Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Extremwertverhalten von unendlichen Moving Average Prozessen mit leicht taillierten Innovationen und Anwendungen auf EGARCH Prozesse

Diplomarbeit

von

Nicholas Drude

Themensteller: PD Dr. Lindner
Betreuer: PD Dr. Lindner
Abgabetermin: 01.07.2006

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 1. Juli 2006

Danksagung

Obgleich das Füllen dieser Seite mit einigen mehr oder minder geglückten Zeilen nun, sagen wir mal, eher obligatorisch ist, ist es mir nicht lästige Pflicht, sondern größte Ehre, den Versuch einer annehmbaren Danksagung zu unternehmen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn PD Dr. Alexander Lindner, zugleich Themensteller und Betreuer meiner Diplomarbeit. In stets geduldiger und hilfsbereiter Weise hat er mich bei der Anfertigung meiner Arbeit unterstützt.

Weiterhin gilt mein Dank meiner Familie, welche es mir überhaupt erst ermöglichte, an der Universität zu studieren und mich mit aller Kraft meiner Diplomarbeit zu widmen.

Selbstverständlich ein herzliches Dankeschön all meinen Freunden gegenüber, welche zeitweise darauf verzichten mussten, sich mit mir über andere Dinge als spezielle mathematische Fragestellungen, deren Sinngehalt sich normalen Menschen nicht automatisch erschließt, zu unterhalten.

Nun möchte ich doch die Gelegenheit nutzen, meiner tiefen Demut dem Schicksal und - sofern vorhanden - einer Schicksal beeinflussenden Macht gegenüber Ausdruck zu verleihen. Nichts rechtfertigt das Glück, in einem wohlhabenden, kultivierten und freien Land dieser Erde in eine Epoche des Friedens geboren worden zu sein. Einzig dieser Umstand gab mir die Gelegenheit, frei von Zwang oder Not meine Persönlichkeit zu entwickeln und meine Interessen zu verfolgen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein wesentliches Bindeglied zwischen der wissenschaftlichen Theorie der Finanzmathematik und der finanzwirtschaftlichen Praxis besteht in der Modellierung von Finanzzeitreihen. Bei dieser geht es darum, die Entwicklung realer Finanzzeitreihen wie die des *Dow Jones* oder des *DAX* - natürlich aber auch einzelner Derivate - möglichst realistisch zu simulieren. Ein Ziel ist dabei, charakteristische Eigenschaften dieser Finanzzeitreihen - und damit vor allem mögliche Trend-unabhängige Risiken für Investoren - nachzubilden.

Hierbei hält man sich an die so genannten *stylized facts*. Diese beruhen auf der Analyse realer Finanzzeitreihen und unterstellen diesen bestimmte Eigenarten. Eine davon nennt sich *leverage effect* und besagt, dass Finanzmärkte asymmetrisch auf Nachrichten reagieren: gute Nachrichten verringern die Volatilität der Märkte, schlechte Nachrichten erhöhen sie.

Das bekannteste zeitdiskrete Modell, welches den leverage effect nachbilden kann, heißt ***E**xponential **G**eneralized **A**uto**r**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity*-Modell, in Kurzform *EGARCH*-Modell. In diesem wird der Renditeprozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ einer Finanzzeitreihe als Produkt seines Volatilitätsprozesses $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und seines Noiseprozesses $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, dessen einzelne Zufallsvariablen unabhängig identisch verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 sind, dargestellt; insgesamt also

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Dies stellt noch keine Innovation dar, da in anderen Modellen identisch vorgegangen wird. Das eigentlich Neue am EGARCH ist die Art, wie die Volatilität simuliert wird, nämlich durch

$$\log \sigma_t^2 = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} c_i g(\epsilon_{t-i}), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion, $\mu \in \mathbb{R}$ und $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Koeffizienten, so dass

$$\mathrm{E}|g(\epsilon_1)| < \infty, \quad \mathrm{Var} g(\epsilon_1) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$$

gelten. *Standardwahlen* hierbei sind $g(x) := Ax + B(|x| - \mathrm{E}|\epsilon_1|)$ mit $A, B, x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon_1 \stackrel{d}{=} N(0,1)$.

Der Unterschied zu anderen Modellen besteht darin, dass die Funktion g einfließt, durch welche man den leverage effect nachbilden kann.

Der EGARCH wurde bisher weitreichend, jedoch noch nicht umfassend analysiert. Insbesondere extremwerttheoretische Ergebnisse und Punktprozessresultate konnten nur für endliche EGARCH Prozesse - solche also, für die $c_n = 0$ für $n \geq n_0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt - nachgewiesen werden. Extremwerttheoretische Ergebnisse wären hierbei das Wissen über die Wahrscheinlichkeit extremer Ereignisse sowie die Kenntnis über das Verhalten der Maxima eines EGARCH Prozesses. Genauere Erkenntnisse erhält man mit Punktprozessresultaten: anhand dieser lassen sich Aussagen über die Ordnungsstatistiken, also über eine beliebige Anzahl der größten Werte eines EGARCH Prozesses machen. Darüber hinaus ermöglichen diese, den Pfad eines EGARCH Prozesses in der Nähe seiner extremen Ausschläge zu analysieren.

In dieser Diplomarbeit werden zum ersten Mal die beschriebenen extremwerttheoretischen Ergebnisse und Punktprozessresultate für unendliche EGARCH Prozesse hergeleitet. Dies ist deshalb von so großer Bedeutung, weil sich so genannte EGARCH(p, q) Prozesse - das sind Prozesse, in denen die Volatilität durch

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g(\epsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log \sigma_{t-j}^2, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

definiert wird, wobei noch einige technische Bedingungen an die Koeffizienten gestellt werden - nicht mehr in endliche, sondern nur in unendliche EGARCH Prozesse überführen lassen, sobald $q \geq 1$ gilt. In der Praxis wird jedoch überwiegend mit EGARCH(p, q) Prozessen gearbeitet. Endliche EGARCH Prozesse wurden hierbei bereits in [14] und [9] behandelt.

Um den EGARCH Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ verstehen zu können, muss man sich zunächst $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, einem *unendlichen Moving Average Prozess*, kurz MA(∞), aus (1.1) widmen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Innovationsfolge $(g(\epsilon_t))_{t\in\mathbb{Z}}$ *Gauß'sche Tails* hat. Dies bedeutet vor allem - neben anderen schwachen Voraussetzungen - dass die Funktion $\mathrm{P}(g(\epsilon_1) > t)$ sehr schnell für $t \to \infty$ abfällt. Eine Beispiel hierzu ist

$$\mathrm{P}(g(\epsilon_1) > t) \sim c \exp(-t^p), \qquad t \to \infty$$

mit $c > 0$ und $p > 1$.

Dies führt zunächst zur Betrachtung von MA(n) Prozessen mit $n \in \mathbb{N}$ im zweiten Kapitel. Dieses folgt in großen Teilen [1], worin ein für den weiteren Verlauf der Diplomarbeit essentieller Faltungssatz hergeleitet wurde. Einzig die Notation wurde überarbeitet und übersichtlicher gestaltet.

In [7] wurde der Übergang zu MA(∞) Prozessen mit leicht taillierten Innovationen gemacht, jedoch mit der Voraussetzung einer nicht negativen Koeffizientenfolge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dies ist jedoch beim EGARCH Prozess nicht vorausgesetzt. Außerdem interessiert vor allem der Prozess

$$\log X_t^2 = \log \sigma_t^2 + \log \epsilon_t^2 = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} c_i g(\epsilon_{t-i}) + \log \epsilon_t^2, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Dieser fällt jedoch nicht in die Klasse der MA(∞) Prozesse. Insofern basiert das dritte Kapitel auf [7]. Die Neuerung besteht darin, dass nun endliche Summen von unabhängigen unendlichen Moving Average Prozessen, welche mit $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet werden, betrachtet werden. Insbesondere die Wahrscheinlichkeit extremer Ereignisse von $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sowie der Anziehungsbereich von Y_0 werden aufgezeigt. Dies erlaubt die Betrachtung von $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit einer beliebigen Koeffizientenfolge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit Punktprozessresultaten für den im dritten Kapitel definierten Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Hierbei wird zunächst in die Theorie der Punktprozesse eingeführt. Daraufhin werden die elementaren Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u_n})$ für stationäre Prozesse sowie die daraus resultierenden Punktprozessresultate vorgestellt. Im dritten Abschnitt wird analysiert, unter welchen Voraussetzungen der Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u_n})$ erfüllt. Dies ist mathematisches Neuland, da dies bisher nur für unendliche Moving Average Prozesse getan wurde, jedoch nicht für endliche Summen derselben.

Im fünften und letzten Kapitel werden der EGARCH und der EGARCH(p, q) Prozess vorgestellt, sowie die Standardwahl für dieselben. Unter der Standardwahl und einigen weiteren Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, welcher eine endliche Summe von unendlichen Moving Average Prozessen ist, die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u_n})$ erfüllt, woraus die im vierten Kapitel vorgestellten Punktprozessresultate für diesen Prozess folgen. Dieselben Resultate können anhand einiger Transformationen auch für die Prozesse $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ nachgewiesen werden. Dies sind die zentralen - und zuvor noch nicht bewiesenen - Ergebnisse der Diplomarbeit. Zuletzt wird ein EGARCH$(1, 1)$ Prozess numerisch simuliert und graphisch dargestellt.

Kapitel 2

Dichten mit Gauß'schen Tails

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Faltung von Zufallsvariablen. Haben eine endliche Anzahl von unabhängigen Zufallsvariablen eine bestimmte Eigenschaft, nämlich *Gauß'sche Tails*, so bleibt diese Eigenschaft auch bei der Faltung dieser Zufallsvariablen erhalten. *Gauß'sche Tails* bedeutet hierbei vor allem - neben einigen sehr allgemein gehaltenen Voraussetzungen - leichte Tails. Das meint, dass für eine betrachtete Zufallsvariable X die Funktion $\mathrm{P}(X > t)$ sehr schnell für $t \to \infty$ abfällt. Eine Beispiel hierzu ist

$$\mathrm{P}(X > t) \sim c \exp(-t^p), \qquad t \to \infty$$

mit $c > 0$ und $p > 1$. Die Relation $\sim$ bedeutet hierbei, dass der Quotient der beiden Funktionen für $t \to \infty$ gegen 1 geht. Man nennt diese Eigenschaft *Tailäquivalenz*. Würde im beschriebenen Beispiel $0 < p < 1$ gelten, so spräche man bereits von mittelschweren Rändern.

Ein intuitiver Grund für die Bezeichnung *Gauß'sche Tails* liegt darin, dass die *exponentielle Familie* von Zufallsvariablen mit Gauß'sche Tails asymptotisch normalverteilt ist. Was das genau heißt, lernen wir in Abschnitt 2.3 kennen.

Die zentrale Aussage des Kapitels befindet sich in Satz 2.6, dessen Beweis jedoch kompliziert ist. Insofern beschäftigt sich der Rest des Kapitels vornehmlich mit der Zuarbeit auf diesen Beweis. Einige in dieser Zuarbeit getroffene Aussagen werden jedoch auch in späteren Abschnitten verwendet.

Das Kapitel hält sich eng an [1], die Beweise wurden jedoch oftmals - dem Stile einer Diplomarbeit entsprechend - umfangreicher und anschaulicher gestaltet. Die Notation wurde hierbei an [7] angepasst.

Definition 2.1 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist*

$$t_\infty := \sup(D)$$

der obere (bzw. rechte) Endpunkt *von ψ.*

Die folgenden beiden Konvergenzarten tauchen im Laufe der Diplomarbeit häufiger auf.

Definition 2.2 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ sowie $f_n : D \mapsto \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen.*

Dann konvergiert f_n lokal gleichmäßig *gegen f, falls für jedes $\boldsymbol{x} \in D$ eine nicht-triviale Umgebung $U_{\boldsymbol{x}}$ existiert, so dass f_n auf $U_{\boldsymbol{x}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

f_n konvergiert kompakt *bzw.* gleichmäßig auf beschränkten $\boldsymbol{x}$-Mengen *gegen f, falls f_n auf allen kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Korollar 2.3 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ sowie $f_n : D \mapsto \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen. Dann konvergiert f_n genau dann lokal gleichmäßig gegen f, wenn f_n kompakt gegen f konvergiert.*

Definition 2.4 *Eine Funktion $\sigma : D \mapsto \mathbb{R}$, die strikt positiv auf dem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ ist und den oberen Endpunkt t_∞ hat, heißt* selbst-vernachlässigend in $t_o \leq t_\infty$, *in Zeichen $\sigma \in SV(t_o)$, wenn*

$$\frac{\sigma(t + \sigma(t)x)}{\sigma(t)} \to 1, \qquad t \uparrow t_o$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen gilt und außerdem

$$t + \sigma(t)x < t_o$$

für $x \in \mathbb{R}$ und hinreichend große $t < t_o$.

Definition 2.5 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ in C^2 und strikt konvex auf dem Intervall $D \subset \mathbb{R}$. Sei außerdem $t_o \in D$ und $\sigma := 1/\sqrt{\psi''} \in SV(t_o)$. Eine Funktion $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$, welche in einer linken Umgebung von t_o strikt positiv ist, heißt* flach für ψ in t_o, *falls*

$$\frac{\nu(t + \sigma(t)x)}{\nu(t)} \to 1, \qquad t \uparrow t_o \tag{2.1}$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen.

Satz 2.6 *Seien $X_1, \ldots, X_d$ für $d \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit beschränkten Dichten $f_1, \ldots, f_d$, wobei $t_{i\infty} := \sup\{t \in \mathbb{R} : f_i(t) > 0\} > 0$ mit $i \in \{1, \ldots, d\}$. Seien weiter $\psi_i, \nu_i : [t_0, t_{i\infty}) \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Sämtliche Dichten f_i seien strikt positiv auf einer linken Umgebung von $t_{i\infty}$ und genügen dem Tailverhalten*

$$f_i(t) \sim \nu_i(t) \exp(-\psi_i(t)), \qquad t \uparrow t_{i\infty}, \tag{2.2}$$

wobei für jede Funktion ψ_i gelte, dass

$$\psi_i \textit{ ist } C^2,\ \psi_i'(t_0) = 0 \textit{ und } \psi_i'' \textit{ ist strikt positiv}, \tag{2.3}$$

woraus die strikte Konvexität von ψ_i folgt. Sei außerdem

$$\sigma_i := 1/\sqrt{\psi_i''} \textit{ selbst-vernachlässigend in } t_{i\infty}. \tag{2.4}$$

Die Funktionen ν_i genügen dem asymptotischen Verhalten

$$\frac{\nu_i(t + \sigma_i(t)x)}{\nu_i(t)} \to 1 \qquad t \uparrow t_{i\infty} \tag{2.5}$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen, seien also flach für ψ_i in $t_{i\infty}$. Außerdem sei angenommen, dass

$$\sup_t \psi_i'(t) =: \tau_\infty \leq \infty \text{ ist unabhängig von } i. \tag{2.6}$$

Dann gilt für die Dichte $f_0 := f_1 * \ldots * f_d$ von $X_0 := X_1 + \ldots + X_d$

$$f_0(t) \sim \nu_0(t) \exp(-\psi_0(t)), \qquad t \uparrow t_\infty := t_{1\infty} + \ldots + t_{d\infty},$$

wobei $\psi_0 : [t_u, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ mit $t_u \leq dt_0$ eine strikt konvexe C^2 Funktion und $\nu_0 : [t_u, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ flach für ψ_0 in t_∞ ist. Eine exakte Darstellung von ν_0 und ψ_0 kann über die inversen Funktionen $q_i = (\psi_i')^{\leftarrow}$ der streng monoton wachsenden Funktionen ψ_i' gegeben werden. Sei

$$q_0(\tau) := q_1(\tau) + \ldots + q_d(\tau), \qquad \tau \in [0, \tau_\infty).$$

Dann ist q_0 eine stetige, streng monoton wachsende Funktion, die $[0, \tau_\infty)$ auf $[dt_0, t_\infty)$ abbildet. Für $\tau \in [0, \tau_\infty)$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\psi_0(q_0(\tau)) &= \psi_1(q_1(\tau)) + \ldots + \psi_d(q_d(\tau)), && (2.7)\\
\sigma_0^2(q_0(\tau)) &= \sigma_1^2(q_1(\tau)) + \ldots + \sigma_d^2(q_d(\tau)), && (2.8)\\
\sqrt{2\pi}\sigma_0(q_0(\tau))\nu_0(q_0(\tau)) &= \prod_{1 \leq i \leq d} \left\{ \sqrt{2\pi}\sigma_i(q_i(\tau))\nu_i(q_i(\tau)) \right\} && (2.9)
\end{aligned}$$

sowie $q_0(\tau) = (\psi_0')^{\leftarrow}(\tau)$. Außerdem ist $\sigma_0^2(t) = 1/\psi_0''(t)$ für ein beliebiges $t \in [dt_0, t_\infty)$ und $\sup_t \psi_0'(t) = \tau_\infty$.

2.1 Selbstvernachlässigende Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften selbst-vernachlässigender Funktionen nach Definition 2.4 zusammen getragen, welche im weiteren Verlauf des Kapitels noch benötigt werden.

Die folgende Proposition zeigt unter Anderem auf, dass zu jeder selbst-vernachlässigenden Funktion eine tailäquivalente C^∞ Funktion existiert.

Proposition 2.7 *Seien $\sigma, \nu : D \mapsto \mathbb{R}$ strikt positiv auf einem Intervall $D \in \mathbb{R}$, jeweils mit oberem Endpunkt t_∞. Hierbei sei $\sigma \in SV(t_\infty)$. Die Funktion ν genüge*

$$\frac{\nu(t + \sigma(t)x)}{\nu(t)} \to 1, \qquad t \uparrow t_\infty \tag{2.10}$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen. Dann existiert für ein $D \ni s_1 < t_\infty$ eine C^∞ Funktion $\beta : [s_1, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$, so dass $\beta \sim \nu$ und (2.10) mit β anstelle von ν ebenfalls erfüllt wird. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sigma^n(t)\beta^{(n)}(t)}{\beta(t)} \to 0, \qquad t \uparrow t_\infty.$$

Beweis Sei $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ eine C^∞ Funktion mit den Eigenschaften $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f ist auf $[0,1]$ monoton wachsend und $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Sei nun die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch einen beliebig gewählten Startpunkt $s_1 < t_\infty$ und $s_{n+1} = s_n + \sigma(s_n)$ definiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma(t + \sigma(t)x)}{\sigma(t)} < 2 \tag{2.11}$$

für $|x| \leq 1$ und $t > s_1$, was wegen $\sigma \in SV(t_\infty)$ möglich ist. Dann gilt $s_n \to t_\infty$. Angenommen, dem wäre nicht so, so müsste $\sigma(s_n) = s_{n+1} - s_n \to 0$ und per Definitionem $\sigma(s_\infty) = c > 0$ gelten. Nun ergäbe (2.11) ausgewertet an s_∞, dass $\sigma > c/2$ auf dem Intervall $(s_\infty - c, s_\infty + c)$.

Definiere nun die Funktion β für $t \in [s_n, s_{n+1})$ durch

$$\beta(t) := \nu(s_n) + f\left(\frac{t - s_n}{s_{n+1} - s_n}\right)\{\nu(s_{n+1}) - \nu(s_n)\}.$$

Wenn man die rechte Seite durch $\nu(s_n)$ dividiert, so konvergiert diese unter Beachtung von (2.10) gleichmäßig gegen 1. Weil nun $\nu(s_n) \sim \nu(t)$ für $t \in [s_n, s_{n+1})$ wiederum nach (2.10) gilt, folgt $\beta \sim \nu$. Aufgrund der Definition von β wird (2.10) mit β anstelle von ν natürlich auch erfüllt. Weiterhin ist offensichtlich $\beta \in C^\infty$. Dann gilt für $t \in [s_n, s_{n+1})$ und $k \in \mathbb{N}$ wegen (2.10) sowie der Voraussetzungen an f und σ

$$\begin{aligned}
\sigma^k(t)\beta^{(k)}(t)/\beta(t) &= f^{(k)}\left(\frac{t - s_n}{s_{n+1} - s_n}\right)\frac{\nu(s_{n+1}) - \nu(s_n)}{(s_{n+1} - s_n)^k}\sigma(t)^k/\beta(t) \\
&\leq \max_{u\in[0,1)} f^{(k)}(u)\underbrace{\frac{\sigma(t)^k}{\sigma(s_n)^k}}_{\to 1}\underbrace{\frac{|\nu(s_{n+1}) - \nu(s_n)|}{\min\{\nu(s_n), \nu(s_{n+1})\}}}_{\to 0} \\
&\to 0, \qquad t \uparrow t_\infty,
\end{aligned}$$

da $f^{(k)}$ auf $[0,1]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. □

Nun einige hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, dass eine Funktion selbstvernachlässigend ist.

Proposition 2.8 *Sei $\sigma : D \mapsto \mathbb{R}$ strikt positiv auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und C^1 mit oberem Endpunkt t_∞. Falls $t_\infty = \infty$, so ist $\sigma \in SV(t_\infty)$, wenn*

$$\sigma'(t) \to 0, \qquad t \uparrow t_\infty. \tag{2.12}$$

Falls $t_\infty < \infty$, so ist $\sigma \in SV(t_\infty)$, wenn zusätzlich zu (2.12)

$$\frac{\sigma(t)}{t_\infty - t} \to 0, \qquad t \uparrow t_\infty \tag{2.13}$$

gilt.

Ist andererseits $\sigma \in SV(t_\infty)$ (nicht zwingend C^1), so existiert ein $s_1 \in D$ und eine C^1 Funktion $\tau : [s_1, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ mit $\tau \sim \sigma$ und $\tau \in SV(t_\infty)$, so dass $\tau'(t) \to 0$ für $t \uparrow t_\infty$ gilt. Falls $t_\infty < \infty$, so gelten zusätzlich $\tau(t), \sigma(t) = o(t_\infty - t)$ für $t \uparrow t_\infty$.

Beweis Sei zunächst $t_\infty = \infty$ und gelte (2.12). Sei nun $t_0 \in D$. Dann gilt

$$\frac{\sigma(t)}{t} = \frac{\int_{t_0}^{t} \sigma'(x)\mathrm{d}x + \sigma(t_0)}{t} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Daher gilt $\sigma(t) = o(t)$ für $t \to \infty$, woraus folgt, dass $t + \sigma(t)x \to \infty$ für $t \to \infty$ und $r \in \mathbb{R}$. Also existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi \in [0, 1]$, so dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sigma(t + \sigma(t)x)}{\sigma(t)} = 1 + \sigma'(t + \xi\sigma(t)x)x \to 1, \qquad t \to \infty.$$

Sei nun $t_\infty < \infty$ und gelten (2.12) und (2.13). Dann gilt das eben Gezeigte, falls $t + \sigma(t)x < t_\infty$ für $x \in \mathbb{R}$. Dies ist gerade wegen (2.13) der Fall.

Sei nun $\sigma \in SV(t_\infty)$. Konstruiere τ exakt so, wie β im Beweis von Proposition 2.7. Schließlich erfüllt ja σ die Voraussetzungen von Proposition 2.7. Also gilt $\tau \sim \sigma$ und für $t \in [s_n, s_{n+1})$

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= f'\left(\frac{t - s_n}{s_{n+1} - s_n}\right) \underbrace{\left(\frac{\sigma(s_n + \sigma(s_n))}{\sigma(s_n)} - 1\right)}_{\to 0} \\ &\to 0, \qquad t \uparrow t_\infty, \end{aligned}$$

weil f' auf $[0, 1]$ nach Voraussetzung beschränkt ist.

Sei nun zusätzlich $t_\infty < \infty$. Nach Definition 2.4 muss für jedes $x > 0$ und hinreichend große $t < t_\infty$

$$\begin{aligned} & t + \sigma(t)x < t_\infty, \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sigma(t)}{t_\infty - t} < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

gelten. Da x frei gewählt wird, folgt (2.13) für σ und aufgrund der Tailäquivalenz auch für τ. □

Korollar 2.9 *Sei $\sigma : D \mapsto \mathbb{R}$ strikt positiv auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ mit oberem Endpunkt $t_\infty \leq \infty$. σ ist genau dann selbst-vernachlässigend, wenn $s_1 \in D$ und eine C^1 Funktion $\tau : [s_1, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ existieren, so dass $\tau \in SV(t_\infty)$ und $\sigma \sim \tau$ sowie $\tau'(t) = o(1)$ für $t \uparrow t_\infty$.*

Die folgende Proposition ist insbesondere für die Summe *asymptotisch parabolischer* Funktionen, welche wir in Abschnitt 2.2 kennen lernen werden, wichtig.

Proposition 2.10 *Seien $\sigma_1 : D_1 \mapsto \mathbb{R}$ und $\sigma_2 : D_2 \mapsto \mathbb{R}$ strikt positiv auf Intervallen $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ mit dem selben oberen Endpunkt t_∞ und $\sigma_1, \sigma_2 \in SV(t_\infty)$. Setze $D = D_1 \cap D_2$. Dann ist die Funktion $\sigma : D \mapsto \mathbb{R}$, welche für $t \in D$ durch*

$$\sigma(t) := \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)^{-1/2}$$

definiert ist, ebenfalls in $SV(t_\infty)$.

Beweis Aufgrund der Definition von σ gilt $\sigma \le \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Daher gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ (von t abhängige) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1|, |x_2| \le |x|$, so dass für $t < t_\infty$

$$\sigma(t)x = \sigma_1(t)x_1 = \sigma_2(t)x_2$$

gilt. Außerdem gilt wegen $\sigma_1, \sigma_2 \in SV(t_\infty)$ für $t \uparrow t_\infty$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sigma_1^2(t+\sigma(t)x)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t+\sigma(t)x)}\right)^{-1} &= \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)}(1+o(1)) + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}(1+o(1))\right)^{-1} \\
&= \left(\left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)(1+o(1))\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)^{-1}(1+o(1))^{-1} \\
&\sim \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2(t+\sigma(t)x)}{\sigma^2(t)} &= \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1^2(t+\sigma(t)x)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t+\sigma(t)x)}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1^2(t+\sigma_1(t)x_1)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t+\sigma_2(t)x_2)}\right)^{-1} \\
&\sim \left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1^2(t)} + \frac{1}{\sigma_2^2(t)}\right)^{-1} \\
&= 1, \qquad t \uparrow t_\infty.
\end{aligned}$$

Zieht man nun die Wurzel, so folgt die Behauptung. □

2.2 Asymptotisch parabolische Funktionen

Der folgende Abschnitt analysiert die Eigenschaften so genannter *asymptotisch parabolischer* Funktionen. Diese sind für uns deshalb von solcher Bedeutung, weil sich herausstellen wird, dass in unserem zentralen Satz 2.6 die Funktionen ψ_i, mit denen ja die Dichten $f_i \sim \nu_i \mathrm{e}^{-\psi_i}$ verbunden sind, asymptotisch parabolisch sind.

Zunächst erst einmal die Definition von *asymptotisch parabolisch*.

Definition 2.11 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion und $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt ψ* asymptotisch parabolisch (AP)*, wenn ψ eine konvexe C^2-Funktion ist, so dass ψ'' strikt positiv und $\sigma := 1/\sqrt{\psi''}$ selbst-vernachlässigend im oberen Endpunkt t_∞ ist. σ heißt hierbei* Hilfs- *oder* Skalenfunktion*. Weiterhin definiert man $\tau_\infty := \sup_{t\in D} \psi'(t)$. Mit* $\mathrm{AP}(t_\infty)$ *bezeichnet man auch die Menge aller asymptotisch parabolischen Funktionen mit dem gemeinsamen Endpunkt t_∞.*

Bemerkung Mit der Notation von eben gilt $\tau_\infty = \psi'(t_\infty)$ aufgrund der Konvexität von ψ. Sollte $t_\infty \notin D$ gelten, so sei $\psi(t_\infty)$ durch den - wie sich herausstellen wird - uneigentlichen Grenzwert

$$\psi(t_\infty) := \lim_{h \downarrow 0} \psi(t_\infty - h)$$

definiert. Selbige Definition gelte für beliebige Ableitungen von ψ.

Es werden jetzt einige Eigenschaften der Klasse der AP Funktionen bezüglich Abgeschlossenheit vorgestellt.

Proposition 2.12 *Die Menge der AP Funktionen ist abgeschlossen bezüglich der Addition von Konstanten und linearen Funktionen: wenn $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit dem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ AP ist, so ist es auch $\psi + \alpha$, wobei $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ affin sei.*

Beweis Die Konvexität bleibt erhalten und die zweite Ableitung ändert sich nicht. □

Proposition 2.13 *Die Menge der AP Funktionen mit identischem oberen Endpunkt ist ein konvexer Kegel, dass heißt*

(a) *Wenn $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit dem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ asymptotisch parabolisch mit Skalenfunktion σ ist, so ist für jedes $c > 0$ die Funktion $c\psi$ AP mit Skalenfunktion $\sigma/\sqrt{c}$.*

(b) *Wenn $\psi_1 : D_1 \mapsto \mathbb{R}$ und $\psi_2 : D_2 \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervallen $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ jeweils in $AP(t_\infty)$ mit Skalenfunktionen σ_1, σ_2 sind, dann ist mit $D = D_1 \cap D_2$ die Funktion $\psi_1 + \psi_2 : D \mapsto \mathbb{R}$ ebenfalls in $AP(t_\infty)$ mit Skalenfunktion $\sigma = (\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2})^{-1/2}$.*

Beweis Nachdem die Menge der konvexen Funktionen ein konvexer Kegel ist, muss nur die Beschaffenheit der Skalenfunktion gezeigt werden.

(a) $1/\sqrt{(c\psi)''} = \sigma/\sqrt{c}$, was natürlich auch selbst-vernachlässigend ist.

(b) $1/\sqrt{(\psi_1 + \psi_2)''} = 1/\sqrt{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} = \sigma$. Nach Proposition 2.10 ist σ auch selbst-vernachlässigend. □

Von entscheidender Bedeutung in diesem Kapitel ist die so genannte *konvex Konjugierte* einer Funktion.

Definition 2.14 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion und $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die durch*

$$\psi^*(\tau) := \sup_{x \in D} (\tau x - \psi(x)), \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion ψ^* heißt konvex Konjugierte *von ψ.*

In der folgenden Proposition werden die für uns wichtigsten Eigenschaften der konvex Konjugierten zusammengefasst.

Proposition 2.15 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ asymptotisch parabolisch. Dann gilt für alle $\tau \in D$*

$$\psi^{**}(\tau) := (\psi^*)^*(\tau) = \psi(\tau).$$

Sei $\Delta := \psi'(D)$ und $\tau \in \Delta$. Dann gilt

$$\psi^*(\tau) = \tau(\psi')^{\leftarrow}(\tau) - \psi\left((\psi')^{\leftarrow}(\tau)\right)$$

und $(\psi^*)'(\tau) = (\psi')^{\leftarrow}(\tau)$.

Beweis Sei $\tau \in D$. Dann gilt

$$\psi^{**}(\tau) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(\tau x - \psi^*(x)) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(\tau x - \sup_{t \in D}(xt - \psi(t))).$$

Lässt man das innere Supremum weg und setzt dafür ein beliebiges t ein, so muss sich insgesamt etwas Größeres ergeben. Wählt man $t = \tau$, so kommt

$$\psi^{**}(\tau) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}}(\tau x - x\tau + \psi(\tau)) = \psi(\tau)$$

heraus. Lässt man das äußere Supremum weg und setzt dafür ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ein, so wird das Ergebnis kleiner. Wählt man $x = \psi'(\tau)$, so ergibt sich

$$\psi^{**}(\tau) \geq \tau\psi'(\tau) - \sup_{t \in D}(\underbrace{\psi'(\tau)t - \psi(t)}_{=:h(t)}).$$

Nun gilt weiter

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & \psi'(\tau) - \psi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \tau \\ h''(t) & = & -\psi''(t) < 0, \qquad \forall t \in D. \end{array}$$

Aufgrund dieser beiden Ergebnisse nimmt $h(t)$ sein Maximum an der Stelle $t = \tau$ an. Hieraus folgt

$$\tau\psi'(\tau) - \sup_{t \in D}(\psi'(\tau)t - \psi(t)) = \tau\psi'(\tau) - \tau\psi'(\tau) + \psi(\tau) = \psi(\tau).$$

Insgesamt folgt also $\psi^{**} \equiv \psi$ auf D.

Sei nun $\tau \in \Delta$. Mit der selben Rechnung wie eben stellt man fest, dass die Funktion $g(x) := \tau x - \psi(x)$, $x \in D$ ihr Maximum an der Stelle $x = (\psi')^{\leftarrow}(\tau) \in D$ annimmt. Es ergibt sich also

$$\psi^*(\tau) = \tau(\psi')^{\leftarrow}(\tau) - \psi\left((\psi')^{\leftarrow}(\tau)\right)$$

und weiter

$$\begin{array}{rcl} (\psi^*)'(\tau) & = & (\psi')^{\leftarrow}(\tau) + \tau((\psi')^{\leftarrow})'(\tau) - \psi'\left((\psi')^{\leftarrow}(\tau)\right)((\psi')^{\leftarrow})'(\tau) \\ & = & (\psi')^{\leftarrow}(\tau) + \tau((\psi')^{\leftarrow})'(\tau) - \tau((\psi')^{\leftarrow})'(\tau) \\ & = & (\psi')^{\leftarrow}(\tau). \end{array}$$

Dies entspricht der Behauptung. $\square$

Proposition 2.16 *Die Klasse der AP Funktionen ist abgeschlossen bezüglich Konjugation im folgenden Sinne: falls $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und oberem Endpunkt t_∞ in $AP(t_\infty)$ mit Skalenfunktion σ ist, so ist die Restriktion von ψ^* auf $\Delta := \psi'(D)$ in $AP(\tau_\infty)$ mit oberem Endpunkt $\tau_\infty = \psi'(t_\infty)$ und Skalenfunktion $s = 1/\sigma \circ q$, wobei die Funktion $q : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ durch $q(\tau) := (\psi^*)'(\tau) = (\psi')^{\leftarrow}(\tau)$ definiert wird.*

Beweis Für $\tau \in \Delta$ gilt einerseits

$$q'(\tau) = \left((\psi')^{\leftarrow}\right)'(\tau) = \frac{1}{\psi''\left((\psi')^{\leftarrow}(\tau)\right)} = \sigma^2(q(\tau))$$

und andererseits

$$q'(\tau) = (\psi^*)''(\tau) = \frac{1}{s(\tau)^2},$$

da die Skalenfunktion s von ψ^* ja gerade durch $s := \sqrt{1/(\psi^*)''}$ definiert wird. Dies beweist das behauptete Verhältnis von s zu σ. Weil $\Delta = \psi'(D)$ ein Intervall ist und ψ^* ja offensichtlich auf Δ eine strikt konvexe C^2 Funktion ist, zeigte dies außerdem, dass die Restriktion von ψ^* auf Δ AP mit Endpunkt $\tau_\infty = \psi'(t_\infty)$ ist, falls bewiesen werden kann, dass s selbst-vernachlässigend in τ_∞ ist. Man beachte nun, dass für ein $|\theta| \leq 1$ und $t \in D$, $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi'(t+\sigma(t)u) &= \psi'(t) + \sigma(t)u\psi''(t+\theta\sigma(t)u) \\ &= \psi'(t) + \frac{u}{\sigma(t)}\frac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(t+\theta\sigma(t)u)} \\ &= \psi'(t) + \frac{u}{\sigma(t)}(1+o(1)), \qquad t \uparrow t_\infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

gleichmäßig auf beschränkten u-Mengen gilt. Dies aufgrund der Tatsache, dass σ selbst-vernachlässigend ist. Definiere nun die Funktion $r_u : D \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$r_u(t,x) := u\frac{\sigma^2(t+\theta\sigma(t)x)}{\sigma^2(t)}.$$

Da $r_u(t,x) \to u$ für $t \to t_\infty$, existieren $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ für hinreichend große t (ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $t \geq t_0 \in D$), so dass $r_u(t,x_0) < x_0$ und außerdem $r_u(t,x_1) > x_1$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $v_{t,u} \in \mathbb{R}$, für dass

$$v_{t,u} \in (\min\{x_0,x_1\}, \max\{x_0,x_1\}), \quad r_u(t,v_{t,u}) = v_{t,u}, \qquad t \geq t_0$$

gilt. Definiere jetzt $v : [t_0, t_\infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$v(t,u) := v_{t,u} = u\frac{\sigma^2(t+\theta\sigma(t)v(t,u))}{\sigma^2(t)} \tag{2.15}$$

gilt. Weil σ selbst-vernachlässigend ist, gilt

$$\lim_{t\uparrow t_\infty} v(t,u) = u.$$

Setzt man nun $v(t,u)$ anstelle von u für $t \geq t_0$ und $u \in \mathbb{R}$ in (2.14) ein, so folgt mit (2.15)

$$\psi'(t+\sigma(t)v(t,u)) = \psi'(t) + \frac{u}{\sigma(t)}. \tag{2.16}$$

Seien nun $\tau = \psi'(t)$, $u \in \mathbb{R}$ und $t \geq t_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(\tau + us(\tau)) &= 1/\sigma((\psi')^{\leftarrow}(\tau + us(\tau))) \\ &= 1/\sigma((\psi')^{\leftarrow}(\psi'(t) + u/\sigma(t))) \\ &= 1/\sigma((\psi')^{\leftarrow}(\psi'(t + v(t,u)\sigma(t)))) \\ &= 1/\sigma(t + v(t,u)\sigma(t)) \sim 1/\sigma(t), \qquad t \uparrow t_\infty \\ &= s(\tau). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $s \in SV(\tau_\infty)$. □

Jetzt folgen einige nützliche asymptotische Eigenschaften von asymptotisch parabolischen Funktionen.

Proposition 2.17 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ asymptotisch parabolisch mit oberem Endpunkt t_∞. Dann ist $|\psi(t_\infty)| = \infty$.*

Beweis Dies ist offensichtlich, wenn $t_\infty = \infty$ und $\tau_\infty = \sup \psi'(t) \neq 0$. Es bleiben also noch die Fälle, in denen $t_\infty < \infty$ oder $t_\infty = \infty$ und $\tau_\infty = 0$.

