

Technische Universität München  
Fakultät für Physik  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik

# **Gyrokinetische Simulation von Plasmaturbulenz mit gefangenen Teilchen und elektromagnetischen Effekten**

**Tilman Dannert**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik  
der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.-Prof. Dr. Katharina Krischer

Prüfer der Dissertation:

1. Hon.-Prof. Dr. Rolf Wilhelm
2. Univ.-Prof. Dr. Harald Friedrich

Die Dissertation wurde am 16.11.2004 bei der Technischen  
Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik  
am 18.01.2005 angenommen.

Gyrokinetische Simulation von Plasmaturbulenz  
mit gefangenen Teilchen und elektromagnetischen  
Effekten

Tilman Dannert

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der turbulente Transport in Fusionsplasmen mittels nichtlinearer ab-initio Simulationen untersucht. Dazu lösen wir das gyrokinetische Vlasov-Maxwell System numerisch. Der vorhandene GENE-Code wird grundlegend überarbeitet und durch die Verwendung neuer numerischer Verfahren stabiler und genauer gemacht. Außerdem wird durch den Einbau des magnetischen Spiegelterms in der Vlasogleichung die Behandlung von Teilchen, die in Magnetfeldsenken gefangen sind, ermöglicht. Damit kann die von gefangenen Elektronen getriebene Turbulenz (TEM-Turbulenz) untersucht werden. Deren grundlegende Eigenschaften werden erstmals systematisch analysiert, wobei wir eine Abhängigkeit des Transportes vom Sicherheitsfaktor finden, die experimenteller Beobachtung entspricht. Auch ein effektiver kritischer Temperaturgradient wird in nichtlinearen Rechnungen gefunden und dessen Variation mit dem Dichtegradienten analysiert. Weiter untersuchen wir die Abhängigkeit des Transportes von der magnetischen Verschierung und dem inversen Aspektverhältnis sowie dem Dichtegradienten. Es stellt sich heraus, dass man in den meisten Fällen diese Abhängigkeiten durch ein einfaches Transportmodell beschreiben kann. Für hohe Gradienten ergeben sich jedoch signifikante Abweichungen, da die nichtlinearen Rechnungen eine Entkopplung des Teilchen- und Wärmetransportes zeigen.

Ein weiterer Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Turbulenz, die vom Ionen-temperatur-Gradienten (ITG) getrieben wird. Es wird insbesondere das Verhalten des Ionen-Wärmetransportes bei endlichem Plasma- $\beta$  ( $\beta$  ist das Verhältnis des Plasmadruckes zum Magnetfelddruck) untersucht. Eine Eigenschaft dieser Turbulenz ist, dass sich der elektromagnetische Transport aufgrund von Fluktuationen des Magnetfeldes im Vergleich zum rein elektrostatischen Transport zu größeren räumlichen Skalen verschiebt. Auch beobachten wir ein rapides Ansteigen des Transportes schon bei einem Druckgradienten von ca. 90% des kritischen Druckgradienten der idealen Magnetohydrodynamik.

Der letzte Teil der Arbeit hat die gekoppelte ITG/TEM-Turbulenz zum Gegenstand, wobei das Augenmerk auf dem Teilchentransport liegt. So finden wir einen Einwärtstransport (Pinch) von Teilchen in zwei verschiedenen Turbulenz-Regimes. Beim ITG-Pinch herrscht die ITG-Turbulenz vor und die gefangenen Elektronen werden einwärts transportiert, beim TEM-Pinch ist die TEM-Turbulenz vorherrschend und es sind die freien Elektronen, die einwärts transportiert werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Die gyrokinetischen Gleichungen . . . . .	8
2.1.1	Transformation auf Gyrozentrenvariablen . . . . .	8
2.1.2	Lietransformation und Mittelung . . . . .	11
2.1.3	Die gyrokinetische Vlasovgleichung . . . . .	16
2.1.4	Die gyrokinetischen Feldgleichungen . . . . .	18
2.2	Geometrie . . . . .	24
2.2.1	Wahl eines geeigneten Koordinatensystems . . . . .	24
2.2.2	Reduktion auf einen Flussschlauch . . . . .	26
2.2.3	Transformation der Operatoren . . . . .	28
2.3	Ausgangsgleichungen für die numerische Behandlung . . . . .	31
2.3.1	Vlasovgleichung . . . . .	31
2.3.2	Feldgleichungen . . . . .	33
2.3.3	Randbedingungen . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Numerische Simulation: Der GENE Code</b>	<b>39</b>
3.1	Simulation von Plasmaturbulenz . . . . .	39
3.1.1	Gitter und Notation . . . . .	40
3.2	Lösung der Vlasovgleichung . . . . .	41
3.2.1	Zeitschrittverfahren . . . . .	41
3.2.2	Paralldynamik . . . . .	42
3.2.3	Lineare Senkrechtdynamik . . . . .	44
3.2.4	Die Nichtlinearität . . . . .	46
3.2.5	Gefangene Teilchen . . . . .	46
3.2.6	Zeitschrittlimit . . . . .	48
3.3	Lösung der Feldgleichungen . . . . .	48
3.4	Parallelisierung . . . . .	49
3.5	Diagnostik und Auswertung . . . . .	50
3.5.1	Die Ausgabe von GENE . . . . .	50
3.5.2	Postprocessing . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Lineare Dynamik</b>	<b>53</b>
4.1	Zweiflüssigkeitsmodell . . . . .	53
4.2	Alfvénwellen . . . . .	54
4.2.1	Kinetische Scher-Alfvénwellen . . . . .	56
4.2.2	Gyrokinetische Scher-Alfvénwellen . . . . .	57
4.3	Krümmungsgetriebene Moden . . . . .	58
4.3.1	ITG-Moden . . . . .	58
4.3.2	TE-Moden . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Numerische Tests</b>	<b>67</b>
5.1	Lineare Benchmarks . . . . .	67
5.1.1	Alfvénwellen . . . . .	68
5.1.2	Adiabatische ITG-Moden . . . . .	70
5.1.3	Elektromagnetische ITG-Moden . . . . .	71
5.1.4	TE-Moden . . . . .	72
5.1.5	Lineare Dämpfung der zonal flows . . . . .	73
5.2	Nichtlinearer Benchmark . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Stoßfreie TEM-Turbulenz</b>	<b>77</b>
6.1	Grundeigenschaften der TEM-Turbulenz . . . . .	80
6.2	Ein einfaches Modell für den Transport . . . . .	88
6.3	Abhängigkeit des Wärmetransportes der Elektronen vom Sicherheitsfaktor $q$ . . . . .	91
6.4	TEM-Turbulenz und $T_e$ -Profilsteifheit . . . . .	93
6.5	Weitere Abhängigkeiten . . . . .	97
6.5.1	Magnetische Verscherung . . . . .	97
6.5.2	Inverses Aspektverhältnis $\epsilon_t$ . . . . .	98
6.5.3	Dichtegradient . . . . .	98
<b>7</b>	<b>ITG/TEM-Turbulenz</b>	<b>103</b>
7.1	Elektromagnetische ITG-Turbulenz . . . . .	103
7.1.1	Physikalische und numerische Parameter . . . . .	104
7.1.2	Grundlegende Eigenschaften . . . . .	105
7.1.3	Variation von $\beta_e$ . . . . .	107
7.2	ITG/TEM-Turbulenz und der Teilchenpinch . . . . .	109
7.2.1	ITG-Pinch . . . . .	109
7.2.2	TEM-Pinch . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	117
8.2	Ausblick . . . . .	118
<b>A</b>	<b>Transportgrößen</b>	<b>121</b>

<b>B Lie Transformationen</b>	<b>123</b>
<b>C Gyromittel und Gyromapping</b>	<b>125</b>
<b>D Stencil-Notation</b>	<b>129</b>
<b>E Charakterisierung von Differenzenverfahren</b>	<b>131</b>
E.1 Ordnung . . . . .	131
E.2 Spektrale Auflösung . . . . .	132
<b>F Krümmungsdrift</b>	<b>135</b>
<b>G Herleitung des Upwindverfahrens vierter Ordnung</b>	<b>137</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>139</b>

---

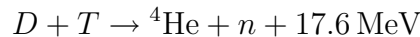
## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Frank Jenko für die Betreuung dieser Arbeit und seine Unterstützung während der vergangenen drei Jahre bedanken. Seine motivierenden Erklärungen und seine stete Bereitschaft, meine Fragen zu beantworten, waren mir eine große Hilfe. Auch für das Probelesen aller Entwürfe bin ich dankbar. Herr Prof. Wilhelm danke ich für die akademische Betreuung der Arbeit. Bei Reinhard Tisma, Renate Dohmen und Roman Hatzky bedanke ich mich für die Unterstützung bei der Optimierung und Parallelisierung des GENE-Codes.

# Kapitel 1

## Einführung

Der weltweit wachsende Energiebedarf macht die Suche nach alternativen Energiequellen notwendig. Diese wird noch dringlicher durch die Begrenztheit der bisher verwendeten fossilen Energieträger. Neben den regenerativen Energiequellen wie Solarenergie, Wind- und Wasserkraft, ist auch die Erzeugung von Fusionsenergie eine Möglichkeit, annähernd unbegrenzt Energie zu gewinnen. Dabei verschmelzen ähnlich wie in Sternen leichte Atomkerne zu einem schwereren. Der dabei auftretende Massendefekt wird als Bewegungsenergie auf die Fusionsprodukte übertragen. Während in der Sonne in erster Linie Protonen schrittweise zu Heliumkernen verschmelzen, kommt für einen Fusionsreaktor nur die Deuterium-Tritium-Reaktion in Frage (Wesson, 1997). Diese hat bei relativ niedriger Temperatur den größten Wirkungsquerschnitt. Die Reaktion lautet



wobei sich die freiwerdende Energie von 17.6 MeV entsprechend dem inversen Massenverhältnis auf die Reaktionsprodukte aufteilt.

Um diese Reaktion für eine wirtschaftliche Energiegewinnung nutzen zu können, muss eine möglichst hohe Reaktionsrate erzielt werden, so dass sich das Plasma selbst heizt und dazu noch Energie liefert. Dazu müssen die Energieverluste durch Strahlung und Konvektion durch die Fusionsenergie überkompensiert werden. Diese Zündbedingung wird durch das Lawson-Kriterium (Kaufmann, 2003) beschrieben:

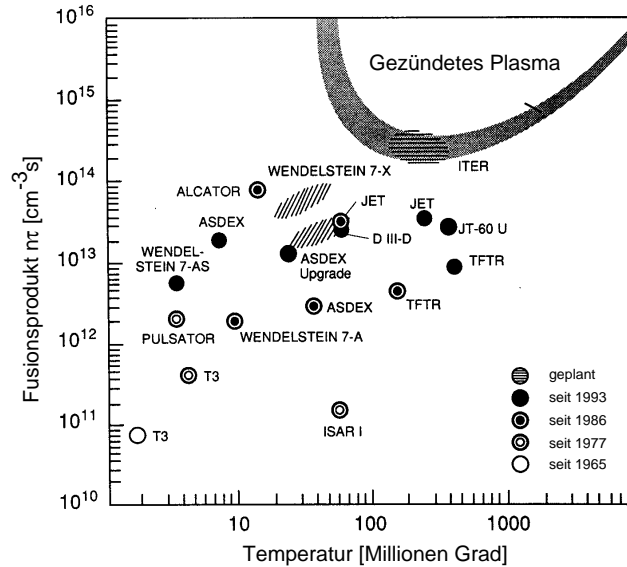
$$n\tau_E > 1.5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}\text{s}$$

mit der Teilchendichte  $n$  und der Energieeinschlusszeit  $\tau_E$ . Der Schwellenwert ist von der Temperatur<sup>1</sup> abhängig wie in Abb. 1.1 zu sehen ist und hat sein Minimum bei  $T \approx 10 - 40 \text{ keV}$ , was ungefähr 120 – 460 Millionen Grad entspricht. Für ein Fusionskraftwerk wird  $T \approx 15 - 30 \text{ keV}$  verwendet (Kaufmann, 2003). Um

---

<sup>1</sup>In der gesamten Arbeit wird die Boltzmannkonstante  $k_B = 1$  gesetzt und die Temperatur in eV angegeben, wie es in der Plasmaphysik allgemein üblich ist. Dabei entspricht 1 eV einer Temperatur von ca. 11600 K.





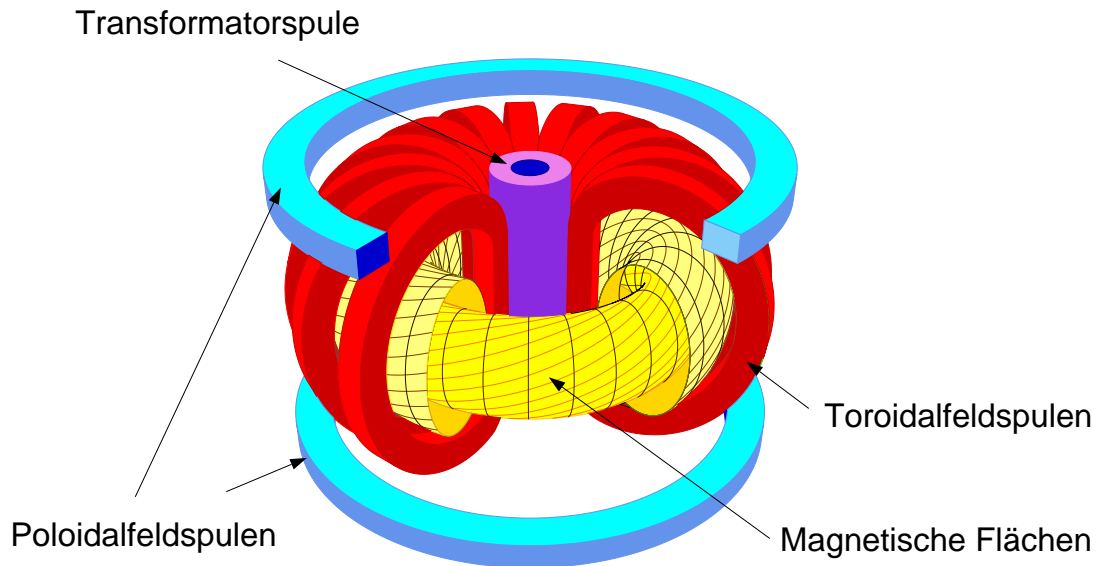
**Abbildung 1.1:** Fusionsprodukt aus Teilchendichte  $n$  und Energieeinschlusszeit  $\tau$ , aufgetragen über der Temperatur. Eingezeichnet sind die Parameterbereiche verschiedener Fusionsexperimente.

obigen Schwellenwert zu erreichen, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. In der Trägheitsfusion wird für eine sehr kurze Einschlusszeit ( $\tau_E \sim 10^{-10}$  s) eine sehr hohe Dichte ( $n \sim 10^{31}$  m $^{-3}$ ) erzielt, indem ein gefrorenes Deuterium-Tritium Gemisch durch Laser-, Röntgenstrahlen- oder Schwerionenbeschuss komprimiert wird (Kaufmann, 2003).

Die andere Möglichkeit, den Schwellenwert zu erreichen, ist der magnetische Einschluss eines  $\approx 15$  keV heißen D-T-Plasmas. Hierbei ist  $n \approx 10^{20}$  m $^{-3}$  und  $\tau_e \approx 5$  s. Die Bewegung geladener Teilchen senkrecht zu einem vorgegebenen Magnetfeld ist auf die schnelle Gyration und langsame Driften beschränkt. Der Gyroradius ist dabei stets sehr viel kleiner als die räumliche Ausdehnung des Plasmas oder die Variationslänge des Magnetfeldes. Da die Bewegung entlang der Feldlinien durch das Magnetfeld nicht eingeschränkt wird, und somit an den Enden einer linearen Anordnung große Verluste auftreten würden, ist eine toroidale Topologie notwendig. Die beiden Geometrien, die dabei verfolgt werden, sind zum einen der Stellarator, bei dem das Gleichgewichtsmagnetfeld gänzlich von außen vorgegeben wird, zum anderen der axialsymmetrische Tokamak, bei dem das Gleichgewichtsmagnetfeld durch die Überlagerung eines von außen vorgegebenen toroidalen Feldes und eines vom toroidalen Plasmastrom erzeugten poloidalen<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Die Bezeichnungen toroidal und poloidal beziehen sich auf die Richtungen in einem Torus. Toroidal ist die Richtung entlang des Torus. Dies ist auch die Symmetrierichtung im Tokamak.

Feldes gegeben ist. Der Plasmastrom selbst wird durch Induktion eines toroidalen elektrischen Feldes mittels eines Transformators erzeugt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden wir uns ausschließlich mit dem Tokamak beschäftigen, dessen schematischer Aufbau in Abb. 1.2 dargestellt ist.



**Abbildung 1.2:** Schematische Darstellung eines Tokamak.

Im magnetohydrodynamischen Gleichgewicht spannt jede Feldlinie des Magnetfeldes eine magnetische Flussfläche auf. Verschiedene Plasmagrößen wie der Druck  $p$  sind auf diesen Flussflächen, die aus topologischen Gründen ineinander geschachtelte Tori sein müssen, konstant. Die Bewegung der Teilchen innerhalb der Flussflächen hat keinen direkten Einfluss auf den Einschluss, nur Transport über Flussflächen hinweg (was der radialen Richtung entspricht) stellt ein Problem für den Einschluss dar, da nur so Teilchen und Wärme das Plasma verlassen können.

Ein Teil des radialen Transports wird von den Stößen der Teilchen verursacht. Der in Messungen aus dem Experiment bestimmte Transport kann jedoch durch den stoßinduzierten Transport allein nicht erklärt werden. Insbesondere der Elektronen-Wärme und Teilchentransport ist mehrere Größenordnungen größer. Der noch fehlende Teil wird allgemein als „anomaler“ Transport bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit werden wir uns ausschließlich mit diesem anomalen Transport beschäftigen.

Anomaler Transport wird durch turbulente Fluktuationen der Plasmagrößen erzeugt. Diese Turbulenz wird angetrieben von Mikroinstabilitäten, die aufgrund der Inhomogenität des toroidalen Plasmas (Dichte, Temperatur) unvermeidlich

---

Poloidal ist die Richtung senkrecht dazu, die um die magnetische Achse verläuft und senkrecht auf der dritten, der radialen Richtung steht.

sind. Diese Instabilitäten wachsen nun an, indem sie den Hintergrund-Gradienten der Dichte oder Temperatur freie Energie entziehen. Mit dem Anwachsen der Amplituden werden nichtlineare Terme immer wichtiger und führen zu einem Energieaustausch der Moden untereinander. Dadurch kann Energie zu anderen räumlichen Skalen transferiert werden, wo sie dann dissipiert wird (z. B. durch Landau-Dämpfung oder Stöße). Das Anwachsen der ursprünglichen linearen Moden wird dadurch gehemmt und die Turbulenz in die Sättigung geführt. In solch einem gesättigten Zustand ist die Menge der zugeführten Energie durch die instabilen Moden gerade so groß wie die Energiedissipation durch Landau-Dämpfung und Stöße.

Je nach Wahl der Plasmaparameter sind andere Instabilitäten angeregt. Für den anomalen Transport kommen jedoch nur Mikroinstabilitäten in Frage, deren Längenskalen im Bereich des Ionengyroradius liegen,  $k_{\perp}\rho_s \sim 1$  bzw.  $k_{\perp}L_{\perp} \sim L_{\perp}/\rho_s \gg 1$  und die auf Zeitskalen anwachsen, die der diamagnetischen Frequenz

$$\omega_* = \frac{\rho_s}{L_{\perp}} k_{\perp}\rho_s \Omega_i \ll \Omega_i$$

entsprechen. Dabei ist  $L_{\perp}$  eine typische Gradientenlänge,  $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$  die Ionenschallgeschwindigkeit und  $\rho_s = c_s/\Omega_i$  der Ionengyroradius bei Elektronentemperatur, wobei  $\Omega_i = eB/m_i c$  die Ionengyrofrequenz ist.

Die beiden wichtigsten Moden mit solchen räumlichen Skalen sind zum einen die vom Iontemperatur-Gradienten getriebene toroidale ITG-Mode und die von den gefangenen Elektronen getriebene TEM („trapped electron mode“). Beide Moden werden durch ungünstige Krümmung des Magnetfeldes destabilisiert und sind deshalb an der Außenseite des Torus lokalisiert. Bisherige Untersuchungen hatten hauptsächlich ITG-Turbulenz mit einem vereinfachten Modell für die Elektronendynamik zum Gegenstand. Auch TEM-Turbulenz wurde bisher fast ausschließlich in vereinfachten Modellen analysiert.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit ITG- und TEM-Turbulenz mit einer Behandlung der Elektronen, die in der Genauigkeit weit über die oben genannten Modelle hinausgeht. Dabei liegt das Augenmerk auf drei Themengebieten. Zuerst soll die von TE-Moden erzeugte Turbulenz sozusagen im Reinzustand untersucht und ihre grundlegenden Eigenschaften analysiert werden. Der anomale Transport hängt von einer Vielzahl von Parametern ab. Eine Auswahl wird hier untersucht. Das zweite Gebiet, das genauer betrachtet wird, ist die elektromagnetische ITG-Turbulenz. In einem letzten Abschnitt untersuchen wir dann noch die Auswirkungen des Vorhandenseins beider Turbulenzarten auf den Teilchentransport.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. Im zweiten Kapitel werden die den Rechnungen dieser Arbeit zugrunde liegenden gyrokinetischen Gleichungen hergeleitet und für die numerische Bearbeitung aufbereitet. Hier werden auch die Geometrie und die Normierungen beschrieben, die in der ganzen Arbeit verwendet werden.

---

Im dritten Kapitel beschreiben wir den GENE Code, mit dem alle nichtlinearen Rechnungen ausgeführt wurden.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der linearen Dynamik. Hier werden einfache Bilder der Alfvénwellen und der beiden antreibenden Moden (ITG-Moden und TEM) vorgestellt und vereinfachte Dispersionsrelationen hergeleitet.

Das fünfte Kapitel ist ganz dem „Benchmarking“ gewidmet. Der überarbeitete GENE Code wurde ausführlich mit bekannten Ergebnissen verglichen.

Im sechsten und siebten Kapitel werden die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt. Wir beginnen im sechsten Kapitel mit reiner TEM-Turbulenz und untersuchen die Abhängigkeit von einigen Plasmametern, wie Gradienten oder magnetische Verscherung. Im siebten Kapitel wenden wir uns zuerst der elektromagnetischen ITG-Turbulenz zu, um anschließend den interessanten Effekt des Teilchenpinches in der gekoppelten ITG/TEM Turbulenz zu untersuchen.

Ich beende die Arbeit im achten Kapitel mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf eine mögliche Fortführung der Arbeit.

Ein Anhang schließt sich an und beinhaltet einige ausführlichere Rechnungen, die den Fluss der vorhergehenden Kapitel zu sehr unterbrochen hätten.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

Ein Plasma kann mit verschiedenen Modellen theoretisch beschrieben werden. In der Magnetohydrodynamik wird es als eine stromtragende, elektrisch leitfähige Flüssigkeit angesehen. Betrachtet man die Elektronen und Ionen als zwei einander durchdringende Flüssigkeiten, kommt man zur Beschreibung mittels einer Zweiflüssigkeitentheorie. In beiden Beschreibungen rechnet man mit makroskopischen Größen wie Dichte, Geschwindigkeit der Flüssigkeit und Temperatur (Chen, 1974; Cap, 1994).

Ein umfassenderer Ansatz ist dagegen die kinetische Behandlung des Plasmas. Hierzu wird eine Verteilungsfunktion im sechsdimensionalen Phasenraum verwendet. Die Vlasovgleichung, die aus der Liouville-Gleichung folgt, in Kombination mit den Maxwellgleichungen, beschreibt dann die Dynamik des Plasmas (Schram, 1991). Die oben genannten Flüssigkeitstheorien kann man aus der kinetischen Theorie durch Integration über den Geschwindigkeitsraum (Momentenbildung) erhalten.

Ist man ausschließlich an niederfrequenten Plasmaphänomenen ( $\omega \ll \Omega_i$  mit der Ionengyrationsfrequenz  $\Omega_i = eB/m_i c$ ) interessiert, so kann die kinetische Beschreibung vereinfacht werden, indem man eine Mittelung über die Gyration durchführt. Damit gelangt man zur gyrokinetischen Theorie. Die erste Ableitung *nichtlinearer* gyrokinetischer Gleichungen wurde von (Frieman & Chen, 1982) durchgeführt. In einfacher Geometrie und unter Ausnutzung der Hamilton'schen Form der Ausgangsgleichungen konnten (Dubin *et al.*, 1983) gyrokinetische Gleichungen mit Hilfe von Lietransformationen und nichtkanonischer Störungstheorie herleiten. Mit der in (Cary & Littlejohn, 1983) zusammengefassten nichtkanonischen Störungstheorie für Differentialformen wurden dann von (Hahm *et al.*, 1988; Hahm, 1988) und (Brizard, 1989) die Gleichungen hergeleitet, die wir auch in dieser Arbeit verwenden. Bei der Herleitung im Abschnitt 2.1 orientieren wir uns an diesen letztgenannten drei Arbeiten. Dabei gehen wir den folgenden Weg:

1. Ausgehend von der Lagrangefunktion eines Teilchens im Magnetfeld wird diese in eine differentielle Einsform umgeschrieben. Aus dieser Einsform wird dann die grundlegende gyrokinetische Einsform hergeleitet. Dazu trans-

formieren wir die Einsform auf Gyrozentrenvariablen.

2. Diese neue Einsform wird aufgeteilt in Gleichgewichts- und Störungsanteil und mittels einer Lietransformation weiter transformiert, so dass die resultierende Einsform nicht mehr von der schnellen Gyrophase abhängt.
3. Ausgehend von der so hergeleiteten fundamentalen Einsform der Gyrokinetik wird eine Lagrangefunktion hergeleitet und von dieser werden die Bewegungsgleichungen mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen berechnet. Mit Hilfe dieser Bewegungsgleichungen läßt sich die gyrokinetische Vlasogleichung darstellen.
4. In einem vierten Schritt werden aus den Maxwellgleichungen die gyrokinetischen Feldgleichungen für die Potentiale hergeleitet.
5. Alle so bestimmten Gleichungen werden nun noch im Ortsraum auf ein am Gleichgewichtsmagnetfeld ausgerichtetes Koordinatensystem transformiert. Dieses wird auf einen Flussschlauch eingeschränkt.
6. Eine geeignete Normierung führt zu den für die numerische Behandlung verwendeten Gleichungen.

## 2.1 Die gyrokinetischen Gleichungen

Ist man an einer Beschreibung der niederfrequenten Phänomene im magnetisierten Plasma interessiert, so kann man durch die gyrokinetische Behandlung die schnelle Gyrophase eliminieren und damit die Dimensionalität des Phasenraums von sechs auf fünf reduzieren. Die Mittelung, die bei der gyrokinetischen Behandlung durchgeführt wird, ist eine rein zeitliche, d. h. es findet keine räumliche Mittelung über den Ionenlarmorradius statt. Darin liegt auch der Unterschied zur driftkinetischen Behandlung, bei der auch noch eine Mittelung im Ortsraum über den Gyroradius durchgeführt wird.

Die kleinsten räumlichen Skalen, an denen wir interessiert sind, liegen in der Größenordnung des Ionengyroradius, es gilt also  $k_{\perp}\rho_i \sim 1$ . Da der Elektronengyroradius um einen Faktor  $\sqrt{m_H/m_e} \approx 43$  ( $m_H$  ist die Masse des Protons) kleiner ist, spielen die Elektronenskalen nur für sehr große  $k_{\perp}$  eine Rolle. Man könnte die Elektronen auch driftkinetisch behandeln, nähme sich damit aber die Möglichkeit die Kopplung der Elektronenskalen mit den Ionenskalen zu untersuchen (Jenko, 2004).

### 2.1.1 Transformation auf Gyrozentrenvariablen

Im ersten Schritt werden ein statisches elektrisches und magnetisches Feld angenommen. Die Lagrangefunktion eines nichtrelativistischen Teilchens der Masse  $m$

mit der Ladung  $e$  in diesem Feld lautet unter Verwendung der Teilchenkoordinaten  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left( m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

Hier wurde der kanonische Impuls  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$  verwendet. Die Hamiltonfunktion lautet  $H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{m}{2}v^2 + e\Phi(\mathbf{x})$ .

In der weiteren Behandlung ist es einfacher, anstatt mit Lagrangefunktionen mit den zugehörigen Einsformen zu arbeiten. Dabei gilt der Zusammenhang

$$\int L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dt = \int \gamma$$

wobei  $\gamma$  die Einsform ist. Sie lautet damit für die oben angegebene Lagrangefunktion

$$\gamma = \left( m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \cdot d\mathbf{x} - H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dt$$

Nun werden die Gyrozentrenvariablen  $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu)$  durch die folgenden Transformationsgleichungen eingeführt, wobei die Zeitvariable nicht transformiert wird.

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \frac{mc}{eB(\mathbf{x})} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v} \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B(\mathbf{x})} \quad v_{\parallel} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

Dabei gibt  $\mathbf{X}$  den Ort des Gyrozentrums an,  $\mu$  das magnetische Moment und  $v_{\parallel}$  die parallele Geschwindigkeit. Es wurde in den Transformationsgleichungen der Einheitsvektor in Richtung des Gleichgewichtsmagnetfeldes  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  und der Betrag des magnetischen Feldes  $B = |\mathbf{B}|$  eingeführt.

Unter der ab nun geltenden Annahme

$$\frac{\rho_i}{L_B} \sim \epsilon \ll 1, \quad (2.1)$$

dass das Gleichgewichtsmagnetfeld (dessen räumliche Skala durch  $L_B$  charakterisiert ist) nur langsam räumlich veränderlich ist, sich also über die Skala des Ionen-Gyroradius  $\rho_i = v_{Ti}/\Omega_i$  nicht ändert, können die Felder in den Transformationsgleichungen entweder am Teilchenort oder am Gyrozentrenort genommen werden. Dieselbe Annahme gilt für eventuell auftretende elektrische Gleichgewichtsfelder.

Die Rücktransformation von den Gyrozentrenvariablen auf die alten Teilchenvariablen lautet

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \rho_i(\mathbf{X})\mathbf{a}(\theta) \quad \mathbf{v} = v_{\parallel}\mathbf{b} + v_{\perp}\mathbf{c}(\theta) \quad \text{mit} \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{2\mu B(\mathbf{X})}{m}} \quad (2.2)$$

und den Abkürzungen

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta \quad \mathbf{c}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}(\theta) = -\mathbf{e}_1 \sin \theta - \mathbf{e}_2 \cos \theta$$



Die Vektoren  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$  beschreiben ein lokales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem.

Allgemein gilt für die Transformation einer Einsform  $\gamma$  von einem Koordinatensystem  $(z^\nu)$  in die Einsform  $\Gamma$  in den Koordinaten  $(Z^\mu)$  die Beziehung

$$\Gamma_\mu = \gamma_\nu \frac{dz^\nu}{dZ^\mu}$$

was aus der Invarianz von Skalaren unter Koordinatentransformationen folgt. Mit dieser Beziehung und mit den Zuordnungen  $z^0 = t, z^1 = x, z^2 = y, z^3 = z, z^4 = v_x, z^5 = v_y, z^6 = v_z$  und  $Z^0 = t, Z^1 = X, Z^2 = Y, Z^3 = Z, Z^4 = v_{\parallel}, Z^5 = \mu, Z^6 = \theta$  hat man dann die folgenden Ausdrücke für die  $\Gamma_\mu$ . Dabei ist zu beachten, dass  $\gamma_{\mathbf{v}} = 0$  ist.

Da die Zeit nicht transformiert wird, gilt einfach

$$\Gamma_t = \gamma_t = -H(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu) = -\frac{m}{2}v_{\parallel}^2 - \mu B(\mathbf{X}) - e\Phi(\mathbf{X})$$

Für die Ortsraumkomponenten gilt mit  $i = 1, 2, 3$

$$\Gamma_i = \gamma_j \frac{dz^j}{dZ^i} = \left( mv_{\parallel} b_j + mv_{\perp} \mathbf{c}_j(\theta) + \frac{e}{c} A_j(\mathbf{X}) \right) \frac{dx^j}{dX^i}$$

Berechnet man die Ableitung und setzt das Ergebnis ein, hat man

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \left( mv_{\parallel} b_j + mv_{\perp} \mathbf{c}_j(\theta) + \frac{e}{c} A_j(\mathbf{X}) \right) \left( \delta_i^j - \frac{\mu a^j(\theta)}{\Omega(\mathbf{X}) m v_{\perp}(\mathbf{X})} \frac{dB(\mathbf{X})}{dX^i} \right) \\ &= mv_{\parallel} b_i + mv_{\perp} \mathbf{c}_i(\theta) + \frac{e}{c} A_i(\mathbf{X}) - \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\theta) \frac{\mu}{B(\mathbf{X}) v_{\perp}(\mathbf{X})} \frac{dB(\mathbf{X})}{dX^i} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird nun über die schnelle Gyrophase gemittelt, was der Operation

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\theta$$

entspricht. Damit fallen die beiden schnell oszillierenden Terme, die  $\mathbf{c}(\theta)$  und  $\mathbf{a}(\theta)$  enthalten weg und es bleibt nur noch

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = mv_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{X}) \quad (2.3)$$

Die nächste zu betrachtende Koordinate ist die parallele Geschwindigkeit. Da jedoch nur die Transformationsgleichung für  $\mathbf{v}$  eine  $v_{\parallel}$ -Abhängigkeit hat,  $\gamma_{\mathbf{v}}$  jedoch gleich Null ist, verschwindet auch  $\Gamma_{v_{\parallel}}$ .

Für die weitere Geschwindigkeitsraumvariable  $\mu$  kommt man auf den folgenden Ausdruck.

$$\Gamma_\mu = \left( mv_{\parallel} \mathbf{b} + mv_{\perp} \mathbf{c}(\theta) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{X}) \right) \cdot \mathbf{a}(\theta) \frac{B(\mathbf{X})}{\Omega(\mathbf{X}) m v_{\perp}(\mathbf{X})} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\theta)}{v_{\perp}(\mathbf{X})}$$

Durch die Gyromittelung fällt dieser Term allerdings wieder weg.

Bleibt noch die letzte Variable, die Gyrophase selbst. Hier hat man

$$\begin{aligned}\Gamma_\theta &= \left( mv_\parallel \mathbf{b} + mv_\perp \mathbf{c}(\theta) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{X}) \right) \cdot \mathbf{c}(\theta) \frac{v_\perp}{\Omega(\mathbf{X})} \\ &= \frac{mv_\perp^2}{\Omega(\mathbf{X})} + \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{c}(\theta) \frac{ev_\perp}{c\Omega(\mathbf{X})}\end{aligned}$$

Durch die Gyromittelung fällt der zweite Term weg, so dass nur der erste bleibt.

Nimmt man alle Ergebnisse zusammen, erhält man die gyrogemittelte Einsform in Gyrozentrenvariablen

$$\Gamma = \left( mv_\parallel \mathbf{b} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{X}) \right) \cdot d\mathbf{X} + \frac{\mu B(\mathbf{X})}{\Omega(\mathbf{X})} d\theta - \left( \frac{m}{2} v_\parallel^2 + \mu B(\mathbf{X}) + e\Phi(\mathbf{X}) \right) dt \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Lietransformation und Mittelung

Jetzt betrachten wir Abweichungen vom Gleichgewicht und nehmen kleine Störungen der Felder hinzu. Wir ersetzen also  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x})$  und  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \Phi_1(\mathbf{x})$ . Letztere Beziehung schließt elektrische Gleichgewichtsfelder aus, was die Rechnung vereinfacht und für die anstehenden Untersuchungen keine Einschränkung darstellt. Die Störungsgrößen sollen klein gegen die Gleichgewichtsgrößen sein, es soll also gelten

$$\frac{\mathbf{A}_1}{\rho B_0} \sim \frac{e\Phi_1}{T_0} \sim \epsilon \quad (2.5)$$

Allerdings sind die senkrechten Gradienten der Störungsgrößen von der gleichen Ordnung wie die senkrechten Gradienten der Gleichgewichtsgrößen. Es gilt also z. B. für die parallele Komponente des elektromagnetischen Potentials

$$\nabla_\perp A_{1\parallel} \sim \frac{A_{1\parallel}}{\rho} \sim \frac{A_0}{L}$$

Wenn man nun nochmal einen Schritt zurück zur Einsform eines Teilchens in den Teilchenkoordinaten geht und dort die Erweiterung auf Störungsterme einsetzt, kann man die Einsform in einen Gleichgewichtsanteil  $\gamma_0$  und eine Störungsanteil  $\gamma_1$  aufteilen, für die dann jeweils gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \left( m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \right) \cdot d\mathbf{x} - \frac{m}{2} v^2 dt \\ \gamma_1 &= \frac{e}{c} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - e\Phi_1 dt\end{aligned}$$

Nun folgt wieder die im Abschnitt 2.1.1 eingeführte Transformation von  $\gamma$  auf die Einsform  $\Gamma$  in den Gyrozentrenvariablen  $(\mathbf{X}, v_\parallel, \mu, \theta)$ . Für  $\Gamma_0$  erhält man gerade die dort hergeleitete Gleichung (2.4). Für  $\Gamma_1$  kommt man auf

$$\Gamma_1 = \left( \frac{e}{c} \mathbf{A}_1 - \frac{\mu}{v_\perp} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{a} \frac{\nabla B_0}{B_0} \right) \cdot d\mathbf{X} + \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{a}}{v_\perp} d\mu + \frac{mv_\perp}{B_0(\mathbf{X})} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{c} d\theta - e\Phi_1 dt$$

Hierbei werden die Felder  $\mathbf{A}_1$  und  $\Phi_1$  am Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{r}$  genommen. Dabei ist  $\mathbf{r} = \rho_i \mathbf{a}(\theta)$ , wie man aus den Rücktransformationsgleichungen (2.2) entnehmen kann. Für die Störungsfelder ist es wichtig, zwischen Teilchenort  $\mathbf{X} + \mathbf{r}$  und Gyrozentrenort  $\mathbf{X}$  zu unterscheiden, da die Störungsanteile der Felder sich auf der Skala des Gyroradius ändern. Das Gleichgewichtsfeld wird dagegen wieder am Ort  $\mathbf{X}$  berechnet. Beachtet man nun die gyrokinetische Ordnung (2.1) und (2.5), so kann der zweite Term in der Klammer vernachlässigt werden und es bleibt

$$\Gamma_1 = \frac{e}{c} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{X} + \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{a}}{v_\perp} d\mu + \frac{mv_\perp}{B_0(\mathbf{X})} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{c} d\theta - e\Phi_1 dt$$

Nun wird eine Koordinatentransformation gesucht, die die schnelle Gyrophase wieder aus der Störungseinsform entfernt. Dazu ist am besten eine Lietransformation geeignet, die in (Cary & Littlejohn, 1983) beschrieben wird. Die wichtigsten Eigenschaften werden in Anhang B zusammengefasst. Nimmt man nun die Gleichungen (B.3) und (B.5) so gilt für die nullte Ordnung mit  $dS_0 = 0$

$$\bar{\Gamma}_0 = \Gamma_0$$

Für die erste Ordnung hat man

$$\bar{\Gamma}_{1\mu} = \Gamma_{1\mu} - G_1^\nu \left( \frac{\partial \Gamma_{0\mu}}{\partial Z^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{0\nu}}{\partial Z^\mu} \right) + \frac{\partial S_1}{\partial Z^\mu}$$

Es gilt nun, die  $G_1^\nu$  so zu bestimmen, dass die transformierte Einsform  $\bar{\Gamma}_1$  unabhängig von der schnellen Gyrophase  $\theta$  wird. Für die obigen Einsformen gilt allgemein  $\Gamma_{0v_\parallel} = \Gamma_{0\mu} = 0$ . Außerdem wählen wir  $G_1^t = 0$ , da die Zeit nicht transformiert wird.

Für die Koordinate  $\mu$  erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1\mu} &= \Gamma_{1\mu} + G_1^{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \Gamma_{0\mathbf{x}}}{\partial \mu} + G_1^\theta \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial \mu} + \frac{\partial S_1}{\partial \mu} \\ &= \frac{\mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}(\theta)}{v_\perp(\mathbf{X}, \mu)} + G_1^\theta \frac{mc}{e} + \frac{\partial S_1}{\partial \mu} \end{aligned}$$

Als nächste Variable betrachten wir die Gyrophase  $\theta$ . Da die Gleichgewichtseinsform nicht von  $\theta$  abhängt, fällt bei allen Termen die entsprechende Ableitung weg.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1\theta} &= \Gamma_{1\theta} - G_1^{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial \mathbf{X}} - G_1^{v_\parallel} \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial v_\parallel} - G_1^\mu \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial \mu} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \\ &= \frac{mv_\perp(\mathbf{X}, \mu)}{B_0(\mathbf{X})} \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{c}(\theta) - G_1^\mu \frac{mc}{e} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Damit die resultierende Einsform möglichst einfach wird, fordert man  $\bar{\Gamma}_{1\theta} = \bar{\Gamma}_{1\mu} = 0$ , was dann zu den folgenden Gleichungen führt.

$$\begin{aligned} G_1^\mu &= \frac{e}{mc} \left( \frac{mv_\perp(\mathbf{X}, \mu)}{B_0(\mathbf{X})} \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{c}(\theta) + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right) \\ G_1^\theta &= -\frac{e}{mc} \left( \frac{\mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}(\theta)}{v_\perp(\mathbf{X}, \mu)} + \frac{\partial S_1}{\partial \mu} \right) \end{aligned}$$

Für die parallele Geschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1v_\parallel} &= \Gamma_{1v_\parallel} + G_1^{\mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \Gamma_{0\mathbf{X}}}{\partial v_\parallel} + G_1^\mu \frac{\partial \Gamma_{0\mu}}{\partial v_\parallel} + G_1^\theta \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial S_1}{\partial v_\parallel} \\ &= G_1^{\mathbf{X}} \cdot m\mathbf{b} + \frac{\partial S_1}{\partial v_\parallel} \end{aligned}$$

Auch hier wird gefordert, dass diese Komponente der Einsform verschwindet, was auf die Gleichung

$$G_1^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) = -\frac{1}{m} \frac{\partial S_1}{\partial v_\parallel}$$

führt.

Jetzt bleiben noch die Ortsraumkoordinaten und die Zeit. Der Ortsraum wird zuerst behandelt und dazu die einzelnen Koordinaten getrennt betrachtet.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1X^i} &= \Gamma_{1X^i} - G_1^{X^j} \left( \frac{\partial \Gamma_{0X^i}}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma_{0X^j}}{\partial X^i} \right) - G_1^{v_\parallel} \frac{\partial \Gamma_{0X^i}}{\partial v_\parallel} - G_1^\mu \frac{\partial \Gamma_{0X^i}}{\partial \mu} + G_1^\theta \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial X^i} + \frac{\partial S_1}{\partial X^i} \\ &= \frac{e}{c} A_{1i} - G_1^{X^j} \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_{0i}}{\partial X^j} - \frac{\partial A_{0j}}{\partial X^i} \right) - G_1^{v_\parallel} m v_\parallel \left( \frac{\partial b_{0i}}{\partial X^j} - \frac{\partial b_{0j}}{\partial X^i} \right) - G_1^{v_\parallel} m b_i + \frac{\partial S_1}{\partial X^i} \\ &= \frac{e}{c} A_{1i} + \frac{e}{c} (G_1^{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}_0)_i + m v_\parallel (G_1^{\mathbf{X}} \times (\nabla \times \mathbf{b}_0))_i - G_1^{v_\parallel} m b_i + \frac{\partial S_1}{\partial X^i} \end{aligned}$$

Oder in Vektorschreibweise

$$\bar{\Gamma}_{1\mathbf{X}} = \frac{e}{c} \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) + \frac{e}{c} G_1^{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}_0^* - G_1^{v_\parallel} m \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) + \nabla S_1$$

wobei zur Vereinfachung die Abkürzungen  $\mathbf{A}_0^* = \mathbf{A}_0 + \frac{mc}{e} v_\parallel \mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{B}_0^* = \nabla \times \mathbf{A}_0^*$  eingeführt wurden. Die drei unbekanntenen Funktionen sollen nun so gewählt werden, dass sich  $\bar{\Gamma}_{1\mathbf{X}} = \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle$  ergibt. Dazu muß gelten

$$\frac{e}{c} \{ \widetilde{\mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r})} \} + \frac{e}{c} G_1^{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}_0^* - G_1^{v_\parallel} m \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) + \nabla S_1 = 0$$

Nun nimmt man einmal das Skalarprodukt mit  $\mathbf{B}_0^*$ , was zu

$$G_1^{v_\parallel} = \frac{1}{m B_{0\parallel}^*} \left( \frac{e}{c} \mathbf{B}_0^* \cdot \{ \widetilde{\mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r})} \} + \mathbf{B}_0^* \cdot \nabla S_1 \right)$$

führt. Zum anderen nimmt man das Vektorprodukt mit  $\mathbf{b}_0$  womit man

$$G_1^{\mathbf{X}} = -\frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \mathbf{b}_0 \times \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} + \frac{1}{m} \frac{\partial S_1}{\partial v_{\parallel}} \mathbf{B}_0^* + \frac{c}{e} \mathbf{b}_0 \times \nabla S_1 \right)$$

erhält.

Für die Zeitkomponente gilt

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1t} &= \Gamma_{1t} - G_1^{\mathbf{X}} \frac{\partial \Gamma_{0t}}{\partial \mathbf{X}} - G_1^{v_{\parallel}} \frac{\partial \Gamma_{0t}}{\partial v_{\parallel}} - G_1^{\mu} \frac{\partial \Gamma_{0t}}{\partial \mu} + G_1^{\theta} \frac{\partial \Gamma_{0\theta}}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial t} \\ &= -e\Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) + G_1^{\mathbf{X}} \cdot \nabla(\mu B_0) + G_1^{v_{\parallel}} m v_{\parallel} + G_1^{\mu} B_0(\mathbf{X}) + \frac{\partial S_1}{\partial t} \\ &= -e\Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \\ &\quad - \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial S_1}{\partial v_{\parallel}} \mathbf{B}_0^* + \mathbf{b}_0 \times \left( \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} + \frac{c}{e} \nabla S_1 \right) \right) \cdot \nabla(\mu B_0) \\ &\quad + \frac{\mathbf{B}_0^*}{B_{0\parallel}^*} \left( \frac{e}{c} \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} + \nabla S_1 \right) v_{\parallel} \\ &\quad + \frac{e}{mc} \left( \frac{m v_{\perp}(\mathbf{X}, \mu)}{B_0(\mathbf{X})} \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{c}(\theta) + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right) B_0(\mathbf{X}) + \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Eichfunktion  $S_1$  ergeben sich folgende Abschätzungen

$$(\partial_t, \nabla_{\parallel}, \nabla_{\perp}, \partial_{v_{\parallel}}, \partial_{\mu}, \partial_{\theta}) S_1 \sim (\epsilon \Omega, \epsilon / \rho, 1 / \rho, 1 / v_t, B_0 / T, 1) S_1$$

Damit lassen sich die Terme, in denen  $S_1$  vorkommt miteinander vergleichen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_0^*}{B_{0\parallel}^*} \frac{1}{m} \frac{\partial S_1}{\partial v_{\parallel}} \mu \nabla B_0 &\sim \frac{\mu B_0}{m v_t} \frac{\nabla B_0}{B_0} S_1 \sim \frac{\rho \Omega}{L_B} S_1 \sim \epsilon \Omega S_1 \\ \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \mathbf{b}_0 \times \frac{c}{e} \nabla S_1 \right) \cdot \nabla(\mu B_0) &\sim \frac{1}{B_0} \frac{c}{e} (\nabla_{\parallel} S_1 + \nabla_{\perp} S_1) \frac{T \nabla B_0}{B_0} \sim (\epsilon + 1) \epsilon \Omega S_1 \end{aligned}$$

Die parallele Ableitung von  $S_1$  kann vernachlässigt werden.

$$\frac{\mathbf{B}_0^*}{B_{0\parallel}^*} \cdot \nabla S_1 v_{\parallel} \sim \nabla_{\parallel} S_1 \rho \Omega \sim \Omega \epsilon S_1 \quad \frac{e}{mc} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} B_0 \sim \Omega S_1 \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} \sim \epsilon \Omega$$

Behält man nur die Terme nullter Ordnung, so bleibt

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1t} &= -e \langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle - e \{ \Phi_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} \\ &\quad - \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \mathbf{b}_0 \times \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} \right) \cdot \nabla(\mu B_0) \\ &\quad + \frac{e v_{\parallel}}{c} \frac{\mathbf{B}_0^*}{B_{0\parallel}^*} \cdot \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \} \\ &\quad + \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{\perp}(\mathbf{X}, \mu, \theta) \rangle + \frac{e}{c} \{ \mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{u}_{\perp}(\mathbf{X}, \mu, \theta) \} + \Omega \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Dabei wurden die Störungen der Potentiale nach dem folgenden Muster in einen gyrogemittelten

$$\langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) d\theta$$

und einen oszillierenden Anteil

$$\{\Phi_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}})\} = \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) - \langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle$$

aufgeteilt.

Nun muß die Eichfunktion so gewählt werden, dass alle oszillierenden Anteile von den Termen mit  $S_1$  absorbiert werden. Es bleibt dann

$$\bar{\Gamma}_{1t} = -e \langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle + \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_\perp(\mathbf{X}, \mu, \theta) \rangle$$

Dazu muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = & \frac{1}{\Omega} \left( e \{\Phi_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}})\} + \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \mathbf{b}_0 \times \{\mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}})\} \right) \cdot \nabla(\mu B_0) \right. \\ & \left. - \frac{ev_{\parallel}}{c} \frac{\mathbf{B}_0^*}{B_{0\parallel}^*} \cdot \{\mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}})\} - \frac{e}{c} \{\mathbf{A}_1(\widetilde{\mathbf{X} + \mathbf{r}}) \cdot \mathbf{u}_\perp\} \right) \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl für  $S_1$  und den oben angegebenen  $G_1^y$  erhält man die grundlegende gyrokinetische Einsform

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} = & \left( mv_{\parallel} \mathbf{b}_0 + \frac{e}{c} \mathbf{A}_0(\mathbf{X}) + \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1 \rangle \right) \cdot d\mathbf{X} + \frac{\mu mc}{e} d\theta \\ & - \left( \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 + \mu B_0(\mathbf{X}) + e \langle \Phi_1 \rangle - \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{u}_\perp \rangle \right) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei alle Gleichgewichtsgrößen am Gyrozentrenort  $\mathbf{X}$  genommen werden, die Störungsgrößen dagegen am Ort  $\mathbf{X} + \mathbf{r}$ .

Die gemittelten Ausdrücke in (2.6) kann man noch weiter berechnen, was ausführlich im Anhang C vorgeführt wird. Hier übernehmen wir nur das Ergebnis der Gleichungen (C.1) und (C.2).

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \rangle = J_0(\lambda) \Phi_1(\mathbf{X}) \quad \langle \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle = J_0(\lambda) \mathbf{A}_1(\mathbf{X}) \\ \frac{e}{c} \langle \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{u}_\perp \rangle = -I_1(\lambda) \mu B_{1\parallel}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

mit  $\lambda^2 = -\rho^2 \nabla_\perp^2$ . Außerdem kann man das gestörte Vektorpotential  $\mathbf{A}_1$ , das ja nur die senkrechten Fluktuationen des Magnetfeldes beschreiben soll, auf die parallele Komponente einschränken. Insgesamt lautet die Einsform damit

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} = & \left( mv_{\parallel} \mathbf{b}_0 + \frac{e}{c} \mathbf{A}_0(\mathbf{X}) + \frac{e}{c} J_0 A_{1\parallel} \mathbf{b}_0 \right) \cdot d\mathbf{X} + \frac{\mu mc}{e} d\theta \\ & - \left( \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 + \mu B_0(\mathbf{X}) + e J_0 \Phi_1 + I_1 \mu B_{1\parallel} \right) dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Die gyrokinetische Vlasovgleichung

Nachdem im letzten Abschnitt die fundamentale gyrokinetische Einsform hergeleitet wurde, kann nun die Vlasovgleichung in den neuen Variablen geschrieben werden. Die Vlasovgleichung ohne Stöße lautet allgemein

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

wobei  $F$  die Verteilungsfunktion im Phasenraum ist. Eine Herleitung der Gleichung aus der Liouville-Gleichung findet man z. B. in (Schram, 1991). In einem beliebigen Koordinatensystem muß dann die totale Zeitableitung in den Koordinaten ausgeschrieben werden. Für den hier interessierenden Fall von Lie transformierten Gyrozentrenvariablen  $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu)$  lautet die Vlasovgleichung dann

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla F + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} + \dot{\mu} \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0 \quad (2.9)$$

Die einzelnen partiellen Zeitableitungen der Koordinaten erhält man aus den Bewegungsgleichungen, welche man wiederum aus den Euler-Lagrangegleichungen erhält.

Die Einsform des vorherigen Abschnitts kann einfach in eine Lagrangefunktion umgeformt werden

$$\mathcal{L} = \left( \frac{e}{c} \mathbf{A}^* + \frac{e}{c} \bar{A}_{1\parallel} \mathbf{b}_0 \right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\mu mc}{e} \dot{\theta} - \left( \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 + \mu B_0 + e \bar{\Phi}_1 + \mu \bar{B}_{1\parallel} \right)$$

wobei die Notation für die gyrogemittelten Größen geändert und die zusammengefaßte Größe  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0 + \frac{mc}{e} v_{\parallel} \mathbf{b}_0$  eingeführt wurde. Es gilt

$$\bar{\Phi}_1 = J_0 \Phi \quad \bar{A}_{1\parallel} = J_0 A_{1\parallel} \quad \bar{B}_{1\parallel} = I_1 B_{1\parallel}$$

Mit den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z^i} = 0$$

für jede Variable kommt man auf die Bewegungsgleichungen, die man dann in (2.9) einsetzt.

