

**Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München**

Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken

Johannes Linhard

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller
3. Univ. Lecturer Dr. Fehmi Cirak,
University of Cambridge / UK

Die Dissertation wurde am 03.02.2009 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 14.04.2009 angenommen.

Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird der Entwurfsprozess von Membrantragwerken aus der Sichtweise der numerischen Mechanik analysiert. Die dabei durchzuführenden Planungsschritte, die sich aufgrund des speziellen Tragverhaltens vorgespannter, leichter Flächentragwerke von denen konventioneller Bauten unterscheiden, werden zunächst getrennt voneinander auf ihre kontinuumsmechanische Problemstellung und die daraus abzuleitenden numerischen Lösungsverfahren hin untersucht. Im Anschluss daran werden gegenseitige Interaktionen zwischen den einzelnen Phasen aufgezeigt, durch deren Berücksichtigung sich ein integraler, numerisch gestützter Entwurfsprozess mit einem Zugewinn an Modellgenauigkeit entwickeln lässt.

Da Membrankonstruktionen wegen ihrer extremen Schlankheit äußere Lasten nahezu ausschließlich über tangentielle Zugspannungen abtragen, muss zu Beginn des Entwurfsprozesses eine geeignete Geometrie gefunden werden, die sowohl den mechanischen als auch architektonischen Anforderungen genügt. Dies geschieht im Zuge der *Formfindung*, bei der für Spannungsvorgaben in den Strukturelementen die korrespondierende Gleichgewichtsform unter Einhaltung gewisser Randbedingungen ermittelt wird. Eine robuste numerische Lösung dieses inversen Problems gelingt durch die vorgestellte Erweiterung der Updated Reference Strategy, bei der sowohl die Instabilitäten infolge der diskretisierten Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente als auch generell auftretende physikalische Inkompatibilitäten bei den Spannungsvorgaben gelöst werden.

Die Herstellungsweise der räumlichen Membrantragwerke aus ebenen Werkstoffbahnen macht eine *Zuschnittsermittlung* erforderlich, bei der die Auswirkungen infolge der generellen Nichtabwickelbarkeit der Membranfläche zu minimieren sind. Nach theoretischen Überlegungen zur qualitativen Verteilung der Zusatzspannungen infolge der doppelten Verkrümmung der Membranbahnen, wird ein Zuschnittsalgorithmus beschrieben, der durch Verbindung einer kontinuumsmechanisch korrekten Beschreibung des Deformationsprozesses mit Optimierungsmethoden eine Minimierung der Spannungsabweichung bewirkt. Das beschriebene Verfahren ist in der Lage, beliebige Vorspannzustände und Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

Bei der abschließenden Beschreibung der *Strukturanalyse* von Membrantragwerken wird der Schwerpunkt auf eine integrale Betrachtungsweise gelegt. Durch Kombination der numerischen Methoden zur statischen Berechnung von Membranen mit Elementen der Formfindung lassen sich Aufbauprozesse von vorgespannten Konstruktionen simulieren. Der Einfluss des Zuschnitts auf das Strukturverhalten kann berücksichtigt werden, indem die zugeschnittenen, spannungsfreien Membranbahnen anstatt der vorgespannten, zusammengebauten Geometrie als Referenzkonfiguration für eine geometrisch nichtlineare Berechnung verwendet wird. Der Erfolg der beschriebenen Methoden wird jeweils an illustrativen Beispielen demonstriert.

Computational mechanics of the design process of membrane structures

Abstract. This thesis investigates the design process of membrane structures from a computational mechanics point of view. In a first step, the respective design phases, which significantly differ from those for conventional structures due to the special structural behaviour of membranes, are analysed concerning their definition of the physical problem and its consequences for a numerical solution process. Thereafter, mutual interactions between the individual phases are pointed out leading to the development of an integrated, numerical design process with increased accuracy of the calculations.

Due to the slenderness of membrane structures, external loads have to be carried almost completely by tensile forces in tangential directions. Therefore, an adequate geometry has to be found at the beginning of the design process, which satisfies mechanical as well as architectural requirements. In the so called *form finding procedure*, the equilibrium shape for a given stress state and boundary conditions is determined. A robust numerical solution of this inverse problem is achieved by the proposed extension of the Updated Reference Strategy, which successfully deals with the instabilities due to the discretized geometrical representation with finite elements as well as with physically incompatible given stress states.

The manufacturing of spatially curved membrane structures out of plane material panels necessitates a *cutting pattern generation*, in which the negative effects due to a general non-developability of the membrane surface have to be minimised. After theoretical considerations regarding the qualitative distribution of additional stresses due to two-directional curvature changes of the plane membrane panels, an algorithm for cutting pattern generation is presented, which minimises the stress deviation by combining a continuum mechanically correct description of the actual deformation process with optimisation methods. The proposed method is capable of including the effects of arbitrary prestress states and material properties of the membrane.

In the concluding description of *structural analysis methods* for membrane structures, the main focus is on an integrated approach. By combining numerical methods for static analysis of membranes with form finding procedures, simulations of assembling processes become possible. The effects of cutting patterns on the structural behaviour can be investigated by defining the stress-free, plane membrane panels as reference configuration for a geometrically nonlinear calculation instead of the prestressed, curved surface of the assembled structure. The success of the proposed methods is demonstrated with illustrative examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2005 bis 2009 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Meinen besonderen Dank möchte ich meinem Doktorvater, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, aussprechen, der mir als Lehrstuhlinhaber ein äußerst angenehmes und produktives Arbeitsumfeld ermöglichte. Nicht nur stand er mir in unzähligen Diskussionen als äußerst kompetenter und begeisterungsfähiger Gesprächspartner zur Verfügung, sondern gleichzeitig gewährte er mir genügend Freiheit, eigene Ideen ausprobieren zu dürfen. Durch dieses entgegengebrachte Vertrauen ist ein Großteil dieser Arbeit erst möglich geworden.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller und Herrn Univ. Lecturer Dr. Fehmi Cirak danke ich herzlich für ihr Interesse an der Arbeit und für die Übernahme der Koferate. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission.

In besonders guter Erinnerung werde ich die kollegiale und freundschaftliche Atmosphäre behalten, die am Lehrstuhl für Statik zwischen den Mitarbeitern herrschte. Besonders hervorheben möchte ich hierbei Florian Jurecka, André Lähr und Roland Wüchner, die mir entweder als Zimmernachbarn und/oder durch die enge wissenschaftliche Zusammenarbeit stets wertvolle Ansprechpartner waren.

Bei meinen Eltern Ingrid und Helmut möchte ich mich für ihre stete Unterstützung und Inspiration auf meinem bisherigen Lebensweg bedanken, wodurch sie in entscheidender Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ganz besonderer Dank gebührt jedoch meiner lieben Frau Diana: Denn sie zeigte mir stets, dass es außerhalb der Welt der Membranen durchaus noch eine andere, nicht minder lebenswerte Welt gibt. Dazu bin ich ihr zu größtem Dank verpflichtet.

München, im April 2009

Johannes Linhard



Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 1.2 | Zielsetzung und Überblick | 2 |
| 2 | Geometrische und mechanische Beschreibung von Membrantragwerken | 7 |
| 2.1 | Modellbildung | 7 |
| 2.2 | Differentialgeometrie von Flächen im Raum | 9 |
| 2.2.1 | Flächenbeschreibung | 9 |
| 2.2.2 | Erste Fundamentalform – Metrik der Fläche | 13 |
| 2.2.3 | Zweite Fundamentalform – Krümmung der Fläche | 15 |
| 2.2.4 | Diskretisierte Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente | 20 |
| 2.3 | Kontinuumsmechanik | 26 |
| 2.3.1 | Konfigurationen | 26 |
| 2.3.2 | Spannungs- und Dehnungsmaße | 30 |
| 2.3.3 | Materialmodellierung | 38 |
| 2.3.4 | Gleichgewichtsbeziehungen | 46 |
| 3 | Formfindung | 55 |
| 3.1 | Was ist Formfindung? | 55 |
| 3.1.1 | Definition der Formfindung | 56 |
| 3.1.2 | Experimentelle und numerische Formfindung | 58 |
| 3.2 | Diskussion der physikalischen Problemstellung | 60 |
| 3.2.1 | Membran mit isotroper Vorspannung | 61 |
| 3.2.2 | Membran mit anisotroper Vorspannung | 67 |
| 3.2.3 | Mit Seilen kombinierte Membran | 76 |
| 3.2.4 | Seilnetze | 81 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3 | Numerische Formfindung | 85 |
| 3.3.1 | Diskretisierung des Originalproblems | 85 |
| 3.3.2 | Updated-Reference-Strategy: Stabilisierung des numerischen Problems | 88 |
| 3.3.3 | Spannungsadaption: Stabilisierung des physikalischen Problems . . . | 99 |
| 4 | Zuschnitt | 113 |
| 4.1 | Problemstellung und Ablauf der Zuschnittsberechnung | 113 |
| 4.2 | Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts | 116 |
| 4.3 | Numerische Ermittlung der Schnittlinien | 121 |
| 4.3.1 | Schnittebenen | 122 |
| 4.3.2 | Geodätische Linien | 123 |
| 4.4 | Zuschnitt durch Verebnen | 128 |
| 4.5 | Zuschnitt durch „Inverse engineering“ | 132 |
| 4.5.1 | Methode I: Kleinste Fehlerquadrate | 134 |
| 4.5.2 | Methode II: Minimierung der „Arbeit der Spannungsabweichung“ . . | 142 |
| 4.6 | Vergleich der Zuschnittsmethoden | 146 |
| 5 | Strukturanalyse | 153 |
| 5.1 | Überblick | 153 |
| 5.2 | Elementformulierungen | 155 |
| 5.2.1 | Membranelement | 155 |
| 5.2.2 | Seilelement | 157 |
| 5.3 | Kombination Formfindung - Strukturanalyse | 157 |
| 5.3.1 | Membran mit Seilschlaufe | 158 |
| 5.3.2 | Bat-Sail | 159 |
| 5.3.3 | Tensegrity | 160 |
| 5.3.4 | Unterspannte Membranstruktur | 162 |
| 5.4 | Kombination Zuschnitt - Strukturanalyse | 164 |
| 5.4.1 | Bat-Sail | 165 |
| 5.4.2 | Pneumatisch vorgespanntes Folienkissen | 167 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 175 |

| | |
|--|------------|
| Literaturverzeichnis | 179 |
| Anhang | 189 |
| A.1 Richtungsprojektion zwischen Flächen | 189 |
| A.2 Geometrische Beschreibung von Rotationsflächen | 191 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Entwurfsprozess von Membrantragwerken | 4 |
| 2.1 | Modellbildung einer Membran | 8 |
| 2.2 | Ortsvektor eines Punktes im Raum | 10 |
| 2.3 | Explizite und implizite Flächenbeschreibung | 11 |
| 2.4 | Parameterdarstellung einer Fläche | 12 |
| 2.5 | Ko- und Kontravariante Basisvektoren | 13 |
| 2.6 | Erste Fundamentalform einer Fläche | 14 |
| 2.7 | Möglichkeiten der Krümmungsberechnung | 16 |
| 2.8 | Flächenkategorien | 18 |
| 2.9 | Gaußsche Krümmungen eines Torus | 18 |
| 2.10 | Topologie eines drei- und vierknotigen finiten Elements | 21 |
| 2.11 | Lage und Wichtung der Gaußpunkte zur numerischen Integration | 22 |
| 2.12 | Knotennormalen bei finiten Elementen | 24 |
| 2.13 | Vergleich der Wichtungsfaktoren bei Mittelung des Knotendirektors | 25 |
| 2.14 | Kontinuumsmechanische Konfigurationen | 27 |
| 2.15 | Konfigurationen einer Membranstruktur | 29 |
| 2.16 | Polare Dekomposition der Deformation | 32 |
| 2.17 | Normal- und Schubspannungskomponenten des Spannungsvektors | 34 |
| 2.18 | Membranspannungszustand und dessen Hauptspannungen | 35 |
| 2.19 | Kontinuumsmechanische Spannungsmaße | 37 |
| 2.20 | Monoaxiale Kraft-Streckungs-Kurve eines St. Venant-Kirchhoff-Materials | 41 |
| 2.21 | Multilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung | 44 |
| 2.22 | Berstversuch eines ETFE-Folienkissens | 46 |
| 2.23 | Realität und Modellbildung der Krafteinleitung | 47 |
| 2.24 | Gleichgewicht der Membran senkrecht zur Fläche | 48 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.1 | Faltenbildung bei einer gescherten Membran | 56 |
| 3.2 | Definition der Formfindung | 57 |
| 3.3 | Experimentelle Formfindung | 59 |
| 3.4 | Numerische Formfindung des Tanzbrunnens von Frei Otto | 61 |
| 3.5 | Costasche Minimalfläche | 63 |
| 3.6 | Relatives Flächenminimum der Costaschen Minimalfläche | 64 |
| 3.7 | Beispiele für Minimalflächen | 65 |
| 3.8 | cmc-Variationen eines Katenoids | 67 |
| 3.9 | Orthogonalitätsbedingung der anisotropen Vorspannung | 68 |
| 3.10 | Projektionsschema: Untersuchung der Eindeutigkeit | 69 |
| 3.11 | Projektionsschema: Orthogonalisierung der Richtungen | 70 |
| 3.12 | Rotationssymmetrische Struktur mit anisotroper Vorspannung | 71 |
| 3.13 | Stabile rotationssymmetrische Formen mit anisotroper Vorspannung | 74 |
| 3.14 | Spannungsabweichung bei einem anisotrop vorgespannten Katenoid | 75 |
| 3.15 | Kombinationen Membran - Seil | 76 |
| 3.16 | Formfindung: Membran mit Randseil | 77 |
| 3.17 | Formfindung: Membran mit Augseil | 79 |
| 3.18 | Formfindung: Membran mit elastischem Augseil | 80 |
| 3.19 | Seilnetztypen | 81 |
| 3.20 | Vergleich Membran - Seilnetz an einem Katenoid | 82 |
| 3.21 | Numerische Formfindung eines Katenoids | 83 |
| 3.22 | Seilnetze mit konstanter Vorspannung | 84 |
| 3.23 | Schwimmende Netze bei numerischer Formfindung | 86 |
| 3.24 | Singuläre Steifigkeiten bei direkter numerischer Formfindung | 88 |
| 3.25 | Formfindung der Scherkschen Minimalfläche mittels URS | 91 |
| 3.26 | Lineares Seilelement | 93 |
| 3.27 | Formfindung von Seilnetzen mittels der Kraftdichtemethode | 96 |
| 3.28 | Numerische Seifenblasen | 98 |
| 3.29 | Zerplatzen eines überkritischen Katenoids | 101 |
| 3.30 | Ablaufdiagramm: Formfindung mit Spannungsadaption | 103 |
| 3.31 | Konfigurationen der Formfindung mit Spannungsadaption | 105 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.32 | Formfindung eines Katenoids mit Spannungsadaption | 107 |
| 3.33 | Testbeispiel für Verzerrungskontrolle | 108 |
| 3.34 | Verzerrungskontrolle bei einer „punktgestützten“ Membran | 110 |
| 3.35 | Netzanpassung mittels Verzerrungskontrolle | 111 |
| 3.36 | Beispiele für die Formfindung von Membrantragwerken | 112 |
| | | |
| 4.1 | Zuschnitt eines Vierpunktsegels | 114 |
| 4.2 | Konfigurationen der Zuschnittsermittlung | 115 |
| 4.3 | Verebnung nicht-abwickelbarer Flächen | 117 |
| 4.4 | Faltenbildung infolge des Zuschnitts am physikalischen Modell | 118 |
| 4.5 | Faktoren der Spannungsabweichung infolge des Zuschnitts | 119 |
| 4.6 | Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts beim „Papstzelt“ | 120 |
| 4.7 | Einfluss der Schnittliniendefinition auf den Zuschnitt | 121 |
| 4.8 | Neuvernetzung nach vertikalen Schnitten | 122 |
| 4.9 | Beispiele geodätischer Linien | 123 |
| 4.10 | Algorithmen zur Bestimmung diskreter geodätischer Linien | 125 |
| 4.11 | Berechnung der Entfernungsfunktion T der FMM | 125 |
| 4.12 | Berechnungsergebnisse der geodätischen Entfernung | 126 |
| 4.13 | Geodätische Linien durch vorgespannte Seile | 127 |
| 4.14 | Zuschnitt durch Verebnen | 129 |
| 4.15 | Ergebnisse bei Verebnung eines vorgespannten Seiles | 131 |
| 4.16 | Zuschnitt durch „Inverse engineering“ | 134 |
| 4.17 | Variation der Referenzgeometrie bei orthotropen Geweben | 137 |
| 4.18 | Cauchy-Spannung eines Seiles in Abhängigkeit der Zuschnittslänge | 140 |
| 4.19 | Stationäre Punkte bei Optimierung des Seilzuschnitts | 141 |
| 4.20 | Maßgebliche Funktionen der inversen Zuschnittsberechnung | 143 |
| 4.21 | Unsymmetrische Systemmatrix bei Zuschnittsermittlung | 146 |
| 4.22 | Vergleich der Zuschnittsvarianten an einer hyper-ähnlichen Minimalfläche | 147 |
| 4.23 | Vergleich der inversen Zuschnittsvarianten | 149 |
| 4.24 | Konfigurationen eines Sechspunktsegels | 150 |
| 4.25 | Einfluss der Materialeigenschaften auf den Zuschnitt | 151 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Formfindung einer Membran mit Seilschlaufe | 158 |
| 5.2 | Schematische Skizze einer Fledermaus | 159 |
| 5.3 | Formfindung eines Bat-Sails | 160 |
| 5.4 | Formfindung von Tensegrity-Strukturen | 161 |
| 5.5 | Formfindung einer unterspannten Membranstruktur („Geiger-Kuppel“) . . . | 163 |
| 5.6 | Statische Analyse eines Bat-Sails | 166 |
| 5.7 | Entwurfsprozess eines pneumatischen Folienkissens | 168 |
| 5.8 | Einfluss des Zuschnitts bei statischer Analyse eines Pneus | 171 |
| | | |
| A.1 | Basisvektoren bei Richtungsprojektion | 189 |
| A.2 | Geometrie einer Rotationsfläche | 191 |
| A.3 | Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche | 193 |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Membrantragwerke wissen zu faszinieren: Auch wenn vielen Menschen der Begriff an sich oft unbekannt ist, sind sie doch bei ihrem Anblick generell von der Leichtigkeit und dem Anmut beeindruckt, mit der diese Konstruktionen weite Flächen überspannen können. Dabei ist die Art der individuellen Empfindung durchaus verschieden: Während bei einigen das pure Staunen über die so natürlich geschwungenen und doch ungewohnten Formen überwiegt, wundern sich andere, dass die auf den ersten Blick äußerst fragil anmutenden Strukturen durchaus beträchtliche Kräfte sicher abtragen können.

Die wahre Sonderstellung vorgespannter Membrankonstruktionen offenbart sich jedoch erst bei intensiver Beschäftigung mit dem Thema. Denn nur dadurch lässt sich deren unübertreffliche Effizienz begreifen, die sich durch ein optimales Zusammenspiel aus Form und verwendetem Material ergibt. Durch Kombination des Kraftflusses der rein auf Zug belasteten Membran mit einer doppelten Flächenkrümmung verfügt das Tragwerk trotz seiner extremen Leichtigkeit über ausreichend Steifigkeit, um gegenüber den maßgeblichen Einwirkungen genügend Widerstand bieten zu können.

Um aber diesen Optimalzustand in einer Membranstruktur zu erreichen, ist trotz oder sogar wegen ihres äußerst logischen Aufbaus die Kenntnis der mechanischen und konstruktiven Grundlagen bei ihrem Entwurfsprozess unerlässlich. Zwar wurden diese fundamentalen Prinzipien von einer Vielzahl von Ingenieuren und Architekten erforscht und verfeinert, doch taucht hierbei immer wieder ein Name auf: Frei Otto gilt vielen als Begründer des modernen textilen Bauens und stellt zweifellos eine der maßgeblichen Persönlichkeiten auf diesem Feld dar. Dennoch war auch er sich sehr wohl darüber bewusst, dass er nicht „Erfinder“, sondern Weiterentwickler und Ideengeber des Membranbaus ist, wie aus seinem Vorwort zum Pariser Kolloquium über „hängende Dächer“ im Jahre 1962 deutlich wird [ES62]: „Die zugbeanspruchten Konstruktionen haben ihre Wurzel im Zeltbau, der im Altertum hoch entwickelt war. Die hohe Kunst des Zeltbaus verblasste und erst heute gelingt es, ihn in veränderter Form zu neuem Leben zu erwecken.“

Es kann also festgehalten werden, dass Membrantragwerke eine der ältesten und zugleich eine der modernsten Bauweisen der Menschheit sind. Vergleicht man hierbei die oft mehrere Jahrtausende zurückliegenden anfänglichen Gehversuche wie z. B. steinzeitliche Nomadenzelte oder chinesische Yurten [Hop07] mit modernen zugbeanspruchten Tragwerken

(siehe u. a. [BGS95, Kie95, Göp04, Hab04b] für Beispiele heutiger Bauten), wird der immense Fortschritt deutlich, welcher dabei in den zurückliegenden Jahren stattgefunden hat. Selbstverständlich macht die Weiterentwicklung auch in heutiger Zeit nicht Halt: Anstatt reine „Zeltragwerke“ aus vorgespannten Membranwerkstoffen bzw. Seilnetzen zu entwerfen, wird der Trend deutlich, die Formenvielfalt rein zugbeanspruchter Strukturbauteile durch Kombination mit druck- und biegebeanspruchten Elementen zu erhöhen. Als Beispiele hierfür seien die Schirmkonstruktionen des Büros SL-Rasch [OR96] oder die Geiger-Kuppeln [Gei88] aufgeführt. Ebenfalls von wachsendem Interesse sind Konstruktionen aus ETFE-Folienmaterial [Hab04a], wobei hier v. a. die Ausführung als pneumatisch vorgespanntes Luftkissen zunehmend zum Einsatz kommt (z. B. als Fassadenelemente bei der Allianz-Arena in München [Mor05]).

Voraussetzung für die Weiterentwicklung der konstruktiven Möglichkeiten stellt eine begleitende Fortentwicklung der benötigten Berechnungsverfahren dar. Während man zu Beginn des modernen Ingenieurbaus noch meist auf Überschlagsformeln und Modell- bzw. Experimentalstatik zurückgreifen musste, eröffnen die heutigen numerischen Verfahren bislang ungeahnte Möglichkeiten hinsichtlich der Berechnungskomplexität und Detailtiefe. Als meist verbreitetes „Hilfsmittel“ kann die Methode der finiten Elemente angesehen werden, die so gut wie in allen Bereichen des Ingenieurbaus ihren Einzug gehalten hat [ZTZ05]. Seltenerweise steht jedoch das Gebiet des Membranbaus – zumindest nach der Meinung des Autors – auf numerischer Seite bislang irgendwie entkoppelt von den übrigen Bereichen des Ingenieurhochbaus da. Dies mag v. a. daran liegen, dass hierfür zu Beginn der computergestützten Statik speziell der Problemstellung angepasste Berechnungsmethoden entwickelt wurden, deren Zusammenführung in den allgemeineren Kontext bislang misslang. Eine Vereinheitlichung der numerisch-mechanischen Beschreibung würde jedoch erheblich dazu beitragen, dass Membrankonstruktionen noch einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich werden. Diese Arbeit möchte einen Beitrag dazu leisten.

1.2 Zielsetzung und Überblick

In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundlagen für numerische Verfahren, basierend auf der Methode der finiten Elemente, gelegt werden, die einen integralen und zeitgemäßen Entwurfsprozess von Membrantragwerken ermöglichen. Zunächst werden die bei der Planung derartiger Konstruktionen durchzuführenden Einzelschritte getrennt voneinander betrachtet: Es wird jeweils eine mechanisch klare Definition der Problemstellung erarbeitet, die anschließend hinsichtlich ihrer Lösbarkeit untersucht wird. Liegt ein gut gestelltes Problem vor bzw. wurden für eine schlecht gestellte Aufgabenstellung die notwendigen Stabilisierungsmaßnahmen entwickelt, werden numerische Lösungsverfahren aufgezeigt. Um einen integralen Entwurfsprozess zu entwickeln, werden abschließend die auftretenden Interaktionen zwischen den einzelnen Planungsschritten behandelt. Es wird angestrebt, durch Integration der relevanten Ergebnisse bzw. Methoden anderer Planungsschritte die Modellgenauigkeit bzw. Flexibilität der aktuellen Entwurfsphase zu erhöhen.

Das spezielle Tragverhalten von vorgespannten Membrantragwerken, das sich durch eine fast vollständige Abwesenheit von Druck- und Biegespannungen charakterisieren lässt, er-

fordert einen speziell angepassten Entwurfsprozess, der konventionell in die drei Einzelschritte *Formfindung*, *Strukturanalyse* und *Zuschnitt* unterteilt wird [Göp04]. In diesem Standardprozess wird zunächst in einer Formfindung eine physikalisch realisierbare und den architektonischen Anforderungen genügende Tragwerksgeometrie bestimmt, die in dem nachfolgenden Schritt der Strukturanalyse auf ihre Lastabtragseigenschaften hin untersucht wird. Wird ein Entwurfskriterium dabei nicht eingehalten (z. B. Spannungsüberschreitung der Membran bei Einwirkung äußerer Lasten), müssen beide Schritte wiederholt werden. Erfüllt das Tragwerk alle Anforderungen, wird der Entwurfsprozess mit der Berechnung der Zuschnittsmuster für die Membran abgeschlossen. Dieses Ablaufschema wird in Abbildung 1.1 veranschaulicht.

Nachteilig wirkt sich am eher linear verlaufenden Standard-Entwurfsprozess die Tatsache aus, dass sich die Einzelschritte nur sehr begrenzt gegenseitig beeinflussen können. Dies ist zwar bei Vorentwürfen durchaus erwünscht [CSA⁺02], jedoch kann durch Verknüpfung der Planungsphasen eine Erhöhung der Berechnungsgenauigkeit erreicht werden. Als Beispiel für diesen erweiterten Entwurfsprozess (siehe ebenfalls Abbildung 1.1) sei in dieser Einleitung lediglich die Berücksichtigung des Zuschnitts bei der statischen Analyse aufgeführt: Während beim Standardprozess die Zuschnittsberechnung als eine aus konstruktiven Gründen notwendige Maßnahme aufgefasst wird, die nur sehr bedingt in die Bemessung der Struktur mit eingeht, wird beim erweiterten Prozess der Zuschnitt explizit bei der Strukturanalyse berücksichtigt. Indem dieser als wahre Referenzkonfiguration für die Strukturberechnung verwendet wird, gehen auch die Zusatzspannungen in die Analyse mit ein, die durch die Nicht-Abwickelbarkeit der Membrangeometrie entstehen. Dies ist besonders für eine realitätsnahe Modellierung von Membrankonstruktionen aus schubsteifer Kunststoffolie wichtig, wie an einem Beispiel zu sehen sein wird.

Um die mechanischen und numerischen Grundlagen dieses integralen Entwurfsprozesses im Detail vorzustellen, werden die jeweiligen Phasen separat in einzelnen Kapiteln beschrieben. Dabei wird immer versucht, eventuelle Interaktionen mit anderen Schritten aufzuzeigen. Konkret gliedert sich die vorliegende Arbeit wie folgt:

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den geometrischen und kontinuumsmechanischen Grundlagen des Membranbaus. Nach einer kurzen Abhandlung über die bei der mechanischen Modellierung einer Membran getätigten Annahmen, folgt eine Einführung in die Differentialgeometrie räumlicher Flächen. Einen Schwerpunkt bildet dabei die Charakterisierung der Flächeneigenschaften hinsichtlich ihrer Metrik und Krümmung, da diese fundamentale Kenngrößen für die späteren Schritte der Formfindung und Zuschnittsberechnung liefern. Die diskretisierte Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente schließt die geometrischen Grundlagen ab. Die darauf folgende Einführung in die nichtlineare Kontinuumsmechanik beginnt mit einer Definition der einzelnen Konfigurationen, die ein Tragwerk in seiner „Lebenszeit“ einnimmt. Darauf aufbauend werden geometrisch nichtlineare Dehnungs- und Spannungsmaße hergeleitet sowie die für den Membranbau relevantesten Materialgesetze vorgestellt. Das Kapitel endet mit einer Beschreibung der für Membranen maßgeblichen Gleichgewichtsbeziehungen, die sowohl in starker als auch in schwacher Formulierung präsentiert werden.

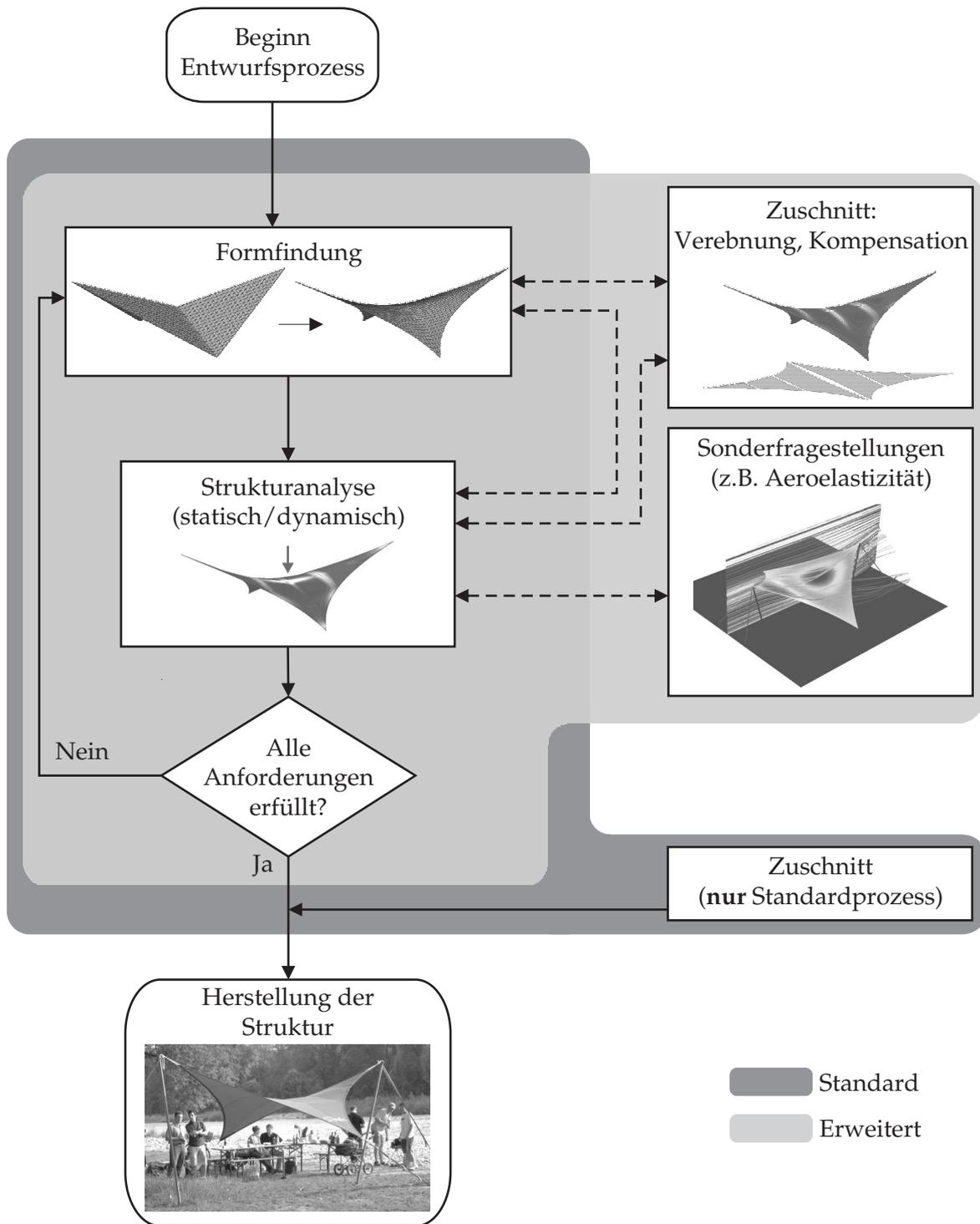


Abbildung 1.1: Entwurfsprozess von Membrantragwerken

Kapitel 3 beschreibt mit der Formfindung von Membrantragwerken den ersten Schritt, der bei ihrem Entwurf durchzuführen ist. Zu Beginn des Kapitels erfolgt eine Diskussion der physikalischen Problemstellung: Hierbei werden nach einer einführenden Problemdefinition signifikante Fragestellungen wie beispielsweise Formfindung einer Membran mit iso- oder anisotroper Vorspannung bzw. Formfindung mit Seilen kombinierter Membranen hinsichtlich ihrer Lösbarkeit untersucht. Die numerische Formfindung bildet die zweite Hälfte des Kapitels: Zur Behebung der infolge der inversen Fragestellung auftretenden numerischen Instabilitäten wird die Updated Reference Strategy [BR99] verwendet, die sich wegen ihrer kontinuumsmechanischen Herleitung besonders für die Implementierung in einen FE-Kontext eignet. Nach eingehender Untersuchung dieser Methode werden grundlegende Erkenntnisse über die Ergebnisse während des Iterationsverlaufs herausgearbeitet. Um auch für „unscharf“ definierte Fragestellungen Formfindungsergebnisse zu erhalten, wird eine Erweiterung der in [WB05] vorgestellten automatischen Spannungsadaptation entwickelt, die dem Planer einen größeren Entwurfsfreiraum eröffnet.

Kapitel 4 beinhaltet eine Untersuchung der Zuschnittsproblematik von vorgespannten, doppelt gekrümmten Flächentragwerken. Obwohl man beim konventionellen Entwurfsprozess die Zuschnittsberechnung generell zuletzt durchführt, wird in vorliegender Arbeit die Beschreibung dieses Arbeitsschrittes bewusst vorgezogen: Da die Geometrie der Zuschnittsmuster erheblichen Einfluss auf das Lastabtragsverhalten haben kann, müssen in eine detaillierte Strukturanalyse, wie sie im nächsten Kapitel aufgezeigt wird, die Ergebnisse der Zuschnittsberechnung miteinbezogen werden. Um ein besseres Verständnis für diese integrale Betrachtungsweise zu erreichen, ist ein Grundwissen über die fundamentalen Prinzipien der Zuschnittsberechnung vor Beschreibung der erweiterten Strukturanalyse sinnvoll. Das Kapitel beginnt mit theoretischen Überlegungen zur Nicht-Abwickelbarkeit doppelt gekrümmter Flächen und den daraus resultierenden Konsequenzen für den Membranbau, wobei v. a. qualitative Aussagen über die Verteilung der Zusatzspannungen getroffen werden, die durch die räumliche Verkrümmung der ebenen Zuschnittsgeometrien entstehen. Nach einer kurzen Beschreibung der numerischen Ermittlung von Schnittlinien folgt der Hauptteil des Kapitels: Es werden neu entwickelte numerische Zuschnittsmethoden vorgestellt, die auf einer korrekten kontinuumsmechanischen Beschreibung des tatsächlichen Deformationsprozesses beruhen. Der Erfolg dieser Zuschnittsalgorithmen durch „Inverse engineering“ wird an illustrativen Beispielen unter Verwendung verschiedener Werkstoffe und Vorspannzustände aufgezeigt.

Kapitel 5 schließt mit einem Überblick über numerische Strukturanalysen von Membrankonstruktionen den inhaltlichen Teil der Arbeit ab. Dabei soll jedoch keine detaillierte Beschreibung der Strukturanalyse an sich erfolgen, da dies aufgrund der immensen Diversität dieses Gebiets den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Vielmehr wird das Augenmerk auf die Verknüpfung der Strukturanalyse mit den vorher beschriebenen Schritten der Formfindung und Zuschnittsermittlung gelegt. Zu Beginn des Kapitels werden exemplarisch die Elementformulierungen eines isoparametrischen Membranelements bzw. eines linearen Seilelements für geometrisch nichtlineare statische Berechnungen hergeleitet. Diese werden im Nachfolgenden verwendet, um durch Kombination mit Formfindungselementen einerseits komplexe Aufbauvorgänge zu simulieren, andererseits um schlecht gestellte Formfindungsprobleme zu stabilisieren. Das vorgeschlagene Verfahren wird dabei stets an

Beispielen verdeutlicht. Als letzter Punkt wird eine statische Analyse unter Berücksichtigung des Zuschnitts vorgestellt: Um die reale Verformungsgeschichte eines Membrantragwerks abzubilden, werden die zugeschnittenen Membranbahnen als kontinuumsmechanische Referenzkonfiguration für die Spannungs- und Dehnungsdefinition verwendet. Dieses Verfahren wird anschließend auf druck- und biegebeanspruchte Bauteile verallgemeinert, wodurch sich auf effiziente Weise beliebige Vorspannzustände in einer Struktur modellieren lassen. Die statische Analyse unter Berücksichtigung des Zuschnitts wird beispielhaft an einer mit elastischen Stäben verstärkten Segelkonstruktion und einem pneumatisch vorgespannten Luftkissen aus ETFE-Folie demonstriert.

Kapitel 6 fasst die durchgeführten Arbeiten zusammen und liefert einen Ausblick auf noch ungeklärte Fragestellungen und zukünftige Forschungsvorhaben.

Kapitel 2

Geometrische und mechanische Beschreibung von Membrantragwerken

In diesem Kapitel sollen die notwendigen Grundlagen für eine sinnvolle und systematische Beschreibung der Form und Geometrie von vorgespannten Membrankonstruktionen und ihrem mechanischen Verhalten gelegt werden. Nach einführenden Bemerkungen zu den Modellannahmen bei flächenhaften Strukturen werden zunächst Methoden zu ihrer geometrischen Beschreibung erläutert. Hierbei wird v. a. die Differentialgeometrie von Flächen sowie die diskrete Flächenbeschreibung mithilfe finiter Elemente näher betrachtet. Diese ist Voraussetzung für eine spätere effiziente Erfassung der Mechanik dünner Flächentragwerke. Da diese in der Lage sein muss, große Deformationen der Struktur unter Last in korrekter Weise abzubilden, wird eine kontinuumsmechanische Formulierung mit nichtlinearer Kinematik zur adäquaten Erfassung der Eigenschaften der Membranstrukturen verwendet. Hierfür werden grundlegende Kenntnisse über Konfigurationsmechanik, Spannungs- und Dehnungsmaße sowie Materialgesetze vermittelt. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Übersicht über die maßgeblichen Gleichgewichtsbeziehungen bei einer Membranstruktur. Ausgehend von der schwachen Formulierung des Gleichgewichts wird ein inkrementelles Lösungsverfahren für Strukturprobleme skizziert.

2.1 Modellbildung

Membrantragwerke und Seilnetze sind flächenhafte Tragstrukturen, deren Ausdehnungen in den zwei Flächenrichtungen um einige Größenordnungen über ihrer Dicke liegen. Aus diesem Grund erscheint es kontinuumsmechanisch wenig sinnvoll, derartige Strukturen mit all ihren Einzelheiten als dreidimensionales Kontinuumsmodell abzubilden. Um das Strukturverhalten verstehen zu können, ist ein Abstraktions- bzw. Modellbildungsprozess notwendig, der die Komplexität der realen Konstruktion durch ein genügend einfaches mechanisches Modell greifbar macht. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass dabei wichtige Phänomene nicht außer Acht gelassen werden, die später zu einer groben Verfälschung der Modellergebnisse führen würden.

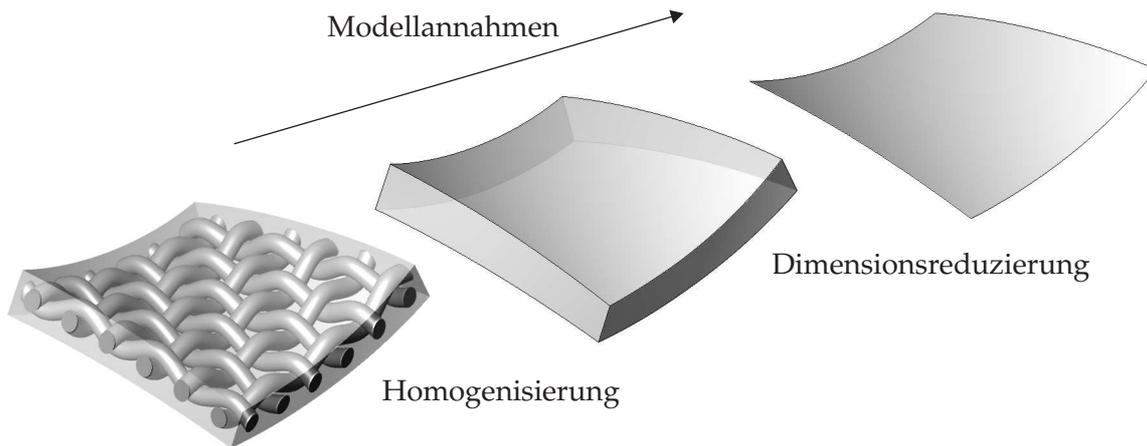


Abbildung 2.1: Modellbildung einer Membran.

Den Ausgangspunkt der Modellbildung bildet eine nähere Betrachtung der Membranwerkstoffe. Hierbei lässt sich feststellen, dass sie selbst komplexe Tragstrukturen darstellen. Sogar die auf den ersten Blick homogen wirkenden Kunststofffolien wie z. B. ETFE (siehe u. a. [Mor07b, LS06] für weiterführende Informationen zu diesem Werkstoff) verfügen auf der Mikroebene über untereinander verbundene Molekülketten, deren Interaktion das charakteristische Werkstoffverhalten bewirkt. Bei textilen Membranen (z. B. PVC-beschichtetes Polyestergewebe oder PTFE-beschichtetes Glasfasergewebe [Bau02, HO00]) ist mit den verwobenen Garnen die Mikrostruktur sogar mit bloßem Auge sichtbar. Für die Erfassung des globalen Verhaltens der Gesamtstruktur würde jedoch eine detaillierte Modellierung dieser Mikroebene einen immens hohen Berechnungsaufwand bedeuten. Aus diesem Grund wird eine Homogenisierung des Materials vorgenommen: Der inhomogene, evtl. aus einer Materialmatrix bestehende Membranwerkstoff wird durch einen homogenen dreidimensionalen elastischen Körper ersetzt, der näherungsweise die gleichen mechanischen Eigenschaften besitzt (siehe Abbildung 2.1 links und Mitte). Dieses Modell wäre rechentechnisch zu bewältigen.

Vergleicht man die Dicke der Membran mit den auftretenden Krümmungsradien der Gesamtstruktur, lässt sich eine weitere Idealisierung durchführen: Während die Höhe des Querschnitts im Millimeterbereich und darunter anzusiedeln ist, liegen die auftretenden Krümmungsradien um einige Größenordnungen darüber im Meterbereich. Es kann deshalb vereinfachend angenommen werden, dass über die Querschnittshöhe alle „Fasern“ der Membran bei Verformung gleichermaßen gedehnt bzw. gestaucht werden. Dadurch stellt sich der sogenannte *Membranspannungszustand* ein, der konstante Spannungen über die Membrandicke und dadurch eine Abwesenheit von Biegespannungen postuliert. Mit Hilfe dieser Annahmen kann eine *Dimensionsreduzierung* des Membranmodells durchgeführt werden: Die tatsächlich dreidimensionale Membran wird allein durch ihre zweidimensionale Mittelfläche beschrieben (siehe Abbildung 2.1 rechts), bei der zusätzlich noch die Dicke an jedem Flächenpunkt abgespeichert wird, um eine äquivalente Darstellung zum vorherigen homogenen Kontinuum zu erreichen. Die Lage eines jeden Materiepunkts der Membran ist somit durch dessen Projektionspunkt auf der Mittelfläche und seinem Abstand von dieser eindeutig definiert. Dieses vereinfachte Modell ist in der Lage, den Membranspan-

nungszustand korrekt abzubilden, und eignet sich für die numerische Beschreibung von Membranstrukturen, wie in den nächsten Kapiteln zu sehen sein wird.

2.2 Differentialgeometrie von Flächen im Raum

Die Differentialgeometrie bietet Methoden zur detaillierten Beschreibung der Eigenschaften räumlicher Flächen. Hierbei sind v. a. ihre Metrik und Krümmung von Interesse, da diese im nachfolgenden Kapitel zur Definition geeigneter Spannungs- und Dehnungsmaße sowie für die Gleichgewichtsbedingungen benötigt werden. Ausgehend von analytischen Methoden zur Flächenbeschreibung befasst sich der nachfolgende Abschnitt mit den ersten beiden Fundamentalformen einer Fläche und ihrer geometrischen Bedeutung. Den Abschluss bildet eine Übersicht über die diskretisierte Flächenbeschreibung mithilfe finiter Elemente.

2.2.1 Flächenbeschreibung

Punkt im Raum. Um eine Fläche im Raum zu definieren, muß die räumliche Position all ihrer Flächenpunkte P bekannt sein. Hierzu wird als Referenzsystem ein globales kartesisches Koordinatensystem eingeführt, dessen Basisvektoren $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden [Zei96]. Im Detail bedeutet dies, dass die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen und jeweils die Länge 1 besitzen, was am Skalarprodukt je zweier Basisvektoren verdeutlicht werden kann:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (2.1)$$

δ_{ij} stellt das sogenannte Kronecker-Delta dar, das für gleiche Indizes i und j den Wert 1 liefert, für verschiedene den Wert 0. Die Rechtshändigkeit der Basis wird durch Bestimmung des dritten Basisvektors \mathbf{e}_3 aus dem Kreuzprodukt der ersten beiden Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 sichergestellt:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (2.2)$$

Der von der globalen kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ aufgespannte Raum wird als *euklidischer Raum* \mathbb{R}^3 bezeichnet. Die räumliche Lage eines jeden Punktes P kann nun über den Ortsvektor \mathbf{x} angegeben werden, der die Lage von P relativ zum Ursprung O des globalen kartesischen Koordinatensystems beschreibt. Er lässt sich eindeutig als Linearkombination der mit den kartesischen Koordinaten x^i skalierten kartesischen Basisvektoren darstellen (siehe Abbildung 2.2):

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

In Gleichung (2.3) wird die Einsteinsche Summenkonvention angewandt, die eine Summation über gleiche obere und untere Indizes impliziert [Zei96]. Dabei läuft der Index bei Verwendung eines lateinischen Buchstabens (z. B. i) von 1 bis 3, bei einem griechischen Buchstaben (z. B. α) lediglich von 1 bis 2. Der letzte Term in Gleichung (2.3) gibt den Ortsvektor in

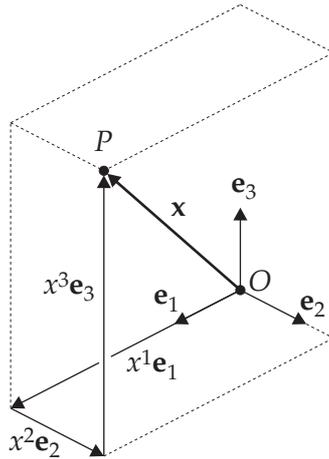


Abbildung 2.2: Ortsvektor eines Punktes im Raum.

der sogenannten Tensorschreibweise wieder, die stets neben den Koeffizienten des Tensors (hier: Koordinaten x^i) auch die dazugehörige Basis (hier: \mathbf{e}_i) enthält. Wird als Tensorbasis eine kartesische Basis verwendet, bedient man sich oft der vereinfachenden Matrizeschreibweise, die lediglich die Tensorkoeffizienten enthält. Ist weiterhin die Basis das globale kartesische Koordinatensystem, werden die Koordinaten in den drei Raumrichtungen gewöhnlich mit x , y und z gekennzeichnet. Dadurch ergibt sich folgende Matrizeschreibweise des Ortsvektors:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Mathematische Flächengleichungen. Mathematisch kann eine Fläche explizit, implizit oder parametrisch beschrieben werden. Die einfachste Flächendarstellung dabei ist die *explizite Flächengleichung*. Hierbei ist die z -Koordinate z_p eines jeden Flächenpunktes P direkt als Funktion F seiner kartesischen Koordinaten x_p und y_p gegeben:

$$z_p = F(x_p, y_p) \quad (2.5)$$

Diese Darstellung zeichnet sich durch ihre schlichte Direktheit aus, jedoch können keine „überlappenden“ Flächen beschrieben werden: Besitzen mehrere Punkte der Fläche dieselben x - und y -Koordinaten, ist eine direkte explizite Flächenbeschreibung nicht mehr eindeutig, selbst wenn die z -Koordinaten der Punkte unterschiedlich groß sind. Wird beispielsweise die explizit beschreibbare Fläche in Abbildung 2.3 a) um die y -Achse rotiert, ergibt sich eine Fläche, die nicht mehr explizit beschrieben werden kann (siehe Abbildung 2.3 b)). Dieses Problem lässt sich mit der *impliziten Flächendarstellung* umgehen. Hierbei wird die Fläche indirekt durch eine Gleichung \tilde{F} definiert, die die Koordinaten der Flächenpunkte lösen müssen:

$$\tilde{F}(x_p, y_p, z_p) = 0 \quad (2.6)$$

Dadurch ist die Fläche zwar eindeutig beschrieben, doch sind die geometrischen Informationen (Flächeninhalt, Krümmung, etc.) „verschleiert“ und nicht mehr leicht zugänglich.

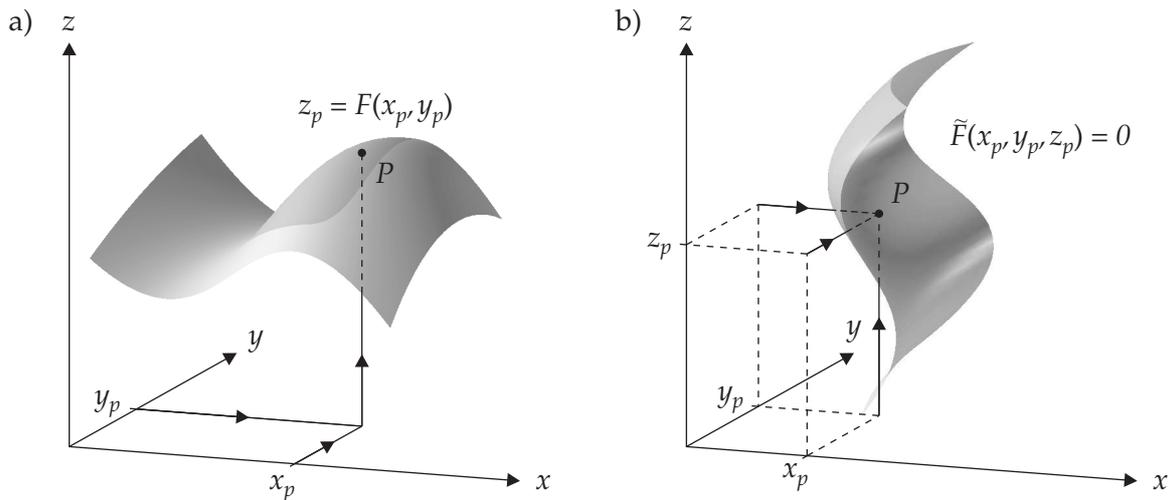


Abbildung 2.3: Flächenbeschreibung: a) explizit, b) implizit.

Der größte Schwachpunkt sowohl der expliziten als auch der impliziten Flächenbeschreibung liegt in der Schwierigkeit, die passende analytische Funktion für die jeweilige Fläche zu finden. Schon bei relativ einfachen Geometrien mit gekrümmten Rändern erweist sich dieser Schritt als nahezu unüberwindliches Hindernis.

Parameterdarstellung einer Fläche. Eine für numerische Belange sinnvolle Alternative bietet die *Parameterdarstellung* einer Fläche. Die Grundidee hierbei ist, jedem Punkt der Fläche eindeutige Flächenparameter bzw. -koordinaten zuzuweisen. Trotz der räumlichen Ausdehnung einer Fläche genügen dafür zwei unabhängige Koordinaten, da mathematisch jede Fläche ein zweidimensionales Gebilde darstellt. Die Flächenkoordinaten werden je nach Autor mit u und v [Ble90, Zei96], ξ und η [Hug00, ZTZ05] bzw. mit den hier gewählten griechischen Buchstaben θ^1 und θ^2 [WB05] bezeichnet.

Bildlich lässt sich die Parametrisierung der Fläche durch ein zweidimensionales Koordinatennetz darstellen, das auf der zu beschreibenden Fläche „ausgelegt“ wird. Durch diese Abbildung wird das im zweidimensionalen Parameterraum orthogonale Netz zu einem schiefwinkligen Netz im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 verzerrt, so dass θ^1 und θ^2 auch krummlinige Koordinaten genannt werden (siehe Abbildung 2.4).

Der Positionsvektor \mathbf{x} eines jeden Punktes im „realen“ dreidimensionalen Raum ist nunmehr eine Funktion der zugehörigen Flächenparameter:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) = x^i(\theta^1, \theta^2) \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} x(\theta^1, \theta^2) \\ y(\theta^1, \theta^2) \\ z(\theta^1, \theta^2) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Um in jedem Flächenpunkt die lokalen Eigenschaften der Geometrie beschreiben zu können, wird ein lokales Bezugssystem eingeführt. Die sogenannte *kovariante lokale Basis* $\{\mathbf{g}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$

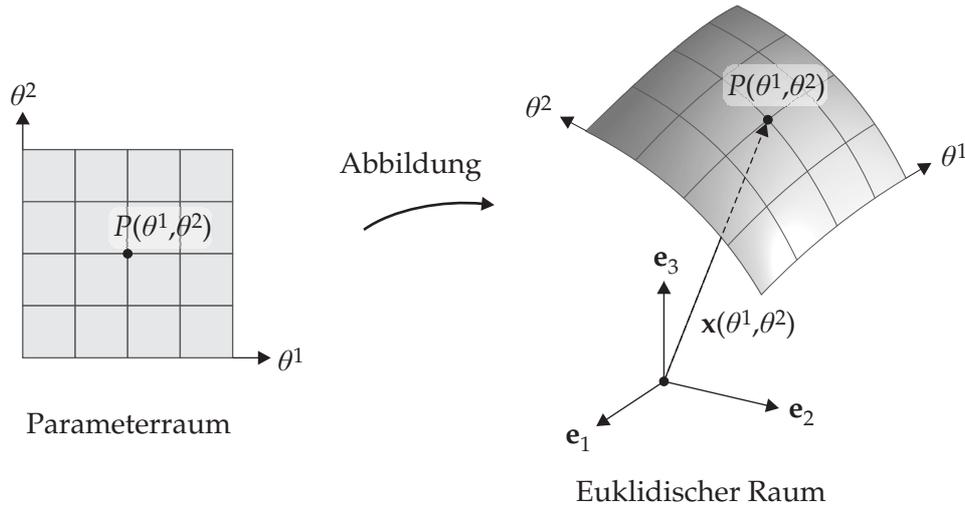


Abbildung 2.4: Parameterdarstellung einer Fläche.

erhält man durch partielle Differentiation des Ortsvektors nach den Flächenkoordinaten θ^1 und θ^2 :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^1} = \mathbf{x}_{,1} \quad ; \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^2} = \mathbf{x}_{,2} \quad (2.8)$$

Die resultierenden kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 , die im Gegensatz zu kartesischen Basen keine zueinander orthogonalen Einheitsvektoren darstellen, sind tangential zu ihren jeweiligen Koordinatenlinien (siehe Abbildung 2.5): Beispielsweise stellt \mathbf{g}_1 den Tangentenvektor im Punkt P an die Koordinatenlinie dar, die durch Varianten von θ^1 erzeugt wird, während man θ^2 konstant hält. Zusammen spannen \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 die Tangentialebene der Fläche auf. Der dritte Basisvektor \mathbf{g}_3 , der zum Aufspannen des Raumes benötigt wird, könnte theoretisch bei einer Flächenbeschreibung beliebig gewählt werden. Es ist jedoch sinnvoll, diesen mit dem Normalenvektor \mathbf{n} der Fläche zu identifizieren, der sich aus dem normierten Kreuzprodukt der ersten beiden Basisvektoren ergibt:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} \quad (2.9)$$

Weiterhin kann am Flächenpunkt P eine sogenannte duale Basis [Hol04] mit den *kontravarianten Basisvektoren* $\{\mathbf{g}^\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ eingeführt werden. Die beiden Basisvektoren \mathbf{g}^1 und \mathbf{g}^2 liegen ebenfalls in der Tangentialebene der Fläche und müssen folgender Bedingung genügen:

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{für } \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) gibt an, dass ko- und kontravariante Basisvektoren mit unterschiedlichen Indizes aufeinander senkrecht stehen: So ist der kovariante Basisvektor \mathbf{g}_1 orthogonal zu \mathbf{g}^2 , \mathbf{g}_2 hingegen schließt mit \mathbf{g}^1 einen rechten Winkel ein (siehe Abbildung 2.5 für eine Illustration dieses Zusammenhangs). Das Skalarprodukt eines kovarianten Basisvektors mit einem kontravarianten Basisvektor von gleichem Index besitzt den Wert 1. Da die ersten beiden

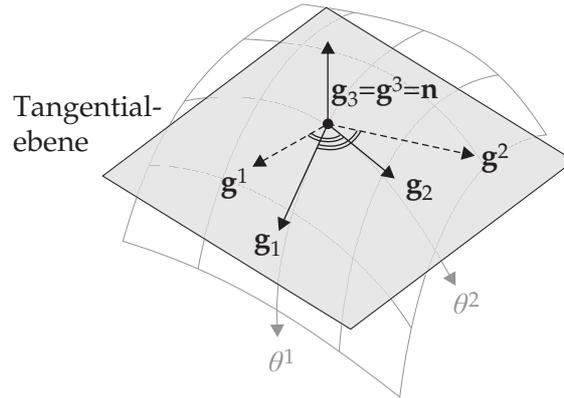


Abbildung 2.5: Ko- und Kontravariante Basisvektoren.

Basisvektoren sowohl der ko- als auch kontravarianten Basis dieselbe Tangentialebene aufspannen, ist der jeweils dritte Basisvektor (\mathbf{g}^3 bzw. \mathbf{g}_3) identisch mit der Flächennormalen \mathbf{n} .

Eine alternative Möglichkeit zur Berechnung der kontravarianten Basis ist über folgende Gleichung gegeben:

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\partial \theta^1}{\partial \mathbf{x}} \quad ; \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\partial \theta^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

2.2.2 Erste Fundamentalform – Metrik der Fläche

Unter Zuhilfenahme der eingeführten lokalen ko- und kontravarianten Basis lassen sich Aussagen über die lokalen Eigenschaften der Fläche in unmittelbarer Nachbarschaft des zugehörigen Punktes P treffen. Die *erste Fundamentalform der Fläche* (auch „erste Gaußsche Fundamentalform“ genannt) beinhaltet alle metrischen Eigenschaften, die sich durch Längenmessungen *innerhalb* der Fläche bestimmen lassen (z. B. die Längen der Basisvektoren und die untereinander eingeschlossenen Winkel). In Matrixschreibweise lautet die erste Fundamentalform:

$$\mathbf{I}(\theta^1, \theta^2) = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\beta} \right] = [\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = [g_{\alpha\beta}] \quad (2.12)$$

Die Koeffizienten der symmetrischen Matrix $\mathbf{I}(\theta^1, \theta^2)$, auch *kovarianter Metriktensor* $[g_{\alpha\beta}]$ genannt, setzen sich aus den Skalarprodukten der kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 zusammen. Meist beschränkt man sich auf die Angabe der Skalarprodukte der ersten beiden Basisvektoren, da die Lage und Länge des dritten Basisvektors als Normalenvektor der Tangentialebene der Fläche klar definiert ist. Das Skalarprodukt $g_{i3} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_3$ würde somit keine neuen, noch unbekanntenen Informationen über die Geometrie der Fläche bieten. In der verbleibenden 2×2 -Matrix liefern die stets positiven Werte der Hauptdiagonalen die Längenquadrate der Basisvektoren, die Nebendiagonalterme können zur Berechnung des

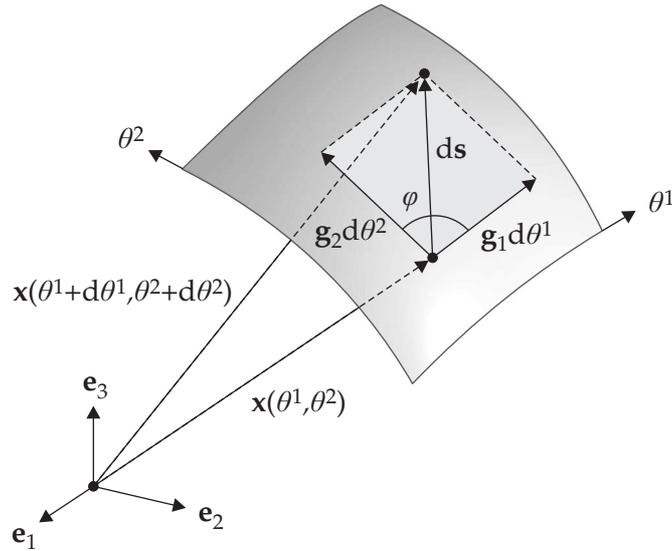


Abbildung 2.6: Erste Fundamentalform einer Fläche.

Winkels φ zwischen den Basisvektoren benutzt werden (siehe Abbildung 2.6):

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = \|\mathbf{g}_1\|^2 = E \\ g_{22} &= \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = \|\mathbf{g}_2\|^2 = G \\ g_{12} &= g_{21} = \|\mathbf{g}_1\| \|\mathbf{g}_2\| \cos \varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = F \end{aligned} \quad (2.13)$$

Man beachte, dass in den meisten mathematisch-orientierten Publikationen (z. B. [Zei96]) die Koeffizienten des Metrikensors zumeist mit den Buchstaben E , F und G abgekürzt werden.

Desweiteren ist anzumerken, dass die Koeffizienten des kovarianten Metrikensors die Koeffizienten des *Einheitstensors* \mathbf{I} darstellen, falls dieser in einer kontravarianten Basis beschrieben wird. Da sich Tensoren in jede beliebige Basis transformieren lassen, ohne ihre physikalische Bedeutung zu verlieren [Hol04], lässt sich der Einheitstensor sowohl mit kovarianten Koeffizienten bzgl. einer kontravarianten Basis („kovarianter Tensor“), mit kontravarianten Koeffizienten bzgl. einer kovarianten Basis („kontravarianter Tensor“) oder mit dem Kronecker-Delta bzgl. einer kartesischen Basis darstellen:

$$\mathbf{I} = g_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \tilde{\mathbf{e}}_\beta \quad (2.14)$$

Dabei bezeichnet \otimes das sogenannte Tensorprodukt, das den Raum zwischen den verknüpften Vektoren aufspannt [Hol04]. Die Koeffizienten des Einheitstensors bzgl. einer kovarianten Basis werden auch *kontravarianter Metrikensor* $[g^{\alpha\beta}]$ genannt und lassen sich als Inverse des kovarianten Metrikensors bestimmen:

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = [g_{\alpha\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.15)$$

Ko- und kontravariante Basisvektoren können über die Metrikensoren ineinander transformiert werden:

$$\mathbf{g}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta \quad ; \quad \mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta \quad (2.16)$$

Differentielles Linienelement. Mithilfe der ersten Fundamentalform lässt sich die Länge eines differentiellen Linienelements ds auf der Fläche ermitteln. Das Linienelement verbindet den Flächenpunkt P mit dem Positionsvektor $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2)$ mit einem Punkt in seiner unmittelbaren Nachbarschaft, der den Positionsvektor $\mathbf{x}(\theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + d\theta^2)$ besitzt (siehe Abbildung 2.6). Aus der Differenz dieser beiden Endpunkte ergibt sich der Vektor $d\mathbf{s}$:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{x}(\theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + d\theta^2) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^2} d\theta^2 = \mathbf{g}_1 d\theta^1 + \mathbf{g}_2 d\theta^2 \quad (2.17)$$

Bildet man das Skalarprodukt des Vektors $d\mathbf{s}$ mit sich selbst, erhält man das Quadrat der Länge des differentiellen Linienelements:

$$ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = g_{11} (d\theta^1)^2 + 2 g_{12} d\theta^1 d\theta^2 + g_{22} (d\theta^2)^2 \quad (2.18)$$

Für die Bestimmung der Länge einer Kurve auf der Fläche ist es sinnvoll, die Kurve ebenfalls parametrisiert anzugeben. Wählt man t als Kurvenparameter, lässt sich die Kurvenlänge s unter Verwendung von Gleichung (2.18) mittels Integration berechnen:

$$s = \int_t^{t_0} ds = \int_t^{t_0} \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\theta^1}{dt}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{d\theta^1}{dt} \frac{d\theta^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\theta^2}{dt}\right)^2} dt \quad (2.19)$$

Differentielles Flächenelement. Der Flächeninhalt einer räumlichen Fläche lässt sich ebenfalls über die erste Fundamentalform berechnen. Hierzu wird zuerst der Flächeninhalt da eines differentiellen Flächenelements bestimmt, das dem von den Vektoren $\mathbf{g}_1 d\theta^1$ und $\mathbf{g}_2 d\theta^2$ aufgespannten Parallelogramm entspricht:

$$\begin{aligned} da &= \|\mathbf{g}_1 d\theta^1\| \|\mathbf{g}_2 d\theta^2\| \sin \varphi(\mathbf{g}_1 d\theta^1, \mathbf{g}_2 d\theta^2) = \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| d\theta^1 d\theta^2 \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} d\theta^1 d\theta^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Durch Integration der Gleichung (2.20) lässt sich für die Fläche ihr gesamter Flächeninhalt a ermitteln:

$$a = \int_a da = \int_{\theta^2} \int_{\theta^1} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.21)$$

2.2.3 Zweite Fundamentalform – Krümmung der Fläche

Die *zweite Gaußsche Fundamentalform* beschreibt die Krümmungseigenschaften einer Fläche. Da Krümmungen i. A. nicht allein aus Messungen innerhalb der Fläche bestimmt werden können, müssen Informationen „aus dem umgebenden dreidimensionalen Raum“ [Zei96] berücksichtigt werden. Dies geschieht durch gleichzeitige Betrachtung des Verhaltens des Ortsvektors \mathbf{x} und des Normalenvektors \mathbf{n} (bzw. \mathbf{g}_3) in der Umgebung eines Flächenpunktes. Die zweite Fundamentalform lautet in Matrixschreibweise:

$$\mathbb{II}(\theta^1, \theta^2) = \left[\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha \partial \theta^\beta} \cdot \mathbf{n} \right] = \left[-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta^\beta} \right] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [b_{\alpha\beta}] \quad (2.22)$$

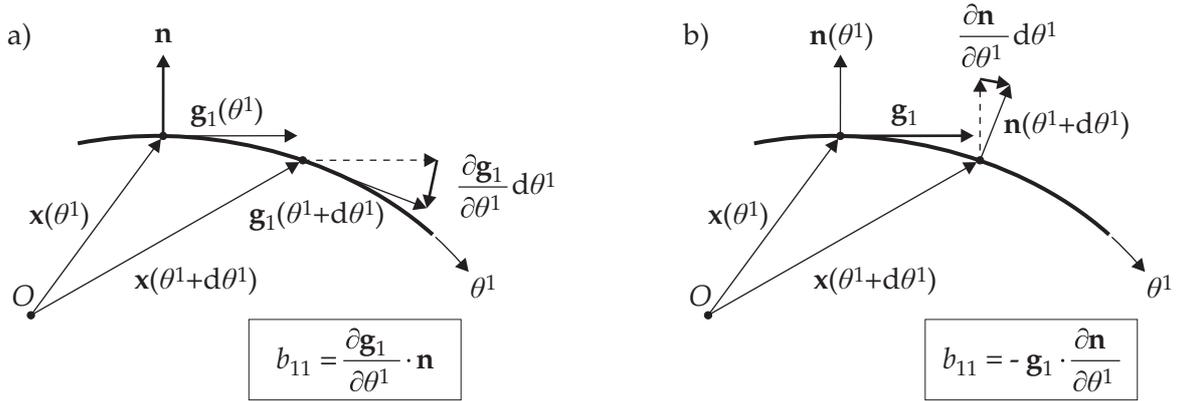


Abbildung 2.7: Möglichkeiten der Krümmungsberechnung.

Gleichung (2.22) lässt sich so interpretieren, dass die Krümmungsmessung auf zwei verschiedene Weisen erfolgen kann: Einerseits kann der Normalenvektor als konstante Referenz definiert werden. Ausgehend davon schließt man aus der relativen Änderung der Tangentialebene in der Umgebung des Flächenpunkts auf die vorherrschende Krümmung. Die Änderungsrate der Tangentialebene wird dabei durch die Ableitung der Basisvektoren nach den Flächenkoordinaten ausgedrückt. In Abbildung 2.7 a) wird diese Methode zur Krümmungsmessung an einer eindimensionalen Kurve demonstriert. Bei der zweiten Möglichkeit betrachtet man von der nun als fix angesehenen Tangentialebene eines Punktes die Änderung des Normalenvektors in der „Nachbarschaft“ (negatives Skalarprodukt aus dem Basisvektor und der ersten Ableitung des Normalenvektors, siehe Abbildung 2.7 b)). Das Ergebnis ist in beiden Fällen identisch. Obwohl es nur der ersten Methode direkt anzusehen ist, wird bei der Krümmungsberechnung stets die zweite Ableitung der Geometrie nach den Flächenparametern ausgewertet. Dies hat zur Folge, dass aufgrund der erforderlichen höheren Ableitungen eine größere Ungenauigkeit bei den Ergebnissen einer numerischen Berechnung zu erwarten ist [PTVF02].

Wie auch bei der ersten Fundamentalform werden in mathematisch-orientierten Büchern meist lateinische Großbuchstaben zur Abkürzung der Koeffizienten der zweiten Fundamentalform benutzt. In diesem Fall sind es die Buchstaben L , M und N :

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \theta^1} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta^1} = L \\
 b_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \theta^2} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta^2} = N \\
 b_{12} &= b_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \theta^2} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \theta^1} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{g}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta^2} = -\mathbf{g}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta^1} = M
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Die Werte $b_{\alpha\beta}$ bezeichnen die kovarianten Koeffizienten des Krümmungstensors \mathbf{k} (auch \mathbf{b} genannt) und geben somit die Krümmungen bzgl. der lokalen kontravarianten Basis an. Um die „physikalischen“ bzw. tatsächlichen Krümmungen zu erhalten, muss eine Transformation in eine lokale kartesische Basis $\{\tilde{\mathbf{e}}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ vorgenommen werden. Ausgangspunkt für den Basiswechsel bildet die gleichbedeutende Darstellung des Krümmungstensors in den beiden Basen:

$$\mathbf{k} = b_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta = k_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \tilde{\mathbf{e}}_\beta \tag{2.24}$$

Durch Umformung der Gleichung (2.24) ergibt sich folgende Transformationsvorschrift:

$$k_{\alpha\beta} = b_{\gamma\delta} (\mathbf{g}^\gamma \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\alpha) (\mathbf{g}^\delta \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\beta) \quad (2.25)$$

Die Beträge der Hauptdiagonalterme k_{11} und k_{22} stellen die Kehrwerte der Radien der Krümmungskreise der kartesischen Koordinatenlinien dar. Zudem gibt deren Vorzeichen Auskunft darüber, „auf welcher Seite“ der Fläche der Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises liegt: Ist das Vorzeichen positiv, liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf derjenigen Flächenseite, in die der Normalenvektor zeigt. Ist das Vorzeichen negativ, liegt der Mittelpunkt auf der entgegengesetzten Seite. Da jedoch die Richtung des Normalenvektors keine intrinsische Flächeneigenschaft ist, sondern von der Flächenparametrisierung abhängt, lässt sich durch Umkehr der Parametrisierung das Vorzeichen der Krümmungen ändern. Der absolute Betrag bleibt jedoch stets konstant. Diese Nicht-Eindeutigkeit des Vorzeichens des Krümmungstensors wird mathematisch als *Pseudotensor* bezeichnet [Zei96].

Da die Lage des lokalen kartesischen Koordinatensystems beliebig ist, lässt es sich innerhalb der Tangentialebene derartig drehen, so dass die zugehörigen Nebendiagonalterme der Koeffizientenmatrix $k_{12} = k_{21}$, die die Verwindung der Fläche angeben, verschwinden. Auf der Koeffizientenmatrix bleiben lediglich Terme auf der Hauptdiagonalen übrig. Diese werden als *Eigenwerte* des Krümmungstensors bzw. *Hauptkrümmungen* k_1 und k_2 der Fläche bezeichnet und geben die maximale Krümmung der Fläche im zugehörigen Flächenpunkt P an. Die Kehrwerte $R_1 = 1/k_1$ und $R_2 = 1/k_2$ werden *Hauptkrümmungsradien* genannt.

Gaußsche Krümmung. Um die Krümmungseigenschaften der Fläche zu charakterisieren, wurde der Begriff der *Gaußschen Krümmung* K eingeführt. Diese wird als Produkt der Hauptkrümmungen k_1 und k_2 definiert. Wird anstelle des lokalen kartesischen Koordinatensystems, das entlang den Hauptkrümmungen orientiert ist, ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem benutzt, lässt sich die Gaußsche Krümmung über die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform (Gleichungen (2.12) und (2.22)) bestimmen:

$$K = k_1 k_2 = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det [b_{\alpha\beta}]}{\det [g_{\alpha\beta}]} \quad (2.26)$$

In tensorieller Sichtweise ist die Gaußsche Krümmung gleichbedeutend mit der Determinante des Krümmungstensors bzw. dessen zweiter Invariante [Hol04]:

$$K = \det(\mathbf{k}) = I_2(\mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Über diese fundamentale Größe kann ein Flächenpunkt P als elliptisch ($K > 0$), hyperbolisch ($K < 0$) oder parabolisch ($K = 0$) klassifiziert werden [Hsi81]. Größere Bedeutung als der Klassifizierung einzelner Punkte (lokale Betrachtung) kommt beim Membranbau jedoch der Betrachtung von Flächenbereichen bzw. gesamten Flächen zu (globale Betrachtung). Können deren zugehörige Flächenpunkte alle der gleichen der vorher genannten Kategorien zugeordnet werden, lassen sich Flächen folgendermaßen kategorisieren:

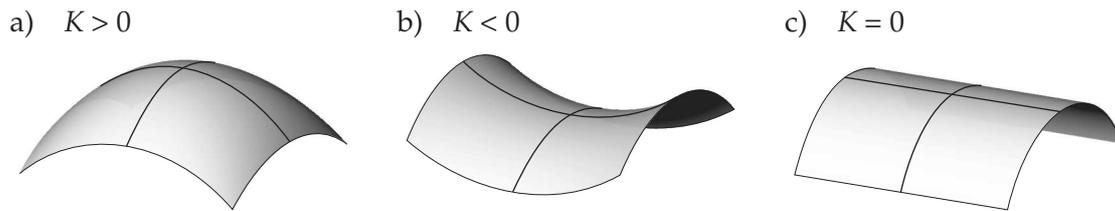


Abbildung 2.8: Flächenkategorien: a) synklastisch, b) antiklastisch, c) abwickelbar.

- ◇ $K > 0$: Synklastische Fläche
Die Mittelpunkte der Hauptkrümmungskreise liegen stets auf derselben Flächenseite (siehe Abbildung 2.8 links).
- ◇ $K < 0$: Antiklastische Fläche
Die Mittelpunkte der Hauptkrümmungskreise liegen stets auf verschiedenen Flächenseiten (siehe Abbildung 2.8 Mitte).
- ◇ $K = 0$: Abwickelbare Fläche
Mindestens eine Krümmung ist gleich Null (siehe Abbildung 2.8 rechts).

Eine Fläche, die über Teilbereiche aller drei Flächenkategorien verfügt, ist der Torus. Diese Fläche entsteht durch Extrusion eines Kreises um eine weitere Kreisbahn, die durch den Kreismittelpunkt des extrudierten Kreises läuft und orthogonal zu diesem ist (siehe Abbildung 2.9). Die innere, dem Mittelpunkt der Kreisbahn zugewandte Hälfte des Torus verfügt über eine negative Gaußsche Krümmung $K < 0$, da die Mittelpunkte der Hauptkrümmungskreise auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen. Die abgewandte Torushälfte besitzt eine positive Gaußsche Krümmung $K > 0$, während hingegen an den Schnittkurven beider Bereiche die Gaußsche Krümmung verschwindet ($K = 0$). Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Schnittkurven ebene Kreise bilden. Läuft man auf der Torusober- bzw. -unterseite entlang des Schnittkreises, stellt man fest, dass der Kreis zwar nach innen gekrümmt, in der anderen Richtung jedoch gerade ist. Somit ist diese Krümmung gleich Null und die Gaußsche Krümmung verschwindet.

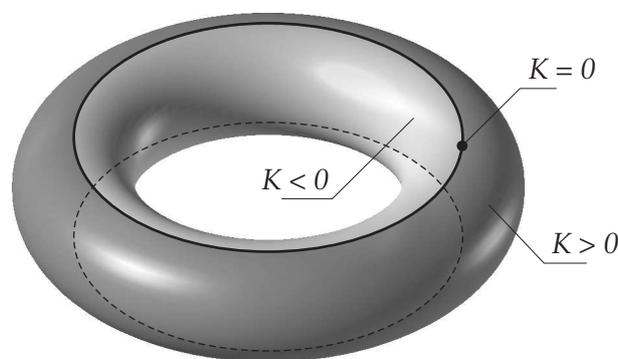


Abbildung 2.9: Gaußsche Krümmungen eines Torus.

Abwickelbarkeit von Flächen. Der Begriff der *Abwickelbarkeit* ist für den Herstellungsprozess von Membranstrukturen von größter Bedeutung: Wie der Name impliziert, kann eine abwickelbare räumliche Fläche ohne Verzerrungen in eine Ebene „abgewickelt“ werden. Im Umkehrschluss lässt sich jede abwickelbare Fläche allein durch „Biegen“ aus einem ebenen „Zuschnitt“ herstellen, ohne dass dabei Dehnungen in der Fläche entstehen. Voraussetzung für die Abwickelbarkeit ist eine Gaußsche Krümmung $K = 0$ in jedem Flächenpunkt. Ein integrales Maß hierfür stellt die *Gesamtkrümmung* einer Fläche dar, die man durch Integration der Gaußschen Krümmung über die Fläche erhält ($\int_a K da$). Ist die Gesamtkrümmung von Null verschieden, ist die Fläche nicht abwickelbar.

Während die Membranstrukturen i. A. doppelt-gekrümmt sind ($K \neq 0$), sind die für die Herstellung verwendeten Materialbahnen eben ($K = 0$). Wird nun das *theorema egregium* von Gauß zu Rate gezogen [Gau07], stellt man fest, dass sich die „Gaußsche Krümmung K allein durch Messungen auf der Fläche bestimmen lässt“ [Zei96] und somit lediglich von der ersten Fundamentalform der Fläche abhängt. Ändert sich nun bei der Herstellung der doppelt-gekrümmten Struktur die Gaußsche Krümmung der Membranbahn, ändert sich zwingend auch die erste Fundamentalform. Es kann somit keine längentreue Abbildung stattfinden, wodurch die Membran in gewissen Richtungen gedehnt bzw. gestaucht wird. Dies verursacht Zusatzspannungen innerhalb der Membran, die zu unerwünschten Faltenbildungen bzw. Spannungsspitzen führen können [LWB08]. Für die Zuschnittsberechnung einer gegebenen doppelt-gekrümmten Struktur bedeutet dies, dass es nicht möglich ist, deren Fläche gleichzeitig längen-, winkel- und flächentreu in eine Ebene abzubilden. Es muss stets ein Kompromiss gefunden werden, der Abweichungen beim Verebnen der Flächen zulässt. Kapitel 4 beschäftigt sich näher mit dieser Problematik.

Mittlere Krümmung. Neben der Gaußschen Krümmung stellt die *mittlere Krümmung* H eine weitere wichtige Kenngröße zur Beschreibung des Krümmungsverhaltens von Flächen dar. Die mittlere Krümmung ist als arithmetisches Mittel der beiden Hauptkrümmungen k_1 und k_2 definiert. Bei der Verwendung einer krummlinigen lokalen Basis lässt sich H ebenfalls wie die Gaußsche Krümmung K aus den Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform bestimmen:

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2.28)$$

Auch die mittlere Krümmung besitzt einen engen Zusammenhang zu den Invarianten des Krümmungstensors: Ihr doppelter Wert entspricht exakt der Spur des Krümmungstensors bzw. dessen erster Invariante [Hol04]:

$$2H = \text{tr}(\mathbf{k}) = I_1(\mathbf{k}) \quad (2.29)$$

Während die Gaußsche Krümmung v. a. für die Zuschnittsberechnung von Interesse ist (siehe Kapitel 4), kommt der mittleren Krümmung H bei der Formfindung von Membrangeometrien entscheidende Bedeutung zu (siehe Kapitel 3). Reges Forschungsgebiet der Mathematik sind dabei Flächen, die eine konstante mittlere Krümmung H in jedem Flächenpunkt

besitzen (siehe u. a. [Kap87, Ken03] für weiterführende Informationen). Diese sogenannte *cmc-surfaces* (Abkürzung für den englischen Begriff „constant mean curvature surfaces“) stellen eine Verallgemeinerung der weitbekannten *Minimalflächen* dar, die mit einer mittleren Krümmung gleich Null einen Sonderfall bilden.

2.2.4 Diskretisierte Flächenbeschreibung mittels finiter Elemente

Eine kontinuierliche Flächenbeschreibung ist sowohl bei der expliziten, impliziten als auch parametrischen Darstellung nur durch Angabe einer analytischen Funktion möglich, die die Lage aller Flächenpunkte definiert. Für komplizierte Geometrien und Berandungen lässt sich diese analytische Flächendefinition nur äußerst schwierig bewerkstelligen. Für numerische Belange ist es deswegen sinnvoller, eine diskretisierte Flächendarstellung mittels *finiter Elemente* vorzunehmen. Die Grundidee hierbei ist, die Gesamtfläche in eine endliche Anzahl kleiner Flächen, die finite Elemente genannt werden, zu zerlegen, deren Geometrie durch die bekannte geometrische Lage ihrer Knoten eindeutig definiert ist [ZTZ05]: Durch Interpolation dieser diskreten Knotenwerte ins Element hinein ergibt sich die räumliche Position des gesamten finiten Elements in Parameterdarstellung.

Verschiebungselemente. Im Gegensatz zu den Materiepunkten eines polaren Cosserat-Kontinuums, die ähnlich Starrkörpern über jeweils drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade verfügen [Sch67], beschränkt man sich bei der numerischen Beschreibung von Membranen i. A. auf die räumliche Lage der Membranzmittelfläche im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Für die kinematisch-mechanische Beschreibung bedeutet dies, dass Membranpunkte *nur Translationen*, aber keine Rotationen erfahren. Folglich werden die verwendeten finiten Elemente auch als *Verschiebungselemente* bezeichnet. Die Position der Flächenpunkte eines derartigen finiten Elements erhält man in parametrisierter Darstellung durch Interpolation der diskret gegebenen Ortsvektoren $\bar{\mathbf{x}}_k$ der FE-Knoten:

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{x}}_k \quad (2.30)$$

Die Interpolation erfolgt dabei über sogenannte Formfunktionen N^k . Um eine physikalische Bedeutung der interpolierten Knotenwerte zu gewährleisten, werden die Formfunktionen sinnvollerweise so gewählt, dass sie an jeweils einem Knoten den Wert 1 besitzen, an den anderen $(n_{el} - 1)$ Knoten des Elements den Wert 0. Dadurch wird eine „Zuordnung“ der Formfunktion N^k zum Knoten k erreicht. Eine weitere Bedingung für eine kontinuierliche Interpolation der Geometrie innerhalb des Elements ist die sogenannte *partition of unity* der Formfunktionen [ZTZ05]. Diese besagt, dass an jedem Punkt im Element die Summe aller Formfunktionen den Wert 1 besitzen muss:

$$\sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) = 1 \quad (2.31)$$

Der von den *natürlichen Koordinaten* θ^1 und θ^2 aufgespannte Parameterraum ist bei der FE-Diskretisierung separat für jedes Element definiert und erstreckt sich somit nicht mehr über

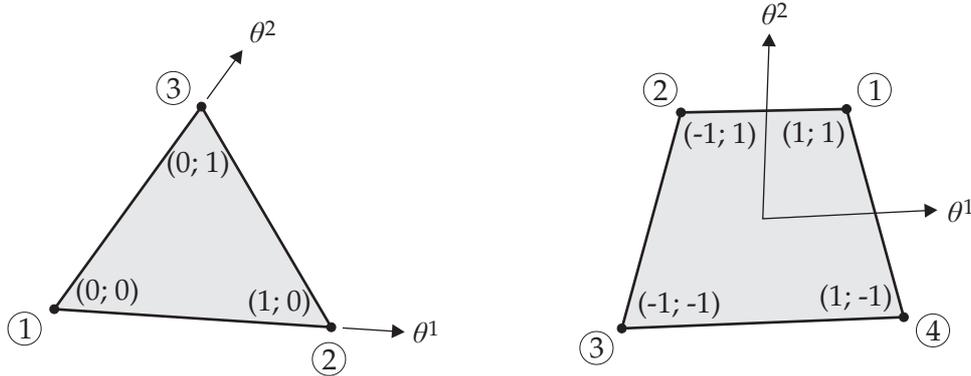


Abbildung 2.10: Topologie eines drei- und vierknotigen finiten Elements.

die gesamte diskretisierte Fläche. Die Topologie eines Elementes könnte prinzipiell so gut wie jede Form annehmen, jedoch haben sich ob ihrer klaren Definition und besseren Vernetzbarkeit der Struktur hauptsächlich Drei- und Viereckselemente etabliert. Das einfachste finite Element ist das sogenannte lineare Dreieckselement. Es verfügt über drei FE-Knoten (siehe Abbildung 2.10 links), die über lineare Formfunktionen interpoliert werden. Die Parameter θ^1 und θ^2 können dabei Werte von 0 bis 1 annehmen:

$$\begin{aligned}
 N^1(\theta^1, \theta^2) &= 1 - \theta^1 - \theta^2 \\
 N^2(\theta^1, \theta^2) &= \theta^1 \\
 N^3(\theta^1, \theta^2) &= \theta^2
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

mit $\theta^1 \geq 0; \theta^2 \geq 0; 0 \leq \theta^1 + \theta^2 \leq 1$

Das bilineare Viereckselement ist in Abbildung 2.10 auf der rechten Seite abgebildet. Der Parameterraum von θ^1 und θ^2 erstreckt sich jeweils von -1 bis +1. Die zugehörigen Formfunktionen lauten:

$$\begin{aligned}
 N^1(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{4} (1 + \theta^1) (1 + \theta^2) \\
 N^2(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{4} (1 - \theta^1) (1 + \theta^2) \\
 N^3(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{4} (1 - \theta^1) (1 - \theta^2) \\
 N^4(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{4} (1 + \theta^1) (1 - \theta^2)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

mit $\theta^1 \in [-1; 1]; \theta^2 \in [-1; 1]$

Es können auch Drei- und Viereckselemente mit mehr als drei bzw. vier Knoten konstruiert werden. Die dabei zusätzlich vorhandenen Knoten im Element machen eine Erhöhung des Polynomgrads der Formfunktionen erforderlich (für weiterführende Informationen zu diesen *p-Elementen* sei u. a. auf [BR89, Hug00, ZTZ05] verwiesen). Obwohl *Elemente höherer Ordnung* für viele Strukturprobleme eine höhere Konvergenzrate als lineare bzw. bilineare Elemente aufweisen (siehe z. B. [ZTZ05]), stellen sie größere Anforderungen an die Netzgenerierung, weswegen oft einfachere Elementtypen bevorzugt werden.

Metrikeigenschaften eines finiten Elements. Auf der facettierten Flächenbeschreibung der Gesamtgeometrie mittels finiter Elemente können die bislang aufgezeigten Verfahren zur Bestimmung der Flächeneigenschaften direkt angewandt werden. Einstiegspunkt hierfür ist die Berechnung der kovarianten Basisvektoren. Diese ergeben sich gemäß Gleichung (2.8) durch Ableitung des Ortsvektors nach den Flächenparametern θ^1 und θ^2 . Da die Ortsvektoren der FE-Knoten diskret gegeben sind und nicht von den Flächenparametern abhängen, sind lediglich die Formfunktionen für die Berechnung der Basisvektoren abzuleiten:

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\partial N^k(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha} \bar{\mathbf{x}}_k \quad (2.34)$$

Die Basisvektoren können nun benutzt werden, um die Metrikeigenschaften des finiten Elements nach Abschnitt 2.2.2 zu bestimmen. Beispielsweise ergibt sich sein Flächeninhalt aus der Kombination von Gleichung (2.34) mit den Gleichungen (2.20) und (2.21). Zwar ließe sich die notwendige Integration für die Flächenberechnung noch analytisch durchführen, doch wird bei FE-Berechnungen meist auf eine numerische Integration zurückgegriffen. Das bekannteste Verfahren ist hierbei die *Gauß-Integration* bzw. *Gauß-Quadratur* [ZTZ05]. Für den konkreten Fall der Flächenberechnung ergibt sich die Elementfläche aus der gewichteten Summe der differentiellen Flächeninhalte da_i an den Gaußpunkten:

$$a = \int_a da = \sum_{i=1}^{n_{gp}} da_i w_i \quad (2.35)$$

Die Anzahl n_{gp} der Gaußpunkte, deren Lage und die zugehörigen Wichtungsfaktoren w_i sind vom Polynomgrad und Typ des Elements abhängig. Für das lineare Dreieckselement ist lediglich ein Gaußpunkt in dessen Schwerpunkt nötig, beim bilinearen Viereckselement sind schon vier Gaußpunkte für eine vollständige Integration erforderlich (siehe Abbildung 2.11).

