

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Risikotheorie bei zufälligen
Kapitalanlagen**

Diplomarbeit

von

Florian Diesch

Themensteller: Priv.-Doz. Dr. Alexander Lindner

Betreuer: Priv.-Doz. Dr. Alexander Lindner

Abgabetermin: 01. Dezember 2006

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 30. November 2006

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zuerst Prof. Dr. Alexander Lindner für seine ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit danken. Er hatte stets genügend Zeit, um mir bei schwierigen Punkten weiterzuhelfen, oder gab mir Literaturempfehlungen, mit deren Hilfe ich selbst zum Ziel kommen konnte. Außerdem haben mich seine positive Einstellung und seine ermutigenden Worte in meiner Arbeit bestärkt und mich auch unangenehmere Aufgaben optimistisch angehen lassen.

Als nächstes möchte ich mich bei Elena Hermann, Nicola Diesch und Chris Niedermayr dafür bedanken, dass sie mir bei meiner Diplomarbeit mit manchem hilfreichen Tipp geholfen und diese korrekturgelesen haben.

Ein sehr großer Dank gilt auch meinen Eltern, die nicht nur mein Studium, inklusive eines Auslandsjahrs, finanziert haben, sondern auch stets ein offenes Ohr für meine Probleme hatten und mich die gesamte Ausbildungszeit bei meinem Tun unterstützten.

Zuletzt will ich noch ganz herzlich Frau Professor Klüppelberg für die Vermittlung dieser Diplomarbeit danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	5
2.1	Wichtige Erkenntnisse aus der Stochastik	5
2.2	Grundlagen der Topologie	11
2.3	Theorie der Halbgruppen	13
3	Markov-Prozesse aus funktionalanalytischer Sicht	15
4	Das Risikomodell	21
4.1	Das klassische Risikomodell	21
4.2	Modellbeschreibung	24
4.3	Der infinitesimale Generator des Risikoprozesses	29
5	Die Ruinwahrscheinlichkeit des Risikoprozesses	39
5.1	Ruinwahrscheinlichkeiten als Lösung eines Randwertproblems	39
5.1.1	Die Struktur der Ruinwahrscheinlichkeit	44
5.1.2	Das Vorgehen bei der Bestimmung analytischer Lösungen	47
5.2	Zwei Beispielm Modelle unter deterministischer Verzinsung	49
5.2.1	Das Cramér-Lundberg Modell	50
5.2.2	Das klassische Risikomodell mit Störterm	55
5.3	Ruinwahrscheinlichkeiten als Lösung einer Volterra-Integralgleichung	58
5.4	Eine andere Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten	63
6	Numerische Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit	75
6.1	Numerische Methoden	75
6.2	Numerische Beispiele	87
6.2.1	Beispiel 1: Das Cramér-Lundberg-Modell	88
6.2.2	Beispiele unter stochastischer Verzinsung	91
6.2.3	Kapitalanlage der Risikoreserve: Aktien vs. Bonds	96
7	Würdigung der Ergebnisse	101
	Literaturverzeichnis	103

Kapitel 1

Einleitung

Die Risikothorie beschäftigt sich mit stochastischen Prozessen die Kapitalflüsse von Versicherungsunternehmen abbilden. Dies sind in erster Linie *Prämieneinnahmen*, welche die Versicherten zahlen müssen, und *Schadenforderungen* an die Versicherung, die bei Eintritt eines Versicherungsschadens fällig werden. Dabei steht die folgende Frage im Mittelpunkt des Interesses: Wie hoch muss die *Anfangsrisikoreserve* gewählt werden, damit das Versicherungsunternehmen mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit nicht Bankrott geht?

Anfang des 20. Jahrhunderts beschäftigten sich unter anderem Filip Lundberg¹ und Harald Cramér² mit dieser Fragestellung. Nach ihnen wurde auch das *Cramér-Lundberg-Modell*, das klassische Risikomodell, benannt. Mit der Veröffentlichung „Martingales in Risk Theory“³ im Jahr 1973 läutete H. U. Gerber ein neues Kapitel in der Risikothorie ein, indem er zum ersten mal *Martingalmethoden* in diesem Gebiet verwendete. In der Folgezeit behandelten zahlreiche Autoren kompliziertere Risikomodelle, die z.B. einen Störterm als zusätzliche Komponente zulassen, oder Modelle, bei denen die Risikoreserve verzinst wird. Es wurde dabei in den meisten Fällen eine *deterministische Verzinsung* mit konstantem Zinssatz angenommen.

In der Praxis erfolgt die Anlage der Reserve in Versicherungsunternehmen jedoch an Kapitalmärkten, also insbesondere an Renten- und Aktienmärkten. Es ist also wünschenswert, den Risikoprozess unter zufälliger Verzinsung zu betrachten und so der Anlage der Risikoreserve an Kapitalmärkten Rechnung zu tragen.

Zudem hat vor einigen Jahren in der Versicherungsbranche ein Umdenkprozess begonnen. Es wurde die große Bedeutung der Anlageseite für die Risikoexponierung von Versicherungsunternehmen erkannt. Seitdem versuchen Versicherungen verstärkt, das Risiko aus der Kapitalanlage in die verwendeten Modelle mit einzubeziehen. Um dies zu bewerkstelligen, gab es in großen Unternehmen wie der *Münchener Rück* und der *Allianz-Versicherung* bedeutende Umstrukturierungen und Neuorganisationen von Abteilungen. Bereits daran lässt sich die Bedeutung dieses Themas erkennen.

¹1893-1985

²1876-1965

³Gerber [1973]

Nicht überraschend ist somit die Beobachtung, dass sich gerade in den letzten zehn Jahren eine nicht geringe Anzahl von Autoren mit Risikomodellen unter *stochastischer Verzinsung* beschäftigt haben. Insbesondere Jostein Paulsen leistete auf diesem Gebiet viel und verfasste zahlreiche Artikel seit 1993. Auf seinen Veröffentlichungen wird diese Diplomarbeit zum größten Teil aufbauen.

Ziel der Diplomarbeit ist es, das relativ umfassende *Risikomodell von J. Paulsen*⁴ vorzustellen und sowohl analytisch als auch numerisch die resultierenden Ruinwahrscheinlichkeiten in unendlicher Zeit zu berechnen. Der Risikoprozess erlaubt im Vergleich zum klassischen Cramér-Lundberg-Modell einen Störterm in Form einer Brownschen Bewegung, der für zusätzliche Unsicherheit bei den Prämieinnahmen oder bei den Schadenforderungen steht. Er wird in der Literatur manchmal auch als *durch Diffusion gestörter klassischer Risikoprozess* bezeichnet. Zudem wird die Anlage der Risikoreserve am Kapitalmarkt durch einen zweiten Prozess, den *Ertragsprozess*, abgebildet. Dieser besteht, ähnlich wie im *Black-Scholes Modell*, aus einer Drift- und einer Schwankungskomponente, besitzt aber zusätzlich noch einen Sprungterm, der plötzliche Veränderungen am Kapitalmarkt verkörpern soll. Der gesamte Risikoprozess wird dann in Form einer *stochastischen Differentialgleichung* dargestellt, welche die stochastische Verzinsung des durch Diffusion gestörten klassischen Risikoprozesses durch den Ertragsprozess modelliert. Dieser Risikoprozess spiegelt dann sowohl das Versicherungsrisiko als auch das Anlagerisiko des Versicherungsunternehmens wider und stellt eine deutliche Erweiterung des klassischen Risikomodells dar.

Im zweiten Kapitel werden kurz die wichtigsten *mathematischen Grundlagen* zusammengefasst, die für das Verständnis dieser Diplomarbeit nötig sind. Dies sind insbesondere Sätze und Definitionen aus der Semimartingaltheorie, das heißt aus dem Gebiet der stochastischen Integration. Außerdem werden kurz grundlegende Begriffe und Resultate aus der Topologie und aus der Funktionalanalysis dargestellt. Diese werden fast ausschließlich im dritten Kapitel benötigt.

Dort werden dann *Markov-Prozesse aus der Sichtweise von K. Itô und E. Dynkin* eingeführt, das heißt aus dem Blickwinkel der Funktionalanalysis. Damit lässt sich für diese Prozessklasse ein linearer Operator, genauer der infinitesimale Generator, definieren. Dieser wird später eine zentrale Rolle spielen bei der Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit des Risikoprozesses spielen.

Im ersten Abschnitt des vierten Kapitels wird das *klassische Risikomodell* vorgestellt und die wichtigsten Resultate zur Bestimmung der dazugehörigen Ruinwahrscheinlichkeit werden angegeben. Danach erfolgt eine ausführliche Beschreibung des *Risikomodells von J. Paulsen*. Dieses wird in Form einer stochastischen Differentialgleichung eingeführt, welche dann am Ende des Abschnitts gelöst wird. Im dritten Teil des Kapitels folgt die Berechnung des *infinitesimalen Generator des Risikoprozesses* unter Verwendung der Itô-Formel.

⁴siehe Paulsen [1993] und Paulsen und Gjessing [1997]

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit der *Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit* in unendlicher Zeit des Risikomodells und bildet den Schwerpunkt der Diplomarbeit. In Satz 5.1 wird unter Verwendung des infinitesimalen Generators des Risikoprozesses ein *Randwertproblem* formuliert, als dessen Lösung sich die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit ergibt. Es folgt ein kurzer Teil, in dem die Gestalt der Ruinwahrscheinlichkeiten diskutiert wird, und danach werden noch einige technische Überlegungen gemacht, die für deren analytische Berechnung nötig sind. Als nächstes werden zwei Beispiele behandelt, für die explizite Berechnungen möglich sind. Für das erste Beispiel kann sowohl die Ruinwahrscheinlichkeit als auch die Laplacetransformierte der Ruinzeit analytisch bestimmt werden, für das zweite Beispiel wird nur die Ruinwahrscheinlichkeit berechnet. Bei allen Beispielen werden Erkenntnisse aus der Theorie der *konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichungen* verwendet, um zum Ziel zu gelangen. Der dritte Teil des Kapitels liefert das Fundament für numerische Lösungsansätze. Dort wird das Randwertproblem, genauer die zu lösende Integro-Differentialgleichung, durch Integration und unter Verwendung der Randbedingungen in eine *Volterra-Integralgleichung* überführt, da diese sich besser für numerische Lösungsansätze eignet. Im letzten Abschnitt des fünften Kapitels wird dann eine ganz andere Herangehensweise zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit präsentiert, bei der im Gegensatz zum ersten Teil die explizite Darstellung des Risikomodells verwendet wird. Die dort erhaltenen Resultate haben für die Praxis weniger Bedeutung als jene im ersten Abschnitt. Jedoch wird ein guter Einblick in die Struktur des Risikoprozesses gewährt und man erfährt viel über dessen stochastische Eigenschaften.

Das letzte Kapitel widmet sich der numerischen Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeiten. Nach der Beschreibung verschiedener numerischer Verfahren folgt eine Ausführliche Behandlung des *Zwei-Block-Simpson Verfahrens* und es wird bewiesen, dass dieses die Konvergenzordnung vier hat. Im zweiten Teil des sechsten Kapitels werden dann einige Zahlenbeispiele betrachtet und die zuvor besprochenen Methoden zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeiten anhand dieser veranschaulicht. Als erstes wird ein Beispiel ohne Diffusionsterme betrachtet, für welches die exakten Ruinwahrscheinlichkeiten bekannt sind, um die Qualität der numerischen Lösungen zu beurteilen. Danach folgen mehrere Beispiele mit Diffusionstermen, bei denen die Schadenforderungen exponential- oder paretoverteilt sind. Man wird feststellen, dass für alle betrachteten Fälle das verwendete numerische Verfahren gute Ergebnisse liefert, sich also auch gut für eine Verwendung in der Praxis eignet. Um die Bedeutung der Kapitalanlage im Risikoprozess zu verdeutlichen, wird zuletzt anhand eines Beispiels mit realen Marktdaten verglichen, inwieweit sich die Kapitalanlage der Risikoreserve in Aktien gegenüber jener in Bonds auf die Ruinwahrscheinlichkeiten eines Versicherungsportfolios mit paretoverteilten Schäden auswirkt.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen vorgestellt, die für das Verständnis des Rests der Diplomarbeit nötig sind. Zuerst werden zwei wichtige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgeführt. Danach folgt eine Auswahl an Sätzen und Definitionen aus der Theorie der stochastischen Prozesse. Die letzten beiden Abschnitte geben eine kurze Einführung in die Topologie und in die Theorie der Halbgruppen. Diese beiden Gebiete sind grundlegend für den theoretischen Teil der Arbeit im dritten Kapitel.

2.1 Wichtige Erkenntnisse aus der Stochastik

Satz 2.1 (Fubini's Theorem, Shiryaev [1995])

Es seien zwei Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ gegeben, und $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ sei deren Produktraum. Es sei $f = f(\omega_1, \omega_2)$ eine $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -messbare und bezüglich $\mu_1 \times \mu_2$ integrierbare Funktion, also

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| d(\mu_1 \times \mu_2) < \infty. \quad (2.1)$$

Dann sind die Integrale $\int_{\Omega_i} f(\omega_1, \omega_2) \mu_i(d\omega_i)$, $i = 1, 2$ für alle ω_1 bzw. ω_2 definiert und \mathcal{F}_2 - bzw. \mathcal{F}_1 - messbare Funktionen, die μ_2 bzw. μ_1 fast überall definiert sind. Die linke Seite von (2.1) ist dann gleich

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right] \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \right] \mu_2(d\omega_2).$$

Satz 2.2 (Satz von Lebesgue, Shiryaev [1995])

Seien X, Y, Y_1, Y_2, \dots Zufallsvariablen, so dass $|Y_n| \leq X$, $E(X) < \infty$ und $Y_n \rightarrow Y$ f.s. gilt. Dann ist $E|Y| < \infty$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n) = E(Y)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|Y_n - Y| = 0.$$

Stochastische Prozesse

Es folgen einige Sätze und Definitionen über stochastische Prozesse die entweder [Protter \[2000\]](#) oder [Sato \[1999\]](#) entnommen sind.

Definition 2.3 (Stochastischer Prozess)

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $\{X_t, t \geq 0\}$ von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in dem Zustandsraum S . S ist oft der d -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^d oder allgemeiner ein topologischer Raum (S, δ) .

Die Abbildung $t \rightarrow X_t(\omega)$ von $[0, \infty)$ nach S heißt Pfad von X .

Definition 2.4 (Version, Ununterscheidbarkeit)

Zwei Stochastische Prozesse X und Y heißen Versionen von einander, wenn $X_t = Y_t$ f.s. für jedes t , das heißt $P(X_t = Y_t) = 1$ für jedes t . Sie heißen ununterscheidbar, wenn f.s. gilt $X_t = Y_t$ für alle t .

Definition 2.5 (von endlicher Variation)

Ein stochastischer Prozess heißt càdlàg, wenn er f.s. rechtsseitig stetige Pfade hat, für die ein Grenzwert von links existiert. Er heißt càglàd, wenn er f.s. linksseitig stetige Pfade hat, für die ein Grenzwert von rechts existiert.

Ein Prozess heißt von endlicher Variation, falls fast alle seiner Pfade von endlicher Variation auf jedem kompakten Intervall sind.

Definition 2.6 (stochastisch stetig)

Ein stochastischer Prozess X auf \mathbb{R}^d heißt stochastisch stetig, falls für alle $t \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow s} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

Nun werden verschiedene wichtige Klassen von stochastischen Prozessen definiert. Eine sehr allgemeine Klasse von Prozessen sind die Markov-Prozesse, die im dritten Kapitel genauer besprochen werden. Eine Unterklasse davon sind die Lévy-Prozesse.

Definition 2.7 (Lévy-Prozess)

Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ mit $X_0 = 0$ f.s. ist ein Lévy-Prozess, wenn gilt:

- (1) Für $0 \leq s \leq t$ hat $X_t - X_s$ die gleiche Verteilung wie X_{t-s} (stationäre Zuwächse).
- (2) Für $0 \leq s \leq t$ ist $X_t - X_s$ unabhängig von $\{X_u : u \leq s\}$ (unabhängige Zuwächse).
- (3) X ist stochastisch stetig.

Es existiert eine Version von X mit càdlàg-Pfaden, die wir als gegeben annehmen.

Wichtige Beispiele für Lévy-Prozesse sind die Brownsche Bewegung, der Poisson-Prozess und der zusammengesetzte Poisson-Prozess. Ab jetzt sei der Zustandsraum $S = \mathbb{R}$.

Definition 2.8 (Brownsche Bewegung)

Ein stochastischer Prozess B ist eine (Standard) Brownsche Bewegung, wenn er ein Lévy-Prozess ist und wenn B_t normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t ist. Man betrachte die Version von B , die stetige Pfade besitzt.

Definition 2.9 (zusammengesetzter Poissonprozess)

Ein stochastischer Prozess N mit Werten auf dem Zustandsraum \mathbb{N}_0 heißt Poissonprozess, wenn er ein Lévy-Prozess ist und wenn N_t mit dem Parameter λt poissonverteilt ist.

Ein zusammengesetzter Poissonprozess L ist dann definiert durch

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} S_i,$$

wobei S_i , $i = 1 \dots N_t$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen sind, die auch unabhängig von N_t sind.

Eine allgemeinere Klasse von stochastischen Prozessen stellen die Semimartingale dar. Diese sind wesentlich für die Theorie der stochastischen Integration. Die nachfolgende Definition ist nur der Vollständigkeit halber angegeben. Wichtig sind Semimartingale in den folgenden Kapiteln aber als Oberklasse anderer Prozesse, insbesondere der Lévy-Prozesse, denn wir benötigen später Sätze aus der Semimartingaltheorie.

Definition 2.10 (Semimartingal)

Ein (adaptierter) càdlàg Prozess X heißt Semimartingal, falls

$$X_t = X_0 + L_t + F_t$$

gilt. Dabei ist L ein lokales Martingal und F ein Prozess von endlicher Variation und $L_0 = F_0 = 0$.

Stochastische Integration und stochastische DGLen

Die folgenden Sätze stammen aus dem zweiten Kapitel von Protter [2000]. In Klammern ist jeweils die Nummer des entsprechenden Theorems angegeben.

Zuerst soll erwähnt werden, dass die Menge der Semimartingale einen Vektorraum bildet. Die Klasse der Semimartingale ist sehr umfassend, jedoch muss nicht jeder Markovprozess ein Semimartingal sein. Es gilt aber folgender wichtiger Sachverhalt:

Satz 2.11 (Protter, Thm. II.9,7)

Jeder Lévy-Prozess ist ein Semimartingal. Jeder (adaptierte) càdlàg Prozess von endlicher Variation ist ein Semimartingal.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nun folgende abkürzende Notationen eingeführt:

$$H \cdot X \text{ steht für } \int H_s dX_s \text{ und } \Delta X = X_t - X_{t-}.$$

Außerdem definieren wir die Klasse \mathbb{L} von stochastischen Prozessen:

$$\mathbb{L} = \{\text{Raum der (adaptierten) càglàd Prozesse}\}$$

Im Folgenden seien alle Prozesse H aus der Klasse \mathbb{L} .

Satz 2.12 (Protter, Thm. II.13)

Der Sprungprozess $\Delta(H \cdot X)_s$ ist ununterscheidbar von dem Prozess $H_s(\Delta X_s)$ für alle $H \in \mathbb{L}$.

Satz 2.13 (Protter, Thm. II.17)

Falls das Semimartingal X Pfade von endlicher Variation auf Kompakta hat, dann ist $H \cdot X$ ununterscheidbar vom pfadeweise berechneten Lebesgue-Stieltjes Integral.

Dies gilt insbesondere für Sprungprozesse wie den Poisson- und den zusammengesetzten Poissonprozess, was wir in Kapitel 4.2 und 4.3 ausnutzen werden. Als nächstes definieren wir den quadratischen Kovariationsprozess von stochastischen Prozessen, der unter anderem für die Itô-Formel in Satz 2.19 benötigt wird.

Definition 2.14 (quadratischer (Ko-)variationsprozess)

Es seien X und Y Semimartingale. Dann ist der quadratische Kovariationsprozess $[X, Y] = ([X, Y]_t)_{t \geq 0}$ definiert als

$$[X, Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX,$$

wobei $X_{0-} = 0$. Die Abbildung $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ ist bilinear und symmetrisch.

Definition 2.15 (stetiger Anteil von $[X, X]$)

Es bezeichne $[X, X]^c$ den (pfadweise) stetigen Anteil von $[X, X]$. Es gilt dann für den quadratischen Variationsprozess

$$[X, X]_t = [X, X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 = [X, X]_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s)^2.$$

X heißt „quadratic pure jump“ falls $[X, X]^c = 0$.

Die Definition für den Kovariationsprozess $[X, Y]$ erfolgt analog.

Für die quadratische Variation des trivialen Prozesses $X_t = t$ gilt $[t, t] = 0$ und für die Standard Brownsche Bewegung B gilt $[B, B]_t = t$. Zwei unabhängige Standard Brownsche Bewegungen B und C haben den Kovariationsprozess $[B, C]_t = 0$.

Satz 2.16 (Protter, Thm. II.26)

Falls X adaptiert und càdlàg ist, sowie Pfade von endlicher Variation auf Kompakta hat, so ist X ein „quadratic pure jump“ Semimartingal.

Beispiele dafür sind der Poisson-Prozess und der zusammengesetzte Poissonprozess.

Satz 2.17 (Protter, Thm. II.28)

Es sei X ein „quadratic pure jump“ Semimartingal. Dann gilt für jedes Semimartingal Y

$$[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

Für zwei unabhängige zusammengesetzte Poissonprozesse L_P und L_R gilt also f.s. $[L_P, L_R]_t = 0$ für alle t und für den Prozess L_P gilt $[L_P, L_P]_t = \sum_{i=1}^{N_{P,t}} (\Delta S_{P,i})^2$.

Satz 2.18 (Protter, Thm. II.29)

Seien X und Y Semimartingale und $H, K \in \mathbb{L}$. Dann gilt

$$[H \cdot X, K \cdot Y]_t = \int_0^t H_s K_s d[X, Y]_s \tag{2.2}$$

und insbesondere auch

$$[H \cdot X, H \cdot X]_t = \int_0^t H_s^2 d[X, X]_s. \tag{2.3}$$

Der nächste Satz wird für die Berechnung des infinitesimalen Generators des Risikoprozesses in Kapitel 4.3 benötigt. Zuerst wird dort die Itô-Formel für Semimartingale angewendet und anschließend folgen Berechnungen unter Verwendung der oben angeführten Sätze.

Satz 2.19 (Itô-Formel für Semimartingale, Protter Thm. II.32)

Es sei X ein Semimartingal und $f \in C^2$ sei eine reelle Funktion. Dann ist $f(X)$ wieder ein Semimartingal und die folgende Formel gilt:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s). \tag{2.4}$$

Nun werden wir noch zwei wichtige Sätze über die Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen formulieren. Das Ergebnis des nächsten Satzes ist für Itô-Prozesse sehr bekannt und wird hier allgemeiner für Semimartingale formuliert.

Satz 2.20 (Protter, Thm. II.37)

Es sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann existiert ein eindeutiges Semimartingal Z , das die Gleichung $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s$ erfüllt. Z ist dabei gegeben durch

$$Z_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} [X, X]_t \right) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp \left(-\Delta X_s + \frac{1}{2} (\Delta X_s)^2 \right), \quad (2.5)$$

wobei das (unendliche) Produkt konvergiert.

Die Lösung der stochastischen DGL von oben wird auch als stochastisches Exponential $\mathcal{E}(X)$ bezeichnet und hat für stetige Semimartingale die einfachere Form

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} [X, X]_t \right).$$

Nun folgt noch ein Satz, der Aufschluss über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen für Semimartingale, sowie über deren Form gibt. Es wurden dabei zwei Sätze aus dem 5. Kapitel von Protter [2000] zusammengefasst.

Satz 2.21 (Protter, Thm. V.7 und V.32)

Gegeben sei ein Vektor von Semimartingalen $\mathbf{Z} = (Z^1, \dots, Z^d)$ mit $\mathbf{Z}_0 = 0$ und ein Semimartingal J . Die Funktionen f_j , ($1 \leq j \leq d$) seien Lipschitz-stetig. Dann hat die stochastische DGL

$$X_t = J_t + \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(X)_{s-} dZ_s^j \quad (2.6)$$

eine eindeutige Lösung X , die wiederum ein Semimartingal ist.

Ist \mathbf{Z} ein Vektor unabhängiger Lévy-Prozesse, so ist die Lösung X zudem ein starker Markov-Prozess.

2.2 Grundlagen der Topologie

In diesem Abschnitt sollen einige allgemeine Begriffe aus der Topologie eingeführt werden, die insbesondere im nächsten Kapitel bei der Theorie über den infinitesimalen Generator von Markov-Prozessen auftauchen. Dort liegt meist ein *kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis* zu Grunde. Besonders wichtig ist der unten aufgeführte *Satz von Riesz*, der im dritten Kapitel für Beweise benötigt wird. Es folgen nun einige Definitionen verschiedener topologischer Räume.

Definition 2.22 (Topologie, topologischer Raum nach Werner [1997])

Eine Topologie τ auf einer Menge E ist ein System von Teilmengen von E mit den Eigenschaften:

- (i) $\emptyset \in \tau$ und $E \in \tau$.
- (ii) Sind $O_1 \in \tau$ und $O_2 \in \tau$, so gilt $O_1 \cap O_2 \in \tau$.
- (iii) Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $O_i \in \tau$ ($i \in I$), so ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

Man nennt (E, τ) (oder kürzer: E) einen topologischen Raum und die in τ enthaltenen Mengen offen.

Ein topologischer Raum (E, τ) heißt *metrisierbar*, falls seine Topologie τ von einer Metrik abgeleitet werden kann, das heißt, falls die Elemente aus τ , also die offenen Mengen, durch offene Kugeln bezüglich einer Metrik erklärt werden können.

(E, τ) heißt *separabel*, wenn eine abzählbare Teilmenge F von E existiert, so dass der Abschluss von F gleich E ist, also wenn gilt $\overline{F} = E$.

Ein *polnischer Raum* ist ein separabler vollständig metrisierbarer topologischer Raum, wobei vollständig metrisierbar bedeutet, dass seine Topologie von einer vollständigen Metrik abgeleitet werden kann. Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist für jedes $d \geq 1$ ein polnischer Raum, genauso wie jeder kompakte Raum mit abzählbarer Basis polnisch ist.

Die topologischen Räume, die in den folgenden Definitionen eingeführt werden, sind besonders wichtig für die Theorie der Halbgruppen und deren infinitesimale Generatoren im nächsten Kapitel.

Definition 2.23 (Hausdorffsche Trennungseigenschaft)

Ein topologischer Raum E heißt Hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Elemente aus E disjunkte Umgebungen besitzen. Das heißt, es gibt zu $x, y \in E$, $x \neq y$ zwei disjunkte offene Mengen U und V mit $x \in U$ und $y \in V$.

Für einen Hausdorff-Raum gilt, dass jede endliche Menge abgeschlossen ist, und dass jede konvergente Folge genau einen Grenzwert besitzt.

Definition 2.24 ((lokal-) kompakte Räume nach §27 Bauer [1992])

Ein topologischer Raum E heißt kompakt, wenn er Hausdorffsch¹ ist und wenn jede offene Überdeckung von E eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

E heißt lokalkompakt, wenn er Hausdorffsch ist, und wenn jedes Element $x \in E$ mindestens eine kompakte Umgebung besitzt. (Beispiele: \mathbb{R}^n , jeder kompakte Raum)

Jeder kompakte Raum ist natürlich lokalkompakt, und aus einem kompakten Raum wird durch Herausnehmen eines beliebigen Punktes ein lokalkompakter Raum.

Nun werden einige Funktionenräume auf lokalkompakten Räumen eingeführt.

Definition 2.25 (Funktionenräume, §27 Bauer [1992])

Es sei E ein lokalkompakter Raum. Dann können folgende Funktionenräume auf E definiert werden:

$C(E)$: Vektorraum der stetigen Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf E

$C_b(E)$: Vektorraum der stetigen und beschränkten Funktionen auf E

$C_c(E)$: Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf E , d.h. die Menge $\{f \in C(E), f \neq 0\}$ ist kompakt.

$C^2(E)$: Vektorraum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf E

$C_b^2(E) := \{f \in C^2(E) : f, f', f'' \text{ beschränkt}\}$

Es gilt stets $C_c(E) \subset C_b(E) \subset C(E)$ und $C_b^2(E) \subset C^2(E) \subset C(E)$. Ist E ein kompakter Raum, so fallen die Funktionenräume $C_c(E)$, $C_b(E)$ und $C(E)$ zusammen und $C^2(E)$ ist Untervektorraum dieser Räume.

Der nächste Satz ist ein wichtiger Satz aus der Funktionalanalysis. Er wird im dritten Kapitel benötigt, um die Theorie der Halbgruppen aus der Funktionalanalysis auf bestimmte stochastische Prozesse, genauer die Markovprozesse, anzuwenden. Es können so den Übergangswahrscheinlichkeiten eines Markov-Prozesses eineindeutig Operatoren, die Übergangsoperatoren, zugeordnet werden. Diese bilden dann eine Halbgruppe.

Satz 2.26 (Darstellungssatz von Riesz, §29 Bauer [1992])

Ist E ein lokalkompakter Raum, so existiert zu jeder positiven Linearform I auf $C_c(E)$ mindestens ein Borel-Maß μ für das gilt:

$$I(f) = \int_E f(y)\mu(dy) \text{ für alle } f \in C_c(E). \quad (2.7)$$

Besitzt E eine abzählbare Basis, so ist μ sogar eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1

Auf einem kompakten Raum gilt $C_c(E) = C(E)$.

¹die Hausdorff-Eigenschaft wird von manchen anderen Autoren nicht gefordert

Die Existenz einer *abzählbaren Basis* des topologischen Raums (E, τ) bedeutet, dass es ein System abzählbar vieler offener Mengen $O_i \in \tau$, $i \in I$ gibt, so dass jede offene Menge O , also jedes $O \in \tau$, als Vereinigung solcher Mengen geschrieben werden kann, also dass gilt $O = \bigcup_{i \in J} O_i$ für eine Indexmenge $J \subset I$.

Ein *Borelmaß* μ auf einem lokalkompakten Raum E ist ein Maß für das $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset E$ gilt. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ist offensichtlich ein Borelmaß, da $\mu(E) = 1$ ist.

Wie schon erwähnt, werden wir im nächsten Kapitel einen kompakten Hausdorff-Raum mit abzählbarer offener Basis zu Grunde liegen haben und darauf die stetigen Funktionen betrachten. Das Maß aus Satz 2.26 ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das dann eindeutig bestimmt ist.

2.3 Theorie der Halbgruppen

In diesem Abschnitt sind Grundlagen aus der Theorie der Halbgruppen zusammengefasst. Diese bildet den theoretischen Rahmen für die Behandlung von Markovprozessen aus funktionalanalytischer Sicht im nächsten Kapitel. Genauer findet man im zweiten Kapitel von Itô [2003]. Grundlagen der Funktionalanalysis sind entweder Werner [1997] entnommen oder stammen aus Yosida [1971]. Am letzten Buch orientierte sich auch K. Itô.

Definition 2.27 (Operator)

Eine stetige lineare Abbildung T zwischen den normierten Räumen X und Y heißt *stetiger (linearer) Operator* ($T \in L(X, Y)$). Ist der Bildraum Y der Skalarkörper, so sagt man *Funktional statt Operator*.

Ein Operator $T : X \rightarrow Y$ ist *stetig*, falls aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$. Ein (linearer) Operator T ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist, also wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$. Das kleinste solche M definiert die Operatornorm von T .

Definition 2.28 (Operatornorm)

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \end{aligned}$$

Im Folgenden sei X ein *separabler Banachraum*, also ein separabler vollständiger normierter Raum. Separabel bedeutet, dass X eine abzählbar dichte Teilmenge M besitzt, d.h. es gibt eine Menge $M \subset X$, die abzählbar und deren Abschluss \overline{M} gleich X ist. Außerdem ist X vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge konvergiert in X .

Definition 2.29 (Halbgruppe nach Hille-Yosida)

Eine einparametrische Familie $\{H_t, t \geq 0\}$ von beschränkten linearen Operatoren in X , $H_t \in L(X, X)$, heißt Halbgruppe (im Sinne von Hille-Yosida), falls folgende Bedingungen gelten:

$$\|H_t\| \leq 1 \tag{2.8}$$

$$H_{t+s} = H_t H_s \tag{2.9}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \|(H_t - I)x\| = 0 \text{ für alle } x \in X \tag{2.10}$$

Definition 2.30 (Der infinitesimale Generator)

Der (infinitesimale) Generator einer Halbgruppe $\{H_t\}$ ist definiert durch

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{H_t f - f}{t}, \quad f \in \mathcal{D}(A) := \{f : \text{der Limes existiert}\}. \tag{2.11}$$

$\mathcal{D}(A)$ bezeichnet den Definitionsbereich des Operators A (engl: domain).

Satz 2.31 Ein linearer Operator A ist der Generator einer Halbgruppe $\{H_t\}$ genau dann, wenn gilt:

- $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in X
- Für alle $\alpha > 0$ hat $(\alpha - A)$ eine Inverse auf X und $\|(\alpha - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

In diesem Fall ist H_t durch A eindeutig bestimmt.

Beweis: siehe Itô [2003, Theorem 5, Kapitel II.2]

Kapitel 3

Markov-Prozesse aus funktionalanalytischer Sicht

Ein (homogener) *Markov-Prozess* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ auf dem *Zustandsraum* S ist ein stochastischer Prozess mit Werten in S , dessen zukünftige Entwicklung nur von dem aktuellen Zustand des Prozesses abhängt, nicht jedoch von vergangenen Entwicklungen oder von der Zeit. $\{X_t\}$ ist somit festgelegt durch den Startpunkt $X_0 = x$, $x \in S$ (bzw. die Startverteilung μ) und die Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_t(x, B)\}_{x \in S, B \in \mathcal{B}(S), t \geq 0}$. Diese geben die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher der Prozess $\{X_t\}$ bei Start in x sich zum Zeitpunkt t in der Menge B befindet. Eine formale Definition folgt später.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Markov-Prozesses

Der Zustandsraum $(S, \mathcal{B}(S))$ sei im Folgenden ein *kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer offener Basis* und $\mathcal{B}(S)$ sei die *topologische σ -Algebra* auf S , d.h. die σ -Algebra, die von den offenen Mengen erzeugt wird. Der Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem der Prozess X_t definiert ist, sei $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ mit $P_x(X_t \in B) := p_t(x, B)$, $x \in \mathcal{B}(S)$, wobei $p_t(x, B)$ die Übergangswahrscheinlichkeit von x nach B in der Zeit t ist. $C(S)$ sei der Raum aller stetigen Funktionen auf S , der mit der Supremumsnorm ein separabler Banachraum ist.

Wir betrachten nun die *Übergangswahrscheinlichkeiten* (oder Übergangsfunktionen) $\{p_t(x, B)\}$ des Markovprozesses X_t auf dem Zustandsraum $(S, \mathcal{B}(S))$ genauer. Sie sollen folgende Bedingungen erfüllen:

(p.0) $x \mapsto p_t(x, B)$ ist Borel-messbar für t und B fest

(p.1) $B \mapsto p_t(x, B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für t und x fest

(p.2) $p_0(x, B) = \delta_x(B)$ (Dirac-Maß konzentriert in x)

(p.3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \int f(y) p_t(x, dy) = \int f(y) p_t(x_0, dy)$ für alle $f \in C(S)$, t fest (schwache Konvergenz)

(p.4) $\lim_{t \rightarrow 0} p_t(x, U(x)) = 1$ für jede Umgebung $U(x)$ von x

(p.5) Es gilt die *Chapman-Kolmogorov Gleichung*:

$$p_{t+s}(x, B) = \int_S p_s(y, B) p_t(x, dy) \quad (3.1)$$

Die Bedingungen (p.0) und (p.1) müssen allgemein für Kerne erfüllt sein. (p.2) ist klar. (p.3) bedeutet, dass sich das Übergangsmaß bei einer Änderung des Startpunktes x_0 stetig ändert, und (p.4) besagt, dass in einem infinitesimal kleinen Zeitintervall der Prozess mit großer Wahrscheinlichkeit in einer Umgebung des Startpunkts bleibt. Die Annahme (p.5) ist charakteristisch für einen Markov-Prozess und entspricht der Markov-Eigenschaft.

