

Lehrstuhl für Regelungstechnik
Fakultät für Maschinenwesen
Technische Universität München

Aktive Schwingungsisolierung in Kfz-Motoraufhängungen – Systemkonfiguration und Methoden

Jörg Paschedag

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Udo Lindemann
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Günter Roppenecker,
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Die Dissertation wurde am 31.10.2007 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 20.02.2008
angenommen.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Aspekten der konstruktiven Einrichtung sowie den Methoden zur algorithmischen Umsetzung von Systemen zur aktiven Schwingungs-isolation in Motoraufhängungen mit Hilfsrahmen. Es werden dabei im Wesentlichen drei Themengebiete behandelt.

Im ersten Teil der Arbeit erfolgt eine Zusammenstellung der Eigenarten der hier betrachteten Art von Motoraufhängung. Weiterhin wird eine Modellierung sowohl als Starrkörper- als auch als FEM-Modell beschrieben, ebenso wie die Umsetzung entsprechender Prüfstände. Insbesondere wird eine ausführliche Analyse zur effektiven und bezüglich der Leistungsaufnahme optimalen Platzierung der Aktoren im Prüfstand vorgestellt.

Den zweiten Schwerpunkt bildet eine neuartige Konvergenzanalyse zum Filtered-x-LMS-Algorithmus, der im Rahmen dieser Arbeit in verschiedenen Anwendungsformen zum Einsatz kommt. Es wird dabei speziell der vorliegende Fall einer Anregung mit einer Überlagerung von harmonischen Sinusschwingungen betrachtet.

Im dritten Teil wird die Anwendbarkeit und Performance von vier verschiedenen Algorithmen zur softwareseitigen Umsetzung des Dämpfungssystems am Prüfstand untersucht. Neben einer klassischen Regelung werden hierzu adaptive FIR- und IIR-Filter in Störgrößenaufschaltungen sowie ein Störbeobachter implementiert. Notwendige Modifikationen der Algorithmen werden angegeben und ihr typisches Verhalten, insbesondere für instationäre Anregung, verglichen. Speziell für die adaptiven FIR-Filter wird schließlich eine Erweiterung zu zentralen Mehrkanalsystemen vorgenommen.

Abstract

Subject of this work is the configuration, implementation, and analysis of the mechatronic system constituted by an actively damped engine suspension system in an automobile. The thesis focuses on three topics.

In the first part, the considered mechanical setup consisting of the engine suspension with a chassis subframe is explained. A respective rigid body model is introduced as well as an FEM-model. The realisation of suitable experimental setups is described. Moreover, a thorough analysis concerning the determination of an effective and energy-saving arrangement of the electro-mechanical actuators in the setup is presented.

The second focus of the thesis is a novel analysis of the convergence behavior of the filtered-X LMS algorithm especially for the relevant excitation with multiple harmonic sinusoids. The filtered-X LMS algorithm is applied in this work in different kinds of structures.

In the third part, the applicability and performance of four different types of algorithms for the software realization of the active damping system is investigated and discussed. Besides classical feedback control, feedforward control with adaptive FIR and IIR filters as well as a disturbance observer approach are implemented on the experimental setups. Necessary modifications of the algorithms are explained and their behavior is compared. Especially the FIR filters in feedforward structure are furthermore extended to multichannel systems.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann bedanken, der durch seine stetige Förderung und seine wertvollen Anregungen wesentlich zur erfolgreichen Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen hat.

Für sein Interesse an meiner Arbeit sowie die Übernahme des Zweitgutachtens gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Roppenecker.

Weiterhin danke ich den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Regelungstechnik, hier insbesondere Herrn Guido Koch und Herrn Rudy Eid für ihre Unterstützung und für hilfreiche Diskussionen zur behandelten Thematik.

Mein Dank gilt außerdem den studentischen Mitarbeitern, die an der Arbeit mitgewirkt haben, namentlich (in chronologischer Reihenfolge) Herrn Bogdan Langer, Herrn Johannes L. R. Schwarz, Herrn Johannes Huber, Herrn Stefan Hatzl, Herrn Jen-Hao TU, Herrn Klaus Diephold, Frau Marta Gómez Hernández und Herrn Stefan Raith.

Meiner Mutter und meiner Schwester, besonders aber meinem Vater, danke ich für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aufgabenstellung	1
1.2	Zum Stand der Forschung	3
1.3	Gliederung der Arbeit	4
2	Elemente der digitalen Signalverarbeitung	5
2.1	Grundlegendes	5
2.2	Systemidentifikation	8
2.3	Parameteradaption mittels LMS-Algorithmus	14
3	Methoden der aktiven Schwingungsdämpfung	29
3.1	Konkurrierende Grundstrukturen	29
3.2	Störgrößenaufschaltung mit konstanten Parametern	32
3.3	Adaptive Störgrößenaufschaltung	35
4	Prüfstände zur experimentellen Analyse	43
4.1	Verhältnisse im realen Kfz	43
4.2	Aufbau der Prüfstände	48
4.3	FEM-Analyse des Mehrkanalprüfstands	50
4.4	Aktorik und Sensorik	54
4.5	Anbindung an ein Echtzeitsystem	59
5	Effizienzanalyse zur Aktorplatzierung	62
5.1	Aktorkonfigurationen	62
5.2	Modellierung	66
5.3	Mittlere Leistung – mit und ohne Energierückspeisung	68
5.4	Frequenzbezogener Leistungsbedarf und Auswertung	73

5.5	Diskussion	81
6	Konvergenz des FxLMS-Algorithmus	83
6.1	Motivation und Zielsetzung	83
6.2	Grundlegendes zur Konvergenz	85
6.3	Formale Beschreibung der Fehlerkonvergenz	88
6.4	Annäherung des Konvergenzvorgangs	98
6.5	Simulationsergebnisse	106
6.6	Zusammenfassung zur Konvergenzanalyse	108
7	Performance von vier Algorithmen	109
7.1	Klassische Regelung	110
7.2	Nichtrekursives adaptives Filter: FxLMS-Algorithmus	132
7.3	Rekursives adaptives Filter: FuLMS-Algorithmus und SHARF	144
7.4	Einsatz eines Störbeobachters	149
7.5	Diskussion der vier Algorithmen	156
8	Erweiterung zum Mehrkanalfall	160
8.1	Vorgehensweise	160
8.2	Experimentelle Untersuchungen	162
8.3	Anregung mit Motor-Messdaten	164
8.4	Schlussfolgerung	168
9	Zusammenfassung	169
A	Liste der verwendeten Formelzeichen	173
B	Zu den Prüfständen	180
B.1	Parameter	180
B.2	Identifizierte Streckenmodelle	182
C	Die Produkte $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$	188
	Literaturverzeichnis	184

Kapitel 1

Einleitung

In der Automobilindustrie wird großer Aufwand betrieben, um im Kraftfahrzeug störende Vibrationen vom Chassis fernzuhalten. Ziele sind dabei die Verbesserung des Fahrkomforts sowie der Schutz der mechanischen Strukturen vor belastenden oszillierenden Kräften. Schon seit langem werden hierzu passive Techniken wie z. B. Feder-Dämpfer-Systeme oder einfaches Dämmmaterial eingesetzt, deren Wirkung jedoch im Wesentlichen auf höhere Frequenzbänder beschränkt ist. Für die Reduktion von Schwingungen niedriger Frequenz (wenige hundert Hz und darunter) sind neben halbaktiven Techniken insbesondere die aktiven Techniken gut geeignet [50]. Diese sind zunehmend Gegenstand von Forschung und Entwicklung (z. B. [104, 78, 81, 6]), da die notwendigen Mikrocomputer hoher Rechenleistung zu vertretbaren Kosten verfügbar werden. Grundsätzliches Prinzip der aktiven Vibrationsdämpfung (engl.: Active Vibration Control, kurz AVC) [55, 103, 50, 19, 30] ist die Auslöschung der unerwünschten Vibrationen durch Überlagerung eines um 180° phasenverschobenen Gegensignals.

1.1 Aufgabenstellung

Im Kraftfahrzeug liegt eine Vielzahl von mechanischen Schwingungsquellen vor, die zu störenden Vibrationen und resultierendem Körperschall im Fahrzeuginneren führen können [90]. Gegenstand der vorgelegten Untersuchungen ist speziell die Vermeidung der Übertragung der vom Verbrennungsmotor erzeugten Vibrationen auf das Chassis. Es wird hierzu der praktikable Ansatz gewählt, die Vibrationen möglichst nahe an der Quelle, also im Bereich der Aufhängung des Motors zu kom-

pensieren. Eine weitere Übertragung auf die Karosserie wird so unterbunden und eine Isolation des Motors bezüglich der Vibrationsausbreitung erreicht. Als konkrete Konstruktion der Motoraufhängung wird dabei eine übliche Konfiguration betrachtet, bei der der Motor über einen so genannten Hilfsrahmen im Fahrzeug gelagert ist (s. Kapitel 4). Ziel dieser Arbeit ist die Ermittlung einer möglichst effektiven und energieeffizienten Umsetzung des entsprechend erforderlichen mechatronischen Gesamtsystems zur aktiven Schwingungsdämpfung. Ein gewisser Schwerpunkt liegt dabei auf der softwareseitigen, algorithmischen Implementierung.

Um eine vollständige Isolation des Motors zu erreichen, muss eine Vibrationsdämpfung an mehreren Aufhängestellen eingerichtet werden. Da störende Effekte aufgrund von Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Auslöschungsstellen auftreten können, ist davon auszugehen, dass letztendlich die Einrichtung eines zentralen Systems notwendig ist. Kritisch ist bei der Realisierung eines solchen Mehrkanalsystems der potenziell sehr hohe Rechenaufwand. Dies insbesondere, da das entwickelte System den Anforderungen der in der Automobilindustrie üblichen Massenproduktion entsprechen sollte und ein ökonomischer Umgang mit verwendeten Hardwareressourcen wünschenswert ist. Eine effektive Maßnahme zur Reduktion des Rechenaufwands ist u. a. die Verwendung kleiner Abtastraten f_A , besonders, da mit sinkender Abtastrate in den meisten Fällen auch die Ordnung von softwareseitig implementierten Systemmodellen abnimmt. Als Folge wird allerdings die Annahme quasi-kontinuierlicher Verhältnisse in der Regel nicht zulässig sein, und eine überwiegend zeitdiskrete Betrachtung ist notwendig.

Eine wichtige Eigenart der vorliegenden Anwendung ist die T_G -Periodizität der Störanregung, die als eine Überlagerung einer sinusförmigen Grundschiwingung der Frequenz $f_G = 1/T_G$ und der zugehörigen Harmonischen angenommen werden kann. Zur Dämpfung derartiger Störsignale sind besonders adaptive Störgrößenaufschaltungen gut geeignet, deren Analyse einen wichtigen Teil dieser Arbeit ausmacht. Eine weitere Anforderung an die verwendeten Algorithmen ergibt sich dadurch, dass die Grundfrequenz der Störanregung im laufenden Betrieb zeitveränderlich ist. Das Verhalten der Algorithmen für diesen Fall wird in der Literatur nur selten diskutiert, kann aber bei der vorliegenden Anwendung nicht vernachlässigt werden.

Es ist außerdem zu beachten, dass das Übertragungsverhalten der für die aktive Schwingungsdämpfung relevanten Strecken der Motoraufhängung zeitvariant ist. Durch Alterungserscheinungen, aber auch durch die starken Temperaturschwankun-

gen im Motorraum, kann sich die Übertragung insbesondere der elastomeren Lager-einheiten im Aufbau deutlich verändern. Demzufolge ist die Verwendung digitaler Streckenmodelle im Allgemeinen nicht ohne weiteren Aufwand möglich.

1.2 Zum Stand der Forschung

Verschiedene Forschungsarbeiten wurden bereits zur Isolation der Motorvibration im Kfz durchgeführt. Eine Grundlage hierzu bildet sicherlich die Vibrationsisolation von Maschinen im Allgemeinen, die z. B. in [30, 38] behandelt wird. Arbeiten, die sich im weiteren Rahmen mit der Dämpfung von Vibrationen im Kfz beschäftigen, auch mit passiven und halbaktiven Techniken, sind in [79, 60, 11, 106] zu finden.

Die Anwendung eines aktiven Verfahrens [28] speziell zur Dämpfung von Motorschwingungen wurde bereits in [76] vorgeschlagen. Ein weiterer Vorschlag erfolgte in [56]. Ein Überblick zur Realisierung von Systemen zur Vibrationsdämpfung im Kfz, unter anderem zur Isolation von Aggregateschwingungen, wird in [90, 91] gegeben. In der letzteren Quelle wird auch der konkrete Stand der Technik in der Industrie zusammengefasst.

Eine Behandlung verschiedener Verfahren zur Vibrationsdämpfung in der Motoraufhängung, mit einem Schwerpunkt auf dem Einsatz von piezoelektrischen Aktoren, ist in [81] zu finden. Ein Ansatz zur Vibrationsisolation mittels eines Störbeobachters wird in [6, 48, 69] betrachtet. Diverse weitere Arbeiten zum Thema wurden in [70, 65, 34] veröffentlicht.

Wie die genannten Quellen erkennen lassen, wird das Thema der aktiven Vibrationsisolation im Kraftfahrzeug hier nicht zum ersten Mal behandelt. Neuartig sind aber die im Einzelnen präsentierten Ergebnisse. Dies sind insbesondere die Analysen zur energieeffizienten Aktorplatzierung und zur Konvergenz des Filtered-x-LMS-Algorithmus. Weiterhin zählt hierzu der konsequente Vergleich verschiedener Algorithmentypen, speziell für die vorliegende Anwendung und unter Einbeziehung des Verhaltens bei instationärer Anregung.

Die hier genannten Quellen geben lediglich einen generellen Überblick über bisherige Arbeiten zum behandelten Thema. Detaillierte Literaturangaben, speziell zu den im Folgenden behandelten Themengebieten, erfolgen in den entsprechenden Kapiteln und werden dort nach Bedarf diskutiert.

1.3 Gliederung der Arbeit

In den nachfolgenden Kapiteln 2 und 3 werden zunächst einige relevante Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung wiedergegeben und wichtige bekannte Verfahren der aktiven Schwingungsdämpfung vorgestellt. Insbesondere im 3. Kapitel erfolgt hierbei auch eine erste Heranführung an die gegebene Problemstellung.

Die Dokumentation der eigentlichen Aufgabenbearbeitung beginnt mit dem 4. Kapitel. Hier werden die experimentellen Aufbauten vorgestellt, die für die Verifikation theoretischer Überlegungen sowie die Implementierung und Analyse von Algorithmen eingerichtet wurden. Neben der verwendeten Aktorik und Sensorik werden die Gesamtsysteme inklusive der digitalen Signalverarbeitung erläutert.

Kapitel 5 präsentiert eine im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Effizienzanalyse zur günstigen Platzierung der Aktoren im mechanischen Aufbau. Basierend auf einer Starrkörpermodellierung werden Kennlinien angegeben, die eine frequenzbezogene Beurteilung des Leistungsbedarfs der verschiedenen möglichen Konfigurationen erlauben.

Eine Konvergenzanalyse des Filtered-x-LMS-Algorithmus speziell für den vorliegenden Anwendungsfall wird im Kapitel 6 vorgestellt. Erstmals wird hier eine einfache Beschreibung des Zeitverhaltens der Restschwingungen mit vollständiger Abschätzung der Konvergenzdynamik erreicht.

Kapitel 7 liefert einen detaillierten Vergleich von vier effektiven Algorithmen der aktiven Vibrationsdämpfung bezüglich ihrer Eignung für die betrachtete Anwendung. Zunächst in Einkanalausführung werden die Umsetzbarkeit, der Rechen- und Speicheraufwand sowie die erreichbare Performance untersucht. Wichtige Informationen werden insbesondere für das Verhalten bei nichtstationärer Anregung gesammelt.

Eine Einrichtung ausgewählter Algorithmen als zentrale Mehrkanalanwendung erfolgt in Kapitel 8. Die Leistungsfähigkeit der resultierenden Gesamtsysteme wird, unter anderem für Störanregung mit Messdaten vom realen Kraftfahrzeug, festgehalten und diskutiert.

Den Abschluss der Arbeit bilden eine Zusammenfassung und Bewertung der erhaltenen Ergebnisse.

Kapitel 2

Elemente der digitalen Signalverarbeitung

Um auch für komplexe zentrale Mehrkanalanwendungen den Rechenaufwand moderat halten zu können, soll im Rahmen dieser Arbeit die Abtastrate f_A möglichst gering gewählt werden. Hieraus folgt die Forderung nach einer zeitdiskreten Analyse und möglichst auch zeitdiskreten Auslegung der verwendeten Steuerungen und Regelungen. In diesem Kapitel werden die hierfür relevanten Regeln und Darstellungsweisen der digitalen Signalverarbeitung kurz zusammengefasst. Aufbauend hierauf wird das Prinzip der Parameteridentifikation erklärt und schließlich der LMS (Least-Mean-Squares)-Algorithmus eingeführt und erläutert.

Es sei bereits an dieser Stelle angemerkt, dass im Folgenden lediglich auf die zeitdiskrete Natur digitaler Signale (und Systeme) eingegangen wird. Die Wertediskretisierung, die bei rechnerinterner Verwendung von Fließkommaarithmetik insbesondere durch die A/D- und D/A-Wandler gegeben ist, wird hier nicht näher behandelt, da kein nennenswerter Einfluss auf Simulations- und Messergebnisse festgestellt wurde.

2.1 Grundlegendes

2.1.1 Abtasttheorem

Bei digitaler Verarbeitung können ursprünglich zeitkontinuierliche Signale nur zu diskreten, typischerweise äquidistanten Zeitpunkten $0, T_A, 2 \cdot T_A, \dots$ (den so genann-

ten Abtastzeitpunkten) erfasst und verarbeitet werden. Es kann gezeigt werden, dass bei der Abtastung keine Information über die tatsächlich vorliegenden kontinuierlichen Signale verloren geht, solange das *Shannonsche Abtasttheorem* [83, 24] (auch *Nyquist'sches Abtasttheorem* [71]) eingehalten wird. Dieses besagt, dass die verwendete Abtastfrequenz $f_A = 1/T_A$ mehr als doppelt so groß sein muss wie die größte in den verarbeiteten Signalen vorkommende Frequenz f_{\max} . Es muss also gelten

$$f_A > 2 f_{\max} . \quad (2.1)$$

Ist diese Forderung erfüllt, so kann aus dem abgetasteten, zeitdiskreten Signal das ursprüngliche, zeitkontinuierliche Signal vollständig rekonstruiert werden. Die halbe Abtastfrequenz $f_A/2$, bis zu der also Frequenzanteile zulässig sind, wird auch Nyquist-Frequenz genannt. Als Aliasing bezeichnet man die Signalverfälschung, die bei einer Abtastung entsteht, bei der das Abtasttheorem nicht eingehalten wird.

2.1.2 Darstellung zeitdiskreter Systeme

Allgemein können zeitdiskrete LZI (lineare zeitinvariante)-Systeme durch Differenzgleichungen der Form

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N_a} y(n-N_a) = b_0 u(n) + \dots + b_{N_b} u(n-N_b) \quad (2.2)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $y(n)$ die Ausgangsgröße und $u(n)$ die Eingangsgröße des Systems. Der n -te Abtastschritt entspricht dem diskreten Zeitpunkt $n T_A$.

Aus (2.2) kann direkt eine rekursive Berechnungsformel für den jeweils aktuellen Abtastschritt erhalten werden. Hierzu ist lediglich ein entsprechendes Umstellen notwendig.

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_{N_a} y(n-N_a) + b_0 u(n) + \dots + b_{N_b} u(n-N_b) . \quad (2.3)$$

Aus der Differenzgleichung (2.2) kann weiterhin, durch Ausführen der Z-Transformation und unter Vernachlässigung von Anfangszuständen, die so genannte Z-Übertragungsfunktion des Systems bestimmt werden.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N_b} z^{-N_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N_a} z^{-N_a}} . \quad (2.4)$$

Es ist zu beachten, dass die Ordnung N des so gegebenen Systems gleich dem größeren der Grade N_a und N_b von Nenner- bzw. Zählerpolynom ist, also

$$N = \max(N_a, N_b) . \tag{2.5}$$

Die diskrete Totzeit N_t ergibt sich über den niedrigsten Index i , ab dem gilt $b_i \neq 0$. Es gilt also $b_i = 0 \forall i = 0, \dots, N_t - 1$ und $b_{N_t} \neq 0$.

In der Terminologie der digitalen Signalverarbeitung wird ein gemäß einer der Beschreibungen (2.2) bis (2.6) gegebenes System historisch bedingt auch als digitales Filter oder kurz als Filter bezeichnet. Im Zusammenhang mit den Algorithmen, bei denen diese Bezeichnung in der einschlägigen Literatur üblich ist, wird sie auch in den nachfolgenden Ausführungen verwendet.

Einen Sonderfall des gemäß (2.4) gegebenen Systems stellt das Finite-Impulse-Response (FIR)-Filter dar, das auch als nichtrekursives Filter bezeichnet wird. Bei einem solchen System sind alle Polstellen in Null fixiert. Folglich kann es gemäß

$$G(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N_b} z^{-N_b} \tag{2.6}$$

beschrieben werden. Es liegen hier keine Rückwirkungen des Systemausgangs auf sich selbst vor, und das System ist zwangsläufig stabil. Eine weitere besondere Eigenschaft des FIR-Filters ist, dass seine zeitdiskrete Impulsantwort seiner Koeffizientenfolge b_0, b_1, \dots, b_{N_b} entspricht. Die mit Gleichung (2.4) gegebene allgemeine Form wird in diesem Zusammenhang oft auch als Infinite-Impulse-Response (IIR)-Filter oder rekursives Filter bezeichnet.

2.1.3 Stabilität und Nichtminimalphasigkeit

Ähnlich wie die Übertragungsfunktion bei zeitkontinuierlichen Systemen liefert die Z-Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall wichtige Informationen über das durch sie beschriebene System:

Stabilität

Ein zeitdiskretes System ist genau dann sicher stabil im Sinne von Bounded Input-Bounded Output (BIBO)-Stabilität [26, 47], wenn alle Pole (Nennernullstellen) seiner Z-Übertragungsfunktion innerhalb des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene liegen.

Nichtminimalphasigkeit

Ein zeitdiskretes System heißt nichtminimalphasig, wenn mindestens eine der Nullstellen seiner Z -Übertragungsfunktion außerhalb des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene liegt. Diese Systemeigenschaft ist insbesondere von Bedeutung, weil das Invertieren eines solchen Systems zwangsläufig auf ein instabiles System führt.

2.2 Systemidentifikation

Für die Implementierung von Algorithmen zur aktiven Vibrationsdämpfung werden in vielen Fällen mathematische Modelle der Übertragungstrecken des betrachteten mechanischen Aufbaus benötigt. Da bei der vorliegenden Anwendung eine physikalisch motivierte Modellierung sehr aufwändig ist, bieten sich Verfahren zur Systemidentifikation [54] an, die nach dem so genannten „Black Box“-Prinzip arbeiten. Hierbei wird mehr oder weniger willkürlich eine Modellstruktur mit ausreichend hoher Ordnung vorgegeben. Anschließend werden durch Auswertung von gemessenen Signalverläufen die enthaltenen Parameter so ermittelt, dass das Verhalten des realen physikalischen Systems bestmöglich nachgebildet wird. Inwieweit die angesetzte Systemstruktur zur Nachbildung geeignet ist, kann durch einen nachträglichen Vergleich des Verhaltens des identifizierten Modells mit dem des realen Systems überprüft werden. Die Ermittlung der Systemparameter bei vorgegebener Systemstruktur wird allgemein auch als Parameteridentifikation bezeichnet.

Die Mathematik stellt verschiedene Methoden zur Ermittlung von Systemparametern aus gegebenen Messdaten zur Verfügung. Im Folgenden soll hiervon lediglich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate für lineare Regressionen ausführlich erläutert werden. Sie hat gegenüber anderen gängigen Verfahren insbesondere die Vorteile, dass sie einfach implementiert und sehr zeitsparend ausgeführt werden kann. Eine verallgemeinerte Anschauungsweise und andere Modelltypen werden gegen Ende dieses Kapitels kurz umrissen.

2.2.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Sind mit $u(n)$ und $y(n)$ ($n = -N_a - N_b + 1, \dots, K$) insgesamt $N_a + N_b + K$ Messwertpaare für das Eingangssignal und das Ausgangssignal eines LZI-Systems gemäß (2.2) gegeben, so können, bei bekannter Struktur, die Parameter a_i und b_i des Sys-

tems leicht bestimmt werden. Es dürfen lediglich bei der Messdatenerfassung keine Fehler aufgetreten sein und keine Störsignale gewirkt haben. In diesem Fall können $N_a + N_b + 1$ Messwertpaare aus $u(n)$ und $y(n)$ herausgegriffen werden, und die Parameter a_i und b_i ergeben sich exakt als Lösung eines linearen Gleichungssystems. Eine Voraussetzung hierzu ist natürlich, dass genügend Messdaten vorliegen, d. h. $K \geq 1$.

Sind die Signalmessungen allerdings verfälscht bzw. gestört, so führt die beschriebene Vorgehensweise im Allgemeinen nicht mehr zu bestmöglichen Ergebnissen. Für die Systemparameter berechnen sich dann ebenfalls verfälschte Werte, die je nach Auswahl der $N_a + N_b + 1$ Messwertpaare variieren. Es ist folglich nicht möglich, einen Satz von Parametern zu ermitteln, der für sämtliche Messdaten exakt gültig ist. Abhilfe kann hier geschaffen werden, indem nicht die exakte, sondern eine genäherte Lösung berechnet wird, die eine optimale Lösung unter Berücksichtigung aller gegebenen Messdaten darstellt. Ein Gütemaß für diese Näherung kann erhalten werden, indem die gemessenen Ausgangsdaten $y(n)$ mit den über die Systemparameter ermittelten (geschätzten) Ausgangswerten $\tilde{y}(n)$ verglichen werden

$$\epsilon(n) = y(n) - \tilde{y}(n) . \tag{2.7}$$

Das letztendliche Gütemaß wird dann als Summe der Quadrate der ermittelten Fehlerwerte $\epsilon(n)$ gebildet

$$J = \sum_{n=1}^K \epsilon^2(n) . \tag{2.8}$$

Gelingt es, die Parameter a_i und b_i zu ermitteln, für die J minimal ist, so hat man den (nach dem betrachteten Kriterium) optimalen Parametersatz gefunden.

Um die in (2.7) benötigten Schätzwerte $\tilde{y}(n)$ zu ermitteln, kann die rekursive Formel (2.3) verwendet werden.

$$\tilde{y}(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_{N_a} y(n-N_a) + b_0 u(n) + \dots + b_{N_b} u(n-N_b) . \tag{2.9}$$

Diese Rechenvorschrift kann zur Verkürzung der Schreibweise in ein Skalarpro-

dukt zweier Vektoren zerlegt werden:

$$\tilde{y}(n) = \underbrace{[y(n-1) \ \cdots \ y(n-N_a) \ u(n) \ \cdots \ u(n-N_B)]}_{=:\varphi_n^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N_a} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{N_b} \end{bmatrix}}_{=:\Theta} . \quad (2.10)$$

Ein Modell, dessen Schätzwert $\tilde{y}(n)$ wie in (2.10) als ein Produkt aus Messwert- und Parametervektor geschrieben werden kann, wird in der Terminologie der Statistik auch als lineare Regression bezeichnet.

Mit (2.10) lautet der Fehler für den n -ten Abtastschritt

$$\epsilon(n) = y(n) - \varphi_n^T \Theta . \quad (2.11)$$

Fasst man die Fehler $\epsilon(n)$ sowie $y(n)$, $\tilde{y}(n)$ und φ_n^T weiter zusammen

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon(1) \\ \vdots \\ \epsilon(K) \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(K) \end{bmatrix} , \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_K^T \end{bmatrix} , \quad (2.12)$$

so ergibt sich mit (2.11) die Formel

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y} - \Phi \Theta . \quad (2.13)$$

Das Gütemaß J kann nun durch

$$J = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.14)$$

ausgedrückt werden. Das Minimum dieses quadratischen Gütemaßes bezüglich der Parameter Θ wird bestimmt durch Ableiten nach Θ und anschließendes Nullsetzen

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta} = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

Mittels Einsetzen der Gleichungen (2.13) und (2.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Theta} &= \frac{\partial}{\partial \Theta} [(\mathbf{y} - \Phi \Theta)^T (\mathbf{y} - \Phi \Theta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial \Theta} [(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi \Theta) - \Theta^T \Phi^T \mathbf{y} + \Theta^T \Phi^T \Phi \Theta] \\ &= -2 \Phi^T \mathbf{y} + 2 \Phi^T \Phi \Theta \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ergibt sich schließlich durch Auflösen nach dem Parametervektor Θ eine Vektorgleichung, mit der Θ direkt bestimmt werden kann:

$$\Theta = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y . \quad (2.17)$$

Der Ausdruck $[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T$ wird hierin auch als Pseudoinverse der Matrix Φ bezeichnet.

2.2.2 Verallgemeinerte Anschauung und verschiedene Störmodelle

Im letzten Abschnitt wurde auf direktem Wege eine Formel zur Parameterbestimmung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate hergeleitet. Es wurde dabei angenommen, dass bei der Messwertaufnahme am realen physikalischen System nicht ideale Bedingungen geherrscht haben. Die vorliegenden Messdaten konnten daher nicht exakt den von einer Differenzgleichung gelieferten Wertepaaren (Ein- bzw. Ausgabe) entsprechen. In der realen Anwendung gibt es verschiedene mögliche Gründe für eine solche Abweichung vom idealen Fall. Zum Beispiel kann die Ordnung der anzupassenden Differenzgleichung zu niedrig sein, um das reale System exakt nachzubilden. Auch können nichtlineare Anteile im System enthalten sein, die bei Anpassung eines linearen Modells selbstverständlich nicht vollständig berücksichtigt werden können. Man spricht in diesen Fällen von Strukturfehlern. Weitere Fehlerquellen sind überlagerte Störsignale und Messfehler. In der Realität werden in der Regel genau genommen alle diese Störeinflüsse gleichzeitig vorliegen. Die einzelnen Beiträge werden lediglich gegebenenfalls so klein sein, dass sie in einer nicht mehr relevanten Größenordnung liegen. Bei der theoretischen Behandlung der Parameteridentifikation wird die Betrachtung der Störeinflüsse häufig etwas vereinfacht und auf die Annahme des Vorliegens nur eines Störsignals beschränkt. Je nachdem, wo das Störsignal angreift, werden verschiedene Fehlermodelle angesetzt. Das wahrscheinlich einfachste dieser Modelle ist das, bei dem die Störung $e(n)$ gemäß

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N_a} y(n-N_a) = b_0 u(n) + \dots + b_{N_b} u(n-N_b) + e(n) \quad (2.18)$$

in die Systembeschreibung eingeht.

Ein Modell mit einer derartigen Fehlerwirkung wird auch als ARX (Auto Regressive Exogenous)-Modell bezeichnet. Unter der Annahme, dass es sich bei dem

Störsignal $e(n)$ um weißes Rauschen handelt, ist die Formel zur Berechnung des Vorhersagewertes $\tilde{y}(n)$ eines solchen Modells dieselbe wie bei der im letzten Abschnitt durchgeführten Herleitung (s. (2.9)). Auch bei der ARX-Modellform handelt es sich folglich um eine lineare Regression, und die im vorhergehenden Abschnitt ermittelte Gleichung (2.17) zur Bestimmung des optimalen Parametervektors bleibt gültig.

Neben anderen gängigen Modellen ist im Zusammenhang mit der hier betrachteten Anwendung insbesondere ein weiteres Fehlermodell von größerem Interesse. Dies ist das so genannte Ausgangsfehler-Modell (engl. „Output Error Model“). Bei diesem wird das Fehlersignal als dem Ausgangssignal des Systems additiv überlagert angenommen:

$$\begin{aligned}x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_{N_a}x(n-N_a) &= b_0u(n) + \dots + b_{N_b} + u(n-N_b) , \\y(n) &= x(n) + e(n) .\end{aligned}\tag{2.19}$$

Dieses Modell entspricht den am Schwingungsprüfstand vorliegenden Verhältnissen wohl am besten. Die Herleitung der Parameteridentifikation für ein solches Modell ist jedoch aufwändiger als für ARX-Modelle und die Ausführung auf dem Computer ist deutlich rechenintensiver. Nach praktischen Erfahrungen mit der vorliegenden Anwendung führt die Parameteridentifikation mit beiden Modelltypen (ARX und Ausgangsfehler) zu etwa gleich guten Ergebnissen, sofern die Ordnung der ARX-Modelle etwas größer angesetzt wird. Aufgrund des deutlich reduzierten Rechenaufwands wurde im Rahmen dieser Arbeit daher den ARX-Modellen in der Regel der Vorzug gegeben.

Es ist noch anzumerken, dass in der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Software Matlab/Simulink die Identifikationsverfahren für die gängigen Fehlermodelle bereits implementiert sind und direkt verwendet werden können. Trotzdem bleibt die in den letzten Abschnitten durchgeführte Darstellung der mathematischen Hintergründe sinnvoll, da sie neben einem fundierteren Verständnis der Verfahren auch eine gute Motivation und Interpretationsmöglichkeit zum Einsatz des im nächsten Abschnitt vorgestellten LMS-Algorithmus liefert.

2.2.3 Testsignale

Um die Messdaten für die Parameteridentifikation zu erhalten, wird ein so genanntes Testsignal eingesetzt, das auf den Eingang des zu identifizierenden Systems gegeben wird. Die Eignung des ausgewählten Testsignals kann entscheidend sein für die Güte

des erhaltenen Systemmodells. Wichtig sind hierbei insbesondere die Kriterien ausreichender spektraler Anregung sowie ein möglichst geringer Crest-Faktor [54]. Der Crest-Faktor ist ein Maß für das Verhältnis der größten Signalspitze zur mittleren Leistung des Signals. Er kann als Quotient aus Unendlich-Norm und l_2 -Norm des Testsignals $u_{\text{id}}(n)$ berechnet werden

$$K_{\text{Crest}}(u_{\text{id}}(n)) = \frac{l_{\infty}(u_{\text{id}}(n))}{l_2(u_{\text{id}}(n))}. \quad (2.20)$$

Testsignale mit kleinem Crest-Faktor ermöglichen eine Anregung mit hoher Signalleistung bei gleichzeitig geringer Belastung der betrachteten Strecke durch hohe Signalspitzen. Hierbei wird insbesondere auch die Gefahr nichtlinearer Sättigungseffekte vermindert.

In der aktiven Schwingungsdämpfung kommen verschiedene Arten von Testsignalen zum Einsatz. Hierzu gehören u. a. Multisinusfunktionen und bandbegrenzt weißes Rauschen. Potenziell können diese beiden Signalformen einen sehr hohen Crest-Faktor aufweisen. Dieser kann aber durch geeignete Maßnahmen abgesenkt werden. Beim bandbegrenzten weißen Rauschen kann dies in der Regel durch eine Begrenzung der Amplitude geschehen, ohne dass es zu einer allzu starken Verzerrung kommt. Der Crest-Faktor des Multisinus kann gering gehalten werden, indem die einzelnen überlagerten Sinusschwingungen in ihrer Phase geeignet gegeneinander verschoben werden. Als besonders vorteilhaft für die Praxis haben sich auch so genannte (Pseudo-)Random Binary Signale herausgestellt, die in zufälligen Zeitabständen zwischen zwei diskreten Signalpegeln hin- und herschalten. Für diese ergibt sich der optimale Crest-Faktor 1 [54]. Ein guter Crest-Faktor vom Wert $\sqrt{2}$ wird auch mit so genannten Chirp-Signalen erreicht. Diese entsprechen einem Sinussignal, dessen Frequenz den betrachteten Frequenzbereich durchläuft. Durch die Veränderung der Frequenz kommt es hierbei allerdings immer auch zu einer Anregung außerhalb des durchlaufenen Frequenzbandes.

Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten experimentellen Untersuchungen wurden hinreichend gute Ergebnisse mit allen diesen üblichen Testsignal-Formen erhalten. Eine Dauer der Anregung und Messdatenaufnahme von ca. 1 sec war dabei ausreichend lang. Tatsächlich eingesetzt wurde für die meisten Versuche bandbegrenzt weißes Rauschen, das unter der verwendeten Software Matlab/Simulink sehr einfach implementiert werden kann.

2.3 Parameteradaption mittels LMS-Algorithmus

Im vorhergehenden Abschnitt wurde eine Berechnungsvorschrift hergeleitet, mit deren Hilfe die Parameter eines LZI-Systems aus gegebenen Messdaten direkt berechnet werden können. Der im Folgenden beschriebene Least-Mean-Squares (LMS)-Algorithmus [102, 103] verfolgt ein ähnliches Ziel. Allerdings werden hier die optimalen Parameter nicht in einem einzigen Rechenschritt bestimmt, sondern sie werden rekursiv über viele aufeinander folgende Abtastschritte hinweg sukzessive angenähert. Ein entscheidender Vorteil dieser Vorgehensweise ist eine starke Verringerung des Rechenaufwands und des benötigten Speicherplatzes. Darüber hinaus kann, bei Auftreten langsamer Zeitvarianzen des realen betrachteten Systems, eine fortlaufende Nachbesserung des angenäherten Systemmodells erreicht werden. Neben diesen Vorteilen ist allerdings zu beachten, dass der Algorithmus aufgrund seines rekursiven Charakters eine eigene Dynamik besitzt, so dass Instabilität auftreten kann. Die notwendigen Maßnahmen zur Sicherstellung eines stabilen Verhaltens sowie grundlegende Betrachtungen zum Konvergenzverhalten des Algorithmus werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

Es sei hier angemerkt, dass die im Folgenden verwendete Notation und die dargestellten Herleitungen in wesentlichen Teilen auf die Quelle [50] von Kuo und Morgan zurückgreifen.

2.3.1 Prinzip

Mithilfe des LMS-Algorithmus ist es möglich, ein FIR-Filter, also eine bestimmte Form eines zeitdiskreten Systemmodells, durch Parameterschätzung an eine gegebene Strecke anzugleichen. In Bild 2.1 ist die Struktur einer solchen Filteranpassung dargestellt.

Ziel ist eine Minimierung des Fehlersignals $e(n)$ durch Subtraktion des Signals $y(n)$ vom Signal $d(n)$. Entspricht das Filter $W(z)$ exakt der Strecke $P(z)$, also

$$W(z) = P(z) , \tag{2.21}$$

so verschwindet $e(n)$ vollständig. Die Anpassung des Filters $W(z)$ geschieht durch den LMS-Algorithmus. Er verwendet als Gütemaß das mittlere Quadrat des Fehler-

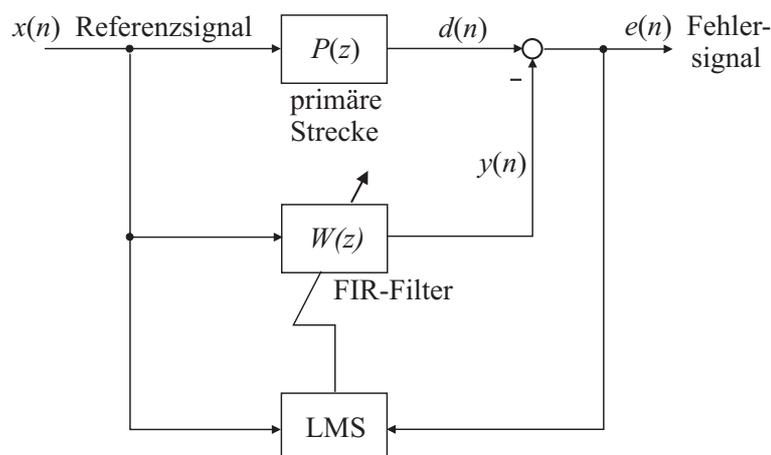


Bild 2.1: Filteranpassung mittels LMS-Algorithmus

signals $e(n)$. Wie bereits erwähnt, erfolgt die Angleichung des Filters fortlaufend, so dass auch zeitvariante Strecken nachgebildet werden können.

2.3.2 Mathematischer Hintergrund

Vorbemerkung: Für die nachfolgenden Herleitungen und Betrachtungen zum LMS-Algorithmus werden die beiden Signale $x(n)$ und $d(n)$ (s. Bild 2.1) als stationäre stochastische Prozesse betrachtet. Diese Annahme wird in der Praxis in aller Regel nicht oder nur näherungsweise erfüllt sein. Sie ermöglicht jedoch trotzdem die Durchführung von aussagekräftigen praxisrelevanten Analysen.

Beschreibung des anzupassenden Filters

Die Wirkung des adaptierten FIR-Filters $W(z)$ kann durch die Gleichung

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} w_l(n)x(n-l) \tag{2.22}$$

beschrieben werden. Hierin sind $x(n)$ und $y(n)$ die Werte des Eingangssignals bzw. des Ausgangssignals zum aktuellen Abtastschritt. Die Werte $w_l(n)$, $l = 0, \dots, L - 1$ bilden den zugehörigen Satz von L fortlaufend adaptierten Filterkoeffizienten. Die Ordnung des Filters ist also $N = L - 1$.

Für eine Vereinfachung der Darstellung werden die letzten L abgetasteten Werte des Eingangssignals $x(n)$ in umgekehrter Reihenfolge ihres zeitlichen Auftretens als

Elemente in einem Vektor $\mathbf{x}(n)$ angeordnet

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-L+1)]^T . \quad (2.23)$$

Außerdem werden die Filterkoeffizienten in einem Vektor $\mathbf{w}(n)$ zusammengefasst

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \cdots \ w_{L-1}(n)]^T , \quad (2.24)$$

so dass die Summenformel (2.22) als

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) . \quad (2.25)$$

geschrieben werden kann.

Analytische Bestimmung der optimalen Filterkoeffizienten

Der LMS-Algorithmus führt die Filteradaption auf der Grundlage der Minimierung eines Gütemaßes aus. Als Gütemaß dient hier das Quadrat des Fehlersignals $e(n)$ im zeitlichen Mittel. Für stationäre Anregung entspricht der zeitliche Mittelwert dem Erwartungswert, und es kann geschrieben werden

$$E\{e^2(n)\} \stackrel{!}{=} \min . \quad (2.26)$$

Ziel der folgenden Herleitung ist das Aufstellen einer analytischen Formel zur Bestimmung der im Sinne der Gütemaßminimierung optimalen Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$.

Für den Fehler $e(n)$ gilt gemäß Bild 2.1

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y(n) \\ &= d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Unter der Annahme, dass $\mathbf{w}(n)$ deterministisch ist [50], kann hieraus abgeleitet werden, dass

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= E\{[d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2\} \\ &= E\{d^2(n)\} - 2E\{d(n)\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\} + E\{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\} \\ &= E\{d^2(n)\} - 2\mathbf{w}^T(n)E\{d(n)\mathbf{x}(n)\} + \mathbf{w}^T(n)E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\}\mathbf{w}(n) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

In dieser Gleichung ist

$$\mathbf{p} = E\{d(n)\mathbf{x}(n)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k)\mathbf{x}(k) \quad (2.29)$$

der Kreuzkorrelationsvektor von $d(n)$ und $\mathbf{x}(n)$ sowie

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) \quad (2.30)$$

die Autokorrelationsmatrix des Referenzvektors $\mathbf{x}(n)$. Die Matrix \mathbf{R} besitzt verschiedene interessante Eigenschaften [33]. Die wichtigsten hiervon sind:

- \mathbf{R} ist symmetrisch. Hieraus folgt, dass sämtliche Eigenwerte von \mathbf{R} reell sein müssen, und dass die zu einfachen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren orthogonal sind. Die zu mehrfachen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind zwar nicht mehr zwangsläufig orthogonal, die Annahme der Orthogonalität bleibt aber zulässig [58, 26]. In jedem Fall sind die Eigenvektoren linear unabhängig.
- Die Matrix \mathbf{R} ist positiv semidefinit. Alle ihre Eigenwerte sind entsprechend größer oder gleich Null.
- \mathbf{R} ist eine Töplitz-Matrix. Diese Eigenschaft hat hauptsächlich Bedeutung für die Anwendbarkeit von effizienten Algorithmen zur Berechnung von \mathbf{R} .

Wegen der angenommenen Stationarität sind sowohl \mathbf{p} als auch \mathbf{R} unabhängig von n . Aus (2.28) wird somit

$$E\{e^2(n)\} = E\{d^2(n)\} - 2\mathbf{w}^T(n)\mathbf{p} + \mathbf{w}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n) . \quad (2.31)$$

Man erhält eine Zuordnung des mittleren Fehlerquadrates zu den Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$. Durch vektorielles Ableiten von Gleichung (2.31) nach $\mathbf{w}(n)$ und anschließendes Nullsetzen ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{p} . \quad (2.32)$$

Da das betrachtete Gütemaß $E\{e^2(n)\}$ bezüglich der Filterkoeffizienten eine quadratische Funktion darstellt [50], liefert (2.32) als Lösung genau einen Satz \mathbf{w}_{opt} von optimalen Filterkoeffizienten. Die so erhaltene Lösung wird auch als *Wiener Filter* bezeichnet. Sie entspricht dem Ergebnis (2.17) der Methode der kleinsten Fehlerquadrate im Abschnitt 2.2.1. Um dies zu zeigen, können in Formel (2.32) die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} und der Kreuzkorrelationsvektor \mathbf{p} in Anlehnung an die Gleichungen (2.29) und (2.30) umgeschrieben werden gemäß

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \right) \mathbf{w}_{\text{opt}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} \right) . \quad (2.33)$$

Dabei enthalte Φ entsprechend Gleichung (2.12) transponierte Messvektoren, die im vorliegenden Zusammenhang als $\mathbf{x}(n)$ gegeben sind. Es sei also

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(K) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Der Vektor \mathbf{y} enthalte gemäß (2.12) die Werte des gemessenen Ausgangssignals der betrachteten Strecke. Im Zusammenhang mit dem LMS-Algorithmus ist dieses Ausgangssignal mit $d(n)$ bezeichnet, und es gilt folglich

$$\mathbf{y} = [d(1) \cdots d(K)]^T. \quad (2.35)$$

Wird in (2.33) die Normierung auf K auf beiden Seiten aufgehoben und die Gleichung anschließend von links mit $\lim_{K \rightarrow \infty} (\Phi^T \Phi)^{-1}$ multipliziert, so ergibt sich schließlich

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \lim_{K \rightarrow \infty} (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}. \quad (2.36)$$

Dies entspricht der Lösung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für eine unendlich hohe Anzahl von Messwerten. Dieses Ergebnis kann natürlich nur erhalten werden, wenn $\lim_{K \rightarrow \infty} (K) \cdot \mathbf{R} = \lim_{K \rightarrow \infty} (\Phi^T \Phi)$, bzw. \mathbf{R} selbst, invertierbar ist. Liegt in $x(n)$ eine ausreichend breite spektrale Anregung vor, so ist diese Voraussetzung sicher erfüllt [33]. Speziell für die im Rahmen dieser Anwendung relevante schmalbandige Anregung wird dies aber nicht unbedingt der Fall sein. Hier sind nur die impliziten Darstellungen (2.32) bzw. (2.33) sicher zulässig. Eine genauere Untersuchung dieses Falls wird im Abschnitt (6) durchgeführt.

Gleichung (2.32) ist für einen praktischen Einsatz zur Berechnung der optimalen Filterkoeffizienten leider nicht geeignet. Da die angenommene Stationarität der Prozesse $x(n)$ und $d(n)$ bei den meisten technischen Anwendungen nicht gegeben ist, wären weder \mathbf{R} noch \mathbf{p} konstant und müssten daher im schlimmsten Fall bei jedem Berechnungsschritt neu bestimmt werden. Dies verursacht nicht nur enormen Rechenaufwand, sondern ist auch prinzipiell gar nicht ohne Weiteres möglich, da hierzu eine separate Erfassung des Signals $d(n)$ notwendig wäre (s. Gleichung (2.29)).

Rekursive Berechnung der optimalen Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$

Ein anderer Ansatz zum Auffinden des Minimums des mittleren Fehlerquadrats ist die Methode des steilsten Abstiegs (method of steepest descent [103, 50])

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \xi(n). \quad (2.37)$$

In Gleichung (2.37) ist $\nabla \xi(n)$ der Gradient eines Gütemaßes - also hier des mittleren Fehlerquadrats (2.31) - bezogen auf die Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$. Es wird folglich bei jedem Iterationsschritt eine Veränderung von $\mathbf{w}(n)$ in Richtung des negativen Gütemaßgradienten und somit in Richtung des steilsten Abstiegs des Gütemaßes ausgeführt. Da (2.31) bezüglich $\mathbf{w}(n)$ genau ein Minimum besitzt, werden die Filterkoeffizienten auf diese Weise so lange in Richtung ihres optimalen Wertes verändert, bis sie ihn erreicht haben.

Die Geschwindigkeit, mit der die Annäherung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ gemäß Gleichung (2.37) an das Optimum erfolgt, wird durch die Schrittweite μ festgelegt. Diese Schrittweite muss für eine effektive und gleichzeitig zuverlässig Funktion des Algorithmus geeignet gewählt werden. Eine theoretische Begrenzung für μ kann durch Stabilitätsbetrachtungen des Algorithmus ermittelt werden (s. Abschnitt 2.3.4).

Setzt man den aus (2.31) bestimmbaren Gradienten

$$\nabla \xi(n) = \nabla E\{e^2(n)\} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n) \quad (2.38)$$

in Formel (2.37) ein, so erhält man die vollständige Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)) \quad (2.39)$$

der Methode des steilsten Abstiegs. Ebenso wie (2.32) ist auch (2.39) in der Praxis nicht ohne Weiteres einsetzbar. Und zwar aus den gleichen Gründen: Da die Signale $x(n)$ und $d(n)$ in der Realität meist nicht stationär sind, sind auch \mathbf{p} und \mathbf{R} in der Regel zeitabhängig und können nur mit großem Aufwand oder sogar überhaupt nicht berechnet werden. Ein praxistauglicheres Verfahren zur Ermittlung der optimalen Filterkoeffizienten kann jedoch direkt aus Gleichung (2.39) abgeleitet werden. Es ergibt sich die Berechnungsformel des LMS-Algorithmus, die im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

2.3.3 LMS-Berechnungsformel

Im vorhergehenden Abschnitt wurde als rekursives Verfahren zur adaptiven Filterbestimmung die Methode des steilsten Abstiegs vorgestellt. Diese ist aufgrund des schwer ermittelbaren Gradienten $\nabla\xi(n)$ in der in (2.39) angegebenen Form nicht für die praktische Anwendung geeignet. Abhilfe kann hier durch eine einfache Modifikation des Gütemaßes $\xi(n)$ geschaffen werden. Dies geschieht, indem als Abschätzung für den Mittelwert des Fehlerquadrats $E\{e^2\}$ dessen Momentanwert, also $e^2(n)$, gewählt wird. Es ist dann der Gradient des geschätzten Gütemaßes

$$\nabla\hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n) = 2[\nabla e(n)]e(n). \quad (2.40)$$

Unter Berücksichtigung von (2.27) kann dieser Ausdruck umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \nabla\hat{\xi}(n) &= 2[\nabla(d - \mathbf{w}^T \mathbf{x})]e(n) \\ &= 2 \mathbf{x} e(n). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Eingesetzt in die Formel (2.37) des steilsten Abstiegs ergibt sich schließlich mit

$$\boxed{\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}(n)e(n)} \quad (2.42)$$

die rekursive Berechnungsformel des LMS-Algorithmus. Die entsprechende Struktur für die Implementierung am Mikrorechner wird durch Bild 2.2 anschaulich gemacht.

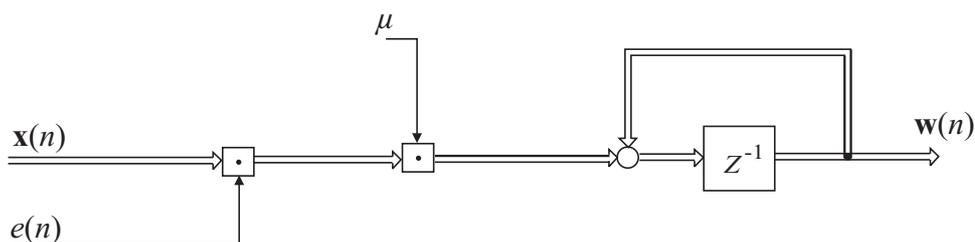


Bild 2.2: Struktur des LMS-Algorithmus

Formel (2.42) ermöglicht eine sukzessive Annäherung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ an ihre Optimalwerte \mathbf{w}_{opt} . Im folgenden Abschnitt sollen die für (2.42) geltenden Stabilitätsbedingungen untersucht werden. Es können so Richtlinien für die Auswahl der Schrittweite μ des LMS-Algorithmus erhalten werden.

2.3.4 Stabilität

Eine aussagekräftige Stabilitätsbetrachtung des LMS-Algorithmus wird möglich unter der Annahme verhältnismäßig langsamer Konvergenz. Dies ist ein Fall, der bei der hier betrachteten Anwendung in aller Regel auch vorliegen wird. Ist langsame Konvergenz gegeben, so sind die Signale $x_f(n)$ und $e(n)$ nahezu unabhängig voneinander [50]. Es kann dann eine Mittelwertbildung (gekennzeichnet durch spitzte Klammern $\langle \rangle$) auf beiden Seiten der rekursiven Gleichung (2.42) durchgeführt werden

$$\langle \mathbf{w}(n+1) \rangle = \langle \mathbf{w}(n) \rangle + \langle \mu \mathbf{x}(n) e(n) \rangle \quad (2.43)$$

und hieraus weiterhin mit (2.27), (2.29) und (2.30) abgeleitet werden, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}(n+1) \rangle &= \langle \mathbf{w}(n) \rangle + \mu \langle \mathbf{x}(n) [d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)] \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}(n) \rangle + \mu [\langle \mathbf{x}(n) d(n) \rangle - \langle \mathbf{x}(n) \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \rangle] \\ &= \langle \mathbf{w}(n) \rangle + \mu [\mathbf{p} - \mathbf{R} \langle \mathbf{w}(n) \rangle] . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Hier ist wieder \mathbf{R} die Autokorrelationsmatrix des Signals $x(n)$ und \mathbf{p} der Kreuzkorrelationsvektor von $\mathbf{x}(n)$ und $d(n)$. Es ist zu beachten, dass (2.44) nahezu exakt der Formel der Methode des steilsten Abstiegs (2.39) entspricht. Der einzige Unterschied ist, dass in (2.44) nicht der Momentanwert der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ gegen den optimalen Filterwert \mathbf{w}_{opt} strebt, sondern ihr zeitlicher Mittelwert $\langle \mathbf{w}(n) \rangle$. Es wird hier also im zeitlichen Mittel eine Anpassung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ ausgeführt, die eine größtmögliche Gütemaßverringerung, also dessen steilsten Abstieg bewirkt. Bei jedem einzelnen Schritt der Rekursion wird es dagegen eine zufällige Abweichung der aktuell ausgeführten Koeffizientenanpassung von der theoretisch optimalen Anpassung geben. Der Grund hierfür ist die in Abschnitt 2.3.3 beschriebene Annäherung des Gradienten des gemittelten Fehlerquadrats durch den Augenblickswert des Fehlerquadrats.

Durch die Ersetzung

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} \quad (2.45)$$

kann (2.44) überführt werden in

$$\langle \mathbf{u}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \langle \mathbf{u}(n) \rangle - \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{opt}} + \mu \mathbf{p}. \quad (2.46)$$

Es werden nun also nicht mehr die absoluten Werte der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ betrachtet, sondern ihre Abweichungen von den optimalen Filterwerten \mathbf{w}_{opt} .

Nach (2.32) entfallen in (2.46) die letzten beiden Summanden und es verbleibt

$$\langle \mathbf{u}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \langle \mathbf{u}(n) \rangle. \quad (2.47)$$

Da die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} symmetrisch ist (s. (2.30)), ist sie gleichzeitig auch diagonalähnlich, und es ist folgende Zerlegung durchführbar [26]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_R \mathbf{V}^T. \quad (2.48)$$

Die Matrix \mathbf{V} setzt sich aus den linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix \mathbf{R} zusammen. Da \mathbf{R} nach (2.30) symmetrisch ist, ist \mathbf{V} eine orthonormale Matrix [109] und es gilt $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$. Die Matrix $\mathbf{\Lambda}_R$ ist eine Diagonalmatrix, und enthält die L Eigenwerte von \mathbf{R} . Man erhält so

$$\langle \mathbf{u}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_R \mathbf{V}^T) \langle \mathbf{u}(n) \rangle. \quad (2.49)$$

Mit einer weiteren Ersetzung durch die lineare Umformung

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{V}^T \mathbf{u}(n) \quad (2.50)$$

geht aus (2.49) die Beziehung

$$\langle \mathbf{z}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R) \langle \mathbf{z}(n) \rangle \quad (2.51)$$

hervor. Auf Grund der Diagonalität von $\mathbf{\Lambda}_R$ kann diese Matrixgleichung zerlegt werden in L einzelne, voneinander unabhängige Gleichungen:

$$\langle z_l(n+1) \rangle = (1 - \mu \lambda_l^R) \langle z_l(n) \rangle. \quad (2.52)$$

Hierbei ist $l = 1, \dots, L$, und L die Anzahl der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$. Die Lösung dieser Differenzgleichung ist direkt erkennbar. Sie lautet

$$\langle z_l(n) \rangle = (1 - \mu \lambda_l^R)^n \langle z_l(0) \rangle. \quad (2.53)$$

Die Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ sollen sich im Laufe der Zeit asymptotisch an die optimalen Koeffizienten \mathbf{w}_{opt} annähern. Aufgrund von (2.45) und (2.50) gelte also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_l(n) \rangle = 0 \quad \forall l. \quad (2.54)$$

Dies kann nur der Fall sein, falls in (2.53) gilt

$$|1 - \mu \lambda_l^R| < 1 \quad (2.55)$$

bzw.

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_l^R} . \quad (2.56)$$

Da dieser Zusammenhang für alle Eigenwerte λ_l^R , mit $l = 1, \dots, L$ gelten muss, folgt aus (2.56), dass

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}^R} \quad (2.57)$$

notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der L durch (2.56) gegebenen Gleichungen ist. Hierbei ist λ_{\max}^R der maximale für \mathbf{R} auftretende Eigenwert. Da λ_{\max}^R in der Praxis nur mit sehr großem Aufwand berechnet werden kann, wird sein Wert für eine anwendungsgerechte Formel durch die Summe aller Eigenwerte von \mathbf{R} ersetzt. Diese kann leicht bestimmt werden, da sie der Summe der Hauptdiagonalelemente, also der Spur von \mathbf{R} entspricht. Gemäß Formel (2.30) gilt also

$$\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l^R = \text{Spur} (E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\}) = E\{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)\} =: LP_x . \quad (2.58)$$

Hierbei bezeichnet P_x die Signalleistung von $x(n)$. Sie kann angenähert werden durch

$$P_x \approx \frac{1}{L} \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) . \quad (2.59)$$

Durch Einsetzen in (2.57) ergibt sich jetzt eine anschauliche und gut auswertbare Formel zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen.

$$0 < \mu < \frac{2}{LP_x} \approx \frac{2}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} . \quad (2.60)$$

Es ist hier anzumerken, dass die durch (2.60) gegebene Obergrenze der Schrittweite μ lediglich einen theoretischen Idealwert darstellt. In der Praxis wird man in der Regel deutlich kleinere Werte verwenden müssen, um konvergentes Verhalten des Algorithmus zu erreichen. Trotzdem ist aber der in Formel (2.60) gegebene Zusammenhang von Wert für die praktische Anwendung. Die indirekt proportionale Abhängigkeit der maximal zulässigen Schrittweite μ von der Signalleistung P_x bleibt nahezu immer zumindest näherungsweise erhalten. Diesen Umstand kann man sich für die im Abschnitt 2.3.7 beschriebene Schrittweitenormierung zu Nutze machen.

2.3.5 Verbleibender Fehler der Gütemaßminimierung

In diesem Abschnitt soll der minimal erreichbare Wert $E\{e^2\}_{\min}$ des Gütemaßes bestimmt werden, der bei der Anwendung des LMS-Algorithmus verbleibt. Der hier

gesuchte Minimalwert setzt sich im Wesentlichen aus zwei Anteilen zusammen: Einem grundsätzlichen Fehler $E\{e^2\}_{\min}^0$, der durch die gemäß Formel (2.32) analytisch ermittelten Filterkoeffizienten \mathbf{w}_{opt} gegeben ist, und einem zusätzlichen Anteil $E\{e^2\}_{\min}^{\text{LMS}}$, der durch die Anwendung des LMS-Algorithmus nach (2.42) entsteht.

Eine Formel zur Bestimmung des grundsätzlich verbleibenden Fehlers $E\{e^2\}_{\min}^0$ ergibt sich, wenn man das mit der Gleichung (2.32) berechnete optimale Filter \mathbf{w}_{opt} in die Gleichung (2.31) zur Berechnung des Gütemaßes $E\{e^2\}$ einsetzt:

$$E\{e^2\}_{\min}^0 = E\{d^2\} - \mathbf{p}^T \mathbf{w}_{\text{opt}} . \quad (2.61)$$

Dies ist der kleinste Fehler, der überhaupt durch die hier untersuchte Signalauslöschung mittels Filteranpassung erreicht werden kann. Er gilt für die oben beschriebenen rekursiven Methoden ebenso wie für die zu Grunde gelegte analytische Berechnung.

Der zusätzliche Anteil $E\{e^2\}_{\min}^{\text{LMS}}$ des Restfehlers entsteht dadurch, dass bei der rekursiven Berechnung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$, die nach dem Verfahren des steilsten Abstiegs ausgeführt wird, nicht der Gradient $\nabla\xi(n)$ des tatsächlichen Gütemaßes verwendet werden kann, sondern nur der Gradient des geschätzten Gütemaßes, nämlich $\nabla\hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n)$. Es entsteht dadurch ein stochastischer Fehler des verwendeten Gradienten, der wiederum eine stochastische Abweichung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ bewirkt. Es kommt so zu einem zusätzlichen Rauschanteil im Fehlersignal $e(n)$. Dieser kann gemäß [103] näherungsweise durch den Ausdruck

$$E\{e^2\}_{\min}^{\text{LMS}} \approx \frac{\mu}{2} LP_x E\{e^2\}_{\min}^0 \quad (2.62)$$

beschrieben werden. Der gesamte verbleibende Fehler ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} E\{e^2\}_{\min} &= E\{e^2\}_{\min}^0 + E\{e^2\}_{\min}^{\text{LMS}} \\ &\approx \left(1 + \frac{\mu}{2} LP_x\right) E\{e^2\}_{\min}^0 . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Der mit dem optimalen Filter \mathbf{w}_{opt} minimal erreichbare Restfehler $E\{e^2\}_{\min}^0$ hängt davon ab, wie groß der Signalanteil in $d(n)$ ist, der sich über eine lineare Übertragung aus dem Signal $x(n)$ (s. Bild 2.1) ergibt [50]. Sofern also $P(z)$ ein ideal lineares System ist und keine Störeinflüsse außer den in $x(n)$ erfassten vorliegen, wird auch ein verschwindender Restfehler $E\{e^2\}_{\min}^0$ möglich sein. $P(z)$ ist dann nämlich durch ein lineares FIR-Filter von ausreichend hoher Ordnung beliebig gut darstellbar (Stabilität von $P(z)$ vorausgesetzt), und gemäß Bild 2.1 kann eine vollständige Auslöschung erreicht werden.

2.3.6 Dynamik der Filteradaption

Im Abschnitt 2.3.4 wurde mit (2.47) eine homogene Differenzgleichung aufgestellt, aus der anschließend die entkoppelte Form (2.51) gewonnen werden konnte. Diese erlaubt eine vereinfachte Analyse der Systemeigenschaften und eine anschauliche Untersuchung der Dynamik der LMS-Filteradaption. Wird die Schrittweite μ des Algorithmus ausreichend klein gewählt, so dass er nur langsam konvergiert, so kann die Lösung (2.53) der Differenzgleichung (2.51) durch den Ausdruck

$$\langle z_l(n) \rangle \approx e^{-\mu\lambda_l^R n} \langle z_l(0) \rangle \quad (2.64)$$

angenähert werden. Es gilt hier wieder $l = 1, \dots, L$.

In (2.64) kann nun $1/\mu\lambda_l^R$ als eine zeitproportionale Konstante betrachtet werden, die angibt, wie viele Abtastschritte benötigt werden, bis die Größe $\langle z_l(n) \rangle$ auf das $\frac{1}{e}$ -fache ihres Startwertes $\langle z_l(0) \rangle$ abgefallen ist. Geht man von der Zahl der Abtastschritte auf die absolut benötigte Zeit über, so erhält man Zeitkonstanten τ_l , die mit der Formel

$$\tau_l \approx \frac{T_A}{\mu\lambda_l^R} \quad (2.65)$$

berechnet werden können. T_A ist hierbei die Abtastzeit des Algorithmus.

Über die Gesamtkonvergenz des Algorithmus kann gesagt werden, dass sie im Wesentlichen durch die Zeitkonstanten der am stärksten angeregten Moden der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ festgelegt sein wird. Sicher ist dabei, dass die Geschwindigkeit der Gesamtkonvergenz nach unten hin begrenzt ist durch die langsamste Mode, also durch die größte Zeitkonstante und nach oben hin durch die schnellste Mode und somit die kleinste Zeitkonstante. Eine ausführliche Analyse der Dynamik der Filteradaption speziell für den vorliegenden Anwendungsfall wird im Kapitel (6) erfolgen.

2.3.7 Modifikationen des Algorithmus

Die Grundform des LMS-Algorithmus ist durch die rekursive Berechnungsformel (2.42) gegeben. Um diese auf eine für die Anwendung geeignete Form zu bringen, müssen zwei Modifizierungen vorgenommen werden. Diese werden im Folgenden beschrieben.

Normierung der Schrittweite

Eine der erforderlichen Modifikationen der Berechnungsvorschrift (2.42) ist die Normierung der Schrittweite μ . Grund für diese Maßnahme ist die in Abschnitt 2.3.4 festgestellte Abhängigkeit des Konvergenzbereichs des Algorithmus von der Koeffizientenzahl L des Filters W und der Signalleistung P_x des Referenzsignals $x(n)$. Gemäß Ungleichung (2.60) verhält sich die maximal einstellbare Schrittweite indirekt proportional zu dem Produkt LP_x . Diese Abhängigkeit kann kompensiert werden, indem in Formel (2.42) die ursprünglich konstante Schrittweite μ durch den normierten Wert $\frac{\alpha}{LP_x(n)}$ ersetzt wird. Entsprechend (2.60) sollte für α hierbei gelten

$$0 < \alpha < 2 . \tag{2.66}$$

Man erhält so die neue LMS-Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\alpha}{LP_x(n)} \mathbf{x}(n)e(n) . \tag{2.67}$$

Der derart abgewandelte Algorithmus wird als *normierter LMS-Algorithmus* bezeichnet. Seine Stabilität ist weitgehend unabhängig von der Höhe der Eingangsleistung P_x sowie der Filterordnung L .

Die Struktur des modifizierten Algorithmus ist in Bild 2.3 zu sehen. Für eine einfache Implementierung wurde hier der Ausdruck $LP_x(n)$ durch das Produkt $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)$ angenähert. Für die praktische Anwendung ist es außerdem wichtig, bei der Berechnung der Schrittweite eine untere Grenze $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$ für die eingerechnete Signalleistung $P_x(n)$ festzulegen. Tut man dies nicht, so wird die Schrittweite gegen unendlich hohe Werte streben, wenn ein verschwindendes Referenzsignal vorliegt.

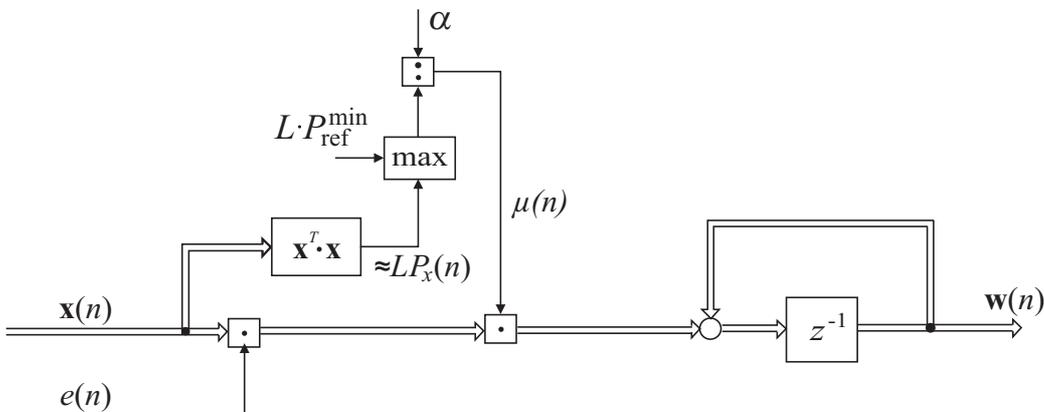


Bild 2.3: LMS-Algorithmus mit Schrittweitenormierung

Einführung eines Vergessensfaktors (Leaky LMS)

Eine weitere für den praktischen Einsatz notwendige Modifizierung des LMS-Algorithmus ist die Einführung des so genannten Vergessensfaktors ν [103]. Dieser soll ein unerwünschtes Driften der Koeffizienten des adaptiven Filters $W(z)$ in Richtung unendlich hoher Werte vermeiden. Eine solche Drift kann entstehen, wenn der LMS-Algorithmus durch das Referenzsignal spektral nicht ausreichend angeregt wird (vgl. Kapitel 6). Der Vergessensfaktor ν wirkt diesem Effekt entgegen, indem er gemäß der Formel

$$\mathbf{w}(n+1) = \nu \mathbf{w}(n) + \frac{\alpha}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \mathbf{x}(n)e(n) \quad (2.68)$$

auf die für die Rekursion zwischengespeicherten Werte der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ Einfluss nimmt. Es muss gelten $0 \leq \nu \leq 1$, wobei für die Anwendung normalerweise ein Wert für ν gewählt wird, der sehr nahe bei Eins liegt (z. B. $\nu = 0.9999$). Als Folge wirken sich lange zurückliegende Filterkoeffizientenwerte nicht mehr im aktuellen Wert aus. Alternativ kann Formel (2.68) auch so interpretiert werden, dass die Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ durch ν fortlaufend eine gewisse Verkleinerung erfahren. Bei geeigneter Wahl von ν sollte die Verkleinerung zum einen stark genug sein, um die typischerweise langsamen Drifterscheinungen zu unterbinden, zum anderen aber deutlich schwächer bleiben als die adaptive Wirkung durch den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (2.68). Anschaulich betrachtet wird hier eine „Leck“-Wirkung (engl. Leakage) herbeigeführt, da die Filterkoeffizienten kontinuierlich in Richtung verschwindender Werte streben, ähnlich wie der Füllstand eines undichten Flüssigkeitsbehälters. Ein nachteiliger Effekt des Vergessensfaktors ist die Verminderung der erreichbaren Güte der Schwingungsdämpfung. Die Unterdrückung wird umso schwächer ausfallen, je kleiner der Wert von ν gewählt wird. In der Literatur werden Verfahren vorgeschlagen, mit denen die auftretende Performance-Verschlechterung minimiert werden kann (z. B. [66, 67]).

