

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Effiziente algorithmische Strukturerkennung in großen Datenmengen

Stefan Markwardt

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Michael Ulbrich
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Jürgen Scheurle
2. Univ.-Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
3. Univ.-Prof. Dr. Klaus Diepold

Die Dissertation wurde am 08.07.2009 bei der Technischen Universität eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 03.11.2009 angenommen.

Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie meinem Betreuer Herrn Prof. Jürgen Scheurle, der mich in zahlreichen konstruktiven Besprechungen und Diskussionen in jeder Phase der Ausarbeitung meiner Dissertation unterstützt hat.

Des Weiteren möchte ich mich ausdrücklich bei Herrn Prof. Jürgen Richter-Gebert und Herrn Prof. Klaus Diepold für die vielen hilfreichen Hinweise und Anregungen bedanken. Für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre gebührt mein Dank darüber hinaus allen ehemaligen und aktuellen Kollegen am Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Analytische Mechanik.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Problemstellung, große Datenmengen effizient auf bestimmte Struktureigenschaften zu untersuchen, wird in dieser Arbeit ein Algorithmus entwickelt, mit dem man für eine Punktmenge A in einem beliebigen Euklidischen Raum eine kleine und dennoch für gewisse Struktureigenschaften von A aussagekräftige Teilmenge bestimmen kann. Diese sogenannte Menge der Charakteristischen Eckpunkte von A wird als Lösung eines mathematischen Optimierungsproblems aus der Menge der Extrempunkte von A ermittelt. Um zu zeigen, wie sich der Aufwand der Strukturerkennung durch diese Vorgehensweise reduzieren lässt, wird ein Algorithmus zur Bestimmung approximativer n -Symmetrien von Punktmengen in Euklidischen Räumen beliebiger Dimension entwickelt. Dieser Algorithmus ermöglicht durch die Zuordnung von Symmetriewerten insbesondere die Erkennung approximativer unvollständiger und approximativer verzerrter Symmetrien.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	CoTeSys	1
1.2	Symmetrierkennung	2
1.3	Ziel der Arbeit	5
1.4	Überblick	7
2	Erkennung approximativer Symmetrien	12
2.1	Darstellung durch Punktmen- gen	12
2.2	Symmetriewert	13
2.3	Rotation	15
2.4	Rotationszentrum	17
2.5	Abstand	18
2.6	Zuordnung	22
2.7	Hohe Symmetrieordnungen	24
3	Charakteristische Teilmengen	29
3.1	Randpunkte	29
3.2	Konvexe Hülle	30
3.3	Charakteristische Eckpunkte	32
3.4	Eingabe-Parameter	41
3.5	Beispiele	43
3.6	Komplexitätsanalyse	46
4	Unvollständige Symmetrien	50
4.1	Charakteristische Eckpunkte eines unvollständigen n -Ecks	51
4.2	Rotationszentrum eines unvollständigen regulären n -Ecks	53
4.3	Symmetriewert zur Erkennung unvollständiger Symmetrien	56
5	Punktmen- gen im \mathbb{R}^3	60
5.1	Darstellung	60
5.2	Konvexe Hülle	61
5.3	Charakteristische Eckpunkte	65
5.3.1	Streichabstand	66
5.3.2	Algorithmus	70
5.4	Rotation	75
5.5	Symmetriewert	76

5.6	Rotationsachse	77
5.6.1	Exakte Symmetrie	77
5.6.2	Approximative Symmetrie	80
5.7	Beispiele	82
6	Verzerrte Symmetrien	87
6.1	Parallele Projektion	89
6.1.1	Projektionen 2-dimensionaler Objekte	90
6.1.2	Projektionen 3-dimensionaler Objekte	112
6.2	Perspektivische Projektion	117
6.2.1	Homogene Koordinaten	118
6.2.2	Projektive Invarianten	119
6.2.3	Invarianten symmetrischer Punktmen- gen	120
6.2.4	Homographie-Matrix	122
6.2.5	Symmetriewerte	124
6.2.6	Beispiel	125
7	Punktmen- gen im \mathbb{R}^d	128
7.1	Konvexe Hülle	128
7.2	Charakteristische Eckpunkte	129
7.3	Symmetriewert	132
7.4	Herleitung der Rotationsmatrix	134
7.5	Beispiele	141
8	Erweiterte Strukturerkennung	153
8.1	Spezielle Vierecksstrukturen	153
8.2	Audio-Daten	156
	Literaturverzeichnis	162

Kapitel 1

Einleitung

„Symmetrie, ob man ihre Bedeutung weit oder eng fasst, ist eine Idee, vermöge derer der Mensch durch die Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.“ [48]

Wie erkennt ein Mensch ihm bekannte Objekte? Was sind die charakteristischen Merkmale, anhand derer der Mensch ein Straßenschild, eine bestimmte Person oder ein bekanntes Geräusch identifiziert? Das sind Fragen, an denen sich die Entwicklung optimaler Strukturerkennungsalgorithmen in dieser Arbeit orientiert. Der Mensch mit seinen herausragenden kognitiven Fähigkeiten gilt hierbei in vielen Fällen als Vorbild für Computeralgorithmen. Denn er ist in der Lage, aus Erfahrungen zu lernen und zukünftige Entscheidungen in Abhängigkeit von den gemachten Erfahrungen zu treffen. Auf diese Weise wird das Verhältnis zwischen dem Aufwand der Wahrnehmung und der Genauigkeit bzw. der Korrektheit der daraus resultierenden Schlüsse optimiert.

Die Frage, wie man kognitive Fähigkeiten für technische Systeme nutzen kann, ist elementar für die Weiterentwicklung von Systemen, welche den Menschen in gewissen Anwendungen unterstützen oder auch ersetzen können. Das Exzellenzcluster **CoTeSys** („Cognition for technical Systems“), in dessen Rahmen diese Arbeit gefördert wurde, befasst sich mit dieser Fragestellung.

1.1 CoTeSys

Im Exzellenzcluster **CoTeSys**, das von der Technischen Universität München koordiniert wird, arbeiten Wissenschaftler aus verschiedenen Fachrichtungen eng zusammen. Dabei werden Algorithmen, die technischen Systemen, wie zum Beispiel Fahrzeugen, Robotern oder Fabriken, die Fähigkeit zum kognitiven Handeln ermöglichen, sowohl entwickelt als auch umgesetzt.

Unter kognitivem Handeln versteht man reflexives und gewohnheitsmäßiges Verhalten unter Berücksichtigung langfristiger Ziele. Kognitive technische Systeme sind in der Lage Dinge wahr zu nehmen, wichtige Informationen aus dem Wahrgenommenen zu filtern und zu speichern, aus früheren Erkenntnissen zu lernen und dadurch effektive verbesserte Handlungen zu planen, sowie diese durchzuführen. Dadurch können zum Beispiel die

Zuverlässigkeit, Flexibilität und Adaptivität der Systeme und somit deren Leistungsfähigkeit verbessert werden. So wird es effizienter und sicherer, mit ihnen zu interagieren und zusammenzuarbeiten.

In einer komplexen Umgebung ist der Mensch einer Vielzahl an visuellen und akustischen Einflüssen ausgesetzt. Der Mensch ist aufgrund seiner Erfahrungen und seiner Lernfähigkeit in der Lage, seine Aufmerksamkeit so zu steuern, dass er die für ihn wichtigen Einflüsse herausfiltert. Um technische Systeme mit kognitiven Fähigkeiten auszustatten, ist es daher von großer Bedeutung, dass man diesen Systemen ermöglicht, auf Algorithmen zuzugreifen, mit deren Hilfe sie mit möglichst geringem Aufwand Input-Daten auf bestimmte Struktureigenschaften untersuchen können. In dieser Arbeit wird die Idee für eine Klasse neuer Algorithmen entwickelt, die benutzt werden können um große Mengen von Daten, wie zum Beispiel Video- oder Audio-Daten, effizient zu speichern und hinsichtlich charakteristischer Merkmale zu analysieren.

Wichtige charakteristische Merkmale sind zum Beispiel die Symmetrieeigenschaften der Daten. Daher orientieren wir uns in dieser Arbeit hinsichtlich der zu entwickelnden Algorithmen an Fragen der Symmetrieeerkennung.

1.2 Symmetrieeerkennung

Symmetrie ist in der Natur sowie im alltäglichen Leben ein in vielfältiger Weise vorhandenes und weitverbreitetes Merkmal. Darüber hinaus enthalten viele industriegefertigte Güter Symmetrien, die einerseits die Funktionalität und das Design verbessern und andererseits die Herstellung vereinfachen. Die Erkennung solcher Symmetrien ist aus diversen Gründen interessant. Für viele Objekte ist zum Beispiel die Symmetrie ein charakteristisches Merkmal. Solche Objekte können unter anderem durch das Erkennen ihrer Symmetrie identifiziert werden. Symmetrieeigenschaften von Objekten können außerdem benutzt werden, um diese Objekte ideal darzustellen (z.B. als Flächenbegrenzungsmodelle im Rahmen eines Reverse Engineering-Prozesses [21], [39]). Die Größe der zu speichernden Daten kann darüber hinaus durch nachgewiesene Symmetrien in diesen Daten reduziert werden. Neben der Verringerung des Speicherbedarfs führt das auch dazu, dass der Aufwand für weitere Analysen dieser Daten verringert werden kann.

Daher wurden bereits verschiedene Algorithmen zur Erkennung von Symmetrien entwickelt. Die Vorgehensweisen der Algorithmen unterscheiden sich dabei stark, was insbesondere daran liegt, dass sie für verschiedene Anwendungsszenarien geeignet sind. Die unterschiedlichen Algorithmen lassen sich anhand verschiedener Kriterien klassifizieren.

Ein Objekt wird als symmetrisch bezeichnet, wenn es unter bestimmten Transformationen invariant ist. Diese Transformationen lassen sich in Spiegelungen, Drehungen und Kombinationen aus beiden (Drehspiegelungen) einteilen. Entsprechend unterscheidet man die Symmetrieeerkennungsalgorithmen, je nachdem ob sie Spiegelsymmetrien oder Rotationssymmetrien (Drehsymmetrien) erkennen. Während ein d -dimensionales Objekt ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) spiegelsymmetrisch ist, wenn es durch eine Spiegelung an einer $(d - 1)$ -dimensionalen Hyperebene auf sich selbst abgebildet wird, besitzt ein d -dimensionales Ob-

jekt eine n -Rotationssymmetrie (oder n -Symmetrie) ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), wenn es durch eine (bzw. mehrere für $d > 3$) Drehung(en) um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um einen $(d-2)$ -dimensionalen Raum (bzw. mehrere $(d-2)$ -dimensionale Räume) auf sich selbst abgebildet wird.

Die meisten Symmetrienerkennungsalgorithmen in der Literatur befassen sich mit der Suche nach Spiegelsymmetrien (z.B. [26], [37], [49]). Hingegen existieren vergleichsweise wenige Verfahren, die zur Erkennung von Rotationssymmetrien geeignet sind. Für viele Objekte ist allerdings eine n -Symmetrie ein besonders aussagekräftiges Strukturmerkmal, weil aus bestimmten n -Symmetrien verschiedene Spiegelsymmetrien der Objekte folgen. Wir wollen in dieser Arbeit daher einen Algorithmus entwickeln, mit dem man speziell Rotationssymmetrien erkennen kann.

Objekte, die auf mögliche Symmetrien untersucht werden, können auf verschiedene Arten dargestellt werden. Unser Ziel ist es, einen Symmetrienerkennungsalgorithmus einzuführen, der möglichst allgemein anwendbar ist. Daher wird der hier entworfene Algorithmus auf Punktfolgen operieren. Während es insbesondere im Bereich der Computer Vision Algorithmen gibt, die Symmetrien ausschließlich in Digitalbildern erkennen (z.B. [19], [35]), lässt sich ein auf Punktfolgen operierender Algorithmus für etliche Anwendungsszenarien gebrauchen. Alle Objekte, die wir auf Symmetrien untersuchen wollen, lassen sich als Punktfolgen in unterschiedlich dimensionalen euklidischen Räumen darstellen.

Je nachdem ob man in einer Punktfolge nach lokalen (z.B. [33]) oder globalen (z.B. [27]) Symmetrien sucht, ob man mögliche perspektivische Verzerrungen (z.B. [31]) oder unvollständige Punktfolgen (z.B. [32]) berücksichtigt, eignen sich verschiedene Vorgehensweisen. Um zu testen ob ein Objekt n -symmetrisch ist, werden wir uns der Frage widmen, wie man die das Objekt darstellende Punktfolge effektiv auf globale Symmetrien untersuchen kann. Dabei werden wir gesondert darauf eingehen, wie man mögliche n -Symmetrien auch dann erkennt, wenn die Darstellung unvollständig oder perspektivisch verzerrt ist.

Eine entscheidende Frage ist, ob man nach exakten oder nach approximativen Symmetrien sucht. Algorithmen zur Suche nach exakten Symmetrien in Objekten oder Punktfolgen wurden in vielen verschiedenen Ausarbeitungen vorgestellt und analysiert. Es existiert ein optimaler Algorithmus zur exakten Symmetrienerkennung in Punktfolgen im \mathbb{R}^2 oder im \mathbb{R}^3 mit einer Komplexität (d.h. einem Rechenaufwand in Abhängigkeit von der Inputgröße) von $O(m \log m)$ ([49]). Dabei bezeichnet m die Anzahl der Punkte. Algorithmen, die zwei Punktfolgen im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) auf Kongruenz überprüfen (z.B. [3], Komplexität: $O(m^{d-2} \log m)$) können verwendet werden um zu überprüfen, ob eine Punktfolge $A \subset \mathbb{R}^d$ exakt n -symmetrisch ist.

Die Suche nach approximativen Symmetrien ist weitaus komplexer und differenzierter. Es gibt verschiedene Ansätze zur Definition einer approximativen Symmetrie. Man kann eine Äquivalenzrelation definieren, die zwei Abstände als äquivalent definiert, wenn sie sich höchstens um einen Fehler $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ unterscheiden ([32], [33]). Eine andere Möglichkeit besteht darin, Symmetrie nicht als eine Boolesche Eigenschaft, also als entweder existent oder als nicht existent, anzusehen, sondern als eine Art stufenlose Eigenschaft zu interpretieren. Dazu wird einer Punktfolge oder einem Objekt ein bestimmter Symmetriewert zugeordnet ([54]).

Naturgegebene Symmetrien werden im Regelfall nicht ganz exakt sein. In den meisten realen Anwendungen werden aber selbst exakte Symmetrien kaum als solche erkannt werden können. Fehler in der Darstellung durch Modelle (wie z.B. durch Punktmenge) können aus verschiedenen Gründen dazu führen, dass keine exakte, sondern lediglich eine approximative Symmetrie zu erkennen ist. Die Abweichungen beruhen dabei unter anderem auf Ungenauigkeiten durch die diskrete Darstellung oder Schatteneffekten. Wir werden uns in dieser Arbeit daher der Suche nach approximativen Symmetrien widmen und dafür unter anderem eine geeignete Definition für einen Symmetriewert einführen.

Die unterschiedlichen Ansätze zur Symmetriesuche sind verschieden aufwendig. Während, wie oben bereits erwähnt, eine exakte Symmetrie einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) mit $|A| = m$ in $O(m \log m)$ ermittelt werden kann, hängt der Aufwand zur Bestimmung von approximativen Symmetrien unter anderem von der Frage ab, wie man eine approximative Symmetrie genau definiert. So wurde gezeigt, dass das Finden von approximativen Symmetrien in der Ebene ein NP-schweres Problem ist, wenn eine approximative Symmetrie so definiert ist, dass es eine exakte Symmetrie geben muss, die der approximativen Symmetrie, bis zu einem bestimmten Maß, ähnlich ist ([28]). Ordnet man hingegen einer Punktmenge eine approximative n -Symmetrie zu, wenn sie durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ ungefähr, also innerhalb einer gewissen Toleranz, auf sich selbst abgebildet wird, so gibt es Algorithmen, die approximative Symmetrien mit einer Komplexität von einer hohen polynomiellen Ordnung ($O(m^6)$) finden ([3]). Folgerichtig muss man sich die Frage stellen, ob es möglich ist, eine möglichst kleine Teilmenge der zu untersuchenden Punktmenge zu finden, deren Symmetrieeigenschaften charakteristisch für die globalen Symmetrieeigenschaften der gesamten Punktmenge sind. So eine Teilmenge erhält man zum Beispiel durch das Abtasten an bestimmten Stellen ([54]). Eine andere Möglichkeit besteht darin, Punkte, die einen geringen Abstand zueinander haben, zu Clustern zusammenzufassen ([39]). Mit der Clusterbildung lässt sich zwar die Komplexität der Symmetrieerkenntnis reduzieren ($O(m^{3.5}(\log m)^4)$ [39]), allerdings lassen sich solche Cluster in diversen Anwendungen nicht ohne Probleme bilden und die Abtast-Methode kann unter Umständen zu sehr ungenauen Ergebnissen führen.

Wir werden in dieser Arbeit eine Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ definieren, die die Ecken einer zu untersuchenden Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) repräsentieren soll. Dabei ist \tilde{A} eine Teilmenge der Ecken der konvexen Hülle von A . Die konvexe Hülle einer Punktmenge lässt sich mit vergleichsweise geringem Aufwand bestimmen. Für Punktmenge im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 mit m Punkten beträgt der durchschnittliche Aufwand $O(m \log m)$ ([5]). Alle weiteren Schritte des Symmetrieerkenntnisalgorithmus operieren lediglich auf der Menge der Ecken der konvexen Hülle, die in der Regel nicht entscheidend größer wird, wenn man die Anzahl der Punkte in der gesamten Punktmenge erhöht ([41]). Mit vergleichsweise geringem Aufwand werden wir mit unserem Algorithmus entscheiden, ob die konvexe Hülle einer Punktmenge eine approximative n -Symmetrie besitzt. Das ist insbesondere unter Betrachtung der folgenden Aspekte ein hilfreiches Ergebnis:

Einerseits gilt, wie wir in dieser Arbeit beweisen werden, für jede Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) die n -symmetrisch ist, dass ihre konvexe Hülle auch n -symmetrisch sein muss. Daher kann man mögliche n -Symmetrien einer Punktmenge ausschließen, wenn ihre konvexe Hülle nicht n -symmetrisch ist.

Andererseits gibt es etliche Anwendungen, in denen bereits die Symmetrieeigenschaften der

konvexen Hülle als charakteristisches Merkmal von Interesse sind. Als Beispiel sei hier die Erkennung der 8-Symmetrie einer Punktmenge erwähnt, die die rote Fläche eines Stoppschildes repräsentiert (siehe Abbildung 1.1). Während die konvexe Hülle der Punktmenge 8-symmetrisch ist und diese Symmetrie mit Hilfe des entwickelten Algorithmus nachgewiesen werden kann, ist die gesamte Punktmenge auf Grund des unsymmetrischen Schriftzuges in der Mitte des Schildes nicht symmetrisch. Die äußere Form und damit auch die Symmetrieeigenschaften sind allerdings wichtige Merkmale von Straßenschildern und insofern ist auch ihre Erkennung von großer Bedeutung.



Abbildung 1.1: Stopp-Schild

1.3 Ziel der Arbeit

Wir werden in dieser Arbeit einen Algorithmus zur Erkennung von Rotationssymmetrien entwickeln, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Der Algorithmus ist allgemein anwendbar. Da sich Objekte und Datensätze aus unterschiedlichen Anwendungen als Punktmenge in verschiedenen dimensionalen euklidischen Räumen darstellen lassen, operiert unser Algorithmus allgemein auf Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$).

- Der Algorithmus findet Symmetrien in Punktmenge, die möglicherweise aus realen Anwendungen stammen. Da man bei solchen Punktmenge mit einer gewissen Ungenauigkeit rechnen muss, beschränkt sich unser Algorithmus nicht auf die Erkennung exakter Symmetrien, sondern ermöglicht durch die Zuordnung geeigneter Symmetriewerte auch die Bestimmung approximativer Symmetrien.
- Die Erkennung der n -Symmetrien ist resistent gegen gewisse Fehler in der Darstellung. Es werden auch unvollständige und perspektivisch verzerrte Symmetrien bestimmt.
- Der Algorithmus erkennt mögliche Symmetrien in einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ auf eine effiziente Weise. Die wenig aufwendige Bestimmung einer charakteristischen Teilmenge von A lässt eine Symmetriekerennung mit einem vergleichbar geringen Aufwand zu.

Damit leistet diese Arbeit vor allem hinsichtlich der folgenden Aspekte einen wesentlichen wissenschaftlichen Beitrag im Vergleich zu den bisherigen Verfahren aus der Literatur.

1. Die Erkennung approximativer n -Symmetrien ist in Punktmenge in beliebig dimensionalen euklidischen Räumen möglich. Während sich andere Algorithmen zur Erkennung approximativer Symmetrien unseres Wissens nach auf Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \{2, 3\}$) beschränken (z.B. [27], [33], [45]), werden wir zeigen, dass sich alle Schritte unseres Algorithmus auch zur Erkennung approximativer n -Symmetrien in d -dimensionalen ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) Punktmenge anwenden lassen.
2. Es wird ein Symmetriewert für Punktmenge in beliebig dimensionalen euklidischen Räumen eingeführt, der sich von dem Symmetriewertbegriff aus der Literatur ([54]) darin unterscheidet, dass er ohne die Bestimmung einer exakt symmetrischen Punktmenge berechnet werden kann. Darüber hinaus werden auch Punktmenge, die Objekte durch Parallel- und Perspektivprojektion verzerrt darstellen, sinnvolle Symmetriewerte zugeordnet.
3. Wir definieren für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ die sogenannte Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$. Außerdem geben wir für die verschiedenen Dimensionen Algorithmen an, mit denen man \tilde{A} bestimmen kann und beweisen die Funktionalität dieser Algorithmen. Darüber hinaus zeigen wir anhand von Beispielen und theoretischen Überlegungen zur konvexen Hülle, dass $\tilde{A} \subseteq A$ eine geeignete Teilmenge ist, um A auf mögliche n -Symmetrien zu untersuchen. Damit können wir die Komplexität der approximativen n -Symmetriekerennung, je nach dem Verhältnis von $|A|$ und der Anzahl der Ecken der konvexen Hülle von A , im Vergleich zu anderen Verfahren deutlich reduzieren.
4. Die Menge der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge ist so definiert, dass sie auch zur effizienten Erkennung anderer Strukturmerkmale als der Symmetrieeigenschaften von Punktmenge verwendet werden kann, was wir anhand von Beispielen zeigen werden.

1.4 Überblick

Weiterhin ist die Arbeit folgendermaßen gegliedert.

Erkennung approximativer Symmetrien

In Kapitel 2 werden wir ein Verfahren einführen, mit dem man zum Beispiel ein Objekt auf einem Digitalfoto als eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ darstellen kann. In Abbildung 1.2 ist so eine Punktmenge abgebildet, die die größte zusammenhängende rote Fläche in Abbildung 1.1 repräsentiert.

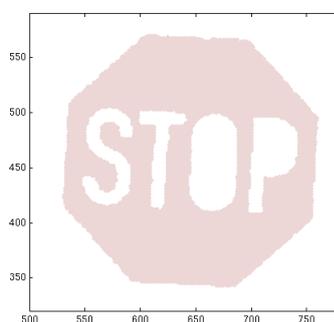


Abbildung 1.2: Darstellung Stopp-Schild

Außerdem werden wir definieren, wie für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ in unserem Algorithmus die Symmetriewerte bezüglich der verschiedenen n -Symmetrien ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) bestimmt werden. Dabei wird diese Definition mit dem üblichen Symmetriewertbegriff aus der Literatur ([54]) verglichen. Darüber hinaus legen wir fest, ob und wie wir der Punktmenge A eine approximative n -Symmetrie zuordnen. Diese Definitionen lassen sich für Punktmenge im \mathbb{R}^3 (siehe Kapitel 5) und Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) (siehe Kapitel 7) verallgemeinern.

Um die Symmetriewerte zu bestimmen, müssen wir den Abstand zwischen zwei Punktmenge berechnen. Wir werden diesen Abstand in Kapitel 2.5 als Lösung eines linearen Optimierungsproblems definieren und einen Algorithmus zur Bestimmung dieses Wertes angeben.

Charakteristische Teilmengen

Unser Ziel ist es, die Symmetrieeigenschaften einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) möglichst effizient zu bestimmen. Das heißt, die Komplexität des Algorithmus in Abhängigkeit von $m := |A|$ soll so gering wie möglich sein. Daraus ergibt sich folgende zentrale Fragestellung:

Gibt es eine möglichst kleine Teilmenge von A , aus der man charakteristische Informationen über die Symmetrieeigenschaften von A bestimmen kann?

In Kapitel 3 werden wir verschiedene Möglichkeiten beschreiben, wie man für $A \subset \mathbb{R}^2$ eine solche Teilmenge bestimmen kann.

Dazu werden wir zunächst die Teilmengen der Randpunkte $A_R \subseteq A$ und der Extrempunkte $A_K \subseteq A$ einführen und zeigen, dass diese Teilmengen nur bedingt geeignet sind, um die Symmetrieeigenschaften von A zu überprüfen.

Daher werden wir eine Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A_K \subseteq A$ definieren, die sich besser zur Bestimmung der Symmetrieeigenschaften von A eignet. Wir nennen sie die Menge der Charakteristischen Eckpunkte von A . Sie ist so definiert, dass sie die Lösung eines gewissen Optimierungsproblems ist. Es wird ein Satz bewiesen, der zeigt, dass die Lösung dieses Optimierungsproblems die Teilmenge von A ist, die die *echten* Ecken des dargestellten Objekts auf eine bestimmte Weise am Besten repräsentiert.

In Kapitel 3 werden wir außerdem einen Algorithmus formulieren und beweisen, dass dieser Algorithmus das Optimierungsproblem löst und somit für alle $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$ bestimmt.

In Abbildung 1.3 sind die verschiedenen Teilmengen der Punktmenge A aus Abbildung 1.2 abgebildet.

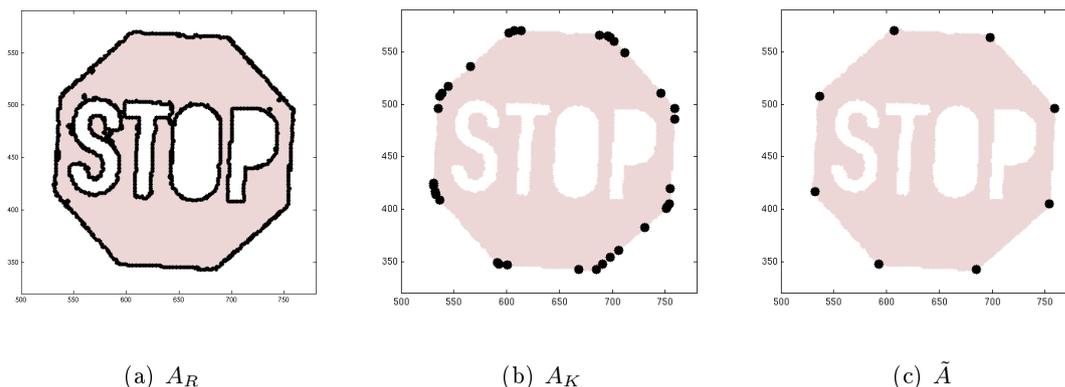


Abbildung 1.3: Verschiedene Teilmengen (vgl. Text)

Die Komplexität unseres Symmetrienerkennungs-Algorithmus wird in Abschnitt 3.6 analysiert.

Unvollständige Symmetrie

Die Darstellung eines Objekts durch eine Punktmenge kann aus verschiedenen Gründen (z.B. Verdeckungen) unvollständig sein. In so einem Fall muss man nicht nur davon ausgehen, dass eventuell eine oder mehrere Ecken des Objekts nicht dargestellt wurden und somit auch nicht durch einen Punkt in \tilde{A} repräsentiert werden, sondern außerdem, dass \tilde{A} Punkte enthält, die keine Ecke des Objekts darstellen (Abbildung 1.4).

Wie man in so einem Fall die Definition der Symmetriewerte modifizieren kann, um auch unvollständige Symmetrien anhand der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge zu erkennen, wird in Kapitel 4 gezeigt. Außerdem stellen wir ein Optimierungsproblem zur



(a) Originalbild

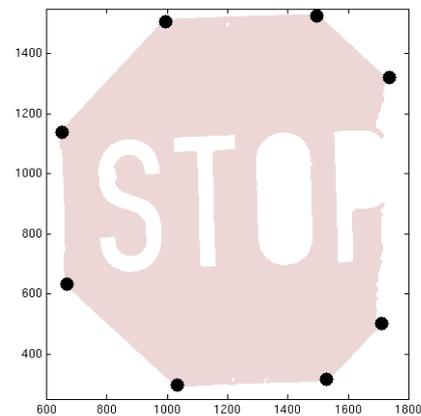
(b) Darstellende Punktmenge A mit \tilde{A}

Abbildung 1.4: Teilweise verdecktes Stopp-Schild

Bestimmung des Rotationszentrums einer unvollständigen approximativen n -Symmetrie auf und stellen einen Algorithmus vor, mit dem das Optimierungsproblem gelöst werden kann.

Punktmenge im \mathbb{R}^3

In Kapitel 5 werden wir analysieren, was beachtet werden muss, wenn man eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ mit einer Variante unseres bisher nur für Punktmenge im \mathbb{R}^2 formulierten Algorithmus auf approximative Symmetrien untersuchen will.

Während sich die konvexe Hülle von $A \subset \mathbb{R}^3$ analog zum 2-dimensionalen Fall bestimmen lässt, definieren wir die Menge $\tilde{A} \subseteq A$ der Charakteristischen Eckpunkte in einer leicht verallgemeinerten Form, da sich der Lösungsalgorithmus für das Optimierungsproblem aus dem 2-dimensionalen Fall nicht ohne weiteres auf höher dimensionale Fälle verallgemeinern lässt.

Auch für $A \subset \mathbb{R}^3$ entwickeln wir einen Algorithmus, der eine Teilmenge von A bestimmt, die nach Definition eine Menge der Charakteristischen Eckpunkte von A ist. Außerdem wird gezeigt, dass dieser Algorithmus für alle $A \subset \mathbb{R}^3$ eine solche Menge $\tilde{A} \subseteq A$ findet.

Wir klären, welche Eigenschaften eine mögliche Symmetrieachse einer exakt n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ haben muss und leiten daraus einen Algorithmus ab, der die möglichen Symmetrieachsen bestimmt, bezüglich derer A approximativ n -symmetrisch sein kann.

Verzerrte Symmetrien

Nachdem wir in Kapitel 5 auch für Punktmenge im \mathbb{R}^3 Symmetriewerte definiert haben, untersuchen wir im sechsten Kapitel, ob eine Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Projektion einer approximativ n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist (Abbildung 1.5).



(a) Originalbild

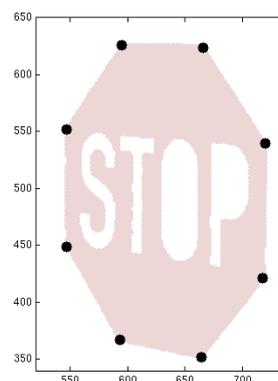
(b) Darstellende Punktmenge A mit \tilde{A}

Abbildung 1.5: Projektiv verzerrtes Stopp-Schild

Dabei unterscheiden wir zwischen paralleler Projektion und perspektivischer Projektion.

Wir beweisen, dass, falls B eine orthogonale Parallelprojektion einer exakt n -symmetrischen Punktmenge A ist, sich die Punkte von B in Partitionen mit bestimmten Eigenschaften zerlegen lassen. Außerdem leiten wir her, wie man in so einem Fall die Koordinaten der Punkte von A bestimmen kann. Daraus resultierend ordnen wir der Punktmenge B Symmetriewerte bezüglich verzerrter n -Symmetrien zu.

Wir führen in der Bildebene, in der die Punktmenge B liegt, Homogene Koordinaten ein und nutzen dann ein Verfahren zur Bestimmung der perspektivischen Projektion, die eine (approximativ) n -symmetrische Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ auf B abbildet, um auch einer perspektivisch verzerrten Punktmenge B sinnvolle Symmetriewerte zuzuordnen.

Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$)

Im siebten Kapitel wird unser Algorithmus zur Erkennung approximativer n -Symmetrien im \mathbb{R}^3 Schritt für Schritt auf den d -dimensionalen Fall erweitert.

Dazu wird gezeigt, dass die Bestimmung der konvexen Hülle und die Definition der Charakteristischen Eckpunkte analog zum 3-dimensionalen Fall auch für höhere Dimensionen möglich ist. Außerdem zeigen wir, wie sich der Algorithmus zur Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ auf den d -dimensionalen Fall ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) anwenden lässt.

Nachdem die Definition der Symmetriewerte so verallgemeinert worden ist, dass sie für Punktmenge aller Dimensionen gilt, weisen wir die Aussagekraft der Symmetriewerte der Extrempunkte $A_K \subseteq A \subset \mathbb{R}^d$ für die Symmetrieeigenschaften von A nach.

In Abschnitt 7.4 analysieren wir, welche Eigenschaften geeignete Rotationsmatrizen im \mathbb{R}^d haben müssen und wie wir die Rotationsmatrizen, bezüglich derer eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) (approximativ) n -symmetrisch sein kann, bestimmen können.

Erweiterte Strukturerkennung

Anhand zweier Beispiele werden wir zum Schluss noch einen Eindruck vermitteln, inwieweit die Bestimmung Charakteristischer Eckpunkte abseits der Symmetrierkennung sinnvoll benutzt werden kann.

Dabei zeigen wir einerseits, wie man spezielle Vierecksstrukturen von Punktmenge durch Eigenschaften ihrer Charakteristischen Eckpunkte identifizieren kann. Andererseits untersuchen wir Punktmenge, die Audio-Daten zur Bestimmung der Richtung einer Geräuschquelle repräsentieren, indem wir ihre Charakteristischen Eckpunkte ermitteln und deren Eigenschaften analysieren.

Kapitel 2

Erkennung approximativer Symmetrien

2.1 Darstellung durch Punktmenge

Eine Punktmenge, die mit unserem Algorithmus auf approximative Symmetrien untersucht werden soll, kann sowohl als abstrakte Punktmenge als auch als Darstellung eines Objekts oder eines Datensatzes gedeutet werden.

Die Struktur solcher Punktmenge hängt davon ab, auf welche Weise die Objekte dargestellt werden bzw. von welcher Art die zu untersuchenden Daten sind. In den meisten unserer Beispiele stellen die untersuchten Punktmenge Objekte dar, die auf einem Digitalfoto abgebildet wurden.

Es existieren etliche Verfahren, mit denen man solche darstellenden Punktmenge aus einem oder mehreren Digitalfotos gewinnen kann (z.B. [17], [36]). Wir wollen uns in dieser Arbeit nicht ausführlich mit dem Thema Darstellung beschäftigen und werden daher für unsere Beispiele Punktmenge, die Objekte auf einem Digitalfoto repräsentieren, mit dem folgenden heuristischen Verfahren bestimmen.

Ein farbiges Foto ist gleichbedeutend mit einem $P_x \times P_y \times 3$ -Tensor T mit ganzzahligen Einträgen zwischen 0 und 255, der die Rot-, Grün- und Blauwerte der $P_x \cdot P_y$ Pixel des Fotos angibt. Handelt es sich um ein Schwarz-Weiß-Foto, erhält man einen $P_x \times P_y \times 1$ -Tensor, dessen Einträge die Grauwerte der jeweiligen Pixel darstellen.

Die Punktmenge A_F , die eine bestimmte Farbe F in dem Farbfoto repräsentiert, besteht dann aus den Koordinaten aller Pixel deren drei Farbwerte jeweils in bestimmten Intervallen $(I_F)_j := [(I_F)_{j1}, (I_F)_{j2}]$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) liegen. Damit folgt:

$$A_F := \{(x, y) \mid (I_F)_{j1} \leq T(x, y, j) \leq (I_F)_{j2} \forall j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Will man verschiedenfarbige Objekte in einem Foto untersuchen, bildet man für K verschiedene Farben ($F \in \{1, \dots, K\}$) Intervalle, sodass jedem Pixel höchstens eine Farbe zugeordnet werden kann. Zwei Beispiele dafür, wie man solche Intervalle sinnvoll wählen kann, sieht man in der Tabelle in Abbildung 2.1.

Da es möglich ist, dass in einem Bild verschiedene Objekte denselben Farbton haben, ist es nötig, die erhaltene Punktmenge in verschiedene Teilpunktmenge zu zerlegen, die die

		BSP.1			BSP.2		
F	Farbe	$T(:, :, 1)$	$T(:, :, 2)$	$T(:, :, 3)$	$T(:, :, 1)$	$T(:, :, 2)$	$T(:, :, 3)$
1	weiß	[128,255]	[128,255]	[128,255]	[161,255]	[161,255]	[161,255]
2	gelb	[128,255]	[128,255]	[0,127]	[161,255]	[161,255]	[0,89]
3	lila	[128,255]	[0,127]	[128,255]	[161,255]	[0,89]	[161,255]
4	türkis	[0,127]	[128,255]	[128,255]	[0,89]	[161,255]	[161,255]
5	rot	[128,255]	[0,127]	[0,127]	[161,255]	[0,89]	[0,89]
6	grün	[0,127]	[128,255]	[0,127]	[0,89]	[161,255]	[0,89]
7	blau	[0,127]	[0,127]	[128,255]	[0,89]	[0,89]	[161,255]
8	schwarz	[0,127]	[0,127]	[0,127]	[0,89]	[0,89]	[0,89]

Abbildung 2.1: Beispiele für Farbintervalle

einzelnen Objekte repräsentieren. Dazu wird die eine bestimmte Farbe darstellende Punktmenge A_F so in Komponenten A_F^i zerlegt, dass möglichst viele Komponenten entstehen, allerdings benachbarte Pixel immer in einer Komponente sind.

Um sicherzustellen, dass ausschließlich Objekte untersucht werden, die aufgrund einer gewissen Mindestgröße durch Pixel sinnvoll dargestellt werden können, werden wir nur die Komponent-Punktmenge A_F^i untersuchen, für die, für ein $\psi \in \mathbb{N}$, gilt: $|A_F^i| > \psi$.

2.2 Symmetriewert

Wann eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ exakt n -symmetrisch ist, ist allgemeingültig definiert:

Definition 2.1. Eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist exakt n -(rotations)symmetrisch ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), wenn sie durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um ihren Schwerpunkt auf sich selbst abgebildet wird.

Wie man den Schwerpunkt einer Punktmenge bestimmt, wird in Definition 2.9 festgelegt.

Die Existenz von exakten Rotationssymmetrien lässt sich also leicht nachprüfen. Analysiert man allerdings Punktmenge, die Objekte aus der Realität repräsentieren, muss man in der Regel aus verschiedenen Gründen mit Ungenauigkeiten rechnen. Wir wollen daher einen Algorithmus entwerfen, der nicht nur exakte sondern auch approximative Symmetrien in Punktmenge erkennt. Im Gegensatz zur exakten Symmetrie gibt es für die Existenz einer approximativen Symmetrie keine allgemeingültige Definition.

Fasst man die approximative Symmetrie einer Punktmenge A als eine Boolesche Eigenschaft auf, so wird A genau dann eine approximative Symmetrie zugeordnet, wenn Eigenschaften einer symmetrischen Punktmenge in A zumindest bis auf eine Fehlertoleranz $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorhanden sind. In [33] ist eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ zum Beispiel genau dann approximativ symmetrisch, wenn es eine Permutation σ von A gibt, sodass für alle Punktpaare $\{a_i, a_j\} \subset A$ gilt:

$$||a_i - a_j| - |\sigma(a_i) - \sigma(a_j)|| \leq \epsilon.$$

Anmerkung:

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), bezeichnet $|p - q|$ in dieser Arbeit immer den euklidischen Abstand zwischen $p = (p_1, \dots, p_d)$ und $q = (q_1, \dots, q_d)$. Es gilt also:

$$|p - q| = \sqrt{\sum_{i=1}^d (p_i - q_i)^2}.$$

Sieht man die Symmetrieeigenschaften einer Punktmenge als stufenlose Eigenschaften an, führt das zu der Frage: *Wie symmetrisch ist eine Punktmenge?* Dies lässt sich beantworten, indem ein Symmetriewert für jede n -Symmetrie definiert wird. Ob man einer Punktmenge die entsprechende approximative Symmetrie zuordnet oder nicht, hängt dann von diesem Symmetriewert ab.

In [54] wird ein Symmetriewert für Punktfolgen eingeführt. Dort entspricht der Symmetriewert $d_n(A)$ einer Punktmenge $A := \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$, bezüglich einer n -Symmetrie, dem minimalen Abstand zwischen A und einer exakt n -symmetrischen Punktmenge $B := \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^d$. Es gilt dann:

$$d_n(A) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |b_i - a_i|.$$

Dieser Symmetriewertbegriff gilt grundsätzlich für beliebig dimensionale Punktfolgen. Die Schwierigkeit besteht darin, die n -symmetrische Punktmenge B , die zu einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) den geringsten Abstand hat, zu bestimmen. In [54] wird gezeigt, wie man B für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ berechnet. Dabei wird $|A| = q \cdot n$ ($q \in \mathbb{N}$) vorausgesetzt. Diese Vorgehensweise lässt sich allerdings nicht ohne Weiteres auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Der Algorithmus zur Bestimmung von B setzt voraus, dass für jeden Punkt $a_i \in A$ bekannt ist, auf welchen Punkt $a_j \in A$ er durch die Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ approximativ abgebildet wird. Diese Zuordnung kann man nur im \mathbb{R}^2 auf triviale Weise bestimmen. Um die n -symmetrische Punktmenge B berechnen zu können, muss man außerdem die Rotation bestimmen, unter der B invariant ist. Im \mathbb{R}^2 ergibt sich diese als die eindeutige Drehung im Uhrzeigersinn um den Schwerpunkt von A (siehe auch Definition 2.1). Für höher dimensionale Fälle lässt sich hingegen keine analytische Lösung finden ([54]).

In dieser Arbeit wollen wir daher einen Symmetriewert definieren, der keine Bestimmung einer exakt n -symmetrischen Punktmenge voraussetzt. Außerdem lässt sich dieser Symmetriewert bezüglich einer n -Symmetrie auch dann einer Punktmenge A zuordnen, wenn kein $q \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|A| = q \cdot n$ gilt. In späteren Kapiteln werden wir zeigen, dass sich diese Definition für beliebig dimensionale Punktfolgen verallgemeinern lässt. Dazu werden wir bereits in diesem Kapitel einige Definitionen und Lemmas unabhängig von der Dimension formulieren. Alle anderen Definitionen und Lemmas werden wir in den jeweiligen Kapiteln auf den 3-dimensionalen Fall (Kapitel 5) bzw. den d -dimensionalen Fall ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$, Kapitel 7) erweitern.

Aus Definition 2.1 geht hervor, dass eine Punktmenge A genau dann exakt rotations-symmetrisch ist, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) gibt, so dass die Punktmenge, die durch die

Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ aus A hervorgeht, identisch zu A ist. Unser Symmetriewert orientiert sich an dieser Definition, indem er ein Maß für den Abstand zwischen A und der Punktmenge, die durch die Rotation aus A hervorgegangen ist, darstellt:

Definition 2.2. Der Symmetriewert $d_n(A)$ einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N}$) entspricht dem Abstand zwischen den Punkt Mengen A und B_n , wobei B_n aus A durch eine Rotation um den Schwerpunkt von A um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ (im Uhrzeigersinn) hervorgeht.

2.3 Rotation

Wie im \mathbb{R}^2 ein Punkt im Uhrzeigersinn um einen anderen Punkt gedreht wird, beschreibt die folgende Definition.

Definition 2.3. Die Koordinaten des Punktes $p_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, den man erhält, wenn man einen Punkt $p_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ um einen Punkt $p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel α im Uhrzeigersinn dreht (wir schreiben: $p_3 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1)$), sind:

$$\begin{aligned}x_3 &:= (x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \sin \alpha + x_2, \\y_3 &:= -(x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha + y_2.\end{aligned}$$

Um die Punkte einer Punktmenge A in einer Matrix zusammenzufassen, definieren wir die Matrixschreibweise einer Punktmenge wie folgt:

Definition 2.4. Die Matrixschreibweise $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ einer Punktmenge $A := \{((a_1)_1, \dots, (a_1)_d), \dots, ((a_m)_1, \dots, (a_m)_d)\} \subset \mathbb{R}^d$ ist gleich:

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} (a_1)_1 & \dots & (a_1)_d \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_m)_1 & \dots & (a_m)_d \end{bmatrix}.$$

Aus Definition 2.3 folgt mit der Matrixschreibweise aus Definition 2.4: Die Punktmenge B , die durch eine Rotation um den Punkt $S := (s_x, s_y)$ um den Winkel α im Uhrzeigersinn aus $A := \{((a_1)_x, (a_1)_y), \dots, ((a_m)_x, (a_m)_y)\} \subset \mathbb{R}^2$ hervorgeht, erhält man folgendermaßen:

$$\mathcal{B} = \left(\overbrace{\begin{bmatrix} (a_1)_x & (a_1)_y \\ \dots & \dots \\ (a_m)_x & (a_m)_y \end{bmatrix}}^{=A} - \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ \dots & \dots \\ s_x & s_y \end{bmatrix} \right) \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}^{=R(\alpha)} + \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ \dots & \dots \\ s_x & s_y \end{bmatrix}.$$

Dabei gilt:

$$R^T(\alpha) \cdot R(\alpha) = I,$$

$$\det(R(\alpha)) = 1.$$

Damit gehört $R(\alpha)$ zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(2)$. Für beliebige Dimensionen gilt die folgende Definition.

Definition 2.5. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(d)$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung umfasst alle Matrizen $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$, für die gilt:

$$R^T \cdot R = I \wedge \det(R) = 1.$$

Die spezielle orthogonale Gruppe umfasst allgemein die Matrizen, die Drehungen im \mathbb{R}^d beschreiben. Dabei gilt:

Lemma 2.6. Für zwei Punktmenge $A := \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$, $B := \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^d$ gilt die Längeninvarianz der Rotation für eine Matrix $R \in SO(d)$:

$$B = A \cdot R \quad \Rightarrow \quad |a_i - a_j| = |b_i - b_j| \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Beweis:

$$R^T \cdot R = I \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^d (R_{ik} \cdot R_{jk}) = \delta_{ij}.$$

Dabei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Delta, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\delta_{ij} := 1 \quad (i = j) \quad \wedge \quad \delta_{ij} := 0 \quad (i \neq j).$$

Daraus ergibt sich:

$$|b_i - b_j| = |a_i \cdot R - a_j \cdot R| = |\overbrace{(a_i - a_j)}{=:c} \cdot R| = |(c_1 R_{11} + \dots + c_d R_{d1}, \dots, c_1 R_{1d} + \dots + c_d R_{dd})| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^d (c_i^2 \cdot \delta_{ii} + 2 \sum_{j=i+1}^d (c_i c_j \cdot \delta_{ij}))} = |a_i - a_j|.$$

□

Damit lassen sich weitere Lemmata für den 2-dimensionalen Fall folgern:

Lemma 2.7. Für zwei Punkte $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt genau dann: $p_1 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1)$, wenn entweder $\alpha = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) oder $p_1 = p_2$ oder beides gilt.

Beweis:

⇐

Aus $p_1 = p_2$ folgt:

$$\text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1) = (0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha + x_2, -0 \cdot \sin \alpha + 0 \cdot \cos \alpha + y_2) = p_2 = p_1.$$

Aus $\alpha = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) folgt:

$$\text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1) = ((x_1 - x_2) \cdot 1 + (y_1 - y_2) \cdot 0 + x_2, -(x_1 - x_2) \cdot 0 + (y_1 - y_2) \cdot 1 + y_2) = p_1.$$

⇒

Wir nehmen an, es gelte $p_1 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1)$ und $p_1 \neq p_2$. Dann folgt:

$$p_1 \neq p_2 \Rightarrow a := (x_1 - x_2) \neq 0 \vee b := (y_1 - y_2) \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$p_1 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1) \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}{=:C} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}}{=:X} = \overbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{=:d}.$$

Dieses Gleichungssystem hat wegen $\det(C) \neq 0$ und $d \neq [0, 0]^T$ eine eindeutige Lösung für X und damit kann es für α nur maximal eine Lösung pro Periode $([0, 2\pi[)$ geben, die wir oben bereits bestimmt haben.

Damit folgt unter den Annahmen: $p_1 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1)$ und $p_1 \neq p_2$, dass $\alpha = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gelten muss und damit ist das Lemma 2.7 bewiesen.

□

Lemma 2.8. *Gilt für drei Punkte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$: $p_3 = \text{rot}_\alpha^{p_2}(p_1)$, dann folgt: $|p_1 - p_2| = |p_3 - p_2|$.*

Beweis:

Da die Abstände zwischen zwei Punkten unter einer Verschiebung um einen Vektor genau wie unter einer Multiplikation mit einer Matrix aus $SO(d)$ invariant sind, folgt der Beweis aus Lemma 2.6.

□

2.4 Rotationszentrum

Aus Definition 2.1 wissen wir, dass eine Punktmenge exakt n -symmetrisch ist, wenn sie durch eine Drehung um ihren Schwerpunkt auf sich selbst abgebildet wird. Der Schwerpunkt einer Punktmenge ist folgendermaßen definiert:

Definition 2.9. Für den Schwerpunkt $SP(A) \in \mathbb{R}^d$ einer Punktmenge $A := \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$SP(A) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i.$$

Der Schwerpunkt einer Punktmenge lässt sich mit geringem Aufwand berechnen. Für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $|A| = m$ beträgt der Aufwand offensichtlich:

$$O(m).$$

Warum es zur Überprüfung einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ sinnvoll ist, für das Rotationszentrum $SP(A)$ zu wählen, verdeutlicht das folgende Lemma:

Lemma 2.10. Eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ wird durch eine Rotation um den Winkel α ($0 < \alpha < 2\pi$) auf $B \subset \mathbb{R}^2$ abgebildet. Falls $A = B$ gilt, muss das Zentrum M der Rotation gleich $SP(A)$ sein.

Beweis:

Da die Abstände zwischen den einzelnen Punkten und dem Schwerpunkt der Punktmenge unter der Rotation invariant sind (siehe Lemma 2.8), gilt:

$$SP(B) = \text{rot}_\alpha^M(SP(A)).$$

Aus $A = B$ folgt $SP(A) = SP(B)$. Da der Drehwinkel α kleiner als 2π und größer als 0 ist, ist das nur möglich wenn $M = SP(A)$ gilt (siehe Lemma 2.7).

□

Folgerichtig ist der Schwerpunkt $SP(A)$ von A der einzige sinnvolle Kandidat für das Rotationszentrum zur Berechnung der Symmetriewerte einer Punktmenge im \mathbb{R}^2 .

2.5 Abstand

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man den Abstand zwischen zwei Punktfolgen definieren kann. Je nachdem, welche Ansprüche man an die Komplexität und an die Anfälligkeit des Algorithmus zur Berechnung des Abstands gegenüber verschiedenen Ungenauigkeiten hat, eignen sich unterschiedliche Abstandsbegriffe.

Ein oft gebrauchtes Abstandsmaß ist die Hausdorff-Halbdistanz:

Definition 2.11. Die Hausdorff-Halbdistanz zwischen den Punktfolgen $B \subset \mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) ist folgendermaßen definiert:

$$d^H(B, A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} |b - a|$$

Die Hausdorff-Halbdistanz zwischen zwei Punkt Mengen A und B ist also definitionsgemäß die Distanz zwischen einem bestimmten Punkt aus A und dem nächstgelegenen Punkt aus B . Über alle anderen Punkte in A weiß man lediglich, dass sie näher an einem Punkt aus B liegen. Ob sie nur etwas näher liegen oder sogar identisch zu Punkten aus B sind, kann man aus der Hausdorff-Halbdistanz nicht ablesen.

Man muss beachten, dass bei diesem Maß für den Abstand im Allgemeinen $d^H(B, A)$ nicht gleich $d^H(A, B)$ ist. Für die Hausdorff-Distanz d^{HD} zwischen zwei Punkt Mengen, welche folgendermaßen definiert ist:

$$d^{HD}(B, A) := \max(d^H(B, A), d^H(A, B)),$$

gilt hingegen offensichtlich:

$$d^{HD}(B, A) = d^{HD}(A, B).$$

Allerdings entspricht auch $d^{HD}(B, A)$ als Maximum der beiden Halbdistanzen $d^H(B, A)$ und $d^H(A, B)$ lediglich der Distanz zwischen je einem Punkt aus A und B .

Eine alternative Möglichkeit, den Abstand zwischen zwei Punkt Mengen A und B zu bestimmen, besteht darin, den Wert eines Minimal Perfect Matchings (MPM) zwischen A und B zu berechnen. Die Methode funktioniert zwar nur, wenn A und B gleich viele Punkte enthalten. Diese Bedingung ist allerdings in unseren Anwendungen aufgrund der Tatsache, dass B aus A durch eine Rotation hervorgeht, immer erfüllt.

Um den Abstand zwischen A und B zu bestimmen, wird bei dieser Methode ein vollständiger gewichteter Bigraph $G(A, B)$ gebildet, wobei die eine Partition aus den Punkten von A und die andere Partition aus den Punkten von B besteht. Das Gewicht einer Kante entspricht dem euklidischen Abstand zwischen den beiden Endpunkten der Kante.

Sucht man ein MPM, dann ordnet man jedem Punkt in A einen Punkt in B zu und sucht die Zuordnung, für die der aufsummierte Abstand zwischen den zugeordneten Punkten minimal ist. Dieser minimale aufsummierte Abstand ist gleich dem Wert des MPM in $G(A, B)$. Es gilt dann:

Definition 2.12. Die MPM-Distanz d^M zwischen den Punkt Mengen A und B ist gleich dem Wert des Minimal Perfect Matchings im Bigraphen $G(A, B)$.

Das Problem, ein MPM im Bigraphen $G(A, B)$ ($A = \{a_1, \dots, a_m\}$; $B = \{b_1, \dots, b_m\}$) zu finden, lässt sich auf die folgende Weise als lineares Optimierungsproblem formulieren: Man definiert eine $m \times m$ Matrix U mit Einträgen u_{ij} ($i, j \in \{1, \dots, m\}$), für die gilt:

$$u_{ij} = |a_i - b_j|.$$

Dann findet man das MPM, indem man die Matrix $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bestimmt, die das folgende lineare Programm löst:

OP 1

$$\min_X \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (u_{ij} \cdot x_{ij})$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Das Optimierungsproblem lässt sich mit der Ungarischen Methode lösen:

Algorithmus: Ungarische Methode

Eingabe: $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Ausgabe: $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Lösung von OP1).