Die *Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraums*, insbesondere des Maßes P_x (bzw. P_μ für X_0 zufällig), für den durch die Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_t(x, B)\}$ definierten Prozess X_t auf S bleibt noch zu zeigen. Das Maß P_μ definiert man durch die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt:

$$P_\mu(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \int_{x \in S} \int_{x_1 \in B_1} \cdots \int_{x_n \in B_n} \mu(dx) p_{t_1}(x, dx_1) p_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \quad (3.2)$$

für $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Dabei ist μ die Startverteilung von X , also die Verteilung von X_0 . Die Mengen B_1, \dots, B_n sind Elemente der σ -Algebra $\mathcal{B}(S)$ auf dem Zustandsraum S .

Ein Stochastischer Prozess X_t mit den endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten P_μ aus (3.2) existiert nach Kolmogorov's Theorem (siehe z.B. [Shiryaev \[1995\]](#) [II. §9, Theorem 1 und Korollare]). X_t ist somit wohldefiniert.

Allerdings sind die *Pfade* des Prozesses nicht eindeutig bestimmt. K. Itô beweist, dass von $\{X_t\}$ eine *Version mit càdlàg Pfaden* existiert. Diese ist bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig (siehe [Itô \[2003\]](#), Theorem 1 Kapitel II.4). Im Weiteren nehmen wir diese càdlàg-Version von $\{X_t\}$ als gegeben an.

Es sei also Ω der Raum aller càdlàg-Funktionen von $T = [0, \infty)$ in den Zustandsraum S , und \mathcal{F} sei die Sigma-Algebra, die durch die Mengen $\{X_t \in B\}$, $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(S)$, also durch die Zylindermengen, erzeugt wird. P_x sei das W'Maß bei Start in $x \in S$, also $P_x(X_t(\omega) \in B) = p_t(x, B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(S)$. Es folgt die Definition eines Markovprozesses nach K. Itô.

Definition 3.1 (Markov-Prozess)

Ein System von Zufallsvariablen

$$\{X_t(\omega), t \geq 0, \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P_x)\}_{x \in S}$$

mit den zuvor definierten Übergangswahrscheinlichkeiten heißt Markov-Prozess mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_t(x, B)\}$.

Die Übergangshalbgruppe

Um die Theorie der Halbgruppen und des infinitesimalen Generators auf Markovprozesse übertragen zu können, nutzt man aus, dass den Übergangsfunktionen $\{p_t(x, B)\}$ auf dem Raum S eindeutig Operatoren $\{T_t\}$ auf dem Raum $C(S)$ zugeordnet werden können. $C(S)$ bezeichnet dabei den Raum der stetigen Funktionen auf S . Zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bildet $C(S)$ einen separablen Banachraum.

Nun definieren wir die Operatoren $\{T_t, t \geq 0\}$ auf $C(S)$ durch

$$(T_t f)(x) := \int_S f(y) p_t(x, dy), \quad f \in C(S). \quad (3.3)$$

Sie werden *Übergangsooperatoren* genannt. Die vorher aufgelisteten Bedingungen (p.0) bis (p.5) an die Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_t(x, B)\}$ lassen sich nun in die Sprache der Übergangsooperatoren $\{T_t\}$ übersetzen:

(T.1) $T_t : C(S) \longrightarrow C(S)$ ist lineare Abbildung für festes t .

(T.2) $T_0 = I$ (Identitätsoperator)

(T.3) $\lim_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = f(x)$ für $f \in C(S)$ und $x \in S$

(T.4) $T_{t+s} = T_t T_s$ (Halbgruppeneigenschaft)

(T.5) $T_t 1 = 1^1$ und $T_t \geq 0$ (d.h. aus $f \geq 0$ folgt $T_t f \geq 0$ für alle $f \in C(S)$)

Beweis:

(T.1) Die Stetigkeit von $T_t f$ folgt aus der Definition in (3.3) und aus (p.3); die Linearität von T_t aus der Integrals.

(T.2) $T_0 f(x) = \int_S f(y) p_0(x, dy) \stackrel{(p.2)}{=} \int_S f(y) \delta_x(dy) = f(x)$ für alle $f \in C(S)$, $x \in S$

(T.3) $\lim_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} \int_S f(y) p_t(x, dy) \stackrel{(p.4)}{=} f(x)$ für alle $f \in C(S)$, $x \in S$

(T.4) $T_{t+s} f(x) = \int_S f(y) p_{t+s}(x, dy) \stackrel{(p.5)}{=} \int_S f(y) \int_S p_s(z, dy) p_t(x, dz) = \int_S T_s f(z) p_t(x, dz) = T_t T_s f(x) \forall f \in C(S), x \in S$

(T.5) $T_t 1 = \int_S 1 p_t(x, dy) = 1$ da $B \mapsto p_t(x, B)$ ein W'Maß ist und

$f \geq 0 \Rightarrow T_t f(x) = \int_S f(y) p_t(x, dy) \geq \inf_{y \in S} f(y) \cdot 1 \geq 0 \forall x \in S$ da $B \mapsto p_t(x, B)$ ein W'Maß ist.

Die Operatoren T_t sind *beschränkt* mit $\|T_t\| = 1$. Da die T_t lineare Operatoren sind, ist dies gleichbedeutend damit, dass sie stetig sind.

¹1 steht hier für die konstante Funktion, die überall gleich 1 ist

Beweis:

$$\|T_t\| \leq 1: \|T_t\| = \sup_{f \in C(S), \|f\| \leq 1} \|T_t f\| = \sup_{x \in S, f \in C(S), \|f\| \leq 1} \int_S f(y) p_t(x, dy) \leq 1 \cdot \sup_{x \in S} \int_S p_t(x, dy) = 1, \text{ da } B \mapsto p_t(x, B) \text{ ein W\textprime} \text{ma\textprime} \text{ f\textprime} \text{ur alle } x \in S \text{ ist.}$$

$$\|T_t\| \geq 1: \|T_t\| \geq \frac{\|T_t \cdot 1\|_\infty}{\|1\|_\infty} \stackrel{(T.5)}{=} \frac{\|1\|_\infty}{\|1\|_\infty} = 1. \quad \square$$

Die Familie $\{T_t\}_{t \geq 0}$ hei\ss t *Halbgruppe der \u00dcbergangsoperatoren* (kurz: *\u00dcbergangshalbgruppe*). Nach Konstruktion ist sie durch die Familie der \u00dcbergangswahrscheinlichkeiten $\{p_t(x, B)\}$ eindeutig bestimmt. In die andere Richtung gilt dasselbe, was in dem folgenden Satz formuliert ist.

Satz 3.2

Die \u00dcbergangshalbgruppe $\{T_t\}$, die durch (T.1) bis (T.5) definiert ist, bestimmt eindeutig eine Familie $\{p_t(x, B)\}$ von \u00dcbergangswahrscheinlichkeiten, die (p.0) bis (p.5) erf\u00fcllen.

Beweis: Aus dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.26) folgt die Existenz eines Radon-Ma\ss es $p_t(x, B)$, das durch die Gleichungen $(T_t f)(x) = \int_S f(y) p_t(x, dy)$, $f \in C(S)$ definiert ist. Da der Raum S eine abz\u00e4hlbare Basis hat, ist dieses eindeutig bestimmt. Die Bedingungen des Satzes sind erf\u00fcllt, da $I(f) = T_t f$ wegen (T.1) und (T.5) eine positive Linearform ist und da f\u00fcr den kompakten ZR $(S, \mathcal{B}(S))$ gilt, dass $C_c(S) = C(S)$. Die so festgelegten Ma\ss e $\{p_t(x, B)\}$ erf\u00fcllen dann die Eigenschaften (p.0) bis (p.5). \square

Folgende S\u00e4tze geben weiteren Aufschluss \u00fcber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Halbgruppen nach Hille-Yosida und den \u00dcbergangshalbgruppen.

Satz 3.3 Die \u00dcbergangshalbgruppe $\{T_t\}$ ist eine Halbgruppe im Sinne von Hille-Yosida.

Beweis: $\{T_t\}$ ist eine Familie beschr\u00e4nkter linearer Operatoren und es gilt:

1. $\|T_t\| \stackrel{(T.5)}{=} 1 \leq 1$
2. $T_{t+s} = T_t T_s \quad \forall s, t \geq 0$ nach (T.4)
3. $\lim_{t \downarrow 0} \int_S f(y) p_t(x, dy) = \lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) \stackrel{T.3}{=} f(x) = \int_S f(y) p_0(x, dy)$ f\u00fcr alle $f \in C(S)$ und $x \in S$. Dies entspricht der schwachen Konvergenz von $\{T_t\}$ bei 0, welche nach dem ersten Theorem aus Kapitel IX.1 in Yosida [1971] unter der Halbgruppeneigenschaft (T.4) \u00e4quivalent zur starken Konvergenz ist. \square

Satz 3.4

Eine Halbgruppe von Operatoren auf $C(S)$ nach Hille-Yosida ist genau dann eine Übergangshalbgruppe, wenn

$$H_t \geq 0 \quad \text{und} \quad H_t \cdot 1 = 1$$

erfüllt ist.

Beweis:

„ \implies “ folgt aus (T.5)

„ \impliedby “: H_t ist positive Linearform auf $C(S)$. Daraus folgt mit dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.26) die Existenz eines eindeutigen Borelmaßes $B \mapsto p_t(x, B)$, so dass gilt: $H_t f(x) = \int_S f(y) p_t(x, dy)$. (T.1), (T.2), (T.4) und (T.5) sind dann offensichtlich erfüllt, (T.3) folgt aus der starken Konvergenz von H bei 0 gegen die Identität und aus der Halbgruppeneigenschaft. \square

Der infinitesimale Generator

Da die Übergangshalbgruppe $\{T_t\}$ eines Markovprozesses nach Satz 3.3 eine Halbgruppe im Sinne von Hille-Yosida ist, folgt, dass der infinitesimale Generator A von $\{T_t\}$ durch die Formel (2.11) gegeben ist, also durch

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}, \quad f \in \mathcal{D}(A) := \{f \in C(S) \text{ und der Limes existiert}\} \quad (3.4)$$

definiert ist.

Der folgende Satz charakterisiert den Generator A einer Übergangshalbgruppe.

Satz 3.5

Der Operator A ist der Generator einer Übergangshalbgruppe genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) A ist linearer Operator auf $C(S)$ und $\overline{\mathcal{D}(A)} = C(S)$
- (ii) $A 1 = 0$
- (iii) Falls $f \in \mathcal{D}(A)$ und $f(x_0) = \max_x f(x)$, dann gilt $Af(x_0) \leq 0$
- (iv) Es existiert ein $\alpha_0 > 0$, so dass für alle $g \in C(S)$ die Gleichung $(\alpha_0 I - A)f = g$ mindestens eine Lösung besitzt.

Beweis: siehe Itô [2003, Theorem 2, Kapitel II.3]

Nun kann die Formel (3.4) für den (infinitesimalen) Generator A der Übergangshalbgruppe $\{T_t\}$ eines Markov-Prozesses X_t in der Terminologie des Prozesses dargestellt werden. Mit $P_x(X_t \in B) := p_t(x, B)$ und $f \in C(S)$ ergibt sich:

$$T_t f(x) = \int_S f(y) p_t(x, dy) = E_x(f(X_t)), \text{ wobei } E_x(\cdot) = \int \cdot P_x(d\omega) \quad (3.5)$$

und somit gilt

$$A f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x(f(X_t)) - f(x)}{t}, \quad f \in \mathcal{D}(A) := \{f \in C(S) \text{ und der Limes existiert}\} \quad (3.6)$$

Mit dieser Formel werden wir im nächsten Kapitel den Generator A unseres Risikoprozesses Y berechnen. Um mit Hilfe von A dann später die Ruinwahrscheinlichkeit von Y zu erhalten, benötigen wir noch den folgenden Satz, der auf E. B. Dynkin zurückgeht.

Satz 3.6 (Dynkinsche Erwartungswertformel)

Es sei $x \in S$ und A sei der infinitesimale Generator des Markov-Prozesses X_t mit $X_0 = x$. Weiter sei τ eine Stoppzeit für die $E_x(\tau) < \infty$ ist. Für $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt dann:

$$E_x \left(\int_0^\tau A f(X_t) dt \right) = E_x(f(X_\tau)) - f(x) \quad (3.7)$$

Beweis: siehe Itô [2003, Theorem 2, Kapitel II.14]

Für viele Markov-Prozesse kann $\mathcal{D}(A)$ nicht genau bestimmt werden. Oftmals kann A jedoch zumindest für eine Teilmenge von Funktionen aus $\mathcal{D}(A)$ bestimmt werden, z.B. mit Hilfe der Itô-Formel für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen. Im Allgemeinen ist damit die Übergangshalbgruppe des stochastischen Prozesses nicht mehr eindeutig bestimmt. Wir werden in Kapitel 5.1 aber feststellen, dass dort damit trotzdem interessierende Eigenschaften des Markov-Prozesses ermittelt werden können.

In Kapitel 4.3 werden wir für $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}})$ den Generator A des Risikoprozesses Y berechnen, und in Theorem 5.1 mit Hilfe von A zwei Randwertprobleme formulieren. Deren Lösungen sind dann die Ruinwahrscheinlichkeit bzw. die Laplacetransformierte der Ruinzeit des Risikoprozesses Y .

Kapitel 4

Das Risikomodell

4.1 Das klassische Risikomodell

In diesem Kapitel wird das klassische Risikomodell vorgestellt. Es wird auch *Cramér-Lundberg Modell* genannt, weil es von Filip Lundberg 1903 eingeführt und später von Harald Cramér ausführlich studiert wurde. Detailliert wird dieses Modell u.a. auf S. 162 ff. in [Rolski u. a. \[1999\]](#) oder auf S. 57 ff. in [Asmussen \[2000\]](#) behandelt.

Der Risikoprozess im Cramér-Lundberg-Modell lautet

$$Y_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} \stackrel{\text{def}}{=} y + pt + L_{P,t}.$$

Dabei steht $p > 0$ für die konstanten *Prämieneinnahmen* der Versicherung. Zum Zeitpunkt t haben die bis dahin gezahlten Versicherungsprämien also den Wert pt . Die akkumulierten *Schadenforderungen* werden durch den zusammengesetzten Poissonprozess L_P abgebildet und sind somit zufällig. Es wird also die Schadensanzahl durch den (homogenen) Poissonprozess N_P mit der Intensität λ_P dargestellt, und die davon unabhängigen Schadenshöhen $S_{P,i}$ zu den Zeitpunkten T_i sind *unabhängig identisch verteilt* mit der Verteilungsfunktion F_P . Der Startwert $Y_0 = y$ ist die *Anfangsrisikoreserve*.

Die Ruinwahrscheinlichkeit des Risikoprozesses

Von Interesse ist nun insbesondere die *Ruinwahrscheinlichkeit*, also die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Risikoprozess Y_t mit der Anfangsrisikoreserve y negativ wird, das heißt Ruin eintritt. Ist diese bekannt, so kann y so groß gewählt werden, dass die Ruinwahrscheinlichkeit „ausreichend klein“ ist. Dies ist, zusammen mit der Erwirtschaftung einer ausreichend großen *Rendite des Eigenkapitals*, das Hauptziel jedes Versicherungsunternehmens.

Es sei $T_y = \inf\{t > 0 : Y_t < 0\}$ der Zeitpunkt des Ruins des Prozesses Y mit der Anfangsrisikoreserve y . Die Ruinwahrscheinlichkeiten sind dann definiert durch

$$\psi(y) = P(T_y < \infty) \quad \text{und} \quad \psi(y, t) = P(T_y < t).$$

Man nennt $\psi(y, t)$ die *Ruinwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt t* und $\psi(y)$ die *Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit*. Im Folgenden werden wir nur $\psi(y)$ betrachten.

Den trivialen Fall, bei dem der sichere Ruin eintritt, will man im Folgenden ausschließen. Es seien T_1, T_2, \dots die Schadenszeitpunkte und $K_i = T_i - T_{i-1}$ die Zwischenankunftszeiten. Letztere sind exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\lambda_P$. Da Ruin nur zu den Zeitpunkten T_i eintreten kann, fordern wir

$$E[pK_i - S_{P,i}] > 0 \quad \text{für alle } i \geq 1 \quad \iff \quad p > \lambda_P E(S_P),$$

was bedeutet, dass die zu erwartenden Prämieinnahmen zu jedem Zeitpunkt größer sind als die zu erwartenden Schadenszahlungen. Diese Bedingung wird auch *Nettoprofitbedingung* genannt.

Unter dieser Bedingung ist $\psi(y)$ monoton fallend in y und $\psi(y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$. Man kann y also so groß wählen, dass $\psi(y)$ beliebig klein wird. Zudem gilt dann dass, $Y_t \rightarrow +\infty$ f.s. für $t \rightarrow \infty$ und $\psi(y) > 0$ für alle Anfangsrisikoreserven $y \geq 0$ ist.

Es ist aber selbst in diesem relativ einfachen Modell nicht leicht, eine analytische Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ anzugeben. Allerdings erfüllt die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y) = 1 - \psi(y)$ die *Erneuerungsgleichung*

$$\phi(y) - \phi(0) = \frac{\lambda_P}{p} \int_0^y (1 - F_P(z)) \phi(y - z) dz,$$

die im Allgemeinen zwar nicht analytisch gelöst werden kann, mit deren Hilfe sich aber die Überlebenswahrscheinlichkeit numerisch berechnen lässt. Da $\phi(\infty) = 1$ gilt, folgt $\phi(0) = 1 - (\lambda_P/p)E[S_P]$. Die Ruinwahrscheinlichkeit bei Null hängt also nur vom Erwartungswert der Schäden $S_{P,i}$, nicht aber von der Schadensverteilung selbst ab.

Für den Fall, dass die $S_{P,i}$ *exponentialverteilt* mit dem Parameter $\mu = E[S_P]^{-1}$ sind, kann man die Gleichung von oben analytisch lösen und man erhält die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(y) = \frac{\lambda_P E[S_P]}{p} \exp\left(-\frac{\phi(0)}{E[S_P]} y\right) \quad \text{für } y \geq 0.$$

Die *Pollaczek-Khinchine Formel* gibt eine explizite Darstellung der Lösung der Erneuerungsgleichung von oben für den allgemeinen Fall in Form einer unendlichen Reihe von Faltungen an:

$$\phi(y) = \left(1 - \frac{\lambda_P E[S_P]}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_P E[S_P]}{p}\right)^n \tilde{F}_P^{n*}(y), \quad y \geq 0.$$

Hierbei ist $\tilde{F}_P^{n*}(y)$ die *n-fache Faltung* von $\tilde{F}_P(y) = E[S_P]^{-1} \int_0^y (1 - F_P(z)) dz$. Diese Formel ist für theoretische Betrachtungen von Bedeutung, aber man kann daraus auch rekursiv eine numerische Lösung berechnen, z.B. mit dem *Algorithmus von Panjer*.

Schwächen des Cramér-Lundberg Modells

Ein Nachteil des Cramér-Lundberg-Modells ist, dass sich die Unsicherheit nur im zusammengesetzten Poissonprozess widerspiegelt. Insbesondere sind keine Schwankungen bei den Prämieeinnahmen zugelassen. Zahlreiche Autoren haben deswegen das klassische Modell um einen Term erweitert und führten eine zusätzliche Schwankungskomponente in Form einer Brownschen Bewegung ein, die kleineren Unsicherheiten Rechnung tragen soll (siehe z.B. [Dufresne und Gerber \[1991\]](#) oder [Furrer und Schmidli \[1994\]](#)). Dieses Modell heißt dann das *durch Diffusion gestörte klassische Risikomodell*.

Eine weitere Schwachstelle dieses Modells ist, dass dort die Risikoreserve nicht verzinst wird. Dies ist jedoch nicht realistisch, da diese in der Praxis am Kapitalmarkt platziert wird, was sich dann auch auf die Ruinwahrscheinlichkeit auswirkt. Denn durch das Kurs- und Ausfallrisiko der Kapitalanlage kommt zusätzliche Unsicherheit ins Spiel. Dies müsste sich also auch im Risikomodell widerspiegeln. Einige Autoren haben in der Vergangenheit Risikomodelle unter *deterministischer Verzinsung* betrachtet (siehe z.B. [Harrison \[1977\]](#) oder [Delbaen und Haenzendonck \[1987\]](#)). Für diese Modelle gibt es auch zahlreiche Artikel über die numerische Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten¹. Wünschenswert wäre jedoch ein Modell, welches die zufälligen Renditen bei der Anlage an Kapitalmärkten repräsentiert, also ein *Risikomodell unter stochastischen Zinseinflüssen*. Daher sollte das Risikomodell so erweitert werden, dass das Risikokapital stochastisch verzinst wird, also als ob es am Kapitalmarkt angelegt wäre. Das heißt die Modellierung der Verzinsung soll mit den gängigen Kapitalmarktmodellen vereinbar sein.

Im nächsten Abschnitt werden wir das klassische Risikomodell so erweitern, dass sowohl eine zufällige Schwankungskomponente darin vorkommt, als auch die Anlage des Risikokapitals am Kapitalmarkt sich darin widerspiegelt. Danach werden wir die Ruinwahrscheinlichkeiten in unendlicher Zeit für dieses Modell untersuchen.

¹siehe Literaturhinweise dazu in [Paulsen \[1998a\]](#)

4.2 Modellbeschreibung

Das in dieser Diplomarbeit betrachtete Modell ist deutlich allgemeiner als das klassische Modell in der Risikotheorie. Der Risikoprozess Y_t ist definiert als die Lösung der folgenden stochastischen Integralgleichung:

$$Y_t = y + P_t + \int_0^t Y_s dR_s, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Dabei sind die stochastischen Prozesse P_t und R_t Semimartingale.

Der *Prämienprozess* P stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Risikoprozesses dar und beschreibt das Versicherungsrisiko. Der *Kapitalertragsprozess* R dagegen modelliert die Kapitalerträge des Risikokapitals, also das Risiko, das aus der Anlage am Kapitalmarkt resultiert. Zum Zeitpunkt 0 gilt $P_0 = R_0 = 0$ und das Startkapital $Y_0 = y$ wird als *Anfangsrisikoreserve* bezeichnet.

In [Paulsen \[1993\]](#) wird die explizite Lösung Y für (4.1) berechnet, jedoch ist diese sehr kompliziert und unhandlich. Um eine für weitere Betrachtungen geeignete Lösung zu erhalten, muss das Modell vereinfacht werden.

Der Prozess der Versicherungsseite (Prämienprozess)

Für den Prämienprozess P verwenden wir im Folgenden den durch Diffusion gestörten klassischen Risikoprozess

$$P_t = pt + \sigma_P W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Die *Prämienintensität* $p \geq 0$ steht für konstante Prämieinnahmen. Der zusammengesetzte Poissonprozess L_P , definiert durch $L_{P,t} := \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$, bildet die mit Zufall behafteten Forderungen an die Versicherung ab. N_P ist dabei ein Poissonprozess mit der Intensität λ_P , der die Anzahl der Forderungen bzw. Schäden modelliert. Die Schadenhöhen $S_{P,i}$ sind davon unabhängig und außerdem unabhängig identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion F_P .

Setzen wir in (4.2) $\sigma_P = 0$, so erhalten wir das klassische Modell der Risikotheorie. Der Term $\sigma_P W_{P,t}$, mit W_P Standard Brownsche Bewegung, steht für zufällige, kleinere Schwankungen des Risikoprozesses P_t und ist unabhängig von $L_{P,t}$. Sie können sowohl als Unsicherheit über die Prämieinnahmen sowie als zusätzliche Unsicherheit über die Forderungen an die Versicherung interpretiert werden. [Furrer und Schmidli \[1994\]](#) machen dies durch eine Aufteilung des Störterms $\sigma_P W_{P,t}$ deutlich, mit der sich für (4.2) die äquivalente Darstellung

$$P_t = pt + \sigma_P^{(1)} W_{P,t}^{(1)} - \left(\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \sigma_P^{(2)} W_{P,t}^{(2)} \right), \quad t \geq 0$$

ergibt. Es gilt für die Störterme $\sigma_P^{(1)}W_{P,t}^{(1)}$ und $\sigma_P^{(2)}W_{P,t}^{(2)}$, dass $(\sigma_P^{(1)})^2 + (\sigma_P^{(2)})^2 = \sigma_P^2$ und dass $W_P^{(i)}, i = 1, 2$ unabhängige Standard Brownsche Bewegungen sind.

Der Prozess der Kapitalerträge (Kapitalertragsprozess)

Der Kapitalertragsprozess R , der die Kapitalerträge des Risikokapitals modelliert, wird nun analog zu (4.2) definiert:

$$R_t = rt + \sigma_R W_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i}, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Hier steht $r \geq 0$ für den *stetigen Zinssatz* und rt somit für eine konstante, deterministische Ertragskomponente. Verwenden wir statt (4.3) lediglich $R_t = rt$, ergibt sich für (4.1) $Y_t = y + P_t + \int_0^t Y_{s-} r dt$. Dies ist ein Risikomodell mit konstanter Verzinsung mit dem stetigen Zinssatz r .

$Y_t = y + \int_0^t Y_{s-} r dt$ oder gleichbedeutend $dY_t = Y_{s-} r dt, Y_0 = y$, bedeutet, dass das Anfangskapital y bei Verzinsung mit dem stetigen risikolosen Zinssatz r zum Zeitpunkt t den Wert ye^{rt} erreicht. Das ist das Standardmodell für die Verzinsung von Kapital in der zeitstetigen Finanzmathematik (siehe z.B. [Lamberton und Lapeyre \[1997, S.69\]](#)).

Der Term $\sigma_R W_{R,t}$, wobei W_R eine Standard Brownsche Bewegung ist, steht für zufällige Schwankungen der Kapitalerträge. Der Ertragsprozess $R_t = rt + \sigma_R W_{R,t}$ entspricht dem Wertentwicklungsprozess des Basiswerts A_t (z.B. Aktienkurs) im klassischen Black-Scholes-Modell². Es gilt dann $dA_t = A_{t-} dR_t = \sigma_R A_t dW_{R,t} + r A_t dt$. Dieser Prozess wird als *geometrische Brownsche Bewegung* bezeichnet. Mit dem Anfangswert $A_0 = 1$ ergibt sich durch Anwendung der Itô-Formel die Lösung $A_t = \exp((r - \frac{1}{2}\sigma_R^2)t + \sigma_R W_{R,t})$ (siehe Satz 2.20). Unser Modell für R_t ist soweit also vereinbar mit den aktuellen Kapitalmarktmodellen in der Finanzmathematik.

Zusätzlich lassen wir zufällige Gewinne bzw. Verluste durch die Anlage am Kapitalmarkt zu, die zu bestimmten (zufälligen) Zeitpunkten realisiert werden. Diese werden durch den zusammengesetzten Poissonprozess $L_{R,t} := \sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i}$ analog zu dem in (4.2) modelliert. Der von W_R unabhängige Poissonprozess N_R hat die Intensität λ_R . Die davon unabhängigen zufälligen Gewinne bzw. Verluste $S_{R,i}$ sind unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion F_R .

Damit umfasst der Kapitalertragsprozess R auch die Sprung-Diffusionsformel für die Bewertung von Optionen, die auf R. Merton zurückgeht³. Somit ist R sehr umfassend und die Modellierung der stochastischen Verzinsung ist mit den meisten Kapitalmarktmodellen vereinbar.

²zuerst veröffentlicht in [Black und Scholes \[1973\]](#)

³Merton [1976]

Weitere Modellannahmen

Wir treffen außerdem noch die Annahme, dass P und R unabhängige stochastische Prozesse sind. Dies lässt sich dadurch rechtfertigen, dass sie unterschiedliche wirtschaftliche Aktivitäten darstellen: P beschreibt die Versicherungsseite des Risikos, R dagegen die Anlage am Kapitalmarkt. Paulsen [1993] hält diese Annahme daher für sinnvoll.

In der Praxis muss diese jedoch nicht immer erfüllt sein. Im Rahmen des „Integrierten Risikomanagements“ wurde bei Versicherungsunternehmen, wie z.B. der Münchener Rück, sogar ein Schwerpunkt auf die Erkennung solcher Abhängigkeiten gelegt. Ein Beispiel aus dem Bereich Pharmarisiken findet sich in Zweimüller [2005]. Dort wird die Problematik behandelt, dass große Rückrufaktionen von Medikamenten und damit verbundene Schadensersatzklagen sich nicht nur als Versicherungsschäden auswirken, sondern meist auch die Aktienkurse der gesamten Pharmabranche in der Folgezeit stark belasten. Die oben gemachte Annahme könnte also durchaus ein Nachteil unseres Modells sein.

Weiter wird angenommen, dass $F_P(0) = 0$. Dies stellt sicher, dass die Forderungen $S_{P,i}$ positiv sind. Außerdem nehmen wir an, dass P_t zufällig ist, also $\sigma_P \neq 0$ oder $\lambda_P \neq 0$.

Die Annahme $F_R(-1) = 0$ bedeutet, dass das gesamte Anlagevermögen nicht auf einen Schlag wertlos werden kann. Dies scheint zumindest bei einer halbwegs konservativen Anlagestrategie, wie sie von Versicherungsunternehmen in der Regel verfolgt wird, vernünftig zu klingen. Bei der Tätigkeit extrem riskanter Kapitalmarktgeschäfte ist diese Annahme aber wohl zu hinterfragen.

Paulsen [1998a] liefert eine Rechtfertigung aus der Sicht der Risikotheorie: aus $F_R(-1) > 0$ und $\lambda_R > 0$ folgt, dass $S_{R,i} \leq -1$ für mindestens ein i mit Wahrscheinlichkeit 1. Hieraus ergibt sich $Y_t = Y_{t-} + \Delta Y_t = Y_{t-} + Y_{t-} S_{R,i} \leq 0$. Y springt oder driftet also f.s. zu einem Zeitpunkt ins Negative. Deswegen tritt f.s. Ruin ein, egal wie hoch das Anfangskapital y ist. Da in diesem Fall die Betrachtung von Ruinwahrscheinlichkeiten keinen Sinn macht, scheint die Annahme gerechtfertigt.

Zudem wird angenommen, dass die Erwartungswerte und die Varianzen von S_P und S_R endlich sind, also $E[S_P] < \infty$, $Var[S_P] < \infty$ und $E[S_R] < \infty$, $Var[S_R] < \infty$. Die Verteilungsfunktionen F_P und F_R seien außerdem stetig. Diese Annahmen sind für die Gültigkeit wichtiger Beweise und Resultate in Kapitel fünf nötig. Für die meisten in Frage kommenden Verteilungen für die Zufallsvariablen S_P und S_R sind diese aber sowieso erfüllt.

Trotz der oben gemachten Einschränkungen ist unser Modell sehr allgemein. Der Prämienprozess P , der das Versicherungsrisiko beschreibt, erweitert den klassischen Risikoprozess um eine zusätzliche Schwankungskomponente. Der Kapitalertragsprozess R stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Black-Scholes Modells für Underlyings dar und umfasst zudem weitere, allgemeinere Finanzmarktmodelle.

Die explizite Darstellung des Risikoprozesses

Zusammengefasst hat das Modell nun die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= y + pt + \sigma_P W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t Y_{s-} d \left(rs + \sigma_R W_{R,s} + \sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,s} \right) \\
 &= y + pt + \sigma_P W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t r Y_{s-} ds \\
 &\quad + \int_0^t \sigma_R Y_{s-} dW_{R,s} + \int_0^t Y_{s-} d \left(\sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,s} \right).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nun stellt sich die Frage, ob die stochastische DGL (4.4) überhaupt eine Lösung besitzt, und ob diese eindeutig ist. Hierzu benötigen wir nicht einmal die genaue Struktur unserer stochastischen DGL, sondern es reicht festzustellen, dass R und P unabhängige Lévy-Prozesse sind (siehe [Sato \[1999\]](#)). Aus Satz 2.11 folgt nun, dass R und P unabhängige Semimartingale sind, und somit kann man die Lösbarkeit des allgemeineren Modells (4.1) betrachten.

Es folgt aus dem ersten Teil von Satz 2.21, dass (4.1) eine eindeutige Lösung Y besitzt, und dass diese sogar wieder ein Semimartingal ist.

Da R und P unabhängige Lévy-Prozesse sind, ist die Lösung Y nach dem zweiten Teil von Satz 2.21 sogar ein starker Markovprozess. Dies kommt später sehr gelegen, da die Theorie des infinitesimalen Generators ursprünglich für diese Prozessklasse entwickelt wurde.

[Paulsen \[1993\]](#) findet eine explizite Lösung eines etwas allgemeineren Modells als (4.1). Er erhält eine brauchbare Lösung jedoch erst nach den Prämissen, dass P und R unabhängig sind, und dass $P(\inf\{t > 0 : \Delta R_t = -1\} < \infty) = 0$ gilt, was im einfacheren Modell (4.4) der Annahme $F_R(-1) = 0$ entspricht.

Analog zu [Paulsen \[1993\]](#) wird nun das Theorem 6.8 aus [Jacod \[1979\]](#) auf das Modell (4.4) angewendet mit $H = P + y$ und $X = R$. Es gilt dann $T_1 = \inf\{t > 0 : \Delta R_t = -1\} = \infty$, so dass der gestoppte Prozess X^{T_1} gleich dem Prozess X ist. Mit der Konvention $H_{0-} = 0$ gilt außerdem $\Delta H_0 = y$. Somit vereinfacht sich die Lösung Y aus [Jacod \[1979\]](#) stark und man erhält

$$Y_t = \mathcal{E}(R)_t \left(y + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(R)_{s-}} dP_s \right), \tag{4.5}$$

wobei $\mathcal{E}(R)$ die eindeutige Lösung der SDGL $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dR_s$ ist. $\mathcal{E}(R)$ heißt *Doléans-Dade Exponential* oder *Stochastisches Exponential*.

Mit Satz 2.20 folgt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(R)_t &= \exp\left(R_t - \frac{1}{2}[R, R]_t^c\right) \prod_{s \leq t} ((1 + \Delta R_s) \exp(-\Delta R_s)) \\
 &= \exp\left(rt + \sigma_R W_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i} - \frac{1}{2}\sigma_R^2 t\right) \prod_{i=1}^{N_{R,t}} (1 + S_{R,i}) \exp(-S_{R,i}) \\
 &= \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t + \sigma_R W_{R,t}\right) \prod_{i=1}^{N_{R,t}} (1 + S_{R,i}), \quad t \geq 0. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Die hier erhaltene explizite Form des Risikoprozesses Y werden wir zunächst nicht weiter verwenden, denn im nächsten Kapitel werden wir Aussagen über die Ruinzeit und die Ruinwahrscheinlichkeiten von Y unter Verwendung der Itô-Formel und des dadurch berechneten infinitesimalen Generators erhalten.

Im Kapitel 5.4 werden wir dann aber an dieser Stelle weiter machen und mit Hilfe der expliziten Darstellung des Risikoprozesses Y eine Lösung für die Ruinwahrscheinlichkeit herleiten.