Sei zunächst $t_\infty < \infty$. Nachdem $\sigma := 1/\sqrt{\psi''} \in SV(t_\infty)$, folgt aus Proposition 2.8, dass $\sigma(t) = o(t_\infty - t)$ für $t \uparrow t_\infty$. Folglich gilt für jedes $M > 1$ und hinreichend große t, dass $\psi''(t) > M/(t_\infty - t)^2$ und für $t \geq t_0$

$$\psi'(t) - \psi'(t_0) = \int_{t_0}^{t} \psi''(x)\mathrm{d}x > M\left(\frac{1}{t_\infty - t} - \frac{1}{t_\infty - t_0}\right), \tag{2.17}$$

falls t_0 ebenfalls groß genug ist. Hieraus folgt $\psi'(t) \to \infty$ für $t \uparrow t_\infty$ und weiter

$$\lim_{t \uparrow t_\infty} (t_\infty - t)\psi'(t) = \infty. \tag{2.18}$$

Sei nun oBdA $\psi'(t) > 0$ für $t \geq t_0$. Aufgrund der Konvexität von ψ und (2.18) gilt dann

$$\begin{aligned} \psi(t_\infty) &\geq \psi(t) + \psi'(t)(t_\infty - t) \\ &= \int_{t_0}^{t} \psi'(x)\mathrm{d}x + \psi(t_0) + \psi'(t)(t_\infty - t) \to \infty, \qquad t \uparrow t_\infty. \end{aligned}$$

Nun seien $t_\infty = \infty$ und $\tau_\infty = 0$. Weil nach Korollar 2.9 ein $s_1 \in D$ und eine Funktion $\gamma : [s_1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ mit $\gamma \in SV(\infty)$, $\gamma \sim \sigma$ und $\gamma \in C^1$ existieren, wobei $\gamma'(t) = o(1)$ für $t \to \infty$ gilt, existiert ein $t_0 > 0$, so dass

$$\frac{\sigma(t)}{t} \sim \frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\int_{t_0}^{t} \gamma'(x)\mathrm{d}x + \gamma(t_0)}{t} \to 0, \qquad t \to \infty,$$

folgt, also $\sigma(t) = o(t)$ für $t \to \infty$. Dieses impliziert für jedes $M > 0$ und hinreichend große t, dass $\psi''(t) > M/t^2$ und $-\int_t^\infty \psi''(x)\mathrm{d}x = \psi'(t) < -M/t$. Hieraus folgt das Grenzverhalten

$$\{\tau_\infty - \psi'(t)\}t \to \infty, \qquad t \to \infty. \tag{2.19}$$

Außerdem ergibt sich aus

$$\int_{t_0}^{t_\infty} \psi'(x)\mathrm{d}x < -M \int_{t_0}^{t_\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -M \log x|_{x=t_0}^{t_\infty}$$

für hinreichend große t_0, dass $\psi(t_\infty) = -\infty$. □

Korollar 2.18 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ asymptotisch parabolisch mit oberem Endpunkt t_∞. Wenn t_∞ endlich ist, so gelten $\tau_\infty = \infty$ und (2.18). Falls τ_∞ endlich ist, so gelten $t_\infty = \infty$ und (2.19).*

Beweis Sei zunächst $t_\infty < \infty$. Die Gültigkeit von (2.18) ergibt sich durch Multiplikation von (2.17) mit $t_\infty - t$. Außerdem muss wegen Proposition 2.17 $\tau_\infty = \infty$ sein.

Sei nun $\tau_\infty < \infty$. Da auch jetzt - auf dieselbe Weise, wie im Beweis von Proposition 2.17 - gezeigt werden kann, dass $\sigma(t) = o(t)$ für $t \to \infty$ gilt, folgt die Aussage aus dem zweiten Teil des Beweises von Proposition 2.17, unter Beachtung dass dann für beliebige $M > 0$ und $t \to \infty$

$$\tau_\infty - \psi'(t) = \int_t^\infty \psi''(x)\mathrm{d}x > \int_t^\infty \frac{M}{x^2}\mathrm{d}x = M/t$$

gilt. □

In den nächsten Propositionen wird die Klasse der für eine asymptotisch parabolische Funktion ψ flachen Funktionen genauer charakterisiert.

Proposition 2.19 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und oberem Endpunkt t_∞ asymptotisch parabolisch. Dann ist ψ'' flach für ψ in t_∞. Außerdem ist das Produkt zweier für ψ in t_∞ flachen Funktionen $\nu_1 : D_1 \mapsto \mathbb{R}$ und $\nu_2 : \mathrm{D}_2 \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervallen $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ flach für ψ in t_∞.*

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}$. Per Definitionem ist $\sigma = 1/\sqrt{\psi''}$ flach für ψ in t_∞. Nun gilt

$$\frac{\psi''(t + \sigma(t)x)}{\psi''(t)} = \frac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(t + \sigma(t)x)} \to 1, \qquad t \uparrow t_\infty,$$

weshalb auch ψ'' flach für ψ in t_∞ ist. Weiter gilt

$$\frac{(\nu_1 \cdot \nu_2)(t + \sigma(t)x)}{(\nu_1 \cdot \nu_2)(t)} = \frac{\nu_1(t + \sigma(t)x)}{\nu_1(t)} \frac{\nu_2(t + \sigma(t)x)}{\nu_2(t)} \to 1, \qquad t \uparrow t_\infty,$$

weshalb das Produkt zweier flacher Funktionen wieder flach für ψ in t_∞ ist. □

Es folgt eine für uns wichtige Definitionen.

Definition 2.20 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ in $AP(t_\infty)$ mit Skalenfunktion σ. Zu einer Funktion $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ sei $\hat{\nu} : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ mit $\Delta := \psi'(D)$ durch*

$$\hat{\nu}(\tau) := \nu\left((\psi')^{\leftarrow}(\tau)\right), \qquad \tau \in \Delta \tag{2.20}$$

definiert.

Der Nutzen der Definition 2.20 erschließt sich in der nachfolgenden Proposition.

Proposition 2.21 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und oberem Endpunkt t_∞ in $AP(t_\infty)$. Sei $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ strikt positiv und $\hat{\nu} : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ wie in (2.20) mit $\Delta := \psi'(D)$. Wenn ν für ψ in t_∞ flach ist, so ist $\hat{\nu}$ flach in τ_∞ für ψ^* eingeschränkt auf Δ.*

Beweis Seien σ Skalenfunktion von ψ sowie s Skalenfunktion von ψ^* eingeschränkt auf Δ. Dann existieren nach dem Beweis von Proposition 2.16 und (2.16) ein $t_0 \in D$ und eine Funktion $v : [t_0, t_\infty) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, so dass für $t \geq t_0$, $\tau = \psi'(t)$ und $u \in \mathbb{R}$

$$\tau + us(\tau) = \psi'(t + v(u,t)\sigma(t)) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{t \uparrow t_\infty} v(t,u) = u.$$

Hieraus und anhand von (2.20) folgt mit $\tau = \psi'(t)$ und $t \uparrow t_\infty$

$$\hat{\nu}(\tau + us(\tau)) = \nu(t + v(u,t)\sigma(t)) \sim \nu(t) = \hat{\nu}(\tau).$$

Wegen $\tau_\infty = \psi'(t_\infty)$ folgt die Behauptung. □

Die nächste Proposition beschreibt die Eigenschaften *asymptotisch parabolisch* und *flach* genauer.

Proposition 2.22 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ asymptotisch parabolisch mit Endpunkt t_∞ und Skalenfunktion σ, und $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ sei flach für ψ in t_∞. Seien außerdem $D \ni t_0 < t_\infty$, $M > 1$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert $t_1 \in (t_0, t_\infty)$, so dass für alle $t \in (t_1, t_\infty)$*

$$J_t := [t - M\sigma(t), t + M\sigma(t)] \subset (t_0, t_\infty),$$

$$1 - \epsilon < \frac{\nu(t + u\sigma(t))}{\nu(t)} < 1 + \epsilon, \qquad |u| \leq M,$$

$$|\varphi_t(u) - \frac{1}{2}u^2| \leq \frac{1}{2}\epsilon u^2, \qquad |u| \leq M$$

gilt, wobei $\varphi_t : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ für $t \in (t_1, t_\infty)$ die normalisierte Funktion

$$\varphi_t(u) := \psi(t + u\sigma(t)) - \psi(t) - u\sigma(t)\psi'(t)$$

von ψ ist. Speziell gelten

$$\varphi_t(0) = \varphi_t'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad {\varphi_t}''(0) = 1.$$

Beweis Die erste Aussage folgt aus der Definition 2.4 der selbst-vernachlässigenden Funktionen. Die zweite Aussage folgt aus der Definition 2.5 der für ψ in t_∞ flachen Funktionen. Insbesondere gilt sie für die nach Proposition 2.19 für ψ in t_∞ flache Funktion ψ''. Das heißt, dass

$$|{\varphi_t}''(u) - 1| = \left| \frac{\psi''(t + \sigma(t)u)}{\psi''(t)} - 1 \right| < \epsilon, \qquad |u| \leq M.$$

Hieraus ergibt sich

$$|\varphi_t(u) - \frac{1}{2}u^2| \le \int_0^u \int_0^t |\varphi_t{}''(x) - 1|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_0^u \int_0^t \epsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\epsilon u^2, \qquad |u| \le M.$$

Hierbei wurde mit einbezogen, dass $\varphi_t(0) = \varphi_t'(0) = 0$, welches sich durch reines Einsetzen ergibt. □

Es folgt eine Aussage zum Tailverhalten der Ableitungen asymptotisch parabolischer Funktionen.

Proposition 2.23 *Sei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und rechtem Endpunkt t_∞ asymptotisch parabolisch mit Skalenfunktion σ. Außerdem sei $\psi'(t) > 0$ für $t \ge t_0 \in D$. Dann ist ψ' für ψ in t_∞ flach und es gilt*

$$\lim_{t \to t_\infty} \psi'(t)\sigma(t) = \infty. \tag{2.21}$$

Beweis Nach Voraussetzung ist ψ' monoton wachsend. Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Weil $\sigma \in SV(t_\infty)$, folgt

$$\begin{aligned}
\psi'(t + \sigma(t)x) - \psi'(t) &= \int_0^x \psi''(t + \sigma(t)y)\sigma(t)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \frac{\sigma(t)}{\sigma^2(t + \sigma(t)y)}\mathrm{d}y \\
&\sim \int_0^x \frac{\sigma(t)}{\sigma^2(t)}\mathrm{d}y = \frac{x}{\sigma(t)}, \qquad t \uparrow t_\infty.
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für $t \uparrow t_\infty$

$$\frac{\psi'(t + \sigma(t)x)}{\psi'(t)} - 1 \sim \frac{x}{\psi'(t)\sigma(t)}.$$

Nun muss nur noch $\psi'(t)\sigma(t) \to \infty$ für $t \uparrow t_\infty$ gezeigt werden. Nun existiert aber für jedes $M > 1$ nach Proposition 2.22 ein $t_1 \in D$ so dass $t - \sigma(t)M > t_0$ für $t > t_1$. Daher gilt nach Voraussetzung für $t > t_1$

$$\begin{aligned}
\psi'(t)\sigma(t) &\ge \{\psi'(t) - \psi'(t - \sigma(t)M)\}\sigma(t) \\
&= \sigma(t) \int_{t - \sigma(t)M}^t \psi''(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-M}^0 \frac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(t + \sigma(t)u)}\mathrm{d}u \to M, \qquad t \uparrow t_\infty.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\liminf_{t \uparrow t_\infty} \psi'(t)\sigma(t) \ge M$$

für jedes M, woraus (2.21) folgt. □

Nachfolgend werden die Voraussetzungen von Satz 2.6 mit Hilfe unseres neuen Wissens über asymptotisch parabolische Funktionen genauer analysiert.

Proposition 2.24 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.6 erfüllt. Dann ist* $\tau_\infty > 0$ *und* $\psi_i(t_{i\infty}) = \infty$ *für* $i \in \{1, \ldots, d\}$. *Falls* $t_{i\infty} < \infty$, *so ist* $f_i(t) = o(t_{i\infty} - t)^n$ *für* $t \uparrow t_{i\infty}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$. *Falls* $\tau_\infty < \infty$, *so gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$t^{-n} \mathrm{e}^{\tau_\infty t} f_i(t) \to \infty, \qquad t \to \infty.$$

Weiterhin existieren für jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$ *ein* $s_{i1} \in (t_0, t_{i\infty})$ *und eine* C^∞ *Funktion* $\beta_i : [s_{i1}, t_{i\infty}) \mapsto \mathbb{R}$, *die für* ψ_i *in* $t_{i\infty}$ *flach ist und für die* $\beta_i \sim \nu_i$ *gilt, so dass die Funktion* $\varphi_i : [s_{i1}, t_{i\infty}) \mapsto \mathbb{R}$, *definiert durch*

$$\varphi_i(t) := \psi_i(t) - \log \beta_i(t),$$

asymptotisch parabolisch mit oberem Endpunkt $t_{i\infty}$ *ist und außerdem* $1/\varphi_i''(t) \sim \sigma_i^2(t)$ *für* $t \uparrow t_{i\infty}$ *mit* $\sup_t \varphi_i'(t) = \tau_\infty$.

Beweis Nach Proposition 2.17 ist $|\psi_i(t_\infty)| = \infty$. Weil die f_i Dichten sind und $f_i \sim \nu_i \mathrm{e}^{-\psi_i}$ vorausgesetzt ist, muss $\psi_i(t_{i\infty}) = \infty$ und damit nach Proposition 2.17 $\tau_\infty > 0$ gelten.

Sei nun $t_{i\infty} < \infty$ für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, d\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $t \uparrow t_{i\infty}$ und beliebiges $t_0 < t$

$$\begin{aligned}
(t_{i\infty} - t)^{-n} \nu_i(t) \exp(-\psi_i(t)) &= \nu_i(t) \exp(-\psi_i(t) - n \log(t_{i\infty} - t)) \\
&= \nu_i(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \left(-\psi_i'(x) + \frac{n}{t_{i\infty} - x} \right) \mathrm{d}x - C \right) \\
&= \nu_i(t) \exp\left(- \int_{t_0}^t \frac{1}{t_{i\infty} - x} \underbrace{(\psi_i'(x)(t_{i\infty} - x) - n)}_{\to\infty \text{ wegen } (2.18)} \mathrm{d}x - C \right) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

wobei $C := \psi_i(t_0) + n \log(t_{i\infty} - t_0)$. Wegen der Tailäquivalenz der f_i folgt die Behauptung.

Sei nun $\tau_\infty < \infty$ für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, d\}$ und weiterhin $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt implizit $t_{i\infty} = \infty$ aus Proposition 2.17 und es gilt für $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
t^{-n} \mathrm{e}^{\tau_\infty t} \nu_i(t) \exp(-\psi_i(t)) &= \nu_i(t) \exp(-\psi_i(t) + \tau_\infty t - n \log t) \\
&= \nu_i(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \left(-\psi_i'(x) + \tau_\infty - \frac{n}{x} \right) \mathrm{d}x - C \right) \\
&= \nu_i(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{x} \underbrace{((\tau_\infty - \psi_i'(x))x - n)}_{\to\infty \text{ wegen } (2.19)} \mathrm{d}x - C \right) \\
&\to \infty,
\end{aligned}$$

wobei $C := \psi_i(t_0) - \tau_\infty t_0 + n \log t_0$.

Konstruiere β_i für $i \in \{1, \ldots, d\}$ zunächst wie in Proposition 2.7. Dann ist β_i flach für ψ_i in $t_{i\infty}$ mit $\beta_i \sim \nu_i$ und es gilt ebenfalls nach Proposition 2.7 für $t \geq s_1$

$$\varphi_i''(t) = \psi_i''(t) - \frac{\beta_i''(t)}{\beta_i(t)} + \frac{(\beta_i')^2(t)}{\beta_i^2(t)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_i''(t) - \frac{\overbrace{\sigma_i^2(t)\beta_i''(t)/\beta_i(t)}^{\to 0} - (\overbrace{\sigma_i(t)\beta_i'(t)/\beta_i(t)}^{\to 0})^2}{\sigma_i^2(t)} \\
&\to \psi_i''(t), \qquad t \uparrow t_{i\infty}.
\end{aligned}
$$

Daher und aufgrund der strikten Konvexität von ψ_i existiert ein $t_i \in [s_{i1}, t_{i\infty})$, so dass $\varphi_i''(t) > 0$ für $t \geq t_i$. Sei oBdA $s_{i1} = t_i$. Nun gilt zusätzlich nach Proposition 2.7 für $t \geq s_1$

$$
\begin{aligned}
\varphi_i'(t) &= \psi_i'(t) - \frac{\overbrace{\sigma_i(t)\beta_i'(t)/\beta_i(t)}^{\to 0}}{\sigma_i(t)} \\
&\to \tau_\infty, \qquad t \uparrow t_{i\infty}.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Aufgrund der Konstruktion ist φ_i AP mit oberem Endpunkt $t_{i\infty}$ und $1/\varphi_i''(t) \sim \sigma_i^2(t)$ für $t \uparrow t_{i\infty}$. Daher und wegen (2.22) ist $\sup_t \varphi_i'(t) = \tau_\infty$. □

Die letzte Proposition dieses Abschnittes widmet sich der Frage, wann die momentenerzeugende Funktion von Dichten, wie sie im Satz 2.6 vorkommen, endlich ist und wann nicht.

Proposition 2.25 *Die Zufallsvariable X habe die Dichte $f \sim \nu e^{-\psi}$, wobei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und oberem Endpunkt t_∞ asymptotisch parabolisch mit Skalenfunktion σ ist und $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ flach für ψ in t_∞. Sei $\tau_\infty > 0$. Dann gilt*

$$\Phi(\tau) := \mathrm{E}e^{\tau X} < \infty, \qquad 0 \leq \tau < \tau_\infty.$$

Falls $\tau_\infty < \infty$, so ist $\Phi(\tau_\infty) = \infty$.

Beweis Sei ν oBdA C^2, ansonsten konstruiere man eine Funktion $\beta : [s_1, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ für ein $s_1 \in D$ wie im Beweis von Proposition 2.7, betrachte dann β anstelle von ν und verwende die Tailäquivalenz von β und ν.

Zunächst sei angenommen, dass $\tau_\infty < \infty$ und $\tau < \tau_\infty$. Es folgt $t_\infty = \infty$, was man anhand des ersten Teils des Beweises von Proposition 2.17 erkennen kann. Außerdem folgt nach (2.21) $\sigma(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, weshalb $(\log \nu)'(t) \to 0$ wiederum für $t \to \infty$ nach Proposition 2.7 folgt. Deshalb existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass

$$(\log \nu)'(t) < \epsilon, \qquad \forall t > t_0.$$

Wähle nun $\epsilon > 0$ so, dass $\tau + 3\epsilon < \tau_\infty$. Dann gibt es ein $t_1 > 0$, so dass

$$\psi'(t) > \tau + 3\epsilon, \qquad \forall t > t_1.$$

Wegen der letzten beiden Ungleichungen gilt

$$\psi'(t) > \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log \nu(t) + (\tau + \epsilon)t) + \epsilon, \qquad \forall t > \max\{t_0, t_1\} =: t_2. \tag{2.23}$$

Weiter existiert wegen $t_\infty = \infty$ ein $t_3 > t_2$, so dass

$$\epsilon(t - t_2) - \log \nu(t_2) - (\tau + \epsilon)t_2 + \psi(t_2) > 0, \qquad \forall t > t_3$$

gilt und damit aufgrund von (2.23)

$$\psi(t) = \int_{t_2}^{t} \psi'(x)\mathrm{d}x + \psi(t_2) > \log \nu(t) + (\tau + \epsilon)t, \qquad \forall t > t_3. \tag{2.24}$$

Definiere nun $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) := \psi(t) - \log \nu(t)$. Wegen (2.24) folgt

$$\varphi(t) - \tau t > \epsilon t, \qquad \forall t > t_3,$$

weshalb nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz das Integral $\int_{t_3}^{\infty} \exp(\tau t - \varphi(t))\mathrm{d}t$ konvergiert. Nun gilt ja

$$\Phi(\tau) \leq \mathrm{e}^{\tau t_3} + \int_{t_3}^{\infty} \mathrm{e}^{\tau t} f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\tau t_3} + \int_{t_3}^{\infty} \exp(\tau t + \log f(t))\mathrm{d}t$$

Aus $-\varphi(t) \sim \log f(t)$ für $t \to \infty$ folgt die Endlichkeit von $\Phi(\tau)$.

Sei nun $\tau_\infty = \infty$. Zu beachten ist, dass nun keine Aussage über t_∞ möglich ist, was aber nicht stört. Sei zunächst $t_\infty = \infty$. Dann gibt es nach Proposition 2.7 für jedes $\epsilon > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass

$$(\log \nu)'(t) < \epsilon/\sigma(t), \qquad \forall t > t_0.$$

Nun ist noch zu zeigen, dass es ein $t_1 > 0$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} & \psi'(t) > \tau + 2\epsilon + \epsilon/\sigma(t), \qquad \forall t > t_1, \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma(t)\psi'(t) > \sigma(t)(\tau + 2\epsilon) + \epsilon. \end{aligned}$$

Sollte nicht $\sigma(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gelten, so ist die obere Ungleichung wegen $\tau_\infty = \infty$ korrekt. Falls doch, so konvergiert die rechte Seite der unteren Ungleichung gegen ϵ, die linke divergiert jedoch nach Proposition 2.23 gegen ∞. Daraus folgt (2.23) und hieraus wiederum die Endlichkeit von $\Phi(\tau)$. Für $t_\infty < \infty$ beachte man, dass für $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{t_\infty} \mathrm{e}^{\tau t} f(t)\mathrm{d}t < e^{\tau t_\infty} < \infty$$

gilt.

Sei nun wieder $\tau_\infty < \infty$. Dann gelten $t_\infty = \infty$ und (2.19) nach Korollar 2.18. Aufgrund der Konvexität von ψ existiert ein $t_0 \in D$, so dass

$$\psi(t) \leq (t - t_0)\psi'(t) + \psi(t_0), \qquad t > t_0.$$

Hieraus folgt für $t > t_0$

$$\tau_\infty t - \varphi(t) \geq \{\tau_\infty - \psi'(t)\}t + t_0\psi'(t) - \psi(t_0) + \log \nu(t).$$

Falls nun gezeigt werden kann, dass $\log \nu(t) = o(\{\tau_\infty - \psi'(t)\}t)$ für $t \to \infty$, so folgt mit (2.19), dass

$$\tau_\infty t - \varphi(t) \to \infty, \qquad t \to \infty. \tag{2.25}$$

Falls nun nicht $|\log \nu(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ gilt, so ist dies klar. Falls doch, so wendet man die Regel von L'Hospital an, aus welcher

$$\begin{aligned}\frac{\log \nu(t)}{\{\tau_\infty - \psi'(t)\}t} &\sim \frac{\nu'(t)}{\nu(t)(\underbrace{\tau_\infty - \psi'(t)}_{\to 0} - t\psi''(t))} \\ &\sim -\frac{\nu'(t)\sigma^2(t)}{\nu(t)t} = -\underbrace{\frac{\nu'(t)\sigma(t)}{\nu(t)}}_{\to 0}\underbrace{\frac{\sigma(t)}{t}}_{\to 0} \\ &\to 0, \qquad t \to \infty\end{aligned}$$

nach Proposition 2.7 und dem Beweis von Proposition 2.17 folgt. Dies ergibt (2.25). Weil nun einerseits

$$\Phi(\tau_\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\tau_\infty t + \log f(t)} \mathrm{d}t$$

gilt und andererseits $\log f(t) \sim -\varphi(t)$ für $t \to \infty$, ist $\Phi(\tau_\infty) = \infty$. □

2.3 Asymptotische Normalität der exponentiellen Familie

Im folgenden Abschnitt wird das Konvergenz-Konzept der *asymptotischen Normalität mit exponentiellen Tails* vorgestellt. Weiterhin wird die *exponentielle Familie* eingeführt. Wie sich herausstellen wird, ist unter den Voraussetzungen von Satz 2.6 die exponentielle Familie einer Zufallsvariable X_i asymptotisch normal mit exponentiellen Tails. Daher ist dieses Konvergenz-Konzept für den Beweis von Satz 2.6 elementar.

Definition 2.26 *Eine Folge von Zufallsvektoren $\boldsymbol{X}_n \in \mathbb{R}^d$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt* asymptotisch normal (AN)*, wenn eine Folge affiner Transformationen $\alpha_n : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, definiert durch $\alpha_n(\boldsymbol{x}) := A_n^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n)$ existiert, wobei $A_n : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ eine Folge invertierbarer linearer Abbildungen ist und $\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^d$, so dass*

$$\alpha_n(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{U}.$$

Hierbei ist der Zufallsvektor $\boldsymbol{U}$ standardnormalverteilt. Die Folge $(\boldsymbol{X}_n)$ ist asymptotisch normal mit exponentiellen Tails (ANET)*, falls zusätzlich die Vektoren $\alpha_n(\boldsymbol{X}_n)$ Dichten g_n haben, welche folgende Bedingung erfüllen: für jedes $\epsilon > 0$ existiert $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$*

$$|g_n(\boldsymbol{x}) - \varphi_d(\boldsymbol{x})| < \epsilon \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.26}$$

wobei φ_d die Dichte der Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^d$ ist und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm. In diesem Sinne sagt man auch, die Folge von Dichten $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ANET.

Der Sinn hinter der Bezeichnung *mit exponentiellen Tails* erschließt sich durch die folgende Proposition.

Proposition 2.27 *Eine Folge von beschränkten Dichten $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann ANET, wenn*

$$g_n(\boldsymbol{x}) \to \varphi_d(\boldsymbol{x}), \qquad n \to \infty \tag{2.27}$$

lokal gleichmäßig für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ ein Index $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sowie $M > 1$ existieren, so dass

$$g_n(\boldsymbol{x}) < \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}, \qquad \|\boldsymbol{x}\| \geq M,\ n \geq n_\epsilon. \tag{2.28}$$

Beweis Sei zunächst die Folge von Dichten $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ANET. Dann folgt (2.27) aus (2.26). Für den Beweis von (2.28) sei oBdA $g_n(\boldsymbol{x}) > \varphi_d(\boldsymbol{x})$. Setze $M > 4/\epsilon$. Dann gilt wegen (2.26) für $n \geq n_\epsilon$ und $\|\boldsymbol{x}\| \geq M$

$$\begin{aligned} g_n(\boldsymbol{x}) &< \epsilon\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon} + \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} \\ &< \epsilon\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon} + \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} \\ &\leq \epsilon\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon} + \left(\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}\right)^2 \\ &< \epsilon\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon} \\ &< \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}, \end{aligned}$$

wobei die Tatsache, dass $t^2 < t/2$ für $0 < t < 1/2$ gilt, unter der Annahme, das ϵ hierfür klein genug gewählt wurde, mit einbezogen wurde.

Nun seien die Gleichungen (2.27) und (2.28) erfüllt. Aus (2.27) und der Beschaffenheit der Dichte der Standardnormalverteilung folgen, dass $g_n(\boldsymbol{x}) > 0$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Daraus folgt

$$\frac{\varphi_d(\boldsymbol{x})}{g_n(\boldsymbol{x})} \to 1, \qquad n \to \infty,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Dies ergibt, dass für sämtliche $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|g_n(\boldsymbol{x}) - \varphi_d(\boldsymbol{x})| = \left|\frac{g_n(\boldsymbol{x}) - \varphi_d(\boldsymbol{x})}{g_n(\boldsymbol{x})}\right| |g_n(\boldsymbol{x})| < \epsilon|g_n(\boldsymbol{x})|, \qquad n \geq N,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.29}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig klein. Definiere

$$\tilde{\epsilon} := \epsilon\mathrm{e}^{-M/\epsilon} / \max_{\substack{|\boldsymbol{x}| \leq M \\ n\in\mathbb{N}}} g_n(\boldsymbol{x}),$$

wobei M die Konstante aus (2.28) bezogen auf ϵ ist. Nach (2.29) existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $|\boldsymbol{x}| \leq M$ und $n \geq N$

$$|g_n(\boldsymbol{x}) - \varphi_d(\boldsymbol{x})| < \tilde{\epsilon}|g_n(\boldsymbol{x})| \leq \epsilon\mathrm{e}^{-M/\epsilon} \leq \epsilon\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|/\epsilon}$$

gilt. Dies zusammen mit (2.28) ergibt (2.26). □

Die nächste Proposition zeigt, dass die ANET Eigenschaft unter affinen Surjektionen beibehalten bleibt.

Proposition 2.28 *Die Folge von Zufallsvektoren $\boldsymbol{X}_n \in \mathbb{R}^d$ für $n \in \mathbb{N}$ mit beschränkten Dichten sei ANET. Sei $\gamma_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit $m \leq d$ eine Folge affiner Surjektionen, so dass*

$$\boldsymbol{W}_n := \gamma_n(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{W}, \qquad n \to \infty,$$

wobei $\boldsymbol{W}$ ein m-dimensional normalverteilter Zufallsvektor mit nicht-singulärer Kovarianzmatrix sei. Dann ist die Folge $(\boldsymbol{W}_n)$ ANET. Überdies sind die bedingten Dichten $f_{n|\boldsymbol{w}}$ von $\boldsymbol{X}_n$, gegeben, dass $\boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{w}$ ist, ANET.

Beweis Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^m$ standardnormalverteilt ist,

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^d, \qquad n \to \infty,$$

wobei $\boldsymbol{U}$ ebenfalls standardnormalverteilt ist und γ_n die Projektion auf die ersten m Koordination ist. Dies ist aufgrund der Definition 2.26 der ANET Konvergenz möglich. $\boldsymbol{X}_n$ habe die Dichte f_n, außerdem seien $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d-m}$. $\gamma_n(\boldsymbol{X}_n)$ habe die Dichte g_n, für die

$$g_n(\boldsymbol{w}) := \int_{\mathbb{R}^{d-m}} f_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

gilt. Die Dichte $f_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $\varphi_d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$, die Dichte der Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^d$. Daher konvergiert $g_n(\boldsymbol{w})$ lokal gleichmäßig gegen $\varphi_m(\boldsymbol{w})$. Sei nun $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach (2.28) ein $M > 1$, so dass für $\|\boldsymbol{w}\| \geq M$ und $n \geq n_\epsilon$

$$\begin{aligned}
g_n(\boldsymbol{w}) &< \int_{\mathbb{R}^{d-m}} \mathrm{e}^{-\|(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\|/\epsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \leq \int_{\mathbb{R}^{d-m}} \mathrm{e}^{-(\|\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{y}\|)/\epsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{w}\|/\epsilon} \int_{\mathbb{R}^{d-m}} \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{y}\|/\epsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{w}\|/\epsilon} (d-m-1)! \epsilon^{d-m} \frac{2\pi^{(d-m)/2}}{\Gamma((d-m)/2)} \\
&< \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{w}\|/\epsilon}
\end{aligned}$$

für hinreichend kleine ϵ. Somit ist $\boldsymbol{W}_n$ ANET. Nun ist

$$f_{n|\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) = \frac{f_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})}{\int_{\mathbb{R}^{d-m}} f_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d-m}. \tag{2.30}$$

Sei $\boldsymbol{w}$ auf die abgeschlossene Kugel mit Radius $r > 0$ um den Ursprung in $\mathbb{R}^m$ beschränkt. Deshalb folgt

$$f_{n|\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) \to \frac{\varphi_d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})}{\varphi_m(\boldsymbol{w})} = \varphi_{d-m}(\boldsymbol{y}), \qquad n \to \infty,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d-m},$$

wodurch (2.27) aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Zähler und Nenner erfüllt wird. Weil der Nenner von (2.30) wegen der Beschränktheit von $\boldsymbol{w}$ größer als eine Konstante $C > 0$ ist, reicht es zu zeigen, dass für $\epsilon > 0$ eine Konstante $r' > 0$ existiert, so dass für $n \geq n_\epsilon$

$$f_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \leq C\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{y}\|/\epsilon}, \qquad \|\boldsymbol{w}\| \leq r, \|\boldsymbol{y}\| \geq r'.$$

Dies ist jedoch der Fall, da ein $\epsilon' > 0$ beliebig kleiner gewählt werden kann, f_n ANET ist und ein $r'' > 0$ existiert, so dass

$$\{\|\boldsymbol{w}\| \leq r, \|\boldsymbol{y}\| \geq r'\} \subset \{\|(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})\| \geq r''\}.$$

Da $r > 0$ frei gewählt werden kann, folgt die Aussage. □

Die folgende Proposition wird für den Beweis von Satz 2.6 benötigt.

Proposition 2.29 *Sei $\boldsymbol{X}_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvektoren mit Dichten f_n und unabhängigen Randverteilungen, also $f_n(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^d f_{n,i}(x_i)$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und $f_{n,i}$ Dichte von $X_{n,i}$. Außerdem seien die $f_{n,i}$ beschränkt. Dann ist $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann ANET, wenn sämtliche $(X_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ ANET sind.*

Beweis Die eine Richtung folgt aus Proposition 2.28. Seien jetzt also alle $(X_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ ANET. Dann gilt $f_{n,i}(x) \to \varphi(x)$ lokal gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$, wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung sei. Dann gilt für $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f_n(\boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^d f_{n,i}(x_i) \\ &\to \prod_{i=1}^d (2\pi)^{-1/2} \exp(-x_i^2/2) \\ &= (2\pi)^{-d/2} \exp(-\|\boldsymbol{x}\|^2/2), \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

Weil die Randverteilungen lokal gleichmäßig konvergieren, konvergieren auch die f_n lokal gleichmäßig. Damit gilt also (2.27). Sei nun $\epsilon > 0$ und $\tilde{\epsilon} = \epsilon/2d$. Wähle nun $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ und $M > 1$ so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$, $|x| \geq M$ und $n \geq n_\epsilon$

$$f_{n,i}(x) \leq \mathrm{e}^{-|x|/\tilde{\epsilon}}$$

gilt. Setze nun

$$C_n := \max_{\substack{|x|\leq M \\ i\in\{1,\ldots,d\}}} f_{n,i}(x), \qquad C := \max_{n\geq n_\epsilon} C_n.$$

Nach Voraussetzung ist $C < \infty$. Für $\|\boldsymbol{x}\| \geq dM$ ist mindestens ein $|x_i| \geq \|\boldsymbol{x}\|/d \geq M$. Sei nun $\|\boldsymbol{x}\| \geq \max\{dM, 2d\tilde{\epsilon}(d-1)\log C\}$, $n \geq n_\epsilon$ sowie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|x_i| = \max_{k\in\{1,\ldots,d\}}\{|x_k|\} \geq \|\boldsymbol{x}\|/d$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f_n(\boldsymbol{x}) &< C^{d-1}\mathrm{e}^{-|x_i|/\tilde{\epsilon}} \\ &\leq C^{d-1}\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/d\tilde{\epsilon}} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2d\tilde{\epsilon}}(2\|\boldsymbol{x}\| - 2d\tilde{\epsilon}(d-1)\log C)\right) \\ &\leq \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/2d\tilde{\epsilon}} = \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (2.28). □

Definition 2.30 *Die Funktion* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *definiere sich durch*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{i=1}^{d} x_i y_i, \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d,$$

entspricht also dem kanonischen Skalarprodukt. Weiterhin sei I_d *die Einheitsmatrix auf dem* $\mathbb{R}^d$.

In der folgenden Proposition wird die Konvergenz der momentenerzeugenden Funktionen aufgezeigt, sofern eine asymptotisch normale Folge mit exponentiellen Tails vorliegt.

Proposition 2.31 *Sei* $\boldsymbol{X}_n \in \mathbb{R}^d$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *ANET und* $\boldsymbol{Y}_n := A_n(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{a}_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} \boldsymbol{U}$, *wobei* $\boldsymbol{U}$ *eine standardnormalverteilte Dichte auf* $\mathbb{R}^d$ *habe. Dann konvergiert die Folge der momentenerzeugenden Funktionen von* $\boldsymbol{Y}_n$ *gegen die momentenerzeugende Funktion der Standardnormalverteilung. Explizit heißt dies, dass*

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{Y}_n \rangle} \to \mathrm{e}^{\|\boldsymbol{t}\|^2/2}, \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d, \; n \to \infty.$$

Beweis Sei $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$. Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $1/\epsilon \geq 1 + \|\boldsymbol{t}\|$. Die Dichte g_n von $\boldsymbol{Y}_n$ genügt dann für $n \geq n_\epsilon$ und $\|\boldsymbol{y}\| \geq M$ der Ungleichung

$$\mathrm{e}^{\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \rangle} g_n(\boldsymbol{y}) \leq \mathrm{e}^{\|\boldsymbol{t}\| \|\boldsymbol{y}\|} \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{y}\|/\epsilon} \leq \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{y}\|},$$

wobei (2.28) und die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung Einzug fanden. Unter Verwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz folgt die Aussage. □

Korollar 2.32 *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition* 2.31. *Dann konvergieren die Momente von* $\boldsymbol{Y}_n$ *gegen die von* $\boldsymbol{U}$. *Weiterhin seien* μ_n *die Erwartung und* Σ_n *die Kovarianz von* $\boldsymbol{X}_n$. *Dann gilt* $A_n(\mu_n - \boldsymbol{a}_n) \to \boldsymbol{0}$ *und* $A_n^T \Sigma_n A_n \to I_d$ *für* $n \to \infty$.

Die folgende Proposition zeigt eine ebenso einfache wie bedeutungsvolle Möglichkeit auf, eine Folge von Dichten $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als ANET zu charakterisieren.

Proposition 2.33 *Sei* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge beschränkter Dichten von Zufallsvektoren auf dem* $\mathbb{R}^d$, *so dass*

$$\frac{f_n(\boldsymbol{x})}{c_n \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}} \to 1, \qquad n \to \infty$$

gleichmäßig auf beschränkten $\boldsymbol{x}$*-Mengen des* $\mathbb{R}^d$. *Sei nun* $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge konvexer Funktionen. Falls Konstanten* $L > 0$, $N \in \mathbb{N}$ *und* $M > 1$ *existieren, so dass für* $n \geq N$ *und* $\|\boldsymbol{x}\| > L$ *die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} f_n(\boldsymbol{x}) &\leq \mathrm{e}^{-\psi_n(\boldsymbol{x})}, \\ f_n(\boldsymbol{x}) &> \mathrm{e}^{-\psi_n(\boldsymbol{x})}/M \end{aligned}$$

gelten, dann folgt

$$c_n \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}, \qquad n \to \infty$$

und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ist ANET.*

Beweis Es müssen neben dem Grenzwert von c_n (2.27) und (2.28) gezeigt werden. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel mit Radius $r > 0$ um den Ursprung. Aufgrund der Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_K \frac{f_n(\boldsymbol{x})}{c_n} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_K \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.31}$$

wobei man mit der rechten Seite beliebig nahe an $(2\pi)^{d/2}$ heran kommt, da r beliebig groß gewählt werden kann. Weil f_n Dichten sind, kommt man durch die Integration von f_n über eine große Kugel beliebig nahe an 1 heran. Hieraus folgt, dass

$$c_n \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$$

und dass f_n gleichmäßig auf beschränkten $\boldsymbol{x}$-Mengen des $\mathbb{R}^d$ gegen die Dichte der Standardnormalverteilung konvergiert, mithin gilt also (2.27).