Es sei hier nebenbei erwähnt, dass sich der Vergessensfaktor durch seine Wirkung auf die Dämpfungsgüte gut als Mittel zum Ein- und Ausschalten der Vibrationsdämpfung eignet. Hierzu wird er entweder auf den gewünschten Betriebswert oder zu Null gesetzt. Bei dieser Vorgehensweise besteht keine Gefahr, dass aufgrund der Schaltvorgänge Instabilitäten auftreten.

In der hier beschriebenen Form wird der Algorithmus als Leaky-LMS-Algorithmus bezeichnet. Seine Umsetzung im Strukturbild ist, zusammen mit der Schrittweitenormierung, in Bild 2.4 wiedergegeben.

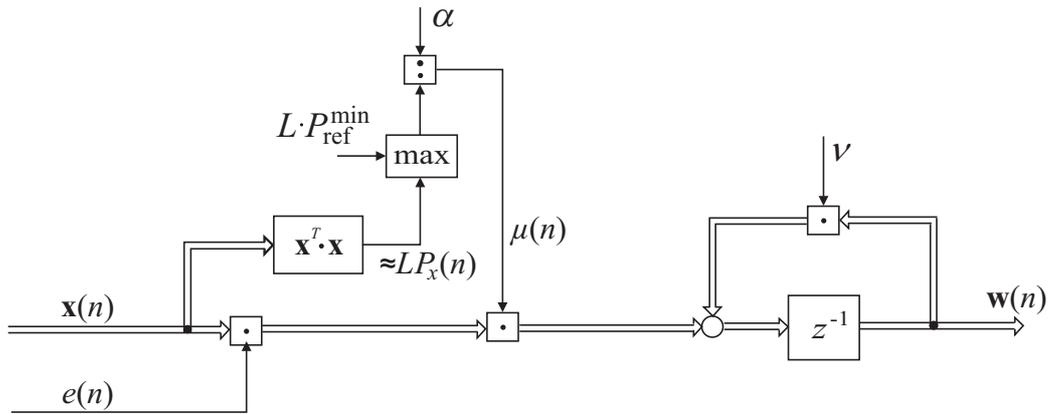


Bild 2.4: LMS-Algorithmus mit Schrittweitenormierung und Vergessensfaktor

Kapitel 3

Methoden der aktiven Schwingungsdämpfung

Das Prinzip der aktiven Schwingungsdämpfung besteht darin, unerwünschte Schwingungen durch Überlagerung eines Gegensignals auszulöschen. Das Gegensignal entspricht dem Betrag nach dem ursprünglichen Signal, ist diesem gegenüber jedoch um 180° phasenverschoben. Systeme, die zur Generierung eines solchen Gegensignals geeignet sind, können grundsätzlich nach zwei verschiedenen Prinzipien (oder deren Kombination) eingerichtet werden. Zum einen ist dies die Umsetzung als Regelkreis mit Rückkopplung, zum anderen die Realisierung als Störgrößenaufschaltung. Diese beiden Strukturen sowie ihre wesentlichen Vorteile und Nachteile werden zum Anfang dieses Kapitels beschrieben. Im Anschluss werden verschiedene wichtige Verfahren vorgestellt, die speziell nach dem Prinzip der Störgrößenaufschaltung arbeiten.

3.1 Konkurrierende Grundstrukturen

3.1.1 Regelung

In Bild 3.1 ist die Struktur eines Regelkreises zur aktiven Schwingungsdämpfung dargestellt. Messtechnische Voraussetzung für die Einsetzbarkeit einer solchen Störunterdrückung ist lediglich, dass eine Erfassung der Vibrationen am erwünschten Auslöschungsort möglich ist. Problematisch ist jedoch, dass aufgrund der Signalarückkopplung ein stabiles Verhalten des Systems nicht selbstverständlich gegeben ist. Es ist daher eine sorgfältige Stabilitätsprüfung notwendig.

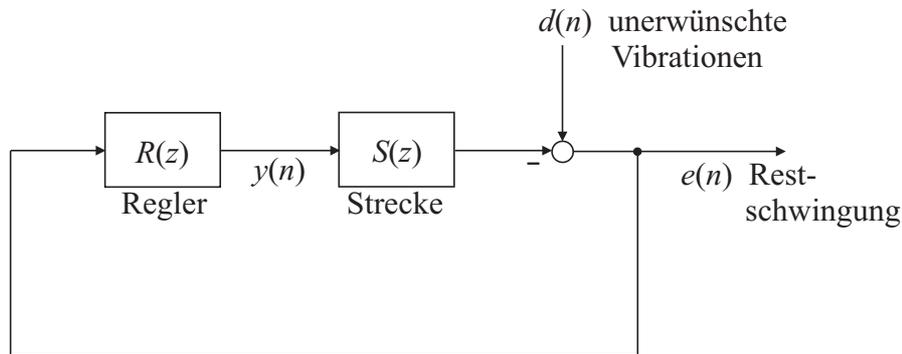


Bild 3.1: Schwingungskompensation durch Rückkopplung

Entscheidend für die Wirksamkeit der implementierten Schwingungsdämpfung ist die Störübertragungsfunktion bzw. Empfindlichkeitsfunktion (engl. Sensitivity Function) $\bar{T}(s)$ des Regelkreises. Sie gibt den Frequenzgang der Übertragung vom Störsignal $d(n)$ zur Restschwingung $e(n)$ gemäß

$$\bar{T}(j\omega) = \frac{E(e^{j\omega T})}{D(e^{j\omega T})} = \frac{1}{1 + S(e^{j\omega T})R(e^{j\omega T})} \quad (3.1)$$

an. Eine Verringerung der störenden Schwingungen wird für die Frequenzen erreicht, für die gilt $|\bar{T}(j\omega)| < 1$. Eine drastische Einschränkung der erreichbaren Dämpfungsgüte ergibt sich durch das Empfindlichkeitstheorem von Bode [5, 27, 36, 86]. Dieses besagt im Allgemeinen, dass eine Verbesserung der Störunterdrückung in einem bestimmten Frequenzbereich zwangsläufig zu einer Verschlechterung außerhalb dieses Frequenzbereichs führen muss. Da im vorliegenden Anwendungsfall davon ausgegangen werden kann, dass der offene Regelkreis stabil ist, gilt das Bode-Theorem für die Differenzordnung $\delta \geq 2$ der offenen Kette in der Form

$$\int_{\omega=0}^{\infty} \log(|\bar{T}(j\omega)|) d\omega = 0. \quad (3.2)$$

Eine Schwingungsdämpfung im gesamten Frequenzbereich ist folglich nicht möglich. Bei Instabilität der offenen Kette ergibt sich ein noch höherer Wert des Integrals und somit eine weitere Verringerung der erreichbaren Gesamt-Dämpfungsgüte.

Es ist hier anzumerken, dass für Differenzordnungen der offenen Kette von $\delta < 2$ eine Verringerung der Störschwingungen im gesamten Frequenzbereich möglich ist. Dieser Fall kann bei einfachen mechanischen Systemen typischerweise mit einer proportionalen Geschwindigkeitsrückführung erreicht werden. Bei der vorliegenden Anwendung führt dieser Ansatz aber nicht zu entsprechenden Ergebnissen. Für

die hier relevanten Übertragungstrecken (s. Abschnitt 7.1) ergibt sich eine höhere Differenzordnung und es gilt zwangsläufig Formel (3.2). Eine wirkungsvolle Schwingungsdämpfung kann dennoch eingerichtet werden, wenn es gelingt, den Bereich der Verstärkung der Störschwingungen in Frequenzbänder zu legen, die für die jeweils betrachtete Anwendung nicht relevant sind. Bei zeitdiskreten Regelsystemen wird diese Vorgehensweise allerdings durch die zwangsläufige Bandbegrenzung der Signalverarbeitung erschwert.

Ein Vorteil der klassischen Regelstruktur mit ihrer normalerweise nicht allzu hohen Reglerordnung ist, dass ihre Ausführung auf dem Mikrocontroller nur wenig Rechenaufwand und Speicherplatz erfordert. Es ist hier auch eine Umsetzung mit verhältnismäßig hoher Abtastrate möglich.

3.1.2 Störgrößenaufschaltung

Ein anderer, weniger kritischer Ansatz kann angewendet werden, wenn die Messung der Störschwingungen nicht am selben Ort erfolgt wie die Auslöschung, so dass in der Übertragung zwischen beiden eine Dynamik liegt. Auslöschung und Messung sind in diesem Fall „noncolocated“, und das im letzten Abschnitt vorgestellte Bode-Theorem ist nicht mehr zwangsläufig gültig [36]. Es wird eine effektive Schwingungsdämpfung über den gesamten Frequenzbereich möglich.

Eine Messung, die nicht direkt am Auslöschungsort erfolgt, wird auch als Referenzmessung bezeichnet. Es ist vorteilhaft, wenn diese an einer Stelle im System erfolgt, an der der Einfluss der Quelle der Störschwingungen möglichst stark ist und der Einfluss des auslöschenden Gegensignals möglichst schwach. Es kann dann eine Störgrößenaufschaltung eingerichtet werden (engl. feedforward control), bei der im Idealfall die Rückwirkung des Gegensignals auf die Referenzmessung vernachlässigbar ist. Eine entsprechende Struktur ist in Bild 3.2 wiedergegeben. Eine vollständige Auslöschung des Fehlersignals $e(n)$ wird hier sicher dann erreicht, wenn für das Filter $W(z)$ gilt $W(z) = P(z)S^{-1}(z)$.

Instabilität kann bei dem dargestellten Verfahren nicht auftreten. Es ist aber zu beachten, dass bei der Störgrößenaufschaltung zumindest für den Fall breitbandiger Anregung eine entscheidende Anforderung an die Totzeiten im System gegeben ist: Die Zeit, die benötigt wird, um aus dem Referenzsignal das Gegensignal $y_f(n)$ zu erzeugen, darf nicht länger sein als die Totzeit der Übertragungstrecke $P(z)$. Speziell wenn periodische Anregung vorliegt, muss diese Forderung aber nicht unbedingt

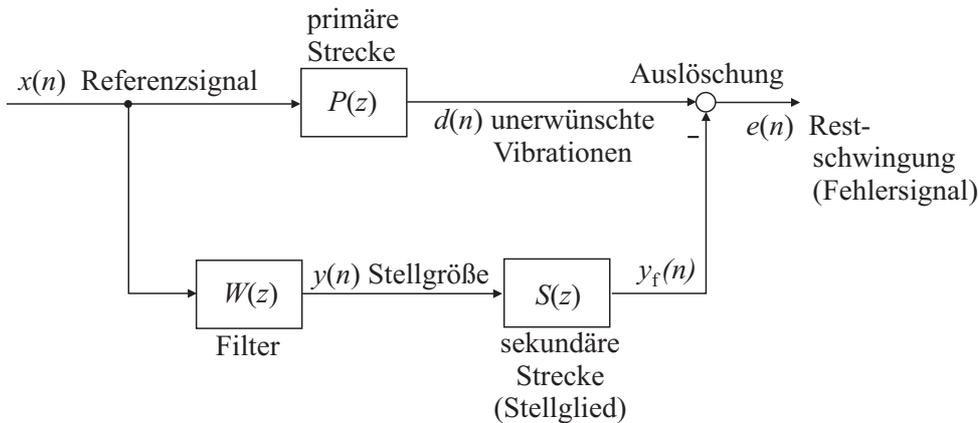


Bild 3.2: Schwingungskompensation durch Störgrößenaufschaltung

erfüllt sein [74, 50]. Durch geeignete Einstellung der Signalverzögerung durch das Filter $W(z)$ kann das Gegensignal um eine oder auch mehrere Signalperioden verspätet auf die Störung geschaltet werden, so dass vollständige Auslöschung immer möglich ist. Bei variierenden Signalfrequenzen folgt allerdings, dass eine fortlaufende Anpassung des Filters durchgeführt werden muss, was einen verhältnismäßig hohen Rechenaufwand erfordert. Eine solche Adaption wird aber in der Praxis sowieso immer dann notwendig sein, wenn langsam wirkende Zeitvarianzen der Übertragungsstrecke $P(z)$ vorliegen, die ausgeglichen werden müssen. Grundlegende, hierzu geeignete Verfahren werden in diesem Kapitel im Abschnitt 3.3 beschrieben.

3.2 Störgrößenaufschaltung mit konstanten Parametern

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Weg zur Implementierung einer konstanten, also nicht adaptiven Störgrößenaufschaltung beschrieben. Es sei bereits darauf hingewiesen, dass diese Art der Störgrößenaufschaltung für die praktische Anwendung im Kraftfahrzeug *nicht* geeignet ist. Sie kann aber für Laborversuche am Prüfstand implementiert werden und ermöglicht eine Verdeutlichung der grundsätzlichen Problematiken bei der Anwendung der Störgrößenaufschaltung zur aktiven Vibrationsdämpfung.

Wie bereits bei der Einführung der Störgrößenaufschaltung im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, wird im Allgemeinen eine vollständige Kompensation des Si-

gnals $d(n)$ (s. Bild 3.2) erreicht, wenn im Zweig der Störaufschaltung ein Filter mit der Übertragungsfunktion $W(z) = P(z)S^{-1}(z)$ wirkt. In diesem Abschnitt sollen die entsprechenden Parameter eines solchen Systems $W(z)$ zunächst mittels Parameteridentifikation gemäß der im Abschnitt 2.2 beschriebenen Black-Box-Methode bestimmt werden. Auf den ersten Blick kommen hierzu hauptsächlich drei verschiedene Vorgehensweisen in Frage:

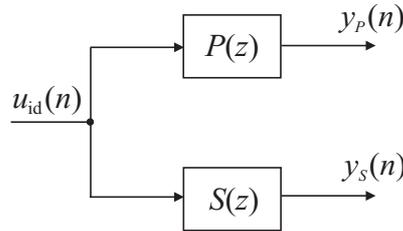
Verfahren 1: Die Strecken $P(z)$ und $S(z)$ werden zuerst getrennt voneinander identifiziert. Anschließend wird $S(z)$ zu $S^{-1}(z)$ invertiert und mit $P(z)$ multipliziert.

Problem: Die Streckenidentifikation am Schwingungsprüfstand liefert aufgrund der zeitdiskreten Natur der Streckenidentifikation typischerweise nichtminimalphasige Systembeschreibungen [2, 12]. Eine Invertierung führt entsprechend Abschnitt 2.1.3 zwangsläufig auf instabile Systeme $S^{-1}(z)$ bzw. $P(z)S^{-1}(z)$.

Verfahren 2: Es werden wiederum zwei getrennte Identifikationen für die Bestimmung von $P(z)$ und $S^{-1}(z)$ durchgeführt. Allerdings wird diesmal $S^{-1}(z)$ direkt identifiziert. Dies wird erreicht, indem bei der Parameterbestimmung das Eingangssignal $y(n)$ und Ausgangssignal $y_f(n)$ der Sekundären Strecke vertauscht werden. Eine solche Vorgehensweise ist – zumindest formal – immer zulässig.

Problem: Da die sekundäre Strecke $S(z)$ im betrachteten Aufbau totzeitbehaftet ist, müsste zwischen den Signalen $y_f(n)$ und $y(n)$ ein nichtkausales System identifiziert werden. Ein solches wird aber durch die mit Gleichung (2.2) angesetzte Systemstruktur nicht zugelassen. Bei Anwendung z. B. der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gemäß Abschnitt 2.2.1 gelingt es daher (zumindest bei sinnvoller Modellordnung) nicht, einen Parametersatz zu finden, für den das Gütemaß der Systemanpassung geringe Werte annimmt.

Verfahren 3: Das System $P(z)S^{-1}(z)$ wird direkt identifiziert durch Verwendung der in Bild 3.3 gezeigten Struktur. Es ist zu beachten, dass die Messung von $y_P(n)$ und $y_S(n)$ im real vorliegenden System nicht gleichzeitig erfolgen kann, da hier gemäß Bild 3.2 nur ihre Differenz $e(n)$ vorliegt. Dieses Problem kann aber leicht gelöst werden, indem $y_P(n)$ und $y_S(n)$ nacheinander in zwei getrennten Messungen bestimmt werden. Es muss lediglich für beide Messungen exakt dasselbe Testsignal

Bild 3.3: Struktur zur Identifikation von $P(z)S^{-1}(z)$

$u_{\text{id}}(n)$ aufgeschaltet werden. In Bild 3.3 gilt

$$\frac{Y_P(z)}{Y_S(z)} = \frac{P(z)U_{\text{id}}(z)}{S(z)U_{\text{id}}(z)} = P(z)S^{-1}(z) . \quad (3.3)$$

$P(z)S^{-1}(z)$ kann also zwischen dem fiktiven Eingangssignal $y_S(n)$ und dem Ausgangssignal $y_P(n)$ identifiziert werden. Die negative Totzeit der Strecke $S^{-1}(z)$ bereitet hier keine Probleme, wenn sie durch eine dem Betrage nach mindestens gleich große Totzeit der primären Strecke ausgeglichen wird. Genau in diesem Fall wird auch die allgemeinen Totzeitanforderung erfüllt sein, die im einführenden Abschnitt 3.1.2 angegeben wurde. In der Praxis kann dies erreicht werden, wenn es gelingt, die Referenzmessung des Signals $x(n)$ ausreichend weit „vorne“ im Signalweg auszuführen. Im realen Kraftfahrzeug wird dies mit einer Sensormessung der Motorvibrationen normalerweise nicht möglich sein. Am Prüfstand ist eine geeignete Konfiguration aber realisierbar. Hier wird (wie im Abschnitt 4 noch ausführlich beschrieben werden wird) die störende Vibration, die normalerweise über den Motor eingebracht wird, durch einen elektrodynamischen Aktor erzeugt. Wird bereits das rechnerseitige Ansteuersignal des Aktors als Referenzsignal verwendet, so besitzt die primäre Strecke eine hinreichend große Totzeit, um die der sekundären Strecke zu kompensieren. Nur mit einer derartigen experimentellen Konfiguration kann die Störgrößenaufschaltung mit konstantem Filter $W(z)$ effektiv eingerichtet werden. Um die Störgrößenaufschaltung auch für den realen Anwendungsfall einsetzen zu können, muss sie also zwangsläufig mit einer adaptiven Filteranpassung eingerichtet werden, so dass unter Ausnutzung der periodischen Natur der Störanregung die gegebene Totzeitanforderung umgangen werden kann.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass ein ähnlich anwendbares Verfahren wie das dritte hier vorgestellte auch vom Verfahren 2 abgeleitet werden kann. Hierzu müssen allerdings bei der direkten Bestimmung von $S^{-1}(z)$ die Messwertfol-

gen für $y_f(n)$ und $y(n)$ so gegeneinander verschoben werden, dass die Systemidentifikation das System $S^{-1}(z) \cdot z^{-n_s}$ liefert („delayed inverse modeling“ [103]). Ist $n_s \cdot T_A$ größer oder gleich der Totzeit der sekundäre Strecke, so gelingt die Identifikation. Das Gesamtsystem $P(z)S^{-1}$ kann dann bestimmt werden, indem der primären Strecke die entsprechende Totzeit gemäß $P(z) \cdot z^{n_s}$ entnommen, und das Produkt $P(z) \cdot z^{n_s} \cdot S^{-1}(z) \cdot z^{-n_s} = P(z)S^{-1}(z)$ gebildet wird. Auch hier muss natürlich die Totzeitanforderung der Störgrößenaufschaltung erfüllt sein. Das heißt, die Totzeit der primären Strecke muss größer sein als $n_s \cdot T_A$.

3.3 Adaptive Störgrößenaufschaltung

In den folgenden Abschnitten werden zwei grundlegende Verfahren zur Einrichtung von Störgrößenaufschaltungen mittels adaptiver Filterung vorgestellt. Ähnlich wie viele andere Algorithmen der aktiven Schwingungsdämpfung basieren sie auf dem LMS-Algorithmus und arbeiten letztlich nach dem Prinzip der Minimierung der mittleren Leistung des Störsignals.

3.3.1 Der FxLMS-Algorithmus

Mit dem LMS-Algorithmus kann gemäß Bild 2.1 eine Auslöschung des Signals $d(n)$ durch Überlagerung des negierten, durch das adaptive Filter $W(z)$ gelieferten Signals $y(n)$ erreicht werden. Dieser Umstand kann für die Einrichtung einer aktiven Vibrationsdämpfung genutzt werden, indem die Filteradaption für eine Störgrößenaufschaltung nach der in Bild 3.2 dargestellten Art eingesetzt wird. Die Strecke $P(z)$ entspricht hierbei im realen Aufbau dem Übertragungsverhalten von der Referenzmessung, die nahe der Quelle der Schwingungen erfolgt, zur Messung der störenden Schwingungen am Auslöschungsort. Das adaptive Filter $W(z)$ sowie der LMS-Algorithmus selbst sind in der Regel auf einem Mikroprozessorsystem implementiert.

Beim Einsatz in der betrachteten Anwendung ist zu berücksichtigen, dass das vom Filter $W(z)$ erzeugte Stellsignal $y(n)$ nicht direkt auf das zu unterdrückende Signal $d(n)$ wirken kann. Es wird vielmehr ein Aktor benötigt, der die erforderlichen mechanischen Gegenschwingungen erzeugt. Dieser Aktor ist Hauptbestandteil der in Bild 3.2 dargestellten sekundären Strecke $S(z)$. Insgesamt enthält die sekundäre Strecke die vollständige Signalübertragung vom digitalen Ansteuersignal $y(n)$ zum

digitalisierten Messsignal $e(n)$ der verbleibenden Schwingungen. Sie enthält also neben dem Aktor in der Regel auch analoge Filter zur Signalaufbereitung sowie die Übertragung der A/D-(analog/digital) und D/A-Wandler.

Bei Vorliegen einer sekundären Strecke $S(z)$ kann im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass der LMS-Algorithmus in seiner ursprünglichen Form konvergiert. Es gibt jedoch verschiedene Wege, die Strecke $S(z)$ bei der Implementierung des Algorithmus so zu berücksichtigen, dass sicher stabiles Verhalten eingestellt werden kann [50]. Die wohl am häufigsten eingesetzte Methode ist, das Referenzsignal $x(n)$ mit einem Abbild $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke zu filtern, bevor es dem LMS-Algorithmus zugeführt wird. Es ergibt sich auf diese Weise der so genannte Filtered-x-LMS-Algorithmus, kurz FxLMS-Algorithmus [63, 103, 73]. Seine Struktur ist im Bild 3.4 dargestellt. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Methode zu der gewünschten Funktion der Signalkompensation führt: Unter der Annahme, dass die Filteradaption verglichen mit den zeitlichen Vorgängen in den vorliegenden Signalen nur langsam verläuft, kann das Filter $W(z)$ als lineares Glied im Blockschaltbild betrachtet werden. Demzufolge ist es zulässig, die Reihenfolge von $W(z)$ und der sekundären Strecke $S(z)$ zu vertauschen. Nimmt man weiterhin an, dass das Filter $\hat{S}(z)$ exakt der Strecke $S(z)$ selbst entspricht, so können beide zusammen vor die vor ihnen liegende Verzweigung gezogen werden. Von hier aus kann $S(z)$ im Signalfluss noch weiter nach vorne verlegt werden, so dass die in Bild 3.5 dargestellte Struktur entsteht. Es ist zu erkennen, dass der LMS-Algorithmus hier in der ursprünglich

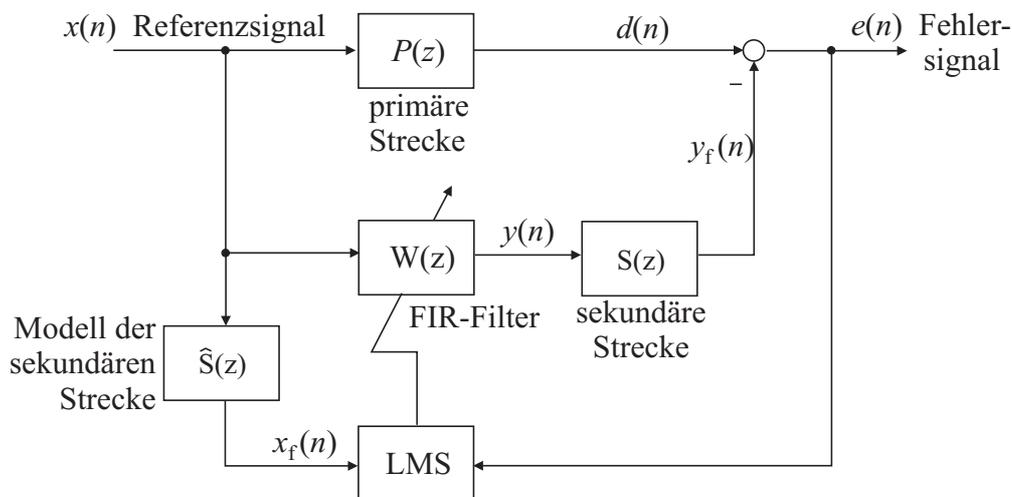


Bild 3.4: Der FxLMS-Algorithmus

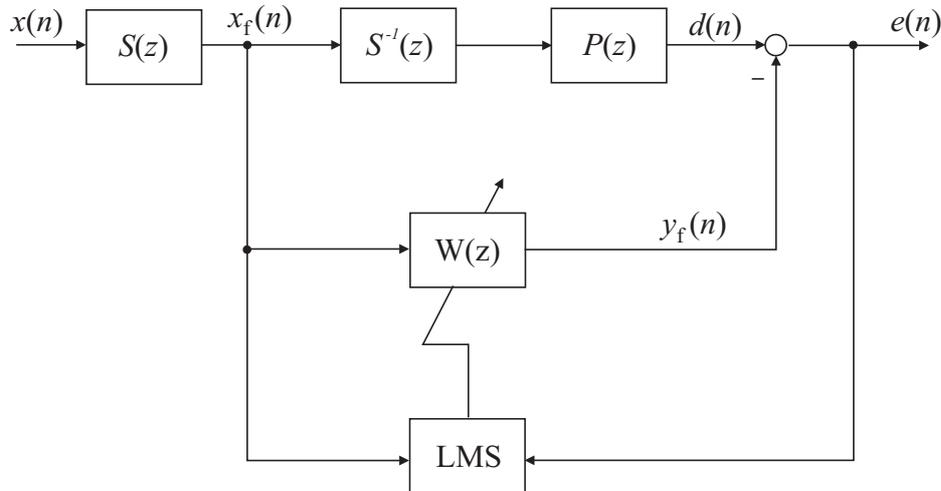


Bild 3.5: FxLMS-Algorithmus, umgeformt

beschriebenen Weise eine Filteradaption ausführt. Neu ist lediglich, dass anstelle der primären Strecke $P(n)$ jetzt das Produkt aus der primären Strecke und der invertierten sekundären Strecke $S^{-1}(z)$ durch das Filter $W(z)$ nachgebildet wird. Es wird also, zumindest für breitbandige Anregung, der Idealfall

$$W(z) = P(z)S^{-1}(z) \quad (3.4)$$

angestrebt. Liegt dieser vor, so werden die durch das Signal $d(n)$ gegebenen Vibrationen vollständig kompensiert, und das Fehlersignal $e(n)$ verschwindet. Wie sich im Kapitel 6 allerdings noch herausstellen wird, ist bei Vorliegen periodischer Anregung die Erfüllung von (3.4) nicht zwangsläufig erforderlich.

Für den FxLMS-Algorithmus bleiben im Wesentlichen die im Abschnitt 2.3 beschriebenen Eigenschaften des LMS-Algorithmus erhalten. Ein Unterschied ergibt sich allerdings aufgrund der sekundären Strecke für die Stabilitätsgrenze der Schrittweite μ . Die mit der Ungleichung (2.60) gegebene Obergrenze wird gegebenenfalls deutlich abgesenkt. In [19] wird hierzu die heuristische Formel

$$0 < \mu < \frac{2}{LP_x + t_S} \quad (3.5)$$

aufgestellt, worin die Größe t_S der Totzeit entspricht, die der sekundären Strecke zugeordnet werden kann. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten wurden allerdings teilweise deutlich niedrigere Grenzen ermittelt. Diese Feststellung deckt sich mit den neueren Ergebnissen, die in [100] präsentiert wurden.

Für die in dieser Arbeit angestrebten Laboruntersuchungen werden bereits mit der von der Stabilitätsgrenze in Ungleichung (2.60) abgeleitete Schrittweitenormierung gemäß Formel (2.67) ausreichend gute Ergebnisse erreicht. Es muss hierzu lediglich der Parameter α geeignet angepasst werden.

Eine wichtige Eigenschaft des FxLMS-Algorithmus ist, dass er verhältnismäßig unempfindlich ist gegen Fehler des Streckenmodells $\hat{S}(z)$. Stabilität des Algorithmus kann sichergestellt werden, solange der Fehler Δ_φ des Phasenwinkels im Bereich $-90^\circ < \Delta_\varphi < 90^\circ$ bleibt. Allerdings wird innerhalb dieses Bereichs je nach Größe von Δ_φ die Stabilitätsgrenze und somit die einstellbare Schrittweite des Algorithmus variieren. Der genaue Zusammenhang ist dabei nicht einfach anzugeben [87]. Für bestimmte Werte der Abweichung kann es sogar zu einer Verbesserung der Stabilität kommen. Fehler der Amplitude des Modells $\hat{S}(z)$ führen dagegen zu einer Absenkung der Stabilitätsgrenze mit einem indirekt proportionalen Zusammenhang.

Die hier beschriebene klassische Einsatzweise des FxLMS-Algorithmus wird auch als direkte Form bezeichnet [50]. Neben dieser kommen in der Praxis auch abgewandelte Formen wie die parallele Form [28] bzw. die Kaskadenform [64] zum Einsatz. Diese Verfahren ergeben sich allerdings unmittelbar aus der direkten Form und werden, soweit sinnvoll, im Kapitel 7 vorgestellt.

3.3.2 Erweiterung zu FuLMS und SHARF

Der LMS-Algorithmus und der abgeleitete FxLMS-Algorithmus erreichen eine Signalauslöschung durch Anpassung eines FIR-Filters. Dies bringt den Vorteil unbedingter Stabilität des Filters mit sich. Auf der anderen Seite sind aber auch diverse Vorteile denkbar, die sich durch die Verwendung von IIR-Filtern (s. Abschnitt 2.1.2) [21] ergeben. Hierzu sind im wesentlichen zwei Punkte zu nennen [50]:

1. Ein IIR-Filter kann in vielen Fällen bei deutlich geringerer Filterordnung dieselbe Performance wie ein FIR-Filter erreichen. Grund hierfür ist die interne Signalarückkopplung, die, anders als bei FIR-Filtern, unendlich lange Impulsantworten bei endlicher Anzahl von Filterkoeffizienten möglich macht.

2. IIR-Filter können die Pole und Nullstellen realer physikalischer Systeme exakt nachbilden. FIR-Filter dagegen können nur Annäherungen der Pole eines Systems wiedergeben. Aus diesem Grund kann mit IIR-Filtern die verbleibende Restschwingung noch weiter verringert werden.

Insbesondere die potenzielle Möglichkeit einer Reduktion der Filterordnung macht den Einsatz von IIR-Filtern in der hier betrachteten Anwendung interessant. Von den verschiedenen Verfahren, die zu einer entsprechenden Filteradaption zur Verfügung stehen [84], ist der in Bild 3.6 illustrierte Filtered-u-LMS (FuLMS)-Algorithmus [23, 22] besonders geeignet. Er ist effektiv und erfordert zugleich nur ausgesprochen wenig Rechenaufwand. Der dargestellte Einsatz zweier adaptiver FIR-Filter ergibt

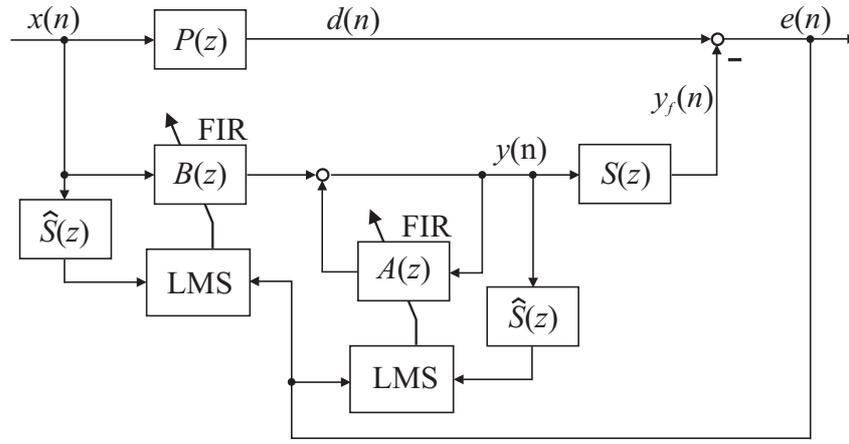


Bild 3.6: FuLMS-Algorithmus

sich, wenn ein IIR-Filter in ähnlicher Form wie in (2.4) aufgestellt wird als

$$G(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)}, \quad (3.6)$$

mit

$$A(z) = -a_1 z^{-1} - \dots - a_{L_a} z^{-L_a} \quad (3.7)$$

und

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{L_b-1} z^{-L_b+1}. \quad (3.8)$$

L_a und L_b bezeichnen hier die Anzahl der Koeffizienten der Polynome $A(z)$ und $B(z)$. Für eine kompakte Beschreibung des vorliegenden Systems können die Koeffizienten in Vektoren geschrieben

$$\mathbf{a}(n) = [-a_1(n) \ \dots \ -a_{L_a}(n)]^T \quad (3.9)$$

$$\mathbf{b}(n) = [b_0(n) \ b_1(n) \ \dots \ b_{L_b-1}(n)]^T \quad (3.10)$$

und anschließend weiter zusammengefasst werden in einem Gesamtvektor

$$\mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(n) \\ \mathbf{a}(n) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Werden weiterhin mit

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ \cdots \ x(n - L_b + 1)]^T \quad (3.12)$$

und

$$\mathbf{y}(n) = [y(n) \ \cdots \ y(n - L_a + 1)]^T \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Vektoren für die Signale $x(n)$ und $y(n)$ gebildet, so kann mit dem verallgemeinerten Referenzvektor

$$\mathbf{u}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \mathbf{y}(n - 1) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

das Signal $y(n)$ beschrieben werden als

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n). \quad (3.16)$$

Die rekursive Formel zur Bestimmung des optimalen Satzes von Filterkoeffizienten kann, ähnlich wie schon beim LMS-Algorithmus, über die Methode des steilsten Abstiegs hergeleitet werden. Ziel ist dabei wieder die Minimierung des Fehlersignals $e(n)$. Der Gradient des Gütemaßes ist auch hier

$$\nabla \hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n) = 2[\nabla e(n)]e(n). \quad (3.17)$$

Unter Annahme von langsamer Konvergenz liefert die konsequente Anwendung der Methode des steilsten Abstiegs [50, 80] eine allgemeine Form des LMS-Algorithmus, den so genannten recursive LMS (RLMS) [23], zur Anpassung des IIR-Filters

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \left(\hat{s}(n) \star [y_{b_0}(n) \ \cdots \ y_{b_{L_b-1}}(n) \ y_{a_1}(n) \ \cdots \ y_{a_{L_a}}(n)]^T \right) e(n). \quad (3.18)$$

Das Symbol \star entspricht hierin der zeitdiskreten Faltung und $\hat{s}(n)$ der Beschreibung des Modells der sekundären Strecke im Zeitbereich. In (3.18) sei

$$y_{b_i}(n) = x(n-i) + \sum_{k=1}^{L_a} b_k(n)y_{b_i}(n-k) \approx \frac{\partial y(n)}{\partial b_i(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, L_b - 1 \quad (3.19)$$

sowie

$$y_{a_j}(n) = y(n - j) + \sum_{l=0}^{L_a} a_l(n)y_{a_j}(n - l) \approx \frac{\partial y(n)}{\partial a_j(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, L_a. \quad (3.20)$$

Die mit den Gleichungen (3.18-3.20) gegebene rekursive Berechnungsvorschrift erfordert einen ausgesprochen hohen Rechenaufwand. Abhilfe kann hier geschaffen werden, indem gemäß [23] die Rekursionen in den Formeln (3.19) und (3.20) vernachlässigt werden. Es ergibt sich dann die einfache Formel

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \mu \hat{\mathbf{s}}(n) \star \mathbf{u}(n)e(n) \quad (3.21)$$

$$= \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{u}_f(n)e(n) \quad (3.22)$$

des FuLMS-Algorithmus wie er in Bild 3.6 dargestellt ist.

Es ist zu beachten, dass die Methode des steilsten Abstiegs bei der Anwendung auf IIR-Filter nicht nur auf ein einziges Minimum des Gütemaßes führt. Es ergeben sich vielmehr mehrere lokale Minima. Folglich ist im Allgemeinen nicht sichergestellt, dass sich tatsächlich die bestmögliche Störunterdrückung einstellt. Wie sich jedoch in der Anwendung herausgestellt hat, kann bei geeigneter Parametrierung in der Regel trotzdem eine zuverlässig effektive Arbeitsweise erreicht werden.

Wie eingangs bereits erwähnt, ist bei der Adaption von IIR-Filtern im Allgemeinen nicht sichergestellt, dass nicht im Verlauf der Parameteranpassung eine oder mehrere Polstellen den Einheitskreis verlassen und folglich instabiles Verhalten auftritt. Diese Problematik kann auf verschiedene Arten entschärft werden. Eine Möglichkeit ist der Einsatz des im Abschnitt 2.3.7 beschriebenen Vergessensfaktors. Allerdings führt dies zu einer deutlichen Verschlechterung der erreichbaren Dämpfungsgüte. Nach einem anderen Ansatz arbeitet der so genannte SHARF-Algorithmus (Simplified Hyperstable Adaptive Recursive Filter). Er ergibt sich aus Überlegungen der nichtlinearen Stabilitätstheorie [46, 53] und kann als eine einfache Modifikation des FuLMS-Algorithmus betrachtet werden. Entsprechend Bild 3.7 wird hier ein FIR-Filter $C(z)$ eingesetzt, um das Fehlersignal $e(n)$ zu glätten, bevor es den beiden LMS-Algorithmen zugeführt wird. Für die Koeffizienten des Glättungsfilters werden üblicherweise die Filterkoeffizienten des rekursiven Teils des IIR-Filters mit umgekehrten Vorzeichen verwendet. Es ergibt sich

$$C(z) = 1 - A(z). \quad (3.23)$$

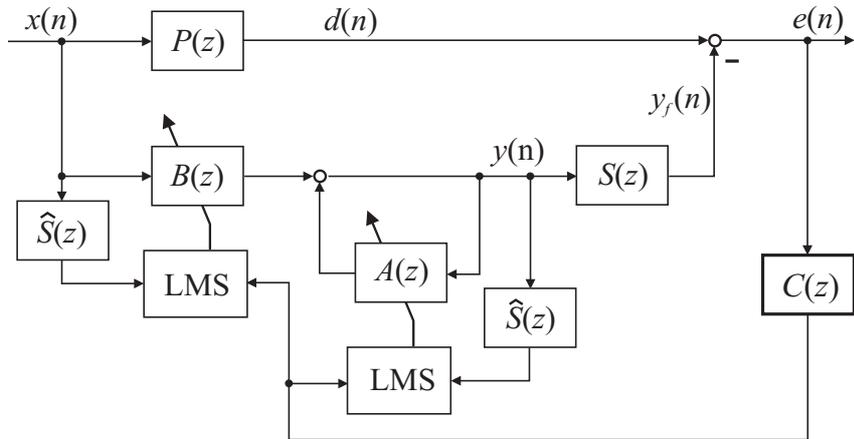


Bild 3.7: SHARF-Algorithmus

Kapitel 4

Prüfstände zur experimentellen Analyse

Im Kraftfahrzeug erzeugt der Motor Vibrationen, die durch die Motoraufhängung zum Fahrzeugchassis übertragen werden. Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Untersuchung der Möglichkeiten zur Verringerung dieser Schwingungsübertragung. Zur Einrichtung, Erprobung und Analyse entsprechender Systeme werden Prüfstände eingesetzt, die die Verhältnisse im Kraftfahrzeug möglichst gut nachbilden. Bezüglich des mechanischen Aufbaus wird dabei eine Konfiguration betrachtet, bei der der Motor über einen so genannten Hilfsrahmen im Fahrzeug gelagert ist.

Im Folgenden wird zunächst das Prinzip der betrachteten Motoraufhängung im Kfz erläutert und die am Motor typischerweise auftretende Krafterzeugung beschrieben. Weiterhin werden die zur Nachbildung der realen Verhältnisse eingesetzten Prüfstände vorgestellt sowie die enthaltene Aktorik und Sensorik. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Darstellung der Anbindung der Prüfstände an ein echtzeitfähiges System zur digitalen Signalverarbeitung.

4.1 Verhältnisse im realen Kfz

4.1.1 Motoraufhängung

In Bild 4.1 ist der Aufbau der konkret betrachteten Motorlagerung in einem Audi A6, zusammen mit der Vorderradaufhängung, dargestellt. Die Ansicht ist von schräg vorne. Ein wesentlicher Bestandteil der Motorlagerung ist der Hilfsrahmen. Bei die-

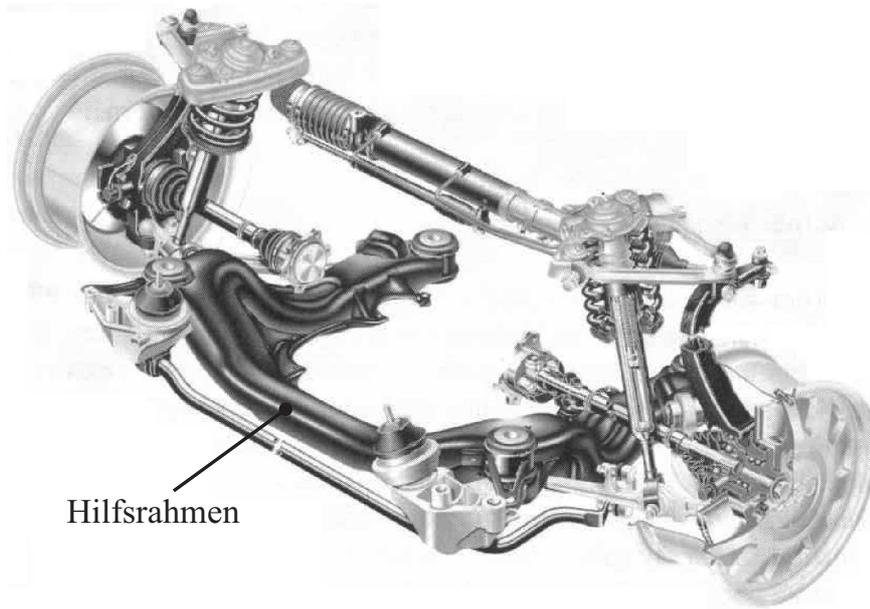


Bild 4.1: Motoraufhängung im Audi A6

sem handelt sich um ein in etwa U-förmiges schwarzes Stahlgebilde. Er ist hohl und hat in der hier verwendeten Version eine mittlere Wanddicke von etwa 2,4 mm. Auf dem Hilfsrahmen ist im Kraftfahrzeug an den in Bild 4.2 gekennzeichneten Stellen der Motor befestigt. Die Kurbelwellenachse liegt dabei in x -Richtung. Die Verbindung geschieht mittels zweier Elastomerlager. Der Rahmen selbst ist wiederum an vier Stellen über Elastomerlager am Chassis aufgehängt.

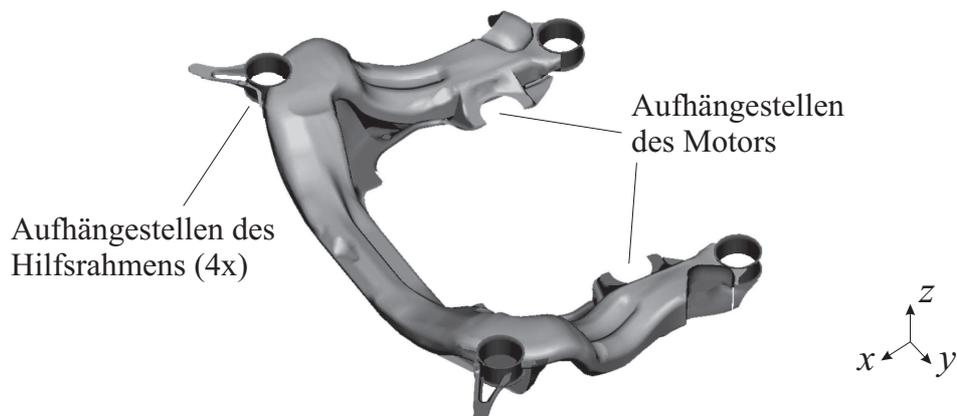


Bild 4.2: Hilfsrahmen mit Lagerstellen

Es ist anzumerken, dass die Bezeichnungen x , y und z , die hier für die Raumkoordinaten verwendet werden, lediglich im Zusammenhang mit der Geometrie des betrachteten Aufbaus an die gewählte räumliche Orientierung gebunden sind. Sie können im Folgenden ansonsten auch andere Größen, mit anderer oder gänzlich ohne Richtungszuordnung, bezeichnen. Dies gilt insbesondere auch für die translatorischen Auslenkungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ (s. u.), die im Starrkörpermodell die Auslenkung der beteiligten Massekörper in vertikaler Richtung beschreiben.

Stark vereinfacht kann die vorliegende Konstruktion in der in Bild 4.3 dargestellten Weise modelliert werden. Chassis und Hilfsrahmen werden hier als starr angenommen, und es werden nur translatorische Bewegungen in vertikaler Richtung zugelassen. Außerdem sind die Feder- und Dämpfungseigenschaften der Elastomerlager als linear angenommen und zu je einem Element zusammengefasst. Die einzelnen, im Folgenden für dieses Modell eingesetzten Parameter sind in der Tabelle B.1 im Anhang B.1 aufgelistet.

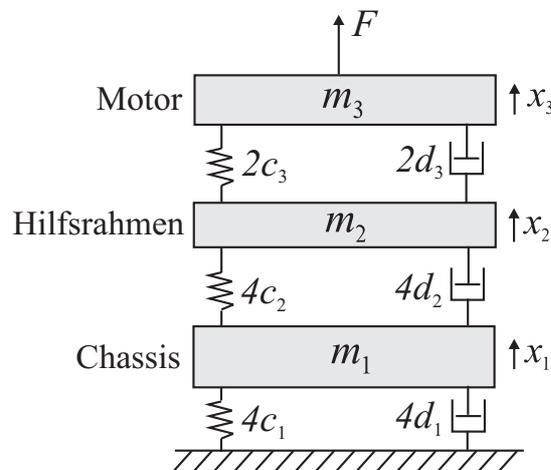


Bild 4.3: Vereinfachtes Modell der Motoraufhängung mit Hilfsrahmen

Anhand des einfachen Starrkörpermodells kann der Vorteil des Einsatzes eines Hilfsrahmens bezüglich der Schwingungsdämpfung verdeutlicht werden. Hierzu ist im Bodediagramm in Bild 4.4 die Übertragung von der Kraft $F(t)$, die vom Motor erzeugt wird, zu der am Chassis resultierenden Beschleunigung illustriert. Die durchgezogene Linie bezieht sich dabei auf die in Abbildung 4.3 gezeigte Konfiguration mit Hilfsrahmen. Für diese sind klar drei Moden zu erkennen. Diese sind, wie eine

weitere Modalanalyse zeigt, jeweils hauptsächlich dem Motor (13,6 Hz), dem Hilfsrahmen (43,8 Hz) und dem Chassis (87,0 Hz) zuzuordnen. Immer bei den einzelnen Resonanzen tritt ein Phasensprung um -180° beim Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Frequenzbereich auf.

Für die gepunktete Linie wird derselbe Aufbau betrachtet, allerdings ist hier die Hilfsrahmenmasse m_2 zu Null gesetzt (c_2 und d_2 bleiben unverändert). Für diesen Fall treten nur zwei Moden auf. In Bild 4.4 ist zu sehen, dass die beiden eingezeichneten Amplitudengänge für niedrige Frequenzen recht ähnlich sind. Für höhere Frequenzen dagegen macht sich ein deutlich ausgeprägteres Tiefpassverhalten der Konfiguration mit Hilfsrahmen bemerkbar. Es tritt ein um ca. 40 dB/dec stärkerer Amplitudenabfall auf. Die passive Vibrationsisolation, die bereits durch die Einrichtung der Motoraufhängung mit Elastomerlagern erreicht wird, ist folglich bei Verwendung eines Hilfsrahmens für höhere Frequenzen deutlich effektiver. Diese Eigenschaft ist wünschenswert, weil wesentliche Anteile der vom Motor erzeugten oszillierenden Kräfte in Ihrer Amplitude quadratisch mit der Drehzahl zunehmen (s. nächster Abschnitt).

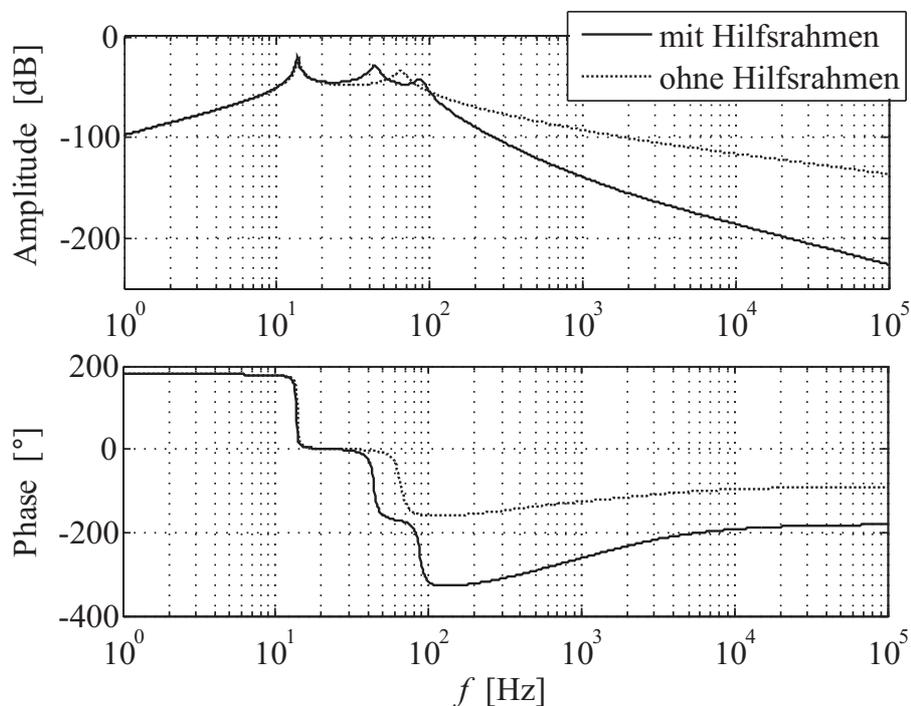


Bild 4.4: Schwingungsübertragung von der anregenden Motorkraft $F(t)$ zur Chassisbeschleunigung $\ddot{x}_1(t)$ – mit und ohne Hilfsrahmen.

Allgemein ist eine hohe Effektivität im oberen Frequenzbereich eine typische Eigenschaft passiver Dämpfungsmaßnahmen. Für niedrigere Frequenzen kann gute Wirksamkeit nur erreicht werden, wenn enorm große Massen und Federwege im Aufbau zugelassen werden. Dies ist natürlich im Rahmen der modernen Automobilauslegung allgemein nicht wünschenswert. Abhilfe kann hier durch den Einsatz aktiver Verfahren geschaffen werden. Diese können gerade für niedrigere Frequenzen sehr effektiv eingerichtet werden.

4.1.2 Störanregung

Ursache der vom Motor in das Fahrzeug eingebrachten Vibrationen sind die Kräfte und Momente, die aufgrund der Massenbeschleunigungen und des Verbrennungsprozesses innerhalb des Motors auftreten. Durch die Beschleunigungsvorgänge wird sowohl eine Kraft (durch translatorische Bewegungen von Pleuelstange und Kolben) erzeugt, als auch ein Moment, das sich am Kurbeltrieb aufbaut [60]. Beide sind dem Betrage nach proportional zum Quadrat der Drehzahl des Motors und somit zur Frequenz der resultierenden Störvibrationen. Die beim explosionsartigen Verbrennungsprozess auftretende Gasentwicklung führt lediglich zu einer Momentenbildung. Dabei steht die Stärke des entstehenden Moments in keinem direkten Zusammenhang zur Drehzahl.

Die durch die Massenbeschleunigungen bewirkten Kraft- und Momentenverläufe setzen sich typischerweise aus zwei überlagerten Sinusschwingungen zusammen. Beispielsweise beim 4-Takt-4-Zylindermotor liegen diese beim Zweifachen und Vierfachen der Drehfrequenz f_{Mot} des Motors [60]. Das Gasmoment entspricht dagegen eher einer Impulsfolge, die als eine Superposition einer Vielzahl von Sinusschwingungen entsprechend einer Fourierreihe betrachtet werden kann. Die Frequenzen aller insgesamt überlagerten Schwingungen sind jeweils ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz f_0 , die je nach Motortyp wiederum ein ganzzahliges Vielfaches oder ein ganzzahliger Teiler der Drehfrequenz f_{Mot} des Motors ist. Typische Verhältnisse f_0/f_{Mot} sind 0.5, 1 oder 2. Letzteres liegt z. B. bei einem 4-Takt-4-Zylindermotor mit gleichförmiger Verbrennung in allen Zylindern vor. Verallgemeinert kann der vorliegende Anregungsverlauf mit

$$x(t) = \sum_{m=1}^M \hat{x}_m \sin(m\omega t + \varphi_{x_m}) \quad (4.1)$$

beschrieben werden. Hierin gilt $\omega = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$, wobei T_0 die Grundperiode der Störschwingung ist. \hat{x}_m bezeichnet die Amplitude und φ_{x_m} die Phase der m -ten Sinusschwingung.

Bezüglich der Gesamtanregung wird in dieser Arbeit im Regelfall ein Frequenzbereich von 20 bis 300 Hz betrachtet. Wird von einer Leerlaufdrehzahl von etwa 800 min^{-1} ausgegangen, so werden hiermit die Frequenzen ab dem Zweifachen der Drehfrequenz f_{Mot} sicher erfasst. Oberhalb 300 Hz ist eine Betrachtung aufgrund der starken Tiefpasswirkung der Motoraufhängung mit Hilfsrahmen (s. Abschnitt 4.1.1) nicht erforderlich.

4.2 Aufbau der Prüfstände

Es kommen zwei verschiedene Prüfstände zum Einsatz. Der erste der beiden ist in Bild 4.5 dargestellt. Hauptelement des Aufbaus ist der industriell gefertigte Hilfsrahmen, auf dem im realen Fahrzeug wie zuvor beschrieben der Motor gelagert ist. Der Hilfsrahmen selbst ist hier über die Elastomerlager an vier Aluminiumpfosten aufgehängt, die auf einem Metalltisch fixiert sind. Im Versuchsaufbau sind zwei schwingungsgebende Aktoren angebracht. Der Störaktor bringt die unerwünschten Vibrationen in den Aufbau ein. Er repräsentiert somit den Motor und ist über einen

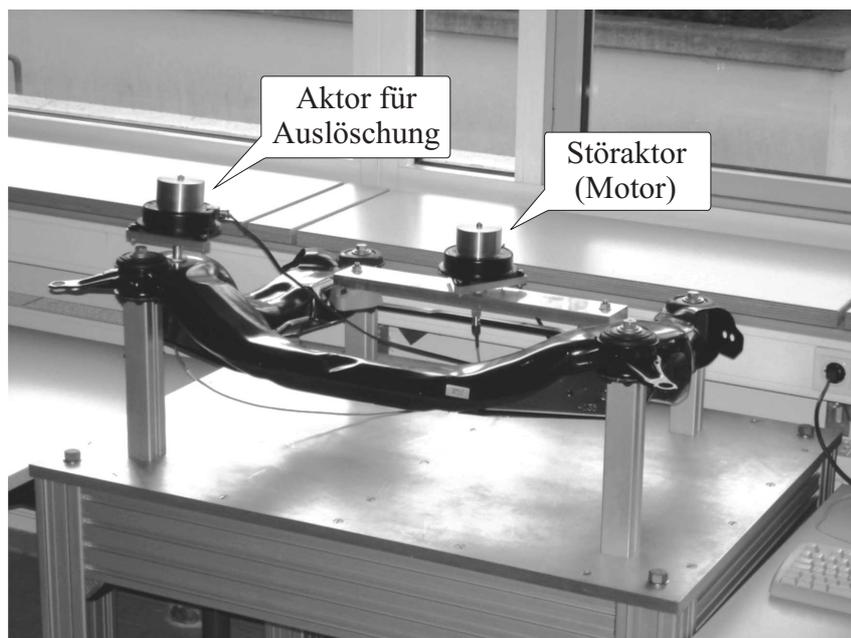


Bild 4.5: Prüfstand mit einem Auslöschungsaktor (Einkanalprüfstand)

Aluminiumbalken an den entsprechenden Lagerstellen am Hilfsrahmen befestigt. Der Auslöschungsaktor hingegen wird zur Erzeugung der Gegenschwingungen eingesetzt, mit denen die „Motorvibrationen“ kompensiert werden. Jeweils direkt am selben Ort wie die Aktoren sind Beschleunigungssensoren befestigt. Sie können je nach Bedarf zur Erfassung der Vibrationsstärke im Aufbau eingesetzt werden.

Die beschriebene Prüfstandkonfiguration entspricht aus verschiedenen Gründen noch nicht den tatsächlichen Verhältnissen im Kfz. Zum einen kann mit einem einzelnen Auslöschungsaktor an nur einer Aufhängestelle des Hilfsrahmens noch keine vollständige Vibrationsisolation des Motors erreicht werden. Zum anderen ist auch die mechanische Konstruktion noch nicht realistisch. Der Metalltisch, der im Kfz dem Chassis entspräche, ist im Prüfstand nicht schwingfähig gelagert und es fehlt eine Nachbildung der großen Masse des Motorblocks.

Trotz dieser Abweichungen von den realen Verhältnissen ist der einfache Prüfstand gut für eine grundsätzliche Untersuchung von Algorithmen im Einkanalfall geeignet. Gerade weil hier auf eine schwere Motormasse verzichtet wurde, wirkt sich das Tiefpassverhalten des Aufbaus bezüglich der Schwingungsübertragung im betrachteten Frequenzbereich nur schwach aus. Auch mit verhältnismäßig geringer Leistung des Störaktors kann bei höheren Frequenzen eine starke Anregung an den Aufhängestellen des Hilfsrahmens erreicht werden.

Eine vollständigere Umsetzung der Verhältnisse im Kraftfahrzeug ist mit dem in Bild 4.6 gezeigten Prüfstand gegeben. Hier sind neben einem leistungsfähigen Störaktor vier Aktoren zur Auslöschung jeweils an den Aufhängestellen des Hilfsrahmens befestigt. Der Störaktor ist dabei auf einem Stahlblock zur Nachbildung der Motormasse installiert. Die hier eingesetzte Masse von 50 kg liegt zwar noch unterhalb einer realistischen Motormasse von bis zu 200 kg, trotzdem ermöglicht sie eine grundsätzliche Nachbildung des charakteristischen Verhaltens des realen Aufbaus. Des Weiteren sind die vier Aluminiumpfosten, an denen der Hilfsrahmen aufgehängt ist, auf einem zusätzlichen Zwischenrahmen befestigt, der schwingfähig über Elastomerelemente auf dem nahezu unbeweglichen Metalltisch gelagert ist. Es wird hiermit für prinzipielle Untersuchungen das Chassis nachgebildet.

Es verbleibt eine prinzipielle Ungenauigkeit des Prüfstands insofern, dass mit dem installierten Störaktor zwar Kräfte in z-Richtung, aber, anders als beim realen Motor, keine Momente erzeugt werden können. Für die angestrebte Erprobung von Algorithmen ergibt sich hieraus allerdings kein grundsätzlicher Unterschied. Da nur

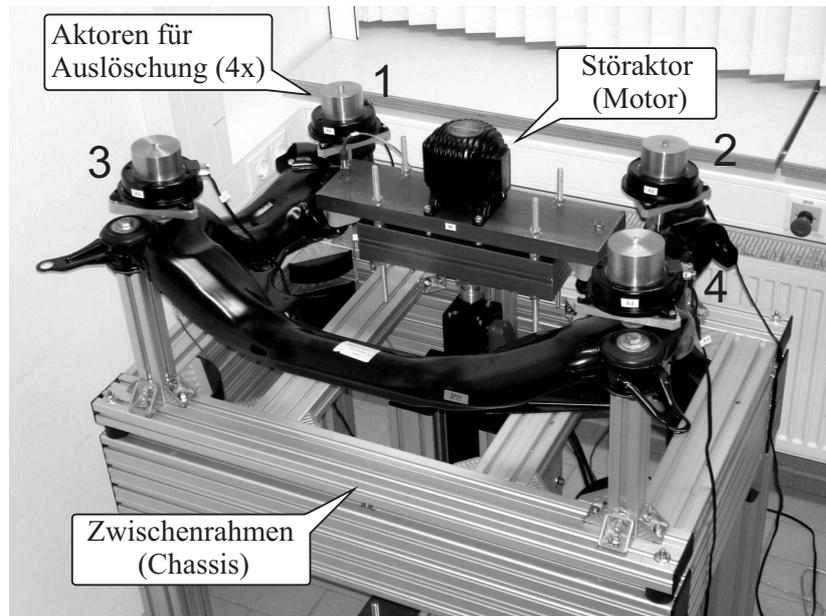


Bild 4.6: Vollständiger Mehrkanalprüfstand

kleine Auslenkungen auftreten, liegen an den betrachteten Auslöschungsstellen im Aufbau auch nur nahezu geradlinige Bewegungen vor. Allgemein ist eine lineare Beschreibung des Systems möglich. Der so aufgebaute Prüfstand ermöglicht neben der Implementierung von Mehrkanalsystemen insbesondere auch eine anschauliche und aussagekräftige Leistungsanalyse zur Aktorplatzierung (s. Kapitel 5).

4.3 FEM-Analyse des Mehrkanalprüfstands

Eine genaue Modellierung der in dieser Arbeit betrachteten Motoraufhängung samt Motor und Chassis ist mit klassischen Ansätzen aufgrund der Komplexität der gegebenen mechanischen Struktur verhältnismäßig schwierig. Eine erste Annäherung ist durch das in Bild 4.3 illustrierte Starrkörpermodell mit drei Freiheitsgraden gegeben. Bei diesem werden allerdings rotatorische Moden und elastische Eigenschaften der Körper im Aufbau vernachlässigt. Eine Verbesserung kann mit einem Modell mit 12 Freiheitsgraden erreicht werden [39, 77] (s. Abschnitt 7.1.2), bei dem auch die relevanten rotatorischen Bewegungen (um x- und y-Achse) der Körper erfasst werden. Allerdings ist das entsprechende mathematische Modell bereits relativ kompliziert und unübersichtlich. Auch werden elastische Moden nach wie vor nicht erfasst.

Deutliche Verbesserungen ergeben sich bei Einsatz von Finite-Elemente-Methoden

(FEM) [77]. Bei diesen wird das reale, kontinuierlich verteilte System durch eine endliche Anzahl von Gitterpunkten angenähert [62, 89, 3]. Es resultiert ein System von Differenzialgleichungen, das mittels numerischer Verfahren gelöst werden kann. Für die Einrichtung und Lösung der FEM-Modelle stehen leistungsfähige Softwareprogramme zur Verfügung. Im Rahmen dieser Arbeit wird hiervon die Software ANSYS eingesetzt. Mit dieser ist insbesondere auch eine ausführliche Visualisierung und Analyse der erstellten Modelle möglich. Auch komplexe Modelle werden so überschaubar und gut verifizierbar. Es kann z. B. das oben erwähnte Modell mit 12 Freiheitsgraden gut handhabbar eingerichtet werden.

Die eigentliche Stärke der FEM kommt jedoch beim Umgang mit elastischen Strukturen zum Tragen. Eine entsprechende Modellierung ist auch für die Motoraufhängung im Prüfstand möglich. Hierzu werden die Geometriedaten des Hilfsrahmens mittels eines Konvertierungsprogramms (hier ANSA) aus dem ursprünglich gegebenen CAD-Format in ein für die Software ANSYS geeignetes Format übertragen. Einbinden in ein Gesamtmodell des Mehrkanalprüfstands ergibt die in Bild 4.7 gezeigte Systemnachbildung.

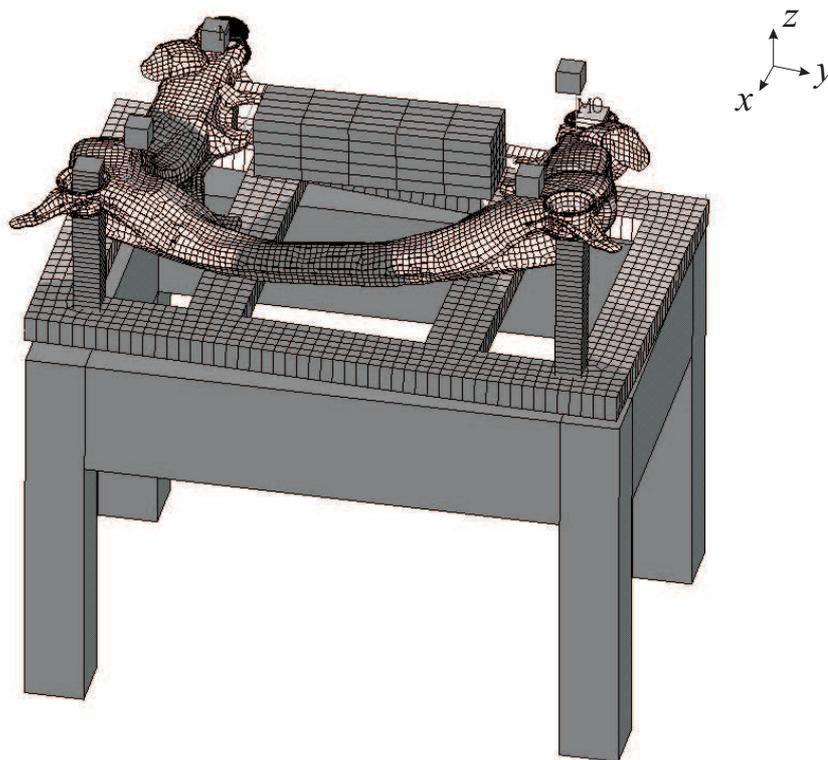


Bild 4.7: FEM-Modell des Mehrkanalprüfstands

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit liegt der wesentliche Nutzen der FEM-Modellierung in einer tieferen Einsicht in das Systemverhalten. Hilfreich ist hierzu insbesondere eine detaillierte Modalanalyse. Eine solche kann mit der Software ANSYS durchgeführt werden und ermöglicht eine Bestimmung und Visualisierung der Moden des Prüfstands. Als Ergebnis einer entsprechenden Analyse sind in der Tabelle 4.1 alle die Moden stichpunktartig beschrieben, die einen wesentlichen Beitrag zu den für die vorliegende Aufgabenstellung relevanten Übertragungen leisten.