Soll eine Funktion f über die Fläche integriert werden, ist das prinzipielle Vorgehen das Gleiche: Man bestimmt den Funktionswert f_i an jedem Gaußpunkt und multipliziert ihn mit

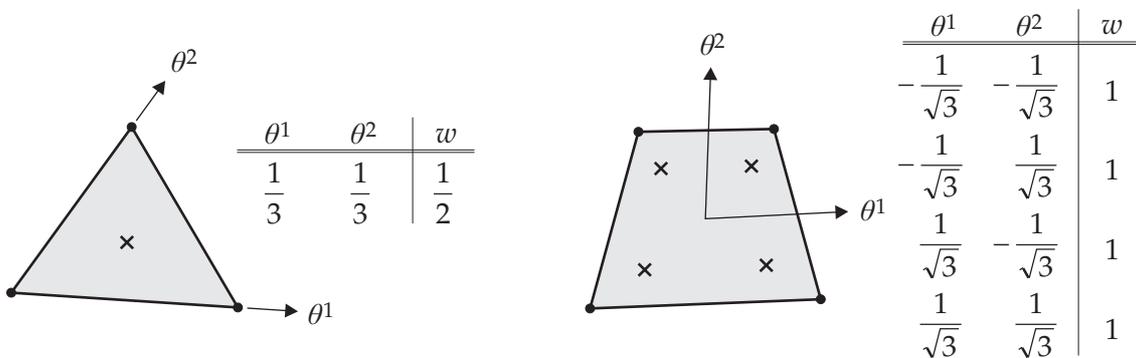


Abbildung 2.11: Lage und Wichtung der Gaußpunkte zur numerischen Integration.

der differentiellen Fläche da_i und dem Wichtungsfaktor w_i . Werden diese Produkte anschließend über alle Gaußpunkte aufsummiert, ergibt sich ein Näherungswert für das analytische Integral:

$$\int_a f da \approx \sum_{i=1}^{n_{gp}} f_i da_i w_i \quad (2.36)$$

Krümmungsberechnung bei C^0 -kontinuierlichen FE-Netzen. Das Krümmungsverhalten von Membranstrukturen ist maßgebend dafür, ob eine Struktur in der Lage ist, äußere Lasten ohne Überschreitung der zulässigen Grenzwerte zu den Auflagern zu transportieren oder nicht. Ist die Geometrie zu wenig gekrümmt, sind oft große Verformungen und Spannungen zum Lastabtrag nötig, während hingegen eine stärkere Krümmung der Struktur zunehmend Steifigkeit verleiht. Aus diesem Grund ist die Krümmungsanalyse ein wichtiges Werkzeug für den Planer.

Werden bei einer mit Verschiebungselementen diskretisierten Struktur die im Kapitel 2.2.3 beschriebenen Beziehungen zur Krümmungsberechnung benutzt, wird man schnell feststellen, dass dadurch nur die Krümmung jedes einzelnen finiten Elements, nicht jedoch der Fläche bestimmt werden kann. Dreiknotige Elemente werden beispielsweise stets eine Ebene darstellen, während hingegen vierknotige Elemente nur Ebenen und Flächen mit negativer Gaußscher Krümmung beschreiben können. Die Gesamtkrümmung der diskretisierten Fläche hingegen kann nicht korrekt erfasst werden. Die Ursache hierfür ist die Tatsache, dass die Übergänge zwischen den einzelnen Verschiebungselementen lediglich C^0 -kontinuierlich sind. Dies bedeutet, dass zwar die interpolierte Geometrie an den Kanten keine Klaffungen bzw. Überschneidungen aufweist, jedoch Knicke zwischen den Elementen möglich sind [COS00, CO01]. Im mathematischen Sinne ist somit die Funktion stetig, die weiteren Ableitungen jedoch nicht. Geometrische Informationen, die Ableitungen der Geometrie benötigen, werden dadurch an den Elementkanten unstetig. Dieses Verhalten zeigt sich auch an den Normalenvektoren einer diskretisierten gekrümmten Fläche: Anstatt ein kontinuierliches Vektorfeld zu bilden, sind die Normalenvektoren zweier Elemente entlang der gemeinsamen Kante nicht identisch (siehe Abbildung 2.12 links).

Ein Verfahren zur numerischen Krümmungsberechnung bei C^0 -kontinuierlichen FE-Netzen beruht auf einer Idee, die auf [Zie01] zurückgeht: Um Diskontinuitäten des Normalenvektors verschiedener Elemente am selben Knoten zu vermeiden, wird eine Vereinheitlichung der Knotennormalenvektoren vorgenommen (siehe Abbildung 2.12 rechts). Jedem Knoten k wird zusätzlich zu seinem Ortsvektor ein diskreter Normalenvektor $\bar{\mathbf{n}}_k$ (auch *Knotendirektor* genannt) zugewiesen, der sich aus einem Mittelwert der Element-Normalenvektoren \mathbf{n}_k^i aller angrenzenden Elemente i zusammensetzt:

$$\bar{\mathbf{n}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{el_k} w_{ki} \mathbf{n}_k^i}{\left\| \sum_{i=1}^{el_k} w_{ki} \mathbf{n}_k^i \right\|} \quad (2.37)$$

el_k ist dabei die Anzahl der Elemente, die denselben FE-Knoten k als Elementknoten besitzen. Der Term w_{ki} stellt einen Wichtungsfaktor dar, der den Einfluss der Größe und Form

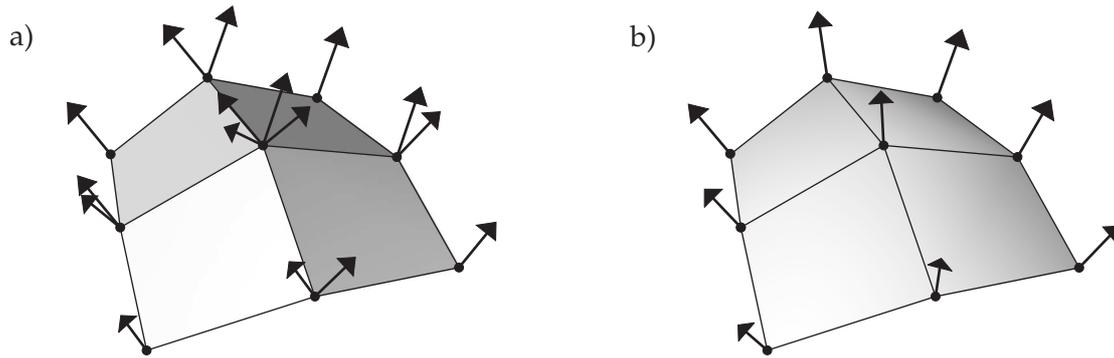


Abbildung 2.12: Knotennormalen: a) Vor und b) nach der Vereinheitlichung.

der angrenzenden Elemente bei der Mittelwertbildung berücksichtigt. Obwohl w_{ki} prinzipiell beliebig groß gewählt werden kann, wird vorgeschlagen, den Wichtungsfaktor invers proportional zur Elementgröße A_{ki} zu wählen [Wak04]. Dies lässt sich durch die Annahme begründen, dass kleinere Elemente eine genauere Diskretisierung der Fläche bilden als größere Elemente.

Der Einfluss des Wichtungsfaktors soll an einem zweidimensionalen Beispiel verdeutlicht werden: Ein Halbkreis wird mit drei unterschiedlich langen Linienelementen diskretisiert (siehe Abbildung 2.13). An den zwei Mittelknoten wird nun jeweils der mittlere Knotenindirektor $\bar{\mathbf{n}}_1$ bzw. $\bar{\mathbf{n}}_2$ nach Gleichung (2.37) für verschiedene Wichtungsfaktoren ermittelt. In der linken Bildhälfte von Abbildung 2.13 wurde der Wichtungsfaktor proportional zur Elementgröße (hier: Länge des Linienelements) gewählt. Man erkennt deutlich eine Abweichung der gemittelten Knotennormalen von den theoretisch korrekten Normalenvektoren, deren Wirkungslinie stets durch den Mittelpunkt M des Halbkreises verläuft. Auch ein konstanter Wichtungsfaktor, dessen Wert unabhängig der Elementgröße ist, liefert keine korrekten Ergebnisse (siehe Abbildung 2.13 Mitte). Wird der Wichtungsfaktor invers proportional zur Größe des Elements gewählt, stimmen für dieses zweidimensionale Beispiel die diskreten Knotennormalen stets mit der analytischen Lösung überein (siehe Abbildung 2.13 rechts). Auch beim dreidimensionalen Fall einer diskretisierten Kugel liefert ein zur Elementgröße invers proportional gewählter Wichtungsfaktor die besten Ergebnisse, auch wenn die analytische Lösung i. A. nicht getroffen wird.

Bei Verwendung von Elementen gleichen Typs (z. B. drei- oder vierknotiges Element) wird die Elementgröße über den Flächeninhalt des Parallelogramms angenähert, das von den lokalen Basisvektoren am Knoten k aufgespannt wird:

$$w_{ki} = \frac{1}{A_{ki}} = \frac{1}{\|\mathbf{g}_{ki1} \times \mathbf{g}_{ki2}\|} \quad (2.38)$$

Werden lineare dreiknotige Elemente mit bilinearen vierknotigen Elementen kombiniert, ist darauf zu achten, dass der Wertebereich der Flächenparameter θ^1 und θ^2 in beiden Fällen unterschiedlich groß ist (siehe Gleichungen (2.32) und (2.33)). Als Folge dessen liefert der Wert $A_{ki} = \|\mathbf{g}_{ki1} \times \mathbf{g}_{ki2}\|$ beim dreiknotigen Element exakt den doppelten Wert der Elementgröße, während beim vierknotigen Element der Betrag nur ca. ein Viertel der Elementfläche beträgt. Um eine Vereinheitlichung zu erreichen, wird die Elementgröße als eine Art

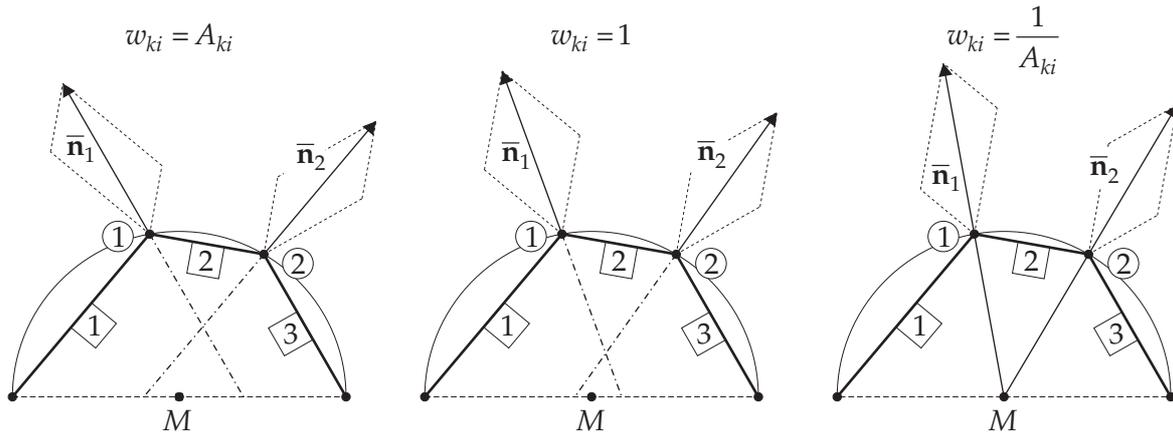


Abbildung 2.13: Einfluss verschiedener Wichtungsfaktoren bei Mittelung des Knotendirektors.

Einzugsfläche des Elements am jeweiligen Knoten uminterpretiert, die dem Flächeninhalt des Parallelogramms entspricht, das durch zwei Elementkanten aufgespannt wird. Folglich müssen die Wichtungsfaktoren modifiziert werden, um den unterschiedlichen Wertebereichen der Flächenparameter bei Dreieckselementen (Index *tri*) und Viereckselementen (Index *quad*) Rechnung zu tragen (siehe Gleichungen (2.32) und (2.33)):

$$w_{ki}^{tri} = \frac{1}{\|\mathbf{g}_{ki1} \times \mathbf{g}_{ki2}\|} \quad ; \quad w_{ki}^{quad} = \frac{1}{4 \|\mathbf{g}_{ki1} \times \mathbf{g}_{ki2}\|} \quad (2.39)$$

Nach erfolgter Berechnung der diskreten Knoten-Normalenvektoren $\bar{\mathbf{n}}_k$ kann durch deren Interpolation ein angenommenes Normalenvektorfeld $\mathbf{n}^*(\theta^1, \theta^2)$ im Element erzeugt werden. Dabei werden dieselben Formfunktionen $N^k(\theta^1, \theta^2)$ wie zur Geometrieinterpolation verwendet:

$$\mathbf{n}^*(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{n}}_k \quad (2.40)$$

Obwohl dieses angenommene Normalenvektorfeld nicht dem Normalenvektorfeld der Elementgeometrie entspricht, kann es zur Krümmungsberechnung eingesetzt werden: Durch die Mittelung der Knotennormalen werden Informationen der umgrenzenden Elemente ins „Zentralelement“ getragen, wodurch eine stetige Krümmungsberechnung möglich wird. Den Krümmungstensor \mathbf{k} in seiner Darstellung bzgl. der lokalen kontravarianten Basis im Element erhält man nun durch Anwendung von Gleichung (2.22) und anschließender Zwangssymmetrierung:

$$\mathbf{k} = b_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial \theta^\alpha} \right) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta \quad (2.41)$$

Dieser Krümmungstensor kann verwendet werden, um im Element durch Lösen des Eigenwertproblems die Hauptkrümmungen und deren Richtungen bzw. Gaußsche und mittlere Krümmung zu ermitteln. Durch leichte Modifizierung des Krümmungsoperators lassen sich Membranelemente sogar zu Schalelementen erweitern, da nun auch die aus der Biegung stammende Systemsteifigkeit berücksichtigt werden kann. Für weiterführende Informationen zu diesen *rotationsfreien Schalelementen*, die lediglich über Verschiebungs- und keine Rotationsfreiheitsgrade verfügen, sei auf [LWB07] verwiesen.

2.3 Kontinuumsmechanik

Das mechanische Verhalten leichter Flächentragwerke lässt sich am besten mittels kontinuumsmechanischer Darstellung beschreiben. Diese beobachtet das Verhalten deformierbarer Körper Ω in Raum und Zeit und schliesst daraus auf evtl. auftretende Dehnungen, Spannungen, etc. Dabei wird angenommen, dass jeder Körper aus zusammenhängenden Materiepunkten besteht, die sich eindeutig zu jedem Zeitpunkt über ihre konvektiven Koordinaten identifizieren lassen. Diese Materiepunkte dürfen sich zwar im Raum relativ zueinander verschieben, aber nie den „Kontakt“ zu ihren benachbarten Materiepunkten verlieren. D. h., der Körper kann gedehnt bzw. gestaucht werden, jedoch treten dabei keine Risse in ihm auf.

Die Kontinuumsmechanik lässt sich bei einer Vielzahl von Fragestellungen des konstruktiven Ingenieurbaus anwenden (z. B. Festkörper- und Fluidprobleme, Thermodynamik, etc.). Für weiterführende Informationen sei u. a. auf [Hol04, SB96, BWBR04, ZTN05] verwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit soll eine auf die speziellen Belange des Membranbaus „zugeschnittene“ Kontinuumsmechanik vorgestellt werden. Besonderen Wert muss hierbei auf die korrekte kinematische Beschreibung gelegt werden: Während die Verformung konventioneller Bauten unter Last meist kaum visuell wahrnehmbar ist, treten bei Membrantragwerken in der Regel große Verformungen auf. Dies ist meist sogar erwünscht, da durch die sich einstellende geometrische Steifigkeit die auftretenden Spannungen gering gehalten werden können. Dieses als „große Verformungen - kleine Dehnungen“ bezeichnete Verhalten macht eine nichtlineare Beschreibung der Kinematik vonnöten. Die materielle Nichtlinearität ist aufgrund der angestrebten kleinen Dehnungen für die Berechnungsergebnisse i. A. nicht so entscheidend [Wak04], weswegen im Membranbau meist eine lineare Beziehung zwischen Spannungen und Dehnung angenommen wird. Für bestimmte Fragestellungen (z. B. Kriechen) muss jedoch auch hier ein nichtlineares Materialgesetz verwendet werden [HdKM07].

Das folgende Kapitel beginnt mit einer Diskussion der verschiedenen Konfigurationen, die eine Membranstruktur während ihrer Lebensdauer einnimmt. Darauf aufbauend werden Dehnungs- und Spannungsmaße sowie konstitutive Gesetze zur Beschreibung des Materialverhaltens eingeführt. Anhand dieser Vorarbeiten werden die elementaren Gleichgewichtsbeziehungen für Membranen entwickelt. Hierbei kann zwischen der starken Form des Gleichgewichts und seiner schwachen Form unterschieden werden. Während die starke Form mit ihren Differentialbeziehungen v. a. für theoretische Überlegungen von Interesse ist, wird die durch das Prinzip der virtuellen Arbeit gegebene schwache Formulierung als Ausgangspunkt zur Entwicklung eines iterativen Lösungsverfahrens mittels finiter Elemente verwendet, die den Abschluss des Kapitels bildet.

2.3.1 Konfigurationen

Ein fundamentaler Begriff der Kontinuumsmechanik ist die sogenannte *Konfiguration* eines Körpers [Hol04]: Diese beschreibt die räumliche Lage seiner Materiepunkte zu einem gewissen Zeitpunkt t . Mathematisch betrachtet wird dabei jedem Materiepunkt durch eine

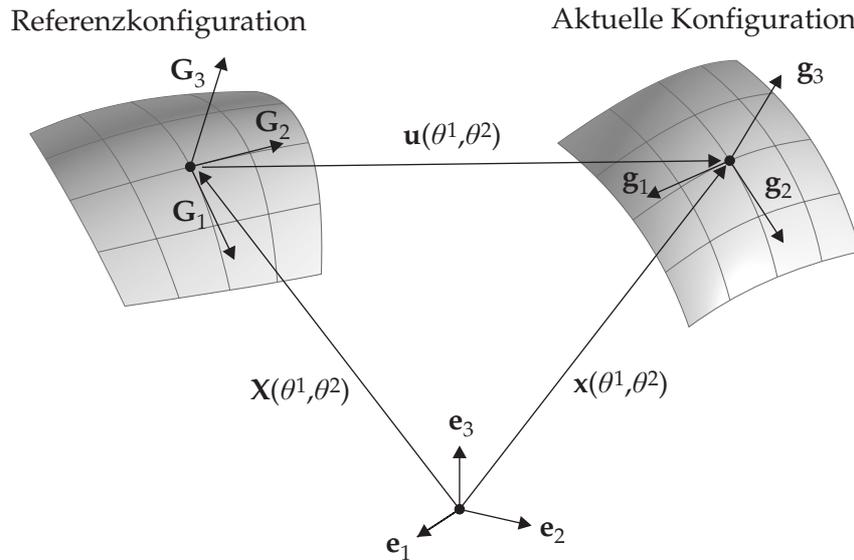


Abbildung 2.14: Kontinuumsmechanische Konfigurationen.

Abbildungsvorschrift χ ein eindeutiger Positionsvektor \mathbf{x} im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 zugewiesen. Um Schlüsse über das Deformationsverhalten des Körpers ziehen zu können, betrachtet man verschiedene Konfigurationen zu unterschiedlichen Zeiten t und analysiert die Änderungen. Die Betrachtung kann auf zwei grundlegend unterschiedliche Weisen erfolgen [SB96]: Bei der *Lagrangeschen Betrachtungsweise* verfolgt der Beobachter die Lage einzelner Materiepunkte über einen gewissen Zeitraum, sie wird deswegen auch *materielle Betrachtungsweise* genannt. Sie kann vorteilhaft zur Beschreibung der Mechanik von Festkörpern verwendet werden und kommt auch im nachfolgenden Text zum Einsatz. Anstatt mit den Materiepunkten mitzuwandern, verfolgt der Betrachter der *Eulerschen Betrachtungsweise* die Ereignisse in einem stets fixen räumlichen Bereich: Er kann z. B. die Geschwindigkeit und Beschleunigungen der Materialpunkte messen, die dieses „Kontrollvolumen“ passieren. Diese räumliche Beschreibung wird oft als intuitive Herangehensweise für die Beschreibung von Fluidproblemen benutzt [ZTN05].

In der klassischen Kontinuumsmechanik werden nun zwei signifikante Konfigurationen eingeführt: Die erste Konfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt die *unverformte Referenzkonfiguration* der mechanischen Struktur ohne äußere Lasten. Diese Konfiguration dient bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise als Referenz für die Messung aller später auftretenden Dehnungen und Spannungen. Man nimmt somit an, dass alle Strukturteile zu diesem Zeitpunkt unbelastet und damit frei von elastischen Spannungen sind. Es hat sich eingebürgert, alle Größen, die sich auf diese unverformte Konfiguration beziehen, durch Großbuchstaben zu charakterisieren. Beispielsweise beschreibt \mathbf{X} die räumliche Position eines Materiepunkts zum Zeitpunkt $t = 0$. \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 und \mathbf{G}_3 kennzeichnen die unverformten lokalen kovarianten Basisvektoren.

Betrachtet man die Struktur zu einem späteren Zeitpunkt t , stellt deren räumliche Lage die sogenannte *Momentankonfiguration* oder *aktuelle Konfiguration* dar. Diese Konfiguration ist durch Verformung der Struktur, ausgehend von der Referenzkonfiguration über den Zeit-

raum t , entstanden. Der Körper Ω ist nun i. A. nicht mehr spannungsfrei, da sowohl sein Rand Γ als auch sein inneres Volumen Kräften ausgesetzt sind. Die kontinuumsmechanischen Größen zum aktuellen Zeitpunkt t werden der Konvention nach durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet. \mathbf{x} bezeichnet den aktuellen Ortsvektor eines Punktes, die verformten lokalen Basisvektoren werden mit \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 abgekürzt. Die Verschiebungen \mathbf{u} eines Materiepunktes, die über der gesamten Zeit t aufgetreten sind, lassen sich aus der Differenz seiner Ortsvektoren in der aktuellen bzw. Referenzkonfiguration berechnen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.42)$$

Für die Analyse von Membrantragwerken sind die Konfigurationen der Mittelebene der Membranstruktur von Interesse, da aus deren Lage im Raum mithilfe der Dickeninformation die Lage aller weiteren Materiepunkte des Kontinuums abgeleitet werden kann [BWBR04]. Abbildung 2.14 zeigt exemplarisch die Konfigurationen eines Membranflächenstücks. Beim „klassischen“ Entwurfsprozess repräsentiert die Referenzkonfiguration das ideal vorgespannte, von äußeren Kräften unbelastete Tragwerk. Dieses ist lediglich den formgebenden Lasten unterworfen wie beispielsweise dem Innendruck bei pneumatischen Strukturen. Besondere Beachtung ist der Vorspannung zu schenken: Da per Definition die Referenzkonfiguration das unverformte System darstellt, kann in diesem „vereinfachten“ mechanischen Modell die Vorspannung nicht als elastische Größe eingeführt werden, da zu deren Entstehung Dehnungen vonnöten wären. Aus diesem Grund wird die Vorspannung als systeminhärent definiert. Die Referenzkonfiguration könnte somit als idealer Bauzustand einer Struktur betrachtet werden, auf der nur „gewünschte“ Lasten, aber keine „schädlichen“ Lasten wie z. B. Schwerkraft oder Wind wirken. Die verformte aktuelle Geometrie hingegen stellt das Momentanbild der Struktur zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt unter Last dar.

Betrachtet man den Herstellungsprozess vorgespannter Tragwerke jedoch im Detail, ist festzustellen, dass für eine realitätsnähere Beschreibung des mechanischen Prozesses die Einführung einer neuen dritten Konfiguration notwendig ist: Um die Vorspannung in der Gesamtstruktur zu erzeugen und der doppelten Krümmung der Fläche gerecht zu werden, wird die Membran aus mehreren einzelnen Zuschnittsbahnen konfektioniert (für eine weitreichende Diskussion der Zuschnittsproblematik sei auf Kapitel 4 verwiesen). Diese stellen den Ausgangspunkt für die Erstellung des Membrantragwerks dar und können somit als tatsächliche kontinuumsmechanische Referenzkonfiguration \mathbf{X}_0 identifiziert werden. Dies lässt sich schon an ihrer zeitlichen Lage erkennen, da der Zuschnitt zum Zeitpunkt $t = -t_0$ vor der Montage des Gesamttragwerks stattfindet. Der montierte Zustand der Membran \mathbf{X} , der bislang als Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ angesehen wurde, stellt bei dieser erweiterten Betrachtungsweise lediglich eine verformte Zwischenkonfiguration dar. Diese Konfiguration zeichnet sich dadurch aus, dass erstmalig die einzelnen Bauteile der Gesamtstruktur (Zuschnitt, Randseile, etc.) zueinander in Kontakt kommen und den letztendlichen Randbedingungen unterworfen sind. Die dabei vorherrschende Topologie wird auch bei späteren verformten Zuständen \mathbf{x} zu den Zeit $t > 0$ beibehalten. In Abbildung 2.15 sind die drei signifikanten Konfigurationen eines Membrantragwerks exemplarisch am Beispiel eines Vierpunktsegels dargestellt.

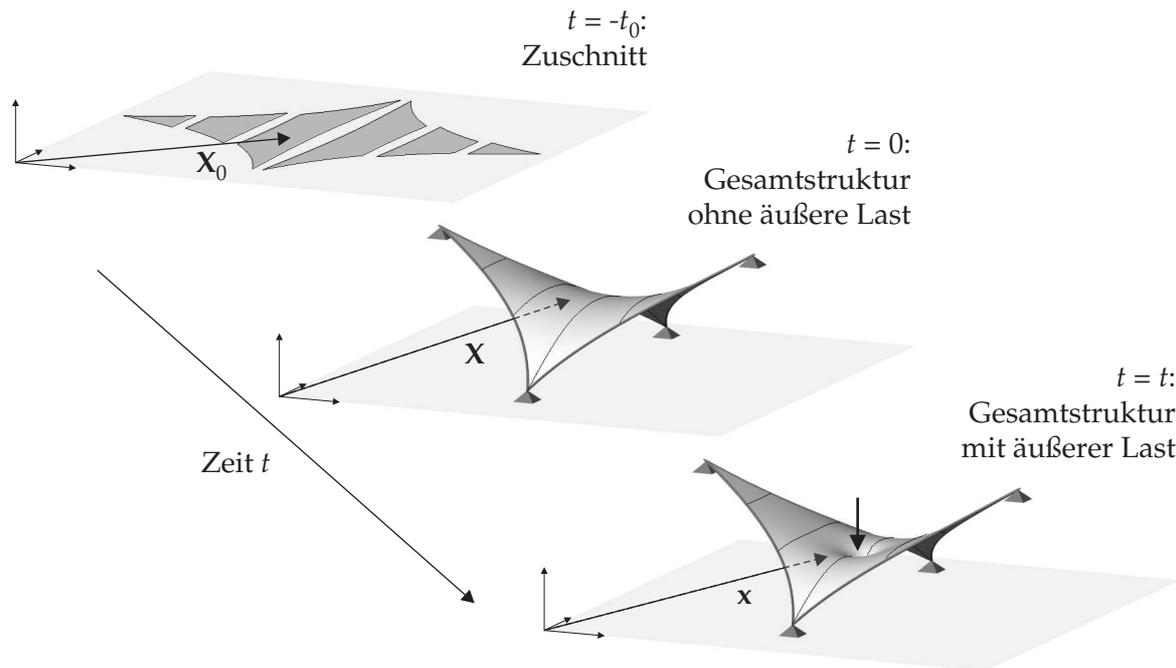


Abbildung 2.15: Konfigurationen einer Membranstruktur.

Ob nun die konventionelle oder erweiterte kontinuumsmechanische Betrachtungsweise für den Entwurf von leichten Flächentragwerken zum Einsatz kommt, hängt entscheidend vom Stand der Planung ab: In den ersten Entwurfsphasen muss meist noch die genaue Form der Geometrie ausgearbeitet werden, der Zuschnitt ist gegebenenfalls noch unbekannt. Wird in diesem Stadium eine Strukturanalyse durchgeführt, stellt die Annahme einer ideal innerlich vorgespannten Gesamtstruktur die einzig sinnvolle Annahme dar, da eine Berücksichtigung des Zuschnitts den Planungsablauf erheblich verlangsamen und verkomplizieren würde. Für die spätere Detailplanung einer konkreten Form bietet die erweiterte Betrachtungsweise ein wichtiges Hilfsmittel, um die Auswirkungen des Herstellungsprozesses auf die Gesamtstruktur abschätzen zu können. Beispielsweise kann dadurch geklärt werden, wo in der Membran infolge der räumlichen Verkrümmung der ebenen Zuschnittsbahnen evtl. Spannungsspitzen bzw. Falten entstehen könnten. Diese Informationen sollen dann weniger eine erneute Modifikation der Gesamtgeometrie bewirken als eine Änderung des Zuschnitts. Kapitel 5 beschäftigt sich u. a. mit derartigen Fragestellungen.

Zum Abschluss der Konfigurationsdefinitionen ist noch anzumerken, dass der nachfolgende Text, soweit nicht anders angemerkt, nur statische Probleme behandelt. Da aus diesem Grund zeitabhängige Kräfte (wie bei Viskosität und Trägheit eines Körpers) vernachlässigt werden können, handelt es sich bei der Zeit t weniger um eine physikalische Größe als um einen Parametrisierungsparameter für die Abfolge gewisser Konfigurationen, der für die Berechnungsverfahren von untergeordneter Bedeutung ist. In [BWBR04] wird sie deswegen als Pseudozeit bezeichnet.

2.3.2 Spannungs- und Dehnungsmaße

Deformationsgradient. Um Aussagen über die Spannungen bzw. Dehnungen in der verformten Membran treffen zu können, wird die Mittelfläche der aktuellen Konfiguration mit der unverformten Mittelfläche der Referenzkonfiguration „verglichen“. Hierzu betrachtet man ein differentielles Linienelement auf der Fläche, das im Punkt P startet. Im unverformten Zustand wird dieses Linienelement durch den Vektor $d\mathbf{X}$ beschrieben, der in den Vektor $d\mathbf{x}$ der aktuellen Geometrie verformt wird. Die auftretende Deformation wird mathematisch durch den *Deformationsgradienten* \mathbf{F} beschrieben:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.43)$$

\mathbf{F} transformiert ein differentielles Linienelement der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration. Durch Umstellen von Gleichung (2.43) lässt sich eine Gleichung zur Berechnung des zweistufigen Tensors \mathbf{F} finden:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.44)$$

Die zweite fundamentale Beziehung auf der rechten Seite obiger Gleichung kann aus den Gleichungen (2.8) und (2.11) hergeleitet werden. Sie besagt, dass unter Verwendung der Gleichung (2.10) ko- und kontravariante Basisvektoren der einzelnen Konfigurationen mithilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} ineinander transformiert werden können:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad ; \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i \quad ; \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i \quad ; \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i \quad (2.45)$$

Da der Deformationsgradient \mathbf{F} und sein transponierter Tensor \mathbf{F}^T nicht identisch sind, wird ersichtlich, dass \mathbf{F} ein unsymmetrischer Tensor ist. Das Gleiche gilt für die Inverse des Deformationsgradienten \mathbf{F}^{-1} und dessen Transponierte \mathbf{F}^{-T} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad ; \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad ; \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \end{aligned} \quad (2.46)$$

Eine Besonderheit ist weiterhin, dass die Basis des Deformationsgradienten sowohl aus Vektoren der Referenzkonfiguration als auch aus Vektoren der aktuellen Konfiguration besteht. Aufgrund dessen wird \mathbf{F} auch als *Zweipunktentensor* [Hol04] bezeichnet, da er in beiden Konfigurationen ein „Standbein“ besitzt.

Die Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ stellt das Verhältnis des von den drei konvektiven Basisvektoren aufgespannten Volumens $d\mathbf{v}$ in der aktuellen Konfiguration zu dem unverformten Volumen dV der Referenzkonfiguration dar. Da gemäß den Modellannahmen einer Membran der dritte Basisvektor \mathbf{G}_3 bzw. \mathbf{g}_3 jedoch nach Gleichung (2.9) stets als Flächennormalenvektor mit Einheitslänge definiert wurde und somit keine Längenänderungen erfährt, kann $\det \mathbf{F}$ nunmehr als Verhältnis der verformten infinitesimalen Fläche da , die durch die ersten beiden Basisvektoren aufgespannt ist, zur Ausgangsfläche dA interpretiert werden. Da Volumen bzw. Flächen stets positive Beträge besitzen, ist auch deren Verhältnis stets positiv:

$$\det \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dV} = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3} \stackrel{\text{Gl. (2.9)}}{=} \frac{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|}{\|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\|} = \frac{da}{dA} > 0 \quad (2.47)$$

Hauptstreckungen. Durch Eigenwertanalyse des Deformationsgradienten lassen sich die auftretenden *Hauptstreckungen* und ihre Richtungen errechnen. Bei jeder beliebigen Verformung eines Membranstücks lassen sich an allen Flächenpunkten stets zwei zueinander orthogonale „Fasern“ finden, die im Laufe der Deformation zwar beliebig ihre Länge verändert haben, jedoch zueinander senkrecht geblieben sind. Diese Fasern lassen sich bildlich durch zwei auf die Membran gezeichnete Striche darstellen, die sowohl in der Referenzkonfiguration als auch im aktuellen Zustand orthogonal zueinander sind, deren Strichlänge jedoch sich vergrößert bzw. verkleinert hat. Das Längenverhältnis λ_1 bzw. λ_2 aus verformter zu originaler Strichlänge wird Hauptstreckung (englisch: „principal stretch“) genannt, die durch die Striche definierten Richtungen sind die sogenannten Hauptstreckungsrichtungen.

Mathematisch betrachtet stellen λ_1 bzw. λ_2 die Eigenwerte des Deformationsgradienten \mathbf{F} dar. Die orthogonalen Hauptstreckungsrichtungen sind in der Referenzkonfiguration durch die lokale kartesische Basis $\{\hat{\mathbf{N}}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ in der verformten Lage durch $\{\hat{\mathbf{n}}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ gegeben. Die sogenannte *spektrale Darstellung* des Deformationsgradienten erhält man durch Verwendung seiner Eigenvektoren als Basis:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha = \lambda_\alpha \hat{\mathbf{n}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha \quad (2.48)$$

Da die direkte Eigenwertanalyse des Zweipunktensors \mathbf{F} aufgrund seiner Verankerung in zwei Konfigurationen mathematisch Probleme bereitet, versucht man aus \mathbf{F} eine neue Hilfsgröße zu konstruieren, die sich lediglich auf eine Konfiguration bezieht. Dies gelingt durch Multiplikation der Transponierten des Deformationsgradienten mit dem Deformationsgradienten selbst:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = g_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta = \lambda_\alpha^2 \hat{\mathbf{N}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha \quad (2.49)$$

Wie aus der rechten Seite von Gleichung (2.49) ersichtlich wird, entsprechen die Eigenwerte des symmetrischen *rechten Cauchy-Green-Tensors* \mathbf{C} exakt den Quadraten der Eigenwerte des Deformationsgradienten \mathbf{F} . Da \mathbf{C} zudem allein in der Referenzkonfiguration verankert ist, gelingt die Bestimmung der Eigenwerte λ_α^2 und der Eigenvektoren $\hat{\mathbf{N}}_\alpha$ ohne Probleme. Ist weiterhin die Lage der Hauptstreckungsrichtungen in der aktuellen Konfiguration gefragt, lassen sich die eben ermittelten Eigenvektoren $\hat{\mathbf{N}}_\alpha$ mittels des Deformationsgradienten in ihre verformte Lage $\lambda_\alpha \hat{\mathbf{n}}_\alpha$ transformieren:

$$\lambda_\alpha \hat{\mathbf{n}}_\alpha = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\alpha \quad (2.50)$$

Da die Richtung dieser Vektoren den Hauptstreckungen entspricht, ihr Betrag jedoch gleich der Hauptstreckung λ_α ist, muss eine Normalisierung vorgenommen werden, um die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$ zu erhalten.

Bei der Analyse des Deformationsprozesses der Vektoren $\hat{\mathbf{N}}_1$ und $\hat{\mathbf{N}}_2$ wird deutlich, dass diese einerseits eine Streckung um den Faktor λ_α erfahren, andererseits vollführen sie eine räumliche Rotation, um in ihrer letztendlichen Position anzukommen. Die Rotation wirkt sich jedoch auf beide Vektoren gleichmäßig aus, wodurch ihre relative Lage zueinander unverändert bleibt. Man kann somit diesen Verformungsvorgang (und alle weiteren) in eine reine

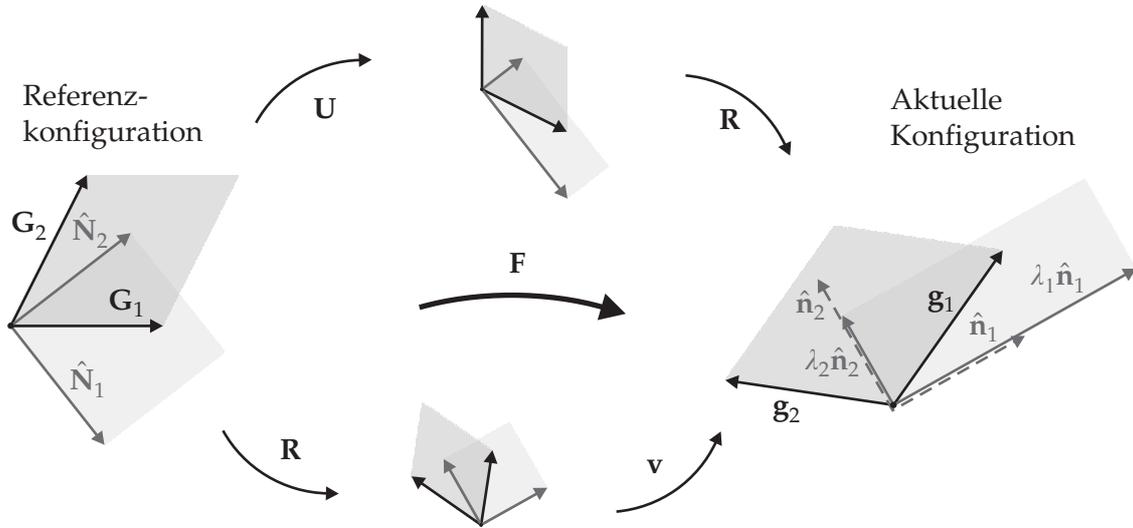


Abbildung 2.16: Polare Dekomposition der Deformation.

Dehnung und eine anschließende Rotation (bzw. Rotation und anschließende Streckung) aufspalten. Dies motiviert die *polare Dekomposition* des Deformationsgradienten [Hol04]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \quad (2.51)$$

\mathbf{R} ist dabei ein orthogonaler Rotationstensor ($\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{R} = 1$), der eine reine Rotation des Flächenelements bewirkt. \mathbf{U} bezeichnet den *rechten Strecktensor*, \mathbf{v} den *linken Strecktensor*. Der Unterschied zwischen beiden Tensoren ist der Zeitpunkt der Streckung im Vergleich zur Rotation: Bei Verwendung von \mathbf{U} wird der Körper erst gestreckt und dann rotiert, während im Gegensatz hierzu die Streckung \mathbf{v} erst nach der Rotation erfolgt. Abbildung 2.16 stellt beide Varianten grafisch dar.

Unter Verwendung der Hauptstreckungen und ihrer Richtungen lassen sich die Größen \mathbf{R} , \mathbf{U} und \mathbf{v} in den Hauptachsen (spektrale Darstellung) wie folgt schreiben:

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{n}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha \quad (2.52)$$

$$\mathbf{U} = \lambda_\alpha \hat{\mathbf{N}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha \quad (2.53)$$

$$\mathbf{v} = \lambda_\alpha \hat{\mathbf{n}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{n}}_\alpha \quad (2.54)$$

Die eben eingeführten Tensoren sind u. a. für die Entwicklung nichtlinearer Materialgesetze (wie z. B. für das Ogden-Modell [Ogd84, GR92]) unerlässliche kontinuumsmechanische Größen, finden jedoch auch beim Algorithmus der Vorspannungsanpassung im Zuge der numerischen Formfindung Gebrauch (siehe Abschnitt 3.3.3).

Dehnungsmaße. Im Gegensatz zu Spannungen stellen Dehnungen keine eindeutig definierten physikalischen Größen dar. Aus diesem Grund hat sich eine Vielzahl an bekannten Dehnungsmaßen entwickelt, die für jeweils ganz spezifische Bereiche der Mechanik zum

Einsatz kommen: Während die Ingenieurdehnung $\varepsilon = \lambda - 1 = \Delta L/L$ v. a. für die Berechnung von Stabtragwerken zum Einsatz kommt [WK04], wird die logarithmische Hencky-Dehnung $\varepsilon_H = \ln \lambda$ hauptsächlich zur Beschreibung nichtlinearer Materialbeziehungen verwendet [Hol04]. Für die kinematische Beschreibung leichter Flächentragwerke ist die korrekte Erfassung großer Rotationen und Starrkörperverschiebungen von großer Bedeutung. Dies erfordert den Einsatz einer komplett nichtlinearen geometrischen Beschreibung, da die bei Theorie I. und II. Ordnung verwendete Annahme kleiner Verformungen nicht mehr zutrifft. Ein weit verbreitetes nichtlineares Dehnungsmaß stellt der *Green-Lagrangesche Dehnungstensor* \mathbf{E} dar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\lambda_\alpha^2 - 1) \hat{\mathbf{N}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dieser in der Referenzkonfiguration verankerte Dehnungstensor erfüllt die Bedingung, Starrkörperverschiebungen bzw. -rotationen dehnungsfrei abbilden zu können. Dies wird aus der zweiten und dritten Beziehung von Gleichung (2.55) ersichtlich: Durch „Quadrierung“ des Deformationsgradienten \mathbf{F} wird der in der Verformung enthaltene Rotationsanteil \mathbf{R} eliminiert. Die Dehnung hängt somit nur noch von dem rechten Strecktensor \mathbf{U} ab, der die „reine“ Dehnung aus der Gesamtdeformation herausfiltert.

In analoger Weise zum Green-Lagrangeschen Dehnungstensor lässt sich mit dem *Euler-Almansi-Dehnungstensor* \mathbf{e} ein weiteres nichtlineares Dehnungsmaß konstruieren, das seinen Bezugspunkt in der aktuellen Konfiguration besitzt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \right) \hat{\mathbf{n}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{n}}_\alpha \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{v}^{-2}) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dabei stellen der Green-Lagrangesche Dehnungstensor \mathbf{E} und der Euler-Almansi-Dehnungstensor \mathbf{e} keine komplett unabhängigen Dehnungsmaße dar. Vielmehr haben sie die gleiche physikalische Aussagekraft, ihr Unterschied besteht lediglich im Blickwinkel, aus dem sie einen gewissen Sachverhalt betrachten. Während der Green-Lagrangesche Dehnungstensor quasi die zukünftigen Dehnungen für einen noch unverformten Körper vorhersieht, blickt der Euler-Almansi-Dehnungstensor bildlich ausgedrückt ausgehend vom verformten Körper auf dessen Deformation zurück. Diese Dualität der Betrachtungsweise wird sich auch später noch bei anderen kontinuumsmechanischen Größen wie z. B. Spannungen, Materialgesetzen und der Definition des Kräftegleichgewichts fortsetzen und stellt eine weitere fundamentale Erkenntnis der Kontinuumsmechanik dar: Jeder physikalische Sachverhalt lässt sich gleichwertig sowohl in der Referenz- als auch der verformten Konfiguration beschreiben. Ist eine Größe in der Referenzkonfiguration bekannt, erhält man ihre

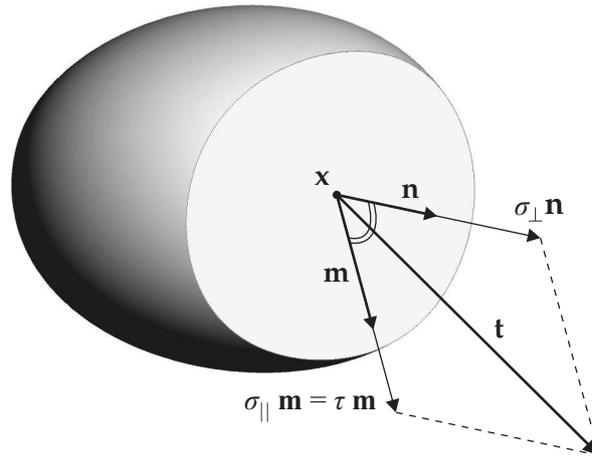


Abbildung 2.17: Normal- und Schubspannungskomponenten des Spannungsvektors.

alternative Darstellung in der aktuellen Konfiguration durch eine sogenannte *Push-Forward-Operation* χ_* . Die korrespondierende *Pull-Back-Operation* χ_*^{-1} führt die Rücktransformation der Darstellung bzgl. der aktuellen Konfiguration auf die unverformte Referenz durch [MH94]. In beiden Fällen bleiben dabei i. A. die Tensorkoeffizienten konstant, es werden lediglich die konvektiven Basen mithilfe des Deformationsgradienten in den jeweils anderen Zustand transformiert. Für den kovarianten Green-Lagrangeschen Dehnungstensor kann die Push-Forward-Operation, die die Euler-Almansi-Dehnungen liefert, wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{e} = \chi_*(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.57)$$

Gleichermaßen ergibt die auf den Euler-Almansi-Dehnungstensor angewandte Pull-Back-Operation die Green-Lagrangeschen Dehnungen:

$$\mathbf{E} = \chi_*^{-1}(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (2.58)$$

Spannungsmaße. Die physikalische Definition des Begriffs der Spannung bereitet weniger Probleme als die Einführung eines sinnvollen Dehnungsmaßes: Folgt man dem *Cauchy-Postulat*, wird der *Spannungsvektor* \mathbf{t} , der auf einer Schnittfläche eines Körpers in der aktuellen Konfiguration wirkt, lediglich durch die Lage der Schnittfläche beeinflusst [SB96]. Dieser Spannungsvektor ist als Kraft pro Einheitsfläche definiert und lässt sich aus einem gegebenen *Cauchyschen Spannungstensor* σ und dem Normalenvektor \mathbf{n} der Schnittfläche bestimmen:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (2.59)$$

Die im Cauchy-Spannungstensor gespeicherten Spannungen entsprechen den realen, physikalisch messbaren Größen. Um aus dem Spannungsvektor den Normal- und Schubspannungsanteil herauszufiltern (d. h. den Anteil senkrecht und parallel zur Schnittfläche), ist eine weitere Projektion von \mathbf{t} auf den Normalenvektor bzw. auf die Tangentialebene notwendig (siehe Abbildung 2.17). Die Normalspannung σ_{\perp} ergibt sich somit zu:

$$\sigma_{\perp} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.60)$$

Die im Spannungsvektor enthaltene Schubspannungskomponente $\sigma_{||} = \tau$ lässt sich durch Projektion des Spannungstensors auf einen in der Schnittfläche liegenden Einheitsvektor \mathbf{m} bestimmen, der koplanar mit \mathbf{n} und \mathbf{t} ist:

$$\sigma_{||} = \tau = \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - \sigma_{\perp}^2} \quad (2.61)$$

Bei der Modellierung einer Membran wird die Annahme getroffen, dass die Spannungsverteilung über die Dicke der Membran konstant bleibt. Zugleich treten keine Spannungskomponenten senkrecht zur Mittelfläche auf. Führt man nun an jedem Flächenpunkt der Membran ein lokales kartesisches Koordinatensystem $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i \in \{1,3\}}$ ein, dessen dritter Basisvektor $\tilde{\mathbf{e}}_3$ identisch mit dem Normalenvektor \mathbf{n} der Fläche ist, lassen sich die Annahmen dieses *ebenen Spannungszustands* folgendermaßen formulieren:

$$\sigma_{3i} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i = \sigma_{i3} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3 = 0 \quad (2.62)$$

An einem differentiellen Membranelement, dessen Schnittflächen orthogonal zu den Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_1$ und $\tilde{\mathbf{e}}_2$ angeordnet sind, greifen somit nur noch planare Spannungen an, die Membranspannungen genannt werden (siehe Abbildung 2.18):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \tau &= \sigma_{12} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = \sigma_{21} = (\boldsymbol{\sigma}_{mem} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Identitätsbeziehung der Schubspannungen σ_{12} und σ_{21} ergibt sich aus dem notwendigen Momentengleichgewicht am Element („Drallerhaltung“), das zugleich auch für die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors verantwortlich ist. Da sich damit die Anzahl unabhängiger Tensorkoeffizienten des Membranspannungszustands auf lediglich drei reduziert, hat es sich eingebürgert, diese anstatt in einer Matrix in einem Vektor anzuordnen. Dies wird

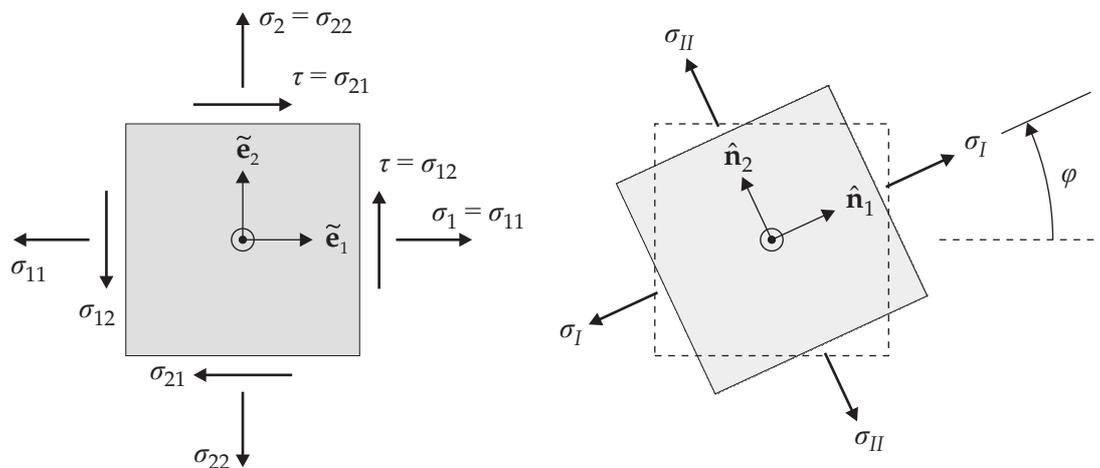


Abbildung 2.18: Membranspannungszustand und dessen Hauptspannungen.

auch *Voigt-Notation* genannt:

$$\sigma_{mem} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{11} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix-Notation}} \stackrel{\wedge}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \tau = \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\text{Voigt-Notation}} \quad (2.64)$$

Für jeden Membranspannungszustand lässt sich das lokale kartesische Koordinatensystem in der Tangentialebene derartig drehen, so dass die Schubspannungen τ verschwinden. An den zugehörigen Schnittufern greifen lediglich Normalspannungen an. Diese *Hauptspannungen* σ_I bzw. σ_{II} und ihre korrespondierenden Richtungen $\hat{\mathbf{n}}_1$ und $\hat{\mathbf{n}}_2$ stellen die Eigenwerte und -vektoren des Cauchy-Spannungstensors dar. Das Eigenwertproblem lässt sich vorteilhaft durch Verwendung der Invarianten des Spannungstensors lösen:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\text{tr}(\sigma)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(\sigma)}{2}\right)^2 - \det \sigma} \quad (2.65)$$

mit $\text{tr}(\sigma) = I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22}$
 $\det \sigma = I_2(\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$

Der Winkel φ , um den die Hauptspannungsrichtungen gegenüber dem lokalen kartesischen Koordinatensystem verdreht sind (für die Winkeldefinition siehe Abbildung 2.18 rechts), ist mit folgender Gleichung gegeben:

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (2.66)$$

In ähnlicher Weise wie bei den Dehnungen lassen sich auch aus dem Cauchyschen Spannungstensor durch Pull-Back-Operationen alternative Spannungsmaße ableiten. Den *ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* erhält man durch:

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.67)$$

Ähnlich wie bei dem Deformationsgradienten handelt es sich hierbei um einen Zweipunkt-tensor, der sowohl in der Referenz- als auch in der aktuellen Konfiguration verankert ist. Er kann verwendet werden, um für eine Schnittfläche in der Referenzkonfiguration mit dem Normalenvektor \mathbf{N} einen Spannungsvektor \mathbf{T} zu bestimmen. Dieser Spannungsvektor \mathbf{T} ist kollinear mit dem physikalischen Spannungsvektor \mathbf{t} , jedoch betragsmäßig unterschiedlich (siehe Abbildung 2.19). Der Zusammenhang zwischen \mathbf{T} und \mathbf{t} wird über den differentiellen Kraftvektor $d\mathbf{f}$ hergestellt, der auf der infinitesimal kleinen Schnittfläche der aktuellen Konfiguration wirkt: $d\mathbf{f}$ lässt sich sowohl aus \mathbf{t} als auch aus \mathbf{T} durch Multiplikation mit der jeweils zugehörigen differentiellen Schnittfläche da bzw. dA bestimmen:

$$d\mathbf{f} = (\sigma \cdot \mathbf{n}) da = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) dA = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{N}) dA \quad (2.68)$$

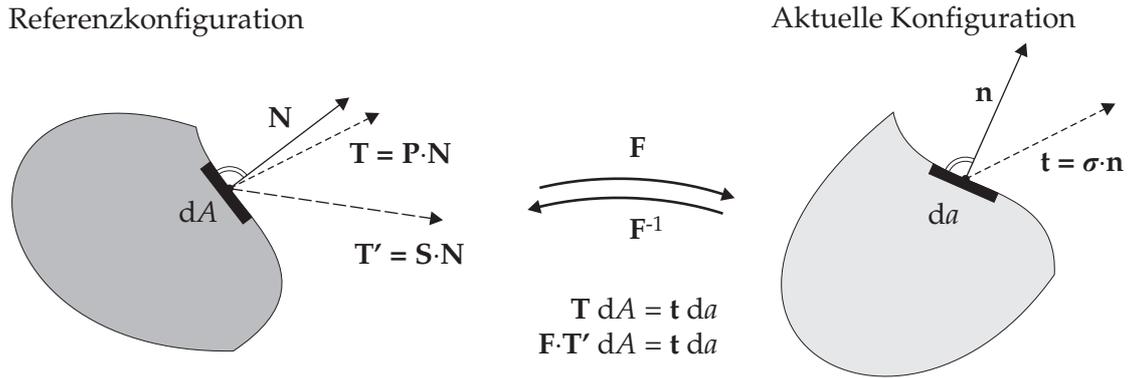


Abbildung 2.19: Kontinuumsmechanische Spannungsmaße.

Die letzte Beziehung von Gleichung (2.68) führt den *zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* (auch PK2-Spannungstensor genannt) ein, der ein Spannungsmaß in der Referenzkonfiguration darstellt. Dieser entsteht durch eine weitere Pull-Back-Operation aus dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (2.69)$$

Der zugehörige Spannungsvektor \mathbf{T}' wirkt auf der differentiellen unverformten Schnittfläche mit dem Normalenvektor \mathbf{N} und ist weder kollinear noch betragsmäßig gleich mit dem physikalischen Spannungsvektor \mathbf{t} (siehe Abbildung 2.19). Jedoch lassen sich \mathbf{t} und \mathbf{T}' durch entsprechende Transformationsvorschriften ineinander überführen.

Durch eine Push-Forward-Operation gelingt die Rücktransformation des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors zurück in den Cauchy-Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} \quad (2.70)$$

Interessanterweise lässt sich zeigen, dass für einen zweidimensionalen Spannungszustand ohne Verformung in Dickenrichtung ($\lambda_3 = 1$) die Determinante des Cauchy-Spannungstensors identisch mit der Determinante der PK2-Spannungen ist. Für den Nachweis ist es vorteilhaft, die Hauptdehnungsachsen als jeweiliges lokales kartesisches Basissystem sowohl für die Referenz- als auch für die aktuelle Konfiguration zu verwenden. Unter Verwendung der Gleichungen (2.48) und (2.70) lautet die Transformationsvorschrift zwischen den Spannungsmaßen wie folgt:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}}_{\alpha} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\beta} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot (\tilde{\mathbf{S}}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{N}}_{\alpha} \otimes \hat{\mathbf{N}}_{\beta}) \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} \stackrel{\lambda_3=1}{=} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \tilde{\mathbf{S}}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}}_{\alpha} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\beta} \quad (2.71)$$

Aus obiger Gleichung können Zusammenhänge für die Koeffizienten der Spannungstensenoren bzgl. der jeweiligen lokalen kartesischen Basis abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{\mathbf{S}}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tilde{\mathbf{S}}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{\mathbf{S}}_{12} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Der Identitätsnachweis der beiden Determinanten gelingt nun ohne Schwierigkeiten:

$$\det \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{12}\tilde{\sigma}_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{S}_{11} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tilde{S}_{22} - \tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21} = \det \mathbf{S} \quad (2.73)$$

Da eine kartesische Basis zur Darstellung der jeweiligen Tensoren verwendet wurde, konnte in Gleichung (2.73) die Determinantenberechnung auf die Auswertung der Determinante der Tensorkoeffizienten beschränkt werden. Wird ein beliebiger Tensor \mathbf{a} jedoch in einer beliebigen krummlinigen Basis angegeben, ist bei der Determinantenberechnung zusätzlich die Determinante der Metrik der jeweiligen Basis zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{a} &= \det (a^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) = \det(a^{ij}) \det(g_{ij}) \\ &= \det (a_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) = \det(a_{ij}) \det(g^{ij}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Wäre für beide Spannungsmaße neben der Determinante auch der Wert der Spur gleich, lägen aufgrund übereinstimmender Invarianten identische Tensoren vor: Da jedoch die Spuren verschiedene Werte besitzen, wird ersichtlich, dass die Cauchy- und PK2-Spannungen unterschiedliche Spannungsmaße darstellen:

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{S}_{11} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tilde{S}_{22} \neq \operatorname{tr} \mathbf{S} = \tilde{S}_{11} + \tilde{S}_{22} \quad (2.75)$$

Die Identitätsbeziehung zwischen den Determinanten der Cauchy- und PK2-Spannungen gilt nur für zweidimensionale Spannungszustände. Eine Verallgemeinerung auf n -dimensionale Spannungszustände mit Streckungen in ebenfalls n -Dimensionen ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\det \boldsymbol{\sigma} = \det \mathbf{F}^{(2-n)} \det \mathbf{S} \quad (2.76)$$

Abschließend soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass es sich bei den Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren um reine Rechengrößen handelt, deren Koeffizienten keine direkte physikalische Bedeutung besitzen. Aus diesem Grund hat sich im Bereich der Werkstoffprüfung der Begriff der *fiktiven Spannung* bzw. *Nominalspannung* zur Beschreibung der ersten Piola-Kirchhoff-Spannungen etabliert, während hingegen die realen physikalischen Cauchy-Spannungen als *wahre Spannungen* bezeichnet werden [Hib06].

2.3.3 Materialmodellierung

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen wird über das Materialgesetz hergestellt. In der nichtlinearen Kontinuumsmechanik wird der materielle Elastizitätstensor \mathbf{C} als Änderungsrate der PK2-Spannungen \mathbf{S} bzgl. einer Variation der Green-Lagrange-Dehnungen \mathbf{E} definiert [Hol04]:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.77)$$

Gleichung (2.77) lässt sich zu einer konstitutiven Differentialbeziehung umschreiben, die den Zusammenhang des energetisch konjugierten Spannungs-Dehnungs-Paares \mathbf{S} und \mathbf{E} über den symmetrischen Elastizitätstensor \mathbf{C} verdeutlicht:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{C} : d\mathbf{E} \quad (2.78)$$

Für den Fall, dass der Elastizitätstensor während des Verformungsprozesses konstant bleibt, erhält man durch Integration der Gleichung (2.78) folgende Beziehung:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.79)$$

Die Verknüpfung des energetisch konjugierten Spannungs-Dehnungs-Paares in der verformten Konfiguration – die Cauchy-Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die Euler-Almansi-Dehnungen \mathbf{e} – geschieht durch den räumlichen Elastizitätstensor \mathbf{c} :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \mathbf{e} \quad (2.80)$$

Sowohl der materielle als auch der räumliche Elastizitätstensor stellen symmetrische Tensoren 4. Stufe dar, die durch Pull-Back- bzw. Push-Forward-Transformationen ineinander überführt werden können:

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l = \mathbf{C}^T \quad (2.81)$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \chi_*^{-1}(\mathbf{C}) = \frac{1}{\det \mathbf{F}} C_{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2.82)$$

Aus der Vielzahl entwickelter Materialgesetze werden im nachfolgenden Text lediglich die bei der Bemessung von Membrantragwerken am weitesten verbreiteten konstitutiven Beziehungen aufgezeigt. Es werden mit dem St. Venant-Kirchhoff- und dem Münsch-Reinhardt-Material exemplarisch Materialmodelle für isotrope und orthotrope Materialien mit linearer Elastizität vorgestellt. Das Ogden-Materialgesetz dient als Beispiel für homogenes hyperelastisches Materialverhalten unter großen Dehnungen. Abschließend wird mit der multilinearen Erweiterung des St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetzes ein pragmatischer Ansatz zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens von isotropen Folienwerkstoffen beschrieben.

Für alle nachfolgenden konstitutiven Beziehungen gelten folgende Annahmen:

- ◇ *Ebener Spannungszustand*: Es treten keine Spannungen senkrecht zur Mittelfläche der Membran auf.
- ◇ *Pfadunabhängigkeit*: Der Spannungszustand lässt sich allein aus dem Vergleich der aktuellen Konfiguration mit der unverformten Referenzkonfiguration bestimmen. Die dazwischen aufgetretenen Zustände haben keinen Einfluss.

St. Venant-Kirchhoff. Das *St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz* stellt eine der einfachsten konstitutiven Beziehungen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik dar und wird zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von isotropen, homogenen Materialien mit linear-elastischem Materialverhalten verwendet. Als mehrdimensionale Verallgemeinerung des Hookeschen Werkstoffgesetzes ist die Gültigkeit ebenfalls auf kleine Dehnungen beschränkt. Es kann zur vereinfachten Berechnung von Membranfolien wie z. B. ETFE-Folie verwendet werden [Mor07b, LS06].

Bei der Materialformulierung wird ein linearer Zusammenhang zwischen den Green-Lagrange-Dehnungen \mathbf{E} und den PK2-Spannungen \mathbf{S} postuliert. Da dadurch der Elastizitätstensor \mathbf{C}_{StVK} unabhängig von der Verformung ist, kann die Differentialbeziehung (2.78) als explizite Gleichung umgeschrieben werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_{StVK} : \mathbf{E} \quad (2.83)$$

Unter Verwendung der konvektiven krummlinigen Basis ergibt sich der Elastizitätstensor \mathbf{C}_{StVK} zu:

$$\mathbf{C}_{StVK} = \underbrace{\left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} + \frac{E}{2(1+\nu)} (G^{\alpha\gamma} G^{\beta\delta} + G^{\alpha\delta} G^{\beta\gamma}) \right]}_{\mathbf{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta \otimes \mathbf{G}_\gamma \otimes \mathbf{G}_\delta \quad (2.84)$$

Die konstitutive Beziehung wird über lediglich zwei Materialparameter definiert, die sich relativ einfach aus Versuchen ermitteln lassen: Der Elastizitätsmodul E kann ebenso wie die Querdehnzahl ν allein aus Monoaxialversuchen bestimmt werden. [SB96] beschreibt die dazu notwendige Vorgehensweise.

Eine einfachere Darstellung des Materialgesetzes gelingt durch Verwendung einer lokalen kartesischen Basis. Diese darf aufgrund der Isotropie beliebig in der Tangentialfläche der Membran angeordnet sein. Der Elastizitätstensor lässt sich nun in Voigtscher Notation als Matrix seiner Koeffizienten darstellen:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{StVK}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{22} \\ 2\tilde{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Das verwendete Symbol $\tilde{\bullet}$ kennzeichnet physikalische Tensorkoeffizienten bzgl. einer kartesischen Basis. Hierdurch wird eine bessere Unterscheidbarkeit zu den unphysikalischen kov- bzw. kontravarianten Koeffizienten erzielt, die stets noch die Metrik der Fläche enthalten.

Besondere Aufmerksamkeit ist der unterschiedlichen Definition der Schubverzerrung zwischen kontinuumsmechanischer und Voigtscher Notation zu schenken: Bei letzterer werden die kontinuumsmechanischen Schubverzerrungen \tilde{E}_{12} und \tilde{E}_{21} zu einer Gesamtschubverzerrung addiert, die aufgrund der Symmetrieeigenschaft des Dehnungstensors den Wert $2\tilde{E}_{12}$ besitzt. Für diese Gesamtschubverzerrung ist auch der Begriff des Schubwinkels γ weitverbreitet.

Obwohl beim ebenen Spannungszustand keine Spannungen senkrecht zur Mittelfläche auftreten, entsteht i. A. eine Dehnung in Dickenrichtung. Diese wird durch den Querdehneffekt verursacht, der bei Streckung in der Fläche eine Ausdünnung der Materialdicke mit sich bringt:

$$\tilde{E}_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\tilde{E}_{11} + \tilde{E}_{22}) \quad (2.86)$$

Da das Materialgesetz nur für kleine Dehnungen anwendbar ist, wird diese Veränderung der Querschnittshöhe jedoch meist vernachlässigt. Man nimmt deswegen an, dass die Höhe H des unverformten Querschnitts der Höhe h der verformten Membran entspricht.

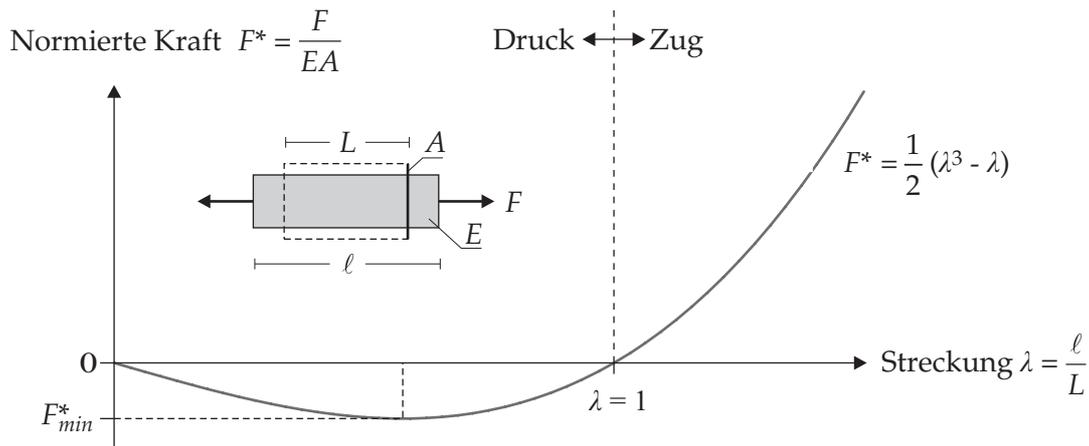


Abbildung 2.20: Monoaxiale Kraft-Streckungs-Kurve eines St. Venant-Kirchhoff-Materials.

Wird das St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz jenseits des gültigen Bereichs kleiner Dehnungen verwendet, treten rasch Abweichungen vom linear-elastischen Materialverhalten auf. Als Beispiel dafür ist in Abbildung 2.20 die resultierende Kraft-Streckungs-Kurve eines monoaxialen Zugversuchs dargestellt: Um eine einheitenfreie Darstellung zu ermöglichen, wird die angreifende F durch Division mit dem Elastizitätsmodul E und der unverformten Querschnittsfläche A des Probenkörpers normiert. Bei kleinen auftretenden Verzerrungen verhält sich das Material nahezu linear-elastisch. Wird der Körper jedoch weiter gedehnt, fällt auf, dass die Kraft überproportional gesteigert werden muss, um die korrespondierende Streckung hervorzurufen. Das Material wird zunehmend steifer und könnte unendlich große Zugspannungen aufnehmen. Ganz anders ist das Verhalten im Druckbereich: Hier nimmt die Steifigkeit mit zunehmender Druckkraft bzw. Stauchung ab. Unterschreitet die Streckung sogar einen gewissen Wert, verursacht das Materialmodell sogar den Sonderfall einer negativen Steifigkeit: Dies bedeutet, dass der Probenkörper dem Materialmodell nach bis zu seinem Verschwinden ($\lambda = 0$) zusammengedrückt werden könnte, jedoch gleichzeitig die dazu notwendigen Kräfte ebenfalls auf Null abfallen würden. Durch diese Nichtlinearität wäre die maximal aufnehmbare Druckkraft auf den Wert F_{min}^* beschränkt. Es wird ersichtlich, dass das auf den ersten Blick so einfache und lineare St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz „unangenehme“ Überraschungen zu bieten hat, falls man seinen Gültigkeitsbereich überschreitet.

Münsch-Reinhardt. Eine empirisch motivierte Erweiterung des St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetzes auf orthotrope Materialien stellt das *Münsch-Reinhardt-Materialmodell* dar, das zur Berechnung von beschichteten Gewebemembranen verwendet werden kann [MR95]. Dabei wird die Annahme getroffen, dass sich die Dehnungen der Materialfasern zwar gegenseitig beeinflussen, die Verrautung zueinander jedoch hiervon entkoppelt ist. Somit kann in Anlehnung an Gleichung (2.85) das Materialgesetz in zwei Anteile aufgespalten werden: Der erste beschreibt das gekoppelte Spannungsdehnungsverhalten bei reiner Dehnung der Kett- und Schussrichtung (siehe u. a. [Bau02] für eine detailliertere Materialbeschreibung), der zweite Anteil die entstehende Schubspannung, die durch Verscherung der

orthogonalen Gewebestruktur entsteht. Die einfachste und zugleich auch sinnvollste Darstellung des Münsch-Reinhardt-Materialmodells gelingt in Matrixschreibweise bezüglich einer lokalen kartesischen Basis $\{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$, die an den Faserrichtungen orientiert ist:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_k \\ \tilde{S}_s \\ \tilde{S}_{ks} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 - \mu_{ks}\mu_{sk}} \begin{bmatrix} E_k & \mu_{ks}E_k & 0 \\ \mu_{sk}E_s & E_s & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu_{ks}\mu_{sk})G \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{MR}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{E}_k \\ \tilde{E}_s \\ 2\tilde{E}_{ks} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

\tilde{S}_k und \tilde{S}_s stellen die PK2-Spannungen in Kett- bzw. Schussrichtung dar, die aus den zugehörigen Green-Lagrange-Dehnungen \tilde{E}_k und \tilde{E}_s resultieren. Die korrespondierenden Materialparameter sind die Elastizitätsmoduli E_k und E_s und Querdehnraten μ_{ks} und μ_{sk} . Die Querdehnraten μ_{ks} beschreibt die Kontraktion in Kettrichtung infolge einer Dehnung der Schussfäden unter Last, μ_{sk} analog die Kontraktion der Schussrichtung infolge kraftverursachter Dehnung der Kettfäden. Die Schubsteifigkeit G der gewebten Membran wird hauptsächlich durch die Beschichtung verursacht und verknüpft die technische Schubverzerrung $2\tilde{E}_{ks}$ mit der PK2-Schubspannung \tilde{S}_{ks} . Die Materialkenngrößen lassen sich nicht mehr wie beim St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz aus lediglich einem Materialtest bestimmen. Es müssen mindestens zwei verschiedene Versuchsanordnungen durchgeführt werden (z. B. Biaxialversuch mit fadenparallelem und um 45° gedrehtem Probestück).

Obwohl bislang fünf Materialparameter bei dem Münsch-Reinhardt-Modell Verwendung gefunden haben, reduziert sich letztendlich die Anzahl auf lediglich vier Stück (E_k , E_s , μ_{ks} und G). Dies wird durch eine Zwangssymmetrisierung der Materialmatrix \mathbf{C}_{MR} verursacht, die eine Kopplung der Elastizitätsmoduli und der Querdehnraten über folgende Bedingung fordert:

$$\frac{\mu_{sk}}{E_k} = \frac{\mu_{ks}}{E_s} \quad (2.88)$$

Dieses symmetrische Materialverhalten lässt sich zwar nicht durch Experimente bestätigen (siehe z. B. [Bau02]), ist aber für die meisten numerischen Berechnungsverfahren erforderlich, da oft nur symmetrische Systemmatrizen im Gleichungslöser verarbeitet werden können.

Eine allgemeine Darstellung des Materialgesetzes in krummlinigen Koordinaten erreicht man durch Transformation des Elastizitätstensors von der faserparallelen kartesischen Basis in die konvektive Basis, was einigen numerischen Berechnungsaufwand bedeutet:

$$\mathbf{C}_{MR} = \underbrace{\left[\tilde{C}^{\varepsilon\zeta\eta\theta} \left(\mathbf{G}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon \right) \left(\mathbf{G}^\beta \cdot \tilde{\mathbf{f}}_\zeta \right) \left(\mathbf{G}^\gamma \cdot \tilde{\mathbf{f}}_\eta \right) \left(\mathbf{G}^\delta \cdot \tilde{\mathbf{f}}_\theta \right) \right]}_{\tilde{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta \otimes \mathbf{G}_\gamma \otimes \mathbf{G}_\delta$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1111} &= \frac{1}{1 - \mu_{ks}\mu_{sk}} E_k \\ \tilde{C}_{2222} &= \frac{1}{1 - \mu_{ks}\mu_{sk}} E_s \\ \tilde{C}_{1122} &= \tilde{C}_{2211} = \frac{1}{1 - \mu_{ks}\mu_{sk}} \mu_{ks} E_k \\ \tilde{C}_{1212} &= \tilde{C}_{2121} = \tilde{C}_{1221} = \tilde{C}_{2112} = G \\ \tilde{C}_{1112} &= \tilde{C}_{1121} = \tilde{C}_{1211} = \tilde{C}_{2111} = \tilde{C}_{1222} = \tilde{C}_{2122} = \tilde{C}_{2212} = \tilde{C}_{2221} = 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Ogden. Das *Ogden-Materialgesetz* soll als Beispiel für nichtlineares Materialverhalten dienen. Es wurde ursprünglich für die mechanische Beschreibung gummiartiger Werkstoffe unter großen Dehnungen und Verformungen entwickelt [Ogd84] und kann somit auch für die Berechnung isotroper und homogener Membranmaterialien (wie z. B. Kunststofffolien) verwendet werden. Die Herleitung beruht auf dem Konzept der *Hyperelastizität*, das die Existenz eines Potentials der Formänderungsenergie W fordert [SB96]. Durch Differentiation des Potentials nach den Green-Lagrange-Dehnungen erhält man die PK2-Spannungen, deren erneute Ableitung gemäß Gleichung (2.77) den Elastizitätstensor ergibt:

$$\mathbf{C} = \frac{\overbrace{\partial \left(\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \right)}^{\mathbf{s}}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.90)$$

Für ein inkompressibles Ogden-Material, dessen Volumen bei Verformung stets konstant bleibt, nimmt die Formänderungsenergie folgende Form an [GR92]:

$$W_{\text{Ogden}} = \sum_r = \frac{\mu_r}{\alpha_r} [\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3] \quad (2.91)$$

μ_r und α_r sind Materialkoeffizienten, die zu insgesamt r Paaren vorliegen. λ_1 und λ_2 stellen die Hauptstreckungen in der Fläche dar, λ_3 die Streckung der Dickenrichtung. Diese lässt sich unter Verwendung der Inkompressibilitätsbedingung durch die zwei Streckungen der Fläche ausdrücken:

$$\lambda_3 = \frac{\overbrace{\det \mathbf{F}}^{=1}}{\lambda_1 \lambda_2} = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \quad (2.92)$$

Die PK2-Spannungen in den Hauptstreckungsrichtungen $\{\hat{\mathbf{N}}_\gamma\}_{\gamma \in \{1,2\}}$, die zugleich den Hauptspannungsrichtungen entsprechen, ergeben sich unter Verwendung der Gleichungen (2.90), (2.91) und (2.55) nun zu:

$$\hat{S}_\gamma = \frac{\partial W_{\text{Ogden}}}{\partial \lambda_\gamma} \frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial E_\gamma} = \lambda_\gamma^{-2} \sum_r \mu_r \left[\lambda_\gamma^{\alpha_r} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \right] \quad (2.93)$$

Den Elastizitätstensor in Hauptachsen-Darstellung erhält man durch Ableitung obiger Gleichung nach den Green-Lagrange-Dehnungen und kann in [GR92] nachgelesen werden. Wichtig ist die Erkenntnis, dass es sich hier um eine Tangentenmaterialsteifigkeit handelt, die von der Verformung des Materials abhängt und nicht mehr konstant ist. Anstatt einen absoluten Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang zu etablieren, gibt sie somit lediglich die Änderungsrate der Spannungen bei Variation der Dehnungen an.

Bei Verwendung eines konvektiven Koordinatensystems müssen zur Berechnung des Elastizitätstensors zunächst die Hauptstreckungen und ihre Achsen berechnet werden. Danach kann für diese Hauptachsen die Materialsteifigkeitsmatrix gemäß [GR92] bestimmt werden. Den Abschluss der Berechnung bildet die Rücktransformation ins konvektive Koordinatensystem.

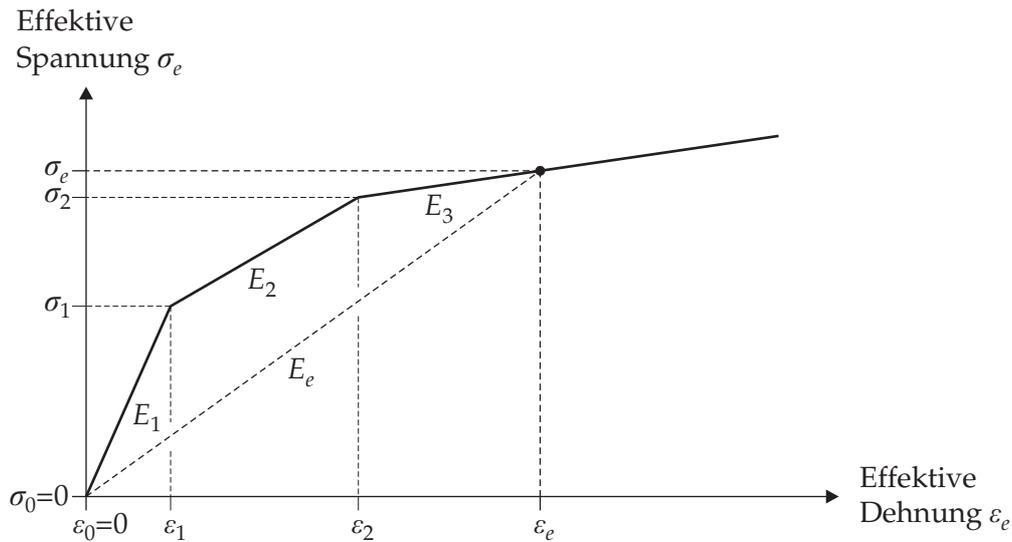


Abbildung 2.21: Multilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung.

Die ebenfalls weitverbreiteten *Mooney-Rivlin*- und *Neo-Hooke*-Materialgesetze stellen Sonderfälle des Ogden-Materials dar [Hol04]. Obwohl somit ein äußerst leistungsfähiges und vielseitig einsetzbares Materialgesetz zur Beschreibung isotroper Materialien vorliegt, findet es dennoch relativ wenig Anwendung beim Membranbau. Die Ursache hierfür liegt v. a. in der relativ komplizierten Bestimmung der Materialparameter, die zudem nicht den gebräuchlichen Materialkennwerten wie beispielsweise Elastizitätsmodul oder Querdehnzahl entsprechen.

Multilineare Elastizität. Ein eher handwerklich anmutendes Materialgesetz zur Modellierung nichtlinearer isotroper Werkstoffe lässt sich durch multilineare Erweiterung der konstitutiven Beziehung nach St. Venant-Kirchhoff herleiten [Ans07]. Es wird hierbei die Annahme getroffen, dass der Elastizitätsmodul E eine Funktion der vorherrschenden Dehnungen ist, während die Querdehnzahl ν hingegen stets konstant bleibt.

Die Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens erfolgt über eine abschnittsweise lineare Approximation einer monoaxialen Spannungs-Dehnungs-Kennlinie, die aus Materialversuchen ermittelt wurde (siehe Abbildung 2.21). Die einzelnen linearen Abschnitte werden über diskrete Spannungs-Dehnungs-Paare $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ definiert, mittels deren auch der jeweils konstante Tangentenmodul E_i bestimmt werden kann.

Um diese „eindimensionalen“ Informationen aus einem Monoaxialversuch für die Berechnung räumlichen Materialverhaltens verwenden zu können, wird zunächst eine sogenannte *äquivalente Gesamtdehnung* ε_e (englisch: „equivalent total strain measure“) eingeführt [Ans07]:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)^2} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12})^2 + 6(\varepsilon_{23})^2 + 6(\varepsilon_{13})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

ε_e berechnet sich aus der Querdehnzahl ν und den kartesischen Koeffizienten ε_{ij} des Green-Lagrange-Dehnungstensors, die ausnahmsweise mit einem griechischen Buchstaben abgekürzt werden, um Verwechslungen mit den Elastizitätsmoduli auszuschließen. Für einen ebenen Spannungszustand lässt sich Gleichung (2.94) durch Einsetzen der Gleichung (2.86) wie folgt vereinfachen:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{1-\nu^2} \left[(1-\nu+\nu^2) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 3(1-\nu)^2 (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12})^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

Für diese äquivalente Gesamtdehnung kann über die monoaxiale Spannungs-Dehnungs-Linie eine zugehörige äquivalente Spannung σ_e bestimmt werden (siehe Abbildung 2.21). Das Verhältnis von σ_e zu ε_e beschreibt den äquivalenten Sekantenelastizitätsmodul E_e :

$$E_e(\varepsilon_e) = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} = \frac{\sum_{i=1}^m [E_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})] + E_{m+1} (\varepsilon_e - \varepsilon_m)}{\varepsilon_e} \quad \text{mit } \varepsilon_e \geq \varepsilon_m \quad (2.96)$$

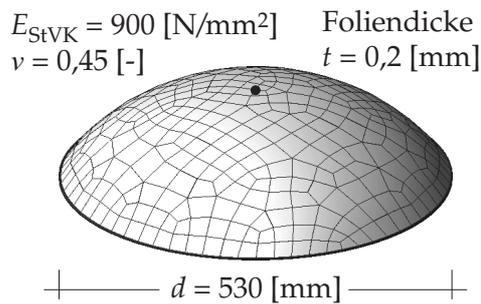
Der zum aktuellen Dehnungszustand zugehörige Elastizitätstensor \mathbf{C}_{mle} ergibt sich nun durch Skalierung des konstanten Elastizitätstensors \mathbf{C}_{StVK} , der die Materialbeziehungen im linear-elastischen Zustand beschreibt (siehe Gleichung (2.84)). Als Skalierungsfaktor wird das Verhältnis des äquivalenten Sekantenmoduls E_e zur linear-elastischen Materialsteifigkeit E_{StVK} verwendet. Da es sich bei \mathbf{C}_{mle} um eine Sekantensteifigkeit handelt, lässt sich für einen gegebenen Dehnungszustand ein linearer Zusammenhang zwischen den Green-Lagrange-Dehnungen und den PK2-Spannungen aufstellen:

$$\mathbf{S}(\varepsilon_e) = \underbrace{\frac{E_e(\varepsilon_e)}{E_{StVK}} \mathbf{C}_{StVK}}_{\mathbf{C}_{mle}(\varepsilon_e)} : \mathbf{E} \quad (2.97)$$

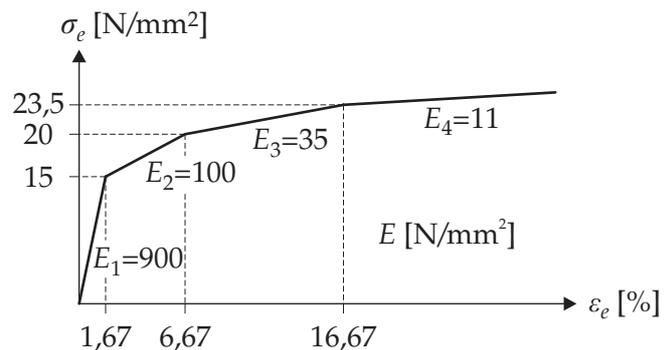
Dieses nichtlineare Materialgesetz wurde exemplarisch für die numerische Simulation eines Berstversuchs eines Luftkissens aus ETFE-Folie verwendet. Die Versuchsreihe wurde 2006 von Schiemann am Lehrstuhl für Tragwerksplanung der Technischen Universität München durchgeführt [SBHS07]. In Abbildung 2.22 a) und b) sind die Abmessungen der kreisförmigen Materialprobe und die von Schiemann und Moritz [Mor07b] ermittelten Materialkennwerte dargestellt.

Bei der Durchführung des Berstversuchs wurde der Innendruck des Luftkissens so lange gesteigert, bis ein Bersten der Folie auftrat. Um die auftretenden Verschiebungen zu messen, wurden photogrammetrische Verfahren verwendet. Als signifikante Größe ist der Verlauf des Stichs in Pneumitte in Abhängigkeit des Innendrucks in Abbildung 2.22 c) aufgezeigt. Neben dieser aus experimentellen Messwerten ermittelten Kurve sind im gleichen Diagramm auch die mittels numerischer Simulation erzeugten Last-Verschiebungskurven dargestellt. Bei Verwendung des linear-elastischen St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetzes kann man im Bereich großer Dehnungen deutlich die Abweichungen der numerischen Berechnungsergebnisse von den Messdaten erkennen. Die multilineare Erweiterung hingegen ist in der Lage, die Abnahme der Materialsteifigkeit korrekt abzubilden und liefert auch für große Dehnungen überzeugende Ergebnisse bei der berechneten Verschiebungen.

a) System und FE-Netz



b) Multilineare Materialkennlinie



c) Versuchsauswertung

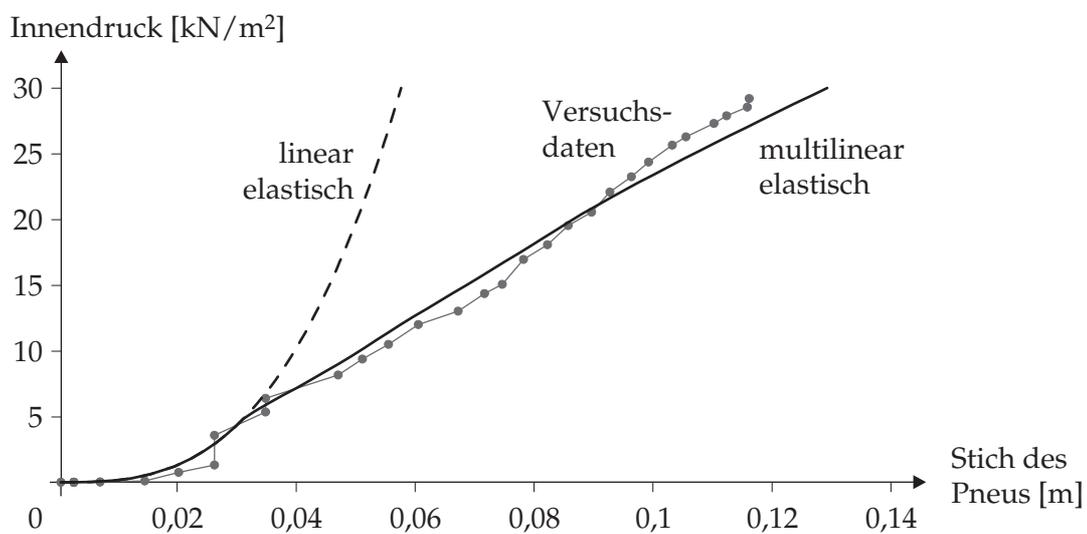


Abbildung 2.22: Berstversuch eines ETFE-Folienkissens.