Für die Euler-Lagrange Gleichungen der Variablen  $\theta$ ,  $\mu$  und  $v_{\parallel}$  erhält man

$$\dot{\mu} = 0 \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta} = \Omega - \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{e}{c} \bar{A}_{1\parallel} v_{\parallel} - e \bar{\Phi}_1 - \mu \bar{B}_{1\parallel} \right) \quad (2.11)$$

$$v_{\parallel} = \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (2.12)$$

Für die Ortsraumvariable  $\mathbf{X}$  kommt man unter Verwendung von (2.12) auf die folgende Euler-Lagrange Gleichung

$$m\dot{v}_{\parallel}\mathbf{b}_0 - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}^* - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{X}} \times \bar{\mathbf{B}}_{1\perp} = e\bar{\mathbf{E}}_1 - \mu\nabla(B_0 + \bar{B}_{1\parallel})$$

Dabei wurde das elektrische Feld als  $\bar{\mathbf{E}}_1 = -\nabla\bar{\Phi}_1 - \mathbf{b}_0\frac{1}{c}\dot{\bar{A}}_{1\parallel}$  eingeführt und  $\mathbf{B}^* = \text{rot } \mathbf{A}^*$  sowie  $\bar{\mathbf{B}}_{1\perp} = \nabla \times (\mathbf{b}_0\bar{A}_{1\parallel})$  verwendet. Durch die Operation  $\mathbf{b}_0 \times$  kommt man auf die Bewegungsgleichung für  $\mathbf{X}$  und durch die Operation  $\dot{\mathbf{X}} \cdot$  auf die Bewegungsgleichung für  $v_{\parallel}$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= v_{\parallel}\mathbf{b}_0 + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} \left( v_{\parallel}\frac{\bar{\mathbf{B}}_{1\perp}}{B_0} + c\frac{\bar{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} + \frac{\mu}{m\Omega}\mathbf{b}_0 \times \nabla(B_0 + \bar{B}_{1\parallel}) + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega}(\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} \right) \\ \dot{v}_{\parallel} &= \frac{\dot{\mathbf{X}}}{mv_{\parallel}} (e\bar{\mathbf{E}}_1 - \mu\nabla(B_0 + \bar{B}_{1\parallel})) \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme in der Bewegungsgleichung für  $\mathbf{X}$  haben die folgende physikalische Bedeutung: ungestörte Bewegung entlang des Gleichgewichtsmagnetfeldes, Bewegung entlang der gestörten Magnetfeldlinien,  $E \times B$ -Driftgeschwindigkeit,  $\nabla B$ -Drift und Krümmungsdrift.

Diese Gleichungen lassen sich noch weiter umformen und übersichtlicher schreiben, wenn man folgende Abkürzungen verwendet,

$$\nabla \times (\bar{A}_{1\parallel}\mathbf{b}_0) = (\nabla\bar{A}_{1\parallel}) \times \mathbf{b}_0 + \mathcal{O}(\epsilon_B) \quad e\chi_1 = e\bar{\Phi}_1 - \frac{e}{c}v_{\parallel}\bar{A}_{1\parallel} + \mu\bar{B}_{1\parallel}$$

und die verallgemeinerte  $E \times B$ , grad  $B$  und Krümmungsdrift mit

$$\mathbf{v}_{E\chi} = c\frac{-\nabla\chi_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad \mathbf{v}_{\nabla B_0} = \frac{\mu}{m\Omega}\mathbf{b}_0 \times \nabla B_0 \quad \mathbf{v}_c = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega}(\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} \quad (2.13)$$

bezeichnet. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= v_{\parallel}\mathbf{b}_0 + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_{E\chi} + \mathbf{v}_{\nabla B_0} + \mathbf{v}_c) \\ \dot{v}_{\parallel} &= \left( \frac{v_{\parallel}\mathbf{b}_0}{mv_{\parallel}} + \frac{B_0}{mv_{\parallel}B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_{E\chi} + \mathbf{v}_{\nabla B_0} + \mathbf{v}_c) \right) \cdot (e\bar{\mathbf{E}}_1 - \mu\nabla(B_0 + \bar{B}_{1\parallel})) \end{aligned}$$

Die nun errechneten Bewegungsgleichungen werden in (2.9) eingesetzt, was zu der folgenden Gleichung führt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \left( v_{\parallel}\mathbf{b}_0 + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_{E\chi} + \mathbf{v}_{\nabla B_0} + \mathbf{v}_c) \right) \\ \cdot \left( \nabla F + \frac{1}{mv_{\parallel}} (e\bar{\mathbf{E}}_1 - \mu\nabla(B_0 + \bar{B}_{1\parallel})) \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} \right) = 0 \quad (2.14) \end{aligned}$$



### $\delta F$ -Splitting

Für die numerische Behandlung ist es einfacher, wenn die Verteilungsfunktion in einen Gleichgewichtsanteil  $F_0$  und einen Störungsanteil  $F_1$  aufgeteilt wird. Wie beim Aufteilen der Felder ist auch hier die Störungsgröße eine Ordnung in  $\epsilon$  kleiner als das Gleichgewicht. Die senkrechten Gradienten sind allerdings von der gleichen Ordnung.

Betrachtet man nun den Gleichgewichtsanteil der Gleichung (2.14), indem man alle Störungsanteile in der Verteilungsfunktion und den Feldern Null setzt, so erhält man die folgende Gleichgewichtsgleichung, wenn man fordert, dass sie stationär sein soll.

$$\left( v_{\parallel} \mathbf{b}_0 + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_{\nabla B_0} + \mathbf{v}_c) \right) \cdot \left( \nabla F_0 - \frac{\mu}{mv_{\parallel}} \nabla B_0 \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \right) = 0$$

Diese Gleichung nun in die obige volle Vlasovgleichung bis zur ersten Ordnung eingesetzt, und unter Verwendung der Abkürzungen

$$g_1 = F_1 - \frac{e}{mc} \bar{A}_{1\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \quad G_1 = g_1 - \frac{e\chi_1}{mv_{\parallel}} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \quad (2.15)$$

erhält man die Gleichung für  $F_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} \mathbf{v}_{E\chi} \cdot \left( \nabla F_0 - \frac{\mu}{mv_{\parallel}} \nabla B_0 \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \right) + \frac{B_0}{B_{0\parallel}^*} (\mathbf{v}_{E\chi} + \mathbf{v}_{\nabla B_0} + \mathbf{v}_c) \cdot \nabla G_1 \\ + v_{\parallel} \mathbf{b}_0 \cdot \nabla G_1 + \left( \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{b}} + \frac{B_0}{mv_{\parallel} B_{0\parallel}^*} \mathbf{v}_c \right) \cdot (e\bar{\mathbf{E}}_1 - \mu \nabla (B_0 + \bar{B}_{1\parallel})) \frac{\partial F_1}{\partial v_{\parallel}} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

#### 2.1.4 Die gyrokinetischen Feldgleichungen

Im letzten Abschnitt wurde die gyrokinetische Vlasovgleichung im Gleichgewicht und in erster Störungsordnung hergeleitet. Dabei wurden die Felder als von außen fest vorgegeben betrachtet. Tatsächlich ist aber nur das Gleichgewichtsmagnetfeld von außen vorgegeben, die anderen Feldgrößen werden selbstkonsistent von den Ladungsdichten und Strömen im Plasma erzeugt und werden durch die Maxwellgleichungen beschrieben. Es ist allerdings zu beachten, dass die Maxwellgleichungen in Teilchenkoordinaten aufgestellt sind und nicht in Gyrozentrenvariablen. In diesem Abschnitt werden die gyrokinetisch modifizierten Maxwellgleichungen hergeleitet, die in Kombination mit Gleichung (2.16) ein vollständiges System von Differentialgleichungen darstellen, welches das Plasma beschreibt. Da im Plasma kleine Verschiebungen der Teilchendichten von Elektronen und Ionen gegeneinander zu großen rücktreibenden elektrischen Feldern führen, und damit zu hochfrequenten ( $\omega \sim \omega_p$  mit der Plasmafrequenz  $\omega_p = 4\pi e^2 n_0 / m_e$ ) Schwingungen, kann man in der niederfrequenten Plasmaphysik von einem quasineutralen

Plasma ausgehen, also  $n_e = n_i$  annehmen. Diese Beziehung ersetzt dann die Poissongleichung der Maxwellgleichungen. Man hat also die folgenden Gleichungen für die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Feldern und Plasma.

$$n_e = n_i \qquad \text{rot } \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}_1 \qquad (2.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e) \qquad \text{div } \mathbf{B}_1 = 0 \qquad (2.18)$$

Dabei wurde auch noch der Verschiebungsstrom vernachlässigt, da wir keine elektromagnetischen Wellen betrachten wollen.

### Gleichung für das elektrostatische Potential

Für die Teilchendichte gilt in Teilchenkoordinaten mit der Verteilungsfunktion  $f_z(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

$$n(\mathbf{x}) = \int f_z(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dv_{\parallel} v_{\perp} dv_{\perp} d\theta$$

Wird die Verteilungsfunktion  $f_z$  in Teilchenkoordinaten auf Gyrozentrenvariablen und damit auf die Verteilungsfunktion  $f_Z(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu, \theta)$  transformiert, so lautet die Gleichung

$$n(\mathbf{x}) = \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) f_Z(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu, \theta) d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta \qquad (2.19)$$

Der Vorfaktor kommt von der Transformation des Integrationselementes. Bildlich bedeutet diese Integrationsformel ein Integral für alle Gyroradien über alle Punkte im Raum, deren Gyrotrajektorie den betrachteten Punkt  $\mathbf{x}$  trifft.

Nun kommt im nächsten Schritt wieder die Lietransformation, die auch schon bei der Herleitung der gyrokinetischen Einsform verwendet wurde. Für eine skalare Funktion der alten Variablen lautet die Transformationsgleichung auf die Funktion  $F$  in den neuen Variablen

$$F = T^{*-1} f_Z$$

mit dem Operator  $T^*$ , der in Anhang B beschrieben wird. Umgekehrt gilt damit  $f_Z = T^* F$ , was in Gleichung (2.19) eingesetzt wird. Zuerst wird dieser Ausdruck ausführlicher geschrieben.

$$f_Z = T^* F = e^{\epsilon L_1} F = (1 + \epsilon L_1) F = F + \epsilon L_1 F = F + \epsilon \sum_{\nu=0}^5 G_1^{\nu} \frac{\partial F}{\partial Z^{\nu}}$$

Dabei werden nun die in Abschnitt 2.1.2 berechneten  $G_1^{\nu}$  verwendet. Wenn man nun nur die Terme bis zur Größenordnung  $\epsilon F_0$  mitnimmt, kommt man zu

$$T^* F = F + \frac{e}{mc} \tilde{A}_{1\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{B_0} \left( e \tilde{\Phi}_1 - \frac{e v_{\parallel}}{c} \tilde{A}_{1\parallel} - \mu \bar{B}_{1\parallel} \right) \frac{\partial F_0}{\partial \mu} \qquad (2.20)$$

Um weitere Vereinfachungen durchführen zu können, ist es notwendig eine Wahl für  $F_0$  zu treffen. Obwohl im vorhergehenden Abschnitt eine Differentialgleichung für  $F_0$  hergeleitet wurde, verwenden wir nicht die Lösung dieser Differentialgleichung, sondern einfach eine Maxwellverteilung um den Nullpunkt als Gleichgewichtsgeschwindigkeitsverteilung. Es gilt also

$$F_0(v_{\parallel}, \mu) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} n_0 e^{-\frac{mv_{\parallel}^2/2 + \mu B_0}{T}} \quad (2.21)$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} = -\frac{mv_{\parallel}}{T} F_0 \quad \frac{\partial F_0}{\partial \mu} = -\frac{B_0}{T} F_0.$$

Damit und mit (2.20) eingesetzt in (2.19) kommt man zu einer Teilchendichte von

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) &= \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) \left( F - e\tilde{\Phi}_1 \frac{F_0}{T} + \mu \bar{B}_{1\parallel} \frac{F_0}{T} \right) d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta \\ &= \bar{n}(\mathbf{x}) - \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) \left( e\tilde{\Phi}_1 - \mu \bar{B}_{1\parallel} \right) \frac{F_0}{T} d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta \end{aligned}$$

Hierbei wurde die gyrogemappte Gyrozentrerdichte

$$\bar{n}(\mathbf{x}) = \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) F d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta \quad (2.22)$$

eingeführt. Weiter wird nun der oszillierende Anteil von  $\Phi$  wieder zurückersetz durch

$$\tilde{\Phi}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) - \bar{\Phi}_1(\mathbf{X})$$

und man erhält, wenn man berücksichtigt, dass das Integral über  $\Phi_1$  durch die  $\delta$ -Funktion berechnet werden kann und das verbleibende Integral über  $F_0$  mit  $n_0$  bezeichnet wird

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) &= \bar{n}(\mathbf{x}) - \frac{e\Phi_1(\mathbf{x})}{T} n_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) \left( e\bar{\Phi}_1(\mathbf{X}) + \mu \bar{B}_{1\parallel}(\mathbf{X}) \right) \frac{F_0}{T} d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta \end{aligned}$$

Das Integral kann weiter vereinfacht werden, indem man die Integration über  $\mathbf{X}$  ausführt und anschließend erneut gyromittelt. Wenn man dann noch die Integration über  $v_{\parallel}$  durchführt (nur  $F_0(v_{\parallel}, \mu) = F_0(\mu) \exp(-mv_{\parallel}^2/T)$  hängt davon ab), so bleibt

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) &= \bar{n}(\mathbf{x}) - \frac{e\Phi_1(\mathbf{x})}{T} n_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{B_0}{\sqrt{T}} \int \left( eJ_0(\lambda)\bar{\Phi}_1(\mathbf{x}) + \mu J_0(\lambda)\bar{B}_{1\parallel}(\mathbf{x}) \right) F_0(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Es bleiben Integrale der Form

$$\int_0^\infty J_0^2(\lambda) \Phi_1(\mathbf{x}) e^{-\frac{\mu B_0}{T}} d\mu \quad \int_0^\infty J_0(\lambda) I_1(\lambda) \mu B_{1\parallel}(\mathbf{x}) e^{-\frac{\mu B_0}{T}} d\mu$$

Führt man bei diesen die neue Variable  $x = \frac{\mu B_0}{T}$  ein, so folgt  $\lambda^2 = -\rho^2 \nabla_\perp^2 = -\frac{v_\perp^2}{\Omega^2} \nabla_\perp^2 = -\frac{2\mu B_0}{m\Omega^2} \nabla_\perp^2 = -2\frac{xT}{m\Omega^2} \nabla_\perp^2 = 2xb$  mit  $b = -\rho_t^2 \nabla_\perp^2$ , wobei  $\rho_t^2 = \frac{T}{m\Omega^2}$ . Für die Integrale hat man damit

$$\frac{T}{B_0} \int_0^\infty J_0^2(\lambda) \Phi_1 e^{-x} dx \quad \frac{T^2}{B_0^2} \int_0^\infty J_0(\lambda) I_1(\lambda) x B_{1\parallel} e^{-x} dx$$

Berechnet man diese beiden Integrale, erhält man

$$\frac{T}{B_0} e^{-b} \hat{I}_0(b) \Phi_1(\mathbf{x}) \quad \frac{T^2}{B_0^2} e^{-b} \left( \hat{I}_0(b) - \hat{I}_1(b) \right) B_{1\parallel}$$

Führt man nun noch die Abkürzung  $\Gamma_n(b) = \hat{I}_n(b) e^{-b}$  mit der modifizierten Besselfunktion  $\hat{I}$  ein, so hat man den folgenden Ausdruck für die Dichte

$$n(\mathbf{x}) = \bar{n}(\mathbf{x}) - \frac{e\Phi_1(\mathbf{x})}{T} n_0(\mathbf{x}) + n_0 \left( \Gamma_0(b) \frac{e\Phi_1(\mathbf{x})}{T} + (\Gamma_0(b) - \Gamma_1(b)) \frac{B_{1\parallel}(\mathbf{x})}{B_0} \right)$$

Damit und unter Verwendung der allgemeinen Quasineutralität

$$\sum_j e_j \frac{n_{j1}}{n_{j0}} = 0$$

folgt die gesuchte Gleichung für das elektrostatische Potential  $\Phi_1$

$$\sum_j e_j (1 - \Gamma_0(b_j)) \frac{e_j \Phi_1}{T_{j0}} = \sum_j e_j \left( \frac{\bar{n}_{j1}}{n_{j0}} + (\Gamma_0(b_j) - \Gamma_1(b_j)) \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \right) \quad (2.23)$$

Weiter folgt aus (2.22) die Beziehung für die gyrogemappede Gyrozentrendichte

$$\bar{n}(\mathbf{x}) = \frac{B_0}{m} \int J_0(\lambda) F dv_\parallel d\mu d\theta$$

### Gleichung für $A_{1\parallel}$

Die Maxwellgleichung für  $B_1$  kann mit den Potentialen unter Verwendung der Coulombgleichung  $\text{div } \mathbf{A}_1 = 0$  geschrieben werden als

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Für die parallele Komponente braucht man den parallelen Strom. Der Beitrag einer Spezies zum Gesamtstrom läßt sich aus der Verteilungsfunktion  $f_z$  in den Teilchenkoordinaten berechnen.

$$j_{\parallel}(\mathbf{x}) = e \int v_{\parallel} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v$$

Wie bei der Berechnung der Dichte, wird jetzt auch hier die schrittweise Transformation auf die Lietransformierten Gyrozentrenkoordinaten durchgeführt. Das Ergebnis lautet

$$j_{\parallel}(\mathbf{x}) = e \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) v_{\parallel} T^* F d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta$$

Setzt man nun wieder  $T^*F$  aus Gleichung (2.20) unter Verwendung der Gleichgewichtsverteilungsfunktion  $F_0$  aus Gleichung (2.21) ein und beachtet dass Integrale über  $v_{\parallel} F_0(v_{\parallel})$  wegen der Symmetrie von  $F_0$  verschwinden, so bleibt nur

$$j_{\parallel}(\mathbf{x}) = e \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) v_{\parallel} F(\mathbf{X}) d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta$$

übrig. Hier wird nun die Integration über  $\mathbf{X}$  durchgeführt und anschließend erneut gyrogemittelt. Es ergibt sich

$$\bar{j}_{\parallel}(\mathbf{x}) = e \frac{B_0}{m} \int v_{\parallel} J_0(\lambda) F(\mathbf{x}) dv_{\parallel} d\mu d\theta$$

Und damit insgesamt die Gleichung

$$\nabla_{\perp}^2 A_{1\parallel} = -\frac{4\pi B_0}{c} \sum_j \frac{e_j}{m_j} \int v_{\parallel} J_0(\lambda_j) F_j(\mathbf{x}) dv_{\parallel} d\mu d\theta \quad (2.24)$$

### Gleichung für $B_{1\parallel}$

Die senkrechten Komponenten der Ampèregleichung (2.18) lauten ausgeschrieben

$$(\text{rot } \mathbf{B}_1)_{\perp} = \begin{pmatrix} \partial_y B_{1\parallel} - \partial_z B_{1y} \\ \partial_z B_{1x} - \partial_x B_{1\parallel} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{1\perp}$$

Da die parallelen Ableitungen der Störungsgrößen eine Ordnung in  $\epsilon$  kleiner sind als die senkrechten Ableitungen, kann diese Gleichung vereinfacht geschrieben werden als

$$\mathbf{b} \times \nabla_{\perp} B_{1\parallel} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{1\perp}$$

Der senkrechte Strom berechnet sich wieder in den transformierten Koordinaten als

$$\mathbf{j}_{\perp} = e \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) \mathbf{u}_{\perp} T^* F d\mathbf{X} dv_{\parallel} d\mu d\theta$$

Jetzt setzt man wieder Gleichung (2.20) und  $F_0$  aus (2.21) ein und erhält

$$\mathbf{j}_\perp = e \frac{B_0}{m} \int \delta(\mathbf{X} + \mathbf{r} - \mathbf{x}) \mathbf{u}_\perp \left( F - \left( e\tilde{\Phi}_1 - \mu\bar{B}_{1\parallel} \right) \frac{F_0}{T} \right) d\mathbf{X} dv_\parallel d\mu d\theta$$

Mit demselben Vorgehen wie bei den anderen beiden Potentialen kommt man zu

$$B_{1\parallel} = - \sum_j \frac{4\pi n_0 T_{j0}}{B_0} \left[ \frac{B_0}{n_0 T_{j0}} \int \mu I_1(\lambda_j) F_{1j} d^3v + (\Gamma_0(b_j) - \Gamma_1(b_j)) \left( \frac{e_j \Phi_1}{T_{j0}} + 2b_j \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \right) \right] \quad (2.25)$$

Löst man diese Gleichung nach  $B_{1\parallel}/B_0$  auf, kommt man zu

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \sum_j \beta_j (\Gamma_0(b_j) - \Gamma_1(b_j)) 2b_j \right) \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \\ & = - \sum_j \beta_j \left[ \frac{B_0}{n_0 T_{j0}} \int \mu I_1(\lambda_j) F_{1j} d^3v + (\Gamma_0(b_j) - \Gamma_1(b_j)) \frac{e_j \Phi_1}{T_{j0}} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Größe  $B_{1\parallel}$  gibt die Störung des Magnetfeldes in Richtung des Gleichgewichtsmagnetfeldes an. Man kann mit Hilfe des Ausdrucks (2.26) diese Größe abschätzen:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + 2 \sum_j \beta_j \frac{m_j T_{j0}}{m_i T_{e0}} \right) \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \sim - \sum_j \beta_j \left[ \frac{B_0}{n_0 T_{j0}} \frac{m_j v_{Tj}^2}{2B_0} n_0 \epsilon + \frac{T_{e0}}{T_{j0}} \epsilon \right] \\ & \left( 1 + 2\beta_e \frac{m_e}{m_i} + 2\beta_i \frac{T_{i0}}{T_{e0}} \right) \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \sim - \sum_j \beta_j \epsilon \left[ 1 + \frac{T_{e0}}{T_{j0}} \right] \end{aligned}$$

Für ein Temperaturverhältnis der Ordnung 1, bekommt man dann unter Berücksichtigung des Massenverhältnisses:

$$(1 + 2\beta_i) \frac{B_{1\parallel}}{B_0} \sim (\beta_e + \beta_i) \epsilon$$

Wenn  $\beta_j$  klein ist, und das ist bei den Rechnungen in dieser Arbeit immer der Fall, kann man  $B_{1\parallel}$  abschätzen durch

$$B_{1\parallel} \sim \beta \epsilon B_0$$

Damit wird klar, dass man für unsere Rechnungen  $B_{1\parallel}$  nicht berücksichtigen muss. Wir setzen es deshalb ab hier gleich Null.

### Zusammenfassung

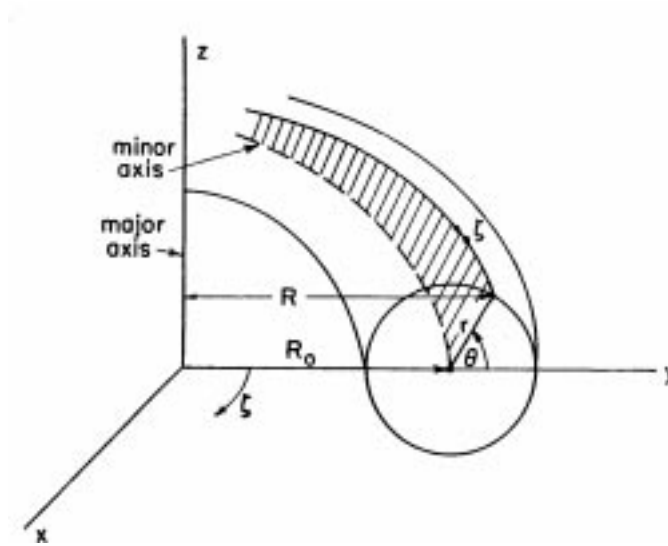
In diesem Abschnitt wurde das gyrokinetische Maxwell-Vlasov System hergeleitet. Dazu wurde die Einsform mittels einer Transformation auf Gyrozentrenvariablen und einer anschließenden Lietransformation in erster Störungsordnung dargestellt. Daraus konnten die Bewegungsgleichungen und damit die Vlasovgleichung in den neuen Gyrozentrenvariablen berechnet werden. Kombiniert mit den Maxwellgleichungen und der Quasineutralität konnte das gesamte gyrokinetische System aufgestellt werden.

## 2.2 Geometrie

In diesem Abschnitt werden nun die Ortsraumkoordinaten betrachtet und auf ein geeignetes Koordinatensystem transformiert. Als solches verwenden wir ein Koordinatensystem, in dem die Gleichgewichtsmagnetfeldlinien gerade sind und in einer Koordinatenrichtung liegen (Greene & Johnson, 1962). Außerdem wird das Koordinatensystem auf einen Flußschlauch eingeschränkt (Beer *et al.*, 1995). Immer wenn der Ortsraum für die numerische Simulation mit einem Gitter überzogen wird, hilft solch eine Transformation, viel Rechenaufwand zu sparen. Das liegt daran, dass die Skalen der Turbulenz in senkrechter Richtung zum Magnetfeld um 2-4 Größenordnungen kleiner sind als parallel dazu. Somit kann man die Anzahl der Gitterpunkte in paralleler Richtung viel kleiner wählen und dadurch Rechenaufwand sparen. In den folgenden beiden Unterabschnitten, wird erst ein Koordinatensystem gefunden, in dem die Feldlinien gerade sind, dieses dann am Magnetfeld ausgerichtet und auf einen Flußschlauch eingeschränkt.

### 2.2.1 Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

In einem toroidalen System mit einem sich helikal windenden Magnetfeld bilden die Feldlinien ineinander geschachtelte Tori. Um ein geeignetes Koordinatensystem zu finden, geht man von einem Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  aus, das vollständig bekannt ist. Der Raum wird durch drei Koordinaten bestimmt, zum einen durch die Koordinate über die Flussflächen hinweg, das „flux-surface label“  $\varrho$ , und dann noch zwei weitere winkelartige Koordinaten  $\theta$  und  $\zeta$ , die in poloidaler bzw. toroidaler Richtung zeigen, siehe dazu die Abb. 2.1. Die kovarianten Einheitsvektoren in die drei Raumrichtungen werden mit  $\mathbf{e}_\varrho$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\zeta$  bezeichnet. Es sollen nun neue Koordinaten  $\theta_f$  und  $\zeta_f$  gefunden werden, in denen die Feldlinien gerade sind und in Richtung einer Koordinate liegen. Als „flux-surface label“ kann jede radial wachsende Funktion verwendet werden, die nur von der Flußfläche abhängt. In Tokamaks wird gewöhnlich der poloidale magnetische Fluß  $\Psi_p$  verwendet. Für



**Abbildung 2.1:** Ausgangskoordinatensystem in einem Torus, nach (D'haeseleer, 91)

dieses gilt

$$\Psi_p = \frac{1}{2\pi} \Psi_{\text{pol}} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\text{pol}}} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_V \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \theta d^3R \quad (2.27)$$

Dabei ist  $S_{\text{pol}}$  eine Fläche, die von der Flußfläche und der magnetischen Achse beschränkt ist und deren Normalenvektor in poloidaler Richtung zeigt. Das Volumen  $V$  ist dagegen das von der Flußfläche eingeschlossene Volumen. Das Magnetfeld läßt sich in seinen kontravarianten Komponenten schreiben.

$$\mathbf{B}_0 = B^\varrho \mathbf{e}_\varrho + B^\theta \mathbf{e}_\theta + B^\zeta \mathbf{e}_\zeta \quad \text{mit} \quad B^i = \mathbf{B} \cdot \nabla u^i.$$

Aus der Definition einer Flußfläche  $\mathbf{B} \cdot \nabla \varrho = 0$  folgt  $B^\varrho = 0$  und damit für das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = B^\theta \mathbf{e}_\theta + B^\zeta \mathbf{e}_\zeta = B^\theta J(\nabla \zeta \times \nabla \varrho) + B^\zeta J(\nabla \varrho \times \nabla \theta).$$

Dabei wurde die Jacobideterminante  $J = 1/(\nabla \varrho \times \nabla \theta \cdot \nabla \zeta)$  eingeführt. Aus  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  folgt, dass die beiden Komponenten nicht unabhängig voneinander sind und beide von einer Funktion  $\nu(\varrho, \theta, \zeta)$  abgeleitet werden können:

$$B^\theta = -\frac{1}{J} \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} \quad B^\zeta = \frac{1}{J} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}$$

Damit kann das Magnetfeld geschrieben werden als

$$\mathbf{B}_0 = \nabla \varrho \times \nabla \nu$$



da Terme in  $\nu$ , die ein  $\nabla\varrho$  enthalten durch das Kreuzprodukt wieder wegfallen.

In (D'haeseleer *et al.*, 1991) wird ausgeführt, dass die Funktion  $\nu$  die folgende Form hat

$$\nu(\varrho, \theta, \zeta) = (\Psi'_t \theta - \Psi'_p \zeta) + \tilde{\nu}(\varrho, \theta, \zeta)$$

wobei der Strich die Ableitung nach dem Argument  $\varrho$  kennzeichnet. Nun kann man die Variablen ändern zu

$$\theta_f = \theta + \frac{\tilde{\nu}}{\Psi'_t} \quad \zeta_f = \zeta$$

und man erhält

$$\nu(\varrho, \theta_f, \zeta_f) = \Psi'_t \theta_f - \Psi'_p \zeta_f$$

Mit  $\nu = \nu_0 = \text{konstant}$  erhält man die Gleichung einer geraden Feldlinie im  $(\theta_f, \zeta_f)$  Koordinatensystem (Greene & Johnson, 1962):

$$\zeta_f = \frac{\Psi'_t}{\Psi'_p} \theta_f - \frac{\nu_0}{\Psi'_p}$$

mit der Steigung  $q = \Psi'_t/\Psi'_p$ , dem Sicherheitsfaktor. Mit  $q$  kann auch die gesamte Funktion  $\nu$  geschrieben werden, was zu

$$\nu(\varrho, \theta_f, \zeta_f) = \Psi'_p (q\theta_f - \zeta_f)$$

führt und damit für das Magnetfeld

$$\mathbf{B}_0 = \nabla\Psi_p \times \nabla(q\theta_f - \zeta_f)$$

ergibt. Dabei wurde  $\nabla\Psi_p = \Psi'_p \nabla\varrho$  verwendet. Transformiert man nun vom  $(\Psi_p, \theta_f, \zeta_f)$  Koordinatensystem auf ein  $(\alpha, \beta, \theta)$  Koordinatensystem mit Hilfe der Transformation

$$\alpha = \Psi_p \quad \beta = q\theta_f - \zeta_f \quad \theta = \theta_f$$

so läßt sich das Magnetfeld einfach in einer Clebsch Darstellung als

$$\mathbf{B}_0 = \nabla\alpha \times \nabla\beta \tag{2.28}$$

schreiben (Kruskal & Kulsrud, 1958).

### 2.2.2 Reduktion auf einen Flussschlauch

Das im letzten Abschnitt gewählte Koordinatensystem wird nun weiterverwendet und auf einen Flussschlauch eingeschränkt. Diese Geometrie ist dadurch ausgezeichnet, dass die Ausdehnung in senkrechter Richtung zum Magnetfeld klein ist, entlang des Flußschlauches, also parallel zum Magnetfeld dagegen groß (Beer *et al.*, 1995). Das entspricht auch der räumlichen Struktur der erwarteten Turbulenz. Die Größenordnung in senkrechter Richtung sind einige 10 bis wenige 100

Ionengyrationsradien, in paralleler Richtung ist dagegen die relevante Längenskala der große Radius des Tokamaks.

Der Flußschlauch ist das kleinste dreidimensionale Simulationsvolumen, das alle für die Turbulenzsimulation von Mikroinstabilitäten wichtigen Effekte enthält. Die Gleichgewichtsgrößen sowie deren Gradienten werden als konstant über die radiale Ausdehnung des Flußschlauches angenommen, da dessen Ausdehnung viel kleiner als die Gleichgewichtslängenskalen ist. Nimmt man weiter ein großes Aspektverhältnis und kreisförmige Flußflächen an, so kann man den poloidalen Fluß an einer Stelle  $R_0 + x$  darstellen als

$$\Psi_p \approx \Psi_{p0} + RB_p x$$

Darauf kommt man, wenn man von dem magnetischen Fluß an der Stelle  $R_0$  ausgeht und eine Kreisscheibe in der Integrationsfläche hinzunimmt, die gerade die Fläche  $2\pi R x$  hat. Das Poloidalfeld  $B_p$  wird als konstant angenommen und der Faktor  $2\pi$  ist in der Definition von  $\Psi_p$  schon enthalten. Löst man diese Beziehung nach  $x$  auf, erhält man

$$x = \frac{1}{RB_p}(\Psi_p - \Psi_{p0})$$

Für den Sicherheitsfaktor  $q$  gilt

$$q = \frac{\Psi'_t}{\Psi'_p} \approx \frac{r_0 B_{t0}}{R_0 B_{p0}}$$

was man erhält, wenn man den infinitesimalen Fluß berechnet  $d\Psi_p = RB_p d\alpha$ . Genauso kann man auch den toroidalen Fluß berechnen.

Nun wählt man als neue Koordinaten

$$x = \frac{q}{r_0 B_{t0}}(\Psi_p - \Psi_{p0}) \quad y = \frac{r_0}{q_0}(\beta - \beta_0) \quad z = q_0 R_0 \theta \quad (2.29)$$

Das Magnetfeld hat in diesen neuen Koordinaten die Form

$$\mathbf{B}_0 = B_{t0} \nabla x \times \nabla y$$

Die Jacobideterminante ist genau Eins. Berechnet man die metrischen Koeffizienten, erhält man die folgende Matrix

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\hat{s}}{q_0 R_0} z & 0 \\ \frac{\hat{s}}{q_0 R_0} z & 1 + \left(\frac{\hat{s}}{q_0 R_0} z\right)^2 + \left(\frac{r_0}{q_0 R_0}\right)^2 & \frac{q_0 R_0}{r_0} \\ 0 & \frac{q_0 R_0}{r_0} & \left(\frac{q_0 R_0}{r_0}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

mit dem Verscherungsparameter („magnetic shear“)

$$\hat{s} = \frac{r_0}{q_0} \frac{dq}{dx}.$$

Die Größe  $\hat{s}$  wird als konstant über den Flußschlauch angenommen und am Ort  $x = 0$  berechnet.

Nimmt man ein großes Aspektverhältnis  $\epsilon_t = r_0/R_0 \ll 1$  an, so ist der Betrag des Gesamtmagnetfeldes nur durch den toroidalen Beitrag gegeben. Dabei steht  $r_0$  für den kleinen Radius der Flussfläche und  $R_0$  für den großen Radius. Weiter kann man die Abhängigkeit des toroidalen Magnetfeldes von den Koordinaten beschreiben und damit die Ableitungen des Magnetfeldes nach den Koordinaten berechnen. Das Magnetfeld fällt radial von der Symmetrieachse aus mit dem Abstand ab. Der Abstand eines Punktes  $(x, y, z)$  von der Symmetrieachse läßt sich aus geometrischen Überlegungen im  $r, \theta, \zeta$  Koordinatensystem berechnen. Es gilt dann

$$B_0(R) \propto \frac{1}{R_0 + (r_0 + x) \cos \theta}$$

Bezieht man das Magnetfeld auf einen Referenzwert  $B_{\text{ref}}$  am Ort  $R = R_0$ , so erhält man für das so normierte Magnetfeld

$$\hat{B} = \frac{B_0}{B_{\text{ref}}} = \frac{R_0}{R_0 + (r_0 + x) \cos \theta} \approx \frac{1}{1 + \epsilon_t \cos \theta}$$

wobei die Näherung  $x \ll r_0$  berücksichtigt und das inverse Aspektverhältnis  $\epsilon_t = r_0/R_0$  verwendet wurde. Damit erhält man für die Ableitungen

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial x} = -\frac{\hat{B}^2}{R_0} \cos \theta \quad \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} = \hat{B}^2 \frac{\epsilon_t}{q_0 R_0} \sin \theta \quad (2.31)$$

### 2.2.3 Transformation der Operatoren

Jetzt werden die in Abschnitt 2.1 berechneten Operatoren in das Flußschlauchkoordinatensystem transformiert. Dabei wird beachtet, dass die senkrechte Ausdehnung des Flußschlauches sehr viel kleiner ist als die Skalen der Gleichgewichtsgrößen. Die Gleichgewichtsgrößen werden also als konstant angenommen. Gleichzeitig werden allerdings auch die senkrechten Gradienten der Gleichgewichtsgrößen als konstant angenommen.

Es treten die folgenden Ortsraumdifferentialoperatoren in der Vlasogleichung auf<sup>1</sup>:

$$\mathbf{v}_{E_\chi} \cdot \nabla = \frac{c}{B_0^2} (\mathbf{B}_0 \times \nabla \chi_1) \cdot \nabla \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_{\nabla B_0} \cdot \nabla = \frac{\mu}{m \Omega B_0} (\mathbf{B}_0 \times \nabla B_0) \cdot \nabla \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}_c \cdot \nabla = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega B_0^2} (\mathbf{B}_0 \times \nabla B_0) \cdot \nabla \quad (2.34)$$

---

<sup>1</sup>Wie man auf die angeführte Form für die Krümmungsdrift kommt, wird in Anhang F gezeigt.

für die Driftoperatoren und

$$\mathbf{b}_0 \cdot \nabla = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \cdot \nabla \quad \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \cdot \nabla - \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \bar{A}_{1\parallel}}{B_0 B_{0\parallel}^*} \cdot \nabla$$

für die parallelen Operatoren. Zusätzlich zu diesen Operatoren der Vlasovgleichung braucht man noch den „senkrechten“ Laplaceoperator in den Feldgleichungen.

Wie man sieht kann man alle Operatoren durch die drei Basisoperatoren

$$(\mathbf{B}_0 \times \nabla F) \cdot \nabla \quad \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \quad \nabla_{\perp}^2$$

ausdrücken. Für diese Basisoperatoren gilt im  $(x, y, z)$  Koordinatensystem

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_0 \times \nabla F) \cdot \nabla G &= (B_0(\nabla x \times \nabla y) \times \nabla F) \cdot \nabla G \\ &= B_0 (g^{1i} g^{2j} - g^{2i} g^{1j}) \partial_i F \partial_j G \\ \mathbf{B}_0 \cdot \nabla G &= B_0 \frac{\partial G}{\partial z} \\ \nabla_{\perp}^2 G &= g^{11} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + g^{22} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Außerdem wird eine Maxwellverteilung (2.21) für  $F_0$  verwendet, wobei allerdings beachtet werden muss, dass es radiale Gleichgewichtsgradienten in  $n_0$ ,  $T_0$  und  $B_0$  gibt und dass  $B_0$  von  $z$  abhängt. Für die Ableitungen von  $F_0$  gilt damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x} &= F_0 \left( \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial x} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left( \frac{mv_{\parallel}^2}{2T} + \frac{\mu B}{T} - \frac{3}{2} \right) - \frac{\mu}{T} \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial F_0}{\partial y} &= 0 \quad \frac{\partial F_0}{\partial z} = -F_0 \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \end{aligned}$$

Zur weiteren Vereinfachung werden noch die häufig vorkommenden Größen

$$g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} = 1 \quad g^{12} g^{13} - g^{11} g^{23} = -\frac{q_0 R_0}{r_0} \quad g^{13} g^{22} - g^{12} g^{23} = -\frac{\hat{s} z}{r_0}$$

angegeben. Bei deren Berechnung wurde die Näherung des kleinen Aspektverhältnisses verwendet und dementsprechend  $r_0/R_0 = \epsilon_t$  als klein angenommen und Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon_t^2)$  vernachlässigt.

Geht man nun die einzelnen Operatoren der Gleichung (2.16) durch und drückt sie im Flussschlauchkoordinatensystem aus, so bekommt man die folgenden Ausdrücke. Mit dem metrischen Tensor (2.30) und unter Vernachlässigung der parallelen Ableitungen der Störungsgrößen kommt man für die Terme mit der  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -

Geschwindigkeit auf die folgenden Ergebnisse.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla F_0 &= -\frac{c}{B_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{c}{B_0} \left( \frac{q_0 R_0}{r_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\hat{s}z}{r_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial F_0}{\partial z} \\
 \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla B_0 &= -\frac{c}{B_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial B_0}{\partial x} + \frac{c}{B_0} \left( \frac{q_0 R_0}{r_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\hat{s}z}{r_0} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial B_0}{\partial z} \\
 \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla G_1 &= \frac{c}{B_0} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial G_1}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Für die weiteren Driftterme erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\nabla B_0} \cdot \nabla G_1 &= \frac{\mu}{m\Omega} \left( -\frac{q_0 R_0}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial B_0}{\partial x} - \frac{\hat{s}z}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
 \mathbf{v}_c \cdot \nabla G_1 &= \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega B_0} \left( \frac{\partial B_0}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{q_0 R_0}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\hat{s}z}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
 \mathbf{v}_c \cdot \bar{\mathbf{E}}_1 &= -\mathbf{v}_c \cdot \nabla \bar{\Phi}_1 \\
 &= -\frac{v_{\parallel}^2}{\Omega B_0} \left( \frac{\partial B_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} - \frac{q_0 R_0}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} - \frac{\hat{s}z}{r_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} \right) \\
 \mathbf{v}_c \cdot \nabla B_0 &= \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega B_0} (g^{1i} g^{2j} - g^{2i} g^{1j}) (\partial_i B_0 + \frac{4\pi}{B_0} \partial_i p) \partial_j B_0 = 0
 \end{aligned}$$

Die parallelen Ableitungen entlang des Gleichgewichtfeldes und entlang des gestörten Feldes lauten dann

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0 \cdot \nabla G_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial z} \\
 \tilde{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_1 &= -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla \bar{\Phi}_1 - \frac{1}{c} \dot{A}_{1\parallel} \\
 &= -\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial z} - \frac{1}{c} \dot{A}_{1\parallel} + \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} - \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} \right) \\
 \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla B_0 &= \mathbf{b}_0 \cdot \nabla B_0 - \frac{1}{B_{0\parallel}^*} (g^{1i} g^{2j} - g^{2i} g^{1j}) \partial_i A_{1\parallel} \partial_j B_0 \\
 &= \frac{\partial B_0}{\partial z} - \frac{1}{B_{0\parallel}^*} \left( -\frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial y} \frac{\partial B_0}{\partial x} + \frac{q_0 R_0}{r_0} \left( \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial x} + \hat{s}\theta \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial y} \right) \frac{\partial B_0}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Es bleibt noch der senkrechte Laplaceoperator in den Feldgleichungen, für den im neuen Koordinatensystem die Beziehung

$$\nabla_{\perp}^2 G_1 = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2\hat{s} \frac{z}{q_0 R_0} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} + \left( 1 + \left( \frac{\hat{s}z}{q_0 R_0} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}$$

gilt.

### Zusammenfassung

Dieser Abschnitt diente dazu, die Gleichungen auf ein Koordinatensystem umzuschreiben, in dem die Feldlinien gerade sind und in der  $z$ -Richtung liegen. Ausgehend von einer Clebsch-Darstellung des Magnetfeldes kamen wir zu geraden Feldlinien, von dort zu am Magnetfeld ausgerichteten Feldlinien und schränkten das Simulationsvolumen auf einen Flussschlauch ein.

## 2.3 Ausgangsgleichungen für die numerische Behandlung

Nun werden die im letzten Abschnitt hergeleiteten Größen auf geeignete Referenzgrößen normiert, so dass sie alle von derselben Größenordnung sind, was die numerische Behandlung vereinfacht. Für die unabhängigen Größen gilt

$$\left( \frac{c_s t}{L_\perp}, \frac{x}{\rho_s}, \frac{y}{\rho_s}, \frac{z}{L_\parallel}, \frac{v_\parallel}{v_{Tj}}, \frac{\mu B_{\text{ref}}}{T_{j0}} \right) \longrightarrow (t, x, y, z, v_\parallel, \mu)$$

und für die abhängigen

$$\left( \frac{v_{Tj}^3}{n_0} F_{j0}, \frac{v_{Tj}^3}{n_0} \frac{L_\perp}{\rho_s} F_{j1}, \frac{e\Phi_1}{T_{e0}} \frac{L_\perp}{\rho_s}, \frac{A_{1\parallel}}{\beta_e B_{\text{ref}} \rho_s} \frac{L_\perp}{L_\parallel} \frac{L_\perp}{\rho_s}, \frac{B_{1\parallel}}{B_{\text{ref}}} \frac{L_\perp}{\rho_s} \right) \longrightarrow (F_{j0}, F_j, \Phi, A_\parallel, B_\parallel)$$

Außerdem wird der Betrag des Gleichgewichtsmagnetfeldes geschrieben als  $B_0 = \hat{B} B_{\text{ref}}$ . Die abgeleiteten Größen  $g_1$  und  $G_1$  werden wie  $F_1$ ,  $\chi_1$  wie  $\Phi_1$  normiert. Sie lauten dann in normierten Einheiten

$$g_1 = F_1 + \sigma_j \alpha_j v_\parallel F_{j0} \hat{\epsilon} \beta_e \bar{A}_{1\parallel} \quad G_1 = g_j + \sigma_j \chi_j F_{j0} \quad \chi_j = \bar{\Phi}_1 - \alpha_j v_\parallel \hat{\epsilon} \beta_e \bar{A}_{1\parallel}$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma_j = \frac{e_j T_{e0}}{e T_{j0}} \quad \alpha_j = \frac{v_{Tj}}{c_s} \frac{L_\perp}{q_0 R_0}$$

### 2.3.1 Vlasovgleichung

Mit der angeführten Normierung kommt man für die Operatoren auf

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla F_0 &= -\frac{c_s}{L_\perp} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{\rho_s}{L_\perp} \frac{1}{\hat{B}} \left[ \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{L_\perp}{r_0} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \hat{s} z \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial F_0}{\partial z} \right] \\ \frac{\mu}{T_{j0}} F_0 \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla B_0 &= -\mu F_0 \frac{c_s}{L_\perp} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{\rho_s}{L_\perp} \frac{1}{\hat{B}} \left[ \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} - \frac{L_\perp}{r_0} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \hat{s} z \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \right] \\ \mathbf{v}_{E_x} \cdot \nabla G_1 &= \frac{c_s \rho_s}{L_\perp^2} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{1}{\hat{B}} \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial G_1}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Die weiteren linearen Driftterme werden zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\nabla B_0} \cdot \nabla G_1 &= \frac{c_s}{L_\perp} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{\rho_s}{L_\perp} \frac{1}{\hat{B}} \frac{\mu}{\sigma_j} \left( -\frac{L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} - \frac{\hat{s}z L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \right) \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
 \mathbf{v}_c \cdot \nabla G_1 &= \frac{c_s}{L_\perp} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{\rho_s}{L_\perp} \frac{1}{\hat{B}} \frac{2v_\parallel^2}{\hat{B} \sigma_j} \left( -\frac{L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} - \frac{\hat{s}z L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \right) \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
 \frac{\mu}{m_j v_\parallel} \mathbf{v}_c \cdot \nabla B_0 \frac{\partial F_1}{\partial v_\parallel} &= 0 \\
 \frac{\mu}{m_j} \mathbf{b}_0 \cdot \nabla B_0 \frac{\partial F_1}{\partial v_\parallel} &= \frac{c_s}{L_\perp} \frac{n_0}{v_{Tj}^3} \frac{\rho_s}{L_\perp} \frac{\alpha_j}{2} \mu \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial v_\parallel}
 \end{aligned}$$

Alle weiteren nichtlinearen Terme sind eine Ordnung in  $\rho_s/L_\perp$  kleiner und werden vernachlässigt. Für die Größe  $B_{0\parallel}^*$  gilt in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 B_{0\parallel}^* &= \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{B}^* = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{B}_0 + \frac{mc}{e} v_\parallel \mathbf{b}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{b}_0 = B_0 + \frac{mc}{e} v_\parallel \frac{\mathbf{b}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{B}_0}{B_0} \\
 &= B_0 + \frac{4\pi m}{e B_0} v_\parallel j_\parallel
 \end{aligned}$$

Schätzt man die Größe dieses Ausdrucks ab, kommt man zu

$$B_{0\parallel}^* \sim B_0 + \frac{4\pi m_j}{e_j B_0} v_{Tj} e_j n_j v_{Tj} = B_0 + \frac{8\pi n_j T_{j0}}{B_0^2} B_0 \sim B_0(1 + \beta) \sim B_0$$

wobei die Näherung  $\beta \ll 1$  verwendet wurde, was für unsere Rechnungen immer gilt. Wir approximieren deshalb  $B_{0\parallel}^*$  durch  $B_0$ .

Man kommt damit auf die folgende Gleichung für jede Spezies  $j$  (die Indizes 1, die die Störungsterme bezeichnen werden nun weggelassen und teilweise durch ein  $j$  ersetzt, um die Zuordnung der Größe zu den Spezies zu verdeutlichen).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_j}{\partial t} + \frac{1}{\hat{B}} \left[ \left( \omega_n + \omega_{Tj} \left( v_\parallel^2 + \mu \hat{B} - \frac{3}{2} \right) \right) F_{0j} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \left( \frac{\partial \chi_j}{\partial x} \frac{\partial G_j}{\partial y} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \frac{\partial G_j}{\partial x} \right) \right. \\
 \left. + \frac{\mu \hat{B} + 2v_\parallel^2}{\sigma_j \hat{B}} \left( -\frac{L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{\partial G_j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} - \frac{\hat{s}z L_\perp}{r_0} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \right) \frac{\partial G_j}{\partial y} \right) \right] \\
 + \alpha_j v_\parallel \frac{\partial G_j}{\partial z} - \frac{\alpha_j}{2} \mu \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{\partial F_{1j}}{\partial v_\parallel} = 0
 \end{aligned}$$

Hierbei wurden die folgenden Abkürzungen für die Antriebsgradienten verwendet:

$$\omega_n = \frac{L_\perp}{L_n} = -\frac{L_\perp}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \quad \omega_{Tj} = \frac{L_\perp}{L_{Tj}} = -\frac{L_\perp}{T_{j0}} \frac{dT_{j0}}{dx}$$

Setzt man noch die Ausdrücke (2.31) in der richtigen Normierung ein, kommt man zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial t} + \left( \omega_n + \omega_{Tj} \left( v_{\parallel}^2 + \mu \hat{B} - \frac{3}{2} \right) \right) F_{0j} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \left( \frac{\partial \chi_j}{\partial x} \frac{\partial G_j}{\partial y} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \frac{\partial G_j}{\partial x} \right) \\ + \frac{\mu \hat{B} + 2v_{\parallel}^2}{2\sigma_j \hat{B}} \left( \mathcal{K}_x \frac{\partial G_j}{\partial x} + \mathcal{K}_y \frac{\partial G_j}{\partial y} \right) + \alpha_j v_{\parallel} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\alpha_j}{2} \mu \hat{B}^2 \epsilon_t \sin z \frac{\partial F_1}{\partial v_{\parallel}} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei die Vorfaktoren  $1/\hat{B}$  mit Eins genähert wurden. Außerdem wurden die normierten Krümmungsterme

$$\mathcal{K}_x = -2 \frac{L_{\perp}}{R_0} \sin z \quad \mathcal{K}_y = -2 \frac{L_{\perp}}{R_0} (\cos z + \hat{s}z \sin z) \quad (2.36)$$

verwendet, sowie die Gleichgewichtsverteilungsfunktion  $F_0$  aus Gleichung (2.21), die in den normierten Größen

$$F_0(v_{\parallel}, \mu) = \pi^{-3/2} e^{-(v_{\parallel}^2 + \mu \hat{B})}$$

lautet. Durch einfache Veränderung des Ausdrucks für  $\mathcal{K}_y$  zu

$$\mathcal{K}_y = -2 \frac{L_{\perp}}{R_0} (\cos z + \sin z (\hat{s}z - \alpha_{\text{MHD}} \sin z)) \quad (2.37)$$

kann man eine Shafranov-Verschiebung mitberücksichtigen (Connor *et al.*, 1978). Dabei ist  $\alpha_{\text{MHD}}$  der aus der MHD bekannte  $\alpha$ -Parameter, der folgendermaßen definiert ist.

$$\alpha_{\text{MHD}} = -\frac{8\pi R q^2}{B^2} \frac{dp}{dr}$$

In normierten Einheiten folgt daraus die Beziehung zu  $\beta_e$ :

$$\alpha_{\text{MHD}} = \beta_e \frac{2L_{\perp}}{R_0} \hat{\epsilon} \left( \omega_n + \omega_{T_e} + (\omega_n + \omega_{T_i}) \frac{T_i}{T_e} \right)$$

wobei das Verhältnis der parallelen Skalen zu den senkrechten Skalen mit  $\hat{\epsilon}$  bezeichnet wurde.

$$\hat{\epsilon} = \left( \frac{q_0 R_0}{L_{\perp}} \right)^2$$

### 2.3.2 Feldgleichungen

Nun müssen auch noch die beiden Feldgleichungen (2.23,2.24) in das neue Koordinatensystem transformiert werden, was einfach dadurch geschieht, dass der senkrechte Laplaceoperator im neuen System geschrieben wird. Weiter folgt dann



noch die Normierung der Gleichungen. Man erhält somit als normierte Gleichung für das elektrostatische Potential

$$\sum_j e_j \sigma_j (1 - \Gamma_0(b_j)) \Phi_1 = \sum_j e_j \pi \hat{B} \int J_0(\lambda_j) F_{1j} dv_{\parallel} d\mu$$

Drückt man diese Gleichung mit der modifizierten Verteilungsfunktion  $g_j$  aus, so ändert sich an der Form nichts, da der zusätzliche Term in  $g_j$ , proportional zu  $v_{\parallel} F_{0j}$  ist, was durch die  $v_{\parallel}$ -Integration zu Null wird. Es bleibt also

$$\sum_j e_j \sigma_j (1 - \Gamma_0(b_j)) \Phi_1 = \sum_j e_j \pi \hat{B} \int J_0(\lambda_j) g_{1j} dv_{\parallel} d\mu \quad (2.38)$$

Die Gleichung (2.24) für das parallele elektromagnetische Vektorpotential wird durch die Normierung zu

$$\nabla_{\perp}^2 A_{1\parallel} = - \sum_j \alpha_j \frac{e_j}{e} \pi \hat{B} \int v_{\parallel} J_0(\lambda_j) F_{j1} dv_{\parallel} d\mu \quad (2.39)$$

Ersetzt man auch hier wieder  $F_{j1}$  durch  $g_{j1} - \sigma_j \alpha_j v_{\parallel} F_{j0} \hat{\epsilon} \beta_e \bar{A}_{1\parallel}$ , so kommt man auf

$$\nabla_{\perp}^2 A_{1\parallel} = - \sum_j \alpha_j \frac{e_j}{e} \pi \hat{B} \int v_{\parallel} J_0(\lambda_j) g_{j1} dv_{\parallel} d\mu + \sum_j \sigma_j \hat{\epsilon} \beta_e \alpha_j^2 \frac{e_j}{e} \Gamma_0(b_j) A_{1\parallel} Y$$

mit dem Integral  $Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int v_{\parallel}^2 e^{-v_{\parallel}^2} dv_{\parallel}$ . Bei analytischer Rechnung ist dies einfach gleich 1/2, bei numerischer Rechnung sollte man jedoch dieses Integral ebenso wie das Integral über die Störung der Verteilungsfunktion numerisch berechnen, so dass sich die beiden Integrale (einmal der Teil, der in  $g_1$  enthalten ist und zum anderen  $Y$ ) wirklich gegenseitig aufheben. Man hat also für die numerische Rechnung die Gleichung

$$\left( \nabla_{\perp}^2 - Y \hat{\epsilon} \beta_e \sum_j \sigma_j \alpha_j^2 \frac{e_j}{e} \Gamma_0(b_j) \right) A_{1\parallel} = - \sum_j \alpha_j \frac{e_j}{e} \pi \hat{B} \int v_{\parallel} J_0(\lambda_j) g_{j1} dv_{\parallel} d\mu \quad (2.40)$$

### 2.3.3 Randbedingungen

Um das numerisch zu lösende Problem vollständig zu definieren, muss man noch Randbedingungen angeben. In beiden senkrechten Richtungen werden periodische Randbedingungen verwendet. Die nichtlinear entstehende Turbulenz ist bestrebt, die Hintergrundgradienten abzubauen und damit ihren eigenen Antrieb zu senken. Um das damit verbundene Ende der Turbulenz zu verhindern, wählen

wir periodische Randbedingungen in radialer Richtung, obwohl sie nicht physikalisch sind. Sofern man darauf achtet, dass die Ausdehnung des Simulationsvolumens in radialer Richtung größer ist als die entsprechende Korrelationslänge der Turbulenz, wird das Turbulenzniveau durch die Wahl dieser Randbedingungen nicht beeinflusst (Beer *et al.*, 1995). Die Breite des Simulationsvolumens in radialer Richtung ist also nach unten durch die Korrelationslänge der Turbulenz beschränkt, nach oben durch die Maßgabe, bei möglichst wenigen Punkten noch eine gute Auflösung zu erhalten.