Tabelle 4.1: Tabelle der Eigenfrequenzen des Finite-Elemente-Modells

Mode	Frequenz	Beschreibung der Bewegung	HR
1	12.44	gleichförmige Schwingung des gesamten Prüfstandes in vertikaler Richtung, Motormasse am stärksten beteiligt	trans z
4	20.22	Drehung des gesamten Prüfstandes, Aktoren sehr stark schwingend	rot y
5	20.49	gleichförmige Drehung aller Bauteile, Aktoren stark beteiligt	rot x
6	21.27	Motor schwingt gegenphasig zu den anderen Bauteilen, damit ist er bereits im überkritischen Bereich, Aktoren am stärksten beteiligt	trans z
7	21.55	die Aktoren schwingen diagonal versetzt, der Hilfsrahmen wird leicht auf Torsion belastet	trans z
9	28.02	Drehschwingung des Motors, Aktoren schwingen gegenphasig zu den anderen Bauteilen	rot x
18	40.30	vertikale Bewegung des Hilfsrahmens, Motor und Aktoren gegenphasig	trans z
21	54.90	Drehschwingung des Hilfsrahmens und des Chassis, Motor und Aktoren gegenphasig	rot x
22	56.44	Drehschwingung des Hilfsrahmens und des Chassis gegen die anderen Bauteile	rot y
26	85.71	vertikale Schwingung von Hilfsrahmen gegenphasig zu Chassis, andere Bauteile kaum beteiligt	trans z
27	99.42	Torsionsschwingung des Hilfsrahmens	elast.
28	113.80	Drehung von Hilfsrahmen und Chassis gegeneinander	rot y
30	119.40	gegenläufige Drehung von Hilfsrahmen und Chassis, Hilfsrahmen wird dabei tordiert	rot x
32	185.39	erste Biegeform des Hilfsrahmens (um die x-Achse), Querstrebe stark beteiligt	elast.
33	193.98	Torsionsschwingung des Chassis	elast.
36	275.22	zweite Biegeform des Hilfsrahmens (um die y-Achse)	elast.

Weiterhin ist es möglich, Informationen zu Übertragungsstrecken im Prüfstand zu erhalten. Es kann beispielsweise das Übertragungsverhalten von der Störanregung zu den Auslöschungsstellen bei den Aktoren ermittelt werden. Dabei kann getrennt translatorische und rotatorische Anregung vorgegeben werden. Zwei Bode-Diagramme zur Veranschaulichung sind in den Bildern 4.8 und 4.9 dargestellt.

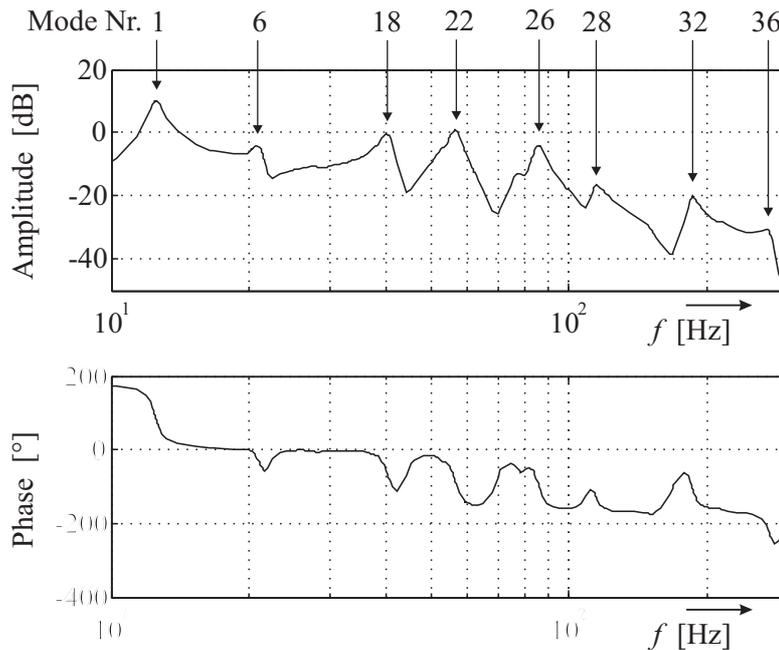


Bild 4.8: Übertragung bei *translatorischer* Anregung: Von der „Motorkraft“ $F(t)$ zu der Auslöschungsstelle bei Aktor 4 (s. Bild 4.6)

Eine Verifikation der erhaltenen Ergebnisse mit einer Modalanalyse direkt am Prüfstand sowie durch Streckenidentifikationen zeigt eine insgesamt gute Übereinstimmung der erstellten Systembeschreibung mit dem realen Vorbild [77]. Die Nachbildung gelingt besonders gut im unteren Frequenzbereich. Für zunehmende Frequenzen (ab ca. 100 – 200 Hz) wird die Modellierung allerdings schwieriger und fehlerträchtiger. Es machen sich dort bereits Abweichungen in recht kleinen Details der Prüfstandgeometrie bemerkbar. Auch Parameterabweichungen, die durch nicht berücksichtigte Nichtlinearitäten der verwendeten Elastomerlager entstehen, nehmen verstärkt Einfluss. Allgemein kann eine beliebig gute Übereinstimmung von realem Aufbau und angepasstem Modell nicht zu allen Zeiten gegeben sein, da der Aufbau, insbesondere durch die enthaltenen Elastomerlager, zeitvariantes Verhalten zeigt.

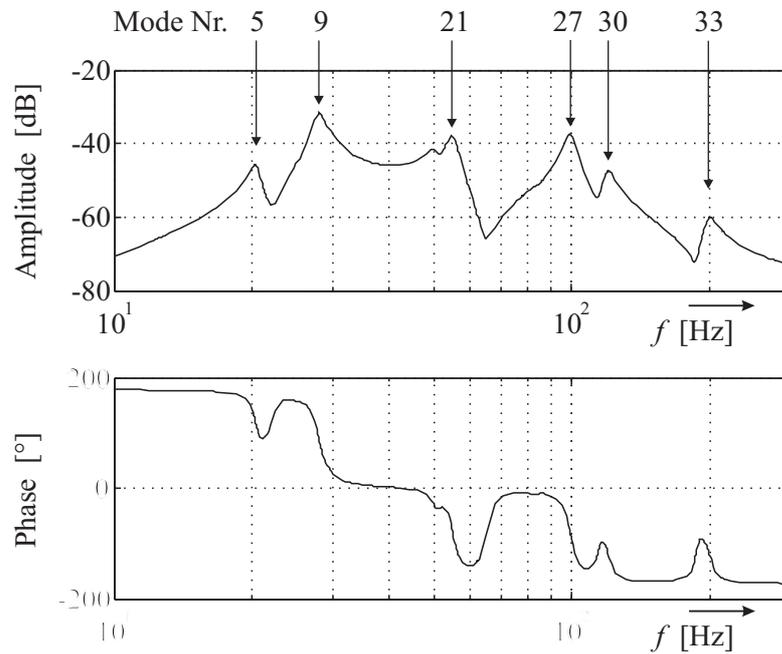


Bild 4.9: Übertragung bei *rotatorischer* Anregung: Vom „Motormoment“ $M_x(t)$ zu der Auslöschungsstelle bei Aktor 4 (s. Bild 4.6)

4.4 Aktorik und Sensorik

Aktorik

Sowohl für das Einbringen der Störvibrationen als auch für die Erzeugung der kompensierenden Gegenkräfte kommen in den Prüfständen Aktoren in Form von aktiv betriebenen Tilgern (engl. auch: Reaction Mass Actuator, kurz RMA [25]) zum Einsatz (ein alternatives Aktorprinzip wird im Abschnitt 5.1 vorgestellt). Schematisch ist die entsprechende mechanische Struktur in Bild 4.10 dargestellt. Eine gesonderte

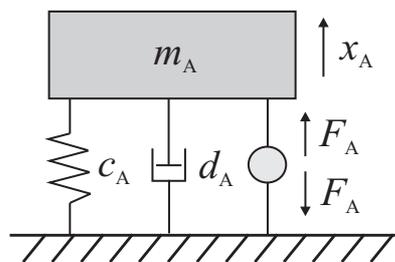


Bild 4.10: Mechanischer Aufbau des aktiven Tilgers

Aktormasse m_A wird hier durch die Kraft $F_A(t)$ beschleunigt. Zusammen mit den von Feder- und Dämpferelement erzeugten Kräften $c_A \cdot x_A(t)$ und $d_A \cdot \dot{x}_A(t)$ bildet $F_A(t)$ eine Gesamtkraft $F_{\text{ges}}(t)$, die zum einen auf die beschleunigte Masse und zum anderen als Gegenkraft auf den Prüfstand wirkt. Die Generierung der Gesamtkraft geschieht besonders effektiv im Bereich der Resonanzfrequenz des beteiligten passiven Feder-Masse-Dämpfer-Systems. Die antreibende Kraft $F_A(t)$ wird in den Aktoren nach elektrodynamischem Prinzip erzeugt, ähnlich wie z. B. bei einer Tauchspule in einem Lautsprecher (engl.: Voice Coil) [43, 61, 91]. Alternative Prinzipien zur Krafterzeugung wären z. B. in elektromagnetischen Aktoren oder Piezo-Stacks gegeben [43]. Die Kraftgenerierung nach elektrodynamischem Prinzip wird aus verschiedenen Gründen für den Einsatz am Prüfstand gewählt: Die entsprechenden technischen Komponenten sind einfach aufgebaut und kostengünstig zu erwerben. Weiterhin ist ihr Eigengewicht vergleichsweise gering, und ihre Ansteuerung ist unkompliziert. Schließlich haben sie die Eigenschaft, dass sie sowohl im bestromten als auch im unbestromten Fall nahezu keine Reibungs- oder Widerstandskraft gegen von außen wirkende Kräfte ausüben. Ein Wunsch zur Verbesserung der verwendeten Komponenten bleibt lediglich in Bezug auf die Leistungsaufnahme offen, wie sich in den Abschnitten 5.3 und 5.4 noch zeigen wird.

Die Umsetzung des elektrodynamischen Prinzips in den verwendeten Auslöschungsaktoren ist in Bild 4.11 gezeigt. Eine leitfähige Spule ist hier im Luftpalt eines Permanentmagneten mit Weicheisengehäuse platziert. Ein Stromfluss $i_A(t)$ in der

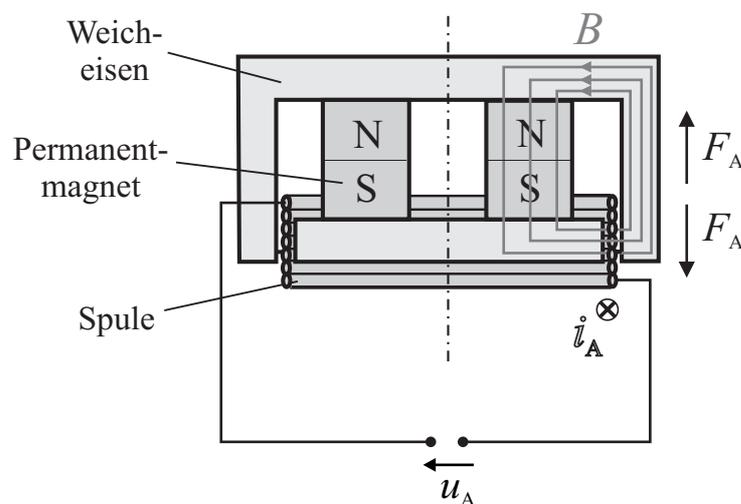


Bild 4.11: Krafterzeugung im Aktor

Spule führt zu einer Lorentzkraft $F_A(t)$ entsprechend einem Rechtssystem [98, 14]:

$$F_A(t) = N \cdot i_A(t) \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{B}) . \quad (4.2)$$

In Gleichung (4.2) bezeichnet N die Anzahl der Spulenwicklungen, die sich im Luftspalt befinden. Die vektorielle Größe \mathbf{l} ist der Spulenumfang, dem hier die Richtung des Stromflusses zugeordnet wird und \mathbf{B} entspricht der magnetischen Induktion. Da die Spulenwicklungen senkrecht zum radial gerichteten Magnetfeld liegen, vereinfacht sich die gegebene Formel zu

$$F_A(t) = NBl \cdot i_A(t) . \quad (4.3)$$

Dieser Zusammenhang ist gültig unter der Annahme, dass nur relativ kleine translatorische Bewegungen in Richtung von $F_A(t)$ ausgeführt werden, so dass immer der gesamte Luftspalt mit Spulenwicklungen gefüllt bleibt. Es sind B und l die Beträge der ursprünglich vektoriellen Größen.

Bei Spannungssteuerung der Aktoren ergibt sich der Stromfluss $i_A(t)$ entsprechend dem in Bild 4.12 gezeigten Ersatzschaltbild. Die Größe $u_{\text{ind}}(t)$ entspricht darin

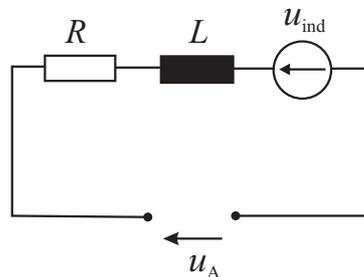


Bild 4.12: Ersatzschaltbild der Stromerzeugung

der Gegenspannung, die durch die Bewegung der leitfähigen Spulenwicklungen im Magnetfeld hervorgerufen wird. Sie berechnet sich als

$$u_{\text{ind}}(t) = NBl \cdot \dot{x}_A(t) . \quad (4.4)$$

Es ist anzumerken, dass $u_{\text{ind}}(t)$ bei der vorliegenden Anwendung in der Regel vernachlässigbar kleine Werte annimmt, da nur verhältnismäßig geringe Geschwindigkeiten auftreten.

Gemeinsames Modellieren des mechanischen und des elektrischen Aktorteils führt auf die in Bild 4.13 gezeigte Systemstruktur. Die Werte der eingetragenen Parameter

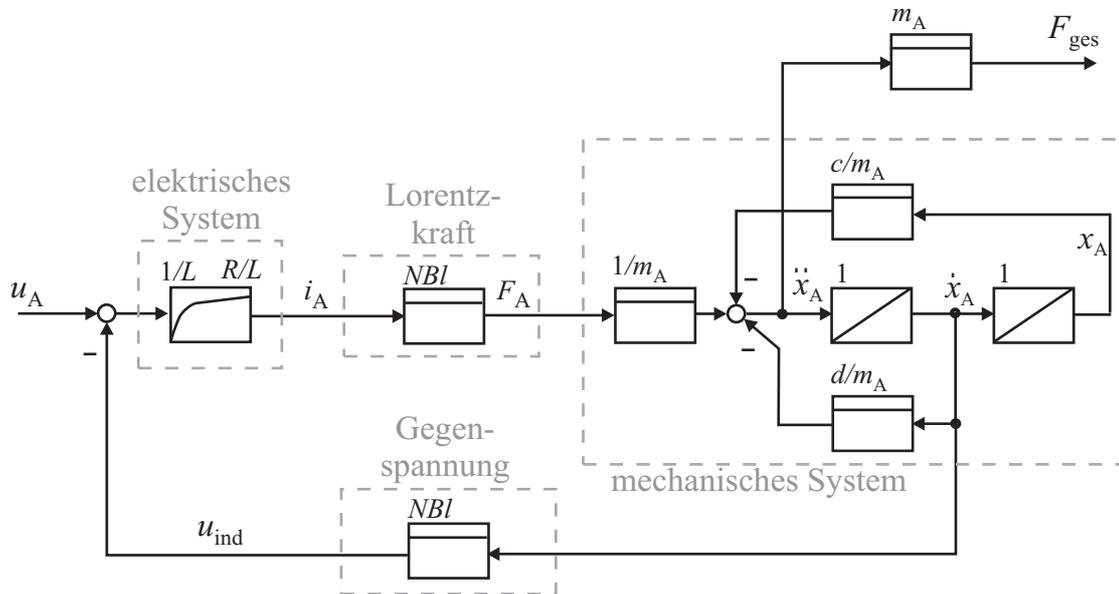


Bild 4.13: Aktormodell im Strukturbild

stehen in der Tabelle B.2 im Anhang B.1.

Bei den im Prüfstand installierten Aktoren handelt es sich um kommerzielle Produkte (Bass Pump III) aus der HiFi-Industrie. Mit den im Lieferzustand vorliegenden Systemparametern ergibt sich für diese nach Bild 4.13 das in Bild 4.14 dargestellte Bodediagramm. Es ist sowohl das Übertragungsverhalten für Spannungssteuerung als auch das für Stromsteuerung eingezeichnet. Die Amplitudenwerte für den stromgesteuerten Betrieb sind mit dem Faktor 3,5 (Wert des ohmschen Widerstands der Aktorspule) skaliert, um eine gute Vergleichbarkeit zu erhalten. Signifikante Frequenzen sind die Resonanzfrequenz f_{mech} des mechanischen Aufbaus sowie die Eckfrequenz f_{el} des elektrischen Stromkreises.

Bei der Resonanzfrequenz f_{mech} ist zu erkennen, dass sich für den spannungsgesteuerten Betrieb etwas kleinere Amplitudenwerte einstellen als für den stromgesteuerten Betrieb. Dies ist die einzige wesentliche Auswirkung der geschwindigkeitsproportionalen Gegenspannung $u_{\text{ind}}(t)$, die hier als zusätzliche Dämpfung wirkt. Die Eckfrequenz f_{el} ist lediglich für den spannungsgesteuerten Betrieb relevant. Bei dieser Betriebsart nimmt die Effizienz des Aktors oberhalb von f_{el} deutlich ab. Außerdem tritt eine zusätzliche Phasenverzögerung im Vergleich zur Stromsteuerung auf. Da allerdings die Eckfrequenz bei nahezu 500 Hz liegt, ist die Auswirkung

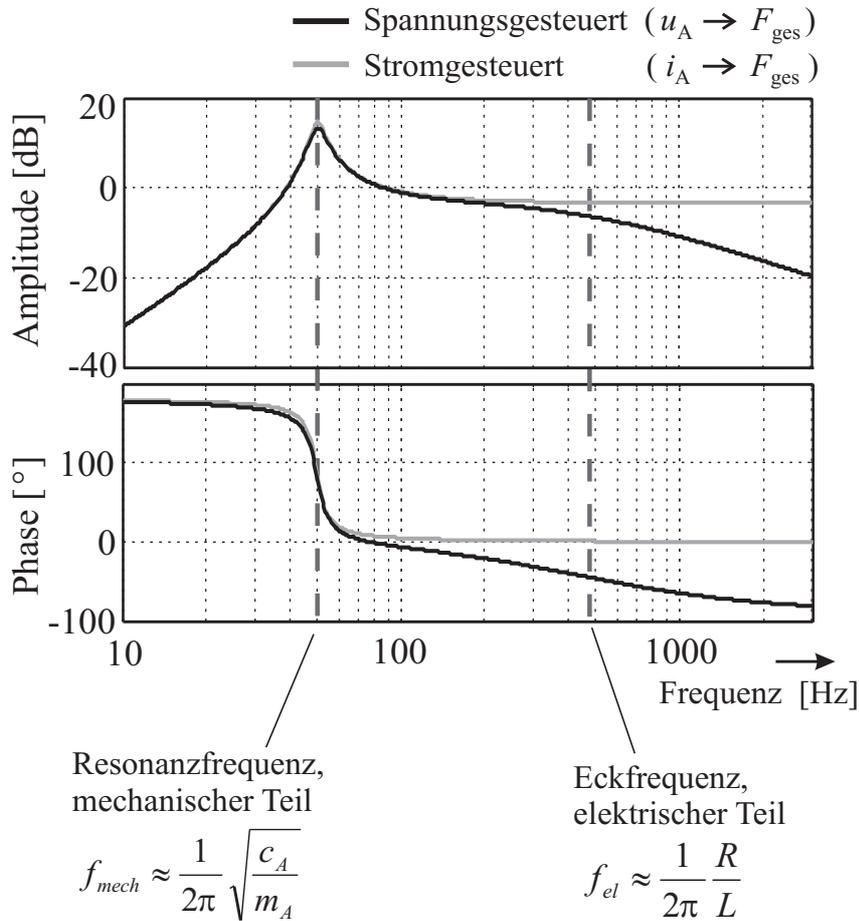


Bild 4.14: Übertragungsverhalten der Aktoren

im betrachteten Frequenzbereich von 20 bis 300 Hz nicht allzu gravierend. Aus Gründen der einfachen Realisierbarkeit wurde in dieser Arbeit der Spannungssteuerung der Vorzug gegeben. Für die untersuchten Algorithmen zur aktiven Schwingungsdämpfung folgt hieraus kein wesentlicher Nachteil.

In Bild 4.14 ist weiterhin zu sehen, dass die Effektivität des Aktors unterhalb der mechanischen Resonanzfrequenz stark abnimmt. Ein Betrieb bei kleineren Frequenzen als etwa 30 Hz wäre hier nur eingeschränkt möglich. Abhilfe kann durch eine einfache konstruktive Maßnahme geschaffen werden. Durch Erhöhen der Aktormasse m_A wird die mechanische Resonanzfrequenz des Aktors abgesenkt und damit sein Wirkungsbereich erweitert. Bei Vergrößerung von m_A um ca. 2 kg ergibt sich der in Bild 4.15 dargestellte Amplitudengang. Es ist hier sowohl das Verhalten des Modells als auch das des realen Aktors eingetragen. Ein ähnlicher Effekt wie

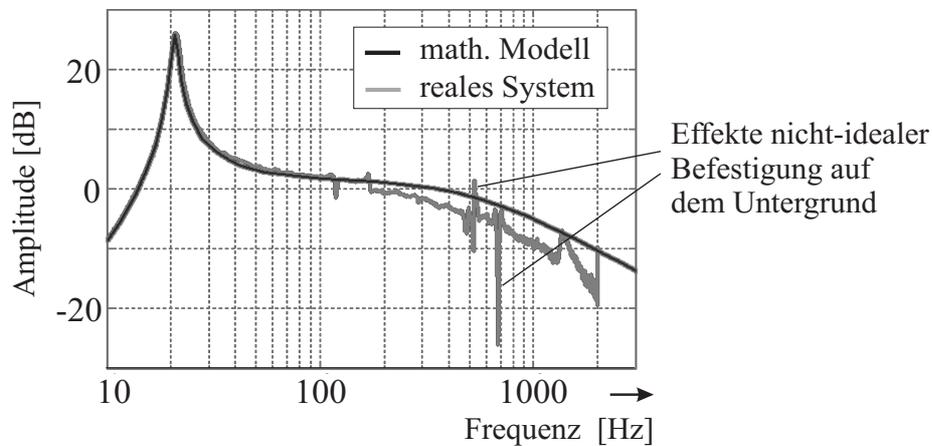


Bild 4.15: Aktor-Amplitudengang ($u_{\text{in}} \rightarrow F_{\text{ges}}$) für erhöhte Masse m_A

durch die Erhöhung der Aktormasse kann natürlich auch durch eine Verringerung der Federkonstante c_A erreicht werden.

Im Mehrkanalaufbau wird für die Generierung der Störvibrationen ein Aktor eingesetzt, der etwas leistungsfähiger ist als die für die Störkompensation verwendeten. Auch dieser ist nach dem Prinzip eines aktiven Tilgers aufgebaut. Die Modellierung und das genauere Übertragungsverhalten des Störaktors werden hier aber nicht näher untersucht, da sie im Rahmen dieser Arbeit keine wesentliche Bedeutung haben.

Sensorik

Für die Erfassung der Vibrationsstärke werden in den Prüfständen Beschleunigungssensoren eingesetzt. Für den hier relevanten Frequenzbereich von 20 bis 300 Hz konnten problemlos Sensortypen gefunden werden, deren Übertragungsverhalten so spezifiziert ist, dass ihre Dynamik für die nachfolgend beschriebenen Untersuchungen vernachlässigt werden kann. In Modellierungen gehen sie entsprechend nur in Form eines Proportionalgliedes ein.

4.5 Anbindung an ein Echtzeitsystem

Die im Rahmen dieser Arbeit erforderlichen Simulationen werden unter der Software Matlab/Simulink durchgeführt. Um Algorithmen aus der Simulation möglichst

zeiteffizient in Echtzeitanwendungen umsetzen zu können, wird das System xPC-Target verwendet. Dieses Rapid-Prototyping-System kann als Toolbox in der Matlab/Simulink-Umgebung genutzt werden. Es ermöglicht die Einrichtung der elektronischen Messdatenverarbeitung für die Ansteuerung der Aktoren und das Auslesen der Sensorsignale. Weiterhin stellt xPC-Target verschiedene Möglichkeiten zur Sicherung und Visualisierung von Messdaten in Echtzeit zur Verfügung.

Insgesamt wird das in Bild 4.16 gezeigte Hardware-System eingerichtet. Haupt-

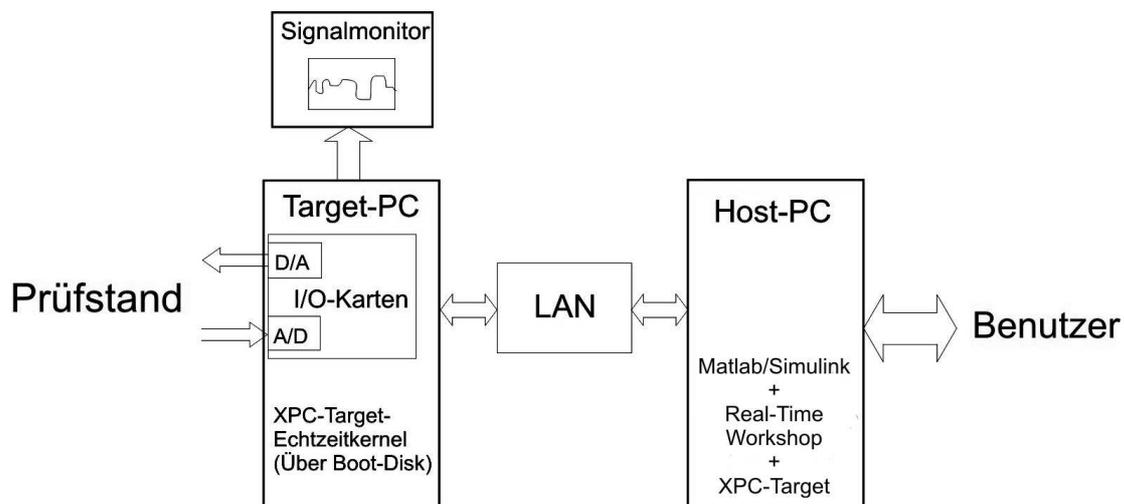


Bild 4.16: Die xPC-Target-Hardware

elemente des Systems sind zwei PCs: Der Host-PC und der Target-PC. Über den Host-PC erfolgen die Eingabe und das Editieren des gewünschten Softwarecodes in Form eines Simulink-Modells. Das erzeugte Modell wird mittels Real-Time Workshop (Matlab/Simulink) kompiliert und über eine Netzwerkverbindung auf den Target-PC übertragen. Hier erfolgt die eigentliche Ausführung als Echtzeitanwendung. Die Echtzeitfähigkeit des Target-PCs ist gegeben durch einen Echtzeitkernel von xPC-Target, der über eine Boot-Disk nach dem Start des Computers automatisch geladen wird.

Die Aktoren und Sensoren im Prüfstand sind in der in Bild 4.17 gezeigten Weise mit dem Target-PC verbunden. Für die analoge Signalverarbeitung werden hier Tiefpassfilter zur Signalrekonstruktion [47] und für das Anti-Aliasing eingesetzt. Je nach Anforderung werden im Rahmen dieser Arbeit Butterworth-Filter [72, 92] achter Ordnung oder PT1-Glieder in Form von passiven RC-Schaltungen, jeweils mit einer Grenzfrequenz von etwa 300 Hz, eingesetzt. Als Verstärker für die Aktoran-

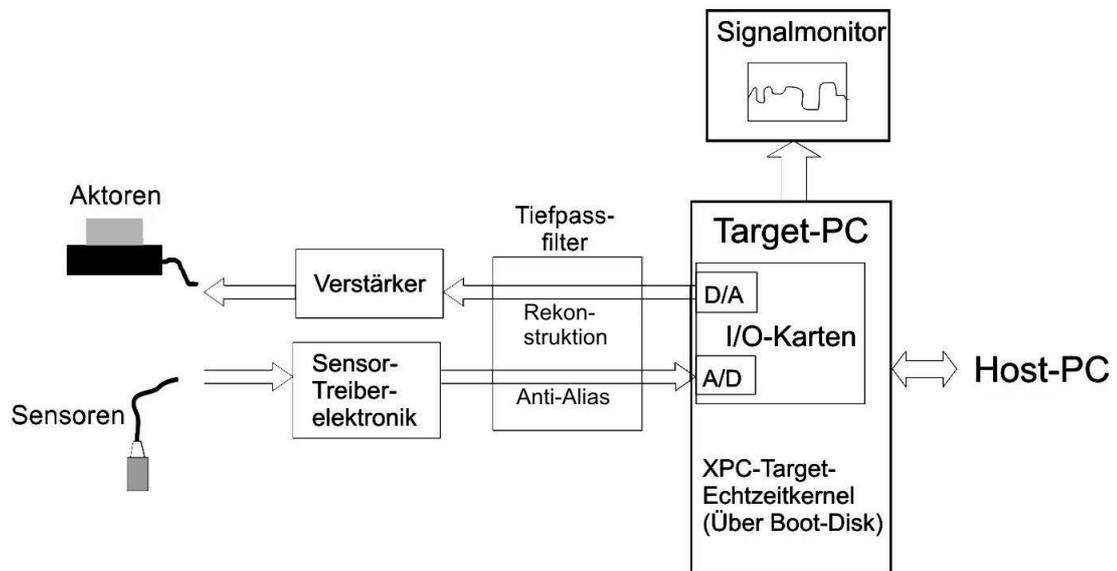


Bild 4.17: Anschluss von Aktoren und Sensoren am Target-PC

steuerung dienen Endstufen des Typs RA-300 der Firma Alesis.

Kapitel 5

Effizienzanalyse zur Aktorplatzierung

Für die Isolation der Motorvibrationen im Kraftfahrzeug werden derzeit überwiegend passive Methoden eingesetzt [106]. In Fahrzeugen der höheren Preisklasse kommen seit längerem auch bereits halbaktive Techniken, z. B. in Form von abstimmbaren Dämpfern, zum Einsatz [79, 60, 11]. Die Vorteile vollaktiver Verfahren, wie Flexibilität und hohe Effektivität, werden hingegen kaum genutzt. Ein Hauptgrund hierfür ist der potenziell hohe Energieverbrauch aktiver Systeme.

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie durch eine geeignete Anordnung von kraftgebenden Aktoren in der Motoraufhängung eine möglichst energiesparende aktive Vibrationsisolation eingerichtet werden kann. Es werden dabei zum einen Aussagen zum konkret betrachteten Prüfstandaufbau mit den verwendeten Aktoren angestrebt, zum anderen sollen aber auch grundsätzliche Potenziale zur Einrichtung eines möglichst energiesparenden Systems aufgedeckt werden.

5.1 Aktorkonfigurationen

Für die Isolation der Motorvibrationen können generell verschiedenste Aktorformen eingesetzt werden, [43, 44, 42, 79, 45]. Für die Modellierungen im Rahmen dieser Arbeit werden hiervon speziell solche betrachtet, die eine Krafterzeugung nach dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten elektrodynamischen Prinzip nutzen. Auf diese Weise können insbesondere zwei effektive Wirkprinzipien realisiert werden [30, 90]:

5.1.1 Aktiver Tilger (Kraftausgleich)

Bei diesem Aktorprinzip bewirkt die Kraft $F_A(t)$ wie im Abschnitt 4.4 beschrieben eine Gesamtkraft $F_{\text{ges}}(t)$ durch Beschleunigung einer zusätzlichen Aktormasse (s. Bild 5.1). Auf diese Weise kann die Kraft ausgeglichen werden, die auf den zu beruhigenden Körper wirkt. Wird die Kraft $F_{\text{ges}}(t)$ so generiert, dass alle an m_1 angreifenden Kräfte genau kompensiert werden, so kann ein vollständiger Stillstand des Körpers erreicht werden.

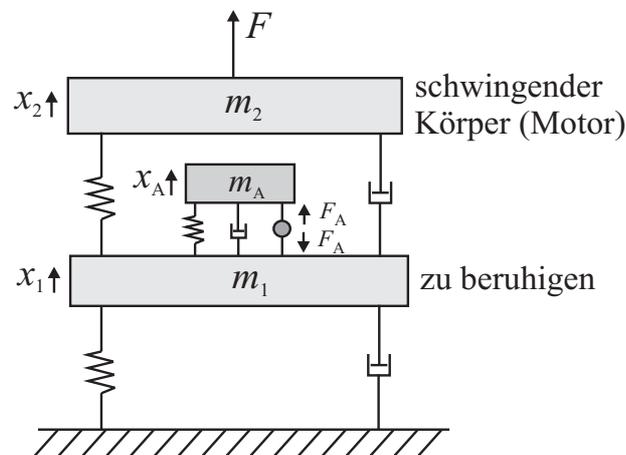


Bild 5.1: Vibrationsisolierung durch Kraftausgleich

5.1.2 Kraftentkopplung (Wegausgleich)

Bei dem in Bild 5.2 dargestellten Wirkprinzip werden wiederum alle auf die Masse m_1 wirkenden Kräfte kompensiert. Hierbei stützt sich die Kraft $F_A(t)$ aber nicht gegen eine zusätzliche Masse, sondern gegen die ursprünglich schwingende Masse m_2 ab. Die krafterzeugende Komponente wird in diesem Fall selbst als Aktor bezeichnet, und die Kraft $F_A(t)$ entspricht direkt der insgesamt wirkenden Aktorkraft. Es wird mit dieser Konfiguration erreicht, dass die Masse m_2 sich frei bewegen kann, da scheinbar keine Kraftwirkung von m_2 auf m_1 vorliegt. Man sagt hier auch, dass der Aktor einen Wegausgleich herbeiführt [90].

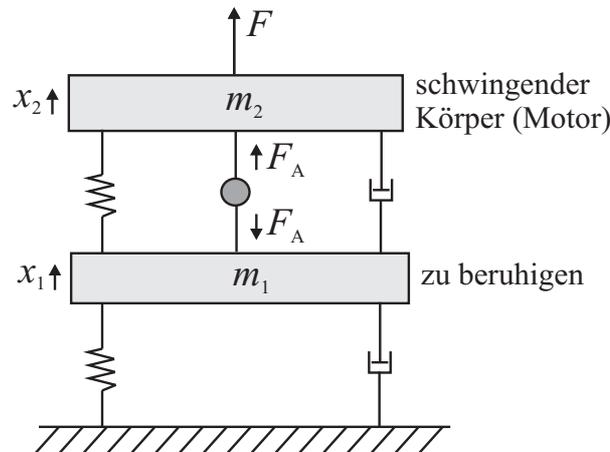


Bild 5.2: Vibrationsisolierung durch Wegausgleich

5.1.3 Anordnung in der Motoraufhängung

Als Störanregung wird für die vorliegende Untersuchung des Leistungsbedarfs eine vertikal wirkende Kraft $F(t)$ am Motor angenommen. Momentenwirkungen werden vernachlässigt¹. Dies hat zum Vorteil, dass eine anschauliche Analyse anhand des einfachen, in Abschnitt 4.1.1 eingeführten Dreimassenmodells möglich wird. Grundlegende Zusammenhänge können so gut nachvollzogen werden. Eine konsequente Anwendung der beiden vorgestellten Aktorprinzipien auf das Dreimassenmodell führt, wie in Bild 5.3 gezeigt, auf sechs mögliche Anordnungen.

In den dargestellten Konfigurationen repräsentiert der jeweils einzelne eingezeichnete Aktor insgesamt vier parallel wirkende Aktoren im realen Aufbau. Um eine Vergleichbarkeit der elektrischen Leistungsberechnung zu erhalten, gilt dies auch für die Anordnungen, bei denen aufgrund der Aufbaugeometrie der Einsatz von zwei Aktoren ausreichend wäre ($m3A$ und $m23$). Vier parallel arbeitende Aktoren des gegebenen Typs erfordern für dieselbe Kraftentwicklung nur halb so viel elektrische Gesamtleistung wie zwei Aktoren. Soll nämlich mit nur zwei Aktoren dieselbe Kraftwirkung erreicht werden wie mit vieren, so muss die Kraftwirkung jedes einzelnen der beiden Aktoren doppelt so groß sein wie die jedes einzelnen der vier Aktoren. Hierzu müsste wiederum der Strom jeden Aktors verdoppelt werden und

¹Die Ergebnisse der FEM-Analyse zeigen, dass das System für rotatorische Anregung ein ähnliches charakteristisches Verhalten aufweist wie für translatorische Anregung. Dies gilt insbesondere am realen Kfz, wo die Massenträgheitsmomente des Motors noch deutlich höher sind als die des „Motorblocks“ im Prüfstand.

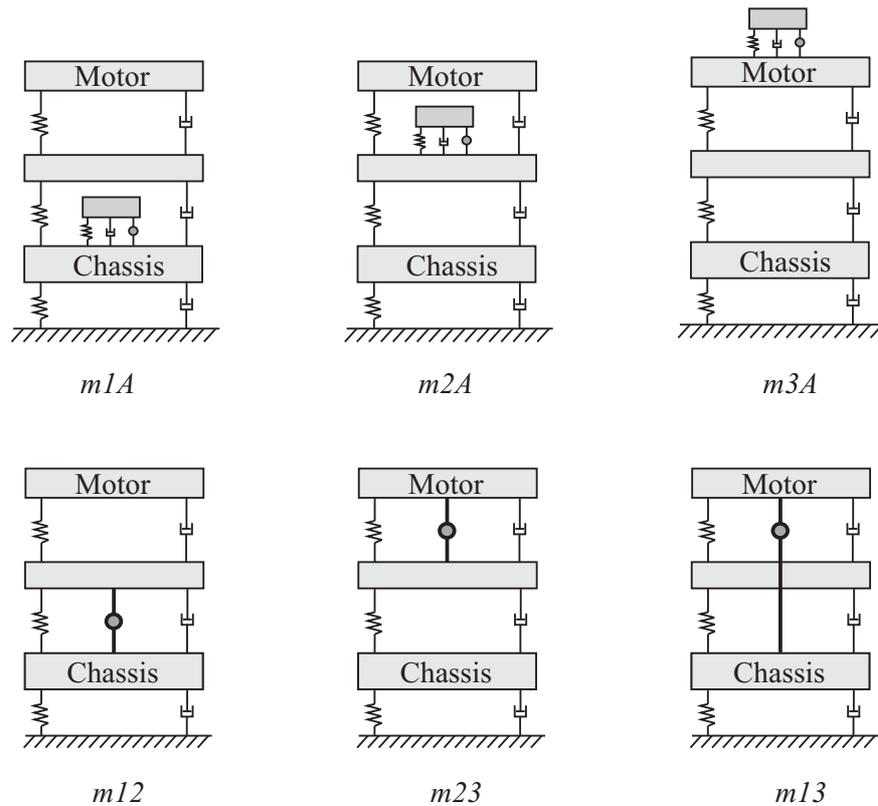


Bild 5.3: Mögliche Aktoranordnungen

zur Erzeugung des Strom auch die betreibende Spannung. Da sich die elektrische Leistung aus dem Produkt von Strom und Spannung ergibt, wird die Leistung für jeden einzelnen Aktor vervierfacht, und die erforderliche elektrische Gesamtleistung der zwei Aktoren wird somit doppelt so groß wie die von vier Aktoren.

Bereits hier kann vermutet werden, dass die Anordnung *m3A* eine ungünstige Lösung bezüglich der Energieaufnahme sein wird. Da bei diesem Fall die kompensierende Kraft direkt am Motor angreift, kann keinerlei Dämpfung durch passive Bauelemente (Feder und Dämpfer) genutzt werden. Es muss vielmehr die gesamte beschleunigende Kraft $F(t)$ ausgeglichen werden.

Außerdem ist anzumerken, dass die technische Realisierung der Konfiguration *m13* möglicherweise problematisch ist. Da der Motor in x-Richtung nicht symmetrisch auf dem Hilfsrahmen befestigt ist (s. Bild 4.2), werden hier rotatorische Moden des Hilfsrahmens um die y-Achse angeregt. Um das resultierende Moment am Chassis ausgleichen zu können, müsste durch die Aktoren wiederum ein entsprechendes Gegenmoment unter Abstützung am Motorblock erzeugt werden. Speziell an dem

hier betrachteten Prüfstand z. B. wäre dies aufgrund des relativ geringen Massenträgheitsmoments des „Motorblocks“ kaum möglich.

Von den in Bild 5.3 dargestellten möglichen Aktoranordnungen werden lediglich die ersten drei, nämlich $m1A$, $m2A$ und $m3A$ (Kraftausgleich) tatsächlich am Prüfstand realisiert. Die Anordnungen $m12$, $m23$ und $m13$ (Wegausgleich) werden aber trotzdem in die nachfolgende theoretische Analyse mit einbezogen. Um Vergleichbarkeit zu erreichen, werden dabei dieselben Kraftaktoren (s. Bild 4.11 und Tabelle B.2) eingesetzt, wie für den Kraftausgleich. Für die tatsächliche Anwendung können allerdings Modifikationen notwendig sein, um die beim Wegausgleich auftretenden mechanischen Anforderungen erfüllen zu können.

5.2 Modellierung

Mit den beiden Aktorprinzipien Kraftausgleich und Wegausgleich ergeben sich für das Dreimassenmodell Konfigurationen wie in den Bildern 5.4-a und 5.4-b gezeigt. Die entsprechende mathematische Modellierung wird im Folgenden stellvertretend für den Fall in 5.4-a demonstriert.

Bei der Aktormodellierung kann auf die Ausführungen von Abschnitt 4.4 zurückgegriffen werden. Wie bereits angemerkt, sind in Bild 5.4-a insgesamt vier Aktoren zu einem einzigen Aktor zusammengefasst. Dieser hat entsprechend die vierfache

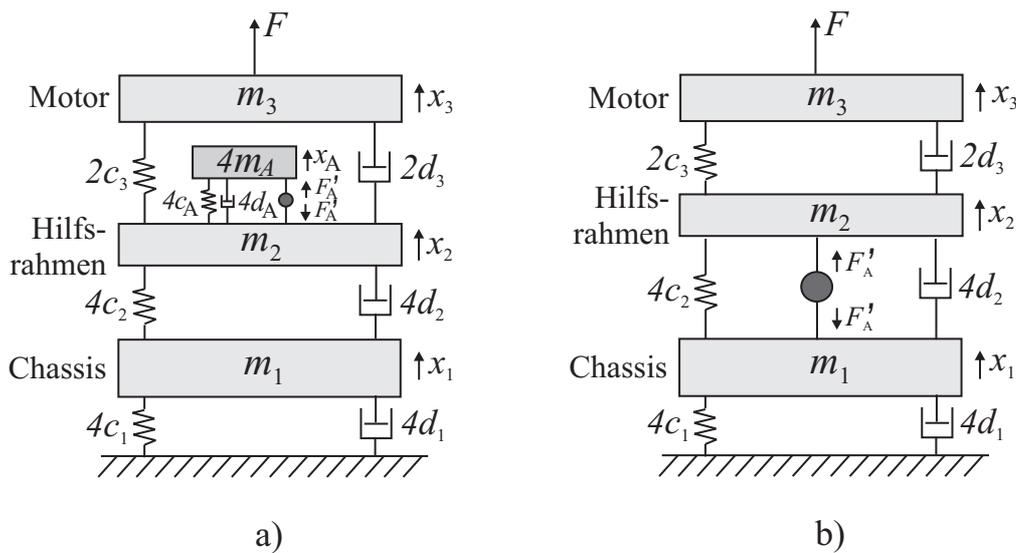


Bild 5.4: Physikalische Modelle mit Kraftausgleich ($m2A$) und Wegausgleich ($m12$)

Masse sowie Feder- und Dämpferkonstante wie ein tatsächlicher Aktor. Widerstand und Induktivität des Ersatzaktors nehmen dagegen ein Viertel des ursprünglichen Wertes an. Es resultieren auf ein Vierfaches erhöhte Gesamtwerte von Strom und Aktorkraft.

$$i'_A(t) = 4 \cdot i_A(t) , \quad F'_A(t) = 4 \cdot F_A(t) . \quad (5.1)$$

Die Steuerspannung $u_A(t)$ sowie die Auslenkung $x_A(t)$ bleiben unverändert.

Die Modellierung des mechanischen Aufbaus kann durch die Anwendung von Newtons zweitem Gesetz [42, 32] geschehen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass auch die im realen Aufbau zwischen den Massen m_1 , m_2 und m_3 parallel wirkenden Feder- und Dämpferelemente jeweils zusammengefasst sind zu Gesamtelementen mit entsprechend vielfachen Parameterwerten. Zusammen mit dem elektrischen Teil des Aktormodells sowie den Kopplungsgleichungen ergibt sich die nachfolgende formelmäßige Beschreibung.

Mechanisch:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -4 c_1 x_1(t) - 4 d_1 \dot{x}_1(t) + 4 c_2 (x_2(t) - x_1(t)) + 4 d_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) , \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -4 c_2 (x_2(t) - x_1(t)) - 4 d_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) \\ &\quad + 2 c_3 (x_3(t) - x_2(t)) + 2 d_3 (\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) \\ &\quad + 4 c_A (x_A(t) - x_2(t)) + 4 d_A (\dot{x}_A(t) - \dot{x}_2(t)) - F'_A(t) , \\ m_3 \ddot{x}_3(t) &= -2 c_3 (x_3(t) - x_2(t)) - 2 d_3 (\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) + F(t) , \\ 4 m_A \ddot{x}_A(t) &= -4 c_A (x_A(t) - x_2(t)) - 4 d_A (\dot{x}_A(t) - \dot{x}_2(t)) + F'_A(t) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Elektrisch:

$$u_A(t) = \frac{L}{4} \frac{di'_A(t)}{dt} + \frac{R}{4} i'_A(t) + u_{\text{ind}}(t) . \quad (5.3)$$

Kopplungsgleichungen:

$$\begin{aligned} F'_A(t) &= NBl i'_A(t) , \\ u_{\text{ind}}(t) &= NBl (\dot{x}_A(t) - \dot{x}_2(t)) . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Für eine frequenzbezogene Analyse des somit gegebenen Systems werden diese Gleichungen in den Laplace-Bereich transformiert. Anfangswerte werden dabei vernachlässigt. Eine Abschätzung des Leistungsbedarfs kann hergeleitet werden, indem eine vollständige Auslöschung der Vibrationen an der zu beruhigenden Masse, also hier an m_2 , angenommen wird. In der Praxis kann dieser Fall zumindest in guter Näherung mithilfe einer Störgrößenaufschaltung erreicht werden (s. Abschnitt 3.1.2). Die entsprechende Annahme wird in den hier durchgeführten Berechnungen umgesetzt, indem die Auslenkung $X_2(s)$ zu Null gesetzt wird. Hierdurch wird gleichzeitig die Ordnung des betrachteten Gesamtsystems um den Wert zwei verringert.

Für die weitere Analyse ist es sinnvoll, durch entsprechendes Auflösen des erhaltenen Gleichungssystems Übertragungsfunktionen aufzustellen, die die Wirkung der anregenden Kraft $F(t)$ auf die für die Leistungsberechnung relevanten Größen beschreiben. Es sind hier insbesondere vier Übertragungen wichtig:

$$\begin{aligned}
 G_{F'_A}(s) &: F(s) \rightarrow \text{Aktorkraft } F'_A(s), \\
 G_{v_A}(s) &: F(s) \rightarrow \text{Aktorgeschwindigkeit } V_A(s), \\
 G_{u_A}(s) &: F(s) \rightarrow \text{Aktorspannung } U_A(s), \\
 G_{i'_A}(s) &: F(s) \rightarrow \text{Aktorstrom } I'_A(s).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Aktorgeschwindigkeit $v_A(t)$ bezeichne hierbei die zeitliche Ableitung der Auslenkung der Aktorkomponente zur Erzeugung der Kraft $F'_A(t)$. Speziell für die Anordnung $m2A$ gelte also $v_A(t) = \dot{x}_A(t) - \dot{x}_2(t)$, wobei $\dot{x}_2(t)$ aufgrund der Schwingungsdämpfung zu Null anzunehmen ist. Für den Fall $m12$ würde entsprechend gelten $v_A(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = 0$.

5.3 Mittlere Leistung – mit und ohne Energie-rückspeisung

Im letzten Abschnitt wurde ein Modell aufgestellt, in dem die Schwingung des zu beruhigenden Körpers vollständig zu Null gesetzt ist. Für diesen Fall entspricht die von den Aktoren erzeugte Gesamtkraft exakt der durch die Störschwingung des Motors bedingten Kraft. Die hierzu insgesamt erforderliche mechanische Momentanleistung an den krafterzeugenden Elementen der Aktoren kann (für die Anordnung $m2A$) als

$$P_{\text{mech}}(t) = F'_A(t) \cdot (\dot{x}_A(t) - \dot{x}_2(t)) \quad , \quad \dot{x}_2(t) = 0 \tag{5.6}$$

berechnet werden. Der Momentanwert der gesamten elektrischen Ansteuerleistung ergibt sich als

$$P_{\text{el}}(t) = u_{\text{A}}(t) \cdot i'_{\text{A}}(t) . \quad (5.7)$$

Dieser nichtlineare Zusammenhang wird gut auswertbar unter der Annahme harmonischer Störanregung, also $F(t) = |F| \cos(\omega t)$. Für diesen Fall kann beispielsweise die elektrische Leistung unter Zuhilfenahme der mit (5.5) gegebenen Frequenzgänge dargestellt werden als

$$P_{\text{el}}(t) = \text{Re}\{G_{u_{\text{A}}}(j\omega)|F|e^{j\omega t}\} \cdot \text{Re}\{G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)|F|e^{j\omega t}\} . \quad (5.8)$$

Ausgehend hiervon kann umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} P_{\text{el}}(t) &= |F|^2 \cdot \text{Re}\{|G_{u_{\text{A}}}(j\omega)|e^{j\angle G_{u_{\text{A}}}(j\omega)}e^{j\omega t}\} \cdot \text{Re}\{|G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)|e^{j\angle G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)}e^{j\omega t}\} \\ &= |F|^2 \cdot |G_{u_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle G_{u_{\text{A}}}(j\omega)) \cdot |G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)) \\ &= \frac{1}{2} |F|^2 \cdot |G_{u_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot |G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot [\cos(2\omega t + \angle G_{u_{\text{A}}}(j\omega) + \angle G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)) \\ &\quad + \cos(\angle G_{u_{\text{A}}}(j\omega) - \angle G_{i'_{\text{A}}}(j\omega))] . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Es wird offensichtlich, dass sich die elektrische Leistung als eine Überlagerung eines konstanten Wertes und eines harmonischen Signals mit der doppelten Frequenz des ursprünglichen Störsignals $F(t)$ ergibt. Der mittlere Wert des Leistungsbedarfs ist

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{el}} &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T P_{\text{el}}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} |F|^2 \cdot |G_{u_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot |G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot \cos(\angle G_{u_{\text{A}}}(j\omega) - \angle G_{i'_{\text{A}}}(j\omega)) , \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei T die Periodendauer der Störschwingung ist.

Dieselbe Herleitung kann für die mechanische Leistung durchgeführt werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{mech}} &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T P_{\text{mech}}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} |F|^2 \cdot |G_{F'_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot |G_{v_{\text{A}}}(j\omega)| \cdot \cos(\angle G_{F'_{\text{A}}}(j\omega) - \angle G_{v_{\text{A}}}(j\omega)) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Für eine Effizienzanalyse bezogen auf den konkret vorliegenden Aufbau ist insbesondere die notwendige elektrische Leistung $\bar{P}_{\text{el}}(t)$ und somit Gleichung (5.10) von Bedeutung. Es ist dabei zu beachten, dass (5.10) nur dann allgemein gültig ist,

wenn für die Aktoren eine Antriebselektronik mit Energierückspeisung eingesetzt wird. Eine derartige Elektronik sollte in der Lage sein, elektrische Leistung sowohl abgeben als auch wieder aufnehmen und speichern zu können. Liegt ein entsprechender Antrieb vor, so geht die Momentanleistung $P_{\text{el}}(t)$ jederzeit in das Integral in (5.10) ein. Liegt aber eine Spannungsversorgung ohne Energierückgewinnung vor, so wird lediglich Leistung abgegeben, aber nicht wieder aufgenommen. Es muss dann die modifizierte Formel

$$\bar{P}_{\text{el}}^+ = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T P_{\text{el}}^+(t) dt \quad (5.12)$$

mit

$$P_{\text{el}}^+(t) = \begin{cases} P_{\text{el}}(t) & \text{falls } P_{\text{el}}(t) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.13)$$

angewandt werden. Es gilt $\bar{P}_{\text{el}} = \bar{P}_{\text{el}}^+$ nur dann, wenn für die Phasendifferenz von Spannung $u_A(t)$ und Strom $i'_A(t)$ gilt

$$\delta_{ui}(\omega) := \angle G_{u_A}(j\omega) - \angle G_{i'_A}(j\omega) = k \cdot 2\pi, \quad (5.14)$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Liegt ein Phasenunterschied deutlich verschieden von (5.14) vor, so ist bei einem Betrieb mit Energierückspeisung eine wesentlich geringere Leistung erforderlich als ohne Energierückspeisung. Dies wird anschaulich klar, wenn man sich vergegenwärtigt, dass der Ausdruck $P_{\text{el}}(t) = u_A(t) \cdot i'_A(t)$ genau dann für alle Zeiten größer oder gleich Null ist (so dass $\bar{P}_{\text{el}} = \bar{P}_{\text{el}}^+$), wenn $u_A(t)$ und $i'_A(t)$ gleiche Phase aufweisen. Ansonsten treten immer Bereiche mit negativen Werten auf. In Bild 5.5 ist der Zusammenhang zwischen Phasendifferenz $\delta_{ui}(\omega)$ und benötigter mittlerer Leistung \bar{P}_{el} bzw. mittlerer positiver Leistung \bar{P}_{el}^+ veranschaulicht. Die gezeichneten Verläufe sind natürlich 2π -periodisch. Es ist ersichtlich, dass für $90^\circ < \delta_{ui} < 270^\circ$ mit Energierückspeisung ein Gewinn an Energie möglich ist. Ohne Energierückspeisung wird die Leistungsaufnahme dagegen nie negativ. Immerhin wäre aber für $\bar{P}_{\text{el}}^+(t)$ zumindest noch ein vollständig verbrauchsfreier Betrieb für $\delta_{ui}(\omega) = 180^\circ$ möglich.

Für eine allgemeine Betrachtung können diese Ergebnisse direkt auf die mechanische Leistung übertragen werden. Voraussetzung für die Annahme eines Betriebes mit Energierückgewinnung ist dann allerdings, dass bereits die Leistungsumsetzung der verwendeten Aktoren auf geeignete Weise geschieht. Ein idealer Fall läge hier z. B. vor, wenn die folgenden beiden Zusammenhänge gegeben sind [68]:

- Aktorspannung $u_A(t)$ proportional zur Aktorgeschwindigkeit $v_A(t)$,
- Aktorstrom $i'_A(t)$ proportional zur Kraft $F'_A(t)$.

Sind diese Anforderungen erfüllt, so kann wieder über die Phasendifferenz der leistungsbestimmenden Größen, in diesem Fall

$$\delta_{Fv}(\omega) := \angle G_{F'_A}(j\omega) - \angle G_{v_A}(j\omega) , \quad (5.15)$$

eine grundsätzliche Aussage über die Energieeinsparung bei Einsatz einer Treiber-elektronik mit Energierückspeisung erhalten werden. Das Verhältnis von mittlerer Leistung und mittlerer positiver Leistung, das in Bild 5.5 ursprünglich für die elektrischen Größen \bar{P}_{el} und \bar{P}_{el}^+ angegeben wurde, gilt hierzu in gleicher Weise auch für die mechanischen Leistungswerte \bar{P}_{mech} und \bar{P}_{mech}^+ .

Speziell bei den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Aktoren verhält sich die Phasendifferenz von Spannung $u_A(t)$ und Strom $i'_A(t)$ wie in Bild 4.14 dargestellt. Sowohl Strom als auch Spannung sind im relevanten Frequenzbereich näherungsweise proportional zur Aktorkraft $F_A(t)$. Die Aktorgeschwindigkeit $v_A(t)$, die ja hauptsächlich durch die induzierte Gegenspannung $u_{ind}(t)$ Einfluss auf die elektrischen

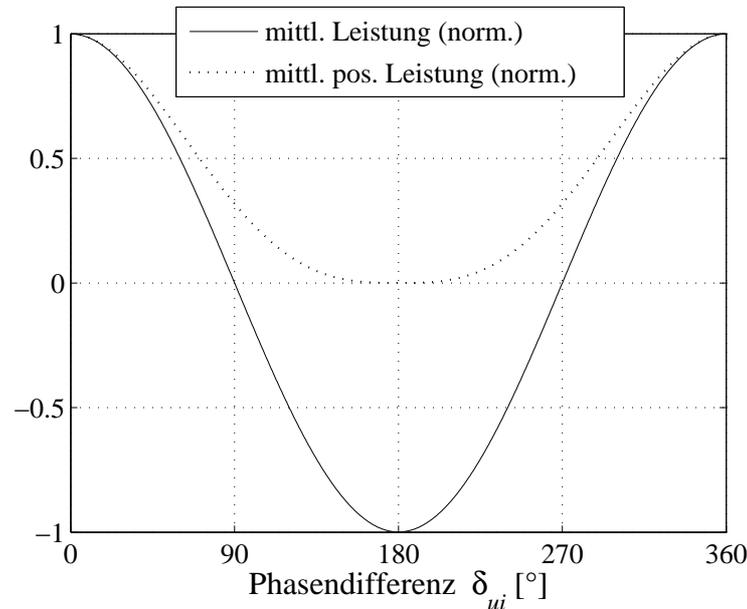


Bild 5.5: \bar{P}_{el} und \bar{P}_{el}^+ (bzw. \bar{P}_{mech} und \bar{P}_{mech}^+), normiert auf den gemeinsamen Maximalwert.

Größen nimmt, ist von vernachlässigbarer Wirkung. Eine geringe Phasendifferenz der elektrischen Größen $u_A(t)$ und $i'_A(t)$ ergibt sich lediglich durch die Eckfrequenz f_{el} des elektrischen Kreises der Aktoren. Bei der höchsten hier betrachteten Frequenz von 300 Hz nimmt die Phasendifferenz einen maximalen Wert von etwa 30° an. Nach Bild 5.5 folgt entsprechend, dass durch einen Einsatz einer Antriebselektronik mit Energierückspeisung nahezu kein Vorteil erreicht werden kann. Potenziale zur Energieeinsparung, die sich durch die Phasendifferenz $\delta_{Fv}(\omega)$ zwischen $F_A(t)$ und $v_A(t)$ ergeben, können kaum ausgenutzt werden, da Strom und Spannung unabhängig von $\delta_{Fv}(\omega)$ immer bei nahezu exakt gleicher Phase bleiben und entsprechend die momentane Leistung $P_{el}(t)$ nie wesentlich kleiner wird als Null.

Ansätze zur Verbesserung der Aktorik

Anhaltspunkte zur vorteilhaften Modifizierung von Aktoren des verwendeten Typs können aus den Beschreibungsgleichungen (5.2)-(5.4) abgeleitet werden. Der gewünschte proportionale Zusammenhang zwischen Strom $i'_A(t)$ und Kraft $F'_A(t)$ (s. o.) ist hier bereits in idealer Weise gegeben. Eine Proportionalität von Spannung $u_A(t)$ und Geschwindigkeit $v_A(t)$ dagegen kann nur dann in guter Näherung erreicht werden, wenn die induzierte Gegenspannung $u_{ind}(t)$ deutlich größer ist als die an Induktivität und Widerstand der Aktorspule abfallende Spannung (vgl. Formel [5.3]). Dies wiederum kann durch zwei verschiedene Ansätze angestrebt werden:

- Zum einen kann die Motorkonstante NBl möglichst groß eingerichtet werden. In Folge wird für die gewünschte Krafterzeugung nur ein geringer Strom benötigt, und der Spannungsabfall über Spuleninduktivität und -widerstand bleibt klein. Die induzierte Gegenspannung dagegen wird gleichzeitig wie gewünscht nach (5.4) groß ausfallen.
- Zum anderen ist eine Modifikation der mechanischen Einbauweise der Aktoren in der Art denkbar, dass einerseits die erforderliche Kraft $F'_A(t)$ verhältnismäßig gering bleibt (hieraus ergibt sich wiederum ein geringer Stromfluss $i'_A(t)$), und dass andererseits die auftretende Auslenkung $x_A(t)$ (und somit die Geschwindigkeit und gleichzeitig die induzierte Gegenspannung) möglichst groß wird. Derartige Verhältnisse könnten durch Getriebeübersetzungen, oder, im einfachsten Fall, durch Hebelkonstruktionen erreicht werden.

Die beiden vorgestellten Maßnahmen geben grundsätzliche Anhaltspunkte zur – bezüglich der Energieaufnahme – vorteilhaften Aktorauslegung. Es ist natürlich zu erwarten, dass die tatsächliche praktische Umsetzung nicht ganz so trivial sein wird, wie die einfache beschriebene Theorie.

5.4 Frequenzbezogener Leistungsbedarf und Auswertung

Im vorhergehenden Abschnitt sind mit den Gleichungen (5.10) und (5.11) Zusammenhänge zwischen der quadrierten Kraftamplitude $|F|^2$ und der erforderlichen mittleren elektrischen bzw. mechanischen Leistung der Aktoren bestimmt worden. Die anregende Motorkraft $F(t)$ wurde dabei als sinusförmig angenommen. Mit einer expliziten Kennzeichnung der Frequenzabhängigkeit von $|F|^2$ und entsprechend auch von \bar{P}_{mech} und \bar{P}_{el} kann geschrieben werden

$$\bar{P}_{\text{mech}}(\omega) = K_{\text{mech}}(\omega) \cdot |F|^2(\omega) , \quad (5.16)$$

$$\bar{P}_{\text{el}}(\omega) = K_{\text{el}}(\omega) \cdot |F|^2(\omega) . \quad (5.17)$$

Die ebenfalls frequenzabhängigen Größen

$$\begin{aligned} K_{\text{mech}}(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot |G_{F'_A}(j\omega)| \cdot |G_{v_A}(j\omega)| \cdot \cos(\angle G_{F'_A}(j\omega) - \angle G_{v_A}(j\omega)) , \\ K_{\text{el}}(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot |G_{u_A}(j\omega)| \cdot |G_{i'_A}(j\omega)| \cdot \cos(\angle G_{u_A}(j\omega) - \angle G_{i'_A}(j\omega)) \end{aligned} \quad (5.18)$$

geben dabei an, welche Leistung notwendig ist, um bei gegebenem $|F|^2(\omega)$ eine Übertragung von Motorvibrationen auf das Chassis vollständig zu vermeiden. Sie stellen also gewissermaßen inverse Effizienzspektren des gesamten Systems zur Schwingungsdämpfung inklusive der passiven Maßnahmen dar.

Da das betrachtete System linear ist, bleiben (5.16) und (5.17) auch für beliebige Überlagerungen von harmonischen Schwingungen gültig. Bei einer Anregung mit mehr als einer Frequenz ergeben sich folglich die insgesamt benötigten Leistungen als

$$\bar{P}_{\text{mech}}^{\text{ges}} = \int_{\omega=\omega_{\text{min}}}^{\omega_{\text{max}}} \bar{P}_{\text{mech}}(\omega) d\omega \quad (5.19)$$

und

$$\bar{P}_{\text{el}}^{\text{ges}} = \int_{\omega=\omega_{\text{min}}}^{\omega_{\text{max}}} \bar{P}_{\text{el}}(\omega) d\omega . \quad (5.20)$$

Mechanischer Leistungsbedarf

In Bild 5.6 sind zunächst die Verläufe von $K_{\text{mech}}(\omega)$ für die sechs in Bild 5.3 vorgestellten Aktoranordnungen gezeigt. Da hier die Verhältnisse von Leistungswerten betrachtet werden, ist die Darstellung logarithmisch skaliert gemäß $K_{\text{mech}}(\omega) [\text{dB}] = 10 \cdot \log_{10}(K_{\text{mech}}(\omega))$.

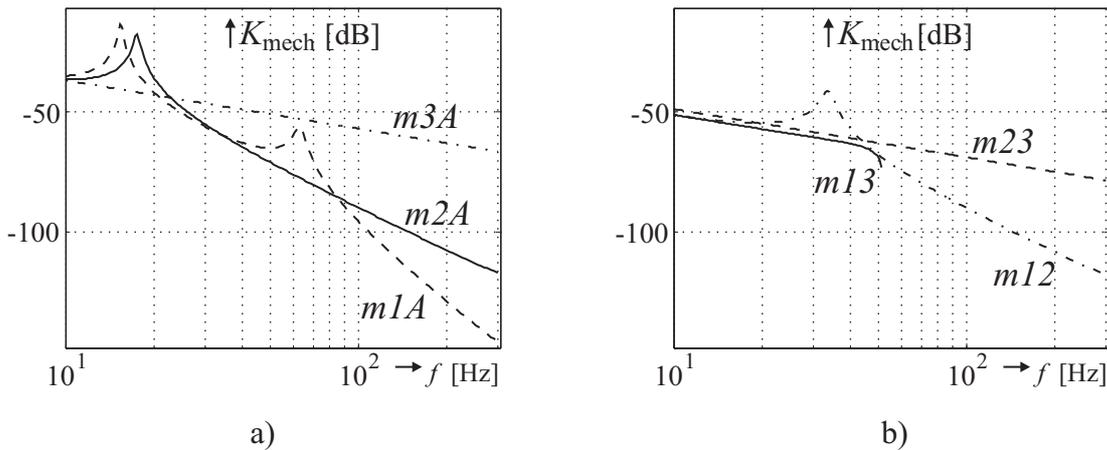


Bild 5.6: Spektren des mittleren mechanischen Leistungsbedarfs für a) Kraftausgleich und b) Wegausgleich

Speziell die Kurve zu $m13$ ist in Bild 5.6-b nur bis zu einer Frequenz von ca. 50 Hz gezeichnet, da sich für höhere Frequenzen ein negatives $K_{\text{mech}}(\omega)$ einstellt. Dies weist auf die Möglichkeit eines Gewinns an mechanischer Energie hin. Wie in Bild 5.7 mit linearer Skalierung gezeigt, ist der Betrag der auftretenden negativen Werte für einen Frequenzbereich zwischen 60 Hz und 70 Hz deutlich verschieden von Null. In diesem Bereich tritt ein Resonanzverhalten des Hilfsrahmens auf. Dieser Effekt kann einen deutlichen Energiegewinn bewirken, falls die entsprechende Resonanzfrequenz bei einer häufig und stark angeregten Frequenz der Motorvibrationen liegt. Für die reale Anwendung bliebe allerdings zu prüfen, in wie weit die Anordnung $m13$ tatsächlich in der Motoraufhängung umgesetzt werden kann (vgl. Abschnitt 5.1). Auf jeden Fall ist dieses Ergebnis eine allgemein interessante Anregung für Problemstellungen, bei denen eine Einrichtung der Aufbaukonfiguration $m13$ möglich ist.

Einen Gesamtüberblick darüber, wie groß der potenzielle Unterschied des Leistungsaufwands mit und ohne Energierückgewinnung bei der vorliegenden Anwendung ist, ist durch Bild 5.8 gegeben. Hier ist zum einen das Produkt der Am-

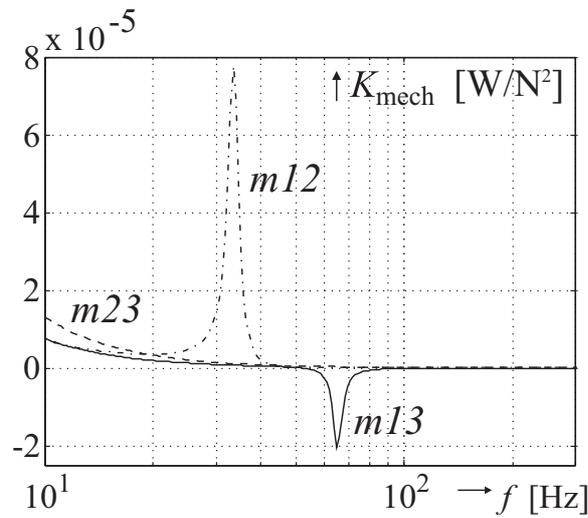


Bild 5.7: Linear skaliertes Leistungsbedarf (nur Wegausgleich)

plitudengänge $|G_{F'_A}(j\omega)|$ und $|G_{v_A}(j\omega)|$ dargestellt und zum anderen die Differenz der zugehörigen Phasengänge. Beides zusammen liefert mit Gleichung (5.11) und Bild 5.5 eine eindeutige Aussage über den Unterschied des Leistungsbedarfs für ein System mit und ohne Energierückgewinnung. Neben einer entsprechenden Treiber-elektronik muss hierzu natürlich, wie im letzten Abschnitt beschrieben, auch eine geeignete Leistungsumsetzung der Aktoren gegeben sein.

