Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Allokation von Risikokapital auf Versicherungsportfolios

Diplomarbeit

von

Michael Urban

Themenstellerin:	Prof. Dr. Claudia Klüppelberg
Betreuer:	Prof. Dr. Claudia Klüppelberg und
	Dr. Rolf Stölting
Abgabetermin:	15. November 2002

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 15. November 2002

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Frau Professor Dr. Claudia Klüppelberg für die freundliche und stets hilfreiche Betreuung.
Weiterhin bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Dr. Rolf Stölting und Herrn Jörg Dittrich für ihre professionelle Hilfe.
Für die immerwährende moralische Unterstützung gilt mein Dank meiner Schwester Nicole und meinem Vater Bruno Urban.
Herrn Thomas Koenen danke ich für das Korrekturlesen.
Nicht zuletzt gilt mein ganz spezieller Dank meiner Freundin Stefani Kottmann, die mich stets mit ihrer tatkräftigen Hilfe und mit sehr viel Verständnis unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Versicherungspolicen eines Versicherungsunternehmens sind unter bestimmten Gesichtspunkten zu Geschäftsbereichen (zum Beispiel Feuerversicherungen, Haftpflicht, usw.) zusammengefasst, die die einzelnen Positionen des Versicherungsportfolios darstellen. Aus langjähriger Erfahrung sind die Schadenverteilungen und somit auch die Ertragsverteilungen für die verschiedenen Geschäftsbereiche relativ genau bekannt. Aufgrund dieser Schadenverteilungen soll den einzelnen Portfoliopositionen des Versicherers das Risikokapital entsprechend zugeteilt werden. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen wird für ein Versicherungsportfolio, das aus n Positionen besteht, eine Abbildung

$$\Phi : L^n \to \mathbb{R}^n$$

gesucht, wobei L eine Teilmenge der Menge der Zufallsvariablen darstellt. Um das Problem möglichst allgemein zu halten, wird die Größe des Risikokapitals K als exogen gegeben angenommen. Somit werden die Φ_i als Zuteilungskoeffizienten aufgefasst, d.h. das dem i^{ten} Geschäftsbereich zugeteilte Kapital beträgt $\Phi_i K$. Somit muss für die Abbildung Φ weiter gelten, dass $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i = 1$ und $\Phi_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Die Kapitalallokation soll das Risiko widerspiegeln, das die einzelnen Portfoliopositionen für das Gesamtportfolio darstellen. Dementsprechend unterteilt sich das Verfahren der Allokation des Risikokapitals in zwei Schritte:

1.) Auswahl eines Risikomaßes, d.h. mathematische Fassung des Risikobegriffes

2.) Allokation des Risikokapitals, aufgrund der durch das Risikomaß bestimmten Kennzahl

Unter einem Risikomaß ρ versteht man eine Abbildung

$$\rho : L \to \mathbb{R}.$$

Grundsätzlich werden keine weiteren Bedingungen an ein Risikomaß gestellt. Natürlich soll ein Risikomaß das subjektive Risikoverständnis mathematisch widerspiegeln. Ein klassisches Risikomaß ist zum Beispiel die Varianz.

Ist nun ein Risikomaß ausgewählt, so kann für alle Kombinationen der Versicherungspositionen das Risiko bestimmt werden. Aufgrund dieser Kennzahlen wird nun das Risikokapital aufgeteilt, d.h. es wird eine Abbildung

$$\Phi^R : R \times L^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\rho, X_1, \ldots, X_n) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1^R(\rho, X_1, \ldots, X_n) \\ \vdots \\ \Phi_n^R(\rho, X_1, \ldots, X_n) \end{pmatrix}$$

mit $\sum_{i=1}^n \Phi_i^R = 1$ und $\Phi_i^R \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gesucht, wobei R für eine Teilmenge der Menge der Risikomaße steht. Wiederum werden keine weiteren Bedingungen an die Abbildung gestellt. Aber auch hier gilt, dass sie eine „gerechte" Allokation des Risikokapitals gewährleisten soll.

Nachdem nun die Problemstellung bekannt ist, ergeben sich einige grundsätzliche Fragen:

1.) Warum benötigt man überhaupt eine Allokation des Risikokapitals?

2.) Was sind die Unterschiede zwischen einer allgemeinen Risikokapitalallokation und einer Allokation auf einem Versicherungsportfolio?

3.) Was ist die daraus folgende Zielsetzung dieser Arbeit?

1.) Risikokapital wird in der Versicherung benötigt, um Zeiten zu überbrücken, in denen die einzelnen Prämien aufgrund zufälliger Schadenfälle nicht ausreichen, diese Schäden zu bezahlen. Auf das Kapital ist eine marktgerechte Verzinsung durch das Versicherungsgeschäft zu erwirtschaften; dadurch stellt es einen Kostenfaktor für das Unternehmen dar. Diese Kosten für das Gesamtunternehmen sind nun „verursachungsgerecht" auf die verschiedenen Geschäftsbereiche aufzuteilen. Damit dient die Aufteilung des Risikokapitals auch der Erfolgsmessung eines Versicherungsunternehmens und stellt so ein wichtiges Steuerungselement dar.

2.) Die Unterschiede zwischen einer allgemeinen Risikokapitalallokation und einer Allokation auf ein Versicherungsportfolio ergeben sich hauptsächlich aus der besonderen Definition der Ertragsfunktionen, und der Abhängigkeit der Zufallsvariablen von der Größe des Geschäftsbereiches. Die zweite Frage wird ausführlich in Kapitel 1.3 beantwortet.

3.) Die Literatur ist reich an Risikomaßen und Allokationsmethoden, so dass sich diese Arbeit nicht mit der Entwicklung neuer Risikomaße oder Allokationsmethoden beschäftigt. Die Anforderungen sowohl an ein Risikomaß als auch an ein Allokationsverfahren lassen sehr viel Spielraum: Es existiert kein eindeutig bestes Verfahren zur Aufteilung des Risikokapitals. Das Ziel dieser Arbeit ist es fünf Risikomaße und fünf Allokationsmethoden, sowie deren Kombinationen zu untersuchen. Dabei werden sowohl die theoretischen Eigenschaften analysiert als auch praktische Erkenntnisse bei deren Umsetzung an einem Beispielportfolio gesammelt.

Die fünf Risikomaße werden in Kapitel 2 vorgestellt und ihre Eigenschaften analysiert. Die Auswahl geschah aufgrund der Verbreitung in der Praxis und der Bedeutung in der Forschung.

In Kapitel 3 werden die fünf Allokationsmethoden beschrieben. Zwei von diesen werden mit Methoden der Spieltheorie hergeleitet.

Kapitel 4 beinhaltet den entscheidenden theoretischen Vergleich der in Kapitel 3 vorgestellten Allokationsmethoden. Die Kriterien, die für den Vergleich herangezogen werden, ergeben sich aus Anforderungen, die in der Versicherungspraxis an eine Allokationsmethode gestellt werden.

Die Ergebnisse der Anwendung, der verschiedenen Kombinationen aus Risikomaßen und Allokationsverfahren auf ein Modellportfolio, werden in Kapitel 5 behandelt und diskutiert. Aus der Diskussion der Problemumsetzung werden Anhaltspunkte für die praktische Auswahl gegeben.

Abschließend werden in Kapitel 6 die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst, und ein Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten in diesem Bereich vorgeschlagen.

1.2 Begriffs- und Notationserklärung

Die hier dargestellten Begriffe und Notationen gelten für die gesamte Arbeit. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum. Alle Zufallsvariablen sind reellwertig und auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Mit $E[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$ bezeichnen wir den Erwartungswert von X. Wird der Erwartungswert nicht bezüglich $\mathbb{P}$, sondern eines Maßes $\mathbb{Q}$ gebildet, schreiben wir $E_\mathbb{Q}[X]$. Den bedingten Erwartungswert von X bezüglich eines Ereignisses A bezeichnen wir mit $E[X|A]$. Wie üblich steht $\text{var}[X]$ für die Varianz, $\text{cov}[X, Y]$ für die Kovarianz und $\varrho_{X,Y}$ für den Korrelationskoeffizienten von X und Y. Falls eine Zufallsvariable X von einer Variablen $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt, machen wir dies durch $X(\lambda)$ kenntlich.

Mit $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (oder $L^0(\mathbb{P})$ oder sogar L^0, falls dadurch keine Konfusion entsteht), bezeichnen wir den Raum aller Zufallsvariablen. Der Raum $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (oder $L^1(\mathbb{P})$ oder einfach L^1) ist der Raum aller integrierbaren, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($L^2(\mathbb{P})$, L^2) der Raum aller quadratintegrierbaren Zufallsvariablen. Für $X \in L^1$ ist $||X|| = E[|X|]$ die Norm von X. Den Raum aller beschränkten Zufallsvariablen bezeichnen wir mit $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (oder $L^\infty(\mathbb{P})$ oder L^∞).

Weiter bezeichnet $\mathcal{M}$ die Menge aller Risikomaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\mathcal{M}_f$ die Menge aller endlichen additiven und nicht-negativen Mengenfunktionen $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, die normalisiert sind, d.h. $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$.

Die Menge N besteht immer aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Zu einem Vektor x ist x' der transponierte Vektor, zu einer Matrix A ist A' die transponierte Matrix. e ist der Vektor $(1, 1, \ldots, 1)'$ und e^i steht für $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$, den i-ten Einheitsvektor. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet $x'y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ das Skalarprodukt.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \lambda \mapsto f(\lambda)$ und $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ ist $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\Lambda)$ die partielle Ableitung von f nach λ_i an der Stelle Λ.

Weiterhin findet auch folgende Indikatorfunktion Anwendung:

$$\mathbf{1}_A(a) = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \\ 0, & \text{falls } a \notin A. \end{cases}$$

Falls in einem Kontext nur positive Werte von Interesse sind, schreiben wir

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

und für negative Werte $x_- = (-x)_+$.

Eine Liste aller verwendeten Symbole befindet sich im Anhang.

1.3 Besonderheiten im Rahmen des Versicherungsgeschäftes

Diese Arbeit befasst sich mit der Kapitalallokation bei Versicherungen. Die Besonderheiten des Versicherungsgeschäftes erfordern eine exakte Rahmensetzung:

Im Kontext von Risikomaßen und Kapitalallokation stehen die Zufallsvariablen für risikobehaftete Erträge X, sowohl positive als auch negative Erträge. Bei Versicherungen setzen sich die Erträge aus Schadenszahlungen S und Prämien P zusammen:

$$X = P - S$$

Die Prämien wiederum bestehen aus zwei Komponenten. Zum einen ist dies die Grundprämie P_G, die dem Erwartungswert der Schadenverteilung entspricht, und zum anderen der Schwankungszuschlag P_S, der das Schwankungsrisiko der Schadensverteilung beinhaltet. Der Schwankungszuschlag enthält zudem Aufschläge, die durch das Geschäft des Versicherers entstehen. Die Versicherungspraxis aber befasst sich meist nur mit Schadenverteilungen, d.h. der Ausgabenseite. Dafür gibt es zwei Gründe:

1.) Die Information über den Erwartungswert, d.h. die Grundprämie, ist in der Schadenverteilung enthalten. Daher macht es prinzipiell keinen Unterschied, ob man die Verteilungen so verschiebt, dass ihr Erwartungswert 0 ist oder ob man dies später korrigiert.

2.) Der zweite Grund für eine Konzentration auf die Schadenverteilung ist, dass sich der Schwankungszuschlag nicht generell festlegen lässt. Er ist von äußeren Faktoren wie dem Geschäftsumfeld und auch dem Verhandlungsgeschick des Underwriters abhängig.

Daher wird der Sachverhalt vereinfacht, indem angenommen wird, dass die Prämie dem Erwartungswert entspricht. Im Folgenden wird dementsprechend davon ausgegangen, dass

$$X = E[S] - S. \tag{1.1}$$

Ändert sich die Größe Λ_i des i^{ten} Geschäftsbereiches, so ändert sich die Schadenverteilung S_i und somit die Ertragsvariable X_i des i^{ten} Geschäftsbereiches. Als Maßzahl Λ_i für die Größe des Geschäftsbereiches kann zum Beispiel das Prämien- bzw. das Haftungsvolumen dienen. Die Abhängigkeit der Ertragsvariable X_i von der Größe des Geschäftsbereiches wird durch $X_i(\lambda_i)$ kenntlich gemacht. X_i hängt nur von der Größe des i^{ten} Geschäftsbereiches ab. Dies bedeutet, dass λ_i die Variable ist, mit der $X_i(\lambda_i)$ an die Größe des Geschäftsbereiches angepasst wird und Λ_i steht für die eigentliche Größe des Geschäftsbereiches.

Bei der Skalierung, d.h. der Anpassung der Ertragsvariable an die Größe des Geschäftsbereiches, tritt eine weitere Besonderheit des Versicherungsgeschäftes auf. In der Portfoliotheorie geht man davon aus, dass die Zufallsvariablen linear in der Größe des Portfolios skaliert werden, d.h. wenn X die Ertragsverteilung einer Portfolioposition ist, so ist $2X$ die Ertragsverteilung einer doppelt so großen Portfolioposition. Diese Annahme ist im versicherungsmathematischen Kontext, aufgrund der Modellierung der Versicherungsportfolios, nicht mehr haltbar. Wird zum Beispiel eine Portfolioposition durch ein individuelles Modell dargestellt, d.h. die Schadenverteilung ist gegeben durch $S(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei die X_i iid Zufallsvariablen sind. Wird die Schadenverteilung mittels n skaliert, so gilt $S(2n) \neq 2S(n)$.

So kommen im Versicherungsgeschäft folgende Skalierungen vor:

1.) Lineare Skalierung

2.) Skalierung in den Parametern einer Verteilung, d.h. wenn $X(\lambda)$ eine Ertragsverteilung mit Parameter λ für eine Portfolioposition ist, dann ist $X(2\lambda)$ die Ertragsverteilung für eine doppelt so große Portfolioposition.

Lineare Skalierung und Skalierung in den Parametern müssen nicht äquivalent sein. Es kann sich ergeben, dass $X(2\lambda) \neq 2X(\lambda)$.

In dieser Arbeit werden Ableitungen der Risikomaße bezüglich der Größe der Geschäftsbereiche gebildet, da diese für zwei Allokationsverfahren in Kapitel 3 benötigt werden. Die nicht-lineare Skalierung erschwert die Berechnung dieser Ableitungen.

Eine letzte Besonderheit ist, dass verschiedene Schadenverteilungen nicht oder positiv korreliert sind, also keine negative Korrelation auftritt, was einen weiteren Unterschied zur Portfoliotheorie bei Kapitalanlagen darstellt.

1.4 Definition der verwendeten Verteilungen

Für Beispiele in dieser Arbeit und das Modellportfolio in Kapitel 5 werden folgende Schadenverteilungen benötigt. Aus diesen ergeben sich gemäß Gleichung (1.1) die Verteilungen für den Ertrag.

Definition 1.1 *Eine Zufallsvariable N besitzt die* **Poissonverteilung** *mit dem Parameter $\tau \in (0,\infty)$, wenn*

$$\mathbb{P}[N = n] = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} e^{-\tau} & \textit{falls } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Definition 1.2 *Eine Zufallsvariable X besitzt die* **Paretoverteilung** *mit den Parametern $\gamma \in (0, \infty)$ und $b \in (0, \infty)$, wenn für die Verteilungsfunktion von X*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, b) \\ 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{-\gamma} & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit für die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, b) \\ \frac{\gamma}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{-\gamma-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Definition 1.3 *Eine Zufallsvariable X besitzt die* **Lognormalverteilung**, *falls $\ln(X)$ normalverteilt ist. Man nennt $\ln(X)$, die zu X gehörige Normalverteilung. Falls $\ln(X)$ Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besitzt ergibt sich die Dichte von X*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}} \exp\left(\frac{-(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

Um die Schäden für eine Portfolioposition zu berechnen, wird häufig das kollektive Modell verwendet.

Definition 1.4 *Sei N eine Zufallsvariable aus $L^0(\mathbb{N}_0)$ und $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen aus $L^0(\mathbb{R}_+)$, die unabhängig von N ist und bei der die X_i die gleiche Verteilung wie X besitzen. Dann definiert man die Zufallsvariable S durch*

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Das Paar $(N, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ wird als **kollektives Modell**, *bestehend aus der* **Schadenzahl** *N und der* **Schadenhöhe** *X bezeichnet. S nennt man den* **Gesamtschaden** *des Bestandes.*

Kapitel 2

Risikomaße

Wie bereits in Kapitel 1.1 dargelegt wurde, ist ein Risikomaß ρ eine Abbildung

$$\rho : (L^0)^n \to \mathbb{R}^n.$$

Im Allgemeinen werden keine weiteren Bedingungen an ein Risikomaß gestellt.

Wie im vorangegangenen Kapitel beschrieben, stehen die Zufallsvariablen für risikobehaftete Erträge eines Versicherungsportfolios. Ein Risikomaß soll die Information, die in einer Verteilung enthalten ist, auf eine einzige Zahl reduzieren. Dies soll in einer Weise geschehen, dass Verteilungen, die nach dem Risikoempfinden des Anwenders ein höheres Risiko besitzen, einen größeren Wert erhalten als Verteilungen, die weniger risikobehaftet sind.

Die Literatur über Risikomaße ist reichhaltig. Als zwei bekannte Risikomaße kann man die Varianz und den Value-at-Risk nennen. Die Varianz ist das klassische Risikomaß aus der mathematischen Statistik, das auch schon Markowitz [32] für die Auswahl eines optimalen Portfolios benutzte. Der Value-at-Risk ist in der Praxis das gebräuchlichste Risikomaß im Bankensektor. Der Basler-Ausschuss für Bankenaufsicht hat seine Verwendung zur Bestimmung des Eigenkapitals bei Banken vorgeschlagen, was vom Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen in ein Gesetz umgesetzt wurde.

Das Postulieren von einzelnen Risikomaßen ist nicht die einzige Möglichkeit an das Thema der Risikobestimmung heranzugehen. In [4] wurde ein axiomatischer Zugang gewählt. Es wurden vier Axiome postuliert, die von einem „sinnvollen“ Risikomaß erfüllt sein sollten. Risikomaße, die diesen Axiomen genügen, werden kohärente Risikomaße genannt. Dies war ein wichtiger Schritt, da nicht mehr nur Eigenschaften einzelner Risikomaße untersucht oder miteinander verglichen sondern von Beginn an gewisse Eigenschaften gefordert wurden. Als Vertreter dieser Klasse kommt dem Expected Shortfall eine besondere Bedeutung zu.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitel werden fünf Risikomaße vorgestellt. Die Auswahl erfolgte nach zwei Kriterien. Zum einen wurde die Verbreitung in der Praxis berücksichtigt, zum anderen wurde auf die neuere Forschung in diesem Themenbereich eingegangen.

Soweit dies möglich ist, werden die Ableitungen der Risikomaße nach der Größe der Geschäftsbereiche bestimmt, da diese bei zwei Allokationsverfahren im nächsten

Kapitel Verwendung finden. Die Darstellung des Expected Shorfalls wird etwas ausführlicher behandelt. Dies liegt daran, dass der Expected Shortfall viele positive Eigenschaften besitzt, deren Vorzüge ausführlicher dargelegt werden.

Da es nicht möglich ist, alle Risikomaße zu behandeln, findet der interessierte Leser im Appendix B weitere Risikomaße. Diese werden in der Arbeit nicht weiter analysiert und sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

2.1 Varianz

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits geschildert, ist die Varianz ein klassisches Streuungsmaß, das „ursprüngliche" Risikomaß. Sie ist das einfachste, der hier vorgestellten Risikomaße, und dadurch in der Praxis sehr weit verbreitet.

2.1.1 Definition und Beispielrechnung

Definition 2.1 *Sei X eine Zufallsvariable mit* $\mathrm{var}[X] < \infty$ *und* $c > 0$.

Dann definieren wir die **Varianz als Risikomaß** *von X wie folgt*

$$\rho_{\mathrm{var}}(X) = c \cdot \mathrm{var}[X].$$

Die Konstante c wird oft als 95%- oder als 99%-Quantil der Standardnormalverteilung gewählt, d.h. $c \approx 1.65$ oder $c \approx 2.33$. Im Folgenden werden wir $c = 1$ setzen, da der Vorfaktor im Rahmen unserer Betrachtung keine Rolle spielt.

Beispiel 2.1 (Varianz)
Sei N eine Poisson verteilte, S_P eine Pareto verteilte Zufallsvariable, S_{kM} ein kollektives Modell mit N als Schadenzahl und S_P als Schadenhöhe. Ausserdem sei S_{ln} eine lognormalverteilte Zufallsvariable.

S_{kM} und S_{ln} sind die Schadenverteilungen von denen ausgegangen wird. Die Ertragsfunktionen X_{kM} sowie X_{ln} ergeben sich aus Gleichung (1.1). Da die Varianz unter Spiegelung und Verschiebung erhalten bleibt, kann man die Berechnungen anhand der Schadenverteilungen durchführen.

Aufgrund von Satz A.1 benötigt man zur Bestimmung von $\mathrm{var}[S_{kM}]$, sowohl die Varianz, als auch den Erwartungswert jeweils von N und S_P.

$$\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\tau} \frac{\tau^k}{k!} = e^{-\tau} \tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\tau} \tau e^{\tau} = \tau \\
E[N^2] &= \tau + \tau^2 \\
\mathrm{var}[N] &= E[N^2] - \big(E[N]\big)^2 = \tau
\end{aligned}$$

$$E[S_P] = \int_b^\infty x\gamma b^\gamma x^{-\gamma-1}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für } \gamma \leq 1 \\ \dfrac{b\gamma}{\gamma-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$E[S_P^2] = \int_b^\infty x^2\gamma b^\gamma x^{-\gamma-1}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für } \gamma \leq 2 \\ \dfrac{b^2\gamma}{\gamma-2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathrm{var}[S_P] = \begin{cases} \infty & \text{für } \gamma \leq 2 \\ E[S_P^2] - \big(E[S_P]\big)^2 = \dfrac{b^2\gamma}{(\gamma-2)(\gamma-1)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich mit der Gleichung von Wald (Satz A.1)

$$\mathrm{var}[S_{kM}] = \begin{cases} \infty & \text{für } \gamma \leq 2 \\ E[N]\mathrm{var}[S_P] + \mathrm{var}[N]\big(E[S_P]\big)^2 = \dfrac{\tau b^2\gamma}{\gamma-2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun wird die Varianz der Lognormalverteilung berechnet. Wir benutzen dafür die momenterzeugende Funktion. Dafür sei $L_{\mu,\sigma}$ die Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung und $N_{\mu,\sigma}$ die der dazugehörigen Normalverteilung.

$$\begin{aligned} E[S_{ln}^k] &= \int\limits_0^\infty x^k\ d\Lambda_{\mu,\sigma}(x) \\ &= \int\limits_{-\infty}^\infty e^{kx}\ dN_{\mu,\sigma}(x) \\ &= \int\limits_{-\infty}^\infty e^{ky}\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dy \\ &= e^{k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun

$$\mathrm{var}[S_{ln}] = E[S_{ln}^2] - \big(E[S_{ln}]\big)^2 = e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2}-1\big).$$

2.1.2 Differentiation der Varianz

Wenn nun von der Ableitung eines Risikomaßes gesprochen wird, ist damit die Ableitung bezüglich der Größe eines Geschäftsbereiches, also bezüglich λ_i, gemeint. Im nächsten Kapitel werden zwei Verfahren zur Kapitalallokation vorgestellt, die diese Ableitungen verwenden.

Für die Varianz als Risikomaß werden zwei Fälle untersucht. Einmal wird die Zufallsvariable linear skaliert, im anderen Fall liegt ein kollektives Modell mit einer Poissonverteilung als Schadenzahlverteilung vor. Die Größe des Geschäftsbereiches wird über den Parameter der Poissonverteilung skaliert.

Satz 2.2 *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $\big(X_1, X_2(\lambda_2), \ldots, X_n(\lambda_n)\big)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen mit* $\mathrm{var}[X_i] < \infty$, *sowie* $\mathrm{var}\big[X_i(\lambda_i)\big] < \infty$ *für* $i = 2, \ldots, n$ *und* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)' \in U$. *Sei* $Z(\lambda) = \lambda_1 X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i(\lambda_i)$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\lambda)\big]}{\partial \lambda_1} = 2\ \mathrm{cov}[Z(\lambda), X_1] \quad \text{für } \lambda \in U.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\lambda)\big]}{\partial \lambda_1} &= E\left[\frac{\partial\big(Z(\lambda) - E[Z(\lambda)]\big)^2}{\partial \lambda_1}\right] \\
&= E\left[2\Big(Z(\lambda) - E[Z(\lambda)]\Big)\left(\frac{\partial(\lambda_1 X_1)}{\partial \lambda_1} - E\Big[\frac{\partial(\lambda_1 X_1)}{\partial \lambda_1}\Big]\right)\right] \\
&= 2\ \mathrm{cov}[Z(\lambda), X_1]
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Differentiation und Integration ist aufgrund von A.2 erlaubt.
□

Satz 2.3 *Sei* N *eine Poisson verteilte Zufallsvariable mit Parameter* λ_1, *und* S *ein kollektives Modell mit Schadenzahl* N *und Schadenhöhe* Y *mit* $E[Y^2] < \infty$. *Sei außerdem* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $\big(X_2(\lambda_2), \ldots, X_n(\lambda_n)\big)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen mit* $\mathrm{var}\big[X_i(\lambda_i)\big] < \infty$ *für* $i = 2, \ldots, n$ *und* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)' \in U$. *Die Korrelationskoeffizienten von* X_i *und* X_j *seien* $\varrho_{i,j}$ *und* $Z(\lambda) = S(\lambda_1) + \sum_{i=2}^{n} X_i(\lambda_i)$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\lambda)\big]}{\partial \lambda_1} = E[Y^2] + \Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sum_{i=2}^{n} \varrho_{1,i} \sqrt{E[Y^2]\mathrm{var}[X_i(\lambda_i)]}\Big).$$

Insbesonders gilt

$$\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\lambda)\big]}{\partial \lambda_1} = E[Y^2],$$

falls S *unkorreliert mit* $X_2, \ldots, X_n$.

Beweis: Aufgrund von Satz A.1 gilt

$$\mathrm{var}[S(\lambda_1)] = \lambda_1 E[Y^2]$$

und somit

$$\frac{\partial \mathrm{var}[S(\lambda_1)]}{\partial \lambda_1} = E[Y^2].$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{var}[Z(\lambda)]}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Bigg(\mathrm{var}[S(\lambda_1)] + \sum_{i=2}^{n}\mathrm{var}[X_i(\lambda_i)] \\ &\quad + 2\sum_{i=2}^{n}\mathrm{cov}[S(\lambda_1), X_i(\lambda_i)] + \sum_{\substack{i,j\in N\setminus\{1\}\\ i\neq j}}^{n}\mathrm{cov}[X_i(\lambda_i), X_j(\lambda_j)]\Bigg) \\ &= E[Y^2] + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Big(2\sum_{i=2}^{n}\varrho_{1,i}\sqrt{\mathrm{var}[S(\lambda_1)]\mathrm{var}[X_i(\lambda_i)]}\Big) \\ &= E[Y^2] + \Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sum_{i=2}^{n}\varrho_{1,i}\sqrt{E[Y^2]\mathrm{var}[X_i(\lambda_i)]}\Big)\end{aligned}$$

Falls S unkorreliert mit $X_2, \ldots, X_n$ ist, gilt $\varrho_{1,i} = 0$ für $i = 2, \ldots, n$ und man erhält das Ergebnis. $\square$

2.2 Standardabweichung

Auf den ersten Blick unterscheiden sich Standardabweichung und Varianz nicht sehr. Es wird sich aber herausstellen, dass die Standardabweichung in diesem Kontext als Risikomaß wesentlich geeigneter ist, als die Varianz.

2.2.1 Definition und Beispielrechnung

Definition 2.4 *Sei X eine Zufallsvariable mit* $\mathrm{var}[X] < \infty$ *und* $c > 0$.

Dann definieren wir die **Standardabweichung als Risikomaß** *für X wie folgt*

$$\rho_{St}(X) = c \cdot \sigma[X] = c\sqrt{\mathrm{var}[X]}.$$

Auch hier wird $c = 1$ gesetzt und Beispiel 2.1 fortgeführt.

Beispiel 2.2 (Standardabweichung)
Da die Standardabweichung die Wurzel der Varianz ist, fällt es uns leicht, die folgenden Standardabweichungen für die Verteilungen aus Beispiel 2.1 anzugeben.

$$\begin{aligned}\sigma[S_{kM}] &= \frac{b}{\gamma - 1}\sqrt{\frac{\tau\gamma}{2-\gamma}} \\ \sigma[S_{ln}] &= \sqrt{e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2} - 1\big)}\end{aligned}$$

2.2.2 Differentiation der Standardabweichung

Die nächsten beiden Sätze zur Ableitung der Standardabweichung folgen sofort aus Satz 2.2 und Satz 2.3.

Satz 2.5 *Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2.2 gegeben. Dann gilt*

$$\frac{\partial\sqrt{\mathrm{var}\left[Z(\lambda)\right]}}{\partial\lambda_i} = \frac{\mathrm{cov}[Z(\lambda), X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}[Z(\lambda)]}}.$$

Beweis: Der Beweis folgt mit der Kettenregel unmittelbar aus Satz 2.2. □

Satz 2.6 *Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2.3 gegeben. Dann gilt*

$$\frac{\partial\sqrt{\mathrm{var}\left[Z(\lambda)\right]}}{\partial\lambda_i} = \frac{E[Y^2] + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sum_{i=2}^{n}\varrho_{1,i}\sqrt{E[Y^2]\mathrm{var}[X_i(\lambda_i)]}\right)}{2\ \sqrt{\mathrm{var}[Z(\lambda)]}}.$$

Insbesonders gilt

$$\frac{\partial\mathrm{var}\left[Z(\lambda)\right]}{\partial\lambda_1} = \frac{E[Y^2]}{2\ \sqrt{\mathrm{var}[Z(\lambda)]}},$$

falls S unkorreliert mit $X_2, \ldots, X_n$.

Beweis: Der Beweis folgt mit der Kettenregel unmittelbar aus Satz 2.3. □

2.3 Lower Partial Moments (LPM), Semivarianz (SV)

Ein weiterer Versuch der Risikoerfassung ist Markowitzes Definition der Semivarianz [32], die von Fishburn [19] zu den „Lower Partial Moments“ (LPM) verallgemeinert wurde. Die LPMs verwenden nur die linke Seite der Ertragsfunktion, um das Risiko zu bestimmen.

2.3.1 Einführung und Beispielrechnung

Der Grundgedanke ist, dass für das Risiko einer Zufallsvariablen nur die Ereignisse unterhalb eines Zielwertes entscheidend sind. Ob ein Versicherer bei einer Ertragsverteilung rechts vom Erwartungswert eine große oder kleine Streuung der Ereignisse sieht, ist für ihn nicht so entscheidend, wie die Streuung links vom Erwartungswert, da diese Ereignisse Verluste und somit auch die mögliche Insolvenz bedeuten. Die LPMs sind die mathematische Fassung dieses Risikobegriffes.

Definition 2.7 *Sei X eine Zufallsvariable, $k \in \mathbb{N}$ und $E[X^k] < \infty$. Dann ist das* **lower partial moment** *mit Zielwert $\tau \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert*

$$LPM_k^\tau(X) = E[(X-\tau)_-^k].$$

So erhält man für $n = 0$ und $\tau = 0$ die Verlustwahrscheinlichkeit, für $n = 1$ den zu erwartenden Ertrag unterhalb des Zielwerts.

Im Fall $n = 2$ und $\tau = E[X]$ gleicht das LPM der Semivarianz, die im Folgenden auch weiter betrachtet, und deshalb noch einmal gesondert definiert wird.

Definition 2.8 *Sei X eine Zufallsvariablen mit $E[X_-^2] < \infty$.*

Dann definieren wir die **Semivarianz als Risikomaß** *wie folgt*

$$\rho_{\text{svar}}[X] = \text{svar}[X] = E[(X - EX)_-^2].$$

Die Semivarianz unterscheidet sich von der Varianz dadurch, dass man nicht über ganz Ω integriert, sondern nur über den Teil von Ω, für den $X - E[X] \leq 0$.

Auch hier führen wir das Beispiel fort.

Beispiel 2.3 (Semivarianz)
Eine explizite Darstellung erhält man nur noch bei der Paretoverteilung. Um die Semivarianz berechnen zu können, muss man aus der Schadenverteilung S_P durch die Transformation (1.1) die Ertagsverteilung $X_P = E[S_P] - S_P$ bestimmen.

$$\begin{aligned} E[(X_P - E[X_P])_-^2] &= \int_{-\infty}^{\frac{b\gamma}{1-\gamma}} \Big(\frac{b\gamma}{1-\gamma} - x\Big)^2 \gamma b^\gamma x^{-\gamma-1}\, dx \\ &= \frac{\gamma^2 b^\gamma \big(\frac{\gamma^2}{1-\gamma}\big)^{-\gamma} \big(- 2b(\gamma-2)\gamma^2 + (\gamma-1)\gamma^3 + b^2(2 - 3\gamma + \gamma^2)\big)}{(\gamma-2)(\gamma-1)^3} \end{aligned}$$

Anhand von Beispiel 2.3 kann man schon einen Nachteil der Semivarianz erahnen. Sie ist mathematisch bei weitem nicht so leicht zu handhaben wie die Varianz.

2.3.2 Differentiation der Semivarianz

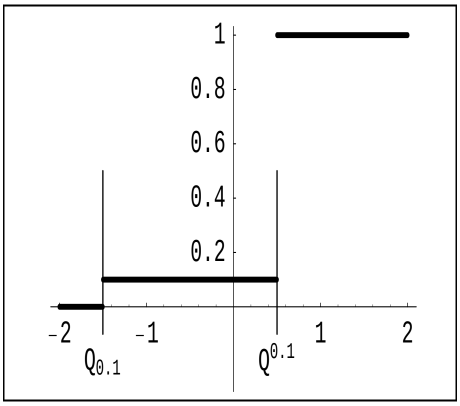
Ableitungen der Semivarianz nach Größe der Geschäftsbereiche sind nicht bekannt.

2.4 Value-at-Risk (VaR)

Der VaR ist das zur Zeit gebräuchlichste Risikomaß im Bankenwesen. Zusätzlich gewinnt er an Bedeutung, dass das Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen ihn bei Banken wie bereits angesprochen zur Berechnung des Eigenkapitals gesetzlich festgelegt hat.

Der VaR mit Parameter α liefert eine Schranke, die höchstens mit Wahrscheinlichkeit α unterschritten wird.

Abbildung 2.1: Unterschied zwischen oberem und unterem Quantil



Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}[X = -1.5] = 0.1$ und $\mathbb{P}[X = 0.5] = 0.9$. Das obere und das untere 0.1-Quantil sind eingezeichnet.

2.4.1 Einführung

Um das Vorangegangene mathematisch zu fassen, definiert man zunächst zwei α-Quantile.

Definition 2.9 *Sei X eine Zufallsvariable. Für ein festes $\alpha \in (0,1)$ definiert man*

$$\begin{aligned} Q^{\alpha}(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\} \\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x] \leq \alpha\} \quad \textbf{als das obere } \boldsymbol{\alpha}\textbf{-Quantil}, \\ Q_{\alpha}(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\} \quad \textbf{als das untere } \boldsymbol{\alpha}\textbf{-Quantil}. \end{aligned}$$

Aus $\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\}$ folgt sofort $Q_{\alpha} \leq Q^{\alpha}$. Den Unterschied zwischen unterem und oberem Quantil veranschaulicht Abbildung 2.1

Für ein besseres Verständnis der Quantile dienen die folgenden beiden Sätze, die bestimmen unter welchen Bedingungen oberes und unteres α-Quantil zusammenfallen und Aussagen über deren Stetigkeit machen.

Satz 2.10 *Sei X eine Zufallsvariable und $\alpha \in (0,1)$. Dann ist $Q^{\alpha}(X)$ rechts- und $Q_{\alpha}(X)$ linksstetig in α.*

Beweis: Sei $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$. Um die Rechtsstetigkeit von $Q^{\alpha}(X)$ zu beweisen, muss man zeigen, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $\tau \in (\alpha, \alpha + \delta)$ folgt $Q^{\tau}(X) \in (Q^{\alpha}(X), Q^{\alpha}(X) + \epsilon)$.

Sei $x = Q^{\alpha}(X)$, dann gilt $\alpha' = F(x+\epsilon) > \alpha$ aufgrund der Definition von $Q^{\alpha}(X)$.

Besteht $\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x + \epsilon] \leq \alpha'\}$ nur aus einem Element, wählt man $\delta \in (0, \alpha' - \alpha)$ und es gilt wegen der Monotonie von $F_X(x)$, dass für $\tau \in (\alpha, \alpha + \delta)$ folgt $Q^{\tau}(X) \in (Q^{\alpha}(X), Q^{\alpha}(X) + \epsilon)$.

Besteht dagegen $\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq x + \epsilon) \leq \alpha'\}$ aus mehreren Elementen, dann betrachtet man $y = \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X \leq x + \epsilon] \leq \alpha'\}$. Falls $y = x$, wählt man $\delta = \frac{\alpha' - \alpha}{2}$, ansonsten gilt $\delta \in (0, F_X(y) - \alpha)$ und man hat diesen Teil bewiesen.

Der Beweis für $Q_{\alpha}(X)$ verläuft analog. $\square$

Satz 2.11 $Q_\alpha = Q^\alpha$ *genau dann, wenn* $\mathbb{P}[X \leq x] = \alpha$ *für höchstens ein* x.

Beweis: Wenn man annimmt es gäbe mehrere x mit $\mathbb{P}[X \leq x] = \alpha$, dann kann man zwei Punkte x_1 und x_2 wählen mit $x_1 < x_2$ und $\mathbb{P}[X \leq x_1] = \mathbb{P}[X \leq x_2] = \alpha$. Dann folgt aufgrund der Definition der Quantile, dass $Q_\alpha \leq x_1 < x_2 \leq Q^\alpha$.

Gibt es genau ein x mit $\mathbb{P}[X \leq x] = \alpha$, dann folgt $Q_\alpha = Q^\alpha = x$. Gibt es kein x mit $\mathbb{P}[X \leq x] = \alpha$, dann gibt es ein z mit $\mathbb{P}[X \leq z] > \alpha$, so dass für alle $y < z$ gilt $\mathbb{P}[X \leq y] < \alpha$. Daraus folgt $Q_\alpha = Q^\alpha = z$. □

Definition 2.12 *Sei* X *eine Zufallsvariable. Für* $\alpha \in (0,1)$ *definieren wir den* **Value-at-Risk (VaR)** *wie folgt*

$$VaR_\alpha(X) = -Q^\alpha(X).$$

Bei normalverteilten Zufallsvariablen lässt sich der VaR auf den VaR der Standardnomalverteilung zurückführen. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 2.13 *Sei* X *eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert* μ *und Standardabweichung* σ, *sowie* $\alpha \in (0,1)$. *Dann gilt* $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sigma c_\alpha - \mu$, *wobei* $c_\alpha = VaR_\alpha(Y)$ *mit* Y *standardnormalverteilt.*

Beweis: Sei Y standardnormalverteilt.

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= -\inf\{x|\mathbb{P}[X \leq \alpha] > \alpha\} \\ &= -\inf\left\{x|\mathbb{P}\Big[\sigma Y + \mu \leq x\Big] > \alpha\right\} \\ &= \sigma\big(-\inf\{x|\mathbb{P}[Y \leq x] > \alpha\}\big) - \mu \\ &= \sigma c_\alpha - \mu \end{aligned}$$

Dies zeigt auch, dass $c_\alpha = VaR_\alpha(Y)$. □

2.4.2 Differentiation des VaR

Bei der Ableitung des VaR sind nur solche Ergebnisse bekannt, bei denen die Zufallsvariable $Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ linear von den Zufallsvariablen X_i abhängt. Neben dem hier vorgestellten Satz von Lemus [41], gibt es noch ein weiteres Resultat von Tasche [51], das ohne Beweis angeben wird.

Zur Vereinfachung wird folgende Schreibweise eingeführt: $Q^\alpha(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i) = Q^\alpha(\lambda)$.

Satz 2.14 ([41]) *Sei* $X = \big(X_1, \ldots, X_n\big)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen und* $Z(\lambda) = \lambda' X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$. *Sei außerdem für* $x_i \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_i = x_i]$ *differenzierbar bezüglich* λ_i *für* $i = 1, \ldots, n$ *und die Bedingungen von A.2 erfüllt. Dann gilt*

$$\frac{\partial Q^\alpha(\lambda)}{\partial \lambda_i} = E\big[X_i | \lambda' X = Q^\alpha(\lambda)\big]$$

Beweis: Leitet man die Identität

$$\mathbb{P}[\lambda' X \leq Q^\alpha(\lambda)] = \alpha$$

bezüglich λ_1 ab und sei $f_{\lambda' X}$ die Dichte von $\lambda' X$, dann erhält man

$$\Big[\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\mathbb{P}[\lambda' X \leq t]\Big]_{t=Q^\alpha(\lambda)} + f_{\lambda' X}\big(Q^\alpha(\lambda)\big)\frac{\partial Q^\alpha(\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0. \tag{2.1}$$

Sei f_{X_1} die Dichte von X_1, dann gilt

$$\mathbb{P}[\lambda' X \leq t] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1] f_{X_1}(x_1)\, dx_1$$

und falls $\mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1]$ differenzierbar ist bezüglich λ_1, dann kann aufgrund von A.2 die Differentiation und die Integration vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\mathbb{P}[\lambda' X \leq t] &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1] f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Big(\mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1]\Big) f_{X_1}(x_1)\, dx_1.
\end{aligned}$$

Die letzte Ableitung kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1] &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}[\lambda' X \leq t - h\lambda_1 | X_1 = x_1] - \mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1]}{h} \\
&= f_{\lambda' X | X_1 = x_1}(t)(-x_1),
\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\mathbb{P}[\lambda' X \leq t] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\lambda' X | X_1 = x_1}(t) f_{X_1}(x_1)\, dx_1.$$

Wenn man nun die Ergebnisse in (2.1) zusammenfasst, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q^\alpha(\lambda)}{\partial \lambda_1} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{\lambda' X | X_1 = x_1}\big(Q^\alpha(\lambda)\big)}{f_{\lambda' X}\big(Q^\alpha(\lambda)\big)} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \\
&= E[X_1 | \lambda' X = Q^\alpha(\lambda)].
\end{aligned}$$

Die gleiche Argumentation kann man für alle Komponenten wiederholen. □

Satz A.2 setzt voraus, dass

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\mathbb{P}[\lambda' X \leq t | X_1 = x_1]$$

bezüglich t in einem abgeschlossenem Intervall, das t enthält, stetig ist. Das gilt bei diskreten Verteilungen nicht für alle $t \in \mathbb{R}$, da diese unter Umständen unstetige Stellen besitzen.

Das gleiche Ergebnis erhält man auch als Spezialfall eines Satzes von Pflug [38]. Er führt aber noch weitere Beschränkungen ein, um seinen Satz zu verallgemeinern.

Für die Ableitung von Q_α nach Tasche [51] wird eine Annahme S eingeführt.

Definition 2.15 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, $n \geq 2$,*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty), \quad (t, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(t, x_2, \ldots, x_n)$$

die Dichte der bedingten Verteilung von X_1 bei gegebenem $(X_2, \ldots, X_n)'$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann erfüllt $(X_1, \ldots, X_n)'$ die **Annahme S**, *wenn es die folgenden vier Bedingungen erfüllt:*

1.) Für feste $x_2, \ldots, x_n$ ist die Funktion $t \mapsto \Phi(t, x_2, \ldots, x_n)$ stetig in t.

2.) Die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty), \quad (t, \lambda) \mapsto E\Big[\Phi\Big(\lambda_1^{-1}\Big(t - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j X_j\Big), X_2, \ldots, X_n\Big)\Big]$$

ist beschränkt und stetig.

3.) Für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$0 < E\Big[\Phi\Big(\lambda_1^{-1}\Big(Q_\alpha(\lambda) - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j X_j\Big), X_2, \ldots, X_n\Big)\Big].$$

4.) Für alle $i = 2, \ldots, n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad (t, \lambda) \mapsto E\Big[X_i \Phi\Big(\lambda_1^{-1}\Big(t - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j X_j\Big), X_2, \ldots, X_n\Big)\Big]$$

beschränkt und stetig.

Satz 2.16 ([51]) *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der die Annahme S erfüllt und $\alpha \in (0,1)$. Außerdem sei $U = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ für $\lambda \in U$. Dann ist $Q_\alpha : U \to \mathbb{R}$ mit*

$$Q_\alpha(\lambda) = \inf\{z \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[Z(\lambda) \leq z] \geq \alpha\} \quad \text{für } \lambda \in U$$

partiell differenzierbar in U mit stetigen Ableitungen

$$\frac{\partial Q_\alpha(\lambda)}{\partial \lambda_i}(\lambda) = E[X_i | Z(\lambda) = Q_\alpha(\lambda)] \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis: siehe [51] □

2.5 Kohärente Maße

Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben, beschritten Artzner et al. in [4] einen neuen Weg. Sie formulierten Mindestanforderungen, die ein Risikomaß erfüllen soll. Diese Axiome leiten sich als natürliche Forderungen ab, die eine Aufsichtsbehörde an ein Risikomaß stellen sollte. Diese Mindestanforderungen sind nicht so restriktiv, dass sie ein Risikomaß eindeutig festlegen, sie charakterisieren vielmehr eine Klasse von Risikomaßen, die kohärente Risikomaße genannt werden.

Bei kohärenten Risikomaßen wird der Begriff des Risikos über den zukünftigen Wert einer Position definiert. Man betrachtet eine Periode $(0, T)$, in der keine Veränderung des Portfolios möglich ist. In [4] gibt es eine risikolose Anlage mit Preis 1 zum Zeitpunkt 0 und Preis r zum Zeitpunkt T. Meist wird mit r diskontiert. Da dies in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt, wird die Diskontierung außer Acht gelassen.

Dieser Abschnitt basiert auf Artzner et al. [4] und der darauf aufbauenden Arbeit von Dalbaen [10], in der die Theorie von endlichen auf beliebige Wahrscheinlichkeitsräume erweitert wurde.

Zunächst werden die einzelnen Axiome vorgestellt und besprochen. Danach wird auf die wichtigsten Ergebnisse eingegangen.

Axiom 2.1 (Translationsinvarianz) *Für alle Zufallsvariablen $X \in L^\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a.$$

Axiom 2.1 stellt sicher, dass für jedes Portfolio X gilt, $\rho(X + \rho(X)) = 0$: Wenn man zu dem Portfolio X eine sichere Anlage hinzunimmt, die betragsmäßig dem Risiko des Portfolios entspricht, ist das Risiko 0. Dies bedeutet, dass nach Axiom 2.1 ein Risikomaß verschiedene Risiken nicht nur ordnet, sondern der Betrag des Risikomaßes auch mit den Realisierungen zusammenhängt.

Im Rahmen dieser Arbeit ist dieses Axiom nur von geringer Bedeutung, da durch (1.1) die Ertragsfunktionen immer Erwartungswert 0 haben und somit keine Translationen vorkommen.

Axiom 2.2 (Subadditivität) *Für alle Zufallsvariablen $X, Y \in L^\infty$ gilt*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Dies ist sowohl das wichtigste als auch mitunter das verständlichste der vier Axiome und wird oft mit „Ein Merger schafft kein zusätzliches Risiko“ umschrieben. Dies bedeutet, dass das Risiko von zwei Versicherungsportfolios gegenüber der Addition von Einzelrisiken zusammen kleiner bewertet werden muss. Dieses Prinzip spielt bei Versicherungen unter dem Begriff „Ausgleich im Kollektiv“ eine entscheidende Rolle, ohne das ein Versicherungsgeschäft überhaupt nicht möglich wäre.

Axiom 2.3 (Positive Homogenität) *Für alle Zufallsvariablen $X \in L^\infty$ und $\lambda \geq 0$ gilt*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

Aufgrund von Axiom 2.2 gilt $\rho(nX) \leq n\rho(X)$ für $n \in \mathbb{N}$. Axiom 2.3 fordert De-facto die umgekehrte Ungleichung und damit Gleichheit, da eine Anhäufung von gleichen Risiken nach allgemeinem Verständnis das Risiko nicht senkt.

Zu den letzten beiden Axiomen ist noch zu bemerken, dass sie die Größe des Portfolios gänzlich außer Acht lassen, also das Liquiditätsrisiko nicht berücksichtigen. Ab einer gewissen Größe kann ein Portfolio nicht mehr auf einmal abgestoßen oder verkauft werden und die benötigte Zeit hängt von der Größe des Portfolios ab. Diesem Einwand trägt das Konzept der konvexen Risikomaße Rechnung, das in Kapitel B vorgestellt wird.

Axiom 2.4 (Monotonie) *Für alle Zufallsvariablen $X, Y \in L^\infty$ mit $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt*

$$\rho(Y) \leq \rho(X)$$

Die Forderung dieses Axioms ist sehr eingänglich. Wenn für $\mathbb{P}$-f.s. alle zukünftigen Zustände die Erträge von Y größer als die von X sind, dann besitzt Y offensichtlich ein geringeres Risiko als X.

Auch dieses Axiom ist bei der hier untersuchten Fragestellung nebensächlich, da die Forderung aufgrund von $E[X] = 0$ für alle Ertragsvariablen erfüllt ist.

Diese vier Axiome definieren ein kohärentes Risikomaß.

Definition 2.17 *Ein* **kohärentes Risikomaß** *ist eine Abbildung*

$$\rho : L^\infty \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \rho(X),$$

welche die vier Axiome 2.1, 2.2, 2.3 und 2.4 erfüllt.