In poloidaler Richtung sind periodische Randbedingungen angemessen, da in unseren Koordinaten die  $y$ -Richtung die Achsensymmetrie des Tokamaks wiedergibt. Beim Übergang von einem Hohltorus zu einem Fluss Schlauch ist es physikalisch sinnvoll, die Periodizität in der  $y$ -Richtung beizubehalten; dies entspricht einer Ausdünnung des toroidalen Modenspektrums (Scott, 1998).

In paralleler Richtung ist die Frage nach der Randbedingung nicht so einfach zu beantworten. Die Länge der Box in paralleler Richtung wird im Allgemeinen auf  $2\pi qR$  festgelegt. Nach dieser Strecke entlang der Feldlinie schneidet die Feldlinie eine poloidale Schnittfläche am selben poloidalen Punkt. Aber die toroidale Position ist im Allgemeinen nicht dieselbe.

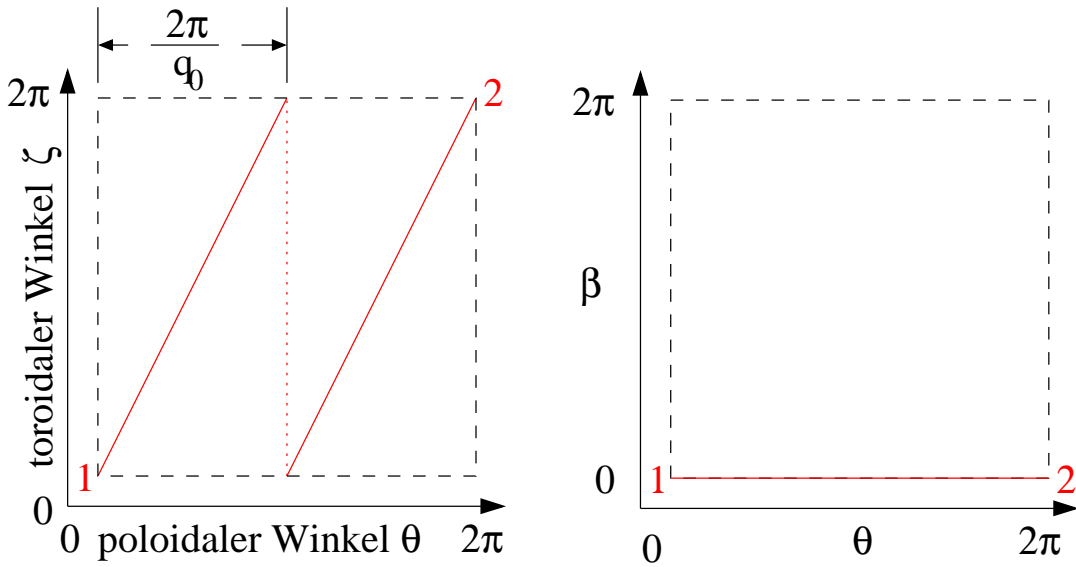
Betrachtet man darüberhinaus einen Ausschnitt aus der poloidalen Ebene (z.B. den viereckigen Querschnitt eines Fluss schlauches) und bewegt diesen Ausschnitt entlang der Feldlinien um einen festen toroidalen Winkel, so wird der Ausschnitt verzerrt, da Punkte auf verschiedenen Flussflächen unterschiedlich weit in poloidaler Richtung rotieren (für eine magnetische Verscherung  $\hat{s} \neq 0$ ).

Betrachtet man eine Referenzflussfläche im Abstand  $r_0$  von der magnetischen Achse, die durch den Sicherheitsfaktor  $q_0$  bestimmt ist, so muss man in toroidaler Richtung einen Winkel  $2\pi q_0$  weitergehen, um genau einmal poloidal umzulaufen. Für kleine Abweichungen von der Referenzflussfläche  $|r - r_0| \ll r_0$  kann man die Abhängigkeit des Sicherheitsfaktors von der radialen Koordinate mit Hilfe der magnetischen Verscherung  $\hat{s}$  (am Ort  $r_0$ ) ausdrücken durch

$$q(r) = q_0 \left( 1 + \hat{s} \frac{r - r_0}{r_0} \right)$$

was aus den Gleichungen (2.29) und (2.27) folgt. Nimmt man eine feste Variation des toroidalen Winkels um  $2\pi q_0$  an, so verändert sich der poloidale Winkel um  $2\pi q_0 / q(r) = 2\pi / (1 + \hat{s}(r - r_0)/r_0)$ . Mit  $\xi = (r - r_0)/r_0$  und  $|\xi| \ll 1$  hat man dann nach einem toroidalen Winkel von  $2\pi q_0$  einen Versatz in poloidaler  $y$ -Richtung von  $-2\pi \hat{s} \xi$  gegenüber Punkten auf der Referenzflussfläche.

In Abb. 2.2 ist eine gesamte Flussfläche dargestellt. Im linken Bild soll eine Referenzflussfläche mit  $q_0 = 2$  in einem Koordinatensystem mit geraden Feldlinien veranschaulicht sein. Eine Feldlinie ist in Rot eingezeichnet. Das rechte Bild zeigt dieselbe Feldlinie in einem am Magnetfeld ausgerichteten Koordinatensystem. Dabei wurde die Transformation  $\beta = q\theta - \zeta$  durchgeführt. Da die rechteckige Darstellung der Flussfläche vom Aufschneiden des Torus entlang der Außenseite



**Abbildung 2.2:** Gesamte Flussfläche, links mit einer Feldlinie mit  $q_0 = 2$  in einem Koordinatensystem mit geraden Feldlinien. Rechts ist dieselbe Feldlinie in einem ausgerichtetem Koordinatensystem dargestellt.  $\theta$  bezeichnet den poloidalen Winkel,  $\zeta$  den toroidalen.  $\beta = q\theta - \zeta$ . Die gestrichelten Linien geben die periodischen Randbedingungen an.

entsteht, sind an beiden Rändern periodische Randbedingungen anzuwenden. Die Abszisse stellt in der Darstellung den poloidalen Winkel  $\theta$ , die Ordinate den toroidalen Winkel  $\zeta$  dar. Eine radial benachbarte Flussfläche mit einem größeren Sicherheitsfaktor  $q > 2$  ist in Abb. 2.3 dargestellt. Auch dort ist eine Feldlinie in den beiden Koordinatensystem eingezeichnet.

Die Transformation auf ein ausgerichtetes Koordinatensystem entspricht einer Transformation der Achsenabschnitte der Linien in den linken Bildern in die negativen  $\beta$ -Werte in den rechten Bildern. Die rote Linie wird deshalb zu einer einzigen Linie für  $\beta = 0$ , die blaue beginnt auch bei  $\beta = 0$ , wird aber nach einem poloidalen Umlauf ( $\theta = 2\pi$ ) um einen Betrag in  $\beta$ -Richtung verschoben. In der  $\beta$ -Richtung selbst werden periodische Randbedingungen verwendet, in  $\theta$ -Richtung jedoch quasiperiodische, was die beschriebene Verschiebung beinhaltet.

Nun soll das Simulationsvolumen auf einen Flussschlauch eingeschränkt werden. Dazu wird die toroidale Richtung in  $N$  Teile unterteilt. Ein Ausschnitt der Flussfläche mit einer toroidalen Ausdehnung von  $\Delta\zeta = 2\pi/N$  stellt dann einen Flussschlauch dar, wie in Abb. 2.4 zu sehen ist. Im rechten Bild ist der Flussschlauch im angepassten Koordinatensystem zu sehen. Für den in  $\beta$ -Richtung reduzierten Flussschlauch werden nun wieder periodische Randbedingungen angenommen. Dieses Vorgehen entspricht einem Ausdünnen der Fouriermoden in  $\beta$ -Richtung (Scott, 1998). Die Randbedingung in  $\theta$ -Richtung ist wieder dieselbe quasiperiodische wie die für die gesamte Flussfläche verwendete.

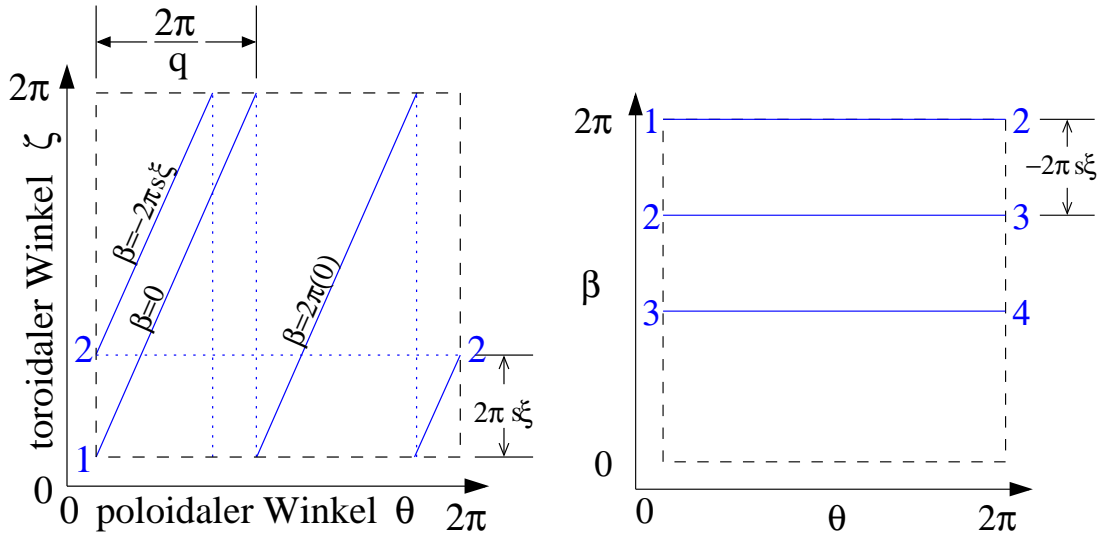


Abbildung 2.3: Eine Feldlinie mit  $q > 2$  im radialen Abstand  $\xi$  von der Referenzflussfläche in beiden Koordinatensystemen.

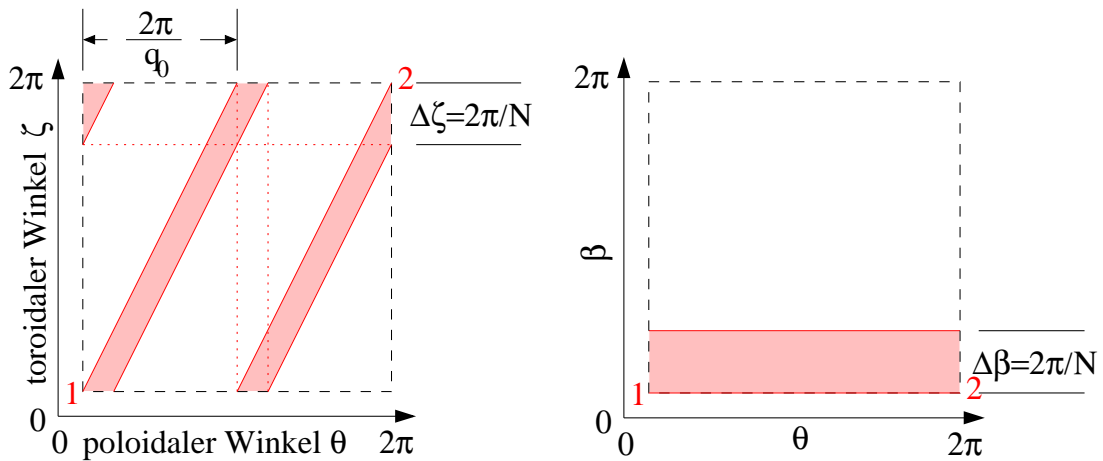


Abbildung 2.4: Fluss Schlauch in den beiden besprochenen Koordinatensystemen.

Führt man nun das Flusslauchkoordinatensystem des Abschnittes 2.2 ein, und schränkt die Ausdehnung in  $y$ -Richtung auf  $L_y$  ein, so wird eine Feldlinie nach jedem Umlauf in  $z$ -Richtung um  $-2\pi\hat{s}x$  in  $y$ -Richtung verschoben. Führt die Verschiebung der Feldlinie dazu, dass die  $y$ -Koordinate größer als  $L_y$  wird, werden periodische Randbedingungen angewendet und die Feldlinie wieder in das Simulationsvolumen abgebildet. In Formeln kann man also die beschriebene quasiperiodische Randbedingung für eine Funktion  $f(x, y, z)$  schreiben als

$$f(x, y, z + 2\pi) = f(x, y - 2\pi\hat{s}x, z). \quad (2.41)$$

Der Vollständigkeit halber werden die anderen beiden Randbedingungen auch noch angegeben

$$f(x + L_x, y, z) = f(x, y, z) \quad f(x, y + L_y, z) = f(x, y, z) \quad (2.42)$$

Betrachtet man diese Randbedingungen an zwei radial um  $L_x$  versetzten Punkten  $x_1$  und  $x_2 + L_x$ , und wendet die parallele Randbedingung (2.41), sowie die radiale Randbedingung an, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x_1, y, z + 2\pi) &= f(x_1, y - 2\pi\hat{s}x_1, z) \\ &= f(x_2, y - 2\pi\hat{s}x_1, z) = f(x_2, y - 2\pi\hat{s}x_1 + 2\pi\hat{s}x_2, z + 2\pi) \end{aligned}$$

Damit diese Beziehung konsistent mit der Randbedingung in  $y$ -Richtung ist, muss also zusätzlich zu den oben genannten Randbedingungen gelten

$$2\pi\hat{s}L_x = \mathcal{N}L_y \quad \text{mit} \quad \mathcal{N} \in \mathbb{N}.$$

### Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden das gyrokinetische Maxwell-Vlasov System für die numerische Behandlung aufbereitet. Dazu wurden geeignete Normierungen und Randbedingungen eingeführt.

# Kapitel 3

## Numerische Simulation: Der GENE Code

### 3.1 Simulation von Plasmaturbulenz

Im Zentrum dieser Arbeit steht die numerische Lösung des gyrokinetischen Vlasov-Maxwell Systems, das in Kapitel 2 hergeleitet und geeignet normiert wurde. Dazu gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Zum einen die bekannte „particle-in-cell“ (PIC) Simulation, bei der das Plasma durch Markerteilchen repräsentiert wird, deren Bewegung im Phasenraum berechnet wird (Parker & Lee, 1993). Durch die statistische Repräsentation des Plasmas durch Markerteilchen tritt numerisches Rauschen auf, das nur mit der Wurzel der Anzahl der Teilchen sinkt. Dieses Problem kann zwar durch die Wahl spezieller Verfahren abgeschwächt werden, es verschwindet aber nie ganz (Villard *et al.*, 2004).

Ein anderer Ansatz sind die sogenannten Vlasovverfahren, bei denen der gesamte Phasenraum mit einem Gitter überzogen wird. Hierbei tritt kein numerisches Rauschen auf, da das Plasma nicht statistisch repräsentiert ist. Dafür ist der Aufwand unter Umständen höher als bei den PIC Verfahren. In diesem Kapitel wird der nichtlineare GENE Code, der solch ein Vlasovcode ist, genauer beschrieben.

Der GENE Code wurde ursprünglich von F. Jenko (Jenko *et al.*, 2000) entwickelt und im Rahmen dieser Doktorarbeit überarbeitet und erweitert. Zum einen wurden neue numerische Verfahren untersucht und eingebaut, die zu einem insgesamt stabileren und genaueren Code führten, zum Anderen wurde mit dem Einbau der gefangenen Teilchen der Code um einen wichtigen physikalischen Aspekt erweitert. So ist es nun möglich, neben der vom Ionen-Temperaturgradienten (ITG) und Elektronen-Temperaturgradienten (ETG) getriebenen Turbulenz auch die von „trapped electron“ Moden (TEM) getriebene Turbulenz zu untersuchen.

Eine wichtige numerische Verbesserung ist die gemeinsame Behandlung aller Operatoren. Bisher wurden die linearen und nichtlinearen Operatoren aufgeteilt,

unabhängig voneinander berechnet und am Ende des Zeitschritts wieder zusammengefügt. Dieses Verfahren wurde nun durch eine gemeinsame Berechnung aller Terme ersetzt.

Zum Vergleich und linearen Benchmarking wird der weit verbreitete gyrokinetische Vlasovcode GS2 (Kotschenreuther *et al.*, 1995) verwendet. GS2 verwendet wie GENE einen Flußschlauch als Simulationsvolumen, berechnet allerdings die lineare Dynamik mit einem impliziten Verfahren. Dadurch sind lineare Rechnungen sehr schnell, weshalb viele lineare Untersuchungen in dieser Arbeit mit GS2 durchgeführt wurden. Sie hätten prinzipiell auch mit GENE gemacht werden können, wie durch die Benchmarks gezeigt wird, das wäre aber laufzeitintensiver gewesen. In den nichtlinearen Rechnungen ist GENE jedoch stärker optimiert und deshalb schneller als GS2.

### 3.1.1 Gitter und Notation

Da die erwartete Turbulenz räumlich homogen ist, können wir einfach ein kartesisches äquidistantes Gitter im dreidimensionalen Ortsraum verwenden. Die inneren Punktzahlen in den drei Raumrichtungen werden mit  $N_x$ ,  $N_y$  und  $N_z$  bezeichnet. Um auch die Ableitungen der Randpunkte berechnen zu können, wird noch in jeder Raumrichtung ein „Geisterrand“ eingeführt, mit den entsprechenden Breiten  $N_{xb}$ ,  $N_{yb}$  und  $N_{zb}$ , die zu dem jeweils verwendeten Differenzenverfahren passen. Damit sind die Differenzen auch für die Randpunkte definiert. Der Randaustausch findet immer dann statt, wenn sich die Funktionswerte an den den Geisterrandpunkten entsprechenden inneren Punkten geändert haben und eine finite Differenz berechnet werden soll, die diese geänderten Funktionswerte verwendet. Beim Randaustausch, der in den Unterabschnitten zur Diskretisierung der einzelnen Phasenraumdimensionen beschrieben wird, werden die periodischen ( $x$ - und  $y$ -Richtung) und quasiperiodischen ( $z$ -Richtung) Randbedingungen berücksichtigt.

Der Geschwindigkeitsraum wird in paralleler Richtung mit einem äquidistanten Gitter mit  $2N_{v_{\parallel}} + 1$  Punkten überzogen<sup>1</sup>, in der senkrechten Geschwindigkeitsraumrichtung, also in der Koordinate  $\mu$  werden die Knoten einer Gauß-Integration als Gitterpunkte verwendet. In dieser Richtung wird nur integriert, es werden keine Differenzenquotienten berechnet, weshalb die Knoten für die Integration optimiert werden.

Der Zeitschritt ist linear durch einen maximalen Zeitschritt festgelegt, der aber nichtlinear dynamisch angepaßt wird. Diese Adaption wird in Abschnitt 3.2.4 näher beschrieben.

Alle verwendeten Größen werden auf diesem Gitter dargestellt. Die Notation

---

<sup>1</sup>Die ungerade Anzahl an parallelen Geschwindigkeitsraumpunkten rührt von der Tatsache her, dass die Geschwindigkeit Null auch auf einem Gitterpunkt liegen soll.

ist dann, z.B. für die Verteilungsfunktion  $f$ :

$$f_{i,j,k,l,m}^{(n)} = f(x_i, y_j, z_k, v_l, \mu_m, t_n)$$

Es werden allerdings immer nur die Indizes geschrieben, die notwendig sind. Die Grenzen der Indizes werden so gewählt, dass der erste innere Punkt den Index 0 hat. Dann erhält man die folgenden Indexgrenzen.

$$\begin{aligned} i &\in \{-N_{xb}, \dots, N_x + N_{xb} - 1\}, & j &\in \{-N_{yb}, \dots, N_y + N_{yb} - 1\}, \\ k &\in \{-N_{zb}, \dots, N_z + N_{zb} - 1\}, & l &\in \{-N_{v_{\parallel}}, \dots, N_{v_{\parallel}}\}, & m &\in \{0, N_{\mu} - 1\} \end{aligned}$$

## 3.2 Lösung der Vlasovgleichung

Das im zweiten Kapitel vorgestellte gyrokinetische Vlasov-Maxwell-System (2.35-2.40) ist ein nichtlineares partielles Integro-Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Eine Möglichkeit solch ein System zu lösen, ist die „method of lines“, bei der die räumlichen Operatoren diskretisiert werden, so dass man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhält. Die Vlasovgleichung wird dann zu

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = M(\mathbf{g}) \quad (3.1)$$

wobei  $\mathbf{g}$  ein Vektor des gesamten Phasenraumes ist. Da die Vlasovgleichung nicht-linear ist, ist der Vektor  $M$  auf der rechten Seite auch nichtlinear von  $\mathbf{g}$  abhängig. Der Vorteil dieser Methode ist die konzeptionelle Unabhängigkeit der räumlichen und zeitlichen Diskretisierungen voneinander. Man kann also je nach Problemstellung und Parametern recht einfach unterschiedliche Diskretisierungen für die einzelnen Operatoren wählen. Aus Stabilitätsgründen müssen dabei allerdings bestimmte Bedingungen erfüllt werden (Dekker & Verwer, 1984). Für die Lösung des so entstehenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man Standardverfahren wie explizite Runge-Kutta (ERK)-Verfahren verwenden. Ein ERK-Verfahren dritter Ordnung kommt in GENE zum Einsatz.

### 3.2.1 Zeitschrittverfahren

Der Algorithmus eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens dritter Ordnung hat mit der Notation aus (3.1) das folgende Aussehen (Lambert, 1991):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= M(\mathbf{g}^{(n)}) & \mathbf{k}_2 &= M\left(\mathbf{g}^{(n)} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{k}_1\right) & \mathbf{k}_3 &= M\left(\mathbf{g}^{(n)} + \frac{2\Delta t}{3}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{g}^{(n+1)} &= \mathbf{g}^{(n)} + \frac{\Delta t}{4}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

wobei  $M$  eine Funktion des Argumentes ist. Da das Argument bei expliziten Verfahren aber bekannt ist, kann man die rechten Seiten der obigen Formeln berechnen. Wie nun die einzelnen Terme der Gleichung (2.35) diskretisiert werden, ist Thema der folgenden Unterabschnitte.



### 3.2.2 Paralleldynamik

Ordnet man die Terme der gyrokinetischen Vlasovgleichung (2.35) nach zunehmender Komplexität, so kommt der Term, der die Paralleldynamik beschreibt zuerst. Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, ist dieser Term für die Darstellung von Alfvénwellen essentiell. Dieser Term legt aber auch in den meisten Fällen die Beschränkung für den Zeitschritt fest, da die parallele Elektronendynamik die schnellste im Gesamtsystem ist.

Wie auch im nächsten Kapitel bei der Besprechung der Alfvéndynamik gezeigt wird, liefert eine zentrierte Diskretisierung die besten Ergebnisse. Wir verwenden somit ein zentriertes Verfahren vierter Ordnung, so dass die parallele Ableitung die folgende Form hat

$$\frac{\partial G_{i,j,k,l,m}}{\partial z} = \frac{G_{i,j,k-2,l,m} - 8G_{i,j,k-1,l,m} + 8G_{i,j,k+1,l,m} - G_{i,j,k+2,l,m}}{12\Delta z}. \quad (3.2)$$

Betrachtet man nur die parallele Dynamik, die in der Gleichung (2.35) enthalten ist, so hat man eine parallele Advektion der Form<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial t} + \alpha_j v_{\parallel} \frac{\partial G_j}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial g_j}{\partial t} + \alpha_j v_{\parallel} \frac{\partial g_j}{\partial z} + \sigma_j \alpha_j v_{\parallel} F_{j0} \frac{\partial \chi_j}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Setzt man die obige Diskretisierung ein, erhält man ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem, dessen Stabilität durch die Bedingung gekennzeichnet ist, dass die Eigenwerte der Matrix auf der rechten Seite multipliziert mit dem Zeitschritt innerhalb des Stabilitätsgebietes des verwendeten Zeitschrittverfahrens liegen müssen. Dabei handelt es sich im Prinzip um eine Courant-Friedrichs-Lewy Stabilitätsbedingung (Courant *et al.*, 1928). Für eine weitere Diskussion der Stabilitätseigenschaften von Zeitschrittverfahren sei auf das Buch von Lambert (Lambert, 1991) verwiesen. Die Stabilitätsgebiete von expliziten Runge-Kutta Verfahren verschiedener Ordnung sind in Abb. 3.1 dargestellt. Da die aus der Diskretisierung von (3.3) mit (3.2) entstehende Matrix  $\mathfrak{M}$ , die folgendermaßen definiert ist (zur „Stencil“-Notation von finiten Differenzen und Matrizen siehe Anhang D)

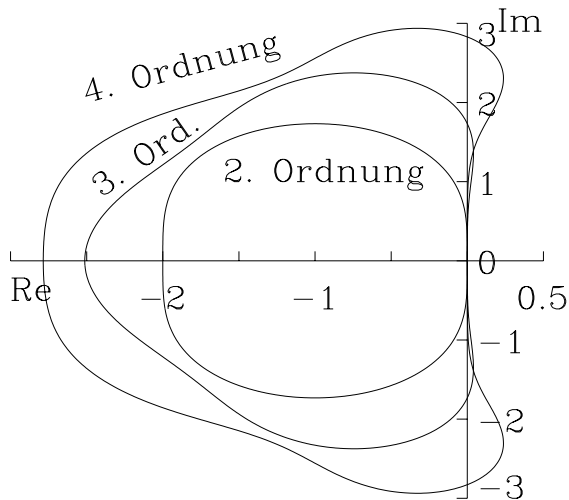
$$\mathfrak{M} = \frac{\alpha_j v_{\parallel}}{12\Delta z} [ 1 \quad -8 \quad 0 \quad 8 \quad -1 ]$$

schiefsymmetrisch ist, hat sie nur imaginäre Eigenwerte. Wie numerische Untersuchungen der Eigenwerte zeigen, kann man den Betrag des maximalen Eigenwertes abschätzen als

$$|\lambda_{\max}| \leq \frac{\alpha_j v_{\parallel}}{12\Delta z} \cdot 16.5.$$

---

<sup>2</sup>Es werden in diesem und in allen weiteren Kapiteln die Einheiten und Normierungen verwendet, die in Kapitel 2 eingeführt wurden, sofern nichts anderes angegeben ist.



**Abbildung 3.1:** Stabilitätsgebiete expliziter Runge-Kutta Verfahren verschiedener Ordnung nach (Lambert, 91)

Um überhaupt in der Lage zu sein durch Wahl eines Zeitschrittes die Werte  $\Delta t \lambda$  in das Stabilitätsgebiet zu bringen, braucht man ein Gebiet, das zumindest einen Teil der Imaginärachse umfasst, also mindestens ein Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung. Nur ab dieser Ordnung ist ein Teil der Imaginärachse um den Nullpunkt Teil des Stabilitätsgebietes. Die Schnittpunkte der Stabilitätskurve mit der Imaginärachse liegen für ein ERK dritter Ordnung bei  $\pm\sqrt{3}$  und bei Null.

Als parallele Stabilitätsbedingung für den Zeitschritt erhält man also allgemein

$$\Delta t < \frac{\text{maximale Stab.grenze}}{\lambda_{\max}} \quad (3.4)$$

und speziell für ein ERK dritter Ordnung und die oben definierte Diskretisierung

$$\Delta t < \frac{12\sqrt{3}\Delta z}{\alpha_j v_{\parallel} \cdot 16.5}$$

Das strengste Zeitschrittlimit erhält man für maximale parallele Geschwindigkeit, also  $v_{\parallel} = v_{\text{cut}}$  und für maximales  $\alpha_j$ , was für Elektronen eintritt.

Man muß hier noch hinzufügen, dass die hier durchgeführte Betrachtung nur eine Näherung des richtigen Zeitschrittlimits angibt, da in der parallelen Advektionsgleichung (3.3) auch noch das Potential  $\chi_j$  auftritt, in dem über eine Integration auch wieder die Verteilungsfunktion  $g_j$  enthalten ist. Wollte man das Zeitschrittlimit für die Gleichung (3.3) genau bestimmen, müßte man auch noch die Geschwindigkeitsraumdiskretisierung sowie die numerische Integration mit einbeziehen und dann die Eigenwerte der entstehenden  $N_z \times N_{v_{\parallel}}$ -Matrix berechnen. Das ist im Prinzip zumindest numerisch möglich, der Aufwand lohnt sich aber nicht, da sich gezeigt hat, dass obige Abschätzung ziemlich gut ist, solange man zentrierte Differenzen verwendet. Dies ist bei unseren Rechnungen immer der Fall.

**Randbedingung** In paralleler Richtung gilt ja eine quasiperiodische Randbedingung wie in Abschnitt 2.3.3 hergeleitet wurde, d.h. der rechte Rand wird nicht direkt mit dem linken verbunden, sondern mit dem um  $2\pi\hat{s}x$  in  $y$ -Richtung verschobenen linken Rand. Numerisch betrachtet, hat man das Problem, dass man entweder nur ganz bestimmte Verhältnisse von  $N_x : N_y$  zulassen darf, so dass die Verschiebung immer gerade eine bestimmte Anzahl an Punkten beträgt. Oder man muß den Zwischengitterwert aus den benachbarten Gitterwerten interpolieren, was im GENE Code mittels einer linearen Interpolation verwendet wird. Man ist damit in der Wahl von  $N_x$  und  $N_y$  nicht eingeschränkt.

### 3.2.3 Lineare Senkrechtdynamik

Als nächste Terme in der numerischen Analyse betrachten wir die lineare Senkrechtdynamik des Systems. Dabei handelt es sich zum einen um die  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift der Hintergrundgradienten, zum anderen um die  $\nabla B$ - und Krümmungsdrift der gestörten Verteilungsfunktion. Der erste Term ist gegeben durch

$$c_g \left( \omega_{n_j} + \omega_{T_j} \left( v_{\parallel}^2 + \mu \hat{B} - \frac{3}{2} \right) \right) \frac{\partial \chi_j}{\partial y} F_{j0}$$

Die Ableitung des verallgemeinerten Potentials  $\chi_j$  nach  $y$  wird mit kompakten Differenzen sechster Ordnung berechnet. Kompakte Differenzen (Lele, 1992) haben die Eigenschaft, das Spektrum des Differentialoperators besser darzustellen als die einfachen zentralen Differenzen. Um trotzdem einen kompakten Stencil zu behalten, der höchstens eine Ausdehnung von drei Gitterpunkten in jede Richtung hat, wird die Ableitung an allen Gitterpunkten einer Raumrichtung mittels eines linearen tridiagonalen Gleichungssystems bestimmt. Das Verfahren sechster Ordnung ist das Verfahren der höchsten Ordnung, für das nur ein tridiagonales Gleichungssystem gelöst werden muß.

Es wäre vorteilhaft, alle in der Gleichung (2.35) auftretenden Ableitungen mittels kompakter Differenzen zu berechnen, da damit spektrale Fehler minimiert würden. Jedoch stellt sich heraus, dass Stabilitätsprobleme auftreten, wenn man in der senkrechten Advektion für die Ableitung der Verteilungsfunktion kein upwind-Verfahren verwendet.

Der zweite Term, der die Drift des Störungsanteils der Verteilungsfunktion mit der  $\nabla B$ - und Krümmungsdrift beschreibt, lautet

$$-\frac{v_{\parallel}^2/\hat{B} + \mu/2}{\sigma_j} \left( \mathcal{K}_x \frac{\partial G_j}{\partial x} + \mathcal{K}_y \frac{\partial G_j}{\partial y} \right)$$

Hier wird nun wegen der oben angeführten Gründe, die zusammengefasste Größe  $G_j$  wieder aufgeteilt in einen Anteil  $g_j$  und einen Feldanteil. Die Ableitung des Verteilungsfunktionsanteils wird mittels eines upwind-Verfahrens vierter Ordnung berechnet, die Ableitung des Feldanteils dagegen mit kompakten Differenzen sechster Ordnung.

Im Unterschied zu zentrierten Verfahren, haben upwind Verfahren eine numerische Dissipation, die für die Senkrechtdynamik notwendig zu sein scheint. Erreicht wird die Dissipation durch Verwendung eines unsymmetrischen Stencils, der so gewichtet ist, dass in die Richtung differenziert wird, aus der die Information kommt, also gegen den Strom (upwind). Man kann Verfahren höherer Ordnung herleiten, indem man die Konsistenzbedingungen bis zu der gewünschten Ordnung löst. Für die vierte Ordnung hat man fünf Konsistenzbedingungen, was dazu führt, dass man mindestens einen Fünfer-Stencil verwenden muß. Mit fünf Differentiationspunkten landet man allerdings unweigerlich bei einem zentrierten Verfahren, weshalb man für ein Upwind-Verfahren vierter Ordnung noch mehr Punkte miteinbeziehen muß. Wir verwenden einen Siebener-Stencil und als Zusatzbedingung eine Forderung an die Spektralfunktion der Diskretisierung. (Zur Charakterisierung eines Differenzenverfahrens siehe Anhang E.)

Die finiten Differenzen des upwind Verfahrens vierter Ordnung für eine positive Geschwindigkeit lauten in der Stencilschreibweise

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{96\Delta x} \left( \begin{bmatrix} 13 & -38 & -29 & 60 & -61 & 74 & -19 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} -6 & 24 & -30 & 0 & 30 & -24 & 6 \end{bmatrix} \right) g \quad (3.5)$$

wie in Anhang G hergeleitet wird.

Da jede Advektion, die mit einem expliziten Zeitschrittverfahren berechnet wird, der Courant-Friedrichs-Levy Stabilitätsbedingung unterliegt, ist die Frage, wie diese Bedingung an den Zeitschritt für die Senkrechtdynamik aussieht. Betrachtet man wieder nur den Advektionsteil der Verteilungsfunktion ohne die Felder, also analog zur Betrachtung im Abschnitt über die Paralleldynamik, so bleibt nur der Term mit Krümmungs- und  $\nabla B$ -Drift.

$$\frac{\partial g_j}{\partial t} = -\frac{v_{\parallel}^2/\hat{B} + \mu/2}{\sigma_j} \left( \mathcal{K}_x \frac{\partial g_j}{\partial x} + \mathcal{K}_y \frac{\partial g_j}{\partial y} \right)$$

In dieser Form wird deutlich, dass man als Geschwindigkeiten in die CFL-Bedingung die Ausdrücke

$$\frac{v_{\parallel}^2/\hat{B} + \mu/2}{\sigma_j} \mathcal{K}_x \quad \text{und} \quad \frac{v_{\parallel}^2/\hat{B} + \mu/2}{\sigma_j} \mathcal{K}_y$$

einzusetzen hat.

**Randbedingung** In den senkrechten Richtungen werden einfache periodische Randbedingungen verwendet, was sich auch in der numerischen Repräsentation

widerspiegelt. Es gilt hier für alle Größen, die von diesen beiden Raumdimensionen abhängen, die folgende Beziehung, die wir beispielhaft für das elektrostatische Potential angeben.

$$\Phi_{N_x+\sigma,j,k} = \Phi_\sigma \quad \text{und} \quad \Phi_{-N_{xb}+\sigma} = \Phi_{N_x-N_{xb}+\sigma} \quad \forall \sigma = 0, \dots, N_{xb} - 1$$

Eine analoge Beziehung gilt für die  $y$ -Richtung.

### 3.2.4 Die Nichtlinearität

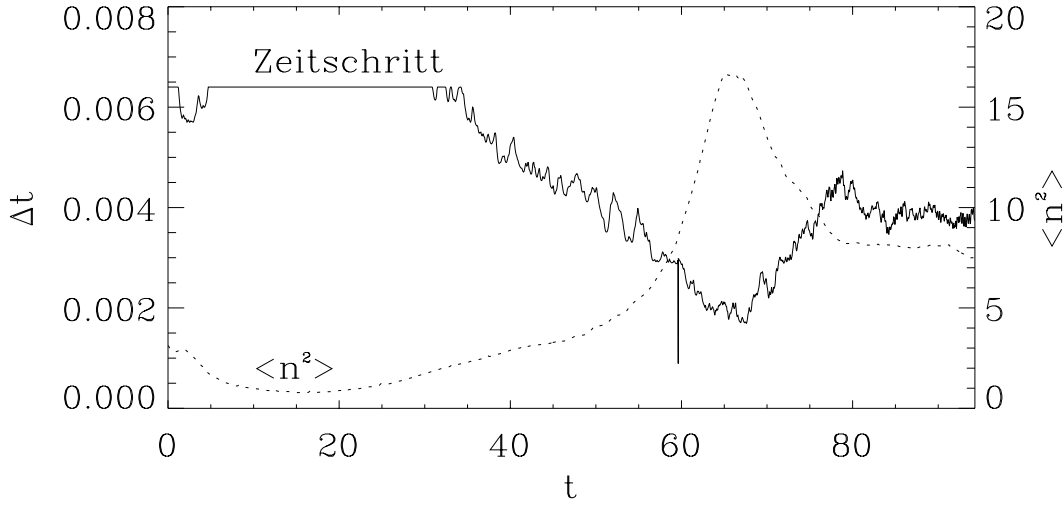
Eine weitere senkrechte Dynamik ist durch den nichtlinearen Term in Gleichung (2.35) gegeben. Es handelt sich wieder um einen senkrechten Advektionsterm, doch diesmal mit der verallgemeinerten  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit, die selbst von Störungsgrößen abhängt. Somit treten die Störungsgrößen quadratisch auf und der Term ist nichtlinear. Die Diskretisierung dieses Terms erfolgt ähnlich dem anderen Driftterm, der im vorhergehenden Unterabschnitt besprochen wurde. Mit dem Unterschied, dass die verallgemeinerte  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit mittels kompakter Differenzen sechster Ordnung berechnet wird. Anschließend wird dann mittels desselben upwind-Verfahren vierter Ordnung wie bei der linearen Senkrechtdynamik der Advektionsterm bestimmt.

Da es sich auch bei diesem Term um eine Advektion handelt, gilt wieder eine CFL-Stabilitätsbedingung. Dieser kann aber nicht durch die statische Wahl eines Zeitschrittes genügt werden, da sich die Amplitude von  $\chi$  mit der Zeit ändert und damit auch die verallgemeinerte  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit. Aus diesem Grund findet eine dynamische Zeitschrittanpassung statt, die für jeden Zeitschritt die Größe des Zeitschrittes aus den senkrechten Driften ( $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ,  $\nabla B$  und Krümmungsdift) berechnet. Diese dynamische Anpassung des Zeitschrittes ist in Abb. 3.2 dargestellt. Man sieht wie der Zeitschritt (die durchgezogene Linie) sinkt, wenn die Amplitude der Dichte wächst und umgekehrt.<sup>3</sup>

### 3.2.5 Gefangene Teilchen

Der einzige Term, der noch nicht besprochen wurde, ist der magnetische Spiegelterm, der für die Existenz gefangener Teilchen verantwortlich ist. In den  $(v_{\parallel}, \mu)$  Variablen tritt keine explizite Unterscheidung zwischen gefangenen und freien Teilchen auf, auch muß die „Trapped-Passing-Boundary“ nicht gesondert behandelt werden. Im GENE Code treten die gefangenen Teilchen als ein Advektionsterm im Geschwindigkeitsraum auf, der die Verteilungsfunktion direkt beeinflusst. Diese Behandlung hat wegen ihrer programmiertechnischen Einfachheit deutliche Vorteile. Dies wird besonders klar, wenn man sie mit der Behandlung der gefangenen Teilchen in  $(\epsilon, \mu)$ -Koordinaten vergleicht, wie sie z. B. bei Candy (Candy

<sup>3</sup>Der Ausreißer bei  $t = 60$  ist nur ein Artefakt der Darstellung. Er kommt daher, dass hier zwei Folgeläufe hintereinander dargestellt werden.



**Abbildung 3.2:** Dynamische Zeitschrittadaption bei einer nichtlinearen Simulation

& Waltz, 2002) verwendet werden.  $\epsilon$  ist in diesem Koordinatensatz die gesamte kinetische Energie.

In  $(v_{\parallel}, \mu)$ -Koordinaten lautet der Spiegelterm

$$-\frac{\mu}{\hat{\mu}_j \alpha_j} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \frac{F_{j1}}{\partial v_{\parallel}}$$

Die Ableitung des Gleichgewichtsmagnetfeldes kann in unserem  $\hat{s} - \alpha$  Modell analytisch berechnet werden, die Ableitung der Verteilungsfunktion wird mit zentrierten Differenzen vierter Ordnung berechnet. Da jedoch nicht die Verteilungsfunktion  $F_{j1}$  als Unbekannte verwendet wird, sondern die modifizierte Verteilungsfunktion  $g_{j1}$  muss zuerst das  $F_{j1}$  aus  $g_{j1}$  und den Feldern berechnet werden, was aber keine große Hürde darstellt, da all diese Größen bekannt sind.

Als Randbedingung hat man in der parallelen Geschwindigkeit nicht einfach eine periodische, sondern man fordert das Verschwinden der Verteilungsfunktion für große Geschwindigkeiten. Man kann die Störung der Verteilungsfunktion also an den Randpunkten durch die Gleichgewichtsverteilungsfunktion approximieren, bzw. die Ableitung von  $F_{j1}$  nach der Geschwindigkeit durch die Ableitung von  $F_{j0}$  nach der Geschwindigkeit approximieren. Allerdings zeigt sich, dass dieser Aufwand nicht notwendig ist. Die Ergebnisse, die man erhält, wenn man die Ableitungen am Rand einfach Null setzt, sind genau so gut. Wir berechnen also die Ableitung der Verteilungsfunktion an allen inneren Punkten, die einen Abstand von mehr als einen Punkt vom Rand haben, mit zentrierten Differenzen vierter Ordnung, die Ableitungen an den beiden Punkten, die genau einen Punkt vom Rand entfernt sind, mit zentrierten Differenzen zweiter Ordnung und setze die Ableitungen an den Randpunkten selbst auf Null. Da auch hier eine Advektion

auftritt, erhält man eine CFL-Bedingung für den Zeitschritt, bei Verwendung des Vorfaktors der Ableitung von  $F_{j1}$  als Advektionsgeschwindigkeit.

### 3.2.6 Zeitschrittlimit

Bei der Besprechung der einzelnen Terme wurde immer eine Beschränkung für den Zeitschritt bestimmt. Hier setzen wir typische Simulationsparameter ein und vergleichen die sich ergebenden Zeitschrittlimites. Für die Paralleldynamik erhalten wir für zwei typische Werte für  $N_z$  die folgenden Zeitschrittlimites. Verwendet man ein Massenverhältnis von  $\mu_e = \frac{1}{1836}$  und rechnet bei einem  $q$  von 1.4 und  $\frac{L_\perp}{R}$  von  $\frac{1}{3}$ , so kommt man zu einem  $\alpha_e = \sqrt{\frac{2}{\mu_e \epsilon}} = 14.4$ . Dann erhält man für das Zeitschrittlimit  $\Delta t < 0.0115$  für 16 parallele Punkte und  $\Delta t < 0.0057$  für 32 parallele Punkte.

Verwendet man dagegen ein Massenverhältnis von nur 1:400 bei ansonsten gleichen Parametern, so kommt man zu den Zeitschrittlimites von  $\Delta t < 0.0245$  für 16 Punkte und  $\Delta t < 0.0122$  für 32 Punkte. Durch das reduzierte Massenverhältnis kann man also einen doppelt so großen Zeitschritt verwenden, was wir uns später zu Nutzen machen werden. Die lineare Senkrechtdynamik führt mit einer Box  $L_x = 152.8\rho_s$  und  $L_y = 256\rho_s$ , Punktzahlen von  $N_x = 128$  und  $N_y = 128$  und einem Shear von  $\hat{s} = 0.8$  zu einer Zeitschrittgrenze von  $\Delta t < 0.13$ , welches in diesem Fall von der  $x$ -Richtung vorgegeben ist. Von der Behandlung des Spiegelterms erhalten wir für  $\mu_{\max} = 9.0$ ,  $N_{v_\parallel} = 41$  auf ein Zeitschrittlimit von  $\Delta t < 0.03$ . Aus diesem Vergleich sieht man noch einmal deutlich, dass das strengste Zeitschrittlimit von der Paralleldynamik der Elektronen herrührt.

## 3.3 Lösung der Feldgleichungen

Bei der Lösung der Feldgleichungen treten Gyromitteloperationen der Art

$$\bar{\Phi}_1 = I_0(\lambda_j)\Phi_1$$

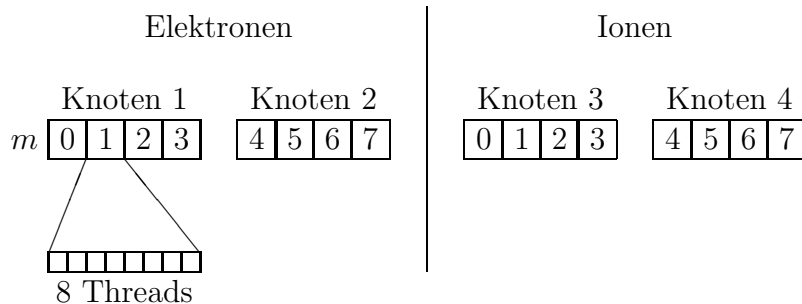
auf, wobei  $\lambda_j = \sqrt{2\mu\hat{B}b_j}$  und  $b_j = -\frac{\psi_j}{\hat{B}^2}\nabla_\perp^2$ . Da  $I_0$  eine unendliche Potenzreihe mit einem Operator als Argument ist, und eine Berechnung von  $\bar{\Phi}_1$  im Ortsraum deshalb nicht möglich ist, wird  $\Phi_1$  in den Fourierraum transformiert. Dort wird aus dem Operator  $I_0(\lambda_j)$  einfach ein Faktor, mit dem multipliziert wird (zur Berechnung von  $I_0$  im Fourierraum siehe (Abramowitz & Stegun, 1972)). Durch anschließende Rücktransformation in den Ortsraum erhält man  $\bar{\Phi}_1$ . Dasselbe Vorgehen verwendet man auch, um den Operator  $\Gamma_0(b_j)$  auf die Felder anzuwenden. Die schnelle zweidimensionale Fouriertransformation wird in GENE mittels einer Routine der ESSL Bibliothek von IBM durchgeführt.

### 3.4 Parallelisierung

Eine Lösung des gyrokinetischen Vlasov-Maxwell-Gleichungssystems für vernünftige Boxgrößen und Auflösungen ist sehr aufwändig. Aus diesem Grund ist eine Parallelisierung unerlässlich. Beide heutzutage üblichen Parallelisierungsparadigmen (OpenMP und MPI) kommen zum Einsatz. Mit Hilfe des Message Passing Interfaces (MPI) wird über die Spezies parallelisiert. Zusätzlich dazu ist es möglich auch den senkrechten Geschwindigkeitsraum auf MPI Prozesse zu verteilen um die maximale Anzahl der verwendbaren Prozessoren zu erhöhen. Die senkrechte Geschwindigkeitsraumrichtung bietet sich für die Parallelisierung an, da keine Ableitung in dieser Koordinate berechnet werden müssen. Man spart sich dadurch den Randaustausch.

Ein Problem an dieser Parallelisierung ist die Tatsache, dass die maximale Anzahl an MPI Prozessen auf  $N_{\text{Spezies}} \cdot N_{\mu}$  beschränkt ist, was im Normalfall (2 Spezies,  $N_{\mu} = 8$ ) mit 16 eine eher kleine Anzahl ist.

Um trotzdem mehr Prozessoren nutzen zu können, kann bei shared memory Systemen, mittels des OpenMP Paradigmas über die restlichen  $\mu$ -Punkte (sofern noch mehr als einer pro MPI Prozess übrigbleibt) und den  $v_{\parallel}$ -Raum parallelisiert werden. Die typische Parallelisierung ist in Abb. 3.3 veranschaulicht.



**Abbildung 3.3:** Parallelisierung im Standardfall ( $m$  bezeichnet den Index der  $\mu$  Koordinate)

Da alle parallelen Threads auf gemeinsamen Speicher zugreifen, ist ein Randaustausch in  $v_{\parallel}$  nicht notwendig. Die theoretische Maximalanzahl an verwendbaren Prozessoren ist somit  $N_{\text{Spezies}} \cdot N_{\mu} \cdot N_{v_{\parallel}}$ , was bei üblichen Parametern  $N_{v_{\parallel}} = 41$  zu maximal 656 Prozessoren führt. Das ist allerdings nur die theoretische Maximalanzahl. Im konkreten Fall ist man durch die Anzahl der Prozessoren in einem Knoten beschränkt, die auf gemeinsamen Speicher zugreifen können. Auch können erhöhte Kommunikationskosten zwischen den Prozessen dazu führen, dass weniger Prozesse zu einer besseren Performance führen.

Alle nichtlinearen Läufe wurden auf dem Regatta-Hybridrechner des Rechenzentrums Garching der Max-Planck-Gesellschaft und des Institutes für Plasma-physik durchgeführt. Es handelt sich dabei um einen IBM-Rechner mit Power4 Prozessoren, die zu je 32 in einem Knoten untergebracht sind, in dem sie auf



gemeinsamen Speicher zugreifen können. Für meine Rechnungen wurden in der Regel 4 Knoten und somit 128 Prozessoren verwendet. Dabei erhält man eine Performance von bis zu 290 MFlop/s pro Prozessor bei hinreichend großem Arbeitsspeicher von  $\sim 1.6$  GB/Knoten. Eine weitere Optimierung des Codes könnte noch zu einer Verbesserung der Performance führen.

## 3.5 Diagnostik und Auswertung

Zum Abschluß der Beschreibung des GENE Codes wird hier noch angegeben, in welcher Form der Code die Ergebnisse ausgibt. Es gibt zwei Hauptausgaben während eines Laufes. So werden zum einen ziemlich häufig, so ca. jeden 10. Zeitschritt ein Datensatz in die `nrg`-Datei geschrieben. In wesentlich größeren Abständen werden einige räumliche Größen in der `kine`- und der `kini`-Datei abgelegt. Die ausgegebenen Größen, und wie sie berechnet werden, sollen in diesem Abschnitt beschrieben werden.