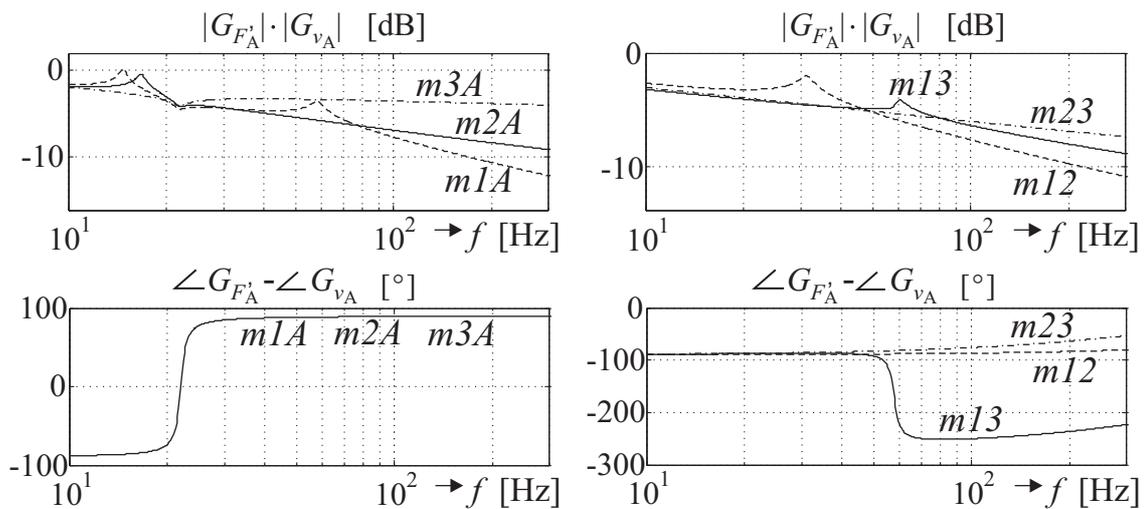


Bild 5.8: Amplitudenprodukte und Phasendifferenzen von $G_{F'_A}(t)$ und $G_{v_A}(t)$

In Bild 5.8 ist zu sehen, dass die Phasendifferenz $\delta_{F_v}(\omega)$ sowohl für das Prinzip Kraftausgleich als auch für den Wegausgleich für fast alle Frequenzen nahe einem Wert $(2k + 1) \cdot 90^\circ$ bleibt, wobei k wieder ganzzahlig ist. Dies folgt speziell beim Wegausgleich daraus, dass die Kraft $F'_A(t)$ hauptsächlich durch die Kraft der Federelemente (z. B. c_3 für $m2\beta$) bestimmt ist. Diese ist proportional zur Aktorauslenkung ($x_3 - x_2$ für $m2\beta$), aus der sich durch Ableitung die Aktorgeschwindigkeit $v_A(t)$ ergibt. Es resultiert für die Anordnungen $m1\beta$ und $m2\beta$ eine Phasendifferenz $\delta_{F_v}(\omega) \approx -90^\circ$ im gesamten betrachteten Frequenzbereich. Für die Konfiguration $m1\beta$ tritt oberhalb der Mode bei ungefähr 60 Hz eine Differenz von etwa -270° auf. Diese ergibt sich zufolge der Umkehr der Bewegungsorientierung des frei schwingenden zwischen-geschalteten Hilfsrahmens beim Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Frequenzbereich. Bei allen drei Fällen mit Wegausgleich steigt mit zunehmender Frequenz der Einfluss der geschwindigkeitsproportionalen Dämpferkräfte, und die Phasendifferenzen weichen von den Werten -90° und -270° nach oben hin ab.

Die Anordnungen mit Kraftausgleich verhalten sich für niedrige Frequenzen ähnlich wie die mit Wegausgleich. Auch hier ist die Kraft $F'_A(t)$ wesentlich durch die wegproportionalen Federkräfte, die in diesem Fall durch die Federelemente c_A entstehen, bestimmt. Es stellt sich folglich eine Phasendifferenz von -90° ein. Für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz ist die Kraft $F_A(t)$ in etwa proportional zur insgesamt von den Aktoren erzeugten Kraft $F_{\text{ges}}(t)$. Entsprechend ist $F'_A(t)$ in guter Näherung proportional zur Beschleunigung $\ddot{x}_A(t)$. Da diese hier der Ableitung der Aktorgeschwindigkeit $v_A(t)$ entspricht, ergibt sich die Phasendifferenz δ_{F_v} von 90° .

Abschließend kann festgehalten werden, dass aus den gegebenen Verläufen der Winkeldifferenz $\delta_{F_v}(\omega)$ mit Diagramm 5.5 folgt, dass ein System mit Energierückgewinnung hier potentiell wesentlich effizienter arbeiten kann als eines ohne (geeignete Antriebselektronik und Aktorik vorausgesetzt). Insbesondere gilt dies für die Anordnung $m1\beta$.

Elektrischer Leistungsbedarf

Die Spektren des elektrischen Leistungsbedarfs sind in Bild 5.9 dargestellt. Grundsätzlich ergeben sich hier ähnliche Kurvenformen wie für die mechanische Energieaufnahme. Da aber die vorliegenden Aktoren nicht für einen Betrieb mit Energierückgewinnung geeignet sind, nehmen die Kurven – wie nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts zu erwarten war – deutlich höhere Werte an, als die der mecha-

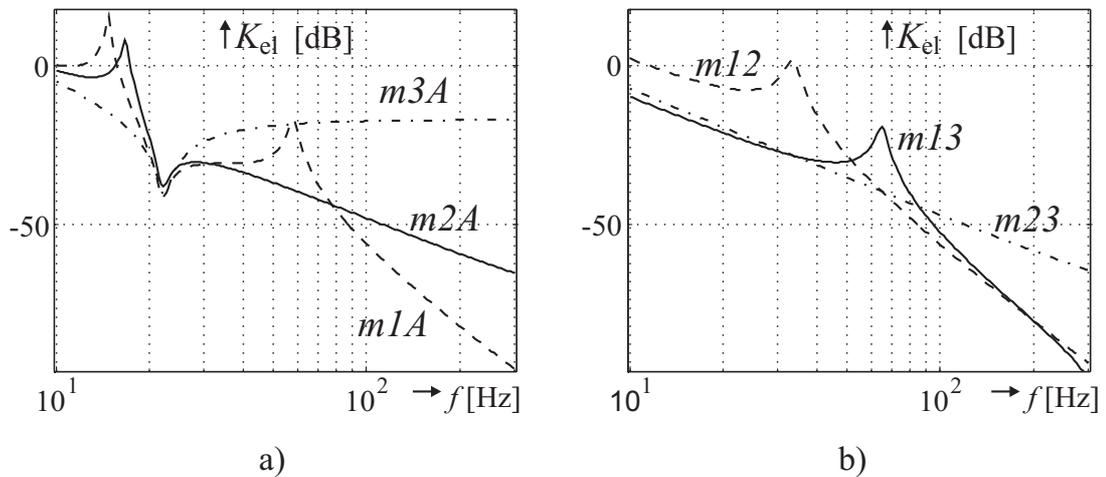


Bild 5.9: Spektren des mittleren elektrischen Leistungsbedarfs für a) Kraftausgleich und b) Wegausgleich

nischen Leistung. Eine Ausnahme ergibt sich nur in Bild 5.9-a (Kraftausgleich) bei dem lokalen Minimum, das bei etwa 22 Hz auftritt und das auf die Resonanz der aktiven Tilger zurückzuführen ist. Hier speziell wird ein annähernd genauso günstiger Leistungsbedarf wie bei der mechanischen Leistung erreicht. Dies ist nach Bild 5.8 im vorhergehenden Abschnitt auch zu erwarten, da bei $\omega_0 \approx 2 \cdot \pi \cdot 22$ Hz die Winkel-differenz $\delta_{Fv}(\omega_0)$ den Wert Null annimmt, so dass gilt $\bar{P}_{mech}^+(\omega_0) = \bar{P}_{mech}(\omega_0)$. Der Leistungsbedarf ist also bei ω_0 , nahe der Resonanzfrequenz, gleich groß für Systeme mit und ohne Energierückgewinnung. Beim Wegausgleich tritt dieser Fall nicht auf, und der für die verwendeten Aktoren ermittelte elektrische Leistungsbedarf ist durchweg deutlich höher als der mechanische. Bezüglich des elektrischen Leistungsverbrauchs ohne Energierückgewinnung ergibt sich als Folge in der Umgebung der Resonanzfrequenz ein deutlicher Vorteil des Kraftausgleich-Prinzips gegenüber dem Wegausgleich (vgl. Bild 5.9).

Mit den Kurven in Bild 5.9 sind Aussagen über die frequenzbezogene Effizienz der verschiedenen Aktoranordnungen gewonnen worden. Um allerdings detaillierte Bewertungen bezüglich der Eignung im Kraftfahrzeug vornehmen zu können, würden modellspezifische Informationen über die Krafterzeugung am Motor benötigt. Es müsste bekannt sein, wie stark und wie häufig einzelne Frequenzanteile in der Kraft $F(t)$ auftreten. Einflussfaktoren sind hierbei einerseits der jeweilige Motortyp, andererseits aber auch das typische Lastprofil bzw. Fahrverhalten. Sind die entsprechen-

den Informationen bekannt, so ist eine Beurteilung der Aktoranordnungen verhältnismäßig einfach möglich. Für beliebige Motorentypen und Belastungen ist es dagegen schwieriger, differenzierte Aussagen zu treffen. Trotzdem können einige wichtige grundsätzliche Informationen gewonnen werden:

Offensichtlich wird in Bild 5.9 die bereits im Abschnitt 5.1 angestellte Vermutung bestätigt, dass die Anordnung $m3A$ sicherlich nicht die günstigste Lösung ist. Sie erfordert nahezu im gesamten relevanten Frequenzbereich von 20 bis 300 Hz wesentlich mehr Leistung als die anderen Anordnungen mit Kraftausgleich.

Weiterhin ist es möglich, die Aktorkonfiguration zu ermitteln, die zumindest für die meisten Motortypen und -belastungen zu einem minimalen Energieverbrauch führen sollte. Um die Auswahl zu veranschaulichen ist es hilfreich, von der in Bild 5.9 verwendeten doppelt-logarithmischen Darstellung zu einer komplett linearen Skalierung gemäß den Bildern 5.10-a,b,c überzugehen. Da bei linearer Skalierung die Darstellung aufgrund stark unterschiedlicher Kurvenwerte recht unübersichtlich ist, werden drei Ansichten mit verschiedenen Anzeigebereichen verwendet. In 5.10-a sind dabei noch alle Kurven dargestellt, in 5.10-b ist dagegen $m12$ weggelassen und in 5.10-c sind nur noch $m23$ und $m2A$ eingezeichnet. Es ist insgesamt erkennbar, dass die Konfiguration $m2A$ im unteren Frequenzbereich mit Abstand die kleinsten Spitzenwerte annimmt. Im oberen Frequenzbereich sind andere Anordnungen zwar effizienter ($m1A$, $m12$ und $m13$, s. Bild 5.11), aber die Absolutwerte der Unterschiede sind gering. Dieses Ergebnis drückt sich auch in der Gesamtleistung \bar{P}_{el}^{ges} aus, die sich durch die Integralbildung gemäß Formel (5.20) ergibt. Wird hierzu eine Anregung

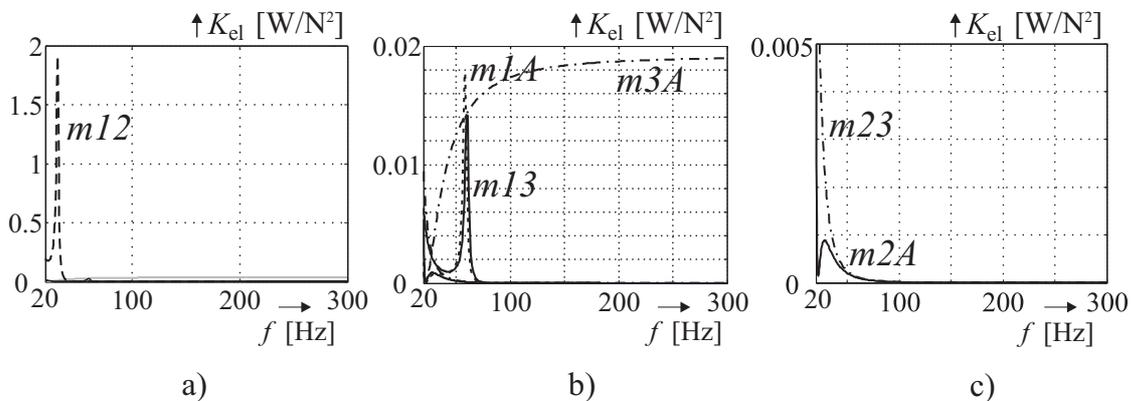


Bild 5.10: Linear skaliertes mittlerer elektrischer Leistungsbedarf – mit drei verschiedenen Anzeigebereichen

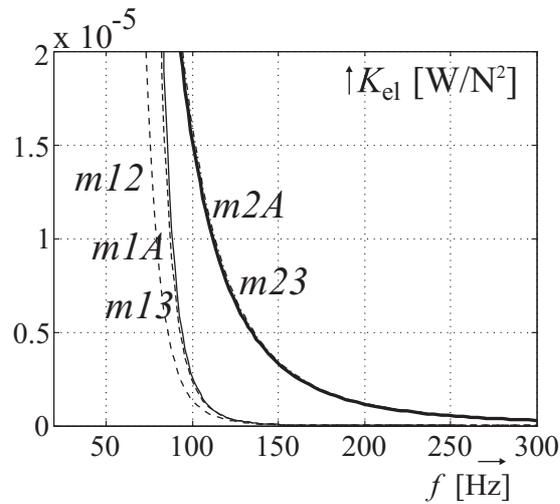


Bild 5.11: Mittlerer elektrischer Leistungsbedarf, unterer Wertebereich

mit der Kraftamplitude $|F|(\omega) = 1$ für den gesamten relevanten Frequenzbereich angenommen, so ergeben sich die in Tabelle 5.1 eingetragenen Integralwerte. Für bessere Vergleichbarkeit ist hier eine Normierung auf den für die Anordnung $m2A$ auftretenden Wert von \bar{P}_{el}^{ges} vorgenommen worden.

Nach Abschnitt 4.1.2 wird zumindest für einen Teil der vom Motor erzeugten Kraftkomponenten die Amplitude $|F|(\omega)$ nicht konstant sein, sondern mit der Frequenz quadratisch zunehmen. Aber auch unter der extremen Annahme, dass dies für das gesamte Störsignal der Fall ist, bleiben die Ergebnisse bezüglich der Effizienz der Aktoranordnungen zumindest qualitativ erhalten (s. Tabelle 5.1).

Ein interessantes Teilergebnis ist, dass die Anordnung $m1A$ offensichtlich weniger effizient ist als $m2A$. Da bei $m1A$ mehr Elemente zur passiven Schwingungsisolation

Tabelle 5.1: Gesamter Leistungsbedarf, jeweils normiert auf d. kleinsten Wert ($m2A$)

Anordnung	\bar{P}_{el}^{ges} für $ F = \text{konst}$	\bar{P}_{el}^{ges} für $ F \sim \omega^2$
$m1A$	5,6	8,0
$m2A$	1,0	1,0
$m3A$	224	3800
$m12$	372	159
$m23$	3,0	1,7
$m13$	6,7	8,1

im Übertragungsweg vom Motor bis zur Auslöschungsstelle liegen, hätte auf den ersten Blick eine höhere Effizienz erwartet werden können. Dass dies nicht der Fall ist liegt daran, dass bei der Anordnung *m1A* bei ca. 60 Hz, also im relevanten Frequenzbereich, eine dominante Mode infolge resonanten Verhaltens des Hilfsrahmens vorliegt. Bei der Aktoranordnung *m2A* dagegen kann diese Mode nicht aufschwingen.

Aufgrund der stark vereinfacht angesetzten Modellierung des Prüfstandaufbaus kann natürlich nicht erwartet werden, dass alle hier erhaltenen Ergebnisse exakt denen am realen Prüfstand oder gar Kraftfahrzeug entsprechen. Trotzdem werden sich die prinzipiellen Verhaltensweisen im Wesentlichen dort wiederfinden. Dies wird auch durch die Vergleichsmessungen belegt, die am Mehrkanalprüfstand durchgeführt wurden. Für die Realisierung der Vibrationsauslöschung an den jeweiligen Massekörpern wurde hierzu eine Störgrößenaufschaltung als Mehrkanalsystem gemäß Kapitel 8 eingesetzt.

Die Ergebnisse der Messungen sind in Bild 5.12 dargestellt. Es ist zu sehen, dass insgesamt eine gute Übereinstimmung von Messwerten und analytischen Werten vorliegt. Bei der Anordnung *m1A* fällt auf, dass neben der durch die Berechnungen vorhergesagten Mode bei ca. 60 Hz eine weitere ausgeprägte Mode bei etwa 90 Hz aufschwingt, die von dem einfachen Dreimassenmodell nicht nachgebildet wird. Außerdem liegt für die Anordnung *m2A* die tatsächlich benötigte Leistung insgesamt um einen bestimmten Wert über der berechneten. Hauptgrund hierfür ist die bezüglich der x-Richtung (s. Bild 4.2) stark unsymmetrische Geometrie des Hilfsrahmens sowie die nicht symmetrische Befestigung des Motors auf dem Rahmen. Es stellt sich am Prüfstand ein deutlich unterschiedlicher Leistungsverbrauch der „vor-

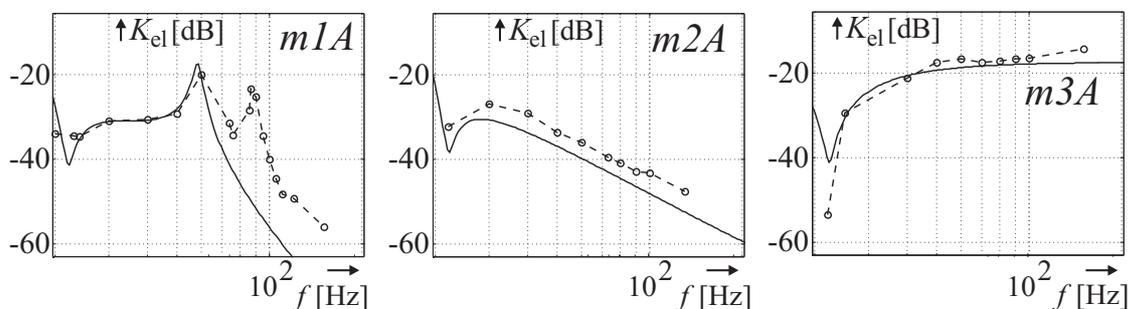


Bild 5.12: Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Messwerten vom realen Prüfstand

deren“ und „hinteren“ Aktoren ein, so dass fast die gesamte Dämpfungskraft von nur zwei der vier Aktoren aufgebracht werden muss. Hierdurch ergibt sich, wie bereits in Abschnitt 5.1.3 angemerkt, ein um nahezu den Faktor zwei erhöhter Gesamtleistungsbedarf der Aktoren. Trotzdem fällt der Verbrauch von Anordnung $m2A$ in den Messungen – bei Betrachtung des gesamten relevanten Frequenzbereichs – am geringsten aus. Unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses wird bei den nachfolgend beschriebenen Untersuchungen von Algorithmen zur aktiven Schwingungsisolation die Anordnung $m2A$ eingesetzt.

5.5 Diskussion

Im Rahmen der vorgestellten Effizienzanalyse wurde frequenzbezogen der Leistungsbedarf der verschiedenen in der Motoraufhängung möglichen Aktoranordnungen verglichen. Hierzu wurden Spektren der Übertragung von der quadrierten Amplitude $|F|^2(\omega)$ der Motorkraft auf die benötigte mechanische und auch elektrische Leistung an den Aktoren ermittelt.

Es wurden zwei verschiedene Wirkprinzipien (Kraftausgleich und Wegausgleich) der Aktoren im Aufbau unterschieden. Während für die Anordnungen mit Wegausgleich tendenziell eine höhere Effizienz bezüglich des mechanischen Leistungsbedarfs festgestellt wurde, zeigten sich in Bezug auf die elektrische Energieaufnahme eher die Konfigurationen nach dem Kraftausgleich-Prinzip überlegen. Diese profitieren in diesem Fall von der Dämpfungswirkung der beteiligten passiven Tilger.

Bezüglich der mechanischen Leistung stellte sich weiterhin heraus, dass mit einer Krafterzeugung mit Energierückgewinnung gegenüber dem Fall ohne Rückspeisung ein deutlich verringerter Leistungsbedarf erreicht werden kann. Speziell für eine der Aktoranordnungen mit Wegausgleich ($m1\beta$) ergibt sich sogar die Möglichkeit eines Energiegewinns im zeitlichen Mittel. Diese Konfiguration würde dann auch die insgesamt beste Lösung darstellen. Für eine entsprechende Krafterzeugung mit Energierückspeisung müsste allerdings neben der Treiberelektronik auch die Aktorik selbst geeignet ausgeführt sein. Speziell bei den im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Aktoren ist dies nicht der Fall (Erläuterung und Verbesserungsvorschläge: s. Abschnitt 5.3). Mit diesen wird auch bei Verwendung einer Antriebselektronik mit Energierückspeisung nur eine minimale Leistungseinsparung erreicht. Diese negative Eigenart der Aktoren steht den positiven Eigenschaften gegenüber, die im

Abschnitt 4.4 aufgeführt wurden.

Für den hier geplanten Einsatz zur Erprobung und Untersuchung von Algorithmen am Prüfstand ergibt sich aufgrund des relativ hohen Leistungsbedarfs der Aktoren noch kein großer Nachteil. Für die Anwendung am realen Kfz, wo die Energieeinsparung ein entscheidendes Kriterium ist, wäre die Ermittlung bzw. die Entwicklung einer Aktorik mit geringerem Verbrauch aber sicher wünschenswert. Die Einsetzbarkeit der vorgestellten aktiven Verfahren könnte so ausschlaggebend verbessert werden.

Abschließend sei noch angemerkt, dass natürlich auch Kombinationen der vorgestellten Aktoranordnungen denkbar sind. Es könnte beispielsweise für den Frequenzbereich unterhalb von ca. 80 Hz die Anordnung *m2A* eingesetzt werden und darüber die Konfiguration *m1A*. Die Anforderungen an die Bandbreite der Aktoren würden dabei entsprechend abgeschwächt werden. Es bleibt aber unwahrscheinlich, dass die erreichbare Energieeinsparung den erheblichen zusätzlichen Hardware-Aufwand rechtfertigen könnte.

Kapitel 6

Konvergenz des FxLMS-Algorithmus

6.1 Motivation und Zielsetzung

Der FxLMS-Algorithmus zeichnet sich durch einfache Implementierbarkeit, zuverlässig stabilen Betrieb und potenziell sehr hohen Dämpfungsgrad aus. Darüber hinaus benötigt er nur wenig Rechen- und Speicheraufwand. Aus diesen Gründen ist er der in der aktiven Schwingungsdämpfung am häufigsten eingesetzte Algorithmus [50]. Besonders unproblematisch ist seine Anwendung bei der Dämpfung periodischer Störsignale, da für diese die sonst gültige Totzeitanforderung außer Kraft gesetzt ist (vgl. Abschnitt 3.1.2). Auch in der vorliegenden Arbeit kommt der FxLMS-Algorithmus aufgrund seiner diversen Vorteile zum Einsatz. Dabei stellt sich für die Anregung mit einer Überlagerung von Sinusschwingungen ein charakteristisches Konvergenzverhalten ein. Für dieses steht eine vollständige mathematische Beschreibung noch aus. Eine solche soll daher im Folgenden hergeleitet werden.

Die Analyse soll im Zeitbereich erfolgen. Aufbauend auf dem Grundlagenabschnitt 2.3.4 wird ein zeitdiskretes Zustandsraumsystem zur Beschreibung der Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$ betrachtet. Da hierbei stationäre Anregung angenommen wird, kann der betrachtete Fall unmittelbar übertragen werden auf die direkte Schmalbandanwendung des FxLMS-Algorithmus, die in [28] im Allgemeinen und in [18] speziell für synchrone Abtastung ($f_A = n \cdot f_0$, $n \in \mathbb{N}$) behandelt wird. Eine ähnliche Betrachtung der Eigenwerte und Eigenvektoren des Adaptionsprozesses wird in [51] präsentiert. Dabei liegt das Hauptaugenmerk auf dem Einfluss des Fre-

quenzabstands und der Länge L des adaptiven Filters (Anzahl der Filterkoeffizienten) auf die Eigenwertverteilung und die resultierende Konvergenzgeschwindigkeit. Eine grundsätzliche untere Grenze bezüglich der Filterlänge ist mit

$$L \geq 2M \quad (6.1)$$

gegeben [51], wobei M wieder die Anzahl der überlagerten Frequenzen ist. Um eine effektive Vibrationsdämpfung sicherzustellen, kann aber eine deutlich größere Filterlänge erforderlich sein [51]. Bei Experimenten an den Prüfständen zur Motoraufhängung stellte sich heraus [73, 75], dass eine hinreichende Bedingung für die Filterlänge durch

$$LT_A \geq T_0 \quad (6.2)$$

gegeben ist. T_A ist dabei nach wie vor die Abtastperiode und T_0 die Grundperiode der Störangeregung. Falls die Bedingung (6.2) erfüllt ist, ist die Dauer LT_A der Impulsantwort des adaptiven Filters mindestens so groß wie eine Grundperiode T_0 . Dass dies eine hinreichende Bedingung für einen bestmöglichen Dämpfungsgrad ist, kann zumindest für den Fall, dass die Periodendauer T_0 ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode T_A ist, auch mathematisch einfach gezeigt werden [74]. Zur Veranschaulichung sind in Bild 6.1 die Dämpfungsergebnisse entsprechender Experimente gezeigt. Es ist zu sehen, dass ein hoher Unterdrückungsgrad für $L \geq 50$, also wenn (6.2) erfüllt ist, erreicht wird. Obwohl der erste Teil der hier vorgestellten Analyse auch den allgemeinen Fall $L \geq 2M$ zulässt, bezieht sich der zweite Teil speziell auf die gegebene Anwendung und es wird entsprechend zusätzlich (6.2) angenommen. Ziel beider Teile ist die Herleitung eines geschlossenen mathematischen

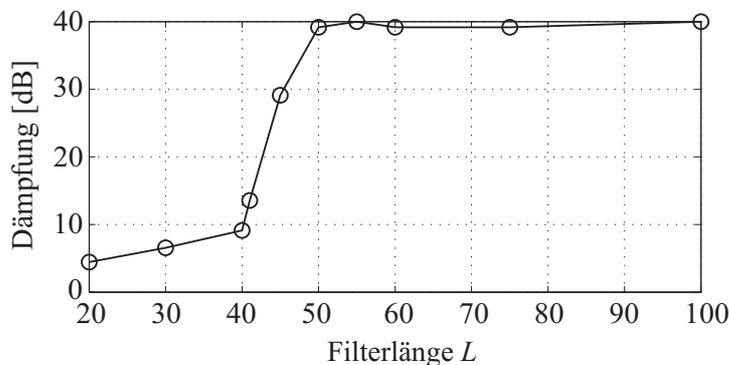


Bild 6.1: Dämpfungsergebnisse am Prüfstand für $f_0 = 1/T_0 = 20$ Hz, $M = 10$ und $f_A = 1/T_A = 1000$ Hz.

Ausdrucks für das konvergierende Fehlersignal. Weitere Aspekte des Verhaltens des FxLMS-Algorithmus wurden in anderen veröffentlichten Arbeiten behandelt. Stochastische Ansätze, die für den Fall sinusförmiger Anregung interpretiert werden können, wurden z. B. in [4] und [93] vorgestellt. Beide Quellen konzentrieren sich auf die Auswirkung von Modellierungsfehlern. In [94] wird zusätzlich das Verhalten bei Vorgabe eines Vergessensfaktors entsprechend Abschnitt 2.3.7 untersucht. Eine Analyse speziell für Anregung mit überlagerten Sinusschwingungen wurde in [100] präsentiert. Es wurden hier obere Grenzen für die Schrittweite des Algorithmus bestimmt.

Dieses Kapitel gliedert sich wie folgt: Im nachfolgenden Abschnitt wird zunächst noch einmal die bereits bekannte Theorie zur Konvergenz des FxLMS-Algorithmus zusammengestellt. Danach erfolgt in Abschnitt 6.3 eine neuartige Analyse der Eigenvektoren und Eigenwerte eines Systems zur Beschreibung der Filteradaption speziell für die Anregung mit einer harmonischen Überlagerung von Sinusschwingungen. Es wird weiterhin ein Ausdruck für den Anfangszustand des diagonalisierten Systems hergeleitet und eine formale Beschreibung des zeitlich gemittelten Verhaltens des Fehlersignals bestimmt, die allerdings noch unbekannte Größen enthält. In Abschnitt 6.4 wird eine Fehlerbeschreibung abgeleitet, die zwar nicht mehr vollständig diagonal ist, dafür aber eine Annäherung des Konvergenzvorgangs zulässt, so dass schließlich eine geschlossene und vollständig bestimmte Formel für das Fehlersignal gewonnen werden kann. Die Ergebnisse der durchgeführten Analyse werden im Abschnitt 6.5 mit Simulationsergebnissen veranschaulicht und im Abschnitt 6.6 noch einmal zusammengefasst.

6.2 Grundlegendes zur Konvergenz

Allgemein ist die Analyse des Verhaltens des FxLMS-Algorithmus zufolge seiner nichtlinearen Struktur nicht ganz unkompliziert. Im Abschnitt 2.3.4 wurde allerdings eine Betrachtungsweise vorgestellt, mit der, zumindest unter der Annahme langsamer Konvergenz, eine grundsätzliche Untersuchung seines Konvergenzverhaltens möglich ist. Im Folgenden sollen die grundlegenden Formeln für die Beschreibung des Fehlersignals $e(n)$ zusammengestellt werden, wobei für bessere Übersichtlichkeit die relevanten Ergebnisse aus Abschnitt 2.3.4 noch einmal wiederholt werden:

Eine Fehlerbeschreibung kann ausgehend von dem grundsätzlichen Zusammenhang

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_f(n) \quad (6.3)$$

hergeleitet werden (vgl. Bild 3.5). Wird hierin das adaptive Filter $\mathbf{w}(n)$ gemäß Formel (2.45) durch die Summe aus Filterabweichung $\mathbf{u}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}$ und optimalem Filter \mathbf{w}_{opt} ersetzt

$$e(n) = d(n) - [\mathbf{u}^T(n) + \mathbf{w}_{\text{opt}}^T] \mathbf{x}_f(n) , \quad (6.4)$$

so ergibt sich unter Annahme einer vollständigen Schwingungsauslöschung im optimalen Fall die einfache Beschreibung

$$e(n) = -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{x}_f(n) \quad (6.5)$$

des Fehlersignals. Formel (6.5) kann hier als Ausgangsgleichung eines Zustandsraumsystems betrachtet werden, dessen Zustandsdifferenzgleichung durch Formel (2.47) gegeben ist, also

$$\langle \mathbf{u}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \langle \mathbf{u}(n) \rangle . \quad (6.6)$$

Die spitzen Klammern kennzeichnen dabei die zeitliche Mittelung und \mathbf{R} ist die Autokorrelationsmatrix des gefilterten Referenzsignals $x_f(n)$. Unter der Annahme stationärer Anregung kann \mathbf{R} berechnet werden als

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{x}_f(n)\mathbf{x}_f^T(n) \} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_f(k)\mathbf{x}_f^T(k) . \quad (6.7)$$

Dabei ist der Vektor $\mathbf{x}_f(n)$ definiert gemäß

$$\mathbf{x}_f(n) = [x_f(n) \ \cdots \ x_f(n-L+1)]^T . \quad (6.8)$$

Die speziellen Eigenschaften der Matrix \mathbf{R} , die im Abschnitt 2.3.2 zusammengestellt wurden, werden auch im Nachfolgenden von Bedeutung sein.

Unter der Annahme, dass gilt $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$, ist der Anfangswert von $\mathbf{u}(n)$

$$\mathbf{u}(0) = -\mathbf{w}_{\text{opt}} , \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{p} , \quad (6.9)$$

wobei der Vektor \mathbf{p} durch die Kreuzkorrelationsfunktion von $d(n)$ und $x_f(n)$ gegeben ist

$$\mathbf{p} = E\{d(n)\mathbf{x}_f(n)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k)\mathbf{x}_f(k) . \quad (6.10)$$

Für eine gründliche Untersuchung der Dynamik des Konvergenzprozesses ist es hilfreich, das System (6.6), wie bereits im Abschnitt 2.3.4 beschrieben, durch die Transformation

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{V}^T \mathbf{u}(n) \quad (6.11)$$

zu diagonalisieren. Da \mathbf{R} symmetrisch ist, kann angenommen werden, dass $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ [59, 26]. Entsprechend kann das diagonalisierte System geschrieben werden als

$$\langle \mathbf{z}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R) \langle \mathbf{z}(n) \rangle \quad (6.12)$$

mit

$$\mathbf{\Lambda}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} .$$

\mathbf{V} ist die Eigenvektormatrix von \mathbf{R} , wobei die Eigenvektoren durch die Spaltenvektoren \mathbf{v}_i gegeben sind. $\mathbf{\Lambda}_R$ ist eine diagonale Matrix, deren Hauptdiagonale die L reellen Eigenwerte λ_i^R von \mathbf{R} enthält.

Von (6.12) kann direkt eine Formel für die Berechnung des zeitlichen Mittelwertes von $z(n)$ zum aktuellen Zeitpunkt hergeleitet werden:

$$\langle \mathbf{z}(n) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{z}(0) . \quad (6.13)$$

Eine Anwendung der in (6.11) gegebenen Transformation auf das entkoppelte System (6.13) liefert schließlich eine Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der Filterabweichung

$$\langle \mathbf{u}(n) \rangle = \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{z}(0) . \quad (6.14)$$

Die hier betrachtete Zustandsdarstellung (6.5) und (6.6) beschreibt die Fehlerkonvergenz entsprechend Abschnitt 2.3.4 im zeitlichen Mittel für langsame Konvergenz. Es sei hier angemerkt, dass die Voraussetzung langsamer Konvergenz bei der betrachteten Anwendung in der Regel in guter Näherung erfüllt sein wird. Für diesen Fall stimmt weiterhin auch die zeitlich gemittelte Konvergenz gut mit dem tatsächlichen Momentanwert überein [50].

Die Lösung (6.14) der Zustandsdifferenzgleichung (6.6) ist im Wesentlichen definiert durch die Eigenwertmatrix $\mathbf{\Lambda}_R$, die Eigenvektormatrix \mathbf{V} und den Anfangszustand $\mathbf{z}(0)$. Ziel des nachfolgenden Abschnitts ist die Bestimmung geeigneter Ausdrücke für diese Größen.

6.3 Formale Beschreibung der Fehlerkonvergenz

In diesem Abschnitt soll eine mathematische Beschreibung des exakten Verhaltens des Fehlersignals für Anregung mit einer Überlagerung von harmonischen Sinusschwingungen ermittelt werden. Es kann zwar nicht davon ausgegangen werden, dass die Beschreibung im Allgemeinen vollständig durch bekannte Größen bestimmt sein wird, nichtsdestotrotz wird sie als Grundlage für die Herleitung einer vollständig bestimmten Annäherung der Fehlerkonvergenz benötigt.

Wie bereits angemerkt, wird im Folgenden zunächst der Fall $L \geq 2M$ gemäß (6.1) angenommen. Die mathematische Formulierung erfolgt dabei für den Fall $L > 2M$. Der Fall $L = 2M$ ergibt sich hieraus immer unmittelbar.

6.3.1 Eigenvektoren und Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix

Bei dem hier betrachteten Fall der Anregung mit einer Überlagerung von Sinusschwingungen kann das gefilterte Referenzsignal $x_f(n)$ in Anlehnung an die Formel (4.1) durch

$$x_f(n) = \sum_{m=1}^M x_{f_m}(n) = \sum_{m=1}^M \hat{x}_{f_m} \sin(m\omega n T_A + \varphi_m)$$

beschrieben werden, wobei \hat{x}_{f_m} die Amplituden und φ_m die Phasen der Sinusfunktionen bezeichnen. Es sei $\hat{x}_{f_m} > 0 \forall m$. Die fundamentale Winkelfrequenz ist nach wie vor $\omega = 2\pi f_0$. Der gemäß Formel (6.8) zugehörige Vektor $\mathbf{x}_f(n)$ kann durch Anwendung des Additionstheorems $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ als eine Summe von Linearkombinationen von zwei Vektoren geschrieben werden

$$\mathbf{x}_f(n) = \sum_{m=1}^M [\alpha_m(n) \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} + \beta_m(n) \tilde{\mathbf{v}}_{b_m}] , \quad (6.15)$$

mit

$$\alpha_m(n) = \hat{x}_{f_m} \cos(m\omega n T_A - \tilde{\varphi}_m) ,$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{a_m} = \begin{bmatrix} \sin[m\omega 0 T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \\ \sin[m\omega (-1) T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \\ \vdots \\ \sin[m\omega (-L+1) T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \end{bmatrix} , \quad (6.16)$$

$$\beta_m(n) = \hat{x}_{f_m} \sin(m\omega n T_A - \tilde{\varphi}_m) ,$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{b_m} = \begin{bmatrix} \cos[m\omega 0 T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \\ \cos[m\omega(-1)T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \\ \vdots \\ \cos[m\omega(-L+1)T_A + \varphi_m + \tilde{\varphi}_m] \end{bmatrix} . \quad (6.17)$$

Die Größen $\tilde{\varphi}_m$ sind hierbei noch undefiniert. Sie können als Winkel interpretiert werden. Unabhängig von der Wahl der Werte von $\tilde{\varphi}_m$ bleibt die Gleichung (6.15) gültig. Wird definiert, dass $\tilde{\mathbf{V}}_a = [\tilde{\mathbf{v}}_{a_1} \dots \tilde{\mathbf{v}}_{a_M}]$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b = [\tilde{\mathbf{v}}_{b_1} \dots \tilde{\mathbf{v}}_{b_M}]$ sowie $\boldsymbol{\alpha}(n) = [\alpha_1(n) \dots \alpha_M(n)]^T$ und $\boldsymbol{\beta}(n) = [\beta_1(n) \dots \beta_M(n)]^T$, so folgt, dass

$$\mathbf{x}_f(n) = \tilde{\mathbf{V}}_a \boldsymbol{\alpha}(n) + \tilde{\mathbf{V}}_b \boldsymbol{\beta}(n) . \quad (6.18)$$

Hierbei sind $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ ($L \times M$)-Matrizen, und $\boldsymbol{\alpha}(n)$ sowie $\boldsymbol{\beta}(n)$ sind ($M \times 1$)-Vektoren.

Werden die Winkel $\tilde{\varphi}_m$ in (6.16) und (6.17) so gewählt, dass gilt

$$\varphi_m + \tilde{\varphi}_m = m\omega \frac{(L-1)}{2} T_A + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} , \quad (6.19)$$

so werden die Sinusfunktionen in den Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{a_m}$ ungerade und die Kosinusfunktionen in den Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{b_m}$ gerade, bezogen auf den Punkt $\frac{(L+1)}{2}$, der die „Mitte“ der Vektoren darstellt. Es folgt daher, dass

$$\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_b = \tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_a = \mathbf{0} . \quad (6.20)$$

Dies bedeutet, dass die Spaltenvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}_a$ orthogonal zu den Spaltenvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}_b$ sind. Es ist zu beachten, dass andererseits die Spaltenvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ im Allgemeinen untereinander nicht orthogonal sind, d. h. $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$ sind nicht zwangsläufig diagonal.

Es wird im Folgenden angenommen, dass sowohl $\tilde{\mathbf{V}}_a$ als auch $\tilde{\mathbf{V}}_b$ vollen Rang M haben. Zumindest in numerischen Berechnungen tritt aber für kleine Filterlängen L und niedrige Grundfrequenzen f_0 Rangabfall auf. Eine Erklärung zu den Auswirkungen für die hier dargestellten Ableitungen erfolgt am Ende dieses Abschnitts.

Um Informationen über die Eigenvektormatrix \mathbf{V} und die Eigenwertmatrix $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{R}}$ zu erhalten, muss die in Formel (6.7) angegebene Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} speziell für den vorliegenden Anregungsfall betrachtet werden:

$$\mathbf{R} = E\{[\tilde{\mathbf{V}}_a \boldsymbol{\alpha}(n) + \tilde{\mathbf{V}}_b \boldsymbol{\beta}(n)] \cdot [\boldsymbol{\alpha}^T(n) \tilde{\mathbf{V}}_a^T + \boldsymbol{\beta}^T(n) \tilde{\mathbf{V}}_b^T]\} .$$

Wegen

$$E \{ \boldsymbol{\alpha}(n) \boldsymbol{\beta}^T(n) \} = E \{ [\boldsymbol{\beta}(n) \boldsymbol{\alpha}^T(n)]^T \} = \mathbf{0} \quad (6.21)$$

kann dieser Ausdruck vereinfacht werden zu

$$\mathbf{R} = E \left\{ \tilde{\mathbf{V}}_a \boldsymbol{\alpha}(n) \boldsymbol{\alpha}^T(n) \tilde{\mathbf{V}}_a^T + \tilde{\mathbf{V}}_b \boldsymbol{\beta}(n) \boldsymbol{\beta}^T(n) \tilde{\mathbf{V}}_b^T \right\} .$$

Außerdem kann gezeigt werden, dass gilt

$$\hat{\mathbf{X}}_f^2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{f_1}^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{x}_{f_M}^2 \end{bmatrix} = 2E \{ \boldsymbol{\alpha}(n) \boldsymbol{\alpha}^T(n) \} \quad (6.22)$$

und in ähnlicher Weise, dass gilt

$$\hat{\mathbf{X}}_f^2 = 2E \{ \boldsymbol{\beta}(n) \boldsymbol{\beta}^T(n) \} .$$

Als Folge kann die $(L \times L)$ -Matrix \mathbf{R} geschrieben werden als

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}_a \hat{\mathbf{X}}_f^2 \tilde{\mathbf{V}}_a^T + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}_b \hat{\mathbf{X}}_f^2 \tilde{\mathbf{V}}_b^T , \quad (6.23)$$

bzw.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{V}}_a \tilde{\mathbf{V}}_b] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_f^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{X}}_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_a^T \\ \tilde{\mathbf{V}}_b^T \end{bmatrix} . \quad (6.24)$$

Da sowohl die $(L \times M)$ -Matrizen $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ als auch die $(M \times M)$ -Matrix $\hat{\mathbf{X}}_f^2$ Rang M haben, und außerdem die Spaltenvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}_a$ orthogonal (und somit sicher linear unabhängig) zu denen in $\tilde{\mathbf{V}}_b$ sind, liegt hier ein Produkt von drei Matrizen vom Rang $2M$ vor, was wiederum auf eine Matrix \mathbf{R} führt, die ebenfalls Rang $2M$ hat. Es sind also genau $2M$ Eigenwerte von \mathbf{R} ungleich Null. Da \mathbf{R} außerdem symmetrisch und positiv semidefinit ist, sind diese Eigenwerte reell und positiv [33] (vgl. Abschnitt 2.3.2).

Wird (6.23) als eine Summe von zwei Überlagerungen von m dyadischen Produkten geschrieben, so folgt mit $\mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_R$, dass

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^M \hat{x}_{f_m}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} \tilde{\mathbf{v}}_{a_m}^T + \sum_{m=1}^M \hat{x}_{f_m}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{b_m} \tilde{\mathbf{v}}_{b_m}^T \right) \mathbf{v}_i = \lambda_i^R \mathbf{v}_i , \quad (6.25)$$

wobei $i = 1, \dots, L$.

Wird weiterhin der zweite Summand in (6.25) zu Null gesetzt und die Eigenwerte λ_i^R und die Eigenvektoren \mathbf{v}_i durch $\lambda_{a_j}^R$ und \mathbf{v}_{a_j} substituiert, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \hat{x}_{f_m}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} \tilde{\mathbf{v}}_{a_m}^T \mathbf{v}_{a_j} = \lambda_{a_j}^R \mathbf{v}_{a_j} .$$

Wird diese Gleichung durch $\lambda_{a_j}^R$ geteilt, so ergeben sich verwertbare Ausdrücke für die Vektoren \mathbf{v}_{a_j}

$$\mathbf{v}_{a_j} = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} c_{a_m j} , \quad (6.26)$$

wobei

$$c_{a_m j} = \frac{\hat{x}_{f_m}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{a_m}^T \mathbf{v}_{a_j}}{2\lambda_{a_j}^R} .$$

Es kann angenommen werden, dass gilt $\lambda_{a_j}^R \neq 0 \forall j$, wie weiter unten noch erläutert wird. Unter Berücksichtigung von (6.20) erfüllen die \mathbf{v}_{a_j} auch die Gleichung (6.25) und können damit als Eigenvektoren von \mathbf{R} betrachtet werden. Es muss gelten $j = 1, \dots, M$, da aus der vorliegenden Linearkombination der M linear unabhängigen Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{a_m}$ genau M linear unabhängige Lösungen gewonnen werden können (Die Eigenvektoren symmetrischer Matrizen sind immer linear unabhängig).

In Matrixschreibweise entspricht der erhaltene Ausdruck

$$\mathbf{v}_{a_j} = [\tilde{\mathbf{v}}_{a_1} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{v}}_{a_M}] \begin{bmatrix} c_{a_1 j} \\ \vdots \\ c_{a_M j} \end{bmatrix} =: \tilde{\mathbf{V}}_a \mathbf{c}_{a_j} .$$

Die \mathbf{v}_{a_j} können in einer Matrix zusammengefasst werden gemäß

$$\mathbf{V}_a := [\mathbf{v}_{a_1} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{a_M}] = \tilde{\mathbf{V}}_a [\mathbf{c}_{a_1} \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{a_M}] = \tilde{\mathbf{V}}_a \mathbf{C}_a . \quad (6.27)$$

Auf dieselbe Weise können M weitere Eigenvektoren \mathbf{v}_{b_j} bestimmt werden, indem der erste Summand in (6.25) zu Null gesetzt wird

$$\mathbf{V}_b = \tilde{\mathbf{V}}_b \mathbf{C}_b . \quad (6.28)$$

Die Werte der verbleibenden $L - 2M$ Eigenvektoren sind hier nicht relevant, da sie, wie im Abschnitt 6.3.3 noch deutlich werden wird, keinen Einfluss auf die Fehlerkonvergenz haben.

Gemäß Abschnitt 2.3.2 kann angenommen werden, dass die Eigenvektormatrix der symmetrischen Matrix \mathbf{R} orthogonal ist [26]. Es sei daher

$$\mathbf{V}_a^T \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b^T \mathbf{V}_b = \mathbf{I} \quad (6.29)$$

und, zufolge (6.20),

$$\mathbf{V}_a^T \mathbf{V}_b = (\mathbf{V}_b^T \mathbf{V}_a)^T = \mathbf{C}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_b \mathbf{C}_b = \mathbf{0} . \quad (6.30)$$

An dieser Stelle sei betont, dass die orthogonalen Spaltenvektoren der Matrizen \mathbf{V}_a und \mathbf{V}_b nicht unter allen Umständen die einzigen möglichen Eigenvektoren zu den nicht verschwindenden Eigenwerten der Matrix \mathbf{R} sind. Um dies zu verdeutlichen, soll hier noch einmal etwas grundlegende Theorie zu den Eigenwerten und Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen betrachtet werden: Für einfache Eigenwerte sind die zugehörigen Eigenvektoren eindeutig (bezüglich ihrer Richtung) und notwendigerweise orthogonal zu allen anderen Eigenvektoren. Für einen mehrfachen Eigenwert sind die zugehörigen Eigenvektoren ebenfalls sicher orthogonal zu allen anderen Eigenvektoren [29, 37]. Untereinander müssen sie aber nicht mehr zwangsläufig orthogonal sein, da jede Linearkombination der Eigenvektoren eines mehrfachen Eigenwertes ebenfalls ein gültiger Eigenvektor ist [58]. Es folgt, dass die betroffenen Eigenvektoren nicht mehr eindeutig sind. Für den hier vorliegenden Fall bedeutet dies, dass die Eigenvektoren in \mathbf{V}_a und \mathbf{V}_b zwangsläufig orthogonal sein müssen, falls alle nicht verschwindenden Eigenwerte einfach sind. Mit (6.30) folgt, dass dann die Spaltenvektoren in $\tilde{\mathbf{V}}_a$ orthogonal zu denen in $\tilde{\mathbf{V}}_b$ sein müssen, was wiederum nur dann der Fall sein kann, wenn die Bedingung (6.19) erfüllt ist. Liegen andererseits mehrfache nicht verschwindende Eigenwerte in \mathbf{R} vor, so ist vollständige Orthogonalität nicht mehr zwangsläufig erforderlich, und die Erfüllung von (6.19) ist zwar erlaubt, aber nicht notwendig. Es folgt, dass die hier bestimmten Eigenvektoren in \mathbf{V}_a und \mathbf{V}_b im Fall mehrfacher Eigenwerte zwar einen gültigen, aber nicht den einzigen möglichen Satz von Eigenvektoren darstellen. Unabhängig davon ist aber die resultierende Fehlerkonvergenz eindeutig und wird mit den orthogonalen Eigenvektoren richtig bestimmt.

Unter Annahme orthogonaler Eigenvektoren wird aufgrund der folgenden Argumentation auch deutlich, dass die zu den Eigenvektoren \mathbf{v}_{a_j} und \mathbf{v}_{b_j} gehörigen Eigenwerte $\lambda_{a_j}^R$ und $\lambda_{b_j}^R$ ungleich Null sein müssen: Aus dem Zusammenhang $\mathbf{\Lambda}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}$ folgt mit Gleichung (6.24), dass Eigenvektoren, die orthogonal zu allen $\tilde{\mathbf{v}}_{a_m}$ und $\tilde{\mathbf{v}}_{b_m}$

sind, zwangsläufig auf Eigenwerte gleich Null führen. Weiterhin gilt, dass aus den Linearkombinationen der jeweils M linear unabhängigen Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{a_m}$ und $\tilde{\mathbf{v}}_{b_m}$ in (6.27) und (6.28) insgesamt nur genau $2M$ orthogonale Eigenvektoren hervor gehen können, die *nicht* orthogonal zu allen $\tilde{\mathbf{v}}_{a_m}$ und $\tilde{\mathbf{v}}_{b_m}$ sind. Es müssen also zu diesen $2M$ Eigenvektoren die genau $2M$ Eigenwerte ungleich Null gehören.

Zufolge der obenstehenden Herleitung kann die vollständige Eigenvektormatrix von \mathbf{R} geschrieben werden als

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_a \ \mathbf{V}_b \ \mathbf{V}_r] , \quad (6.31)$$

wobei die Teilmatrix \mathbf{V}_r beliebig sei, allerdings so, dass \mathbf{V} quadratisch und orthogonal wird.

Aus der Annahme $\text{Rang}(\tilde{\mathbf{V}}_a) = \text{Rang}(\tilde{\mathbf{V}}_b) = M$ folgt insbesondere die Invertierbarkeit der Matrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_b . Gleichung (6.23) kann daher durch Ersetzung von $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ nach (6.27) und (6.28) umgeschrieben werden zu

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_a^{-T} \mathbf{V}_a^T + \frac{1}{2} \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_b^{-T} \mathbf{V}_b^T .$$

Die zugehörige Eigenwertmatrix ergibt sich nun als

$$\mathbf{\Lambda}_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a^T \\ \mathbf{V}_b^T \\ \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} \left(\mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_a^{-T} \mathbf{V}_a^T + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_b^{-T} \mathbf{V}_b^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a & \mathbf{V}_b & \mathbf{V}_r \end{bmatrix} .$$

Mit (6.29) und (6.30) kann gefolgert werden

$$\mathbf{\Lambda}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{R_a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{R_b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} , \quad (6.32)$$

wobei

$$\mathbf{\Lambda}_{R_a} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_a^{-T} , \quad (6.33)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{R_b} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_b^{-T} . \quad (6.34)$$

Es ist zu beachten, dass $\mathbf{\Lambda}_R$ eine Diagonalmatrix sein muss, da \mathbf{R} symmetrisch ist.

Wie weiter oben angemerkt wurde, wird angenommen, dass $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ vollen Rang M haben, was in den meisten praxisrelevanten Fällen auch gegeben sein wird. Falls diese Annahme aber nicht erfüllt ist, wird die Anzahl der aus (6.26) erhaltenen Eigenvektoren \mathbf{v}_{a_j} kleiner sein als M , und die Matrix \mathbf{C}_a wird entsprechend nicht invertierbar sein. Als Folge muss $\tilde{\mathbf{V}}_a$ in Abhängigkeit von \mathbf{V}_a als $\tilde{\mathbf{V}}_a = \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^I$ bestimmt werden, wobei \mathbf{C}_a^I sich als $\mathbf{C}_a^I = \mathbf{V}_a^+ \tilde{\mathbf{V}}_a$ ergibt. Hierin ist \mathbf{V}_a^+ die Pseudoinverse $\mathbf{V}_a^+ = (\mathbf{V}_a^T \mathbf{V}_a)^{-1} \mathbf{V}_a^T$ von $\mathbf{V}_a = \tilde{\mathbf{V}}_a \mathbf{C}_a$. Entsprechendes gilt für \mathbf{V}_b . Wird diese Modifikation berücksichtigt, so können die hier dargestellten Herleitungen auch bei Vorliegen eines Rangabfalls von $\tilde{\mathbf{V}}_a$ bzw. $\tilde{\mathbf{V}}_b$ – zumindest formal mathematisch – in ganz analoger Weise durchgeführt werden. Es ist zu beachten, dass in der praktischen Anwendung bei Rangabfall von V_a und V_b eine vollständige Auslöschung des Fehler-signals $e(n)$ nicht mehr erreicht wird. Entsprechend wäre schon die Ableitung der Gleichung (6.5) von (6.4) nicht mit guter Näherung möglich. Eine weitere Analyse zu diesem Fall bleibt hier offen für zukünftige Forschungsarbeiten.

Speziell die in Abschnitt 6.4 beschriebene Abschätzung ist nur dann möglich, wenn $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ vollen Rang haben. Wie aber zu Beginn von Abschnitt 6.4 erläutert wird, entsteht hierdurch für die Praxis kein wesentlicher Verlust an Allgemeingültigkeit.

6.3.2 Anfangszustand des diagonalisierten Systems der Filterabweichung

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt Ausdrücke für die Eigenvektormatrix und die Eigenwertmatrix ermittelt wurden, bleibt noch der Anfangszustand $\mathbf{z}(0)$ des diagonalisierten Systems zur Beschreibung der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ zu bestimmen. Gemäß (6.9) und (6.11) ist $\mathbf{z}(0)$ durch

$$\mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{z}(0) = -\mathbf{p} \quad (6.35)$$

gegeben. Mit (6.23) und (6.31) wird aus Gleichung (6.35)

$$(\tilde{\mathbf{V}}_a \hat{\mathbf{X}}_f^2 \tilde{\mathbf{V}}_a^T + \tilde{\mathbf{V}}_b \hat{\mathbf{X}}_f^2 \tilde{\mathbf{V}}_b^T) [\mathbf{V}_a \ \mathbf{V}_b \ \mathbf{V}_r] \mathbf{z}(0) = -2\mathbf{p}$$

und weiterhin, unter Berücksichtigung von (6.20) und (6.27)-(6.29)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_a^{-T} & \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_b^{-T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}(0) = -2\mathbf{p} \quad (6.36)$$

Wird nun $\mathbf{z}(n)$ als

$$\mathbf{z}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(n) \\ \mathbf{z}_b(n) \\ \mathbf{z}_r(n) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

geschrieben, so folgt aus (6.36) mit $\mathbf{z}_a(n) = [z_1(n) \ \cdots \ z_M(n)]^T$, $\mathbf{z}_b(n) = [z_{M+1}(n) \ \cdots \ z_{2M}(n)]^T$ und $\mathbf{z}_r(n) = [z_{2M+1}(n) \ \cdots \ z_L(n)]^T$, dass

$$\mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_a^{-T} \mathbf{z}_a(0) + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f^2 \mathbf{C}_b^{-T} \mathbf{z}_b(0) = -2\mathbf{p} . \quad (6.38)$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen (6.10) und (6.18) kann der Kreuzkorrelationsvektor \mathbf{p} als

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= E \left\{ d(n) \left[\tilde{\mathbf{V}}_a \boldsymbol{\alpha}(n) + \tilde{\mathbf{V}}_b \boldsymbol{\beta}(n) \right] \right\} \\ &= \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} E \{ d(n) \boldsymbol{\alpha}(n) \} + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} E \{ d(n) \boldsymbol{\beta}(n) \} \end{aligned} \quad (6.39)$$

geschrieben werden. Ein Vergleich der Faktoren der Eigenvektoren auf der linken Seite von (6.38) und derer auf der rechten Seite von (6.39) liefert Formeln für die Anfangszustände

$$\mathbf{z}_a(0) = -2\mathbf{C}_a^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-2} E \{ d(n) \boldsymbol{\alpha}(n) \} , \quad (6.40)$$

$$\mathbf{z}_b(0) = -2\mathbf{C}_b^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-2} E \{ d(n) \boldsymbol{\beta}(n) \} . \quad (6.41)$$

Die Anfangswerte der Zustandsvariablen in $\mathbf{z}_r(n)$ sind zufolge unzureichender spektraler Anregung nicht festgelegt. Wie sich im Abschnitt 6.3.3 zeigen wird, haben sie allerdings auch keinen Einfluss auf die Fehlerkonvergenz.

Wird das Störsignal als

$$d(n) = \sum_{m=1}^M \hat{d}_m \sin(m\omega n T_A + \varphi_{d_m})$$

ausgedrückt, wobei \hat{d}_m und φ_{d_m} die Amplituden und Phasen der Frequenzkomponenten des Signals bezeichnen, so kann der Erwartungswert in (6.40) als

$$E \{ d(n) \boldsymbol{\alpha}(n) \} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_f \begin{bmatrix} \hat{d}_1 \sin(\varphi_{d_1} + \tilde{\varphi}_1) \\ \vdots \\ \hat{d}_M \sin(\varphi_{d_M} + \tilde{\varphi}_M) \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

geschrieben werden. In Folge wird Gleichung (6.40) zu

$$\mathbf{z}_a(0) = -\mathbf{C}_a^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{d}_{\sin} , \quad (6.43)$$

mit

$$\mathbf{d}_{\sin} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 \sin(\varphi_{d_1} + \tilde{\varphi}_1) \\ \vdots \\ \hat{d}_M \sin(\varphi_{d_M} + \tilde{\varphi}_M) \end{bmatrix} . \quad (6.44)$$

Dieselbe Herleitung kann für die Gleichung (6.41) durchgeführt werden, mit dem Ergebnis

$$\mathbf{z}_b(0) = -\mathbf{C}_b^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{d}_{\cos} . \quad (6.45)$$

Dabei ist

$$\mathbf{d}_{\cos} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 \cos(\varphi_{d_1} + \tilde{\varphi}_1) \\ \vdots \\ \hat{d}_M \cos(\varphi_{d_M} + \tilde{\varphi}_M) \end{bmatrix} . \quad (6.46)$$

6.3.3 Formel zur Beschreibung der Fehlerkonvergenz

Eine Beschreibung des Fehlersignals kann durch Kombinieren der Formeln (6.5) und (6.14) erhalten werden

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= -\langle \mathbf{u}^T(n) \rangle \mathbf{x}_f(n) \\ &= -\mathbf{z}^T(0) (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{V}^T \mathbf{x}_f(n) . \end{aligned}$$

Der Überstrich von $\bar{e}(n)$ bezeichnet dabei die zeitliche Mittelung der Konvergenz, die mit $\langle \mathbf{u}(n) \rangle$ gegeben ist. Werden die Eigenvektormatrix \mathbf{V} und der gefilterte Referenzvektor $\mathbf{x}_f(n)$ durch die in (6.18) and (6.31) gegebenen Beschreibungen ersetzt, so folgt mit (6.27)-(6.30), dass

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= -\mathbf{z}^T(0) (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a^T \\ \mathbf{V}_b^T \\ \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} [\mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \boldsymbol{\alpha}(n) + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \boldsymbol{\beta}(n)] \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a^T(0) & \mathbf{z}_b^T(0) & \mathbf{z}_r^T(0) \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a^{-1} \boldsymbol{\alpha}(n) \\ \mathbf{C}_b^{-1} \boldsymbol{\beta}(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

An dieser Stelle wird offensichtlich, dass die Zustandsvariablen in $\mathbf{z}_r(n)$, die zu den Eigenvektoren in \mathbf{V}_r gehören, keinen Einfluss auf das Fehlersignal haben. Es ergibt sich

$$\bar{e}(n) = -\mathbf{z}_a^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_a})^n \mathbf{C}_a^{-1} \boldsymbol{\alpha}(n) - \mathbf{z}_b^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_b})^n \mathbf{C}_b^{-1} \boldsymbol{\beta}(n) . \quad (6.47)$$

Formel (6.47) beschreibt eine Überlagerung der Kosinus- und Sinusfunktionen die durch $\boldsymbol{\alpha}(n)$ und $\boldsymbol{\beta}(n)$ gegeben sind. Die Funktionen sind jeweils mit Werten gewichtet, die aufgrund der Ausdrücke $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_a})^n$ und $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_b})^n$ mit der Zeit abklingen. Dies wird deutlicher, wenn (6.47) zu

$$\bar{e}(n) = -\sum_{m=1}^M a_m(n) \cos(m\omega n T_A - \tilde{\varphi}_m) - \sum_{m=1}^M b_m(n) \sin(m\omega n T_A - \tilde{\varphi}_m) \quad (6.48)$$

umformuliert wird, mit

$$\begin{aligned} a_m(n) &= \mathbf{z}_a^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_a})^n \mathbf{c}_{a_m}^{-1} \hat{x}_{f_m} , \\ b_m(n) &= \mathbf{z}_b^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_{R_b})^n \mathbf{c}_{b_m}^{-1} \hat{x}_{f_m} . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Schließlich kann hierfür geschrieben werden

$$\bar{e}(n) = -\sum_{m=1}^M \sqrt{a_m^2(n) + b_m^2(n)} \sin[m\omega n T_A + \varphi_{\bar{e}_m}(n)] ,$$

mit

$$\varphi_{\bar{e}_m}(n) = \arctan \left[\frac{b_m(n)}{a_m(n)} \right] - \tilde{\varphi}_m ,$$

wobei $\varphi_{\bar{e}_m}(n) + \tilde{\varphi}_m$ im entsprechenden Quadranten liegt.

Mit Gleichung (6.47) ist eine formale mathematische Beschreibung des Konvergenzvorgangs erzielt worden. Da es allerdings nach Wissen des Autors keinen trivialen Weg zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen \mathbf{C}_a and \mathbf{C}_b gibt, kann die erhaltene Formel nicht direkt ausgewertet werden. Aus diesem Grund wird im nachfolgenden Abschnitt eine angenäherte Beschreibung des exakten Fehlerverhaltens abgeleitet, die vollständig durch bekannte Größen bestimmt ist und die entsprechend von größerem praktischen Nutzen ist.

6.4 Annäherung des Konvergenzvorgangs

Ziel der folgenden Herleitung ist eine Vereinfachung der zuvor ermittelten Beschreibung der Fehlerkonvergenz in der Weise, dass sie nur noch von Größen abhängt, die entweder exakt bekannt sind, oder innerhalb vollständig bestimmter Fehlergrenzen liegen.

Im Folgenden wird angenommen, dass (6.2) erfüllt ist. Hieraus folgt u. a., dass die Matrizen $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ sicher vollen Rang M haben, solange $M \leq 13$ Frequenzen angeregt sind und $M \cdot f_0 \leq 0.9 \cdot f_s/2$ erfüllt ist (d. h. die höchste angeregte Frequenz nicht allzu nah an der Nyquist-Frequenz liegt). Für diesen Fall kann numerisch gezeigt werden, dass die im Anhang C untersuchten Matrizen $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$ strikt diagonaldominant sind und somit sicher vollen Rang M haben. Letzteres muss entsprechend auch für $\tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b$ selbst gelten, und das Invertieren der Matrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_b ist folglich zulässig.

6.4.1 Umformulieren der Fehlerbeschreibung

Als erster Schritt zur Bestimmung der erwünschten Darstellung der Fehlerkonvergenz muss die bisher ermittelte Beschreibung so umgeformt werden, dass die Annäherung des tatsächlichen Konvergenzvorgangs möglich wird.

Hierzu müssen zunächst $\mathbf{z}_a(0)$ und $\mathbf{z}_b(0)$ in Gleichung (6.47) gemäß (6.43) und (6.45) ersetzt werden. Anschließend ist $\boldsymbol{\alpha}(n)$ unter Verwendung von Formel (6.22) umzuschreiben zu

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \hat{\mathbf{X}}_f \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) \quad (6.50)$$

und $\boldsymbol{\beta}(n)$ zu

$$\boldsymbol{\beta}(n) = \hat{\mathbf{X}}_f \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) , \quad (6.51)$$

wobei

$$\boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) = \begin{bmatrix} \cos(1\omega n T_A - \tilde{\varphi}_1) \\ \vdots \\ \cos(M\omega n T_A - \tilde{\varphi}_M) \end{bmatrix} , \quad (6.52)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) = \begin{bmatrix} \sin(1\omega n T_A - \tilde{\varphi}_1) \\ \vdots \\ \sin(M\omega n T_A - \tilde{\varphi}_M) \end{bmatrix} . \quad (6.53)$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\bar{e}(n) &= \mathbf{d}_{\sin}^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{C}_a (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_{R_a})^n \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) \\ &\quad + \mathbf{d}_{\cos}^T \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{C}_b (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_{R_b})^n \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) \\ &= \mathbf{d}_{\sin}^T \left(\mathbf{I} - \mu \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{C}_a \mathbf{\Lambda}_{R_a} \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \right)^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) \\ &\quad + \mathbf{d}_{\cos}^T \left(\mathbf{I} - \mu \hat{\mathbf{X}}_f^{-1} \mathbf{C}_b \mathbf{\Lambda}_{R_b} \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \right)^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n).\end{aligned}$$

Werden $\mathbf{\Lambda}_{R_a}$ und $\mathbf{\Lambda}_{R_b}$ durch (6.33) und (6.34) ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{e}(n) &= \mathbf{d}_{\sin}^T \left(\mathbf{I} - \mu \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_f \mathbf{C}_a^{-T} \mathbf{C}_a^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \right)^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) \\ &\quad + \mathbf{d}_{\cos}^T \left(\mathbf{I} - \mu \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_f \mathbf{C}_b^{-T} \mathbf{C}_b^{-1} \hat{\mathbf{X}}_f \right)^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n).\end{aligned}\tag{6.54}$$

Die unbekanntenen Koeffizientenmatrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_b können nun eliminiert werden, da aus (6.27)-(6.29) folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_a^T \mathbf{V}_a &= \mathbf{C}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a \mathbf{C}_a = \mathbf{I}, \\ \mathbf{V}_b^T \mathbf{V}_b &= \mathbf{C}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b \mathbf{C}_b = \mathbf{I},\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{C}_a^{-T} \mathbf{C}_a^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_b^{-T} \mathbf{C}_b^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b.$$

Gleichung (6.54) wird entsprechend zu

$$\bar{e}(n) = \mathbf{d}_{\sin}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) + \mathbf{d}_{\cos}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^b)^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n),\tag{6.55}$$

mit

$$\mathbf{Q}^a = \mu \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_f \tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a \hat{\mathbf{X}}_f,\tag{6.56}$$

$$\mathbf{Q}^b = \mu \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}_f \tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b \hat{\mathbf{X}}_f,\tag{6.57}$$

wobei \mathbf{Q}^a und \mathbf{Q}^b nicht-diagonale, symmetrische Matrizen sind.

Es ist anzumerken, dass, obwohl Formel (6.55) nicht von den Eigenwerten und Eigenvektoren von \mathbf{R} abhängt, die zuvor durchgeführte Diagonalisierung des Systems der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ nach Meinung des Autors trotzdem zumindest vorübergehend notwendig ist, um die Herleitung von (6.55) möglich zu machen.

Um die weitere Analyse zu vereinfachen, ist es hilfreich, die beiden Vektoren

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_a(n) &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)^n \mathbf{d}_{\sin} , \\ \hat{\mathbf{e}}_b(n) &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^b)^n \mathbf{d}_{\cos} ,\end{aligned}\quad (6.58)$$

zu definieren, so dass die Fehlerkonvergenz gemäß (6.55) durch den Ausdruck

$$\bar{e}(n) = \hat{\mathbf{e}}_a^T(n) \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) + \hat{\mathbf{e}}_b^T(n) \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) \quad (6.59)$$

beschrieben werden kann.

Das Fehlersignal ist nun als eine Überlagerung von Kosinus- und Sinusfunktionen gegeben, die jeweils mit den Einträgen der Vektoren $\hat{\mathbf{e}}_a(n)$ und $\hat{\mathbf{e}}_b(n)$ gewichtet sind. Nach den Formeln in (6.58) können $\hat{\mathbf{e}}_a(n)$ und $\hat{\mathbf{e}}_b(n)$ als die Zustandsvektoren zweier homogener Systeme betrachtet werden

$$\hat{\mathbf{e}}_a(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a) \hat{\mathbf{e}}_a(n) , \quad (6.60)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_b(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^b) \hat{\mathbf{e}}_b(n) , \quad (6.61)$$

deren Anfangszustände durch

$$\hat{\mathbf{e}}_a(0) = \mathbf{d}_{\sin} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_b(0) = \mathbf{d}_{\cos} \quad (6.62)$$

gegeben sind.