Man kann das Konzept der kohärenten Risikomaße auch auf L^0 definieren. Dabei treten technische Probleme auf, die in diesem Zusammenhang nicht den Kernpunkt des Interesses darstellen und das eigentlich Relevante verschleiern. Deshalb sei der Leser auf [10] verwiesen.

Es gibt noch eine andere Sichtweise auf kohärente Risikomaße. In [4] wurden Axiome für eine Menge $\mathcal{A} \subseteq L^\infty$, die Menge der akzeptierbaren Risiken, angegeben. Es wurde gezeigt, dass

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

ein kohärentes Risikomaß ist. Für unsere Zwecke reicht aber folgende Definition aus.

Definition 2.18 *Sei ρ ein kohärentes Risikomaß. Dann ist die* **Menge der akzeptierbaren Risiken** *definiert durch*

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^\infty | \rho(X) \leq 0\}. \tag{2.2}$$

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von akzeptierbaren Risiken. Dann ist das **zu $\mathcal{A}$ gehörige Risikomaß** *definiert durch*

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz gilt für ein Portfolio X, dass $X + \rho(X)$ ein akzeptierbares Risiko ist. Wie die Menge der akzeptierbaren Risiken und die dazugehörigen kohärenten Maße zusammenhängen, zeigt die folgende Proposition.

Proposition 2.19 ([21]) *Sei ρ ein kohärentes Risikomaß und $\mathcal{A}_\rho$ die dazugehörige Menge von akzeptierbaren Risiken, dann ist $\mathcal{A}_\rho$ ein konvexer Kegel.*

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von akzeptierbaren Risiken und $\rho_\mathcal{A}$ das dazugehörige Risikomaß und $\rho_\mathcal{A}(0) > -\infty$. Dann ist $\rho_\mathcal{A}$ ein kohärentes Risikomaß, falls $\mathcal{A}$ ein Kegel ist.

Beweis: siehe [21] □

Es gibt mehrere Repräsentations-Sätze für kohärente Risikomaße. Bei dem Folgenden wird das kohärente Risikomaß als das Supremum der Erwartungswerte von verschiedenen „Szenarien", d.h. Risikomaßen, dargestellt. Dies ermöglicht eine neue Sichtweise auf das Konzept. Zunächst werden zwei Mengen definiert, die noch des öfteren Verwendung finden werden.

Definition 2.20 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße und mit $\mathcal{M}_f$ die Menge aller endlich additiven und nicht-negativen Mengenfunktionen $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$, die normalisiert sind, d.h. $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$.*

Satz 2.21 ([21]) *Ein Risikomaß ρ ist genau dann kohärent, falls eine Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}_f$ existiert, so dass*

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} E_\mathbb{Q}[-X] \quad \textit{für alle } X \in L^\infty. \tag{2.3}$$

$\mathcal{Q}$ kann sogar als konvexe Menge gewählt werden, bei der das Supremum in (2.3) angenommen wird.

Beweis: Die Darstellung (2.3) liefert offensichtlich ein kohärentes Risikomaß. Der Rest des Beweises folgt in Korollar B.2 in größerer Allgemeinheit. □

Aufgrund von Satz 2.21 erkennt man, dass auch der negative Erwartungswert ein kohärentes Risikomaß ist. Je größer die Menge $\mathcal{Q}$ ist, desto „vorsichtiger" ist das daraus entstehende Risikomaß.

Das erste in der ursprünglichen Arbeit [4] angegebene kohärente Risikomaß ist die „worst conditional expectation".

Definition 2.22 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist die* **worst conditional expectation** *von X durch*

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\left\{E_\mathbb{P}[X|A] \middle| A \in \mathcal{A} \wedge \mathbb{P}[A] > \alpha\right\} \tag{2.4}$$

definiert.

Als erstes stellt man fest, dass die WCE_α mit der Annahme $E[X_-] < \infty$ einen endlichen Wert liefert, da aus $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X) + t] = 1$ folgt, dass es ein Ereignis $A = \{X \leq Q_\alpha(X) + t\}$ mit $\mathbb{P}[A] > \alpha$ und $E[X\mathbf{1}_A] < \infty$ gibt.

Delbaen [10] beweist, dass die WCE das kleinste kohärente Risikomaß ist, das den VaR dominiert. Es wird noch gezeigt unter welchen Bedingungen es mit dem Expected Shortfall zusammen fällt, der im nächsten Kapitel definiert wird.

Die WCE ist vom praktischen Gesichtspunkt aus gesehen kein nützliches Risikomaß, da es die Kenntnis über den gesamten unterliegenden Wahrscheinlichkeitsraum voraussetzt.

2.5.1 Expected Shortfall (ES)

Einführung

In diesem Abschnitt wird ein weiteres kohärentes Risikomaß eingeführt, das auch bei den späteren Allokationsberechnungen verwendet wird.

Um den Expected Shortfall (ES) später aus einem anderen Blickwinkel untersuchen zu können, wird vor seiner Definition die „Tail Conditional Expectation" (TCE) eingeführt. Anschließend wird gezeigt, dass der Expected Shorfall ein kohärentes Risikomaß ist und einige seiner positiven Eigenschaften dargelegt. Danach wird untersucht unter welchen Umständen die TCE und der ES äquivalent sind. Dies ist von Interesse, da die Definition der TCE besser interpretierbar ist als die des ES und somit hilft den ES besser zu verstehen. Abschließend wird noch auf die Beweggründe eingegangen, die zur Definition des ES geführt haben.

Definition 2.23 *Sei X eine Zufallsvariable und $\alpha \in (0,1)$. Dann ist die* **Lower Tail Conditional Expectation** *definiert durch*

$$\mathrm{TCE}_\alpha(X) = -E[X|X \leq Q_\alpha(X)]$$

und die **Upper Tail Conditional Expectation** *definiert durch*

$$\mathrm{TCE}^\alpha(X) = -E[X|X \leq Q^\alpha(X)].$$

Wie das folgende Beispiel aus [54] zeigt, ist weder TCE_α noch TCE^α ein kohärentes Risikomaß, da beide nicht für alle diskrete Verteilungen subadditiv sind.

Beispiel 2.4 (TCE ist nicht subadditiv)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{A}$ der Potenzmenge von Ω und $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = p, \quad \mathbb{P}[\{\omega_3\}] = 1 - 2p,$$

wobei $0 < p < \frac{1}{3}$. Für ein festes $G \in \mathbb{R}^+$ seien die zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit den Werten

$$X_i(\omega_j) = \begin{cases} -G, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Tabelle 2.1: TCE^α und TCE_α sind nicht subadditiv

	$p < \alpha < 2p$		$p = \alpha$		$p > \alpha$	
Riskomaß	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$
TCE^α	Gp	G	Gp	G	G	G
TCE_α	Gp	G	G	G	G	G
WCE_α	$G/2$	G	$G/2$	G	G	G

definiert. Wählt man α, so dass $0 < \alpha < 2p$, dann erhält man für TCE^α, TCE_α und WCE_α die Werte in Tabelle 2.1.
Wählt man $p < \alpha < 2p$, dann sieht man aus Tabelle 2.1, dass weder TCE^α noch TCE_α subadditiv sind. Der WCE_α hingegen ist wie bekannt subadditiv, was man in Tabelle 2.1 bestätigt findet.

Als nächstes definieren wir den Expected Shortfall, welcher der TCE ähnlich ist.

Definition 2.24 *Sei X eine Zufallsvariable und $\alpha \in (0,1)$.*
Dann definieren wir den **Expected Shortfall** *wie folgt*

$$\text{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\Big(E[X\mathbf{1}_{\{X \leq Q_\alpha(X)\}}] + Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X)]\big)\Big).$$

Tasche [54] zeigt in Korollar 4.3, dass es im Gegensatz zum VaR keinen Unterschied macht, ob man bei der Definition des ES das obere oder das untere Quantil oder einen Wert dazwischen verwendet. Der ES stimmt für alle Werte zwischen oberem und unterem Quantil überein.

Für Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion vereinfacht sich der ES, da in diesem Fall $\mathbb{P}[x \leq Q_\alpha(X)] = \alpha$ und somit auch $\frac{1}{\alpha}E[X\mathbf{1}_{\{X \leq Q_\alpha(X)\}}] = E[X|X \leq Q_\alpha(X)]$. Dies bedeutet, dass $\text{TCE}_\alpha = \text{TCE}^\alpha = \text{ES}_\alpha$ für Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion.

Als nächstes wird gezeigt, dass der ES ein kohärentes Risikomaß ist.

Satz 2.25 ([53]) *Sei $\alpha \in (0,1)$ beliebig, dann ist der ES ein kohärentes Risikomaß.*

Beweis:

1.) Zuerst zeigt man die Translationsinvarianz von ES. Wie in Satz 2.13 dargestellt gilt, dass

$$Q_\alpha(X + a) = Q_\alpha(X) + a$$

und somit

$$\mathbb{P}[X + a \leq Q_\alpha(X + a)] = \mathbb{P}[X + a \leq Q_\alpha(X) + a] = \mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X)].$$

Es ist auch bekannt, dass

$$\begin{aligned} E[(X + a)\mathbf{1}_{\{X+a \leq Q_\alpha(X+a)\}}] &= E[(X + a)\mathbf{1}_{\{X \leq Q_\alpha(X)\}}] \\ &= E[X\mathbf{1}_{\{X \leq Q_\alpha(X)\}}] + a\mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X)]. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X+a) &= -\frac{1}{\alpha}\Big(E[(X+a)\mathbf{1}_{\{X+a\le Q_\alpha(X+a)\}}] \\
&\quad + Q_\alpha(X+a)\big(\alpha - \mathbb{P}[X+a \le Q(X+a)]\big)\Big) \\
&= -\frac{1}{\alpha}\Big(E[X\mathbf{1}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}] + a\mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)] \\
&\quad + Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X \le Q(X)]\big) + a\big(\alpha - \mathbb{P}[X \le Q(X)]\big)\Big) \\
&= \mathrm{ES}_\alpha(X) - a.
\end{aligned}$$

2.) Als nächstes wird die Subadditivität gezeigt. Dafür definiert man für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}^\alpha_{\{X\le x\}} = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X\le x\}} & \text{für } \mathbb{P}[X=x]=0 \\ \mathbf{1}_{\{X\le x\}} + \dfrac{\alpha - \mathbb{P}[X\le x]}{\mathbb{P}[X=x]}\mathbf{1}_{\{X=x\}} & \text{für } \mathbb{P}[X=x]>0. \end{cases}$$

Man zeigt leicht, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} &\in [0,1] \\
E\Big[\mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}\Big] &= \alpha \\
-\frac{1}{\alpha}E\Big[X\mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}\Big] &= \mathrm{ES}_\alpha(X). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Für $Z = X+Y$ erhält man in der neuen Schreibweise

$$\begin{aligned}
&\alpha\Big(\mathrm{ES}_\alpha(X) + \mathrm{ES}_\alpha(Y) - \mathrm{ES}_\alpha(Z)\Big) \\
&= E\Big[Z\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - X\mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} - Y\mathbf{1}^\alpha_{\{Y\le Q_\alpha(Y)\}}\Big] \\
&= E\Big[X\Big(\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}\Big) + Y\Big(\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{Y\le Q_\alpha(Y)\}}\Big)\Big] \\
&\ge Q_\alpha(X)E\Big[\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}\Big] + Q_\alpha(Y)E\Big[\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{Y\le Q_\alpha(Y)\}}\Big] \\
&= Q_\alpha(X)(\alpha-\alpha) + Q_\alpha(Y)(\alpha-\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

In der Ungleichung wurde die Tatsache verwendet, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{X\ge Q_\alpha(X)\}} \ge 0 \quad &\text{falls } X > Q_\alpha(X) \\
\mathbf{1}^\alpha_{\{Z\le Q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^\alpha_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} \le 0 \quad &\text{falls } X < Q_\alpha(X).
\end{aligned}$$

3.) Für $\lambda \ge 0$ gilt

$$Q_\alpha(\lambda X) = \lambda Q_\alpha(X)$$

und somit

$$\mathbb{P}[\lambda X \le Q_\alpha(\lambda X)] = \mathbb{P}[\lambda X \le \lambda Q_\alpha(X)] = \mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)].$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(\lambda X) &= -\frac{1}{\alpha}\Big(E[\lambda X\mathbf{1}_{\{\lambda X\le Q_\alpha(\lambda X)\}}] + Q_\alpha(\lambda X)\big(\alpha - \mathbb{P}[\lambda X \le Q(\lambda X)]\big)\Big)\\
&= -\frac{1}{\alpha}\Big(\lambda E[X\mathbf{1}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}] + \lambda Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X \le Q(X)]\big)\Big)\\
&= \lambda\ \mathrm{ES}_\alpha(X),
\end{aligned}
$$

was die positive Homogenität beweist.

4.) Als letztes bleibt die Monotonie zu beweisen. Dies ist einfach, wenn man in Betracht zieht, dass

$$
E[X\mathbf{1}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}] \ge Q_\alpha(X)(\mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)] - \alpha) + E[X\mathbf{1}_{\{X< Q_\alpha(X)\}}]. \qquad (2.6)
$$

Denn damit ergibt sich für $X \ge 0$ P-f.s. mit (2.6)

$$
\begin{aligned}
-\alpha\mathrm{ES}_\alpha(X) &= E[X\mathbf{1}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}] + Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)]\big)\\
&\ge Q_\alpha(X)(\mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)] - \alpha)\\
&\quad + E[X\mathbf{1}_{\{X< Q_\alpha(X)\}}] + Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X \le Q_\alpha(X)]\big)\\
&= E[X\mathbf{1}_{\{X< Q_\alpha(X)\}}] \ge 0
\end{aligned}
$$

Dies beweist die Monotonie, da $X \ge 0\quad \mathbb{P}$-f.s. $\Rightarrow \rho(X) \le 0$ eine äquivalente Formulierung von Axiom 2.4 ist. □

Stetigkeit und Monotonie von ES

Wie verändert sich der ES_α, wenn α variert? Dies ist eine natürliche Frage, die bei der Untersuchung des ES_α auftritt. Hier kann der ES_α mit zwei angenehmen Eigenschaften dienen. Einerseits ist der ES_α monoton fallend, andererseits stetig in α, unabhängig von der Verteilung. Dies bedeutet, dass das Risiko, das durch den ES_α gemessen wird, sich nicht dramatisch ändert, falls man das Konfidenzniveau etwas anhebt oder senkt. Um dies zu zeigen, wird zunächst eine Integraldarstellung von ES_α bewiesen, aus der sich sofort die Stetigkeit ergibt.

Proposition 2.26 ([53]) *Sei X eine Zufallsvariable mit $E[X_-] < \infty$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt*

$$
ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha Q_u(X)\,du.
$$

Beweis: Indem man, falls nötig, den Wahrscheinlichkeitsraum wechselt, kann man annehmen, dass es eine reellwertige Zufallsvariable U auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gibt, die auf $(0,1)$ gleichverteilt ist, d.h. $\mathbb{P}[U \le u] = u$ für $u \in (0,1)$. Es ist wohlbekannt, dass die Zufallsvariable $Z = Q_U(X)$ die gleiche Verteilung hat wie X.

Da $u \mapsto Q_u(X)$ nicht-fallend ist, gilt

$$
\{U \le \alpha\} \subseteq \{Z \le Q_\alpha(X)\} \quad \text{und} \qquad (2.7)
$$

$$
\{U > \alpha\} \cap \{Z \le Q_\alpha(X)\} \subseteq \{Z = Q_\alpha(X)\}. \qquad (2.8)
$$

Durch (2.7) und (2.8) erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_0^\alpha Q_u(X)\,du &= E[Z\mathbf{1}_{\{U\le\alpha\}}] \\
&= E[Z\mathbf{1}_{\{Z\le Q_\alpha(X)\}}] - E[Z\mathbf{1}_{\{U\le\alpha\}\cap\{Z\le Q_\alpha(X)\}}] \\
&= E[Z\mathbf{1}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}] + Q_\alpha(X)\big(\alpha - \mathbb{P}[X\le Q_\alpha(X)]\big).
\end{aligned}
$$

Division durch $-\alpha$ liefert nun das gewünschte Resultat. □

Aus der Integraldarstellung folgt sofort der folgende Satz.

Satz 2.27 ([53]) *Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $E[X_-] < \infty$. Dann ist die Abbildung $\alpha \mapsto ES_\alpha$ stetig auf $(0,1)$.*

Die Monotonie des ES in α ist offensichtlich, wird aber dennoch im nächsten Satz bewiesen.

Satz 2.28 ([53]) *Sei X eine Zufallsvariable mit $E[X_-] < \infty$, dann gilt für jedes $\alpha \in (0,1)$ und jedes $\epsilon > 0$ mit $\alpha + \epsilon < 1$ die folgende Ungleichung:*

$$
\mathrm{ES}_{\alpha+\epsilon}(X) \le \mathrm{ES}_\alpha(X).
$$

Beweis: Mit der Darstellung (2.5) erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{\alpha+\epsilon}(X) - \mathrm{ES}_\alpha(X) &= E\Big[X\Big(\alpha^{-1}\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} - (\alpha+\epsilon)^{-1}\mathbf{1}^{(\alpha+\epsilon)}_{\{X\le Q_{\alpha+\epsilon}(X)\}}\Big)\Big] \\
&= \big(\alpha(\alpha+\epsilon)\big)^{-1} E\Big[X\Big((\alpha+\epsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} - \alpha\mathbf{1}^{(\alpha+\epsilon)}_{\{X\le Q_{\alpha+\epsilon}(X)\}}\Big)\Big] \\
&\le \big(\alpha(\alpha+\epsilon)\big)^{-1} E\Big[Q_\alpha(X)\Big((\alpha+\epsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}} - \alpha\mathbf{1}^{(\alpha+\epsilon)}_{\{X\le Q_{\alpha+\epsilon}(X)\}}\Big)\Big] \\
&= \frac{Q_\alpha(X)}{\alpha(\alpha+\epsilon)}\Big((\alpha+\epsilon)E\Big[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le Q_\alpha(X)\}}\Big]\alpha E\Big[\mathbf{1}^{(\alpha+\epsilon)}_{\{X\le Q_{\alpha+\epsilon}(X)\}}\Big]\Big) \\
&= \frac{Q_\alpha(X)}{\alpha(\alpha+\epsilon)}\big((\alpha+\epsilon)\alpha - \alpha(\alpha+\epsilon)\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit ist die Ungleichung bewiesen. □

Beziehung zwischen WCE, TCE und ES

Nun wird das Verhältnis dieser drei Risikomaße untereinander etwas näher beleuchtet, um ein besseres Verständnis des ES zu ermöglichen. Zunächst wird eine Proposition bewiesen, die für die nachfolgenden Sätze benötigt wird.

Proposition 2.29 ([53]) *Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\alpha \in (0,1)$. Außerdem sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $E[(f\circ X)_-] < \infty$, $f(x) \le f(Q_\alpha(X))$ für $x < Q_\alpha(X)$ und $f(x) \ge f(Q_\alpha(X))$ für $x > Q_\alpha(X)$. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}[A] \ge \alpha$ und $E[|f\circ X|\mathbf{1}_A] < \infty$. Dann gilt*

1.) $-\mathrm{ES}_\alpha(f \circ X) \leq E[f \circ X | A]$

2.) $-\mathrm{ES}_\alpha(f \circ X) = E[f \circ X | A]$ *falls* $\mathbb{P}[A \cap \{X > Q_\alpha(X)\}] = 0$ *und*

$$\mathbb{P}[X < Q_\alpha(X)] = 0 \quad \textit{oder} \tag{2.9}$$

$$\mathbb{P}[X < Q_\alpha(X)] > 0, \mathbb{P}[\Omega \setminus A \cap \{X < Q_\alpha(X)\}] = 0 \ \textit{und}\ \mathbb{P}[A] = \alpha \tag{2.10}$$

3.) falls $f(x) < f(Q_\alpha(X))$ *für* $x < Q_\alpha(X)$ *und* $f(x) > f(Q_\alpha(X))$ *für* $x > Q_\alpha(X)$, *dann folgt aus* $-\mathrm{ES}_\alpha(f \circ X) = E[f \circ X | A]$, *dass* $\mathbb{P}[A \cap \{X > Q_\alpha(X)\}] = 0$ *und entweder (2.9) oder (2.10).*

Beweis: Der Beweis ist einfach, aber technisch; deshalb siehe [54]. □

Satz 2.30 ([53]) *Sei* X *eine Zufallsvariable mit* $E[X_-] < \infty$ *und* $\alpha \in (0,1)$. *Dann gilt*

$$\mathrm{TCE}^\alpha(X) \leq \mathrm{TCE}_\alpha(X) \leq \mathrm{ES}_\alpha(X) \quad \textit{und} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{TCE}^\alpha(X) \leq \mathrm{WCE}_\alpha(X) \leq \mathrm{ES}_\alpha(X). \tag{2.12}$$

Beweis: Die erste Ungleichung in (2.11) ist offensichtlich, die Zweite folgt aus Proposition 2.29 (1), indem man $f(x) = x$ und $A = \{X \leq Q_\alpha(X)\}$ setzt und beachtet, dass $\mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X)] \geq \alpha$.

Die erste Ungleichung in (2.12) wurde in [4] bewiesen, die Zweite folgt wieder aus 2.29 (1), da alle Ereignisse in der Definition der WCE eine Wahrscheinlichkeit größer α besitzen. □

Unter welchen Bedingungen ES, TCE und WCE zusammenfallen, stellt der folgende Satz klar.

Satz 2.31 ([53]) *Sei* X *eine Zufallsvariable mit* $E[X_-] < \infty$ *und* $\alpha \in (0,1)$. *Dann gilt*

1.) $\mathbb{P}[X \leq Q^\alpha(X)] = \alpha$, $\mathbb{P}[X < Q_\alpha(X)] > 0$ *oder* $\mathbb{P}[X \leq Q^\alpha(X), X \neq Q_\alpha(X)] = 0$ *genau dann, wenn*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \mathrm{WCE}_\alpha(X) = \mathrm{TCE}_\alpha(X). \tag{2.13}$$

Insbesonders gilt (2.13), wenn die Verteilung von X *stetig ist, d.h.* $\mathbb{P}[X = x] = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

2.) $\mathbb{P}[X \leq Q_\alpha(X)] = \alpha$ *oder* $\mathbb{P}[X < Q_\alpha(X)] = 0$ *genau dann, wenn* $\mathrm{ES}_\alpha(X) = \mathrm{TCE}_\alpha(X)$.

Beweis: Für (1) wendet man Proposition 2.29 (2) und (3) mit $A = \{X \leq Q^\alpha(X)\}$ und Satz 2.30 an.

Um (2) zu erhalten, wendet man Proposition 2.29 (2) und (3) mit $A = \{X \leq Q^\alpha(X)\}$ an. □

Aufgrund von [10] Satz 6.10 ist es nun möglich die folgende Schlussfolgerung zu ziehen: Ist der Wahrscheinlichkeitsraum „reichhaltig“ genug und sind die Zufallsvariablen stetig verteilt, dann ist der ES bzw. die TCE das kleinste kohärente Risikomaß, das den VaR dominiert.

Motivation für ES und TCE

Schließlich wird noch darauf eingegangen, wie TCE und ES motiviert werden können. Die Ausführung ist [52] und [54] entnommen.

Der VaR ist die statistische Antwort auf die Frage:

Was ist der kleinste Verlust in den $100\alpha\%$ *schlimmsten Fällen?*

Hier wird deutlich, dass der VaR indifferent ist gegenüber Verlusten jenseits der durch das Quantil gegebenen Schranke. Mit diesem Kritikpunkt im Bewusstsein ist es nicht schwierig die Frage etwas zu modifizieren:

Was ist der erwartete Verlust in den $100\alpha\%$ *schlimmsten Fällen?*

Man würde wohl zunächst eine bedingte Wahrscheinlichkeit wie zum Beispiel beim TCE erwarten. Wie bereits gezeigt wurde, beantwortet der TCE diese Frage nur für stetige Verteilungen. Bei allgemeinen Verteilungen liefert der TCE nicht die richtige Antwort, da $\{X \leq Q_\alpha(X)\}$ eine größere Wahrscheinlichkeit als α haben kann.

Um zu sehen welcher Schätzer wirklich hinter der Frage steckt, kann man sich überlegen wie sie beantwortet werden würde, wenn man eine große Zahl n von Realisierungen $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ einer Zufallsvariablen vorliegen hätte. Man würden die Realisierungen wohl in anwachsender Reihenfolge ordnen, um dann den Durchschnitt der ersten $100\alpha\%$ Werte zu bilden. Dafür definiert man die Ordnungsstatistik $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ als die sortierten Werte von $\{X_i\}_{\{i=1,\dots,n\}}$ und approximiert die Zahl $100\alpha\%$ durch $\lfloor n\alpha \rfloor = \max\{m|M \leq n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$, den ganzzahligen Anteil. Damit ist die Menge der $100\alpha\%$ schlimmsten Fälle $\{X_{1:n}, \dots, X_{\lfloor n\alpha \rfloor:n}\}$.

Die Ordnungsstatistik erscheint als natürlicher Schätzer für $Q_\alpha(X)$. Es ist aber bekannt, dass sie für nicht-eindeutige Quantile, d.h. $Q_\alpha(X) < Q^\alpha(X)$ nicht gegen $Q_\alpha(X)$ konvergiert. Dies folgt zum Beispiel aus Satz 1 in [17], der besagt, dass

$$1 = \mathbb{P}[X_{\lfloor n\alpha \rfloor:n} \leq Q_\alpha(X) \text{ unendlich oft}] = \mathbb{P}[X_{\lfloor n\alpha \rfloor:n} \geq Q^\alpha(X) \text{ unendlich oft}].$$

Man erhält aber einen wohldefinierten Schätzer, wenn man die einzelne Ordnungsstatistik durch den Durchschnitt über die $100\alpha\%$ schlimmsten Fälle ersetzt.

Satz 2.32 ([53]) *Sei X eine Zufallsvariable mit $E[X_-] < \infty$, $(X_1, X_2, \dots)$ eine iid Folge von Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung wie X und $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt mit Wahrscheinlichkeit* 1

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\lfloor n\alpha \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} X_{i:n} = \mathrm{ES}_\alpha(X). \tag{2.14}$$

Falls X integrabel ist, hält die Konvergenz in (2.14) auch in L_1.

Beweis: Wegen Proposition 2.26 ist der erste Teil des Satzes ein Spezialfall von Satz 3.1 in [58] mit $0 = t_0 < \alpha = t_1 < t_2 = 1$, $J(t) = \mathbf{1}_{(0,\alpha]}(t)$, $J_N(t) = \mathbf{1}_{(0,\frac{\lfloor N\alpha \rfloor+1}{N}]}(t)$, $g(t) = F^{-1}(t)$ und $p_1 = p_2 = \infty$. Was die L^1-Konvergenz betrifft, stellen wir fest, dass

$$\Big|\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} X_{i:n}\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

Aufgrund des starken Gesetzes der großen Zahlen konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ in L_1. Daraus folgt gleichmässige Integrierbarkeit für $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ und für $\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha\rfloor}X_{i:n}|$. Zusammen mit der bereits bewiesenen fast sicheren Konvergenz ergibt sich die Behauptung. □

Mit dieser Schreibweise ist die Subadditivität von ES offensichtlich.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X+Y) &= \lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{\lfloor n\alpha\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha\rfloor}(X+Y)_{i:n}\Big)\\
&\le \lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{\lfloor n\alpha\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha\rfloor}(X_{i:n}+Y_{i:n})\Big)\\
&= \mathrm{ES}_\alpha(X)+\mathrm{ES}_\alpha(Y)
\end{aligned}$$

Der natürliche Schätzer für TCE_α ist

$$\mathrm{TCE}_\alpha(X) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\mathbf{1}_{\{X_i\le X_{\lfloor n\alpha\rfloor:n}\}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_i\le X_{\lfloor n\alpha\rfloor:n}\}}}.$$

Hier wird im Allgemeinen der Durchschnitt von mehr als den $100\alpha\%$ schlimmsten Fällen geschätzt. Auch sieht man in dieser Darstellung, dass die TCE nicht subadditiv ist.

Differentiation des ES

Der folgende Satz stammt von Kalkbrener und wird im Anhang C.2.2 im Rahmen seiner Allokationsmethode bewiesen.

Satz 2.33 ([28]) *Sei $(X_1,\dots,X_n)'$ ein Vektor von Zufallszahlen und $Z=Z(\lambda)=\sum_{i\in N}\lambda_i X_i$. Dann ist*

$$\frac{\partial \mathrm{ES}_\alpha(Z(\lambda))}{\partial\lambda_i} = -\alpha^{-1}\int_\Omega X_i\mathbf{1}_{\{Z<Q_\alpha(Z)\}}\,d\mathbb{P} - \beta_Z\int_\Omega X_i\mathbf{1}_{\{Z=Q_\alpha(Z)\}}\,d\mathbb{P} \quad \textit{mit}$$

$$\beta_Z = \begin{cases}\dfrac{\alpha-\mathbb{P}[Z<Q_\alpha(Z)]}{\alpha\mathbb{P}[Z=Q_\alpha(Z)]} & \textit{,falls } \mathbb{P}[Z=Q_\alpha(Z)]>0\\ 0 & \textit{,sonst.}\end{cases}$$

Insbesonders gilt

$$\frac{\partial \mathrm{ES}_\alpha(Z(\lambda))}{\partial\lambda_i} = E[X_i|Z(\lambda)\le Q_\alpha(Z)] \quad \textit{für } i=1,\dots,n.$$

Beweis: siehe Beweis Satz C.38

2.5.2 Untersuchung der Risikomaße auf Kohärenz

Der ES ist ein kohärentes Risikomaß. Nun stellt sich die Frage, welche Axiome der Kohärenz die anderen Risikomaße erfüllen.

Satz 2.34 *Die Varianz erfüllt im Allgemeinen keines der Axiome 2.1 - 2.4.*

Beweis:

1.) Es ist bekannt, dass für eine beliebige Zufallsvariable $X \in L^2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\text{var}[aX + b] = a^2\text{var}[X]$. Somit ist Axiom 2.1 nicht erfüllt.

2.) Mit der obigen Gleichung sieht man, dass die Varianz nicht positiv homogen ist.

3.) Für beliebige Zufallsvariablen $X_1, X_2 \in L^2$ gilt, dass

$$\text{var}[X_1 + X_2] = \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] + 2\text{cov}[X_1, X_2]$$

und somit

$$\text{var}[X_1 + X_2] > \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2],$$

falls X_1 und X_2 positiv korreliert sind. In Kapitel 1.3 wurde als Besonderheit des Versicherungsgeschäftes genannt, dass Zufallsvariablen entweder gar nicht oder positv korreliert sind. Somit ist die Varianz in diesem Kontext ein superadditives Risikomaß und Axiom 2.2 nicht gültig.

4.) Auch Axiom 2.4 ist im Allgemeinen nicht gültig. Seien $X, Y \in L^\infty$ und $\text{var}[X] < \text{var}[Y]$. Wählt man b genügend groß, so dass $X \leq Y + b$ $\mathbb{P}$-f.s., dann gilt dennoch $\text{var}[X] < \text{var}[Y + b]$. □

Bevor die weiteren Axiome für die Standardabweichung behandelt werden, zeigt die folgende Proposition, dass sie subadditiv ist.

Proposition 2.35 *Für alle $X, Y \in L^2$ gilt*

$$\sigma[X + Y] \leq \sigma[X] + \sigma[Y].$$

Beweis: Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt

$$\big(\text{cov}[X, Y]\big)^2 \leq \text{var}[X]\text{var}[Y]$$

und somit

$$(\text{cov}[X, Y]) \leq \sqrt{\text{var}[X]}\sqrt{\text{var}[Y]}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{var}[X + Y] &= \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2\text{cov}[X, Y] \\ &\leq \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2\sqrt{\text{var}[X]}\sqrt{\text{var}[Y]} \\ &= \Big(\sqrt{\text{var}[X]} + \sqrt{\text{var}[Y]}\Big)^2 \end{aligned}$$

und somit die Ungleichung. □

Satz 2.36 *Die Standardabweichung erfüllt die Axiome 2.2 und 2.3, aber nicht die Axiome 2.1 und 2.4.*

Beweis:

1.) Die Subadditivität ist, wie bereits in Proposition 2.35 gezeigt wurde, erfüllt.

2.) Sei $X \in L^2$ und $\lambda \geq 0$. Wegen $\text{var}[\lambda X] = \lambda^2 \text{var}[X]$ gilt $\sigma[\lambda X] = \lambda \sigma[X]$ und somit ist Axiom 2.3 bestätigt.

3.) Analog wie in Satz 2.34 zeigt man, dass die Standardabweichung weder monoton noch translationsinvariant ist. □

Satz 2.37 *Die Semivarianz erfüllt im Allgemeinen keines der Axiome 2.1 - 2.4.*

Beweis:

1.) Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\text{svar}(X+a) = E\big[(X+a-E[X+a])_-^2\big] = E\big[(X-E[X])_-^2\big] = \text{svar}(X)$, womit gezeigt ist, dass die Semivarianz nicht translationsinvariant ist.

2.) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A}$ die Potenzmenge und $\mathbb{P}[\omega_1] = \mathbb{P}[\omega_2] = \frac{1}{2}$. Seien außerdem X_1, X_2 Zufallsvariablen mit $X_i(\omega_1) = 0$ und $X_i(\omega_2) = -2$ für $i = 1, 2$. Dann gilt $\text{svar}(X_1) = \text{svar}(X_2) = \frac{1}{2}$ und $\text{svar}(X_1+X_2) = 2$. Somit ist die Semivarianz nicht subadditiv.

3.) Sei $\lambda \in \mathbb{R}^+$, dann gilt $\text{svar}(\lambda X) = E\big[(\lambda X - E[\lambda X])_-^2\big] = \lambda^2 E\big[(X - E[X])_-^2\big] = \lambda^2 \text{svar}(X)$. Somit ist gezeigt, dass die Semivarianz nicht positiv homogen ist.

4.) Seien $X, Y \in L^\infty$ mit $\text{svar}(X) \leq \text{svar}(Y)$. Wählt man b genügend groß, so dass $X \leq Y + b$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt, dann ist aber dennoch $\text{svar}(X) \leq \text{svar}(Y + b)$, da die Semivarianz unter Verschiebung erhalten bleibt.

Auch der VaR ist nicht subadditiv. Dies wird deutlich, wenn man noch einmal Beispiel 2.4 heranzieht.

Beispiel 2.5 (VaR im Allgemeinen nicht subadditiv)
Unter den in Beispiel 2.4 genannten Voraussetzungen gilt für den VaR Tabelle 2.2.

Tabelle 2.2: VaR ist nicht subadditiv

	$p < \alpha < 2p$		$p = \alpha$		$p > \alpha$	
Riskomaß	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$
VaR_α	0	G	G	G	G	G

Für $p < \alpha < 2p$ gilt, dass $0 = \text{VaR}_\alpha(X_1) + \text{VaR}_\alpha(X_2) < \text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = G$. Dies zeigt, dass der VaR_α nicht subadditiv ist.

Satz 2.38 *Der VaR erfüllt die Axiome 2.1, 2.3 und 2.4, aber nicht Axiom 2.2.*

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$

1.) Dass der VaR nicht subadditiv ist, zeigt Beispiel 2.5.

2.) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{VaR}_\alpha(X+a) = -Q_\alpha(X+a) = -\inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X+a \le x] \ge \alpha\} = -\inf\{x \in \mathbb{R}|\mathbb{P}[X \le x] \ge \alpha\} - a = \mathrm{VaR}_\alpha(X) - a$. Somit ist der VaR translationsinvariant.

3.) Für $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda X) = -Q_\alpha(\lambda X) = -\inf\{x \in \mathbb{R}|\mathbb{P}[\lambda X \le x] \ge \alpha\} = -\lambda \inf\{x \in \mathbb{R}|\mathbb{P}[X \le x] \ge \alpha\} = \lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Somit ist der VaR positiv homogen.

4.) Seien X, Y Zufallsvariablen mit $X \le Y$ P-f.s. Dann gilt $\mathrm{VaR}(X)_\alpha = -Q_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R}|\mathbb{P}[X \le x] \ge \alpha\} \ge -\inf\{x \in \mathbb{R}|\mathbb{P}[Y \le x] \ge \alpha\} = \mathrm{VaR}(Y)$. Somit ist der VaR monoton. □

Man kann sich die Frage stellen unter welchen Bedingungen der VaR subadditiv ist. Um dies zu beantworten, definieren wir sphärische und elliptische Verteilungen.

Definition 2.39 *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen. X besitzt eine* **sphärische Verteilung***, wenn für jede orthogonale Abbildung U, d.h. eine Abbildung, für die $UU^t = U^tU = I_{n\times n}$ gilt,*

$$UX =_d X,$$

wobei $=_d$ Gleichheit in Verteilung bedeutet.

Die charakteristische Funktion $\Psi(t) = E[\exp(it'X)]$ eines sphärischen Zufallsvektors X besitzt eine besonders einfache Struktur. Es existiert eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, so dass $\Psi(t) = \Phi(tt') = \Phi(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2)$. Falls X die Dichte $f(x)$ besitzt, dann gibt es somit eine Funktion g, so dass $f(x) = g(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, womit sich auch der Name sphärische Verteilung erklärt. Die Dichte ist auf Sphären konstant, also rotationssymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Für einen sphärischen Zufallsvektor X gilt somit $E[X] = 0$.

Definition 2.40 *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung. X besitzt eine* **elliptische Verteilung***, falls es einen Vektor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$ von Zufallsvariablen mit sphärischer Verteilung gibt, so dass $X = T(Y)$.*

Man sieht, dass $b = \big(E[X_1], \dots, E[X_n]\big)'$. Jetzt kann man die Bedingungen angeben, unter denen der VaR subadditiv ist.

Satz 2.41 ([15]) *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der eine elliptische Verteilung besitzt und $\mathrm{var}[X_i] < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Sei*

$$\mathcal{P} = \{Z = \lambda' X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller linearen Portfolios. Dann gilt für $0 < \alpha \leq 0,5$ und zwei Portfolios $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$, dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Z_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(Z_2).$$

Beweis: Sei $AY + b = X$, wobei A, b und Y wie in Definition 2.40 und q_α das α-Quantil von $\big(1/\sigma[e'Y]\big)e'Y$. Dann gilt für alle $Z \in \mathcal{P}$ mit $Z = \lambda' X$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha(Z) &= -\inf\{z \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[Z \leq z] > \alpha\} \\
&= -\inf\Big\{z \in \mathbb{R} \Big| \mathbb{P}\Big[\lambda'\big(AY + E[X]\big) \leq z\Big] > \alpha\Big\} \\
&= -\inf\Big\{z \in \mathbb{R} \Big| \mathbb{P}\Big[\lambda'(AY) + E[Z] \leq z\Big] > \alpha\Big\} \\
&= -\sigma[Z] \inf\Big\{z \in \mathbb{R} \Big| \mathbb{P}\Big[\big(1/\sigma[Z]\big)u'(AY) \leq z\Big] > \alpha\Big\} - E[Z] \\
&= -\sigma[Z] \inf\Big\{z \in \mathbb{R} \Big| \mathbb{P}\Big[\big(1/\sigma[e'Y]\big)e'Y \leq z\Big] > \alpha\Big\} - E[Z] \\
&= -\sigma[Z]q_\alpha - E[Z]
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung ergibt sich aus der Überlegung, dass $u'(AY) =_d e'Y$. Dies kann man zum Beispiel zeigen, indem man nachweist, dass $\big(1/\sigma[Z]\big)A'u$ und $\big(1/\sigma[e'Y]\big)e$ auf der gleichen Sphäre liegen. Somit erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}(Z_1) &= -\sigma[Z_1]q_\alpha - E[Z_1] \\
\mathrm{VaR}(Z_2) &= -\sigma[Z_2]q_\alpha - E[Z_2] \\
\mathrm{VaR}(Z_1 + Z_2) &= -\sigma[Z_1 + Z_2]q_\alpha - E[Z_1 + Z_2].
\end{aligned}$$

Da $\sigma[Z_1 + Z_2] \leq \sigma[Z_1] + \sigma[Z_2]$ und $-q_\alpha \geq 0$, folgt das Ergebnis. □

2.6 Vergleich der Risikomaße

Ein theoretischer Vergleich der ausgewählten Risikomaße im Sinne eines Rankings ist nicht möglich, da es mehrere Vergleichskriterien gibt. Deshalb beschränken wir uns darauf Eigenschaften darzulegen und die Kritikpunkte an den einzelnen Risikomaßen zusammenzufassen.

Varianz

Wie bereits erwähnt, ist die Varianz ein sehr einfaches, klassisches Risikomaß. Sie lässt sich mathematisch gut handhaben und es ist in den meisten Fällen möglich sie für eine gegebene Verteilung explizit anzugeben. Bei Rechnungen mit diskreten Verteilungen oder Simulationen ist der Rechenaufwand zu ihrer Bestimmung im Vergleich zu anderen Risikomaßen gering und die Stabilität ist im Vergleich sehr gut, wie man in Kapitel 5 sehen wird.

Dennoch hat sie gravierende Nachteile. Sie erfüllt kein einziges Kohärenzaxiom, somit auch nicht die beiden in diesem Kontext entscheidenden Axiome: Subadditivität und Homogenität. Am schwerwiegensten ist zu beurteilen, dass sie nicht subadditiv sondern in diesem Kontext sogar superadditiv ist. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass sie dies als Risikomaß zur Kapitalallokation eigentlich disqualifiziert.

Standardabweichung

Die genannten Vorteile der Varianz übertragen sich ohne Einschränkung auf die Standardabweichung. Ein großer Unterschied zwischen Standardabweichung und Varianz ist, dass die Standardabweichung die zwei für das Versicherungsgeschäft wichtigen Kohärenzaxiome erfüllt: Sie ist subadditivität und homogen. Deshalb ist sie als Risikomaß bei der Kapitalallokation der Varianz vorzuziehen.

Semivarianz

Die Semivarianz ähnelt der Varianz, ist aber bei weitem mathematisch nicht so angenehm zu handhaben. Bei der Wahl zwischen Varianz und Semivarianz entscheidet im Grunde die persönliche Risikodefinition: Die Semivarianz misst im Gegensatz zur Varianz nur die negativen Risiken.

Auch die Semivarianz erfüllt keines der Kohärenzaxiome und in diesem Zusammenhang gilt das gleiche wie für die Varianz.

VaR

Die explizite Berechnung des VaR ist nur in den seltensten Fällen möglich, aber die Näherung durch Diskretisierung, Simulationen und Abschätzungen ist aufgrund der enormen Forschungsbemühungen der letzten Jahre mit vertretbarem Aufwand möglich.

Durch die Klasse der sphärischen Zufallsvektoren, für die der VaR subadditiv ist, werden viele Möglichkeiten abgedeckt. Dennoch muss klar gesagt werden, dass der VaR im Allgemeinen diese Eigenschaft nicht besitzt.

Außerdem gibt es am VaR zwei weitere Kritikpunkte. So bezieht der VaR nicht mit ein, wie groß die Ausschläge unterhalb des Quantils sind. So kann man sich zwei Verteilungen vorstellen, die in positiver Richtung vom negativen VaR aus gleich sind, aber sich gravierend auf der negativen Seite unterscheiden, was folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.6 (VaR berücksichtigt nicht die Größe der Ausschläge jenseits des VaR)
Seien X_1, X_2 zwei Zufallsvariablen mit Dichte

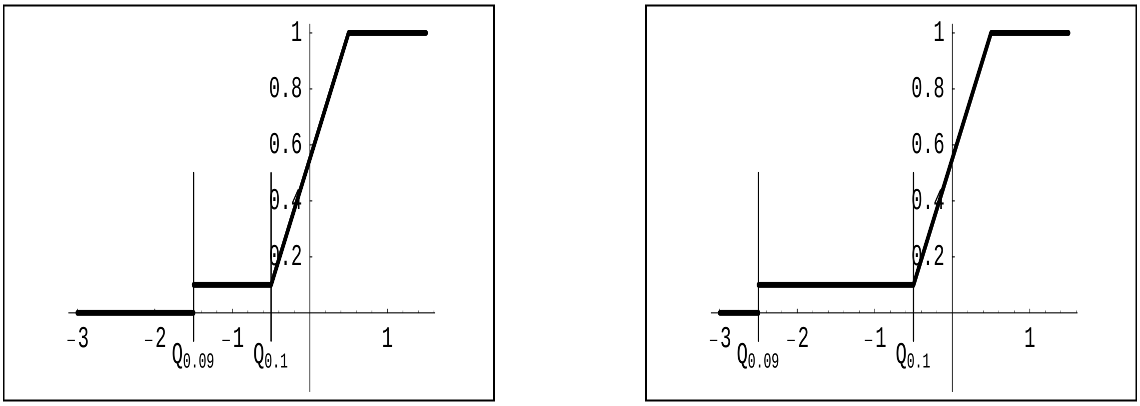
$$f(x) = \begin{cases} 9/10 & \text{für } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Unterschied zwischen beiden Zufallsvariabeln besteht darin, dass

$$\mathbb{P}[X_1 = -1.5] = \mathbb{P}[X_2 = -2.5] = 0.1.$$

Damit ist der $\mathrm{VaR}_{0.1}(X_1) = VaR_{0.1}(X_2) = -0.5$. Falls $\alpha < 0.1$, gilt aber $1.5 = VaR_\alpha(X_1) < VaR_\alpha(X_2) = 2.5$. Diesen Sachverhalt veranschaulicht Abbildung 2.2.

Abbildung 2.2: VaR ist indifferent gegenüber der Verteilung jenseits des Quantils[1)]



1) Dargestellt sind die Verteilungsfunktionen der zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus Beispiel 2.6. In der linken Darstellung ist die Verteilungsfunktion von X_1 und in der rechten die von X_2 dargestellt.

Falls man das Risiko(kapital) des gesamten Versicherungsportfolios bestimmen will, könnte man argumentieren, dass es belanglos ist wie groß die Ausschläge jenseits des Quantils sind, da sobald dieser Wert unterschritten wird die Insolvenz eintritt. Diese Argumentation verliert aber an Schlagkraft, sobald man das Risiko von Teilportfolios mittels des VaR bestimmt.

Der zweite Kritikpunkt ist, dass der VaR nicht stetig in α ist, d.h. kleine Änderungen in α können große Änderungen des VaR nach sich ziehen. Dies wird anhand eines Beispiels demonstriert.

Beispiel 2.7 (VaR$_\alpha$ ist unstetig in α)
Wenn man noch einmal die Situation von Beispiel 2.6 betrachtet, sieht man, dass $\mathrm{VaR}_{0.1}(X_1) = \mathrm{VaR}_{0.1}(X_1) = 0.5$. Wählt man aber ein $\alpha \in (0, 0.1)$ springt der VaR_α von X_1 auf 1.5 und der VaR_α von X_2 auf 2.5. Dies ist in Abbildung 2.3 zu sehen.

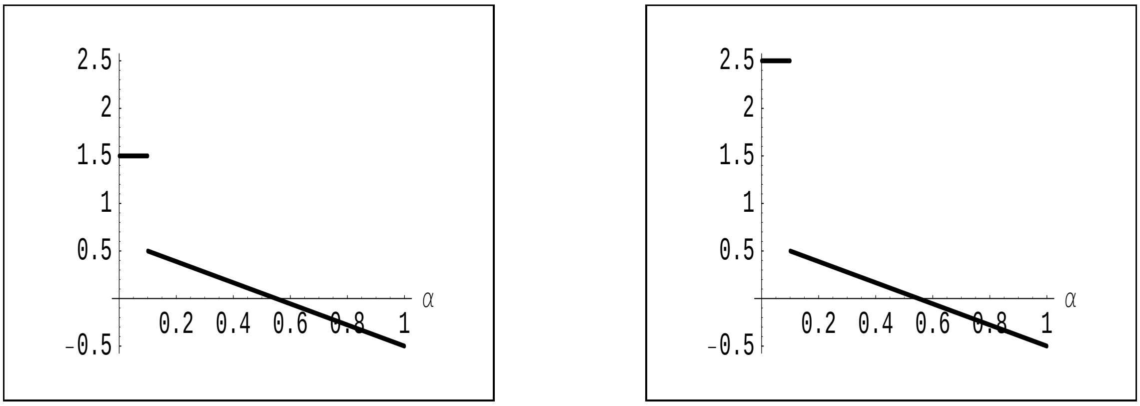
Eine wichtige Tatsache ist, dass der Vergleich von zwei Zufallsvariablen mittels des VaR stark von α abhängt. So kann es sein, dass $\mathrm{VaR}_\alpha(X) < \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$, aber $\mathrm{VaR}_{\alpha+\epsilon}(X) > \mathrm{VaR}_{\alpha+\epsilon}(Y)$. Dies wird bei der Berechnung des Modellportfolios in Kapitel 5 noch zu sehen sein.

Expected Shortfall

Der ES erfüllt alle Axiome eines kohärentes Risikomaßes, berücksichtigt im Gegensatz zum VaR die Größe der Ausschläge jenseits des Quantils und ist stetig in α.

Bei stetigen Verteilungen entspricht er dem negativen bedingten Erwartungswert, ist also gut zu vermitteln. Die Bestimmung des ES hängt hauptsächlich von der Berechnung des Quantils ab und ist im Aufwand mit der des VaR vergleichbar.

Abbildung 2.3: VaR_α ist unstetig in α[1)]



1) Dargestellt ist der VaR_α für X_1 und X_2 aus Beispiel 2.7, wobei auf der x-Achse α und auf der y-Achse der VaR_α aufgetrag ist. In der linken Abbildung ist $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1)$ und in der rechten $\mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$ dargestellt.

Natürlich ist der Vergleich zweier Zufallsvariablen wie beim VaR abhängig vom Parameter α.