1. FÜR $i = 1 : m$:

$$a_i := \min_{j=1:m} u_{ij}.$$

FÜR $j = 1 : m$:

$$u_{ij} := u_{ij} - a_i.$$

2. FÜR $\{i, j\} \mid u_{ij} = 0 \wedge \sum_{j^*} x_{ij^*} = 0 \wedge \sum_{i^*} x_{i^*j} = 0$:

$$x_{ij} := 1, s_{ij} := 1.$$

3. FÜR $j = 1 : m$:

$$c_j := \sum_i x_{ij}.$$

WENN $c_j = 1$:

$$y_j := 1.$$

WENN $\min_j y_j = 1$:

AUSGABE: X .

4. FÜR $\{i, j\} \mid u_{ij} = 0 \wedge y_j = 0$:

$$h_{ij} := 1.$$

WENN $\exists \{i, l\} \mid h_{il} = 1 \wedge (\nexists \{i, j\} \mid u_{ij} = 0 \wedge s_{ij} = 1)$:

Gehe zu 5.

SONST:

FÜR $\{i, j\} \mid h_{il} = 1 \wedge u_{ij} = 0 \wedge s_{ij} = 1$:

$$y_j := 0, z_i := 1.$$

Gehe zu 6.

5. $x_{il} = 1$.

FÜR $p \mid s_{pl} = 1$:

$x_{pl} = 0$. usw. (alternierende Reihe)

```

FÜR  $i = 1 : m$ :
     $z_i := 0$ .
    FÜR  $j = 1 : m$ :
         $y_j := 0, h_{ij} := 0$ .
Gehe zu 3.

6.  $w := \{\min u_{ij} \mid z_i = 0 \wedge y_j = 0\}$ 
    FÜR  $i = 1 : m$ :
        FÜR  $j = 1 : m$ :
            WENN  $z_i = 1$ :
                 $u_{ij} := u_{ij} + w$ .
            WENN  $y_j = 0$ :
                 $u_{ij} := u_{ij} - w$ .
Gehe zu 4.

```

Lemma 2.13. *Mit dem Algorithmus Ungarische Methode findet man immer eine minimale Lösung von OP1. Die Komplexität beträgt für einen Bigraphen mit $2m$ Punkten $O(m^3)$.*

Beweis:

Für einen Bigraphen mit $2m$ Punkten ergibt sich eine Matrix U mit m^2 Einträgen. Der Aufwand zum Markieren (Vektoren y, z) und Hervorheben (Matrix H) von U beträgt daher $O(m^2)$.

Jedesmal, wenn in Schritt 5 eine alternierende Reihe gefunden wird und alle Markierungen und Hervorhebungen gelöscht werden, wird ein Eintrag mehr gekennzeichnet. Wenn m Einträge gekennzeichnet sind, haben wir die optimale Lösung. Daher gibt es höchstens m Markierungs- und Hervorhebungsschleifen und der gesamte Aufwand beträgt $O(m^3)$.

Dass die Ungarische Methode immer die richtige Lösung eines Zuordnungsproblems, welches OP1 entspricht, findet, wird in [30] gezeigt.

□

Der Rechenaufwand ist also $O(m^3)$. Gibt es hingegen eine Permutation σ der Indizes von B , sodass gilt:

$$|a_i - b_{\sigma(i)}| < \min_{j \in \{1, \dots, m\}, j \neq \sigma(i)} |a_i - b_j| \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

dann erhält man bereits im ersten Schleifendurchgang die Lösung und der Aufwand liegt somit in $O(m^2)$. So eine Permutation existiert offensichtlich, falls A exakt n -symmetrisch ist und daher ist sie auch für leicht gestörte Symmetrien nicht unwahrscheinlich.

Dennoch hängt der Aufwand des Algorithmus von der Anzahl der Punkte m ab. In unseren Anwendungen, in denen Objekte durch Punktmenge dargestellt werden, kann man zwar die Pixeldichte und damit auch die Anzahl der repräsentierenden Punkte in vielen Fällen steuern, allerdings führt eine geringere Pixeldichte in der Regel zu größerer Ungenauigkeit und Störungsanfälligkeit. Daher muss man daran interessiert sein, für eine Punktmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine charakteristische Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$, deren Größe möglichst von m unabhängig ist, zu finden (siehe Kapitel 3).

2.6 Zuordnung

Im vorangegangenen Abschnitt wurden zwei Möglichkeiten für ein Abstandsmaß zwischen zwei Punktmenge definiert. Anhand zweier Beispiele wollen wir illustrieren, welche Unterschiede zwischen den beiden Abstandsmaßen bestehen und wie wir entscheiden, ob einer Punktmenge eine approximative Symmetrie zugeordnet wird.

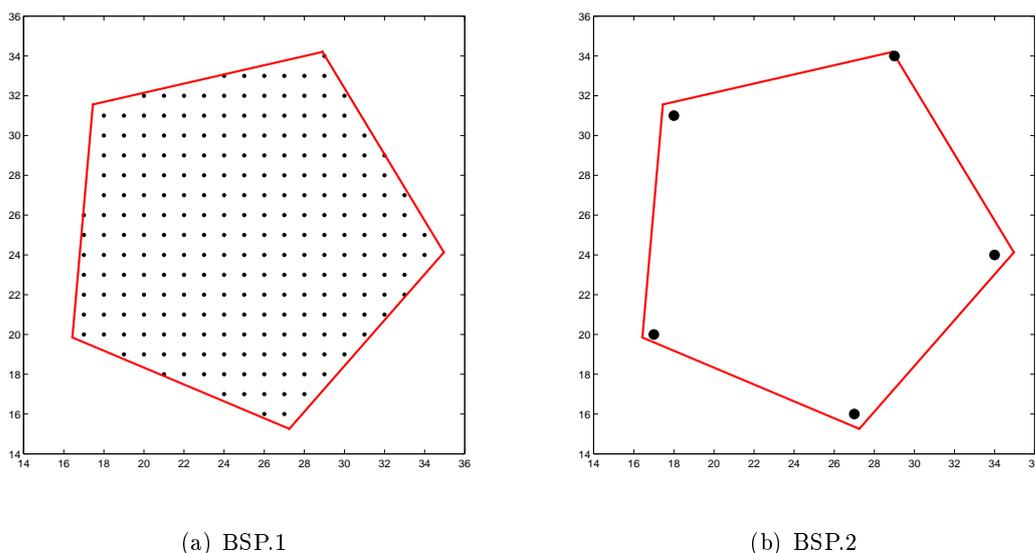


Abbildung 2.2: Durch eine Punktmenge repräsentiertes reguläres Fünfeck

In Abbildung 2.2 sieht man ein reguläres Fünfeck, welches in Beispiel 1 durch alle ganzzahligen Punkte innerhalb des Fünfeckes (Punktmenge A) und in Beispiel 2 durch eine charakteristische Teilmenge von A (Punktmenge \tilde{A}) repräsentiert wird. Wie man so eine charakteristische Punktmenge \tilde{A} erhält, wird in Kapitel 3 beschrieben. Anschließend werden die Symmetriewerte $d_n^H(A)$, mit der Hausdorff-Halbdistanz als Maß für den Abstand, und $d_n^M(A)$, mit der MPM-Distanz als Abstandsmaß, für $n = 2, \dots, 8$, berechnet.

In der Symmetriewert-Tabelle in Abbildung 2.3 kann man sehen, dass die Abstände mit dem MPM-Abstandsmaß insbesondere in BSP.1 deutlich größer sind. Das verwundert nicht, wenn man sich überlegt, dass die MPM-Distanz, anders als die Hausdorff-Halbdistanz, die Summe von m Abständen ist. Um verschiedene Symmetriewerte dennoch aussagekräftig vergleichen zu können, definieren wir den Eindeutigkeitswert, der einen Symmetriewert einer Punktmenge A im Vergleich mit den anderen Symmetriewerten von A bewertet.

Definition 2.14. Für den Eindeutigkeitswert $\Delta_{i,\dots,j}^n(A)$ eines Symmetriewertes $d_n(A)$ gilt:

$$\Delta_{i,\dots,j}^n(A) = \max_{k \in \{i,\dots,j\} \setminus \{l \mid n \bmod l = 0\}} \frac{d_n(A)}{d_k(A)} \cdot 100.$$

	BSP.1		BSP.2	
m	237		5	
n	$d_n^H(A)$	$d_n^M(A)$	$d_n^H(\tilde{A})$	$d_n^M(\tilde{A})$
2	1.99	85.7	5.82	29.0
3	1.80	139.1	4.37	19.5
4	2.00	60.6	3.16	14.8
5	0.83	100.7	0.79	2.2
6	1.26	116.0	2.31	10.1
7	1.81	134.8	3.69	16.9
8	2.25	151.6	4.72	22.0
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	65.9	166.2	34.2	21.8

Abbildung 2.3: Symmetriewerte

Anmerkung:

Wenn im Folgenden aus dem Zusammenhang klar ist, für welche Punktmenge A ein Eindeutigkeitswert bestimmt wird, schreiben wir verkürzt $\Delta_{i,\dots,j}^n$ an Stelle von $\Delta_{i,\dots,j}^n(A)$.

Insbesondere weil die MPM-Symmetriewerte $d^M(A)$ als Summe von $m = |A|$ Abständen stark von der Anzahl der Punkte in A abhängen, ist es nicht sinnvoll, die absoluten Werte verschiedener $d^M(A)$ zu vergleichen. Die Eindeutigkeitswerte der Symmetriewerte hingegen lassen sich auch von verschiedenen Punktfolgen, mit unterschiedlich vielen Punkten, sinnvoll vergleichen. Ein kleiner Eindeutigkeitswert deutet darauf hin, dass die entsprechende Symmetrie ein charakteristisches Merkmal der Punktmenge ist.

In unseren Anwendungsbeispielen werden wir Punktfolgen immer dann eine approximative n -Symmetrie zuordnen, wenn die entsprechenden Symmetriewerte die Bedingung in der folgenden Definition erfüllen.

Definition 2.15. *Einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ wird genau dann eine approximative n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) zugeordnet, wenn für den Eindeutigkeitswert des Symmetriewertes $d_n(A)$ gilt:*

$$\Delta_{2,\dots,8}^n < 25.$$

Fasst man die Definitionen 2.14 und 2.15 zusammen, so ergibt sich, dass einer Punktmenge eine approximative n -Symmetrie zugeordnet wird, wenn der Symmetriewert der Punktmenge bezüglich der n -Symmetrie kleiner ist als ein Viertel aller Symmetriewerte bezüglich der i -Symmetrien, für alle i von 2 bis 8, die keine ganzzahligen Teiler von n sind. Diese Zuordnung, die in unserem Algorithmus verwendet wird, ist aus verschiedenen Gründen geeignet.

So ist der in Definition 2.14 eingeführte Eindeutigkeitswert, dadurch dass er der Quotient aus zwei Symmetriewerten derselben Punktmenge ist, ein genormter Wert, für den sich unabhängig von der Größe der zu untersuchenden Punktmenge und den Abständen zwischen zwei benachbarten Punkten ein sinnvoller Schwellenwert einführen lässt, bis zu dem eine Symmetrie zugeordnet werden kann.

Außerdem wird einer n -symmetrischen Punktmenge, zumindest für $n \in \{2, \dots, 8\}$, nur ihre höchste Symmetrieordnung zugeordnet. Ist eine Punktmenge A n -symmetrisch, folgt für alle ganzzahligen Teiler i_1, \dots, i_j von n , dass A auch i_1, \dots, i_j -symmetrisch sein muss. Daher sind wir grundsätzlich nur an der höchsten Symmetrieordnung einer Punktmenge interessiert, selbst wenn der Symmetriewert bezüglich einer i_j -Symmetrie kleiner als der Symmetriewert bezüglich der n -Symmetrie ist.

Die approximative 5-Symmetrie der Punktmenge aus Abbildung 2.2 lässt sich in BSP.1 mit keinem der beiden Abstandsmaße so deutlich erkennen, dass unser Algorithmus der Punktmenge eine Symmetrie zuordnet. In BSP.2 ist der Eindeutigkeitswert für d_5 besonders bei Anwendung der MPM-Methode signifikant klein. Nur in diesem Fall wird der Punktmenge eine 5-Symmetrie zugeordnet.

Wir werden in unseren Algorithmen die MPM-Methode benutzen, da diese alle Punkte in die Abstandsberechnung einbezieht und daher am genauesten ist. Wir setzen also:

$$d_n(A) = d^M(A, B_n),$$

wobei B_n die Punktmenge ist, die aus A durch eine Rotation um $SP(A)$ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ hervorgeht.

2.7 Hohe Symmetrieordnungen

Ist man vor allem an Symmetrien hoher Ordnung interessiert, kann es sinnvoll sein, die Zuordnung einer Symmetrie aus Definition 2.15 zu modifizieren. Denn bei der Suche nach sehr hohen Symmetrieordnungen ($n \gg 8$), kann es passieren, dass einer Punktmenge nach Definition 2.15 fälschlicherweise eine Symmetrie zugeordnet wird. Um zu zeigen, warum dieses Problem auftritt, beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma 2.16. *Für jede endliche Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A) = 0.$$

Beweis:

Nach Definition 2.2 ist $d_n(A)$ der Abstand zwischen A und B_n , wobei B_n aus A durch eine Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ hervorgeht. Außerdem ist der Abstand zwischen A und B_n gleich dem Wert des MPM zwischen A und B_n .

Wir bezeichnen die Punkte in A und B_n folgendermaßen:

$$A = \{a_1, \dots, a_m\} \quad , \quad B_n = \{b_1^n, \dots, b_m^n\}.$$

Dabei sind die Punkte so nummeriert, dass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ der Punkt b_i^n durch die Drehung aus dem Punkt a_i hervorgegangen ist.

Bedenkt man, dass man für jedes beliebige n ein perfektes, wenn auch nicht unbedingt minimales, Matching erhält, indem man für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ dem Punkt a_i den Punkt b_i^n zuordnet, so folgt:

$$0 \leq d_n(A) \leq \sum_{i=1}^m |a_i - b_i^n|.$$

Für ein beliebiges $i \in \{1, \dots, m\}$ betrachten wir das Dreieck $\Delta_{a_i, b_i^n, SP(A)}$, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Der Winkel bei $SP(A)$ entspricht dem Rotationswinkel. Es gilt also:

$$\angle_{SP(A)} = \frac{2\pi}{n}.$$

- Da b_i^n aus a_i durch Drehung um $SP(A)$ hervorgegangen ist, gilt nach Lemma 2.8: $|a_i - SP(A)| = |b_i^n - SP(A)| =: x_i$ und da die Winkelsumme im Dreieck gleich π ist, folgt:

$$\angle_{a_i} = \angle_{b_i^n} = \frac{1}{2}(\pi - \angle_{SP(A)}) = \frac{\pi(n-2)}{2n}.$$

- Da $x_i := |a_i - SP(A)|$ unabhängig von n ist, gilt:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_i < \infty.$$

Aus diesen Eigenschaften folgt mit dem Sinussatz:

$$|a_i - b_i^n| = x_i \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{(n-2)\pi}{2n}}.$$

Und mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{2\pi}{n} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(n-2)\pi}{2n} = 1$$

folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_i - b_i^n| = 0.$$

Daher gilt auch:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |a_i - b_i^n| = 0.$$

Damit ist Lemma 2.16 bewiesen. □

Ist eine Punktmenge $A \in \mathbb{R}^2$ für alle $j \in \{2, \dots, 8\}$ nicht exakt j -symmetrisch, so gilt:

$$d_j(A) = \epsilon > 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, 8\}$$

und somit lässt sich aus Lemma 2.16 folgern:

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ für das, gilt: } \Delta_{2, \dots, 8}^n(A) < 25 \quad \forall n > N.$$

Somit wird ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ einer beliebigen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ (unabhängig von ihren Symmetrieeigenschaften) jede n -Symmetrie ($n > N$) nach Definition 2.15 zugeordnet. Daher eignet sich diese Definition nur bedingt, wenn man eine Punktmenge auf approximative Symmetrien sehr hoher Ordnungen untersucht.

Wir wollen im Folgenden auf eine Möglichkeit eingehen, wie man die Zuordnung von approximativen Symmetrien alternativ gestalten kann, wenn man nach Symmetrien höherer Ordnungen suchen will.

Das Problem bei der Zuordnung von Symmetrien, das aus Lemma 2.16 gefolgert werden kann, beruht darauf, dass sich für eine Punktmenge B_n , die aus einer Drehung um einen sehr kleinen Winkel aus einer Punktmenge A hervorgegangen ist, unabhängig von ihren Symmetrieeigenschaften ein perfektes Matching zwischen B_n und A finden lässt, das einen sehr kleinen Wert hat. Daher definieren wir einen alternativen Symmetriewert, der sich nicht nur aus dem Wert eines solchen Matchings berechnet:

Definition 2.17. Der alternative Symmetriewert $\hat{d}_n(A)$ einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der n -Symmetrie berechnet sich wie folgt:

$$\hat{d}_n(A) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} d(A, B_n(i)).$$

Dabei geht die Punktmenge $B_n(i) \subset \mathbb{R}^2$ aus A durch eine Rotation um den Punkt $SP(A) \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\frac{2\pi \cdot i}{n}$ hervor und $d(A, B_n(i))$ bezeichnet den Abstand zwischen den Punktmenge A und $B_n(i)$.

Für den alternativen Symmetriewert $\hat{d}_n(A)$ einer beliebigen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ gilt offensichtlich nicht die Aussage aus Lemma 2.16 für den Grenzwert von $d_n(A)$.

Wir definieren analog einen alternativen Eindeutigkeitswert:

Definition 2.18. Für den alternativen Eindeutigkeitswert $\hat{\Delta}_{i,\dots,j}^n(A)$ eines alternativen Symmetriewertes $\hat{d}_n(A)$ gilt:

$$\hat{\Delta}_{i,\dots,j}^n(A) = \max_{k \in \{i,\dots,j\} \setminus \{l \mid n \bmod l=0\}} \frac{\hat{d}_n(A)}{\hat{d}_k(A)} \cdot 100,$$

Dadurch kann man davon ausgehen, dass nur für eine approximativ n -symmetrische Punktmenge A gilt:

$$\hat{\Delta}_{2,\dots,8}^n(A) < 25.$$

Die genaue Bestimmung der Symmetrieeigenschaften einer Punktmenge mit Hilfe der alternativen Symmetrie- und Eindeutigkeitswerte ist allerdings aufwendiger, wie aus dem folgenden Lemma hervorgeht:

Lemma 2.19. Die Komplexität der Bestimmung aller alternativen Symmetriewerte $\hat{d}_n(A)$ ($n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq N \in \mathbb{N}$) einer m -elementigen Punktmenge A ist:

$$O(N^2 m^3).$$

Zur Berechnung aller Symmetriewerte $d_n(A)$ beträgt der Aufwand hingegen:

$$O(Nm^3)$$

Beweis:

Die Erstellung der Eingabe-Matrix für **OP1**, deren Einträge m^2 Abstände zwischen je zwei Punkten sind, besitzt eine Komplexität von $O(m^2)$. Der Aufwand zur Berechnung eines Minimal Perfect Matchings in einem Bigraphen mit $2m$ Punkten beträgt $O(m^3)$ (siehe Lemma 2.13). Der Aufwand zur Berechnung des Abstands zweier Punktmenge beträgt, wenn man das Matching gegeben hat, hingegen lediglich $O(m)$.

Zur Berechnung eines alternativen Symmetriewertes $\hat{d}_n(A)$ müssen $n - 1$ solcher Matchings bestimmt werden.

Insgesamt ergibt sich also zur Berechnung aller alternativen Symmetriewerte ein Aufwand von

$$O\left(\sum_{n=2}^N (n-1)m^3\right) \doteq O(N^2m^3).$$

Da zur Berechnung eines Symmetriewertes $d_n(A)$ nur ein Matching bestimmt werden muss, beträgt der Aufwand zur Bestimmung aller Symmetriewerte $d_n(A)$ ($n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq N \in \mathbb{N}$) einer m -elementigen Punktmenge A :

$$O(Nm^3).$$

□

Der Aufwand unseres Symmetrieeerkennungsalgorithmus hängt einerseits davon ab, auf welche Symmetrieordnungen die Punktmenge untersucht werden soll. Andererseits würde sich der Aufwand erheblich reduzieren, wenn wir eine möglichst kleine Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ mit $|\tilde{A}| =: \tilde{m} \ll m := |A|$ finden könnten, deren Symmetriewerte eine Aussagekraft für die Symmetrieeigenschaften der gesamten Punktmenge A besitzen. Mit der Frage, wie man eine solche Teilmenge \tilde{A} finden kann, werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen.

Die Unterschiede zwischen Symmetriewerten und alternativen Symmetriewerten werden anhand des folgenden Beispiels illustriert:

Wir betrachten eine approximativ 11-symmetrische Punktmenge A (siehe Abbildung 2.4). A ist die Punktmenge, die aus den Eckpunkten eines regulären Elfecks besteht, deren Koordinaten auf ganze Zahlen gerundet wurden.

Vergleicht man die Symmetriewerte und die alternativen Symmetriewerte für $n = 2, \dots, 13$ und, um den Effekt des Grenzwertes für $n \rightarrow \infty$ anzudeuten, beispielhaft für $n = 367$ (siehe Abbildung 2.5), so erkennt man, wie es nach den vorherigen Überlegungen zu erwarten war:

1. Die approximative 11-Symmetrie wird sowohl mit den Symmetriewerten als auch mit den alternativen Symmetriewerten erkannt.
2. Obwohl die Punktmenge offensichtlich nicht approximativ 367-symmetrisch ist, würde ihr nach den Definitionen 2.2, 2.14 und 2.15 eine approximative 367-Symmetrie zugeordnet. Anhand des alternativen Symmetriewertes (siehe Definition 2.17) erkennt man, dass keine approximative 367-Symmetrie vorliegt.

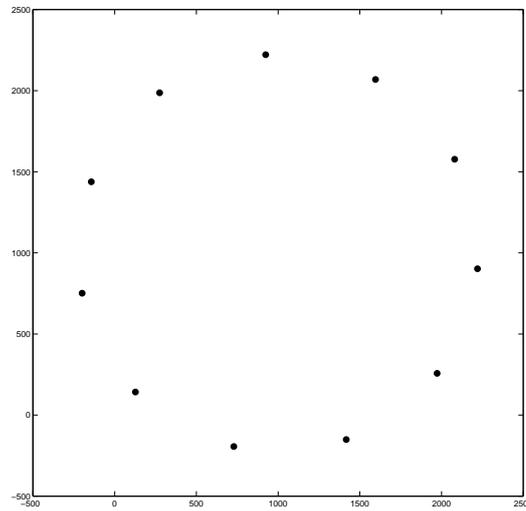


Abbildung 2.4: Punktmenge A

n	$d_n(A)$	$\Delta_{2,\dots,8}^n(A)$	$\hat{d}_n(A)$	$\hat{\Delta}_{2,\dots,8}^n(A)$
2	3833.1	299.1	3833.1	174.7
3	2560.2	199.8	2560.2	116.7
4	1921.4	149.9	2558.6	116.6
5	1537.6	120.0	2303.9	105.0
6	1281.6	83.3	2303.3	105.0
7	3288.5	256.6	2194.1	100.0
8	2879.1	224.6	2193.8	100.0
9	1708.2	133.3	2133.2	97.2
10	769.1	60.0	2133.0	97.2
11	7.3	0.6	6.1	0.3
12	641.0	41.7	2094.2	98.2
13	1183.1	92.3	2067.5	96.9
367	230.6	18.0	1925.0	87.7

Abbildung 2.5: Symmetriewerte und Eindeutigkeitswerte

Kapitel 3

Charakteristische Teilmengen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir eine Vorgehensweise eingeführt, mit der man prüfen kann, ob eine Punktmenge A eine approximative n -Symmetrie besitzt. Der Aufwand der dazu benötigten Berechnung des Abstands zwischen zwei Punkt Mengen A und B ist sowohl bei der Verwendung der Hausdorff-Halbdistanz ($O(m^2)$) als auch bei der Verwendung der MPM-Distanz ($O(m^3)$) abhängig von der Anzahl m der Punkte in A (und B). Die entscheidende Frage, die sich daher stellt, wenn man effizient nach Symmetrien in einer Punktmenge A suchen will, ist: Gibt es eine möglichst kleine Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$, deren Symmetriewert Aussagekraft für die Symmetrieeigenschaften von A besitzt?

In diesem Kapitel wird es darum gehen, eine solche charakteristische Teilmenge von A zu ermitteln. Dazu werden wir eine neue Teilmenge einer Punktmenge definieren, die sogenannten Charakteristischen Eckpunkte.

Wir werden im Folgenden die Eigenschaften, die eine solche Teilmenge von A erfüllen muss, anhand eines Vergleichs mit den Randpunkten von A und den Extrempunkten von A herleiten.

3.1 Randpunkte

Wird eine Punktmenge A , zum Beispiel mit dem in Kapitel 2.1 beschriebenen Verfahren, aus Pixel mit einem bestimmten Farbwert in einem Foto gebildet, so ist A eine ganzzahlige Punktmenge (d.h. $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}^{m \times 2}$). Für jede ganzzahlige Punktmenge A lässt sich die eindeutig definierte Teilmenge ihrer Randpunkte $A_R \subseteq A$ bestimmen. Dabei gilt:

Definition 3.1. *Ein Randpunkt einer ganzzahligen Punktmenge*

$A := \{((a_1)_x, (a_1)_y), \dots, ((a_m)_x, (a_m)_y)\}$ ist ein Punkt $a^* = ((a^*)_x, (a^*)_y) \in A$, für den es zumindest für eine der folgenden Bedingungen keinen Punkt $a_j \in A$ gibt, der diese erfüllt:

1. $(a_j)_x = (a^*)_x + 1 \quad \wedge \quad (a_j)_y = (a^*)_y$,
2. $(a_j)_x = (a^*)_x - 1 \quad \wedge \quad (a_j)_y = (a^*)_y$,
3. $(a_j)_x = (a^*)_x \quad \wedge \quad (a_j)_y = (a^*)_y + 1$,
4. $(a_j)_x = (a^*)_x \quad \wedge \quad (a_j)_y = (a^*)_y - 1$.

Werden Objekte durch Pixel repräsentiert, so steigt die Genauigkeit der Darstellung mit einer höheren Pixeldichte. Die Pixeldichte ist abhängig vom Abstand $disP$ zwischen zwei Pixel. Wenn wir $disP$ verringern, wird ein Objekt durch mehr Punkte repräsentiert und so detaillierter dargestellt.

Der Abstand zwischen zwei Punkten, die zwei bestimmte Stellen eines Objekts darstellen, steigt indirekt proportional zu $disP$. Damit folgt für $0 < disP \leq 1$:

$$|A| \sim \left(\frac{1}{disP}\right)^2 \quad \wedge \quad |A_R| \sim \frac{1}{disP}.$$

Es gilt also:

$$|A_R| =: m_R \sim \sqrt{m}.$$

Daher ist $|A_R|$ zwar in der Regel deutlich kleiner als $|A|$, allerdings auch abhängig von $disP$ und steigt damit, wenn man eine genauere Darstellung erzeugt. Für detailliertere Betrachtungen kann also auch hier der Aufwand für die Symmetriewertberechnung sehr groß werden. Außerdem setzt Definition 3.1 voraus, dass A eine ganzzahlige Punktmenge ist. Da wir Punktmenge in beliebig dimensionalen euklidischen Räumen untersuchen wollen, ist die Teilmenge A_R für unseren Algorithmus nicht geeignet.

Wir werden im Folgenden eine charakteristische Teilmenge definieren, deren Größe mit kleiner werdendem $disP$ nicht (deutlich) steigt, die auch für nicht ganzzahlige Punktmenge definiert ist und die trotzdem geeignet ist, um aussagekräftige Symmetriewerte zu bestimmen.

3.2 Konvexe Hülle

Die grundsätzliche Idee beruht darauf, eine Teilmenge der Extrempunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ zu bestimmen. Wir definieren:

Definition 3.2. Eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten $p, q \in A$ auch alle Punkte auf deren Verbindungsstrecke $\lambda\vec{p} + (1 - \lambda)\vec{q}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) enthält.

Definition 3.3. Die *konvexe Hülle* $A_{kon} \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die kleinste konvexe Menge, in der A enthalten ist.

Definition 3.4. Ein Punkt $a \in A$ einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) heißt *Extrempunkt* von A , wenn es keine zwei von a verschiedenen Punkte $q_1, q_2 \in A_{kon}$ gibt, so dass a auf der Strecke zwischen q_1 und q_2 liegt. Die Menge der Extrempunkte von A wird mit A_K bezeichnet.

Dabei gilt:

Lemma 3.5. *Die in 3.4 definierte Menge A_K der Extrempunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) ist eindeutig.*

Beweis:

Die konvexe Hülle A_{kon} einer Punktmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$ lässt sich nach den Definitionen 3.2 und 3.3 als die Menge der endlichen Konvexkombinationen von Punkten aus A konstruieren:

$$A_{kon} := \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot a_i \mid a_i \in A, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Jede Menge $A' \neq A_{kon}$, die nicht größer als A_{kon} ist, enthält entweder einen Punkt $a_i \in A$ nicht, oder sie ist nach Definition 3.2 nicht konvex. Daher ist die konvexe Hülle A_{kon} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ eindeutig.

Für jeden Punkt $a \in A$ ist damit in Definition 3.4 eindeutig festgelegt, ob er Extrempunkt ist oder nicht. Also ist auch die Menge $A_K \subseteq A$ der Extrempunkte eindeutig. □

Es gibt verschiedene Verfahren mit denen man die konvexe Hülle und damit auch die Extrempunkte einer Punktmenge bestimmen kann. Der schnellste Algorithmus ist der Quickhull-Algorithmus [5]. Er berechnet für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) mit $|A| = m$ die Extrempunkte A_K in einer durchschnittlichen Komplexität von $O(m \log m)$. In [5] wurde außerdem gezeigt, dass der Aufwand im 2- und 3-Dimensionalen lediglich $O(m \log r)$ und im d -Dimensionalen ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) $O(m \frac{f_r}{r})$ beträgt, wenn bestimmte Balance-Bedingungen erfüllt sind. Dabei bezeichnet r die Anzahl der bearbeiteten Punkte und f_r die maximale Anzahl an Facetten für r Ecken.

Die Idee des Quickhull-Algorithmus beruht auf dem folgenden Prinzip:

Teilmenge der Punkte werden jeweils partitioniert in diejenigen Punkte, die links von einer bestimmten (gerichteten) Geraden liegen und diejenigen, die rechts der Geraden liegen. Diese Punktmenge werden dann rekursiv weiter behandelt. Zunächst bestimmt man den Punkt p_0 mit der kleinsten y-Koordinate. Bei mehreren Punkten mit kleinster y-Koordinate wird aus diesen der Punkt mit der kleinsten x-Koordinate gewählt. Dieser Punkt p_0 ist ein Extrempunkt. Als zweiter Punkt p_1 wird zu Beginn ebenfalls p_0 genommen. Die Startgerade g geht durch p_0 und liegt so, dass alle Punkte der Menge $A \setminus \{p_0\}$ rechts von g liegen. Die Menge R bezeichnet die Teilmenge von A , die aus den Punkten besteht, die rechts der Geraden g liegen. In der Ausgangssituation gilt also: $R = A \setminus \{p_0\}$. Der Rekursionsschritt geht wie folgt:

In der Menge R wird der am weitesten von g entfernte Punkt q gesucht. Dieser ist ein weiterer Extrempunkt. Dann wird eine Gerade g_0 durch p_0 und q gelegt und die Punktmenge R wird partitioniert in die Menge R_0 derjenigen Punkte, die rechts von g_0 liegen und die Menge L_0 derjenigen Punkte, die links von (oder auf) g_0 liegen. Ferner wird eine Gerade g_1 durch q und p_1 gelegt und L_0 wird partitioniert in die Menge R_1 derjenigen Punkte, die rechts von g_1 liegen und die Menge L_1 derjenigen Punkte, die links von (oder auf) g_1 liegen. Die Punkte der Menge L_1 liegen im Inneren der konvexen Hülle und gehören daher

nicht zu A_K . Mit den Geraden g_0 von p_0 nach q und g_1 von q nach p_1 und den zugehörigen Mengen R_0 und R_1 wird rekursiv weiter verfahren, wenn sie nicht leer sind.

In Abbildung 3.1 wird die Vorgehensweise des Quickhull-Algorithmus dargestellt. Im ersten Schritt werden R_0 und L_0 gebildet. Im zweiten Schritt kann man bereits alle Punkte innerhalb der beiden Dreiecke $\Delta_{p_0qp_1}$ und $\Delta_{p_0p_1q'}$ als mögliche Punkte von A_K ausschließen. Im dritten Bild ist das Ergebnis A_K dargestellt. Man sieht, dass die Punktmenge, die eigentlich ein reguläres Fünfeck darstellen sollte, 13 Extrempunkte besitzt. Neben Ungenauigkeiten durch Lichteffekte oder Verdeckungen ist insbesondere die Darstellung durch Pixel, also ganzzahlige Punktfolgen, dafür verantwortlich, dass die konvexe Hülle mehr Extrempunkte als die Anzahl der Ecken des dargestellten Objekts enthält.

Will man aussagekräftige Symmetriewerte berechnen, eignet sich die charakteristische Teilmenge A_K daher nur bedingt (siehe auch die Beispiele in Kapitel 3.5). Im Folgenden werden wir eine neue Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A_K \subseteq A$ definieren, die eine effektive Symmetriewertberechnung ermöglicht.

Dabei enthält \tilde{A} als Teilmenge von A_K zwar nur Informationen über die Eigenschaften der konvexen Hülle von A , allerdings ist einerseits in vielen Fällen bereits die Form der konvexen Hülle einer Punktmenge charakteristisch für diese und andererseits kann man mit dieser weniger aufwendigen Methode bereits n -Symmetrien von A ausschließen, wenn A_{kon} nicht n -symmetrisch ist, was wir in Kapitel 7.3 für $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) beweisen werden.

3.3 Charakteristische Eckpunkte

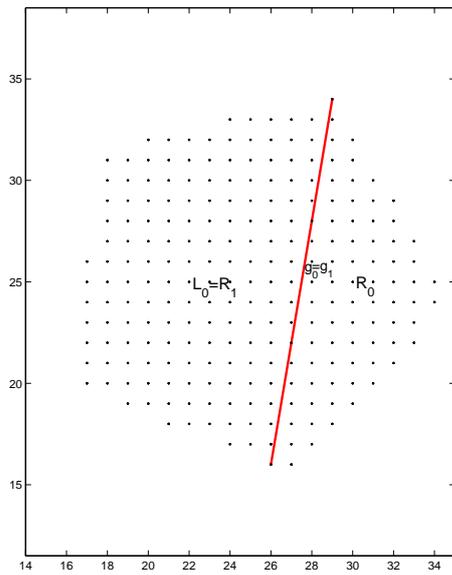
Gesucht ist eine Teilmenge von A_K , die nur die *echten* Ecken von A enthält. Unter der Menge der *echten* Ecken verstehen wir dabei eine Teilmenge von A_K , die einerseits möglichst klein sein soll und deren konvexe Hülle andererseits möglichst ähnlich zu der konvexen Hülle der Punktmenge A sein soll.

Dieses Problem lässt sich als ein Glättungsproblem auf dem stückweise linearen Rand der konvexen Hülle interpretieren und beschreibt somit eine verwandte Fragestellung zu derjenigen, die Verfahren aus der Literatur behandeln, die sich mit dem Zerlegen der Umrisslinien einer 2-dimensionalen Fläche in möglichst wenige Teilabschnitte beschäftigen ([12], [50]).

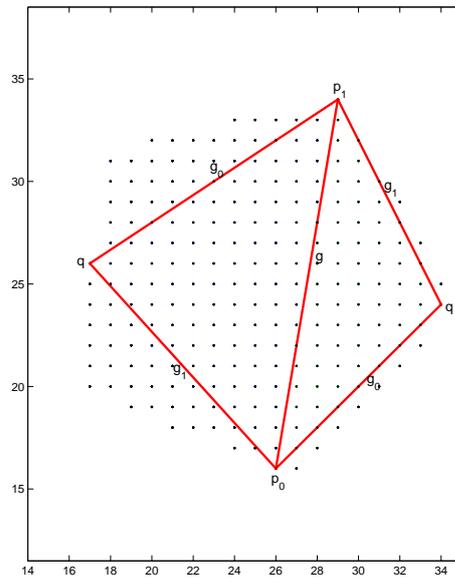
Dabei werden möglichst lange Abschnitte des Umrisses, in denen die Krümmung bestimmte Kriterien erfüllt, zusammengefasst. Da in unserem Fall der Rand der konvexen Hülle durch die diskrete Teilmenge der Extrempunkte gegeben ist und wir ein Verfahren einführen wollen, welches sich auch zur Bearbeitung höher dimensionaler Punktfolgen anwenden lässt, ist dieser Ansatz für unsere Zwecke nicht geeignet. Wir orientieren uns daher bei der Bestimmung der charakteristischen Teilmenge an den zu Beginn des Abschnitts genannten Kriterien für die *echten* Ecken einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$. Dazu definieren wir:

Definition 3.6. Zwei konvexe Punktfolgen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ heißen genau dann ϵ -ähnlich ($\epsilon \in \mathbb{R}^+$), wenn gilt:

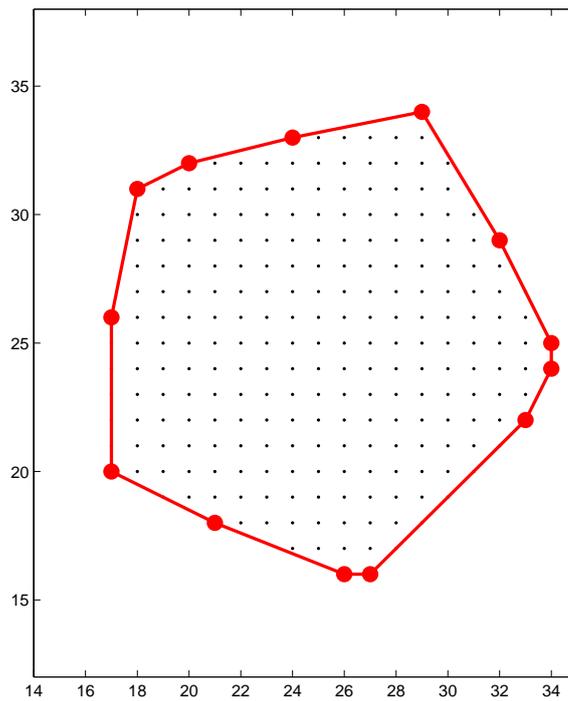
$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} |a - b| \leq \epsilon \quad \wedge \quad \max_{b \in B} \min_{a \in A} |a - b| \leq \epsilon.$$



(a) 1. Schritt



(b) 2. Schritt



(c) Ergebnis

Abbildung 3.1: Quickhull-Algorithmus

Die Bedingung aus Definition 3.6 ist gleichbedeutend zu

$$d^{HD}(A, B) \leq \epsilon.$$

Dabei bezeichnet $d^{HD}(A, B)$ die Hausdorff-Distanz zwischen den Punktmenge A und B (siehe Kapitel 2.5). Um die Kriterien für die *echten* Ecken zu quantifizieren, formulieren wir mit Hilfe der Definition 3.6 die sogenannten ϵ -Bedingungen.

Definition 3.7. Für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ und ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt die Teilmenge $\tilde{A} := \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$ die ϵ -Bedingungen genau dann, wenn gilt:

1. \tilde{A}_{kon} und A_{kon} sind ϵ -ähnlich.
2. Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt: $(\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}$ und A_{kon} sind nicht ϵ -ähnlich.

Um eine Teilmenge einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ zu finden, die die ϵ -Bedingungen für ein bestimmtes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt, definieren wir das folgende Optimierungsproblem, welches als Eingabeparameter neben der Punktmenge A eine positive Konstante $dcon \in \mathbb{R}^+$ benötigt. Auf die Frage, wie man $dcon$ wählen sollte, wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

OP 2

$$\min_{\tilde{A} \subseteq A_K} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A})} d(w, \tilde{A}_{kon}).$$

unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$NB1 : d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq dcon \quad \forall w \in (A_K \setminus \tilde{A})$$

$$NB2 : |\tilde{A}| = \min_{\tilde{A}_i \subseteq A_K \wedge \tilde{A}_i | NB1} |\tilde{A}_i|.$$

$d(w, \tilde{A}_{kon})$ bezeichnet dabei den Abstand zwischen dem Punkt w und der konvexen Hülle von \tilde{A} . Das heißt:

$$d(w, \tilde{A}_{kon}) = \min_{a \in \tilde{A}_{kon}} |w - a|.$$

$\tilde{A}_i | NB1$ bedeutet, dass \tilde{A}_i die Nebenbedingung NB1 erfüllen muss.

In **OP2** wird also eine minimale Anzahl von Punkten aus A_K gesucht, so dass alle Punkte, die nicht ausgewählt wurden, von der konvexen Hülle der neuen Punktmenge nicht weiter als die vorgegebene Entfernung $dcon$ entfernt sind. Unter allen Teilmengen, die diese Bedingungen erfüllen, wird nun diejenige ausgewählt, bei der die aufsummierte Distanz zwischen den nicht ausgewählten Punkten und der neuen konvexen Hülle minimal ist. Damit gilt:

Satz 3.8. Die Lösung $\tilde{A} \subseteq A \subset \mathbb{R}^2$ des Optimierungsproblem **OP2** erfüllt die ϵ -Bedingungen für $\epsilon = dcon$ und für jede andere Teilmenge $B \subseteq A$, die die ϵ -Bedingungen für $\epsilon = dcon$ erfüllt, gilt:

$$|B| \geq |\tilde{A}| \quad \wedge \quad (|B| = |\tilde{A}| \Rightarrow \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A})} d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq \sum_{w \in (A_K \setminus B)} d(w, B_{kon})).$$

Beweis:

Grundsätzlich gilt für alle Punktmenge $\tilde{A} \subseteq A \subset \mathbb{R}^2$ (siehe Definition 3.4):

$$\max_{a \in A} d(a, (\tilde{A})_{kon}) = \max_{a \in A_K} d(a, (\tilde{A})_{kon}).$$

Sei \tilde{A} nun die Lösung von **OP2** (Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^2$, $dcon \in \mathbb{R}^+$), dann folgt aus NB1:

$$\max_{a \in A_{kon}} \min_{b \in (\tilde{A})_{kon}} |a - b| \leq dcon.$$

Außerdem gilt wegen $\tilde{A} \subseteq A$:

$$\max_{b \in (\tilde{A})_{kon}} \min_{a \in A_{kon}} |a - b| = 0 < dcon.$$

Wegen NB2 gilt für alle $a_i \in \tilde{A}$:

$$\max_{a \in A_{kon}} \min_{b \in (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}} |a - b| > dcon.$$

Damit erfüllt \tilde{A} die ϵ -Bedingungen für $\epsilon = dcon$.

Aus NB2 folgt außerdem für jede andere Teilmenge $B \subseteq A$, die die ϵ -Bedingungen für $\epsilon = dcon$ erfüllt:

$$|B| \geq |\tilde{A}|.$$

Da \tilde{A} die Zielfunktion unter den Nebenbedingungen minimiert, gilt:

$$|B| = |\tilde{A}| \Rightarrow \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A})} d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq \sum_{w \in (A_K \setminus B)} d(w, B_{kon}).$$

□

Wir definieren folgerichtig:

Definition 3.9. Eine Punktmenge $\tilde{A}(dcon) \subset \mathbb{R}^2$, die das Optimierungsproblem **OP2** (Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^2$, $dcon \in \mathbb{R}^+$) löst, bezeichnen wir als Menge der Charakteristischen ($dcon$)-Eckpunkte (bzw. als Charakteristische ($dcon$)-Eckpunkte) der Punktmenge A .

Das Optimierungsproblem **OP2** wird mit dem folgenden Algorithmus gelöst, der anhand des Beweises von Satz 3.10 ausführlich erläutert wird.

Algorithmus: Eckpunkte

Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^2$, $dcon \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: $\tilde{A} \subseteq A$ (Lösung von OP2), $d \in \mathbb{R}$ (Zielfunktionswert von OP2).

1. $A_K := \{w_1, \dots, w_m\} := \text{Quickhull}(A)$, (Nummerierung im Uhrzeigersinn).
 $\tilde{A} := \{\}$, $E := 0$, $F := 1$, $NR := 1$, $i := 1$.
2. WÄHREND $i < m - NR + 2 \wedge E = 0$:
 WENN $A_K \setminus \{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\} \mid NB1$:
 $i := i + 1$.
 SONST:
 $E := 1$.
3. WENN $E \neq 1$:
 $i := 1$, $NR := NR + 1$, gehe zu 2.
4. WENN $F \geq NR + 1$:
 Gehe zu 7.
5. $A' := \{w_1, \dots, w_m\}$, $P_1^F(1) := \{w_{i+F-1}\}$, $P_1^F(2) := \{\}$, $p_1 := 2$.
 FÜR $j = (i + F) : m$:
 WENN $A' \setminus w_j \mid NB1$:
 $A' := A' \setminus w_j$, $P_1^F(p_1) := P_1^F(p_1) \cup w_j$.
 SONST:
 $P_1^F(p_1) := P_1^F(p_1) \cup w_j$, $p_1 := p_1 + 1$, $P_1^F(p_1) := \{\}$.
 FÜR $j = 1 : (i + F - 2)$:
 WENN $A' \setminus w_j \mid NB1$:
 $A' := A' \setminus w_j$, $P_1^F(p_1) := P_1^F(p_1) \cup w_j$.
 SONST:
 $P_1^F(p_1) := P_1^F(p_1) \cup w_j$, $p_1 := p_1 + 1$, $P_1^F(p_1) := \{\}$.
6. $A' := \{w_1, \dots, w_m\}$, $P_2^F(1) := \{w_{i+F-1}\}$, $P_2^F(2) := \{\}$, $p_2 := 2$.
 FÜR $j = (i + F - 2) : -1 : 1$:
 WENN $A' \setminus w_j \mid NB1$:
 $A' := A' \setminus w_j$, $P_2^F(p_2) := P_2^F(p_2) \cup w_j$.
 SONST:
 $P_2^F(p_2) := P_2^F(p_2) \cup w_j$, $p_2 := p_2 + 1$, $P_2^F(p_2) := \{\}$.
 FÜR $j = m : -1 : (i + F)$:
 WENN $A' \setminus w_j \mid NB1$:
 $A' := A' \setminus w_j$, $P_2^F(p_2) := P_2^F(p_2) \cup w_j$.
 SONST:
 $P_2^F(p_2) := P_2^F(p_2) \cup w_j$, $p_2 := p_2 + 1$, $P_2^F(p_2) := \{\}$.
 $s_F := p_1 - 1$, $F := F + 1$, gehe zu 4.
7. $s := \min_{j \in \{1, \dots, NR\}} s_j$, $F := 1$.

8. WENN $F \geq NR + 1 \vee s_F \neq s$:
 $d_F := \infty$, gehe zu 15.
9. $P_1(1) := P_1^F(1) \cup P_1^F(s+1)$, $P_2(1) := P_2^F(1) \cup P_2^F(s+1)$.
 FÜR $j = 2 : s$:
 $P_1(j) := P_1^F(j)$, $P_2(j) := P_2^F(j)$.
10. FÜR $q = 1 : m$:
 WENN $A_K \setminus w_q$ NB1 nicht erfüllt:
 FÜR $l = 1 : m$ ($l \neq q$):
 FÜR $(k, j) \mid w_q, w_l \in P_k(j)$:
 $P_k(j) := P_k(j) \setminus w_l$.
11. FÜR $j' = 1 : s$:
 FÜR $k' = 1 : 2$:
 WENN $|P_{k'}(j')| = 1$:
 $w_q := P_{k'}(j')$.
 FÜR $(k, j) \mid w_q \in P_k(j)$:
 $P_k(j) := \{w_q\}$.
12. FÜR $j, j' = 1 : s$:
 FÜR $k, k' = 1 : 2$:
 WENN $P_k(j) \subset P_{k'}(j')$:
 $P_{k'}(j') := P_k(j)$.
13. WENN $\exists(k, j) \mid P_k(j)$ (Schritt 12) $\neq P_k(j)$ (Schritt 10):
 Gehe zu 11.
14. $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{|I|}\} := \{\check{A}_i \subseteq A_K \mid (|\check{A}_i \cap P_k(j)| = 1 \ \forall j, k) \wedge (\check{A}_i | NB1)\}$.
 $d_F := \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon})$.
 $\tilde{A}^F := \tilde{A}_i \mid i = \arg \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon})$.
 $F := F + 1$, gehe zu 8.
15. WENN $F < NR + 1$:
 $F := F + 1$, gehe zu 8.
16. AUSGABE: $d := \min_{F \in \{1, \dots, NR\}} d_F$.
 AUSGABE: $\tilde{A} := \tilde{A}^F \mid F := \arg \min_{F \in \{1, \dots, NR\}} d_F$.
-

Satz 3.10. *Der Algorithmus Eckpunkte findet immer alle Lösungen des Optimierungsproblems OP2.*

Beweis:

Wir führen den Beweis mit der Hilfe von fünf Lemmata:

Lemma 3.11. *Das Optimierungsproblem **OP2** besitzt immer (mindestens) eine Lösung \tilde{A}^* .*

Beweis:

Das Optimierungsproblem hat immer (mindestens) eine Lösung, da NB1 zumindest für $\tilde{A} = A_K$ erfüllt ist und es damit auch immer mindestens eine Menge \tilde{A} geben muss, die beide Nebenbedingungen erfüllt.

Wir bezeichnen die Punktmenge, die die Zielfunktion unter den Nebenbedingungen minimiert, mit \tilde{A}^* . Existieren mehrere Lösungen, bezeichnet \tilde{A}^* eine dieser Lösungen.

□

Lemma 3.12. *Für das in Schritt 7 berechnete s gilt:*

$$s = \min_{\tilde{A}_i \subseteq A_K \wedge \tilde{A}_i | NB1} |\tilde{A}_i| = |\tilde{A}^*|.$$

Beweis:

In Schritt 2 wird eine NR -elementige Teilmenge $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ gesucht, für die $A_K \setminus \{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ NB1 nicht erfüllt.

Daraus folgt, dass mindestens ein Element aus $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ in \tilde{A}^* sein muss.

In den verschiedenen Schleifen in Schritt 5 wird je einer der Punkte $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ als fester Punkt für \tilde{A} ausgewählt. Zumindest in einer Schleife kann man damit noch auf \tilde{A}^* kommen.

Anschließend werden für $F = 1 : NR$ die Partitionen $P_1^F(1), \dots, P_1^F(s_F + 1)$ so gebildet, dass aus jeder der Mengen $P_1^F(1), \dots, P_1^F(s_F)$ jeweils mindestens ein Punkt in \tilde{A} sein muss, damit \tilde{A} NB1 erfüllt. Analoges passiert in Schritt 6 in umgekehrter Reihenfolge bei der Bildung der Partitionen $P_2^F(1), \dots, P_2^F(s_F + 1)$.

Da \tilde{A}^* mindestens einen der Punkte $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ enthält, gilt

$$|\tilde{A}^*| \geq s = \min_{(j \in \{1, \dots, NR\})} s_j.$$

Außerdem erhält man eine Menge \tilde{A} (mit $|\tilde{A}| = s_F$), welche NB1 erfüllt, wenn man \tilde{A} neben dem festen Punkt aus den jeweils als letztes hinzugekommenen Punkten der Partitionen $P_1^F(2), \dots, P_1^F(s_F)$ bildet. Es gilt daher

$$|\tilde{A}^*| \leq s_F \quad \forall F = 1 : NR.$$

Für das in Schritt 7 berechnete s gilt also:

$$s = |\tilde{A}^*|.$$

□

Lemma 3.13. *Für mindestens ein $F \in \{1, \dots, NR\}$ mit $s_F = s$ gilt: \tilde{A}^* besteht aus je einem Element aus $P_1^F(j)$ ($j = 1 : s$), bzw. aus je einem Element aus $P_2^F(j)$ ($j = 1 : s$).*

Beweis:

\tilde{A}^* besteht aus s Elementen und enthält mindestens einen der Punkte $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$. Die verschiedenen $P_k^F(j)$ ($F = 1 : NR$) wurden unter der Voraussetzung, dass ein bestimmter Punkt w_{i-1+F} in \tilde{A} sein muss, so gebildet, dass für $j = 2 : s$ aus $P_1^F(j)$ und $P_2^F(j)$ mindestens ein Element in \tilde{A} sein muss, damit \tilde{A} NB1 erfüllt.

Daher muss zumindest für das F , bei dem ein Punkt aus $\{w_i, \dots, w_{i+NR-1}\}$ als fester Punkt in \tilde{A} gewählt wird, der auch in \tilde{A}^* ist, \tilde{A}^* aus je einem Element aus $P_1^F(j)$ (bzw. aus je einem Element aus $P_2^F(j)$ ($j = 1 : s$)) bestehen.

□

Lemma 3.14. *Für mindestens ein $F \in \{1, \dots, NR\}$ gilt für das in Schritt 14 berechnete \tilde{A}^F :*

$$\tilde{A}^* = \tilde{A}^F = \tilde{A}_i \mid i = \arg \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon}),$$

Beweis:

Bildet man für alle $F = 1 : NR$ mit der Eigenschaft $s_F = s$ alle Punktmenge \tilde{A}_i ($i \in I'$), sodass aus jeder $P_1^F(j)$ (bzw. aus jeder $P_2^F(j)$) ($j = 1 : s$) genau ein Element in \tilde{A}_i ist, dann ist \tilde{A}^* zumindest für ein F identisch zu einer der $|I'|$ gebildeten Punktmenge \tilde{A}_i .

Für dieses F gilt:

In den Schritten 10-12 werden die verschiedenen Partitionen $P_k(j)$ verkleinert und damit die Anzahl der zu bildenden \tilde{A}_i reduziert. Es werden nur noch $|I^*|$ ($I^* \subseteq I'$) Mengen gebildet. \tilde{A}^* ist allerdings auch nach der Reduzierung der zu betrachtenden \tilde{A}_i identisch zu einer der \tilde{A}_i ($i \in I^*$, $I^* \subseteq I'$), da durch die Schritte 10-12 nur Möglichkeiten ausgeschlossen werden, bei denen \tilde{A}_i zumindest eine der beiden Nebenbedingungen nicht erfüllt.

Schritt 10:

Wenn $A_K \setminus w_q$ NB1 nicht erfüllt, muss w_q in \tilde{A}^* sein, damit \tilde{A}^* NB1 erfüllt.