Ob dieses einfache Materialgesetz sich jedoch für die Bemessung von Kunststofffolien unter großen Dehnungen eignet, muss noch in weiteren Forschungsarbeiten überprüft werden. Als Einschränkung ist hierbei v. a. die Pfadunabhängigkeit des Materialmodells anzuführen: Diese vereinfacht zwar die numerische Berechnung erheblich, jedoch kann dadurch ein Fließen der Folie nur *näherungsweise* simuliert werden, eine korrekte Beschreibung der Plastizität ist aber nicht möglich!

2.3.4 Gleichgewichtsbeziehungen

Aufgrund der in Abschnitt 2.3.2 eingeführten Annahme eines ebenen Spannungszustands in der Membran und der gleichzeitigen Dimensionsreduzierung auf ein Flächenmodell (siehe Abschnitt 2.1) können die für das 3D-Kontinuum entwickelten Grundgleichungen der Elastostatik für die Berechnung von Membranen nur bedingt angewendet werden. Offensichtlich wird die durch die Modellannahmen verursachte Diskrepanz bei Betrachtung des Kräfteinleitungsproblems: Greifen in der Realität äußere Kräfte wie z. B. Wind oder

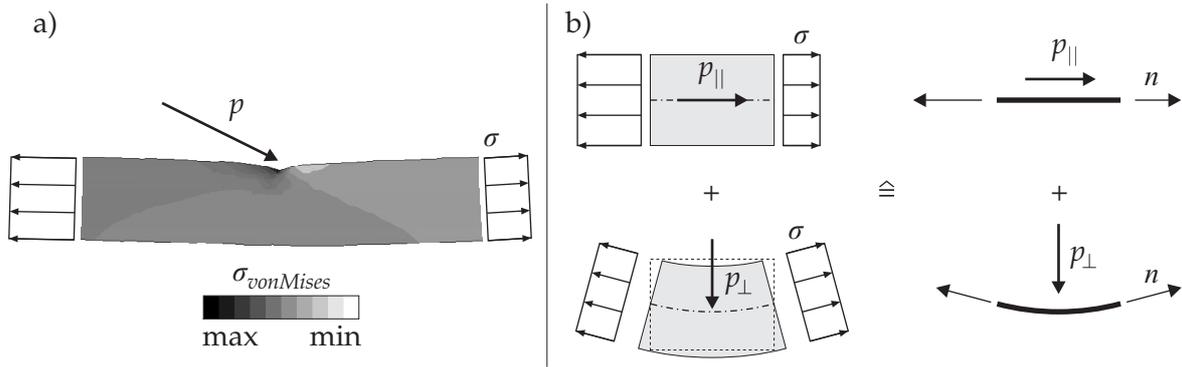


Abbildung 2.23: Krafteinleitung: a) Realität und b) Modell.

Schnee auf der Membranoberfläche an, ergeben sich in der Nähe der Lastangriffspunkte erhöhte Spannungskonzentrationen, die zur Erfüllung des lokalen Kräftegleichgewichts und zur Spannungsumordnung in die Lastabtragsrichtungen erforderlich sind (siehe Abbildung 2.23 a)). Bei dem flächenhaften Membranmodell hingegen geht man davon aus, dass zum einen die äußeren Lasten direkt in der Mittelfläche angreifen, zum anderen eine sofortige idealisierte Lastverteilung stattfindet. Werden beispielsweise tangentielle Kräfte in die Membran eingeleitet, ist der ganze Membranquerschnitt gleichermaßen am Lastabtrag beteiligt. Bei zur Mittelfläche senkrechter Belastung erzeugt die durch die Krümmung der Mittelfläche entstehende Verdrehung der Schnittflächen zueinander eine Spannungsergebnisierende, die der senkrechten Last entgegen wirkt. Auch hier ist der Ausnutzungsgrad jeder Faser identisch. Diese Modellannahmen, die auf einer raschen Abnahme der Randstörungen gemäß dem *Prinzip von St. Venant* [SB96] beruhen, sind auf der rechten Seite der Abbildung 2.23 zu sehen.

Da die Spannungen über den Querschnitt konstant sind, ist es sinnvoll, mit den resultierenden Schnittkräften zu arbeiten. Diese ergeben sich durch Integration der Spannungen über die Querschnittshöhe. In der Referenzkonfiguration erhält man die zugehörigen Normalkräfte \mathbf{N} durch Integration der PK2-Spannungen über die unverformte Querschnittshöhe H , für die tatsächlichen Normalkräfte \mathbf{n} sind die Cauchy-Spannungen über die verformte Querschnittshöhe h zu integrieren:

$$\mathbf{N} = N^{\alpha\beta} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta = \int_{-H/2}^{H/2} \mathbf{S} dH = H S^{\alpha\beta} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta \quad (2.98)$$

$$\mathbf{n} = n^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dh = h \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \quad (2.99)$$

Diese integrale Betrachtungsweise ist besonders bei textilen Membranen angebracht: Da aufgrund der Webung und anschließenden Beschichtung kein homogener Querschnitt vorliegt, ist es zutreffender, die auf den Gesamtquerschnitt wirkende Normalkraft auszuweisen. Eine Angabe von Spannungen würde lediglich eine nichtvorhandene Rechengenauigkeit vortäuschen, da deren genaue Aufteilung auf die einzelnen Materialbestandteile im Gegensatz zur integralen Größe letztendlich unbekannt ist.

Starke Form. In der *starken Form des Gleichgewichts* muss an jedem Punkt der verformten Membranfläche Ω sowohl das *Gleichgewicht in der Fläche* als auch das *Gleichgewicht senkrecht zur Fläche* erfüllt sein. Das Gleichgewicht in der Fläche ist für den Lastabtrag tangentialer Lasten verantwortlich. Dabei erzeugt die Änderung der Normalkräfte (mathematisch durch den Divergenz-Operator „div“ beschrieben) ein Gleichgewicht mit den flächenparallelen Lasten $\mathbf{p}_{||}$ [Cir98]:

$$\operatorname{div} \mathbf{n} + \mathbf{p}_{||} = 0 \quad (2.100)$$

Das Gleichgewicht senkrecht zur Fläche wird durch die Krümmung \mathbf{k} der gespannten Membran bewerkstelligt. Durch die Richtungsänderung der Membranzugspannungen \mathbf{n} entstehen Umlenkkräfte, die mit den senkrechten Lasten p_{\perp} das Gleichgewicht erzeugen. Eine positive Drucklast p_{\perp} wirkt dabei in Richtung des Normalenvektors der Fläche:

$$\mathbf{n} : \mathbf{k} = n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = -p_{\perp} \quad (2.101)$$

Stellt man Gleichung (2.101) in den Hauptspannungsrichtungen dar, ergibt sich die räumliche Erweiterung der allseits bekannten *Kesselformel* (auch *Fassformel* genannt):

$$n_1 k_{11} + n_2 k_{22} = \frac{n_1}{r_1} + \frac{n_2}{r_2} = -p_{\perp} \quad (2.102)$$

n_1 und n_2 sind die Hauptspannungen, r_1 und r_2 die vorzeichenbehafteten Krümmungsradien in den Hauptspannungsrichtungen, die jedoch i. A. nicht mit den Hauptkrümmungsrichtungen übereinstimmen.

Da die meisten Fragestellungen des Membranbaus als sogenannte *Randwertprobleme* vorliegen [Zei96], ist eine Erfüllung des Gleichgewichts innerhalb des Membranegebiets Ω nicht hinreichend; die Membran muss zudem die gegebenen Randbedingungen an ihren Rändern Γ erfüllen. Diese können als Verschiebungsrandbedingungen (Dirichlet-Randbedingung,

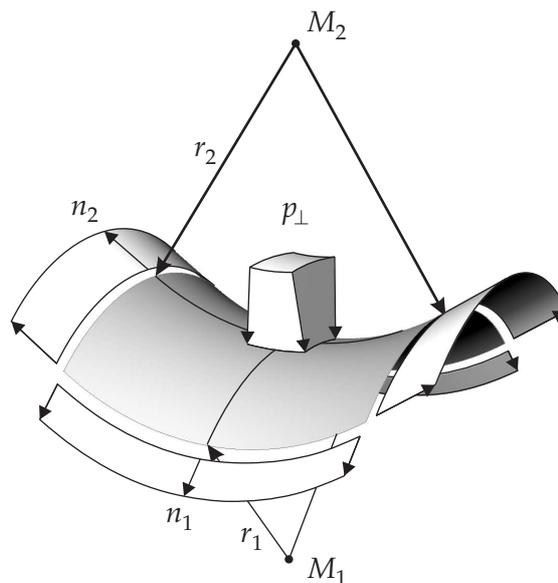


Abbildung 2.24: Gleichgewicht der Membran senkrecht zur Fläche.

z. B. feste Ränder), Krastrandbedingungen (Neumann-Randbedingung, z. B. freier Rand) ausgebildet sein [CC05]. Auch eine Kombination der beiden ist möglich (Robin-Randbedingung [GA98], z. B. Anschluss an ein elastisches Bauteil). Jedoch bereitet es selbst mit den heutzutage zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden noch große Probleme, die gekoppelten Differentialgleichungen (2.100) und (2.101) unter beliebig gegebenen Randbedingungen geschlossen zu lösen. Eine Lösung der starken Form müsste das Gleichgewicht an jedem Punkt erfüllen. Im nächsten Abschnitt werden Näherungslösungen aufgezeigt, die lediglich eine Gleichgewichtserfüllung im integralen Sinn fordern.

Schwache Form. In der *schwachen Form* eines Strukturproblems ist das Gleichgewicht nicht mehr zwingend an jedem Punkt der Struktur erfüllt, es genügt eine Erfüllung im Mittel. Diese abgeschwächte Gleichgewichtsanforderung kann als Ausgangspunkt für die Entwicklung numerischer Lösungsverfahren, wie z. B. der Methode der finiten Elemente, herangezogen werden. Bildlich ausgedrückt versucht man hierbei mit den gegebenen Hilfsmitteln eine bestmögliche Approximation der tatsächlichen Lösung zu erhalten, jedoch wohlwissentlich darüber, dass dabei i. A. ein über die Struktur verteilter Fehler auftreten kann.

Eines der am weitesten verbreiteten Verfahren zur näherungsweise Lösung eines diskretisierten kontinuumsmechanischen Problems stellt das *Prinzip der virtuellen Arbeit*, genauer gesagt das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*, dar. Dieses beruht auf folgender Feststellung: Auf ein sich im Gleichgewicht befindendes System wird eine beliebige, infinitesimal kleine Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ aufgebracht. Führt man nun eine Energiebilanz durch, lässt sich nachweisen, dass die durch diese virtuelle Verschiebung entstehende innere Arbeit δW_{int} des Systems gleich der äußeren Arbeit δW_{ext} infolge externer Lasten ist:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (2.103)$$

Die virtuelle innere Arbeit eines Systems lässt sich dabei aus „arbeitskonformen Paarungen von Spannungs- und Verzerrungstensoren“ [SB96] sowohl in der Referenz- als auch in der aktuellen Konfiguration berechnen. Dabei sind für die Spannungen jeweils die tatsächlich auftretenden Größen zu verwenden, für die Dehnungen werden die infolge der virtuellen Verschiebungen entstehenden Variationen der Dehnungen benötigt. Das energetisch konjugierte Paar von Spannungen und Dehnungen in der Referenzkonfiguration besteht somit aus den PK2-Spannungen \mathbf{S} und den virtuellen Green-Lagrange-Dehnungen $\delta \mathbf{E}$. In der aktuellen Konfiguration bilden die Cauchy-Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die virtuellen Euler-Almansi-Dehnungen $\delta \mathbf{e}$ die korrespondierende Paarung. Sind die virtuellen Verschiebungen kompatibel mit den geometrischen Randbedingungen des Systems, erhält man die virtuelle innere Arbeit durch Volumenintegration über das „innere“ Gebiet Ω der Struktur. Verwendet man bei Membranen die Spannungsresultierenden \mathbf{N} bzw. \mathbf{n} , lässt sich die Volumenintegration auf eine Integration über die Fläche reduzieren. Gleichung (2.104) fasst die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten der internen virtuellen Arbeit nochmals zusammen:

$$-\delta W_{int} = \begin{cases} \int_{\Omega} (\mathbf{S} : \delta \mathbf{E}) dV = \int_{\Omega} (\mathbf{N} : \delta \mathbf{E}) dA & \text{: Referenzkonfiguration} \\ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e}) dv = \int_{\Omega} (\mathbf{n} : \delta \mathbf{e}) da & \text{: Aktuelle Konfiguration} \end{cases} \quad (2.104)$$

Die externe virtuelle Arbeit δW_{ext} kann grundsätzlich in zwei Anteile aufgespalten werden: Der erste Anteil beschreibt die virtuelle Arbeit, die von Volumenkräften (z. B. Schwerkraft) im Körper selbst verrichtet wird. Die Integration müsste in diesem Fall über das Volumen erfolgen. Da jedoch bei Membranen eine Vorintegration über die Querschnittshöhe erfolgen kann, können Volumenkräfte auch dem zweiten Anteil der virtuellen äußeren Arbeit zugerechnet werden: Dieser setzt sich aus der Arbeit der auf die Membranoberfläche wirkenden Kräfte \mathbf{p} zusammen. Bei Verwendung eines Flächenmodells ist die virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$, auf der die äußeren Kräfte ihre Arbeit verrichten, identisch mit der virtuellen Verschiebung der Mittelfläche der Membran. Aus diesem Grund erfolgt die Integration der Arbeitsanteile über die Mittelfläche in der aktuellen Konfiguration:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}) da \quad (2.105)$$

Es ist noch anzumerken, dass mittels Prinzip der virtuellen Arbeit selbst Strukturprobleme behandelt werden können, die über kein Potential der inneren bzw. äußeren Energie verfügen (z. B. bei Folgelasten oder Plastizität). Liegt jedoch ein Problem mit Potentialcharakter vor (z. B. hyperelastisches Material in Verbindung mit konservativen Lasten), lässt sich der Gleichgewichtszustand des Systems ebenfalls als Minimum der gesamten potentiellen Energie Π des Systems beschreiben [ZTZ05]. Die setzt sich aus der internen Formänderungsenergie Π_{int} und dem Potential der äußeren Kräfte Π_{ext} zusammen:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} \quad (2.106)$$

Die notwendige Bedingung für ein Energieminimum stellt eine verschwindende erste Variation des Gesamtpotentials dar:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_{int} + \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (2.107)$$

Zwar beschreibt jeder stationäre Zustand, der Gleichung (2.107) erfüllt, einen Gleichgewichtszustand des Systems. Ein stabiler Zustand und somit die hinreichende Bedingung für ein Energieminimum ist jedoch nur gegeben, falls die zweite Variation der potentiellen Energie einen positiven Wert aufweist [Hol04]:

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 \Pi_{int} + \delta^2 \Pi_{ext} > 0 \quad (2.108)$$

Ein negativer Wert der zweiten Variation deutet auf ein labiles Gleichgewicht hin, bei dem schon eine kleine Störung zum Verlust des Gleichgewichts führt. Wird die zweite Variation zu Null, liegt ein indifferentes Gleichgewicht vor, bei dem auch eine Änderung des Systems eine neue Gleichgewichtslage bewirkt.

Diskretisierung der schwachen Form. Wird zur Beschreibung der Membrangeometrie eine Diskretisierung mit finiten Elementen gewählt (siehe Abschnitt 2.2.4), ist die Struktur allein durch die räumliche Position der Knoten definiert: Die Geometrie der Referenzkonfiguration entsteht durch Interpolation der unverformten Ortsvektoren $\bar{\mathbf{X}}_k$ der Knoten. Addiert man zu diesen die Knotenverschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_k$, erhält man nach Gleichung (2.42) die verformten Ortsvektoren $\bar{\mathbf{x}}_k$ der aktuellen Konfiguration:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{u}}_k \quad (2.109)$$

Bei *isoparametrischen Elementen* werden die gleichen Formfunktionen $N^k(\theta^1, \theta^2)$ zur Interpolation der Verschiebungen benutzt wie zur Interpolation der Referenzgeometrie. Es ergibt sich somit folgende Interpolationsvorschrift für die Geometrie innerhalb eines finiten Elements:

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{X}}_k \quad (2.110)$$

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^{n_{el}} N^k(\theta^1, \theta^2) (\bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{u}}_k) \quad (2.111)$$

Da die Referenzgeometrie in einem Strukturproblem mit Lagrangescher Betrachtungsweise stets konstant bleibt, während sich lediglich die Geometrie der aktuellen Konfiguration ändert, kann eine Variation im Sinne der schwachen Form nur über eine Variation der verformten Geometrie, und somit der Knotenverschiebungsvektoren, erfolgen. Nachdem jeder Knoten im Raum \mathbb{R}^3 drei translatorische Freiheitsgrade u_r besitzt, ergeben sich dementsprechend drei unabhängige Variationsmöglichkeiten δu_r pro Knoten:

$$\delta \bar{\mathbf{X}}_k = 0 \quad (2.112)$$

$$\delta \bar{\mathbf{x}}_k = \delta \bar{\mathbf{u}}_k = \delta u_r \mathbf{e}_r \quad (2.113)$$

Um von dieser Variation am Knoten auf die Variationen der Dehnungen zu schließen, die für die schwache Form erforderlich sind, muss zuerst die Variation der Basisvektoren der aktuellen Konfiguration bestimmt werden. Unter Verwendung der Gleichungen (2.34) und (2.111) ergibt sich:

$$\delta \mathbf{g}_\alpha(\theta^1, \theta^2) = \frac{\partial(\delta \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2))}{\partial \theta^\alpha} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\partial N^k(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha} \delta \bar{\mathbf{u}}_k \quad (2.114)$$

Aufbauend darauf erhält man mit Gleichung (2.44) die Variation des Deformationsgradienten \mathbf{F} für Materialien ohne Dickenänderung:

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha \quad (2.115)$$

Etwas aufwändiger gestaltet sich die Berechnung der Variation der Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{F} , da hier einige Summen- und Kettenregeln bei der Variation von Gleichung (2.47) zu beachten sind:

$$\delta(\det \mathbf{F}) = \frac{\delta(da)}{dA} = \frac{((\delta \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) + (\mathbf{g}_1 \times \delta \mathbf{g}_2)) \cdot (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| \|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\|} \quad (2.116)$$

Die Variation der Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{F} lässt sich nach [Hol04] unter Verwendung der Gleichungen (2.115) und (2.46) in kontinuumsmechanischer Schreibweise auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\delta(\det \mathbf{F}) = \det \mathbf{F} \operatorname{div}(\delta \mathbf{x}) = \det \mathbf{F} \left(\underbrace{\frac{\partial(\delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}}}_{\delta \mathbf{F}} : \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \right) = \det \mathbf{F} (\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\alpha) \quad (2.117)$$

Die Variation des Green-Lagrange-Dehnungstensors \mathbf{E} wird mittels Gleichung (2.55) bestimmt:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \delta \mathbf{F}) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta \quad (2.118)$$

Soll auch die Variation des Euler-Almansi-Dehnungstensors \mathbf{e} bestimmt werden, stößt man auf das Problem, dass eine Variation nicht nur die Koeffizienten des Tensors beeinflussen würde, sondern auch seine in der aktuellen Konfiguration definierte Basis (siehe Gleichung (2.56)). Dieses Problem umgeht man, indem zuerst die Euler-Almansi-Dehnungen durch eine Pull-Back-Operation in die Green-Lagrange-Dehnungen transformiert werden, deren Variation $\delta \mathbf{E}$ durch Gleichung (2.118) gegeben ist. Nun erfolgt die Rücktransformation in die aktuelle Konfiguration mittels einer Push-Forward-Operation, die letztendlich die Variation der Euler-Almansi-Dehnungen $\delta \mathbf{e}$ liefert [Hol04]:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \delta \mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta \end{aligned} \quad (2.119)$$

Residuum und Linearisierung. Eine anschauliche Interpretation der mechanischen Bedeutung der diskretisierten schwachen Form des Gleichgewichts gelingt über die Einführung des sogenannten *Residuums*. Ausgangspunkt hierfür ist die Fragestellung, ob eine gegebene Konfiguration eines mechanischen Systems dessen Gleichgewichtslage darstellt. Wird Gleichung (2.103) verletzt, herrscht im System Ungleichgewicht. Um dennoch Gleichgewicht zu erzwingen, wird nun an allen Freiheitsgraden u_r der FE-Knoten eine externe Residuumskraft R_r angebracht, die eine Erfüllung des Prinzips der virtuellen Arbeit für eine beliebige Variation δu_r garantiert:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} + R_r \delta u_r = 0 \quad (2.120)$$

Da die aufgebrauchten virtuellen Verschiebungen δu_r infinitesimal klein sind, kann eine Linearisierung der durch δu_r verursachten Variationen anderer Größen vorgenommen werden:

$$\delta(\bullet) \stackrel{\text{LIN}}{\equiv} \frac{\partial(\bullet)}{\partial u_r} \delta u_r \quad (2.121)$$

Mittels der Gleichungen (2.120) und (2.121) und der Annahme, dass ein nicht-trivialer Fall der Variation vorliegt ($\delta u_r \neq 0$), erhält man eine Gleichung zur Berechnung der Residualkräfte:

$$R_r = -\frac{\partial W_{int}}{\partial u_r} - \frac{\partial W_{ext}}{\partial u_r} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_r} \right) dV - \int_{\Gamma} \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_r} \right) da \quad (2.122)$$

Befindet sich das System im Gleichgewicht, ist es in der Lage, „sich selbst zu tragen“, und die virtuellen Residualkräfte R_r verschwinden. Diese Erkenntnis macht man sich zur iterativen Berechnung der Gleichgewichtslage zu Nutze. Durch Modifikation der aktuellen räumlichen Lage der FE-Knoten wird versucht, das Residuum derart zu minimieren, bis es näherungsweise den Wert Null erreicht. Eine Berechnungsformel für die Verschiebungskremente Δu_s bzgl. aller Freiheitsgrade des Systems ergibt sich durch Anwendung der Newton-Raphson-Methode auf Gleichung (2.122):

$$\text{LIN}(R_r) = R_r + \frac{\partial R_r}{\partial u_s} \Delta u_s = 0 \quad (2.123)$$

Durch Umstellung obiger Gleichung erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der inkrementellen Knotenverschiebungen. Die Ableitung der Residualkräfte R_r nach den Verschiebungen der Freiheitsgrade u_s ergibt die Tangentensteifigkeitsmatrix K_{rs} des Systems, der negative Residualvektor die Ungleichgewichtskräfte F_r :

$$K_{rs} \Delta u_s = F_r \quad \text{mit} \quad K_{rs} = \frac{\partial R_r}{\partial u_s}; \quad F_r = -R_r \quad (2.124)$$

An Rändern mit vorgeschriebenen Verschiebungen (Dirichlet-Randbedingungen) ergeben die Knotenresiduen R_r nach Gleichung (2.122) die zugehörigen Auflagerkräfte. Die dabei notwendigen Ableitungen sind hierbei nach den festgehaltenen Freiheitsgraden durchzuführen.

Dieses hier skizzierte Berechnungsverfahren wird in den nachfolgenden Kapiteln zur Lösung der unterschiedlichen Problemstellungen angewandt, die im Laufe des Entwurfsprozesses von vorgespannten leichten Tragwerken entstehen.

Kapitel 3

Formfindung

Formfindung stellt typischerweise den ersten Schritt des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken dar. Es gilt eine für Membranen geeignete Form zu finden, die sich innerhalb gegebener Randbedingungen befindet. Das Kapitel beleuchtet zunächst die physikalische Problemstellung der Formfindung: Was genau bedeutet Formfindung von Membranen, was sind die notwendigen Eingangsparameter sowie die zulässigen Randbedingungen? Im Anschluss daran wird anhand einiger charakteristischer Anwendungsfälle die generelle Lösbarkeit des Problems untersucht.

Der letzte Teil des Kapitels befasst sich mit der numerischen Umsetzung der Formfindung. Aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen und der Differentialgeometrie aus Kapitel 2 werden ein numerisches Lösungsverfahren für das Formfindungsproblem sowie die dabei auftretenden Probleme diskutiert.

3.1 Was ist Formfindung?

Membrankonstruktionen weisen eine extrem hohe Schlankheit ihrer Strukturelemente im Vergleich zu den globalen Abmessungen des Tragsystems auf: So sind Spannweiten von über 100 [m] heutzutage keine Seltenheit mehr (max. Spannweite des deutschen Pavillons in Montreal von Frei Otto: ca. 130 [m] [Hop07]), die Dicke der Membranstoffe hingegen liegt im Millimeterbereich (Dicke von PVC-beschichtetem Polyestergewebe Typ III: ca. 0,9 [mm] [Hop07]). Durch dieses außerordentlich geringe Verhältnis von Dicke zu Spannweite stellt sich bei Membranen ein charakteristisches Lastabtragsverhalten ein: Eine Membran kann auftretende Lasten nur über Zugspannungen abtragen, die tangential zu ihrer Mittelfläche wirken. Evtl. auftretenden Druckkräften entzieht sich die Membran durch Faltenbildung, da aufgrund der vernachlässigbar kleinen Biegesteifigkeit in Kompressionsrichtung ein lokales Beulen auftritt [Zie01].

Am besten kann dieses charakteristische Lastabtragsverhalten am Beispiel einer gescherten ebenen Membran verdeutlicht werden: Auf ein rechteckiges Membranstück (z. B. aus Textil oder Folie) wird eine Scherverformung aufgebracht (siehe Abbildung 3.1). Die Richtungen der resultierenden Hauptdehnungen sind dabei um 45° gegenüber der Verscherungsrichtung gedreht. Beide Hauptdehnungen sind vom Betrag her identisch, besitzen jedoch unterschiedliche Vorzeichen: In der einen Richtung wird die Membran gezogen, in der anderen Richtung hingegen „gedrückt“ bzw. gestaucht. Die Zugdehnungen bewirken planmäßig

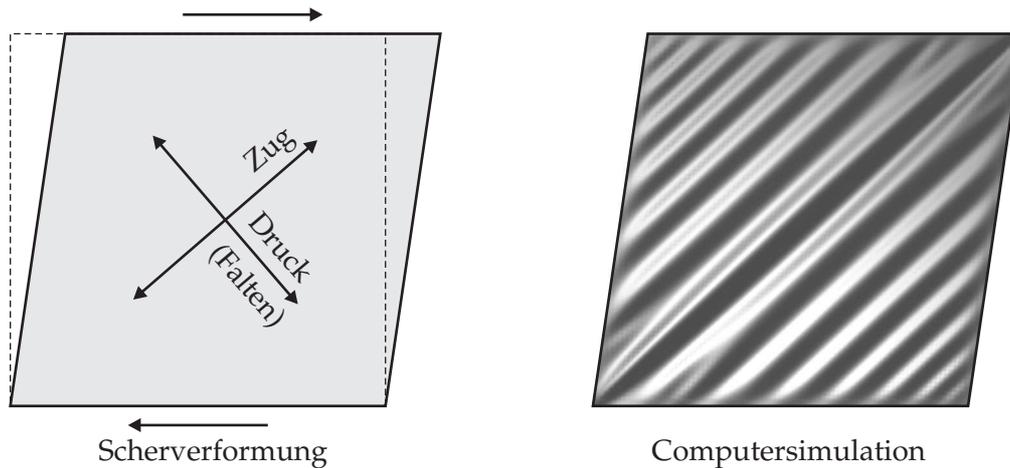


Abbildung 3.1: Faltenbildung bei einer gescherten Membran.

Zugspannungen in der Membran, die Stauchung der Membran verursacht jedoch nur in einem idealen ebenen System Druckspannungen: Da in Realität stets Imperfektionen bei der Geometrie auftreten, und die Membran nie komplett eben ist, führen schon kleinste auftretende Druckspannungen in der Membran zu einem lokalen Stabilitätsversagen, das die Ursache für die Faltenbildung ist. Die Druckspannungen werden dadurch nahezu komplett abgebaut.

Diese spezielle Tragwirkung muss in adäquater Weise bei der Gestaltung der geometrischen Form der Membrankonstruktion berücksichtigt werden: Es muss sichergestellt werden, dass die Membran an jeder Stelle unter Zugspannungen steht. Auftretende Falten sind zu vermeiden, da zum einen ein erheblicher Verlust von Steifigkeit bis hin zum Stabilitätsversagen des Gesamtsystems die Folge sein kann (die Membran kann in Richtung der Stauchung keine Lasten abtragen). Zum anderen wird das Material durch wiederholte Knickbildung geschwächt, was evtl. zu einem verfrühten Materialversagen infolge Ermüdung führt. Diese Notwendigkeit eines *reinen Zugspannungszustands* in der Membran bewirkt, dass die Form einer Membrankonstruktion i. A. nicht mehr „am Zeichenbrett“ entworfen werden kann: Es muss eine *Formfindung* durchgeführt werden, die für gewisse Randbedingungen eine physikalisch realisierbare Geometrie erzeugt.

3.1.1 Definition der Formfindung

Auch wenn der Begriff „Formfindung“ allgemein viele Deutungsmöglichkeiten zulässt, kann die Formfindung von vorgespannten Flächentragwerken relativ einheitlich definiert werden: Es gilt die Geometrie der Struktur unter dem maßgeblichen Formfindungslastfall derart zu bestimmen, so dass im Tragwerk ein gewünschter vorgegebener Membranzugspannungszustand herrscht. Im Gegensatz zum Planungsprozess konventioneller Bauwerke wird somit die Spannungsverteilung in der Struktur unter Last als gegeben vorausgesetzt, jedoch nicht die Geometrie, auf der sie wirkt. Diese umgekehrte Aufgabenstellung, bei der zwar sozusagen die Ergebnisse bekannt sind, nicht jedoch die Ursachen hierfür, wird

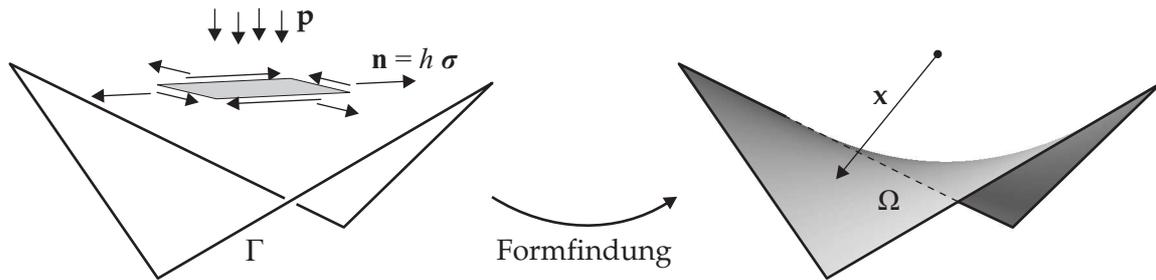


Abbildung 3.2: Definition der Formfindung.

auch als *inverses Problem* bezeichnet [Ble98, Tar05]. Das numerische Vorgehen der Formfindung ist dabei für Membrankonstruktionen nahezu identisch wie für Seilnetze, weswegen sich der nachfolgende Text hauptsächlich auf Membranen konzentriert. Bei der Definition der Aufgabenstellung müssen jedoch leichte Modifikationen beachtet werden, wie Abschnitt 3.3.2 zeigt.

Die Eingangsparameter der Formfindung setzen sich aus dem gewünschten Spannungszustand \mathbf{n} der Membran (bzw. der gewünschten Seilkraft bei Seilnetzen), den formgebenden äußeren Lasten \mathbf{p} sowie den Randbedingungen wie beispielsweise der Topologie und der geometrischen Position der festen Auflager Γ zusammen. Durch den Formfindungsprozess soll nun die zu den Eingangsparametern korrespondierende Gleichgewichtslage Ω des Tragwerks bestimmt werden, die mittels der räumlichen Lage \mathbf{x} der Flächenpunkte beschrieben wird. Abbildung 3.2 verdeutlicht die Ein- und Ausgangsparameter des Formfindungsprozesses am Beispiel einer hyper-ähnlichen Membran mit fester Berandung.

Der Formfindungslastfall besteht bei einem Großteil der Membranbauten lediglich aus der *Vorspannung* \mathbf{n} der Membran. Diese wird normalerweise in der Einheit [Kraft/Länge] angegeben und setzt sich gemäß Gleichung (2.99) aus den über die Membrandicke h integrierten Zugspannungen σ zusammen. Durch die Vorspannung soll sichergestellt werden, dass die Struktur in der Lage ist, evtl. auftretende äußere Lasten ausschließlich über Zug abzutragen. Eine äußere Last \mathbf{p} wird dabei nicht direkt bei der Formfindung berücksichtigt, da man annimmt, dass der Mittelwert der Belastung über die Zeit näherungsweise verschwindet. Wirken äußere Lasten jedoch nicht nur temporär (wie z. B. Wind oder Schnee), sondern dauerhaft, müssen sie in den Formfindungsprozess integriert werden. Eines der wichtigsten Beispiele hierfür stellt der Innendruck bei pneumatischen Strukturen dar wie z. B. bei der Aussenhülle der Allianz-Arena in München [Mor05]: Die ETFE-Folienkissen werden einem konstanten Innendruck ausgesetzt, der in Kombination mit der gleichzeitigen Membranvorspannung die charakteristische synklastische Form der Kissen erzeugt.

Während die Membranvorspannung meist nach statischen und materiellen Überlegungen ausgewählt wird [BD04, DIN06], ergeben sich die Topologie und Berandung des Tragwerks überwiegend aus architektonischen Belangen: Unter Topologie versteht man hier die prinzipielle Form der Strukturelemente (z. B. vier- oder fünfeckige Membran) sowie die Anordnung verschiedener Strukturelemente untereinander. Hierbei ist v. a. die Kombination von Membran und Seil von großer Bedeutung, die auf unterschiedlichste Weise erfolgen

kann (z. B. Gratseil, Randseil, Augseil, etc. [FM04]). Durch Anordnung der Auflagerbedingungen kann die entwerfende Person ebenfalls Einfluss auf das letztendliche Ergebnis der Formfindung und die daraus resultierende Struktur nehmen. Es muss festgesetzt werden, wieviele Punkte der Membran fest verankert werden, ob die Ränder ebenfalls fixiert werden (englisch: „rigid support“) oder durch den Einsatz von Randseilen eine flexible Berandung bilden (englisch: „soft support“). Die geometrische Lage des Randes ist dabei möglichst so auszubilden, dass er eine starke Krümmung der Gleichgewichtsfläche erzeugt. Die daraus in Verbindung mit der Vorspannung resultierende geometrische Steifigkeit ist für ein optimales Tragverhalten entscheidend [FM04].

Nachdem die Aufgabenstellung festgelegt wurde, soll anschließend im Prozess der Formfindung die zugehörige Gleichgewichtsfläche bestimmt werden. Diese lässt sich nach der Definition der Konfigurationsmechanik (siehe Abschnitt 2.3.1) als verformte Konfiguration identifizieren, da die auf ihr wirkenden Vorspannungen als physikalische Spannungen definiert sind. Sie stellen somit Cauchy-Spannungen dar, die sich definitionsgemäß auf die verformte aktuelle Geometrie einer Struktur beziehen. Eine Formfindung versucht demnach, direkt den verformten Zustand der Membran zu bestimmen, noch ohne ihre zugehörige Referenzkonfiguration zu kennen. Darüber hinaus ist der Formfindungsprozess auch unabhängig von der Art und Quantität des Materials [Lin99]. Einzig entscheidend ist der Vorspannungszustand in der Membran – wie dieser jedoch entstanden ist, ist bislang noch nicht von Interesse.

Die maßgebende Gleichung der Formfindung ergibt sich aus der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit (siehe Abschnitt 2.3.4). Da sich die gegebene Membranspannung auf die verformte Konfiguration bezieht, wird die virtuelle Arbeit ebenfalls in ihrer räumlichen Darstellung beschrieben:

$$\delta W = \underbrace{-h \int_a (\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e}) da}_{\delta W_{int}} + \underbrace{\int_a (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}) da}_{\delta W_{ext}} = 0 \quad (3.1)$$

Durch Verwendung von Gleichung (2.119) lässt sich der Ausdruck für die innere virtuelle Arbeit umschreiben. Sie kann nun aus den Tensorcoeffizienten des Spannungstensors und den kovarianten Basisvektoren mit ihren Ableitungen errechnet werden:

$$- \delta W_{int} = h \int_a \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} (\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) da \quad (3.2)$$

Die gesuchte Gleichgewichtsfläche muss das durch Gleichung (3.1) gegebene Randwertproblem erfüllen. In den nachfolgenden Abschnitten wird beschrieben, welche Verfahren zur Formfindung angewandt werden können.

3.1.2 Experimentelle und numerische Formfindung

Eine Formfindung kann heutzutage sowohl experimentell als auch numerisch durchgeführt werden. Als das textile Bauen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zunehmend auf In-



Abbildung 3.3: Experimentelle Formfindung mit Seifenhäuten und Strumpfmodellen.

teresse stieß, mussten für die Formfindung in Ermangelung geeigneter Berechnungsverfahren und Rechenkapazität jedoch noch nahezu ausschließlich physikalische Modelle verwendet werden. Dabei gab es zwei unterschiedliche Experimentiermethoden: Bei Modellen aus *Seifenhaut* wurde die natürliche Oberflächenspannung der Seifenlauge zu Nutze gemacht, um innerhalb einer festen Berandung (z. B. aus Draht) eine Fläche mit isotrop verteilter Vorspannung zu generieren. Auch können damit pneumatische Strukturen generiert werden, wie die allseits bekannten Seifenblasen zeigen (siehe Abbildung 3.3 links). Um die Lebensdauer der Modelle zu verlängern und sie dadurch einer besseren Erfassung zugänglich zu machen, wurde am Institut für Leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart unter Frei Otto sogar eine „Seifenhautmaschine“ entwickelt [BBB05]. Die Strukturmodelle aus Seifenfilm wurden in einer Klimakammer gelagert und konnten durch Projektion mittels parallelem Licht auf Fotoplatten anschließend vermessen werden.

Bei den sogenannten *Strumpf-* bzw. *Tüllmodellen* wird ein hochelastischer Stoff (Gummihaut, Tüll, auch oft Damenstrumpfhosen) verwendet, der in eine Berandung eingespannt wird [Ott54, Lin76]. Im Gegensatz zu Seifenhäuten stellt sich hier nicht zwangsläufig ein homogener Spannungszustand im Material ein, da unterschiedliche Bereiche verschieden gedehnt und somit auch verschieden stark vorgespannt werden. Was einerseits als Nachteil gelten mag, eröffnet jedoch gleichzeitig die Möglichkeit, gezielt anisotrope Vorspannung an einem Modell zu testen. Abbildung 3.3 rechts zeigt ein Strumpfmodell, bei dem die Membran durch Seile verstärkt wurde. Erwähnenswert sind auch die Experimente von Antoni Gaudí und Heinz Isler [Hen76, Cri03, Isl76, Isl94]: Aus rein auf Zug belasteten Hängeformen (z. B. mit Gewichten beschwerte Ketten oder durchtränkte Tücher) generierten sie durch Inversion der Geometrie Formen für Schalenkonstruktionen, die ihr Eigengewicht allein über Druckspannungen abtragen.

Der Vorteil derartiger empirischer Experimente liegt in ihrem hohen Maß an Anschaulich-

keit, leider ist ihre Durchführung schon für relative simple Modelle oft sehr komplex und zeitaufwändig. Als Auslöser für den Beginn der Entwicklung numerischer Methoden in Deutschland kann der Bau des Olympiastadions in München für die Olympiade 1972 gesehen werden: Für die Planung der weitreichenden Zeltdächer stieß man mit experimentellen Methoden schnell an die Grenzen des Machbaren. Aus diesem Grund versuchte man vorwiegend im Stuttgarter Raum computergestützte Rechenverfahren zur Formfindung vorgespannter Flächentragwerke zu entwickeln. Diese Bestrebungen mündeten schließlich in dem bekannten Sonderforschungsbereich 64 „Weitgespannte Flächentragwerke“ (SFB 64) der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) [SFB84] sowie dessen „Nachfolger“ SFB 230 „Natürliche Konstruktionen – Leichtbau in Architektur und Natur“. Hier wurden v. a. von Linkwitz und Scheck mit der Einführung der sogenannten *Kraftdichte* die Grundlagen der modernen numerischen Formfindung gelegt [LS71]. Diese Methoden wurden in den folgenden Jahren durch eine Vielzahl diverser Forschungsbeiträge erweitert. Als besonders vielversprechend hat sich hier die *Updated Reference Strategy* von Bletzinger [BR99] herausgestellt, die eine kontinuumsmechanische basierte Formfindung propagiert. Abschnitt 3.3 beschäftigt sich näher mit diesem Verfahren und seiner Weiterentwicklung. Interessanterweise entstand parallel zur „Stuttgarter Schule der Formfindung“ im angelsächsischen Raum eine davon unabhängige Strömung: Die auf der sogenannten *dynamischen Relaxation* beruhenden Formfindungsmethoden wurden maßgeblich von Barnes vorangetrieben (siehe u. a. [Bar99, Wak04] für weiterführende Informationen). Noch heute lässt sich beim Membranbau eine Zweiteilung in diese unterschiedlichen Zweige der Formfindung feststellen. In dem nachfolgenden Text werden die auf der dynamischen Relaxation basierenden Methoden jedoch nur am Rande erwähnt.

Durch die Entwicklung der numerischen Formfindung verfügt der Planer über ein effektives Werkzeug für den Entwurf vorgespannter Flächentragwerke, die mit experimentellen Methoden nur schwer und mit großem Zeitaufwand realisierbar wären. Als Beispiel ist in Abbildung 3.4 die numerische Formfindung des Tanzbrunnens von Frei Otto zu sehen, der schon 1957 für die Bundesgartenschau in Köln errichtet wurde [BBB05]. Während bei der ursprünglichen experimentellen Formfindung sicherlich einige Tage für den Modellbau benötigt wurden, konnte die numerische Berechnung einschließlich Pre- und Postprocessing binnen einer Stunde bewerkstelligt werden. Dennoch hat selbstverständlich auch die numerische Formfindung ihre Grenzen: In gleicher Weise wie die experimentelle Formfindung kann sie nur für Probleme Lösungen finden, die physikalisch auch sinnvoll sind. Aus diesem Grund werden im nächsten Abschnitt die physikalischen Anforderungen an den Formfindungsprozess diskutiert.

3.2 Diskussion der physikalischen Problemstellung

„Wenn du eine weise Antwort verlangst, mußt du vernünftig fragen.“

Dieser etwas philosophisch anmutende Satz von Johann Wolfgang von Goethe ist bei der mathematischen Disziplin der *Optimierung*, als deren Untergebiet die Formfindung angesehen werden kann, von höchster Relevanz. Allgemein versteht man unter Optimierung die Suche nach einem optimalen Zustand, der gewisse Nebenbedingungen erfüllen muss. Doch

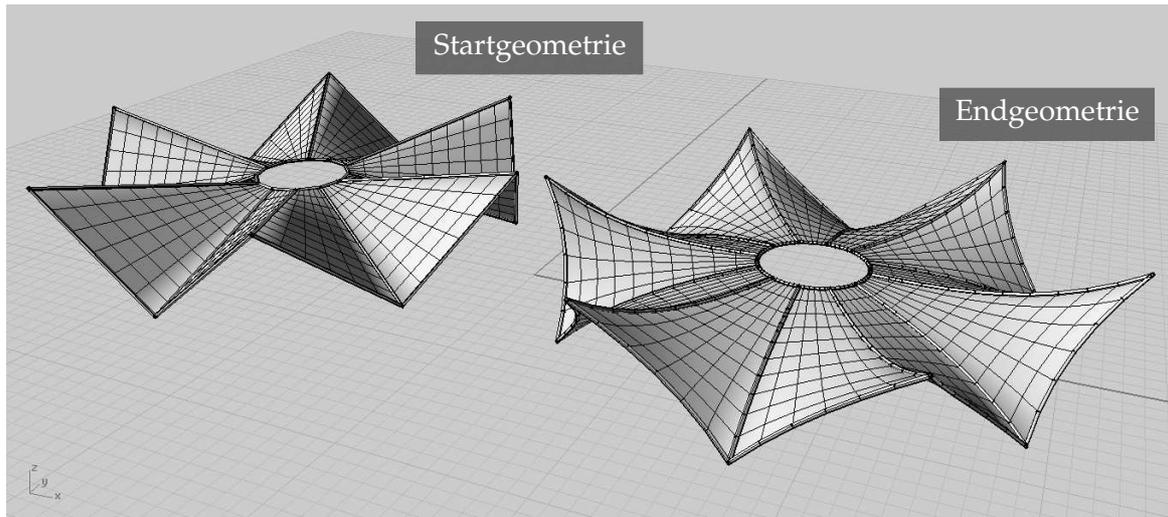


Abbildung 3.4: Numerische Formfindung am Beispiel des Tanzbrunnens von Frei Otto.

schon die Definition dieses „optimalen Zustands“ bereitet oft größte Probleme, was man nur zu gut selbst aus Fragestellungen des Alltags kennt: Entweder ist die Problemstellung zu vage (z. B.: Welcher Weg zur Arbeit ist optimal? Der zeitlich oder der räumlich kürzere?), oder man stellt zu viele Nebenbedingungen, so dass das Problem gar nicht mehr gelöst, geschweige dafür ein Optimum gefunden werden kann (z. B.: Welches Produkt kostet am wenigsten, erfüllt aber gleichzeitig die höchsten Ansprüche?). Im Alltag lassen sich solche Ungenauigkeiten meist durch gesunden Menschenverstand überbrücken. Soll jedoch für ein mechanisches Problem das Optimum mittels mathematischer Methoden exakt bestimmt werden (darunter fallen auch die numerischen Methoden), muss sichergestellt sein, dass eine Lösung für das Problem überhaupt existiert.

Dergleichen verhält es sich auch mit der Formfindung von Membranstrukturen: Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben wurde, wird i. A. die Gleichgewichtsform für eine gewisse Kombination von Strukturelementen gesucht, deren Spannungen a priori gegeben sind. Bevor man sich mit den Lösungsmethoden für diese Problemstellung beschäftigt, sollte man sich auch hier zunächst Gedanken machen, ob es überhaupt eine Lösung für das Problem geben kann. Aufgrund dessen sollen im Nachfolgenden mehrere relevante Problemstellungen für den Membranbau im Bereich der Formfindung hinsichtlich ihrer Lösbarkeit diskutiert werden.

3.2.1 Membran mit isotroper Vorspannung

Die Formfindung isotrop vorgespannter Membranen, die von festen Rändern umschlossen sind, ist schon seit mehreren Jahrhunderten mathematisches Forschungsgebiet, auch wenn die Motivation hierfür weniger textiles Bauen als die reine Mathematik an sich war. Wie im Nachfolgenden gezeigt wird, ergibt sich eine Analogie zwischen dem Minimalflächenproblem und der Formfindung isotrop vorgespannter Membranen.

Reine Vorspannung. Der erste hier zu untersuchende Formfindungslastfall stellt auch zugleich eines der ältesten untersuchten Probleme dar: Er besteht allein aus einer konstanten isotropen Vorspannung der Membran ohne äußere Lasten ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$), für die die Gleichgewichtsfläche bezüglich einer festen Berandung gesucht wird. Dieses Formfindungsproblem entspricht den Experimenten mit Seifenhäuten: Die Oberflächenspannung der Seifenlauge bewirkt einen sogenannten *hydrostatischen Spannungszustand*, der in allen Richtungen die gleiche Vorspannung σ_0 besitzt. In Tensorschreibweise lässt sich dieser Spannungszustand als das Skalarprodukt der Vorspannung σ_0 mit dem Einheitstensor \mathbf{I} ausdrücken [Ble98]:

$$\sigma^{iso} = \sigma_0 \mathbf{I} \stackrel{\text{Gl. (2.14)}}{=} \sigma_0 g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \quad (3.3)$$

Da keine äußeren Lasten wirken, beschränkt sich die maßgebliche Gleichung auf die innere virtuelle Arbeit des Systems. Durch Einsetzen von Gleichung (3.3) in Gleichung (3.2) ergibt sich folgende Beziehung:

$$-\delta W_{int} = \frac{1}{2} h \sigma_0 \int_a g^{\alpha\beta} (\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) da = h \sigma_0 \int_a (\mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha) da = 0 \quad (3.4)$$

Als nächster Schritt erfolgt die Transformation von Gleichung (3.4) in die Referenzkonfiguration. Die Integration erfolgt nun über die Referenzfläche A :

$$-\delta W_{int} = h \sigma_0 \int_A (\mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha) \det \mathbf{F} dA = 0 \quad (3.5)$$

Da sowohl die Membranhöhe h als auch die gegebene isotrope Vorspannung σ_0 von Null verschieden sind, können diese Werte aus der maßgeblichen Gleichung eliminiert werden. Verwendet man zusätzlich die Beziehung aus (2.117) für die Variation der Determinante des Deformationsgradienten, erhält man eine neue Gleichung zur Bestimmung der Gleichgewichtsfläche:

$$\int_A (\mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha) \det \mathbf{F} dA = \int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA = 0 \quad (3.6)$$

Es fällt auf, dass in Gleichung (3.6) die Parameter bezüglich der Membranvorspannung (Dicke und Betrag der Vorspannung) nicht mehr enthalten sind. Die mechanische Bedeutung des Verschwindens der virtuellen Arbeit hat sich somit in eine rein geometrische Beziehung verwandelt. Setzt man abschließend Gleichung (2.116) in Gleichung (3.6) ein, vereinfacht sich die maßgebende Gleichung für eine Gleichgewichtsfläche mit isotroper Vorspannung zu einer verschwindenden Variation des Flächeninhalts:

$$\int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA = \int_a \delta(da) = \delta a = 0 \quad (3.7)$$

In anderen Worten ausgedrückt, repräsentiert die Gleichgewichtsfläche einen stationären Punkt des Flächenfunktionals bezüglich beliebiger infinitesimaler Variationen der Fläche. Indem man die zweite Variation $\delta^2 a$ des Flächeninhalts betrachtet, lässt sich erkennen, ob dieser stationäre Punkt ein Maximum, Sattelpunkt oder Minimum des Flächeninhalts beschreibt. Da es physikalisch bzw. mathematisch kein eindeutiges Flächenmaximum ($\delta^2 a < 0$) geben kann, reduziert sich die Betrachtung auf die zwei verbleibenden Fälle:

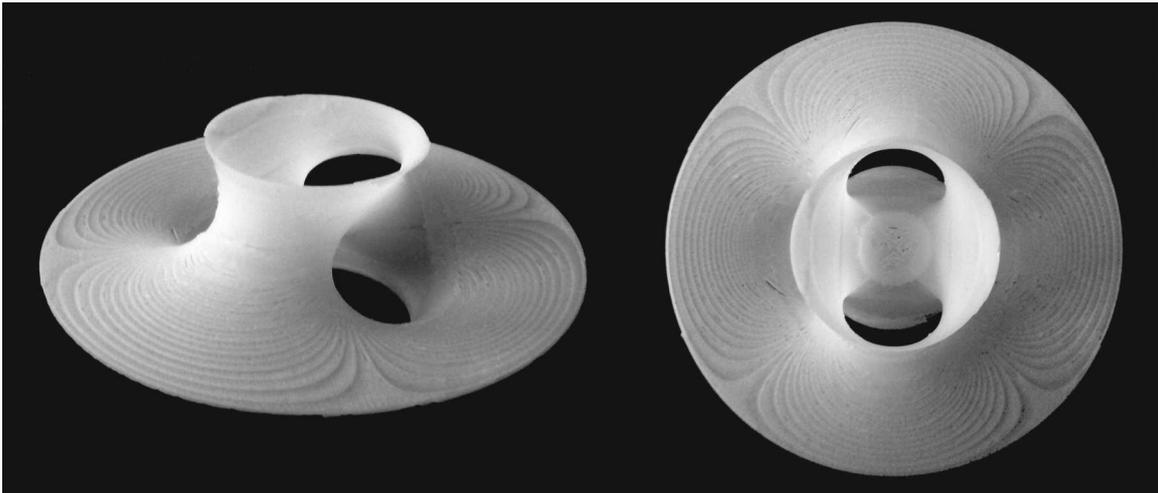


Abbildung 3.5: Physikalisches Modell der Costaschen Minimalfläche.

- ◇ $\delta^2 a > 0$: Es liegt ein lokales Minimum des Flächeninhalts vor. Jede zur Fläche senkrechte Variation bewirkt eine Vergrößerung des Flächeninhalts. Die zugehörige mechanische Fläche stellt eine stabile Minimalfläche dar.
- ◇ $\delta^2 a = 0$: Es liegt ein Sattelpunkt des Flächenfunktional vor. Variationen können sowohl eine Flächenvergrößerung als auch eine -verkleinerung bewirken. Die mechanische Fläche ist eine instabile Minimalfläche.

Da in der Natur nur stabile Gleichgewichtszustände auftreten, beschreiben somit alle Seifenhäute die Fläche kleinsten Inhalts für eine gegebene Berandung. Dieses Erkenntnis war schon im 19. Jahrhundert bekannt. Plateau beispielsweise entdeckte durch Experimente mit Seifenfilmen, dass es für beliebig geformte geschlossene Randkurven, die sich weder berühren noch schneiden, stets eine Minimalfläche gibt. Der mathematische Nachweis der Existenz einer Lösung für dieses sogenannte *Plateau-Problem* gelang jedoch erst Douglas und Radó in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts [Dou31, Rad33].

Des Weiteren ist auch das Auftreten „relativer“ Minimalflächen möglich, was sehr schön am Beispiel der *Costaschen Minimalfläche* ersichtlich wird: Profan ausgedrückt besteht ihre Berandung aus drei konzentrischen Kreisen, die in verschiedenen Höhen übereinander angeordnet sind (für eine mathematische Beschreibung sei auf die Originalpublikation ihres Entdeckers Costa verwiesen [Cos84]). Darin wird eine Fläche derart aufgespannt, so dass ebenso der obere wie der untere Kreis sich über zwei „Kanäle“ zur jeweils anderen Seite des Mittelkreises öffnen. Das in Abbildung 3.5 dargestellte physikalische Modell hilft beim Verstehen dieses doch sehr komplexen räumlichen Zusammenhangs.

Beginnend von einer beliebigen Startgeometrie wird nun ein iterativer Formfindungsprozess gestartet (siehe Abbildung 3.6). Dies kann beispielsweise eine Berechnung mit der Updated Reference Strategy sein, jedoch kann man sich auch ein Experiment mit Seifenlauge darunter vorstellen. Ausgehend von dem relativ großen Flächeninhalt der Startgeometrie findet der Formfindungsprozess die bereits in Abbildung 3.5 dargestellte Minimalfläche in

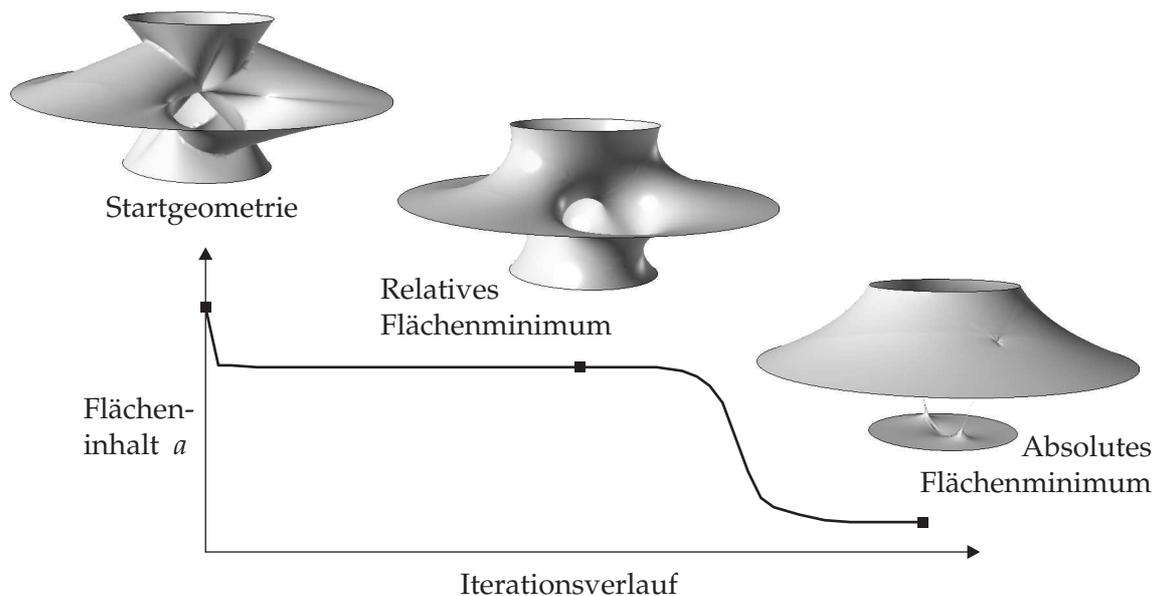


Abbildung 3.6: Relatives Flächenminimum der Costaschen Minimalfläche.

relativ kurzer Zeit. Dabei wird der Flächeninhalt verkleinert. Lässt man den Formfindungsprozess jedoch weiterlaufen, ändert sich bei Aufbringen einer kleinen Imperfektion, die bei numerischen oder experimentellen Verfahren so gut wie immer gegeben ist, die Fläche nahezu schlagartig. Die anfänglich zusammenhängende Struktur zerplatzt in zwei getrennte Flächen: In ein Katenoid (genauer gesagt „Chinese hat“), das zwischen einem der Randkreise und dem Mittelkreis aufgespannt ist, und in eine Kreisfläche, die durch den anderen Randkreis begrenzt wird. Diese beiden Flächen stellen jeweils für sich Minimalflächen dar und besitzen insgesamt einen kleineren Flächeninhalt als die Costasche Minimalfläche, bei der es sich demzufolge lediglich um ein relatives Flächenminimum mit einem relativ instabilen Gleichgewichtszustand handelt. Das durch das Zerplatzen entstandene Katenoid und die Kreisfläche hingegen befinden sich in einem stabilen Gleichgewichtszustand und bilden das absolute Flächenminimum.

Neben ihrer Eigenschaft, Minimalflächen bezüglich der gegebenen Berandung darzustellen, lässt sich über die starke Form des Gleichgewichts eine weitere fundamentale Eigenschaft von Flächen mit isotroper Vorspannung herleiten: Von den ursprünglich zwei Gleichgewichtsbeziehungen in Abschnitt 2.3.4 ist lediglich das Gleichgewicht senkrecht zur Fläche von Interesse. Das tangentielle Gleichgewicht nach Gleichung (2.100) ist wegen der gegebenen isotropen Vorspannung und der Abwesenheit äußerer Kräfte definitionsgemäß stets erfüllt. Aufgrund des hydrostatischen Spannungszustands kann jede Richtung der Membran als Hauptspannungsrichtung angesehen werden, in der die Vorspannung n wirkt. Somit lässt sich das durch Gleichung (2.102) gegebene Gleichgewicht senkrecht zur Fläche folgendermaßen vereinfachen:

$$n (k_{11} + k_{22}) = n \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = -p_{\perp} \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) ist auch als *Young-Laplace Gleichung* bekannt und beschreibt den Zusammenhang zwischen den zum Lastabtrag notwendigen Krümmungen k_{11} und k_{22} der Fläche und

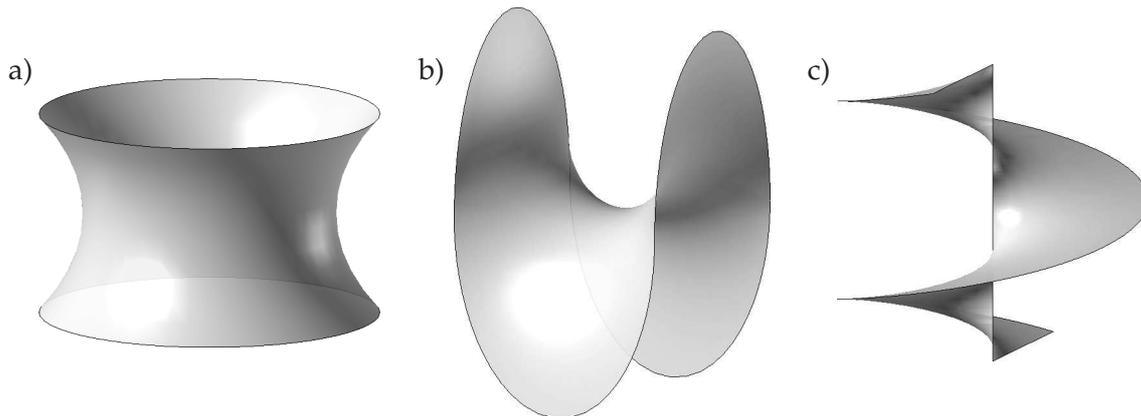


Abbildung 3.7: Minimalflächen: a) Katenoid, b) Scherksche Minimalfläche, c) Helikoid.

der äußeren, normal zur Fläche wirkenden Last p_{\perp} . Auch hier gilt die Definition, dass eine positive Drucklast in Richtung des Normalenvektors der Fläche wirkt.

Da Minimalflächen von äußeren Kräften unbelastet sind und die Vorspannung einen realen Wert besitzt, kann Gleichung (3.8) weiter umgeschrieben werden:

$$H = \frac{1}{2} (k_{11} + k_{22}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0 \quad (3.9)$$

Diese Gleichung liefert die wichtige Erkenntnis, dass bei Minimalflächen die mittlere Krümmung H verschwindet. Dies heisst jedoch nicht, dass die Flächen nicht gekrümmt sein dürfen: Ist eine Minimalfläche in einer Richtung mit dem Krümmungsradius r verkrümmt, weist sie orthogonal zu dieser Richtung ebenfalls eine betragsmäßig gleich große Krümmung auf. Die Krümmungsmittelpunkte beider Krümmungskreise liegen jedoch auf verschiedenen Flächenseiten. Somit haben die Krümmungen in beliebigen, zueinander orthogonalen Richtungen stets denselben Betrag, jedoch unterschiedliches Vorzeichen. Es folgt, dass Minimalflächen stets antiklastische Flächen mit negativer oder verschwindender Gaußscher Krümmung K sind:

$$K = k_{11}k_{22} = -\frac{1}{|r|^2} \leq 0 \quad (3.10)$$

Abbildung 3.7 zeigt drei bekannte „echte“, d. .h. stabile Minimalflächen: In der linken Bildhälfte ist das *Katenoid* dargestellt. Diese Fläche stellt neben dem trivialen Fall einer Ebene die einzige Minimalfläche mit Rotationssymmetrie dar. In der Mitte ist die *Scherksche Minimalfläche* abgebildet, auf der rechten Seite das *Helikoid*, auch *Wendelfläche* genannt.

Ob sich für eine beliebige Berandung (z. B. mit Singularitäten) eindeutig eine stabile Minimalfläche bestimmen lässt, kann nicht generell gesagt werden. Es wird empfohlen, numerische Tests diesbezüglich durchzuführen, denn sogar „gutmütige“ Flächen wie das Katenoid können bei Veränderung der Randbedingungen Probleme bereiten: Ist die Höhe H des Katenoids kleiner als der 1,32548-fache Werte des Radius seiner begrenzenden Ringe, lässt sich eine stabile Gleichgewichtsfläche mit isotroper Vorspannung bestimmen (siehe

Abbildung 3.7 links). Überschreitet die Höhe jedoch diesen kritischen Wert, dessen Herleitung in [BPA99] beschrieben ist, „zerplatzt“ das Katenoid in zwei Kreisscheiben zwischen den Rändern. Obwohl die Randtopologie dabei gleich bleibt, lässt sich dennoch keine dem Katenoid entsprechende Minimalfläche mehr finden. Dieses Verhalten kann sowohl durch Seifenhautexperimente als auch durch numerische Rechnungen bestätigt werden.

Vorspannung und Drucklast. Ein weiterer Formfindungslastfall, der nicht nur mechanische, sondern auch mathematische Bedeutung erlangt hat, ist die Kombination von isotroper Vorspannung der Membran und gleichzeitiger Druckbelastung. Hier wollen wir uns mit der starken Form des Gleichgewichts beschäftigen: Da eine Drucklast stets senkrecht zur Oberfläche wirkt, ist auch in diesem Fall das Gleichgewicht in der Fläche nach Gleichung (2.100) per Definition stets erfüllt. Bei dem Gleichgewicht senkrecht zur Fläche bleibt nun der Kraftterm erhalten. Durch Umstellung von Gleichung (3.8) erhält man eine Formel zur Berechnung der mittleren Krümmung H :

$$H = \frac{1}{2} (k_{11} + k_{22}) = -\frac{p_{\perp}}{2n} = \text{konst.} \quad (3.11)$$

Wie man aus Gleichung (3.11) erkennen kann, nimmt die mittlere Krümmung H einer isotrop vorgespannten Membran, auf der eine konstante Druckbelastung wirkt, einen ebenfalls über die Fläche konstanten Wert ein [Ken03]. Dies wird mathematisch als *constant mean curvature surface* (kurz: cmc-surface) bezeichnet. Diese Flächen konstanter Krümmung stellen eine Verallgemeinerung der Minimalfläche dar, die mit einer konstanten mittleren Krümmung $H = 0$ quasi einen Sonderfall bildet. Ob es für eine beliebig gegebene Berandung jeweils eine eindeutige cmc-Fläche gibt, kann ähnlich wie bei den Minimalflächen nicht generell gesagt werden. Es muss jeder Fall einzeln untersucht werden. Dennoch lässt sich festhalten, dass prinzipiell eine Lösung möglich ist.

Ob die Gaußsche Krümmung K einer derartigen Fläche einen positiven, negativen oder verschwindenden Wert besitzt, hängt einerseits von der Geometrie der Berandung, andererseits auch vom Verhältnis Vorspannung zu Druckbelastung ab. Als Beispiel seien hier „cmc-Variationen“ eines Katenoids aufgeführt (siehe Abbildung (3.8)): Den Startpunkt der Überlegungen bildet ein Katenoid mit isotroper Vorspannung n , auf den der triviale Sonderfall der Drucklast $p_{\perp} = 0$ wirkt. Der Radius der Randkreise beträgt R , die Höhe des Katenoids wird zur Unterscheidung von der mittleren Krümmung mit H^* abgekürzt. Die mittlere Krümmung dieser antiklastischen Minimalfläche verschwindet, der Wert der Gaußschen Krümmung ist dementsprechend negativ (siehe Gleichung (3.10)). Nun wird allmählich von innen eine Drucklast auf die Fläche aufgebracht. Bildlich gesprochen wird die Seifenhaut aufgeblasen. Erreicht der Druck den Wert $p_{\perp} = \frac{n}{R}$, besitzt die Fläche die Form eines Zylinders. Die Drucklast wird allein durch die Ringspannungen abgetragen, da keine Krümmung in Meridianrichtung auftritt. Die Gaußsche Krümmung verschwindet folglich ($K = 0$). Erhöht man den Druck weiter, weisen die entstehenden Flächen eine synklastische Krümmung auf ($K > 0$). Durch geschickte Wahl der Drucklast kann das ursprüngliche Katenoid sogar in ein Kugelsegment mit Radius R^* transformiert werden (siehe Gleichung (3.10) rechts). Fasst man das Gedankenexperiment zusammen, lässt sich sagen, dass jeder dieser verschiedenen Flächenzustände stets eine konstante mittlere Krümmung besitzt. Der Wert der Gaußschen Krümmung jedoch ändert sich sowohl in der Fläche als auch von Zustand zu Zustand.

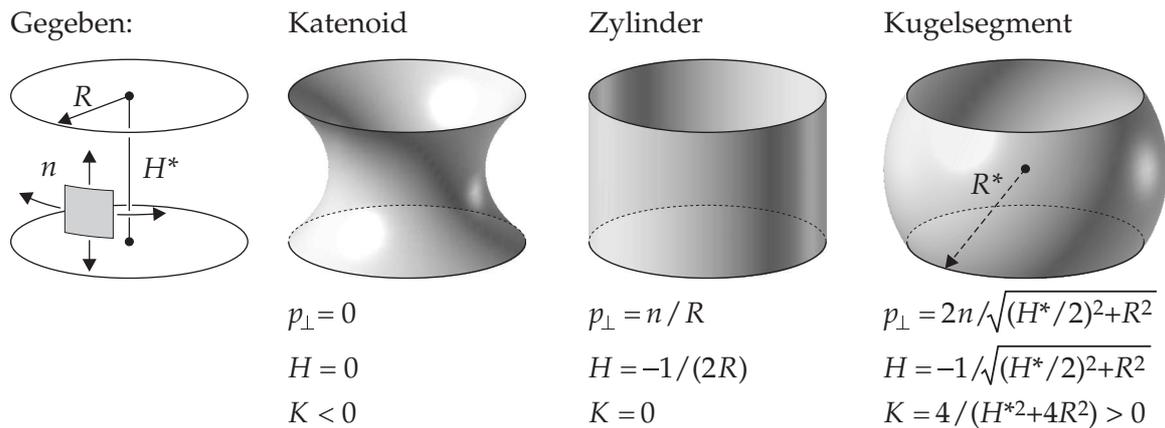


Abbildung 3.8: cmc-Variationen eines Katenoids.

Vorspannung und beliebige Belastung. Die Frage, ob eine Membran mit isotroper Vorspannung auch in der Lage ist, beliebige tangential angreifende Lasten abzutragen, lässt sich durch Betrachtung des Gleichgewichts in der Fläche beantworten: Da angenommen wird, dass eine tangentiale Flächenlast \mathbf{p}_{\parallel} auf der Membranfläche wirkt, folgt nach Gleichung (2.100), dass die Divergenz der Vorspannung von Null verschieden sein muss:

$$\operatorname{div} \mathbf{n} = -\mathbf{p}_{\parallel} \neq \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Dies würde jedoch bedeuten, dass die Vorspannung eine Änderung über die Fläche aufweisen müsste, um Gleichgewicht mit den äußeren Lasten zu erzeugen. Da aber die Vorspannung als isotrop definiert wurde, tritt hier ein Widerspruch auf. Folglich können isotrop vorgespannte Membrantragwerke lediglich senkrecht zur Fläche wirkende Drucklasten abtragen, nicht jedoch eine tangentiale Belastung.

3.2.2 Membran mit anisotroper Vorspannung

Um sowohl einen höheren Formenreichtum für Membrantragwerke zu gewinnen als auch um das Lastabtragsverhalten gezielt zu optimieren, ist es in gewissen Fällen ratsam, die Vorspannung der Membran nicht gleichmäßig (d. h. isotrop) auszubilden, sondern sie in unterschiedliche Richtungen verschieden hoch und somit anisotrop zu wählen. Dadurch kann z. B. den unterschiedlichen Materialsteifigkeiten von gewebten Textilien Rechnung getragen werden. Auch kann damit der Gefahr der Wassersackbildung entgegengewirkt werden, da die Geometrien isotrop vorgespannter Membranen aufgrund der verschwindenden mittleren Krümmung eher flach ausfallen [Wüc07]. Die Vorspannrichtungen dürfen jedoch nicht beliebig angeordnet werden, sondern müssen zueinander stets orthogonal sein. Somit wäre eigentlich der Begriff einer „orthogonal anisotrop“ oder „orthotrop“ vorgespannten Membran der korrekte fachliche Begriff.

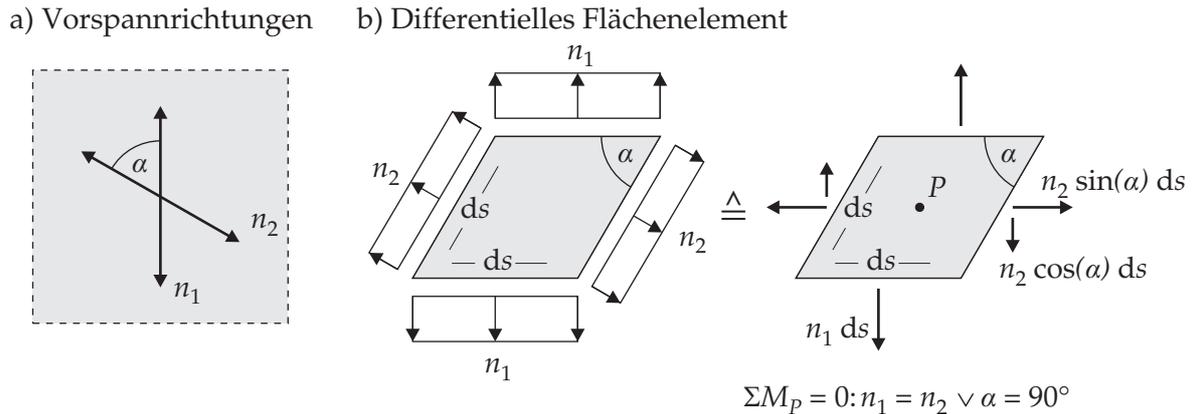


Abbildung 3.9: Orthogonalitätsbedingung der anisotropen Vorspannung.

Orthogonalitätsbedingung. Die Orthogonalitätsbedingung der anisotropen Vorspannrichtungen kann aus der Betrachtung des Momentengleichgewichts an einem differentiellen Flächenelement hergeleitet werden: Zunächst wird davon ausgegangen, dass die Richtungen für die Vorspannungen n_1 und n_2 nicht aufeinander senkrecht stehen, sondern untereinander den Winkel α einschließen (siehe Abbildung 3.9). Nun wird aus der Membran ein differentielles Flächenelement so herausgeschnitten, dass dessen Kanten senkrecht zu den Vorspannrichtungen sind und alle die gleiche Kantenlänge ds besitzen. Um die Zulässigkeit eines beliebigen Vorspannzustands zu überprüfen, wird das Gleichgewicht der Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung und das Momentengleichgewicht um den Elementmittelpunkt P betrachtet:

$$\begin{aligned}
 \sum F_H &= n_2 \sin(\alpha) ds - n_2 \sin(\alpha) ds = 0 \\
 \sum F_V &= n_1 ds - n_1 ds + n_2 \cos(\alpha) ds - n_2 \cos(\alpha) ds = 0 \\
 \sum M_P &= 2 n_1 ds \frac{\cos(\alpha) ds}{2} - 2 n_2 \cos(\alpha) ds \frac{ds}{2} = (n_1 - n_2) \cos(\alpha) ds^2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wie man anhand des Gleichungssystems (3.13) erkennen kann, sind die beiden Kräftegleichgewichte $\sum F_H$ und $\sum F_V$ für alle Werte von n_1 und n_2 stets erfüllt. Die Erfüllung des Momentengleichgewichts $\sum M_P$ hingegen hängt vom Verhältnis der Werte der Vorspannung und des Winkels α ab: Einerseits ist es möglich, die Werte beider Vorspannungen n_1 und n_2 gleich groß zu wählen (wodurch der erste Faktor der Gleichung zu Null wird), um dadurch Momentengleichgewicht zu garantieren. Obwohl nun der Winkel α theoretisch einen beliebigen Wert annehmen dürfte, stellt dies einen „trivialen“ Fall anisotroper Vorspannung dar, da durch die einstellende Isotropie der Vorspannung eine Richtungsdefinition der Vorspannung überflüssig wird („Isotropie“ = „Richtungsunabhängigkeit einer bestimmten Eigenschaft“). Die zweite Möglichkeit, das Momentengleichgewicht zu erfüllen, ist $\cos(\alpha) = 0$ zu setzen. Löst man diese Winkelbeziehung auf, erkennt man, dass $\alpha = 90^\circ$ sein muß. Somit ist jeder anisotrope Vorspannzustand ein kontinuumsmechanisch zulässiger Zustand, solange dessen Vorspannrichtungen orthogonal zueinander sind.

Richtungsdefinition auf räumlich gekrümmten Flächen. Falls die Membranstruktur eine anisotrope Vorspannung aufweisen sollte, ist es notwendig, deren Richtungen auf der

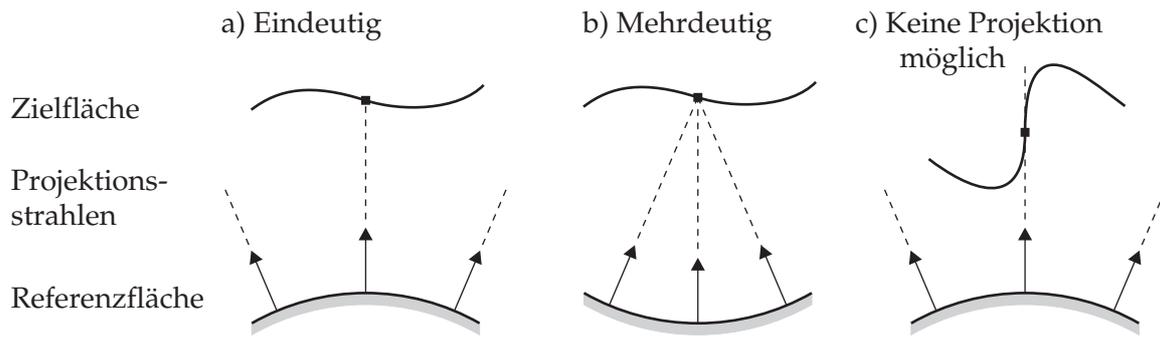


Abbildung 3.10: Projektionsschema: Untersuchung der Eindeutigkeit.

Fläche zu definieren. Dies verdeutlicht schon der aus dem Griechischen kommende Begriff der Anisotropie, der frei übersetzt soviel wie „das Gegenteil von richtungsgleich“ bedeutet. Doch wie kann man eindeutig Richtungen auf einer räumlichen Geometrie festlegen, die sich nur mit größten Mühen mathematisch geschlossen beschreiben lässt und deren endgültige Form zudem noch unbekannt ist?

Eine Möglichkeit besteht darin, die Hauptkrümmungsrichtungen einer gekrümmten Fläche als intrinsische Eigenschaft für die Richtungsdefinition zu nutzen: Vorteilhaft dabei ist die Tatsache, dass keine zusätzlichen Parameter benötigt werden. Diese „eindeutige“ Definition zieht jedoch gleichzeitig auch eine nicht unerhebliche Einschränkung der Flexibilität für den Planer mit sich, da dieser dadurch keinen Einfluss mehr auf die Definition der Vorspannungsrichtung ausüben kann. Auch können numerische Probleme bei der Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen erwartet werden, falls die Membran über Bereiche mit nahezu verschwindender Krümmung verfügt.

Eine allgemeinere Weise der Richtungsdefinition besteht in dem Projektionsschema, das in [WB05] vorgestellt wird: Anstatt die Richtungen direkt auf der eigentlichen Zielfläche festzulegen, werden sie auf einer geometrisch klar definierten Hilfs- bzw. Referenzfläche definiert. Der Übergang auf die Zielfläche erfolgt durch eine Projektion der Richtungen von der Referenz- auf die Zielfläche, wobei die Projektionsstrahlen stets senkrecht auf der Referenzfläche stehen. Um eine eindeutige Projektion zu gewährleisten, muss sichergestellt werden, dass jeder Punkt auf der Zielfläche Schnittpunkt genau eines Projektionsstrahls mit der Zielfläche ist (Abbildung 3.10 a)). Unzulässig sind Fälle, bei denen entweder mehrere Projektionsstrahlen denselben Punkt treffen (Abbildung 3.10 b)) oder ein Flächenpunkt von Projektionsstrahlen nur „gestreift“ wird, da die Fläche lokal senkrecht zu der Referenzfläche steht (Abbildung 3.10 c)). Um diese pathologischen Fälle zu vermeiden, ist es notwendig, für jede Struktur eine geeignete Referenzfläche zu wählen: Ist die Endgeometrie eher weniger gekrümmt, wählt man am besten eine Ebene, die möglichst parallel zur Zielfläche ist. Ist die Zielfläche näherungsweise rotationssymmetrisch, liefert i. A. eine Zylinderprojektion die besten Resultate.

Werden beide Richtungen n_1 und n_2 der anisotropen Vorspannung auf die Zielfläche projiziert, stellt man fest, dass diese i. A. nicht mehr orthogonal zueinander sind (siehe Abbildung 3.11 links). Dies ist nur der Fall, wenn die Tangentialebenen der Ziel- und Referenzflächen zueinander um lediglich eine Achse verdreht sind. Da jedoch, wie im vorheri-

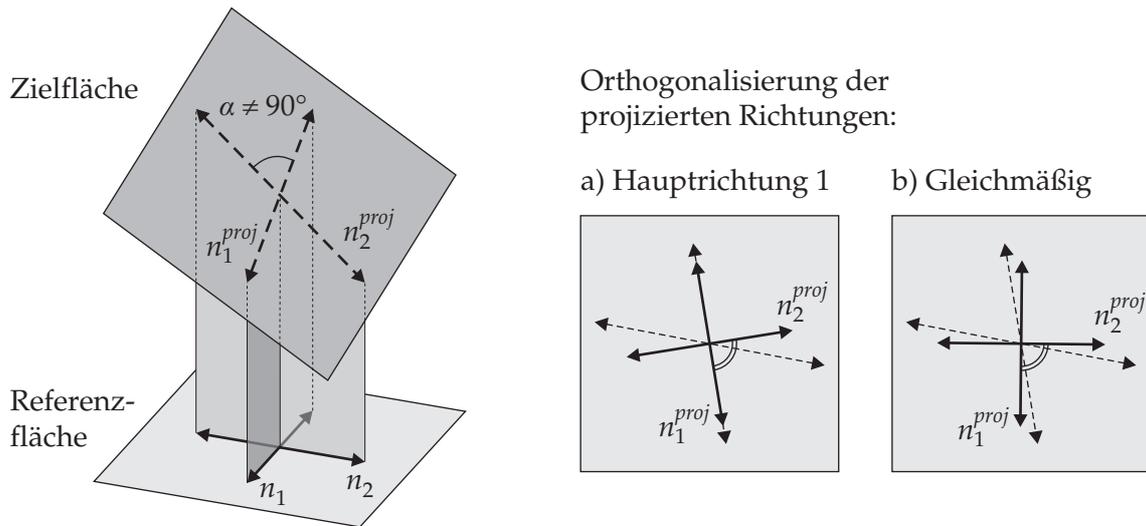


Abbildung 3.11: Projektionsschema: Orthogonalisierung der Richtungen.

gen Abschnitt verdeutlicht wurde, die Orthogonalität der anisotropen Vorspannungen eine Grundvoraussetzung für einen kontinuumsmechanisch zulässigen Spannungszustand ist, müssen die projizierten Richtungen n_1^{proj} und n_2^{proj} so modifiziert werden, dass sie wieder senkrecht zueinander stehen. Diese Orthogonalisierung kann auf zweierlei Weise geschehen: Eine Möglichkeit besteht darin, eine Richtung als Hauptrichtung zu definieren, die exakt projiziert wird. Die andere Richtung wird nun in der Tangentialebene so lange gedreht, bis die Orthogonalität wieder hergestellt ist (siehe Abbildung 3.11 a)). Eine gleichmäßige Projektion beider Richtungen erreicht man, indem man beide Richtungen zueinander bis zur Orthogonalität „aufspreizt“. Hierbei wird der Projektionsfehler gleichmäßig auf beide Richtungen verteilt (siehe Abbildung 3.11 b)). Anhang A.1 beschreibt die Vorgehensweise zur Orthogonalisierung im Detail.

Diese Projektionsmethode für die Richtungsdefinition auf räumlich gekrümmten Flächen ist sehr nahe verwandt mit dem sogenannten *Texture mapping* aus dem Bereich der 3D-Computer-Grafik: Dieses wurde entwickelt, um räumliche Flächen mit zweidimensionalen Textur-Bildern zu belegen (für weiterführende Informationen siehe u. a. [Hec86]). Der ebenen, rechteckigen Textur-Datei werden die Textur-Koordinaten U und V zugewiesen. Dabei erfolgt die Parametrisierung derart, dass die linke untere Bildecke die Koordinaten $U = V = 0$, die rechte obere Bildecke die Koordinaten $U = V = 1$ besitzt. Die U -Achse verläuft parallel zur horizontalen Kante, die V -Achse vertikal. Als Nächstes wird nun die räumliche Fläche mit U und V parametrisiert. Dies geschieht i. A. durch Projektionsverfahren. Um ein möglichst gleichmäßiges Koordinatennetz zu erhalten, wählt man aus verschiedenen Referenzgeometrien (Ebene, Zylinder, Kugel, etc.) die adäquate für die jeweilige Problemstellung aus. Das auf dieser Referenzfläche eingepreßte U - V -Netz wird anschließend auf die 3D-Fläche projiziert. Da nun sowohl auf der Bitmap-Texturdatei als auch auf der räumlichen Fläche dieselben Netze vorhanden sind, kann ein Mapping der Bildinformation der Textur-Datei auf die 3D-Fläche erfolgen. Falls ein CAD-Programm zur Geometrieerstellung von Formfindungsmodellen verwendet wird, kann somit die Textur-Mapping-

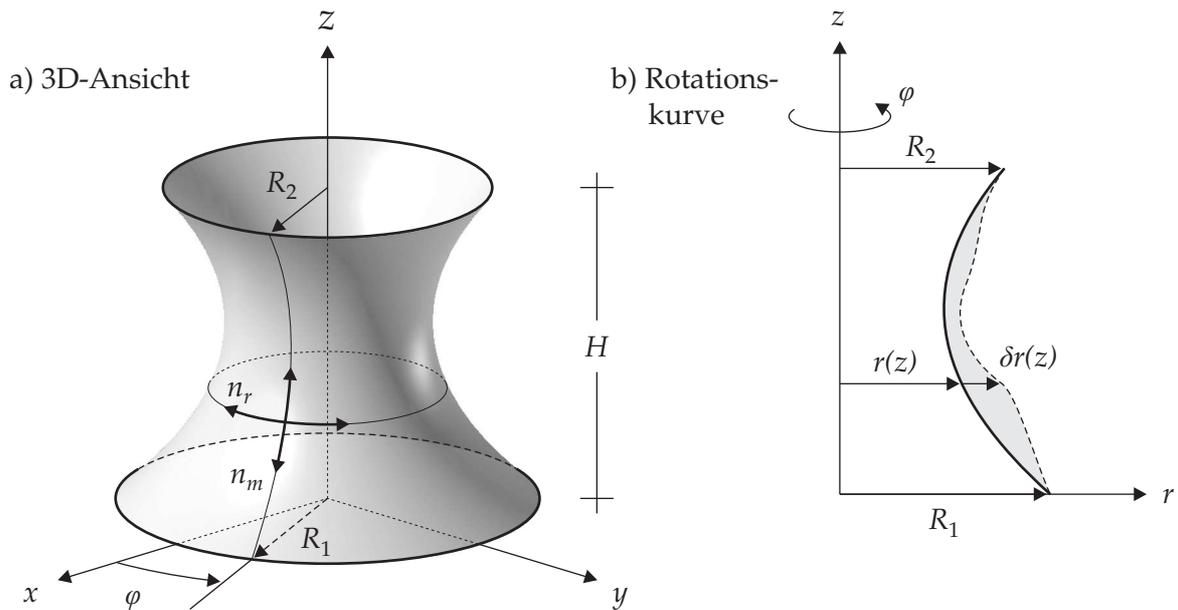


Abbildung 3.12: Geometrie einer rotationssymmetrischen Struktur mit anisotroper Vorspannung

Funktion zur Richtungsbeschreibung auf der Fläche verwendet werden: Hierzu werden die Koordinatenlinien der Mapping-Parameter U und V mit den anisotropen Vorspannungsrichtungen interpretiert. Da das Netz i. A. krummlinig ist, ist hier jedoch erneut eine punktweise Orthogonalisierung der Richtungen vonnöten.

Diskussion der Existenz einer Lösung mit konstanter anisotroper Vorspannung. Um die Eingangsparameter für das Formfindungsproblem möglichst gering zu halten, wird bei der numerischen Formfindung mit anisotroper Vorspannung meist eine *konstante* Verteilung für die gesamte Struktur angesetzt: Das theoretische Ziel wäre somit eine Gleichgewichtsfläche, die an jedem Punkt in der einen Richtung *exakt* die Vorspannung n_1 aufweist und in der anderen um 90° auf der Tangentialfläche gegenüber Richtung 1 gedrehten Richtung 2 die *exakte* Vorspannung n_2 besitzt. Wie jedoch an dem nächsten Beispiel gezeigt werden soll, ist die Annahme einer solchen konstanten anisotropen Vorspannung nur für Sonderfälle wie z. B. abwickelbaren Flächen kontinuumsmechanisch möglich. Als Folge dessen müssen planmäßig Abweichungen vom Sollvorspannungszustand beim Formfindungsprozess in Kauf genommen werden, da sonst keine Konvergenz bei der iterativen numerischen Lösung des Problems erreicht werden kann.

Als Beispiel für die Formfindung mit konstanter anisotroper Vorspannung soll eine rotationssymmetrische Struktur betrachtet werden (siehe Abbildung 3.12), die eine Verallgemeinerung des Katenoids darstellt. Die Geometrie ist auch unter dem Namen „Chinese hat“ oder „Cooling tower“ bekannt [MM99, RW04]: Die geometrischen Randbedingungen sind zwei konzentrische festgehaltene Kreise mit den Radien R_1 und R_2 , die im vertikalen Abstand H angeordnet sind und als unverschiebliche Lager fungieren. Dazwischen soll eine Membranfläche aufgespannt werden, die in radialer Richtung die Vorspannung n_r und in Meridianrichtung die Vorspannung n_m besitzt. Der Vorteil dieser rotationssymmetrischen

Struktur liegt in der klaren Definition dieser anisotropen Vorspannrichtungen, die eine andersweitige Definition der Richtungsdefinition erübrigen.