### 3.5.1 Die Ausgabe von GENE

**nrg-Datei** In die `nrg`-Datei wird ungefähr alle 10 Zeitschritte ein Datensatz für jede Teilchenart geschrieben, der aus den folgenden acht Größen besteht. Alle Größen sind quadratische über das gesamte Simulationsvolumen gemittelte Momente der Verteilungsfunktion. Die ersten vier bezeichnen Dichte, parallele Geschwindigkeit und die beiden Temperaturen (parallel und senkrecht), jeweils quadratisch und über den Ortsraum gemittelt, was die Operation  $\langle \dots \rangle$  anzeigt.

$$\begin{aligned} \langle n_j^2 \rangle &= \left\langle \left( \int F_{j1} d^3v \right)^2 \right\rangle & \hat{\mu} \langle u_{j\parallel}^2 \rangle &= \hat{\mu} \left\langle \left( \int \alpha_j v_{\parallel} F_{j1} d^3v \right)^2 \right\rangle \\ \frac{1}{2} \langle T_{\parallel}^2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left( \int (2v_{\parallel}^2 - 1) F_{j1} d^3v \right)^2 \right\rangle \\ \langle T_{\perp}^2 \rangle &= \left\langle \left( \int (\mu \hat{B}(z) - 1) F_{j1} d^3v \right)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Die zweiten vier Zahlen stehen für den elektrostatischen und elektromagnetischen Teilchen- und Wärmefluss. Berechnet werden diese Größen wie folgt (siehe dazu auch Anhang A):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{es}} &= - \left\langle \int F_{j1} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} d^3v \right\rangle & \Gamma_{\text{em}} &= \left\langle \int \alpha_j v_{\parallel} \hat{\beta} F_{j1} \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial y} d^3v \right\rangle \\ Q_{\text{es}} &= - \left\langle \int (v_{\parallel}^2 + \mu \hat{B}) F_{j1} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} d^3v \right\rangle \\ Q_{\text{em}} &= \left\langle \int \alpha_j v_{\parallel} (v_{\parallel}^2 + \mu \hat{B}) F_{j1} \frac{\partial \bar{A}_{1\parallel}}{\partial y} d^3v \right\rangle \end{aligned}$$

Dabei gilt  $d^3v = \pi \hat{B}(z) d\mu dv_{\parallel}$ .

Die `nrg`-Datei dient der Aufnahme von Zeitspuren aus denen z.B. Anwachsraten bestimmt werden können. Außerdem sieht man aus dem Verlauf, ab wann die nichtlineare (turbulente) Sättigung eintritt und kann entsprechende Mittelwerte der Flüsse berechnen.

Da es sich bei diesen Größen immer um volumengemittelte handelte, fehlen wichtige Informationen, die aber für das Verständnis der Turbulenz und des Transportes unverzichtbar sind. Aus diesem Grund werden in größeren Zeitabständen 10 dreidimensionale Felder in die `kine` bzw. `kini`-Datei geschrieben.

**kin-Datei** Um die räumliche Struktur der Turbulenz untersuchen zu können, genügt es nicht, die räumlich gemittelten Werte obiger Größen auszugeben. Vielmehr ist die Ausgabe der Skalarfelder als Ganzes notwendig. Diese Ausgabe wird in die `kine/kini`-Datei gemacht. Da die Ausgabe sehr Festplattenspeicher intensiv ist, kann sie nur ca. alle 2000-5000 Zeitschritte erfolgen. Es werden die folgenden acht dreidimensionalen Felder ausgegeben  $\Phi_1, A_{1\parallel}, n, T_{\parallel}, T_{\perp}, q_{\parallel}, q_{\perp}, u_{\parallel}$ . Rechnet man mit gefangenen Teilchen, so wird die Dichte und die parallele Temperatur noch aufgespalten in einen Teil, der von den gefangenen Teilchen und einen der von den freien Teilchen verursacht wird. Für die Größen gelten die Berechnungsvorschriften

$$\begin{aligned} n(x, y, z) &= \int F_{j1} d^3v & u_{\parallel}(x, y, z) &= \int \alpha_j v_{\parallel} F_{j1} d^3v \\ T_{\parallel}(x, y, z) &= \int (2v_{\parallel}^2 - 1) F_{j1} d^3v & T_{\perp}(x, y, z) &= \int (\mu \hat{B} - 1) F_{j1} d^3v \\ q_{\parallel}(x, y, z) &= \int \alpha_j v_{\parallel} (v_{\parallel}^2 - \frac{3}{2}) F_{j1} d^3v & q_{\perp}(x, y, z) &= \int \alpha_j v_{\parallel} (\mu \hat{B} - 1) F_{j1} d^3v \end{aligned}$$

mit  $d^3v = \pi \hat{B}(z) d\mu dv_{\parallel}$ .

### 3.5.2 Postprocessing

Aus den im vorhergehenden Unterabschnitt beschriebenen Daten kann man nur bedingt Informationen ablesen. Sie müssen nachbearbeitet werden, was mit Hilfe verschiedener IDL Routinen bewerkstelligt wird. Die wichtigsten Diagnosemöglichkeiten, die wir im Rahmen dieser Arbeit verwendet haben, werden im Folgenden kurz beschreiben.

**Konturplots** Die einfachste Art, die dreidimensionalen Felder darzustellen, sind zweidimensionale Konturplots, z. B. in der Ebene senkrecht zum Gleichgewichtsmagnetfeld. Dazu wird über die dritte, z. B. parallele, nicht dargestellte Koordinate gemittelt und anschliessend die Höhenlinien der Größe dargestellt. Man kann auch nicht über die dritte Koordinate mitteln, sondern einen Schnitt bei einem festen Wert dieser Koordinate darstellen.

**Spektren** Eine wichtige weitere Diagnostik ist die Untersuchung der Beiträge zu verschiedenen Größen in Abhängigkeit von der Wellenzahl. Hier sind besonders die senkrechten Spektren interessant, da die Senkrechtdynamik die für die Turbulenz entscheidende Dynamik ist. Die Berechnung erfolgt als Mittelung über die Koordinaten, deren Spektrum nicht interessiert, anschließend wird mittels einer schnellen Fouriertransformation das Spektrum berechnet.

In den Untersuchungen treten drei verschiedene Arten von Spektren auf (Jenko & Scott, 1999a; Jenko & Scott, 1999b). So hat man zum einen das Energiespektrum, das angibt, wie sich die Energie einer Größe auf verschiedene Skalen verteilt. So kann man z. B.  $\langle(\nabla\Phi)^2\rangle$  als elektrostatische Energie untersuchen oder  $\langle n^2\rangle$  als Energie, die in der Dichtefluktuation steckt, usw.

Für den Transport interessant sind die Spektren, die die Beiträge zu einer Transportgröße, z. B.  $\langle nv_x\rangle$  nach den Wellenlängen aufschlüsselt. Daran kann man erkennen, bei welchen Skalen der Transport am größten ist.

Als drittes Spektrum kommt das Quellen/Senken Spektrum zum Einsatz, bei dem Antriebsterme und Dissipationsterme untersucht werden. Daraus lassen sich die Skalen bestimmen, an denen der Antrieb und die Dissipation stattfindet. Das ist für das Verständnis der Turbulenz und deren Mechanismen unerlässlich.

**Phasenkorrelationen** Die Beiträge zum Transport sind immer Korrelationen zweier Größen, so dass sie sowohl von den Amplituden der beiden Größen als auch von dem Phasenwinkel zwischen ihnen abhängen. Dieser Phasenwinkel kann mit einem statistischen Verfahren berechnet werden. Dazu wird die Häufigkeit eines Winkels zwischen zwei Größen in Abhängigkeit von  $k_y$  als Konturplot aufgetragen. Sofern ein ausgeprägtes Maximum existiert, sind die Größen korreliert und die Lage des Maximums gibt den Phasenwinkel an. Um das Maximum deutlicher zu machen, kann man nicht einfach die Häufigkeit bestimmen, sondern muss diese mit der Amplitude gewichten.

**Weitere Diagnostiken** Es gibt viele weitere Möglichkeiten, die Eigenschaften der Turbulenz zu untersuchen. So kann man Zeit- oder Amplitudenkorrelationen berechnen, dreidimensionale Ansichten erstellen oder weitere statistische Methoden anwenden.

# Kapitel 4

## Lineare Dynamik

In diesem Kapitel wird die lineare Dynamik des durch die Gleichungen (2.35), (2.38), (2.40) beschriebenen gyrokinetischen Vlasov-Maxwell-Systems dargestellt. Es geht in erster Linie um die zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen, welche die Moden antreiben. Um physikalische Bilder der Moden zu entwickeln, ist es einfacher in einem Flüssigkeitsmodell zu arbeiten, anstatt die vollen gyrokinetischen Gleichungen zu verwenden. Alle hier beschriebenen Moden lassen sich in einem Zweiflüssigkeitenmodell erklären, die kinetische Theorie führt dann noch zu Modifikationen in reeller Frequenz und Dämpfungs- bzw. Anwachsrate.

### 4.1 Zweiflüssigkeitenmodell

Beschreibt man das Plasma als zwei sich durchdringende Flüssigkeiten, einmal für die Ionen und einmal für die Elektronen, so kann man die Gleichungen von Braginskii (Braginskii, 1965) verwenden. Da es hier nur um eine einfache Veranschaulichung geht, werden Stoßterme und die Anisotropie im Druck vernachlässigt. Außerdem wird die Energiegleichung stark vereinfacht zu einer reinen Advektion der Temperaturstörung. Die so vereinfachten Gleichungen lauten dann

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div}(n_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (4.1)$$

$$m_j n_j \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_j = q_j n_j \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{B}}{c} \right) - \nabla p_j \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla T_j = 0 \quad (4.3)$$

Die erste Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung, die die Erhaltung der Masse ausdrückt. Die Impulserhaltung wird in der zweiten Gleichung, der Bewegungsgleichung dargestellt. Man kann die vollen Braginskii-Gleichungen über eine Momentenbildung aus der kinetischen Gleichung für die Verteilungsfunktion herleiten. Zusätzlich braucht man für die selbstkonsistente Beschreibung des Plasmas

die Maxwellgleichungen und die Quasineutralität:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad n_i = n_e \quad (4.5)$$

In Gleichung (4.4a) wurde der Verschiebungsstrom vernachlässigt, da elektromagnetische Wellen in der weiteren Behandlung keine Rolle spielen. Die Quasineutralitätsbeziehung (4.5b) ersetzt in der niederfrequenten Plasmaphysik die Poissongleichung (Chen, 1974; Scott, 2001). In diesem Kapitel nehmen wir einfach geladene Ionen an und bezeichnen als Folge der Quasineutralität die Dichte immer mit  $n$ . Dabei unterscheiden wir nicht zwischen Ionen- und Elektronendichte. Erst wenn in Abschnitt 4.3.2 die Elektronen in gefangene und freie Elektronen unterteilt werden, wird auch die Dichte wieder entsprechend geschrieben.

Diese Gleichungen werden nun linearisiert, indem die gesuchten Größen Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit, sowie die Felder in einen Gleichgewichtsanteil (Index 0) und einen Störungsanteil (Index 1) aufgeteilt werden. Der Störungsteil soll klein sein gegenüber dem Gleichgewichtsterm. Es gelte z. B.  $n = n_0 + n_1$  mit  $n_1 \ll n_0$ . Für die Gleichgewichtsgrößen wird angenommen, dass sie zeitunabhängig sind. Das führt auch zu dem Ergebnis  $\nabla \cdot (n_0 \mathbf{u}_{j0}) = 0$ . Die Gleichgewichtsfelder werden als von außen vorgegeben betrachtet, so dass die Maxwellgleichungen nur für die Störungsfelder berücksichtigt werden. Eine weitere Vereinfachung ist die Annahme, dass es im Gleichgewicht kein elektrisches Feld gibt. Außerdem werden alle Terme weggelassen, die zwei Störungsgrößen enthalten. Man erhält dann das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} (n_0 \mathbf{u}_{j1} + n_1 \mathbf{u}_{j0}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} m_j \frac{\partial \mathbf{u}_{j1}}{\partial t} + m_j \mathbf{u}_{j0} \cdot \nabla \mathbf{u}_{j1} + m_j \mathbf{u}_{j1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{j0} + m_j \frac{n_1}{n_0} \mathbf{u}_{j0} \cdot \nabla \mathbf{u}_{j0} \\ = q_j \mathbf{E}_1 + \frac{q_j}{c} \mathbf{u}_{j0} \times \mathbf{B}_1 + \frac{q_j}{c} \mathbf{u}_{j1} \times \mathbf{B}_0 + \frac{q_j}{c} \frac{n_1}{n_0} \mathbf{u}_{j0} \times \mathbf{B}_0 - \frac{\nabla p_{j1}}{n_0} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial T_{j1}}{\partial t} + \mathbf{u}_{j0} \cdot \nabla T_{j1} + \mathbf{u}_{j1} \cdot \nabla T_{j0} = 0 \quad (4.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1 \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (4.9)$$

Hier wurde der Strom eingeführt, der sich folgendermaßen zusammensetzt:

$$\mathbf{j}_1 = en_0 (\mathbf{u}_{i1} - \mathbf{u}_{e1}) + en_1 (\mathbf{u}_{i0} - \mathbf{u}_{e0}) = \mathbf{j}_{01} + \mathbf{j}_{10}$$

## 4.2 Alfvénwellen

Eine grundlegende Mode im magnetisierten Plasma ist die Alfvénwelle (Chen, 1974; Cross, 1988). Außerdem ist sie in dem später betrachteten System die

schnellste parallele Wellendynamik und stellt deshalb an die numerische Behandlung gewisse Anforderungen.

Es gibt zwei Arten von Alfvénwellen, die jedoch deutlich unterschiedliche Frequenzen haben. Die Dynamik von Alfvénwellen beinhaltet Fluktuationen des Magnetfeldes. Da es wesentlich weniger Energie bedarf, das Magnetfeld senkrecht auszulenken als parallel zu komprimieren, sind die Kompressions-Alfvénwellen höherfrequent als die Scher-Alfvénwellen. Wir betrachten im folgenden nur die Scher-Alfvénwellen. Dazu nehmen wir  $\mathbf{k} = (0, 0, k_{\parallel})$  an. Ferner soll die Störung des Magnetfeldes in  $x$ -Richtung gewählt werden, also  $B_1 = (B_{1x}, 0, 0)$ . Nimmt man nun als Ansatz ebene Wellen an, so gilt  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  und  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ . Aus der Induktionsgleichung erhält man dann sofort

$$\begin{pmatrix} -k_{\parallel} E_{1y} \\ k_{\parallel} E_{1x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} B_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit und dem obigen linearen Gleichungssystem kommt man zu den folgenden Gleichungen, wenn man ein homogenes Plasma ohne Krümmung, keine Gradienten im Gleichgewicht, sowie  $\mathbf{u}_{j0} = 0$  annimmt.

$$\begin{aligned} -i\omega m_j \mathbf{u}_{j1} &= q_j \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega}{k_{\parallel} c} B_{1x} \\ E_{1\parallel} \end{pmatrix} + \frac{1}{c} \begin{pmatrix} u_{j1y} B_0 \\ -u_{j1x} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{in_1 T_{j0}}{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{\parallel} \end{pmatrix} \\ ik_{\parallel} B_{1x} &= \frac{4\pi}{c} en_0 (\mathbf{u}_{i1y} - \mathbf{u}_{e1y}) \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen (die erste tritt für jede Teilchenspezies auf) stellen ein abgeschlossenes Gleichungssystem für die senkrechten Komponenten von  $\mathbf{u}_{j1}$  und die Störung des magnetischen Feldes dar.

Man erhält daraus die Dispersionsrelation der Scher-Alfvénwellen

$$\omega^2 = v_A^2 k_{\parallel}^2 \quad \text{mit} \quad v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_0 m_i} \quad (4.10)$$

wobei  $v_A$  die Alfvéngeschwindigkeit beschreibt. Unter Verwendung von  $\beta_e$  kann diese auch geschrieben werden als

$$v_A^2 = \frac{T_{e0}}{\beta_e m_i} = \frac{c_s^2}{\beta_e}$$

Für ein sehr kleines  $\beta_e$  werden die Alfvénwellen also sehr schnell, was Implikationen für den Zeitschritt in der numerischen Simulation hat, wie man in Abschnitt 5.1.1 sehen wird.

### 4.2.1 Kinetische Scher-Alfvénwellen

Nun soll die Dispersionsrelation der kinetischen Alfvénwellen bestimmt werden. Der Unterschied zum vorhergehenden Abschnitt besteht darin, dass nun FLR („finite Larmor radius“) Effekte in niedrigster Ordnung für die Ionen mitberücksichtigt werden. Damit verläßt man das Gebiet der Braginskii-Gleichungen und kommt zur Gyrofluid-Theorie (Snyder & Hammett, 2001b). In einer einfachen Näherung gelten hierbei dieselben Gleichungen, Dichte und Geschwindigkeit beziehen sich jetzt jedoch auf die Gyrozentren. Man muß also zwischen der Gyrozentrendichte  $\bar{n}_i$  und der Teilchendichte unterscheiden. In der Gleichung für die Quasineutralität muss die Ionendichte nun ersetzt werden durch

$$n_{e1} = \bar{n}_{i1} + n_0 \rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \frac{e\Phi_1}{T_{e0}}, \quad (4.11)$$

die im Grenzfall  $k_{\perp} \rho_s \ll 1$  gilt (Snyder & Hammett, 2001b). Da die Elektronen in paralleler Richtung wesentlich beweglicher sind als die Ionen, tragen sie den Hauptanteil des parallelen Stroms. Die Ionen können in dieser Richtung also als ruhend behandelt werden, d.h.  $\mathbf{u}_{i\parallel} = 0$ . Außerdem ist der parallele Strom bei weitem größer als der senkrechte Strom, da sich die Elektronen annähernd ungehindert mit thermischer Geschwindigkeit entlang des Magnetfeldes bewegen können, in senkrechter Richtung aber nur deutlich langsamere Driften möglich sind. Im Ampèreschen Gesetz kann man für  $\beta \ll 1$  (siehe dazu Kapitel 2) in guter Näherung nur den parallelen Strom berücksichtigen und erhält dann auch nur das parallele elektromagnetische Potential  $A_{1\parallel}$ . Man hat also zusätzlich zu (4.11) die Gleichungen

$$\begin{aligned} -i\omega m_j \mathbf{u}_{j1} &= q_j \left( \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{u}_{j1} \times \mathbf{B}_0 \right) - \frac{T_{j0} i \mathbf{k} \bar{n}_{j1}}{n_0} \\ -i\omega n_{e1} &= -i \mathbf{k} \cdot (n_0 \mathbf{u}_{e1}) \\ -i\omega \bar{n}_{i1} &= -i \mathbf{k} \cdot (n_0 \mathbf{u}_{i1\perp}) \\ k_{\perp}^2 A_{1\parallel} &= \frac{4\pi}{c} j_{\parallel} \quad \mathbf{E}_1 = -i \mathbf{k} \Phi_1 + \frac{i\omega}{c} A_{1\parallel} \mathbf{b} \end{aligned}$$

wobei die Potentiale eingeführt wurden. Nimmt man nun wieder eine Wellenausbreitung in paralleler Richtung an, also wieder  $\mathbf{k} = (0, 0, k_{\parallel})$ , so folgt aus der Kontinuitätsgleichung für die Ionengyrozentren  $\bar{n}_{i1} = 0$ .

Betrachtet man nur die parallele Komponente der Bewegungsgleichungen, so kommt man zu

$$\begin{aligned} -i\omega m_e u_{e1\parallel} &= -e E_{1\parallel} - \frac{T_{e0} i n_{e1}}{n_0} k_{\parallel} \\ -i\omega n_{e1} &= -i k_{\parallel} n_0 u_{e1\parallel} \quad n_{e1} = -n_0 \rho_s^2 k_{\perp}^2 \frac{e\Phi_1}{T_{e0}} \\ k_{\perp}^2 A_{1\parallel} &= -\frac{4\pi}{c} e n_0 u_{e1\parallel} \quad E_{1\parallel} = -i k_{\parallel} \Phi_1 + \frac{i\omega}{c} A_{1\parallel} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine Lösung, wenn die Dispersionsrelation erfüllt ist. Diese lautet

$$\omega^2 = v_A^2 k_{\parallel}^2 \left( \frac{1 + \rho_s^2 k_{\perp}^2}{1 + \delta_e^2 k_{\perp}^2} \right) \quad (4.12)$$

wobei  $\delta_e = \frac{c}{\omega_p}$  die stoßfreie Skintiefe ist. Dabei wurde die Plasmafrequenz  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_e$  verwendet.

### 4.2.2 Gyrokinetische Scher-Alfvénwellen

Der nächste und letzte Schritt auf dem Weg zur Dispersionsrelation der Alfvénwellen führt zu den gyrokinetischen Scher-Alfvénwellen, die man aus der Paralleldynamik der in Kapitel 2 hergeleiteten Gleichungen erhält. Nimmt man die Ausgangsgleichungen (2.35), (2.38) und (2.40) und betrachtet nur die lineare Paralleldynamik ohne Gradienten und Krümmung, so kann man Gleichung (2.35) vereinfachen zu

$$\frac{\partial g_j}{\partial t} + \alpha_j v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} (F_{j1} + \sigma_j F_{j0} \bar{\Phi}_1) = 0. \quad (4.13)$$

Unter Vernachlässigung der parallelen Magnetfeldfluktuationen und dem Beschränken auf räumliche Skalen, die viel größer als die Debyelänge sind, womit die linke Seite in Gleichung (2.38) zu Null wird, werden die Feldgleichungen aus dem ersten Kapitel zu

$$\begin{aligned} \sum_j \xi_j (1 - \Gamma_0(b_j)) \sigma_j \Phi_1 &= \sum_j \xi_j \int I_0(\lambda_j) g_j d^3v \\ \left[ \nabla_{\perp}^2 - \sum_j \frac{\xi_j \sigma_j \hat{\beta}}{\hat{\mu}_j} \Gamma_0(b_j) \right] A_{1\parallel} &= - \sum_j \xi_j \alpha_j \int v_{\parallel} I_0(\lambda_j) g_j d^3v \end{aligned}$$

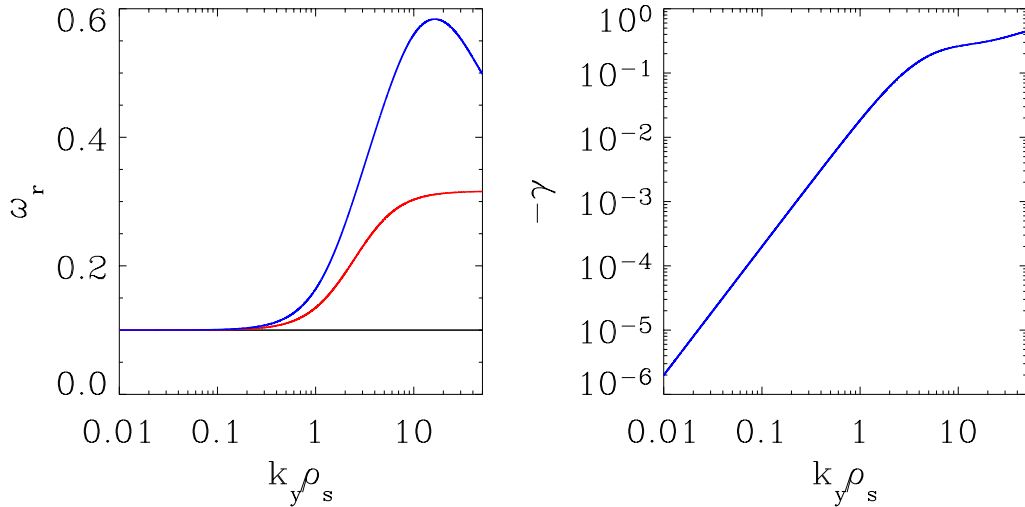
Damit kommt man auf die Dispersionsrelation

$$k_{\perp}^2 \sum_j \xi_j \sigma_j (1 - \Gamma_0(b_j)) + R \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \hat{\beta} \sum_j \xi_j \sigma_j (1 - \Gamma_0(b_j)) \right) = 0 \quad (4.14)$$

mit  $R = \sum_j \xi_j \sigma_j \Gamma_0(b_j) (1 + \bar{\omega} Z(\bar{\omega}))$ , wobei  $Z$  die Plasmadispersionsfunktion beschreibt (Fried & Conte, 1961) und die Abkürzungen aus Kapitel 2 gelten.

Hier werden die vollen Gyromapping Operationen ausgeführt, also alle FLR-Effekte behandelt, womit die Dispersionsrelation keiner Beschränkung in  $k_{\perp} \rho_s$  unterliegt. Die Frequenz wird nun komplex, was soviel bedeutet, als dass die Alfvénwellen gedämpft sind. Diese Dämpfung erhält man erst bei Verwendung einer Verteilungsfunktion im Phasenraum. Nur so kann die Plasma-Dispersionsfunktion  $Z$  in die Gleichungen kommen. In Abb. 4.1 sind alle drei Dispersionsrelationen über  $k_y$  aufgetragen.





**Abbildung 4.1:** Dispersionsrelation von Alfvénwellen. Dargestellt sind in Blau Gl. (4.14), in Rot Gl. (4.12) und in Schwarz Gl. (4.10)

## 4.3 Krümmunggetriebene Moden

### 4.3.1 ITG-Moden

Hat man im Gleichgewicht einen hinreichend starken Ionentemperatur-Gradienten, so führt dieser zu einer Instabilität. Diese ITG-Mode tritt in einfacher slab Geometrie (ungekrümmtes Magnetfeld) wie auch in toroidaler Geometrie auf, es liegen den beiden Moden aber verschiedene Mechanismen zugrunde. So wird die slab ITG-Mode von der parallelen Dynamik beherrscht, wogegen die toroidale ITG-Mode von „schlechter“ Krümmung getrieben wird. Was das bedeutet, wird weiter unten erklärt. Da in dieser Arbeit die slab ITG-Moden keine Rolle spielen, betrachten wir hier auch nur die toroidale ITG-Mode und beschreiben deren Mechanismus in einem einfachen elektrostatischen Flüssigkeitsmodell. Die parallele Dynamik ist für die toroidale Mode von untergeordneter Bedeutung, weshalb wir sie in diesem einfachen Modell vernachlässigen.

Die Elektronen werden in dem hier verwendeten einfachen Modell adiabatisch behandelt, so dass sich die folgende Beschreibung auf die Ionen bezieht. Der Instabilitätsmechanismus wird anhand der Bilder in Abb. 4.2 erklärt, wobei das Gleichgewichtsmagnetfeld in die Zeichenebene hinein zeigen soll. Wir orientieren uns an der Darstellung des Mechanismus von (Beer, 1994; Weiland, 2000) Als Ausgangssituation nehmen wir an, es habe sich eine Temperaturfluktuation in poloidaler Richtung herausgebildet (linkes Bild in Abb. 4.2). Befindet sich diese Fluktuation an der „outboard midplane“, also am Punkt mit dem schwächsten Magnetfeld, so zeigt der Gradient des Magnetfeldes in negative radiale Richtung,

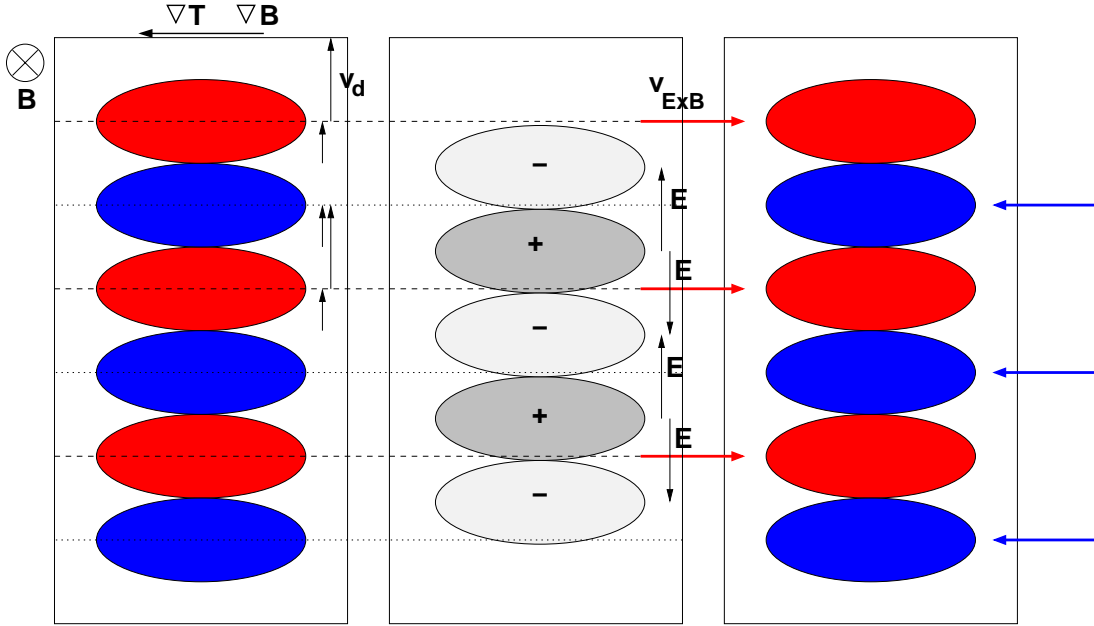


Abbildung 4.2: Mechanismus der ITG Instabilität, der im Text beschrieben ist.

genau wie der Ionentemperatur-Gradient. Die  $\nabla B$  und Krümmungsdift kann für niedriges  $\beta$  zusammengefaßt werden zu der folgenden Geschwindigkeits- und damit temperaturabhängigen Drift (siehe Anhang F).

$$\mathbf{v}_d = \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{\Omega B_0^2} \mathbf{B} \times \nabla B \quad (4.15)$$

Die Drift zeigt für die Ionen nach unten (negative  $y$ -Richtung) und führt nun dazu, dass aus der Temperaturfluktuation eine Dichtefluktuation wird. Oberhalb der heißen Stellen sammeln sich Ionen an, unterhalb der heißen Stellen sinkt die Dichte (mittleres Bild). Die Quasineutralität führt dazu, dass die Elektronendichte dieselbe Dichtestörung zeigt. Aufgrund der Adiabaticität der Elektronen (die von der hohen Beweglichkeit der Elektronen entlang der Feldlinien kommt), führt die Dichtestörung zu einer Störung des elektrostatischen Potentials, die zu einem elektrischen Feld führt. Das elektrische Feld wiederum ruft eine  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift hervor, die kaltes Plasma in kalte Stellen und heißes Plasma in heiße Stellen advektiert, und damit die Ausgangsfluktuation verstärkt (rechtes Bild). Der Grund für die Verstärkung liegt in der gleichen Richtung der Ionentemperatur-Gradienten und des Gradienten des Magnetfeldes. An der „inboard midplane“, also der Stelle mit dem stärksten Magnetfeld, ist  $\nabla B$  in positive radiale Richtung gerichtet, der Temperaturgradient zeigt dagegen wieder in die negative radiale Richtung. Die beiden Gradienten sind damit entgegengesetzt. Dadurch ergibt sich durch den oben beschriebenen Mechanismus, dass kaltes Plasma in die heißen Stellen und heißes in die kalten Stellen transportiert wird. Damit ist die Fluktuation an dieser

Stelle stabil.

Der obige Mechanismus soll nun noch anhand eines sehr einfachen elektrostatischen Modells der ITG-Mode rechnerisch dargestellt werden. Dazu werden als erstes die Driften bestimmt, die für die Rechnung notwendig sind. Man erhält sie, indem man die Bewegungsgleichung (4.2) einmal auf die Magnetfeldrichtung projiziert und einmal auf die Fläche senkrecht dazu. Nimmt man nur die Gleichungen für die Gleichgewichtsanteile (also mit dem Index 0), so kann man die Geschwindigkeit in senkrechter Richtung ausdrücken durch

$$\mathbf{u}_{j0\perp} = -\frac{c}{q_j n_0 B_0} \nabla p_{j0} \times \mathbf{b}_0$$

Dies ist die diamagnetische Geschwindigkeit, die im folgenden mit  $\mathbf{u}_{*j}^{(p)}$  bezeichnet wird. Das hochgestellte  $p$  zeigt an, dass es eine diamagnetische Geschwindigkeit aufgrund eines Druckgradienten ist. In erster Ordnung der Störungsterme kommt man unter Vernachlässigung der Trägheitsterme zu einer senkrechten Geschwindigkeit von

$$\mathbf{u}_{j1\perp} = \frac{c}{B_0} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{b}_0 - \frac{c}{q_j n_0 B_0} \nabla p_{j1} \times \mathbf{b}_0 = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*j1}^{(p)}$$

Der erste Term stellt die bekannte  $E \times B$ -Driftgeschwindigkeit dar, der zweite Term ist die diamagnetische Driftgeschwindigkeit aufgrund des Gradienten des gestörten Druckes. Man kann die letzte Driftgeschwindigkeit umrechnen in die Driften aufgrund des Dichte und Temperaturgradienten durch die Beziehung

$$\mathbf{u}_{*j1}^{(p)} = \mathbf{u}_{*j1}^{(T)} + \mathbf{u}_{*j1}^{(n)} + \frac{T_{j1}}{T_{j0}} \mathbf{u}_{*j}^{(n)} + \frac{n_1}{n_0} \mathbf{u}_{*j}^{(T)}$$

In paralleler Richtung erhält man in nullter Störungsordnung  $u_{j0\parallel} = 0$  und in erster Störungsordnung unter Berücksichtigung der „diamagnetic cancellation“ (Hinton & Horton, 1971), die besagt, dass der Term proportional zu  $\mathbf{u}_{j0\perp} \cdot \nabla u_{j1\parallel}$  durch einen ebensolchen Term, der aus der Divergenz des Drucktensors entsteht, aufgehoben wird:

$$m_j \frac{\partial u_{j1\parallel}}{\partial t} = q_j \mathbf{E}_{1\parallel} - \frac{\nabla_{\parallel} p_{j1}}{n_0}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist von der Masse abhängig, die beschleunigende Kraft auf der rechten Seite dagegen nicht. Da die Elektronen viel leichter sind als die Ionen, bewegen sie sich deutlich schneller als die Ionen entlang der Feldlinien. In der senkrechten Driftbewegung war dieser Unterschied nicht festzustellen. Da wir Zeitskalen betrachten wollen, die zwischen den Transitfrequenzen der beiden Teilchen liegen, also

$$k_{\parallel} v_{i\parallel} \ll \omega \sim \omega_* \ll k_{\parallel} v_{e\parallel}$$

können wir für die Ionen die Parallelbewegung vernachlässigen. Für die Elektronen kann man dagegen die Trägheit unberücksichtigt lassen und kommt damit zur Adiabaticitätsgleichung der Elektronen

$$\frac{e\Phi}{T_{e0}} = \frac{n_1}{n_0},$$

da es in paralleler Richtung keine Temperaturschwankungen gibt. Auch das ist eine Folge der schnellen parallelen Elektronenbewegung.

Nachdem nun die Driften bekannt sind und auch die Bewegungsgleichung der Elektronen bestimmt wurde, bestimmen wir nun aus dem folgenden einfachen Modell für die Ionendynamik eine Anwachsrate und eine reelle Frequenz. Die Ionendynamik besteht aus der Kontinuitätsgleichung in linearisierter Form

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*i1}^{(p)}) \cdot \nabla n_0 + n_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*i1}^{(p)}) = 0$$

und der  $E \times B$ -Advektion der Temperaturstörung in den Gleichgewichtstemperaturgradienten.

$$\frac{\partial T_{i1}}{\partial t} + \mathbf{u}_E \cdot \nabla T_{i0} = 0$$

Ausgehend von diesen Gleichungen und den oben berechneten Driften, sowie unter Annahme von harmonischen Fluktuationen  $n_1, T_{i1} \propto \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t))$ , gelangt man zu der Dispersionsrelation

$$\omega \left( \omega + \tau_i \omega_{*i}^{(n)} - \omega_{Di}(1 + \tau_i) \right) + \omega_{Di} \tau_i \omega_{*i}^{(T)} = 0$$

Löst man diese Gleichung nach  $\omega$  auf, kommt man zu

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \tau_i \omega_{*i}^{(n)} - \omega_{Di}(1 + \tau_i) \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \tau_i \omega_{*i}^{(n)} - \omega_{Di}(1 + \tau_i) \right)^2 - 4\omega_{Di} \tau_i \omega_{*i}^{(T)}}$$

Eine instabile Mode erhält man immer dann, wenn

$$4\omega_{Di} \tau_i \omega_{*i}^{(T)} > \left( \tau_i \omega_{*i}^{(n)} - \omega_{Di}(1 + \tau_i) \right)^2 \quad (4.16)$$

Nun kann man zwei Extremfälle unterscheiden. Befindet man sich auf der Torusaußenseite, so sind alle Gradienten nach innen gerichtet und es gilt für die Driftfrequenzen (wenn man  $\nabla B_0/B_0 = -\hat{\mathbf{x}}/R$  schreibt):

$$\omega_{*i}^{(n)} = -\frac{cT_{i0}k_y}{eB_0L_n} \quad \omega_{*i}^{(T)} = -\frac{cT_{i0}k_y}{eB_0L_{T_i}} \quad \omega_{Di} = -\frac{cT_{i0}k_y}{eB_0R}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4.16) ein und multipliziert die Gleichung mit  $R^2$ , so kommt man zu dem folgenden Ausdruck für die Schwelle des Temperaturgradienten, damit die ITG-Mode instabil wird.

$$\frac{R}{L_{T_i}} > \frac{1}{4\tau_i} \left( 1 + \tau_i - \tau_i \frac{R}{L_n} \right)^2 = \left( \frac{R}{L_{T_i}} \right)_{\text{krit}}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann die Frequenz geschrieben werden als  $\omega = \omega_r + i\gamma$  mit

$$\omega_r = -\frac{1}{2} \left( \tau_i \omega_{*i}^{(n)} - \omega_{Di} (1 + \tau_i) \right) = \frac{\omega_{Di}}{2} \left( 1 + \tau_i - \tau_i \frac{R}{L_n} \right)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{4\tau_i} cT_{i0} k_y}{2 eB_0 R} \sqrt{\frac{R}{L_{T_i}} - \frac{1}{4\tau_i} \left( 1 + \tau_i - \tau_i \frac{R}{L_n} \right)^2} = \sqrt{\tau_i} |\omega_{Di}| \sqrt{\frac{R}{L_{T_i}} - \left( \frac{R}{L_{T_i}} \right)_{\text{krit}}}$$

Befindet man sich dagegen auf der Torusinnenseite, so gilt für die Driftfrequenzen (diesmal ist  $\nabla B$  nach außen gerichtet, also  $\propto \hat{x}/R$ ):

$$\omega_{*i}^{(n)} = -\frac{cT_{i0} k_y}{eB_0 L_n} \quad \omega_{*i}^{(T)} = -\frac{cT_{i0} k_y}{eB_0 L_{T_i}} \quad \omega_{Di} = \frac{cT_{i0} k_y}{eB_0 R}$$

Eingesetzt in (4.16) erhält man nun

$$-4\tau_i \frac{R}{L_{T_i}} > \left( 1 + \tau_i + \tau_i \frac{R}{L_n} \right)^2$$

Da nun die rechte Seite immer positiv, die linke dagegen immer negativ ist, kann diese Bedingungen nicht erfüllt werden. An der Torusinnenseite ist die ITG-Mode also stabil, was dazu führt, dass sie auf der Außenseite des Torus lokalisiert ist.

### 4.3.2 TE-Moden

Das toroidale Magnetfeld im Tokamak hat die Eigenschaft, dass seine Stärke von mit dem Abstand von der Symmetrieachse abnimmt. Außerdem windet sich eine Feldlinie helikal um den Torus, wodurch die Stärke des Magnetfeldes entlang der Feldlinie schwankt zwischen einem Maximalwert an der Innenseite des Torus (bei  $z = \pm\pi$ ) und dem Minimalwert an der Außenseite (bei  $z = 0$ ).

Bewegen sich Teilchen entlang eines sich räumlich ändernden Magnetfeldes, so können sie gefangen werden und ihre Bewegung wird auf einen Teil des Raumes eingeschränkt. Wegen der Erhaltung der Energie und des magnetischen Moments gilt

$$W_{\text{kin}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu B(z) = \text{const.}$$

Ändert sich nun das Magnetfeld, muss sich auch die parallele Geschwindigkeit ändern. Bei steigendem Magnetfeld sinkt diese, so dass Teilchen mit geringer paralleler Geschwindigkeit in einer magnetischen Senke gefangen werden und sich zwischen zwei Umkehrpunkten hin und her bewegen. Die Umkehrpunkte sind die Stellen, an denen das Magnetfeld gerade gleich  $W_{\text{kin}}/\mu$  ist. Da im Torus das Magnetfeld an der Außenseite am schwächsten ist, ist ein Teil der Teilchen (Elektronen wie Ionen) auf der Außenseite gefangen.

Der wichtigste Effekt der gefangenen Teilchen auf die Dynamik des gesamten Systems ist die Behinderung der parallelen Bewegung der Elektronen. Sind diese nicht gefangen, so kann man sie oft als adiabatisch in paralleler Richtung annehmen (wie wir es bei der Beschreibung der ITG Mode getan haben), da dort die Bewegung aufgrund der kleinen Masse der Elektronen fast ungehindert abläuft. Das führt dazu, dass sich das elektrostatische Potential sofort an die Dichteverteilung anpasst.

Ist nun aber ein Teil  $f_t$  der Elektronen gefangen, so kann sich nur noch der restliche Teil  $(1 - f_t)$  frei entlang der Feldlinien bewegen und das Potential beeinflussen. Die gefangenen Elektronen sind dagegen an der Außenseite des Torus lokalisiert.

Durch dieses „Trapping“ der Elektronen ist auch ein Thermalisieren entlang der Feldlinien behindert und es können sich Temperaturschwankungen in poloidaler Richtung einstellen, was ohne „Trapping“ nicht möglich wäre, da die schnelle parallele Bewegung zu einem Wärmeaustausch führen würde.

Der weitere Mechanismus der TE-Mode ist derselbe, wie bei der ITG Mode mit dem Unterschied, dass nun die gefangenen Elektronen die Rolle der Ionen der ITG Mode spielen. Um das zu sehen, betrachten wir die „bounce“-Bewegung der gefangenen Teilchen etwas näher. Die Teilchen bewegen sich zwischen den Umkehrpunkten hin und her. Die Frequenz dieser Bewegung kann man berechnen, wenn man sie als harmonisch annimmt und die rücktreibende Kraft als die Spiegelkraft nimmt, so dass gilt

$$F = -\mu \nabla_{\parallel} B_0$$

Weiter nehmen wir als einfache Geometrie des Magnetfeldes die folgende Beziehung und deren Ableitung für kleine  $\theta$

$$B = \frac{B_{\text{ref}}}{1 + \epsilon_t \cos \theta} \quad \frac{dB}{dz} = \epsilon_t B_{\text{ref}} \theta \frac{d\theta}{dz}$$

Mit der Gleichung einer Feldlinie  $r d\theta/dz = B_{\theta}/B$  und damit  $\theta = (B_{\theta}/rB)z$  gilt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} = -\omega_b^2 z \quad \text{mit} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{\mu B_{\text{ref}}}{m_j q^2 R_0^2} \epsilon_t} = \frac{v_{\perp}}{q R_0} \sqrt{\frac{\epsilon_t}{2}}$$

wobei  $q$  der Sicherheitsfaktor ist. Die senkrechte Geschwindigkeit kann man mit der thermischen Geschwindigkeit abschätzen. Dann erhält man für die Beziehungen

$$\omega_{\text{bi}} = \frac{v_{T_i}}{q R_0} \sqrt{\epsilon_t} \ll \omega_{*i} \sim \omega \sim \omega_{*e} \ll \frac{v_{T_e}}{q R_0} = \omega_{\text{be}}$$

Das heißt aber wiederum, dass die Elektronen auf der Zeitskala der diamagnetischen Geschwindigkeiten viele Hin- und Herbewegungen durchführen. Deshalb

unterscheiden sich die gefangenen und die freien Elektronen in ihren Eigenschaften. Die freien kann man weiterhin als adiabatisch annehmen, die gefangenen werden über die „bounce“-Bewegung gemittelt. Für die Ionen ist die Situation insofern verschieden, als die „bounce“-Bewegung viel langsamer ist als, die diamagnetische Bewegung. Hier sieht man auf den Zeitskalen der Driften keinen Unterschied zwischen gefangenen und freien Ionen.

Auch für die TE-Moden kann man ein einfaches Modell aufstellen, dass dieselben Gleichungen wie das Modell für die ITG-Moden umfaßt, diesmal jedoch angewandt auf die gefangenen Elektronen. Die Ionen werden als ruhend angenommen. Man hat dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\text{et}1}}{\partial t} + \left( \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*\text{et}1}^{(p)} \right) \cdot \nabla n_0 + n_0 \nabla \cdot \left( \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{*\text{et}1}^{(p)} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T_{\text{e}1}}{\partial t} + \mathbf{u}_E \cdot \nabla T_{\text{e}0} &= 0 \\ \frac{n_{\text{ep}1}}{n_0} - \frac{e\Phi}{T_{\text{e}0}} = 0 \quad f_t n_{\text{et}1} + (1 - f_t) n_{\text{ep}1} = n_{\text{i}1} &= 0 \end{aligned}$$

Harmonische Fluktuationen führen zu

$$\begin{aligned} (-\omega + \omega_{\text{Det}}) n_{\text{et}1} + \frac{n_0}{T_{\text{e}0}} \omega_{\text{Det}} T_{\text{et}1} + n_0 (\omega_{*\text{e}}^{(n)} - \omega_{\text{Det}}) \frac{e\Phi}{T_{\text{e}0}} &= 0 \\ -\omega T_{\text{et}1} + e\omega_{*\text{e}}^{(T)} \Phi &= 0 \\ f_t \frac{n_{\text{et}1}}{n_0} + (1 - f_t) \frac{e\Phi}{T_{\text{e}0}} &= 0 \end{aligned}$$

Normiert man nun wieder alle fluktuierenden Größen auf ihren Gleichgewichtsanteil und das Potential auf  $T_{\text{e}0}/e$ , so kommt man auf das System

$$\begin{aligned} (-\omega + \omega_{\text{Det}}) n_{\text{et}1} + \omega_{\text{Det}} T_{\text{et}1} + (\omega_{*\text{e}}^{(n)} - \omega_{\text{Det}}) \Phi &= 0 \\ -\omega T_{\text{et}1} + \omega_{*\text{e}}^{(T)} \Phi &= 0 \\ f_t n_{\text{et}1} + (1 - f_t) \Phi &= 0 \end{aligned}$$

dessen Lösung zu der Dispersionsrelation

$$\omega^2 + \omega (x_t (\omega_{*\text{e}}^{(n)} - \omega_{\text{Det}}) - \omega_{\text{Det}}) + x_t \omega_{\text{Det}} \omega_{*\text{et}}^{(T)} = 0$$

mit  $x_t = f_t/(1 - f_t)$  führt. Aufgelöst ergibt dies für die Frequenz

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} (x_t \omega_{*\text{e}}^{(n)} - (x_t + 1) \omega_{\text{Det}}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(x_t \omega_{*\text{e}}^{(n)} - (x_t + 1) \omega_{\text{Det}})^2 - 4x_t \omega_{\text{Det}} \omega_{*\text{et}}^{(T)}}$$

Hier kommt man zu einer sehr ähnlichen Bedingung für die Instabilität, wie bei den ITG Moden:

$$4x_t \omega_{\text{Det}} \omega_{*\text{et}}^{(T)} > (x_t \omega_{*\text{e}}^{(n)} - (x_t + 1) \omega_{\text{Det}})^2$$

Für die Driftfrequenzen gilt an der „outboard midplane“

$$\omega_{Det} = \frac{cT_{e0}k_y}{eB_0R} \quad \omega_{*et}^{(T)} = \frac{cT_{e0}k_y}{eB_0L_{Te}} \quad \omega_{*e}^{(n)} = \frac{cT_{e0}k_y}{eB_0L_n}$$

Daraus folgt für die Instabilitätsbedingung

$$\frac{R}{L_{Te}} > \frac{1}{4x_t} \left( 1 + x_t - x_t \frac{R}{L_n} \right)^2 = \left( \frac{R}{L_{Te}} \right)_{\text{krit}}$$

Wenn man  $x_t$  durch  $\tau_1$  ersetzt, erhält man die Instabilitätsbedingung für die ITG-Moden und den Iontemperatur-Gradienten. Für Frequenz und Anwachsrate erhält man so analog

$$\omega_r = \frac{\omega_{Det}}{2} \left( 1 + x_t - x_t \frac{R}{L_n} \right) \quad \gamma = \sqrt{x_t} |\omega_{Det}| \sqrt{\frac{R}{L_{Te}} - \left( \frac{R}{L_{Te}} \right)_{\text{krit}}}$$

### Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die drei linearen Moden beschrieben, die auch für die nichtlineare Dynamik eine Rolle spielen. Mittels eines einfachen Modells wurden Dispersionsrelationen hergeleitet und kurz diskutiert. Dabei ergab sich, dass die krümmungsgetriebenen ITG- und TE-Moden auf der Torusaußenseite lokalisiert sind.





# Kapitel 5

## Numerische Tests

Nachdem im vorhergehenden Kapitel die lineare Dynamik beschrieben wurde, die einem durch die gyrokinetischen Gleichungen (2.35-2.40) beschriebenen Plasma zugrunde liegt, wird hier nun der in Kapitel 3 beschriebene Code mit bekannten Ergebnissen und anderen Codes verglichen, um seine Korrektheit sicherzustellen.

Um den Ergebnissen von numerischen Rechnungen trauen zu können, muß gewährleistet sein, dass der zugrunde liegende Code bei bekannten Parametern die bekannten Ergebnisse liefert. Bei einem nichtlinearen Turbulenzcode ist das Benchmarking mit linearen Rechnungen relativ einfach, da genug Vergleichswerte existieren, bzw. schnell erzeugt werden können. Will man allerdings die nichtlineare Funktion des Codes überprüfen, kann man sich nur auf einen bekannten Testfall, den sogenannten „Cyclone base case“ (Dimits *et al.*, 2000) stützen. Dabei handelt es sich um einen Parametersatz, der an eine bestimmte Entladung des DIII-D Tokamaks angelehnt ist. Das Cyclone Projekt verglich die Ergebnisse verschiedener Codes (Gyrofluid- und gyrokinetische Rechnungen) für diesen Parametersatz miteinander. Mit dem dabei gewonnenen Ergebnis für den Transport kann auch der GENE-Code verglichen werden.

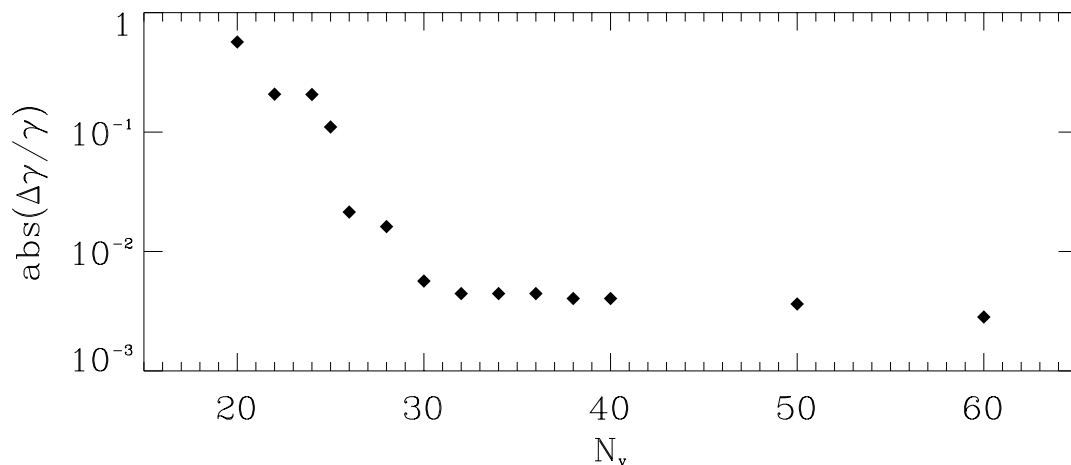
### 5.1 Lineare Benchmarks

In diesem Abschnitt werden die linearen Benchmarks vorgestellt, die wir durchgeführt haben. Dabei wird im Allgemeinen mit dem GS2 Code (Kotschenreuther *et al.*, 1995) oder analytischer Theorie verglichen. Es werden vier unterschiedliche Moden untersucht. Als erstes werden Alfvénwellen simuliert, bei denen es gilt, die richtige Dämpfungsrate und Frequenz zu erhalten. Weiter untersuchen wir die drei anwachsenden Moden, adiabatische und elektromagnetische ITG-Moden und TE-Moden.

### 5.1.1 Alfvénwellen

Ein erster numerischer Test betrifft die Paralleldynamik. Diese ist durch die Alfvénwellen charakterisiert, welche die schnellste Wellendynamik im System darstellen. Wie in Abschnitt 4.2.2 gezeigt wurde, sind diese Landau-gedämpft, was es numerisch zu reproduzieren gilt. Diese Landau-Dämpfung ist ein kinetisches Phänomen weshalb man erwartet, dass die Geschwindigkeitsraumaufösung eine wichtige Rolle spielt. In diesem Abschnitt geben wir Resultate aus (Dannert & Jenko, 2004) wieder, die mit einer auf die Paralleldynamik beschränkten Version des GENE-Codes durchgeführt wurden. Da dieselben numerischen Verfahren verwendet wurden, wie für die nichtlinearen Rechnungen, sind die Ergebnisse dieses Abschnittes übertragbar auf die Resultate dieser Arbeit.

