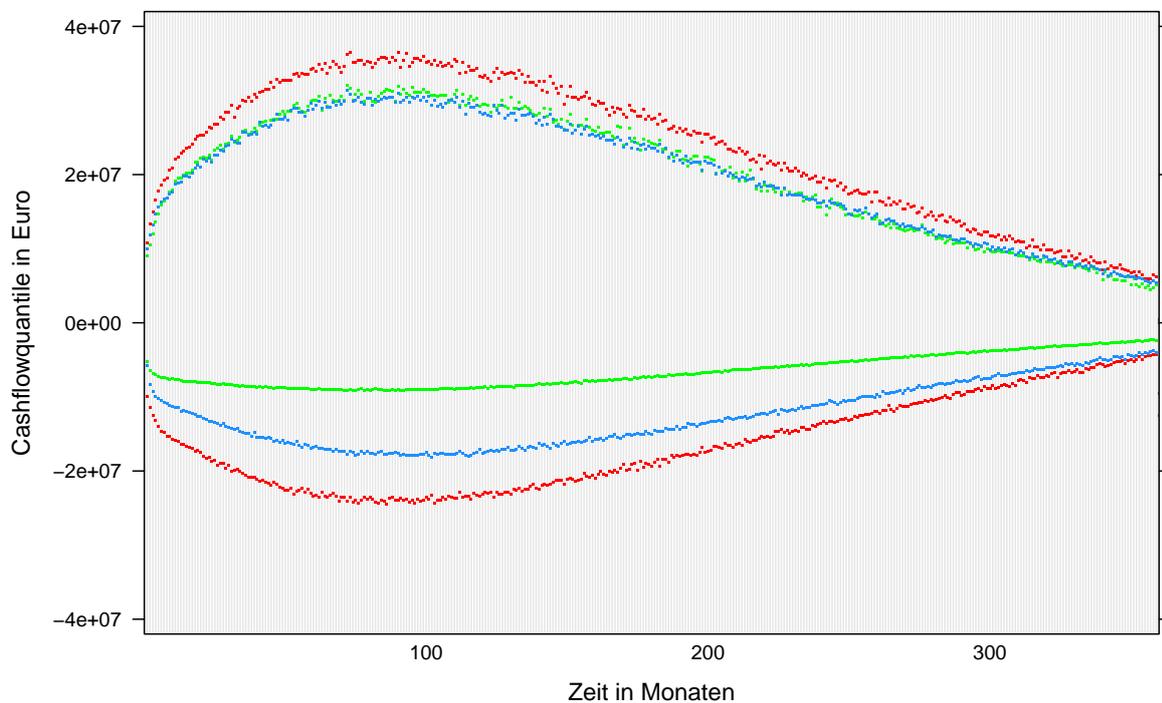


Bei einer Kapitalmarktvolatilität von 30 % sind die **Quantile des ungehedgten Cashflows** im Vergleich zu vorangegangener Grafik bemerkbar betragsmäßig größer. Das **0,5 %-Quantil des effizienzoptimalen Hedgings** ist hier relativ nah am ungehedgten Cashflow dran, was durch den geringen zugrunde gelegten Strikepreis erklärt wird. Qualitativ ändert sich sonst nichts.

Bezugnehmend auf die Gleichung (7.5) kann hier exemplarisch die Höhe der Initialinvestition des **optimalen Hedgings** berechnet werden. Wenn wir von der Strategie „ $\rho = 0,95$, $\xi = 0,14$ und $\lambda = 0,30$ “ ausgehen, belaufen sich diese auf:

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\mathcal{H}}(0) &= -\mathcal{H}(0) \cdot \pi_{\rho, X_0}^{Call}(0) \\
 &= -\lambda \cdot \sum_{j=1}^{\eta_0} [\mathbb{1}_{\left\{ \frac{V_{DK}^j(0)}{V^j(0)} > \xi \right\}} \cdot V_{GF}^j(0)] \\
 &= -0,30 \cdot 13.352.660 \text{ €} \\
 &= -4.005.798 \text{ €}.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Abbildung 7.3: Vergleich der Quantile des Cashflows mit denen der gehedgten Cashflows bei 40% Aktienvolatilität p. a. (eigene Darstellung)