Sei nun $\epsilon > 0$. Wähle nun $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für ein beliebiges $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und $n \geq n_\epsilon$

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{f_n(\boldsymbol{x})}{c_n \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}} & < & 1 + \epsilon \\ \Rightarrow & f_n(\boldsymbol{x}) & < & \exp\left(-\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2} + \log c_n + \log(1+\epsilon)\right) \end{array}$$

gilt. Aufgrund der Voraussetzung $f_n(\boldsymbol{x}) > \mathrm{e}^{-\psi_n(\boldsymbol{x})}/M$ auf $\|\boldsymbol{x}\| > L$ und $n \geq N$ folgt hieraus für $\|\boldsymbol{x}\| > L$ und $n \geq \max\{N, n_\epsilon\}$

$$\begin{array}{rrcl} & -\psi_n(\boldsymbol{x}) - \log M & < & -\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2} + \log c_n + \log(1+\epsilon) \\ \Rightarrow & \psi_n(\boldsymbol{x}) & > & \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2} - \log c_n - \log(1+\epsilon) - \log M. \end{array}$$

Es folgt also, dass für $\|\boldsymbol{x}\| > L$ und $n \geq \max\{N, n_\epsilon\}$

$$f_n(\boldsymbol{x}) < e^{-\psi_n(\boldsymbol{x})} < e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2 + \log c_n + \log(1+\epsilon) + \log M}$$

gilt. Nun existiert nach dem ersten Teil des Beweises ein $n_c \in \mathbb{N}$, so dass

$$\log c_n \leq \log\left((1+\epsilon)(2\pi)^{-d/2}\right) = -d/2 \log 2\pi + \log(1+\epsilon), \qquad n \geq n_c$$

gilt. Mit $C := 2\log(1+\epsilon) + \log M - d/2 \log 2\pi$ folgt für $\|\boldsymbol{x}\| > L$ und $n \geq \max\{N, n_\epsilon, n_c\}$

$$\begin{array}{rcl} f_n(\boldsymbol{x}) & < & e^{-\psi_n(\boldsymbol{x})} < e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2 + C} \\ & < & e^{-\|\boldsymbol{x}\|/\epsilon}, \end{array}$$

falls L größer ist, als die Nullstellen des Polynoms $\|\boldsymbol{x}\|^2/2 - \|\boldsymbol{x}\|/\epsilon - C$. Hieraus ergibt sich (2.28). $\square$

Die folgende Aussage ist eine einfache Konsequenz von Proposition 2.33.

Proposition 2.34 *Sei $f_n(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\psi_n(\boldsymbol{x})}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Dichte eines Zufallsvektors auf dem $\mathbb{R}^d$ und außerdem $\psi_n : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ konvex und in C^2. Falls $\psi_n'(\mathbf{0}) \to \mathbf{0}$ und $\psi_n''(\boldsymbol{x}) \to I_d$ gleichmäßig auf beschränkten $\boldsymbol{x}$-Mengen des $\mathbb{R}^d$, jeweils für $n \to \infty$, dann ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ANET.*

Beweis Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ existiert nach dem Satz von Taylor ein $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$\psi_n(\boldsymbol{x}) = \psi_n(\mathbf{0}) + \psi_n'(\mathbf{0})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\psi_n''(\tau\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, dass die f_n Dichten sind, folgt also $\psi_n(\mathbf{0}) \to \log(2\pi)d/2$ für $n \to \infty$ und damit

$$\psi_n(\boldsymbol{x}) \to \frac{d}{2}\log(2\pi) + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2}, \qquad n \to \infty$$

gleichmäßig auf beschränkten $\boldsymbol{x}$-Mengen des $\mathbb{R}^d$. Dadurch genügen die f_n den Voraussetzungen von Proposition 2.33. □

Definition 2.35 *Sei $\boldsymbol{X}$ ein Zufallsvektor auf dem $\mathbb{R}^d$ mit einer Dichte f. Mit*

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}) := \mathrm{E}\mathrm{e}^{\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{X}\rangle}, \qquad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^d$$

wird die momentenerzeugende Funktion *von $\boldsymbol{X}$ definiert. Weiterhin sei*

$$\Lambda := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^d | \Phi(\boldsymbol{\tau}) < \infty\}.$$

Die zu f assoziierte exponentielle Familie *von Dichten $f_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{\tau}}}$ wird für $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ durch*

$$f_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{\tau}}}(\boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{x}\rangle} f(\boldsymbol{x})/\Phi(\boldsymbol{\tau}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \tag{2.32}$$

definiert. Der mit $f_{\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{\tau}}}$ assoziierte Zufallsvektor wird mit $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{\tau}}$ bezeichnet.

Das folgende, so genannte Stetigkeitslemma findet sich zum Beispiel in [2] und wird unter Anderem zum Beweis von Proposition 2.37 benötigt.

Lemma 2.36 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ messbar, μ ein Maß auf Ω und $\tau_0 \in I$, so dass gelten:*

(a) *für jedes $\tau \in I$ ist $f(\cdot, \tau) \in L^1(\mu)$,*
(b) *für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\omega, \cdot)$ stetig in τ_0,*
(c) *Es gibt eine Umgebung U von τ_0, so dass $\sup_{\tau\in U} |f(\cdot, \tau)| \in L^1(\mu)$.*

Dann ist die Abbildung $\int f(\omega, \cdot)\mu(\mathrm{d}\omega)$ stetig in τ_0.

Beweis Siehe Lemma 16.1, [2]. □

Nachfolgend zwei nützliche Eigenschaften der exponentiellen Familie.

Proposition 2.37 *Sei X eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gelten*

$$\mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\tau \bar{X}_\tau} 1_{\bar{X}_\tau \in A}\right) \mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X}, \qquad \tau \geq 0 \tag{2.33}$$

und

$$(\overline{cX})_\tau \stackrel{d}{=} c\bar{X}_{c\tau}, \qquad c, \tau \geq 0. \tag{2.34}$$

Hat X eine Dichte $f \sim \nu \mathrm{e}^{-\psi}$, wobei $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und oberem Endpunkt t_∞ asymptotisch parabolisch mit $\tau_\infty > 0$ ist und $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ flach für ψ in t_∞, dann ist $\Phi(\tau) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X}$ stetig für alle $0 \leq \tau < \tau_\infty$.

Beweis Es gilt zunächst

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\tau \bar{X}_\tau} 1_{\bar{X}_\tau \in A}\right) = \Phi(\tau) \int_A \mathrm{e}^{-\tau t} f_{\bar{X}_\tau}(t) \mathrm{d}t = \Phi(\tau) \frac{\int_A f(t) \mathrm{d}t}{\Phi(\tau)} = \mathrm{P}(X \in A)$$

und außerdem

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left((\overline{cX})_\tau \in A\right) &= \int_A f_{(\overline{cX})_\tau}(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_A \frac{e^{\tau t} f(t/c)/c}{\mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau c X}} \mathrm{d}t \\
&= \int_{A/c} \frac{e^{c\tau x} f(x)}{\Phi(c\tau)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{A/c} f_{\bar{X}_{c\tau}}(x) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{P}\left(\bar{X}_{c\tau} \in A/c\right) = \mathrm{P}\left(c\bar{X}_{c\tau} \in A\right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Gleichungen (2.33) und (2.34).

Nun habe X die beschriebene Dichte f. Sei $0 \leq \tau < \tau_\infty$. Dann ist

$$\Phi(\tau) = \int \mathrm{e}^{\tau x} f(x) \mathrm{d}x < \infty$$

nach Proposition 2.25. Weiterhin ist $\mathrm{e}^{\tau x} f(x)$ stetig in τ. Und weil

$$|\mathrm{e}^{\tau x} f(x)| = \mathrm{e}^{\tau x} f(x)$$

ist, sind damit die drei Bedingungen von Lemma 2.36 erfüllt. Weil τ frei gewählt war, ist Φ stetig auf $[0, \tau_\infty)$. □

Proposition 2.38 *Seien $X_1, \ldots, X_d$ für $d \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten $f_1, \ldots, f_d$. Wenn für $\tau \geq 0$ sämtliche momentenerzeugenden Funktionen $\Phi_i(\tau)$ endlich sind, dann gilt*

$$\left(\overline{X_1 + \ldots + X_d}\right)_\tau \stackrel{d}{=} (\bar{X}_1)_\tau + \ldots + (\bar{X}_d)_\tau =: \bar{X}_{1,\tau} + \ldots + \bar{X}_{d,\tau}$$

Beweis Definiere $X_0 := X_1 + \ldots + X_d$ und bezeichne mit $f_{\bar{X}_{i,\tau}}$ die Dichte der Zufallsvariable $\bar{X}_{i,\tau}$ und mit g_τ die der Zufallsvariable $\left(\overline{X_1 + \ldots + X_d}\right)_\tau$. Weiter sei $\Phi(\tau)$ die momentenerzeugende Funktion und f_0 die Dichte von X_0. Dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit der X_i

$$\Phi(\tau) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X_0} = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X_i} = \prod_{i=1}^{d} \Phi_i(\tau).$$

Es folgt aus den Gesetzen der Faltung

$$\begin{aligned} g_\tau(t) &= \int \cdots \int \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^d \Phi_i(\tau)} \exp\left(\tau \left\{ t - \sum_{i=2}^d t_i \right\} \right) f_1\left(t - \sum_{i=2}^d t_i \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{i=2}^d \{\exp(\tau t_i) f_i(t_i)\} \right] \prod_{i=2}^d \mathrm{d}t_i \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\tau t}}{\Phi(\tau)} \int \cdots \int \left[f_1\left(t - \sum_{i=2}^d t_i \right) \prod_{i=2}^d f_i(t_i) \right] \prod_{i=2}^d \mathrm{d}t_i \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\tau t}}{\Phi(\tau)} \left(\circledast_{i=1}^d f_i \right)(t) \quad = \quad \frac{1}{\Phi(\tau)} \mathrm{e}^{\tau t} f_0(t) \\ &= f_{\bar{X}_{0,\tau}}(t). \end{aligned}$$

Hierbei sei $\circledast$ das Faltungssymbol. Es folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt die ANET-Konvergenz der exponentiellen Familie der Dichten f_i aus Satz 2.6, der zentralen Aussage des Kapitels, auf und ist entsprechend von elementarer Bedeutung für den Beweis von Satz 2.6. Wir benötigen hier nur den eindimensionalen Fall.

Satz 2.39 *Die Zufallsvariable X habe eine beschränkte Dichte $f \sim \nu \mathrm{e}^{-\psi}$, wobei die Funktion $\psi : D \mapsto \mathbb{R}$ AP mit Intervall $D \subset \mathbb{R}$, rechtem Endpunkt $t_\infty > 0$ und Skalenfunktion σ ist und $\nu : D \mapsto \mathbb{R}$ flach für ψ in t_∞. Seien $\tau_\infty = \sup_t \psi'(t)$, $\Delta := \psi'(D)$ und $f_{\bar{X}_\tau}$ sowie Λ definiert wie in Definition* 2.35. *Dann ist $\Lambda \cap [0, \infty) = [0, \tau_\infty)$ und $q(\tau) := (\psi')^{\leftarrow}(\tau) \to t_\infty$ genau dann, wenn $\tau \to \tau_\infty$. Die normalisierten Dichten*

$$g_{\bar{X}_\tau}(u) = \sigma(q(\tau)) f_{\bar{X}_\tau}(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u), \qquad u \in \mathbb{R},\ \tau \in \Delta$$

sind ANET. Die momentenerzeugende Funktion $\Phi(\tau)$ von X und die konvex Konjugierte ψ^* von ψ hängen durch das asymptotische Verhalten

$$\Phi(\tau) \sim \sqrt{2\pi}\nu(q(\tau))\sigma(q(\tau))e^{\psi^*(\tau)}, \qquad \tau \to \tau_\infty \tag{2.35}$$

zusammen.

Beweis Weil f eine Dichte ist und wegen der Tailäquivalenz von f und Proposition 2.17 gilt $\tau_\infty > 0$. Aus Proposition 2.25 folgt $\Lambda \cap [0, \infty) = [0, \tau_\infty)$. Weiterhin ist $q(\tau) \to t_\infty$

genau dann, wenn $\tau \to \tau_\infty$, da ψ' auf D streng monoton steigt und $\tau_\infty = \sup \psi'(D)$. Setze nun $x := q(\tau) + \sigma(q(\tau))u$ für $\tau \in \Delta$ und

$$r_t(u) := \frac{1}{2}u^2 - (\psi(t + \sigma(t)u) - \psi(t) - u\sigma(t)\psi'(t)), \qquad u \in \mathbb{R},\ t \in D.$$

Dann gilt mit $\tau \in \Delta$, Proposition 2.15 und $t = q(\tau)$

$$\begin{aligned}
\tau x - \psi(x) &= \tau q(\tau) + \tau\sigma(q(\tau))u - \psi(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u) \\
&= \psi^*(\tau) + \psi(q(\tau)) + \tau\sigma(q(\tau))u - \psi(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u) \\
&= \psi^*(\tau) - (\psi(t + \sigma(t)u) - \psi(t) - u\sigma(t)\psi'(t)) \\
&= \psi^*(\psi'(t)) - \frac{1}{2}u^2 + r_t(u) \\
&= \psi^*(\tau) - \frac{1}{2}u^2 + r_{q(\tau)}(u).
\end{aligned}$$

Weil nun, wie vorhin gezeigt, $q(\tau) \to t_\infty$ genau dann gilt, wenn $\tau \to \tau_\infty$ gilt, verschwindet der Restterm gleichmäßig auf beschränkten u-Mengen für $\tau \to \tau_\infty$ aufgrund von Proposition 2.22. Setze nun

$$c(\tau) := \nu(q(\tau))\sigma(q(\tau))e^{\psi^*(\tau)}/\Phi(\tau), \qquad \tau \in \Delta \cap \Lambda.$$

Aufgrund des eben Gezeigten, der Voraussetzungen an f und der Flachheit von ν folgt

$$\begin{aligned}
\frac{g_{\bar{X}_\tau}(u)}{c(\tau)} &= \frac{\sigma(q(\tau))f_{\bar{X}_\tau}(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u)}{\nu(q(\tau))\sigma(q(\tau))e^{\psi^*(\tau)}}\Phi(\tau) \\
&= \frac{f_{\bar{X}_\tau}(x)}{\nu(q(\tau))}e^{-\psi^*(\tau)}\Phi(\tau) \\
&\sim \frac{\nu(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u)}{\nu(q(\tau))}\exp(\tau x - \psi(x) - \psi^*(\tau)) \\
&\to \mathrm{e}^{-u^2/2}, \qquad \tau \to \tau_\infty
\end{aligned}$$

gleichmäßig auf beschränkten u-Mengen.

Um Proposition 2.33 auf $g_{\bar{X}_\tau}$ anwenden zu können, schließen wir den negativen Exponenten der Dichte $g_{\bar{X}_\tau}$ zwischen zwei konvexen Funktionen ein und zwar folgendermaßen: nach Proposition 2.24 existieren ein $s_1 \in D$ und $\varphi : [s_1, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$, so dass $f \sim \mathrm{e}^{-\varphi}$ und $\varphi \in \mathrm{AP}(t_\infty)$ ist. Setze nun φ beliebig auf D fort, so dass $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$ weiterhin strikt konvex und in C^2 ist und außerdem $\varphi(D) = \Delta$ gilt. Wir können davon ausgehen, dass

$$1/2 \leq f(u)\mathrm{e}^{\varphi(u)} \leq 2$$

auf einer linken Umgebung von t_∞, sagen wir auf $u \in [t_0, t_\infty)$ mit $t_0 > 0$. Es gilt also für $u \in [t_0, t_\infty)$

$$\begin{aligned}
& f(u)\mathrm{e}^{\varphi(u)}/\mathrm{e} &\leq\ & 2/\mathrm{e} < 1 \\
\Rightarrow\quad & f(u)\mathrm{e}^{\varphi(u)-1} &\leq\ & 1 \\
\Leftrightarrow\quad & f(u) &\leq\ & \mathrm{e}^{-(\varphi(u)-1)}.
\end{aligned}$$

Andersherum gerechnet ergibt sich für $u \in [t_0, t_\infty)$

$$\begin{array}{rrcl} & f(u)\mathrm{e}^{\varphi(u)}\mathrm{e} & \geq & \mathrm{e}/2 > 1 \\ \Rightarrow & f(u) & > & \mathrm{e}^{-(\varphi(u)-1)-2}. \end{array}$$

Wähle nun $M > 1 - \varphi(t_0)$, so dass $f(t) \leq e^M$ für $t \in \mathbb{R}$. Definiere nun

$$\varphi_1(u) := \begin{cases} -M, & u \in (-\infty, t_0] \\ \varphi(u) - 1, & u \in (t_0, t_\infty). \end{cases}$$

Insgesamt gilt $f(u) \leq \mathrm{e}^{-\varphi_1(u)}$ für $u \in \mathbb{R}$. Sei nun $\varphi_0 : (-\infty, t_\infty) \mapsto \mathbb{R}$ die konvexe Hülle von φ_1, woraus $\varphi_0(u) \leq \varphi_1(u)$ und damit

$$f(u) \leq \mathrm{e}^{-\varphi_0(u)}, \qquad u \in \mathbb{R} \tag{2.36}$$

folgt. Es gilt $\varphi^* \in AP(\tau_\infty)$ nach Proposition 2.16. Wegen $(\varphi^*)'(\tau) = (\varphi')^{\leftarrow}(\tau)$ für $\tau \in \Delta$ nach Proposition 2.15 folgt aus Proposition 2.17 und Proposition 2.15 $\varphi^*(\tau_\infty) = \infty$, also

$$\tau(\varphi')^{\leftarrow}(\tau) - \varphi((\varphi')^{\leftarrow}(\tau)) \to \infty, \qquad \tau \uparrow \tau_\infty \tag{2.37}$$

falls $\sup_\tau (\varphi^*)'(\tau) = t_\infty > 0$, was jedoch nach Voraussetzung der Fall ist. Setzt man $u = (\varphi')^{\leftarrow}(\tau)$ in (2.37), so folgt

$$\varphi'(u)u - \varphi(u) \to \infty, \qquad u \uparrow t_\infty.$$

Nun ist

$$y_{t_0} := \varphi(u) + \varphi'(u)(t_0 - u) = (\varphi(u) - \varphi'(u)u)\left(1 - \frac{\varphi'(u)t_0}{\varphi'(u)u - \varphi(u)}\right)$$

der Wert der Linearisierung von φ in $u \in D$ an der Stelle t_0. Ist nun $\tau_\infty < \infty$, so folgt aufgrund des eben Gezeigten $y_{t_0} \to -\infty$ für $u \uparrow t_\infty$. Falls $\tau_\infty = \infty$, so gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\frac{\varphi'(u)t_0}{\varphi'(u)u - \varphi(u)} \to \frac{\varphi''(u)t_0}{\varphi''(u)u + \varphi'(u) - \varphi'(u)} \to \frac{t_0}{t_\infty} < 1 \qquad u \uparrow t_\infty,$$

und damit $y_{t_0} \to -\infty$ für $u \uparrow t_\infty$. Hieraus folgt, dass ein $t_1 \in (t_0, t_\infty)$ existiert, so dass $\varphi_0(u) = \varphi(u) - 1$ für $u \in (t_1, t_\infty)$ gilt und daher auch

$$f(u) > \mathrm{e}^{-\varphi_0(u)-2}, \qquad u \in (t_1, t_\infty). \tag{2.38}$$

Definiere nun $h_\tau(u) := q(\tau) + \sigma(q(\tau))u$ für $u \in \mathbb{R}$ und $\tau \in \Delta$ und die Funktion

$$\varphi_\tau(u) := \varphi_0(h_\tau(u)) - \tau h_\tau(u) - \log \sigma(q(\tau)) + \log \Phi(\tau), \qquad u \in \mathbb{R},\ \tau \in \Delta$$

welche konvex in u ist, da φ_0 konvex ist und h_τ affin mit strikt positiver Steigung.

Sei nun $\tau \in \Delta$. Es folgt, dass einerseits für $u \in \mathbb{R}$ wegen (2.36)

$$\begin{aligned} g_{\bar{X}_\tau}(u) &= \sigma(q(\tau)) f_{\bar{X}_\tau}(q(\tau) + \sigma(q(\tau))u) \\ &= \sigma(q(\tau)) e^{\tau h_\tau(u)} f(h_\tau(u))/\Phi(\tau) \\ &\leq \sigma(q(\tau)) e^{\tau h_\tau(u)} \mathrm{e}^{-\varphi_0(h_\tau(u))}/\Phi(\tau) \\ &= \exp(-\{\varphi_0(h_\tau(u)) - \tau h_\tau(u) - \log \sigma(q(\tau)) + \log \Phi(\tau)\}) \\ &= \exp(-\varphi_\tau(u)) \end{aligned}$$

gilt. Nun existiert nach Proposition 2.22 für jedes $r > 0$ ein $t_2 \in (t_1, t_\infty)$, so dass für alle $t \in (t_2, t_\infty)$

$$[t - \sigma(t)r, t + \sigma(t)r] \subset (t_1, t_\infty)$$

gilt. Für $u \in \mathbb{R}$ existiert also hinreichend große $\tau \in \Delta$, sagen wir $\tau \in (\tau_u, \tau_\infty)$ für $\tau_u \in \Delta$, so dass $h_\tau(u) \in (t_1, t_\infty)$. Hieraus und mit (2.38) folgt für $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_{\bar{X}_\tau}(u) &> \sigma(q(\tau)) e^{\tau h_\tau(u)} \mathrm{e}^{-\varphi_0(h_\tau(u))-2}/\Phi(\tau) \\ &= \exp(-\{\varphi_0(h_\tau(u)) - \tau h_\tau(u) - \log \sigma(q(\tau)) + \log \Phi(\tau)\} - 2) \\ &= \frac{\exp(-\varphi_\tau(u))}{\mathrm{e}^2}, \qquad \tau \in (\tau_u, \tau_\infty). \end{aligned}$$

Nun kann Proposition 2.33 angewendet werden, woraus folgt, dass $g_{\bar{X}_\tau}$ für $\tau \to \tau_\infty$ ANET ist. Speziell folgt $c(\tau) \to 1/\sqrt{2\pi}$, was zu Gleichung (2.35) führt. $\square$

2.4 Der Beweis

Bemerkung Mit der Dichte f_i einer Zufallsvariable X_i für $i \in \mathbb{N}$ wird im eindimensionalen Fall die exponentielle Familie von Dichten $f_{\bar{X}_{i,\tau}}$ mit zugehörigen Zufallsvariablen $\bar{X}_{i,\tau}$ in Verbindung gebracht.

Beweis von Satz 2.6 Sei f die Dichte des Zufallsvektors $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ mit unabhängigen Komponenten X_i, deren Dichten $f_i \sim \nu_i \mathrm{e}^{-\psi_i}$ für $i \in \{1, \ldots, d\}$ den Voraussetzungen von Satz 2.6 genügen. Die exponentielle Familie der Dichten $f_{\bar{X}_{i,\tau}}$ wurde in (2.32) definiert. Setze $\boldsymbol{\lambda} = (\tau, \ldots, \tau) \in \mathbb{R}^d$ mit $\tau \in \Delta := [0, \tau_\infty)$ und sei die Zufallsvariable $U \sim N(0,1)$ verteilt. Wendet man nun Satz 2.39 an, so ergibt sich, dass die normalisierten Dichten für $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$g_{\bar{X}_{i,\tau}}(u_i) := \sigma_i(q_i(\tau)) f_{\bar{X}_{i,\tau}}(q_i(\tau) + \sigma_i(q_i(\tau))u_i), \qquad \tau \in \Delta,\ u_i \in \mathbb{R}$$

ANET sind für $\tau \to \tau_\infty$ und für die dazugehörigen Zufallsvariablen

$$\bar{Y}_{i,\tau} := \frac{\bar{X}_{i,\tau} - q_i(\tau)}{\sigma_i(q_i(\tau))} \xrightarrow{\mathscr{D}} U, \qquad \tau \to \tau_\infty, \tag{2.39}$$

folgt. Sei $\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ und setze $\overline{\boldsymbol{Y}}_\lambda := (\bar{Y}_{1,\tau}, \ldots, \bar{Y}_{d,\tau})$. Weil die f_i unabhängig sind, hat $\overline{\boldsymbol{Y}}_\lambda$ Dichte $\prod g_{\bar{X}_{i,\tau}}$. Sie ist nach Proposition 2.29 ebenso ANET und es gilt für

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{d} g_{\bar{X}_{i,\tau}}(u_i) &= \prod_{i=1}^{d} \sigma_i(q_i(\tau)) f_{\bar{X}_{i,\tau}}(q_i(\tau) + \sigma_i(q_i(\tau))u_i) \\ &\sim \prod_{i=1}^{d} \left(\mathrm{e}^{-u_i^2/2}/\sqrt{2\pi}\right), \qquad \tau \to \tau_\infty. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Wegen (2.39) folgt aus Korollar 2.32, dass

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_{i,\tau}) \sim \sigma_i^2(q_i(\tau)), \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{E}\bar{X}_{i,\tau} - q_i(\tau)}{\sigma_i(q_i(\tau))} \to 0, \qquad \tau \to \tau_\infty. \tag{2.41}$$

Nach Proposition 2.29 und Proposition 2.28 ist die Summe $\bar{X}_{0,\tau} := \bar{X}_{1,\tau} + \ldots + \bar{X}_{d,\tau}$ mit der Dichte $f_{\bar{X}_{0,\tau}}$ für $\tau \to \tau_\infty$ ANET und es gilt für $u \in \mathbb{R}$

$$\sigma_0(q_0(\tau)) f_{\bar{X}_{0,\tau}}(q_0(\tau) + \sigma_0(q_0(\tau))u) \to \mathrm{e}^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}, \qquad \tau \to \tau_\infty, \tag{2.42}$$

wobei aufgrund von (2.41) und des Satzes von der Typenkonvergenz für $\tau \in \Delta$

$$\begin{aligned}\sigma_0^2(q_0(\tau)) &:= \sigma_1^2(q_1(\tau)) + \ldots + \sigma_d^2(q_d(\tau)), \\ q_0(\tau) &:= q_1(\tau) + \ldots + q_d(\tau)\end{aligned}$$

gelten muss; vergleiche hierzu Korollar 2.32. Seien $q(\tau) := (q_1(\tau), \ldots, q_d(\tau))$ für $\tau \in \Delta$ und f_0 die Dichte der Zufallsvariable $X_0 := X_1 + \ldots + X_d$. Setzt man nun in (2.40) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ bzw. in (2.42) $u = 0$, so ergeben sich jeweils für $\tau \to \tau_\infty$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{d} f_{\bar{X}_{i,\tau}}(q_i(\tau)) &= \prod_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{\tau q_i(\tau)} f_i(q_i(\tau))/\mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X_i} \\ &= \mathrm{e}^{\tau q_0(\tau)} f(q(\tau))/\mathrm{E}\mathrm{e}^{\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{X}\rangle} \sim \prod_{i=1}^{d} \left(\sigma_i(q_i(\tau))\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.43}$$

und anhand von Proposition 2.38

$$f_{\bar{X}_{0,\tau}}(q_0(\tau)) = \mathrm{e}^{\tau q_0(\tau)} f_0(q_0(\tau))/\mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X_0} \sim \left(\sigma_0(q_0(\tau))\sqrt{2\pi}\right)^{-1}. \tag{2.44}$$

Die Definition von $\boldsymbol{\lambda}$ ergibt $\mathrm{E}\mathrm{e}^{\tau X_0} = \mathrm{E}\mathrm{e}^{\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{X}\rangle}$. Entsprechend folgt aus (2.43) und (2.44), dass

$$f_0(q_0(\tau)) \sim \frac{\prod_{i=1}^{d}\{\sigma_i(q_i(\tau))\sqrt{2\pi}\}}{\sigma_0(q_0(\tau))\sqrt{2\pi}} f(q(\tau)), \qquad \tau \to \tau_\infty.$$

Schreibt man nun $f(q(\tau)) = \prod_{i=1}^{d} \nu_i(q_i(\tau))\mathrm{e}^{-\psi_i(q_i(\tau))}$ für $\tau \in \Delta$, was aus der Unabhängigkeit der Randverteilungen von $\boldsymbol{X}$ folgt, so ergibt sich

$$f_0(q_0(\tau)) \sim \frac{\prod_{i=1}^{d}\left\{\sigma_i(q_i(\tau))\nu_i(q_i(\tau))\sqrt{2\pi}\right\}}{\sigma_0(q_0(\tau))\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} \psi_i(q_i(\tau))\right), \qquad \tau \to \tau_\infty.$$

Wenn nun ψ_0 und ν_0 geschrieben werden, wie in (2.7) und (2.9), also für $\tau \in \Delta$

$$\psi_0(q_0(\tau)) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i(q_i(\tau)), \quad \nu_0(q_0(\tau)) = \frac{\prod_{i=1}^{d} \left\{\sigma_i(q_i(\tau))\nu_i(q_i(\tau))\sqrt{2\pi}\right\}}{\sigma_0(q_0(\tau))\sqrt{2\pi}},$$

und substituiert man $t = q_0(\tau)$, so ergibt sich die beschriebene Tail-Äquivalenz

$$f_0(t) \sim \nu_0(t)\mathrm{e}^{-\psi_0(t)}, \qquad t \to t_{1\infty} + \ldots + t_{d\infty}.$$

Nun ist ja gerade $q_i'(\tau) = \sigma_i^2(q_i(\tau))$ für $\tau \in \Delta$. Differenziert man jetzt Gleichung (2.7), so ergibt sich

$$\psi_0'(q_0(\tau))q_0'(\tau) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i'(q_i(\tau))q_i'(\tau) = \sum_{i=1}^{d} \tau q_i'(\tau) = \tau q_0'(\tau), \qquad \tau \in \Delta.$$

Daraus folgen $\psi_0'(t_\infty) = \tau_\infty$ und außerdem - weil q_0 stetig und streng monoton wachsend ist - $q_0(\tau) = (\psi_0')^{\leftarrow}(\tau)$ für $\tau \in \Delta$. Differenziert man Letzteres unter Verwendung der Definitionen von q_0 und σ_0^2, so ergibt sich

$$\frac{1}{\psi_0''(q_0(\tau))} = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2(q_i(\tau)) = \sigma_0^2(q_0(\tau)), \qquad \tau \in \Delta,$$

woraus $\sigma_0^2(t) = 1/\psi_0''(t)$ für $t \in [dt_0, t_\infty)$ folgt.

Noch bleibt zu zeigen, dass ψ_0 asymptotisch parabolisch und ν_0 flach für ψ_0 in t_∞ ist. Die erste Aussage folgt daraus, dass die Funktionen ψ_i^* eingeschränkt auf Δ nach Proposition 2.16 asymptotisch parabolisch mit dem gemeinsamen Endpunkt τ_∞ sind. Daraus ergibt sich, dass die Funktion $\psi_0^* := \psi_1^* + \ldots + \psi_d^*$ eingeschränkt auf Δ nach Proposition 2.13(b) in $\mathrm{AP}(\tau_\infty)$ ist, weshalb ψ_0^{**} eingeschränkt auf $[dt_0, t_\infty)$ wiederum nach Proposition 2.16 in $\mathrm{AP}(t_\infty)$ ist. Nun ist nach Proposition 2.15 gerade $\psi_0 = \psi_0^{**}$ eingeschränkt auf $[dt_0, t_\infty)$.

Definiere nun für $\tau \in \Delta$

$$\begin{aligned} \delta_i(q_i(\tau)) &:= \sqrt{2\pi}\sigma_i(q_i(\tau))\nu_i(q_i(\tau)), \qquad i \in \{1, \ldots, d\}, \\ \delta_0(q_0(\tau)) &:= \prod_{i=1}^{d} \delta_i(q_i(\tau)) = \sqrt{2\pi}\sigma_0(q_0(\tau))\nu_0(q_0(\tau)). \end{aligned}$$

Für sämtliche i ist Funktionen δ_i nach Proposition 2.19 für ψ_i flach in $t_{i\infty}$, da es die Faktoren σ_i und ν_i nach den Voraussetzungen (2.4) und (2.5) ebenfalls sind. Die Funktion $\hat{\delta}_i : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ (siehe Definition 2.20) ist nach Proposition 2.21 flach in τ_∞ für ψ_i^* eingeschränkt auf Δ. Nun gilt für die Skalenfunktion s_0 von ψ_0^* für $\tau \in \Delta$

$$s_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(\psi_0^*)''(\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{d} (\psi_i^*)''(\tau)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(\psi_i^*)''(\tau)}} = s_i(\tau), \qquad \forall i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Dies impliziert $s_0 < \min s_i$ auf Δ. Daher ist $\hat{\delta}_i$ auch für $\psi_0^* = \sum \psi_i^*$ eingeschränkt auf Δ flach in τ_∞. Also ist nach Proposition 2.19 auch das Produkt $d_0 := \hat{\delta}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{\delta}_d$ für ψ_0^*

eingeschränkt auf Δ flach in τ_∞. Daher ist nach Proposition 2.21 $\hat{d}_0$ für ψ_0 (da ψ_0 nur auf $[dt_0, t_\infty)$ definiert ist) flach in t_∞. Nun gilt genau deshalb aber nach Definition 2.20

$$\begin{aligned}
\hat{d}_0(q_0(\tau)) &= d_0(q_0^{\leftarrow}(q_0(\tau))) = d_0(\tau) \\
&= \hat{\delta}_1(\tau) \cdot \ldots \cdot \hat{\delta}_d(\tau) = \delta_1(q_1(\tau)) \cdot \ldots \cdot \delta_d(q_d(\tau)) \\
&= \delta_0(q_0(\tau)), \qquad \tau \in \Delta,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass δ_0 flach für ψ_0 in t_∞ ist und daher auch

$$\nu_0 = \frac{\delta_0}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}.$$

$\square$

Kapitel 3

Tailverhalten und Anziehungsbereich für endliche Summen von MA(∞)-Prozessen

In diesem Kapitel wird das Extremwertverhalten von endlichen Summen unabhängiger *unendlicher Moving Average Prozesse*, im Folgenden mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet, analysiert. Speziell werden an die *Innovationen* dieses Prozesses Voraussetzungen gestellt, die denen von Satz 2.6 entsprechen. Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass die exponentielle Familie von Y_n ANET ist. Dadurch ist es möglich, in Satz 3.8 das asymptotische Verhalten der Tails von Y_n zu bestimmen. Weiterhin kann in Satz 3.18 gezeigt werden, dass die mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *assoziierte i.i.d. Folge* im *Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung* liegt.

Die eben genannten Sätze sind die zentralen Aussagen dieses Kapitels. Zuvor werden die Voraussetzungen, welche an $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gemacht werden, aufgeführt und besprochen.

Das Kapitel hält sich eng an [7] und erweitert dieses ausschließlich auf endliche Summen unabhängiger unendlicher Moving Average Prozesse.

Definition 3.1 *Sei $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge identisch verteilter, unkorrelierter Zufallsvariablen mit* $\mathrm{E}|Z_0| < \infty$*. Sei weiter $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine absolut summierbare Zahlenfolge. Dann wird die durch*

$$Y_n := \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i Z_{n+i}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

definierte Folge von Zufallsvariablen als unendlicher Moving Average (kurz: MA(∞)) Prozess *bezeichnet. Weiter nennt man $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ die* Innovationen *des $MA(\infty)$ Prozesses.*

Bemerkung In unserem Fall werden die Innovationen sogar unabhängig und nicht nur unkorreliert sein.

Definition 3.2 *Eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt* strikt stationär*, wenn für alle $h,\ t_1,\dots,t_n \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}) \stackrel{d}{=} (Y_{t_1+h},\dots,Y_{t_n+h})$$

gilt.

Voraussetzung 3.3 *Seien $K \in \mathbb{N}$ und $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\dots,K\}}$ eine summierbare Folge nicht-negativer reeller Zahlen, nicht alle gleich Null. Für $k \in \{1,\dots,K\}$ haben die Zufallsvariablen Z_k endlichen Erwartungswert. Weiter existiere eine Folge von Zufallsvariablen $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$. Hierbei sei $Z_{i,k}$ identisch verteilt wie Z_k für $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1,\dots,K\}$. Zusätzlich seien alle $(c_{i,k}Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\dots,K\}}$ unabhängig.*

Definition 3.4 *Es gelte die Voraussetzung* 3.3. *Dann ist*

$$Y_n := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k} Z_{n+i,k}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

eine endliche Summe von unabhängigen MA(∞)-Prozessen.

Die nachfolgende Voraussetzung erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.6 und macht entsprechend eine Anwendung desselben möglich.

Voraussetzung 3.5 *Es sei Voraussetzung* 3.3 *erfüllt. Für $k \in \{1,\dots,K\}$ habe Z_k die Dichte f_k. Diese sei beschränkt und genüge der Gleichung*

$$f_k(t) = \nu_k(t) \exp\left(-\psi_k(t)\right), \qquad t \geq t_{0,k}, \tag{3.2}$$

wobei $t_{0,k} \in \mathbb{R}$ und ν_k, $\psi_k : [t_{0,k},\infty) \to \mathbb{R}$ und zusätzlich $\psi_k \in C^2$, $\psi_k'(t_{0,k}) = 0$, außerdem $\psi_k'(\infty) = \infty$, ψ_k'' strikt positiv auf $[t_{0,k},\infty)$ und $1/\sqrt{\psi_k''}$ selbst-vernachlässigend in ∞ gelten. Die Funktion ν_k sei messbar und flach für ψ_k in ∞.

In der nachfolgenden Definition werden die meisten der in diesem Kapitel verwendeten Funktionen eingeführt. Die Notation hält sich möglichst nahe an die des zweiten Kapitels. So sind für beliebiges k die Zufallsvariablen $X_{i,k}$ und die Funktionen $q_{i,k}$ analog zu den X_i und q_i des vergangenen Kapitels. Zu beachten ist, dass die $\sigma_{i,k}^2$ den $\sigma_i^2 \circ q_i$ des vorangegangenen Kapitels entsprechen. Außerdem ist q_∞ mit q_0 aus Kapitel 2 vergleichbar und σ_∞^2 mit $\sigma_0^2 \circ q_0$. Hier wurde die Notation verändert, um explizit auf die nicht endliche Anzahl der Summanden von q_∞ und σ_∞^2 hinzuweisen.

Definition 3.6 *Es gelte die Voraussetzung* 3.5. *Definiere für $\tau \in [0,\infty)$, $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1,\dots,K\}$*

$$\begin{aligned}
X_{i,k} &:= c_{i,k} Z_{i,k}, \\
\Phi_{i,k}(\tau) &:= \mathrm{E}e^{\tau X_{i,k}}, \\
\Phi(\tau) &:= \mathrm{E}e^{\tau Y_0}, \\
q_k(\tau) &:= (\psi_k')^{\leftarrow}(\tau), \\
q_{i,k}(\tau) &:= c_{i,k} q_k(c_{i,k}\tau), \\
\sigma_k^2(\tau) &:= q_k'(\tau) = 1/\psi_k''(q_k(\tau)), \\
\sigma_{i,k}^2(\tau) &:= q_{i,k}'(\tau) = c_{i,k}^2/\psi_k''(q_k(c_{i,k}\tau)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_\infty(\tau) &:= \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_{i,k}(\tau), \\ \sigma_\infty^2(\tau) &:= \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma_{i,k}^2(\tau) = q'_\infty(\tau). \end{aligned}$$

Bemerkung Sei Voraussetzung 3.5 erfüllt und $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiert wie in (3.1). Aus der Minkowski'schen Ungleichung folgt

$$\mathrm{E}|Y_n| \le \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}\mathrm{E}|Z_k| < \infty.$$

Außerdem ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ strikt stationär nach Definition 3.2.