4.3 Der infinitesimale Generator des Risikoprozesses

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten von Risikoprozessen stellen Martingalmethoden dar. Diese wurden zuerst von [Gerber \[1973\]](#) verwendet und seither von zahlreichen Autoren angewendet. Von größter Bedeutung ist dabei der infinitesimale Generator des Risikoprozesses. Dieser kann in manchen Risikomodellen direkt durch die Übergangswahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. In dem hier behandelten Modell ist dies jedoch nicht möglich.

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, dass der Risikoprozess Y_t ein Markov-Prozess ist. Somit ist durch die Formel (3.6) sein infinitesimaler Generator definiert, welcher dann mit Hilfe der Itô-Formel berechnet werden kann. Dies wurde auch in [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) ausgenutzt. Dort findet sich die Formel des infinitesimalen Generators, allerdings wird nur auf die Anwendung der Itô-Formel verwiesen und kein Beweis geliefert. Dieser folgt im Anschluss an den folgenden Satz, welcher zusammen mit dem Satz 5.1 im nächsten Kapitel das Kernstück dieser Diplomarbeit darstellt.

Satz 4.1 (Der infinitesimale Generator)

Es sei $f \in C_b^2(\mathbb{R})$, also zweimal stetig differenzierbar mit f , f' und f'' beschränkt. Der infinitesimale Generator A des Risikoprozesses Y_t aus (4.4) lautet dann

$$\begin{aligned} Af(y) &= \frac{1}{2} (\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) f''(y) + (ry + p) f'(y) \\ &\quad + \lambda_P \int_0^\infty (f(y-x) - f(y)) dF_P(x) \\ &\quad + \lambda_R \int_{-1}^\infty (f(y(1-x)) - f(y)) dF_R(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Um diesen Satz zu beweisen werden noch einige Resultate benötigt. Dazu wird zuerst ξ_t durch

$$\xi_t := -\ln \mathcal{E}(R)_t \stackrel{(4.6)}{=} -\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t - \sigma_R W_{R,t} - \sum_{i=1}^{N_{R,t}} \ln(1 + S_{R,i}) \tag{4.8}$$

definiert. Somit ist ξ wieder ein Lévy-Prozess. Der letzte Logarithmus ist f.s. definiert, da die $S_{R,i}$ f.s. größer als -1 sind. Später werden auch einige Ergebnisse aus [Lindner und Maller \[2005\]](#) benötigt. Zuerst stellen wir fest, dass unser Prozess Y

deren Prozess V entspricht, da

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mathcal{E}(R)_t \left(y + \int_0^t (\mathcal{E}(R)^{-1})_{s-} dP_s \right) \\
 &= e^{-\xi t} y + \left(e^{-\xi t} \int_0^t e^{\xi s-} dP_s \right) \\
 &= e^{-\xi t} y + Z_t \quad \text{mit} \quad Z_t = e^{-\xi t} \int_0^t e^{\xi s-} dP_s.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nun folgen zwei Lemmata, mit deren Hilfe dann der infinitesimale Generator A aus Satz 4.1 berechnet werden kann. Im ersten Lemma wird gezeigt, dass Y quadratintegrierbar ist und im zweiten werden drei Konvergenzen in L^1 bewiesen.

Lemma 4.2

Es sei Y wieder der Risikoprozess aus (4.4), ξ und Z seinen die in (4.8) und (4.9) definierten stochastischen Prozesse. Dann gilt für alle festen $t \geq 0$

- (i) $E [e^{-2\xi t}] < \infty$,
- (ii) $E [Z_t^2] < \infty$,
- (iii) Y ist quadratintegrierbar.

Beweis:

(i) Es gilt für $k = 1, 2$

$$E [e^{-k\xi t}] = E[\mathcal{E}(R)_t^k] = E \left[\exp \left(k \left(r - \frac{1}{2} \sigma_R^2 \right) t + k \sigma_R W_{R,t} \right) \right] E \left[\prod_{i=1}^{N_{R,t}} |1 + S_{R,i}|^k \right],$$

da der Poissonprozess N_R und die Sprungverteilungen $S_{R,i}$ unabhängig von der Brownschen Bewegung W_R sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 &E \left[\exp \left(k \left(r - \frac{1}{2} \sigma_R^2 \right) t + k \sigma_R W_{R,t} \right) \right] \\
 &= E \left[\exp \left((k \sigma_R) W_{R,t} - \frac{1}{2} (k \sigma_R)^2 t \right) \right] \exp \left(\frac{1}{2} k^2 \sigma_R^2 t - \frac{1}{2} k \sigma_R^2 t + k r t \right) \\
 &= \exp \left(\left(\frac{1}{2} (k^2 - k) \sigma_R^2 + k r \right) t \right) < \infty \quad \text{für alle festen } t \geq 0,
 \end{aligned}$$

da die geometrische Brownsche Bewegung mit den Parametern $-\frac{1}{2}\sigma^2$ und σ den

Erwartungswert 1 hat. Weiter gilt

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^{N_{P,t}} (1 + S_{R,i})^k \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\prod_{i=1}^j (1 + S_{R,i})^k \middle| N_{P,t} = j \right] P(N_{P,t} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[(1 + S_R)^k \right]^j e^{-\lambda_R t} \frac{(\lambda_R t)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_R t} \frac{(E \left[(1 + S_R)^k \right] \lambda_R t)^j}{j!} \\ &= \exp \left((E \left[(1 + S_R)^k \right] - 1) \lambda_R t \right) < \infty \quad \text{für alle festen } t \geq 0, \end{aligned}$$

da $E[S_R^k] < \infty$ für $k = 1, 2$ gemäß den Modellannahmen ist. Es gilt also

$$E \left[e^{-k\xi t} \right] = \exp \left(\left(\frac{1}{2}(k^2 - k)\sigma_R^2 + kr + (E \left[(1 + S_R)^k \right] - 1) \lambda_R \right) t \right) < \infty$$

für $k = 1, 2$. Damit ist Teil (i) des Lemmas gezeigt. Außerdem stellt man fest, dass sich t bei der Darstellung von $E \left[e^{-k\xi t} \right]$ herausfaktoriert, was im Folgenden wichtig ist. Mann kann so

$$\Psi_{\xi}(k) := \frac{1}{2}(k - k^2)\sigma_R^2 - kr + (1 - E \left[(1 + S_R)^k \right]) \lambda_R, \quad k = 1, 2 \quad (4.10)$$

definieren.

(ii) Um $E \left[Z_t^2 \right] < \infty$ zu zeigen, benutzen wir zuerst die Proposition 2.3 aus [Lindner und Maller \[2005\]](#) und erhalten so

$$Z_t = e^{-\xi t} \int_0^t e^{\xi s} dP_s \stackrel{D}{=} \int_0^t e^{-\xi s} dP_s.$$

Wir haben vorher gezeigt, dass $E \left[e^{-2\xi_1} \right] < \infty$ und es gilt zudem $E[P_1^2] < \infty$ da $E[S_P^2] < \infty$ nach Voraussetzung erfüllt ist. Außerdem ist hier zusätzlich P unabhängig von R und somit auch von ξ , weswegen aus dem Beweis von Proposition 4.1 und der Bemerkung 8.1 in [Lindner und Maller \[2005\]](#) mit $\kappa = 2$ und $p = q = 1$ folgt, dass

$$E \left[Z_t^2 \right] = E \left[\left(\int_0^t e^{-\xi s} dP_s \right)^2 \right] < \infty \quad \text{für alle festen } t \geq 0.$$

Die Bedingung “ $\Psi_{\xi}(2) < 0$ ” muss nicht erfüllt sein, da in unserem Fall nur bis t und nicht bis ∞ integriert wird. Also wurde (ii) bewiesen.

(iii) Folgt mit der Darstellung (4.9) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung direkt aus (i) und (ii), also

$$E \left[Y_t^2 \right] = E \left[e^{-2\xi t} y + e^{-\xi t} y Z_t + Z_t^2 \right] < \infty \quad \text{für alle festen } t \geq 0.$$

□

Lemma 4.3

Mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.2 gilt

- (i) $e^{-2\xi_t} y^2 f''(Y_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y^2 f''(y)$ in L^1 ,
- (ii) $Z_t^2 f''(Y_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ in L^1 ,
- (iii) $e^{-\xi_t} y Z_t f''(Y_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ in L^1 .

Beweis:

(i) Aus der Definition von Ψ_ξ in (4.10) und aus Lemma 4.2 (i) folgt $E[e^{-2\xi_t}] = e^{t\Psi_\xi(2)} < \infty$ und somit ist der stochastische Prozess $X_t = e^{-\xi_t - t\Psi_\xi(1)}$ ein quadratintegrierbares Martingal mit Erwartungswert 1, für das gilt

$$\begin{aligned} \left(E \left[\sup_{0 < s \leq t} e^{-2\xi_s} \right] \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(E \left[\left(\sup_{0 < s \leq t} X_s e^{t|\Psi_\xi(1)|} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{t|\Psi_\xi(1)|} \left(E \left[\sup_{0 < s \leq t} X_s^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2e^{t|\Psi_\xi(1)|} \sup_{0 < s \leq t} (E[X_s^2])^{\frac{1}{2}} \leq D_t < \infty \quad \text{für alle festen } t \geq 0. \end{aligned}$$

Beim dritten “ \leq ” wurde dabei die *Doobsche Ungleichung* für positive Martingale mit $p = q = 2$ verwendet (siehe Kap. I, Thm. 20 in Protter [2000]). Da f'' beschränkt ist, gilt $|f''(Y_s)| \leq K$ für alle s und somit ist $y^2 K \sup_{0 < s \leq t} e^{-2\xi_s}$ eine Majorante für $y^2 e^{-2\xi_t} f''(Y_t)$ mit $E[y^2 K \sup_{0 < s \leq t} e^{-2\xi_s}] < \infty$. Und außerdem gilt

$$e^{-2\xi_t} y^2 f''(Y_t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y^2 f''(y) \quad \text{f.s.,}$$

da ξ_t ein Lévy-Prozess mit $\xi_0 = 0$ und $Y_0 = 0$ ist. Daraus folgt mit dem *Satz von Lebesgue*, dass $E|e^{-2\xi_t} y^2 f''(Y_t) - y^2 f''(y)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ konvergiert.

(ii) Für die zweite Konvergenz wird verwendet, dass mit einer Konstanten $L > 0$ gilt

$$\begin{aligned} E[Z_t^2] &\leq L \cdot E \left[\sup_{0 < s \leq t} e^{-2\xi_s} \right] E[P, P]_t \\ &\leq L \cdot D_t^2 t E[P, P]_1 \leq \tilde{C} t, \end{aligned}$$

siehe Gleichung (8.2) in Lindner und Maller [2005]. Damit gilt

$$E[Z_t^2 f''(Y_t)] \leq K \tilde{C} t = O(t)$$

mit Konstanten \tilde{C} und K . $Z_t^2 f''(Y_t)$ konvergiert also für $t \rightarrow 0$ in L^1 gegen 0.

(iii) Als letztes benutzt man, dass mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} E [e^{-\xi t} y Z_t f''(Y_t)] &\leq y K E [e^{-\xi t} Z_t] \\ &\leq y K \sqrt{E [e^{-2\xi t}]} \sqrt{E [Z_t^2]} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

da $E [e^{-2\xi t}] < \infty$ und $\lim_{t \rightarrow 0} E [Z_t^2] = 0$. \square

Beweis von Satz 4.1:

Für $f \in \mathcal{D}(A)$ kann man A durch die Formel (3.6) berechnen. A ist also definiert durch

$$Af(y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_y(f(Y_t)) - f(y)}{t}.$$

Wir werden sehen, dass dieser Grenzwert für alle $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ existiert. Es gilt also $C_b^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$.

Als erstes wenden wir die Itô-Formel (Satz 2.19) auf $Z_t := f(Y_t)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} f(Y_t) - f(y) &= \\ &= \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) dY_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) d[Y, Y]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-}) \Delta Y_s\} \\ &= \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) p ds + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) \sigma_P dW_{P,s} - \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) d\left(\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}\right) \\ &\quad + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) r Y_{s-} ds + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) \sigma_R Y_{s-} dW_{R,s} + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) Y_{s-} d\left(\sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) \sigma_{P,t}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) Y_{s-}^2 \sigma_{R,t}^2 dt \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-}) \Delta Y_s\} \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit wird verwendet, dass $\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$ und $\sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i}$ „quadratic pure jump“ Semimartingale sind und dass W_R und W_P unabhängige Brownsche Bewegungen sind, sowie die hieraus folgenden Eigenschaften. Somit gilt für den stetigen Anteil der quadratischen Variation von Y

$$d[Y, Y]_t^c = \sigma_P^2 d[W_P, W_P]_t + Y_{t-}^2 \sigma_R^2 d[W_R, W_R]_t = \sigma_P^2 dt + Y_{t-}^2 \sigma_R^2 dt.$$

Im Folgenden bezeichnen $T_{P,i}$ und $T_{R,j}$ die Zeitpunkte des i -ten bzw. j -ten Sprungs der Poissonprozesse N_P bzw. N_R ($1 \leq i \leq N_{P,t}$, $1 \leq j \leq N_{R,t}$). Da N_P und N_R nach Voraussetzung unabhängige Poissonprozesse sind, ist $P(T_{P,i} = T_{R,j}) = 0$ für alle i ,

j und somit gilt $\Delta Y_{T_{P,i}} = -S_{P,i}$ und $Y_{T_{P,i}} = Y_{T_{P,i-}} - S_{P,i}$. Außerdem gilt nach Satz 2.12 $\Delta Y_{T_{R,j}} = Y_{T_{R,j}} - S_{R,j}$ und $Y_{T_{R,j}} = Y_{T_{R,j-}} + Y_{T_{R,j}} - S_{R,j}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-})\Delta Y_s\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{P,t}} \{f(Y_{T_{P,i}}) - f(Y_{T_{P,i-}}) + f'(Y_{T_{P,i-}})S_{P,i}\} \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} \{f(Y_{T_{R,i}}) - f(Y_{T_{R,i-}}) - f'(Y_{T_{R,i-}})Y_{T_{R,j}} - S_{R,j}\} \end{aligned}$$

Nun können die stochastischen Integrale bezüglich der zusammengesetzten Poissonprozesse als Lebesgue-Stieltjes Integrale geschrieben werden, so dass

$$\begin{aligned} \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) d\left(\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}\right) &= \sum_{i=1}^{N_{P,t}} f'(Y_{T_{P,i-}})S_{P,i} \quad \text{und} \\ \int_{0+}^t f'(Y_{s-})Y_{s-} d\left(\sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i}\right) &= \sum_{i=1}^{N_{R,t}} f'(Y_{T_{R,i-}})Y_{T_{R,i-}}S_{R,i} \end{aligned}$$

gilt (siehe Satz 2.13).

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} f(Y_t) - f(y) &= \int_{0+}^t f'(Y_{s-})pd_s + \int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_P dW_{P,s} \\ & \quad + \int_{0+}^t f'(Y_{s-})rY_{s-}ds + \int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_R Y_{s-}dW_{R,s} \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(\int_{0+}^t f''(Y_{s-})\sigma_{P,t}^2 dt + \int_{0+}^t f''(Y_{s-})Y_{s-}^2\sigma_{R,t}^2 dt \right) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_{P,t}} (f(Y_{T_{P,i}}) - f(Y_{T_{P,i-}})) + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} (f(Y_{T_{R,i}}) - f(Y_{T_{R,i-}})). \end{aligned}$$

Um $Af(x)$ zu berechnen, betrachten wir den Prozess Y_t nur in einer Umgebung der 0, also auf dem Intervall $[0, t]$ für ein $t > 0$ beliebig. Wir benötigen außerdem noch einige Resultate. Als erstes stellt man fest, dass

$$E \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_P dW_{P,s} \right] + E \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_R Y_{s-}dW_{R,s} \right] = 0 \quad \forall t \in [0, t_0]. \quad (4.11)$$

Die Gleichung (4.11) ist erfüllt, da f' stetig und beschränkt auf $[0, t]$ ist und da W_P und W_R Martingale mit Erwartungswert 0 sind sowie $E[\int_0^t Y_s^2 ds] = \int_0^t E[Y_s^2] ds < \infty$

ist (siehe Lemma 4.2).

Es gelten außerdem die beiden folgenden Gleichungen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} (f(Y_{T_{P,i}-} - S_{P,i}) - f(Y_{T_{P,i}-})) \right] = \lambda_P \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) \quad \text{und} \quad (4.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\sum_{i=1}^{N_{R,t}} (f(Y_{T_{R,i}-} + Y_{T_{R,i}-} S_{R,i}) - f(Y_{T_{R,i}-})) \right] = \lambda_R \int_{-1}^\infty f(y(1+x)) - f(y) dF_R(x)$$

Beweis von (4.12):

Mit $Z_i := f(Y_{T_{P,i}-} - S_{P,i}) - f(Y_{T_{P,i}-})$, $i \geq 1$ und $Z_0 = 0$ schreiben wir:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=0}^{N_{P,t}} Z_i \right] &= E \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{N_{P,t}=j} \sum_{i=1}^{N_{P,t}} Z_i \right] = \sum_{j=1}^{\infty} E \left[\mathbf{1}_{N_{P,t}=j} \sum_{i=1}^j Z_i \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^j Z_i | N_{P,t} = j \right] P(N_{P,t} = j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Außerdem gilt für den Poissonprozess N_P :

$$P(N_{P,t} = j) = e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^j}{j!}, \text{ also}$$

$$P(N_{P,t} = 0) = e^{-\lambda_P t}$$

$$P(N_{P,t} = 1) = e^{-\lambda_P t} (\lambda_P t)$$

$$P(N_{P,t} = 2) = e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} (\lambda_P t)^2 \quad \text{und} \quad P(N_{P,t} \geq 2) = o(t)$$

Hiermit ergibt sich für die linke Seite von (4.12):

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (E[Z_1 | N_{P,t} = 1] P(N_{P,t} = 1)) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=2}^{\infty} E \left[\sum_{i=0}^j Z_i | N_{P,t} = j \right] P(N_{P,t} = j) \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} e^{-\lambda_P t} (\lambda_P t) E[f(Y_{T_{P,1}-} - S_{P,1}) - f(Y_{T_{P,1}-}) | N_{P,t} = 1] \right) + 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} E[f(Y_{T_{P,1}-} - S_{P,1}) - f(Y_{T_{P,1}-}) | N_{P,t} = 1] \quad \text{wobei } T_{P,1} \in [0, t] \\ &\stackrel{(2)}{=} E[f(y - S_{P,1}) - f(y)] \\ &= \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) \quad \text{mit } F_P(x) \text{ Verteilung von } S_{P,i} \end{aligned}$$

zu(1):

Da f beschränkt ist, sei $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \stackrel{\text{def}}{=} M$ für ein $M > 0$. Also gilt $|f(x)| \leq M$ für alle x und $|Z_i| \leq 2M$ für alle i . Mit $Z_0 = 0$ gilt also

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=2}^{\infty} E \left[\sum_{i=0}^j |Z_i| \middle| N_{P,t} = j \right] P(N_{P,t} = j) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(E[|Z_1| + |Z_2| \middle| N_{P,t} = 2] P(N_{P,t} = 2) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=3}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^j |Z_i| \middle| N_{P,t} = j \right] P(N_{P,t} = j) \right) \\
 &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(4M e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} \lambda_P^2 t^2 + \sum_{j=3}^{\infty} 2M j e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^j}{j!} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(4M e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} \lambda_P^2 t \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left(2M \lambda_P \sum_{j=3}^{\infty} e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\
 &= 0 + \lim_{t \rightarrow 0} (2M \lambda_P P(N_{P,t} \geq 2)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (2M \lambda_P o(t)) = 0.
 \end{aligned}$$

zu(2):

Durch die Bedingung auf $N_{P,t} = 1$ wissen wir, dass der Prozess Y_t im Intervall $[0, t]$ genau einen Sprung macht, der aus dem Prozess N_P resultiert. Dieser Sprung findet zum Zeitpunkt $T_{P,1}$ statt. Es gilt also $T_{P,1} \in [0, t]$. Für t klein genug macht der Prozess Y_t f.s. keinen weiteren Sprung in diesem Intervall. Insbesondere hat der Prozess N_R dort f.s. keine Sprungstelle, da $P(N_{P,t} \geq 1) = O(t) \rightarrow 0$ für t gegen 0. Deswegen gilt $\lim_{t \rightarrow 0} Y_t = \lim_{t \rightarrow 0} Y_{T_{P,1}-} = y$ und wir können wegen der Beschränktheit von f den Satz von Lebesgue anwenden.

Damit ist die Formel (4.12) bewiesen. Der Beweis der zweiten Formel verläuft analog. \square

Als letztes sind noch die folgenden beiden Gleichheiten zu zeigen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-}) (p + r Y_{s-}) ds \right] = f'(y) (p + r y)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\int_{0+}^t \frac{1}{2} f''(Y_{s-}) (\sigma_P^2 + Y_{s-}^2 \sigma_R^2) ds \right] = \frac{1}{2} f''(y) (\sigma_P^2 + y^2 \sigma_R^2). \quad (4.14)$$

Wir beschränken uns darauf (4.14) zu beweisen. Bei der oberen Gleichung geht man analog vor. Als erstes soll gezeigt werden, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_R^2 f''(Y_{s-}) Y_{s-}^2 ds \right] = \frac{1}{2} \sigma_R^2 f''(y) y^2$$

gilt.

Da f'' beschränkt ist und da $Y_0 = 0$ gilt, erhält man mit Lemma 4.2 und Lemma 4.3 zusammen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t Y_{s-}^2 f''(Y_{s-}) ds \right] &= \int_0^t E \left[(ye^{-\xi s} + Z_s)^2 f''(Y_s) \right] ds \\ &= \int_0^t E \left[y^2 e^{-2\xi s} f''(Y_s) + 2ye^{-\xi s} Z_s f''(Y_s) + Z_s^2 f''(Y_s) \right] ds \\ &= \int_0^t (y^2 f''(y) + O(t)) ds \quad \text{mit } O(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aus (4.15) folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left(\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_R^2 f''(Y_{s-}) Y_{s-}^2 ds \right) &= \frac{1}{2} \sigma_R^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t (y^2 f''(y) + O(t)) ds \\ &= \frac{1}{2} \sigma_R^2 y^2 f''(y) \end{aligned}$$

und weiter folgt wieder mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E \left(\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_P^2 f''(Y_{s-}) ds \right) = \frac{1}{2} \sigma_P^2 f''(y).$$

Damit wurde die Gleichung (4.14) bewiesen.

Alles zusammengenommen erhält man dann

$$\begin{aligned} Af(x) &= f'(y)(p + ry) + \frac{1}{2} f''(y)(\sigma_P^2 + y^2 \sigma_R^2) \\ &\quad + \lambda_P \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) + \lambda_R \int_{-1}^\infty f(y(1-x)) - f(y) dF_R(x). \end{aligned}$$

□

Der infinitesimale Generator A stellt leider einen ziemlich komplizierten Operator dar, bei dem sowohl Integrale als auch Differentiale vorkommen. Die daraus hervorgehenden *Integro-Differentialgleichungen* erlauben eine explizite analytische Lösung deswegen nur in Spezialfällen.

Im nächsten Kapitel werden jedoch zwei wichtige Beispiele für Risikoprozesse behandelt, bei denen eine analytische Lösung für die Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi(y)$ bzw. die Laplacetransformierte der Ruinzeit $q_\alpha(y)$ unter Verwendung des infinitesimalen Generators A berechnet werden kann. Das Vorgehen ist dabei von der Theorie her relativ einfach und deutlich weniger aufwändig als die alternative Methode, die im letzten Teil des nächsten Kapitels behandelt wird. Außerdem lassen sich damit auch numerische Lösungen für allgemeine Fälle berechnen.

In Kapitel 6.1 wird dann ein numerisches Verfahren vorgestellt, welches mit Hilfe des infinitesimalen Generators A , aufbauend auf die Theorie von Kapitel 5, die Ruinwahrscheinlichkeiten des stochastischen Prozesses Y berechnet. Dem Generator von Y kommt also eine Schlüsselrolle bei der Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten unseres Risikoprozesses zu. Somit kann man den Satz 4.1 als das Fundament betrachten, auf das der Rest dieser Diplomarbeit aufbaut.

Kapitel 5

Die Ruinwahrscheinlichkeit des Risikoprozesses

In diesem Kapitel geht es darum, die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit und die Laplacetransformierte der Ruinzeit des Risikoprozesses zu finden. Diese werden dabei als Funktion $\psi(y)$ bzw. $q_\alpha(y)$ der Anfangsrisikoreserve y betrachtet. Zuerst wird bewiesen, dass man $\psi(y)$ und $q_\alpha(y)$ jeweils als Lösung eines Randwertproblems erhalten kann und es wird das allgemeine Vorgehen dabei erläutert. Im zweiten Abschnitt werden dann zwei Beispiele behandelt. Danach wird das Randwertproblem in eine Form gebracht, die sich für numerische Lösungsansätze gut eignet, und die theoretischen Grundlagen für die numerischen Lösungsmethoden im sechsten Kapitel werden bereitgestellt. Der letzte Abschnitt des Kapitels stellt einen alternativen Ansatz zum Auffinden der Ruinwahrscheinlichkeit vor. Dort werden auch einige wichtige Erkenntnisse über die Gestalt des Risikoprozesses gewonnen.

5.1 Ruinwahrscheinlichkeiten als Lösung eines Randwertproblems

Mit Hilfe des infinitesimalen Generators A des Risikoprozesses Y_t lässt sich durch Formulierung eines Randwertproblems die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ und die Laplacetransformierte der Ruinzeit $q_\alpha(y)$ bestimmen. Dieses Resultat geht auf [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) zurück und ist in dem folgendem Satz wiedergegeben.

Satz 5.1 (Ruin und Randwertprobleme)

Es sei Y der Risikoprozess aus Kapitel 4 und $T_y = \inf\{t : Y_t < 0\}$ der Zeitpunkt des Ruins beim Anfangskapital $Y_0 = y$ mit $T_y = \infty$ falls kein Ruin eintritt.

- (i) *Es sei eine Funktion ψ mit $\psi|_{[0,\infty)} \in C_b^2$ gegeben, also eine zweimal stetig differenzierbare und beschränkte Funktion, die auch beschränkte Ableitungen besitzt. Bei 0 ist jeweils die rechte Ableitung gemeint. Falls $\psi(y)$ die Gleichung*

$A\psi(y) = 0$ für $y > 0$ löst und zusätzlich die Randbedingungen

$$\begin{aligned}\psi(y) &= 1 \quad \text{für } y < 0, \\ \psi(0) &= 1 \quad \text{falls } \sigma_P^2 > 0 \text{ und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) &= 0\end{aligned}$$

erfüllt, dann gilt

$$\psi(y) = P(T_y < \infty).$$

(ii) Es sei eine Funktion $q_\alpha(y)$ mit $q_\alpha|_{[0, \infty)} \in C_b^2$ gegeben, also eine zweimal stetig differenzierbare und beschränkte Funktion, die auch beschränkte Ableitungen besitzt. Bei 0 ist dabei jeweils die rechte Ableitung gemeint. Falls $q_\alpha(y)$ die Gleichung $Aq_\alpha(y) = \alpha q_\alpha$ für $y > 0$ löst und zusätzlich die Randbedingungen

$$\begin{aligned}q_\alpha(y) &= 1 \quad \text{für } y < 0, \\ q_\alpha(0) &= 1 \quad \text{falls } \sigma_P^2 > 0 \text{ und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} q_\alpha(y) &= 0\end{aligned}$$

erfüllt, dann gilt

$$q_\alpha(y) = E[e^{-\alpha T_y}].$$

Beweis von (i):

Sei ψ_n eine auf dem ganzen Definitionsbereich zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\psi_n = \psi$ auf $(-\infty, -1/n] \cup [0, \infty)$. Die Funktion ψ_n verbindet also die Punkte $(-1/n, 1)$ und $(0, \psi(0))$ (bzw. $(0, 1)$ im Fall $\sigma_P^2 > 0$) so, dass sie zweimal stetig differenzierbar und beschränkt ist. Die Familie $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$ sei außerdem *gleichmäßig beschränkt*, das heißt es gilt $\psi_n(y) \leq M$ für alle n und y . Dies ist möglich, da $\psi(0)$, $\psi'(0+)$ und $\psi''(0+)$ beschränkt und stetig von rechts sind und außerdem $\psi(y) = 1$ für $y < 0$ ist sowie $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$ gilt.

Man benötigt die Hilfsfunktion ψ_n , da nicht gegeben ist dass ψ an der Stelle 0 zweimal stetig differenzierbar, und somit $\psi \notin C_b^2(\mathbb{R})$ ist, also der infinitesimale Generator unseres für ψ nicht definiert ist, wohingegen $\psi_n \in C_b^2(\mathbb{R})$ ist.

Es sei $T^b := \inf\{t : Y_t \geq b\}$ für ein $b > y$, womit für die Stoppzeit $t \wedge T_y \wedge T^b$ gilt, dass $E(t \wedge T_y \wedge T^b) < \infty$ ist. Dies folgt aus $Y_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ auf $\{T_y = \infty\}$ (vgl. S. 968 [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#)). Also kann man die *Dynkinsche Erwartungswertformel* aus Satz 3.6 auf ψ_n anwenden:

$$E(\psi_n(Y_{t \wedge T_y \wedge T^b})) = E\left(\int_0^{t \wedge T_y \wedge T^b} A\psi_n(Y_s) ds\right) + \psi_n(y) = \psi_n(y)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $A\psi(y) = 0$ für $y > 0$ und somit nach Konstruktion auch $A\psi_n(y) = 0$ auf $y > 0$.

Man benötigt nun einige Grenzwerte. Zuerst stellt man fest, dass nach Definition von ψ_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(y) = \psi(y)$$

gilt (punktweise Konvergenz). Danach folgert man aus der gleichmäßigen Beschränktheit von ψ_n mit dem *Satz von Lebesgue* (Satz 2.2), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\psi_n(Y_{t \wedge T_y})) = E(\psi(Y_{t \wedge T_y}))$$

für alle $t \geq 0$ ist. Außerdem gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} E(\psi_n(Y_{t \wedge T_y \wedge T^b})) = E(\psi_n(Y_{t \wedge T_y}))$$

für jedes feste $t \geq 0$ nach dem *Satz von Lebesgue*. Diesen kann man anwenden, da mit $\psi_n(Y_{t \wedge T_y \wedge T^b}) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \psi_n(x) < \infty$ eine Majorante für alle b gegeben ist, und da aus $\lim_{b \rightarrow \infty} T^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \inf\{t : Y_t \geq b\} = \infty$ (f.s.) folgt, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} Y_{t \wedge T_y \wedge T^b} = Y_{t \wedge T_y}$ (f.s.) und somit auch $\lim_{b \rightarrow \infty} \psi_n(Y_{t \wedge T_y \wedge T^b}) = \psi_n(Y_{t \wedge T_y})$. Insgesamt ergibt sich nun

$$E(\psi(Y_{t \wedge T_y})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} E(\psi_n(Y_{t \wedge T_y \wedge T^b})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(y) = \psi(y).$$

Weiter gilt nach Voraussetzung $\psi(Y_{T_y}) = 1$, da $Y_{T_y} < 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(Y_t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$ (f.s.) auf $\{T_y = \infty\}$, da dort $Y_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ (siehe [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#)). Also erhält man

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} E(\psi(Y_{t \wedge T_y})) = \lim_{t \rightarrow \infty} [E(\psi(Y_t) \mathbf{1}_{\{t \leq T_y\}} + \psi(Y_{T_y}) \mathbf{1}_{\{t > T_y\}})] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} E(\mathbf{1}_{\{T_y < t\}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(T_y < t) \\ &= P(T_y < \infty). \end{aligned}$$

Das erste „=" gilt wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\psi(Y_t) \mathbf{1}_{\{t \leq T_y\}}) = 0$. Dies folgt aus dem Satz von Lebesgue mit der Majorante $\sup \psi(y)$ und weil $\lim_{t \rightarrow \infty} (\psi(Y_t) \mathbf{1}_{\{t < T_y\}}) = 0$, denn für $t \rightarrow \infty$ gilt auf

$$\begin{aligned} \{T_y = \infty\}: \mathbf{1}_{\{T_y > t\}} &\rightarrow \mathbf{1}_{\{T_y = \infty\}} = 1 \text{ und } \psi(Y_t) \rightarrow \psi(\infty) = 0, \text{ da } Y_t \rightarrow \infty, \\ &\text{also } \psi(Y_t) \mathbf{1}_{\{t < T_y\}} \rightarrow 0 \text{ und auf} \\ \{T_y < \infty\}: \mathbf{1}_{\{T_y > t\}} &\rightarrow 0 \text{ und } \psi(Y_t) < \infty, \\ &\text{also } \psi(Y_t) \mathbf{1}_{\{t < T_y\}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dabei ist immer die fast sichere Konvergenz gemeint.

Im Fall $\sigma_P^2 > 0$ folgt aus den Eigenschaften der Brownschen Bewegung, dass Y_t bei Start in $Y_0 = y = 0$ sofort einen negativen Wert annimmt, und somit der sichere

Ruin eintritt. Also kommt in diesem Fall noch die Bedingung $\psi(0) = 1$ hinzu. Damit ist (i) bewiesen.

Beweis von (ii):

Es sei nun $\alpha > 0$ beliebig und $q_\alpha^n \in C_b^2(\mathbb{R})$ eine Hilfsfunktion analog zu ψ_n im Beweis von (i). Da das Vorgehen hier diesbezüglich gleich wie in (i) ist, wird weiterhin q_α statt der Hilfsfunktion geschrieben. Für den Beweis benötigt man den *backward evolution Operator*, der durch

$$\tilde{A}g(t, y) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (E_y [g(t, Y_t)] - g(t, y))$$

definiert ist. Diesen kann man wie den infinitesimalen Generator im Beweis von Satz 4.1 berechnen. Dafür benötigt man jedoch die Itô-Formel für Funktionen $g(t, x) \in C^1 \times C^2$. Diese liefert im Unterschied zur Version aus Satz (2.19) auf der rechten Seite noch den zusätzlichen Term $\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} g(s, y) ds$.

Damit kann man nun die Schritte des Beweises von Satz 4.1 für $\tilde{A}g(t, y)$ statt für $Aq_\alpha(y)$ durchgehen. Mit der Funktion $g(t, y) = e^{-\alpha t} q_\alpha(y)$ erhält man dann

$$\begin{aligned} \tilde{A}g(t, y) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} E \left[\int_0^t -\alpha e^{-\alpha t} q_\alpha(Y_t) dt \right] + Aq_\alpha(y) \\ &= -\alpha q_\alpha(y) + Aq_\alpha(y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei wurde verwendet, dass die Funktion $e^{-\alpha t}$ und somit auch $g(t, y)$ beschränkt ist und dass $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\alpha t} = 1$ sowie $Y_0 = y$ ist, so dass die Voraussetzungen für den Satz von Lebesgue erfüllt sind.

Genauer über den backward evolution Operator findet man im dritten Kapitel von [Fleming und Soner \[1993\]](#). Dort wird auch festgestellt, dass

$$M_t := g(t, Y_t) - g(0, y) - \int_0^t \tilde{A}g(s, Y_s) ds$$

ein Martingal mit $E[M] = 0$ ist. Somit gilt für die f.s. endliche Stoppzeit $t \wedge T_y \wedge T^b$ aus (i)

$$E [M_{t \wedge T_y \wedge T^b}] = 0$$

und mit der Bedingung $Aq_\alpha(y) = \alpha q_\alpha(y)$ für $y \geq 0$ sowie mit der Darstellung für \tilde{A} aus (5.1) folgt nach Anwendung des Satzes von Lebesgue wie im Beweis von (i)

$$E (e^{-\alpha(t \wedge T_y)} q_\alpha(Y_{t \wedge T_y})) = q_\alpha(y).$$

Mit dem Grenzwert $t \rightarrow \infty$ erhält man

$$\begin{aligned} q_\alpha(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} E (e^{-\alpha(t \wedge T_y)} q_\alpha(Y_{t \wedge T_y})) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [E (e^{-\alpha t} q_\alpha(Y_t) \mathbf{1}_{\{T_y > t\}}) + E (e^{-\alpha T_y} q_\alpha(Y_{T_y}) \mathbf{1}_{\{T_y \leq t\}})] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} E (e^{-\alpha T_y} \mathbf{1}_{\{T_y \leq t\}}) \\ &= E (e^{-\alpha T_y}) \text{ da } P(\{T_y \leq \infty\}) = 1. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit folgt aus dem Satz von Lebesgue, da $e^{-\alpha t}q_\alpha(Y_t)$ beschränkt und $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t}q_\alpha(Y_t) = 0$ ist.