Hier fällt neben den betragsmäßig noch größeren Quantilwerten auf, dass der schon angesprochene Effekt der Hedgingstrategie, den Wert des **99,5%-Quantils** zu verringern nicht größer ausfällt als bei $\sigma_X = 0,2$. Es kann folglich postuliert werden, dass er unabhängig von der Kapitalmarktvolatilität ist. Daraus lässt sich folgern, dass je höher die Kapitalmarktvolatilität, desto größer der Nutzen der Integration eines weiteren Derivats in das Hedgingportfolio, das das Zinsrisiko gezielt absichert.

Die Ergebnisse sind stark von der unterstellten Kapitalmarktvolatilität abhängig. Zu dem ist sie in der Realität kein Parameter, sondern eine Variable. Dies gewärtigend könnte die Schnittmenge der Effizienzkurven - also ρ -Werte zwischen 0,81 und 0,95 - als optimaler kapitalmarktvolatilitätsunabhängiges Intervall heran gezogen werden. Im Idealfall passt das Kapitalanlagemanagement die Strategie an die aktuell beobachtbare Volatilität an. Dennoch verbleibt dann ein Volatilitätsrisiko - also die Unsicherheit bzgl. der insbesondere kurzfristigen Veränderungen der Volatilität.

Um dieses Problem zu untersuchen, wären aufwendigere Kapitalmarktmodelle wie z. B. das Heston-Modell von Nöten.

Kapitel 8

Fazit

In der Diplomarbeit konnten die Risiken der dynamischen Drei-Topf-Hybride mit einem Cashflowhedging-Ansatz bewertet werden. Die Arbeit war unter anderem deshalb interessant, weil dabei unterschiedlichste mathematische Disziplinen hilfreich waren: Während die Lebensversicherungsmathematik nur gelegentlich benötigt wurde, stand die Finanzmathematik insbesondere bei der Kapitalmarktmodellierung und beim Hedging im Vordergrund. Um diese beiden mathematischen Gebiete verstehen zu können, war auch wahr-scheinlichkeitstheoretisches Wissen unabdingbar. Außerdem wurde die Statistik gestreift, als es darum ging, den Bestand zu verdichten und die Cashflows zu analysieren. Zu guter Letzt kamen Techniken der Optimierung beim Umschichtungsalgorithmus und bei der Hedgingstrategie zum Einsatz.

Das in dieser Arbeit verwendete Kapitalmarktmodell könnte neben der angesprochenen variablen Volatilität auch noch durch die stochastische Simulation von Zinskurven sinnvoll erweitert werden. Das gilt insbesondere dann, wenn in der Praxis die Entscheidung getroffen wird, den Cashflow nicht zu hedgen.

Statt das Kapitalmarktmodell zu ändern wäre es interessanter, die Inputparameter des Produkts zu modifizieren. Spezielle Produktderivate könnten dabei in den Fokus rücken, wie z. B. das sogenannte potentielle „Nachziehen der Garantie“ - also eine Erhöhung der Sicherungslinie - in den Fällen, in denen das Kundenvermögen verhältnismäßig hoch ist. Diese existierende Produktvariante birgt nämlich ein noch größeres Umschichtungsrisiko für das Versicherungsunternehmen.

Andererseits ließe sich das Produkt auch so verändern, dass die Umschichtungsvolumina verringert oder limitiert werden, ohne dass dabei die Garantie für den Kunden verloren geht. Eine alternative Maßnahme, das Risiko zu begrenzen, wäre das Neugeschäft für die dynamischen Drei-Topf-Hybrid-Produkte in Kapitalmarktkrisen zu beschränken. Ebenso überlegenswert ist die Idee, dieses Neugeschäft nur so lange zu erlauben, bis der Drei-Topf-Hybrid-Bestand einen gewissen Anteil am gesamten Lebensversicherungsbestand erreicht. Dadurch könnten positive Wechselwirkungen bzw. Diversifikationseffekte zum klassischen Lebensversicherungsbestand in hinreichend großem Maße genutzt werden. Diese Erkenntnisse flossen direkt in die jeweiligen Arbeitskreise des Lebensversicherungsunternehmens

ein und bildeten die Basis für Managemententscheidungen und weitere umfangreiche Analysen.