Kapitel 3

Allokationsmethoden

Die Thematik der Geschäftsbereichssteuerung in Unternehmen wird seit vielen Jahren in der betriebswirtschaftlichen Theorie und Praxis diskutiert. Als Steuerungsgrundlagen werden vor allem risikoadjustierte Performancemaße wie „Risk Adjusted Return on Capital“ (RAROC), „Return on Risk Adjusted Capital“ (RORAC) oder „Risk Adjusted Return on Risk Adjusted Capital“ (RARORAC) vorgeschlagen. Diese drei Performancemaße entsprechen jeweils dem Quotienten aus Ertrag und Eigenkapital, wobei entweder Ertrag oder Eigenkapital oder sogar beide dem vorliegenden Risiko entsprechend angepasst werden. Als Einsatzfelder dieser Konzepte nennt die Literatur insbesondere

- Entscheidung über die Umstrukturierung von Geschäftsfeldern
- Bestimmung der künftigen Geschäftspolitik, z.B. über die Festlegung von Grenzpreisen für Produkte einzelner Bereiche
- Risiko Management in einzelnen Geschäftsbereichen
- Performancemessung des Bereichsmanagements

Die risikoadjustierten Performancemaße haben gemeinsam, dass einzelnen Unternehmensbereichen Kapital zugeordnet wird. Die Kosten des allozierten Kapitals werden mit einer Gewinngröße des Bereichs verglichen, woraufhin Schlüsse bezüglich der obigen Fragestellungen gezogen werden.

In diesem Kapitel wird die risikoadjustierte Kapitalallokation auf die verschiedenen Geschäftsbereiche behandelt, d.h. die Aufteilung des Kapitals entsprechend dem Risiko der einzelnen Unternehmensteile. Zur Bestimmung des Risikos werden die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Risikomaße herangezogen. Formal kann die Kapitalallokation wie in Kapitel 1.1 schon dargelegt als eine Abbildung

$$\Phi_R : R \times (L^0)^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\rho, X_1, \ldots, X_n) \to \begin{pmatrix} \Phi_1(\rho, X_1, \ldots, X_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(\rho, X_1, \ldots, X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

gesehen werden, wobei R die Menge der Risikomaße ist. Hier wird die Verbindung zu den Risikomaßen aus Kapitel 2 ersichtlich.

Grundsätzlich sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Entweder ist das aufzuteilende Kapital K exogen vorgegeben oder es wird mittels eines Risikomaßes bestimmt. Im Folgenden wird der erste Fall behandelt. Dies bedeutet, dass die K_i Zuteilungskoeffizienten darstellen. Für sie gilt $K_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} K_i = 1$. Das einem Unternehmensbereich zugeordnete Kapital ergibt sich somit zu $K_i K$.

Es werden fünf Verfahren zur Kapitalallokation vorgestellt. Die ersten drei sind Ad-hoc-Postulate. Dies bedeutet, dass keine mathematische Modellbildung vorausgegangen ist. Die vierte und fünfte Methode dagegen basiert auf einem spieltheoretischen Ansatz. Dies besagt, dass zunächst in einem spieltheoretischen Rahmen ein Modell konstruiert wird, um darauf aufbauend eine „gerechte" Zuteilung des Risikokapitals abzuleiten. Abschließend eröffnet ein weiterer Ansatz, das Eulerprinzip, noch eine andere Sichtweise auf die zweite spieltheoretische Allokationsmethode.

Zu diesem Kapitel findet der Leser noch zwei weitere Allokationsmethoden im Appendix C.2. Diese werden in der Arbeit nicht weiter analysiert und sind als Ergänzung zu den ausgewählten Risikomaßen gedacht.

3.1 Proportionale Zuteilung

Die proportionale Zuteilung ist die einfachste Methode der Kapitalallokation und kann als „first guess" bezeichnet werden. Hier wird das Kapital proportional dem Risiko der einzelnen Zufallsvariablen zugeteilt.

Definition 3.1 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht, und ρ ein Risikomaß.*

Dann sind die **Zuteilungskoeffizienten der proportionalen Zuteilung mit Risikomaß $\boldsymbol{\rho}$** *definiert durch*

$$K_i^{p,\rho} = K_i^p = \frac{\rho(X_i)}{\sum\limits_{j \in N} \rho(X_i)} \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n.$$

Die proportionale Zuteilung ist für alle Arten von Risikomaßen möglich.

Beispiel 3.1 (Proportionale Zuteilung mit Varianz als Risikomaß)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\mathrm{var}[X_i] < \infty$. Dann ergibt sich für die Varianz als Risikomaß folgende Zuteilungskoeffizienten:

$$K_i^p = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{\sum\limits_{j \in N} \mathrm{var}[X_i]}.$$

Man erkennt sofort, dass die Korrelation der Zufallsvariablen untereinander nicht berücksichtigt wird.

Sei $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Die Zuteilung $K_i^p = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{\mathrm{var}[Z]}$ ist nicht möglich, da aufgrund von $\mathrm{var}[Z] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] + \sum_{i,j \in N, i \neq j} \mathrm{cov}[X_i, X_j]$ nicht das gesamte Risikokapital aufgeteilt werden würde.

3.2 Marginales Prinzip

Wie man in Beispiel 3.1 erkennen konnte, wird bei der proportionalen Methode die Diversifikation der Risiken nicht berücksichtigt. Dieses Manko versucht die marginale Methode anzugehen. Grundsätzlich teilt sie das Kapital proportional der Risikoänderung zwischen dem Gesamtunternehmen und einem Teil davon zu.

Hinter dem Begriff der marginalen Methode verbergen sich zwei Methoden der Kapitalallokation:

1.) Bei der Methode nach Merton und Perold [33] betreffen die Änderungen ganze Geschäftsbereiche.

2.) Bei der Methode nach Myers und Read [34] sind die Unterschiede infinitesimal.

Beide Methoden wurden ursprünglich für ein Optionsrisikomaß entwickelt, lassen sich aber auf beliebige Risikomaße verallgemeinern.

3.2.1 Methode von Merton und Perold

Bei der marginalen Methode nach Merton und Perold [33] berechnet man sowohl das Risikomaß für das Gesamtunternehmen als auch das Risikomaß des um einen Geschäftsbereich verkleinerten Unternehmens. Man bildet die Differenz der Risikomaße und teilt das Kapital proportional diesen Differenzen zu.

Definition 3.2 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht, $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ und ρ ein Risikomaß.*

Dann sind die **Zuteilungskoeffizienten der Zuteilung nach Merton und Perold mit Risikomaß ρ** *definiert durch*

$$K_i^{MP,\rho} = K_i^{MP} = \frac{\rho(Z) - \rho(Z - X_i)}{\sum\limits_{j \in N} \Big[\rho(Z) - \rho(Z - X_j)\Big]} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Auch diese Zuteilung ist für alle Risikomaße möglich. Führt man Beispiel 3.1 weiter, erkennt man, dass sich die Differenzen nicht zum Risiko des Gesamtunternehmens aufaddieren müssen.

Beispiel 3.2 (Methode nach Merton und Perold mit der Varianz als Risikomaß)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\mathrm{var}[X_i] < \infty$. Dann ergibt sich für die Varianz als Risikomaß folgende Zuteilung:

$$\begin{aligned} K_i^{MP} &= \frac{\mathrm{var}[Z] - \mathrm{var}[Z - X_i]}{\sum\limits_{j \in N} \Big[\mathrm{var}[Z] - \mathrm{var}[Z - X_j]\Big]} \\ &= \frac{2\ \mathrm{cov}[X_i, Z] - \mathrm{var}[X_i]}{2\ \mathrm{var}[Z] - \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{var}[X_j]}. \end{aligned}$$

Man bemerkt, dass sich die Zähler der Zuteilungskoeffizienten nicht zu $\mathrm{var}[Z]$ summieren.

3.2.2 Methode von Myers und Read

Bei der Methode von Myers und Read [34] werden nicht ganze Geschäftsbereiche weggelassen, sondern infinitesimal kleine Änderungen in der Größe der Geschäftsbereiche untersucht. Nun wird ersichtlich warum im vorangegangenen Kapitel die Ableitungen der Risikomaße gebildet wurden.

Definition 3.3 *Sei $(X_1(\lambda_1), \ldots, X_n(\lambda_n))'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht, $\Lambda = (\Lambda_i, \ldots, \Lambda_n)'$ die Größe der Geschäftsbereiche, $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_i(\lambda_i)$ und ρ ein Risikomaß, das partielle Ableitungen nach λ_i für $i = 1, \ldots, n$ besitzt.*

Dann sind die **Zuteilungskoeffizienten der Zuteilung nach Myers und Read mit Risikomaß $\boldsymbol{\rho}$** *definiert durch*

$$K_i^{MR,\rho} = K_i^{MR} = \left(\frac{\partial \rho\big(Z(\Lambda)\big)}{\partial \lambda_i} \Lambda_i \Big/ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho\big(Z(\Lambda)\big)}{\partial \lambda_j} \Lambda_j \right) \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n.$$

Diese Art der Zuteilung ist im Gegensatz zu den beiden vorangegangenen nur für Risikomaße möglich, die partielle Ableitungen besitzen. Auch hier wird Beispiel 3.2 weitergeführt.

Beispiel 3.3 (Zuteilung nach Myers und Read mit Varianz als Risikomaß) Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\mathrm{var}[X_i] < \infty$ und $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$. Dann ergibt sich für die Varianz als Risikomaß folgende Zuteilung:

$$\begin{aligned} K_i^{MR} &= \left(\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\Lambda)\big]}{\partial \lambda_i} \Lambda_i \Big/ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\Lambda)\big]}{\partial \lambda_j} \Lambda_j \right) \\ &= \frac{\mathrm{cov}[\Lambda_i X_i, Z(\Lambda)]}{\mathrm{var}[Z(\Lambda)]}. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel liefert zwei interessante Einsichten. Einerseits sieht man, dass die Methode nach Myers und Read proportional den Kovarianzen von $\Lambda_i X_i$ zum Gesamtportfolio $Z(\Lambda)$ zuteilt. Andererseits gilt auch hier, dass sich die Zähler der Zuteilungskoeffizienten

$$\frac{\partial \mathrm{var}\big[Z(\Lambda)\big]}{\partial \lambda_i} \Lambda_i = 2 \,\mathrm{cov}[X_i, Z(\Lambda)] \Lambda_i$$

nicht zu $\mathrm{var}[Z(\Lambda)]$ summieren.

Dass dies bei anderen Risikomaßen aber der Fall sein kann, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 3.4 (Methode nach Myers und Read mit Standardabweichung als Risikomaß)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\mathrm{var}[X_i] < \infty$ und $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. Dann ergibt sich für die Varianz als Risikomaß folgende Zuteilung:

$$\begin{aligned} K_i^{MR} &= \left(\frac{\partial \sigma\left[Z(\Lambda)\right]}{\partial \lambda_i} \Lambda_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma\left[Z(\Lambda)\right]}{\partial \lambda_j} \Lambda_j \right) \\ &= \frac{\mathrm{cov}[\Lambda_i X_i, Z(\Lambda)]}{\mathrm{var}[Z(\Lambda)]}. \end{aligned}$$

Die Zuteilungskoeffizienten sind identisch mit denen der Zuteilung nach Myers und Read mit der Varianz als Risikomaß. Im Gegensatz zur Varianz summieren sich hier jedoch die Zähler der Zuteilungskoeffizienten zu $\sigma[Z(\Lambda)]$ auf.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma\left[Z(\Lambda)\right]}{\partial \lambda_i} \Lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{cov}[X_i, Z(\Lambda)]}{\sqrt{\mathrm{var}[Z(\Lambda)]}} \Lambda_i = \sigma[Z(\Lambda)]$$

Beide Punkte werden im nächsten Kapitel noch ausführlicher zur Sprache kommen.

3.3 Spieltheoretischer Ansatz

Dieser Abschnitt widmet sich der Theorie der kooperativen Spiele. Hier unterscheidet man zwei verschiedene Modellierungen. Eine behandelt die Theorie der endlichen kooperativen Spiele, die andere die Theorie der kooperativen Spiele mit skalierbaren Spielern. Die beiden Modelle unterscheiden sich darin, dass bei Ersterem die Spieler nicht teilbar, beim Zweiten hingegen teilbar sind.

3.3.1 Endliche kooperative Spiele

Einführung

Um im Weiteren die Ergebnisse der Spieltheorie, speziell der Theorie der endlichen kooperativen Spiele, für die Kapitalallokation nutzen zu können, geben wir eine kurze Einführung. Sie beruht zu großen Teilen auf der Vorlesung von Schlee [43]. Im Folgenden wird sie auch nur noch als Theorie der kooperativen Spiele bezeichnet, wenn keine Verwechselung möglich ist.

Unter einem kooperativen Spiel kann man sich eine Gruppe von Spielern vorstellen, die etwas zu zahlen oder eine Investition zu tätigen haben. Schließen sich die Spieler zu einer Koalition zusammen, ist die gemeinsame Investition geringer als die addierten Einzelinvestitionen. Je größer die Koalition ist, umso größer fällt der Koalitionsgewinn aus.

Definition 3.4 *Ein* **endliches kooperatives Spiel** *ist ein Tupel* (N, ρ)*, bei dem* $N = \{1, \ldots, n\}$ *die* n *Spieler und* $\rho : \wp(N) \to \mathbb{R}$ *die sogenannte* **charakteristische**

Funktion *bezeichnet. Teilmengen von* N *heißen* **Koalitionen**. *Die charakteristische Funktion hat folgende Eigenschaften:*

$$\rho(\emptyset) = 0$$
$$\rho(A \cup B) \leq \rho(A) + \rho(B) \quad \textit{für alle } A, B \subseteq N.$$

Es ist wichtig zu erwähnen, dass in der Literatur der kooperativen Spiele anstatt der Subadditivität der charakteristischen Funktion meist die Superadditivität, d.h. $\rho(A \cup B) \geq \rho(A) + \rho(B)$ vorausgesetzt wird. Es wird in diesem Fall dann davon ausgegangen, dass die charakteristische Funktion für eine Auszahlungsfunktion steht. Natürlich sind Super- und Subadditivität nur zwei Seiten derselben Medaille, da für eine subadditive Funktion ρ gilt, dass $\rho' = -\rho$ superadditiv ist. Es macht somit keinen Unterschied welches Konzept man betrachtet.

Man erkennt sofort, dass das Problem der Kapitalallokation als kooperatives Spiel aufgefasst werden kann, wenn man als Spieler die Geschäftsbereiche und als charakteristische Funktion $\tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho}(S) = \rho\left(\sum_{i \in S} X_i\right) \quad \text{für } S \subseteq N$$

mit einem Risikomaß ρ verwendet. Im Folgenden wird kein Unterschied zwischen der charkteristischen Funktion und einem Risikomaß gemacht. Dies bedeutet, dass ab jetzt $\rho(N)$ äquivalent $\rho\big(\sum_{i \in N} X_i\big)$ ist. Dies ist aber nur möglich, wenn das Risikomaß subadditiv ist, was z.B. bei kohärenten Maßen der Fall ist. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Risikomaßen ist, wie schon in Kapitel 2.5.2 dargelegt, nur die Standardabweichung und der Expected Shortfall im Allgemeinen subadditiv. Welche Auswirkungen es hat, wenn die Forderung der Subadditivität verletzt ist, wird im nächsten Kapitel behandelt.

Die charakteristische Funktion eines kooperativen Spieles sagt nichts über die Verteilung des Koalitionsgewinnes aus, d.h. wie $\sum_{i=1}^{n} \rho(\{i\}) - \rho(N)$ aufgeteilt wird. Um darüber weitere Aussagen machen zu können, wird zunächst eine Zuteilung definiert.

Definition 3.5 *Ein Vektor* $(K_1, \ldots, K_n)'$ *heißt* **Zuteilung (Imputation)**, *wenn er folgende Bedingung erfüllt*

$$K_i \leq \rho(\{i\}) \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1}^{n} K_i = \rho(N)$$

$K_i \leq \rho(\{i\})$ *heißt die Bedingung der individuellen Rationalität,* $\sum_{i=1}^{n} K_i = \rho(N)$ *die der Gruppenrationalität oder der kollektiven Rationalität.*

Beide Bedingungen sind leicht nachvollziehbar. Zum einen will kein Spieler in einer Koalition mehr zahlen als er alleine müsste und zum anderen müssen die gesamten Kosten abgedeckt werden.

Bei kooperativen Spielen kann man zwischen unwesentlichen und wesentlichen Spielen unterscheiden.

Definition 3.6 *Ein kooperatives Spiel mit einer charakteristischen Funktion bei der*

$$\rho(B) = \sum_{i \in B} \rho(\{i\}) \quad \text{für alle } B \subseteq N$$

gilt, heißt **unwesentlich**, *sonst heißt es* **wesentlich**.

Unwesentliche kooperative Spiele sind trivial, da ihre charakteristische Funktion additiv ist und es für sie somit nur eine Imputation gibt.

Satz 3.7 ([43]) *Sei (N, ρ) ein unwesentliches kooperatives Spiel. Dann ist*

$$K_i = \rho(\{i\}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

die einzige Imputation für dieses Spiel.

Beweis: Dies folgt sofort aus $K_i \leq \rho(\{i\})$ und $\sum_{i=1}^{n} K_i = \rho(N) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\{i\})$. □

Um die folgenden Beweise zu vereinfachen wird der Begriff der strategischen Äquivalenz eingeführt.

Definition 3.8 *Zwei kooperative Spiele (N, ρ) und $(N, \tilde{\rho})$ mit der gleichen Spielermenge N heißen* **strategisch äquivalent**, *falls es ein $k > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ gibt, so dass*

$$\tilde{\rho}(B) = k\rho(B) + \sum_{i \in B} c_i \quad \text{für alle } B \subseteq N.$$

Die Relation „strategisch äquivalent" ist bei kooperativen Spielen eine Äquivalenzrelation und induziert somit in der Menge der Spiele mit der gleichen Anzahl von Spielern eine Klasseneinteilung. Auch die Imputationen von je zwei strategisch äquivalenten kooperativen Spielen lassen sich eineindeutig aufeinander abbilden.

Satz 3.9 ([43]) *Die Mengen der Imputationen von strategisch äquivalenten kooperativen Spielen können umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden.*

Beweis: Seien (N, ρ) und $(N, \tilde{\rho})$ zwei äquivalente Spiele und $(K_1, \ldots, K_n)'$ eine Imputation für (N, ρ). Dann gilt mit der Notation aus 3.8

$$\tilde{\rho}(B) = k\rho(B) + \sum_{i \in B} c_i \tag{3.1}$$

$$K_i \leq \rho(\{i\}) \quad \sum_{i=1}^{n} K_i = \rho(N).$$

Wenn wir nun K_i auf $\tilde{K}_i$ durch $\tilde{K}_i = kK_i + c_i$ für $i = 1, \ldots, n$ abbilden, folgt aufgrund von (3.1)

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_i &= kK_i + c_i \leq k\rho(\{i\}) + c_i = \tilde{\rho}(\{i\}) \\
\sum_{i=1}^{n} \tilde{K}_i &= \sum_{i=1}^{n} kK_i + c_i = k\rho(N) + \sum_{i=1}^{n} c_i = \tilde{\rho}(N)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. Der Umkehrschluss von dem neuen Spiel auf das alte folgt analog zur Reflexivität der Relation „strategisch äquivalent“. □

Nun kann man möglichst einfache Repräsentanten suchen. Diese werden in den nächsten beiden Definitionen vorgestellt.

Definition 3.10 *Ein kooperatives Spiel heißt* **Null-Spiel***, wenn seine charakteristische Funktion identisch* 0 *ist.*

Definition 3.11 *Ein kooperatives Spiel, dessen charakteristische Funktion folgende Eigenschaften hat*

$$\begin{aligned}
\rho(\{i\}) &= 0 \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n \\
\rho(N) &= -1,
\end{aligned}$$

heißt ein **0-(−1)-reduziertes kooperatives Spiel**.

Jetzt ist zu beweisen, dass alle kooperativen Spiele entweder einem Null- oder einem 0-(−1)-Spiel äquivalent sind.

Satz 3.12 ([43]) *Jedes unwesentliche Spiel ist einem Null-Spiel strategisch äquivalent.*

Beweis: Sei (N, ρ) ein unwesentliches Spiel. Wählt man mit der Notation aus Definition 3.8 $k = 1$ und $c_i = -\rho(\{i\})$, dann gilt

$$\tilde{\rho}(B) = \rho(B) + \sum_{i \in B} -\rho(\{i\}) = 0 \quad \text{für alle } B \subseteq N,$$

da bei einem unwesentlichen Spiel

$$\rho(B) = \sum_{i \in B} \rho(\{i\}) \quad \text{für alle } B \subseteq N.$$

□

Satz 3.13 ([43]) *Jedes wesentliche kooperative Spiel ist einem* 0-(−1)*-reduzierten kooperativem Spiel strategisch äquivalent.*

Beweis: Es soll gelten

$$\tilde{\rho}(\{i\}) = k\rho(\{i\}) + c_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$
$$\tilde{\rho}(N) = k\rho(N) + \sum_{i=1}^{n} c_i = -1.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit $(n+1)$ Gleichungen und $(n+1)$ Unbekannten. Hieraus berechnen sich k und die c_i zu

$$k = -\frac{1}{\rho(N) - \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\{i\})}$$
$$c_i = \frac{\rho(\{i\})}{\rho(N) - \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\{i\})} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Wegen der Wesentlichkeit des Spieles und der Subadditivität ist der Nenner $\neq 0$ und $k > 0$. □

Verteilungsmethoden für den Koalitionsgewinn

Alle kooperativen Spiele sind derart in Äquivalenzklassen aufgeteilt, dass innerhalb einer Äquivalenzklasse sich die Imputationen eindeutig aufeinander abbilden lassen. Für unwesentliche Spiele gibt es aufgrund von Satz 3.7 nur eine einzige Imputation. Somit bleiben nur die Imputationen von wesentlichen Spielen, d.h. wegen der strategischen Äquivalenz sind die Imputationen von 0-(-1)-Spielen zu untersuchen. Hiervon gibt es offensichtlich unendlich viele.

Jeder Spieler i möchte, dass sein Anteil K_i möglichst klein ist. Dies ist natürlich nur auf Kosten der anderen Spieler möglich. So muss ein Spieler Gründe vorbringen, die seinen geringeren Anteil rechtfertigen. So könnte er mit dem Nutzen einer Koalition B, der er angehört, argumentieren und verlangen, dass dieser besser berücksichtigt wird.

Dominanz von Imputationen Man kann sich nun die Frage stellen, ob man die Imputationen nicht zumindest teilweise ordnen kann, d.h. ob es Imputationen gibt, die offensichtlich besser als andere sind. Folgende Definition zeigt eine Möglichkeit auf.

Definition 3.14 *Eine Imputation $K = (K_1, \ldots, K_n)$* **dominiert** *eine Imputation $L = (L_1, \ldots, L_n)$* **bezüglich (oder auch durch die) der Koalition B**, *falls*

$$\sum_{i \in B} K_i \geq \rho(B) \quad \textit{(Bedingung der Effektivität)}$$
$$K_i < L_i \quad \textit{für alle } i \in B \textit{(Bedingung der Präferenz).}$$

Man bezeichnet diesen Sachverhalt auch mit

$$K \succ_B L.$$

Der Gedanke hinter dieser Definition ist einfach. Die Spieler aus B bekommen bei der Imputation K weniger zugeteilt und können diese Imputation auch durchsetzen. Würden sie aus der großen Koalition ausscheiden, könnten sie diese Verteilung auch durch die Koalition B realisieren.

Definition 3.15 *Eine Imputation K* **dominiert** *die Imputation L, in Zeichen $K \succ L$, wenn es eine Koalition B gibt, so dass $K \succ_B L$.*

Die Dominanz bleibt bei strategischer Äquivalenz erhalten.

Satz 3.16 ([43]) *Seien (N, ρ) und $(N, \tilde{\rho})$ zwei strategisch äquivalente kooperative Spiele und seien K, L und $\tilde{K}, \tilde{L}$ strategisch äquivalente Imputationen für die beiden Spiele. Dann folgt aus $K \succ_B L$ die Beziehung $\tilde{K} \succ_B \tilde{L}$.*

Beweis: Sei

$$\tilde{\rho}(B) = k\rho(B) + \sum_{i \in B} c_i \quad \text{mit } k > 0, c_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } B \subseteq N.$$

Aus $K_i < L_i$ für $i \in B$ folgt $\tilde{K}_i = kK_i + c_i < kL_i + c_i = \tilde{L}_i$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B} \tilde{K}_i &= \sum_{i \in B} (kK_i + c_i) \\
&= k \sum_{i \in B} K_i + \sum_{i \in B} c_i \\
&\geq k\rho(B) + \sum_{i \in B} c_i \\
&= \tilde{\rho}(B).
\end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenschaften der Dominanz für $(N, \tilde{\rho})$ gezeigt. □

Zur Untersuchung der Dominanz genügt es daher die Äquivalenzklassen von Spielen zu betrachten.

Der Kern eines kooperativen Spiels Aufgrund der Dominanz kann man schon einige Imputationen ausschließen. Die restlichen werden zusammengefasst.

Die explizite Definition des Kerns eines kooperativen Spiels stammt von Gillies [23] aus dem Jahre 1959. Inhaltlich findet sich die Idee des Kerns bereits bei Edgeworth [14] im Jahr 1881.

Definition 3.17 *Die Menge aller nicht-dominierten Imputationen eines kooperativen Spieles heißt der* **Kern $\mathfrak{K}$** *des Spieles.*

Der nächste Satz beschreibt den Kern durch eine andere Eigenschaft, der darin enthaltenen Imputationen.

Satz 3.18 ([43]) *$K = (K_1, \dots, K_n) \in \mathfrak{K}$ gilt genau, wenn*

$$\rho(B) \geq \sum_{i \in B} K_i \quad \textit{für alle } B \subseteq N \tag{3.2}$$

Beweis: Es genügt 0-(-1)-reduzierte Spiele zu betrachten. Für die Koalition N und die Einerkoalitionen $\{i\}, i = 1, \dots, n$ ist die Ungleichung (3.2) aufgrund der Definition einer Imputation immer erfüllt.

Es wird also angenommen, dass für eine Koalition $B \neq N$, die keine Einerkoalition ist,

$$\rho(B) < \sum_{i \in B} K_i$$

gelte. Hieraus folgt weiter

$$\sum_{i \notin B} K_i = \rho(N) - \sum_{i \in B} K_i < \rho(B) - \sum_{i \in B} K_i < 0.$$

Wir konstruieren nun eine Imputation L mit $L \succ_B K$. Sei

$$\frac{1}{|B|}(\rho(B) - \sum_{i \in B} K_i) < \epsilon < 0 \tag{3.3}$$

und setzen L fest zu

$$L_i = \begin{cases} K_i + \epsilon & \text{falls } i \in B \\ \frac{1}{|N \setminus B|}(\sum_{i \notin B} K_i - |B|\epsilon) & \text{falls } i \notin B \end{cases} .$$

L ist tatsächlich eine Imputation.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} L_i &= \sum_{i \in B} K_i + |B|\epsilon + |N \setminus B| \frac{1}{|N \setminus B|}(\sum_{i \notin B} K_i - |B|\epsilon) \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_i = \rho(N) = -1. \end{aligned}$$

$L_i \leq 0$ für $i \in B$ folgt aus $K_i \leq 0$ und $\epsilon < 0$. Für $i \notin B$ gilt wegen (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{|N \setminus B|}(\sum_{i \notin B} K_i - |B|\epsilon) &< \frac{1}{|N \setminus B|}(\sum_{i \notin B} K_i - \rho(B) + \sum_{i \in B} K_i) \\ &\leq \frac{1}{|N \setminus B|}(\rho(N) - \rho(B)) \leq 0. \end{aligned}$$

L dominiert K. $L_i < K_i$ ist für alle $i \in B$ erfüllt und $\sum_{i \in B} L_i \geq \rho(B)$ folgt aus

$$\sum_{i \in B} L_i = \sum_{i \in B} K_i + |B|\epsilon > \sum_{i \in B} K_i + \rho(B) - \sum_{i \in B} K_i = \rho(B).$$

Da nun $L \succ_B K$, so würde K damit nicht zum Kern gehören, also muss die Ungleichung (3.2) gelten.

Würde K von L dominiert bezüglich der Koalition B, dann würde gelten

$$\sum_{i \in B} K_i > \sum_{i \in B} L_i \geq \rho(B).$$

Dies ist ein Widerspruch, daher gibt es kein $L \succ K$, und es gilt die Ungleichung (3.2). $\square$

Die Bedeutung des Kerns erwächst aus dem vorangegangenen Satz. Im Kern sind all diejenigen Imputationen enthalten, bei denen es sich für keine Koalition lohnen würde aus der großen Koalition auszuscheiden und eine kleinere Koalition zu bilden, da sie insgesamt mehr zahlen müsste als bei einer Imputation aus dem Kern. Dies bedeutet, dass eine „gute“ Verteilung ein Element des Kerns sein sollte.

Der Ausgangspunkt für weitere Vorschläge zur Verteilung des Gewinns sind zwei Mängel des Kerns:

1.) Der Kern hat nur eine sogenannte innere Stabilität: Keine Imputation aus $\mathfrak{K}$ dominiert irgendeine andere Imputation aus $\mathfrak{K}$. Es kann aber für irgendeine Imputation K unter Umständen keine Imputation $L \in \mathfrak{K}$ angegeben werden mit $L \succ K$.

2.) Der Kern kann aus mehr als einer Imputation bestehen, was zu keiner eindeutigen Auswahl einer Verteilung führt.

Aufgrund des zweiten Punktes ergibt sich die folgende Definition.

Definition 3.19 *Ein* **Wert** *ist eine Funktion, die jedes Spiel auf eine eindeutige Imputation abbildet.*

$$\Phi : (N, \rho) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(N,\rho) \\ \vdots \\ \Phi_n(N,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \sum_{i \in N} K_i = \rho(N)$$

Ein geeigneter Wert ist das Ziel der Suche, da man damit für jedes Spiel genau eine Imputation erhalten würde. Im Folgenden werden nun Lösungsvorschläge für die beiden Probleme vorgestellt.

von-Neumann-Morgernstern Lösung Der erste Lösungsvorschlag, stammt von Morgenstern und von Neumann. Er trägt dem ersten Kritikpunkt am Kern Rechnung.

Definition 3.20 *Die* **von-Neumann-Morgenstern Lösung** *eines kooperativen Spiels nennt man die Menge $\mathfrak{R}$ von Imputationen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1.) Keine Imputation aus $\mathfrak{R}$ dominiert irgend eine andere Imputation aus $\mathfrak{R}$ (interne Stabilität)

2.) Zu jeder Imputation $L \notin \mathfrak{N}$ gibt es eine Imputation $K \in \mathfrak{N}$, die L dominiert: $K \succ L$ (externe Stabilität)

Die von-Neumann-Morgenstern Lösungen beinhalten den Kern.

Satz 3.21 ([43]) *Wenn die von-Neumann-Morgenstern $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ ist, dann gilt $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Beweis: Wenn $\mathfrak{K} = \emptyset$, dann gilt in jedem Fall $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$. Wenn eine Imputation $K \in \mathfrak{K}$ ist, dann wird sie von keiner anderen Imputation dominiert. Wäre $K \notin \mathfrak{N}$, dann würde sie von einer Imputation aus $\mathfrak{N}$ dominiert. Dies ist ein Widerspruch, daher muss $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$ gelten. □

Der Schwachpunkt der von-Neumann-Morgenstern Lösungen ist, dass diese Menge sowohl keine als auch unendlich viele Imputationen enthalten kann. So hat Lucas [30] ein Zehnpersonenspiel angegeben, das keine von-Neumann-Morgenstern Lösung besitzt. Der Fall, dass die von-Neumann-Morgenstern Lösung nur aus einer einzigen Imputation besteht, trifft nur dann zu, wenn das kooperative Spiel unwesentlich ist.

Satz 3.22 ([43]) *Wenn die von-Neumann-Morgenstern Lösung $\mathfrak{N}$ eines kooperativen Spiels nur aus einer einzigen Imputation besteht, dann ist das Spiel unwesentlich.*

Beweis: Wir nehmen nun an, dass das Spiel wesentlich ist und o.B.d.A in der 0-(-1)-reduzierten Form vorliegt. Insbesondere ist damit auch $n > 1$. Sei nun $(K_1, \ldots, K_n)'$ die einzige Imputation und für ein j sei $K_j < 0$. Ein solches j existiert aufgrund der Eigenschaft der Imputation. Hieraus konstruieren wir nun eine neue Imputation L:

$$L_i = \begin{cases} K_i + \frac{K_j}{n-1} & \text{falls } i \neq j \\ 0 \quad \text{falls } i = j \end{cases}$$

L wird nicht von K dominiert, da für alle K_i mit $i \neq j$ gilt, dass $L_i < K_i$. Es gilt zwar $K_j < L_j$ aber $K_j \leq \rho(\{j\})$. Daher muss entweder $L \in \mathfrak{N}$ sein oder es gibt eine weitere Imputation M, die L dominiert und zu $\mathfrak{N}$ gehört. In beiden Fällen enthält $\mathfrak{N}$ mindestens 2 Imputationen im Widerspruch zur Annahme. Daher muss das Spiel unwesentlich sein. □

Da die von-Neumann-Morgenstern Lösung nur für den trivialen Fall eindeutig ist, ist man weiter auf der Suche nach einer geeigneten Verteilungsmethode.

Nucleolus Der Lösungsvorschlag des Nucleolus wurde im Jahr 1969 von Schmeidler [44] formuliert. Ziel ist es hier, die Imputation $K = (K_1, \ldots, K_n)$ zu berechnen, welche die Überschüsse

$$\delta(S) = \rho(S) - \sum_{i \in S} K_i \quad \text{für alle } S \in N$$

minimiert. Um ausdrücken zu können, was man mit Minimum meint, muss im $\mathbb{R}^d$, hier $d = 2^n$, eine Ordnung eingeführt werden, da gleichzeitig über alle $\delta(S)$ minimiert werden soll. Deshalb defininiert man die lexikographische Ordung „$\leq_l$“.

Definition 3.23 *Seien $K, L \in \mathbb{R}^d$. Dann ist die* **lexikographische Ordung** $\leq_l$ *definiert durch*

$$K \leq_l L \Leftrightarrow \exists k : 0 \leq k \leq d \quad K_i = L_i \text{ für } i = 1, \ldots, k \text{ und } K_{k+1} < L_{k+1}.$$

Wenn keine Koalition S willkürlich bevorzugt werden soll, so kann man zwei verschiedene Vektoren $(\delta(S))_{S \subseteq N}$ nicht direkt vergleichen. Deshalb ordnet man zuerst die Komponenten der Größe nach und führt erst dann den lexikographischen Vergleich durch.

Definition 3.24 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Ein $K \in M$ heißt* **Lexmaxmin-Element** *bzw. $K = lexmaxmin_{L \in M}$, falls*

$$[K] \leq_l [L] \quad \text{für alle } L \in M$$

mit $[K] = (K_{[1]}, \ldots, K_{[d]})$, wobei $K_{[1]} \geq \cdots \geq K_{[d]}$.

Nun kann man den Nucleolus eines kooperativen Spieles definieren.

Definition 3.25 *Als* **Nucleolus eines Spieles** (N, ρ) *bezeichnet man die Imputation $K = (K_1, \ldots, K_n)$, welche die Lösung der folgenden Optimierungsaufgabe ist:*

$$\begin{aligned}
(\delta(S))_{S \subseteq N} &\mapsto lexmaxmin \\
\rho - \sum_{i \in S} K_i &= \delta(S) \quad \text{für alle } S \subseteq N \\
\sum_{i=1}^{n} K_i &= \rho(N) \\
K_i &\leq \rho(\{i\}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Durch die nächsten beiden Sätze wird gezeigt, dass der Nucleolus ein Wert ist.

Satz 3.26 ([43]) *Die jeweiligen Nucleoli strategisch äquivalenter Spiele können durch die entsprechende strategische Transformation ineinander überführt werden.*

Beweis: Die Überschüsse rechnen sich folgendermaßen um:

$$\tilde{\rho}(S) - \sum_{i \in S} \tilde{K}_i = \Big(k\rho(S) + \sum_{i \in S} c_i\Big) - \sum_{i \in S}(kK_i + c_i) = k\Big(\rho(S) - \sum_{i \in S} K_i\Big).$$

Da $k > 0$, wird die lexikographische Ordnung der Überschüsse nicht verändert. □

Satz 3.27 ([43]) *Der Nucleolus existiert für jedes kooperative Spiel und ist eindeutig.*

Beweis: Ein unwesentliches Spiel hat genau eine Imputation und diese ist dann auch der Nucleolus.

Bei einem wesentlichen Spiel ersieht man aus der 0-(-1)-reduzierten Form, dass die Menge der Imputationen nicht leer und kompakt ist. Unter der lexikographischen Ordnung ist die Menge der Imputationen vollständig geordnet. Hieraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit. $\square$

Man kann sogar Folgendes zeigen.

Satz 3.28 ([37]) *Der Nucleolus eines kooperativen Spieles ist im Kern enthalten.*

Beweis: siehe [37]. $\square$

Shapley Zuteilung Die Shapley Zuteilung wurde 1953 von Lloyd Shapley [47] angegeben und hat seitdem großes Interesse erfahren. Ein Grund dafür ist sicherlich das axiomatische Herangehen. Shapley stellt zunächst drei Axiome auf, die eine „faire“ Zuteilung erfüllen soll. Dann weist er nach, dass ein Wert existiert, der durch diese Axiome eindeutig bestimmt ist.

Um den Shapley Wert in einer leicht lesbaren Form angeben zu können, benötigt man einige vorbereitende Definitionen.

Definition 3.29 *1.) Es wird die Abkürzung* $\boldsymbol{\Delta_i(S)}$= $\rho(S \cup \{i\}) - \rho(S)$ *für jede beliebige Menge* $S \subset N, i \notin S$ *eingeführt.*

2.) Zwei Spieler i *und* j *heißen* **austauschbar** *in* (N, ρ)*, falls jeder der beiden den selben Beitrag zu jeder Koalition* S *liefert, die weder* i *noch* j *enthält, d.h.* $\Delta_i(S) = \Delta_j(S)$ *für alle Mengen* $S \subset N$ *mit* $i, j \notin S$.

3.) Ein Spieler heißt **Dummy***, falls er zu jeder Koalition* S *den Beitrag* $\rho(\{i\})$ *liefert. Das bedeutet* $\Delta_i(S) = \rho(\{i\})$ *für alle* $S \subset N$ *mit* $i \notin S$.

Nun können die Axiome und der Shapley Wert in einer übersichtlichen Form definiert werden.

Axiom 3.1 (Symmetrie) (N, ρ) *sei ein kooperatives Spiel und* $\Phi(N, \rho)$ *ein Wert. Falls die Spieler* i *und* j *austauschbar sind, gilt* $\Phi_i(N, \rho) = \Phi_j(N, \rho)$

Axiom 3.2 (Dummy-Spieler) (N, ρ) *sei ein kooperatives Spiel und* $\Phi(N, \rho)$ *ein Wert. Für Dummies gilt* $\Phi(N, \rho)_i = \rho(\{i\})$.

Axiom 3.3 (N, ρ_1) *und* (N, ρ_1) *seien zwei kooperative Spiele und* $\Phi(N, \rho)$ *ein Wert. Es gilt* $\Phi(N, \rho_1 + \rho_2) = \Phi(N, \rho_1) + \Phi(N, \rho_2)$*, wobei das Spiel* $(N, \rho_1 + \rho_2)$ *definiert ist durch* $(\rho_1 + \rho_2)(S) = \rho_1(S) + \rho_2(S)$ *für alle* $S \subseteq N$.

Es ist zu beachten, dass die ersten beiden Axiome Bedingungen für einzelne Spiele sind, wobei das dritte Axiom die Werte von zwei kooperativen Spielen miteinander verbindet. Die ersten beiden Axiome sind leicht zu motivieren im Gegensatz zum dritten, das zwar mathematisch einleuchtend ist aber nicht in den Zusammenhang zu passen scheint.

Definition 3.30 *Gegeben sei ein kooperatives Spiel (N, ρ). Ein Wert $\Phi(N, \rho)$ der die Axiome 3.1 - 3.3 erfüllt, heißt* **Shapley Wert**.

Erstaunlicherweise folgt aus diesen Annahmen die Existenz und die Eindeutigkeit des Wertes. Darüber hinaus gilt die folgende Formel.

Satz 3.31 ([43]) *Der Shapley-Wert K^{Sh} ist eindeutig und für jedes Spiel durch die folgende Formel gegeben*

$$K_i^{Sh} = \sum_{S:S\subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\big(\rho(S) - \rho(S \setminus \{i\})\big) \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n$$

Der Shapley-Wert kann folgendermaßen interpretiert werden: Die Spieler verabreden sich zu einer bestimmten Zeit in einem Raum. Alle Reihenfolgen ihres Eintreffens sind gleich wahrscheinlich. Dann ist der Shapley-Wert für einen Spieler der Erwartungswert des Beitrages dieses Spielers zur bereits im Raum befindlichen Koalition.

Der Beweis des Satzes 3.31 erfolgt in mehreren Schritten.

Definition 3.32 *Unter dem* **Randwerten von Koalition B** *werden folgende rekursiv definierte Größen r_B verstanden:*

$$r_{\{i\}}(\rho) = \rho(\{i\}) \quad \textit{für alle } i \in N$$
$$r_B(\rho) = \rho(B) - \sum_{L:L\subset B} r_L(\rho) \quad \textit{für alle } B \textit{ mit } B \subseteq N \textit{und } |B| > 1$$

Lemma 3.33 ([43]) *Für den Randwert r_B einer Koalition B gilt:*

$$r_B(\rho) = \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L).$$

Beweis: Induktion über die Anzahl der Elemente der Teilmenge.
Für $i \in N$:

$$r_{\{i\}}(\rho) = (-1)^{1-1}\rho(\{i\}) = \rho(\{i\})$$

Für $|B| > 1$:

$$\begin{aligned}
r_B &= \rho(B) - \sum_{L:L\subset B} r_L(\rho) \\
&= \rho(B) - \sum_{L:L\subset B} \sum_{H:H\subseteq L} (-1)^{|L|-|H|}\rho(H) \\
&= \rho(B) - \sum_{L:L\subset B} \sum_{i=0}^{|B|-|L|-1} \binom{|B|-|L|}{i} (-1)^i \rho(L) \\
&= \rho(B) - \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L) \\
&= \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L)
\end{aligned}$$

Es gilt
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = (-1)^n, \tag{3.4}$$
da es gleichviele geradzahlige wie ungeradzahlige Untermengen gibt und bei (3.4) nur nicht die Menge mit n-Elementen gezählt wird. □

Zur Herleitung des Shapley-Wertes wird die charakteristische Funktion unter Zuhilfenahme der Randwerte r_B als Linearkombination von „elementaren" charakteristischen Funktionen dargestellt. Die Berechnung des Shapley-Wertes kann auf die Berechnung mittels elementarer charakteristischer Funktionen zurückgeführt werden.

Definition 3.34 *Für ein $B \subseteq N$ nennt man die folgende Funktion*
$$\rho_B : \wp(N) \to \mathbb{R} \quad mit \quad \rho_B(L) = \begin{cases} -1 & falls\ B \subseteq L \\ 0 & falls\ B \nsubseteq L \end{cases}$$
eine **elementare charakteristische Funktion**.

Lemma 3.35 ([43]) *Für das Spiel $(N, c\rho_B)$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ ist der Shapley-Wert gegeben durch*
$$\Phi_i(c\rho_B) = \begin{cases} -\frac{c}{|B|} & falls\ i \in B \\ 0 & falls\ i \notin B \end{cases}$$

Beweis: Sei $L \subseteq N$ mit $i, j \notin L$. Sind $i, j \in B$, dann ist $\Delta_i(L) = \Delta_j(L) = 0$ für alle $L \subseteq N$. Sind $i, j \notin B$, dann ist $\Delta_i(L) = \Delta_j(L) = 0$ für alle $L \subseteq N$. Nur für $i \in B$ und $j \notin B$ ist $\Delta_i(L) \neq \Delta_j(L)$ für $L = B \setminus \{j\}$. Daraus folgt, dass das Symmetrie-Axiom erfüllt ist.

Ist $i \notin B$, so ist es ein Dummy, da $\rho_B(\{i\}) = 0$ und $\Delta_i(L) = 0$ für alle $L \subset N$. Ist $i \in B$, so ist es kein Dummy,da $\rho_B(\{i\}) = 0$, aber $\Delta_i(L) = -1$ für $L = B \setminus \{i\}$. Daraus folgt, dass das Dummy Spieler Axiom erfüllt ist. □

Lemma 3.36 ([43]) *Die charakteristische Funktion ρ eines Spieles (N, ρ) kann als Linearkombination elementarer charakteristischer Funktionen dargestellt werden:*
$$\rho = \sum_{\substack{B: B \subseteq N \\ B \neq \emptyset}} r_B(\rho)\rho_B,$$
wobei die r_B Randwerte der Koalition B sind. Die Darstellung ist eindeutig.

Beweis: Es muss gezeigt werden:
$$\rho(M) = \sum_{\substack{B: B \subseteq N \\ B \neq \emptyset}} r_B(\rho)\rho_B(M).$$

Für $r_B(\rho)$ setzt man ein:

$$r_B(\rho) = \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L).$$

Somit ergibt sich

$$\rho(M) = \sum_{\substack{B:B\subseteq N\\ B\neq\emptyset}} \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L)\rho_B(M).$$

Berücksichtigt man die Definition von $\rho_B(M)$, so folgt weiter

$$\rho(M) = \sum_{\substack{B:B\subseteq M\\ B\neq\emptyset}} \sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L).$$

Vertauschen der beiden Summen und abzählen der $(-1)^{|B|-|L|}$ liefert

$$\begin{aligned}
\rho(M) &= \sum_{L\subseteq M}\Big[\sum_{B:L\subseteq B\subseteq M} (-1)^{|B|-|L|}\Big]\rho(L)\\
&= \sum_{L\subseteq M}\Big[\sum_{b=|L|}^{|M|} \sum_{\substack{|B|=b\\ B:L\subseteq B\subseteq M}} (-1)^{b-|L|}\Big]\rho(L).
\end{aligned}$$

Da eine Menge B von b Elementen, die eine Menge L enthält, aus einer Menge M auf $\binom{|M|-|L|}{b-|L|}$ verschiedene Weisen gewählt werden kann, folgt weiter

$$\rho(M) = \sum_{L\subseteq M}\Big[\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{b-|L|}\Big]\rho(L).$$

Die Indextransformation $\beta = b-|L|$ und die Anwendung der binomischen Formel liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{b-|L|} &= \sum_{\beta=0}^{|M|-|L|}\binom{|M|-|L|}{\beta}(-1)^{\beta}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } |M|-|L|>0\\ 1 & \text{falls } |M|-|L|=0\end{cases}.
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\rho(M) &= \sum_{L=M}\left[\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{b-|L|}\right]\rho(L)\\
&\quad + \sum_{\substack{L\subseteq M\\ L\neq M}}\left[\sum_{b=|L|}^{|M|}\binom{|M|-|L|}{b-|L|}(-1)^{b-|L|}\right]\rho(L)\\
&= \rho(M) + 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung einer charakteristischen Funktion durch elementare charakteristische Funktionen gezeigt. Bleibt noch die Eindeutigkeit. Angenommen es gäbe zwei verschieden Darstellungen für $\rho(S)$:

$$\rho(S) = \sum_{\substack{B:B\subseteq N\\ B\neq\emptyset}} \lambda_B(\rho)\rho_B(S) = \sum_{\substack{B:B\subseteq N\\ B\neq\emptyset}} \tilde{\lambda}_B(\rho)\rho_B(S).$$

Wir beweisen die Gleichheit der Koeffizienten durch Induktion über die Menge aller Untermengen S einer Menge $M \subset N$. Zunächst liefert $S = \{i\}$ die Gleichheit von $\lambda_{\{i\}} = \tilde{\lambda}_{\{i\}}$. Nimmt man nun an, dass für alle $S \subset M$ die Gleichheit $\lambda_S = \tilde{\lambda}_S$ bereits bewiesen ist, folgt für $S = M$ die Gleichheit $\lambda_M = \tilde{\lambda}_M$, da für $B \not\subset M$ die Summanden ρ_B gleich Null sind und für $B \subset M$ nach Induktionsannahme $\lambda_B = \tilde{\lambda}_B$ gilt. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen. □

Lemma 3.37 ([43]) *Falls die Differenz $\rho - \tau$ zweier charakteristischer Funktionen ebenfalls eine charakteristische Funktion ist, dann gilt für den Shapley-Wert*

$$\Phi(\rho - \tau) = \Phi(\rho) - \Phi(\tau).$$

Beweis: Nach Axiom 3.3 folgt aus $\rho = (\rho - \tau) + \tau$ die Behauptung. □

Beweis der Shapley-Formel: Nach Satz 3.35, Satz 3.36, dem Axiom 3.3 und Satz 3.37 folgt

$$\Phi_i(\rho) = \sum_{\substack{B:B\subseteq N\\ i\in B}} \frac{r_B(\rho)}{|B|}.$$

Verwendet man die Definition der Randwerte für $r_B(\rho)$ und vertauscht anschließend die beiden Summationen, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_i(\rho) &= \sum_{\substack{B:B\subseteq N\\ i\in B}} \frac{1}{|B|}\Big[\sum_{L:L\subseteq B} (-1)^{|B|-|L|}\rho(L)\Big]\\ &= \sum_{L:L\subseteq N}\Big[\sum_{B:L\cup\{i\}\subseteq B} \frac{1}{|B|}(-1)^{|B|-|L|}\Big]\rho(L).\end{aligned}$$

Es gibt genausoviele Teilmengen L von B ohne i wie mit i. Wenn $i \in L$ ist, dann gilt

$$\gamma_i(L) = \sum_{B:L\cup\{i\}\subseteq B} \frac{1}{|B|}(-1)^{|B|-|L|} = -\gamma_i(L \setminus \{i\})$$

und berücksichtigt man $\rho(L) = \rho(L \setminus \{i\})$, falls $i \notin L$, so folgt weiter

$$\Phi_i(\rho) = \sum_{L\subset N} \gamma_i(L)(\rho(L) - \rho(L \setminus \{i\})).$$

Nach einer Argumentation wie in Satz 3.36 ergibt sich

$$\gamma_i(L) = \sum_{b=|L|}^{n} \frac{1}{b}(-1)^{b-|L|}\binom{n-|L|}{b-|L|}.$$

Wir verwenden nun

$$\frac{1}{b} = \int_0^1 x^{b-1}\,dx,$$

die binomische Formel und setzen $l = |L|$.

$$\begin{aligned}
\sum_{b=l}^{n}\frac{1}{b}(-1)^{b-l}\binom{n-l}{b-l} &= \sum_{b=l}^{n}\int_0^1 x^{b-1}\,dx(-1)^{b-l}\binom{n-l}{b-l} \\
&= \int_0^1 \Big[\sum_{b=l}^{n} x^{b-l}(-1)^{b-l}\binom{n-l}{b-l}\Big]x^{l-1}\,dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^{n-l}x^{l-1}\,dx = \frac{(n-l)!(l-1)!}{n}
\end{aligned}$$

Das zuletzt angegebene Integral stellt die Betafunktion dar, die für ganzzahlige n und l den angeführten Wert hat. Hieraus folgt schließlich die Behauptung. □

Beweis, dass der Shapley-Wert eine Imputation liefert: Nachweis von $\Phi_i \leq \rho(\{i\})$. Wegen der Subadditivität gilt $\rho(B) - \rho(B \setminus \{i\}) \leq \rho(\{i\})$, falls $i \in B$. Aus Satz 3.31 folgt dann

$$\Phi_i(N,\rho) \leq \rho(\{i\}) \sum_{\substack{B:B\subseteq N \\ i\in B}} \frac{(|B|-1)!(n-|B|)!}{n!} \quad \text{für } i = 1,\ldots,n.$$

Als nächstes zeigt man, dass

$$\sum_{\substack{B:B\subset N \\ i\in B}} \frac{(|B|-1)!(n-|B|)!}{n!} = 1 \quad \text{für } i = 1,\ldots,n.$$

Nach einer bereits mehrfach angewendeten Methode des Berechnens der Anzahl der verschiedenen Mengen B $(i \in B)$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{B:B\subset N \\ i\in B}} \frac{(|B|-1)!(n-|B|)!}{n!} &= \sum_{b=1}^{n}\sum_{\substack{B:|B|=b \\ i\in B}} \frac{(|B|-1)!(n-|B|)!}{n!} \\
&= \sum_{b=1}^{n}\frac{(b-1)!(n-b)!}{n!}\binom{n-1}{b-1} \\
&= \sum_{b=1}^{n}\frac{(b-1)!(n-b)!}{n!}\,\frac{(n-1)!}{(b-1)!(n-b)!} \\
&= \sum_{b=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Nachweis von $\sum\limits_{b=1}^{n} \Phi_i(\rho) = \rho(N)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{B:B\subset N\\ i\in B}} \frac{(|B|-1)!(n-|B|)!}{n!}(\rho(B) - \rho(B \setminus \{i\})).$$

Betrachten wir nun eine feste Menge L. Diese erscheint mit dem entsprechenden Koeffizienten als Minuend $|L|$-mal und als Subtrahend $(n - |L|)$-mal. Dies ergibt für den Minuenden einen Koeffizienten von $|L|\frac{(|L|-1)!(n-|L|)!}{n!} = \frac{|L|!(n-|L|)!}{n!}$. Falls $L = N$, ist dieser Koeffizient gleich. Für den Subtrahenden ergibt sich ein Koeffizient von $(n - |L|)\frac{|L|!(n-|L|-1)!}{n!} = \frac{(|L|-1)!(n-|L|)!}{n!}$. Falls $L = N$, ist dieser Koeffizient gleich 0. Alle Summanden bis auf den von $\rho(N)$ heben sich auf. Daher bleibt nur noch $\rho(N)$ übrig. □

Nun stellt sich noch die Frage, unter welchen Bedingungen der Shapley-Wert im Kern enthalten ist. Zwei Ergebnisse sind bekannt.