Mit den Gleichungen (6.59)-(6.62) ist eine Fehlerbeschreibung gewonnen worden, die ausschließlich von bekannten Größen abhängt. Ein Nachteil der Beschreibung ist, dass die Matrizen $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)$ und $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^b)$ nicht exakt diagonal sind. Nichtsdestotrotz, zumindest für langsame Konvergenz, d. h. für kleine Schrittweiten μ , bleiben sie immerhin annähernd diagonal. Dies kann repräsentativ für die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)$ gezeigt werden, wenn die Einträge der Hauptdiagonalen von \mathbf{Q}^a als

$$q_{mm}^a = \mu \frac{1}{2} \hat{x}_{fm}^2 \tilde{\mathbf{v}}_{a_m}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} = \mu P_m^{x_f} \tilde{\mathbf{v}}_{a_m}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_m} \quad (6.63)$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet $P_m^{x_f} = E\{x_{fm}^2(n)\}$ die Signalleistung bei der m -ten angeregten Frequenz. Die q_{mm}^a in Gleichung (6.63) können angenähert werden durch

$$q_{mm}^a \approx \mu P_m^{x_f} \frac{L}{2} ,$$

wie sich aus dem Anhang C ergibt. Da die Signalleistung bei einer einzelnen Frequenz $P_m^{x_f}$ niemals größer als die gesamte Signalleistung $P_{x_f} = \sum_{m=1}^M P_m^{x_f}$ sein kann, folgt näherungsweise

$$q_{mm}^a \leq \mu P_{x_f} \frac{L}{2} .$$

Bei praktischen Anwendungen des LMS-Algorithmus (wie hier im FxLMS gegeben) wird der Ausdruck $\mu P_{x_f} L$, der normalerweise im Zusammenhang mit der Implementierung einer normierten Schrittweite relevant ist, typischerweise so gewählt, dass gilt [50]

$$0,01 \leq \mu P_{x_f} L \leq 0,1 .$$

Wird entsprechend angenommen, dass die Werte q_{mm}^a kleiner oder gleich 0,05 sind,

$$q_{mm}^a \leq 0,05 , \quad (6.64)$$

so werden die Einträge der Hauptdiagonalen von $\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a$ größer oder gleich dem Wert 0,95 sein. In Folge werden, aufgrund der Ergebnisse des Anhangs C, die Beträge aller anderen Einträge entsprechend

$$|q_{mi}^a| < 0,3 \quad q_{mm}^a < 0,015 , \quad i \neq m ,$$

begrenzt sein. Es folgt schließlich, dass

$$|q_{mi}^a| < 0,016 (1 - q_{mm}^a) , \quad i \neq m .$$

6.4.2 Abschätzung des Konvergenzvorgangs

Für eine anschauliche Herleitung ist es vorteilhaft, das Problem vorübergehend durch die Annahme zu vereinfachen, dass nur der erste Summand in (6.59) ungleich Null ist. Dies ist zufolge der Gleichungen (6.44), (6.46) und (6.58) gegeben, wenn für die Werte der Winkel φ_{d_m} und $\tilde{\varphi}_m$ gilt, dass

$$\varphi_{d_m} + \tilde{\varphi}_m = \frac{\pi}{2} \quad \forall m = 1, \dots, M . \quad (6.65)$$

Ist dies gegeben, so folgt

$$\hat{\mathbf{d}} = [\hat{d}_1 \dots \hat{d}_M]^T = \mathbf{d}_{\sin} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_{\cos} = [0 \dots 0]^T . \quad (6.66)$$

In diesem Fall muss nur noch das System (6.60), d. h.

$$\hat{\mathbf{e}}_a(n+1) = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} q_{11}^a & \cdots & q_{1M}^a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1}^a & \cdots & q_{MM}^a \end{bmatrix} \right) \hat{\mathbf{e}}_a(n) \quad (6.67)$$

für eine vollständige Beschreibung des Fehlersignals $\bar{e}(n)$ betrachtet werden. Der Anfangszustand ist dann $\hat{\mathbf{e}}_a(0) = \hat{\mathbf{d}}$.

Da $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)$ annähernd eine Diagonalmatrix ist, kann sie als die Dynamikmatrix eines diagonalen Systems mit gestörten Parametern betrachtet werden. Die Eigenwerte des ungestörten, diagonalen Systems sind dabei durch die Elemente der Hauptdiagonalen von $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)$ gegeben und die Abweichung des Verhaltens des gestörten vom ungestörten System kann numerisch abgeschätzt werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Hierzu ist die Lösung

$$\hat{\mathbf{e}}_a(n) = \mathbf{C}^n \hat{\mathbf{d}} \quad (6.68)$$

des Systems (6.67) zu betrachten, wobei

$$\mathbf{C}^n = \begin{bmatrix} C_{11}^n & \cdots & C_{1M}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M1}^n & \cdots & C_{MM}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - q_{11}^a & \cdots & -q_{1M}^a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{M1}^a & \cdots & 1 - q_{MM}^a \end{bmatrix}^n. \quad (6.69)$$

Die Einträge C_{mi}^n der Matrix \mathbf{C}^n entsprechen also den (m,i) -ten Elementen der n -ten Potenz der Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^a)$. Gleichung (6.68) kann zerlegt werden entsprechend

$$\hat{\mathbf{e}}_a(n) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\alpha)^n \hat{\mathbf{d}} + \mathbf{A}^n \hat{\mathbf{d}}. \quad (6.70)$$

Dabei sei $(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\alpha)$ die Eigenwertmatrix des ungestörten Systems, wobei

$$\mathbf{\Lambda}_\alpha = \begin{bmatrix} q_{11}^a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_{MM}^a \end{bmatrix}.$$

Folglich ist

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C}^n - (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\alpha)^n = \begin{bmatrix} C_{11}^n - (1 - q_{11}^a)^n & \cdots & C_{1M}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M1}^n & \cdots & C_{MM}^n - (1 - q_{MM}^a)^n \end{bmatrix}$$

die Abweichung der mit n potenzierten, gestörten Systemmatrix \mathbf{C}^n vom ungestörten Fall. Die Elemente von \mathbf{A}^n seien im Folgenden als A_{mi}^n bezeichnet, also

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \cdots & A_{1M}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1}^n & \cdots & A_{MM}^n \end{bmatrix} .$$

Die A_{mi}^n bestimmen, in wie weit sich der Verlauf des Zustands $\hat{\mathbf{e}}_a(n)$ des tatsächlichen Systems (6.68) von dem des ungestört angenommenen Systems mit der Dynamikmatrix $(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\alpha)$ im Abtastschritt n unterscheidet. Es hat sich herausgestellt, dass die Begrenzungen der Einträge von \mathbf{A}^n nur schwer exakt zu ermitteln sind. Sie können aber numerisch angenähert werden. In Bild 6.2 sind die Maximalbeträge der Elemente A_{mi}^n für $M = 40$ und beliebige n für den Fall dargestellt, dass alle Diagonalelemente q_{mm}^a ihren Maximalwert 0,05 einnehmen. Nehmen die q_{mm}^a unter-

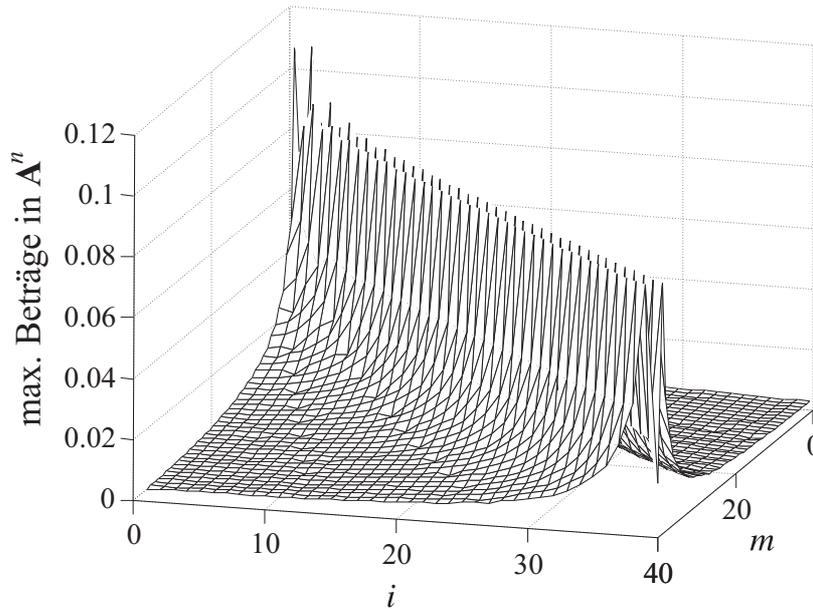


Bild 6.2: Maximale Beträge der Elemente der Matrix \mathbf{A}^n für beliebige n

schiedliche Werte kleiner oder gleich 0,05 an, so bleibt die dargestellte Fläche die Obergrenze, solange gilt $q_{11}^a \geq \dots \geq q_{MM}^a$. Ist dies nicht gegeben, so können noch etwas größere Beträge der A_{mi}^n auftreten. Ein absolute Erhöhung um mehr als 0.01 tritt aber nicht auf.

Speziell für die Elemente A_{ii}^n der Hauptdiagonalen gilt sicher

$$A_{ii}^n < 0,045 . \tag{6.71}$$

Der maximale Wert für ein A_{ii}^n stellt sich dann ein, wenn das zugehörige q_{ii}^a sehr klein ist, verglichen mit den anderen q_{mm}^a , $m \neq i$, die allesamt den Maximalwert $q_{mm}^a = 0.05$ entsprechend (6.64) einnehmen.

Bild 6.2 zeigt, dass die größten Maximalbeträge der A_{mi}^n in den Diagonalen direkt neben der Hauptdiagonalen auftreten. Je weiter sie von der Hauptdiagonalen entfernt liegen, desto kleiner werden die Maximalbeträge der A_{mi}^n und desto kleiner wird auch der Einfluss des entsprechenden \hat{d}_i auf die Konvergenz der m -ten Frequenz. Es ist eine interessante Feststellung, dass, falls weniger als die für Bild 6.2 angenommenen 40 Frequenzen angeregt werden, die Grenzen der verbleibenden A_{mi}^n exakt als der entsprechende Ausschnitt aus der abgebildeten Grenzfläche entnommen werden können.

Liegt die maximale Signalfrequenz Mf_0 nahe bei der Nyquistfrequenz $f_A/2$, so wird die Grenzfläche verformt. Allerdings bleibt die Verformung geringfügig, solange gilt $Mf_0 \leq 0,75 f_A/2$. Ein Maximalwert von 0,12 wird dann für kein (m, i) überschritten, und speziell für die Elemente der Hauptdiagonalen bleibt (6.71) erhalten.

Mit den bisher erhaltenen Ergebnissen kann nun wieder der allgemeine Fall betrachtet werden, bei dem beide Summanden in der Fehlerbeschreibung (6.59) ungleich Null sind. In diesem Fall ist die Annahme (6.65) nicht notwendigerweise erfüllt, und $\hat{\mathbf{d}}$ muss in der Lösung (6.70) durch \mathbf{d}_{\sin} ersetzt werden. Da sich für den zweiten (mit b indizierten) Summanden in (6.59) ein analoges Ergebnis zu (6.70) ergibt, folgt

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= \mathbf{d}_{\sin}^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{\alpha})^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) + \mathbf{d}_{\sin}^T \mathbf{A}^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) \\ &\quad + \mathbf{d}_{\cos}^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{\beta})^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) + \mathbf{d}_{\cos}^T \mathbf{B}^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) \\ &= \mathbf{d}_{\sin}^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{\alpha})^n \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n) + \mathbf{d}_{\cos}^T (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{\beta})^n \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n) + \sum_{m=1}^M \Delta_m(n) . \end{aligned} \quad (6.72)$$

Die $\Delta_m(n)$ sind gegeben durch

$$\Delta_m(n) = \Delta_{a_m}(n) + \Delta_{b_m}(n) , \quad (6.73)$$

mit

$$\Delta_{a_m}(n) = \sum_{i=1}^M \hat{d}_i A_{mi}^n \sin(\varphi_{d_i} + \tilde{\varphi}_i) \cdot \cos(m\omega n T_A - \tilde{\varphi}_m) \leq \sum_{i=1}^M \hat{d}_i A_{mi}^n . \quad (6.74)$$

Entsprechend gilt

$$\Delta_{b_m}(n) \leq \sum_{i=1}^M \hat{d}_i B_{mi}^n, \quad (6.75)$$

wobei die maximal möglichen Werte der B_{mi}^n den Maximalwerten der A_{mi}^n sehr ähnlich sind, die durch die in Bild 6.2 dargestellte Fläche mit der beschriebenen Unsicherheit angegeben werden.

Der Ausdruck (6.72) führt auf eine einfache Darstellung, wenn angenommen wird, dass die Hauptdiagonalelemente q_{ii}^a und q_{ii}^b der Matrizen $\mathbf{\Lambda}_\alpha$ und $\mathbf{\Lambda}_\beta$ jeweils paarweise gleiche Werte annehmen. Eine geeignete Wahl für derartige gemeinsame Werte ist das arithmetische Mittel \bar{q}_m der jeweiligen Elemente. Dieses ergibt sich exakt als

$$\bar{q}_m = \frac{q_{mm}^a + q_{mm}^b}{2} = \mu \frac{L}{4} \hat{x}_{\bar{f}_m}^2. \quad (6.76)$$

Es folgt eine mögliche Abweichung der Hauptdiagonalelemente q_{mm}^a (s. Gleichung (6.63)) vom Mittelwert entsprechend

$$q_{mm}^a = (1 + \Delta_m^\lambda) \bar{q}_m. \quad (6.77)$$

Für q_{mm}^b ergibt sich dasselbe Ergebnis. Nach Anhang C werden die Grenzen von Δ_m^λ in guter Näherung durch $|\Delta_m^\lambda| < 2/[(4m+1)\pi]$ abgeschätzt, solange die Länge L des adaptiven Filters groß ist. Hieraus ergeben sich niedrige Werte der Grenzen, besonders für die höheren Harmonischen. Die Grenzwerte werden größer für abnehmende L wegen der Ungenauigkeiten der Näherung (C.2). Ungeachtet dessen gilt $|\Delta_m^\lambda| < 0,15$ für $L \geq 9$ und $|\Delta_m^\lambda| < 0,35$ für beliebige L [wobei $L \geq 3$ wegen der Annahme (6.2) und dem Shannonschen Abtasttheorem]. Für alle Fälle wird dabei angenommen, dass $f_0 \leq 0,75 f_A/2$.

Da die Konvergenzgeschwindigkeit des Gesamtsignals $e(n)$ irgendwo zwischen der Konvergenzgeschwindigkeit des mit a indizierten und der des mit b indizierten Signalteils liegt, können schließlich mit

$$\bar{\lambda}_m = (1 + \Delta_m^\lambda) \bar{q}_m \quad (6.78)$$

gemittelte Eigenwerte $1 - \bar{\lambda}_m$ des Konvergenzprozesses abgeschätzt werden.

Mit den Gleichungen (6.44), (6.46), (6.52), (6.53) und dem Additionstheorem $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ kann Formel (6.72) nun umgeschrieben werden zu

$$\bar{e}(n) = \sum_{m=1}^M \hat{d}_m (1 - \bar{\lambda}_m)^n \sin(m\omega n T_A + \varphi_{d_m}) + \Delta_m(n), \quad (6.79)$$

wobei für $\Delta_m(n)$ gilt (vgl. Formeln (6.73)-(6.75))

$$\Delta_m(n) \leq \sum_{i=1}^M \hat{d}_i (A_{mi}^n + B_{mi}^n) . \quad (6.80)$$

Für langsame Konvergenz und dementsprechend kleine Werte von $\bar{\lambda}_m$, wird der Ausdruck $(1 - \bar{\lambda}_m)^n$ in Gleichung (6.79) in guter Näherung durch den Term $e^{-\bar{\lambda}_m n}$ beschrieben, der für die Zeitkonstanten $T_A/\bar{\lambda}_m$ den Wert $1/e$ annimmt. Da die $\bar{\lambda}_m$ proportional zu den quadrierten Amplituden $\hat{x}_{f_m}^2$ sind, konvergieren die einzelnen Frequenzkomponenten umso schneller, je größer die Leistung des Signals $x_f(n)$ bei der jeweiligen Frequenz ist.

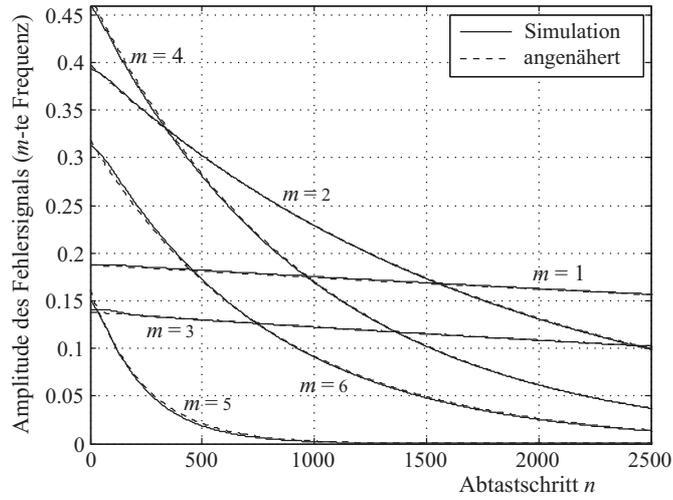
Die Unsicherheiten des Ergebnisses (6.79) sind die Größen Δ_m^λ und $\Delta_m(n)$. Deren Werte gehen zu Null, wenn das Zeitintervall LT_A genau ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_0 der Störanregung ist. In diesem Fall korrespondiert die erhaltene Beschreibung mit den Übertragungsfunktionen der zeitinvarianten Komponenten, die in [28] hergeleitet wurden. Sie bestätigt außerdem die in [18] für $LT_A/T_0 = 1$ vorgestellten Ergebnisse für synchrone Abtastung. Speziell für Anregung mit nur einer einzigen Sinusschwingung (d. h. $M = 1$) ergibt sich $\Delta_m(n) = 0$, unabhängig vom Verhältnis LT_A/T_0 . Die Abschätzung wird schließlich im Allgemeinen gut, wenn gilt $LT_A \gg T_0$. Diese Spezialfälle folgen im Wesentlichen aus der im Anhang C untersuchten Struktur der Produkte $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$.

6.5 Simulationsergebnisse

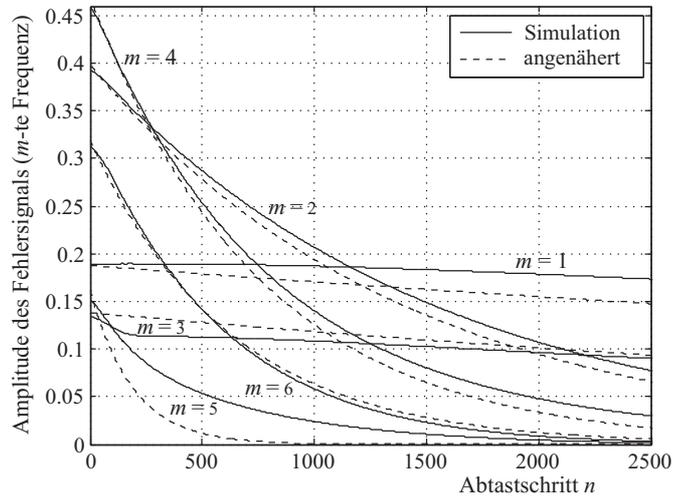
Die Ergebnisse zweier Simulationen sind in den Bildern 6.3(a) und (b) wiedergegeben. Dabei sind jeweils die konvergierenden Amplituden des Fehlersignals $e(n)$ bei den einzelnen Frequenzen mf_0 dargestellt. In beiden Fällen sind sechs Frequenzen angeregt, wobei die Amplituden des gefilterten Referenzsignals $x_f(n)$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{f_1} &= 0,1 \quad , \quad \hat{x}_{f_2} = 0,1 \quad , \quad \hat{x}_{f_3} = 0,01, \\ \hat{x}_{f_4} &= 0,3 \quad , \quad \hat{x}_{f_5} = 0,2 \quad , \quad \hat{x}_{f_6} = 0,2 \end{aligned}$$

betragen. Die Abtastfrequenz ist zu $T_A = 0,001$ sec gesetzt, und die Grundperiode der Störanregung beträgt $f_0 = 25$ Hz. Die Schrittweite $\mu = 0,05$ wurde relativ klein gewählt, um eine anschauliche Darstellung zu ermöglichen. Als primäre und sekundäre Strecke werden identifizierte Modelle vom Einkanalprüfstand eingesetzt (s. Anhang B.2.1).



(a)



(b)

Bild 6.3: Konvergenz der frequenzbezogenen Fehleramplituden.

(a) $LT_A/T_0 = 1$. (b) $LT_A/T_0 = 1, 3$.

In den gezeigten Darstellungen sind die Simulationsergebnisse des originalen rekursiven Algorithmus dem Ergebnis der Annäherung der Konvergenz durch Gleichung (6.79) gegenübergestellt. Die Werte $\bar{\lambda}_m$ nach (6.78) werden hierbei exakt auf die entsprechenden Mittelwerte \bar{q}_m gemäß Formel (6.76) gesetzt. Die Summanden $\Delta_m(n)$ werden vernachlässigt. Im angenäherten Fall werden die frequenzbezogenen Amplituden folglich direkt als $\hat{d}_m(1 - \bar{R}_m)^n$ berechnet.

Für die in Bild 6.3(a) gezeigten Ergebnisse wurde das Verhältnis LT_A/T_0 auf den Wert 1 gesetzt, so dass gilt $L = 40$. Wie nach der oben stehenden Analyse auch

zu erwarten war, verlaufen die Kurven von Simulation und Approximation nahezu identisch. Die leichten Abweichungen der dargestellten Kurven sind hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass die frequenzbezogenen Ergebnisse der Simulation durch die Anwendung einer Short-Time-Fourier-Transformation erhalten wurden.

In Bild 6.3(b) sind die Kurven für $LT_A/T_0 = 1,3$ (d. h. $L = 52$) abgebildet. Hier zeigt sich eine ausgeprägte Abweichung der Simulationsergebnisse von den geschätzten Werten. Der Unterschied würde sich für zunehmende Werte der Schrittweite μ noch graduell verstärken. Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass der genaue Verlauf der Abweichung stark von der Phasendifferenz $\varphi_m - \varphi_{d_m}$ von gefiltertem Referenzsignal und Störsignal abhängt. In jedem Fall vermittelt aber die angenähert berechnete Konvergenz zumindest einen qualitativen Eindruck vom tatsächlichen Abklingverhalten.

6.6 Zusammenfassung zur Konvergenzanalyse

Inhalt dieses Kapitels war eine gründliche Analyse zur Fehlerkonvergenz des FxLMS-Algorithmus speziell für schmalbandige Anregung mit mehreren harmonischen Frequenzen. Im ersten Teil des Kapitels wurde eine exakte Beschreibung des Konvergenzvorgangs, basierend auf einer Diagonalisierung der Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} , hergeleitet. Da die zugehörigen Eigenvektoren und auch die Eigenwerte in geschlossener Form nicht durch bekannte Größen ausgedrückt werden können, wurde im zweiten Teil des Kapitels eine Annäherung des idealen Vorgangs ausgearbeitet. Hierzu wurde die Fehlerbeschreibung zunächst umgeschrieben zu einer Form, die nicht länger exakt diagonal war, dafür aber geeignet für die angestrebte Approximation. Basierend auf der erhaltenen Beschreibung wurden die Abschätzung der Konvergenz durchgeführt und die einfache Formel (6.79) hergeleitet, welche das Fehlersignal als eine Summe von Sinusschwingungen ausdrückt. Für die verbleibenden Unsicherheiten wurden Fehlergrenzen numerisch spezifiziert. Schließlich wurden die Spezialfälle diskutiert, für die die Fehlergrenzen exakt oder annähernd zu Null werden.

Im Rahmen der durchgeführten Analyse wurde als eine Besonderheit die Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit der angeregten Frequenzanteile im Fehlersignal von der Leistung des gefilterten Referenzsignals bei den entsprechenden Frequenzen festgestellt. Hieraus ergeben sich unter anderem Forderungen an die Auslegung der sekundären Strecke $S(z)$, wie sie nachfolgend in der Zusammenfassung im Kapitel 9 noch beschrieben werden.

Kapitel 7

Performancevergleich von vier Algorithmen

Neben der Einrichtung des mechanischen Aufbaus und der enthaltenen elektromechanischen Komponenten ist die Effektivität der softwareseitig implementierten Algorithmen entscheidend für die Leistungsfähigkeit eines Systems zur aktiven Vibrationsdämpfung. In diesem Kapitel sollen entsprechend die Einsetzbarkeit und die Leistungsfähigkeit der verschiedenen algorithmischen Ansätze des AVC für den betrachteten Anwendungsfall untersucht werden. Es werden hierzu stellvertretend vier verschiedene Strukturen betrachtet. Dies sind konkret die klassische Regelung, zwei Algorithmen (FxLMS und FuLMS) zur Umsetzung einer adaptiven Störgrößenaufschaltung, sowie, als alternatives Verfahren, die Vibrationsdämpfung mittels Störbeobachter. Die Einrichtung der Systeme soll hier zunächst nur im Einkanalfall an einer der Aufhängestellen des Hilfsrahmens erfolgen. Angestrebt sind Aussagen zur technischen Realisierbarkeit, zum erforderlichen Rechenaufwand und zur Performance.

In diesem Kapitel kommt den experimentell ermittelten Ergebnissen eine relativ große Bedeutung zu. Neu ist dabei insbesondere die konsequente Untersuchung des Verhaltens der Algorithmen bei instationärer Anregung. Die experimentelle Analyse ist hier besonders für die adaptiven Filter sowie den Störbeobachter wichtig, da sich für diese eine entsprechende theoretische Analyse äußerst schwierig gestaltet.

7.1 Klassische Regelung

In diesem Abschnitt sollen die Umsetzbarkeit und erreichbare Effektivität einer Schwingungsdämpfung mittels Signalrückführung (Regelung) abgeschätzt werden. Hierzu bieten sich verschiedene Methoden des Reglerentwurfs an. Da das Ziel dieses Abschnitts ein Gewinn von eher grundsätzlichen Informationen ist, sollen möglichst einfache und gut nachvollziehbare Verfahren zum Einsatz kommen. Neben der proportionalen Signalrückführung wird daher ein Entwurf durch gezielte Pol- und Nullstellenvorgabe unter Berücksichtigung der Empfindlichkeitsfunktion des Regelkreises verwendet. Eine kurze Übersicht zu anderen möglichen Verfahren wird im nächsten Abschnitt gegeben.

7.1.1 Übersicht zu Regelungsentwürfen in der aktiven Schwingungsdämpfung

Das wohl einfachste Verfahren zur aktiven Schwingungsdämpfung mittels Signalrückkopplung ist die proportionale Geschwindigkeitsrückführung [30]. Diese bringt bei einem mechanischen System eine zusätzliche Dämpfungswirkung ein. Ebenso möglich sind aber auch proportionale Positions- und Beschleunigungsrückführung. Ein etwas weiterentwickelter Ansatz ist die positive Positionsrückführung (engl.: positive position feedback) [40]. Bei diesem wird dem gegebenen System ein zusätzlicher Freiheitsgrad durch einen Regler zweiter Ordnung hinzugefügt, der, ähnlich wie ein passiver Tilger, dem System Energie entzieht. Die Wirkung ist dabei allerdings (ganz analog zum passiven Tilger) auf einen verhältnismäßig schmalen Frequenzbereich beschränkt. Verwandt mit der positiven Positionsrückführung sind die positive Geschwindigkeits- und die positive Beschleunigungsrückführung. Diese unterscheiden sich von der positiven Positionsrückführung dadurch, dass sie die Überhöhung der Empfindlichkeitsfunktion des Regelkreises gemäß dem Bode-Theorem (Abschnitt 3.1.1) eher im oberen Frequenzbereich herbeiführen.

Neben diesen einfachen Grundstrukturen werden auch bereits anspruchsvollere Regelungsansätze eingesetzt. Eine konsequente Behandlung von Mehrgrößensystemen ist mit einem Entwurf im Zustandsraum, typischerweise unter Verwendung eines Zustandsbeobachters möglich [30]. Liegen in der zu beruhigenden Systemstruktur deutliche, aber langsam ablaufende Parameterschwankungen vor, so kann mit adaptiven Regelungsverfahren Abhilfe geschaffen werden [22, 50, 9]. Für eine gezielte

Vorgabe der Empfindlichkeitsfunktion unter Berücksichtigung von Modellunsicherheiten ist ein H_∞ - oder ein μ -Entwurf geeignet [86, 82, 99]. Schließlich finden auch Verfahren der optimalen Regelung wie LQR (Linear Quadratic Regulator) oder LQG (Linear Quadratic Gaussian) Anwendung [105, 85, 35]. Bei diesen wird der Reglerentwurf unter Minimierung eines quadratischen Gütemaßes ausgeführt.

Die obige Aufzählung stellt einen kurzen Umriss zur Anwendung von Regelungsansätzen in der aktiven Schwingungsdämpfung dar. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

7.1.2 Modellierung und Vorüberlegungen

Modellierung

Für einen fundierten Entwurf eines Reglers $R_c(s)$ zum Einsatz in einem Regelkreis gemäß Bild 7.1 ist ein Modell der Regelstrecke $S_c(s)$ erforderlich¹. Ein solches kann auf verschiedene Weisen erhalten werden. Ein möglicher Weg ist eine Systemidenti-

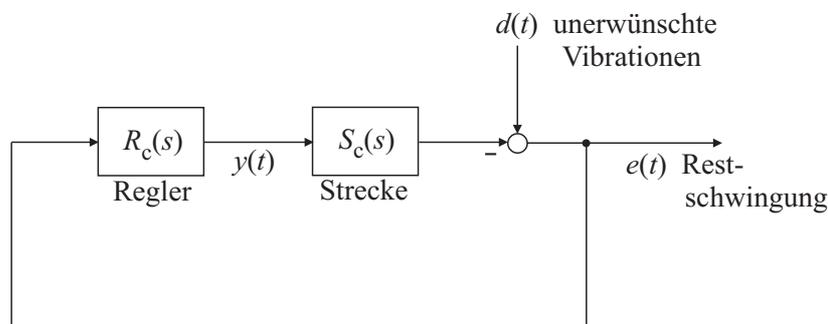


Bild 7.1: Betrachteter zeitkontinuierlicher Regelkreis

fikation mittels eines der im Abschnitt 2.2 vorgestellten Black-Box-Verfahren. Allerdings steht die dabei erhaltene Systemstruktur in der Regel nicht in einem erkennbaren Zusammenhang zu der Struktur des tatsächlich vorliegenden physikalischen Systems. Für den hier beschriebenen Reglerentwurf wird daher an Stelle dessen ein physikalisch motiviertes Modell gemäß Abbildung 7.2 verwendet [39]. Das dargestellte Modell hat 12 Freiheitsgrade und erfasst neben translatorischen Bewegungen in vertikaler Richtung auch die rotatorischen Bewegungen um die horizontalen Achsen.

¹Der Index c kennzeichnet hier die Zeitkontinuität der Systeme.

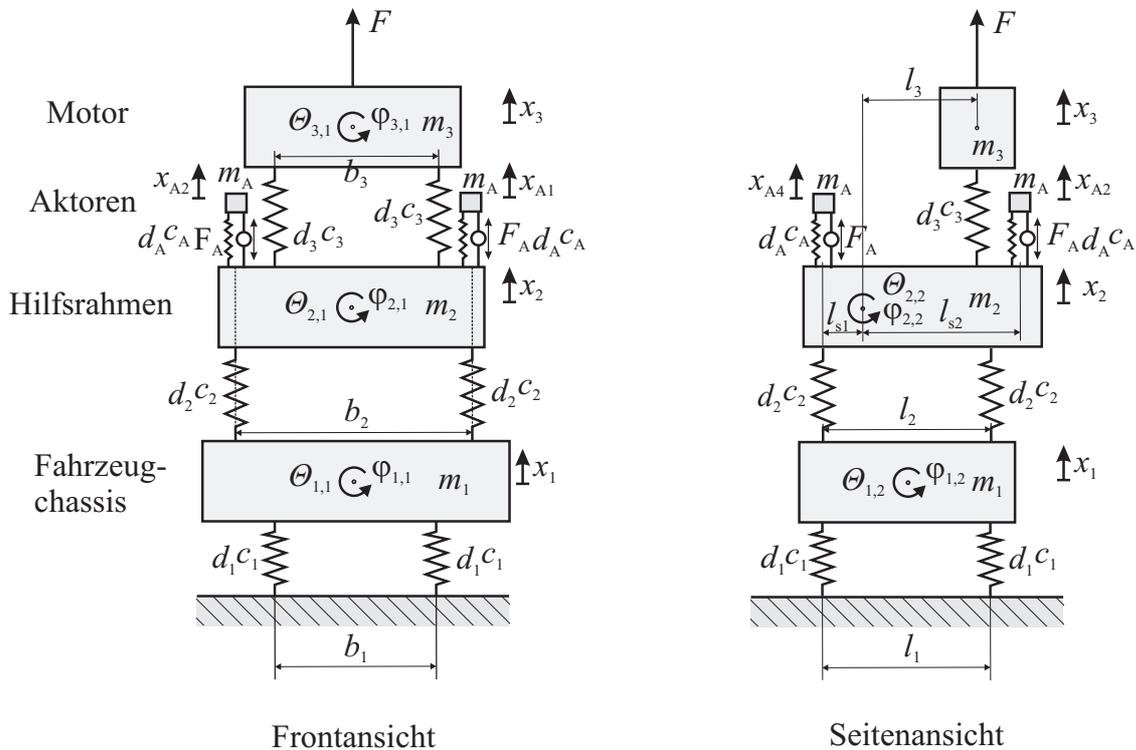


Bild 7.2: Prüfstandmodell mit 12 Freiheitsgraden

Die Bewegungsgleichungen des Modells können mit dem Newton-Euler-Formalismus hergeleitet werden [97]. Es ergibt sich ein System von Gleichungen zweiter Ordnung, das für weitere Analysen auf Zustandsdarstellung umgeformt werden kann [39]. Dem erhaltenen Modell sind weiterhin noch die Systemgleichungen der verwendeten Auslöschungsaktoren (s. Abschnitt 4.4) anzufügen. Die Sensoren können als einfache Verstärkungsfaktoren berücksichtigt werden. Aus dem resultierenden Gesamtsystem ergeben sich die für die Reglerauslegung erforderlichen Übertragungsfunktionen.

Die Regelung soll im vorliegenden Fall an der vorderen Aufhängung 3 (vgl. Bild 4.6) im Mehrkanalprüfstand eingerichtet werden. Die betrachtete Regelstrecke beinhaltet demzufolge hauptsächlich die Übertragung von der Eingangsspannung des Aktors an dieser Aufhängestelle zum Ausgangssignal des zugeordneten Sensors. Die vollständige Strecke ergibt sich schließlich durch Hinzufügen der analogen Tiefpassfilter für das Anti-Aliasing und die Signalrekonstruktion. Im vorliegenden Fall werden hierzu einfache PT1-Glieder mit einer Grenzfrequenz von ca. 300 Hz eingesetzt. Diese führen nur zu einer moderaten Phasenverzögerung unterhalb ihrer Grenzfrequenz. Außerdem ist bei der verwendeten Abtastrate von 10 kHz (s. u., Abschnitt 7.1.5)

bereits der relativ schwache Amplitudenabfall von 20 dB/dec ausreichend, um eine genügend starke Sperrwirkung bei der Nyquistfrequenz $f_A/2$ zu erreichen.

Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass in der realen Regelstrecke im Prüfstand eine Totzeit durch Signallaufzeiten auftritt, die in der Modellierung bisher nicht berücksichtigt wird. Diese Totzeit wird in den folgenden Abschnitten zunächst auch weiterhin vernachlässigt, da erst einmal nur eine Abschätzung der maximal erreichbaren Dämpfungsgüte und damit der prinzipiellen Einsetzbarkeit der betrachteten Reglerstrukturen angestrebt wird. Eine konsequente Einführung und Berücksichtigung der Totzeit erfolgt im Abschnitt 7.1.4.

Gültigkeit des Bode-Theorems

Die gemäß dem vorhergehenden Abschnitt erhaltene Systembeschreibung gibt unter anderem Auskunft über die Differenzordnung δ der betrachteten Regelstrecken. Für die hier relevante Übertragung von der Ansteuerspannung der Auslöschungsaktoren auf die Beschleunigung an der jeweiligen Auslöschungsstelle ergibt sich bei Einbeziehen der analogen Tiefpassfilter ein $\delta = 3$. Für die Übertragung auf die Geschwindigkeit folgt außerdem $\delta = 4$ und für die Übertragung auf die Position $\delta = 5$. Es gilt folglich das Bode-Theorem in der in Gleichung 3.2 angegebenen Form. Wie im Abschnitt 3.1.1 vorweggenommen, ist eine Schwingungsverminderung im gesamten Frequenzbereich also nicht möglich.

7.1.3 Regelung mittels proportionaler Rückführung

Als erster Ansatz soll hier mit einem Proportionalglied die einfachste mögliche Reglerstruktur betrachtet werden. Aus Anwendungen z. B. an Einmassenschwingern ist bekannt, dass diese bei ausreichend hohem Wert des Rückführungsfaktors bereits zu passablen Ergebnissen der Schwingungsdämpfung führen kann [30, 39].

Es soll die Rückführung von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position untersucht werden². Die Abschätzung der maximal erreichbaren Dämpfungsgüte kann dabei mittels der Empfindlichkeitsfunktion $\bar{T}(s)$ nach Abschnitt 3.1.1 erfolgen. $\bar{T}(s)$ ergibt sich mit konstantem Regler K als

$$\bar{T}(s) = \frac{1}{1 + K S_c(s)}. \quad (7.1)$$

²Für eine praktische Anwendung würden im vorliegenden Fall Geschwindigkeit und Position jeweils durch Integration aus dem Beschleunigungssignal generiert werden.

Im Folgenden wird jeweils der Verlauf der Empfindlichkeitsfunktion betrachtet, der sich bei stabilem Betrieb des geschlossenen Regelkreises in direkter Nähe der Stabilitätsgrenze einstellt. Es wird entsprechend ein Verstärkungsfaktor K eingesetzt, für den gerade noch Stabilität vorliegt. Es ist zu beachten, dass für kleinere Werte von K zwar jeweils die erreichte Vibrationsverstärkung und auch -dämpfung verringert wird, die Form der dargestellten Amplituden- und Phasengänge bleibt aber in etwa erhalten.

Proportionale Beschleunigungsrückführung

Bei der Beschleunigungsrückführung wird die Stabilitätsgrenze bei ca. $K = 7,7$ festgestellt. Gemäß Bild 7.3 wird für diesen Wert zwar eine gute Schwingungsdämpfung im oberen Frequenzbereich (ungefähr 40-300 Hz) erreicht, für niedrigere Frequenzen (etwa 20-40 Hz) ergibt sich jedoch eine deutliche Verstärkung (bis zu +50 dB bei der Resonanzfrequenz des Auslöschungsaktors).

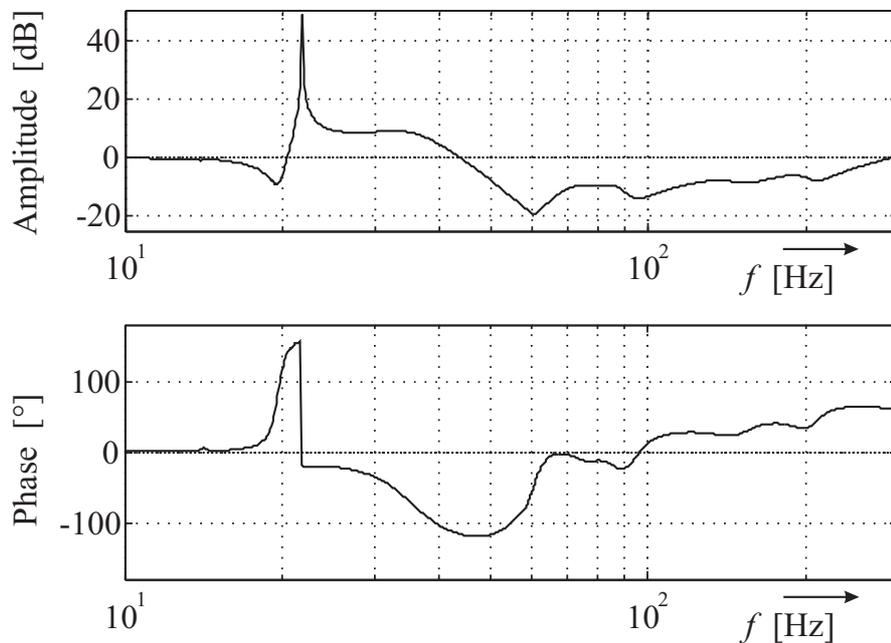


Bild 7.3: Empfindlichkeitsfunktion bei proportionaler Beschleunigungsrückführung

Proportionale Geschwindigkeitsrückführung

In Bild 7.4 ist das Bode-Diagramm der Empfindlichkeitsfunktion für Geschwindigkeitsrückführung eingetragen. Für einen Verstärkungsfaktor von $K = 300$ wird hier nur eine geringe Verbesserung des Störverhaltens (max. -5 dB) in einem recht schmalen Frequenzbereich erreicht.

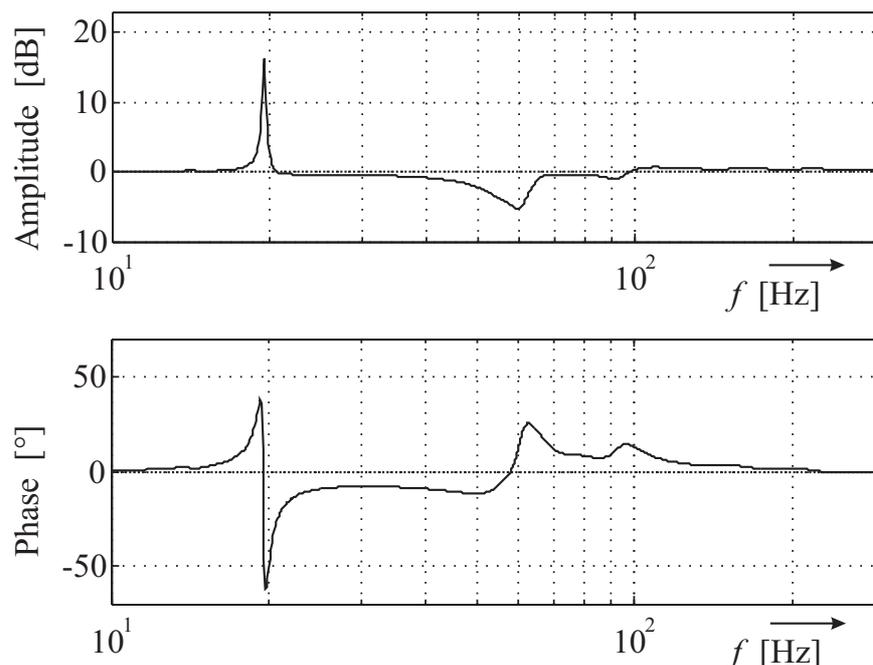


Bild 7.4: Empfindlichkeitsfunktion bei proportionaler Geschwindigkeitsrückführung

Proportionale Positionsrückführung

Mit der Positionsrückführung können gemäß Bild 7.5, zumindest im unteren Frequenzbereich (20-65 Hz), gute Dämpfungswerte von bis zu 25 dB erhalten werden. Im oberen Frequenzbereich (65-300 Hz) treten jedoch wieder zum Teil deutliche Störverstärkungen auf. Die Rückführkonstante wurde hier zu $K = 6,5 \cdot 10^5$ gesetzt.

Schlussfolgerung

Aus der Betrachtung der drei proportionalen Rückführungen folgt, dass diese nur sehr bedingt zur Anwendung bei der vorliegenden Problemstellung geeignet sind. Eine Störunterdrückung gelingt in keinem Fall im gesamten für die Vibrationsdämpfung

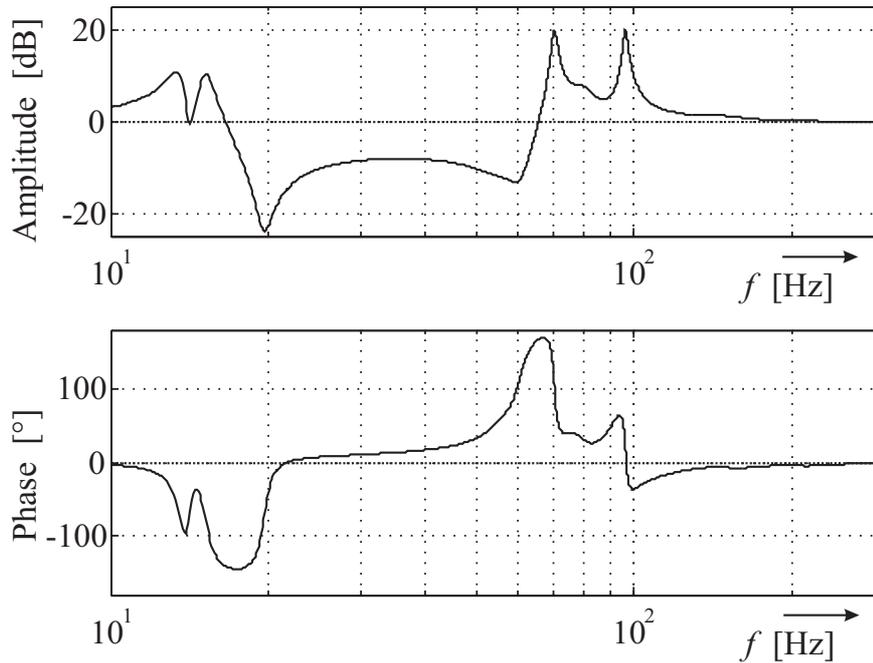


Bild 7.5: Empfindlichkeitsfunktion bei proportionaler Positionsrückführung

relevanten Frequenzband. Es treten immer auch Bereiche mit teilweise erheblicher Verstärkung der Störung auf. In den nachfolgenden Abschnitten soll daher eine etwas aufwändigere Reglerstruktur ausgearbeitet werden, mit der die Empfindlichkeitsfunktion gezielter abgestimmt werden kann. Ein einfacher Ansatz hierzu wäre bereits der Einsatz von Kombinationen der oben beschriebenen proportionalen Rückführungen. Allerdings werden auch hiermit noch keine zufrieden stellenden Ergebnisse erreicht [39]. Hauptgrund hierfür ist, dass mit der sich ergebenden Struktur die Phase des offenen Regelkreises im unteren Frequenzbereich noch nicht ausreichend weit abgesenkt werden kann. Diese Problematik, sowie geeigneterer Strukturen, werden nachfolgend näher erläutert.

7.1.4 Einsatz einer dynamischen Reglerstruktur

Da sich die Regelung mit proportionaler Rückführung als nicht Erfolg versprechend herausgestellt hat, soll im Folgenden ein dynamischer Regler entworfen werden, dessen Übertragungsverhalten frequenzbezogen abgestimmt werden kann.

Reglerauslegung

Der Entwurf des dynamischen Reglers $R_c(s)$ geschieht hier durch eine gezielte Beeinflussung des Übertragungsverhaltens der offenen Kette $R_c(s)S_c(s)$ (s. Bild 7.1) durch Einbringen von Polstellen und Nullstellen. Grundsätzliche Anhaltspunkte für eine sinnvolle Positionierung der Pole und Nullstellen ergeben sich bei Betrachtung des Bode-Diagramms der Regelstrecke $S_c(s)$. Wie in Bild 7.6 zu sehen, beginnt die Phase der Regelstrecke bereits bei 360° . Dies ist auf einen Nullstellenüberschuss in der Nähe des Ursprungs zurückzuführen. Im hinteren Bereich des Phasenverlaufs fällt die Phase unter -180° und kann dort instabiles Verhalten verursachen. Folgende Maßnahmen sind daher Erfolg versprechend:

- Einfügen von Polen nahe am Ursprung senkt die Phase bei niedrigen Frequenzen. Es wird erreicht, dass die Amplitude der offenen Kette im unteren Frequenzbereich durch Vergrößern der Verstärkung des Reglers erhöht werden kann, ohne dass Instabilität auftritt.
- Einfügen von Nullstellen im mittleren Frequenzbereich hebt die Phase der offenen Kette im hinteren Bereich an und erhöht dort die Stabilitätsreserve.

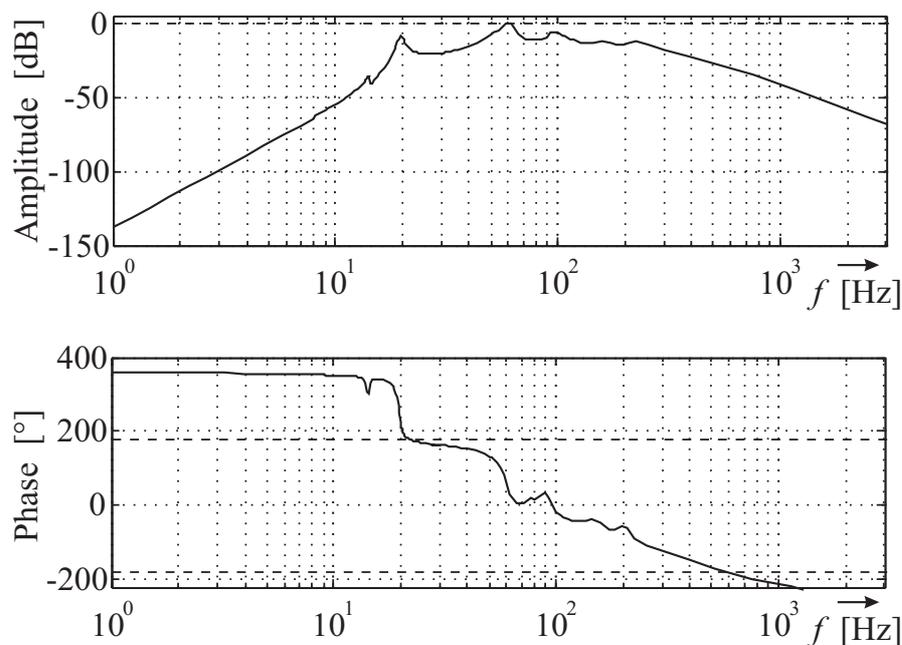


Bild 7.6: Bode-Diagramm der Regelstrecke $S_c(s)$

Auf diese Weise ergibt sich eine aus so genannten Lag-Gliedern bestehende Reglerstruktur. Derartige Übertragungsglieder enthalten gemäß

$$\frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \quad \text{mit} \quad T_1 < T_2 \quad (7.2)$$

jeweils eine Polstelle und eine Nullstelle. Sie senken in einem bestimmten Frequenzbereich die Amplitude und die Phase einer offenen Regelkette ab, ohne dabei insgesamt die Differenzordnung der Kette zu verändern. Anstelle von einfachen Polen/Nullstellen können gegebenenfalls auch konjugiert komplexe Polpaare/Nullstellenpaare sinnvoll sein.

Die genaue Positionierung der Pole und Nullstellen wird hier mit dem *SISO Design Tools* unter Matlab durchgeführt. Dieses ermöglicht eine direkte Parametermanipulation des Reglers bei gleichzeitiger Darstellung verschiedener Visualisierungen zum Regelkreis wie Wurzelortskurve, Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve. Es zeigt sich, dass gute Ergebnisse bereits mit einem relativ einfachen Entwurf mit drei Polstellen bei etwa 2,4 Hz, einer Nullstelle bei ca. 50 Hz und einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar bei ca. 30 Hz erzielt werden.

$$R_c(s) = V_R \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^{-5} s^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} s + 1)(3,2 \cdot 10^{-3} s + 1)}{(66,7 \cdot 10^{-3} s + 1)^3} . \quad (7.3)$$

Die Verstärkung V_R , die sich hier bei der Stabilitätsgrenze des geschlossenen Regelkreises für die Frequenz 0 Hz ergibt, ist allerdings mit $V_R = 95 \cdot 10^3$ noch sehr hoch. Abhilfe kann geschaffen werden durch ein zusätzliches Lead-Glied, das genau wie ein Lag-Glied gemäß Gleichung 7.2 aufgebaut ist. Einziger Unterschied ist, dass nun gilt $T_1 > T_2$, so dass zwischen Polstelle und Nullstelle eine Anhebung von Amplitude und Phase bewirkt wird. Beim vorliegenden Regler wird eine Nullstelle in 0 Hz und eine weitere Polstelle bei 2,4 Hz platziert. Es ergibt sich

$$R_c(s) = V_R \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^{-5} s^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} s + 1)(3,2 \cdot 10^{-3} s + 1) \cdot s}{(66,7 \cdot 10^{-3} s + 1)^4} . \quad (7.4)$$

Der Verstärkungsfaktor bei der Stabilitätsgrenze liegt nun bei $V_R = 6500$, wobei sich die tatsächliche Verstärkung des Reglers, wie in Bild 7.7 zu erkennen, insbesondere für Frequenzen nahe 0 Hz sehr klein einstellt. Eine weitere Absenkung der Regleramplitude im Bereich von 0,1-10 Hz kann hier nicht durchgeführt werden, da sich gleichzeitig immer auch eine deutlich erhöhte Störverstärkung des geschlossenen Regelkreises im Frequenzbereich unterhalb 20 Hz einstellt. Die resultierende offene

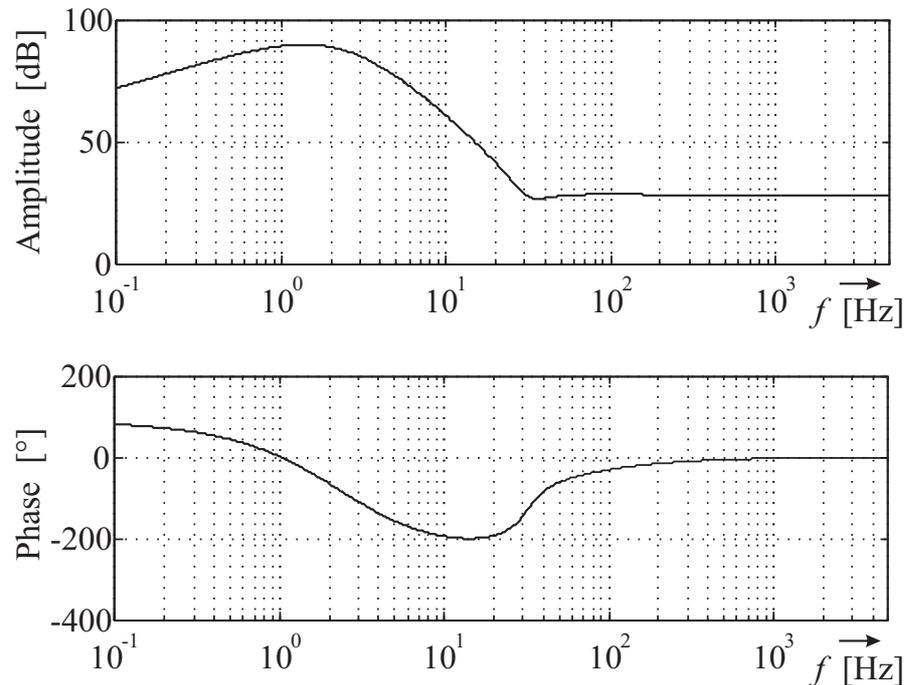
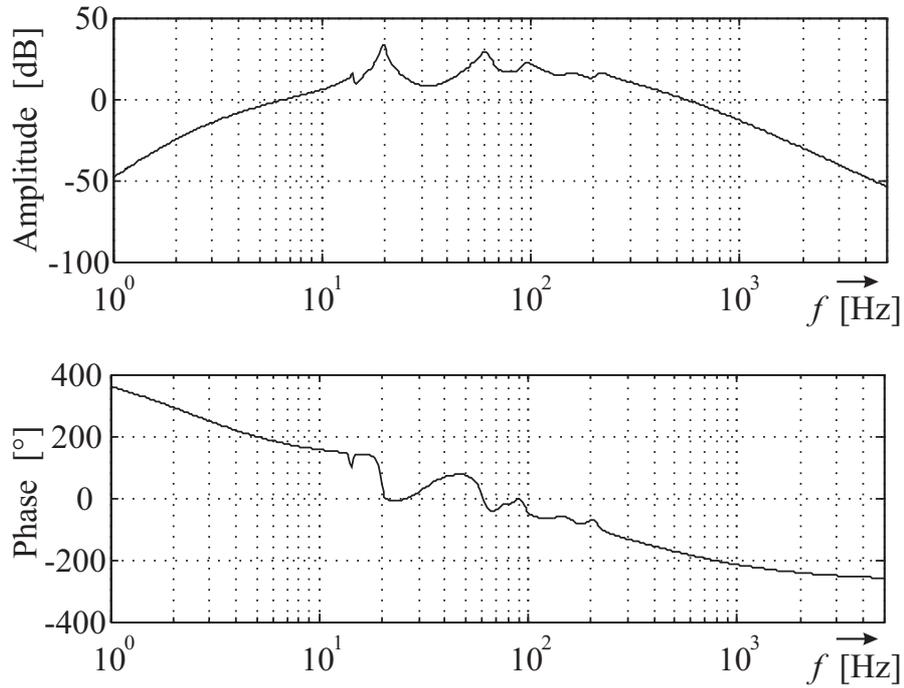
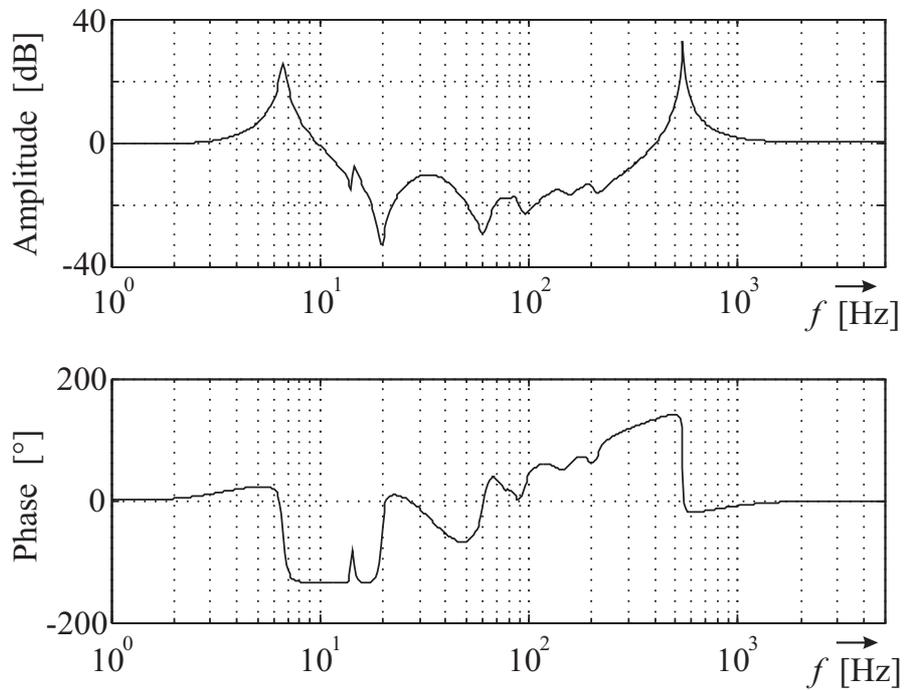


Bild 7.7: Bode-Diagramm des Reglers

Regelkette sowie die Empfindlichkeitsfunktion sind in den Abbildungen 7.8 und 7.9 zu sehen.

Gemäß Bild 7.9 stellt sich im gesamten relevanten Frequenzband von 20-300 Hz eine wesentliche Verringerung der Störübertragung ein. Es ist weiterhin zu sehen, dass die Störverstärkungen, die sich in Übereinstimmung mit dem Bode-Theorem ergeben, sowohl oberhalb als auch unterhalb des relevanten Frequenzbereichs auftreten. Dabei liegt der bei weitem größere Anteil im oberen Frequenzbereich (zu beachten ist die logarithmische Skalierung der Frequenzachse). Unerwünscht sind hier noch die hohen Spitzenwerte der Störverstärkung von bis zu 30 dB. Diese stellen sich jedoch nur für den Fall ein, dass der Verstärkungsfaktor V_R sehr nahe bei seinem maximal zulässigen Wert bei der Stabilitätsgrenze gewählt ist. Bei realem Betrieb des Reglers muss V_R kleiner eingestellt werden und es ergeben sich geringere Werte. Insbesondere die Störverstärkung unterhalb 20 Hz wird außerdem durch die in den folgenden Abschnitten durchgeführten Regleranpassungen gegenüber der Störverstärkung im oberen Frequenzbereich deutlich abgesenkt.

Bild 7.8: Offene Kette mit dynamischem Regler ($V_R = 6500$)Bild 7.9: Empfindlichkeit des erhaltenen Regelkreises ($V_R = 6500$)

Berücksichtigung von Streckentotzeiten

Wie bereits angemerkt, enthält die Regelstrecke $S_c(s)$ im realen Prüfstand eine Totzeit T_t , die in der Modellierung bisher nicht berücksichtigt wurde. Die Totzeit entsteht im Wesentlichen durch Signallaufzeiten, die hauptsächlich dem mechanischen Aufbau zuzuordnen sind. Entsprechende Messungen ergeben eine Signalverzögerung von etwa 0,35 msec bei der Übertragung von der Aktor-Eingangsspannung zu der mit dem Sensor gemessenen Beschleunigung. Dieser Zeitspanne ist noch eine Verzögerung von etwa 1,5 Abtastperioden aufgrund der digitalen Signalverarbeitung und der D/A-Wandlung hinzuzufügen. Es stellt sich eine Gesamttotzeit $T_t \approx 0,5$ msec ein.

Die hier bisher verwendete Art der Regelkreisanalyse kann bei Strecken $S_c(s)$ mit Totzeit nicht direkt angewandt werden. Eine Untersuchung ist aber möglich, wenn anstelle der exakten Wirkung $G_t(s) = e^{-sT_t}$ der Totzeit eine Näherung $\tilde{G}_t(s)$ berücksichtigt wird. Eine solche kann mithilfe der Pade-Approximation erhalten werden [29], die sich durch Umkehrung der im nachfolgenden Abschnitt 7.1.5 vorgestellten bilinearen Transformation ergibt. Die Pade-Approximation nähert den Verschiebeoperator $z_T = e^{sT}$ mit

$$z_T \approx \frac{(1 + \frac{1}{2}sT)}{(1 - \frac{1}{2}sT)} \quad (7.5)$$

an. Der Verschiebeoperator wirkt verzögernd, wenn er invertiert wird ($\frac{1}{z_T} = e^{-sT}$). Eine Verzögerung um das k -fache von T ergibt sich weiterhin durch Potenzieren mit dem Exponenten k : $(\frac{1}{z_T})^k = e^{-skT}$. Die Annäherung der Totzeit T_t kann dementsprechend durch

$$\tilde{G}_t(s) = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}s\frac{T_t}{k}}{1 + \frac{1}{2}s\frac{T_t}{k}} \right)^k \quad (7.6)$$

erfolgen. Die Approximation ist umso genauer, je größer k gewählt wird. Für ein unendlich hohes k wird mithilfe des allgemeinen Zusammenhangs [88]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k = e^x \quad (7.7)$$

einsichtig, dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{-\frac{1}{2}sT_t}{k}}{1 + \frac{\frac{1}{2}sT_t}{k}} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{-\frac{1}{2}sT_t}{k} \right)^k}{\left(1 + \frac{\frac{1}{2}sT_t}{k} \right)^k} = e^{-sT_t}. \quad (7.8)$$

Im vorliegenden Fall wird $k = 10$ gewählt. Das Ergebnis der Approximation (7.6) ist in Bild 7.10 zusammen mit der originalen Totzeit eingetragen. Eine weitere Erhöhung von k führt zu keiner nennenswerten Änderung der Ergebnisse bei der Reglerauslegung.

Wird die angenäherte Totzeit $\tilde{G}_t(s)$ der Regelstrecke angefügt, so bleibt der Amplitudengang der Strecke zwar unverändert, der Phasengang aber wird für zunehmende Frequenzen deutlich abgesenkt. Hierdurch wird im oberen Frequenzbereich die Phasenreserve verringert bzw. negativ. Um Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu erhalten, muss zwangsläufig der Verstärkungsfaktor V_R herabgesetzt werden. Im vorliegenden Fall wird Stabilität erst bei Verkleinerung von V_R auf fast ein Viertel, nämlich auf den Wert $V_R = 1650$ erreicht. Es stellt sich die in Bild 7.11 illustrierte Empfindlichkeitsfunktion $\bar{T}(s)$ ein. Die Störverminderung im relevanten Frequenzbereich fällt hier insgesamt wesentlich schwächer aus als mit dem ursprünglich verwendeten Verstärkungsfaktor im System ohne Totzeit. Speziell bei Frequenzen nahe 300 Hz tritt sogar eine deutliche Verstärkung der Störung auf. Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen konnte kein Weg gefunden werden, die

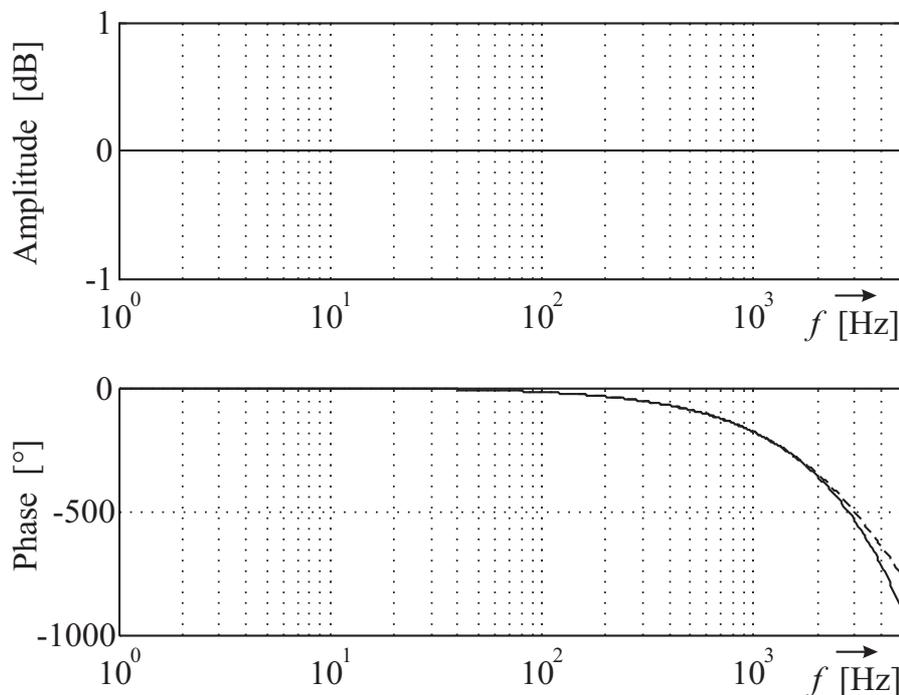


Bild 7.10: Ideale Totzeit von 0.5 msec (durchgezogene Linie) und Annäherung mittels Pade-Approximation (gestrichelte Linie)

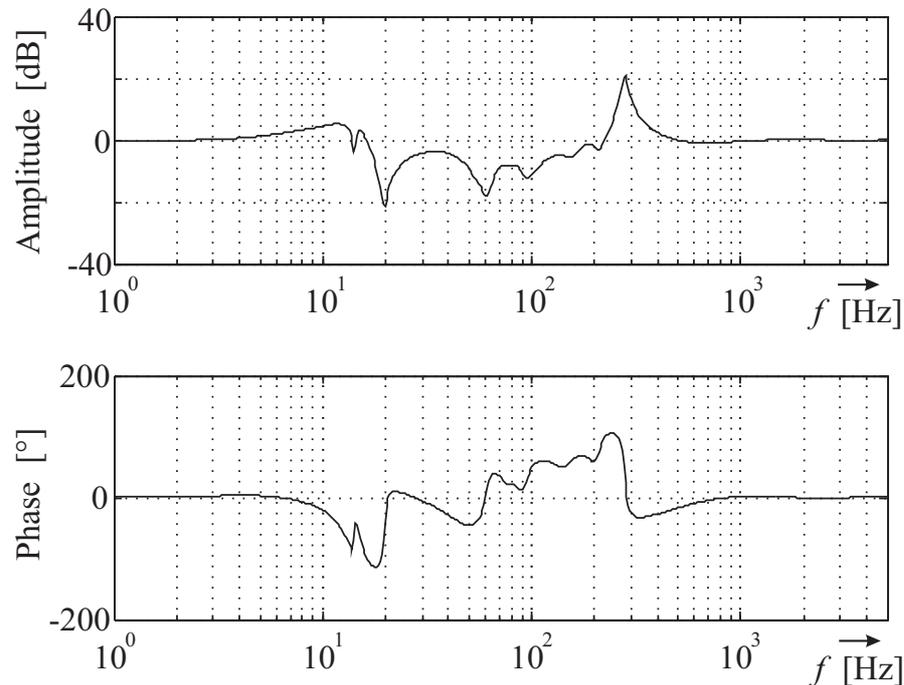


Bild 7.11: Empfindlichkeit für ursprünglichen Regler, mit Streckentotzeit. ($V_R = 1650$)

ursprünglich hohe Gesamtunterdrückung im Bereich von 20-300 Hz durch weiteres Zufügen von Polen und Nullstellen wieder herzustellen [39]. Immerhin kann aber zumindest die schlechte Dämpfung zwischen 200 und 300 Hz verbessert werden. Es werden hierzu die beiden Polstellen der analogen Hardwarefilter im Prüfstand durch Nullstellen bei ebenfalls ca. 300 Hz ausgeglichen. Zum Erhalt des notwendigen Abfalls der Amplitude des offenen Regelkreises für hohe Frequenzen werden dann wieder zwei Polstellen bei 900 Hz eingefügt. Mit den beiden so zusätzlichen eingerichteten Lead-Gliedern ergibt sich der Regler

$$R_c(s) = V_R \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^{-5} s^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} s + 1)(3,2 \cdot 10^{-3} s + 1)(5,6 \cdot 10^{-4} s + 1)^2 \cdot s}{(66,7 \cdot 10^{-3} s + 1)^4 (1,8 \cdot 10^{-4} s + 1)^2} \quad (7.9)$$

mit der in Bild 7.12 gezeigten Empfindlichkeitsfunktion. Es wird nun wieder eine Dämpfung im gesamten relevanten Frequenzbereich erzielt. Die Reglerverstärkung muss dazu nur wenig auf $V_R = 1400$ abgesenkt werden.