Die geometrische Lage eines jeden Flächenpunkts des „Chinese hats“ kann infolge der Rotationssymmetrie durch Angabe seiner Höhe $z \in [0; H]$, des Abstands von der Rotationsachse $r(z)$ und des Rotationswinkels $\varphi \in [0; 2\pi]$ beschrieben werden. Im globalen kartesischen Koordinatensystem lautet der Ortsvektor der Flächenpunkte:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z) \cos(\varphi) \\ r(z) \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Die konvektiven Basisvektoren entlang der Koordinatenlinien in Ring- und Meridianrichtung sind stets orthogonal zueinander und nach Gleichung (A.12) wie folgt gegeben:

$$\mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} r_{,z} \cos(\varphi) \\ r_{,z} \sin(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Da im gesuchten Gleichgewichtszustand lediglich Vorspannungen und keine äußeren Lasten wirken, muss die innere virtuelle Arbeit des Systems verschwinden (siehe Abschnitt 2.3.4):

$$-\delta W = -\delta W_{int} = \int_a (\mathbf{n} : \delta \mathbf{e}) da = \int_a (n_r \delta e_r + n_m \delta e_m) da = 0 \quad (3.16)$$

Diese schwache Form des Gleichgewichts beinhaltet die Gleichgewichtsbedingungen sowohl *in* als auch *senkrecht* zur Fläche. δe_r und δe_m sind virtuelle Euler-Almansi-Dehnungen, die infolge einer virtuellen, infinitesimal kleinen Perturbation $\delta \mathbf{u}$ der Gleichgewichtsfläche entstehen. Da die Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ beliebig wählbar sind, werden sie einigen Nebenbedingungen unterworfen, um den Berechnungsaufwand zu minimieren: Jeder Flächenpunkt wird nur in radialer Richtung um den Wert δr verschoben. Um die Rotationssymmetrie auch bei den virtuellen Verschiebungen beizubehalten, ist der Wert δr für alle Punkte mit gleicher z -Koordinate identisch:

$$\delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta r(z) \cos(\varphi) \\ \delta r(z) \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Ferner sollen die Perturbationen an den beiden Rändern mit den Verschiebungsrandbedingungen kompatibel sein, da sonst auch virtuelle Arbeitsanteile der Auflagerkräfte berücksichtigt werden müssten:

$$\delta r(z=0) = 0 ; \quad \delta r(z=H) = 0 \quad (3.18)$$

Die aufgrund der virtuellen Verschiebung entstehende Variation der lokalen Basisvektoren ergibt sich zu:

$$\delta \mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} -\delta r \sin(\varphi) \\ \delta r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \delta \mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} \delta r_{,z} \cos(\varphi) \\ \delta r_{,z} \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Nach Gleichung (2.119) lässt sich die Variation der Euler-Almansi-Dehnungen lediglich durch die lokalen Basisvektoren in der Gleichgewichtsgeometrie und deren Variationen ausdrücken:

$$\delta e_r = \frac{\delta \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r}{\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r} = \frac{\delta r}{r} \quad ; \quad \delta e_m = \frac{\delta \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_m}{\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_m} = \frac{r_{,z} \delta r_{,z}}{1 + r_{,z}^2} \quad (3.20)$$

Als Nächstes werden die Variationen der Dehnungen in Gleichung (3.16) eingesetzt, und mit der Beziehung aus Gleichung (A.13) eine Vorintegration in Radialrichtung durchgeführt:

$$\begin{aligned} -\delta W &= \int_0^H \int_0^{2\pi} (n_r \delta e_r + n_m \delta e_m) r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_0^H \left(n_r \frac{\delta r}{r} + n_m \frac{r_{,z} \delta r_{,z}}{1 + r_{,z}^2} \right) r \sqrt{1 + r_{,z}^2} dz = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um die auftretende Ableitung der virtuellen Verschiebungen $\delta r_{,z}$ zu eliminieren, wird die Gleichung umgeschrieben und eine partielle Integration durchgeführt:

$$\begin{aligned} -\delta W &= 2\pi \int_0^H \left(n_r \sqrt{1 + r_{,z}^2} \delta r + \overbrace{n_m \frac{r r_{,z}}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \delta r_{,z}}^{\text{partielle Integration}} \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^H \left(n_r \sqrt{1 + r_{,z}^2} \delta r - \frac{\partial}{\partial z} \left(n_m \frac{r r_{,z}}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \right) \delta r \right) dz + \underbrace{2\pi n_m \frac{r r_{,z}}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \delta r \Big|_0^H}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

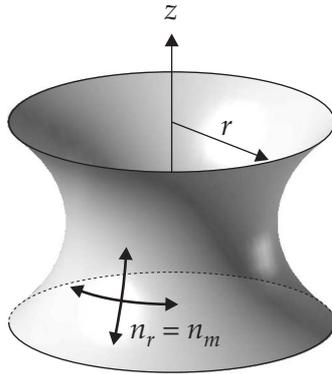
Gemäß Gleichung (3.18) treten keine virtuellen Verschiebungen an den Lagern auf, so dass der durch partielle Integration erzeugte Randterm in Gleichung (3.22) verschwindet. Somit muss der Integrand zu Null werden, um die Gleichung zu erfüllen. Weiterhin sind die Perturbationen δr beliebig und im nicht-trivialen Fall von Null verschieden. Berücksichtigt man zudem, dass die Vorspannung stets konstant sein soll ($\frac{\partial n_m}{\partial z} = 0$), erhält man eine neue maßgebende allgemeine Gleichgewichtsbeziehung:

$$n_r \sqrt{1 + r_{,z}^2} - n_m \left(\frac{r r_{,z}}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \right)_{,z} = 0 \quad (3.23)$$

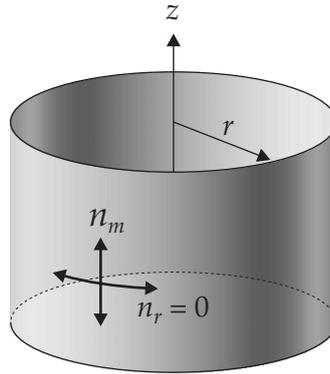
Führt man die Differentiation nach z und weitere algebraische Operationen durch, kann man Gleichung (3.23) folgendermaßen umschreiben:

$$n_r \left(-\frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \right) + n_m \frac{r_{,zz}}{(1 + r_{,z}^2)^{\frac{3}{2}}} = (n_r - n_m) r_{,z}^2 \left(\frac{1}{r \sqrt{1 + r_{,z}^2}} \right) \quad (3.24)$$

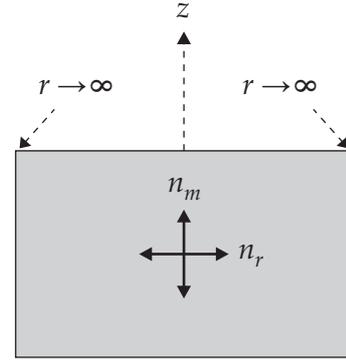
Wie bereits angemerkt wurde, kann Gleichung (3.24) als allgemeine Gleichgewichtsbeziehung angesehen werden, die sowohl das Gleichgewicht in der Fläche als auch normal zur

Fall 1: $n_r = n_m$ (trivial)


Katenoid

 Fall 2: $dr/dz = 0$


Zylinder



Ebene

Abbildung 3.13: Stabile Formen mit anisotroper Vorspannung.

Fläche beinhaltet. Eine explizite Gleichgewichtsbeschreibung für das Gleichgewicht senkrecht zur Fläche ist durch Gleichung (2.102) gegeben, die ein Gleichgewicht der Umlenkkräfte postuliert: Da keine Drucklasten auf die Membran wirken, müssen sich die für die Krümmungen k_r und k_m notwendigen Umlenkkräfte in Radial- und Meridianrichtung gegenseitig aufheben. Durch Verwendung der analytischen Krümmungen aus den Gleichungen (A.17) und (A.17) ergibt sich folgende starke Form des Gleichgewichts senkrecht zur Fläche:

$$\frac{n_r}{R_r} + \frac{n_m}{R_m} = n_r k_r + n_m k_m = n_r \left(-\frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1+r_{,z}^2}} \right) + n_m \frac{r_{,zz}}{(1+r_{,z}^2)^{\frac{3}{2}}} = -p_{\perp} = 0 \quad (3.25)$$

Setzt man nun Gleichung (3.25) in Gleichung (3.24) ein, kann deren mechanische Bedeutung auf das tangentielle Gleichgewicht reduziert werden. Man erkennt, dass beim Einsetzen die komplette linke Seite der Gleichung zu Null wird. Da weiterhin für nicht-singuläre Fälle der Radius r positive Werte aufweist, ergibt sich eine neue Bedingungsgleichung für eine Gleichgewichtsfläche mit konstanter anisotroper Vorspannung:

$$(n_r - n_m) r_{,z}^2 = 0 \quad (3.26)$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, können zwei Fälle vorliegen:

- ◇ Fall 1: $n_r = n_m$

Die Vorspannung ist isotrop. Die entstehende Form für diesen trivialen Fall der anisotropen Vorspannung ist das Katenoid (siehe Abbildung 3.13 links).

- ◇ Fall 2: $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$

Der Radius verändert sich nicht über die Höhe, wodurch die meridionale Krümmung k_m verschwindet. Hierbei kann man erneut zwei Fälle unterscheiden:

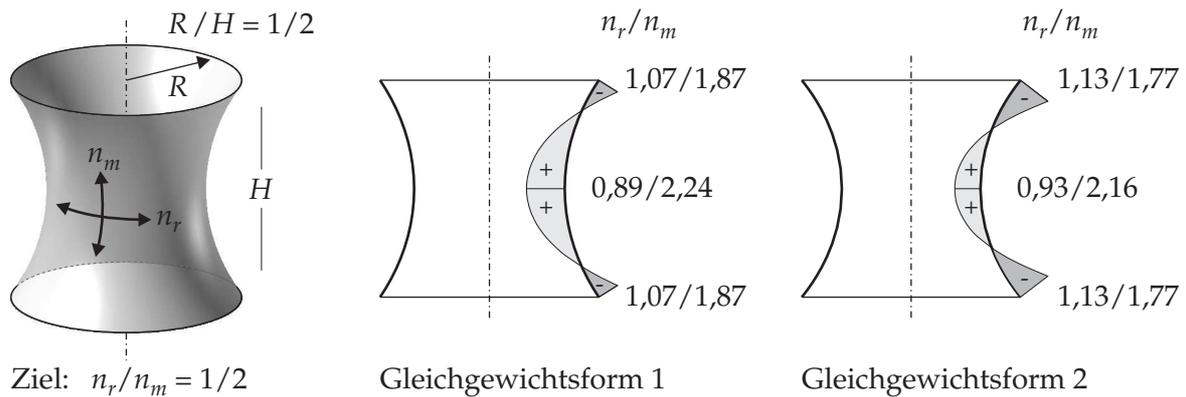


Abbildung 3.14: Spannungsabweichung bei einem anisotrop vorgespannten Katenoid.

- Ist der Radius in Radialrichtung endlich groß, handelt es sich bei der resultierenden Geometrie um einen Zylinder (Abbildung 3.13 Mitte). Aus der Gleichgewichtsbeziehung (3.25) folgt, dass dabei die Meridianvorspannung einen beliebigen Wert annehmen darf, jedoch darf *keine* Vorspannung in Radialrichtung aufgebracht werden, da diese zu einer radialen Einschnürung führen würde.
- Ist der radiale Radius unendlich groß, verschwindet neben der Krümmung in Meridianrichtung auch die Krümmung in Radialrichtung. Die Geometrie „entartet“ zur Ebene (Abbildung 3.13 rechts): Aufgrund $k_r = k_m = 0$ ist die Gleichgewichtsbeziehung (3.25) für jedes beliebige Verhältnis der Vorspannungen n_r und n_m erfüllt.

Es wird ersichtlich, dass es abgesehen von Trivialfällen (wie z. B. einer ebenen Membran) *keine Systeme mit konstanter anisotroper Vorspannung* geben kann, da das Kräftegleichgewicht in der Fläche infolge der doppelten Krümmung nicht gewährleistet werden kann. Es gibt somit keine Membrantragwerke, die exakt ein konstantes Vorspannverhältnis in der gesamten Fläche besitzen. Hingegen gibt es eine unendliche Anzahl von Lösungen, deren Vorspannverhältnis „in etwa“ so groß ist wie das gewünschte. Als Beispiel sind in Abbildung 3.14 für ein anisotrop vorgespanntes Katenoid zwei mögliche Gleichgewichtsformen dargestellt: In beiden Fällen kann ein variierendes Spannungsverhältnis in Radial- und Meridianrichtung um den Zielwert festgestellt werden. Obwohl betragsmäßig für beide Fälle unterschiedlich, ist das Verhältnis n_r/n_m in der Nähe der Randkreise stets größer als gewünscht (d. h., die Radialspannungen sind zu groß, die Meridianspannungen zu klein), in der Mitte des Katenoids fällt das Verhältnis zu klein aus.

Diese Nicht-Existenz einer Fläche mit konstanter anisotroper Vorspannung muss bei der Definition des Formfindungsproblems in Betracht gezogen werden: Da für den eigentlichen Sollspannungszustand i. A. keine exakte Gleichgewichtsform gefunden werden kann, muss dieser als inkompatibel für die gegebenen Randbedingungen betrachtet werden. Somit handelt es sich bei diesem Formfindungsproblem um eine schlecht gestellte Aufgabe. Anstatt diese direkt lösen zu wollen, ist es notwendig, „die Fragestellung so abzuändern, dass sinnvolle Antworten gegeben werden können“ [Zei96], d. h., Abweichungen müssen planmäßig

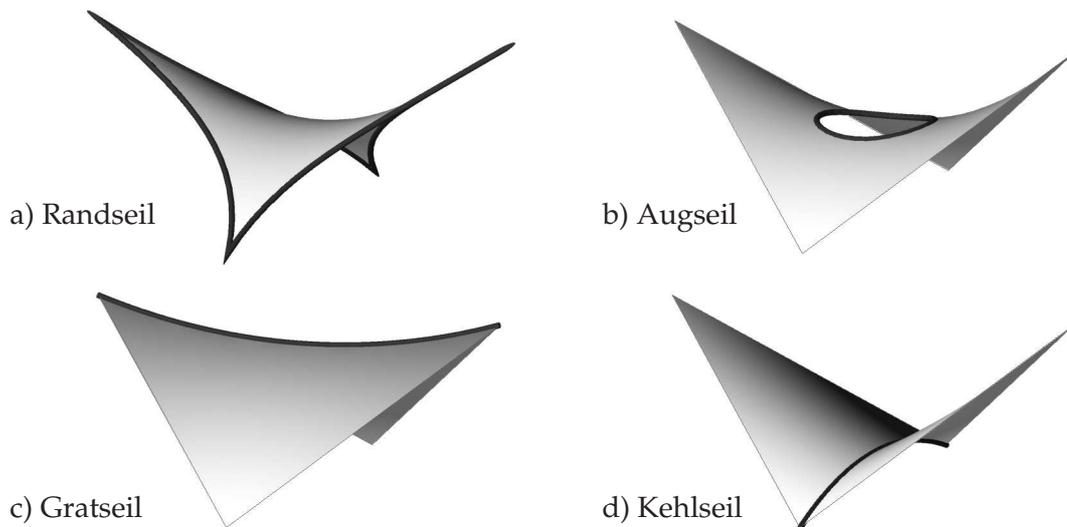


Abbildung 3.15: Kombinationen Membran - Seil.

in Kauf genommen werden. In Abschnitt 3.3.3 werden Algorithmen beschrieben, die inkompatible Spannungszustände im Laufe der Formfindung so modifizieren, dass eine Gleichgewichtsform gefunden werden kann. Dabei wird angestrebt, die Differenz zwischen dem tatsächlichen kompatiblen und dem ursprünglichen inkompatiblen Spannungszustand so gering wie möglich zu halten.

3.2.3 Mit Seilen kombinierte Membran

Bislang bestand die Topologie der untersuchten Membranstrukturen stets aus einer einfeldrigen Membran, die durch feste Ränder begrenzt wird. Für die mathematische und mechanische Analyse ist dies ein großer Vorteil, da die Randbedingungen geometrisch klar definiert sind, und sich deswegen die Berechnungen erheblich vereinfachen. In der Praxis sind derartige Membrankonstruktionen jedoch eher die Seltenheit: Da die meisten Membranwerkstoffe in der Regel eine Kriechneigung aufweisen (d. h., sie dehnen sich unter Last mit der Zeit), ist i. A. ein Nachjustieren der Membranvorspannung erforderlich [DIN06]. Bei festen Rändern ist dies jedoch konstruktiv nur schwer durchführbar, so dass meist flexible Ränder mit Randseilen zum Einsatz kommen (siehe Abbildung 3.15 a)), deren Geometrie ebenfalls in der Formfindung ermittelt werden muss.

Des Weiteren ist es auch möglich, innerhalb der Membran Seile anzuordnen. Hier unterscheidet man v. a. Augeseile (Abbildung 3.15 b)), die dazu verwendet werden, Öffnungen in der Membran herzustellen, und Grat- bzw. Kehlseile, die in der Membranfläche liegen, deren Endpunkte aber mit Auflagern verbunden sind (Abbildung 3.15 c) und d)).

Da durch die Kombination der Strukturelemente die Geometrie der Membran durch die Seile beeinflusst wird (und umgekehrt), muss die Formfindung in der Lage sein, die gegenseitige Interaktion in korrekter Weise zu erfassen. Die Gleichgewichtsbedingung umfasst somit neben der virtuellen Arbeit der Membrankräfte n auch die virtuelle Arbeit der Kräfte

N_i aller n_{Seile} Seile:

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_a (\mathbf{n} : \delta \mathbf{e}) da + \sum_{i=1}^{n_{\text{Seile}}} \left(\int_{l_i} (\mathbf{N}_i : \delta \mathbf{e}_i) dl_i \right) \quad (3.27)$$

Ausnahmsweise kennzeichnet die Groß- bzw. Kleinschreibung der Vorspannung keine Konfiguration, auf die sie sich bezieht. Vielmehr dient sie der Unterscheidung, ob es sich um eine flächenhafte Vorspannung wie bei Membranen (Kleinbuchstabe n) oder eine linienhafte Vorspannung wie bei Seilen (Großbuchstabe N) handelt.

Im nächsten Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit eine kombinierte Formfindung von Membranen und Randseilen unter direkter Vorgabe von Kräften zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen führt.

Membran mit Randseil. Als erstes Beispiel einer kombinierten Formfindung von Membran und Seilen wird ein ebenes Vierpunktsegel betrachtet, dessen Ränder mit Randseilen (englisch: „edge cables“ [FM04]) eingefasst sind (siehe Abbildung 3.16). Die vier Eckpunkte sind festgehalten und bilden ein Quadrat mit der Kantenlänge b . Nun soll überprüft werden, ob es einen Radius r der Randseile gibt, der ein stabiles Gleichgewicht zwischen der gegebenen Seilkraft N und der ebenfalls gegebenen isotropen Vorspannung der Membran n ermöglicht.

Das Problem wird über eine Betrachtung der im System gespeicherten potentiellen Energie Π gelöst: Da in dem System weder elastische Spannungen noch äußere Lasten auftreten (reine Formfindung!), setzt sich das Potential des Systems aus der Summe der über die Membranfläche a_{Membran} integrierten isotropen Membranspannung und der über alle vier

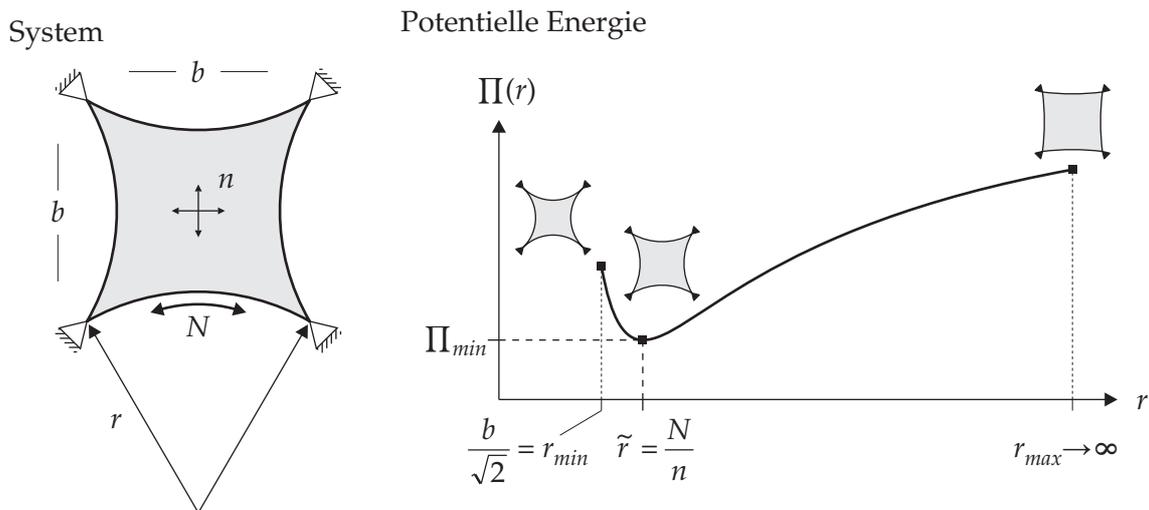


Abbildung 3.16: Formfindung: Membran mit Randseil.

Seillängen $l_{Randseil}$ integrierten Seilkraft zusammen [dGBWQ04]:

$$\begin{aligned}\Pi(r) &= n a_{Membran} + 4 N l_{Randseil} \\ &= n \left(b^2 - 4 \arcsin \left(\frac{b}{2r} \right) r^2 + 4 \cos \left(\arcsin \left(\frac{b}{2r} \right) \right) \frac{br}{2} \right) \\ &\quad + 4 N \left(2r \arcsin \left(\frac{b}{2r} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Um nun den Gleichgewichtsradius \tilde{r} zu ermitteln, muss ein stationärer Punkt des Potentials bestimmt werden (siehe Gleichung (2.107)). Da allein Veränderungen des Radius auftreten können, genügt es, die Ableitung des Potentials bezüglich des Radius r zu bilden und den Wert \tilde{r} zu ermitteln, für den die Ableitung verschwindet:

$$\left. \frac{\partial \Pi(r)}{\partial r} \right|_{\tilde{r}} = \underbrace{(n \tilde{r} - N)}_{=0} \underbrace{\left(\frac{8}{\sqrt{\left(\frac{2\tilde{r}}{b}\right)^2 - 1}} - 8 \arcsin \left(\frac{b}{2\tilde{r}} \right) \right)}_{>0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.29)$$

Da der zweite Faktor der Gleichung (3.29) für geometrisch zulässige Werte von r stets größer als Null ist, muss zur Erfüllung der Gleichung der erste Faktor $(n \tilde{r} - N)$ gleich Null sein. Somit erhält man den Gleichgewichtsradius \tilde{r} als Verhältnis der Seilvorspannung N zu der Membranvorspannung n :

$$\tilde{r} = \frac{N}{n} \quad (3.30)$$

Die Plausibilität des Ergebnisses kann mit der sogenannten „Kesselformel“ (auch „Fassformel“ genannt), die aus Gleichung (2.102) hergeleitet werden kann, leicht überprüft werden.

Um zu ermitteln, ob ein physikalisch stabiler oder instabiler Gleichgewichtszustand vorherrscht, wird die zweite Ableitung des Potentials am stationären Punkt bestimmt:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial r)^2} \right|_{\tilde{r} = \frac{N}{n}} = n \left(\frac{8}{\sqrt{\left(\frac{2\tilde{r}}{b}\right)^2 - 1}} - 8 \arcsin \left(\frac{b}{2\tilde{r}} \right) \right) > 0 \quad (3.31)$$

Da die zweite Ableitung am stationären Punkt für physikalisch und geometrisch sinnvolle Parameterkombinationen stets größer als Null ist, führt jede Veränderung des Radius r zu einer Erhöhung der potentiellen Energie des Systems. Folglich stellt der Gleichgewichtszustand ein potentielles Minimum des Systems dar und ist somit stabil. Dass ein Energieminimum vorliegt, kann auch aus dem grafischen Verlauf des Potentials in Abbildung 3.16 abgelesen werden.

Mathematisch betrachtet stellt die Formfindung einer Membran mit Randseilen ein konvexes Problem dar, das mit Gradientenlösungsverfahren (wie z. B. der FE-Methode) gelöst werden kann.

Membran mit Augseil. Die zweite Möglichkeit, eine Membran mit Seilen zu kombinieren, besteht darin, dass in die Membranfläche ein Augseil (englisch: „loop“ [FM04]) eingebaut

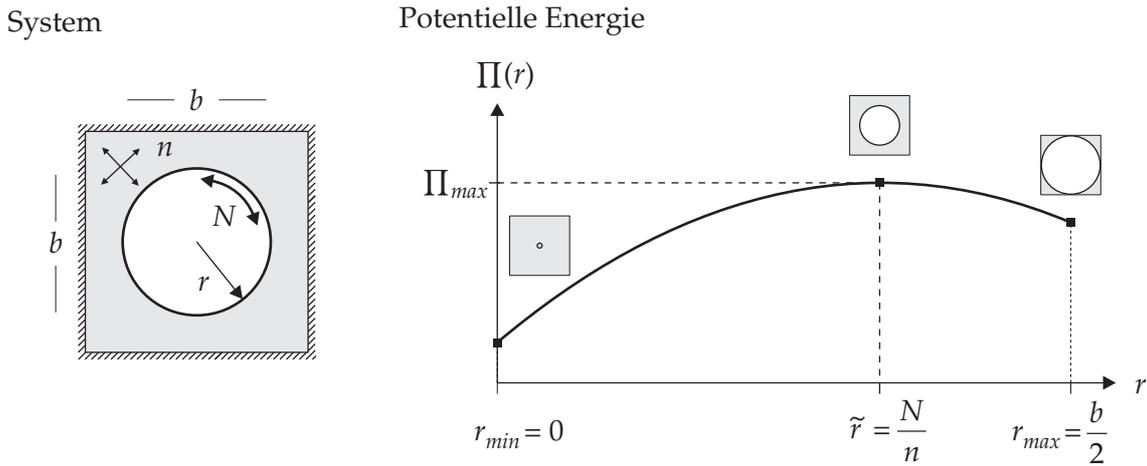


Abbildung 3.17: Formfindung: Membran mit Augseil.

wird. Die Seilvorspannung des Augseils schließt als innenliegender Zugring die Zugspannungen der Membran kurz. Auch hier soll überprüft werden, ob ein physikalischer stabiler Zustand durch reine Spannungsvorgabe erzeugt werden kann.

Als exemplarisches System betrachten wir erneut eine quadratische ebene Membran mit der Kantenlänge b (siehe Abbildung 3.17). Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ist der gesamte Rand nun unverschieblich gelagert. In der Membran befindet sich ein Augseil mit dem zunächst noch unbekanntem Radius r . Gegeben ist weiterhin die isotrope Vorspannung der Membran n und die Vorspannkraft des Augseils N .

Da keine elastischen Spannungen auftreten, kann das Potential des Systems in Abhängigkeit vom Radius r und der Vorspannung der Membran und des Augseils wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\Pi(r) &= n a_{\text{Membran}} + N l_{\text{Augseil}} \\ &= n (b^2 - r^2\pi) + N (2r\pi)\end{aligned}\quad (3.32)$$

Für die Ermittlung des Gleichgewichtsradius \tilde{r} wird der stationäre Punkt des Potentials bestimmt:

$$\left. \frac{\partial \Pi(r)}{\partial r} \right|_{\tilde{r}} = \underbrace{(n \tilde{r} - N)}_{=0} \underbrace{(-2\pi)}_{<0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{r} = \frac{N}{n}\quad (3.33)$$

Wie man durch Lösen der Gleichung (3.33) sofort erkennen kann, entspricht der Gleichgewichtsradius \tilde{r} erneut dem Verhältnis von Seil- zu Membranvorspannung. Bei den Gleichgewichtsbedingungen besteht somit kein Unterschied, ob sich das Seil innerhalb der Membran oder an deren Rand befindet.

Bestimmt man jedoch die zweite Ableitung des Potentials, wird offensichtlich, dass bei Augseilen jede Veränderung des Gleichgewichtsradius \tilde{r} eine Verringerung des Potentials zur Folge hat:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial r)^2} \right|_{\tilde{r}=\frac{N}{n}} = -2\pi < 0\quad (3.34)$$

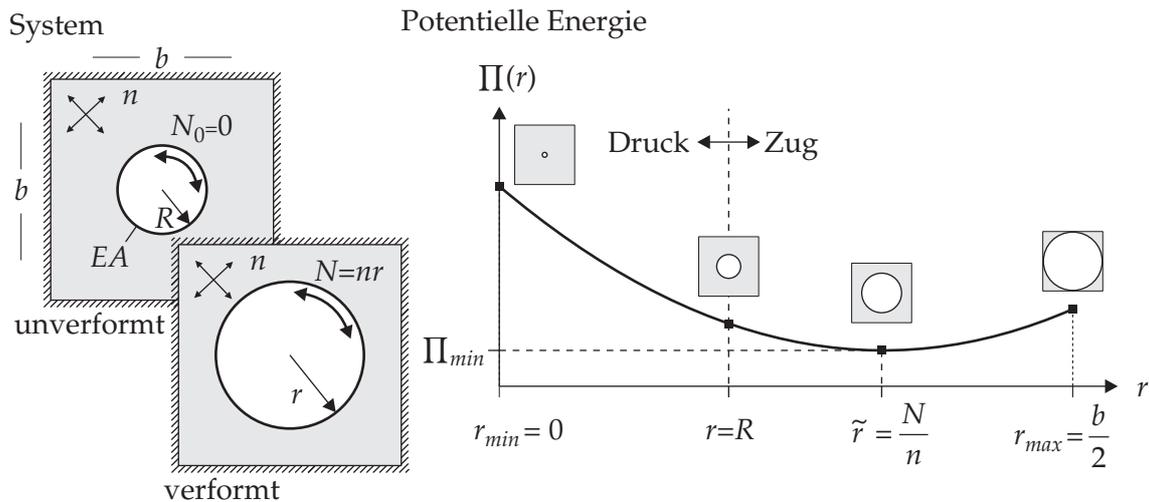


Abbildung 3.18: Formfindung: Membran mit elastischem Augeil (lineare Kinematik).

Somit liegt bei allein durch Vorspannung definierten Augeilen ein physikalisch instabiles Gleichgewicht vor. Werden Gradientenverfahren zur Lösung dieses Formfindungsproblems angewandt, führen schon kleinste numerische Rundungsfehler dazu, dass das Augeil im iterativen Prozess sich entweder auf die Länge 0 zusammenschnürt ($r \rightarrow 0$) oder das vom Augeil umschlossene Loch „aufreißt“ ($r \rightarrow \infty$). Obwohl ein theoretisch sinnvoller Gleichgewichtszustand vorhanden ist, sind Standardlösungsverfahren nicht in der Lage, diesen zu finden, da i. A. stets eine Minimierung der Energie angestrebt wird.

Um dennoch eine Formfindung von Augeilen durchführen zu können, muss die Problemstellung modifiziert werden: Eine Alternative ist, die Länge des Augeils direkt festzusetzen und dabei die Seilspannung variabel zu lassen. Damit wird die Spannungsnebenbedingung des Optimierungsproblems in eine Längennebenbedingung geändert. Mechanisch kann dies als unendlich hohe Dehnsteifigkeit des Seiles interpretiert werden, was in den meisten Berechnungsverfahren eine extrem schlechte Konditionierung des Gleichungssystems zur Folge hätte. Aus numerischer Sicht ist es deshalb sinnvoller, das Seil elastisch mit einer endlichen Dehnsteifigkeit zu definieren. Durch die Membranvorspannung wird das Seil so lange gedehnt, bis Gleichgewicht zwischen der elastischen Seilkraft und der Membranvorspannung herrscht. Gleichzeitig stellt sich ein Minimum des Potentials ein (siehe Abbildung 3.18), das nun neben einem Anteil aus Vorspannung auch aus einem elastischen Anteil infolge der Dehnung des Seiles besteht.

Zwar lässt sich in diesem Fall weder die exakte Länge (das Seil dehnt sich im Formfindungsprozess) noch die Vorspannung vorgeben, jedoch stellt dies die einzige Möglichkeit dar, um überhaupt eine physikalisch und numerisch stabile Lösung zu erhalten. Wird die Steifigkeit des Seiles zudem noch entsprechend groß genug gewählt, kann man davon ausgehen, dass die auftretenden Längenänderungen des Seiles in vertretbarem Rahmen bleiben. In Abschnitt 5.3.1 wird diese Kombination aus Formfindung und elastischer Berechnung anhand eines Beispiels demonstriert.

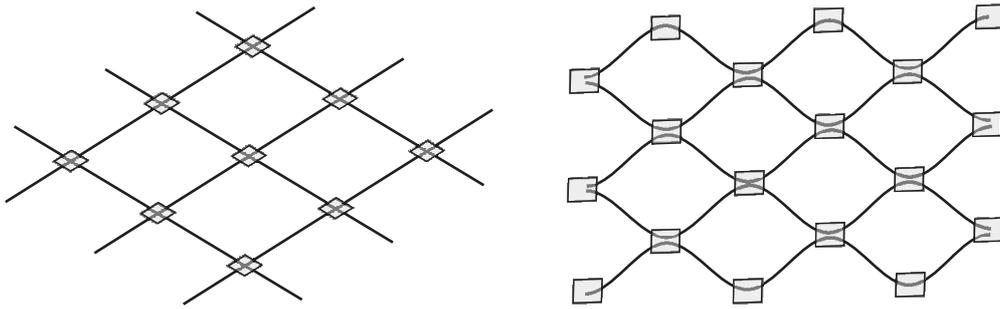


Abbildung 3.19: Unterschiedliche Seilnetztypen.

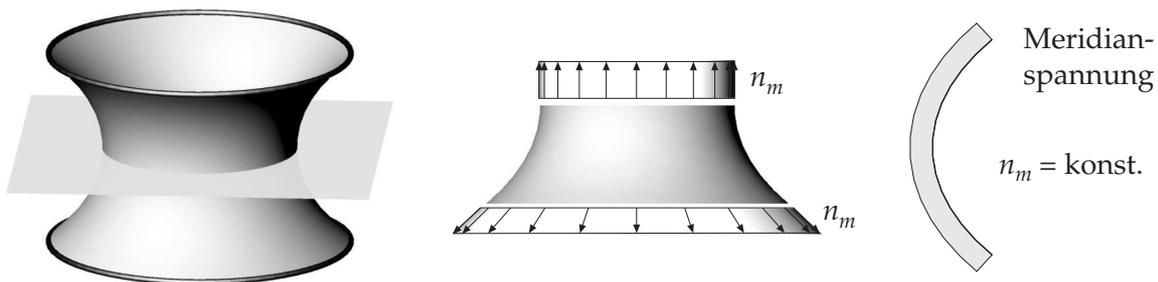
Membran mit Grat- bzw. Kehlseil. Topologisch betrachtet versteht man unter einem Grat- bzw. Kehlseil (englisch: „ridge and valley cables“ [FM04]) ein Seil, das im Gebiet der Membran liegt und somit von der Membran „umschlossen“ wird. Im Gegensatz dazu verfügen die bereits aufgeführten Rand- und Augenseile stets über einen „freien“ Rand. Durch das Grat- bzw. Kehlseil kann eine nachgiebige linienförmige Stützung der Membran erreicht werden [Bub97]. Da die Enden von Grat- und Kehlseilen stets zu Auflagern (feste Lager oder flexible Randseile) geführt werden müssen, sind sie in mechanischer Hinsicht mit Randseilen verwandt. Dies hat zur Folge, dass Formfindungsprobleme unter Vorgabe von Spannungen direkt gelöst und keine zusätzlichen Längennebenbedingungen wie bei Augenseilen eingebaut werden müssen.

3.2.4 Seilnetze

Es ist selbstverständlich auch möglich, Seile als alleinige Strukturelemente zu verwenden. Die Seile werden dabei untereinander so verbunden, dass sie eine flächige Netzstruktur bilden, die sowohl regulär als auch irregulär sein kann [FM04]. Die genaue Art der Produktionsweise ändert sich von Hersteller zu Hersteller, doch können bei regulären, viereckigen Netzen prinzipiell zwei Herstellverfahren unterschieden werden: Indem zwei sich kreuzende Seilscharen an ihren jeweiligen Schnittpunkten miteinander verknüpft werden, lässt sich ein äußerst stabiles Netz bilden, dessen klar definierter Kräfteverlauf entlang der einzelnen Seile orientiert ist (siehe Abbildung 3.19 links). Da der Produktions- und Montageaufwand für diese Art von Seilnetz jedoch nicht unerheblich ist, hat sich ein weiteres Herstellverfahren entwickelt [SSO07]: Dabei besteht das Netz am Anfang der Herstellung aus lediglich einer parallelen Seilschar (siehe Abbildung 3.19 rechts). Im nächsten Schritt wird jedes Seil in regulärem Abstand abwechselnd mit seinem linken und rechten Nachbarseil fest verbunden. Zieht man nun die Seilschar auseinander, fächert sich durch diese spezielle Anordnung der Seilknoten ein rautenförmiges Netz auf. Während bei der ersten Variante die Seilknoten hauptsächlich zur Fixierung der Geometrie eingesetzt werden, sind diese bei dem Rautennetz erheblichen Belastungen ausgesetzt, da sie die Lasten zwischen zwei benachbarten Seilen übertragen müssen.

Wie man schon anhand der verschiedenen Herstelltechniken sehen kann, trifft die weitverbreitete Annahme, dass Seilnetze lediglich „diskretisierte“ Membranen darstellen, nur

Membran



Seilnetz

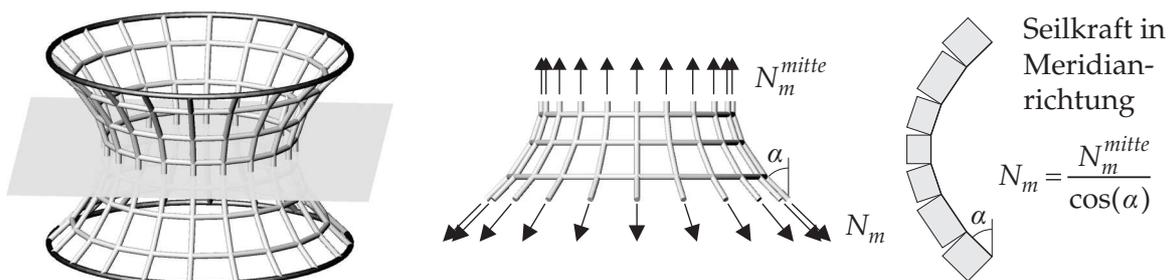


Abbildung 3.20: Vergleich Membran - Seilnetz an einem Katenoid.

bedingt zu. Bei der Formfindung von Seilnetzen müssen eigene Gesetzmäßigkeiten beachtet werden: Soll beispielsweise eine Struktur aus dem rautenförmigen Seilnetz gebaut werden, muss sichergestellt werden, dass die Kanten des Seilnetzes beim Berechnungsvorgang nahezu gleich lang sind. Somit ist es nicht mehr möglich, allein die Seilkraft und die Netztopologie inklusive Randbedingungen vorzuschreiben, da ein entstehendes Netz so gut wie nicht baubar wäre. Dem ursprünglichen Formfindungsproblem wird dadurch eine starke geometrische Randbedingung hinzugefügt, die beinahe die komplette Grundaufgabenstellung dominiert. Die Geometrie des Netzes wird nun weniger dadurch bestimmt, dass sie die Gleichgewichtslage für vorgegebene Seilkräfte ist, als durch die Zielsetzung, dass die Maschenweite näherungsweise konstant sei und das Netz unter Zugspannungen stehe. In [SSO07] ist ein Berechnungsablauf dargestellt, der den produktionstechnischen Gegebenheiten Rechnung tragen soll.

Ebenso wenig wie der Formfindungsvorgang von Membranen auf Seilnetze übertragen werden kann, stellt ein Seilnetz ein akkurates Ersatzmodell für eine Membran dar. Als Beispiel soll hier wiederum die Form eines Katenoids dienen. In der oberen Hälfte von Abbildung 3.20 ist das durch Formfindung erhaltene Katenoid zu erkennen. Als Eingangsparameter der Formfindung wurde eine isotrope Vorspannung n gewählt. Führt man nun einen horizontalen Schnitt sowohl durch die Mitte der Gleichgewichtsfläche als auch kurz vor dem unteren Auflager, kann man erkennen, dass überall eben diese Vorspannung wirkt. Obwohl der Umfang des Katenoids am Auflager größer ist als in der Mitte, ist das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte dennoch erfüllt: Da die Vorspannung stets tangential zur Fläche wirkt, darf zur Berechnung der resultierenden vertikalen Kraft nur der vertikale Anteil der Vorspannung genommen werden, der den Umfangsunterschied wieder ausgleicht. Die Vorspannung n in Meridianrichtung ist somit überall gleich groß.

Als Nächstes soll die kontinuierliche Fläche des Katenoids durch ein Seilnetz approximiert werden. Die Seile sind dabei entlang der Meridian- und Ringrichtung orientiert und bilden ein orthogonales Netz. Die Maschenweite ist aufgrund der sich ergebenden Einschnürung des Katenoids jedoch nicht äquidistant. Um eine Aussage über die auftretenden Vorspannkraften der Seile in meridionaler Richtung treffen zu können, wird erneut ein horizontaler Schnitt durch die Mitte und ein Schnitt über dem unteren Auflager geführt (siehe Abbildung 3.20 unten). Die resultierende Vertikalkraft in der Mitte ergibt sich direkt aus dem Produkt der dort wirkenden Seilkraft N_m^{mitte} und der Anzahl der Seile in Meridianrichtung. Betrachtet man nun den Schnitt über dem Auflager, fällt auf, dass die Seile um den Winkel α gegenüber der Vertikalen geneigt sind. Es muss somit eine Kräftezerlegung der dort wirkenden Seilkraft N_m in einen vertikalen und einen horizontalen Anteil vorgenommen werden. Da die Anzahl der Seile jedoch konstant bleibt, muss N_m betragsmäßig größer als N_m^{mitte} sein, um trotz dieser Kräfteaufteilung vertikales Gleichgewicht zu erzeugen. Folglich ist allein aus Gleichgewichtsüberlegungen sichtbar, dass eine konstante Vorspannung im Meridianseil nicht möglich ist. Je größer der Neigungswinkel α ist, desto höher muss auch die Vorspannung sein. Ein analytischer Zusammenhang wird über folgende Formel hergestellt:

$$N_m = \frac{N_m^{mitte}}{\cos(\alpha)} \quad (3.35)$$

Die Seilkraft hat somit ihren maximalen Wert über den Auflagern und nimmt bis zur Mitte des Katenoids ab. Somit ist es mit der vorliegenden Vernetzung nicht möglich, eine Gleichgewichtsfläche zu erzeugen, bei der alle Seile einen stets gleich großen Ausnutzungsgrad aufweisen. Dies lässt sich auch anhand einer numerischen Berechnung demonstrieren: In Abbildung 3.21 ist in der oberen Hälfte die numerische Formfindung eines konstant isotrop

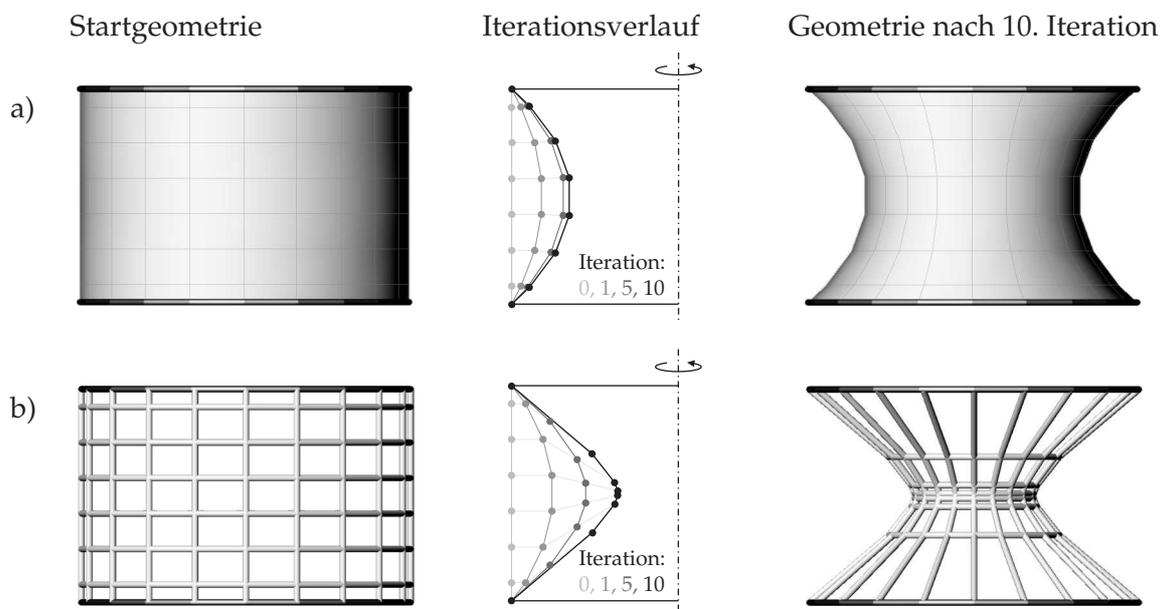


Abbildung 3.21: Numerische Formfindung eines konstant vorgespannten Katenoids aus a) Membran und b) Seilen.

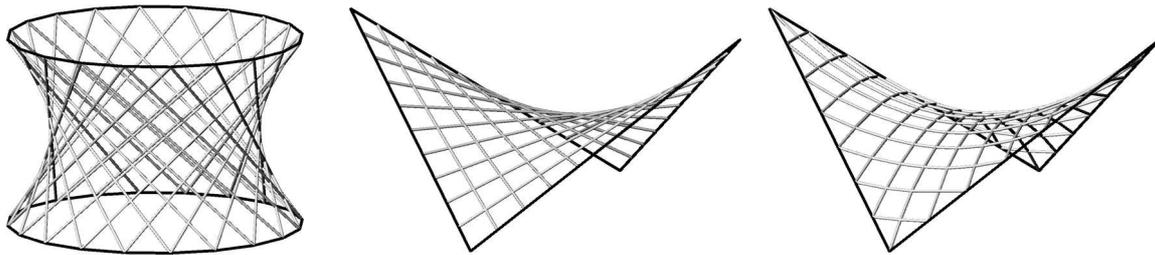


Abbildung 3.22: Seilnetze mit konstanter Vorspannung

vorgespannten Katenoids mit dem im nächsten Kapitel beschriebenen Formfindungsalgorithmus dargestellt. Ausgehend von einer zylinderförmigen Startgeometrie konvergiert die Berechnung in ca. 10 Iterationsschritten stabil gegen die gesuchte Minimalfläche. In der unteren Hälfte von Abbildung 3.21 wurde derselbe „Versuch“ mit einem Seilnetz anstatt der Membran durchgeführt. Als Formfindungslastfall wurde hier für alle Seile eine konstante Vorspannung sowohl in Meridian- als auch in Radialrichtung angesetzt. Wie man aus dem in der Mitte dargestellten Iterationsverlauf entnehmen kann, wandern die in Radialrichtung angeordneten Seile zunehmend zur Mitte hin. Diese Einschnürung der Geometrie ist ein Zeichen für einen inkompatiblen Spannungszustand, für den keine Gleichgewichtsgeometrie gefunden werden kann.

Werden beim Katenoid die Seile jedoch diagonal angeordnet, ist ein konstant vorgespanntes Seilnetz möglich (siehe Abbildung 3.22 links). Die entstehende Fläche ist mathematisch als *einschaliges Hyperboloid* bekannt und zählt zur Familie der Regelflächen. Diese werden durch „Bewegung einer Geraden im Raum“ gebildet [Zei96]. Bei dem vorliegenden Seilnetz entsprechen die Seile exakt den erzeugenden Geraden, was als fast trivialer Fall gekrümmter Flächentragwerke angesehen werden kann, da kein Kraftaustausch zwischen den einzelnen Seilen auftritt. Einen ähnlichen Fall eines Seilnetzes mit geraden, konstant vorgespannten Seilen erhält man durch spezielle Vernetzung eines *hyperbolischen Paraboloids* (siehe Abbildung 3.22 Mitte): Da der *Hypar* ebenfalls zu den Regelflächen zählt, entsteht durch Vernetzung entlang der erzeugenden Geraden ebenfalls ein Seilnetz aus geraden Seilen, die zwischen den Auflagern gespannt sind. Vernetzt man den *Hypar* jedoch näherungsweise entlang den Hauptkrümmungen, lässt sich ein Seilnetz erzeugen, dessen Seile konstant vorgespannt sind und keine Geraden bilden (siehe Abbildung 3.22 rechts).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die für die Formfindung von Membranen entwickelten Methoden nicht ohne weiteres für die Formfindung von Seilnetzen eingesetzt werden können. Ausschlaggebend sind hierfür v. a. die unterschiedlichen Vernetzungsmöglichkeiten von Seilnetzen, die das Ergebnis der Formfindung erheblich beeinflussen können (siehe Katenoid-Beispiel). Dieses Problem existiert bei vorgespannten Membranen aufgrund ihrer „echten“ Flächigkeit nicht. Prinzipiell ist eine kraftgesteuerte Formfindung möglich, ob sie jedoch zu den gewünschten Zielen führt, muss von Projekt zu Projekt abgewägt werden.

3.3 Numerische Formfindung

Mit dem Einzug immer leistungsfähigerer Rechner und der gleichzeitigen Fortentwicklung der numerischen Berechnungsverfahren gewinnt die numerische Formfindung kontinuierlich an Bedeutung: Sie bietet dem Planer ein äußerst leistungsfähiges Werkzeug, vorge-spannte Tragwerke akkurat anhand eines Computermodells zu entwickeln. Damit lässt sich einerseits die sehr kostspielige und zeitaufwendige experimentelle Formfindung umgehen, andererseits können auch spezielle Spannungsvorgaben gezielt dem Modell hinzugefügt werden: So lassen sich beispielsweise die durch Seifenhautversuche erzeugten Minimalflächen auch im Rechner generieren, zusätzlich hat man aber bei numerischer Simulation die Möglichkeit, die Spannungen in einer Richtung separat zu erhöhen. Dies eröffnet neue gestalterische Möglichkeiten, die die empirischen Experimente nicht zulassen. Die Komplexität der numerischen Berechnungsmodelle ist dabei nahezu unbegrenzt steigerbar.

Bei der Entwicklung der numerischen Verfahren zur Formfindung treten jedoch Probleme auf, die auf den ersten Blick nicht offensichtlich sind. Diese werden einerseits durch die Numerik an sich verursacht, andererseits gilt es auch, evtl. auftretende physikalische Probleme wie z. B. vorgegebene inkompatible Spannungszustände infolge anisotroper Vorspannung (siehe Abschnitt 3.2.2) zu bewältigen. Der nächste Abschnitt stellt diesbezüglich Lösungsvorschläge vor, die in einem vielseitig einsetzbaren Formfindungsalgorithmus münden.

3.3.1 Diskretisierung des Originalproblems

Startpunkt der Entwicklung der numerischen Formfindungsmethode bildet die Definition des Formfindungsproblems gemäß Abschnitt 3.1.1: Es wird die Gleichgewichtsfläche für einen gegebenen Formfindungslastfall bezüglich ebenfalls gegebener Randbedingungen gesucht. Zur Vereinfachung der Problembeschreibung soll bis auf weiteres der Formfindungslastfall lediglich aus der Membranvorspannung n bestehen, äußere Lasten werden zunächst noch nicht berücksichtigt.

Für die numerische Erfassung der Problemstellung erfolgt die Flächenbeschreibung in der in Abschnitt 2.2.4 aufgezeigten, diskretisierten Weise: Die Fläche besteht aus einer endlichen Anzahl finiter Elemente, deren Topologie zwar bekannt ist, die geometrische Position der Netzknoten aber eine endliche Anzahl von unbekanntem Variablen darstellt. Man kennt somit die Anzahl der FE-Knoten sowie deren Zuordnung zu den finiten Elementen. Der Ortsvektor eines jeden einzelnen Knotens ist zunächst noch unbekannt und soll nun im Laufe der Formfindung derart bestimmt werden, so dass das resultierende FE-Netz eine Diskretisierung der kontinuierlichen Gleichgewichtsfläche darstellt.

Zu dieser diskretisierten Flächendarstellung lässt sich ein Gedankenexperiment anstellen, bei dem über einer gegebenen Fläche ein vorhandenes Netz ausgebreitet werden soll. Zunächst wird man versuchen, die Ränder des Netzes mit den Flächenrändern deckungsgleich zu machen, wodurch sich auch das Netz im Flächeninneren in seine Form zieht. Diese Vorstellung stimmt aber nur bedingt mit einem FE-Netz überein. Denn bei dem gedanklichen Netz impliziert man stets eine gewisse Elastizität der Netzkanten, die die Knoten auf der

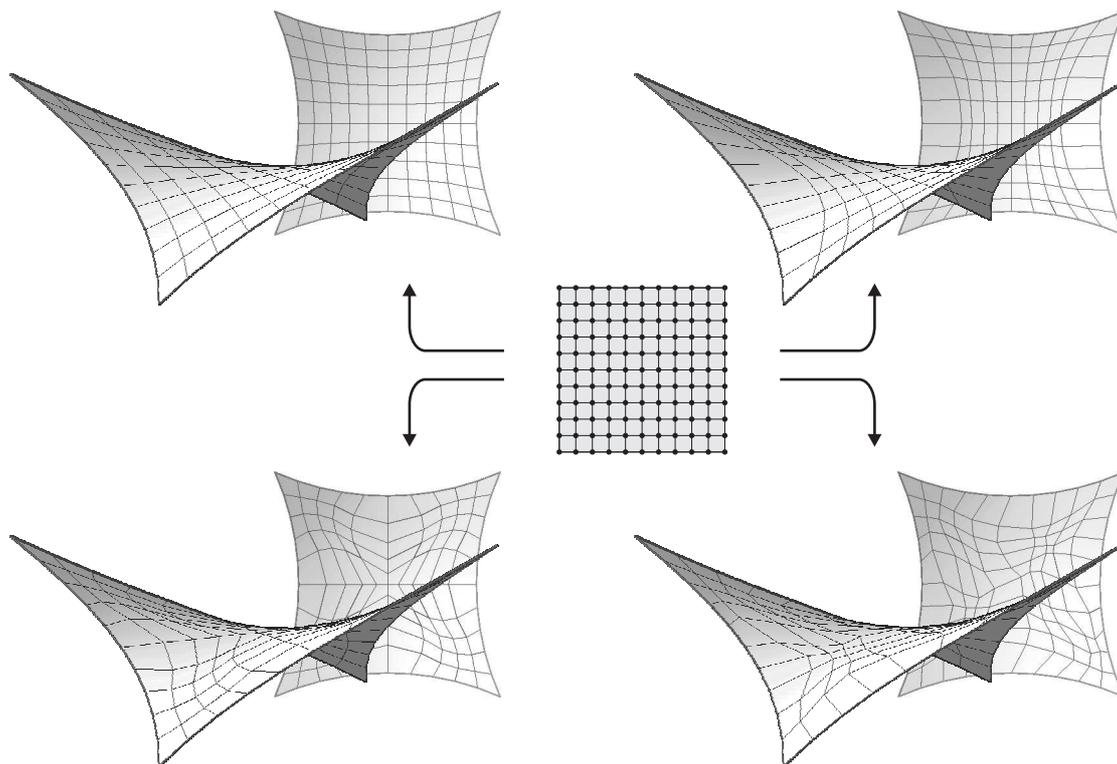


Abbildung 3.23: Verschiedene Diskretisierungen eines Vierpunktsegels mit gleicher Netztopologie („Schwimmende Netze“).

Fläche einigermaßen gleichmäßig verteilen wird. Bei einer FE-Berechnung stellen die Kanten jedoch nur die Abgrenzung zwischen zwei Elementen dar, verfügen aber über keinerlei mechanische Eigenschaften. Das Netz könnte somit beliebig auf der Fläche verschoben werden und würde dennoch stets eine zulässige Diskretisierung der Fläche bilden (solange keine Überlappung zwischen einzelnen Elementen auftritt). Folglich kann es für jede Fläche nie eine eindeutige Flächendiskretisierung geben, sondern es ist stets eine unendliche Anzahl an Diskretisierungen mit der gleichen Topologie möglich. Als Beispiel sind in Abbildung 3.23 vier unterschiedliche Diskretisierungsvarianten eines einfachen Vierpunktsegels dargestellt. Die Flächendiskretisierungen lassen sich allein durch Verschieben der Netzknoten auf der Fläche in die jeweils andere Diskretisierung transformieren. Während bildlich ausgedrückt die Netzknoten auf der Fläche herumschwimmen können, bleibt die Topologie, die in diesem Beispiel aus 100 quadratisch angeordneten Viereckselementen besteht, stets unverändert.

Die unendliche Anzahl möglicher Flächendiskretisierungen verursacht auch eines der Hauptprobleme der numerischen Formfindung: Selbst wenn eine physikalisch existierende Lösung vorliegt, ist der Computer nicht in der Lage, diese direkt zu finden. Die Schwierigkeit hierbei ist weniger die Erfüllung der maßgeblichen Gleichungen als das Dilemma, aus einer unendlichen Lösungsmenge genau eine Lösung „herauszupicken“. Das *inverse Problem*, aus gegebenen Spannungen eine zugehörige diskretisierte Gleichgewichtsfläche zu ermitteln, verfügt somit über keine eindeutige Lösung und wird deshalb mathematisch als *schlecht gestellt* bezeichnet.

Versuch einer direkten numerischen Lösung. Diese Mehrdeutigkeit der Lösungen wirkt sich auch bei dem Versuch, das Formfindungsproblem direkt numerisch lösen zu wollen, negativ aus: Man beginnt die Herleitung eines numerischen Lösungsalgorithmus mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit, das in Gleichung (3.1) gegeben ist. Dieses postuliert ein Verschwinden der virtuellen Arbeit, falls sich ein gegebenes Spannungsfeld im Gleichgewicht befindet. Durch Linearisierung der virtuellen Verschiebungen nach Gleichung (2.121) und der Vernachlässigung äußerer Lasten ergibt sich folgendes nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungen an den Freiheitsgraden u_r :

$$-\frac{\partial W}{\partial u_r} = R_r = h \int_a \left(\sigma : \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u_r} \right) da = 0 \quad (3.36)$$

R_r sind dabei die Knotenresiduen, die im Gleichgewichtszustand verschwinden müssen. Aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems ist eine iterative Berechnung nötig: Ausgehend von einer beliebigen Startgeometrie verbessert man die Knotenpositionen bis zur Lösung des Problems. Die Startgeometrie kann hierbei kontinuumsmechanisch als unverformte Referenzkonfiguration interpretiert werden, die Gleichgewichtsgeometrie als aktueller verformter Zustand. Da dieser noch unbekannt ist, wird Gleichung (3.36) auf die bekannte Startgeometrie durch eine Pull-Back-Operation transformiert (siehe Gleichungen (2.47) und (2.119)):

$$\begin{aligned} R_r &= H \int_A \sigma : \left[\frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^{-T} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial u_r} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \right] \det \mathbf{F} dA \\ \sigma^T &\stackrel{=}{=} \sigma \quad H \int_A \det \mathbf{F} (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} dA = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Höhe des Membranquerschnitts im Verlauf der Formfindung konstant bleibt ($h = H$). Dies ist auch zutreffend, da der Referenzzustand in diesem Fall lediglich eine fiktive Hilfsgröße zur iterativen Berechnung darstellt. Weiterhin konnte Gleichung (3.37) dadurch vereinfacht werden, dass die doppelte Verjüngung eines symmetrischen Tensors (wie z. B. der Cauchy-Spannungstensor σ) mit einem unsymmetrischen Tensor gleich der doppelten Verjüngung des symmetrischen Tensors mit der Transponierten des unsymmetrischen Tensors ist:

$$\sigma : \left(\mathbf{F}^{-T} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial u_r} \right) \sigma^T \stackrel{=}{=} \sigma : \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (3.38)$$

Das nichtlineare Gleichungssystem wird nun mittels Newton-Raphson-Verfahren gemäß Gleichung (2.123) linearisiert. Die Tangentensteifigkeitsmatrix K_{rs} beschreibt die Änderungsrate der Residualkraft am Freiheitsgrad u_r für eine Veränderung der Geometrie in Richtung des Freiheitsgrades u_s :

$$K_{rs} = \frac{\partial R_r}{\partial u_s} = H \int_A \frac{\partial}{\partial u_s} \left[\det \mathbf{F} (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} \right] dA = 0 \quad (3.39)$$

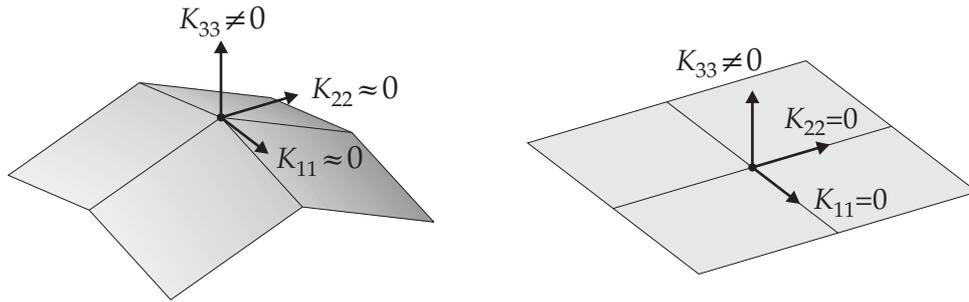


Abbildung 3.24: Singuläre Steifigkeiten bei direkter numerischer Formfindung.

Für eine eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems muss eine nicht-singuläre Steifigkeitsmatrix vorliegen [Zei96]. Bestimmt man jedoch die Determinante der entstehenden Gesamtsteifigkeitsmatrix, wird man unweigerlich erkennen, dass bei diesem direkten numerischen Lösungsversuch deren Wert näherungsweise gleich Null ist:

$$\det(K_{rs}) \approx 0 \quad (3.40)$$

Dies ist ein Anzeichen für eine nahezu singuläre Systemmatrix, durch die eine direkte Lösung des Problems verhindert wird. Die Singularität lässt sich darauf zurückführen, dass Knotenverschiebungen tangential zur Membranfläche so gut wie keine Veränderung der Residualkräfte bewirken. Entsprechend gering sind die zugehörigen Steifigkeiten (siehe Abbildung 3.24 links). Liegt der Knoten sogar in einer „echten“ Ebene, sind die auftretenden Steifigkeiten bezüglich tangentialer Freiheitsgrade sogar exakt Null (siehe Abbildung 3.24 rechts). Der numerischen Berechnung fehlt durch die verschwindenden Steifigkeiten, bildlich gesprochen, der Wegweiser, in welchen Richtungen eine Verbesserung der Lösungen erreicht werden kann. Eine feinere Diskretisierung der Membranfläche verschlimmert sogar das Problem, da der „Knickwinkel“ zwischen zwei benachbarten Elementen durch die bessere Flächenapproximation zunehmend kleiner wird. Folglich verringert sich auch die Steifigkeit bzgl. der tangentialen Verschiebungsfreiheitsgrade.

Es gelingt somit nicht, ein numerisches Lösungsverfahren für die Formfindung von vorgespannten Flächentragwerken zu entwickeln, bei dem direkt die maßgebliche Gleichgewichtsbedingung gelöst wird. Die Ursache hierfür ist die inverse Fragestellung, die eine Mehrdeutigkeit an diskreten Lösungen zulässt, selbst wenn eine eindeutige physikalische Lösung vorliegt.

3.3.2 Updated-Reference-Strategy: Stabilisierung des numerischen Problems

Um das Formfindungsproblem auf numerische Weise lösen zu können, ist eine Stabilisierung der ursprünglichen numerischen Fragestellung erforderlich. Im Laufe der Zeit sind hierzu eine Vielzahl verschiedener Herangehensweisen entwickelt worden (siehe [Wüc07] für einen entsprechenden Überblick). Als äußerst effizientes Verfahren hat sich die sogenannte *Updated Reference Strategy* herauskristallisiert [BR99]: Aufgrund ihrer kontinuumsmechanisch intuitiven Herangehensweise wird eine physikalische Interpretierbarkeit des

Lösungsprozesses erheblich erleichtert, da keine rein mathematischen „Kunstgriffe“ erforderlich sind.

Die Grundidee hinter der Updated Reference Strategy (kurz *URS* genannt) besteht darin, ein schlecht gestelltes Originalproblem durch ein verwandtes, gut gestelltes Ersatzproblem anzunähern. Da dadurch verständlicherweise auch nur eine Ersatzlösung erhalten werden kann, wird das Ersatzproblem wiederholt gelöst, um letztendlich zur Lösung des Originalproblems zu konvergieren. Diese Herangehensweise wird mathematisch als *Homotopieverfahren* bezeichnet [BR01].

Konkret auf die Formfindung angewandt, wird für das Ersatzproblem die Gleichgewichtsbedingung etwas modifiziert: Anstelle direkt die unbekannte Gleichgewichtsfläche für gegebene Cauchy-Spannungen σ_0 zu suchen, soll ausgehend von einer bekannten Referenzfläche mit gegebenen PK2-Spannungen \mathbf{S} die zugehörige verformte Geometrie gefunden werden. Das ursprünglich komplett in der verformten Konfiguration definierte Problem wird somit von einer räumlichen Darstellung in eine materielle Problemstellung transformiert. Zugleich wird durch eine beabsichtigte kontinuumsmechanische Fehlinterpretation eine Modifikation des Originalproblems erreicht: Man setzt die PK2-Spannungen der bekannten Referenzfläche gleich dem Sollspannungszustand σ_0 , obwohl dieser in seiner ursprünglichen Bedeutung als Cauchy-Spannung definiert ist. Würden die PK2-Spannungen der Referenzfläche kontinuumsmechanisch korrekt durch eine Push-Back-Operation des Sollspannungszustands ermittelt werden, würde man das Originalproblem lediglich in einer anderen Darstellung erhalten (vgl. Gleichung (2.104)), die Singularität des Problems bliebe aber bestehen. Nachfolgend sind die aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit erhaltenen maßgebenden Gleichungen sowohl für das Originalproblem der Formfindung als auch für dessen modifizierte Version aufgeführt (äußere Lasten werden hier der Übersichtlichkeit halber nicht berücksichtigt):

$$\begin{aligned} -\delta W_{orig} &= -\delta W_\sigma = \int_{\Omega} (\sigma : \delta \mathbf{e}) \, dv = 0 & \text{mit } \sigma \equiv \sigma_0 \\ -\delta W_{mod} &= -\delta W_{\mathbf{S}} = \int_{\Omega} (\mathbf{S} : \delta \mathbf{E}) \, dV = 0 & \text{mit } \mathbf{S} \equiv \sigma_0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die auftretenden Verschiebungen bei der Lösung des Ersatzproblems bewirken, dass die resultierenden physikalischen Cauchy-Spannungen auf der zugehörigen verformten Geometrie von den Zielvorgaben σ_0 abweichen. Dies lässt sich der in Gleichung (2.70) gegebenen Transformationsvorschrift zwischen Cauchy- und PK2-Spannungen entnehmen:

$$\sigma = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \neq \sigma_0 \quad \text{falls } \mathbf{F} \neq \mathbf{I} \quad (3.42)$$

Obwohl die resultierende Gleichgewichtsfläche einen physikalisch stabilen Zustand darstellt, erfordert die Abweichung vom Sollspannungszustand einen erneuten Formfindungsschritt: Hierzu wird die aktuelle Konfiguration als neue Referenzfläche für das Ersatzproblem uminterpretiert. Bei diesem *reference update* werden auch die in der Struktur wirkenden Spannungen zurückgesetzt. Anstelle der Spannungen nach Gleichung (3.42) bringt man erneut die PK2-Spannungen auf, die den gewünschten Spannungen σ_0 entsprechen. Somit

gilt für den Formfindungsschritt $i + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(i+1)} &= \mathbf{x}^{(i)} \\ \mathbf{S}^{(i+1)} &= \sigma_0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Löst man erneut das Ersatzproblem, werden die auftretenden Verschiebungen bei einer physikalisch lösbaren Fragestellung kleiner ausfallen als im vorherigen Iterationsschritt. Dementsprechend geringer ist auch die Abweichung der resultierenden Cauchy-Spannungen der neu erhaltenen Fläche von den Sollspannungen. Um nun die Lösung des Originalproblems zu erhalten, sind so lange weitere Formfindungsschritte durchzuführen, bis Konvergenz erreicht ist. Als Konvergenzschranke werden sowohl die Spannungsabweichungen als auch die Verschiebungen in einem Formfindungsschritt herangezogen.

In Abbildung 3.25 ist die iterative Formfindung mittels URS am Beispiel der Scherkschen Minimalfläche aufgezeigt. Den Ausgangspunkt bildet eine recht grobe Annäherung der Minimalfläche (Abbildung 3.25 links oben). Voraussetzungen für eine zulässige Startgeometrie sind die korrekte Topologie der Fläche und deren Kompatibilität mit den Randbedingungen. Nachdem auf diese Startfläche eine isotrope PK2-Spannung σ_0 aufgebracht wurde, ergibt sich aus Gleichgewichtsbeziehungen die verformte Geometrie des ersten Formfindungsschritts. Die Spannungsabweichungen sind hier noch erheblich. Jedoch erhält man schon nach dem zweiten Berechnungsschritt durchaus akzeptable Spannungswerte. Nach fünf Formfindungsschritten verringert sich der Fehler auf ca. 10%, nach 10 Iterationen beträgt er lediglich 4%. Wie schnell das Verfahren konvergiert, hängt sehr von der gewählten Ausgangsgeometrie ab.

Eine Steigerung der Konvergenzrate lässt sich durch eine Verallgemeinerung des zu lösenden Ersatzproblems bewerkstelligen: Diese Generalisierung erhält man durch eine Überblendung der ursprünglichen Fragestellung δW_σ mit dem stabilisierend wirkenden Ersatzproblem δW_S . Dazu wird der Homotopieparameter λ eingeführt, der eine lineare Interpolation zwischen dem ursprünglichen und modifizierten Problem ermöglicht:

$$\delta W_{mod}^* = \lambda \delta W_\sigma + (1 - \lambda) \delta W_S \quad (3.44)$$

Hierdurch lässt sich einerseits genügend Stabilisierung dem Originalproblem „zumischen“, um eine gute Lösbarkeit zu erreichen. Andererseits kann durch Beibehaltung der Ausgangsfragestellung eine schnellere Konvergenz erzielt werden. Welcher Wert von λ jedoch die besten Ergebnisse erzielt, hängt sehr von den Eigenheiten der jeweiligen Problemstellung ab. Vermutet man, dass die Startgeometrie der Iteration noch weit von der Zielgeometrie entfernt ist, empfiehlt es sich, λ verhältnismäßig klein zu wählen, um die Rechnung stabil zu halten. Nähert man sich der gesuchten Gleichgewichtsfläche, kann auch der Wert von λ erhöht werden [BR01].

Da in den meisten praktischen Anwendungsfällen der Stabilität der Berechnung eine größere Bedeutung zukommt als einer schnellen Konvergenzrate, die Instabilitäten verursachen könnte, ist es i. A. zweckmäßig, den Homotopieparameter λ möglichst gering zu wählen. Aus diesem Grund wird im nachfolgenden Text lediglich das reine Ersatzproblem betrachtet und keine Interpolation mit dem Originalproblem vorgenommen ($\lambda = 0$).

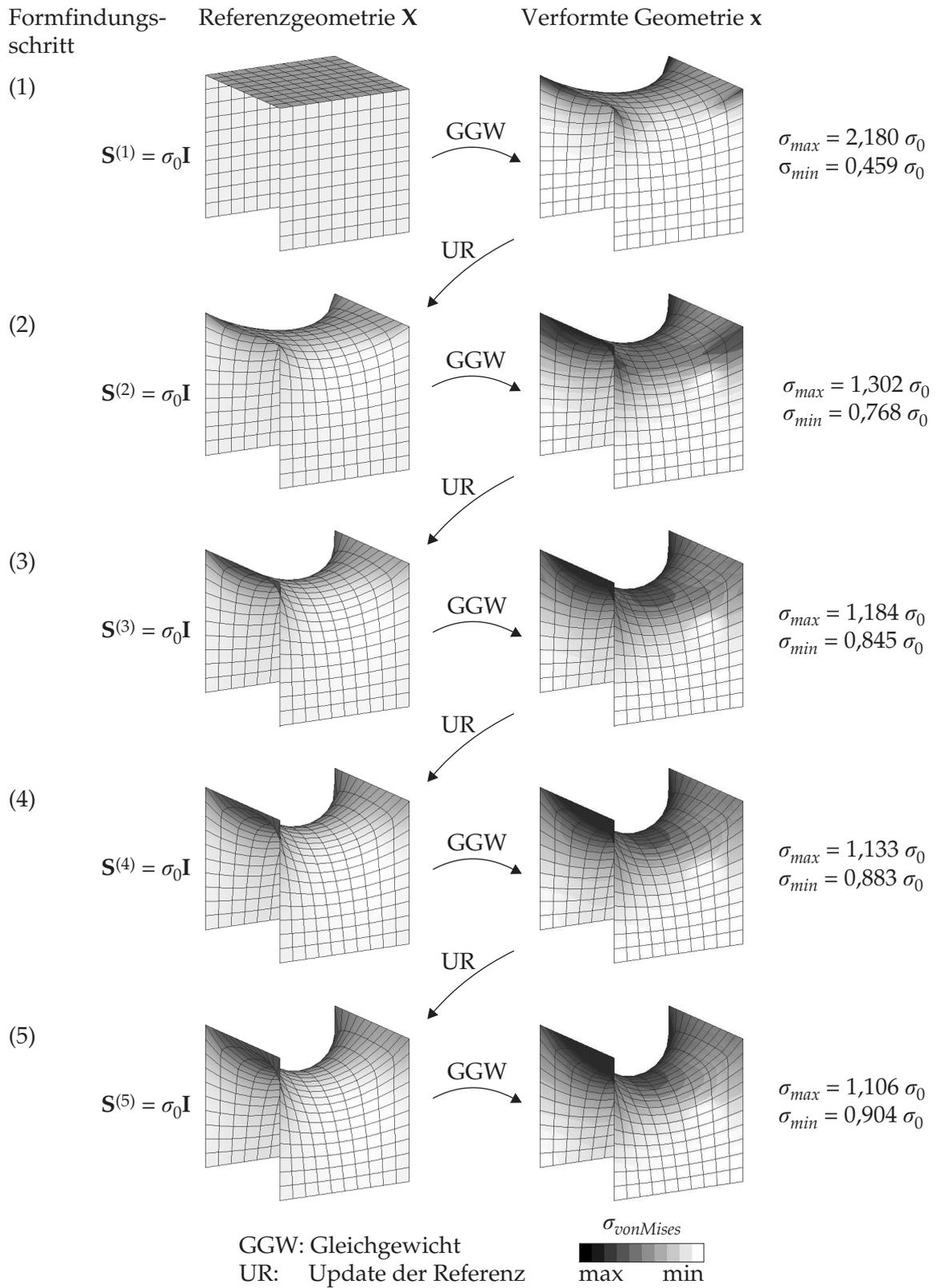


Abbildung 3.25: Formfindung der Scherkschen Minimalfläche mittels URS.

URS-Membranelement. Die Elementformulierung von Membranelementen zur Formfindung mittels URS wird durch Diskretisierung und anschließende Linearisierung der modifizierten Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (3.41) abgeleitet.

Der Vektor der Ungleichgewichtskräfte ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (2.118) und der Symmetrie des Spannungstensors (vgl. Gleichung (3.38)) zu:

$$R_r^{urs,mem} = H \int_A \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_r} dA = H \int_A S^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta) dA \quad (3.45)$$

$S^{\alpha\beta}$ sind hierbei die Koeffizienten des PK2-Spannungstensors bzgl. der lokalen kovarianten Basis.

Die Tangentensteifigkeitsmatrix erhält man durch Differentiation der Ungleichgewichtskräfte nach dem Freiheitsgrad u_s :

$$K_{rs}^{urs,mem} = H \int_A \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u_r \partial u_s} dA = H \int_A S^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s}) dA \quad (3.46)$$

Da die PK2-Spannungen auf der unveränderlichen Referenzkonfiguration wirken, müssen in Gleichung (3.46) keine Ableitungen der Spannungsterme bzgl. eventueller Verschiebungen der aktuellen Geometrie berücksichtigt werden. Ebenso entfallen die zweiten Ableitungen der kovarianten Basisvektoren, da die aktuellen Ortsvektoren der FE-Knoten nur linear von den Knotenverschiebungen abhängen (siehe Gleichung (2.114)):

$$\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha(\theta^1, \theta^2)}{\partial u_r} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\partial N^k(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_k}{\partial u_r} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_\alpha(\theta^1, \theta^2)}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\partial N^k(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha} \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}_k}{\partial u_r \partial u_s}}_{=0} = 0 \quad (3.48)$$

Es fällt auf, dass die Steifigkeitsmatrix der Membranelemente zur Formfindung lediglich aus Größen der Referenzkonfiguration (H , A , $S^{\alpha\beta}$) besteht und unabhängig von der Geometrie der aktuellen Konfiguration ist. Die Steifigkeitsmatrix kann somit als Funktion der Referenzgeometrie aufgefasst werden ($K_{rs}^{urs,mem}(\mathbf{X})$), die sich zwar in jedem Formfindungsschritt nach einem Update der Referenz ändert, nicht jedoch bei der Gleichgewichtssiteration nach dem Newton-Raphson-Verfahren innerhalb eines Formfindungsschritts. Als Folge dessen vereinfacht sich die iterative Berechnung der verformten Geometrie in einem Formfindungsschritt zu einem einmaligen Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Weiterhin ist anzumerken, dass für die Vorgabe von Zugspannungen ($S^{\alpha\beta} > 0$) stets eine positiv-definite, symmetrische Steifigkeitsmatrix vorliegt, die eine stabile Lösung des Gleichungssystems ermöglicht. Die ursprünglich nichtlineare, schlecht-gestellte Ausgangsfragestellung der Formfindung kann somit durch die Updated Reference Strategy in eine Reihe von linearen, gut-gestellten Problemen übergeführt werden.

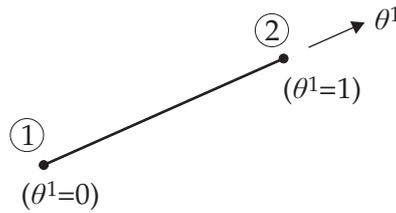


Abbildung 3.26: Lineares Seilelement.

URS-Seilelement. Seilelemente stellen eindimensionale Strukturelemente dar, die durch Dimensionsreduzierung aus Membranelementen abgeleitet werden. Für die Formfindung genügt i. A. ein lineares, zweiknotiges Seilelement (siehe Abbildung 3.26). Die zugehörigen Formfunktionen lauten:

$$\begin{aligned} N^1(\theta^1) &= 1 - \theta^1 \\ N^2(\theta^1) &= \theta^1 \end{aligned} \quad \text{mit } \theta^1 \in [0;1] \quad (3.49)$$

Für die Integration des Residualvektors, der sich aus dem modifizierten Formfindungsproblem nach Gleichung (3.41)) ergibt, ist aufgrund der Eindimensionalität der Seile nur noch eine Integration über die Seillänge L der Referenzkonfiguration erforderlich. Dies impliziert auch die Annahme, dass über den Seilquerschnitt A keine Änderungen auftreten, wodurch der Querschnitt aus dem Integral herausgezogen werden kann:

$$R_r^{urs,seil} = A \int_L \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_r} dL = A \int_L S^{11} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) dL \quad (3.50)$$

Des Weiteren reduziert sich durch die Dimensionsreduzierung die Anzahl unabhängiger Tensorkoeffizienten für die Tensoren jeder Stufe auf lediglich einen Eintrag. S^{11} ist hierbei der einzige Koeffizient des Spannungstensors bzgl. der lokalen kovarianten Basis. Da bei Verwendung der konvektiven Basis die Metrik des Elements in den Tensorkoeffizienten enthalten ist, darf S^{11} nicht mit den Spannungen \tilde{S}^{11} bzgl. der lokalen kartesischen Basis verwechselt werden, die in physikalischen Einheiten angegeben werden.

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich analog zur Steifigkeitsmatrix des Membran-Formfindungselements durch Differentiation des Residualvektors:

$$K_{rs}^{urs,seil} = A \int_L \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u_r \partial u_s} dL = A \int_L S^{11} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) dL \quad (3.51)$$

Die Gleichungen (3.50) und (3.51) sind nicht auf lineare Elemente beschränkt, sondern können auch bei höherwertigen Ansatzfunktionen verwendet werden. Für die in Abbildung 3.26 aufgezeigten, linearen zweiknotigen Seilelemente lassen sich jedoch weitere Vereinfachungen vornehmen: Da sowohl die Spannung als auch die Dehnung innerhalb eines Elements stets konstant bleibt, ist die Integration über die Länge trivial. Weiterhin kann das Produkt aus den PK2-Spannungen und der Querschnittsfläche zur Seilkraft N zusammengefasst werden, die den Eingangsparameter der Formfindung darstellt:

$$N = \tilde{S}_{11} A = \frac{S_{11} A}{L^2} \quad (3.52)$$

Auch hier tritt wieder die gewollte kontinuumsmechanische Missinterpretation der Spannungen auf, die für URS entscheidend ist: Die Seilkraft N sollte eigentlich die resultierende Seilkraft im verformten Zustand sein. Man beachte, dass der Großbuchstabe N lediglich zur Unterscheidung von den Membranspannungen n gewählt wurde und kein Zeichen für die zugehörige Konfiguration darstellt. Zur Stabilisierung des Problems wird jedoch die Seilkraft als Produkt aus den PK2-Spannungen und der Querschnittsfläche der Referenzkonfiguration interpretiert.

Die vereinfachte Darstellung des Residualvektors für lineare Seilelemente lautet:

$$R_r^{urs,seil} = \frac{N}{L}(\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \quad (3.53)$$

Die zugehörige Steifigkeitsmatrix ergibt sich zu:

$$K_{rs}^{urs,seil} = \frac{N}{L}(\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) \quad (3.54)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix eines Seiles zur Formfindung mittels URS setzt sich analog zur Steifigkeitsmatrix der Membranelemente zur Formfindung (siehe Gleichung (3.46)) lediglich aus Größen der unveränderbaren Referenzkonfiguration zusammen. Sie ist somit für die iterative Berechnung des Gleichgewichts während eines Formfindungsschrittes stets konstant. Dies wiederum bringt den Vorteil, dass für jede beliebige Kombination von Seil- und Membranelementen nach der Updated Reference Strategy stets ein lineares Gleichgewichtsproblem vorliegt, das schon nach einem Berechnungslauf ausiteriert ist.

Unterschied URS - Kraftdichte. Die für die Formfindung von Seilnetzen sehr verbreitete Kraftdichtemethode wird in [BR99, Wüc07] als Sonderfall der Updated Reference Strategy bezeichnet. Betrachtet man die jeweiligen maßgeblichen Gleichungen, lässt sich auch unweigerlich eine Analogie erkennen, wie im Nachfolgenden gezeigt wird. Die Kraftdichtemethode führt für Seile den Begriff der *Kraftdichte* q als Verhältnis der Seilkraft zur Seillänge ein [LS71, Sch74], das während der Berechnung konstant bleibt:

$$q = \frac{N_{ref}}{L} = \frac{N_{akt}}{l} \quad (3.55)$$

Zwar lässt die Kraftdichte (englisch: „force density“) keine physikalische Interpretation zu, dennoch bewirkt dieser Kunstgriff einige Vorteile für das Berechnungsverfahren: Die vorherrschende Seilkraft in einem beliebigen Zustand erhält man aus Multiplikation der bekannten Kraftdichte des Seiles mit der aktuellen Seillänge l . Somit bietet jede Konfiguration allein genügend Informationen zur Bestimmung der Kräfte, sodass nicht mehr zwei Zustände miteinander verglichen werden müssen, um auf evtl. Dehnungen bzw. Spannungen zu schließen:

$$N_{akt} = q l \quad (3.56)$$

Betrachtet man nun die in den Gleichungen (3.53) und (3.54) gegebenen Elementmatrizen des zweiknotigen Seilelements nach der Updated Reference Strategy, fällt auf, dass darin

jedesmal die Kraftdichte des Seiles enthalten ist [Ble98, BR99]. Der Residualvektor und die Steifigkeitsmatrix lassen sich unter Verwendung der Kraftdichte q wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} R_r^{urs,seil} &= q (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \\ K_{rs}^{urs,seil} &= q (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Formal liefern die Updated Reference Strategy und die Kraftdichtemethode somit dieselben Elementmatrizen für die Formfindung von Seilen, die Herleitung ist jedoch unterschiedlich. Während die Kraftdichtemethode direkt für Seile entwickelt wurde [Lin99], stellt die Updated Reference Strategy das allgemeinere Verfahren zur Formfindung dar: Das modifizierte Problem wurde für ein Kontinuum definiert und kann durch Dimensionsreduzierung sowohl auf Membranen als auch auf Seile angewendet werden [BR99].

Obwohl die „Technik“ der Kraftdichtemethode keine Neuheiten gegenüber der URS bietet, stellt ihre Grundidee dennoch eine weiterhin äußerst interessante Option zur Formfindung von Seilnetzen dar: Da das direkte Vorschreiben von Seilkräften ein physikalisch unlösbares Problem verursachen kann (siehe Abschnitt 3.2.4), müssen Abweichungen von einer konstanten Seilvorspannung gezielt in Betracht gezogen werden. Dies gelingt, indem man statt der Seilkräfte N die Kraftdichte q des Seilnetzes vorschreibt. Deren Wert lässt sich beispielsweise aus der angestrebten Seilkraft und der Maschenweite des Netzes berechnen. Die zugehörige Gleichgewichtsfläche wird i. A. variable Seilkräfte aufweisen, die bei einer einigermaßen regelmäßigen Netztopologie jedoch um den angestrebten Mittelwert streuen werden. Die jeweilige Größe der Seilkraft kann direkt aus der Geometrie des Seilnetzes abgelesen werden, da durch Einführung der Kraftdichte ein linearer Zusammenhang zwischen der Größe eines Seilelements und der darin vorherrschenden Spannung definiert wurde: Je länger ein Seil in der Gleichgewichtsfläche ist, desto größer ist seine Seilkraft.

Durch die Anwendung der Kraftdichte vereinfacht sich der Berechnungsablauf erheblich, da nur ein Formfindungsschritt notwendig ist: Ein Nachziehen der Referenz in einem zweiten Formfindungsschritt würde keine Änderung des Ergebnisses bringen, da die neue Referenzgeometrie schon die Gleichgewichtsgeometrie für die gegebenen Kraftdichten darstellt. Bei der Vorgabe von Seilkräften müssten die Kraftdichten in jedem Formfindungsschritt neu nach Gleichung (3.55) berechnet werden, weswegen mehrere Formfindungsschritte bis zur Konvergenz nötig sind.