Satz 3.38 ([5]) *Falls für alle Koalitionen S mit $S \geq 2$*

$$\sum_{T\subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}\rho(T) \leq 0,$$

dann ist der Shapley-Wert im Kern enthalten.

Beweis: siehe [5] □

Satz 3.39 *Falls ein Spiel (N, ρ) stark subadditiv ist, d.h. $\rho(S) + \rho(T) \geq \rho(S \cup T) + \rho(S \cap T)$ für alle Koalitionen S und T, dann beinhaltet der Kern den Shapley-Wert*

Der Beweis dieses Satzes stammt aus [48]. Zunächst muss etwas Vorarbeit geleistet werden.

Definition 3.40 *Sei ω eine bijektive Abbildung von N auf $\{1, \dots, n\}$, in anderen Worten eine Ordnung von N. Man definiert die* **Anfangssegmente der Ordnung $\boldsymbol{\omega}$** *durch*

$$S_{\omega,k} = \{i \in N | \omega(i) \leq k\} \quad \textit{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Man kann nun das folgende Gleichungssystem betrachten

$$\sum_{i\in S_{\omega,k}} x_i = \rho(S_{\omega,k}) \quad \textit{für } k = 1, \dots, n.$$

Dieses Gleichungssystem ist leicht zu lösen und man erhält als Koordinaten für die Schnittpunkte der Hyperebenen

$$a_i^{\omega} = \rho(S_{\omega,\omega(i)}) - \rho(S_{\omega,\omega(i)-1}) \quad \textit{für } i = 1, \dots, n.$$

Definition 3.41 *Die Hyperebene $\sum_{i\in S} x_i = \rho(S)$ wird mit $\mathbf{H}_S$, die Seiten des Kerns werden mit $\mathfrak{K}_S$ bezeichnet, d.h. $\mathfrak{K} \cap H_S = \mathfrak{K}_S$. Alle Seiten des Kerns $\{\mathfrak{K}_S\}_{S\subseteq N}$ bilden die Kernkonfiguration.*

Definition 3.42 *Eine* **Kernkonfiguration $\{\mathfrak{K}_S\}_{S\subseteq N}$** *heißt* **regulär**, *falls*

$$\mathfrak{K}_N \neq \emptyset \text{ und } \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_T \subseteq \mathfrak{K}_{S\cup T} \cap \mathfrak{K}_{S\cap T} \quad \text{für alle } S, T \subseteq N.$$

Lemma 3.43 ([48]) *Sei (N, ρ) ein kooperatives Spiel mit einer regulären Kernkonfiguration. Falls $S \subset X \subset T \subseteq N$ und $a \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_T$, dann existieren Q und b derart, dass $S \subset Q \subset T$ und $b \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_Q \cap \mathfrak{K}_T$. Man kann sogar fordern, dass $b_i = a_i$ für alle $i \in S$ und $j \in Q$, $k \notin Q$ für zwei Elemente aus $T \setminus S$.*

Beweis: Seien $j, k \in T \setminus S$ beliebig. Definiere $b \in \mathfrak{K}$ durch $b_j = a_j - \gamma, b_k = a_k + \gamma$ und $b_i = a_i$ für $i \neq j, k$ mit γ dem größtmöglichen Wert, so dass $b \in \mathfrak{K}$. Dies kann man machen, da $\mathfrak{K}$ kompakt ist und a enthält. Offensichtlich gilt $\sum_{i\in S} b_i = \sum_{i\in S} a_i$ und $\sum_{i\in T} b_i = \sum_{i\in T} a_i$ für $i \in T$, also folgt $b \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_T$. Da für ein größeres γ die Imputation b nicht mehr im Kern enthalten wäre, muss es eine Menge R geben, die j aber nicht k enthält, so dass $b \in \mathfrak{K}_R$. Sei $Q = (S\cup R)\cap T$. Da $\{S | b \in \mathfrak{K}_S\}$ unter „$\cup$" und „$\cap$" abgeschlossen ist, gilt $b \in \mathfrak{K}_Q$ und Q hat alle geforderten Eigenschaften. $\square$

Lemma 3.44 ([48]) *Sei (N, ρ) ein kooperatives Spiel mit einer regulären Kernkonfiguration. Sei $S \subset X \subset N$ und $a \in \mathfrak{K}_S$. Dann existiert für jedes $j \in N \setminus S$ ein $b \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_{S\cup\{j\}}$, so dass $b_i = a_i$ für alle $i \in S$.*

Beweis: Wir setzten $T = N$ und benutzen Lemma 3.43, um Q und b zu finden mit $S\cup\{j\} \subseteq Q \subset N$, $b \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_Q$ mit $b_i = a_i$ für $i \in S$. Falls $Q = S\cup\{j\}$, ist der Beweis beendet und falls nicht, setzten wir $T = Q$ und wiederholen die Argumentation. $\square$

Satz 3.45 ([48]) *Sei (N, ρ) ein kooperatives Spiel mit einer regulären Kernkonfiguration $\{\mathfrak{K}_S\}_{S\subseteq N}$, dann gilt*

$$\mathfrak{K}_{S_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{S_m} \neq \emptyset$$

für jede aufsteigende Folge $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_m$.

Beweis: Man kann annehmen, dass die Folge $\{S_k\}$ von maximaler Länge ist, d.h. $m = n + 1$. Dann gilt $\mathfrak{K}_{S_1} = \mathfrak{K}_\emptyset$, die per Definition nicht leer ist. Man wählt ein $a_{(1)} \in \mathfrak{K}_{S_1}$ und um für $k = 1, \ldots, n-1$ die Punkte $a_{(k+1)} \in \mathfrak{K}_{S_k} \cap \mathfrak{K}_{S_{k+1}}$ mit $a_{(k)}$ auf S_k zu finden, benutzt man Lemma 3.44. Der Punkt $a_{(n)}$ ist in allen $\mathfrak{K}_{S_k}$ für $k = 1, \ldots, n$ enthalten. Außerdem ist er auch in $\mathfrak{K}_{S_{n+1}} = \mathfrak{K}_N$ enthalten. $\square$

Satz 3.46 ([48]) *Die Ecken des Kerns in einer regulären Konfiguration sind genau die Punkte a^ω.*

Beweis: Für jedes ω gilt,

$$\mathfrak{K}_{S_{\omega,1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{S_{\omega,n}} \subseteq H_{S_{\omega,1}} \cap \cdots \cap H_{S_{\omega,n}}.$$

Aufgrund von Satz 3.45 ist bekannt, dass die linke Seite nicht leer ist. Sie besteht aus dem einzelnen Punkt a^ω. Daraus folgt, dass a^ω im Kern enthalten ist. Falls er keine Ecke wäre, dann gäbe es einen von 0 verschiedenen Vektor d, so dass $a^\omega \pm d \in \mathfrak{K}$. Aber dies ist nicht möglich, da mindestens eine Hyperebene $H_{S_{\omega,k}}$, die a^ω bestimmt, genau zwischen den beiden Punkten $a^\omega \pm d$ hindurchgehen muss und damit einen aus dem Kern ausschließt. Daraus folgt, dass a^ω für jedes ω eine Ecke des Kerns ist.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass der Kern $\mathfrak{K}$ keine weiteren Ecken außer a^ω hat. Sei a eine Ecke des Kerns und sei $\emptyset = S_1 \subset \cdots \subset S_m = N$ die „längste“ Folge, die ausschließlich Elemente aus $\{S|a \in \mathfrak{K}_S\}$ enthält, d.h. eine Sequenz die m maximiert. Falls keine Sprünge in der Sequenz sind, d.h. $m = n + 1$, dann ist a von der Form a^ω und der Beweis ist vollendet. Nehmen wir an, es gäbe eine Lücke in der Sequenz, so dass $S_k \subset X \subset S_{k+1}$ für ein k und es seien $i, j \in S_{k+1} \setminus S_k$ mit $i \neq j$. Da a eine Ecke ist, ist es nicht nur eine Lösung des Gleichungssystems $\sum_{i\in S} x_i = \rho(S)$ für alle $S \in \{S|a \in C_S\}$, sondern es ist die einzige Lösung. Um die Koordinaten a_i, a_j und nicht nur deren Summe $a_i + a_j$ zu bestimmen, muss es eine Gleichung geben, die sie separiert, d.h. ein $R \in \{S|a \in C_S\}$, das genau einen der Spieler i oder j enthält. Da $\{S|a \in C_S\}$ unter „$\cup$“ und „$\cap$“ abgeschlossen ist, haben wir ein $Q \in \{S|a \in C_S\}$ mit $Q = (S_k \cup R) \cap S_{k+1}$. Aber $S_k \subset Q \subset S_{k+1}$ widerspricht der Maximalität von m. □

Satz 3.47 ([48]) *Der Kern eines stark subadditiven kooperativen Spieles ist nicht leer.*

Beweis: Es ist ausreichend zu zeigen, dass a^ω für ein ω im Kern ist. Sei $T \subset N$ und j das „ω-früheste“ Element von $N \setminus T$, so dass alle ω-Vorläufer von j in T sind, aber nicht j selbst. Dann gilt

$$\begin{aligned} T \cup S_{\omega,\omega(j)} &= T \cup \{j\} \quad \text{und} \\ T \cap S_{\omega,\omega(j)} &= S_{\omega,\omega(j)-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch die starke Subadditivität von ρ

$$\rho(T) + \rho(S_{\omega,\omega(j)}) \geq \rho(T \cup \{j\}) + \rho(S_{\omega,\omega(j)-1})$$

oder wegen der Definition von a^ω

$$a_j^\omega \geq \rho(T \cup \{j\}) - \rho(T).$$

Somit gilt

$$\sum_{i\in T} a_i^\omega - \rho(T) \leq \sum_{i\in T\cup\{j\}} a_i^\omega - \rho(T \cup \{j\}).$$

Wenn man diese Argumentation $n - t - 1$ mal wiederholt, erhalten wir

$$\sum_{i\in T} a_i^\omega - \rho(T) \leq \sum_{i\in N} a_i^\omega - \rho(N) = 0.$$

Da T beliebig war, folgt dass a^ω im Kern ist. □

Satz 3.48 ([48]) *Ein kooperatives Spiel ist stark subadditiv genau dann, wenn seine Kernkonfiguration regulär ist.*

Beweis: Das kooperative Spiel habe eine reguläre Kernkonfiguration. Seien $S, T \subseteq N$. Da $S \cap T \subseteq S \cup T$, kann man wegen Satz 3.45 ein $a \in \mathfrak{K}_{S\cup T} \cap \mathfrak{K}_{S\cap T}$ finden. Dann gilt

$$\rho(S \cup T) + \rho(S \cap T) = \sum_{i \in S\cup T} a_i + \sum_{i \in S\cap T} a_i = \sum_{i \in S} a_i + \sum_{i \in T} a_i \leq \rho(S) + \rho(T).$$

Dies zeigt, dass ρ stark subadditiv ist.

Nun sei ρ stark subadditiv. Dann gilt aufgrund von Satz 3.47, dass $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ und es bleibt nur noch die zweite Bedingung der Regularität zu zeigen. Sei $a \in \mathfrak{K}_S \cap \mathfrak{K}_T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(S \cup T) + \rho(S \cap T) &\leq \rho(S) + \rho(T) \\ &= \sum_{i \in S} a_i + \sum_{i \in T} a_i \\ &= \sum_{i \in S\cup T} a_i + \sum_{i \in S\cap T} a_i. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aber es gilt auch

$$\sum_{i \in S\cup T} a_i \leq \rho(S \cup T) \quad \text{und} \quad \sum_{i \in S\cap T} a_i \leq \rho(S \cap T),$$

da a im Kern liegt. Daraus folgt die Gleichheit in (3.5) und somit $a \in \mathfrak{K}_{S\cup T} \cap \mathfrak{K}_{S\cap T}$.
□

Nun folgt der Beweis des eigentlichen Satzes.
Beweis von Satz 3.39: Es ist leicht einzusehen, dass

$$\Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\omega \in \Omega} a^{\omega},$$

wobei Ω die Menge aller Ordnungen von N ist. Daraus folgt durch Satz 3.46 und Satz 3.48, dass der Shapley-Wert im Kern liegt. □

Dies ist etwas enttäuschend, da starke Subadditivität eine stärkere Forderung ist als die z.B. bei kohärenten Maßen geforderte Subadditivität. Natürlich kann man in der Praxis testen, ob ein Risikomaß nicht sowieso die starke Subadditivität besitzt.

Die Standardabweichung und der ES sind die einzigen hier untersuchten subadditiven Risikomaße. Sie sind aber nicht stark subadditiv wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.5 (Die Standardabweichung und ES sind nicht stark subadditiv)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\mathcal{A}$ der Potenzmenge von Ω. Weiter sei

$$\mathbb{P}[\omega_i] = \frac{1}{4} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4.$$

Die drei Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 seien wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
X_1(\omega_1) = X_3(\omega_1) = G = -X_1(\omega_2) = X_3(\omega_2)\\
X_1(\omega_3) = X_3(\omega_3) = 0 = -X_1(\omega_4) = X_3(\omega_4)\\
X_2(\omega_1) = 0 = X_2(\omega_2)\\
X_2(\omega_3) = G = X_2(\omega_4).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sigma[X_1 + X_2 + X_3] + \sigma[X_2] = (\sqrt{5} + 1)\frac{G}{\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})\frac{G}{\sqrt{2}} = \sigma[X_1 + X_2] + \sigma[X_2 + X_3] \quad \text{und}$$

$$\mathrm{ES}_{0,1}(X_1 + X_2 + X_3) + \mathrm{ES}_{0,1}(X_2) = 3G > 2G = \mathrm{ES}_{0,1}(X_1 + X_2) + \mathrm{ES}_{0,1}(X_2 + X_3).$$

Auch mit Satz 3.38 kann man nicht zeigen, dass der Shapley Wert für die Standardabweichung oder für den ES im Kern liegt, da

$$\begin{aligned}
\sum_{S \subseteq \{1,2,3\}} (-1)^{3-|S|} \sigma\Big[\sum_{i \in \{1,2,3\}} X_i\Big] = (\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 1)\frac{G}{\sqrt{2}}\\
\sum_{S \subseteq \{1,2,3\}} (-1)^{3-|S|} \mathrm{ES}_{0,1}\Big[\sum_{i \in \{1,2,3\}} X_i\Big] = 4G.
\end{aligned}$$

Für den theoretischen Vergleich und die Modellrechnung wird nur der Shapley Wert nicht aber der Nucleolus weiter betrachtet, obwohl der Nucleolus aufgrund von Satz 3.28 im Gegensatz zum Shapley Wert sicher im Kern enthalten ist. Diese Auswahl ergibt sich aufgrund des axiomatischen Vorgehens beim Shapley Wert. Das Symmetrie- und das Dummyaxiom stellen Forderungen dar, die man auch im Rahmen der Kapitalallokation an einen Wert stellen sollte.

Bei kooperativen Spielen geht man in der Modellierung davon aus, dass das $\rho(N)$, d.h. das Risikokapital, durch die charakteristische Funktion, d.h. das Risikomaß festgelegt wird. Da wir in unserer Fragestellung aber davon ausgehen, dass das Risikokapital exogen gegeben ist, muss man den Shapley Wert noch durch $\rho(N)$ dividieren, um die Zuteilungskoeffizienten zu erhalten.

Definition 3.49 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen und ρ ein Risikomaß.*

Dann sind die **Zuteilungskoeffizienten der Zuteilung nach Shapley mit Risikomaß $\boldsymbol{\rho}$** *definiert durch*

$$K_i^{S,\rho} = K_i^S = \left[\sum_{S: S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left(\rho\Big(\sum_{j \in S} X_j\Big) - \rho\Big(\sum_{j \in S \setminus \{i\}} X_j\Big)\right)\right] \Big/ \rho\Big(\sum_{j \in N} X_j\Big)$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Im nächsten Abschnitt wird eine andere Modellierung untersucht, die stärkere Existenzargumente liefert und für kohärente Risikomaße zu einer vereinfachten Berechnung führt. Dies ist von Wichtigkeit, da die Berechnung des Shapley Wertes schon für relativ kleine Mengen N sehr aufwendig ist. Es muss die charakteristische Funktion bzw. das Risikomaß für alle Koalitionen ausgewertet werden. Dies bedeutet, dass man den Wert für $2^n - 1$ Risikomaße berechnen muss.

3.3.2 Kooperative Spiele mit skalierbaren Spielern

Einführung

In der Theorie der endlichen kooperativen Spiele werden die Spieler als unteilbar angenommen. Geht man aber davon aus, dass die Spieler Versicherungsportfolios darstellen, ist dies keine notwendige Forderung. Auch Teile dieser Portfolios könnten sich zu Koalitionen zusammenschließen, d.h. ein gewisser Teil von jedem Policentyp kann sich einer Koalition anschließen. In diesem Abschnitt wird das Modell dementsprechend abgeändert und nicht-diskrete kooperative Spiele untersucht.

Die grundlegende Arbeit zu diesem Konzept lieferten Aumann und Shapley in ihrem Buch „Values of Non-Atomic Games“ [7]. Dort steht eine Menge I, meist $[0, 1]$, für die Menge aller Spieler und Koalitionen sind die Elemente einer σ-Algebra ℓ. Spiele sind reellwertige Mengenfunktionen auf ℓ.

Zunächst erfolgt eine Einführung in die Theorie der kooperativen Spiele mit skalierbaren Spielern. Anschließend wird der grundlegende Satz dieser Theorie angegeben und besprochen. Den Beweis kann der Leser in Appendix C.1 nachlesen. Dieser Satz ist gewissermaßen das Analogon zum Shapley Wert aus dem vorangegangenen Abschnitt.

Abschließend werden die Ergebnisse in eine andere etwas eingängigere Notation übersetzt, die von mehreren anderen Autoren gewählt wurde. Hier steht ein Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ für den „Grad der Beteiligung“ der Spieler. Jede Komponente wird mit einem Spieler assoziiert. Das Ziel dieses Spieles ist es einen Preis-Vektor zu finden, der jedem Spieler die Kosten für eine Einheit zuteilt.

Da dieser Abschnitt weitgehend aus dem Buch „Values of Non-Atomic Games“ von Aumann und Shapley [7] übernommen wurde, wird die Notation an diese angelehnt.

Definition 3.50 *(I, ℓ) ist ein Messraum mit I einer Menge und ℓ eine σ-Algebra von messbaren Mengen von I. Die Elemente von I heißen* **Spieler** *und die Elemente von ℓ heißen* **Koalitionen**. *Ein* **nicht-diskretes kooperatives Spiel** *oder ein* **kooperatives Spiel mit skalierbaren Spielern** *v auf I ist eine reellwertige Mengenfunktion auf ℓ mit $v(\emptyset) = 0$.*

Wie man schon an der Definition des nicht-diskreten kooperativen Spieles erkennen kann, macht man sich zur Modellierung die Maßtheorie zu nutzen. Zunächst werden unterschiedliche Räume von Spielen definiert. Die Grundbausteine bilden monotone Spiele und Spiele mit beschränkter Variation.

Definition 3.51 *Ein Spiel ist* **monoton**, *wenn für alle* $S, T \in \ell, S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$. *Ein Spiel ist von* **beschränkter Variation**, *falls es sich als Differenz zweier monotoner Spiele beschreiben lässt.*

Definition 3.52 *Der Raum aller Spiele mit beschränkter Variation wird mit* **BV** *bezeichnet. Falls* $I = [0,1]$, *dann bezeichnet* **bv** *den Raum aller Funktionen* f *auf* $[0,1]$ *mit beschränkter Variation und* $f(0) = 0$.

Definition 3.53 *Falls* Q *ein Raum von Spielen ist, bezeichnet* Q^+ *den Kegel der monotonen Elemente von* Q. *Eine Abbildung von* Q *nach* BV *heißt* **positiv**, *falls* Q^+ *nach* BV^+ *abgebildet wird.*

Definition 3.54 *Ein Maß* μ *ist* **nicht-diskret**, *falls für alle* $S \in \ell, |\mu(S)| > 0 \Rightarrow \exists T \subseteq S, T \in \ell$ *mit* $0 < |\mu(T)| < |\mu(S)|$. *Mit* **NA** *sei der Raum der nicht-diskreten Maße auf* (I, ℓ) *bezeichnet und* $\mathbf{NA^1} \subseteq NA$, *wobei für alle* $\mu \in NA^1$ *gilt* $\mu(I) = 1$. *Der Abschluss des Raumes aller Polynome in Maßen aus* NA^+ *wird mit* **pNA** *bezeichnet.*

Offensichtlich gilt $NA \subseteq BV$.

Definition 3.55 *Sei* $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ *die Gruppe der Automorphismen auf* (I, ℓ), *d.h. bijektive Abbildungen von* I *auf sich selbst, die in beide Richtungen messbar sind. Jedes* $\Theta \in \mathcal{G}$ *induziert eine lineare Abbildung* Θ_* *von* BV *auf sich selbst durch* $(\Theta_* v)(S) = v(\Theta S)$ *für alle* $S \in \ell$. *Ein Unterraum* Q *von* BV *heißt* **symmetrisch**, *falls* $\Theta_* Q = Q$ *für alle* $\Theta \in \mathcal{G}$.

Zum Schluss dieser Einführung erfolgt noch die Definition des Wertes für ein nicht-diskretes kooperatives Spiel.

Definition 3.56 *Sei* Q *ein symmetrischer Unterraum von* BV. *Ein* **Wert** *auf* Q *ist eine positive lineare Abbildung* Φ *von* Q *nach* FA, *die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1.)

$$(\Phi v)(I) = v(I) \quad \textit{für alle } v \in Q \quad \textit{(Effizienz)} \tag{3.6}$$

2.)

$$\Phi\Theta_* = \Theta_*\Phi \quad \textit{für alle } \Theta \in \mathcal{G} \quad \textit{(Symmetrie)} \tag{3.7}$$

Da in dieser Definition ein Großteil der Modellbildung enthalten ist, bedarf sie einiger Erläuterungen. In Analogie zum Fall der endlichen kooperativen Spiele ist auch hier ein Wert eine Abbildung vom Raum der Spiele in den Raum der Imputaionen. Dass FA den Raum der Imputationen darstellt, ist leicht einzusehen. Mit einem $f \in FA$ kann man jeder Koalition ihr Kapital zuweisen, da für eine disjunkte Zerlegung $I_1, \ldots, I_m$ von I gilt $\sum_{i=1}^m f(I_i) = f(I)$.

Die erste Bedingung sorgt dafür, dass das gesamte Risikokapital zugewiesen wird. Die zweite Bedingung ist grob gesagt dafür verantwortlich, dass nur das Spiel und nicht ein anderes Kriterium für den Wert einer Koalition maßgebend ist.

Der folgende Satz liefert die Hauptaussage über nicht-diskrete kooperative Spiele.

Satz 3.57 ([7]) *Es existiert ein eindeutiger Wert Φ auf pNA mit $\|\Phi\| = 1$. Weiter sei μ ein Vektormaß in NA und f sei eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Wertebereich von μ mit $f(0) = 0$. Dann ist $f \circ \mu \in pNA$ und*

$$\Phi(f \circ \mu)(S) = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\, dt. \tag{3.8}$$

$f_{\mu(S)}$ ist die Ableitung von f in die Richtung von $\mu(S)$.

Der Beweis von Satz 3.57 erfolgt in Appendix C.1.

Transformation der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse in eine andere, etwas eingängigere Form transformiert, die auch die eigentliche Zielsetzung, d.h. die Kapitalallokation herausstellt. Zunächst wird diese neue Darstellungsweise aufgezeigt und erläutert wie man die bisherigen Ergebnisse in diese überführen kann. Dann wird der Zusammenhang zwischen den Risikomaßen aus Kapitel 2 und der n-dimensionalen charakteristischen Funktion hergestellt. Schließlich werden noch andere Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit des Aumann-Shapley Wertes angegeben und gezeigt, dass sich seine Darstellung für homogene Funktionen vereinfachen lässt.

In der neuen Darstellungsform steht ein positiver Vektor $\Lambda \in \mathbb{R}^n_+$ für die vollständige Beteiligung jedes der n Spieler, d.h. für ein Versicherungsportfolios gibt Λ die eigentliche Größe der einzelnen Versicherungspositionen z.B. mittels des Prämienvolumens an. Weiter gibt es wie bei endlichen kooperativen Spielen eine charakteristische Funktion r, die aber im Gegensatz zur diskreten Modellierung eine auf $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ definierte Funktion ist. Somit ergibt sich folgende Definition:

Definition 3.58 *Ein* **kooperatives Spiel mit skalierbaren Spielern** (N, Λ, r) *besteht aus*

1.) einer endlichen Menge N mit $|N| = n$

2.) einem positiven Vektor $\Lambda \in \mathbb{R}^n_+$, der den Wert für die vollständige Beteiligung eines jeden der n Spieler angibt

3.) einer reelwertige charakteristische Funktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, r : \lambda \mapsto r(\lambda)$, die auf $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ definiert ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Definition 3.50 in Definition 3.58 transferieren lässt. Man wählt als Menge $I = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x \leq \Lambda\}$ und als σ-Algebra ℓ die Borel-σ-algebra. Die charakteristische Funktion $r(\lambda)$ entspricht $v([0, \lambda_1] \times \cdots \times [0, \lambda_n])$.

Nachdem die Ergebnisse in diese verständliche Form transformiert wurden, ist es wichtig den Zusammenhang zwischen den Risikomaßen und der charakteristischen

Funktion zu klären. Die charakteristische Funktion kann folgendermaßen mit dem Risikomaß identifiziert werden:

$$r(\lambda) = \rho\left(\sum_{i \in N} X_i(\lambda_i)\right).$$

Es gilt also $r(\Lambda) = \rho(N)$.

Definition 3.59 *Ein Vektor $k \in \mathbb{R}^n$ ist ein* **per-unit Zuteilungsvektor (Imputationsvektor)** *des Spiels (N, Λ, r), falls*

$$\Lambda^t k = r(\Lambda).$$

Definition 3.60 *Ein* **Wert** *ist eine Funktion die jedem kooperativen Spiel mit skalierbaren Spielern (N, Λ, r) einen eindeutigen per-unit Zuteilungsvektor zuordnet:*

$$\Phi : (N, \Lambda, r) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(N, \Lambda, r) \\ \vdots \\ \Phi_n(N, \Lambda, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

so dass

$$\sum_{i \in N} \Lambda_i k_i = r(\Lambda) = \rho(N).$$

Im Gegensatz zur Definition des Wertes in 3.56 wird hier keine Symmetrie gefordert. Transformiert man nun auch Satz 3.57, erhält man folgendes Gegenstück, bei dem nur eine Aussage über die Existenz aber nicht über die Eindeutigkeit gemacht werden kann.

Satz 3.61 *Sei (N, Λ, r) ein kooperatives Spiel mit skalierbaren Spielern. Dann existiert ein Wert*

$$\Phi_i^{AS}(N, \Lambda, r) = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt,$$

der mit Aumann-Shapley Wert bezeichnet wird.

Ein Satz von Billera und Heath [8], liefert für den Aumann-Shapley Wert ein ähnliches Ergebnis wie Satz 3.31.

Satz 3.62 ([8]) *Es gibt genau einen Wert Φ für ein kooperatives Spiel (N, Λ, r) mit skalierbaren Spielern, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1.) $\Phi(N, \Lambda, r) + \Phi(N, \Lambda, s) = \Phi(N, \Lambda, t)$ *für $t = r + s$* **(Additivität)**

2.) Falls für die charakteristischen Funktionen r und $\bar{r}$ gilt $r(\lambda) = \bar{r}(z'\lambda)$ für ein festes $z \in \mathbb{N}_+^n \setminus \{0\}$, dann ist $\Phi(N, \Lambda, r) = \Phi(\{1\}, z'\Lambda, s)z$. **(Aggregationsinvarianz)**

3.) Falls r nicht-fallend ist auf $I = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x \leq \Lambda\}$, dann gilt $\Phi(N, \Lambda, r) \geq 0$. **(Monotonie)**

Dieser Wert ist gegeben durch

$$\Phi_i(N, \Lambda, r) = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt \tag{3.9}$$

Die Kosten pro Einheit für das i^{te} Portfolio sind der Durchschnitt der marginalen Kosten, wenn das Volumen aller Portfolios linear von 0 auf Λ steigt.

Auch der Beweis dieses Satzes erfolgt in mehreren Teilen.

Lemma 3.63 ([8]) *Durch (3.9) ist ein Wert gegeben, der den drei Bedingungen aus Satz 3.62 genügt.*

Beweis: Um zu beweisen, dass Φ ein Wert ist, muss man zeigen, dass $\Phi(N, \Lambda, r)'\Lambda = r(\Lambda)$. Dies folgt aus

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_i \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} r(t\Lambda)\, dt = r(\Lambda) - r(0) = r(\Lambda).$$

Die Additivität ergibt sich sofort aus der Linearität der Differentiation und der Integration.

Falls r nicht-fallend ist, gilt $\frac{\partial r}{\partial \lambda_i} \geq 0$ und somit gilt die Monotonie.

Die Aggregationsinvarianz folgt aus $\frac{\partial r}{\partial \lambda_i} = z_i \frac{d\bar{r}}{dx}(z'\lambda)$ für $r(\lambda) = \bar{r}(z'\lambda)$. Denn damit gilt

$$\begin{aligned}\Phi_i(N, \Lambda, r) &= \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda}(t\Lambda)\, dt = z_i \int_0^1 \frac{d\bar{r}}{dx}\Big(z'(t\Lambda)\Big)\, dt \\ &= z_i \int_0^1 \frac{d\bar{r}}{dx}\Big(t(z'\Lambda)\Big)\, dt = z_i \Phi(\{1\}, z'\lambda, \bar{r}). \quad \square\end{aligned}$$

Als nächstes werden zwei Normen definiert, die im nächsten Beweis Anwendung finden.

Definition 3.64 *Für $\Lambda \in \mathbb{R}^n, \Lambda > 0$, h eine reelwertige stetige Funktion auf I und f eine reelwertige stetig differenzierbare Funktion auf I mit $f(0) = 0$ werden die Normen $\|.\|_0$ und $\|.\|_1$ definiert:*

$$\begin{aligned}\|h\|_0 &= \sup_{x \in I} |h(x)| \quad \textit{und} \\ \|f\|_1 &= \|h\|_0 + \sum_{i=1}^n \Big\| \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \Big\|_0.\end{aligned}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $C^1(\Lambda)$, die Menge der reelwertigen stetig differenzierbaren Funktionen f auf I mit $f(0) = 0$ durch $\|.\|_1$ ein Banachraum ist.

Lemma 3.65 ([8]) *$s : C^1(\Lambda) \to \mathbb{R}^n$ genüge den folgenden beiden Bedingungen:*

$$s(f+g) = s(f) + s(g) \quad \textit{und} \tag{3.10}$$

$$s(f) \geq 0 \quad \textit{falls } f \textit{ nicht-fallend auf } I \textit{ ist.} \tag{3.11}$$

Dann ist s C^1-stetig.

Beweis: Als erstes wird gezeigt, dass eine reele Zahl M existiert, so dass

$$\frac{s(f)'\Lambda}{\|f\|_1} \leq M \quad \text{für alle nicht-fallend } f \in C^1(\lambda). \tag{3.12}$$

Falls dies nicht der Fall wäre, gäbe es für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ ein nicht-fallendes $f_m \in C^1(\Lambda)$ mit

$$\frac{s(f_m)'\Lambda}{\|f_m\|_1} > m + 1. \tag{3.13}$$

Indem man f_m durch ein passendes rationales Vielfaches ersetzt, kann man annehmen, dass

$$\frac{1}{(m+1)^2} \leq \|f_m\|_1 \leq \frac{1}{m^2},$$

da (3.13) bei Multiplikation von f_m mit einer rationalen Zahl gültig bleibt. Nun sei $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ punktweise definiert. f ist nicht-fallend und durch die Vollständigkeit von $C^1(\Lambda)$ gilt $f \in C^1(\Lambda)$. Aufgrund von (3.11) gilt

$$\begin{aligned} \infty > s(f)'\Lambda &\geq \Big(\sum_{m=1}^{k} f_m\Big)'\Lambda \\ &= \sum_{m=1}^{k} s(f_m)'\Lambda > \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

für alle k, was ein Widerspruch ist.

Als nächstes wird gezeigt, dass jedes $f \in C^1(\Lambda)$ in der Form $f = g - h$ geschrieben werden kann, wobei $g, h \in C^1(\Lambda)$ und beide nicht-fallend sind auf I und

$$\|g\|_1 + \|h\|_1 \leq K\|f\|_1 \quad \text{mit } K \text{ unabhängig von } f. \tag{3.14}$$

Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ mit

$$\gamma_i = -\min\Big(0, \min_{0 \leq \lambda \leq \Lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\lambda)\Big).$$

Dann ist $h(\lambda) = \lambda'\gamma \in C^1(\Lambda)$ und nicht-fallend, da $\gamma \geq 0$. Auch $g = f + h \in C^1(\Lambda)$ und nicht-fallend auf I, da $\frac{\partial g}{\partial \lambda_i} \geq 0$ auf I. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \Lambda'\gamma + \sum_{k=1}^{n} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (\Lambda_i + 1) \Big\|\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\Big\|_0 \\ &\leq \max_{i \in N} (\Lambda_i + 1) \|f\|_1 \end{aligned}$$

und damit

$$\|g\|_1 + \|h\|_1 \le \|f\|_1 + 2\|h\|_1 \le 3 \max_{i\in N}(\Lambda_i + 1)\|f\|_1.$$

Sei $f \in C^1(\Lambda)$ und $f = g - h$ mit g, h nicht-fallend auf I und $\|g\|_1 + \|h\|_1 \le K\|f\|_1$. Dann gilt aufgrund von (3.10), (3.11), (3.12) und (3.14)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |s_i(f)|\Lambda_i &= \sum_{i=1}^{n} |s_i(g) - s_i(h)|\Lambda_i \\ &\le s(g)'\Lambda + s(h)'\Lambda \\ &\le M(\|g\|_1 + \|h\|_1) \le KM\|f\|_1.\end{aligned}$$

Da $\Lambda > 0$, zeigt dies die Stetigkeit von s. □

Korollar 3.66 ([8]) *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.65 ist s eine lineare Funktion auf $C^1(\Lambda)$.*

Beweis: Dies kann man dadurch zeigen, dass man a durch rationale Zahlen approximiert und dann durch die Stetigkeit von s zeigt, dass es auch für $a \in \mathbb{R}$ gilt. □**Beweis von Satz 3.62:** Die Existenz wird durch Lemma 3.63 gezeigt. Also bleibt

nur noch die Eindeutigkeit zu beweisen. Dafür sei Φ ein Wert, der die Bedingungen aus Satz 3.62 erfüllt und $\bar{r}(x) = x^k, x \in \mathbb{R}, k > 0$ und $\Lambda > 0$. Dann gilt aufgrund der Definition des Wertes $\Lambda\Phi(\{1\}, \Lambda, \bar{r}) = \Lambda^k$ und damit

$$\Phi(\{1\}, \Lambda, \bar{r}) = \Lambda^{k-1} = \int_0^1 \frac{d\bar{r}}{dx}(t\Lambda)\, dt.$$

Nun sei $r(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = g(z'\lambda) = (z_1\lambda_1 + \cdots + z_n\lambda_n)^k$ mit $z \in \mathbb{N}_+^n$. Dann gilt wegen der Aggregationsinvarianz

$$\begin{aligned}\Phi_i(N, \Lambda, r) &= \Phi(\{1\}, z'\Lambda, \bar{r})z_i = (z'\Lambda)^{k-1}z_i \\ &= \int_0^1 z_i \frac{d\bar{r}}{dx}\Big(t(z'\Lambda)\Big)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Jedes Polynom $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $p(0) = 0$ kann als Linearkombination von positiven ganzzahligen Potenzen der Form $k_1\lambda_1 + \cdots + k_n\lambda_n$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen k_i geschrieben werden, bei denen nicht alle 0 sind. Aus Korollar 3.66 und (3.15) kann man schließen, dass für kooperative Spiele mit solchen Polynomen als charakteristische Funktionen ein Wert Φ gegeben sein muss, der die Bedingungen aus Satz 3.62 erfüllt durch (3.9).

Durch Lemma 3.65 ist ersichtlich, dass sowohl $\Phi(N, \Lambda, r)$ als auch die Funktion, definiert durch (3.9), C^1-stetige Funktionen sind. Da Polynome p mit $p(0) = 0$ dicht in $C^1(\Lambda)$ liegen, ist es leicht zu zeigen, dass $\Phi(N, \Lambda, r)$ durch (3.9) auf ganz $C^1(\Lambda)$ eindeutig gegeben ist. □

Wenn man als Risikomaß ein homogenes Maß wählt, kann man die Berechnung des Aumann-Shapley-Wertes wegen des folgenden grundlegenden Lemmas aus der Analysis noch weiter vereinfachen.

Lemma 3.67 *Sei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto r(\lambda)$ eine k-homogene Funktion ist, d.h. für $c \in \mathbb{R}$ gilt $r(c\lambda) = c^k r(\lambda)$, dann ist $\frac{\partial r(\lambda)}{\partial \lambda_i}$ eine $(k-1)$-homogene Funktion.*

Beweis: Sei $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ und $r_c(\lambda) = r(c\lambda)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial r_c}{\partial \lambda_i}(\Lambda) = c\frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(c\Lambda) \quad \text{und} \quad \frac{\partial r_c}{\partial \lambda_i}(\Lambda) = \frac{\partial c^k r}{\partial \lambda_i}(\Lambda) = c^k \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda).$$

Daraus folgt $c^{k-1}\frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda) = \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(c\Lambda)$. □

Satz 3.68 ([12]) *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen und ρ ein homogenes Risikomaß, das partielle Ableitungen besitzt. Außerdem sei (N, Λ, r) ein darauf basierendes kooperatives Spiel mit skalierbaren Spielern mit einer charakteristischen Funktion $r(\lambda) = \rho(\sum_{i \in N} \lambda_i X_i)$. Dann lässt sich der Aumann-Shapley-Wert wie folgt berechnen:*

$$\Phi_i^{AS}(N, \Lambda, r) = k_i^{AS} = \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda). \tag{3.16}$$

Beweis: Aufgrund von Lemma 3.67 und da r homogen ist, gilt

$$\Phi_i^{AS}(N, \Lambda, r) = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda)\, dt = \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda).$$

□

Somit kann die Zuteilung nach Aumann und Shapley angegeben werden.

Definition 3.69 *Sei $(X_1(\lambda_1), \ldots, X_n(\lambda_n))'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht, $\Lambda = (\Lambda_i, \ldots, \Lambda_n)'$ die Größe der Geschäftsbereiche, $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_i(\lambda_i)$ und ρ ein Risikomaß, das partielle Ableitungen nach λ_i für $i = 1, \ldots, n$ besitzt. Sei außerdem $r(\lambda) = \rho\big(Z(\lambda)\big)$. Dann sind die* **Zuteilungskoeffizienten der Zuteilung nach Aumann und Shapley mit Risikomaß $\boldsymbol{\rho}$** *definiert durch*

$$K_i^{AS,\rho} = K_i^{AS} = \left(\Lambda_i \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda)\, dt\right) \Big/ r(\Lambda) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Ist ρ ein homogenes Risikomaß und gilt $r(\lambda) = \rho(\sum_{i \in N} \lambda_i X_i)$, dann folgt

$$K_i^{AS,\rho} = K_i^{AS} = \Big(\frac{\partial r(\Lambda)}{\partial \lambda_i}\Lambda_i\Big) \Big/ r(\Lambda) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

3.3.3 Eulerprinzip

In [51] kommt Tasche durch eine andere Vorgehensweise zu einem ähnlichen Ergebnis wie (3.16). Diese soll in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

Zuerst wird die Modellbildung und Notation geklärt. Wenn man die Bezeichnungen aus [51] in diesen Kontext transferiert, dann werden aus den Cash Flow Verteilungen die Schadenverteilungen und aus den Schwankungsverteilungen die Ertragsverteilungen. Mit dieser Transformation bleibt das Modell schlüssig und die Ergebnisse gliedern sich hervoragend in den hiesigen Kontext ein.

Für die hier angewandte Beweisführung ist es unabdingbar, dass die Zufallsvariablen linear skaliert werden. Somit ergibt sich mit den Schadenverteilungen S_i, den Erwartungswerten der Schadenverteilungen $m_i = E[S_i]$ und den Ertragsfunktionen X_i das hier verwendete Modell

$$S_i = m_i - X_i,$$

und daraus der gesamte Ertrag wie gehabt zu

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i.$$

Hier wird ρ wieder als eine Funktion in $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ aufgefasst, d.h. $\rho(\lambda) = \rho(Z(\lambda))$.

Dieser Ansatz basiert auf einer zumindest lokalen Maximierung des RORAC. Liegen zwei Geschäftsbereiche mit Erwartungswerten m_1 und m_2 sowie notwendigem Risikokapital K_1 und K_2 vor, wobei sowohl Erwartungswert als auch Risikokapital von den Risiken r_1 und r_2 abhängen, dann ist Geschäftsbereich 1 rentabler, genau dann, wenn $\frac{m_1}{K_1} \geq \frac{m_2}{K_2}$. Dies ist bei der hier verwendeten Rahmensetzung auch eingängig, da die m_i für die Prämienerträge der verschiedenen Unternehmensteile stehen.

Um dies formal zu fassen, wird eine Ertragsfunktion definiert.

Definition 3.70 *Sei $\emptyset \neq U$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und ρ ein Risikomaß auf U. Außerdem sei $m \in \mathbb{R}^n$. Dann wird die Funktion $g = g_{\rho,m} : \{\lambda \in U | \rho(\lambda) \neq m'\lambda\} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$g(\lambda) = \frac{m'\lambda}{\rho(\lambda) - m'\lambda}$$

die **Ertragsfunktion für $\boldsymbol{\rho}$** *genannt.*

Falls das Risikokapital $\rho(\lambda^{(i)}) - m'\lambda^{(i)}$ für die Portfolios $\lambda^{(i)}, = 1, 2$ positiv ist, dann ist eindeutig, dass die Performance von $\lambda^{(1)}$ genau dann besser als die von $\lambda^{(2)}$ ist, wenn $g(\lambda^{(1)}) > g(\lambda^{(2)})$. Es werden aber auch negative Werte des Risikokapitals zugelassen. Dies ist sinnvoll, wenn man beispielsweise auch Garantien oder Derivate in die Betrachtung einbezieht.

Unterschiedliche Vorzeichen in Zähler und Nenner werden nicht auftreten, da dies bedeuten würde, dass man entweder Geld für eine Garantie bekommen würde oder Geld dafür zahlen würde jemand anderem eine Garantie zu geben. Falls sowohl

Zähler als auch Nenner negativ sind, steht $g(\lambda)$ für den Ertrag einer Gegenpartei und sollte deshalb aus Investorensicht so klein wie möglich gehalten werden.

Als nächstes wird definiert, wann ein Vektorfeld $a = (a_1, \ldots, a_n)'$ als geeignet zur Performancemessung angesehen wird.

Definition 3.71 *Sei $\emptyset \neq U$ eine Menge in $\mathbb{R}^n$ und ρ ein Risikomaß auf U. Ein Vektorfeld $a = (a_1, \ldots, a_n)' : U \to \mathbb{R}^n$ wird* **geeignet zur Performancemessung** *genannt, falls ρ den folgenden zwei Bedingungen genügt:*

1.) Für alle $m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in U$ mit $\rho(\lambda) \neq m'\lambda$ und $i \in N$ folgt aus der Ungleichung

$$m_i \rho(\lambda) > a_i(\lambda) m'\lambda, \tag{3.17}$$

dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $t \in (0, \epsilon)$

$$g_{\rho,m}(-te^i + \lambda) < g_{\rho,m}(\lambda) < g_{\rho,m}(te^i + \lambda)$$

gilt.

2.) Für alle $m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in U$ mit $\rho(\lambda) \neq m'\lambda$ und $i \in N$ folgt aus der Ungleichung

$$m_i \rho(\lambda) < a_i(\lambda) m'\lambda,$$

dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $t \in (0, \epsilon)$

$$g_{\rho,m}(-te^i + \lambda) > g_{\rho,m}(\lambda) > g_{\rho,m}(te^i + \lambda)$$

gilt.

Man kann $a_i(\lambda)$ als den Risikobeitrag einer Einheit des i^{ten} Geschäftsbereiches oder als normalisierten Risikobeitrag des i^{ten} Geschäftsbereiches deuten. Man erkennt dies, wenn man die Ungleichung

$$\frac{m^T \lambda}{\rho(\lambda) - m^T \lambda} < \frac{m_i}{a_i(\lambda) - m_i}$$

betrachtet, die äquivalent zu Ungleichung (3.17) ist. Sie besagt, dass der RORAC einer einzlenen Einheit des i^{ten} Geschäftsbereiches größer ist als der RORAC des Gesamtgeschäftes.

Die Bedingungen in Definition 3.71 sind sinnvolle Forderungen an ein Vektorfeld, das bestimmen soll, ob es sich lohnt einen Geschäftsbereich auszubauen oder es besser ist diesen Geschäftsbereich zurückzufahren. Wie man durch den folgenden Satz sieht, lässt sich aus diesen Forderungen ein eindeutiges Vektorfeld ableiten.