Für $k \in \{1,\dots,K\}$ folgt, dass $q_k \in C^1$ und streng monoton wachsend ist. Außerdem bildet q_k die Menge $[0,\infty)$ auf $[t_{0,k},\infty)$ ab. Weil

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_{i,k}| < \infty \tag{3.3}$$

und wegen $\psi_k'' > 0$ auf $[t_{0,k},\infty)$ sind die Funktionen q_∞ und σ_∞^2 wohldefiniert. Hierbei gilt

$$q_\infty : [0,\infty) \mapsto \left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_{0,k}c_{i,k}, \infty\right).$$

Zusätzlich ist q_∞ streng monoton wachsend, aufgrund der Stetigkeit also invertierbar.

Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma_{i,k}(\tau) < \infty, \qquad \tau \ge 0 \tag{3.4}$$

wegen (3.3). Die Zufallsvariable $X_{i,k}$ aus Definition 3.2 habe die Dichte $h_{i,k}$, für die nach dem Transformationssatz für Dichten mit $x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1,\dots,K\}$

$$h_{i,k}(x) = f_k(x/c_{i,k})/c_{i,k}$$

gilt. Daher gilt $\Phi_{i,k}(\tau) = \mathrm{E}e^{\tau X_{i,k}} < \infty$ für $\tau \ge 0$ nach Proposition 2.25.

Mit der nachfolgende Voraussetzung ist es möglich, auch die ANET Eigenschaft der exponentiellen Familie von abzählbar unendlichen Summen von Zufallsvariablen, die den Voraussetzungen von Satz 2.6 genügen, nachzuweisen.

Voraussetzung 3.7 *Sei $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\dots,K\}}$ wie in Voraussetzung* 3.3. *Zusätzlich gelten die folgenden beiden Bedingungen:*

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{\tau\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{|i|>m}\sigma_{i,k}^2(\tau)}{\sigma_\infty^2(\tau)} = 0, \tag{3.5}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{\tau\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{|i|>m}\sigma_{i,k}(\tau)}{\sigma_\infty(\tau)} = 0. \tag{3.6}$$

Bemerkung Manchmal werden die Indizes, über die summiert wird, im Folgenden verkürzt dargestellt. Hierbei bedeuten

$$\sum_{k,i}(...) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(...)$$

und

$$\sum_{k,|i|\leq m}(...) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-m}^{m}(...).$$

Vergleichbare Abkürzungen der Indizes sind auf oben beschriebene Weise zu interpretieren.

3.1 Tailverhalten

Dieser Abschnitt setzt sich mit dem Tailverhalten der Zufallsvariable $Y_n \stackrel{d}{=} Y_0$ für $n \in \mathbb{Z}$, welche in Gleichung (3.1) definiert wurde, auseinander. Der Beweis des Satzes 3.8, welcher wiederum das Tailverhalten beschreibt, ist kompliziert und benötigt einige Hilfslemmas, bevor er am Ende des Abschnittes folgt.

Satz 3.8 *Wenn die Voraussetzungen* 3.5 *und* 3.7 *erfüllt sind, dann folgt*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) \sim \frac{\exp(-\tau q_\infty(\tau))\Phi(\tau)}{\sqrt{2\pi}\tau\sigma_\infty(\tau)}, \qquad \tau \to \infty. \tag{3.7}$$

Weiter gibt es eine Funktion $\rho(\tau) = o(1/\sigma_\infty(\tau)),\ \tau \to \infty$*, so dass für* $t \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > t\right) \sim \frac{\exp\left(-\int_{\sum_{k,i} t_{0,k}c_{i,k}}^{t} [q_\infty^{\leftarrow}(\nu) + \rho(q_\infty^{\leftarrow}(\nu))]\,\mathrm{d}\nu\right)}{\sqrt{2\pi}q_\infty^{\leftarrow}(t)\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(t))} \tag{3.8}$$

gilt, wobei $1/\sigma_\infty(\tau) = o(\tau),\ \tau \to \infty$*, so dass der erste Term des Integranden dominiert.*

Das folgende Lemma zeigt die ANET Eigenschaft der exponentiellen Familie $(\bar{Z}_{k,\tau})_{\tau\geq 0}$ der Zufallsvariable Z_k aus Voraussetzung 3.5.

Lemma 3.9 *Es sei die Voraussetzung* 3.5 *erfüllt. Dann ist* $[\{\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)\}/\sigma_k(\tau)]_{\tau\geq 0}$ *für* $k \in \{1, \ldots, K\}$ *ANET und es gilt*

$$\frac{\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)}{\sigma_k(\tau)} \to U, \qquad \tau \to \infty,$$

wobei die Zufallsvariable U *standardnormalverteilt sei.*

Beweis Die Zufallsvariable Z_k erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.39. Für die Dichte $g_{\bar{Z}_{k,\tau}}$ der Zufallsvariable $\{\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)\}/\sigma_k(\tau)$ gilt nach dem Transformationssatz für Dichten

$$g_{\bar{Z}_{k,\tau}}(u) = \sigma_k(\tau)f_{\bar{Z}_{k,\tau}}(q_k(\tau) + \sigma_k(\tau)u),$$

Diese Dichte entspricht bei genauer Betrachtung der Definition von $\sigma_k(\tau)$ in der Definition 3.6 genau der normalisierten Dichte aus Satz 2.39. □

Bemerkung Mit der Dichte $h_{i,k}$ einer Zufallsvariable $X_{i,k}$ aus Definition 3.6 wird die exponentielle Familie von Dichten $f_{\bar{X}_{i,k,\tau}}$ mit zugehörigen Zufallsvariablen $\bar{X}_{i,k,\tau}$ für $\tau \geq 0$ in Verbindung gebracht.

Lemma 3.10 *Es seien die Voraussetzungen* 3.5 *und* 3.7 *erfüllt. Dann existiert die momentenerzeugende Funktion* Φ *von* $\sum_{k,i} X_{i,k} = \sum_{k,i} c_{i,k} Z_{i,k}$ *und ist endlich für alle* $\tau \geq 0$ *und es gilt*

$$\Phi(\tau) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_{i,k}(\tau), \qquad \tau \geq 0,$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log \Phi(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log \Phi_{i,k}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}, \qquad \tau \geq 0,$$

wobei sowohl die Summe als auch das Produkt auf Teilmengen von $[0, \infty)$ *gleichmäßig konvergieren. Die mit* $\sum_{k,i} X_{i,k}$ *assoziierte exponentielle Familie ist* $(\sum_{k,i} \bar{X}_{i,k,\tau})_{\tau \geq 0}$*, wobei die Summe für alle* $\tau \geq 0$ *fast sicher absolut konvergiert.*

Beweis Seien im weiteren Verlauf $i \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, \ldots, K\}$ und $\tau \geq 0$. Aufgrund der Definition 2.35 der exponentiellen Familie folgt

$$\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} = \frac{\mathrm{E}\left(X_{i,k} \mathrm{e}^{\tau X_{i,k}}\right)}{\Phi_{i,k}(\tau)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h_{i,k}(t) t \mathrm{e}^{\tau t} \mathrm{d}t}{\Phi_{i,k}(\tau)} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{i,k}(\tau)/\mathrm{d}\tau}{\Phi_{i,k}(\tau)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log \Phi_{i,k}(\tau).$$

Weiterhin gilt für $\tau \geq 0$ wegen $\mathrm{E}|X_{i,k}| < \infty$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau}| = \frac{\int |t| \mathrm{e}^{\tau t} h_{i,k}(t) \mathrm{d}t}{\Phi_{i,k}(\tau)} &\leq \underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{0} |t| h_{i,k}(t) \mathrm{d}t}{\Phi_{i,k}(\tau)}}_{=:\, C < \infty} + \frac{\int_{0}^{\infty} t \mathrm{e}^{\tau t} h_{i,k}(t) \mathrm{d}t}{\Phi_{i,k}(\tau)} \\ &\leq C + \frac{\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{(\tau+1)t} h_{i,k}(t) \mathrm{d}t}{\Phi_{i,k}(\tau)} \\ &= C + \frac{\Phi_{i,k}(\tau + 1)}{\Phi_{i,k}(\tau)} < \infty. \end{aligned}$$

Da $\tau \geq 0$ beliebig war, ist die dritte und damit auch die erste Bedingung von Lemma 2.36 erfüllt. Die zweite Bedingung wird durch die Stetigkeit von $\Phi_{i,k}(\tau)$ erfüllt. Deshalb ist die Funktion

$$\tau \mapsto \mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau}|$$

auf $[0, \infty)$ stetig nach Lemma 2.36. Weil nach Lemma 3.9

$$[\{\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)\}/\sigma_k(\tau)]_{\tau \geq 0}$$

ANET ist und gegen eine $N(0, 1)$ verteilte Zufallsvariable konvergiert, konvergiert nach Proposition 2.31 für $\tau \to \infty$ das absolute Moment

$$\mathrm{E}|\{\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)\}/\sigma_k(\tau)|$$

gegen das einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariable, nämlich $(2/\pi)^{1/2}$. Außerdem sind nach Voraussetzung 3.5, den eben gemachten Berechnungen und (2.34) $\mathrm{E}|\bar{Z}_{k,\tau}|$, $1/\sigma_k(\tau)$ und $q_k(\tau)$ auf kompakten Teilintervallen von $[0,\infty)$ beschränkt. Daher existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\mathrm{E}|\bar{Z}_{k,\tau} - q_k(\tau)| \leq C\sigma_k(\tau)$$

für alle $\tau \geq 0$. Weil nach Definition 3.6, Voraussetzung 3.5 und (2.34)

$$\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau) = (\overline{c_{i,k} Z_{i,k}})_\tau - c_{i,k} q_k(c_{i,k}\tau) \stackrel{d}{=} c_{i,k}\left(\bar{Z}_{k,c_{i,k}\tau} - q_k(c_{i,k}\tau)\right)$$

gilt, folgt

$$\mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)| \leq C\sigma_{i,k}(\tau), \qquad \forall \tau \geq 0,\ \forall i \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \{1,\ldots,K\}. \tag{3.9}$$

Insbesondere gilt für sämtliche $s > 0$

$$\sup_{0\leq\tau\leq s} \mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau}| \leq C \sup_{0\leq\tau\leq s} \sigma_{i,k}(\tau) + \sup_{0\leq\tau\leq s} q_{i,k}(\tau),$$

was wegen der Voraussetzungen 3.5 und 3.7 sowie (3.4) absolute und gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}$$

auf Kompakta impliziert. Die Konvergenz von $\sum_{k,i} \mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau}|$ zieht die absolute Konvergenz von $\sum_{k,i} \bar{X}_{i,k,\tau}$ nach sich. Überdies impliziert die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log \Phi_{i,k}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}$$

zusätzlich die von $\sum_{k,i} \log \Phi_{i,k}(\tau)$ und weiter die von

$$\prod_{k=1}^{K} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_{i,k}(\tau) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[\exp\left(\tau c_{i,k} Z_{i,k}\right)\right]$$

jeweils auf Kompakta. Nun konstruiere man für $k \in \{1,\ldots,K\}$ eine Zufallsvariable $\tilde{Z}_k$ durch

$$\tilde{Z}_k = \begin{cases} Z_k, & Z_k \geq 0, \\ \in [0,1], & Z_k < 0, \end{cases}$$

so dass $\tilde{Z}_k$ eine beschränkte Dichte habe. Sei nun $(\tilde{Z}_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ für alle k eine unabhängig identisch verteilte (kurz: i.i.d.) Folge mit der Verteilung von $\tilde{Z}_k$ und seien die $\tilde{Z}_{i,k}$ für alle i und k unabhängig. Da die $\tilde{Z}_{i,k}$ der Voraussetzung 3.5 genügen, folgt mit den Berechnungen von eben

$$\prod_{k=1}^{K} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[\exp\left(\tau c_{i,k} \tilde{Z}_{i,k}\right)\right] < \infty, \qquad \tau \geq 0.$$

Nun gilt aber auch für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \geq 0$

$$0 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-n}^{n}\left\{\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right\}\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-(n+1)}^{n+1}\left\{\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right\}\right)$$

und daher folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und durch die Unabhängigkeit der $\tilde{Z}_{i,k}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right\}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-n}^{n}\exp\left(\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-n}^{n}\mathrm{E}\left[\exp\left(\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[\exp\left(\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right)\right] < \infty, \qquad \tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Weil außerdem für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \geq 0$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-n}^{n}\left\{\tau c_{i,k}Z_{i,k}\right\}\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{\tau c_{i,k}\tilde{Z}_{i,k}\right\}\right)$$

gilt, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und durch die Unabhängigkeit der $Z_{i,k}$

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(\tau\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{c_{i,k}Z_{i,k}\right\}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-n}^{n}\exp\left(\tau c_{i,k}Z_{i,k}\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[\exp\left(\tau c_{i,k}Z_{i,k}\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{K}\prod_{i=-\infty}^{\infty}\Phi_{i,k}(\tau) \qquad \tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Dass $(\sum_{k,i}\bar{X}_{i,k,\tau})_{\tau\geq 0}$ die mit $\sum_{k,i}X_{i,k}$ assoziierte exponentielle Familie ist, folgt aus Gleichung (3.4), [13]. □

Nachfolgendes Lemma ist eine Variante von Slutsky's Theorem und wird zum Beweis des darauf folgenden Lemmas benötigt.

Lemma 3.11 *Seien V, W_u für $u \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen auf dem metrischen Raum S mit der Metrik ρ. Seien weiter $(V_{u,n}, V_n)$ Zufallsvektoren auf $S \times S$ für $u, n \in \mathbb{N}$. Falls $V_{u,n} \xrightarrow{\mathscr{D}} W_u$ für ein festes $u \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$ und falls $W_u \xrightarrow{\mathscr{D}} V$ für $u \to \infty$ und zusätzlich*

$$\lim_{u\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}(\rho(V_{u,n}, V_n) \geq \epsilon) = 0$$

für ein beliebiges $\epsilon > 0$, dann gilt

$$V_n \xrightarrow{\mathscr{D}} V, \qquad n \to \infty.$$

Beweis Siehe Theorem 3.2, [3]. □

Lemma 3.12 *Es seien die Voraussetzungen* 3.5 *und* 3.7 *erfüllt. Dann gilt*

$$\frac{1}{\sigma_\infty(\tau)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\} \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0,1), \qquad \tau \to \infty. \tag{3.10}$$

Beweis Definiere für $\tau \geq 0$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass nicht alle $(c_{i,k})_{|i|\leq m, k\in\{1,\ldots,K\}}$ gleich 0 sind

$$\begin{aligned}
A_{m,\tau} &:= \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-m}^{m} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\} \left(\frac{1}{\sigma_\infty(\tau)} - \frac{1}{\left(\sum_{k,|i|\leq m} \sigma_{i,k}^2(\tau)\right)^{1/2}} \right), \\
B_{m,\tau} &:= \frac{1}{\sigma_\infty(\tau)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{|i|>m} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}, \\
V_{m,\tau} &:= \frac{\sum_{k,|i|\leq m} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\leq m} \sigma_{i,k}^2(\tau)\right)^{1/2}}, \\
V_\tau &:= \frac{1}{\sigma_\infty(\tau)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}.
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$V_\tau - V_{m,\tau} = A_{m,\tau} + B_{m,\tau}.$$

Nun gilt nach (2.34) und Lemma 3.9 für $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1, \ldots, K\}$

$$\frac{1}{\sigma_{i,k}(\tau)} \left(\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\right) \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sigma_k(c_{i,k}\tau)} \left(\bar{Z}_{k,c_{i,k}\tau} - q_k(c_{i,k}\tau)\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0,1), \qquad \tau \to \infty.$$

Vergleiche hierzu (2.39). Aufgrund von (2.42) folgt also für $m \in \mathbb{N}$

$$V_{m,\tau} \text{ ist ANET}, \quad V_{m,\tau} \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0,1), \qquad \tau \to \infty, \tag{3.11}$$

Gleichung (3.10) folgt nun aus Lemma 3.11, vorausgesetzt für sämtliche $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{\tau\to\infty} \mathrm{P}(|A_{m,\tau}| > \epsilon) = 0 = \lim_{m\to\infty} \limsup_{\tau\to\infty} \mathrm{P}(|B_{m,\tau}| > \epsilon). \tag{3.12}$$

In diesem Fall wäre nämlich $\mathbb{R}$ der metrische Raum mit der Metrik $\rho(a,b) = |a-b|$. Um nun (3.12) zu zeigen, werde $A_{m,\tau}$ folgendermaßen umgeschrieben:

$$A_{m,\tau} = \frac{\sum_{k,|i|\leq m} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\leq m} \sigma_{i,k}^2(\tau)\right)^{1/2}} \left(\left(\frac{\sum_{k,|i|\leq m} \sigma_{i,k}^2(\tau)}{\sigma_\infty^2(\tau)} \right)^{1/2} - 1 \right).$$

Weil nun nach Proposition 2.31

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathrm{E}\left|\frac{\sum_{k,|i|\le m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\le m}\sigma^2_{i,k}(\tau)\right)^{1/2}}\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

folgt aufgrund von (3.5), dass

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{\tau\to\infty}\mathrm{E}|A_{m,\tau}| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\limsup_{m\to\infty}\limsup_{\tau\to\infty}\left(1 - \left(\frac{\sum_{k,|i|\le m}\sigma^2_{i,k}(\tau)}{\sigma^2_\infty(\tau)}\right)^{1/2}\right) = 0.$$

Hieraus folgt die linke Gleichung von (3.12) durch die Markov'sche Ungleichung, welche für eine beliebige Zufallsvariable X und $c > 0$

$$\mathrm{P}(|X| > c) < \frac{1}{c}\mathrm{E}|X|$$

besagt. Die rechte Seite von (3.12) folgt mit derselben Methode durch (3.6) unter Betrachtung, dass

$$\mathrm{E}|B_{m,\tau}| \le \frac{1}{\sigma_\infty(\tau)}\sum_{k=1}^K\sum_{|i|>m}\mathrm{E}|\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)| \le \frac{C}{\sigma_\infty(\tau)}\sum_{k=1}^K\sum_{|i|>m}\sigma_{i,k}(\tau),$$

was aus (3.9) folgt. □

Lemma 3.13 *Es seien die Voraussetzungen* 3.5 *und* 3.7 *erfüllt. Dann hat*

$$\frac{1}{\sigma_\infty(\tau)}\sum_{k=1}^K\sum_{i=-\infty}^\infty\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}$$

eine Dichte, bezeichnet durch r_τ, welche für $\tau\to\infty$ lokal gleichmäßig gegen die Dichte φ der Standard Normalverteilung konvergiert. Überdies gibt es ein $C > 0$ und ein $\tau_c > 0$, so dass $r_\tau(x) \le C$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und $\tau \ge \tau_c$.

Beweis Aufgrund von (3.5) existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass für hinreichend große τ, sagen wir $\tau \ge \tau_0 > 0$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sigma_\infty(\tau)}\sqrt{\sum_{k=1}^K\sum_{|i|\le m}\sigma^2_{i,k}(\tau)} \le 1 \tag{3.13}$$

gilt. Sei g_τ die Dichte von

$$\frac{\sum_{k,|i|\le m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\le m}\sigma^2_{i,k}(\tau)\right)^{1/2}}.$$

Wegen der ANET Eigenschaft nach (3.11) konvergiert aufgrund von Proposition 2.27 g_τ lokal gleichmäßig gegen die Dichte φ der Standardnormalverteilung für $\tau \to \infty$ und es existieren für jedes $\epsilon > 0$ ein $M > 1$ und ein $\tau_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$g_\tau(x) \leq \mathrm{e}^{-|x|/\epsilon}, \qquad |x| \geq M,\ \tau \geq \tau_\epsilon. \tag{3.14}$$

Also gibt es ein $M_\epsilon \geq M$, so dass $g_\tau(x) \leq \epsilon$ für alle $|x| \geq M_\epsilon$. Weil global $g_\tau \geq 0$ gilt, folgt hieraus

$$|g_\tau(x) - g_\tau(y)| \leq \epsilon, \qquad |x|, |y| \geq M_\epsilon,\ \tau \geq \tau_\epsilon. \tag{3.15}$$

Nun folgt aus lokal gleichmäßiger Konvergenz punktweise Konvergenz von g_τ gegen die Dichte φ der Standardnormalverteilung für $\tau \to \infty$. Außerdem ist φ gleichmäßig stetig auf $[-M_\epsilon, M_\epsilon]$. Sei nun $\tilde{\epsilon} = \epsilon/3$. Dann existieren ein $\delta_{1,\epsilon} > 0$ und $\tau_{1,\epsilon} > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |g_\tau(x) - g_\tau(y)| &\leq |g_\tau(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - g_\tau(y)| \\ &\leq 3\tilde{\epsilon} = \epsilon, \qquad |x|, |y| \leq M_\epsilon,\ |x - y| \leq \delta_{1,\epsilon},\ \tau \geq \tau_{1,\epsilon}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Die Ungleichungen (3.15) und (3.16) implizieren, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta_{1,\epsilon} > 0$ und $\tau_{1,\epsilon} > 0$ existieren, so dass

$$|g_\tau(x) - g_\tau(y)| \leq \epsilon, \qquad \forall \tau \geq \tau_{1,\epsilon},\ \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \delta_{1,\epsilon}. \tag{3.17}$$

Die Dichte von $\sum_{k,|i|\leq m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}/\sigma_\infty(\tau)$ ist nach dem Transformationssatz für Dichten gegeben durch

$$x \mapsto g_\tau\left(\frac{\sigma_\infty(\tau)}{\sqrt{\sum_{k,|i|\leq m}\sigma_{i,k}^2(\tau)}}x\right)\frac{\sigma_\infty(\tau)}{\sqrt{\sum_{k,|i|\leq m}\sigma_{i,k}^2(\tau)}} =: h_\tau(x). \tag{3.18}$$

Aufgrund von (3.13), (3.17) und (3.18) existieren für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta_{2,\epsilon} > 0$ und $\tau_{2,\epsilon} > 0$, so dass

$$|h_\tau(x) - h_\tau(y)| \leq \epsilon, \qquad \forall \tau \geq \tau_{2,\epsilon},\ \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \delta_{2,\epsilon}.$$

H_τ sei die Verteilungsfunktion von $\sum_{k,|i|>m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}/\sigma_\infty(\tau)$. Dann hat

$$\frac{\sum_{k,i}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\sigma_\infty(\tau)} = \frac{\sum_{k,|i|\leq m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\sigma_\infty(\tau)} + \frac{\sum_{k,|i|>m}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\sigma_\infty(\tau)}$$

eine durch

$$r_\tau(x) := \int h_\tau(x - t)\mathrm{d}H_\tau(t)$$

bezeichnete Dichte, welche für alle $\tau \geq \tau_{2,\epsilon}$ und $x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \delta_{2,\epsilon}$ der Ungleichung

$$|r_\tau(x) - r_\tau(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\{h_\tau(x - t) - h_\tau(y - t)\}\mathrm{d}H_\tau(t)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\epsilon\mathrm{d}H_\tau(t) = \epsilon \tag{3.19}$$

genügt. Außerdem gilt wegen (3.13) und (3.18) für $\tau \geq \tau_0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$|r_\tau(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(x - t)\mathrm{d}H_\tau(t)\right| \leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\max_{x\in\mathbb{R}} g_\tau(x)\mathrm{d}H_\tau(t) = 2\max_{x\in\mathbb{R}} g_\tau(x). \tag{3.20}$$

Nun ist aber lokal gleichmäßige Konvergenz von g_τ gegen φ nach Korollar 2.3 äquivalent zu kompakter Konvergenz. Das heißt, für $M > 0$ konvergiert $g_\tau(x)$ für $x \in [-M, M]$ gleichmäßig gegen die Dichte $\varphi(x)$ der Standardnormalverteilung für $\tau \to \infty$. Es gibt also für jedes $\epsilon > 0$ ein $\tau_{3,\epsilon} > 0$, so dass

$$g_\tau(x) \leq \varphi(x) + \epsilon \leq 1/\sqrt{2\pi} + \epsilon, \qquad |x| \leq M,\ \tau \geq \tau_{3,\epsilon}$$

gilt. Dies gemeinsam mit (3.14) bedingt die gleichmäßige Beschränktheit von $r_\tau(x)$ für große τ. Angenommen, $r_\tau(x)$ konvergierte nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\varphi(x)$ für $\tau \to \infty$. Für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ existierte dann ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass oBdA

$$\varphi(x_0) + 2\epsilon \leq \limsup_{\tau\to\infty} r_\tau(x_0)$$

stimmte. So gäbe es eine gegen ∞ divergente Subfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass durch diese Tatsache $\lim_{n\to\infty} r_{\tau_n}(x_0) = \limsup_{\tau\to\infty} r_\tau(x_0)$ folgte. (3.19) implizierte nun die Existenz eines $\delta > 0$, so dass für hinreichend große n

$$r_{\tau_n}(y) \geq \varphi(y) + \epsilon, \qquad \forall y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

gelte. Hieraus folgte

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} r_{\tau_n}(y)\mathrm{d}y \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{\varphi(y) + \epsilon\}\mathrm{d}y,$$

welches wiederum Lemma 3.12 widerspräche. Also konvergiert $r_\tau(x)$ gegen $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\tau \to \infty$. Aus der Ungleichung (3.19) folgt die lokale Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz. Hieraus sowie aus (3.20) und der ANET Eigenschaft von g_τ folgt die ANET Eigenschaft von h_τ. □

Lemma 3.14 *Es seien die Voraussetzungen* 3.5 *und* 3.7 *erfüllt. Dann gilt für* $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\log\left(\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)\right) &= -\tau\sigma_\infty^2(\tau) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\} \\ &= -\tau\sigma_\infty^2(\tau) + o(\sigma_\infty(\tau)), \qquad \tau \to \infty.\end{aligned}$$

Beweis Wegen Lemma 3.10 und der Definition von $q'_\infty(\tau)$ folgt für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\log\left(\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{-\tau q_\infty(\tau) + \log\Phi(\tau)\} \\ &= -\tau q'_\infty(\tau) - q_\infty(\tau) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} \\ &= -\tau\sigma_\infty^2(\tau) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}.\end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Durch (3.9) und (3.6) existiert ein $m_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\limsup_{\tau\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{|i|>m_\epsilon} \left| \frac{\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)}{\sigma_\infty(\tau)} \right| \leq \limsup_{\tau\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{|i|>m_\epsilon} \mathrm{E} \left| \frac{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)}{\sigma_\infty(\tau)} \right| \leq \epsilon. \qquad (3.21)$$

Wegen der ANET Eigenschaft von

$$\frac{\sum_{k,|i|\leq m_\epsilon} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\leq m_\epsilon} \sigma_{i,k}^2(\tau)\right)^{1/2}}$$

für $\tau \to \infty$ nach (3.11) folgt nach Korollar 2.32

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau\to\infty} \left| \frac{\sum_{k,|i|\leq m_\epsilon} \{\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\sigma_\infty(\tau)} \right| &\leq \limsup_{\tau\to\infty} \left| \frac{\mathrm{E}\sum_{k,|i|\leq m_\epsilon} \{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}}{\left(\sum_{k,|i|\leq m_\epsilon} \sigma_{i,k}^2(\tau)\right)^{1/2}} \right| \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Die Behauptung folgt durch (3.21) und (3.22), da $\epsilon > 0$ beliebig war. □

Beweis von Satz 3.8 Unter Verwendung von (2.33), Lemma 3.10 und Lemma 3.13 ergibt sich für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) \\ &= \mathrm{E}\left\{\exp\left(-\tau\sum_{k,i}\bar{X}_{i,k,\tau}\right) 1_{\sum_{k,i}\bar{X}_{i,k,\tau} > q_\infty(\tau)}\right\}\Phi(\tau) \\ &= \mathrm{E}\left\{\exp\left(-\tau q_\infty(\tau)\right)\exp\left(-\tau\sum_{k,i}\left(\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\right)\right) 1_{\sum_{k,i}\bar{X}_{i,k,\tau} > q_\infty(\tau)}\right\}\Phi(\tau) \\ &= \mathrm{E}\left\{\exp\left(-\tau\sigma_\infty(\tau)\sum_{k,i}\frac{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)}{\sigma_\infty(\tau)}\right) 1_{\sum_{k,i}\{\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)\}/\sigma_\infty(\tau) > 0}\right\} \mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau) \\ &= \mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau\sigma_\infty(\tau)x} r_\tau(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nach Definition 3.6 ist

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau\sigma_\infty(\tau) = \left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tau^2 q_{i,k}'(\tau)\right)^{1/2}.$$

Nun existieren nach Voraussetzung 3.7 ein $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1, \ldots, K\}$, so dass $c_{i,k} > 0$ und damit wiederum nach Definition 3.6 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to\infty} \tau^2 q_{i,k}'(\tau) &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{c_{i,k}^2\tau^2}{\psi_k''\left((\psi_k')^{\leftarrow}(c_{i,k}\tau)\right)} \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2}{\psi_k''\left((\psi_k')^{\leftarrow}(\nu)\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\psi_k'(t))^2}{\psi_k''(t)}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Grenzwert nach Proposition 2.23 gegen ∞ divergiert, da ψ_k nach Voraussetzung 3.5 asymptotisch parabolisch ist. Hieraus folgt, dass

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau\sigma_\infty(\tau) = \infty. \tag{3.23}$$

Unter Verwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz und Lemma 3.13 folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty} \tau\sigma_\infty(\tau)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau\sigma_\infty(\tau)x} r_\tau(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z} r_\tau\left(\frac{z}{\tau\sigma_\infty(\tau)}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \lim_{\tau\to\infty} \mathrm{e}^{-z} r_\tau\left(\frac{z}{\tau\sigma_\infty(\tau)}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

woraus (3.7) folgt.

Nach (3.7) und Lemma 3.14 existiert eine Funktion $\zeta(\tau) = o(\sigma_\infty(\tau))$ für $\tau\to\infty$, so dass gilt

$$P\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^\infty c_{i,k}Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) \sim \frac{\exp(-\int_0^\tau \{uq'_\infty(u)+\zeta(u)\}\mathrm{d}u)}{\sqrt{2\pi}\tau\sigma_\infty(\tau)}, \qquad \tau\to\infty. \tag{3.24}$$

Setzt man nun $t = q_\infty(\tau)$ und definiert $\rho(\tau) := \zeta(\tau)/\sigma_\infty^2(\tau) = o(1/\sigma_\infty(\tau))$, $\tau\to\infty$, so folgt (3.8) aufgrund der Gleichung

$$\int_0^{q_\infty^{\leftarrow}(t)} \left(uq'_\infty(u) + \frac{\zeta(u)}{q'_\infty(u)}q'_\infty(u)\right)\mathrm{d}u = \int_{\sum_{k,i} t_{0,k}c_{i,k}}^t [q_\infty^{\leftarrow}(v) + \rho\,(q_\infty^{\leftarrow}(v))]\mathrm{d}v, \tag{3.25}$$

wobei mit $q_\infty(u) = v$ substituiert wurde. Dass $1/\sigma_\infty(\tau) = o(\tau)$ für $\tau\to\infty$ gilt, folgt aus (3.23). □

3.2 Anziehungsbereich

In diesem Abschnitt wird analysiert, wie sich das Maximum einer Folge von Zufallsvariablen $(\widehat{Y}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unter geeigneter Zentrierung und Skalierung verhält. Hierbei sind die $\widehat{Y}_n$ identisch verteilt wie Y_0 aus (3.1), jedoch zusätzlich unabhängig voneinander. Es stellt sich heraus, dass $(\widehat{Y}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung liegt.

Was das genau bedeutet, wird - da dies nicht das Thema der Diplomarbeit ist - in aller Kürze in der folgenden Definition und nachfolgenden Bemerkung geklärt. Für eine ausführlichere Beschreibung dieser Phänomene seien dem geneigten Leser Kapitel 0 und 1, [11] ans Herz gelegt.

Definition 3.15 *Sei V eine nicht-degenerierte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion G. Dann ist eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Verteilungsfunktion F* im Anziehungsbereich von G, *geschrieben*

$$X_1 \in D(G), \quad \textit{oder} \quad F\in D(G),$$

falls normierende Konstanten $a_n > 0$ *und* $b_n \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass*

$$a_n(\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} V, \qquad n \to \infty$$

oder äquivalent dazu

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x/a_n + b_n) = G(x)$$

oder ebenfalls äquivalent

$$\lim_{n\to\infty} n\{1 - F(x/a_n + b_n)\} = -\log G(x)$$

in jedem Stetigkeitspunkt von G.

Bemerkung Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Verteilungsfunktion von $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ aus obiger Definition (also insbesondere mit unabhängigen X_i) gerade F^n. Außerdem kann nach Theorem 1.4.2, [8] die Verteilungsfunktion G aus obiger Definition ausschließlich einem der drei nachfolgend definierten Typen angehören:

(a) Typ 1:

$$G(x) = \Lambda(x) := \exp(-\mathrm{e}^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) oder Typ 2:

$$G(x) = \Phi_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}) \text{ für ein } \alpha > 0, & x > 0, \end{cases}$$

(c) oder Typ 3:

$$G(x) = \Psi_\alpha(x) := \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) \text{ für ein } \alpha > 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Die Funktion Λ heißt *Gumbel Verteilung* und ist der für uns interessante Fall, da unter Anderem $X_1 \in D(G)$ dann eintreten kann, wenn die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus obiger Definition leichte Tails haben. Typ 2 heißt *Fréchet Verteilung* und kann ausschließlich bei schweren Tails der X_n eintreten. Typ 3 heißt *Weibull Verteilung* und setzt insbesondere $t_\infty < \infty$ voraus, was Voraussetzung 3.5 widerspricht. Allgemein heißen die drei beschriebenen Verteilungsfunktionen *Extremwertverteilungsfunktionen*.

Man könnte anstelle des Maximums von Zufallsvariablen auch das Minimum betrachten, schließlich gilt ja $\min\{X_1, \ldots, X_n\} = -\max\{-X_1, \ldots, -X_n\}$. Auch deshalb spielt die Extremwerttheorie eine bedeutende Rolle bei der Abschätzung von Risiken in der Finanz- und Versicherungswirtschaft.

Definition 3.16 *Seien* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion* F *und* $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen ebenfalls mit Verteilungsfunktion* F. *Dann heißt* $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die mit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assoziierte i.i.d. Folge.

Bemerkung Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$. Da nun für $m, n \in \mathbb{N}$

$$a_{m+n+1}(\max\{X_{-m},\dots,X_n\} - b_{m+n+1}) \stackrel{d}{=} a_{m+n+1}(\max\{X_1,\dots,X_{m+n+1}\} - b_{m+n+1})$$

gilt, lässt sich die Definition 3.15 beliebig auf Folgen in $\mathbb{Z}$ erweitern.