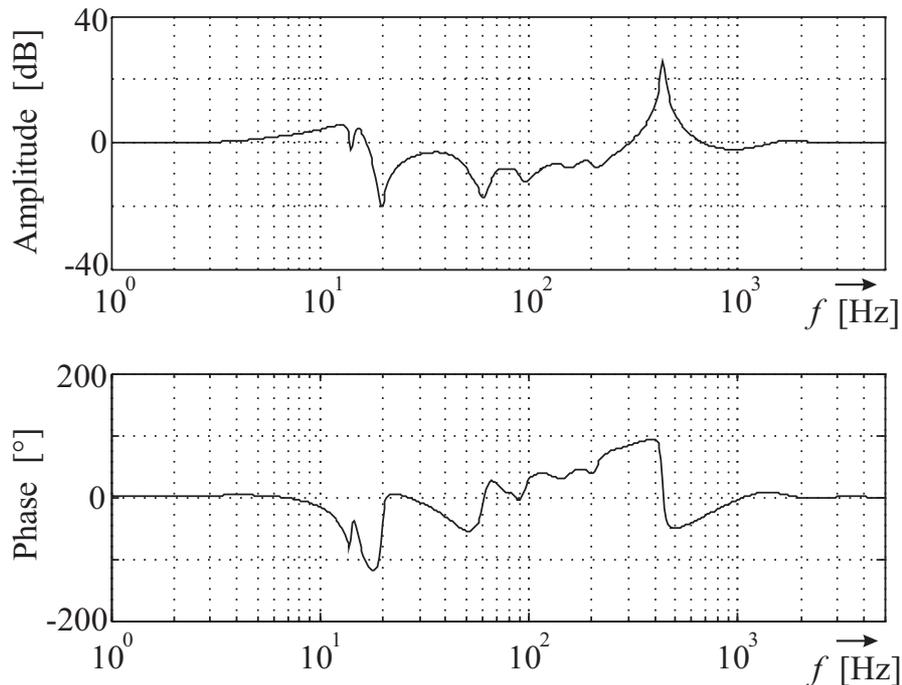


Bild 7.12: Empfindlichkeit des Regelkreises mit Verbesserung im oberen Frequenzbereich ($V_R = 1400$)

7.1.5 Digitale Umsetzung des Reglers

Auswahl der Abtastrate

Entsprechend Abschnitt 2.1.1 kann ein digital eingerichteter Regler nur Signale bis zur Nyquist-Frequenz, d. h. bis zur halben Abtastrate $f_A/2$ fehlerfrei verarbeiten. Es legt folglich die Abtastrate das zur Signalverarbeitung verfügbare Frequenzband fest. An dieses sind bei der Einrichtung einer Regelung verschiedene Anforderungen gestellt:

Für die analoge Signalaufbereitung werden Tiefpassfilter eingesetzt (s. Abschnitt 4.5), deren Flankensteilheit nicht zu hoch sein sollte, um einen starken Phasenabfall der Regelstrecke im relevanten Frequenzbereich zu vermeiden. Um trotzdem eine gute Sperrwirkung bei der Nyquistfrequenz $f_A/2$ zu erzielen, muss ein entsprechend breites Frequenzband allein für den Amplitudenabfall der Filter vorgesehen werden.

Des Weiteren kann eine Regelung im vorliegenden Fall aufgrund des Bode-Theorems nicht für alle Frequenzen eine Verminderung der Störschwingungen herbeiführen. Es kommt in bestimmten Frequenzbändern zwangsläufig zu einer Störver-

stärkung. Auch die hiervon betroffenen Frequenzbereiche sollten möglichst breit ausfallen, so dass die Spitzenwerte der Verstärkung moderat bleiben können.

Nicht zuletzt ist ein hohes f_A wünschenswert, um die durch die digitale Signalverarbeitung entstehende Streckentotzeit gering zu halten.

Aus den aufgezählten Gründen wird im vorliegenden Fall die Abtastfrequenz auf den bei der verwendeten Hardware höchstmöglichen Wert von 10 kHz gesetzt.

Transformation des Reglers ins Zeitdiskrete

Um den Regler am Prüfstand in Echtzeit ausführen zu können, muss seine zeitkontinuierlich entworfene Übertragungsfunktion in zeitdiskrete Darstellung gewandelt werden. Dies kann mithilfe der bilinearen Transformation nach Tustin [96, 41, 71] geschehen. Die hierbei angewandte Ersetzung

$$s = \frac{2}{T_A} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (7.10)$$

bildet die imaginäre Achse der s-Ebene auf den Einheitskreis der z-Ebene ab. Die ursprünglich links gelegenen Pole kommen dabei im Inneren des Einheitskreises zu liegen, so dass Stabilität immer erhalten bleibt. Bei der Abbildung tritt im Vergleich zu der idealen Transformation $z = e^{sT_A}$ ein Fehler auf, der aber gering bleibt, solange die Dynamiken des Reglers langsam sind im Vergleich zur Nyquist-Frequenz $f_A/2$.

7.1.6 Simulationsergebnisse

Vor der Ausführung in der Echtzeitanwendung kann der entworfene Regler in einer realitätsnahen numerischen Simulation unter Simulink getestet werden. Mit dem Regler (7.4) ergibt sich unter Vernachlässigung der Streckentotzeit T_t (fiktiver Fall) die in Bild 7.13 gezeigte Dämpfung. Bei Berücksichtigung der Totzeit wird mit dem Regler (7.9) das in Bild 7.14 wiedergegebene Ergebnis erhalten.

Es wird hier eine Anregung durch die Motorkraft $F(t)$ mit bandbegrenztem weißem Rauschen (10-1000 Hz) angenommen. Auf diese Weise ist, zumindest für den angeregten Frequenzbereich, die vollständige Ermittlung der frequenzbezogenen Störübertragung des Regelkreises möglich. Die Übertragungsfunktion von der Kraft $F(t)$ zu der Beschleunigung an der Auslöschungsstelle ergibt sich ebenso wie die Regelstrecke $S_c(s)$ aus dem in Abschnitt 7.1.2 vorgestellten Prüfstandmodell mit 12 Freiheitsgraden.

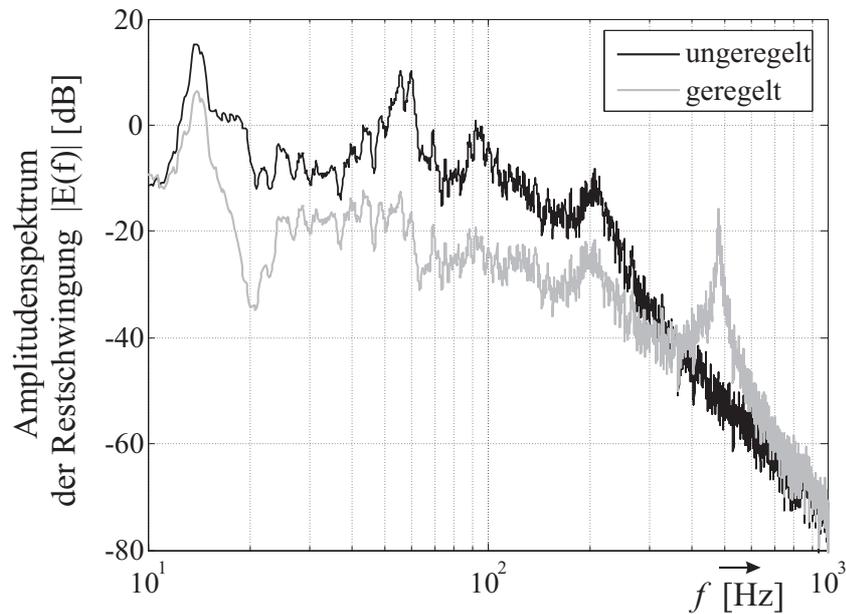


Bild 7.13: Dämpfung in der Simulation – fiktiver Fall ohne Streckentotzeit ($V_R = 5500$)

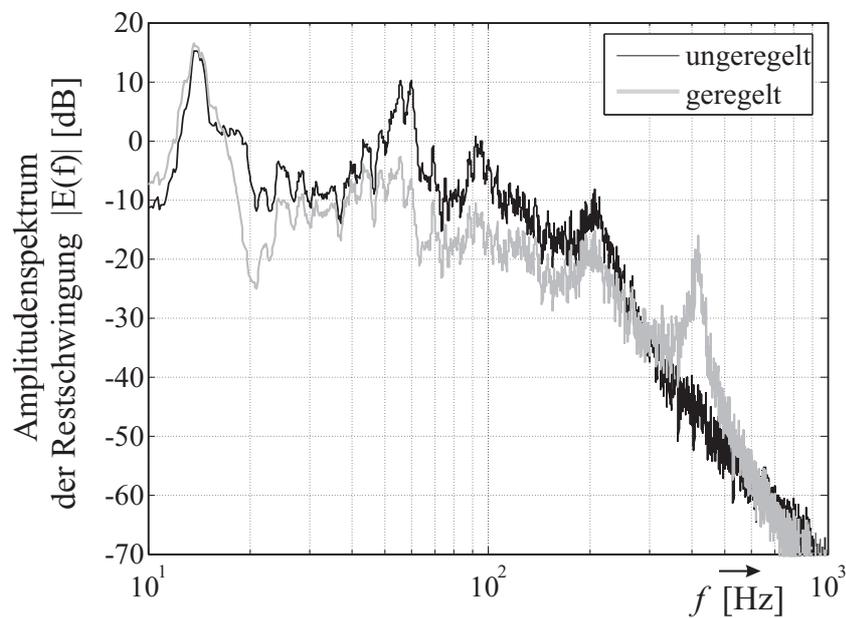


Bild 7.14: Dämpfung in der Simulation – mit Streckentotzeit ($V_R = 1330$)

7.1.7 Verhalten für Chirp-Anregung

In Bezug auf die betrachtete Anwendung im Kraftfahrzeug ist insbesondere das Dämpfungsverhalten für harmonische Anregung relevant. Dabei ist beim realen Kfz

davon auszugehen, dass sich die Frequenz der anregenden Signale zumindest von Zeit zu Zeit mehr oder minder schnell um wesentliche Beträge ändert. Im Folgenden soll erprobt werden, inwieweit die hier entworfene Regelung grundsätzlich zur Dämpfung entsprechender Störsignale geeignet ist. Es wird hierzu eine Sinusschwingung mit gleichförmig ansteigender Frequenz eingesetzt. Ein solches Signal wird auch als Chirp-Signal bezeichnet. Für die Steigung der Frequenzrampe wird der relativ hohe Wert von 200Hz/sec angesetzt.

Es werden hier dieselben Fälle der Regelung betrachtet wie im vorhergehenden Abschnitt zur Simulation. Der erste Fall ist ein fiktiver Regelkreis mit einer Regelstrecke ohne Totzeit und einem Regler gemäß (7.4). Für diesen Fall wird das in Bild 7.15 gezeigte Dämpfungsverhalten erreicht. An der Ordinate ist hier der RMS (Root-Mean-Squares)-Wert der Restschwingung $e(n)$ an der Auslöschungsstelle aufgetragen. Die Ordinate sowie die Zeitachse sind logarithmisch skaliert, so dass ein Vergleich mit dem Ergebnis in Bild 7.13 für bandbegrenztetes weißes Rauschen möglich ist. Außerdem ist zusätzlich zur Zeitachse eine in etwa entsprechende Frequenzachse eingezeichnet. Durch die hohe Frequenzsteigung von 200 Hz sowie die RMS-Bildung

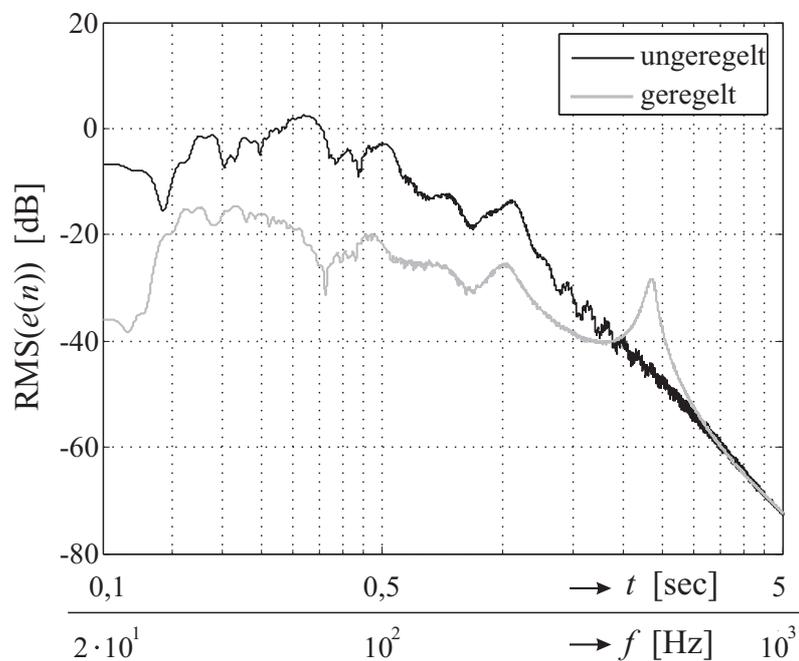


Bild 7.15: Dämpfung für Chirp-Störsignal, Simulation *ohne* Totzeit ($V_R = 5500$).

- Steigung der Frequenzrampe: 200 Hz/sec.
- Startfrequenz: 20 Hz, Stoppfrequenz: 1000 Hz.

ist der Kurvenverlauf in Bild 7.15 zwar etwas verzerrt, trotzdem wird, wie letztlich auch zu erwarten war, bezüglich der Dämpfung eine weitgehende Übereinstimmung mit dem Ergebnis in Bild 7.13 erreicht. Für eine möglichst gute Vergleichbarkeit wurden die RMS-Werte in Bild 7.15 normiert.

Ein ganz analoges Ergebnis stellt sich gemäß Bild 7.16 für eine Simulation mit dem Regler (7.9) unter Berücksichtigung der Totzeit ein.

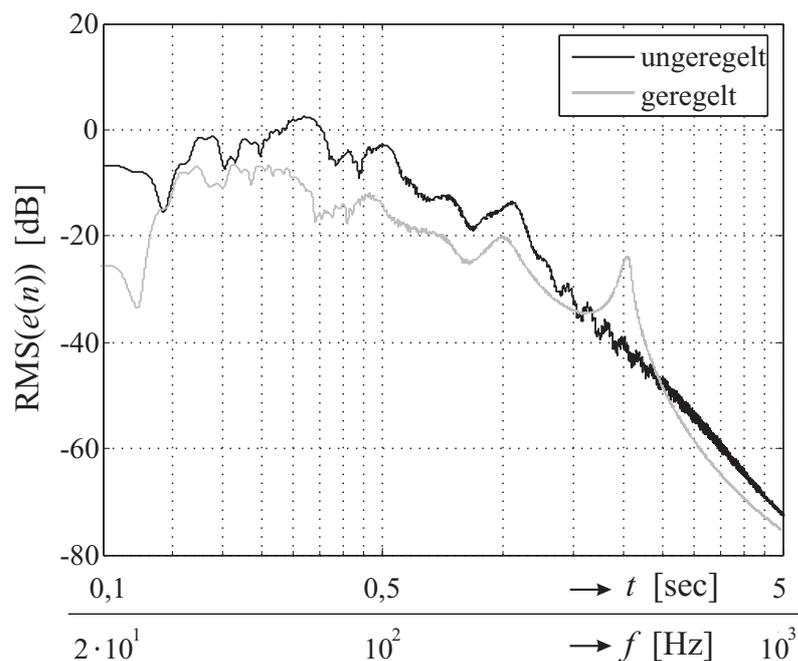


Bild 7.16: Dämpfung für Chirp-Störsignal, Simulation *mit* Totzeit ($V_R = 1330$).

- Steigung der Frequenzrampe: 200 Hz/sec.
- Startfrequenz: 20 Hz, Stoppfrequenz: 1000 Hz.

7.1.8 Ergebnisse am Prüfstand

Zur Erprobung am Prüfstand wird zunächst die Version (7.4) des entworfenen Reglers implementiert. Um einen zuverlässig stabilen Betrieb zu gewährleisten, muss dabei der Verstärkungsfaktor von dem in der oben durchgeführten Regelkreisanalyse ermittelten Wert $V_R = 1650$ (vgl. Bild 7.11) abgesenkt werden auf $V_R = 1150$. Das resultierende Dämpfungsergebnis ist in Bild 7.17 dokumentiert. Es stellt sich, wie nach dem Verlauf der Empfindlichkeitsfunktion in Bild 7.11 auch zu erwarten war, eine gute Unterdrückung im unteren Frequenzbereich ein. Im oberen Frequenzbereich, ab ca. 200 Hz, tritt dagegen eine Störverstärkung auf. In der Analyse und

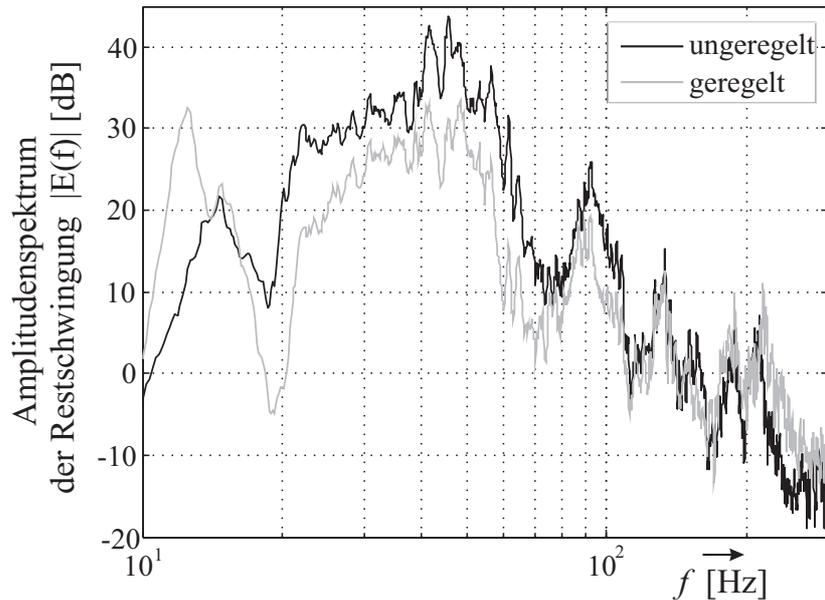


Bild 7.17: Performance des Reglers (7.9) am Prüfstand ($V_R = 1150$).

auch in den Simulationen konnte dieser unerwünschte Effekt durch die Erweiterung zu der Reglerversion (7.9) aufgehoben werden. Beim Einsatz am Prüfstand zeigt sich aber, dass mit dieser Version ein stabiler Betrieb nur mit extrem kleinem Verstärkungsfaktor V_R möglich ist. Es tritt hier eine deutliche Abweichung vom vorhergesagten Verhalten auf, die hauptsächlich auf Ungenauigkeiten des verwendeten Streckenmodells im oberen Frequenzbereich zurückzuführen ist. Der Einsatz der Reglerstruktur von (7.9) bleibt mit zumindest moderat hohem Verstärkungsfaktor möglich, wenn die Polstellen der beiden zuletzt eingefügten Lead-Glieder statt auf 900 Hz auf nur 500 Hz gesetzt werden. Es ergibt sich die Reglerbeschreibung

$$R_c(s) = V_R \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^{-5} s^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} s + 1)(3,2 \cdot 10^{-3} s + 1)(5,6 \cdot 10^{-4} s + 1)^2 \cdot s}{(66,7 \cdot 10^{-3} s + 1)^4 (3,2 \cdot 10^{-4} s + 1)^2}, \quad (7.11)$$

die am Prüfstand das in Bild 7.18 dargestellte Dämpfungsverhalten bewirkt. Die Gesamtdämpfung ist hier zwar geringer als die in Bild 7.17 gezeigte, es treten dafür aber nur noch unwesentliche Störverstärkungen im oberen Frequenzbereich auf. Letzteres wird mit dem Regler (7.9) auch mit vergleichbarem Verstärkungsfaktor nicht erreicht.

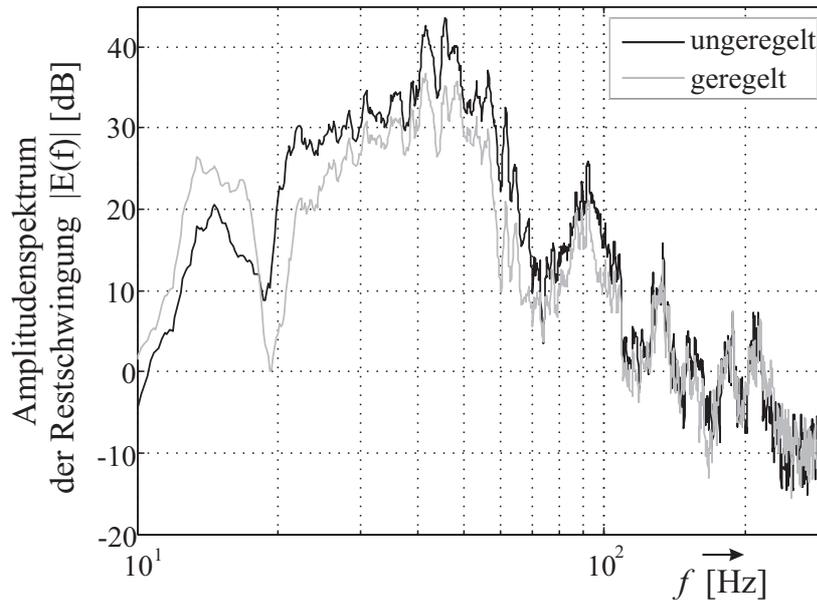


Bild 7.18: Performance des Reglers (7.11) am Prüfstand ($V_R = 580$)

7.1.9 Zusammenfassung zum klassischen Reglerentwurf

Gemäß den vorangehend beschriebenen Untersuchungen ist prinzipiell ein Reglerentwurf für den gegebenen Aufbau bereits mit einfachen Mitteln möglich. Eine entscheidende Einschränkung bezüglich der erreichbaren Störunterdrückung ist allerdings durch die Totzeit der Regelstrecke gegeben, die im vorliegenden Fall aufgrund der Signallaufzeiten im mechanischen Aufbau recht lang ausfällt. Eine Verbesserung sollte hier zumindest in einem gewissen Rahmen durch konstruktive Maßnahmen erreicht werden können. So ist beispielsweise bezüglich der Aktoren eine kompaktere Bauform sowie eine direktere Befestigung am Prüfstand möglich. Weiterhin könnten die Sensoren näher an den Aktoren platziert werden.

Ein weiterer wesentlicher Einfluss auf die erreichbare Dämpfungsperformance ist durch die Genauigkeit des Streckenmodells gegeben. Je exakter die reale Strecke bekannt ist, desto passender und effektiver kann der Regler parametrisiert werden. Das hier verwendete Modell ist zwar für grundsätzliche Untersuchungen zum Reglerentwurf gut geeignet, für eine Anpassung für die tatsächliche Anwendung wäre aber eine höhere Genauigkeit wünschenswert. Obwohl eine diesbezügliche Verbesserung sicherlich möglich ist, wird allerdings beliebige Genauigkeit, wie bereits im Abschnitt 4.3 festgestellt wurde, insbesondere im oberen Frequenzbereich kaum erreicht werden

können.

Positiv fällt bei den behandelten Reglerstrukturen die uneingeschränkte Einsetzbarkeit zur Dämpfung von frequenzveränderlichen Signalen auf. Wie sich in den nachfolgenden Abschnitten noch zeigen wird, ist diese Eigenschaft bei anderen Algorithmen zur aktiven Schwingungsdämpfung keineswegs selbstverständlich gegeben.

Ein weiterer Vorteil der entworfenen Regler ist ihre geringe Ordnung (hier im Zeitkontinuierlichen maximal gleich sechs). Der resultierende Rechen- und Speicheraufwand bei der Ausführung in der Echtzeitanwendung ist gering und insbesondere deutlich niedriger als bei den meisten anderen hier anwendbaren Algorithmen. In Kauf genommen werden muss dafür allerdings eine vergleichsweise hohe Abtastrate.

Bezüglich der realen Anwendung verbleiben noch zwei grundsätzliche Problematiken, die bisher nicht behandelt wurden. Zum Einen muss für die vollständige Isolation der Motorvibrationen jeweils eine Regelung an jeder der vier Aufhängestellen des Hilfsrahmens eingerichtet werden. Hierbei entsteht eine besondere Schwierigkeit dadurch, dass es nicht genügt, allein die Stabilität der vier Regelkreise an den Aufhängungen sicherzustellen. Es muss vielmehr auch die Stabilität aller anderen sich ergebenden Rückkopplungswirkungen überprüft, bzw. bereits beim Reglerentwurf berücksichtigt werden. Unter Umständen ergibt sich als Folge eine Reduktion der erreichbaren Dämpfungsgüte.

Eine weitere Problematik entsteht durch die zwar langsame aber ausgeprägte Zeitvarianz der Übertragungstrecken in der Motoraufhängung. Um trotz der Streckenänderungen Stabilität sicherstellen zu können, müssten die eingesetzten Regler sehr robust parametrisiert werden. Eine deutlich größere Stabilitätsreserve als bei der oben durchgeführten Reglerauslegung wäre notwendig. Dies würde eine noch weiter abgeschwächte Performance zur Folge haben. Abhilfe wäre durch eine Parameternachführung, entweder durch z. B. temperaturabhängiges Gain Scheduling, oder in Form von konsequenten adaptiven Regelverfahren denkbar. Allerdings müsste vermutlich auch bei Anwendung eines Gain Scheduling noch eine recht hohe Robustheit vorgesehen werden. Weiterhin arbeiten die in der aktiven Schwingungsdämpfung eingesetzten adaptiven Regelungen typischerweise nach einem ähnlichen Prinzip wie die adaptiven Störgrößenaufschaltungen, die in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben werden. Sie bringen entsprechend auch ähnliche, zusätzliche Problematiken mit sich [50]. Insbesondere die Dämpfung instationärer Störanregung ist nicht uneingeschränkt möglich.

7.2 Nichtrekursives adaptives Filter: FxLMS-Algorithmus

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die Vibrationsdämpfung mittels Signalführung untersucht wurde, soll im Folgenden die Wirkungsweise von adaptiven Störgrößenaufschaltungen betrachtet werden. Hierzu wird zunächst die Implementierung des Filtered-x-LMS-Algorithmus behandelt, der, wie im Grundlagenkapitel 3 beschrieben, eine Schwingungskompensation durch Adaption eines FIR-Filters ausführt. Der Einsatz des FxLMS-Algorithmus erfolgt hier in zwei verschiedenen Strukturen, die in den beiden nachfolgenden Abschnitten vorgestellt werden. Die Strukturen werden zunächst im Einkanalfall an dem in Bild 4.5 illustrierten Prüfstand eingerichtet. Die Umsetzung als Mehrkanalsystem ist Inhalt des Kapitels 8.

Die Abtastfrequenz wird für alle folgenden Untersuchungen zu $f_A = 1$ kHz gesetzt. Dieser relativ niedrige Wert ist notwendig, da die nachfolgend beschriebenen Algorithmen, im Vergleich z. B. zu einer klassischen Regelung, viel Rechenaufwand erfordern. Eine hohe Abtastrate ist insbesondere zu vermeiden, da die erforderliche Ordnung der implementierten zeitdiskreten Systeme (d. h. des adaptiven Filters sowie des Modells $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke) mit der Abtastrate deutlich zunimmt.

Das Modell $\hat{S}(z)$ wird durch Parameteridentifikation gemäß Abschnitt 2.2 als ARX-Modell am Prüfstand identifiziert. Ein Bode-Diagramm zu $\hat{S}(z)$ ist im Anhang B.2.1 zusammen mit dem eines identifizierten Modells der primären Strecke $P(z)$ dargestellt.

Als Tiefpassfilter für die analoge Signalverarbeitung kommen die Butterworthfilter achter Ordnung mit einer Grenzfrequenz von etwa 300 Hz zur Anwendung (s. Abschnitt 4.5).

7.2.1 Direkte Form

Die erste hier betrachtete Einsatzweise des FxLMS-Algorithmus ist die direkte Form [28, 76, 50]. Diese wurde in ihrer klassischen Ausführung bereits im Abschnitt 3.3.1 vorgestellt. Jedoch wurde dort angenommen, dass das Referenzsignal $x(n)$ durch eine Messung der tatsächlichen Vibrationen am Motor erhalten wurde. Auf die hierzu notwendige Sensormessung kann bei der vorliegenden Anwendung verzichtet werden. Anstelle dessen kann ein Tachometer-Signal verfügbar gemacht werden, wel-

ches als Referenz nutzbar ist [28, 13, 18, 76]. Als Tachometer-Signal wird hier ein periodisches, (zumindest annähernd) impulsförmiges Signal mit einer Frequenz entsprechend der Motordrehzahl verstanden. Ein solches Signal kann im Kraftfahrzeug zum Beispiel von der Ansteuerung der Zündspulen abgegriffen werden. Speziell in Dieselfahrzeugen wäre alternativ die Verwendung des Steuersignals der Kraftstoffeinspritzung denkbar. Der Einfachheit halber wird im Folgenden die Wiederholfrequenz der Impulsfolge gleich der Grundfrequenz f_0 der auftretenden Störvibrationen angenommen. Falls im realen Anwendungsfall ein ganzzahliges Vielfaches oder ein ganzzahliger Teiler der Grundfrequenz vorliegt, kann, soweit notwendig, eine entsprechende Umwandlung zu f_0 durchgeführt werden.

Der Einsatz des Tachometer-Signals als Referenz bedeutet auch insofern einen Vorteil, als hierdurch Rückkopplungen vom Ausgang der sekundären Strecke auf das Referenzsignal vollständig vermieden werden. Auf zusätzliche Maßnahmen zur Sicherung der Stabilität [74] kann daher sicher verzichtet werden.

Eine Impulsfolge der beschriebenen Form hat aufgrund ihrer T_0 -Periodizität die besondere Eigenschaft, Anteile bei genau den Frequenzen zu enthalten, die auch in der vom Motor erzeugten Störanregung vorkommen. Dies sind die Grundfrequenz f_0 selbst, sowie alle Harmonischen bei den ganzzahligen Vielfachen. Bei einer idealen Impulsfolge treten die Harmonischen bis zu unendlich hohen Frequenzen auf. Um beim Übergang zur zeitdiskreten Signalverarbeitung das Auftreten von Aliasing-Effekten zu vermeiden, ist daher für das am Fahrzeug aufgenommene Tachometer-Signal (so wie ursprünglich auch für das Sensor-Referenzsignal) unbedingt ein Anti-Aliasing Tiefpass vorzusehen. Im Folgenden wird das bereits entsprechend gefilterte Signal mit $x_T(n)$ bezeichnet.

Da das Tachometer-Signal dieselben Frequenzen enthält wie die tatsächlichen Störvibrationen $x(n)$ am Motor, ist die Anschauung möglich, dass $x(n)$ durch eine lineare Übertragung $G_T(z)$ gemäß Bild 7.19 aus $x_T(n)$ hervorgeht. Das Gesamtsystem kann dann wieder als ein klassischer FxLMS-Algorithmus mit dem Referenzsignal $x_T(n)$ betrachtet werden. Das entstehende System ist allerdings nur dann gleichwertig zum ursprünglichen FxLMS-Algorithmus, wenn angenommen wird, dass die Amplituden und auch die Phasen der überlagerten Sinusschwingungen in $x(t)$ für konstantes f_0 auch selbst konstant bleiben. Ansonsten würde sich eine zeitvariante primäre Strecke $P_T(z)$ ergeben. Im Algorithmus mit Tachometer-Referenz müsste entsprechend eine Anpassung des adaptiven Filters $W(z)$ ausgeführt werden. Der

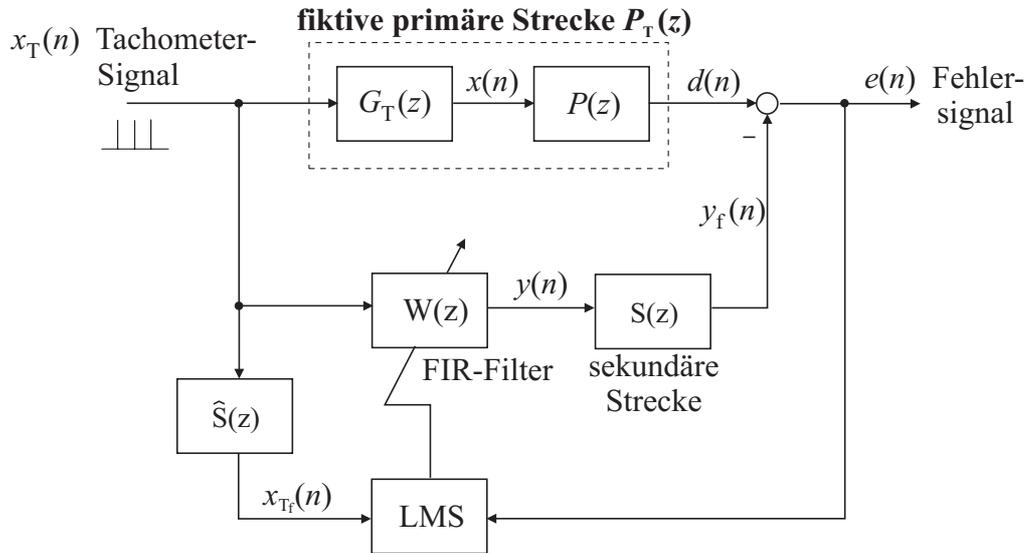


Bild 7.19: FxLMS-Algorithmus (direkte Form) mit Tachometer-Referenz

klassische FxLMS-Algorithmus hingegen erfasst die Signalvariationen bereits durch die Referenzmessung selbst, so dass keine weitere Filteranpassung notwendig ist. Inwieweit dies ein gewichtiges Argument gegen den Einsatz des „Tachometer-FxLMS“ darstellt, hängt davon ab, wie häufig und wie stark im Kraftfahrzeug mit einer Laständerung, z. B. durch unruhige Windverhältnisse oder Fahrbahnunebenheiten zu rechnen ist. Langsame Amplitudenänderungen können sicherlich problemlos durch Adaption des Filters $W(z)$ nachgefahren werden.

Wie bereits im vorhergehenden Kapitel zum Konvergenzverhalten angemerkt wurde, besitzt der FxLMS-Algorithmus einige sehr positive Eigenschaften. Speziell für die vorliegende Anwendung konnte aber auch gezeigt werden, dass die Konvergenzgeschwindigkeit bei den einzelnen Störfrequenzen von der Stärke der Anregung durch das gefilterte Referenzsignal, hier $x_{Tf}(n)$, bei eben den entsprechenden Frequenzen abhängt. Da die Schrittweitenormierung gemäß (2.67) nur die Gesamtleistung des Signals $x_{Tf}(n)$ berücksichtigt, ergibt sich für die in $x_{Tf}(n)$ schwach vertretenen Frequenzen eine nur langsame Fehlerkonvergenz. Diese Problematik wird noch einmal veranschaulicht durch das in Bild 7.20 gezeigte Messergebnis des Echtzeitsystems am Prüfstand. Als Anregung dient hier eine Überlagerung von $M = 10$ harmonischen Sinusschwingungen gemäß Gleichung (4.1). Die Grundfrequenz f_0 beträgt 30 Hz. Die bei der Ausführung des Algorithmus eingesetzten Parameter sind in der Tabelle 7.1 auf Seite 140 aufgelistet.

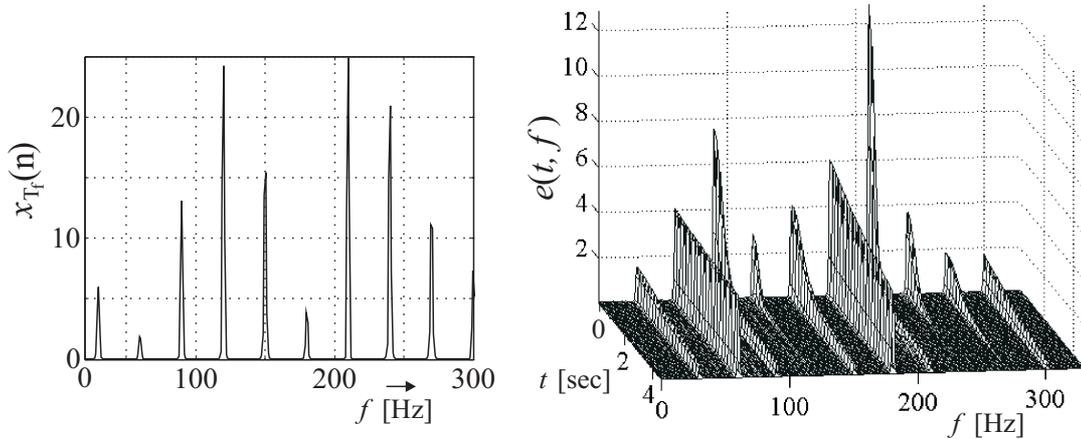


Bild 7.20: Frequenzbezogene Konvergenz des FxLMS-Algorithmus in direkter Form (Parameter gemäß Tabelle 7.1)

Da die Schrittweite μ für alle angeregten Frequenzen gleichermaßen gilt, gibt es keine Möglichkeit, auf die stark unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeiten der einzelnen Frequenzanteile ausgleichend Einfluss zu nehmen. Eine Verbesserung hierzu kann mit der parallelen Anwendungsform des FxLMS-Algorithmus erreicht werden, die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt wird. Ein Vergleich des Verhaltens der direkten und der parallelen Form erfolgt im Abschnitt 7.2.3.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass für die hier und im Folgenden wiedergegebenen Messungen der Vergessensfaktor ν zu Eins gesetzt wird. Zumindest im Laborversuch ist dies problemlos möglich. Für die reale Anwendung muss ν gegebenenfalls, je nach Anforderung, angepasst werden.

7.2.2 Parallele Form mit orthogonaler Referenz

Eine Struktur, mit der die stark frequenzabhängige Konvergenz der direkten Form des FxLMS-Algorithmus umgangen werden kann, ist die in Bild 7.21 gezeigte parallele Form [50, 107]. Es wird hier nicht ein gesamtes gefiltertes Referenzsignal zur Anregung eines einzigen LMS-Algorithmus verwendet, sondern es werden vielmehr die einzelnen Frequenzkomponenten des Signals mehreren getrennten LMS-Blöcken zugeführt. Die Argumente der eingesetzten Sinusfunktionen ergeben sich als

$$\phi_m(n) = m 2\pi T_A \sum_{k=0}^{n-1} f_0(k), \quad (7.12)$$

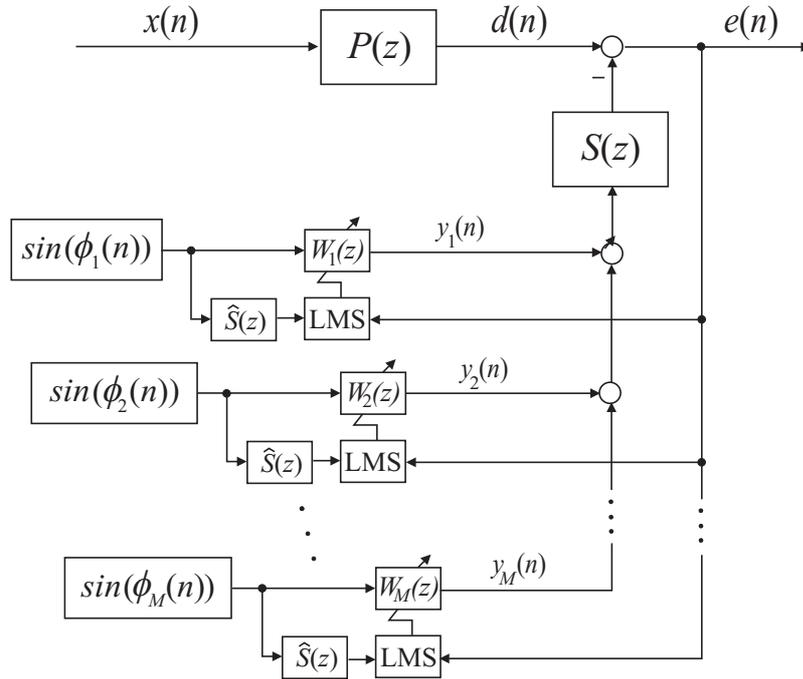


Bild 7.21: FxLMS-Algorithmus in paralleler Anordnung

bzw. rekursiv über

$$\phi_m(n+1) = \phi_m(n) + m 2\pi f_0(n) T_A \quad \text{mit} \quad \phi_m(0) = 0. \quad (7.13)$$

Um die Notwendigkeit der Summenbildung zur Berechnung der Phase $\phi_m(n)$ zu verdeutlichen, ist hier vorübergehend die in der Realität im Allgemeinen vorliegende Zeitabhängigkeit der Frequenz f_0 explizit gekennzeichnet. Für die bisher durchgeführten Analysen wurde, wie beschrieben (s. Abschnitt 2.3.2), stationäre Anregung und somit konstantes f_0 angenommen. Bei der realen Anwendung kann die jeweils aktuell vorliegende Frequenz durch eine Auswertung des Tachometer-Signals bestimmt werden (s. hierzu Abschnitt 8.3).

Den parallel ausgeführten Algorithmen kann nun die Konvergenzgeschwindigkeit getrennt vorgegeben werden. Dies geschieht bereits automatisch, wenn jeweils separate Schrittweitenormierungen nach (2.67) eingerichtet sind.

Nachteilig ist bei der parallelen Anordnung, dass sich bei einer Wahl der Filterordnung gemäß (6.2) ein enorm hoher Rechenaufwand ergibt. Dieses Problem kann aber umgangen werden, da der FxLMS-Algorithmus bei Anregung mit nur einer Frequenz auch bei Nichterfüllung von (6.2) zuverlässig arbeiten kann. Generell ist dies bereits mit zwei Filterkoeffizienten je Frequenz möglich [51]. Es ergibt sich dann

für die m -te FxLMS-Struktur der Stellgrößenbeitrag

$$y_m(n) = w_{1,m}(n) \sin(\phi_m(n)) + w_{2,m}(n) \sin(\phi_m(n-1)) \quad , \quad m = 1 \dots M \quad , \quad (7.14)$$

wobei $w_{1,m}(n)$ und $w_{2,m}(n)$ die beiden Koeffizienten des Filters $W_m(z)$ bezeichnen. In komplexer Zeigerdarstellung entspricht dies der Überlagerung zweier mit $w_{1,m}(n)$ und $w_{2,m}(n)$ gewichteter Zeiger, die mit der Winkelfrequenz $m2\pi f_0(n)$ umlaufen. Der konstante Winkel zwischen den beiden Zeigern beträgt $m2\pi f_0(n)T_A$ und wird insbesondere für Frequenzen $mf_0(n) \ll f_A/2$ sehr klein sein. Je nach Phase des komplexen Zeigers, der durch die m -te Frequenzkomponente des auszulöschenden Störsignals $d(n)$ gegeben ist, können folglich für vollständige Auslöschung sehr hohe Werte der Gewichtungen (Filterkoeffizienten) $w_{1,m}(n)$ und $w_{2,m}(n)$ erforderlich sein. Da die mögliche Schrittweite μ des Algorithmus stabilitätsbedingt begrenzt ist, resultiert in einem solchen Fall eine ausgesprochen langsame Konvergenz.

Eine Verbesserung kann erreicht werden, indem der Winkel zwischen den überlagerten Zeigern zu 90° gewählt wird, so dass sich die Superposition zweier orthogonaler Funktionen ergibt:

$$y_m(n) = w_{2m-1}(n) \sin(\phi_m(n)) + w_{2m}(n) \cos(\phi_m(n)) \quad . \quad (7.15)$$

Eine Struktur dieser Art wird auch als adaptives Notch Filter bezeichnet und wurde ursprünglich in [101] für eine einzelne Anregungsfrequenz hergeleitet. Eine Anwendung, auch für mehrere Frequenzen, erfolgte in [108]. In Bild 7.22 ist das entsprechende Grundprinzip gezeigt. Anstatt mit jeweils einer Frequenzkomponente einen einzelnen FxLMS-Algorithmus mit mindestens zwei Filterkoeffizienten anzuregen, wird hier für jede Frequenz eine Kosinus- und eine Sinusschwingung erzeugt und je einem FxLMS-Algorithmus mit nur einem Filterkoeffizienten zugeführt. Die Summe der Ausgänge der Filter $w_1(n)$ bis $w_{2M}(n)$ ist das Stellsignal $y(n)$ für die Störauslöschung. Im Folgenden wird sich die Bezeichnung „parallele Form des FxLMS-Algorithmus“, auch wenn nicht explizit angegeben, immer auf die hier beschriebene Struktur mit orthogonaler Referenz beziehen.

Es ist zu beachten, dass bei M angeregten Frequenzen insgesamt $2M$ FxLMS-Algorithmen implementiert werden müssen. Demzufolge muss auch die Filterung des Referenzsignals mit dem Abbild $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke $2M$ -mal ausgeführt werden. Bei einem Modell $\hat{S}(z)$ höherer Ordnung (im vorliegenden Fall ≥ 30) ergibt sich bei großem M folglich ein ausgesprochen hoher Rechenaufwand. Abhilfe kann

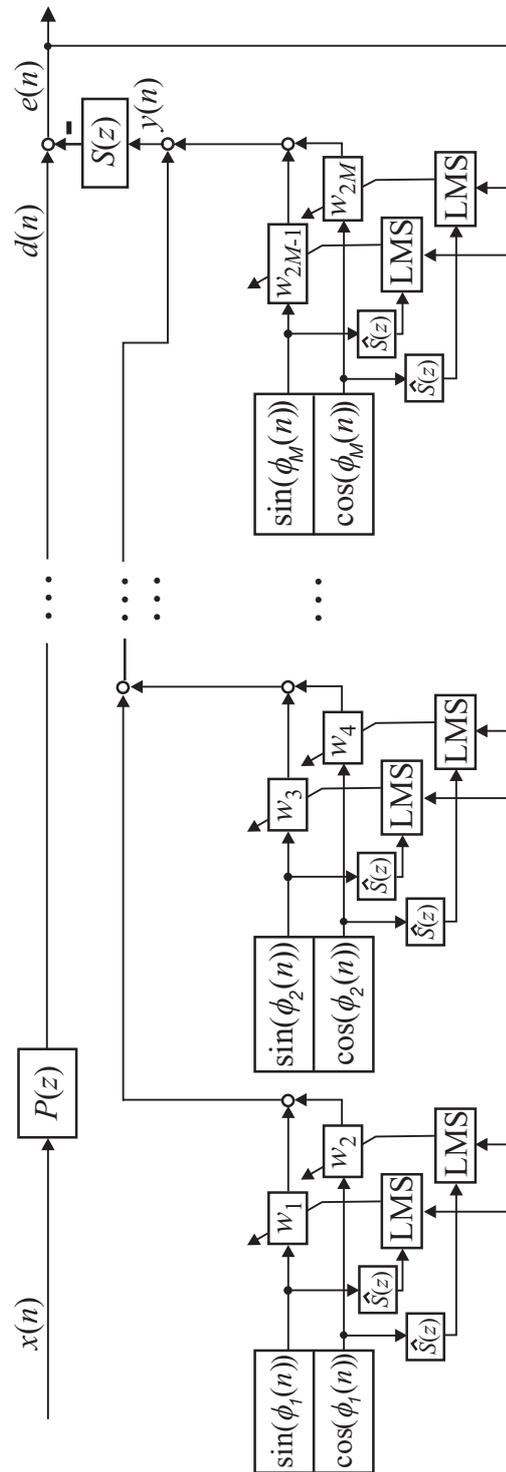


Bild 7.22: FxLMS-Algorithmus in paralleler Anordnung mit orthogonaler Referenz

geschaffen werden, da $\hat{S}(z)$ nur jeweils auf einzelne Frequenzen angewandt werden muss. Entsprechend kann das Übertragungsverhalten allein durch Verstärkung und Phasenverzögerung beschrieben werden. Um die Frequenzabhängigkeit der Übertragung zu berücksichtigen, können die frequenzbezogenen Amplituden- und Phasenwerte jeweils in einem Vektor abgelegt werden [50]. Die Komponenten der Vektoren werden dann je nach Frequenz abgerufen. Für die vorliegende Anwendung wurde eine Einteilung in 1 Hz-Schritten als hinreichend genau festgestellt. Es wurden entsprechend zwei Vektoren mit je 281 Elementen für den betrachteten Frequenzbereich von 20 Hz - 300 Hz implementiert. Der insgesamt benötigte Speicherplatz bleibt moderat, da die Amplituden- und Phasenwerte für alle $2M$ FxLMS-Systeme gleichermaßen gültig sind. Die beschriebene Vorgehensweise gewinnt noch an Wichtigkeit bei der Umsetzung im Mehrkanalfall. Diese wird im Abschnitt 8 erläutert.

Das Konvergenzverhalten des parallelen FxLMS-Algorithmus mit orthogonaler Referenz ist mit dem in Bild 7.23 gezeigten Messergebnis vom Prüfstand illustriert. Abgesehen von der normierten Schrittweite α (siehe hierzu weiter unten) werden hier die in Tabelle 7.1 angegebenen Parameter verwendet. Es ergibt sich eine durchweg schnelle Konvergenz für alle angeregten Frequenzen.

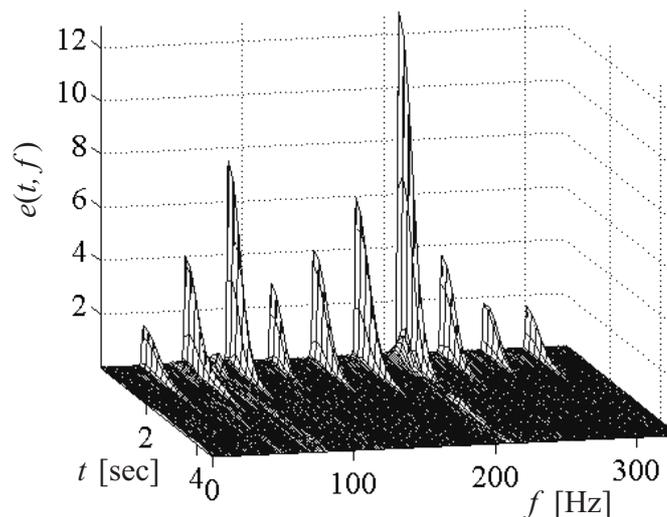


Bild 7.23: Frequenzbezogene Konvergenz des FxLMS-Algorithmus in paralleler Form mit orthogonaler Referenz (Schrittweiten im Bereich 0,002 – 0,008, alle anderen Parameter gemäß Tabelle 7.1)

Das gezeigte schnelle Abklingverhalten ergibt sich zu einem wesentlichen Teil dadurch, dass gemäß Formel (2.60) die Stabilitätsgrenze des FxLMS-Algorithmus indirekt proportional zur Anzahl L der Filterkoeffizienten des adaptiven Filters $W(z)$ ist. Für $L = 1$ stellt sich bei Verwendung der in Abschnitt 2.3.7 vorgestellten Schrittweitenormierung (2.67) demzufolge die höchstmögliche Schrittweite ein. Dass alle Frequenzanteile in etwa gleich schnell abklingen liegt hauptsächlich daran, dass die Schrittweitenormierung auch die Leistungen der Referenzsignale, die hier für die angeregten Frequenzen separat vorliegen, berücksichtigt. Zusätzlich wurde speziell für das gezeigte Resultat noch eine „händische“ Anpassung der Schrittweiten einzelner Frequenzen durchgeführt. Abweichend von der Angabe in Tabelle 7.1 wird folglich nicht eine einzige Schrittweite α für alle Frequenzen vorgegeben, sondern es werden jeweils Werte von 0.002 bis 0.008 eingesetzt. Die Auswirkung dieser Maßnahme ist aber nicht allzu gewichtig. Für alle anderen im Folgenden gezeigten Ergebnisse wird, wie in Tabelle 7.1 angegeben, die Schrittweite für sämtliche Frequenzen zu $\alpha = 0.004$ gesetzt.

7.2.3 Performance-Vergleich der direkten und der parallelen Form am Prüfstand

In Bild 7.24 sind die Gesamtkonvergenzen, die sich für die Anwendung des FxLMS-Algorithmus in direkter und paralleler Form ergeben, einander gegenübergestellt. Als Anregung dient eine Überlagerung von zehn harmonischen Schwingungen mit der Grundfrequenz $f_0 = 25$ Hz. Die für die Algorithmen eingesetzten Parameter sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Die Bedeutung der Größen α , $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$ und ν ist dem Grundlagenabschnitt 2.3.7 zu entnehmen, und die Anzahl L der Filterkoeffizienten

Tabelle 7.1: Parametrierung des FxLMS-Algorithmus

Parameter	direkte Form	parallele Form
Schrittweite α	0,03	0,004
Schrittweitenbegrenzung $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
Vergessensfaktor ν	1	1
Abtastrate f_A	1 kHz	1 kHz
Anzahl L der Koeffizienten der (des) adaptiven Filter(s)	60	1

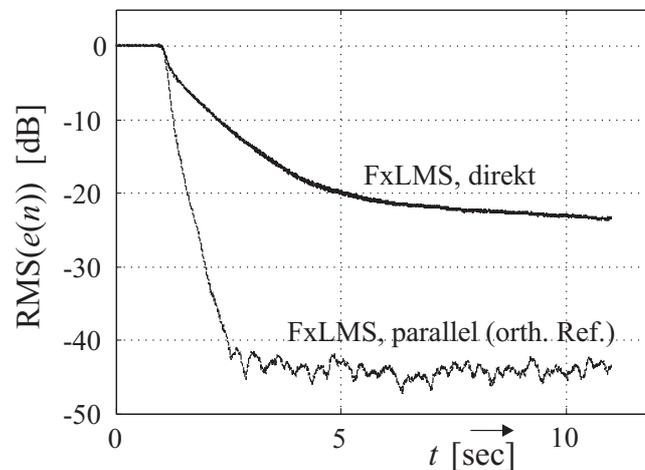


Bild 7.24: Vergleich der Konvergenz von direkter Form und paralleler Form des FxLMS-Algorithmus ($f_0 = 25$ Hz, $M = 10$; Parameter gemäß Tabelle 7.1)

genügt der Forderung (6.2). Speziell bei der parallelen Form werden allen enthaltenen LMS-Algorithmen dieselben Parameter vorgegeben.

Wie bereits nach den frequenzabhängig dargestellten Simulationsergebnissen in den Bildern 7.20 und 7.23 zu erwarten war, zeigt sich die parallele Form in Bild 7.24 deutlich überlegen. Bereits nach etwa zwei Sekunden ist das Fehlersignal auf -40 dB abgesunken. Relativiert wird dieses viel versprechende Ergebnis allerdings durch das Verhalten, das sich für eine Störanregung mit variierenden Frequenzen ergibt. Um dies zu zeigen, wird wieder eine Anregung mit einem Multisinus gemäß Formel 4.1 mit insgesamt $M = 10$ Sinusschwingungen vorgegeben. Allerdings soll die Grundfrequenz f_0 nun nicht mehr konstant sein, sondern vielmehr rampenartig ansteigen. Letztlich ergibt sich so eine Überlagerung von Chirp-Signalen (vgl. Abschnitt 7.1.7). Die entsprechenden Frequenzverläufe sind in Bild 7.25 (beispielhaft für die parallele Form) dargestellt. Die Amplituden der einzelnen Chirp-Signale werden zu Null gesetzt, sobald ihre Frequenzen größer werden als 300 Hz.

Für die nachfolgend dokumentierten Messungen wird der Algorithmus jeweils bei einer Grundfrequenz $f_0 = 20$ Hz der Störung eingeschaltet. Danach wird f_0 für eine gewisse Zeit konstant gehalten, bis der Algorithmus weitgehend konvergiert ist. Erst dann wird die Frequenzrampe mit der jeweils angegebenen Steigung gestartet.

Bereits bei einer Rampe mit 5 Hz/sec Steigung erzielt gemäß Bild 7.26 die paral-

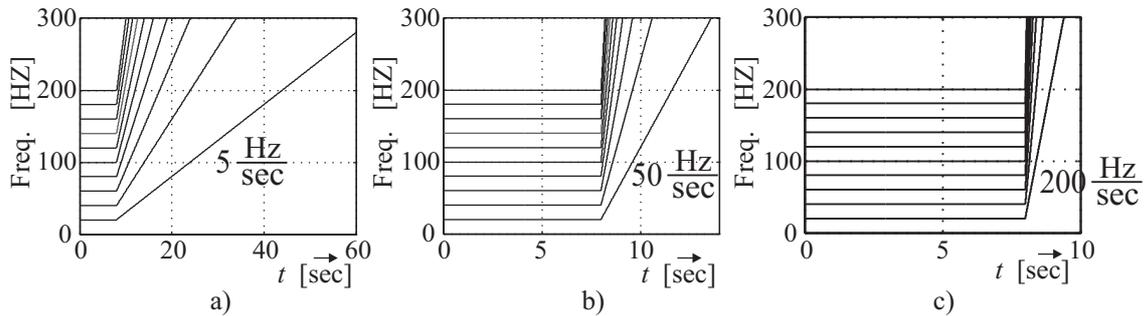
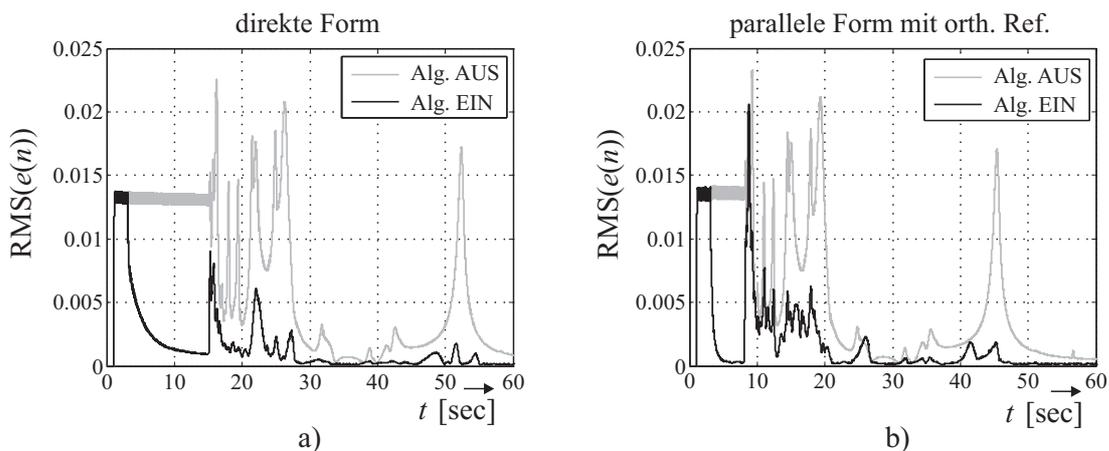


Bild 7.25: Verläufe der Frequenzen der instationären Anregung

lele Form mit orthogonaler Referenz eher eine schwächere Dämpfung als die direkte Form. Insbesondere tritt beim Start der Rampe, wo nach Bild 7.25-a noch viele Signalanteile mit steiler Frequenzsteigung vorliegen, eine ausgeprägte Überhöhung des Fehlersignals auf. Bei einer Rampensteigung von 50 Hz/sec ist die parallele Form sogar deutlich schlechter als die direkte Form (s. Bild 7.27). Für eine Steigung von 200 Hz/sec stellt sich schließlich fast durchweg eine Störverstärkung durch die parallele Struktur ein (Bild 7.28). Bei der direkten Form dagegen ist dies nicht der Fall. Für diese wird zwar die Dämpfung mit zunehmender Rampensteigung schlechter, es tritt aber nahezu keine deutliche Verstärkung der Störung auf.

Bild 7.26: Dämpfung des FxLMS-Algorithmus am Prüfstand für eine Grundfrequenzrampe von 5 Hz/sec (Startwert $f_0 = 20$ Hz, $M = 10$; Parameter gemäß Tab. 7.1)

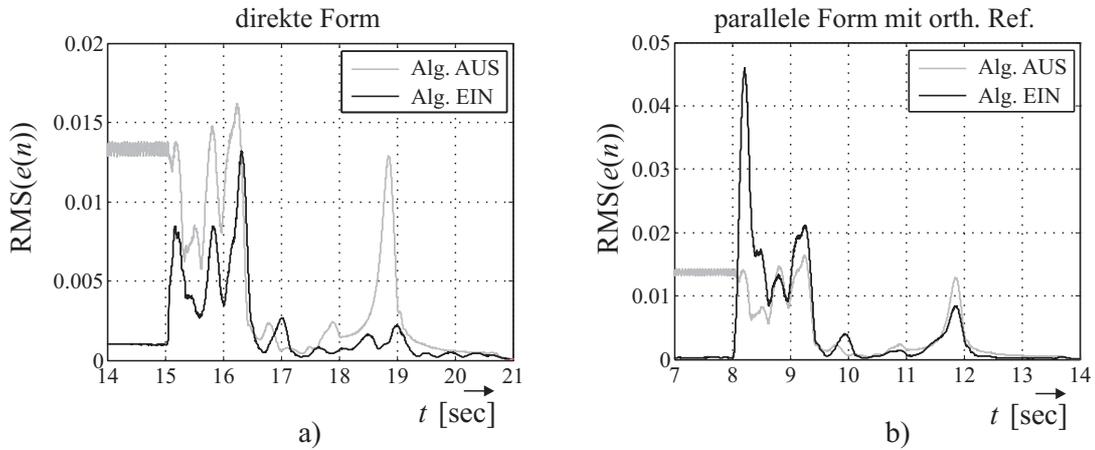


Bild 7.27: Dämpfung des FxLMS-Algorithmus am Prüfstand für eine Grundfrequenzrampe von 50 Hz/sec (Startwert $f_0=20$ Hz, $M=10$; Parameter gemäß Tab. 7.1)

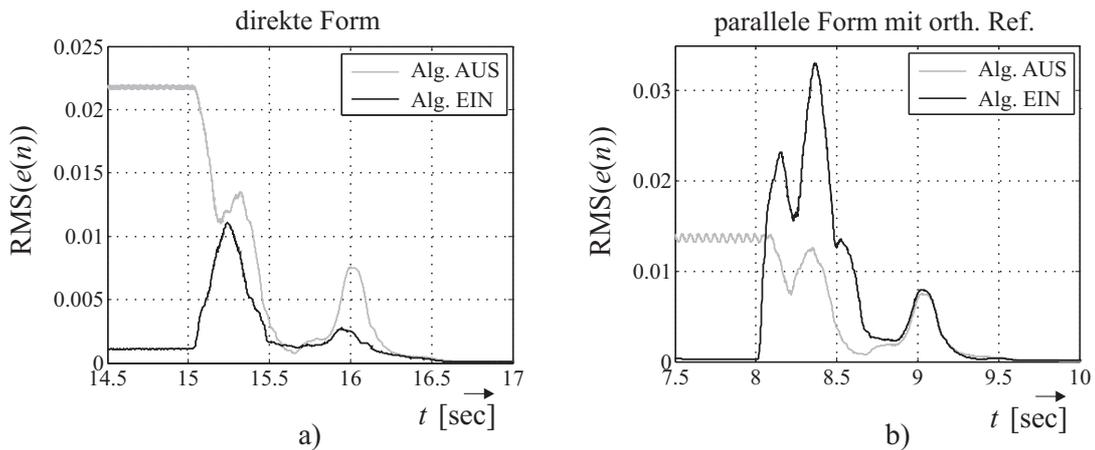


Bild 7.28: Dämpfung des FxLMS-Algorithmus am Prüfstand für eine Grundfrequenzrampe von 200 Hz/sec (Startwert $f_0=20$ Hz, $M=10$; Parameter gemäß Tab. 7.1)

Es sei angemerkt, dass für den bezüglich der Grundfrequenz breitbandigen Einsatz der Algorithmen eine geeignete Parametrierung sehr wichtig ist. Die Schrittweite α muss entweder, so wie im vorliegenden Fall, niedrig genug vorgegeben werden, um im gesamten Frequenzbereich Stabilität zu gewährleisten, oder sie muss nach Art eines Gain Scheduling frequenzabhängig implementiert werden. Bei der vorliegenden Anwendung darf des Weiteren die obere Begrenzung der Schrittweite durch $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$ (vgl. Abschnitt 2.3.7) nicht zu hoch gewählt werden. Da die sekundäre Strecke beim Einkanalprüfstand bei etwa 185 Hz eine Übertragungsnulstelle besitzt, kommt es

bei dieser Frequenz sonst zu einer auf andere Weise kaum behebbaren Instabilität.

Bezüglich des Vergessensfaktors ν ist zu sagen, dass durch geringfügiges Herabsetzen seines Wertes (z. B. auf $\nu = 0,999$) die Störverstärkung durch die parallele Form zumindest für relativ flache Frequenzflanken vermieden werden kann. Für steilere Flanken jedoch kann auf diese Weise lediglich noch eine Abschwächung der Verstärkung erzielt werden. Gleichzeitig wird außerdem allgemein bei den Frequenzen, bei denen mit $\nu = 1$ eine Dämpfung erreicht wird, diese durch das Absenken des Vergessensfaktors verringert.

Weiterhin ist festzuhalten, dass die Störverstärkungen, die sich für die direkte Anwendung des FxLMS-Algorithmus bei instationärer Anregung ergeben (s. Bilder 7.27 und 7.28) durch ein Absenken der Schrittweite α in den jeweiligen Frequenzbereichen vermieden werden können. Gleichzeitig wird dabei aber wiederum auch eine Verringerung der Konvergenzgeschwindigkeit bei den betroffenen Frequenzen im stationären Betrieb herbeigeführt. Bei der parallelen Form ist das Verhalten zumindest ähnlich. Allerdings kann die Störverstärkung bei hohen Frequenzsteigungen durch ein Absenken der Schrittweite in der Regel nur verringert, aber nicht gänzlich vermieden werden. Bei langsamen Frequenzsteigungen, bei denen mit höherer Schrittweite eine Dämpfung erreicht wird, kann es durch das Absenken sogar zu einer Störverstärkung kommen.

Eine interessante Feststellung ist schließlich, dass das für instationäre Anregung positive Verhalten der direkten Form auch erhalten bleibt, wenn anstelle von mehreren überlagerten Sinusschwingungen durchweg nur eine einzige Frequenz als Anregung dient.

7.3 Rekursives adaptives Filter: FuLMS-Algorithmus und SHARF

Als zweites Verfahren zur adaptiven Störgrößenaufschaltung wird der FuLMS-Algorithmus als Echtzeitanwendung implementiert. Dieser passt im Gegensatz zum FxLMS-Algorithmus ein IIR-Filter an. Gemäß Abschnitt 3.3.2 sind derartige Filter potenziell in der Lage, das Übertragungsverhalten von Systemen wie dem vorliegenden Prüfstand mit unter Umständen deutlich niedrigerer Ordnung und zugleich besserer Genauigkeit nachzubilden als FIR-Filter. Auf der anderen Seite wurde aber auch bereits angemerkt, dass bei der Adaption derartiger Filter Instabilität auf-

treten kann. Außerdem ergibt sich für das Gütemaß der Adaption bezüglich der Filterkoeffizienten nicht nur ein globales Minimum, sondern es sind vielmehr viele lokale Minima möglich. Die entscheidende Frage bleibt, wie viel oder wenig diese Vorteile und Nachteile sich jeweils in der Anwendung tatsächlich auswirken.

Für eine entsprechende Untersuchung wird der FuLMS-Algorithmus in ähnlicher Weise implementiert wie der FxLMS-Algorithmus. Auch hier wird als Referenz ein Tachometer-Signal in Form einer Impulsfolge eingesetzt. Die Struktur des Algorithmus ist in Bild 7.29 noch einmal mit der entsprechenden Modifikation abgebildet. Es ist hier auch der Glättungsfaktor $C(z)$ eingezeichnet, mit dem der FuLMS-

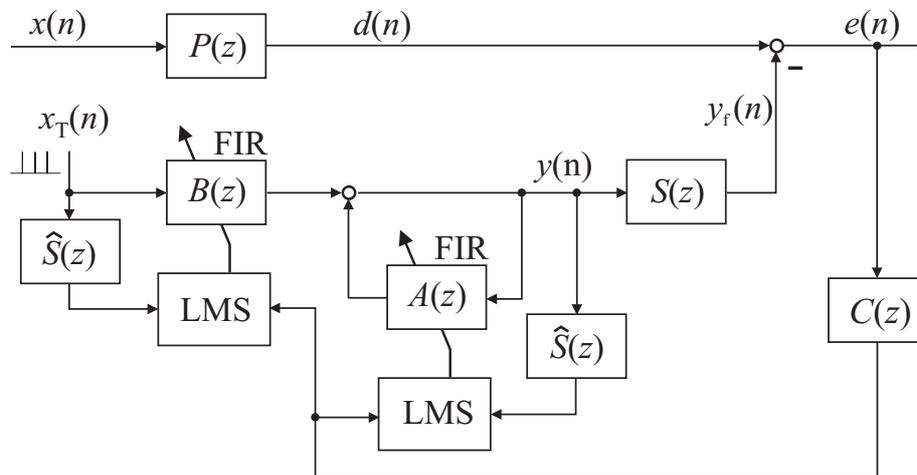


Bild 7.29: FuLMS-Algorithmus mit Tachometer-Referenz, mit Erweiterung zum SHARF

Algorithmus auf die in Abschnitt 3.3.2 beschriebene Weise zum SHARF erweitert wird. Mit diesem wird in den Simulationen und am Prüfstand durchweg eine leichte Verbesserung der Stabilität der Adaption festgestellt. Er wird daher bei den im Folgenden dokumentierten Untersuchungen eingesetzt.