Satz 3.72 ([51]) *Sei $\emptyset \neq U$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und ρ ein Risikomaß, das stetig partiell differenzierbar ist in U. Sei $a = (a_1, \ldots, a_n)' : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist a geeignet zur Performancemessung genau dann, wenn*

$$a_i(\lambda) = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i}(\lambda) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } \lambda \in U. \tag{3.18}$$

Beweis: Als erstes kann man feststellen, dass für $\lambda \in U$ mit $\rho(\lambda) \neq m'\lambda$, $m \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial g_{\rho,m}}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{m_i\rho(\lambda) - a_i(\lambda)m'\lambda + \Big(a_i(\lambda) - \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)\Big)m'\lambda}{\big(\rho(\lambda) - m'\lambda\big)^2} \tag{3.19}$$

gilt.

Falls (3.18) gilt, folgt sofort

$$\frac{\partial g_{\rho,m}}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{m_i\rho(\lambda) - a_i(\lambda)m'\lambda}{\big(\rho(\lambda) - m'\lambda\big)^2} \tag{3.20}$$

und somit aufgrund der Stetigkeit von a und ρ, dass die Bedingungen aus Definition 3.71 erfüllt sind.

Um die Notwendigkeit der Gleichung (3.18) zu zeigen, wählt man ein $i \in N$. Aufgrund der Stetigkeit ist es ausreichend (3.18) für $\lambda \in U$ mit $\lambda_i \neq 0$ und $\lambda_j \neq 0$ mit $i \neq j$ zu zeigen. Jetzt wird der Beweis relativ einfach. Es müssen aber einige Spezialfälle betrachtet werden. Diese Fälle sind:

1.) $a_i(\lambda) \neq 0$, $\rho(\lambda) \neq 0$, $\rho(\lambda) \neq \lambda_i a_i(\lambda)$

2.) $a_i(\lambda) \neq 0$, $\rho(\lambda) \neq 0$, $\rho(\lambda) = \lambda_i a_i(\lambda)$

3.) $a_i(\lambda) = 0$, $\rho(\lambda) \neq 0$

4.) $\rho(\lambda) = 0$ jede Umgebung von λ enthält ein $v \in U$, so dass $\rho(v) \neq 0$

5.) $\rho(\lambda) = 0$ für alle v in einer Umgebung von λ gilt $\rho(v) = 0$.

Es wird nur der Beweis für den 1. Fall ausgeführt, da die Beweise für den 2. und 3. fast identisch sind. Der 4. Fall folgt aus der Stetigkeit und der 5. ist offensichtlich.

Für den 1. Fall wählt man ein $j \in N \setminus \{i\}$ mit λ_j und definiert $m(t) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} m_i(t) &= 1 \\ m_j(t) &= \frac{t}{\lambda_j}\Big(\frac{\rho(\lambda)}{a_i(\lambda)} - \lambda_i\Big) \quad \text{und} \\ m_l(t) &= 0 \quad \text{für } l \neq i, j. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} m(t)'\lambda = t\frac{\rho(\lambda)}{a_i(\lambda)} + (1-t)\lambda_i \quad \text{und} \\ m_i(t)\rho(\lambda) - a_i(\lambda)m(t)'\lambda = (1-t)(\rho(\lambda) - \lambda_i a_i(\lambda)). \end{aligned}$$

Aufgrund von Gleichung (3.19) kann man Folgen (t_k) und (s_k) mit $t_k \to 1$ und $s_k \to 1$ wählen, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dass $m(s_k)'\lambda \neq \rho(\lambda) \neq m(t_k)'\lambda$ und

$$\begin{aligned} (1-t_k)(\rho(\lambda) - \lambda_i a_i(\lambda)) + \Big(a_i(\lambda) - \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)\Big)\Big(t_k\frac{\rho(\lambda)}{a_i(\lambda)} + (1-t_k)\lambda_i\Big) \geq 0 \quad \text{und} \\ (1-s_k)(\rho(\lambda) - \lambda_i a_i(\lambda)) + \Big(a_i(\lambda) - \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)\Big)\Big(s_k\frac{\rho(\lambda)}{a_i(\lambda)} + (1-s_k)\lambda_i\Big) \leq 0. \end{aligned}$$

Jetzt folgt (3.18) aus $k \to \infty$. $\square$

Damit sind die nachstehenden zwei Sachverhalte bekannt:

1.) Mit der verwendeten Modellierung ist der Gradient das einzige zur Performancemessung geeignete Vektorfeld $a(\lambda)$.

2.) $a(\lambda)$ kann als normalisierter Risikobeitrag der Geschäftsbereiche angesehen werden.

Wenn Λ_i die Größe des i$^{\text{ten}}$ Geschäftsbereiches ist, dann ist eine Zuteilung proportional zu

$$a_i(\Lambda)\ \Lambda_i$$

sicherlich sinnvoll, da das Kapital entsprechend dem Risiko zugeteilt werden soll. Somit erhält man die gleiche Zuteilung wie Aumann und Shapley für kohärente Risikomaße und lineare Skalierung oder wie Myers und Read.

Hier stellt sich die Frage, worin der Vorteil dieses Vorgehens besteht. Die Modellierung bei der Theorie der kooperativen Spiele mit skalierbaren Spielern ist fundamentaler und weniger auf Deutungen angewiesen als beim Eulerprinzip. Der Nutzen dieser Methode zeigt sich in der neuen „Betrachtungsweise“. Teilt man das Kapital nach Aumann und Shapley zu, erhält man nicht nur eine „gerechte Zuteilung“, sondern gleichzeitig auch ein Regelungselement, das entsprechend dem RORAC steuert, d.h. dass bekannt ist in welche Richtung man mit dieser Zuteilung steuert.

Kapitel 4

Theoretischer Vergleich der Allokationsmethoden

Wie in Kapitel 1.1 bereits festgelegt wurde, wird in dieser Arbeit die Kapitalallokation bei exogen vorgegebenem Gesamtkapital untersucht. Für die hier untersuchten Fragestellungen reicht es aus, die relative Verteilung zu kennen. Dies vereinfacht die Analyse der Allokationsmethoden und ermöglicht eine klare Darstellung der Ergebnisse. Ist es für die Argumentation von Bedeutung, dass die Höhe des Risikokapitals durch ein Risikomaß festgelegt wird, wird dies explizit angegeben.

Bei exogen gegebenem Risikokapital wird ein statischer Ansatz untersucht, d.h. es können keine Aussagen darüber gemacht werden, ob ein Unternehmensteil nach Veränderung der Größe der Geschäftsbereiche absolut mehr oder weniger Kapital erhält.

Es gibt drei Fragenkomplexe, die in diesem Kapitel untersucht werden:

1.) Welche Eigenschaften besitzen die unterschiedlichen Zuteilungen?
Wie wirken sich die Eigenschaften der Risikomaße auf die Zuteilungen aus?

2.) Gibt es verschiedene Kombinationen von Risikomaßen und Allokationsverfahren, die die gleiche Zuteilung liefern?

3.) Was wären wünschenswerte Eigenschaften, die eine Allokation erfüllen sollte?
Welche Kombinationen aus Risikomaßen und Allokationsverfahren erfüllen diese Eigenschaften?

4.1 Eigenschaften der Allokationsmethoden

Proportionale Zuteilung

Die Proportionale Zuteilung ist die einfachste der hier vorgestellten Allokationsmethoden, was sicherlich einen Vorteil darstellt. Dennoch ist sie auszuschließen, da sie nicht die Korrelationen im Portfolio berücksichtigt. Das folgende Beispiel veranschaulicht dies.

Beispiel 4.1 (Die Proportionale Zuteilung berücksichtigt keine Diversifikation)
Bei der Rahmensetzung wurde festgelegt, dass Zufallsvariablen nicht negativ korreliert sind. Diese Annahme wird in diesem Beispiel zunächst außer Kraft gesetzt, um besser veranschaulichen zu können, dass bei der proportionalen Zuteilung die Korrelation keine Beachtung findet.

Seien X_1, X_2, X_3 drei Zufallsvariablen mit folgender Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} G & -G & 0 \\ -G & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

wobei $G > 0$. Interpretiert man die Zufallsvariablen als Ertragsfunktionen von drei Geschäftsbereichen, dann erhalten alle drei Unternehmensteile bei der proportionalen Zuteilung ein Drittel des Risikokapitals unabhängig davon, ob man die Varianz oder die Standardabweichung als Risikomaß verwendet. Betrachtet man aber die Kovarianzmatrix so erkennt man, dass die Geschäftsbereiche 1 und 2 vollständig negativ korreliert sind. Zusammengenommen tragen sie somit überhaupt kein Risiko und das gesamte Risikokapital müsste Geschäftsbereich 3 zugeschlagen werden.

Betrachtet man nun folgende Kovarianzmatrizen für die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$

$$\begin{pmatrix} G & G & 0 \\ G & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

in denen nur positive Korrelationen vorkommen. Wählt man als Risikomaß wiederum die Varianz oder die Standardabweichung, so erhalten in beiden Fällen alle drei Unternehmensteile ein Drittel des Risikokapitals:

$$K_i^{p,\text{var}} = K_i^{p,\sigma} = \tilde{K}_i^{p,\text{var}} = \tilde{K}_i^{p,\text{var}} = \frac{1}{3} \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Dies bedeutet, dass bei der proportionalen Zuteilung mit der Varianz oder der Standardabweichung als Risikomaß alle drei Zufallsvariablen den gleichen Anteil am Gesamtrisiko besitzen. Schließen sich wieder die Geschäftsbereiche 1 und 2 zusammen, sind die Zuteilungskoeffizienten für die beiden Fälle unterschiedlich:

$$\begin{aligned} K_{1+2}^{p,\text{var}} &= \frac{4}{5} > \frac{2}{5} &&= \tilde{K}_{1+2}^{p,\text{var}} \\ K_{1+2}^{p,\sigma} &= \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} &&= \tilde{K}_{1+2}^{p,\sigma}. \end{aligned}$$

Dies widerspricht dem Verständnis einer Zuteilung gemäß dem Anteil am Gesamtrisiko. Für die anderen Risikomaße können ähnliche Beispiele konstruiert werden.

Die Korrelation kann bei der proportionalen Methode auch gar nicht berücksichtigt werden, da nur die Risiken der Einerkoalitionen in die Allokation einfliesen.

Eine in der Versicherungsmathematik weit verbreitete Methode der Risikokapitalallokation ist das Kovarianzprinzip, bei dem das Kapital proportional der Zeilensummen der Kovarianzmatrix zugeteilt wird.

Definition 4.1 *Sei $(X_1,\ldots,X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht und $Z=\sum_{i=1}^n X_i$.*

Dann sind die **Zuteilungskoeffizienten für das Kovarianzprinzip** *definiert durch*

$$K_i^{KP}=\frac{\text{cov}[X_i,Z]}{\sum\limits_{j=1}^{n}\text{cov}[X_j,Z]}=\frac{\text{cov}[X_i,Z]}{\text{var}[Z]}\quad \textit{für } i=1,\ldots,n.$$

Da die Kovarianz eine Abilldung von $L^2\times L^2\to\mathbb{R}$ ist, ist sie kein Risikomaß. Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen dem Kovarianzprinzip und der proportionalen Zuteilung mit der Varianz oder der Standardabweichung als Risikomaß.

Satz 4.2 *Sei $(X_1,\ldots,X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\text{var}[X_i]<\infty$ für $i=1,\ldots,n$. Dann gilt:*

1.) Falls alle X_i vollständig korreliert sind, d.h. für die Korrelationskoeffizienten $\varrho_{i,j}$ gilt $\varrho_{i,j}=1$ für $i,j\in N$, liefert die proportionale Zuteilung mit der Standardabweichung als Risikomaß die gleiche Zuteilung wie das Kovarianzprinzip. Dies bedeutet, dass die Zuteilungskoeffizienten der beiden Zuteilungen übereinstimmen.

2.) Falls alle X_i paarweise vollständig unkorreliert sind, liefert die proportionale Zuteilung mit der Varianz als Risikomaß die gleiche Zuteilung wie das Kovarianzprinzip.

Beweis: Seien alle X_i vollständig korreliert. Dann gilt

$$K_i^{KP}=\frac{\sum\limits_{j\in N}\text{cov}(X_i,X_j)}{\sum\limits_{j,k\in N}\text{cov}(X_j,X_k)}=\frac{\sum\limits_{j\in N}\pm\,\sigma_i\sigma_j}{\sum\limits_{j,k\in N}\pm\,\sigma_j\sigma_k}=\frac{\sigma_i}{\sum\limits_{j\in N}\sigma_j}=K_i^{p,\sigma}.$$

Seien alle X_i paarweise vollständig unkorreliert. Dann gilt

$$K_i^{KP}=\frac{\sum\limits_{j\in N}\text{cov}(X_i,X_j)}{\sum\limits_{j,k\in N}\text{cov}(X_j,X_k)}=\frac{\text{var}[X_i]}{\sum\limits_{j\in N}\text{var}[X_j]}=K_i^{p,\text{var}}.$$

□

Man kann somit die proportionale Zuteilung mit der Varianz und die proportionale Zuteilung mit der Standardabweichung als Extrempositionen des Kovarianzprinzips betrachten. Dies bedeutet aber nicht, dass die Gewichtungsfaktoren des Kovarianzprinzips für die einzelnen Geschäftsbereiche zwischen den Gewichtungsfaktoren der anderen beiden Allokationsmethoden liegen.

Bei der proportionalen Zuteilung spielt der absolute Wert des Risikomaßes die entscheidende Rolle. Bei den anderen Zuteilungsmethoden dagegen werden Differenzen zwischen Risikomaßen oder Ableitungen, die infinitesimale Differenzen sind, gebildet. Liegt Subadditivität vor, dann können diese Differenzen wesentlich kleiner sein als die absoluten Risiken der einzelnen Zufallsvariablen.

Die Kohärenz oder Nicht-Kohärenz eines Risikomaßes wirkt sich bei der proportionalen Zuteilung nur bei Veränderungen der Zufallszahlen aus.

Zwischen der proportionalen Zuteilung und der Zuteilung nach Shapley besteht folgende Beziehung. Bei der Zuteilung nach Shapley werden für den i^{ten} Geschäftsbereich alle Differenzen der Art $\rho(S) - \rho(S \setminus \{i\})$ für $S \subseteq N$ betrachtet, wohingegen die proportionale Zuteilung nur die Differenzen $\rho(\{i\}) - \rho(\emptyset)$ berücksichtigt.

Kovarianzprinzip

Es ist maßgebend unter welchem Risikomaß das Kovarianzprinzip als Allokation betrachtet wird. Wie man im nächsten Abschnitt erkennt, ist das Kovarianzprinzip sowohl einer Zuteilung mit der Varianz als auch einer Zuteilung mit der Standardabweichung als Risikomaß äquivalent.

Zuteilung nach Merton und Perold

Auch diese Allokationsmethode ist leicht zu vermitteln. Im Gegensatz zur proportionalen Zuteilung bezieht sie die Korrelation bei der Allokation mit ein. Dabei wird betrachtet um wieviel das Risiko wächst, wenn ein neuer Geschäftsbereich hinzukommt. Es kann jedoch kritisiert werden, dass nur die Abhängigkeit zwischen dem gesamten Unternehmen und dem um einen Geschäftsbereich verkleinerten Unternehmen berücksichtigt wird.

Auch wenn die Zuteilung nach Merton und Perold die Korrelation berücksichtigt, so kann man Beispiele finden, bei denen sie nicht das erwartete Verhalten zeigt.

Beispiel 4.2 (Korrelation bei der Zuteilung nach Merton und Perold) Seien $X_1, \ldots, X_5$ Zufallsvariablen mit folgender Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die sich daraus ergebenden Zuteilungskoeffizienten sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Man sieht, dass

$$K_1^{p,\text{var}} > K_1^{MP,\text{var}}. \tag{4.1}$$

Dies entspricht dem allgemeinen Risikoverständnis, da X_1 mehr zur Diversifikation des Portfolios beiträgt als eine korrelierte Zufallsvariable. Dass für eine unkorrelierten Zufallsvariable generell Ungleichung (4.1) gilt, zeigen Satz 4.3 und Satz 4.4. Auch entspricht

$$K_2^{p,\text{var}} < K_2^{MP,\text{var}} \quad \text{und} \quad K_3^{p,\text{var}} < K_3^{MP,\text{var}}$$

Tabelle 4.1: Zuteilungskoeffizienten[1)] in % für die proportionale Zuteilung und die Zuteilung nach Merton und Perold mit Varianz und Standardabweichung

	proportionale Zuteilung		**Zuteilung nach MP[2)]**	
	Varianz	$\boldsymbol{\sigma}$	**Varianz**	$\boldsymbol{\sigma}$
$\mathbf{K_1}$	71.4	44.2	54.3	58.5
$\mathbf{K_2}$	7.1	14.0	16.3	14.9
$\mathbf{K_3}$	7.1	14.0	16.3	14.9
$\mathbf{K_4}$	7.1	14.0	6.5	5.8
$\mathbf{K_5}$	7.1	14.0	6.5	5.8

1) Gerundet auf eine Dezimalstelle

2) Merton und Perold

den Erwartungen. Dennoch gibt es auch bei der Varianz Fälle, die der Erwartung widersprechen. So gilt zum Beispiel

$$K_4^{p,\mathrm{var}} > K_4^{MP,\mathrm{var}} \quad \text{und} \quad K_5^{p,\mathrm{var}} > K_5^{MP,\mathrm{var}},$$

obwohl X_4 und X_5 miteinander korreliert sind. Dies ist dadurch zu erklären, dass die in der Definition auftretende Zähler und somit auch der Nenner von $K_i^{MP,\mathrm{var}}$ größer sind als die von $K_i^{p,\mathrm{var}}$, d.h.

$$\mathrm{var}[X_i] \leq \mathrm{var}[X_i] + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} \mathrm{cov}[X_i, X_j].$$

Sind nun andere Zufallsvariablen auch positiv korreliert, so kann es sein, dass bei einer Zufallsvariable mit kleiner positiver Korrelation der Zähler anteilig weniger zunimmt als der Nenner.

Betrachtet man die Zuteilungskoeffizienten der Standardabweichung, so fällt auf, dass auch hier

$$K_4^{p,\sigma} > K_4^{MP,\sigma} \quad \text{und} \quad K_5^{p,\sigma} > K_5^{MP,\sigma}.$$

Was aber wesentlich stärker der Erwartung widerspricht, ist dass

$$K_1^{p,\sigma} < K_1^{MP,\sigma}.$$

Somit kann es vorkommen, dass einer unkorrelierten Zufallsvariable bei der Zuteilung nach Merton und Perold mehr Risikokapital zugewiesen wird als bei der proportionalen Zuteilung. Dies hängt damit zusammen, dass bei der Standardabweichung als Risikomaß der Zähler und somit auch der Nenner in der Definition von $K_i^{MP,\sigma}$ kleiner sind als der von $K_i^{p,\sigma}$, d.h.

$$\sqrt{\mathrm{var}[X_i]} = \sigma[X_i] \geq \sigma[Z] - \sigma[Z - X_i] = \sqrt{\mathrm{var}[Z]} - \sqrt{\mathrm{var}[Z - X_i]}.$$

Die Differenz $\big(\sqrt{x} - (\sqrt{g} - \sqrt{g-x})\big)/\sqrt{x}$ ist für $0 \leq x \leq g$ eine monoton fallende Funktion. Somit nimmt der Zähler von unkorrelierten Zufallsvariablen mit großer Varianz relativ weniger ab als bei solchen mit kleiner Varianz.

Der in Beispiel 4.2 dargestellte Sachverhalt wird in den folgenden beiden Sätzen untersucht.

Satz 4.3 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen. Dann gilt einer der drei folgenden Fälle:*

1.) $K_i^{p,\mathrm{var}} < K_i^{KP} < K_i^{MP,\mathrm{var}}$

2.) $K_i^{p,\mathrm{var}} > K_i^{KP} > K_i^{MP,\mathrm{var}}$

3.) $K_i^{p,\mathrm{var}} = K_i^{KP} = K_i^{MP,\mathrm{var}}$.

Insbesondere gilt,

$$K_i^{p,\mathrm{var}} > K_i^{KP} > K_i^{MP,\mathrm{var}} \quad \textit{oder} \quad K_i^{p,\mathrm{var}} = K_i^{KP} = K_i^{MP},$$

falls X_i mit den anderen Zufallsvariablen aus $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert ist.

Beweis: Sei $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt

$$\begin{aligned} K_i^{MP,\mathrm{var}} &= K_i^{p,\mathrm{var}} + \frac{2\,y}{\left(2\,\mathrm{var}[Z] - \sum\limits_{j=1}^n \mathrm{var}[X_j]\right)\sum\limits_{j=1}^n \mathrm{var}[X_j]} \\ &= K_i^{KP} + \frac{y}{\left(2\,\mathrm{var}[Z] - \sum\limits_{j=1}^n \mathrm{var}[X_j]\right)\mathrm{var}[Z]}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei

$$y = \mathrm{cov}[X_i, Z]\sum_{j=1}^n \mathrm{var}[X_j] - \mathrm{var}[X_i]\mathrm{var}[Z]. \tag{4.3}$$

Da die Nenner der beiden Brüche aus (4.2) immer positv sind, folgt aus (4.2) und (4.3)

$$\begin{aligned} &K_i^{p,\mathrm{var}} > K_i^{KP} \Leftrightarrow K_i^{MP,\mathrm{var}} < K_i^{KP} \Leftrightarrow K_i^{MP,\mathrm{var}} < K_i^{p,\mathrm{var}} \quad \text{und} \\ &K_i^{p,\mathrm{var}} < K_i^{KP} \Leftrightarrow K_i^{MP,\mathrm{var}} > K_i^{KP} \Leftrightarrow K_i^{MP,\mathrm{var}} > K_i^{p,\mathrm{var}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort der 1. und der 2. Fall. Wenn $y = 0$, folgt sofort $K_i^{p,\mathrm{var}} = K_i^{KP} = K_i^{MP,\mathrm{var}}$.

Falls X_i mit den anderen Zufallsvariablen aus $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert ist, gilt $\mathrm{cov}[X_i, Z] = \mathrm{var}[X_i]$ und somit $y \leq 0$, was den Zusatz beweist. □

Satz 4.4 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvarialblen und ρ ein superadditives Risikomaß mit $\rho(X_1) + \rho(\sum_{i \in S} X_i) = \rho(X_1 + \sum_{i \in S} X_i)$ für $S \subseteq N \setminus \{1\}$. Dann gilt*

$$K_1^{p,\rho} \geq K_1^{MP,\rho}$$

Beweis: Sei $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt

$$K_1^{p,\rho} = \frac{\rho(X_1)}{\sum\limits_{j=1}^n \rho(X_j)} = \frac{\rho(Z) - \rho(Z - X_1)}{\sum\limits_{j=1}^n \rho(X_j)} \geq \frac{\rho(Z) - \rho(Z - X_1)}{\sum\limits_{j=1}^n \Big(\rho(Z) - \rho(Z - X_j)\Big)} = K_1^{MP,\rho}.$$

□

Die Voraussetzungen von Satz 4.4 treffen für die Varianz bei einer unkorrelierten Zufallsvariable zu. Hat man dagegen ein subadditives Risikomaß ρ, sind sowohl Zähler als auch Nenner von $K_i^{MP,\rho}$ kleiner als Zähler und Nenner von $K_i^{p,\rho}$ und es ist keine allgemeingültige Aussage mehr möglich.

Bei einem additiven Risikomaß liefert die Zuteilung nach Merton und Perold das gleiche Ergebnis wie die proportionale Zuteilung.

Zwischen der Zuteilung nach Merton und Perold und der Zuteilung nach Shapley besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen der proportionalen Methode und der Zuteilung nach Shapley. Hier wird das Kapital proportional zu den Differenzen zwischen den n- und den $(n-1)$-Koalitionen aufgeteilt.

Zuteilung nach Myers und Read

In den Beispielen 3.3 und 3.4 wurde folgender Sachverhalt angesprochen. Bei manchen Risikomaßen, wie zum Beispiel der Standardabweichung gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(Z(\Lambda))}{\partial \lambda_i} \Lambda_i = \rho(Z(\Lambda)), \tag{4.4}$$

wobei $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. Bei der Varianz dagegen hält (4.4) nicht. Dies erklärt sich mit Satz 3.68, der besagt, dass (4.4) für homogene Risikomaße und lineare Skalierung gilt.

Die Zuteilung nach Myers und Read bildet mit der Zuteilung nach Aumann und Shapley eine eigene Gruppe, da sie sich nicht aus Differenzen zwischen diskreten Koalitionen berechnen lässt, sondern den nicht-diskreten Fall behandelt.

Zuteilung nach Shapley

Ein beachtenswerter Vorteil der Zuteilung nach Shapley ist, dass sie auf einer spieltheoretischen Modellbildung beruht und sich aufgrund dessen nicht nur eine Diskussion über ihre Eigenschaften sondern auch über das zugrundeliegende Modell führen lässt. Auch hier entfaltet wie bei den Risikomaßen das axiomatische Vorgehen eine große Anziehungskraft. Im Gegensatz zu den kohärenten Risikomaßen ergibt sich hier aus den Axiomen ein eindeutiges Verfahren.

Zunächst wird Beispiel 4.2 fortgeführt.

Beispiel 4.3 (Fortführung von Beispiel 4.2 für die Zuteilung nach Shapley) Unter den Voraussetzungen wie in Beispiel 4.2 ergeben sich die in Tabelle 4.2 aufgeführten Zuteilungskoeffizienten.

Auch die Zuteilung nach Shapley widerspricht den Erwartungen in ähnlicher Weise wie die Zuteilung nach Merton und Perold.

Bei der spieltheoretischen Modellbildung wurde gefordert, dass das Risikomaß subadditiv ist. Nun stellt sich die Frage, welche Auswirkungen es hat, wenn das verwendete Risikomaß diese Eigenschaft nicht besitzt. Dazu ein Beispiel:

Tabelle 4.2: Zuteilungskoeffizienten[1)] in %

	prop. Zuteilung		Zuteilung nach MP[2)]		Zuteilung nach Shapley	
	Varianz	σ	**Varianz**	σ	**Varianz**	σ
$\mathbf{K_1}$	71.4	44.2	54.3	58.5	61.7	51.8
$\mathbf{K_2}$	7.1	14.0	16.3	14.9	12.3	14.1
$\mathbf{K_3}$	7.1	14.0	16.3	14.9	12.3	14.1
$\mathbf{K_4}$	7.1	14.0	6.5	5.8	12.3	14.1
$\mathbf{K_5}$	7.1	14.0	6.5	5.8	12.3	14.1

1) Gerundet auf eine Dezimalstelle

2) Merton und Perold

Beispiel 4.4 (Bei nicht-subadditiven Risikomaßen ist der Shapley Wert nicht notwendigerweise im Kern)
Gegeben seien drei Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, für die Erträge der Geschäftsbereiche mit folgender Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} G & G & 0 \\ G & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

und $G > 0$. Dann berechnen sich die Zuteilungskoeffizienten nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß zu

$$K_1 = \frac{2}{5}, \quad K_2 = \frac{2}{5}, \quad K_3 = \frac{1}{5}.$$

Nimmt man an, dass das Gesamtrisikokapital wie im zugrundeliegendem Modell durch die Varianz festgelegt wird, ergibt es sich zu $5G$. Somit erhalten der zweite und der dritte Geschäftsbereich zusammen $3G$. Würden sie sich aber zu einem neuen Geschäftsbereich zusammenschliessen und aus der Koalition austreten, dann würde sich ihr Risikokapital nur auf $\text{var}[X_2 + X_3] = 2G$ belaufen.

Bei dieser Argumentation wird davon ausgegangen, dass das Risikokapital mit dem verwendeten Risikomaß bestimmt wird. Eine Berechnung mittels eines anderen Risikomaßes ist aus mathematischer Sicht hinterfragbar, da der Gebrauch von zwei unterschiedlichen Risikobegriffen, einmal zur Bestimmung des Risikokapitals, das andere Mal zur Allokation, nur schwer zu rechtfertigen ist.

Bei der Modellierung der kooperativen Spiele gibt die charakteristische Funktion die Kosten an, die für die verschiedenen Koalitionen anfallen. Die Forderung nach der Subadditivität der charakteristische Funktion rührt daher, dass es sich ansonsten für die Spieler nicht lohnt sich zu einer großen Koalition zusammenzuschließen. Somit gäbe es auch kein Grund sich über die Aufteilung von $\rho(N)$ Gedanken zu machen. Geht man jedoch davon aus, dass die charakteristische Funktion keine Kosten sondern Auszahlungen angibt, dann wäre die Forderung nach Superadditivität sinnvoll, da die Spieler in diesem Fall bestrebt sind möglichst viel Gewinn zu machen.

Teilt man $\rho(N)$ entsprechend der Shapley-Formel aus Satz 3.31 auf, so sind auch bei nicht subadditivem ρ die Shapley-Axiome 3.1 bis 3.3 erfüllt.

Zuteilung nach Aumann und Shapley

Bei der Zuteilung nach Aumann und Shapley greifen die gleichen Argumente bezüglich der Modellbildung wie bei der Zuteilung nach Shapley.

Falls das Risikomaß homogen und subadditiv ist, folgt aus Satz C.31, dass der Aumann-Shapley Wert im Kern enthalten ist. Die Homogenität und die lineare Skalierung führen wie aus Satz 3.68 ersichtlich zu der einfacheren Form

$$K_i = \Big(\frac{\partial r(\Lambda)}{\partial \lambda_i}\Lambda_i\Big)\Big/\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r(\Lambda)}{\partial \lambda_j}\Lambda_j,$$

die äquivalent der Zuteilung nach Myers und Read ist.

4.2 Äquivalente Zuteilungen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der zweiten Frage: Gibt es Kombinationen von Allokationsverfahren und Risikomaßen, welche die gleichen Zuteilungen liefern? Der nächste Satz zeigt, dass mit Varianz und Standardabweichung viele Allokationsverfahren äquivalent sind.

Satz 4.5 *Sei $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen mit $\mathrm{var}[\tilde{X}_i] < \infty$ und $X = (\Lambda_1 X_1, \ldots, \Lambda_n X_n)$. Außerdem sei $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{X}_i$ und $Z = Z(\Lambda)$. Dann sind folgende Zuteilungen auf X dem Kovarianzprinzip äquivalent, d.h. die Zuteilungskoeffizienten der folgenden Zuteilungen stimmen mit den Zuteilungskoeffizienten des Kovarianzprinzips überein:*

1.) *Proportionale Zuteilung mit der Varianz als Risikomaß, falls die Zufallsvariablen paarweise vollständig unkorreliert sind*

2.) *Proportionale Zuteilung mit der Standardabweichung als Risikomaß, falls die Zufallsvariablen paarweise vollständig korreliert sind*

3.) *Zuteilung nach Merton und Perold mit der Varianz als Risikomaß, falls die Zufallsvariablen paarweise unkorreliert sind*

4.) *Zuteilung nach Myers und Read mit der Varianz als Risikomaß*

5.) *Zuteilung nach Myers und Read mit der Standardabweichung als Risikomaß*

6.) *Zuteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß*

7.) *Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Varianz als Risikomaß*

8.) *Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Standardabweichung als Risikomaß*

Beweis: Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (1): siehe Satz 4.2
Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (2): siehe Satz 4.2
Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (3): Falls die Zufallsvariablen paarweise unkorreliert sind, gilt

$$K_i^{KP} = \frac{\operatorname{cov}[X_i, Z]}{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}[X_j, Z]} = \frac{\operatorname{var}[X_i]}{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}[X_j]} = \frac{\operatorname{var}[Z] - \operatorname{var}[Z - X_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Big(\operatorname{var}[Z] - \operatorname{var}[Z - X_j]\Big)} = K_i^{MP,\mathrm{var}}.$$

Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (4): Da aufgrund von Satz 2.2

$$\frac{\partial \operatorname{var}[Z(\lambda)]}{\partial \lambda_i} = 2 \operatorname{cov}[\tilde{X}_i, Z],$$

gilt

$$K_i^{MR,\mathrm{var}} = \left(\frac{\partial \operatorname{var}[Z(\Lambda)]}{\partial \lambda_i}\Lambda_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \operatorname{var}[Z(\Lambda)]}{\partial \lambda_j}\Lambda_j\right) = \frac{\operatorname{cov}[\Lambda_i \tilde{X}_i, Z]}{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}[\Lambda_j \tilde{X}_j, Z]} = K_i^{KP}.$$

Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (5): Da aufgrund von Satz 2.5

$$\frac{\partial \sigma[Z(\Lambda)]}{\partial \lambda_i} = \frac{\operatorname{cov}[\tilde{X}_i, Z]}{\sqrt{\operatorname{var}[Z]}},$$

gilt die gleiche Argumentation wie zuvor.
Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (6): Der Zähler von $K_i^{S,\mathrm{var}}$ ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left(\operatorname{var}\Big[\sum_{j \in S} X_j\Big] - \operatorname{var}\Big[\sum_{j \in S \setminus \{i\}} X_j\Big]\right) \\
&= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left(2 \operatorname{cov}\Big[X_i, \sum_{j \in S \setminus \{i\}} X_j\Big] + \operatorname{var}[X_i]\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{|S|=s \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(2 \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \operatorname{cov}\Big[X_i, X_j\Big] + \operatorname{var}[X_i]\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-1}{s-1} \left(\binom{n-2}{s-2} \Big/ \binom{n-1}{s-1}\right) 2 \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \operatorname{cov}[X_i, X_j]\right) \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-1}{s-1} \operatorname{var}[X_i] \\
&= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{2(s-1)}{n(n-1)} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \operatorname{cov}[X_i, X_j] + \frac{1}{n} \operatorname{var}[X_i]\right) \\
&= \operatorname{cov}[X_i, Z].
\end{aligned}$$

Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (7): Es gilt

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathrm{var}[t\Lambda'\tilde{X}]}{\partial \lambda_i}\,dt = \int_0^1 t^2 \frac{\partial \mathrm{var}[\Lambda'\tilde{X}]}{\partial \lambda_i}\,dt$$
$$= \int_0^1 t^2 2\,\mathrm{cov}[\tilde{X}_i, Z(\Lambda)]\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\mathrm{cov}[\tilde{X}_i, Z(\Lambda)].$$

Äquivalenz von Kovarianzprinzip und (8): Da bei homogenen Risikomaßen und linearer Skalierung aufgrund von Satz 3.68 die Zuteilungen nach Myers und Read identisch mit der Zuteilung nach Aumann und Shapley sind, ergibt sich der Beweis aus den vorangegangenen Teilen. □

Satz 4.6 *Sei* $(X_1, \ldots, X_n)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen mit* $\mathrm{var}[X_i] < \infty$ *und die* X_i *für* $i = 1, \ldots, n$ *symmetrisch verteilt. Dann ist die proportionale Zuteilung mit der Varianz als Risikomaß äquivalent der proportionalen Zuteilung mit der Semivarianz als Risikomaß.*

Sind die Zufallsvariablen unabhängig, dann gilt für die restlichen vier Allokationsmethoden, dass eine Zuteilung mit der Varianz als Risikomaß äquivalent der gleichen Zuteilung mit der Semivarianz als Risikomaß ist.

Beweis: Es gilt $2\ \mathrm{svar}[X_i] = \mathrm{var}[X_i]$, da die Zufallsvariablen eine symmetrische Verteilung besitzen. Somit folgt

$$K_i^{P,\mathrm{var}} = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{var}[X_j]} = \frac{2\ \mathrm{svar}[X_i]}{\sum\limits_{j=1}^{n} 2\ \mathrm{svar}[X_j]} = K_i^{P,\mathrm{svar}}.$$

Der Beweis für die anderen vier Allokationen beruht darauf, dass die Summe von unabhängigen symmetrisch verteilten Zufallsvariablen wieder symmetrisch verteilt ist. □

Satz 4.7 *Sei* $(X_1, \ldots, X_n)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen mit* $E[X_i] = 0$ *und* $\mathrm{var}[X_i] < \infty$ *für* $i = 1, \ldots, n$, *der eine elliptische Verteilung besitzt. Dann gilt für alle fünf Allokationsmethoden, dass eine Zuteilung mit dem* VaR_α *für* $\alpha \leq 0.5$ *als Risikomaß äquivalent der gleichen Zuteilung mit der Standardabweichung als Risikomaß ist.*

Beweis: In Satz 2.41 wurde gezeigt, für eine elliptisch verteilten Vektor X gilt, dass $\mathrm{VaR}_\alpha(Z) = \sigma[Z]q_\alpha - E[Z]$ für $Z \in \{\lambda' X | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Somit gilt

$$K_i^{p,\mathrm{VaR}} = \frac{\mathrm{VaR}(X_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{VaR}(X_j)} = \frac{\sigma[X_i]q_\alpha}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma[X_j]q_\alpha} = K_i^{p,\sigma}.$$

Der Beweis für die anderen Äquivalenzen folgt genau der gleichen Argumentation. □

Tabelle 4.3: Äquivalenz von verschiedenen Risikomaßen bei gleichen Allokationsverfahren

Risikomaß	**proportionale Zuteilung**	**Zuteilung nach** Merton & Perold	Myers & Read⁵⁾	Shapley	Aumann & Shapley⁵⁾
Varianz	y^3	$y^{1,3}$	$x^0 y^{1,3}$	$y^{1,3}$	$x^0 y^{1,3}$
Standardabweichung	z^4	z^4	$x^0 z^4$	z^4	$x^0 z^4$
Semivarianz	y^3	$y^{1,3}$	$y^{1,3}$	$y^{1,3}$	$y^{1,3}$
VaR	z^4	z^4	z^4	z^4	z^4
Expected Shortfall					

x, y und z stehen für die verschiedenen „Äquivalenzklassen“ innerhalb eines Allokationsverfahrens. Die Hochzahlen stehen für die verschiedenen Voraussetzungen an die Zufallsvariablen (ZV), die für die Äquivalenz hinreichend sind: 0) keine Voraussetzungen 1) ZV unabhängig; 2) ZV vollständig korreliert; 3) ZV symmetrisch; 4) ZV elliptisch verteilt und $E[X_i] = 0$ für $i = 1, \ldots, n$; 5) $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$

Satz 4.8 *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallsvariablen, $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ sowie die Bedingungen für die Differenzierbarkeit der Standardabweichung, des VaR und des ES erfüllt. Dann ist die Zuteilung nach Myers and Read jeweils für die Standardabweichung, den VaR und den ES als Risikomaß gleich der Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Standardabweichung, dem VaR und dem ES als Risikomaß.*

Beweis: Standardabweichung, VaR und ES sind homogene Risikomaße und somit vereinfacht sich nach Satz 3.68 der Aumann-Shapley Wert zu $\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \lambda_i}$, was multipliziert mit λ_i die Kenngröße ergibt, nach der man proportional zuteilt. Dies ist identisch mit der Zuteilung nach Myers und Read. □

Nun soll veranschaulicht werden, wie die einzelnen Zuteilungen zusammenhängen. Es werden nicht sofort alle Äquivalenzen auf einmal dargestellt, um die Verflechtungen besser sichtbar zu machen. In 4.3 wird zunächst die Äquivalenz von gleichen Allokationsverfahren mit verschiedenen Risikomaßen betrachtet, d.h. nur Äquivalenzen in einer Spalte. In 4.4 werden die Äquivalenzen von verschiedenen Allokationsverfahren bei gleichen Risikomaßen betrachtet. Die Zusammenführung der Ergebnisse erfolgt dann in 4.5.

Aus Tabelle 4.5 erkennt man, dass sich das Kovarianzprinzip sowohl aus mehreren Zuteilungen mit der Varianz als Risikomaß als auch aus der Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Standardabweichung als Risikomaß ergibt.

Tabelle 4.4: Äquivalenz von verschiedenen Allokationsverfahren bei gleichen Risikomaßen

Risikomaß	**proportionale Zuteilung**	**Zuteilung nach** Merton & Perold	Myers & Read[3)]	Shapley	Aumann & Shapley[3)]
Varianz	x^1	x^1	x^0	x^0	x^0
Standardabweichung	x^2		x^0		x^0
Semivarianz					
VaR			x^0		x^0
Expected Shortfall			x^0		x^0

x steht für die „Äquivalenzklassen“ innerhalb eines Risikomaße. Die Hochzahlen stehen für die verschiedenen Voraussetzungen an die Zufallsvariablen (ZV), die für die Äquivalenz hinreichend sind: 0) keine Voraussetzungen 1) ZV unabhängig; 2) ZV vollständig korreliert; 3) $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$

Tabelle 4.5: Äquivalente Allokationsverfahren

Risikomaß	**propportionale Zuteilung**	**Zuteilung nach** Merton & Perold	Myers & Read[5)]	Shapley	Aumann & Shapley[5)]
Varianz	x^1	x^1	x	x	x
Standardabweichung	x^2	w^4	x	z^4	x
Semivarianz	x^3	$x^{1,3}$	$x^{1,3}$	$x^{1,3}$	$x^{1,3}$
VaR	x^4	w^4	x^4	z^4	x^4
Expected Shortfall			y		y

w, x, y und z stehen für die verschiedenen Äquivalenzklassen. Die mit x gekennzeichneten Zuteilungen sind äquivalent dem Kovarianzprinzip. Die Hochzahlen stehen für die verschiedenen Voraussetzungen an die Zufallsvariablen (ZV), die für die Äquivalenz hinreichend sind: keine Voraussetzungen 1) ZV unabhängig; 2) ZV vollständig korreliert; 3) ZV symmetrisch; 4) ZV elliptisch verteilt und $E[X_i] = 0$ für $i = 1, \ldots, n$; 5) $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$

4.3 Weitere Eigenschaften der Allokationsverfahren

Nach der Besprechung der Eigenschaften der Allokationsverfahren und der Äquivalenzen zwischen den Zuteilungen, werden die Verfahren abschließend auf drei weitere wichtige Eigenschaften hin untersucht. Meinungsverschiedenheiten über die Wichtigkeit der Kriterien sind anzunehmen, deshalb werden die Bedingungen für die Zuteilungen genau angegeben.

Die drei folgenden Eigenschaften werden als außerordentlich wichtig erachtet.

1.) Berücksichtigung der Korrelation

2.) Keine Abhängigkeit von der Zuteilungsebene

3.) Subadditivität der charakteristischen Funktion bei der Zuteilung nach Shapley

Zunächst wird ihre Bedeutung erklärt. Die 1. geforderte Eigenschaft ist selbsterklärend. Eine Zuteilung, die die Korrelation nicht berücksichtigt, geht am Kern des Problems vorbei, wie man deutlich an Beispiel 4.1 sieht und sollte daher nicht eingesetzt werden.

Die Forderung nach der Unabhängigkeit von der Zuteilungsebene ist folgendermaßen zu verstehen. Seien $X_1, \dots, X_n$ die Ertragsfunktionen für n Geschäftsbereiche und eine Allokationsmethode gegeben. Berechnet man die Zuteilung des Kapitals auf die verschiedenen Unternehmensteile, so erhält man die Koeffizienten $K_1, \dots, K_n$. Man kann nun annehmen, dass die Geschäftsbereiche 1 und 2 zu einem neuen Geschäftsbereich $1 + 2$ verschmolzen werden. Berechnet man wieder die Kapitalzuteilung mit der gleichen Allokationsmethode, so ergeben sich die Koeffizienten $K'_{1+2}, K'_3, \dots, K'_n$. Ist die Zuteilung unabhängig von der Zuteilungsebene, muss $K_1 + K_2 = K'_{1+2}$ und $K_i = K'_i$ für $i = 3, \dots, n$ gelten. Die Forderung nach dieser Eigenschaft ergibt sich aus der „willkürlichen" Zusammenlegung von Versicherungspolicen zu Geschäftsbereichen und bedeutet, dass es für eine Portfolioposition keinen Unterschied macht, ob sie alleine oder in Verbindung mit einer anderen Position betrachtet wird. Auch spielt die Aufteilung des restlichen Unternehmens für das einem Geschäftsbereich zugeteilte Kapital keine Rolle. Diese Forderung taucht auch in Kalkbreners Axiomensystem auf. Bei den spieltheoretischen Zuteilungen ist diese Eigenschaft nicht von Interesse, da sie ein allgemeineres Problem betrachten und sich nicht auf die Allokation von Kapital beschränken.

Die 3. Eigenschaft ist wiederum offensichtlich und ihre Bedeutung wurde bereits in Beispiel 4.4 dargelegt.

Auch wenn eine Kombination aus Zuteilungsprinzip und Risikomaß äquivalent einer anderen Kombination ist und sich herausstellen sollte, dass diese Kombination eine der genannten Eigenschaften nicht erfüllt, dann kann nicht gefolgert werden, dass die äquivalente Kombination auch ausgeschlossen werden kann. Diese Schlussfolgerung kann nur getroffen werden, falls die Risikomaße übereinstimmen, da ansonsten zwei verschiedene Risikobegriffe den Allokationen zugrunde liegen.

Proportionale Zuteilung

Die proportionale Methode berücksichtigt weder die Korrelation noch ist sie unabhängig von der Zuteilungsebene. Nur wenn ein Risikomaß additiv ist, ist es zusammen mit der proportionalen Methode unabhängig von der Zuteilungsebene. Keines der hier betrachteten Risikomaße ist additiv.

Zuteilung nach Merton und Perold

Die Zuteilung nach Merton und Perold berücksichtigt die Korrelation, da sich aus verschiedenen Korrelationen zwischen den Zufallsvariablen verschiedene Zuteilungskoeffizienten ergeben können.

Aber auch hier ist die Zuteilung nicht unabhängig von der Zuteilungsebene. Dies erkennt man für Varianz, Standardabweichung und Semivarianz, wenn man die Zuteilung für Beispiel 4.4 berechnet, dann die Zufallsvariablen X_1 und X_2 zusammenfasst und die Zuteilung neu berechnet. Für die Semivarianz ist dies auch möglich, indem man sich unter den Verteilungen Normalverteilungen vorstellt. Um zu sehen, dass die Zuteilung nach Merton und Perold für den VaR und den ES abhängig von der Zuteilungsebene ist, kann man Beispiel 2.4 fortführen.

Beispiel 4.5 (Weiterführung von Beispiel 2.4)
Sei $X_3 = -G$. Dann gilt

$$K_1^{MP,\mathrm{VaR}_\alpha} = K_2^{MP,\mathrm{VaR}_\alpha} = K_3^{MP,\mathrm{VaR}_\alpha} = \frac{1}{3}$$

für $p < \alpha < 2p$. Wenn man nun aber die Zufallsvariablen X_1 und X_2 zu X_{1+2} zusammenfasst ergibt sich

$$K_{1+2}^{MP,\mathrm{VaR}_\alpha} = K_3^{MP,\mathrm{VaR}_\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Für den ES erhält man

$$K_1^{MP,\mathrm{ES}_\alpha} = K_2^{MP,\mathrm{ES}_\alpha} = \frac{\alpha - p}{3\alpha - 2p} \quad \text{und} \quad K_3^{MP,\mathrm{ES}_\alpha} = \frac{\alpha}{3\alpha - 2p}.$$

Fasst man auch hier die ersten beiden Zufallsvariablen zusammen, lautet die Zuteilung

$$K_{1+2}^{MP,\mathrm{ES}_\alpha} = K_3^{MP,\mathrm{ES}_\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Die zeigt, dass die Zuteilung nach Merton und Perold abhängig ist von der Zuteilungsebene.

Zuteilung nach Myers und Read

Die Zuteilung nach Myers und Read berücksichtigt zum einen die Diversifikation, zum anderen ist sie unabhängig von der Zuteilungsebene wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.9 *Sei* $X = (X_1, \ldots, X_n)'$ *ein Vektor von Zufallsvariablen, der für die Erträge der einzelnen Geschäftsbereiche steht und* $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$*, d.h. die Größe der Geschäftsbereiche ist* $e_n = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$*. Sei weiter* ρ *ein Risikomaß, das partielle Ableitungen* $\frac{\partial \rho(Z)}{\partial \lambda_i}$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *besitzt. Außerdem sei* $Z_{1+2}(\lambda_{1+2}, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) = \lambda_{1+2} X_{1+2} + \sum_{i=3}^n \lambda_i X_i$*, wobei* $X_{1+2} = X_1 + X_2$ *und die Größe der neuen Geschäftsbereiche dementsprechend* $e_{n-1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$ *ist.*

Dann gilt

$$K_1^{MR,\rho} + K_2^{MR,\rho} = K_{1+2}^{MR,\rho}, \tag{4.5}$$

wobei die Koeffizienten auf der linken Seite von (4.5) aus der Zuteilung auf $X_1, \ldots, X_n$ *stammen und sich der Koeffizient auf der rechten Seite aus der Zuteilung auf* $X_{1+2}, X_3, \ldots, X_n$ *ergibt.*

Beweis: Es gilt

$$\frac{\partial Z(e)}{\partial \lambda_{1+2}} = \frac{\partial Z(e)}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_{1+2}} + \frac{\partial Z(e)}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_{1+2}} = \frac{\partial Z(e)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial Z(e)}{\partial \lambda_2}$$

und somit die Behauptung. □

Zuteilung nach Shapley

Die Zuteilung nach Shapley berücksichtigt die Korrelation. Auch sie ist für die Standardabweichung, den VaR und den ES abhängig von der Zuteilungsebene.

Wie bereits angesprochen sind die Risikomaße bis auf die Standardabweichung und den ES nicht subadditiv, was zur Folge hat, dass die Zuteilungen nach Shapley nicht im Kern enthalten sind.

Zuteilung nach Aumann und Shapley

Die Zuteilung nach Aumann und Shapley ist nach Satz 3.68 für homogene Risikomaße und lineare Skalierung äquivalent der Zuteilung nach Myers und Read. Die Äquivalenz trifft auch für die Varianz und bei symmetrischen Verteilungen für die Semivarianz zu. Somit gilt hier das gleiche wie bei der Zuteilung nach Myers und Read.