In Abb. 5.1 ist der relative Fehler in der Dämpfungsrate (verglichen mit der numerisch aus Gleichung (4.14) berechneten) in Abhängigkeit von der Anzahl der parallelen Geschwindigkeitsraumpunkte dargestellt. Man erkennt ein deutli-

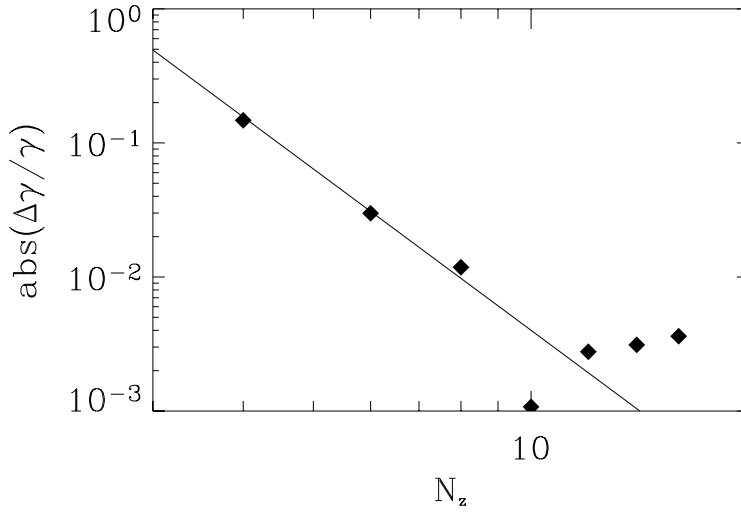


**Abbildung 5.1:** Relativer Fehler in der Dämpfungsrate als Funktion von  $N_{v_{\parallel}}$ .

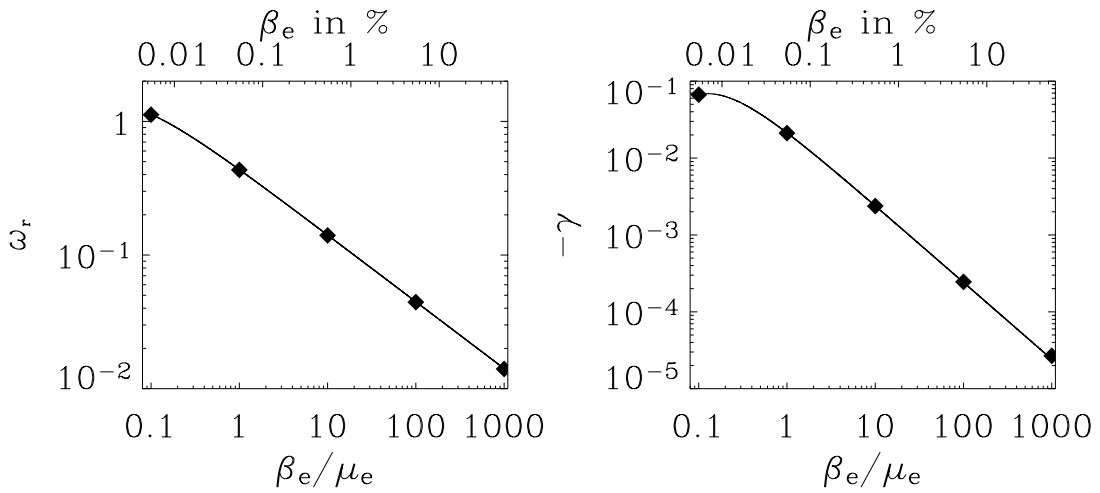
ches Absinken des relativen Fehlers auf weniger als 1% ab  $N_{v_{\parallel}} = 30$ . Obwohl die Landauresonanz im Geschwindigkeitsraum wichtig für den Dämpfungsmechanismus ist, reichen relative wenige Punkte aus, um die Dämpfungsrate richtig wiederzugeben.

Die Auflösung im Ortsraum in paralleler Richtung wird durch einen Scan über  $N_z$  überprüft. Man erhält die Ergebnisse der Abb. 5.2. Wie erwartet fällt der Fehler proportional zu  $N_z^{-4}$  (dies eingezeichnete Linie) ab, bis er sich auf sehr niedrigem Niveau einpendelt. Für ein Verfahren vierter Ordnung erwartet man genau dieses Verhalten.

In Abb. 5.3 ist die reelle Frequenz und die Dämpfungsrate für verschiedene  $\beta_e$  dargestellt. Als Vergleich dient die numerische Lösung der Dispersionsrelation (4.14). Die Übereinstimmung ist sehr gut.

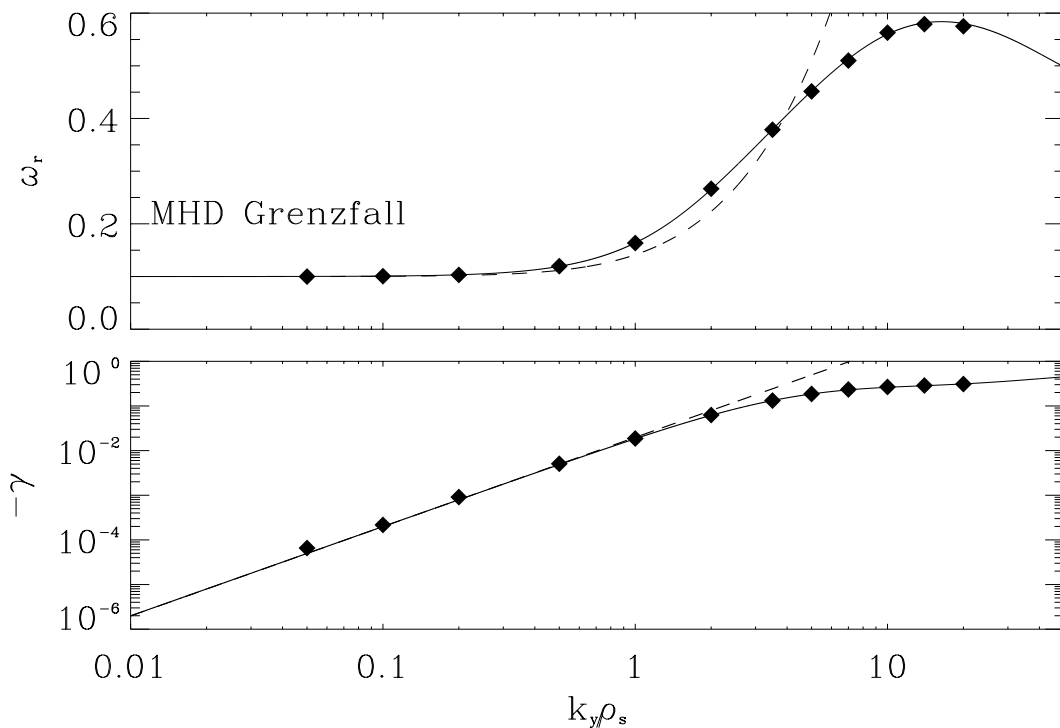


*Abbildung 5.2: Relativer Fehler der Dämpfungsrate als Funktion von  $N_z$ .*



*Abbildung 5.3: Frequenz und Dämpfungsrate von kinetischen Scher-Alfvénwellen.*

Ein zweiter Benchmark ist die Berechnung der Frequenz und Dämpfungsrate für einen weiten Bereich von  $k_y \rho_s$ . Hier ist eine korrekte Behandlung der Alfvénwellen notwendig, da in nichtlinearen Turbulenzsimulationen ein breites Band an Wellenlängen zur Dynamik beiträgt. In Abb. 5.4 ist der Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Dispersionsrelation dargestellt und zeigt wieder eine sehr gute Übereinstimmung, sowohl im MHD Grenzfall bei kleinen  $k_y$ , also auch im kleinskaligen Grenzfall bei großen  $k_y$ . In der Abbildung sind gestrichelt noch die Ergebnisse der driftkinetischen Dispersionsrelation eingezeichnet, in der die FLR-Effekte fehlen. Bei kleinen Skalen führt diese Dispersionsrelation erwartungsgemäß zu Abweichungen.



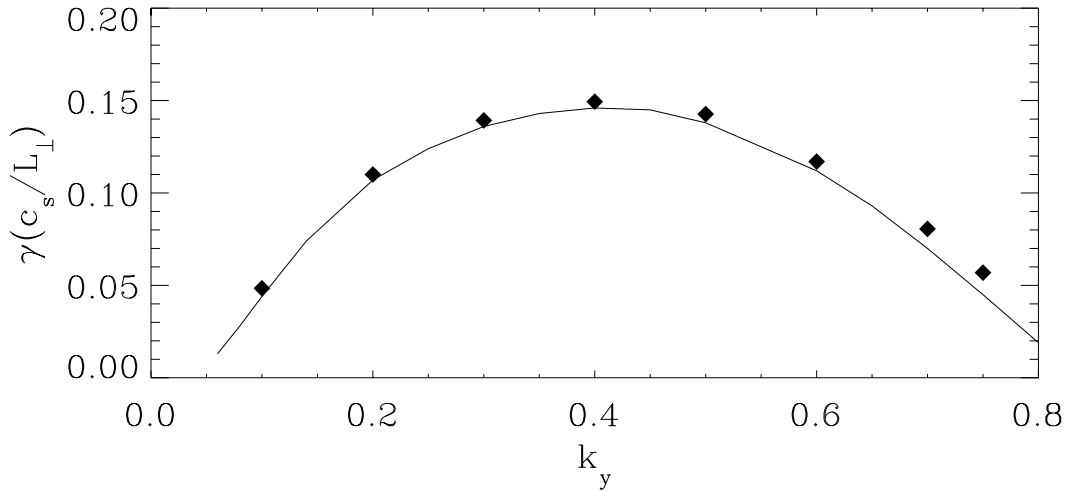
**Abbildung 5.4:** Frequenz und Dämpfungsrate von kinetischen Scher-Alfvénwellen für verschiedene  $k_y$ .

Wir konnten also zeigen, dass der überarbeitete GENE-Code kinetische Scher-Alfvénwellen gut wiedergibt. Weiter wurde gezeigt, dass in der parallelen Geschwindigkeitsrichtung ca. 30 Punkte genügen, um Konvergenz zu erreichen.

### 5.1.2 Adiabatische ITG-Moden

Bei adiabatischen ITG-Moden rechnen wir mit nur einer Spezies, den Ionen, die Elektronen werden als adiabatisch angenommen. Als weitere Parameter wählen

wir  $N_x = N_y = 8$ ,  $N_z = 32$ ,  $N_{v_{\parallel}} = 41$ ,  $N_{\mu} = 8$ ,  $R/L_n = 3.0$ ,  $R/L_{Te} = R/L_{Ti} = 9.0$ ,  $\hat{s} = 1.0$ ,  $q = 2.0$  und  $T_e = T_i$ . Außerdem ist  $\epsilon_t = 0$ , so dass keine gefangenen Teilchen auftreten. Es wird immer mit einer Box gerechnet, die gerade so groß ist, dass die Grundschiwingung dem gesuchten  $k_y$  entspricht. Diese Mode wird in  $y$ -Richtung initialisiert, in  $x$ -Richtung wird die Mode als konstant angenommen, es gilt also  $k_x = 0$ . Auch in paralleler Richtung beginnt die Rechnung mit einer Grundschiwingung. Die Ergebnisse sind dann in Abb. 5.5 dargestellt.



**Abbildung 5.5:** Anwachsraten für adiabatische ITG Moden, berechnet mit GENE (Symbole) und GS2 (Linie).

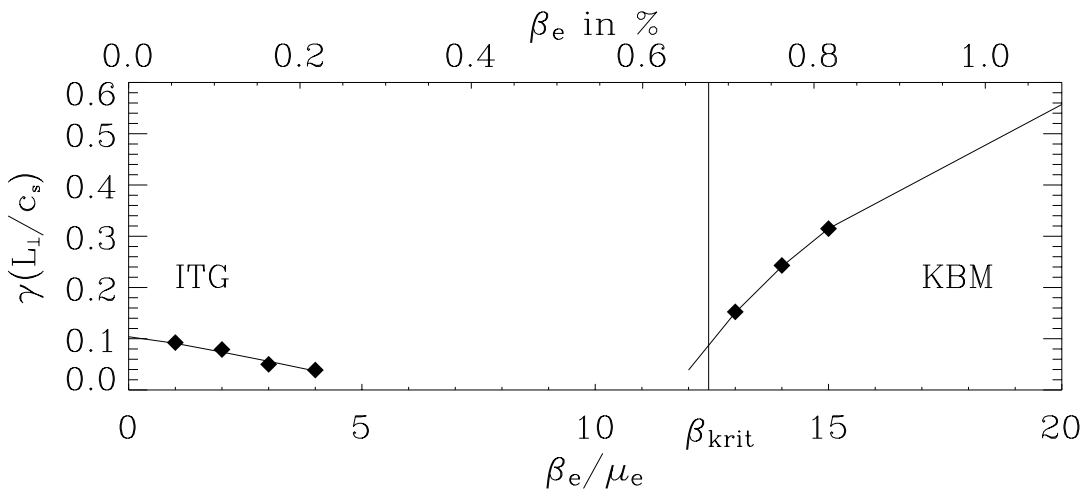
Die beiden Codes ergeben dem Verlauf nach eine gute Übereinstimmung, GENE hat allerdings immer eine etwas größere Anwachsratenrate als GS2. Allerdings sollte man diesen minimalen Unterschied nicht überbewerten, da zum einen beide Codes einige numerische Parameter haben, die das Ergebnis beeinflussen (für den GENE Code wurden Konvergenztests gemacht, so dass hier der Einfluss der numerischen Parameter ausgeschaltet ist, beim GS2 Code ist es wegen mangelnder Dokumentation schwierig, alle Parameter zu untersuchen), zum anderen ist für die weiteren Untersuchungen, wie Transport oder Struktur und Charakteristik der Turbulenz, der absolute Wert der Anwachsratenrate zweitrangig, es interessiert mehr der Verlauf der Kurve für niedere  $k_y$ , da in diesem Bereich der meiste Transport stattfindet. Und in diesem Bereich finden wir eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

### 5.1.3 Elektromagnetische ITG-Moden

Den nächsten Schritt in der Komplexität erreicht man, wenn man die Elektronen selbst als Spezies, die der gyrokinetischen Vlasovgleichung (2.35) unterliegen,

behandelt. Damit ist es auch möglich elektromagnetisch zu rechnen.

Die Parameter waren bei diesen Rechnungen  $N_x = N_y = N_z = 32$ ,  $N_{v_{\parallel}} = 41$ ,  $N_{\mu} = 8$ ,  $R/L_n = 2.2$ ,  $R/L_{Te} = R/L_{Ti} = 6.9$ ,  $\hat{s} = 0.8$ ,  $q = 1.4$ ,  $\mu_e = 1/1836$ ,  $T_e = T_i$ ,  $\epsilon_t = 0$ . Es wurde nun  $\beta_e$  variiert, allerdings ohne das  $\alpha$  aus der MHD mitzuverändern, welches Null gesetzt wurde. Alle Berechnungen werden für  $k_y \rho_s = 0.3$  durchgeführt. Dieses  $k_y$  entspricht ungefähr der größten Anwachsrate. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.6 dargestellt.



**Abbildung 5.6:** Lineare Anwachsrate für elektromagnetische toroidale ITG-Moden, berechnet mit GENE (Symbole) und GS2 (Linie) bei Variation von  $\beta_e$ .

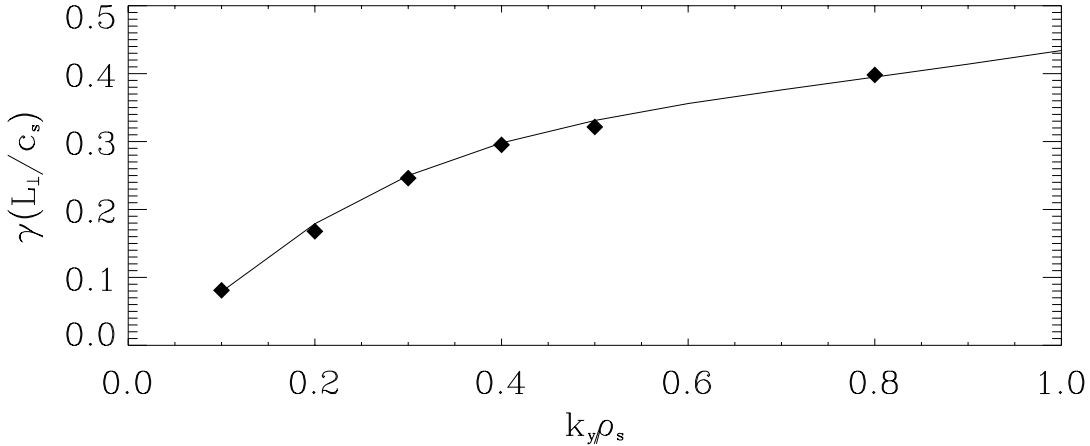
Im Diagramm sieht man deutlich den ITG Zweig bei kleinen  $\beta_e$ , und das Einsetzen der kinetischen Ballooning Mode (KBM) ab ungefähr  $\beta_e = 0.6\%$ . Die ideale MHD gibt als kritisches  $\beta_e$  einen Wert von  $0.677\%$  vor. Wie man sieht setzt die gyrokinetische Ballooning Mode schon ein wenig früher ein. Die Übereinstimmung zwischen den beiden Codes ist überzeugend, sodass man auch für diese Moden den Ergebnissen des GENE Codes Glauben schenken kann.

Wir konnten auch für elektromagnetische ITG-Moden zeigen, dass der überarbeitete GENE-Code richtige Ergebnisse liefert. Somit können die nichtlinearen Simulationen in Abschnitt 7.1 durchgeführt werden.

### 5.1.4 TE-Moden

Nun muß noch überprüft werden, ob unsere Behandlung der gefangenen Teilchen zu den richtigen Ergebnissen führt. Es wird nun also der Term für die gefangenen Teilchen angeschaltet, indem  $\epsilon_t = 0.18$  gesetzt wird. Um als erstes „reine“ TE-Moden zu erhalten, wird der Ionentemperatur-Gradient auf Null gesetzt, um

ITG Moden auszuschalten. Die restlichen Parameter sind dieselben wie in Abschnitt 5.1.3, wobei wieder alle Läufe elektrostatisch durchgeführt werden. Die Ergebnisse kann man der Abb. 5.7 entnehmen. Dass die Anwachsraten für große



**Abbildung 5.7:** Lineare Anwachsraten für TEM, berechnet mit GENE (Symbole) und GS2 (Linie) bei Variation von  $k_y$ .

$k_y$  nicht wieder abfallen, liegt daran, dass bei den gewählten Parametern, in diesem Bereich schon die vom Elektronentemperatur-Gradienten (ETG) getriebenen Moden einsetzen, die ihr Maximum zwar erst bei sehr viel höheren  $k_y$  haben, deren untere  $k_y$ -Schwelle allerdings schon im Bereich der Variation von  $k_y$  in der Abbildung liegt.

Die von uns getroffene Wahl der unabhängigen Variablen und die damit verbundene etwas ungewöhnliche Behandlung der gefangenen Teilchen liefert die richtigen Ergebnisse, wie man aus der Abbildung ersehen kann.

### 5.1.5 Lineare Dämpfung der zonal flows

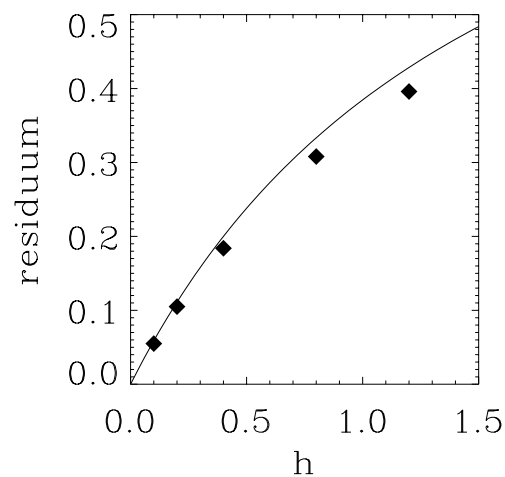
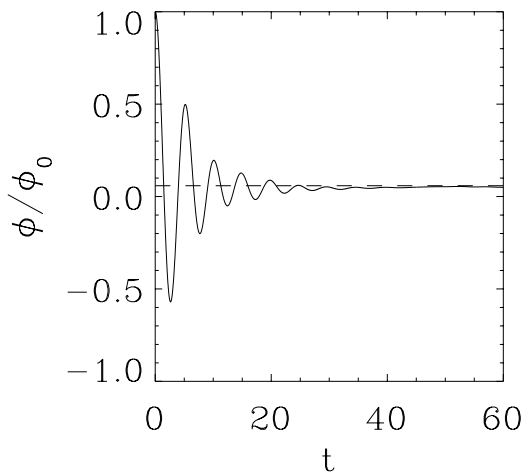
Die Turbulenz kann im Laufe der Simulation starke Scherströmungen aufbauen, die wiederum die Wirbel, die stark zum Transport beitragen, zerreißen. Die Stärke der sogenannten zonal flows ist somit wichtig für das Sättigungslevel der Turbulenz und den radialen Transport (Hasegawa & Wakatani, 1987; Hammett *et al.*, 1993). Die zonal flows unterliegen aber selbst einer partiellen linearen Dämpfung, wie Rosenbluth und Hinton (Hinton & Rosenbluth, 1999) gezeigt haben. Ob der GENE Code diese Dämpfung der rein poloidalen Störungen und das Residualniveau nach der Dämpfung richtig wiedergibt, soll hier untersucht werden. Dazu werden lineare Simulationen durchgeführt und als Startbedingung eine Mode in radialer Richtung initialisiert und deren zeitliche Entwicklung beobachtet.



In Abb. 5.8 wird der Verlauf der Fourierkomponente der Grundschiwingung (die auch initialisiert wurde) dargestellt. Wie man sieht, wird die Mode gedämpft und schwingt sich auf ein Residualniveau ein. Für dieses Niveau geben Rosenbluth und Hinton die Formel

$$A_R = \frac{1}{1 + 1.6/h} \quad \text{mit} \quad h = \frac{\sqrt{\epsilon_t}}{q^2}$$

an, welches für den gezeigten Fall gestrichelt eingezeichnet ist. In Abb. 5.9 ist diese Formel (durchgezogenen Linie) und unsere Simulationsergebnisse als Punkte aufgetragen. Die Ergebnisse stimmen gut überein, so dass die lineare Dämpfung der zonal flows von GENE richtig berücksichtigt wird.



**Abbildung 5.8:** Grundschiwingung von  $\Phi$  in radialer Richtung im zeitlichen Verlauf

**Abbildung 5.9:** Residualniveau über dem  $h$ -Parameter von Rosenbluth und Hinton

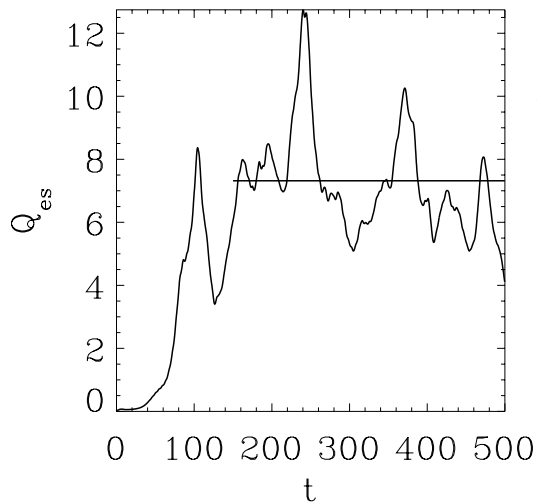
## 5.2 Nichtlinearer Benchmark

Nachdem nun die Funktionsweise des Codes im Linearen als richtig bestätigt wurde (alle linearen Ergebnisse stimmen mit den Referenzwerten von GS2 gut überein), kann man nun die nichtlinearen Turbulenzläufe angehen, die der Inhalt dieser Arbeit sind.

Doch zuerst wird noch der einzige nichtlineare Benchmark gerechnet, über den Einigkeit herrscht, der Cyclone Standardfall (Dimitis *et al.*, 2000). Dieser hat als Parameter

$$\frac{R}{L_n} = 2.22, \quad \frac{R}{L_{Te}} = \frac{R}{L_{Ti}} = 6.92, \quad \hat{s} = 0.796, \quad q = 1.4, \quad \epsilon_t = 0.18, \quad T_e = T_i$$

Als Ergebnis findet man in (Candy *et al.*, 2004) den Wert  $Q_i = 7.2$  für den Wärmefluss mit den Codes GYRO und GS2 und  $Q_i = 7.4$  für den Code von Dimits (Dimits *et al.*, 2000). Mit dem GENE Code erhalten wir die Zeitspur in Abb. 5.10 und als Mittelwert  $Q_i = 7.3$ . Dieser Wert liegt zwischen den beiden oben genannten Werten.



**Abbildung 5.10:** Zeitspur des Ionen-Wärmetransportes für Cyclone base case Parameter

**Zusammenfassung** In diesem Kapitel wurden lineare und nichtlineare Benchmarks durchgeführt. Dabei konnten wir in allen Fällen eine gute Übereinstimmung mit Referenzwerten feststellen.



# Kapitel 6

## Stoßfreie TEM-Turbulenz

Es wird allgemein vermutet, dass die von den gefangenen Elektronen getriebene Turbulenz (TEM-Turbulenz) den Hauptbeitrag zum Elektronen-Wärmetransport liefert. Diese Turbulenz zu untersuchen ist Gegenstand dieses Kapitels. Bisher war es üblich, über die „Bounce“-Bewegung der gefangenen Elektronen zu mitteln und die freien Elektronen adiabatisch zu behandeln (Sydora *et al.*, 1996; Parker *et al.*, 1993; Dimits *et al.*, 1996). (Beer & Hammett, 1996) verwendeten in ihren Gyrofluid-Rechnungen immer noch adiabatische freie Elektronen, hatten aber für die gefangenen Elektronen bereits ein besseres Modell. Erst in letzter Zeit wurden dann von (Parker *et al.*, 2004) gyrokinetische PIC-Rechnungen („particle in cell“) und von (Candy & Waltz, 2002) gyrokinetische Vlasov-Rechnungen mit nichtadiabatischen freien Elektronen und kinetisch behandelten gefangenen Elektronen durchgeführt. Auch wir behandeln in diesem Kapitel die Elektronen gyrokinetisch. Die oben genannten Untersuchungen behandelten meist TE- und ITG-Moden als Antriebe für die Turbulenz gemeinsam. Hier wird nun erstmals reine TEM-Turbulenz systematisch untersucht. Auch experimentell kann man ein Regime erreichen, in dem fast ausschließlich die TEM-Turbulenz angeregt ist, indem man ausschließlich die Elektronen stark heizt (Ryter *et al.*, 2003).

Mit TEM-Turbulenz bezeichnen wir ein turbulentes System, das als einzigen Antrieb TE-Moden hat. Um das zu erreichen, wird der Antrieb der ITG-Moden, also der Iontemperatur-Gradient, auf Null gesetzt. Um diese reine TEM-Turbulenz zu untersuchen, gehen wir von folgendem Standardparametersatz aus:

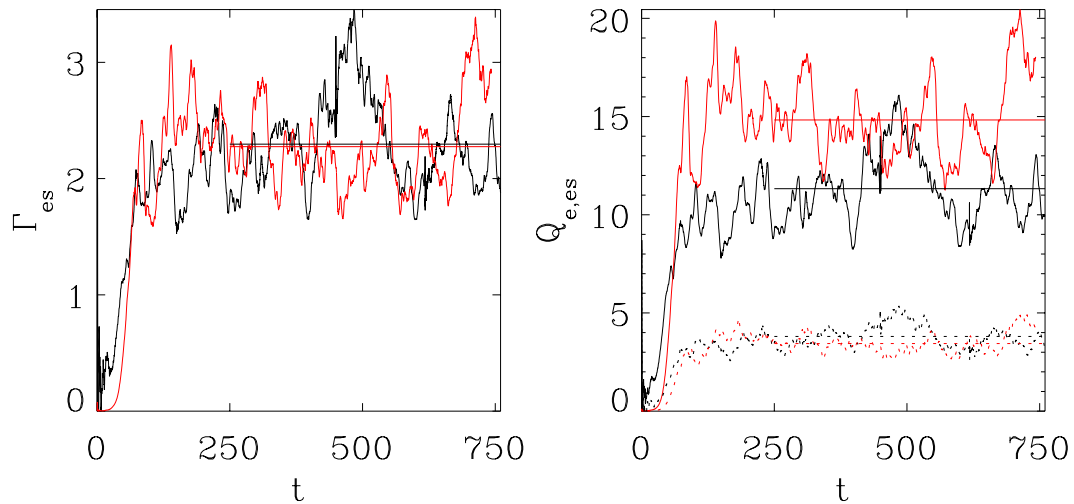
$$\begin{aligned} \frac{R}{L_n} = 3 & \quad \frac{R}{L_{Te}} = 6 & \quad \frac{R}{L_{Ti}} = 0 & \quad \frac{r}{R} = \epsilon_t = 0.16 \\ q = 1.4 & \quad \beta_e = 0.001 & \quad \mu_e = \frac{m_e}{m_i} = \frac{1}{400} & \quad \hat{s} = 0.8 & \quad \frac{T_e}{T_i} = 3. \end{aligned}$$

Wir variieren verschiedene Parameter und analysieren die Veränderungen. Es ergibt sich für das angegebene  $\beta_e$  ein Plasma mit einer Teilchendichte von  $n_0 = 2 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ , einer Elektronentemperatur von  $T_{e0} = 1.2 \text{ keV}$  und einem Magnetfeld

der Stärke  $B_0 = 2.3 \text{ T}$ . Damit hat man einen Gyroradius  $\rho_s = 1.54 \text{ mm}$  und daraus folgt bei einer typischen Gradientenlänge von  $L_\perp = 50 \text{ cm}$  das Verhältnis  $\rho_s/L_\perp \approx 3 \cdot 10^{-3}$ , welches ja in bei der Herleitung der Gleichungen als Kleinheitsparameter diente.

**Reduziertes Massenverhältnis** An obigem Parametersatz ist die Wahl des Massenverhältnisses  $\mu_e$  von 1:400 unphysikalisch, die numerische Behandlung wird dadurch aber einfacher, da selbst in nichtlinearen Rechnungen der Zeitschritt im Allgemeinen durch die parallele Elektronendynamik bestimmt ist. Nimmt man nun ein Massenverhältnis von 1:400 an, so sind die Elektronen nur 20 mal schneller als die Ionen, anstatt ca. 43 mal schneller wie im Wasserstoff-Fall mit  $\mu_e = 1/1836$ . Man kann somit den linearen Zeitschritt im reduzierten Fall doppelt so groß wählen.

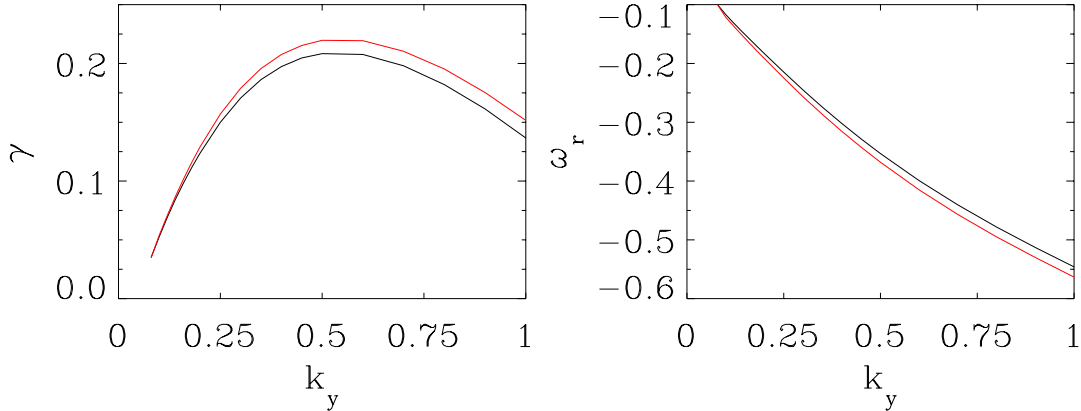
Um zu zeigen, dass sich die zugrunde liegende Physik qualitativ nicht ändert, wurde der Standardparametersatz auch mit dem richtigen Wasserstoffmassenverhältnis gerechnet. Die Zeitspuren der beiden Simulationen sind in Abb. 6.1 dargestellt. Der Teilchenfluss und der Ionen-Wärmefluss stimmen hierbei recht



**Abbildung 6.1:** Standard-TEM-Turbulenz mit Massenverhältnis 1:400 (rot) und 1:1836 (schwarz). Dargestellt ist links der elektrostatische Teilchenfluss und rechts der elektrostatische Wärmefluss der Elektronen (durchgezogen), sowie der elektrostatische Wärmefluss der Ionen (gepunktet). Die Mittelwerte über die stationäre Phase der Turbulenz sind als gerade Linien eingezeichnet.

gut überein, während für den Elektronen-Wärmefluss ein Unterschied ersichtlich ist. So sinkt der Elektronen-Wärmefluss von 15 bei unserem reduzierten Massenverhältnis auf  $\sim 11$  mit dem Wasserstoffmassenverhältnis.

Vergleicht man die linearen Moden für die beiden Massenverhältnisse, so erhält man nur einen kleinen Unterschied, wie man im  $k_y$  Spektrum der linearen Anwachsrate sehen kann (Abb. 6.2).



**Abbildung 6.2:** Lineare Anwachsrate der TEM bei Massenverhältnis 1:400 (rot) und 1:1836 (schwarz)

Es treten somit keine gravierenden Veränderungen durch die Wahl des vereinfachten Massenverhältnisses auf, weshalb wir es in diesem Kapitel überwiegend verwenden. Einzig bei der Untersuchung der  $T_e$ -Profilsteifheit in Abschnitt 6.4 wird neben dem reduzierten auch das Wasserstoff-Massenverhältnis verwendet, da der kritische Gradient vom Massenverhältnis abhängt.

**Boxgrößen** Für die Untersuchungen in diesem Kapitel wurde nahezu ausschließlich eine Simulationsbox mit einer Ausdehnung in radialer Richtung von  $152.8\rho_s$  verwendet. Falls wir eine andere Box verwenden, wird es gesondert erwähnt. Für den Standardparametersatz wurde noch mit einer radialen Box von  $101.9\rho_s$  gerechnet. Die Ergebnisse im Transport stimmen weitgehend mit den Ergebnissen der Rechnung mit der großen Box überein. Die Ausdehnung in  $y$ -Richtung beträgt immer  $256\rho_s$ . Das bedeutet, dass das kleinste  $k_y$ , das wir berücksichtigen, einen Wert von 0.0245 hat. Wir erwarten, dass dies ausreicht, da der stärkste Transport bei  $k_y \sim 0.1$  stattfindet. Auch die Moden mit den stärksten Anwachsrate haben ein  $k_y$ , das deutlich über unserem minimalen liegt. Diese Annahme wird auch im Nachhinein durch die Simulationsergebnisse bestätigt. Die Ausdehnung in paralleler Richtung ist fest auf  $2\pi$  vorgegeben, wobei der Nullpunkt in der Mitte liegt und die Außenseite des Torus, die „outboard midplane“, also die Stelle mit dem kleinsten Magnetfeld bezeichnet. Bei  $\pm\pi$  hat man das maximale Gleichgewichtsmagnetfeld.

**Gitter** In jeder senkrechten Richtung werden 128 Punkte verwendet, in paralleler Richtung genügen 16 Punkte. Dies wurde in einem Konvergenztest überprüft. Die Rechnung für die Standardparameter mit 32 parallelen Punkten<sup>1</sup> führte zu einem Teilchentransport von  $\Gamma_{es} = 3.0$ , einem Elektronen-Wärmetransport von  $Q_{e,es} = 18.5$  und einem Ionen-Wärmetransport von  $Q_{i,es} = 4.9$ . Die Veränderung zur Rechnung mit 16 Punkten ist klein, der Aufwand ist mit 16 Punkten aber nur ein Viertel des Aufwands mit 32 Punkten.<sup>2</sup> Der Geschwindigkeitsraum hat wie bei allen Läufen in dieser Arbeit  $N_{v_{\parallel}} = 41$  und  $N_{\mu} = 8$ . Mit diesen Werten erhält man als Courantlimit eine Beschränkung für den Zeitschritt von 0.019, welche durch die Paralleldynamik gegeben ist. Da diese Schranke aus den in Abschnitt 3.2.2 angeführten Gründen nur eine Abschätzung darstellt, und man auch tatsächlich bei Verwendung von genau dieser Schranke als linearen Zeitschritt teilweise noch numerische Instabilitäten erhält, rechnen wir immer mit einer oberen Zeitschrittgrenze von 0.015.

**Einheiten** Die Einheiten, in denen die verwendeten Größen angegeben werden, wurden größtenteils schon bei der Normierung der Gleichungen in Abschnitt 2.3 eingeführt. So wird die Zeit in Einheiten von  $L_{\perp}/c_s$  angegeben. Alle Gradienten sind dimensionslose Größen. Die Transportflüsse werden gemessen in Einheiten von

$$\text{Teilchenfluss : } D_{\text{GB}} \frac{n_0}{L_{\perp}} \qquad \text{Wärmeffluss : } D_{\text{GB}} \frac{p_{j0}}{L_{\perp}}$$

Wobei die gyro-Bohm Diffusivität

$$D_{\text{GB}} = \frac{cT_{e0}}{eB_0} \frac{\rho_s}{L_{\perp}} = c_s \rho_s \frac{\rho_s}{L_{\perp}}$$

gegeben ist. Wie diese Einheiten zustande kommen und wie die Transportgrößen definiert sind, ist in Anhang A dargestellt.

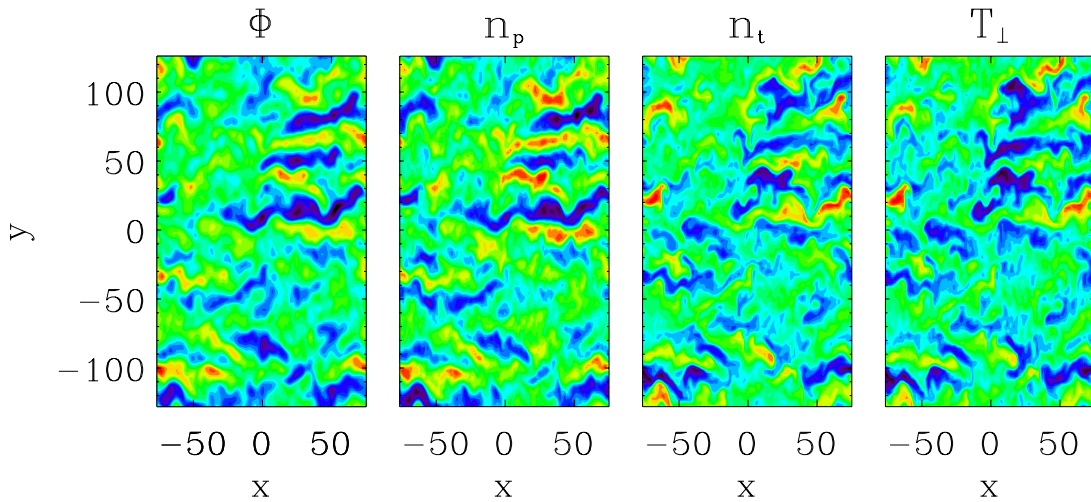
## 6.1 Grundeigenschaften der TEM-Turbulenz

Einen ersten Blick auf die TEM-Turbulenz kann man anhand der Konturplots verschiedener Größen werfen. Für den Standardfall sind das elektrostatische Potential, die Dichten der gefangenen und freien Elektronen, sowie die senkrechte Temperatur der Elektronen in Abb. 6.3 dargestellt. Wie man sieht, bilden sich in der turbulenten Phase Wirbel aus, die in radialer Richtung elongiert sind („Streamer“). Bei der Wahl der Simulationsbox ist darauf zu achten, dass die radiale

---

<sup>1</sup>Diese Rechnung wurde mit einer kleinen radialen Box von  $L_x = 101.9\rho_s$  durchgeführt.

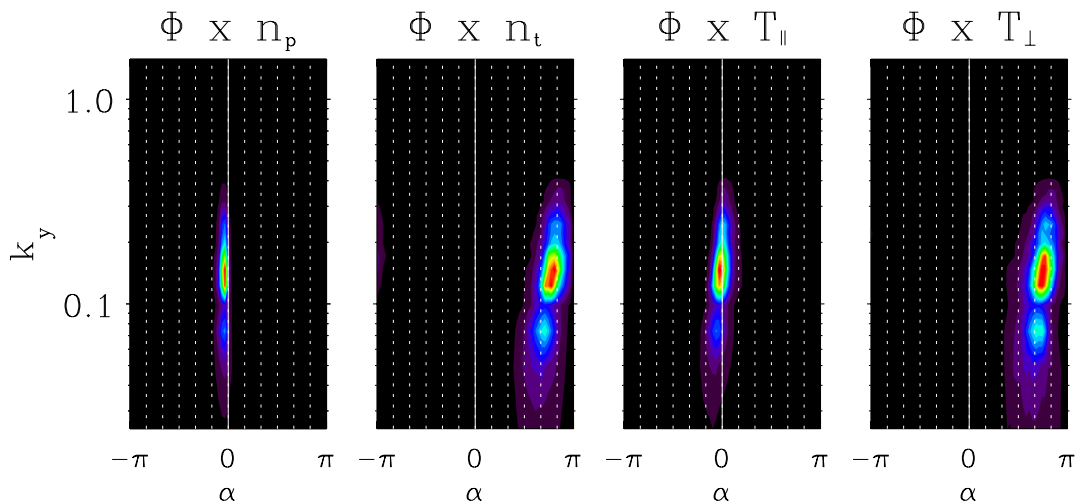
<sup>2</sup>Ein Faktor 2 kommt von der Anzahl der Punkte, ein weiterer von der Restriktion des Zeitschritts.



**Abbildung 6.3:** Konturplots verschiedener Größen für den Standardfall

Ausdehnung der Streamer kleiner als die Boxbreite ist, um den Einfluss der radialen periodischen Randbedingungen auszuschalten.

In  $y$ -Richtung sieht man wellenartige Strukturen. Weiter fällt die Ähnlichkeit zwischen elektrostatischem Potential  $\Phi$  und der Dichte der freien Elektronen  $n_p$  ins Auge. Man kann daraus auf ein adiabatisches Verhalten der freien Elektronen schließen. Dies zeigt außerdem auch die Abb. 6.4, in der die Phasenverschiebungen zwischen  $\Phi$  und der Dichte der gefangenen und freien Elektronen, sowie der senkrechten und parallelen Elektronentemperatur dargestellt sind. Man erkennt



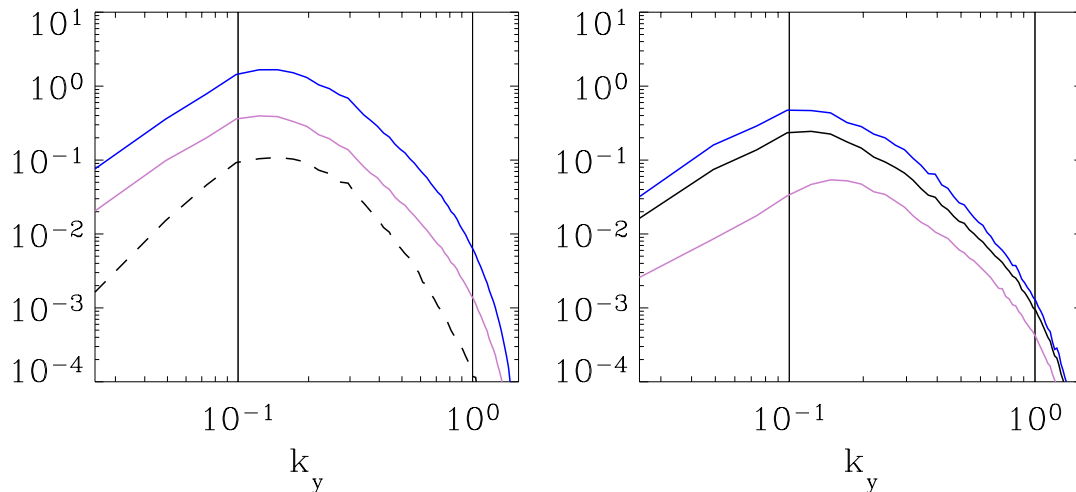
**Abbildung 6.4:** Phasenverschiebung verschiedener Größen bzgl.  $\Phi$



einen Phasenwinkel von nahezu Null zwischen  $\Phi$  und  $n_p$ . Die freien Elektronen tragen also sehr wenig zum Teilchentransport bei.

Ganz anders die gefangenen Elektronen. Der Phasenwinkel zwischen  $\Phi$  und  $n_t$  liegt für den Hauptpeak ungefähr bei  $3\pi/4$ . Schon aus den Konturplots kann man ersehen, dass  $n_t$  und  $T_\perp$  sehr ähnliche Konturen haben. Das bestätigt sich auch im Phasenwinkeldiagramm. Auch  $T_\perp$  ist um  $3\pi/4$  zum elektrostatischen Potential verschoben, wogegen  $T_\parallel$  fast keine Phasendifferenz zu  $\Phi$  zeigt. Die gefangenen Teilchen haben eine kleine parallele Geschwindigkeit, die freien Teilchen haben dagegen eher eine kleine senkrechte Geschwindigkeit. Damit erklärt sich die hohe Korrelation zwischen  $n_t$  und  $T_\perp$ . Die gefangenen Teilchen tragen hauptsächlich zur senkrechten Temperatur bei, die freien zur parallelen Temperatur.

Aus dem Phasendiagramm erwartet man, dass der Teilchentransport von den gefangenen Elektronen getragen wird, der Wärmetransport von der senkrechten Elektronentemperatur. Die Ionen spielen eine eher passive Rolle. In Abb. 6.5 sind die Spektren der Teilchen- und Wärmeflüsse der Elektronen und Ionen für die Standardparameter in einem doppeltlogarithmischen Diagramm dargestellt.<sup>3</sup> In



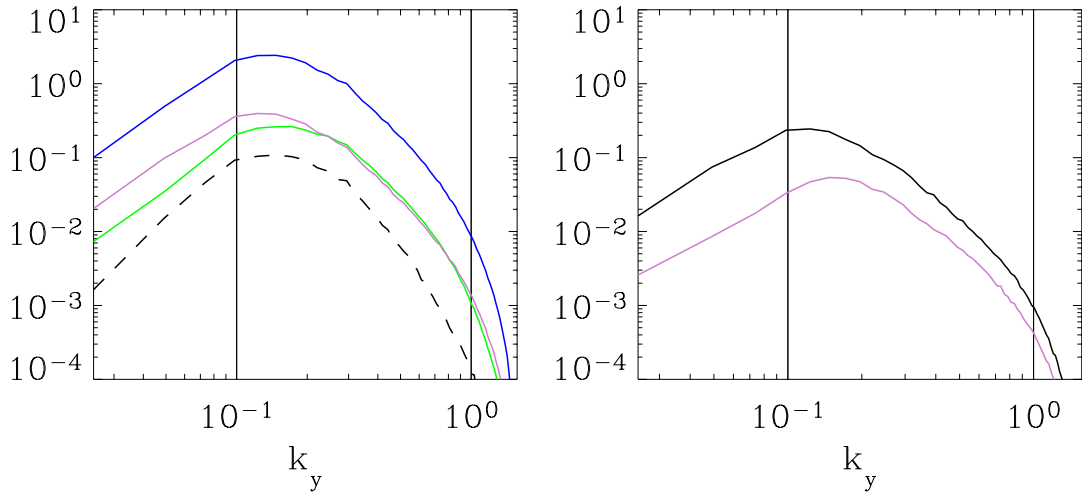
**Abbildung 6.5:** Fluss-Spektren der Elektronen (links) und der Ionen (rechts). Dargestellt ist  $\Gamma_{es,p}$  (schwarz),  $\Gamma_{es,t}$  (violett),  $Q_{es}$  (blau).

diesem ist an der schwarzen gestrichelten Linie erkennbar, dass die freien Elektronen einen Einwärts-Teilchentransport (Teilchenpinch) verursachen, der allerdings vom Auswärts-Teilchentransport der gefangenen Elektronen – die violette Linie – überkompensiert wird, so dass in der Summe ein Auswärtstransport der Teilchen erfolgt. Der Teilchentransport der Ionen entspricht dem der Elektronen (ambipolarer Transport). Auch schon aus dem Phasendiagramm Abb. 6.4 kann man

<sup>3</sup>Eine Bemerkung zur Darstellung: Um auch negative Werte der Größen im doppeltlogarithmischen Plot darstellen zu können, werden diese an der Null gespiegelt und gestrichelt eingezeichnet.

eine leichte negative Phasenverschiebung der freien Dichte zum Potential ablesen. Da eine negative Phasenverschiebung zu einem Einwärtstransport führt, ergibt sich ein konsistentes Bild. Das bisher übliche Modell der freien Elektronen als adiabatisch kann dieses Ergebnis nicht liefern. Um einen Teilchenpinch der freien Elektronen zu beobachten, ist es unumgänglich, diese nichtadiabatisch zu behandeln.

Um den Ursachen des Transportes auf die Spur zu kommen, muss man die zugrundeliegende Turbulenz untersuchen. Dazu hilft ein Blick auf die Antriebssterme, die in Abb. 6.6 als Spektrum dargestellt sind. Als Hauptantrieb des Elek-

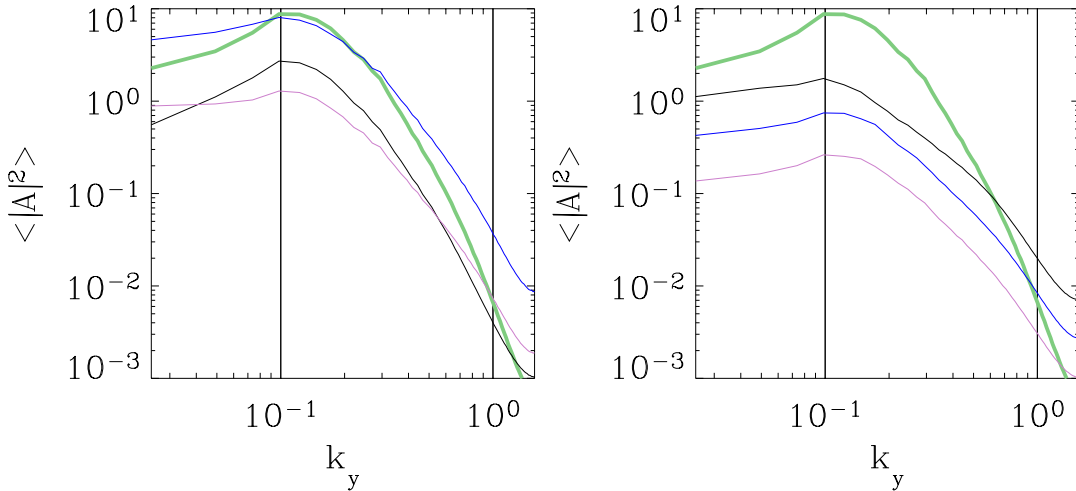


**Abbildung 6.6:** Quellen Spektrum für TEM-Turbulenz mit den Standardparametern, für Elektronen (links) und Ionen (rechts). Dargestellt sind die Dichteantriebssterme  $\Gamma_{n,p}$  (schwarz),  $\Gamma_{n,t}$  (violett),  $\omega_t \langle T_{\perp} v_x \rangle$  (blau) und  $\omega_t \langle T_{\parallel} v_x \rangle / 2$  (grün). (Zur Definition und Bedeutung der Größen siehe Anhang A und (Jenko & Scott, 1999a; Jenko & Scott, 1999b))

tronen-Wärmetransportes lässt sich leicht die Advektion der senkrechten Elektronentemperatur ausmachen. Sie dominiert alle anderen Antriebe bei weitem.

Vergleicht man hier auch wieder die Antriebe der Ionendynamik mit denen der Elektronendynamik, so sieht man, dass die Ionen nur vom Dichtegradienten getrieben werden, was bei  $R/L_{Ti} = 0$  auch verständlich ist. Dieser Antrieb ist ungefähr eine Größenordnung kleiner als der vom Elektronentemperatur-Gradienten bestimmte. Der Peak der Spektren liegt bei Ionen und Elektronen bei  $k_y \sim 0.175 - 0.2$  und kennzeichnet die Skala des stärksten Antriebs.