Die Anzahl der Filterkoeffizienten wird hier der Einfachheit halber für Zähler- und Nennerpolynom gleich gewählt, es gelte also $L_a = L_b$. Mit anderen Einstellungen konnte keine Verbesserung der erhaltenen Ergebnisse erreicht werden.

Ein wesentliches Ergebnis der durchgeführten Versuche ist, dass der FuLMS-Algorithmus, und folglich natürlich auch der SHARF, durchaus zuverlässig stabil eingerichtet werden können. Voraussetzung hierfür ist allerdings eine geeignete Parametrierung. Insbesondere kann die Schrittweite α_a des LMS-Algorithmus im re-

kursiven Teil des IIR-Filters (s. Bild 7.29) nur klein eingestellt werden, verglichen mit der Schrittweite α_b im nichtrekursiven Teil. Der Versuch einer Erhöhung von α_a führt zwangsläufig zu Instabilität. Dies gilt unabhängig von der Einstellung der anderen Parameter des Algorithmus.

Zufolge dieser Einschränkung ist das Verhalten des FuLMS-Algorithmus bei der hier vorliegenden Anwendung dem des FxLMS-Algorithmus in direkter Form sehr ähnlich. Eine entscheidende Bedeutung kommt folglich auch der Anzahl L_b der Filterkoeffizienten des Zählerpolynoms $B(z)$ des adaptiven Filters zu. Es stellt sich genau wie beim FxLMS-Algorithmus heraus, dass ein problemloser Betrieb mit bestmöglicher Performance erreicht werden kann, wenn $L_b \geq T_0/T_A$ (vgl. Formel (6.2)) gewählt wird. Der Algorithmus verhält sich dann nahezu genauso wie der FxLMS-Algorithmus, wobei aber immerhin eine gewisse Verbesserung der Performance durch den rekursiven Filteranteil erreicht wird [80]. Die Verbesserung bleibt aber entsprechend der kleinen Schrittweite α_a des LMS im rekursiven Teil sehr gering.

Ursprüngliche Motivation für die Untersuchung des adaptiven IIR-Filters ist die potenzielle Möglichkeit einer deutlichen Absenkung der benötigten Filterordnung und somit ein Ersparnis an Rechenaufwand und Speicherplatz. Da im vorliegenden Fall für den FxLMS-Algorithmus eine Koeffizientenanzahl $L = 50$ für bestmögliche Performance ausreichend ist, müsste also für das IIR-Filter mit $L_b < 25$ und $L_a < 25$ eine vergleichbare oder bessere Performance erreicht werden, um diesbezüglich einen Vorteil erzielen zu können. Wie in Bild 7.30 veranschaulicht, stellt sich aber selbst für $L_b = L_a = 25$ ein deutlich schlechteres Verhalten ein, als beim FIR-Filter mit $L = 50$. Der SHARF verhält sich hier sogar noch etwas schlechter als der FxLMS-Algorithmus mit der Koeffizientenzahl $L = 25$. Gleich gute Ergebnisse können nur erreicht werden, wenn die Schrittweite für den rekursiven Teil vollständig zu Null gesetzt wird, so dass das IIR-Filter in ein FIR-Filter übergeht.

Die verwendeten Parameter sind in der Tabelle 7.2 angegeben. Die für $L_a = L_b = 25$ eingetragenen Schrittweiten α_a und α_b sind etwa ein Fünftel kleiner als die, die bei einer idealen Anzahl $L_b \geq 50$ eingesetzt werden können.

Weitere Experimente führen zu dem Ergebnis, dass auch bei instationärer Anregung mit variierender Grundfrequenz das adaptive IIR-Filter mit $L_a = L_b = 25$ schlechtere Ergebnisse liefert als ein FIR-Filter mit nur der halben Gesamtanzahl von Filterkoeffizienten ($L = 25$).

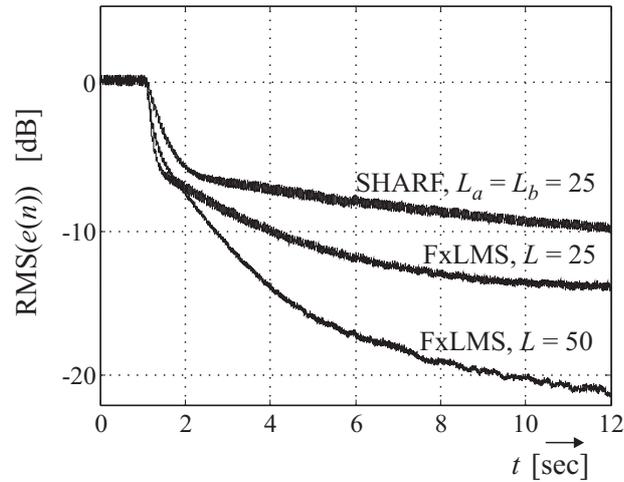


Bild 7.30: Vergleich von FuLMS und FxLMS in direkter Form ($f_0 = 20$ Hz, $M = 10$; weitere Parametrierung gemäß Tabelle 7.2 (für FuLMS) bzw. Tabelle 7.1 (für direkten FxLMS mit $L = 25$ und $L = 50$))

In Bild 7.31 ist der Vollständigkeit halber das frequenzbezogene Abklingverhalten des SHARF-Algorithmus abgebildet. Es sei hier angemerkt, dass ein Einsatz des FuLMS-Algorithmus zu einem nahezu identischen Ergebnis führt.

Fazit dieses Abschnitts ist, dass FuLMS-Algorithmus und SHARF zwar funktionsfähig für die vorliegende Anwendung eingerichtet werden können, sichere Stabilität ergibt sich aber nur für eingeschränkte Parametrierungen insbesondere bezüglich der Schrittweite des rekursiven Filteranteils. Es wird bei den gegebenen Anforderungen kein wesentlicher Vorteil gegenüber dem FxLMS-Algorithmus in direkter Form festgestellt. Bei der Ausführung am Prüfstand muss vielmehr, $L_a = L_b$ und

Tabelle 7.2: Parametrierung des FuLMS-Algorithmus

Parameter	rekursiver Teil	nichtrekursiver Teil
Schrittweite	$\alpha_a = 0,0002$	$\alpha_b = 0,01$
Anzahl der Filterkoeffizienten	$L_a = 25$	$L_b = 25$
Vergessensfaktor ν	1	1
Schrittweitenbegrenzung $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
Abtastrate f_A	1 kHz	1 kHz

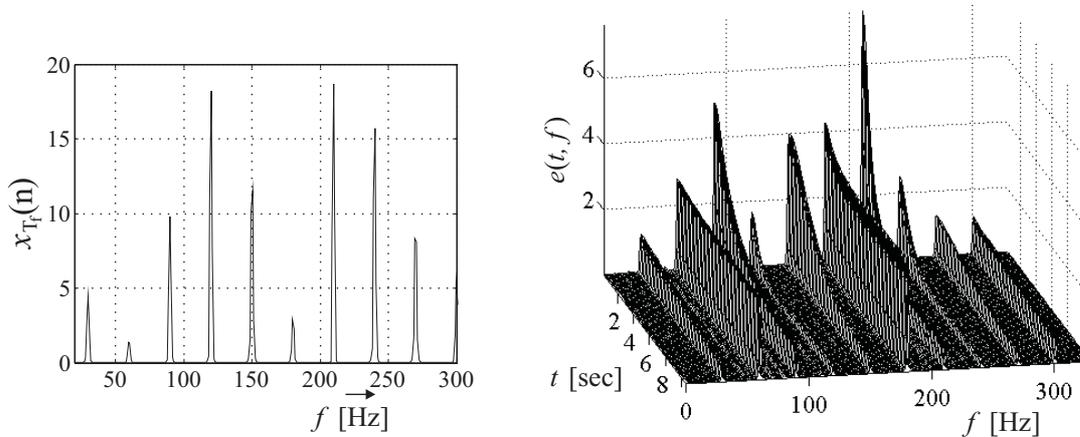


Bild 7.31: Frequenzbezogene Konvergenz des FuLMS-Algorithmus (Parameter gemäß Tabelle 7.2)

$L \leq T_0/T_A$ vorausgesetzt, mindestens die zweifache Gesamtanzahl von Filterkoeffizienten für den SHARF vorgesehen werden, um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen. Dass hier der nach der Theorie zunächst zu erwartende Vorteil der IIR-Filter bezüglich des Rechen- und Speicheraufwands nicht genutzt werden kann, liegt zum einen, wie bereits erwähnt, an der Tendenz des IIR-Filters zur Instabilität. Zum anderen ist aber auch zu bedenken, dass das zum Vergleich betrachtete FIR-Filter zufolge der periodischen Anregung bereits mit einer geringeren Anzahl von Filterkoeffizienten effektiv eingesetzt werden kann, als eigentlich zur vollständigen Nachbildung des Systems $P(z)S^{-1}(z)$ notwendig wäre (vgl. Abschnitt 6.1). Die diskrete Impulsantwort des FIR-Filters muss hier nämlich nicht zwangsläufig so lange dauern wie die Impulsantwort der nachzubildenden Strecke, sondern lediglich so lange wie eine Grundperiode der Störanregung. Letztere ist bei der vorliegenden Anwendung deutlich kürzer als die Impulsantwort von $P(z)S^{-1}(z)$.

7.4 Einsatz eines Störbeobachters

Ein vergleichsweise neuer Ansatz zur aktiven Dämpfung harmonischer Störsignale ist der Einsatz eines Störbeobachters [26, 6, 69, 48, 95]. Dieser ermittelt, basierend auf einer Modellierung der Störanregung sowie der sekundären Übertragungstrecke das zur Schwingungskompensation notwendige Stellsignal. In den nachfolgenden Abschnitten soll das Verhalten dieses Ansatzes am Einkanalprüfstand untersucht werden. Dabei wird bezüglich des Korrekturvektors des eingesetzten Beobachters ein Spezialfall angenommen (s. nächster Abschnitt).

7.4.1 Prinzip

Das hier betrachtete Prinzip der Schwingungsdämpfung mittels Störbeobachter ist in [6] ausführlich beschrieben und soll im Folgenden nur kurz umrissen werden. In Bild 7.32 ist die Struktur veranschaulicht, in der mittels des Beobachters ein Stellsignal $u_z(n)$ zur Kompensation der Störung erzeugt wird. Es wird hier angenommen, dass die Störung am Eingang der sekundären Strecke wirkt. Für eine übersichtliche Einführung der Systembeschreibungen ist der idealisierte Fall dargestellt, dass die realen Systeme (Störung und sekundäre Strecke $S(z)$) exakt ihren Modellen (Störmodell sowie $\hat{S}(z)$) entsprechen.

Als Störsignal wird wieder eine stationäre harmonische Anregung mit einer Überlagerung von insgesamt M Sinusschwingungen eingesetzt. In zeitdiskreter Zustandsdarstellung ist dabei die Beschreibung der m -ten Sinusschwingung durch ein System zweiter Ordnung mit der Systemmatrix

$$\mathbf{A}_{z,m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi f_i T_A) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

und dem Ausgangsvektor

$$\mathbf{c}_{z,m}^T = [1 \ 0] \quad (7.17)$$

möglich. Für die Überlagerung der Sinusschwingungen ergeben sich die Gesamtmatrizen

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{z,1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_{z,M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_z^T = [\mathbf{c}_{z,1}^T \ \cdots \ \mathbf{c}_{z,M}^T]. \quad (7.18)$$

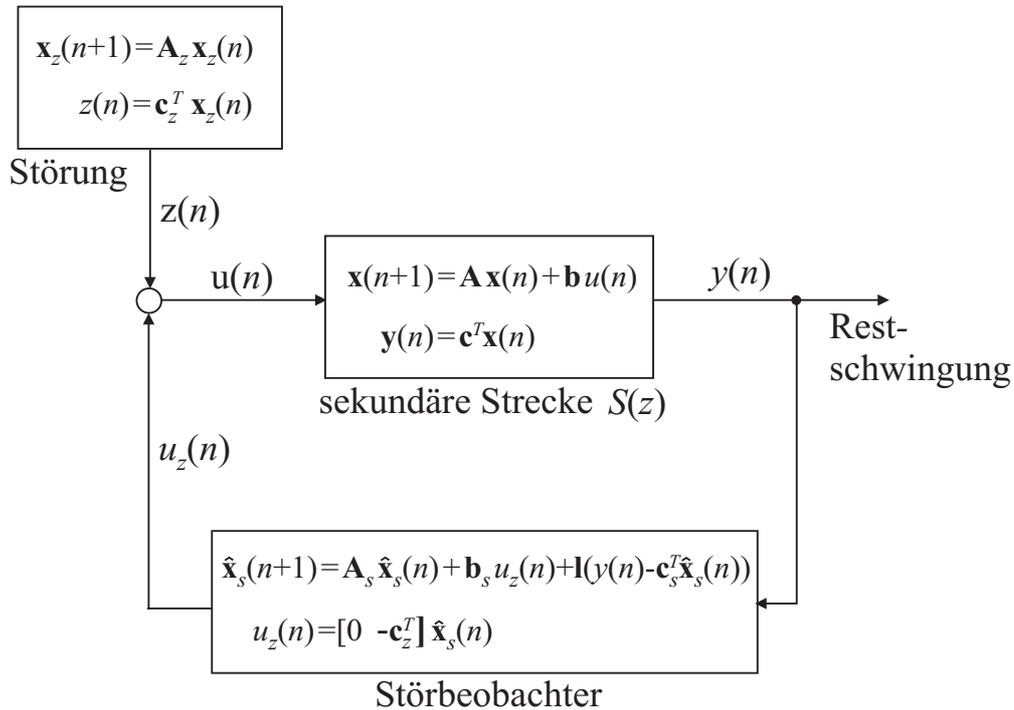


Bild 7.32: Einsatz des Störbeobachters zur Schwingungsdämpfung

Der Zustandsvektor des Störbeobachters beinhaltet die geschätzten Zustände der sekundären Strecke $S(z)$ und der Störung

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}_z \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

$\hat{S}(z)$ und das Störmodell bilden entsprechend die Grundlage beim Aufstellen des Beobachters:

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}\mathbf{c}_z^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

und

$$\mathbf{c}_s^T = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{0}]. \quad (7.21)$$

Der Vektor

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{\text{sec}} \\ \mathbf{l}_z \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

schließlich enthält die Korrektur Elemente, mit denen die Zustandsvariablen des Beobachters dem tatsächlichen Zustand angeglichen werden. Gemäß [6] ist in der Anwendung für die Einträge von \mathbf{I} ein frequenzbezogenes Gain Scheduling vorzusehen (s. nächster Abschnitt), um einen stabilen Betrieb zu sichern.

Im Folgenden wird angenommen, dass lediglich die Korrektur Elemente in \mathbf{I} ungleich Null sind, die dem Modell der Störung zuzuordnen sind (\mathbf{I}_z). Die Zustände des sekundären Streckenmodells werden entsprechend im Betrieb nicht explizit angepasst. Es gelte also $\mathbf{I}_{\text{sec}} = 0$. Eine Voraussetzung hierzu ist die im vorliegenden Fall gegebene Stabilität des Streckenmodells. Die Motivation für diese Vereinfachung ergibt sich aufgrund der relativ hohen Ordnung des durch Parameteridentifikation gewonnenen sekundären Streckenmodells $\hat{S}(z)$ (s. Anhang B.2.1). Bei einer Ordnung von mindestens 25 resultiert eine merkliche Reduktion des Aufwands bei der Einrichtung und Ausführung des Gain Scheduling.

7.4.2 Einrichtung am Prüfstand und Messergebnisse

Die Einrichtung der Beobachterstruktur als Echtzeitanwendung kann in ähnlicher Weise wie bei den adaptiven Störgrößenaufschaltungen am Einkanalprüfstand erfolgen. Es wird eine Abtastrate von 1 kHz eingestellt, und zur analogen Signalverarbeitung kommen wieder Butterworth-Filter achter Ordnung mit einer Grenzfrequenz von etwa 300 Hz zum Einsatz.

Die Bestimmung der Einträge des Korrekturvektors \mathbf{I}_z für das Gain Scheduling erfolgt vorab in Simulationen. Es wird dabei in Störung und Störmodell jeweils nur eine einzige Sinusschwingung vorgegeben, so dass \mathbf{I}_z nur zwei Elemente besitzt. Mit dieser Sinusschwingung wird der relevante Frequenzbereich von 20 – 300 Hz durchgegangen. Intervallweise werden dabei für die zwei Einträge von \mathbf{I}_z Werte bestimmt, für die sich möglichst schnelle Konvergenz mit noch gut robuster Stabilität ergibt. Es wird so eine Matrix mit $2 \times P$ geeigneten Korrekturwerten aufgestellt, wobei P die Anzahl von Frequenzintervallen ist, in die der relevante Frequenzbereich für das Gain Scheduling eingeteilt wird. Aus dieser Matrix können dann beim tatsächlichen Einsatz mit M überlagerten Frequenzen für jede Sinusschwingung im Störmodell das aktuell aufgrund der vorliegenden Frequenz zugeordnete Paar von Werten für den Korrekturvektor \mathbf{I}_z (der nun $2M$ Elemente enthält) entnommen werden. Die verwendete pragmatische Vorgehensweise, bei der die Einträge des Korrekturvektors jeweils paarweise für eine einzelne angeregte Frequenz ermittelt und anschließend direkt für

Überlagerungen mehrerer Frequenzen übernommen werden, führte im vorliegenden Fall zu zuverlässig guten Ergebnissen. Für die nachfolgend dargestellten Untersuchungen wurde das Gain Scheduling mit einer recht hohen Auflösung von 1 Hz eingerichtet. Es ist also $P = 281$.

Mit dem entsprechend implementierten Algorithmus gelingt, wie bereits gemäß [6] zu erwarten war, für stationäre Anregung mit konstanten Frequenzen eine effektive Schwingungsdämpfung (s. Bilder 7.33 und 7.34). Nicht ganz so unproblematisch ist der Einsatz des Beobachters im Falle instationärer Anregung. Da das verwendete Störmodell sich aus der Beschreibung einer Sinusschwingung konstanter Frequenz herleitet, ist eine Funktion des Störbeobachters für Signale mit veränderlicher Frequenz nicht gesichert.

Für eine diesbezügliche Untersuchung am Prüfstand wird der Algorithmus bei einer stationären Anregung mit einer Überlagerung von 10 harmonischen Sinusschwingungen gestartet. Die Grundfrequenz liegt hierbei bei $f_0 = 22$ Hz. Für eine niedrigere Frequenz direkt bei der Resonanzfrequenz der Auslöschungsaktoren konnte nur schwer eine Parametrierung gefunden werden, für die sich ein zuverlässig stabiles Verhalten des Störbeobachters einstellt. Nach 10 Sekunden wird dann die Grundfrequenz mit der angegebenen Flankensteilheit angehoben. Die Harmonischen steigen mit der entsprechend vielfachen Steilheit an.

Gemäß Bild 7.35 wird bei einer Grundfrequenzrampe von 5 Hz/sec zumindest für

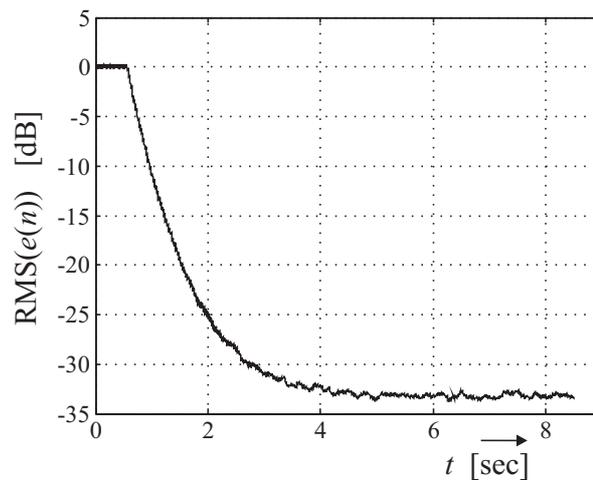


Bild 7.33: Konvergenz des Störbeobachters am Prüfstand (Grundfrequenz $f_0 = 33$ Hz, $M = 10$)

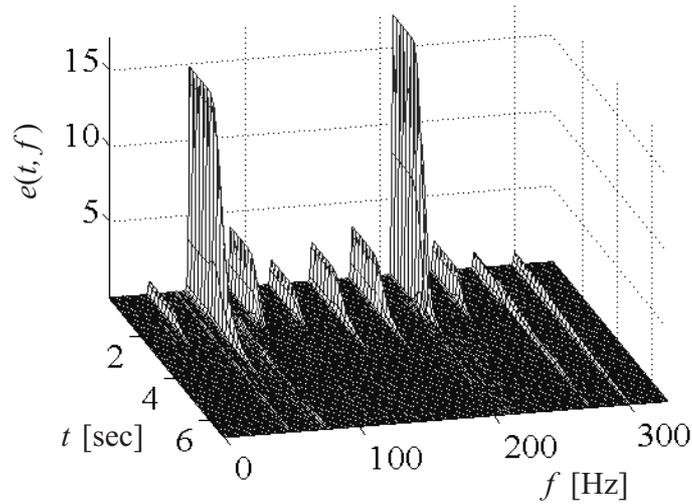


Bild 7.34: Frequenzbezogene Konvergenz des Störbeobachter

spätere Zeitpunkte, bei denen nur noch Signalanteile mit geringer Steilheit der Frequenzrampe vorliegen, noch eine weitgehend effektive Unterdrückung der Störung erreicht. Für eine Grundfrequenzrampe von 50 Hz/sec ergibt sich, wie in Bild 7.36 gezeigt, dagegen bereits nahezu durchgehend eine deutliche Verstärkung. Bei einer Rampe von 200 Hz/sec (s. Bild 7.37) wird die Störverstärkung noch erhöht. Insgesamt wird bei der verwendeten Einsatzweise ein eher noch etwas schlechteres Verhalten für instationäre Anregung festgestellt, als beim FxLMS-Algorithmus in paralleler Form.

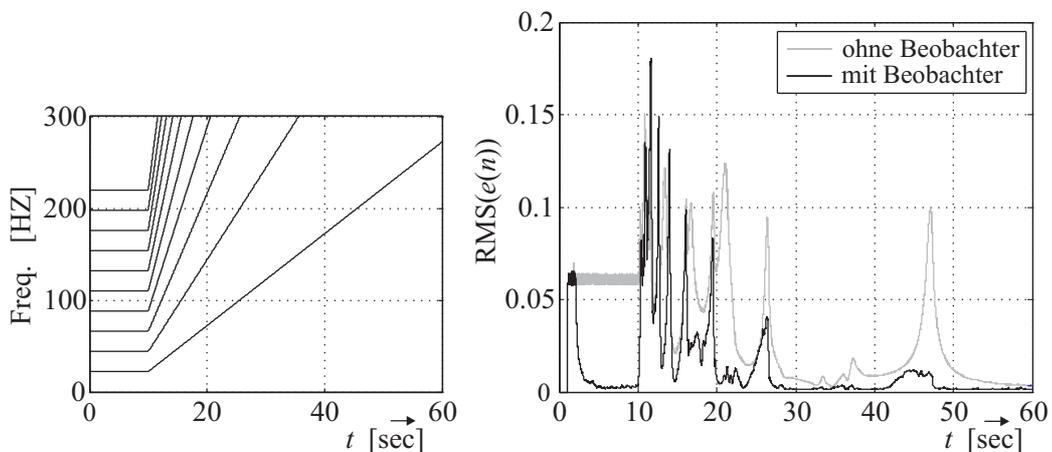


Bild 7.35: Anregungsfrequenzen und Dämpfungsergebnis für instationäre Anregung mit Grundfrequenzrampe 5 Hz/sec

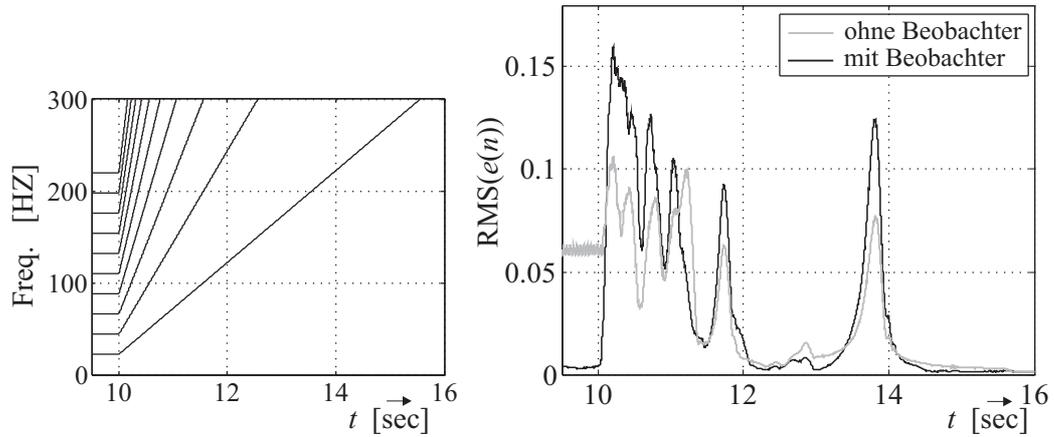


Bild 7.36: Simulationsergebnis für instationäre Anregung mit Grundfrequenzrampe 50 Hz/sec

7.4.3 Weitere Analyse des implementierten Verfahrens

Wie oben erläutert wurde, wird hier der spezielle Fall betrachtet, dass lediglich ein Abgleich der Zustände des im Beobachter enthaltenen Modells der Störung stattfindet, während die Zustände des Streckenmodells $\hat{S}(z)$ unbeeinflusst bleiben. Für die

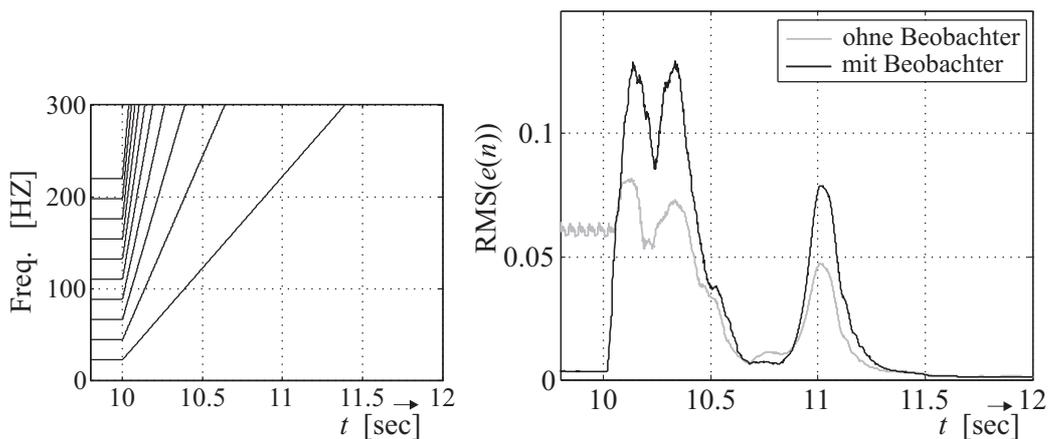


Bild 7.37: Simulationsergebnis für instationäre Anregung mit Grundfrequenzrampe 200 Hz/sec

Systembeschreibung des Beobachters folgt hieraus die Form [95]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(n+1) \\ \hat{\mathbf{x}}_z(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}\mathbf{c}_z^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(n) \\ \hat{\mathbf{x}}_z(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_z(n) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_z \end{bmatrix} (y(n) - \hat{y}(n)) , \\ \hat{y}(n) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(n) \\ \hat{\mathbf{x}}_z(n) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Wird nun die Anfangsbedingung $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$ zu Null gesetzt, so wird auch $\hat{\mathbf{x}}(n)$ für alle Zeiten gleich Null bleiben. Grund hierfür ist, dass gilt $u_z(n) = -\mathbf{c}_z^T \hat{\mathbf{x}}_z(n)$. Als Folge kann die Differenzgleichung in (7.23) vereinfacht werden zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{x}}_z(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{x}}_z(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_z \end{bmatrix} y(n) . \quad (7.24)$$

Gemäß Bild 7.32 werden für die Berechnung des Stellsignals $u_z(n)$ lediglich die Zustände des Störmodells benötigt, die sich nun offensichtlich als

$$\hat{\mathbf{x}}_z(n+1) = \mathbf{A}_z \hat{\mathbf{x}}_z(n) + \mathbf{1}_z y(n) \quad (7.25)$$

ergeben.

Eine interessante Folge dieser Überlegungen ist, dass für den speziellen Fall $\mathbf{l}_{\text{sec}} = \mathbf{0}$ die sekundäre Strecke keinerlei Einfluss auf die Berechnung der Stellgröße $u_z(n)$ hat und somit für den Einsatz des Beobachters nicht benötigt wird.

7.4.4 Zusammenfassung zum Störbeobachter

Der Störbeobachter liefert in der hier implementierten Form eine effektive Unterdrückung stationärer harmonischer Störsignale. Für instationäre Anregung hingegen konnten im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen nur eher mäßig gute Ergebnisse erzielt werden. Ein Verbesserungspotenzial hierzu könnte in dem Verfahren zur Auslegung des Korrekturvektors liegen. Gerade für die einfache Beobachterstruktur, die sich mit (7.25) ergibt, sollte ein Entwurf mittels einer geeigneten Polvorgabe [26] realisierbar sein. Eine allzu gravierende Verbesserung des Verhaltens bei instationärer Anregung scheint nach den hier gesammelten Erfahrungen zwar nicht wahrscheinlich, eine gewisse Optimierung könnte aber möglich sein.

Allgemein vorteilhaft an der untersuchten Störbeobachterstruktur ist der unter der Annahme $\mathbf{l}_{\text{sec}} = \mathbf{0}$ vergleichsweise geringe erforderliche Rechenaufwand. Auch ist aufgrund der Linearität der eingesetzten Struktur zumindest für stationäre Anregung eine übersichtliche Analyse möglich.

7.5 Diskussion der vier Algorithmen

In diesem Abschnitt sollen die Vor- und Nachteile der vier untersuchten algorithmischen Ansätzen zur Schwingungsdämpfung an der Motoraufhängung einander gegenübergestellt werden.

7.5.1 Eigenarten und Performance

Der erste betrachtete Ansatz, die klassische Regelung, zeigt eine besondere Stärke bezüglich der Einsetzbarkeit bei instationärer Anregung. Es bleibt aber fraglich, inwieweit in der Praxis, bei Betrieb mit konstanten Reglerparametern, eine effektive breitbandige Dämpfung der unerwünschten Vibrationen erreicht werden kann. Insbesondere aufgrund der Zeitvarianz der Übertragungstrecken im betrachteten Aufbau können sich hier erhebliche Probleme ergeben.

Die im Anschluss vorgestellten adaptiven Störgrößenaufschaltungen sind gerade für den Einsatz bei zeitveränderlichen Übertragungstrecken gut geeignet. Aufgrund ihrer selbstanpassenden Eigenschaften kann davon ausgegangen werden, dass sie insbesondere die in der Motoraufhängung auftretenden langsamen Zeitveränderlichkeiten problemlos ausgleichen können.

Der erste hierzu untersuchte Algorithmus, der FxLMS-Algorithmus, wurde in zwei Ausführungen implementiert, nämlich in der direkten, klassischen Form und in der parallelen Form. In der parallelen Struktur zeigt der FxLMS-Algorithmus hervorragende Eigenschaften bezüglich Abklinggeschwindigkeit und Unterdrückungsgrad des Fehlersignals für stationäre Anregung. Für instationäre Anregung (hier speziell eine Überlagerung von Chirpsignalen) wurde dagegen ein weniger gutes Verhalten festgestellt. Besonders für schnelle Rampen der Grundfrequenz von 50 Hz/sec oder mehr stellt sich überwiegend eine Verstärkung der Störvibrationen ein. In der direkten Form konnte dagegen zwar nur eine eher mäßig schnelle Gesamtkonvergenz erreicht werden, dafür wurde aber auch für extrem schnell veränderliche Anregungsfrequenzen noch überwiegend eine Dämpfung der Vibrationen erzielt. Nach Abschluss des Konvergenzvorgangs zeigen bei stationärer Anregung sowohl die direkte als auch die parallele Form des FxLMS-Algorithmus einen sehr hohen Unterdrückungsgrad.

Als zweite Methode zur adaptiven Störgrößenaufschaltung wurde der FuLMS-Algorithmus untersucht. Dieser passt ein IIR-Filter an, so dass im Vergleich zur direkten Form des FxLMS-Algorithmus eine Verringerung der zur effektiven Schwingungsdämpfung notwendigen Anzahl von Filterkoeffizienten in Aussicht stand. Bei

der Erprobung in Simulationen und am Prüfstand zeigte sich aber, dass, um tatsächlich eine entsprechende Unterdrückungsgüte und zuverlässige Stabilität zu erzielen, letztlich eine deutlich höhere Koeffizientenzahl notwendig ist. Lediglich bei mindestens zweifacher Koeffizientenzahl ist unter Einhaltung von $L \geq T_0/T_A$ eine marginal verbesserte Performance im Vergleich zum direkten FxLMS-Algorithmus möglich.

Als ein vergleichsweise neuer Ansatz zur aktiven Schwingungsdämpfung wurde der Einsatz eines Störbeobachters untersucht. Da bei der vorliegenden Anwendung die Ordnung des im Beobachter vorgesehenen Modells $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke relativ hoch ist, wurde hierbei lediglich der Spezialfall betrachtet, dass im Beobachter nur die Zustandsvariablen des Modells der vorliegenden Störung, und nicht die des Modells der sekundären Strecke angepasst werden. Es stellte sich heraus, dass in diesem Fall auf das sekundäre Streckenmodell vollständig verzichtet werden kann. Mit dieser besonderen Anwendungsform konnte eine effektive Unterdrückung stationärer Anregung erreicht werden. Für instationäre Anregung mit linear ansteigenden Frequenzrampen hingegen konnten gute Dämpfungswerte nur für eher langsame Rampensteigungen erzielt werden.

7.5.2 Abschätzung zu Rechen- und Speicheraufwand

Eine grundsätzliche Abschätzung zeigt, dass bezüglich des Rechenaufwands besonders die klassische Regelung, und, in der hier implementierten Form, der Störbeobachter-Ansatz vorteilhaft sind. Dabei ist allerdings speziell bei der Regelung gleichzeitig eine recht hohe Abtastrate in Kauf zu nehmen. Auf der anderen Seite benötigt die klassische Regelung nur wenig Speicher, wohingegen der Bedarf des Störbeobachters aufgrund des Gain Scheduling etwas größer ausfällt.

Der FxLMS-Algorithmus in direkter Form (und mehr noch der FuLMS-Algorithmus) erfordert aufgrund des enthaltenen adaptiven Filters $W(z)$ und des Modells $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke im vorliegenden Fall einen vergleichsweise großen Rechen- und Speicheraufwand. Entsprechend der Anforderung $L \geq T_0/T_A$ an das FIR-Filter kann der Aufwand aber bei Einsatz einer geringen Abtastrate f_A moderat gehalten werden.

In paralleler Form ist der Rechenaufwand des FxLMS-Algorithmus geringer als in der direkten Form [75]. Der Speicheraufwand kann dagegen, zumindest bei hoher Frequenzauflösung von Amplitudenvektor und Phasenvektor zur Beschreibung der sekundären Strecke, wesentlich höher ausfallen.

7.5.3 Bewertung

Die Eigenarten der untersuchten Algorithmen sind in der Tabelle 7.3 noch einmal zusammengefasst. Eine abschließende Beurteilung der Eignung der einzelnen Ansätze für die tatsächliche Anwendung im Kfz ist nach den hier durchgeführten grundsätzlichen Betrachtungen sicherlich noch nicht zulässig. Hierzu müssten genauere Informationen über die Verhältnisse im betreffenden Kraftfahrzeug, wie Motorlast, Drehzahlverläufe und Grenzen der Parametervariationen der mechanischen Übertragungstrecken, mit einbezogen werden. Wird aber die Annahme getroffen, dass eine deutliche Zeitvarianz der Streckenparameter in der Motoraufhängung vorliegt, und dass außerdem regelmäßige, schnelle Drehzahländerungen um größere Beträge auftreten, so ist eine Eignung besonders bei den adaptiven Störgrößenaufschaltungen in direkter Anwendungsform (FxLMS und FuLMS) zu erwarten. Von diesen wiederum hatte sich der FxLMS-Algorithmus aufgrund geringeren Rechenaufwands als überlegen herausgestellt.

Für die bisherigen Untersuchungen sind die Algorithmen im Einkanalfall an nur einer Aufhängung des Hilfsrahmens implementiert worden. Wie bereits erläutert wurde, ist aber für eine vollständige Vibrationsisolation bezüglich des Motors eine Schwingungsdämpfung an allen vier Aufhängestellen notwendig. Im nachfolgenden Kapitel wird die Erweiterung der beiden betrachteten Einsatzformen des FxLMS-Algorithmus zu einer entsprechenden Mehrkanalanwendung beschrieben.

Eine weitere Diskussion zu den untersuchten Algorithmen erfolgt im abschließenden Kapitel 9.

Tabelle 7.3: Eigenarten der untersuchten Algorithmen (+ : positiv, 0 : neutral, - : negativ)

	Effektivität für konst. Grund- frequenz f_0	Effektivität für variierende Grundfreq. f_0	Eignung für zeitvariante Strecken	Rechen- aufwand	Speicher- aufwand	Abtast- rate
Klassische Regelung	0	+	- -	niedrig	niedrig	hoch
FxLMS, direkt	+	+	+	moderat	moderat	niedrig
FxLMS, parallel	++	-	+	moderat	hoch	niedrig
FuLMS (SHARF)	+	+	+	hoch	hoch	niedrig
Stör- beobachter	++	-	+	niedrig	moderat	niedrig

Kapitel 8

Erweiterung zum Mehrkanalfall

Inhalt dieses Kapitels ist die Umsetzung der direkten und der parallelen Form des FxLMS-Algorithmus in eine Mehrkanalanwendung. Hierzu sind in der Literatur bereits verschiedene Verfahren, zum Teil mit Modifikationen des FxLMS-Algorithmus, zu finden [20, 16]. Ebenso sind ausführliche Analysen [17, 8], auch bezüglich des Rechenaufwands [10], verfügbar. Im Folgenden wird die Einrichtung und das Verhalten der konsequenten Methode nach [49, 50] für die gegebene Anwendung beschrieben.

8.1 Vorgehensweise

Gemäß Bild 4.6 ist in der letztendlichen Anwendung die Vibrationsauslöschung an vier Aufhängestellen des Motorträgers einzurichten. Der einfachste hierzu denkbare Ansatz ist die Implementierung eines dezentralen Systems, in dem vier Algorithmen getrennt arbeiten. Da hierbei allerdings die zwischen den einzelnen Algorithmen zwangsläufig vorhandenen Wechselwirkungen vernachlässigt werden, kann ein zuverlässiger Betrieb nicht sichergestellt werden. Dies wird durch experimentelle Untersuchungen belegt, in denen Stabilität nur für bestimmte Frequenzbereiche der Grundfrequenz f_0 erreicht werden kann [31]. Es ist folglich notwendig, den Algorithmus unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen zu einem zentral wirkenden Mehrgrößensystem zu erweitern. Die resultierende Struktur ist in Bild 8.1 dargestellt.

Um die gezeigten Signalübertragungen nachzuvollziehen ist es sinnvoll, die Akteure im Aufbau als sekundäre Quellen, und die zugeordneten Sensoren als sekundäre Senken zu betrachten. Aus der Übertragung von den hier vier Quellen auf die vier

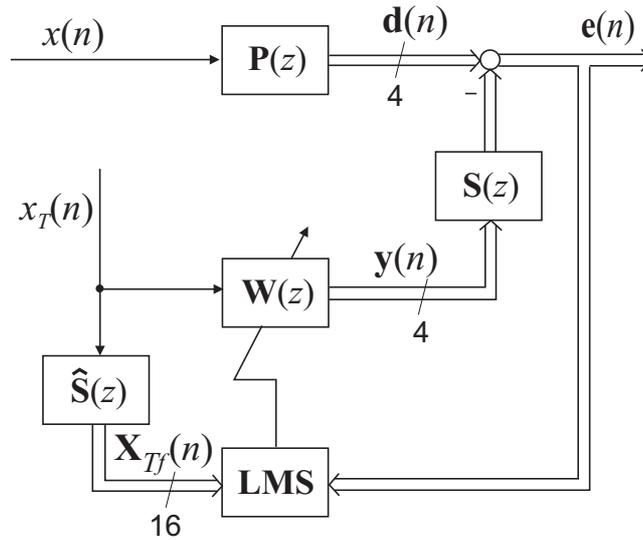


Bild 8.1: FxLMS in zentraler Mehrkanalanwendung

Senken ergibt sich das Übertragungsverhalten von insgesamt sechzehn sekundären Strecken, die in einer 4×4 -Matrix $\mathbf{S}(z)$ dargestellt werden:

$$\mathbf{S}(z) = \begin{bmatrix} s_{11}(z) & s_{12}(z) & s_{13}(z) & s_{14}(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) & s_{23}(z) & s_{24}(z) \\ s_{31}(z) & s_{32}(z) & s_{33}(z) & s_{34}(z) \\ s_{41}(z) & s_{42}(z) & s_{43}(z) & s_{44}(z) \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

Die Übertragung $\mathbf{P}(z)$ der primären Strecken dagegen ergibt sich als ein Spaltenvektor mit vier Einträgen. Das Mehrgrößensystem $\hat{\mathbf{S}}(z)$ ist wieder ein Modell der sekundären Übertragung $\mathbf{S}(z)$. Angewandt auf das skalare Referenzsignal $x_T(n)$ ergeben sich in der Signalmatrix $\mathbf{X}_{Tf}(n)$ sechzehn Komponenten $x_{Tf_{ik}}(n)$, die als Eingangssignale des Mehrkanal-LMS-Algorithmus dienen. Letzterer passt hier entsprechend der Anzahl der sekundären Quellen insgesamt vier Filter $\mathbf{w}_i(n)$, $i = 1 \dots 4$, an, die jeweils mit der rekursiven Berechnungsformel

$$\mathbf{w}_i(n+1) = \mathbf{w}_i(n) + \mu_i \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_{Tf_{ik}}(n) e_k(n) \quad (8.2)$$

aktualisiert werden. Die Vektoren $\mathbf{x}_{Tf_{ik}}(n)$ ergeben sich dabei analog zum Vektor $\mathbf{x}_f(n)$ im Einkanalfall (vgl. Definition (2.23)) aus den Signalen $x_{Tf_{ik}}(n)$.

Die Schrittweiten μ_i der Algorithmen, die den Filtern $\mathbf{w}_i(n)$ zugeordnet sind,

können nun über die Formel

$$\mu_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^N \mathbf{x}_{\Gamma_{ik}}^T(n) \mathbf{x}_{\Gamma_{ik}}(n)} \quad (8.3)$$

so normiert werden, dass sich ein zuverlässig stabiler Betrieb ergibt.

Für die parallele Form mit orthogonaler Referenz kann die Erweiterung der einzelnen FxLMS-Algorithmen zum Mehrkanalfall ganz analog durchgeführt werden.

8.2 Experimentelle Untersuchungen

Die frequenzbezogene Konvergenz der eingerichteten Mehrkanalsysteme ist in Abbildung 8.2 für die direkte Anwendung des FxLMS-Algorithmus und in Abbildung 8.3 für die parallele Struktur mit orthogonaler Referenz gezeigt. In Abbildung 8.2 ist

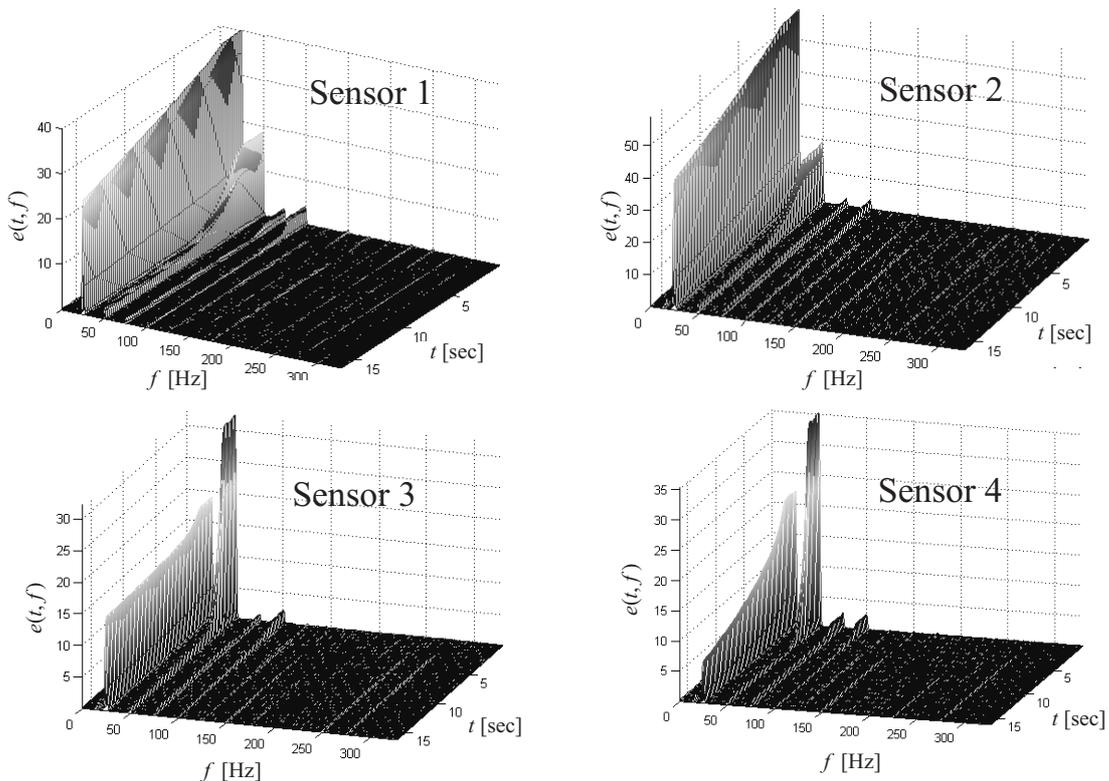


Bild 8.2: Frequenzbezogenes Konvergenzverhalten der *direkten* Form des FxLMS-Algorithmus (zentrales Mehrkanalsystem, Parameter gemäß Tabelle 8.1)

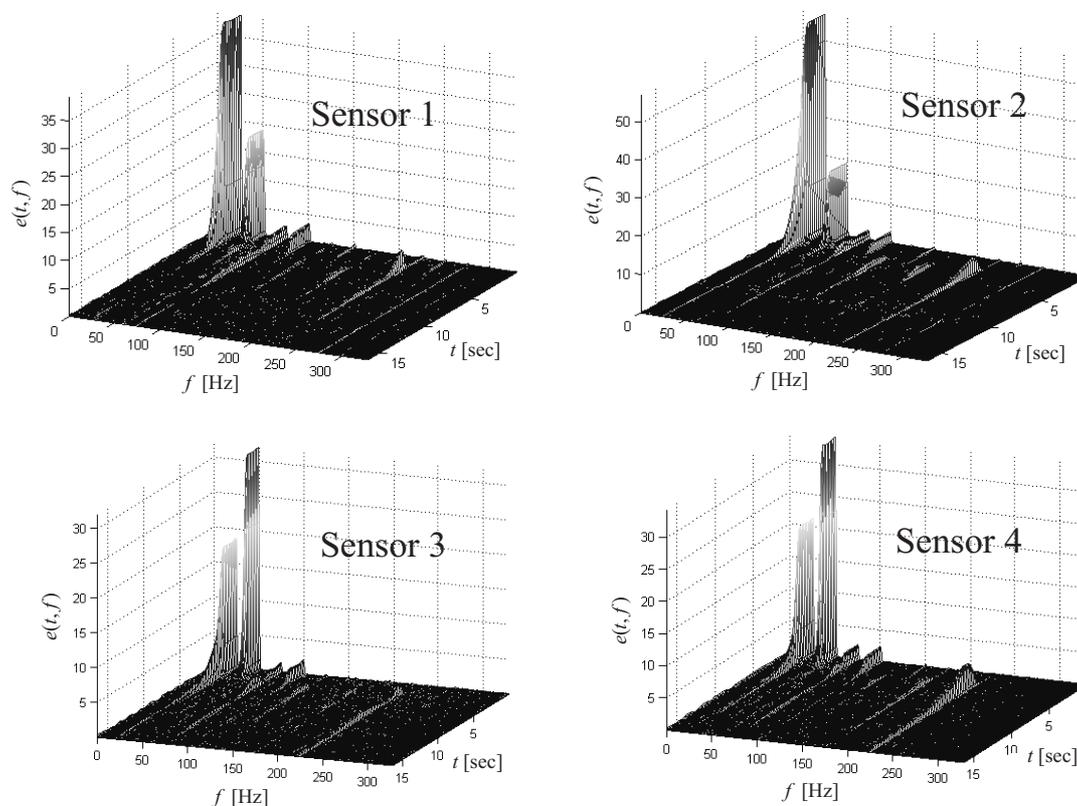


Bild 8.3: Frequenzbezogenes Konvergenzverhalten der *parallelen* Form des FxLMS-Algorithmus (zentrales Mehrkanalsystem, Parameter gemäß Tabelle 8.1)

die bereits ausführlich behandelte stark unterschiedliche Abklinggeschwindigkeit bei den einzelnen Frequenzen zu erkennen, die sich aufgrund der spektralen Verteilung der gefilterten Referenzsignale $x_{\text{Tf}_i,j}(n)$ ergibt. Für die parallele Anordnung dagegen kann eine durchweg hohe Konvergenzgeschwindigkeit für alle Frequenzen erreicht werden.

Beide Algorithmen konvergieren bei stationärer Anregung – bei jeweils entsprechend langer Wartezeit – zu einem niedrigen Wert des Fehlers $e(n)$. Es werden Gesamtdämpfungen bis nahezu 40 dB erreicht.

Bei instationärer Anregung mit einer linear ansteigenden Frequenzrampe bestätigen sich die Ergebnisse, die im Einkanalfall gewonnen wurden. Die direkte Form des FxLMS-Algorithmus zeigt für zunehmende Steilheit der Frequenzrampe eine zwar abnehmende Dämpfung, eine Störverstärkung tritt aber nur schwach und lediglich in

kleinen Frequenzbereichen auf. Die parallele Anwendung dagegen bewirkt bereits bei Rampensteigungen mittlerer Höhe eine teilweise stark ausgeprägte Störverstärkung.

Die für die erhaltenen Ergebnisse eingesetzten Parameter sind in der Tabelle 8.1 angegeben. Es sei auch an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass für einen zuverlässigen Betrieb des FxLMS-Algorithmus, egal in welcher Anwendungsform, die Schrittweitenbegrenzung durch P_{\min}^{ref} von entscheidender Bedeutung ist. Für die anderen Parameter müssen daneben natürlich ebenfalls geeignete Werte zum Einsatz kommen.

Tabelle 8.1: Parametrierung des FxLMS-Algorithmus in zentraler Mehrkanalstruktur am Prüfstand

Parameter	direkte Form	parallele Form
Schrittweite α	0,03	0,002
Schrittweitenbegrenzung P_{ref}^{\min}	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Vergessensfaktor ν	1	1
Abtastrate f_A	1 kHz	1 kHz
Anzahl L der Koeffizienten der (des) adaptiven Filter(s)	50	1

8.3 Anregung mit Motor-Messdaten

Um einen besseren Eindruck vom Verhalten der Algorithmen in der tatsächlichen Anwendung zu gewinnen, sollen nun abschließend Prüfstand-Ergebnisse für eine Anregung mit Messdaten von einem realen Kraftfahrzeug wiedergegeben werden. Als Störanregung dienen hierbei Signalverläufe einer Beschleunigungsmessung direkt am Motorblock. Nach einer Filterung mit der inversen Übertragung des Störaktors im Mehrkanalprüfstand (von der Eingangsspannung auf die resultierende Beschleunigung) können diese auf den Störaktor geschaltet werden, so dass sich am „Motorblock“ im Prüfstand nahezu dieselben Vibrationen einstellen wie ursprünglich im Kraftfahrzeug.

Für die Gewinnung des Referenzsignals wird das Ansteuer-Signal der Zündung verwendet, das direkt an den Zündspulen abgegriffen werden kann. Es wird so ein Tachometer-Signal mit den in Abschnitt 7.2.1 beschriebenen Eigenschaften erhal-

ten. Dem FxLMS-Algorithmus in direkter Form kann dieses Signal – nach einer Anti-Aliasing-Filterung – unmittelbar als Referenz zugeführt werden. Die parallele Ausführung dagegen benötigt den jeweils aktuellen Wert der Grundfrequenz f_0 , um entsprechende Sinusfunktionen als Referenzsignal generieren zu können. Die Ermittlung von f_0 geschieht hier mithilfe einer hochauflösenden Zählerschaltung. Diese misst die Grundperiode T_0 und übergibt sie als digitalen Wert an das Echtzeitsystem.

Das verwendete Versuchsfahrzeug ist ein Opel Astra F-CC (Motor X16XEL 16V). Sowohl Zündsignal als auch Sensorsignal werden über den Stereo-Eingang der Audio-Karte eines Notebooks aufgenommen. Die erwähnte Aufbereitung der Messdaten durch inverse Filterung ist anschließend unter Matlab/Simulink möglich. Die Ausgabe der Signale erfolgt wiederum über den Ausgang einer Audio-Karte. In Zusammenarbeit mit dem Echtzeitsystem am Mehrkanalprüfstand ergibt sich das in Bild 8.4 gezeigte Gesamtsystem.

In Bild 8.4 ist speziell die Konfiguration mit einer gesonderten Bestimmung der Frequenz des Zündsignals für den parallelen FxLMS-Algorithmus gezeigt. Bei der direkten Form kann, wie erwähnt, das Zündsignal direkt dem Echtzeitsystem zugeführt werden.

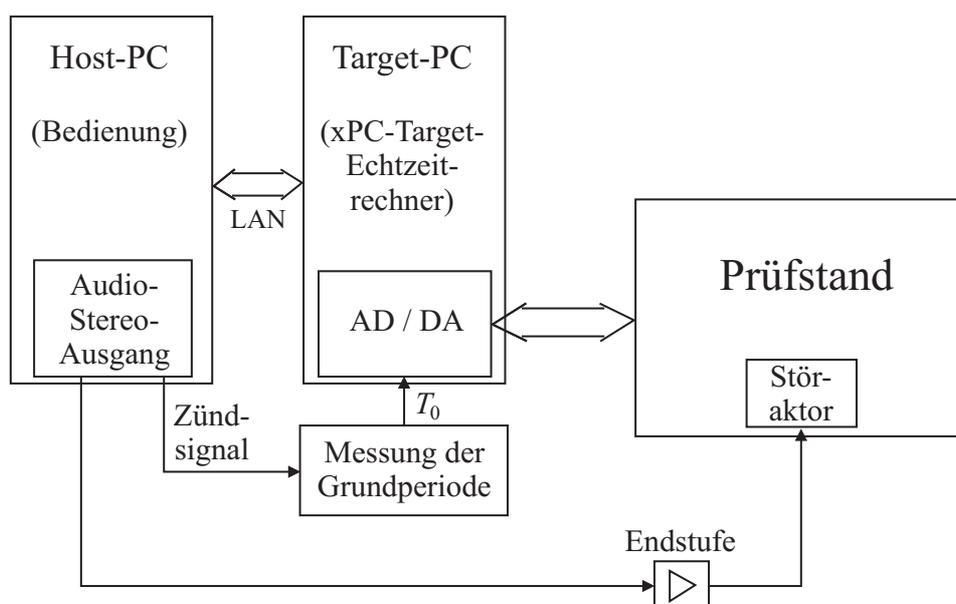


Bild 8.4: Gesamtsystem zum Betrieb der parallelen Form des FxLMS-Algorithmus mit realen Motor-Messdaten

Es werden Dämpfungsergebnisse für zwei verschiedene Fahrbeispiele vorgestellt:

- **Fahrbeispiel 1:** Gleichmäßige Fahrt auf der Autobahn mit ca. 110 km/h.
- **Fahrbeispiel 2:** Beschleunigungsvorgang aus dem Stand auf etwa 60 km/h mit mehrmaligem Schaltvorgang. Danach Fahrt mit gleich bleibender Geschwindigkeit.

In den Bildern 8.5 und 8.6 sind zunächst die Ergebnisse der parallelen Form des FxLMS-Algorithmus, zusammen mit der über die Zählerschaltung ermittelten Grundfrequenz f_0 , dargestellt. Die Drehfrequenz f_{mot} des Motors entspricht in diesem Fall der Grundfrequenz, es ist also $f_{\text{mot}} = f_0$. Es tritt allerdings bei f_0 nahezu keine Vibration auf. Erst die darüber liegende erste Harmonische enthält den Hauptteil der Schwingungsleistung. Bei den weiteren Harmonischen treten nur relativ kleine Amplituden auf.

Die entsprechenden Ergebnisse der direkten Anwendungsform sind in Bild 8.7 zu sehen. Es bestätigen sich hier in etwa die Verhaltensweisen, die schon im vorhergehenden Kapitel für den Einkanalfall festgestellt wurden. Die parallele Anwendung konvergiert sehr schnell für stationäre Anregung. Die maximale Dämpfung bleibt dabei aber, verglichen mit den bisher gezeigten Ergebnissen, eher gering. Der Grund hierfür liegt hauptsächlich in der nicht perfekten, von einem Rauschteil überlagerten Frequenzmessung. Nichtsdestotrotz gelingt die Dämpfung zuverlässig

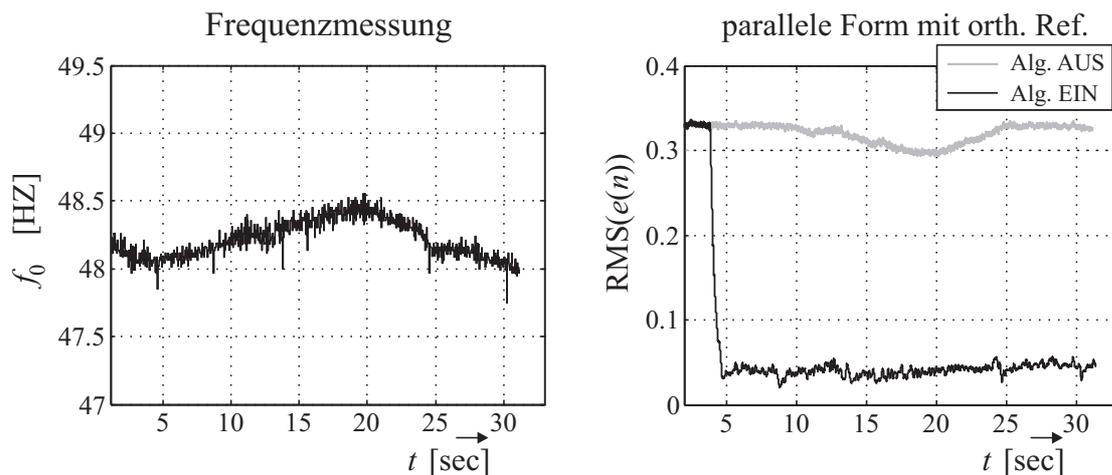


Bild 8.5: Verlauf der Grundfrequenz f_0 und der Dämpfung des parallelen FxLMS-Algorithmus für gleichmäßige Fahrt auf der Autobahn (Fahrbeispiel 1, Parameter gemäß Tabelle 8.2)

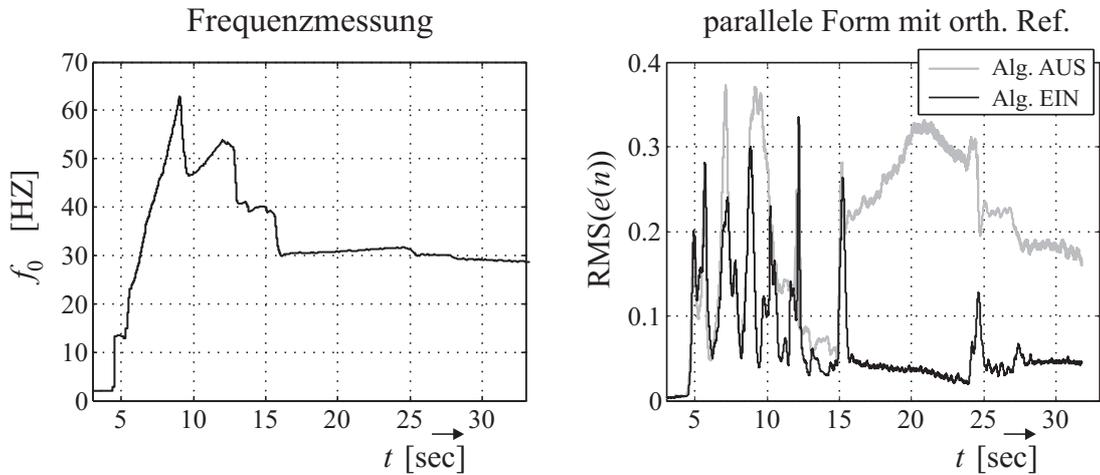


Bild 8.6: Verlauf der Grundfrequenz f_0 und der Dämpfung des parallelen FxLMS-Algorithmus für einen Beschleunigungsvorgang (Fahrbeispiel 2, Parameter gemäß Tabelle 8.2)

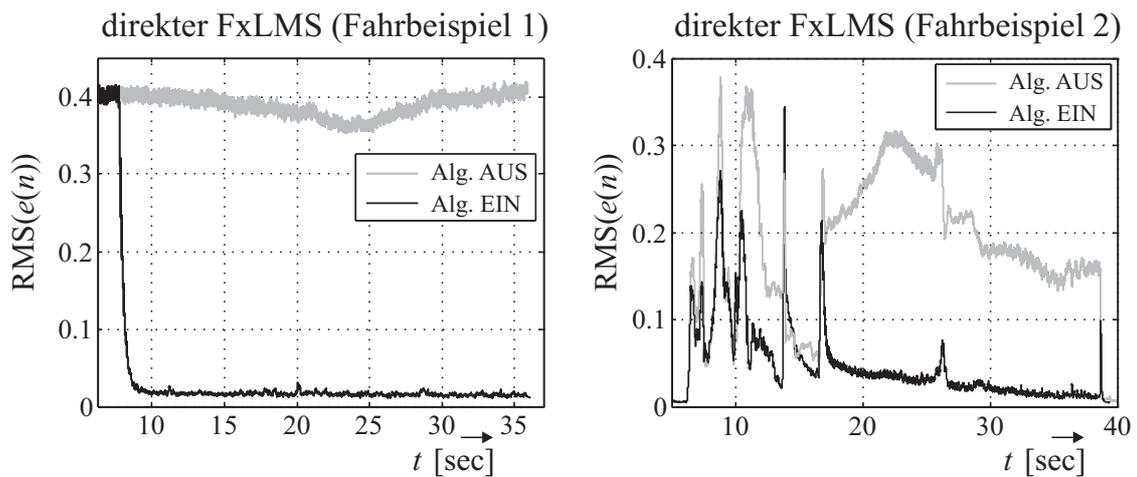


Bild 8.7: Dämpfung des direkten FxLMS-Algorithmus für konstante Geschwindigkeit und einen Beschleunigungsvorgang (Fahrbeispiele 1 und 2, Parameter gemäß Tabelle 8.2)

für annähernd konstante Frequenzen, sowie auch bei langsamen Steigungen der Grundfrequenz. Erst für steilere Frequenzflanken stellt sich, wie nach den bisherigen Ergebnissen auch zu erwarten war, eine Störverstärkung ein.

Die direkte Form konvergiert hier, hauptsächlich aufgrund der Tatsache, dass die meiste Schwingungsleistung in nur einer Harmonischen liegt, fast genauso schnell wie die parallele Form. Sie zeigt sich außerdem bei der gegebenen Anregung etwas

stabiler als die parallele Form. Entsprechend ist ein besserer Unterdrückungsgrad möglich. Weiterhin erzielt die direkte Form eine zuverlässigere Dämpfung bei variabler Grundfrequenz. Es tritt nahezu keine Störverstärkung auf.

Tabelle 8.2: Parametrierung des FxLMS-Algorithmus für die Anwendung mit Messdaten vom realen Kfz

Parameter	direkte Form	parallele Form
Schrittweite α	0,01	0,002
Schrittweitenbegrenzung $P_{\text{ref}}^{\text{min}}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Vergessensfaktor ν	1	0,99995
Abtastrate f_A	1 kHz	1 kHz
Anzahl L der Koeffizienten der (des) adaptiven Filter(s)	50	1

8.4 Schlussfolgerung

Im Mehrkanalfall bestätigen sich weitgehend die Ergebnisse der Einkanal-Untersuchungen. Auch hier konvergiert die parallele Form des FxLMS-Algorithmus einerseits bei stationärer Anregung schneller als die direkte Form, zeigt dafür aber andererseits auch schlechteres Verhalten bei instationärer Anregung. Speziell beim Einsatz mit realen Motormessdaten wurde allerdings zusätzlich eine Verschlechterung der erreichten Dämpfungsgüte der parallelen Form bei stationären Störsignalen festgestellt. Die Struktur zeigt sich hier empfindlich gegen Ungenauigkeiten des Grundfrequenz-Signals. Die direkte Form hingegen zeigte mit den verwendeten Messdaten eher ein verbessertes Verhalten, da in den Störsignalen eine einzelne Sinusschwingung sehr dominant war. Insgesamt verstärkt sich der Eindruck der Überlegenheit der direkten Form des FxLMS-Algorithmus.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation wurden grundsätzliche Untersuchungen und konkrete Ergebnisse zur Einrichtung von mechatronischen Gesamtsystemen zur aktiven Schwingungsdämpfung in Kfz-Motoraufhängungen vorgestellt. Es wurden dabei im Wesentlichen drei Themengebiete bearbeitet.

Den ersten Schwerpunkt der Arbeit bilden die Analyse des vorliegenden mechanischen Systems (Motoraufhängung mit Hilfsrahmen), die Planung und Einrichtung entsprechender Prüfstände zur aktiven Schwingungsdämpfung sowie eine ausführliche Analyse zur Wirkungsweise und Platzierung der Aktoren im Aufbau. Die grundsätzliche Untersuchung der Eigenschaften der Motoraufhängung bezüglich der Schwingungsübertragung wurde dabei größtenteils anhand eines Starrkörpermodells mit translatorischen Freiheitsgraden durchgeführt. Bereits mit diesem vergleichsweise einfachen Modell kann der grundsätzliche Vorteil des Einsatzes eines Hilfsrahmens, nämlich ein ausgeprägtes Tiefpassverhalten, gezeigt werden. Für eine Validierung und tiefergehende Einsichten in das Systemverhalten wurde ein FEM-Modell eingerichtet.

Speziell die Analyse zur Aktoranordnung wurde hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt möglichst geringer Leistungsaufnahme durchgeführt. Berücksichtigt wurden dabei sowohl die mechanische als auch die elektrische Leistung. Es stellte sich heraus, dass durch eine geschickte Einrichtung der Aktorik eine erhebliche Einsparung an Betriebsenergie möglich ist. Für eine spezielle Konfiguration konnte sogar das Potenzial eines Energiegewinns ausgemacht werden. Eine entscheidende Voraussetzung für die Nutzbarkeit dieser Einspar- bzw. Gewinnmöglichkeiten ist allerdings die Verwendung von geeigneten Aktortypen und Treiberelektroniken. Mit den im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Kraftaktoren ist eine entsprechende Energierückgewinnung nicht möglich. Da die Aktoren hier jedoch als Teil eines aktiven

Tilgers eingesetzt werden, bleibt ihre Energieaufnahme, zumindest im Bereich der mechanischen Resonanzfrequenz der Tilger, trotzdem moderat. Eine bezüglich des elektrischen Leistungsverbrauchs vorteilhafte Platzierung in der Motoraufhängung wurde ermittelt und schließlich am Prüfstand umgesetzt. Die Resultate der zunächst theoretischen Leistungsanalyse wurden sowohl durch experimentelle Ergebnisse am Prüfstand als auch durch die Ergebnisse der FEM-Modellierung bestätigt bzw. untermauert.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde eine Konvergenzanalyse zum Filtered-x-LMS-Algorithmus vorgestellt. Dieser kommt bei der algorithmischen Umsetzung der Vibrationsdämpfung in verschiedenen Varianten zum Einsatz und wurde hier speziell für den vorliegenden Anwendungsfall, d. h. für Anregung mit einer harmonischen Überlagerung von Sinusschwingungen, untersucht. Grundlage der Analyse war eine mathematische Beschreibung der Abweichung des enthaltenen adaptiven Filters von seinem Optimum. Aufbauend hierauf konnte das Fehlersignal durch ein exakt diagonalförmiges Zustandsraumsystem beschrieben werden, das allerdings noch unbekannte Größen enthielt. Um eine praktisch verwertbare Darstellung zu erhalten, wurde die Diagonalform des Systems aufgegeben, so dass eine Beschreibung ausschließlich durch bekannte Größen, zumindest in Näherung, möglich wurde. Als Endergebnis konnte zum ersten Mal eine einfache Formel für das abklingende Fehlersignal gewonnen werden, für deren verbleibende Unsicherheiten numerische Grenzwerte spezifiziert sind.