Zum Schluss erhält man noch die Bedingung $q_\alpha(0) = 1$ für $\sigma_P^2 > 0$ wie in Teil (i) wegen den Eigenschaften der Brownschen Bewegung. \square

Aus Theorem 5.1 folgt, dass $q_\alpha(y)$ und $\psi(y)$ als Funktionen der Anfangsrisikoreserve y eindeutig bestimmt sind, soweit die Bedingungen des Theorems erfüllt sind. Um die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit oder die Laplacetransformierte der Ruinzeit zu finden, muss also nur noch das so erhaltene Randwertproblem gelöst werden.

Dieses ist jedoch kein normales Randwertproblem aus dem Bereich der Differentialgleichungen, da die Lösung einer *Integro-Differentialgleichung* (kurz: *Integro-DGL*) unter Randbedingungen gesucht wird. In Integro-DGLen kommen sowohl Ableitungen der gesuchten Funktion als auch Integrale über diese vor. Leider sind diese Integro-DGLen recht kompliziert und können in der Regel nicht direkt behandelt werden, sondern müssen durch Differentiation oder Integration in eine Integral- oder eine Differentialgleichung höherer Ordnung überführt werden um numerisch oder analytisch gelöst werden zu können.

In dieser Diplomarbeit werden beide Wege beschrritten werden. Durch Differentiation und unter Verwendung von Rechenregeln bekannter Differentialgleichungstypen werden in Kapitel 5.2 analytische Lösungen berechnet. In Kapitel 5.3 wird dann die Integro-DGL durch Integration in eine Form gebracht, die sich gut zur weiteren numerischen Behandlung eignet. Dies wird dann das Thema des 6. Kapitels sein.

Im Folgenden soll die zuerst erwähnte Methode genauer vorgestellt werden. Das Ziel ist also, durch geeignete Differentiation der Integro-DGL $Aq_\alpha(y) = \alpha q_\alpha(y)$ bzw. $A\psi(y) = 0$ eine analytische Lösung für die Laplacetransformierte der Ruinzeit bzw. für die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen. Wie man dabei vorgeht, wird anhand zweier Beispiele in Kapitel 5.2 gezeigt. Zuvor müssen aber noch zwei wichtige Fragen beantworten werden:

1. Welche Gestalt haben die Ruinwahrscheinlichkeiten in dem hier behandelten Modell? Sind insbesondere die Voraussetzungen bezüglich deren Glattheit in Theorem 5.1 erfüllt, bzw. unter welchen Bedingungen?
2. Für analytische Berechnungen müssen Integro-DGLen durch Differentiation in reine Differentialgleichungen überführt werden. Wie erhält man dann neue Randwertbedingungen, um den Informationsverlust, der durch die Differentiation entsteht, auszugleichen?

5.1.1 Die Struktur der Ruinwahrscheinlichkeit

In Satz 5.1 wird unter anderem gefordert, dass $\psi(y)$ zweimal stetig differenzierbar auf $\{y \geq 0\}$ ist. Jedoch werden in [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) keine Bedingungen an die Parameter und Schadenverteilungen des Risikoprozesses Y angegeben, unter welchen diese Annahme erfüllt ist. In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Gestalt die Funktion $\phi(y) := 1 - \psi(y)$ und damit auch $\psi(y)$ selbst hat.

In den letzten Jahren haben sich einige Autoren mit dem Risikomodell von J. Paulsen beschäftigt und dessen Theorem 2.1 aus [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) wurde oft zitiert (hier Satz 5.1). Dabei wurde dieses meist für die *Überlebenswahrscheinlichkeit* $\phi(y) := 1 - \psi(y)$ umformuliert. A bezeichnet im Folgenden wieder den infinitesimalen Generator des Risikoprozesses Y .

Satz 5.2 (Alternative Formulierung von Satz 5.1)

Es sei $\phi(y)$ eine Funktion mit $\phi|_{[0,\infty)} \in C_b^2$, also beschränkt und zweimal stetig differenzierbar mit ϕ' und ϕ'' beschränkt auf $y \geq 0$. Bei 0 ist dabei jeweils die rechte Ableitung gemeint. Falls $\phi(y)$ die Gleichung $A\phi(y) = 0$ für $y > 0$ löst und zusätzlich die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \phi(y) &= 0 \quad \text{für } y < 0, \\ \phi(0) &= 0 \quad \text{falls } \sigma_P^2 > 0 \text{ und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) &= 1 \end{aligned}$$

erfüllt, dann ist $\phi(y)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit des Risikoprozesses Y .

Insbesondere G. Wang hat sich mit dem Risikomodell von J. Paulsen beschäftigt und erstmals in [Wang und Wu \[2001\]](#) für das (einfachere) Modell mit $\sigma_P = \lambda_R = 0$ Bedingungen angegeben, unter denen $\phi(y)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Falls $r > \frac{1}{2}\sigma_R^2$ und $p > \lambda_P E(S_P)$ gilt, ist dies insbesondere für folgende Schadenverteilungen $F_P(x)$ der Schäden S_P erfüllt: die Exponentialverteilung, die gemischte Exponentialverteilung, die Gamma(n, β)-Verteilung mit $n \geq 2$ und die Lognormalverteilung.

In [Wang u. a. \[2004\]](#) werden die Bedingungen dann auf das Modell mit $\lambda_R > 0$ ausgeweitet, also auf unser Modell mit $\sigma_P = 0$. Das heißt, der Prämienprozess P ist gleich wie im klassischen Risikomodell, insbesondere gibt es *keinen Störterm* in Form einer Brownschen Bewegung. Der Ertragsprozess R ist dagegen wie in unserem Modell. Es werden nun die Ergebnisse für dieses Modell zusammengefasst.

Satz 5.3 *Es gelten fortan zusätzlich die Modellannahmen*

$$r > \frac{1}{2}\sigma_R^2 \quad \text{und} \quad p > \lambda_P E(S_P).$$

Dann gilt $\psi(y) < 1$ für $y \geq 0$ und $\phi(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = 1$.

Beweis: Siehe Kap. II in Wang u. a. [2004] und in Wang und Wu [2001]. Für ein allgemeineres Modell findet man die entsprechenden Aussagen in Paulsen [1998b].

Die letzte Bedingung ist übrigens die *Nettoprofitbedingung* des klassischen Risikomodells. Sie besagt, dass die erwarteten Prämieinnahmen größer sein müssen als die erwarteten Schadenforderungen. Wenn das betrachtete Versicherungsunternehmen zum Ziel hat, Gewinne zu erwirtschaften, scheint diese Annahme also keine echte Einschränkung zu sein. Die erste Bedingung besagt, dass die deterministische Komponente des Anlageprozesses R groß genug im Vergleich zur Varianz der Störschwankungen sein muss. Inwieweit dies in der Praxis eine Einschränkung bedeutet, müsste gegebenenfalls überprüft werden.

Man beachte, dass in dem Modell von G. Wang $\sigma_P = 0$ ist und somit kein sicherer Ruin für $y = 0$ eintritt.

Unter der Verwendung von expliziten Formeln für Verteilungen von exponentialen Funktionalen der Brownschen Bewegung kann man folgende zwei Sätze beweisen, die sich als Theoreme 2.2 und 2.3 in Wang u. a. [2004] finden.

Satz 5.4 *Die Überlebenswahrscheinlichkeiten $\phi(y)$ sind stetige Funktionen von y auf dem Intervall $[0, \infty)$.*

Im folgenden Satz wird vorausgesetzt, dass die Dichten $f_P = F'_P$ und $f_R = F'_R$ von S_P beziehungsweise S_R existieren.

Satz 5.5 *Es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

- (i) f_P und f_R sind zweimal stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ bzw. auf $(-1, \infty)$.
- (ii) Die Limiten $y \downarrow 0$ von $f_P(y)$, $f'_P(y)$, $f''_P(y)$ und $y \downarrow -1$ von $f_R(y)$, $f'_R(y)$ und $f''_R(y)$ existieren.
- (iii) $\int_0^\infty |f'_P(z)|dz$, $\int_0^\infty |f''_P(z)|dz$, $\int_{-1}^\infty (1+z)|f'_R(z)|dz$ und $\int_{-1}^\infty (1+z)^2|f''_R(z)|dz < \infty$.
- (iv) $\lambda_P + \lambda_R > 2r + \sigma_R^2$

Dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ des Risikoprozesses Y und dessen erste Ableitung ϕ' beschränkt auf $[0, \infty)$. Dazu ist $\phi(y)$ monoton steigend und zweimal stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$.

Beweis: Siehe Thm. 2.3 in Wang u. a. [2004] und in Wang und Wu [2001].

Unter den Bedingungen des Satzes 5.5 sind außerdem die Voraussetzungen von Theorem 5.2 erfüllt und man erhält die Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ als Lösung des entsprechenden Randwertproblems (siehe S. 265 in Wang u. a. [2004]).

Ein großes Manko der beiden vorangehenden Sätzen ist, dass sie nur für das eingeschränkte Modell mit $\sigma_P = 0$ gelten, also keine Schwankungskomponente $\sigma_P W_P$

zugelassen ist. Wie wir in Kapitel 6.1 sehen werden, hat J. Paulsen in [Paulsen u. a. \[2005\]](#) bewiesen, dass unter bestimmten Bedingungen die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$ sogar viermal stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist. Dieser gilt allerdings wiederum nur unter einer Modellvereinfachung, nämlich für den Fall $\lambda_R = 0$.

J. Cai und H. Yang beschäftigen sich in [Cai und Yang \[2005\]](#) mit dem Risikomodell von J. Paulsen und greifen auch die Überlegungen aus [Wang u. a. \[2004\]](#) über die für die Anwendung des Satzes 5.2 nötigen Voraussetzungen auf. Sie beweisen dann, dass die Existenz einer stetigen Dichte von S_P genügt, um zu garantieren, dass die Funktion $\phi(y)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Dazu formulieren sie zuerst die stochastische Differentialgleichung (4.4) in Form des dynamischen Systems

$$\begin{aligned} dY_t &= (p + R_t Y_t)dt + \sigma_P dW_{P,t} - dL_{P,t}, & Y_0 &= y \\ dR_t &= rdt + \sigma_R dW_{R,t} + dL_{R,t}, & R_0 &= 0. \end{aligned}$$

Danach wird das Problem einer optimalen Dividendenauszahlung des Versicherungsunternehmens betrachtet, wobei der kontinuierliche Auszahlungsfluss gleich αX_t sein soll. Die, bezogen auf die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$, optimale Auszahlungsrate ist dann $\alpha = 0$.

Unter Verwendung der *HJB-Gleichung* aus der stochastischen Kontrolle kann dann der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 5.6 *Es seien p , λ_P und σ_P positiv. Unter der Annahme, dass die Schadenforderungen S_P eine stetige Dichte $f_P(x)$ besitzen, gilt:*

Die Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y) := 1 - \psi(y)$ ist nicht negativ, monoton wachsend und konkav und es gilt $\phi(\infty) = 1$. Außerdem ist $\phi(y)$ stetig auf $[0, \infty)$ und zweimal stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$.

Beweis: Siehe Theorem 2.1 in [Cai und Yang \[2005\]](#) und die Verweise darin auf [Hipp und Plum \[2003\]](#).

Damit wissen wir, wie für unser Risikomodell die Funktion $\phi(y)$ der Ruinwahrscheinlichkeit aussieht. J. Cai und H. Yang haben dieses Resultat unter der relativ leichten Annahme, dass $f_P(x)$ stetig ist, erhalten. Dies erscheint auf den ersten Blick etwas überraschend, da in [Wang u. a. \[2004\]](#) für ein einfacheres Modell deutlich strengere Annahmen getroffen wurden. Es ist jedoch festzuhalten, dass in [Cai und Yang \[2005\]](#) $\sigma_P > 0$ vorausgesetzt ist, der Satz also nicht mehr gilt, wenn kein Schwankungsterm W_P im Modell vorhanden ist. Die Ursache hierfür könnte die stabilisierende Wirkung dieses Störterms sein, die auch in [Paulsen u. a. \[2005\]](#) angesprochen wird. Wie wir im 6. Kapitel sehen werden, bringt nämlich gerade das Risikomodell mit $\sigma_P = 0$ und $\sigma_R > 0$ einige Probleme mit sich.

Die Bedingungen aus Satz 5.6 garantieren für den Fall $R_t = rt$, also für das Risikomodell unter konstanter Verzinsung, dass $\phi(y)$ sich als Lösung des Randwertproblems aus 5.2 ergibt. Für den allgemeinen Fall wurde dies dort aber leider nicht gezeigt.

5.1.2 Das Vorgehen bei der Bestimmung analytischer Lösungen

Im Anschluss an Satz 5.1 wurde bereits erwähnt, dass in manchen Fällen die Möglichkeit besteht, eine *Integro-DGL* durch Differentiation in eine *reine Differentialgleichung* zu überführen. Für diese kann man dann mit Hilfe der Theorie der Differentialgleichungen eine analytische Lösung bestimmen, oder, falls dies nicht möglich ist, mit Hilfe eines numerischen Verfahrens für Randwertprobleme numerische Lösungen berechnen.

Im nächsten Abschnitt wird das Vorgehen dabei anhand zweier Beispiele, für die analytische Lösungen berechnet werden können, vorgeführt. Zuvor sind aber noch einige Überlegungen notwendig, die nun für das allgemeine Modell gemacht werden.

Es wird im Folgenden nur noch die Integro-DGL $Aq_\alpha(y) = \alpha q_\alpha(y)$, $\alpha \geq 0$ aus dem zweiten Teil von Theorem 5.1 betrachtet, da diese den Fall aus dem ersten Teil mit einschließt. Man setze einfach $\alpha = 0$ und $q_0(y) = \psi(y)$.

Mit der Formel (3.6) für den infinitesimalen Generator A des Risikoprozesses Y lautet die Gleichung $Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha(y) = 0$ ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} q'_\alpha(y)(p + ry) + \frac{1}{2}q''_\alpha(y)(\sigma_P^2 + y^2\sigma_R^2) \\ + \lambda_P \int_0^\infty q_\alpha(y-x) - q_\alpha(y) dF_P(x) \\ + \lambda_R \int_{-1}^\infty q_\alpha(y(1-x)) - q_\alpha(y) dF_R(x) - \alpha q_\alpha(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Diese Gleichung kann nun durch *Differentiation* in eine Form ohne Integrale gebracht werden. Da durch die Differentiation Information verloren geht, benötigt man aber eine zusätzliche Randwertbedingung, um den so entstandenen Informationsverlust auszugleichen. Diese erhält man, indem man den Grenzwert $y \downarrow 0$ für (5.2) berechnet und dabei die Randwertbedingungen aus Theorem 5.1 (ii) benutzt. Das heißt, es muss der Grenzwert

$$\lim_{y \downarrow 0} (Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha(y)) = 0$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} q_\alpha(y) &= 1 \quad \text{für } y < 0, \\ q_\alpha(0) &= 1 \quad \text{falls } \sigma_P^2 > 0 \quad \text{und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} q_\alpha(y) &= 0 \end{aligned}$$

berechnet werden.

Damit erhält man

- für den Fall $\sigma_P^2 > 0$ die neue Nebenbedingung

$$\begin{aligned} q'_\alpha(0+)p + \frac{1}{2}q''_\alpha(0+)(\sigma_P^2 + 0) + \lambda_P \int_0^\infty q_\alpha(0-x) - q_\alpha(0)dF_P(x) \\ + \lambda_R \int_{-1}^\infty q_\alpha(0) - q_\alpha(0)dF_R(x) - \alpha q_\alpha(0) = \\ q'_\alpha(0+)p + \frac{1}{2}q''_\alpha(0+)\sigma_P^2 - \alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

- und für den Fall $\sigma_P^2 = 0$ die neue Nebenbedingung

$$\begin{aligned} q'_\alpha(0+)p + \lambda_P \int_0^\infty q_\alpha(0-x) - q_\alpha(0)dF_P(x) + 0 - \alpha q_\alpha(0) = \\ q'_\alpha(0+)p + \lambda_P \int_0^\infty dF_P(x) - \lambda_P q_\alpha(0) \int_0^\infty dF_P(x) - \alpha q_\alpha(0) = \\ q'_\alpha(0+)p - (\alpha + \lambda_P)q_\alpha(0) + \lambda_P = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Es gibt auch Fälle, in denen die ursprüngliche Gleichung mehrmals differenziert werden muss, um eine integralfreie Darstellung zu erreichen. Wenn man die Gleichung (5.2) *zweimal differenzieren* muss, so hat man den Grenzwert $y \downarrow 0$ der Gleichung $(d/dy)(Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha(y)) = 0$ zu betrachten. Es wird dabei angenommen, dass eine stetige Dichte $f_P(x) = F'_P(x)$ auf dem Intervall $[0, \varepsilon]$ existiert. An der Stelle 0 wird die rechte Ableitung betrachtet. [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) erhalten dann

- für den Fall $\sigma_P^2 > 0$ die zusätzliche Randbedingung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_P^2 q'''_\alpha(0+) + \left(p - \frac{\sigma_P^2}{2p} (r + \lambda_R E[S_R] - \lambda_P - \alpha) \right) q''_\alpha(0+) \\ + \frac{\alpha}{p} (r + \lambda_R E[S_R] - \lambda_P - \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

- und für den Fall $\sigma_P^2 = 0$ zusätzliche Randbedingung

$$\begin{aligned} pq''_\alpha(0+) + \left(r + \frac{p\lambda_P}{\alpha + \lambda_P} f_P(0) + \lambda_R E[S_R] - \lambda_P - \alpha \right) q'_\alpha(0+) \\ - \frac{\alpha\lambda_P}{\alpha + \lambda_P} f_P(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Mit diesen Beobachtungen ist es nun möglich, analytische Lösungen für die Laplacetransformierte $q_\alpha(y)$ und die Ruinfunktion $\psi(y)$ des Risikoprozesses Y_t zu bestimmen. Dies wird in Kapitel 5.2 anhand zweier Beispiele gezeigt.

5.2 Zwei Beispielmodelle unter deterministischer Verzinsung

In diesem Kapitel werden zwei Beispiele betrachtet, bei denen durch Anwendung des Satzes 5.1 analytische Lösungen für die Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi(y)$ gefunden werden können. In beiden Beispielen sind die Schadenforderungen S_P exponentialverteilt und $\lambda_R = \sigma_R = 0$, das heißt, wir haben hier keine zufällige, sondern eine deterministische Verzinsung.

Um analytische Lösungen zu bestimmen, benötigen wir einige Resultate aus der Theorie der *Konfluenten Hypergeometrischen Differentialgleichungen*. Diese DGLen sind in der Literatur sehr ausführlich behandelt worden. Wir orientieren uns bei der folgenden kurzen Zusammenfassung an dem Buch Slater [1960].

Konfluente Hypergeometrische Differentialgleichungen haben die Form

$$zh''(z) + (b - z)h'(z) - az = 0. \quad (5.7)$$

Die Lösungen $h(x)$ dieser Gleichung haben die Gestalt

$$h(x) = C_1 F(a, b, x) + C_2 U(a, b, x) \quad (5.8)$$

mit Konstanten C_1 und C_2 . Wir schreiben $h(x) = \mathcal{F}(a, b, x)$.

$F(a, b, x)$ heißt *Krummersche Funktion* und ist definiert durch die Reihe

$$F(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)3!}x^3 + \dots,$$

welche für $b \neq 0, -1, -2, \dots$ konvergiert. Sie stellt die einfachste Lösung der DGL (5.7) dar. Eine weitere Lösung ist

$$U(a, b, x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)}F(a, b, x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{1-b}F(1+a-b, 2-b, x)$$

(siehe auch die Seiten 2 und 5 in Slater [1960]). Auf den Seiten 34 respektive 38 des gleichen Buchs findet man eine angenehmere Darstellung für U und F :

$$F(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad \text{für } b > a > 0 \quad (5.9)$$

und

$$U(a, b, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad \text{für } a > 0, x > 0. \quad (5.10)$$

5.2.1 Das Cramér-Lundberg Modell

Wir betrachten nun ein, verglichen mit unserem Ausgangsmodell (4.4), relativ einfaches Modell für den Risikoprozess Y_t . Auf dieses wenden wir dann die Theorie des Theorems 5.1 an, um eine explizite Lösung für die Ruinwahrscheinlichkeiten zu erhalten.

Es sei $\lambda_R = \sigma_R = \sigma_P = 0$ und die Schadenforderungen $S_{P,i}$ seien exponentialverteilt mit dem Parameter μ , das heißt $F'_P(x) = f_P(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

Wir erhalten so das Modell:

$$Y_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + r \int_0^t Y_s ds. \quad (5.11)$$

Dies entspricht dem klassischen *Cramér-Lundberg Modell* mit exponentialverteilten Schäden $S_{P,i}$ unter deterministischer Verzinsung des Risikokapitals mit dem stetigen Zinssatz r .

Die Berechnung der Ruinzeit

Um die *Ruinwahrscheinlichkeiten* $\psi(y)$ von Y mit der Anfangsrisikoreserve $Y_0 = y$ als Lösung des Randwertproblems aus Theorem 5.1 zu erhalten, betrachten wir zunächst den infinitesimalen Generator A von Y_t :

$$Af(y) = f'(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(A) \cap C_b^2.$$

Damit hat die Bedingung $A\psi(y) = 0$ aus Theorem 5.1 (i) die Form

$$\psi'(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty \psi(y-x) - \psi(y) dF_P(x) = 0. \quad (5.12)$$

Dazu kommen die Randwertbedingungen

$$\psi(y) = 1 \quad \text{für } y < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0.$$

Wir wollen nun (5.12) in eine reine Differentialgleichung überführen, so dass wir ein gewöhnliches Randwertproblem erhalten. Um das Integral loszuwerden, differenzieren wir diese Gleichung und betrachten statt $A\psi(y) = 0$ die Gleichung $d/dy(A\psi(y)) + \mu(A\psi(y)) = 0$. Wir erhalten hierfür die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} & \psi''(y)(p + ry) + \psi'(y)r + \lambda_P \int_0^\infty (\psi'(y-x) - \psi'(y)) \mu e^{-\mu x} dx \\ & + \mu \left(\psi'(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty (\psi(y-x) - \psi(y)) \mu e^{-\mu x} dx \right) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \psi''(y)(p + ry) + \psi'(y)(r + p\mu + ry\mu) - \lambda_P \psi'(y) + \lambda_P [-\psi(y-x)\mu e^{-\mu x}] \Big|_{x=0}^{\infty} \\
 & + \lambda_P \left(-\mu \int_0^{\infty} \psi(y-x)\mu e^{-\mu x} dx + \mu \int_0^{\infty} \psi(y-x)\mu e^{-\mu x} dx - \mu\psi(y) \right) = \\
 & \psi''(y)(p + ry) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P)\psi'(y) = 0. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Hinzu kommt die zusätzliche Randwertbedingung, die wir für $\lim_{y \rightarrow 0} (A\psi(y)) = 0$ erhalten, also die Bedingung aus (5.4). Für unser Beispiel hat sie die Gestalt

$$\psi'(0)p - \lambda_P \psi(0) + \lambda_P = 0. \quad (5.14)$$

Wir suchen jetzt also eine Lösung der Differentialgleichung (5.13) unter Berücksichtigung der Randwertbedingung (5.14) und der Bedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$. Die Lösung für dieses Randwertproblem wurde schon im Jahr 1942 von C. Segerdahl gefunden (in [Segerdahl \[1942\]](#)).

Sie lautet:

$$\psi(y) = \frac{\int_y^{\infty} e^{-\mu x} \left(1 + \frac{rx}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} dx}{\frac{p}{\lambda_P} + \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \left(1 + \frac{rx}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} dx}. \quad (5.15)$$

Einen Beweis findet man auch in [Dassios und Embrechts \[1989\]](#). Dabei muss man lediglich in deren Theorem 11 $c(y)$ gleich $p + ry$ setzen. Man kann die Lösung allerdings auch einfach durch Nachrechnen überprüfen:

Wir kürzen für eine platzsparendere Schreibweise das Integral im Nenner des Bruchs aus (5.15) mit B ab und erhalten dann:

$$\begin{aligned}
 \psi'(y) &= -\frac{1}{\frac{p}{\lambda_P} + B} e^{-\mu y} \left(1 + \frac{ry}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} \\
 \psi''(y) &= -\frac{1}{\frac{p}{\lambda_P} + B} e^{-\mu y} \left(1 + \frac{ry}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} \left[-\mu + \frac{\lambda_P - r}{p + ry}\right].
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\psi'(0) = -\frac{1}{\frac{p}{\lambda_P} + B} \quad \text{und} \quad \psi(0) = \frac{B}{\frac{p}{\lambda_P} + B}.$$

Wir erhalten damit für die Gleichung (5.13)

$$\begin{aligned}
 & (ry + p)\psi''(y) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P)\psi'(y) = \\
 & \frac{-1}{\frac{p}{\lambda_P} + B} e^{-\mu y} \left(1 + \frac{ry}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} \left[(ry + p) \left(-\mu + \frac{\lambda_P - r}{p + ry}\right) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Auch die Nebenbedingungen lassen sich jetzt leicht nachprüfen:

$$\psi'(0)p - \lambda_P \psi(0) + \lambda_P = -\frac{p}{\frac{p}{\lambda_P} + B} - \frac{\lambda_P B}{\frac{p}{\lambda_P} + B} + \lambda_P \frac{\frac{p}{\lambda_P} + B}{\frac{p}{\lambda_P} + B} = 0.$$

Außerdem folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\mu x} \left(1 + \frac{rx}{p}\right)^{(\lambda_P/r)-1} = 0,$$

dass $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$ gilt. □

Die Bestimmung der Verteilung der Ruinzeit des Risikoprozesses

Als nächstes wollen wir die *Laplacetransformierte* $E[e^{-\alpha T_y}]$ der Ruinzeit T_y unseres Risikoprozesses Y finden. Dazu gehen wir ähnlich wie oben vor, behandeln aber nicht den Spezialfall $\alpha = 0$, $\psi(y) = q_0(y)$, sondern den allgemeinen Fall. Nach dem zweiten Teil des Theorems 5.1 suchen wir also die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha(y) &= 0 && \iff \\ q'_\alpha(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty q_\alpha(y-x) - q_\alpha(y) \mu e^{-\mu x} dx - \alpha q_\alpha(y) &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

unter den Nebenbedingungen $\lim_{y \rightarrow \infty} q_\alpha(y) = 0$ und $q_\alpha(y) = 1$ für $y < 0$.

In der Gleichung (5.16) kommt wie vorher bei der Berechnung von $\psi(y)$ ein Integral vor. Um dieses zu eliminieren, betrachten wir die Gleichung $d/dy(Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha) + \mu(Aq_\alpha(y) - \alpha q_\alpha) = 0$. Man erhält wiederum

$$(ry + p)q''_\alpha(y) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P - \alpha)q'_\alpha(y) - \alpha \mu q_\alpha(y) = 0 \quad (5.17)$$

und die zusätzliche Randbedingung aus (5.4), die hier

$$pq'_\alpha(0) - (\lambda_P + \alpha)q_\alpha(0) + \lambda_P = 0 \quad (5.18)$$

lautet. Die Randwertbedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} q_\alpha(y) = 0$ muss natürlich weiterhin erfüllt sein.

Um eine analytische Lösung dieses Randwertproblems zu erhalten, bringen wir die DGL (5.17) durch Variablentransformation in die Form (5.7) einer *konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung*, für welche dann eine explizite Lösung bekannt ist.

In unserem Beispiel setzen wir nun $y = (z/\mu) - (p/r)$ und $g(z) = q_\alpha(y)$ in (5.16). Dadurch erhalten wir mit

$$g'(z) = \frac{1}{\mu} q'_\alpha(y) \quad \text{und} \quad g''(z) = \frac{1}{\mu^2} q''_\alpha(y)$$

aus (5.17) die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$zg''(z) + \left(1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r} - z\right)g'(z) - \left(-\frac{\alpha}{r}\right)g(z) = 0. \quad (5.19)$$

Die allgemeine Lösung der Form (5.8) lautet also

$$q_\alpha(y) = \mathcal{F}\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, z\right) = \mathcal{F}\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right).$$

Das heißt, mit den (noch unbekanntenen) Konstanten c_1 und c_2 ist

$$q_\alpha(y) = c_1 F\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right) + c_2 U\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right).$$

Um eine spezielle Lösung zu erhalten, verwenden wir nun die Randwertbedingungen. Als erstes soll unsere Lösung $q_\alpha(y)$ die Bedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} q_\alpha(y) = 0$ erfüllen. Dazu betrachten wir die asymptotischen Eigenschaften von $U(a, b, x)$. Wir stellen fest, dass $U(a, b, x) = x^{-a} (1 + O(\frac{1}{x}))$ für $x \rightarrow \infty$. Die Funktion U verschwindet also für $a > 0$, wenn x gegen unendlich geht (Seite 60 in Slater [1960]). Wir versuchen also eine Lösung der Form

$$q_\alpha(y) = c_2 U\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right).$$

Es gibt hier jedoch das Problem, dass $a = -\frac{\alpha}{r} < 0$ ist und die Funktion $U(a, b, x)$ deswegen nicht mit der Formel (5.10) berechnet werden kann. Es gilt jedoch für konfluentes hypergeometrischen DGLen, dass wenn $f(x) = U(a, b, x)$ eine Lösung ist, auch $f(x) = e^x x^{1-b} U(1-a, 2-b, -x)$ eine Lösung ist. Wir probieren also eine Lösung der Form

$$\begin{aligned} q_\alpha(y) &= c_2 \left(-\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)^{\frac{\alpha + \lambda_P}{r}} e^{-\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)} U\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right) \\ &= C e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r}\right)^{(\alpha + \lambda_P)/r} U\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit einer (noch unbekanntenen) Konstanten C . Es gilt dann also, dass

$$q_\alpha(y) \sim c e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r}\right)^{(\lambda_P/r)-1} \rightarrow 0$$

für $y \rightarrow \infty$, womit die gewünschte Nebenbedingung erfüllt ist. Dabei wurde die oben beschriebene Asymptotik von $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ verwendet. Genaueres darüber findet man in Paulsen und Gjessing [1997] bzw. in den dort angegebenen Literaturverweisen auf Slater [1960].

Zuletzt muss noch die Konstante C gefunden werden. Dazu nutzt man die zweite Randwertbedingung (5.18) aus, in die man die gerade erhaltene allgemeine Lösung einsetzt. Um diese zu differenzieren, verwendet man eine Differentiationsregel für konfluente hypergeometrische Funktionen, die sich auf Seite 16 in Slater [1960] findet. Sie lautet:

$$\frac{d}{dx}U(a, b, x) = -a U(a + 1, b + 1, x).$$

Man erhält damit für das $q_\alpha(y)$ aus (5.20):

$$q'_\alpha(y) = C e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r}\right)^{\frac{\alpha + \lambda_P}{r}} \left[-\mu U() + \left(\frac{\alpha + \lambda_P}{ry + p}\right) U() - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) U'() \right],$$

wobei $U() = U(a, b, x)$ die Krummersche Funktion mit den Parametern von oben ist, und $U'() = U(a + 1, b + 1, x)$.

Wir erhalten somit

$$q_\alpha(0) = C \left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{\alpha + \lambda_P}{r}} U(a, b, w) \quad \text{und}$$

$$q'_\alpha(0)' = C \left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{\alpha + \lambda_P}{r}} \left[\left(-\mu + \frac{\alpha + \lambda_P}{ry + p}\right) U(a, b, w) - \mu \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) U(a + 1, b + 1, w) \right]$$

mit den Parametern $a = 1 + \frac{\alpha}{r}$, $b = 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}$ und $w = \frac{\mu p}{r}$. Man erhält dann für die Konstante C durch Einsetzen von $q_\alpha(0)$ und $q'_\alpha(0)$ in die Randwertbedingung (5.18):

$$C = \frac{\lambda_P}{\mu p} \left(\frac{p}{r}\right)^{-\left(\frac{\alpha + \lambda_P}{r}\right)} \left[U(a, b, w) + \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) U(1 + a, 1 + b, w) \right]^{-1}.$$

Insgesamt ergibt sich also für unsere Ruinwahrscheinlichkeiten

$$q_\alpha(y) = \frac{\lambda_P}{\mu p} \frac{e^{-\mu y} \left(1 + \frac{r}{p}y\right)^{(\alpha + \lambda_P)/r} U\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)}{\mu p U\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \frac{\mu p}{r}\right) + \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) U\left(2 + \frac{\alpha}{r}, 2 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \frac{\mu p}{r}\right)}$$

Diesen Ausdruck kann man dann mit der Formel (5.10) für $U(a, b, x)$ ausrechnen. Um die Verteilung von T_y zu erhalten, muss die so erhaltene Laplacetransformierte danach noch (numerisch) invertiert werden.

5.2.2 Das klassische Risikomodel mit Störterm

In diesem Abschnitt wird ein weiteres Beispiel, für welches eine analytische Lösung für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ bestimmt werden kann, beschrieben. Es handelt sich dabei um das zuvor betrachtete Modell, erweitert um einem zusätzlichen Störterm im Prozess des Versicherungsrisikos P . Es sind also die Schadenforderungen S_P exponentialverteilt mit dem Parameter μ und es ist $\lambda_R = \sigma_R^2 = 0$. Das heißt, das Risikokapital wird deterministisch verzinst mit der kontinuierlichen Zinsrate r . Der Risikoprozess Y ist dann gegeben durch

$$Y_t = y + pt + \sigma_P W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + r \int_0^t Y_s ds.$$

Nach Satz 5.1 kann man die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ als Lösung des folgenden Randwertproblems erhalten. ψ sei die Lösung der Gleichung $A\psi(y) = 0$, das heißt es gelte

$$\psi'(y)(p + ry) + \frac{1}{2}\psi''(y)\sigma_P^2 + \lambda_P \int_0^\infty \psi(y-x) - \psi(y) dF_P(x) = 0 \quad (5.21)$$

mit $F_P(x) = 1 - \mu e^{-\mu x}$ unter den Randbedingungen

$$\psi(y) = 1 \text{ für } y < 0, \quad \psi(0) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0.$$

Das Vorgehen wird nun ähnlich zu dem im letzten Abschnitt sein. Ziel ist es, die Gleichung (5.21) durch geeignete Variablentransformationen in die Form einer konfluenten Hypergeometrischen Differentialgleichung der Gestalt (5.7) zu bringen, und für diese dann eine analytische Lösung zu bestimmen.