Eine weitere Diagnostik stellt das Energiespektrum dar, wieder in Abhängigkeit der Wellenzahl  $k_y$ . In Abb. 6.7 wird für den Standardfall solch ein Energiespektrum gezeigt, und zwar für Elektronen im linken Diagramm, für die Ionen im rechten. Für kleine Skalen hat man die übliche Kaskade der zweidimensiona-

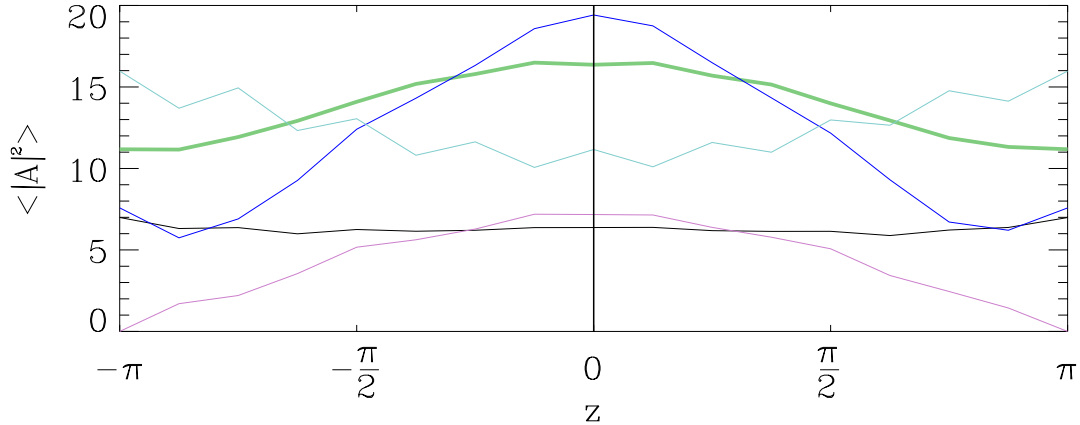


**Abbildung 6.7:** Energiespektrum von TEM-Turbulenz bei Standardparametern für Elektronen (links) und Ionen (rechts). Dargestellt sind die quadratischen Größen  $|\Phi|^2$  (grün),  $|n_t|^2$  (violett),  $|n_p|^2$  (schwarz) und  $|T_\perp|^2$  (blau), jeweils gemittelt über die  $x$  und  $z$  Koordinate.

len Turbulenz. Sie stellt im log-log Plot annähernd eine Gerade dar, was einem Potenzgesetz entspricht. Fittet man diese Funktion an die Daten, so bekommt man eine Beziehung von  $|\Phi|^2 \propto k_y^{-5.1}$ . An der Stelle, an der das Quellen/Senken Spektrum seinen Peak hat, knickt das Energiespektrum ab und wird flach. Dies ist die Skala des stärksten Antriebs. Für den Fall der TEM-Turbulenz ist der Antrieb durch die  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Advektion entlang des Hintergrund-Elektronentemperatur-Gradienten gegeben.

Bisher wurden alle Größen über die radiale und die parallele Richtung gemittelt und daraus das  $k_y$ -Spektrum berechnet. Um aber zu sehen, wie sich die Größen entlang der Feldlinien verhalten, kann man auch das gemittelte Quadrat über eine  $x - y$ -Ebene berechnen und das Ergebnis über der parallelen Koordinate auftragen. Das wurde in Abb. 6.8 für die Elektronen gemacht.

Was als erstes auffällt an dieser Grafik ist die Tatsache, dass es Größen gibt, die ihr maximales Fluktuationsniveau an der Außenseite (bei  $z = 0$ ) haben und andere, die es an der Innenseite (bei  $z = \pm\pi$ ) haben. Außerdem gibt es noch die Teilchendichte der freien Elektronen (schwarz), die überall ungefähr denselben Wert aufweist. Das ist verständlich, wenn man bedenkt, dass die freien Teilchen durch die Variation des Magnetfeldes nur wenig beeinflusst werden. Die Dichte der gefangenen Elektronen (violett) hat ihr Maximum bei  $z = 0$ . Da dort das Magnetfeld minimal ist, müssen im Mittel alle gefangenen Teilchen diesen Punkt passieren. Auch die senkrechte Temperaturen hat eine den gefangenen Teilchen ähnliche Struktur und ist bei  $z = 0$  maximal. Wir hatten ja schon weiter oben gesehen, dass hauptsächlich die gefangenen Elektronen zur senkrechten Temperatur



**Abbildung 6.8:** Struktur entlang der Feldlinien für  $|\Phi|^2$  (grün),  $|n_t|^2$  (violett),  $|n_p|^2$  (schwarz),  $|u_{\parallel}|^2$  (blaugrau) und  $|T_{\perp}|^2$  (blau), jeweils gemittelt über die beiden senkrechten Koordinaten.

beitragen.

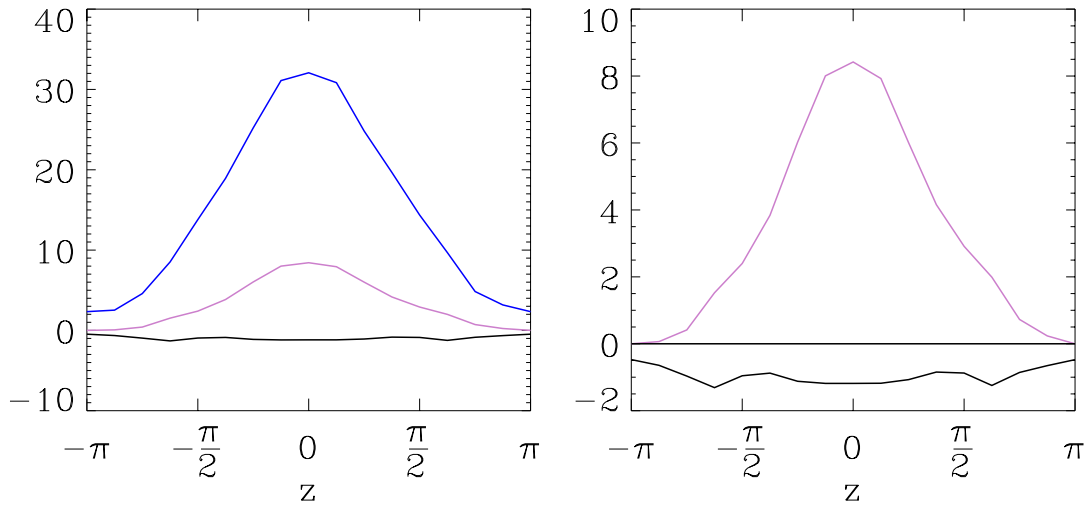
Für die parallele Geschwindigkeit des Elektronenplasmas erhält man dagegen ein Minimum um den Nullpunkt. Dies kann man erklären, wenn man bedenkt, dass nur die Elektronen nicht gefangen sind, deren parallele Geschwindigkeit groß ist. Da nun die parallele Elektronengeschwindigkeit als Moment der Teilchengeschwindigkeiten gewichtet mit der Verteilungsfunktion berechnet wird,

$$u_{\parallel} \propto \int v_{\parallel} f d^3v$$

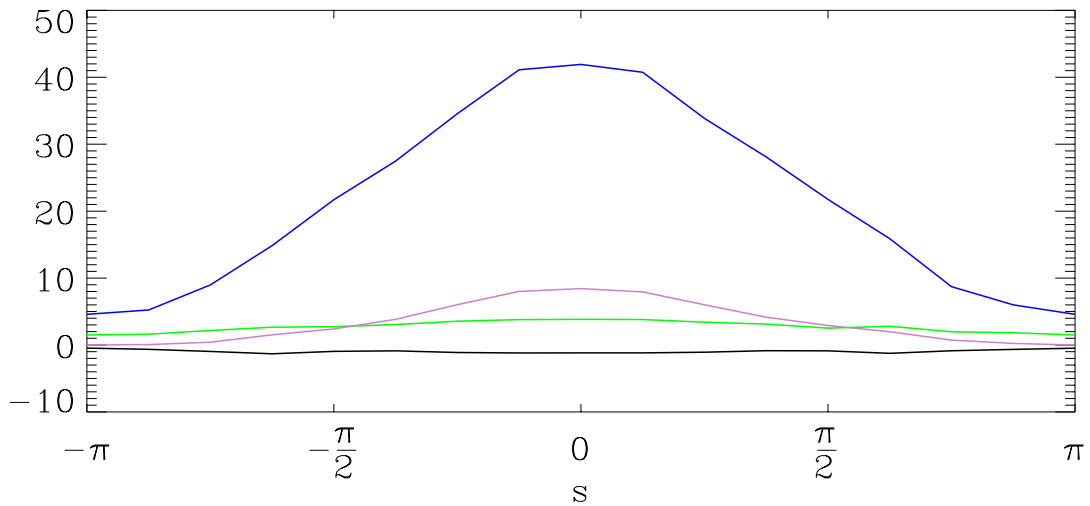
sinkt die Gesamtgeschwindigkeit um den Nullpunkt, wo die Teilchen mit geringer paralleler Geschwindigkeit stark vertreten sind.

Wo in der parallelen Richtung tritt nun der Transport auf und wo wird die Turbulenz getrieben? Hierauf bekommt man eine Antwort aus Abb. 6.9 und 6.10. Man erkennt in beiden Bildern ein stark ausgeprägtes Maximum auf der Torusaußenseite um  $z = 0$ , wie sie allgemein von krümmungsgetriebenen Ballooning-Moden her bekannt ist. Die Moden werden an der Außenseite am stärksten getrieben, was auch dort zum stärksten Transport führt. Der Grund hierfür liegt in der schlechten Krümmung an der Außenseite bei  $z = 0$ . Da die TE-Moden krümmungsgetrieben sind, treiben sie dort die Turbulenz am stärksten, was dann auch zum maximalen Transport an dieser Stelle führt. Außerdem halten sich die meisten gefangenen Elektronen an der Außenseite des Torus auf und sie sind es ja, die den größten Teil zum Teilchen- und Wärmetransport beitragen.

**Zonal flows** Von der durch ITG-Moden getriebenen Turbulenz weiß man, dass die Turbulenz selbst poloidale Scherströmungen („zonal flows“) erzeugt, die die



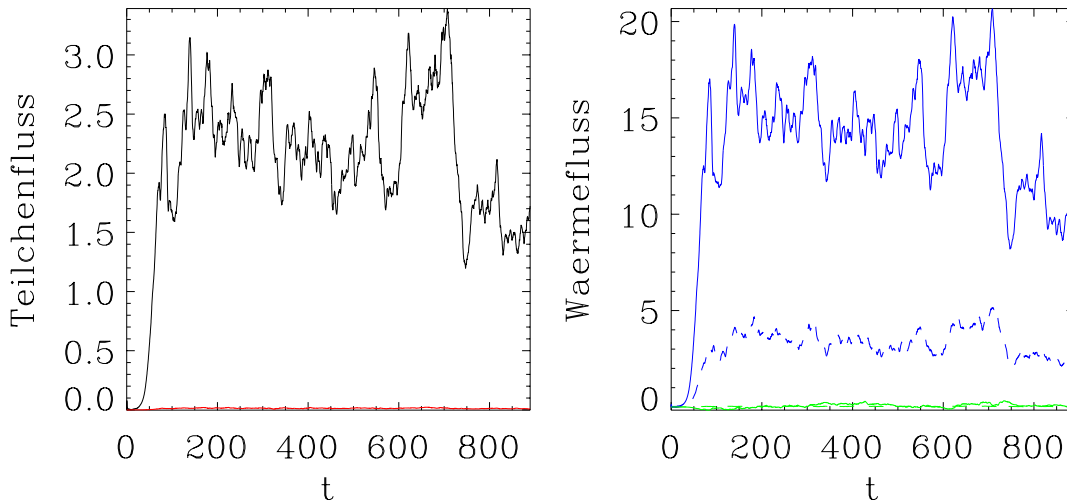
**Abbildung 6.9:** Paralleles Profil der Transportflüsse für Elektronen. Dargestellt sind  $Q_{es}$  (blau),  $\Gamma_{es,t}$  (violett) und  $\Gamma_{es,p}$  (schwarz). Das rechte Bild zeigt die Teilchenflüsse vergrößert.



**Abbildung 6.10:** Paralleles Profil der Antriebe der Elektronen. Dargestellt sind die Dichteantriebsterme für freie (schwarz) und gefangene (violett) Teilchen und die Terme  $\omega_t \langle T_{\perp} v_x \rangle$  (blau) und  $\omega_t \langle T_{\parallel} v_x \rangle / 2$  (grün).

Streamer zerreißen und das Transportniveau deutlich senken (Hasegawa & Wakatani, 1987; Hammett *et al.*, 1993; Lin *et al.*, 1998). Wie wichtig sind nun zonal flows für die TEM-Turbulenz?

In Abb. 6.11 ist der Zeitverlauf einer Simulation von TEM-Turbulenz dargestellt, bei der zum Zeitpunkt  $t = 600$  die zonale Komponente des elektrostatischen Potentials  $\Phi$  unterdrückt wurde. Man erkennt keine starke Änderung des



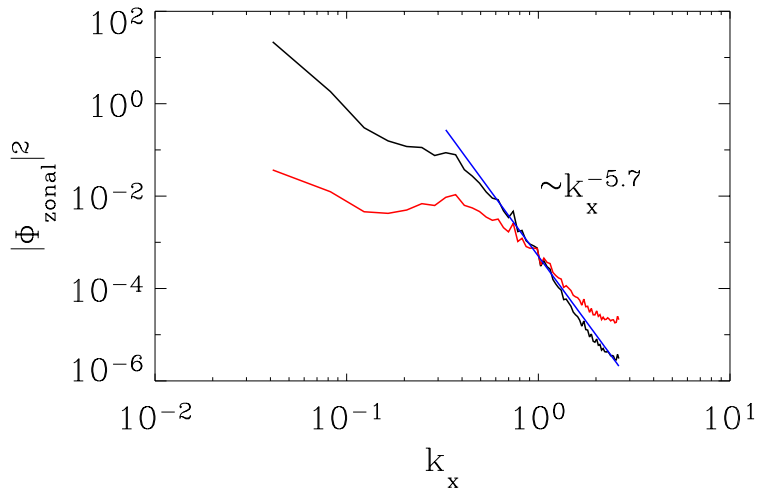
**Abbildung 6.11:** Zeitverlauf mit unterdrückten zonal flows ab  $t = 600$

Transportes, wie man es von der ITG-Turbulenz gewohnt ist. Vielmehr ist der Transport wenig beeinflusst von den zonal flows, er sinkt sogar ein wenig, wenn sie unterdrückt werden.

Abb. 6.12 zeigt das  $k_x$ -Spektrum der zonal flows. In Rot ist das  $k_x$ -Spektrum der Verscherungsrate  $\omega_E = dv_{Ey}/dx = d^2\Phi/dx^2$  dargestellt. Das Spektrum zeigt im doppeltlogarithmischen Diagramm ab  $k_x = 0.4$  ungefähr einen linearen Verlauf, hat also den Charakter eines Potenzgesetzes mit einem Exponenten von  $-5.7$ . Dieser Exponent entspricht ungefähr dem von  $|\Phi|^2$  über  $k_y$ . Summiert über alle  $k_x$  erhält man eine gesamte Verscherungsrate von  $\omega_E = 0.21$ . Diese Stärke ist mit der maximalen linearen Anwachsrate der zugrundeliegenden TE-Moden vergleichbar, was aber bedeutet, dass die zonal flows *keine dominante* Rolle bei der Sättigung der Turbulenz spielen. Dazu müsste  $\omega_E \gg \gamma^{\text{lin}}$  sein (Hahn *et al.*, 1999).

### Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden die grundlegenden Eigenschaften der TEM-Turbulenz vorgestellt. Dazu wurden verschiedene Diagnostiken verwendet, wie Transport, Energie und Quellspektren, aber auch Phasenkorrelationen zwischen verschiedenen Plasmagrößen. Auch parallele Profile wurden analysiert, wobei eine Lokali-



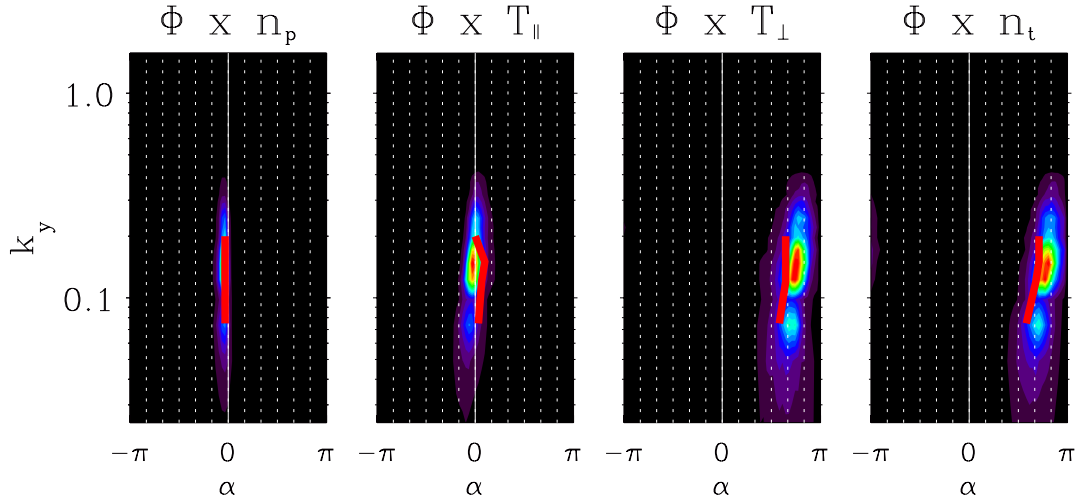
**Abbildung 6.12:**  
 $k_x$  Spektrum von zonal flows in TEM-Turbulenz. In Schwarz  $\langle \Phi_{\text{zonal}}^2 \rangle$ , in Rot  $\omega_E$ , in Blau ein linearer Fit.

sierung des Transportes auf der Außenseite des Torus festgestellt wurde („Ballooning“ Struktur). Es stellte sich weiter heraus, dass die freien Elektronen einwärts transportiert werden. Dieser Teilchentransport wird jedoch durch den stärkeren Auswärtstransport der gefangenen Elektronen überkompensiert. Weiter konnte gezeigt werden, dass die zonal flows keine Rolle bei der Sättigung der TEM-Turbulenz spielen.

## 6.2 Ein einfaches Modell für den Transport

Da sich ein wichtiger, rein nichtlinearer Mechanismus für den Transport als nicht dominant herausgestellt hat, versuchen wir in diesem Abschnitt, den Transport mit einem linearen Ansatz zu modellieren. Diesem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, dass es hauptsächlich die den linearen Moden zugeordneten Eigenschaften sind, die zum Transport führen. Solange die nichtlineare Dynamik zu einem großen Teil von der linearen Physik bestimmt wird, ergeben die quasilinear berechneten Flüsse ein gutes Ergebnis. Ein Indiz für die Anwendbarkeit von (quasi-) linearen Modellen für den nichtlinearen Transport sind die Phasenbeziehungen zwischen einzelnen Größen. In Abb. 6.4 wurden die nichtlinearen Phasen zwischen den wichtigsten Größen dargestellt. In Abb. 6.13 wurden in dasselbe Bild noch die linearen Phasen als rote Linien eingezeichnet. Man sieht deutlich, dass die linearen Phasen im Nichtlinearen recht gut erhalten bleiben, zumindest in dem Bereich, in dem der Transport am größten ist. Von daher kann man vermuten, dass das einfache lineare Modell dieses Abschnitts den turbulenten Transport in vielen Fällen richtig wiedergibt.

Mit dem Prandtl’schen Mischungswegmodell erhält man die einfachste Abschätzung für die Diffusivität. Hierzu nimmt man typische Zeit- und Längenskalen der Turbulenz und schätzt damit den Transport durch eine dimensionale



**Abbildung 6.13:** Lineare und nichtlineare Phasenwinkel

Betrachtung ab. Die Dimension der Diffusivität ist Länge<sup>2</sup>/Zeit und in Annahme einer typischen Zeitskala von  $\gamma$  und einer Längenskala von  $k_{\perp}$  kommt man damit auf die Abschätzung  $D = \gamma/k_{\perp}^2$ .

Eine ähnliche Überlegung führt auf dasselbe Ergebnis: Die lineare Mode hat eine intrinsische Zeitskala von  $\gamma^{-1}$ , die turbulente Dynamik von  $v_E k_{\perp}$ . Eine typische Geschwindigkeit ist also die  $E \times B$ -Driftgeschwindigkeit, eine typische räumliche Skala eine Wellenlänge. Die Sättigung tritt nun ein, wenn diese Zeitskalen ähnlich werden, da dann kein weiteres Anwachsen mehr möglich ist, ohne auch ein Anwachsen der Turbulenz nach sich zu ziehen. Damit kommt man zu der Abschätzung für eine fluktuierende Größe im saturierten turbulenten Zustand von

$$\gamma \sim \nabla_{\perp} \Phi k_{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{\text{sat}} \sim \frac{\gamma}{k_{\perp}^2}.$$

Für starke Turbulenz gilt weiter, dass die Diffusivität proportional zum saturierten Potential ist (Itoh *et al.*, 1999, Seite 50). Somit hat man

$$D \propto \frac{\gamma}{k_{\perp}^2}$$

Für  $k_{\perp}^2$  hat man in der verwendeten Geometrie den Ausdruck

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + 2\hat{s}z k_x k_y + (1 + \hat{s}^2 z^2) k_y^2.$$

Wir nehmen  $k_x = 0$  an, womit man zu  $k_{\perp}^2 = (1 + \hat{s}^2 z^2) k_y^2$  kommt.

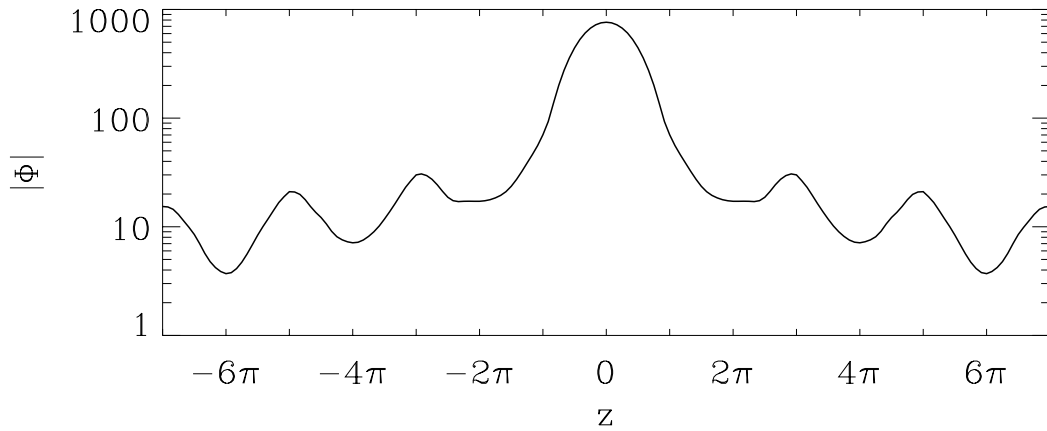
Wie ist dieser letzte Ausdruck auszuwerten? Da die Mode, deren Anwachsrate linear berechnet wird, eine Struktur in paralleler Richtung hat, kann man nicht einfach  $k_{\perp}$  an einer Stelle berechnen. Man muß vielmehr die Struktur der Mode



in die Berechnung miteinbeziehen. Eine Möglichkeit ist, die parallele Koordinate mit der Amplitude der Mode zu gewichten und diesen Term im obigen Ausdruck anstelle von  $z^2$  zu verwenden. Man würde also die Berechnung nach der folgenden Formel ausführen.

$$\langle k_{\perp}^2 \rangle = (1 + \hat{s}^2 \langle z^2 \rangle) k_y^2 \quad \text{mit} \quad \langle z^2 \rangle = \frac{\int z^2 |\Phi(z)|^2 dz}{\int |\Phi(z)|^2 dz}$$

Eine genauere Beschreibung findet man in (Jenko & Dannert, 2004). In Abb. 6.14 ist der Betrag von  $\Phi$  über der parallelen Koordinate für ein  $k_y \rho_s = 0.4$  dargestellt. Da die Größe  $z^2 |\Phi|^2$  nicht integrierbar ist, muss das Mittelungsintegral auf



**Abbildung 6.14:** Parallele Modenstruktur eines linearen GS2 Laufes mit den Standardparametern und  $k_y \rho_s = 0.4$

einen kleineren Bereich eingeschränkt werden. In allen folgenden Rechnungen mit diesem Modell wurde dafür das Intervall  $[-3\pi, 3\pi]$  verwendet.

Folgendes Vorgehen liegt der Berechnung der aller gestrichelten Modellkurven in den Bildern dieses Kapitels zugrunde:

1. Für einen gegebenen Satz von Plasmaparametern und einige  $k_y$  werden die linearen Anwachsraten und  $\langle k_{\perp}^2 \rangle$  berechnet.
2. Das Maximum der Kurve  $\gamma / \langle k_{\perp}^2 \rangle$  wird bestimmt. Der Wert dieses Maximums stellt nun eine Abschätzung für  $Q_e$  dar. In der Anpassung an die nichtlinearen Ergebnisse wird hier ein freier Parameter verwendet, um für den Standardfall eine Übereinstimmung von  $Q_{e,es}$  der nichtlinearen Rechnung und des einfachen Modells zu erreichen.
3. Aus dem linearen Lauf, der zu diesem  $k_y$  gehört, wird der quasilineare Teilchenfluss  $\Gamma_{ql}$  und der Wärmefluss  $Q_{j,ql}$  bestimmt. Dann folgt für die Transportflüsse des Modells:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{ql}}{Q_{e,ql}} \cdot Q_e \quad Q_i = \frac{Q_{i,ql}}{Q_{e,ql}} \cdot Q_e$$

### 6.3 Abhängigkeit des Wärmetransportes der Elektronen vom Sicherheitsfaktor $q$

In Transportmodellen wird oft eine Abhängigkeit des Transportes vom Sicherheitsfaktor  $q$  mit  $q^\tau$  ( $1 \leq \tau \leq 2$ ) verwendet, um die im Experiment beobachtete Abhängigkeit vom Plasmastrom zu modellieren. Ein solches Transportmodell (Garbet *et al.*, 2004) verwendet für die Diffusivität  $\chi$  den Ausdruck

$$\chi = \chi_s q^\tau \frac{T}{eB} \frac{\rho_s}{R} \left( \frac{R}{L_T} - \kappa_c \right) H \left( \frac{R}{L_n} - \kappa_c \right) + \chi_0 q^\tau \frac{T}{eB} \frac{\rho_s}{R}$$

wobei  $\kappa_c$  der kritische Temperaturgradient und  $H(\dots)$  die Heaviside-Funktion ist. In diesem Abschnitt interessiert uns nur die  $q$ -Abhängigkeit. Garbet *et al.* verwenden für den Exponenten  $\tau = 1.5$ . In (Waltz *et al.*, 1997; Petty *et al.*, 2004) liegt  $\tau$  zwischen 1 und 2. Diese Resultate wollen wir mit nichtlinearen Simulationen analysieren.

Um diese  $q$ -Abhängigkeit des turbulenten Transportes zu untersuchen, wurde  $q$  einmal vom Standardfall ( $q = 1.4$ ) aus auf  $q = 2$  erhöht und einmal auf  $q = 1$  erniedrigt. In Abb. 6.15 sind die Ergebnisse grafisch dargestellt. Man sieht ein

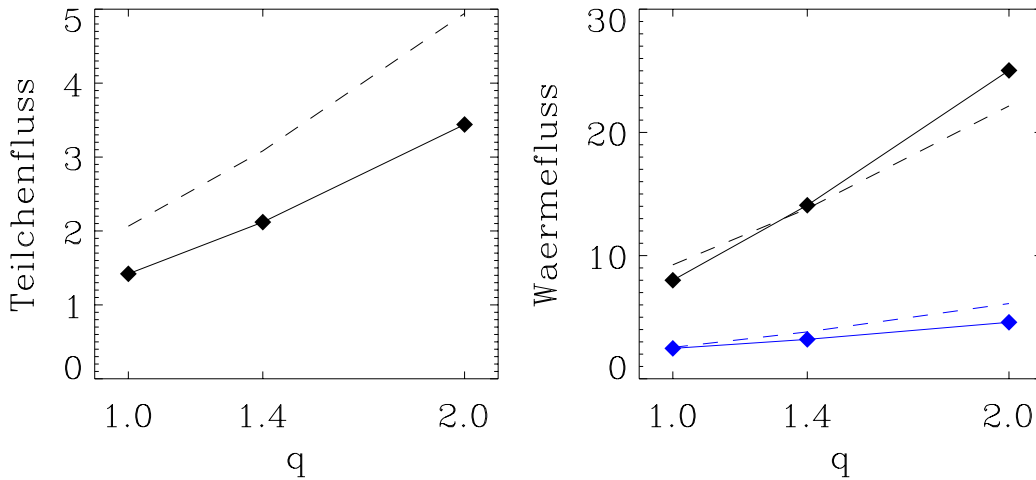


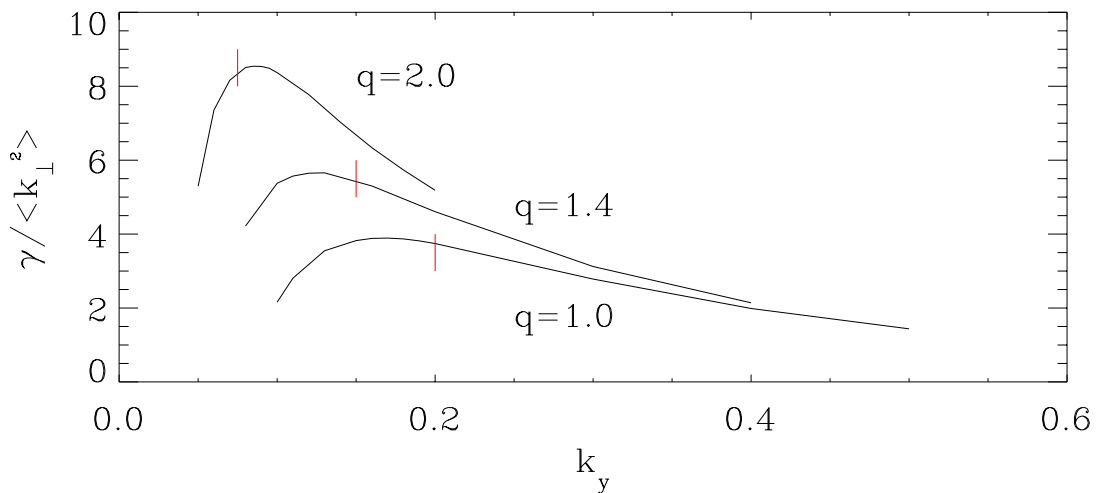
Abbildung 6.15: Teilchen- und Wärmefluss über  $q$

Anwachsen des Transportes mit  $q$ . Fittet man eine Kurve  $q^\tau$  durch die Punkte, so erhält man für den Teilchenfluss  $\tau \sim 1.4$ , für den Elektronen-Wärmefluss ergibt sich  $\tau \sim 1.7$ .

Das einfache Transportmodell aus Abschnitt 6.2, das in Abb. 6.15 gestrichelt dargestellt ist, führt zu einer ähnlichen Skalierung. Hier wurde der Elektronen-Wärmefluß des Standardfalles ( $q = 1.4$ ) durch Anpassung eines freien Faktors mit

den nichtlinearen Ergebnissen in Einklang gebracht. Die Werte der anderen beiden Flüsse werden dann mit einem weiteren Faktor berechnet, der aber nicht frei ist, sondern den man aus dem linearen Lauf erhält. Und zwar wird dazu angenommen, dass die Verhältnisse der linearen Flüsse zueinander (also Teilchenfluss zu Elektronen-Wärmeffluss und Teilchenfluss zu Ionen-Wärmeffluss) den nichtlinearen Verhältnissen entsprechen. Wie man sieht, trifft das für den Ionen-Wärmeffluss zu, der Teilchenfluss wird dadurch allerdings weniger gut beschrieben.

In Abb. 6.16 ist  $\gamma/\langle k_{\perp}^2 \rangle$  über  $k_y$  für die drei  $q$ -Werte dargestellt.<sup>4</sup> Hier wird deutlich, dass sich die Maxima für größere  $q$  zu kleineren  $k_y$  verschieben. In Rot



**Abbildung 6.16:** Quasilineare Amplituden über  $k_y$  für verschiedene  $q$ . In Rot sind die Lagen der Peaks in den nichtlinearen Transportspektren eingezeichnet.

ist die Lage der Maxima des nichtlinearen Transportspektrums eingetragen. Und auch hier sieht man dieselbe Tendenz: für größere  $q$  verschiebt sich das Maximum zu kleineren  $k_y$ , also zu größeren Skalen. Dass es Abweichungen zwischen den linearen und nichtlinearen Maxima gibt, liegt zum einen an der beschränkten Statistik der nichtlinearen Läufe (aufgrund der großen Datenmengen, können nur ca. 10 Zeitpunkte in der Mittelung berücksichtigt werden) und auch an der groben Auflösung im niedrig- $k_y$  Bereich, zum anderen kann das einfache Transportmodell das Verhalten des nichtlinearen Transportes nur teilweise erklären. Nichtlineare Wechselwirkungen sind nur im Rahmen des einfachen Modells aus Abschnitt 6.2 berücksichtigt und Verschiebungen in der Phase fehlen vollständig in diesem Modell.

**Erklärung** Was verändert sich, wenn  $q$  verändert wird? In den Gleichungen tritt  $q$  explizit nur in den Größen  $\alpha_j$  und  $\hat{\epsilon}$  auf. Erstere sinkt proportional zu

<sup>4</sup>Zur Bedeutung und Berechnung der Größe  $\gamma/\langle k_{\perp}^2 \rangle$  verweisen wir auf den Abschnitt 6.2

$1/q$ , letztere wächst quadratisch. Betrachtet man die Dynamik des Systems, so findet man als charakteristische Frequenz der Senkrechtdynamik und damit auch des Antriebs die diamagnetische Frequenz  $\omega_* = c_s \rho_s k_y / L_\perp$ , eine die Landau-dämpfung der Paralleldynamik kennzeichnende Frequenz ist die Transitfrequenz  $\omega_{\text{tr},j} = k_\parallel v_{Tj}$ . Für Standardparameter und ein  $k_y \rho_s \sim 0.4$  ist  $\omega_{\text{tr},i} < \omega_* \ll \omega_{\text{tr},e}$ . Ab einem bestimmten  $k_y \rho_s$  wird nun  $\omega_*$  so klein, dass die Paralleldynamik und damit die Landaudämpfung den Antrieb der Senkrechtdynamik dominiert. Betrachtet man TE-Moden und ersetzt in der diamagnetischen Frequenz das  $L_\perp$  durch die Gradientenlänge des Elektronentemperatur-Gradienten als stärkstem Antrieb, so kommt man auf ein  $k_y \rho_s$  von

$$k_y \rho_s \approx \alpha_i \frac{L_{Te}}{L_\perp} \propto \frac{1}{q}$$

Diese Grenze verschiebt sich nun mit wachsendem  $q$  zu kleineren Werten. Insgesamt tragen für größere  $q$  auch größere Skalen zum Transport bei, was schon aufgrund eines Random-walk Modells zu einem größeren Transport führt (Horton *et al.*, 2000).

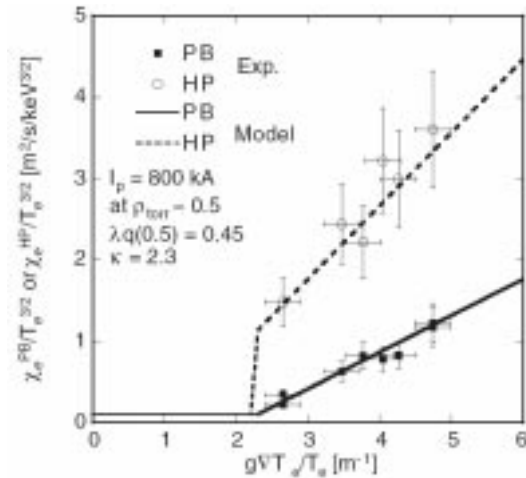
### Zusammenfassung

Wir konnten mit nichtlinearen Rechnungen zeigen, dass sich der Elektronen-Wärmetransport wie  $q^\tau$  mit  $\tau \approx 1.7$  mit dem Sicherheitsfaktor ändert. Diese Variation erhalten wir auch mit dem einfachen Transportmodell aus Abschnitt 6.2. Somit konnten wir den in quasilinearen Transport-Modellen häufig eingeführten Faktor  $q^\tau$  in nichtlinearen Rechnungen verifizieren. Auch das z. B. bei (Garbet *et al.*, 2004) verwendete  $\tau \in [1, 2]$  wird durch unsere Untersuchungen bestätigt.

## 6.4 TEM-Turbulenz und $T_e$ -Profilsteifheit

Experimentelle Untersuchungen zeigen häufig, dass der logarithmische Elektronentemperatur-Gradient  $\nabla T_{e0}/T_{e0}$  unabhängig von der Heizleistung ist (Ryter *et al.*, 2003; Wagner *et al.*, 1986). Dieses Verhalten bezeichnet man als Steifheit des Elektronentemperatur-Profiles. Die Annahme eines Schwellenwertes für den Elektronentemperatur-Gradienten, ab dem der Elektronen-Wärmetransport stark ansteigt, kann dieses Verhalten erklären. Ein Heizen im Zentrum des Plasmas würde dann in einem ersten gedanklichen Schritt zu einem Anwachsen des Temperaturprofils führen. Sobald dadurch aber der kritische Gradient überschritten wird, setzt starker Elektronen-Wärmetransport nach außen ein, wodurch das Profil wieder abflacht. Der Elektronentemperatur-Gradient „hängt“ an dem kritischen Gradient fest und kann diesen nur unter Zuführung von viel Heizleistung überschreiten. In Abb. 6.17 sind Messungen des Elektronen-Wärmetransport in Abhängigkeit vom logarithmischen Temperatur-Gradienten dargestellt. Zusätzlich sind zwei Modellkurven eingezeichnet, deren Form in (Ryter *et al.*, 2003)

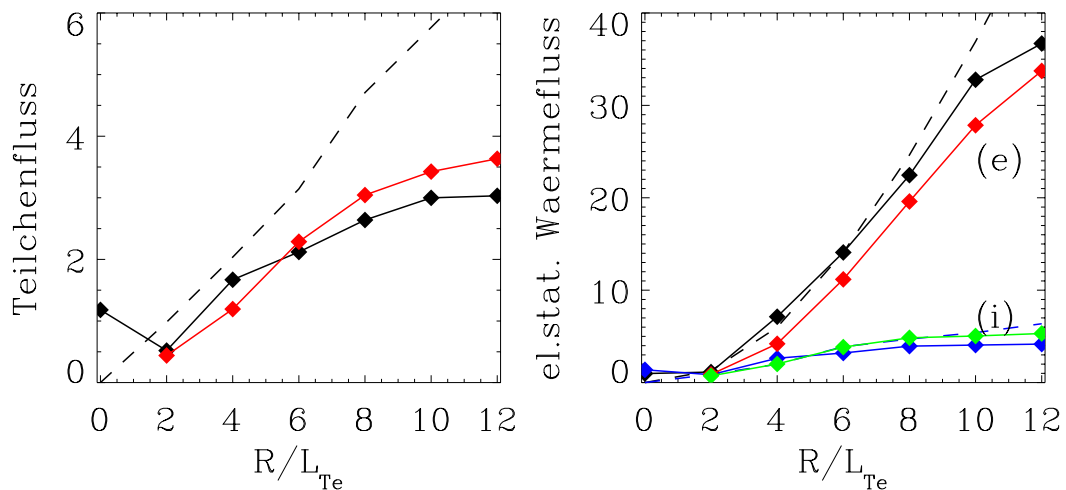
beschrieben wird. Man kann hier deutlich erkennen, dass der Transport niedrig



**Abbildung 6.17:** Experimentelle Messungen des Elektronen-Wärmetransportes mittels heat pulse (HP) oder power balance (PB) in Abhängigkeit vom Temperaturgradienten in ASDEX Upgrade, aus (Ryter et al., 2003)

ist, solange der Temperaturgradient kleiner als eine Schwelle ist. Erst über dieser Schwelle setzt der Elektronen-Wärmetransportes ein.

In diesem Abschnitt wird nun untersucht, ob nichtlineare Turbulenzsimulationen reiner TEM-Turbulenz zu einem ähnlichen Ergebnis führen. Dazu variieren wir ausgehend von unserem Standardfall den Elektronentemperatur-Gradienten und beobachten die Auswirkungen auf den Elektronen-Wärmetransport. In Abb. 6.18 sind die Ergebnisse der Rechnungen grafisch aufgetragen. In der Grafik sieht



**Abbildung 6.18:** Teilchen- und Wärmefluss von TEM-Turbulenz bei Variation des Elektronentemperatur-Gradienten. Gestrichelt sind die Ergebnisse des einfachen Transportmodells eingezeichnet. Die rote und grüne Kurve wurde mit einem Massenverhältnis von 1:1836 berechnet, die schwarze und blaue mit 1:400.

man ein Plateau für Werte von  $R/L_{Te} \leq 2$ , sowohl im Teilchenfluss, als auch im

Wärmefluss. Ab einem Temperaturgradienten von 2 steigen die Flüsse mehr oder weniger linear mit dem Gradienten an. Bei hohen Temperaturgradienten flacht die Kurve für den Teilchentransport ab.

Weiter kann man ein Verschieben der Kurve zu kleineren Werten ablesen, wenn man das Massenverhältnis von 1:400 auf 1:1836 verändert. Diese Beobachtung konnten wir auch schon in der Einleitung dieses Kapitels machen, als das reduzierte Massenverhältnis näher untersucht wurde. Durch ein Verschieben der Kurve bei gleicher Steigung ändert sich auch der extrapolierte Schnittpunkt der Kurve mit der  $R/L_{Te}$ -Achse von 2.6 auf 3.3. Hierbei wurde eine Gerade durch die Werte bei  $R/L_{Te} = 6$  und 8 gelegt und deren Schnittpunkt mit der  $R/L_{Te}$ -Achse berechnet. Man kann den so bestimmten Gradienten als kritischen Gradienten auffassen, ab dem die TEM-Turbulenz einsetzt. Die Ähnlichkeit mit dem Verlauf der experimentellen Kurve ist erstaunlich hoch.

Aus linearen Rechnungen kann man eine Formel für diesen kritischen Gradienten angeben, die für Wasserstoffplasmen und einen Dichtegradienten  $R/L_n \geq 3$  gilt (Jenko & Dannert, 2004):

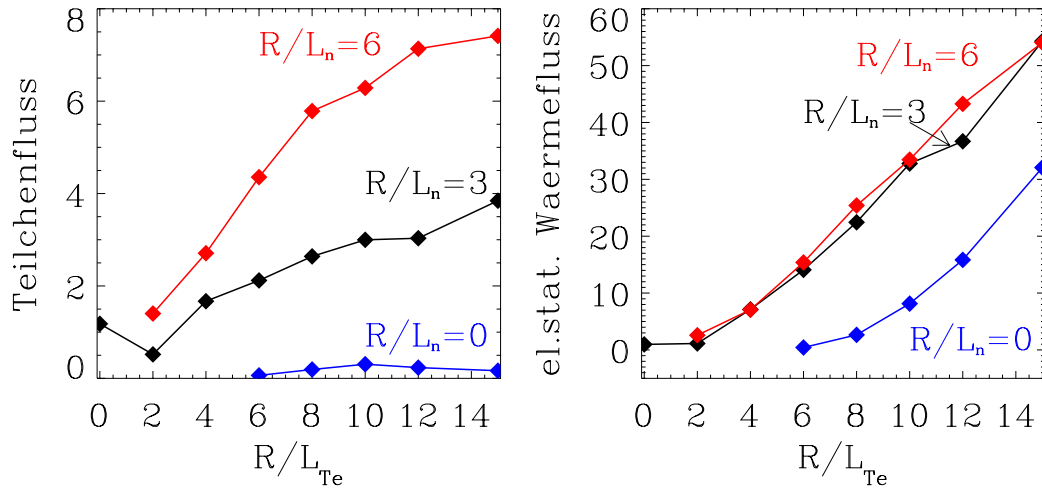
$$\left. \frac{R}{L_{Te}} \right|_{\text{krit}} \approx 2.5 + 2.0 \frac{\hat{s}}{q}$$

Setzt man unsere Werte hier ein, so erhält man  $R/L_{Te\text{krit}} \approx 3.6$ , was mit dem nichtlinear bestimmten Wert von 3.3 gut übereinstimmt.

Gestrichelt sind noch die mit Hilfe des einfachen Transportmodells berechneten Flüsse eingezeichnet, die wie im vorhergehenden Kapitel mit einem Faktor skaliert wurden. Der Verlauf für die Wärme Flüsse stimmt der Tendenz nach mit den nichtlinearen Ergebnissen überein. Für den Teilchenfluss wird das Abflachen für hohe Gradienten nicht wiedergegeben.

**Abhängigkeit vom Dichtegradienten** Der zweite Antrieb, der für die reine TEM-Turbulenz eine Rolle spielt, ist der Dichtegradient. Wie hängt der kritische Temperaturgradient vom Dichtegradienten ab? Dieser Frage sind wir mit weiteren Simulationen nachgegangen und haben die Ergebnisse der Abb. 6.19 erhalten. Wie zu erwarten war, steigt der Teilchenfluss mit dem Dichtegradienten an. Bei  $R/L_n = 0$  variiert der Teilchenfluss nur wenig mit dem Temperaturgradienten und ist allgemein sehr niedrig. Erhöht man den Dichtegradienten, so steigt der Teilchenfluss an. Zudem wächst auch die Steigung der Teilchenfluss-Kurve über  $R/L_{Te}$ . Für hohe Temperaturgradienten beobachtet man wieder eine flache Kurve, also ein Entkoppeln des Teilchenflusses vom Temperaturgradienten. Dies tritt bei allen Dichtegradienten auf.

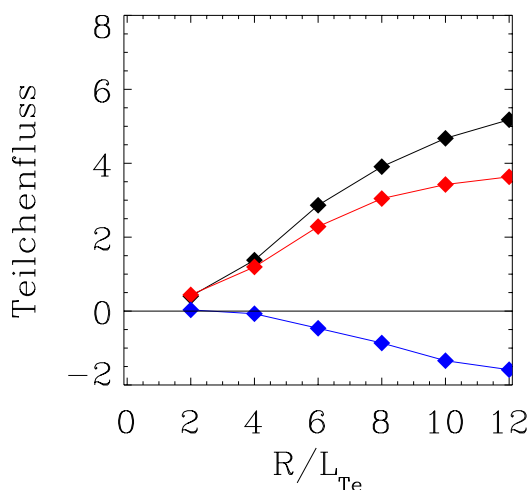
Betrachtet man den Wärme Fluss im rechten Bild, so kann man für kleine Dichtegradienten ein Verschieben des kritischen Temperaturgradienten beobachten, wenn man den Dichtegradienten vergrößert. So hat man bei  $R/L_n = 0$  einen kritischen Temperaturgradienten von  $\approx 9$ , wogegen er bei  $R/L_n = 3$  den Wert  $\approx 3$



**Abbildung 6.19:** Transportflüsse in Abhängigkeit vom Elektronentemperatur-Gradienten für verschiedene Dichtegradienten

hat. Erhöht man den Dichtegradienten jedoch noch weiter, über 3 hinaus, verändert sich die Kurve fast nicht mehr. Somit bleibt auch der kritische Gradient bei einem Wert von ungefähr 3. Die beiden Kurven für  $R/L_n = 3$  und  $R/L_n = 6$  liegen fast über die gesamte Variation von  $R/L_{Te}$  aufeinander!

**Zusammensetzung des Teilchentransportes** Eine weitere interessante Untersuchung kann man in Abb. 6.20 sehen. Hier ist die Zusammensetzung des Teilchentransportes in Abhängigkeit von  $R/L_{Te}$  dargestellt. Man erkennt in die-



**Abbildung 6.20:** Teilchenfluss der gefangenen Elektronen  $\Gamma_{e,t}$  (schwarz) und der freien Elektronen  $\Gamma_{e,p}$  (blau), und die Summe aus beiden (rot)

ser Abbildung, dass beide Transportkanäle (der der gefangenen und der der freien

Elektronen) zunehmen. Da allerdings das Verhältnis von  $\Gamma_{e,t}$  zu  $\Gamma_{e,p}$  mit wachsendem Temperaturgradient abnimmt, bis ein festes Verhältnis erreicht ist, kann der totale Teilchentransport nur langsam zunehmen und läuft für hohe Gradienten in eine Sättigung.

**Zusammenfassung** In diesem Abschnitt wurde mit nichtlinearen Rechnungen das Phänomen der ProfilstEIFheit der Elektronentemperatur untersucht. Es wurde ein effektiver kritischer Temperaturgradient gefunden, der leicht vom Massenverhältnis abhängt. Weiter wurde gezeigt, dass sich dieser kritische Gradient für einen Dichtegradienten kleiner als 3 mit dem Dichtegradienten verschiebt, ab dem Schwellenwert von  $R/L_n \approx 3$  jedoch unabhängig vom Dichtegradient ist.

## 6.5 Weitere Abhängigkeiten

### 6.5.1 Magnetische Verscherung

Die magnetische Verscherung ist definiert als

$$\hat{s} = \frac{r}{q} \frac{\partial q}{\partial r},$$

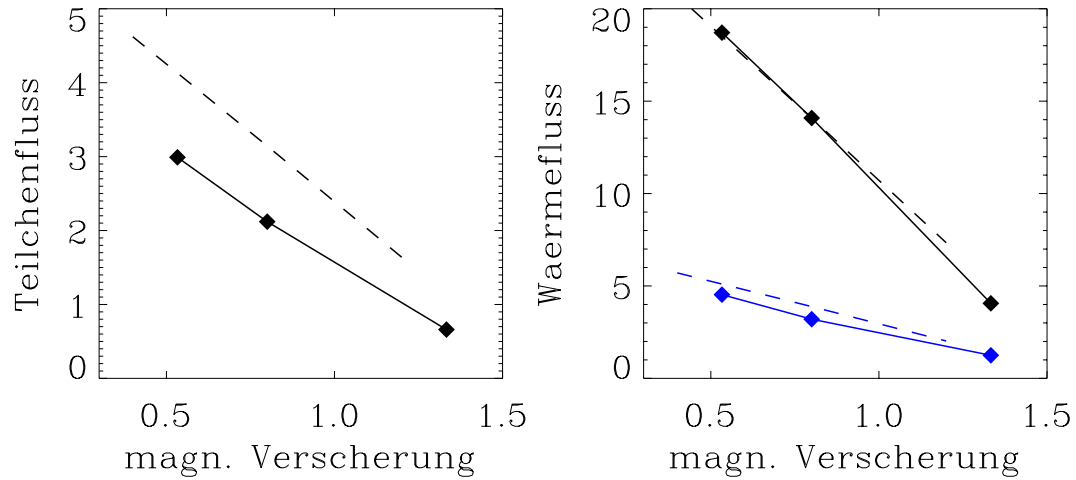
d. h. als die radiale Ableitung des Sicherheitsfaktors.  $q$  gibt die mittlere Anzahl der toroidalen Umläufe einer Feldlinie pro poloidalen Umlauf an. Diese Zahl ist für alle Feldlinien auf einer magnetischen Flußfläche identisch, kann sich jedoch radial ändern. In diesem Fall ist  $\hat{s} \neq 0$ .

Hat der Flussschlauch in der outboard midplane einen rechteckigen poloidalen Querschnitt so wird dieser Querschnitt zu einem Parallelogramm verzerrt, wenn man ihn entlang der Feldlinien bewegt, da die Ecken, die auf verschiedenen Flußflächen liegen, unterschiedlich weit poloidal rotieren.

Eine streamerartige, in radialer Richtung ausgedehnte Struktur der Turbulenz, wie sie im Konturplot in Abb. 6.3 gezeigt wurde, wird genauso verzerrt, was zur Folge hat, dass deren Hauptachse gegenüber der Horizontalen verkippt wird (Antonsen, Jr. *et al.*, 1996). Da nun aber die  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit, die den elektrostatischen Transport bewirkt, parallel der Äquipotentiallinien gerichtet ist, und diese nun gekippt sind zur radialen Richtung, sinkt die radiale Transportgeschwindigkeit und damit der Transport.

Es gibt somit Stellen entlang des Flussschlauches, an denen der Transport mit wachsender Verscherung kleiner wird. Dadurch sinkt auch der gesamte Transport, der alle Beiträge entlang der Feldlinien aufaddiert. Man erwartet also mit steigender Verscherung eine Absenkung des Transportes. Genau dieses Verhalten konnten wir bei den nichtlinearen Simulationen beobachten, wie man in Abb. 6.21 sehen kann. Auch das gestrichelt eingezeichnete einfache Transportmodell entspricht dieser Erwartung und gibt den Verlauf der nichtlinearen Rechnungen gut wieder.





**Abbildung 6.21:** Teilchen- und Wärmefluss in Abhängigkeit der magnetischen Verschönerung

### 6.5.2 Inverses Aspektverhältnis $\epsilon_t$

Der Anteil der gefangenen Elektronen an der Gesamtanzahl ist in stoßfreien Plasmen an der Außenseite des Torus gegeben durch (Wesson, 1997)

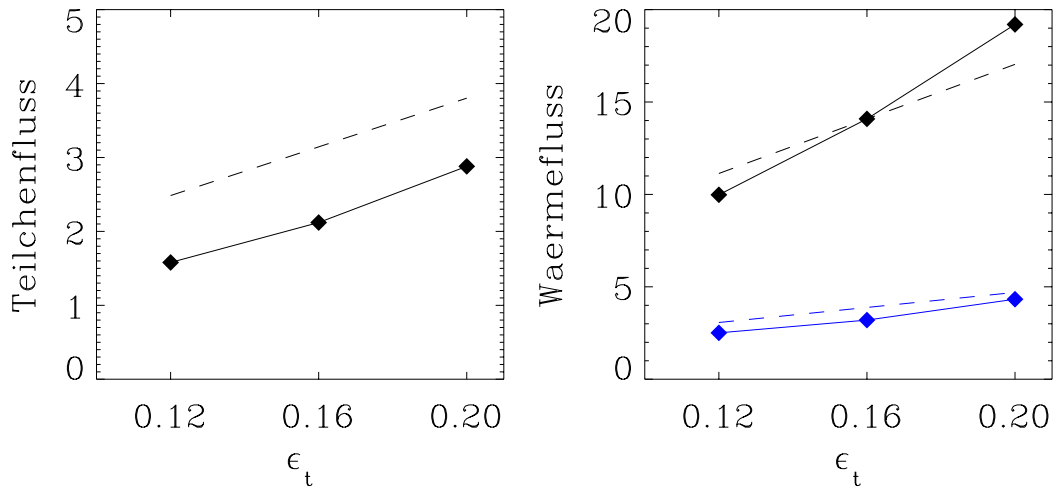
$$f_t = \sqrt{\frac{2\epsilon_t}{1 + \epsilon_t}}.$$

Das ist eine monoton wachsende Funktion mit dem inversen Aspektverhältnis, so dass der Anteil der gefangenen Teilchen mit wachsendem  $\epsilon_t$  zunimmt.