Durch den erhaltenen Formelausdruck wird das charakteristische Verhalten belegt, dass der FxLMS-Algorithmus bei der gegebenen Anwendung zeigt. Dieses besteht darin, dass seine Konvergenzgeschwindigkeit bei den einzelnen angeregten Frequenzen näherungsweise proportional ist zu der Leistung der entsprechenden Frequenzkomponenten des zugeführten gefilterten Referenzsignals. Dieser Zusammenhang stimmt unter bestimmten, in dieser Arbeit ermittelten Bedingungen exakt, bleibt aber in der festgestellten Näherung auch allgemein gültig. Aus der speziellen Konvergenzcharakteristik ergeben sich wichtige Schlussfolgerungen für die Effektivität des Algorithmus beim Einsatz an der Motoraufhängung.

Im dritten und letzten Teil der Arbeit wurde die Anpassung und Implementierung verschiedener Algorithmen speziell für die hier gegebene Anwendung beschrieben. Die Stärken und Schwächen der Algorithmen wurden aufgezeigt und ihre Performance am Prüfstand, insbesondere auch für instationäre Anregung, verglichen. Ne-

ben einer klassischen Regelung kamen hierbei adaptive Störgrößenaufschaltungen mit nichtrekursiven und rekursiven Filtern zum Einsatz. Als alternatives Verfahren aus der modernen Regelungstechnik wurde eine Schwingungsdämpfung mittels Störbeobachter untersucht.

Die klassische Regelung zeigte hierbei Stärken bezüglich des Rechenaufwands und des Verhaltens bei instationärer Anregung. Eine Eignung für den Einsatz in der Praxis ist aber unwahrscheinlich sobald wesentliche Zeitvarianzen der Regelstrecke auftreten, die von der Reglerstruktur nicht berücksichtigt werden können.

Als besser geeignet stellten sich die adaptiven Störgrößenaufschaltungen mit nichtrekursiven Filtern heraus. Diese wurden unter Anwendung des FxLMS-Algorithmus realisiert. Neben der klassischen, direkten Struktur kam dabei die parallele Form zum Einsatz. Letztere zeigte sich besonders effektiv bei der Dämpfung stationärer Anregung. Bereits für vergleichsweise langsam zeitveränderliche Störfrequenzen wurde dagegen aber eine wesentlich verschlechterte Dämpfung, bzw. für moderat schnelle Frequenzänderungen sogar eine deutliche Störverstärkung festgestellt. Eine weitere Problematik kann sich für die parallele Form bei der Anwendung im realen Kraftfahrzeug daraus ergeben, dass eine relativ genaue Kenntnis der Störfrequenzen vorliegen muss, um den im stationären Fall potentiell hohen Wirkungsgrad tatsächlich erreichen zu können. Infolge kann zusätzlicher, unerwünschter Hardwareaufwand erforderlich sein.

Die direkte Anwendungsform des FxLMS-Algorithmus zeigte ein gutmütigeres Verhalten gegenüber instationärer Anregung. Der Dämpfungsgrad nimmt für zunehmende Änderungsgeschwindigkeit der Störfrequenzen nur vergleichsweise langsam ab, und es tritt auch für sehr schnelle Änderungen nahezu keine Störverstärkung auf. Gegebenenfalls nachteilig ist das typische Konvergenzverhalten der direkten Form: Frequenzen, die im gefilterten Referenzsignal stark vertreten sind, werden zwar schnell und effektiv unterdrückt, schwach oder gar nicht angeregte Frequenzen klingen aber nur langsam bzw. überhaupt nicht ab. Diese Problematik kann jedoch vermieden werden, wenn die sekundäre Strecke in der Motoraufhängung geeignet eingerichtet wird. Gelingt es, in den für die Schwingungsdämpfung wichtigen Frequenzbereichen eine gute Übertragung zu gewährleisten, so wird in der Regel auch eine ausreichend starke Anregung durch das gefilterte Referenzsignal erfolgen. Ein effektiver Betrieb des FxLMS-Algorithmus kann dann sichergestellt werden. Der Einsatz des direkten FxLMS-Algorithmus ist des Weiteren unproblematisch bei Be-

triebsarten des Motors, bei denen nahezu ausschließlich eine einzige Frequenz ange-regt wird. In diesem Fall wird die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus durch die in Abschnitt (2.3.7) beschriebene Schrittweitenormierung individuell auf die je-weilige Frequenz angepasst. Übertragungsnullstellen der sekundären Strecke in den relevanten Frequenzbereichen sind aber natürlich auch in diesem Fall zu vermeiden.

Die ebenfalls untersuchte Störgrößenaufschaltung mittels eines rekursiven adap-tiven Filters führte, auch bei deutlich erhöhtem Rechen- und Speicheraufwand, zu keiner wesentlichen Verbesserung gegenüber der direkten Form des FxLMS-Algorithmus.

Eine Alternative zu den zuvor beschriebenen Verfahren ist der Einsatz eines Störbeobachters. Unter Verwendung eines Gain-Schedulings kann mit diesem ei-ne effektive Unterdrückung stationärer Störungen erreicht werden. Für instationäre Anregung wurde allerdings, zumindest mit der im Rahmen dieser Arbeit imple-mentierten Form, eine noch etwas weniger gute Performance erreicht, als mit dem parallel eingesetzten FxLMS-Algorithmus. Interessant war an der verwendeten Im-plementierung, dass ein Einsatz mit nur geringem Rechenaufwand bei gleichzeitig niedriger Abtastrate möglich war.

Die experimentelle Analyse der verschiedenen Algorithmen erfolgte zunächst am Einkanalprüfstand. Speziell die direkte und die parallele Form des FxLMS-Algorithmus wurden aber auch zu zentralen Mehrkanalsystemen erweitert, wobei sich die Ergebnisse vom Einkanalfall weitgehend bestätigten. Insbesondere wurde auch das Verhalten für Anregung mit Motor-Messdaten vom realen Kfz untersucht.

Eine abschließende Beurteilung der verschiedenen Algorithmen kann hier nur be-dingt vorgenommen werden, da für eine endgültige Bewertung Informationen vom je-weils konkret verwendeten Fahrzeug- und Motortyp berücksichtigt werden müssten. Insgesamt erscheint aber, insbesondere bei Annahme einer eher dynamischen Fahr-weise, der FxLMS-Algorithmus in direkter Form am ehesten geeignet für den Ein-satz am realen Kraftfahrzeug. Eine zusätzliche Verbesserungsmöglichkeit für dessen Betrieb, die in dieser Arbeit noch nicht behandelt wurde, wäre eine Schrittweiten-steuerung [52, 57, 1] zur weiteren Beschleunigung der Konvergenz. Interessant für zukünftige Untersuchungen wären auch die relativ jungen Methoden der so genann-ten affinen Projektion. Diese versprechen, im Vergleich zum FxLMS-Algorithmus, verbesserte Konvergenz ohne übermäßige Erhöhung des Rechenaufwands [15, 7]. Insbesondere eignen sie sich gut für den Einsatz in Mehrkanalsystemen.

Anhang A

Liste der verwendeten Formelzeichen

Kapitel 2 (Wichtige Elemente der digitalen Signalverarbeitung)

Grundlegendes:

f_A	Abtastfrequenz
T_A	Abtastperiode
f_{\max}	maximal auftretende Signalfrequenz
n	diskrete Zeit, normiert auf Abtastperiode
b_i	Zählerkoeffizienten, zeitdiskretes System
a_i	Nennerkoeffizienten, zeitdiskretes System
$y(n)$	Ausgangssignal, zeitdiskretes System
$u(n)$	Eingangssignal, zeitdiskretes System
$N_b - 1$	Anzahl, Zählerkoeffizienten (diskretes System)
N_a	Anzahl, Nennerkoeffizienten (diskretes System)
N	Systemordnung (diskretes System)
N_t	diskrete Totzeit
$G(z)$	Übertragungsfunktion, IIR-Filter
K	Konstante Zahl in verschiedenen Zusammenhängen

Systemidentifikation:

$\tilde{y}(n)$	Schätzwert, Ausgangssignal
$\epsilon(n)$	Schätzfehler
J	Gütemaß
Θ	Parametervektor
Φ	Messwertmatrix
$e(n)$	Störung im Systemmodell (Parameteridentifikation)
$u_{\text{id}}(n)$	Testsignal zur Parameteridentifikation
$K_{\text{Crest}}(u_{\text{id}}(n))$	Crest-Faktor des Testsignals

Parameteradaption mittels LMS-Algorithmus:

$P(z)$	primäre Strecke
$S(z)$	sekundäre Strecke
$W(z)$	adaptives FIR-Filter
$w_i(n)$	FIR-Filterkoeffizienten
$\mathbf{w}(n)$	Vektor mit den Filterkoeffizienten
\mathbf{w}_{opt}	optimales Filter
L	Anzahl, FIR-Filterkoeffizienten
$e(n)$	Fehlersignal
$x(n)$	Referenzsignal
$\mathbf{x}(n)$	Referenzvektor
$d(n)$	Störsignal
\mathbf{p}	Kreuzkorrelationsvektor der Signale $d(n)$ und $x(n)$
\mathbf{R}	Autokorrelationsmatrix des Signals $x(n)$
$\xi(n)$	Gütemaß der Adaption
$\nabla\xi(n)$	Gradient des Gütemaßes
μ	Schrittweite der Adaption
$\mathbf{u}(n)$	Abweichung des adaptiven FIR-Filters vom optimalen Filter
Λ_R	Eigenwertmatrix zu \mathbf{R}
λ_i^R	Eigenwerte von \mathbf{R}
λ_{max}^R	größter Eigenwert von \mathbf{R}
\mathbf{V}	Eigenvektormatrix zu \mathbf{R}
\mathbf{v}_i	Eigenvektoren von \mathbf{R}
$\mathbf{z}(n)$	Zustandsvektor des diagonalisierten Systems zur Beschreibung der Abweichung des adaptiven Filters $\mathbf{w}(z)$ vom optimalen Filter \mathbf{w}_{opt}

P_x	mittlere Leistung des Signals $x(n)$
τ_i	Zeitkonstanten des Adaptionprozesses
α	normierte Schrittweite
ν	Vergessensfaktor
$P_{\text{ref}}^{\text{min}}$	untere Grenze der bei der LMS-Schrittweitenormierung zugelassenen Leistung des Referenzsignals

Kapitel 3 (Methoden der aktiven Schwingungsdämpfung)

$\bar{T}(s)$	Empfindlichkeitsfunktion (sensitivity function)
δ	Differenzordnung
$y_f(n)$	Ausgangssignal der sekundären Strecke in der Störgrößenaufschaltung
$y_p(n)$	Ausgang der primären Strecke in der Identifikationsstruktur (konstante Störgrößenaufschaltung)
$y_s(n)$	Ausgang der sekundären Strecke in der Identifikationsstruktur (konstante Störgrößenaufschaltung)
n_S	diskrete Totzeit, normiert auf die Abtastperiode T_A
$\hat{S}(z)$	Modell der sekundären Strecke
$x_f(n)$	gefiltertes Referenzsignal
t_S	Totzeit der sekundären Strecke
Δ_φ	Fehler des Phasenwinkels des Modells der sekundären Strecke
$B(z)$	Zählerpolynom, IIR-Filter im FuLMS-Algorithmus
$A(z) + 1$	Nennerpolynom, IIR-Filter im FuLMS-Algorithmus
L_b	Anzahl, Zählerkoeffizienten
L_a	Anzahl, Nennerkoeffizienten
$\mathbf{y}(n)$	Signalvektor im FuLMS-Algorithmus
$\mathbf{u}(n)$	Verallgemeinerter Referenzvektor im FuLMS-Algorithmus
$\hat{s}(n)$	Modell der sekundären Strecke im Zeitbereich
$C(z)$	Glättungsfilter im SHARF

Kapitel 4 (Prüfstände zur experimentellen Analyse)

x, y, z	Raumkoordinaten
c_1	Federkonstante, „Chassis“ zu Inertialsystem
d_1	Dämpferkonstante, „Chassis“ zu Inertialsystem
c_2	Federkonstante, Hilfsrahmen zu „Chassis“
d_2	Dämpferkonstante, Hilfsrahmen zu „Chassis“

c_3	Federkonstante, „Motor“ zu Hilfsrahmen
d_3	Dämpferkonstante, „Motor“ zu Hilfsrahmen
m_1	Masse, „Chassis“
m_2	Masse, Hilfsrahmen
m_3	Masse, „Motor“
$F(t)$	Kraft am Motor
$x_1(t)$	Auslenkung des „Chassis“ (vertikal)
$x_2(t)$	Auslenkung des Hilfsrahmens (vertikal)
$x_3(t)$	Auslenkung des Motors (vertikal)
f_{Mot}	Drehfrequenz des Motors [Hz]
$x(t)$	verallgemeinerte Störanregung
f_0	Grundfrequenz der Störanregung
T_0	Grundperiode der Störanregung
M	Anzahl angeregter Frequenzen
ω	fundamentale Kreisfrequenz
\hat{x}_m	Amplitude der m -ten Frequenz
φ_{x_m}	Phasenverzögerung der m -ten Frequenz
c_A	Federkonstante
d_A	Dämpferkonstante
m_A	Masse des aktiven Tilgers
R	ohmscher Widerstand der Spule
L	Induktivität der Spule
N	Anzahl der Spulenwicklungen im Spalt
l	Spulenumfang
B	magnetische Flussdichte
$x_A(t)$	Auslenkung der Aktormasse (vertikal)
$v_A(t)$	Geschwindigkeit der Aktormasse (vertikal)
$F_A(t)$	Kraft eines Kraftaktors
$F_{\text{ges}}(t)$	Gesamtkraft eines aktiven Tilgers
$i_A(t)$	Aktorstrom
$u_A(t)$	Aktorspannung
$u_{\text{ind}}(t)$	induzierte Gegenspannung
f_{mech}	Resonanzfrequenz, Aktor
f_{el}	elektrische Grenzfrequenz, Aktor

Kapitel 5 (Effizienzanalyse zur Auswahl der Aktorplatzierungen)

$m1A, m2A, m3A$	Aktoranordnungen für Kraftausgleich
$m12, m13, m23$	Aktoranordnungen für Wegausgleich
$v_A(t)$	Relativgeschwindigkeit der Aktormasse
$i'_A(t)$	Gesamtstrom für vier Aktoren
$F'_A(t)$	Gesamtkraft von vier Aktoren
$G_{F'_A}(s)$	Übertragung, $F(s) \rightarrow$ Aktorkraft $F'_A(s)$
$G_{v_A}(s)$	Übertragung, $F(s) \rightarrow$ Aktorgeschwindigkeit $V_A(s)$
$G_{u_A}(s)$	Übertragung, $F(s) \rightarrow$ Aktorspannung $U_A(s)$
$G_{i'_A}(s)$	Übertragung, $F(s) \rightarrow$ Aktorstrom $I'_A(s)$
$P_{\text{mech}}(t)$	Momentanwert der mechanischen Leistung
$P_{\text{el}}(t)$	Momentanwert der elektrischen Leistung
$\bar{P}_{\text{mech}}(t)$	mittlere mechanische Leistung
$\bar{P}_{\text{el}}(t)$	mittlere elektrische Leistung
$\bar{P}_{\text{mech}}^+(t)$	mittlere positive mechanische Leistung
$\bar{P}_{\text{el}}^+(t)$	mittlere positive elektrische Leistung
$P_{\text{mech}}^+(t)$	positive mechanische Leistung
$P_{\text{el}}^+(t)$	positive elektrische Leistung
$\bar{P}_{\text{mech}}^{\text{ges}}(t)$	mittlere mechanische Leistung im gesamte Frequenzspektrum
$\bar{P}_{\text{el}}^{\text{ges}}(t)$	mittlere elektrische Leistung im gesamte Frequenzspektrum
T	Zeitintervall
$\delta_{Fv}(\omega)$	Phasendifferenz von Aktorkraft und Aktorgeschwindigkeit
$\delta_{ui}(\omega)$	Phasendifferenz von Aktorspannung und Aktorstrom
ω_{min}	minimale relevante Störfrequenz
ω_{max}	maximale relevante Störfrequenz
$K_{\text{mech}}(\omega)$	inverses Effizienzspektrum, mechanisch
$K_{\text{el}}(\omega)$	inverses Effizienzspektrum, elektrisch

Kapitel 6 (Konvergenzanalyse des FxLMS-Algorithmus)

$\mathbf{x}_f(n)$	Vektor des gefilterten Referenzsignals
\hat{x}_{f_m}	Amplituden der Frequenzkomponenten des gefilterten Referenzsignals
$\hat{\mathbf{X}}_f$	Diagonalmatrix mit den \hat{x}_{f_m} in der Hauptdiagonalen
φ_m	Phasen der Frequenzkomponenten des gefilterten Referenzsignals
ω	fundamentale Winkelfrequenz

$\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_b, \mathbf{V}_r$	Eigenvektormatrizen zu \mathbf{R}
$\mathbf{\Lambda}_{R_a}, \mathbf{\Lambda}_{R_b}$	Eigenwertmatrizen zu \mathbf{R}
\hat{d}_m	Amplituden der Frequenzkomponenten des Störsignals $d(n)$
φ_{d_m}	Phasen der Frequenzkomponenten des Störsignals $d(n)$
$\bar{e}(n)$	Fehlersignal mit zeitlich gemittelter Konvergenz
$\varphi_{\bar{e}_m}(n)$	Phasen der Frequenzkomponenten des Signals $\bar{e}(n)$
$P_m^{x_f}$	Leistung des gefilterten Referenzsignals bei der m -ten Frequenz.
P_{x_f}	Gesamtleistung des gefilterten Referenzsignals
$\tilde{\varphi}_m, \tilde{\mathbf{V}}_a, \tilde{\mathbf{V}}_b, \boldsymbol{\alpha}(n), \boldsymbol{\beta}(n), \mathbf{d}_{\sin}, \mathbf{d}_{\cos}, a_m(n), b_m(n), \boldsymbol{\alpha}_{\cos}(n), \boldsymbol{\beta}_{\sin}(n), \mathbf{Q}^a, \mathbf{Q}^b, \mathbf{A}^n$	
$\mathbf{B}^n, \mathbf{L}_a^n, \mathbf{L}_b^n$	mathematische Hilfsgrößen

Kapitel 7 (Performancevergleich von vier Algorithmen)

$S_c(s)$	(sekundäre) Strecke, zeitkontinuierlich
$R_c(s)$	Regler, zeitkontinuierlich
$\Theta_{i,j}$	Massenträgheitsmoment
$\varphi_{i,j}$	Winkelauslenkung
K	Verstärkungsfaktor, proportionale Rückführung
T_1	Zeitkonstante
T_2	Zeitkonstante
V_R	stationäre Reglerverstärkung
T_t	Streckentotzeit
$G_t(s)$	Übertragungsfunktion der Streckentotzeit T_t
$G_t(s)$	Angenäherte Übertragungsfunktion der Streckentotzeit
$\phi_m(n)$	Argumente der Referenz-Sinusfunktionen
$x_T(n)$	Tachometersignal
$G_T(z)$	Übertragung vom Tachometersignal zum ursprünglichen Referenzsignal
$P_T(z)$	fiktive primäre Strecke mit Eingang $x_T(n)$
$x_{T_f}(n)$	Tachometersignal nach Filterung mit $\hat{S}(z)$
α_a	Schrittweite, rekursiver Teil im FuLMS-Algorithmus
α_b	Schrittweite, nichtrekursiver Teil im FuLMS-Algorithmus
\mathbf{A}_z	Dynamikmatrix des Störmodells
\mathbf{c}_z	Ausgangsvektor des Störmodells
$\mathbf{x}_z(n)$	Zustandsvektor des Störmodells

$z(n)$	Ausgangssignal des Störmodells
\mathbf{A}	Dynamikmatrix der sekundären Strecke
\mathbf{b}	Eingangsvektor der sekundären Strecke
\mathbf{c}	Ausgangsvektor der sekundären Strecke
$\mathbf{x}(n)$	Zustandsvektor der sekundären Strecke
$y(n)$	Ausgangssignal der sekundären Strecke
\mathbf{A}_s	Dynamikmatrix, Gesamtmodell für Störbeobachter
\mathbf{b}_s	Eingangsvektor, Gesamtmodell für Störbeobachter
\mathbf{c}_s	Ausgangsvektor, Gesamtmodell für Störbeobachter
$\mathbf{x}_s(n)$	Zustandsvektor, Gesamtmodell für Störbeobachter
\mathbf{l}	Korrekturvektor des Störbeobachters
\mathbf{l}_z	Anteil des Korrekturvektors, der der Störung zugeordnet ist
\mathbf{l}_{sec}	Anteil des Korrekturvektors, der der sekundären Strecke zugeordnet ist
$u_z(n)$	Ausgangssignal des Störmodells, von Beobachter geschätzt
P	Anzahl von Frequenzbereichen für das Beobachter-Gain Scheduling

Kapitel 8 (Erweiterung zum Mehrkanalfall)

$\mathbf{P}(z), \mathbf{S}(z), \hat{\mathbf{S}}(z), \mathbf{W}(z)$	Entsprechungen der Systeme $P(z)$, $S(z)$, $\hat{S}(z)$ und $W(z)$ im Mehrkanalfall
$\mathbf{d}(n), \mathbf{e}(n), \mathbf{y}(n), \mathbf{X}_{T_f}(n)$	Entsprechungen der Signale $d(n)$, $e(n)$, $y(n)$ und $x_{T_f}(n)$ im Mehrkanalfall

Anhang B

Zu den Prüfständen

B.1 Parameter

In den folgenden Tabellen sind die physikalischen Parameter des Mehrkanalprüfstands (s. Abschnitt 4.2) und der zur Vibrationskompensation installierten Aktoren aufgelistet. Das Chassis entspricht im Prüfstand dem eingefügten Zwischenrahmen, der Motor dem Stahlblock mit dem aufgesetzten Störaktor.

Tabelle B.1: Parameter des Mehrkanalprüfstands

Parameter	Wert	Beschreibung
$c_1 = 770 \cdot 10^3$	[N/m]	Federkonstante, „Chassis“ zu Inertialsystem
$d_1 = 260$	[Ns/m]	Dämpferkonstante, „Chassis“ zu Inertialsystem
$c_2 = 521 \cdot 10^3$	[N/m]	Federkonstante, Hilfsrahmen zu „Chassis“
$d_2 = 47$	[Ns/m]	Dämpferkonstante, Hilfsrahmen zu „Chassis“
$c_3 = 277 \cdot 10^3$	[N/m]	Federkonstante, „Motor“ zu Hilfsrahmen
$d_3 = 109$	[Ns/m]	Dämpferkonstante, „Motor“ zu Hilfsrahmen
$m_1 = 21$	[kg]	Masse, „Chassis“
$m_2 = 20$	[kg]	Masse, Hilfsrahmen
$m_3 = 50$	[kg]	Masse, „Motor“

Tabelle B.2: Parameter der Aktoren zur Schwingungsauslöschung

Parameter	Wert	Beschreibung
$c_A = 4,9 \cdot 10^4$	[N/m]	Federkonstante
$d_A = 20$	[Ns/m]	Dämpferkonstante
$m_A = 2,56$	[kg]	Masse des aktiven Tilgers
$R = 3,5$	[Ohm]	ohmscher Widerstand der Spule
$L = 1,2 \cdot 10^{-3}$	[H]	Induktivität der Spule
$N = 15$	[1]	Anzahl der Spulenwicklungen im Spalt
$l = 0,245$	[m]	Spulenumfang
$B = 1,3$	[T]	magnetische Flussdichte

B.2 Identifizierte Streckenmodelle

Die unten stehenden Diagramme illustrieren die Frequenzgänge der Streckenmodelle, die am Einkanal- und Mehrkanal-Prüfstand als ARX-Modelle identifiziert wurden und in den Simulationen und Echtzeitanwendungen zum Einsatz kommen. Als Testsignal für die Identifikation wurde bandbegrenzt weißes Rauschen mit Frequenzanteilen im Bereich von etwa 20 bis 300 Hz verwendet. Die Amplituden- und Phasengänge der Modelle sind entsprechend nur in diesem Frequenzband sicher gültig. Die Streckenmodelle des Einkanalprüfstands wurden mit der Ordnung 40 identifiziert, die Strecken des Mehrkanalprüfstands mit der Ordnung 50. Diese relativ hohen Ordnungen sind insbesondere für das Einrichten von möglichst realitätsgetreuen Simulationsumgebungen sinnvoll. Innerhalb der im Rahmen der Arbeit untersuchten Algorithmen selbst können auch Modelle etwas niedrigerer Ordnung (z. B. 30) eingesetzt werden.

B.2.1 Strecken im Einkanalprüfstand

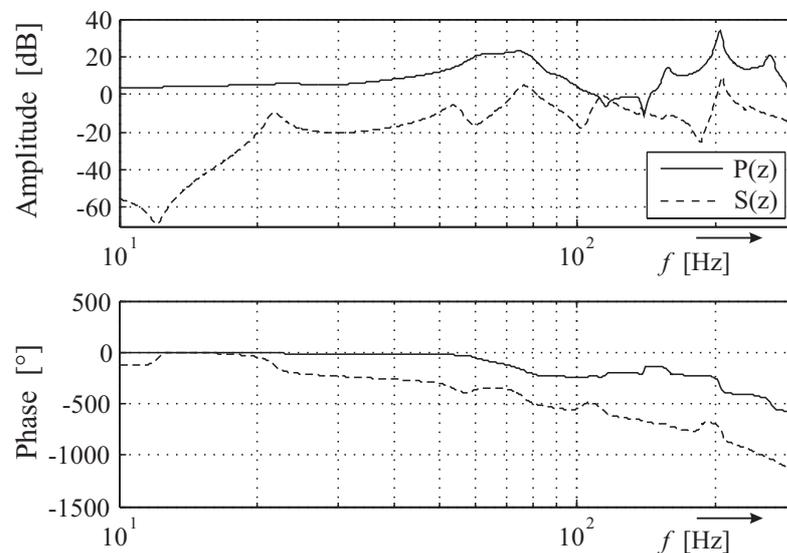
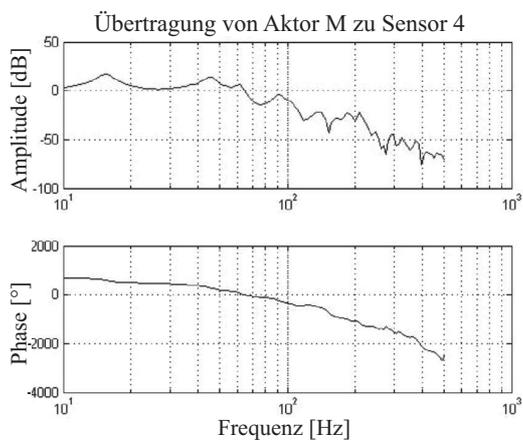
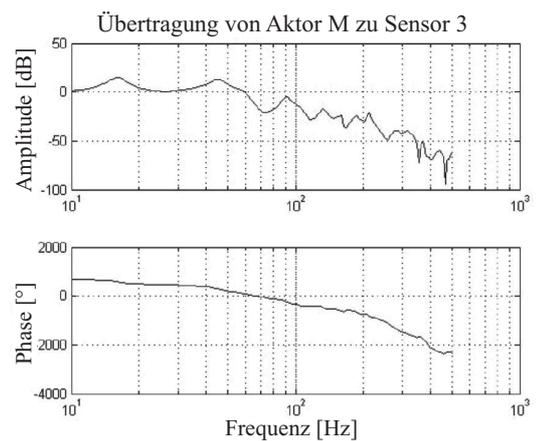
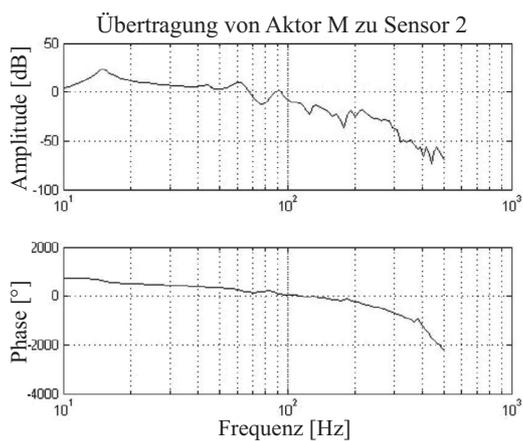
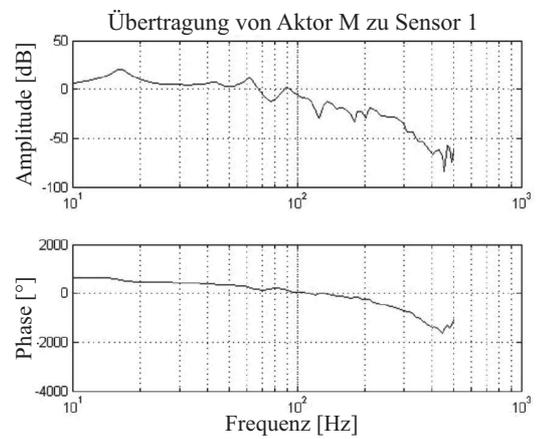
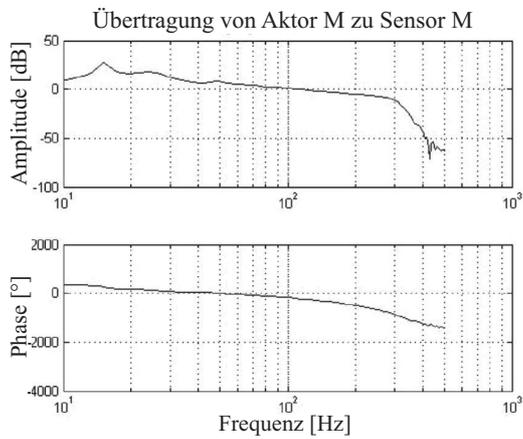


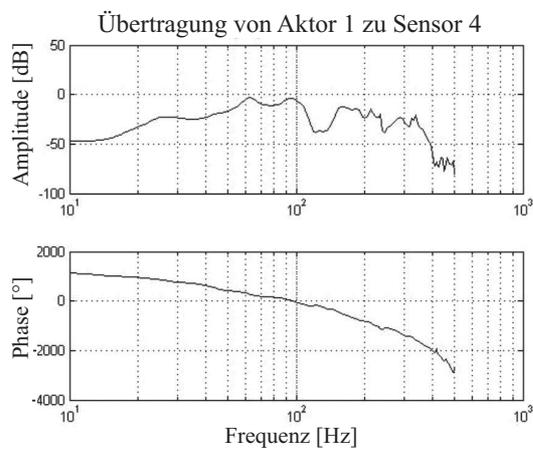
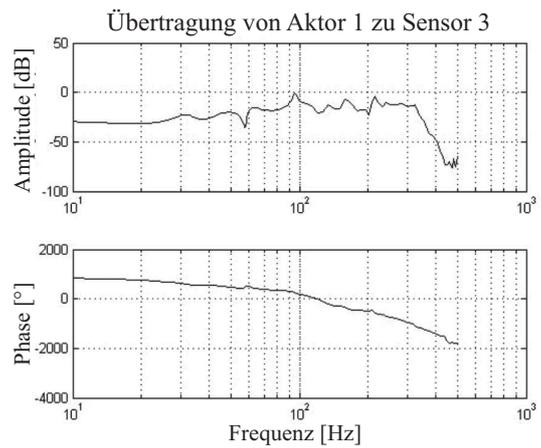
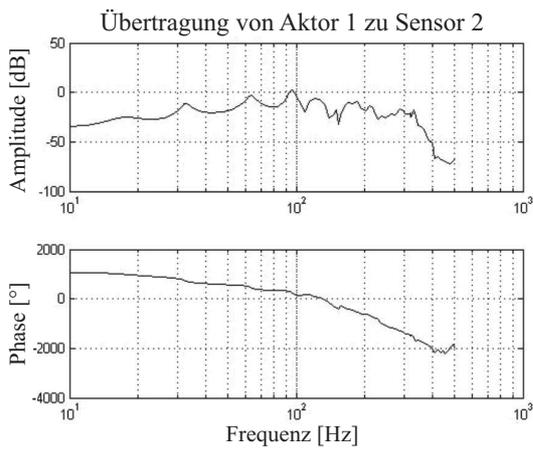
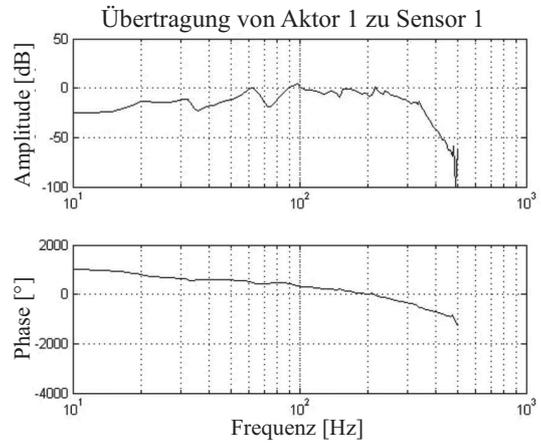
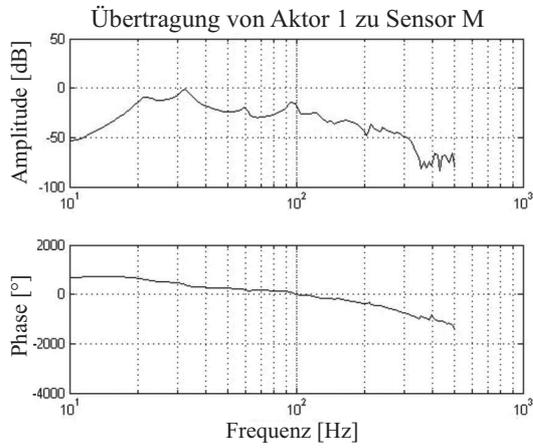
Bild B.1: Bode-Diagramme der eingesetzten primären und sekundären Strecke im Einkanalprüfstand

B.2.2 Strecken im Mehrkanalprüfstand

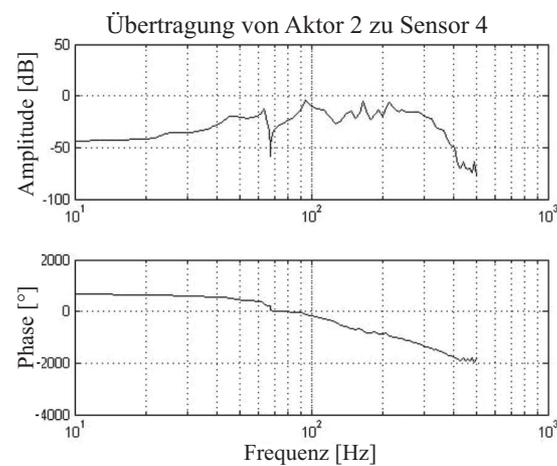
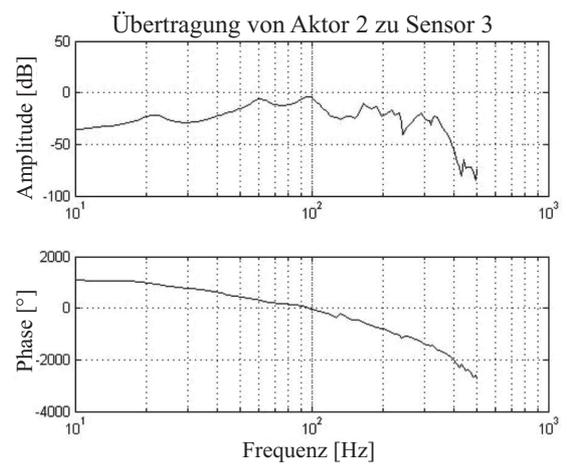
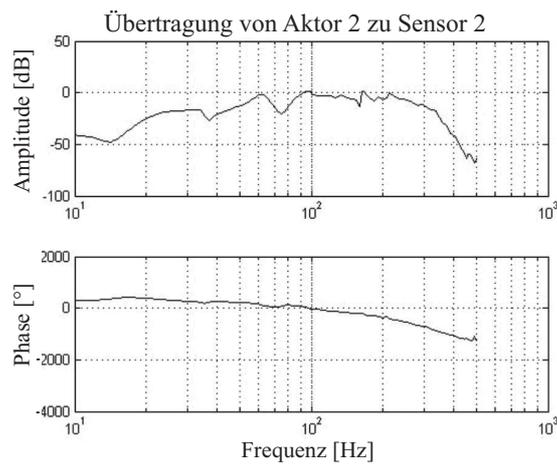
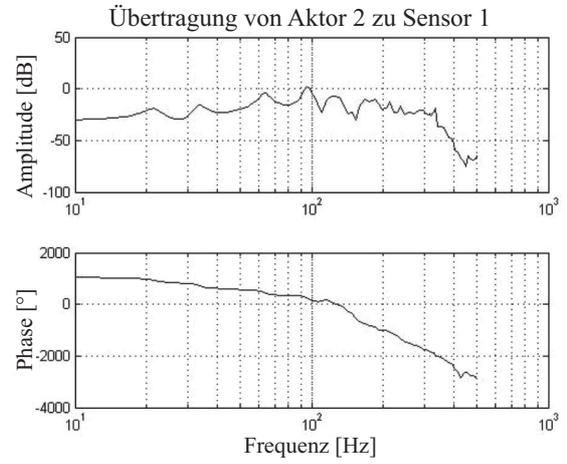
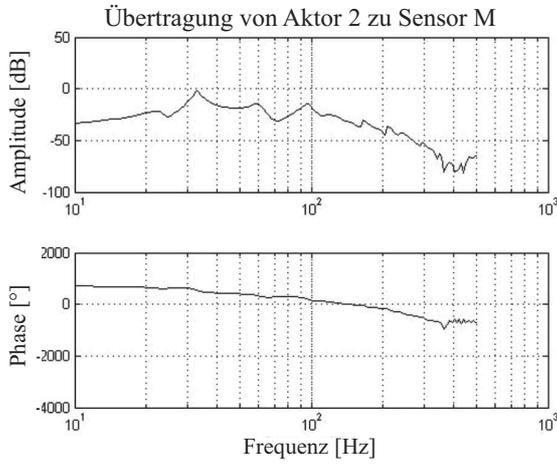
Übertragung von Aktor M (Störaktor)



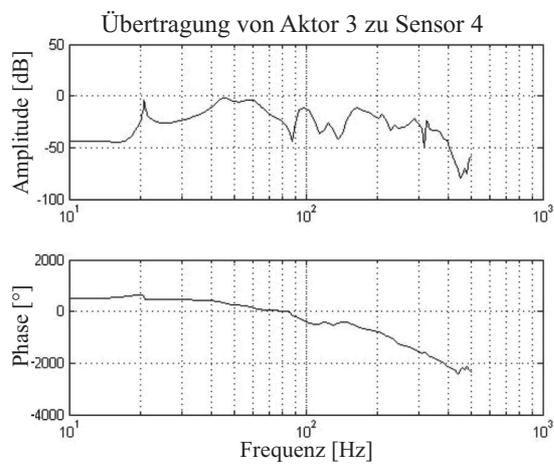
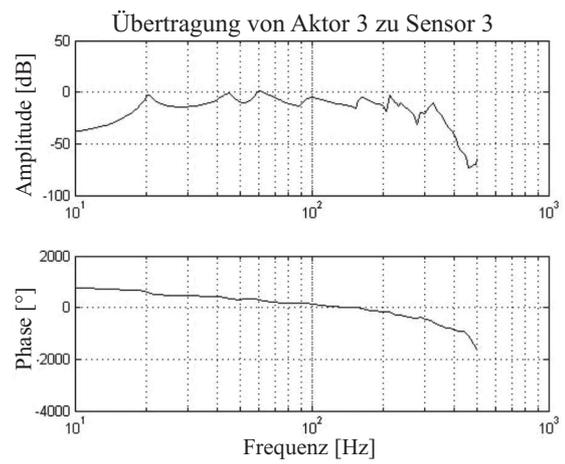
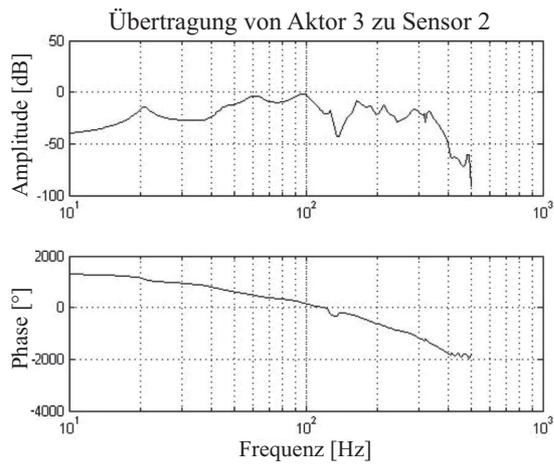
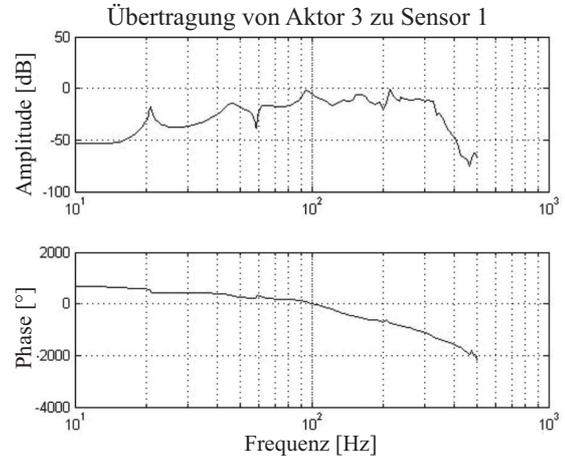
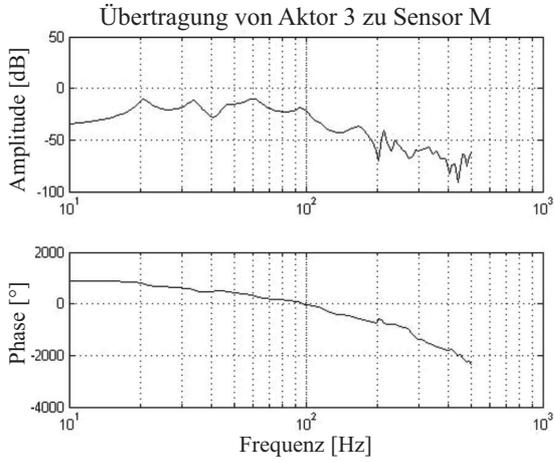
Übertragung von Aktor 1



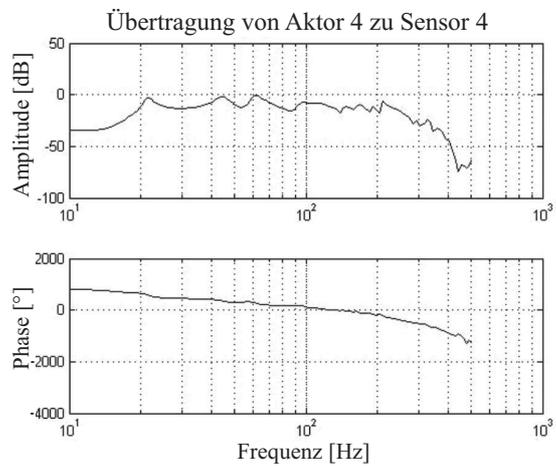
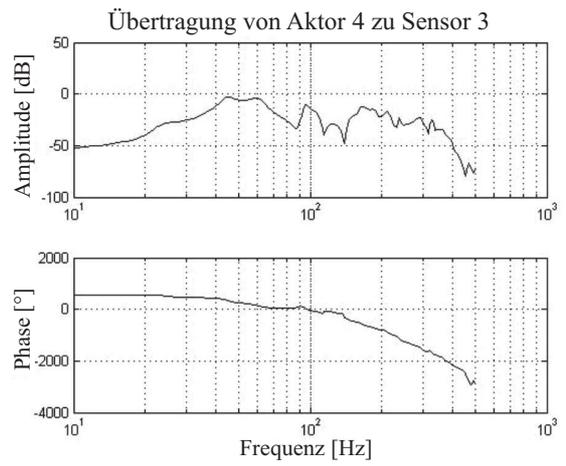
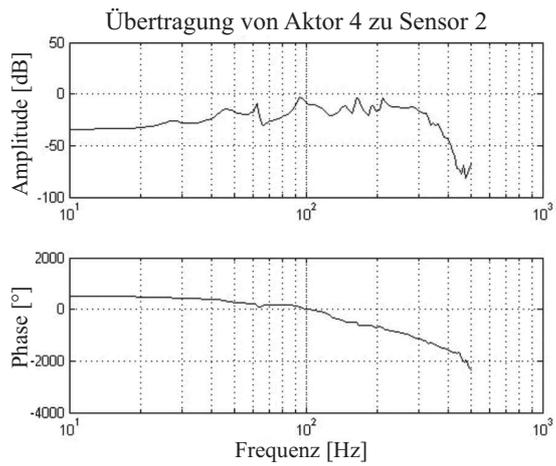
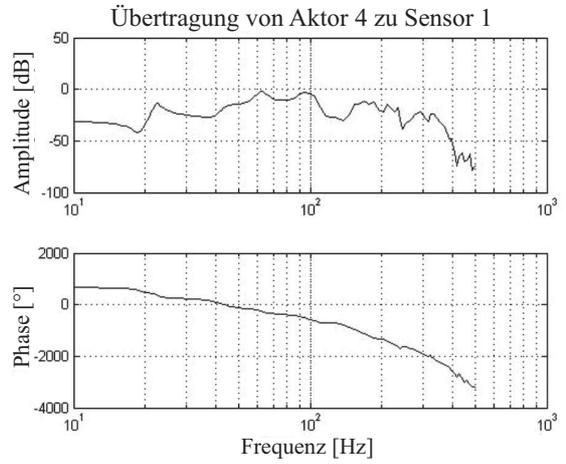
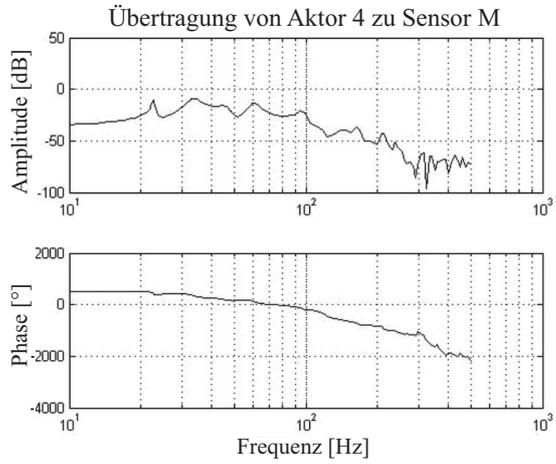
Übertragung von Aktor 2



Übertragung von Aktor 3



Übertragung von Aktor 4



Anhang C

Die Produkte $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$

Die Produkte $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ und $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$ liefern interessante Informationen für die Approximation des in Kapitel 6 betrachteten Konvergenzvorgangs. Zuzufolge der in (6.16) gegebenen Definition ist $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ eine Matrix mit den Elementen

$$\tilde{\mathbf{v}}_{a_i}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_j} = \sum_{l=0}^{L-1} \sin(-i\omega l T_A + \varphi_i + \tilde{\varphi}_i) \cdot \sin(-j\omega l T_A + \varphi_j + \tilde{\varphi}_j) . \quad (\text{C.1})$$

Wegen der speziellen Werte (6.19) der Phase $\varphi_j + \tilde{\varphi}_j$ kann die hier gegebene Summe durch

$$\tilde{\mathbf{v}}_{a_i}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_j} \approx 2 \int_{l=0}^{L/2} \sin(i\omega l T_A) \sin(j\omega l T_A) dl$$

angenähert werden.

Eine Anwendung des Additionstheorems $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ und Lösen des Integrals führen auf

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{a_i}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_j} &\approx \frac{\sin \left[(j - i) \omega \frac{L}{2} T_A \right]}{(j - i) \omega T_A} - \frac{\sin \left[(j + i) \omega \frac{L}{2} T_A \right]}{(j + i) \omega T_A} \\ &= \frac{L}{2} \left\{ \text{si} \left[(j - i) \omega \frac{L}{2} T_A \right] - \text{si} \left[(j + i) \omega \frac{L}{2} T_A \right] \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

wobei die Variable i die Zeilennummer und j die Spaltennummer des Matrizenproduktes $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ bezeichnet. Jede Zeile von $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ ist nun durch eine Überlagerung zweier si-Funktionen gegeben. Eine der si-Funktionen ist um die Zeilennummer i nach rechts verschoben, so dass ihr globales Maximum 1 auf der Hauptdiagonalen von $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ liegt. Die andere ist um die Zeilennummer i nach links verschoben und hat, insbesondere für höhere i , nur geringen Einfluss. Für die Einträge $\tilde{\mathbf{v}}_{a_i}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_i}$ der

Hauptdiagonalen ergibt sich infolge eine Abweichung vom Wert $L/2$, die für variierende ω und L gemäß $|L/2 - \tilde{\mathbf{v}}_{a_i}^T \tilde{\mathbf{v}}_{a_i}| \leq L/[(4m+1)\pi]$ begrenzt ist. Diese Grenzen, die auf der Approxiamtion (C.2) beruhen, liegen nahe bei denen, die aus (C.1) resultieren, solange die Filterlänge L groß ist.

Eine wichtige Eigenschaft der Matrix $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ ist, dass sie diagonal wird, falls das Verhältnis LT_A/T_0 ganzzahlig ist. In diesem Fall liegen die Nullstellen der si-Funktionen in (C.2) genau bei den ganzzahligen Werten j . Im Allgemeinen wird sich $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$ einer diagonalen Struktur annähern, wenn LT_A/T_0 viel größer wird als Eins. Dies ergibt sich nach (C.2), weil die si-Funktionen für zunehmende Werte von LT_A/T_0 gestaucht werden.

Für $\tilde{\mathbf{V}}_b^T \tilde{\mathbf{V}}_b$ ergeben sich analoge Ergebnisse wie für $\tilde{\mathbf{V}}_a^T \tilde{\mathbf{V}}_a$. Lediglich Gleichung (C.2) würde nicht die Differenz, sondern eine Summe zweier si-Funktionen enthalten.

Literaturverzeichnis

- [1] ABOULNASR, T. und K. MAYYAS: *A Robust Variable Step Size LMS-Type Algorithm: Analysis and Simulation*. IEEE Transactions on Signal Processing, 45(3):631–639, March 1997.
- [2] ÅSTRÖM, K. J., P. HAGANDER und J. STERNBY: *Zeros of Sampled Systems*. Automatica, 20(1):31–38, 1984.
- [3] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [4] BJARNASON, E.: *Analysis of the Filtered-X LMS algorithm*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 3(6):504–514, Nov. 1995.
- [5] BODE, H.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand Reinhold, New York, 1945.
- [6] BOHN, C., A. CORTABARRIA, V. HÄRTEL und K. KOWALCZYK: *Active Control of Engine-Induced Vibrations in Automotive Vehicles Using Disturbance Observer Gain Scheduling*. Control Engineering Practice, 12:1029–1039, 2004.
- [7] BOUCHARD, M.: *Multichannel affine and fast affine projection algorithms for active noise control and acoustic equalization systems*. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 11(1):54–60, January 2003.
- [8] BOUCHARD, M. und S. NORCROSS: *Computational load reduction of fast convergence algorithms for multichannel active noise control*. Signal Processing, 83:121–134, 2003.
- [9] BOUCHARD, M. und B. PAILLARD: *An Alternative Feedback Structure for the Adaptive Active Control of Periodic and Time-Varying Periodic Disturbances*. Journal of Sound and Vibration, 210(4):517–527, 1998.

-
- [10] BOUCHARD, M. und S. QUEDNAU: *Multichannel Recursive-Least-Squares Algorithms and Fast-Transversal-Filter Algorithms for Active Noise Control and Sound Reproduction Systems*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 8(5):606–618, 2000.
- [11] BRAESS, H.-H. und U. SEIFFERT: *Vieweg Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*. Vieweg, Wiesbaden, 2003.
- [12] CHAN, J.-T. H.: *Stabilization of Discrete System Zeros: An improved design*. International Journal of Control, 75(10):759–765, 2002.
- [13] CHAPLIN, G. W. B.: *The cancellation of repetitive noise and vibration*. In: *in Proc. Inter-Noise*, Seiten 699–702, Dec. 1980.
- [14] DOBRINSKI, P., G. KRAKAU und A. VOGEL: *Physik für Ingenieure*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [15] DOUGLAS, S. C.: *The fast affine projection algorithm for active noise control*. In: *29th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Seite 12451249, Oct. 1995.
- [16] DOUGLAS, S. C.: *Fast Implementations of the Filtered-X LMS and LMS Algorithms for Multichannel Active Noise Control*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 7(4):454–465, 1999.
- [17] ELLIOTT, S. J., C. C. BOUCHER und P. A. NELSON: *The behavior of a multichannel active control system*. IEEE Transactions on Signal Processing, 40(5):1041–1052, 1992.
- [18] ELLIOTT, S. J. und P. DARLINGTON: *Adaptive Cancellation of Periodic, Synchronously Sampled Interference*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 33(3):715–717, June 1985.
- [19] ELLIOTT, S. J. und P. A. NELSON: *Active Noise Control*. IEEE Signal Processing Magazine, Seiten 12–35, Oct. 1993.
- [20] ELLIOTT, S. J, I. M. STOTHERS und P. A. NELSON: *A Multiple Error LMS Algorithm and Its Application to the Active Control of Sound and Vibration*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-35(10):1423–1434, Oct. 1987.

-
- [21] ERIKSSON, L. J.: *Active Sound Attenuation Using Adaptive Digital Signal Processing Techniques*. PhD. dissertation, Univ. Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1985.
- [22] ERIKSSON, L. J.: *Development of the Filtered-U Algorithm for Active Noise Control*. Journal of the Acoustical Society of America, 89:257–265, 1991.
- [23] FEINTUCH, P. L.: *An Adaptive Recursive LMS Filter*. In: *Proc. IEEE*, Band 64, Seiten 1622–1624, 1976.
- [24] FLIEGE, N.: *Systemtheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [25] FLINT, E., M. E. EVERT, E. ANDERSON und P. FLANNERY: *Active/Passive Counter-Force Vibration Control and Isolation Systems*. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Aerospace Conference*, Paper #432, 2000.
- [26] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig, Heidelberg, 1994.
- [27] FREUDENBERG, J. S. und P. L. DOUGLAS: *Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30(6):555–565, 1985.
- [28] GLOVER, J. R.: *Adaptive Noise Canceling Applied to Sinusoidal Interferences*. IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-25(6):484–491, Dec. 1977.
- [29] GOLUB, G. H. und C. F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1989.
- [30] HANSEN, C. H. und S. D. SNYDER: *Active Control of Noise and Vibration*. E & FN Spon, London, 1997.
- [31] HATZL, S.: *Realisierung und Performance-Analyse von Mehrkanalsystemen zur aktiven Vibrationsdämpfung im Kfz*. Diplomarbeit - Technische Universität München, Lehrstuhl für Regelungstechnik, München, 2006.
- [32] HAUGER, W., W. SCHNELL und D. GROSS: *Technische Mechanik 3*. Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [33] HAYKIN, S.: *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 3. Auflage, 1996.

- [34] HILLIS, A. J., A. J. L. HARRISON und D. P. STOTEN: *A Comparison of Two Adaptive Algorithms for the Control of Active Engine Mounts*. Journal of sound and vibration, 286(1-2):37–54, Aug. 2005.
- [35] HO, C.-C. und C.-K. MA: *Active vibration control of structural systems by a combination of the linear quadratic Gaussian and input estimation approaches*. Journal of Sound and Vibration, 301(3-5):429–449, 2007.
- [36] HONG, J. und D. S. BERNSTEIN: *Bode Integral Constraints, Colocation, and Spillover in Active Noise and Vibration Control*. IEEE Transactions on Control System Technology, 6(1):110–120, 1998.
- [37] HORN, R. A. und C. R. JOHNSON: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [38] HOWARD, C. Q.: *Active isolation of machinery vibration from flexible structures*. PhD dissertation, The University of Adelaide, 1999.
- [39] HUBER, J.: *Implementierung einer klassischen Regelung zur aktiven Schwingungsdämpfung am KFZ*. Semesterarbeit - Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, München, 2006.
- [40] INMAN, D. J., P. A. TARAZAGA und A. SALEHIAN: *Active and Passive Damping of Structures*. In: *The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration*, Vienna, July 2006.
- [41] ISERMANN, R.: *Digitale Regelsysteme, Band I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.
- [42] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [43] JANOCHA, H.: *Aktoren*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [44] JANOCHA, H.: *Unkonventionelle Aktoren im Kraftfahrzeug*. Branchenforum Fahrzeugbau/Automatisierungstechnik - Zentrum für Innovative Produktion, 2004.
- [45] JENDRITZA, D. J.: *Technischer Einsatz neuer Aktoren*. Expert-Verlag, Renningen-Malmsheim, 1995.

-
- [46] JOHNSON, C. R. JR.: *A Convergence Proof for a Hyperstable Adaptive Recursive Filter*. IEEE Transaction on Information Theory, IT-25(6):745–749, 1979.
- [47] KAMMEYER, K. D. und K. KROSCHEL: *Digitale Signalverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [48] KOWALCZYK, K. und F. SVARICEK: *Experimental Robustness of FxLMS and Disturbance-Observer Algorithms for Active Vibration Control in Automotive Applications*. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prag, 2005*.
- [49] KUO, S. M. und B. FINN: *A General Multi-Channel Algorithm for 3-D Active Noise Control Systems*. In: *in Proc. Int. Cong. Recent Developments in Air-Structure-Borne Sound and Vibration*, Seiten 345–352, March 1992.
- [50] KUO, S. M. und D. R. MORGAN: *Active Noise Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [51] KUO, S. M. und A. B. PUVVALA: *Effects of Frequency Separation in Periodic Active Noise Control Systems*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 14(5):1857–1866, Sept. 2006.
- [52] KWONG, R. H. und E. W. JOHNSTON: *A Variable Step Size LMS Algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, 40(7):1633–1642, July 1992.
- [53] LARIMORE, M. G., J. R. TREICHLER und C. R. JR. JOHNSON: *SHARF: An Algorithm for Adapting IIR Digital Filters*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 28:428–440, 1980.
- [54] LJUNG, L.: *System Identification*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [55] LUEG, P.: *Process of silencing sound oscillations*. U.S. Patent 2,043,416, June 9, 1936.
- [56] MAJEED, K. N., HOYING J. F. ARWINE J. B.: *Active vibration control system for attenuating engine generated vibrations in a vehicle*. U.S. Patent 5332061 U.S. Patent 2,043,416, July 26, 1994.

- [57] MATHEWS, V. J. und Z. XIE: *A Stochastic Gradient Adaptive Filter with Gradient Adaptive Step Size*. IEEE Transactions on Signal Processing, 41(6):2075–2087, June 1993.
- [58] MEIROVITCH, L.: *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage, 1986.
- [59] MEIROVITCH, L.: *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- [60] MITSCHKE, M. und H. WALLENTOWITZ: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [61] MIU, D. K.: *Mechatronics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [62] MÜLLER, G. und C. GROTH: *FEM für Praktiker - Band 1*. Expert Verlag, Renningen, 2002.
- [63] MORGAN, D. R.: *An Analysis of Multiple Correlation Cancellation loops with a Filter in the auxiliary Path*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 28:454–467, August 1980.
- [64] MORGAN, D. R. und J. THI: *A Multitone Pseudocascade Filtered-X LMS Adaptive Notch Filter*. IEEE Transactions on Signal Processing, 41(2):946–956, 1993.
- [65] NAKAJI, Y., S. SATOH, T. KIMURA, T. HAMABE, Y. AKATSU und H. KAWAZOE: *Development of an active control engine mount system*. Vehicle System Dynamics, 32(2-3):185–198, Aug. 1999.
- [66] NASCIMENTO, V. H. und A. H. SAYED: *An Unbiased and Cost-Effective Leaky-LMS Filter*. In: *Proceedings of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Seiten 1078–1082, Oktober 1996.
- [67] NASCIMENTO, V. H. und A. H. SAYED: *Unbiased and Stable Leakage-Based Adaptive Filters*. IEEE Transactions on Signal Processing, 47(12):3261–3276, 1999.

- [68] OKADA, Y. und H. HARADA: *Regenerative Control of Active Vibration Damper and Suspension Systems*. In: *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan*, Seite 47154720, 1996.
- [69] OLSSON, C.: *Disturbance Observer-Based Automotive Engine Vibration Isolation Dealing With Non-linear Dynamics and Transient Excitation*. Technischer Bericht, Department of Information Technology, Uppsala Universitet, 2005.
- [70] OLSSON, C.: *Active Automotive Engine Vibration Isolation Using Feedback Control*. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2):162–176, 2006.
- [71] OPPENHEIM, A. V., R. W. SCHAFFER und J. R. BUCK: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Pearson Studium, München, 2004.
- [72] OPPENHEIM, A. V. und A. S. WILLSKY: *Signals & Systems*. Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, 1983.
- [73] PASCHEDAG, J.: *Implementierung einer Störgrößenaufschaltung zur aktiven Schwingungsdämpfung*. Diplomarbeit - Universität Bremen, Institut für Automatisierungstechnik, Bremen, 2003.
- [74] PASCHEDAG, J.: *Dämpfung der Motorvibrationen im Kfz mittels Filtered-x-LMS-Algorithmus: Implementierung am Prüfstand und Konvergenzanalyse*. Technical Reports on Automatic Control, Institute of Automatic Control — Technische Universität München, TRAC-2(1), 2007.
- [75] PASCHEDAG, J. und J. L. R. SCHWARZ: *Application of Feedforward Structures for Isolation of Car Engine Vibration*. In: *The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration*, Vienna, July 2006.
- [76] PFAFF, D. P., N. S. KAPSOKAVATHIS und N. A. PARKS: *Method for Actively Attenuating Engine Generated Noise*. U.S. Patent 146505, Sep. 8 1992.
- [77] RAITH, S.: *FEM-Modellierung eines Prüfstandes zur aktiven Schwingungsdämpfung an einer Kfz-Motoraufhängung*. Semesterarbeit - Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, München, 2007.
- [78] RILEY, B. und M. BODIE: *An Adaptive Strategy for Vehicle Vibration and Noise Cancellation*. In: *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference NAECON*, Band 2, Seiten 836–843, Mai 1996.

- [79] SCHMITZ, G.: *Mechatronik im Automobil II*. Expert Verlag, Renningen, 2003.
- [80] SCHWARZ, J. L. R.: *Einsatz von adaptiven IIR-Filtern in Feedforward-Strukturen zur aktiven Schwingungsdämpfung*. Semesterarbeit - Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, München, 2005.
- [81] SEBA, B.: *Vibration Attenuation in Car Chassis and Semi-Cantilever Beam Setups*. Dissertation, Universität Bremen, 2006.
- [82] SEBA, B., N. NEDELJKOVIĆ, J. PASCHEDAG und B. LOHMANN: *H_∞ Feedback Control and FXLMS Feedforward Control for Car Engine Vibration Attenuation*. Journal of Applied Acoustics, 66(3):277–296, 2005.
- [83] SHANNON, C. E.: *Communication in the Presence of Noise*. In: *Proc. IRE*, Band 37, Seiten 10–21, 1949.
- [84] SHYNK, J. J.: *Adaptive IIR Filtering*. IEEE ASSP Magazine, Seiten 4–21, Apr. 1989.
- [85] SIEVERS, L. A. und A. H. FLOTOW: *Comparison and Extension of Control Methods for Narrow-Band Disturbance Rejection*. IEEE Transactions on Signal Processing, 40(10):2377–2391, 1992.
- [86] SKOGESTAD, S. und I. POSTLETHWAITE: *Multivariable Feedback Control*. Wiley, West Sussex, 2005.
- [87] SNYDER, S. D. und C. H. HANSEN: *The Effect of Transfer Function Estimation Errors on the Filtered-X LMS Algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, 42(4):950–953, 1994.
- [88] STÖCKER, H.: *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1999.
- [89] STELZMANN, U., C. GROTH und G. MÜLLER: *FEM für Praktiker - Band 2: Strukturdynamik*. Expert Verlag, Renningen, 2002.
- [90] SVARICEK, F., C. BOHN, H.-J. KARKOSCH und V. HÄRTEL: *Aktive Schwingungskompensation im Kfz aus regelungstechnischer Sicht*. at-Automatisierungstechnik, 49(06):249–259, 2001.

-
- [91] SVARICEK, F. und K. KOWALCZYK: *Mechatronische Systeme zur Steigerung des Geräusch- und Schwingungskomforts in Kraftfahrzeugen*. atp - Automatisierungstechnische Praxis, 7:84–89, 2005.
- [92] TIETZE, U. und CH. SCHENK: *Halbleiterschaltungstechnik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [93] TOBIAS, O. J., J. C. M. BERMUDEZ und N. J. BERSHAD: *Mean weight behavior of the filtered-X LMS algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, 48(4):1061–1075, Apr. 2000.
- [94] TOBIAS, O. J. und R. SEARA: *Leaky-FXLMS algorithm: stochastic analysis for Gaussian data and secondary path modeling error*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 13(6):1217–1230, Nov. 2005.
- [95] TU, J.-H.: *Disturbance Observer Approach to Active Engine Vibration Control in Automotive Vehicles*. Semesterarbeit - Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2007.
- [96] TUSTIN, A.: *A Method of Analyzing the Behaviour of Linear Systems in Terms of Time Series*. J. Inst. Elect. Engineers, 94(IIA):130–142, 1947.
- [97] ULBRICH, H.: *Maschinendynamik*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 1996.
- [98] UNBEHAUEN, R.: *Grundlagen der Elektrotechnik 1*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [99] VERES, S. M.: *Model-based Control design for AVC*. In: *In Tokhi, M.O. and Veres, S.M. (eds.): Active sound and vibration control: theory and applications*, Seiten 135–158. Institute of Electrical Engineers, 2002.
- [100] VICENTE, L. und E. MASGRAU: *Novel FxLMS convergence condition with deterministic reference*. IEEE Transactions on Signal Processing, 54(10):3768–3774, Oct. 2006.
- [101] WIDROW, B., J. GLOVER, J. MCCOOL, J. KAUNITZ, C. WILLIAMS, R. HEARN, J. ZEIDLER, E. DONG JR und R. GOODIN: *Adaptive noise canceling: principles and applications*. In: *Proc. IEEE*, Band 63, Seiten 1692–1716, Dec. 1975.

- [102] WIDROW, B. und M. E. HOFF: *Adaptive switching circuits*. In: *1960 IRE WESCON Convention Record, New York IRE*, Seiten 96–104, 1960.
- [103] WIDROW, B. und S. D. STEARNS: *Adaptive Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1985.
- [104] YANG, J., Y. SUEMATSU und Z. KANG: *Two-Degree-of-Freedom Controller to Reduce the Vibration of Vehicle Engine-Body System*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 9(2):295–304, 2001.
- [105] YANG, J. N.: *Application of Optimal Control Theory to Civil Engineering Structures*. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 101(3):818–838, 1975.
- [106] YU, Y., N. G. NAGANATHAN und R. V. DUKKIPATI: *Review of Automotive Vehicle Engine Mounting Systems*. Int. J. Vehicle Design, 24(4):299–319, 2000.
- [107] YUAN, Y., N. S. KAPSOKAVATHIS, K. CHEN und S. M. KUO: *Active Noise Control System*. U.S. patent 5359662, Oct. 25 1994.
- [108] ZIEGLER, E. W.: *Selective Active Cancellation System for Repetitive Phenomena*. U.S. Patent 4878188, Oct. 31 1989.
- [109] ZURMÜHL, R. und S. FALK: *Matrizen 1*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

Eigene Veröffentlichungen

(Zum Teil bereits im Literaturverzeichnis aufgeführt)

Seba, B., Nedeljković, N., Paschedag, J. und Lohmann, B.: *H-infinity Feedback Control and FXLMS Feedforward Control for Car Engine Vibration Attenuation*. Journal of Applied Acoustics, Volume 66, Issue 3, Pages 277-296, March 2005.

Paschedag, J. und Koch, G.: *Comparison of Different Actuator Configurations for Active Isolation of Car Engine Induced Vibration Regarding Power Consumption*. Proceedings of the thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, 2006.

Paschedag, J. und Schwarz, J. L. R.: *Application of Feedforward Structures for Isolation of Car Engine Vibration*. Proceedings of the thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, 2006.

Paschedag, J. und Hatzl, S.: *Anwendung adaptiver Störgrößenaufschaltungen zur Dämpfung von Kfz-Motorvibrationen im Mehrkanalfall*. Tagungsband „Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik“, Hirschberg 2006.

Paschedag, J.: *Einsatz des Filtered-x-LMS-Algorithmus zur Dämpfung der Motorvibrationen im Kfz: Implementierung am Prüfstand und Konvergenzanalyse*. Technical Report on Automatic Control (TRAC), Lehrstuhl für Regelungstechnik an der Technischen Universität München, 2007.

Paschedag, J. und Koch, G.: *Energy saving Actuator Arrangements in an Actively Damped Engine Suspension System*. Angenommen bei: The 16th IFAC World Congress, Seoul, 2008.

Paschedag, J. und Lohmann, B.: *Error Convergence of the Harmonically Excited Filtered-X LMS Algorithm*. Angenommen bei: IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing.

Vorträge und Workshops:

Nedeljković, N. und Paschedag, J.: *ANC - Grenzen der Regelgüte und Aspekte der Implementierung*, 24. Kolloquium der Automatisierungstechnik in Salzhausen, Nov. 2002.

Paschedag, J.: *Modeling and Aspects of Applicability of Reaction Mass Actuators*, 26. Kolloquium der Automatisierungstechnik in Salzhausen, Nov. 2004.

Paschedag, J.: *Analyse verschiedener Aktorkonfigurationen zur aktiven Isolation der Motorvibrationen im Kfz, insbesondere bezüglich ihrer Leistungsaufnahme*, Regelungstechnischer Workshop auf Schloss Hirschberg, Dez. 2005.