Zuerst differenziert man die Gleichung (5.21) und betrachtet die neue Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (A\psi(y)) + \mu A\psi(y) &= 0 \quad \iff \\ \frac{1}{2}\sigma_P^2\psi'''(y) + (ry + p + \frac{1}{2}\mu\sigma_P^2)\psi''(y) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P)\psi'(y) &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dazu muss die neue Nebenbedingung aus (5.3) gelten, die man durch $\lim_{y \rightarrow 0} A\psi(y) = 0$ erhalten hat. Die Randbedingungen sind also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_P^2\psi''(0+) + p\psi'(0+) &= 0, \\ \psi(0) &= 1 \quad \text{und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Um (5.22) in die Form einer hypergeometrischen DGL zu bringen, setzt man zuerst $\psi'(y) = e^{-\mu z} g(z)$ und $y = z - \beta$, wobei $\beta = (2p - \mu\sigma_P^2)/2r$ ist. Dann ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\psi''(y) &= e^{-\mu z} (g'(z) - \mu g(z)) \quad \text{und} \\ \psi'''(y) &= e^{-\mu z} (g''(z) - 2\mu g'(z) + \mu^2 g(z))\end{aligned}$$

aus (5.22) die neue Gleichung

$$\frac{1}{2}\sigma_P^2 g''(z) + rzg'(z) + (r - \lambda_P)g(z) = 0.$$

Durch eine weitere Variablentransformation $g(z) = h(u)$ und $z^2 = -(\sigma_P^2 u)/r$ erhält man mit

$$\begin{aligned}g'(z) &= -2\frac{r}{\sigma_P^2}zh'(u) \quad \text{und} \\ g''(z) &= -4\frac{r}{\sigma_P^2}uh''(u) - 2\frac{r}{\sigma_P^2}h'(u)\end{aligned}$$

die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$uh''(u) + \left(\frac{1}{2} - u\right)h'(u) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_P}{2r}\right)h(u) = 0. \quad (5.24)$$

Die allgemeine Lösung für h ist also gegeben durch

$$h(u) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{1}{2}, u\right)$$

und durch Rücksubstitution ergibt sich somit für ψ'

$$\psi'(y) = c_1 e^{-\mu y} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{1}{2}, -\frac{r}{\sigma_P^2}(y + \beta)^2\right) \quad (5.25)$$

mit $c_1 = e^{-\mu\beta}$. Da die Multiplikation mit einer Konstanten die Form der allgemeinen Lösung nicht ändert, kann der Faktor c_1 bei der weiteren Betrachtung weggelassen werden.

Die gesuchte Lösung kann als Linearkombination zweier beliebiger unabhängiger Lösungen dargestellt werden. Auf Seite fünf in Slater [1960] sind acht mögliche Lösungen y_1 bis y_8 angegeben. Zum gewünschten Ergebnis führen Lösungen der Form y_7 und y_4 . Man erhält so die zwei linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned}\psi'_1(y) &= \exp\left(-\left(\mu y + \frac{r}{\sigma_P^2}(y + \beta)^2\right)\right) U\left(\frac{\lambda_P}{2r}, \frac{1}{2}, \frac{r}{\sigma_P^2}(y + \beta)^2\right) \quad \text{und} \\ \psi'_2(y) &= (y + \beta) \exp\left(-\left(\mu y + \frac{r}{2\sigma_P^2}(y + \beta)^2\right)\right) F\left(1 + \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{3}{2}, \frac{r}{\sigma_P^2}(y + \beta)^2\right).\end{aligned}$$

Aus den asymptotischen Eigenschaften von $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $F(\cdot, \cdot, \cdot)$, die in Slater [1960] auf Seite 58ff. behandelt werden, folgt, dass die Bedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$ für

$$\psi(y) = a_1 \int_y^\infty \psi'_1(x) dx + a_2 \int_y^\infty \psi'_2(x) dx \quad (5.26)$$

erfüllt ist. Es gilt nämlich $U(a, b, x) = x^{-a} (1 + O(x^{-1}))$ und $F(a, b, x) = ce^x x^{a-b} (1 + O(x^{-1}))$. Benutzt man dies für ψ'_1 und ψ'_2 von oben, so folgt sofort das gewünschte Verhalten für y gegen unendlich.

Um die Koeffizienten a_1 und a_2 zu bestimmen, verwendet man die beiden verbliebenen Randbedingungen von $\psi(y)$. Dabei benötigt man zur Berechnung von $\psi''_1(0+)$ und $\psi''_2(0+)$ in (5.23) die Ableitungsregeln für konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{-x} U(a, b, x)) &= -e^{-x} U(a, b + 1, x) \quad \text{und} \\ \frac{d}{dx} F(a, b, x) &= \frac{a}{b} F(a + 1, b + 1, x). \end{aligned}$$

J. Paulsen erhält nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{D} \left[\frac{1}{2} \sigma_P^2 F\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{3}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right) + \frac{r}{3} \left(1 + \frac{\lambda_P}{r}\right) \beta^2 F\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_P}{r}, \frac{5}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right) \right], \\ a_2 &= \frac{1}{D} \left[\frac{1}{2} \lambda_P \beta U\left(1 + \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{3}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right) \right] \quad \text{mit} \\ D &= \psi_1(0) \left[\frac{1}{2} \sigma_P^2 F\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{3}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right) + \frac{r}{3} \left(1 + \frac{\lambda_P}{r}\right) \beta^2 F\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_P}{r}, \frac{5}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \psi_2(0) \lambda_P \beta U\left(1 + \frac{\lambda_P}{2r}, \frac{3}{2}, \frac{r\beta^2}{\sigma_P^2}\right). \end{aligned}$$

Für den Fall $\lambda_P < 2r$ kann man $\psi_1(y)$ und $\psi_2(y)$ mit Hilfe der Darstellungen (5.10) und (5.9) in eine Form ohne die Funktionen $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ bringen. Für den Fall $\beta > 0$, also für $2p > \mu\sigma_P^2$, findet J. Paulsen eine Integraldarstellung der Lösung für λ_P beliebig. Diese Darstellungen der Lösung aus Paulsen und Gjessing [1997] benötigen jedoch ziemlich viel Platz und werden hier deswegen nicht angegeben.

Setzt man bei dem eben behandelten Beispiel $r = 0$, so erhält man den *durch Diffusion gestörten klassischen Risikoprozess*. Dieser wurde erstmals 1970 von H. U. Gerber behandelt. In Dufresne und Gerber [1991] wird gezeigt, dass die Ruinwahrscheinlichkeiten gestörte Erneuerungsgleichungen erfüllen und somit Standardtechniken aus der Erneuerungstheorie angewendet werden können, um diese zu bestimmen. Weiter werden in Furrer und Schmidli [1994] exponentielle Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeiten in endlicher und in unendlicher Zeit gefunden.

5.3 Ruinwahrscheinlichkeiten als Lösung einer Volterra-Integralgleichung

In diesem Abschnitt wird die Integro-Differentialgleichung des Randwertproblems aus Satz 5.2 durch Integration unter Verwendung der Randbedingungen in die Form einer *Volterra-Integralgleichung* überführt. Diese wird dann im 6. Kapitel durch numerische Methoden gelöst.

Das ursprüngliche Modell (4.4) muss dazu leicht vereinfacht werden. Der Prämienprozess P , der die Versicherungsseite des Risikoprozesses Y modelliert, bleibt gleich wie in (4.2). Der Ertragsprozess R , der für die Kapitalerträge steht, wird im Vergleich zu (4.3) jedoch vereinfacht. Und zwar setzen wir $\lambda_R = 0$ und erhalten so

$$R_t = rt + \sigma_R W_{R,t}.$$

R hat nun keine Sprungkomponente mehr und ist somit ein stetiger Prozess.

Im Folgenden betrachten wir die *Überlebenswahrscheinlichkeit* $\phi(y) = 1 - \psi(y)$. Zuerst untersuchen wir, unter welchen Bedingungen der *sichere Ruin für alle y* eintritt, um diesen Fall dann bei den weiteren Betrachtungen von $\phi(y)$ auszuschließen. Danach geben wir Bedingungen an, unter denen $\phi(y)$ viermal stetig differenzierbar ist.

Satz 5.7 *Es sei $\phi(y)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit des Risikoprozesses Y mit der Anfangsrisikoreserve $Y_0 = y$ und außerdem sei $p > 0$, $\lambda_P > 0$ und $r > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} r \leq \frac{1}{2}\sigma_R^2 &\iff \phi(y) = 0 \text{ für alle } y \quad \text{und} & (5.27) \\ r > \frac{1}{2}\sigma_R^2 &\iff \phi(y) > 0 \text{ für alle } y > 0. \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist dann $\phi(\infty) = 1$.

Beweis: Den Beweis findet man in einer etwas allgemeineren Form in Thm. 3.1 in [Paulsen \[1998b\]](#), denn hier ist

$$E[\ln(\mathcal{E}(R)_t)] = E\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2\right)t + \sigma_R W_{R,t}\right] = r - \frac{1}{2}\sigma_R^2,$$

also die Bedingung $E[\ln(\mathcal{E}(R)_t)] \leq 0$ entspricht (5.27). □

Der Satz besagt, dass sicherer Ruin eintritt, wenn im Prozess R die Schwankungskomponente in Form der Brownschen Bewegung zu groß im Vergleich zu den sicheren (positiven) Kapitalerträgen ist. Dabei ist egal, wie hoch die Anfangsrisikoreserve y ist. (Siehe auch Satz 5.3 für den Prozess mit $\sigma_P = 0$.) Diese Erkenntnis lässt die Bedingungen des nächsten Satzes sinnvoll erscheinen.

Satz 5.8 (Glattheit von $\phi(y)$)

Es seien $p > 0$, $r > \frac{1}{2}\sigma_R^2$ und $F = F_P \in C^4[0, \infty)$ und es gelte für den Tail $\bar{F} = 1 - F$ von F

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)x^\beta < \infty \text{ für ein } \beta > 0. \quad (5.28)$$

Dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$ eine viermal stetig differenzierbare Funktion auf $[0, \infty)$, also $\phi(y) \in C^4[0, \infty)$.

Beweis: Der Beweis findet sich nach Theorem 2.4 in [Paulsen u. a. \[2005\]](#).

Die Bedingung (5.28) an den Tail von F ist nicht besonders stark. Sie ist insbesondere dann erfüllt, wenn $E(|S_P|^\beta) < \infty$ für ein $\beta > 0$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} n^\beta \bar{F}(n) &= n^\beta P(S_P > n) = n^\beta \sum_{m=n}^{\infty} P(m+1 \geq S_P > m) = \sum_{m=n}^{\infty} \int_m^{m+1} n^\beta dP_{S_P}(x) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \int_m^{m+1} x^\beta dP_{S_P}(x) = \int_n^{\infty} x^\beta dP_{S_P}(x) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{da} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\beta dP_{S_P}(x) = E(|S_P|^\beta) < \infty. \end{aligned}$$

Da nach den Modellannahmen $E[S_P^2] < \infty$ gilt, ist (5.28) hier also immer erfüllt.

Damit die Voraussetzungen des Satzes 5.2 erfüllt sind, ist nur die zweifache stetige Differenzierbarkeit von $\phi(y)$ notwendig. Um eine ausreichende Konvergenzordnung bei der numerischen Bestimmung von $\phi(y)$ zu erreichen, benötigen wir aber in Kapitel 6 die höhere Glattheit.

Wir nehmen vorerst an, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y) = 1 - \psi(y)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Somit erhalten wir $\phi(y)$ als Lösung des Randwertproblems aus Satz 5.2.

Der infinitesimale Generator für unser Modell hat die Form

$$Af(y) = \frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) f''(y) + (ry + p) f'(y) + \lambda_P \int_0^{\infty} (f(y-x) - f(y)) dF_P(x) \quad (5.29)$$

und wir suchen jetzt die Lösung des Randwertproblems

$$\frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) \phi''(y) + (ry + p) \phi'(y) + \lambda_P \int_0^y \phi(y-x) dF_P(x) - \lambda_P \phi(y) = 0 \quad (5.30)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \phi(y) &= 0 \text{ auf } y < 0, \\ \phi(0) &= 0 \text{ falls } \sigma_P^2 > 0 \text{ und} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) &= 1. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Man kann nun durch Integration und unter Verwendung der Nebenbedingungen (5.31) die Integro-DGL (5.30) in eine *Volterra-Integralgleichung zweiter Ordnung* überführen. Über diese Art von Gleichungen gibt es ergebnisreiche Literatur und man kann sie mit Hilfe bekannter numerischer Verfahren lösen.

Satz 5.9 ($\phi(y)$ als Lösung einer Volterra-Integralgleichung)

Die Integro-Differentialgleichung (5.30) kann als Volterra Integralgleichung zweiter Ordnung dargestellt werden. Diese hat dann die Gestalt

$$\phi(y) + \int_0^y K(y, x)\phi(x)dx = \alpha(y) \quad (5.32)$$

mit bekannten Funktionen $K(x, y)$ und $\alpha(y)$. Diese sind für den Fall $\sigma_P^2 = \sigma_R^2 = 0$

$$K(y, x) = -\frac{r + \lambda_P(1 - F(y - x))}{ry + p} \quad \text{und} \quad \alpha(y) = \frac{p}{ry + p}\phi(0) \quad (5.33)$$

und für $\sigma_P^2 + \sigma_R^2 > 0$

$$K(y, x) = 2 \frac{(2r - 3\sigma_R^2 + \lambda_P)x + p + \lambda_P \int_0^{y-x} F_P(z)dz - (r - \sigma_R^2 + \lambda_P)y}{\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2} \quad (5.34)$$

und

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{2p}{\sigma_R^2 y} \phi(0) & \text{falls } \sigma_P^2 = 0, \\ \frac{\sigma_P^2 y}{\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2} \phi'(0) & \text{falls } \sigma_P^2 > 0. \end{cases}$$

Wenn die Lösung $\phi(y)$ die Randwertbedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = 1$ erfüllt, dann ist $1 - \phi(y)$ die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit.

Beweis:

Zuerst ersetzt man in (5.30) y durch z und integriert dann die Gleichung von 0 bis y . Man erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_R^2 \int_0^y z^2 \phi''(z)dz + \frac{1}{2}\sigma_P^2(\phi'(y) - \phi'(0)) + r \int_0^y z\phi'(z)dz + p(\phi(y) - \phi(0)) \\ - \lambda_P \int_0^y \phi(z)dz + \lambda_P \int_0^y \int_0^z \phi(z-x)f_P(x)dx dz = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{part. Int.}}{\iff} \frac{1}{2}\sigma_R^2 \left(y^2 \phi'(y) - 2y\phi(y) + 2 \int_0^y \phi(z)dz \right) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(\phi'(y) - \phi'(0)) + p(\phi(y) - \phi(0)) \\ + r \left(y\phi(y) - \int_0^y \phi(z)dz \right) - \lambda_P \int_0^y \phi(z)dz + \lambda_P \int_0^y \int_0^z \phi(z-x)f_P(x)dx dz = 0 \end{aligned}$$

Das Doppelintegral wird nun durch die Variablentransformation $x' = z - x$ und durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge gemäß dem Satz von Fubini in die gewünschte Form gebracht:

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^z \phi(z-x) f_P(x) dx dz &= \int_0^y \int_0^z \phi(x) f_P(z-x) dx dz \\ &= \int_0^y \int_x^y \phi(x) f_P(z-x) dz dx = \int_0^y \phi(x) F_P(y-x) dx. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) \phi'(y) - \frac{1}{2} \sigma_P^2 \phi'(0) + ((r - \sigma_R^2)y + p) \phi(y) - p \phi(0) \\ - (r - \sigma_R^2 + \lambda_P) \int_0^y \phi(x) dx + \lambda_P \int_0^y F(y-x) \phi(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Für den Fall $\sigma_P = \sigma_R = 0$ erhält man nach Division von (5.35) durch $(p + ry)$ dann (5.33).

Wenn $\sigma_P^2 + \sigma_R^2 > 0$ ist, dann muss man in der Gleichung (5.35) wieder y durch z ersetzen und diese danach nochmals über das Intervall $[0, y]$ integrieren und erhält so (5.34) erhält.

Die letzte Aussage des Satzes gilt, da die anderen Nebenbedingungen des ursprünglichen RWP bei der Integration der Integro-DGL und den späteren Berechnungen mit verwendet wurden, und somit immer erfüllt sind. \square

Jetzt wollen wir durch Lösen der Gleichung (5.32) die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$ erhalten. Damit die letzte Nebenbedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(y) = 1$ erfüllt ist, benutzen wir eine *Hilfsfunktion* $g(y)$, die wir an der Stelle 0 durch $g(0) = g_0$ (bzw. $g'(0) = g'_0$) mit einen Anfangswert g_0 (bzw. g'_0) fixieren. Dann berechnen wir $g(y)$ als Lösung der Gleichung (5.32), also

$$g(y) + \int_0^y K(y, x) g(x) dx = \beta(y) \quad (5.36)$$

mit $K(y, x)$ wie oben und $\beta(y)$ wie das $\alpha(y)$ von oben, aber mit $g(0)$ beziehungsweise $g'(0)$ statt $\phi(0)$ beziehungsweise $\phi'(0)$.

Die Lösung $\phi(y)$ erhalten wir dann durch

$$\phi(y) = \frac{1}{g(\infty)} g(y).$$

Dies gilt, da $\phi(y)$ als Vielfaches von $g(y)$ die Gleichung (5.32) erfüllt und außerdem der Nebenbedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = 1$ genügt.

Wenn $\sigma_P^2 > 0$ ist, kann der Anfangswert $g(0) > 0$ beliebig gewählt werden. Ist $\sigma_P^2 = 0$, so muss $g(0) = 0$ gewählt werden, damit die Randbedingung $\phi(0) = 0$ erfüllt ist. Der in diesem Fall zusätzlich benötigte Anfangswert $g'(0) > 0$ kann dagegen beliebig gewählt werden.

Die Frage, wie man in der Praxis den Wert $g(\infty)$ ermittelt, muss noch untersucht werden. Dies wird im Rahmen der Diskussion eines geeigneten numerischen Verfahrens zur Lösung der Volterra Integralgleichung (5.36) in Kapitel 6.1 geschehen.

Ein weiteres Problem ist, dass im Fall $\sigma_P^2 = 0$ und $\sigma_R^2 > 0$ der Kern $K(y, x)$ an der Stelle $y = 0$ singularär ist. Dies muss später bei der numerischen Lösung der Gleichung (5.36) berücksichtigt werden. Wie in Kapitel 6.1 gezeigt wird, kann die Funktion $g(y)$ jedoch an der Stelle 0 durch ihre Taylorentwicklung bis zum dritten Glied dargestellt und die Singularität dadurch aufgelöst werden.

Im Rahmen der Behandlung numerischer Verfahren zur Lösung der Gleichung (5.36) werden diese Fragen in Kapitel 6.1 ausführlicher besprochen. Als nächstes wird jedoch zuerst einmal eine andere Methode zur Ermittlung der Ruinwahrscheinlichkeit vorgestellt, welche auch einen guten Einblick in die Natur des Risikoprozesses Y geben wird.

5.4 Eine andere Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten

Die folgenden Resultate gehen auf [Paulsen \[1993\]](#) zurück. Dort wurde das in dieser Diplomarbeit besprochene Risikomodell erstmals betrachtet und zahlreiche Autoren haben sich in den letzten Jahren in ihren Arbeiten über Risikoprozesse auf Inhalte aus [Paulsen \[1993\]](#) bezogen. J. Paulsen orientierte sich seinerseits in Teilen an dem Artikel von [Harrison \[1977\]](#) und übertrug dessen Ideen auf sein Modell, das deutlich komplizierter ist.

In diesem Kapitel seien alle Zufallsvariablen und stochastische Prozesse auf dem *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ definiert. $\mathbb{F} = \{(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\}$ ist eine Filtrierung, das heißt, für die Sigma-Algebren $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ gilt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für alle $s \leq t$. Der gegebene Wahrscheinlichkeitsraum erfülle außerdem die *üblichen Bedingungen*:

- (i) \mathcal{F}_0 enthalte alle P -Nullmengen;
- (ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$ für alle t , d.h. \mathbb{F} ist rechtsseitig stetig.

Die Filtrierung werde o.B.d.A. durch den Risikoprozess Y , ergänzt durch die P -Nullmengen \mathcal{N} , erzeugt. Es ist also $\mathcal{F}_t = \sigma(\sigma(Y_t) \cup \mathcal{N}) = \sigma(\sigma(P_t) \cup \sigma(R_t) \cup \mathcal{N})$. Dies ist möglich, da alle Information von dem Prozess Y generiert wird und dieser rechtsseitig stetig ist.

Im Folgenden werden wir die Überlegungen zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ aus [Paulsen \[1993\]](#) für unser etwas einfacheres Modell ausführen. Im Gegensatz zu dem Vorgehen in Abschnitt 5.1 gelangt man hier nicht indirekt durch Anwendung der Itô-Formel zu Ergebnissen, sondern man verwendet die explizite Darstellung des Risikoprozesses Y , die in Kapitel 4.2 berechnet wurde.

Sie lautet

$$Y_t = \mathcal{E}(R)_t \left(y + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(R)_{s-}} dP_s \right)$$

mit

$$\mathcal{E}(R)_t = \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_R^2 \right) t + \sigma_R W_{R,t} \right) \prod_{i=1}^{N_{R,t}} (1 + S_{R,i}).$$

Um Formeln später kompakter schreiben zu können wird

$$U_s := (\mathcal{E}(R)^{-1})_s \quad \text{und} \quad Z_t := \int_0^t U_{s-} dP_s \tag{5.37}$$

definiert. Für den Prozess Y schreibt man dann

$$Y_t = U_t^{-1} \left(y + \int_0^t U_{s-} dP_s \right) = \mathcal{E}(R)_t (y + Z_t).$$

Nach Theorem 19 im zweiten Kapitel von Protter [2000] ist der so festgelegte Prozess Z wieder ein Semimartingal.

Es gilt $F_R(-1) = 0$ nach Voraussetzung und somit ist $\mathcal{E}(R)_t = U_t^{-1}$ f.s. positiv für alle $t \geq 0$. Deswegen tritt Ruin genau dann ein, wenn für mindestens ein $t \geq 0$ $Z_t < -y$ gilt, das heißt

$$\psi(y) = P\left(\inf_{t \geq 0} \{Z_t < -y\}\right).$$

Für die folgenden zwei Sätze werden noch ein paar rechnerische Ergebnisse benötigt. Dazu definiert man zuerst

$$m_{P,k} = E[S_P^k] \quad \text{und} \quad m_{R,k} = E\left[\frac{1}{(1+S_R)^k}\right].$$

Bemerkung 2

Die Größen $m_{P,2}$ und $m_{R,2}$ existieren aufgrund der Modellannahmen $E[S_P^2] < \infty$ und $E[S_R^2] < \infty$ immer.

Man erhält nun

$$\begin{aligned} E[U_t^k] &= \exp\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_R^2 - r\right)tk\right) E[\exp(-k\sigma_R W_{R,t})] E\left[\prod_{i=1}^{N_{R,t}} \frac{1}{(1+S_{R,i})^k}\right] \\ &= \exp\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_R^2 - r\right)tk + \frac{1}{2}(k\sigma_R)^2t\right) \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{(1+S_{R,i})^k}\right] P(N_{R,t} = n) \\ &= \exp\left(\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_R^2 - r\right)k + \frac{1}{2}k^2\sigma_R^2\right]t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_{R,k}\lambda_R t)^n}{n!} e^{-\lambda_R t}. \end{aligned}$$

Bei dem ersten Gleichheitszeichen wird ausgenutzt, dass W_R , N_R und die $S_{R,i}$ unabhängig sind. Die zweite Gleichheit gilt, da die geometrische Brownsche Bewegung mit den Parametern $-1/2\sigma^2$ und σ^2 ein Martingal ist und den Erwartungswert 1 hat und W_R die gleiche Verteilung wie $-W_R$ hat. Weiter wird ausgenutzt, dass die $S_{R,i}$ unabhängig von N_R sind. Die letzte Gleichheit gilt, da die $S_{R,i}$ unabhängig und gleich verteilt sind. Außerdem wird die Dichte der Poissonverteilung von N_R eingesetzt. Die Summe zum Schluss ist die Exponentialreihe.

Also ist

$$E[U_t^k] = \exp\left(\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_R^2 - r\right)k + \frac{1}{2}k^2\sigma_R^2 + \lambda_R(m_{R,k} - 1)\right]t\right)$$

und μ_k kann durch

$$e^{-\mu_k t} \stackrel{\text{def}}{=} E[U_t^k] \tag{5.38}$$

definiert werden. Es ist also

$$\begin{aligned}\mu_1 &= r - \sigma_R^2 + \lambda_R(1 - m_{R,1}) \quad \text{und} \\ \mu_2 &= 2r - 3\sigma_R^2 + \lambda_R(1 - m_{R,2}).\end{aligned}$$

Mit der Gleichung (5.38) und dem Satz von Fubini (Satz 2.1) erhält man nun

$$E \left[\int_0^t U_{s-} ds \right] = \int_0^t e^{-\mu_1 s} ds = \frac{1}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) < \infty \iff \mu_1 > 0. \quad (5.39)$$

Dabei wurde die Tatsache ausgenutzt, dass die Menge $\{U_{s-} \neq U_s\}$ das (Lebesgue-) Maß Null hat.

Als nächstes stellt man fest, dass U_s/U_u und U_{s-u} für alle $s \geq u$ die gleiche Verteilung besitzen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Brownsche Bewegung W_R und der Poissonprozess N_R Lévy-Prozesse sind und somit unabhängige und stationäre Zuwächse haben. Die bedeutet, dass für alle $s \geq u$ $W_{R,s} - W_{R,u}$ die gleiche Verteilung wie $W_{R,s-u}$ und $N_{R,s} - N_{R,u}$ die gleiche Verteilung wie $N_{R,s-u}$ hat und dass für $s \geq u$ $W_{R,s} - W_{R,u}$ unabhängig von $W_{R,u}$ und $N_{R,s} - N_{R,u}$ unabhängig von $N_{R,u}$ ist. Damit gilt dann

$$\frac{U_s}{U_u} = \frac{(\mathcal{E}(R)^{-1})_s}{(\mathcal{E}(R)^{-1})_u} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{(4.6)}{=} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2 \right) (u - s) - \sigma_R(W_{R,s} - W_{R,u}) \right) \prod_{j=N_{R,u}+1}^{N_{R,s}} (1 + S_{R,j})^{-1} \\ &\sim \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_R^2 \right) (u - s) - \sigma_R W_{R,s-u} \right) \prod_{j=1}^{N_{R,s-u}} (1 + S_{R,i})^{-1} \\ &= (\mathcal{E}(R)^{-1})_{s-u} = U_{s-u}.\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $X \sim Y$, dass X die gleiche Verteilung wie Y hat. Die Unabhängigkeit von U_s/U_u und U_u folgt dann mit der Darstellung (5.40) und den zuvor angeführten Eigenschaften der Brownschen Bewegung W_R und des davon unabhängigen Poissonprozesses N_R .

Nun wird wie zuvor verwendet, dass die Menge $\{U_s \neq U_{s-}\}$ das Maß Null hat. Mit dem Satz von Fubini und den Erkenntnissen aus (5.40) folgt dann

$$\begin{aligned}E \left[\left(\int_0^t U_{s-} ds \right)^2 \right] &= E \left[2 \int_0^t \int_0^s U_s U_u dud s \right] = 2 \int_0^t \int_0^s E[U_s U_u] dud s \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s E[U_u^2] E[U_{s-u}] dud s \stackrel{(5.38)}{=} 2 \int_0^t \int_0^s e^{-\mu_2 u} e^{-\mu_1 (s-u)} dud s \\ &= 2 \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{\mu_2 (\mu_2 - \mu_1)} e^{-\mu_2 t} - \frac{1}{\mu_1 (\mu_2 - \mu_1)} e^{-\mu_1 t} \right).\end{aligned} \quad (5.41)$$

Bei der dritten Gleichheit wurde $U_s = U_u U_s / U_u$ eingesetzt.

Da aus (5.38) folgt, dass $\mu_1 > 0$ ist falls $\mu_2 > 0$ ist, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_0^t U_{s-} ds \right)^2 \right] = \frac{2}{\mu_1 \mu_2} < \infty \iff \mu_2 > 0 \quad (5.42)$$

aus der Gleichung (5.41).

Mit diesen Resultaten kann der folgende Satz bewiesen werden. Er beschreibt das Semimartingal Z genauer und gibt zudem Bedingungen dafür an, dass der Grenzwert gegen unendlich von Z_t existiert und integrierbar bzw. quadratintegrierbar ist.

Satz 5.10 (Charakterisierung von Z_t)

Es sei $\beta_P = p - \lambda_P E(S_P)$. Dann ist $Z_t := \int_0^t U_{s-} dP_s = \int_0^t (\mathcal{E}(R)^{-1})_{s-} dP_s$ ein

<i>Supermartingal</i>	<i>falls $\beta_P < 0$</i>
<i>Martingal</i>	<i>falls $\beta_P = 0$</i>
<i>Submartingal</i>	<i>falls $\beta_P > 0$.</i>

Angenommen es sei $\mu_1 > 0$. Dann existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = Z_\infty$ mit Konvergenz f.s. und in L^1 . Der Erwartungswert für Z_∞ ist

$$E(Z_\infty) = \beta_P / \mu_1.$$

Gilt zudem $\mu_2 > 0$, so ist auch $E(Z_\infty^2) < \infty$.

Beweis:

Man beginnt mit der Zerlegung des Semimartingals P in

$$\begin{aligned} P_t &= \left(\sigma_P W_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \lambda_P E[S_P] t \right) + (p - \lambda_P E[S_P]) t \\ &\stackrel{\text{def}}{=} M_t + \beta_P t. \end{aligned}$$

Dabei ist M ein Martingal. Es ergibt sich nun für Z_t die Zerlegung

$$Z_t = \int_0^t U_{s-} dP_s = \int_0^t U_{s-} dM_s + \beta_P \int_0^t U_{s-} ds$$

und mit der Definition von

$$N_t := \int_0^t U_{s-} dM_s \quad \text{und} \quad V_t := \int_0^t U_{s-} ds$$

kann man abkürzend

$$Z_t = N_t + \beta_P V_t$$

schreiben.

Da $U_t > 0$ f.s. für alle t ist, gilt die (Sub-/Super-) Martingaleigenschaft, wenn $E(|Z_t|) < \infty$ erfüllt ist. Um dies zu zeigen, werden die Prozesse N_t und V_t getrennt betrachtet.

Der Prozess V_t ist nach Definition ein positiver, *wachsender Prozess* und er ist nach den Formeln (5.39) und (5.41) absolut- und quadratintegrierbar, das heißt $E[V_t^2] < \infty$ für alle $t \geq 0$. Weiter ergibt sich daraus für $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = V_\infty$

$$E[V_\infty] = E[|V_\infty|] < \infty \iff \mu_1 > 0 \quad \text{und} \quad E[V_\infty^2] < \infty \iff \mu_2 > 0.$$

Nun wird Prozess N untersucht. Dieser ist nach Theorem 33 in Kapitel III von Protter [2000] ein *lokales Martingal*.

Da $N = U_- \cdot M$ ist, gilt nach Satz 2.18 $[N, N] = U_-^2 \cdot [M, M]$ und es ist $[M, M]_t = \sigma_P^2 t + \sum_{i=1}^{N_P, t} S_{P,i}^2$.

Es seien T_1, T_2, \dots die Sprungzeiten des Poisson-Prozesses N_P . Nach unseren Modellannahmen sind N_P und N_R unabhängige Prozesse und deswegen ist $T_i \neq T_{R,j}$ fast sicher. Da U nur von R , und somit von N_R , abhängt, gilt folglich auch $U_{T_i-} = U_{T_i}$ fast sicher.

Zusammen ergibt sich

$$[N, N]_t = \sigma_P^2 \int_0^t U_s^2 ds + \sum_{i=1}^{N_P, i} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2. \quad (5.43)$$

Mit dieser Darstellung von $[N, N]_t$ können wir nun $E[N, N]_t$ berechnen. Wir erhalten

$$E \left[\sigma_P^2 \int_0^t U_s^2 ds \right] \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sigma_P^2 \int_0^t E[U_s^2] ds \stackrel{(5.38)}{=} \int_0^t e^{-\mu_2 s} ds = \frac{\sigma_P^2}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \quad (5.44)$$

und

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{N_P, i} U_{T_i}^2 S_{P,i}^2 \right] &= E[S_P^2] \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^n U_{T_i}^2 \mid N_{P,t} = n \right] P(N_{P,t} = n) \\ &= E[S_P^2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_P t)^n}{n!} e^{-\lambda_P t} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n E[U_{T_i}^2] f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1 \\ &= E[S_P^2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_P t)^n}{n!} e^{-\lambda_P t} \int_0^t \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t \sum_{i=1}^n e^{-\mu_2 t_i} \frac{n!}{t^n} dt_n \dots dt_2 dt_1 \\ &= E[S_P^2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_P t)^n}{n!} e^{-\lambda_P t} \frac{n}{t \mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \\ &= E[S_P^2] \frac{1}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \lambda_P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_P t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_P t} = \lambda_P E[S_P^2] \frac{1}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}). \end{aligned}$$

Beim ersten Gleichheitszeichen wird ausgenutzt, dass die $S_{P,i}$ unabhängig identisch verteilt sind und außerdem unabhängig von N_P und von U sind. Beim dritten Gleichheitszeichen wird verwendet, dass die Sprungzeitpunkte T_1, \dots, T_n des Poissonprozesses N_P unter der Bedingung $N_{P,t} = n$ auf dem Intervall $[0, t]$ genauso verteilt sind wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen auf $[0, t]$. Sie haben also die gemeinsame Dichte $f(t_1, \dots, t_n) = n!/t^n \mathbf{1}_{\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t\}}$.

Insgesamt ergibt sich also

$$E[N, N]_t = \frac{1}{\mu_2} (\sigma_P^2 + \lambda_P E[S_P^2]) (1 - e^{-\mu_2 t}) < \infty \quad \text{für } 0 \leq t < \infty. \quad (5.45)$$

Aus dem dritten Korollar zu Theorem 27 in Kapitel II in Protter [2000] folgt nun, dass N_t ein *quadratintegrierbares Martingal* ist und dass $E(N_t^2) = E([N, N]_t) (< \infty)$ gilt. Da auch V_t quadratintegrierbar ist, das heißt $E(V_t^2) < \infty$ für alle t , folgt dass $E[|Z_t|] \leq E[|N_t|] + |\beta_p| E[|V_t|] < \infty$ ist, da eine quadratintegrierbare Zufallsvariable auch absolut integrierbar ist. Es gilt $E[Z_t | \mathcal{F}_s] = N_s + \beta_p E[V_t | \mathcal{F}_s]$ für $0 \leq s < t$. Da V_t ein wachsender Prozess ist, gilt $E[V_t | \mathcal{F}_s] > V_s$ und somit ist Z_t ein Martingal für $\beta_p = 0$, ein Submartingal für $\beta_p > 0$ und ein Supermartingal für $\beta_p < 0$.

Um die letzten beiden Aussagen des Satzes zu beweisen, definieren wir zuerst

$$N_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |N_s| \quad \text{und} \quad N_\infty^* = \sup_{s \geq 0} |N_s|$$

und wir benötigen außerdem die *Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung*

$$E[(N_t^*)^p] \leq c_p E \left[[N, N]_t^{p/2} \right], \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (5.46)$$

für $p \geq 1$ und mit einer Konstanten $c_p > 0$. Auch für $t = \infty$ gilt die Formel

$$[N, N]_\infty = \sigma_P^2 \int_0^\infty U_s^2 ds + \sum_{i=1}^\infty U_{T_i}^2 S_{P,i}^2 \quad (5.47)$$

von oben und daraus folgt mit $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für positive a und b

$$[N, N]_\infty^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_P \left(\int_0^\infty U_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^\infty U_{T_i} |S_{P,i}|. \quad (5.48)$$

Als nächstes soll $E[[N, N]_\infty^{1/2}]$ nach oben abgeschätzt werden, um danach die Burkholder Ungleichung anwenden zu können. Wir betrachten zuerst den zweiten Term der rechten Seite von (5.48).