Zusammenfassung

Kombiniert man die Aussagen aus diesem Abschnitt mit den Äquivalenzen aus dem vorangegangenem Abschnitt, erhält man Tabelle 4.6. In dieser ist aufgeführt, welche Kombinationen aus Risikomaß und Allokationsmethode welche Eigenschaften nicht erfüllen.

Da die Standardabweichung, der VaR und der ES homogene Risikomaße sind, ist für diese Risikomaße aufgrund von Satz 3.68 die Zuteilung nach Myers und Read äquivalent der Zuteilung nach Aumann und Shapley.

Tabelle 4.6: Untersuchung auf wichtige Eigenschaften

Risikomaß	**propor-tionale Zuteilung**	**Zuteilung nach** Merton & Perold	Myers & Read[4)]	Shapley	Aumann & Shapley[4)]
Varianz	1)2)	2)	3)	3)	3)
Standard-abweichung	1)2)	2)		2)	
Semivarianz	1)2)	2)	3)	3)	3)
VaR	1)2)	2)		2)3)	
Expected Shortfall	1)2)	2)		2)	

Es wurde das Vorhandensein von drei Eigenschaften untersucht: 1) keine Berücksichtigung der Diversifikation; 2)Abhängigkeit von der Zuteilungsebene; 3) keine Subadditivität des Risikomaßes bei der Zuteilung nach Shapley. Es wurden auch solche Zuteilungen ausgeschlossen, die bei gleichem Risikomaß äquivalent zu einer ausgeschlossenen Zuteilung sind.
4) $Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$

Somit bleiben drei Zuteilungen übrig, die alle drei Eigenschaften erfüllen. Die Zuteilung nach Aumann und Shapley ist nach Satz 4.5 äquivalent dem Kovarianzprinzip. Man muss aber beachten, dass man das Risiko mittels der Standardabweichung und nicht mittels der Varianz misst.

Kapitel 5

Berechnung der Zuteilungen für ein Beispielportfolio

In diesem Kapitel werden die Allokationsmethoden mit den verschiedenen Risikomaßen kombiniert, auf ein Modellportfolio angewendet und die bei der Berechnung auftretenden Probleme sowie die Ergebnisse diskutiert.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es für den praktischen Einsatz von Allokationsmethoden und Risikomaßen vergleichende Aussagen über deren Auswirkungen bereitzustellen. In diesem Zusammenhang werden die folgenden Themenkomplexe behandelt:

- Test der Verfahren auf Anwendbarkeit in der Praxis
  - Benötigter Rechenaufwand
  - Numerische Stabilität der Ergebnisse
- Größenordnung der Unterschiede zwischen den Zuteilungsverfahren bei einer realistischen Verteilungswahl
  - Unterschiede zwischen verschiedenen Kombinationen aus Allokationsverfahren und Risikomaßen
  - Unterschiede bei gleichem Allokationsverfahren aber unterschiedlichem Parameter α für VaR_α und ES_α
- Sensitivität des Größenparameters, der das Geschäftsvolumen darstellt

Zunächst wird das Modellportfolio definiert und das Verfahren sowie die Rahmensetzung der Berechnung dargelegt. Danach werden die Ergebnisse angegeben und anschließend diskutiert.

Dieses Kapitel ist hauptsächlich an den Praktiker gerichtet, der an Fragestellungen bei der konkreten Berechnung interessiert ist. Es stellt gewissermaßen einen Brückenschlag zwischen der vorangegangenen Theorie und der Praxis dar.

5.1 Definition des Beispielportfolios

Das Portfolio besteht aus sieben Schadenverteilungen, die im Folgenden definiert werden. Aus ihnen werden gemäß der Rahmensetzung in Kapitel 1.3 Ertragsfunktionen hergeleitet. Die hierfür verwendeten Verteilungstypen sind die Poissonverteilung (Definition 1.1), die Paretoverteilung (Definition 1.2), sowie die Lognormalverteilung (Definition 1.3). Die Poissonverteilung wird als Schadenzahlverteilung, die Paretoverteilung als Schadenhöhenverteilung in einem kollektiven Modell (Definition 1.4) verwendet. Die verschiedenen Verteilungstypen wurden aufgrund ihrer Bedeutung in der Praxis und ihren unterschiedlichen Eigenschaften ausgewählt. So zeigen die kollektiven Modelle im Vergleich zu den reinen Lognormalverteilungen größere Asymmetrie und haben einen schweren tail.

In diesem Modell werden die Paretoverteilungen F_i bei Werten b_i gestutzt. Dies impliziert, dass man die verbleibenden Funktionen mit $1 - F_i(b_i)$ normiert. Die Paretoverteilungen werden teilweise auch verschoben. Dies wird mittels eines Shiftparameters angegeben. Positive Werte bedeuten eine Verschiebung um den Wert nach rechts, negative nach links.

Die Lognormalverteilungen werden mit einem Skalierungsparameter multipliziert, um die Schadenhöhen an die Portfoliogröße anzupassen.

Die Definition der kollektiven Modelle erfolgt in Tabelle 5.1, die Definition der Lognormalverteilungen in Tabelle 5.2. Die Verteilungsfunktionen der verschiedenen Ertragsverteilungen sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Es wurde für alle Verteilungsfunktionen der gleiche Darstellungsbereich von -150 bis 100 gewählt.

Die Verteilungsfunktionen von Erdbeben, E (GS) und F (GS) haben Unstetigkeiten, die daher rühren, dass die Verteilungsfunktionen der Paretoverteilungen nur für Werte größer dem Parameter b von 0 verschieden sind. Somit können diese Schadenverteilungen keine Werte zwischen 0 und b liefern. Der Parameter γ der Paretoverteilungen X_i^P ist bis auf die F (GS)-Verteilung < 1 und somit würde ohne Stutzung $E[X_i^P] = \infty$ gelten und somit aufgrund von Satz A.1 auch $E[S_i] = \infty$ für die kollektiven Modelle S_i.

Die drei Basisschadenverteilungen sind paarweise mit einem Korrelationskoeffizienten von jeweils 0.14 korreliert. Die Skalierung der Schadenverteilungen ist aus Tabelle 5.3 ersichtlich.

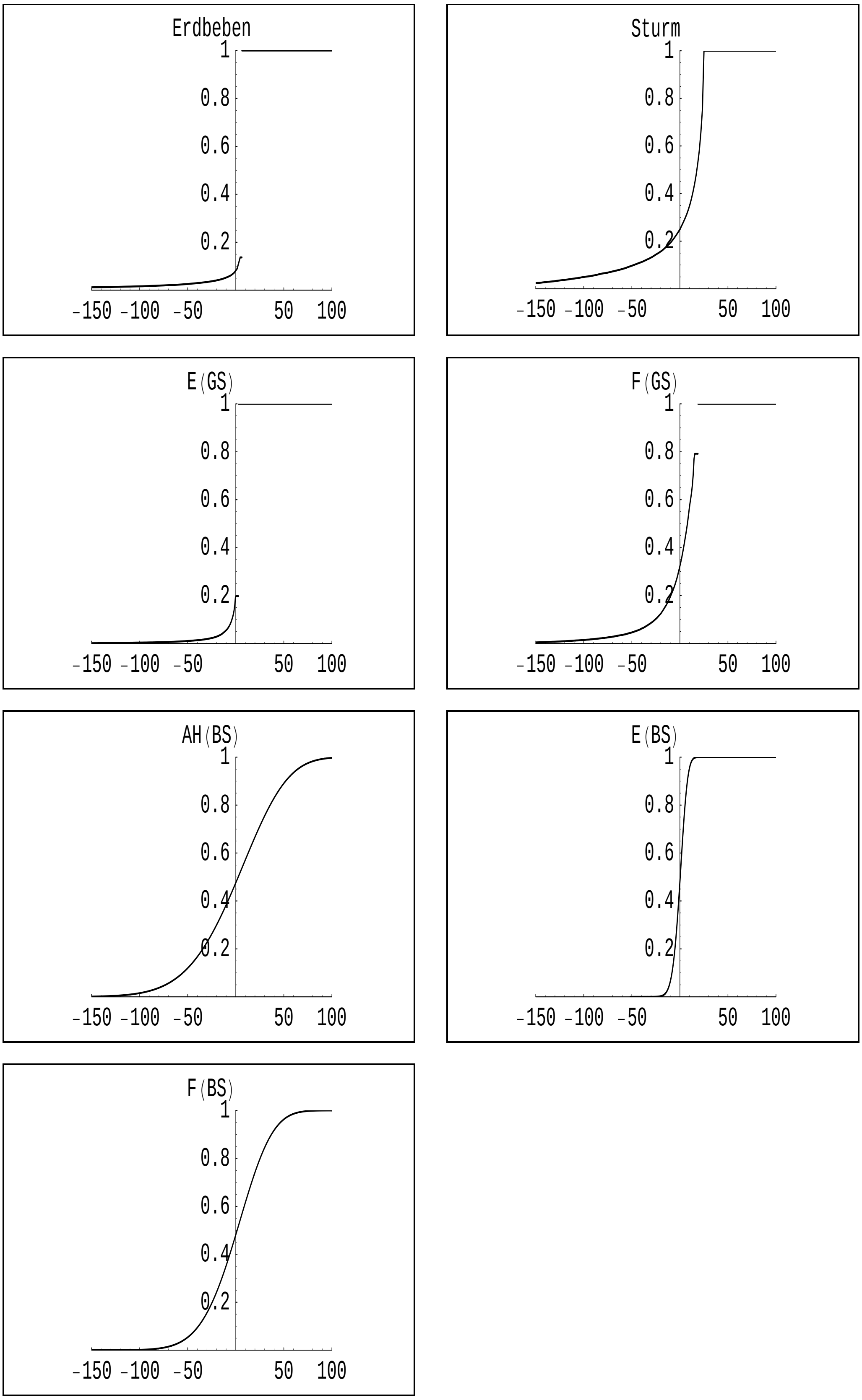
5.2 Simulationsdurchführung

5.2.1 Programm zur Berechnung: @Risk

Das zur Berechnung verwendete Programme ist @Risk$^{\mathrm{TM}}$ in Verbindung mit Microsoft Excel$^{\mathrm{TM}}$.

@Risk ist eine Simulationssoftware, die für auf Excel basierende Modelle Zufallszahlen erzeugt und auch Routinen zur Auswertung der Ergebnisse zur Verfügung stellt. Die Erzeugung der Zufallszahlen für die verschiedenen Verteilungen erfolgt mittels Pseudozufallszahlengenerator und der Latin Hypercube Methode. [40]

Abbildung 5.1: Verteilungsfunktionen der Ertragsverteilungen[1)]



1)Daten aus einem Simulationslauf

Tabelle 5.1: Definition der kollektiven Modelle

Name	**Abkürzung**	**Schadenzahl**	τ	**Schadenhöhe**	γ	**b**	**Stutzungspunkt**	**Shift**
Naturgefahr Sturm	S	Poisson	2.43[1)]	Pareto	0.65	1	250	−1
Naturgefahr Erdbeben	EB	Poisson	0.15	Pareto	0.42	1.98[1)]	633.88[1)]	0
Engineering (Großschäden)	E(GS)	Poisson	0.22	Pareto	0.98	3	200	0
Feuer (Großschäden)	F(GS)	Poisson	1.57	Pareto	1.3	4	200	0

1) Werte auf 2 Dezimalstellen gerundet

Tabelle 5.2: Definition der Lognormalverteilungen

Name	**Abkürzung**	**Erwartungswert**[1)]	**Standardabweichung**[2)]	**Skalierungsparameter**
Allgemeine Haftpflicht (Basisschäden)	AH(BS)	0.98	0.12	350
Engineering (Basisschäden)	E(BS)	0.98	0.105	60
Feuer (Basisschäden)	F(BS)	0.90	0.085	350

1) Erwartungswert=$\exp(\mu + \sigma^2/2)$

2) Standardabweichung=$\exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$

Der Grund für die Verwendung einer Simulationssoftware ist die Korrelation zwischen den Basisschadenverteilungen, die mit der vorhandenen numerischen Software nicht nachgebildet werden konnte.

5.2.2 Ergebnisgewinnung

Zur Berechnung der Zuteilungskoeffizienten wurden 50 Simulationen mit jeweils 30.000 Iterationen durchgeführt und anschließend der Mittelwert gebildet.

Dies bedeutet, dass pro Simulation und Verteilung 30000 Zufallszahlen zur Verfügung standen. Damit wurden mittels der üblichen Schätzer Werte für die verschiedenen Risikomaße berechnet und für die Allokationen verwendet.

5.2.3 Probleme bei der Berechnung

Die Zuteilung nach Myers und Read (Definition 3.3) sowie die Zuteilung nach Aumann und Shapley (Definition 3.69) konnten nicht berechnet werden. Die zur Berechnung der Ableitung benötigten Differenzen $\rho(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) - \rho((\lambda_1 + \Delta)X_1 + \cdots + \lambda_n X_n)$ sind für kleine Δ auch bei 30000 Iterationen nicht stabil genug.

Tabelle 5.3: Skalierung der Verteilungen nach dem Geschäftsvolumen

Verteilung	Größe der Verteilung (λ_i)	τ	b	Stutzungspunkt	Skalierungsp.
S	250	$0.1(\lambda_1/h_1)^{1)}$		λ_1	
EB	550		$0.025 \cdot h_2^{2)}$	$8.01 \cdot h_2^{2)}$	
AH (BS)	350				λ_3
E (B)	60				λ_4
E (GS)	0.22	λ_5			
F (BS)	350				λ_6
F (GS)	1.57	λ_7			

1) $h_1 = (\alpha/(1-\alpha)(a^\alpha \lambda_1^{1-\alpha} - a)/(1-(a/\lambda_1)^\alpha) - \text{shift})$

2) $h_2 = \lambda_2/6.95$

Die Anzahl der Iterationen nennenswert zu erhöhen war aufgrund von Speicherplatzbeschränkungen nicht möglich.

Wegen des beschränkten Speicherplatzes war es auch nicht möglich, die Zuteilung nach Shapley für die Semivarianz und den ES zu berechnen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die anderen Risikomaße mittels in @Risk implementierter Routinen berechnet werden konnten, die Berechnung der Semivarianz und des ES aber in Microsoft Excel durchgeführt werden musste.

5.3 Ergebnisse der Berechnung

5.3.1 Zuteilungskoeffizienten

Die Zuteilungskoeffizienten für die verschiedenen Kombinationen aus Allokationsverfahren und Risikomaßen sind in den Tabellen 5.4 bis 5.6 angegeben.

5.3.2 Mittlerer quadratischer Fehler

In den Tabellen 5.7 bis 5.9 sind die mittleren quadratischen Fehler (MSE=Mean Square Error) der verschiedenen Zuteilungen angegeben.

5.3.3 Sensitivität des Größenparameters

Aufgrund des beschränkten Zeitrahmens konnte zu diesem Themenkomplex keine vollständige Analyse durchgeführt werden. Es wurden deshalb nur je drei Simulationen für jedes Szenario, d.h. für jede Veränderung des Größenparameters berechnet.

Insgesamt wurden sieben Szenarien berechnet. Für jede Verteilung wurde der Größenparameter, der das Geschäftsbereichsvolumen (zum Beispiel Versicherungsprämien bzw. Haftungsvolumen für Sturm und Erdbeben) angibt, um 10% vergrößert, während die Größenparameter der anderen Verteilungen den ursprünglichen Wert beibehielten. Das Ergebnis soll einen Eindruck vermitteln wie sensi-

Tabelle 5.4: Zuteilungskoeffizienten für die proportionale Zuteilung (Definition 3.1)

Ver-teilungen	**Zuteilungskoeffizienten[1] in % für**								
	var	σ	**svar**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES_{0.01}}$	$\mathbf{ES_{0.05}}$	$\mathbf{ES_{0.1}}$
S	28.6	22.5	32.0	26.8	32.3	26.5	22.4	28.0	28.5
EB	21.9	19.6	28.0	23.7	3.9	-1.2	32.1	19.5	14.2
AH (BS)	24.9	21.0	18.0	14.6	24.2	31.3	12.1	16.7	19.8
E (BS)	0.6	3.2	0.4	2.2	3.6	4.7	1.8	2.5	2.9
E (GS)	2.0	5.9	2.4	6.8	3.6	2.2	8.9	6.4	5.4
F (BS)	12.5	14.9	8.8	10.1	16.9	22.1	8.3	11.6	13.8
F (GS)	9.6	13.0	10.3	15.7	15.5	14.5	14.4	15.4	15.3

1) Zuteilungskoeffizienten auf eine Dezimalstelle gerundet

Tabelle 5.5: Zuteilungskoeffizienten für die Zuteilung nach Merton und Perold (Definition 3.2)

Ver-teilungen	**Zuteilungskoeffizienten[1] in % für**								
	var	σ	**svar**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES_{0.01}}$	$\mathbf{ES_{0.05}}$	$\mathbf{ES_{0.1}}$
S	25.2	25.5	28.9	38.2	40.7	29.2	19.3	36.5	35.9
EB	19.3	19.1	26.7	33.4	13.6	7.0	64.1	32.8	24.1
AH (BS)	27.3	27.8	20.6	13.2	19.2	31.1	7.4	13.4	17.9
E (BS)	2.1	2.0	1.6	1.0	1.6	2.2	0.5	1.0	1.4
E (GS)	1.7	1.6	1.8	1.3	2.3	2.3	0.7	1.5	1.9
F (BS)	16.0	15.8	12.0	7.1	11.5	17.1	4.3	7.7	10.2
F (GS)	8.5	8.2	8.4	6.0	11.0	11.1	3.7	7.1	8.8

1) Zuteilungskoeffizienten auf eine Dezimalstelle gerundet

Tabelle 5.6: Zuteilungskoeffizienten für die Zuteilung nach Shapley (Definition 3.49)

Ver-teilungen	**Zuteilungskoeffizienten[1] in % für**								
	var[3]	σ	**svar**[2]	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.01}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.05}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.1}}$
S	26.8	25.0	-	33.5	37.3	28.3	-	-	-
EB	20.5	20.2	-	28.1	8.3	3.2	-	-	-
AH (BS)	26.2	24.3	-	13.2	22.7	31.8	-	-	-
E (BS)	1.4	1.9	-	1.2	1.8	2.5	-	-	-
E (GS)	1.8	3.3	-	4.0	2.9	2.3	-	-	-
F (BS)	14.4	14.7	-	7.9	13.6	18.9	-	-	-
F (GS)	9.0	10.6	-	12.2	13.4	12.9	-	-	-

1) Zuteilungskoeffizienten auf eine Dezimalstelle gerundet

2) Konnte aufgrund von Speicherplatzbeschränkungen nicht berechnet werden

3) Aufteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß ist äquivalent dem Kovarianzprinzip, Satz 4.5

Tabelle 5.7: Mittlerer quadratischer Fehler für die proportionale Zuteilung

Ver-	**Mittlerer quadratischer Fehler[1] für**								
teilungen	**var**	$\boldsymbol{\sigma}$	**svar**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES_{0.01}}$	$\mathbf{ES_{0.05}}$	$\mathbf{ES_{0.1}}$
S	2.1	0.3	3.7	1.5	0.8	0.9	1.0	0.6	0.4
EB	7.7	1.6	11.0	5.8	0.4	0.1	5.2	2.4	1.3
AH (BS)	0.7	0.1	0.6	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1
E (BS)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
E (GS)	0.1	0.2	0.2	0.7	0.1	0.0	0.7	0.2	0.1
F (BS)	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0
F (GS)	0.4	0.2	0.6	0.8	0.5	0.3	0.5	0.2	0.2

1) Mittlerer quadratischer Fehler in Einheiten von 10^{-5} auf eine Dezimalstelle gerundet

Tabelle 5.8: Mittlerer quadratischer Fehler für die Zuteilung nach Merton und Perold

Ver-	**Mittlerer quadratischer Fehler[1] für**								
teilungen	**var**	$\boldsymbol{\sigma}$	**svar**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES_{0.01}}$	$\mathbf{ES_{0.05}}$	$\mathbf{ES_{0.1}}$
S	1.5	1.8	5.9	44.2	20.4	8.3	56.8	15.9	7.7
EB	6.3	7.0	15.7	60.3	6.3	4.5	145.0	30.2	12.7
AH (BS)	0.6	0.7	3.5	34.8	10.5	8.6	14.3	3.4	2.8
E (BS)	0.0	0.0	0.1	9.4	2.9	2.4	0.9	0.2	0.1
E (GS)	0.1	0.1	0.6	7.7	2.9	2.2	2.2	0.9	0.7
F (BS)	0.2	0.2	1.5	25.8	10.8	7.5	8.7	3.0	2.2
F (GS)	0.3	0.3	1.6	33.0	10.9	3.6	17.1	4.3	3.0

1) Mittlerer quadratischer Fehler in Einheiten von 10^{-5} auf eine Dezimalstelle gerundet

Tabelle 5.9: Mittlerer quadratischer Fehler für die Zuteilung nach Shapley

Ver-	**Mittlerer quadratischer Fehler[1] für**								
teilungen	**var[3]**	$\boldsymbol{\sigma}$	**svar[2]**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.01}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.05}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.1}}$
S	1.8	1.0	-	6.6	2.0	1.2	-	-	-
EB	6.9	4.3	-	14.0	0.7	0.3	-	-	-
AH (BS)	0.6	0.4	-	1.6	0.5	0.6	-	-	-
E (BS)	0.0	0.0	-	0.1	0.0	0.1	-	-	-
E (GS)	0.1	0.1	-	0.6	0.1	0.1	-	-	-
F (BS)	0.2	0.1	-	1.1	0.5	0.6	-	-	-
F (GS)	0.3	0.3	-	2.0	1.1	0.6	-	-	-

1) Mittlerer quadratischer Fehler in Einheiten von 10^{-5} auf eine Dezimalstelle gerundet

2) Konnte aufgrund von Speicherplatzbeschränkungen nicht berechnet werden

3) Aufteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß ist äquivalent dem Kovarianzprinzip, Satz 4.5

tiv die Zuteilungen auf die Vergrößerung eines Geschäftsbereiches reagieren. Unter Berücksichtigung der quadratischen Fehler lässt sich die Stabilität der Veränderungen abschätzen.

In den Tabellen 5.10 bis 5.12 sind die prozentualen Zuwächse der Zuteilungskoeffizienten für ein 10%ige Vergrößerung des Geschäftsbereiches angegeben. Die Zuwächse in einer Tabelle stammen nicht aus einer einzigen Zuteilung. Sei K_i der Zuteilungskoeffizient bei unveränderten Größenparametern und K_i' der Zuteilungskoeffizient des Szenarios bei dem der Größenparameter der i^{ten} Verteilung um 10% erhöht wurde aber die restlichen unverändert blieben. Dann entspricht der Eintrag in den Tabellen 5.10 bis 5.12 für diese Zuteilung $\frac{K_i'-K_i}{K_i}$. Dies bedeutet, dass für jede Verteilung nur die prozentualen Änderungen der Zuteilungskoeffizienten aus dem Szenario angegeben werden, in dem die Größe dieser Verteilung geändert wurde.

Tabelle 5.10: Abhängigkeit der Zuteilungskoeffizienten von der Volumenänderung für die proportionale Zuteilung

Ver-	**Änderung der Zuteilungskoeffizienten[1] in % für**								
teilungen	**var**	σ	**svar**	**VaR$_{0.01}$**	**VaR$_{0.05}$**	**VaR$_{0.1}$**	**ES$_{0.01}$**	**ES$_{0.05}$**	**ES$_{0.1}$**
S	13.7	7.5	13.3	6.3	5.8	6.7	7.6	6.7	6.7
EB	14.7	7.3	13.5	9.4	9.5	9.9	6.2	8.1	7.6
AH (BS)	15.1	7.9	16.7	9.7	7.6	6.1	9.5	8.5	8.7
E (BS)	20.7	9.5	20.7	9.5	9.7	9.4	10.6	10.1	9.9
E (GS)	7.8	3.6	7.3	9.7	9.2	12.6	5.3	6.6	7.1
F (BS)	18.1	8.4	19.0	8.9	8.8	7.3	9.0	8.5	8.3
F (GS)	7.9	3.9	6.8	3.1	4.9	6.1	1.4	3.2	3.9

1) Auf eine Dezimalstelle gerundet. Sei K_i der Zuteilungskoeffizient bei unveränderten Größenparametern und K_i' der Zuteilungskoeffizient des Szenarios, bei dem der Größenparameter der i^{ten} Zufallsvariablen um 10% erhöht wurde. Dann berechnet sich die Änderung zu $\frac{K_i'-K_i}{K_i}$.

5.4 Diskussion der Simulationsergebnisse

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Interpretation der verschiedenen Allokationen, der zweite Teil mit der Stabilität der Ergebnisse.

5.4.1 Interpretation der Allokationsergebnisse

Bandbreite der Ergebnisse

Der erste wichtige Punkt bei der Interpretation der Ergebnisse ist ihre Bandbreite, d.h. wie unterschiedlich sind die Zuteilungskoeffizienten einer Verteilung für die verschiedenen Kombinationen aus Risikomaßen und Allokationsmethoden. Wie man aus den Tabellen 5.4 bis 5.6 und veranschaulicht in Graphik 5.2 sieht, sind die Unterschiede in den Zuteilungskoeffizienten bei ein und der selben Zufallsvariable verhältnismässig groß.

Tabelle 5.11: Abhängigkeit der Zuteilungskoeffizienten von der Volumenänderung für die Zuteilung nach Merton und Perold

Ver-	**Änderung der Zuteilungskoeffizienten[1)] in % für**								
teilungen	**var**	σ	**svar**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES_{0.01}}$	$\mathbf{ES_{0.05}}$	$\mathbf{ES_{0.1}}$
S	14.3	15.5	16.7	17.0	12.7	23.8	27.0	17.7	16.3
EB	15.2	16.3	13.4	17.8	7.6	n.s.	13.1	14.8	11.9
AH (BS)	12.6	13.6	15.1	26.2	19.9	17.6	44.2	24.2	21.1
E (BS)	12.1	12.2	13.9	22.4	4.2	15.7	25.8	12.8	12.4
E (GS)	7.8	7.8	n.s.	n.s.	17.8	4.2	8.8	22.5	14.9
F (BS)	13.9	14.8	18.7	44.3	10.5	18.7	20.7	24.2	19.5
F (GS)	8.2	8.5	8.0	n.s.	8.5	10.2	7.0	10.7	11.0

1) Auf eine Dezimalstelle gerundet. Sei K_i der Zuteilungskoeffizient bei unveränderten Größenparametern und K_i' der Zuteilungskoeffizient des Szenarios, bei dem der Größenparameter der i^{ten} Zufallsvariablen um 10% erhöht wurde. Dann berechnet sich die Änderung zu $\frac{K_i'-K_i}{K_i}$.

Aus Abbildung 5.2 ist ersichtlich, dass man aufgrund der Bandbreite der Ergebnisse die kollektiven Modelle und die Lognormalverteilungen nicht eindeutig unterscheiden kann. Auch sieht man, dass die Zuteilungskoeffizienten der einzelnen Zufallsvariablen sich nicht bei speziellen Werten konzentrieren, sondern ziemlich gleichmäßig verteilt sind.

Nun stellt sich die Frage, ob bei einer differenzierteren Betrachtung dieses Bild erhalten bleibt. Dazu sind in Abbildung 5.3 die unterschiedlichen Allokationsmethoden für die verschiedenen Zufallsvariablen gesondert aufgetragen. Doch auch hier erkennt man keine Werte, um die sich die Zuteilungskoeffizienten der einzelnen Allokationsmethoden häufen. Auch sind die Zuteilungskoeffizienten der einzelnen Allokationsmethoden über nahezu die gesamte Bandbreite der Zufallsvariablen verteilt.

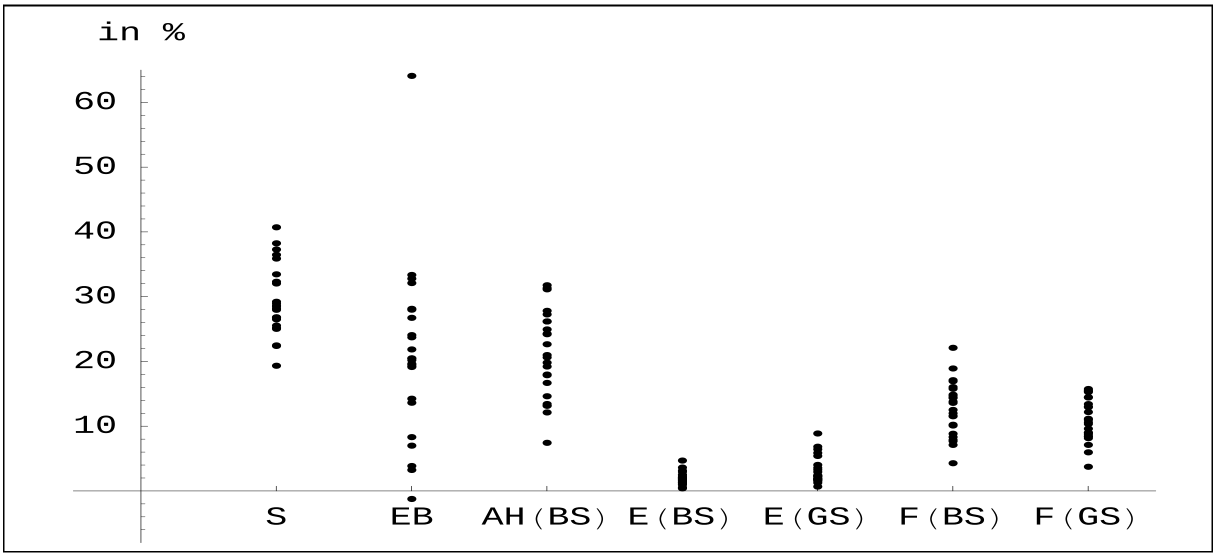
In Abbildung 5.4 sind die Zuteilungskoeffizienten für die Risikomaße gesondert aufgetragen. Bei dieser Darstellung ergibt sich nun ein etwas anderes Bild. Die Zuteilungskoeffizienten einer Zufallsvariable sind für ein Risikomaß meist auf ein relativ kleines Intervall beschränkt.

Dies legt den Schluß nahe, dass zumindest bei diesem Portfolio die Zuteilungskoeffizienten stärker durch die Wahl des Risikomaßes als durch die Wahl der Allokationsmethode bestimmt werden.

Unterschiede bei gleicher Allokationsmethode aber unterschiedlichen Risikomaßen

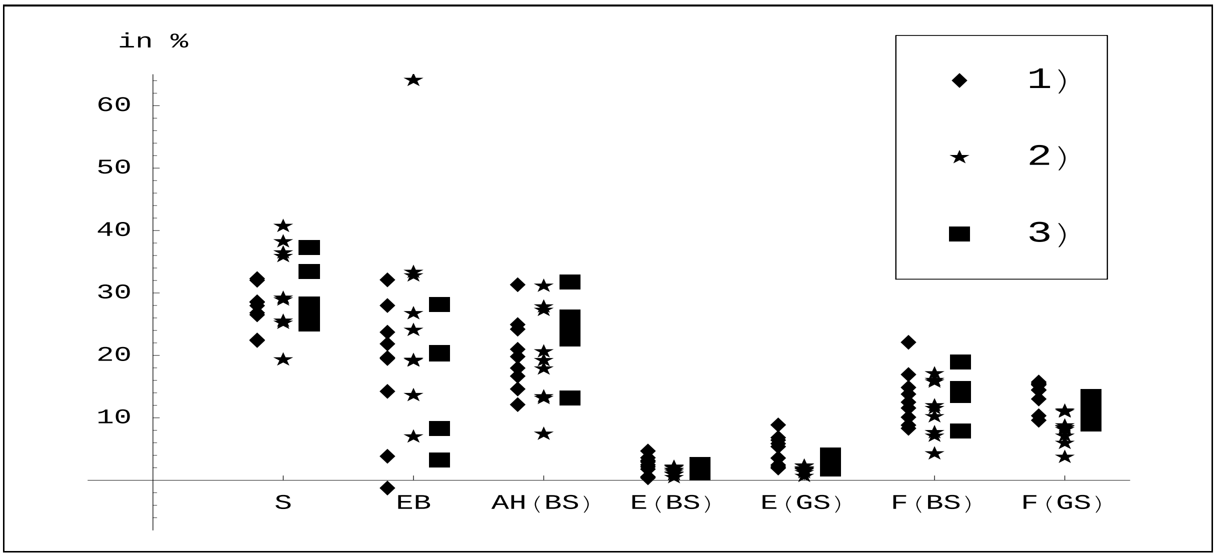
Kovarianzprinzip Aufgrund von Satz 4.2 können die proportionale Zuteilung mit Varianz und Standardabweichung als Extrempositionen des Kovarianzprinzips betrachtet werden. In diesem Portfolio besteht nur eine Korrelation von jeweils 0.14 zwischen den drei Basisschadenverteilungen. Die restlichen Verteilungen sind untereinander paarweise unkorreliert und es besteht auch keine Korrelation zwischen ihnen und den Basisschadenverteilungen. Dies legt die Schlußfolgerung nahe, dass

Abbildung 5.2: Bandbreite der Zuteilungskoeffizienten[1)] in %



1) Aufgetragen sind alle berechneten Zuteilungskoeffizienten für die sieben Verteilungen

Abbildung 5.3: Zuteilungskoeffizienten[4)] in % getrennt nach Allokationsverfahren



1) Proportionale Zuteilung 2) Zuteilung nach Merton und Perold 3) Zuteilung nach Shapley

4) Aufgetragen sind alle berechneten Zuteilungskoeffizienten

Tabelle 5.12: Abhängigkeit der Zuteilungskoeffizienten von der Volumenänderung für die Zuteilung nach Shapley

Ver-teilungen	**Änderung der Zuteilungskoeffizienten[1)] in % für**								
	var[3)]	$\boldsymbol{\sigma}$	**svar[2)]**	$\mathbf{VaR_{0.01}}$	$\mathbf{VaR_{0.05}}$	$\mathbf{VaR_{0.1}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.01}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.05}}$	$\mathbf{ES^{2)}_{0.1}}$
S	14.1	11.5	-	11.6	8.5	15.9	-	-	-
EB	15.0	11.8	-	14.1	1.8	0.7	-	-	-
AH (BS)	13.7	11.5	-	15.9	14.2	10.8	-	-	-
E (BS)	13.8	11.7	-	15.9	14.7	13.8	-	-	-
E (GS)	7.8	5.3	-	4.3	9.6	9.7	-	-	-
F (BS)	15.7	12.7	-	2.7	14.6	12.8	-	-	-
F (GS)	8.1	6.1	-	4.3	3.3	7.8	-	-	-

1) Auf eine Dezimalstelle gerundet. Sei K_i der Zuteilungskoeffizient bei unveränderten Größenparametern und K_i' der Zuteilungskoeffizient des Szenarios, bei dem der Größenparameter der i^{ten} Zufallsvariablen um 10% erhöht wurde. Dann berechnet sich die Änderung zu $\frac{K_i'-K_i}{K_i}$.

2) Konnte aufgrund von Speicherplatzbeschränkungen nicht berechnet werden

3) Aufteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß ist äquivalent dem Kovarianzprinzip, Satz 4.5

das Kovarianzprinzip und die proportionale Zuteilung mit der Varianz als Risikomaß sehr ähnliche Zuteilungen liefern, was auch der Fall ist.

Semivarianz In Kapitel 2.3 wurde angemerkt, dass bei einer symmetrisch verteilten Zufallsvariable X gilt $\text{var}[X] = 2\ \text{svar}[X]$. Ist die Zufallsvariable Y hingegen stark linksschief, dann kann näherungsweise $\text{var}[Y] = \text{svar}[Y]$ gelten. Die Verteilungen der kollektiven Modelle sind asymmetrischer als die Lognormalverteilungen der Basisschadenverteilungen, was aus Abbildung 5.1 deutlich zu erkennen ist. Somit gilt:

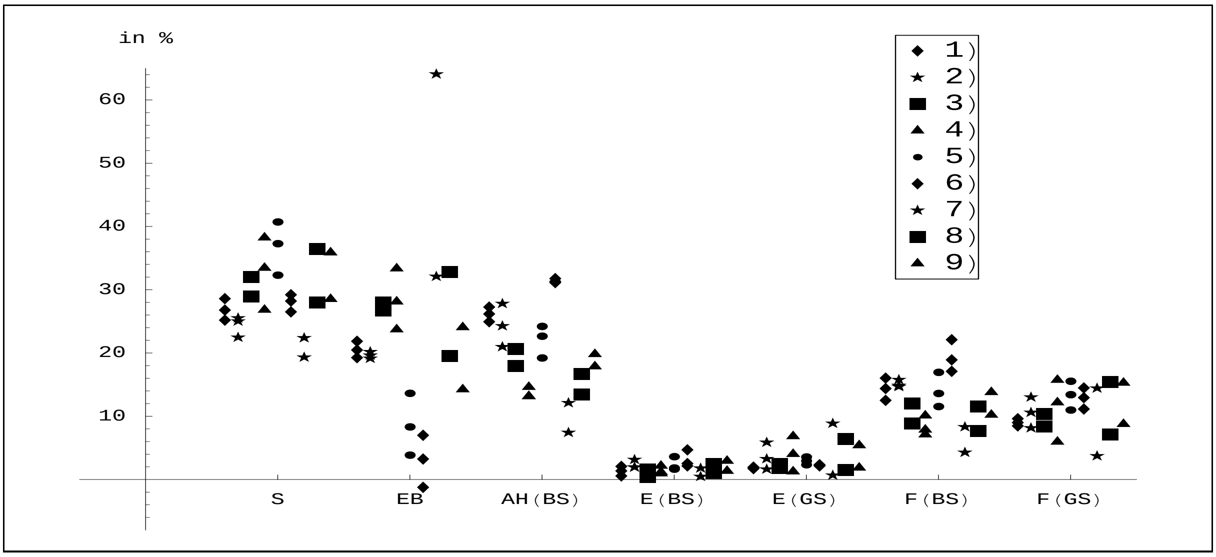
$$K^{p,\text{var}}_{\text{kollektives Modell}} < K^{p,\text{svar}}_{\text{kollektives Modell}}$$

Für die Basisschadenverteilungen gilt die inverse Ungleichung.

Große Unterschiede durch Änderung von Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ bei $\mathbf{VaR_\alpha}$ und $\mathbf{ES_\alpha}$ Eine andere äußerst wichtige Beobachtung ist, dass sich die Zuteilungen für VaR_α und ES_α sehr stark verändern, wenn sich α ändert. Dies bedeutet, dass VaR_α und ES_α bei verschiedenen α sehr unterschiedliche Risikomaße darstellen. Auch sieht man, dass der Unterschied zwischen VaR und ES auch bei einem praxisnahen Portfolio sehr groß sein kann. So ist zum Beispiel $K^{MP,\text{VaR}_{0.01}}_{\text{Erdbeben}} = 33.4$ und $K^{MP,\text{ES}_{0.01}}_{\text{Erdbeben}} = 64.1$. Letzterer Zuteilungskoeffizient ist der Ausreißer nach oben in Abbildung 5.2. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Erdbebenverteilung stärker durch ihr tail bestimmt wird als die anderen Verteilungen.

Untere Grenze für Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ bei $\mathbf{VaR_\alpha}$ Mit den in Kapitel 1.3 aufgestellten Rahmenbedingungen, kann der ES nicht negativ sein, da für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

Abbildung 5.4: Zuteilungskoeffizienten[6)] in % getrennt nach Risikomaßen



1) Varianz 2) Standardabweichung 3) Semivarianz 4) $\mathrm{VaR}_{0.01}$ 5) $\mathrm{VaR}_{0.05}$ 6) $\mathrm{VaR}_{0.1}$ 7) $\mathrm{ES}_{0.01}$ 8) $\mathrm{ES}_{0.05}$ 9) $\mathrm{ES}_{0.1}$ 10) Aufgetragen sind die berechneten Zuteilungskoeffizienten der in 1)-9) aufgeführten Risikomaße

$\mathrm{ES}_\alpha(X) \geq E[X] = 0$. Der VaR dagegen kann sehr wohl negative Werte annehmen wie man an der Verteilung für Erdbeben bei der proportionalen Zuteilung mit $\mathrm{VaR}_{0.1}$ sieht. Daraus lässt sich für α bei VaR_α eine obere Grenze angeben. Zufallsvariablen, die nicht $\mathbb{P}$-f.s. konstant sind, besitzen für unser Verständnis ein Risiko und sollten somit Risikokapital erhalten. Um dies zu gewährleisten, müssen die Werte des Risikomaßes positiv sein. Somit kommen für den Parameter α nur solche Werte in Frage, bei denen der VaR_α für alle nicht konstanten Zufallsvariablen größer 0 ist.

Unterschiede bei gleichem Risikomaß aber unterschiedlichen Allokationsverfahren

An diesem Beispielportfolio sieht man die Aussage von Satz 4.5 bestätigt. Das Kovarianzprinzip und die Zuteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß liefern äquivalente Zuteilungen.

Man findet bei diesem Beispielportfolio einen Sachverhalt, der auch in Beispiel 4.2 auftaucht:

$$K^{MP,\sigma}_{\text{Sturm Europa}} > K^{p,\sigma}_{\text{Sturm Europa}}$$

Der Verteilung von Sturm wird bei der Zuteilung nach Merton und Perold mit der Standardabweichung als Risikomaß mehr zugewiesen als bei der proportionalen Zuteilung, obwohl sie mit keiner der anderen Variablen korreliert ist. Für die Engineering Basisschadenverteilung dagegen gilt

$$K^{MP,\sigma}_{\text{E(BS)}} < K^{p,\sigma}_{\text{E(BS)}},$$

obwohl sie mit den anderen Basisschadenverteilungen korreliert ist.

Änderung des Größenparameters, der das Geschäftsvolumen angibt

Man kann zunächst zwei Beobachtungen machen. Einerseits können die Unterschiede zwischen den Veränderungen innerhalb einer Zuteilung beachtlich sein, andererseits gibt es Kombinationen aus Allokationsmethode und Risikomaß bei denen im Schnitt größere Veränderungen auftreten als bei anderen.

Gesetzmäßigkeiten sind nur bei den linear skalierten Zufallsvariablen festzustellen. So ist es trivial, dass diese sich bei der proportionalen Zuteilung mit der Varianz oder Semivarianz stärker ändern als mit der Standardabweichung.

5.4.2 Interpretation der Stabilität der Ergebnisse

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Stabilität für alle Risikomaße bei der proportionalen Zuteilung und der Zuteilung nach Shapley ausreichend ist. Dagegen sind die MSE bei der Zuteilung nach Merton und Perold mit VaR_α und ES_α für kleines α verhältnismäßig groß. So reichen die Ergebnisse der 50 Simulationen bei der Zuteilung nach Merton und Perold mit $\mathrm{ES}_{0.01}$ für die Erdbeben Verteilung von 55.7 % bis 73.0 %.

Größter MSE bei Zuteilung nach Merton und Perold für VaR und ES

Diese relativ großen MSE bei der Zuteilung nach Merton und Perold lassen sich auf drei Faktoren zurückführen:

1.) Die Schwankungen bei der Bewertung einer speziellen Koalition sind relativ klein, wachsen jedoch beim VaR in dieser Simulationsstudie mit der Koalitionsgröße schneller als zum Beispiel bei der Varianz.

2.) Die Differenzen, die gebildet werden, sind wesentlich kleiner als der Betrag des Risikomaßes einer Verteilung.

3.) Der ausgleichende Effekt der Mittelung über viele Differenzen wie bei der Zuteilung nach Shapley ist nicht vorhanden.

Dass der MSE von Risikodifferenzen bei Varianz und Standardabweichung mit der Koalitionsgröße langsamer wächst als bei VaR und ES sieht man, wenn man die MSE der drei Allokationsmethoden miteinander vergleicht. Bei der proportionalen Methode, Differenzen von 1er und 0er Koalitionen, sind die MSE von VaR und ES kleiner bei der Zuteilung nach Merton und Perold, Differenzen zwischen 7er und 6er Koalitionen, viel größer als bei Varianz und Standardabweichung. Bei der Zuteilung nach Shapley, dem gewichteten Mittelwert aller Differenzen, nähern sie sich wieder an.

Zunahme des mittleren quadratischen Fehlers bei VaR und ES für abnehmendes α

Die Zunahme des MSE bei abnehmendem α ist keine Überraschung: Je kleiner α wird, desto weniger Werte aus einer Simulation stehen zur Schätzung des Quantils oder des ES zur Verfügung.

Interessant dagegen ist die unterschiedliche Größe des MSE für unterschiedliche Verteilungen. Bei allen Kombinationen besitzt die Erdbeben Verteilung den größten, Sturm den zweitgrößten sowie die Engineeringverteilungen den kleinsten MSE. Im Mittelfeld ist die Rangfolge nicht eindeutig. Dies lässt sich aber mit einem Blick auf Abbildung 5.1 erklären. Für die Schadenverteilung X_{Erdbeben} gilt zum einen

$$\mathbb{P}[X_{\text{Erdbeben}} = 0] \approx 0.85,$$

zum anderen nimmt die Verteilungsfunktion im tail langsamer ab als bei den anderen Verteilungen. Zusammengefaßt bedeutet dies, dass nur relativ wenige Werte der Schadenverteilung von 0 verschieden sind und diese auch noch stärker schwanken als bei den anderen Verteilungen.

Der Grund hierfür liegt in den Parametern der Paretoverteilung. Wie man in Beispiel 2.1 sieht, existiert der Erwartungswert einer nicht gestutzten Paretoverteilung mit $\gamma < 1$ nicht. Das γ von Erdbeben ist das kleinste Pareto γ aller Paretoverteilungen dieses Modells, hat also das stärkste tail. Auch ist der Stutzungspunkt der Paretoverteilung von Erdbeben bei ungefähr 633, wohingegen der Stutzungspunkt der Paretoverteilung der Engineering Großschäden bei 200. Dies zeigt, dass die Schadengröße bei Erdbeben stärker streut als bei den anderen Verteilungen.

Größerer MSE bei Semivarianz als bei Varianz

Der MSE der Semivarianz ist meist weitaus größer als bei der Varianz und teilweise sogar größer als bei VaR und ES. Dies hat drei Gründe:

1.) Zur Berechnung werden weniger Werte als bei Varianz und Standardabweichung verwendet.

2.) Bei den kollektiven Modellen fallen die stabilisierenden Werte weg, d.h. die Werte, bei denen die Schadenverteilung 0 ist.

3.) Die Werte werden quadriert, was die Schwankungen verstärkt.

5.5 Auswirkungen auf die Wahl von Risikomaß und Allokationsverfahren

Maßgebende Kriterien für die praktische Umsetzung wurden in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits genannt. Nun werden die Aussagen noch einmal zusammengefasst.

Berechenbarkeit

Die Berechnung der proportionalen Zuteilung sowie der Zuteilung nach Merton und Perold stellt für die verwendeten Risikomaße kein Problem dar.

Bei der Zuteilung nach Shapley muss das Risiko für alle Koalitionen bestimmt werden. Bei n Verteilungen sind dies $2^n - 1$ Koalitionen. Damit stößt man sehr schnell an die Grenzen des Berechenbaren.

Das Problem bei der Zuteilung nach Myers und Read sowie Aumann und Shapley ist, dass beim Fehlen analytischer Ausdrücke für die Ableitung nach der Größe diese numerisch durch die Bildung von Differenzen wie bei der Zuteilung nach Merton und Perold bestimmt werden müssen. Aufgrund des MSE bei der Zuteilung nach Merton und Perold kann man erahnen, dass der MSE noch größer ist, wenn man nicht ganze Verteilungen sondern nur Teile davon weglässt. Diesem Problem kann aber durch die Bestimmung von geschlossenen Ausdrücken für die Ableitung begegnet werden.

Numerische Stabilität

Die Stabilität der Ergebnisse ist von entscheidender Bedeutung für die praktische Umsetzung.

Dafür gibt es zwei Hauptgründe:

- Ist die Stabilität der Ergebnisse zu gering, lässt dies die Zuteilung als zufällig erscheinen.
- Im operativen Geschäft ist es kaum möglich für eine Zuteilung je 50 Simulationen zu berechnen, um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten.

Eine Allokation mit wünschenswerten theoretischen Eigenschaften muss eine genügende Stabilität aufweisen, um zur Anwendung zu kommen.

Allgemein kann man sagen, dass bei der proportionalen Zuteilung, dem Kovarianzprinzip und der Zuteilung nach Shapley eine hinreichende Stabilität gegeben ist, solange man $\alpha \geq 0.01$ für VaR_α und ES_α wählt.

Die Zuteilung nach Merton und Perold dagegen weist für VaR_α und ES_α bei $\alpha = 0.05$ und $\alpha = 0.01$ keine ausreichende Stabilität mehr auf. Auch wird der MSE bei dieser Zuteilung wohl stark zunehmen, wenn die Zahl der Verteilungen von sieben auf eine realistische Zahl, die zwischen 200 und 300 liegen kann, zunimmt. Dann sind die Differenzen im Vergleich zu den absoluten Werten noch kleiner als bei diesem Modellportfolio.

Unabhängigkeit von Parametern

Unabhängigkeit von Parametern wie zum Beispiel α bei VaR_α und ES_α ist insofern bedeutsam, als die Zuteilungskoeffizienten für unterschiedliches α stark schwanken. Die Auswahl des Parameters α und damit die gesamte Zuteilung wird dadurch willkürlich.

Stabilität gegenüber Veränderungen im Größenparameter

Die Sensitivität des Größenparameters ist ein entscheidender Faktor, was die praktische Anwendbarkeit einer Zuteilung betrifft. Erzeugt eine geringfügigen Änderung des Größenparameters eine allzugroße Änderung in der Zuteilung, dann werden Fehler bei dessen Bestimmung verstärkt.