Lemma 3.17 *Seien $\psi : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ in C^2, $\psi'(\infty) = \infty$, $\psi'' > 0$ und $q := (\psi')^{\leftarrow}$. Dann ist $1/\sqrt{\psi''}$ genau dann selbst-vernachlässigend in ∞, wenn $\sqrt{\psi'' \circ q}$ selbst-vernachlässigend in ∞ ist.*

Beweis Die Aussage ist eine direkte Konsequenz von Proposition 2.16. □

Satz 3.18 *Es seien die Voraussetzungen 3.5 und 3.7 erfüllt. Dann folgt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(Y_0 > t + x/q_\infty^{\leftarrow}(t)\right)}{\mathrm{P}(Y_0 > t)} = \mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Außerdem ist die mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assoziierte i.i.d. Folge im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung, wobei die normierenden Konstanten a_n und b_n gegeben sind durch

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{P}(Y_0 > b_n) = 1 \quad \textit{und} \quad a_n := q_\infty^{\leftarrow}(b_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Beweis Sobald (3.26) gezeigt werden konnte, folgt daraus direkt

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{P}\left(Y_0 > b_n + x/a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}(Y_0 > b_n + x/q_\infty^{\leftarrow}(b_n))}{\mathrm{P}(Y_0 > b_n)} = \mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

was zeigt, dass nach Definition 3.15 und der darauf folgenden Bemerkung die assoziierte i.i.d. Folge in $D(\Lambda)$ mit normierenden Konstanten a_n und b_n liegt. Also muss nur (3.26) gezeigt werden. Setze nun für $x \in \mathbb{R}$ und hinreichend große t

$$\tau := q_\infty^{\leftarrow}(t) \quad \text{und} \quad \tau^* := q_\infty^{\leftarrow}\left(t + \frac{x}{q_\infty^{\leftarrow}(t)}\right).$$

Dann folgt aus (3.7),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{P}(Y_0 > t + x/q_\infty^{\leftarrow}(t))}{\mathrm{P}(Y_0 > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{P}(Y_0 > q_\infty(\tau^*))}{\mathrm{P}(Y_0 > q_\infty(\tau))} = \lim_{t\to\infty} \frac{\tau\sigma_\infty(\tau)}{\tau^*\sigma_\infty(\tau^*)} \frac{\mathrm{e}^{-\tau^* q_\infty(\tau^*)}\Phi(\tau^*)}{\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)}.$$

Demnach folgt (3.26) wenn erst einmal gezeigt wurde, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q_\infty^{\leftarrow}(t)}{q_\infty^{\leftarrow}(t + x/q_\infty^{\leftarrow}(t))} = 1 = \lim_{t\to\infty} \frac{q_\infty'(q_\infty^{\leftarrow}(t))}{q_\infty'(q_\infty^{\leftarrow}(t + x/q_\infty^{\leftarrow}(t)))}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.28}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \int_\tau^{\tau^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \log\left(\mathrm{e}^{-uq_\infty(u)}\Phi(u)\right) \mathrm{d}u = -x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

gelten. Aus (3.28) folgt nämlich

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tau\sigma_\infty(\tau)}{\tau^*\sigma_\infty(\tau^*)} = 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

und aus (3.29)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\tau^* q_\infty(\tau^*)}\Phi(\tau^*)}{\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)} = \mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

schließlich gilt

$$\begin{aligned}\int_\tau^{\tau^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \log\left(\mathrm{e}^{-uq_\infty(u)}\Phi(u)\right)\mathrm{d}u &= \log\left(\mathrm{e}^{-\tau^* q_\infty(\tau^*)}\Phi(\tau^*)\right) - \log\left(\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)\right)\\ &= \log\left(\frac{\mathrm{e}^{-\tau^* q_\infty(\tau^*)}\Phi(\tau^*)}{\mathrm{e}^{-\tau q_\infty(\tau)}\Phi(\tau)}\right).\end{aligned}$$

Definiere nun

$$P_m(u) := \sum_{k=1}^K \sum_{|i|\le m} q_{i,k}(u), \qquad u \ge 0,$$

woraus folgt, dass

$$P_m'(u) = \sum_{k=1}^K \sum_{|i|\le m} \sigma_{i,k}^2(u), \qquad u \ge 0.$$

Wegen (3.5) existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $m = m_\epsilon \in \mathbb{N}$ und ein $u_\epsilon \in \mathbb{R}$, so dass

$$P_m'(u) \le q_\infty'(u) \le (1+\epsilon)P_m'(u), \qquad \forall u \ge u_\epsilon. \tag{3.30}$$

Betrachtet man Lemma 3.12, so stellt man fest, dass für das dort definierte $V_{m,\tau}$ gerade

$$V_{m,\tau} = \frac{\sum_{k,|i|\le m} \bar{X}_{i,k,\tau} - P_m(\tau)}{\left(P_m'(\tau)\right)^{1/2}}$$

gilt. Eingedenk der Gleichungen (3.11) und (2.42) erkennt man, dass $\sqrt{P_m'(P_m^{\leftarrow})}$ gerade σ_0 aus dem Beweis des Satzes 2.6 entspricht. Dieses ist dort Skalenfunktion einer asymptotisch parabolischen Funktion und damit selbst-vernachlässigend. Nach Lemma 3.17 folgt daraus, dass $1/\sqrt{P_m'}$ selbst-vernachlässigend in ∞ ist. Speziell bedeutet dies, dass

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P_m'\left(u + x/\sqrt{P_m'(u)}\right)}{P_m'(u)} = 1$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen. Nun folgt aus (3.30), dass

$$\frac{1}{1+\epsilon}\frac{P_m'\left(u + x/\sqrt{q_\infty'(u)}\right)}{P_m'(u)} \le \frac{q_\infty'\left(u + x/\sqrt{q_\infty'(u)}\right)}{q_\infty'(u)} \le (1+\epsilon)\frac{P_m'\left(u + x/\sqrt{q_\infty'(u)}\right)}{P_m'(u)}$$

gleichmäßig für beschränkte x und hinreichend große u. Nachdem $P'_m \leq q'_\infty$ und $1/\sqrt{P'_m}$ selbst-vernachlässigen in ∞ ist, ergibt sich

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq \liminf_{u\to\infty} \frac{q'_\infty\left(u + x/\sqrt{q'_\infty(u)}\right)}{q'_\infty(u)} \leq \limsup_{u\to\infty} \frac{q'_\infty\left(u + x/\sqrt{q'_\infty(u)}\right)}{q'_\infty(u)} \leq 1+\epsilon$$

gleichmäßig auf beschränkten x-Intervallen, weshalb $1/\sqrt{q'_\infty}$ selbst-vernachlässigend in ∞ ist und daher auch $\sigma_\infty \circ q_\infty^\leftarrow$ nach Lemma 3.17. Dies wiederum impliziert die rechte Seite von (3.28), da für große t nach (3.23) $1/q_\infty^\leftarrow(t)$ kleiner als $\sigma_\infty(q_\infty^\leftarrow(t))$ ist. Es sei festgehalten, dass nach (3.23)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{q_\infty^\leftarrow(t)} = -(q_\infty^\leftarrow(t))^{-2}\sigma_\infty^{-2}(q_\infty^\leftarrow(t)) \to 0, \qquad t\to\infty. \tag{3.31}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und t hinreichend groß. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{q_\infty^\leftarrow(t + x/q_\infty^\leftarrow(t))} - \frac{1}{q_\infty^\leftarrow(t)}\right| = \left|\int_t^{t+x/q_\infty^\leftarrow(t)} \left(\frac{1}{q_\infty^\leftarrow}\right)'(u)\mathrm{d}u\right|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Weil $t + x/q_\infty^\leftarrow(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und außerdem (3.31) gilt, existiert ein $t_\epsilon \in \mathbb{R}$, so dass für $t \geq t_\epsilon$

$$\left|\int_t^{t+x/q_\infty^\leftarrow(t)} \left(\frac{1}{q_\infty^\leftarrow}\right)'(u)\mathrm{d}u\right| \leq \epsilon|x/q_\infty^\leftarrow(t)|$$

und daher für $t \geq t_\epsilon$

$$\left|\frac{q_\infty^\leftarrow(t)}{q_\infty^\leftarrow(t + x/q_\infty^\leftarrow(t))} - 1\right| \leq \epsilon|x|$$

gilt, woraus die linke Seite von (3.28) folgt. Zum Beweis von (3.29) sei festgehalten, dass eine Funktion, die $o(\sigma_\infty(u))$ ist, wegen (3.23) auch $o(u\sigma_\infty^2(u))$ jeweils für $u \to \infty$ ist. Nach Lemma 3.14 und (3.23) folgt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\left(\mathrm{e}^{-uq_\infty(u)}\Phi(u)\right) = -u\sigma_\infty^2(u) + o(u\sigma_\infty^2(u)) = -u\sigma_\infty^2(u)(1 - o(1)), \qquad u \to \infty.$$

Nun gilt nach dem Satz von Taylor für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t)\mathrm{d}t = f(t_1) - f(t_0) = f'(\xi)(t_1 - t_0)$$

für ein $\xi \in [t_0, t_1]$. Daher existiert ein $\xi \in [t, t + x/q_\infty^\leftarrow(t)]$, so dass

$$\int_\tau^{\tau^*} u\sigma_\infty^2(u)\mathrm{d}u = \int_{q_\infty^\leftarrow(t)}^{q_\infty^\leftarrow(t+x/q_\infty^\leftarrow(t))} uq'_\infty(u)\mathrm{d}u = \int_t^{t+x/q_\infty^\leftarrow(t)} q_\infty^\leftarrow(v)\mathrm{d}v = q_\infty^\leftarrow(\xi)\frac{x}{q_\infty^\leftarrow(t)}$$

gilt . Für $t \to \infty$ konvergiert der letzte Ausdruck gegen x, da $\tau^*/\tau \to 1$ und q_∞ außerdem monoton wachsend ist. Hieraus folgt (3.29). □

Kapitel 4

Extremwerttheorie für endliche Summen von MA(∞)-Prozessen als Punktprozessresultat

In diesem Kapitel werden Punktprozessresultate für den in (3.1) definierten Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ aufgezeigt.

Dabei wird zunächst in aller Kürze in die Theorie der Punktprozesse eingeführt. Daraufhin werden die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für stationäre Prozesse vorgestellt, sowie die daraus resultierenden Punktprozessresultate. Zuletzt wird nachgewiesen, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ unter Voraussetzungen, die etwas schärfer als die Voraussetzungen 3.5 und 3.7 sind, die beiden eben genannten Bedingungen erfüllt.

4.1 Punktprozesse

Es folgen einige Definitionen zum Thema Punktprozesse, die im Wesentlichen dem dritten Kapitel von [11] entlehnt sind.

Definition 4.1 *Sei E ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis (zum Beispiel $\mathbb{R}^d$ oder auch eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, jeweils mit der euklidischen Metrik versehen) und $\mathcal{E}$ die Borelsche $\sigma-$Algebra auf E. Für $x \in E$ sei das Maß ϵ_x definiert durch*

$$\epsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{E}.$$

Sei nun die Menge $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ von Punkten auf E derart, dass das Maß m, definiert durch

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{x_i},$$

auf allen kompakten Elementen von $\mathcal{E}$ endlich ist. Dann ist m ein Punktmaß.

Seien $M_P(E)$ der Raum aller Punktmaße auf E, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \mapsto M_P(E)$ eine beliebige Abbildung. Dann heißt N Punktprozess *auf E, wenn für jedes $A \in \mathcal{E}$ die Abbildung $\omega \mapsto (N(\omega))(A)$ von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$ messbar ist. Hierbei ist $\mathcal{B}([0,\infty])$ die durch $[0,\infty]$ erzeugte Borelsche $\sigma-$Algebra.*

Bemerkung Mit der Notation von eben ist also N genau dann ein Punktprozess, wenn $(N)(A)$ für ein beliebiges $A \in \mathcal{E}$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist.

Definition 4.2 *Mit der Notation von Definition* 4.1 *seien N ein Punktprozess auf E und μ ein Radon-Maß auf $\mathcal{E}$. Dann heißt N* Poisson Prozess *mit* Intensitätsmaß μ, *falls*

(a) *für jedes $A \in \mathcal{E}$ und $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\mathrm{P}((N)(A) = k) = \begin{cases} \exp(-\mu(A))(\mu(A))^k/k!, & \mu(A) < \infty, \\ 0, & \mu(A) = \infty \end{cases}$$

gilt und

(b) *für jedes $k \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Elemente $A_1, \ldots, A_k$ von $\mathcal{E}$ die Zufallsvariablen*

$$(N)(A_i), \qquad i \leq k$$

unabhängig sind.

Definition 4.3 *Mit der Notation von Definition* 4.1 *seien N und N_n für $n \in \mathbb{N}$ Punktprozesse auf E und $C_b(M_P(E))$ die Menge aller Funktionen $f : M_P(E) \mapsto \mathbb{R}$, die stetig und beschränkt sind. Dann konvergiert N_n genau dann schwach gegen N, in Zeichen*

$$N_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty,$$

wenn

$$\mathrm{E}(f(N_n)) \to \mathrm{E}(f(N)), \qquad \forall f \in C_b(M_P(E)).$$

4.2 Die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ und daraus resultierende Punktprozessresultate

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 5, [8]. Hierbei werden die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ vorgestellt und die für uns wesentlichen Resultate wiedergegeben.

Bemerkung Wenn nachfolgend die Rede von stationären Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sein wird, so ist damit eine strikt stationäre Folge von Zufallsvariablen nach Definition 3.2 gemeint. Wenn $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Folge ist, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ für $m \in \mathbb{N}$, so bezeichnet

$$F_I(\boldsymbol{v}) := F_{i_1,\ldots,i_m}(v_1, \ldots, v_m) := \mathrm{P}(Y_{i_1} \leq v_1, \ldots, Y_{i_m} \leq v_m)$$

die multivariate Verteilungsfunktion von $\boldsymbol{Y}_I := (Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_m})$. Außerdem seien $M_n^{(k)}$ und $M(I)^{(k)}$ jeweils die k-te Ordnungsstatistik von $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ bzw. $\{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}\}$ sowie speziell $M_n := M_n^{(1)} = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ für $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin bezeichnen $\widehat{M}_n^{(k)}$ und $\widehat{M}(I)^{(k)}$ die entsprechenden Ordnungsstatistiken der assoziierten i.i.d. Folge.

Definition 4.4 *Eine stationäre Folge* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *erfüllt* die Bedingung $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ *für* $r \in \mathbb{N}$ *und eine Folge von Konstanten* $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\boldsymbol{u}_n \in \mathbb{R}^r$*, falls für jede Wahl von* $I = (i_1, \ldots, i_p)$ *und* $J = (j_1, \ldots, j_q)$ *mit* $1 \le i_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \le n$ *und* $j_1 - i_p \ge l$

$$|F_{I,J}(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_n) - F_I(\boldsymbol{v}_n)F_J(\boldsymbol{w}_n)| \le \alpha_{n,l} \tag{4.1}$$

gilt. Hierbei seien $\boldsymbol{v}_n = (v_{n,1}, \ldots, v_{n,p})$ *und* $\boldsymbol{w}_n = (w_{n,1}, \ldots, w_{n,q})$*, wobei jedes* $v_{n,i}$ *und* $w_{n,j}$ *einem beliebigen der* r *Werte* $u_{n,1}, \ldots, u_{n,r}$ *entspreche. Weiter gelte für die Funktion* $\alpha_{n,l}$ *mit* $l_n = o(n)$

$$\alpha_{n,l_n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Bemerkung Die Bedingung $D_1(\boldsymbol{u}_n)$ wird üblicherweise (und daher auch im Folgenden) mit $D(u_n)$ bezeichnet.

Lemma 4.5

(a) *Die Funktion* $\alpha_{n,l}$ *aus der Bedingung* $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ *kann für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *als nicht-wachsend in* l *angenommen werden.*

(b) *Für* $\alpha_{n,l}$ *wie in* (a) *beschrieben ist die Bedingung* $\alpha_{n,l_n} \to 0$ *mit* $l_n = o(n)$ *für* $n \to \infty$ *äquivalent zu*

$$\alpha_{n,\lfloor n\lambda \rfloor} \to 0, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4.2}$$

Beweis (a) Man könnte $\alpha_{n,l}$ durch das Maximum der linken Seite von (4.1) über alle i's, j's und $u_{n,k}$'s ersetzen. Dieses wäre möglicherweise kleiner als $\alpha_{n,l}$, wäre jedoch für jedes n nicht-wachsend in l und erfüllte natürlich $\alpha_{n,l_n} \to 0$ für $n \to \infty$, falls die Bedingung $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ erfüllt wäre.

(b) Die eine Richtung ist klar. Sei jetzt also (4.2) erfüllt. Dies impliziert die Existenz einer Folge monoton wachsenden Konstanten m_k, so dass $\alpha_{n,\lfloor n/k \rfloor} < k^{-1}$ für $n \ge m_k$. Setze nun $k_n = r$, für $m_r \le n < m_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $m_{k_n} \le n$, so dass $\alpha_{n,\lfloor n/k_n \rfloor} < k_n^{-1} \to 0$. Setze nun $l_n = \lfloor n/k_n \rfloor$. □

Definition 4.6 *Eine stationäre Folge* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *erfüllt* die Bedingung $D'(u_n)$ *für eine Folge von Konstanten* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \sum_{j=2}^{\lfloor n/k \rfloor} \mathrm{P}(Y_1 > u_n, Y_j > u_n) = 0 \tag{4.3}$$

gilt.

Proposition 4.7 *Sei* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine stationäre Folge, so dass die Bedingungen* $D'(u_n)$ *und* $D(u_n)$ *für sämtliche* $u_n = x/a_n + b_n$*,* $x \in \mathbb{R}$ *mit normierenden Konstanten* $a_n > 0$ *und* $b_n \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *gelten. Sei* G *eine Extremwertverteilungsfunktion (EWVF). Dann gilt genau dann* $\mathrm{P}(a_n(M_n - b_n) \le x) \to G(x)$*, wenn* $\mathrm{P}(a_n(\widehat{M}_n - b_n) \le x) \to G(x)$ *jeweils für* $n \to \infty$ *gilt.*

Beweis Siehe Satz 3.5.2, [8]. □

Proposition 4.8 *Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Folge, so dass die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D(u_n)$ für sämtliche $u_n = x/a_n + b_n$, $x \in \mathbb{R}$ mit normierenden Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gelten. Sei G eine EWVF. Weiterhin gelte $\mathrm{P}(a_n(M_n - b_n) \le x) \to G(x)$ für $n \to \infty$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{P}(a_n(M_n^{(k)} - b_n) \le x) \to G(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-\log G(x))^i}{i!}, \qquad n \to \infty.$$

Beweis Siehe Satz 5.3.4, [8]. □

Proposition 4.9 *Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Folge, so dass $\mathrm{P}(a_n(M_n - b_n) \le x) \to G(x)$ mit normierenden Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und EWVF G gelte. Sei außerdem $x_0 := \inf\{x : G(x) > 0\}$. Sei weiter N_n mit $n \in \mathbb{N}$ ein Punktprozess auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ mit den Punkten $\{(j/n, a_n(Y_j - b_n)) : j \in \mathbb{N}\}$ und N ein Poisson Prozess auf $(0,\infty) \times (x_0,\infty)$ mit dem Intensitätsmaß $\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}t \times \mathrm{d}(\log G(x))$.*

Angenommen, $D'(u_n)$ gilt für sämtliche $u_n = x/a_n + b_n$, $x \in \mathbb{R}$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ gilt für sämtliche $r \in \mathbb{N}$ und $u_{n,k} = x_k/a_n + b_n$, $1 \le k \le r$, $x_k \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$N_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty.$$

Beweis Siehe Satz 5.7.2, [8]. □

4.3 $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für Summen von MA(∞) Prozessen

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass der in (3.1) definierte Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unter der Voraussetzung 4.14 die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ erfüllt. Voraussetzung 4.14 ist eine Verschärfung der Voraussetzungen 3.5 und 3.7, was bewiesen wird. Anhand dessen kann in Satz 4.26 die zentrale Aussage des vierten Kapitels getätigt werden: die Anwendung des Punktprozessresultats aus Proposition 4.9 auf endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen.

Zur Einführung von Voraussetzung 4.14 benötigen wir die Definition der regulär variierenden Funktionen.

Definition 4.10 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [t_0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^+$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$ heißt* regulär variierend mit Index α, *kurz $f \in \mathrm{RV}(\alpha)$, falls für ein beliebiges $x > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha$$

gilt.

Proposition 4.11 *Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^+$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathrm{RV}(\alpha)$ genau dann, wenn zwei beliebige Konstanten $a > t_0$, $c > 0$, eine messbare Funktion $c : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ und eine lokal Lebesgue integrierbare Funktion $\epsilon : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ existieren, so dass $\lim_{x\to\infty} c(x) = c$, $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ und*

$$f(x) = x^\alpha c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\epsilon(t)}{t} \mathrm{d}t\right), \qquad x \geq a \tag{4.4}$$

Beweis Siehe Theorem 1.4.1(iii) und Theorem 1.3.1, [4]. □

Definition 4.12 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist ultimativ absolut stetig auf Kompakta, wenn ein $T \in \mathbb{R}$ existiert, so dass f auf $[T, T + x]$ für beliebiges $x > 0$ absolut stetig ist.*

Lemma 4.13 *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\psi : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ in C^2. Weiterhin gelte $\psi'(\infty) = \infty$ und $\psi'' > 0$. Sei $q := (\psi')^{\leftarrow}$ und definiere mit $\beta \in [-1, \infty]$*

$$\beta' := \begin{cases} 1/(1+\beta) - 1, & \beta \in (-1, \infty), \\ -1, & \beta = \infty, \\ \infty, & \beta = -1. \end{cases}$$

(a) *Es gilt $\psi' \in \mathrm{RV}(1 + \beta)$ genau dann, wenn $q \in \mathrm{RV}(1 + \beta')$ gilt.*

(b) *Falls $\psi'' \in \mathrm{RV}(\beta)$ mit $\beta \in \mathbb{R}$, dann gilt $\beta \geq -1$. Außerdem folgen $\psi' \in \mathrm{RV}(1 + \beta)$, $q' \in \mathrm{RV}(\beta')$ und $1/\sqrt{\psi''}$ ist selbst-vernachlässigend in ∞. Falls $\beta \in (-1, \infty)$, dann gilt $\psi'' \in \mathrm{RV}(\beta)$ genau dann, wenn $q' \in \mathrm{RV}(\beta')$ gilt.*

(c) *Sei $\beta' \in [-1, \infty)$. Dann ist ψ'' genau dann ultimativ absolut stetig auf Kompakta und erfüllt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\psi'(t)}{\psi''(t)} = 1 + \beta',$$

wenn $q' \in \mathrm{RV}(\beta')$.

(d) *Falls $q' \in \mathrm{RV}(-1)$, dann gilt $\psi'' \in \mathrm{RV}(\infty)$ und $1/\sqrt{\psi''}$ ist selbst-vernachlässigend in ∞.*

Beweis (a) Dies folgt aus Proposition 1.5.15 und Theorem 2.4.7, [4].

(b) Weil $\psi'(\infty) = \infty$, $\psi'' > 0$ und $\psi'' \in \mathrm{RV}(\beta)$, folgt mit Proposition 4.11 und der Regel von L'Hospital, dass $\psi' \in \mathrm{RV}(\beta + 1)$ und $1 + \beta \geq 0$. Wegen $q'(\tau) = 1/\psi''(q(\tau))$ folgt $q' \in \mathrm{RV}(\beta')$ durch Komposition, falls $\beta \in (-1, \infty)$. Die Gegenrichtung beweist man mit derselben Methode. Falls $\beta = -1$, so folgt $\psi' \in \mathrm{RV}(0)$ und daher $q \in \mathrm{RV}(\infty)$. Nach Theorem 1.5.3, [4] ist ψ'' asymptotisch äquivalent zu einer monoton fallenden Funktion, sagen wir h. Hierbei gilt natürlich $h \in \mathrm{RV}(-1)$. Weiterhin existiert für $c \in (0, 1)$ und $\epsilon > 0$ ein τ_ϵ, so dass $q(c\tau) < \epsilon q(\tau)$ für $\tau \geq \tau_\epsilon$, weil $q \in \mathrm{RV}(\infty)$. Dies impliziert

$$\frac{q'(c\tau)}{q'(\tau)} \sim \frac{h(q(\tau))}{h(q(c\tau))} \leq \frac{h(q(\tau))}{h(\epsilon q(\tau))} \to \epsilon, \qquad \tau \to \infty,$$

woraus $q' \in \mathrm{RV}(\infty)$ folgt. Um zu zeigen, dass $1/\sqrt{\psi''}$ selbst-vernachlässigend in ∞ ist, sei angemerkt, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t + x/\sqrt{\psi''(t)}}{t} = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{x}{t\sqrt{\psi''(t)}} = 1$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$, nachdem $t \mapsto t\sqrt{\psi''(t)}$ in $\mathrm{RV}(1+\beta/2)$ ist.

(c) ψ'' ist genau dann ultimativ absolut stetig auf Kompakta und genügt der Gleichung

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\psi'(t)}{\psi''(t)} = 1 + \beta',$$

wenn q' ultimativ absolut stetig auf Kompakta ist und

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau q''(\tau)}{q'(\tau)} = \frac{-\psi'(q(\tau))\psi'''(q(\tau))}{\psi''(q(\tau))^2} = \frac{-\psi'(t)\psi'''(t)}{\psi''(t)^2} = \beta'$$

gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass q' absolut stetig auf Kompakta ist und der Gleichung

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau \mathrm{d}(\tau^{-\beta'} q'(\tau))/\mathrm{d}\tau}{\tau^{-\beta'} q'(\tau)} = 0$$

genügt, was wiederum äquivalent zu $q' \in \mathrm{RV}(-1)$ ist, wobei die Funktion c aus Proposition 4.11 in diesem Fall einer Konstante entspricht; siehe hierzu S. 15, [4].

(d) Der Beweis hiervon verläuft ähnlich zu dem von (b), wobei Lemma 3.17 verwandt wird, um zu zeigen, dass $1/\sqrt{\psi''}$ selbst-vernachlässigend in ∞ ist. □

Anhand der nachfolgenden Voraussetzung werden wir die im letzten Abschnitt vorgestellten Punktprozessresultate auf endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen anwenden können.

Voraussetzung 4.14 *Es gelte Voraussetzung* 3.5. *Für beliebiges $k \in \{1, \ldots, K\}$ gelte $\psi_k'' \in \mathrm{RV}(\beta_k)$ mit $\beta_k \in [-1, \infty]$. Falls $\beta_k = \infty$, so sei ψ_k'' ultimativ absolut stetig auf Kompakta und es gelte*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\psi_k'(t)}{\psi_k''(t)} = 0.$$

Definiere nun

$$\beta_k' := \begin{cases} 1/(1+\beta_k) - 1, & \beta_k \in (-1, \infty), \\ -1, & \beta_k = \infty, \\ \infty, & \beta_k = -1. \end{cases}$$

Zusätzlich gelte $\mathrm{E}Z_k^2 < \infty$ und $c_{i,k} = O(|i|^{-\vartheta_k})$ für $|i| \to \infty$ mit $\vartheta_k > \max\{1, 2/(2+\beta_k')\}$. Außerdem gelte oBdA $\beta_1' \geq \ldots \geq \beta_K'$. Falls $K' := \mathrm{card}\{2 \leq k \leq K : \beta_k' = \beta_1'\} > 0$, so gelte für $k \in \{2, \ldots, K'+1\}$

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{q_k'(\tau)}{q_1'(\tau)} = d_k$$

mit $d_k \in [0,1]$. Definiere weiterhin $d_1 := 1$ und $d_k := 0$ für $k \in \{K'+2, \ldots, K\}$, falls hierbei $K' < K-1$.

Korollar 4.15 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt. Setze* $\vartheta := \min\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_K\}$. *Dann gelten* $\vartheta > 1$ *und* $c_{i,k} = O(|i|^{-\vartheta})$ *für* $|i| \to \infty$. *Weiterhin gilt mit dem Satz von L'Hospital*

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{q_k(\tau)}{q_1(\tau)} = d_k.$$

Überdies sind Konstanten $D_1, \ldots, D_K > 0$ *vorhanden, so dass* $q_k'(\tau) \leq D_k q_1'(\tau)$ *für* $\tau \geq 0$ *und* $k \in \{1, \ldots, K\}$.

Definition 4.16 *Seien* $c, d > 0$, $K \in \mathbb{N}$ *und* $\theta \in [0, 2)$. *Mit* $\mathcal{G}_{c,d,\theta,K}$ *definiert man die Menge aller nicht-negativen summierbaren Folgen* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\ldots,K\}}$, *so dass* $\sum_{k,i} c_{i,k} \leq d$, $\sum_{k,i} c_{i,k}^{2-\theta} \leq d$, $\sum_{k,i} c_{i,k}^{1-\theta/2} \leq d$ *und* $c/2 \leq \max\{c_{i,k} : k \in \{1, \ldots, K\}, i \in \mathbb{Z}\} \leq c$. *Außerdem schreibt man* $\mathcal{G}_{c,d,\theta} := \mathcal{G}_{c,d,\theta,1}$.

Korollar 4.17 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* $k \in \{1, \ldots, K\}$. *Es werde jetzt* $\theta_k \in [0, 2 - 2/\vartheta_k)$ *derart gewählt, dass* $\theta_k + \beta_k' > 0$. *Sei* $c_k := \max\{c_{i,k} : i \in \mathbb{Z}\}$. *Dann existiert ein* $d_k > 0$, *so dass* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ *in* $\mathcal{G}_{c_k,d_k,\theta_k}$ *ist. Mit* $c := \max\{c_k : 1 \leq k \leq K\}$ *und* $\theta := \min\{\theta_k : 1 \leq k \leq K\}$ *existiert ein* $d > 0$, *so dass* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\ldots,K\}}$ *in* $\mathcal{G}_{c,d,\theta,K}$.

Beweis Es gilt
$$(1 - \theta_k/2)\vartheta_k > (1 - (2 - 2/\vartheta_k)/2)\vartheta_k = 1.$$
Nach Voraussetzung ist $c_{i,k}^{1-\theta_k/2} = O(|i|^{-(1-\theta_k/2)\vartheta_k})$ für $|i| \to \infty$, weshalb

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k}^{1-\theta_k/2} < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k}^{2-\theta_k} < \infty$$

folgen. Weil $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ absolut summierbar ist, ergibt sich die Existenz von d_k. □

Aufgrund der nachfolgenden Proposition lassen sich die Sätze 3.8 und 3.18 auf endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen übertragen, welche Voraussetzung 4.14 erfüllen. Dies ist zwingend nötig, um die Punktprozessresultate aus Abschnitt 4.2 zu erhalten.

Proposition 4.18 *Es seien Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* θ_k *für* $k \in \{1, \ldots, K\}$ *wie in Korollar* 4.17. *Dann ist ebenfalls Voraussetzung* 3.7 *erfüllt. Außerdem existiert ein* $D > 0$, *so dass*
$$\sigma_\infty^2(\tau) \leq D \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{2-\theta_k} c^2 q_1'(c\tau), \qquad \tau \geq 0 \tag{4.5}$$
für beliebiges $c \geq \max\{c_{i,k} : i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq K\}$.

Beweis Nach Lemma 4.13 gilt $q_k' \in \mathrm{RV}(\beta_k')$. Definiere nun $p_{1,k}(\tau) := \tau^{\theta_k} q_k'(\tau)$ für $\tau \geq 0$. Dann gilt $p_{1,k} \in \mathrm{RV}(\theta_k + \beta_k')$ nach Proposition 4.11, wobei $\theta_k + \beta_k' > 0$ nach Korollar 4.17. Daher existiert eine monoton wachsende Funktion $p_{2,k} : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, so dass die Ungleichung $p_{1,k}(\tau) \leq p_{2,k}(\tau)$ für $\tau \geq 0$ und $p_{1,k}(\tau) \sim p_{2,k}(\tau)$ für $\tau \to \infty$ erfüllt sind. Für $\beta_k' \neq \infty$ folgt dies aus Theorem 1.5.3, [4] und für $\beta_k' = \infty$ aus $q_k'(\tau) = 1/\psi_k''(q_k(\tau))$, der Monotonie von q_k und der Anwendung von Theorem 1.5.3, [4] auf $1/\psi_k'' \in \mathrm{RV}(1)$. Weiterhin existiert eine Konstante $d_{1,k} > 0$, so dass $p_{2,k}(\tau) \le d_{1,k} p_{1,k}(\tau)$ für $\tau \ge 1$. Sei nun $c \ge \max\{c_{i,k} : i \in \mathbb{Z},\ 1 \le k \le K\}$. Dann gilt, falls $c\tau \ge 1$

$$p_{1,k}(c_{i,k}\tau) \le p_{2,k}(c_{i,k}\tau) \le p_{2,k}(c\tau) \le d_{1,k} p_{1,k}(c\tau).$$

Weil q_k' stetig und strikt positiv auf $[0,1]$ ist, existiert eine Konstante $d_{2,k} > 0$, so dass $q_k'(x) \le d_{2,k} q_k'(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$. Speziell für $c\tau \le 1$ gilt $q_k'(c_{i,k}\tau) \le d_{2,k} q_k'(c\tau)$. Mit $e_k := \max\{d_{1,k}, d_{2,k}\}$ folgt

$$c_{i,k}^{\theta_k} q_k'(c_{i,k}\tau) \le e_k c^{\theta_k} q_k'(c\tau), \qquad \tau \ge 0, \tag{4.6}$$

woraus

$$\sigma_\infty^2(\tau) \le \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_k \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{2-\theta_k} c^2 q_k'(c\tau), \qquad \tau \ge 0$$

folgt. Aufgrund von Voraussetzung 4.14 und nach Korollar 4.15 existiert ein $D > 0$, so dass $e_k q_k'(c\tau) \le D q_1'(c\tau)$ für $\tau \ge 0$, woraus (4.5) folgt. Sei nun θ wie in Korollar 4.17. Weil $\sum_{k,i} c_{i,k}^{1-\theta/2} < \infty$, folgt aus (4.6), dem Satz von der dominierten Konvergenz und $q_k' \in \mathrm{RV}(\beta_k')$, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty} \frac{\sum_{k,i} c_{i,k}\sqrt{q_k'(c_{i,k}\tau)}}{c\sqrt{q_1'(c\tau)}} &= \sum_{k,i} \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{1-\theta/2} \lim_{\tau\to\infty} \sqrt{\frac{c_{i,k}^{\theta} q_k'(c_{i,k}\tau)}{c^{\theta} q_1'(c\tau)}} \\
&= \sum_{k,i} \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{1-\theta/2} \sqrt{d_k \frac{c_{i,k}^{\theta+\beta_k'}}{c^{\theta+\beta_1'}}} \\
&= \sum_{k,i} d_k^{1/2} \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{1+\beta_1'/2}
\end{aligned}$$

mit d_k aus Voraussetzung 4.14, wobei angemerkt sei, dass $d_k = 0$, falls $\beta_k' \ne \beta_1'$. Die rechte Seite ist als $\mathrm{card}\{(i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,\dots,K\}) : c_{i,k} = c\}$ anzusehen, falls $\beta_1' = \infty$. Auf nahezu identische Weise zeigt man für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\sum_{k,|i|>m} c_{i,k}\sqrt{q_k'(c_{i,k}\tau)}}{c\sqrt{q_1'(c\tau)}} = \sum_{k,|i|>m} d_k^{1/2} \left(\frac{c_{i,k}}{c}\right)^{1+\beta_1'/2},$$

woraus (3.6) folgt. (3.5) folgt mit derselben Beweisidee. □

Mit Hilfe des nachfolgenden Lemmas kann die Bedingung $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ nachgewiesen werden.

Lemma 4.19 *Es seien Voraussetzung* 3.3 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $a_n > 0$ *und* $b_n \in \mathbb{R}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *normierenden Konstanten,* G *eine EWVF und*

$$\mathrm{P}(a_n(\widehat{M}_n - b_n) \le x) \to G(x), \qquad n \to \infty,\ x > \inf\{t : G(t) > 0\} \tag{4.7}$$

erfüllt.

(a) *Wenn für beliebige* $\epsilon, v > 0$ *und* $n \to \infty$

$$n\mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > \epsilon\right) \to 0, \quad n\mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{-\lfloor nv \rfloor} c_{i,k} Z_{i,k} > \epsilon\right) \to 0, \tag{4.8}$$

gilt, dann erfüllt $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *die* $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ *Bedingung für sämtliche* $r \in \mathbb{N}$ *und* $u_{n,i} = x_i/a_n + b_n$ *mit* $1 \le i \le r$ *und* $x_i \in \mathbb{R}$.

(b) *Falls* $a_n = O((\log n)^\alpha)$ *für* $n \to \infty$ *mit* $\alpha > 0$, $c_{i,k} = O(|i|^{-\vartheta})$ *für* $|i| \to \infty$ *mit* $\vartheta > 1$ *und* $\mathrm{E}Z_k^2 < \infty$, *jeweils für* $k \in \{1, \ldots, K\}$, *dann gilt* (4.8).

Beweis (a) Sei $r, n \in \mathbb{N}$ und $I = (i_1, \ldots, i_p)$ und $J = (j_1, \ldots, j_q)$ mit

$$1 \le i_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \le n, \qquad j_1 - i_p \ge 2\lfloor nv \rfloor .$$

Definiere nun $\boldsymbol{Y}_I' := (Y_{i_1}', \ldots, Y_{i_p}')$ sowie $\boldsymbol{Y}_J'' := (Y_{j_1}'', \ldots, Y_{j_q}'')$, wobei

$$Y_t' := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\lfloor nv \rfloor -1} c_{i,k} Z_{i+t,k}, \qquad Y_t'' := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\lfloor nv \rfloor +1}^{\infty} c_{i,k} Z_{i+t,k}.$$

Nachdem ja $j_1 - i_p \ge 2\lfloor nv \rfloor$ gilt, sind $\boldsymbol{Y}_I'$ und $\boldsymbol{Y}_J''$ unabhängig. Setze weiter

$$M_n' := \max\{|Y_1 - Y_1'|, \ldots, |Y_n - Y_n'|\}, \qquad M_n'' := \max\{|Y_1 - Y_1''|, \ldots, |Y_n - Y_n''|\}$$

und $\boldsymbol{\epsilon}_i \in \mathbb{R}^i$, wobei sämtliche Komponenten den Wert ϵ haben. Seien $\boldsymbol{v}_n = (v_{n,1}, \ldots, v_{n,p})$ und $\boldsymbol{w}_n = (w_{n,1}, \ldots, w_{n,q})$, wobei $v_{n,i}, w_{n,j} \in \{u_{n,1}, \ldots, u_{n,r}\}$. Hierbei sei $u_{n,k} = x_k/a_n + b_n$ mit $1 \le k \le r$ und $x_k \in \mathbb{R}$. Sei nun mit $\epsilon > 0$

$$k_0 := \arg\max_k\{\mathrm{P}(u_{n,k} < Y_0 \le u_{n,k} + 2\epsilon)\}, \qquad k_1 := \arg\max_k\{\mathrm{P}(u_{n,k} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k})\}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n) \\
&\quad= \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J'' - (\boldsymbol{Y}_J'' - \boldsymbol{Y}_J) \le \boldsymbol{w}_n\right) \\
&\quad= \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J'' \le \boldsymbol{w}_n + (\boldsymbol{Y}_J'' - \boldsymbol{Y}_J), M_n'' \le \epsilon\right) \\
&\qquad + \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J'' \le \boldsymbol{w}_n + (\boldsymbol{Y}_J'' - \boldsymbol{Y}_J), M_n'' > \epsilon\right) \\
&\quad\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J'' \le \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{\epsilon}_q\right) + \mathrm{P}\left(M_n'' > \epsilon\right) \\
&\quad\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I' \le \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{\epsilon}_p, \boldsymbol{Y}_J'' \le \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{\epsilon}_q\right) + \mathrm{P}\left(M_n' > \epsilon\right) + \mathrm{P}\left(M_n'' > \epsilon\right) \\
&\quad= \mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I' \le \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{\epsilon}_p)\,\mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J'' \le \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{\epsilon}_q\right) + \mathrm{P}\left(M_n' > \epsilon\right) + \mathrm{P}\left(M_n'' > \epsilon\right) \\
&\quad\le \mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_p)\,\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_q) + 2\mathrm{P}\left(M_n' > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n'' > \epsilon\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_p\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad + \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_q, \exists k \in \{1,\dots,q\} : Y_{j_k} > w_{n,k}\right) \\
&\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_p\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad + \mathrm{P}\left(\exists k \in \{1,\dots,q\} : w_{n,k} < Y_{j_k} \le w_{n,k} + 2\epsilon\right) \\
&\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n + 2\boldsymbol{\epsilon}_p\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{q} \mathrm{P}\left(w_{n,k} < Y_{j_k} \le w_{n,k} + 2\epsilon\right) \\
&\le \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad + n\mathrm{P}\left(u_{n,k_0} < Y_0 \le u_{n,k_0} + 2\epsilon\right).
\end{aligned}
$$

Auf vergleichbare ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n) \\
&\quad = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n + (\boldsymbol{Y}_J^{''} - \boldsymbol{Y}_J), M_n^{''} \le \epsilon\right) \\
&\qquad + \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n + (\boldsymbol{Y}_J^{''} - \boldsymbol{Y}_J), M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{\epsilon}_q\right) + \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n + (\boldsymbol{Y}_J^{''} - \boldsymbol{Y}_J), M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{\epsilon}_q\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I^{'} \le \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{\epsilon}_p, \boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{\epsilon}_q\right) \\
&\quad = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I^{'} \le \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{\epsilon}_p\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J^{''} \le \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{\epsilon}_q\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n - 2\boldsymbol{\epsilon}_p\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n - 2\boldsymbol{\epsilon}_q\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) - n\mathrm{P}\left(u_{n,k_1} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k_1}\right) \\
&\quad \ge \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n\right) \mathrm{P}\left(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n\right) - 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) - 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\qquad - n\mathrm{P}\left(u_{n,k_1} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k_1}\right).
\end{aligned}
$$

Mit $k_2 := \arg\max_k\{\mathrm{P}(u_{n,k} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k} + 2\epsilon)\}$ und dem Wissen, dass $1 - x^n \le n(1-x)$ für $0 \le x \le 1$ und $n \in \mathbb{N}$, gilt dann auf jeden Fall mit $l := 2\lfloor nv \rfloor$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n,l}(I,J) &:= |\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n) - \mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_I \le \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_J \le \boldsymbol{w}_n)| \\
&\le n\mathrm{P}\left(u_{n,k_2} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k_2} + 2\epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{'} > \epsilon\right) + 2\mathrm{P}\left(M_n^{''} > \epsilon\right) \\
&\le n\mathrm{P}\left(u_{n,k_2} - 2\epsilon < Y_0 \le u_{n,k_2} + 2\epsilon\right) + 2n\mathrm{P}\left(|Y_0 - Y_0^{'}| > \epsilon\right) \\
&\quad + 2n\mathrm{P}\left(|Y_0 - Y_0^{''}| > \epsilon\right).
\end{aligned}
$$

Also hängt die Schranke $\alpha_{n,l}(I,J)$ weder von der spezifischen Wahl von I und J, noch von r ab. Sei u_{n,k_2} oBdA $x_1/a_n + b_n$. Ersetzt man nun ϵ durch ϵ/a_n, so ändert sich die

Korrektheit der Ungleichungen nicht. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\alpha_{n,l} &:= \sup_{I,J} \alpha_{n,l}(I,J) \le n\mathrm{P}\left((x_1-2\epsilon)/a_n + b_n < Y_0 \le (x_1+2\epsilon)/a_n + b_n\right) \\ &\quad + 2n\mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > \epsilon\right) + 2n\mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{-\lfloor nv \rfloor} c_{i,k} Z_{i,k} > \epsilon\right).\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden gehen nach (4.8) gegen 0. Nach Theorem 1.5.1, [8] und (4.7) gilt $n\mathrm{P}(Y_0 > x_1/a_n + b_n) \to -\log G(x_1)$ und daher

$$n\mathrm{P}\left((x_1-2\epsilon)/a_n + b_n < Y_0 \le (x_1+2\epsilon)/a_n + b_n\right) \to \log G(x_1+2\epsilon) - \log G(x_1-2\epsilon).$$

Nachdem G eine EWVF ist, ist G auch stetig. Weil außerdem $G(x_1) > 0$ vorausgesetzt wurde, gilt $\log G(x_1+2\epsilon) - \log G(x_1-2\epsilon) \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Daher gilt $\alpha_{n,l} \to 0$ für $n \to \infty$ und weil $l = 2\lfloor nv \rfloor$ mit beliebigem $v > 0$ gesetzt wurde, folgt nach Lemma 4.5(b) die Bedingung $D_r(\boldsymbol{u}_n)$.