Es sei angemerkt, dass jeder der Schadenszeitpunkte T_i die Summe von i unabhängigen, zu dem Parameter λ_P exponentialverteilten Zufallsvariablen ist. Also sind die T_i

Gamma(i, λ_P) - verteilt und die Laplacetransformierte $E[e^{-aT_i}]$ ist bekannt. Hiermit und mit (5.38) gilt

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i} | S_{P,i} \right] &= E [|S_P|] \sum_{i=1}^{\infty} E [e^{-\mu_1 T_i}] = \\ &= E [|S_P|] \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_1} \right)^i < \infty \iff \mu_1 > 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Für den ersten Term in (5.48) erhalten wir

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^{\infty} U_s^2 ds \right)^{1/2} \right] &\leq E \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s < n+1} U_s^2 \right)^{1/2} \right] \leq E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s < n+1} U_s \right] \\ &= E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{n \leq s < n+1} \frac{U_s}{U_n} U_n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[U_n] E \left[\sup_{0 \leq s < 1} U_s \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_1 n} E \left[\sup_{0 \leq s < 1} U_s \right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_1 n} K < \infty \iff \mu_1 > 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

mit einer Konstanten $K > 0$. Wie vorher wurde hier verwendet, dass U_s und U_{s-t} für alle $t \leq s$ unabhängig sind und U_s/U_t die gleiche Verteilung wie U_{s-t} hat. Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da für das Maximum B_t der Brownschen Bewegung auf dem Intervall $[0, 1)$ gilt, dass $E[e^{\sigma_R B_t}]$ nach S.96 [Karatzas und Shreve \[1988\]](#) beschränkt ist und da $E[(1 + S_R)^{-1}] = m_{R,1}$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{0 \leq s < 1} U_s \right] &= E \left[\sup_{0 \leq s < 1} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \sigma_R^2 s - r s - \sigma_R W_{R,s} \right) \prod_{i=1}^{N_{R,s}} (1 - S_{R,i})^{-1} \right) \right] \\ &\leq e^{\frac{1}{2} \sigma_R^2} E \left[\exp \left(\sigma_R \sup_{0 \leq s < 1} W_{R,s} \right) \right] E \left[\prod_{i=1}^{N_{R,1}} \max \{ (1 - S_{R,i})^{-1}, 1 \} \right] \\ &\leq k \lambda_P \max \{ m_{R,1}, 1 \} \leq K \text{ da } m_{R,1} < \infty \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich

$$\begin{aligned} E(N_{\infty}^*) &\stackrel{(5.46)}{\leq} c_p E([N, N]_{\infty}^{\frac{1}{2}}) \stackrel{(5.48)}{\leq} c_p \sigma_P E \left[\left(\int_0^{\infty} U_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] + c_p E \left[\sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i} | S_{P,i} \right] \\ &\stackrel{(5.49)(5.50)}{<} \infty \iff \mu_1 > 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $E(N_\infty^*) = E(\sup_{s \geq 0} |N_s|) < \infty$ für $\mu_1 > 0$ und deswegen ist N_t ein *gleichmäßig integrierbares Martingal* nach Theorem 51 in Kapitel I von Protter [2000]. Somit gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = N_\infty$ mit Konvergenz f.s. und in L^1 . Da auch $E(V_\infty^*) = E(V_\infty) < \infty$ ist, ist auch der (monoton wachsende) Prozess V_t gleichmäßig integrierbar. Es gilt also $E(\sup_s |Z_s|) \leq E(\sup_s |N_s|) + \beta_P E(\sup_s |V_s|) < \infty$ und der Limes $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = Z_\infty = N_\infty + \beta_P V_\infty$ existiert f.s. und in L^1 . Mit $E(V_\infty) = \frac{1}{\mu_1}$ bekommen wir außerdem $E[Z_\infty] = \frac{\beta_P}{\mu_1}$, da für das Martingal N $E(N_\infty) = E(N_0) = 0$ gilt.

Zum Schluss zeigen wir noch $E[Z_\infty^2] < \infty$. Dazu verwenden wir die Burkholder-Ungleichung (5.46) zusammen mit der Darstellung (5.47) für $[N, N]_\infty$. Zuerst benötigen wir also Bedingungen dafür, dass $E([N, N]_\infty) < \infty$ ist. Als erstes erhalten wir analog zu (5.49)

$$E \left[\sum_{i=1}^{\infty} U_{T_i}^2 (S_{P,i})^2 \right] = E \left[(S_P)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_2} \right)^i \right] < \infty \iff \mu_2 > 0. \quad (5.51)$$

Weiter verwenden wir, dass nach (5.38) $E[U_s^2] = e^{-\mu_2 s}$ ist und erhalten dann mit dem Satz von Fubini

$$E \left[\int_0^\infty U_s^2 ds \right] = \int_0^\infty E[U_s^2] ds = \frac{1}{\mu_2} \quad \text{für } \mu_2 > 0.$$

Für $\mu_2 > 0$ ist also $E([N, N]_\infty) < \infty$ und mit der Burkholder-Ungleichung folgt, dass dann auch $E[(\sup_{t \geq 0} N_t)^2] < \infty$ ist. Da auch $E[(\sup_{t \geq 0} V_t)^2] = E[V_\infty^2] < \infty$ für $\mu_2 > 0$ erhält man zusammen $E[Z_\infty^2] < \infty$. \square

Annahme 5.1

Ab jetzt sei stets $\mu_1 > 0$, also $r > \sigma_R^2 + \lambda_R (E[(1 + S_R)^{-1}] - 1)$. Außerdem sei unser Modell nicht degeneriert, das heißt mindestens einer der Prozesse R und P muss eine zufällige Komponente enthalten.

Die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ lässt sich dann durch die Verteilungsfunktion $H(x) = P(Z_\infty \leq x)$ der Zufallsvariablen Z_∞ ausdrücken, was im nächsten Satz formuliert ist.

Satz 5.11 (Die Verteilung der Ruinwahrscheinlichkeit)

Sei H die Verteilungsfunktion von Z_∞ aus dem letzten Satz. Dann ist H stetig und die Ruinwahrscheinlichkeit des Prozesses X_t ist gegeben durch

$$\psi(y) := \frac{H(-y)}{E(H(-Y_{T_y}) | T_y < \infty)}. \quad (5.52)$$

Beweis:

Im Anschluss an Theorem 3.2 in Paulsen [1993] wurde gezeigt, dass die Verteilungsfunktion H stetig ist. Dabei ist wesentlich, dass das Modell nicht degeneriert ist, also eine zufällige Komponente enthält.

Um die zweite Aussage zu beweisen, benötigt man

$$V_t \stackrel{\text{def}}{=} U_{t-}^{-1} \int_t^\infty U_{s-} dP_s = \int_t^\infty \left(\frac{U_s}{U_t} \right)_- dP_s = \int_t^\infty U_{(s-t)-} dP_s = \int_0^\infty U'_{s-} dP'_s. \quad (5.53)$$

Hierbei wurde wieder verwendet, dass $U'_s = U_{t+s}/U_t$ die gleiche Verteilung wie U_s und $P'_s = P_{t+s} - P_t$ die gleiche Verteilung wie P_s hat. Letzteres folgt daraus, dass P ein Lévy-Prozess ist und somit stationäre Zuwächse hat.

Da R und P unabhängige Lévy-Prozesse sind, gilt, dass U'_s und P'_s unabhängig von $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_t \cup \mathcal{N})$ für alle $s \geq t \geq 0$ sind und wegen (5.53) also auch V_t unabhängig von \mathcal{F}_t ist. Somit ist V_T unabhängig von \mathcal{F}_T für jede endliche Stoppzeit T . Weiter folgt aus der Gleichung (5.53), dass V_t und auch V_T die gleiche Verteilung wie Z_∞ haben, da $Z_\infty = \int_0^\infty U_{s-} dP_s$.

Es sei nun wieder $T = T_y$ der Zeitpunkt des Ruins, wobei $T = \infty$ ist, falls kein Ruin eintritt. Da wegen (5.53) $Z_\infty = Z_t + U_{t-} V_t$ ist, gilt auf $\{T < \infty\}$

$$y + Z_\infty = y + Z_T + U_{T-} V_T = U_{T-} [U_{T-}^{-1}(y + Z_T) + V_T] = U_T [Y_T + V_T]. \quad (5.54)$$

Es wurde dabei verwendet, dass f.s. $R_{T-} = R_T$, also auch f.s. $U_{T-} = U_T$ ist. Dies gilt, da $F_R(-1) = 0$ und der Prozess R somit f.s. durch keinen seiner Sprünge zum Ruin führt. Ruin tritt also durch Diffusion oder durch einen Sprung des von R unabhängigen Prozesses P ein und der Prozess R hat f.s. keinen Sprung zum gleichen Zeitpunkt wie der Prozess P . Weiter wurde verwendet, dass $Y_t = U_t^{-1}(y + Z_t)$ für alle $t \geq 0$ ist, also auch für die Stoppzeit T .

Es folgt nun aus (5.54), dass auf $\{T < \infty\}$ $P(y + Z_\infty < 0) = P(Y_T + V_T < 0)$, da f.s. $U_t > 0$ für alle t ist. Zuletzt sei angemerkt, dass $\{Z_\infty < -y\} \subset \{T < \infty\}$, da $T = \inf\{t > 0 : Z_t < -y\}$. Mit der Stetigkeit von H folgt dann

$$\begin{aligned} H(-y) &= P(Z_\infty < -y) = P(y + Z_\infty < 0, T < \infty) = P(V_T < -Y_T, T < \infty) \\ &= P(V_T < -Y_T | T < \infty) P(T < \infty) = \int_{\{T < \infty\}} P(V_T < -Y_T | \mathcal{F}_T) dP \\ &= \int_{\{T < \infty\}} H(-Y_T) dP = E[H(-Y_T) | T < \infty] P(T < \infty). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, da V_T die gleiche Verteilung hat wie Z_∞ und da V_T unabhängig von \mathcal{F}_T ist, was beides aus (5.53) folgt, und da Y_T \mathcal{F}_T -messbar ist. \square

Mit diesem Satz ist eine Darstellung der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ durch die Verteilungsfunktion H der Zufallsvariable Z_∞ gewonnen worden. Allerdings müssen

dazu sowohl Zähler als auch Nenner in (5.52) bekannt sein. In Paulsen [1993] wird eine Möglichkeit aufgezeigt, die Verteilungsfunktion H zu gewinnen, die später angegeben wird. Die Berechnung des bedingten Erwartungswertes stellt dagegen ein Problem dar und kann wohl nur für Spezialfälle durchgeführt werden. Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit erhält man jedoch auch ohne den bedingten Erwartungswert aus (5.52), das heißt allein durch die Verteilungsfunktion $H(y)$. Zuerst muss aber noch der Begriff der Ausfallrate definiert werden.

Definition 5.12 (zunehmende Ausfallrate)

Die Zufallsvariable X besitzt eine zunehmende Ausfallrate, falls

$$P(X > y + x | X > y) \leq P(X > x)$$

gilt. Andernfalls hat X eine abnehmende Ausfallrate.

Korollar 5.13 (Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit)

Es gilt stets

$$\psi(y) \leq \frac{H(-y)}{H(0)}$$

mit Gleichheit für $\lambda_P = 0$.

Bei zunehmender Ausfallrate von S_P gilt

$$\psi(y) \geq \frac{H(-y)}{E[H(S_P)]}$$

Bei abnehmender Ausfallrate von S_P und $\sigma_P^2 = 0$ gilt

$$\psi(y) \leq \frac{H(-y)}{E[H(S_P)]}$$

mit Gleichheit für den Fall dass S_P exponentialverteilt ist.

Beweis: Um das Korollar zu beweisen, machen wir eine Fallunterscheidung nach der Ruinursache:

1. Diffusion führt zum Ruin:

Wenn der Diffusionsterm W_P den Ruin verursacht, dann gilt $-Y_T = 0$ und

$$\psi(y) = H(-y)/H(0).$$

Im Falle $\lambda_P = 0$ gilt dies immer.

2. Ein Sprung führt zum Ruin:

Es gilt $\Delta Y_T = \Delta P_T = -S_{P,N_{P,T}}$ und $-Y_T \leq S_{P,N_{P,T}}$. Besitzt die Zufallsvariable

S_P eine zunehmende Ausfallrate, so folgt aus $P(S_P > t + s | S_P > t) \leq P(S_P > s)$ für alle s und t , dass

$$E[H(-Y_T) | T < \infty] = E[H(S_P - Y_{T-}) | T < \infty] \leq E[H(S_P)]$$

und somit ist $\psi(y) \geq H(-y)/E[H(S_P)]$.

Wenn S_P eine abnehmende Ausfallrate besitzt gilt die umgekehrte Ungleichung. Für den Fall dass S_P exponentialverteilt ist, ist die Ausfallrate konstant und es gilt die Gleichheit. \square

Dieses Korollar liefert Schranken für $\psi(y)$, für die man jedoch die Verteilungsfunktion $H(x)$ von Z_∞ benötigt. J. Paulsen beweist, dass man H unter bestimmten Bedingungen als Lösung eines Randwertproblems erhalten kann. Dabei wird der schwache infinitesimale Generator von U verwendet. Da der Aufwand dies zu beweisen relativ groß ist und da zu Beginn des Kapitels schon ein ähnliches Resultat direkt für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ bewiesen wurde, werden die Ergebnisse aus Paulsen [1993] im Folgenden relativ kompakt zusammengefasst. Zuerst machen wir aber noch eine weitere Modellannahme.

Annahme 5.2

Es gelte ab jetzt $\mu_2 > 0$, also $2r > 3\sigma_R^2 - \lambda_R(1 - m_{R,2})$. Dabei ist $m_{R,2} = E[(1 + S_R)^{-2}]$ wie vorher.

Satz 5.14 (Paulsen [1993], Thm. 3.4)

Es sei $\varphi(u) = E[e^{iuZ_\infty}]$ die charakteristische Funktion von Z_∞ . Es gelten die folgenden Bedingungen:

(A1) Falls $\sigma_R^2 + \sigma_P^2 > 0$ dann sei $\int_{-\infty}^{\infty} |u\varphi(u)|du < \infty$,
andernfalls genügt $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|du < \infty$.

(A2) $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(y)|du < \infty$.

(A3) $E[|\log S_R|] < \infty$.

Dann ist die Verteilungsfunktion H von Z_∞ zweimal stetig differenzierbar. H ist außerdem die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_R^2 + \sigma_P^2)H''(u) + (rz - p)H'(z) - (\lambda_R + \lambda_P)H(z) \\ + \lambda_R \int_0^\infty H\left(\frac{z}{s}\right) dF_R(s) + \int_{-\infty}^\infty H(z + s) dF_P(s) = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} H(-\infty) = 0 \quad \text{und} \quad H(\infty) = 1, \quad \text{sowie} \\ \int_{-\infty}^0 H(z)dz = \int_0^\infty (1 - H(z))dz = \frac{\beta_P}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Satz 5.1 sind hier explizite Bedingungen für die Existenz einer Lösung des RWPs angegeben. Die Bedingungen (A1) und (A2) sind aber eher unhandlich. Sie können jedoch in den meisten Fällen durch praktischere Bedingungen ersetzt werden. Dies ist in den folgenden beiden Sätzen wiedergegeben. Interessant ist dabei das Resultat, dass diese automatisch erfüllt sind, wenn $\sigma_P^2 > 0$ ist. Die Brownsche Bewegung im Prozess P scheint also eine *stabilisierende Wirkung* auszuüben.

Satz 5.15 (Paulsen [1993], Prop. 3.4)

Es sei $\sigma_P^2 > 0$. Dann sind (A1) bis (A3) aus Satz 5.14 erfüllt.

Wenn der Prozess P des Versicherungsrisikos keine Schwankungskomponente W_P enthält, σ_P also Null ist, dann ist es schwieriger, einfachere Bedingungen für (A1) und (A2) zu finden. Man erhält jedoch das folgende Resultat.

Satz 5.16 (Paulsen [1993], Prop. 3.5)

Es sei $\sigma_P^2 = \lambda_R = 0$ und es gebe positive Konstanten a, b und K so dass $Re(E[e^{iuS_P}]) \leq au^{-b}$ für alle $|u| \geq K$. Zusätzlich gelte

$$\lambda_P > 2r + \sigma_R^2.$$

Dann sind die Konditionen (A1) und (A2) aus Theorem 5.14 erfüllt.

Nach J. Paulsen ist die Annahme $\lambda_P > 2r + \sigma_R^2$ in der Praxis meist erfüllt, da auf jährlicher Basis bei Versicherungsunternehmen $2r + \sigma_R^2$ meist kleiner als 0.5 und λ_P dagegen deutlich größer als 1 ist.

Somit kann man mit Hilfe des Korollars 5.13 und mit Satz 5.14 Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ berechnen. Lösungen für die Ruinwahrscheinlichkeit selbst können jedoch nur in wenigen Spezialfällen durch den Satz 5.11 berechnet werden. Zwei Beispiele, die jedoch nur bedingt von Interesse sind, finden sich in Paulsen [1993].

Die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse stammen alle aus dem Artikel von Paulsen [1993]. Dieser war von großer Bedeutung für die Risikotheorie, da dort das hier behandelte Risikomodell eingeführt wurde und wichtige theoretische Aspekte dieses Modells präsentiert wurden. Um in der Praxis Ergebnisse für die Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi(y)$ zu erhalten, scheint die zu Beginn dieses Kapitels präsentierte Herangehensweise jedoch deutlich besser geeignet zu sein. Diese wurde auch erst vier Jahre später in Paulsen und Gjessing [1997] veröffentlicht. Auch dadurch sind analytische Lösungen nur in Spezialfällen zu bekommen. Aber es bietet sich an, aufbauend auf Kapitel 5.3 numerische Approximationen der Ruinwahrscheinlichkeit durch Lösung der erhaltenen Volterra-Integralgleichung zu berechnen. Ein effektives Verfahren hierzu ist in Paulsen u. a. [2005] zu finden. Dieses wird im nächsten Kapitel dieser Diplomarbeit ausführlich beschrieben.

Kapitel 6

Numerische Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit

6.1 Numerische Methoden

In diesem Kapitel wird die numerische Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ beziehungsweise der Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y) = 1 - \psi(y)$ behandelt. Die hier verwendeten Verfahren bauen auf der Theorie des Kapitels 5 auf, insbesondere auf den Abschnitt 5.3.

Gesucht ist also eine Lösung der *Volterra-Integralgleichung* (5.36), d.h. der Gleichung

$$g(y) + \int_0^y K(y, x)g(x)dx = \beta(y). \quad (6.1)$$

Dabei ist der *Kern* $K(y, x)$ und die Funktion $\beta(y)$ wie in Kapitel 5.3 definiert. Die gesuchte Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$ erhält man durch

$$\phi(y) = \frac{1}{g(\infty)}g(y). \quad (6.2)$$

Um eine numerische Lösung von (6.1) zu bestimmen, bietet sich die Verwendung eines *Standardverfahrens der numerischen Quadratur* an, mit dem das Integral approximativ berechnet wird.

Dazu muss die Gleichung (6.1) zuerst diskretisiert werden. Die *Wahl der Stützstellen* bei der Berechnung der Integrale unterliegt jedoch starken Einschränkungen. Für die numerische Integration über das Intervall $[0, y_i]$ können nämlich nur Stützstellen y_0, y_1, \dots, y_i verwendet werden, für die bereits Funktionswerte $g(y_j)$ berechnet worden sind. Denn wenn eine Stützstelle ξ benutzt werden soll, so muss der Wert $g(\xi)$ bereits bekannt sein, also das Integral über $[0, \xi]$ zuvor berechnet worden sein. Dies führt zu Einschränkungen bei der Wahl passender Quadraturverfahren.

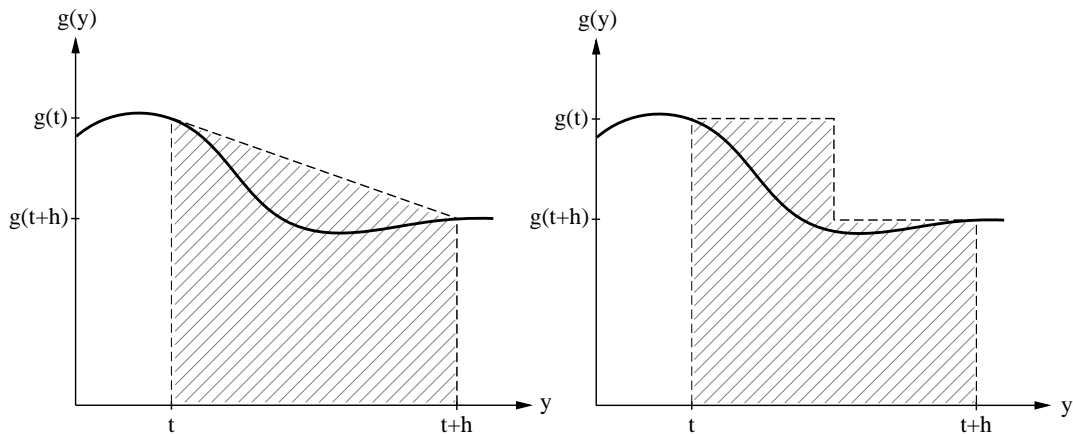
Im Folgenden wird die konstante Schrittweite h verwendet, das heißt es finden nur Funktionsauswertungen an den Stellen $y_0 = 0, y_1 = h, y_2 = 2h, \dots$ statt und nur diese Punkte sind als Stützstellen für die verwendeten Quadraturverfahren zugelassen. Es bezeichne g_i den numerisch berechneten Wert von $g(ih)$ und $K_{j,i} = K(jh, ih)$

sowie $\beta_n = \beta(nh)$. Man erhält damit die diskretisierte Version der Gleichung (6.1)

$$g_n + h \sum_{i=1}^n w_i K_{n,i} g_i = \beta_n, \quad (6.3)$$

mit passenden Gewichten w_i . Diese ergeben sich aus dem verwendeten Quadraturverfahren.

Abbildung 6.1: Die Trapezregel



Eine der einfachsten Quadraturformeln ist die *Trapezregel*. Diese verwendet für die Berechnung des Integrals einer Funktion g über dem Intervall $[ih, (i+1)h]$ nur die Funktionswerte g_i und g_{i+1} . Diese werden beide gleich gewichtet. Für das Integral erhält man so

$$\int_{ih}^{(i+1)h} g(x) dx \approx \frac{1}{2} h g_i + \frac{1}{2} h g_{i+1}$$

und für die Gleichung (6.3) ergibt sich dann

$$g_n + h \left(\frac{1}{2} K_{n,0} g_0 + \sum_{i=1}^{n-1} K_{n,i} g_i + \frac{1}{2} K_{n,n} g_n \right) = \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

mit dem Startwert $g_0 = \beta_0$. Die gesuchten Werte g_i erhält man dann durch Auflösen dieser Gleichung.

Ein Vorteil der Trapezregel ist, dass sie sehr gut graphisch veranschaulicht werden kann und ihre Funktionsweise dadurch leicht zu verstehen ist (siehe Abb. 6.1). Ihr größter Nachteil ist, dass es bessere numerische Verfahren gibt.

Die Qualität numerischer Verfahren

Eine Möglichkeit, um einen ersten Eindruck über die *Qualität von Quadraturverfahren* zu gewinnen, ist, die Klasse von Funktionen zu betrachten, welche die Quadraturformel exakt integriert. So berechnet die Trapezregel nur Integrale über Geraden,

also über Polynomen ersten Grades, exakt. Die *Simpsonregel*, manchmal auch Keplersche Fassregel genannt, integriert dagegen sogar Polynome bis zum Grad drei fehlerlos. Also scheint diese in gewisser Weise der Trapezregel überlegen zu sein. Nachher werden wir ein Verfahren vorstellen, welches die Simpsonregel verwendet und das durchaus “besser” sein wird als das vorher beschriebene.

Nun werden aber zuerst *Gütekriterien für numerische Verfahren* eingeführt. Die folgenden Definitionen stammen dabei aus [Linz \[1985\]](#).

Definition 6.1 (Diskretisierungsfehler)

Der Diskretisierungsfehler ϵ_i eines numerischen Verfahrens ist definiert als

$$\epsilon_i = g_i - g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

wobei für konstante Schrittweiten h $x_i = ih$ gilt.

Man erwartet von einem numerischen Verfahren, dass dieser Fehler ϵ_i für kleiner werdende Schrittweiten h für alle i gegen Null geht, also die numerisch berechneten Werte g_i die tatsächlichen Werte $g(x_i)$ beliebig genau approximieren.

Definition 6.2 (Konvergenz, Konvergenzordnung)

Ein Verfahren der Form (6.3) heißt konvergent, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_i |\epsilon_i| \right) = 0.$$

Falls für alle zulässigen Schrittweiten h

$$\max_i |\epsilon_i| \leq Mh^p$$

mit einer Konstanten $M > 0$ gilt, so hat das numerische Verfahren die Konvergenzordnung p .

Ein gutes Verfahren sollte eine möglichst hohe Konvergenzordnung besitzen. Das bedeutet, dass die Qualität der numerischen Lösungen für kleiner werdende Schrittweiten h möglichst stark zunimmt, also der maximale Diskretisierungsfehler möglichst schnell abnimmt.

H. Linz nutzt aus, dass die Konvergenzordnungen von Quadraturverfahren hinreichend bekannt sind und stellt den Zusammenhang mit denen der darauf aufbauenden Verfahren zur Lösung der Gleichung (6.3) her. So hat das oben beschriebene *Trapezsummenverfahren* die Konvergenzordnung zwei, soweit die Funktion g und der Kern $K(y, x)$ je zweimal stetig differenzierbar sind und der Kern nicht singular ist. Dies entspricht genau der Konvergenzordnung der numerischen Integration durch die Trapezsumme (siehe z.B. [Deuffhard und Hohmann \[1993\]](#)).

Es bietet sich also an, einen Algorithmus zu verwenden, dem ein Quadraturverfahren höherer Konvergenzordnung zugrunde liegt. Im Folgenden wird dies die *Simpsonregel* sein. Das daraus entstehende Verfahren vom Typ (6.3) wird dann auch tatsächlich die höhere Konvergenzordnung vier besitzen.

Das Zwei-Block-Simpson Verfahren

Ein Problem bei der Anwendung der Simpsonregel ist, dass diese nur für die Integration über Intervalle $[0, ih]$ mit i gerade angewendet werden kann. Für ungerade i muss für ein Teilintervall somit eine andere Quadraturformel herangezogen werden, welche mindestens die Konvergenzordnung vier haben muss, damit das so entstandene Verfahren von Ordnung vier ist. Außerdem muss der Wert g_1 durch ein anderes Verfahren mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden.

In Linz [1985] wird zur Lösung von Volterra-Integralgleichungen zweiter Ordnung das *Zwei-Block-Simpson Verfahren* vorgeschlagen. Dieses liefert zum einen den benötigten Startwert g_1 und zum anderen erhält man auch für gerade i Lösungen durch das Simpsonverfahren. Für viermal stetige Funktionen g erreicht dieses Verfahren die Konvergenzordnung vier. Es liefert damit gute Lösungen der Integralgleichung auf dem gesamten Definitionsbereich. J. Paulsen verwendet dieses Verfahren zur Lösung von (6.1) in Paulsen u. a. [2005]. Das genaue Vorgehen dabei wird im Folgenden beschrieben.

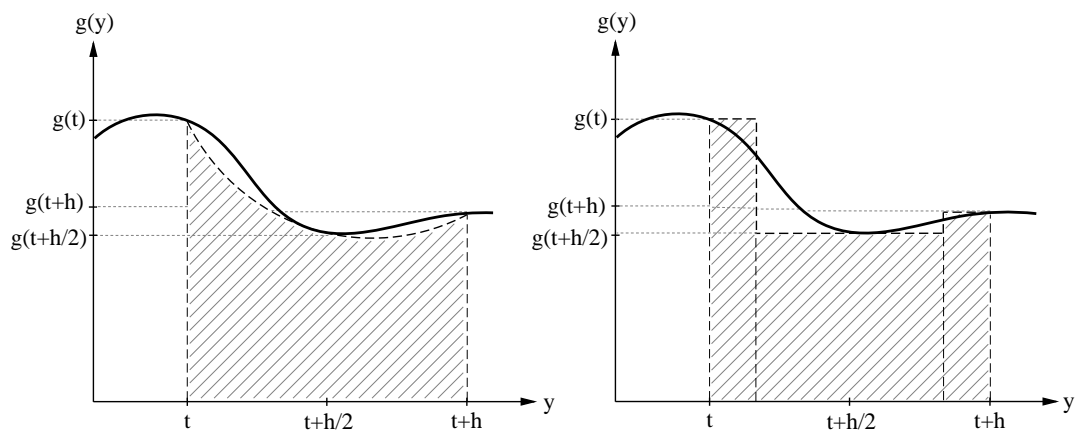


Abbildung 6.2: Simpsonregel: Interpolationspolynom und Integrationsgewichte

Mit der *Simpsonregel* erhält man durch numerische Integration der Funktion $K(y, x)g(x)$ über das Intervall $[0, 2h]$ mit Schrittweite h aus der Gleichung (6.1) die Approximation g_2 für $g(2h)$ aus der Gleichung

$$g_2 + \frac{1}{3}h(K_{2,0}g_0 + 4K_{2,1}g_1 + K_{2,2}g_2) = \beta_2, \quad (6.5)$$

und durch numerische Integration über das Intervall $[0, h]$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}h$ für das noch unbekannte g_1

$$g_1 + \frac{1}{6}h(K_{1,0}g_0 + 4K_{1,0.5}g_{0.5} + K_{1,1}g_1) = \beta_1. \quad (6.6)$$

Die Idee des Zwei-Block-Verfahrens ist, diese beiden Gleichungen simultan zu lösen. Dazu bestimmt man $g_{0.5}$ mittels *Polynominterpolation* durch Polynome der Ordnung zwei. Man muss also das Polynom zweiten Grades finden, welches durch die Punkte $P_0 = (0, g_0)$, $P_1 = (h, g_1)$ und $P_2 = (2h, g_2)$ eindeutig festgelegt ist. Durch Auswertung des Polynoms an der Stelle $0.5h$ erhält man dann eine Approximation von $g_{0.5}$, ausgedrückt durch die Werte g_0 , g_1 und g_2 . Gesucht ist also das Polynom vom Grad zwei

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

welches durch die drei Punkte P_0 , P_1 und P_2 geht. Die Koeffizienten lassen sich durch Lösen des Gleichungssystems berechnen, das nach Einsetzen der Punkte P_0 , P_1 und P_2 in $p(x)$ entsteht.

Eine andere Möglichkeit ist, $p(x)$ mit Hilfe der *Lagrange-Basis* darzustellen. Die dazu gehörenden *Lagrange-Polynome* sind definiert als

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Wir erhalten mit $x_0 = 0$, $x_1 = h$ und $x_2 = 2h$

$$l_0(x) = \frac{x^2 - 3hx + 2h^2}{2h^2}, \quad l_1(x) = \frac{x^2 - 2hx}{-h^2} \quad \text{und} \quad l_2(x) = \frac{x^2 - hx}{2h^2}.$$

Die Lösung des Interpolationsproblems lässt sich dann angeben als

$$p(x) = \sum_{i=0}^2 g(ih)l_i(x) = \sum_{i=0}^2 g_i l_i(x),$$

und somit ist $p(0.5h) = \frac{3}{8}g_0 + \frac{3}{4}g_1 - \frac{1}{8}g_2 \approx g_{0.5}$ die gesuchte Approximation.

Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass es ohne Schwierigkeiten auf Interpolationspolynome höherer Ordnung übertragen werden kann. Die zuerst erwähnte Methode, bei der die drei Interpolationspunkte P_0 , P_1 und P_2 in die Gleichung des Polynoms $p(x)$ eingesetzt werden und danach das so entstandene Gleichungssystem gelöst wird, stößt dagegen bei Polynomen höheren Grads schnell auf Probleme, da dann größere Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

Mit $p(0.5h)$, eingesetzt in (6.6) für $g_{0.5}$, erhält man nun

$$g_1 + \frac{1}{6}h \left[\left(K_{1,0} + \frac{3}{2}K_{1,0.5} \right) g_0 + (K_{1,1} + 3K_{1,0.5}) g_1 - \frac{1}{2}K_{1,0.5}g_2 \right] = \beta_1 \quad (6.7)$$

Die beiden Werte g_1 und g_2 ergeben sich dann als Lösung des Gleichungssystems bestehend aus (6.7) und (6.5). Dies ist ein lineares Gleichungssystem, welches durch ein numerisches Standardverfahren gelöst werden kann.

Die einfachste Methode ist die Q-R-Zerlegung der entsprechenden Matrix und spätere Rücksubstitution. Bei den numerischen Beispielen im nächsten Abschnitt wird das Programm *MATLAB V6.5* verwendet. Dieses wählt automatisch die schnellste in MATLAB implementierte Fortran-Routine aus, um das Gleichungssystem effizient zu lösen. Die Q-R-Zerlegung durch Householder-Reflexionen ist dabei die letzte Wahl, da sie am langsamsten ist. Für das hier vorkommende kleine 2×2 - Gleichungssystem wäre dies aber wohl nicht nötig, da der Rechenaufwand für dessen Lösung doch sehr gering ist. Insbesondere fällt er bei großen i kaum mehr ins Gewicht.

Bei den *weiteren Iterationsschritten* geht man genauso vor. Man erhält dann für g_i und g_{i-1} , $i \geq 4$ und gerade, die beiden Gleichungen

$$g_i + h \sum_{j=0}^{i-2} w_j K_{i,j} g_j + \frac{1}{3} h (K_{i,i-2} g_{i-2} + 4K_{i,i-1} g_{i-1} + K_{i,i} g_i) = \beta_i \quad \text{und}$$

$$g_{i-1} + h \sum_{j=0}^{i-2} w_j K_{i-1,j} g_j + \frac{1}{6} h \left(K_{i-1,i-2} g_{i-2} + 4K_{i-1,i-\frac{1}{2}} g_{i-\frac{1}{2}} + K_{i-1,i-1} g_{i-1} \right) = \beta_{i-1}$$

mit $g_{i-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} g_{i-2} + \frac{3}{4} g_{i-1} - \frac{1}{8} g_i$.

Dabei haben die Gewichte $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{i-3}, w_{i-2})$ die Gestalt

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Es ist also wieder ein lineares Gleichungssystem gegeben, aus dem man g_i und g_{i-1} erhält. Sukzessive kann man somit die Werte g_j jeweils in *Zweierblöcken* berechnen. Dass die hohe hohe Konvergenzordnung des Simpsonverfahrens dabei erhalten bleibt, wird im nächsten Satz bewiesen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit kommt zuvor aber noch eine Definition.

Definition 6.3 *Nach dem Satz 5.9 sind bei der Lösung der Volterra-DGL (6.1) drei Fälle unseres Risikomodells zu unterscheiden. Diese seien wie folgt definiert:*

Fall 1: $\sigma_P^2 = \sigma_R^2 = 0$

Fall 2: $\sigma_P^2 > 0$

Fall 3: $\sigma_P^2 = 0$ und $\sigma_R^2 > 0$

In Fall drei ist der Kern $K(y, x)$ an der Stelle 0 singulär, d.h. unbeschränkt, was man auch bei der numerischen Lösung von Gleichung (6.1) berücksichtigen muss.

Satz 6.4 (Konvergenzordnung des Zwei-Block-Simpson Verfahrens)

Es sei $p > 0$, $r > \frac{1}{2} \sigma_R^2$ und $F_P \in C^4[0, \infty)$. Die Gleichung (6.1) wird mit dem Zwei-Block-Simpson Verfahren mit konstanter Schrittweite h numerisch gelöst.