Daher kann man alle w_l ($l = 1 : m \wedge l \neq q$), die mit w_q zusammen in einer $P_k(j)$ sind, löschen, weil diese nicht in \tilde{A}^* sein können, da NB2 sonst in \tilde{A}^* nicht erfüllt wäre.

Schritt 11:

Ist ein w_q das einzige Element in einer $P_k(j)$, muss es laut Definition auch in jedem \tilde{A}_i sein. Damit \tilde{A}_i NB2 erfüllt, darf kein w_l , das mit w_q in einer der anderen $P_k(j)$ ist, in \tilde{A}_i sein.

Schritt 12:

Damit \tilde{A}_i NB2 erfüllt, darf aus jeder der $P_k(j)$ nur genau ein Element in \tilde{A}_i sein. Daher werden in Schritt 12 nur Möglichkeiten für \tilde{A}_i ausgeschlossen, die NB2 nicht erfüllen.

Daraus folgt, dass für ein $i \in I^*$ gilt: $\tilde{A}^* = \tilde{A}_i$.

Streicht man alle \tilde{A}_i ($i \in I^*$), die NB1 nicht erfüllen, erhält man verschiedene Mengen \tilde{A}_i mit $i \in I$ ($I \subseteq I^*$).

\tilde{A}^* erfüllt NB1. Es gibt also auch ein i ($i \in I$), für das $\tilde{A}^* = \tilde{A}_i$ gilt. Außerdem erfüllen

alle \tilde{A}_i mit $i \in I$ sowohl NB1 als auch NB2.

Da \tilde{A}^* die Zielfunktion minimiert, gilt:

$$\tilde{A}^* = \tilde{A}_i \mid i = \arg \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon}).$$

Damit gilt für dieses F :

$$\tilde{A}^* = \tilde{A}^F$$

□

Lemma 3.15. *Der Algorithmus Eckpunkte terminiert.*

Beweis:

Alle Schleifen innerhalb des Algorithmus sind endlich:

Schritt 2 wird nur endlich oft wiederholt, da $NR < m - 1$ gelten muss um NB1 zu erfüllen.

Die Schritte 4-6 und 8-15 werden nur endlich oft wiederholt, da $NR < \infty$ gilt.

Die Schritte 11-13 werden nur endlich oft wiederholt, da höchstens $m < \infty$ Punkte gestrichen werden können und die Schleife beendet wird, sobald in einem Durchgang kein neuer Punkt gestrichen wird.

□

Aus den Lemmata 3.11 bis 3.15 folgt: **OP2** hat immer mindestens eine Lösung \tilde{A}^* , die man in endlicher Zeit mit Hilfe des Algorithmus **Eckpunkte** ermittelt.

Nimmt die Zielfunktion ihr Minimum für verschiedene Punktmengen $\tilde{A}^{*1}, \tilde{A}^{*2}, \dots$ an, die alle die Nebenbedingungen NB1 und NB2 erfüllen, so ist entweder die Bestimmung von i in Schritt 14

$$i = \arg \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon}),$$

oder die Bestimmung von F in Schritt 16

$$F = \arg \min_{F \in \{1, \dots, NR\}} d_F$$

(oder beide) nicht eindeutig. Da die Lemmata 3.12, 3.13 und 3.14 für jede Lösung \tilde{A}^{*i} gelten, erhält man in diesem Fall alle Lösungen, indem man in Schritt 14 alle \tilde{A}_j ($j \in I$) mit

$$\sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_j)} d(w, (\tilde{A}_j)_{kon}) = \min_{i \in I} \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A}_i)} d(w, (\tilde{A}_i)_{kon})$$

speichert bzw. in Schritt 16 alle \tilde{A}^j ($j \in \{1, \dots, NR\}$) ausgibt, für die gilt:

$$d_j = \min_{F \in \{1, \dots, NR\}} d_F.$$

Damit ist Satz 3.10 bewiesen.

□

Anmerkung:

Die optimale Lösung erhält man auch, wenn man für alle s -elementigen Teilmengen \tilde{A} von A_K , für die NB1 erfüllt ist,

$$d_{\tilde{A}} = \sum_{w \in (A_K \setminus \tilde{A})} d(w, \tilde{A}_{kon})$$

berechnet. Da es allerdings $\binom{m}{s}$ verschiedene s -elementige Teilmengen von A_K gibt, wäre der Aufwand dabei in der Regel sehr groß. Die Schritte 9-14 reduzieren den Aufwand im Normalfall erheblich.

3.4 Eingabe-Parameter

Es stellt sich die Frage, wie man den Parameter $dcon$ wählen sollte, damit $\tilde{A}(dcon)$ tatsächlich den Ecken des Objekts, welches durch A repräsentiert wird, am ehesten entspricht. Das Ziel muss es also sein, $dcon$ so zu wählen, dass, falls A ein n -Eck repräsentiert, $|\tilde{A}(dcon)| = n$ gilt. Um die Abhängigkeit zwischen $|\tilde{A}(dcon)|$ und dem Parameter $dcon$ zu analysieren, beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.16. *Für eine beliebige Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ und zwei positive Parameter $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ seien $\tilde{A}(d_1)$ und $\tilde{A}(d_2)$ die Mengen der Charakteristischen (d_1) - bzw. (d_2) -Eckpunkte von A . Dann gilt:*

$$d_1 \leq d_2 \quad \Rightarrow \quad |\tilde{A}(d_1)| \geq |\tilde{A}(d_2)|.$$

Beweis

Jede Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A_K$, die die Nebenbedingung NB1 des Optimierungsproblems **OP2** für $dcon = d_1$ erfüllt, erfüllt diese auch für $dcon = d_2 \geq d_1$.

Daraus folgt:

$$\min_{\tilde{A}_i \subseteq A_K \wedge \tilde{A}_i | NB1(d_1)} |\tilde{A}_i| \geq \min_{\tilde{A}_i \subseteq A_K \wedge \tilde{A}_i | NB1(d_2)} |\tilde{A}_i|$$

und damit gilt auch:

$$d_1 \leq d_2 \quad \Rightarrow \quad |\tilde{A}(d_1)| \geq |\tilde{A}(d_2)|.$$

□

Fasst man also die Anzahl der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ als Funktion $s(dcon)$ des Eingabeparameters $dcon$ auf, so ist $s(dcon)$ monoton fallend. Außerdem gilt offensichtlich $s(0) = |A_K|$ und wenn man berücksichtigt, dass die konvexe Hülle einer Punktmenge in der Ebene nur gebildet werden kann, wenn die Punktmenge mindestens drei (nicht-lineare) Punkte enthält, folgt: $\lim_{d \rightarrow \infty} s(d) = 3$.

Bei der Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte einer ein n -Eck ($3 < n < |A_K|$) darstellenden Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ unterscheiden wir zwei Fehler bei der Wahl des Parameters $dcon$:

- Fehler erster Art: $dcon$ wird zu klein gewählt $\Rightarrow |\tilde{A}(dcon)| > n$.
- Fehler zweiter Art: $dcon$ wird zu groß gewählt $\Rightarrow |\tilde{A}(dcon)| < n$.

Da wir a priori nicht wissen, wie viele Ecken das dargestellte Objekt besitzt, ist die Überprüfung von $dcon$ nicht offensichtlich. Einen Anhaltspunkt dafür, dass ein $dcon$ so gewählt wurde, dass $|\tilde{A}(dcon)| = n$ gilt, erhalten wir, wenn für $dcon_2 \gg dcon$ auch $|\tilde{A}(dcon_2)| = n$ gilt. Wir definieren folgerichtig:

Definition 3.17. Ein Intervall $I := [d_1, d_2]$ heißt geeignetes $dcon$ -Intervall für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, wenn gilt:

$$3 < |\tilde{A}(d_1)| = |\tilde{A}(d_2)| < A_K \quad \wedge \quad d_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \wedge \quad d_2 \geq 4 \cdot d_1.$$

Um ein $dcon$ aus einem geeigneten Intervall für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ zu finden, benutzen wir den folgenden Algorithmus:

Algorithmus: Parameter

Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^2$, $d_0 \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: $dcon \in \mathbb{R}^+$ in einem geeigneten Intervall.

1. $A_K := \text{Quickhull}(A)$.
 $s_{-1} = s_0 := |A_K|$, $i := 1$, $dcon := 0$.
 2. WÄHREND $s_{i-1} > 3$
 $d_i := 2 \cdot d_{i-1}$.
 $\tilde{A} := \text{Eckpunkte}(A_K, d_i)$.
 $s_i := |\tilde{A}|$.
 WENN $s_i = s_{i-2}$:
 AUSGABE: $dcon := d_{i-2}$.
 $i := i + 1$.
 3. WENN $dcon = 0$:
 AUSGABE: Kein Intervall gefunden!
-

Anmerkungen:

1. Als Startwert d_0 sollte man einen möglichst kleinen Wert wählen, für den trotzdem $|\tilde{A}(d_0)| < |A_K|$ gilt. Wir wählen daher:

$$d_0 := \min_{w_i \in A_K} d(w_i, (A_K \setminus w_i)_{kon}).$$

2. Da in Schritt 2 lediglich die Anzahl s_i der Charakteristischen Eckpunkte von Interesse ist, genügt es hier, nur einen Teil des Algorithmus **Eckpunkte** (Schritte 1-7) durchzuführen.

3. Für zwei beliebige $d_1, d_2 \in I$ in einem geeigneten $dcon$ -Intervall I gilt: $\tilde{A}(d_1) = \tilde{A}(d_2)$. Da

der Algorithmus **Eckpunkte** (in der Regel) schneller ist, wenn $dcon$ kleiner gewählt wird, setzt der Algorithmus **Parameter** $dcon$ gleich dem kleinsten bekannten Wert innerhalb des Intervalls.

4. Findet der Algorithmus **Parameter** kein geeignetes $dcon$ -Intervall, so kann man entweder den Startwert d_0 variieren oder die Bedingung für die Größe des Intervalls auf $d_2 = 2 \cdot d_1$ abmildern.

Untersucht man ein Objekt, dessen Darstellungsweise bekannt ist, ist die $dcon$ -Bestimmung mit dem Algorithmus **Parameter** nicht notwendig, wenn man bereits einen geeigneten Wert für $dcon$ aus früheren Analysen kennt. Wir werden die Parameterbestimmung mit Hilfe des Algorithmus **Parameter** in den folgenden Beispielen ausführen und damit allgemein darauf schließen, wie wir $dcon$ wählen müssen, wenn wir Punktmengen untersuchen, die Objekte mit der in Kapitel 2.1 vorgestellten Pixelmethode repräsentieren.

3.5 Beispiele

Als erstes wollen wir die Vorgehensweise des Algorithmus **Eckpunkte** an dem Beispiel aus Abbildung 2.2 illustrieren:

In Abbildung 3.2(a) sieht man die das Fünfeck repräsentierende Punktmenge A . $A_R \subset A$ ist die blau und grün eingezeichnete Teilmenge der Randpunkte von A . $A_K \subset A_R$ sind die Extrempunkte (grün) von A .

Es gilt:

$$|A_K| = 13, \quad \min_{w_i \in A_K} d(w_i, (A_K \setminus w_i)_{kon}) = 0.1085 =: d_0.$$

Fasst man die Anzahl der Charakteristischen Eckpunkte von A als Funktion $s(dcon)$ des Eingabeparameters $dcon$ auf, so besitzt $s(dcon)$ die in Abbildung 3.3 aufgelisteten Funktionswerte.

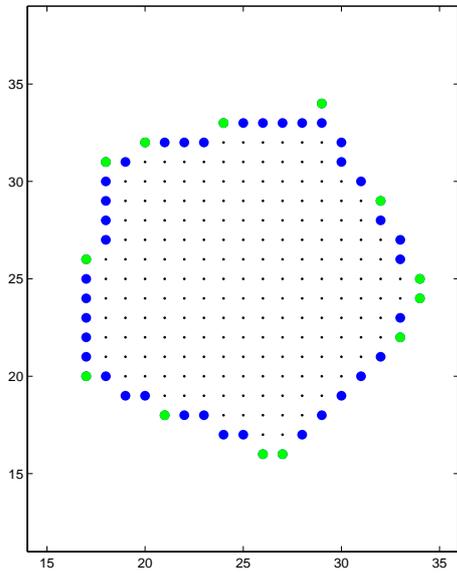
Der Algorithmus **Parameter** findet also das geeignete $dcon$ -Intervall

$$I := [2^3 d_0, 2^5 d_0] = [0.8677, 3.4709].$$

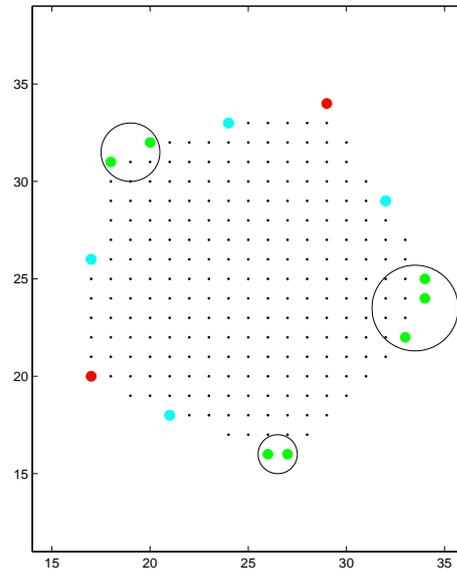
Wir führen den Algorithmus **Eckpunkte** zur Veranschaulichung mit $dcon = 2$ aus.

In 3.2 (b) sind die Punkte in A_K , die sicher zu \tilde{A} gehören müssen, um die beiden Nebenbedingungen zu erfüllen, rot eingezeichnet, die türkisen Punkte liegen sicher nicht in \tilde{A} und aus den drei Teilmengen (Kreise) der grünen Punkte muss jeweils noch ein Punkt in \tilde{A} liegen. Es gibt also noch $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ verschiedene Möglichkeiten \tilde{A} zu bilden. Durch die Schritte 9-14 des **Eckpunkte**-Algorithmus wurde also die Anzahl der möglichen \tilde{A} von $\binom{13}{5} = 1287$ auf 12 reduziert.

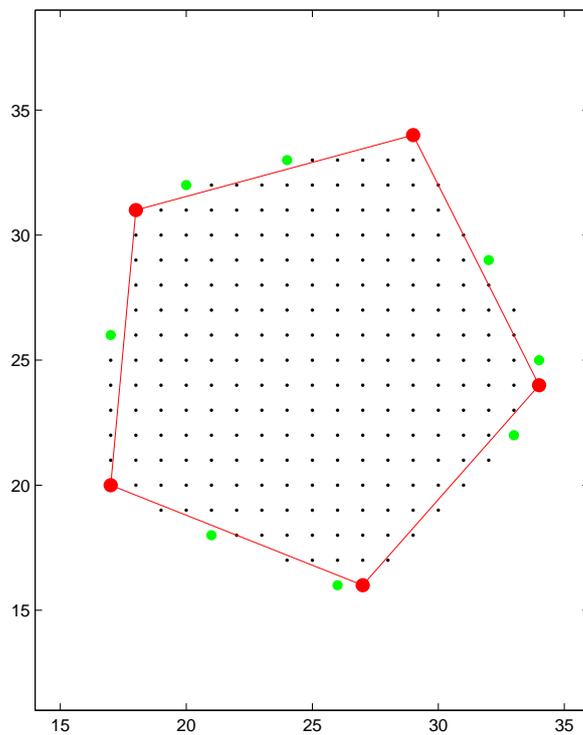
Im unteren Bild (c) ist das optimale \tilde{A} rot eingezeichnet. Die grünen Punkte aus $A_K \setminus \tilde{A}$ liegen von \tilde{A}_{kon} (rotes Fünfeck) weniger als 2 Längeneinheiten entfernt.



(a) A mit A_R (blau+grün) und A_K (grün)



(b) Möglichkeiten für \tilde{A}



(c) Lösung von OP2: \tilde{A} (rot)

Abbildung 3.2: Eckpunkte-Algorithmus

i	$s(2^i \cdot d_0)$
0	12
1	10
2	8
3	5
4	5
5	5
6	3

Abbildung 3.3: Parameterfunktion

m	237	50	13	5
n	$d_n(A)$	$d_n(A_R)$	$d_n(A_K)$	$d_n(\tilde{A})$
2	85.7	78.7	39.8	29.0
3	139.1	71.2	31.6	19.5
4	60.6	58.2	29.8	14.8
5	100.7	47.4	29.5	2.2
6	116.0	51.1	27.3	10.1
7	134.8	55.3	30.9	16.9
8	151.6	57.6	35.5	22.0
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	166.2	92.9	108.2	21.8

Abbildung 3.4: Symmetriewerte

Die verschiedenen Symmetriewerte d_n werden in der Tabelle in Abbildung 3.4 verglichen, die die Tabelle aus 2.3 erweitert. Man erkennt, dass lediglich \tilde{A} eine 5-Symmetrie zugeordnet werden kann. Außerdem kann man die Symmetriewerte von \tilde{A} , aufgrund der niedrigen Anzahl an Punkten in \tilde{A} , mit dem geringsten Aufwand berechnen.

Im Folgenden wollen wir die Symmetriewerte der Charakteristischen Eckpunkte an einem zweiten Beispiel testen.

Im linken Teil der Abbildung 3.5 ist das Originalfoto abgebildet. Im rechten Teil sieht man die Punktmenge A , die das Stoppschild (Farbintervalle aus Abbildung 2.1 (Bsp.2), $\psi = 1000$) repräsentiert. Es gilt:

$$|A_K| = 34, \quad \min_{w_i \in A_K} d(w_i, (A_K \setminus w_i)_{kon}) = 0.031 =: d_0.$$

Verschiedene Funktionswerte für $s(dcon)$ sieht man in Abbildung 3.6.

Der Algorithmus `Parameter` findet also das geeignete $dcon$ -Intervall $I := [2^6 d_0, 2^9 d_0] = [1.984, 15.872]$ und gibt somit für $dcon = 2^6 \cdot d_0 = 1.984$ aus. $d_n(A)$ zu berechnen wäre aufgrund der Größe von A ($|A| = 30657$) nicht praktikabel. Die Symmetriewerte der Charakteristischen Eckpunkte (siehe Abbildung 3.7) lassen sich hingegen mit geringem Aufwand bestimmen.



(a) Originalbild

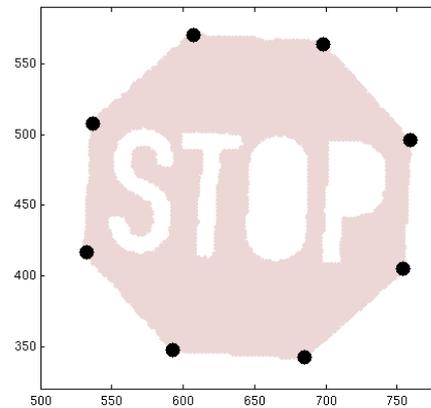
(b) $\tilde{A} \subset A$

Abbildung 3.5: Stopp-Schild

Jedes reguläre Achteck ist nicht nur 8-symmetrisch, sondern auch 2- und 4-symmetrisch. Daher dürfen die niedrigen Symmetriewerte für $d_2(\tilde{A})$ und $d_4(\tilde{A})$ nicht verwundern.

Vergleicht man die geeigneten $dcon$ -Intervalle der beiden Beispiele, so sieht man, dass die Intervalle einen nicht-leeren Schnitt haben. Da die darstellende Punktmenge A im zweiten Beispiel wesentlich größer als im ersten ist, liegt die Vermutung nahe, dass der absolute Fehler durch die Pixel-Darstellung unabhängig von der Größe des dargestellten Objekts ist. Daher verzichten wir im Folgenden auf eine $dcon$ -Bestimmung mit dem Algorithmus `Parameter`, wenn wir eine Punktmenge untersuchen, die ein Objekt mit der Pixelmethode repräsentiert. In diesen Fällen setzen wir $dcon = 2$ und schreiben verkürzt statt $\tilde{A}(dcon)$ nur noch \tilde{A} für die Menge der Charakteristischen Eckpunkte.

3.6 Komplexitätsanalyse

Aus Lemma 2.13 wissen wir, dass die Berechnung des Abstands zwischen zwei Punkt-mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mit $|A| = |B| = m$ die Komplexität $O(m^3)$ besitzt. Der Aufwand zur Berechnung der Symmetriewerte einer Punktmenge A bezüglich aller n -Symmetrien ($n \in \{2, 3, \dots, N\}$) beträgt also $O(Nm^3)$.

In unserem Algorithmus wollen wir, wie in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels erläutert, nicht die Symmetriewerte einer Punktmenge A , sondern die Symmetriewerte der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} von A berechnen und anschließend aufgrund dieser Werte entscheiden, ob wir A eine approximative n -Symmetrie zuordnen oder nicht.

i	$s(2^i \cdot d_0)$
0	33
1	32
2	28
3	25
4	18
5	13
6	8
7	8
8	8
9	8
10	5
11	3

Abbildung 3.6: Parameterfunktion

n	$d_n(\tilde{A})$
2	6.1
3	251.1
4	8.4
5	300.9
6	251.1
7	107.9
8	7.6
$\Delta_{2,\dots,8}^8$	7.0

Abbildung 3.7: Symmetriewerte

Im Folgenden wollen wir daher analysieren, welcher Aufwand bei unserem Algorithmus zu erwarten ist:

1. Bestimmung der konvexen Hülle:

Die konvexe Hülle einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich mit dem in Kapitel 3.2 beschriebenen Quickhull-Algorithmus bestimmen. Der Aufwand dieses Algorithmus hängt davon ab, wieviele neue Facetten pro Iteration erzeugt werden und wieviele Punkte pro Iteration als Extrempunkte ausgeschlossen werden können.

In [5] wird gezeigt, dass der Aufwand $O(m \log r)$ beträgt (r ist die Anzahl der bearbeiteten Punkte), wenn die Iterationen durchschnittliche Ergebnisse liefern, das heißt die Balance-Bedingungen erfüllt sind. Schreibt man den Aufwand ausschließlich in Abhängigkeit von m , so ergibt sich ein durchschnittlicher Aufwand von

$$O(m \log m).$$

2. Anzahl der Extrempunkte:

Alle weiteren Schritte operieren auf der Menge der Extrempunkte A_K , die man als Er-

gebnis des Quickhull-Algorithmus erhält. Daher stellt sich die Frage, wie sich die Anzahl der Extrempunkte $m_K := |A_K|$ in Abhängigkeit zu $m = |A|$ verhält.

In [41] wurde dieser Zusammenhang untersucht, wenn die Punktmenge A aus Punkten besteht, die nach einer gewissen Verteilung zufällig aus den Punkten einer Ebene ausgewählt wurden. Danach gilt:

Wird der Erwartungswert der Anzahl der Extrempunkte einer Punktmenge mit m Punkten mit E_m bezeichnet, so gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_m \sim m^{\frac{1}{3}},$$

wenn die m Punkte in einem konvexen Bereich mit glattem Rand gleichverteilt sind.

Sind die Punkte hingegen normal verteilt, ergibt sich:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_m \sim \sqrt{\log m}.$$

3. Algorithmus Eckpunkte:

Im Algorithmus **Eckpunkte** werden, nachdem die Menge der Extrempunkte A_K (mit $m_K := |A_K|$) bestimmt wurde, die folgenden Schleifen durchlaufen:

Schritte 2-3:

Es gilt $NR < m_K$, da bereits nach Streichung von $m-1$ Punkten die erste Nebenbedingung von **OP2** nicht erfüllt sein kann. Damit wird Schritt 2, in dem i die Werte 1 bis $m_K - NR + 1$ durchläuft, weniger als m_K mal durchgeführt. Es ergibt sich also ein Gesamtaufwand von (höchstens):

$$O(m_K^2).$$

Schritte 4-6:

Wegen $NR < m_K$ werden die Schritte 5 und 6, in denen j jeweils Werte von 1 bis m_K durchläuft, weniger als m_K mal durchgeführt. Daher ist auch hier der Gesamtaufwand in der Ordnung:

$$O(m_K \cdot (2 \cdot m_K)) \doteq O(m_K^2).$$

Schritte 8-15:

Von Schritt 15 auf Schritt 8 wird wegen $NR < m_K$ weniger als m_K -mal gesprungen. Die Schritte 11-13 werden nur dann wiederholt, wenn mindestens ein Punkt aus den Partitionen gestrichen wird, was höchstens m_K mal passieren kann.

Wie viele Kombinationen in Schritt 14 berechnet werden müssen, hängt hingegen davon ab, wie klein die einzelnen Partitionen sind und wie viele Partitionen gebildet wurden. Die Berechnung der Charakteristischen Eckpunkte mit dem Algorithmus **Eckpunkte** ist besonders dann effektiv, wenn man die Partitionen durch die Schritte 11 bis 13 entscheidend verkleinern kann und somit in Schritt 14 nur wenige Kombinationen (bis zu einer Ordnung $O(m_K)$) berechnen muss. In diesem Fall ergibt sich für die Schritte 9 bis 15 ein Aufwand von

$$O(m_K(m_K + m_K)) \doteq O(m_K^2).$$

Sind in Schritt 14 noch zu viele Kombinationen als mögliche Lösungen zu bestimmen, so bieten sich zwei Varianten an. Einerseits kann man den Algorithmus mit $dcon_{neu} = \lambda \cdot dcon_{alt}$ ($0 < \lambda < 1$) wiederholen. Andererseits besteht die Möglichkeit, die einzelnen Charakteristischen Eckpunkte aus den jeweiligen Partitionen nacheinander so zu bestimmen, dass man immer den Punkt auswählt, der die Zielfunktion unter der Bedingung, dass

die bisher ausgewählten Punkte auf jeden Fall zu \tilde{A} gehören, minimiert. Damit würde man in $O(m_K)$ eine Menge erhalten, die die Nebenbedingungen 1 und 2 von **OP2** erfüllt und den Zielfunktionswert zumindest annähert.

Die restlichen Schritte werden nur einmal durchlaufen und sind somit für die Bestimmung des Aufwands unerheblich. Damit liegt (unter den oben beschriebenen Bedingungen für die Partitionen) der Gesamtaufwand des Algorithmus **Eckpunkte** in:

$$O(m_K^2).$$

4. Symmetriewerte:

Die Anzahl der Punkte in der Menge \tilde{A} der Charakteristischen Eckpunkte bezeichnen wir mit $\tilde{m} := |\tilde{A}|$. Repräsentiert die Menge A ein n -eckiges Objekt, erhalten wir (bei idealer Wahl von $dcon$) $\tilde{m} = n$ und das unabhängig von $m := |A|$ bzw. dem Abstand $disP$ zwischen zwei Pixeln (Vergleiche Kapitel 3.1).

Daher hängt der Aufwand zur Bestimmung der Symmetriewerte und damit auch zur Zuordnung von Symmetrien nicht mehr von m ab, sondern liegt in der Ordnung (siehe Lemma 2.19):

$$O(N\tilde{m}^3).$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Aufwand zur Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} und der Symmetriewerte von \tilde{A} unter den oben beschriebenen Bedingungen in der Ordnung

$$O(m \log m + m_K^2 + N\tilde{m}^3)$$

liegt und damit im Normalfall deutlich geringer ist, als wenn man die Symmetriewerte der ursprünglichen Punktmenge A bestimmen würde.

Auch im Vergleich zu den in der Einleitung vorgestellten Verfahren zur approximativen Symmetrieerkenntnis aus der Literatur ([3]: $O(m^6)$, [39]: $O(m^{3.5}(\log m)^4)$) lässt sich der Aufwand (je nach Verhältnis zwischen $|A|$ und $|A_K|$ bzw. $|A|$ und $|\tilde{A}|$) erheblich reduzieren.

Kapitel 4

Unvollständige Symmetrien

In realen Anwendungen kann es aus verschiedenen Gründen (wie z.B. Schatteneffekten oder Überdeckungen) dazu kommen, dass ein Teil eines Objekts, der eine Ecke beinhalten könnte, durch die darstellende Punktmenge A nicht repräsentiert wird.

Der in den bisherigen Kapiteln entwickelte Algorithmus erkennt approximative Symmetrien, indem er eine charakteristische Teilmenge der konvexen Hülle bestimmt, die die Ecken des zu untersuchenden Objekts repräsentiert. In diesem Kapitel wollen wir eine Variante des Algorithmus entwickeln, die auch dann eine mögliche Symmetrie erkennt, wenn mindestens eine der Ecken des Objekts nicht dargestellt ist.

Li, Langbein und Martin widmen sich dem Problem, unvollständige approximative Symmetrien in Punktmenge zu finden ([32]). Einer Menge A aus $n - 1$ Punkten wird dort eine approximative unvollständige n -Symmetrie zugeordnet, wenn es eine Rotation gibt, die $n - 2$ Punkte von A , zumindest approximativ, auf Punkte aus A abbildet. Diese Grundidee werden wir auch für die Definition modifizierter Symmetriewerte verwenden. Darüber hinaus werden wir analysieren, welche Eigenschaften die Menge der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge besitzt, die ein n -symmetrisches Objekt unvollständig darstellt. Außerdem beschäftigen wir uns damit, das Rotationszentrum einer zum Teil verdeckten n -symmetrischen Punktmenge zu bestimmen. Wir werden zeigen, dass der Schwerpunkt der Charakteristischen Eckpunkte, den wir ja zur Erkennung vollständiger Symmetrien als Rotationszentrum benutzen, in diesem Zusammenhang nicht geeignet ist.

Zabrodsky et al. stellen ein Verfahren zur Bestimmung des Rotationszentrums von unvollständig dargestellten Objekten vor ([54]). Dabei wird das Rotationszentrum in einem iterativen Verfahren ermittelt. Im Iterationsschritt werden bestimmte Punkte in der Nachbarschaft von M_i als potentielle M_{i+1} ausgewählt und für alle diese potentiellen Rotationszentren die Symmetriewerte der unvollständigen Punktmenge bestimmt. Als neues Rotationszentrum M_{i+1} für den nächsten Iterationsschritt fungiert der Punkt, für den der Symmetriewert minimal ist.

In diesem Kapitel werden wir ein Lemma über das Rotationszentrum einer unvollständigen n -symmetrischen Punktmenge beweisen und daraus einen Algorithmus ableiten. Mit diesem Algorithmus kann man das Rotationszentrum aus den Charakteristischen Eckpunkten der unvollständigen Punktmenge in maximal drei Schritten (und damit mit einem wesentlich geringeren Aufwand als in [54]) bestimmen.

Im Folgenden nutzen wir die Tatsache, dass sich jede n -symmetrische Punktmenge

$A \subset \mathbb{R}^2$ (mit $SP(A) \notin A$) in Partitionen zerlegen lässt, sodass die Punkte jeder Partition ein reguläres n -Eck darstellen. Wir untersuchen daher unvollständig dargestellte Objekte, die die Form eines regulären n -Ecks besitzen.

4.1 Charakteristische Eckpunkte eines unvollständigen n -Ecks

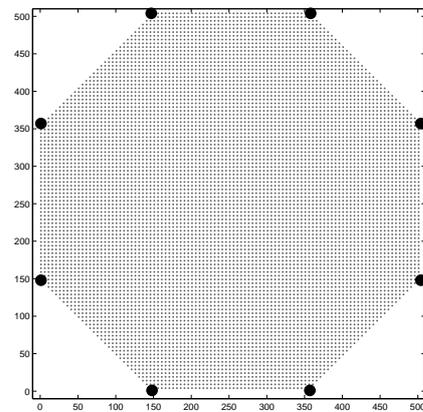
Wird ein Objekt mit der Form eines regulären n -Ecks unvollständig dargestellt, hängt die Anzahl der Charakteristischen Eckpunkte der darstellenden Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ davon ab, welcher Teil des Objekts nicht dargestellt wurde. Wir unterscheiden dabei die folgenden Fälle, bei denen jeweils eine Teilmenge von A durch eine konvexe Fläche verdeckt ist und daher nicht zur darstellenden Punktmenge gehört. Die verschiedenen Fälle werden in Abbildung 4.2 visualisiert.

1. Ein Teil innerhalb des Objekts wird nicht dargestellt.
Da die Menge der Charakteristischen Eckpunkte eine Teilmenge der Extrempunkte von A ist, wird sie durch so eine Verdeckung nicht beeinflusst.
2. Ein Teil des Rands der konvexen Hülle, der keinen Charakteristischen Eckpunkt enthält, wird nicht dargestellt.
In diesem Fall ändert sich zwar unter Umständen die Menge der Extrempunkte (siehe Definition 3.4), allerdings findet der **Eckpunkte** Algorithmus aus Kapitel 3 auch hier die Charakteristischen Eckpunkte, die den Ecken des Objekts entsprechen.
3. Ein Teil der konvexen Hülle, der einen Charakteristischen Eckpunkt enthält, wird nicht dargestellt.
Man erhält in diesem Fall $n + 1$ Charakteristische Eckpunkte, wobei zwei neue Charakteristische Eckpunkte den nicht dargestellten ersetzen.
4. Ein Teil der konvexen Hülle, der mehr als einen Charakteristischen Eckpunkt enthält, wird nicht dargestellt.
Die dargestellten Charakteristischen Eckpunkte werden auch bei der unvollständigen Punktmenge mit Hilfe des **Eckpunkte** Algorithmus erkannt. Anstelle der nicht dargestellten Eckpunkte werden zwei neue gefunden.

In den Fällen 1 und 2, wird die (approximative) n -Symmetrie des Objekts mit Hilfe unseres Algorithmus, also trotz der unvollständigen Darstellung, gefunden. In den Fällen 3 und 4 wird die Punktmenge \tilde{A} durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ allerdings nicht mehr (approximativ) auf sich selbst abgebildet. Dreht man \tilde{A} um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um den Mittelpunkt des Objekts werden immerhin $|\tilde{A}| - 3$ Punkte (approximativ) auf andere Punkte aus \tilde{A} abgebildet. Wir werden später einen Symmetriewert definieren, der diese Eigenschaft hervorhebt. Zunächst wollen wir analysieren, wie man den Mittelpunkt M des zum Teil verdeckten Objekts bestimmen kann.

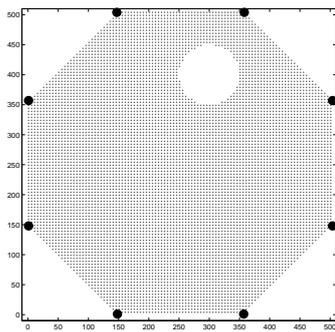


(a) Originalbild

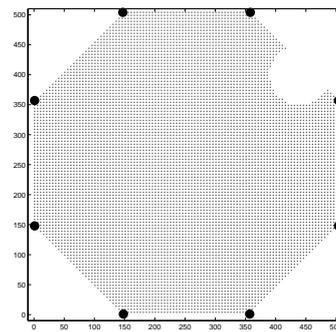


(b) Vollständige Darstellung A mit \tilde{A}

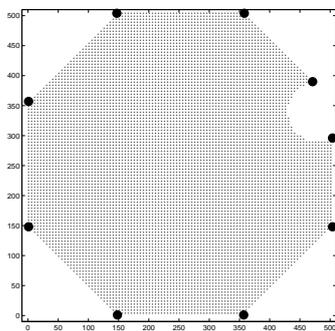
Abbildung 4.1: Achteckiger Teppich



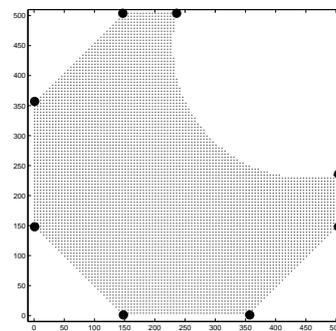
(a) Verdeckung innerhalb



(b) Verdeckung am Rand



(c) Verdeckung an einer Ecke



(d) Verdeckung an mehreren Ecken

Abbildung 4.2: Unvollständige Darstellung

4.2 Rotationszentrum eines unvollständigen regulären n -Ecks

In Kapitel 2 haben wir erläutert, warum es für unseren Algorithmus zur Erkennung vollständiger Symmetrien sinnvoll ist, für das Zentrum der Rotation $M = SP(\tilde{A})$ zu wählen. Diese Vorgehensweise ist nicht geeignet, wenn man nach unvollständigen Symmetrien sucht.

Wie oben bereits angedeutet, wird eine unvollständige Symmetrie daran erkannt, dass durch die Rotation zumindest eine Teilmenge der Charakteristischen Eckpunkte auf eine andere Teilmenge der Charakteristischen Eckpunkte (approximativ) abgebildet wird. Das gilt bei einem unvollständig dargestellten regulären n -Eck nur, wenn man als Rotationszentrum den Schwerpunkt des vollständigen n -Ecks und nicht des unvollständigen n -Ecks verwendet. Wir wollen das anhand des folgenden Beispiels illustrieren:

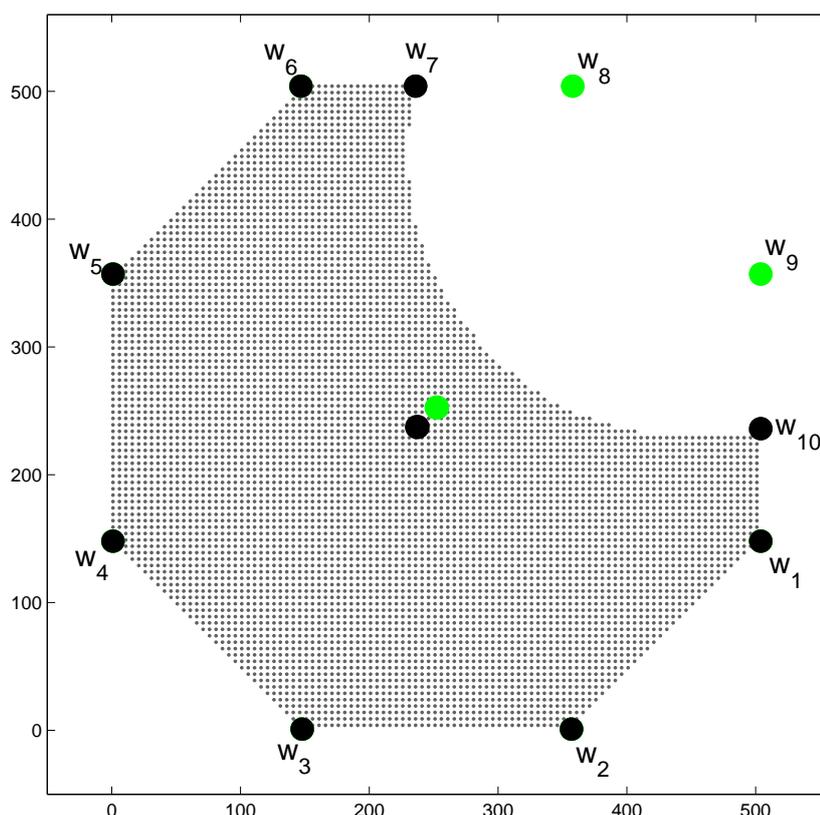


Abbildung 4.3: Achteck B mit Eckpunkten $\tilde{B} = \{w_1, \dots, w_6, w_8, w_9\}$ und $SP(\tilde{B})$, unvollständig dargestellt durch A mit $\tilde{A} = \{w_1, \dots, w_7, w_{10}\}$ und $SP(\tilde{A})$

Wie in Fall 4 (siehe Abbildung 4.2 (d)) unterscheidet sich die Menge der Charak-

teristischen Eckpunkte \tilde{A} des unvollständig dargestellten Achtecks A von der Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{B} des vollständig dargestellten Achtecks B insofern, als dass zwei Punkte $\{w_8, w_9\}$ nicht mehr dabei sind, während zwei neue Punkte $\{w_7, w_{10}\}$ hinzugekommen sind. In Abbildung 4.3 erkennt man, dass sich die beiden Schwerpunkte $SP(\tilde{A})$ und $SP(\tilde{B})$ deutlich unterscheiden. Fünf Punkte von \tilde{A} werden durch eine Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{8}$ nur dann (approximativ) auf fünf andere Punkte aus \tilde{A} abgebildet, wenn man $SP(\tilde{B})$ als Rotationszentrum nehmen würde, was allerdings bei unvollständiger Darstellung nicht gegeben ist. Wie man $SP(\tilde{B})$ aus der gegebenen Punktmenge \tilde{A} bestimmen kann, leiten wir aus dem folgenden Lemma ab:

Lemma 4.1. *Ein reguläres n -Eck wird wie in einem der oben beschriebenen Fälle unvollständig dargestellt. Die Menge der Ecken des regulären n -Ecks sei \tilde{B} . Die Menge der Charakteristischen Eckpunkte der unvollständigen Darstellung wird mit \tilde{A} bezeichnet. Gilt für eine mindestens $\frac{n+2}{2}$ -elementige Teilmenge \tilde{B}' von \tilde{B} : $\tilde{B}' \subseteq \tilde{A}$, dann folgt:*

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{A}} |x - w| = SP(\tilde{B}).$$

Beweis:

Die Menge \tilde{B} der Ecken eines regulären n -Ecks liegt auf einem Kreis mit dem Radius

$$r := \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{B}} |x - w|$$

um den Schwerpunkt des n -Ecks, welcher dem Schwerpunkt der Ecken $SP(\tilde{B})$ entspricht. Es gilt also:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{B}} |x - w| = SP(\tilde{B}).$$

Für alle Punkte $v_i \in \tilde{A} \setminus \tilde{B}$ gilt:

$$|SP(\tilde{B}) - v_i| < r,$$

da sie auch Punkte, aber keine Eckpunkte, des regulären n -Ecks sind und daher innerhalb des oben beschriebenen Kreises liegen.

Daraus folgt:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{B}} |x - w| \geq \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{A}} |x - w|.$$

Da trotz der unvollständigen Darstellung noch mindestens $\frac{n+2}{2}$ Eckpunkte des regulären n -Ecks, also mindestens einer mehr als die Hälfte, in \tilde{A} sind, existieren in jedem Fall mindestens drei (nicht kollineare) Punkte in \tilde{A} , so dass $SP(\tilde{B})$ der Mittelpunkt des Umkreises dieser (mindestens) drei Punkte ist.

Daher muss auch

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{B}} |x - w| \leq \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{A}} |x - w|$$

gelten. Und da der Mittelpunkt des Umkreises von drei Punkten eindeutig ist, gilt schließlich:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{A}} |x - w| = SP(\tilde{B}).$$

□

Daher ist es sinnvoll, bei der Suche nach unvollständigen Symmetrien das Rotationszentrum M als Lösung des folgenden Optimierungsproblems zu bestimmen:

OP 3

$$M = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{w \in \tilde{A}} |x - w|.$$

M ist also der Punkt, der von den Punkten aus \tilde{A} den geringsten Maximalabstand hat.

Anmerkung:

Auch wenn durch Ungenauigkeiten in der Darstellung, die Punkte aus \tilde{B}' nur approximativ in \tilde{A} liegen, kann man davon ausgehen, dass man durch das Lösen von **OP3** eine gute Annäherung für das ideale Rotationszentrum erhält, wenn höchstens $n - \frac{n+2}{2} = \frac{n-2}{2}$ Ecken eines regulären n -Ecks nicht dargestellt werden.

Das Optimierungsproblem **OP3** lässt sich mit dem folgenden Algorithmus lösen:

Algorithmus: Rotationszentrum

Eingabe: $\tilde{A} = \{w_1, \dots, w_m\} \subset \mathbb{R}^2$.

Ausgabe: $M \in \mathbb{R}^2$ (Lösung von OP3)

1. $M_1 := SP(\tilde{A})$.
2. FÜR $i = 1 : m$:
 $d_i := |w_i - M_1|$.
 $i^* := \arg \max_i d_i$.
3. $v_1 := w_{i^*} - M_1$.
 $g := M_1 + \lambda \vec{v}_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
4. FÜR $i = 1 : m$ ($i \neq i^*$):
 $g_i :=$ Mittelsenkrechte der Strecke zwischen w_i und w_{i^*} .
5. FÜR $i = 1 : m$ ($i \neq i^*$):
 $p_i := g_i \cap g$.
6. $j := \arg \min_{i | p_i \in [M_1 w_{i^*}]} |M_1 - p_i|$.
 $M_2 := p_j$
7. $S := \frac{w_{i^*} + w_j}{2}$.
 $v_2 := S - p_j$.
8. $h := p_j + \mu \vec{v}_2$ ($\mu \in \mathbb{R}$).
 FÜR $i = 1 : m$ ($i \neq i^*, j$):
 $q_i := g_i \cap h$.

9. WENN $\exists q_i \mid q_i \in [M_2, S]$:
 AUSGABE: $M = S$.

10. $k := \arg \min_{i \mid q_i \in [M_2, S]} |q_i - p_j|$.
 AUSGABE: $M := q_k$.

Lemma 4.2. *Der Algorithmus Rotationszentrum löst das Optimierungsproblem OP3 für eine beliebige Punktmenge $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$.*

Beweis:

Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten der Strecke zwischen zwei Punkten w_1 und w_2 sind von w_1 und w_2 gleich weit entfernt. Für das in Schritt 6 berechnete M_2 gilt also:

$$|M_2 - w_{i^*}| = |M_2 - w_j| = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |M_2 - w_i|.$$

Endet der Algorithmus nach Schritt 9, ist M der Mittelpunkt zwischen w_j und w_{i^*} und es folgt:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i \in \{i^*, j\}} |x - w_i| = M.$$

Da außerdem kein Punkt q_i auf der Strecke zwischen M_2 und S liegt, gilt:

$$\max_{i \in \{1, \dots, m\}} |M - w_i| = |M - w_j| = |M - w_{i^*}|.$$

Damit löst M OP3.

Endet der Algorithmus nach Schritt 10, ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\triangle_{w_k, w_j, w_{i^*}}$, was bedeutet:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i \in \{i^*, j, k\}} |x - w_i| = M.$$

Alle anderen w_i liegen innerhalb dieses Umkreises. Also löst auch hier der Algorithmus das Optimierungsproblem.

□

Wird das Rotationszentrum als Lösung von OP3 für die Eingabepunktmenge A bestimmt, so wird es in Zukunft mit $M_{OP3}(A)$ bezeichnet.

4.3 Symmetriewert zur Erkennung unvollständiger Symmetrien

Wie oben bereits angedeutet, muss man zur Erkennung von unvollständigen Symmetrien eine modifizierte Definition für den Symmetriewert einführen. Untersucht man unvollständig dargestellte reguläre n -Ecke, wie zum Beispiel das Achteck aus Abbildung 4.2 (c) und

Fall	a	b	c	d
n	$d_n(\tilde{A})$	$d_n(\tilde{A})$	$d_n(\tilde{A})$	$d_n(\tilde{A})$
2	5.9	5.9	613.1	486.4
3	569.0	569.0	646.2	765.3
4	5.3	5.3	397.5	486.6
5	681.9	681.9	646.1	823.5
6	569.0	569.0	813.1	889.3
7	244.4	244.4	476.7	647.9
8	8.6	8.6	215.0	467.2
9	190.1	190.1	286.6	556.0
10	342.0	342.0	356.3	631.1
$\Delta_{2,\dots,10}^8$	4.5	4.5	75.0	84.0

 Abbildung 4.4: Werte für d

(d), mit Hilfe der in Kapitel 2 eingeführten Symmetriewerte, so kann man keine eindeutigen Ergebnisse erwarten, da ja drei der Charakteristischen Eckpunkte durch die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{8}$ nicht auf andere Charakteristische Eckpunkte abgebildet werden.

Die Symmetriewerte für die Beispiele aus Abbildung 4.2 sind in der Tabelle 4.4 aufgelistet. Das Rotationszentrum M wurde dabei als Lösung von **OP3** bestimmt. Es lässt sich erkennen, dass in den Fällen (a) und (b) eine 8-Symmetrie trotz der unvollständigen Darstellung zugeordnet wird. In den Fällen (c) und (d) sind zwar die Symmetriewerte für $n = 8$ am kleinsten, allerdings sind die Unterschiede zu den anderen Symmetriewerten so gering, dass unser Algorithmus keine Symmetrie zuordnet.

Das unterstreicht, dass wir zur Erkennung einer unvollständigen Symmetrie einen modifizierten Symmetriewert benötigen.

Definition 4.3. $\tilde{A} := \{w_1, \dots, w_m\}$ sei eine im Uhrzeigersinn nummerierte Menge Charakteristischer Eckpunkte und $\tilde{B}_n := \{v_1, \dots, v_m\}$ sei die Punktmenge, die aus \tilde{A} durch Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um $M_{OP3}(\tilde{A})$ hervorgeht. Der Teilmengen-Symmetriewert $Td_n(\tilde{A})$ von \tilde{A} bezüglich einer (unvollständigen) n -Symmetrie ist folgendermaßen definiert:

$$Td_n(\tilde{A}) = \min_{C \in \mathfrak{A}} \min_{D \in \mathfrak{B}_n} d(C, D).$$

Dabei gilt: $\mathfrak{A} := \{C^1, \dots, C^m\}$ mit

$$C^i := \{w_{i+3}, \dots, w_m\} \cup \{w_{\max(1, i+3-m)}, \dots, w_{i-1}\}$$

bzw. $\mathfrak{B}_n := \{D^1, \dots, D^m\}$ mit

$$D^i := \{v_{i+3}, \dots, v_m\} \cup \{v_{\max(1, i+3-m)}, \dots, v_{i-1}\}.$$

Anmerkungen:

$d(C, D)$ ist dabei der Abstand zwischen den Punkt Mengen $C \subset \mathbb{R}^2$ und $D \subset \mathbb{R}^2$ nach der

MPM-Methode aus Kapitel 2.

Da wir davon ausgehen, dass der verdeckte Teil des Objekts eine konvexe Punktmenge ist, und die Punkte in \tilde{A} als Lösung von **OP2** im Uhrzeigersinn nummeriert sind, sind die $m - 3$ Punkte von \tilde{A} , die durch die Drehung auf andere $m - 3$ Punkte aus \tilde{A} abgebildet werden, aufeinanderfolgend. Daher genügt es uns die m Punktmenge in \mathfrak{A} an Stelle aller $m - 3$ elementigen Teilmengen von \tilde{A} zu betrachten.

In Abbildung 4.5 sind die Teilmengen-Symmetriewerte für die Charakteristischen Eckpunkte der Punktmenge aus Abbildung 4.2 (Fälle c und d) für die zwei verschiedenen Rotationszentren $M_1 := SP(\tilde{A})$ und $M_2 := M_{OP3}(\tilde{A})$ aufgelistet.

Die Eindeutigkeitswerte und der Schwellenwert für die Zuordnung einer Symmetrie gelten analog zur Suche nach vollständigen (approximativen) Symmetrien (siehe Definitionen 2.14 und 2.15).

Fall	c	c	d	d
n	$Td_n^{M_1}(\tilde{A})$	$Td_n^{M_2}(\tilde{A})$	$Td_n^{M_1}(\tilde{A})$	$Td_n^{M_2}(\tilde{A})$
2	402.5	257.8	318.6	243.6
3	429.9	333.2	400.0	321.8
4	220.2	48.6	246.1	122.3
5	406.4	392.0	455.0	382.8
6	400.9	425.7	315.6	357.0
7	172.0	182.3	128.7	154.3
8	97.7	6.6	82.9	4.0
9	183.7	143.6	164.7	117.3
10	246.3	227.5	250.2	212.2
$\Delta_{2,\dots,10}^8$	56.8	4.6	64.4	3.4

Abbildung 4.5: Werte für Td

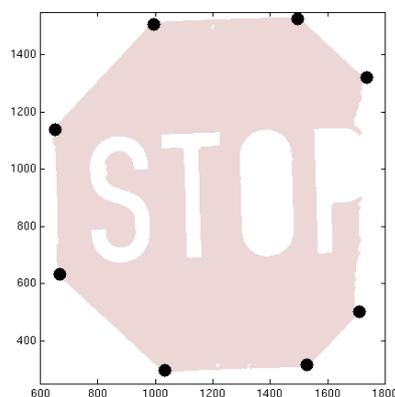
In der Tabelle in Abbildung 4.5 erkennt man, dass die unvollständige 8-Symmetrie in den Fällen (c) und (d) aus Abbildung 4.2 der Punktmenge \tilde{A} zugeordnet wird, wenn man $M_{OP3}(\tilde{A})$ als Rotationszentrum verwendet.

In der Praxis gibt es etliche Anwendungsszenarien, in denen es wichtig ist, unvollständig dargestellte Objekte, die durch ihre Symmetrie charakterisiert werden können, zu erkennen. Im folgenden Beispiel (siehe Abbildung 4.6) ist ein Stopp-Schild teilweise von einem Baum verdeckt.

Die Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} wurde mit Hilfe des Algorithmus **Eckpunkte** bestimmt. Da ein Teil des Schildes nicht dargestellt wurde, bilden die Punkte in \tilde{A} kein reguläres Achteck. Wir untersuchen die Symmetriewerte und die Teilmengen-Symmetriewerte von \tilde{A} (Rotationszentrum: $M_{OP3}(\tilde{A})$).



(a) Originalbild



(b) Darstellende Punktmenge A mit \tilde{A}

Abbildung 4.6: Teilweise verdecktes Stopp-Schild

n	$d_n(\tilde{A})$	$Td_n(\tilde{A})$
2	869.4	444.7
3	1546.7	654.6
4	915.3	247.4
5	1723.7	862.9
6	1840.7	842.9
7	1263.5	358.9
8	877.5	45.5
9	1066.7	292.0
10	1247.0	513.2
$\Delta_{2,\dots,10}^8$	82.3	15.6

Abbildung 4.7: Vergleich d_n und Td_n

Die Tabelle in Abbildung 4.7 zeigt, dass die unvollständige 8-Symmetrie mit Hilfe der Teilmengen-Symmetriewerte zu erkennen ist. Im Gegensatz dazu lassen die in Definition 2.2 eingeführten Symmetriewerte, wie erwartet, keine Zuordnung einer Symmetrie zu.

Kapitel 5

Punktmenge im \mathbb{R}^3

In diesem Kapitel werden wir analysieren, wie sich die für den 2-dimensionalen Fall eingeführten Methoden auf den 3-dimensionalen Fall erweitern lassen. In Kapitel 7 werden wir dann zeigen, dass sich eine leicht modifizierte Variante dieses Algorithmus auch zur Symmetriekennung in Punktmenge in Eulidischen Räumen beliebiger Dimension anwenden lässt.

Vergleicht man verschiedene Algorithmen aus der Literatur, die approximative Symmetrien in Punktmenge im \mathbb{R}^3 erkennen, so lassen sich diese in zwei verschiedene Gruppen einteilen.

Es existieren Algorithmen, die ohne Bestimmung einer möglichen Rotationsachse auskommen. Diese ordnen einer Punktmenge genau dann eine approximative Symmetrie zu, wenn es eine entsprechende Permutation der Punktmenge gibt, unter der die Abstände zwischen den Punkten bis zu einer gewissen Fehlertoleranz konstant bleiben (z.B. [33], [39]).