In jedem Fall aber müssen der Preis der Garantien und Optionen bzw. die Hedgingkosten in die Prämie einkalkuliert werden. Auch wenn dies zu einem Tradeoff mit der Produktattraktivität bzw. der Performance aus Kundensicht führt, so hat bei einem Versicherungsunternehmen der Grundsatz „Staying alive“ Vorrang - auch im Sinne des Kunden.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Albrecht and R. Maurer. *Investment- und Risikomanagement*, volume 2. Schäffer-Poeschel, 2005.
- [2] D.F. Babbel and A.M. Santomero. Financial risk management by insurers: An analysis of the process. *The Journal of Risk and Insurance*, 64. JG, Heft 2, 1997.
- [3] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3(3):195-213, 1976.
- [4] C. Cottin and S. Döhler. *Risikoanalyse*. Vieweg-Teuber, 2009.
- [5] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385-407, 1985.
- [6] J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Econometrics*, 7:229-263, 1979.
- [7] H.-P. Deutsch. *Derivate und Interne Modelle*. Schäffer-Poeschel, 2008.
- [8] Deutsche Aktuarvereinigung. DAV-Sterbetafel T. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2008-12-04-DAV-2008-T-R-NR.pdf>, 2008.
- [9] EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Authority. QIS5 - Technical Specifications. <http://ec.europa.eu>, 2010.
- [10] European Union. Directive 2009/138/ec. *Official Journal of the European Union*, 2009.
- [11] D. Farny. *Versicherungsbetriebslehre*, volume 5. Versicherungswirtschaft GmbH Verlag, 2011.
- [12] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance: An Introduction In Discrete Time*, volume 3. De Gruyter, 2008.
- [13] Gabler. Gabler Wirtschaftslexikon. <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/1362/ausfallrisiko-v8.html>.
- [14] Gabler. *Gabler Wirtschaftslexikon*. F. Wagner, 2011.
- [15] N. Gatzert and H. Schmeiser. Implicit options in life insurance: Valuation and risk management. *Working Papers on Risk Management and Insurance*, 26, 2006.

- [16] B. Gehrige and H. Zimmermann. *Fit for Finance: Theorie und Praxis der Kapitalanlage*. FAZ Verlag, 1997.
- [17] H.U. Gerber. *Lebensversicherungsmathematik*. Springer, 1986.
- [18] S. Graf, M. Hauser, and H.-J. Zwiesler. Hedging von garantierten Ablaufleistungen in Fondspolizen. *Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften*, 20, 2009.
- [19] H. Gründl and H. Perlet. *Solvency II & Risikomanagement - Umbruch in der Versicherungswirtschaft*. Gabler, 2005.
- [20] J. Hibbert, P. Morbray, and C. Turnbull. A stochastic asset model & calibration for long-term financial planning purposes. <http://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/hibbert0.pdf>, 2001.
- [21] J. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*, volume 7. Pearson, 2009.
- [22] A. Kling. *Modellierung, Bewertung und Risikoanalyse von Zinsgarantien in konventionellen deutschen Lebensversicherungsverträgen*. ifa Schriftenreihe, 2008.
- [23] M. Kochanski and B. Karnarski. Solvency capital requirement for hybrid products. *Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften*, 08, 2011.
- [24] U. Lipowsky. *Prölss Versicherungsaufsichtsgesetz*, volume 11. C.H. Beck, 1996.
- [25] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77-91, 1952.
- [26] P. Menzel. Optionen in Dynamischen Hybridprodukten. *Der Aktuar* 14, 1:9-12, 2008.
- [27] T. Møller. Hedging equity-linked life insurance contracts. *North American Actuarial Journal*, 5:79-95, 2001.
- [28] T. Møller and M. Steffensen. *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge University Press, 2007.
- [29] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2011. ISBN 3-900051-07-0.
- [30] A. Reuß and J. Ruß. Herbsttagung der DAV Lebensgruppe: Innovative Lebensversicherungsprodukte. <http://www.ifa-ulm.de/downloads/Innovative-Produkte-Solvency-II.pdf>, 2010.
- [31] A. Seemann. Replizierende Portfolios in der Lebensversicherung. *Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften*, 02, 2009.
- [32] A. Siebert. Aktuarielle Fragen zu dynamischen Hybridprodukten. *Der Aktuar* 14, 2:79-82, 2008.