Es gilt dann für den Fall 1 mit dem Startwert $g(0) = g_0 > 0$ beliebig und den Fall 2 mit den Startwerten $g(0) = 0$ und $g'(0) = g'_0 > 0$ beliebig

$$|g_n - g(nh)| = O(h^4) \quad \text{für alle } n \geq 0. \quad (6.8)$$

Für den Fall 3 müssen die Werte g_1 und g_2 wie folgt berechnet werden

$$g_1 := \left(1 + \frac{\lambda_P}{p}h + \frac{\lambda_P(\lambda_P - r) - 2f_P(0)\lambda_P}{p^2}h^2 \right) g_0 \quad \text{und}$$

$$g_2 := \left(1 + \frac{\lambda_P}{p}2h + \frac{\lambda_P(\lambda_P - r) - 2f_P(0)\lambda_P}{p^2}4h^2 \right) g_0,$$

wobei $f_P = F'_P$ die Dichte von S_P ist. Dann gilt mit einem beliebigen Anfangswert $g(0) = g_0 > 0$ auch in diesem Fall die Abschätzung (6.8).

Wird zusätzlich y_{end} so gewählt, dass

$$|g(y_{end}) - g(\infty)| = O(h^{q_0}),$$

dann gilt mit $n_0 = y_{end}/h$ und mit

$$\phi_n := \frac{g_n}{g_{n_0}}$$

gilt für die numerisch berechnete Ruinwahrscheinlichkeit ϕ_n , dass

$$|\phi_n - \phi(nh)| = O(h^q)$$

ist, wobei $q = \min\{4, q_0\}$. In den ersten beiden Fällen gilt dies für alle $n \geq 0$, im letzten Fall nur für $n = 0$ und $n > 2$.

Beweis:

Zuerst stellt man fest, dass die Funktion g nach Satz 5.8 viermal stetig differenzierbar ist.

Für die Fälle 1 und 2 ist der Kern $K(y, x)$ viermal stetig differenzierbar in y und x und erfüllt somit die Bedingungen aus Kapitel 7 in Linz [1985]. Es folgt dann aus Kapitel 7.6 des gleichen Buches, dass die Zwei-Block-Simpsonmethode für $g \in C^4$ die Konvergenzordnung vier hat, also $\max_i |\epsilon_i| = O(h^4)$ ist.

Für den Fall 3 stellt sich das Problem, dass der Kern an der Stelle 0 singular, d.h. unbeschränkt ist und somit die Voraussetzungen aus Kapitel 7 von Linz [1985] nicht gegeben sind. Diese Singularität kann man jedoch durch *Taylorentwicklung* von g an der Stelle 0 auflösen. Dazu schreibt man $g(y) = \gamma_0 + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + O(y^3)$ mit $\gamma_0 = g(0)$. Für die numerisch berechneten Werte g_1 und g_2 ergeben sich dann

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_0 + \gamma_1 h + \gamma_2 h^2 & \text{mit } |g_1 - g(h)| &= O(h^3) \quad \text{und} \\ g_2 &= \gamma_0 + \gamma_1 2h + \gamma_2 4h^2 & \text{mit } |g_2 - g(2h)| &= O(h^3). \end{aligned}$$

Die Startwerte g_0 , g_1 und g_2 haben also einen Fehler der Ordnung drei. Es folgt somit aus dem Theorem 7.2 in Linz [1985], dass das Zwei-Block-Simpson Verfahren mit diesen Anfangswerten die Konvergenzordnung vier hat.

Um g_1 und g_2 zu finden, approximiert man $F_2(x) = \int_0^x F_P(v)dv$ durch $\tilde{F}_2(x) = f_2x^2 + f_3x^3$. Dies macht Sinn, da $F_2(0) = F_2'(0) = 0$. Der zu dieser Approximation gehörende Kern wird mit $\tilde{K}(y, x)$ bezeichnet. Für die Form des ursprünglichen Kerns $K(y, x)$ siehe Satz 5.9. Man schreibt nun abkürzend

$$\tilde{K}(y, x) = \frac{2}{\sigma_R^2 y^2} \left(\kappa_0 + \kappa_1 x + \kappa_2 \tilde{F}_2(y - x) - \kappa_3 y \right),$$

wobei

$$\kappa_0 = p, \quad \kappa_1 = 2r - 3\sigma_R^2 + \lambda_P, \quad \kappa_2 = \lambda_P \quad \text{und} \quad \kappa_3 = r - \sigma_R^2 + \lambda_P \quad \text{ist.}$$

Dann gilt mit $\tilde{g}(y) = \gamma_0 + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2$

$$\tilde{g}(y) + \int_0^y \tilde{K}(y, x) \tilde{g}(x) dx = \beta(y) + O(y^3). \quad (6.9)$$

Nach Einsetzen von \tilde{g} und \tilde{K} in (6.9) erhält man durch Identifizierung der konstanten Terme und der Terme erster Ordnung in y zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten γ_1 und γ_2 und erhält diese also nach Lösung des linearen Gleichungssystems.

Jetzt muss noch die Konvergenzaussage für ϕ_n bewiesen werden. Es gilt mit $q = \min\{q_0, 4\}$ und den Bezeichnungen des Satzes

$$\begin{aligned} |\phi_n - \phi(nh)| &= \left| \frac{g_n}{g_{n_0}} - \frac{g(nh)}{g(\infty)} \right| = \left| \frac{g_n}{g(\infty)} \frac{1}{g_{n_0}/g(\infty)} - \frac{g(nh)}{g(\infty)} \right| \\ &= \left| \frac{g_n}{g(\infty)} \frac{1}{1 + (g_{n_0} - g(\infty))/g(\infty)} - \frac{g(nh)}{g(\infty)} \right| \\ &= \frac{1}{g(\infty)} |g_n - g(nh)| + O(h^q) = O(h^q) \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, da

$$|g_{n_0} - g(\infty)| \leq |g_{n_0} - g(\bar{y})| + |g(\bar{y}) - g(\infty)| = O(h^4) + O(h^{q_0}) = O(h^q).$$

□

In diesem Satz wurde also bewiesen, dass das Zwei-Block-Simpson Verfahren unter Voraussetzungen die Konvergenzordnung vier hat, welche für numerische Verfahren relativ hoch ist. Ein Nachteil der gesamten Verfahrensklasse ist jedoch, dass der

Rechenaufwand nicht proportional zu der Anzahl der gerechneten Schritte wächst. Es sind zur Berechnung von g_0, g_1, \dots, g_i nämlich $N := \sum_{j=1}^i i = \frac{1}{2}i(i+1)$ Additionen und insbesondere auch N Funktionsauswertungen durchzuführen, welche den größten Aufwand bedeuten. Dieser verhält sich also quadratisch zu der Anzahl der zu berechneten Funktionswerte. Dies ist ein Unterschied zu Verfahren für gewöhnliche DGLen, bei denen der Rechenaufwand meist nur linear ansteigt. Der zweite große Unterschied ist die oben angesprochene Einschränkung bei der Wahl der Stützstellen.

Trotzdem eignet sich das Zwei-Block-Simpson Verfahren sehr gut zur numerischen Lösung der Volterra-Integralgleichung (5.36). Zum einen ist bekannt, dass das Verfahren die relativ hohe Konvergenzordnung vier besitzt. Dadurch kann man auch die Qualität der erhaltenen Ergebnisse abschätzen. Insbesondere wegen des quadratisch anwachsenden Rechenaufwands ist eine hohe Konvergenzordnung auch nötig. Die Verwendung von Verfahren, die auf Quadraturformeln niedriger Ordnung aufbauen, sind deswegen nicht zu empfehlen. Bei der Verwendung von Quadraturformeln höherer Ordnung stellt sich das Problem, dass auch die Funktion g entsprechend oft stetig differenzierbar sein muss damit das Verfahren eine höhere Konvergenzordnung als vier erreicht. Dies ist hier aber a priori nicht gegeben.

Andere numerische Verfahren

In der Literatur über die Lösung von Volterra-Integralgleichungen liegt der Schwerpunkt auf Verfahren, die auf die *Simpsonregel* aufbauen, dies vermutlich aus den oben angeführten Gründen. Eine *alternative Implementierung* ist, diese mit einer anderen Quadraturformel zu kombinieren. So wird für gerade i die Simpsonregel verwendet, für ungerade i dagegen ein Teilintervall mit einer anderen Quadraturformel berechnet. Damit die Konvergenzordnung vier des Verfahrens erhalten bleibt, muss diese auch eine entsprechende Konvergenzordnung erreichen. Es wird deswegen meist die *Newtonsche 3/8-Regel* verwendet, welche dieselbe Konvergenzordnung wie die Simpsonregel hat und ein Integral mit vier Stützstellen berechnet.

Die beiden Quadraturformeln haben die Gewichte

$$G_{\text{Simpson}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{und} \quad G_{\text{Newton}} = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right).$$

Damit erhält man die Werte g_i , $i \geq 2$ aus

$$g_i + h \sum_{j=0}^i w_j K_{i,j} g_j = \beta_j \quad \text{mit den Gewichten } \mathbf{w} = (w_0, \dots, w_i)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) && \text{für } i \text{ ungerade} \quad \text{und} \\ \mathbf{w} &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8} + \delta, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) && \text{für } i \text{ gerade} \\ \text{mit } \delta &= \begin{cases} 0 & \text{für } i = 3 \\ \frac{1}{3} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Integrationsgewichte w_i entsprechen für gerade i also denen der zusammengesetzten Simpsonregel, bei ungeraden i entstehen sie durch die Hintereinanderschaltung der Newtonschen 3/8-Regel und der (zusammengesetzten) Simpsonregel.

Um einen *Startwert* g_1 zu erhalten, der einen Fehler von höchstens $O(h^4)$ hat, berechnet man zuerst den *Zwischenwert* $g_{0.5}$ mit der Trapezregel. Danach berechnet man mit der Simpsonregel und mit halber Schrittweite den Wert g_1 , der dann die gewünschte Genauigkeit hat. Das so entstandene Verfahren hat nun wieder die Konvergenzordnung vier und kann als Alternative zum Zwei-Block-Simpson Verfahrens verwendet werden. Etwas ausführlicher wird dieses Verfahren in [Hackbusch \[1989\]](#) beschrieben.

Andere bekannte Lösungsmethoden versuchen die Einschränkungen bei der Wahl der Stützstellen aufzuheben, indem sie Approximationen $\tilde{g}(y)$ von g an beliebigen Stellen y berechnen, z.B. durch Polynominterpolation. Dann können auch Quadraturverfahren verwendet werden, welche mit *nichtäquidistanten Stützstellen* arbeiten.

Die Idee der *Runge-Kutta Verfahren*, die im Gebiet der Differentialgleichungen von großer Bedeutung sind, kann auch auf die Lösung von Volterra-Integralgleichungen übertragen werden. Der wichtigste Unterschied zu den hier behandelten Verfahren ist, dass die Berechnungen von f_{i+1} vom jeweils zuletzt berechneten Wert f_i ausgehen. Das Integral in (6.1) wird im Schritt i also nur über dem Intervall $[y_i, y_{i+1}]$ numerisch integriert. Dazu werden allerdings mehrere Zwischenwerte berechnet.

Die so entstandenen expliziten Verfahren sind nach H. Linz jedoch den hier behandelten Lösungsmethoden unterlegen. Ob die implizite Variante bessere Resultate erzielt, müsste gegebenenfalls untersucht werden. Genaueres findet man in Kapitel 7.8 in [Linz \[1985\]](#) und in Kapitel 4 in [Brunner und van der Houwen \[1986\]](#).

Das Problem $g(\infty)$ zu bestimmen

Um aus der numerisch berechneten Funktion $g(y)$ die Funktion $\phi(y)$ durch die Gleichung (6.2) zu berechnen, benötigt man den Wert $g(\infty)$. Dafür wird der Näherungswert g_{n_0} von $g(\bar{y})$ verwendet mit $n_0 = \bar{y}/h$, wobei \bar{y} der größte Wert y ist, bis zu dem der Algorithmus Werte für $g(y)$ berechnet hat. Im Weiteren wird angenommen, dass das Zwei-Block-Simpson Verfahren verwendet wurde.

Der Satz 6.4 besagt, dass $|g(\bar{y}) - g(\infty)|$ nur einen Fehler der Größenordnung $O(h^4)$ haben darf, damit für die Näherungslösungen $|\phi_n - \phi(nh)| = O(h^4)$ gilt, also der Algorithmus auch für die Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ die Konvergenzordnung vier hat.

Diese Bedingung ist für die Praxis jedoch ziemlich unhandlich. Man überprüft stattdessen, ob der Fehler $|g(\bar{y}) - g(\infty)|$ vernachlässigbar im Vergleich zum Diskretisierungsfehler $|g_n - g(nh)|$ ist. Dieser hängt wegen den auftretenden Rundungsfehlern jedoch nicht nur von dem verwendeten Algorithmus ab, sondern auch von der Rechengenauigkeit. Es spielt hier also eine Rolle, ob einfach- oder doppelt-genaue Gleitkommazahlen benutzt wurden.

Um \bar{y} zu bestimmen geht man wie folgt vor:
Es sei $a = 0$.

1. Anwendung des Zwei-Block-Simpson Verfahrens mit der Schrittweite h zur numerischen Berechnung von Werten g_i für $g(ih)$ auf dem Intervall $[a, \bar{y}]$.
2. Überprüfung ob sich g_i für $i \rightarrow n_0 = \bar{y}/h$ stabilisiert.
 - ja: $\phi_i := \frac{g_i}{g_{n_0}}$ und $|\phi_i - \phi(ih)| = O(h^4)$
 - nein: $a := \bar{y}$ und $\bar{y} := \bar{y}_{\text{neu}}$ mit $\bar{y}_{\text{neu}} > \bar{y}$. Zurück zu 1.

Die Feststellung der Stabilität von g_n wird dadurch erschwert, dass für die Zwei-Block-Methode $|g_{2m+2} - g_{2m+1}| = O(h^4)$ gilt, also Schwankungen der Größenordnung $O(h^2)$ auftreten. Um diesen *Oszillationseffekt* auszugleichen, schlägt J. Paulsen vor, nach der Feststellung der Stabilisierung von g_n bei n_0 den Algorithmus noch m_0 Schritte zusätzlich rechnen zu lassen und dann ϕ_n durch

$$\phi_n = \frac{g_n}{g_\infty} \quad \text{mit} \quad g_\infty = \frac{1}{m_0 + 1} \sum_{k=n_0}^{n_0+m_0} g_k \quad (6.10)$$

zu bestimmen.

In [Paulsen u. a. \[2005\]](#) wird außerdem ein Ansatz vorgestellt, der \bar{y} mit Hilfe des *asymptotischen Verhaltens* von $\psi(y)$ bestimmt. Es gilt nämlich

$$|g(\bar{y}) - g(\infty)| = |\phi(\bar{y})g(\infty) - g(\infty)| = g(\infty)\psi(\bar{y}).$$

Wenn die gewünschte Stabilität von g_n vorhanden ist, dann muss $|g(\bar{y}) - g(\infty)|$ ungefähr die Größenordnung der Rechengenauigkeit γ haben. Diese beträgt beim Zwei-Block-Simpson Verfahren bei Verwendung von doppeltgenauen Gleitkommazahlen zwischen 10^{-8} und 10^{-10} .

Also muss \bar{y} so gewählt werden, dass

$$\psi(\bar{y}) \approx \gamma.$$

Dazu betrachtet man das asymptotische Verhalten von $\psi(y)$. Dieses hängt insbesondere von der Verteilungsfunktion F_P der Schadenforderungen S_P ab und davon, ob σ_R^2 Null ist oder nicht. In [Paulsen u. a. \[2005\]](#) ist für vier Fälle die Asymptotik von

$\psi(y)$ angegeben und es wird auf weitere Artikel verwiesen, in denen man weitere Fälle findet.

J. Paulsen stellt allerdings fest, dass die Asymptotik von $\psi(y)$ nur einen vagen Anhaltspunkt über die nötige Größe von \bar{y} liefert. Das oben beschriebene Vorgehen zur Feststellung der Stabilisierung von g_n muss somit noch zusätzlich angewendet werden. Deswegen wird hier nicht weiter auf die asymptotischen Eigenschaften von $\psi(y)$ eingegangen. Genauer darüber findet sich in [Paulsen u. a. \[2005\]](#) und den dort angegebenen Literaturhinweisen.

6.2 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt werden für einige Zahlenbeispiele die Ruinwahrscheinlichkeiten numerisch berechnet. Dazu wird das im letzten Abschnitt vorgestellte *Zwei-Block-Simpson Verfahren* verwendet. Es wird sich zeigen, dass dieses für jeden der *drei Fälle aus Satz 6.4* gute Ergebnisse liefert, also auch in der Praxis gute Arbeit leistet.

Als erstes wird das Beispiel aus Kapitel 5.2.1 betrachtet, für welches die tatsächlichen Ruinwahrscheinlichkeiten bekannt sind. Deswegen lässt sich die Genauigkeit der berechneten Werte überprüfen. Als nächstes folgen zwei Beispiele, bei denen ein Störterm $\sigma_P > 0$ vorhanden ist und es wird der Einfluss der Störterme σ_P und σ_R auf die Ruinwahrscheinlichkeiten untersucht. Im ersten Fall sind die Schadenforderungen *exponentialverteilt*, im zweiten *paretoverteilt*. Danach wird ein Zahlenbeispiel für den singulären Fall, also für $\sigma_P = 0$ und $\sigma_R > 0$, gerechnet und die Ergebnisse werden mit dem nichtsingulären Fall mit einem kleinen Schwankungsterm σ_P verglichen. Abschließend wird anhand reeller Daten untersucht, wie sich eine sehr konservative Anlagestrategie, d.h. Anlage in *Bonds*, im Vergleich zu einer risikofreudigeren Anlage in *Aktientitel* auf die Ruinwahrscheinlichkeit im Risikomodell auswirkt.

Notation und technische Aspekte

Im Folgenden bezeichnet $\phi_h(y)$ den Näherungswert für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(y)$, der mit dem Zwei-Block-Simpson Verfahren mit Schrittweite h berechnet wurde. Die approximierte Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_h(y)$ erhält man dann durch $\psi_h(y) = 1 - \phi_h(y)$.

Wie im letzten Abschnitt ist \bar{y} der numerische Wert für “ ∞ ”, also der größte Wert y , bis zu dem Werte für die Hilfsfunktion $g(y)$ berechnet werden. $\phi_n(nh)$ wird dann aus $g_n(nh)$ mit der Formel (6.10) berechnet, wobei $n_0 = \bar{y}/h$ ist und m_0 bei exponentialverteilten Schäden $n_0/5$ und bei paretoverteilten Schäden der konstante Wert 1000 ist. Es wird sich zeigen, dass m_0 damit groß genug gewählt ist, um die auftretenden Oszillationen in g_n auszugleichen (siehe letzter Abschnitt). Es wurden in jedem Beispiel verschiedene Werte von \bar{y} getestet und dabei wurde festgestellt, dass es ausreichend ist, wenn \bar{y} ungefähr die theoretisch erforderliche Größenordnung besitzt. Kleinere Änderungen bei der Wahl von \bar{y} haben kaum Einfluss auf die Ergebnisse und die Wahl eines größeren Wertes \bar{y} liefert dann (fast) keine Verbesserung bei den Resultaten mehr.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Rechenergebnisse wird $D_h(y)$ als der *prozentuale relative Fehler* des mit Schrittweite h numerisch berechneten Wertes an der Stelle y definiert. Es ist also

$$D_h(y) = 100 \frac{\psi_h(y) - \psi(y)}{\psi(y)}. \quad (6.11)$$

Für die Berechnung werden außerdem noch die Funktionen $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$ und

$F_2(x) := \int_0^x F(z)dz$ benötigt, wobei $F(x)$ hier die Verteilungsfunktion der Schadenforderungen S_P ist. Dies sind für die *Exponentialverteilung* mit Parameter 1

$$\bar{F}(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad F_2(x) = x - 1 + e^{-x}$$

und für die (*Nullpunkt-*)*Paretoverteilung* mit Erwartungswert 1

$$\bar{F} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + x} \right),$$

wobei hier α der Formparameter ist.

Die Algorithmen wurden für alle drei Fälle in *MATLAB V6.5* programmiert und sind auf einem etwas älteren PC-System mit einem Athlon(tm) XP 1800+ Prozessor und mit 512MB Arbeitsspeicher ausgeführt worden. Eine gute Implementierung in einer Programmiersprache wie Fortran und ein schnellerer Rechner würden die Berechnungen wohl deutlich schneller ablaufen lassen. Wie wir später sehen werden, wäre dies insbesondere bei Schadenverteilungen mit schweren Tails von Vorteil, da dort die benötigte Rechenzeit besonders hoch ist.

6.2.1 Beispiel 1: Das Cramér-Lundberg-Modell

Als erstes werden die Ruinwahrscheinlichkeiten für ein Beispiel zum *Cramér-Lundberg-Modell* unter deterministischer Verzinsung berechnet. Die Schadenforderungen S_P sind dabei exponentialverteilt. Da eine analytische Formel zu der Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit im ersten Beispiel des Kapitels 5.2 bestimmt wurde, lässt sich die Genauigkeit der numerischen Approximationen hier direkt bestimmen. Dies erlaubt in diesem Fall also eine exakte Beurteilung der Qualität des Zwei-Block-Simpson Verfahrens.

Hier wird das Cramér-Lundberg-Modell mit den Parametern $p = 1.1$, $\lambda_P = 1$ und $r = 0.05$ betrachtet. Der stetige Zinssatz 0.05 entspricht einem jährlichen Zinssatz von $e^{0.05} - 1 \approx 5.13\%$. Die Schäden S_P seien exponentialverteilt mit Erwartungswert 1. In diesem Beispiel ist also die *Nettoprofitbedingung* erfüllt, da $p > \lambda_P E[S_P]$ ist. Es werden auch alle in den folgenden Beispielen vorkommenden Schadensverteilungen den Erwartungswert 1 haben. Dies entspricht einer Normierung der Skalierung und stellt somit keine echte Einschränkung dar.

In Tabelle 6.1 sind die numerischen Ergebnisse von g , ϕ und ψ bei einer Schrittweite $h = 0.1$ für verschiedene Werte y abgebildet. Wie auch bei den folgenden Berechnungen für andere Schrittweiten wurde der Wert $\bar{y} = 100$ gewählt. Dass dieser ausreichend groß ist, sieht man daran, dass sich die Werte g_{40} , g_{50} und g_{60} kaum noch unterscheiden, sich g also schon im Bereich von $y = 40$ langsam stabilisiert. Es wurde der approximative Wert für $g(\infty)$ als Mittelwert der letzten 20% der Werte g_i berechnet, also $m_0 = n_0/5$.

In Abbildung 6.3 ist die Funktion der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ dargestellt. Es fällt auf, dass hier $\psi(0) < 1$ ist, was daran liegt, dass in diesem Modell $\sigma_P = 0$ ist, also kein Ruin bei Null in Folge der Brownschen Bewegung eintritt. Ansonsten hat die Kurve die Gestalt, die sie nach Kapitel 5.1.1 haben soll: sie ist monoton fallend in y und konvex. Bei der Anfangsrisikoreserve $y = 15$ ist sie bereits sehr klein, die Ruinwahrscheinlichkeit also schon nahe bei Null.

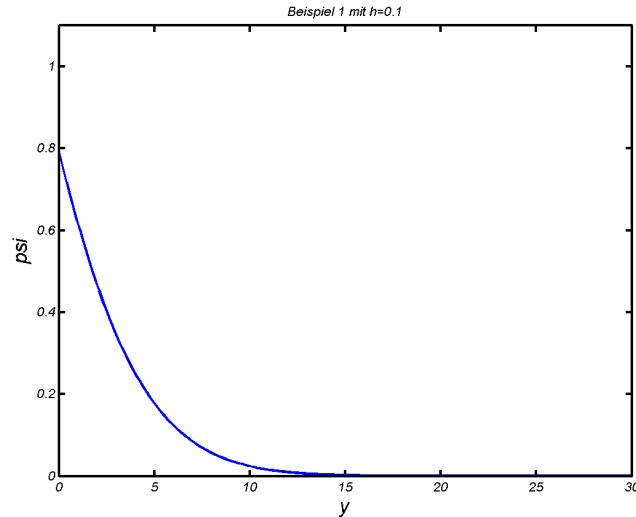


Abbildung 6.3: Die Funktion $\psi(y)$ für Beispiel 1

Nun betrachten wir die Tabelle 6.2. Dort sind in der zweiten Spalte die exakten Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi(y)$ angegeben, in den anderen Spalten folgen die numerischen Lösungen, die mit den Schrittweiten $h = 0.5, 0.1, 0.05$ und 0.01 berechnet wurden. Die relativen prozentualen Fehler $D_h(y)$ der numerisch berechneten Werte sind in der Tabelle 6.3 dargestellt.

Man stellt fest, dass die numerisch berechneten Ruinwahrscheinlichkeiten selbst

y	g	ϕ	ψ
0	1,000000000000000	0,2090456074590370	0,7909543925409620
1	1,84460928211045	0,3856074679033580	0,6143925320966410
2	2,55494683397876	0,5341004129346350	0,4658995870653640
5	3,93401602169383	0,8223887690085730	0,1776112309914260
10	4,66814435541313	0,9758550724838150	0,0241449275161845
20	4,78292657848903	0,9998497920322150	0,0001502079677844
30	4,78364352039669	0,9999996655888160	0,0000003344111840
40	4,78364516210372	1,0000000087804500	-0,0000000087804599
50	4,78364515697769	1,0000000077088800	-0,0000000077088842
60	4,78364515162747	1,0000000065764500	-0,0000000065764538

Tabelle 6.1: Numerische Ergebnisse mit $h = 0.1$ für Beispiel 1

y	$\psi(y)$	$\psi_{0.5}(y)$	$\psi_{0.1}(y)$	$\psi_{0.05}(y)$	$\psi_{0.01}(y)$
0	0,7909540044	0,7911370087	0,7909543925	0,7909543925	0,7909540045
5	0,1776111024	0,1776388798	0,1776112310	0,1776112310	0,1776111024
10	0,0241449177	0,0241117644	0,0241449275	0,0241449275	0,0241449177
15	0,0022199914	0,0021799888	0,0022199786	0,0022199786	0,0022199914
20	0,0001502219	0,0001139793	0,0001502080	0,0001502080	0,0001502219
25	0,0000079593	-0,0000240950	0,0000079467	0,0000079467	0,0000079593
30	0,0000003456	-0,0000282248	0,0000003344	0,0000003344	0,0000003456
35	0,0000000127	-0,0000256872	0,0000000026	0,0000000026	0,0000000127
40	0,0000000004	-0,0000232983	-0,0000000088	-0,0000000088	0,0000000004

Tabelle 6.2: Numerische Ruinwahrscheinlichkeiten für Beispiel 1

y	$D_{0.5}(y)$	$D_{0.1}(y)$	$D_{0.05}(y)$	$D_{0.01}(y)$
0	0,02314	0,00005	0,00005	0,00000
5	0,01564	0,00007	0,00007	0,00000
10	-0,13731	0,00004	0,00004	0,00000
15	-1,80193	-0,00058	-0,00058	0,00000
20	-24,1260	-0,00927	-0,00927	0,00001
25	-402,727	-0,15785	-0,15785	-0,00010
30	-8266,88	-3,23346	-3,23346	0,01399
35	-202361	-79,3421	-79,3421	0,26104

Tabelle 6.3: relativer prozentualer Fehler in Abhängigkeit von h für Beispiel 1

bei der relativ großen Schrittweite $h = 0.5$ für y -Werte kleiner als 15 sehr gut sind und die relative Abweichung der berechneten Ruinwahrscheinlichkeit dort kleiner als 2% ist. Für größere Werte von y ist dann $h = 0.5$ nicht mehr ausreichend und es muss eine kleinere Schrittweite h gewählt werden. Mit der kleinsten hier verwendeten Schrittweite $h = 0.01$ sind die berechneten Werte auch für große Werte von y sehr gut und ein Fehler im Vergleich zur exakten Ruinwahrscheinlichkeit ist aufgrund der Genauigkeit der angegebenen exakten Ergebnisse (10 Kommastellen) nicht mehr feststellbar.

Aus Tabelle 6.4 ersieht man, dass sich die *Rechenzeit* nicht linear bezüglich der Anzahl der berechneten Schritte verhält, sondern ungefähr quadratisch anwächst. So verdoppelt sich die Anzahl n der berechneten Punkte von $h = 0.1$ nach $h = 0.05$, die Rechenzeit ist aber für letzteres 3,75 mal so lang. Und von $h = 0.05$ nach $h = 0.01$ verfünffacht sich die Anzahl der Schritte, die benötigte Rechenzeit für letzteres ist

Werte von h	0.5	0.1	0.05	0.01
Anzahl Schritte	200	1000	2000	10000
Rechenzeit	0.52s	12s	45s	18,7min

Tabelle 6.4: Rechenzeit in Abhängigkeit von h für Beispiel 1

aber 24.93 mal so lang. Die Ergebnisse in der Praxis decken sich hier also exakt mit den theoretischen Beobachtungen, und der Aufwand verhält sich also wirklich quadratisch im Vergleich zur Anzahl der Rechenschritte. Dies ist auch bei allen Beispielen der Fall, die im Folgenden betrachtet werden. Da dort wesentlich mehr Schritte berechnet werden müssen, wurde der Programmcode aber optimiert und so die Rechenzeit pro Schritt deutlich verkürzt.

6.2.2 Beispiele unter stochastischer Verzinsung

Nun werden die interessanteren Fälle unseres Modells betrachtet, nämlich wenn Diffusionsterme vorhanden sind. Es wird im Folgenden stets der Risikoprozess Y mit den Parametern $p = 1.1$, $\lambda_P = 1$ und $r = 0.1$ betrachtet. Soweit nichts anderes explizit angenommen wird, ist die *Volatilität* des Kapitalertragsprozess $\sigma_R = 0.2$.

Der Driftkoeffizient $r = 0.1$ entspricht einer jährlichen Verzinsung von $e^{0.1} - 1 \approx 10.5\%$. Diese ist also deutlich höher als im vorher betrachteten Modell, bei dem jedoch die Volatilität gleich Null war, also eine risikolose Verzinsung des Risikokapitals angenommen wurde. Da der Markt für Anlagen in risikobehaftete Wertpapiere eine *Risikoprämie* verlangt und somit der Erwartungswert der Rendite dieser Titel höher als bei risikolosen Anlagen ist, macht diese Änderung der Parameter aber durchaus Sinn.

Des Weiteren ist nun ein *Störterm* mit Koeffizient σ_P im Prämienprozess vorhanden, der zusätzlicher Unsicherheit bei den Prämieinnahmen oder bei den Schadenforderungen Rechnung tragen soll. Es ist standardmäßig $\sigma_P = 0.2$, also gleich groß wie die Volatilität des Kapitalertragsprozesses. Im später behandelten *singulären Fall* ist dagegen kein Störterm vorhanden, d.h. $\sigma_P = 0$.

Beispiel 2a: Exponentialverteilte Schadenforderungen

In diesem Beispiel sind die Schadenforderungen S_P exponentialverteilt mit Erwartungswert 1. In Tabelle 6.5 findet man die berechneten Ergebnisse für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ für die Schrittweiten $h = 0.1, 0.05$ und 0.01 für verschiedene Werte y . Für $\psi_{0.1}$ und $\psi_{0.05}$ sind zudem die *prozentualen relativen Abweichungen* $D_{0.1}$ und $D_{0.05}$ zu den genaueren Ergebnissen $\psi_{0.01}$ angegeben. Man kann erkennen, dass für y -Werte bis 100 selbst bei Verwendung der Schrittweite $h = 0.1$ noch gute Ergebnisse berechnet werden. Nur bei $y = 1$ fällt eine geringfügig höhere Abweichung auf. Die Ursache hierfür sind die im letzten Abschnitt erwähnten *Oszillationen*, welche im Zwei-Block-Simpson Verfahren auftreten. Diese machen sich insbesondere bei großen Schrittweiten und kleineren y -Werten bemerkbar, was wir anhand eines der folgenden Beispiele aber noch deutlicher sehen werden. Die Ergebnisse für $h = 0.05$ sind dagegen auch für große Werte von y schon fast so gut wie die für $h = 0.01$. Insgesamt kann man festhalten, dass die Ergebnisse hier selbst für größere Schrittweiten relativ gut sind. Bei den Berechnungen wurde übrigens der Wert $\bar{y} = 1000$

y	$\psi_{0.1}$	$D_{0.1}$	$\psi_{0.05}$	$D_{0.05}$	$\psi_{0.01}$
0	1,000000000000000	0,000	1,000000000000000	0,000	1,000000000000000
1	0,58329028941092	0,030	0,58311453410449	0,000	0,58311428082938
2	0,43200976551694	0,001	0,43200686022825	0,000	0,43200667323125
5	0,16875274673128	0,001	0,16875169026985	0,000	0,16875162054250
10	0,03804299994500	0,001	0,03804276073243	0,000	0,03804274502254
20	0,00390647142474	0,001	0,00390644429650	0,000	0,00390644259152
50	0,00010944541731	0,001	0,00010944412564	0,000	0,00010944406001
100	0,00000675658069	0,003	0,00000675638097	0,000	0,00000675637285
500	0,00000000952182	0,067	0,00000000951575	0,003	0,00000000951545

Tabelle 6.5: Ergebnisse für $S_P \sim \exp(1)$, $\sigma_P = 0.2$ und $\sigma_R = 0.2$ für verschiedene h

y	0	5	10	15	20	50
$\psi_{\text{Bsp1}}(y)$	0,79095400	0,17761110	0,02414492	0,00221999	0,00015022	0,00000000
$\psi_{\text{Bsp2a}}(y)$	1,00000000	0,16875162	0,03804275	0,01085459	0,00390644	0,00010944
rel. Abw.	-26%	5%	-58%	-389%	-2500%	-

Tabelle 6.6: Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeiten aus Bsp. 1 und Bsp. 2a

gewählt, der ausreichend groß ist.