Alternativ lässt sich eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ auf approximative n -Symmetrien untersuchen, indem man mögliche Rotationsachsen von A bestimmt (z.B. [45]). Anders als im 2-dimensionalen Fall, wo man das Rotationszentrum als Schwerpunkt von A erhält, ist die Bestimmung der Rotationsachse einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ nicht trivial.

5.1 Darstellung

Ein 3-dimensionales Objekt lässt sich in der Regel im \mathbb{R}^2 nicht detailliert darstellen. Es ist daher anders als bei 2-dimensionalen Objekten nicht möglich, die Form mit der Hilfe von nur einem Foto zu ermitteln.

Allerdings gibt es verschiedene Möglichkeiten ein Objekt durch eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ zu repräsentieren. Es existieren diverse Veröffentlichungen, die sich dem Problem der 3-dimensionalen Darstellung von Objekten widmen (Übersicht in [47]).

Es werden *Ohne-Kontakt*-Methoden und *Tast*-Methoden unterschieden.

Bei den *Ohne-Kontakt*-Methoden werden die nötigen Informationen aufgrund von optischen, akustischen oder magnetischen Merkmalen gewonnen (z.B. [36]). *Tast*-Methoden beruhen auf dem Prinzip, dass die Oberfläche des Objekts mit Hilfe eines Roboterarms abgetastet wird. Diese Methoden sind zwar am wenigsten fehlerbehaftet, allerdings sind sie mit großem Aufwand verbunden und nicht in jedem Fall anwendbar. Die am häufigs-

ten gebrauchte *Tast-Methode* ist die Benutzung von sogenannten *Coordinate Measuring Machines* (CMM). Diese Maschinen sind so programmiert, dass sie Wegen entlang der Oberfläche folgen und diese so vermessen (z.B. [8]).

Um die Vorgehensweise der Symmetriesuche zu illustrieren, werden wir mit der folgenden Methode eine Punktmenge erzeugen, die ein bestimmtes Objekt repräsentiert.

Zunächst definieren wir ein 3-dimensionales Koordinatensystem in dem das zu untersuchende Objekt liegt. Die Längeneinheit des Koordinatensystems bestimmt über Genauigkeit und Aufwand. Anschließend wird eine Begrenzungsmatrix $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ bestimmt, sodass die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) aller Punkte des Objekts die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\Omega_{i1} < x_i < \Omega_{i2} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Außerdem bestimmen wir für Ω Taststrecken.

Definition 5.1. *In einem Koordinatensystem mit der Begrenzungsmatrix Ω sind die Taststrecken s_{11}, \dots, s_{lk} wie folgt definiert:*

$$s_{ij} := \begin{pmatrix} i \\ j \\ \Omega_{31} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{32} - \Omega_{31} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in [0, 1]),$$

$$\forall i, j \mid i, j \in \mathbb{Z} \wedge (\Omega_{11} \leq i \leq \Omega_{12}) \wedge (\Omega_{21} \leq j \leq \Omega_{22}).$$

Die das Objekt darstellende Punktmenge A ist dann die Menge der Schnittpunkte der Taststrecken s_{11}, \dots, s_{lk} mit der Oberfläche des Objekts. Diese Darstellung entspricht einer Methode, bei der die Oberfläche von den Ebenen $E_1 : x_3 = \Omega_{31}$ und $E_2 : x_3 = \Omega_{32}$ aus mit auf die Ebenen senkrecht stehenden Sensoren abgetastet wird.

Wir wollen diese Vorgehensweise anhand eines Beispiels illustrieren. In Abbildung 5.1 sieht man ein 5-symmetrisches Objekt in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem. Die Oberfläche des Objekts wird mit der oben beschriebenen Methode abgetastet und so die in Abbildung 5.2 dargestellte Punktmenge bestimmt, die das Objekt repräsentiert.

5.2 Konvexe Hülle

Auch für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir die Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$ als eine Teilmenge der Extrempunkte $A_K \subseteq A$ (siehe Definition 3.4) bestimmen.

Dazu muss die konvexe Hülle von A berechnet werden. Analog zur Bestimmung der konvexen Hülle im 2-Dimensionalen, benutzen wir dazu den Quickhull-Algorithmus [5], der auch für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ mit $|A| = m$ die Komplexität $O(m \log m)$ besitzt.

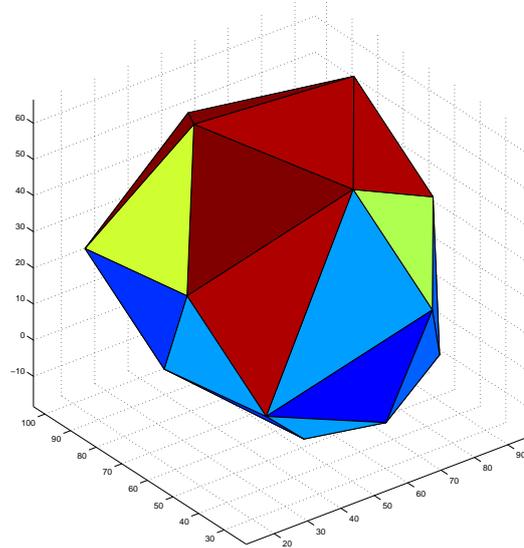


Abbildung 5.1: 5-Symmetrisches Objekt

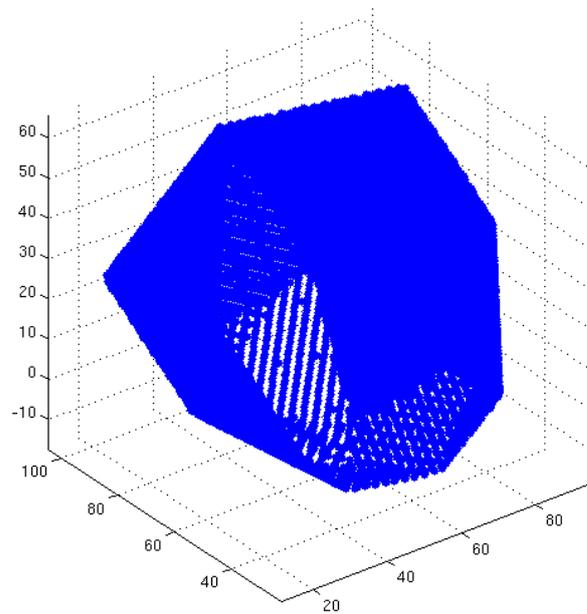


Abbildung 5.2: Darstellung

Die Grundidee des Quickhull-Algorithmus im 3-Dimensionalen entspricht dem 2-dimensionalen Fall (siehe Kapitel 3.2). Die Punkte werden hier allerdings nicht danach partitioniert, ob sie links oder rechts einer Geraden, sondern ob sie innerhalb oder außerhalb eines Polyeders liegen.

Wir wollen die Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ anhand eines Beispiels (Abbildung 5.3(a)) illustrieren.

Als Startpolyeder fungiert ein Tetraeder (Abbildung 5.3(b)), dessen Eckpunkte auf jeden Fall Extrempunkte sind. Solche Punkte sind zum Beispiel diejenigen mit dem größten oder kleinsten x_1 -, x_2 -, oder x_3 -Wert.

Anschließend werden für den Punkt p_i , der außerhalb des Tetraeders liegt und vom Tetraeder am weitesten entfernt ist, alle Facetten (Dreiecksflächen) des Tetraeders bestimmt, die von p_i sichtbar sind. Sichtbar von p_i ist eine Facette genau dann, wenn für alle drei Eckpunkte p_{j_l} ($l \in \{1, 2, 3\}$) der Facette gilt, dass die Strecke $[p_i p_{j_l}]$ den Tetraeder nicht schneidet.

Aus den Begrenzungsstrecken zwischen sichtbaren und nicht sichtbaren Facetten und dem Punkt p_i werden nun neue Facetten für den Polyeder gebildet und dafür die alten sichtbaren Facetten gestrichen (Abbildung 5.4(a)).

Auf diese Weise wird rekursiv weiter verfahren, bis keine Punkte mehr außerhalb des Polyeders liegen (Abbildung 5.4(b)). Die Menge der Extrempunkte besteht dann aus allen Eckpunkten der Facetten des Polyeders.

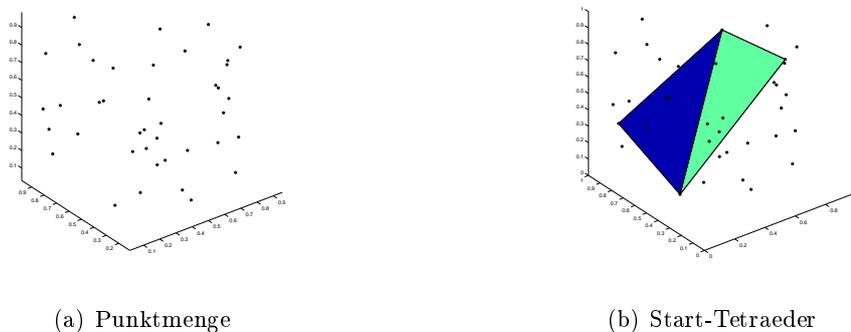


Abbildung 5.3: 3D Quickhull-Algorithmus Teil 1

Der erste Schritt der Untersuchung einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ auf Symmetrien besteht also darin, die konvexe Hülle von A (bzw. die Extrempunkte A_K) zu bestimmen. Ist A die Darstellung eines Objekts, kann man aufgrund von Ungenauigkeiten im Allgemeinen nicht davon ausgehen, dass A_K die Menge der realen Ecken des Objekts abbildet. Bestimmt man z.B. die konvexe Hülle der Punktmenge A (Abbildung 5.2), die das 5-symmetrische Objekt aus Abbildung 5.1 darstellt, so erhält man die Menge der Extrempunkte A_K mit $|A_K| = 197$ (Abbildung 5.5). Im Vergleich dazu besitzt das reale Objekt lediglich 16 Ecken.

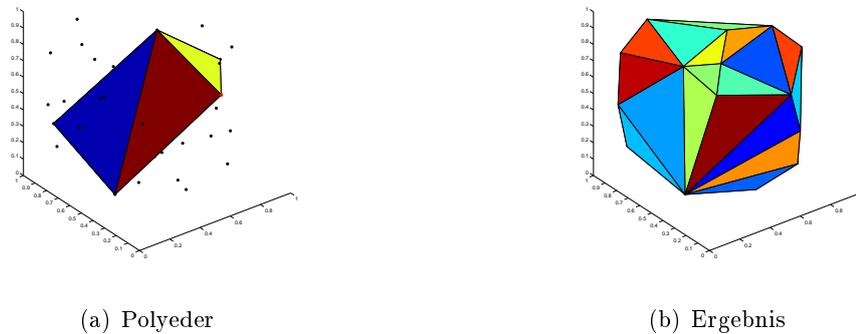


Abbildung 5.4: 3D Quickhull-Algorithmus Teil 2

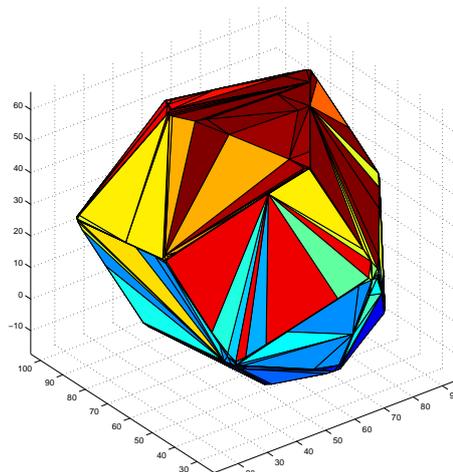


Abbildung 5.5: Konvexe Hülle des 5-symmetrischen Objekts

Definition 5.2. Die mit dem Quickhull-Algorithmus bestimmte konvexe Hülle einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ besteht aus der Menge der Extrempunkte $A_K = \{w_1, \dots, w_m\}$ ($A_K \subseteq A$) und der Menge der Facettentripel $A_F = \{(n_1 n_2 n_3), (n_4 n_5 n_6), \dots\}$ mit $n_i \in \mathbb{N} \wedge n_i \leq m$. Dabei setzt sich der Rand der konvexen Hülle aus den Dreiecken $(w_i w_j w_k)$, für alle Tripel $(ijk) \in A_F$, zusammen.

Anmerkung:

Der Rand der konvexen Hülle wird also ausnahmslos als eine Menge von Dreiecksflächen

dargestellt. Besteht ein Teil der Oberfläche der konvexen Hülle aus einem n -Eck (mit $n \in \mathbb{N} \wedge n > 3$) (z.B. bei einem Würfel mit $n = 4$), so lässt sich diese Seite auch durch $n - 2$ Dreiecke darstellen.

5.3 Charakteristische Eckpunkte

Das Ziel ist es, eine Teilmenge \tilde{A} aus der Menge der Extrempunkte $A_K \subseteq A \subset \mathbb{R}^3$ zu bestimmen, so dass \tilde{A} der Menge der Ecken des durch A dargestellten Objekts entspricht.

Im 2-Dimensionalen haben wir dazu in Definition 3.7 die sogenannten ϵ -Bedingungen formuliert und mit Hilfe des Optimierungsproblems **OP2** in Definition 3.9 die Menge der Charakteristischen Eckpunkte eingeführt. Grundsätzlich ist das Optimierungsproblem **OP2** so formuliert, dass man es auch auf Punktmengen im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 2$) anwenden kann. Allerdings beruht der Lösungsalgorithmus **Eckpunkte** auf dem Sortieren der Extrempunkte im Uhrzeigersinn um den Schwerpunkt und solch eine Sortierung lässt sich nur im 2-Dimensionalen vollführen.

Daher wollen wir in diesem Kapitel die Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ in einer leicht verallgemeinerten Form definieren. Dabei muss diese Teilmenge, wie im 2-dimensionalen Fall, die ϵ -Bedingungen für ein bestimmtes $dcon \in \mathbb{R}^+$ ($\epsilon = dcon$) erfüllen. Für Punktmengen im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) werden wir diese Definition (siehe Definition 7.1) übernehmen.

Definition 5.3. Eine Teilmenge \tilde{A} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir als Menge der Charakteristischen ($dcon$ -)Eckpunkte (bzw. als Charakteristische ($dcon$ -)Eckpunkte) von A , wenn $\tilde{A} := \{a_1, \dots, a_m\}$ für eine positive Konstante $dcon \in \mathbb{R}^+$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.

$$\tilde{A} \subseteq A_K.$$

2.

$$d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq dcon \quad \forall w \in (A_K \setminus \tilde{A}).$$

3.

$$\max_{w \in (A_K \setminus (\tilde{A} \setminus a_i))} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) > dcon \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Damit gilt das folgende Lemma:

Lemma 5.4. Für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ und $\epsilon = dcon$ erfüllt die Menge der Charakteristischen ($dcon$ -)Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$ die ϵ -Bedingungen aus Definition 3.7.

Beweis:

Aus Definition 5.3 (Bed.2) folgt:

$$\max_{b \in A_{kon}} \min_{a \in \tilde{A}_{kon}} |a - b| \leq dcon.$$

Wegen $\tilde{A} \subseteq A$ gilt außerdem:

$$\max_{a \in \tilde{A}_{kon}} \min_{b \in A_{kon}} |a - b| = 0 < d_{con}.$$

Damit ist die erste ϵ -Bedingung erfüllt.

Die zweite ϵ -Bedingung folgt aus Definition 5.3 (Bed.3).

□

Um einen Algorithmus zur Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ zu formulieren, führen wir im folgenden Abschnitt den Begriff des Streichabstands ein.

5.3.1 Streichabstand

Für jeden Punkt aus A_K wird ein Streichabstand wie folgt definiert:

Definition 5.5. Ist $A_K = \{w_1, \dots, w_m\}$ die Menge der Extrempunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$, so ist der Streichabstand d_i von w_i ($1 \leq i \leq m$) folgendermaßen definiert:

$$d_i := \min_{a \in (A_K \setminus w_i)_{kon}} |w_i - a|.$$

Den Streichabstand eines Punktes im \mathbb{R}^3 kann man mit Hilfe der folgenden Definition und des folgenden Lemmas bestimmen.

Definition 5.6. Für einen Extrempunkt w_i bezeichnet die Menge $N^i \subset A_K$:

$$N^i := \{w_j \in A_K \mid i \neq j \wedge \exists (A_F)_k \in A_F \text{ mit: } i, j \in (A_F)_k\}$$

die Menge der Nachbarextrempunkte.

Lemma 5.7. $A_K = \{w_1, \dots, w_m\}$ sei die Menge der Extrempunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$. Für jeden beliebigen Extrempunkt w_i gilt:

N^i sei die Menge der Nachbarextrempunkte von w_i und N_F^i die Menge der Facettentripel der konvexen Hülle von N^i . Dann gilt für den Streichabstand d_i von w_i :

$$d_i := \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} \mid (j,k,l) \in N_F^i} |w_i - a|.$$

Dabei bezeichnet $\Delta_{w_j w_k w_l}$ die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten w_j, w_k, w_l .

Beweis:

Wir bezeichnen mit A_F^i alle Facettentripel der konvexen Hülle von $(A_K \setminus w_i)$ (Abbildung 5.6(b)) und mit $B_F^i \subset A_F$ alle Facettentripel der konvexen Hülle von A , in denen i nicht enthalten ist (Abbildung 5.7(a)). N_F^i ist die Menge der Facettentripel der konvexen Hülle

von N^i (Abbildung 5.7(b)).

Als Erstes wird gezeigt, dass (bei einheitlicher Indizierung) gilt:

$$A_F^i \subseteq (B_F^i \cup N_F^i).$$

Die Tripel von B_F^i sind alle auch in A_F^i , da sich an diesen Oberflächen-Dreiecken durch das Streichen des Punktes w_i nichts verändert. Die Tripel, die in A_F^i sind (Abbildung 5.6(a)), aber nicht in B_F^i , können auch nicht in A_F^i sein, da ja der Eckpunkt w_i gestrichen wurde. Die Tripel $A_F^i \setminus B_F^i$ enthalten ausschließlich Indizes der Nachbarextremalpunkte von w_i und sind daher eine Teilmenge von N_F^i .

Daraus folgt:

$$A_F^i \subseteq (B_F^i \cup N_F^i).$$

Wenn nicht alle Nachbarextremalpunkte in einer Ebene liegen, existieren Dreiecksflächen auf dem Rand der konvexen Hülle von N^i , die innerhalb der konvexen Hülle von $(A_K \setminus w_i)$ liegen und damit sind im Allgemeinen die Mengen A_F^i und $B_F^i \cup N_F^i$ nicht identisch.

Aufgrund der Struktur der konvexen Hülle schneidet jede Strecke von einem Punkt p ($p \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in B_F^i \setminus N_F^i$) zu w_i den Rand der konvexen Hülle von $(A_K \setminus w_i)$ in einem Punkt q ($q \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i$). Damit gilt:

$$\min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in B_F^i \setminus N_F^i} |w_i - a| > \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i} |w_i - a|.$$

Alle Strecken von einem Punkt p' ($p' \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i \setminus A_F^i$) schneiden den Rand der konvexen Hülle von $(A_K \setminus w_i)$ in einem Punkt q ($q \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i \cap A_F^i$). Damit gilt außerdem:

$$\min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i \setminus A_F^i} |w_i - a| > \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i \cap A_F^i} |w_i - a|.$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Punkte p_1 und p_2 , die wie folgt definiert sind

$$p_1 := \arg \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i} |w_i - a|$$

$$p_2 := \arg \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in A_F^i} |w_i - a|$$

beide in $N_F^i \cap A_F^i$ liegen und damit gilt sowohl $p_1 = p_2$ (der nächste Punkt einer konvexen Punktmenge zu einem Punkt außerhalb dieser Menge ist eindeutig), als auch

$$d_i := \min_{a \in \Delta_{w_j w_k w_l} | (j, k, l) \in N_F^i} |w_i - a|.$$

Damit ist Lemma 5.7 bewiesen.

□

Um die Streichabstände aller Extrempunkte $w_i \in A_K$ zu bestimmen, genügt es uns, nach Lemma 5.7, die konvexen Hüllen der Nachbarextrempunkte N^i zu ermitteln und die Abstände der Dreiecks-Begrenzungsflächen zum Punkt w_i zu berechnen. Dabei gilt:

Lemma 5.8. *Im \mathbb{R}^3 sei eine Dreiecksfläche Δ_{abc} und ein Punkt p gegeben. Der minimale Abstand $d(\Delta_{abc}, p)$ zwischen Δ_{abc} und p ist gleich der Länge der Strecke $[pq]$. Wobei gilt: Liegt der Schnittpunkt s der Ebene E , die durch die Punkte a, b und c gelegt wird, mit der Geraden g , die den Aufpunkt p und als Richtungsvektor den Normalenvektor von E hat, innerhalb von Δ_{abc} , so gilt: $q = s$. Ansonsten ist q der Punkt auf dem Rand von Δ_{abc} , der s am nächsten liegt.*

Beweis:

Mit E_{abc} bezeichnen wir die Ebene durch die Punkte a, b und c .

1. $s \in \Delta_{abc}$:

Da die Strecke $[ps]$ auf E_{abc} senkrecht steht, gilt:

$$s = \arg \min_{x \in E_{abc}} |x - p|.$$

Aus $\Delta_{abc} \in E_{abc}$ und $s \in \Delta_{abc}$ folgt:

$$s = \arg \min_{x \in \Delta_{abc}} |x - p|.$$

Damit gilt:

$$d(\Delta_{abc}, p) = |p - s| = |p - q|.$$

2. $s \notin \Delta_{abc}$:

Auch hier gilt:

$$s = \arg \min_{x \in E_{abc}} |x - p|.$$

Nach dem Satz von Pythagoras folgt außerdem für alle Punkte $r \in \Delta_{abc}$:

$$|r - p|^2 = |r - s|^2 + |s - p|^2$$

und damit gilt für

$$q := \arg \min_{r \in \Delta_{abc}} |r - s|$$

auch:

$$q = \arg \min_{r \in \Delta_{abc}} |r - p|.$$

□

Der folgende Algorithmus bestimmt damit nach den Lemmata 5.7 und 5.8 für jeden (Extrempunkt-)Punkt aus der Menge A den Streichabstand d_i :

Algorithmus: Streichabstand

Eingabe: $A_K = \{w_1, \dots, w_m\} \subset \mathbb{R}^3$, A_F .

Ausgabe: $\{d_1, \dots, d_m\}$ (Streichabstände), $\{T_1, \dots, T_m\}$ (Facettentripel).

1. FÜR $i = 1 : m$:

$$N^i := \{w_j \in A_K \mid i \neq j \wedge (\exists (A_F)_k \in A_F \mid i, j \in (A_F)_k)\}.$$

$$N_F^i := \text{Facettentripel}(N^i).$$

2. $i := 1$.

3. FÜR ALLE $(j, k, l) := (N_F^i)_{ii} \in N_F^i$:

$$g := gg \mid w_i \in gg \wedge E_{w_j w_k w_l} \perp gg.$$

$$s_{ii} := E_{w_j w_k w_l} \cap g$$

4. FÜR $ii = 1 : |N_F^i|$:

WENN $s_{ii} \in \Delta_{w_j w_k w_l}$ $((j, k, l) = (N_F^i)_{ii})$:

$$d_{ii}^{ii} := |w_i - s_{ii}|.$$

SONST:

$$q_{ii} := \arg \min_{x \in \Delta_{w_j w_k w_l}} |x - s_{ii}|.$$

$$d_{ii}^{ii} := |w_i - q_{ii}|.$$

5. $d_i := \min_{ii} d_{ii}^{ii}$, $ii^* := \arg \min_{ii} d_{ii}^{ii}$, $T_i := (N_F^i)_{ii^*}$.

WENN $i < m$:

$i := i + 1$, gehe zu 3.

SONST:

AUSGABE: $\{d_1, \dots, d_m\}$, $\{T_1, \dots, T_m\}$.

Anmerkung:

Die Speicherung des Facettentripels T_i der konvexen Hülle der Nachbarextremalpunkte für den Punkt w_i ist notwendig, um schnell entscheiden zu können, ob sich durch eine Streichung des Punktes w_j ($i \neq j$) der Streichabstand d_i verändert.

5.3.2 Algorithmus

Die Menge der Charakteristischen Eckpunkte wird gebildet, indem nach und nach Punkte aus A_K gestrichen werden, deren Streichabstand nicht größer als eine positive Konstante d_{con} ist. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass das Streichen eines Punktes nicht dazu führt, dass zuvor gestrichene Punkte anschließend weiter als d_{con} von der neuen konvexen Hülle entfernt sind.

Die (nicht unbedingt eindeutige) Teilmenge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} einer Punktmenge A (siehe Definition 5.3) lässt sich im 3-Dimensionalen mit Hilfe des folgenden Algorithmus bestimmen, dessen einzelne Schritte anhand des Beweises von Satz 5.9 erläutert werden.

Algorithmus: Eckpunkte 3D

Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^3$, $dcon \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: $\tilde{A} \subseteq A$ (Charakteristische Eckpunkte).

1. $(A_K := \{w_1, \dots, w_m\}, A_F := \{(A_F)_1, \dots, (A_F)_l\}) := \text{Quickhull}(A)$
 $\tilde{A} := A_K.$
 2. $(\{d_1, \dots, d_m\}, \{T_1, \dots, T_m\}) := \text{Streichabstand}(A_K, A_F).$
 $I := \{0, 0, \dots, 0\}^T \in \mathbb{Z}^m.$
 3. WENN $\exists j \mid I(j) = 0$:
 $dma := \min_{j \in \{1, \dots, m\} \mid I(j)=0} d_j.$
 SONST:
 $dma := \infty.$
 WENN $dma \leq dcon$:
 $i := \arg \min_{j \in \{1, \dots, m\} \mid I(j)=0} d_j.$
 SONST:
 AUSGABE: $\tilde{A}.$
 4. FÜR ALLE $j \in \{1, \dots, m\} \mid i \in T_j$:
 $\tilde{A} := (\tilde{A} \setminus w_i) \cup w_j.$
 $(dd_j, TT_j) := \text{Streichabstand}(\tilde{A}, (\tilde{A})_F)$ von $w_j.$
 5. WENN $\max_{j \in \{1, \dots, m\} \mid (i \in T_j) \wedge (I(j)=1)} dd_j > dcon$:
 $I(i) := -1.$
 SONST:
 $\tilde{A} := \tilde{A} \setminus w_i, I(i) := 1.$
 FÜR ALLE $j \mid i \in T_j$:
 $d_j := dd_j \wedge T_j = TT_j.$
 Gehe zu 3.
-

Anmerkung:

In Schritt 4 muss lediglich ein Streichwert (bzw. ein Facettentripel) der Eingabe-Punktmenge bestimmt werden. Entsprechend wird nur ein Teil des Algorithmus **Streichabstand** ausgeführt.

Satz 5.9. *Der Algorithmus **Eckpunkte 3D** findet für jede Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$.*

Beweis:

In Schritt 5 wird jedesmal für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, mit $I(i) = 0$, $I(i) \neq 0$ gesetzt. Daher existiert kein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $I(i) = 0$, wenn die Schritte 3-5 m mal wiederholt wurden. In so einem Fall wird $dma = \infty$ gesetzt und der Algorithmus gibt spätestens in dieser Schleife in Schritt 3 die Menge \tilde{A} aus. Damit terminiert der Algorithmus immer nach endlich vielen

Schritten und gibt eine Punktmenge \tilde{A} aus. Im Folgenden müssen wir zeigen, dass \tilde{A} die drei Bedingungen aus Definition 5.3 erfüllt.

1. $\tilde{A} \subseteq A_K$:

Die Funktionalität des Quickhull-Algorithmus wird in [5] bewiesen. Damit ist \tilde{A} eine Teilmenge der Extrempunkte von A .

2. $d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq dcon \quad \forall w \in (A_K \setminus \tilde{A})$:

In Schritt 1 gilt: $\tilde{A} = A_K$. Bevor \tilde{A} als Lösung ausgegeben wird, werden jeweils in Schritt 5 Punkte aus \tilde{A} gestrichen. Die Menge $A_K \setminus \tilde{A}$ besteht daher aus den Punkten von A_K , die in Schritt 5 gestrichen wurden.

Damit ein Punkt w_i in Schritt 5 gestrichen wird, muss einerseits $d_i = dma \leq dcon$ gelten, damit der Index i in Schritt 3 ausgewählt wird, und andererseits darf der Streichabstand aller bisher gestrichenen Punkte zu $\tilde{A} \setminus w_i$ nicht größer als $dcon$ sein, damit in Schritt 5 w_i tatsächlich gestrichen wird. Offensichtlich kann der Streichabstand eines Punktes w_j mit dazugehörigem Facettentrippel T_j zu einer Menge A_K nur dann unterschiedlich zum Streichabstand von w_j zu $A_K \setminus w_i$ sein, wenn $i \in T_j$ gilt. Daher genügt es in Schritt 4 die Streichabstände dieser w_j zu berechnen.

Für den mit dem Algorithmus **Streichabstand** ermittelten Streichabstand d_i eines Punktes $w_i \in A_K$ gilt nach den Lemmata 5.7 und 5.8:

$$d_i = d(w_i, (A_K \setminus w_i)_{kon}) = \min_{a \in (A_K \setminus w_i)_{kon}} |w_i - a|.$$

Damit wird ein \tilde{A} ausgegeben, für das

$$d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq dcon \quad \forall w \in (A_K \setminus \tilde{A})$$

gilt.

3. $\max_{w \in (A_K \setminus (\tilde{A} \setminus a_i))} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) > dcon \quad \forall a_i \in \tilde{A}$:

Nehmen wir an, dass es einen Punkt $a_i \in \tilde{A}$ gibt, für den

$$\max_{w \in (A_K \setminus (\tilde{A} \setminus a_i))} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) \leq dcon$$

gilt, so muss einerseits

$$d(a_i, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) \leq dcon$$

und andererseits

$$\max_{w \in (A_K \setminus \tilde{A})} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) \leq dcon$$

gelten. Damit folgt $I(i) \neq -1$ und der Index i würde erstens in Schritt 3 ausgewählt werden bevor der Algorithmus terminiert und zweitens würde a_i in Schritt 5 in dieser Schleife aus \tilde{A} gestrichen werden. Damit muss für alle $a_i \in \tilde{A}$ gelten:

$$\max_{w \in (A_K \setminus (\tilde{A} \setminus a_i))} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) > dcon.$$

□

Anmerkungen:

Wie man den Parameter $dcon$ wählen sollte, damit \tilde{A} möglichst genau der Menge der Ecken des zu untersuchenden Objekts entspricht, hängt wie im 2-Dimensionalen von der speziellen Anwendung ab. Die Überlegungen aus Kapitel 3.4 lassen sich auf den 3-dimensionalen Fall übertragen. Da der Abstand zwischen zwei benachbarten Taststrecken, genauso wie zwischen zwei benachbarten Pixel, gleich 1 ist, verwenden wir für den Algorithmus **Eckpunkte 3D** wie für den Algorithmus **Eckpunkte** (siehe Kapitel 3.3) im Allgemeinen $dcon = 2$.

Komplexitätsanalyse:

In Schritt 1 wird der Quickhull-Algorithmus auf A angewendet. Bezeichnen wir die Anzahl der Punkte in A mit m , so hat dieser Schritt eine durchschnittliche Komplexität von

$$O(m \log m).$$

In Schritt 2 werden die Streichabstände aller m_K Extrempunkte mit dem Algorithmus **Streichabstand** bestimmt. Dieser Algorithmus durchläuft seine Schritte 3-5 m_K mal. Dabei werden in Schritt 3 für jeden Punkt w_i die Nachbarextrempunkte N^i ($O(m_K)$) und die Facettentripel N_F^i ($O(|N^i| \log |N^i|)$) bestimmt. Die Schritte 4-5 durchlaufen alle Facettentripel je einmal ($O(|N_F^i|)$). In Abhängigkeit von m_K ergibt sich also eine Komplexität von:

$$O(m_K^2).$$

Die Schritte 3 bis 5 des Algorithmus **Eckpunkte 3D** werden höchstens m_K mal wiederholt. Dabei besitzen die Schritte 3 und 5 die Komplexität $O(m_K)$ und in Schritt 4 werden für die Punkte, deren Facettentripel den Index i enthalten, die Streichabstände berechnet ($O(|N^i| \cdot m_K)$). Auch für diese Schleife ergibt sich also eine Komplexität von:

$$O(m_K^2).$$

Damit bestimmt der Algorithmus die Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ in einem Gesamtaufwand von:

$$O(m \log m + m_K^2).$$

Anhand des bereits oben eingeführten Beispiels wollen wir die Vorgehensweise des Algorithmus **Eckpunkte 3D** illustrieren.

Abbildung 5.2 zeigt die Punktmenge A , die ein 5-symmetrisches Objekt repräsentiert. In Abbildung 5.5 ist die konvexe Hülle A_{kon} dargestellt.

Die Menge der Extrempunkte A_K (mit $|A_K| = 197$) sieht man in Abbildung 5.8.

In Schritt 2 werden nun die Streichabstände d_1, \dots, d_{197} bestimmt. Der Extrempunkt mit dem geringsten Streichabstand w_{i^*} ist in Abbildung 5.8 rot dargestellt. Das nächste Facettentripel T_{i^*} von w_{i^*} ist grün eingezeichnet.

Wendet man den kompletten **Eckpunkte 3D**-Algorithmus auf die Punktmenge A an, so werden 181 der 197 Extrempunkte gestrichen und \tilde{A} besteht aus den 16 Charakteristischen Eckpunkten, die in Abbildung 5.9 rot dargestellt sind.

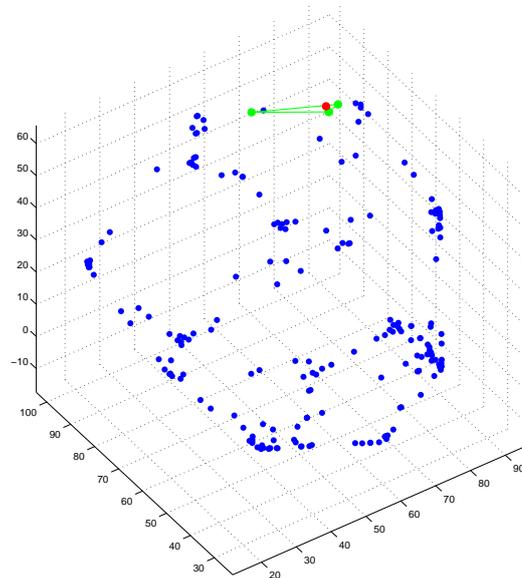


Abbildung 5.8: A_K blau; w_{i^*} rot; T_{i^*} grün

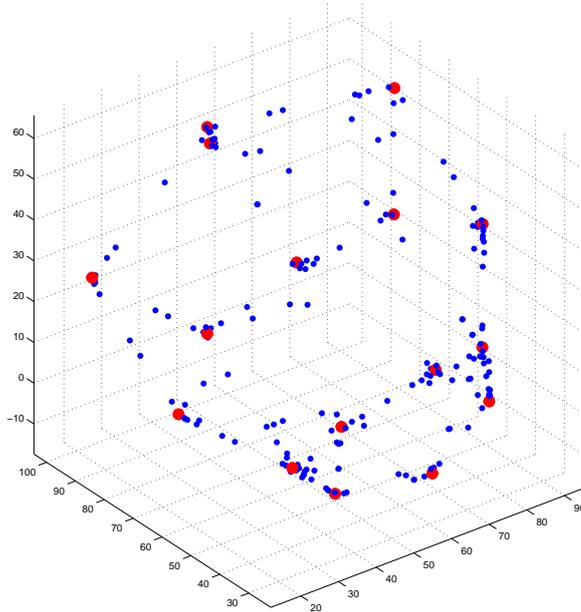


Abbildung 5.9: A_K blau und \tilde{A} rot

5.4 Rotation

Im 3-Dimensionalen wird bei der Suche nach n -Symmetrien die Punktmenge \tilde{A} nicht um einen Punkt sondern um eine Gerade gedreht. Diese Gerade wird Rotationsachse genannt.

Definition 5.10. Eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann exakt n -(rotations)-symmetrisch ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), wenn sie durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um eine Rotationsachse g auf sich selbst abgebildet wird.

In Definition 2.3 haben wir festgelegt wie man eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ um einen bestimmten Punkt rotiert. Im \mathbb{R}^3 gilt die folgende Definition:

Definition 5.11. Die Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^3$, die durch eine Rotation um die Rotationsachse

$$g : \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}| = 1 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$$

um den Winkel α aus $A := \{(a_1)_x, (a_1)_y, (a_1)_z, \dots, (a_m)_x, (a_m)_y, (a_m)_z\} \subset \mathbb{R}^3$ hervorgeht (wir schreiben: $B = \text{rot}_\alpha^g(A)$), erhält man folgendermaßen (in Matrixschreibweise):

$$B := \left(\mathcal{A} - \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \\ \dots & \dots & \dots \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \right) \cdot R(\alpha) + \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \\ \dots & \dots & \dots \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}.$$

Dabei gilt (mit $R := R(\alpha)$):

$$R := \begin{pmatrix} \cos \alpha + v_1^2 (1 - \cos \alpha) & v_1 v_2 (1 - \cos \alpha) - v_3 \sin \alpha & v_1 v_3 (1 - \cos \alpha) + v_2 \sin \alpha \\ v_2 v_1 (1 - \cos \alpha) + v_3 \sin \alpha & \cos \alpha + v_2^2 (1 - \cos \alpha) & v_2 v_3 (1 - \cos \alpha) - v_1 \sin \alpha \\ v_3 v_1 (1 - \cos \alpha) - v_2 \sin \alpha & v_3 v_2 (1 - \cos \alpha) + v_1 \sin \alpha & \cos \alpha + v_3^2 (1 - \cos \alpha) \end{pmatrix}.$$

Anmerkung:

Durch einfaches Nachrechnen erhält man:

$$R(\alpha)^T \cdot R(\alpha) = I \wedge \det(R(\alpha)) = 1.$$

Damit folgt nach Definition 2.5:

$$R(\alpha) \in SO(3).$$

Die Rotation jedes einzelnen Punktes p aus A entspricht dabei einer Rotation innerhalb der Ebene E , die senkrecht auf g steht und p enthält. Dabei wird p um den Punkt $s := E \cap g$ um den Winkel α (vom Punkt $s + (v_1, v_2, v_3)$ aus gesehen im Uhrzeigersinn) rotiert. Daher lassen sich die Lemmata 2.7 und 2.8 auf den 3-dimensionalen Fall erweitern. Es folgt:

Lemma 5.12. *Gegeben seien zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ und eine Rotationsachse $g \subset \mathbb{R}^3$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} p_1 = \text{rot}_\alpha^g(p_1) &\Leftrightarrow (\alpha = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \vee p_1 \in g), \\ p_2 = \text{rot}_\alpha^g(p_1) &\Rightarrow d(p_1, g) = d(p_2, g). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $d(p, g)$ den minimalen Abstand eines Punktes p zu einer Geraden g (d.h. $d(p, g) = \min_{q \in g} |p - q|$).

Beweis:

Bedenkt man, dass die Rotation eines Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ einer Rotation innerhalb der Ebene E , die senkrecht auf g steht und p enthält, entspricht, so folgt der Beweis der ersten Gleichung aus Lemma 2.7. Die zweite Gleichung folgt direkt aus der Längeninvarianz der Rotation (Lemma 2.6) und Translation. □

5.5 Symmetriewert

Analog zum 2-dimensionalen Fall definieren wir auch im 3-Dimensionalen Symmetriewerte von Punktmengen bezüglich der verschiedenen Symmetrien (Vergleiche Definition 2.2). Dabei müssen wir beachten, dass Punktmengen im \mathbb{R}^3 bezüglich unterschiedlicher Rotationsachsen verschiedene n -Symmetrien besitzen können, was wir später am Beispiel der Eckpunkte eines Würfels zeigen werden.

Definition 5.13. *Der Symmetriewert $d_n(A, g)$ einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich der n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N}$) um die Rotationsachse g entspricht dem Abstand zwischen den Punktmengen A und B_n , wobei B_n aus A durch eine Rotation um g um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ hervorgeht.*

Definition 5.14. *Für den Eindeutigkeitswert $\Delta_{i, \dots, j}^n(A, g)$ eines Symmetriewertes $d_n(A, g)$ gilt:*

$$\Delta_{i, \dots, j}^n(A, g) = \max_{k \in \{i, \dots, j\} \setminus \{l \mid n \bmod l = 0\}} \frac{d_n(A, g)}{d_k(A, g)} \cdot 100.$$

Anhand der Symmetriewerte bzw. der Eindeutigkeitswerte wird dann entschieden, bezüglich welcher der möglichen Rotationsachsen \tilde{A} tatsächlich eine n -Symmetrie besitzt (Vergleiche Definition 2.15).

Definition 5.15. *Einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ wird genau dann eine approximative n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) zugeordnet, wenn es eine Gerade $g \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass für den Eindeutigkeitswert des Symmetriewertes $d_n(A, g)$ gilt:*

$$\Delta_{2, \dots, 8}^n(A, g) < 25.$$

Der Abstand zwischen den Punktmenge A und B_n ist, wie in den vorherigen Kapiteln, gleich dem Wert des Minimal Perfect Matchings im vollständigen gewichteten Bigraphen $G(A, B_n)$ (siehe Kapitel 2.3). Dabei besteht die eine Partition von $G(A, B_n)$ aus den Punkten von A und die andere aus den Punkten von B_n . Das Kantengewicht zwischen zwei Punkten $w \in A$ und $v \in B_n$ entspricht dem euklidischen Abstand $|w - v|$ zwischen w und v .

Die Komplexität der Bestimmung der Symmetriewerte bezüglich aller n -Symmetrien ($n \in \{2, \dots, N\}$) einer Punktmenge $\tilde{A} := \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^3$ beträgt also wie im 2-Dimensionalen (vgl. Kapitel 3.7):

$$O(Nm^3).$$

5.6 Rotationsachse

Für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ haben wir gezeigt, dass nur der Schwerpunkt der Punktmenge $SP(A)$ das Zentrum einer möglichen n -Symmetrie sein kann (Lemma 2.10). Daher haben wir diesen auch als Rotationszentrum zur Bestimmung der Symmetriewerte verwendet. Nur bei der Suche nach unvollständigen Symmetrien war diese Vorgehensweise ungeeignet. Im \mathbb{R}^3 wird eine Rotationsachse benötigt um B_n zu bestimmen (siehe Definition 5.11).

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage widmen, wie man aus einer Punktmenge \tilde{A} alle möglichen Rotationsachsen bestimmen kann. Das heißt, wir werden untersuchen, welche Eigenschaften eine Gerade g haben muss, damit \tilde{A} durch eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um g approximativ auf sich selbst abgebildet werden kann. Dazu werden wir zunächst den Fall einer exakt n -symmetrischen Punktmenge analysieren und daraus einen Algorithmus ableiten, mit dem wir alle möglichen Rotationsachsen bestimmen, bezüglich derer eine Punktmenge approximativ n -symmetrisch sein kann.

5.6.1 Exakte Symmetrie

Um eine Gerade g zu bestimmen, benötigen wir zwei (unterschiedliche) Punkte der Geraden im \mathbb{R}^3 . Dabei gilt das folgende Lemma:

Satz 5.16. *$A \subset \mathbb{R}^3$ sei eine (exakt) n -symmetrische Punktmenge ($n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$) bezüglich der Rotationsachse g . Die Menge der Extrempunkte von A sei A_K und A_M sei die Menge der Schwerpunkte der verschiedenen (ebenen) k -Ecke ($k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 3$), aus denen sich der Rand der konvexen Hülle zusammensetzt. Die Menge A_S umfasst alle Mittelpunkte der Strecken zwischen benachbarten Extrempunkten. Außerdem ist M der Schwerpunkt von A_K . Dann gilt:*

$$M \in g \quad \wedge \quad |g \cap (A_K \cup A_M \cup A_S)| = 2.$$

Beweis:

1. $M \in g$:

B sei die Punktmenge, die man erhält, wenn man A um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um g dreht. Da A

n -symmetrisch ist, gilt $A=B$ und damit auch $SP(A_K) = SP(B_K)$ (siehe Definition 2.9). Die Abstände zwischen den Extrempunkten und ihrem Schwerpunkt bleiben während einer Rotation aller Extrempunkte konstant (siehe Lemma 2.6). Daher wird der Schwerpunkt bei der Rotation um g mitgedreht und da $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi$ gilt, muss nach Lemma 5.12 $M \in g$ gelten.

2. $|g \cap (A_K \cup A_M \cup A_S)| = 2$:

Jede Gerade, für die $M \in g$ gilt, schneidet den Rand der konvexen Hülle von A in genau zwei Punkten p_1 und p_2 .

Damit gibt es auch mindestens zwei k -Ecke F_1 und F_2 auf dem Rand, für die gilt:

$$p_1 \in F_1 \wedge p_2 \in F_2.$$

Wir betrachten so ein k -Eck F mit $p_i \in F$ und bezeichnen den Rand von F mit F_R .

Wir untersuchen dabei die folgenden Fälle auf Plausibilität:

2.1. $p_i \in (F \setminus (F_R \cup A_M))$:

Da p_i im Inneren von F liegt und A n -symmetrisch ist, muss F durch die Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um das Rotationszentrum p_i auf sich selbst abgebildet werden.

Das ist nur möglich, wenn p_i der Schwerpunkt der Ecken von F ist (siehe Lemma 2.10).

Dann aber müsste $p_i \in A_M$ gelten.

Daraus folgt: $p_i \notin (F \setminus (F_R \cup A_M))$.

2.2. $p_i \in (F_R \setminus (A_K \cup A_S))$:

Analog zu Fall 2.1 kann F nicht auf sich selbst abgebildet werden, da $A_M \cap F_R = \{\}$ gilt.

Da $p_i \notin A_K$ gilt, kann F nur dann auf ein anderes k -Eck F' der Oberfläche abgebildet werden, wenn der Rotationswinkel gleich π ist ($\frac{2\pi}{n}$ für $n = 2$). In diesem Fall wird die Strecke, auf der p_i liegt, durch eine Rotation um π auf sich selbst abgebildet. Das ist nur möglich, wenn p_i der Mittelpunkt dieser Strecke ist. Es müsste also $p_i \in A_S$ gelten.

Daraus folgt: $p_i \notin (F_R \setminus (A_K \cup A_S))$.

Da immer (mindestens) zwei verschiedene k -Ecke F_1, F_2 der Oberfläche mit $p_i \in F_i$ existieren, gilt:

$$\{p_1, p_2\} \subset (A_K \cup A_M \cup A_S)$$

und damit auch:

$$|g \cap (A_K \cup A_M \cup A_S)| = 2.$$

□

Anmerkung:

Aus dem Beweis ergibt sich, dass für eine n -symmetrische Punktmenge mit $n \geq 3$ sogar:

$$|g \cap (A_K \cup A_M)| = 2$$

gilt.

Sucht man also nach exakten n -Symmetrien, so kann man alle möglichen Rotationsachsen bestimmen, indem man $A_K \cup A_M \cup A_S$ bildet und dann testet, ob es 2-Tupel $\{p_1, p_2\} \subset (A_K \cup A_M \cup A_S)$ gibt, so dass p_1 , p_2 und M kollinear sind. Für jedes 2-Tupel $\{p_i, p_j\}$, das mit M kollinear ist, erhält man eine mögliche Rotationsachse:

$$g := \vec{p}_i + \lambda \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_i) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Lemma 5.16 besagt nicht, dass A eine n -Symmetrie bezüglich einer so ermittelten Gerade g besitzen muss. Ist A allerdings n -symmetrisch, dann nur bezüglich einer solchen Gerade g . Deswegen erhalten wir auf diese Art nur *mögliche* Rotationsachsen.

Eine Punktmenge A kann verschiedene n_i -Symmetrien bezüglich verschiedener Rotationsachsen besitzen. In diesem Fall sind wir an allen Rotationsachsen interessiert. Ein Beispiel dafür ist die Punktmenge, die aus den Ecken eines Würfels besteht (siehe Abbildung 5.10). Hier ergeben sich insgesamt 13 mögliche Rotationsachsen g_1, \dots, g_{13} .

g_1, \dots, g_3 (g_1 in Abbildung 5.10) enthalten neben M jeweils zwei Punkte aus A_M .

g_4, \dots, g_7 (g_4 in Abbildung 5.10) enthalten neben M jeweils zwei Punkte aus A_K .

Außerdem gibt es noch sechs Rotationsachsen g_8, \dots, g_{13} , die neben M auch je zwei Punkte aus A_S enthalten (g_9 in Abbildung 5.10).

Der Würfel besitzt bezüglich aller 13 Rotationsachsen eine n -Symmetrie. Bezüglich g_1, \dots, g_3 ist er 4-symmetrisch (und 2-symmetrisch), bezüglich g_4, \dots, g_7 3-symmetrisch und bezüglich g_8, \dots, g_{13} besitzt er eine 2-Symmetrie.

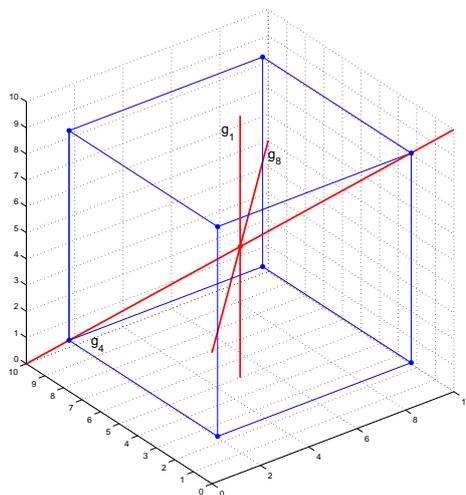


Abbildung 5.10: Rotationsachsen

5.6.2 Approximative Symmetrie

Da wir nicht nur an der Erkennung exakter sondern auch approximativer Symmetrien interessiert sind, müssen wir bei der Bestimmung möglicher Rotationsachsen beachten, dass wir Lemma 5.16 für den exakten Fall formuliert haben.

Exakt symmetrisch kann eine Punktmenge A laut Lemma 5.16 nur dann sein, wenn die Rotationsachse g die Oberfläche der konvexen Hülle ausschließlich in Punkten aus der Menge $(A_K \cup A_M \cup A_S)$ schneidet. Einen niedrigen Symmetriewert kann A_K hingegen auch besitzen, wenn g die Oberfläche in Punkten schneidet, die in der Nähe von Punkten aus $(A_K \cup A_M \cup A_S)$ liegen.

Eine mögliche Rotationsachse zur Bestimmung approximativer Symmetrien erhalten wir daher auch, wenn wir ein 2-Tupel $\{p_1, p_2\} \subset (A_K \cup A_M \cup A_S)$ finden, so dass für den Abstand $d(M, g_{p_1 p_2})$ zwischen dem Schwerpunkt M von A_K und der Geraden durch p_1 und p_2 für eine Fehlertoleranz $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$d(M, g_{p_1 p_2}) < \epsilon_1.$$

Außerdem muss beachtet werden, dass bereits durch eine minimale Veränderung in A_K ein Teil der Oberfläche, der zuvor aus einem ebenen k -Eck ($k > 3$) bestand, als mehrere k_i -Ecke dargestellt wird (mit $k_i < k$). In so einem Fall ist es nicht mehr sinnvoll zu fordern, dass g (näherungsweise) durch einen Punkt aus $(A_K \cup A_M \cup A_S)$ geht, da selbst eine minimale Veränderung in A_K dazu führen kann, dass sich A_M entscheidend verändert (siehe Abbildung 5.11).

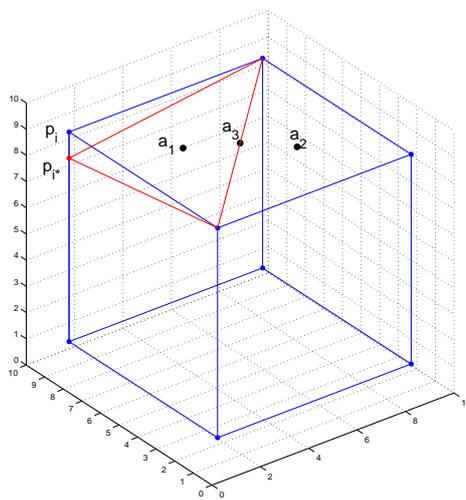


Abbildung 5.11: $p_i \rightarrow p_i^*$, $a_1, a_2 \in A_{M^*}$, $a_3 \in A_M$

Um trotzdem alle Rotationsachsen zu finden, bezüglich derer A_K einen kleinen Symmetriewert besitzen kann, wird eine Menge $A_{M'}$ auf die folgende Weise gebildet:

Für alle ebenen k -Ecke $F_i = F_{(q_1 q_2 \dots q_k)}$ ($i \in \{1, \dots, l\}$) aus denen sich die Oberfläche der konvexen Hülle zusammensetzt, werden alle Punkte $p_j \in A_K \setminus \{q_1, \dots, q_k\}$ gesucht, für die gilt:

$$d(p_j, E_i) < \epsilon_2 \text{ für ein } \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Dabei ist E_i die Ebene, die die Fläche F_i enthält.

Die Punktmenge H_i wird anschließend gebildet, indem $\{q_1, \dots, q_k\}$ mit allen Punkten p_j vereinigt wird, die diese Bedingung erfüllen. Für die Punktmenge $A_{M'}$ gilt dann:

$$A_{M'} = \{x | \exists i \text{ mit } x = SP(H_i)\}.$$

Mögliche Rotationsachsen, bezüglich derer A_K einen kleinen Symmetriewert besitzen kann, enthalten also (approximativ) neben M auch 2-Tupel $\{p_1, p_2\}$, für die gilt: $\{p_1, p_2\} \subset (A_K \cup A_M \cup A_S \cup A_{M'})$.

Mit unserem Algorithmus untersuchen wir eine Punktmenge \tilde{A} , die die Menge der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist, auf mögliche approximative n -Symmetrien. Daraus ergeben sich hinsichtlich der Bestimmung möglicher Rotationsachsen verschiedene Vorteile.

Da für jede Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{A} \subseteq A$

$$(\tilde{A})_K = \tilde{A}$$

gilt und wir die Facetten F_1, \dots, F_l von $(\tilde{A})_{kon}$ aus der Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte bereits gegeben haben, müssen wir die konvexe Hülle zur Bestimmung möglicher Rotationsachsen nicht erst ermitteln. Außerdem sind Extrempunkte einer darstellenden Punktmenge A , die keine Ecke eines Objekts repräsentieren, sondern nur durch ungenaue Darstellung entstanden sind, in der Regel in der Menge $A_K \setminus \tilde{A}$ und verfälschen somit die Suche nach möglichen Rotationsachsen, bezüglich derer \tilde{A} approximativ n -symmetrisch ist, nicht.

Algorithmus: Rotationsachse

Eingabe: $\tilde{A} = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^3$, $\{F_1, \dots, F_l\}$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: g_1, g_2, \dots (alle möglichen Rotationsachsen).

1. $M := SP(\tilde{A})$, $i := 0$, $k := 1$.
2. WENN $i < l$:
 $i := i + 1$
 Sonst:
 Gehe zu 5.
3. $H_i = P_i := \{a \mid a \in (\tilde{A} \cap F_i)\}$.
 $E_i :=$ Ebene, die F_i enthält.
4. FÜR $j = 1 : m$:
 WENN $a_j \notin P_i$:
 WENN $d(a_j, E_i) < \epsilon_2$:
 $H_i := H_i \cup a_j$.
 Gehe zu 2.

5. $A_M := \{x \mid (\exists i \in \{1, \dots, l\} | x = SP(P_i))\}$.
 $A_{M'} := \{x \mid (\exists i \in \{1, \dots, l\} | x = SP(H_i))\}$.
 $A_S := \{x \mid (\exists i \in \{1, \dots, l\} | x = \frac{a_r + a_s}{2} \ (a_r, a_s \in P_i))\}$.
6. FÜR ALLE $\{p_1, p_2\} \subset (\tilde{A} \cup A_M \cup A_S \cup A_{M'})$:
 WENN $d(M, g_{p_1 p_2}) < \epsilon_1$:
 AUSGABE: $(g := \vec{p}_1 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \ (\lambda \in \mathbb{R}))$.
-

5.7 Beispiele

Zunächst wollen wir uns dem in diesem Kapitel bereits unter verschiedenen Gesichtspunkten analysierten 5-symmetrischen Objekt aus Abbildung 5.12 widmen und testen, ob unsere Methode diesem Objekt eine n -Symmetrie zuordnet.

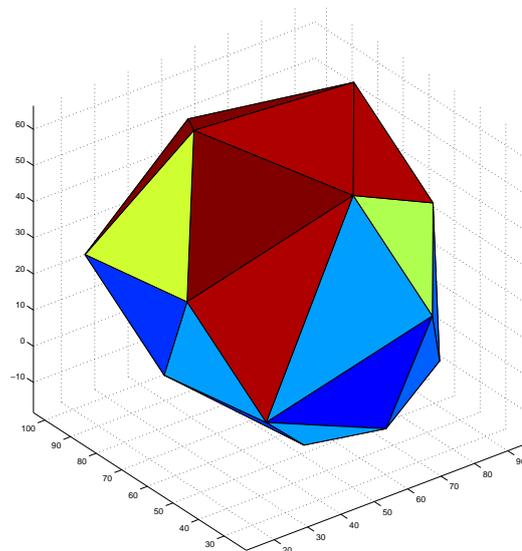
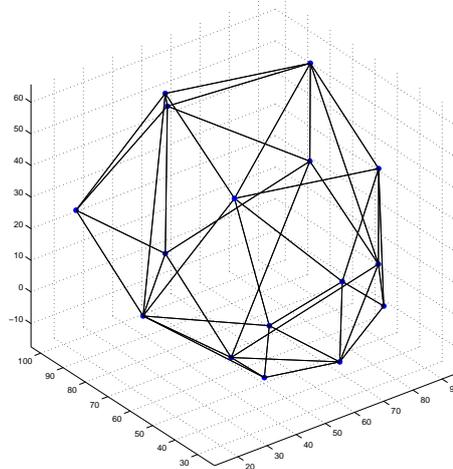


Abbildung 5.12: 5-Symmetrisches Objekt

Mit Hilfe der in Kapitel 5.1 eingeführten Methode wird eine Punktmenge A erzeugt (siehe Abbildung 5.2), die das Objekt repräsentiert.

Auf diese Punktmenge wird der Algorithmus `Eckpunkte 3D` (mit $dcon = 2$) angewendet (siehe Kapitel 5.3.2).

Dabei wird zunächst mit dem Quickhull-Algorithmus die konvexe Hülle (und damit auch die Menge der Extrempunkte A_K) bestimmt (siehe Abbildung 5.5). Anschließend werden die Charakteristischen Eckpunkte berechnet. Als Ergebnis erhält man die in Abbildung 5.13 dargestellte Punktmenge \tilde{A} und die Dreiecksflächen F , die den Rand der konvexen Hülle von \tilde{A} bilden.

Abbildung 5.13: \tilde{A}, F

Mit dem Algorithmus `Rotationsachse` (Eingabe: $\tilde{A}, F, \epsilon_1 = 0.5, \epsilon_2 = 2$) wird anschließend nach möglichen Rotationsachsen gesucht. Als Ergebnis erhält man eine mögliche Rotationsachse g , die in Abbildung 5.14 dargestellt ist.

Anschließend werden die Symmetriewerte von \tilde{A} bezüglich der Rotation um g bestimmt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.15 dargestellt. \tilde{A} wird nach Definition 5.15 eine 5-Symmetrie zugeordnet.

Als zweites Beispiel wollen wir die Darstellung eines Würfels (Abbildung 5.16) auf approximative Symmetrien untersuchen. Wie bereits in Kapitel 5.6 dargestellt, besitzt ein Würfel sechs 2-, vier 3- und drei 4-Symmetrien.

Der Würfel wird mit der Methode aus Kapitel 5.1 durch eine Punktmenge A dargestellt (Abbildung 5.17).

Mit Hilfe des Algorithmus `Eckpunkte 3D` ($dcon = 2$) wird die Menge (\tilde{A}) der Charakteristischen Eckpunkte gebildet (Abbildung 5.18). Anschließend werden alle möglichen Rotationsachsen mit dem Algorithmus `Rotationsachse` bestimmt. Man erhält 13 verschiedene mögliche Rotationsachsen g_1, \dots, g_{13} . Dabei gilt:

$$|g_i \cap A_M| = 2 \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\},$$

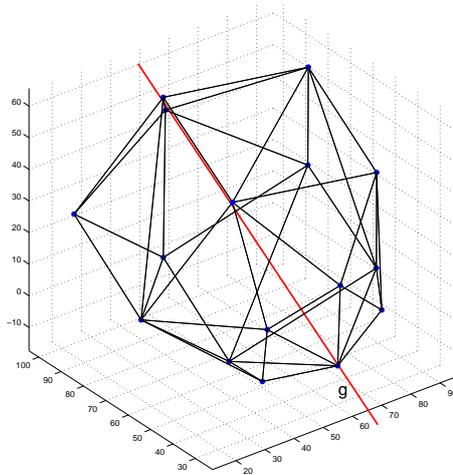


Abbildung 5.14: Rotationsachse

n	$d_n(\tilde{A})$
2	212.5
3	198.2
4	146.8
5	4.7
6	99.8
7	169.4
8	213.9
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	4.71

Abbildung 5.15: Symmetriewerte

$$|g_i \cap A_K| = 2 \text{ für } i \in \{4, \dots, 7\},$$

$$|g_i \cap A_S| = 2 \text{ für } i \in \{8, \dots, 13\}.$$

In Abbildung 5.18 sind die Rotationsachsen g_2 , g_4 und g_9 dargestellt.

Die Symmetriewerte von \tilde{A} bezüglich der verschiedenen Rotationsachsen sind in Abbildung 5.19 aufgelistet. Alle Würfel-Symmetrien werden \tilde{A} zugeordnet.

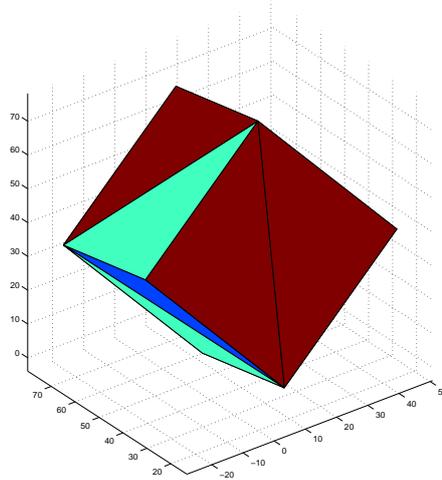


Abbildung 5.16: Würfel

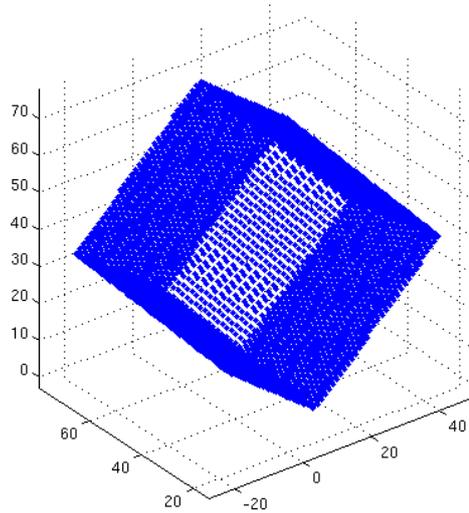


Abbildung 5.17: Punktmenge A

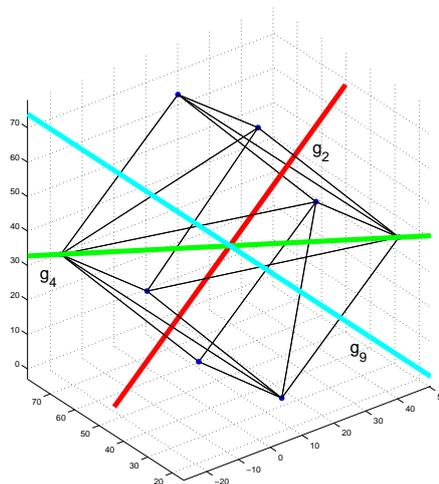


Abbildung 5.18: \tilde{A} , F , Rotationsachsen

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}
n	$d_n(\tilde{A})$												
2	6.0	4.8	4.4	110.7	123.9	141.5	63.9	4.7	10.3	3.7	6.8	6.1	5.7
3	127.1	123.4	99.8	4.3	9.8	6.2	7.8	59.6	156.3	150.8	85.4	118.7	120.9
4	4.1	2.9	3.4	66.1	91.3	104.5	125.6	110.6	83.8	141.9	80.1	144.1	170.2
5	75.3	74.4	59.6	87.8	122.2	145.7	75.9	141.5	60.8	121.6	109.7	140.5	114.9
6	126.0	122.4	100.2	111.6	123.9	140.5	62.8	131.5	82.3	129.3	137.0	151.2	109.8
7	148.3	137.1	130.3	122.0	116.0	142.8	69.4	111.2	101.5	143.8	158.9	153.4	121.0
8	165.2	150.2	153.3	119.9	104.0	148.1	84.7	94.8	115.6	156.5	154.5	157.6	135.1
i	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$\Delta_{2,\dots,8}^i$	5.4	3.9	5.7	6.5	10.7	5.9	12.4	7.9	16.9	3.0	8.5	5.1	5.2

Abbildung 5.19: Symmetriewerte

Kapitel 6

Verzerrte Symmetrien

Wird eine symmetrische Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ auf eine Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ projiziert, so gehen in der Regel die Symmetrieeigenschaften durch die Verzerrung verloren. Trotzdem kann es von Interesse sein, mögliche Symmetrien eines Objekts aus der verzerrten Darstellung zu erkennen. Ein Beispiel dafür ist die Identifizierung eines Stopp-Schildes durch die Erkennung der verzerrten 8-Symmetrie der Projektion des Schildes (Abbildung 6.1).



Abbildung 6.1: Projektiv Verzerrtes Stopp-Schild

In der Literatur werden Algorithmen zur Identifizierung verzerrter Symmetrien nicht nur genutzt, um spezielle Strukturen und Objekte in einem Bild zu erkennen (z.B. [10], [53], [56]), sondern auch, um 3D-Informationen über die Lage oder die Form eines Objekts

aus der 2-dimensionalen Abbildung zu gewinnen (z.B. [36], [51], [52], [55]). So kann man das Wissen um eine vorhandene Symmetrie eines Objekts in der Computer Vision nutzen, um mit Hilfe der Identifizierung dieser Symmetrie im projektiv verzerrten Bild die Kamera zu kalibrieren ([25]).

Die verzerrten Bilder 3-dimensionaler Objekte entstehen durch eine Projektion in die 2-dimensionale Ebene. Dabei unterscheidet man zwischen Perspektivprojektion (Zentralprojektion) und Parallelprojektion.

Bei der Perspektivprojektion muss neben der Projektionsebene E ein Projektionszentrum $f \in \mathbb{R}^3$ gegeben sein. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ im Raum wird dann auf die Projektionsebene E abgebildet, indem die Gerade g , die durch p und f geht, gebildet wird und anschließend g mit E geschnitten wird. Der Schnittpunkt ist der Bildpunkt p' von p .

Wählt man als Projektionsebene beispielsweise die Ebene $E : z = 1$, so erhält man die Bildkoordinaten $p' = (p'_x, p'_y) \in \mathbb{R}^2$ eines Punktes $p = (p_x, p_y, p_z)$ folgendermaßen (Projektionszentrum: $f = (f_x, f_y, f_z)$, $f_z \neq p_z$):

$$p'_x = f_x + \frac{(p_x - f_x)(1 - f_z)}{p_z - f_z},$$

$$p'_y = f_y + \frac{(p_y - f_y)(1 - f_z)}{p_z - f_z}.$$

Die Parallelprojektion entspricht einer Perspektivprojektion, bei der der Fluchtpunkt im Unendlichen liegt. Neben der Projektionsebene E ist bei der Parallelprojektion eine Projektionsrichtung $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Den Bildpunkt p' eines Punktes p erhält man, indem man die Parallele zu v durch p mit E schneidet.

Für $E : z = 1$ lässt sich $p' = (p'_x, p'_y)$ folgendermaßen berechnen:

$$p'_x = p_x + \frac{v_1(1 - p_z)}{v_3},$$

$$p'_y = p_y + \frac{v_2(1 - p_z)}{v_3}.$$

Im Gegensatz zur Perspektivprojektion sind hier die Bildgeraden paralleler Geraden auch parallel. Allerdings verändern sich durch die Projektion die Längen und Verhältnisse von Strecken, genauso wie die Größe und die Verhältnisse von Winkeln.

Eine Spezialform der Parallelprojektion ist die Orthogonale Parallelprojektion, bei der v senkrecht auf E steht. Diese Projektion entspricht einer Fotografie mit einem telezentrischen Objektiv.

In der Literatur finden sich sowohl Verfahren zur Erkennung parallel projizierter Symmetrien, als auch (insbesondere im Bereich der Computer Vision) Verfahren, die perspektivisch verzerrte Symmetrien identifizieren. Wir werden in den folgenden beiden Abschnitten auf verschiedene dieser Methoden eingehen, die sich darin unterscheiden, wo (z.B. in Fotos, in Kantenmodellen oder in Punktmengen) und nach welchen Symmetrien gesucht wird.

Einige Ideen werden wir dabei aufgreifen, um unseren Ansatz, projektiv verzerrten Punktmengen Symmetriewerte zuzuordnen, umzusetzen. Das ermöglicht es uns, verzerrte Rotationssymmetrien auch dann zu erkennen, wenn sie aufgrund von Ungenauigkeiten nicht exakt sondern nur approximativ sind. Außerdem reduziert die wie im nicht verzerrten Fall praktizierte vorangehende Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte in vielen Fällen den Aufwand erheblich und ermöglicht oft erst eine effektive Erkennung der verzerrten Symmetrien.

6.1 Parallele Projektion

Es existieren diverse Verfahren zur Erkennung von Spiegelsymmetrien, die durch Parallelprojektion verzerrt wurden (siehe z.B. [14], [22], [24]). Die Identifizierung möglicher Symmetrieachsen basiert hier zumeist auf der Tatsache, dass die Parallelität zweier Geraden unter einer Parallelprojektion erhalten bleibt.

Die Erkennung verzerrter Rotationssymmetrien ist hingegen relativ wenig erforscht. Shen et al. ([44]) bzw. Lei et al. ([31]) untersuchen Kantenmodelle von Objekten nach verzerrten Spiegelsymmetrien und schließen aus der Anordnung der Symmetrieachsen auf mögliche verzerrte Rotationssymmetrien.

Verfahren zur ausschließlichen Bestimmung von Rotationssymmetrien in Kantenmodellen finden sich in [53] und [56]. Wir wollen auf diese beiden Verfahren etwas näher eingehen:

Yip [53] benutzt einen Hough-Transform-Algorithmus, um parallel projizierte Rotationssymmetrien von 2-dimensionalen Objekten im Raum zu erkennen. Der Algorithmus ist in vier Schritte unterteilt. Dabei werden der Reihe nach

- das Rotationszentrum,
- die beiden Projektionswinkel,
- die Ordnung der Rotationssymmetrie und
- die Bildpunkte, die durch die Rotation aufeinander abgebildet werden,

bestimmt. Dabei werden von einer darstellenden Punktmenge nur die Randpunkte untersucht, um den Aufwand zu reduzieren. Dennoch ist der Algorithmus aufwändig und benötigt viel Speicherplatz.

In dieser Arbeit wollen wir, analog zur Suche nach nicht verzerrten Symmetrien, die Symmetrieeigenschaften einer kleinen Teilmenge der Punktmenge, nämlich der Charakteristischen Eckpunkte, untersuchen. Damit lassen sich der Aufwand und die benötigte Speicherkapazität erheblich reduzieren. Außerdem können eindeutigere Ergebnisse erzielt werden.

Ein weiterer Algorithmus zur Erkennung von verzerrten n -Symmetrien wurde von Zou und Lee entwickelt [56]. Zou und Lee untersuchen eine 2-dimensionale Darstellung eines 3-dimensionalen n -symmetrischen Objekts auf verzerrte Rotationssymmetrien. Dabei gehen sie davon aus, dass alle Kanten und Ecken des Objekts im 2-dimensionalen Bild dargestellt sind und das 2-dimensionale Bild die orthogonale Parallelprojektion des Objekts ist.

Anders als in [53] wird in [56] auch ein Algorithmus angegeben, der die Projektionen von 3-dimensionalen (nicht nur 2-dimensionalen) Objekten auf verzerrte Symmetrien untersucht. Dabei wird untersucht, ob alle Punkte des Bildes in Teilmengen eingeteilt werden können, so dass die einzelnen Teilmengen eine verzerrte n -Symmetrie bezüglich einer gemeinsamen Rotationsachse besitzen.

Wir werden im Folgenden in einigen Punkten ähnliche Ideen wie Zou und Lee in ihrem Algorithmus benutzen, um auch verzerrten Punktmengen sinnvolle Symmetriewerte zuzuordnen.

6.1.1 Projektionen 2-dimensionaler Objekte

In diesem Abschnitt untersuchen wir die orthogonale Parallelprojektion einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, wobei alle Punkte von A in einer Objektebene E_O liegen. Für solche Punktmengen gilt das folgende Lemma:

Lemma 6.1. *Eine Punktmenge $A = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_m, y_m, z_m)\} \subset \mathbb{R}^3$ (wobei $(x_i, y_i, z_i) \neq SP(A) \forall i$ gilt) liege in einer Ebene E , das heißt:*

$$\exists e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R} \mid e_1 \cdot x_i + e_2 \cdot y_i + e_3 \cdot z_i + e_4 = 0 \quad \forall i = 1 : m.$$

Die Menge A sei exakt n -symmetrisch. Dann lässt sich A in k Partitionen A^1, \dots, A^k zerlegen, wobei

$$|A^j| = n \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \forall j = 1 : k$$

gilt. Außerdem gibt es für jede Partition A^j einen Kreis um den Mittelpunkt $SP(A)$, auf dem alle Punkte dieser Partition liegen.

Beweis

Nach Definition 5.10 ist eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ genau dann exakt n -symmetrisch, wenn sie durch eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ um eine Rotationsachse g auf sich selbst abgebildet wird. Liegen alle Punkte von A in einer Ebene E , so muss die Rotationsachse g senkrecht auf E stehen. Andernfalls würden alle Punkte $p_i \in A$ durch eine Rotation um $\alpha < 2\pi$ um g auf Bildpunkte p'_i abgebildet werden, die nicht in E liegen.

Da die Rotation also einer Rotation in der 2-dimensionalen Ebene E entspricht, muss der Schnittpunkt von g und E nach Lemma 2.10 gleich $SP(A)$ sein.

A wird durch die Rotation um $\frac{2\pi}{n}$ auf sich selbst abgebildet. Daher muss es für jeden Punkt $p_1^* \in A$ eine Folge von Punkten $\{p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*\} \subseteq A$ geben, so dass gilt:

$$rot_{\frac{2\pi}{n}}^g(p_i^*) = p_{i+1}^* \quad \forall i = 1 : n-1 \quad \wedge \quad rot_{\frac{2\pi}{n}}^g(p_n^*) = p_1^*.$$

Nach dieser Definition gilt für den minimalen Abstand $d(g, p_i^*)$ zwischen der Geraden g und dem Punkt p_i^* :

$$d(g, p_i^*) = d(g, rot_{\frac{2\pi}{n}}^g(p_i^*)).$$

Da g senkrecht auf E steht, gilt außerdem für alle $p_i \in A$:

$$d(g, p_i) = |SP(A) - p_i|.$$

Damit gilt:

$$|SP(A) - p_1^*| = |SP(A) - p_2^*| = \dots = |SP(A) - p_n^*|$$

und A lässt sich in die in Lemma 6.1 beschriebenen Partitionen zerlegen.

□

Die Punkte von A liegen also auf konzentrischen Kreisen um den Schwerpunkt von A . Welche Auswirkungen dies auf die Punktmenge hat, die die orthogonale Parallelprojektion von A ist, zeigen wir mit dem folgenden Satz:

Satz 6.2. *In einer Ebene $E_O := e_1x + e_2y + e_3z + e_4 = 0$ ($e_3 \neq 0 \wedge e_1^2 + e_2^2 > 0$, siehe Anmerkung) liegt um den Mittelpunkt $M = (m_x, m_y, \frac{-e_1m_x - e_2m_y - e_4}{e_3})$ ein Kreis K mit Radius k .*

Für jeden Punkt $p \in K$ gilt: Wird p durch eine orthogonale Parallelprojektion auf die Ebene $E_P : z = 1$ abgebildet, so liegt das Bild p' von p auf der Ellipse El mit der Gleichung:

$$El : \frac{\left((x - m_x) \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} - (y - m_y) \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2}{r_a^2} + \frac{\left((x - m_x) \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} + (y - m_y) \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2}{r_b^2} = 1.$$

Dabei gilt: $2r_a = 2k$ ist die Länge der Hauptachse von El und $2r_b = 2k \cos \alpha$ (α ist der Schnittwinkel zwischen E_O und E_P) ist die Länge der Nebenachse von El .

Beweis:

1. Bildpunkte:

Die orthogonale Parallelprojektion ist eine Abbildung vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2 . Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in die Ebene $E_P : z = 1$ projizieren, gilt für die Projektionsrichtung $v = (0, 0, 1)^T$. Damit wird ein Punkt $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$ auf den Punkt $p' = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ abgebildet.

Da wir nur Punkte betrachten, die in E_O liegen, können wir die z -Koordinate der Punkte als Funktion von x und y ausdrücken:

$$p = (p_x, p_y, p_z) \in E_O \Rightarrow p = (p_x, p_y, z(p_x, p_y)) \text{ mit } z(x, y) = \frac{-e_1x - e_2y - e_4}{e_3}.$$

Wir werden im Folgenden die Kreisgleichung K in Abhängigkeit von x und y aufstellen und zeigen, dass sie gleich der Ellipsengleichung El ist. Da die $(x|y)$ -Koordinaten von p und p' identisch sind, beweisen wir damit, dass das Bild von K unter der Projektion die Ellipse El ist.

2. Kreisgleichung:

Es gilt:

$$e_1m_x + e_2m_y + e_3 \frac{-e_1m_x - e_2m_y - e_4}{e_3} + e_4 = 0.$$

Damit ist $M \in E_O$ und K ist der Schnitt der Ebene E_O mit einer Kugel um M mit dem Radius k . Es ergibt sich die folgende Kreisgleichung:

$$K(x, y) : (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + \left(\frac{-e_1x - e_2y - e_4}{e_3} - \frac{-e_1m_x - e_2m_y - e_4}{e_3} \right)^2 = k^2,$$

$$K(x, y) : (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + \left(\frac{e_1(x - m_x) + e_2(y - m_y)}{e_3} \right)^2 = k^2.$$

Wir substituieren:

$$u := (x - m_x) \quad \wedge \quad v := (y - m_y)$$

und erhalten mit der binomischen Formel:

$$K(u, v) : u^2 \left(1 + \frac{e_1^2}{e_3^2} \right) + v^2 \left(1 + \frac{e_2^2}{e_3^2} \right) + \frac{2e_1 e_2 uv}{e_3^2} = k^2.$$

3. Schnittwinkel zwischen E_O und E_P :

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem Schnittwinkel zwischen den Normalen der Ebenen. Für den Winkel α zwischen zwei Normalen n_O und n_P gilt allgemein:

$$\alpha = \arccos \frac{n_O \cdot n_P}{|n_O| |n_P|}.$$

Damit folgt für den Schnittwinkel α zwischen E_O ($n_O = (e_1, e_2, e_3)^T$) und E_P ($n_P = (0, 0, 1)^T$):

$$\alpha = \arccos \frac{e_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}.$$

4. Ellipsengleichung:

Mit den Substitutionen $u := (x - m_x)$ und $v := (y - m_y)$ gilt für die Ellipsengleichung aus Satz 6.2:

$$\frac{\left(u \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} - v \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2}{k^2} + \frac{\left(u \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} + v \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2}{k^2 \left(\frac{e_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}} \right)^2} = 1.$$

Zur Vereinfachung substituieren wir:

$$\lambda := \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{e_3^2}$$

und erhalten:

$$\left(u \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} - v \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2 + \lambda \left(u \frac{e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} + v \frac{e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \right)^2 = k^2.$$

Nach Anwendung der binomischen Formeln führt das zu:

$$u^2 \frac{e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} - 2uv \frac{e_1 e_2}{e_1^2 + e_2^2} + v^2 \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2} + \lambda u^2 \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2} + 2\lambda uv \frac{e_1 e_2}{e_1^2 + e_2^2} + \lambda v^2 \frac{e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} = k^2,$$

$$u^2 \left(\frac{e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} + \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2} + (\lambda - 1) \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2} \right) + v^2 \left(\frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2} + \frac{e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} + (\lambda - 1) \frac{e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} \right) + 2uv(\lambda - 1) \frac{e_1 e_2}{e_1^2 + e_2^2} = k^2.$$

Da

$$\lambda - 1 = \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_3^2}$$

gilt, folgt:

$$El(u, v) : u^2 \left(1 + \frac{e_1^2}{e_3^2}\right) + v^2 \left(1 + \frac{e_2^2}{e_3^2}\right) + \frac{2e_1 e_2 uv}{e_3^2} = k^2.$$

Anhand der Umformungen sieht man, dass die Ellipsengleichung der Kreisgleichung entspricht. Damit liegt für jeden Punkt $p = (p_x, p_y, z(p_x, p_y))$, der die Kreisgleichung K erfüllt, das orthogonal parallelprojizierte Bild $p' = (p_x, p_y)$ auf der Ellipse El .

□

Anmerkung:

Gilt $e_3 = 0$, so steht E_O senkrecht auf E_P . Das Bild eines Kreises ist in diesem Fall eine Gerade.

Gilt $e_1 = e_2 = 0$, so liegen E_O und E_P parallel. Ein Kreis wird in diesem Fall durch eine orthogonale Parallelprojektion auf einen Kreis gleicher Größe abgebildet.

Das folgende Lemma zeigt, wie man von einer Ellipse als orthogonaler Parallelprojektion eines Kreises auf die Objektebene schließen kann:

Lemma 6.3. *Eine Ellipse El sei die orthogonale Parallelprojektion in die Projektionsebene E_P eines Kreises K , der in einer Objektebene E_O (E_O ist nicht parallel und nicht senkrecht auf E_P) liegt. Dann gilt:*

1. Die Schnittgerade g zwischen E_P und E_O liegt parallel zur Hauptachse von El .
2. Für den Winkel α zwischen E_P und E_O gilt:

$$\alpha = \arccos \frac{b}{a},$$

dabei ist a die Länge der Hauptachse und b die Länge der Nebenachse von El .

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $E_P : z = 1$ gilt.

1. g liegt parallel zur Hauptachse:

Ein Punkt $p = (p_x, p_y, p_z)$ liegt auf dem Kreis K mit dem Radius k um den Mittelpunkt $M = (m_x, m_y, m_z)$, wenn er die folgende Gleichung erfüllt:

$$K : (p_x - m_x)^2 + (p_y - m_y)^2 + (p_z - m_z)^2 = k^2.$$

Der Durchmesser d von K entspricht dem Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten p und $q = (q_x, q_y, q_z)$ auf K . Dabei sind p und q gegenüberliegend, wenn M auf der Geraden durch p und q liegt. Es gilt:

$$d = 2\sqrt{(p_x - m_x)^2 + (p_y - m_y)^2 + (p_z - m_z)^2} = 2k.$$

Der Abstand zwischen den jeweiligen Bildpunkten $p' = (p_x, p_y, 1)$ und $q' = (q_x, q_y, 1)$, also der Durchmesser $d_{El}(p_z)$ von El , ist hingegen nicht konstant sondern abhängig von der z -Koordinate ($p_z \in [m_z - k, m_z + k]$) von p :

$$d_{El}(p_z) = 2\sqrt{(p_x - m_x)^2 + (p_y - m_y)^2} = 2\sqrt{k^2 - (p_z - m_z)^2}.$$

Offensichtlich gilt:

$$d_{El}(m_z) = \max_{p_z} d_{El}(p_z) = 2k.$$

Für die Länge der Hauptachse gilt also $a = 2k$. Außerdem liegt die Hauptachse von El zwischen den Bildpunkten von p und q , wobei gilt: $p_z = q_z = m_z$. Damit liegen p und q auf der Schnittgeraden g' zwischen den Ebenen $E_O : e_1x + e_2y + e_3z + e_4 = 0$ und $z = m_z$:

$$g' : \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{e_3m_z + e_4}{e_2} \\ m_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, e_2 \neq 0).$$

Die Hauptachse von El liegt also auf der orthogonalen Parallelprojektion g'' von g' :

$$g'' : \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{e_3m_z + e_4}{e_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, e_2 \neq 0).$$

Für die Schnittgerade g zwischen $E_O : e_1x + e_2y + e_3z + e_4 = 0$ und $E_P : z = 1$ gilt:

$$g : \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{e_3 + e_4}{e_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, e_2 \neq 0).$$

Da g und g'' identische Richtungsvektoren haben, ist g parallel zur Hauptachse von El

2. $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$:

Wir bezeichnen die Endpunkte der Nebenachse mit $s' = (s_x, s_y, 1)$ und $t' = (t_x, t_y, 1)$. Dabei ist s' der Bildpunkt von $s = (s_x, s_y, s_z) \in K$ und t' der Bildpunkt von $t = (t_x, t_y, t_z) \in K$. s und t sind gegenüberliegend auf K , damit gilt für den Abstand $d(s, t)$ zwischen s und t : $d(s, t) = 2k = a$.

Die Nebenachse von El steht senkrecht auf der Hauptachse und damit auch auf g . Daher entspricht α dem Winkel beim Punkt s' im rechtwinkligen Dreieck $\triangle(s', t', u)$ mit $u := (t_x, t_y, 1 + t_z - s_z)$. Damit gilt zusammenfassend:

$$\cos \alpha = \frac{d(s', t')}{d(s', u)} = \frac{d(s', t')}{d(s, t)} = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{b}{a}.$$

□

Anmerkung:

Mit Hilfe von Lemma 6.3 lässt sich der Normalenvektor von E_O bestimmen (siehe Lemma

6.4). Das heißt, E_O ist bis auf eine parallele Verschiebung eindeutig. Die Bestimmung von verzerrten Symmetriewerten und damit auch die Zuordnung verzerrter approximativer Symmetrien ist unabhängig von parallelen Verschiebungen von E_O .

Das folgende Lemma gibt an, wie man mit Lemma 6.3 den Normalenvektor und damit auch eine Objektebene E_O bestimmen kann.

Lemma 6.4. *Für die zwei Ebenen*

$$E_P : z = 1,$$

$$E_O : -\beta x + y + \overbrace{\sqrt{\frac{b^2\beta^2 + b^2}{a^2 - b^2}}}^{=: \mu} z = 0, \quad a, b, \beta \in \mathbb{R} \quad a > b > 0$$

gilt:

1. Die Schnittgerade g zwischen E_P und E_O hat den Richtungsvektor v :

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Der Winkel α zwischen E_P und E_O ist gegeben durch:

$$\alpha = \arccos \frac{b}{a}.$$

Beweis:

E_P und E_O sind offensichtlich nicht identisch oder parallel und haben daher eine Schnittgerade g .

1. Wir definieren zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$p_1 = (1, \beta - \mu, 1), \quad p_2 = (2, 2\beta - \mu, 1).$$

Damit gilt:

$$p_1, p_2 \in E_P \wedge p_1, p_2 \in E_O.$$

Daraus folgt:

$$p_1, p_2 \in g.$$

Da außerdem $p_1 \neq p_2$ gilt, lässt sich die Schnittgerade g folgendermaßen darstellen:

$$g : \vec{p}_1 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta - \mu \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Für den Schnittwinkel zwischen E_P und E_O gilt allgemein:

$$\alpha = \arccos \frac{n_O \cdot n_P}{|n_O||n_P|}.$$

Dabei bezeichnet

$$n_P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den Normalenvektor von E_P und

$$n_O := \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ \sqrt{\frac{b^2\beta^2+b^2}{a^2-b^2}} \end{pmatrix}$$

den Normalenvektor von E_O . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos \frac{n_O \cdot n_P}{|n_O||n_P|} = \arccos \frac{\sqrt{\frac{b^2\beta^2+b^2}{a^2-b^2}}}{\sqrt{\beta^2 + 1 + \frac{b^2\beta^2+b^2}{a^2-b^2}}} = \\ &= \arccos \frac{b\sqrt{\frac{\beta^2+1}{a^2-b^2}}}{\sqrt{\frac{\beta^2 a^2 - \beta^2 b^2 + a^2 - b^2 + b^2 \beta^2 + b^2}{a^2 - b^2}}} = \arccos \frac{b\sqrt{\frac{\beta^2+1}{a^2-b^2}}}{a\sqrt{\frac{\beta^2+1}{a^2-b^2}}} = \arccos \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

Bestimmung der Ellipse

Aus den Lemmata 6.1 und 6.3 bzw. dem Satz 6.2 leiten wir unseren Algorithmus zur Erkennung verzerrter Symmetrien ab. Um zu untersuchen, ob einer Punktmenge A eine verzerrte n -Symmetrie zugeordnet werden kann, müssen wir zunächst überprüfen ob A in solche Partitionen (A^1, \dots, A^k) zerlegt werden kann, dass alle Punkte einer Partition auf einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $SP(A)$ liegen.

Dazu benötigen wir eine Methode, die aus einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ die Ellipse bestimmt, auf der die Punkte von A am ehesten liegen. Wir wollen hier die in [20] vorgestellte Methode anwenden, die auf dem folgenden Konzept beruht:

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes $K_a(x, y)$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$K_a(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \quad a \in \mathbb{R}^6.$$

Wir definieren $\delta := a_2^2 - 4a_1a_3$. Die nicht degenerierten Kegelschnitte, das heißt die Kegelschnitte, für die

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt, werden in drei Gruppen eingeteilt:

- Für $\delta < 0$ handelt es sich um eine Ellipse.
- Für $\delta = 0$ handelt es sich um eine Parabel.
- Für $\delta > 0$ handelt es sich um eine Hyperbel.

$K_a(p) = K_a(p_x, p_y)$ ist der algebraische Abstand zwischen dem Punkt $p = (p_x, p_y)$ und $K_a(x, y)$. Das Ziel der Ellipsenbestimmung ist es daher, für eine Punktmenge $A = \{p_1, \dots, p_m\}$ einen Vektor $a \in \mathbb{R}^6$ zu finden, der die aufsummierten Abstandsquadrate

$$D(a) = \sum_{i=1}^m (K_a(p_i))^2$$

minimiert.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass $|A| \geq 5$ gilt. Für eine Punktmenge A mit $3 \leq |A| \leq 4$ lassen sich mit dem Wissen, dass $SP(A)$ der Mittelpunkt der Ellipse El sein muss, aus A weitere Punkte konstruieren, die auf El liegen müssen.

Um sicher zu gehen, dass man weder die triviale Lösung $a = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ noch eine Parabel oder Hyperbel als Lösung erhält, wird $D(a)$ unter der quadratischen Nebenbedingung

$$4a_1a_3 - a_2^2 = 1$$

minimiert.

Dieses Problem lässt sich folgendermaßen darstellen:

OP 4:

$$\min_a \|Ea\|^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung: } a^T C a = 1.$$

Dabei gilt für die Design-Matrix E und die Constraint-Matrix C :

$$E = \begin{bmatrix} (p_1)_x^2 & (p_1)_x(p_1)_y & (p_1)_y^2 & (p_1)_x & (p_1)_y & 1 \\ (p_2)_x^2 & (p_2)_x(p_2)_y & (p_2)_y^2 & (p_2)_x & (p_2)_y & 1 \\ (p_3)_x^2 & (p_3)_x(p_3)_y & (p_3)_y^2 & (p_3)_x & (p_3)_y & 1 \\ \dots & & & & & \\ (p_m)_x^2 & (p_m)_x(p_m)_y & (p_m)_y^2 & (p_m)_x & (p_m)_y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Führt man den Lagrange-Multiplikator λ ein, erhält man die zu minimierende Funktion $\|Ea\|^2 + \lambda(1 - a^T C a)$, und damit ist die Lösung von **OP 4** die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2E^T E a - 2\lambda C a &= 0, \\ a^T C a &= 1. \end{aligned}$$

Mit $S := E^T E$ folgt:

$$\begin{aligned} S a &= \lambda C a, \\ a^T C a &= 1. \end{aligned}$$

Man muss also das allgemeine Eigenwertproblem der symmetrischen Matrizen $S, C \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ lösen. Daraus erhält man sechs Paare (λ_i, u_i) von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Ist (λ_i, u_i) eine Lösung, so gilt das auch für $(\lambda_i, \mu_i u_i)$ ($\mu_i \in \mathbb{R}$) und daher lassen sich die Eigenvektoren so normieren, dass sie die Nebenbedingung $\mu_i^2 u_i^T C u_i = 1$ erfüllen. Dazu muss gelten:

$$\mu_i = \sqrt{\frac{1}{u_i^T C u_i}} = \sqrt{\frac{\lambda_i}{u_i^T S u_i}}.$$

Damit erhalten wir für jedes der sechs Eigenwert-Eigenvektor-Paare (λ_i, u_i) eine Lösung $\tilde{a}_i = \mu_i u_i$ des Gleichungssystems, wenn die Wurzel $\sqrt{\frac{1}{u_i^T C u_i}}$ existiert.

Da S positiv definit ist, existiert die Wurzel für alle positiven λ_i . Die Vorzeichen der Eigenwerte λ_i sind dabei, bis auf eine Permutation der Indizes, identisch zu den Vorzeichen der Eigenwerte von C ($\{-2, -1, 2, 0, 0, 0\}$). Damit existiert genau ein Paar (λ_{i^*}, u_{i^*}) , für das $\lambda_{i^*} > 0$ gilt und $\tilde{a} := \mu_{i^*} u_{i^*}$ ist die eindeutige Lösung von **OP 4**.

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Algorithmus:

Algorithmus: Ellipse

Eingabe: $A = \{(p_1)_x, (p_1)_y), \dots, ((p_n)_x, (p_n)_y)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Ausgabe: Gleichung der Ellipse El , auf der A näherungsweise liegt.

1.

$$E := \begin{bmatrix} (p_1)_x^2 & (p_1)_x(p_1)_y & (p_1)_y^2 & (p_1)_x & (p_1)_y & 1 \\ (p_2)_x^2 & (p_2)_x(p_2)_y & (p_2)_y^2 & (p_2)_x & (p_2)_y & 1 \\ (p_3)_x^2 & (p_3)_x(p_3)_y & (p_3)_y^2 & (p_3)_x & (p_3)_y & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p_m)_x^2 & (p_m)_x(p_m)_y & (p_m)_y^2 & (p_m)_x & (p_m)_y & 1 \end{bmatrix},$$

$$S := E^T E \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (λ_i, u_i) ($i = 1 : 6$) := Eigenwert/Eigenvektorpaare für: $Su_i = \lambda_i C u_i$

3. FÜR $i=1:6$:

WENN $\lambda_i > 0$:

$$a := \sqrt{\frac{1}{u_i^T C u_i}} u_i.$$

AUSGABE: $El : a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0$.

Um Informationen über die Objektebene E_O zu gewinnen, muss man nun die Längen und die Lagen der Haupt- und Nebenachse aus der Ellipsengleichung bestimmen. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 6.5. Gegeben sei eine Ellipse mit der Gleichung:

$$K_a(x, y) : a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0.$$

Dann gilt für

•

$$L := \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & a_3 \end{bmatrix},$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, sind die Eigenwerte von L und $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^2$ die dazugehörigen normierten Eigenvektoren,

•

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix},$$

•

$$\nu := a_6 - \frac{c_1^2}{4\lambda_1} - \frac{c_2^2}{4\lambda_2} \neq 0:$$

Die Längen der Hauptachsen betragen $2 \cdot \sqrt{|\frac{\nu}{\lambda_1}|}$ und $2 \cdot \sqrt{|\frac{\nu}{\lambda_2}|}$. Außerdem hat die Gerade, auf der die Hauptachse von $K_a(x, y)$ liegt, die Steigung: $\beta = \frac{v_2^1}{v_1^1}$.

Beweis:

Die Ellipsengleichung wird durch eine Hauptachsentransformation auf ihre Normalform gebracht, aus der sich die Längen und Lagen der Achsen ablesen lassen. Zunächst schreiben wir unsere Ausgangsgleichung

$$K_a(x, y) : a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0$$

in eine Gleichung in Matrixform um:

$$K_a(x, y) : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & a_3 \end{bmatrix}}{=L} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a_6 = 0.$$

Da $K_a(x, y)$ eine Ellipse beschreibt, gilt $a_2^2 - 4a_1a_3 < 0$ und damit auch

$$|L| = a_1a_3 - \frac{a_2^2}{4} > 0.$$

Daher besitzt L zwei Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Nummerierung so, dass $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ gilt) und die dazugehörigen normierten Eigenvektoren $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^2$, die die Gleichung $Lv^i = \lambda_i v^i$ erfüllen und so skaliert werden, dass

$$|Q| := \left| \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{bmatrix} \right| \geq 0$$

gilt. Mit

$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

folgt dann:

$$L \cdot Q = \begin{bmatrix} a_1v_1^1 + a_2v_2^1 & a_1v_1^2 + a_2v_2^2 \\ a_2v_1^1 + a_3v_2^1 & a_2v_1^2 + a_3v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^1\lambda_1 & v_1^2\lambda_2 \\ v_2^1\lambda_1 & v_2^2\lambda_2 \end{bmatrix} = Q \cdot D.$$

Q besteht aus den Eigenvektoren der reellen symmetrischen Matrix L und ist daher eine orthogonale Matrix (d.h. $Q^T = Q^{-1}$). Daraus folgt:

$$Q^T L Q = D.$$

Als nächstes substituieren wir:

$$\begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} Q^T.$$

Damit folgt aus der Ellipsengleichung:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} Q^T L Q \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} a_4 & a_5 \end{bmatrix} Q}^{=:c} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + a_6 = 0 &\Rightarrow \\ \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + a_6 = 0. \end{aligned}$$

Anschließend wird ausmultipliziert und umgeformt:

$$\begin{aligned} u^2 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + c_1 u + c_2 w + a_6 = 0 &\Rightarrow \\ \lambda_1 \left(u^2 + \frac{c_1}{\lambda_1} u + \frac{c_1^2}{4\lambda_1^2} - \frac{c_1^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(w^2 + \frac{c_2}{\lambda_2} w + \frac{c_2^2}{4\lambda_2^2} - \frac{c_2^2}{4\lambda_2^2} \right) + a_6 = 0 &\Rightarrow \\ \lambda_1 \left(u + \frac{c_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(w + \frac{c_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \overbrace{a_6 - \frac{c_1^2}{4\lambda_1} - \frac{c_2^2}{4\lambda_2}}^{=:v} = 0 &\Rightarrow \\ \frac{\lambda_1}{v} \left(u + \frac{c_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \frac{\lambda_2}{v} \left(w + \frac{c_2}{2\lambda_2} \right)^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Normalform der Ellipsengleichung, deren Hauptachse parallel zur x -Achse liegt.

$$-\operatorname{sgn}\left(\frac{v}{\lambda_1}\right) \frac{\left(u + \frac{c_1}{2\lambda_1}\right)^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{v}{\lambda_1}\right|}\right)^2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{v}{\lambda_2}\right) \frac{\left(w + \frac{c_2}{2\lambda_2}\right)^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{v}{\lambda_2}\right|}\right)^2} = 1.$$

Aus der Normalform lassen sich die Längen der Hauptachse ($2 \cdot \sqrt{\left|\frac{v}{\lambda_1}\right|}$) und der Nebenachse ($2 \cdot \sqrt{\left|\frac{v}{\lambda_2}\right|}$) ablesen.

Da v^1 und v^2 normiert sind, gilt: $\det(Q) \in \{-1, 1\}$. Außerdem sind die Eigenvektoren so skaliert, dass $\det(Q) > 0$ gilt. Es folgt also $\det(Q) = 1$ und mit $Q^T \cdot Q = I$:

$$Q \in SO(2).$$

Daher ist Q eine Rotationsmatrix und lässt sich als

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

schreiben. Durch die Substitution

$$\begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q$$

wurde das Koordinatensystem also um den Winkel α gedreht und damit gilt für die Steigung β der Hauptachse von $K_a(x, y)$:

$$\beta = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{v_2^1}{v_1^1}.$$

□

Bestimmung der Partitionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage widmen, wie man aus einer Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ möglichst effektiv alle Partitionen bestimmen kann, um B auf approximative verzerrte Symmetrien zu untersuchen. Wir beweisen dazu das folgende Lemma:

Lemma 6.6. *Eine Punktmenge $B = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\} \subset \mathbb{R}^2$ sei die orthogonale Parallelprojektion einer n -symmetrischen Punktmenge $A = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_m, y_m, z_m)\} \subset \mathbb{R}^3$, die in einer Ebene liegt. Dann lässt sich B in k Partitionen B^1, \dots, B^k zerlegen, wobei*

$$|B^j| = n \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \forall j = 1 : k$$

gilt. Außerdem gibt es für jede Partition B^j eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $SP(B^j) = SP(B)$, auf dem alle Punkte dieser Partition liegen.

Beweis:

Aus Lemma 6.1 wissen wir, dass sich die Punkte einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, die in einer Ebene liegt, in Partitionen A^1, \dots, A^k zerlegen lässt, so dass einerseits

$$|A^j| = n \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \forall j = 1 : k$$

gilt und andererseits alle Punkte einer Partition auf einem Kreis um $SP(A) =: (m_x, m_y, m_z)$ liegen.

Zerlegt man B in solche Partitionen B^1, \dots, B^k , dass für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ die Partition B^j die Projektion von A^j ist, so folgt einerseits:

$$|B^j| = n \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \forall j = 1 : k$$

und andererseits aus Satz 6.2, dass es für jede Partition B^j eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $SP(B) = (m_x, m_y)$ gibt, auf dem alle Punkte dieser Partition liegen.

Da jede Partition alleine ebenfalls eine n -symmetrische Punktmenge ist (siehe Beweis von Lemma 6.1), erhält man:

$$SP(A^1) = SP(A^2) = \dots = SP(A^k) = SP(A).$$

Daraus folgt:

$$SP(B^1) = SP(B^2) = \dots = SP(B^k) = SP(B).$$

□

Des Weiteren gilt das folgende Lemma:

Lemma 6.7. *$B \subset \mathbb{R}^2$ sei die orthogonale Parallelprojektion einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset E_O \subset \mathbb{R}^3$, die sich in k n -symmetrische Partitionen A^1, \dots, A^k mit $|A^i| = n \ \forall i = 1 : k$ zerlegen lässt. Dann lassen sich die Punkte in $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ so nummerieren und in solche Partitionen B^1, \dots, B^k zerlegen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. B^i ist die orthogonale Parallelprojektion von A^i für alle $i = 1 : k$.
2. Die Punkte b_1, \dots, b_m sind (um $SP(B)$) im Uhrzeigersinn nummeriert.
- 3.

$$B^i = \{b_{i+0 \cdot k}, \dots, b_{i+(n-1) \cdot k}\} \quad \forall i = 1 : k.$$

Beweis:

Die Bedingungen 1 und 2 sind offensichtlich leicht zu erfüllen. Was wir beweisen müssen, ist dass bei der Einteilung in Partitionen unter der Bedingung 1 und bei der Nummerierung der Punkte unter der Bedingung 2 auch die Bedingung 3 erfüllt werden kann:

Da alle Partitionen A^i n -symmetrisch sind, liegen für jede Partition A^i ($i \in \{1, \dots, k\}$) die Punkte a_1^i, \dots, a_n^i auf einem Kreis um $SP(A)$, und sind diese Punkte im Uhrzeigersinn nummeriert, so ist außerdem in jedem Dreieck

$$\Delta_{a_j^i a_{j+1}^i SP(A)} \quad (i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\})$$

der Winkel bei $SP(A)$ gleich $\frac{2\pi}{n}$.

Da A in einer Ebene E_O liegt, lassen sich auch alle Punkte $\{a_1, \dots, a_m\} = A$ im Uhrzeigersinn um $SP(A)$ nummerieren, und aufgrund der Identität der Winkel bei $SP(A)$ in allen Dreiecken $\Delta_{a_j^i a_{j+1}^i SP(A)}$, gilt:

$$A^i = \{a_{i+0 \cdot k}, \dots, a_{i+(n-1) \cdot k}\} \quad \forall i = 1 : k.$$

Um zu zeigen, dass die entsprechende Bedingung 3 auch für die orthogonale Parallelprojektion B von A erfüllt ist, müssen wir beweisen, dass

$$\angle_{p_1 p_4 p_2} < \angle_{p_1 p_4 p_3} < \pi \quad \Rightarrow \quad \angle_{p'_1 p'_4 p'_2} < \angle_{p'_1 p'_4 p'_3}$$

gilt, wenn $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^3$ in einer Ebene liegen und $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 \in \mathbb{R}^2$ die entsprechenden Bildpunkte unter der orthogonalen Parallelprojektion sind.

Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden $g_{p_2 p_4}$ und $h_{p_1 p_3}$ mit x . Aus

$$\angle_{p_1 p_4 p_2} < \angle_{p_1 p_4 p_3} < \pi$$

folgt:

$$x \in [p_1 p_3].$$

x' sei analog der Schnittpunkt zwischen $g'_{p'_2 p'_4}$ und $h'_{p'_1 p'_3}$. Da Inzidenzen zwischen Geraden bzw. Strecken und Punkten unter einer parallelen Projektion von E_O in E_P erhalten bleiben, gilt: x' ist das Bild von x unter der orthogonalen Parallelprojektion und

$$x \in [p_1 p_3] \quad \Rightarrow \quad x' \in [p'_1 p'_3].$$

Daraus folgt:

$$\angle_{p_1 p_4 p_2} < \angle_{p_1 p_4 p_3} < \pi \Rightarrow \angle_{p'_1 p'_4 p'_2} < \angle_{p'_1 p'_4 p'_3}.$$

□

Aus den Lemmata 6.6 und 6.7 ergibt sich unser Algorithmus zur Bestimmung der möglichen Partitionen einer Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich einer n -Symmetrie. Dabei wird berücksichtigt, dass für alle Partitionen B^j ($j = 1 : k$) gelten muss:

$$|B^j| = n \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \forall j = 1 : k.$$

Da wir nicht nach exakten, sondern nach approximativen verzerrten Symmetrien suchen, benötigen wir eine Schranke $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ für die maximale Ungenauigkeit.

Algorithmus: Partitionen

Eingabe: $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^2$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: Partitionen B^1, \dots, B^k

1. $n := 3$, $M := SP(B)$.
 $B := \{b_1, \dots, b_m\}$ um M im Uhrzeigersinn nummeriert.
2. $k := \frac{m}{n}$.
3. WENN $k \in \mathbb{N}$:
 $B^i := \{b_{i+0 \cdot k}, \dots, b_{i+(n-1) \cdot k}\} \quad \forall i = 1 : k$
SONST:
AUSGABE: Keine Partitionen für n ! Gehe zu 5.
4. WENN $|SP(B^i) - SP(B)| < \epsilon \quad \forall i = 1 : k$:
AUSGABE: B^1, \dots, B^k sind die Partitionen für n .
SONST:
AUSGABE: Keine Partitionen für n !
5. WENN $n < n, m$:
 $n := n + 1$ und gehe zu 2.

Anmerkung:

Da man zur Bestimmung der Ellipse mit dem Algorithmus **Ellipse** (siehe oben) eine Punktmenge B mit $|B| > 2$ benötigt, suchen wir nur nach Partitionen B^i , für die $|B^i| > 2$ gilt.

Algorithmus: Verzerrte Symmetrienerkennung

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gezeigt, dass sich eine Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$, die die orthogonale Parallelprojektion einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset E_O \subset \mathbb{R}^3$ ist, in Partitionen mit bestimmten Eigenschaften zerlegen lässt (siehe Lemmata 6.1, 6.6, Satz 6.2). Außerdem haben wir einen Algorithmus entworfen, der für eine Punktmenge

$B \subset \mathbb{R}^2$ die Ellipse findet, auf der die Punkte von B am ehesten liegen (siehe Algorithmus Ellipse), und wir haben gezeigt, wie wir aus der Ellipsengleichung die Längen und Lagen der Hauptachsen bestimmen können (siehe Lemma 6.5). Die Lemmata 6.3 und 6.4 geben schließlich an, wie man aus Längen und Lagen der Hauptachsen die Ebene (bis auf eine parallele Verschiebung) bestimmen kann, in der die projizierte Punktmenge A sein kann, wenn sie n -symmetrisch ist.