Anhang

```
P96 <- function(t) {ifelse (j[t]<=-0.04, t<-0, t<-((1+j[t])*100-96))}
{CFk02 <- function(t) { t <- ( CF02v[t] +
(0.21)*(((
(if (V1_DKv[t-1]/V1vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V1_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V2_DKv[t-1]/V2vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V2_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V3_DKv[t-1]/V3vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V3_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V4_DKv[t-1]/V4vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V4_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V5_DKv[t-1]/V5vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V5_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V6_DKv[t-1]/V6vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V6_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V7_DKv[t-1]/V7vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V7_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V8_DKv[t-1]/V8vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V8_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V9_DKv[t-1]/V9vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V9_GFv[t-1]} else {0}) +
(if (V10_DKv[t-1]/V10vUv[t-1]>0.1) {etav[t-1]*V10_GFv[t-1]} else {0})
)/4.97974592259782) * (P96v[t])
-
(
(if (V1_DKv[t]/V1vUv[t]>0.1) {etav[t]*V1_GFv[t]} else {0}) +
(if (V2_DKv[t]/V2vUv[t]>0.1) {etav[t]*V2_GFv[t]} else {0}) +
(if (V3_DKv[t]/V3vUv[t]>0.1) {etav[t]*V3_GFv[t]} else {0}) +
(if (V4_DKv[t]/V4vUv[t]>0.1) {etav[t]*V4_GFv[t]} else {0}) +
(if (V5_DKv[t]/V5vUv[t]>0.1) {etav[t]*V5_GFv[t]} else {0}) +
(if (V6_DKv[t]/V6vUv[t]>0.1) {etav[t]*V6_GFv[t]} else {0}) +
(if (V7_DKv[t]/V7vUv[t]>0.1) {etav[t]*V7_GFv[t]} else {0}) +
(if (V8_DKv[t]/V8vUv[t]>0.1) {etav[t]*V8_GFv[t]} else {0}) +
(if (V9_DKv[t]/V9vUv[t]>0.1) {etav[t]*V9_GFv[t]} else {0}) +
(if (V10_DKv[t]/V10vUv[t]>0.1) {etav[t]*V10_GFv[t]} else {0})
))) }}
Hedkk02 <- function(t) {t<-(CF02v[t]-CFk02v[t])*1.03^-((t-1)/12)}
P96v<-vector()
P96v[1]=0
CFk02v<-vector()
CFk02v[1]=-304059
Hedkk02v<-vector()
Hedkk02v[1]=2804059
CFk02l=list()
Hedkk02l=list()
```

```
for (k in 1:50000)
{
CFk021[[k]]=CFk02v
Hedkk021[[k]]=Hedkk02v
{DeltaS<-function(t) {t <- ( 100*
(exp(0.2*sqrt(1/6000)) )^sum(rbinom(500,1,0.500308510664302))
*((exp(-0.2*sqrt(1/6000)))^(500-sum(rbinom(500,1,0.499691489335698))))
-100)/100}
j=vector()
for(i in 1:361)
j[i]=DeltaS(1)
for(i in 2:361){
P96v[i]=P96(i)
CFk02v[i]=CFk02(i)
Hedkk02v[i]=Hedkk02(i)
}}}
```