Wie bereits in Abschnitt 5.4.1 dargelegt ist die Zunahme bei der Varianz stärker als bei der Standardabweichung. Allgemein kann man sagen, dass die Zunahme bei den Ergebnissen mit vertretbarem MSE in den allermeisten Fällen zwischen 8% und 16% liegen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Dieses Kapitel verfolgt zwei Zielsetzungen:

1.) Zusammenfassung der relevanten theoretischen und praktischen Ergebnisse sowie Beurteilung der Allokationsmethoden

2.) Darlegung weiterer Forschungsmöglichkeiten in diesem Themenbereich und Vorschläge zur Verbesserung der Umsetzung

6.1 Zusammenfassung der relevanten, theoretischen und praktischen Ergebnisse, sowie Beurteilung der Allokationsmethoden

Die Zusammenfassung ist nach den Allokationsmethoden gegliedert.

Proportionale Zuteilung

Wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, bietet die proportionale Methode aus praktischen Gesichtspunkten zwei grundlegende Vorteile:

- Sie ist leicht zu berechnen (Speicherplatz,Rechenaufwand)
- Der MSE ist klein für alle Risikomaße

Dennoch ist sie nicht zu empfehlen, da sie zugleich gravierende theoretische Nachteile besitzt:

- Sie berücksichtigt nicht die Korrelation
- Sie ist abhängig von der Zuteilungsebene

Zuteilung nach Merton und Perold

Die Vorteile aus praktischer Sicht sind bei der Zuteilung nach Merton und Perold ähnlich denen der proportionalen Zuteilung:

- Sie ist leicht zu berechnen (Speicherplatz,Rechenaufwand)
- Der MSE ist klein für Varianz, Standardabweichung und Semivarianz aber relativ groß für VaR und ES

In Kapitel 5.5 wurde die Vermutung geäußert, dass der MSE bei einer größeren Anzahl von Zufallsvariablen zunimmt. Da in der Praxis die Anzahl der Zufallsvariable sich auf 200 bis 300 belaufen kann, stellt dies unter Umständen ein Hindernis dar.

Aus theoretischer Sicht gibt es gegen die Zuteilung nach Merton und Perold hauptsächlich zwei Einwände:

- Sie berücksichtigt die Korrelation nicht, wie es wünschenswert wäre (Beispiel 4.2)
- Sie ist abhängig von der Zuteilungsebene

Zuteilung nach Myers und Read, Zuteilung nach Shapley und Zuteilung nach Aumann und Shapley

Alle drei Allokationsverfahren lassen sich für realistische Portfolios nicht durch Simulationen berechnen.

Bei der Zuteilung nach Shapley müssen, außer bei Ausnahmefällen wie der Varianz, die Risikomaße für alle Koalitionen berechnet werden, was sich zur Zeit für maximal 9 oder 10 Zufallsvariablen realisieren lässt. Diese Zahl wird durch schnellere Computer auch nicht wesentlich steigen, da die Anzahl der Koalitionen bei n Spielern $2^n - 1$ beträgt und somit exponentiell wächst.

Bei den Zuteilungen nach Myers und Read sowie nach Aumann und Shapley haben die numerisch berechneten Ableitungen keine genügende Stabilität.

Kovarianzprinzip

Für das Kovarianzprinzip treffen aus praktischer Sicht exakt die gleichen Vorteile wie bei der proportionalen Zuteilung zu.

In Satz 4.5 wurde gezeigt, dass das Kovarianzprinzip unter anderem zu folgenden Zuteilungen äquivalent ist:

- Zuteilung nach Shapley mit der Varianz als Risikomaß
- Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Standardabweichung als Risikomaß, falls die Zufallsvariablen linear skaliert werden

Bei der Zuteilung nach Shapley treten keine Skalierungen auf. Somit ist die erste Äquivalenz für alle Skalierungen gültig. Da die Varianz im Versicherungsgeschäft aber ein superadditives Risikomaß ist, treten die in Beispiel 4.4 angesprochenen

Probleme auf: Die Zuteilung erfüllt zwar die Shapley-Axiome, passt aber wegen der fehlenden Subadditivität nicht zu der gewählten Modellierung.

Die Zuteilung nach Aumann und Shapley mit der Standardabweichung als Risikomaß erfüllt alle in Kapitel 4.3 geforderten wünschenswerten Eigenschaften. Die zweite Äquivalenz ist aber nur bei linearer Skalierung der Zufallsvariablen gültig.

6.2 Ausblick

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ist ersichtlich, dass sich ein Versicherungsunternehmen momentan zwischen den drei folgenden Allokationsmethoden entscheiden muss:

1.) Proportionale Zuteilung

2.) Zuteilung nach Merton und Perold

3.) Kovarianzprinzip

In Kombination mit der proportionalen Zuteilung können alle Risikomaße verwendet werden. Bei der Zuteilung nach Merton und Perold beschränkt sich die Auswahl der Risikomaße auf Varianz, Standardabweichung und Semivarianz, da bei VaR und ES die Stabilität der Ergebnisse gering ist.

Ein naheliegender Ansatzpunkt zur weiteren Forschung ist somit die Behebung der Schwierigkeiten bei der Berechnung der Zuteilung nach Myers und Read sowie der Zuteilung nach Aumann und Shapley. Hierzu gehört die Stabilität der Allokationsberechnungen, die sich durch die Verwendung von analytischen Ableitungen der Risikomaße nach den Größen der Geschäftsbereiche verbessern lässt. Falls analytische Ableitungen für alle Skalierungsarten bekannt sind, ist auch eine weitere theoretische Untersuchung der Zuteilungen möglich.

In Verbindung dazu ist es von Interesse die Auswirkung der nicht-linearen Skalierung der Verteilungen weiter zu untersuchen und gegenbenenfalls Abschätzung für die Unterschiede zwischen linearer und nicht-linearer Skalierung zu finden. Im Versicherungsbereich ist Linearität selten.

Bei der praktischen Portfoliooptimierung kann folgendes untersucht werden: Wenn man das Gesamtrisiko durch ein Risikomaß bestimmt, können die Allokationsmethoden bei der Veränderungen der Größe der Geschäftsbereiche untersucht werden. Gibt man dann noch ein Maß für die Rentabilität vor, wie zum Beispiel den RORAC beim Eulerprinzip, kann man auch die Optimierung eines Portfolios unter verschiedenen Risikomaßen und Verteilungsannahmen untersuchen.

Korrelationen beschreiben lineare Abhängigkeiten zwischen Teilportfolios, entsprechen aber nicht immer der Realität. Dies kann durch nicht-lineare Abhängigkeiten besser dargestellt werden. Dies geschieht mittels Kopulas.

Zuletzt ist eine Ausweitung der Suche über die Risikomaßen möglich, um eine größere Transparenz zu erreichen. Dies ermöglicht dem Versicherer für seine verschiedenen Bedürfnisse eine möglichst passende Wahl des Risikobegriffs und der Allokationen zu treffen. So kann man zum Beispiel weitere kohärente oder konvexe

Risikomaße untersuchen, die wie in Kapitel B.1 dargelegt, auf das Liquidierungsrisiko eingehen.

Zusammengefasst ergeben sich folgende Ansatzmöglichkeiten für eine weitere Untersuchung:

- Berechnung von analytischen Ableitungen der Risikomaße bei nicht-linearer Skalierung
- Weiterführende Untersuchung des Einflusses der nicht-linearen Skalierung
- Untersuchung von Spezialfällen, zum Beispiel der Festlegung des Risikokapitals durch ein Risikomaß oder Optimierung eines Portfolios
- Auswirkung von unterschiedlichen Kopulas
- Ausweitung der Suche über die Risikomaße (konvexe oder weitere kohärente Risikomaße)

Anhang A

Einige Standardresultate

Satz A.1 ([46], Gleichung von Wald) *Seien N und X Zufallsvariablen und S ein kollektives Modell mit Schadenzahl N und Schadenhöhe X.*

1.) Im Fall $N \in L^1$ und $X \in L^1$ gilt

$$E[S] = E[N]E[X].$$

2.) Im Fall $N \in L^2$ und $X \in L^2$ gilt

$$\mathrm{var}[S] = E[N]\mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[N]\big(E[X]\big)^2.$$

Beweis: siehe [46] $\square$

Satz A.2 ([22], Ableitung von Integralen) *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t),$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1.) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar auf I.

2.) Für jedes feste $t \in I$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.

3.) Es gibt eine integrierbare Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq F(x) \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times I.$$

Dann ist die durch

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\; dx$$

definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar und es gilt

$$\frac{dg}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\; dx.$$

Beweis: siehe [22] $\square$

Satz A.2 bleibt auch gültig, wenn man den Maßraum aus $\mathbb{R}^n$, Lebesgue-σ-algebra und Lebesguemaß durch einen beliebigen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ersetzt.

Anhang B

Weitere Risikomaße

Die in Kapitel 2 vorgestellten Risikomaße bieten keinen vollständigen Überblick. Um das Bild abzurunden werden noch einige weitere relevante Risikomaße vorgestellt .

B.1 Konvexe Risikomaße

Eine Erweiterung des Konzeptes der kohärenten Maße wurde von Föllmer und Schied [20], [21] vorgeschlagen.

Beim Axiom der Monotonie wurde kritisiert, dass das Liquiditätsrisiko nicht berücksichtigt wird. Dieser Einwand betrifft besonders große Versicherungskonzerne, da deren Portfolios eine Größe haben, bei der das Liquiditätsrisiko nicht mehr zu vernachlässigen ist. Föllmer und Schied gehen darauf ein, indem sie die Axiome der Monotonie und der Subadditivität durch das Folgende ersetzen.

Axiom B.1 (Konvexität) *Für alle Zufallsvariablen X und Y gilt*

$$\rho\big(\lambda X + (1-\lambda)Y\big) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad \textit{für alle } \lambda \in [0,1].$$

In analoger Weise zu kohärenten Risikomaßen kann man auch hier die Menge $\mathcal{A}$ der akzeptierbaren Risiken und $\rho_{\mathcal{A}}$ definieren. Damit kann das folgende Analogon zum Darstellungssatz 2.3 für kohärente Risikomaße bewiesen werden.

Satz B.1 ([21]) *Jedes konvexe Risikomaß ρ ist von der Form*

$$\rho(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_f} \big(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \beta_{\min}(\mathbb{Q})\big) \quad \textit{für } X \in L^\infty, \tag{B.1}$$

wobei die Straffunktion β durch

$$\beta_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} E_{\mathbb{Q}}[-X] \quad \textit{für } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_f$$

definiert ist. $\beta_{\min}$ ist die minimale Straffunktion, die ρ darstellt, d.h. für alle Straffunktionen, für die die Darstellung (B.1) gilt, folgt $\beta(\mathbb{Q}) \geq \beta_{\min}(\mathbb{Q})$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_f$.

Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass

$$\rho(X) \geq \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_f} \big(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \beta_{\min}(\mathbb{Q})\big) \quad \text{für } X \in L^\infty$$

Es gilt $X' = \rho(X) + X \in \mathcal{A}_\rho$ aufgrund der Translationsinvarianz. Daraus folgt für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_f$

$$\beta_{\min}(\mathbb{Q}) \geq E_{\mathbb{Q}}[-X'] = E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X).$$

Daraus folgt dieser Teil.

Nun wird für ein gegebenes $X \in L^\infty$ ein $\mathbb{Q}_X \in \mathcal{M}_f$ konstruiert, so dass

$$\rho(X) \leq E_{\mathbb{Q}_X}[-X] - \beta_{\min}(\mathbb{Q}_X), \tag{B.2}$$

was mit dem vorherigen Schritt die Darstellung (B.1) beweist. Durch die Translationsinvarianz genügt es (B.2) für $X \in L^\infty$ mit $\rho(X) = 0$ zu zeigen. Weiter kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\rho(0) = 0$. Daraus folgt, dass X nicht in der konvexen Menge

$$\mathcal{B} = \{Y \in L^\infty \big| \rho(Y) < 0\}$$

enthalten ist. Offensichtlicherweise enthält $\mathcal{B}$ die offene Kugel

$$\mathcal{B}_1(1) = \{Y \in L^\infty \big| \|Y - 1\| < 1\},$$

wobei $\|.\|$ die Supremumsnorm bezeichnet. Daraus folgt insbesondere, dass $\mathcal{B}$ nichtleer ist bezüglich der Supremumsnorm. Deshalb kann man den Separationssatz V.2.8 in [13] verwenden und erhält ein stetiges lineares Funktional Θ mit

$$\Theta \neq 0 \quad \text{und} \quad \Theta(X) \leq \inf_{Y\in\mathcal{B}} \Theta(Y) = b.$$

Jetzt wird gezeigt, dass $\Theta(Y) \geq 0$ falls $Y \geq 0$. Durch die Monotonie und die Translationsinvarianz von ρ gilt, dass $1 + \lambda Y \in \mathcal{B}$ für $\lambda > 0$ und somit

$$\Theta(X) \leq \Theta(1 + \lambda Y) = \Theta(1) + \lambda\Theta(Y) \quad \text{für } \lambda > 0,$$

was für $\Theta(Y) < 0$ nicht gültig sein könnte.

Als nächstes werden wir beweisen, dass $\Theta(1) > 0$. Da $\Theta \neq 0$, muss es ein$Y \in \mathcal{B}_1$ geben, so dass $0 < \Theta(Y) = \Theta(Y_+) + \Theta(Y_-)$. Aus der Positivität von Θ folgt, dass $\Theta(Y_+) > 0$ und dass $\Theta(1 - Y_+) \geq 0$. Somit gilt $\Theta(1) = \Theta(1 - Y_+) + \Theta(Y_+) > 0$.

Aufgrund der zwei vorherigen Schritte und Satz IV.5.1 aus [13] können wir schließen, dass ein $\mathbb{Q}_X \in \mathcal{M}_f$ existiert, so dass

$$E_{\mathbb{Q}_X}[Y] = \frac{\Theta(Y)}{\Theta(1)} \quad \text{für } Y \in L^\infty.$$

Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\rho$, gilt

$$\beta(\mathbb{Q}_X) = \sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho} E_{\mathbb{Q}_X}[-Y] \geq \sup_{Y\in\mathcal{B}} E_{\mathbb{Q}_X}[-Y] = -\frac{b}{\Theta(1)}.$$

Andererseits gilt $Y + \epsilon \in \mathcal{B}$, falls $Y \in \mathcal{A}_\rho$ und $\epsilon > 0$. Dies zeigt, dass $\beta_{\min}(\mathbb{Q}_X)$ tatsächlich gleich $b/\Theta(1)$ ist. Daraus folgt

$$E_{\mathbb{Q}_X}[-X] - \beta_{\min}(\mathbb{Q}_X) = \frac{1}{\Theta(1)}\big(b - \Theta(X)\big) \geq 0 = \rho(X).$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{Q}_X$ die geforderten Eigenschaften hat und damit den Beweis der Darstellung (B.1) vervollständigt.

Sei nun β eine Straffunktion für ρ, dann gilt für alle $\mathbb{Q}$

$$\rho(X) \geq E_{\mathbb{Q}}[-X] - \beta(\mathbb{Q})$$

und somit

$$\begin{aligned}\beta(\mathbb{Q}) &\geq \sup_{X \in L^\infty}\big(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X)\big)\\ &\geq \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho}\big(E_{\mathbb{Q}}[-X] - \rho(X)\big)\\ &\geq \beta_{\min}(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\beta_{\min}$ durch β dominiert wird. □

Nun wird mit einem Korollar auch Satz 2.21 bewiesen.

Korollar B.2 ([21]) *Die minimale Straffunktion $\beta_{\min}$ eines kohärenten Risikomaßes ρ nimmt nur die Werte 0 und $+\infty$ an.*

Beweis: Durch Proposition 2.19 wissen wir, dass die Menge der akzeptierbaren Risiken für ein kohärentes Risikomaß ein Kegel ist. Somit gilt für die minimale Straffunktion

$$\beta_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathbb{Q}}[-X] = \sup_{\lambda X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathbb{Q}}[-\lambda X] = \lambda \beta_{\min}(\mathbb{Q})$$

für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_f$ und $\lambda > 0$. Damit ist bewiesen, dass $\beta_{\min}$ nur die Werte 0 und $+\infty$ annehmen kann. □

B.2 Ruinwahrscheinlichkeit

Sehr gebräuchlich in der Versicherungsmathematik ist auch die Ruinwahrscheinlichkeit als Maß für das Risiko eines Portfolios. Für einen diskreten oder stetigen stochastischen Prozess X_t und $K, T \in \mathbb{R}^+$ definiert man sie durch $\mathbb{P}[X_t + K < 0 | t \leq T]$. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei risikobehafteten Erträgen X_t und Anfangskapital c ein Unternehmen im Zeitraum $[0, T]$ insolvent wird.

Die Ruinwahrscheinlichkeit ist eine Abbildung von L^0 nach $\mathbb{R}$ und man könnte sie deshalb auch als Risikomaß auffassen. Sie wird dennoch momentan in der Praxis nicht auf Ebene der Geschäftsbereiche verwendet, da Schwierigkeiten bei der Modellierung des dafür notwendigen stochastischen Prozesses sowohl auf der Einnahmen- wie auf der Ausgabenseite vorhanden sind. Der Übergang von diskreten stochastischen Prozessen mit Einjahresintervallen zu kontinuierlichen stochastischen Prozessen ist ein weiterer Entwicklungsschritt.

B.3 Optionsrisikomaße

Beim Optionsrisikomaß wird das Risiko über den Preis einer Defaultoption definiert, die bei Zahlungsunfähigkeit des Unternehmens einspringt.

Seien K das Risikokapital und V die Verbindlichkeiten abzüglich der Prämien, die von den anfallenden Schäden abhängen. In diesem Modell nimmt man an, dass die Verbindlichkeiten am Ende einer Periode mit Länge T, zum Beispiel eines Jahres, zu bezahlen sind. Falls $K > V$, erhalten die Versicherungsnehmer ihre Ansprüche. Falls aber $K < V$ gilt, erhalten die Versicherungsnehmer nur das Risikokapital, die restlichen Ansprüche bleiben unbezahlt und das Versicherungsunternehmen ist insolvent. Nun könnte man sich vorstellen, dass ein Unternehmen sich gegen solch eine Insolvenz absichern will, indem es eine Option erwirbt, die im Falle $K < V$ zum Einsatz kommt. Dies entspricht einer europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K, Aktienpreis V, Zinssatz einer risikofreien Anlage r, Optionszeitraum T und Volatilität σ. Man kann zum Beispiel die Optionspreistheorie von Black-Scholes anwenden, um den Preis dieser Option zu bestimmen.

Im Gegensatz zur Ruinwahrscheinlichkeit wird beim Optionsrisikomaß davon ausgegangen, dass die Insolvenz nur am Ende der Periode T eintreten kann.

Anhang C

Allokationsverfahren

C.1 Beweis des Satzes 3.57

Da der Beweis von Satz 3.57 in viele Teile aufgespalten ist, ist für ein besseres Verständnis der Zusammenhänge die Beweisstruktur in Abbildung C.1 graphisch dargestellt.

Zunächst ist es erforderlich einige zusätzliche Definitionen einzuführen, die im weiteren Verlauf des Beweises verwendet werden.

Definition C.1 *Sei (I, ℓ) ein Messraum und v ein Spiel. Unter einem* **Träger des Spiels v** *versteht man eine Koalition I', so dass $v(S) = v(I' \cap S)$ für alle $S \in \ell$. Das Komplement von I' heißt* **Null** *und alle Untermengen davon* **Null-Koalitionen**.

Definition C.2 *Eine Funktion $f \in bv$ ist* **normalisiert**, *falls $f(1) = 1$.*

Definition C.3 *Der Unterraum von BV, der aus allen beschränkten, endlich additiven reellwertigen Mengenfunktionen besteht, wird mit* **FA** *bezeichnet.*

Nun werden noch drei Normen definiert, die in diesem Abschnitt Anwendung finden.

Definition C.4 *1.) Die Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die* **Supremumsnorm** *und für $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$\|x\|_S = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

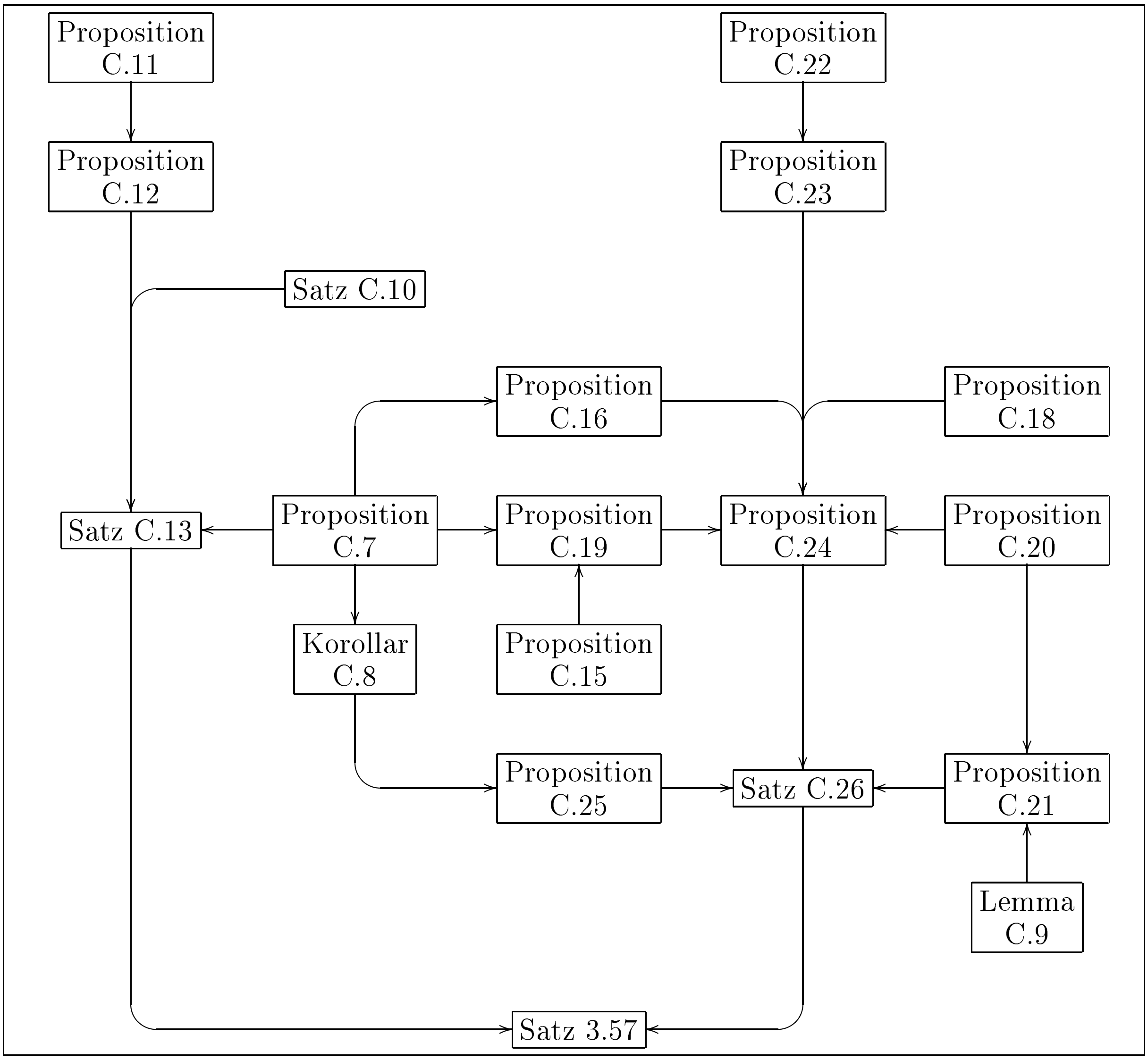
2.) Die Norm auf BV wird **Variationsnorm** *genannt und ist für $v \in BV$ gegeben durch*

$$\|v\|_V = \inf(u(I) + w(I)) \quad \text{für } u, w \text{ monoton und } v = u - w.$$

3.) Für Operatoren die einen Unterraum $U_1 \subseteq BV$ auf einen Unterraum $U_2 \subseteq BV$ abbilden, ist die Norm die **Operatorennorm**, *d.h. für $\varphi : U_1 \to U_2$ gilt*

$$\|\varphi\|_O = \sup_{v \in U_1 \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi v\|_V}{\|v\|_V}.$$

Abbildung C.1: Struktur[1)] des Beweises von Satz 3.57



1) Ein Pfeil von Satz A nach Satz B bedeutet, dass die Aussage von Satz A in Satz B verwendet wird.

Definition C.5 *Ein linearer Unterraum Q von BV heißt* **innerlich***, falls für alle $v \in Q$ gilt, dass $\|v\| = \inf(u(I) + w(I))$ mit $u, w \in Q^+$ und $v = u - w$.*

Wenn im Folgenden offensichtlich ist um welche Norm es sich handelt, wird die Bezeichnung weggelassen und lediglich $\|.\|$ verwendet. Die Variationsnorm kann noch auf eine andere Weise charakterisiert werden, wie folgende Proposition zeigt, für die aber noch eine weitere Definition benötigt wird.

Definition C.6 *Eine nicht-fallende Folge von Mengen*

$$\emptyset = S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_m = I$$

wird eine **Kette** *genannt.*

Sei v eine Mengenfunktion und Ω eine Kette, dann ist die **Variation $\|v\|_\Omega$ von v über Ω** *definiert durch*

$$\|v\|_\Omega = \sum_{i=1}^{m} |v(S_i) - v(S_{i-1})|.$$

Die folgende Proposition gibt an, in welchem Verhältnis zueinander die Variationsnorm und die Variation über eine Kette stehen.

Proposition C.7 ([7]) *Sei v eine Mengenfunktion. Dann gilt $v \in BV$ genau dann, wenn $\|v\|_\Omega$ über alle Ketten Ω beschränkt ist. Falls $v \in BV$, dann gilt*

$$\|v\| = \sup \|v\|_\Omega,$$

wobei das Supremum über alle Ketten Ω gebildet wird.

Beweis: Notwendigkeit: Sei $v = u - w$, mit u, w monoton. Dann gilt für jede Kette Ω

$$\|v\|_\Omega \leq \|u\|_\Omega + \|w\|_\Omega = u(I) + w(I).$$

Dies beweist die Notwendigkeit und auch, dass

$$\sup \|v\|_\Omega \leq \|v\|.$$

Ausreichend: Wir nehmen an, dass $\|v\|_\Omega$ beschränkt ist. Wir definieren u als die „obere Variation" von v, d.h.

$$u(S) = \sup \sum_{i=1}^{m} \max\{(v(S_i) - v(S_{i-1}), 0\},$$

wobei das Supremum über alle Folgen $\emptyset = S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_m = S$ gebildet wird. Sei $w = u - v$. Dann sind sowohl u als auch w monoton., denn falls $S \subseteq T$, gilt

$$u(T) \geq \max\{(v(T) - v(S)), 0\} + u(S).$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist $\geq u(S)$. Dies zeigt, dass u monoton ist. Aber die rechte Seite ist auch $v(T) - v(S) + u(S)$. Daraus erhält man

$$w(T) = u(T) - v(T) \geq u(S) - v(S) = w(S).$$

Dies zeigt, dass auch w monoton ist, womit diese Richtung bewiesen ist.

Seien für ein $v \in BV$, u und v wie im letzten Beweisteil. Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ sei Ω eine Kette $\emptyset = S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_m = I$, so dass

$$\sum_{i=1}^{m} \max\{(v(S_i) - v(S_{i-1}), 0\} \geq u(I) - \epsilon.$$

Sei Λ eine Unterkette bestehend aus allen Gliedern mit $v(S_i) \geq v(S_{i-1})$ und Γ eine Unterkette bestehend aus allen verbleibenden Gliedern. Dann gilt

$$\|v\|_\Lambda \geq u(I) - \epsilon.$$

Weiter gilt

$$\|v\|_\Lambda - \|v\|_\Gamma = \sum_{i=1}^{m}(v(S_1) - v(S_{i-1})) = v(I)$$

und damit

$$\|v\|_\Gamma = \|v\|_\Lambda - v(I) \geq u(I) - v(I) - \epsilon = w(I) - \epsilon.$$

Damit folgt aus der Definition von $\|v\|$

$$\|v\|_\Omega = \|v\|_\Lambda + \|v\|_\Gamma \geq u(I) + w(I) - 2\epsilon \geq \|v\| - 2\epsilon.$$

Da ϵ beliebig ist, folgt, dass $\|v\|_\Omega \geq \|v\|$. Da die entgegengesetzte Ungleichung bereits bewiesen wurde, ist der Beweis der Proposition vollendet. □

Daraus folgt sofort ein Korrolar.

Korollar C.8 ([7]) *Sei $v \in BV$ monoton. Dann gilt $\|v\| = v(I)$.*

Beweis: Für alle Folgen $\emptyset = S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_m = I$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} |v(S_i) - v(S_{i-1})| = v(I) - v(\emptyset) = v(I),$$

da aufgrund der Monotonie von v für $i = 1, 2, \ldots, m$ gilt $v(S_i) - v(S_{i-1}) \geq 0$. □

Nun folgt noch ein Lemma, das später benötigt wird.

Lemma C.9 ([7]) *Sei $(I, \ell) = ([0,1], \mathcal{B})$ und $v \in NA$. Aus $v(S) = 0$ mit $S \subseteq I$ folgt $(\Phi v)(S) = 0$.*

Beweis: Aufgrund der Symmetrie müssen alle Spieler den Wert 0 haben, da der Wert durch $v(I)$ beschränkt ist. Somit haben alle endlichen Null-Koalitonen den Wert 0.

Sei S eine Null-Koalition mit einer nicht-endlichen Kardinalität, dann gibt es disjunkte Unterkoalitionen S_1 und S_2 von S mit der gleichen Kardinalität wie S und einen Automorphismus, der S_1 auf S_2 abbildet. Aufgrund der Symmetrie müssen beide Unterkoalitionen den selben Wert haben. Wegen der Symmetrie müssen sie aber auch den selben Wert wie S haben und somit folgt, dass S den Wert 0 hat. □

Nun folgt der eigentliche Beweis von Satz 3.57. Er ist in zwei Teile gegliedert, die sich wiederum in mehrere Propositionen unterteilen. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Existenz und kommt in Satz C.13 zur Aussage, dass auf pNA ein Wert von der Form (3.8) existiert. Der zweite Teil behandelt die Eindeutigkeit und endet in Satz C.26 mit dem Beweis der Eindeutigkeit.

Später wird der Satz von Lyapunov benötigt, der hier angeben wird.

Satz C.10 ([7], Satz von Lyapunov) *Der Wertebereich eines nicht-diskrete Vektormaßes ist konvex und kompakt.*

Beweis: siehe [5] □

Proposition C.11 ([7]) *Sei Q ein linearer Unterraum von BV und sei φ ein linearer Operator von Q nach FA für den gilt*

$$(\varphi v)(I) = v(I) \tag{C.1}$$

$$\|\varphi\| \leq 1. \tag{C.2}$$

Dann ist φ positiv.

Beweis: Sei $v \in Q$ monoton. Jetzt kann man annehmen, dass es eine Koalition S gäbe mit $(\varphi v)(S) < 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn φv nicht monoton ist (φv ist nicht monoton $\Leftrightarrow (\exists T, U \in \ell; T \subseteq U \Rightarrow \varphi v(T) > \varphi v(U)) \Leftrightarrow \exists S; S = U \setminus T; \varphi v(S) < 0$, da $\varphi v \in FA$) also φ nicht positiv wäre. Dann folgt aus der Monotonie von v, Gleichung C.1 und Gleichung C.2

$$\begin{aligned} v(I) = \|v\| \geq \|\varphi\| \geq |(\varphi v)(S)| + |(\varphi v)(I) - (\varphi v)(S)| \\ > |v(I) - (\varphi v)(S)| = v(I) - (\varphi v)(S) > v(I). \end{aligned} \tag{C.3}$$

Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Proposition C.12 ([7]) *Sei Q ein abgeschlossener symmetrischer Unterraum von BV. Sei F eine Menge von normalisierten bv Funktionen, so dass Q durch die Menge aller Spiele $f \circ \mu$ mit $f \in F$ und $\mu \in NA^1$ aufgespannt wird. Sei φ eine lineare Abbildung von Q nach FA mit $\|\varphi\| \leq 1$, so dass $\varphi(f \circ \mu) = \mu$. Dann ist φ ein Wert auf Q.*

Beweis: Sei $v = f \circ \mu$ mit f und μ wie in der Voraussetzung der Proposition. Für jedes $\Theta \in \mathcal{G}$ gilt $\Theta_* \mu \in NA^1$. Daraus folgt

$$\varphi \Theta_* v = \varphi(f \circ \Theta_* \mu) = \Theta_* \mu = \Theta_* \varphi v.$$

Da sowohl $\|\varphi(v-w)\| \leq \|v-w\|$ als auch $\|\Theta_*(v-w)\| = \|v-w\|$ gilt, sind φ als auch Θ_* stetig. Daraus folgt dass $\varphi\Theta_* - \Theta_*\varphi$ ein stetiger linearer Operator auf Q ist, der auf einem Unterraum, der Q aufspannt, verschwindet. Deshalb verschwindet er auf ganz Q und man erhält $\varphi\Theta_* = \Theta_*\varphi$ für $v \in Q$, was (3.7) zeigt.

Durch eine ähnliche Argumentation erhälten man

$$(\varphi v)(I) = \mu(I) = (f \circ \mu)(I) = v(I)$$

und somit ist auch die Abbildung, die v auf $(\varphi v)(I) - v(I)$ abbildet, ein stetiger linearer Operator auf Q, der auf einem Unterraum, der Q aufspannt, verschwindet und deshalb auch auf ganz Q. Wir erhalten somit $(\varphi v)(I) = v(I)$ für $v \in Q$.

Schließlich folgt aus Proposition C.11, dass φ positiv ist. □

Satz C.13 ([7]) *Es gibt einen Wert auf pNA mit $\|\varphi\| = 1$. Sei außerdem $v \in pNA$ so, dass μ, f und U wie folgt existieren:*

μ ist ein Vektor von n nicht-diskrete Maßen mit Wertebereich R, f ist eine reelwertige Funktion, die auf R definiert und dort stetig differenzierbar ist. U ist eine kompakte konvexe Umgebung der Diagonalen $[0, \mu(I)]$ in R und

$$v(S) = f(\mu(S)) \quad \textit{falls } \mu(S) \in U. \tag{C.4}$$

Dann gilt

$$\varphi(v)(S) = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\, dt, \tag{C.5}$$

wobei $f_{\mu(S)}$ die Ableitung von f in die Richtung von $\mu(S)$ ist.

Beweis: Seien v, μ, f und U wie oben angegeben. Durch

$$\nu(S) = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\, dt \tag{C.6}$$

wird ein reellwertiges Maß definiert. Falls R die gleiche Dimension hat wie μ Komponenten, dann ist die abzählbare Additivität von ν durch folgendes Umschreiben von (C.6) leicht zu erkennen.

$$\int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\, dt = \sum_{i=1}^n \mu_i(S) \int_0^1 f_i(t\mu(I))\, dt \quad \text{mit } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Hat R nicht die volle Dimension, dann sei $z_1, \ldots, z_r$ eine Basis für den kleinsten linearen Unterraum der R enthält. Es gibt dann Maße $\tau_1, \ldots, \tau_r$ mit

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^r z_i \tau_i(S).$$

Somit kann man (C.6) wieder umschreiben und erhält

$$\int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\,dt = \sum_{i=1}^{r} \tau_i(S) \int_0^1 f_{z_i}(t\mu(I))\,dt,$$

wobei f_{z_i} die Ableitung in Richtung z_i ist. Daraus folgt, dass ν abzählbar additiv ist.

Ab jetzt wird angenommen, dass R die Dimension n hat. Wenn nicht sei m die wahre Dimension von R. Da $(0,\ldots,0) \in R$ gibt es eine lineare Transformation $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die auf R bijektiv ist. Sei $\Theta = \Psi|R$. Jetzt kann man ein Vektormaß ξ der Dimension m durch $\xi = \Theta_* \mu$ und eine Funktion g auf ΘR durch $g(x) = f(\Theta^{-1}x)$ definieren. Dann ist es offensichtlich, dass

$$\int_0^1 g_{\xi(S)}(t\xi(I))\,dt = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))dt.$$

Sei $I = S^+ \cup S^-$ eine Hahn Aufteilung von I bezüglich ν. Dies bedeutet ν ist nicht-negativ auf S^+ und seinen Untermengen, ν ist nicht-positiv auf S^- und seinen Untermengen und $S^+ \cap S^- = \emptyset$. Dann gilt aufgrund von Proposition C.7

$$\|\nu\| = |\nu(S^+)| + |\nu(S^-)|.$$

Sei m eine beliebige positive natürliche Zahl. Aufgrund des Satzes von Lyapunov (Satz C.10) ist es möglich S^+ in disjunkte Mengen $S_1^+,\ldots,S_m^+$ aufzuteilen, so dass $\mu(S_j^+) = \frac{\mu(S^+)}{m}$ für $j = 1,2,\ldots,m$ gilt und mit derselben Argumentation ist es möglich S^- in disjunkte Mengen $S_1^-,\ldots,S_m^-$ aufzuteilen, so dass $\mu(S_j^-) = \frac{\mu(S^-)}{m}$ für $j = 1,\ldots,m$. Jetzt wird eine Folge

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_{2m}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} S_0 &= \emptyset, \\ S_{2j} &= (S_1^+ \cup S_1^-) \cup \cdots \cup (S_j^+ \cup S_j^-), \\ S_{2j+1} &= S_{2j} \cup S_{j+1}^+. \end{aligned}$$

Sei $y = \mu(S^+)$ und $b = \mu(I)$, so dass $\mu(S^-) = b - y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(S_{2j}) &= \frac{jb}{m} \quad \text{und} \\ \mu(S_{2j+1}) &= \frac{jb+y}{m}. \end{aligned}$$

Wählt man m genügend groß, kann man erreichen, dass $\mu(S_i) \in U$ für $i = 1,2,\ldots,m$.

Daraus folgt unter Berücksichtigung von Proposition C.7

$$
\begin{aligned}
\|v\| &\geq \sum_{i=1}^{2m} |f(\mu(S_i)) - f(\mu(S_{i-1}))| \qquad \text{(C.7)}\\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \Big| f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb}{m}\Big)\Big| + \sum_{j=0}^{m-1} \Big| f\Big(\frac{(j+1)b}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big)\Big|\\
&\geq \Bigg|\sum_{j=0}^{m-1} \Bigg(f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb}{m}\Big)\Bigg)\Bigg| + \Bigg|\sum_{j=0}^{m-1} \Bigg(f\Big(\frac{(j+1)b}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big)\Bigg)\Bigg|.
\end{aligned}
$$

Fasst man $f(\frac{jb}{m} + \Theta y)$ als eine Funktion in Θ auf, dann erhält man durch die Anwendung des Mittelwertsatzes

$$
f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb}{m}\Big) = \frac{1}{m} f_y\Big(\frac{jb}{m} + \tau y\Big), \qquad \text{(C.8)}
$$

wobei $0 \leq \tau \leq \frac{1}{m}$ und f_y die Ableitung in Richtung y ist. Durch die Voraussetzungen dieses Satzes ist sichergestellt, dass f_y gleichmäßig stetig in R ist. Daraus ergibt sich für die rechte Seite in (C.8)

$$
= \frac{1}{m} f_y\Big(\frac{jb}{m}\Big) + o\Big(\frac{1}{m}\Big) \quad \text{für } m \to \infty.
$$

Ähnlich erhält man

$$
f\Big(\frac{(j+1)b}{m}\Big) - f\Big(\frac{jb+y}{m}\Big) = \frac{1}{m} f_{b-y}\Big(\frac{jb}{m}\Big) + o\Big(\frac{1}{m}\Big).
$$

Wendet man dies auf (C.7) an, so erhält man

$$
\|v\| \geq \Big|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} f_y\Big(\frac{jb}{m}\Big)\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} f_{b-y}\Big(\frac{jb}{m}\Big)\Big| + o(1).
$$

Dies sind approximative Summen für ein Riemann Integral. Da f_y stetig ist in einer Umgebung um die Diagonale, weiß man, dass die Integrale existieren. Wird nun der Grenzwert für $m \to \infty$ gebildet, erhält man

$$
\begin{aligned}
\|v\| &\geq \Big| \int_0^1 f_y(tb)\, dt \Big| + \Big| \int_0^1 f_{b-y}(tb)\, dt \Big| \qquad \text{(C.9)}\\
&= |\nu(S^+)| + |\nu(S^-)| = \|\nu\|.
\end{aligned}
$$

Man kann jetzt

$$
\varphi v = \nu \qquad \text{(C.10)}
$$

definieren. Man muss nun zeigen, dass dies wohldefiniert ist, d.h. dass die Definition nicht von der Wahl von μ, f und U abhängt.

Genügen nun auch ξ, g und V den Voraussetzungen dieses Satzes und gilt dass $v(S) = g(\xi(S))$ für $\xi(S) \in V$. Weiter wird eine Mengenfunktion w durch $w(S) = 0$

für alle S, ein Vektormaß ζ durch $\zeta = (\mu, \xi)$, eine Funktion h durch $h(x,y) = f(x) - g(y)$ und eine kompakte und konvexe Umgebung der Diagonalen $[o, \xi(I)]$ durch $W = U \times V$ definiert. Dann genügen φ, h und W den Voraussetzungen dieses Satzes. Wenn $\zeta(S) \in W$, gilt

$$h(\zeta(S)) = f(\mu(S)) - g(\xi(S)) = v(S) - v(S) = 0 = w(S).$$

Sei

$$\begin{aligned}\eta(S) &= \int_0^1 g_{\xi(S)}(t\xi(I))\,dt \\ \sigma(S) &= \int_0^1 h_{\zeta(S)}(t\zeta(I))\,dt.\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned}\nu - \eta &= \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\,dt - \int_0^1 f_{\xi(S)}(t\xi(I))\,dt \\ &= \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I)) - g_{\xi(S)}(t\xi(I))\,dt \\ &= \int_0^1 h_{\zeta(S)}(t\zeta(I))\,dt = \sigma.\end{aligned}$$

Wenn wir nun (C.9) auf w anwenden, erhalten wir

$$\|\nu - \eta\| = \|\sigma\| \leq \|w\| = \|0\| = 0.$$

Daraus folgt $\nu - \eta = 0$, d.h. $\nu = \eta$. Dies zeigt, dass φ wohldefiniert ist.

Sei Q die Menge der Mengenfunktionen v in pNA, die (C.4) erfüllen. Auch wurde φ schon auf Q definiert. Es ist leicht zu zeigen, dass Q ein linearer Unterraum von pNA ist und dass φ linear in Q ist. Aus Ungleichung (C.9) folgt $\|\varphi v\| \leq \|v\|$ für $v \in Q$ und deshalb ist φ stetig in Q und $\|\varphi\| \leq 1$. Aus

$$(\varphi\lambda)(S) = \int_0^1 f_{\lambda(S)}(t\lambda(I))\,dt = \int_0^1 \lambda(S)\,dt = \lambda(S) \quad \text{mit } \lambda \text{ ein Lebesguemaß},$$

kann man $\|\varphi\| \geq 1$ schließen und erhält somit $\|\varphi\| = 1$. Aus der Vollständigkeit von FA folgt, dass φ eindeutig zu einem stetigen linearen Operator von pNA auf FA erweitert werden kann und die Erweiterung auch Norm 1 hat.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass φ wirklich ein Wert ist. Dafür wird Proposition C.12 verwendet. Sei $v = \mu^k$ mit $\mu \in NA^1$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}(\varphi v)(S) &= \mu(S) \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} t^k\right) dt \\ &= \mu(S)[1^k - 0^k] \\ &= \mu(S)\end{aligned}$$

und der Beweis ist vollständig. □

Nun beginnt der zweite Teil des Beweises von Satz 3.57.

Definition C.14 *Es sei $[0,1]^n$ der Einheitswürfel der Dimension n. Für jede beliebige Funktion auf $[0,1]^n$ wird $\hat{\mathbf{f}}$ auf $[0,1]^n$ durch*

$$\hat{f}(x) = \sup \Big(\sum_{i=1}^{m} |f(x^j) - f(x^{j-1})| \Big) \tag{C.11}$$

definiert, wobei das Supremum über alle endlichen Folgen

$$0 = x^0 \leq \cdots \leq x^m = x \tag{C.12}$$

gebildet wird, für die $x \leq y$ genau dann, wenn $x_i \leq y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Falls $\hat{f}(x)$ endlich ist für alle $x \in [0,1]^n$, dann ist f von beschränkter Variation.

Proposition C.15 ([7]) *f sei eine stetig differenzierbare reelwertige Funktion auf $[0,1]^n$. Dann ist f von beschränkter Variation und $\hat{f}(x)$ ist stetig in x.*

Beweis: Aus der Tatsache, dass $f \in C^1([0,1]^n)$ folgt und f der gleichmäßigen Lipschitzbedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \quad \text{für } x, y \in [0,1]^n \text{ und } L \in \mathbb{R}$$

genügt und somit von beschränkter Variation ist.

Als nächstes wird gezeigt, dass $\hat{f}$ stetig ist. O.B.d.A. kann man annehmen, dass in der Folge (C.12) über die das Supremum (C.11) gebildet wird, jedes x^j sich von x^{j-1} in genau einer Koordinate unterscheidet und $\|x^j - x^{j-1}\| < \gamma$ für $j = 1, \ldots, m$ für ein $\gamma > 0$. Solche Folgen werden zulässige Folgen genannt.

Jetzt muss gezeigt werden, dass falls $\|y - x\|$ klein ist, dies auch für $|\hat{f}(y) - \hat{f}(x)|$ gilt. O.B.d.A unterscheide sich y von x nur in einer Koordinate, der ersten und sei $y_1 > x_1$. Es sei

$$y_1 - x_1 = \|y - x\| < \delta,$$

wobei δ später bestimmt wird. Für jede zulässige Folge $0 = y^0 \leq y^1 \leq \cdots \leq y^m = y$ wird eine zulässige Sequenz $0 = x^0 \leq \cdots \leq x^m = x$ durch

$$x^j = (\min(x_1, y_1^j), y_2^j, \ldots, y_n^j)$$

definiert. Dann gilt

$$\|y^j - x^j\| < \delta \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Nun sei j fest und $i = i(j)$ derart, dass y^j sich von y^{j-1} höchstens in der i-ten Koordinate unterscheidet. Dann unterscheidet x^j sich von x^{j-1} auch in höchstens einer Koordinate und man erhält unter Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes

$$f(y^j) - f(y^{j-1}) = f_i(\bar{y}^j)(y_i^j - y_i^{j-1}) \tag{C.13}$$

$$f(x^j) - f(x^{j-1}) = f_i(\bar{x}^j)(x_i^j - x_i^{j-1}) \tag{C.14}$$

mit $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\bar{y}^j$ auf der Verbindungsgeraden von y^{j-1} und y^j sowie $\bar{x}^j$ auf der Verbindungsgeraden von x^{j-1} und x^j. Deshalb gilt

$$\|\bar{x}^j - \bar{y}^j\| \leq \|\bar{x}^j - x^j\| + \|x^j - y^j\| + \|y^j - \bar{y}^j\| \leq \delta + 2\gamma.$$

Falls $\epsilon > 0$ gegeben ist, folgt aus der Stetigkeit von f_i, dass falls δ und γ genügend klein sind,

$$|f_i(\bar{y}^j) - f_i(\bar{x}^j)| \leq \frac{\epsilon}{2n}. \tag{C.15}$$

Für $i > 1$ gilt $x_i^j = y_i^j$ und $x_i^{j-1} = y_i^{j-1}$. Aus den Gleichungen (C.13) und (C.14) sowie aus der Ungleichung (C.15) erhält man

$$\begin{aligned}
|f(y^j) - f(y^{j-1})| - |f(x^j) - f(x^{j-1})| &= (y_i^j - y_i^{j-1}) f_i(\bar{y}^j) - (x_i^j - x_i^{j-1}) f(\bar{x}^j) \qquad \text{(C.16)} \\
&= \Big(f_i(\bar{y}^j) - f_i(\bar{x}^j)\Big)(y_i^j - y_i^{j-1}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2n}(y_i^j - y_i^{j-1}).
\end{aligned}$$

Falls $i = 1$ und $y_1^j \leq x_1$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(y^j) - f(y^{j-1})| - |f(x^j) - f(x^{j-1})| &= (y_1^j - y_1^{j-1}) f_i(\bar{y}^j) - (x_1^j - x_1^{j-1}) f(\bar{x}^j) \qquad \text{(C.17)} \\
&= (y_1^j - y_1^{j-1}) f_i(\bar{y}^j) - (y_1^j - y_1^{j-1}) f(\bar{y}^j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Falls $i = 1$ und $y_1 \geq y_1^j > x_1$ gilt

$$|f(y^j) - f(y^{j-1})| - |f(x^j) - f(x^{j-1})| \leq |f(y^j) - f(y^{j-1})| \leq M(y_1^j - y_1^{j-1}), \tag{C.18}$$

wobei M das Maximum von $|f_1|$ über dem Einheitswürfel ist. Wählt man δ und γ so, dass $M(\delta + \gamma) \leq \frac{\epsilon}{2}$, kombiniert die Ungleichungen (C.16), (C.17) und (C.18) und setzt

$$\alpha_j = |f(y^j) - f(y^{j-1})| - |f(x^j) - f(x^{j-1})|,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \alpha_j &= \sum_{i(j)>1} \alpha_j + \sum_{\substack{i(j)=1 \\ y_1^j \leq x_1}} \alpha_j + \sum_{\substack{i(j)=1 \\ y_1 \geq y_1^j > x_1}} \alpha_j \\
&\leq \frac{\epsilon}{2n} \sum_{j=1}^{m} (y_{i(j)}^j - y_{i(j)}^{j-1}) + 0 + M \sum_{y_1 \geq y_1^j \geq x_1} (y_1^j - y_1^{j-1}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + M\Big(y_1 - (x_1 - \gamma)\Big) \leq \frac{\epsilon}{2} + M(\delta + \gamma) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Jetzt kann die Folge $0 = y^0 \leq y^1 \leq \cdots \leq y^m = y$ so gewählt werden, dass $\sum_{j=1}^{m} |f(y^j) - f(y^{j-1})|$ beliebig nahe an $\hat{f}(y)$ ist. Daraus folgt, dass falls δ genügend klein ist, $\hat{f}(x) \geq \hat{f}(y) - \epsilon$ gilt. Da $\hat{f}(x) \leq \hat{f}(y)$ aus $x \leq y$ folgt, ist der Beweis vollständig. $\square$

Proposition C.16 ([7]) *Für $v_1, v_2 \in BV$ gilt*

$$\|v_1 v_2\| \leq \|v_1\| \, \|v_2\|.$$

Beweis: Für monotone u und w gilt $\|uw\| = uw(I) = u(I)w(I) = \|u\| \, \|w\|$. Damit und mit Proposition C.7 folgt, dass für alle $v_i \in BV$ mit $v_i = u_i - w_i$ gilt

$$\begin{aligned}
\|v_1 v_2\| &= \|(u_1 - w_1)(u_2 - w_2)\| \\
&= \|u_1 u_2\| + \|u_1 w_2\| + \|w_1 u_2\| + \|w_1 w_2\| \\
&= (\|u_1\| + \|w_1\|)(\|u_2\| + \|w_2\|) \\
&= \|v_1\| \, \|v_2\|.
\end{aligned}$$

□

Proposition C.16 zeigt, dass BV eine Banach Algebra ist. Insbesondere zeigt es, dass die Multiplikation stetig ist, so dass falls X eine Unteralgebra von BV ist, der Abschluss von X auch eine Unteralgebra ist.