(b) Sei oBdA $\lceil \alpha \rceil =: j \in \mathbb{N}$. Dann existieren $C, C_0, \ldots, C_j > 0$, so dass

$$\begin{aligned} a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} &\le C(\log n)^{\alpha} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} i^{-\vartheta} \\ &\sim C_0 \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\vartheta-1}} \\ &\sim C_1 \frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^{\vartheta-1}} \sim \ldots \\ &\sim C_j \frac{(\log n)^{\alpha-j}}{n^{\vartheta-1}} \to 0, \qquad n \to \infty, \end{aligned}$$

wobei die Stammfunktion von $t \mapsto t^{-\vartheta}$ zur Abschätzung der Summe gebildet wurde und die Regel von L'Hospital j-Mal verwandt wurde. Daher ergibt sich durch die Ungleichung von Chebycheff für $\epsilon > 0$, $C_V := \max\{\mathrm{Var}Z_1, \ldots, \mathrm{Var}Z_K\}$, $C_E := \max\{\mathrm{E}Z_1, \ldots, \mathrm{E}Z_K\}$ und große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & n\mathrm{P}\left(a_n \left|\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k}\right| > \epsilon\right) \\ &\le n\mathrm{P}\left(a_n \left|\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k}(Z_{i,k} - \mathrm{E}Z_k)\right| > \epsilon - a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} \mathrm{E}Z_k\right) \\ &\le n \frac{a_n^2 \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k}^2 \mathrm{Var}Z_k}{\left(\epsilon - a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k} \mathrm{E}Z_k\right)^2} \\ &\le n \frac{C_V a_n^2 \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k}^2}{\left(\epsilon - C_E a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=\lfloor nv \rfloor}^{\infty} c_{i,k}\right)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \quad cn\frac{(\log n)^{2\alpha}}{n^{2\vartheta-1}} \\
&= \quad c\left(\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\vartheta-1}}\right)^2 \to 0, \qquad n \to \infty,
\end{aligned}
$$

wobei $c > 0$. Der zweite Grenzwert von (4.8) ergibt sich auf identische Weise. □

Lemma 4.20 *Es gelte Voraussetzung* 4.14*. Sei* $t_0 := \sum_{k,i} t_{0,k} c_{i,k}$*. Dann existieren Konstanten* $D_1, D_2, t_1 > 0$*, so dass*

$$
\mathrm{P}\left(\sum_{k,i} c_{i,k} Z_{i,k} > t\right) \leq D_1 \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left[q_\infty^{\leftarrow}(v) - \frac{D_2}{\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(v))}\right]\mathrm{d}v\right), \qquad t \geq t_1. \tag{4.9}
$$

Darüber hinaus existieren Konstanten $D_3, D_4, t_2 > 0$*, so dass*

$$
\mathrm{P}\left(\sum_{k,i} c_{i,k} Z_{i,k} > t\right) \geq D_3 \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left[q_\infty^{\leftarrow}(v) + \frac{D_4}{\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(v))}\right]\mathrm{d}v\right), \qquad t \geq t_2. \tag{4.10}
$$

Beweis Mit Proposition 4.18 ist auch Voraussetzung 3.7 erfüllt, weshalb Satz 3.8 gilt. Aufgrund von (3.24) aus dem Beweis von Satz 3.8 folgen dann die Existenz einer Funktion $\zeta(\tau) = o(\sigma_\infty(\tau))$ für $\tau \to \infty$ und eines $\tau_0 > 0$, so dass mit $D_0 := \sqrt{2/\pi}$

$$
P\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) \leq \frac{D_0}{\tau\sigma_\infty(\tau)} \exp\left(-\int_0^{\tau}\{u q_\infty'(u) + \zeta(u)\}\mathrm{d}u\right) \tag{4.11}
$$

für $\tau \geq \tau_0$ gilt. Aufgrund von (3.9), dem Beweis von Proposition 4.18 sowie Korollar 4.17, existieren positive Konstanten $C, e_1, \ldots, e_K$, so dass mit $c_k := \max\{c_{i,k} : i \in \mathbb{Z}\}$ sowie $e_0 := \max\{e_1, \ldots, e_K\}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} - q_{i,k}(\tau)| \quad &\leq \quad C\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma_{i,k}(\tau) \\
&\leq \quad C\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}^{1-\theta_k/2} c_k^{\theta_k/2}\sqrt{e_k q_k'(c_k\tau)} \\
&\leq \quad \sum_{k=1}^{K} \underbrace{C e_0^{1/2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{c_{i,k}}{c_k}\right)^{1-\theta_k/2}}_{=:C_k} c_k\sqrt{q_k'(c_k\tau)} \\
&\leq \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{K} C_k}_{=:D}\,\sigma_\infty(\tau), \qquad \tau \geq 0
\end{aligned}
$$

gilt, wobei $D < \infty$. Daher gilt $|\zeta(\tau)| \leq D\sigma_\infty(\tau)$ für $\tau \geq 0$ eingedenk Lemma 3.14 und dem einleitenden Satz vor (3.24). Nun sei $\tau_1 \geq \tau_0$ so gewählt, dass $q_k(c_k\tau_1) \geq 0$ und

$d \geq \sum_{k,i} c_{i,k}$. Unter Anwendung der Monotonie von q_k gilt für $t \geq t_1 := d\sum_k q_k(c_k\tau_1)$

$$t \geq d\sum_{k=1}^{K} q_k(c_k\tau_1) \geq \sum_{k,i} c_{i,k}q_k(c_k\tau_1) \geq \sum_{k,i} c_{i,k}q_k(c_{i,k}\tau_1) \geq q_\infty(\tau_1). \tag{4.12}$$

Dies zeigt, dass (4.11) für alle $t = q_\infty(\tau) \geq t_1$ gilt. Wegen (3.23) kann man $D_0/(\tau\sigma_\infty(\tau))$ in (4.11) durch ein $D_1 > 0$ ersetzen. Dann folgt (4.9) unter Anwendung von (3.25).

Um (4.10) zu zeigen, sei angemerkt, dass aufgrund von (3.24) ein $\tau_{2,1} > 0$ existiert, so dass

$$P\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) \geq \frac{1}{3\tau\sigma_\infty(\tau)}\exp\left(-\int_0^\tau \{uq'_\infty(u) + \zeta(u)\}\mathrm{d}u\right)$$

für $\tau \geq \tau_{2,1}$ gilt. Wenn erst einmal gezeigt wurde, dass ein $\tau_{2,2} > 0$ existiert, so dass

$$\tau\sigma_\infty(\tau) \leq \exp\left(\int_0^\tau \sigma_\infty(v)\mathrm{d}v\right), \qquad \tau \geq \tau_{2,2} \tag{4.13}$$

gilt, dann folgt hieraus, dass für $\tau \geq \tau_2 := \max\{\tau_{2,1}, \tau_{2,2}\}$ und $t = q_\infty(\tau)$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k,i} c_{i,k}Z_{i,k} > q_\infty(\tau)\right) &\geq \frac{1}{3}\exp\left(-\int_0^\tau \left[uq'_\infty(u) + \sqrt{q'_\infty(u)} + \zeta(u)\right]\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{3}\exp\left(-\int_0^\tau q'_\infty(u)\left[u + \frac{\sqrt{q'_\infty(u)} + \zeta(u)}{q'_\infty(u)}\right]\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{3}\exp\left(-\int_{t_0}^t \left[q_\infty^{\leftarrow}(v) + \frac{1}{\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(v))} + \frac{\zeta(q_\infty^{\leftarrow}(v))}{\sigma_\infty^2(q_\infty^{\leftarrow}(v))}\right]\mathrm{d}v\right) \\
&\geq \frac{1}{3}\exp\left(-\int_{t_0}^t \left[q_\infty^{\leftarrow}(v) + \frac{1+D}{\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(v))}\right]\mathrm{d}v\right)
\end{aligned}$$

gilt, woraus (4.10) folgt. Aus (4.5) und dem Theorem von der dominierten Konvergenz folgt die Existenz einer Konstante $C_0 > 0$, so dass $\sigma_\infty(\tau) \sim C_0\sqrt{q'_1(c_0\tau)}$ für $\tau \to \infty$ mit $c_0 := \max\{c_k : 1 \leq k \leq K\}$. Falls nun $\beta_1 \in (-1, \infty]$, also $q'_1 \in \mathrm{RV}(\beta'_1)$ mit $\beta'_1 \in [-1, \infty)$, so gilt

$$\tau\sigma_\infty(\tau)/\int_0^\tau \sigma_\infty(u)\mathrm{d}u \to 1 + \beta'_1/2, \qquad \tau \to \infty$$

nach Theorem 1.5.11(i), [4]. Hieraus folgt natürlich (4.13). Falls jedoch $\psi_1'' \in \mathrm{RV}(-1)$, also $q'_1 \in \mathrm{RV}(\infty)$ zutrifft, so gilt $\tau\sigma_\infty(\tau) \leq (q'_1(c_0\tau))^{2/3}$ nach Proposition 4.18 für hinreichend große τ. Sei $k_0 := \arg\max\{c_k : 1 \leq k \leq K\}$. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass $c_0 = 1$. Mit $t = q_1(\tau)$ folgt also

$$q_1^{\leftarrow}(t)\sigma_\infty(q_1^{\leftarrow}(t)) \leq (q'_1(q_1^{\leftarrow}(t)))^{2/3} = (1/\psi''_1(t))^{2/3},$$

wobei letztere Funktion in RV(2/3) liegt. Andererseits gilt

$$\int_0^{q_{k_0}^{\leftarrow}(t)} \sigma_\infty(v)\mathrm{d}v \geq \int_0^{q_{k_0}^{\leftarrow}(t)} \sqrt{q'_{k_0}(v)}\mathrm{d}v = \int_{t_{0,k_0}}^t \frac{1}{\sqrt{q'_{k_0}(q_{k_0}^{\leftarrow}(u))}}\mathrm{d}u = \int_{t_{0,k_0}}^t \sqrt{\psi''_{k_0}(u)}\mathrm{d}u,$$

welches (als eine Funktion von t) in RV$(1+\beta_{k_0}/2)$ liegt, wobei $1+\beta_{k_0}/2 \geq 1/2$, welches wiederum (4.13) impliziert. □

Nachfolgend wird die $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ Bedingung für endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen, welche Voraussetzung 4.14 erfüllen, nachgewiesen.

Proposition 4.21 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *normierenden Konstanten, definiert durch* (3.27)*. Dann erfüllt* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *die* $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ *Bedingung für sämtliche* $r \in \mathbb{N}$ *und* $u_{n,i} = x_i/a_n + b_n$ *mit* $1 \leq i \leq r$ *und* $x_i \in \mathbb{R}$ *sowie* $\boldsymbol{u}_n = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,r})$.

Beweis Zunächst sei erwähnt, dass $1/\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(t)) = o(q_\infty^{\leftarrow}(t))$ für $t \to \infty$ wegen (3.23). Definiere nun $t_0 := \sum_{k,i} t_{0,k} c_{i,k}$. Dann gilt

$$\int_{t_0}^{t} o(q_\infty^{\leftarrow}(v))\mathrm{d}v = o\left(\int_{t_0}^{t} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v\right). \tag{4.14}$$

Dies ist offensichtlich, falls $\int_{t_0}^{t} o(q_\infty^{\leftarrow}(v))\mathrm{d}v < \infty$, da $q_\infty^{\leftarrow}(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Falls dem nicht so ist, so wende man die Regel von L'Hospital an, woraus sich

$$\frac{\int_{t_0}^{t} o(q_\infty^{\leftarrow}(v))\mathrm{d}v}{\int_{t_0}^{t} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v} = \frac{o(q_\infty^{\leftarrow}(t))}{q_\infty^{\leftarrow}(t)} \to 0, \qquad t \to \infty$$

ergibt. Aus (4.14) und (4.9) sowie (4.10) folgt

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > t\right) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v + o\left(\int_{t_0}^{t} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v\right)\right), \qquad t \to \infty.$$

Nachdem nach Voraussetzung $\mathrm{P}(\sum_{k,i} c_{i,k}Z_{i,k} > b_n) \sim n^{-1}$ und damit $b_n \to \infty$ jeweils für $n \to \infty$, gilt

$$\log n = \int_{t_0}^{b_n} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v + o\left(\int_{t_0}^{b_n} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v\right), \qquad n \to \infty.$$

Division durch $\int_{t_0}^{b_n} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v$ ergibt

$$\frac{\int_{t_0}^{b_n} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v}{\log n} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 4.13(b) gilt $q_k' \in RV(\beta_k')$ für $k \in \{1, \ldots, K\}$, wobei $\beta_k' \geq -1$. Sei nun $c_{i_0,1} := \max_{i\in\mathbb{Z}}\{c_{i,1}\}$. Weil nach Voraussetzung $b_n = q_\infty(a_n)$, existieren Konstanten $C_1, \tau_1 > 0$, so dass für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{b_n} q_\infty^{\leftarrow}(v)\mathrm{d}v &= \int_0^{a_n} u q_\infty'(u)\mathrm{d}u \\
&\geq \int_0^{a_n} c_{i_0,1}^2 u^{3/2} q_1'(c_{i_0,1}u) u^{-1/2}\mathrm{d}u \\
&\geq C_1 \int_{\tau_1}^{a_n} u^{-1/2}\mathrm{d}u = 2C_1\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\tau_1}\right),
\end{aligned}$$

nachdem $\lim_{u\to\infty} u^{3/2} q_1'(c_{i_0,1}u) = \infty$ aufgrund von (4.4). Das zeigt, dass $a_n/(\log n)^2$ beschränkt ist und damit $a_n = O((\log n)^2)$ jeweils für $n \to \infty$. Hieraus und anhand der Voraussetzung 4.14 sowie Korollar 4.15 folgt mit Lemma 4.19(b) die Behauptung. $\square$

Anhand des folgenden Lemmas lässt sich die $D'(u_n)$ Bedingung zeigen.

Lemma 4.22 *Es sei Voraussetzung* 3.3 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $a_n > 0$ *und* $b_n \in \mathbb{R}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *Konstanten. Wenn nun für ein* $\gamma \in (0,1]$ *und mit* $n' = \lfloor n^\gamma \rfloor$ *und* $u_n = x/a_n + b_n$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt, dass*

$$n \sum_{i=1}^{2n'} \mathrm{P}(Y_0 + Y_i > 2u_n) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{4.15}$$

$$n^2 \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n'+1}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > 1\right) \to 0, \quad n^2 \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{-n'-1} c_{i,k} Z_{i,k} > 1\right) \to 0, \tag{4.16}$$

für $n \to \infty$ *und*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-n'}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > u_n\right) = O(1/n), \quad \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{n'} c_{i,k} Z_{i,k} > u_n\right) = O(1/n), \tag{4.17}$$

dann erfüllt $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *die* $D'(u_n)$ *Bedingung mit* $u_n = x/a_n + b_n$ *und beliebigem* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis Es muss (4.3) für sämtliche $x \in \mathbb{R}$ und $u_n = x/a_n + b_n$ gezeigt werden. Nachdem ja $\mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i > u_n) \le \mathrm{P}(Y_0 + Y_i > 2u_n)$ gilt, folgt aus (4.15)

$$n \sum_{i=1}^{2n'} \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i > u_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.18}$$

Definiere nun

$$Y_0' := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{n'} c_{i,k} Z_{i,k}, \qquad Y_t'' := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-n'}^{\infty} c_{i,k} Z_{i+t,k},$$

so dass Y_0' und Y_t'' für $t > 2n'$ unabhängig sind. Es folgt für $t > 2n'$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i > u_n)\\
&\quad = \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i'' + (Y_i - Y_i'') > u_n)\\
&\quad = \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i'' > u_n - (Y_i - Y_i''), Y_i - Y_i'' \le 1/a_n)\\
&\qquad + \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i'' > u_n - (Y_i - Y_i''), Y_i - Y_i'' > 1/a_n)\\
&\quad \le \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i'' > u_n - 1/a_n) + \mathrm{P}(Y_i - Y_i'' > 1/a_n)\\
&\quad \le \mathrm{P}(Y_0' > u_n - 1/a_n, Y_i'' > u_n - 1/a_n) + \mathrm{P}(Y_i - Y_i'' > 1/a_n) + \mathrm{P}(Y_0 - Y_0' > 1/a_n)\\
&\quad = \mathrm{P}(Y_0' > u_n - 1/a_n)\mathrm{P}(Y_i'' > u_n - 1/a_n)\\
&\qquad + \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{-n'-1} c_{i,k} Z_{i,k} > 1\right) + \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n'+1}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > 1\right).
\end{aligned}$$

Verwendet man nun die Stationarität von $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ und schreibt $u_n' = (x-1)/a_n + b_n$, so folgt

$$\begin{aligned} & n \sum_{i=2n'+1}^{\lfloor n/k \rfloor} \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i > u_n) \\ \leq \; & (n^2/k)\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{n'} c_{i,k} Z_{i,k} > u_n' \right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-n'}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > u_n' \right) \\ & + n^2 \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{-n'-1} c_{i,k} Z_{i,k} > 1 \right) + n^2 \mathrm{P}\left(a_n \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n'+1}^{\infty} c_{i,k} Z_{i,k} > 1 \right). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme konvergieren nach (4.16) gegen 0. Nachdem (4.17) auch für u_n' gilt, existiert ein $c > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{i=2n'+1}^{\lfloor n/k \rfloor} \mathrm{P}(Y_0 > u_n, Y_i > u_n) \leq c/k \to 0, \qquad k \to \infty$$

folgt. Dies zusammen mit (4.18) impliziert (4.3). $\square$

Lemma 4.23 *Es gelte Voraussetzung* 3.5. *Weiterhin sei ψ_k'' für ein $k \in \{1, \ldots, K\}$ ultimativ absolut stetig auf Kompakta und es gelte*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\psi_k'(t)}{\psi_k''(t)} = 0.$$

Dann existiert eine Konstante $\tau_{1,k} \geq 0$ und eine C^1 Funktion $p_k : [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$, welche fast überall zweimal differenzierbar ist und die

$$p_k(\tau) = q_k(\tau), \qquad \tau \geq \tau_{1,k},$$

erfüllt und zusätzlich $p_k'(\tau) > 0$ für alle $\tau \geq 0$, $p_k'' \leq 0$ für $\tau \geq 0$ fast überall und für beliebige Konstanten $c_2 \geq c_1 \geq 0$ und $\tau \geq 0$

$$c_1 p_k(c_1\tau) + c_2 p_k(c_2\tau) - (c_1+c_2) p_k\left(\frac{c_1+c_2}{2}\tau\right) \geq \frac{3(c_2-c_1)^2}{32} \tau p_k'\left(\frac{c_1+3c_2}{4}\tau\right) \geq 0. \quad (4.19)$$

Offensichtlich wird die Ungleichung (4.19) mit echt größer Null erfüllt, falls $c_2 > c_1$.

Beweis Aus Lemma 4.13(c) und dessen Beweis wissen wir, dass $q_k' \in \mathrm{RV}(-1)$ und dass $q_k''(\tau) \sim -q_k'(\tau)/\tau$ für $\tau \to \infty$, wobei q_k'' fast überall existiert. Insbesondere gibt es ein $\tau_1 \geq 0$, so dass $q_k''(\tau_1)$ existiert und

$$-\frac{3}{4} q_k'(\tau) \geq \tau q_k''(\tau) \geq -\frac{5}{4} q_k'(\tau), \qquad \tau \geq \tau_1 \text{ fast überall.}$$

Setze $\mu := -\tau_1 q_k''(\tau_1)/q_k'(\tau_1)$. Dann gilt $3/4 \leq \mu \leq 5/4$. Definiere die Funktion p_k durch

$$p_k(\tau) := \begin{cases} q_k(\tau), & \tau \geq \tau_1, \\ q_k(\tau_1) - q_k'(\tau_1)\mathrm{e}^{\mu} \int_{\tau}^{\tau_1} \mathrm{e}^{-\mu t/\tau_1} \mathrm{d}t, & 0 \leq \tau < \tau_1. \end{cases}$$

Dann ist p_k in C^1 und fast überall zweimal differenzierbar und es gilt für $0 \leq \tau \leq \tau_1$

$$p_k'(\tau) = q_k'(\tau_1)\mathrm{e}^{\mu}\mathrm{e}^{-\mu\tau/\tau_1}, \qquad p_k''(\tau) = -\mu p_k'(\tau)/\tau_1,$$

und daher für $0 \leq \tau \leq \tau_1$

$$\tau p_k''(\tau) = -\mu \frac{\tau}{\tau_1} p_k'(\tau) \geq -\mu p_k'(\tau) \geq -\frac{5}{4} p_k'(\tau).$$

Dann gelten $p_k'(\tau) > 0$ für $\tau \geq 0$ und $p_k''(\tau) < 0$ sowie $\tau p_k''(\tau) \geq -\frac{5}{4}p_k'(\tau)$ jeweils für $\tau \geq 0$ fast überall. Weiterhin gilt $p_k(0) \geq q_k(\tau_1) - q_k'(\tau_1)\mathrm{e}^{\mu}\tau_1 > 0$ für hinreichend großes τ_1, nachdem $\lim_{\tau\to\infty} \tau q_k'(\tau)/q(\tau) = 0$ nach Karamatas Theorem, S. 26, [4].

Sei nun $0 \leq c_1 < c_2$ und setze $c := c_1 + c_2$ und $c_0 := \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2$. Für festes $\tau > 0$ sei $j : [0, c] \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$j(a) := a p_k(a\tau) + (c - a) p_k([c - a]\tau), \qquad a \in [0, c]$$

definiert. Dann gelten für $a \in [0, c]$

$$\begin{aligned}
j'(a) &= a\tau p_k'(a\tau) + p_k(a\tau) - p_k([c - a]\tau) - (c - a)\tau p_k'([c - a]\tau), \\
j''(a) &= \tau \left[a\tau p_k''(a\tau) + 2p_k'(a\tau) + (c - a)\tau p_k''([c - a]\tau) + 2p_k'([c - a]\tau) \right] \\
&\geq \frac{3}{4}\tau \left[p_k'(a\tau) + p_k'([c - a]\tau) \right] > 0, \qquad \text{fast überall.}
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass j' auf $[0, c]$ streng monoton wächst. Aus $j'(c/2) = 0$ folgt, dass j sein eindeutiges absolutes Minimum bei $a = c/2$ hat. Zur Auswertung von $j(c_1) - j(c/2)$ sei angemerkt, dass $c_1 < c_0 < c/2 < c_1/4+3c_2/4 < c$. Unter Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt sich

$$j(c_1) - j(c/2) \geq j(c_1) - j(c_0) = (c_0 - c_1)|j'(\xi)| \geq \frac{c_2 - c_1}{4} |j'(c_0)|,$$

wobei $\xi \in [c_1, c_0]$. Mit $j'(c/2) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|j'(c_0)| &= \int_{c_0}^{c/2} j''(a)\mathrm{d}a && (4.20)\\
&\geq \frac{3}{4}\tau \int_{c_0}^{c/2} [p_k'(a\tau) + p_k'([c - a]\tau)]\mathrm{d}a && (4.21)\\
&= \frac{3}{4} \left\{ p_k\left(\frac{c}{2}\tau\right) - p_k(c_0\tau) - p_k\left(\frac{c}{2}\tau\right) + p_k([c - c_0]\tau) \right\}. && (4.22)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Mittelwertsatzes und der Tatsache, dass p_k' monoton fällt, ergibt sich

$$j(c_1) - j(c/2) \geq \frac{3(c_2 - c_1)}{16} [p_k([c - c_0]\tau) - p_k(c_0\tau)] \geq \frac{3(c_2 - c_1)^2\tau}{32} p_k'([c - c_0]\tau).$$

Weil außerdem

$$j(c_1) - j(c/2) = c_1 p_k(c_1\tau) + c_2 p_k(c_2\tau) - (c_1 + c_2) p_k\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\tau\right)$$

gilt, ergibt sich die Behauptung. □

Mit Hilfe des folgenden Lemmas lässt sich (4.15) für endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen, welche Voraussetzung 4.14 erfüllen, zeigen. Dies ist der eindeutig schwierigste Abschnitt im Nachweis der $D'(u_n)$ Bedingung.

Lemma 4.24 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt. Dann existieren* $\gamma_0 \in (0,1]$*,* $m_0 \in \mathbb{N}$*,* $t_3 \geq t_0$ *und eine Familie* $(B_t)_{t\geq t_3}$ *nicht-negativer reeller Zahlen, für welche* $\lim_{t\to\infty} B_t = 0$ *gilt, so dass*

$$\frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(c_{i,k}+c_{i-m,k})Z_{i,k} > t\right)}{\left[\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > t\right)\right]^{1+\gamma_0}} \leq B_t, \qquad \forall t \geq t_3,\ \forall m \geq m_0, \tag{4.23}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(c_{i,k}+c_{i-m,k})Z_{i,k} > t\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > t\right)} = 0, \qquad \forall m \in \{1,\dots,m_0-1\} \tag{4.24}$$

gilt.

Beweis Sei $k \in \{1,\dots,K\}$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ werde die Folge $(c_{i,k,m})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,\dots,K\}}$ durch $c_{i,k,m} := (c_{i,k}+c_{i-m,k})/2$ definiert. Entsprechend werden $q_{\infty,m}$ und $\sigma_{\infty,m}$ definiert, also

$$q_{\infty,m}(\tau) := \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{c_{i,k}+c_{i-m,k}}{2} q_k\left(\frac{c_{i,k}+c_{i-m,k}}{2}\tau\right), \qquad \tau \geq 0.$$

Falls $m=0$, so wird der Index üblicherweise weggelassen, so dass $c_{i,k,0} = c_{i,k}$ usw. Definiere außerdem $t_0 := \sum_{k,i} t_{0,k}c_{i,k}$, $c_k := \max\{c_{i,k} : i \in \mathbb{Z}\}$ und $c_0 = \max\{c_k : 1 \leq k \leq K\}$. Seien weiter $\tilde{c}_{k,m} := \max\{c_{i,k,m} : i \in \mathbb{Z}\}$ und $\tilde{c}_m := \max\{\tilde{c}_{k,m} : 1 \leq k \leq K\}$.

Es folgt aus (4.9) und (4.10) die Existenz von Konstanten $t_3, D_1, \dots, D_4 > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \geq 0$ und $t \geq t_3$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k,m}Z_{i,k} > t\right)}{\left[\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > t\right)\right]^{1+\gamma}}\\ &\leq \frac{D_1}{D_3^{1+\gamma}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left[q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v) - (1+\gamma)q^{\leftarrow}_{\infty}(v) - \frac{D_2}{\sigma_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v))} - \frac{D_4(1+\gamma)}{\sigma_{\infty}(q^{\leftarrow}_{\infty}(v))}\right]\mathrm{d}v\right).\end{aligned}$$

Die Behauptungen werden folgen, sobald bewiesen werden konnte, dass ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\gamma_0 \in (0,1]$ existieren, so dass

$$\lim_{t\to\infty}\inf_{m\geq m_0}\int_{t_0}^{t}[q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v) - (1+\gamma_0)q^{\leftarrow}_{\infty}(v)]\mathrm{d}v = \infty, \tag{4.25}$$

$$\lim_{v\to\infty}\sup_{m\geq m_0}\frac{\sigma^{-1}_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v)) + \sigma^{-1}_{\infty}(q^{\leftarrow}_{\infty}(v))}{q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v) - (1+\gamma_0)q^{\leftarrow}_{\infty}(v)} = 0, \tag{4.26}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}[q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v) - q^{\leftarrow}_{\infty}(v)]\mathrm{d}v = \infty, \qquad \forall m \in \{1,\dots,m_0-1\}, \tag{4.27}$$

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\sigma^{-1}_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v)) + \sigma^{-1}_{\infty}(q^{\leftarrow}_{\infty}(v))}{q^{\leftarrow}_{\infty,m}(v) - q^{\leftarrow}_{\infty}(v)} = 0, \qquad \forall m \in \{1,\dots,m_0-1\}. \tag{4.28}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass (4.27) und (4.28) redundant sind, falls $m_0 = 1$ gilt. Um nun (4.25) bis (4.28) zeigen zu können, muss zwischen den Fällen $\beta_k = \infty$ für alle $k \in \{1, \ldots, K\}$ und $\beta_1 \in [-1, \infty)$ (siehe hierzu Voraussetzung 4.14) unterschieden werden.

Sei zunächst $\beta_k = \infty$, also $\beta'_k = -1$ für $k \in \{1, \ldots, K\}$. Sei $m_0 := 1$. Nachdem Modifikationen an q_k auf beschränkten Intervallen durch die Funktion ν_k aus Voraussetzung 3.5 kompensiert werden können, können wir davon ausgehen, dass q_k bereits die Eigenschaften von p_k aus Lemma 4.23 für beliebiges $k \in \{1, \ldots, K\}$ inne hat. Insbesondere ist q_k strikt positiv auf $[0, \infty)$ und streng monoton wachsend. Weiterhin gilt für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$q_{\infty,m}(2\tau) \geq \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{c_{i,k} + c_{i-m,k}}{2} q_k(\max\{c_{i,k}, c_{i-m,k}\}\tau) \geq q_\infty(\tau), \qquad \tau \geq 0.$$

Darüber hinaus existiert aufgrund von Voraussetzung 4.14 eine Funktion $j : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$, so dass $\inf_{m \in \mathbb{N}}\{c_{j(m),1} - c_{j(m)-m,1}\} > 0$. Dann folgt aus (4.19), dass Konstanten $b_1, b_2 > 0$ existieren, so dass

$$q_\infty(\tau) - q_{\infty,m}(\tau) \geq b_1 \tau q'_1(b_2\tau), \qquad \forall \tau \geq 0,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$q_\infty^{\leftarrow}(t) \leq q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t) \leq 2q_\infty^{\leftarrow}(t), \qquad \forall t \geq t_0,\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

Wendet man den Mittelwertsatz an, so findet sich für festes $t \geq t_0$ ein $\xi_m \in [t, q_\infty(q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))]$, so dass

$$\begin{aligned} q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t) - q_\infty^{\leftarrow}(t) &= q_\infty^{\leftarrow}(q_\infty(q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))) - q_\infty^{\leftarrow}(t) \\ &= \frac{q_\infty(q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t)) - q_{\infty,m}(q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))}{q'_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(\xi_m))} \\ &\geq \frac{b_1 q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t) q'_1(b_2 q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))}{q'_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(\xi_m))}. \end{aligned}$$

Weil $q_\infty^{\leftarrow}(\xi_m) \in [q_\infty^{\leftarrow}(t), q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t)]$, folgt aus (4.5) und der Tatsache, dass q'_1 monoton fallend ist, dass Konstanten $b_3, b_4 > 0$ existieren, so dass

$$q'_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(\xi_m)) \leq b_3 q'_1(b_4 q_\infty^{\leftarrow}(\xi_m)) \leq b_3 q'_1(b_4 q_\infty^{\leftarrow}(t))$$

gilt. Aus (4.29) folgt nun

$$1 \geq \frac{q_\infty^{\leftarrow}(t)}{q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t)} \geq \frac{b_1}{b_3} \frac{q'_1(b_2 q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))}{q'_1(b_4 q_\infty^{\leftarrow}(t))} \geq 0, \qquad \forall t \geq t_0,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Weil $q'_1 \in \mathrm{RV}(-1)$ und q'_1 monoton fallend ist, gilt mit $\tau = q_\infty^{\leftarrow}(t)$ und (4.29)

$$\frac{q'_1(b_2 q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))}{q'_1(b_4 q_\infty^{\leftarrow}(t))} \geq \frac{q'_1(2b_2 q_\infty^{\leftarrow}(t))}{q'_1(b_4 q_\infty^{\leftarrow}(t))} = \frac{q'_1(2b_2\tau)}{q'_1(b_4\tau)} \to \left(\frac{2b_2}{b_4}\right)^{-1} > 0, \qquad \tau \to \infty.$$

Insgesamt folgt die Existenz von Konstanten $a_1, a_2, t_4 > 0$, so dass

$$a_1 \leq \frac{q_1'(b_2 q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t))}{q_1'(b_4 q_{\infty}^{\leftarrow}(t))} \leq a_2, \qquad \forall t \geq t_4,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus den vorherigen Resultaten und wiederum aus (4.29), dass es ein $a_3 > 0$ gibt, so dass

$$q_{\infty,m}^{\leftarrow}(t) - q_{\infty}^{\leftarrow}(t) \geq a_3 q_{\infty}^{\leftarrow}(t), \qquad \forall t \geq t_4,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt (4.25) mit $\gamma_0 := \min\{a_3/2, 1\}$. Um (4.26) zu beweisen, sei darauf hingewiesen, dass mit denselben Argumenten wie eben Konstanten $b_5, t_5 > 0$ existieren, so dass mit $\tau = q_{\infty}^{\leftarrow}(v)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und $v \geq t_5$

$$\begin{aligned}
(q_{\infty}^{\leftarrow}(v))^2 \sigma_{\infty,m}^2(q_{\infty,m}^{\leftarrow}(v)) &\geq (q_{\infty}^{\leftarrow}(v))^2 \tilde{c}_{1,m}^2 q_1'(\tilde{c}_{1,m} q_{\infty,m}^{\leftarrow}(v)) \\
&\geq (q_{\infty}^{\leftarrow}(v))^2 \tilde{c}_{1,m}^2 q_1'(2\tilde{c}_{1,m} q_{\infty}^{\leftarrow}(v)) \\
&\sim b_5 \tau^2 q_1'(\tau) \to \infty, \qquad \tau \to \infty,
\end{aligned}$$

weil $\tilde{q}_1 \in \mathrm{RV}(1)$ nach Proposition 4.11 für die Funktion $\tilde{q}_1 : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^+$, definiert durch $\tilde{q}_1(\tau) := \tau^2 q_1'(\tau)$ für $\tau \geq 0$. Aus Proposition 1.5.1, [4] folgt $\tilde{q}_1(\tau) \to \infty$ für $\tau \to \infty$.