Im Gegensatz zu Beispiel 1 fällt auf, dass die Ruinwahrscheinlichkeit hier bei $y = 0$ den Wert 1 hat, also Ruin mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt. Weiter stellt man beim Vergleich der Tabellen 6.2 und 6.5 fest, dass die Ruinwahrscheinlichkeiten hier mit wachsender Anfangsrisikoreserve y deutlich langsamer abnehmen als in Beispiel 1. Dies liegt an den beiden *Diffusionstermen* mit den Parametern $\sigma_P = \sigma_R = 0.2$, welche für eine größere Unsicherheit stehen. Da der Drift im Ertragsprozess von Beispiel 1 nur halb so groß war wie im aktuellen Beispiel, sind die Ruinwahrscheinlichkeiten der beiden Risikoprozesse bei $y = 5$ noch ungefähr gleich groß. Bei $y = 10$ betragen diese hier ungefähr 3.8%, zuvor waren es dort nur 2.4% und bei $y = 20$ steht dann schon 0.015% gegen 0.39%. Wenn man den Wert $y = 50$ betrachtet, dann ist die Ruinwahrscheinlichkeit beim Modell mit Drift dort immer noch deutlich größer als 0, beim vorher behandelten Cramer-Lundberg-Modell dagegen schon verschwin-

y	D_{15}	D_{50}	D_{100}	D_{200}	D_{500}
1	-1,141	-0,012	-0,001	0,000	0,000
3	-3,440	-0,037	-0,002	0,000	0,000
5	-7,859	-0,085	-0,005	0,000	0,000
10	-40,341	-0,439	-0,027	-0,002	0,000
15	-	-1,580	-0,098	-0,006	0,000
30	-	-20,852	-1,293	-0,080	-0,002
50	-	-	-9,823	-0,606	-0,015
100	-	-	-	-9,808	-0,245

Tabelle 6.7: Ergebnisse für $S_P \sim \exp(1)$, $\sigma_P = 0.2$ und $\sigma_R = 0.2$ für verschiedene \bar{y}

y	$\sigma_P = 0.01$	$\sigma_P = 0.2$	$\sigma_P = 0.5$	rel. Diff.
1	0,5776237570	0,5831145341	0,6108391442	5,75%
2	0,4267531925	0,4320068602	0,4582725084	7,39%
5	0,1656501579	0,1687516903	0,1848875466	11,61%
10	0,0370803170	0,0380427607	0,0432257483	16,57%
20	0,0037844563	0,0039064443	0,0045810966	21,05%
50	0,0001057053	0,0001094441	0,0001303964	23,36%
100	0,0000065223	0,0000067564	0,0000080708	23,74%
500	0,0000000092	0,0000000095	0,0000000114	23,86%

Tabelle 6.8: Ergebnisse für $S_P \sim \exp(1)$, $\sigma_R = 0.2$ für verschiedene Werte σ_P

y	$\sigma_R = 0.0$	$\sigma_R = 0.2$	$\sigma_R = 0.5$	rel. Diff.
1	0,5329930176	0,5831145341	0,9168892424	72%
2	0,3657816185	0,4320068602	0,8853553809	142%
5	0,0964046267	0,1687516903	0,8177502419	748%
10	0,0062368149	0,0380427607	0,7497965677	11922%
20	0,0000080132	0,0039064443	0,6712803915	8377083%
50	0,0000000392	0,0001094441	0,5511753745	-
100	0,0000000392	0,0000067564	0,4457081549	-
500	0,0000000389	0,0000000095	0,1384905912	-

Tabelle 6.9: Ergebnisse für $S_P \sim \exp(1)$, $\sigma_P = 0.2$ für verschiedene Werte σ_R

dend klein (siehe auch 6.6). Man erkennt, dass die beiden Diffusionsterme einen sehr starken Einfluss auf die Ruinwahrscheinlichkeiten haben, insbesondere für den Fall einer hoch gewählten Anfangsrisikoreserve. Und genau dieser ist in der Praxis von Bedeutung.

Als nächstes soll die Auswirkung der *Wahl des Wertes \bar{y}* , also des numerischen Werts für “ ∞ ”, auf die berechneten Ruinwahrscheinlichkeiten untersucht werden. Die relative prozentuale Abweichung für die Ergebnisse mit $\bar{y} = 15, 50, 100, 200$ und 500 im Vergleich zu den Berechnungen mit $\bar{y} = 1500$ sind in Tabelle 6.8 angegeben. Es fällt auf, dass diese nur für die im Vergleich zu dem vorher verwendeten $\bar{y} = 1000$ sehr klein gewählten Wert $\bar{y} = 15$ relativ groß sind. Für $\bar{y} = 100$ kann dagegen nur noch für höhere y -Werte eine deutliche Abweichung zu den “korrekten” Ergebnissen festgestellt werden. Man sieht also, dass das Verfahren relativ unempfindlich auf einen, im Vergleich zur Theorie, etwas zu niedrigen gewählten Endwert \bar{y} reagiert.

Aus der Tabelle 6.8 ersieht man, wie sich die Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des *Diffusionsparameters σ_P des Prämienprozesses* für verschiedene Werte von y verhält. Diese wurde dazu für $\sigma_P = 0.01, 0.2$ und 0.5 berechnet. Erwartungsgemäß sind die Ruinwahrscheinlichkeiten des Risikoprozesses für höhere Werte σ_P größer. In der letzten Spalte aus Tabelle 6.8 sind die relativen prozentualen Abweichungen zwischen dem Beispiel mit $\sigma_P = 0.01$ und dem mit $\sigma_P = 0.5$ aufgelistet. Für $y = 5$ beträgt sie 11.61%, bei $y = 10$ ungefähr 16% und im Bereich von $y = 50$ pendelt sie sich bei ca. 23% ein. Ein zusätzlicher Diffusionsterm erhöht also die

Ruinwahrscheinlichkeit des Risikoprozesses, verstärkt diese Effekt mit wachsender Anfangsrisikoreserve y aber nicht sehr stark.

Als nächstes werden unterschiedliche Größen für die *Schwankungskomponente* σ_R im Kapitalertragsprozess R getestet. Die Ergebnisse für $\sigma_R = 0.0, 0.2$ und 0.5 finden sich in Tabelle 6.9. In der letzten Spalte ist die relative prozentuale Abweichung der Ruinwahrscheinlichkeiten für den Fall $\sigma_R = 0$ zu $\sigma_R = 0.5$ angegeben. Die erhaltenen Ergebnisse sind auf den ersten Blick doch etwas überraschend. Eine Erhöhung der Unsicherheit, also der Volatilität σ_R , in der Kapitalanlage wirkt sich viel stärker auf die Ruinwahrscheinlichkeit aus als zuvor die des Koeffizienten σ_P des Störterms im Prämienprozess. Bei genauerer Betrachtung ist dies aber durchaus plausibel, da diese Schwankung nicht linear, sondern exponentiell in den Risikoprozess Y eingeht. Es ist also festzustellen, dass ein hohes Risiko in den Kapitalanlagen dazu führt, dass mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit Ruin eintritt. Somit sollte eine sichere Kapitalanlage eine hohe Priorität für Versicherungsunternehmen haben.

Beispiel 2b: Paretoverteilte Schadenforderungen

Jetzt soll als Beispiel für eine *Schadenverteilung mit schwerem Tail* die Nullpunkt-Paretoverteilung mit dem Formparameter 2 betrachtet werden. Diese hat wieder den Erwartungswert 1. Für die numerische Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeiten musste in diesen Fall für “ ∞ ” der deutlich höhere Wert $\bar{y} = 30000$ gewählt werden. Deswegen war es nötig, hier größere Schrittweiten zu benutzen. Für die kleinste verwendete Schrittweite $h = 0.05$ waren so 600000 Rechenschritte nötig und der *Zeitaufwand* betrug knapp 22 Stunden. Wie man in den Tabellen 6.10 und 6.11 sehen kann, liefert das Zwei-Block-Simpson Verfahren hier jedoch auch schon bei größeren Schrittweiten relativ gute Ergebnisse, zumindest für höhere y -Werte, also für den praxisrelevanten Fall.

Für die sehr große Schrittweite $h = 1$ zeigen sich dagegen die vorher bereits angesprochenen *Oszillationseffekte* sehr deutlich, was man in Tabelle 6.12 an den Wertepaaren $\psi_1(1)$ und $\psi_1(2)$ sowie $\psi_1(3)$ und $\psi_1(4)$ sehr schön sehen kann. Für

y	$\psi_{0.05}(y)$	$\psi_{0.1}(y)$	$\psi_{0.2}(y)$	$\psi_{0.5}(y)$	$\psi_1(y)$
0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
1	0,5131589553	0,5134221845	0,4960464833	0,6792808924	0,3913160611
2	0,4000043729	0,4000159678	0,4007342335	0,4627799060	0,5434870458
5	0,2169131953	0,2169151030	0,2169143574	0,2183407663	0,2118743711
10	0,0988664606	0,0988669124	0,0988759457	0,0992201582	0,1023580733
20	0,0329718357	0,0329719333	0,0329740619	0,0330606058	0,0338632302
50	0,0055779437	0,0055779566	0,0055782658	0,0055916062	0,0057174776
100	0,0013414083	0,0013414113	0,0013414859	0,0013447516	0,0013756961
500	0,0000506550	0,0000506551	0,0000506580	0,0000507867	0,0000520076

Tabelle 6.10: Ergebnisse für $S_P \sim \text{pareto}(2)$ für verschiedene Schrittweiten h

y	$D_{0.1}$	$D_{0.2}$	$D_{0.5}$	D_1
1	0,051	-3,335	32,372	-23,744
2	0,003	0,182	15,694	35,870
5	0,001	0,001	0,658	-2,323
10	0,000	0,010	0,358	3,532
20	0,000	0,007	0,269	2,704
100	0,000	0,006	0,249	2,556
500	0,000	0,006	0,260	2,670

Tabelle 6.11: prozentuale relative Abweichungen für $S_P \sim \text{pareto}(2)$

y	1	2	3	4	5	6
$\psi_1(y)$	0,39131606	0,54348704	0,28365365	0,30126006	0,21187437	0,19263461

Tabelle 6.12: Oszillationseffekte in Bsp. 1b bei $h = 1$

y -Werte kleiner als 5 sind die numerischen Approximationen von $\psi(y)$ hier also nicht einmal monoton fallend in y und somit nur von geringem Nutzen. Bei höheren Werten y machen sich diese Effekte dagegen nicht mehr so deutlich bemerkbar.

Aus der Tabelle 6.11, in der die relative prozentuale Abweichung der Ergebnisse für die benutzten Schrittweiten im Verhältnis zur kleinsten Schrittweite $h = 0.05$ dargestellt sind, kann man sehen, dass für y -Werte größer als 5 die relative Abweichung der mit $h = 1$ erhaltenen Ergebnisse weniger als 3% beträgt. Die Schrittweite $h = 0.2$ wäre hier wohl ausreichend, um "gute" Ergebnisse zu erhalten, da in der Praxis nur y -Werte deutlich größer als 10 relevant sein dürften, da die Ruinwahrscheinlichkeit dort immer noch fast 10% beträgt. Dies ist eine wichtige Erkenntnis, da die benötigte Rechenzeit für $h = 0.05$ ca. 22 Stunden betrug, für $h = 0.1$ immerhin noch über 5 Stunden, und für $h = 0.2$ nur noch um die 80 Minuten. Bei Verwendung der Schrittweite $h = 0.5$ waren die Ergebnisse dagegen schon in 11 Minuten verfügbar.

In Tabelle 6.13 werden die Ruinwahrscheinlichkeiten für das Modell mit exponentialverteilten und für jenes mit paretoverteilten Schadenforderungen S_P dargestellt. Wie von der Theorie her zu erwarten war, sind für größere Werte y diese für das Modell mit der Paretoverteilung durchwegs größer. Dies liegt daran, dass die Paretoverteilung einen schwereren Tail als die Exponentialverteilung hat und deswegen das Auftreten von hohen Schäden S_P wahrscheinlicher ist und diese dann zum Ruin führen können.

Beispiel 3: Der Fall mit singulärem Kern ($\sigma_P = 0$)

Als Beispiel für den singulären Fall wurde wieder das Modell mit den Parametern aus Beispiel 2b, jedoch diesmal mit $\sigma_P = 0$ und mit Pareto(3)-verteilten Schadenforderungen S_P betrachtet. Die Ergebnisse zu den Schrittweiten $h = 0.5, 0.1$ und 0.05 sind in Tabelle 6.14 angegeben. In der letzten Spalte sind zudem die Ruinwah-

y	$\psi_{\text{pareto}(2)}$	ψ_{exp}	rel. Diff. in %
5	0,2169131953	0,1687516903	29
10	0,0988664606	0,0380427607	160
50	0,0055779437	0,0001094441	4.997
100	0,0013414083	0,0000067564	19.754
500	0,0000506550	0,0000000095	532.228

Tabelle 6.13: Vergleich zwischen pareto- und exponentialverteilten Schäden

y	$\psi_{0.5}$	$\psi_{0.1}$	$\psi_{0.05}$	$\psi_{0.1}$
0	0,732397702162	0,7342076399	0,7342109122	1,0000000000
10	0,075831964320	0,0755458704	0,0755455650	0,0755467987
20	0,016598846564	0,0165279021	0,0165278238	0,0165280175
50	0,001247045957	0,0012381575	0,0012381496	0,0012381606
100	0,000150515619	0,0001485886	0,0001485872	0,0001485887
200	0,000018176523	0,0000177250	0,0000177247	0,0000177250
500	0,000001164220	0,0000010940	0,0000010939	0,0000010940
1000	0,000000152302	0,0000001349	0,0000001349	0,0000001349

Tabelle 6.14: Ruinwahrscheinlichkeiten für Bsp. 3: $\sigma_P = 0$, $\sigma_R = 0.2$

scheinlichkeiten für den nichtsingulären Fall mit $\sigma_P = 0.005$ und ansonsten gleichen Parametern zum Vergleich angegeben. Diese Werte wurden mit Schrittweite 0.1 mit dem normalen Verfahren ohne der Taylorapproximation für die Werte g_1 und g_2 berechnet (siehe Satz 6.4). Es wurde in jedem Fall der Wert $\bar{y} = 10000$ verwendet.

Man sieht an den Ergebnissen, dass auch bei einem singulären Kern das Zwei-Block-Simpson Verfahren mit der in Satz 6.4 beschriebenen Modifikation gute numerische Werte für die Ruinwahrscheinlichkeiten liefert. Der Unterschied der Ruinwahrscheinlichkeiten hier zu denen im nichtsingulären Fall mit $\sigma_P = 0.005$ ist relativ gering. Nur für $y = 0$ und, hier nicht dargestellte, niedrige Werte von y unterscheiden sich diese deutlich, nicht aber für die praxisrelevanten Fälle größerer Anfangsrisikoreserven y . Dort ist kaum noch ein Einfluss des kleinen Störterms im Prämienprozess zu erkennen.

6.2.3 Kapitalanlage der Risikoreserve: Aktien vs. Bonds

Bis jetzt wurde das in dieser Diplomarbeit untersuchte Risikomodell nur aus dem theoretischen Blickwinkel heraus betrachtet. Die Intention liegt jedoch darin dieses als Hilfsmittel zur *Kontrolle der Risikoexponierung* von Versicherungsunternehmen oder von einzelnen Versicherungsportfeuilleen zu verwenden. Um dem Bezug zur Praxis Rechnung zu tragen, werden nun die Ruinwahrscheinlichkeiten zweier realer Szenarios anhand des Risikomodells von J. Paulsen berechnet. Im ersten Fall erfolgt die Kapitalanlage des Risikokapitals relativ risikolos in Bonds und im zweiten Fall eher risikoreich in Aktientitel. Die Investition in die Aktientitel verspricht dabei ei-

ne höhere Rendite, da im Vergleich zur sicheren Kapitalanlage der Markt hier eine Risikoprämie verlangt.

Es werden für beide Szenarios die entsprechenden *Modell- und Verteilungsparameter* für unser Risikomodell benötigt. Für die Modellierung des *Anlageprozesses* R braucht man also die durchschnittliche Rendite r und die Volatilität σ_R der Finanzanlage, welche den Parametern des klassischen Black-Scholes-Modells entsprechen. Da diese sich aus den, meist frei zugänglichen, historischen Börsenkursen für das jeweilige Anlageportfolio berechnen lassen, stellt die Bestimmung von r und σ_R kein größeres Problem dar. Hier werden die Durchschnittsdaten des Aktienindex DAX und des Rentenmarktindex REXP¹ aus den Jahren 1981 bis 2005 verwendet, die man in Albrecht [2006] findet. Für den REXP sind die Parameter $r = 0.07418$ und $\sigma_R = 0.05299$ und für den DAX $r = 0.10781$ und $\sigma_R = 0.29129$.

Daten für den *Prämienprozess* P zu erhalten, gestaltet sich dagegen deutlich schwieriger, da diese meist nicht öffentlich zugänglich sind. Hinzu kommt, dass diese Parameter in der Regel für jedes Versicherungsportfolio unterschiedlich sind und sich innerhalb der einzelnen Versicherungssparten teilweise stark unterscheiden. Als Verteilung für die Schadenforderungen wird in der Sachversicherung meist die *Paretoverteilung* verwendet, welche auch im Folgenden benutzt wird. Der in der Praxis verwendete Formparameter α liegt in der Feuerversicherung zumeist zwischen 1.5 und 2.5, bei Katastrophenschäden (Erdbeben, Stürme, usw.) dagegen oft in der Nähe von 1 oder auch darunter². Wir werden den Wert $\alpha = 1.77$ eines Beispielportfolios mit Feuerversicherungspolice aus einer Veröffentlichung der Schweizer Rückversicherungsgesellschaft verwenden, welche sich mit der Anwendung des Paretomodells auf Versicherungsportfolios beschäftigt (Bütikofer und Schmitter [1997]).

Für unser Beispiel erfolgt wie zuvor die Normierung $\lambda_P E[S_P] = 1$. Eine Prämienintensität p der Höhe 1 würde also der *Nettorisikoprämie* entsprechen, das heißt die Prämieinnahmen der Versicherung wären dann gleich hoch wie die zu erwartenden Schadenforderungen an die Versicherung. In der Versicherungspraxis wird zusätzlich noch ein *Schwankungszuschlag* für das aus den (jährlichen) Schwankungen der Schadenforderungen resultierende Risiko, sowie ein *Unsicherheitszuschlag* für das Risiko, die Nettoprämie nicht exakt geschätzt zu haben, verlangt. Der zuerst genannte Zuschlag hängt von der Verteilung des Prozesses der Schadenforderungen L_P , insbesondere von der Varianz von L_P , ab. Es gehen dort also die Parameter λ_P der Poissonverteilung und α der Paretoverteilung mit ein. Der Unsicherheitszuschlag dagegen hängt von dem Parameter σ_P in unserem Modell ab, der ja genau diese

¹Performance-Index, der den gesamten Anlageerfolg am deutschen Rentenmarkt misst. Performancekomponenten bilden die Kursveränderungen des REX sowie die tägliche Reinvestition des durchschnittlichen Jahrescoupons. Seine Errechnung erfolgt in 2 Schritten jeweils täglich zum Börsenschluss: Zuerst wird die Kalkulation des Kursindex REX durchgeführt, anschließend erfolgt eine Summation von Kursveränderungen und Zinsertrag zum Performanceindex. Quelle: <http://boerse.ard.de/>

²siehe Bütikofer und Schmitter [1997] S. 15

y	$\psi_{\text{DAX}}(y)$	Differenz (%)	$\psi_{\text{REXP}}(y)$
5	0,2695431145	43,51%	0,1878235320
10	0,1609192774	93,96%	0,0829649734
15	0,1106357212	148,90%	0,0444502379
20	0,0823494887	201,03%	0,0273558876
30	0,0524097192	294,64%	0,0132804865
40	0,0372353358	372,75%	0,0078763159
50	0,0282778370	438,78%	0,0052485269
100	0,0115218320	668,72%	0,0014988351
150	0,0066624057	819,60%	0,0007244863
200	0,0044832736	934,43%	0,0004334054
500	0,0012305164	1349,30%	0,0000849044

Tabelle 6.15: Ruinwahrscheinlichkeiten bei Anlage in Aktien und Bonds

Unsicherheit darstellen soll. Diese beiden Größen zu schätzen ist eine der Hauptaufgaben von Aktuarien in Versicherungsunternehmen und die dazu benutzten gängigen Verfahren unterscheiden sich sehr stark. In [Bütikofer und Schmitter \[1997\]](#) (Schweizer Rück) wird z.B. ein Unsicherheitszuschlag von 10% als adäquat angenommen und der Schwankungszuschlag aus der Gesamtschadenverteilung geschätzt. In [Mack \[1997\]](#) (Münchener Rück) kommt der Unsicherheitszuschlag bei der Kalkulation der Bruttoprämie gar nicht explizit vor. Er geht also indirekt an anderer Stelle in die Prämienkalkulation mit ein. Insbesondere neigen Versicherungsunternehmen dazu die Modellparameter sehr “konservativ” zu schätzen, also die theoretisch zu erwartenden Schäden höher anzusetzen, als deren statistische Schätzung aus historischen Daten ergeben würde. Damit geht zumindest ein Teil des Unsicherheitszuschlags schon dort indirekt mit ein. Zusätzlich ist in der *Bruttorisikoprämie* immer noch ein Verwaltungskostenzuschlag enthalten. Wenn dieser so gewählt ist, dass er den tatsächlichen Kosten entspricht, so hat er auf die Risikoexponierung des Portfeuillees keinen Einfluss und kann hier unberücksichtigt bleiben.

Da es also keine “richtigen” Werte für σ_P und p zu geben scheint, verwenden wir im Folgenden einfach die Werte $\sigma_P = 0.2$ und $p = 1.15$. Die Prämie für das übernommene Risiko beträgt somit 15%³ und die Varianz des Störterms zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $\sigma_P^2 \cdot 1 = 0.04$.

In Tabelle 6.15 sind die Ruinwahrscheinlichkeiten für beide Fälle abgebildet. Man sieht sehr deutlich, dass diese im Fall der Kapitalanlage in Aktien (ψ_{DAX}) durchwegs höher sind als bei der Anlage in Bonds (ψ_{REXP}). Bei einer relativ hoch gewählten Anfangsrisikoreserve verstärkt sich dieser Effekt deutlich. Mit unserem Risikomodell kommt man also zu dem Resultat, dass die Risikoreserve möglichst sicher angelegt werden sollte. Somit kann theoretisch begründet werden, was in jedem Buch über

³Bei Verwendung des Varianzprinzips zur Prämienkalkulation würde die Unsicherheitsprämie gleich $k_1\sigma_P^2$ und die Schwankungsprämie $k_2\text{Var}(L_P)$ mit den (für alle Portfeuillees) feste Faktoren k_1 und k_2 betragen.

die Schadenversicherungsmathematik steht (siehe z.B. Kap. I in Mack [1997]).

Bei genauerer Betrachtung der Ergebnisse aus Tabelle 6.15 fällt auf, dass die Ruinwahrscheinlichkeiten sehr hoch sind. Um dies zu erkennen, muss man sich vor Augen führen, dass der Wert $y = 1$ hier den erwarteten jährlichen Schäden entspricht und eine Anfangsrisikoreserve von $y = 5$ das fünffache dieses Wertes darstellt. Doch selbst bei der Kapitalanlage in Bonds beträgt die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit dort noch fast 20% und ist somit sehr hoch.

Zum einen könnte dies daran liegen, dass Risikoprämie und Schwankungszuschlag mit 15% der Nettoprämie zu niedrig angesetzt sind. Zum anderen werden hier auch die Grenzen des unseres Risikomodells für die praktische Anwendung aufgezeigt.

In der Praxis stellt sich nämlich nicht die Frage, ob Ruin in unendlicher Zeit eintritt, sondern mit welcher Wahrscheinlichkeit es zum Ruin innerhalb eines bestimmten (endlichen) Zeithorizonts kommt. Da sich die dem Modell zugrunde liegenden Faktoren über die Jahre hinweg ändern, ist ein möglicher Ruin in ferner Zukunft bedeutungslos. Leider kann man diese für unser Modell nur für den Spezialfall aus Kapitel 5.2.1 durch Invertierung der Laplacetransformierten der Ruinzeit bestimmen.

Dazu kommt, dass Versicherungsunternehmen in der Praxis zusätzlichen Handlungsspielraum haben um Ruin zu vermeiden, da Versicherungsverträge in der Regel jährlich angepasst oder gekündigt werden können. Ist also das Risikokapital innerhalb eines Jahres stark gesunken, so dass im Folgejahr der Ruin droht, so kann das Versicherungsunternehmen darauf reagieren und die Prämien erhöhen, das Sicherheitskapital aufstocken oder gar die Policen kündigen.

Ein weiterer Punkt ist, dass in Versicherungsunternehmen eine starke *Risikostreuung* stattfindet, da meist eine große Zahl unterschiedlicher Portfolios halten werden und somit der "Ruin" eines Portfolios durch das Risikokapital bzw. die Gewinne anderer Portfolios ausgeglichen werden kann. Zudem besteht für Erstversicherungsunternehmen die Möglichkeit *Rückversicherungsverträge* zur Verringerung der eigenen Risikoexposition abzuschließen.

Kapitel 7

Würdigung der Ergebnisse

Abschließend soll eine kritische Würdigung des in dieser Diplomarbeit besprochenen Risikomodells und der erhaltenen Ergebnisse erfolgen. Eine der großen Stärken des Modells liegt darin, dass dieses relativ umfassend ist und insbesondere das *klassische Modell* der Risikotheorie als Spezialfall beinhaltet, sowie die Möglichkeit schafft, zusätzliche Unsicherheit durch einen *Störterm* in Form einer Brownschen Bewegung zu modellieren. Neu ist im Vergleich zu vielen älteren bzw. konkurrierenden Modellen vor allem, dass eine *zufällige Verzinsung der Risikoreserve* erfolgt. Die Modellierung dieses Ertragsprozesses erfolgt auf eine mit vielen aktuellen Kapitalmarktmodellen vereinbare Weise und ist vor allem auch mit dem klassischen Black-Scholes-Modell verträglich. Damit wird die Anforderung, die Anlageseite bei der Bewertung der Risikoexposition mit einzubeziehen, erfüllt.

Trotz der Komplexität des Risikoprozesses ist es möglich, die daraus resultierenden *Ruinwahrscheinlichkeiten in unendlicher Zeit* zu berechnen. In Spezialfällen sind *geschlossene Lösungen* bekannt, im Allgemeinen können diese *numerisch* bestimmt werden. Die im sechsten Kapitel behandelten Zahlenbeispiele zeigen, dass die so erhaltenen Ergebnisse sehr genau sind. Und das selbst dann, wenn die Verteilung der Schadenforderungen einen *schweren Tail* besitzt. Ein Hauptgrund für die hohe Qualität der numerischen Lösungen ist, dass durch die in Kapitel fünf vorgestellte Methode das Finden der Ruinwahrscheinlichkeiten auf das Problem der Lösung einer deterministischen Integro-Differentialgleichung bzw. Volterra-Integralgleichung zurückgeführt worden ist. Es liegt also ein *Standardproblem der Numerik* vor und man erhält nicht nur gute Resultate, sondern auch eine Abschätzung deren Genauigkeit. Deswegen ist dieses Vorgehen den konkurrierenden *Monte-Carlo Methoden* überlegen¹.

Ein weiterer Vorteil resultiert aus der Annahme, dass der *Versicherungsprozess unabhängig vom Kapitalertragsprozess* ist. So können die *Modellparameter* der beiden Prozesse getrennt voneinander geschätzt werden. Für die *Anlageseite* sind zu Genüge Marktdaten vorhanden und es können Standardmethoden der Kapitalmarkttheo-

¹siehe [Paulsen und Rasmussen \[2003\]](#) für Details über mögliche CRC-Methoden und den Beginn von [Paulsen u. a. \[2005\]](#) für eine Auflistung zahlreicher Artikel über die numerische Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten

rie zur Schätzung der benötigten Größen verwendet werden. Die Parameter der *Versicherungsseite* können davon unabhängig für das jeweils betrachtete Versicherungsportfolio unter Verwendung von historischen Daten geschätzt werden. Da diese sowieso für die Prämienkalkulation benötigt werden, ist hier kein bedeutender Mehraufwand zu erwarten. Korrelationen zwischen Anlage- und Versicherungsseite müssen bei der Bestimmung der Modellparameter nicht berücksichtigt werden, weswegen sich das Risikomodell gut für die Verwendung in der Praxis eignet.

Die vereinfachende Annahme der Unabhängigkeit zwischen Prämienprozess und Kapitalertragsprozess stellt jedoch zugleich den größten Nachteil des Modells dar. In der Praxis wird nämlich oftmals gefordert, gerade die Interpendenzen zwischen Anlage- und Versicherungsseite zu modellieren. Dies ist aber in dem hier betrachteten Modell nicht möglich. Da die Unabhängigkeitsannahme wesentlich für viele theoretischen Resultate ist, dürfte es sich auch schwierig gestalten, das Modell so abzuändern oder zu erweitern, dass eine Abhängigkeitsstruktur doch noch berücksichtigt werden kann. Ob bzw. wie diese indirekt miteinbezogen werden kann, müsste gegebenenfalls untersucht werden. Die folgende Überlegung lässt diese Einschränkung jedoch weniger folgenschwer erscheinen. Werden nämlich positive Korrelationen zwischen Versicherungs- und Anlagenseite erkannt, so wird die Versicherung mit einer geänderten Kapitalanlage darauf reagieren und diese verschwinden. Negative Korrelationen kommen dagegen nur sehr selten vor und sind deswegen von geringer Bedeutung.

Ein weiterer Nachteil des Risikomodells ist, dass zwar eine ausführliche Theorie geliefert wird, analytische Darstellungen der Ruinwahrscheinlichkeiten aber trotzdem nur in Spezialfällen möglich sind. Des Weiteren ist über die für die Praxis des Versicherungsalltags wichtigen *Ruinwahrscheinlichkeiten in endlicher Zeit* noch fast nichts bekannt. Eine Methode zu deren Bestimmung wird in [Paulsen und Gjessing \[1997\]](#) vorgestellt. Dabei erfolgt eine Approximation des Risikoprozesses durch einen Diffusionsprozess. In der Einleitung von [Paulsen u. a. \[2005\]](#) finden sich außerdem einige Verweise auf Artikel, welche numerische Verfahren vorschlagen. Dabei werden aber nur Modelle unter deterministischer Verzinsung betrachtet, die interessantesten Fälle des hier vorliegenden Risikomodells sind also ausgeschlossen.

Bei der Weiterentwicklung des dürfte deswegen die Erschließung einer Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten in endlicher Zeit die größte Priorität haben. Außerdem wäre es wünschenswert, die konstanten Prämieinnahmen und die konstante Komponente der Zinserträge durch (deterministische) Funktionen in Abhängigkeit der Zeit zu ersetzen, so dass etwaige Trends bei den Prämieinnahmen oder bei den Zinsen mit im Modell berücksichtigt werden können.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass das in dieser Diplomarbeit betrachtete Risikomodell sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht von großem Interesse ist. Wenn ein Verfahren gefunden wird, mit dem die Ruinwahrscheinlichkeiten in endlicher Zeit dafür berechnet werden können, so lässt sich seine Bedeutung für die Praxis aber noch steigern. Außerdem sollte versucht werden, Trends bei den Prämieinnahmen und bei der Kapitalverzinsung mit zu berücksichtigen.

Literaturverzeichnis

- Albrecht 2006** ALBRECHT, Peter: 25 Jahre Kapitalanlageperformance der deutschen Lebensversicherer. *Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft* 165 (2006), 08
- Asmussen 2000** ASMUSSEN, Søren: *Ruin Probabilities*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000
- Bauer 1992** BAUER, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Walter de Gruyter und Co. Berlin, 1992
- Black und Scholes 1973** BLACK, Fischer ; SCHOLES, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (1973), Nr. 3, S. 637–654
- Brunner und van der Houwen 1986** BRUNNER, H. ; VAN DER HOUWEN, P.J.: *The numerical solution of Volterra equations*. North-Holland, Amsterdam, 1986
- Bütikofer und Schmitter 1997** BÜTIKOFER, Peter ; SCHMITTER, Hans: Abschätzung von Risikoprämien für Sach-Schadenexzedenten mit Hilfe des Paretomodells / Schweizerische Rückversicherungsgesellschaft. 1997. – Forschungsbericht
- Cai und Yang 2005** CAI, Jun ; YANG, Hailiang: Ruin in the perturbed compound poisson risk process under interest force. *Adv. Appl. Prob.* 37 (2005), S. 819–835
- Dassios und Embrechts 1989** DASSIOS, A. ; EMBRECHTS, P.: Martingales and Insurance Risk. *Commun. Statist. – Stoch. Models* 5 (1989), S. 181–217
- Delbaen und Haenzendonck 1987** DELBAEN, F. ; HAENZENDONCK, J.: Classical risk theory in an economic environment. *Insur.: Math. Econ.* 6 (1987), S. 85–116
- Deuflhard und Hohmann 1993** DEUFLHARD, P. ; HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik I*. 2. Walter de Gruyter Berlin, 1993

- Dufresne und Gerber 1991** DUFRESNE, F. ; GERBER, Hans U.: Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insur.: Math. Econ.* 10 (1991), S. 51–59
- Fleming und Soner 1993** FLEMING, Wendell ; SONER, Mete: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag New York, Berlin, 1993
- Furrer und Schmidli 1994** FURRER, H.J. ; SCHMIDLI, H.: Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insur.: Math. Econ.* 15 (1994), S. 23–36
- Gerber 1973** GERBER, H.: Martingales in Risk Theory. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* 73 (1973), S. 205–216
- Hackbusch 1989** HACKBUSCH, W.: *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner Stuttgart, 1989
- Harrison 1977** HARRISON, J. M.: Ruin problems with compounding assets. *Stochastic Processes Appl.* 5 (1977), S. 67–79
- Hipp und Plum 2003** HIPP, Christian ; PLUM, Michael: Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. *Finance and Stochastics* 7 (2003), S. 299–321
- Itô 2003** ITÔ, Kiyoshi: *Stochastic Processes*. Springer-Verlag Berlin New York, 2003
- Jacod 1979** JACOD, J.: *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1979
- Karatzas und Shreve 1988** KARATZAS, I. ; SHREVE, S.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag New York Inc., 1988
- Lamberton und Lapeyre 1997** LAMBERTON, D. ; LAPEYRE, B.: *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. ellipses, Paris, 1997
- Lindner und Maller 2005** LINDNER, Alexander ; MALLER, Ross: Lévy Integrals and the Stationarity of Generalised Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Stochastic Processes Appl.* 115 (2005), Nr. 10, S. 1701–1722
- Linz 1985** LINZ, Peter: *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985
- Mack 1997** MACK, Thomas: *Schadenversicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1997

- Merton 1976** MERTON, Robert C.: Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3 (1976), S. 125–144
- Paulsen 1993** PAULSEN, J.: Risk theory in a stochastic economic environment. *Stochastic Processes Appl.* 46 (1993), S. 327–361
- Paulsen 1998a** PAULSEN, J.: Ruin theory with compounding assets - a survey. *Insur.: Math. Econ.* 22 (1998), S. 3–16
- Paulsen 1998b** PAULSEN, J.: Sharp conditions for certain ruin in risk processes with stochastic return on investments. *Stochastic Processes Appl.* (1998)
- Paulsen und Gjessing 1997** PAULSEN, J. ; GJESSING, H.: Ruin theory with stochastic return on investments. *Adv. Appl. Prob.* 29 (1997), S. 965–985
- Paulsen u. a. 2005** PAULSEN, J. ; KASOZI, J. ; STEIGEN, A.: A numerical method to find the probability of ultimate ruin in the classical risk model with stochastic return on investments. *Insur.: Math. Econ.* 36 (2005), S. 399–420
- Paulsen und Rasmussen 2003** PAULSEN, J. ; RASMUSSEN, B.: Simulating ruin probabilities for a class of semimartingales by importance sampling methods. *Scand. Actuarial Journal* (2003), Nr. 3, S. 178–216
- Protter 2000** PROTTER, Philip E.: *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2nd. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000
- Rolski u. a. 1999** ROLSKI, T. ; SCHMIDLI, H. ; SCHMIDT, V. ; TEUGELS, J.: *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1999
- Sato 1999** SATO, Ken-Iti: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999
- Segerdahl 1942** SEGERDAHL, C. O.: Über einige Risikotheoretische Fragestellungen. *Skand. Akt. Tidskr.* 25 (1942), S. 43–83
- Shiryayev 1995** SHIRYAEV, A. N.: *Probability*. 2nd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995
- Slater 1960** SLATER, L.J.: *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, London, 1960
- Wang und Wu 2001** WANG, Guojing ; WU, Rong: Distributions for the risk process with a stochastic return on investments. *Stochastic Processes Appl.* 95 (2001), S. 329–341

- Wang u. a. 2004** WANG, Guojing ; YUEN, Kam ; NG, Kai: Ruin probabilities for a risk process with stochastic return on investments. *Stochastic Processes Appl.* 110 (2004), S. 259–274
- Werner 1997** WERNER, Dirk: *Funtionalanalysis*. 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997
- Yosida 1971** YOSIDA, Kôsaku: *Functional Analysis*. 3rd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971
- Zweimüller 2005** ZWEIMÜLLER, M.: Ein Unglück kommt selten allein / Münchener Rückversicherungsgesellschaft. 2005 (2). – Forschungsbericht. – 27,28 S