Die Gleichgewichtsgeometrie eines Seilnetzes mit konstanter Kraftdichte ist lediglich von der Topologie des Netzes und seinen Randbedingungen abhängig [GS74, Lin99]. Man kann somit mit einer beliebigen Startgeometrie des Seilnetzes starten und erhält nach einem Lösungsschritt stets dieselbe Gleichgewichtsfläche. Abbildung 3.27 verdeutlicht dies am Beispiel einer Chinese hat-Struktur: Die zwei Startgeometrien in der oberen Bildhälfte sind zwar topologisch gleich, die Lage der Seilnetzknotten ist jedoch unterschiedlich. Nichtsdestotrotz ist die zugehörige Gleichgewichtsfläche für eine konstante Kraftdichte q aller Seilelemente für beide Startgeometrien identisch (siehe Abbildung 3.27 Mitte). Ein Nachteil konstanter Kraftdichte für das gesamte Seilnetz offenbart sich bei genauerer Betrachtung des Ergebnisses: Während im Inneren des Seilnetzes die resultierende Maschenweite verhältnismäßig homogen ist, treten in den Randbereichen unschöne Verzerrungen der Netzgeometrie auf. Die Ursache hierfür sind die geometrischen Randbedingungen, die einen „Zuschnitt“

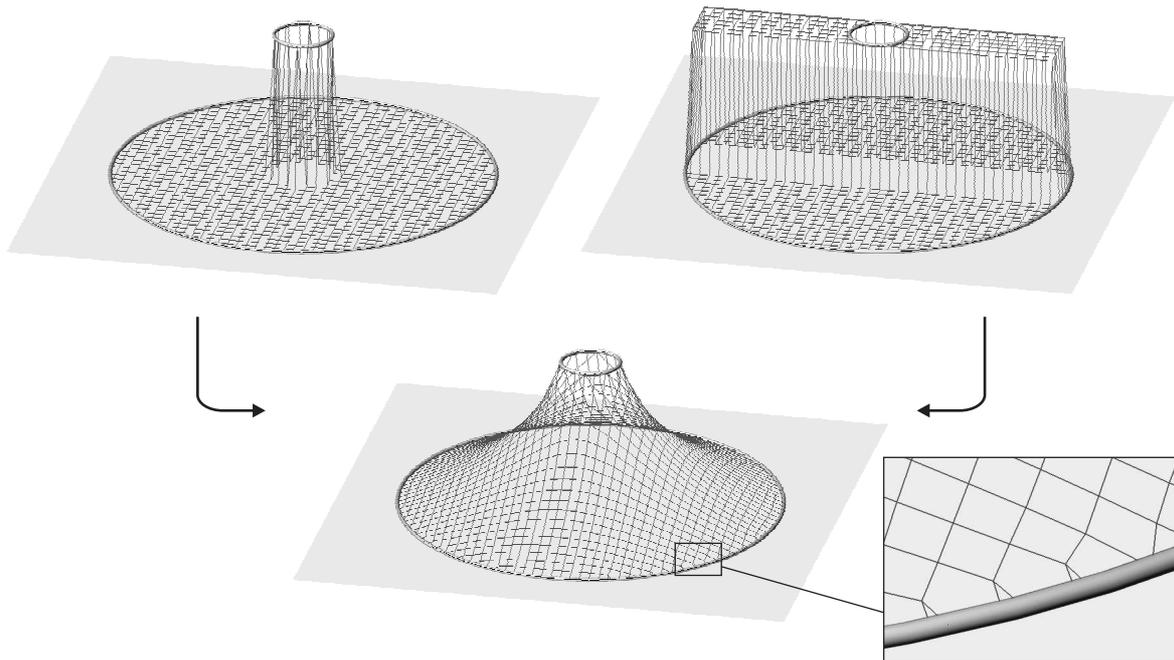


Abbildung 3.27: Formfindung von Seilnetzen unter Annahme konstanter Kraftdichte.

der ansonsten regelmäßigen Gitterstruktur erforderlich machen. Die betroffenen Seillängen sind folglich kürzer als die ursprüngliche Maschenweite. Setzt man nun für das gesamte Netz eine konstante Kraftdichte fest, wird offensichtlich, dass in den zugeschnittenen Seilen nahe des Randes aufgrund ihrer geringeren Länge kleinere Vorspannkräfte wirken als in den Seilen im Netzininneren. Um dennoch Gleichgewicht zu erreichen, verrautet sich das Netz, wie an dem vergrößerten Ausschnitt von Abbildung 3.27 rechts unten gesehen werden kann. Um diese Netzverzerrung zu vermeiden, müssen die Kraftdichten in den Randbereichen erhöht werden, wobei der individuelle Wert für jedes zugeschnittene Seilelement separat zu berechnen ist (siehe „T-Elemente“ in [GB88, GMSS00]).

Möchte man die Updated Reference Strategy zur Berechnung von Seilnetzen nach der Kraftdichtemethode verwenden, muss am Berechnungskern nichts geändert werden, da – wie gezeigt wurde – die Kraftdichtemethode bereits intrinsisch in der URS enthalten ist. Jedoch wirkt sich der Unterschied bei der Definition der Eingangsparameter aus: Da die Seilkräfte die natürlichen Eingangsparameter für die URS sind, man jedoch eine konstante Kraftdichte im Netz haben möchte, muss die Seilkraft für jedes Seil individuell aus dem Produkt der gewünschten Kraftdichte mal der Seillänge der Referenzkonfiguration bestimmt werden. Am weiteren Berechnungsablauf treten keine Änderungen auf.

Die Kraftdichtemethode genießt aufgrund ihrer Robustheit und Klarheit große Bedeutung. Es muss aber verdeutlicht werden, dass sie sich nur als grobe Näherung für die Formfindung von Membrantragwerken eignet und vornehmlich für die Formfindung von Seilnetzen eingesetzt werden sollte. Aber selbst hier bleibt für vorgefertigte Seilnetze mit konstanter Maschenweite die Frage offen, inwieweit die durch die Kraftdichtemethode erhaltene Spannungs- und Längenverteilung durch elastische Deformationen des Seilnetzes erreicht werden kann.

Formfindung mit Drucklasten. Die Updated Reference Strategy ist in der Lage, beliebige äußere formgebende Lasten beim Formfindungsprozess zu berücksichtigen. Die maßgebliche Gleichung umfasst in diesem Fall zusätzlich zur inneren virtuellen Arbeit infolge Vorspannung der Strukturelemente auch die externe virtuelle Arbeit äußerer Kräfte (siehe Gleichung (3.1)).

Besondere Bedeutung kommt der Druckbelastung zu, da sie die einzige Belastung darstellt, für die das Formfindungsproblem exakt unter konstanten Spannungen gelöst werden kann (siehe Abschnitt 3.2). Ihr spezielles physikalisches Verhalten verursacht jedoch einige Schwierigkeiten bei der numerischen Umsetzung: Eine Drucklast p wirkt stets senkrecht zur Oberfläche der aktuellen Geometrie. Dies bedeutet, dass die Größe des Lastvektors zwar gegeben ist, dessen Richtung jedoch von der Lage der Lastangriffsfläche im Raum abhängt. Ändert sich diese, ändert sich ebenfalls der Lastvektor. Die Drucklast wird deshalb auch als *verschiebungsabhängig* bzw. *Folgelast* bezeichnet [Sch82, Buf84].

In [BR01] wird die Herleitung der Elementmatrizen aufgezeigt. Der äquivalente Knotenlastvektor einer Drucklast p ergibt sich hiernach zu:

$$R_r^p = - \int_{\theta_2} \int_{\theta_1} p (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_r} d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.58)$$

Da die Drucklast von den Verschiebungen der Geometrie der aktuellen Konfiguration beeinflusst wird, ist sie auch in der Tangentensteifigkeitsmatrix zu berücksichtigen. Mathematisch folgt dies aus der Tatsache, dass im Gegensatz zu richtungstreuen Lasten die Ableitung des Residualvektors nach den Freiheitsgraden nicht mehr verschwindet. Bei der durchzuführenden Differentiation des Residualvektors stößt man jedoch auf eine weitere „Unannehmlichkeit“: Die entstehende Steifigkeitsmatrix infolge Last kann je nach Problemstellung symmetrisch oder unsymmetrisch sein [SR84]. Dies kann zu Problemen bei der Verwendung vieler numerischer Gleichungslöser führen, da von diesen oft eine symmetrische Systemsteifigkeitsmatrix erwartet wird. Durch einige Umformungen kann die Elementsteifigkeitsmatrix infolge Drucklast jedoch in einen symmetrischen und einen unsymmetrischen Anteil aufgespalten werden (für die genaue Herleitung sei auf [Ble98] verwiesen):

$$K_{rs}^p = -\frac{p}{2} \int_{\theta_2} \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}{\partial u_s} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_r} + \frac{\partial (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}{\partial u_r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_s} \right) d\theta_1 d\theta_2 - \frac{p}{2} \int_{\theta_1} \left(\mathbf{g}_1 \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_s} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_r} d\theta_1 \Bigg|_{\theta_2=0}^1 - \frac{p}{2} \int_{\theta_2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_s} \times \mathbf{g}_2 \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_r} d\theta_2 \Bigg|_{\theta_1=0}^1 \quad (3.59)$$

Der symmetrische Anteil in der ersten Zeile von Gleichung (3.59) besteht aus dem Integral über den Parameterraum des finiten Elements und lässt sich in gleicher Weise wie eine übliche Elementsteifigkeitsmatrix integrieren. Der in der zweiten Zeile beschriebene unsymmetrische Teil der Steifigkeitsmatrix besteht aus zwei Linienintegralen. Liegt eine konservative Problemstellung vor, verschwindet der unsymmetrische Anteil der Steifigkeitsmatrix, so dass in diesem Fall nur der symmetrische Anteil berücksichtigt werden muss. Für eine Diskussion der Konservativität einer mechanischen Fragestellung sei auf [SR84] verwiesen.

Um stets eine optimale Konvergenzrate der Newton-Raphson-Iteration gewährleisten zu können, müssten jeweils alle Anteile bei der Integration der Tangentensteifigkeitsmatrix ausgewertet werden. Dennoch genügt es in den meisten Fällen, sich auf den symmetrischen Anteil zu beschränken. Die nicht vollständige Linearisierung der maßgebenden Gleichungen erfordert dann aber evtl. eine erhöhte Anzahl von Gleichgewichtssiterationen bis zum Erreichen der Konvergenz.

In Abbildung 3.28 ist das Ergebnis einer Formfindung unter Vorgabe isotroper Membranspannung und gleichzeitig wirkender Drucklast zu sehen: Ausgehend von einer würfelförmigen Startgeometrie ergeben sich im Laufe der Formfindung numerische Seifenblasen, deren Formen diskretisierte Kugeln darstellen. Selbstverständlich ist auch die Modellierung mehrerer zusammenhängender Seifenblasen mit unterschiedlichen Innendrücken möglich. Hierbei wird besonders schön die inverse Natur der Formfindung deutlich: Setzt man für alle Seifenblasen die gleiche Vorspannung an, variiert jedoch den Innendruck, bewirkt eine Vergrößerung des Innendrucks eine Verkleinerung des Volumens der Seifenblase. Dies widerspricht der intuitiven Vorstellung vom Aufblasen eines Luftballons. Der fundamentale Unterschied ist hierbei, dass durch das Aufblasen des Luftballons elastische Spannungen entstehen, während bei der Formfindung die Membranspannungen unabhängig von der Geometrie als gegeben vorausgesetzt sind. Aus diesem Grund ist eine Abnahme des Durchmessers der Seifenblase erforderlich, um durch die erhöhte Krümmung der vorgespannten Membran genügend Umlenkkräfte zur Aufnahme der Drucklast zu mobilisieren.

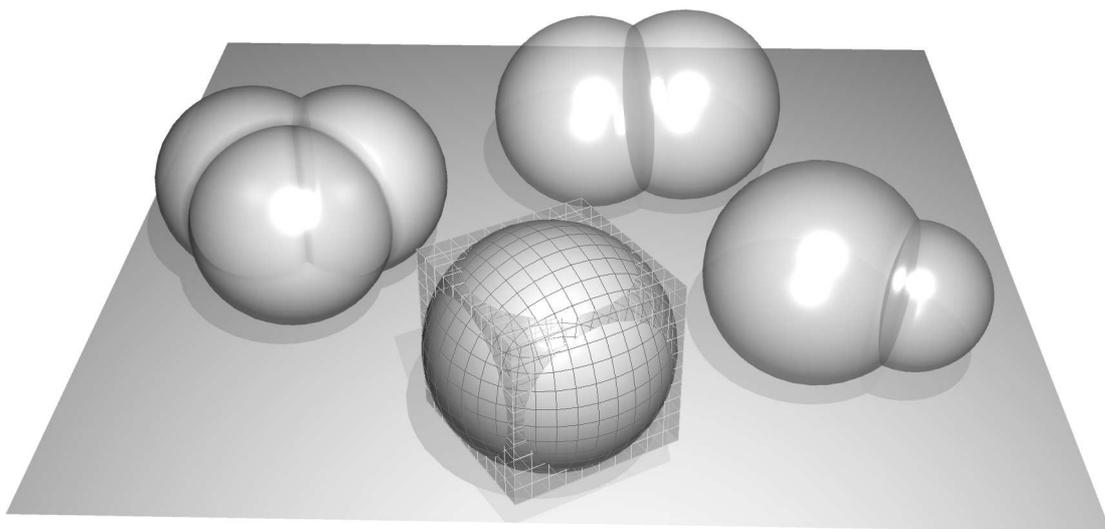


Abbildung 3.28: Numerische Seifenblasen.

3.3.3 Spannungsadaption: Stabilisierung des physikalischen Problems

Selbst wenn die Updated Reference Strategy ein effektives Hilfsmittel gegenüber den durch Numerik verursachten Instabilitäten beim Formfindungsprozess ist, kann sie dennoch nur dann zuverlässig das Formfindungsproblem lösen, falls es auch tatsächlich eine physikalische Lösung für die jeweilige Fragestellung gibt. Wie jedoch in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, ist das Vorschreiben eines physikalisch kompatiblen Spannungszustands für beliebige Randbedingungen eine fast unlösbare Aufgabe: Ein Planer wird meist feldweise konstante Zielspannungen definieren, da es für ihn unmöglich ist, genauere Spannungsverläufe auf einer noch unbekanntem Geometrie „vorherzusehen“ (in geometrisch klar definierten Sonderfällen, wie z. B. Radialstrukturen, wäre evtl. die Vorgabe einer linearen Spannungsverteilung denkbar). Hier tritt jedoch das Problem auf, dass lediglich für isotrope Vorspannungen eine konstante Spannungsverteilung physikalisch möglich ist. Und selbst in diesem Fall kann schon eine leichte Modifikation der Randgeometrie dazu führen, dass keine Gleichgewichtsfläche mehr existiert. Als Beispiel sei nochmals das Platzen eines Katenoids aus Seifenhaut aufgeführt, falls die zwei Endringe über einen gewissen kritischen Wert voneinander entfernt werden (siehe Abschnitt 3.2.1). Für ein anisotropes Vorspannverhältnis lässt sich sogar nur in trivialen Sonderfällen eine konstante Flächenspannung erreichen. Die meisten Formfindungsprobleme wären somit in ihrer ursprünglichen Aufgabenstellung durch die entwerfende Person nicht lösbar.

Hier wird die Diskrepanz zwischen Planer und Berechnungsprogramm deutlich: Während der Tragwerksplaner eigentlich nur Richtwerte für die Sollspannung vorgeben möchte und dabei durchaus leichte Abweichungen in Kauf nimmt, duldet eine numerische Formfindung in ihrer Grundform keine Differenzen von der Zielvorgabe und möchte eine eindeutige exakte Lösung finden. Aus diesem Grund ist es für einen praxistauglichen Formfindungsalgorithmus essentiell, die entwerfende Person bei der Definition des Formfindungsproblems zu unterstützen und leicht inkompatible Spannungsvorgaben anzupassen, um eine Lösbarkeit der Aufgabe zu erreichen.

Als leicht inkompatible Spannungsvorgaben werden hier beispielsweise alle anisotropen Spannungsverhältnisse angesehen: Es lassen sich i. A. hierfür Strukturen finden, die näherungsweise die gegebene, anisotrope Spannungsvorgabe erfüllen, jedoch ist eine exakte Erfüllung der Vorgaben unmöglich. Auch leicht unterschiedliche Vorspannzustände bei aneinander grenzenden Membranfeldern sind in die Kategorie leichter Spannungsinkompatibilitäten einzustufen. Die Vorgabe grober Inkompatibilitäten, die weit entfernt von einer physikalischen Lösbarkeit liegen, sind dennoch unter allen Umständen zu vermeiden. Im Nachfolgenden werden mehrere Methoden aufgezeigt, die eine Spannungsadaption während des Formfindungsprozesses durchführen.

Methode 1: Abbruch der Formfindungsiteration der URS. Die einfachste Weise, einen physikalisch kompatiblen Spannungszustand zu erreichen, ist der Abbruch der Formfindungsiteration der Updated Reference Strategy. Hierbei benützt man deren positive Eigenschaft, dass jede auskonvergierte Lösung innerhalb eines Formfindungsschritts einen physikalisch stabilen Zustand bildet (siehe Abschnitt 3.3.2). Die eigentlich unerwünschte Abweichung der resultierenden Cauchy-Spannungen σ vom vorgegebenen Spannungszustand σ_0

kann somit zum Erreichen eines kompatiblen Spannungszustands positiv verwendet werden. Der Spannungszustand ist jedoch nicht gänzlich beliebig: Gleichung (2.73) besagt, dass die Determinante der Cauchy-Spannungen mit der Determinante des zugehörigen PK2-Spannungstensors für einen zweidimensionalen Spannungszustand ohne Dehnung in Dickenrichtung identisch ist, was mit den Annahmen der numerischen Formfindung nach Abschnitt 3.3.1 übereinstimmt. Die Determinante des PK2-Spannungstensors besitzt wiederum den gleichen Wert wie die Determinante des gewünschten Vorspannzustands σ_0 , da zwecks Stabilisierung die Zielspannungen als PK2-Spannungen interpretiert wurden:

$$\det \sigma^{(i)} = \det \mathbf{S}^{(i)} = \det \sigma_0 \quad (3.60)$$

Mit der Determinante des Vorspanntensors bleibt somit dessen zweite Invariante während der gesamten Formfindung stets konstant:

$$\frac{\det \sigma^{(i)}}{\det \sigma_0} = 1 \quad (3.61)$$

Die erste Invariante – die Spur der Vorspannungen – ändert sich jedoch im Verlauf der Formfindungsschritte. Sie kann als Maß für die auftretende Spannungsabweichung vom eigentlichen Sollzustand herangezogen werden. Eine normierte Darstellung ergibt sich aus dem Verhältnis der Spur der tatsächlich auftretenden Spannungen zur Spur des ursprünglich vorgeschriebenen Spannungszustands. Je näher der Quotient $\text{tr}(\sigma^{(i)})/\text{tr}(\sigma_0^{(0)})$ am Wert 1 liegt, desto geringer ist die vorliegende Spannungsabweichung. Ist der Wert kleiner als 1, liegt ein zunehmend isotropes Vorspannverhältnis vor. Wird der Wert 1 überstiegen, deutet dies auf eine zunehmende Anisotropie der Spannungen hin:

$$\frac{\text{tr}(\sigma^{(i)})}{\text{tr}(\sigma_0)} = \begin{cases} < 1 & : \text{zunehmend isotrop} \\ = 1 & : \text{exakte Lösung} \\ > 1 & : \text{zunehmend anisotrop} \end{cases} \quad (3.62)$$

Eine Obergrenze für diese Maßzahl ist nicht gegeben, da die Anisotropie des Spannungszustands beliebig vergrößert werden kann:

$$\max \left(\frac{\text{tr}(\sigma^{(i)})}{\text{tr}(\sigma_0)} \right) \rightarrow \infty \quad (3.63)$$

Eine untere Schranke erhält man jedoch aus dem Fall, dass eine ursprünglich anisotrope Spannungsvorgabe mit dem Hauptspannungsverhältnis σ_I^0/σ_{II}^0 in einen isotropen Spannungszustand mit der hydrostatischen Spannung $\sigma^{(i)} = \sqrt{\det \sigma_0}$ übergeht:

$$\min \left(\frac{\text{tr}(\sigma^{(i)})}{\text{tr}(\sigma_0)} \right) = \frac{2\sqrt{\sigma_I^0/\sigma_{II}^0}}{1 + \sigma_I^0/\sigma_{II}^0} \quad (3.64)$$

Aus den Gleichungen (3.61) und (3.62) kann eine neue Sichtweise auf den Formfindungsprozess gewonnen werden: Die Konvergenz zu einer existierenden Lösung kann auch als

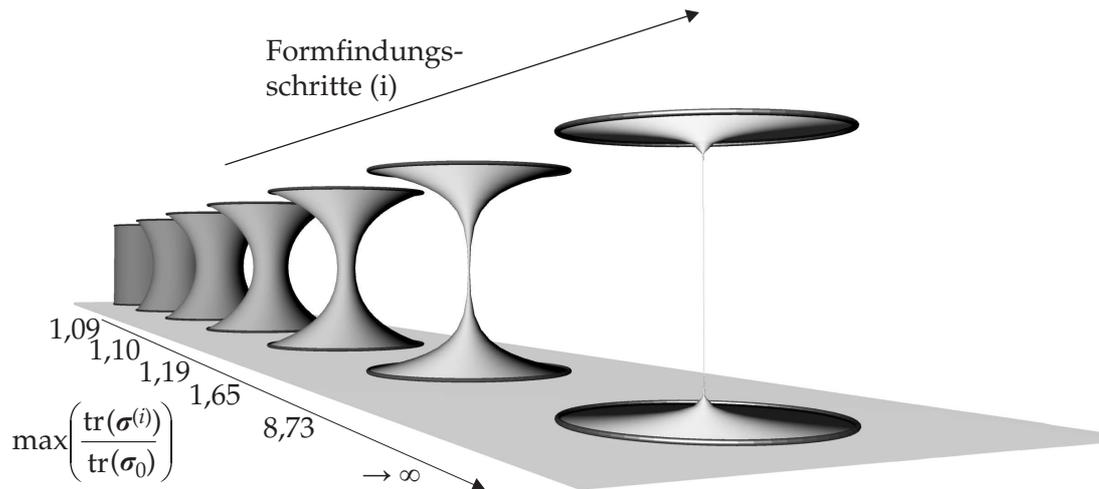


Abbildung 3.29: Zerplatzen eines überkritischen Katenoids bei numerischer Formfindung.

Konvergenz der Spur der Cauchy-Spannungen zum gewünschten Wert interpretiert werden. Kann keine exakte Lösung erzielt werden, wird der Formfindungsvorgang vorzeitig unterbrochen. Der resultierende Spannungszustand verfügt zwar über dieselbe Determinante wie der Sollzustand, jedoch besitzt die jeweilige Spur einen unterschiedlichen Wert.

In Abbildung 3.25 sind die physikalisch stabilen Zwischenlösungen im Laufe der Formfindung der Scherkschen Minimalfläche abgebildet. Anhand der angegebenen Maximal- und Minimalspannungen lässt sich die eben aufgestellte Beobachtung bestätigen: Da die Werte σ_{max} und σ_{min} den Eigenwerten des Spannungstensors entsprechen, lässt sich dessen Determinante einfach aus dem Produkt beider ermitteln. Dieses ist in allen fünf aufgezeigten Formfindungsschritten gleich und stimmt mit dem Quadrat der isotropen Vorspannung überein. Der Mittelwert der auftretenden Spannungen (d. h. die Hälfte der Spur) konvergiert gegen den angestrebten Wert. Eigentlich müsste für dieses Beispiel die Berechnung nicht vorzeitig unterbrochen werden, da eine exakte Lösung für das Problem existiert. Dennoch bietet eine Reduktion der durchgeführten Formfindungsschritte eine Möglichkeit zur Modifikation der Endgeometrie.

Als weiteres Beispiel sei die Formfindung eines ebenfalls isotrop vorgespannten Katenoids aufgeführt, dessen Endringe jedoch über den kritischen Wert voneinander entfernt sind (siehe Abschnitt 3.2.1). In diesem Fall ist die isotrope Vorspannung inkompatibel mit der gegebenen Berandung, was einen vorzeitigen Abbruch der Formfindung erfordert. Würde man die Formfindung über die in Abbildung 3.29 gezeigten sechs Formfindungsschritte hinaus fortsetzen, droht das numerische Katenoid ähnlich seinem physikalischen Modell aus Seifenlauge zu zerplatzen. Die zunehmende Divergenz der Formfindung lässt sich auch an den jeweils auftretenden maximalen Verhältnissen der Spur der tatsächlichen Spannungen zur Spur der gewünschten Spannungen ablesen (siehe Gleichung (3.62)): Schon nach relativ wenigen Formfindungsschritten strebt der Wert dieses Fehlermaßes gegen unendlich. Dies macht deutlich, dass in diesem Beispiel die Formfindung vor Erreichen einer eigentlichen Konvergenz unterbrochen werden muss, um noch ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu erhalten.

Da die vorgestellte Methode zur Vorspannungsadaption auf dem vorzeitigen Abbruch der Formfindungsschleife beruht, hängt die letztendliche Gleichgewichtsgeometrie nun nicht mehr nur von den gegebenen Spannungen und Randbedingungen ab, sondern wird auch durch die Startgeometrie und die Anzahl der durchgeführten Formfindungsschritte beeinflusst. Dies könnte zwar als eine gewisse Beliebigkeit der Lösung ausgelegt werden, jedoch erhält der Planer dadurch weitere Möglichkeiten, die Gestalt des Tragwerks zu beeinflussen. Dabei werden so viele Formfindungsschritte durchlaufen, bis ein akzeptabler Kompromiss zwischen modifizierten Spannungen und der zugehörigen Geometrie eintritt.

Methode 2: Verzerrungskontrolle. Um ein objektives Kriterium zur Spannungsadaption zu etablieren, wurde in [WB05] der Begriff der *Elementverzerrungskontrolle* eingeführt. Die Grundidee war hierbei, die auftretenden Verzerrungen des FE-Netzes in Bezug auf die Startgeometrie während des Formfindungsprozesses zu überprüfen. Überschreiten die Netzverzerrungen *in der Fläche* einen gewissen Grenzwert, deutet dies auf einen inkompatiblen Spannungszustand hin, der eine lokale Adaption der Zielspannungen erfordert. Die Endgeometrie und ihr modifizierter Vorspannzustand sind somit Funktionen der Ausgangsgeometrie $X^{(0)}$, der maximal zulässigen Verzerrung λ_{max} und nicht zuletzt der ursprünglich vorgegebenen Vorspannungen $\sigma_0^{(0)}$. Sie sind jedoch nicht mehr abhängig von einer benutzerspezifisierten Anzahl der Formfindungsschritte, da die Berechnung automatisch durch ein Konvergenzkriterium beendet wird, das die Geometrie- und Spannungsänderung während eines Formfindungsschrittes überprüft.

In der ersten Formulierung der Elementverzerrungskontrolle wurde als Verzerrungsmaß das Längenverhältnis der Basisvektoren bzgl. Ausgangs- und aktueller Konfiguration verwendet (siehe [WB05]). Dies birgt jedoch den gravierenden Nachteil, dass zum einen eine Netzabhängigkeit der Lösung entsteht, zum anderen evtl. Schubverzerrungen zwischen den Basisvektoren nicht abgefangen werden können. Sinnvoller erweist sich die Formulierung der maximal zulässigen Verzerrung bezüglich der Invarianten des Deformationsprozesses an. Durch Verwendung der Hauptstreckungen bei der Definition des maximal zulässigen Verformungszustands gelang eine netzunabhängige Formulierung der Formfindung mit Spannungsadaption [BFLW08].

Der Berechnungsablauf gliedert sich folgendermaßen: Den Ausgangspunkt bildet die Problemdefinition. Hierbei müssen die Randbedingungen Γ , der Formfindungslastfall (Vorspannung $\sigma_0^{(0)}$ und evtl. äußere Lasten) und die Ausgangsgeometrie der Formfindung $X^{(0)}$ spezifiziert werden. Zusätzlich wird auch die maximal zulässige Streckung λ_{max} festgelegt, bei deren Überschreitung die Spannungsadaption in Kraft tritt.

Die anschließende Formfindung erfolgt gemäß der Updated Reference Strategy schrittweise: In jedem Formfindungsschritt i startet die Gleichgewichtsiteration für das stabilisierte Formfindungsproblem von der Referenzgeometrie $X^{(i)}$, die identisch mit der Gleichgewichtsgeometrie $x^{(i-1)}$ des vorherigen Formfindungsschrittes ist. Formgebend wirken die PK2-Spannungen S^i , die zwecks Stabilisierung des numerischen Problems mit den Zielspannungen $\sigma_0^{(i)}$ gleichgesetzt werden. Unterschreiten nach Berechnung der Gleichgewichtsfläche $x^{(i)}$ die Abweichungen der resultierenden Cauchy-Spannungen $\sigma^{(i)}$ vom Zielwert $\sigma_0^{(i)}$ einen gewissen Grenzwert, ist Konvergenz erreicht, und die Formfindung

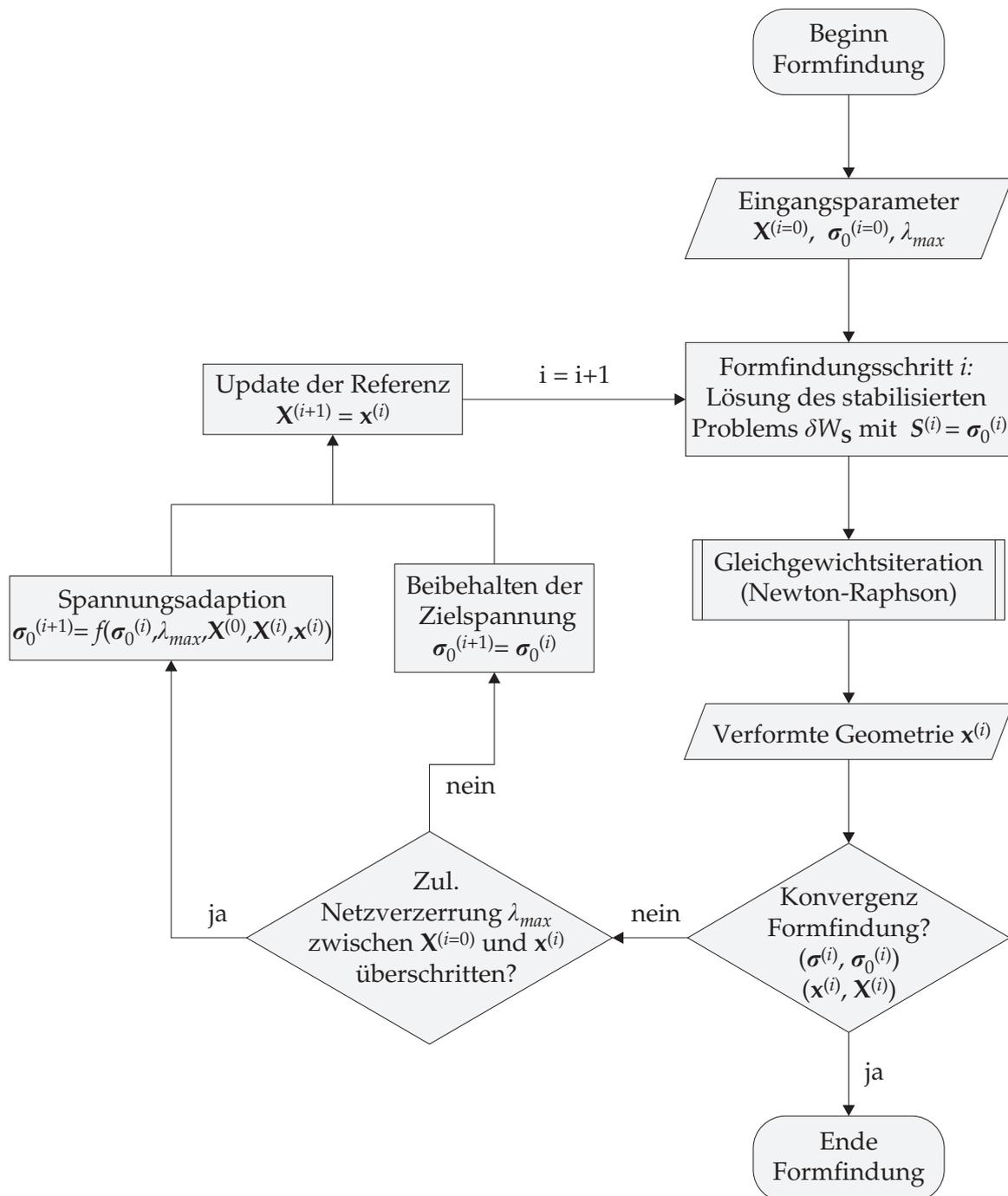


Abbildung 3.30: Ablaufdiagramm: Formfindung mit Spannungsadaption.

kann beendet werden. Anstelle dieser Spannungsdifferenz, die das eigentliche Konvergenzkriterium des Formfindungsproblems beschreibt, werden jedoch oft lediglich die auftretenden Verformungen eines Iterationsschritts überprüft: Da diese bei der gewählten FE-Formulierung die Primärvariablen [ZTZ05] darstellen, liegen sie somit „direkt“ vor und müssen im Gegensatz zu den Spannungen nicht erst aus einer Rückrechnung bestimmt werden.

Wurde keine Konvergenz erreicht, ist ein neuer Formfindungsschritt durchzuführen. Zuvor wird jedoch in einer Nachlaufrechnung überprüft, ob eine Spannungsadaption erforderlich ist. Dazu wird lokal (d. h. an jedem Gaußpunkt) aus den Geometrien $\mathbf{X}^{(0)}$ und $\mathbf{x}^{(i)}$ die absolute Streckung λ während der gesamten Formfindung mittels Eigenwertberechnung bestimmt. Überschreitet sie den definierten Grenzwert, erfolgt eine Spannungsadaption, die eine übermäßige Verzerrung des Formfindungsnetzes verhindern soll. Die Zielspannung $\sigma^{(i+1)}$ für den nächsten Formfindungsschritt wird dabei nur lokal angepasst. Sollte beispielsweise an den übrigen Gaußpunkten die Verzerrung im zulässigen Bereich liegen, bleibt dort die Zielspannung unangetastet ($\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)}$). Nach Beendigung der Spannungsadaption für die gesamte Fläche und anschließendem Referenzupdate kann der nächste Formfindungsschritt durchgeführt werden. Das schematische Ablaufdiagramm der Formfindung mit URS und Spannungsadaption ist in Abbildung 3.30 dargestellt.

Der Spannungsadaptionsvorgang gliedert sich in folgende Schritte: Zu Beginn wird überprüft, ob die Gleichgewichtsgeometrie am Ende eines Formfindungsschrittes die zulässigen Verzerrungen überschreitet. Dazu müssen die Hauptstreckungen berechnet werden, die bei der Gesamtdeformation von der Ausgangsgeometrie $\mathbf{X}^{(0)}$ der Formfindung zum aktuellen Zustand $\mathbf{x}^{(i)}$ entstanden sind. Der zugehörige Deformationsgradient $\mathbf{F}_{tot}^{(i)}$ lässt sich in seiner spektralen Darstellung wie folgt angeben:

$$\mathbf{F}_{tot}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{x}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}^{(0)}} = \lambda_{\alpha}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{\alpha}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{N}}_{\alpha}^{(0)} \quad (3.65)$$

Die Hauptstreckungen $\lambda_{\alpha}^{(i)}$ sowie ihre Richtungen $\hat{\mathbf{N}}_{\alpha}^{(0)}$ bzw. $\hat{\mathbf{n}}_{\alpha}^{(i)}$ in den jeweiligen Konfigurationen lassen sich durch Eigenwertanalyse bestimmen (siehe Abschnitt 2.3.2). Eine Spannungsadaption wird vorgenommen, falls ein Element über die erlaubten Maße gedehnt bzw. gestaucht wurde. Ein unzulässiger Verformungszustand muss dabei mindestens eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

$$\lambda_{\alpha}^{(i)} > \lambda_{max} \quad \vee \quad \lambda_{\alpha}^{(i)} < \frac{1}{\lambda_{max}} = \lambda_{min} \quad (3.66)$$

Die aktuelle Geometrie $\mathbf{x}^{(i)}$ ist die Gleichgewichtsgeometrie für die Cauchy-Spannungen $\sigma^{(i)}$, die man durch eine Push-Forward-Operation aus den PK2-Spannungen $\mathbf{S}^{(i)}$ der Referenzkonfiguration $\mathbf{X}^{(i)}$ erhält (siehe Abbildung 3.31 für einen Überblick über die charakteristischen Konfigurationen und ihre Relationen untereinander). Diese PK2-Spannungen wiederum sind im Rahmen der Updated Reference Strategy identisch mit den Zielspannungen $\sigma_0^{(i)}$ des aktuellen Formfindungsschritts i :

$$\sigma^{(i)} = \frac{1}{\det \mathbf{F}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \cdot \overbrace{\mathbf{S}^{(i)}}^{=\sigma_0^{(i)}} \cdot \mathbf{F}^{(i)T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{x}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \quad (3.67)$$

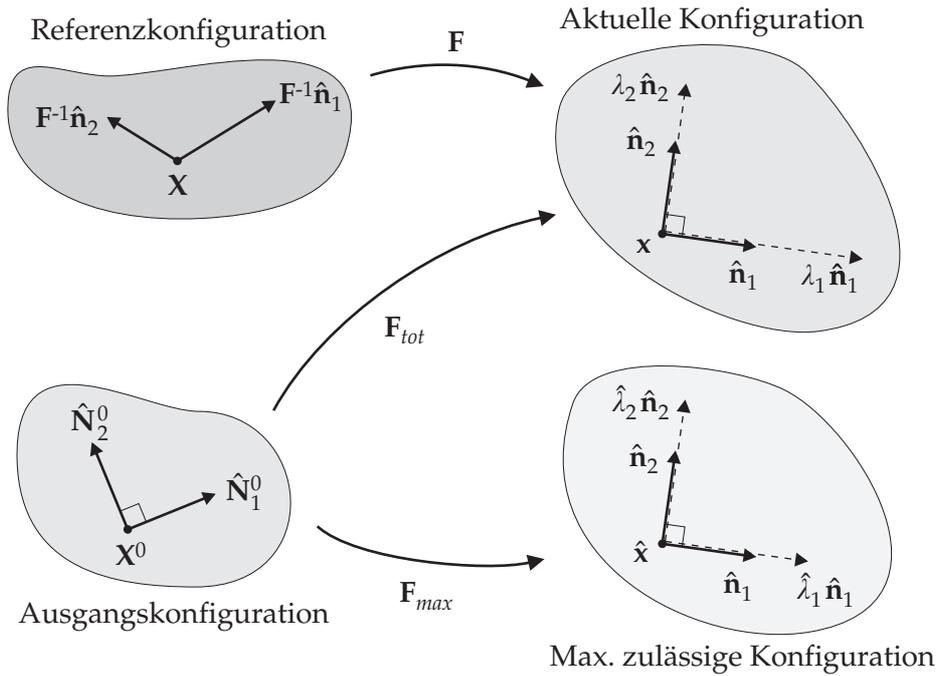


Abbildung 3.31: Konfigurationen der Formfindung mit Spannungsadaption.

Zwar ist der aktuelle verformte Zustand stabil, jedoch unzulässig verformt. Es gilt nun eine Adaption der Vorspannung durchzuführen, die im nächsten Formfindungsschritt die Verformungen des Elements auf zulässige Werte reduziert. Zugleich soll die modifizierte Spannung $\sigma_{mod}^{(i)}$ sich an der ursprünglichen Zielvorgabe orientieren. Zur Herleitung der notwendigen Spannungsmodifikation bedient man sich des folgenden Gedankenmodells: Für die unzulässig verformte Geometrie $\mathbf{x}^{(i)}$ sollen modifizierte Cauchy-Spannungen $\sigma_{mod}^{(i)}$ bestimmt werden, die energetisch gleichbedeutend mit den aktuell vorherrschenden Cauchy-Spannungen $\sigma^{(i)}$ sind, von denen man annimmt, dass sie nun auf einer geometrisch zulässigen Konfiguration $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ wirken. Die Berechnung der modifizierten Spannungen gelingt durch eine verschachtelte Pull-Back/Push-Forward-Operation, bei der zuerst die aktuellen Spannungen $\sigma^{(i)}$ von der maximal zulässigen Konfiguration $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ in die Ausgangskonfiguration $\mathbf{X}^{(0)}$ transformiert werden. Im Anschluss führt eine Push-Forward-Operation die Transformation der entstandenen PK2-Spannungen in die aktuelle Konfiguration $\mathbf{x}^{(i)}$ durch.

Die maximal zulässige Konfiguration $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ ist dabei so definiert, dass ihre Hauptstreckungsrichtungen parallel zu den Hauptstreckungsrichtungen der aktuellen Konfiguration bleiben, die Werte der Hauptstreckungen jedoch die zulässigen Werte einhalten. Der für die Pull-Back-Operation der Spannungen erforderliche Deformationsgradient $\mathbf{F}_{max}^{(i)}$ zwischen der maximal zulässigen Konfiguration und der Ausgangskonfiguration der Formfindung ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{F}_{max}^{(i)} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}^{(0)}} = \hat{\lambda}_\alpha^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_\alpha^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{N}}_\alpha^{(0)} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda}_\alpha^{(i)} = \begin{cases} \lambda_{max} & \text{für } \lambda_\alpha^{(i)} > \lambda_{max} \\ 1/\lambda_{max} & \text{für } \lambda_\alpha^{(i)} < 1/\lambda_{max} \\ \lambda_\alpha^{(i)} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.68)$$

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (3.65) und (3.68) erhält man durch doppelte Transformation die modifizierten Spannungen der aktuellen Konfiguration:

$$\begin{aligned}\sigma_{mod}^{(i)} &= \frac{\det \mathbf{F}_{max}^{(i)}}{\det \mathbf{F}_{tot}^{(i)}} \mathbf{F}_{tot}^{(i)} \cdot \mathbf{F}_{max}^{(i)-1} \cdot \sigma^{(i)} \cdot \mathbf{F}_{max}^{(i)-T} \cdot \mathbf{F}_{tot}^{(i)T} \\ &= \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{\hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\beta} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta(i)} \hat{\mathbf{n}}_\alpha^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}_\beta^{(i)}\end{aligned}\quad (3.69)$$

Werden die Hauptachsen $\{\hat{\mathbf{n}}_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ als lokale kartesische Basis verwendet, kann der Einfluss der Spannungsadaption besonders verdeutlicht werden, da sich explizite Zusammenhänge zwischen den tatsächlichen physikalischen Spannungen $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta(i)}$ am Ende des Formfindungsschritts und ihren modifizierten Werten $\tilde{\sigma}_{mod}^{\alpha\beta(i)}$ ergeben:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{mod}^{11(i)} &= \frac{\lambda_1 \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1 \lambda_2} \tilde{\sigma}^{11(i)} \\ \tilde{\sigma}_{mod}^{22(i)} &= \frac{\lambda_2 \hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2 \lambda_1} \tilde{\sigma}^{22(i)} \\ \tilde{\sigma}_{mod}^{12(i)} &= \tilde{\sigma}^{12(i)}\end{aligned}\quad (3.70)$$

Liegt in einer Richtung eine unzulässige Verzerrung vor, werden die Spannungen in dieser Richtung mit einem Korrekturterm multipliziert, der exakt dem Verhältnis von vorliegender zu erlaubter Streckung entspricht. Ist eine unzulässige Dehnung aufgetreten, wird die Spannung erhöht, bei übermäßiger Stauchung bewirkt die Spannungsadaption eine Senkung der Zielspannungen. Gleichzeitig werden jedoch auch die Spannungen in der dazu orthogonalen Richtung angepasst, indem diese mit dem Kehrwert des Korrekturterms multipliziert werden. Durch diese gegenseitige Beeinflussung der Hauptstreckungsrichtungen und das gleichzeitige Konstanthalten der Schubspannung wird erreicht, dass die Determinante des Spannungstensors infolge Spannungsadaption nicht nur während eines Formfindungsschrittes unverändert bleibt, sondern stets gleich der Determinante der ursprünglichen Sollvorspannung ist (siehe Gleichung (3.60)):

$$\det \sigma_{mod}^{(i)} = \det \sigma^{(i)} = \det \sigma_0^{(0)} \quad (3.71)$$

Der modifizierte Spannungstensor $\sigma_{mod}^{(i)}$ wird als neue Zielspannung $\sigma_0^{(i+1)}$ für den nächsten Formfindungsschritt gesetzt. Dabei erfährt er gemäß der Updated Reference Strategy erneut eine Uminterpretation als PK2-Spannung $\mathbf{S}^{(i+1)}$, die für die Stabilisierung des numerischen Problems zuständig ist:

$$\sigma_{mod}^{(i)} = \sigma_0^{(i+1)} = \mathbf{S}^{(i+1)} \quad (3.72)$$

Das Endergebnis einer Formfindung mit Spannungsadaption ist eine Fläche, deren Hauptstreckungen die maximal erlaubten Verzerrungen einhalten. Als illustratives Beispiel sind in Abbildung 3.32 die spannungsmodifizierten Gleichgewichtsflächen des überkritischen Katenoids aus Abbildung 3.29 für verschiedene Werte der maximalen Streckung λ_{max} aufgezeigt. Deutlich ist dabei die zunehmende Netzverformung für höhere Werte von λ_{max}

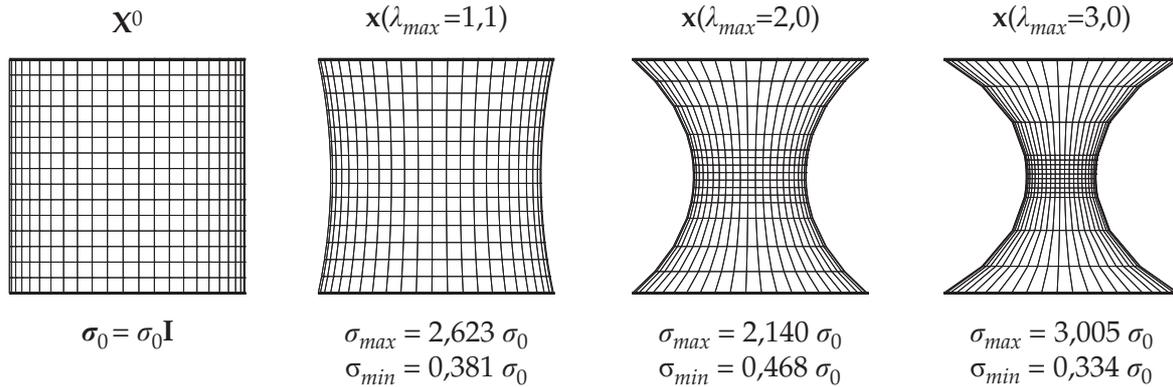


Abbildung 3.32: Formfindung eines Katenoids mit Spannungsadaptation.

zu erkennen. Interessanterweise kann bei den resultierenden Spannungen kein eindeutiger Trend festgestellt werden: Es gilt also nicht, dass eine größere Verformungsfreiheit eine Verbesserung der Spannungen nach sich zieht. Dies ist u. a. darauf zurückzuführen, dass die Spannungsadaptation nicht allmählich einsetzt, sondern erst dann „schlagartig“ passiert, wenn der kritische Grenzwert der Verformung überschritten wurde. Während bei regelmäßigen Netzen diese ruckartige Modifikation i. A. keine Probleme bereitet, kann dies bei unregelmäßigen Strukturen zu erheblichen Problemen führen: Verfügt die Struktur beispielsweise über singuläre Randbereiche, können dort einzelne Elemente während eines Formfindungsschrittes eine Stauchung bzw. Dehnung von mehreren hundert Prozent erfahren. Dementsprechend groß fällt die folgende Spannungsadaptation aus, die sich wie ein plötzlicher Impuls auf die Struktur auswirkt. Die folgenden Oszillationen des Netzes können wiederum andere Elemente übermäßig anregen. Tritt dieser Effekt auf, sind starke lokale Spannungsanpassungen die Folge, die sogar zu einer Divergenz der Lösung führen können.

Methode 3: Relaxierte Verzerrungskontrolle. Die dritte Methode zur Spannungsadaptation beruht auf der Grundidee der Verzerrungskontrolle (siehe Methode 2), versucht jedoch den Einfluss einer abrupten Spannungsanpassung abzuschwächen. Dies wird erreicht, indem die Spannungsmodifizierung aus Gleichung (3.69) relaxiert wird:

$$\sigma_{mod,relax}^{(i)} = (1 - \mu_{relax}) \sigma_{mod}^{(i)} + \mu_{relax} \sigma^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mu_{relax} \in [0; 1] \quad (3.73)$$

Die Relaxation erfolgt durch Überblendung der modifizierten Cauchy-Spannungen $\sigma_{mod}^{(i)}$ mit den Gleichgewichtsspannungen $\sigma^{(i)}$ des aktuellen Formfindungsschrittes. Der Grad der Überblendung lässt sich über den Relaxationsparameter μ_{relax} steuern. Für $\mu_{relax} = 0$ tritt keine Veränderung gegenüber der Methode 2 auf ($\sigma_{mod,relax}^{(i)} = \sigma_{mod}^{(i)}$). Setzt man hingegen $\mu_{relax} = 1$, wird eine maximale Relaxation der Spannungsadaptation erreicht: Die modifizierten Zielspannungen entsprechen den aktuellen Gleichgewichtsspannungen, wodurch sich das zugehörige Flächenelement bereits im Gleichgewicht befindet. Dies verkürzt die Anzahl der durchzuführenden Formfindungsschritte erheblich, da nur noch die Flächenteile ins Gleichgewicht gebracht werden müssen, bei denen bislang keine Spannungsadaptation

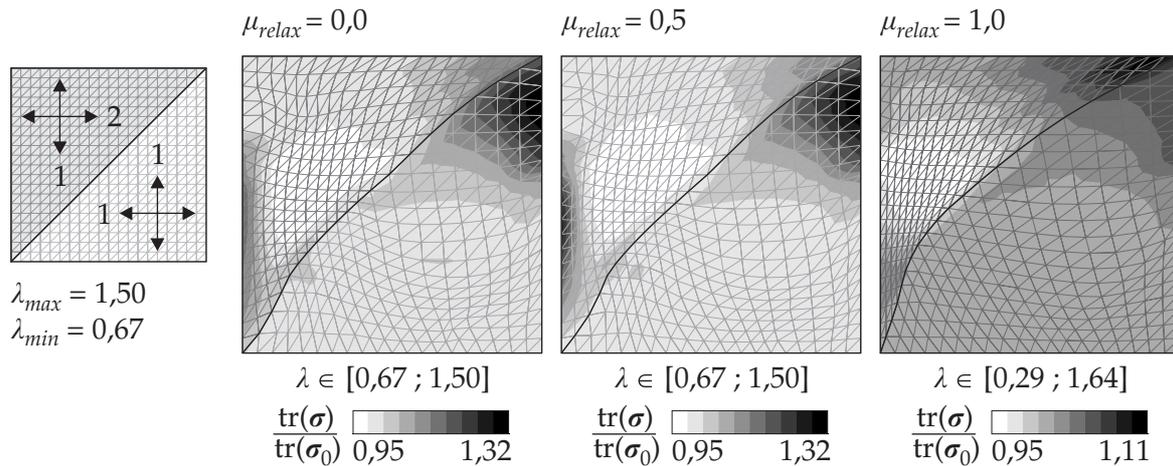


Abbildung 3.33: Testbeispiel für Verzerrungskontrolle.

vorgenommen wurde. Anders ausgedrückt, darf jedes Flächenelement so lange versuchen, die Vorspannungen nach den ursprünglichen Vorgaben anzupassen, solange die zulässigen Verzerrungen eingehalten sind. Werden diese jedoch übertreten, ändert man lokal die Zielvorgaben zu den aktuell vorherrschenden Spannungen ab. Die Verzerrungen der resultierenden Geometrie überschreiten zwar die maximal erlaubten Werte, jedoch zeichnet sich dieses Verfahren durch eine rasche und stabile Konvergenz sowie generell geringere Spannungsabweichungen im Vergleich zur unrelaxierten Spannungsadaption aus.

Wählt man für den Relaxationsparameter einen beliebigen Wert innerhalb seines Wertebereichs, werden die Spannungen so lange modifiziert, bis die zulässigen Verzerrungen eingehalten sind. Die jeweilige Anpassung wird aber gegenüber der ursprünglichen Formulierung abgeschwächt. Dadurch kann das Auftreten etwaiger Oszillationen eingeschränkt werden. Die Berechnung läuft stabiler als die unrelaxierte Methode, jedoch müssen mehr Formfindungsschritte bis zum Erreichen der Konvergenz durchgeführt werden.

Das verbindende Element aller Spannungsadaptionen ist die Tatsache, dass stets die Determinante der resultierenden Spannungen identisch ist mit der Determinante der Spannungsvorgabe. Dadurch wird erreicht, dass der Bezug der adaptierten Spannungen zur ursprünglichen Zielgröße erhalten bleibt:

$$\det \sigma_{mod,relax}^{(i)} = \det \sigma_0^{(0)} \quad (3.74)$$

In Abbildung 3.33 sind die Auswirkungen des Relaxationsparameters μ_{relax} an einem einfachen Testbeispiel aufgezeigt: Die ebene, quadratförmige Struktur besteht aus zwei dreieckigen Hälften. Für die Dreieckshälfte rechts unten ist eine isotrope Vorspannung vom Wert 1 vorgeschrieben, die Dreieckshälfte links oben soll in horizontaler Richtung mit dem Wert 2, in vertikaler Richtung mit dem Wert 1 anisotrop vorgespannt werden. Bereits aus der Angabe wird deutlich, dass an der diagonalen Bereichsgrenze in horizontaler Richtung ein inkompatibler Spannungszustand vorliegt.

Die Ergebnisse der Formfindung mit Verzerrungskontrolle sind rechts neben der Systembeschreibung abgebildet. Als charakteristische Größe zur Beschreibung der Spannungsabweichung wurde das Verhältnis der Spur des tatsächlichen Spannungszustands zur Spur des ursprünglich vorgeschriebenen Spannungstensors gewählt. Während die maximal zulässige Verzerrung mit $\lambda_{max} = 1/\lambda_{min} = 1,5$ stets konstant gehalten wurde, kamen verschiedene Relaxationsparameter μ_{relax} zum Einsatz. Bei Betrachtung der Resultate fällt auf, dass die Ergebnisse bei Verwendung der ursprünglichen, d. h. unrelaxierten Verzerrungskontrolle ($\mu_{relax} = 0,0$) nahezu identisch sind mit denen, die durch teilweise Relaxation der Spannungsadaption erreicht werden ($\mu_{relax} = 0,5$). Einzig auf die Konvergenzgeschwindigkeit wirken sich die Werte von $\mu_{relax} < 1,0$ aus: Je höher der Wert, desto mehr Formfindungsschritte müssen wegen der größeren Relaxation vorgenommen werden, um die maximalen Verzerrungen einzuhalten. Wird eine maximale Relaxation der Spannungsadaption verwendet ($\mu_{relax} = 1,0$), fällt die Spannungsabweichung deutlich geringer aus, jedoch überschreiten die auftretenden Streckungen bei weitem die erlaubten Werte. Dem Wert λ_{max} kommt in diesem Fall lediglich die Bedeutung eines geometrischen Kriteriums zu, bei dessen Überschreitung eine Spannungsadaption vorgenommen wird, jedoch beschreibt er nicht mehr die maximal auftretende Verzerrung des FE-Netzes.

Eine ähnliche Charakteristik der Ergebnisse zeigt sich auch im nächsten Beispiel: Es soll die Form für eine quadratisch berandete Membran gefunden werden, die in der Mitte eine „Punktstützung“ aufweist. Um evtl. Singularitäten zu vermeiden, wird dort jedoch nicht ein einziger Membranpunkt festgehalten, sondern es wird eine quadratförmige Stützung ausgebildet, deren Kantenlänge ein Zehntel der äußeren Berandung entspricht. Durch eine Formfindung mit Verzerrungskontrolle soll nun der ursprünglich vorgeschriebene isotrope Spannungszustand so abgeändert werden, dass ein stabiles Gleichgewicht erzeugt wird. Die Ergebnisse für verschiedene Werte des Relaxationsparameter μ_{relax} sind in Abbildung 3.34 dargestellt. Dabei ist jeweils auch die ungefähre Anzahl nötiger Formfindungsschritte bis zum Erreichen der Konvergenz angegeben.

Für $\mu_{relax} = 1,0$ (maximale Relaxation) ergibt sich eine Struktur, die durch extreme Verlängerung der Elemente spitz auf die Stützung zuläuft. Die resultierenden Spannungen benötigen aufgrund dieser besonderen Geometrieform verhältnismäßig geringe Abweichungen, um Gleichgewicht zu erzeugen. Schränkt man nun die Verformungsmöglichkeiten ein, indem man $\mu_{relax} < 1,0$ setzt, können sich die Elemente infolge der maximal erlaubten Streckung $\lambda_{max} = 1/\lambda_{min} = 1,2$ weniger verformen und müssen lokal größere Spannungsabweichungen aufbauen. Die Größe des Relaxationsparameters wirkt sich hier erneut weniger auf die Qualität des Ergebnisses als auf die Konvergenzgeschwindigkeit aus. Das Ergebnis ohne Relaxation der Spannungsanpassung weist nur leicht höhere Spannungsabweichungen im Gegensatz zu einer „mittleren“ Relaxation auf, jedoch muss nur ca. die Hälfte an Formfindungsschritten durchgeführt werden.

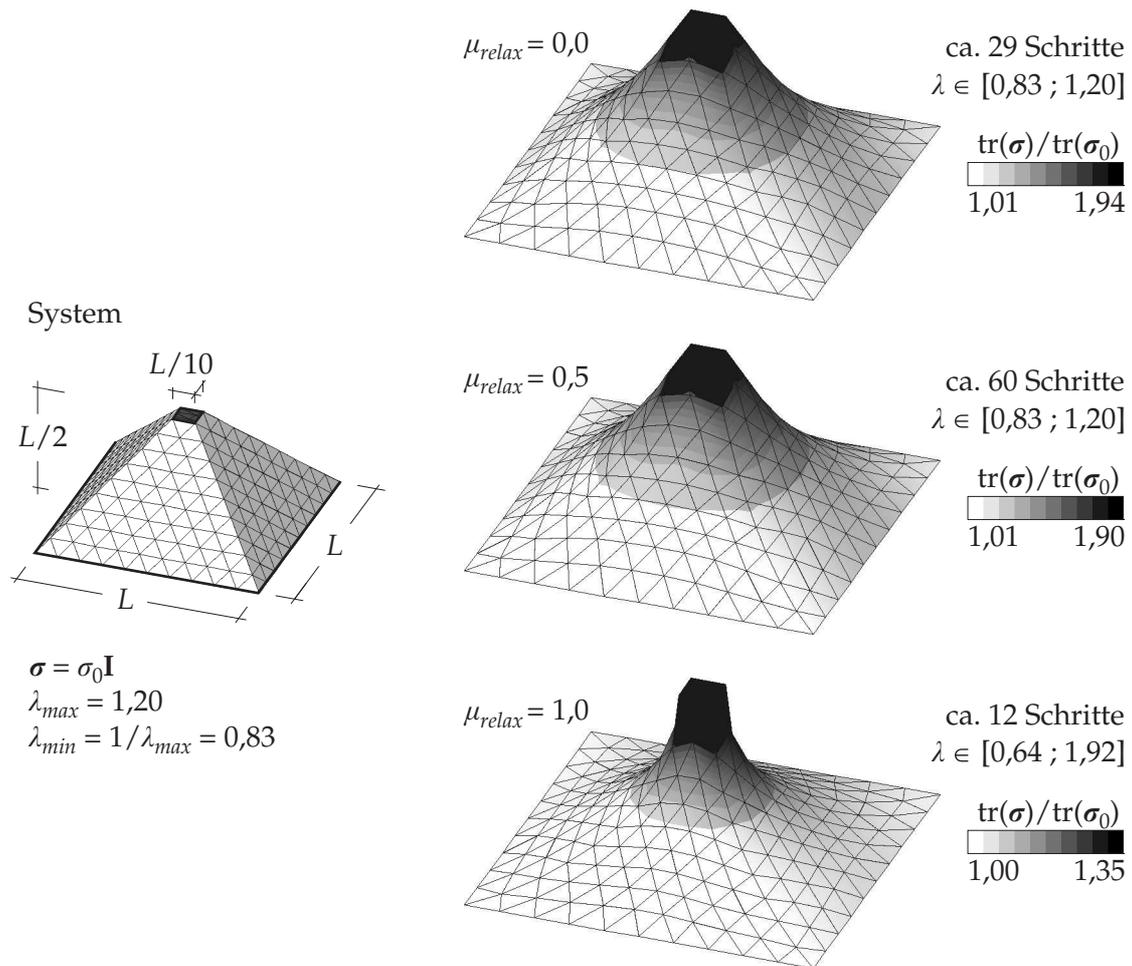


Abbildung 3.34: Verzerrungskontrolle einer „punktgestützten“, isotrop vorgespannten Membran.

Vergleich der Methoden. Stellt man einen zusammenfassenden Vergleich über die vorgestellten Methoden zur Spannungsadaption an, kann man diese grob in zwei Gruppen einteilen: Für Belange der Praxis sind generell eher robuste, schnell konvergierende Rechenverfahren von Interesse, die möglichst geringe Spannungsabweichungen bieten. Für diese Fälle eignet sich hauptsächlich die Methode des vorzeitigen Abbruchs der Formfindungsschritte (Methode 1) und die maximal relaxierte Verzerrungskontrolle (Methode 3). Die ursprüngliche Verzerrungskontrolle (Methode 2) und ihre relaxierte Erweiterung stellen interessante Alternativen dar, jedoch ist die strikte Einhaltung einer maximalen Netzverzerrung für Belange des Membranbaus eher von geringer Bedeutung. Nichtsdestotrotz können die entwickelten Verfahren vorteilhaft für eine algorithmische Behandlung der Netzregularisierung verwendet werden, die z. B. bei bestimmten Fragestellungen der Fluid-Struktur-Interaktion (siehe z. B. [STB03]) oder der Formoptimierung [BFLW08] benötigt wird. Dabei gilt es, einem durch Randverschiebungen verformten FE-Gitter eine möglichst gute Netzqualität zurückzugeben. Die extremen lokalen Deformationen sollen hierbei möglichst gleichmäßig auf das gesamte Gebiet verteilt werden. Als Beispiel hierfür zeigt Abbildung 3.35 die Anwendung der Verzerrungskontrolle bei der Netzanpassung eines quadratisch-berandeten FE-Netzes,

in dessen Mitte ein Würfel schrittweise um jeweils 15° verdreht wird. Ausgangspunkt für jeden Netzanpassungsschritt bildet das jeweilige unverformte FE-Netz, das sich mit einer isotropen PK2-Spannung im Gleichgewicht befindet. Durch Aufbringen der Randverformung entsteht Ungleichgewicht, das lokale Verformungen des Netzes hervorruft. Da diese generell die zulässigen Streckungen überschreiten (hier: $\lambda_{max} = 1,15$), werden die Zielspannungen gemäß Gleichung (3.69) für einen nächsten Formfindungsschritt angepasst. Die Formfindung mit Spannungsadaption wird so lange wiederholt, bis überall die erlaubten Verzerrungen eingehalten sind. Dies wiederum bewirkt, dass auch die Elemente, die nicht in unmittelbarer Nähe des Randes liegen, in die Verformung miteinbezogen werden, so dass ein Ausgleich des Netzes entsteht.

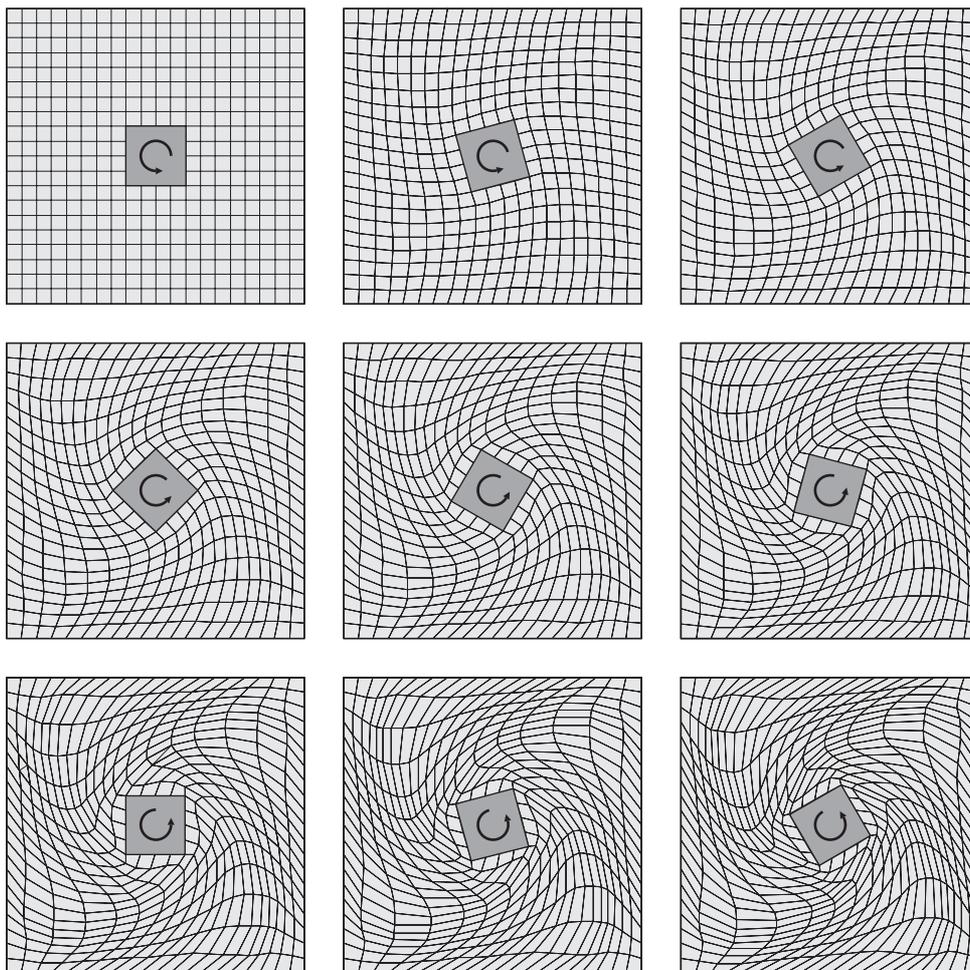


Abbildung 3.35: Netzanpassung mittels Verzerrungskontrolle.

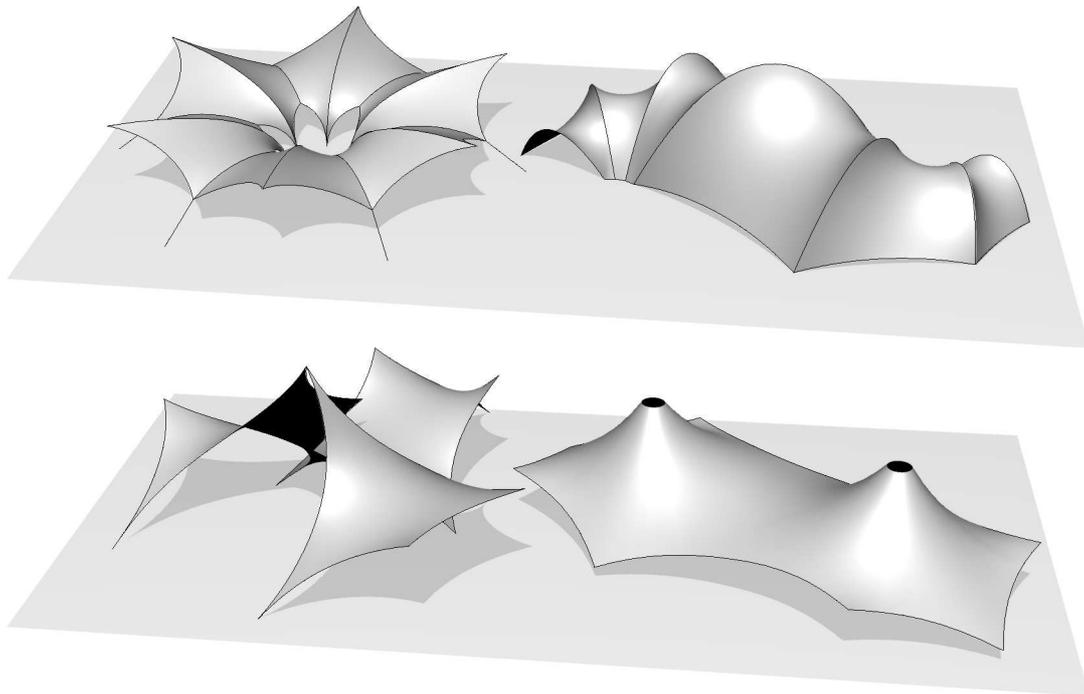


Abbildung 3.36: Beispiele für die Formfindung von Membrantragwerken.

ZUSAMMENFASSUNG. Um ein zufriedenstellendes Ergebnis bei der Formfindung von leichten Flächentragwerken zu erhalten, ist eine intensive Beschäftigung mit der speziellen Fragestellung notwendig. Denn im Gegensatz zu einer Strukturanalyse, die das Verhalten eines geometrisch und materiell klar definierten Tragwerks unter Last beschreibt, mag die Formfindung aufgrund ihrer inversen Natur auf den ersten Blick wenig intuitiv wirken. Im Alltag ist man selten mit der Problematik konfrontiert, ein gegebenes Spannungsfeld bezüglich definierter Randbedingungen ins Gleichgewicht zu bringen. Man muss sich deswegen klar bewusst machen, welche Aufgabenstellungen überhaupt lösbar sind, für welche lediglich eine Näherungslösung gefunden werden kann und ab wann überhaupt keine Lösung mehr vorliegt. Werden zusätzlich numerische Verfahren zur Formfindung verwendet, müssen darüber hinaus noch die numerischen Instabilitäten infolge „schwimmender Netze“ durch Regularisierungsmaßnahmen behandelt werden. Berücksichtigt man die in diesem Kapitel aufgezeigten physikalischen Grundlagen und numerischen Berechnungs- und Stabilisierungsverfahren, lassen sich durch rechnergestützte Formfindung Tragwerke realisieren, deren Komplexität bei weitem nicht mehr durch empirische Verfahren abgebildet werden kann. Als abschließendes Beispiel sind in Abbildung 3.36 die Formfindungsergebnisse eines Studentenworkshops zum Thema „Membranen“ aufgezeigt, der 2007 an der Technischen Universität München abgehalten wurde (siehe hierzu auch [BL06a]).

Kapitel 4

Zuschnitt

Die Zuschnittsermittlung von Membran- oder Seilnetztragwerken stellt in ihrem Entwurfsprozess generell denjenigen Schritt dar, für den die meiste Erfahrung erforderlich ist: Nicht nur muss mit der Verebnung räumlicher Flächen ein komplexes, mechanisch-mathematisches Problem bewältigt werden, vielmehr gilt es auch, eine Reihe konstruktiver und produktionstechnischer Anforderungen wie z. B. Anordnung der Schnittlinien oder Kompensation des Zuschnitts in adäquater Weise zu berücksichtigen. Da sich letztere jedoch für jedes Tragwerk grundlegend ändern können, ist eine komplette Automatisierung der Zuschnittsbestimmung nahezu ausgeschlossen. Ein Berechnungsprogramm kann dementsprechend nur klar definierte Aufgaben übernehmen, der „kreative“ Anteil der Arbeit bleibt stets dem Planer überlassen. Das nachfolgende Kapitel legt seinen Schwerpunkt auf die mechanisch-numerische Seite der Zuschnittsproblematik, die konstruktiven Gegebenheiten hingegen werden lediglich angerissen. Nach einer Diskussion der Aufgabenstellung und der Auswirkungen des Zuschnitts auf die Struktur folgt eine Erläuterung der algorithmischen Umsetzung der Schnittliniendefinition und der Abwicklung räumlicher Bahnen, die als eigentliche Zuschnittsermittlung betrachtet werden kann. Hierbei werden Verfahren vorgestellt, die die zugrundeliegende Konfigurationsmechanik in korrekter Weise abbilden und so zu einer Verbesserung der Ergebnisse führen.

4.1 Problemstellung und Ablauf der Zuschnittsberechnung

Um ausreichend Widerstand gegenüber äußeren Lasten zu bieten, weisen vorgespannte leichte Flächentragwerke generell eine doppelte Krümmung auf [Kie95, Ish99b, Göp04]. In Kombination mit der Vorspannung entsteht so eine geometrische Steifigkeit, mittels derer externe Belastungen abgetragen werden können, ohne große elastische Deformationen des Membran- bzw. Seilwerkstoffs mobilisieren zu müssen. Ein Tragwerksplaner ist somit bestrebt, im Formfindungsprozess eine möglichst starke doppelte Krümmung in der Struktur zu generieren, um dadurch auf effiziente Weise ihr Tragvermögen zu erhöhen [Ott54]. Diese räumliche Krümmung des Gesamttragwerks steht jedoch im Widerspruch zu den vorhandenen Werkstoffen für die bauliche Umsetzung: Membranen oder Seilnetze werden nahezu durchwegs als ebene Bahnen bzw. Gitter endlicher Ausmaße hergestellt [SS95, Rob05, SSO07]. Diese Diskrepanz zwischen dem flächenhaften, gekrümmten Tragwerk und den ebenen Werkstoffen mit begrenzter Breite wird durch die *Zuschnittsermittlung* behoben. Um die bauliche Realisierbarkeit des Tragwerks zu ermöglichen, sind hierbei

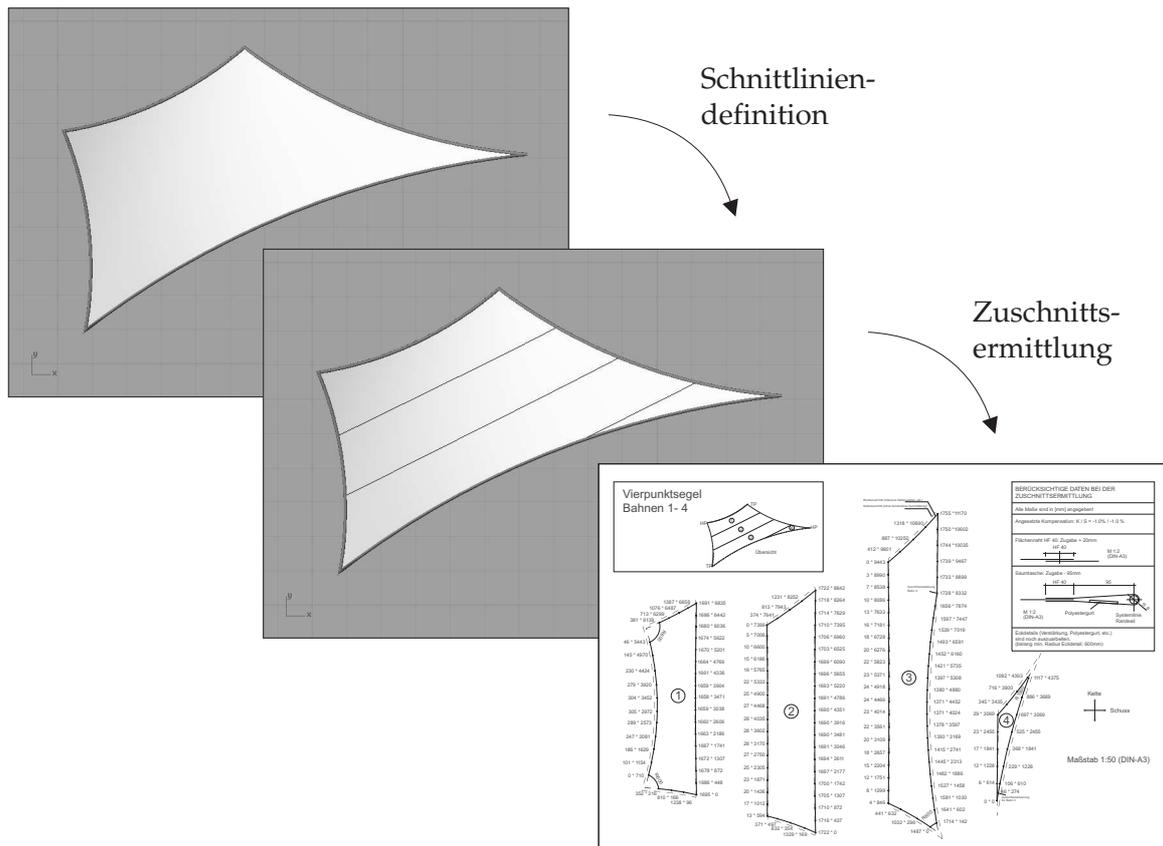


Abbildung 4.1: Zuschnitt eines Vierpunktsegels.

folgende zwei Schritte durchzuführen, die exemplarisch auch für ein Vierpunktsegel in Abbildung 4.1 aufgezeigt sind:

Schnittliniendefinition. Das räumliche Strukturmodell aus der Formfindung wird anhand sogenannter *Schnittlinien* in Bereiche eingeteilt, von denen man annimmt, dass ihre Maße kompatibel mit den lieferbaren Bahnbreiten und -längen der Werkstoffe sind (die maximal lieferbare Bahnbreite von textilen Geweben beträgt ca. 5 [m] [Sei07]). Bei der Anordnung der Schnittlinien ist viel konstruktives Fingerspitzengefühl erforderlich, da diese Auswirkungen auf eine Vielzahl von Faktoren des letztendlichen Gesamttragwerks hat. Zum einen kann durch die Schnittlinienführung gezielt Einfluss auf das mechanische Verhalten des Tragwerks genommen werden, denn die Schnittlinien legen indirekt die Orientierung der Fasern auf der Fläche fest. Werden die Schnittlinien und somit auch näherungsweise die Materialfasern, die parallel zu den Rändern der Werkstoffbahnen liegen, an den Hauptlastabtragsrichtungen ausgerichtet, erreicht man einen optimalen Materialeinsatz und eine Erhöhung der Gesamtsteifigkeit der Struktur. Möchte man ein möglichst flexibles Tragwerk, sind die Schnittlinien versetzt zu den Hauptkrümmungen anzuordnen [Noe76]. Neben dem mechanischen Verhalten wirkt sich die Schnittführung zum anderen auch auf den Herstellungspreis des Flächentragwerks aus. Je nach Qualität der Schnittführung erhöht bzw. verringert sich der Verschnitt des Werkstoffes und somit die erforderlichen Materialkosten. Als

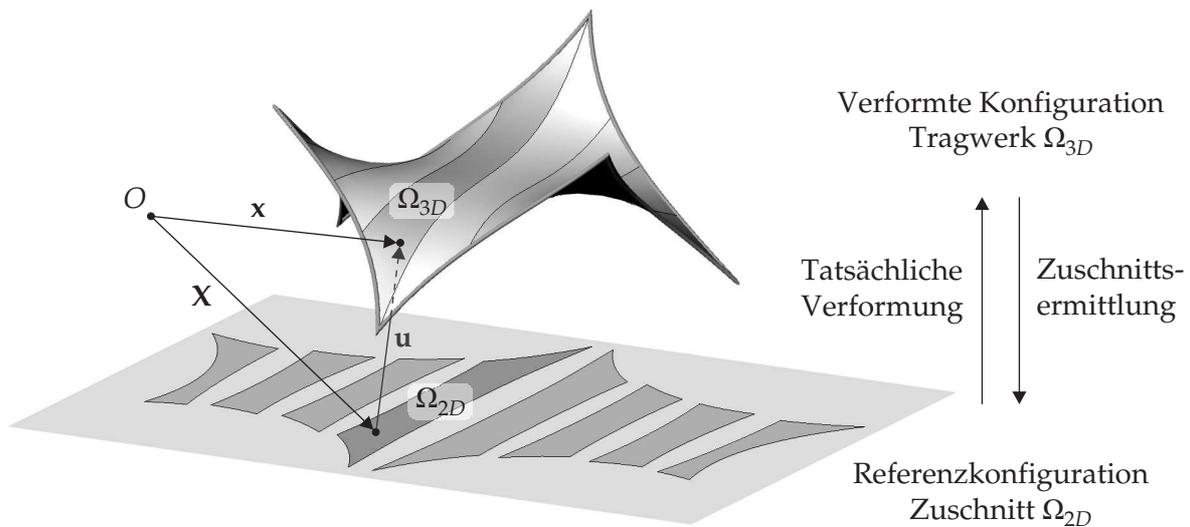


Abbildung 4.2: Konfigurationen der Zuschnittsermittlung.

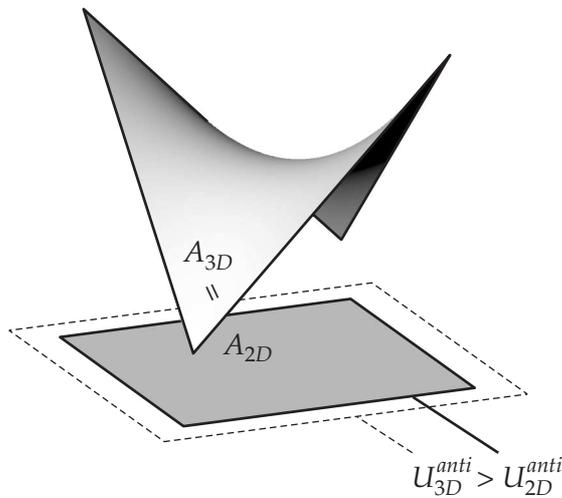
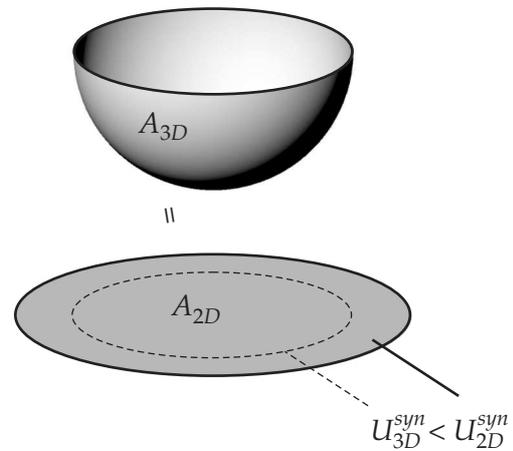
genereller Anhaltswert für das Verhältnis der Summe aus Verschnitt und konstruktiven Zugaben zur Netto-Membranfläche sind in [Mor00] 20% bis 40% aufgeführt. Ein weiterer, nicht zu vernachlässigender Punkt ist das ästhetische Erscheinungsbild, das durch gekonnte Anordnung der Schnittlinien auf der Membranfläche erzielt werden kann. Als gelungenes Beispiel hierfür seien die Schirmkonstruktionen von Rasch erwähnt, die eine regelrechte Ornamentik der Zuschnittsmuster aufweisen [OR96]. Die Anordnung der Schnittlinien auf der Struktur muss weitgehend von Hand erledigt werden [BGS95], da es aufgrund der Vielzahl der Formen und Topologien nahezu unmöglich ist, einen allgemeinen Automatismus zu entwickeln, der alle eben genannten Faktoren zufriedenstellend berücksichtigt. Für die geometrische Schnittliniengenerierung an sich sind numerische Verfahren jedoch ein unerlässliches Hilfsmittel, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird.

Zuschnittsermittlung. In einem zweiten Schritt werden für die räumlichen Bahnen, die aus der Unterteilung der Fläche entlang der Schnittlinien entstehen, ebene Zuschnittsmuster erstellt. Diese müssen derart geformt sein, so dass die tatsächliche Gesamtstruktur, die aus mehreren zugeschnittenen Werkstoffbahnen zusammengesetzt wurde, bestmöglich mit den Planungsvorgaben übereinstimmt. Die *Zuschnittsermittlung* versucht also, den tatsächlichen Verformungsprozess umzukehren: In Realität stellt der zweidimensionale Zuschnitt Ω_{2D} die Referenzkonfiguration des Tragwerks dar, das reale dreidimensionale Tragwerk Ω_{3D} kann als verformte Konfiguration betrachtet werden. Hingegen ist bei der Zuschnittsermittlung mit dem idealen dreidimensionalen „Wunschmodell“ Ω_{3D}^* aus der Formfindung eine verformte Konfiguration bekannt. Man versucht nun, deren unverformte Konfiguration, d. h. den Zuschnitt, so zu bestimmen, dass nach dem Zusammenfügen der einzelnen Bahnen und dem Aufstellen des tatsächlichen Tragwerks die resultierenden Spannungs- und Geometrieabweichungen vom Sollzustand möglichst gering ausfallen. Abbildung 4.2 veranschaulicht die Inversion der tatsächlichen Verformung beim Zuschnittsvorgang und die dabei auftretenden Konfigurationen.

In der Praxis wird der inverse Deformationsprozess der Zuschnittsermittlung gedanklich in zwei Schritte aufgeteilt: Zunächst geht man davon aus, dass die dreidimensionale Geometrie spannungsfrei ist, und bestimmt dafür die ebenen Schnittmuster. Um nun den gewünschten Vorspannzustand in der Struktur hervorzurufen, muss die willkürliche Annahme der Spannungsfreiheit *kompensiert* werden. Der Zuschnitt wird um einen sogenannten *Kompensationsfaktor* verkleinert, der beim Errichten des Tragwerks für die gewünschte elastische Vorspannung in der Membran verantwortlich ist. Die jeweiligen Werte hängen von der Materialart und dem Vorspanngrad ab und werden durch Materialtests bestimmt [Wak04]. Diese stufenweise Zuschnittsgenerierung aus Verebnung und Kompensation lässt sich mittels moderner numerischer Methoden, wie sie beispielsweise in den Abschnitten 4.4 und 4.5 beschrieben werden, in einen einzigen Berechnungsvorgang vereinen. Die berechneten Schnittmuster stellen aber in jedem Fall lediglich einen „Nettozuschnitt“ dar, der um konstruktive Details wie Nahtzugaben oder Randlaschen erweitert werden muss. Auch müssen noch eventuelle Ausgleichsrechnungen vorgenommen werden, um geometrische Rand- bzw. Übergangsbedingungen einzuhalten: Soll eine Membran beispielsweise in feste Ränder eingebaut werden, erweist es sich oft als hilfreich, die Randlänge des Zuschnitts gemäß der Länge des zugehörigen geometrischen Randes zu vergrößern. Dies wird als *Dekompen-sation* bezeichnet [FM04, Wak04]. Ebenfalls muss darauf geachtet werden, dass der gemeinsame Rand zwischen zwei Zuschnittsbahnen keine zu großen Längendifferenzen aufweist, da dies Probleme beim Verbinden durch Verschweißen bzw. Vernähen verursachen könnte. Der durch die konstruktive Durchbildung entstehende „Bruttozuschnitt“ kann nun für die Herstellung des Tragwerks verwendet werden.

4.2 Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts

In Abschnitt 2.2.3 wurde bereits der Begriff der *Abwickelbarkeit* einer Fläche eingeführt. Dieser besagt, dass sich eine räumliche Fläche nur dann verzerrungsfrei in eine Ebene abwickeln lässt, falls an jedem Flächenpunkt die Gaußsche Krümmung K verschwindet. Da leichte Flächentragwerke jedoch generell doppelt gekrümmt sind, lassen sich für die räumlichen Bahnen offensichtlich keine eindeutigen zweidimensionalen Abwicklungen erzeugen, die einem unkompenzierten, d. h. vorgespannten Zuschnitt entsprechen. Ähnlich wie bei der Kartographie muss ein Kompromiss bei der Abwicklung gefunden werden: Für Membrantragwerke ist es jedoch nicht sinnvoll, rein geometrische Abbildungsmethoden zu verwenden, wie sie zur Erstellung der Landkarten herangezogen werden. Man versucht nicht, entweder einen winkel- oder einen flächentreuen Zuschnitt zu erzeugen (wie z. B. bei der Mercator- oder Azimutalprojektion [Sny97]), vielmehr wird eine Minimierung der durch die doppelte Verkrümmung entstehenden Zusatzspannungen angestrebt. Dadurch kann im Gegensatz zu geometriebasierten Herangehensweisen zur Zuschnittsermittlung, wie sie u. a. in [MT90, YPM00, AA97] zu finden sind, den Werkstoffeigenschaften und gewünschten Vorspannzuständen Rechnung getragen werden. Es wurde bereits eine Reihe von Arbeiten auf diesem Gebiet veröffentlicht, jedoch weisen diese stets Einschränkungen bzgl. der zu verwendenden Elemente (z. B. nur Dreieckselemente in [Ish99a, KL02, OF03]), der Materialeigenschaften (z. B. nur lineares Materialverhalten unter kleinen Dehnungen in [MM99]), etc. auf. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer universell einsetzbaren Zuschnittsmethode,

a) Hypar ($K < 0$)b) Halbkugel ($K > 0$)**Abbildung 4.3:** Verebnung nicht-abwickelbarer Flächen unter Beibehaltung der Gesamtfläche.

die für jede beliebige Kombination von Werkstoffen und Vorspannzuständen eine Minimierung der Zusatzspannungen in der dreidimensionalen Geometrie anstrebt.

Die qualitative Verteilung der Zusatzspannungen lässt sich aus einem Gedankenexperiment ableiten: Für zwei charakteristische, doppelt gekrümmte Flächen soll ein Zuschnitt erzeugt werden, der sich im Idealfall spannungsfrei zur räumlichen Fläche verformen ließe. In anderen Worten, es soll keine Vorspannung in der tatsächlichen Struktur wirken, weswegen die Kompensation nicht berücksichtigt werden muss. Aufgrund ihrer klaren Geometrie wird exemplarisch für antiklastische Flächen mit negativer Gaußscher Krümmung K ein hyperbolisches Paraboloid (kurz: Hypar) verwendet; die synklastischen Flächen mit positiver Gaußscher Krümmung sind durch eine Halbkugel repräsentiert (siehe Abbildung 4.3 links bzw. rechts).