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Algorithmus, mit dem wir Punkt Mengen auf verzerrte Symmetrien untersuchen. Dabei gehen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, dass die zu untersuchende Punktmenge B die orthogonale Parallelprojektion einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ in die Ebene $E_P : z = 1$ ist:

Algorithmus: Verzerrte Symmetrieeerkennung

Eingabe: $B \subset \mathbb{R}^2$, $dcon \in \mathbb{R}^+$, $nma \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: Verzerrte Symmetrieeigenschaften von B .

1. $\tilde{B} := \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\} := \text{Eckpunkte}(B, dcon)$.
2. $(\tilde{B}_3^1, \dots, \tilde{B}_3^k), \dots, (\tilde{B}_{nma}^1, \dots, \tilde{B}_{nma}^k) := \text{Partitionen}(\tilde{B}, nma, \epsilon)$.
 $n := 3$.
3. WENN $\tilde{B}_n^1, \dots, \tilde{B}_n^k \neq \emptyset$:
 $El := \text{Ellipse}(\tilde{B}_n^1)$.
 SONST:
 Gehe zu 8.
4. $a :=$ Länge der Hauptachse von El ,
 $b :=$ Länge der Nebenachse von El ,
 $\beta :=$ Steigung der Hauptachse von El (aus Lemma 6.5).
5. $E_O : -\beta x + y + \sqrt{\frac{b^2 \beta^2 + b^2}{a^2 - b^2}} z = 0$.
6. $\tilde{A} := \{(x_1, y_1, \frac{\beta x_1 - y_1}{\mu}), \dots, (x_m, y_m, \frac{\beta x_m - y_m}{\mu})\}$.
 $g : SP(\tilde{A}) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
 $d_2(\tilde{A}, g), \dots, d_8(\tilde{A}, g), d_n(\tilde{A}, g) := \text{Symmetriewerte}(\tilde{A}, g)$.
7. $\Delta_{2, \dots, 8}^n(\tilde{A}, g) := \max_{k \in \{2, \dots, 8\} \setminus \{l \mid n \bmod l = 0\}} \frac{d_n(\tilde{A}, g)}{d_k(\tilde{A}, g)} \cdot 100$.
 WENN $\Delta_{2, \dots, 8}^n(\tilde{A}, g) < 25$:
 AUSGABE: B ist approximativ verzerrt n -symmetrisch.
8. WENN $n < nma$:
 $n := n + 1$ und gehe zu 3.

Anmerkung:

Zur Berechnung der Symmetriewerte in Schritt 6 muss \tilde{A} in der Ebene E_O um den Schwerpunkt von \tilde{A} gedreht werden. Das entspricht im \mathbb{R}^3 einer Rotation um die Gerade g , deren Aufpunkt $SP(\tilde{A})$ und deren Richtungsvektor der Normalenvektor von E_O ist.

Beispiele

Im Folgenden soll der Algorithmus `Verzerrte Symmetrierkennung` anhand von Beispielen illustriert werden.

Reguläres Sechseck

Schritt 1:

Wir betrachten die orthogonale Parallelprojektion eines regulären Sechsecks, das in einer Ebene E_O im Raum \mathbb{R}^3 liegt (Abbildung 6.2). Durch Einführung eines Koordinatensystems stellen wir diese Fläche durch eine Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ dar, die alle ganzzahligen Koordinaten innerhalb der Fläche umfasst. Anschließend bestimmen wir mit dem Algorithmus `Eckpunkte` ($dcon = 2$) die Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{B} := \{b_1, \dots, b_6\} \subset B$ (Abbildung 6.3).

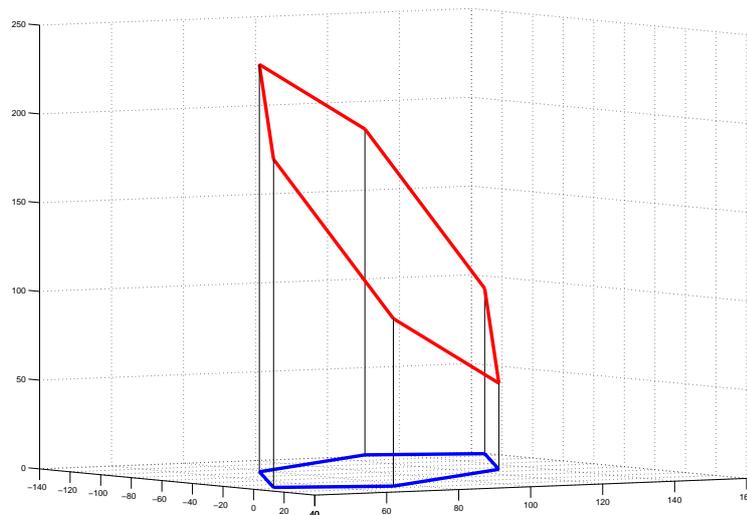


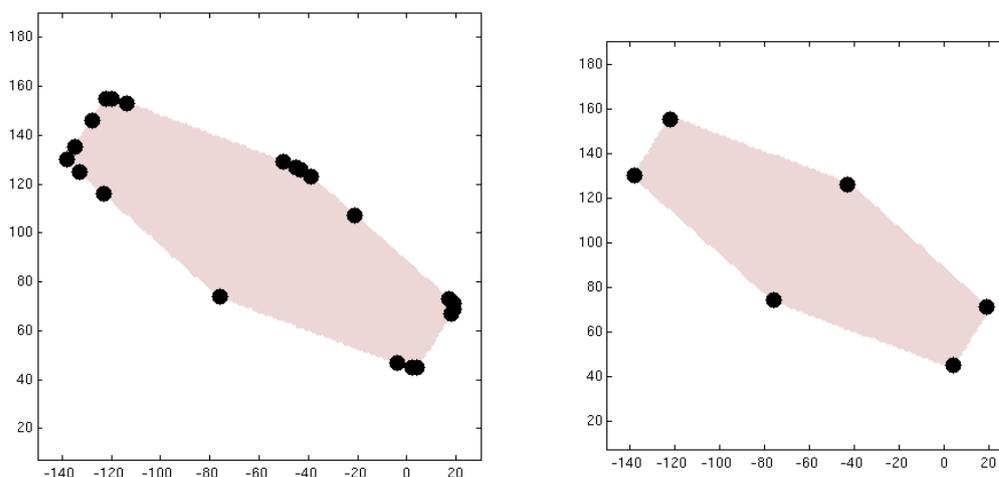
Abbildung 6.2: Reguläres Sechseck und Projektion

Schritt 2:

Mit dem Algorithmus `Partitionen` ($nma = 12, \epsilon = 2$) wird ermittelt, dass es für $n = 3$ ($\tilde{B}^1 = \{b_1, b_3, b_5\}$, $\tilde{B}^2 = \{b_2, b_4, b_6\}$) und $n = 6$ ($\tilde{B}^1 = \{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_6\}$) Partitionen gibt.

Schritt 3:

Für $n = 6$ gilt: $\tilde{B} = \tilde{B}^1$. Mit dem Algorithmus `Ellipse` (Eingabe \tilde{B}) wird die Ellipse El


 (a) $B_K \subset B$

 (b) $\tilde{B} \subset B$

Abbildung 6.3: Extremalpunkte bzw. Charakteristische Eckpunkte

bestimmt (Abbildung 6.4). Es gilt (Zahlen gerundet):

$$El : -0.0105x^2 - 0.0242xy - 0.0236y^2 + 1.1741x + 3.2828y - 100 = 0.$$

Schritt 4:

Nach Lemma 8.3 berechnen wir (Ellipsengleichung durch 100 dividiert):

$$\lambda_1 = -0.0000329, \quad \lambda_2 = -0.0003082, \quad v^1 = \begin{bmatrix} -0.8591 \\ 0.5119 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0.5119 \\ 0.8591 \end{bmatrix}.$$

$$c_1 = 0.0067, \quad c_2 = 0.0342, \quad \nu = 0.2921.$$

Daraus ergibt sich:

$$a = 94.22, \quad b = 30.78, \quad \beta = -0.5959.$$

Schritt 5:

Wir stellen die Gleichung der Objektebene E_O auf:

$$E_O : -\beta x + y + \mu z = 0, \quad \text{mit: } \mu = \sqrt{\frac{b^2\beta^2 + b^2}{a^2 - b^2}} = 0.4024.$$

Schritt 6:

Aus $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\} := \tilde{B}$ bilden wir die Punktmenge \tilde{A} (siehe Abbildung 6.5)

$$\tilde{A} := \left\{ \left(x_1, y_1, \frac{\beta x_1 - y_1}{\mu} \right), \dots, \left(x_m, y_m, \frac{\beta x_m - y_m}{\mu} \right) \right\}$$

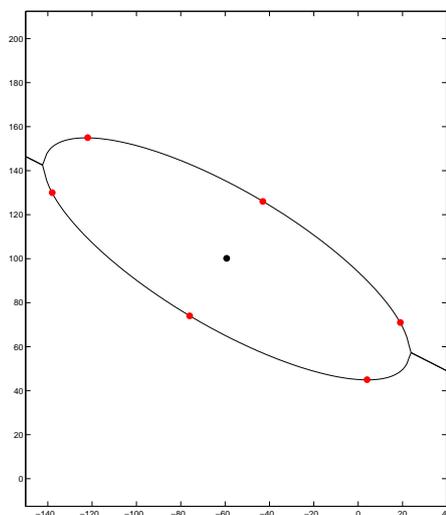


Abbildung 6.4: \tilde{B} , $SP(\tilde{B})$, El

und berechnen die Symmetriewerte $d_2(\tilde{A}, g), \dots, d_8(\tilde{A}, g)$ (siehe Abbildung 6.6) bezüglich der Rotation um die Gerade

$$g : SP(\tilde{A}) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Schritt 7:

Es gilt:

$$\Delta_{2,\dots,8}^6(\tilde{A}, g) = 15.6 < 25.$$

Daher wird der Punktmenge B eine approximative verzerrte 6-Symmetrie zugeordnet.

Anmerkung:

Obwohl $d_2(\tilde{A}) < d_3(\tilde{A}) < d_6(\tilde{A})$ gilt, wird \tilde{A} , und damit auch B , wegen

$$\Delta_{2,\dots,8}^2(\tilde{A}) = 43.8 > 25 \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{2,\dots,8}^3(\tilde{A}) = 90.8 > 25$$

nur die höchste Symmetrieordnung $n = 6$ zugeordnet, die ja sowohl eine 2- als auch eine 3-Symmetrie impliziert.

5-symmetrisches Zehneck

Im vorangegangenen Beispiel wurde aus den sechs Punkten von \tilde{B} nur eine Partition $\tilde{B}^1 = \tilde{B}$ gebildet. Warum es in anderen Fällen wichtig sein kann, die Punktmenge \tilde{B} in mehrere Partitionen zu zerlegen, werden wir anhand eines weiteren Beispiels illustrieren:

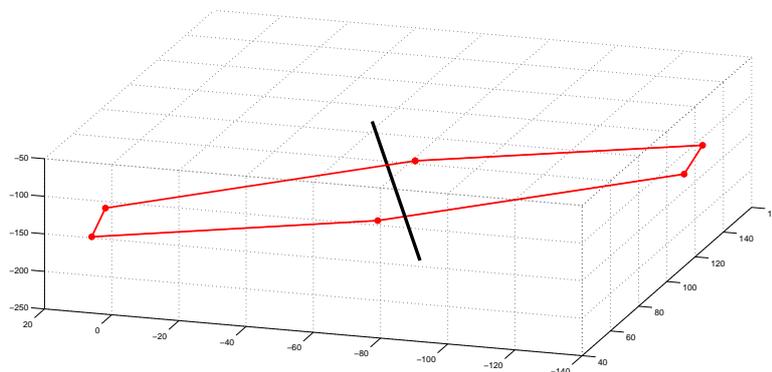


Abbildung 6.5: \tilde{A}, g

n	$d_n(\tilde{A})$
2	3.9
3	8.9
4	212.6
5	84.1
6	9.8
7	63.0
8	109.0
$\Delta_{2,\dots,8}^6$	15.6

Abbildung 6.6: Symmetriewerte

Schritt 1:

Wir betrachten die orthogonale Parallelprojektion eines Zehnecks, das 5- aber nicht 10-symmetrisch ist und in einer Ebene E_O im Raum \mathbb{R}^3 liegt (Abbildung 6.7). Die darstellende Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ der orthogonalen Parallelprojektion, sowie die Menge der Charakteristischen Eckpunkte $\tilde{B} := \{b_1, \dots, b_{10}\} \subset B$ von B ($dcon = 2$) sehen wir in Abbildung 6.8.

Schritt 2+3:

Mit dem Algorithmus `Partitionen` ($nma = 12, \epsilon = 2$) wird ermittelt, dass es für $n = 5$ ($\tilde{B}^1 = \{b_1, b_3, \dots, b_9\}$, $\tilde{B}^2 = \{b_2, b_4, \dots, b_{10}\}$) und $n = 10$ ($\tilde{B}^3 = \{b_1, \dots, b_{10}\}$) Partitionen gibt. Da die entsprechenden Eckpunkte des projizierten Zehnecks nicht auf einem Kreis liegen, kann man auch nicht erwarten, dass die Punkte von \tilde{B}^1 und die Punkte von \tilde{B}^2 auf einer gemeinsamen Ellipse liegen. In Abbildung 6.9 ist die Ellipse El eingezeichnet, die man mit dem Algorithmus `Ellipse` (Eingabe: \tilde{B}^1) erhält. Offensichtlich liegen die Punkte aus \tilde{B}^2 nicht auf El .

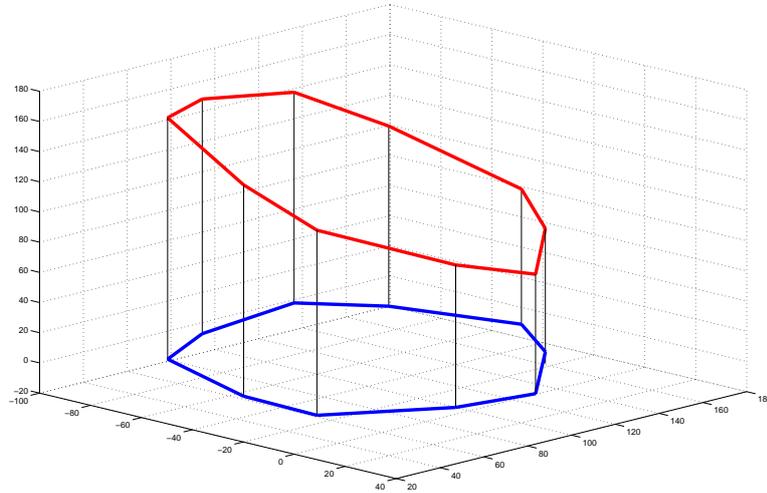
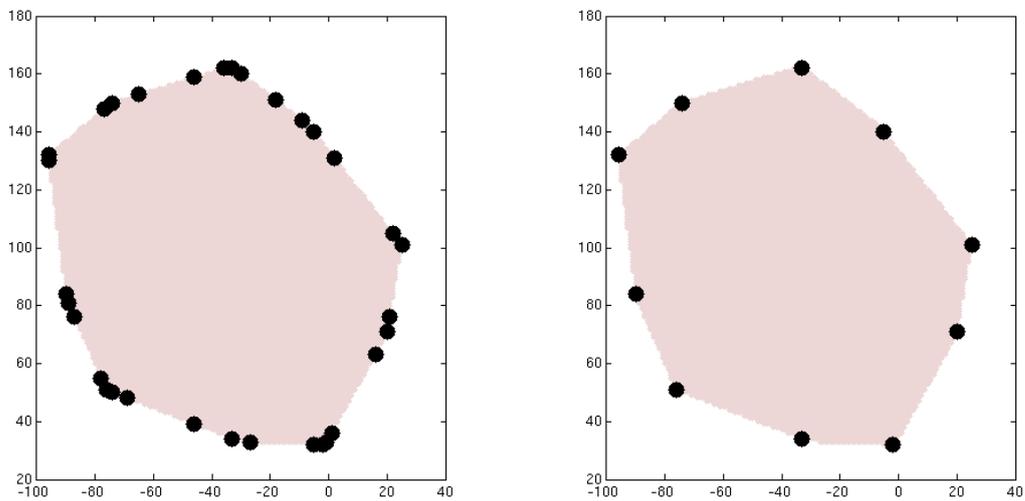


Abbildung 6.7: 5-symmetrisches Zehneck und Projektion



(a) $B_K \subset B$

(b) $\tilde{B} \subset B$

Abbildung 6.8: Extrempunkte bzw. Charakteristische Eckpunkte

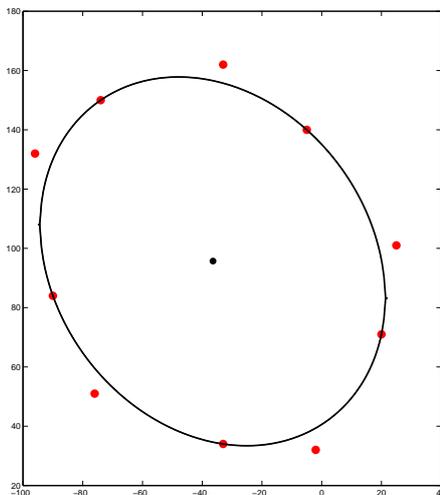


Abbildung 6.9: \tilde{B} , $SP(\tilde{B})$, El

Schritt 4+5+6+7:

Aus El werden β und μ bestimmt und die Punktmenge \tilde{A} wird gebildet:

$$\tilde{A} := \left\{ (x_1, y_1, \frac{\beta x_1 - y_1}{\mu}), \dots, (x_m, y_m, \frac{\beta x_m - y_m}{\mu}) \right\}.$$

Die Symmetrie- und Eindeutigkeitswerte sind in Abbildung 6.10 aufgelistet. Der Punktmenge B wird korrekterweise eine approximative verzerrte 5- (und keine 10-) Symmetrie zugeordnet.

n	$d_n(\tilde{A})$
2	97.2
3	149.4
4	197.7
5	13.7
6	131.6
7	183.0
8	126.3
9	101.8
10	97.0
11	99.9
12	108.3
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	14.1
$\Delta_{2,\dots,8}^{10}$	76.8

Abbildung 6.10: Symmetriewerte

Stopp-Schild

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir den Begriff der verzerrten Symmetrie anhand des Fotos eines Stopp-Schildes illustriert (siehe Abbildung 6.1). Wir stellen die zusammenhängende rote Fläche des Stopp-Schildes mit der in Kapitel 2 eingeführten Methode durch eine Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ dar (siehe Abbildung 6.11) und bestimmen mit dem Algorithmus *Verzerrte Symmetrienerkennung* (Eingabe: B , $dcon = 2$, $nma = 12$, $\epsilon = 2$) die Symmetriewerte der entzerrten Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} , die wir in Abbildung 6.12 mit den Symmetriewerten für die nicht entzerrten Charakteristischen Eckpunkte \tilde{B} vergleichen.

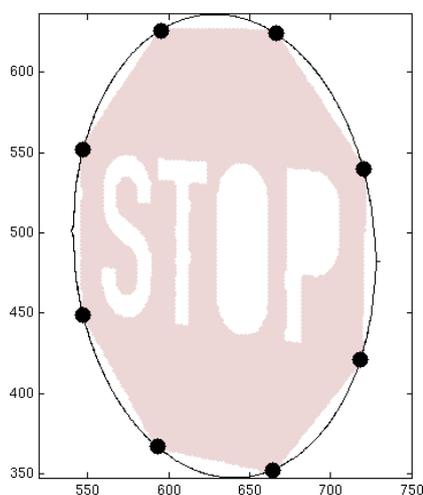


Abbildung 6.11: $\tilde{B} \subset B$, El

n	$d_n(\tilde{A})$	$d_n(\tilde{B})$
2	65.4	65.3
3	256.9	378.2
4	43.1	415.6
5	307.4	468.8
6	254.1	375.7
7	109.2	318.9
8	26.6	293.6
9	86.8	286.7
10	153.6	290.2
11	208.9	299.8
12	255.3	314.4
$\Delta_{2,\dots,8}^8$	24.4	92.1

Abbildung 6.12: Symmetriewerte

Der Algorithmus erkennt die approximative verzerrte 8-Symmetrie der Abbildung des Schildes, obwohl Ungenauigkeiten durch die Darstellung und durch die Annahme der orthogonalen Parallelprojektion zu erwarten waren. Im Vergleich dazu ist die Punktmenge nicht approximativ (unverzerrt) 8-symmetrisch.

6.1.2 Projektionen 3-dimensionaler Objekte

Im vorangegangenen Abschnitt sind wir davon ausgegangen, dass die projizierte Punktmenge A zwar eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 ist, dass aber alle Punkte von A in einer Ebene $E_O \subset \mathbb{R}^3$ liegen. Nun wollen wir uns damit beschäftigen, wie man verzerrte Symmetrien von einer Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ erkennen kann, die die orthogonale Parallelprojektion einer beliebigen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist.

Aus Definition 5.10 wissen wir, dass eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ genau dann exakt n -symmetrisch ist, wenn es eine Rotationsachse g gibt, sodass A durch eine Rotation um g um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ auf sich selbst abgebildet wird. Damit lässt sich das folgende Lemma beweisen:

Lemma 6.8. *$A \subset \mathbb{R}^3$ sei eine n -symmetrische Punktmenge ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) bezüglich der Rotationsachse g . Dann lässt sich A in Partitionen A^1, \dots, A^k zerlegen, so dass für alle $j = 1 : k$ gilt:*

$SP(A^j) \in g$ und entweder alle Punkte aus A^j liegen auf g , oder alle Punkte aus A^j liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt $SP(A^j)$ in einer Ebene E_O^j (mit $(E_O^j \perp g)$ und $|A^j| = n$).

Beweis:

Für jeden Punkt $a_i \in A$ gilt: Er wird durch die Rotation um g entweder auf sich selbst oder auf einen anderen Punkt $a_l \in A$ ($a_l \neq a_i$) abgebildet. Wir definieren eine Ebene E als die eindeutig bestimmte Ebene, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$E \perp g \wedge a_i \in E.$$

Aus Lemma 5.12 können wir folgern:

Gilt $rot_{\frac{2\pi}{n}}^g(a_i) = a_i$, so muss wegen $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi$, $a_i \in g$ gelten.

Gilt $rot_{\frac{2\pi}{n}}^g(a_i) = a_l \neq a_i$, so folgt daraus $a_l \in E$ und $d(a_l, g) = d(a_i, g)$.

Damit für ein $a_i \notin g$ $rot_{\alpha}^g(a_i) = a_i$ gilt, muss nach Lemma 5.12 $\alpha = 2\pi$ sein. Das entspricht n aufeinanderfolgenden Rotationen um $\frac{2\pi}{n}$.

Daher gibt es also für ein $a_i \notin g$ immer $n - 1$ weitere Punkte, die in E liegen und von $S := E \cap g$ so weit entfernt sind wie a_i .

Daher liegen sie auf einem Kreis in E um S . Diese Punkte lassen sich in einer Partition A^j zusammenfassen, für die $A^j \subset E \perp g$ und $|A^j| = n$ gilt. Nach Lemma 2.10 muss außerdem $S = SP(A^j)$ gelten.

Enthält A^j hingegen nur Punkte auf g , so gilt offensichtlich auch $SP(A^j) \in g$.

□

Aus Lemma 6.8 lässt sich folgern:

Satz 6.9. $B \subset \mathbb{R}^2$ sei die orthogonale Parallelprojektion einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$. Dann lässt sich B in Partitionen B^1, \dots, B^k zerlegen, so dass eine Gerade $g' \subset \mathbb{R}^2$ existiert, für die gilt:

$$SP(B^1), \dots, SP(B^k) \in g'$$

Außerdem gilt für alle $j = 1 : k$:

Entweder alle Punkte aus B^j liegen auf g' , oder alle Punkte von B^j liegen auf einer Ellipse El^j mit Mittelpunkt $SP(B^j)$. Dabei liegen die Hauptachsen aller El^j parallel und das Verhältnis zwischen der Nebenachse und der Hauptachse ist für alle El^j gleich.

Beweis:

Wir bezeichnen die Rotationsachse, bezüglich derer A n -symmetrisch ist, mit g . Die orthogonale Parallelprojektion einer Geraden $g \subset \mathbb{R}^3$ ist ebenfalls eine Gerade. Wir bezeichnen diese mit $g' \subset \mathbb{R}^2$.

Laut Lemma 6.8 lässt sich A in Partitionen A^1, \dots, A^k mit bestimmten Eigenschaften zerlegen. Zerlegt man B in die entsprechenden Partitionen (d.h. B^j ist die orthogonale Parallelprojektion von A^j), so folgt:

Ist eine Punktmenge $B^j \subset \mathbb{R}^2$ die orthogonale Parallelprojektion einer Punktmenge $A^j \subset \mathbb{R}^3$, so ist $SP(B^j)$ die orthogonale Parallelprojektion von $SP(A^j)$. Außerdem bleiben Inzidenzen unter der Projektion erhalten. Daher gilt:

$$SP(A^j) \in g \Rightarrow SP(B^j) \in g',$$

$$A^j \subset g \Rightarrow B^j \subset g'.$$

Aus Satz 6.2 wissen wir, dass das Bild eines Kreises (mit Mittelpunkt M) unter einer orthogonalen Parallelprojektion eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt die orthogonale Parallelprojektion von M ist. Daraus kann man folgern:

Wenn alle Punkte aus A^j auf einem Kreis um $SP(A^j)$ liegen, so liegen alle Punkte aus B^j auf einer Ellipse mit Mittelpunkt $SP(B^j)$.

Lemma 6.3 besagt, dass für den Winkel α^j zwischen E_P und E_O^j gilt: $\alpha^j = \arccos \frac{b}{a}$, wenn b die Länge der Nebenachse und a die Länge der Hauptachse einer Ellipse ist, die die orthogonale Parallelprojektion eines Kreises in E_O^j darstellt. Da laut Lemma 6.8 alle Ebenen E_O^j parallel sind, gilt mit $0 < \frac{b}{a} < 1$ und $0 < \alpha^j < \frac{\pi}{2}$:

Das Verhältnis zwischen der Nebenachse und der Hauptachse ist für alle El^j gleich.

Außerdem sind die Schnittgeraden s^j laut Lemma 6.8 zwischen E_O^j und E_P für alle j parallel und damit gilt nach Lemma 6.3:

Die Hauptachsen aller El^j sind parallel.

□

Um heraus zu finden, ob eine Punktmenge B die orthogonale Parallelprojektion einer approximativ n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ sein kann, müssen wir also untersuchen, ob sich B in die in Satz 6.9 beschriebenen Partitionen (oder zumindest in Partitionen,

die die Bedingungen aus Satz 6.9 approximativ erfüllen) zerlegen lässt. Anschließend überprüfen wir, analog zum Algorithmus **Verzerrte Symmetrierkennung**, ob alle Partitionen B^j approximativ verzerrt n -symmetrisch sind.

Dabei werden alle Partitionen B^j in dieselbe Objektebene E_O projiziert, da für E_O nach Lemma 6.4 gilt:

$$E_O : -\beta x + y + \overbrace{\sqrt{\frac{b^2 \beta^2 + b^2}{a^2 - b^2}}}^{=: \mu} z = 0.$$

Des weiteren ist die Steigung der Hauptachse β für alle j gleich und für zwei verschiedene μ gilt:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \mu_1 := \sqrt{\frac{b_1^2 \beta^2 + b_1^2}{a_1^2 - b_1^2}} = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\frac{\beta^2 + 1}{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{b_2}{a_2} \sqrt{\frac{\beta^2 + 1}{1 - \frac{b_2^2}{a_2^2}}} =: \mu_2.$$

Beispiel

Wir betrachten das 5-symmetrische Objekt aus Abbildung 5.12. In Kapitel 5.1 haben wir dieses Objekt durch eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ dargestellt. Anschließend wurde die Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} von A mit dem Algorithmus **Eckpunkte 3D** ($dcon = 2$) bestimmt. In Abbildung 6.13 sehen wir die Punktmenge A und \tilde{A} .

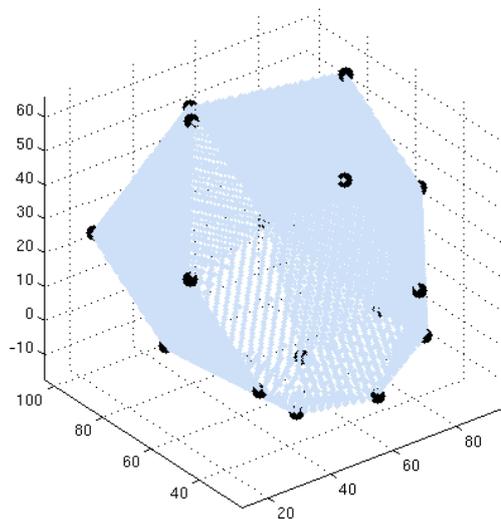


Abbildung 6.13: $\tilde{A} \subset A$

In diesem Kapitel gehen wir nun davon aus, dass nicht die genauen Koordinaten von \tilde{A} gegeben sind, sondern nur die Koordinaten der orthogonalen Parallelprojektion \tilde{B} (siehe

Abbildung 6.14). Nun wird nach Partitionen $\tilde{B}^1, \dots, \tilde{B}^k$ gesucht, die die Bedingungen aus Satz 6.9 zumindest approximativ (d.h. bis auf einen Fehler $\epsilon \in \mathbb{R}^+$) erfüllen. Für $n = 5$ ergeben sich die in Abbildung 6.15 dargestellten Partitionen $\tilde{B}^1, \dots, \tilde{B}^4$.

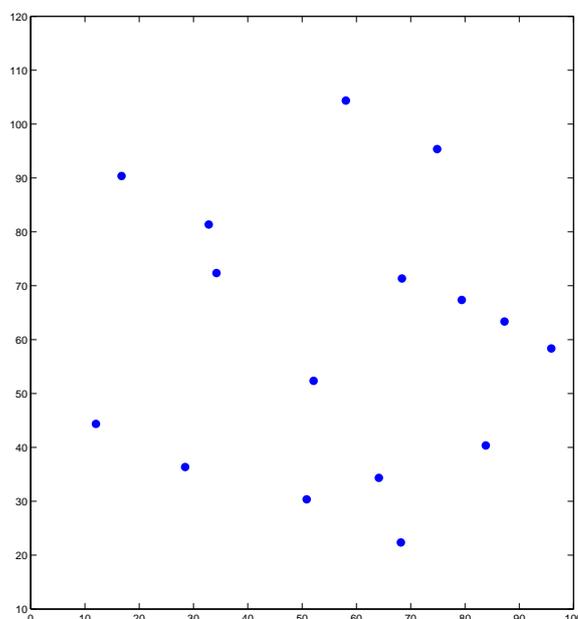


Abbildung 6.14: \tilde{B}

Wählt man Fehler-Schwellenwerte $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.3, \epsilon_2 = 0.05$, so gilt für die Partitionen:

$$|\tilde{B}^1| = |\tilde{B}^2| = |\tilde{B}^3| = 5, \quad |\tilde{B}^4| = 1,$$

$$\max_{j \in \{1, \dots, 4\}} d(g', SP(\tilde{B}^j)) < \epsilon_1$$

$$\max_{i, j \in \{1, 2, 3\}} \left| \frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right| < \epsilon_2$$

$$\max_{i, j \in \{1, 2, 3\}} |\beta_i - \beta_j| < \epsilon_3$$

Bildet man für die Partitionen $\tilde{B}^1 := \{(x_1^1, y_1^1), \dots, (x_5^1, y_5^1)\}, \dots, \tilde{B}^3 := \{(x_1^3, y_1^3), \dots, (x_5^3, y_5^3)\}$ die Punktmenge C^1, \dots, C^3 folgendermaßen:

$$C^i := \left\{ (x_1^i, y_1^i, \frac{\beta_1 x_1^i - y_1^i}{\mu_1}), \dots, (x_5^i, y_5^i, \frac{\beta_1 x_5^i - y_5^i}{\mu_1}) \right\}$$

und berechnet die Symmetriewerte $d_n(C^i)$ bezüglich der Rotation um

$$g_i : SP(C^i) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

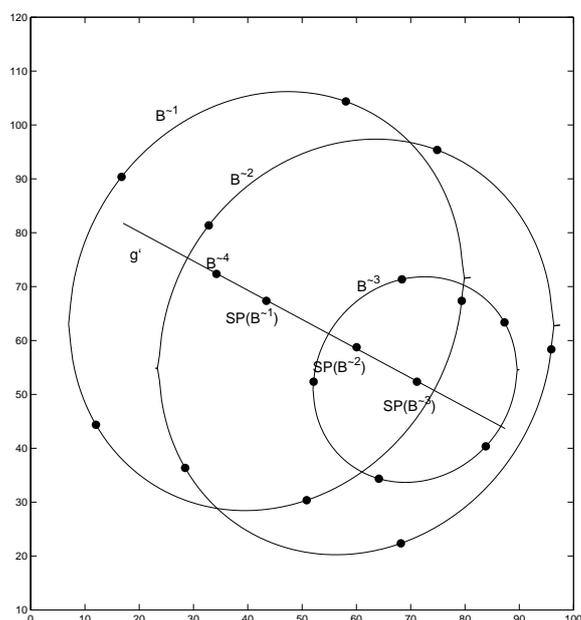


Abbildung 6.15: Partitionen

so erhält man die in Abbildung 6.16 aufgelisteten Werte:

n	$d_n(C^1)$	$d_n(C^2)$	$d_n(C^3)$
2	116.3	115.9	58.5
3	78.2	78.0	39.5
4	58.7	58.7	30.0
5	1.2	4.7	4.7
6	39.3	38.9	20.0
7	67.2	66.7	33.8
8	87.8	87.3	44.2
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	3.0	12.1	23.5

Abbildung 6.16: Symmetriewerte

Man würde die selben Symmetriewerte erhalten, wenn man die einzelnen Partitionen in Ebenen projiziert, die parallel zu $E_O^1 : -\beta_1 x + y + \mu_1 z = 0$ sind. Bildet man also die Punktfolgen C^1, \dots, C^3 folgendermaßen:

$$C^i := \left\{ (x_1^i, y_1^i, \frac{\beta_1 x_1^i - y_1^i}{\mu_1} + \gamma_i), \dots, (x_5^i, y_5^i, \frac{\beta_1 x_5^i - y_5^i}{\mu_1} + \gamma_i) \right\},$$

wobei $\gamma_1 = 0$ gilt und die $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{2, 3\}$) so gewählt werden, dass $SP(C^2)$ und $SP(C^3)$

zumindest approximativ auf

$$g : SP(C^1) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

liegen, was wegen $\max_{j \in \{1, \dots, 4\}} d(g', SP(B^j)) < \epsilon_1$ möglich ist, so ist die Punktmenge $C := C^1 \cup C^2 \cup C^3$ approximativ 5-symmetrisch bezüglich der Rotation um die Rotationsachse g . Da der Punkt aus \tilde{B}^4 (approximativ) auf g' liegt, muss man für ihn keine Symmetriewerte berechnen. Er lässt sich immer in eine auf g senkrechte Ebene E_O^4 projizieren, so dass er (approximativ) auf g liegt.

Es genügt uns also, Partitionen $\tilde{B}^1, \dots, \tilde{B}^k$ einer Punktmenge \tilde{B} zu finden, die die Bedingungen aus Satz 6.9 bis auf einen Fehler $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllen und deren approximative verzerrte n -Symmetrie mit dem Algorithmus **Verzerrte Symmetrierkennung** nachzuweisen, um der Punktmenge \tilde{B} die entsprechende Symmetrie zuzuordnen.

6.2 Perspektivische Projektion

Das Modell der perspektivischen Projektion stimmt mit dem Modell der Lochkamera überein und entspricht dem Prinzip des einäugigen Sehens beim Menschen. Algorithmen, die perspektivisch verzerrte Strukturen erkennen, eignen sich besonders um Eigenschaften von 3-dimensionalen Objekten, die durch ein Foto mit einer kalibrierten Kamera auf den 2-dimensionalen Raum abgebildet wurden, zu identifizieren.

Dementsprechend beschäftigen sich insbesondere in dem Bereich der Computer Vision verschiedene Arbeiten damit, perspektivisch verzerrte Symmetrien zu erkennen.

Gool et al. ([23]) zählen zu den ersten, die Symmetrie-spezifische Invarianten unter perspektivischer Verzerrung herausarbeiten. Dabei stellen sie verschiedene invariante Eigenschaften von spiegelsymmetrischen Punkten vor. Auch in [10] findet sich ein Ansatz zur Erkennung perspektivisch verzerrter Spiegelsymmetrien. Dabei spielt das Doppelverhältnis von vier Punkten ([42]) auf einer Linie als Invariante unter einer projektiven Abbildung eine entscheidende Rolle. Cornelius und Loy ([18]) identifizieren Symmetrien in Fotos, indem sie jeweils Quadrupel aus symmetrischen Punktpaaren bilden. Allerdings werden auch mit diesem Ansatz Spiegel- und nicht Rotationssymmetrien gesucht.

Ma et al. beziehen in ihren Arbeiten die Erkennung von Rotationssymmetrien mit ein ([25], [51], [52]). Dabei beschäftigen sie sich insbesondere mit der Frage, wie man das Wissen um symmetrische Strukturen abgebildeter Objekte nutzen kann, um den Prozess der Rekonstruktion einer 3D-Umgebung aus einem oder mehreren perspektivisch verzerrten Bildern zu unterstützen. Die Tatsache, dass die Bilder symmetrischer Punkte im Raum in Homographie-Gruppen zusammengefasst werden können, wird dabei genutzt, um Informationen für die 3D-Rekonstruktion zu gewinnen.

Die Berechnung von Homographie-Transformationen und die daraus resultierende Bestimmung der perspektivischen Verzerrung einer symmetrischen Punktmenge ([51]) werden wir in unserem Algorithmus nutzen, um verzerrten Punktmengen Symmetriewerte zuzuordnen.

Doch a priori wollen wir, wie im nicht-verzerrten Fall, davon ausgehen, dass uns keine Informationen über mögliche Symmetrien in einer Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ vorliegen und wir daher zunächst untersuchen müssen, ob diese Punktmenge die perspektivische Projektion einer approximativ n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ sein kann.

6.2.1 Homogene Koordinaten

Jeder Punkt in der euklidischen Ebene lässt sich als 2-dimensionaler Vektor

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

darstellen. Bettet man die euklidische Ebene in den 3-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3 ein, indem wir sie gleich der Ebene $z = 1$ setzen, so wird der Punkt durch den 3-dimensionalen Vektor $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ repräsentiert.

Um Homogene Koordinaten einzuführen, bilden wir Äquivalenzklassen im \mathbb{R}^3 indem wir alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$, die sich lediglich durch ein skalares Vielfaches (ungleich 0) unterscheiden, in einer Klasse zusammenfassen.

$$[v] := \{v' \in \mathbb{R}^3 \mid v' = \lambda \cdot v \ (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\}.$$

Ein beliebiger Punkt $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, für den $z \neq 0$ gilt, kann daher in Homogenen Koordinaten durch den Schnittpunkt $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ der Geraden $\lambda \cdot \vec{p}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) mit der Ebene $z = 1$ dargestellt werden. Das entspricht einer Perspektivprojektion mit der Projektionsebene $E : z = 1$ und dem Projektionszentrum $(0, 0, 0)$, bei der alle Punkte, die auf einer Ursprungsgeraden (ohne den Ursprung)

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \neq 0)$$

und damit in einer Äquivalenzklasse liegen, auf den Punkt $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ projiziert werden.

Ein Punkt $p = (x, y, 0)$ wird im Konzept der Homogenen Koordinaten durch einen Punkt im Unendlichen auf der projektiven Ergänzung der euklidischen Ebene repräsentiert. Solche Punkte spielen für unsere Symmetrierkennung allerdings keine Rolle, da wir davon ausgehen, dass wir eine konkrete perspektivisch verzerrte Punktmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ gegeben haben und diese durch die Einbettung in den \mathbb{R}^3 darauf untersuchen wollen, ob sie die Perspektivprojektion einer n -symmetrischen Punktmenge sein kann.

Ein Punkt p in Homogenen Koordinaten repräsentiert im Folgenden alle Punkte q_i , für die gilt: $q_i = \lambda \cdot p$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Für zwei Punktfolgen $A := \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B := \{b_1, \dots, b_m\}$, für die skalare Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a_i = \lambda_i \cdot b_i$ ($\forall i \in \{1, \dots, m\}$) existieren, schreiben wir:

$$A \doteq B.$$

Ist eine Punktmenge

$$B = \{p_1, \dots, p_n\}$$

in Homogenen Koordinaten gegeben, so stellt sich die Frage, welche Eigenschaften diese Punktmenge besitzen muss, um die perspektivische Projektion einer n -symmetrischen Punktmenge zu sein. Dazu untersuchen wir invariante Eigenschaften von Punktmengen unter perspektivischer Projektion.

6.2.2 Projektive Invarianten

Im \mathbb{R}^2 kann man eine Gerade g durch einen Vektor $(g_1, g_2, g_3)^T$ repräsentieren, sodass ein Punkt $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann auf g liegt, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$g_1 \cdot x + g_2 \cdot y + g_3 = 0.$$

Auch in Homogenen Koordinaten wollen wir eine Gerade g durch den Vektor $(g_1, g_2, g_3)^T$ darstellen. Ein Punkt $p = (x, y, z)$ in Homogenen Koordinaten liegt dann auf g , wenn $\langle g, p^T \rangle = 0$ gilt. Für zwei Punkte p_i und p_j , mit $p_i \neq \lambda p_j$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$), existiert damit genau eine Gerade g , die diese beiden Punkte enthält. Dabei gilt:

$$\langle p_i^T, g \rangle = 0 \wedge \langle p_j^T, g \rangle = 0.$$

Die beiden Vektoren p_i^T und p_j^T stehen also senkrecht auf g , sodass sich die Gerade g_{ij} durch die Punkte p_i und p_j als Kreuzprodukt von p_i^T und p_j^T berechnen lässt:

$$g_{ij} = p_i^T \times p_j^T.$$

Den Schnittpunkt q zweier nicht paralleler Geraden g_{ij} und g_{kl} erhält man entsprechend aus dem Kreuzprodukt der beiden Geraden:

$$q^T = g_{ij} \times g_{kl}.$$

Sind g_{ij} und g_{kl} parallel, so erhält man einen Punkt im Unendlichen, das bedeutet, dass die z -Koordinate von q gleich 0 ist.

Kollinearitäten von Punkten in einer Ebene bleiben unter einer Perspektivprojektion in eine andere Ebene erhalten. Auch für zwei Vektoren $p, g \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}^T$ gilt offensichtlich:

$$\langle p, g \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda \cdot p, \mu \cdot g \rangle = 0 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Damit sind sowohl Inzidenzen zwischen Punkten und Geraden, als auch Kollinearitäten von verschiedenen Punkten unabhängig davon, welche Repräsentanten einer Äquivalenzklasse man wählt.

Weitere projektive Invarianten erhalten wir, wenn wir die Verhältnisse von bestimmten Determinanten untersuchen. Dazu definieren wir:

Definition 6.10. Für eine Punktmenge $B = \{b_1, \dots, b_n\} = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$ bezeichnet das Bracket $[ijk]_B$ die Determinante der 3×3 Matrix, die als Spalten die Punkte b_i, b_j und b_k besitzt. Es gilt also:

$$[ijk]_B = \det \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Definition können wir das folgende Lemma beweisen, welches eine bedeutende invariante Eigenschaft unter projektiver Transformation beschreibt:

Lemma 6.11. *Seien die Punktmengeten A und B wie folgt gegeben:*

$$B := \{b_1, \dots, b_n\},$$

$$A := \{\lambda_1 \cdot M^{-1} \cdot b_1, \dots, \lambda_n \cdot M^{-1} \cdot b_n\} \quad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det(M) \neq 0),$$

so gilt für $[ijm]_B \cdot [ilk]_B \neq 0$:

$$\frac{[ijk]_B \cdot [ilm]_B}{[ijm]_B \cdot [ilk]_B} = \frac{[ijk]_A \cdot [ilm]_A}{[ijm]_A \cdot [ilk]_A}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{[ijk]_A \cdot [ilm]_A}{[ijm]_A \cdot [ilk]_A} &= \frac{(\det(M^{-1})^2 \cdot \lambda_i^2 \cdot \lambda_j \cdot \lambda_k \cdot \lambda_l \cdot \lambda_m) \cdot [ijk]_B \cdot [ilm]_B}{(\det(M^{-1})^2 \cdot \lambda_i^2 \cdot \lambda_j \cdot \lambda_m \cdot \lambda_l \cdot \lambda_k) \cdot [ijm]_B \cdot [ilk]_B} = \\ &= \frac{[ijk]_B \cdot [ilm]_B}{[ijm]_B \cdot [ilk]_B}. \end{aligned}$$

□

6.2.3 Invarianten symmetrischer Punktmengeten

Indem wir die Invarianz der Kollinearität unter projektiver Transformation benutzen, können wir mit Hilfe einfacher Gleichungen der Grassmann-Cayley-Algebra ([13]) Bedingungen für perspektivisch verzerrte Symmetrien aufstellen, die man anschaulich geometrisch interpretieren kann.

Wird eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ durch die Rotation um eine Rotationsachse g um $\frac{2\pi}{n}$ auf sich selbst abgebildet, so lassen sich alle Punkte von A , die nicht auf g liegen, in Partitionen aus je n Punkten einteilen, sodass die Punkte einer Partition in einer auf g senkrechten Ebene liegen und die Eckpunkte eines regulären n -Ecks sind.

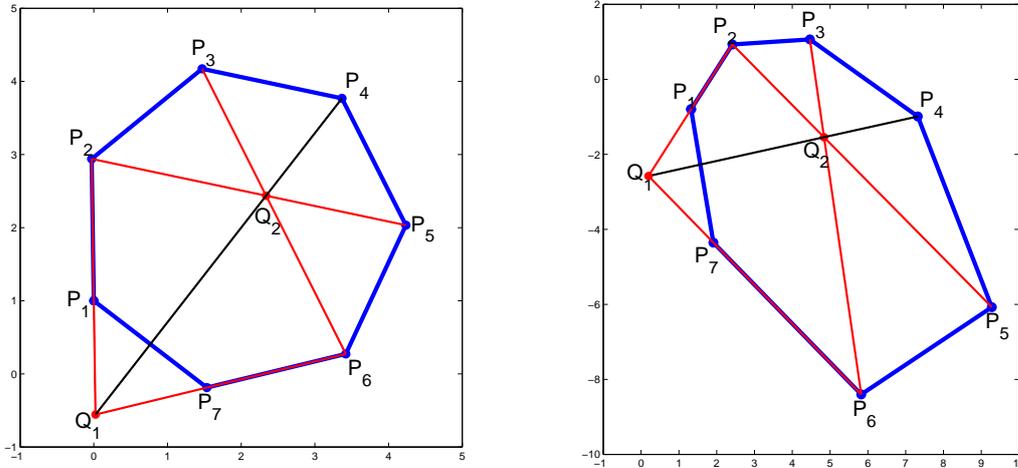
Alle regulären n -Ecke besitzen bestimmte Inzidenz-Eigenschaften. Wir wollen eine solche Eigenschaft am Beispiel eines regulären Siebenecks illustrieren (siehe Abbildung 6.17).

Wir bezeichnen, wie in Abbildung 6.17, die Homogenen Koordinaten der Eckpunkte des Siebenecks mit $\{p_1, \dots, p_7\}$. Außerdem definieren wir:

$$g_1 := p_1^T \times p_2^T,$$

$$g_2 := p_6^T \times p_7^T,$$

$$g_3 := p_2^T \times p_5^T,$$



(a) Unverzerrt

(b) Perspektivisch verzerrt

Abbildung 6.17: Reguläres Siebeneck

$$\begin{aligned}
 g_4 &:= p_3^T \times p_6^T, \\
 q_1^T &:= g_1 \times g_2, \\
 q_2^T &:= g_3 \times g_4.
 \end{aligned}$$

Ein reguläres Siebeneck ist bezüglich aller Achsen, die durch einen Eckpunkt und die Mitte der gegenüberliegenden Seite gehen, spiegelsymmetrisch. Daher sind q_1, q_2 und p_4 kollinear. Diese Kollinearität bleibt unter der perspektivischen Verzerrung erhalten und bildet somit eine Bedingung dafür, dass $B := \{p_1, \dots, p_7\}$ die perspektivische Projektion einer 7-symmetrischen Punktmenge sein kann. Analog lassen sich weitere Bedingungen formulieren, indem man die anderen Spiegelsymmetrien bzw. andere Kollinearitäten berücksichtigt (Kollinearitätsbedingungen).

Die eben hergeleiteten Kollinearitätsbedingungen kann man mit den in Definition 6.10 eingeführten Brackets formulieren. Dabei sind drei Punkte $p_i, p_j, p_k \in B$ genau dann kollinear, wenn es einen Vektor $g \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass gilt: $\langle p_i^T, g \rangle = \langle p_j^T, g \rangle = \langle p_k^T, g \rangle = 0$ (d.h. $[ijk]_B = 0$).

Wir wollen das am Beispiel der Kollinearitätsbedingung aus Abbildung 6.17 illustrieren:

$$\begin{aligned}
 q_1^T &= (p_1^T \times p_2^T) \times (p_6^T \times p_7^T) \stackrel{(1)}{=} \langle p_1^T \times p_2^T, p_7^T \rangle \cdot p_6^T - \langle p_1^T \times p_2^T, p_6^T \rangle \cdot p_7^T \stackrel{(2)}{=} \\
 &= [1, 2, 7]_B \cdot p_6^T - [1, 2, 6]_B \cdot p_7^T.
 \end{aligned}$$

(1) folgt dabei aus der Grassmann-Identität und (2) erhält man durch einfaches Nachrechnen.

Entsprechend gilt:

$$q_2^T = [2, 5, 6]_B \cdot p_3^T - [2, 5, 3]_B \cdot p_6^T.$$

Damit lässt sich die Kollinearitätsbedingung auch folgendermaßen darstellen ($[p_1, p_2, p_3]$ ist dabei gleich der Determinante der Matrix, die p_1, p_2 und p_3 als Spaltenvektoren besitzt):

$$\begin{aligned}
 [q_1^T, q_2^T, p_4^T] = 0 &\Rightarrow [[1, 2, 7]_B \cdot p_6^T - [1, 2, 6]_B \cdot p_7^T, [2, 5, 6]_B \cdot p_3^T - [2, 5, 3]_B \cdot p_6^T, p_4^T] = 0 \Rightarrow \\
 & \quad [1, 2, 7]_B \cdot [2, 5, 6]_B \cdot [6, 3, 4]_B - \overbrace{[1, 2, 7]_B \cdot [2, 5, 3]_B \cdot [6, 6, 4]_B}^{=0} - \\
 & \quad - [1, 2, 6]_B \cdot [2, 5, 6]_B \cdot [7, 3, 4]_B + [1, 2, 6]_B \cdot [2, 5, 3]_B \cdot [7, 6, 4]_B = 0 \Rightarrow \\
 & [1, 2, 7]_B [2, 5, 6]_B [3, 4, 6]_B - [1, 2, 6]_B [2, 5, 6]_B [3, 4, 7]_B + [1, 2, 6]_B [2, 3, 5]_B [4, 6, 7]_B = 0.
 \end{aligned}$$

Ist eine Punktmenge B also die perspektivische Projektion einer exakt n -symmetrischen Punktmenge A , so muss B eine Reihe von Kollinearitätsbedingungen erfüllen.

Da die Homogenen Koordinaten jeder n -symmetrische Punktmenge $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ durch die Multiplikation mit einer 3×3 -Matrix $H' \neq I_3$ auf sich selbst abgebildet werden können (siehe folgender Abschnitt), lassen sich aus Lemma 6.11 weitere Bedingungen herleiten (Bracketbedingungen). So muss zum Beispiel

$$\frac{[ijk]_B \cdot [ilm]_B}{[ijm]_B \cdot [ilk]_B} = \frac{[i'j'k']_B \cdot [i'l'm']_B}{[i'j'm']_B \cdot [i'l'k']_B}$$

gelten, damit B die perspektivische Projektion einer n -symmetrischen Punktmenge $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ ist, bei der für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ der Punkt a_i durch die Rotation auf $a_{i'}$ abgebildet wird.

Dabei lassen sich in manchen Fällen bestimmte Kollinearitätsbedingungen mit Hilfe von Grassmann-Plücker-Relationen auf Bracketbedingungen zurückführen (siehe [13]).

Mit unserem Algorithmus wollen wir nicht nur Bedingungen für exakte verzerrte Symmetrien überprüfen, sondern die Symmetriewerte von Punkt Mengen berechnen und mit Hilfe dieser Werte entscheiden, ob man einer Punktmenge eine approximative verzerrte Symmetrie zuordnen kann. Dazu überprüfen wir, ob sich eine Punktmenge B in Partitionen zerlegen lässt, die die Bracket- bzw. Kollinearitätsbedingungen für eine bestimmte n -Symmetrie zumindest approximativ (das heißt bis auf einen Fehler $\epsilon \in \mathbb{R}$) erfüllen. Ist das der Fall, können wir eine Vermutung aufstellen, ob und, wenn ja, welche approximative verzerrte Symmetrie B besitzt und wie sich B in die entsprechenden Partitionen zerlegen lässt.

Im Folgenden werden wir den einzelnen Partitionen Symmetriewerte zuordnen, indem wir sie aus der Ebene $E : z = 1$ in parallele Objekt-Ebenen projizieren.

Um den Normalenvektor der Objekt-Ebenen zu bestimmen, müssen wir zunächst die Abbildung ermitteln, die die Menge der Punkte (in Homogenen Koordinaten) einer Partition auf sich selbst abbildet.

6.2.4 Homographie-Matrix

Nehmen wir an, dass $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^3$ eine n -symmetrische Punktmenge (bzw. eine Partition einer n -symmetrischen Punktmenge) ist, sodass für die Rotationsachse g gilt:

$$a_{i+1} = rot_{\frac{g}{2\pi}}^{\frac{g}{n}}(a_i) \quad (\forall i \in \{1, \dots, n-1\}) \quad \text{und} \quad a_1 = rot_{\frac{g}{2\pi}}^{\frac{g}{n}}(a_n),$$

dann liegen alle Punkte von A in einer Ebene (mit dem Normalenvektor g). Wir betrachten so eine Punktmenge A , die in der Ebene $z = 1$ liegt und für die $SP(A) = [0, 0, 1]$ gilt. Dann folgt:

$$a_{i+1}^T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot a_i^T \quad (\forall i \in 1, \dots, n-1),$$

$$a_1^T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot a_n^T.$$

Wir bezeichnen die Rotationsmatrix mit H

$$H := \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

und die Punktmenge, die man erhält, wenn man alle Punkte von A (von links) mit H multipliziert, mit $H(A)$. Dann gilt für unsere Punktmenge:

$$H(A) = A.$$

Die Homogenen Koordinaten $\{b_1, \dots, b_n\}$ einer beliebigen n -symmetrischen Punktmenge B erhalten wir aufgrund der planaren Struktur durch die Multiplikation von A mit einer invertierbaren 3×3 -Matrix H_0 ([51]). Falls B nicht in der xy -Ebene liegt (also in allen von uns betrachteten Fällen), ist H_0 invertierbar. Damit gilt:

$$\lambda_i \cdot b_i^T = H_0 \cdot a_i^T \quad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}) \Rightarrow B \doteq H_0(A) \wedge A \doteq H_0^{-1}(B).$$

Definieren wir nun die Homographie-Matrix $H' \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ folgendermaßen:

$$H' := H_0 \cdot H \cdot H_0^{-1},$$

so gilt:

$$\lambda_{i+1} \cdot b_{i+1}^T = H' \cdot b_i^T \quad (\forall i \in \{1, \dots, n-1\}) \wedge \lambda_1 \cdot b_1^T = H' \cdot b_n^T \quad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \Rightarrow$$

$$H'(B) \doteq B.$$

Ist eine Punktmenge B also die perspektivische Verzerrung einer n -symmetrischen Punktmenge, so existiert eine Homographie-Matrix $H' \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ($H' \neq I_3$), die die Punktmenge B unter Homogenen Koordinaten auf sich selbst abbildet. Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, wie wir diese Matrix aus der Punktmenge B bestimmen können.

Aufgrund der Homogenen Koordinaten besitzt H' 8 Freiheitsgrade. Damit H' die Homographie-Matrix von B ist, muss gelten:

$$\lambda_2 \cdot b_2^T = H' \cdot b_1^T, \dots, \lambda_n \cdot b_n^T = H' \cdot b_{n-1}^T, \lambda_1 \cdot b_1^T = H' \cdot b_n^T \quad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Um die skalaren Faktoren zu eliminieren, definieren wir für einen Vektor $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die schiefsymmetrische Matrix

$$\hat{p} := \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \Rightarrow \hat{p} \cdot p^T = (0, 0, 0)^T$$

und folgern daraus:

$$\hat{b}_2 \cdot H' \cdot b_1^T = \lambda_2 \cdot \hat{b}_2 \cdot b_2^T = (0, 0, 0)^T, \dots$$

Setzen wir $H'_{33} := 1$, so lassen sich die acht anderen Einträge von H' mit Hilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmen (siehe [36]):

$$\overbrace{\begin{bmatrix} (b_2^T \otimes \hat{b}_1)^T \\ \dots \\ (b_n^T \otimes \hat{b}_{n-1})^T \\ (b_1^T \otimes \hat{b}_n)^T \end{bmatrix}}{=: X \in \mathbb{R}^{3n \times 9}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} \\ \dots \\ H'_{32} \\ 1 \end{bmatrix}}{=: H'^s \in \mathbb{R}^{9 \times 1}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}}{\in \mathbb{R}^{3n \times 1}}.$$

Dabei ist $u \otimes v$ das Kronecker-Produkt ([36]) der Matrizen u und v . Aus $u \in \mathbb{R}^{u_1 \times u_2}$ und $v \in \mathbb{R}^{v_1 \times v_2}$ folgt $u \otimes v \in \mathbb{R}^{u_1 v_1 \times u_2 v_2}$.

Die Anzahl der Lösungen hängt also vom Rang der Matrix X ab. Gilt $Rg(X) < 8$, gibt es mehrere Lösungen. Für $Rg(X) = 8$ gibt es eine eindeutige Lösung (unter der Festlegung $H'_{33} = 1$) und für $Rg(X) > 8$ gibt es keine Lösung.

Wir skalieren die Homogenen Koordinaten der Punkte in B so, dass B in der Ebene $z = 1$ liegt. Da keine drei Punkte b_i, b_j, b_k , ($i, j, k \in \{1, \dots, n\}$) kollinear sein können, wenn B die perspektivische Verzerrung eines regulären n -Ecks ist und $Rg(\hat{b}_i) = 2$ gilt, lässt sich H' eindeutig bis auf einen skalaren Faktor bestimmen, wenn wir vier Punktpaare haben, die durch H' aufeinander abgebildet werden.

Ist B die perspektivische Verzerrung einer exakt n -symmetrischen ($n > 4$) Punktmenge A , so löst dieses H' auch die Gleichungen für die anderen Punktpaare, da wir ja oben begründet haben, dass in diesem Fall eine Homographie-Matrix existiert.

Da wir auch approximative verzerrte Symmetrien erkennen wollen, müssen wir davon ausgehen, dass im Allgemeinen, für $n > 4$, $Rg(X) > 8$ gilt. In so einem Fall bestimmen wir H' , indem wir das folgende Optimierungsproblem lösen:

$$\min_{H'_{11}, \dots, H'_{32}} \| X \cdot H'^s \|^2.$$

Dazu kann man Standardverfahren zur Lösung linearer Geringste-Quadrate-Probleme verwenden (z.B. [16]).

6.2.5 Symmetriewerte

Haben wir für die Punktmenge $B = \{(x_1, y_1, 1), \dots, (x_n, y_n, 1)\}$ die Homographie Matrix H' bestimmt, so bleibt die Frage, wie man aus H' die (Objekt-)Ebene E_O ermitteln kann, in

die man B (mit dem Ursprung als Projektionszentrum) zurückprojizieren muss, damit das Ergebnis $B^* \subset \mathbb{R}^3$ der Rückprojektion eine (approximativ) n -symmetrische Punktmenge ist.

In [36] wird gezeigt, dass sich eine Homographie Matrix H' auf folgende Weise zerlegen lässt:

$$H' = R + \frac{1}{d}TN^T \quad H', R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, T, N \in \mathbb{R}^3, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind (N, d) die Strukturparameter der Objektebene E_O , die dadurch definiert ist, dass ein Punkt $p = (x, y, z)$ genau dann auf E_O liegt, wenn

$$N^T \cdot p^T = d$$

gilt.

Die Matrix H' lässt sich für ein festes d in vier verschiedene Lösungen $(R_1, T_1, N_1), \dots, (R_4, T_4, N_4)$ zerlegen ([36]). Da die Symmetrieeigenschaften von B^* unabhängig von parallelen Verschiebungen von E_O sind, skalieren wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d = 1$ und betrachten von zwei Lösungen für die $N_i = -N_j$ gilt, nur die Lösung, bei der die z -Koordinate positiv ist.

Es bleiben zwei mögliche Gleichungen für die Objektebene:

$$E_O^1 : N_1^T \cdot (x, y, z)^T = 1 \quad \text{und} \quad E_O^2 : N_2^T \cdot (x, y, z)^T = 1,$$

wobei die Rückprojektion in lediglich einer dieser Ebenen zu einer (approximativ) n -symmetrischen Struktur führt ([51]).

Um der Punktmenge B Symmetriewerte bezüglich perspektivisch verzerrter n -Symmetrien zuzuordnen, projizieren wir B in die Ebenen E_O^1 bzw. E_O^2 und berechnen dort die Symmetriewerte $d_n(B_i^*, g_i)$ der Punktmenge $B_1^*, B_2^* \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich einer Rotation um die jeweilige Gerade g_i , die $SP(B_i^*)$ als Aufpunkt und N_i als Richtungsvektor besitzt (siehe Definition 5.13).

Um zu entscheiden, ob wir B eine approximative perspektivisch verzerrte n -Symmetrie zuordnen, berechnen wir die in Definition 5.14 eingeführten Eindeutigkeitswerte $\Delta_{2, \dots, 8}^n(B_i^*, g_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) und überprüfen, ob einer dieser Werte kleiner als 25 ist (vergleiche Definition 2.15).

6.2.6 Beispiel

Wir betrachten die Menge der Ecken eines regulären Achtecks $A \subset \mathbb{R}^3$ und projizieren diese (mit Projektionszentrum $(0, 0, 0)$) in die Ebene $E : z = 100$. Damit erhalten wir die perspektivisch verzerrte 8-symmetrische Punktmenge $B := \{b_1, \dots, b_8\}$ (Abbildungen 6.18 und 6.19).

Da wir nicht nur nach exakten (verzerrten) Symmetrien, sondern auch nach approximativen Symmetrien suchen wollen, runden wir die Koordinaten der Punkte in Abbildung 6.19 auf ganze Zahlen. Diese gerundete Punktmenge $B^R := \{b_1^R, \dots, b_8^R\}$ wollen wir nun auf approximative perspektivisch verzerrte n -Symmetrien untersuchen.

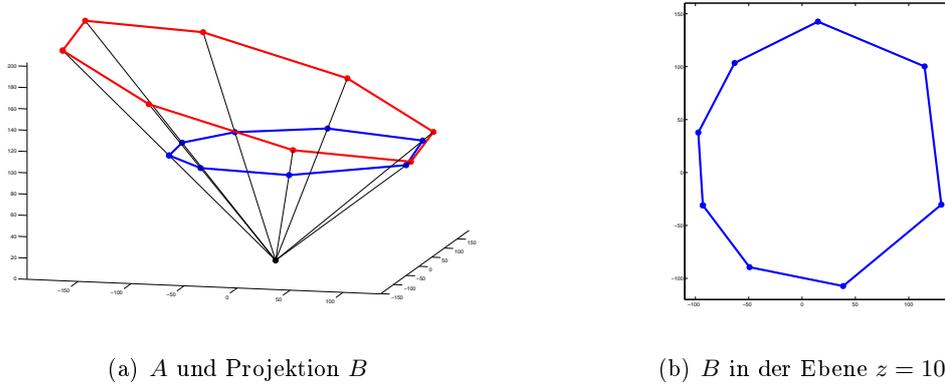


Abbildung 6.18: Perspektivisch verzerrtes reguläres Achteck

i	$(P_i)_x$	$(P_i)_y$	$(P_i)_z$
1	-93.0000	-31.0000	100.0000
2	-97.2921	37.7856	100.0000
3	-63.2604	103.4651	100.0000
4	14.8473	142.5560	100.0000
5	114.8503	100.2352	100.0000
6	130.5815	-30.3494	100.0000
7	38.4950	-107.2504	100.0000
8	-49.2459	-89.4225	100.0000

Abbildung 6.19: Homogene Koordinaten von B

Da die gerundete Punktmenge B^R die Bracket- und Kollinearitätsbedingungen für ein verzerrtes Achteck approximativ erfüllt (Beispiel für eine Kollinearitätsbedingung in Abbildung 6.20), suchen wir nach der Homographie-Matrix H' , die b_i^R auf b_{i+1}^R (für $i = 1 : 7$) bzw. b_8^R auf b_1^R abbildet. Da die Daten durch die Rundung gestört wurden, erhalten wir keine eindeutige Lösung und bestimmen H' so, dass das Optimierungsproblem

$$\min_{H'_{11}, \dots, H'_{32}} \| X \cdot H'^s \|^2$$

gelöst wird.

Mit $H'_{33} = 1$ erhalten wir:

$$H' = \begin{bmatrix} 0.6219 & 0.6450 & -0.1630 \\ -0.7334 & 0.6735 & -0.1085 \\ 0.0992 & -0.1943 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Zerlegen wir H' mit der in [36] vorgestellten Methode, so erhalten wir für die Normalenvektoren von $E_O^1 : N_1^T(x, y, z)^T = 100$ und $E_O^2 : N_2^T(x, y, z)^T = 100$:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.1484 \\ -0.9724 \\ 0.1802 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.2873 \\ -0.0089 \\ 0.9578 \end{bmatrix}.$$

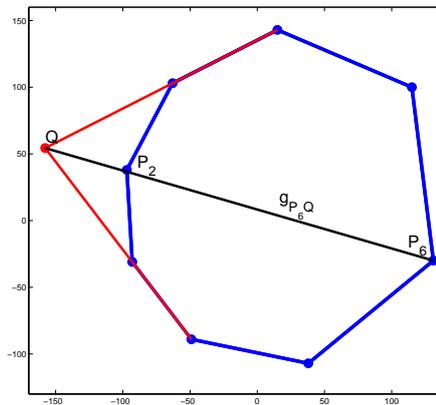


Abbildung 6.20: Eine Kollinearitätsbedingung von B^R : p_2 liegt approximativ auf g_{p_6q}

Nach der Rückprojektion von B^R in die Ebenen E_O^1 und E_O^2 können wir die Symmetriewerte von B_1^* und B_2^* bestimmen (siehe Abbildung 6.21). Skalieren wir die Homogenen Koordinaten von B^R so, dass alle Punkte in E_O^2 liegen, so sind diese Punkte approximativ 8-symmetrisch. Wir ordnen B^R also eine approximative perspektivisch verzerrte 8-Symmetrie zu.

n	$d_n(B_1^*, g_1)$	$d_n(B_2^*, g_2)$
2	2.8140	1.6248
3	125.1095	33.8252
4	92.3360	1.2334
5	69.3216	40.5414
6	81.8028	33.7984
7	97.3790	14.5151
8	110.3084	0.8311
$\Delta_{2,\dots,8}^8$	159.13	5.73

Abbildung 6.21: Symmetriewerte

Kapitel 7

Punktmenge im \mathbb{R}^d

In dieser Arbeit wurde bisher ein Algorithmus vorgestellt, der approximative n -Symmetrien in Punktmenge erkennt, die im \mathbb{R}^2 oder im \mathbb{R}^3 liegen. In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass sich die einzelnen Schritte dieses Algorithmus so verallgemeinern lassen, dass man mit dieser Vorgehensweise auch Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) auf approximative n -Symmetrien untersuchen kann. Dazu werden wir für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$), analog zum 2- und 3-dimensionalen Fall, zunächst eine charakteristische Teilmenge bestimmen und dieser anschließend Symmetriewerte zuordnen.

In der Literatur finden sich verschiedene Verfahren, die zwei Punktmenge $A, B \subset \mathbb{R}^d$ auf Kongruenz überprüfen (z.B.: [1], [3], [9], [11]). Mit diesen Methoden kann man unter anderem herausfinden, ob eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ exakt n -symmetrisch ist. In [1] und [9] werden zum Beispiel Algorithmen vorgestellt, die zwei gleich große Punktmenge $A, B \subset \mathbb{R}^d$ auf Kongruenz überprüfen. Allerdings sind diese nicht auf den approximativen Fall erweiterbar. Alt et al. ([3]) führen neben einem Algorithmus zur Überprüfung zweier beliebig dimensionaler Punktmenge auf exakte Kongruenz auch einen Algorithmus ein, mit dem man zwei Punktmenge $A, B \subset \mathbb{R}^2$ auf approximative Kongruenz überprüfen kann. Allerdings beschränken sie sich hierbei auf den 2-dimensionalen Fall.

Die Erweiterung unserer Methode, Punktmenge Symmetriewerte zuzuordnen, auf den beliebig dimensionalen Fall ermöglicht, anders als die vergleichbaren Ansätze aus der Literatur, die Erkennung approximativer n -Symmetrien in Punktmenge im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$).

7.1 Konvexe Hülle

Die Definitionen 3.2, 3.3 und 3.4 gelten allgemein für Punktmenge in Euklidischen Räumen und damit auch für $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$).

In Kapitel 3 wurde gezeigt, wie man mit dem Quickhull-Algorithmus die konvexe Hülle, und damit auch die Menge der Extrempunkte, einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen kann. In Kapitel 5 wurde diese Vorgehensweise auf den 3-dimensionalen Fall erweitert.

Der in [5] beschriebene Quickhull-Algorithmus kann auch zur Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) benutzt werden. Dabei verwendet der Algorithmus, wie im 2- und 3-Dimensionalen, zwei geometrische Operationen.

Erstens wird durch jeweils d Punkte eine orientierte Hyperebene gelegt und zweitens wird für andere Punkte der positive oder negative Abstand zu dieser Hyperebene berechnet.

Die Komplexität des Quickhull-Algorithmus beträgt im d -dimensionalen ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) Fall, anders als im 2- und 3-Dimensionalen (unter den bereits in Kapitel 3 erwähnten Balance-Bedingungen):

$$O\left(m \frac{f_r}{r}\right).$$

Dabei ist m die Anzahl der eingegebenen Punkte und r die Anzahl der behandelten Punkte. f_r bezeichnet die maximale Anzahl an Facetten für r Punkte (siehe [5]).

Gilt $A \subset \mathbb{R}^3$ (siehe Kapitel 5), so erhalten wir mit Hilfe des Quickhull-Algorithmus die Menge der Extrempunkte $A_K \subset \mathbb{R}^3$ und die Menge der Facettentripel $A_F = \{(n_1 n_2 n_3), (n_4 n_5 n_6), \dots\}$ (siehe Definition 5.2). Analog dazu ermitteln wir für $d > 3$ die Menge der Extrempunkte $A_K \subset \mathbb{R}^d$ und die Menge der Indizes der Eckpunkte aller Facetten $A_F = \{(n_1 n_2 \dots n_d), (n_{d+1} \dots n_{2d}), \dots\}$ von A_{kon} , wobei die Anzahl der Eckpunkte einer Facette gleich d ist.

7.2 Charakteristische Eckpunkte

Die Grundidee des in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus beruht darauf, dass man nicht eine komplette Punktmenge A , sondern nur eine möglichst kleine, aber dennoch aussagekräftige Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ auf Symmetrien untersucht. Dazu haben wir im 2- (Algorithmus **Eckpunkte**) und im 3-Dimensionalen (Algorithmus **Eckpunkte 3D**) angegeben, wie man die Teilmenge \tilde{A} bestimmen kann.

Um auch in höheren Dimensionen eine solche Teilmenge einzuführen, übernehmen wir die Definition der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ (siehe Definition 5.3).

Definition 7.1. Eine Teilmenge \tilde{A} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) bezeichnen wir als Menge der Charakteristischen ($dcon-$)Eckpunkte (bzw. als Charakteristische ($dcon-$)Eckpunkte) von A , wenn $\tilde{A} := \{a_1, \dots, a_m\}$ für eine positive Konstante $dcon \in \mathbb{R}^+$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.

$$\tilde{A} \subseteq A_K.$$

2.

$$d(w, \tilde{A}_{kon}) \leq dcon \quad \forall w \in (A_K \setminus \tilde{A}).$$

3.

$$\max_{w \in (A_K \setminus (\tilde{A} \setminus a_i))} d(w, (\tilde{A} \setminus a_i)_{kon}) > dcon \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Damit erfüllt die Menge der Charakteristischen ($dcon-$)Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) nach einer Verallgemeinerung von Lemma 5.4 die ϵ -Bedingungen für $\epsilon = dcon$ (siehe Definition 3.7).

In Kapitel 5 wurde der Algorithmus **Eckpunkte 3D** eingeführt, mit dem man für $A \subset \mathbb{R}^3$ solch eine Menge \tilde{A} bestimmen kann. Im Folgenden wollen wir untersuchen, ob die einzelnen Schritte dieses Algorithmus analog auch auf $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) angewendet werden können.

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, erhält man für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) die Menge der Extrempunkte A_K und die Menge der Indizes A_F der Eckpunkte der Facetten von A_{kon} mit dem Quickhull-Algorithmus. Jede Facette ist dabei durch ihre d Eckpunkte gegeben.

Im zweiten Schritt des Algorithmus **Eckpunkte 3D** werden die in Definition 5.5 eingeführten Streichabstände aller Punkte aus A_K bestimmt. Definition 5.5 ist unabhängig von der Dimension d des Euklidischen Raumes, in dem die Punktmenge A_K liegt, und gilt somit auch für $d > 3$.

Auch die Definition der Nachbarextrempunkte (siehe Definition 5.6) können wir für höhere Dimensionen übernehmen.

Da die Lemmata 5.7 und 5.8 allerdings nur für den 3-dimensionalen Fall formuliert sind, kann man den Algorithmus **Streichabstand** nicht ohne weiteres auf $A_K \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) anwenden.

Im Folgenden wollen wir erläutern, wie sich das Problem, die Streichabstände von Punkt Mengen im \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) zu bestimmen, auf den 3-dimensionalen Fall zurückführen lässt.

Nach Definition 5.5 ist der Streichabstand d_i eines Punktes $w_i \in A_K \subset \mathbb{R}^d$ gleich

$$d_i := \min_{a \in (A_K \setminus w_i)_{kon}} |w_i - a|.$$

Um d_i zu berechnen, müssen wir die Abstände von w_i zu den verschiedenen Facetten von $(A_K \setminus w_i)_{kon}$ bestimmen. Dazu gehen wir für jede Facette F wie folgt vor:

1. Wir bestimmen den Normalenvektor n der Facette mit den Eckpunkten $\{p_1, \dots, p_d\}$. Da n senkrecht auf F stehen muss, gilt:

$$\langle n, v_{ij} \rangle = 0, \quad v_{ij} := \vec{p}_i - \vec{p}_j \quad (\forall i, j \in \{1, \dots, d\}).$$

Damit lässt sich n als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ \dots \\ v_{d-1}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ \dots \\ n_d \end{bmatrix} = 0$$

bestimmen, wenn man aus allen v_{ij} $d - 1$ unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ auswählt, was in der $d - 1$ -dimensionalen Facette immer möglich ist. Wir setzen n gleich der Lösung des Gleichungssystems, sodass n die Länge 1 hat und so orientiert ist, dass der Vektor n von F aus $(A_K \setminus w_i)_{kon}$ herauszeigt, also auf der anderen Seite der Facette als $SP((A_K \setminus w_i))$ liegt.

2. Wir definieren

$$n_0 := -n_1(p_1)_1 - n_2(p_1)_2 - \dots - n_d(p_1)_d.$$

Damit lässt sich die Gleichung der Hyperebene H , in der F liegt, folgendermaßen darstellen:

$$H : n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_dx_d + n_0 = 0.$$

3. Für den Abstand δ_i des Punktes w_i zur Hyperebene H gilt (siehe [5]):

$$\delta_i := |n_1(w_i)_1 + n_2(w_i)_2 + \dots + n_d(w_i)_d + n_0|.$$

4. Da A_K eine Menge von Extrempunkten ist, liegt $w_i \in A_K$ außerhalb von $(A_K \setminus w_i)_{kon}$. Damit gilt:

$$q := \arg \min_{b \in H} |w_i - b| \Rightarrow \vec{q} = \vec{w}_i - \delta_i \cdot n.$$

5. Gilt: $\{p_1, \dots, p_d, q\}_{kon} = \{p_1, \dots, p_d\}_{kon}$, so ist der Abstand zwischen w_i und F gleich δ_i . Anderenfalls liegt q zwar in der Hyperebene H , aber außerhalb von F . Dann müssen wir den Punkt $x \in F$ bestimmen, der den geringsten Abstand zu q hat. Der Abstand zwischen der Facette und w_i ist in diesem Fall gleich dem Abstand zwischen w_i und x (Verallgemeinerung des Lemmas 5.8 auf Dimension d ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$)).

6. Um x bestimmen zu können, führen wir die Schritte 1 bis 5 für $w_i := q$ und jede Facette von $\{p_1, \dots, p_d\}_{kon}$ durch. Da sowohl $q \in H$ als auch $\{p_1, \dots, p_d\}_{kon} \subset H$ gilt, haben wir das Problem damit um eine Dimension reduziert. Daher müssen wir die Schritte 1 bis 5 $d - 3$ mal ausführen, um x und damit auch den Abstand zwischen w_i und F mit dem Algorithmus **Streichabstand** aus Kapitel 6 bestimmen zu können.

Da wir die Streichabstände aller Punkte $w_i \in A_K \subset \mathbb{R}^d$ auf die oben beschriebene Weise ermitteln können, lassen sich alle Schritte des Algorithmus **Eckpunkte 3D** auch auf eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) anwenden.

Die Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte (siehe Definition 7.1) einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) ist also mit einer leicht modifizierten Variante des Algorithmus **Eckpunkte 3D** möglich.

Da die zusätzlichen Schritte, im Vergleich zum Algorithmus **Streichabstand** (Komplexität: $O(m_K^2)$), zur Bestimmung der Streichabstände nur auf den Nachbarextrempunkten der einzelnen $p_i \in A_K$ operieren, beträgt die Komplexität der Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$, in Abhängigkeit von $m := |A|$, $m_K := |A_K|$, sowie der Anzahl r der im Quickhull bearbeiteten Punkte und der maximalen Anzahl an Facetten f_r für r Ecken, analog zum 3-dimensionalen Fall:

$$O\left(m \frac{f_r}{r} + m_K^2\right).$$

7.3 Symmetriewert

Im 2- und 3-dimensionalen Fall haben wir in den Definitionen 2.3 und 5.11 konkrete Rechenvorschriften angegeben, wie man die Punktmenge B_n bestimmen kann, die durch die Rotation einer Punktmenge A um einen Punkt s bzw. eine Rotationsachse g um einen Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ entsteht.

Um diese Rechenvorschriften auf den d -dimensionalen Fall ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) zu erweitern, erzeugen wir die Punktmenge $B_n \subset \mathbb{R}^d$ in den selben drei Schritten wie im \mathbb{R}^2 (Definition 2.3) und im \mathbb{R}^3 (Definition 5.11):

1. Translation um den Vektor $-\vec{SP}(A)$.
2. Rotation durch die Multiplikation mit einer Matrix $R(\frac{2\pi}{n}) \in SO(d)$.
3. Translation um den Vektor $\vec{SP}(A)$.

Damit hängen die Symmetriewerte einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) von der Rotationsmatrix $R(\alpha) \in SO(d)$ ab und wir definieren:

Definition 7.2. Der Symmetriewert $d_n(A, R)$ einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) bezüglich der n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N}$) und der Rotationsmatrix $R(\alpha) \in SO(d)$ entspricht dem Abstand zwischen den Punkt Mengen A und B_n , wobei mit $(s_1, \dots, s_d) := SP(A)$ gilt:

$$B_n := \left(\mathcal{A} - \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_d \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1 & \dots & s_d \end{bmatrix} \right) \cdot R\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_d \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1 & \dots & s_d \end{bmatrix}.$$

Der Abstand zwischen den Punkt Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $B_n \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) ist, wie im 2-Dimensionalen (siehe Definition 2.12), gleich dem Wert des Minimal Perfect Matchings im Bigraphen $G(A, B_n)$. Auch im d -Dimensionalen ($d > 3$) kann der Bigraph $G(A, B_n)$ wie in Kapitel 2.3 beschrieben gebildet werden und damit lässt sich die Lösung von **OP1** mit dem Algorithmus **Ungarische Methode** bestimmen. Die Komplexität der Symmetriewertberechnung einer Punktmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$ bezüglich aller n -Symmetrien ($n \in \{2, \dots, N\}$) ist damit für eine Rotationsmatrix $R(\alpha) \in SO(d)$ analog zum 2- und 3-dimensionalen Fall gleich

$$O(Nm^3).$$

Um zu zeigen, welche Aussagekraft die Symmetriewerte der konvexen Hülle A_K einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ für die Symmetrieeigenschaften von A haben, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 7.3. Existiert für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 1$) eine Rotationsmatrix $R(\alpha) \in SO(d)$, so dass gilt:

$$d_n(A, R) = 0,$$

so folgt:

$$d_n(A_K, R) = 0.$$

Beweis:

Nach Definition 7.2 ist $d_n(A, R)$ gleich dem Abstand (nach der MPM-Methode) zwischen den Punktmenge $A := \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^d$ und $B_n := \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^d$, wobei für jeden Punkt b_i von B_n gilt:

$$b_i := (a_i - SP(A)) \cdot R\left(\frac{2\pi}{n}\right) + SP(A).$$

Wenn $d_n(A, R) = 0$ gilt, muss der Wert des Minimal Perfect Matchings im Bigraphen $G(A, B_n)$ gleich null sein. Daraus folgt, dass die Mengen A und B_n identisch sind. Es gilt also $b_i \in A$ ($\forall i = \{1, \dots, m\}$).

Da die Menge der Extrempunkte nach Lemma 3.5 eindeutig ist, gilt auch $A_K = (B_n)_K$. Außerdem folgt aus Lemma 2.6:

$$|b_i - b_j| = |a_i - a_j|.$$

Die Abstände zwischen zwei Punkten sind also sowohl unter der Translation um $SP(A)$, als auch unter der Multiplikation mit $R \in SO(d)$ invariant.

Für jedes $b_i \in B_n \wedge b_i \notin (B_n)_K$ gibt es Parameter $\lambda_j \in [0, 1)$ ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$), so dass gilt:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_j = 1 \wedge b_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_j b_j.$$

Wegen $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$ folgt daraus:

$$a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_j a_j \Rightarrow a_i \notin A_K.$$

Damit werden Extrempunkte von A auf andere Extrempunkte von A abgebildet. Es gilt also:

$$a_i \in A_K \Rightarrow b_i \in A_K.$$

Daher wird auch A_K durch die in Definition 7.2 beschriebene Abbildung auf sich selbst abgebildet und es gilt:

$$d_n(A_K, R) = 0.$$

□

Folgerung:

Da wir einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann eine exakte n -Symmetrie zuordnen, wenn es eine Matrix $R(\alpha) \neq I_d \wedge R(\alpha) \in SO(d)$ gibt, so dass $d_n(A, R) = 0$ gilt (Vergleiche Definition 2.1), können wir folgern, dass eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ nur dann exakt n -symmetrisch sein kann, wenn die Menge der Extrempunkte $A_K \subseteq A$ exakt n -symmetrisch ist.

Entsprechend der Definition 7.2 lassen sich auch die Definitionen 2.14 und 2.15 auf den d -dimensionalen Fall ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 3$) verallgemeinern:

Definition 7.4. Für den Eindeutigkeitswert $\Delta_{i,\dots,j}^n(A, R)$ eines Symmetriewertes $d_n(A, R)$ gilt:

$$\Delta_{i,\dots,j}^n(A, R) = \max_{k \in \{i,\dots,j\} \setminus \{l \mid n \bmod l=0\}} \frac{d_n(A, R)}{d_k(A, R)} \cdot 100.$$

Definition 7.5. Einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ wird genau dann eine approximative n -Symmetrie ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) zugeordnet, wenn es eine Matrix $R(\alpha) \in SO(d)$ ($R(\alpha) \neq I_d$) gibt, so dass für den Eindeutigkeitswert des Symmetriewertes $d_n(A, R)$ gilt:

$$\Delta_{2,\dots,8}^n(A, R) < 25.$$

Wie man alle möglichen Rotationsmatrizen, bezüglich derer eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ symmetrisch sein kann, bestimmt, werden wir im folgenden Abschnitt analysieren.

7.4 Herleitung der Rotationsmatrix

Wir werden die Herleitung der möglichen Rotationsmatrizen aus der Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen für den Fall $A \subset \mathbb{R}^4$ ausführlich beschreiben. Die Vorgehensweise lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Unabhängig von der Dimension d der Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ können wir die Rotation jedes einzelnen Punktes von A als ein planares, also 2-dimensionales, Phänomen interpretieren.

\mathbb{R}^2 :

Unter der Rotation ist ein $2-2=0$ -dimensionales geometrisches Objekt, also ein Punkt, invariant. Dieser Punkt ist das Rotationszentrum, welches nach der Translation um $-\vec{S}P(A)$ gleich dem Ursprung $(0,0)$ ist.

Im 2-Dimensionalen existiert nur eine Ebene, der euklidische Raum \mathbb{R}^2 selbst, den wir als xy -Ebene bezeichnen. Jeder Punkt $a_i \in A \subset \mathbb{R}^2$ wird in dieser Ebene rotiert. Die Rotationsmatrix R^{2D} ist daher gleich der Standard-Rotationsmatrix

$$R^{2D}(\alpha) := R_{xy}^{2D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

in der xy -Ebene.

\mathbb{R}^3 :

Unter der Rotation ist ein $3-2=1$ -dimensionales geometrisches Objekt, also eine Gerade, invariant. Diese Gerade ist die Rotationsachse, welche nach der Translation um $-\vec{S}P(A)$ den Ursprung $(0,0,0)$ enthält.

Im 3-Dimensionalen wird jeder Punkt $a_i \in A \subset \mathbb{R}^3$ in der eindeutig bestimmten Ebene E_i , die senkrecht auf der Rotationsachse g steht und a_i enthält, um den Schnittpunkt von g und E_i rotiert (siehe Kapitel 5.4). Um die Rotationsmatrix R auf die Standard-Rotationsmatrix in der xy -Ebene

$$R_{xy}^{3D}(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zurückzuführen, muss daher das Koordinatensystem so transformiert werden, dass alle Rotationsebenen E_i parallel zur xy -Ebene sind.

Das entspricht einer Multiplikation (von links) der Matrix $R_{xy}^{3D}(\alpha)$ mit einer Matrix $R' \in SO(3)$, wobei R' aus drei orthonormalen Spaltenvektoren besteht. Dabei ist die dritte Spalte gleich dem Richtungsvektor von g und die anderen beiden bilden eine Orthonormalbasis der auf g senkrechten Ebene durch den Ursprung.

$$g := \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (|v| = 1, \lambda \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad R' = \begin{bmatrix} \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & v_1 \\ \frac{v_2 v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & v_2 \\ -\sqrt{v_1^2 + v_2^2} & 0 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Anschließend muss das Koordinatensystem noch durch eine Multiplikation mit R'^{-1} rücktransformiert werden.

Auf diese Weise wurde die Matrix $R(\alpha) =: R^{3D}(\alpha)$ aus Definition 5.11 bestimmt. Für diese gilt:

$$R^{3D}(\alpha) = R' \cdot R_{xy}^{3D}(\alpha) \cdot R'^{-1} \in SO(3).$$

\mathbb{R}^4

Analog zum 2- und 3-dimensionalen Fall ist ein $4 - 2 = 2$ -dimensionales geometrisches Objekt, also eine Ebene, unter einer Rotation invariant. Da die Rotation ja eine 2-dimensionale Operation ist, kann man eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ auch um zwei orthogonale Ebenen gleichzeitig um zwei (unter Umständen unterschiedliche) Winkel rotieren. In diesem Fall ist lediglich ein Punkt, nämlich der Schnittpunkt der beiden Ebenen, invariant unter der Rotation. Wir unterscheiden daher im \mathbb{R}^4 zwischen einer einfachen und einer doppelten Rotation.

Einfache Rotation:

Bei der einfachen Rotation wird eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ um eine Ebene E_R rotiert. Alle Punkte, die in E_R liegen, sind unter der Rotation invariant. Jeder andere Punkt $a_i \in A \wedge a_i \notin E_R$ wird um E_R rotiert. Das bedeutet, er wird in der Ebene E_i , die vollständig orthogonal auf E_R liegt und a_i enthält, um den Schnittpunkt von E_i und E_R rotiert. Dabei sind zwei Ebenen E_i und E_j genau dann vollständig orthogonal, wenn jede Gerade $g_i \subset E_i$ orthogonal auf jeder Gerade $g_j \subset E_j$ steht.

Die Rotationsmatrix R lässt sich analog zum 3-dimensionalen Fall auf die Standard-Rotationsmatrix

$$R_{xy}^{AD}(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in der xy -Ebene zurückführen, indem man das Koordinatensystem so transformiert, dass die Ebenen E_i in denen rotiert wird, parallel zur xy -Ebene sind.

Dazu muss die Punktmenge A , analog zum 3-dimensionalen Fall, zunächst mit einer Matrix $R' \in SO(4)$ und, nach der eigentlichen Rotation durch die Multiplikation mit R_{xy}^{AD} , mit $(R')^{-1} \in SO(4)$ multipliziert werden. Es gilt also:

$$R^{AD}(\alpha) := R' \cdot R_{xy}^{AD}(\alpha) \cdot (R')^{-1} \Rightarrow R^{AD}(\alpha) \in SO(4).$$

Dabei bilden die ersten beiden Spalten von R' , wie im 3-dimensionalen, eine Orthonormalbasis der Ebene E_0 durch den Ursprung, die parallel zu allen Ebenen ist, in denen die einzelnen Punkte rotiert werden. E_0 ist also vollständig orthogonal auf E_R . Da $R' \in SO(4)$ ist, bilden die Spalten 3 und 4 von R' eine Orthonormalbasis einer Ebene, die vollständig orthogonal auf E_0 steht.

Rotationsebene:

Haben wir eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ gegeben und sollen diese auf mögliche Symmetrien bezüglich einer einfachen Rotation untersuchen, so stellt sich die Frage, wie man eine (oder mehrere) potentielle Rotationsebene(n) von A ermitteln kann.

Dazu betrachten wir, analog zum 3-dimensionalen Fall (siehe Kapitel 5.6), eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$, die bezüglich einer einfachen Rotation um die Rotationsebene E_R n -symmetrisch ist.

Die Abstände zwischen zwei Punkten sind unter einer Rotation invariant (Lemma 2.6). Wird daher eine Punktmenge A durch eine Rotation um E_R um den Winkel α ($0 < \alpha < 2\pi$) auf eine identische Punktmenge abgebildet, so muss der Schwerpunkt $SP(A)$ von A unter dieser Rotation invariant sein. Es gilt also:

$$SP(A) \in E_R.$$

Analog zum 3-dimensionalen Fall überlegen wir uns außerdem, wie der Rand der konvexen Hülle einer n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ von ihrer Rotationsebene E_R geschnitten wird. Der Rand der konvexen Hülle von A besteht aus 3-dimensionalen Facetten F_1, \dots, F_l , die wir mit dem Quickhull-Algorithmus bestimmen können (siehe Kapitel 7.1). Da $SP(A) \in E_R$ gilt, schneidet E_R den Rand der konvexen Hülle von A in mindestens zwei Strecken.

Die zwei Facetten des Randes der konvexen Hülle von A , die von E_R geschnitten werden, bezeichnen wir mit F_1 und F_2 und die jeweiligen Schnittmengen mit E_R mit S_1 und S_2 .

Liegt mindestens ein Punkt von S_i ($i \in \{1, 2\}$) nicht auf dem Rand von F_i , so wird F_i durch die Rotation um E_R auf sich selbst abgebildet, da alle Punkte auf S_i und die Abstände zwischen zwei Punkten unter der Rotation invariant sind (Lemma 2.6).

Ist die Facette F_i unter der Rotation um die Ebene E_R um den Winkel α ($0 < \alpha < 2\pi$) invariant, so gilt das auch für den Normalenvektor \vec{n}_i von F_i . \vec{n}_i lässt sich somit als eine Linearkombination der Richtungsvektoren von E_R darstellen. Außerdem ist der Schwerpunkt von $(F_i)_K$, $SP((F_i)_K)$, unter der Rotation invariant. Damit gilt für so eine Facette F_i :

$$g_i := \vec{SP}((F_i)_K) + \lambda \vec{n}_i \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad g_i \subset E_R.$$

Liegt S_i komplett auf dem Rand einer Facette, kann F_i theoretisch durch die Rotation auch auf benachbarte Facetten abgebildet werden. Ist A n -symmetrisch, muss S_i auf dem Rand $n - 1$ weiterer Facetten F_1, \dots, F_{n-1} liegen. Eine Gerade $g \subset E_R$ erhält man dann, indem man den Schwerpunkt der Vereinigung der Extrempunkte dieser Facetten F_{i_1}, \dots, F_{i_n} (einschließlich F_i) als Aufpunkt und die Summe aller Normalenvektoren dieser Facetten als Richtungsvektor verwendet.

$$g_i := \vec{SP}\left(\bigcup_{j=1:n} (F_{i_j})_K\right) + \lambda \sum_{j=1}^n \vec{n}_{i_j} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad g_i \subset E_R.$$

Legt man die vorangegangenen Überlegungen zu Grunde, ergibt sich die folgende Vorgehensweise, nach der man die möglichen Rotationsebenen $(E_R)_1, (E_R)_2, \dots$ einer zu untersuchenden Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ bestimmen kann:

1. Wir berechnen den Schwerpunkt $SP(A)$ von A .
2. Wir bestimmen mit dem Quickhull-Algorithmus die konvexe Hülle von A und damit auch die Facetten F_1, \dots, F_l , die den Rand der konvexen Hülle bilden. Ist die zu untersuchende Punktmenge, wie in unserem Algorithmus, die Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$, so gilt $(\tilde{A})_K = \tilde{A}$. Außerdem hat man die Facetten F_i von $(\tilde{A})_{kon}$ bereits bei der Bestimmung von \tilde{A} berechnet.
3. Für alle Facetten einzeln und alle Vereinigungen von Facetten, die mindestens eine Strecke gemeinsam haben, bilden wir wie oben beschrieben die Gerade g_i .
4. Gibt es eine Ebene, die mindestens zwei verschiedene Geraden g_i, g_j und den Schwerpunkt $SP(A)$ enthält, so ist diese Ebene eine potentielle Rotationsebene E_R .

Die Rotationsmatrix R^{4D} erhalten wir dann, indem wir $R' \in SO(4)$ bilden, sodass die ersten beiden Spalten von R' eine Orthonormalbasis der auf E_R vollständig orthogonalen Ebene sind, die durch den Ursprung geht. Für R^{4D} gilt dann:

$$R^{4D}(\alpha) := R' \cdot R_{xy}^{4D}(\alpha) \cdot (R')^{-1}.$$

Approximative Symmetrien:

Da wir nach approximativen und nicht unbedingt exakten Symmetrien suchen, müssen wir bei der Bestimmung möglicher Rotationsachsen eine gewisse Fehlertoleranz berücksichtigen. Das heißt, zwei Geraden

$$g_i := \vec{p}_i + \lambda \vec{n}_i \quad \text{und} \quad g_j := \vec{p}_j + \mu \vec{n}_j \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

führen für eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ zu einer möglichen Rotationsebene

$$E_R := \vec{SP}(A) + \lambda \vec{n}_i + \mu \vec{n}_j \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

wenn für ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$d(p_i, E_R) \leq \epsilon \wedge d(p_j, E_R) \leq \epsilon.$$

Außerdem muss man im approximativen Fall beachten, dass eine Facette, die durch die Rotation approximativ auf sich selbst abgebildet wird, durch die Ungenauigkeiten unter Umständen durch mehrere andere Facetten dargestellt wird (vgl. Kapitel 5.6.2). Um auch in so einem Fall alle möglichen Rotationsebenen zu bestimmen, muss man Facetten, die bis auf einen Fehler $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ in einer Hyperebene des \mathbb{R}^4 liegen, zu einer Facette zusammenfassen.

Doppelte Rotation:

Bei der einfachen Rotation im \mathbb{R}^4 um die Rotationsebene E_R wird ein Punkt p_i in der zu E_R vollständig orthogonalen Ebene E_i , die p_i enthält, um den Schnittpunkt zwischen E_R und E_i rotiert. Alle Punkte, die auf E_R liegen, sind daher unter dieser Rotation invariant. Daher ist es im \mathbb{R}^4 , anders als im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 , möglich, eine Punktmenge um zwei vollständig orthogonale Ebenen gleichzeitig zu rotieren.

Dabei können die beiden Rotationswinkel α und β unterschiedlich sein. Um Punktmen- gen auf mögliche n -Symmetrien zu untersuchen, betrachten wir die doppelten Rotationen, bei denen $\alpha = \beta$ gilt.

Eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ wird um die zwei vollständig orthogonalen Ebenen E_{R1} und E_{R2} um den Winkel α ($0 < \alpha < 2\pi$) rotiert, indem jeder Punkt $p_i \in A$ gleichzeitig in der Ebene E_{i1} um den Schnittpunkt von E_{R1} und E_{i1} und in der Ebene E_{i2} um den Schnittpunkt von E_{R2} und E_{i2} gedreht wird. Dabei ist E_{i1} (bzw. E_{i2}) die Ebene, die zu E_{R1} (bzw. E_{R2}) vollständig orthogonal ist und den Punkt p_i enthält.

Invariant unter dieser Rotation sind also nur Punkte, die sowohl auf E_{R1} als auch auf E_{R2} liegen. Da sich zwei vollständig orthogonale Ebenen im \mathbb{R}^4 genau in einem Punkt schneiden, ist lediglich ein Punkt unter dieser Rotation invariant.

Der invariante Punkt unter einer doppelten Rotation von A um den Winkel α ($0 < \alpha < 2\pi$) muss nach unseren vorangegangenen Überlegungen gleich dem Schwerpunkt $SP(A)$ von A sein. Nach der Translation von A um $-\vec{SP}(A)$ ist der invariante Punkt also gleich dem Ursprung.

Die Rotationsmatrix R^{AD} für die doppelte Rotation lässt sich auf die Standard-Rotationsmatrix

$$R_{xy,zw}^{AD}(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

für die gleichzeitige Rotation in der xy - und in der zw -Ebene zurückführen, indem man das Koordinatensystem so transformiert, dass die Ebenen E_{i1} , in denen um E_{R1} rotiert wird, parallel zur xy -Ebene sind und die Ebenen E_{i2} , in denen um E_{R2} rotiert wird, entsprechend parallel zur zw -Ebene liegen.

Dazu muss die Matrix $R' \in SO(4)$ so gebildet werden, dass die ersten beiden Spalten von R' eine Orthonormalbasis der zu E_{R1} vollständig orthogonalen Ebene durch den Ursprung bilden und die dritte und vierte Spalte entsprechend eine Orthonormalbasis der zu E_{R2} vollständig orthogonalen Ebene durch den Ursprung darstellen. Wie bei der einfachen Rotation gilt dann:

$$R^{4D}(\alpha) := R' \cdot R_{xy,zw}^{4D}(\alpha) \cdot (R')^{-1}.$$

Rotationsebenen:

Da unter einer doppelten Rotation einer Punktmenge lediglich ihr Schwerpunkt invariant ist, können wir nicht von Punkten auf dem Rand der konvexen Hülle, die unter der Rotation invariant sind, auf die Rotationsebenen einer (bezüglich einer doppelten Rotation) n -symmetrischen Punktmenge A schließen. Dafür gilt bei der doppelten Rotation das folgende Lemma:

Lemma 7.6. *Der Punkt $p \in \mathbb{R}^4$ wird durch eine doppelte Rotation, unter der der Ursprung invariant ist, um den Winkel α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) auf den Punkt $q \in \mathbb{R}^4$ abgebildet. Dann gilt für den Winkel \angle_{pq} zwischen den Geraden $g_p := \lambda \cdot \vec{p}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) und $g_q := \mu \cdot \vec{q}$ ($\mu \in \mathbb{R}$):*

$$\angle_{pq} = \alpha.$$

Beweis:

Für den Winkel $\beta := \angle_{pq}$ ($0 \leq \beta \leq \pi$) zwischen den sich schneidenden Geraden g_p und g_q gilt allgemein (siehe z.B. [29]):

$$\cos \beta = \frac{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Der Punkt $p := (p_x, p_y, p_z, p_w) \in \mathbb{R}^4$ wird durch eine gleichzeitige Rotation (d.h. durch eine Multiplikation mit der Rotationsmatrix $R(\alpha)$) um die vollständig orthogonalen Ebenen E_{R1} und E_{R2} auf den Punkt $q := (q_x, q_y, q_z, q_w) \in \mathbb{R}^4$ abgebildet. Das heißt, es gilt:

$$q = p \cdot R' \cdot R_{xy,zw}^{4D}(\alpha) \cdot (R')^{-1} \Leftrightarrow \overbrace{q \cdot R'}^{q'} = \overbrace{p \cdot R'}^{p'} \cdot R_{xy,zw}^{4D}(\alpha).$$

Dabei gilt

$$R' \in SO(4).$$

Daraus folgt:

$$\angle_{pq} = \angle_{p'q'}.$$

Wir können also zur Berechnung von β ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für die Rotationsmatrix R gilt:

$$R(\alpha) = R_{xy,zw}^{4D}(\alpha).$$

Aus $R(\alpha) \in SO(4)$ folgt außerdem:

$$x := |\vec{p}| \Rightarrow |\vec{q}| = x.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\langle \vec{p}, \vec{p} \cdot R_{xy,zw}^{4D}(\alpha) \rangle}{x^2}, \\ \cos \beta &= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_x \cos \alpha + p_y \sin \alpha \\ -p_x \sin \alpha + p_y \cos \alpha \\ p_z \cos \alpha - p_w \sin \alpha \\ p_z \sin \alpha + p_w \cos \alpha \end{bmatrix} \right\rangle}{x^2}, \\ \cos \beta &= \frac{x^2 \cos \alpha}{x^2}. \end{aligned}$$

Da sowohl β als auch α im Intervall $[0, \pi]$ liegen, folgt:

$$\angle_{pq} = \beta = \alpha.$$

□

Betrachten wir nun eine bezüglich einer doppelten Rotation n -symmetrische Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$, deren Schwerpunkt gleich dem Ursprung ist. Aus Lemma 7.6 folgt, dass für jede Facette F_i des Randes der konvexen Hülle von A eine weitere Facette F_j auf dem Rand von A_{kon} existieren muss, so dass gilt:

$$\angle_{SP((F_i)_K)SP((F_j)_K)} = \frac{2\pi}{n}.$$

Um ein vollständig orthogonales Paar von Rotationsebenen zu bestimmen, bezüglich derer eine Punktmenge A n -symmetrisch sein kann, müssen wir also (nach der Translation von A um $-SP(\vec{A})$) für eine beliebige Facette F_i des Randes von A_{kon} den Schwerpunkt $SP((F_i)_K)$ der Extrempunkte von F_i bestimmen und überprüfen, ob es eine weitere Facette F_j auf dem Rand von A_{kon} gibt, so dass $\angle_{SP((F_i)_K)SP((F_j)_K)} = \frac{2\pi}{n}$ (bzw. im approximativen Fall $|\angle_{SP((F_i)_K)SP((F_j)_K)} - \frac{2\pi}{n}| \leq \epsilon \in \mathbb{R}^+$) gilt.

Eine Ebene E kann nur dann eine der beiden Rotationsebenen von A sein, wenn alle Ebenen, die zu E vollständig orthogonal sind, unter der doppelten Rotation invariant sind. Das heißt, ein Punkt $p \in E$ wird durch die doppelte Rotation auf einen Punkt $q \in E$ abgebildet.

Mögliche Rotationsebenenpaare erhalten wir also, indem wir die erste Rotationsebene gleich der Ebene E_{R1} setzen, die den Ursprung, $SP((F_i)_K)$ und $SP((F_j)_K)$ enthält (für zwei Indizes i, j , für die $\angle_{SP((F_i)_K)SP((F_j)_K)} = \frac{2\pi}{n}$ gilt). Die zweite Rotationsebene E_{R2} ist die vollständig orthogonale Ebene zu E_{R1} , die den Ursprung enthält.

\mathbb{R}^d , ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 4$):

Die obige Herleitung der Rotationsmatrix im \mathbb{R}^4 können wir auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Die Rotation eines Punktes findet immer in einer Ebene statt, so dass unter einer einfachen (doppelten usw.) Rotation einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ alle Punkte von A , die in einer $d - 2$ -dimensionalen ($d - 4$ -dimensionalen usw.) Teilmenge des \mathbb{R}^d liegen, invariant sind. Wenn A unter der Rotation invariant ist, umfasst eine solche d' -dimensionale Teilmenge ($1 \leq d' < d$) zum einen den Punkt $SP(A)$ und schneidet zum anderen den $d - 1$ -dimensionalen Rand von A_{kon} in Facetten (bzw. Vereinigungen benachbarter Facetten), die durch die Rotation auf sich selbst abgebildet werden.

Damit lässt sich das Problem, die unter der Rotation invariante Teilmenge des \mathbb{R}^d aus der Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ zu bestimmen, auf das Problem, entsprechende invariante Teilmengen in den $d - 1$ -dimensionalen Facetten von A_{kon} zu ermitteln, reduzieren.

Im \mathbb{R}^d lassen sich bis zu $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ Rotationen in $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ vollständig orthogonalen Ebenen gleichzeitig durchführen. Werden für eine Punktmenge mit gerader Dimension genau $\frac{d}{2}$ Rotationen um Winkel gleicher Größe durchgeführt, ist zwar lediglich ein Punkt (also eine 0-dimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^d) unter der Rotation invariant. Allerdings lassen sich in diesem Fall mit Hilfe der Verallgemeinerung von Lemma 7.6 auf beliebige (gerade) Dimensionen Punktpaare bestimmen, die durch die $\frac{d}{2}$ -fache Rotation aufeinander abgebildet werden. Damit lässt sich die Rotationsmatrix direkt aus d solchen Punktpaaren bestimmen.

7.5 Beispiele

Beispiel 1

Zunächst wollen wir zeigen, wie man die möglichen Rotationsebenen einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ bestimmt. Dazu untersuchen wir die Punktmenge A , die aus den Eckpunkten eines 4-dimensionalen Hyperwürfels besteht (siehe Abbildungen 7.1, 7.2).

Für diese Punktmenge gilt $A_K = A$ und $SP(A) = [0, 0, 0, 0]$.

Der Rand der konvexen Hülle von A besteht aus acht Facetten F_1, \dots, F_8 , die wir mit dem Quickhull-Algorithmus erhalten.

Dabei ist jede Facette ein 3-dimensionaler Würfel mit Kantenlänge 2. Die Menge der Eckpunkte $(F_i)_K$ des Würfels F_i erhält man folgendermaßen:

$$(F_i)_K = \{p := (p_1, p_2, p_3, p_4) | p \in A \wedge p_i = 1\} \quad (i \in \{1, \dots, 4\}),$$

$$(F_i)_K = \{p := (p_1, p_2, p_3, p_4) | p \in A \wedge p_{i-4} = -1\} \quad (i \in \{5, \dots, 8\}).$$

Wollen wir A nun auf einfache Rotationssymmetrien untersuchen, so bilden wir für die

i	$(a_i)_x$	$(a_i)_y$	$(a_i)_z$	$(a_i)_w$
1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1
3	-1	1	-1	-1
4	-1	-1	1	-1
5	-1	-1	-1	1
6	1	1	-1	-1
7	1	-1	1	-1
8	1	-1	-1	1
9	-1	1	1	-1
10	-1	1	-1	1
11	-1	-1	1	1
12	1	1	1	-1
13	1	1	-1	1
14	1	-1	1	1
15	-1	1	1	1
16	1	1	1	1

Abbildung 7.1: Punktmenge A , Eckpunkte des Hyperwürfels

Facetten F_1, \dots, F_8 die Geraden g_1, \dots, g_8 , wie im vorherigen Abschnitt erläutert:

$$g_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad g_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \dots,$$

$$g_5 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad g_6 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \dots$$

Um die weiteren Geraden zu bestimmen, müssen wir alle Vereinigungen benachbarter Facetten bilden.

Da jede Facette ein 3-dimensionaler Würfel ist, besitzt sie sechs Begrenzungsquadrate, zwölf Begrenzungsstrecken und acht Begrenzungspunkte.

Jedes dieser Quadrate ist dabei in zwei, jede Begrenzungsstrecke in drei und jeder Begrenzungspunkt in vier Facetten enthalten. Dabei ist jede Facette F_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$) mit allen anderen Facetten außer F_{i+4} benachbart.

Damit erhalten wir alle Vereinigungen benachbarter Facetten auf folgende Art:

1. Quadrate:

Acht Facetten haben je sechs Begrenzungsquadrate. Dabei ist jedes Begrenzungsquadrat in genau zwei Facetten enthalten. Daher gibt es

$$\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

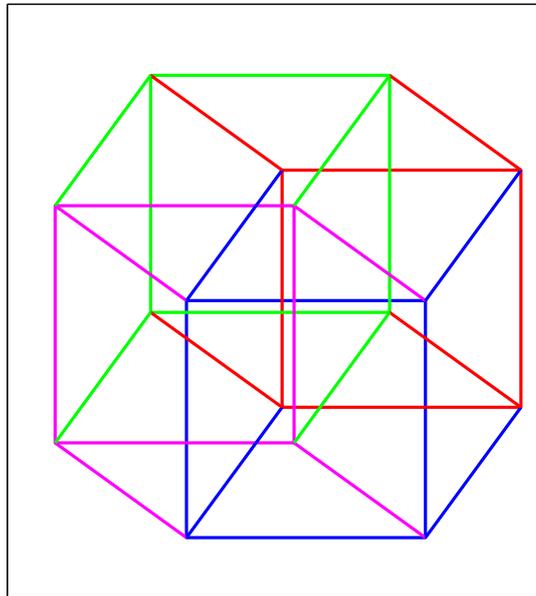


Abbildung 7.2: 4-dimensionaler Hyperwürfel

solcher Vereinigungen. Bildet man die Geraden g_i ($i \in \{9, \dots, 32\}$) für die Vereinigungen von zwei (nicht gegenüberliegenden) Facetten, so erhält man die Geraden:

$$g_9 := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad g_{10} := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \dots,$$

$$g_{15} := \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad g_{16} := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \dots$$

Die Geraden g_9, \dots, g_{32} unterscheiden sich also dadurch, dass in unterschiedlichen zwei aus vier Zeilen Einträge stehen und 2^2 unterschiedliche Kombinationen für die Vorzeichen im Aufpunkt existieren. Die Anzahl solcher Geraden lässt sich also auch folgendermaßen begründen:

$$\binom{4}{2} \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24.$$

2. Strecken:

Acht Facetten haben je zwölf Begrenzungsstrecken. Dabei ist jede Begrenzungsstrecke in genau drei Facetten enthalten. Daher gibt es

$$\frac{8 \cdot 12}{3} = 32$$

solcher Vereinigungen. Bildet man die Geraden g_i ($i \in \{33, \dots, 64\}$) für die Vereinigungen von drei (nicht gegenüberliegenden) Facetten, so erhält man die Geraden:

$$g_{33} := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \dots, g_{64} := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es stehen in drei aus vier Zeilen Einträge und es existieren 2^3 unterschiedliche Kombinationen für die Vorzeichen im Aufpunkt. Das bestätigt auch hier die Anzahl solcher Geraden:

$$\binom{4}{3} \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32.$$

3. Punkte:

Acht Facetten haben je acht Begrenzungspunkte. Dabei ist jeder Begrenzungspunkt in genau vier Facetten enthalten. Daher gibt es

$$\frac{8 \cdot 8}{4} = 16$$

solcher Vereinigungen. Bildet man die Geraden g_i ($i \in \{65, \dots, 80\}$) für die Vereinigungen von vier (nicht gegenüberliegenden) Facetten, so erhält man die Geraden:

$$g_{65} := \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \dots, g_{80} := \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.25 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Die Geraden g_{65}, \dots, g_{80} unterscheiden sich also nur durch 2^4 unterschiedliche Kombinationen für die Vorzeichen im Aufpunkt. Für die Anzahl solcher Geraden gilt:

$$\binom{4}{4} \cdot 2^4 = 1 \cdot 16 = 16.$$

Je zwei Geraden, die einen gleichen Richtungsvektor und einen Aufpunkt mit vertauschten Vorzeichen haben, sind identisch.

Die Geraden haben insgesamt

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15$$

verschiedene Richtungsvektoren v_1, \dots, v_{15} :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, v_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, v_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{15} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für jeden Richtungsvektor existiert zumindest eine Gerade g_i , die durch den Ursprung geht (nämlich die, bei der alle Vorzeichen im Aufpunkt identisch sind). Damit enthalten

alle Ebenen, die durch den Ursprung gehen und durch zwei unterschiedliche Richtungsvektoren v_l und v_j ($l, j \in \{1, \dots, 15\} \wedge l \neq j$) aufgespannt werden, mindestens zwei der Geraden g_i ($i \in \{1, \dots, 80\}$). Die Menge dieser Ebenen lässt sich folgendermaßen unterteilen:

$$l, j \in \{1, \dots, 4\}$$

$\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Ebenen E_1, \dots, E_6 (in Basisschreibweise):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$l \in \{1, \dots, 4\} \wedge j \in \{5, \dots, 10\} :$$

$4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ verschiedene Ebenen, von denen $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ neue Ebenen E_7, \dots, E_{18} sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$l \in \{1, \dots, 4\} \wedge j \in \{11, \dots, 14\} :$$

$4 \cdot \binom{4}{3} = 16$ verschiedene Ebenen, von denen $4 \cdot \binom{3}{3} = 4$ neue Ebenen E_{19}, \dots, E_{22} sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$l \in \{1, \dots, 4\} \wedge j = 15 :$$

$4 \cdot \binom{4}{4} = 4$ verschiedene Ebenen, von denen keine Ebene neu ist.

$$l \in \{5, \dots, 10\} \wedge j \in \{5, \dots, 10\} :$$

$\binom{6}{2} = 15$ verschiedene Ebenen, von denen alle neue Ebenen E_{23}, \dots, E_{37} sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$l \in \{5, \dots, 10\} \wedge j \in \{11, \dots, 14\} :$$

$6 \cdot \binom{4}{3} = 24$ verschiedene Ebenen, von denen $6 \cdot \binom{2}{1} = 12$ neue Ebenen E_{38}, \dots, E_{49} sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$l \in \{5, \dots, 10\} \wedge j = 15 :$

$6 \cdot \binom{4}{4} = 6$ verschiedene Ebenen, von denen keine Ebene neu ist.

$l \in \{11, \dots, 14\} \wedge j \in \{11, \dots, 14\} :$

$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} = 16$ verschiedene Ebenen, von denen $\binom{4}{2} = 6$ neue Ebenen E_{50}, \dots, E_{55} sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$l \in \{11, \dots, 14\} \wedge j = 15 :$

$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{4} = 4$ verschiedene Ebenen, von denen keine Ebene neu ist.

Insgesamt erhalten wir also $6 + 12 + 4 + 15 + 12 + 6 = 55$ potentielle Rotationsebenen E_1, \dots, E_{55} .

Abschließend untersuchen wir A auf n -Symmetrien ($n \in \{2, \dots, 8\}$) bezüglich der verschiedenen Rotationsebenen E_i ($i \in \{1, \dots, 55\}$), indem wir für jede Ebene die Matrix $R_i^{4D}(\frac{2\pi}{n})$, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, bestimmen und dann überprüfen, ob

$$A = A \cdot R_i^{4D}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

gilt.

Als Ergebnis erhalten wir:

- A ist 4-symmetrisch bezüglich der Ebenen E_1, \dots, E_6 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A ist 3-symmetrisch bezüglich der Ebenen E_{19}, \dots, E_{22} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A ist 2-symmetrisch bezüglich der Ebenen E_1, \dots, E_6 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

der Ebenen E_7, \dots, E_{18} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und bezüglich der drei Ebenen von E_{23}, \dots, E_{37} , bei denen in keiner Zeile zwei Einträge sind:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um zu überprüfen, ob A n -symmetrisch bezüglich einer doppelten Rotation ist, betrachten wir die Schwerpunkte $SP((F_i)_K)$ ($i \in \{1, \dots, 8\}$) der Ecken der acht Facetten von A_{kon} (siehe Aufpunkte der Geraden g_1, \dots, g_8). Die Winkel zwischen den Geraden

$$\lambda \cdot SP((\vec{F}_i)_K) \text{ und } \mu \cdot SP((\vec{F}_j)_K) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, \dots, 8\})$$

sind in Abbildung 7.3 aufgelistet.

$j i$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	$\frac{\pi}{2}$						
2	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
5	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
6	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
7	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
8	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

Abbildung 7.3: $\angle_{SP((F_i)_K)SP((F_j)_K)}$

Aus der Tabelle 7.3 sieht man, dass die Winkel zwischen den Schwerpunkten zweier benachbarter Facetten gleich $\frac{2\pi}{4}$ sind. Der Winkel zwischen Schwerpunkten gegenüberliegender Facetten beträgt $\frac{2\pi}{2}$.

Die Punktmenge A kann also durch $6 = 3 \cdot 2$ verschiedene doppelte Rotationen um $\frac{\pi}{2}$ auf sich selbst abgebildet werden.

Die drei Paare vollständig orthogonaler Ebenen, um die wir A um die zwei Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ rotieren, erhalten wir, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, indem wir alle Ebenen bilden, die den Ursprung und zwei Schwerpunkte $SP((F_i)_K)$ und $SP((F_j)_K)$ benachbarter Facetten enthalten.

Es ergeben sich die Ebenen E_1, \dots, E_6 , für die gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist E_1 vollständig orthogonal auf E_6 , E_2 ist vollständig orthogonal auf E_5 und E_3 ist vollständig orthogonal auf E_4 . Die drei Matrizen R'_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) bestehen aus den Orthonormalbasen je eines dieser Paare.

Daraus lassen sich die drei Rotationsmatrizen:

$$R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) := R'_1 \cdot R_{xy,zw}^{AD}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (R'_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2\left(\frac{\pi}{2}\right) := R'_2 \cdot R_{xy,zw}^{AD}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (R'_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) := R'_3 \cdot R_{xy,zw}^{AD}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (R'_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bestimmen.

Für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$A \cdot R_i\left(\frac{\pi}{2}\right) = A.$$

Damit gilt außerdem für alle $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$A \cdot (R_i)^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cdot R_i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A.$$

Alle Paare orthogonaler Ebenen durch den Ursprung, für deren Matrix R'

$$R' \cdot R_{xy,zw}^{AD} \cdot (R')^{-1} \in \{R_1, R_2, R_3\}$$

gilt, sind also Paare von Rotationsebenen, für die A 4-symmetrisch (und damit auch 2-symmetrisch) bezüglich einer doppelten Rotation ist.

Außerdem gilt:

$$R_{xy,zw}^{AD}(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$A \cdot R_{xy,zw}^{AD}(\pi) = A.$$

Daher ist A auch bezüglich aller anderen Paare vollständig orthogonaler Ebenen, die durch den Ursprung gehen, 2-symmetrisch (aber nicht 4-symmetrisch).

Beispiel 2

Als zweites Beispiel wollen wir die folgende Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ betrachten (siehe Abbildung 7.4), die aus 20 Punkten besteht.

i	$(a_i)_x$	$(a_i)_y$	$(a_i)_z$	$(a_i)_w$
1	0.8147	0.6324	0.9575	0.9572
2	0.9058	0.0975	0.9649	0.4854
3	0.1270	0.2785	0.1576	0.8003
4	0.9134	0.5469	0.9706	0.1419
5	-0.4299	0.0238	1.6213	-0.2875
6	-0.0369	-0.4309	1.2651	-0.4573
7	-0.3249	0.1618	0.7112	0.3484
8	-0.1005	-0.0695	1.1490	-0.8720
9	-1.0830	-0.9052	0.1404	-0.9406
10	-0.4005	-1.0767	0.0546	-0.8209
11	-0.7643	-0.2647	0.3107	-0.0910
12	-0.3980	-0.7229	-0.2161	-1.1695
13	-0.2420	-0.8708	-1.4387	-0.0995
14	0.3175	-0.9475	-0.9937	-0.1029
15	-0.5840	-0.4115	-0.4905	0.0893
16	0.4319	-0.5104	-1.2382	-0.3396
17	0.9309	0.0794	-0.9337	1.0733
18	1.1249	-0.2217	-0.4311	0.7044
19	-0.0332	-0.0758	-0.5851	0.6401
20	1.2424	0.2744	-0.5048	0.4709

Abbildung 7.4: Punktmenge A , gerundet auf vier Stellen nach dem Komma

Bestimmt man die konvexe Hülle von A mit dem Quickhull-Algorithmus, so erhält man die Menge der Extrempunkte A_K von A , für die gilt:

$$A_K = A.$$

Außerdem erhält man 50 Randräume F_1, \dots, F_{50} von A_{kon} . Dabei muss man beachten, dass Facetten, die mehr als vier Extrempunkte enthalten, vom Quickhull-Algorithmus als mehrere Facetten, die in der selben 3-dimensionalen Hyperebene liegen, ausgegeben werden. Diese Facetten werden zu einer Facette zusammengefasst.

Für den Schwerpunkt $SP(A)$ von A gilt (gerundet auf vier Stellen nach dem Komma):

$$SP(A) = (0.1206, -0.2206, 0.0735, 0.0265).$$

Verschieben wir die Punktmenge A um den Schwerpunkt, so erhalten wir die Punktmenge $A' := \{a'_1, \dots, a'_{20}\} \subset \mathbb{R}^4$, für die gilt:

$$a'_i := a_i - SP(A) \Rightarrow SP(A') = (0, 0, 0, 0).$$

Die konvexe Hülle von A' (mit den Facetten F'_1, \dots, F'_{50}) erhält man, indem man die Extrempunkte von A und die Facetten von A_{kon} ebenfalls um $-SP(A)$ verschiebt.

Um nach möglichen Rotationsebenen bezüglich einer einfachen Rotation zu suchen, bilden wir für die Facetten F'_1, \dots, F'_{50} und für die 95 Vereinigungen von Facetten, die mindestens einen Extrempunkt gemeinsam haben, die Geraden g_1, \dots, g_{145} auf die im vorangegangenen Abschnitt erläuterte Art:

$$g_i := \vec{p}_i + \lambda \vec{n}_i \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Anschließend überprüfen wir, ob es eine Ebene gibt, in der zwei verschiedene Geraden g_i und g_j und der Ursprung liegen, das heißt, wir suchen nach zwei verschiedenen Indizes i, j , für die es $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$\lambda_1 \vec{n}_i + \mu_1 \vec{n}_j = \vec{p}_i \quad \wedge \quad \lambda_2 \vec{n}_i + \mu_2 \vec{n}_j = \vec{p}_j.$$

Als Ergebnis erhalten wir eine mögliche Rotationsebene von A' :

$$E'_R := \lambda \cdot \begin{bmatrix} -0.7609 \\ 0.3949 \\ -0.1316 \\ 0.4977 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -0.0656 \\ -0.7707 \\ 0.2569 \\ 0.5794 \end{bmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Nun bilden wir die Matrix $R' \in SO(4)$, so dass die Spalten 3 und 4 gleich den beiden Richtungsvektoren von E'_R sind und die ersten beiden Spalten somit eine Orthonormalbasis der auf E'_R vollständig orthogonalen Ebene durch den Ursprung bilden.

Außerdem definieren wir die Rotationsmatrix R folgendermaßen:

$$R := R' \cdot R_{xy,zw}^{AD} \left(\frac{2\pi}{5} \right) \cdot (R')^{-1}.$$

Für die Punktmenge $B := \{b_1, \dots, b_{20}\} \subset \mathbb{R}^4$, mit den Elementen

$$b_i := a'_i \cdot R \quad (i \in \{1, \dots, 20\}),$$

gilt dann:

$$B = A'.$$

Die Punktmenge A ist also tatsächlich 5-symmetrisch bezüglich einer einfachen Rotation um die Rotationsebene E_R :

$$E_R := SP(\vec{A}) + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -0.7609 \\ 0.3949 \\ -0.1316 \\ 0.4977 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} -0.0656 \\ -0.7707 \\ 0.2569 \\ 0.5794 \end{bmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Es existieren keine zwei Indizes $i, j \in \{1, \dots, 50\}$, so dass gilt:

$$\angle_{SP((F'_i)_K)SP((F'_j)_K)} = \frac{2\pi}{5}.$$

Daher ist A nicht 5-symmetrisch bezüglich einer doppelten Rotation.

Beispiel 3

Die Punktmenge aus Beispiel 2 war exakt 5-symmetrisch. Im Folgenden wollen wir unseren Algorithmus auch anhand einer approximativ n -symmetrischen Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^4$ testen. Dazu bilden wir eine Punktmenge B , indem wir die Punkte aus der Punktmenge A aus Beispiel 2 (siehe Abbildung 7.4) auf zwei Stellen nach dem Komma runden (Abbildung 7.5).

i	$(b_i)_x$	$(b_i)_y$	$(b_i)_z$	$(b_i)_w$
1	0.81	0.63	0.96	0.96
2	0.91	0.10	0.96	0.49
3	0.13	0.28	0.16	0.80
4	0.91	0.55	0.97	0.14
5	-0.43	0.02	1.62	-0.29
6	-0.04	-0.43	1.27	-0.46
7	-0.32	0.16	0.71	0.35
8	-0.10	-0.07	1.15	-0.87
9	-1.08	-0.90	0.14	-0.94
10	-0.40	-1.08	0.05	-0.82
11	-0.76	-0.26	0.31	-0.09
12	-0.40	-0.72	-0.22	-1.17
13	-0.24	-0.87	-1.44	-0.10
14	0.32	-0.95	-0.99	-0.10
15	-0.58	-0.41	-0.49	0.09
16	0.43	-0.51	-1.24	-0.34
17	0.93	0.08	-0.93	1.07
18	1.12	-0.22	-0.43	0.70
19	-0.03	-0.08	-0.59	0.64
20	1.24	0.27	-0.50	0.47

Abbildung 7.5: Punktmenge B

Auch für B gilt: $B = B_K$. Außerdem erhält man 50 Randräume F_1, \dots, F_{50} von B_{kon} .

Für den Schwerpunkt $SP(B)$ von B gilt (gerundet auf vier Stellen nach dem Komma):

$$SP(B) = (0.1210, -0.2210, 0.0735, 0.0265).$$

Wir bilden, wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, die Geraden g_1, \dots, g_{145} und überprüfen, ob es zwei Geraden

$$g_i := \vec{p}_i + \lambda \vec{n}_i \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad g_j := \vec{p}_j + \lambda \vec{n}_j \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

gibt, sodass für die Ebene

$$E_{ij} := \vec{S}P(B) + \lambda \vec{n}_i + \mu \vec{n}_j \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

und $\epsilon := 0.01$ gilt:

$$\min_{e \in E_{ij}} |p_1 - e| \leq \epsilon \quad \wedge \quad \min_{e \in E_{ij}} |p_2 - e| \leq \epsilon.$$

Als Ergebnis erhalten wir ein Paar (i, j) und damit eine mögliche Rotationsebene von B :

$$E_R := \vec{S}P(B) + \lambda \begin{bmatrix} -0.7611 \\ 0.3917 \\ -0.1319 \\ 0.4999 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -0.1608 \\ -0.7142 \\ 0.2399 \\ 0.6376 \end{bmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Nun bilden wir die Matrix $R' \in SO(4)$, so dass die Spalten 3 und 4 gleich den beiden Richtungsvektoren von E_R sind und die ersten beiden Spalten somit eine Orthonormalbasis der auf E_R vollständig orthogonalen Ebene durch den Ursprung bilden.

Außerdem definieren wir die Rotationsmatrix $R(\alpha)$ folgendermaßen:

$$R(\alpha) := R' \cdot R_{xy,zw}^{AD}(\alpha) \cdot (R')^{-1}.$$

Anschließend berechnen wir nach Definition 7.2 die Symmetriewerte von B bezüglich $R(\alpha)$ (siehe Abbildung 7.6).

n	$d_n(B, R)$
2	15.19
3	10.39
4	7.82
5	0.47
6	5.22
7	8.91
8	11.65
$\Delta_{2,\dots,8}^5$	9.00

Abbildung 7.6: Symmetriewerte

Der Punktmenge B wird somit eine approximative 5-Symmetrie zugeordnet.

Kapitel 8

Erweiterte Strukturerkennung

In dieser Arbeit haben wir einen Algorithmus eingeführt, der approximative n -Symmetrien in einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N} \wedge d > 1$) auf eine effiziente Weise erkennt. Die Grundidee besteht darin, nicht die gesamte Punktmenge A , sondern nur eine möglichst kleine und gleichzeitig aussagekräftige Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ zu untersuchen. Dazu wurde die Menge der Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge definiert.

Diese Vorgehensweise kann man nicht ausschließlich zur Erkennung von Symmetrien benutzen. Will man ganz allgemein diskrete Daten analysieren, so lassen sich diese Daten in der Regel ohne weiteres als Punktfolgen im \mathbb{R}^d darstellen, deren Größe vom Umfang der Daten abhängt. Durch die Bestimmung der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^d$, kann man sowohl den Speicherbedarf als auch die Komplexität der Strukturerkennungs-Algorithmen reduzieren.

In diesem Kapitel wollen wir anhand zweier Beispiele zeigen, wie die Menge der Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} einer Punktmenge A analysiert werden kann, um allgemein charakteristische Struktureigenschaften (nicht nur approximative n -Symmetrien) von A zu bestimmen.

8.1 Spezielle Vierecksstrukturen

Wir wollen als erstes Beispiel erläutern, wie man erkennen kann, ob die konvexe Hülle einer Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ eine (oder mehrere) der folgenden speziellen Vierecks-Strukturen besitzt (siehe Abbildung 8.1):

1. S_1 : Allgemeines Trapez
2. S_2 : Gleichschenkliges Trapez
3. S_3 : Drachenviereck
4. S_4 : Parallelogramm
5. S_5 : Raute

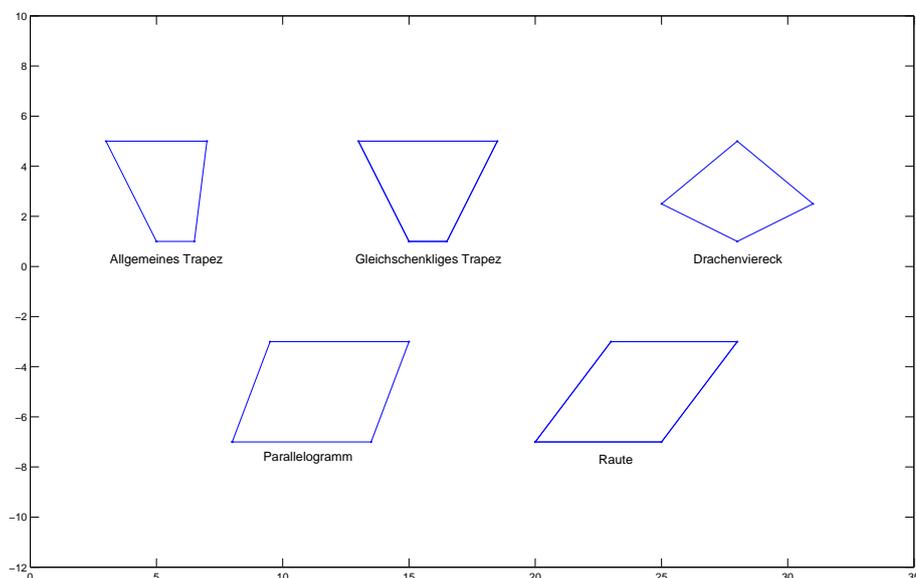


Abbildung 8.1: Spezielle Vierecke

Wir untersuchen eine Punktmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, die ein Objekt (z.B. durch die in Kapitel 2.1 beschriebene Methode) repräsentiert. Dazu werden die Charakteristischen Eckpunkte \tilde{A} von A mit Hilfe des **Eckpunkte**-Algorithmus bestimmt. Um zu untersuchen, ob eine der oben aufgelisteten Strukturen vorliegt, muss man testen, ob die Charakteristischen Eckpunkte die folgenden speziellen Eigenschaften der aufgelisteten Strukturen besitzen.

1. E_1 : Zwei Seiten sind parallel.
2. E_2 : Zwei mal zwei Seiten sind parallel. ($\Rightarrow E_1$)
3. E_3 : Zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
4. E_4 : Zwei mal zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang. ($\Rightarrow E_1, E_2, E_3$)
5. E_5 : Zwei mal zwei benachbarte Seiten sind gleich lang.
6. E_6 : Alle vier Seiten sind gleich lang. ($\Rightarrow E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$)

Natürlich ist es nur sinnvoll, nach den Strukturen S_1, \dots, S_5 zu suchen, wenn $|\tilde{A}| = 4$ gilt. Da in realen Anwendungen für Vierecke durch Ungenauigkeiten in der Darstellung (in Abhängigkeit von $dcon$) $|\tilde{A}| \neq 4$ gelten kann, ist es sinnvoll, das geeignete $dcon$ -Intervall in dem Algorithmus **Parameter** so zu wählen, dass $|\tilde{A}| = 4$ gilt.

Durch Überprüfen der sechs Eigenschaften E_1, \dots, E_6 kann dann entschieden werden, ob eine (oder mehrere) der Strukturen S_1, \dots, S_5 vorliegt. Die notwendigen Eigenschaften der verschiedenen Strukturen sind in der Tabelle in Abbildung 8.2 aufgelistet:

Struktur	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
S_1	X					
S_2	X		X			
S_3					X	
S_4	X	X	X	X		
S_5	X	X	X	X	X	X

Abbildung 8.2: Struktureigenschaften

Jedes gleichschenklige Trapez ist auch ein allgemeines Trapez. Außerdem ist jedes Parallelogramm ein gleichschenkliges Trapez und jede Raute ist sowohl ein Parallelogramm als auch ein Drachenviereck. Daher sind wir bei solchen Vierecken lediglich an der speziellsten Struktur interessiert.

Wie bei der Erkennung von Symmetrien, muss man in realen Anwendungen davon ausgehen, dass die Daten und damit auch die darstellenden Punktmenge mit Fehlern behaftet sind. Daher sind wir daran interessiert, zu erkennen, ob \tilde{A} die Bedingungen E_1, \dots, E_6 zumindest approximativ erfüllt. Der folgende Algorithmus bestimmt die Charakteristischen Eckpunkte einer Punktmenge A und untersucht, ob diese die Eigenschaften E_1 bis E_6 unter einer gewissen Fehlertoleranz $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ besitzen. Damit wird darauf geschlossen, ob man A eine der Strukturen S_1, \dots, S_5 zuordnen kann.

Algorithmus: Vierecksstruktur

Eingabe: $A \subset \mathbb{R}^2$, $dcon \in \mathbb{R}^+$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Ausgabe: S (Struktur von A), E (Eigenschaften).

1. $\tilde{A} = \{w_1, \dots, w_m\} := \text{Eckpunkte}(A, dcon)$.
 $S := (0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$.
 $E := (0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6$.
2. $L := (|w_1 - w_2|, |w_2 - w_3|, |w_3 - w_4|, |w_4 - w_1|) \in \mathbb{R}^4$.
3. WENN $\frac{|L_1 - L_3|}{\max(L_1, L_3)} \leq \epsilon$:
 $E_3 := 1$.
4. WENN $\frac{|L_2 - L_4|}{\max(L_2, L_4)} \leq \epsilon \wedge E_3 = 1$:
 $E_1 = E_2 = E_4 := 1$.
SONST WENN $\frac{|L_2 - L_4|}{\max(L_2, L_4)} \leq \epsilon \wedge E_3 = 0$:
 $E_3 := 1$, gehe zu 7.
SONST WENN $\frac{|L_2 - L_4|}{\max(L_2, L_4)} > \epsilon \wedge E_3 = 1$:
Gehe zu 7.

SONST:

Gehe zu 6.

5. WENN $\frac{|L_1-L_2|}{\max(L_1,L_2)} \leq \epsilon$:
 $E_5 := 1, E_6 := 1, S_5 := 1$
 AUSGABE: S, E .

SONST:

 $S_4 := 1, \text{AUSGABE: } S, E$.

6. WENN $(\frac{|L_1-L_2|}{\max(L_1,L_2)} \leq \epsilon \wedge \frac{|L_3-L_4|}{\max(L_3,L_4)} \leq \epsilon) \vee (\frac{|L_1-L_4|}{\max(L_1,L_4)} \leq \epsilon \wedge \frac{|L_2-L_3|}{\max(L_2,L_3)} \leq \epsilon)$:
 $E_5 := 1, S_3 := 1$.
 AUSGABE: S, E .

7. $M^1 := [(w_1 - w_2)^T, (w_4 - w_3)^T] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
 $M^2 := [(w_1 - w_4)^T, (w_2 - w_3)^T] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
 $p_1 := \frac{\det(M^1)}{\max(|M_{11}^1 \cdot M_{12}^1|, |M_{21}^1 \cdot M_{22}^1|)}$.
 $p_2 := \frac{\det(M^2)}{\max(|M_{11}^2 \cdot M_{12}^2|, |M_{21}^2 \cdot M_{22}^2|)}$.

8. WENN $|p_1| \leq \epsilon \vee |p_2| \leq \epsilon$:
 $E_1 := 1$.
 WENN $E_3 = 0$:
 $S_1 := 1, \text{AUSGABE: } S, E$.
 SONST:
 $S_2 := 1, \text{AUSGABE: } S, E$.
 SONST:
 AUSGABE: S, E .

Um den Algorithmus an einem Beispiel zu testen, untersuchen wir Objekte in einem Bild, deren Umrandungen mit dem in Kapitel 2.1 vorgestellten Algorithmus durch Punktmengen repräsentiert werden (siehe Abbildung 8.3).

Diese Punktmengen werden mit Hilfe des Algorithmus **Vierecksstruktur** ($dcon = 2$, $\epsilon = 0.1$) analysiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 8.4 dargestellt.

8.2 Audio-Daten

In unserer zweiten Anwendung wollen wir einen Eindruck vermitteln, wie man die Grundidee unseres Algorithmus zur Analyse von verschiedenartigen Daten verwenden kann. Dazu wollen wir Daten untersuchen, die aus der Audiosignalverarbeitung stammen.

Die sogenannten Head Related Impulse Response- (HRIR-)Daten, stammen dabei aus der öffentlich bereitgestellten CIPIC-Datenbank [2]. Die Datenbank wurde erstellt, indem

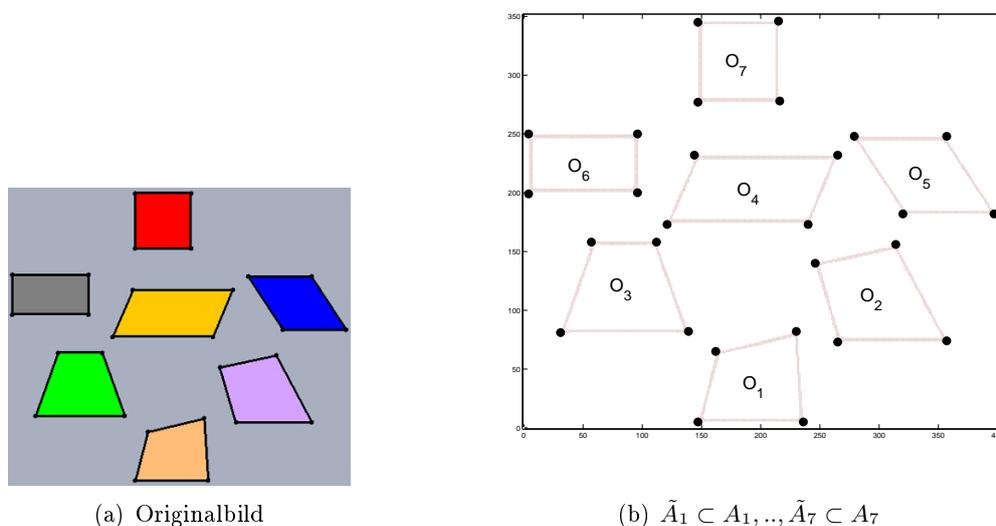


Abbildung 8.3: Verschiedene Vierecke

Objekt	S_i	
O_1	-	
O_2	S_3	Drachenviereck
O_3	S_2	Gleichschenkliges Trapez
O_4	S_4	Parallelogramm
O_5	S_5	Raute
O_6	S_4	Parallelogramm
O_7	S_5	Raute

Abbildung 8.4: Strukturen

für 45 verschiedene Personen, jeweils für das linke und das rechte Ohr, das Impulsansprechverhalten für ein bestimmtes Geräusch aus 1250 verschiedenen Richtungen gemessen wurde. Jede Richtung ist dabei durch einen der insgesamt 25 Azimuths (waagrechte Winkel) und einen der insgesamt 50 Elevations (senkrechte Winkel) charakterisiert. Die zeitliche Dauer einer HRIR beträgt 200 Abtastzeitintervalle, was ungefähr 4,5 ms entspricht. Außerdem enthält die Datenbank verschiedene anthropometrische Messungen des Oberkörpers, des Kopfes und der Ohren jeder der 45 Personen.

Die HRIR-Daten verschiedener Personen für eine bestimmte Richtung sind aufgrund der unterschiedlichen Anthropometrie nicht identisch. Allerdings besitzen die HRIR-Daten einige gemeinsame Merkmale unabhängig von der Anthropometrie. So sind die Werte der HRIR-Daten des Ohres, das näher an der Geräuschquelle liegt, in der Regel größer als die Werte der HRIR-Daten des anderen Ohres. Außerdem erreicht das Geräusch dieses Ohr früher als das andere.

Solche allgemeingültigen Eigenschaften kann man benutzen, um die Richtung, aus der ein Geräusch kommt, zu bestimmen. Daher ist es ein interessantes Problem, signifikante Merkmale herauszufiltern, die die HRIR-Daten aller Testpersonen gemeinsam haben [40].

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie man solche Merkmale gewinnen kann. Dabei wird unter anderem der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus zur Bestimmung Charakteristischer Eckpunkte verwendet.

Zunächst bilden wir für zehn verschiedene Testpersonen, sowohl für das linke als auch für das rechte Ohr, für alle vorhandenen Azimuths ($\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) die folgenden Punktmen- gen im \mathbb{R}^3 :

$$L_i^\alpha = \{(\beta_9, t_{20}, HRIR_i^L(\alpha, \beta_9, t_{20})), \dots, (\beta_{41}, t_{80}, HRIR_i^L(\alpha, \beta_{41}, t_{80}))\},$$

$$R_i^\alpha = \{(\beta_9, t_{20}, HRIR_i^R(\alpha, \beta_9, t_{20})), \dots, (\beta_{41}, t_{80}, HRIR_i^R(\alpha, \beta_{41}, t_{80}))\}.$$

Dabei gilt:

$\beta_j = -\frac{\pi}{4} + (j-1) \cdot \frac{\pi}{32}$ ($j = 9, \dots, 41$) ist eine Auswahl von 33 der 50 vorhandenen Elevations, $t_i = i \cdot 0.01$ ($i = 20, \dots, 80$) beschreibt eine Folge von Zeitpunkten, $HRIR_i^L(\alpha, \beta, t)$ (bzw. $HRIR_i^R(\alpha, \beta, t)$) gibt das Impulsansprechverhalten des linken (bzw. rechten) Ohres der Person i auf ein Geräusch aus der durch die Winkel α und β charakterisierten Richtung zum Zeitpunkt t an. In Abbildung 8.5 ist eine solche Punktmenge dargestellt.

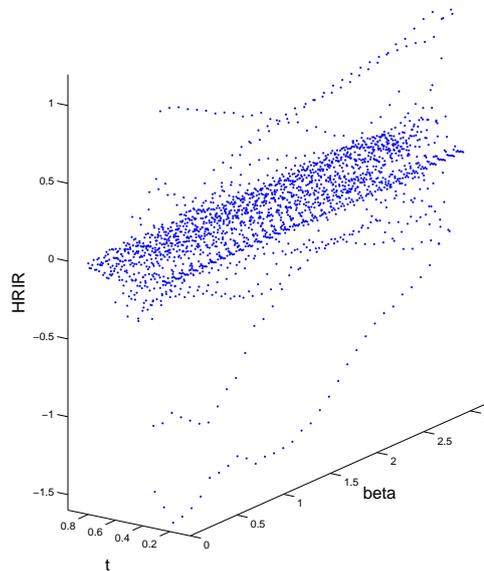


Abbildung 8.5: Punktmenge L_i^α

Für jede der Punktmen- gen L_i^α bzw. R_i^α wird nun mit dem in Kapitel 6 eingeführten Algorithmus `Eckpunkte 3D` ($dcon = 0.1$ aus Algorithmus `Parameter`) die Menge der Cha-

rakteristischen Eckpunkte \tilde{L}_i^α bzw. \tilde{R}_i^α bestimmt. In Abbildung 8.6 sieht man die konvexe Hülle der Menge der Charakteristischen Eckpunkte, also $(\tilde{L}_i^\alpha)_{kon}$.

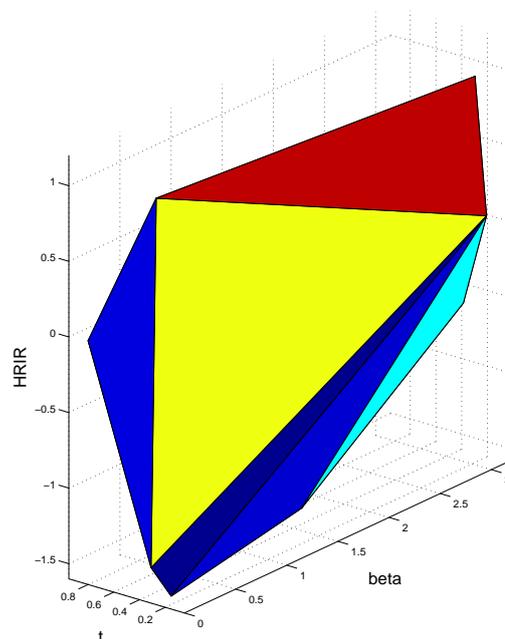


Abbildung 8.6: $(\tilde{L}_i^\alpha)_{kon}$

Als Nächstes definieren wir zwei Funktionen $V^L(\alpha)$ und $V^R(\alpha)$, die allen vorhandenen Werten von α das durchschnittliche Volumen der konvexen Hüllen der Punktmenge $\tilde{L}_1^\alpha, \dots, \tilde{L}_{10}^\alpha$ bzw. $\tilde{R}_1^\alpha, \dots, \tilde{R}_{10}^\alpha$ zuordnen. Anschließend bestimmen wir noch zwei Polynome fünften Grades $p^L(\alpha)$ und $p^R(\alpha)$, die die diskreten Funktionen $V^L(\alpha)$ und $V^R(\alpha)$ (im Sinne der minimalen Fehlerquadrate) in dem Intervall $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ interpolieren (siehe Abbildung 8.7).

Es zeigt sich, dass die Polynome $p^L(\alpha)$ und $p^R(\alpha)$ repräsentativ für alle 45 Testpersonen aus der CIPIC Datenbank sind. Das ist insofern bemerkenswert, als diese Polynome ja nur auf Basis der kleinen Mengen der Charakteristischen Eckpunkte der Punktmenge, die die HRIR-Daten von 10 der 45 Testpersonen repräsentieren, gebildet wurden. Damit zeigt sich einerseits, dass die Polynome von der jeweiligen Anthropometrie unabhängige Eigenschaften der HRIR-Daten widerspiegeln, und andererseits, dass man mit dem Algorithmus **Eckpunkte 3D** kleine, aber für dieses Problem aussagekräftige Teilmengen für die Punktmenge L_i^α bzw. R_i^α bestimmen kann. Für die abgebildeten Punktmenge gilt zum Beispiel:

$$|L_i^\alpha| = 2013, \quad |\tilde{L}_i^\alpha| = 11.$$

Die Repräsentativität der Polynome wollen wir an einem Beispiel illustrieren: Hat man die HRIR-Daten einer Person i für die oben benutzten Elevations β_j und Zeitpunkte t_j für beide Ohren und einen unbekanntes Azimuth α^* gegeben, so kann man die Punktmengen $L_i^{\alpha^*}$ und R^{α^*} bilden und damit das Volumen der konvexen Hülle der Menge der Charakteristischen Eckpunkte dieser Punktmengen berechnen.

Mit diesen Werten kann man dann aus dem Diagramm aus Abbildung 8.7 den Winkel α^* bestimmen, indem man nach dem α^* sucht, für das die Volumen-Werte die Funktionswerte der Polynome $p^L(\alpha^*)$ und $p^R(\alpha^*)$ auf eine bestimmte Art optimal annähern.

In Abbildung 8.8 zeigen die diskreten Punkte die auf diese Weise erzielten Ergebnisse für die jeweiligen echten Azimuths einer Testperson. Die vertikalen Abstände zur Ursprungsgerade beschreiben den Fehler bei der Azimuth-Bestimmung, der in diesem Fall innerhalb von 8 Grad liegt. Für den Korrelationskoeffizienten ρ zwischen dem echten und dem berechneten Azimuth gilt hier $\rho > 0.99$. Allgemein gilt für alle Testpersonen aus der CIPIC-Datenbank:

$$\rho > 0.96.$$

Die Korrelation zwischen diesen Werten ist also sehr hoch, was die hohe Aussagekraft der Polynome $p^L(\alpha)$ und $p^R(\alpha)$ für alle Testpersonen zeigt.

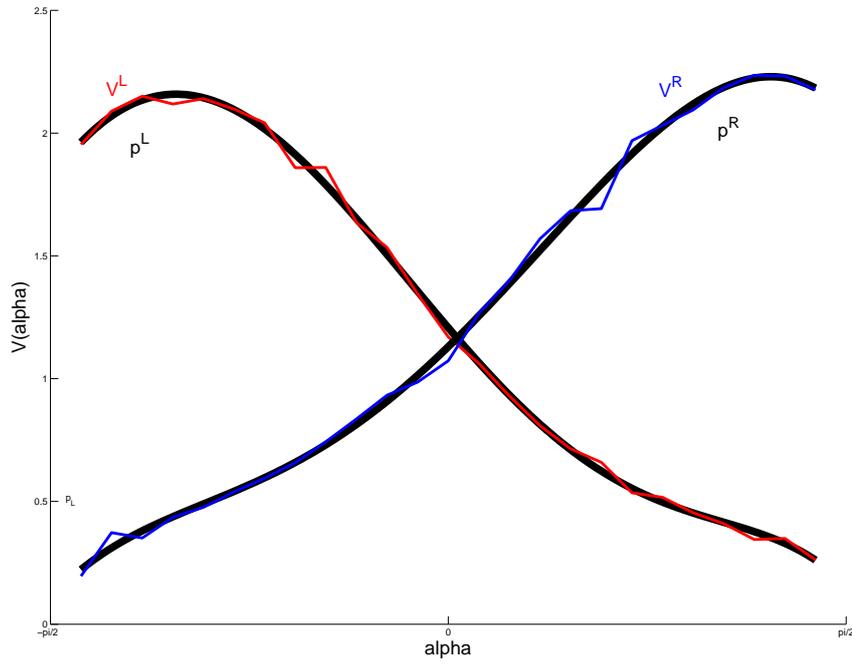


Abbildung 8.7: Stückweise lineare Interpolationen von V^L, V^R , Polynome p^L, p^R

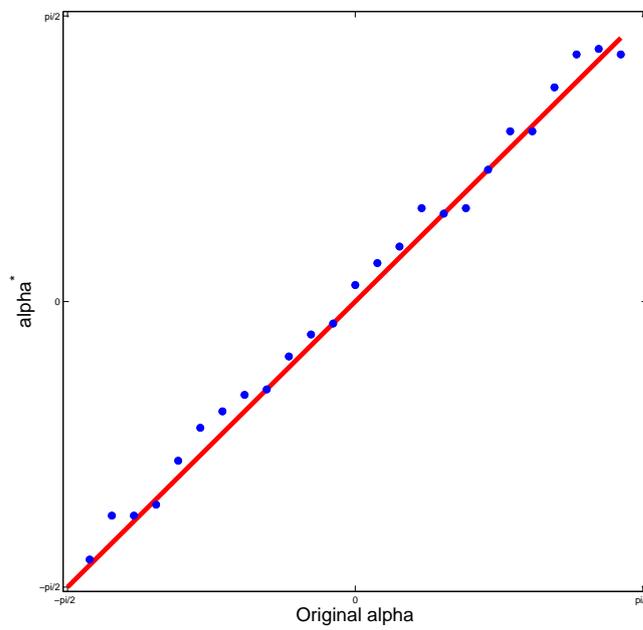


Abbildung 8.8: Berechnung der Azimuths

Literaturverzeichnis

- [1] TATSUYA AKUTSU: *On determining the congruence of point sets in d-dimensions*. 2nd ed. Computational Geometry, 247-256, 1998.
- [2] V.R. ALGAZI, R.O. DUDA, D.M. THOMPSON, C. AVENDANDO: *The CIPIC HRTF database*. 2nd ed. IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, New York, 99-102, 2001.
- [3] HELMUT ALT, KURT MEHLHORN, HUBERT WAGENER, EMO WELZL: *Congruence, Similarity, and Symmetries of Geometric Objects*. Discrete Computational Geometry 3, 237-256, 1988.
- [4] M.A. ARMSTRONG: *Groups and Symmetry* Springer Verlag New York Inc., 1988.
- [5] C. BRADFORD BARBER, DAVID P. DOBKIN, HANNU HUHDANPAA: *The Quickhull Algorithm for Convex Hulls*. ACM Transactions on Mathematical Software, Volume 22, Issue 4, 469 - 483, 1996.
- [6] ALBRECHT BEUTELSPACHER, UTE ROSENBAUM: *Projektive Geometrie*. Vieweg Verlag, 2004.
- [7] F.L. BOOKSTEIN: *Fitting Conic Sections to Scattered Data* Computer Graphics and Image Processing, no. 9, pp. 56-71, 1979.
- [8] JOHN A. BOSCH: *Coordinate measuring machines and systems* CRC Press, 1995.
- [9] PETER BRASS, CHRISTIAN KNAUER: *Testing the congruence of d-dimensional point sets* International Journey of Computational Geometry, 115-124, 2002.
- [10] A.M. BRUCKSTEIN, D. SHAKED: *Skew-Symmetry Detection Via Invariant Signatures*. Pattern Recognition, Vol. 31, No. 2, 181-192, 1998.
- [11] SERGIO CABELLO, PANOS GIANNOPOULOS, CHRISTIAN KNAUER: *On the Parameterized Complexity of d-Dimensional Point Set Pattern Matching*. 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation, 175-183, 2006.
- [12] CHRIS CALHOUN, THOMAS F. STAHOVIC, TOLGA KURTOGLU, LEVENT BURAK KARA: *Recognizing Multi-Stroke Symbols*. AAAI Spring Symposium, 2002.
- [13] STEFAN CARLSSON: *Symmetry in Perspective*. Pattern Recognition, Vol. 31, No. 2, 181-192, 1998.

- [14] TAT-JEN CHAM, ROBERTO CIPOLLA: *Symmetry detection through local skewed symmetries*. Image and Vision Computing Volume 13 Number 5, 6/1995.
- [15] CIPIC INTERFACE LABORATORY: *Documentation for the UCD HRIR Files*. 2nd ed. University of California at Davis, 1998.
- [16] T.F. COLEMAN, Y. LI: *A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on Some of the Variables*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, Number 4, pp. 1040-1058, 1996.
- [17] DORIN COMANICIU, PETER MEER: *Mean Shift: A Robust Approach Toward Feature Space Analysis*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 24, No. 5, 2002.
- [18] HUGO CORNELIUS, GARETH LOY: *Detecting Bilateral Symmetry in Perspective*. Proceedings of the 2006 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop, 191-197, 2006.
- [19] STEPHANE DERRODE, FAOUZI GHORBEL: *Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier-Mellin representation*. Signal Processing 84, 25-39, 2004.
- [20] ANDREW FITZGIBBON, MAURIZIO PILU, ROBERT B. FISHER: *Direct Least Square Fitting of Ellipses*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 1999; 21: 476-480, 1999.
- [21] C.H. GAO, FRANK C. LANGBEIN, DAVID MARSHALL, RALPH R. MARTIN: *Approximate Congruence Detection of Model Features for Reverse Engineering*. Proc. Int. Conf. Shape Modelling and Applications, 69-77, 2003.
- [22] LUC VAN GOOL, THEO MOONS, DORIN UNGUREANU, ANDRE OOSTERLINCK: *The Characterization and Detection of Skewed Symmetries*. Computer Vision and Image Understanding, Vol. 61, No. 1, 138-150, 1995.
- [23] LUC VAN GOOL, THEO MOONS, MARC PROESMANS: *Mirror and Point Symmetry under Perspective Skewing*. Katholieke Universiteit Leuven, 2006.
- [24] ARI D. GROSS, TERRANCE E. BOULT: *Analyzing Skewed Symmetries*. International Journal of Computer Vision, 13:1, 91-111, 1994.
- [25] WEI HONG, ALLEN YANG YANG, KUN HUANG, YI MA: *On Symmetry and Multiple-View Geometry: Structure, Pose and Calibration from a Single Image*. International Journal of Computer Vision, 60(3), 241-265, 2004.
- [26] KAI HUEBNER: *Symmetrie als kognitives Bildmerkmal*. Bremer Institut für sichere Systeme, FB3, Universität Bremen, 2004.
- [27] ATSUSHI IMIYA, TOMOKI UENO, IRIS FERMIN: *Planar Symmetry Detection by Random Sampling and Voting Process*. SSPR SPR 2000, LNCS 1876, pp.347-356 Springer, 2000.

- [28] S. IWANOWSKI: *Testing approximate symmetry in the plane is NP-hard*. Theoretical Computer Science 80, 227-262, 1991.
- [29] KLAUS JAENICH: *Lineare Algebra* Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [30] H.W. KUHN: *The Hungarian Method for the assignment problem* Naval Research Logistics Quarterly, Volume 2, pp. 83-97, 1955.
- [31] YIWU LEI, KOK CHEONG WONG: *Detection and localisation of reflectional and rotational symmetry under weak perspective projection*. Pattern Recognition 32 167-180, 1999.
- [32] MING LI, FRANK C. LANGBEIN, RALPH R. MARTIN: *Detecting Approximate Incomplete Symmetries in Discrete Point Sets*. 335-340, ACM Press, 2007.
- [33] MING LI, FRANK C. LANGBEIN, RALPH R. MARTIN: *Detecting approximate symmetries of discrete point subsets*. Computer Aided Design 40 (2008), 76-93, 2007.
- [34] JIANZHANG LIU, YONG TSUI LEE: *A Graph-Based Method for Face Identification from a Single 2D Line Drawing* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 2001; 23: 1106-1119, 2001.
- [35] GARETH LOY, JAN OLOF EKLUNDH: *Detecting Symmetry and Symmetric Constellations of Features*. ECCV 2006, Part 2, LNCS 3952, 508-521, 2006.
- [36] YI MA, STEFANO SOATTO, JANA KOSECKA, SHANKAR S. SASTRY: *An Invitation to 3-D Vision - From Images to Geometric Models*. 2nd ed. Berlin, Springer, 2003.
- [37] GIOVANNI MAROLA: *On the Detection of the Axes of Symmetry of Symmetric and Almost Symmetric Planar Images*. Discrete Computational Geometry 3, 237-256, 1988.
- [38] WILLARD MILLER: *Symmetry Groups and Their Applications* Academic Press New York , 1972.
- [39] BRUCE I. MILLS, FRANK C. LANGBEIN, DAVID MARSHALL, RALPH R. MARTIN: *Approximate Symmetry Detection For Reverse Engineering*. Proc. 6th ACM Symposium on Solid Modelling and Applications, 241-248, ACM Press, New York, 2001.
- [40] VIKAS C. RAYKAR, RAMANI DURAISWAMI, LARRY DAVIS, B. YEGNANARAYANA: *Extracting Significant Features from HRTF*. 2nd ed. Proceedings of the 2003 International Conference on Auditory Display, Boston, MA USA, July 6-9, 2003.
- [41] A. RENYI, R. SULANKE: *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten* Academic Press New York , 1972.
- [42] JÜRGEN RICHTER-GEBERT: *Hands on Projective Geometry*. Unterlagen zur Vorlesung Projektive Geometrie, TU München, 2007.
- [43] PIETER H. SCHUOTE: *Mehrdimensionale Geometrie 1+2* Sammlung Schubert, Leipzig, 1905.

- [44] D. SHEN, H.H.S. IP, E.K. TEOH: *Robust detection of skewed symmetries by combining local and semi-local affine invariants.* Pattern Recognition 34 1417-1428, 2001.
- [45] CHANGMING SUN, JAMIE SHERRAH: *3D Symmetry Detection Using The Extended Gaussian Image.* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 19, No. 2, 1997.
- [46] GOTTFRIED TINHOFER: *Kombinatorische Optimierung.* Skriptum, Technische Universität München, 2002.
- [47] TAMAS VARADY, RALPH R. MARTIN, JORDAN COX: *Reverse engineering of geometric models - an introduction.* Computer Aided Design Vol 29 (1997), 255-268, 1997.
- [48] HERMANN WEYL: *Symmetry.* Princeton University Press, 1952.
- [49] JAN D. WOLTER, TONY C. WOO, RICHARD A. VOLZ: *Optimal algorithms for symmetry detection in two and three dimensions.* The Visual Computer 1:37-48, Springer, 1985.
- [50] DANIEL M. WUESCHER, KIM L. BOYER: *Robust Contour Decomposition using a Constant Curvature Criterion.* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.13, NO.1, 1991.
- [51] ALLEN Y. YANG, KUN HUANG, SHANKAR RAO, WEI HONG, YI MA: *Symmetry-based 3-D reconstruction from perspective images.* Computer Vision and Image Understanding, Vol. 99, 210-240, 2005.
- [52] ALLEN Y. YANG, KUN HUANG, SHANKAR RAO, WEI HONG, YI MA: *Geometric Segmentation of Perspective Images Based on Symmetry Groups.* Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision, 2003.
- [53] RAYMOND K.K. YIP: *A Hough transform technique for the detection of parallel projected rotational symmetry* Pattern Recognition Letters 1999, 20(10): 991-1004, 1999.
- [54] HAGIT ZABRODSKY, SHMUEL PELEG, DAVID AVNIR: *Symmetry as a continuous Feature.* IEEE Transactions on Pattern Analysis and M.I., Vol. 17, No: 12, 1154-1166, 1995.
- [55] HAGIT ZABRODSKY, DAPHNA WEINSHALL: *Using Bilateral Symmetry To Improve 3D Reconstruction From Image Sequences.* Computer Vision and Image Understanding, Vol. 67, 48-57, 1997.
- [56] H.L. ZOU, Y.T.LEE: *Skewed rotational symmetry detection from a 2D line drawing of a 3D polyhedral object* Computer Aided Design Vol 38 (2006), 1224-1232, 2006.