Nun gelte $\beta_1 \in [-1, \infty)$, also $\beta_1' > -1$. Wiederum stellt eine Modifikation derart, dass sämtliche Funktionen q_k strikt positiv auf $[0, \infty)$ sind, keine Einschränkung dar. Zunächst zeigen wir, dass Konstanten $A_2 > A_1 > 0$ und $\tau_2 > 0$ existieren, so dass

$$q_{\infty,m}(\tau) \leq A_1 q_1(c_0\tau) < A_2 q_1(c_0\tau) \leq q_\infty(\tau), \qquad \forall \tau \geq \tau_2,\ \forall m \geq 1 \tag{4.30}$$

und, falls $\beta_1' = \infty$, dass zusätzlich Konstanten $m_0 \geq 1,\ \tau_3 \geq 0$ und $c' < c_0$ existieren, so dass

$$q_{\infty,m}(\tau) \leq A_1 q_1(c'\tau), \qquad \forall \tau \geq \tau_3,\ \forall m \geq m_0. \tag{4.31}$$

Um (4.30) zu zeigen, sei zunächst angemerkt, dass für $k \in \{1, \ldots, K\}$ nach Voraussetzung 4.14 und Lemma 4.13(a) und (b) $q_k \in \mathrm{RV}(\beta_k' + 1)$ und daher für $i \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{1, \ldots, K\}$ durch die Theoreme 1.5.2 und 2.4.1, [4]

$$\frac{c_{i,k} q_k(c_{i,k}\tau)}{c_k q_k(c_k\tau)} \to \left(\frac{c_{i,k}}{c_k}\right)^{\beta_k'+2}, \qquad \tau \to \infty$$

und außerdem nach Voraussetzung 4.14

$$\frac{c_k q_k(c_k\tau)}{c_0 q_1(c_0\tau)} = \frac{c_k}{c_0} \frac{q_k(c_k\tau)}{q_k(\tau)} \frac{q_k(\tau)}{q_1(\tau)} \frac{q_1(\tau)}{q_1(c_0\tau)} \to \left(\frac{c_k}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} d_k, \qquad \tau \to \infty,$$

weshalb

$$\begin{aligned}
q_\infty(\tau) &\sim \sum_{k,i} \left(\frac{c_{i,k}}{c_k}\right)^{\beta_k'+2} c_k q_k(c_k\tau) \\
&\sim \sum_{k,i} \left(\frac{c_{i,k}}{c_k}\right)^{\beta_k'+2} \frac{c_k q_k(c_k\tau)}{c_0 q_1(c_0\tau)} c_0 q_1(c_0\tau) \\
&\sim \sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} d_k c_0 q_1(c_0\tau), \qquad \tau \to \infty
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung 4.14 und dominierter Konvergenz gilt. Sollte $\beta_1' = \infty$ gelten, so ist

$$\sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} d_k c_0 = \sum_{k=1}^{K'+1} \operatorname{card}\{i \in \mathbb{Z} : c_{i,k} = c_0\} d_k c_0.$$

Durch dieselbe Rechnung ergibt sich für $\beta_1' \neq \infty$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$q_{\infty,m}(\tau) \sim \sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k,m}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} d_k c_0 q_1(c_0\tau), \qquad \tau \to \infty$$

bzw. für $\beta_1' = \infty$ und $\tilde{c}_{k,m} = c_0$ für ein $k \in \{1, \ldots, K'+1\}$. Man kann mit ähnlichen Methoden wie im Beweis von Lemma 4.23, dass

$$A_3 := c_0 \sum_{k=1}^{K'+1} d_k \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k,m}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} < c_0 \sum_{k=1}^{K'+1} d_k \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_{i,k}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2} =: A_4.$$

Sei $M \subset \mathbb{Z}$ eine endliche Teilmenge, so dass $\sum_{k,i\notin M} c_{i,k} \leq (A_4 - A_3)/4$. Definiere jetzt $M_m := M \cup (M+m)$. Dann folgt aufgrund der Voraussetzung 4.14 und der strikten Monotonie von q_1, dass

$$\sum_{k,i\notin M_m} c_{i,k,m} q_k(c_{i,k,m}\tau) \leq (A_4 - A_3) q_1(c_0\tau)/4, \qquad \tau \geq 0.$$

Darüber hinaus folgt aufgrund der Endlichkeit von M durch die Theoreme 1.5.2 und 2.4.1, [4], dass

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{k,i\in M_m} \left(\frac{c_{i,k,m} q_k(c_{i,k,m}\tau)}{c_0 q_1(c_0\tau)} - d_k \left(\frac{c_{i,k,m}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2}\right) = 0$$

gleichmäßig für $m \in \mathbb{N}$. Daher existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\tau_{2,\epsilon} > 0$, so dass für $\tau \geq \tau_{2,\epsilon}$

$$\begin{aligned} \sum_{k,i\in M_m} c_{i,k,m} q_k(c_{i,k,m}\tau) &\leq \left(\epsilon c_0 + c_0 \sum_{k,i\in M_m} d_k \left(\frac{c_{i,k,m}}{c_0}\right)^{\beta_1'+2}\right) q_1(c_0\tau) \\ &\leq (A_3 + \epsilon c_0) q_1(c_0\tau) \end{aligned}$$

gilt. Insgesamt existiert ein $\tau_2' > 0$, so dass für $m \in \mathbb{N}$ und $\tau \geq \tau_2'$

$$q_{\infty,m}(\tau) \leq \frac{A_4 - A_3}{4} q_1(c_0\tau) + \left(A_3 + \frac{A_4 - A_3}{4}\right) q_1(c_0\tau) = \frac{A_4 + A_3}{2} q_1(c_0\tau)$$

folgt. Da außerdem ein $\tau_2'' > 0$ existiert, so dass $q_\infty(\tau) \geq q_1(c_0\tau)(A_3 + 3A_4)/4$ für $\tau \geq \tau_2''$, folgt die Ungleichung (4.30) nun mit $A_1 := (A_4 + A_3)/2$ und $A_2 := (A_3 + 3A_4)/4$ sowie $\tau_2 = \max\{\tau_2', \tau_2''\}$. Ungleichung (4.31) beweist man auf dieselbe Art, wobei man $m_0 \in \mathbb{N}$ und $c' > 0$ so wählt, dass

$$\sup_{m\geq m_0} \tilde{c}_m \leq c' < c_0. \tag{4.32}$$

Nachdem $q_1(\tau) \geq q_k(\tau)$ nach Voraussetzung 4.14 für $k \in \{1,\ldots,K\}$ und hinreichend große τ gilt, folgt $q_{\infty,m}(\tau) \leq \sum_{k,i} c_{i,k} q_1(c_0\tau)$ für hinreichend große τ. Deshalb gilt für hinreichend große t

$$q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) \geq \frac{1}{c_0} q^{\leftarrow}_1\left(\frac{t}{\sum_{k,i} c_{k,i}}\right),$$

wobei Letzteres für $m \in \mathbb{N}$ und $t \to \infty$ gleichmäßig gegen ∞ konvergiert. Daher können wir (4.30) gleichmäßig in m invertieren, weshalb sich eine Konstante $t_6 > 0$ findet, so dass

$$q^{\leftarrow}_{\infty}(t) \leq \frac{1}{c_0} q^{\leftarrow}_1\left(\frac{t}{A_2}\right) < \frac{1}{c_0} q^{\leftarrow}_1\left(\frac{t}{A_1}\right) \leq q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t), \qquad \forall t \geq t_6,\ \forall m \geq 1.$$

Falls $\beta_1' \neq \infty$, also $\beta_1 > -1$ gilt, so setze $m_0 := 1$ und wähle $\gamma_0 \in (0,1]$, so dass ein $A_5 \in (A_1, A_2)$ existiert, so dass $(1+\gamma_0)\psi_1'(t/A_2) \leq \psi_1'(t/A_5)$ für $t \geq t_6$. Dies ist möglich aufgrund des streng monotonen Wachstums von ψ_1' und der Tatsache, dass

$$\frac{\psi_1'(t/A_2)}{\psi_1'(t/A_5)} \to \left(\frac{A_5}{A_2}\right)^{1+\beta_1} < 1, \qquad t \to \infty,$$

nachdem $\psi_k' \in \mathrm{RV}(1+\beta_k)$ nach Lemma 4.13(b). Dann gilt für $t \geq t_6$ und $m \in \mathbb{N}$

$$q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) - (1+\gamma_0) q^{\leftarrow}_{\infty}(t) \geq \frac{1}{c_0}\left[\psi_1'\left(\frac{t}{A_1}\right) - \psi_1'\left(\frac{t}{A_5}\right)\right] = \frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_5}\right) t\psi_1''(\xi), \quad (4.33)$$

wobei $\xi \in [t/A_5, t/A_1]$. Ist nun $\beta_1 = -1$, so werden m_0 wie in (4.32) und $A_5 := A_2$ gewählt. Dann gibt es ein $t_7 > 0$, so dass für $t \geq t_7$

$$q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) - q^{\leftarrow}_{\infty}(t) \geq \frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_5}\right) t\psi_1''(\xi), \qquad \forall m \in \{1,\ldots,m_0-1\}, \qquad (4.34)$$

wobei $\xi \in [t/A_5, t/A_1]$. Wählt man nun $0 < \gamma_0 < \min\{c_0/c' - 1, 1\}$ so gilt $1/c' \geq (\gamma_0+1)/c_0$ und es folgt durch Invertierung von (4.31), dass ein $t_8 > 0$ existiert, so dass für $t \geq t_8$ und $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) - (1+\gamma_0) q^{\leftarrow}_{\infty}(t) &\geq \frac{1}{c'}\psi_1'\left(\frac{t}{A_1}\right) - \frac{1+\gamma_0}{c_0}\psi_1'\left(\frac{t}{A_5}\right) \\ &\geq \frac{1+\gamma_0}{c_0}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_5}\right) t\psi_1''(\xi) \qquad (4.35) \end{aligned}$$

gilt, wobei $\xi \in [t/A_5, t/A_1]$. Nach Theorem 1.5.11, [4] gilt

$$\frac{t^2\psi_1''(t)}{\int_{t_0}^t x\psi_1''(x)\mathrm{d}x} \to \beta_1 + 2, \qquad t \to \infty$$

und aus Proposition 4.11 lässt sich schließen, dass $t^2\psi_1''(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, so dass (4.25) und (4.27) aus (4.33) bis (4.35) folgen. Sei nun $k_0 = k_0(m)$ definiert durch

$$k_0 := \arg\max\{\tilde{c}_{k,m} : 1 \leq k \leq K'+1,\ d_k > 0\}.$$

Um nun die Gleichungen (4.26) und (4.28) nachzuweisen, sei registriert, dass für $m \geq 0$

$$q'_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t)) \geq \tilde{c}^2_{k_0,m} q'_{k_0}(\tilde{c}_{k_0,m} q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t)), \qquad t \geq t_0$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned} q_{\infty,m}(\tau) &\sim \sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k,m} q_k(c_{i,k,m}\tau) \\ &\leq \sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k,m} q_k(\tilde{c}_{k,m}\tau) \\ &\sim \underbrace{\sum_{k=1}^{K'+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k,m} \frac{d_k}{d_{k_0}} \left(\frac{\tilde{c}_{k,m}}{\tilde{c}_{k_0,m}}\right)^{\beta'_1+1}}_{=:A_6/2} q_{k_0}(\tilde{c}_{k_0,m}\tau), \qquad \tau \to \infty, \end{aligned}$$

und $c_{k_0}/2 \leq \tilde{c}_{k_0,m}$, existiert ein $\tau_3 > 0$, so dass sich

$$\frac{c_{k_0}}{2} q_{k_0}(\tilde{c}_{k_0,m}\tau) \leq q_{\infty,m}(\tau) \leq A_6 q_{k_0}(\tilde{c}_{k_0,m}\tau), \qquad \tau \geq \tau_3$$

ergibt. Daher existiert ein $t_9 > 0$, so dass

$$q^{\leftarrow}_{k_0}\left(\frac{t}{A_6}\right) \leq \tilde{c}_{k_0,m} q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) \leq q^{\leftarrow}_{k_0}\left(\frac{2t}{c_{k_0}}\right), \qquad t \geq t_9$$

folgt. Deswegen existiert ein $\eta_m \in [t/A_6, 2t/c_{k_0}]$ so dass $\tilde{c}_{k_0,m} q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t) = q^{\leftarrow}_{k_0}(\eta_m)$, woraus wiederum

$$q'_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t)) \geq \left(\frac{c_{k_0}}{2}\right)^2 q'_{k_0}(q^{\leftarrow}_{k_0}(\eta_m)) = \left(\frac{c_{k_0}}{2}\right)^2 \frac{1}{\psi''_{k_0}(\eta_m)}, \qquad t \geq t_9$$

folgt. Nun gilt $\sigma^{-1}_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t)) = 1/(q'_{\infty,m}(q^{\leftarrow}_{\infty,m}(t))^{1/2}$ für $t \geq t_0$ und außerdem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi''_{k_0}(\eta_m)}{t^2(\psi''_1(\xi))^2} = 0$$

gleichmäßig für $m \geq 0$ aufgrund von Voraussetzung 4.14 und Proposition 4.11. Daher implizieren (4.33) bis (4.35) die Gleichungen (4.26) und (4.28). □

Es folgt der Nachweis der $D'(u_n)$ Bedingung für endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen, welche Voraussetzung 4.14 erfüllen.

Proposition 4.25 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *normierenden Konstanten, definiert durch* (3.27). *Dann erfüllt* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *die* $D'(u_n)$ *Bedingung für* $u_n = x/a_n + b_n$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *beliebig.*

Beweis Wir weisen die Bedingungen (4.15) bis (4.17) nach. Sei $u_n = x/a_n + b_n$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es seien γ_0, m_0, t_3 und $(B_t)_{t \geq t_3}$ wie in Lemma 4.24 und $n' := \lfloor n^{\gamma_0} \rfloor$. Weil Voraussetzung 4.14 insbesondere Voraussetzung 3.7 impliziert, gilt nach Satz 3.18 $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{P}(Y_0 > u_n) = e^{-x}$ und es folgt aus (4.24)

$$n \sum_{m=1}^{m_0-1} \mathrm{P}(Y_0 + Y_m > 2u_n) \sim \sum_{m=1}^{m_0-1} \frac{\mathrm{P}(Y_0 + Y_m > 2u_n)}{\mathrm{P}(Y_0 > u_n)} e^{-x} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Zusätzlich ergibt sich durch (4.23)

$$\begin{aligned} n \sum_{m=m_0}^{2n'} \mathrm{P}(Y_0 + Y_m > 2u_n) &\leq \frac{(e^{-x}+1)^{1+\gamma_0}}{n^{\gamma_0}} \sum_{m=m_0}^{2n'} \frac{\mathrm{P}(Y_0 + Y_m > 2u_n)}{\mathrm{P}(Y_0 > u_n)^{1+\gamma_0}} \\ &\leq 2(e^{-x}+1)^{1+\gamma_0} B_{u_n} \\ &\to 0, \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also (4.15).

Seien $\tau \geq 0$, $k \in \{1, \ldots, K\}$, $i \in \mathbb{N}$ und $X_{i,k}$ wie in Definition 3.6. Dann gilt nach (2.34) $\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau} = c_{i,k}\mathrm{E}\bar{Z}_{k,c_{i,k}\tau}$. Nachdem $|c_{i,k}| \leq C_2|i|^{-\vartheta}$ für $i \neq 0$, $\vartheta := \min\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_K\}$ und ein $C_2 > 0$ nach Voraussetzung 4.14 und Korollar 4.15 gilt, folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_{i,k}\tau| \leq C_2, \qquad \tau \leq n^{\vartheta},\ |i| \geq n.$$

Nachdem $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau \mapsto \mathrm{E}\bar{Z}_{k,\tau}$ nach Proposition 2.37 eine stetige Funktion ist, existiert eine Konstante $C_3 > 0$, so dass

$$|\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}| \leq c_{i,k}C_3, \qquad \tau \leq n^{\vartheta},\ |i| \geq n$$

gilt. Insgesamt ergibt sich für eine Konstante $C_4 > 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}| \leq KC_2C_3 \sum_{i=n+1}^{\infty} |i|^{-\vartheta} \leq C_4 n^{1-\vartheta}, \qquad \tau \leq n^{\vartheta}. \tag{4.36}$$

Sei nun $\bar{\Phi}_n$ die momentenerzeugende Funktion von $\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=n+1}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k}$. Dann folgt wie im Beweis von Lemma 3.10

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log \bar{\Phi}_n(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}, \qquad \tau \geq 0,$$

woraus wiederum

$$\bar{\Phi}_n(\tau) = \exp\left(\int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{E}\bar{X}_{i,k,v} \mathrm{d}v \right), \qquad \tau \geq 0$$

folgt, nachdem $\bar{\Phi}_n(0) = 1$ ist. Aus (4.36) folgt

$$\bar{\Phi}_n(\tau) \leq \exp(C_4 n^{1-\vartheta}\tau), \qquad \tau \leq n^{\vartheta}.$$

Ersetzt man n durch n' und wählt $\tau := (n')^{\vartheta}$, folgt unter Anwendung des eben Gezeigten und (2.33)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=n'+1}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > 1/a_n\right) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(-\tau\sum_{k,i>n'}\bar{X}_{i,k,\tau}\right)1_{\sum_{k,i>n'}\bar{X}_{i,k,\tau}>1/a_n}\right]\bar{\Phi}_{n'}(\tau) \\
&\leq \exp(-\tau/a_n)\bar{\Phi}_{n'}(\tau) \\
&\leq \exp(C_4 n' - (n')^{\vartheta}/a_n) \\
&\leq \exp(n'(C_4 - (n')^{\vartheta-1}/a_n)) = o(n^{-2}), \qquad n\to\infty,
\end{aligned}$$

nachdem $a_n = O((\log n)^2)$ und $(\log n)^2 = o((n')^{\vartheta-1})$ jeweils für $n \to \infty$, was zum Einen im Beweis von Proposition 4.21 und zum Anderen im Beweis von Lemma 4.19(b) gezeigt wurde. Hieraus folgt die linke Seite von (4.16). Die rechte Seite wird auf identische Weise bewiesen.

Wie im Beweis von Lemma 3.10 gezeigt wurde, existiert eine Konstante $C_5 > 0$, so dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-n}^{\infty} |\mathrm{E}\bar{X}_{i,k,\tau}| \leq C_5, \qquad \tau \leq n^{\vartheta}$$

gilt. Sei nun $\tilde{\Phi}_n$ die momentenerzeugende Funktion von $\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-n}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k}$. Dann gilt mit denselben Argumenten wie eben

$$\tilde{\Phi}_n(\tau) \leq \exp(C_5\tau), \qquad \tau \leq n^{\vartheta}.$$

Nun gilt $u_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und beliebiges, aber festes $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere $u_n > C_5 + 1$ für hinreichend große n. Sei nun $k \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma_0\vartheta > 1/k$. Ersetzt man wiederum n durch n' und wählt $\tau := (n')^{\vartheta}$, so folgt für hinreichend große n' durch die Reihenentwicklung der e-Funktion.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=-n'}^{\infty} c_{i,k}Z_{i,k} > u_n\right) &\leq \exp(-\tau u_n)\tilde{\Phi}_{n'}(\tau) \\
&\leq \exp(-(n')^{\vartheta}(u_n - C_5)) \\
&\leq \exp(-(n')^{\vartheta}) \\
&\leq \frac{k!}{n^{\gamma_0\vartheta k}} \\
&\leq \frac{k!}{n} = O(1/n), \qquad n\to\infty,
\end{aligned}$$

woraus sich die linke Seite von (4.17) ergibt. Die rechte Seite wird auf identische Weise bewiesen. □

Es folgt die zentrale Aussage des vierten Kapitels: ein Punktprozessresultat für endliche Summen von unabhängigen MA(∞) Prozessen, welche Voraussetzung 4.14 erfüllen.

Satz 4.26 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *normierenden Konstanten, definiert durch* (3.27). *Darüber hinaus seien* N_n *für* $n \in \mathbb{N}$ *Punktprozesse auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit den dazugehörigen Punkten* $\{(j/n, a_n(Y_j - b_n)) : j \in \mathbb{N}\}$ *und* N *ein Poisson Prozess auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit dem Intensitätsmaß* $\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}t \times \exp(-x)\mathrm{d}x$. *Dann gilt*

$$N_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty. \tag{4.37}$$

Insbesondere liegt $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung.*

Beweis Nach Satz 3.18 gilt $\mathrm{P}(a_n(\widehat{M}_n - b_n) \le x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ für $n \to \infty$, was der Verteilungsfunktion der Gumbel-Verteilung entspricht. Nach den Propositionen 4.21 und 4.25 erfüllt $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Bedingungen $D'(u_n)$ für sämtliche $u_n = x/a_n + b_n$, $x \in \mathbb{R}$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für sämtliche $r \in \mathbb{N}$ und $u_{n,k} = x_k/a_n + b_n$, $1 \le k \le r$, $x_k \in \mathbb{R}$ sowie außerdem $\boldsymbol{u}_n := (u_{n,1}, \dots, u_{n,r})$. Nach Proposition 4.7 folgt also $\mathrm{P}(a_n(M_n - b_n) \le x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ für $n \to \infty$, weshalb $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt. Damit sind die Voraussetzungen von Proposition 4.9 erfüllt, weshalb

$$N_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty$$

nach Proposition 4.9 gilt. □

Korollar 4.27 *Es sei Voraussetzung* 4.14 *erfüllt und* $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiert durch* (3.1). *Seien weiter* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *normierenden Konstanten, definiert durch* (3.27). *Dann gilt für jedes* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(a_n(M_n^{(k)} - b_n) \le x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x}) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\exp(-x)^i}{i!}, \qquad n \to \infty.$$

Beweis Es sind die Voraussetzungen von Proposition 4.8 erfüllt, weshalb diese Anwendung findet. □

Kapitel 5

Extremwerttheorie für EGARCH Prozesse

Im folgenden Kapitel wird zunächst der EGARCH Prozess - bezeichnet mit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ - eingeführt. Das Besondere am EGARCH Prozess ist, dass er den leverage effect nachbilden kann, eine der wesentlichen Eigenschaften, welche Finanzmärkten unterstellt wird. Dieser besagt, dass die Volatilität der Märkte bei schlechten Nachrichten zunimmt und bei guten abnimmt.

Daraufhin wird aufgeführt, dass $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ als endliche Summe von unabhängigen MA(∞) Prozessen dargestellt werden kann. Unter schwachen Voraussetzungen können die Punktprozessresultate aus dem vierten Kapitel auf $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ angewandt werden. Die selben Resultate können durch einfache Transformationen auf $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ausgedehnt werden.

Im zweiten Abschnitt wird exemplarisch ein EGARCH(1,1) Prozess simuliert.

5.1 Der EGARCH Prozess

In diesem Abschnitt werden sämtliche Punktprozessresultate für den EGARCH Prozess vorgestellt. Zuvor werden die nötigen Definitionen eingeführt.

Definition 5.1 *Ein* EGARCH Prozess *ist ein Prozess* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *der Form*

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

wobei der Noiseprozess $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit Erwartungswert* 0 *und Varianz* 1 *ist, und der* Volatilitätsprozess $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *der Gleichung*

$$\log \sigma_t^2 = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} c_i g(\epsilon_{t-i}), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.2}$$

genügt, wobei $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *eine deterministische Funktion ist,* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Koeffizienten, so dass*

$$\mathrm{E}|g(\epsilon_1)| < \infty, \qquad \mathrm{Var}(g(\epsilon_1)) < \infty \tag{5.3}$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty \tag{5.4}$$

gelten.

Definition 5.2 *Die* verallgemeinerte Fehler Verteilung (*auf englisch:* generalised error distribution) *$GED(v)$ für $v \in \mathbb{R}^+$ hat eine Dichte f, für die*

$$f(x) := \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

gilt, wobei

$$\lambda := \left(\frac{2^{-2/v}\Gamma(1/v)}{\Gamma(3/v)}\right)^{1/2}, \qquad \alpha := \frac{v}{\lambda 2^{(v+1)/v}\Gamma(1/v)}$$

und Γ der Gamma-Funktion entspricht.

Definition 5.3 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess. Die* Standardwahl *für $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und die Funktion g lautet*

$$\epsilon_t \stackrel{d}{=} GED(v), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

und

$$g(x) := Ax + B(|x| - \mathrm{E}|\epsilon_1|), \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ und $v > 0$ gelten.

Bemerkung Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl. Dann gilt

$$\mathrm{E}g(\epsilon_t) = 0, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

aufgrund der Konstruktion. Falls $\epsilon_t \geq 0$, so ist g affin linear in ϵ_t mit der Steigung $A+B$ und falls $\epsilon_t < 0$, so ist g affin linear in ϵ_t mit der Steigung $A-B$. Dies ermöglicht dem EGARCH Modell, asymmetrisch auf die Innovationen zu reagieren und so den leverage effect nachzubilden. Weiterhin ist eine $GED(2)$ verteilte Zufallsvariable genau standardnormalverteilt.

Definition 5.4 *Seien $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q \in \mathbb{R}$ sowie $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen* (*englisch*: White Noise Prozess) *mit Erwartungswert* 0 *und Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann heißt der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, welcher die* ARMA Gleichung

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-q}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.5}$$

und für den zusätzlich $\mathrm{E}|X_t|^2 < \infty$ *für $t \in \mathbb{Z}$ gilt,* ARMA(p,q) Prozess. *Die Polynome*

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p, \qquad z \in \mathbb{C}$$

und

$$\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q, \qquad z \in \mathbb{C}$$

heißen charakteristische Polynome. *Ein Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt ARMA(p,q) Prozess mit Erwartungswert μ, falls $(Y_t - \mu)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA(p,q) Prozess ist.*

Definition 5.5 *Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 \neq 0$. Außerdem haben die Polynome*

$$\Phi(z) := 1 - \beta_1 z - \ldots - \beta_q z^q, \qquad z \in \mathbb{C}$$

und

$$\Theta(z) := 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z + \ldots + \frac{\alpha_p}{\alpha_1} z^{p-1}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

keine gemeinsamen Nullstellen und es gelte $\Phi(z) \neq 0$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Sei $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 und g wie in Definition 5.1, so dass (5.3) erfüllt ist. Dann heißt $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $X_t = \sigma_t \epsilon_t$ wie in (5.1) und

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g(\epsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log \sigma_{t-j}^2, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.6}$$

(kausaler) EGARCH(p,q) Prozess.

Proposition 5.6 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH(p,q) Prozess mit $\mathrm{Var}(g(\epsilon_1)) > 0$. Dann ist $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess und $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein ARMA$(q, p-1)$ Prozess mit i.i.d. Noise $Z_t := \alpha_1 g(\epsilon_{t-1})$ für $t \in \mathbb{Z}$ und charakteristischen Polynomen Φ und Θ. Speziell gilt*

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i Z_{t+1-i}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

wobei sich die Koeffizienten c_i durch die Potenzreihendarstellung

$$h(z) := \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} z^i,$$

welche auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + \epsilon\}$ für ein $\epsilon > 0$ gültig ist, errechnen lassen. Es gilt also

$$c_{i+1} = h^{(i)}(0)/i!, \qquad i \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis Das $\log \sigma_t^2$ die ARMA Gleichung (5.5) erfüllt, ist klar. Für das Weitere sei auf S. 83, [6] verwiesen. □

Bemerkung Der Einfachheit halber betrachten wir in Zukunft nur EGARCH Prozesse, für die μ in (5.2) bzw. α_0 in (5.6) gleich 0 ist. Die sich hierbei ergebenden Resultate lassen sich selbstverständlich dank einfachster Faltung verallgemeinern.

Nachfolgend wird aufgezeigt, dass sich $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ als endliche Summen unabhängiger unendlicher Moving Average Prozesse darstellen lassen.

Proposition 5.7 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess, wobei $\mu = 0$ und $\mathrm{E}|\log \epsilon_1^2| < \infty$ gelten. Setze $c_i = 0$ für $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ und definiere*

$$c_{i,1} := \max\{0, c_i\}, \quad c_{i,2} := -\min\{0, c_i\}, \quad c_{i,3} := \delta_{0,i}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

wobei $\delta_{0,i} = 1$ *für* $i = 0$ *und sonst* 0 *ist. Setze weiter*

$$Z_{i,1} = g(\epsilon_i), \quad Z_{i,2} = -g(\epsilon_i), \quad Z_{i,3} = \log \epsilon_i^2, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Dann erfüllen $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ *und* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ *die Voraussetzung* 3.3. *Zusätzlich gilt dank der Konstruktion*

$$\log \sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g(\epsilon_{t-i}) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k} Z_{t-i,k}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

und

$$\log X_t^2 = \log \sigma_t^2 + \log \epsilon_t^2 = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i,k} Z_{t-i,k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{5.7}$$

Beweis Klar. □

Lemma 5.8 *Seien* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *ein EGARCH Prozess und* $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ *jeweils wie in Proposition* 5.7.

(a) *Es habe* ϵ_1 *eine Dichte* f *und es sei* g *ein Diffeomorphismus. Dann haben die* $Z_{i,k}$ *eine Dichte* f_k *für* $i \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \{1, 2, 3\}$, *wobei*

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{|g'(g^{\leftarrow}(x))|} f(g^{\leftarrow}(x)), \qquad x \in \mathbb{R}, \\
f_2(x) &= \frac{1}{|g'(g^{\leftarrow}(-x))|} f(g^{\leftarrow}(-x)), \qquad x \in \mathbb{R}, \\
f_3(x) &= \frac{\exp(x/2)}{2} f(\exp(x/2)), \qquad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

gilt.

(b) *Seien* $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *und* g *nach der Standardwahl aus Definition* 5.3, *wobei* $-B \neq A \neq B$ *und* $s := \operatorname{sgn}(A + B) = \operatorname{sgn}(A - B)$ *gelten. Definiere nun*

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &:= 1_{\{s=1\}} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x + B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{\lambda(A + B)} \right| \right)^v + 1_{\{s=-1\}} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x + B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{\lambda(A - B)} \right| \right)^v, \qquad x \geq -B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \\
\psi_2(x) &:= 1_{\{s=1\}} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{B\mathrm{E}|\epsilon_1| - x}{\lambda(A - B)} \right| \right)^v + 1_{\{s=-1\}} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{B\mathrm{E}|\epsilon_1| - x}{\lambda(A + B)} \right| \right)^v, \qquad x \geq B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \\
\psi_3(x) &:= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\exp(x/2)}{\lambda} \right)^v - x \right], \qquad x \in \mathbb{R}, \\
\nu_1(x) &:= 1_{\{s=1\}} \frac{\alpha}{|A + B|} + 1_{\{s=-1\}} \frac{\alpha}{|A - B|}, \qquad x \geq -B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \\
\nu_2(x) &:= 1_{\{s=1\}} \frac{\alpha}{|A - B|} + 1_{\{s=-1\}} \frac{\alpha}{|A + B|}, \qquad x \geq B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \\
\nu_3(x) &:= \frac{\alpha}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Setze $t_{0,1} := -B\mathrm{E}|\epsilon_1|$*,* $t_{0,2} := B\mathrm{E}|\epsilon_1|$ *und* $t_{0,3} := \frac{2}{v}\log\left(\frac{2}{v}\right) + 2\log\lambda$*. Dann haben die* $Z_{i,k}$ *eine Dichte* f_k *für* $i \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \{1,2,3\}$*, wobei*

$$f_k(x) = \nu_k(x)\exp(-\psi_k(x)), \qquad x \geq t_{0,k},\ k \in \{1,2,3\} \tag{5.8}$$

gilt.

Beweis (a) Die Aussage folgt aus dem Transformationssatz für Dichten.
(b) Die Aussage folgt aus den Definitionen von f und g. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
g^{\leftarrow}(x) &= 1_{\{s=1\}}\frac{x+B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{A+B} + 1_{\{s=-1\}}\frac{x+B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{A-B}, \qquad x \geq -B\mathrm{E}|\epsilon_1|,\\
g^{\leftarrow}(x) &= 1_{\{s=1\}}\frac{x+B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{A-B} + 1_{\{s=-1\}}\frac{x+B\mathrm{E}|\epsilon_1|}{A+B}, \qquad x < -B\mathrm{E}|\epsilon_1|,\\
g'(x) &= A+B, \qquad x > 0,\\
g'(x) &= A-B, \qquad x < 0.
\end{aligned}$$

□

Im folgenden Lemma wird aufgezeigt, unter welchen Bedingungen an den EGARCH Prozess die Voraussetzungen 3.5 bzw. 4.14 erfüllt sind.

Lemma 5.9 *Seien* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl, wobei* $\mu = 0$*,* $\mathrm{E}|\log\epsilon_1^2| < \infty$*,* $-B \neq A \neq B$ *und* $s := \mathrm{sgn}(A+B) = \mathrm{sgn}(A-B)$ *gelten. Außerdem seien* $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ *und* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ *wie in Proposition* 5.7 *und* ψ_k*,* ν_k *und* $t_{0,k}$ *für* $k \in \{1,2,3\}$ *wie Lemma* 5.8(b).

(a) *Wenn* $v > 1$ *ist, dann erfüllen* $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$*,* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$*,* ψ_k*,* ν_k *und* $t_{0,k}$ *für* $k \in \{1,2,3\}$ *die Voraussetzung* 3.5.

(b) *Wenn zusätzlich zu* (a) *noch* $\mathrm{E}|g(\epsilon_1)|^2 < \infty$*,* $\mathrm{E}(\log(\epsilon_1^2))^2 < \infty$ *und* $c_i = O(|i|^{-\vartheta})$ *für* $|i| \to \infty$ *mit* $\vartheta > \max\{1, 2-2/v\}$ *und* $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *wie in Definition* 5.1*, dann erfüllen* $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$*,* $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$*,* ψ_k*,* ν_k *und* $t_{0,k}$ *die Voraussetzung* 4.14.

Beweis (a) Die Dichten haben eine Darstellung wie in (3.2). Die übrigen Kriterien von Voraussetzung 3.5 sind ebenfalls erfüllt. Um zu zeigen, dass $1/\sqrt{\psi_1''}$ und $1/\sqrt{\psi_2''}$ selbst-vernachlässigend in ∞ sind, werde die bis auf Verschiebung und Skalierung mit $1/\sqrt{\psi_k''}$ für $k \in \{1,2\}$ identische Funktion $h_1(x) := x^{1-v/2}$ mit $x \geq 0$ betrachtet. Hierbei gilt für $x \in \mathbb{R}$ fest

$$\begin{aligned}
h(t+h(t)x) &= (t+t^{1-v/2}x)^{1-v/2}\\
&= (t(1+t^{-v/2}x))^{1-v/2}\\
&= h(t)\underbrace{(1+t^{-v/2}x)^{1-v/2}}_{\to 1}, \qquad t \to \infty,
\end{aligned}$$

weil $t^{-v/2} \to 0$ für $t \to \infty$. Weiterhin ist die mit $1/\sqrt{\psi_3''}$ bis auf Verschiebung und Skalierung identische Funktion $h_2(x) := \exp(-xv/4)$ für $x \geq 0$ offensichtlich selbst-vernachlässigend in ∞.

(b) Es gelten $\psi_1'', \psi_2'' \in \mathrm{RV}(v-2)$ und $\psi_3'' \in \mathrm{RV}(\infty)$. Allerdings ist ψ_3'' ultimativ absolut stetig auf Kompakta und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\psi_3'(t)}{\psi_3''(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\frac{1}{4}v\left(\frac{\exp(x/2)}{\lambda}\right)^v - \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}v^2\left(\frac{\exp(x/2)}{\lambda}\right)^v} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2}{v} = 0, \qquad t \to \infty.$$

Weiterhin gelten $q_1', q_2' \in \mathrm{RV}(1/(v-1)-1)$ und $q_3' \in \mathrm{RV}(-1)$ nach Lemma 4.13. Zum asymptotischen Verhalten von c_i für $|i| \to \infty$ sei angemerkt, dass

$$\frac{2}{2+1/(v-1)-1} = \frac{2}{v/(v-1)} = 2 - \frac{2}{v}.$$

Da $\beta_1' = \beta_2'$, wird nun $\lim_{\tau\to\infty} q_1'(\tau)/q_2'(\tau)$ betrachtet. Sei hierfür oBdA $s = 1$ (die Rechnung für $s = -1$ wäre dieselbe). Dann gelten

$$q_1(\tau) = \left(\frac{2\lambda(A+B)\tau}{v}\right)^{1/(v-1)} \lambda(A+B) - B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \qquad \tau \geq 0,$$

$$q_2(\tau) = \left(\frac{2\lambda(A-B)\tau}{v}\right)^{1/(v-1)} \lambda(A-B) + B\mathrm{E}|\epsilon_1|, \qquad \tau \geq 0.$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{q_1'(\tau)}{q_2'(\tau)} = \left(\frac{A+B}{A-B}\right)^{1/(v-1)+1}, \qquad \tau \geq 0.$$

Falls hierbei $B < 0$ gelten sollte, müsste umnummeriert werden. Damit sind sämtliche Kriterien von Voraussetzung 4.14 erfüllt. □

Bemerkung Wenn nachfolgend von Funktionen $q_{i,k}$ die Rede ist, so seien diese definiert wie in Definition 3.6. Hierbei seien $c_{i,k}$ wie in Proposition 5.7 und ψ_k wie in Lemma 5.8.

Es folgt die erste wesentliche Aussage des Kapitels, nämlich das Punktprozessresultat für $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Satz 5.10 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl, wobei $\mu = 0$, $v > 1$, $-B \neq A \neq B$, $s := \mathrm{sgn}(A+B) = \mathrm{sgn}(A-B)$, $\mathrm{E}|g(\epsilon_1)|^2 < \infty$, $\mathrm{E}(\log(\epsilon_1^2))^2 < \infty$ und $c_i = O(|i|^{-\vartheta})$ für $|i| \to \infty$ mit $\vartheta > \max\{1, 2-2/v\}$ und $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie in Definition 5.1 gelten. Außerdem seien $(Z_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ und $(c_{i,k})_{i\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3\}}$ wie in Proposition 5.7. Definiere nun*

$$Y_{n,1} := \log \sigma_n^2, \quad Y_{n,2} := \log X_n^2, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

und für $j \in \{1,2\}$

$$q_{\infty,j}(\tau) := \sum_{k=1}^{j+1}\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_{i,k}(\tau), \qquad \tau \geq 0$$

und für $n \in \mathbb{N}$ die normierenden Konstanten $b_{n,j}$ und $a_{n,j}$ durch

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{P}(Y_{1,j} > b_{n,j}) = 1, \qquad a_{n,j} = q_{\infty,j}^{\leftarrow}(b_{n,j}). \tag{5.9}$$

Darüber hinaus seien $N_{n,j}$ für $n \in \mathbb{N}$ Punktprozesse auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ mit den dazugehörigen Punkten $\{(i/n, a_{n,j}(Y_{i,j} - b_{n,j})) : i \in \mathbb{N}\}$ und N ein Poisson Prozess auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ mit dem Intensitätsmaß $\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}t \times \exp(-x)\mathrm{d}x$. Dann gilt

$$N_{n,j} \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty.$$

Insbesondere liegen $(\log\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\log X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung.

Beweis Es sind sämtliche Voraussetzungen von Satz 4.26 erfüllt. Daher findet dieser Anwendung. □

Um die Resultate von $(\log X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\log\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ auf $(X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ übertragen zu können, werden so genannte *Von Mises Funktionen* benötigt.

Definition 5.11 *Sei F_* eine Verteilungsfunktion mit $x_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{F_*(x) < 1\}$. Dann heißt F_** Von Mises Funktion*, falls $c > 0$ und $z_0 < x_0$ existieren, so dass*

$$1 - F_*(x) = c\exp\left(-\int_{z_0}^{x} \frac{1}{f_*(u)}\mathrm{d}u\right), \qquad z_0 < x < x_0 \tag{5.10}$$

mit einer Hilfsfunktion $f_* : [z_0, x_0) \mapsto \mathbb{R}^+$*, welche absolut stetig ist und deren Ableitung f_*' dem Grenzwert $\lim_{u\uparrow x_0} f_*'(u) = 0$ genügt.*

Lemma 5.12 *Eine Verteilungsfunktion F mit $x_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{F(x) < 1\}$ ist genau dann im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung, wenn eine Von Mises Funktion F_* mit Hilfsfunktion f_* existiert, so dass $x_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{F_*(x) < 1\}$ und*

$$\lim_{x\uparrow x_0} \frac{1 - F(x)}{1 - F_*(x)} = 1$$

gelten. Als normierende Konstanten können

$$n(1 - F(b_n)) = 1, \quad a_n = \frac{1}{f_*(b_n)}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

gewählt werden.

Beweis Siehe Kapitel 1, [11]. □

Proposition 5.13 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl, wobei sämtliche Voraussetzungen von Satz* 5.10 *erfüllt seien. Dann liegen $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung. Definiere*

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_\infty(\tau) &:= \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_{i,k}(\tau),\\
q_\infty(\tau) &:= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_{i,k}(\tau), \qquad \tau \ge 0.
\end{aligned}$$

und $\tilde{c}_n$ *sowie* $\tilde{d}_n$ *durch* $n\mathrm{P}(\log \sigma_1^2 > \tilde{d}_n) = 1$ *und* $\tilde{c}_n := \tilde{q}_\infty^{\leftarrow}(\tilde{d}_n)$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *als normierende Konstanten von* $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$*, sowie* c_n *und* d_n *durch* $n\mathrm{P}(\log X_1^2 > d_n) = 1$ *und* $c_n := q_\infty^{\leftarrow}(d_n)$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *als normierende Konstanten von* $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$*. Dann lauten die normierenden Konstanten für* $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\hat{b}_n := \exp(d_n), \quad \hat{a}_n := \frac{q_\infty^{\leftarrow}(\log \hat{b}_n)}{\hat{b}_n}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{5.11}$$

und für $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\tilde{b}_n := \exp(\tilde{d}_n), \quad \tilde{a}_n := \frac{\tilde{q}_\infty^{\leftarrow}(\log \tilde{b}_n)}{\tilde{b}_n}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{5.12}$$

sowie für $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$b_n := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2}d_{n/2}\right), & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{(1-F_X)^{\leftarrow}(n)}, & n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad a_n := \frac{2q_\infty^{\leftarrow}(2\log b_n)}{b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.13}$$

Beweis Seien F_X, F_{X^2} und $F_{\log X^2}$ die Verteilungsfunktionen von X_1, X_1^2 und $\log X_1^2$. Nach Satz 5.10 liegt $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung. Also existiert nach Lemma 5.12 eine Von Mises Funktion F_* mit Hilfsfunktion f_*, Endpunkt ∞ und Darstellung wie in (5.10), so dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_{\log X^2}(x)}{1 - F_*(x)} = 1, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

gilt. Aus nahe liegenden Gründen muss nun

$$\lim_{t\to\infty} q_\infty^{\leftarrow}(t) f_*(t) = 1 \tag{5.14}$$

gelten, da sowohl c_n, als auch $1/f_*(d_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ als normierende Konstanten von $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ möglich sind und $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Es folgt nun für $x \geq 0$

$$\begin{aligned} 1 - F_{X^2}(x) &= 1 - F_{\log X^2}(\log x) \\ &\sim c\exp\left(-\int_{z_0}^{\log x} \frac{1}{f_*(u)}\mathrm{d}u\right) \\ &= c\exp\left(-\int_{\exp(z_0)}^{x} \frac{1}{tf_*(\log t)}\mathrm{d}t\right), \qquad x \to \infty. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} tf_*(\log t) = f_*(\log t) + t\,\underbrace{f_*'(\log t)}_{\to 0}\,\frac{1}{t} \to f_*(\log t), \qquad t \to \infty.$$

Wegen (5.14) und der Tatsache, dass $q_\infty^{\leftarrow}(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, gelten $f_*(t) \to 0$ und deshalb $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} tf_*(\log t) \to 0$ jeweils für $t \to \infty$. Daher ist $1 - F_{X^2}$ tail-äquivalent zu einer Von Mises Funktion und deshalb im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung nach Lemma 5.12.