Der aus je einer Bahn bestehende Zuschnitt beider Flächen wird nun so bestimmt, dass die Gesamtfläche A_{3D} der dreidimensionalen Struktur gleich der Gesamtfläche A_{2D} des Zuschnitts ist. Für das hyperbolische Paraboloid wird als einfachst möglicher Zuschnitt ein Quadrat gewählt. Dessen Seitemumfang U_{2D}^{anti} ist aufgrund der eben aufgestellten Flächen-gleichheitsbedingung kleiner als der Umfang U_{3D}^{anti} des Hypars, was sich durch eine einfache algebraische Rechnung überprüfen lässt. Für die Halbkugel kann wegen ihrer Rotations-symmetrie mit einem ebenen Kreis ausnahmsweise ein eindeutiger optimaler Zuschnitt bestimmt werden, dessen Umfang U_{2D}^{syn} größer ist als der Randumfang U_{3D}^{syn} der synklastischen räumlichen Fläche.

Verformt man nun gedanklich den Zuschnitt zur doppelt gekrümmten Fläche, ergibt sich für beide Flächenkategorien ein unterschiedliches Bild: Beim antiklastischen Hypar bilden sich aufgrund des kleineren Umfangs des Zuschnitts entlang des Randes Zugspannungen aus. Dementgegen entstehen in Flächenmitte Druckkräfte bzw. Falten, da beim Quadrat dort relativ „mehr“ Fläche angeordnet ist als beim Hypar. Die Spannungsverteilung in der synklastischen Halbkugel infolge des Zuschnitts liefert ein konträres Ergebnis: Der Kreis muss

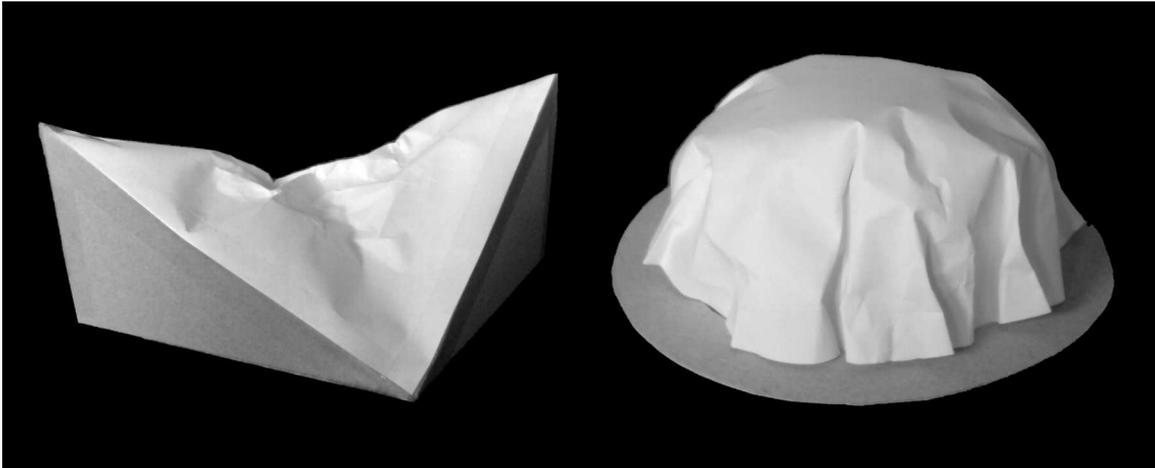


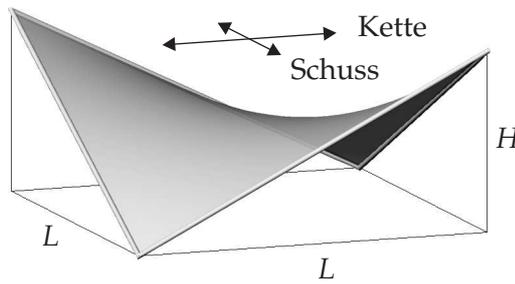
Abbildung 4.4: Faltenbildung infolge des Zuschnitts am physikalischen Modell.

in der Mitte gezogen und am Rand gestaucht werden, um in eine halbkugelförmige Gestalt überführt zu werden. Folglich treten hier in Flächenmitte Zugspannungen auf, am Rand ist eine Faltenbildung durch theoretische Druckspannungen zu erwarten. Abbildung 4.4 veranschaulicht die unterschiedliche Distribution der Spannungsabweichung an physikalischen Modellen: Anhand des entstehenden Faltenmusters können deutlich Bereiche identifiziert werden, in denen infolge des Zuschnitts Druckspannungen entstanden sind. Wie durch das Gedankenexperiment vorausgesagt, befinden sie sich bei antiklastischen Strukturen in der Mitte, bei synklastischen Formen hingegen am Strukturrand.

Diese rein qualitative Aussage über die Spannungsabweichungen bei doppelt-gekrümmten Flächen wird auch durch numerische Experimente bestätigt, wie in den nachfolgenden Abschnitten zu sehen sein wird. Der lokale quantitative Wert, der stets in Relation zur Vorspannung der Struktur gesehen werden muss, hängt von einer Reihe verschiedener globaler Faktoren ab, unter denen die Flächenkrümmung, die Breite der Zuschnittsbahnen und die Schubsteifigkeit des Materials als die wichtigsten betrachtet werden können. Der Einfluss der beiden zuletzt genannten Faktoren soll am konkreten Beispiel eines Vierpunktsegels mit starren Rändern untersucht werden, dessen Abmessungen und Systemwerte im oberen Drittel von Abbildung 4.5 gegeben sind. Als Materialmodell wird das Münsch-Reinhardt-Modell verwendet, das zunächst als äquivalentes Ersatzmodell für ein isotropes Folienmaterial dient, im zweiten Teil der Untersuchung durch Verminderung der Schubsteifigkeit ein fiktives orthotropes Textil modelliert. Die Materialparameter sind [Mor07b] entnommen. Um die letztendliche Spannungsverteilung bei der jeweiligen Versuchsanordnung zu quantifizieren, wird für die Struktur zunächst der kompensierte Zuschnitt für die Spannungsvorgabe σ_0 ermittelt. Die entstehenden Zuschnittsbahnen werden anschließend zusammengefügt und in die Berandung „eingehängt“, wodurch sich die gesuchten Spannungen bzw. die Abweichungen vom Sollspannungszustand ergeben.

Die erste Versuchsreihe untersucht den Einfluss der Bahnbreite, weswegen stets das gleiche isotrope Folienmaterial mit hoher Schubsteifigkeit für die Berechnung verwendet wird: Die resultierenden Spannungsbilder für eine jeweils unterschiedliche Anzahl von Zuschnittsbahnen sind in der Mitte von Abbildung 4.5 dargestellt. Es lässt sich deutlich die Abnahme

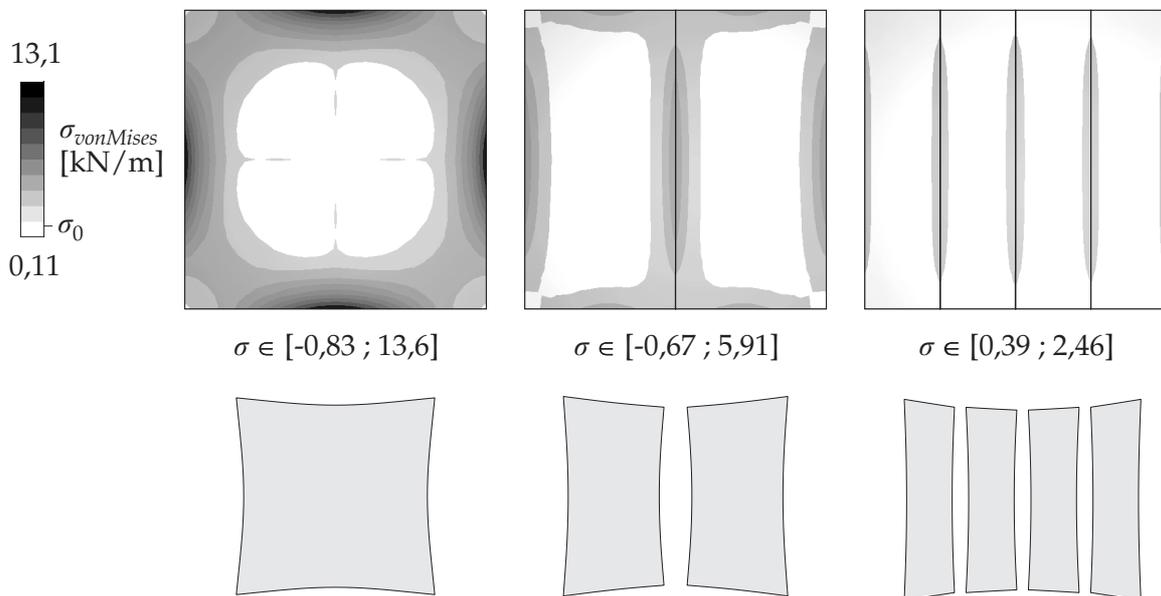
System



$$\begin{aligned}
 E_k &= 250,0 \text{ [kN/m]} \\
 E_s &= 250,0 \text{ [kN/m]} \\
 \mu_{ks} &= 0,45 \text{ [-]} \\
 G_0 &= 86,2 \text{ [kN/m]} \\
 \sigma_0 &= 1,0 \text{ [kN/m]}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} E_k \\ E_s \\ \mu_{ks} \\ G_0 \\ \sigma_0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{bezogen} \\ \text{auf ideale} \\ \text{Querschnitts-} \\ \text{höhe} = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 L &= 2,0 \text{ [m]} \\
 H &= 1,0 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

Einfluss der Bahnbreite (jeweils Schubmodul G_0)



Einfluss des Schubmoduls (jeweils 4 Zuschnittsbahnen)

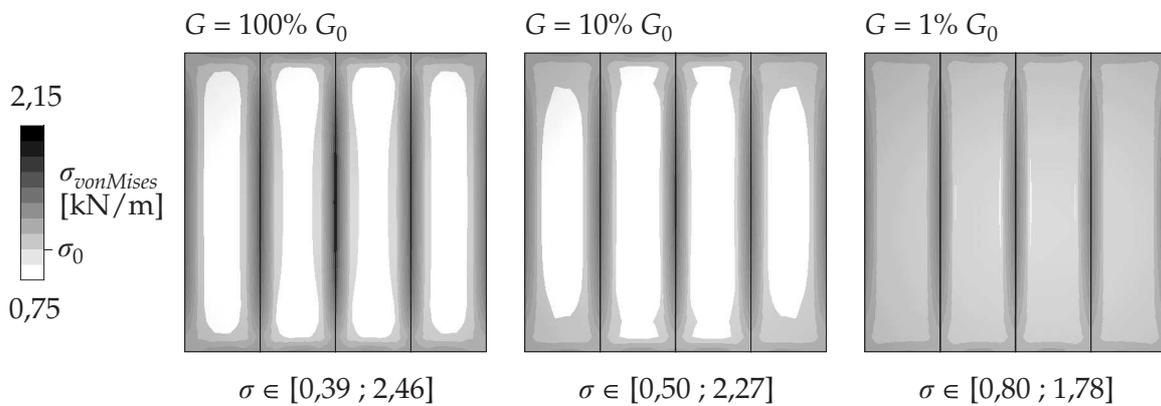


Abbildung 4.5: Faktoren der Spannungsabweichung infolge des Zuschnitts.

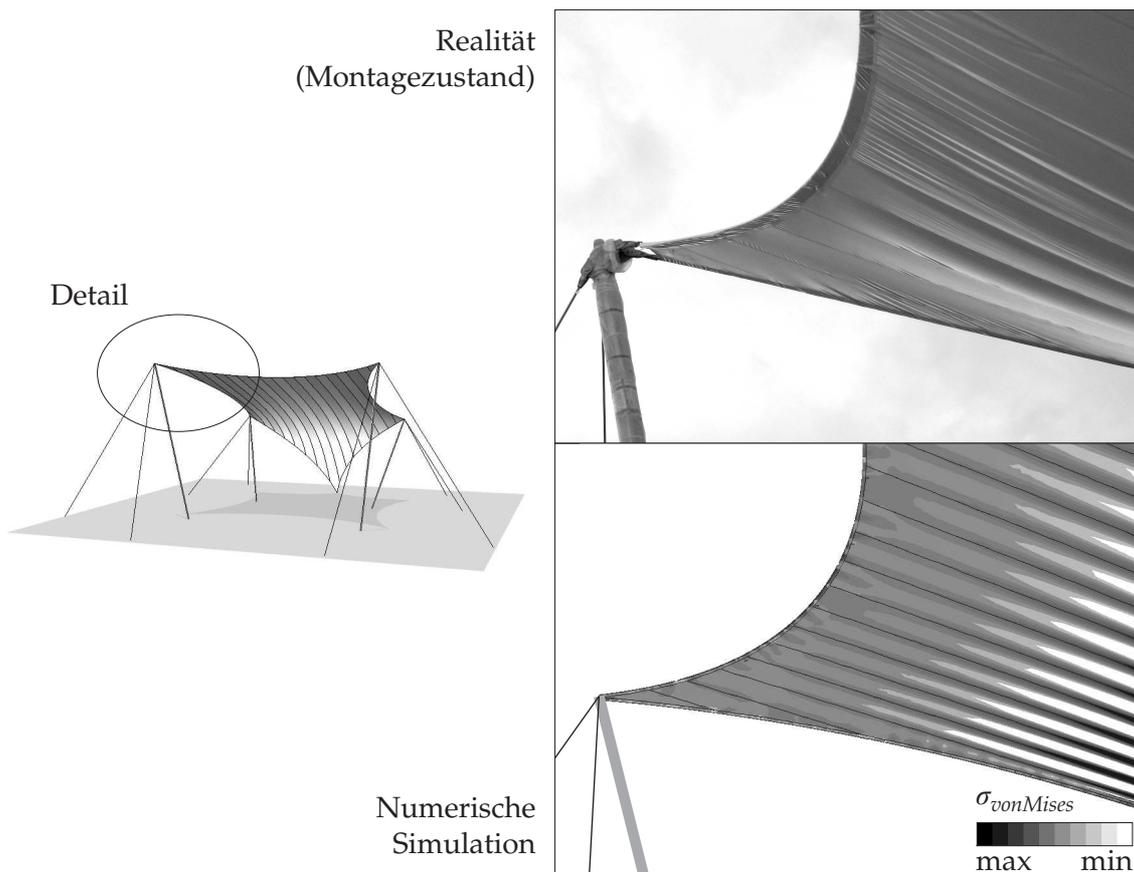


Abbildung 4.6: Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts beim „Papstzelt“.

der zum Teil recht beträchtlichen Spannungsabweichung bei Verringerung der Bahnbreite erkennen. Die Zuschnittsbahnen sollten folglich umso schmaler gewählt werden, je stärker eine Fläche gekrümmt ist. Im rein theoretischen Grenzübergang für unendlich schmale Zuschnitte ließe sich sogar eine doppelt-gekrümmte Fläche ohne Zusatzspannungen bauen.

In der zweiten Versuchsanordnung wird der Einfluss der Schubsteifigkeit eines textilen Werkstoffs auf die resultierende Spannungsverteilung der räumlichen Struktur überprüft: Dazu wird der Wert des Schubmoduls des verwendeten Materials in den jeweiligen numerischen Experimenten reduziert, so dass hierdurch das zunächst isotrope Material mit hoher Schubsteifigkeit in ein leicht verrautbares Gewebe übergeht. Bei Betrachtung der Ergebnisse im unteren Drittel der Abbildung wird deutlich, dass bei einer stets gleichen Anzahl an Zuschnittsbahnen eine Abnahme des Schubmoduls zu einer Reduktion der Spannungsabweichung führt. Ein orthotropes Gewebe kann demnach durch Verrautung der Fasern „leichter“ in eine doppelt-gekrümmte Form übergeführt werden als ein schubstarres isotropes Material. Diese hier aus numerischen Versuchen gewonnene Erkenntnis stellt selbstverständlich keine Neuentdeckung dar, denn schon Frei Otto beschreibt in [Ott54] dieses Phänomen indirekt wie folgt: „Die gekrümmte vorgespannte Membrane hat [...] den Nachteil, daß sie sich im allgemeinen schwer herstellen läßt, wenn sie nicht aus Zelttuch besteht.“

Ob signifikante Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts auftreten, muss im Einzelfall überprüft werden. Jedoch sind Folienkonstruktionen in der Regel dafür anfälliger als textile Tragwerke, da die verwendeten isotropen Werkstoffe über einen relativ hohen Schubmodul verfügen und zudem ihr Vorspanngrad verhältnismäßig niedrig gewählt wird. Die Spannungsabweichungen bei orthotropen Textilien werden in der Regel von der aufgebrauchten Vorspannung „überzogen“, so dass evtl. Veränderungen der Struktur nur im Montagezustand sichtbar werden, da dann die Membran noch nicht in vollem Maße vorgespannt ist. Abbildung 4.6 zeigt diesen Sachverhalt am Beispiel des Zeltdachs auf, das anlässlich des Papstbesuches in München im Jahr 2006 errichtet wurde. Bei der von Sobek entworfenen Membranstruktur [SH08] kann man während des Aufbauprozesses deutlich die Spannungsabweichungen erkennen (siehe Abbildung 4.6 oben): Während die Nähte zwischen den einzelnen Zuschnittsbahnen schon straff vorgespannt sind, ist die Vorspannung im Zentrum der Bahnen infolge ihrer antiklastischen Krümmung noch zu niedrig, um Faltenbildung zu vermeiden. Diese Beobachtung stimmt sowohl mit dem zu Beginn des Abschnitts angestellten Gedankenexperiment als auch mit den numerischen Berechnungsergebnissen überein, die in der unteren Hälfte der Abbildung zu sehen sind. Dieser Zustand hoher relativer Spannungsabweichung ist selbstverständlich nur temporär: Nach Erreichen des angestrebten Vorspannzustands verschwinden die Falten, und die Zusatzspannungen fallen im Vergleich zur Vorspannung aufgrund der relativ flachen Geometrie und der niedrigen Schubsteifigkeit des Materials gering aus, so dass sich letztendlich eine „glatte“ Struktur einstellt.

4.3 Numerische Ermittlung der Schnittlinien

Auch wenn die Anordnung der Schnittlinien auf der Struktur i. A. manuell erfolgt, bedeutet dies nicht, dass die Ränder der Zuschnittsbahnen „freihand“ auf die Fläche gemalt werden. Jede Schnittlinie an sich unterliegt generell einer strengen mathematischen Definition, die

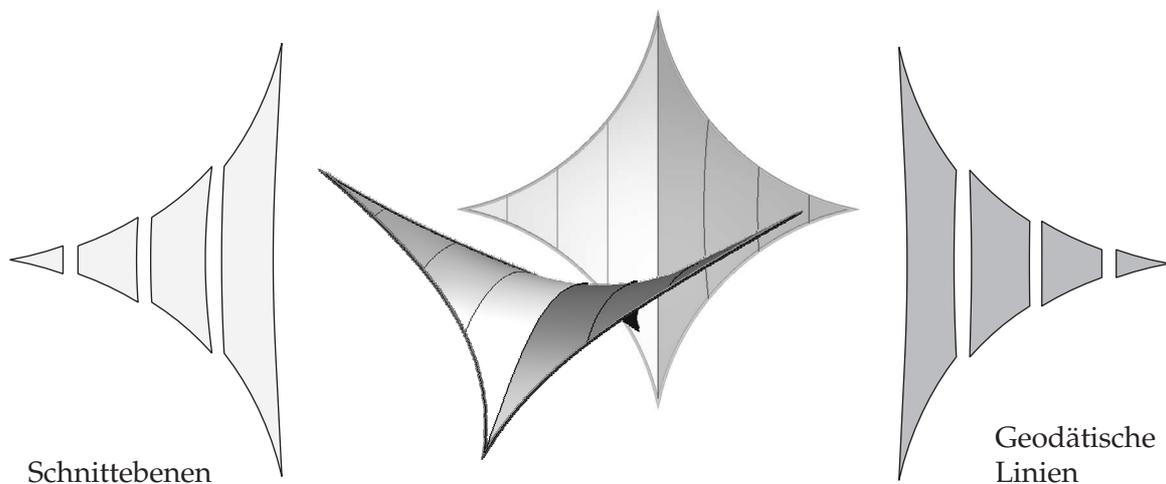


Abbildung 4.7: Einfluss der Schnittliniendefinition auf den Zuschnitt.

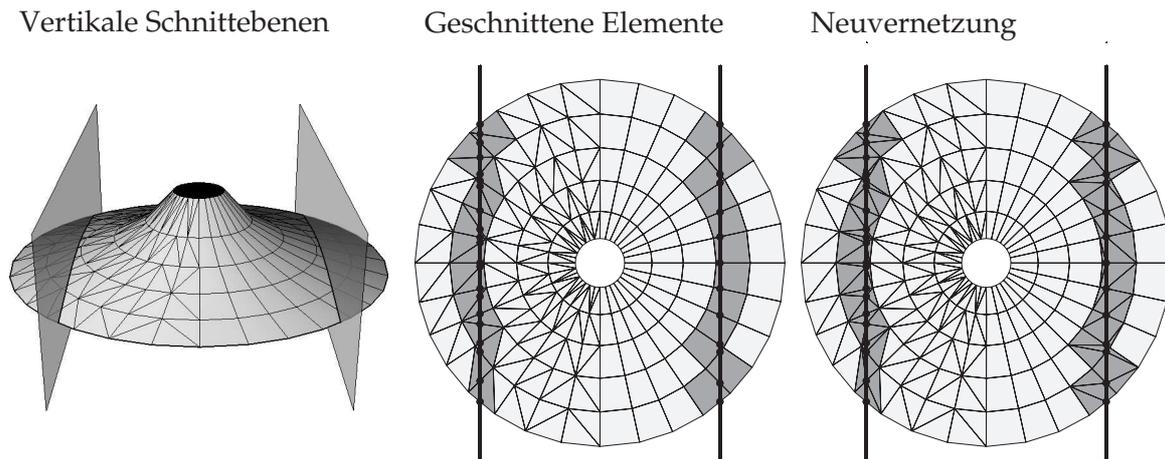


Abbildung 4.8: Neuvernetzung nach vertikalen Schnitten.

eine Gleichmäßigkeit bei der Zuschnittsermittlung gewährleisten soll. Die weitestverbreiteten Schnittliniendefinitionen erfolgen hierbei durch die Verschneidung der Membran- bzw. Seilnetzfläche mit gegebenen *Schnittebenen* oder anhand *geodätischer Linien* mit bekannten Start- und Endpunkten. Welche Art der Schnittlinie gewählt wird, hängt vom jeweiligen Projekt ab, jedoch lässt sich durch Verwendung geodätischer Linien eine bessere Materialausnutzung erzielen als mittels Schnittebenen: Wie Abbildung 4.7 am Beispiel des Zuschnitts eines einfachen Vierpunktsegels aufzeigt, sind die Schnittmuster infolge vertikaler Schnitte (Abbildung 4.7 links) stärker gekrümmt als der Zuschnitt anhand geodätischer Linien (Abbildung 4.7 rechts). Dieser weist zwar ebenfalls gekrümmte Ränder auf, jedoch ist die Krümmung an entgegengesetzten Rändern gegenläufig, wodurch die Zuschnittsbahn eine relativ gerade Form erhält. Dadurch kann die Breite der Werkstoffbahnen besser ausgenutzt werden als im Falle der „bananenförmigen“ Zuschnittsmuster durch vertikale Schnitte [FM04].

Die nächsten Abschnitte erläutern numerische Algorithmen zur Berechnung der eben vorgestellten Schnittlinienvarianten. Dabei wird vorausgesetzt, dass stets eine diskrete Flächenbeschreibung gemäß der Methode der finiten Elemente vorliegt. Um den Sachverhalt jedoch nicht unnötig zu verkomplizieren, werden im nachfolgenden Text lediglich lineare Dreiecks- und bilineare Viereckselemente verwendet.

4.3.1 Schnittebenen

Wird die Schnittlinie als Verschneidungsfigur einer Schnittebene mit der Membranfläche definiert, bereitet die numerische Berechnung der Schnittkurve keine größeren Schwierigkeiten: Die Schnittkurve kann als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Ebene mit den Elementkanten ermittelt werden. Eine geschnittene Kante liegt genau dann vor, wenn die Endpunkte der Elementkante auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen, was sich z. B. unter Verwendung der Hesse-Normalform einer Ebene bestimmen lässt [Zei96].

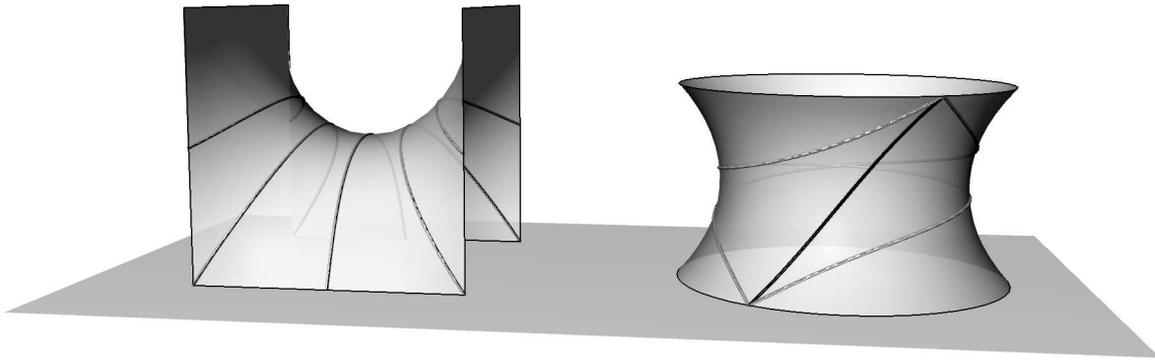


Abbildung 4.9: Beispiele geodätischer Linien.

Probleme entstehen bei diesem rein geometrischen Vorgehen durch das ebenfalls geschnittene FE-Netz. Um ein zulässiges Netz für die Zuschnittsberechnung zu erhalten, ist mindestens eine Neuvernetzung der durch die Schnittkurve geteilten finiten Elemente nötig. Die einfachste Methode bietet die lokale Vernetzung mit linearen Dreieckselementen, wobei die Schnittpunkte aus Ebene und Elementkante als neue FE-Knoten dem Netz hinzugefügt werden. Abbildung 4.8 verdeutlicht dieses Vorgehen am Beispiel einer Chinese hat-Struktur, die je zu einer Hälfte mit Drei- und Viereckselementen diskretisiert ist. Bei der näheren Betrachtung der Ergebnisse erkennt man deutlich die Verschlechterung der Netzqualität durch die ungleichmäßige Größe der neu erzeugten Elemente. Auch wird das ursprünglich reine Vierecksnetz auf der rechten Seite zu einer gemischten Diskretisierung aus Drei- und Vierecken abgeändert. Ist dies nicht erwünscht oder werden hohe Anforderungen an die Qualität an des FE-Netz gestellt, ist eine Neuvernetzung der gesamten Fläche ratsam.

4.3.2 Geodätische Linien

Die Definition geodätischer Linien kann über eine Vielzahl möglicher Herangehensweisen erfolgen (siehe z. B. [Zei96, Car76]): Eine der eingängigsten ist ihre Eigenschaft, zwei auf ihr liegende Punkte auf kürzestem Weg zu verbinden. Sie kann somit als eine verallgemeinerte Gerade bzgl. gekrümmter Flächen interpretiert werden. Es ist jedoch wichtig anzumerken, dass die Weglänge zwischen den zwei Punkten nicht zwangsläufig das absolute Entfernungsminimum sein muss, vielmehr genügt es, dass ein lokales Minimum des Abstands vorliegt. In anderen Worten, eine Kurve zwischen zwei Punkten ist genau dann eine geodätische Linie, falls jede infinitesimale Änderung der Kurve eine Vergrößerung der Wegstrecke bewirkt. Dennoch kann es eine weitere Kurve geben, deren Weglänge geringer ist; diese liegt jedoch nicht „in der unmittelbaren Nachbarschaft“ der ersten Kurve. Dieser Sachverhalt wird besonders beim Katenoid deutlich, bei dem zwischen zwei Flächenpunkten sogar unendlich viele geodätische Linien existieren, die sich durch die Anzahl der „Umwicklungen“ und die Drehrichtung unterscheiden (siehe Abbildung 4.9 rechts).

Geodätische Kurven lassen sich neben dem vorgestellten, variationellen Kriterium des kürzesten Weges ebenso über eine rein geometrische Bedingung definieren: Der Krümmungsmittelpunkt einer geodätischen Linie muss für jeden Kurvenpunkt exakt auf der Geraden

liegen, auf der sich auch die Zentren der Krümmungskreise der Fläche befinden. Diese Gerade wird durch den Kurven- bzw. Flächenpunkt und dessen Flächennormalenvektor bestimmt (siehe Abschnitt A.2). Dies bedeutet, dass eine geodätische Kurve stets in gleicher Weise wie die zugehörige Fläche gekrümmt sein muss. Tritt eine Krümmungskomponente auf, die nicht in der Fläche „enthalten“ ist, handelt es sich bei der vorliegenden Kurve folglich nicht um eine geodätische Linie. Die geodätischen Linien am Beispiel der Scherkschen Fläche (siehe Abbildung 4.9 links) veranschaulichen diesen Zusammenhang.

Die Festlegung geodätischer Linien auf einer Fläche kann durch die Angabe zweier Kurvenpunkte erfolgen. Jedoch ist hier Achtung geboten, falls mehrere geodätische Linien möglich sind. Alternativ lässt sich auch ein Startpunkt und eine Startrichtung als Eingangsparameter verwenden. Dies hat jedoch den Nachteil, dass damit nur relativ grob die letztendliche Richtung der Kurve auf der gekrümmten Fläche vorausgesehen werden kann, was einer akkuraten Anordnung der Schnittlinien abträglich ist. Um mehr Kontrolle über das Resultat zu bekommen, empfiehlt es sich deshalb, die erste Variante zu verwenden und die Linie über ihren Anfangs- und Endpunkt zu definieren.

Die Berechnung geodätischer Linien auf facettierten Geometrien, wie z. B. FE-Netzen, wird generell in zwei Schritten vollzogen: Zunächst wird eine Näherung der geodätischen Linie berechnet, die sich nur aus Elementkanten zusammensetzt. Anschließend folgt eine Optimierung dieser *diskreten geodätischen Linie*, um die auftretenden Knicke zwischen den Kurvenelementen zu minimieren. Nachfolgend werden die einzelnen Schritte näher erläutert.

Diskrete geodätische Linien. Die meisten Berechnungsverfahren diskreter geodätischer Linien basieren auf sogenannten *Wavefront propagation*-Algorithmen [Dji59, SK98, NK02, MVC04]. Dabei werden, ausgehend vom Endpunkt P_{Ende} der geodätischen Linie, sukzessive die kürzesten Entfernungen aller weiteren Netzknoten zu diesem Endknoten bestimmt. Die Schleife wird abgebrochen, wenn die Wellenfront der Entfernungsberechnung den Startpunkt P_{Start} der gesuchten geodätischen Linie erreicht hat. Die eigentliche Kurvenberechnung erfolgt im nächsten Schritt, der den bislang eingeschlagenen Weg umkehrt. Beginnend mit dem Startpunkt wird der Folgepunkt gesucht, der sich durch die kürzeste Wegsumme aus der Entfernung zwischen beiden Punkten und dem anschließenden Abstand zum Endpunkt auszeichnet. Dieses Berechnungsverfahren wird so lange fortgesetzt, bis die resultierende, diskrete geodätische Linie am Endpunkt angekommen ist.

Ein bekannter Algorithmus zur Berechnung kurzer Pfade in Netzwerken wurde von Dijkstra [Dji59] entwickelt. Die verwendete Entfernungsfunktion berechnet den Abstand eines Punktes zum Endpunkt ausschließlich über die minimal zurückzulegende Kantenlänge. Für regelmäßige Netze kann dies Probleme bereiten, da es eine Vielzahl verschiedener Lösungen für die diskrete Kurve geben kann. Diese besitzen alle näherungsweise die gleiche Länge, liegen jedoch oft weit entfernt von einer analytischen geodätischen Linie. Als Beispiel sind in der oberen Hälfte der Abbildung 4.10 auf der rechten Seite zwei mögliche Ergebnisse des Algorithmus abgebildet. Jede der beiden Linien verbindet den Start- und Endpunkt auf kürzestmöglichem absoluten Weg, dennoch haben beide Ergebnisse relativ wenig mit einer guten Näherung der gesuchten geodätischen Linie gemein.

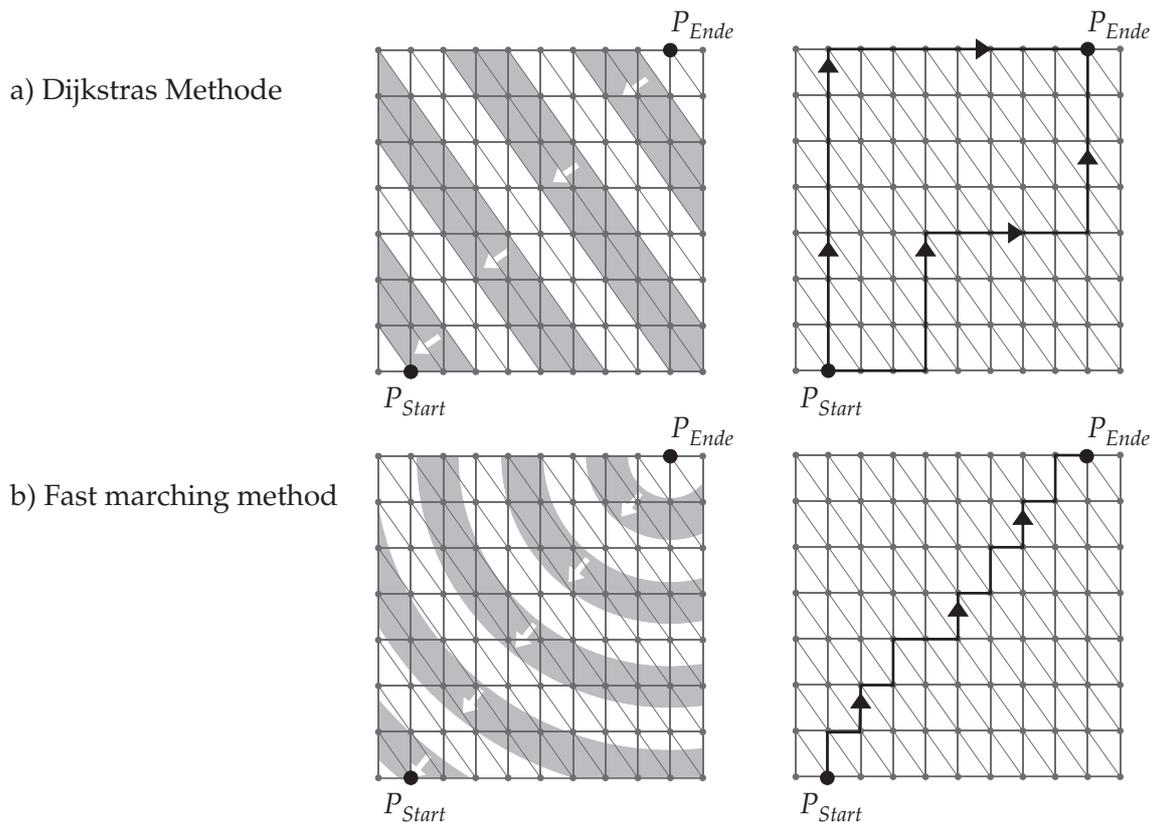


Abbildung 4.10: Algorithmen zur Bestimmung diskreter geodätischer Linien.

Eine Verbesserung liefert die von Sethian/Kimmel entwickelte *Fast Marching Method* (FMM) für triangularisierte Netze [SK98]. Anstatt nur den zurückgelegten Weg auf den Elementkanten zu berücksichtigen, versucht die bei der Fast Marching Method verwendete Entfernungsfunktion, die tatsächliche geodätische Entfernung zu approximieren: Aus den bekannten Entfernungen T_1 und T_2 zweier Dreieckspunkte wird zunächst ein gedanklicher Ursprung O konstruiert, der in der gleichen Ebene wie das Dreieck liegt. Von diesem Ursprung kann nun die noch unbekannte Abstandsfunktion T_3 des dritten Punktes ausgemes-

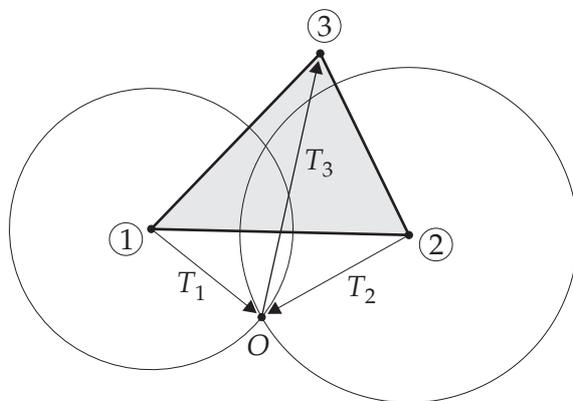


Abbildung 4.11: Berechnung der Entfernungsfunktion T der FMM.

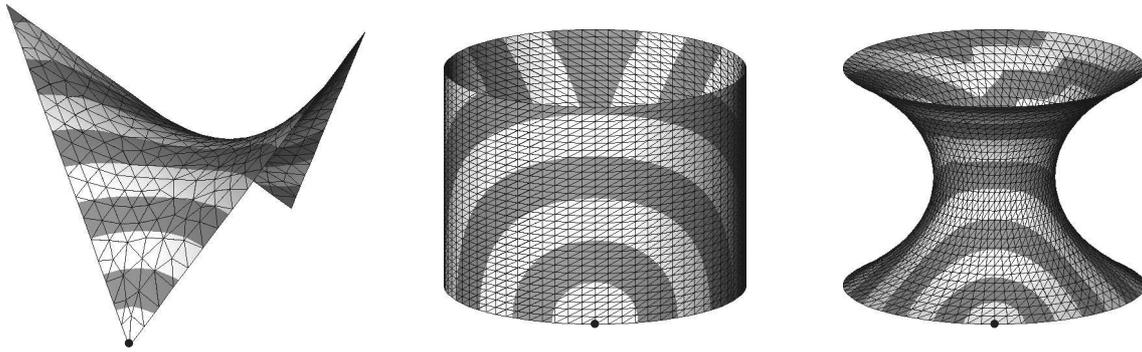


Abbildung 4.12: Berechnungsergebnisse der geodätischen Entfernung.

sen werden. In Abbildung 4.11 wird dieses Vorgehen illustriert. Der allgemeine Ablauf zur Berechnung der Entfernungsfunktion aller Knoten kann [NK02] entnommen werden.

Dieses Vorgehen zur Approximation der geodätischen Entfernung liefert akkurate Ergebnisse, falls das FE-Netz aus „stumpfen“ Dreiecken besteht (siehe Hypar und Zylinder in Abbildung 4.12 links und Mitte). Für spitzwinklige Dreiecke entstehen Ungenauigkeiten bei der Berechnung geodätischer Distanzen (siehe „Zacken“ auf der Hinterseite des Katenoids in Abbildung 4.12 rechts). Wenn die daraus resultierende Annäherung der geodätischen Linie nur einen Ausgangspunkt für die nachfolgende Optimierung der diskreten Kurve bildet, können die Abweichungen in Kauf genommen werden. Für genauere Ergebnisse sind in [SK98, NK02] Verfahren zur Behebung dieses Problems beschrieben.

Werden viereckige Elemente zur Flächendiskretisierung verwendet, muss zur Berechnung der geodätischen Entfernungen das Netz in Dreiecke umgewandelt werden, um die gerade beschriebenen Algorithmen verwenden zu können. Bei der anschließenden Rückwärtsrechnung, deren Resultat die diskrete geodätische Linie ist, kann wieder das vierknotige Netz verwendet werden.

Optimierung der diskreten geodätischen Linie. Da die diskrete geodätische Linie sich bislang lediglich aus Elementkanten zusammensetzt, können starke Knicke zwischen den einzelnen Kurvenelementen die Folge sein. Durch einen anschließenden Optimierungslauf wird versucht, die Kurve zu begradigen. Eine rein geometrische Herangehensweise findet man in [MVC04]: Es wird versucht, die Kurve sukzessive zu begradigen, wobei man sich zur Hilfe macht, dass geodätische Linien „verallgemeinerte Geraden“ sind. Der Algorithmus betrachtet stets zwei aufeinanderfolgende Kurvenstücke und die zugehörigen beiden Dreieckselemente. Nachdem diese in eine Ebene aufgeklappt worden sind, wird der Mittelknoten der beiden Kurvenstücke auf der verbindenden Elementkante so positioniert, dass diese eine Gerade bilden. Dieses Vorgehen wird für alle folgenden Knoten gleichermaßen wiederholt, wodurch sich die Kurve iterativ begradigt. Bis zum Erreichen der Konvergenz können evtl. mehrere globale Optimierungsläufe notwendig sein. Da die resultierende diskrete geodätische Linie nicht allein aus Elementkanten besteht, ist ähnlich wie in Abschnitt 4.3 eine Neuvernetzung der geschnittenen Elemente vor der Zuschnittsberechnung erforderlich.

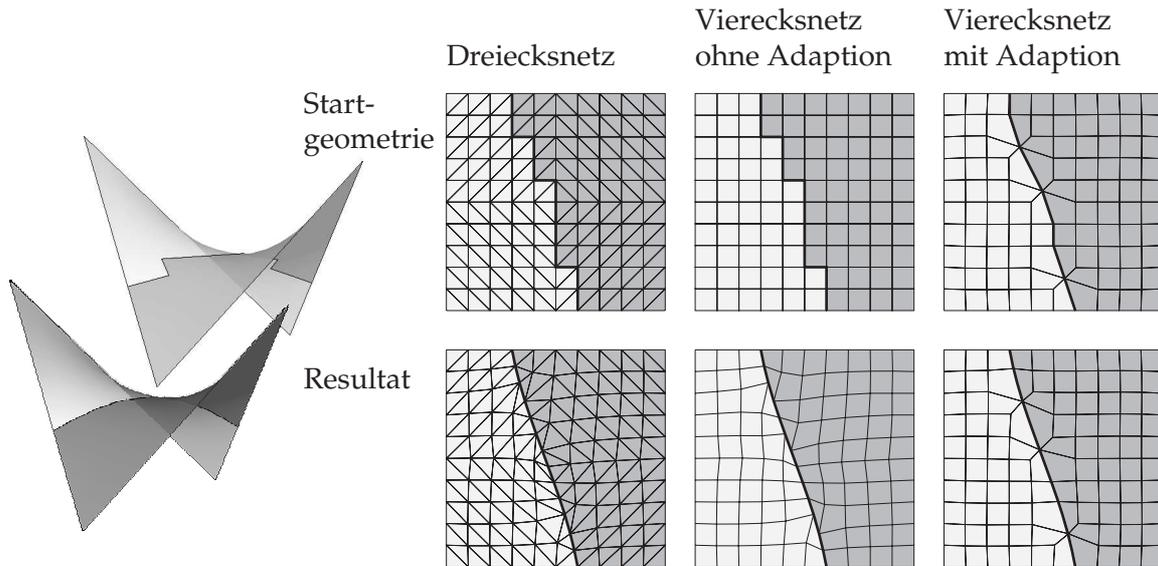


Abbildung 4.13: Geodätische Linien durch vorgespannte Seile.

Möchte man eine Neuvernetzung umgehen, besteht die Möglichkeit, entlang der berechneten Schätzung der geodätischen Linie vorgespannte Seile dem Flächennetz der Membran hinzuzufügen. Führt man nun weitere Formfindungsschritte aus, zieht die Vorspannung des Seiles das Netz in die gewünschte Form. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass alle Reaktionskräfte des Seiles unterdrückt werden, die senkrecht zur Membranoberfläche wirken (z. B. können hierfür die approximierten Knotennormalen nach Abschnitt 2.2.4 verwendet werden). Dies bewirkt, dass die Seilknoten in jedem Iterationsschritt nur in der Tangentialebene der Fläche rutschen, wodurch die Gesamtform der Struktur weitestgehend unbehelligt bleibt [Wak04]. Aus ähnlichen Überlegungen folgt, dass ebenfalls die Reaktionskräfte am Start- und Endknoten der geodätischen Linie unterdrückt werden müssen, falls dort keine festen Auflagerbedingungen vorhanden sind.

Bei diesem „Geradeziehen“ des Seiles in der Tangentialebene der Fläche macht man sich die Minimierung der Vorspannenergie zu Nutze, um durch die gleichzeitige Minimierung der Seillänge die gewünschte geodätische Linie zu erhalten. Während diese Methode bei dreieckigen Netzen sehr gute Resultate liefert (siehe Abbildung 4.13 links), tauchen bei Vierecksnetzen Probleme auf: Sind zwei Kanten des gleichen Elements Bestandteil der Näherungskurve, werden diese durch das Geradeziehen näherungsweise kollinear. Das eigentliche Viereck entartet zu einer dreieckigen Form, was aus FE-technologischer Sicht eine Verschlechterung der späteren Berechnungsergebnisse bewirken kann (siehe Abbildung 4.13 Mitte). Aus diesem Grund ist bei viereckigen Netzen eine Netzadaption erforderlich, durch die erreicht wird, dass maximal eine Kante eines jeden Elements zur geodätischen Linie gehört. Eine mögliche Netzadaption, die zulässige Vierecke nach der Berechnung der geodätischen Linie produziert, ist auf der rechten Seite von Abbildung 4.13 zu sehen.

Nach der Ermittlung der geodätischen Schnittlinien ist noch eine Aufspaltung des Flächennetzes in die einzelnen Bereiche vonnöten. Ist diese vollzogen, kann mit der Zuschnittsberechnung fortgefahren werden.

4.4 Zuschnitt durch Verebnen

Die einfachste Weise, ein allgemeines mechanisches Verfahren für die Zuschnittsberechnung zu verwenden, bietet das *Verebnen* einer Struktur [LWB08]. Diese Methode fußt auf der Idee, eine elastische flächenhafte Struktur in eine zunächst beliebige Ebene zu drücken. Die dadurch entstehenden elastischen Spannungen werden in einem nachfolgenden Relaxationsschritt abgebaut, bei dem sich die Struktur in der Ebene „entspannen“ kann (siehe Abbildung 4.14). Dadurch entsteht ein energetisch optimaler zweidimensionaler Zustand, dessen Umrandung das gesuchte Schnittmuster bildet. Aufgrund des mechanischen Ansatzes lassen sich unterschiedliche Materialeigenschaften sowie Vorspannzustände bei der Zuschnittsermittlung berücksichtigen.

Numerisch kann dieses Verfahren in zwei Schritten umgesetzt werden: Zu Beginn erfolgt eine rein geometrische Verebnung des FE-Netzes der Struktur, die als Ausgangsgeometrie für den nachfolgenden Relaxationsschritt dient (siehe Abbildung 4.14 links). Hierbei ist lediglich darauf zu achten, dass keine Überlappungen bei der zweidimensionalen Fläche entstehen, ansonsten kann die Verebnung beliebig erfolgen. Dennoch gilt es zu bedenken, dass die spätere Relaxation umso schneller verläuft, je geringer die Abweichung der „plattgedrückten“ Fläche vom Endzustand des Zuschnitts ist. Als effektives Verfahren zur geometrischen Verebnung kann die Projektion der Fläche in eine Ebene verwendet werden. Es empfiehlt sich, die Ebene nach dem mittleren Normalenvektor der räumlichen Struktur auszurichten, um die Abbildungsverzerrungen möglichst klein zu halten. Der mittlere Normalenvektor der Fläche lässt sich aus den ebenfalls gemittelten Knotennormalen nach Gleichung (2.37) wie folgt approximieren:

$$\bar{\mathbf{n}}_{\text{Projektion}} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n_{\text{knoten}}} \bar{\mathbf{n}}_k}{\left\| \sum_{k=1}^{n_{\text{knoten}}} \bar{\mathbf{n}}_k \right\|} \quad (4.1)$$

Im zweiten Schritt erfolgt die Relaxation der Membran (siehe Abbildung 4.14 rechts): Indem man diese in der Ebene frei verformen lässt, werden die durch die Zwangsverebnung entstandenen elastischen Spannungen und eventuelle intrinsische Vorspannungen, die für die Kompensation des Zuschnitts verantwortlich sind, bis auf einen Eigenspannungszustand abgebaut. Die Größe und Lage der resultierenden Eigenspannungen ist unabhängig von der projizierten Ausgangsgeometrie und stellt ein Indiz für später zu erwartenden Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts bei der dreidimensionalen Struktur dar. Nur bei abwickelbaren Flächen verschwindet der Eigenspannungszustand komplett.

Für die algorithmische Umsetzung stellt das projizierte FE-Netz eine Zwischenlösung für den iterativen Lösungsprozess der Relaxation dar. Dabei wird die Position der FE-Knoten innerhalb der Fläche derart verbessert, so dass sich letztendlich der energetisch optimale Zustand einstellen kann. Da sich jeder Knoten nur noch in der Projektionsebene bewegen darf, reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf zwei Stück pro Knoten. Als geometrische Randbedingung ist eine statisch bestimmte Lagerung des FE-Netzes zu wählen, so dass die Verformungsmöglichkeiten nicht künstlich eingeschränkt werden.

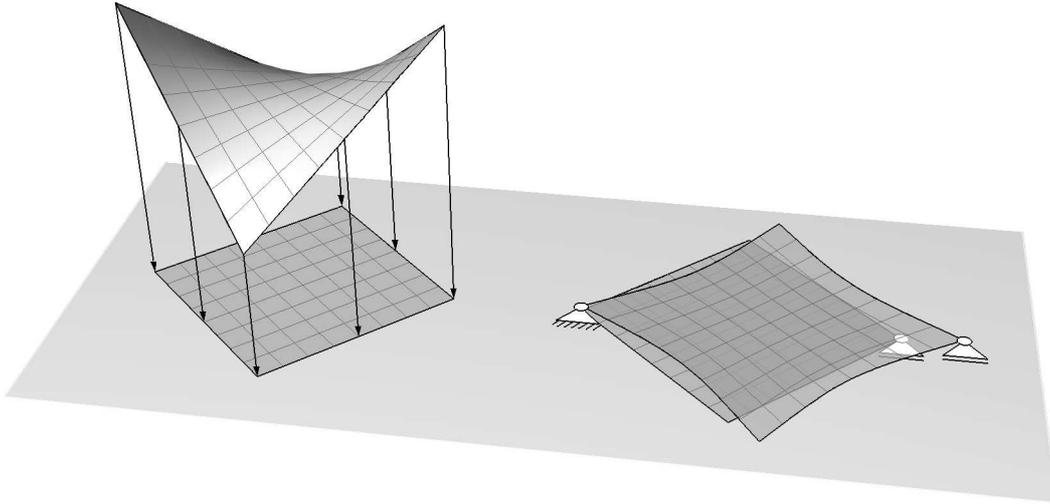


Abbildung 4.14: Zuschnitt durch Verebnen.

Der Gleichgewichtszustand der verebneten Membran, der ihrem Zuschnitt entspricht, muss folgende Arbeitsgleichung erfüllen:

$$-\delta W_{Verebnen} = H \int_{\Omega_{3D}} (\mathbf{S}_{el,3D \rightarrow 2D} + \mathbf{S}_{ps}) : \delta \mathbf{E}_{3D \rightarrow 2D} dA_{3D} = 0 \quad (4.2)$$

Da die zweidimensionale Geometrie im Laufe der Berechnung noch unbekannt ist, wird die virtuelle Arbeit des Systems materiell beschrieben. Dies bedeutet, dass kontinuumsmechanische Größen verwendet werden, die sich auf die Referenzkonfiguration beziehen, die in diesem Fall die dreidimensionale Struktur bildet. Die Integration der Arbeitsanteile, die über die Höhe H des Membranquerschnitts konstant sind, erfolgt dementsprechend über die Referenzfläche A_{3D} der Mittelebene der räumlichen Membran. Die Spannungen setzen sich aus zwei Anteilen zusammen: Die elastischen PK2-Spannungen $\mathbf{S}_{el,3D \rightarrow 2D}$ entstehen durch den Deformationsprozess vom dreidimensionalen Zustand in die Ebene. Der zweite Anteil \mathbf{S}_{ps} beschreibt einen auf die Membran aufgetragenen Vorspannzustand (englisch: „prestress“), der ein Schrumpfen der Membran bei der Relaxation und somit eine automatische Kompensation des Zuschnitts bewirkt. $\mathbf{E}_{3D \rightarrow 2D}$ stellt die virtuellen Green-Lagrange-Dehnungen dar, die ebenfalls durch die Verebnung entstehen.

Durch Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens auf Gleichung (4.2) ergibt sich schließlich ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der inkrementellen Verbesserungen Δu_s der zweidimensionalen Knotenpositionen:

$$\underbrace{-\frac{\partial^2 W_{Verebnen}}{\partial u_r \partial u_s}}_{K_{rs}^{Verebnen}} \Delta u_s - \underbrace{\frac{\partial W_{Verebnen}}{\partial u_r}}_{R_r^{Verebnen}} = 0 \quad (4.3)$$

Nach Erreichen der Konvergenz entspricht der Umriss der zweidimensionalen Fläche dem gesuchten Zuschnitt. Wird ein orthotropes Material verwendet, ist zusätzlich noch die Orientierung der Faserrichtungen auf dem Zuschnittsmuster zu bestimmen. Dafür werden an

jedem Gaußpunkt der Fläche die lokalen kartesischen Basisvektoren $\{\tilde{\mathbf{f}}_{\alpha,3D}\}_{\alpha \in \{1,2\}}$, die die Faserrichtungen der dreidimensionalen Membran repräsentieren, mithilfe des Rotationsanteils \mathbf{R} des Deformationsgradienten nach Gleichung (2.51) in den ebenen Zuschnitt gedreht. Um einheitliche globale Faserrichtungen $\{\tilde{\mathbf{f}}_{\alpha,2D}\}_{\alpha \in \{1,2\}}$ des Zuschnitts zu erhalten, erfolgt eine Mittelung aller Vektoren mit anschließender Orthogonalisierung analog Abschnitt 3.2.2:

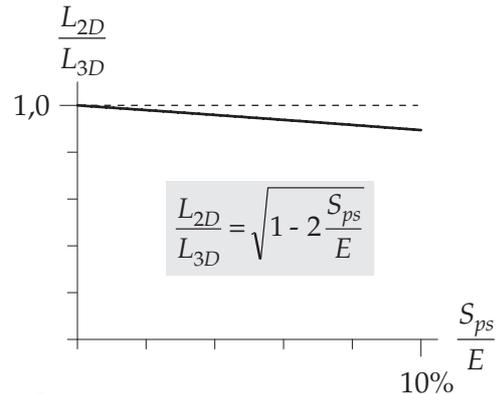
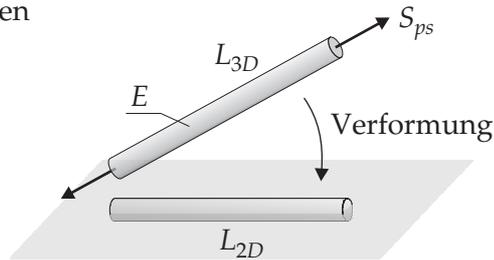
$$\tilde{\mathbf{f}}_{\alpha,2D} = \frac{\int_{A_{3D}} \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha,3D} \, dA_{3D}}{\left\| \int_{A_{3D}} \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha,3D} \, dA_{3D} \right\|} \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (4.4)$$

Die numerische Implementierung des vorgestellten Zuschnittsalgorithmus in ein bestehendes FE-Programm bereitet keine Schwierigkeiten, da das Vorgehen identisch mit einer geometrisch nichtlinearen Analyse ist. Der Berechnungsprozess ist zudem aufgrund der physikalischen Analogie des Algorithmus extrem stabil und kann beliebige Vorspannzustände und Materialien berücksichtigen.

Ein Nachteil dieser Zuschnittsmethode offenbart sich jedoch bei Berechnung des resultierenden Spannungsniveaus in der „realen“ Struktur: Um die tatsächlichen Spannungen im dreidimensionalen Zustand der Membran zu berechnen, werden analog zum realen Montageprozess die zugeschnittenen Bahnen numerisch zusammengefügt und in die entsprechenden Lagerbedingungen eingehängt. Die Ermittlung der Gleichgewichtsform erfolgt erneut durch eine geometrisch nichtlineare Berechnung, bei der nun der Zuschnitt die unverformte Referenzkonfiguration bildet. Man kann erkennen, dass dies der Konfigurationsdefinition des Verebnungsvorgangs widerspricht, bei dem es ja den Zuschnitt als „verformte“ Geometrie zu berechnen galt. Folglich ist die Zuschnittsermittlung durch Verebnung nicht in der Lage, den tatsächlichen Herstellungsprozess auf korrekte Weise zu beschreiben. Dies lässt sich am Beispiel der Vorspannung konkretisieren: Während diese beim Zuschnittsvorgang als PK2-Größe auf der räumlichen Fläche angesetzt wurde, stellt sie in der Realität eine physikalische Größe dar und ist folglich als Cauchy-Spannung zu interpretieren. Der daraus resultierende Fehler zeigt sich beim mittleren Vorspannniveau und hängt vom Verhältnis aus Vorspannung zu Materialsteifigkeit ab. Im Einzelnen bedeutet dies, dass unkompenzierte Zuschnitte mit einer gewünschten Vorspannung $\sigma_{ps} = 0$ durchaus mit dem aufgezeigten Verfahren berechnet werden können. Soll jedoch automatisch eine Kompensation des Zuschnitts berücksichtigt werden, treten zusätzlich zu den unvermeidbaren Spannungsabweichungen infolge der doppelten Krümmung Abweichungen wegen der „falschen“ Kontinuumsmechanik der Zuschnittsermittlung auf. Der Wechsel der Referenzkonfiguration bewirkt dabei, dass die letztendliche mittlere Vorspannung stets höher ausfällt als geplant.

Dieser Effekt lässt sich am einfachsten anhand der Zuschnittsermittlung eines vorgespannten Seiles erklären: Dies bringt den Vorteil, dass aufgrund der Eindimensionalität der Struktur die Zusatzspannungen infolge der Nicht-Abwickelbarkeit entfallen, so dass etwaige Abweichungen vom Sollzustand allein auf den Zuschnittsalgorithmus zurückzuführen sind. Im nachfolgenden Beispiel soll die Zuschnittslänge L_{2D} des Seiles derart bestimmt werden, so dass sich im verformten Zustand, der die bekannte Länge L_{3D} besitzt, die Vorspannung σ_{ps} einstellt. Das Material des Seiles wird durch das St. Venant-Kirchhoff-Modell mit konstantem E-Modul E beschrieben, eine Querdehnung tritt dabei nicht auf ($\nu = 0$).

Zuschnitt durch
Verebnen



Berechnung der
realen Vorspannung

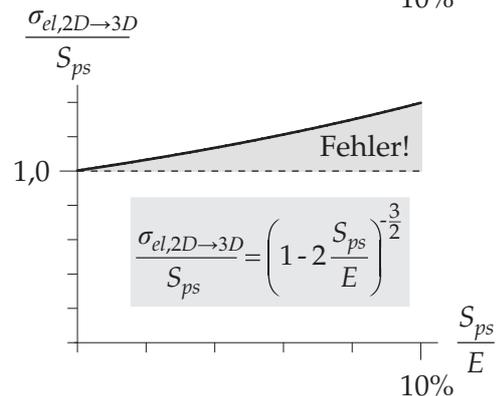
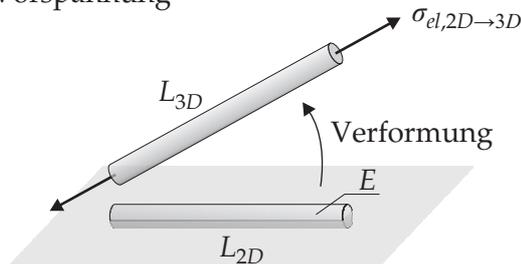


Abbildung 4.15: Ergebnisse bei Verebnung eines vorgespannten Seiles.

Im Rahmen der Zuschnittsermittlung durch Verebnen geht man nun davon aus, dass im Seil im eingebauten Zustand mit der Länge L_{3D} keine elastischen Spannungen herrschen, sondern lediglich eine PK2-Vorspannung S_{ps} , die identisch ist mit dem Sollzustand σ_{ps} . Das Seil wird nun in eine Zuschnittsebene gedrückt und dort relaxiert (siehe Abbildung 4.15 oben): Aufgrund der Vorspannung erfolgt eine Kontraktion des Seiles, wodurch ein Gleichgewicht zwischen der Vorspannung und den resultierenden elastischen Druckspannungen entsteht. Die sich einstellende zweidimensionale Seillänge L_{2D} ist als normierter Funktionsverlauf in Abhängigkeit der mit dem E-Modul normierten Werte der Vorspannung auf der rechten oberen Seite der Grafik abgebildet. Wie zu erwarten war, ist die Seillänge umso kürzer, je höher die gewünschte Vorspannung ist.

Um die Qualität des Zuschnittsalgorithmus zu überprüfen, wird als Nächstes die tatsächliche physikalische Vorspannung berechnet, die durch Verformung des zugeschnittenen Seiles in die dreidimensionale Lage entsteht (siehe Abbildung 4.15 unten): Dabei wird ein unverformtes Seil der Länge L_{2D} bis zur Länge L_{3D} gedehnt und die tatsächlichen Cauchy-Spannungen $\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}$ berechnet (siehe Abschnitt 2 für die kontinuumsmechanischen Grundlagen). Das mit der Zielvorspannung S_{ps} normierte Ergebnis der resultierenden Spannung $\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}$ ist auf der rechten unteren Seite der Abbildung 4.15 zu sehen: Im Idealfall sollten die elastischen Spannungen exakt der gewünschten Vorspannung entsprechen ($\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}/S_{ps} = 1$). Für Vorspannwerte $S_{ps} \neq 0$ tritt jedoch ein Fehler auf, dessen Wert mit zunehmendem Verhältnis aus gewünschter Vorspannung S_{ps} und Elastizität E des Seiles ansteigt.

Dieser Kompensationsfehler, die eine Erhöhung des mittleren Vorspannniveaus verursacht, entsteht in gleicher Weise auch bei der Zuschnittsermittlung vorgespannter Membranen. Für geringe relative Vorspannwerte, wie sie meist beim textilen Bauen zum Einsatz kommen, liegt er jedoch meist im vertretbaren Rahmen. Das Verhältnis aus Vorspannung zu Materialsteifigkeit beträgt beispielsweise für PTFE-beschichtetes Glasfasergewebe nach [Bau02] generell weniger als ein Prozent (Verhältnis in Schussrichtung: $n_s/E_s \approx 4/500 = 0,8\%$), bei ETFE-Folie ist der angestrebte Wert i. A. sogar noch niedriger ($n/E \approx 1/250 = 0,4\%$, [Mor05, Mor07b]). Die zu erwartenden Spannungsabweichungen infolge der inkorrekten kontinuumsmechanischen Beschreibung werden folglich ebenfalls im unteren Prozentbereich liegen (nicht zu verwechseln mit den Spannungsabweichungen infolge der Nicht-Abwickelbarkeit!). Dennoch ist diese Ungenauigkeit beim resultierenden Spannungsniveau nicht befriedigend, falls der Zuschnittsalgorithmus universell einsetzbar sein soll. Um eine Optimierung der Ergebnisse zu erzielen, ist eine korrekte Beschreibung der Kontinuumsmechanik des Herstellungsprozesses schon bei der Zuschnittsermittlung essentiell. Im nächsten Abschnitt werden deshalb Verfahren aufgezeigt, die auf einer kontinuumsmechanisch zutreffenden Definition der Konfigurationen beruhen und somit in der Lage sind, Zuschnitte von äußerst hoher Qualität zu produzieren.

4.5 Zuschnitt durch „Inverse engineering“

Die nachfolgende Variante der Zuschnittsermittlung basiert auf der kontinuumsmechanischen Betrachtung des realen Herstellungsprozesses einer Membranstruktur: Die in der Formfindung bestimmte räumliche Geometrie des Tragwerks stellt die Sollvorgabe für dessen baulichen Endzustand dar und ist somit als verformte Konfiguration x_{3D} zu interpretieren. Für diesen Zustand ist zudem der vorherrschende Sollspannungszustand σ_{ps} und bei Verwendung anisotroper Werkstoffe die näherungsweise Orientierung der Fasern auf der räumlichen Fläche bekannt (z. B. durch die Anordnung der Schnittlinien). Im Rahmen der Zuschnittsermittlung gilt es nun, anhand dieser Angaben den tatsächlichen Verformungsvorgang der Herstellung zu rekonstruieren und durch dessen Invertierung die eigentliche Referenzgeometrie, d. h. den ebenen Zuschnitt zu bestimmen. Diese Herangehensweise wird als *Zuschnitt durch „Inverse engineering“* bezeichnet, da im Vergleich zu „normalen“ Strukturanalysen der entgegengesetzte Weg einzuschlagen ist: In den meisten Fällen ist ein klar definierter mechanischer Körper mit einer bestimmten Masse und mit Materialeigenschaften gegeben, für den der Endzustand und die Spannungen unter Last gesucht werden. Bei der Zuschnittsermittlung hingegen ist bereits dieser verformte Zustand mitsamt den zugehörigen Spannungen bekannt, nicht jedoch die zugrunde liegende Ausgangskonfiguration. Aufgrund der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Abwicklungsproblematik ist es jedoch generell nicht möglich, diese eindeutig zu bestimmen: Auf den Herstellungsprozess bezogen bedeutet dies, dass es im Normalfall keinen Zuschnitt gibt, bei dem sich durch Verformung in den doppelt-gekrümmten Zustand die ursprünglich angesetzte Vorspannung exakt einstellt. Obwohl somit i. A. keine exakte Lösung für die Problematik vorhanden ist, kann dennoch eine bestmögliche Lösung bestimmt werden: Der optimale Zuschnitt zeichnet sich dadurch aus, dass die Spannungsabweichungen zwischen den resultierenden Spannungen nach Montage der Struktur und dem Sollzustand so gering wie möglich ausfällt.

Die Aufgabenstellung lässt sich als Optimierungsproblem folgendermaßen definieren: Es ist diejenige zweidimensionale Referenzkonfiguration \mathbf{X}_{2D} gesucht, bei der sich nach Verformung zur gegebenen dreidimensionalen Form \mathbf{x}_{3D} die minimale Differenz zwischen den entstehenden elastischen Cauchy-Spannungen $\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}$ und der gewünschten Vorspannung σ_{ps} ergibt:

$$\min_{\mathbf{X}_{2D}} \rightarrow f(\mathbf{X}_{2D}) = \sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps} \quad (4.5)$$

Diese Schreibweise spiegelt bei näherer Betrachtung den tatsächlichen Sachverhalt eigentlich nur ungenau wider: Anstatt die Abweichung der tatsächlichen Spannungen zu minimieren, ist es beim textilen Bauen wichtiger, dass der über die Querschnittshöhe einer Membran integrierte Spannungswert, d. h. die Normalkraft, möglichst exakt mit den Vorgaben übereinstimmt. Dies hätte zur Folge, dass auch die Dickenänderung infolge der Querdehnung in das Optimierungsproblem miteinbezogen werden müsste. Es lässt sich jedoch zeigen, dass man dies umgehen kann, indem man vereinfachend annimmt, dass keine Streckung des Membranquerschnitts erfolgt ($\lambda_3 = 1$). Die unter dieser Prämisse berechneten Cauchy-Spannungen sind zwar dementsprechend kleiner als ihr realer Wert, jedoch hebt sich dieser Fehler bei Integration über die Querschnittsdicke wieder auf, da die Höhe des verformten zum unverformten Zustand nicht abgemindert wird:

$$\underbrace{\frac{\sigma^{(\lambda_3=1)}}{\sigma^{(\lambda_3 \neq 1)}} = \lambda_3 \quad ; \quad \frac{h^{(\lambda_3=1)}}{h^{(\lambda_3 \neq 1)}} = \frac{H}{\lambda_3 H} = \frac{1}{\lambda_3}}_{\mathbf{n} = h^{(\lambda_3=1)} \sigma^{(\lambda_3=1)} = h^{(\lambda_3 \neq 1)} \sigma^{(\lambda_3 \neq 1)}} \quad (4.6)$$

Wie sich aus Gleichung (4.6) ergibt, sind die resultierenden Normalkräfte \mathbf{n} für beide Fälle identisch. Im nachfolgenden Text wird deshalb, soweit nicht anders vermerkt, von einer konstanten Dicke des Querschnitts ausgegangen und mit den daraus resultierenden „Nominalspannungen“ gearbeitet, da aus diesen leichter auf die zugehörige Konfiguration der Spannungsmaße geschlossen werden kann.

Sollen orthotrope Textilien als Werkstoffe für die zu bauende Struktur zum Einsatz kommen, muss neben der reinen Geometrie der Zuschnittsmuster auch die zugehörige Orientierung der Faserrichtungen darauf bestimmt werden. Neben dem bereits genannten Optimierungsproblem der Spannungsabweichung muss die Zuschnittsermittlung zugleich auch in der Lage sein, die Abweichungen der verformten Fasern in der räumlichen Konfiguration von der näherungsweise Vorgabe durch gezielte Faserausrichtungen am Zuschnitt zu minimieren.

Bildlich gesprochen wählt die Zuschnittsmethode durch „Inverse engineering“ aus verschiedenen möglichen Zuschnittsformen und Materialausrichtungen diejenige aus, die nach dem Herstellungsvorgang die besten Ergebnisse sowohl bei den Spannungen als auch bei der Orientierung der Faserrichtungen verspricht (siehe Abbildung 4.16). Das Optimierungsproblem der Zuschnittsermittlung ist somit zwar gedanklich formuliert, jedoch gilt es noch die exakte mathematische Beschreibung der zu optimierenden Funktion durchzuführen, was in den nächsten beiden Abschnitten geschieht.

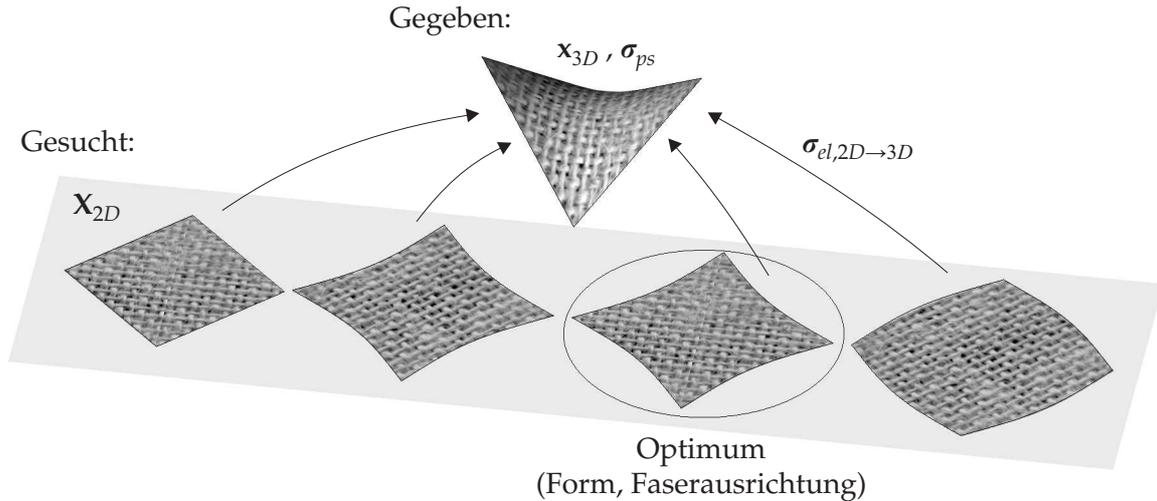


Abbildung 4.16: Zuschnitt durch „Inverse engineering“.

4.5.1 Methode I: Kleinste Fehlerquadrate

Aufgrund der generellen Nicht-Abwickelbarkeit räumlicher Flächen kann kein Zuschnitt generiert werden, der die Spannungsabweichung zwischen realen und Sollspannungen an jedem Punkt minimiert. Die Minimierung der Spannungsdifferenz kann deshalb nur über ein globales Kriterium erfolgen. Eine weitverbreitete Möglichkeit stellt die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* dar (siehe u. a. [Zei96, ZTZ05, Jur07] für weitere Informationen zu diesem Thema): Dabei wird zunächst für jeden Flächenpunkt der räumlichen Struktur das Quadrat der Differenz aus tatsächlicher Spannung $\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}$ und gewünschter Vorspannung σ_{ps} ausgewertet. Um ein globales Maß Π für die resultierende Spannungsabweichung zu erhalten, wird dieser skalare Fehler anschließend über die dreidimensionale Fläche a_{3D} integriert und mit dem Vorfaktor $\frac{1}{2}$ multipliziert. Die optimale Zuschnittsgeometrie X_{2D} zeichnet sich dadurch aus, dass sie dieses integrale Fehlermaß Π minimiert:

$$\min_{X_{2D}} \rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps})^T : (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) da_{3D} \quad (4.7)$$

Bei der numerischen Zuschnittsberechnung beginnt man nun von einer Schätzung der ebenen Referenzgeometrie, die wie in Abschnitt 4.4 aus einer Projektion des räumlichen FE-Netzes stammen kann, die Knotenpositionen des Zuschnitts inkrementell zu verbessern:

$$\bar{\mathbf{x}}_{2D,k}^{(i+1)} = \bar{\mathbf{x}}_{2D,k}^{(i)} + \Delta \bar{\mathbf{U}}_{2D,k}^{(i)} \quad (4.8)$$

Dabei ist $\bar{\mathbf{x}}_{2D,k}^{(i)}$ die ebene Position eines Knotens k im Iterationsschritt i ; $\bar{\mathbf{x}}_{2D,k}^{(i+1)}$ ist die neue Lage des gleichen Knotens im nächsten Iterationsschritt, die durch die inkrementelle Geometrieverbesserung $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{2D,k}^{(i)}$ entstanden ist. Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass es sich bei dieser Geometrieänderung um keine Knotenverschiebung im herkömmlichen Sinn handelt, die elastische Verformungen hervorruft. Vielmehr ist sie als reine Modifikation des

Zuschnittsmusters zu verstehen, anhand dessen die Bahnen zugeschnitten werden. Wird beispielsweise die Geometrie eines Randknotens angepasst, erhält dadurch der Zuschnitt mehr bzw. weniger Material. Die Lage der inneren Knoten beeinflusst auf den ersten Blick nicht direkt den entscheidenden Umriss des Zuschnitts, doch bewirken evtl. Knotenverschiebungen im Inneren eine Änderung der Spannungsabweichung im Feld, was indirekt wieder zu einer Modifikation der Randknoten führen kann.

Eine Berechnungsvorschrift für die Inkremente der Geometrieänderung lässt sich aus Gleichung (4.7) herleiten: Eine notwendige Bedingung für ein Minimum der Fehlerquadrate ist ein stationärer Punkt des Funktionals Π bzgl. der Geometrieviationen des Zuschnitts. Dabei kann die Anpassung jedes Knotens in zwei voneinander unabhängigen Ebenenrichtungen erfolgen, die im Nachfolgenden als Freiheitsgrade U_R bezeichnet werden. Der verwendete Großbuchstabe soll deutlich machen, dass es sich hierbei um *Änderungen der Referenzgeometrie* handelt und nicht wie sonst um Änderungen der verformten Geometrie. Um eine Eindeutigkeit der Berechnungsergebnisse zu erhalten und um Starrkörperverschiebungen in der Ebene zu vermeiden, sind drei Freiheitsgrade festzuhalten, so dass quasi eine statisch bestimmte Lagerung entsteht. Für die restlichen Freiheitsgrade ergibt sich jeweils eine variationelle Gleichung, die wegen ihrer formalen Analogie zu den Gleichungen der virtuellen Arbeit mit δW^I abgekürzt wird:

$$\begin{aligned}\delta W^I &= \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \delta \sigma_{el,2D \rightarrow 3D} da_{3D} \\ &= \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} \delta U_R da_{3D} = 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Aufgrund der Nichtlinearität des obigen Gleichungssystems wird das Newton-Raphson-Verfahren angewandt, um iterativ die Lösung bestimmen zu können:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 W^I}{\partial U_R \partial U_S}}_{K_{RS}^I} \Delta U_S + \underbrace{\frac{\partial W^I}{\partial U_R}}_{R_R^I} = 0\quad (4.10)$$

Die Freiheitsgradresiduen R_R^I sind das Analogon zu den Ungleichgewichtskräften bei einer mechanischen Berechnung. Sie können über folgende Gleichung bestimmt werden:

$$R_R^I = \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} da_{3D}\quad (4.11)$$

Die Systemmatrix K_{RS}^I lässt sich als Sensitivitätsmatrix des Residualvektors R_R^I bzgl. Änderungen der Freiheitsgrade U_S interpretieren, mithilfe derer sich eine verbesserte Knotenposition berechnen lässt:

$$K_{RS}^I = \int_{\Omega_{3D}} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} : \frac{\partial \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_S} \right) + (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial^2 \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R \partial U_S} \right] da_{3D}\quad (4.12)$$

Mit der oben genannten symmetrischen Systemmatrix und dem Residualvektor ist das Grundgerüst für eine kontinuumsmechanisch korrekte Zuschnittsermittlung geschaffen. Bei der Umsetzung müssen jedoch einige Besonderheiten beachtet werden, die in den nachfolgenden Teilabschnitten erläutert werden.

Variation der Cauchy-Spannungen bei linearer Elastizität. In den Gleichungen (4.11) und (4.12) werden die Ableitungen der Cauchy-Spannungen $\sigma_{el,2D \rightarrow 3D}$ bzgl. einer Änderung des Freiheitsgrads U_R der Referenzkonfiguration benötigt. Bildlich ausgedrückt möchte man hiermit bestimmen, wie sich die physikalischen Spannungen an einem bestimmten Ort der verformten Konfiguration ändern, falls der Zuschnitt „etwas anders“ ausgeschnitten wird, d. h. die Referenzgeometrie um δU_R leicht modifiziert wird. Es müssen folglich stets die Ableitungen bzgl. einer *Änderung der Referenzkonfiguration* bestimmt werden, die Geometrie der verformten Fläche bleibt stets konstant:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial U_R} = \mathbf{X}_{,R} \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial U_R} = \mathbf{x}_{,R} = 0 \quad (4.13)$$

Für linear-elastische Materialien, bei denen die Materialeigenschaften unabhängig der Verformung sind (wie z. B. das St. Venant-Kirchhoff- oder das Münsch-Reinhardt-Material aus Abschnitt 2.3.3), erfolgt die Berechnung der Ableitung der Cauchy-Spannungen durch Anwendung der Produktregel auf Gleichung (2.80), die die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in räumlicher Schreibweise enthält:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial U_R} = \mathbf{c}_{,R} : \mathbf{e} + \mathbf{c} : \mathbf{e}_{,R} \quad (4.14)$$

Als Nächstes müssen die Ableitungen des räumlichen Elastizitätstensors \mathbf{c} und die der Euler-Almansi-Dehnungen \mathbf{e} ermittelt werden. Da die Euler-Almansi-Dehnungen sich auf die verformte Konfiguration beziehen, betrifft die durchzuführende Differentiation nur die Koeffizienten des räumlichen Dehnungstensors. Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.56) erhält man:

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial U_R} = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_{\beta,R} - \mathbf{G}_{\alpha,R} \cdot \mathbf{G}_\beta \right) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta \quad (4.15)$$

Die erforderliche Ableitung der kovarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration ergibt sich aus den Interpolationsvorschriften des finiten Elements analog zu Gleichung (2.114).

Der wenig gebräuchliche räumliche Elastizitätstensor \mathbf{c} entsteht gemäß Gleichung (2.82) durch eine Push-Forward-Operation aus dem bekannten materiellen Elastizitätstensor \mathbf{C} . Somit ist auch \mathbf{c} allein in der verformten Konfiguration verankert, weswegen sich die Differentiation erneut nur auf die Tensorkoeffizienten auswirkt:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial U_R} = \left(\left(\frac{1}{\det \mathbf{F}} \right)_{,R} C_{ijkl} + \frac{1}{\det \mathbf{F}} (C_{ijkl})_{,R} \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (4.16)$$

Die Ableitungen der Tensorkoeffizienten C_{ijkl} ergeben sich aus dem jeweiligen Materialgesetz und sollte keine Probleme hinsichtlich ihrer Berechnung verursachen. Für ein St. Venant-Kirchhoff-Material sind die Koeffizienten bzgl. der lokalen konvektiven Basis in Gleichung (2.84) gegeben, für ein Münsch-Reinhardt-Material in Gleichung (2.89). Bei Letzterem wird angenommen, dass während eines Iterationsschrittes die Faserrichtungen konstant bleiben, die Neuanpassung der Fasern erfolgt erst nach Beendigung des jeweiligen Berechnungsdurchlaufs (siehe nächster Teilabschnitt).

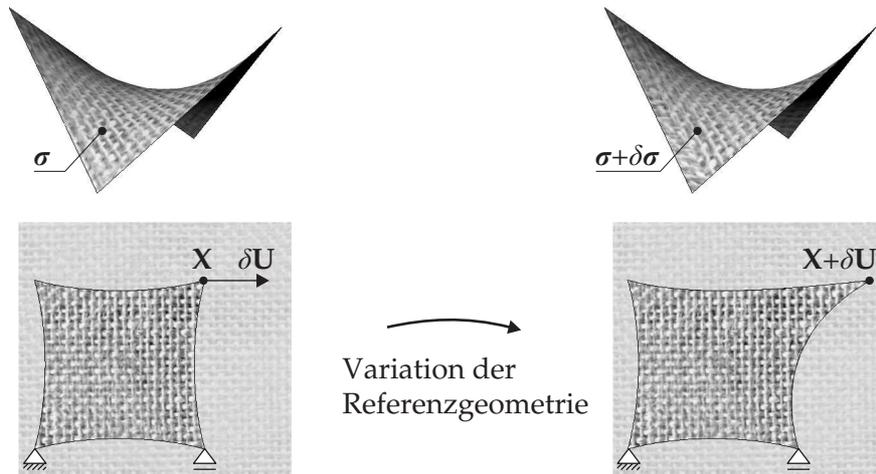


Abbildung 4.17: Variation der Referenzgeometrie bei orthotropen Geweben.

Die Berechnung der Ableitung der inversen Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{F} gestaltet sich aufgrund der Betragsfunktion in Gleichung (2.47) zwar etwas aufwändiger, bereitet aber keine mathematischen Schwierigkeiten. Die zweiten Ableitungen der Cauchy-Spannungen, die für die Systemmatrix benötigt werden, lassen sich ebenfalls durch wiederholte Anwendung der jeweiligen Differentiationsregeln berechnen, weswegen sie hier nicht näher erläutert werden.

Anpassung der Faserrichtungen. Die Bestimmung der Faserrichtungen von textilen Geweben auf dem Zuschnitt erfolgt stets *vor* einem Iterationsschritt. Anhand der bekannten näherungsweise Orientierung der Fasern auf der verformten Konfiguration wird mit dem in Abschnitt 4.4 aufgezeigten Verfahren eine einheitliche Ausrichtung der Textilfasern auf dem aktuellen Zuschnitt bestimmt. Bei dem anschließenden Iterationsschritt zur Verbesserung der Zuschnittsgeometrie wird diese Faserorientierung beibehalten: Dies bedeutet, dass man bei der Berechnung der Systemmatrix und des Residualvektors davon ausgeht, dass sich zwar die Geometrie des Zuschnitts auf dem Material ändert, nicht jedoch das Material entgegen dem Zuschnitt verdreht wird (siehe Abbildung 4.17 für eine Illustration dieses Sachverhalts). Die Faserrichtungen werden erst für die verbesserte Geometrie am Ende des jeweiligen Iterationsschritts erneut bestimmt.

Variation der Cauchy-Spannungen bei nichtlinearem Materialverhalten. Soll die Zuschnittsberechnung für hoch dehnfähige Materialien durchgeführt werden, muss die Aufgabenstellung aufgrund der Änderung der Querschnittshöhe weiter konkretisiert werden: Möchte man im Endzustand der Struktur eine bestmögliche Übereinstimmung der tatsächlichen Spannungen, oder ist es wichtiger, dass der über die Materialdicke integrierte Wert, d. h. die resultierende Normalkraft, möglichst exakt erreicht wird? Das Einhalten eines bestimmten Spannungsniveaus könnte von Interesse sein, falls eine charakteristische Spannungsgrenze eines Materials nicht überschritten werden soll. Für Strukturprobleme ist jedoch eher die resultierende Schnittgröße von Interesse. In diesem Fall müsste das Optimie-

rungsproblem wie folgt umgeschrieben werden:

$$\min_{\mathbf{x}_{2D}} \rightarrow \Pi = \int_{\Omega_{3D}} (\mathbf{n}_{el,2D \rightarrow 3D} - \mathbf{n}_{ps})^T : (\mathbf{n}_{el,2D \rightarrow 3D} - \mathbf{n}_{ps}) \, da_{3D} \quad (4.17)$$

Beim iterativen Lösungsprozess sind nun die Variationen der Normalkräfte $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{el,2D \rightarrow 3D}$ gefragt. Da bei dehnfähigen Materialmodellen wie z. B. dem hier exemplarisch verwendeten inkompressiblen Ogden-Material aus Abschnitt 2.3.3 die Dickenänderung explizit in der Materialmodellierung auftaucht, muss in diesem Fall auch die Variation der Streckung der Querschnittshöhe bei der Variation der Normalkräfte berücksichtigt werden. Es kann somit nicht mehr die vereinfachte Variante nach Gleichung (4.6) benützt werden. Durch Anwendung der Produktregel erhält man eine Berechnungsvorschrift für die Variation der Normalkräfte:

$$\delta \mathbf{n} = \delta \left(\underbrace{h}_{\lambda_3 H} \boldsymbol{\sigma} \right) = H (\delta \lambda_3 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_3 \delta \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.18)$$

Da sich das Ogden-Material vorteilhaft mit Hilfe von Hauptstreckungen beschreiben lässt (siehe Gleichung (2.91)), bietet es sich an, die Variation der notwendigen kontinuumsmechanischen Größen ebenfalls in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem durchzuführen, das an den Hauptstreckungsrichtungen $\{\hat{\mathbf{n}}_\gamma\}_{\gamma \in \{1,2\}}$ der verformten Konfiguration ausgerichtet ist.

Die Variation der Streckung in Dickenrichtung ergibt sich gemäß Gleichung (2.121) aus den Ableitungen der Dickenrichtung nach den Euler-Almansi-Dehnungen und der anschließenden Multiplikation mit der Variation dieser:

$$\delta \lambda_3 = \frac{\partial \lambda_3}{\partial \mathbf{e}} : \delta \mathbf{e} \quad (4.19)$$

In Voigtscher Notation lautet dieser Zusammenhang in Hauptachsenrichtung unter Verwendung der Inkompressibilitätsbedingung aus Gleichung (2.92) wie folgt:

$$\delta \lambda_3 = \begin{bmatrix} -\lambda_1/\lambda_2 \\ -\lambda_2/\lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \delta \tilde{e}_{11} \\ \delta \tilde{e}_{22} \\ \delta(2\tilde{e}_{12}) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$\delta \tilde{e}_{\alpha\beta}$ stellen hierbei die Variationen der Koeffizienten des Euler-Almansi-Dehnungstensors bzgl. der kartesischen Basis dar, die an den Hauptstreckungsrichtungen orientiert ist. Um die komplizierte direkte Berechnung zu umgehen, bietet es sich an, zunächst die Variation der Euler-Almansi-Dehnungen im konvektiven Koordinatensystem gemäß Gleichung (4.15) zu berechnen und diese anschließend in die Hauptachsen zu transformieren.

Die Cauchy-Spannungen in dem gleichen Koordinatensystem ergeben sich durch eine Push-Forward-Operation der aus Gleichung (2.93) bekannten PK2-Spannungen des Ogden-Materials (siehe auch [GR92]):

$$\tilde{\sigma}_{\gamma\gamma} = \hat{\sigma}_\gamma = \sum_r \mu_r \left[\lambda_\gamma^{\alpha_r} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \right] \quad (4.21)$$

Durch erneute Anwendung der Gleichung (2.121) lässt sich die Variation der Cauchy-Spannungen in Abhängigkeit der Variation der Euler-Almansi-Dehnungen ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{\sigma}_{11} \\ \delta\tilde{\sigma}_{22} \\ \delta\tilde{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\tilde{\sigma}_{11}/\partial\tilde{e}_{11} & \partial\tilde{\sigma}_{11}/\partial\tilde{e}_{22} & 0 \\ \partial\tilde{\sigma}_{22}/\partial\tilde{e}_{11} & \partial\tilde{\sigma}_{22}/\partial\tilde{e}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \partial\tilde{\sigma}_{12}/\partial(2\tilde{e}_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\tilde{e}_{11} \\ \delta\tilde{e}_{22} \\ \delta(2\tilde{e}_{12}) \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\sigma}_{11}/\partial\tilde{e}_{11} &= (\lambda_1)^2 \sum_r \mu_r \alpha_r \left[\lambda_1^{\alpha_r} + (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \right] \\ \partial\tilde{\sigma}_{11}/\partial\tilde{e}_{22} &= (\lambda_2)^2 \sum_r \mu_r \alpha_r (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \\ \partial\tilde{\sigma}_{22}/\partial\tilde{e}_{11} &= (\lambda_1)^2 \sum_r \mu_r \alpha_r (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \\ \partial\tilde{\sigma}_{22}/\partial\tilde{e}_{22} &= (\lambda_2)^2 \sum_r \mu_r \alpha_r \left[\lambda_2^{\alpha_r} + (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_r} \right] \\ \partial\tilde{\sigma}_{12}/\partial(2\tilde{e}_{12}) &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{22}} \stackrel{\Delta\lambda \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_r \mu_r \alpha_r (\lambda_1)^{\alpha_r + 2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Besondere Vorsicht ist bei der Berechnung der Variation der Schubspannungen geboten: Ist der Spannungszustand näherungsweise hydrostatisch, was man an einem sehr kleinen Differenzbetrag der beiden Hauptstreckungen erkennen kann, muss bei der Berechnung der Variation ein Grenzübergang vorgenommen werden, um numerische Instabilitäten durch eine Division mit dem Wert Null zu vermeiden. Das Ergebnis ist in der letzten Zeile der Gleichung (4.22) auf der rechten Seite angegeben.