Definition C.17 *Für beliebiges $k > 0$ und beliebiges m mit $1 \leq m \leq 2^k$ wird ein Maß $\boldsymbol{\lambda^k_m}$ durch*

$$\lambda^k_m(S) = 2^k \lambda(S \cap [\frac{m-1}{2^k}, \frac{m}{2^k}])$$

definiert, wobei λ das Lebesguemaß ist. Sei $\boldsymbol{\lambda^k}$ eine Mengenfunktion von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}^{2^k}$ definiert durch

$$\lambda^k = (\lambda^k_1, \ldots, \lambda^k_{2^k}).$$

Der Wertebereich von λ^k ist der abgeschlossene Einheitswürfel $R_k = [0,1]^{2^k}$. Mit **A** *wird die Klasse aller Mengenfunktionen der Form $f \circ \lambda^k$ mit $k > 0$ und f stetig differenzierbar auf R_k bezeichnet.*

Proposition C.18 ([7]) *A ist eine Unteralgebra von BV.*

Beweis: Es ist leicht einzusehen, dass $v \in A$ von beschränkter Variation ist. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass A eine Algebra ist.

Eine lineare Abbildung $\Psi_k : \mathbb{R}^{2^k} \to \mathbb{R}^{2^{k-1}}$ sei durch

$$\Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{2^k}) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \ldots, \frac{x_{2^k - 1} + x_{2^k}}{2})$$

definiert. Ψ_k bildet R^k auf R^{k-1} ab und $\Psi_k \lambda^k = \lambda^{k-1}$. Daraus folgt, dass es für $k \geq l$ eine lineare Abbildung $\Psi_{k,l} : \mathbb{R}^{2^k} \to \mathbb{R}^{2^l}$ gibt, die R_k auf R_l abbildet, so dass $\Psi_{kl} \lambda^k = \lambda^l$.

Seien $v, w \in A$ und $v = f \circ \lambda^k$ sowie $w = g \circ \lambda^l$ mit $f \in C^1(R_k), g \in C^1(R_l)$ und $k \geq l$. Wenn man eine Funktion h auf R_k durch $h = f + g \circ \Psi_{kl}$ definiert, dann ist $h \in C^1(R_k)$ und es gilt

$$v + w = f \circ \lambda^k + g \circ \Psi_{kl} \circ \lambda^k = h \circ \lambda^k \in A.$$

Genauso kann gezeigt werden, dass $vw \in A$. Dafür muss die Addition in der Definition von h durch eine Multiplikation ersetzt werden. Damit ist gezeigt, dass A eine Algebra ist. □

Proposition C.19 ([7]) *A ist innerlich.*

Beweis: Sei $v \in A$ mit $v = f \circ \lambda^k$, wobei $f \in C^1(R_k)$. Zur besseren Lesbarkeit wird $n = 2^k$, $R = R_k = [0,1]^n$ gesetzt. Ferner wird f^+ auf R durch

$$f^+(x) = \sup \sum_{j=1}^{m} \max(0, f(x^j) - f(x^{j-1}))$$

definiert, wobei das Supremum über alle Folgen der Form (C.12) genommen wird. f^- wird ähnlich definiert aber mit $\max(0, f(x^{j-1}) - f(x^j))$ als Summanden. f^+ und f^- sind nicht-fallend und es gilt

$$\begin{aligned}
f^+ + f^- &= \sup \sum_{j=1}^{m} \max\left(0, f(x^j) - f(x^{j-1})\right) + \sup \sum_{j=1}^{m} \max\left(0, f(x^{j-1}) - f(x^j)\right) \\
&= \sup \left[\sum_{j=1}^{m} \max\left(0, f(x^j) - f(x^{j-1})\right) + \max\left(0, f(x^{j-1}) - f(x^j)\right)\right] \\
&= \sup \left[\sum_{j=1}^{m} |f(x^j) - f(x^{j-1})|\right] \\
&= \hat{f}
\end{aligned}$$

und analog erhält man

$$f^+ - f^- = f$$

Da $\hat{f}$ aufgrund von Proposition C.15 stetig und endlich auf R ist, da f stetig differenzierbar und damit stetig und endlich auf R ist und $f^+ = \frac{\hat{f}+f}{2}$, $f^- = \frac{\hat{f}-f}{2}$, folgt, dass f^+ und f^- überall auf R endlich und stetig sind. Weiter gilt, dass

$$\|v\| = \hat{f}(e) = f^+(e) + f^-(e),$$

da die Folgen der Form (C.12) genau die Folgen $\{\lambda^k(S_j)\}$ sind, die aus der Folge $\emptyset = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_m = I$ entstehen, die die Variationsnorm nach der Darstellung aus Proposition C.7 bestimmt. Es gilt aber nicht $\|v\|_A = f^+(e) + f^-(e)$ mit $f^+, f^- \in A$, da f^+ und f^- nicht differenzierbar sein müssen. Deshalb muss geeigneter differenzierbarer Ersatz für f^+ und f^- gefunden werden, d.h. nicht-fallende Funktionen $h, k \in C^1(R)$ mit $h - k = f$, $h(0) = k(0) = 0$ sowie $h(e)$ und $k(e)$ sind jeweils approximativ ähnlich zu $f^+(e)$ und $f^-(e)$.

Sei $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $D = \max_{i \in N} \max_{x \in R} |f_i(x)|$. Außerdem sei $\epsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ sei so gewählt, dass aus $\|x - y\| < \delta$ folgt, dass $\max_{i \in N} |f_i(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in R$ und dass $\delta < \frac{\epsilon}{D}$.

Nun wird ein linearer Operator $*$ für die stetigen Funktionen in R definiert:

$$g^*(x) = \int_{y \in R} g((1-\delta)x + \delta y)\, dy$$

oder äquivalent nach Fubini

$$g^*(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{z_1=(1-\delta)x_1}^{(1-\delta)x_1+\delta} \cdots \int_{z_n=(1-\delta)x_n}^{(1-\delta)x_n+\delta} g(z)\, dz_1 \dots dz_n.$$

Aus der zweiten Darstellungsweise wird sofort ersichtlich, dass $g^* \in C^1(R)$ auch falls g nur stetig ist und dass, falls $g \in C^1(R)$, gilt

$$(g^*)_i = (1-\delta)(g_i)^*.$$

Aus der ersten Darstellungsweise erkennt man, dass falls g nicht-fallend ist, auch g^* nicht-fallend ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} g^*(0) &= \int_{y\in R} g(\delta y)\, dy && \geq \int_{y\in R} g(0)\, dy = g(0) \quad \text{und} \\ g^*(e) &= \int_{y\in R} g((1-\delta)e + \delta y)\, dy && \leq \int_{y\in R} g(e)\, dy = g(e). \end{aligned}$$

Da man den Durchschnitt einer stetigen Funktion über den um$(1-\delta)x$ verschobenen und um δ gestreckten Einheitswürfel bildet, gibt es für jedes $x \in R$ ein $y \in R$, so dass $\|x - y\| < \delta$ und $g(y) = g^*(x)$. Wendet man dies auf die Ableitungen der Originalfunktion an, so erhält man

$$|f_i^*(x) - f_i(x)| = |f_i^*(x) - f_i(y) + f_i(y) - f_i(x)| \leq \|x-y\|D < \delta D < \epsilon$$

für alle $x \in R$ und $i \in N$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial(f^* - f)(x)}{\partial x_i}\Big| &\leq |(f^*)_i(x) - f_i^*(x)| + |f_i^*(x) - f_i(x)| \\ &< |(1-\delta)f_i^*(x) - f_i^*(x)| + \epsilon \\ &= \delta|f_i^*(x)| + \epsilon \\ &\leq \delta D + \epsilon \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Funktion $f^* - f + 2\epsilon u$ mit $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ nicht-fallend ist. Sei jetzt

$$h = f^{+*} - f^{+*}(0) + 2\epsilon u.$$

Daraus folgt, dass $h \in C^1(R)$ und $h(0) = 0$. Außerdem ist h nicht-fallend, da es eine Summe von nicht-fallenden Funktionen ist. Als nächstes wird

$$k = h - f$$

definiert. Auch $k \in C^1(R)$ und $h(0) = 0$. Außerdem kann man k als Summe von nicht-fallenden Funktionen schreiben:

$$\begin{aligned} k &= h - f \\ &= (f^+)^* - (f^+)^*(0) + 2\epsilon u - f \\ &= (f^+ - f)^* + (f^* - f + 2\epsilon u) - f^{+*}(0) \\ &= (f^-)^* + (f^* - f + 2\epsilon u) - (f^+)^*(0). \end{aligned}$$

Durch die Linearität von „*“ folgt, dass auch k nicht-abnehmend ist. Deshalb sind $h \circ \mu$ und $k \circ \mu$ Elemente aus A^+ und es gilt $\|v\|_A \leq h(e) + k(e) = 2h(e) - f(e)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\|v\| \leq \|v\|_A &\leq 2f^{+*}(e) - 2f^{+*}(0) + 4\epsilon u(e) - f(e) \\ &\leq 2f^+(e) - f^+(0) + 4\epsilon n - f(e) \\ &= f^+(e) + f^-(e) + 4\epsilon n \\ &= \|v\| + 4\epsilon n.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ gilt, erhält man $\|v\| = \|v\|_A$. □

Proposition C.20 ([7]) *Sei $\mu \in NA^1$ auf dem messbaren Raum $([0,1], \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra ist. Dann gibt es einen Automorphismus Φ von $([0,1], \mathcal{B})$, so dass*

$$\Phi_* \mu = \lambda,$$

wobei λ das Lebesguemaß ist.

Beweis: Sei $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ mit $\Phi(x) = \mu([0,x])$. Da $\mu \in NA^1$ ist Φ offensichtlich ein Automorphismus von $[0,1]$. Sei $[0,a] \subseteq [0,1]$, dann ist $\mu(\Phi^{-1}([0,a])) = a = \lambda([0,a])$. Somit stimmen $\Phi_* \mu$ und λ auf allen Intervallen der Form $[0,a]$ und damit auf $\mathcal{B}$ überein. □

Proposition C.21 ([7]) *Sei Q ein symmetrischer Unterraum von BV und sei φ ein Wert auf Q. Falls $\mu \in NA^1$ und f eine normalisierte bv Funktion ist, so dass $f \circ \mu \in Q$, dann gilt*

$$\varphi(f \circ \mu) = \mu$$

Beweis: Für diesen Beweis wird angenommen, dass $(I, \ell) = ([0,1], \mathcal{B})$. Zunächst wird der Fall betrachtet, in dem μ ein Lebesguemaß λ ist. Seien S_1 und S_2 zwei Mengen mit gleichem λ-Maß und Θ sei ein λ-Maß erhaltender Automorphismus von (I, ℓ), so dass die symmetrische Differenz $(\Theta S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus \Theta S_1)$ von λ-Maß 0 ist (siehe [25], Seite 78). Es sei $v = f \circ \mu = f \circ \lambda$. Aufgrund der Definition von *bv* ist jede Koalition mit λ-Maß 0 eine Nullkoalition und erhält wie aus Proposition C.9 ersichtlich den Wert 0. Somit gilt $(\varphi v)(\Theta S_1) = (\varphi v)(S_2)$. Da aber Θ maßerhaltend ist, gilt $\Theta_* v = v$. Somit erhält man durch die Symmetriebedingung (3.7)

$$(\varphi v)(S_2) = (\varphi v)(\Theta S_1) = (\Theta_* \varphi v)(S_1) = (\varphi \Theta_* v)(S_1) = (\varphi v)(S_1).$$

φv liefert das selbe Ergebnis für zwei Mengen mit gleichem λ-Maß, d.h. $(\varphi v)(S)$ ist eine nur von $\lambda(S)$ abhängige Funktion. Deshalb kann man schreiben $(\varphi v)(S) = g(\lambda(S))$. Aus $\varphi v \in FA$ folgt, dass g beschränkt und additiv ist, d.h. $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, falls $x_1, x_2, x_1 + x_2 \in [0,1]$.

Für $a, b \in \mathbb{N}$ erhält man $g(\frac{a}{b}) = g(\frac{1}{b}) + \cdots + g(\frac{1}{b}) = ag(\frac{1}{b}) = \frac{a}{b}g(1)$, da $g(1) = bg(\frac{1}{b})$. Da jede reelle Zahl durch eine rationale Zahlen beliebig approximiert werden kann, folgt $g(x) = g(1)x$ für $x \in [0,1]$. Da $g(1) = (\varphi v)(I) = v(I) = f(\lambda(I)) = f(1) = 1$, erhält man $(\varphi v)(S) = g(\lambda(S)) = \lambda(S)$. Daraus folgt $\varphi v = \lambda$.

Im allgemeinen Fall, wenn $\mu \neq \lambda$, lässt sich wie in Proposition C.20 gezeigt ein Automorphismus Θ finden, so dass $\Theta_* \mu = \lambda$. Daraus folgt $\Theta_*(f \circ \mu) = f \circ (\Theta_* \mu) = f \circ \lambda$. Durch das gerade Bewiesene ergibt sich $\varphi \Theta_*(f \circ \mu) = \varphi(f \circ \lambda) = \lambda$. Somit folgt aufgrund der Definition des Wertes und dem Vorangegangenen, dass

$$\varphi(f \circ \mu) = \Theta_*^{-1} \Theta_* \varphi(f \circ \mu) = \Theta_*^{-1} \lambda = \mu,$$

was den Beweis vollendet. □

Proposition C.22 ([7]) *Sei Q ein abgeschlossener Unterraum von BV und sei $B = Q^+ - Q^+$, dann ist B vollständig in der B-Norm.*

Beweis: Um die Vollständigkeit zu beweisen benutzt man die Tatsache, dass ein linearer Raum genau dann vollständig ist, wenn die absolute Konvergenz einer Serie ihre Konvergenz impliziert, d.h. $\sum \|x_i\| < \infty$ impliziert, dass die partiellen Summen $\sum_{i=1}^n x_i$ konvergieren.

Sei $v_i \in B$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} \|v_i\| < \infty$. Jetzt muss gezeigt werden, dass $\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i$ in der B-Norm konvergiert. Seien u_i und w_i in Q^+ mit $u_i - w_i = v_i$ und

$$u_i(I) + w_i(I) \leq \|v_i\|_B + \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i(I)$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} w_i(I)$ konvergieren. Wegen der Monotonie von u_i und w_i konvergieren auch $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i(S)$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} w_i(S)$ für alle $S \in I$. Seien $u(S)$ und $w(S)$ die Grenzwerte. Daraus folgt

$$\|u - \sum_{i=1}^n u_i\| = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(I) \to 0,$$

da $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i(I) < \infty$ konvergiert. Da $\sum_{i=1}^n \in Q$ und Q abgeschlossen ist, folgt, dass $u \in Q$. Gleiches gilt für w. Da u und w offensichtlich monoton sind, sind beide in Q^+. Setzt man $v = u - w$, folgt, dass $v \in B$ und

$$\begin{aligned}
\|v - \sum_{i=1}^n v_i\|_B &\leq \|u - \sum_{i=1}^n u_i\|_B + \|w - \sum_{i=1}^n w_i\|_B \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(I) + \sum_{i=n+1}^{\infty} w_i(I) \to 0.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i$ gegen v konvergiert. □

Proposition C.23 ([7]) *Der Abschluss eines innerlichen Raumes ist innerlich.*

Beweis: Sei A innerlich und $Q = \bar{A}$ und $B = Q^+ - Q^+$, wobei $\bar{A}$ den Abschluss von A bezüglich BV bezeichnet. Aufgrund von Proposition C.22 ist B vollständig in der B-Norm. Aus

$$Q^+ \subseteq B \cap BV^+ = B^+ = (Q^+ - Q^+)^+ \subseteq Q^+$$

folgt, dass $Q^+ = B^+$ und $B = Q^+ - Q^+ = B^+ - B^+$. Sei A^* der Abschluss von A bezüglich B in der B-Norm. Es gilt

$$A \subseteq A^* \subseteq B \subseteq \bar{B} = Q \subseteq BV.$$

Jetzt folgt

$$\|v\| = \|v\|_B \quad \text{für alle } v \in A^* \tag{C.19}$$

aus

$$\|v\| \leq \|v\|_B \leq \|v\|_A = \|v\|.$$

Für $v \in A^* \setminus A$ folgt (C.19) aus einer einfachen Grenzwertbildung. Daraus folgt, dass A^* ein abgeschlossener Unterraum von B in der B-Norm ist. Da B in dieser Norm wie in Proposition C.22 gezeigt vollständig ist, ist auch A^* vollständig in dieser Norm. Aus (C.19) folgt, dass A^* auch vollständig in der Variationsnorm ist und somit ein abgeschlossener Unteraum von BV. Deshalb gilt

$$A^* = \bar{A}^* \supset \bar{A} = Q \supset B \supset A^*$$

und somit Gleichheit. Insbesondere erhält man $Q = B = Q^+ - Q^+$. Somit ist die Q-Norm auf Q definiert. Aus (C.19) und $A^* = B = Q$ erhält man

$$\|v\| = \|v\|_Q \quad \text{für alle } v \in Q,$$

was den Beweis abschließt. □

Proposition C.24 ([7]) *pNA ist innerlich.*

Beweis: L sei die Menge aller Maße, die absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes λ sind. Es wird nun gezeigt, dass

$$L \subseteq \bar{A}. \tag{C.20}$$

Falls $\mu \in L$, dann gilt durch den Satz von Radon-Nikodym, dass man eine integrable Funktion f finden kann, so dass

$$\mu(S) = \int_S f(t)\, dt \quad \text{für alle } S \subseteq I.$$

Man kann f durch Stufenfunktionen g in der L^1-Norm approximieren. Die Stufenfunktion kann so gewählt werden, dass jeder Schritt ein Intervall der Form $[\frac{m-1}{2^k}, \frac{m}{2^k}]$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $m \leq 2^k$. ist, d.h. man kann eine solche Funktion g finden, so dass

$$\int_I |f(t) - g(t)|\, dt < \epsilon.$$

Es wird nun ein Maß ν durch

$$\nu(S) = \int_s g(t)\, dt.$$

definiert. Somit gilt $\nu \in A$ und $\|\mu - \nu\| < \epsilon$, d.h. μ kann in der Variationsnorm durch Elemente aus A approximiert werden. Dies beweist die Behauptung (C.20).

Aufgrund von Proposition C.18 weiß man, dass A eine Algebra ist, also ist auch $\bar{A}$ wegen Proposition C.16 und der anschließenden Bemerkung eine Algebra. Aus (C.20) folgt, dass $\bar{A}$ alle Polynome in Maßen aus L und deren Limiten enthält.

Nun sei $v \in pNA$. Dann gilt, dass v der Grenzwert in der Variationsnorm einer Folge $v_1, v_2, \ldots$ von endlichen Polynomen aus NA^1-Maßen ist. Da jedes v_i nur aus endlich vielen Maßen besteht, sind nur abzählbar viele Maße in der Folge enthalten. Diese seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Sei

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2},$$

dann gilt $\mu_i \ll \mu$ für alle i und demzufolge ist jedes v_i ein Polynom aus Maßen, die absolut stetig bezüglich μ sind. Aufgrund von Proposition C.20 weiß man, dass es einen Automorphismus Φ auf $([0,1], \mathcal{B})$ gibt, so dass $\Phi_*\mu = \lambda$. Die $\Phi_* v_i$ sind Polynome aus Maßen aus $\Phi_*\mu_i$ von denen alle absolut stetig bezüglich $\Phi_*\mu = \lambda$ sind. Deshalb ist $\Phi_* v_i \in \bar{A}$ und da $\|\Phi_* v_i - \Phi_* v\| = \|v_i - v\| \to 0$ gilt

$$\Phi_* v \in \bar{A} \tag{C.21}$$

Aus den Propositionen C.23 und C.19 folgt, dass $\bar{A}$ innerlich ist. Daraus lässt sich weiter folgern, dass auch $\Phi_*^{-1}\bar{A}$ innerlich ist für jeden Automorphismus Φ. Durch (C.21) ergibt sich, dass jedes Element aus pNA Element eines innerlichen Unterraums ist. Dies bedeutet, dass pNA selbst innerlich ist. □

Proposition C.25 ([7]) *Sei Q ein innerlicher Unterraum von BV und sei φ ein positiver linearer Operator von Q nach BV, welcher der Effizienzbedingung 3.6 genügt. Dann gilt $\|\varphi\| \leq 1$.*

Beweis: Sei $v \in Q$ und für ein gegebenes $\epsilon > 0$ seien u und w in Q^+ derart, dass $v = u - w$ und $\|v\| + \epsilon \geq u(I) + w(I)$. Daraus folgt mit Korrolar C.8

$$\begin{aligned}\|\varphi v\| &= \|\varphi u - \varphi w\| \leq \|\varphi u\| + \|\varphi w\| \\ &= (\varphi u)(I) + (\varphi w)(I) = u(I) + w(I) \leq \|v\| + \epsilon.\end{aligned}$$

Dies liefert $\|\varphi\| \leq 1$. □

Satz C.26 ([7]) *Der Wert auf pNA ist eindeutig.*

Beweis: φ sei ein Wert auf pNA, dann folgt aufgrund von Propositionen C.24 und Proposition C.25 das φ stetig ist, da man für $\epsilon > 0$ einfach $\delta = \epsilon$ wählt und somit aus $\|u - w\| < \delta$ folgt, dass $\|\varphi(u - w)\| \leq \|u - w\| < \epsilon = \delta$. Andererseits weiß man wegen Proposition C.21, dass $\varphi\mu^k = \mu$ für alle μ in NA und alle positiven natürlichen Zahlen k. Dies bestimmt φ auf einer spannenden Untermenge von pNA und somit durch Linearität und Stetigkeit auf ganz pNA. □

Hiermit folgt sofort der Beweis von Satz 3.57.

Beweis von Satz 3.57: Der Beweis folgt direkt aus Satz C.13 und Satz C.26. □

C.2 Weitere Allokationsprinzipien

Dieser Abschnitt gibt einen Ausblick auf weitere Allokationsprinzipien. Die beiden hier kurz vorgestellten Verfahren sind axiomatische Ansätze.

Der erste Vorschlag stammt von Denault [12] und versucht das Prinzip der kohärenten Risikomaße auf Allokationen zu erweitern. Die Ergebnisse sind sehr eng mit denen von Aumann und Shapley verknüpft.

Das zweite Allokationsprinzip stammt von Kalkbrener [28]. Das Besondere an seinem Ansatz ist, dass die Zuteilung auf die Zufallsvariable X_i nur von X_i selbst und dem gesamten Portfolio abhängt, nicht aber von der Aufteilung des Restes. Auch taucht in seinen Axiomen das Risikomaß nur zur Bestimmung des Gesamtkapitals auf.

C.2.1 Kohärente Verteilung

In [12] schlägt Denault ein den kohärenten Maßen angepasstes Allokationsprinzip für kooperative Spiele vor. Zuerst wird das Prinzip der kohärenten Allokation für ein endliches kooperatives Spiel angegeben und die Axiome erläutert. Danach wird auf die kohärente Zuteilung bei kooperativen Spielen mit skalierbaren Spielern eingegangen. Denault schlägt drei Axiome vor, die eine Zuteilung erfüllen sollte.

Axiom C.1 (No Undercut)

$$\sum_{i\in M} K_i \leq \rho\Big(\sum_{i\in M} X_i\Big) \tag{C.22}$$

Die Aussage dieses Axioms ist offensichtlich und ist wie in Satz 3.18 gezeigt äquivalent zur Aussage, dass die Zuteilung im Kern enthalten ist.

Axiom C.2 (Symmetrie) *Falls die Portfolios i, j mit $i \neq j$ jeweils den gleichen Beitrag zu jeder Unterkoalition $M \subset N \setminus \{i, j\}$ liefern, dann gilt $K_i = K_j$.*

Auch die Aussage dieses Axioms ist klar: Die Verteilung des Risikokapitals hängt nur von dem zusätzlichen Risiko ab, das eine Portfolioposition zu den verschiedenen Unterkoalitionen beiträgt.

Axiom C.3 (Risikolose Zuteilung) *Für ein risikoloses Portfolio n gilt*

$$K_n = \rho(\alpha) = -\alpha.$$

Das Axiom der risikolosen Zuteilung besagt, dass das einem Unternehmensbereich zugeteilte Kapital $-\alpha$ ist, falls er am Ende des Betrachtungszeitraums sicher das Kapital α vorweisen kann. Dies ist einleuchtend, da ein risikoloser Geschäftsbereich kein Risikokapital benötigt und sein eigenes Kapital den anderen zur Verfügung stellen kann.

Definition C.27 *Ein Wert Φ ist* **kohärent***, falls er für jedes kooperative Spiel (N, ρ) die Axiome C.1, C.2 und C.3 erfüllt.*

Der Shapley-Wert erfüllt per Definition das Axiom der Symmetrie. Falls das Risikomaß kohärent ist stellt die Translationsinvarianz das Dummy Player Axiom sicher. Falls der Shapley-Wert nun auch im Kern liegen würde, wäre er eine kohärente Zuteilung. Bedingungen unter denen der Shapley-Wert im Kern liegt, wurden in den Sätzen 3.38 und 3.39 genannt. Da diese Bedingungen relativ stark sind, kann kein befriedigender Existenzsatz für eine kohärente Zuteilung bei nicht-skalierbaren Spielern gegeben werden.

Nun folgen die Axiome für kooperative Spiele mit skalierbaren Spielern. Hier beschränken wir uns darauf, dass die Zufallsvariablen linear skaliert werden, woraus folgt, dass $r(\lambda) = \rho(\sum_{i \in N} \lambda_i X_i)$.

Axiom C.4 (Zuteilungsinvarianz) *Seien r und $\bar{r}$ zwei Risikomaße mit $r\lambda = \bar{r}(\Gamma\lambda)$ für eine $m \times n$ Matrix Γ und für alle λ mit $0 \leq \lambda \leq \Lambda$. Dann gilt*

$$\Phi(N, \Lambda, r) = \Gamma' \Phi(N, \Gamma\Lambda, \bar{r}).$$

Axiom C.5 (Stetigkeit) *Die Abbildung Φ ist stetig über dem normierten Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $r : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, die am Ursprung verschwinden.*

Axiom C.6 (Monotonie) *Falls r nicht-fallend ist, in dem Sinn dass $r(\lambda) \leq r(\lambda^*)$ für $0 \leq \lambda \leq \lambda^* \leq \Lambda$, dann gilt*

$$\Phi(N, \Lambda, r) \geq 0.$$

Axiom C.7 (Dummy Allokation) *Falls i ein Dummy ist, d.h., dass*

$$r(\lambda) - r(\lambda^*) = (\lambda_i - \lambda_i^*) \frac{\rho(X_i)}{\Lambda_i}$$

für $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ und $\lambda = \lambda^*$ außer in der i^{ten} Komponente, Dann ist

$$k_i = \frac{\rho(X_i)}{\Lambda_i}.$$

Die Axiome sind in ähnlicher Weise zu rechtfertigen wie die für nicht skalierbare Spieler. Vor der Definition der kohärenten Zuteilung, wird die Definition des Kerns eines kooperativen Spiels angegeben.

Definition C.28 (Fuzzykern) *Die Zuteilung $\Phi(N, \Lambda, r)$ gehört zum* **Kern** *des kooperativen Spiels (N, Λ, r), falls für alle λ mit $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ gilt, dass*

$$\lambda'\Phi(N, \Lambda, r) \leq r(\lambda).$$

Definition C.29 *Sei r ein kohärentes Risikomaß. Ein Wert*

$$\Phi : (N, \Lambda, r) \mapsto k \in \mathbb{R}^n$$

ist **kohärent** *falls er Axiome C.4, C.5 C.6 und C.7 erfüllt und falls k ein Element des Fuzzykerns ist.*

In diesem Fall wird der Aumann-Shapley Wert herangezogen und untersucht inwieweit er eine kohärente Zuteilung liefert. Zuerst stellt man fest, dass falls ρ kohärent ist, die Aggregationsinvarianz und die Monotonie vom Aumann-Shapley Wert erfüllt werden. Über das Stetigkeitsaxiom können keine Aussagen gemacht werden, es wird aber als erfüllt angenommen. Somit ist nur noch zu klären, ob das Dummy Player Axiom vom Aumann-Shapley Wert erfüllt wird und er im Kern liegt.

Folgendes Lemma behandelt den ersten Punkt.

Lemma C.30 ([12]) *Falls das Risikomaß r kohärent ist, erfüllt der Aumann-Shapley Wert das Dummy Player Axiom.*

Beweis: Aufgrund von Axiom C.7 gilt für einen Dummy i mit $\lambda^* = \Lambda$, außer in der i^{ten} Komponente, $r(\lambda) = (\lambda_i - \lambda_i^*)\frac{\rho(X_i)}{\Lambda_i} + r(\lambda^*)$ und somit

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\Lambda) = \frac{\rho(X_i)}{\Lambda_i}.$$

□

Der zweite Punkt kann mit einem Satz von Aubin beantwortet werden.

Satz C.31 ([5]) *Der Kern eines kooperativen Spiels mit skalierbaren Spielern (N, Λ, r) mit positiv homogener charakteristischer Funktion r ist gleich dem Gradienten von $r(\lambda)$ bei Λ.*

Beweis: siehe [5] □

Dies liefert folgendes Korollar.

Korollar C.32 ([12]) *Sei (N, Λ, r) ein kooperatives Spiel mit skalierbaren Spielern und r ein kohärentes Risikomaß, das differenzierbar bei Λ ist. Dann ist der Aumann-Shapley Wert eine kohärente Allokation.*

C.2.2 Kalkbreners Axiomensystem

In [28] gibt Kalkbrener drei Eigenschaften an, die eine Allokation erfüllen soll und zeigt, dass dadurch die Zuteilung eindeutig bestimmt ist. Die vorgeschlagene Axiomatisierung basiert auf der Annnahme, dass das Kapital, das dem i^{ten} Geschäftsbereich zugeordnet wird, nur von X_i und Z abhängt, wobei $Z = \sum_{i \in N} X_i$. Dies bedeutet, dass das dem i^{ten} Unternehmensbereich zugewiesene Kapital unabhängig von der Aufteilung von $Z - X_i$ ist.

Aus der obigen Grundannahme folgt, dass bei dieser Methode die Allokation eine Funktion Φ von $L^0 \times L^0$ nach $\mathbb{R}$ ist, mit der Aussage, dass $\Phi(X_i, Z)$ das dem i^{ten} Geschäftsbereich zugewiesene Kapital ist.

Definition C.33 *Sei $\rho : L^0 \to \mathbb{R}$ ein Risikomaß. Eine* **Kapitalallokation bezüglich $\boldsymbol{\rho}$** *ist eine Abbildung Φ von $L^0 \times L^0$ nach $\mathbb{R}$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:*

$$\Phi(X, X) = \rho(X) \tag{C.23}$$
$$\Phi(aX + bY, Z) = a\Phi(X, Z) + b\Phi(Y, Z) \tag{C.24}$$
$$\Phi(X, Y) \leq \Phi(X, X) \tag{C.25}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $X, Y, Z \in L^0$. Eine Kapitalallokation wird stetig bei $Y \in L^0$ genannt, falls

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(X, Y + \epsilon Z) = \Phi(X, Y) \tag{C.26}$$

für alle $X, Z \in L^0$.

Bedingung (C.23) ist die bekannte Forderung, dass das gesamte Risikokapital aufgeteilt werden soll. Forderung (C.24) besagt, dass Φ linear in der ersten Komponente ist und bedeutet, dass ein Subportfolio genau soviel Kapital erhält, unabhängig davon ob es aufgespaltet oder gesamt betrachtet wird. Durch Bedingung (C.25) wird sichergestellt, dass Diversifikation nicht bestraft wird. Dies wird klar, wenn man sich X als Unterportfolio von Y vorstellt.

Es stellen sich nun zwei Fragen:

1. Wird durch das Axiomensystem für ein Risikomaß ρ eine Allokation eindeutig festgelegt?

2. Was sind notwendige und ausreichende Bedingungen an ein Risikomaß um die Existenz einer Allokation sicherzustellen?

Die erste Frage kann mit ja beantwortet werden, was folgender Satz zeigt. Er besagt, dass das dem Unterportfolio X zugewiesene Kapital die Ableitung des zugrundliegenden Risikomaßes in Richtung des Unterportfolios X ist.

Satz C.34 ([28]) *Sei Φ eine Kapitalallokation bezüglich ρ. Falls Φ stetig bei $Y \in L^0$ ist, dann gilt für alle $X \in L^0$, dass*

$$\Phi(X, Y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\rho(Y + \epsilon X) - \rho(Y)}{\epsilon}.$$

Beweis: Sei $0 \neq \epsilon \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen Bedingung (C.23), dass

$$\rho(Y + \epsilon X) - \rho(Y) = \Phi(Y + \epsilon X, Y + \epsilon X) - \Phi(Y, Y). \tag{C.27}$$

Aufgrund der Bedingung (C.24) und (C.25) erhält man

$$\Phi(Y + \epsilon X, Y + \epsilon X) - \Phi(Y, Y) \geq \Phi(Y + \epsilon X, Y) - \Phi(Y, Y) = \epsilon \Phi(X, Y) \tag{C.28}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi(Y + \epsilon X, Y + \epsilon X) - \Phi(Y, Y) &= \Phi(Y, Y + \epsilon X) + \Phi(\epsilon X, Y + \epsilon X) - \Phi(Y, Y) \\ &\leq \epsilon \Phi(X, Y + \epsilon X). \end{aligned} \tag{C.29}$$

Wenn man nun (C.27), (C.28) und (C.29) kombiniert und durch ϵ dividiert, erhält man

$$\Phi(X, Y) \leq \frac{\rho(Y + \epsilon X) - \rho(Y)}{\epsilon} \leq \Phi(X, Y + \epsilon X).$$

Aus Bedingung (C.26) folgt nun

$$\Phi(X, Y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\rho(Y + \epsilon X) - \rho(Y)}{\epsilon}.$$

□

Als nächstes wenden wir uns der zweiten Frage zu. Zunächst kann man feststellen, dass, falls eine Kapitalallokation Φ bezüglich ρ existiert, ρ subadditiv sein muss.

Lemma C.35 ([28]) *Sei Φ eine Kapitalallokation bezüglich ρ. Dann ist ρ subadditiv.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \rho(X + Y) &= \Phi(X + Y, X + Y) \\ &= \Phi(X, X + Y) + \Phi(Y, X + Y) \\ &\leq \Phi(X, X) + \Phi(Y, Y) \\ &= \rho(X) + \rho(Y) \end{aligned}$$

□

Daraus kann man schließen, dass es für den VaR im Allgemeinen keine Kapitalallokation gibt. Einen Existenzsatz kann dennoch angegeben werden. Dazu wird wie in Proposition 2.19 das Risikomaß $\rho_{\mathcal{P}}$ definiert.

Definition C.36 *Sei $\mathcal{P}$ eine schwach konvexe Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$ sind. Dann wird* $\boldsymbol{\rho_{\mathcal{P}}}$ *durch*

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) = E_{\mathbb{P}_X}(-X) = \max\{E_{\mathbb{Q}}(-X) | \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\},$$

definiert, wobei $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so dass die linke Gleichung erfüllt ist. Die Abbildung $\boldsymbol{\Phi_{\mathcal{P}}}$ *von $L^0 \times L^0$ nach $\mathbb{R}$ wird durch*

$$\Phi_{\mathcal{P}}(X, Y) = E_{\mathbb{P}_Y}(-X)$$

definiert.

Damit erhält man folgenden Existenzsatz.

Satz C.37 ([28]) *$\Phi_{\mathcal{P}}$ ist eine Kapitalallokation bezüglich dem Risikomaß $\rho_{\mathcal{P}}$. Sei $Y \in L^\infty$. Falls ein eindeutiges $\mathbb{P}_Y \in \mathcal{P}$ mit $\rho_{\mathcal{P}}(Y) = E_{\mathbb{P}_Y}(-Y)$ existiert, dann ist $\Phi_{\mathcal{P}}$ stetig bei Y und*

$$\Phi_{\mathcal{P}}(X,Y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\rho_{\mathcal{P}}(Y+\epsilon X) - \rho_{\mathcal{P}}(Y)}{\epsilon}. \tag{C.30}$$

Beweis: Aus der Definition von $\Phi_{\mathcal{P}}$ folgt sofort, dass $\Phi_{\mathcal{P}}$ eine Kapitalallokation bezüglich $\rho_{\mathcal{P}}$ ist. Seien $X, Z \in L^\infty$. Da für $\epsilon \to 0$ gilt, dass $\mathbb{P}_{Y+\epsilon Z}$ gegen $\mathbb{P}_Y$ schwach konvergiert (siehe [11] Proposition 5), folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi_{\mathcal{P}}(X, Y+\epsilon Z) = \lim_{\epsilon \to 0} E_{\mathbb{P}_{Y+\epsilon Z}}(-X) = E_{\mathbb{P}_Y}(-X) = \Phi_{\mathcal{P}}(X,Y). \tag{C.31}$$

Daraus folgt, dass $\Phi_{\mathcal{P}}$ stetig bei Y ist. Die Gleichung (C.30) folgt sofort aus Satz C.34. □

Damit kann man nun auch die Ableitung des ES berechnen.

Satz C.38 ([28]) *Sei $(X_1, \ldots, X_n)'$ ein Vektor von Zufallszahlen und $Z(\lambda) = \sum_{i \in N} \lambda_i X_i$. Dann ist*

$$\frac{\partial \mathrm{ES}_\alpha(Z(\lambda))}{\partial \lambda_i} = -\alpha^{-1} \int_\Omega X_i \mathbf{1}_{\{Z < Q_\alpha(Z)\}} \, d\mathbb{P} - \beta_Z \int_\Omega X_i \mathbf{1}_{\{Z = Q_\alpha(Z)\}} \, d\mathbb{P} \quad \textit{mit}$$

$$\beta_Z = \begin{cases} \dfrac{\alpha - \mathbb{P}[Z < Q_\alpha(Z)]}{\alpha \mathbb{P}[Z = Q_\alpha(Z)]} & \textit{,falls } \mathbb{P}[Z = Q_\alpha(Z)] > 0 \\ 0 & \textit{,sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Zunächst wird das Risikomaß $\mathbb{P}_Z$ durch Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}} = \alpha^{-1} \mathbf{1}_{\{Z < Q_\alpha(Z)\}} + \beta_Z \mathbf{1}_{\{Z = Q_\alpha(Z)\}}$$

definiert mit β_Z wie in der Behauptung. Dann folgt aus

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_X | X \in L^0\},$$

dass

$$\mathrm{ES}_\alpha(Z) = E_{\mathbb{P}_Z}(-Z) = \max\{E_{\mathbb{Q}}(-Z) | \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\}.$$

Daraus ergibt sich, dass $\mathcal{P}$ schwach kompakt ist und dass ES_α ein durch $\mathcal{P}$ definiertes kohärentes Risikomaß ist. Nun folgt aus Satz C.37 sofort die Behauptung. □

Liste der Notationen

Zahlen

x_+	$\max\{x, 0\}$
x_-	$-\max\{-x, 0\}$
$\lvert x\rvert$	$\max\{x, -x\}$

Mengen von Zahlen und Vektoren

$\mathbb{N}$	Menge $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Intervall $[0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$	der n-dimensionale Euklidische Raum
$\mathcal{M}$	Menge der Risikomaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$
$\mathcal{M}_f$	Menge aller nicht-negativen endlich additiven Mengenfunktionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Funktionen

$\rho(X)$	Risikomaß von X
$\mathbf{1}_A(a)$	Indikatorfunktion von A

Relationen

$A \subseteq B$	A ist eine Teilmenge von B
$A \subset B$	A ist eine echte Teilmenge von B

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
X, Y, Z	Zufallsvariablen
L^0	Raum der reelwertigen Zufallsvariablen
L^1	Raum der integrierbaren, reelwertigen Zufallsvariablen
L^∞	Raum der beschränkten, reelwertigen Zufallsvariablen
$\mathbb{P}[A]$	Wahrscheinlichkeit von A
$\mathbb{P}[A\vert C]$	bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter C
$E[X]$	Erwartungswert von X
$E[X\vert C]$	bedingter Erwartungswert von X unter C
$\mathrm{var}[X]$	Varianz von X
$\mathrm{cov}[X, Y]$	Kovarianz von X und Y
$\sigma[X]$	Standardabweichung von X
F_X	Verteilungsfunktion von X

Zuteilungen

$K_i^{p,\rho}$	Zuteilungskoeffizient für die proportionale Zuteilung mit Risikomaß ρ
$K_i^{MP,\rho}$	Zuteilungskoeffizient für die Zuteilung nach Merton und Perold mit Risikomaß ρ
$K_i^{MR,\rho}$	Zuteilungskoeffizient für die Zuteilung nach Myers und Read mit Risikomaß ρ
$K_i^{S,\rho}$	Zuteilungskoeffizient für die Zuteilung nach Shapley mit Risikomaß ρ
$K_i^{AS,\rho}$	Zuteilungskoeffizient für die Zuteilung nach Aumann und Shapley mit Risikomaß ρ

Spieltheorie

(N, ρ)	endliches kooperatives Spiel
$\mathfrak{K}$	Kern eines endlichen kooperativen Spiels
Φ	Wert eines kooperativen Spiels
$\mathfrak{R}$	von-Neumann-Morgenstern Lösung
$\leq_l$	lexikographische Ordnung
$\Delta_i(S)$	$\rho(S \cup \{i\}) - \rho(S)$

Funktionenräume

BV	Raum der reellwertigen Mengenfunktionen mit beschränkter Varianz auf (I, ℓ)
bv	Raum der Funktionen f mit beschränkter Variation auf $[0, 1]$ mit $f(0) = 0$
NA	Nicht diskrete Maße auf (I, ℓ)
NA^1	Nicht diskrete Maße auf (I, ℓ) mit $v(I) = 1$
NA^+	Nicht diskrete, monotone Maße auf (I, ℓ)
pNA	Abschluß der Polynome mit Maßen aus NA^+
FA	Raum der endlich additiven Mengenfunktionen

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] P. Albrecht. Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung. In *Credit Risk and VaR-Alternatives*, 1998.

[2] P. Artzner. Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance. *North American Actuarial Journal*, 3:11–25, 1999.

[3] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *Risk*, 10, 1997.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measure of risk. *Mathematical Finance*, noch nicht erschienen.

[5] J.P. Aubin. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory.* North-Holland Publishing Company, 1979.

[6] J.P. Aubin. Cooperative fuzzy games. *Mathematics of Operations Research*, 6:1–13, 1981.

[7] R.J. Aumann and L.S. Shapley. *Values of Non-Atomic Games.* Princton University Press, 1974.

[8] L.J. Billera and D.C. Heath. Allocation of shared costs: A set of axioms yielding a unique procedure. *Mathematics of Operations Research*, 1982.

[9] L.J. Billera, D.C. Heath, and J. Raanan. Internal telephone billing rates-a novel application of non-atomic game theory. *Operations Research*, 26:956–965, 1978.

[10] F. Delbaen. Coherent risk measures on general probability spaces, 1998. ETH Zürich.

[11] F. Delbaen. Coherent risk measures. *Scuola Normale Superiore die Pisa*, 2001.

[12] M. Denault. Coherent allocation of risk capital, 2001.

[13] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience Publishers, 1958.

[14] F.Y. Edgeworth. *Mathematical Physics.* Kegan Paul, 1881.

[15] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls, 1998.

[16] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation: Pitfalls and alternatives, 1999.

[17] D. Feldman and H.G. Tucker. Estimation of non-unique quatiles. *Ann. Math. Stat.*, 37:451–457, 1966.

[18] T. Fischer. Coherent risk measures depending on higher moments, 2001.

[19] P.C. Fishburn. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *American Economic Review*, 67:116–126, 1977.

[20] H. Föllmer and A. Schied. Robust preferences and convex measures of risk, 2002.

[21] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Financial Stochastics*, erscheint noch.

[22] O. Forster. *Analysis 3.* Vieweg, 1984.

[23] D.B. Gillies. Solutions to general non-zero-sum-games. In A.W. Tucker and R.D. Luce, editors, *Contribution to the Theory of Games IV, Annuals of mathematical Studies 40.* Princton University Press, 1959.

[24] P.R. Halmos. *Measure Theory.* D. van Nostrand Company, 1950.

[25] P.R. Halmos. *Ergodic Theory.* Chelsea, 1956.

[26] W.V. Harlow. Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial Analysis Journal*, 1991.

[27] K. Hess. Das kollektive Modell der Risikotheorie in der Schadenexzendent-Rückversicherung.

[28] M. Kalkbrener. An axiomatic approach to capital allocation, 2001.

[29] C. Klüppelberg and H. Rootzén. A single number can't hedge against economic catastrophes. *Ambio*, 28, 1999.

[30] W.F. Lucas. A game with no solution. *Bulletin of American Mathematical Society*, 74:237–239, 1968.

[31] T. Mack. *Schadenversicherungsmathematik.* Verlag Versicherungswirtschaft e.V., 1997.

[32] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.

[33] R. Merton and A. Perold. Theory of risk capital in financial firms. *Journal of Applied Corporate Finance*, 6:16–32, 1993.

[34] S.C. Myers and James A. Read. Surplus allocation for insurance companies, 1999. Arbeitspapier.

[35] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princton University Press, 1944.

[36] A. Oehler and M. Unser. *Finanzwirtschaftliches Risikomanagement.* Springer, 2001.

[37] M.J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory.* MIT Press, 1994.

[38] G.P. Pflug. *Optimization of Stochastic Models.* Kluwer Academic Publisher, 1996.

[39] H. Rau-Bredow. Value at Risk, Expected Shortfall and marginal risk contribution, 2002.

[40] B.D. Ripley. *Stochastic Simulation.* Wiley, 1987.

[41] G.J.L. Rodriguez. *Portfolio Optimization with Quantile-based Risk Measurement.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1999.

[42] R.Y. Rubinstein and B. Melamed. *Modern Simulation and Modeling.* Wiley, 1998.

[43] W. Schlee. Vorlesung über Spieltheorie. Technical report, Technische Universität München, Sommersemester 1999.

[44] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic funktion game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, pages 1163–1170, 1969.

[45] H. Schmeiser and H. Gründl. Marktwertorientierte Unternehmens- und Geschäftsbereichssteuerung in Finanzdienstleistungsunternehmen, 2001.

[46] K.D. Schmidt. *Versicherungsmathematik.* Springer, 2002.

[47] L. Shapley. A value for n-person games. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Contribution to the Theory of Games, Vol. 2.* Princton University Press, 1953.

[48] L. Shapley. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26, 1971-1972.

[49] J. Szep and F. Forgo. *Einführung in die Spieltheorie.* Verlag Harri Deutsch, 1983.

[50] D. Tasche. Kapitalallokation und Kapitalaufteilung nach Risikogesichtspunkten, 2000. Präsentation bei Münchner Rückversicherung.

[51] D. Tasche. Risk contribution and performance measurement, 2000. Arbeitspapier.

[52] D. Tasche. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, 2001.

[53] D. Tasche. On the coherence of Expected Shortfall, 2001. Präsentation am Center for Computational Finance in Pittsburgh.

[54] D. Tasche. On the coherence of Expected Shortfall, 2002.

[55] D. Tasche and L. Tibiletti. Approximations for the Value-at-Risk approach to risk-return analysis, 2001.

[56] R. Vogelsang. *Die mathematische Theorie der Spiele.* Mathematisch-Naturwissenschaftliche-Taschenbücher, 1963.

[57] T. Witting. Die Rückversicherungstechnik im Spannungsfeld zwischen Finanztheorie und Versicherungsmathematik.

[58] W.R. van Zwet. A strong law for linear functions of order statistics. *Ann. Probab.*, 8:986–990, 1980.