Aus $\mathrm{P}(\log X_1^2 > x) = \mathrm{P}(X_1^2 > \exp(x))$ folgt $\hat{b}_n = \exp(d_n)$. Nach Lemma 5.12 kann $\hat{a}_n = 1/(\hat{b}_n f_*(\log \hat{b}_n))$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden. Wegen (5.14) geht also auch

$$\hat{a}_n = \frac{q_\infty^{\leftarrow}(\log \hat{b}_n)}{\hat{b}_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Auf exakt identische Weise erhält man die normierenden Konstanten von $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgrund der Definition $X_t = \sigma_t \epsilon_t$ und der Symmetrie von ϵ_t für $t \in \mathbb{Z}$ folgt für $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
1 - F_X(x) &= \frac{1}{2}\big(1 - F_{|X|}(x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1 - F_{X^2}(x^2)\big) \\
&\sim \frac{c}{2}\exp\left(-\int_{\exp(z_0)}^{x^2} \frac{1}{t f_*(\log t)} \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{c}{2}\exp\left(-\int_{\exp(z_0/2)}^{x} \frac{2}{u f_*(2\log u)} \mathrm{d}u\right), \qquad x \to \infty.
\end{aligned}$$

Wiederum gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t f_*(2\log t)/2 = \underbrace{f_*(2\log t)}_{\to 0}/2 + t\underbrace{f_*'(2\log t)}_{\to 0}\frac{1}{t} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Daher ist $1 - F_X$ tail-äquivalent zu einer Von Mises Funktion und hiermit im Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung nach Lemma 5.12.

Aufgrund der selben Argumente wie eben folgt

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(\log X_1^2 > x) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_1^2 > \exp(x)) = \mathrm{P}(X_1 > \exp(x/2)).$$

Aus diesem Grund wählt man

$$b_n = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2} d_{n/2}\right), & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{(1-F_X)^{\leftarrow}(n)}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wiederum wegen (5.14) kann

$$a_n = \frac{2 q_\infty^{\leftarrow}(2\log b_n)}{b_n}$$

gewählt werden. □

Bemerkung Aufgrund des Definitionsbereiches von $q_\infty^{\leftarrow}$ aus Proposition 5.13 besteht die Möglichkeit, dass a_n und $\hat{a}_n$ für kleine n nicht wohldefiniert sind. Für solche Fälle müssten a_n und $\hat{a}_n$ wie in Lemma 5.12 gewählt werden.

Im Folgenden ist $\log \boldsymbol{x}$ als $(\log x_1, \ldots, \log x_d)$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und $d \in \mathbb{N}$ zu interpretieren. Weiterhin sei

$$\frac{\boldsymbol{x}}{a} + b := \left(\frac{x_1}{a} + b, \ldots, \frac{x_d}{a} + b\right)$$

mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

Im kommenden Satz folgen die wohl zentralen Aussagen der gesamten Diplomarbeit: die Punktprozessresultate für $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und insbesondere $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Satz 5.14 *Sei* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl, wobei sämtliche Voraussetzungen von Satz* 5.10 *erfüllt seien. Seien sämtliche normierenden Konstanten definiert wie in Proposition* 5.13.

Darüber hinaus seien $N_{n,1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *ein Punktprozess auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit den dazugehörigen Punkten* $\{(i/n, a_n(X_i - b_n)) : i \in \mathbb{N}\}$, $N_{n,2}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *ein Punktprozess auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit den dazugehörigen Punkten* $\{(i/n, \hat{a}_n(X_i^2 - \hat{b}_n)) : i \in \mathbb{N}\}$, $N_{n,3}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *ein Punktprozess auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit den dazugehörigen Punkten* $\{(i/n, \tilde{a}_n(\sigma_i^2 - \tilde{b}_n)) : i \in \mathbb{N}\}$ *und* N *ein Poisson Prozess auf* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *mit dem Intensitätsmaß* $\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}t \times \exp(-x)\mathrm{d}x$. *Dann gilt*

$$N_{n,j} \xrightarrow{\mathscr{D}} N, \qquad n \to \infty,\ j \in \{1,3\}.$$

Beweis Nach Proposition 5.13 gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n(\max\{X_1,\ldots,X_n\} - b_n) \le x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\hat{a}_n(\max\{X_1^2,\ldots,X_n^2\} - \hat{b}_n) \le x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\tilde{a}_n(\max\{\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2\} - \tilde{b}_n) \le x) \\
&= \exp(-e^{-x}), \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nun müssen die Bedingungen $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ nachgewiesen werden, um Proposition 4.9 anwenden zu können.

Wir betrachten zunächst $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und hierbei $D'(u_n)$. Es sei angemerkt, dass $c_n \to \infty$ und $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Seien nun $x \in \mathbb{R}$ fest und

$$C := \begin{cases} 1/2, & x \ge 0, \\ 2, & x < 0. \end{cases}$$

Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\log(x+1) \ge Cx$, falls $|x| \le \epsilon$. Es gilt nun für $j \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, so dass $x/\hat{a}_n + \hat{b}_n \ge 0$, was aufgrund der Definition von $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ auch möglich ist,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_1^2 > \frac{x}{\hat{a}_n} + \hat{b}_n, X_j^2 > \frac{x}{\hat{a}_n} + \hat{b}_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\log X_1^2 > \log\left(\frac{x}{\hat{a}_n} + \hat{b}_n\right), \log X_j^2 > \log\left(\frac{x}{\hat{a}_n} + \hat{b}_n\right)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\log X_1^2 > \log\left(\frac{\hat{b}_n x}{c_n} + \hat{b}_n\right), \log X_j^2 > \log\left(\frac{\hat{b}_n x}{c_n} + \hat{b}_n\right)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\log X_1^2 > \log\left(\frac{x}{c_n} + 1\right) + d_n, \log X_j^2 > \log\left(\frac{x}{c_n} + 1\right) + d_n\right) \\
&\le \mathrm{P}\left(\log X_1^2 > \frac{Cx}{c_n} + d_n, \log X_j^2 > \frac{Cx}{c_n} + d_n\right).
\end{aligned}$$

Weil $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ nach Satz 5.10 die $D'(u_n)$ Bedingung erfüllt, erfüllt sie auch $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Um $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ zu zeigen, ist (4.1) nachzuweisen. Seien $n, l, p, q \in \mathbb{N}$ und I, J und $\alpha_{n,l}$ wie in Definition 4.4, wobei $\alpha_{n,l}$ derart ist, dass $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ die $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ mit $\alpha_{n,l}$ erfülle. Seien außerdem $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in \mathbb{R}$ sowie $\boldsymbol{v}_n := (x_1/\hat{a}_n + \hat{b}_n, \dots, x_p/\hat{a}_n + \hat{b}_n)$ und $\boldsymbol{w}_n := (y_1/\hat{a}_n + \hat{b}_n, \dots, y_q/\hat{a}_n + \hat{b}_n)$. Dann gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{P}(X_I^2 \le \boldsymbol{v}_n, X_J^2 \le \boldsymbol{w}_n) - \mathrm{P}(X_I^2 \le \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(X_J^2 \le \boldsymbol{w}_n)| \\
&= |\mathrm{P}(\log X_I^2 \le \log \boldsymbol{v}_n, \log X_J^2 \le \log \boldsymbol{w}_n) - \mathrm{P}(\log X_I^2 \le \log \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(\log X_J^2 \le \log \boldsymbol{w}_n)| \\
&= \Bigg| \underbrace{\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \log\left(\frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + 1\right) + d_n, \log X_J^2 \le \log\left(\frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + 1\right) + d_n\right)}_{=:\beta_n} - \\
&\qquad \underbrace{\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \log\left(\frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + 1\right) + d_n\right)\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \log\left(\frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + 1\right) + d_n\right)}_{=:\gamma_n} \Bigg|.
\end{aligned}
$$

Falls nun $\beta_n \ge \gamma_n$, so wähle $C_n, D_n \in \{1/2, 2\}$ so, dass

$$
\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n, \log X_J^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) \ \ge\ \beta_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.15}
$$

$$
\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n\right)\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) \ \le\ \gamma_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.16}
$$

Falls $\beta_n < \gamma_n$, so wähle $C_n, D_n \in \{1/2, 2\}$ so, dass die Ungleichungen in (5.15) und (5.16) mit umgekehrten Vorzeichen erfüllt sind. Für hinreichend große n ist dies aufgrund der Taylor Entwicklung von $\log(x+1)$ um 1 möglich. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{P}(X_I^2 \le \boldsymbol{v}_n, X_J^2 \le \boldsymbol{w}_n) - \mathrm{P}(X_I^2 \le \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(X_J^2 \le \boldsymbol{w}_n)| \\
\le\ & \Bigg|\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n, \log X_J^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) - \\
&\quad \mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n\right)\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right)\Bigg| \\
\le\ & \Bigg|\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n, \log X_J^2 \le \frac{C_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) - \\
&\quad \mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + d_n, \log X_J^2 \le \frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right)\Bigg| + \\
&\Bigg|\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + d_n, \log X_J^2 \le \frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) - \\
&\quad \mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + d_n\right)\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right)\Bigg| + \\
&\Bigg|\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{\boldsymbol{x}}{c_n} + d_n\right)\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \frac{\boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right) -
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left(\log X_I^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{x}}{c_n} + d_n\right) \mathrm{P}\left(\log X_J^2 \le \frac{D_n \boldsymbol{y}}{c_n} + d_n\right)\Bigg| \\ \le \;& \epsilon_{n,1} + \alpha_{n,l} + \epsilon_{n,2}, \end{aligned}$$

wobei $\epsilon_{n,1}$ dem Wert des ersten Betrages entspreche und $\epsilon_{n,2}$ dem des dritten. Falls nun $\epsilon_{n,1}, \epsilon_{n,2} \to 0$ für $n \to \infty$, so folgt $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$. Dies ist jedoch der Fall, da $\boldsymbol{x}/c_n, \boldsymbol{y}/c_n \to \mathbf{0}$ für $n \to \infty$ und die Verteilungsfunktionen aufgrund von (5.8) für hinreichend große Argumente stetig sind.

Auf absolut identische Weise reduziert man die Nachweise von $D'(u_n)$ und $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ für $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ auf $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Nun werden $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $D'(u_n)$ für $x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Es sei angemerkt, dass $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Definiere C wie eben. Dann gilt für $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{x}{a_n} + b_n \ge \left(\frac{x}{2c_{\lfloor n/2 \rfloor}} + 1\right) \exp\left(\frac{1}{2} d_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \ge 0,$$

was aufgrund der Definition von a_n und b_n auch möglich ist,

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left(X_1 > \frac{x}{a_n} + b_n, X_j > \frac{x}{a_n} + b_n\right) \\ \le\; & \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(|X_1| > \frac{x}{a_n} + b_n, |X_j| > \frac{x}{a_n} + b_n\right) \\ =\; & \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(X_1^2 > \left(\frac{x}{a_n} + b_n\right)^2, X_j^2 > \left(\frac{x}{a_n} + b_n\right)^2\right) \\ =\; & \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\log X_1^2 > 2\log\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right), \log X_j^2 > 2\log\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right)\right) \\ \le\; & \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\log X_1^2 > 2\log\left(\frac{x}{2c_{\lfloor n/2 \rfloor}} + 1\right) + d_{\lfloor n/2 \rfloor},\right. \\ & \qquad \left. \log X_j^2 > 2\log\left(\frac{x}{2c_{\lfloor n/2 \rfloor}} + 1\right) + d_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \\ \le\; & \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\log X_1^2 > \frac{Cx}{c_{\lfloor n/2 \rfloor}} + d_{\lfloor n/2 \rfloor}, \log X_j^2 > \frac{Cx}{c_{\lfloor n/2 \rfloor}} + d_{\lfloor n/2 \rfloor}\right). \end{aligned}$$

Nachdem $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ nach Satz 5.10 die $D'(u_n)$ Bedingung erfüllt, erfüllt auch $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die $D'(u_n)$ Bedingung.

Jetzt wird $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ gezeigt. Seien $n, l, p, q \in \mathbb{N}$ und I, J und $\alpha_{n,l}$ wie in Definition 4.4, wobei $\alpha_{n,l}$ derart ist, dass $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ die $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ mit $\alpha_{n,l}$ erfülle. Seien außerdem $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{R}$, überdies $\boldsymbol{v}_n := (x_1/a_n + b_n, \ldots, x_p/a_n + b_n)$ und weiterhin $\boldsymbol{w}_n := (y_1/a_n + b_n, \ldots, y_q/a_n + b_n)$. Dann gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & |\mathrm{P}(X_I \le \boldsymbol{v}_n, X_J \le \boldsymbol{w}_n) - \mathrm{P}(X_I \le \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(X_J \le \boldsymbol{w}_n)| \\ \le\; & |\mathrm{P}(\log X_I^2 \le 2\log \boldsymbol{v}_n, \log X_J^2 \le 2\log \boldsymbol{w}_n) - \\ & \quad \mathrm{P}(\log X_I^2 \le 2\log \boldsymbol{v}_n)\mathrm{P}(\log X_J^2 \le 2\log \boldsymbol{w}_n)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq \Bigg| & \underbrace{\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \leq 2\log\left(\frac{\boldsymbol{x}}{2c_{g_n}}+1\right)+d_{g_n}, \log X_J^2 \leq 2\log\left(\frac{\boldsymbol{y}}{2c_{g_n}}+1\right)+d_{g_n}\right)}_{=:\beta_n} - \\
& \underbrace{\mathrm{P}\left(\log X_I^2 \leq 2\log\left(\frac{\boldsymbol{x}}{2c_{g_n}}+1\right)+d_{g_n}\right)}_{=:\gamma_{n,1}} \cdot \\
& \underbrace{\mathrm{P}\left(\log X_J^2 \leq 2\log\left(\frac{\boldsymbol{y}}{2c_{g_n}}+1\right)+d_{g_n}\right)}_{=:\gamma_{n,2}} \Bigg| .
\end{aligned}
$$

Setze nun $\gamma_n := \gamma_{n,1}\gamma_{n,2}$. Die Zahlenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werde durch $\lceil n/2 \rceil$ oder $\lfloor n/2 \rfloor$ so definiert, dass $|\beta_n - \gamma_n|$ maximal werde. Der Rest des Beweises läuft vergleichbar mit der $D_r(\boldsymbol{u}_n)$ Bedingung für $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Damit sind sämtliche Voraussetzungen von Proposition 4.9 für $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$, $(\sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ erfüllt, weshalb diese anwendbar ist. □

Korollar 5.15 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein EGARCH Prozess mit der Standardwahl, wobei sämtliche Voraussetzungen von Satz* 5.10 *erfüllt seien. Seien b_n, $\tilde{b}_n$, $\hat{b}_n$, a_n, $\tilde{a}_n$ und $\hat{a}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ wie in* (5.11), (5.12) *bzw.* (5.13) *und $M_{n,j}^{(k)}$ die k-te Ordnungsstatistik von $\{X_1^j, \ldots, X_n^j\}$ für $j \in \{1,2\}$ und $M_{n,3}^{(k)}$ die k-te Ordnungsstatistik von $\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(a_n(M_{n,1}^{(k)} - b_n) \leq x) &\rightarrow \exp(-\mathrm{e}^{-x}) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\exp(-x)^i}{i!}, \\
\mathrm{P}(\hat{a}_n(M_{n,2}^{(k)} - \hat{b}_n) \leq x) &\rightarrow \exp(-\mathrm{e}^{-x}) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\exp(-x)^i}{i!}, \\
\mathrm{P}(\tilde{a}_n(M_{n,3}^{(k)} - \tilde{b}_n) \leq x) &\rightarrow \exp(-\mathrm{e}^{-x}) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\exp(-x)^i}{i!}, \qquad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}
$$

Beweis Es sind die Voraussetzungen von Proposition 4.8 erfüllt, weshalb diese Anwendung findet. □

5.2 Simulation eines EGARCH(p,q) Prozesses

Nachfolgend wird ein EGARCH(1,1) Prozess mit der Standardwahl simuliert. Hierbei wird $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ festgelegt durch

$$\log \sigma_t^2 := 0.7g(\epsilon_{t-1}) + 0.4 \log \sigma_{t-1}^2, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

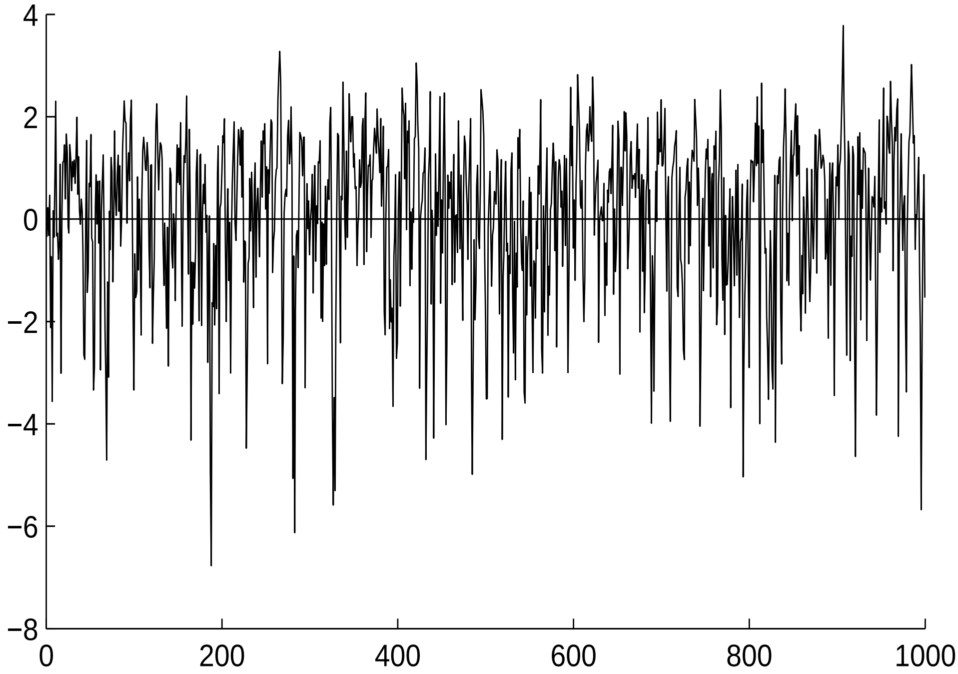

Abbildung 5.1: Simulation von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Weiterhin wird $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := 2x - (|x| - \mathrm{E}|\epsilon_1|), \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\epsilon_t \stackrel{d}{=} GED(2)$, also standardnormalverteilt für $t \in \mathbb{Z}$. Durch die Definition von g fließen negative Innovationen ϵ_t - verglichen mit positiven Innovationen - für $t \in \mathbb{Z}$ mit dreifachem Gewicht in $\log \sigma_t^2$ ein. Hierdurch wird der in der Einleitung angesprochene leverage effect nachgebildet.

Die Simulation des EGARCH(1,1) Prozesses folgt der im vierten Kapitel, [10] beschriebenen Methodik.

In den Abbildungen 5.1 und 5.2 erkennt man gut den leverage effect. Die negativen Innovationen fließen deutlich stärker gewichtet in $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(\log X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein als die positiven.

In den Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 erkennt man, dass kein *Clusterverhalten* vorliegt, dass also große Ausschläge nicht in Haufen auftreten.

Nun wird anhand eines *probability plots* (kurz: *PP-plot*) die Güte der Gleichung (3.8), mit welcher man das Tailverhalten von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ abschätzen kann, analysiert. Hierbei betrachtet man $n \in \mathbb{N}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit Verteilungsfunktion F. Nun bildet man deren *Ordnungsstatistiken* $\xi_{n,n} \leq \cdots \leq \xi_{1,n}$. Dabei gilt

$$\mathrm{E}F(\xi_{k,n}) = \frac{n-k+1}{n+1}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

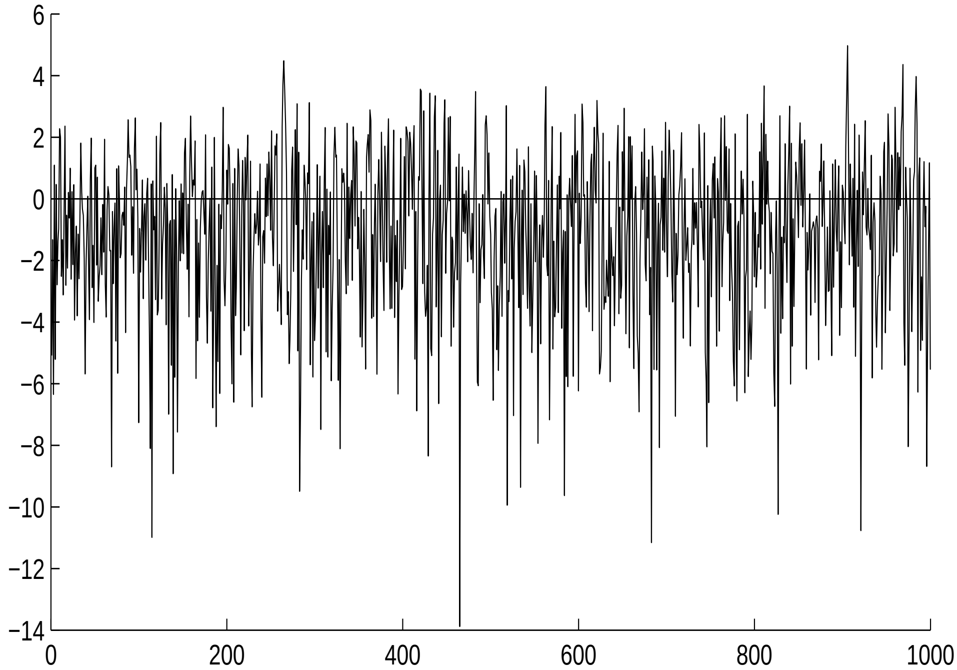

Abbildung 5.2: Simulation von $(\log X_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$.

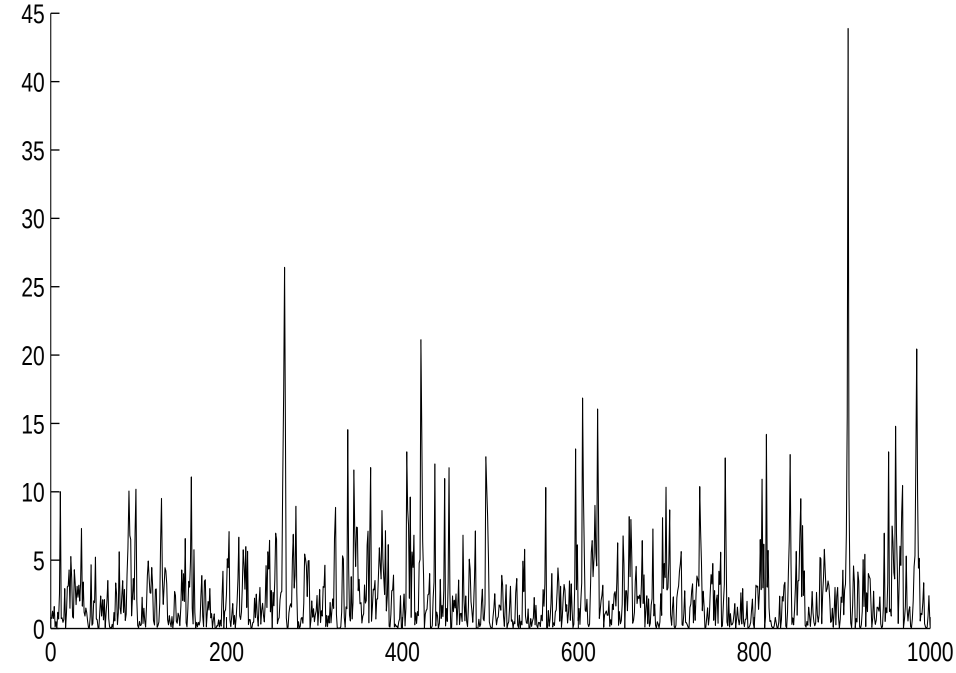

Abbildung 5.3: Simulation von $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$.

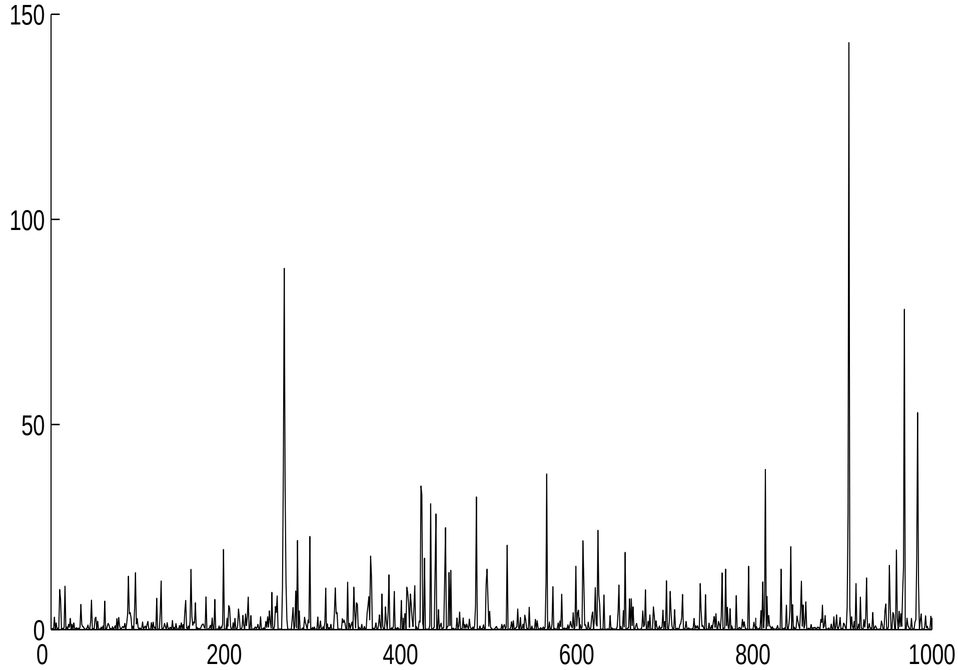

Abbildung 5.4: Simulation von $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

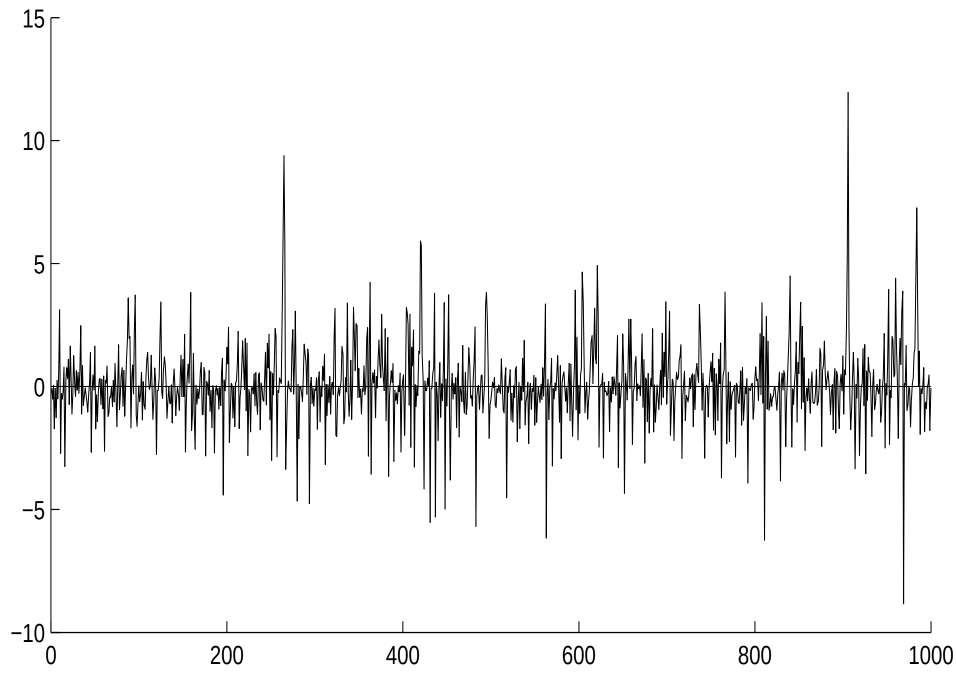

Abbildung 5.5: Simulation von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Daher betrachtet man den Graph

$$\left\{\left(F(\xi_{k,n}), \frac{n-k+1}{n+1}\right) : k = 1, \dots, n\right\}$$

und erwartet, dass im Idealfall sämtliche Punkte des Graphen auf der Winkelhalbierenden des Koordinatensystems zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ liegen.

Wir wollen sowohl den rechten, als auch den linken Tail von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ betrachten. Aus diesem Grund definieren wir in letzterem Fall die Funktion g durch

$$g(x) := 2x + (|x| - \mathrm{E}|\epsilon_1|), \qquad x \in \mathbb{R},$$

um so einen nahezu gespiegelten Datensatz zu erhalten, so dass wir in diesem Fall wiederum nur den rechten Tail betrachten können. Zunächst betrachten wir jedoch den tatsächlichen rechten Tail.

Gleichung (3.8) besagt, dass

$$\mathrm{P}\left(\log \sigma_1^2 > t\right) \sim \frac{\exp\left(-\int_{\sum_{k,i} t_{0,k}c_{i,k}}^{t} [q_\infty^{\leftarrow}(\nu) + o(q_\infty^{\leftarrow}(\nu))]\, d\nu\right)}{\sqrt{2\pi} q_\infty^{\leftarrow}(t)\sigma_\infty(q_\infty^{\leftarrow}(t))}, \qquad t \to \infty.$$

In unserem Beispiel gilt

$$\log \sigma_t^2 = 0.7 \sum_{i=0}^{\infty} 0.4^i g(\epsilon_{t-i-1}), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

so dass wir mit $q_\infty(\tau) = \frac{7}{12}\tau + t_0$ für $\tau \geq 0$ und $t_0 := \frac{7}{6}(\frac{2}{\pi})^{1/2}$

$$1 - \tilde{F}_{\log \sigma^2}(t) := \frac{1}{\sqrt{24\pi/7}(t - t_0)} \exp\left(-\frac{6}{7}(t - t_0)^2\right), \qquad t \geq t_0$$

definieren. Nun schätzen wir $F_{\log \sigma^2}(t)$ durch $\tilde{F}_{\log \sigma^2}(t)$, jedoch erst für so große $t \in \mathbb{R}$, dass das Ergebnis Sinn macht, sich also $\tilde{F}_{\log \sigma^2}(t) > 0$ ergibt. Es sei darauf hingewiesen, dass für uns ausschließlich das Verhalten der PP-Plots in der Umgebung von $(1, 1)$ interessant ist, da wir keinen Test auf die Verteilungsfunktion ausführen, sondern einen auf die Tails. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.6 festgehalten.

Nun betrachten wir den linken Tail von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ über die beschriebene Änderung der Funktion g. Dabei ergeben sich $q_\infty(\tau) = \frac{21}{4}\tau + t_0$ für $\tau \geq 0$ und $t_0 := -\frac{7}{6}(\frac{2}{\pi})^{1/2}$, so dass wir die Abschätzung

$$1 - \tilde{F}_{\log \sigma^2}(t) := \frac{1}{\sqrt{8\pi/21}(t - t_0)} \exp\left(-\frac{2}{21}(t - t_0)^2\right), \qquad t \geq t_0$$

für den gespiegelten linken Tail von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ erhalten. Das Resultat findet sich in Abbildung 5.7.

In Abbildung 5.6 befindet sich der Graph in der Umgebung von $(1, 1)$ leicht über der Winkelhalbierenden, welche gestrichelt eingezeichnet ist. Dies heißt, dass der rechte Tail

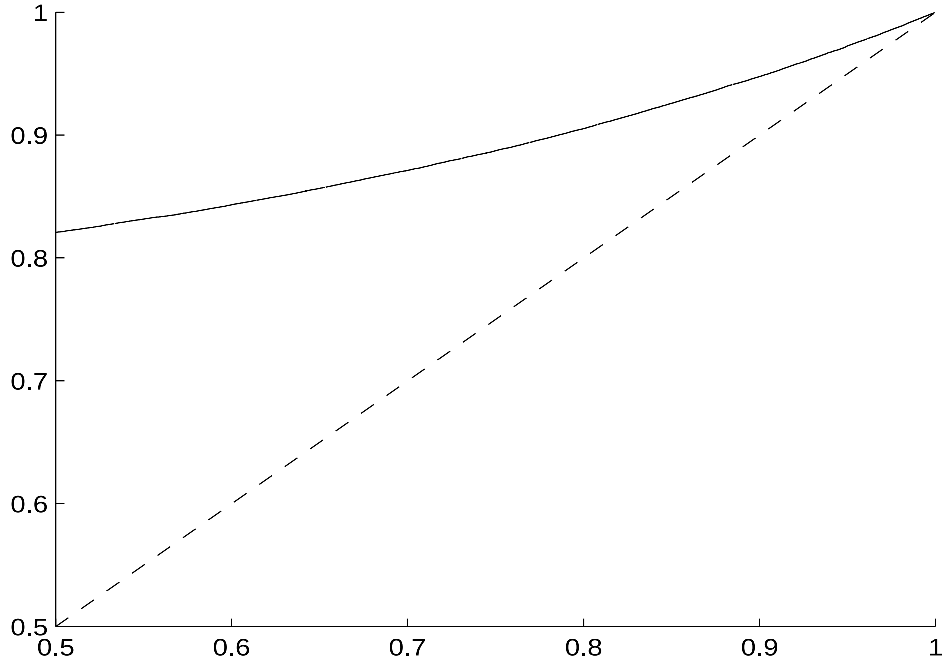

Abbildung 5.6: Abschätzung des rechten Tails von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ anhand eines PP-Plots.

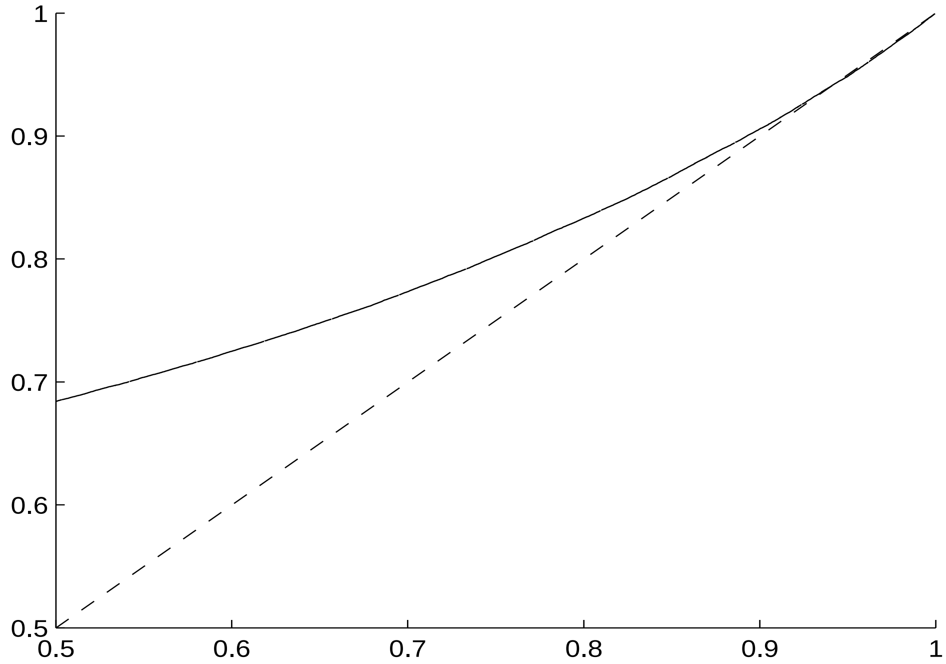

Abbildung 5.7: Abschätzung des linken Tails von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ anhand eines PP-Plots.

von $(\log \sigma_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ leichter ist, als unsere Tailschätzung vermuten ließe. Anders in Abbildung 5.7: in der Umgebung von $(1,1)$ ist die Tailapproximation nahezu perfekt.

Es ist zu vermuten, dass die leicht unterschiedlichen Resultate daher rühren, dass der Term $\rho \circ q_\infty^{\leftarrow}$ aus (3.8) mit 0 geschätzt und daher nicht berücksichtigt wurde. In welcher Weise $\rho \circ q_\infty^{\leftarrow}$ für t, welche nicht nahe ∞ sind, ins Gewicht fiele, ist jedoch nicht abschätzbar; in dieser Situation befinden wir uns jedoch.

Literaturverzeichnis

[1] BALKEMA, A. A., C. KLÜPPELBERG und S. I. RESNICK: *Densities with Gaussian Tailes*. Proc. London Math. Soc. (3), 66:568-588, 1993.

[2] BAUER, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, 1992.

[3] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1999.

[4] BINGHAM, N. H., C. M. GOLDIE und J. L. TEUGELS: *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1987.

[5] BREIDT, F. J. und R. A. DAVIS: *Extremes of Stochastic Volatility Models*. The Annals of Applied Probability, 8:664-675, 1998.

[6] BROCKWELL, P. und R. DAVIS: *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer Verlag, 1996.

[7] KLÜPPELBERG, C. und A. LINDNER: *Extreme value theory for moving average processes with light-tailed innovations*. Bernoulli (3), 11:381-410, 2005.

[8] LEADBETTER, M. R., G. LINDGREN und H. ROOTZÉN: *Extremes and related properties of Random Sequences and Processes*. Springer Verlag, 1983.

[9] LINDNER, A. und K. MEYER: *Extremal behavior of finite EGARCH processes*. `http://www-m4.ma.tum.de/pers/lindner/evt_egarch.pdf`, unveröffentlichtes Manuskript, 2002.

[10] MEYER, K.: *Untersuchungen zu exponentiellen GARCH-Modellen*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 2002.

[11] RESNICK, S. I.: *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer Verlag, 1987.

[12] ROOTZÉN, H.: *Extreme Value Theory for Moving Average Processes*. Ann. Probab. (3), 14:612-652, 1986.

[13] ROOTZÉN, H.: *A Ratio Limit Theorem for the Tails of weighted sums*. Ann. Probab. (3), 15:728-747, 1987.

[14] SETTIMI, R.: *Analisi delle distribuzioni di valori estremi con applicazioni alla volatilità dei mercati finanziari*. Dissertation, Università die Perugia, 1995.