Die zweite Variation der Cauchy-Spannungen wird auf analoge Weise ermittelt, jedoch bedeutet dies aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens erhöhten Rechenaufwand. Da sich für jedes analytisch beschreibbare Materialgesetz die Variation der Cauchy-Spannungen bzgl. einer Variation der Referenzgeometrie berechnen lässt, ist der vorgeschlagene Zuschnittsalgorithmus für beliebige Materialien unter sowohl kleinen als auch großen Dehnungen einsetzbar. Die einzige Einschränkung bildet allein die Notwendigkeit des Vorhandenseins einer eindeutigen Spannungs-Dehnungs-Beziehung beim Materialmodell, die jedem gegebenen Dehnungszustand genau einen Spannungszustand zuweist. Eine Verwendung geschichtsabhängiger konstitutiver Beziehungen ist deshalb nicht möglich. Diese erscheint auch wenig sinnvoll in Anbetracht der Tatsache, dass bei der Zuschnittsermittlung keinerlei Informationen über die Zwischenschritte des tatsächlichen Deformationsprozesses vorliegen.

Geringer Konvergenzradius der Berechnung. Führt man mit dem vorgestellten Verfahren Zuschnittsberechnungen durch, wird man schnell feststellen, dass die Berechnung in gewissen Fällen äußerst schnell konvergiert, in anderen Situationen keine sinnvolle Lösung finden kann. Dieses Verhalten lässt sich näher konkretisieren: Ob für eine Fragestellung ein optimaler Zuschnitt ermittelt werden kann, hängt entscheidend von der Startgeometrie des iterativen Lösungsprozesses ab. Liegt diese im sogenannten *Konvergenzradius* [Zei96] der Berechnung, sind quadratische Konvergenzraten möglich. Befindet sie sich außerhalb, konvergiert das Verfahren nur langsam oder divergiert sogar.

Die Ursache hierfür ist die generelle Nichtkonvexität der in Gleichung (4.7) gegebenen Zielfunktion Π : Die darin enthaltenen Cauchy-Spannungen weisen sogar für einfache Material-

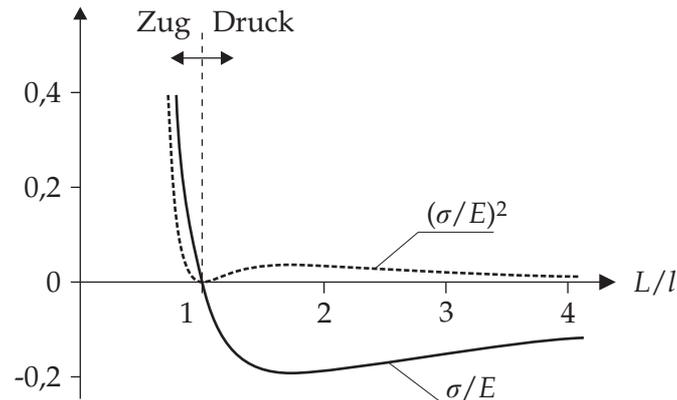


Abbildung 4.18: Cauchy-Spannung eines Seiles in Abhängigkeit der Zuschnittslänge.

gesetze wie das St. Venant-Kirchhoff-Modell ein nichtlineares Verhalten bzgl. Geometriemodifikationen auf (siehe Abbildung 2.20), dennoch bilden sie eine näherungsweise konvexe Funktion bzgl. einer Variation der Referenzgeometrie. Durch eine Quadratur der Cauchy-Spannungen, wie sie in der Zielfunktion Π des Optimierungsproblems benötigt wird, geht diese positive Eigenschaft jedoch verloren, und der Funktionsverlauf wird nichtkonvex. Kommen nun wie mit dem hier verwendeten Newton-Raphson-Verfahren Gradientenmethoden zur Bestimmung der optimalen Lösung zum Einsatz, kann eine außerhalb des Konvergenzradius liegende Startgeometrie bei dem vorliegenden *nichtkonvexen Optimierungsproblem* [Jur07] zu einer Divergenz des Berechnungslaufs führen.

Dieses unerwünschte Verhalten lässt sich wie in Abschnitt 4.4 am Beispiel der Zuschnittsermittlung eines vorgespannten Seiles demonstrieren. Um den Sachverhalt so einfach wie möglich zu halten, kommt erneut als konstitutive Beziehung ein St. Venant-Kirchhoff-Material mit konstantem Elastizitätsmodul E und verschwindender Querdehnung zum Einsatz.

Wird das Seil mit der Referenzlänge $L = L_{2D}$ auf die verformte Länge $l = l_{3D}$ gedehnt, ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (2.55), (2.70) und (2.83) folgende Beziehung für die mit dem Elastizitätsmodul E normierte Cauchy-Spannung σ in Seilachse:

$$\frac{\sigma(L)}{E} = \frac{1}{2} \frac{l}{L} \left(\left(\frac{l}{L} \right)^2 - 1 \right) \quad (4.23)$$

In Abbildung 4.18 ist der Werteverlauf der resultierenden Cauchy-Spannung in Abhängigkeit der Zuschnittslänge aufgetragen. Auch hier wird eine normierte Darstellung gewählt: Die variable Referenzlänge L wird dabei auf die als gegeben angenommene, verformte Länge l bezogen; die resultierende Cauchy-Spannung $\sigma(L)$ wird erneut durch Division mit dem Elastizitätsmodul E normiert. Der nur einen Krümmungswechsel aufweisende Funktionsverlauf $\sigma(L)/E$ besitzt sein absolutes Minimum bei $L/l = \sqrt{3} \approx 1,73$, was mit der maximal aufnehmbaren Druckkraft nach Abbildung 2.20 korrespondiert. Sind Referenz- und Ausgangslänge gleich ($L/l = 1$), ist das Seil erwartungsgemäß spannungsfrei und die Funktion verfügt über einen Nulldurchgang. In der gleichen Grafik wie der Verlauf der normierten

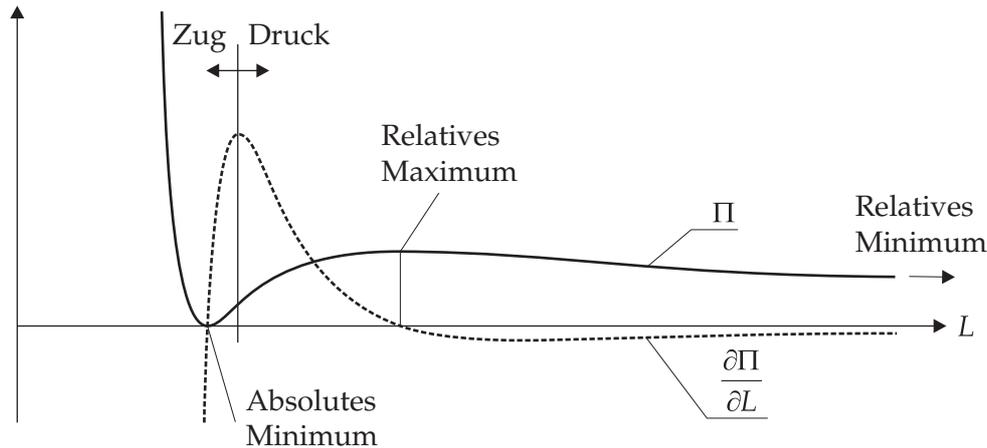


Abbildung 4.19: Stationäre Punkte bei Optimierung des Seilzuschnitts.

Cauchy-Spannung ist zudem ihr Quadrat $(\sigma(L)/E)^2$ als gestrichelte Kurve eingezeichnet. Auf den ersten Blick fällt direkt die höhere „Welligkeit“ dieser Funktion auf, die ein deutlich nichtkonvexes Verhalten zeigt.

Die Nichtkonvexität des Funktionsverlaufs setzt sich auch bei der Zielfunktion Π des Zuschnittsproblems fort, da für deren Berechnung gemäß Gleichung (4.7) das Quadrat der Cauchy-Spannungen benötigt wird. Der charakteristische Verlauf der Zielfunktion ist in Abbildung 4.19 zusammen mit ihrer Ableitung nach der Referenzlänge L aufgetragen. Zur Bestimmung der optimalen Zuschnittslänge L muss das absolute Minimum der Zielfunktion Π bestimmt werden. Da jedoch das verwendete Newton-Raphson-Verfahren nur die notwendige Bedingung des Optimums überprüft, sind für die Methode bildlich gesprochen alle Längen L Kandidaten für das Optimum, bei denen die Ableitung $\frac{\partial \Pi}{\partial L}$ verschwindet. Wie man aus der Grafik weiterhin ablesen kann, ist diese Stationärbedingung neben dem gesuchten absoluten Minimum auch bei zwei weiteren Referenzlängen erfüllt. Zum einen liegt mit einer Referenzlänge, die größer als die verformte Länge ist, ein relatives Maximum vor, ein relatives Minimum ergibt sich für eine gegen unendlich strebende Referenzlänge. Gegen welchen dieser drei Stationärwerte nun die Zuschnittsiteration konvergiert, hängt von der Startgeometrie des ersten Iterationsschritts ab. Ob das Ergebnis physikalisch sinnvoll ist, wird von der Methode an sich nicht überprüft.

Die aufgezeigte erste Methode des Zuschnitts durch „Inverse engineering“ ist zwar in der Lage, den Verformungsvorgang kontinuumsmechanisch korrekt abzubilden, und kann auch verschiedenste Material- und Vorspannzustände berücksichtigen. Ihr großer Nachteil liegt jedoch im relativ kleinen Konvergenzradius des Optimierungsproblems. Dies bedeutet, dass die Anfangsschätzung für den Zuschnitt schon möglichst nahe am Endzustand liegen sollte. Ist dies der Fall, werden sehr gute Ergebnisse erzielt, wie später noch zu sehen sein wird. Da eine gute Startgeometrie jedoch nicht immer gewährleistet ist, muss die Stabilität dieser Methode erhöht werden, um vielseitig einsetzbar zu sein. Eine effiziente Möglichkeit zur Stabilisierung bietet die nachfolgende Variante.

4.5.2 Methode II: Minimierung der „Arbeit der Spannungsabweichung“

Entsprechend dem Grundgedanken des Zuschnitts durch „Inverse engineering“ versucht auch die nun vorzustellende Methode die Spannungsabweichung im Endzustand durch Optimierung der Referenzgeometrie zu minimieren. Da ein exaktes Erreichen der Spannungsvorgabe σ_{ps} nur in Ausnahmefällen an jedem Flächenpunkt möglich ist, soll eine bestmögliche Erfüllung „im Mittel“ durch Minimierung des globalen Fehlers erfolgen. Dieser setzt sich aus dem Flächenintegral einer lokalen skalaren Fehlergröße zusammen, die sich durch Wichtung der Spannungsdifferenz ($\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}$) mit einer *Wichtungsfunktion* η ergibt. Die optimale Geometrie des Zuschnitts ist dann gegeben, falls eine Variation der Wichtungsfunktion keine Änderung des globalen Fehlers bewirkt bzw. ein stationärer Punkt des Funktionals vorliegt:

$$\int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \delta\eta \, da_{3D} = 0 \quad (4.24)$$

Diese Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung ist auch als *Galerkin-Verfahren* bekannt [Hug00, Hol04]. Im konkreten Fall wird hierbei versucht, mit einem lediglich zweidimensionalen Formenraum für die Referenzkonfiguration die Spannungsabweichung in der nicht-abwickelbaren dreidimensionalen Fläche zu minimieren. Für den Erhalt sinnvoller Lösungen ist v. a. eine geeignete Wahl der Wichtungs- bzw. Testfunktion η zur Berechnung der lokalen Fehlerresiduen entscheidend: Einerseits möchte man, dass eine höhere Spannungsabweichung stärker „bestraft“ wird als ein geringerer Fehler, da dadurch eine gleichmäßigere Fehlerverteilung in der Fläche erreicht werden kann. Andererseits soll durch Multiplikation mit der Testfunktion verhindert werden, dass betragsmäßig gleiche, aber vom Vorzeichen her unterschiedliche Spannungsdifferenzen sich gegenseitig bei der Berechnung des globalen Fehlers herauskürzen und somit die Bilanz verfälschen. Aus diesen Anforderungen ergibt sich, dass die zu wählende Testfunktion eine Verwandtschaft mit der zu wichtenden Funktion aufweisen sollte.

Eine spezielle Art der Wichtung wurde indirekt bereits im vorherigen Abschnitt vorgestellt: Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate lässt sich auch als Galerkin-Verfahren interpretieren, bei dem der Fehler infolge der Spannungsabweichung mit sich selbst gewichtet wird (siehe variationelle Formulierung in Gleichung (4.9)). Die Testfunktion und ihre Variation lauten in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \eta^I &= \sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps} \\ \delta\eta^I &= \delta\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Diese Art der Wichtung erfüllt zwar prinzipiell alle theoretischen Anforderungen, jedoch entsteht aufgrund der Multiplikation der nichtlinearen Cauchyspannung mit sich selbst eine hochgradig nichtlineare Fehlerfunktion mit nichtkonvexem Verhalten, die bei Anwendung eines Gradientenverfahrens zu einem äußerst geringen Konvergenzradius der numerischen Berechnung führt (siehe Abschnitt 4.5.1). Um die Stabilität der Zuschnittsermittlung zu erhöhen, wird deswegen eine Modifikation durchgeführt: Anstatt die Differenz der Cauchy-Spannungen als Testfunktion zu wählen, bietet sich aufgrund ihrer kontinuumsmechani-

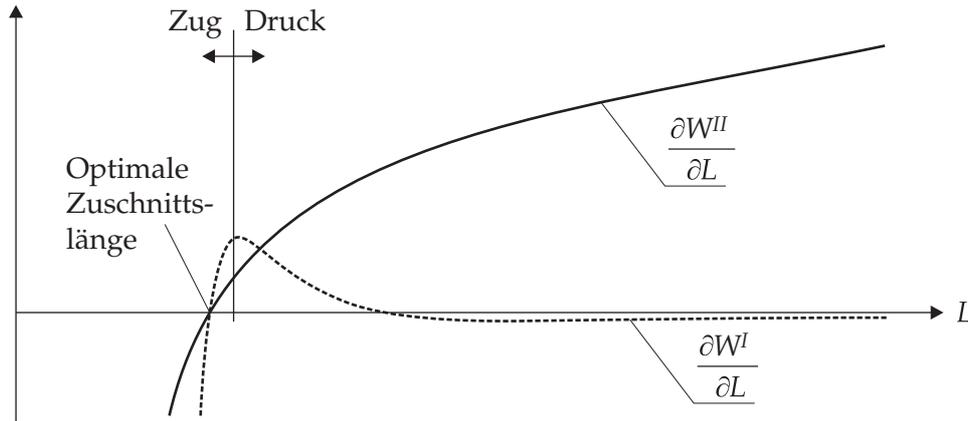


Abbildung 4.20: Maßgebliche Funktionen der inversen Zuschnittsberechnung.

schen Verwandtschaft die Differenz der zugehörigen Euler-Almansi-Dehnungen als Wichtung an:

$$\begin{aligned}\eta^{II} &= \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D} - \mathbf{e}_{ps} \\ \delta \eta^{II} &= \delta \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}\end{aligned}\quad (4.26)$$

$\mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}$ ist der Dehnungszustand, der sich am Flächenpunkt infolge der Verformung des Zuschnitts in seine räumliche Endgeometrie einstellt; \mathbf{e}_{ps} bezeichnet die theoretisch notwendigen Dehnungen zum Erreichen des Sollspannungszustands. Da diese von Änderungen der Zuschnittsgeometrie unabhängig sind, entfällt dieser Term bei einer Variation der Testfunktion ($\delta \mathbf{e}_{ps} = \mathbf{0}$).

Die maßgebende Zuschnittsgleichung nimmt nach Einsetzen der neuen Wichtungsfunktion in Gleichung (4.24) folgende variationelle Form an:

$$\begin{aligned}\delta W^{II} &= \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \delta \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D} \, da_{3D} \\ &= \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} \delta U_R \, da_{3D} = 0\end{aligned}\quad (4.27)$$

Aufgrund ihrer formalen Analogie mit einer virtuellen Arbeitsgleichung wird diese Variante der Zuschnittsberechnung als *Zuschnitt durch Minimierung der „Arbeit der Spannungsabweichung“* bezeichnet.

Die positiven Eigenschaften dieser Modifizierung werden bei der Zuschnittsberechnung des vorgespannten Seiles aus Abschnitt 4.5.1 deutlich: Während die resultierende Cauchy-Spannung gemäß Gleichung (4.23) eine gebrochen rationale Funktion der Referenzlänge L darstellt, kann die zugehörige Euler-Almansi-Dehnung über ein Polynom zweiten Grades beschrieben werden:

$$e(L) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right) \quad (4.28)$$

Diese geringe „Nichtlinearität“ der Wichtungsfunktion wirkt sich auch auf die maßgebende Gleichung der Zuschnittsermittlung aus: Als notwendige Bedingung für einen optimalen Zuschnitt muss die Stationärbedingung $\partial W^{II} / \partial L = 0$ erfüllt sein, deren Funktionsver-

lauf in Abhängigkeit der Referenzlänge L in Abbildung 4.20 dargestellt ist. Auf den ersten Blick fällt direkt die „Einfachheit“ dieser Funktion auf, deren einziger Nulldurchgang sich aufgrund der streng monotonen Steigung ohne Schwierigkeiten mit numerischen Gradientenverfahren berechnen lässt. Zum Vergleich ist in derselben Grafik die maßgebende Gleichung $\partial W^I / \partial L$ der ersten Zuschnittsvariante abgebildet: Zwar besitzt auch diese am analytisch korrekten Wert einen Nulldurchgang, jedoch ist die Funktion nicht monoton steigend und besitzt weitere Nullstellen. Vergleicht man beide Graphen, lässt sich vermuten, dass im Vergleich zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate das eben vorgestellte Verfahren eine signifikante Steigerung der Stabilität aufweisen wird. Diese Annahme konnte auch bei der Durchführung numerischer Tests bestätigt werden: Während bei der ersten Methode die Startgeometrie lediglich geringe Abweichungen vom Endzustand aufweisen durfte, konvergierte die zweite Methode von nahezu jeder beliebigen Anfangsschätzung aus zum korrekten Wert.

Numerische Implementierung. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (4.27) erfolgt erneut durch Linearisierung mit dem Newton-Raphson-Verfahren. Ausgehend von einer zweidimensionalen Startgeometrie wird durch eine iterative Berechnung der stationäre Zustand gesucht, bei dem der auf mögliche Geometriemodifikationen U_R bezogene Residualvektor R_R^I verschwindet. Für jede beliebige Zwischenlösung kann er über folgende Gleichung errechnet werden:

$$R_R^I = \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} da_{3D} \quad (4.29)$$

Die „Steifigkeitsmatrix“ K_{RS}^I gibt die Sensitivitäten der Residuen an:

$$K_{RS}^I = \int_{\Omega_{3D}} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{el,2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} : \frac{\partial \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_S} \right) + (\sigma_{el,2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R \partial U_S} \right] da_{3D} \quad (4.30)$$

Die gewählte Wichtungsfunktion wirkt sich günstig auf den erforderlichen Grad der Ableitungen der Cauchy-Spannungen aus: Während bei der Methode der kleinsten Fehlerquadrate noch die ersten und zweiten Ableitungen benötigt wurden (siehe Gleichung (4.12)), ist bei der Zuschnittsvariante durch Minimierung der Spannungsabweichungsarbeit lediglich die erste Ableitung zu ermitteln, wodurch sich der numerische Berechnungsaufwand verringert. Die Differentiation erfolgt analog zu Abschnitt 4.5.1.

Eine Besonderheit des Verfahrens offenbart sich bei genauerer Betrachtung der in Gleichung(4.30) gegebenen Systemmatrix: Während der zweite Term, der aus dem Produkt der Spannungsabweichung mit den zweiten Ableitungen der Dehnungen besteht, symmetrische Eigenschaften besitzt, weist der erste Term eine Unsymmetrie auf:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial U_R} : \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial U_S} \neq \frac{\partial \sigma}{\partial U_S} : \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial U_R} \quad (4.31)$$

Dies mag zunächst verwundern, da ähnliche Terme bei der Strukturanalyse generell symmetrisch sind ($\frac{\partial \sigma}{\partial u_r} : \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u_s} = \frac{\partial \sigma}{\partial u_s} : \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u_r}$). Jedoch gilt zu bedenken, dass bei der Zuschnittsermittlung die ausgeführten Ableitungen sich nicht auf eine Veränderung der verformten Geometrie beziehen, sondern auf eine Modifikation der Ausgangsgeometrie. Bei Variation des Randes ändert sich sogar die Massenbilanz der Struktur, so dass evtl. Energieerhaltungssätze in diesem Fall nicht mehr anwendbar sind.

Die entstehende Unsymmetrie lässt sich anhand eines einfachen Beispiels veranschaulichen: Eine rechteckig zugeschnittene Membran wird in eine quadratförmige Form gezogen, wobei die Abmessung der längeren Seite (Richtung 2) während der gesamten Deformation konstant bleibt (siehe Abbildung 4.21 oben). Nimmt man nun an, dass das verwendete isotrope Material keine Querdehnung aufweist ($\nu = 0$), treten nur in der gezogenen horizontalen Richtung 1 Dehnungen und Spannungen auf. Variiert man die Zuschnittsgeometrie, indem man an der langen Seite etwas Material dazugibt (Abbildung 4.21 Mitte), ändern die Spannungen und Dehnungen in Richtung 1 zwar ihren Betrag, die dazu senkrechte Richtung 2 bleibt jedoch weiterhin spannungs- und dehnungsfrei. Nun wird die Zuschnittsgeometrie an der kurzen Seite etwas verlängert (Abbildung 4.21 unten): Die Verformung des Zuschnitts in die Endgeometrie kann man gedanklich in zwei Stufen einteilen: Zuerst wird Richtung 1 in die entsprechende Länge gezogen. Die dadurch entstehenden Spannungen bzw. Dehnungen entsprechen exakt den Ergebnissen infolge der ursprünglichen Zuschnittsvariante. Weiterhin muss jedoch Richtung 2 gestaucht werden, um die quadratische Endform zu gewährleisten. Es treten nun zum ersten Mal Spannungen und Dehnungen in Richtung 2 auf. Zugleich werden die Spannungen in Richtung 1 „zusammengeschoben“, so dass letztendlich auch die Cauchy-Spannungen in dieser Richtung zunehmen.

Vergleicht man nun die Änderungsraten der Spannungen und Dehnungen bzgl. der beiden Geometrievariationen, ergibt sich folgender Zusammenhang: Infolge der Breitenvariation δU_R ändern sich sowohl die Spannungen als auch die Dehnungen in Richtung 1. Die Längenvariation δU_S hingegen bewirkt zwar durch das Zusammenstauchen der Geometrie eine Änderung der Spannungen in Richtung 1, die korrespondierenden Euler-Almansi-Dehnungen bleiben jedoch konstant. Betrachtet man nun die beiden Nebendiagonaleinträge $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial U_R} : \frac{\partial e_{11}}{\partial U_S} = 0 \neq \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial U_S} : \frac{\partial e_{11}}{\partial U_R}$ lässt sich die Unsymmetrie der Systemmatrix plausibel erklären.

Soll dieses Zuschnittsverfahren in ein vorhandenes Berechnungsprogramm implementiert werden, das nur über einen symmetrischen Gleichungslöser verfügt, erreicht man eine Zwangssymmetrisierung der Systemmatrix über folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 K_{RS}^{II, sym} &= \int_{\Omega_{3D}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{el, 2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} : \frac{\partial \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_S} + \frac{\partial \sigma_{el, 2D \rightarrow 3D}}{\partial U_S} : \frac{\partial \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R} \right) da_{3D} \\
 &+ \int_{\Omega_{3D}} (\sigma_{el, 2D \rightarrow 3D} - \sigma_{ps}) : \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{2D \rightarrow 3D}}{\partial U_R \partial U_S} da_{3D}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Zwar lässt sich aufgrund der daraus entstehenden inkonsistenten Linearisierung keine quadratische Konvergenz der iterativen Berechnung erreichen, jedoch wurde in vielfältigen numerischen Versuchen ein äußerst zuverlässiges und stabiles Konvergenzverhalten bei der Methode festgestellt, das in nur wenigen Iterationsschritten zur Lösung führt.

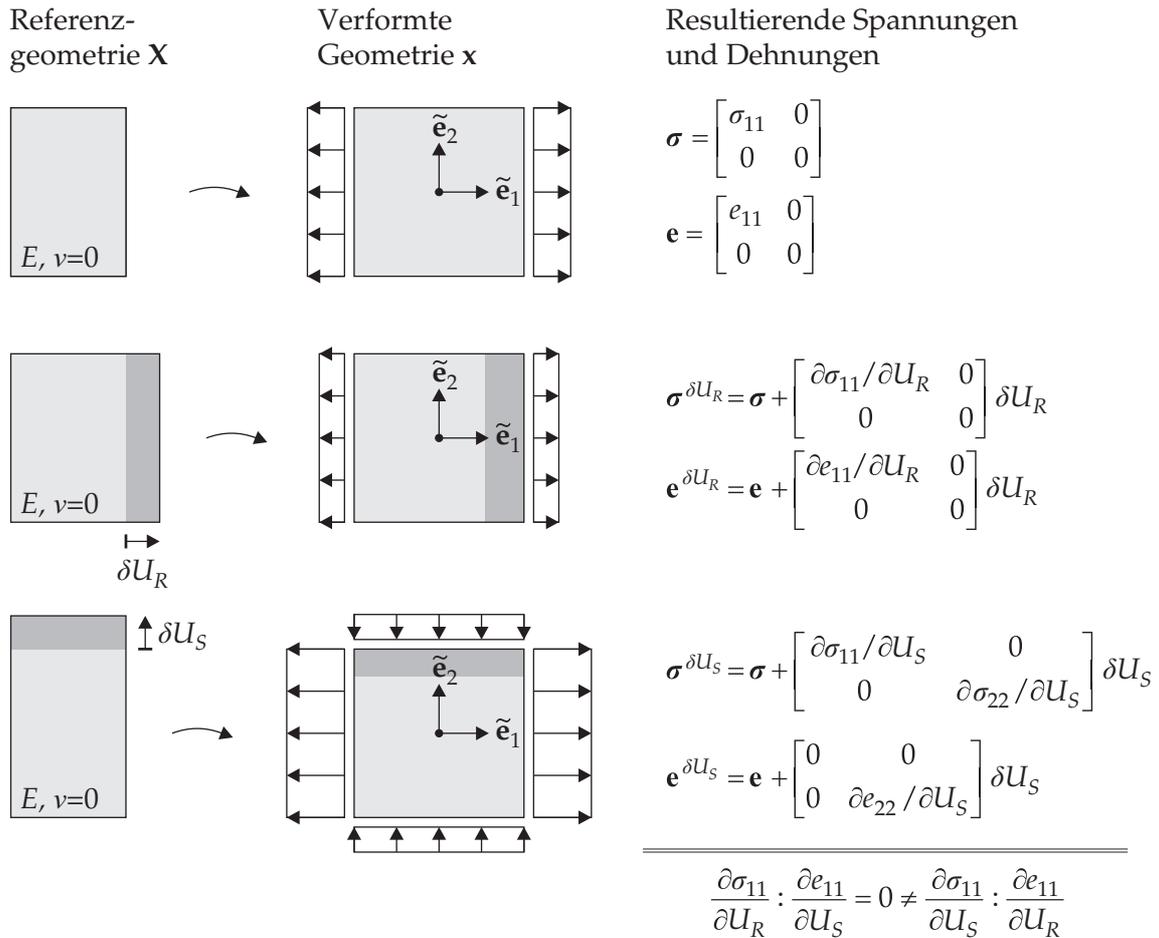


Abbildung 4.21: Unsymmetrische Systemmatrix bei Zuschnittsermittlung.

4.6 Vergleich der Zuschnittsmethoden

Nachdem in den vorangegangenen beiden Abschnitten die Theorie und Algorithmik der Zuschnittsermittlung durch Verebnung bzw. „Inverse engineering“ vorgestellt wurden, sollen die jeweiligen Verfahren anhand konkreter Beispiele miteinander verglichen werden. Dies ist nötig, um einen Eindruck der Wirkungsweise der aufgezeigten Methoden zu vermitteln.

Hypar-ähnliche Minimalfläche aus isotropem Material. Als erstes Beispiel soll für eine hypar-ähnliche Minimalfläche ein Großflächenzuschnitt mit nur einer Zuschnittsbahn erfolgen (siehe Abbildung 4.22). Die Geometrie wird von vier linienförmigen festen Auflagern berandet, die in einen Würfel mit Einheitslänge eingeschrieben werden können. Als Material findet ein fiktiver isotroper Werkstoff Verwendung, dessen linear-elastisches konstitutives Verhalten mit dem St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz modelliert wird. Der zugehörige Elastizitätsmodul besitzt den Wert $E = 2$, die Querdehnzahl den Wert $\nu = 0,3$. Die gewünschte Vorspannung, die sich nach Einbau des kompensierten Zuschnitts in die Berandung einstellen soll, wird mit $\sigma_{ps} = 1$ auf einen relativ hohen Wert gesetzt: Man

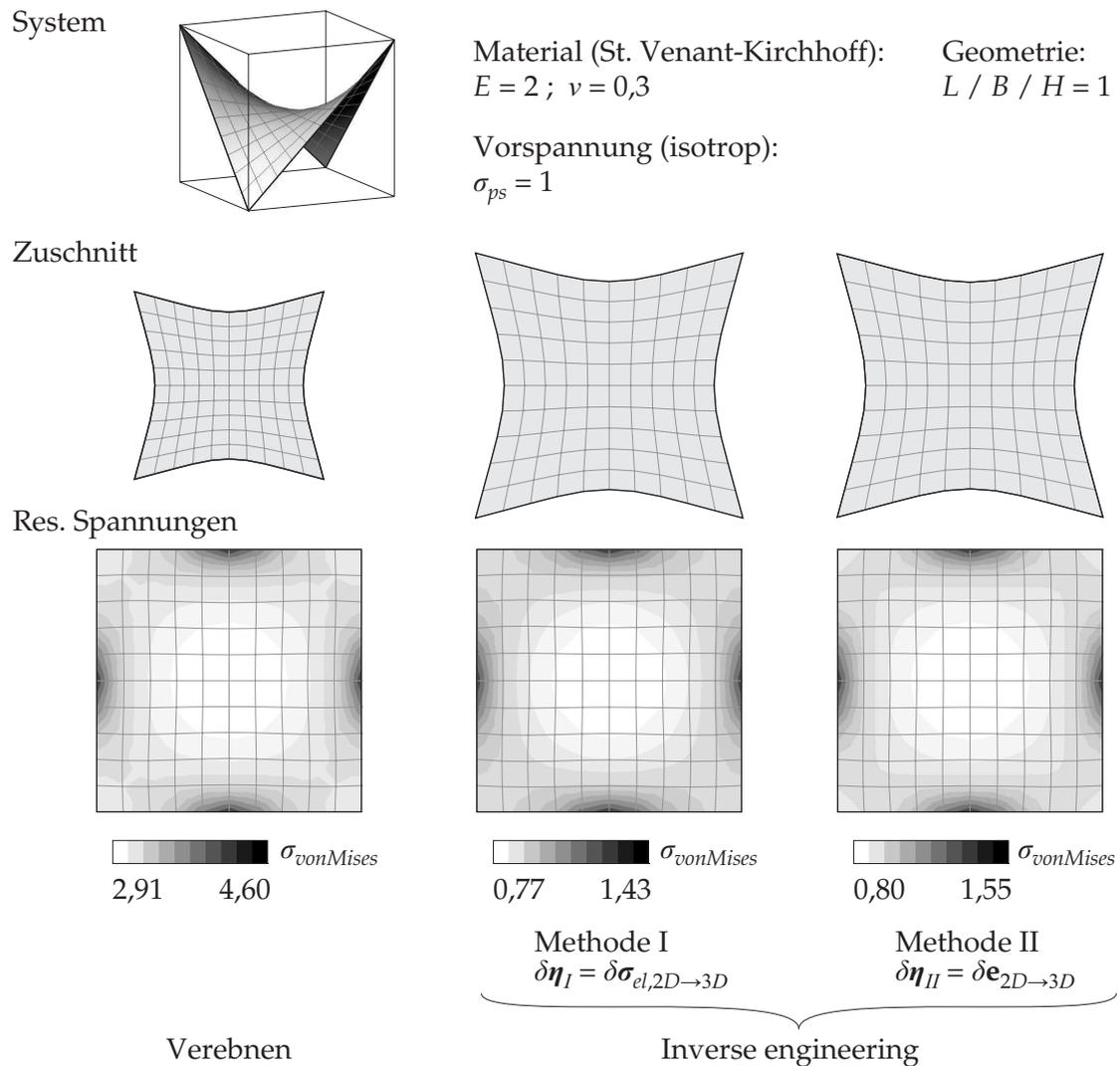


Abbildung 4.22: Vergleich der Zuschnittsvarianten an einer hyper-ähnlichen Minimalfläche.

kann grob abschätzen, dass Dehnungen bis zu 50 % nötig sein werden, um die erforderlichen Spannungen hervorzurufen. Obwohl ein derart hohes Verhältnis von Spannung zu Materialsteifigkeit in Realität nahezu unmöglich ist und eigentlich auch das für kleine Dehnungen entwickelte St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz in diesem Bereich seine Gültigkeit verliert, eignet sich dieser extreme Wert sehr gut, um die Unterschiede der verschiedenen Zuschnittsmethoden miteinander zu vergleichen.

Auf der linken Seite der Abbildung 4.22 sind die Ergebnisse infolge einer Zuschnittsrechnung über Verebnung aufgezeigt: Der kompensierte Zuschnitt, der bildlich gesprochen durch das Plattdrücken und Schrumpfen einer dreidimensionalen antiklastischen Membran bestimmt wurde, weist zwar die charakteristische konkave Form mit nach innen gekrümmten Rändern auf, jedoch ist die absolute Größe zu klein. Dies zeigt sich deutlich beim resultierenden Spannungsniveau, das sich in der „realen“ Struktur infolge des Zuschnitts einstellt. Die auftretenden Spannungsabweichungen von bisweilen mehreren hundert Prozent sind in diesem Fall weniger auf die Zusatzspannungen infolge der Nicht-Abwickelbarkeit

als auf die falsche kontinuumsmechanische Beschreibung des Herstellungsprozesses bei der Zuschnittsberechnung zurückzuführen, die sich in einem hohen Kompensationsfehler zeigt.

Die Ergebnisse der beiden inversen Zuschnittsvarianten nach Abschnitt 4.5 liefern auf den ersten Blick nahezu die gleichen Ergebnisse: Bei beiden gewählten Wichtungsfaktoren – sowohl Abweichung der Cauchy-Spannungen in Methode I (Abschnitt 4.5.1) als auch Abweichung der Euler-Almansi-Dehnungen in Methode II (Abschnitt 4.5.2) – treten äußerst geringe Differenzen vom Sollzustand auf, wie aus den Grafiken in der Mitte und der rechten Seite von Abbildung 4.22 ersichtlich wird. Wie zu erwarten war, ergeben sich stets an den Rändern Spannungsspitzen, während in der Mitte der Struktur die angestrebte Vorspannung unterschritten wird. Beide Methoden sind somit in der Lage, das mittlere Spannungsniveau einzuhalten und die Abweichungen infolge der doppelten Krümmung der Zielfläche dabei zu minimieren. Zwar weist die Methode der kleinsten Fehlerquadrat (Methode I) leicht bessere Spannungswerte auf als Methode II, jedoch musste die Vorspannung bei der ersten Variante wegen des kleinen Konvergenzradius stufenweise aufgebracht werden, um eine stabile Berechnung zu gewährleisten. Bei der Minimierung der Spannungsabweichungsarbeit (Methode II) hingegen konnte die volle Kompensation in einem Lastschritt erreicht werden.

Obwohl beide Methoden der inversen Zuschnittsberechnung für dieses Beispiel fast identische Ergebnisse liefern, ist dennoch Methode II aufgrund der höheren Stabilität zu bevorzugen. Die Zuschnittsberechnung über Verebnung scheidet für die Ermittlung kompensierter Zuschnitte aus, dennoch bildet sie eine interessante Alternative, falls lediglich eine Abwicklung ohne Kompensation durchgeführt werden soll.

Sechspunktsegel aus orthotropem Material. Die beiden inversen Zuschnittsvarianten werden in einem zweiten Beispiel für die Zuschnittsberechnung eines Sechspunktsegels eingesetzt. Die Geometrie der Struktur sowie ihre näherungsweise Abmessungen können Abbildung 4.23 entnommen werden. Das Tragwerk soll aus 8 Zuschnittsbahnen hergestellt werden, die im zusammengebauten Zustand eine isotrope Vorspannung vom Wert $\sigma_{ps} = 1,0$ [kN/m] erzeugen sollen. Das zu verwendende orthotrope Textil wird mit dem Münsch-Reinhardt-Materialgesetz modelliert. Die Materialwerte, die sich auf eine ideale Querschnittshöhe $H = 1$ beziehen, können Abbildung 4.23 entnommen werden.

Bei den entstehenden Zuschnittsmustern, die in Abbildung 4.23 rechts oben zu sehen sind, lässt sich mit bloßem Auge nahezu kein Unterschied zwischen den beiden Zuschnittsmethoden erkennen. Auch bei den resultierenden elastischen Spannungen in der Endgeometrie ist die Verteilung für beide verwendeten Wichtungsfunktionen fast identisch: In beiden Fällen stellen sich erhöhte Spannungen an den Rändern ein, das Spannungsniveau in der Bahnmitte liegt etwas unter dem gewünschten Wert.

Beide inverse Zuschnittsmethoden liefern somit erneut nahezu identische Resultate, die stets eine sehr gute Spannungsverteilung aufweisen. Nichtsdestotrotz empfiehlt es sich, die in Abschnitt 4.5.2 beschriebene Methode II zur Zuschnittsberechnung zu verwenden, da die Startgeometrie für die iterative Berechnung größere Abweichungen zur Endgeometrie aufweisen darf.

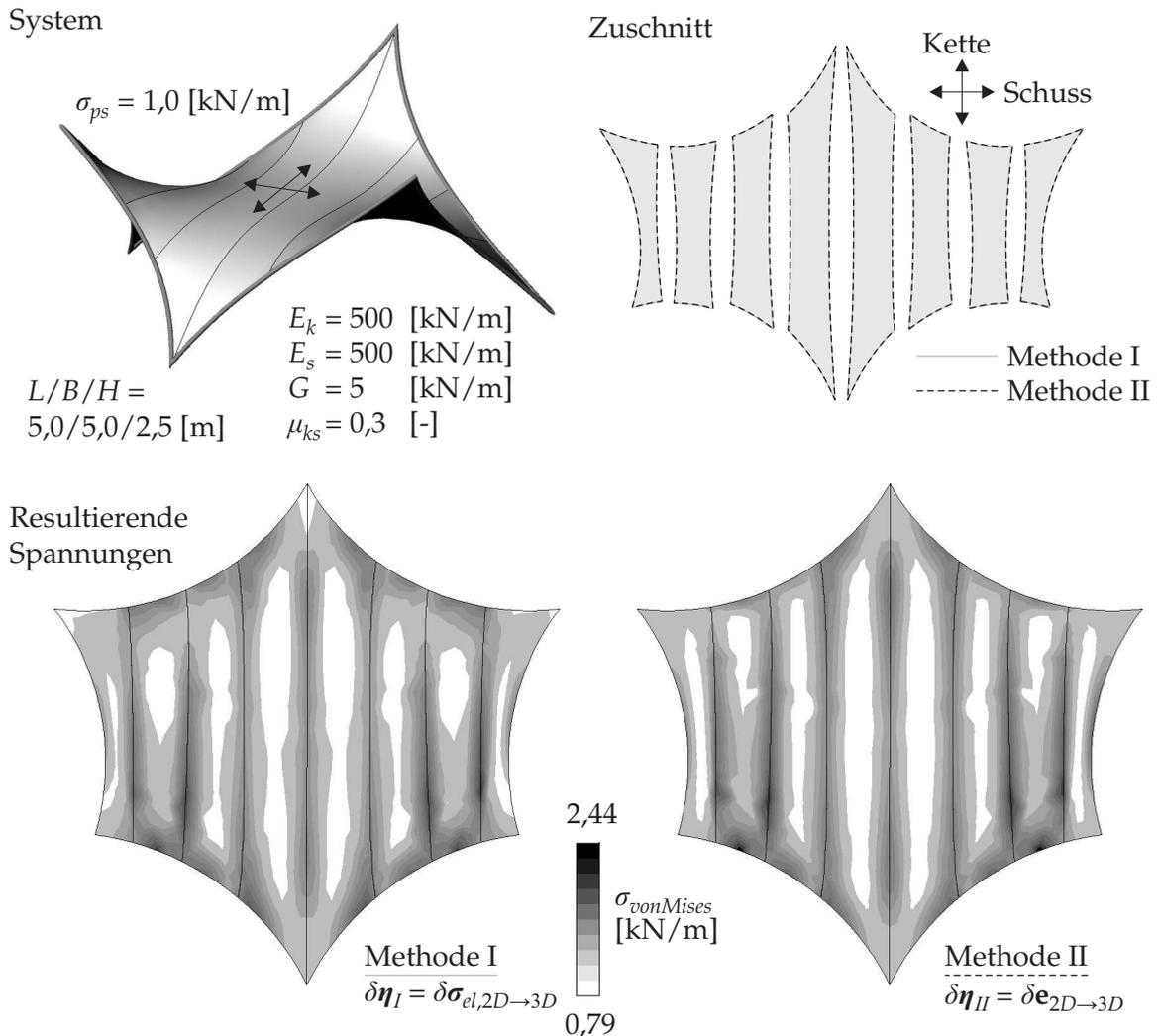


Abbildung 4.23: Vergleich der inversen Zuschnittsvarianten.

Die Praxistauglichkeit der Zuschnittsmuster aus Abbildung 4.23 wurde bei einem Schulprojekt überprüft: Im Rahmen eines zweitägigen Workshops zum Thema „Membrantragwerke“ wurde 2007 am Gymnasium Ettenheim (bei Freiburg/Breisgau) das Sechspunktsegel errichtet. Nachdem die Membranbahnen von den Schülern gemäß der berechneten Form zugeschnitten wurden, erfolgte das Zusammennähen und letztendliche Errichten der Gesamtstruktur. Abbildung 4.24 zeigt die verschiedenen Konfigurationen bis zur Fertigstellung des Tragwerks.

Einfluss der Materialeigenschaften auf den Zuschnitt. In einem letzten Beispiel soll untersucht werden, ob die Methoden in der Lage sind, den Einfluss der Materialeigenschaften auf die Zuschnittsform zu berücksichtigen. Um Spannungsabweichungen infolge der Nicht-Abwickelbarkeit auszuschließen, wird als Endgeometrie eine ebene „Test“-Struktur verwendet (siehe Abbildung 4.25 oben). Für verschiedene Materialien soll nun ein kompensierter Zuschnitt derart bestimmt werden, so dass sich in der Endgeometrie ein anisotropes

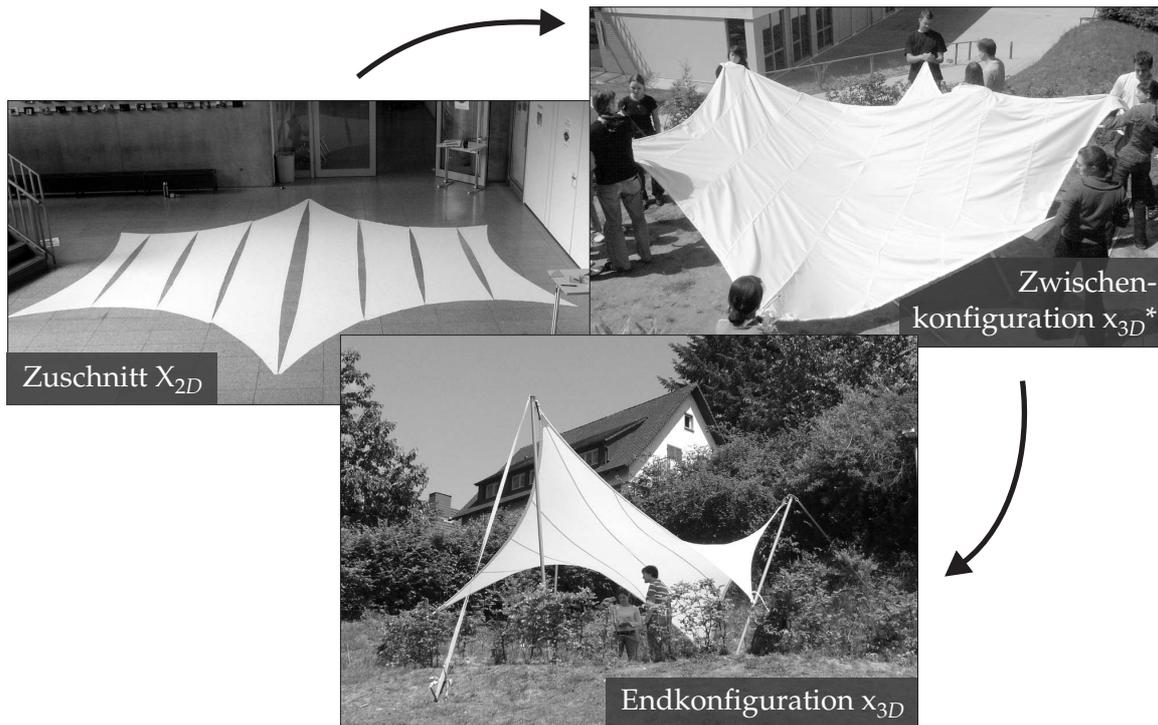


Abbildung 4.24: Konfigurationen eines Sechspunktsegels.

Spannungsverhältnis vom Wert 1:2 einstellt. Die Spannungsrichtungen sind dabei um 45° gegenüber der horizontalen Achse verdreht angeordnet.

Der resultierende Zuschnitt für ein fiktives St. Venant-Kirchhoff-Material mit den Stoffparametern $E = 50$ und $\nu = 0,3$ ist links in der Mitte von Abbildung 4.25 dargestellt. Da die gegebene Problemstellung exakt gelöst werden kann, liefern beide inverse Zuschnittsmethoden aus Abschnitt 4.5 die gleichen akkuraten Ergebnisse. Aus der Isotropie des Materials ergibt sich eine leichte Schiefstellung des Zuschnitts, die später im verformten Zustand die anisotrope Spannungsverteilung hervorruft. Die dabei auftretenden Verzerrungen sind entsprechend dem Gültigkeitsbereich des Materialgesetzes noch gering.

Als Nächstes wird die Zuschnittsermittlung für ein Ogden-Material durchgeführt. Die Materialkenngrößen $\alpha_i = \{1,3; 5,0; -2,0\}$ $\mu_i = \{6,3; 0,012; -0,1\}$ entstammen [Hol04]. Auch dieses Materialgesetz ist isotrop, jedoch können damit nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen beschrieben werden, was auch an der Form des Schnittmusters erkennbar wird. Die Schiefstellung ist in diesem Fall ausgeprägter als für das linear-elastische St. Venant-Kirchhoff-Material: Dies ist darauf zurückzuführen, dass infolge der abnehmenden Steifigkeit für hohe Spannungen das Material mehr gedehnt werden muss, um den höheren Vorspannwert zu erreichen. In Richtung der niedrigeren Vorspannung genügen kleinere Dehnungen.

Den Abschluss bildet ein textiles Gewebe, dessen orthotropes Materialverhalten mit dem Münsch-Reinhardt-Material modelliert wird (fiktive Materialwerte: $E_k = 100$; $E_s = 50$; $\mu_{ks} = 0,3$; $G = 10$). Für eine Ausrichtung der Fasern entlang den globalen Achsen ergibt sich das leicht verzerrte Schnittmuster, das in der Mitte der Abbildung zu sehen ist.

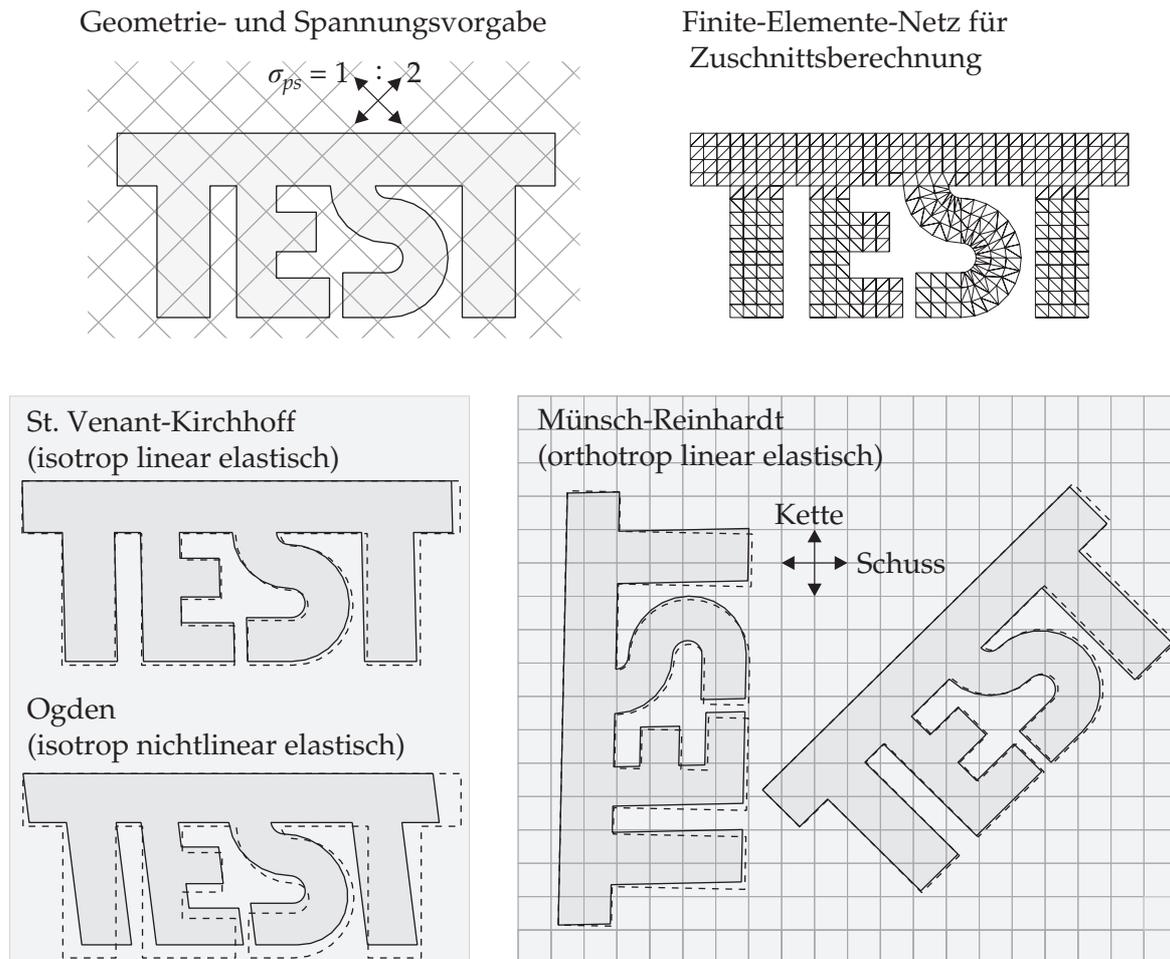


Abbildung 4.25: Einfluss der Materialeigenschaften auf den Zuschnitt.

Richtet man hingegen die Fasern nach den Vorspannroutungen aus, erhält man für die gewählte Konstellation aus Vorspannung und Materialeigenschaften ein Zuschnittsmuster, das keine Verscherungen gegenüber der Endgeometrie aufweist. Da sowohl in Kett- als auch in Schussrichtung ein identisches Verhältnis von Vorspannung zu Fasersteifigkeit vorliegt, kann der Zuschnitt allein über Faserstreckungen das gewünschte Vorspannungsniveau erreichen, Schubverzerrungen sind dabei nicht notwendig.

Dieses Beispiel zeigt, dass die inverse Zuschnittsermittlung in der Lage ist, den Einfluss nahezu beliebiger Materialgesetze bei der Zuschnittsermittlung auf korrekte Weise zu berücksichtigen. Voraussetzung ist lediglich, dass eine eindeutige absolute Spannungs-Dehnungs-Beziehung durch das verwendete Materialmodell gegeben ist. Der Einsatz eines pfadabhängigen Materialgesetzes erscheint auch wenig sinnvoll angesichts der Tatsache, dass im Rahmen der Zuschnittsermittlung nur die verformte Geometrie gegeben ist, nicht jedoch die komplette Geschichte ihres Deformationsprozesses. Für die Zuschnittsermittlung ist es somit von essentieller Bedeutung, dass man allein aus den zwei Zuständen „Zuschnitt“ und „verformte Geometrie“ auf die Spannungen in der Struktur schließen kann.

ZUSAMMENFASSUNG. Die Zuschnittsermittlung von vorgespannten Flächentragwerken erfolgt in zwei getrennten Phasen: Zunächst wird die räumliche Struktur anhand von Schnittlinien in Bereiche eingeteilt, für die später die einzelnen Zuschnittsmuster individuell bestimmt werden. Die entwerfende Person muss hierbei die Art der Schnittlinien (z. B. geodätische Linien) und die notwendigen Parameter (z. B. Start- und Endpunkte) generell von Hand festlegen, bevor die Geometrieanpassung numerisch erfolgen kann. Obwohl die Schnittlinienbestimmung eine rein geometrische Aufgabe darstellt, können mechanische Analogien als Lösungsansatz verwendet werden (z. B. Geradeziehen eines Seiles in der Membranfläche).

Die eigentliche Zuschnittsberechnung erfolgt anschließend: Da Membrankonstruktionen einen großen Zusammenhang zwischen Kraft und Form aufweisen, sollte der Zuschnitt unter der Vorgabe bestimmt werden, dass der Spannungszustand in der realen Struktur bestmöglich mit der Vorgabe übereinstimmen muss. Geometrische Verebnungsmethoden können dies nicht garantieren, so dass kontinuumsmechanische Verfahren zu bevorzugen sind, da diese die Material- und Vorspanneigenschaften gezielt in die Berechnung integrieren können. Die Zielspannungen werden jedoch generell nie exakt eingehalten werden, da beim Herstellungsprozess stets Zusatzspannungen infolge der doppelten Verkrümmung der ebenen Werkstoffbahnen auftreten. Bei antiklastischen Tragwerken sind Spannungsspitzen an den Rändern zu erwarten, bei synklastischen Konstruktionen ist die Bahnmitte erhöhten Spannungen ausgesetzt. Die vorgestellten Zuschnittsverfahren durch „Inverse engineering“ sind in der Lage, diesen Effekt infolge der Nicht-Abwickelbarkeit schon bei der Zuschnittsberechnung zu berücksichtigen: Durch die verwendete kontinuumsmechanisch korrekte Beschreibung können kompensierte und unkompensierte Schnittmuster erzeugt, die ein Minimum an Spannungsabweichung vom Sollzustand aufweisen.

Kapitel 5

Strukturanalyse

Im nachfolgenden Kapitel werden die Besonderheiten näher beleuchtet, die es bei der numerischen Strukturanalyse leichter Flächentragwerke zu berücksichtigen gilt. Zunächst wird ein Überblick über Modellierungsverfahren, basierend auf der Finite-Elemente-Technologie, gegeben, die eine realitätsnahe Simulation des Verhaltens vorgespannter Tragwerke unter Last ermöglichen. Dabei wird auch auf Grundlagen eingegangen wie z. B. der Formulierung eines nichtlinearen finiten Membranelements für statische Analysen.

Das Hauptaugenmerk des Kapitels liegt jedoch nicht auf einer Beschreibung der „klassischen“ Strukturanalyse. Es soll vielmehr eine integrale Strukturanalyse vorgestellt werden, die in der Lage ist, sowohl Elemente der Formfindung als auch Ergebnisse der Zuschnittsermittlung in die Berechnungsprozedur zu integrieren. Durch Kombination von Formfindung und Strukturanalyse lassen sich einerseits durch den Einsatz elastischer Strukturelemente anderweitig nicht lösbare Formfindungsprobleme effektiv stabilisieren, andererseits können durch die Verwendung von Formfindungselementen bei einer Strukturanalyse komplexe Aufbauvorgänge simuliert werden (siehe Abschnitt 5.3). Ist eine detaillierte Analyse der Spannungsverteilung in einer Membranstruktur erforderlich, kann die Akkuratheit der numerischen Berechnung durch Verwendung des Zuschnitts als wahre Referenzkonfiguration gesteigert werden. Diese in Abschnitt 5.4 aufgezeigte, kontinuumsmechanisch korrekte Modellierung kann auch dazu verwendet werden, um neben einer reinen Vorspannung auch planmäßige Biegezustände in einer Struktur zu beschreiben. Die Vorgehensweise wird an einem Beispiel in Abschnitt 5.4.1 verdeutlicht.

5.1 Überblick

Um zu überprüfen, ob ein geplantes Flächentragwerk den späteren realen Anforderungen der Praxis genügt, werden an seinem mechanischen Modell Strukturanalysen durchgeführt. Es gilt z. B. nachzuweisen, dass in den einzelnen Strukturelementen bestimmte Spannungsgrenzwerte bei statischen oder dynamischen Belastungen nicht überschritten werden. Werden die gegebenen Grenzwerte nicht eingehalten, müssen Modifikationen des Tragwerks durchgeführt werden, um spätere Schäden weitestgehend auszuschließen (z. B. Änderungen der Geometrie und/oder der Werkstoffe) [Wak04, BFD04].

Als wichtigstes Hilfsmittel für die Strukturanalyse hat sich in den letzten Jahrzehnten die Methode der finiten Elemente etabliert [Hug00, ZTZ05]. Dieses universell einsetzbare Verfahren wurde durch eine Vielzahl an Forschungsarbeiten an die Belange des Membranbaus angepasst, wodurch sich das mechanische Verhalten nahezu beliebig komplexer Strukturen modellieren lässt. Als roter Faden zieht sich die Notwendigkeit einer geometrisch nichtlinearen Formulierung der Kinematik durch beinahe alle Arbeiten, da aufgrund der extremen Schlankheit der Konstruktionen generell große Verformungen zu erwarten sind [BFD04]. Auf dieser Basis wurde die Elementformulierung je nach auftretender Problemstellung in den unterschiedlichen Forschungsgebieten vorangetrieben.

Den Ausgangspunkt aller Weiterentwicklungen bildet generell das Membranelement zur statischen Analyse. Dieses lässt sich entweder direkt für einen speziellen Elementtypus entwickeln (z. B. für lineare Dreieckselemente in [NB04, RLVO05, Gil06, GB06]) oder kann auf kontinuumsmechanische Weise aus einem elastischen Kontinuum durch Anwendung der Modellannahmen hergeleitet werden [BWBR04]. Bei letzterer Herangehensweise können nahezu beliebige Diskretisierungstechniken angewandt werden, wodurch sich problemlos Elemente mit höherwertigen Ansatzfunktionen oder auch isogeometrische Elemente, basierend auf NURBS, formulieren lassen (siehe [HCB05]). Sollen auch dynamische Effekte in die Strukturanalyse miteinbezogen werden, ist zusätzlich zur Steifigkeitsmatrix des Elements, eine Massen- und evtl. eine Dämpfungsmatrix zu bestimmen. Für weiterführende Informationen zur dynamischen Analyse von Membrantragwerken sei auf [Wüc07] verwiesen.

Neben der reinen Elementtechnologie stellt die Weiterentwicklung konstitutiver Beziehungen ein wichtiges Forschungsgebiet dar. Einerseits gilt es, geeignete Materialgesetze für Membranwerkstoffe unter kleinen und großen Dehnungen zu entwickeln (siehe u. a. [Mor05, BG04, Min06]), andererseits werden intensive Bemühungen betätigt, die Faltenbildung von Membranen in adäquater Weise zu modellieren [Zie01, ZWB03, RLVO05, JWB08].

Ebenso wichtig wie eine akkurate Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Struktur ist eine möglichst exakte Kenntnis der angreifenden Kräfte [Wak04]. Da gerade Membrantragwerke eine große Kopplung zwischen Form und äußerer Last aufweisen, ist hier die Windbelastung von besonderem Interesse: Im Forschungsgebiet der Fluid-Struktur-Interaktion werden Verfahren entwickelt, die die gegenseitige Wechselwirkung zwischen der turbulenten Windanströmung und dem sich dadurch bewegenden Bauwerk erfassen können [Wüc07, WKB07, WKB08].

Wie dieser kurze und selbstverständlich alles andere als vollständige Überblick verdeutlicht, stellt die Strukturanalyse von Membrantragwerken ein weiterhin hochaktuelles Forschungsgebiet dar, das sich zwangsläufig nicht erschöpfend in einer einzigen Arbeit diskutieren lässt. In den nachfolgenden Abschnitten sollen auch keine reinen Weiterentwicklungen der Strukturanalyse an sich vorgestellt werden, sondern es wird vielmehr eine integrale Betrachtungsweise der Strukturanalyse propagiert, die durch Kombination mit Formfindung bzw. Zuschnittsberechnung entsteht.

5.2 Elementformulierungen

Die gängigste Weise, nichtlineare Elemente für statische Analysen zu formulieren, geschieht mit der sogenannten *Total Lagrangeschen* Betrachtungsweise. Dies bedeutet, dass als Bezugs-konfiguration für die Berechnung stets die unverformte Referenzkonfiguration verwendet wird [Hol04]. Dementsprechend müssen alle kontinuumsmechanischen Größen in ihrer materiellen Darstellung vorliegen, die Integration der Systemmatrizen erfolgt ebenfalls über die Ausgangskonfiguration. Nachfolgend werden die Tangentensteifigkeitsmatrix und der Vektor der Ungleichgewichtskräfte exemplarisch für statische Membran- und Seilelemente hergeleitet.

5.2.1 Membranelement

Den Ausgangspunkt der Elementformulierung für das Membranelement bildet die innere virtuelle Arbeitsgleichung (2.104) in ihrer materiellen Darstellung. Den Vektor der Ungleichgewichtskräfte R_r^{mem} bzgl. der Freiheitsgrade u_r erhält man durch Linearisierung der ersten Variation der inneren Arbeit [BL06b]:

$$R_r^{mem} = H \int_A \left(\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_r} \right) dA \quad (5.1)$$

\mathbf{S} bezeichnet den PK2-Spannungstensor der Struktur, \mathbf{E} den Green-Lagrangeschen Dehnungstensor. Die Integration erfolgt über die unverformte Mittelfläche der Membran, die den Flächeninhalt A besitzt. Die Querschnittshöhe H des Membranwerkstoffs im unverformten Zustand geht als konstanter Faktor in Gleichung (5.1) ein.

Die Tangentensteifigkeitsmatrix K_{rs}^{mem} stellt die Sensitivität der Ungleichgewichtskräfte in Richtung der Freiheitsgrade u_r bzgl. infinitesimaler Verschiebungen an den Freiheitsgraden u_s dar. Folglich ergibt sie sich durch Differentiation der Gleichung (5.1) nach den Freiheitsgraden u_s :

$$K_{rs}^{mem} = \frac{\partial R_r^{mem}}{\partial u_s} = H \int_A \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u_s} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_r} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u_r \partial u_s} \right) dA \quad (5.2)$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass sich alle Freiheitsgrade auf die *verformte Geometrie* beziehen. So wirken die Ungleichgewichtskräfte auf der aktuellen Konfiguration, obwohl sie aufgrund der materiellen Formulierung in der Referenzkonfiguration berechnet wurden. Ebenso spiegelt die Steifigkeitsmatrix die Änderungsrate dieser räumlichen Kräfte für Änderungen der verformten Geometrie wider.

Besondere Aufmerksamkeit ist darüberhinaus bei den Gleichungen (5.1) und (5.2) der Definition des PK2-Spannungstensors \mathbf{S} zu schenken. Werden gemäß der erweiterten kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise aus Abschnitt 2.3.1 die zugeschnittenen Membranbahnen als Referenzkonfiguration verwendet, beinhalten die PK2-Spannungen lediglich die durch Verformung entstandenen elastischen Spannungsanteile ($\mathbf{S} = \mathbf{S}_{el}$). Benützt man jedoch vereinfachend die ideal vorgespannte, räumliche Konfiguration als Referenzsystem,

setzt sich die absolute Spannung aus zwei Anteilen zusammen: Zusätzlich zu den elastischen Spannungen \mathbf{S}_{el} muss nun auch der Vorspannzustand \mathbf{S}_{ps} berücksichtigt werden, der den Modellannahmen zufolge schon in der Referenzkonfiguration herrscht (die Abkürzung „ps“ entstammt dem englischen Wort *prestress*):

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{el} + \mathbf{S}_{ps} \quad (5.3)$$

Dabei gilt es jedoch, die kontinuumsmechanische Definition der Vorspannung zu klären: Man muss sich bewusst machen, dass die Einführung der Vorspannung ein Kunstgriff ist, der aufgrund des Wechsels der Referenzkonfiguration erforderlich wird. Kontinuumsmechanisch korrekt wäre es, die kompensierten Zuschnittsbahnen als unverformte Konfiguration zu verwenden, da deren elastische Verformungen beim Zusammenbau zum Gesamttragwerk die eigentliche Vorspannung erzeugen. Wird aber anstelle des Zuschnitts die zusammengefügte, räumliche Geometrie als Referenzkonfiguration gesetzt, müssen die in der Realität elastischen Spannungen als intrinsische Vorspannung uminterpretiert werden. Gleichzeitig werden die elastischen Spannungen und Dehnungen dieser Konfiguration „auf Null“ zurückgesetzt.

Möchte man nun, dass der Vorspannzustand unabhängig zukünftiger Dehnungen ist, müssen die Vorspannungen als Cauchy-Spannungen σ_{ps} definiert werden. Die zugehörigen PK2-Größen der Vorspannungen ergeben sich aus einer Pull-Back-Operation gemäß Gleichung (2.69). Der Nachteil dieser Formulierung besteht jedoch darin, dass die als Rechengröße dienenden PK2-Vorspannungen nicht mehr unabhängig von den Knotenverschiebungen des Elements sind. Aufgrund dessen muss auch deren Ableitung bei der Elementsteifigkeitsmatrix berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{ps}^{Cauchy}}{\partial u_s} = \frac{\partial}{\partial u_s} (\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \underbrace{\sigma_{ps}}_{=konst.} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \neq 0 \quad (5.4)$$

Definiert man hingegen die Vorspannung als PK2-Spannung, ändern sich zwar die physikalischen Vorspannungswerte bei auftretenden Deformationen, die Berechnung der Steifigkeitsmatrix vereinfacht sich aber, da in diesem Fall die Ableitung entfällt:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{ps}^{PK2}}{\partial u_s} = \frac{\partial}{\partial u_s} (\underbrace{\mathbf{S}_{ps}}_{=konst.}) = 0 \quad (5.5)$$

Bei kleinen auftretenden Dehnungen ist der Unterschied zwischen beiden beschriebenen Varianten vernachlässigbar, weswegen die zweite Formulierung mit PK2-Spannungen aufgrund des verringerten Berechnungsaufwands zu bevorzugen ist. Werden jedoch große Dehnungen erwartet, empfiehlt es sich, die Vorspannung als „wahre“ Cauchy-Spannung zu definieren.

Die aufgezeigte Formulierung lässt sich auf beliebige Diskretisierungen anwenden. Die notwendigen Zwischenschritte zur Integration der Gleichungen (5.1) und (5.2) können Kapitel 2 entnommen werden.

5.2.2 Seilelement

Die Systemmatrizen für ein elastisches Seilelement zur statischen Analyse lassen sich analog zu der Membranformulierung herleiten. Werden zudem lineare Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Geometrie und der Verschiebungen gewählt, lässt sich der Residualvektor R_r^{seil} für ein linear-elastisches Materialverhalten explizit wie folgt schreiben:

$$R_r^{seil} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L^3} (l^2 - L^2) l l_r + \begin{cases} \sigma_{ps} A l_r & \text{falls } \sigma_{ps} = \text{konst.} \\ S_{ps} \frac{A}{L} l l_r & \text{falls } S_{ps} = \text{konst.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Mit L bzw. l wird die unverformte bzw. verformte Länge des linearen Seilelements bezeichnet. l_r beschreibt die Ableitung der verformten Seillänge bzgl. einer Änderung der Seilgeometrie am Freiheitsgrad u_r . Die linear-elastische Dehnsteifigkeit des Seiles ist mit dem Wert EA gegeben, der sich aus dem Elastizitätsmodul E des Materials und dem unverformten Seilquerschnitt A zusammensetzt. Für den Anteil der Knotenkräfte aus einer evtl. Seilvorspannung wird erneut eine Unterscheidung vorgenommen, ob die Vorspannung als Cauchy-Spannung σ_{ps} oder PK2-Spannung S_{ps} interpretiert werden soll.

Die zugehörige Tangentensteifigkeitsmatrix K_{rs}^{seil} lautet gemäß Gleichung (2.124):

$$K_{rs}^{seil} = \frac{EA}{L^3} \left[(l l_r) (l l_s) + \frac{1}{2} (l^2 - L^2) (l_r l_s + l l_{rs}) \right] + \begin{cases} \sigma_{ps} A l_{rs} & \text{falls } \sigma_{ps} = \text{konst.} \\ S_{ps} \frac{A}{L} (l_r l_s + l l_{rs}) & \text{falls } S_{ps} = \text{konst.} \end{cases} \quad (5.7)$$

5.3 Kombination Formfindung - Strukturanalyse

Werden für die Strukturanalyse entwickelte finite Elemente mit finiten Elementen zur Formfindung kombiniert, ergibt sich eine Vielzahl möglicher Einsatzmöglichkeiten, wie an den nachfolgenden Beispielen aus Formfindung bzw. statischer Analyse ersichtlich wird. Man erhält dadurch die Möglichkeit, den Strukturelementen entweder materielle Eigenschaften (wie z. B. Materialsteifigkeit und unverformte Länge) oder entmaterialisierte Spannungswerte zuzuweisen. Der Gesamtcharakter der numerischen Berechnung hängt vom jeweiligen „Mischungsverhältnis“ ab: In den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 dominiert die Formfindung, die elastischen Elemente werden für die Stabilisierung der Berechnung benötigt. In den beiden abschließenden Beispielen (Abschnitt 5.3.3 bzw. 5.3.4) überwiegt die Strukturanalyse, die Formfindungselemente stellen hierbei die treibende Kraft des Deformationsprozesses dar.

Von numerisch-mechanischer Seite betrachtet ergeben sich bei einer Kombination von Formfindung und Strukturanalyse keine großen Hindernisse. Es muss einzig allein auf das Mitziehen der Referenzkonfiguration bei den Formfindungselementen geachtet werden: Im Gegensatz zu den Elementen für die Strukturanalyse mit ihrer Total-Lagrangeschen

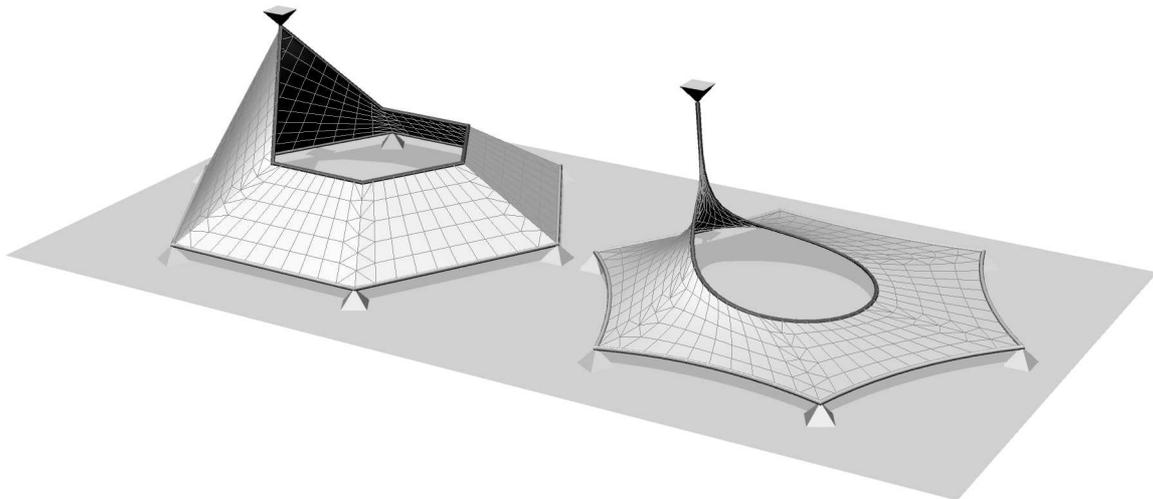


Abbildung 5.1: Formfindung einer Membran mit Seilschleufe.

Beschreibung muss bei den Formfindungselementen in jedem neuen Lastschritt (nicht jedoch während der Gleichgewichtsiteration) ein Update der Referenzkonfiguration vollzogen werden (siehe Abschnitt 3.3.2). Diese Mischung aus Total-Lagrangescher und Updated-Lagrangescher Herangehensweise lässt sich beispielsweise durch Vorhaltung getrennter Listen mit den Knotenpositionen der beiden unterschiedlichen Referenzkonfigurationen bewerkstelligen.

5.3.1 Membran mit Seilschleufe

Wie in Abschnitt 3.2.3 verdeutlicht wurde, gelingt die Formfindung einer Membran mit Augeseil nicht über die Vorgabe von Seilkräften, da der gesuchte Gleichgewichtszustand einem Maximum der potentiellen Energie entspricht und somit instabil ist. Wird das Augeseil hingegen mit elastischen Seilelementen modelliert, kann eine Stabilisierung der Berechnung erreicht werden.

Als Beispiel hierfür ist in Abbildung 5.1 die Formfindung einer Membran mit Seilschleufe dargestellt. Ähnliche Strukturen wurden intensiv von Frei Otto untersucht und kamen beispielsweise beim Bau des Instituts für leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart und bei dem Entwurf des neuen Stuttgarter Hauptbahnhofs zum Einsatz [OR96, BBB05]. Bei der Formfindungsberechnung wurden die Randseile sowie die isotrop vorgespannte Membran mit Formfindungselementen modelliert, für die Seilschleufe kamen die in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen elastischen Seilelemente zum Einsatz. Aufgrund ihrer Total-Lagrangeschen Formulierung ist darauf zu achten, dass schon bei der Startgeometrie der Formfindung die Seilschleufe die gewünschte Länge besitzt, da bei Verwendung realistischer Steifigkeiten generell nur geringe Seildehnungen im Zuge der Formfindung zu erwarten sind. Die Ausgangsgeometrie der Formfindungselemente hingegen darf beliebig gewählt werden, jedoch muss sie mit den Randbedingungen kompatibel sein. Eine Änderung ihrer Referenzgeometrie beeinflusst somit nicht das Endergebnis, sondern lediglich die Anzahl der durchzuführenden Formfindungsschritte. Die gewählte Ausgangsgeometrie für

die mit Strukturelementen kombinierte Formfindungsberechnung ist auf der linken Seite der Abbildung 5.1 zu sehen, die Gleichgewichtsgeometrie ist auf der rechten Seite derselben Grafik abgebildet.

5.3.2 Bat-Sail

Das zweite Beispiel einer Formfindung mit elastischen Elementen ist ein interessantes Projekt, das von Robert Off am Institut für Membran- und Schalentechologien e. V. initiiert wurde [Off07]. Den Ausgangspunkt für die Entwicklung des *Bat-Sails* bildeten Überlegungen, wie die überdachte Fläche eines Vierpunktsegels zu erhöhen sei. Um den Flächenverlust durch die konkav geformten Randseile zu verringern, wurden innerhalb der Membran dünne Stäbe mit Biegesteifigkeit eingenäht, die näherungsweise parallel zu den Hauptkrümmungsrichtungen liegen und jeweils von Randseilen begrenzt werden. Diese werden dabei von den Stäben nach außen gedrückt, so dass sich die Membranfläche vergrößert. Da die entstehende charakteristische Form des Tragwerks an die Flügel einer Fledermaus erinnert (siehe Abbildung 5.2), wurde die Struktur gemäß der englischen Übersetzung *Bat-Sail* genannt.

Um eine physikalisch sinnvolle Form des Tragwerks zu entwickeln, wurde eine Formfindungsberechnung durchgeführt, bei der einerseits die gewünschten Spannungen in der Membran und den Randseilen, andererseits die Referenzgeometrie und die Materialeigenschaften der elastischen Stäbe vorgegeben waren. Folglich wurden für die Membran und die Randseile jeweils Formfindungselemente verwendet, die beiden elastischen Stäbe wurden mit dünnen Balkenelementen modelliert, da sie planmäßig Druck und Biegung aufnehmen müssen. In der hier durchgeführten Berechnung kamen als Ersatz für die Balkenelemente rotationsfreie Kirchhoff-Schalenelemente zum Einsatz (für die Elementformulierung siehe [LWB07, LB08]). Dies brachte den Vorteil, dass die Kopplung mit den Membran- und Seilelementen problemlos vonstatten ging, da alle Elementtypen nur über Verschiebungsfreiheitsgrade verfügen. Selbstverständlich könnte die Berechnung auch mit nichtlinearen Balkenelementen durchgeführt werden. Hierbei müssten jedoch die Torsionsfreiheitsgrade in geeigneter Weise festgehalten werden, um ein kinematisches System zu verhindern.



Abbildung 5.2: Schematische Skizze einer Fledermaus.

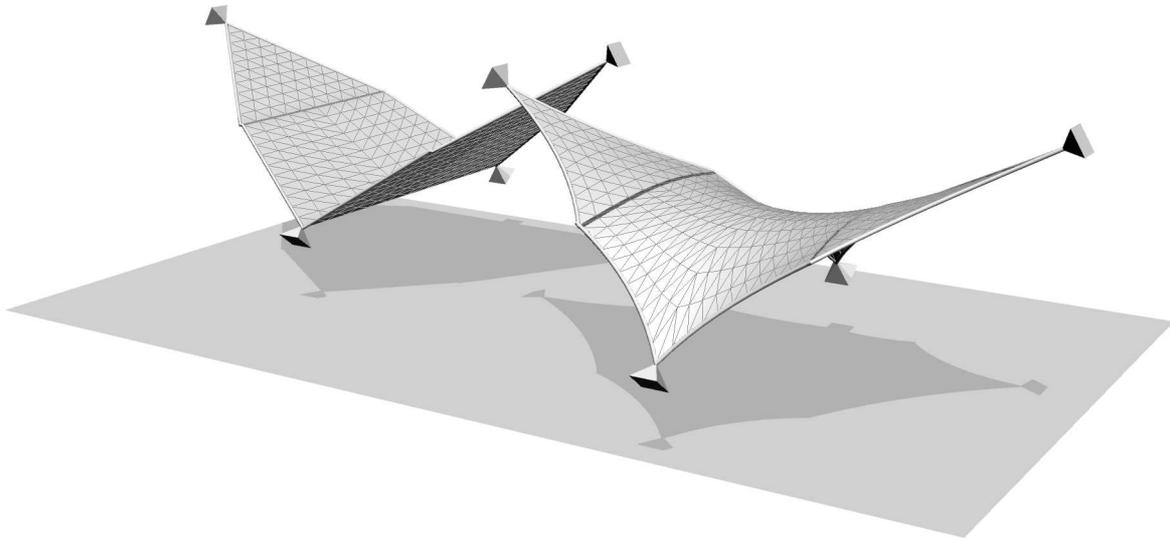


Abbildung 5.3: Formfindung eines Bat-Sails.

Die Start- und Endgeometrie der Formfindung ist in Abbildung 5.3 auf der linken bzw. rechten Seite zu sehen. Wie ersichtlich wird, ist es erforderlich, die elastischen Stäbe „zu groß“ in das eigentliche Vierpunktsegel einzubauen, da hierdurch die Randseile „auseinandergedrückt“ werden und somit eine Vergrößerung der überdachten Fläche entsteht. Die resultierende Fläche stellt die Gleichgewichtsgeometrie für die Kombination aus gegebenen Vorspannungen der Membran und Randseile und den elastischen Spannungen der dünnen Stäbe dar, die durch die Verformungen im Laufe der Formfindung entstanden sind.

Soll in einem nachfolgenden Schritt eine reine Strukturanalyse des resultierenden Tragwerks durchgeführt werden, müssen die bereits im System vorhandenen Spannungen in geeigneter Weise in die neue Berechnung miteinbezogen werden. Dabei muss v. a. den dünnen Stäben Beachtung geschenkt werden, da in diesen neben reinen Druckspannungen auch planmäßig Biegespannungen wirken. Eine mögliche Vorgehensweise für das Beispiel des Bat-Sails wird in Abschnitt 5.4 vorgestellt.

5.3.3 Tensegrity

„Kleine Inseln aus Druck in einem Meer von Zug“ [Gen02, BM01], so beschrieb Richard Buckminster Full die *Tensegrity-Strukturen*, die von ihm in Zusammenarbeit mit Kenneth Snelson entwickelt und sogar patentiert wurden [Ful62, Pug76]. Diese spektakulären Strukturen zeichnen sich in ihrer Grundform durch eine kontinuierliche Anordnung von Zuggliedern aus, die durch diskontinuierlich angeordnete Druckglieder gestützt werden [BM01, Gen02].

Da sie den Membrankonstruktionen ähnlich eine starke Kopplung zwischen Kraft und Geometrie aufweisen, muss die Tragwerksform von Tensegrity-Strukturen mittels einer Formfindungsprozedur bestimmt werden. Als Beispiel hierfür sei die Formfindung sogenannter *Twistelemente* [Gen02] (auch bekannt als zylindrische Tensegrity-Strukturen [EBM05]) aufgeführt: Ihre Grundform besteht aus gegenüberliegenden regelmäßigen Polygonen, die um

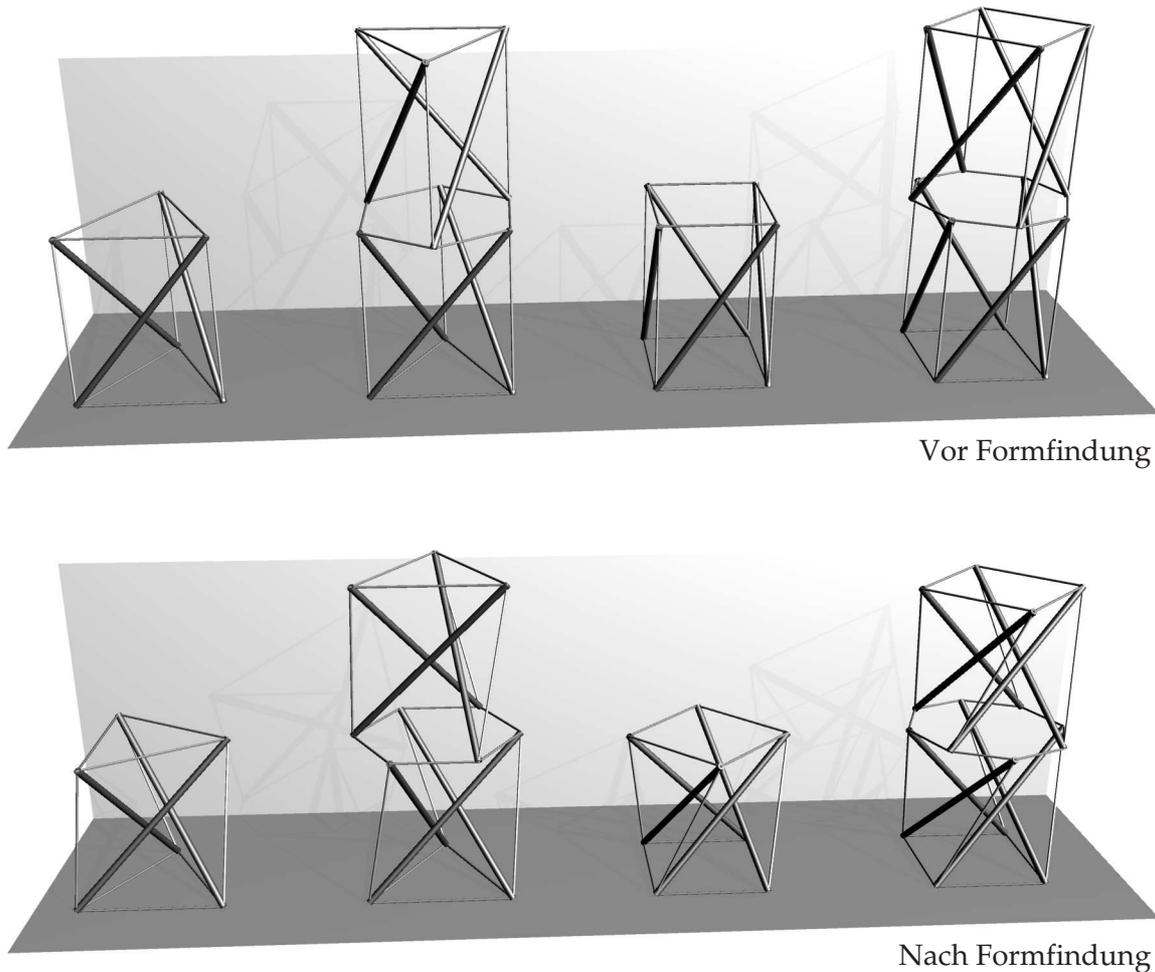


Abbildung 5.4: Formfindung von Tensegrity-Strukturen.

einen bestimmten Twist- bzw. Drehwinkel zueinander verdreht sind (siehe Abbildung 5.4). Führt man nun erste Formfindungsversuche mit der Kraftdichtemethode bzw. Updated Reference Strategy durch, bei denen man die Kräfte in allen Strukturelementen beliebig vorgibt, wird man schnell feststellen, dass, ausgehend von einer topologisch korrekten, statisch bestimmt gelagerten Startgeometrie, die Struktur im Laufe der Berechnung mit nahezu hundertprozentiger Sicherheit kollabiert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass zum Erhalt einer stabilen Lösung die Seil- und Stabkräfte nicht unabhängig voneinander gewählt werden dürfen. Vielmehr darf man nur die Kraft in einem einzigen Typus der Strukturelemente (horizontale Seile, vertikale Seile oder Druckstützen) vorgeben, die anderen Kräfte müssen für den Erhalt einer stabilen Struktur entsprechend angepasst werden.

Eine Stabilisierung des Formfindungsprozesses kann erreicht werden, indem man genau eine Elementgruppe der zylindrischen Tensegrity-Struktur mit Formfindungselementen nach Abschnitt 3.3.2 modelliert und ihnen somit eine bestimmte Zug- bzw. Druckkraft zuweist. Das restliche Tragwerk setzt sich aus elastischen Stabelementen nach Abschnitt 5.2.2 zusammen [Hol08]. Führt man nun eine kombinierte Formfindung/Strukturanalyse durch, stellen die Formfindungselemente bildlich gesprochen Aktuatoren dar [Paw06], die die rest-

liche Struktur elastisch verformen und somit in die Gleichgewichtslage bringen. Der Formfindungsprozess kann somit auch als Simulation eines realen Aufbauprozesses betrachtet werden: Man baut einen Teil der Struktur spannungsfrei zusammen (d. h. die elastischen Bauteile) und bringt anschließend über die Formfindungselemente die nötige Vorspannung ins System. Der Übergang zwischen Formfindung und Strukturanalyse ist in diesem Fall fließend.