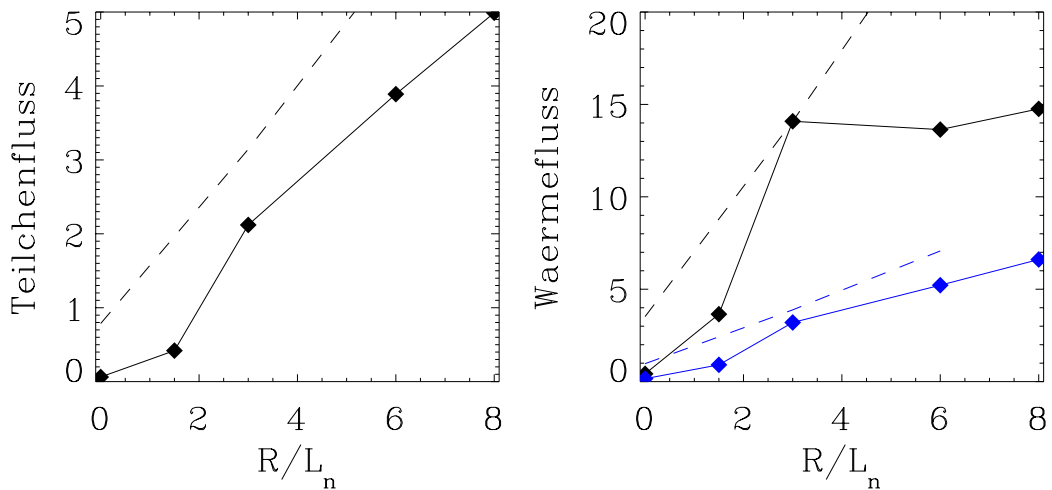
Da die Dichte der gefangenen Teilchen direkt in die Instabilität der TE-Mode eingeht (siehe Abschnitt 4.3.2), erwartet man ein Anwachsen des Transportes mit wachsendem  $\epsilon_t$ . Die Ergebnisse zweier nichtlinearer Läufe mit  $\epsilon_t = 0.12$  und  $\epsilon_t = 0.20$  sind in Abb. 6.22 dargestellt. Man sieht das erwartete Anwachsen des Transportes mit  $\epsilon_t$ . Auch die Ergebnisse des Transportmodells aus Abschnitt 6.2, die hier gestrichelt dargestellt sind, geben diese Abhängigkeit des nichtlinearen Transportes gut wieder.

### 6.5.3 Dichtegradient

Auch der Dichtegradient stellt einen Antrieb dar, wie man z. B. in Abb. 6.6 sehen kann. In diesem Abschnitt wird nun untersucht, inwieweit der Transport von dieser Größe abhängt. Von ITG Turbulenz weiß man, dass die Turbulenz für  $R/L_n \gtrsim R/L_{Ti}$  verschwindet. Für die hier untersuchte TEM-Turbulenz erhält man die Ergebnisse der Abb. 6.23, bei Verwendung eines Temperaturgradienten  $R/L_{Te} = 6$ .



**Abbildung 6.22:** Teilchen- und Wärmefluss der TEM-Turbulenz in Abhängigkeit von  $\epsilon_t$ , nichtlinear (durchgezogen) und mit dem einfachen Transportmodell (gestrichelt)



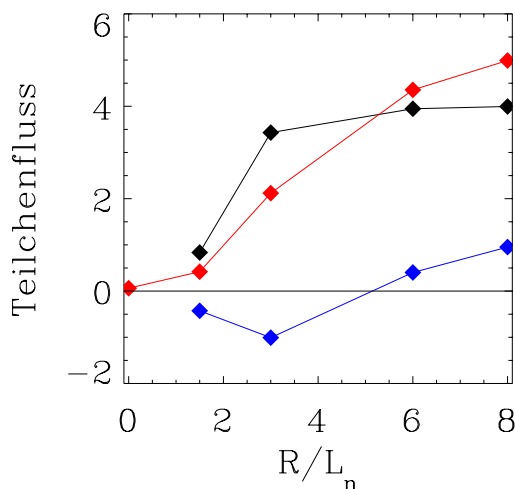
**Abbildung 6.23:** Teilchen- und Wärmefluss der TEM-Turbulenz in Abhängigkeit vom Dichtegradienten, nichtlinear (durchgezogen) und mit dem einfachen linearen Transportmodell (gestrichelt)

Der Teilchentransport steigt etwa linear mit dem Dichtegradienten an. Dieser Kanal ist es auch, der vom Dichtegradienten hauptsächlich getrieben wird. Der Elektronen-Wärmetransport dagegen steigt bis zu einem Wert von  $R/L_n = 3$  oder  $\eta_e = L_n/L_{Te} = 2$  stark an und bleibt dann näherungsweise konstant. Da der Ionen-Wärmetransport nur durch den Dichtegradienten getrieben wird (es gilt ja immer  $R/L_{Ti} = 0$ ), ist er direkt proportional zum Teilchentransport. Aus diesem Grund sieht man das Abflachen in diesem Transportkanal nicht.

Das einfache Transportmodell, das bisher immer gute Ergebnisse zur Beschreibung des nichtlinearen Transportes geliefert hat, versagt im Bereich für große Dichtegradienten für den Elektronen-Wärmeffluss vollständig. Das Anwachsen der anderen beiden Transportkanäle und für  $R/L_n < 3$  wird noch gut wiedergegeben, dann aber sagt das Modell ein weiteres Anwachsen auch für den Elektronen-Wärmetransport voraus, was nichtlinear nicht beobachtet wird. Dieser Effekt der Unabhängigkeit des Elektronen-Wärmetransportes vom Dichtegradient über einer bestimmten Schwelle ist also ein inhärent nichtlineares Phänomen.

Eine ähnliche Beobachtung haben wir auch schon bei der  $R/L_{Te}$ -Skalierung gemacht, nur mit vertauschten Rollen. Dort lief der Teilchentransport über einem bestimmten  $R/L_{Te}$ -Wert in die Sättigung und die Wärmeflüsse wuchsen weiter (Abb. 6.18). Auch dort konnte das einfache Transportmodell dieses Abflachen nicht erklären. Man kann also zusammenfassend festhalten, dass die nichtlinearen Untersuchungen zeigen, dass Teilchen- und Wärmetransport für hohe Gradienten entkoppeln. Der Teilchentransport wird also unabhängig vom Temperaturgradienten, der Wärmetransport unabhängig vom Dichtegradienten.

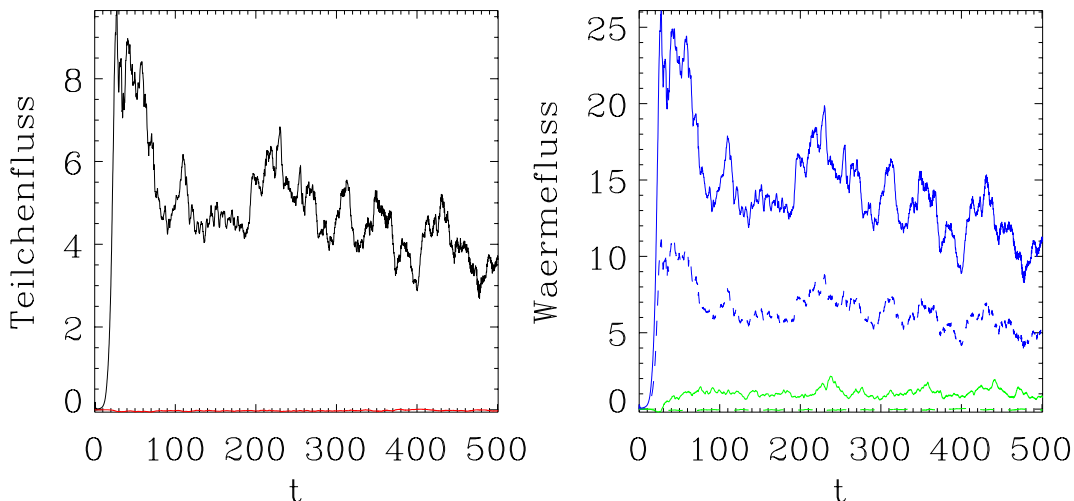
**Zusammensetzung des Teilchentransportes** In Abb. 6.24 ist die Zusammensetzung des Teilchentransportes bei Veränderung des Dichtegradienten dargestellt. Für kleine Dichtegradienten tragen die gefangenen Elektronen zum Aus-



**Abbildung 6.24:** Teilchenfluss  $\Gamma_{e,t}$  (schwarz) und  $\Gamma_{e,p}$  (blau), und die Summe (rot)

wärtstransport, die freien dagegen zum Einwärtstransport bei. Ab einer Schwelle bei  $R/L_n \approx 5$  wechseln auch die freien Teilchen zum Auswärtstransport, dessen Anstieg ab dieser Schwelle auch hauptsächlich vom Anstieg des Transportes der freien Teilchen getragen wird. Für große Dichtegradienten wird der Antrieb dieses Gradienten für die TEM-Turbulenz immer wichtiger. Es sind dann die vom Dichtegradienten getriebenen TE-Moden, die die Turbulenz antreiben. Der Wechsel des Teilchentransportes für die freien Teilchen von einem einwärts gerichtetem zu einem auswärts gerichtetem Transport kann mit dem Übergang von vom Temperaturgradient getriebenen zu vom Dichtegradient getriebenen antreibenden Moden identifiziert werden.

**Zonal flows** Ein erster Schritt zur Erklärung des durch lineare Modelle nicht beschreibbaren Verhaltens ist die Untersuchung bekannter nichtlinearer Mechanismen, die Einfluß auf den Transport haben. Hier sind natürlich in erster Linie die zonal flows gemeint, also rein poloidale Scherströmungen, die normalerweise das Transportniveau deutlich senken (Beer, 1994; Hammett *et al.*, 1993). Wir hatten bei der Vorstellung der Grundeigenschaften der TEM-Turbulenz in Abschnitt 6.1 gezeigt, dass zonal flows keinen Einfluss auf die Sättigung der Turbulenz haben. Vielleicht ändert sich der Einfluss bei hohen Gradienten. In Abb. 6.25 ist die Zeitspur der Rechnung mit  $R/L_n = 8$  dargestellt. Dieser Wert von  $R/L_n$  liegt deutlich im abgeflachten Bereich. Wenn das Abflachen von starken zonal flows verursacht würde, so müsste der Transport deutlich steigen, wenn man die zonal flows unterdrückt. Ab  $t = 310$  wurde die zonale Komponente des elektro-



**Abbildung 6.25:** Zeitspur des Laufes mit  $R/L_n = 8$ . Ab  $t = 310$  wird die zonale Komponente von  $\Phi$  unterdrückt.

statischen Potentials künstlich unterdrückt. Wie Abb. 6.25 zeigt, war kein großer

Einfluss auf das Transportniveau feststellbar. Insbesondere steigt das Transportniveau nicht auf einen Wert an, der darauf schließen ließe, dass zonal flows die Ursache des Abflachens wären.

**Weitere Erklärungsmöglichkeiten** Die zonal Flows stellten sich nicht als die Ursache des Entkoppelns von Teilchen- und Wärmetransport bei hohen Gradienten heraus. Ein anderer nichtlinearer Mechanismus, der zur Sättigung der Turbulenz beiträgt, sind die Sekundärinstabilitäten (Cowley *et al.*, 1991). Große Gradienten in den Streamern führen wiederum zum Antrieb von sekundären Instabilitäten, die turbulente Fluktuationen anregen und damit wiederum ihren eigenen Antrieb, also die hohen Amplituden der Primärinstabilitäten abbauen. Dieser Mechanismus könnte wichtiger werden, wenn die Hintergrund-Gradienten schon groß sind, da sie dann auch allgemein zu einem höheren Sättigungsniveau der Turbulenz führen. Eine genaue Untersuchung dieses Verhaltens steht jedoch noch aus.

# Kapitel 7

## ITG/TEM-Turbulenz

Im letzten Kapitel wurde reine TEM-Turbulenz untersucht. Die andere, im Bereich  $k_{\perp}\rho_s \sim 1$  wichtige Mode, ist die vom Ionentemperatur-Gradienten (ITG) getriebene ITG-Mode. Die von dieser Mode getriebene Turbulenz ist Gegenstand dieses Kapitels. Um sie zu untersuchen, setzen wir  $R/L_{Ti} \neq 0$ .

In einem ersten Abschnitt analysieren wir die Wirkung dieses Antriebs ohne gefangene Teilchen, also reine ITG-Turbulenz. Wir setzen dazu das inverse Aspektverhältnis auf Null,  $\epsilon_t = 0$ . Hier soll die *elektromagnetische* ITG-Turbulenz im Vordergrund stehen, also der Frage nachgegangen werden, was passiert, wenn das Plasma- $\beta$  erhöht wird und sich dem kritischen Wert nähert, der das Einsetzen der kinetischen Ballooning-Mode (KBM) kennzeichnet. Diese Mode entsteht, wenn der Druckgradient groß ist und damit mehr freie Energie zur Verfügung stellt als das Verbiegen der Feldlinien benötigt. Ballooning-Moden entstehen in Gebieten unvorteilhafter Krümmung, also auf der Torusaußenseite. Sie haben sehr große Anwachsrate und auch größere räumliche Skalen, wodurch sie den gesamten Plasmaeinschluss gefährden. Für einen guten Einschluss ist es notwendig, KBMs zu vermeiden, woraus ein Limit für das Plasma- $\beta$  folgt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden dann beide Moden zugelassen und die daraus entstehende Turbulenz untersucht. Dabei beobachtet man unter bestimmten Bedingungen einen Einwärtstransport von Teilchen (Teilchenpinch), dessen Eigenschaften analysiert werden.

### 7.1 Elektromagnetische ITG-Turbulenz

In der von ITG-Moden getriebenen Turbulenz wird die Hauptursache für den anomalen Ionen-Wärmetransport gesehen. Die Untersuchung dieser Turbulenz ist deshalb schon lange Gegenstand plasmaphysikalischer Forschung, insbesondere auch mit Hilfe numerischer Simulationen. In den Anfängen musste man sich bei gyrokinetischen Rechnungen auf einfache ungekrümmte Geometrien („sheared slab“) beschränken (Cohen *et al.*, 1993). Gyrofluid-Rechnungen ergaben erste

Parameterstudien zur ITG-Turbulenz (Waltz *et al.*, 1994). Der Vergleich der Ergebnisse der gyrokinetischen und der Gyrofluid-Rechnungen waren Gegenstand mehrerer Untersuchungen (Parker *et al.*, 1994; Dimits *et al.*, 2000). Alle diese Simulationen hatten aber gemeinsam, dass sie mit adiabatischen Elektronen rechneten und damit im elektrostatischen Grenzfall. Erst in letzter Zeit wurden sowohl Gyrofluid- (Snyder & Hammett, 2001a) als auch gyrokinetische Rechnungen (Candy & Waltz, 2002; Chen *et al.*, 2003; Parker *et al.*, 2004; Lewandowski, 2004) durchgeführt, um elektromagnetische ITG-Turbulenz zu untersuchen. Diese blieben jedoch auf  $\beta$ -Werte beschränkt, die deutlich unter dem kritischen  $\beta$ -Wert der MHD liegen. Hier wird erstmalig untersucht, was für  $\beta \rightarrow \beta^{\text{krit}}$  passiert.

### 7.1.1 Physikalische und numerische Parameter

Im Vergleich zur ITG-Turbulenz mit adiabatischen Elektronen erfordert die numerische Berechnung von elektromagnetischer ITG-Turbulenz einen wesentlich höheren Aufwand. Dies liegt vor allem daran, dass nun die wesentlich schnellere Elektronendynamik zeitaufgelöst werden muss. Der Zeitschritt muss um einen Faktor  $\sqrt{m_i/m_e} \gg 1$  verkleinert werden, was bei Wasserstoff einem Faktor 43 entspricht. Um den Aufwand klein zu halten, kann man mit einem reduzierten Massenverhältnis (wie bei der TEM-Turbulenz) rechnen, wie es z. B. (Candy & Waltz, 2002) gemacht haben. Da jedoch gerade die Elektronendynamik der essentielle Teil bei elektromagnetischen Rechnungen ist, rechnen wir wie (Parker *et al.*, 2004) mit einem Massenverhältnis von 1:1836. Um unsere Ergebnisse mit denen der Untersuchung von (Snyder & Hammett, 2001a) vergleichen zu können, verwenden wir dieselben physikalischen Parameter,  $T_e = T_i$ , eine magnetische Verscherung von  $\hat{s} = 1$ , einen Sicherheitsfaktor von  $q = 2$ , einen Dichtegradienten von  $R/L_n = 3$ , sowie Temperaturgradienten von  $R/L_{Te} = R/L_{Ti} = 9$ . Außerdem setzen wir  $\epsilon_t = 0$  (keine gefangenen Teilchen).

Der Parameter  $\alpha$  der Magnetohydrodynamik wird zusammen mit dem variierten  $\beta_e$  verändert. Er ist definiert als

$$\alpha_{\text{MHD}} = -\frac{8\pi Rq^2}{B^2} \frac{dp}{dr}$$

Dieser Ausdruck kann umgeformt werden zu folgendem Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und unserem  $\beta_e$ .

$$\alpha = 2\beta_e q^2 \left( \frac{R}{L_n} + \frac{R}{L_{Te}} + \left( \frac{R}{L_n} + \frac{R}{L_{Ti}} \right) \frac{T_i}{T_e} \right) = 192\beta_e$$

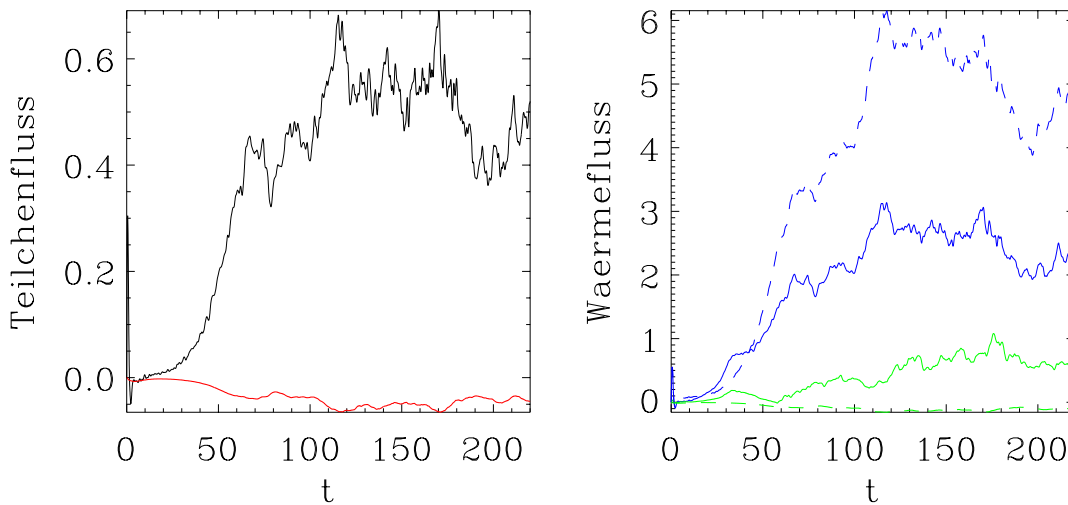
Dabei wurden für die letzte Umformung die oben genannten Parameter eingesetzt. Weiter erwartet man aus der idealen MHD, dass das  $\beta$  Limit bei ungefähr  $\alpha = 0.6\hat{s}$  liegt (Wesson, 1997). In unserem Fall also bei  $\alpha_{\text{krit}} = 0.60$  oder  $\beta_e^{\text{krit}} = 0.31\%$ .

**Simulationsgebiet** Als Simulationsvolumen verwenden wir für diese elektromagnetischen ITG-Turbulenz-Rechnungen eine Box mit den Ausmaßen  $L_x = 100\rho_s$ ,  $L_y = 104.7\rho_s$  und  $L_z = 2\pi qR$ . Das führt zu einem minimalen  $k_y\rho_s$  von 0.06.

**Numerisches Gitter** Diese Box wird nun mit einem Gitter überzogen, das  $128 \times 64 \times 32$  Punkte im Ortsraum und  $N_{v_{\parallel}} = 41$  und  $N_{\mu} = 8$  Punkte im Geschwindigkeitsraum hat. Da die Paralleldynamik als entscheidend für die elektromagnetischen Effekte angesehen wird, verwenden wir in dieser Richtung 32 Punkte. Im Ergebnis führt dies unter der Verwendung des Wasserstoff-Massenverhältnisses zu einem Wert von  $\Delta t = 0.0064$  für den Zeitschritt. Dies erhöht die Anforderungen an die Rechenleistung deutlich.

### 7.1.2 Grundlegende Eigenschaften

In Abb. 7.1 ist eine typische Zeitspur<sup>1</sup> für  $\beta_e = 0.175\%$  bzw.  $\beta_e/\beta_e^{\text{krit}} = 0.56$  dargestellt. Wie erwartet dominiert der Ionen-Wärmetransport  $Q_{\text{es},i}$  alle anderen



**Abbildung 7.1:** Typische Zeitspur für elektromagnetische ITG-Turbulenz bei  $\beta_e = 0.175\% = 0.56\beta_{\text{MHD,krit}}$ ,  $\Gamma_{\text{es}}$  (schwarz),  $\Gamma_{\text{em}}$  (rot),  $Q_{\text{es}}$  (blau),  $Q_{\text{em}}$  (grün). Die Werte der Elektronen sind durchgezogen, die der Ionen gestrichelt dargestellt.

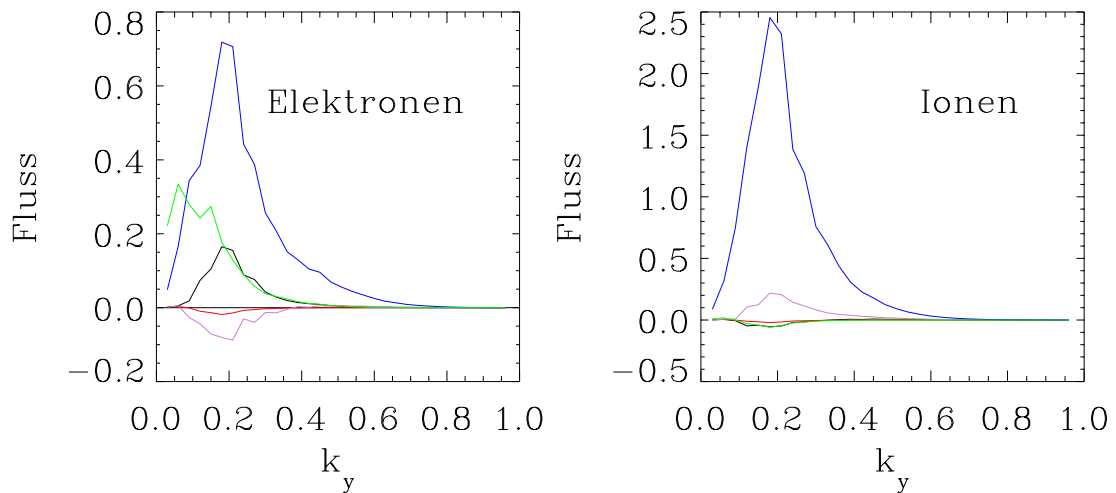
Transportkanäle bei weitem. Der Elektronen-Wärmetransport  $Q_{\text{es},e}$  ist nur ungefähr halb so groß wie  $Q_{\text{es},i}$ . Trotz eines  $\beta_e$  von mehr als der Hälfte des kritischen Wertes, sind die elektromagnetischen Transportbeiträge klein. Beim Teilchen-transport macht der elektromagnetische („magnetic flutter“) Transport nur ca. 10% des gesamten Transportes aus, beim Wärmefluss tritt nur ein Transport der

<sup>1</sup>Für eine Definition der Transportgrößen verweisen wir auf den Anhang A.



Elektronenwärme auf. Wegen der höheren Beweglichkeit der Elektronen parallel zum Magnetfeld tragen sie mehr zum Transport entlang der gestörten Feldlinien bei (Jenko & Dorland, 2001).

In Abb. 7.2 ist das Transportspektrum von elektromagnetischer ITG-Turbulenz mit gefangenen Teilchen dargestellt.<sup>2</sup> Die weiteren Parameter sind  $R/L_n = 2.2$ ,  $R/L_{Te} = R/L_{Ti} = 6.9$ ,  $\epsilon_t = 0.18$  und eine größere Box  $125\rho_s \times 209.4\rho_s$ . Als Gitter verwendeten wir für diese Rechnung  $64 \times 64 \times 32 \times 41 \times 8$  Punkte. Man



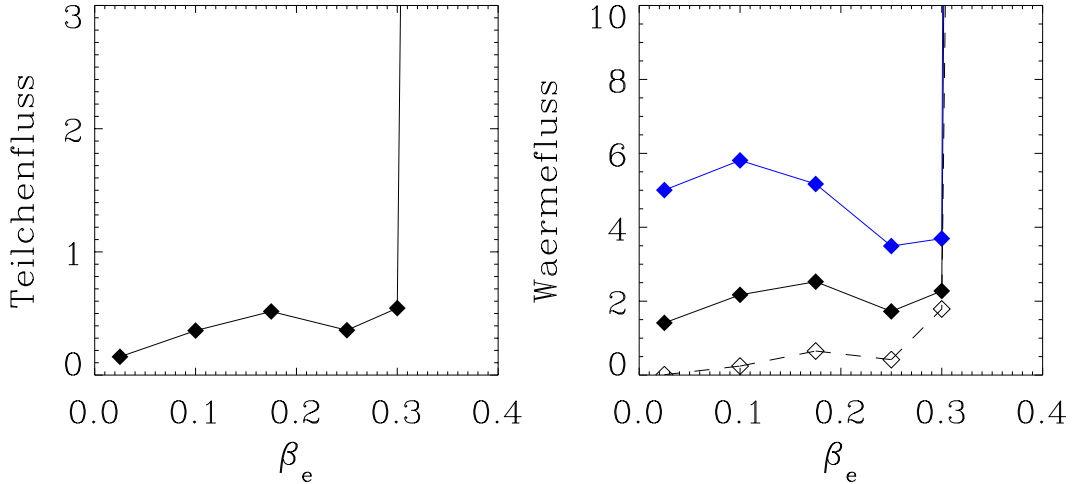
**Abbildung 7.2:** Transportspektrum von elektromagnetischer ITG-Turbulenz mit  $\beta_e = 0.2\%$ . Weitere Parameter im Text. Dargestellt sind die Größen  $\Gamma_{es}$  (schwarz),  $\Gamma_{em}$  (rot),  $Q_{es}$  (blau) und  $Q_{em}$  (grün).

kann auch hier erkennen, dass der Ionen-Wärmetransport um mindestens einen Faktor 2 größer ist als der Elektronen-Wärmetransport. Auffällig ist außerdem, dass das Maximum des elektromagnetischen Elektronen-Wärmetransportes (die grüne Kurve im linken Bild) im  $k_y$ -Spektrum deutlich zu größeren Skalen als alle anderen Transportkanäle verschoben ist. Diese Beobachtung haben wir für alle elektromagnetischen Rechnungen gemacht, egal ob mit oder ohne gefangene Teilchen. Man ist deshalb gezwungen, für diese Untersuchungen eine große Box in  $y$ -Richtung zu verwenden, will man den elektromagnetischen Transport nicht unterschätzen. Der Beitrag des elektromagnetischen Transportes zum gesamten Wärmetransport summiert über  $k_y$  ist allerdings immer noch sehr klein. Er liegt bei ca. 9%, macht jedoch  $\sim 30\%$  des Elektronen-Wärmetransportes aus.

<sup>2</sup>Zur Begründung der leicht veränderten Parameter: Die reinen ITG Rechnungen wurden mit einer kleineren Box durchgeführt, so dass man den Effekt, dass der „flutter“-Transport bei größeren Skalen sein Maximum hat, nicht so gut sehen kann. Deshalb wird hier zur Veranschaulichung ein anderer Parametersatz verwendet.

### 7.1.3 Variation von $\beta_e$

Wird  $\beta_e$  zwischen 0.025% und 0.4% variiert, erhält man die Abb. 7.3. Betrachtet

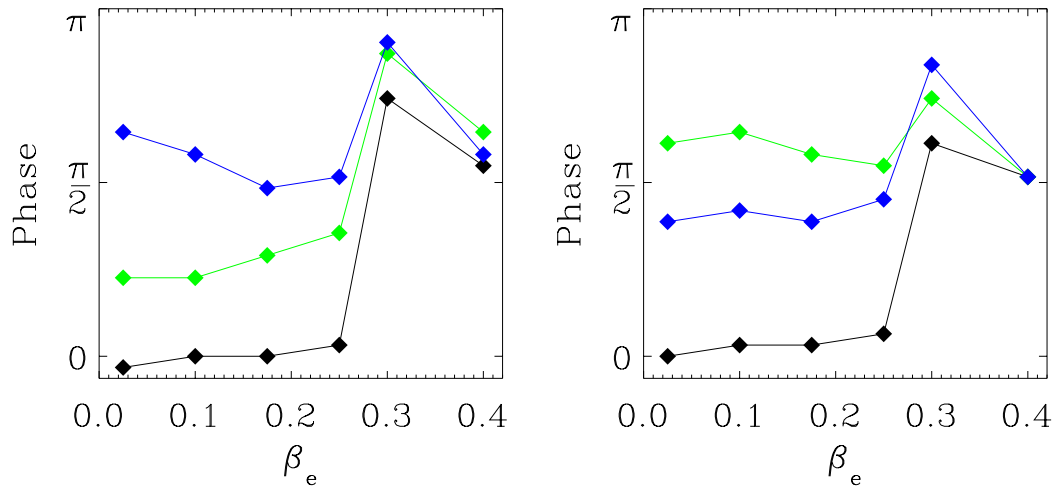


**Abbildung 7.3:** Elektromagnetische ITG-Turbulenz. Dargestellt ist im linken Bild  $\Gamma_{es}$ , im rechten Bild  $Q_{es,i}$  (blau) und  $Q_{es,e}$  (schwarz durchgezogen) und  $Q_{em,e}$  (schwarz gestrichelt).

man diese Grafik, so fällt der große Sprung im Transport zwischen  $\beta_e = 0.3\%$  und  $\beta_e = 0.4\%$  auf. Hier liegt auch der Übergang zwischen dem Bereich, in dem die kinetische Ballooning Mode stabil ist und dem Bereich in dem sie destabilisiert wird. Solange die KB-Mode stabil ist, steigt der Wärmetransport erst leicht mit  $\beta_e$  an, um dann stetig abzusinken.

Um den Sprung weiter zu untersuchen, kann man die Phasenverschiebung zwischen  $\Phi$  und  $n$ ,  $T_{\parallel}$  und  $T_{\perp}$  bei Variation von  $\beta_e$  betrachten. Die Ergebnisse sind in Abb. 7.4 dargestellt. Dabei fällt auf, dass auch in den Phasenwinkeln ein Übergang festzustellen ist. Er tritt allerdings schon früher, zwischen  $\beta_e = 0.25\%$  und  $\beta_e = 0.3\%$  auf.

**Erklärung.** Was passiert an diesem Übergang? Warum deutet der Phasenwinkel schon bei  $\beta_e = 0.3\%$  eine Änderung der Modenstruktur an, im Transport sieht man diesen Übergang aber erst bei  $\beta_e = 0.4\%$ ? Die ideale MHD sagt ein kritisches  $\beta_e$  von 0.31% voraus. Berechnet man das kritische  $\beta_e$  allerdings durch lineare gyrokinetische Simulationen, so ergibt sich ein kritischer Wert von  $\beta_e^{\text{krit}} = 0.27\%$ . Eine Verschiebung des kritischen  $\beta_e$  zu kleineren Werten findet auch Cheng (1982), sobald er FLR-Effekte („finite Larmor radius effects“) mitbetrachtet. Der fragliche Fall von  $\beta_e = 0.3\%$  liegt zwischen diesen beiden Werten. Die Ergebnisse lassen sich so interpretieren, dass bei  $\beta_e = 0.3\%$  sowohl die ITG-Mode als auch die KBM instabil sind und sich deshalb die Modenstruktur weder der einen, noch



**Abbildung 7.4:** Phasenwinkel zwischen  $\Phi$  und  $n$  (schwarz),  $T_{\parallel}$  (grün) und  $T_{\perp}$  (blau) bei Variation von  $\beta_e$  für Elektronen links und Ionen rechts

der anderen Mode allein zuschreiben läßt. Da bei diesem Wert die Anwachsrate der beiden Moden vergleichbar sind, findet man im Transport erst einen kleinen Anstieg. Die Anwachsrate der KBM nimmt mit wachsendem  $\beta_e$  stark zu, so dass bei  $\beta_e = 0.4\%$  nur noch diese Mode die Turbulenz bestimmt. Das ist auch im Phasenverlauf zu beobachten, da bei  $\beta_e = 0.4\%$  alle Größen nahezu dieselbe Phase von  $\frac{\pi}{2}$  aufweisen.

Man erhält also ein Anwachsen des Transportes schon vor der idealen MHD Schwelle. Dieses Anwachsen wird von der KB-Mode verursacht. Wir erhalten qualitativ eine ähnliche Aussage wie (Snyder & Hammett, 2001a). Allerdings finden Snyder und Hammett in ihren Gyrofluid-Simulationen ein Anwachsen des Transportes schon ab ca.  $\beta_e/\beta_e^{\text{krit}} = 0.55$ . Bei uns macht sich die KB-Mode dagegen erst ab ca. 90% des kritischen MHD- $\beta_e$  bemerkbar. Der Unterschied zwischen den beiden Codes rührt wahrscheinlich von der unterschiedlichen Behandlung der Elektronendynamik her. Snyder und Hammett (2001a) verwenden ein Landau-Flüssigkeitsmodell für die Elektronen, bei denen die schnelle parallele Dynamik nicht voll aufgelöst wird, wir haben dagegen die volle gyrokinetische Behandlung auch für die Elektronen implementiert.

**Zusammenfassung** In diesem Abschnitt konnte gezeigt werden, dass elektromagnetische ITG-Turbulenz gyrokinetisch mit einem Wasserstoff-Massenverhältnis untersucht werden kann. Es wurde gezeigt, dass der elektromagnetische Wärmetransport hauptsächlich von den Elektronen getragen wird und bei größeren Skalen stattfindet, als der elektrostatische Transport. Aus der Variation des Plasma- $\beta$  konnten wir zeigen, dass der Transport bis kurz vor Einsetzen der KBM mit wachsendem  $\beta_e$  sinkt. Ab der Schwelle, die bei ca.  $\beta_e/\beta_e^{\text{krit}} = 0.9$  liegt, wächst

er sehr stark an.

## 7.2 ITG/TEM-Turbulenz und der Teilchenpinch

Experimentell beobachtet man sehr häufig eine erhöhte Dichte im Zentrum des Plasmas (Wagner & Stroth, 1993; Baker *et al.*, 2000; Gruber *et al.*, 2001; Angioni *et al.*, 2003). Dieses Verhalten zeigt sich auch bei Plasmen, bei denen sich die Teilchenquellen nur am Rand befinden. Die Frage ist, durch welche Mechanismen Teilchen vom Rand ins Zentrum transportiert werden. Rein diffusive Prozesse würden nicht zum beobachteten „density-peaking“ führen, sondern zu einer Gleichverteilung der Dichte über den kleinen Radius. Diese Beobachtung läßt sich mit der Annahme erklären, dass ein Einwärtstransport („Pinch“) stattfindet. Bisherige Untersuchungen, sowohl experimenteller Natur (Furno *et al.*, 2003), als auch quasilineare Rechnungen (Miskane *et al.*, 2000; Dominguez, 1993), zeigen diesen Teilchenpinch.

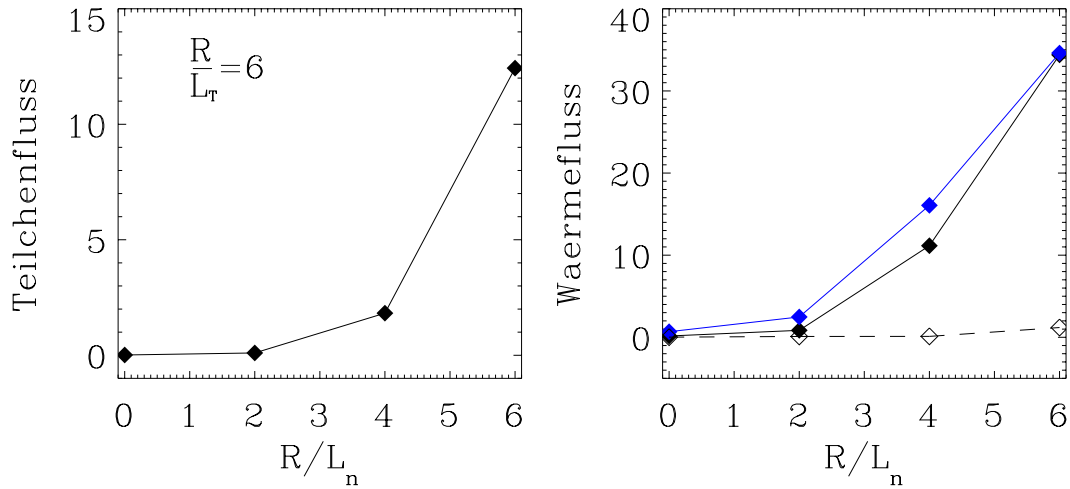
Um diesen Einwärtstransport auch nichtlinear zu untersuchen, werden nun beide Antriebe für die Turbulenz eingeschaltet, der Ionentemperatur-Gradient, der die ITG-Moden destabilisiert und der Elektronentemperatur-Gradient in Kombination mit einem endlichen inversen Aspektverhältnis  $\epsilon_t > 0$ , was zur Destabilisierung der TE-Moden führt. Als Parametersatz, von dem aus verschiedene Änderungen untersucht werden, verwenden wir somit

$$\begin{aligned} \frac{R}{L_n} = 3 & \quad \frac{R}{L_{Te}} = \frac{R}{L_{Ti}} = 6 & \quad \frac{m_i}{m_e} = 400 & \quad T_e = T_i & \quad \epsilon_t = 0.16 \\ \beta_e = 0.1\% & \quad \alpha_{\text{MHD}} = 0 & \quad \hat{s} = 0.8 & \quad q = 1.4 \end{aligned}$$

### 7.2.1 ITG-Pinch

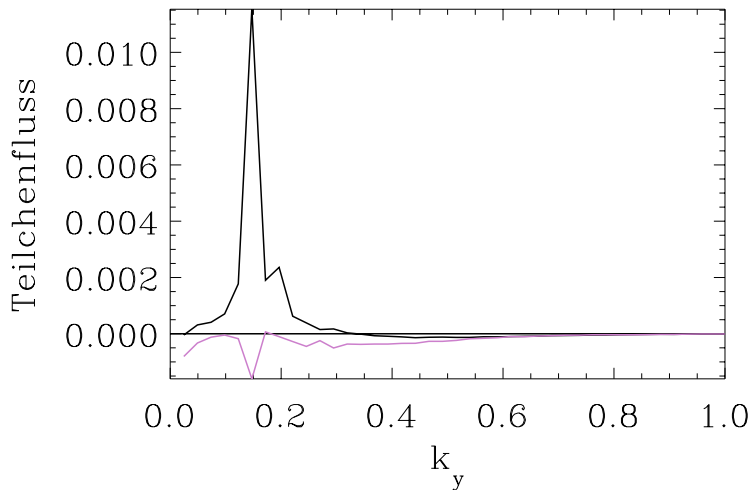
Der Hauptantrieb des Teilchentransportes ist der Dichtegradient. Wir untersuchen deshalb als erstes die Variation des Transportes (und hier in erster Linie die des Teilchentransportes) mit dem Dichtegradienten. Bei den obigen Parametern und einer Veränderung von  $R/L_n$  erhalten wir die Ergebnisse der Abb. 7.5. Der Teilchentransport wächst wie erwartet mit dem Dichtegradienten an; gleiches sieht man auch für den Wärmefluss. Die Wärmeflüsse der Elektronen und der Ionen sind annähernd gleich groß. Für die TEM-Turbulenz hatten wir in Kapitel 6 gefunden, dass der Wärmetransport der Elektronen wesentlich größer als der der Ionen ist. Für ITG-Turbulenz ist der umgekehrte Fall bekannt und wurde auch in Abschnitt 7.1 bestätigt. Sind jedoch beide Wärmeflüsse gleich groß, kann man nicht eine der beiden Turbulenzarten als dominant bezeichnen, vielmehr treten beide nebeneinander auf.

Einen Einwärtstransport kann man aus der Abbildung 7.5 noch nicht erkennen. Betrachtet man aber das Transportspektrum für den Lauf mit  $R/L_n = 0$ , das in Abb. 7.6 dargestellt ist, so erkennt man, dass die gefangenen Teilchen zu einem



**Abbildung 7.5:** Teilchen- und Wärmefluss von ITG/TEM-Turbulenz für verschiedene Dichtegradienten.  $Q_{es,e}$  (schwarz),  $Q_{es,i}$  (blau)

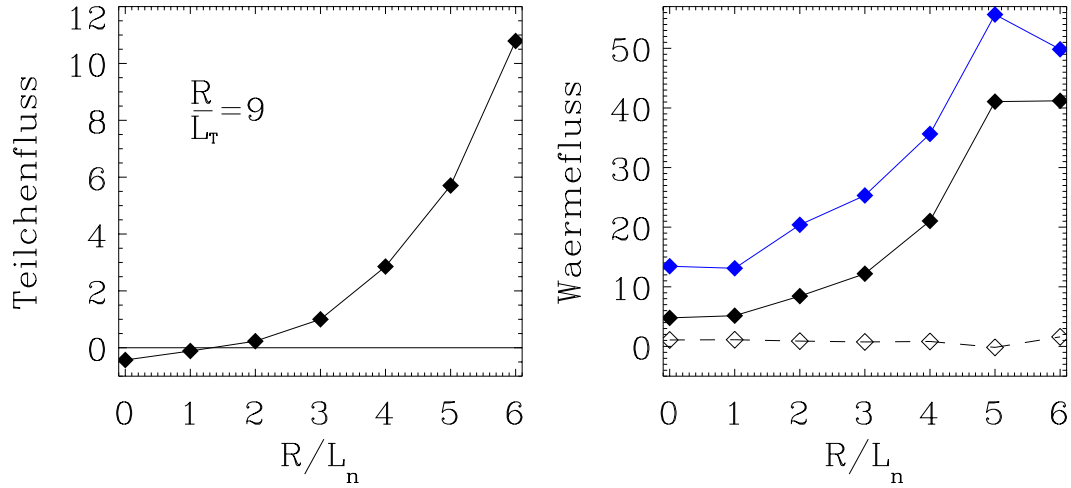
Einwärtstransport führen, der allerdings vom Auswärtstransport der freien Teilchen übertroffen wird. Deshalb ergibt sich in der Summe ein Auswärtstransport.



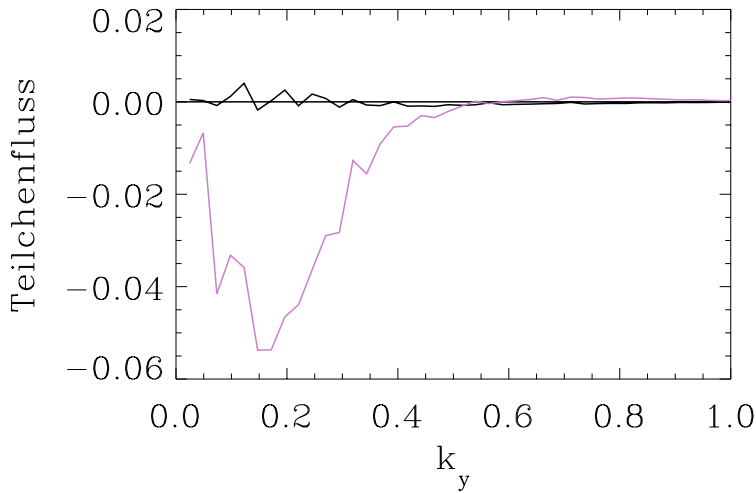
**Abbildung 7.6:** Transportspektrum von ITG/TEM-Turbulenz mit  $R/L_n = 0$ . Dargestellt ist  $\Gamma_{es,t}$  (violett) und  $\Gamma_{es,p}$  (schwarz).

Erhöht man nun den Temperaturgradienten auf 9 für beide Spezies, so erhält man die Ergebnisse der Abb. 7.7. Hier sieht man für kleine Dichtegradienten einen Einwärtstransport. Das Spektrum in Abb. 7.8 macht deutlich, dass nun der Einwärtstransport der gefangenen Teilchen den Auswärtstransport der freien Teilchen übertrifft<sup>3</sup>. Der Übergang von Einwärtstransport zu Auswärtstransport

<sup>3</sup>Hier wurden  $\beta_e = 0.01\%$  und  $R/L_n = 1.5$  als Parameter verwendet, das qualitative Ergebnis



**Abbildung 7.7:** Teilchen- und Waermefluss von ITG/TEM-Turbulenz für  $R/L_T = 9$ .  $Q_{es,e}$  (schwarz),  $Q_{es,i}$  (blau)



**Abbildung 7.8:** Transportspektrum des Elektronen-Teilchen-transportes für einen typischen ITG-Pinch,  $\Gamma_{n,p}$  (schwarz) und  $\Gamma_{n,t}$  (violett)

findet bei einem Dichtegradienten zwischen  $R/L_n = 1$  und  $R/L_n = 2$  statt. Zwischen diesen beiden Werten muss es einen Dichtegradienten geben, an dem der Teilchentransport Null wird.

In einem System, in dem der Transport auf die Profile rückwirkt, würde man also erwarten, dass sich ein Dichtegradient vom Übergangswert (also zwischen 1 und 2) einstellt, da die Turbulenz für größere Gradienten einen Auswärtstransport von Teilchen und damit ein Abflachen der Profile bewirkt; für kleinere Gradienten werden Teilchen einwärts transportiert, so dass die Profile steiler werden und der Dichtegradient anwächst.

Betrachtet man in Abb. 7.7 die Wärmeflüsse, so sieht man, dass der Ionen-Wärmefluss meist um mindestens 50% größer ist als der Elektronen-Wärmefluss. Da dies ein Zeichen von ITG-Turbulenz ist, kann man den oben beschriebenen Pincheffekt als ITG-Pinch bezeichnen.

Eine zweite Beobachtung, die man an Abb. 7.8 machen kann, ist das Abflachen der Kurve für hohe Gradienten. Ab ungefähr  $R/L_n = 5$  hängt der Wärmetransport nicht mehr vom Dichtegradienten ab, für kleinere Dichtegradienten steigt er dagegen mit diesen kontinuierlich an. Solch ein Ergebnis hatten wir auch schon bei der reinen TEM-Turbulenz. Auch dort trat ab einem bestimmten Dichtegradienten ein Abflachen der Wärmetransport-Dichtegradient Kurve auf.

#### $R/L_n$ -Scan bei $\beta_e = 0.01\%$

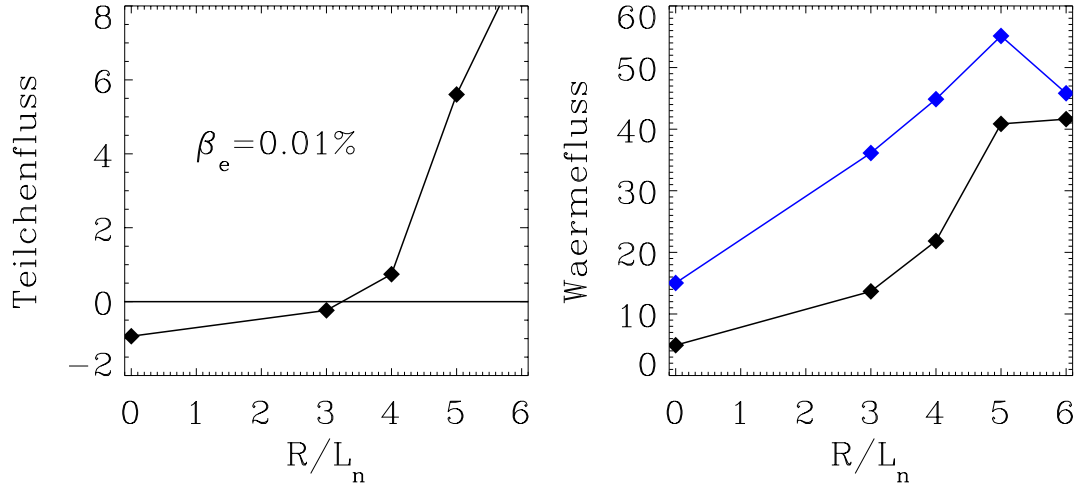
Erniedrigt man das Plasma- $\beta$ , senkt also den Plasmadruck relativ zum magnetischen Druck, so dass man ein  $\beta_e$  von 0.01% erhält, so verschiebt sich der Übergang vom Teilchenpinch zum Auswärtstransport zu größeren  $R/L_n$ , wie man in Abb. 7.9 sehen kann. Er liegt nun erst bei einem Dichtegradienten etwas größer als 3. Wie man am Wärmefluss sieht, tritt auch hier wieder das bekannte Abflachen der Transportkurve für hohe Dichtegradienten auf. Da auch hier für das kleinere  $\beta_e$  der Wärmefluss ab ca.  $R/L_n = 5$  nicht mehr vom Dichtegradienten abhängt, scheint diese Grenze von  $\beta_e$  unabhängig zu sein.

Um diesen Trend, das Verschieben des Nulldurchgangs mit  $\beta_e$ , weiter zu untersuchen, wurde noch eine Rechnung mit  $\beta_e = 0.2\%$  und  $R/L_n = 0$  durchgeführt. Trägt man alle Läufe bei diesem Dichtegradienten über  $\beta_e$  auf, erhält man Abb. 7.10. Man erkennt, dass der Pincheffekt mit wachsendem  $\beta$  sinkt und sich damit der Nulldurchgang der  $R/L_n$ -Kurve zu kleineren Werten verschiebt, bis es ab einem bestimmten  $\beta$  keinen Einwärtstransport und auch keinen Nulldurchgang mehr gibt.

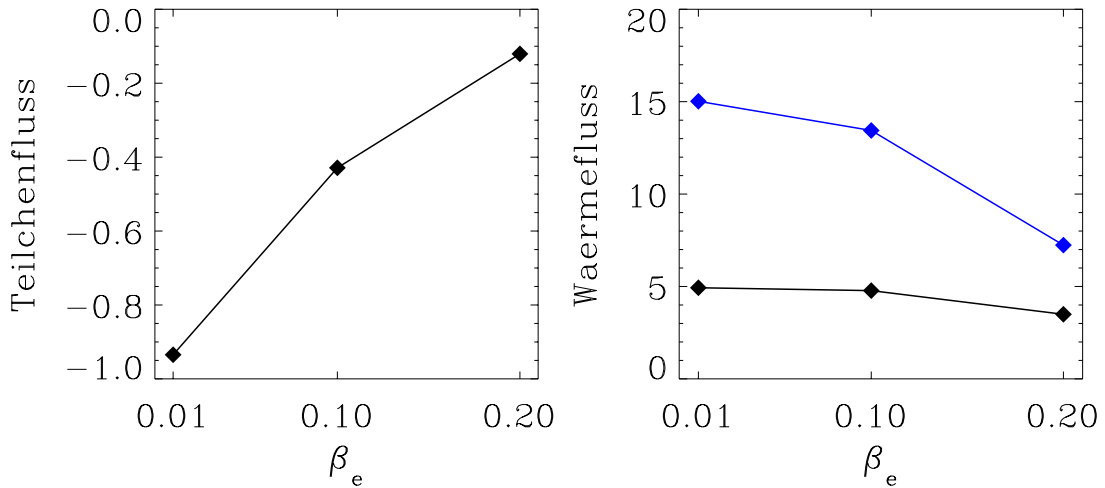
Am Wärmetransport im rechten Bild ist erkennbar, dass ein höheres  $\beta$  ein allgemeines Absinken des Transportes bewirkt. Somit sinkt auch der Einwärtstransport. Man kann das als typische  $\beta$ -Stabilisierung bezeichnen, die man auch bei der ITG-Turbulenz beobachtet.

---

ändert sich dadurch aber nicht.



**Abbildung 7.9:** Teilchen- und Wärmefluss von ITG/TEM-Turbulenz bei  $\beta_e = 0.01\%$  und  $R/L_T = 9$ .  $Q_{es,e}$  (schwarz),  $Q_{es,i}$  (blau)



**Abbildung 7.10:** Teilchen- und Wärmetransport von ITG/TEM-Turbulenz bei  $R/L_n = 0$ .  $Q_{es,e}$  (schwarz),  $Q_{es,i}$  (blau)

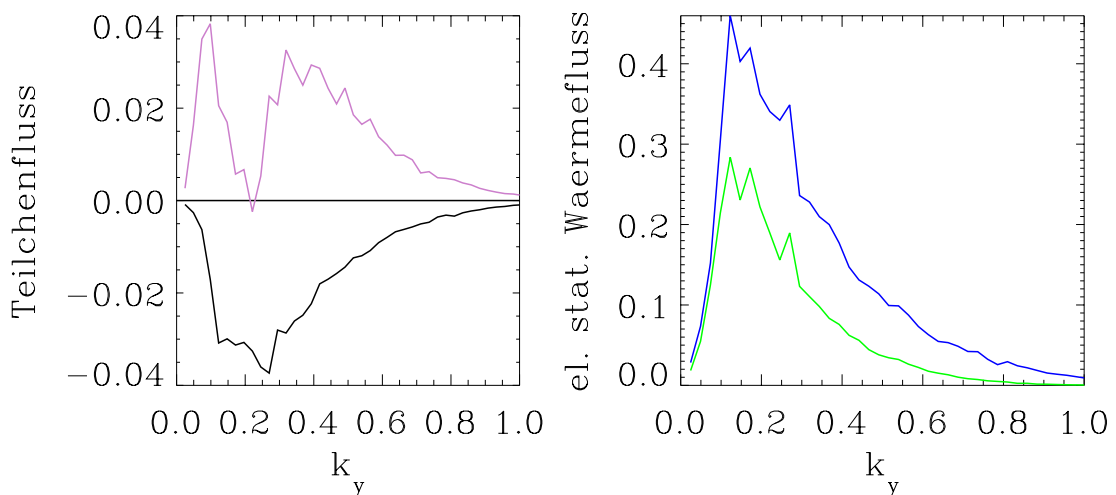


### 7.2.2 TEM-Pinch

Bisher waren es in diesem Abschnitt immer die gefangenen Elektronen, die für den Einwärtstransport der Teilchen sorgten. Gibt es auch Fälle, in denen die freien Elektronen zu einem Pinch führen?

Schon in Kapitel 6 konnte man in einem typischen Transportspektrum der TEM-Turbulenz sehen (Abb. 6.5), dass dort die freien Elektronen zum Einwärtstransport beitragen. Die gefangenen Teilchen bewirken im Fall der TEM-Turbulenz dagegen einen Netto-Auswärtstransport. Es stellt sich die Frage, ob man durch eine Veränderung der Parameter den Einwärtstransport zum dominanten Transportbeitrag machen kann.

Im Kapitel über die TEM-Turbulenz wurden die Transportanteile der gefangenen und der freien Elektronen getrennt aufgeführt (Abb. 6.20, 6.24). Dabei konnte man beobachten, dass mit wachsendem Dichtegradienten beide Arten von Elektronen zu einem Auswärtstransport führen. Will man also einen dominanten Teilchenpinch erhalten, muss man einen kleinen Dichtegradienten verwenden. Für  $R/L_{Ti} = 0$  konnten wir nie einen dominanten Pinch beobachten. Erst wenn der Ionentemperatur-Gradient eine bestimmte Schwelle überschreitet, erhält man einen resultierenden Einwärtstransport von Teilchen. Durch die Wahl von  $R/L_{Ti} = 6$  und eines Elektronentemperatur-Gradienten von  $R/L_{Te} = 9$ , sowie eines kleinen Dichtegradienten von  $R/L_n = 1.5$  und außerdem der Wahl eines kleinen  $\beta_e = 0.01\%$  erhält man tatsächlich einen Teilchenpinch, der von den freien Elektronen verursacht wird. Das Transportspektrum dieses Laufes ist in Abb. 7.11 dargestellt. Die Differenz zwischen Einwärtstransport der freien Elek-



**Abbildung 7.11:** Transportspektrum mit einem Teilchenpinch, der von den freien Elektronen getragen wird. Links ist der Teilchentransport der Elektronen dargestellt, rechts in blau der Wärmetransport der Elektronen, in grün der Wärmetransport der Ionen

tronen und Auswärtstransport der gefangenen Elektronen ist recht klein, beide Beiträge heben sich fast gegenseitig auf. Man befindet sich mit diesem Lauf jedoch in einem Parameterregime, in dem der resultierende Teilchenpinch von den freien Elektronen getragen wird. Hier muss betont werden, dass diese Ergebnisse nur durch die Behandlung der freien Elektronen als nichtadiabatisch möglich sind. Bei Rechnungen mit adiabatischen freien Elektronen tragen diese nicht zum Transport bei.

Betrachtet man die Wärmeflüsse dieses Laufes, so wird klar, dass der Elektronen-Wärmetransport der dominante Transportkanal ist. Dies ist eine Eigenschaft der TEM-Turbulenz, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde. Man kann somit von einem TEM-Pinch sprechen.

**Zusammenfassung** In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass in gekoppelter ITG/TEM-Turbulenz ein Teilchenpinch beobachtet werden kann. Dieser wird je nach vorherrschender Turbulenzart von den gefangenen Elektronen (bei dominanter ITG-Turbulenz) oder von freien Elektronen (bei dominanter TEM-Turbulenz) getragen. Es konnte weiter gezeigt werden, dass dieser Pincheffekt mit wachsendem  $\beta$  sinkt.



# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das gyrokinetische Vlasov-Maxwell System mittels eines nichtlinearen Vlasovcodes gelöst. Damit konnte der turbulente Transport analysiert werden. Speziell wurde die Turbulenz betrachtet, die von der Ionentemperatur-Gradienten-Mode (ITG-Mode) und von der Trapped-Electron-Mode (TEM) getrieben wird. Im einzelnen führten wir die folgenden Untersuchungen durch.

**Weiterentwicklung des GENE-Codes.** Zahlreiche numerische Untersuchungen von Diskretisierungsverfahren, Stabilitätskriterien und Konvergenzeigenschaften haben im Hinblick auf Robustheit und Genauigkeit zu einem deutlich verbesserten Simulationscode geführt. Die Implementierung des Spiegelterms eröffnete die Möglichkeit, gefangene Teilchen zu behandeln und machte damit die nichtlinearen Rechnungen zur TEM-Turbulenz und zum Teilchenpinch überhaupt erst möglich.

**Numerische Tests.** Das lineare Verhalten der neuen Version des GENE-Codes wurde relativ detailliert getestet. In allen Bereichen wurde eine gute Übereinstimmung mit den entsprechenden Ergebnissen des GS2-Codes gefunden. Ebenso wurden analytische Resultate zur Dämpfung von „zonal flows“ und Scher-Alfvénwellen reproduziert, wie auch die nichtlinearen Eigenschaften adiabatischer ITG-Turbulenz für einen repräsentativen Parametersatz.

**TEM-Turbulenz.** In zahlreichen nichtlinearen Simulationen untersuchten wir zunächst reine TEM-Turbulenz. Ihre Grundeigenschaften wurden mit Hilfe diverser Diagnostiken charakterisiert. Dabei stellte sich heraus, dass der Transport wenig von „zonal flows“ abhängt und die linearen Phasenbeziehungen verschiedener Plasmagrößen im Nichtlinearen nur leicht modifiziert werden. Aufgrund dieser Ergebnisse konnte ein einfaches Transportmodell entwickelt werden. Ein

Schwerpunkt der weiteren Untersuchungen lag auf der Analyse der Abhängigkeit des Transportes vom Sicherheitsfaktor  $q$ , bei dem eine  $q^\tau$ -Skalierung mit  $\tau \approx 1.7$  des Wärmetransportes gefunden wurde, die gut mit experimentellen Ergebnissen ( $1 \leq \tau \leq 2$ ) übereinstimmt. Weiter untersuchten wir das Phänomen der Temperaturprofilsteifheit. Es konnte in den nichtlinearen Rechnungen ein kritischer Elektronentemperatur-Gradient bestimmt werden, bis zu dem der Transport sehr gering ist, ab dem er allerdings stark ansteigt. Mit herkömmlichen quasilinearen Rechnungen kann dieses Ergebnis im Allgemeinen nicht gefunden werden. Die Untersuchung weiterer Parameterabhängigkeiten des Transportes bestätigten das einfache Transportmodell. Die einzige signifikante Abweichung erhielten wir für große Dichtegradienten bzw. für große Temperaturgradienten. So fanden wir ein Entkoppeln von Teilchenfluss und Wärmefluss im Fall großer Gradienten.

**Elektromagnetische ITG-Turbulenz.** Elektromagnetische Rechnungen zur ITG-Turbulenz konnten erfolgreich durchgeführt werden. Wir beobachteten ein Sinken des Transportes mit wachsendem  $\beta$ , für  $\beta/\beta_{\text{krit}}^{\text{MHD}} < 0.9$ . Überschreitet man diese Schwelle, setzt die kinetische Ballooning Mode ein und führt sehr schnell zu einem Anwachsen des Transportes. Obwohl frühere Gyrofluid-Rechnungen qualitativ dasselbe Verhalten zeigten, treten im quantitativen Verhalten doch erhebliche Abweichungen auf.

**Teilchenpinch.** Es wurde in gekoppelter ITG/TEM-Turbulenz ein Einwärts-transport von Teilchen beobachtet. Die nähere Untersuchung ergab das folgende Bild des Teilchenpinches. Im Fall dominierender ITG-Turbulenz tragen die *gefangenen Elektronen* den Einwärtstransport, dominiert dagegen die TEM Turbulenz, so sind die *freien Elektronen* für einen Einwärtstransport von Teilchen verantwortlich. Es konnte weiter gezeigt werden, dass sich im Fall der vorherrschenden ITG-Turbulenz der Übergang von Einwärts- zu Auswärtstransport mit wachsendem  $\beta$  zu kleineren Werten verschiebt und ab einem bestimmten  $\beta$  ganz verschwindet.

## 8.2 Ausblick

**Einführung von Stößen.** Die wichtigste Erweiterung der nächsten Zeit ist die Implementierung eines Stoßoperators. Es ist bekannt, dass Stöße einen großen Einfluss auf TEM-Turbulenz haben. Auch der Teilchenpinch zeigt in quasilinearen Rechnungen eine starke Abhängigkeit von der Stoßfrequenz (Angioni *et al.*, 2003). Um diese Ergebnisse in Turbulenzsimulationen zu bestätigen, ist ein Stoßoperator notwendig.

**Elektromagnetische ITG/TEM-Turbulenz.** Bisher stellte es sich als schwierig heraus, elektromagnetische Rechnungen mit gekoppelter ITG/TEM-Turbulenz

durchzuführen, da die benötigte Rechenleistung recht groß ist. Eine Beschleunigung des Programms, sowie Verwendung einer höheren Auflösung sind ein nächster Schritt auf dem Weg zur Untersuchung dieser Turbulenz und ihres Einflusses auf den Transport.

**Schnelle Teilchen und Verunreinigungen.** Eine weitere Untersuchung könnte sich einer dritten Teilchenspezies widmen. Eine Anwendung wäre die Untersuchung des wechselseitigen Einflusses von schnellen Teilchen und der gyrokinetischen Turbulenz, oder das Verhalten von Verunreinigungen in Gegenwart turbulenter Dynamik.

**Nichtlokale Rechnungen.** Gibt man die lokale Näherung in radialer Richtung auf, treten viele neue physikalische Effekte in Erscheinung, die untersucht werden können. Die Wechselwirkung der Turbulenz mit magnetischen Inseln, die Untersuchung von Randschichtturbulenz und von Transportbarrieren oder globale Rechnungen über ein größeres Plasmavolumen könnten Gegenstand der Forschung mit einem radial nichtlokalen Code sein.



# Anhang A

## Transportgrößen

In der Arbeit werden als Ergebnis oft Transportflüsse angegeben. Deren Berechnung aus den Simulationsdaten wird hier kurz vorgestellt. Im GENE-Code wird in jedem Zeitschritt die Störung der Verteilungsfunktion  $g_{1j}$  und die Störung des elektrostatischen und elektromagnetischen Potentials,  $\Phi_1$  bzw.  $A_{\parallel 1}$  berechnet. Daraus läßt sich direkt  $F_{1j}$  bestimmen. Für den radialen Teilchenfluss gilt dann unter Vernachlässigung der FLR-Effekte

$$\Gamma = \int v_x F_{1j} d^3v = v_{E,x} \int F_{1j} d^3v + \frac{B_x}{B_0} \int v_{\parallel} F_{1j} d^3v$$

Der erste Term stellt die radiale Komponente der  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Geschwindigkeit dar, der zweite Term entspricht der Projektion der Bewegung von Teilchen, die ausgelenkten Magnetfeldlinien folgen. Den Ausdruck für den Teilchenfluss kann man unter Verwendung von

$$n_1(x, y, z) = \int F_{j1} d^3v \quad n_0 u_{\parallel 1}(x, y, z) = \int v_{\parallel} F_{j1} d^3v$$

und Durchführung einer raumzeitlichen Mittelung  $\langle \dots \rangle$  schreiben als

$$\Gamma = \langle n_1 v_{E,x} \rangle + \frac{n_0 \langle u_{\parallel 1} B_x \rangle}{B_0}$$

Mit den Normierungen aus Abschnitt 2.3 erhält man

$$\Gamma = \Gamma_{\text{es}} + \Gamma_{\text{em}} = -\langle n_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \rangle + \hat{\epsilon} \beta_e \langle u_{\parallel j} \frac{\partial A_{\parallel 1}}{\partial y} \rangle$$

wobei normierte Größen mit demselben Symbol bezeichnet werden, wie die unnormierten.  $\Gamma$  wird in dieser Normierung in Einheiten von  $D_{\text{GB}} n_0 / L_{\perp}$  gemessen. Diese Größen gibt der GENE-Code aus, wie auch in Abschnitt 3.5.1 beschrieben wird.



Für den Wärmefluss gilt analog

$$Q_j = \int \frac{m_j v^2}{2} v_x F_{j1} d^3v = v_{E,x} \int \frac{m_j v^2}{2} F_{j1} d^3v + \frac{B_x}{B_0} \int \frac{m_j v^2}{2} v_{\parallel} F_{j1} d^3v$$

Wird dieser Ausdruck normiert und die Terme für  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$ ,  $q_{\parallel}$  und  $q_{\perp}$  aus Abschnitt 3.5.1 verwendet, so kommt man auf

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_{j,\text{es}} + Q_{j,\text{em}} \\ &= - \left\langle \left( \frac{1}{2} T_{\parallel j} + T_{\perp j} + \frac{3}{2} n_1 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle + \hat{\epsilon} \beta_e \left\langle \left( q_{\parallel j} + q_{\perp j} + \frac{5}{2} u_{\parallel j} \right) \frac{\partial A_{\parallel 1}}{\partial y} \right\rangle \end{aligned}$$

wobei der Wärmefluss nun in Einheiten von  $D_{\text{GB}} p_{j0} / L_{\perp}$  gemessen wird. Eine Berücksichtigung der FLR-Effekte ist ohne weiteres machbar, indem in der Berechnung der Momente die Besselfunktion  $J_0$  berücksichtigt wird.

# Anhang B

## Lie Transformationen

Hier werden kurz die Lie Transformationen nach (Littlejohn, 1982) eingeführt. Gegeben sei ein Vektorfeld  $X$  auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . In einem gegebenen Koordinatensystem  $\{x^i\}$  habe dieses Vektorfeld die Darstellung

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k X_k^i(x)$$

mit dem Ordnungsparameter  $\epsilon$ . Dieses Gleichungssystem soll in nullter Ordnung eine Lösung  $X_0$  haben. Die Störungstheorie soll nun eine Koordinatentransformation finden, so dass die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten  $\{\bar{x}^i\}$  einfacher sind. Da die nullte Ordnung bekannt ist, muss die Koordinatentransformation ein „near-identity“ Transformation sein, es muss also gelten

$$\bar{x}^i = x^i + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Nun wird die Transformation durch die Abbildung

$$T : \begin{cases} M \rightarrow M \\ x \rightarrow Tx = \bar{x} \end{cases}$$

definiert. Das Vektorfeld wird dann durch die tangentielle Abbildung  $T_*$  transformiert.

$$\bar{X} = T_* X$$

was in Koordinatendarstellung die Form

$$\bar{X}^i(\bar{x}) = \sum_j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} X^j(x)$$

hat. Um auch Skalarfelder transformieren zu können, werden diese als differentielle 0-Formen behandelt und mittels des Pullback-Operators  $T^*$  abgebildet. Da

dieser jedoch in die andere Richtung abbildet, gilt für eine skalare Abbildung  $s : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{s} = T^{*-1}s.$$

Eine Lie Transformation ist nun genau solch eine gesuchte „near-identity“ Koordinatentransformation. Sie kann geschrieben werden mit der Erzeugenden  $G$ .

$$\bar{x} = T^\epsilon x \quad \text{mit} \quad T^\epsilon = \exp(\epsilon G)$$

Die Tangentenabbildung wird dann zu

$$T_*^\epsilon = \exp(-\epsilon L_G)$$

mit der Lie-Ableitung  $L_G$ , deren Wirkung auf ein Vektorfeld  $X$  definiert ist als der Kommutator der beiden Felder

$$L_G X = [G, X] \quad (L_G X)^i = G^j X^i_{,j} - X^j G^i_{,j}$$

Damit kann nun eine Einsform  $\gamma$  in neue Koordinaten durch die folgende Beziehung transformiert werden

$$\Gamma = T^{*-1}\gamma + dS \tag{B.1}$$

mit dem Transformationsoperator  $T^{*-1}$ . Nimmt man nun für diesen Operator den inversen pullback obiger Lietransformation an, so gilt bis zur zweiten Ordnung in  $\epsilon$

$$T^{*-1} = \exp(-\epsilon^2 L_2) \exp(-\epsilon L_1) = 1 - \epsilon L_1 + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} L_1^2 - L_2 \right)$$

wobei eine Reihe von Erzeugenden  $G_1, G_2, \dots$  und deren zugehörige Lie-Ableitungen  $L_1, L_2, \dots$  eingeführt wurden.

Entwickelt man nun in Gleichung (B.1) die Größen  $\Gamma$ ,  $\gamma$  und  $S$  auch in Reihen von  $\epsilon$ , so kann man mittels vergleichen der Ordnungen beider Seiten, die folgenden Transformationsgleichungen für die verschiedenen Ordnungen aufstellen.

$$\Gamma_0 = \gamma_0 + dS_0 \tag{B.2}$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 - L_1 \gamma_0 + dS_1 \tag{B.3}$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2 - L_1 \gamma_1 + \frac{1}{2} (L_1^2 - 2L_2) \gamma_0 + dS_2 \tag{B.4}$$

Nun muß noch definiert werden, wie die Lieoperatoren  $L_n$  auf die Einsformen wirken sollen. Nach z.B. (Littlejohn, 1982) gilt

$$(L_n \gamma)_\mu = G_n^\nu \left( \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z^\nu} - \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial z^\mu} \right). \tag{B.5}$$

# Anhang C

## Gyromittel und Gyromapping

Hier berechnen wir die gyromittelten Größen der Gleichung (2.7).

$$\begin{aligned}\langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{X} + \mathbf{r})} d\theta \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\theta\end{aligned}$$

Man muß also das Gyromittel von  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  berechnen. Dabei wird die Definition der Besselfunktion nach z.B. (Abramowitz & Stegun, 1972) (9.1.21, S. 360) verwendet:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

Man erhält dann für das Gyromittel

$$\begin{aligned}\langle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho k_\perp \cos(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho k_\perp \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i\rho k_\perp \cos \theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} e^{i\rho k_\perp \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} J_0(\rho k_\perp) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i\rho k_\perp \cos(\theta' + \pi)} d\theta' \\ &= \frac{1}{2} J_0(\rho k_\perp) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\rho k_\perp \cos \theta'} d\theta' \\ &= \frac{1}{2} J_0(\rho k_\perp) + \frac{1}{2} J_0(-\rho k_\perp) = J_0(\rho k_\perp)\end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl des lokalen Koordinatensystems, konnte die funktionale Form von  $\mathbf{a}(\theta)$  vereinfacht werden. Dazu wurde das Koordinatensystem so gelegt, dass der Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{k}_\perp$  und  $\mathbf{a}$  gemessen wird. Da über eine ganze Gyration integriert wird und sich physikalisch während einer Gyrationdauer nichts ändert, kann man den Startwinkel der Mittelung immer beliebig festlegen. Außerdem wurde die Achsensymmetrie für  $J_0$  verwendet, also  $J_0(z) = J_0(-z)$ .

Unter Verwendung eines weiteren Ausdrucks für die Besselfunktion (Abramowitz & Stegun, 1972)

$$J_l(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^\nu}{\nu!(l+\nu)!}$$

kann man den folgenden Ausdruck für das Gyromittel von  $\Phi_1$  berechnen.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J_0(\rho k_\perp) \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}(\rho k_\perp)^2\right)^\nu}{(\nu!)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}(\rho \nabla_\perp / i)^2\right)^\nu}{(\nu!)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}(-i\rho \nabla_\perp)^2\right)^\nu}{(\nu!)^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \hat{\Phi}_1(\mathbf{k}) \\ &= J_0(-i\rho \nabla_\perp) \Phi_1(\mathbf{X}) = J_0(\lambda) \Phi_1(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

mit  $\lambda^2 = -\rho^2 \nabla_\perp^2$ . Analog erhält man das Gyromittel für  $\mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r})$ .

Die zweite Größe, die in der Herleitung der gyrokinetischen Gleichungen auftritt ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_\perp(\mathbf{X}, \mu, \theta) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_\perp d\theta \\ &= v_\perp \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{c}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Es gilt also  $\langle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{c}(\theta) \rangle$  zu berechnen. Auch hier vereinfacht eine geeignete Wahl von  $\theta_0$  der Transformation  $\theta' = \theta + \theta_0$  die Rechnung deutlich. Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{r} &= \rho \mathbf{k}\mathbf{a} = \rho \mathbf{k}(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta) = \rho(k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta) \\ &= \rho(k_1 \cos(\theta' - \theta_0) - k_2 \sin(\theta' - \theta_0)) \\ &= \rho k_1 (\cos \theta' \cos(-\theta_0) - \sin \theta' \sin(-\theta_0)) - \rho k_2 (\cos \theta' \sin(-\theta_0) + \sin \theta' \cos(-\theta_0)) \\ &= \rho(k_1 \cos(\theta_0) + k_2 \sin(\theta_0)) \cos \theta' + \rho(k_1 \sin(\theta_0) - k_2 \cos(\theta_0)) \sin \theta' \end{aligned}$$

---

Um nun  $\theta_0$  zu bestimmen, wird gefordert

$$\begin{aligned} k_1 \cos(\theta_0) + k_2 \sin(\theta_0) &= k_{\perp} \\ k_1 \sin(\theta_0) - k_2 \cos(\theta_0) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\cos \theta_0 = \frac{k_1}{k_{\perp}} \quad \sin \theta_0 = \frac{k_2}{k_{\perp}}$$

Man hat also bei dieser Wahl des Winkels  $\theta_0$  den folgenden Ausdruck für das Skalarprodukt

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = \rho k_{\perp} \cos \theta'$$

Die Funktion  $\mathbf{c}(\theta)$  enthält einen Term mit einem Sinus und einen mit einem Kosinus, die man getrennt betrachten kann. Damit folgt für den ersten Teil (die Integrationsgrenzen müssen nicht verschoben werden, da der Integrand  $2\pi$  periodisch ist und über eine gesamte Periode integriert wird)

$$\begin{aligned} \langle \sin \theta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta' - \theta_0) e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \theta' \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta') e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{k_1}{k_{\perp}} \sin \theta' - \frac{k_2}{k_{\perp}} \cos \theta' \right) e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \end{aligned}$$

Es kann mittels partieller Integration gezeigt werden, dass der erste Term verschwindet. Für den zweiten gilt

$$\begin{aligned} &-\frac{k_2}{k_{\perp}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta' e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\ &= -\frac{k_2}{k_{\perp}} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \cos \theta' e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta' e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \right) \\ &= -\frac{k_2}{k_{\perp}} \frac{1}{2\pi} \left( i\pi J_1(\rho k_{\perp}) + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta' e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \right) \\ &= -\frac{k_2}{k_{\perp}} \frac{1}{2\pi} (i\pi J_1(\rho k_{\perp}) - i\pi J_1(-\rho k_{\perp})) = -\frac{k_2}{k_{\perp}} i J_1(\rho k_{\perp}) \end{aligned}$$

Nun wird dieselbe Rechnung noch einmal durchgeführt, allerdings mit der Erset-

zung des Sinus durch den Kosinus.

$$\begin{aligned}
 \langle \cos \theta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta' - \theta_0) e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta' \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \sin \theta') e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{k_1}{k_{\perp}} \cos \theta' + \frac{k_2}{k_{\perp}} \sin \theta' \right) e^{i\rho k_{\perp} \cos \theta'} d\theta' \\
 &= \frac{k_1}{k_{\perp}} i J_1(\rho k_{\perp})
 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{c}(\theta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rangle &= -\mathbf{e}_1 \langle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin \theta \rangle - \mathbf{e}_2 \langle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cos \theta \rangle \\
 &= \mathbf{e}_1 \frac{k_2}{k_{\perp}} i J_1(\rho k_{\perp}) - \mathbf{e}_2 \frac{k_1}{k_{\perp}} i J_1(\rho k_{\perp}) = (k_2 \mathbf{e}_1 - k_1 \mathbf{e}_2) \frac{i}{k_{\perp}} J_1(\rho k_{\perp})
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{u}_{\perp} \rangle &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (k_2 \mathbf{e}_1 - k_1 \mathbf{e}_2) \frac{i}{k_{\perp}} J_1(\rho k_{\perp}) \mathbf{A}_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\
 &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (k_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{k}) - k_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{k})) \frac{i}{k_{\perp}} J_1(\rho k_{\perp}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\
 &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (i k_2 A_{11}(\mathbf{k}) - i k_1 A_{12}(\mathbf{k})) \frac{1}{k_{\perp}} \frac{\rho k_{\perp}}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} \rho^2 k_{\perp}^2)^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\
 &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_2 A_{11}(\mathbf{k}) - \partial_1 A_{12}(\mathbf{k})) \frac{\rho}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} \rho^2 (\nabla_{\perp}/i)^2)^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\
 &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_2 A_{11}(\mathbf{k}) - \partial_1 A_{12}(\mathbf{k})) \frac{\rho}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} (i\rho \nabla_{\perp})^2)^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}}
 \end{aligned}$$

Definiert man nun eine neue Funktion  $I_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4} z^2)^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!}$  und  $\lambda^2 = -\rho^2 \nabla_{\perp}^2$ , so kann man weiter schreiben

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{u}_{\perp} \rangle &= v_{\perp} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\partial_2 A_{11}(\mathbf{k}) - \partial_1 A_{12}(\mathbf{k})) \frac{\rho}{2} I_1(\lambda) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} \\
 &= -v_{\perp} \frac{\rho}{2} I_1(\lambda) B_{1\parallel} = -\frac{c}{e} \mu I_1(\lambda) B_{1\parallel}(\mathbf{X}) \quad (\text{C.2})
 \end{aligned}$$

# Anhang D

## Stencil-Notation

Will man einen Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten ausdrücken, erhält man gerade bei höheren Ordnungen teilweise recht umfangreiche Ausdrücke. Um diese übersichtlicher zu schreiben, kann man die Notation mit sogenannten „Stencils“ (Differenzenstern) abkürzen. Es werden nur die Koeffizienten der einzelnen Terme in eckiger Klammer geschrieben (Hackbusch, 1996).

Folgendes Beispiel soll das verdeutlichen. Die Ableitung vierter Ordnung einer Funktion  $f$  am Ort  $x_i$  berechnet sich nach dem folgenden Ausdruck.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x}$$

Da insgesamt fünf Punkte in die Differenzenformel miteinbezogen werden (wenn auch der Koeffizient des mittleren Punktes Null ist), kann man diese Formel vereinfacht mit einem Fünfer-Stencil schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x} [ 1 \quad -8 \quad 0 \quad 8 \quad -1 ] f$$

Denkt man sich nun  $f$  als einen Vektor, so kann man die Notation auch als eine vereinfachte Schreibweise einer Pentadiagonalmatrix verstehen. Der obige Stencilausdruck stellt dann eine Abkürzung dar für die folgende Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{N-1} \\ f'_N \end{pmatrix} = \frac{1}{12\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 \\ 8 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}$$



Da wir als Randbedingungen periodische und quasiperiodische verwenden, sind durch die Notation immer die entsprechenden Randbedingungen mit gemeint. In  $x$  und  $y$ -Richtung also periodische (wie in dem angeführten Beispiel), in paralleler  $z$ -Richtung sind dagegen quasiperiodische Randbedingungen gemeint.

# Anhang E

## Charakterisierung von Differenzenverfahren

In dieser Arbeit werden verschiedene Differenzenverfahren verwendet. Hier im Anhang wird kurz allgemein gezeigt, welche Eigenschaften ein Differenzenverfahren hat, da im Haupttext des öfteren auf diese Eigenschaften eingegangen wird.

Ein Differenzenverfahren approximiert einen Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten. Dazu wird die Funktion  $f$  auf einem Gitter dargestellt mit den Gitterknoten an den Punkten  $x_m$ , der Gitterweite  $h$  und den Funktionswerten an den Gitterpunkten  $f(x_m) = f_m$ . Allgemein kann man eine  $n$ -te Ableitung der Funktion  $f$  am Ort  $x_m$  schreiben durch eine gewichtete Summe über einige Funktionswerte an benachbarten Gitterpunkten.

$$\left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_m = \sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i f_{m+i} \quad (\text{E.1})$$

Das Ziel ist nun, die Koeffizienten  $c_i$  und die Ausdehnung des Stencils von  $m - i_0$  bis  $m + i_1$  so zu bestimmen, dass die Ableitung möglichst gut approximiert wird. Um das weiter zu untersuchen, beschränken wir uns auf erste Ableitungen.

### E.1 Ordnung

Ein naheliegendes Maß für die Qualität des Differenzenquotienten ist die Fehlerordnung, die man aus einer Taylorentwicklung der rechten Seite von Gleichung (E.1) erhält.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_m = \sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i \left( f_m + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_m (ih) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_m (ih)^2 + \dots \right) \quad (\text{E.2})$$

Daraus erhält man die Konsistenzbedingungen, die erfüllt sein müssen, damit der Differenzenquotient überhaupt die richtige Ableitung approximiert.

$$\sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i = 0 \quad \sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i(ih) = 1 \quad (\text{E.3})$$

Wie gut die Approximation nun ist, hängt vom ersten nicht verschwindenden Term auf der rechten Seite von Gl. (E.2) ab. Er bestimmt die Ordnung in  $h$  mit der der Approximationsfehler sinkt. So gilt für ein Verfahren erster Ordnung zusätzlich zu (E.3)

$$\sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i(ih)^2 \neq 0$$

Ein üblicher Stencil für die Approximation der ersten Ableitung lautet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dass beide Konsistenzbedingungen erfüllt sind, kann man leicht nachprüfen. Die Bedingung für die zweite Ordnung ergibt

$$c_{-1}(-h)^2 + c_1(h)^2 = -h^2 + h^2 = 0$$

Die nächste Ordnung würde nun fordern

$$\sum_{i=-i_0}^{i_1} c_i(ih)^3 = 0$$

was allerdings hier nicht mehr erfüllt ist, da gilt

$$c_{-1}(-h)^3 + c_1(h)^3 = -1(-h^3) + h^3 = 2h^3 \neq 0$$

Das angegebene Verfahren ist also zweiter Ordnung.

## E.2 Spektrale Auflösung

Neben der Fehlerordnung hat ein Differenzenquotient noch eine andere Eigenschaft, die spektrale Auflösung. Sie gibt an, wie sich die Wirkung des diskretisierten Differentialoperators in Abhängigkeit von der Wellenlänge ändert. Sie beschreibt also den dispersiven Charakter diskretisierter Operatoren.

Um ein Bild davon zu bekommen, wenden wir den Differentialoperator einer ersten Ableitung auf eine ebene Welle an. Man erhält in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = ike^{ikx}$$

Dieselbe Operation auf einem Gitter durchgeführt mit diskretisiertem Operator und diskretisierter Funktion führt zu

$$\sum_{j=-i_0}^{i_1} c_j e^{ikx_{m+j}} = \sum_{j=-i_0}^{i_1} c_j e^{ik(x_m+jh)} = e^{ikx_m} \sum_{j=-i_0}^{i_1} c_j e^{ikjh}$$

Da diese Operation auf allen Gitterpunkten durchgeführt wird, kann man eine Spektralfunktion  $Q$  definieren und schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = ikQ(kh)e^{ikx} \quad \text{mit} \quad Q(kh) = (ik)^{-1} \sum_{j=-i_0}^{i_1} c_j e^{ikjh}$$

Für das oben angeführte zentrierte Verfahren zweiter Ordnung kommt man auf eine Spektralfunktion von

$$Q(kh) = \frac{c_{-1}e^{-ikh} + c_0 + c_1e^{ikh}}{ik} = \frac{-e^{-ikh} + e^{ikh}}{2ikh} = \frac{\sin(kh)}{kh}$$

Hat man eine periodische Box der Länge  $L$  und  $N$  Gitterpunkte, so ist  $h = L/N$ . Die kleinste Wellenlänge, die noch dargestellt werden kann, ist die Nyquist-Wellenlänge  $\lambda_{\text{Nyquist}} = 2h$ . Damit sieht man, dass sich das Argument der Spektralfunktion  $kh$  zwischen den Werten 0 und  $k_{\text{max}}h = 2\pi/(2h)h = \pi$  bewegt. Aus der Berechnungsvorschrift für die Spektralfunktion kann man entnehmen, dass antisymmetrische Verfahren immer zu rein reellen Spektralfunktionen führen. Solche Verfahren dissipieren keine Energie, sind aber dispersiv.

Verwendet man dagegen unsymmetrische Stencils, so hat man im Allgemeinen auch noch einen Imaginärteil in der Spektralfunktion, der zu einer numerischen Dämpfung der Mode in Abhängigkeit von  $kh$  führt.



# Anhang F

## Krümmungsdrift

Hier wird die Umformung der Krümmungsdrift von der Form (2.13) zur Form (2.34) vorgeführt.

Es gilt als erstes die folgende vektorielle Umformung.

$$(\nabla \times (B_0 \mathbf{b}_0))_{\perp} = \nabla B_0 \times \mathbf{b}_0 + B_0 (\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp}$$

Damit man schreiben

$$(\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_0)_{\perp} - \nabla B_0 \times \mathbf{b}_0}{B_0} = \frac{1}{B_0} \left( \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\perp} - \nabla B_0 \times \mathbf{b}_0 \right)$$

wobei im letzten Schritt das Ampèresche Gesetz verwendet wurde. Nun wird weiter die folgende MHD Gleichgewichtsbedingung verwendet.

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{J}_{\perp} \times \mathbf{B}_0$$

Ein Kreuzprodukt mit  $\mathbf{B}_0$  führt zu

$$\mathbf{B}_0 \times \nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{J}_{\perp} \times \mathbf{B}_0) = \frac{1}{c} (B_0^2 \mathbf{J}_{\perp} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{J}_{\perp}) \mathbf{B}_0) = \frac{B_0^2}{c} \mathbf{J}_{\perp}$$

Und damit hat man insgesamt

$$(\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} = \frac{1}{B_0} \left( \frac{4\pi}{c} \frac{c}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla p - \nabla B_0 \times \mathbf{b}_0 \right) = \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla B_0 + \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \mathbf{b}_0 \times \frac{\nabla p}{p_0}$$

Wenn man die Definition von  $\beta = 8\pi p/B_0^2$  einführt, kommt man zu

$$(\nabla \times \mathbf{b}_0)_{\perp} = \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla B_0 + \beta \mathbf{b}_0 \times \frac{\nabla p}{p_0} \approx \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla B_0$$

Die letzte Näherung kann man machen, wenn  $\beta \ll 1$  ist, was bei den Rechnungen in dieser Arbeit immer der Fall ist. Wir vernachlässigen deshalb den Term mit dem Druckgradienten.



# Anhang G

## Herleitung des Upwindverfahrens vierter Ordnung

In Abschnitt 3.2.3 wurde das verwendete Upwindverfahren vierter Ordnung angegeben. Hier soll es hergeleitet werden. In Abschnitt E wurden die Eigenschaften von Differenzenverfahren allgemein beschrieben. Diese Eigenschaften kann man sich auch zunutze machen und bestimmte Eigenschaften fordern und dazu ein Verfahren finden.

Wir verlangen von dem gesuchten Verfahren, dass es von vierter Ordnung ist, dass der Realteil der Spektralfunktion an der Stelle  $kh = \pi/2$  mit der exakten Spektralfunktion übereinstimmt und dass der Imaginärteil der Spektralfunktion bei  $kh = \pi$  einen bestimmten Wert  $\nu$  hat. Da zentrierte Verfahren immer die höchste Ordnung für eine gegebene Stencilbreite ergeben, und die vierte Ordnung für zentrierte Differenzen einen Fünferstencil verwendet, brauchen wir mindestens sechs Gitterpunkte. Um symmetrisch in der Breite zu bleiben, verwenden wir sieben Gitterpunkte, um den Differentialquotienten zu approximieren. Die Konsistenzbedingungen bis zur vierten Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \sum_{j=-3}^3 c_j &= 0 & \sum_{j=-3}^3 c_j(jh) &= 1 & \sum_{j=-3}^3 c_j(jh)^2 &= 0 \\ & & \sum_{j=-3}^3 c_j(jh)^3 &= 0 & \sum_{j=-3}^3 c_j(jh)^4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Spektralfunktion lautet

$$\begin{aligned} Q(kh) &= (ik)^{-1} \sum_{j=-3}^3 c_j e^{ikjh} = (ik)^{-1} \left( \sum_{j=-3}^3 c_j \cos(jkh) + i \sum_{j=-3}^3 c_j \sin(jkh) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \sum_{j=-3}^3 c_j \sin(jkh) - i \sum_{j=-3}^3 c_j \cos(jkh) \right) = \frac{H_1(kh) + iH_2(kh)}{kh} \end{aligned}$$



Es werden nun neben den fünf Konsistenzbedingungen noch die folgenden beiden Bedingungen gefordert

$$H_1(\pi/2) = \pi/2 \quad H_2(\pi) = \nu$$

womit man sieben Gleichungen für sieben Unbekannte hat. Das Ergebnis dieses Gleichungssystems ist der Stencil für das verwendete Upwindverfahren.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\nu}{192h} [ & 3 \quad -18 \quad 45 \quad -60 \quad 45 \quad -18 \quad 3 ] \\ & + \frac{1}{192} [ 32 \quad -112 \quad 32 \quad 0 \quad -32 \quad 112 \quad -32 ] \\ & + \frac{1}{192} [ -12\pi \quad 48\pi \quad -60\pi \quad 0 \quad 60\pi \quad -48\pi \quad 12\pi ] \quad (\text{G.1}) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden tragen als antisymmetrische Stencils nicht zur Dissipation des Verfahrens bei, nur der erste von  $\nu$  abhängige Term ist für einen Imaginärteil der Spektralfunktion verantwortlich. In den Rechnungen dieser Arbeit wurde durchgehend  $\nu = -2$  verwendet, womit man dann endgültig auf den in Gleichung 3.5 angegebenen Stencil kommt.

# Literaturverzeichnis

- Abramowitz, Milton, & Stegun, Irene A. (eds). 1972. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: John Wiley & Sons.
- Angioni, C., Peeters, A. G., Pereverzev, G. V., Rytter, F., Tardini, G., & ASDEX Upgrade Team. 2003. Theory-based modeling of particle transport in ASDEX Upgrade H-mode plasmas, density peaking, anomalous pinch and collisionality. *Phys. Plasmas*, **10**(8), 3225–3239.
- Antonsen, Jr., T. M., Drake, J. F., Guzdar, P. N., Hassam, A. B., Lau, Y. T., Liu, C. S., & Novakovskii, S. V. 1996. Physical mechanism of enhanced stability from negative shear in tokamaks: Implications for edge transport and the L-H transition. *Phys. Plasmas*, **3**, 2221.
- Baker, D. R., Wade, M. R., Petty, C. C., Rosenbluth, M. N., Luce, T. C., de-Grassie, J. S., Rice, B. W., Groebner, R. J., Greenfield, C. M., Doyle, E. J., Rettig, C. L., Rhodes, T. L., & Mahdavi, M. A. 2000. Particle transport phenomena in the DIII-D tokamak. *Nucl. Fusion*, **40**(5), 1003–1016.
- Beer, M. A., & Hammett, G. W. 1996. Bounce averaged trapped electron fluid equations for plasma turbulence. *Phys. Plasmas*, **3**(11), 4018.
- Beer, M. A., Cowley, S. C., & Hammett, G. W. 1995. Field-aligned coordinates for nonlinear simulations of tokamak turbulence. *Phys. Plasmas*, **2**(7), 2687–2700.
- Beer, Michael Alan. 1994. *Gyrofluid models of turbulent transport in tokamaks*. Ph.D. thesis, Princeton University.
- Braginskii, S. I. 1965. Transport processes in a plasma. In: Leontovich, M. A. (ed), *Reviews of Plasma Physics*, vol. 1. Consultants Bureau.
- Brizard, A. 1989. Gyrokinetic energy conservation and Poisson-bracket formulation. *Phys. Fluids B*, **1**(7), 1381–1384.
- Candy, J., & Waltz, R. E. 2002. An Eulerian Gyrokinetic-Maxwell Solver. *J. Comp. Phys.*, **186**, 545–581.

- Candy, J., Waltz, R. E., & Dorland, W. 2004. The local limit of global gyrokinetic simulations. *Phys. of Plasmas*, **11**(5), L25–L28.
- Cap, Ferdinand. 1994. *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*. Springer-Verlag.
- Cary, J.R., & Littlejohn, R.G. 1983. Noncanonical Hamiltonian Mechanics and Its Application to Magnetic Field Line Flow. *Ann. Phys.*, **151**, 1–34.
- Chen, Francis F. 1974. *Introduction to Plasma Physics*. Plenum Press, New York.
- Chen, Y., Parker, S. E., Cohen, B. I., Dimits, A. M., Nevins, W. M., Shumaker, D., Decyk, V. K., & Leboeuf, J. N. 2003. Simulations of turbulent transport with kinetic electrons and electromagnetic effects. *Nucl. Fusion*, **43**, 1121–1127.
- Cheng, C. Z. 1982. Kinetic theory of collisionless ballooning modes. *Phys. Fluids*, **25**(6), 1020–1026.
- Cohen, B. I., Williams, T. J., Dimits, A. M., & Byers, J. A. 1993. Gyrokinetic simulations of  $E \times B$  velocity-shear effect on ion-temperature-gradient modes. *Phys. Fluids B*, **5**(8), 2967.
- Connor, J. W., Hastie, R. J., & Taylor, J. B. 1978. Shear, Periodicity, and Plasma Ballooning Modes. *Phys. Rev. Lett.*, **40**(6), 396–399.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. 1928. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, **100**, 32–74.
- Cowley, S. C., Kulsrud, R. M., & Sudan, R. 1991. Considerations of ion-temperature-gradient-driven turbulence. *Physics of Fluids B*, **3**(10), 2767–2782.
- Cross, Rodney C. 1988. *An Introduction to Alfvén Waves*. Adam Hilger imprint by IOP Publishing Ltd.
- Dannert, T., & Jenko, F. 2004. Vlasov simulation for kinetic shear Alfvén waves. *Comp. Phys. Comm.*, **163**(2), 67.
- Dekker, K., & Verwer, J. G. 1984. *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. North-Holland.
- D’haeseleer, W. D., Hitchon, W. N. G., Callen, J. D., & Shohet, J. L. 1991. *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*. Springer-Verlag.
- Dimits, A. M., Williams, T. J., Byers, J. A., & Cohen, B. I. 1996. Scalings of Ion-Temperature-Gradient-Driven Anomalous Transport in Tokamaks. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1), 71.

- Dimits, A. M., Bateman, G., Beer, M. A., Cohen, B. I., Dorland, W., Hammett, G. W., Kim, C., Kinsey, J. E., Kotschenreuther, M., Kritz, A. H., Lao, L. L., Mandrekas, J., Nevins, W. M., Parker, S. E., Redd, A. J., Shumaker, D. E., Sydora, R., & Weiland, J. 2000. Comparisons and physics of tokamak transport models and turbulence simulations. *Physics of Plasmas*, **7**(3), 969–983.
- Dominguez, R. R. 1993. Anomalous particle and electron energy pinches. *Phys. Fluids B*, **5**(6), 1782.
- Dubin, Daniel H.E., Krommes, John A., Oberman, C., & Lee, W.W. 1983. Non-linear gyrokinetic equations. *Phys. Fluids*, **26**(12), 3524–3535.
- Fried, B. D., & Conte, S. D. 1961. *The Plasma Dispersion Function*. Academic Press.
- Frieman, E. A., & Chen, Liu. 1982. Nonlinear gyrokinetic equations for low-frequency electromagnetic waves in general plasma equilibria. *Phys. Fluids*, **25**(3), 502–508.
- Furno, I., Weisen, H., & TCV team. 2003. Observation of inward and outward particle convection in the core of electron cyclotron heated and current driven plasmas in the Tokamak à Configuration Variable. *Phys. Plasmas*, **10**(6), 2422.
- Garbet, X., Mantica, P., Ryter, F., Cordey, G., Imbeaux, F., Sozzi, C., Manini, A., Asp, E., Parail, V., Wolf, R., & the JET EFDA Contributors. 2004. Profile stiffness and global confinement. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **46**, 1351–1373.
- Greene, John M., & Johnson, John L. 1962. Stability Criterion for Arbitrary Hydromagnetic Equilibria. *Phys. Fluids*, **5**(5), 510.
- Gruber, O., Arslanbekov, R., Atanasiu, C., Bard, A., Becker, G., Becker, W., Beckmann, M., Behler, K., Behringer, K., Bergmann, A., Bilato, R., Bolshukin, D., & et al. 2001. Overview of ASDEX Upgrade results. *Nuclear Fusion*, **41**(10), 1369.
- Hackbusch, Wolfgang. 1996. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. 2 edn. Teubner, Stuttgart.
- Hahm, T. S. 1988. Nonlinear gyrokinetic equations for tokamak microturbulence. *Phys. Fluids*, **31**(9), 2670–2673.
- Hahm, T. S., Beer, M. A., Lin, Z., Hammett, G. W., Lee, W. W., & Tang, W. M. 1999. Shearing rate of time-dependent  $E \times B$  flow. *Phys. Plasmas*, **6**(3), 922–926.

- Hahm, T.S., Lee, W.W., & Brizard, A. 1988. Nonlinear gyrokinetic theory for finite-beta plasmas. *Phys. Fluids*, **31**(7), 1940–1948.
- Hammett, G. W., Beer, M. A., Dorland, W., Cowley, S. C., & Smith, S. A. 1993. Developments in the Gyrofluid Approach to Tokamak Turbulence Simulations. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **35**, 973–985.
- Hasegawa, A., & Wakatani, M. 1987. Self-Organization of Electrostatic Turbulence in a Cylindrical Plasma. *Phys. Rev. Letters*, **59**(14), 1581.
- Hinton, F. L., & Horton, C. W. 1971. Amplitude Limitation of a Collisional Drift Wave Instability. *Phys. Fluids*, **14**(1), 116.
- Hinton, F. L., & Rosenbluth, M. N. 1999. Dynamics of axisymmetric ( $E \times B$ ) and poloidal flows in tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **41**, A653–A662.
- Horton, W., Zhu, P., Hoang, G. T., Aniel, T., Ottaviani, M., & Garbet, X. 2000. Electron transport in Tore Supra with fast wave electron heating. *Phys. of Plasmas*, **7**(5), 1494–1510.
- Itoh, K., Itoh, S.-I., & Fukuyama, A. 1999. *Transport and Structural Formation in Plasmas*. Institute of Physics Publishing.
- Jenko, F. 2004. On the Nature of ETG Turbulence and Cross-Scale Coupling. *Journal of Plasma and Fusion Research, in print*.
- Jenko, F., & Dannert, T. 2004. Trapped Electron Mode Turbulence and Electron Temperature Profile Stiffness. *to be submitted to Phys. Rev Letters*.
- Jenko, F., & Dorland, W. 2001. Nonlinear electromagnetic gyrokinetic simulations of tokamak plasmas. *Plasma Phys. and Contr. Fusion*, **43**(12A), 141–150.
- Jenko, F., Dorland, W., Kotschenreuther, M., & Rogers, B. N. 2000. Electron temperature gradient driven turbulence. *Phys. of Plasmas*, **7**(5), 1904–1910.
- Jenko, Frank, & Scott, Bruce D. 1999a. Numerical computation of collisionless drift Alfvén turbulence. *Phys. Plasmas*, **6**, 2705.
- Jenko, Frank, & Scott, Bruce D. 1999b. Numerical computation of collisionless drift wave turbulence. *Phys. Plasmas*, **6**, 2418.
- Kaufmann, Michael. 2003. *Plasmaphysik und Fusionsforschung*. B. G. Teubner GmbH, Stuttgart.
- Kotschenreuther, M., Rewoldt, G., & Tang, W.M. 1995. Comparison of Initial Value and Eigenvalue Codes for Kinetic Toroidal Plasma Instabilities. *Comp. Phys. Comm.*, **88**, 128–140.

- Kruskal, M. D., & Kulsrud, R. M. 1958. Equilibrium of a Magnetically Confined Plasma in a Toroid. *Phys. Fluids*, **1**(4), 265.
- Lambert, J. D. 1991. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*. John Wiley & Sons.
- Lele, Sanjiva K. 1992. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. *J. Comp. Phys.*, **103**, 16–42.
- Lewandowski, J. L. V. 2004. Particle-in-Cell Simulations with Kinetic Electrons. *Journal of Scientific Computing*, **21**(2), 173.
- Lin, Z., Hahm, T. S., Lee, W. W., Tang, W. M., & White, R. B. 1998. Turbulent Transport Reduction by Zonal Flows: Massively Parallel Simulations. *Science*, **281**, 1835.
- Littlejohn, R. G. 1982. Hamiltonian Perturbation Theory in Noncanonical Coordinates. *J. Math. Phys.*, **23**(5), 742.
- Miskane, F., Garbet, X., Dezairi, A., & Saifaoui, D. 2000. Anomalous particle pinch in tokamaks. *Phys. Plasmas*, **7**(10), 4197.
- Parker, S. E., & Lee, W. W. 1993. A fully nonlinear characteristic method for gyrokinetic simulation. *Phys. Fluids B*, **5**(1), 77–86.
- Parker, S. E., Lee, W. W., & Santoro, R. A. 1993. Gyrokinetic Simulation of Ion Temperature Gradient Driven Turbulence in 3D Toroidal Geometry. *Phys. Rev. Lett.*, **71**(13), 2042.
- Parker, S. E., Dorland, W., Santoro, R. A., Beer, M. A., Liu, Q. P., Lee, W. W., & Hammett, G. W. 1994. Comparisons of gyrofluid and gyrokinetic simulations. *Phys. Plasmas*, **1**(5), 1461.
- Parker, S. E., Chen, Y., & Wan, W. 2004. Electromagnetic gyrokinetic simulations. *Phys. Plasmas*, **11**(5), 2594–2599.
- Petty, C. C., Kingsey, J. E., & Luce, T. C. 2004. Safety factor scaling of energy transport in L-mode plasmas on the DIII-D tokamak. *Phys. Plasmas*, **11**(3), 1011.
- Ryter, F., Tardini, G., Luca, F. De, Fahrbach, H.-U., Imbeaux, F., Jacchia, A., Kirov, K. K., Leuterer, F., Mantica, P., Peeters, A. G., Pereverzev, G., Suttrop, W., & ASDEX Upgrade Team. 2003. Electron heat transport in ASDEX Upgrade: experiment and modelling. *Nucl. Fusion*, **43**, 1396–1404.
- Schram, P. P. J. M. 1991. *Kinetic Theory of Gases and Plasmas*. Kluwer Academic Publishers.

- Scott, Bruce. 2001 (März). *Low Frequency Fluid Drift Turbulence in Magnetised Plasmas*. Tech. rept. IPP 5/92. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik.
- Scott, Bruce D. 1998. Global consistency for thin flux tube treatments of toroidal geometry. *Phys. Plasmas*, **5**(6), 2334.
- Snyder, P. B., & Hammett, G. W. 2001a. Electromagnetic effects on plasma microturbulence and transport. *Phys. Plasmas*, **8**(3), 744–749.
- Snyder, P. B., & Hammett, G. W. 2001b. A Landau fluid model for electromagnetic plasma microturbulence. *Phys. Plasmas*.
- Sydora, R. D., Decyk, V. K., & Dawson, J. M. 1996. Fluctuation-induced heat transport results from a large global 3D toroidal particle simulation model. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **38**, A281–A294.
- Villard, L., Allfrey, S. J., Bottino, A., Brunetti, M., Falchetto, G. L., Grandgirard, V., Hatzky, R., Nührenberg, J., Peeters, A. G., Sauter, O., Sorge, S., & Vaclavik, J. 2004. Full radius linear and nonlinear gyrokinetic simulations for tokamaks and stellarators: zonal flows, applied  $E \times B$  flows, trapped electrons and finite beta. *Nucl. Fusion*, **44**, 172–180.
- Wagner, F., & Stroth, U. 1993. Transport in toroidal devices — the experimentalist’s view. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **35**, 1321.
- Wagner, F., Gruber, O., Lackner, K., Murmann, H. D., Speth, E., Becker, G., Bosch, H. S., Brocken, H., Cattanei, G., & et al. 1986. Experimental Study of the Principles Governing Tokamak Transport. *Phys. Rev. Lett.*, **56**(20), 2187.
- Waltz, R. E., Kerbel, G. D., & Milovich, J. 1994. Toroidal gyro-Landau fluid model turbulence simulations in a nonlinear ballooning mode representation with radial modes. *Phys. Plasmas*, **1**(7), 2229.
- Waltz, R. E., Staebler, G. M., Dorland, W., Hammett, G. W., Kotschenreuther, M., & Konings, J. A. 1997. A gyro-Landau-fluid transport model. *Phys. Plasmas*, **4**(7), 2482–2496.
- Weiland, Jan. 2000. *Collective Modes in Inhomogeneous Plasma*. IoP Publishing.
- Wesson, John. 1997. *Tokamaks*. Oxford science publications.