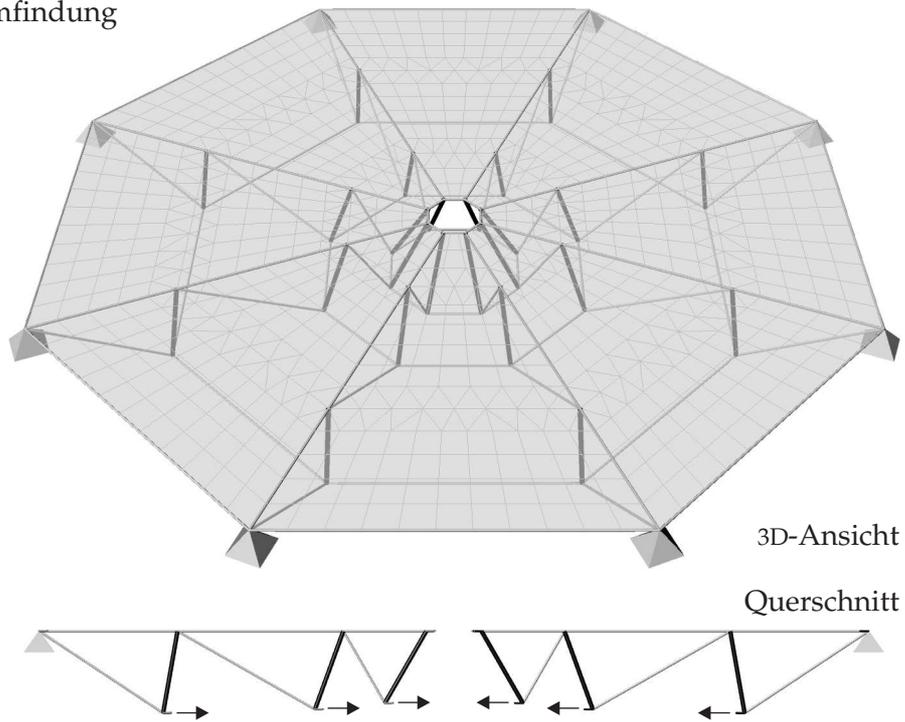
In Abbildung 5.4 sind sowohl die Startgeometrien für ein- und zweilagige Twistelemente als auch ihre Gleichgewichtsformen nach Formfindung dargestellt. Interessanterweise stellt sich bei Tensegrity-Strukturen mit dreieckigen Grundflächen („Tripod“ oder auch „Triplex“ genannt) unabhängig der Höhe stets ein Verdrehwinkel von 30° ein, bei einer viereckigen Grundfläche („Quadpod“ bzw. „Quadruplex“) beträgt der Winkel 45° . Diese Erkenntnis stimmt auch mit den analytischen Lösungen aus der Literatur überein [CCS92, Est07].

5.3.4 Unterspannte Membranstruktur

Das letzte Beispiel für eine Kombination aus Formfindung und Strukturanalyse beschäftigt sich mit der Analyse einer unterspannten Membranstruktur, die der Topologie nach einer *Geiger-Kuppel* (englisch: „Geiger dome“) entspricht. Diese signifikante Konstruktionsweise geht auf David H. Geiger zurück [Gei88] und kann als eine Art Speichenradkonstruktion betrachtet werden [BMS03]. Als Raumabschluss kommt auf der tragenden Unterkonstruktion in Tensegrity-Bauweise eine Membranhülle zum Einsatz [Gen02].

Ähnlich wie bei Tensegrity-Strukturen (siehe Abschnitt 5.3.3) führt auch bei der Geiger-Kuppel eine reine Formfindung unter Spannungsvorgabe aufgrund der dabei generell entstehenden Widersprüchlichkeiten zu keinen sinnvollen Ergebnissen. Die Formfindung muss erneut als eine Art Montagevorgang simuliert werden: Bei dem in Abbildung 5.5 dargestellten konkreten Beispiel wird die Tensegrity-Unterkonstruktion mit Ausnahme der Ring- und Randseile mit elastischen Stabelementen modelliert. Das Aufrichten der Struktur geschieht durch die ins System eingebrachte Vorspannung aus den mit Formfindungselementen diskretisierten Ringseilen. Gleichzeitig werden auch die Membranfläche und die Randseile mit Formfindungselementen diskretisiert, was einem stetigen Nachjustieren der Vorspannung in den jeweiligen Elementen entspricht. Die beschriebene Vorgehensweise erweist sich bei der numerischen Berechnung als äußerst stabil und führt bei geeigneter Wahl der Systemgrößen auch stets zu physikalisch sinnvollen Lösungen, wie am Endergebnis der Formfindungsberechnung in Abbildung 5.5 gesehen werden kann.

Vor Formfindung



Nach Formfindung

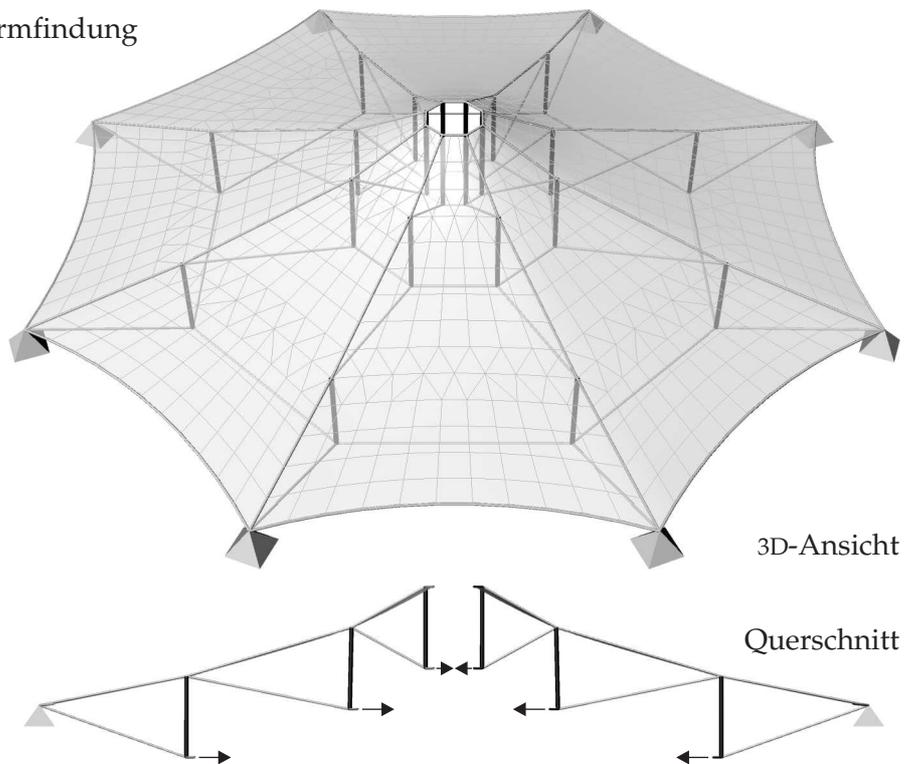


Abbildung 5.5: Formfindung einer unterspannten Membranstruktur („Geiger-Kuppel“).

5.4 Kombination Zuschnitt - Strukturanalyse

Wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben wurde, wird in einem konventionellen Entwurfsprozess der Einfluss des Zuschnitts bei der Strukturanalyse generell vernachlässigt. Bei stark gekrümmten Flächen und/oder dem Einsatz besonders schubsteifer Materialien wie z. B. ETFE-Folien kann diese Annahme jedoch zu nicht unerheblichen Abweichungen der numerischen Berechnungsergebnisse im Vergleich zu den realen Werten führen. Sollen in diesen Fällen akkurate Spannungsverteilungen ermittelt werden, um z. B. die Orte möglicher Faltenbildung näher zu charakterisieren, ist es entscheidend, das Tragwerk so detailliert wie möglich zu modellieren. Hierzu trägt bei, dass Informationen aus einer evtl. bereits durchgeführten Zuschnittsberechnung schon bei der Strukturanalyse berücksichtigt werden. Dadurch kann mit der Zuschnittsgeometrie die nach kontinuumsmechanischer Betrachtungsweise „wahre“ Referenzgeometrie für die numerische Berechnung verwendet werden, was den Kunstgriff der Einführung einer Vorspannung bei der Modellbildung erübrigt.

Selbstverständlich lässt sich das Prinzip, die Zuschnittsbahnen als korrekte Referenzkonfiguration für die Spannungs- und Dehnungsberechnung von Membranbauteilen zu verwenden, auch auf alle anderen Strukturelemente wie z. B. Seile und Balken übertragen. Dabei beschreibt ein verallgemeinerter Zuschnittsbegriff die Geometrie des Bauteils, die es *vor* Einbau in die Gesamtstruktur besitzt. Betrachtet man nun alle einzelnen Bauteile einer Struktur, wird man feststellen, dass diese in ihrer spannungsfreien Ausgangsform zueinander generell geometrisch *nicht* kompatibel sind. Dies ist jedoch gewünscht, da dadurch beim Zusammenbau der Gesamtstruktur die gewünschte Vorspannung erzeugt wird, die kontinuumsmechanisch als Eigenspannungszustand interpretiert werden kann.

Numerisch lässt sich eine Strukturanalyse unter Berücksichtigung des Zuschnitts wie folgt umsetzen: Als Ausgangsgeometrie für die Gleichgewichtsiteration bietet es sich an, das FE-Netz der Gesamtstruktur zu verwenden, das das Endprodukt der Formfindung darstellt und zur Berechnung des Zuschnitts verwendet wurde. Dabei ist es wichtig zu verstehen, dass es sich hierbei lediglich um eine Zwischenkonfiguration handelt, die aus dem Zusammenfügen der wahren Referenzkonfiguration, d. h. der Zuschnitte, entstanden ist. Das eigentliche Zusammenfügen wird jedoch nicht numerisch simuliert, sondern liegt gedanklich „vor der Zeit“, bei der die numerische Berechnung startet. Die verformte Zwischenkonfiguration kann zwar evtl. dazu verwendet werden, äußere Flächenlasten wie Schnee oder vereinfachte Windlasten zu bestimmen, jedoch stellen die kontinuumsmechanisch signifikanten Konfigurationen für die Spannungs- und Dehnungsberechnung der Zuschnitt und die jeweils aktuelle verformte Fläche unter Last dar [LWB08]. Für eine illustrative Darstellung der Konfigurationen sei auf Abbildung 2.15 verwiesen.

Da bei den verwendeten Elementen mit Total-Lagrangescher Formulierung alle mechanische Größen sich auf die Referenzkonfiguration beziehen, ist es nötig, zusätzlich zum Gesamtnetz für jedes einzelne Bauteil ein eigenes FE-Netz mit seiner unverformten Geometrie vorzuhalten, das topologisch mit dem zugehörigen Teil des Gesamtnetzes übereinstimmt. Die Elementnummerierung kann bei dem Zuschnittsnetz identisch zum Gesamtnetz sein, bei der Knotennummerierung sind jedoch Abweichungen erforderlich: Dies wird durch die geometrische Inkompatibilität der Zuschnitte verursacht, die an den Verbindungskanten

getrennte Knoten für die einzelnen Zuschnittsnetze erforderlich macht, auch wenn diese bei der Gesamtstruktur miteinander „verschmolzen“ sind. Die räumliche Anordnung der Zuschnitte untereinander und in Bezug auf das letztendliche Tragwerk ist beliebig, da aufgrund der gewählten kontinuumsmechanischen Formulierung Starrkörperrotationen und -verschiebungen keine Spannungen verursachen.

Die Berechnung der Systemmatrizen einer Strukturanalyse findet daraufhin durch Integration *auf dem Zuschnitt* statt; die aus der Lösung des Gleichungssystems resultierenden inkrementellen Verschiebungen beziehen sich hingegen auf die zusammengebaute Geometrie. Dieses vorgestellte Verfahren lässt sich in gleicher Weise sowohl für statische als auch für dynamische Analysen verwenden. Der Übersichtlichkeit halber werden jedoch im Nachfolgenden nur statische Beispiele aufgezeigt.

5.4.1 Bat-Sail

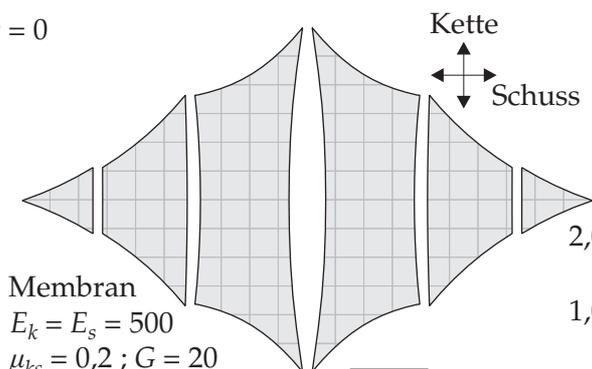
Als erstes Beispiel soll eine statische Analyse unter Berücksichtigung des Zuschnitts für das Bat-Sail durchgeführt werden, dessen Formfindung bereits in Abschnitt 5.3.2 aufgezeigt wurde. Für die Membran wurde im Vorlauf der Strukturanalyse eine Zuschnittsberechnung durchgeführt, um die unverformten Geometrien der orthotropen Werkstoffbahnen zu erhalten. Auch für die vorgespannten Randseile wurde die jeweils benötigte zugeschnittene Länge durch Rückrechnung aus verformter Länge, gewünschter Vorspannkraft und Dehnsteifigkeit ermittelt. Die Referenzgeometrie der dünnen, biegebeanspruchten Stäbe wurde aus der Formfindungsberechnung übernommen, da diese bereits dort elastisch modelliert wurden. In der linken oberen Ecke von Abbildung 5.6 sind die jeweiligen unverformten Geometrien \mathbf{X} der einzelnen Strukturelemente dargestellt. Ebenso sind die jeweiligen Materialkennwerte aufgeführt, die jedoch rein approximativen Charakter besitzen, da es sich bei vorliegendem Beispiel eher um eine qualitative Berechnung als um eine echte statische Bemessung handelt.

Das Verhalten des Bat-Sails wird nun unter drei verschiedenen Lastfällen untersucht: Zum Zeitpunkt $t = t_1$ ist die Struktur unbelastet, zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_2$ greift eine Windsogkraft $p = 1$ auf dem Segel an, der eine Winddruckbelastung $p = -1$ zum Zeitpunkt $t = t_3$ folgt (siehe Abbildung 5.6 rechts).

Auch wenn der erste Lastfall ohne Windlast formal dem Formfindungslastfall entspricht, ergeben sich dennoch Unterschiede: Bei der Formfindung wurde von einer konstanten isotropen Vorspannung $\sigma_{ps} = 1$ in der Membran ausgegangen. Diese lässt sich durch die Zuschnittsberechnung aufgrund der doppelten Krümmung der Fläche jedoch nur näherungsweise erreichen (siehe Abschnitt 4.2). Folglich stellt auch die Formfindungsgeometrie noch nicht die Gleichgewichtsgeometrie dar, die sich nach Zusammenfügen des „Baukastens der Strukturelemente“ ergibt. Da die Geometrieunterschiede aber gering ausfallen, sind nur wenige Gleichgewichtssiterationen nötig, um mit einer Finite-Elemente-Berechnung ausgehend von der Formfindungsgeometrie die gesuchte Gleichgewichtsform \mathbf{x} zu bestimmen. Die resultierenden Hauptspannungen σ_I und σ_{II} in der Membran sind in der Mitte der Grafik zu sehen. Sichtbar wird erneut die charakteristische Spannungsverteilung, die sich infolge des Zuschnitts in einer antiklastischen Struktur einstellt: Deutlich sind die leicht erhöhten

Referenzgeometrie X

$t = 0$



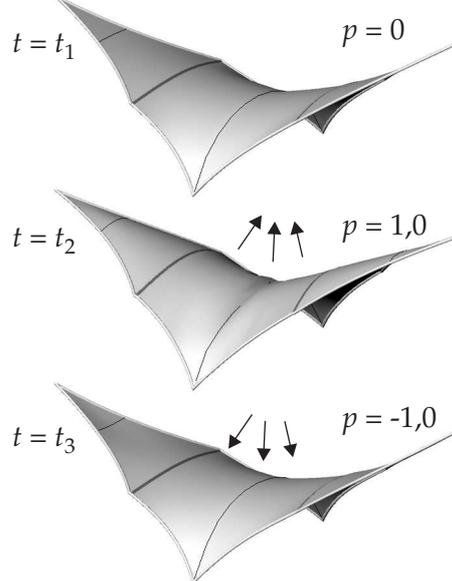
Membran
 $E_k = E_s = 500$
 $\mu_{ks} = 0,2 ; G = 20$

Balken
 $EA = 117'600$
 $EI = 1,9$

Seile
 $EA = 10'000$

Einheiten bzgl. [kN, m]

Verformte Geometrie x



Resultierende Hauptspannungen σ_I und σ_{II} in der verformten Geometrie

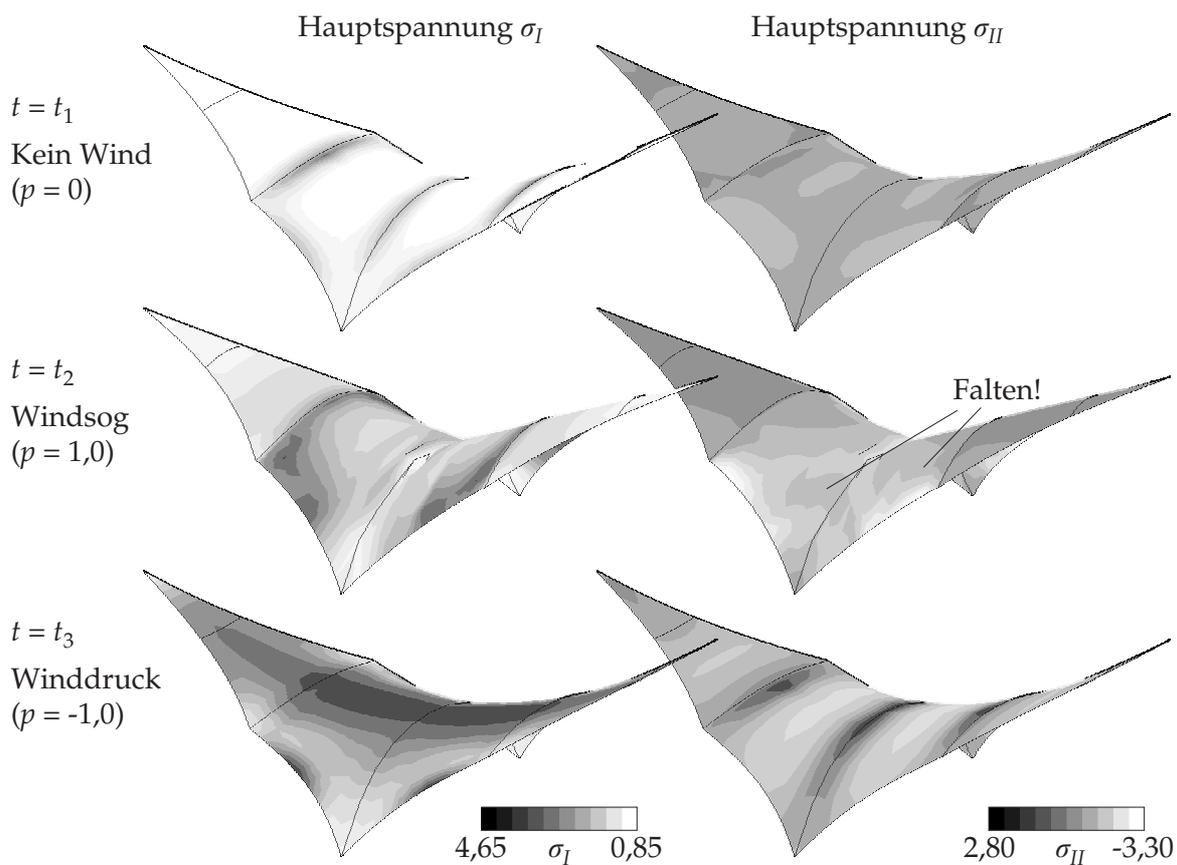


Abbildung 5.6: Statische Analyse eines Bat-Sails.

Spannungen entlang der Nahtkanten der Zuschnittsbahnen erkennbar, die Spannungen in Feldmitte liegen, wie es zu erwarten war, unter dem angestrebten Vorspannniveau.

Wird nun das Segel zum Zeitpunkt $t = t_2$ durch Windsog belastet, erfolgt der Hauptlastabtrag über eine zunehmende Verkrümmung der „kurzen Seite“ der Struktur (siehe unteres Drittel in Abbildung 4.2). Um akkurate Berechnungsergebnisse zu erhalten, ist es besonders entscheidend, dass die Verformung der elastischen Stäbe korrekt modelliert wird: Denn die elastischen Verkrümmungen entstehen nicht bloß aus Verformung der Formfindungsgeometrie bis zum aktuellen Zustand, sondern müssen die gesamte Deformation, ausgehend von der unbelasteten geraden Zuschnittsgeometrie, enthalten. Dieser Effekt kann nur durch eine Kombination aus Strukturanalyse und Zuschnitt beschrieben werden und lässt sich nicht mit einer konventionellen Strukturanalyse abbilden, bei der die Startgeometrie der Iteration zugleich auch die kontinuumsmechanische Referenz darstellt. Die Berücksichtigung des Zuschnitts bei der Membran ist zwar weniger für das Verhalten der Gesamtstruktur entscheidend, dennoch können nur damit exakte Prognosen über die Spannungsverteilung und evtl. Faltenbildungen angestellt werden. Hierbei muss den ausgewiesenen Druckspannungen besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden: Diese haben ihre Ursache in der relativ groben FE-Diskretisierung der Struktur (ca. 1080 Freiheitsgrade, siehe Abbildung 5.3), die der Membran eine Restdrucksteifigkeit verleiht. Da dies nicht mit der Realität übereinstimmt, dürfen die berechneten hohen Werte der Druckspannungen in der Membran nicht als tatsächliche Bemessungsspannungen interpretiert werden. Vielmehr sind sie ein Indiz für Bereiche, in denen in der Realität Falten auftreten werden. Für eine Verbesserung der Berechnungsgenauigkeit müssten in diesem Fall Faltenmodelle bei der numerischen Analyse verwendet werden [JWB08].

Der letzte Lastfall besteht aus einer Winddrucklast auf dem Tragwerk. Die resultierenden Verformungen und Membranhauptspannungen zum Zeitpunkt $t = t_3$ können in Abbildung 4.2 am unteren Bildrand gesehen werden. Der Lastabtrag erfolgt in diesem Fall vornehmlich über die „lange Seite“ von Hochpunkt zu Hochpunkt. Erneut ist der Einbezug der korrekten Referenz der elastischen Stäbe entscheidend: Denn nur so lässt sich die Abnahme der Verkrümmung im Gegensatz zum rein vorgespannten Zustand ohne äußere Last simulieren. Würde fälschlicherweise die Endgeometrie der Formfindung als Referenzkonfiguration verwendet werden, entstünden Zugspannungen an der Stabunterseite. In Realität bleibt jedoch die Zugzone auf der Staboberseite, auch wenn ihr Betrag infolge des Winddrucks abnimmt.

5.4.2 Pneumatisch vorgespanntes Folienkissen

Das letzte Beispiel dieses Kapitels beschäftigt sich mit der statischen Analyse einer pneumatisch vorgespannten Kissenstruktur aus ETFE-Folie (siehe u. a. [LS06, RWSBP06, Mor07a, Mor07b] für weiterführende Informationen zu dieser Konstruktionsweise). Gerade bei dem verwendeten isotropen Werkstoff mit seiner relativ hohen Schubsteifigkeit ist es besonders wichtig, den Zuschnitt bei der statischen Berechnung zu berücksichtigen: Wie bereits in Abbildung 4.5 gezeigt wurde, sind umso ausgeprägtere Spannungsabweichungen infolge der doppelten Verkrümmung der ebenen Zuschnittsbahnen zu erwarten, je höher die Schubsteifigkeit eines Materials ist.

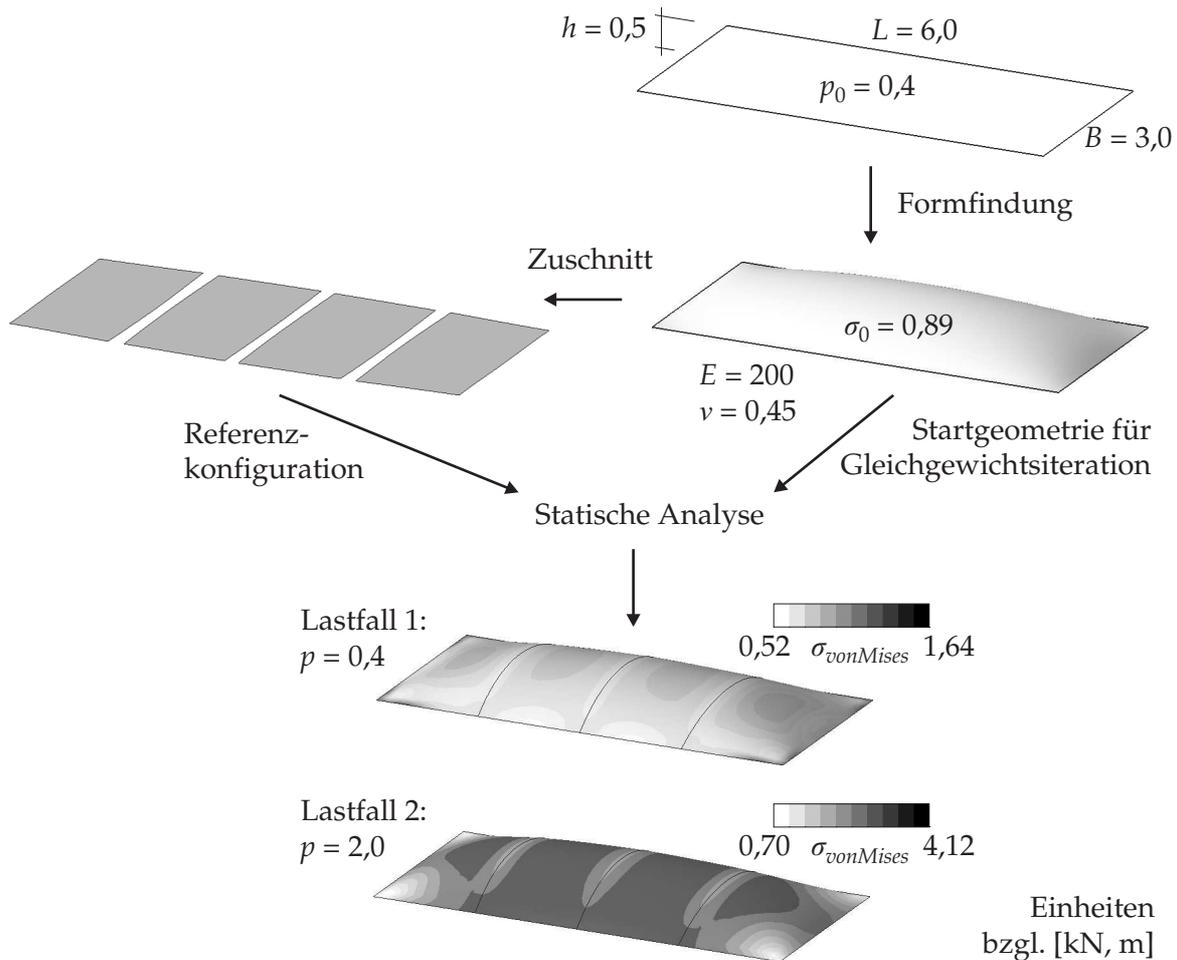


Abbildung 5.7: Entwurfsprozess eines pneumatischen Folienkissens.

Entwurfsprozess. Als konkreter Fall soll ein Folienkissen mit rechteckiger Berandung untersucht werden, dessen Kantenlängen 6,0 [m] bzw. 3,0 [m] betragen (eine ähnliche Aufgabenstellung wird auch in [Mor07b] behandelt). Die Geometrie des Kissens wurde entgegen der konventionellen Aufgabenstellung einer Formfindung nicht über eine Spannungsvorgabe, sondern über ein geometrisches Kriterium bestimmt: Bei einem Nenninnendruck $p_0 = 0,4$ [kN/m²] sollte sich in Feldmitte ein Stich von 0,5 [m] einstellen. Die korrespondierende isotrope Membranspannung bzgl. einer ideellen Querschnittshöhe $H = h = 1$ des Folienwerkstoffs wurde daraufhin in einer iterativen Formfindungsberechnung zu $\sigma_0 = 0,89$ [kN/m] bestimmt (siehe Abbildung 5.7 oben).

Für diesen „nicht-materialisierten Gleichgewichtszustand“ [Lin99] wird nun im Schritt der Zuschnittsberechnung eine materielle Referenzkonfiguration ermittelt, deren Spannungsverteilung im verformten Zustand eine bestmögliche Übereinstimmung mit der Sollspannung σ_0 aufweist (siehe Abbildung 5.7 Mitte). Dabei soll die Struktur aus vier zugeschnittenen ETFE-Bahnen bestehen, deren Form mit der in Abschnitt 4.5.2 beschriebenen Variante der Zuschnittsberechnung durch Inverse Engineering bestimmt wird. Als Materialgesetz für die ETFE-Folie wird das St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz verwendet, dessen Stoffparameter in Anlehnung an [Mor07b] zu $E = 200$ [kN/m] und $\nu = 0,45$ [-] abgeschätzt

wurden.

Nach Abschluss dieser „Vorarbeiten“ kann mit der eigentlichen Strukturanalyse begonnen werden. Im ersten Lastfall wird untersucht, welche Spannungen sich tatsächlich in der Membran bei dem Nenninnendruck $p = 0,4$ [kN/m²] einstellen. Dazu wird eine geometrisch nichtlineare FE-Berechnung durchgeführt, bei der der Zuschnitt die spannungsfreie Referenzkonfiguration darstellt, während die Endgeometrie der Formfindung die Ausgangsgeometrie für die Gleichgewichtsiteration bildet. Nach Konvergenz ergibt sich eine Spannungsverteilung, für die exemplarisch der Verlauf der von Mises-Vergleichsspannung $\sigma_{vonMises}$ in Abbildung 5.7 dargestellt ist. Man erkennt deutlich, dass die Annahme einer konstanten Vorspannung in der Membran nur sehr bedingt zutrifft: An den Rändern sinkt die von Mises-Spannung bis auf einen Wert von $\sigma_{vonMises,min} = 0,59$ [kN/m] ab, in der Feldmitte der beiden äußeren Zuschnittsbahnen erreicht sie mit $\sigma_{vonMises,max} = 1,64$ [kN/m] ihren Höchstwert. Die eigentlich angestrebte Zielspannung $\sigma_{vonMises,0} = 0,89$ [kN/m] wird somit von Zusatzspannungen überlagert, deren Ursache die Nicht-Abwickelbarkeit der Geometrie des Luftkissens ist.

Im zweiten Lastfall wird der Innendruck auf $p = 2,0$ [kN/m²] gesteigert. Gemäß der Total-Lagrangeschen Formulierung wird weiterhin der Zuschnitt als Referenzkonfiguration verwendet. Die iterative Bestimmung der Gleichgewichtslage könnte erneut von der Formfindungsgeometrie gestartet werden, es bietet sich jedoch an, die verformte Geometrie des ersten Lastfalls als Startgeometrie zu verwenden. Da sich diese bereits im Gleichgewicht mit den Zusatzspannungen infolge des Zuschnitts befindet, genügen weniger Iterationen zum Erreichen der Konvergenz. Das Endergebnis der statischen Berechnung ist am unteren Bildrand von Abbildung 5.7 zu sehen. Die Zusatzspannungen infolge der Nicht-Abwickelbarkeit fallen bei dem erhöhten Innendruck relativ geringer aus, da das gesamte elastische Spannungsniveau aufgrund der Lasterhöhung gestiegen ist.

Vergleich unterschiedlicher Zuschnittsvarianten. Um den Einfluss des Zuschnitts auf die Resultate der Strukturanalyse zu verdeutlichen, wird die gleiche statische Berechnung des Luftkissens für folgende vier Zuschnittsvarianten bzw. Referenzgeometrien durchgeführt:

a) Ideale 3D-Geometrie:

Die aus der Formfindung resultierende Gleichgewichtsgeometrie wird als Referenzgeometrie verwendet. Man trifft die Annahme, dass die Membran im Ausgangszustand zwar frei von elastischen Spannungen ist, jedoch mit dem exakten Wert $\sigma_0 = 0,89$ [kN/m] intrinsisch vorgespannt ist.

b) Flachzuschnitt:

Es kommt eine rechteckige Zuschnittsgeometrie zum Einsatz, deren Umriss deckungsgleich mit den geometrischen Randbedingungen ist. Dieser Zuschnitt, der aus mehreren Einzelbahnen zusammengesetzt sein kann, berücksichtigt zwar nicht die gewünschte Höhe des Folienkissens, bietet aber aufgrund der stets geraden Kantenführung produktionstechnische Vorteile [Mor07b].

c) Eine Zuschnittsbahn:

Für die räumliche Geometrie wird ein Zuschnitt berechnet, der aus einer einzigen Bahn besteht. Dies bringt erneut einen Vorteil im Herstellungsprozess: Bei einer weiteren Unterteilung dieses Gesamtzuschnitts in Einzelbahnen können gerade Schnittkanten verwendet werden, wodurch später ein einfacheres Verschweißen möglich wird.

d) Vier Zuschnittsbahnen:

Nachdem die räumliche Geometrie anhand geodätischer Linien in vier Bereiche unterteilt wurde, wird für jeden Teilbereich separat ein Zuschnittsmuster ermittelt (siehe vorheriger Abschnitt), das als Referenzgeometrie für die statische Berechnung verwendet wird.

Für jede Variante der Referenzgeometrie wurde die statische Berechnung mit den Lastfällen $p = 0,4 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ bzw. $p = 2,0 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ durchgeführt. Als exemplarische Ergebnisse der einzelnen statischen Analysen sind in Abbildung 5.8 der Verlauf der jeweiligen von Mises-Vergleichsspannung σ_{vonMises} und der Stich f in Feldmitte des Luftkissens angegeben.

Referenzgeometrie a) beschreibt den Idealzustand des Bauwerks bei vorherrschendem Nenninnendruck. Es muss verdeutlicht werden, dass es sich hierbei im Gegensatz zu den Referenzgeometrien b) bis d) nicht um einen „echten“, d. h. physikalisch realisierbaren Zuschnitt handelt: Um die konstante Vorspannung in der Membran zu generieren, müsste die räumliche Membranfläche aus unendlich schmalen Zuschnittsbahnen zusammengesetzt werden. Dennoch wird dieses vereinfachte, idealisierte Modell in den meisten Entwurfsprozessen als Referenzgeometrie für die statische Bemessung herangezogen. Für den Formfindungslastfall $p = 0,4 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ sind zum Erreichen des Gleichgewichts keine zusätzlichen elastischen Spannungen notwendig, weswegen sich der Spannungszustand in der Gesamtstruktur lediglich aus der konstanten Vorspannung $\sigma_0 = 0,89 \text{ [kN/m]}$ zusammensetzt. Erst bei einer Erhöhung des Innendrucks treten elastische Spannungen auf, die im Feld das Spannungsniveau erhöhen, während die Ecken der Gefahr der Faltenbildung aufgrund von Druckspannungen ausgesetzt sind.

Betrachtet man die Spannungsbilder infolge des Flachzuschnitts in Variante b), lassen sich drastische Unterschiede bei den Ergebnissen im Vergleich zu Variante a) erkennen. Zwar stellen sich bei erhöhtem Innendruck $p = 2,0 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ in beiden Varianten in den antiklastisch gekrümmten Eckbereichen die Spannungsminima ein, dennoch unterscheiden sich für das restliche Tragwerk die Spannungsmagnituden und -verteilungen sowie der auftretende Stich in Feldmitte bei beiden Lastfällen immens. Da der Flachzuschnitt nach Einbau in die Randbedingungen noch keine Krümmung aufweist, müssen Innendrucke vornehmlich über die elastische Steifigkeit (siehe [BLM00] für eine Definition dieses Begriffs) abgetragen werden. Ob die daraus resultierenden hohen Spannungen die einfachere Produzierbarkeit des Zuschnitts aufwiegen, ist im Einzelfall zu klären. Darüberhinaus muss festgehalten werden, dass dieser Zuschnitt nicht zum Erreichen der Sollgeometrie nach Variante a) verwendet werden kann, da das resultierende Luftkissen eine viel zu flache Form aufweist ($f_1^{(b)} \ll f_1^{(a)}$).

Wird gemäß Variante c) ein Gesamtzuschnitt für das Luftkissen berechnet, erreicht man damit zwar eine bessere Approximation der Idealgeometrie, jedoch entstehen Probleme direkt

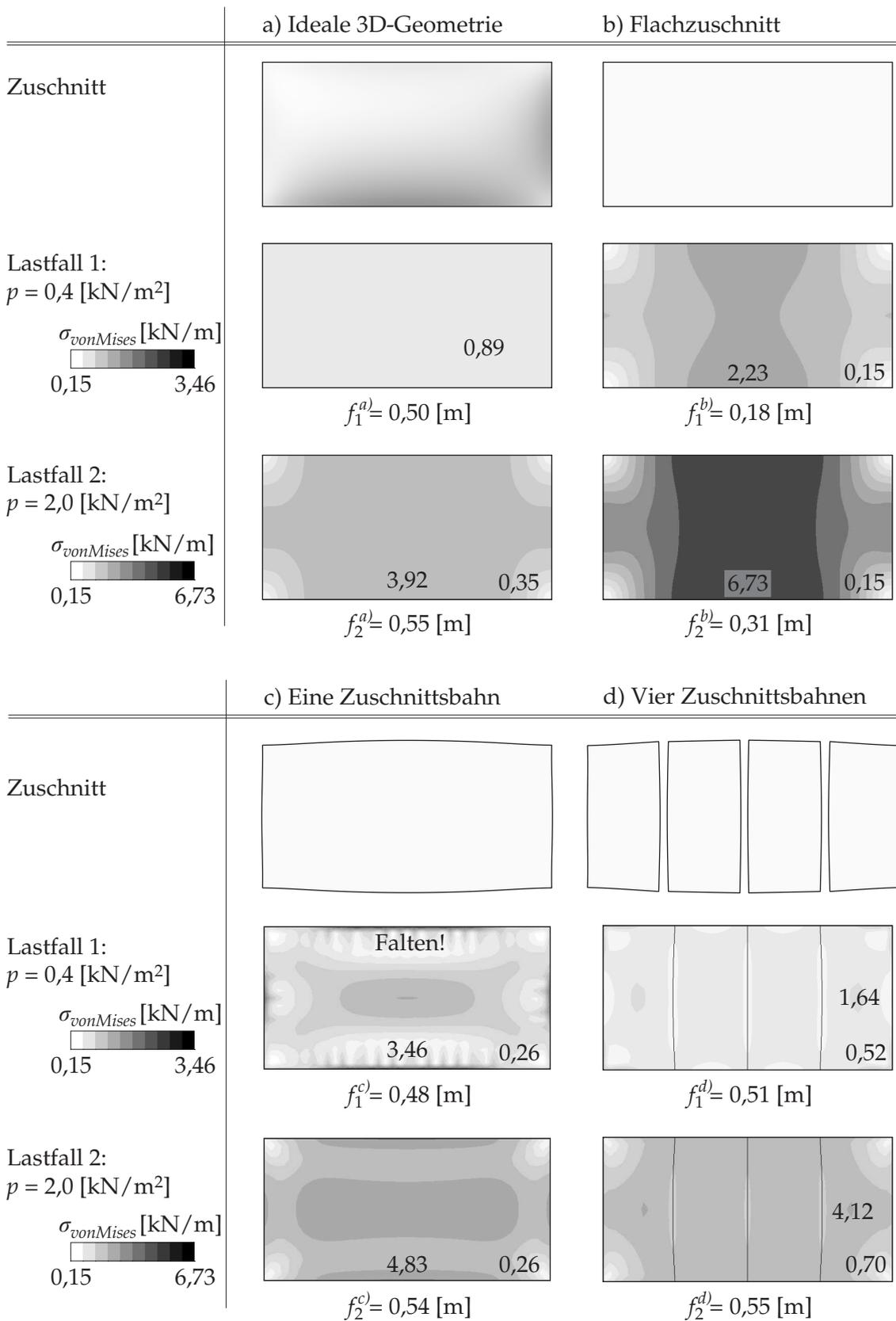


Abbildung 5.8: Einfluss des Zuschnitts bei statischer Analyse eines pneumatischen Folienkissens.

beim Einbau: Der Fehler infolge der Nicht-Abwickelbarkeit macht sich besonders am längeren Rand bemerkbar, da dort die zugeschnittene Membran zum Einbau „gerafft“ werden muss. Die Folgen sind extreme Falten bei Nenninnendruck (ein ähnliches Faltenmuster war bereits in Abbildung 4.4 erkennbar). Bei Zunahme des Drucks werden die Falten überzogen, das Spannungsniveau pendelt sich näherungsweise im Bereich des idealisierten Strukturmodells nach Variante a) ein. Auch beim Vergleich der auftretende Stiche fällt eine relativ gute Übereinstimmung auf.

Mit den vier Zuschnittsbahnen in Referenzgeometrie d) kann die bislang beste Annäherung an den Sollzustand erreicht werden. Dies zeigt sich bereits bei der resultierenden Spannungsverteilung bei Nenninnendruck, die im Mittel der gewünschten Vorspannung entspricht, auch wenn die Spannungsabweichungen infolge des Zuschnitts noch deutlich sichtbar sind. Erhöht man den Innendruck, wird der Unterschied zwischen der vereinfachten Berechnung nach Variante a) und der statischen Analyse mit Berücksichtigung des Zuschnitts nach Variante d) zunehmend geringer.

Aus den durchgeführten Berechnungen lässt sich folgender Umkehrschluß bilden: In gewissen Fällen kann eine vereinfachte statische Analyse unter Annahme einer idealen räumlichen Referenzgeometrie (Variante a)) durchaus dazu verwendet werden, globale Aussagen über das tatsächliche Spannungsniveau anzustellen. Jedoch muss dafür sichergestellt werden, dass die Zusatzspannungen infolge der nichtabwickelbaren Membrangeometrie im Verhältnis zu den elastischen Spannungen unter Last gering ausfallen. Falls dies nicht garantiert werden kann bzw. falls eine detaillierte Analyse der Spannungen erforderlich ist, empfiehlt es sich, den Zuschnitt in die Strukturanalyse miteinzubeziehen.

ZUSAMMENFASSUNG. Für eine umfassende statische bzw. dynamische Analyse eines vorgespannten Flächentragwerks ist es erforderlich, aus allen Planungsschritten diejenigen Effekte bei der numerischen Berechnung zu berücksichtigen, die das Strukturverhalten signifikant beeinflussen können. Eine Strukturanalyse sollte deswegen stets im Gesamtkontext des Entwurfs- bzw. Herstellungsprozesses gesehen werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden durch Kombination einer konventionellen statischen Analyse mit Elementen der numerischen Formfindung Methoden aufgezeigt, mittels derer sich strukturelle Aufbauprozesse auf korrekte Weise abbilden lassen. Mit den Formfindungselementen in Updated-Lagrangescher Beschreibung werden diejenigen Membran- bzw. Seilbauteile modelliert, deren Vorspannung auch in Realität durch stetes Nachspannen auf einem konstanten Wert gehalten wird. Die verbleibenden Strukturelemente, deren Referenzgeometrie unverändert bleibt, werden mit finiten Elementen in Total-Lagrangescher Betrachtungsweise diskretisiert.

Indem die zugeschnittenen Membranbahnen als Referenzkonfiguration für die nichtlineare numerische Berechnung verwendet werden, können mit der resultierenden „realen“ Vorspannungsverteilung in der Membran, die durch elastische Deformationen entstanden ist, auch die Zusatzspannungen infolge der doppelten Verkrümmung der ebenen Bahnen bei der statischen Analyse berücksichtigt werden. Dies ist besonders bei der Verwendung schubsteifer Materialien wie beispielsweise Kunststofffolien wichtig: An einem pneumatisch vorgespannten Luftkissen wurden die signifikanten Unterschiede bei den berechneten Spannungen aufgezeigt, die sich durch Annahme einer ideal vorgespannten, räumlichen Referenzgeometrie bzw. durch Verwendung des Zuschnitts als kontinuumsmechanisch korrekte unverformte Konfiguration ergeben. Weiterhin wurde eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens vorgenommen: Neben rein zugbeanspruchten Bauteilen (wie z. B. Seile oder Membranen) können auch Strukturelemente mit planmäßigen Biege- und Druckspannungen (z. B. Biegebalken) durch ihre „wahre“ unverformte Referenzkonfiguration beschrieben werden. Der gewünschte, beliebig komplexe Vorspannzustand stellt sich anschließend als Eigenspannungszustand im Gesamttragwerk ein, das durch den Zusammenbau der einzelnen geometrisch inkompatiblen Strukturelemente entstanden ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Für die erfolgreiche Planung einer vorgespannten Membrankonstruktion ist eine fundierte Kenntnis der Charakteristiken derartiger Tragwerke unerlässlich: Von besonderer Signifikanz ist hierbei die extreme Leichtigkeit und Schlankheit ihres hauptsächlichlichen Strukturelements – der Membran. Aufgrund ihrer äußerst geringen Querschnittshöhe im Vergleich zu den Tragweiten der Gesamtstruktur müssen äußere Lasten nahezu ausschließlich über tangentielle Zugspannungen in der Membran abgetragen werden. Dieses spezielle Tragverhalten erzeugt eine ausgeprägte Kopplung zwischen Form und Kraft in der Struktur, die beim Entwurfsprozess im Schritt der *Formfindung* berücksichtigt wird.

Neben dieser rein mechanisch bedingten Eigenheit hat auch die Produktionstechnik von Membrantragwerken entscheidenden Einfluss auf ihren Entwurfsvorgang: Die Membranwerkstoffe werden unabhängig von der Tragwerksgeometrie als ebene Bahnen hergestellt. Erst später erfolgt die Anpassung an das jeweilige räumliche Bauwerk. Bei dieser *Zuschnittsermittlung* gilt es, die unerwünschten Effekte infolge der doppelten Verkrümmung der Bahnen zu minimieren und gleichzeitig die Systemeigenschaften durch gezielte Anordnung der Faserrichtungen bzw. durch möglichst exaktes Erreichen des gewünschten Vorspannzustandes zu optimieren.

Es sind die eben genannten Schritte der Formfindung und der Zuschnittsermittlung, die die gravierendsten Unterschiede des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken im Vergleich zu dem konventioneller Bauten ausmachen. Da in beiden Schritten jeweils Fragestellungen inverser Natur zu bearbeiten sind, ist für die meisten Ingenieure und Architekten wegen der generell ungewohnten Problematik der Ersteinstieg in die Thematik relativ mühsam. Erschwerend kommt hinzu, dass es zwar durchaus kommerzielle Berechnungsprogramme zur Unterstützung des Entwurfsprozesses gibt, jedoch stellen diese zumeist speziell angepasste Sonderlösungen dar, die selbst Personen, die über weitreichende Erfahrungen mit konventioneller Berechnungssoftware verfügen, eine intensive Einarbeitung abverlangen.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Einzelschritte des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken mit den modernen Verfahren der nichtlinearen Kontinuumsmechanik beschrieben. Dadurch konnte eine klare Definition der jeweiligen Aufgabenstellung erreicht werden, die die Erarbeitung moderner Lösungsansätze vereinfacht. Die dabei angewendete Methode der finiten Elemente bietet aufgrund ihrer weiten Verbreitung die Möglichkeit, die entwickelten Verfahren ohne großen Aufwand in bereits bestehende Berechnungsprogramme zu integrieren bzw. eine hohe Kompatibilität zwischen speziell auf den Membranbau zugeschnittenen Softwarelösungen und allgemeineren FE-Programmen zu erreichen.

Die Einzelschritte des Planungsprozesses wurden zunächst getrennt voneinander analysiert, um im Anschluss daran evtl. Interaktionen aufzuzeigen. Bei der numerischen Formfindung konnte festgestellt werden, dass eine direkte numerische Bestimmung einer Gleichgewichtsfläche unter Spannungsvorgabe generell nicht möglich ist, da sowohl Instabilitäten infolge der Numerik als auch infolge einer physikalisch inkompatiblen Problemdefinition auftreten können. Die Updated Reference Strategy behebt die numerische Problematik, jedoch ist sie in ihrer Grundform nicht in der Lage, evtl. physikalische Inkompatibilitäten zu bereinigen. Ausgehend von der Überprüfung der Netzverzerrung während des iterativen Formfindungsprozesses konnte ein Algorithmus entwickelt werden, der anhand dieses geometrischen Kriteriums durch Adaption der Zielspannungen ihre Kompatibilität untereinander und mit den Randbedingungen gewährleistet. Das Verfahren zeichnet sich dadurch aus, dass die Determinante der angepassten Spannungen stets identisch mit der Determinante der ursprünglichen Spannungsvorgabe ist.

Die entwickelte Zuschnittsmethode beruht auf einer kontinuumsmechanisch exakten Beschreibung des später real auftretenden Deformationsprozesses. Durch Anwendung eines Galerkin-Verfahrens lässt sich für beliebige doppelt gekrümmte Geometrien ein bestmöglicher Zuschnitt ermitteln, der sich im verformten Zustand durch minimale Abweichungen vom Sollspannungszustand auszeichnet. Die kontinuumsmechanische Betrachtungsweise ermöglicht die Berücksichtigung verschiedenster Materialeigenschaften, die lediglich über einen eindeutigen, d. h. geschichtsunabhängigen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang verfügen müssen. Exemplarisch wurden in der Arbeit Zuschnittsberechnungen mit linearem und nichtlinearem Materialverhalten durchgeführt (St. Venant-Kirchhoff- und Münsch-Reinhardt-Materialgesetz bzw. Ogden-Modell).

Die Beschreibung der numerischen Strukturanalyse von Membrantragwerken wurde bewusst knapp gehalten, da diese viele Gemeinsamkeiten mit der Analyse konventioneller Bauwerke aufweist, über die bereits eine Vielzahl an Publikationen vorliegt. Um einen Einstieg in das Thema zu bieten, wurde dennoch die Formulierung eines geometrisch nicht-linearen Membran- und Seilelements für statische Berechnungen aufgezeigt. Der Schwerpunkt lag aber auf der Vorstellung einer integralen Strukturanalyse, die Informationen aus Formfindung und Zuschnitt auch bei der statischen Berechnung berücksichtigt. Gerade die Verwendung des Zuschnitts als tatsächliche Referenzgeometrie bietet eine vielversprechende Herangehensweise: So kann damit einerseits eine realitätsnähere numerische Modellierung von Membranstrukturen erreicht werden, andererseits lässt sich das Verfahren auch auf beliebige Bauteile übertragen. Letzteres macht z. B. die akkurate Beschreibung von Bauzuständen oder von Eigenspannungen in Strukturelementen möglich.

In der Arbeit wurde ein integraler, numerisch gestützter Entwurfsprozess von Membrantragwerken vorgestellt. Die entwickelten Methoden stellen ein leistungsfähiges und effizientes Hilfsmittel zur Realisierung anspruchsvoller Membrankonstruktionen dar. Um die bereits erreichte Modellierungsgenauigkeit noch weiter zu erhöhen, sind nach Meinung des Autors zusätzliche Forschungsarbeiten in den folgenden Themenkomplexen besonders von Interesse: Die Weiterentwicklung konstitutiver Beziehungen, die speziell den Eigenheiten von Membranwerkstoffen angepasst sind, ist für eine genauere Bemessung von Membrantragwerken unerlässlich. Durch ein besseres Materialverständnis könnte der Ausnutzungsgrad der verwendeten Werkstoffe in einer Konstruktion ohne Sicherheitseinbußen kontrol-

liert erhöht werden, wodurch noch leichtere und weitgespannere Tragwerke möglich würden.

Die gleiche Absicht steckt hinter einer genaueren Beschreibung der äußeren Lasten und ihrer Interaktion mit dem Bauwerk. Bislang werden externe Einwirkungen eher konservativ abgeschätzt, um die Sicherheit des Tragwerks zu gewährleisten. Falls sich die einwirkenden Lasten jedoch exakter bestimmen ließen, könnte eine wirtschaftlichere Bemessung der Konstruktion vorgenommen werden. Große Bedeutung kommt hierbei v. a. der numerischen Modellierung von Wind als zumeist maßgeblicher Beanspruchung von Membrankonstruktionen zu. Dies stellt ein äußerst komplexes Problem dar, da es nicht damit getan ist, allein eine Bemessungswindgeschwindigkeit für eine Struktur festzulegen. Es muss eine Vielzahl an aeroelastischen Effekten berücksichtigt werden, die sich aus der Interaktion von Wind und Bauwerk ergeben. Während zu ihrer Erforschung bislang zumeist experimentelle Windkanalversuche durchgeführt wurden, werden in Zukunft zunehmend numerische Modelle an Bedeutung gewinnen: Es müssen zwar noch einige Validierungstests durchgeführt werden, aber bereits jetzt erscheinen numerische Windkanäle und die gekoppelte Berechnung von Fluid und Struktur äußerst vielversprechend.

Eine interessante Weiterentwicklung der Elementtechnologie ergibt sich aus dem Einsatz isogeometrischer Elemente bei der numerischen Berechnung von Membrantragwerken. Durch die Verwendung der CAD-Geometrie als diskretisierte Strukturbeschreibung könnte die Interaktion zwischen Architekt und Ingenieur verbessert werden, da dadurch Zwischenschritte zur Konvertierung eines architektonischen Entwurfsmodells in ein numerisches Strukturmodell entfielen. Im Idealfall würden sowohl die gestaltende als auch die bemessende Person stets mit der gleichen numerischen Repräsentation des Tragwerks arbeiten. Für regelmäßige Geometrien wurden bereits erste Forschungsergebnisse erzielt, jedoch bleibt zu klären, inwieweit sich beliebige Strukturen mit Aussparungen, unregelmäßigen Geometrien, etc. effizient mit NURBS-Geometrien berechnen lassen.

Es bleibt zusammenzufassen, dass numerische Verfahren zum integralen Bestandteil des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken geworden sind. Mit dieser Arbeit wurde eine Konsolidierung und Verfeinerung bereits bestehender Methoden bewirkt; für Themenbereiche, für die bislang keine zufriedenstellenden Verfahren vorlagen (v. a. bei der Zuschnittsermittlung), wurden Neuentwicklungen getätigt. Durch die vereinheitlichte Beschreibung mit finiten Elementen wurde die Möglichkeit geschaffen, den Membranbau aus seiner Sonderstellung heraus einem breiteren Publikum zugänglich zu machen.

Literaturverzeichnis

- [AA97] P. AZARIADIS und N. ASPRAGATHOS: *Design of plane developments of doubly curved surfaces*. *Computer-Aided Design*, 29:675–685, 1997.
- [Ans07] *ANSYS 11.0 – Theory reference*. Ansys Inc, Canonsburg, PA, 2007.
- [Bar99] M. BARNES: *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*. *International Journal of Space Structures*, 14(2):89–104, 1999.
- [Bau02] T. BAUMANN: *Statisch-konstruktive Eigenschaften von PTFE-beschichtetem Glasgewebe*. *Bauingenieur*, 77:158–166, 2002.
- [BBB05] R. BARTHEL, C. BRENSING und E. BUBNER: *Frei Otto, das Gesamtwerk: Leicht bauen – natürlich gestalten*. Birkhäuser, 2005.
- [BD04] M. BALZ und M. DENCHER: *Design loading conditions*. In: B. FORSTER und M. MOLLAERT (Herausgeber): *European design guide for tensile surface structures*. TensiNet, 2004.
- [BFD04] M. BARNES, B. FORSTER und M. DRENCHER: *Structural design basis and safety criteria*. In: B. FORSTER und M. MOLLAERT (Herausgeber): *European design guide for tensile surface structures*. TensiNet, 2004.
- [BFLW08] K.-U. BLETZINGER, M. FIRL, J. LINHARD und R. WÜCHNER: *Optimal shapes of mechanically motivated surfaces*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Online publication, 2008.
- [BG04] B.N. BRIDGENS und P.D. GOSLING: *Direct stress-strain representation for coated woven fabrics*. *Computers and Structures*, 82(23-26):1913–1927, 2004.
- [BGS95] R. BERGERMANN, K. GÖPPERT und J. SCHLAICH: *Die Membranüberdachungen für das Gottlieb-Daimler-Stadion, Stuttgart und den Gerry Weber Court, Halle (Westfalen)*. *Bauingenieur*, 70:251–260, 1995.
- [BL06a] K.-U. BLETZINGER und J. LINHARD: *Membrantragwerke in der Lehre – Theorie und Praxis*. In: *Tagungsband vom 10. Dresdner Baustatik-Seminar, Dresden*, 2006.
- [BL06b] K.-U. BLETZINGER und J. LINHARD: *Numerical Theory*. Vorlesungsunterlagen Masterkurs „Membrane Structures“, Dessau, 2006.
- [Ble90] K.-U. BLETZINGER: *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.

- [Ble98] K.-U. BLETZINGER: *Formfinding and optimization of membranes and minimal surfaces*. Ph.D. course on Advanced Topics in Structural Optimization, Denmark, 1998.
- [BLM00] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU und B. MORAN: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [BM01] R. BARTHEL und H. MARKERT: *Große Spannweiten – Tragstrukturen weit gespannter Dächer*. *Detail – Zeitschrift für Architektur + Baudetail*, 5:837–840, 2001.
- [BMS03] R. BARTHEL, K. MORITZ und M. SCHLEMMER: *Zugbeanspruchte Konstruktionen*. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Tragwerksplanung, Band 9, 2003.
- [BPA99] A. BOUDAUD, P. PATRÍCIO und M.B. AMAR: *The helicoid versus the catenoid: Geometrically induced bifurcations*. *Physical Review Letters*, 83(19):3836–3839, 1999.
- [BR89] J. BELLMANN und E. RANK: *Die p - und hp -Version der Finite-Elemente-Methode oder: Lohnen sich höherwertige Ansatzfunktionen?* *Bauingenieur*, 64:67–72, 1989.
- [BR99] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy*. *International Journal of Space Structures*, 14(2):131–145, 1999.
- [BR01] K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Structural optimization and form finding of light weight structures*. *Computers and Structures*, 79:2053–2062, 2001.
- [Bub97] E. BUBNER: *Membrankonstruktionen – Verbindungstechniken*. Wehlmann, Essen, 1997.
- [Buf84] H. BUFLER: *Pressure loaded structures under large deformations*. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 64(7):287–295, 1984.
- [BWBR04] M. BISCHOFF, W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Models and finite elements for thin-walled structures*. In: E. STEIN, R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of computational mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- [Car76] M.P. DO CARMO: *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [CC05] A. CHENG und D.T. CHENG: *Heritage and early history of the boundary element method*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29:268–302, 2005.
- [CCS92] A. CHASSAGNOUX, A. CHOMARAT und J. SAVEL: *A study of morphological characteristics of tensegrity structures*. *International Journal of Space Structures*, 7(2):165–172, 1992.
- [Cir98] F. CIRAK: *Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1998.

- [CO01] F. CIRAK und M. ORTIZ: *Fully C^1 -conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51(7):813–833, 2001.
- [Cos84] A. COSTA: *Examples of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 15(1):47–54, 1984.
- [COS00] F. CIRAK, M. ORTIZ und P. SCHRÖDER: *Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite-element analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47(12):2039–2072, 2000.
- [Cri03] M.A. CRIPPA: *Gaudí: Von der Natur zur Baukunst*. Taschen Verlag, Köln, 2003.
- [CSA⁺02] F. CIRAK, M.J. SCOTT, E.K. ANTONSSON, M. ORTIZ und P. SCHRÖDER: *Integrated modeling, finite-element analysis and engineering design for thin-shell structures using subdivision*. Computer-Aided Design, 34(2):137–148, 2002.
- [dGBWQ04] P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART und D. QUÉRÉ: *Capillary and wetting Phenomena – Drops, bubbles, pearls, waves*. Springer, 2004.
- [DIN06] *Fliegende Bauten - Zelte – Sicherheit; Deutsche Fassung EN 13782:2005*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 2006.
- [Dji59] E.W. DJIKSTRA: *A note on two problems in connection with graphs*. Numerische Mathematik, 1:269–271, 1959.
- [Dou31] J. DOUGLAS: *Solution of the problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society, 33:263–321, 1931.
- [EBM05] G.G. ESTRADA, H.-J. BUNGARTZ und C. MOHRDIECK: *On cylindrical tensegrity structures*. In: *Proceedings of 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures, June 1-4, Salzburg, Austria, 2005*.
- [ES62] N. EQUILLAN und Y. SAILLARD (Herausgeber): *Hanging roofs – Proceedings of the IASS colloquium on hanging roof, continuous metallic shell roof and superficial lattice roofs, Paris, France, 9-11 July, 1962*.
- [Est07] G.G. ESTRADA: *Analytical and numerical investigations of form-finding methods for tensegrity structures*. Doktorarbeit, Fakultät Informatik, Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Stuttgart, 2007.
- [FM04] B. FORSTER und M. MOLLAERT (Herausgeber): *European design guide for tensile surface structures*. TensiNet, 2004.
- [Ful62] R.B. FULLER: *Tensile-integrity structures*. U.S. Patent No. 3,063,521, 1962.
- [GA98] K. GUSTAFSON und T. ABE: *The third boundary condition – was it Robin's?* The Mathematical Intelligencer, 20:63–71, 1998.
- [Gau07] C.F. GAUSS: *General investigations of curved surfaces (Engl. Übersetzung des Originaltexts durch A. Hiltebeitel und J. Morehead)*. Watchmaker Pub, 2007.

- [GB88] L. GRÜNDIG und J. BAHNDORF: *The design of wide-span roof structures using micro-computers*. Computers and Structures, 30(3):495–501, 1988.
- [GB06] A.J. GIL und J. BONET: *Finite element analysis of prestressed structural membranes*. Finite Elements in Analysis and Design, 42(8-9):683–697, 2006.
- [Gei88] D.H. GEIGER: *Roof structure*. U.S. Patent No. 4,736,553, 1988.
- [Gen02] C. GENGNAGEL: *Arbeitsblätter „Tensegrity“*. Lehrstuhl für Hochbaustatik und Tragwerksplanung, Technische Universität München, 2002.
- [Gil06] A.J. GIL: *Structural analysis of prestressed Saint Venant-Kirchhoff hyperelastic membranes subjected to moderate strains*. Computers and Structures, 84(15-16):1012–1028, 2006.
- [GMSS00] L. GRÜNDIG, E. MONCRIEFF, P. SINGER und D. STRÖBEL: *A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970-1999*. In: *Proceedings of Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Chania-Crete, Greece, June 5-7, 2000*.
- [Göp04] K. GÖPERT: *Membrankonstruktionen – Form und Detail*. Stahlbau, 73:990–1000, 2004.
- [GR92] F. GRUTTMANN und R.L.TAYLOR: *Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principle stretches*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:1111–1126, 1992.
- [GS74] L. GRÜNDIG und H.-J. SCHECK: *Analytical form finding and analysis of prestressed cable networks*. In: *International Conference on Tension Roof Structures, London, April, 1974*.
- [Hab04a] K.J. HABERMANN: *The history of membrane building*. In: K.M. KOCH (Herausgeber): *Membrane structures*. Prestel, New York, 2004.
- [Hab04b] K.J. HABERMANN: *A selection of membrane structures worldwide*. In: K.M. KOCH (Herausgeber): *Membrane structures*. Prestel, New York, 2004.
- [HCB05] T.J.R. HUGHES, J.A. COTTRELL und Y. BAZILEVS: *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(39-41):4135–4195, 2005.
- [HdKM07] E. HAUG, P. DE KERMEL und A. MICHALSKI: *Industrial design and analysis of structural membranes*. In: *Proceedings of the III International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Barcelona, Spain, 17-19 September, 2007*.
- [Hec86] P.S. HECKBERT: *Survey of texture mapping*. IEEE Computer Graphics and Applications, 6(11):56–67, 1986.
- [Hen76] J. HENNICKE: *The formfinding of grid shells*. In: *Arbeitsunterlagen, Internationales Symposium „Weitgespannte Flächentragwerke“, Stuttgart, 6.-9. April, 1976*.

- [Hib06] R.C. HIBBELER: *Technische Mechanik 2 – Festigkeitslehre*. Pearson Education, München, 5. Auflage, 2006.
- [HO00] R. HOUTMAN und M. ORPANA: *Materials for membranes structures*. Bauen mit Textilien, 4:1–7, 2000.
- [Hol04] G. A. HOLZAPFEL: *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- [Hol08] A. HOLLBERG: *Eine Einführung in Tensegrity-Strukturen*. Bachelorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2008.
- [Hop07] D.S. HOPPE: *Freigespannte textile Membrankonstruktionen*. Böhlau, Wien, 2007.
- [Hsi81] C.-C. HSIUNG: *A first course in differential geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1981.
- [Hug00] T.J.R. HUGHES: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover, Mineola, 2000.
- [Ish99a] K. ISHII: *Form finding analysis in consideration of cutting patterns of membrane structures*. International Journal of Space Structures, 14(2):105–119, 1999.
- [Ish99b] K. ISHII: *Membrane designs and structures in the world*. Shinken-chiku-sha Co. Ltd, Tokyo, 1999.
- [Isl76] H. ISLER: *Schalenbau – Tendenzen und Grenzen*. In: *Arbeitsunterlagen, Internationales Symposium „Weitgespannte Flächentragwerke“*, Stuttgart, 6.-9. April, 1976.
- [Isl94] H. ISLER: *Concrete shells derived from experimental shapes*. Structural Engineering International, 3:142–147, 1994.
- [Jur07] F. JURECKA: *Robust design optimization based on metamodeling techniques*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2007.
- [JWB08] A. JRUSJRUNGKIAT, R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *A wrinkling model based on material modification for isotropic and orthotropic membranes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197:773–788, 2008.
- [Kap87] N. KAPOULEAS: *Constant mean curvature surfaces in euclidean three space*. Bulletin of the American Mathematical Society, 17(2):318–320, 1987.
- [Ken03] K. KENMOTSU: *Surfaces with constant mean curvature*. In: *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society, 2003.
- [Kie95] M. KIEFER: *Beispiele für Textiles Bauen – Ausgeführte und projektierte Bauten*. Bauingenieur, 70:263–269, 1995.
- [KL02] J.-Y. KIM und J.-B. LEE: *A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures*. Engineering Structures, 24:745–756, 2002.

- [LB08] J. LINHARD und K.-U. BLETZINGER: *Advantages of the CEG rotation free shell element in analysis and design of thin shell structures*. In: *Proceedings of WCCM 2008 Conference, Venice, Italy, June 30 - July 4, 2008*.
- [Lin76] K. LINKWITZ: *Combined use of computation techniques and models for the process of form finding for prestressed nets, grid shell and membranes*. In: *Berichtsheft, Internationales Symposium „Weitgespannte Flächentragwerke“, Stuttgart, 6.-9. April, 1976*.
- [Lin99] K. LINKWITZ: *About formfinding of double-curved structures*. *Engineering Structures*, 21(8):709–718, 1999.
- [LS71] K. LINKWITZ und H.-J. SCHEK: *Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorge-spannten Seilnetzkonstruktionen*. *Archive of Applied Mechanics*, 40(3):145–158, 1971.
- [LS06] S. LEHNERT und T. SCHWEEN: *Bauen mit Folienkissen*. *Bauingenieur*, 81:285–288, 2006.
- [LWB07] J. LINHARD, R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *“Upgrading” membranes to shells – The CEG rotation free shell element and its application in structural analysis*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44:63–74, 2007.
- [LWB08] J. LINHARD, R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *Introducing cutting patterns in form finding and structural analysis*. In: E. OÑATE und B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatable Structures II*. Springer, 2008.
- [MH94] J.E. MARSDEN und T.J.R. HUGHES: *Mathematical foundations of elasticity*. Dover, New York, 1994.
- [Min06] H. MINAMI: *A multi-step linear approximation method for nonlinear analysis of stress and deformation of coated plain-weave fabric*. *Journal of Textile Engineering*, 52(5):189–195, 2006.
- [MM99] B. MAURIN und R. MOTRO: *Cutting pattern of fabric membranes with the stress composition method*. *International Journal of Space Structures*, 14(2):121–129, 1999.
- [Mor00] K. MORITZ: *Materialeinsatz und Konfektionierung von Membranwerkstoffen*. *Stahlbau*, 69(8):619–626, 2000.
- [Mor05] K. MORITZ: *Die Stadionhülle der Allianz Arena – Bauweise der ETFE-Folienpneus*. *Detail – Zeitschrift für Architektur + Baudetail*, 9:976–980, 2005.
- [Mor07a] K. MORITZ: *Bauweisen der ETFE-Foliensysteme*. *Stahlbau*, 5:336–342, 2007.
- [Mor07b] K. MORITZ: *ETFE-Folie als Tragelement*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Tragwerksplanung, Technische Universität München, 2007.
- [MR95] R. MÜNSCH und H.-W. REINHARDT: *Zur Berechnung von Membrantragwerken aus beschichtetem Gewebe mit Hilfe genäherter elastischer Materialparameter*. *Bauingenieur*, 70:271–275, 1995.

- [MT90] E. MONCRIEFF und B.H.V. TOPPING: *Computer methods for the generation of membrane cutting patterns*. Computers and Structures, 37:441–450, 1990.
- [MVC04] D. MARTÍNEZ, L. VELHO und P.C. CARVALHO: *Geodesic parths on triangular meshes*. In: *Proceedings of the XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, 2004.
- [NB04] THOURAYA NOURI-BARANGER: *Computational methods for tension-loaded structures*. Archives of Computational Methods in Engineering, 11(2):143–186, 2004.
- [NK02] M. NOVOTNI und R. KLEIN: *Computing geodesic distances on triangular meshes*. In: *Proceedings of The 10th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, 2002.
- [Noe76] J. NOESGE: *Zum Tragverhalten vorgespannter Seilnetztragwerke – quadratisches Netz mit elastischen Rändern*. In: *Arbeitsunterlagen, Internationales Symposium „Weitgespannte Flächentragwerke“*, Stuttgart, 6.-9. April, 1976.
- [OF03] M. OHSAKI und J. FUJIWARA: *Developability conditions for prestress optimization of a curved surface*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192:77–94, 2003.
- [Off07] R. OFF: *Neue Möglichkeiten für (Membran-)Konstruktionen – Das Bat-Sail als form-adaptives hybrides Tragwerk*. Umriss, 6:39–41, 2007.
- [Ogd84] R.W. OGDEN: *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [OR96] F. OTTO und B. RASCH: *Finding form: Towards an architecture of the minimal*. Edition Axel Menges, 1996.
- [Ott54] F. OTTO: *Das hängende Dach*. Bauwelt Verlag, Berlin, 1954.
- [Paw06] R. PAWLOWSKI: *Adaptive Dachtragwerke*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Holzbau- und Baukonstruktion, Technische Universität München, 2006.
- [PTVF02] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING und B.P. FLANNERY: *Numerical recipes in C – the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 2002.
- [Pug76] A. PUGH: *An introduction to tensegrity*. University of California Press, 1976.
- [Rad33] T. RADÓ: *On the problem of Plateau*. Springer, Berlin, 1933.
- [RLVO05] R. ROSSI, M. LAZZARI, R. VITALIANI und E. OÑATE: *Simulation of light-weight membrane structures by wrinkling model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62(15):2127–2153, 2005.
- [Rob05] L.A. ROBINSON: *Structural opportunities of ETFE (ethylene tetra fluoro ethylene)*. Master thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 2005.

- [RW04] E. RAMM und W.A. WALL: *Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60(1):381–427, 2004.
- [RWSBP06] W. RUDORF-WITRIN, B. STIMPFLE, S. BLÜMEL und H. PASTERNAK: *Von der CargoLifter-Werfthalle zu Tropical Islands – Konstruktion, Herstellung und Montage der neuen ETFE-Folienkissen-Eindeckung*. Bauingenieur, 81(1):33–42, 2006.
- [SB96] E. STEIN und F.-J. BARTHOLD: *Elastizitätstheorie*. In: G. MEHLHORN (Herausgeber): *Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [SBHS07] L. SCHIEMANN, R. BARTHEL, S. HINZ und M. STEPHANI: *Bursting tests of ETFE-foil*. In: *Proceedings of the III International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Barcelona, Spain, September 17-19, 2007*.
- [Sch67] H. SCHAEFER: *Das Cosserat-Kontinuum*. Zeitschrift für angewandete Mathematik und Mechanik, 8:485–498, 1967.
- [Sch74] H.-J. SCHECK: *The force density method for form finding and computation of general networks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3(1):115–134, 1974.
- [Sch82] K. SCHWEIZERHOFF: *Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1982.
- [Sei07] M. SEIDEL: *Textile Hüllen – Bauen mit biegeweichen Tragelementen*. Ernst & Sohn, Berlin, 2007.
- [SFB84] *Jahresberichte 1972/73 - 1982/83 – Sonderforschungsbereich 64: Weitgespannte Flächentragwerke (Stuttgart)*, 1972-84.
- [SH08] M. SOSTMANN und F. HEINLEIN: *Werner Sobek: Light Works*. avedition, Ludwigsburg, 2008.
- [SK98] J.A. SETHIAN und R. KIMMEL: *Computing geodesic paths on manifolds*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 95(15):8431–8435, 1998.
- [Sny97] J.P. SNYDER: *Flattening the earth: Two thousand years of map projections*. The University of Chicago Press, Ltd., London, 1997.
- [SR84] K. SCHWEIZERHOF und E. RAMM: *Displacement dependent pressure loads in non-linear finite element analysis*. Computers and Structures, 18(6):1099–1114, 1984.
- [SS95] W. SOBEK und M. SPETH: *Textile Werkstoffe*. Bauingenieur, 70:243–250, 1995.
- [SSO07] D. STRÖBEL, P. SINGER und R. OSWALD: *Seilnetze – Eigenschaften, Besonderheiten bei der Montage, Lastabtragung*. Stahlbau, 76(5):289–296, 2007.

- [STB03] K. STEIN, T. TEZDUYAR und R. BENNEY: *Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements*. Journal of Applied Mechanics, 70:58–63, 2003.
- [Tar05] A. TARANTOLA: *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
- [Wak04] D. WAKEFIELD: *Basics and calculation of membrane structures*. In: K.M. KOCH (Herausgeber): *Membrane structures*. Prestel, New York, 2004.
- [WB05] R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64:143–166, 2005.
- [Wüc07] R. WÜCHNER: *Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2007.
- [WK04] W. WUNDERLICH und G. KIENER: *Statik der Stabtragwerke*. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [WKB07] R. WÜCHNER, A. KUPZOK und K.-U. BLETZINGER: *A framework for stabilized partitioned analysis of thin membrane-wind interaction*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 54:945–963, 2007.
- [WKB08] R. WÜCHNER, A. KUPZOK und K.-U. BLETZINGER: *Analysis of free form membranes subject to wind using FSI*. In: *Textile Composites and Inflatable Structures II*. Springer, 2008.
- [YPM00] G. YU, N.M. PATRIKALAKIS und T. MAEKAWA: *Optimal development of doubly curved surfaces*. Computer Aided Geometric Design, 17:545–577, 2000.
- [Zei96] E. ZEIDLER: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [Zie01] R. ZIEGLER: *Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 2001.
- [ZTN05] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR und P. NITHIARASU: *The finite element method: For fluid dynamics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 2005.
- [ZTZ05] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR und J.Z. ZHU: *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 6. Auflage, 2005.
- [ZWB03] R. ZIEGLER, W. WAGNER und K.-U. BLETZINGER: *A finite element model for the analysis of wrinkled membrane structures*. International Journal of Space Structures, 18(1):1–14, 2003.

Anhang

A.1 Richtungsprojektion zwischen Flächen

Es sei eine Referenzfläche R im Raum gegeben, auf der eindeutig orthogonale Richtungen definiert sind. Diese Richtungen sollen auf eine Zielfläche Z projiziert werden. Dazu wird an jedem Punkt P_r der Referenzfläche ein lokales kartesisches Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ definiert, dessen Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in der zugehörigen Tangentialebene liegen und parallel zu den orthogonalen Richtungen sind. Der Basisvektor \mathbf{e}_3 ist identisch mit dem Normalenvektor. In der Zielfläche soll nun durch Projektion ebenfalls ein lokales kartesisches Koordinatensystem $\{\tilde{\mathbf{f}}_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ bestimmt werden. Dabei ist der Basisvektor $\tilde{\mathbf{f}}_3$ an jedem Punkt P_z der Zielfläche wiederum als Normalenvektor der Tangentialebene bekannt. Die Lage der Basisvektoren $\tilde{\mathbf{f}}_1$ und $\tilde{\mathbf{f}}_2$, die den projizierten Richtungsverlauf definieren, ist zunächst noch unbekannt.

Für die Richtungsprojektion muß für jeden Punkt P_z der Zielfläche der zugehörige Projektionspunkt P_r auf der Referenzfläche gesucht werden. Die Bedingung hierfür ist, dass der Normalenvektor \mathbf{e}_3 im Projektionspunkt auf den Zielpunkt P_z „deutet“: D. h., die Verbindungsgerade zwischen P_z und P_r muss parallel zum Normalenvektor \mathbf{e}_3 sein (siehe Abbildung A.1 links):

$$(\mathbf{P}_z - \mathbf{P}_r) \parallel \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.1})$$

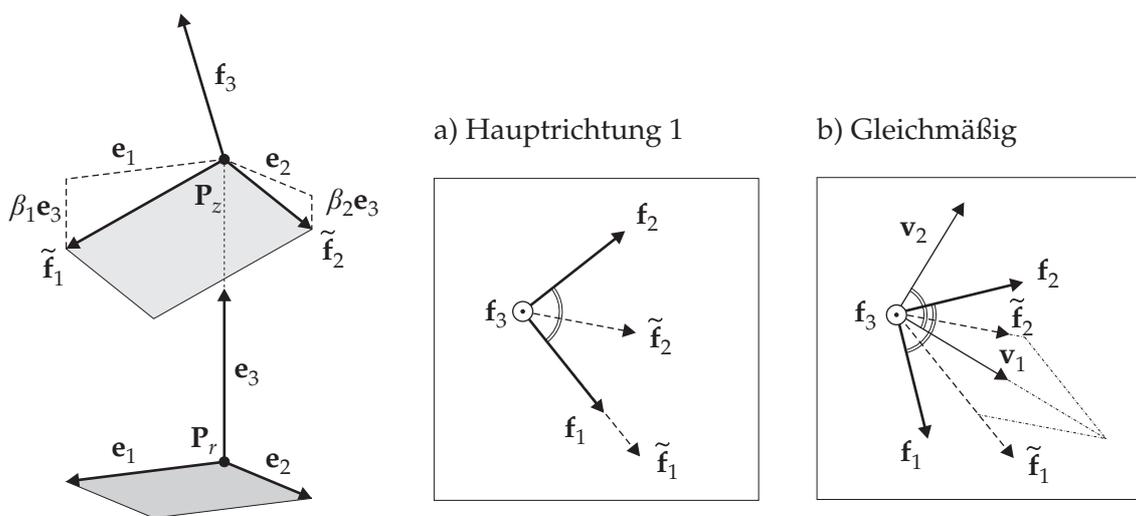


Abbildung A.1: Basisvektoren bei Richtungsprojektion

Als Nächstes werden die Richtungsvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 von der Tangentialebene der Referenzfläche auf die Tangentialebene der Zielfläche projiziert. Die entstehenden Vektoren $\tilde{\mathbf{f}}_1$ und $\tilde{\mathbf{f}}_2$ setzen sich aus den projizierten Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 und einem betragsmäßig noch unbekanntem Vielfachen des Normalenvektors \mathbf{e}_3 zusammen:

$$\tilde{\mathbf{f}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + \beta_\alpha \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.2})$$

Der Skalierungsfaktor β_i kann für beide Richtungen durch eine lineare Gleichung aus der Orthogonalitätsbedingung der projizierten Vektoren mit dem Normalenvektor der Zielfläche bestimmt werden:

$$\tilde{\mathbf{f}}_\alpha \cdot \mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_\alpha + \beta_\alpha \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{f}_3 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Hauptrichtung. Um eine kartesische Basis zu erhalten, müssen die projizierten Vektoren $\tilde{\mathbf{f}}_1$ und $\tilde{\mathbf{f}}_2$ derartig modifiziert werden, so dass sie zueinander orthogonale Einheitsvektoren darstellen. Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, kann eine Richtung als Hauptrichtung gewählt werden. Diese Richtung wird exakt projiziert, und lediglich bei der zweiten Richtung ist eine Modifikation notwendig. Für den Fall, dass \mathbf{e}_1 Hauptrichtung ist (siehe Abbildung A.1a)), können die Basisvektoren auf der Zielfläche wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_1\|} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 \quad (\text{A.5})$$

Gleichmäßige Projektion. Falls beide Richtungen gleichmäßig projiziert werden sollen (siehe Abbildung A.1b)), führt man zwei Hilfsvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 ein. \mathbf{v}_1 ist ein Einheitsvektor, der auf der Winkelhalbierenden zwischen $\tilde{\mathbf{f}}_1$ und $\tilde{\mathbf{f}}_2$ liegt:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_1/\|\tilde{\mathbf{f}}_1\| + \tilde{\mathbf{f}}_2/\|\tilde{\mathbf{f}}_2\|}{\|(\tilde{\mathbf{f}}_1/\|\tilde{\mathbf{f}}_1\| + \tilde{\mathbf{f}}_2/\|\tilde{\mathbf{f}}_2\|)\|} \quad (\text{A.6})$$

\mathbf{v}_2 bildet mit \mathbf{v}_1 und \mathbf{f}_3 ein kartesisches Koordinatensystem:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.7})$$

Aus diesen Hilfsvektoren lässt sich nun die gewünschte kartesische Basis konstruieren:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (\text{A.9})$$

A.2 Geometrische Beschreibung von Rotationsflächen

Gegeben sei eine Rotationsfläche, die durch Rotation einer Kurve um die z -Achse eines globalen kartesischen Koordinatensystems entsteht. Somit kann der Ortsvektor eines jeden Punktes dieser Rotationsfläche in globalen kartesischen Koordinaten wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{x}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} x(\varphi, z) \\ y(\varphi, z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z) \cos(\varphi) \\ r(z) \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Weiterhin kann an jedem Punkt durch Verwendung der Zylinderkoordinaten φ und z ein konvекtives Koordinatensystem bestimmt werden, dessen Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 parallel zur Radial- bzw. Meridianrichtung sind und aufgrund der Rotationssymmetrie zueinander orthogonal sind (siehe Abbildung A.2):

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_m = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \begin{bmatrix} r_{,z} \cos(\varphi) \\ r_{,z} \sin(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Ein differentielles Flächenelement da bzgl. der gewählten Parametrisierung ergibt sich zu:

$$da = \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| \, d\varphi dz = r \sqrt{1 + r_{,z}^2} \, d\varphi dz \quad (\text{A.13})$$

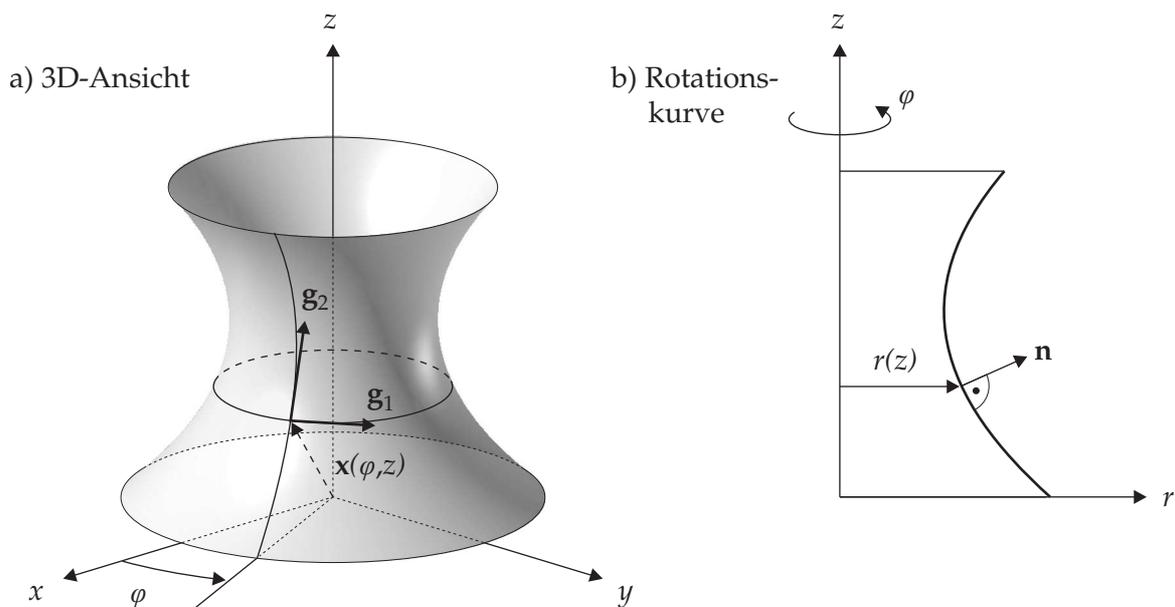


Abbildung A.2: Geometrie einer Rotationsfläche

Der Normalenvektor \mathbf{n} wird über das normierte Kreuzprodukt der beiden konvektiven Basisvektoren bestimmt:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -r_{,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Für die Berechnung der Krümmung der Fläche werden die Ableitungen des Normalenvektors \mathbf{n} nach den Flächenparametern φ und z benötigt:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = -\frac{r_{,zz}}{(1 + r_{,z}^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} r_{,z} \cos(\varphi) \\ r_{,z} \sin(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen einer Rotationsfläche sind identisch mit der Radial- bzw. Meridianrichtung. Da zugleich auch die Koordinatenlinien der Flächenparameter φ und z stets orthogonal zueinander und parallel zu den Hauptkrümmungsrichtungen sind, lassen sich die Werte der Hauptkrümmungen gemäß den Gleichungen (2.10) und (2.25) wie folgt berechnen:

$$k_r = -\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\|^2 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + r_{,z}^2}} \quad (\text{A.17})$$

$$k_m = -\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right\|^2 = \frac{r_{,zz}}{(1 + r_{,z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.18})$$

Interessanterweise entspricht die Hauptkrümmung in Radialrichtung nicht dem Kehrwert des Radius $r(z)$, wie man vielleicht vermuten würde. Veranschaulichen lässt sich dies sehr schön aus der Lage der Zentren der Radialhauptkrümmungskreise, die zwar stets auf der Rotationsachse liegen, aber generell nicht auf der gleichen Höhe z wie der zugehörige Flächenpunkt (siehe Abbildung A.3):

$$\mathbf{x}_{M_r} = \mathbf{x} + \frac{1}{k_r} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z + r r_{,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

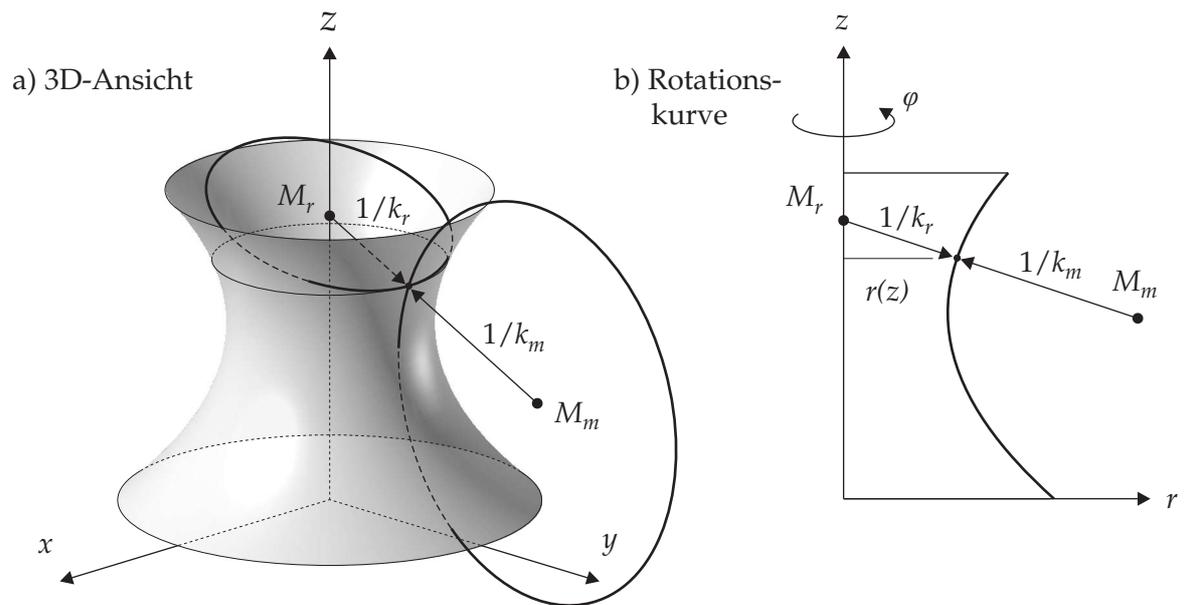


Abbildung A.3: Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche