

Zentrum Mathematik der Technischen Universität München  
Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Analytische Mechanik  
Forschungseinheit Dynamische Systeme

# **Eine mathematische Analyse von Modellen für Belebtschlammbecken**

Hajnalka Fuer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr. R. Lasser

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. J. Scheurle
2. Univ.-Prof. Dr. S. Walcher,  
Rheinisch-Westfälische Hochschule Aachen

Die Dissertation wurde am 28. April 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 14. Mai 2003 angenommen.

*für Júlia Péter-Fuer*

*“Wege entstehen dadurch, dass man sie geht”*

(Franz Kafka)

# Vorwort

“You don’t find fish in lakes and rivers anymore. You have to catch them in cans. Towns die. Oil spills. Money talks.” (Heller: “Something happened”\*)

Um eine solche Situation abzuwenden werden Belebungsverfahren zur biologischen Reinigung von Abwässern benutzt. Sie wurden in den Jahren zwischen 1913 und 1927 von englischen Ingenieuren entwickelt und gelten heute weltweit als das am weitesten verbreitete Verfahren zur biologischen Abwasserreinigung. In Belebtschlamm-Anlagen werden organische Abwasserinhaltsstoffe abgebaut (Nitrifikation und Denitrifikation) sowie Phosphate biologisch entfernt.

Die vielfältigen Prozesse, die in solchen Becken ablaufen, bedürfen der sorgfältigen Steuerung, um eine effiziente Reinigung zu garantieren; dabei ist insbesondere die von außen zugefügte Konzentration an Sauerstoff von Bedeutung.

Um die Verhältnisse in Belebtschlamm-Anlagen genauer zu beschreiben, wurde im Jahr 1987 von einer Arbeitsgruppe der International Association on Water Quality (IAWQ) ein mathematisches Dimensionierungsmodell entwickelt (Activated Sludge Model No. 1, [Hen87]). In diesem Modell werden die wichtigsten Komponenten, die das Prozessgeschehen in Belebtschlamm-Anlagen bestimmen, berücksichtigt. Die Prozesse im Belebungsbecken werden in Form von Differentialgleichungen miteinander verknüpft und in Relation zu den jeweiligen baulichen und betrieblichen Randbedingungen gesetzt. Das Modell erlaubt eine dynamische Simulation der Vorgänge in einer Belebtschlamm-Anlage, ist daher realitätsnah, benötigt aber zu Durchführung der Berechnungen eine Vielzahl an Detailinformationen, die es zu gewinnen oder abzuschätzen gilt.

Auch von Ingenieuren, die mit diesem System arbeiten, wird die Frage gestellt, wie man bei der Vielzahl der Parameter noch einen Überblick über das Verhalten

---

\*Joseph Heller: “Something happened”, Paperback 1997

des Systems gewinnen kann. Das mathematisch und verfahrenstechnisch bedeutsame Problem der Parameteridentifikation ist bei einem System dieser Größe im allgemeinen nicht exakt lösbar. Deshalb kann zur grundlegenden Klärung der Beziehungen der Parameter untereinander und im Hinblick auf eine effiziente Prozesssteuerung eine mathematische Analyse des Modells helfen.

In dieser Arbeit werden verschiedene Modelle für Verfahren zur biologischen Abwasserreinigung vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet und analysiert. Dazu werden reduzierte Versionen des Originalsystems (ASM 1) untersucht, wobei die wichtigsten Prozesse (Nitrifikation und Denitrifikation) berücksichtigt werden. Das dynamische Verhalten dieser reduzierten nichtlinearen Differentialgleichungssysteme wird analysiert und mit Hilfe der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und der Theorie der Chemostaten vollständig bestimmt.

Exakte Bedingungen für das innere Gleichgewicht des Systems werden angegeben, wobei die Gleichgewichte parameterabhängig sind. Die Existenz und Stabilitätsbedingungen zeigen den Einfluss von wichtigen Parametern (beispielsweise Sauerstoffkonzentration) auf das Verhalten des Systems.

Die Ergebnisse lassen sich qualitativ auch auf das Originalsystem übertragen.

Es wird weiter gezeigt, wie die Konzentration des Sauerstoffs gewählt werden muß, um eine optimale Reinigung zu erzielen.

Die mathematische Analyse zeigt auf, daß das vorliegende Modell (ASM 1) die Koexistenz verschiedener Nitrifizierer oder verschiedener Denitrifizierer nicht zuläßt; dies stellt sich als inhärente Schwäche des Modells heraus.

## **Aufbau der Arbeit**

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. Im ersten Kapitel stelle ich grundlegende Eigenschaften von Bioreaktoren sowie eine kurze Einführung in die Modellierung von Belebtschlamm-Becken und die Reaktionskinetik dar. Außerdem werden verschiedene Arten von Chemostaten (bekannte und neue Variationen) aufgeführt

und analysiert.

Im Kapitel 2 wird das Activated Sludge Model No. 1 vorgestellt, das den Ausgangspunkt der Analyse in dieser Arbeit darstellt, und auf seine Anwendungen in der Praxis eingegangen. In der Literatur vorhandene Erweiterungen und Varianten, wie z. B das ASM 2 und ASM 3, werden kurz präsentiert.

Im dritten Kapitel werden die grundlegenden mathematischen Begriffe und Resultate eingeführt, die für die Analyse des Modellsystems unerlässlich sind und Resultate hergeleitet, die im Kapitel 4 zur Analyse des Modells (ASM 1) dienen.

Abschnitt 3.1 gibt eine Einführung in die Theorie dynamischer Systeme. Es folgen Definitionen und Aussagen über dynamische Systeme, invariante Mengen, über Limesmengen, globale Attraktoren, alle Teil einer Theorie, die für die Analyse als Werkzeug zur Verfügung steht.

Chemostate sind wichtige Werkzeuge bei der Analyse größerer Systeme, da sie häufig als Untersysteme auftreten. Der Chemostat mit einem Substrat und beliebig vielen Mikrobenspezies, wobei das Prinzip der kompetitiven Exklusion (es kann höchstens eine Spezies überleben) herrscht wird in Abschnitt 3.2.1 behandelt. Dieses Modell wird in Abschnitt 3.2.2 auf verschiedenen Abbauraten erweitert. Es wird gezeigt, daß sich die Ergebnisse bezüglich kompetitiver Ausschluss übertragen lassen.

Abschnitt 3.3 enthält ein zentrales Ergebnis der vorliegenden Arbeit, das in Kapitel 4 für Stabilitätsaussagen verwendet wird: Satz 3.3.1 über Limesmengen liefert Bedingungen für die Existenz eines globalen Attraktors und verallgemeinert u.a. ein Resultat von Markus und Thieme ([Thi92]) über asymptotisch autonome Systeme.

Kapitel 4 bildet den eigentlichen Kern dieser Arbeit. Es beinhaltet das vereinfachte Modell, das die wichtigsten Prozesse Nitrifikation und Denitrifikation enthält.

Dieses System ist explizit nicht lösbar. Jedoch läßt sich das Langzeitverhalten der Lösungen, und seine globale Dynamik (Existenz ist leicht unter einigen Zusatzbedingungen zu zeigen) vollständig bestimmen. Dies geschieht durch Berechnung der stationäre Punkte (Abschnitt 4.2.3) und die Untersuchung ihrer Stabilität (Abschnitt 4.2.4). Das allgemeine Modell wird im Abschnitt 4.3 anhand eines Beispiels (die Aufnahmefunktionen haben Monod-Typ) illustriert.

In 4.4 wird gezeigt, dass das Modell die Koexistenz verschiedener Nitrifizierer und Denitrifizierer nicht zuläßt, indem das Exklusionsprinzip für mehrere Nitrifizierer und Denitrifizierer bewiesen wird (Satz 4.4.5).

Zum Schluss des Kapitels werden Effizienzfragen studiert (Abschnitt 4.5), die beim Abbau des Substrats auftauchen: Wie sollte die Sauerstoffkonzentration gewählt werden, um eine optimale Reinigung zu erreichen? Diese Ergebnisse für den Gleichgewichtspunkt  $E_1$  im Monod-Fall werden im Satz 4.5.4 zusammengefasst.

Im Kapitel 5 werden allgemeiner Kaskaden von Reaktoren betrachtet, wobei zwei oder mehrere Becken hintereinandergeschaltet werden (Abschnitt 5.1). Schließlich wird eine 5-dimensionale Erweiterung des Nitrifikations-Denitrifikations-Systems untersucht, bei der die Konzentration des leicht abbaubarem Substrats als die fünfte Variable hinzugefügt wird. Hier liegen Teilergebnisse zu Positivität, Beschränktheit, Existenz von stationären Punkten und ihre Stabilität vor.

## **Danksagung**

Es ist mir ein besonderes Vergnügen, meinem Betreuer Prof. Dr. S. Walcher meinen herzlichsten Dank für seine ausgezeichnete Betreuung und die vielen fachlichen Anregungen auszudrücken. Seine engagierte Unterstützung meine Arbeit hat mich sehr angespornt. Mir hat die Arbeit mit ihm viel Einsicht und Freude gebracht.

Weiterhin möchte ich mich herzlich bei Prof. J. Scheurle für seine Unterstützung

und für die Übernahme des Gutachtens bedanken.

Für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Graduiertenkollegs “Angewandte Algorithmische Mathematik” bedanke ich mich herzlich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft, bei Herrn Prof. Dr. P. Gritzmann sowie bei Dr. A. Brieden.

Großer Dank geht an meine Kollegen im Graduiertenkolleg, an Franziska Berger für detailliertes Korrekturlesen und an alle anderen für zahlreiche konstruktive Diskussionen und freundliche Unterstützung bei Computerproblemen. Danken möchte ich ebenso den Mitarbeitern des Instituts für Biomathematik und Biometrie der GSF Neuherberg, besonders Herrn Prof. Dr. Eberl für seine wichtigen Hinweise und Anmerkungen.

Ich bin meinem Mann István sehr dankbar und verpflichtet für seine Ausdauer und Unterstützung.

Allen meinen Freunden danke ich vor allem für die guten Diskussionen und Gespräche. Mein besonderer Dank gilt Zoltán für seine liebevolle Unterstützung in manchen schwierigen persönlichen Situationen und sein konstantes Vertrauen in mich. Köszí!

Schließlich, aber nicht zuletzt, möchte ich mich bei meinen Eltern für die immerwährende Liebe und moralische Unterstützung bedanken. Ohne Euch hätte ich es nicht geschafft. Vielen Dank!

Hajnalka Fuer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Bioreaktoren in der biologischen Abwasserreinigung . . . . .	1
1.2	Reaktionskinetik . . . . .	2
1.2.1	Darstellung von Reaktionen (nach Bastin/Dochain) . . . . .	2
1.2.2	System mit mehreren Reaktionen. . . . .	3
1.2.3	Transportphänomene. . . . .	4
1.2.4	Zur Gestalt der einzelnen Terme. . . . .	5
1.2.5	Vergleich mit der chemischen Reaktionskinetik . . . . .	6
1.2.6	Grundsätzliche Fragen . . . . .	7
1.3	Verschiedene Arten von Chemostaten . . . . .	8
1.3.1	Der Chemostat mit einem Substrat und einer Mikroben- spezies . . . . .	8
1.3.2	Der Chemostat mit zwei Mikrobenspezies . . . . .	10
1.3.3	Der Chemostat mit Zufluss von Mikroben . . . . .	12
1.3.4	Der Chemostat mit verschiedenen Abtransportraten . . . . .	16
1.3.5	Der Chemostat mit Zufluss von Mikroben und verschiede- nen Abtransportraten . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Das ASM 1-Modell</b>	<b>29</b>
2.1	Vorstellung des Modells . . . . .	29



2.1.1	Wichtige Prozesse im Modell . . . . .	35
2.1.2	Annahmen und Einschränkungen im Modell . . . . .	37
2.2	Verwendung des Modells in der Praxis . . . . .	38
2.2.1	Biologische Abwasserreinigung . . . . .	39
2.2.2	Das Belebtschlammverfahren . . . . .	40
2.2.3	Nitrifikation und Denitrifikation . . . . .	41
2.3	Erweiterungen und Varianten . . . . .	42
2.3.1	Das ASM 2-Modell . . . . .	42
2.3.2	Das ASM No. 2d-Modell . . . . .	43
2.3.3	Das ASM No. 3-Modell . . . . .	43
2.4	Die Notwendigkeit der Reduktion komplexer biologischer Abwasserreinigungsmodele . . . . .	44
2.4.1	Annahmen zur Modellvereinfachung . . . . .	45
2.5	Zielsetzung der vorliegenden Arbeit . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>49</b>
3.1	Zusammenfassung bekannter Ergebnisse . . . . .	49
3.1.1	Aussagen über Lösungen nichtlinearer autonomer Differentialgleichungssysteme . . . . .	50
3.1.2	Stabilität und Instabilität . . . . .	53
3.1.3	Poincaré-Bendixson-Theorie im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	57
3.1.4	Ljapunov-Theorie . . . . .	58
3.2	Der allgemeine Chemostat . . . . .	60
3.2.1	Der Chemostat mit einem Substrat und $n$ Mikrobenspezies	60
3.2.2	Der Chemostat mit verschiedenen Abbauraten . . . . .	64
3.3	Aussagen über Limesmengen . . . . .	66

<b>4</b>	<b>Ein vereinfachtes Modell für Nitrifikation und Denitrifikation</b>	<b>73</b>
4.1	Vorstellung des Modells . . . . .	73
4.2	Das autonome System mit monotonen Aufnahme- raten . . . . .	75
4.2.1	Positivität von Lösungen . . . . .	76
4.2.2	Beschränktheit der positiven Lösungen . . . . .	77
4.2.3	Stationäre Punkte . . . . .	78
4.2.4	Stabilität der stationären Punkte . . . . .	83
4.3	Der Spezialfall mit Monod- Aufnahme- funktionen . . . . .	91
4.3.1	Stationäre Punkte . . . . .	92
4.4	Das Exklusionsprinzip . . . . .	95
4.4.1	Ein System mit mehreren Nitrifizierern und Denitrifizierern . . . . .	95
4.4.2	Analyse des Systems . . . . .	98
4.4.3	Stabilität der stationären Punkte . . . . .	99
4.5	Effizienzfragen . . . . .	103
4.5.1	Eine Minimierungsaufgabe für die Sauerstoff- konzentration . . . . .	103
4.5.1.1	Schalterfunktionen als Aufnahme- funktionen . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Erweiterungen des 4-dimensionalen Systems</b>	<b>109</b>
5.1	Kaskaden mit zwei Becken . . . . .	110
5.1.1	Stabilität der stationären Punkte . . . . .	113
5.2	Ein 5-dimensionales System . . . . .	116
5.2.1	Positivität und Beschränktheit . . . . .	118
5.2.2	Stationäre Punkte . . . . .	119
5.2.3	Stabilität der stationären Punkte . . . . .	123
	<b>Notation</b>	<b>127</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

In diesem Kapitel werden wichtige Begriffe, die bei Abwasserreinigungsprozessen auftreten, eingeführt und kurz erläutert, wie z.B. Bioreaktoren, Chemostate. Bemerkenswerte Eigenschaften wie Reaktionskinetik, Transportphänomene und Persistenz werden aufgeführt.

### 1.1 Bioreaktoren in der biologischen Abwasserreinigung

Bioreaktoren treten in vielen Bereichen auf, wie z.B (bei Chemostaten\*) in der Industrie oder Klärschlammbecken in der biologischen Abwasserreinigung([HE95], [Wei00]). Ein Bioreaktor ist ein Behältnis, in dem Bakterienkulturen zu einem spezifischen Zweck genutzt werden. Biologisch gesehen sind Bioreaktoren abgeschlossene Systeme, in denen die für den mikrobiologischen Sanierungsprozess wichtigen verfahrenstechnischen Parameter gut gesteuert werden können.

---

\*Der Chemostat ist ein Laborgerät zur Züchtung von Mikroorganismen. Für eine detaillierte Einführung in die Theorie des Chemostates siehe das Buch von Smith/Waltman [SW95].

Im Bereich der Abwasserreinigung werden beispielsweise in Bioreaktoren Mikroorganismen vermehrt, die zur Reinigung industrieller Wässer eingesetzt werden können, insbesondere bei der biologischen Abwasserreinigung von z. B. Industrieabwässern.

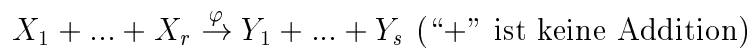
Die Bauformen von Bioreaktoren richten sich nach dem Verfahren (aerob oder anaerob), nach der Einsatzintensität-z.B. Kläranlagen- und nach den zu bewältigenden Volumina. Entsprechend reichen Bioreaktoren von einfachen Laboranlagen über größere Becken bis zu komplexen, großtechnischen Verfahrensanlagen.

Hier wird nur die räumlich homogene Situation betrachtet; die Reaktoren werden durch kontinuierliches Rühren, Verhindern von Wandanlagerung, etc. in einem Zustand gehalten, der homogene Verteilung aller beteiligten Chemikalien, Substrate, Mikroben garantiert. Deshalb führen die Modelle auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

## 1.2 Reaktionskinetik

### 1.2.1 Darstellung von Reaktionen (nach Bastin/Dochain)

Grundlage für die Beschreibung von Reaktionen ist eine von Monod aufgestellte und später von Bastin/Dochain erweiterte Theorie (siehe [Bas80], Kapitel 1, Abschnitt 1.4.1, Seite 19). Danach läuft eine Reaktion folgendermassen ab:

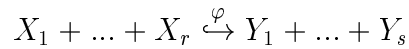


Hier sind  $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s$  bestimmte "Komponenten" (Populationen von Mikroorganismen, Enzyme, Substrate, etc.) im System.

$X_1, \dots, X_r$  heissen Reaktanten,  $Y_1, \dots, Y_s$  sind Reaktionsprodukte.

Es kommt häufig vor, dass Reaktionen autokatalytisch sind, d.h., dass zur Produktion einer Komponente die Komponente selbst benötigt wird.

In Bastin/Dochain ([Bas80]) wird dies (falls Reaktion autokatalytisch bezüglich  $Y_1$ ) mit



symbolisiert.

Die Reaktionsrate  $\varphi$  ist eine positivwertige Funktion der Konzentration (Masse) aller Komponenten, und u.U. weiterer Parameter (Temperatur, pH-Wert...). Die zeitliche Änderung der Komponenten, die durch die gegebene Reaktion bewirkt wird, ist je proportional zur Reaktionsrate:

$$\frac{d}{dt}(\text{Konzentration von } Y_i) = k_i \varphi, \text{ mit positiven Konstanten } k_i.$$

Falls  $X_i$  nicht auch als Reaktionsprodukt auftritt, gilt:

$$\frac{d}{dt}(\text{Konzentration von } X_i) = -l_i \varphi, \text{ mit positiven Konstanten } l_i.$$

Die  $k_i$  bzw.  $l_i$  werden als Ertragskoeffizienten bezeichnet.

**Bemerkung 1.2.1** *Die Existenz der Konstanten  $k_i, l_i$  derart, dass die obigen Gleichungen erfüllt sind, ist eine sehr starke zusätzliche Annahme (“Erhaltungssatz”) über den Ablauf und das Ergebnis der Reaktion. Sie wird in dieser Arbeit beibehalten.*

## 1.2.2 System mit mehreren Reaktionen.

Gegeben seien nun  $n$  Komponenten  $X_1, \dots, X_n$  (mit Konzentrationen  $x_1, \dots, x_n$ ), und  $m$  Reaktionen.

$\sum_{i=1}^n \vartheta_{ij} X_i \xrightarrow{\varphi_j} \sum_{i=1}^n \rho_{ij} X_i; 1 \leq j \leq m$  mit  $\vartheta_{ij}, \rho_{ij} \in \{0, 1\}$  und Reaktionsraten  $\varphi_j, j = 1, \dots, m$ .

Mit der Matrix  $K = (k_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  der Ertragskoeffizienten wird die durch die Reaktionen bewirkte zeitliche Änderung der Konzentrationen im System bezeichnet.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

(Hier gehen Temperatur, pH-Wert und die Konzentrationen in die  $\varphi_j$  ein.)

Vorzeichenregel für die  $k_{ij}$  (Ertrag von Komponente  $i$  bei Reaktion  $j$ ):

Falls Komponente  $i$  Reaktionsprodukt (auch Autokatalyst) von Reaktion  $j$  ist, dann  $k_{ij} > 0$ ; falls Komponente  $i$  Reaktant (aber nicht Autokatalyst) von Reaktion  $j$  ist, dann  $k_{ij} < 0$ ; in den verbleibenden Fällen ist  $k_{ij} = 0$ .

### 1.2.3 Transportphänomene.

An Transportphänomenen (im weitesten Sinne) können auftreten:

- (i) Zufuhr (von Substrat oder Mikroben)
- (ii) Abfluss (der Mischung von Substrat, Mikroben, Reaktionsprodukte)
- (iii) Ausgasen (von Reaktionsprodukten)

Damit hat das vollständige Modell folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, Z(t)) \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n, Z(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} - r(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1(t, x) \\ \vdots \\ q_n(t, x) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Hierbei steht  $Z(t)$  für physikalisch-chemische Parameter (Temperatur, pH-Wert), die durch die Reaktion selbst nicht geändert werden; die  $f_i(t)$ ,  $q_i(t, x)$  und  $r(t)$  sind nichtnegative Funktionen.

Genauer: falls  $x_i$  zugeführt wird, ist  $f_i > 0$ . Falls abgeführt wird (Rate  $r(t) > 0$ ), liefert der zweite Term einen nichttrivialen Beitrag. Falls eine Komponente  $i$  auf andere Weise den Reaktor verlässt (durch Ausgasen), ist  $q_i > 0$ .

**Beispiel 1.2.2** *Chemostat mit einem Substrat und einer Mikrobenspezies*

$$\begin{cases} \dot{S} = 1 - S - \frac{mSx}{a+S} \\ \dot{x} = x\left(\frac{mS}{a+S} - 1\right), \\ S(0) \geq 0, x(0) > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Beispiel 1.2.3** *Chemostat mit einem Substrat und zwei Mikrobenspezies*

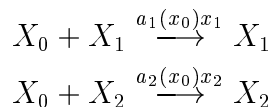
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = r(k - x_0) - \frac{a_1(x_0)}{\gamma_1}x_1 - \frac{a_2(x_0)}{\gamma_2}x_2 \\ \dot{x}_1 = (-r + a_1(x_0))x_1 \\ \dot{x}_2 = (-r + a_2(x_0))x_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

(Zufluss von Substrat mit Konzentration  $rk$ ; Abfluss von Mischung; je Rate  $r$ . Mikroben nehmen Substrat auf und vermehren sich dadurch.)

In Standardform erhält man:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\gamma_1 & -1/\gamma_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(x_0)x_1 \\ a_2(x_0)x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rk \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Hier finden zwei Reaktionen statt und zwar:



## 1.2.4 Zur Gestalt der einzelnen Terme.

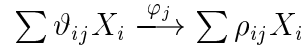
- Standardannahmen: Die  $\varphi_j, f_i, q_i, r$  sind nichtnegativ und hinreichend oft differenzierbar für  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, t \geq 0$ .



- Sinnvolle Annahmen zur Gestalt der Reaktionsraten:

Ist ein Reaktant für eine Reaktion nicht vorhanden, so findet die Reaktion nicht statt.

Hat man also die Reaktion  $j$ :



so ist im Fall  $\delta_{lj} = 1$  stets  $\varphi_j(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_n, *) = 0$ .

Die Voraussetzung hinreichender Differenzierbarkeit auch am Rande führt dann zu  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n, Z) = x_1^{\delta_{1j}} \dots x_n^{\delta_{nj}} \bar{\varphi}_j(x_1, \dots, x_n, Z)$  mit zumindest stetigem  $\bar{\varphi}_j$ .

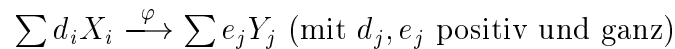
- Zur Gestalt der Ausgasungsraten:

Typisch ist  $q_i = \beta_i x_i$ , solange  $x_i$  unterhalb der Sättigungskonstante liegt. Hier hängt  $\beta_i$  üblicherweise von der Temperatur ab.

### 1.2.5 Vergleich mit der chemischen Reaktionskinetik

Es gibt formale Ähnlichkeiten, jedoch sollte angemerkt werden, dass chemische Reaktionsgleichungen im Idealfall aus einem "exakten" Modell kommen:

- Eine Reaktionsgleichung

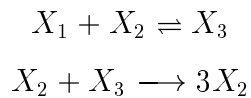


berücksichtigt die Massenbilanz; man erhält also daraus Erhaltungsgrößen für die Differentialgleichung, die die Kinetik beschreibt.

- Gilt das Massenwirkungsgesetz (Idealfall verdünnter Gase oder Lösungen), so kann man  $\varphi = \Pi x_i^{d_i}$  setzen. Die Massenerhaltung garantiert, dass  
 (zeitliche Änderung von  $Y_j$  durch Reaktion) =  $k\dot{\varphi}$ ,  
 (zeitliche Änderung von  $X_i$  durch Reaktion) =  $-k\dot{\varphi}$ , vorausgesetzt, die Messung erfolgt in konsistenten Einheiten (z.B. mol) .

- In einem abgeschlossenem System hat man das Prinzip der mikroskopischen Reversibilität (auch: Prinzip des detaillierten Gleichgewichts): Im Gleichgewichtszustand sind alle Einzelreaktionen im Gleichgewicht.

**Beispiel 1.2.4** (*Autokatalyse mit Massenwirkungsgesetz*)



Das entsprechende System ist:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 + k_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 x_2 + k_2 x_3 + 2k_3 x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= k_1 x_1 x_2 - k_2 x_3 - k_3 x_2 x_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

(Beachte:  $x_1 + x_2 + 2x_3$  ist die Erhaltungsgrösse). Generell sollte man bei Bioreaktoren wesentlich ungenauere Informationen erwarten. Es gibt darüber hinaus nur selten eine Herleitung von kinetischen Gleichungen aus "ersten Prinzipien".

## 1.2.6 Grundsätzliche Fragen

Für die folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

ist die Positivität von Lösungen mit positivem Anfangswert eingebaut (dank der Gestalt von  $K$ ). Grundlegende Fragen sind

- Permanenz: Überleben die Mikroben? Wenn ja, welche?
- Beschränktheit von Lösungen.

## 1.3 Verschiedene Arten von Chemostaten

In diesem Abschnitt werden einige, zum Teil bekannte Ergebnisse (aber auch neue Resultate) über Chemostate aufgeführt. Verschiedene Varianten der Chemostate mit und ohne Mikrobenezfluss bzw. mit verschiedenen Abflussraten lassen sich auf ähnliche Weise behandeln und führen zu fast demselben Ergebnis, das intuitiv wie folgt lautet: “Es kann höchstens eine Mikrobenspezies überleben und zwar diejenige, die am besten hungern kann”.

Chemostaten spielen eine wichtige Rolle bei der Abwasserreinigung, siehe dazu auch Beispiele aus [Riv77]. Eine ausführliche Zusammenfassung verschiedener Chemostate befindet sich in dem Monograph von Smith und Waltman ([SW95]). Der Chemostat ist ein einfaches Beispiel für dynamische Systeme die “kompetitiven Ausschluss” modellieren, wobei mehrere Mikrobenspezies um dieselbe Nahrung konkurrieren.

### 1.3.1 Der Chemostat mit einem Substrat und einer Mikrobenspezies

Die Differentialgleichungen, die den Chemostat mit einem Substrat und einer Mikrobenspezies beschreiben, sind nach entsprechenden Skalierungen folgende (vgl. [SW95], Seite 6):

$$\begin{cases} \dot{S} = 1 - S - \frac{mSx}{a+S} \\ \dot{x} = x\left(\frac{mS}{a+S} - 1\right), \\ S(0) \geq 0, x(0) > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

wo  $S(t)$  die Konzentration des Substrats zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet und  $x(t)$  die Konzentration der Mikroben ist. Hier wird der Term

$$\frac{mSx}{a+S}$$

als Nahrungsaufnahmeterm verwendet, wobei diese Form von Aufnahme-funktion in der Literatur als “Monod-Kinetik” bekannt ist. Weiterhin wird mit  $m$  die maximale Wachstumsrate der Organismen bezeichnet und  $a$  wird Halbsättigungskonstante genannt.

Für das obige System ist der positive Quadrant positiv invariant (siehe [SW95]). Falls das System also positive Anfangswerte hat, dann bleiben die zwei Komponenten der Lösung positiv für alle positiven Zeiten. Darüber hinaus gilt: falls man die beiden Gleichungen addiert und  $\Sigma = 1 - S - x$  definiert, dann erhält man eine einzige Gleichung:

$$\dot{\Sigma} = -\Sigma, \quad \text{mit} \quad \Sigma(0) > 0.$$

Es ergibt sich, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0$  und dass die Konvergenz hier exponentiell ist. Diese Tatsache liefert nicht nur Dissipativität, sondern das System lässt sich auch vereinfachen durch Reduktion der Dimension. Aus  $\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + x(t)] = 1$  kann man schliessen, dass die Omega-Limesmenge des Systems in dieser Menge liegen muss und die Trajektorien der Omega-Limesmenge folgende Gleichung erfüllen müssen:

$$\dot{x} = x \left[ \frac{m(1-x)}{1+a-x} - 1 \right], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.8)$$

Da alle Trajektorien des Originalsystems sich asymptotisch ihrer Omega-Limesmenge annähern, genügt es bei der Analyse der Gleichung (1.8), das asymptotische Verhalten des Originalsystems (1.7) zu studieren (siehe [SW95], Seite 14).

Definiere, für  $m > 1$ ,

$$\lambda = \frac{a}{m-1}$$

wobei  $\lambda$  "Überlebenskonzentration" heisst. Die Gleichung (1.8) besitzt zwei stationäre Punkte  $x = 0$  und  $x = 1 - \lambda$ , und die Gleichung lässt sich folgendermassen umformulieren:

$$\dot{x} = x \left[ \frac{m-1}{1+a-x} \right] [1 - \lambda - x], 0 \leq x \leq 1.$$

Falls  $m < 1$  oder  $m > 1$  und  $\lambda > 1$ , dann  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Andererseits, falls  $\lambda < 1$  und  $m > 1$ , dann ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 - \lambda$  (also  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda$ ).

Als Ergebnis lässt sich folgender Satz für das Verhalten der Mikroben in einem Chemostat formulieren:

**Satz 1.3.1** *Betrachte das Chemostat-System (1.7) und setze voraus dass die maximale Wachstumsrate  $m > 1$  ist. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:*

- (i) *Falls die Überlebenskonzentration  $0 < \lambda < 1$ , dann gilt für jede Lösung des Systems mit  $x(0) > 0$ , dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 - \lambda$ .*
- (ii) *Falls die Überlebenskonzentration  $\lambda > 1$ , dann gilt für jede Lösung des Systems mit  $x(0) > 0$ , dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 1$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , d.h. die Mikroben sterben aus.*

BEWEIS: siehe [SW95], Seiten 13 und 14.

**Bemerkung 1.3.2** *Wird der Monod-Aufnahmeterm durch eine beliebige monotone Funktion ersetzt, so erhält man das selbe Resultat.*

### 1.3.2 Der Chemostat mit zwei Mikrobenspezies

Die Konkurrenz zwischen zwei Mikrobenspezies in einem Chemostaten lässt sich folgendermassen beschreiben:

$$\begin{cases} \dot{S} = 1 - S - \frac{m_1 S x_1}{a_1 + S} - \frac{m_2 S x_2}{a_2 + S} \\ \dot{x}_1 = x_1 \left( \frac{m_1 S}{a_1 + S} - 1 \right), \\ \dot{x}_2 = x_2 \left( \frac{m_2 S}{a_2 + S} - 1 \right) \\ S(0) \geq 0, x_1(0) > 0, x_2(0) > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Solch ein System beschreibt den Wettbewerb zweier Populationen um dieselbe Nahrung.

Man addiert hier auch die Gleichungen und definiert:  $\Sigma(t) = 1 - S(t) - x_1(t) - x_2(t)$ . Danach formuliert man das System wie in [SW95] um:

$$\begin{cases} \Sigma' = -\Sigma \\ \dot{x}_1 = x_1 \left( \frac{m_1(1-\Sigma-x_1-x_2)}{a_1+1-\Sigma-x_1-x_2} - 1 \right), \\ \dot{x}_2 = x_2 \left( \frac{m_2(1-\Sigma-x_1-x_2)}{a_2+1-\Sigma-x_1-x_2} - 1 \right) \\ \Sigma(0) \leq 1, x_1(0) > 0, x_2(0) > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

und bemerkt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0$ , wobei die Konvergenz exponentiell ist. Dies wiederum zeigt, dass das System (1.9) dissipativ ist und dass die Trajektorien auf der Menge  $\Sigma = 0$  folgendes System erfüllen müssen:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left( \frac{m_1(1-x_1-x_2)}{a_1+1-x_1-x_2} - 1 \right), \\ \dot{x}_2 = x_2 \left( \frac{m_2(1-x_1-x_2)}{a_2+1-x_1-x_2} - 1 \right) \\ x_1(0) > 0, x_2(0) > 0, x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

**Satz 1.3.3 (Der Satz über kompetitiven Ausschluss)** Sei  $m_i > 1, i = 1, 2$  und seien die Überlebenskonzentrationen der zwei Mikrobenspezies so, dass  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ . Dann gilt für alle Lösungen des Systems (1.8) mit dem Anfangswert  $x_i(0) > 0$  folgende globale Dynamik:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda_1, \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 1 - \lambda_1, \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$$

BEWEIS:

Für Beweis siehe [SW95], Seite 16, Theorem 5.1.

### 1.3.3 Der Chemostat mit Zufluss von Mikroben

Falls im Zufluss neben dem Substrat auch Mikroben auftreten (mit Rate  $r_2$ ), und ein beliebiger monotoner Aufnahmeterm ( $a(x)$ ) verwendet wird, dann ändert sich das obige System wie folgt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 - \delta x_1 - a(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = r_2 + (a(x_1) - \delta)x_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

wobei  $r_1, r_2, \delta > 0$  und die Funktion  $a(x)$  folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist stetig differenzierbar,
- (ii)  $a(0) = 0$ ,
- (iii)  $a(x_1) < a(x_2)$  falls  $x_1 < x_2$ ,
- (iv) es gibt ein  $M > 0$ , so dass  $a(x) \leq M$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+$ .

**Lemma 1.3.4** (*Positivität*)

*Der positive Orthant ist für das System (1.12) invariant, d.h die Lösungen die ihren Anfangswert in dem positiven Orthanten haben bleiben für alle positiven Zeiten positiv.*

**Lemma 1.3.5** (*Beschränktheit*)

*Die Lösungen des Systems (1.12) im positiven Orthanten sind beschränkt.*

BEWEIS:

Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten:

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = r_1 + r_2 - \delta(x_1 + x_2) \quad (1.13)$$

Daraus gilt  $x_1(t) + x_2(t) = \frac{r_1+r_2}{\delta} + C_1 e^{-\delta t}$ , und mit der Positivität folgt die Beschränktheit von Lösungen.

**Lemma 1.3.6** *Die Gleichung  $(\frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1)(\delta - a(x_1)) = r_2$  hat im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  genau eine Lösung.*

BEWEIS:

Setze  $h(x_1) = \frac{(r_1+r_2-\delta x_1)}{\delta}(\delta - a(x_1))$ . Im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  gilt:  $h(x_1)$  ist streng monoton fallend, solange  $h(x_1) > 0$ , (also  $a(x_1) < \delta$ ), und hat negative Werte, falls  $h(x_1) \leq 0$ .

Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

- (i) Es ist  $a(x_1) < \delta$  für alle  $x_1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$ . Dann gilt  $h(0) = r_1 + r_2 > r_2$ ,  $h(\frac{r_1+r_2}{\delta}) = 0 < r_2$  und  $h$  ist streng monoton fallend. Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz genau einer Lösung  $x_1^*$  der Gleichung  $h(x_1) = r_2$ .
- (ii) Es gibt ein  $\tilde{x}_1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  mit  $a(\tilde{x}_1) = \delta$ . Die Monotonie der Funktion  $a$  zeigt dass  $\delta - a(x_1) > 0$  für  $x_1 < \tilde{x}_1$  und  $\delta - a(x_1) < 0$  für  $x_1 > \tilde{x}_1$ . Daher existiert keine Lösung der Gleichung  $h(x_1) = r_2$  in  $[\tilde{x}_1, \frac{r_1+r_2}{\delta})$ . Jetzt verwende man das selbe Argument wie im 1. Fall für das Intervall  $[0, \tilde{x}_1]$ .

□

**Lemma 1.3.7** *Falls ein stationärer Punkt im ersten Quadranten existiert, dann liegt er im Inneren des ersten Quadranten und es gilt  $x_1^1 < \frac{r_1+r_2}{\delta}$  für seine erste Komponente. Ausserdem ist  $a(x_1) < \delta$  für alle  $x_1 \in (0, x_1^1)$ .*



BEWEIS:

Die stationären Punkte werden von den Lösungen des folgenden Gleichungssystems geliefert:

$$\begin{cases} r_1 = \delta x_1 + a(x_1)x_2 \\ r_2 + a(x_1)x_2 = \delta x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1 \\ x_2[\delta - a(x_1)] = r_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

Da  $x_1 + x_2 = \frac{r_1+r_2}{\delta}$ , liegen die Lösungen auf einer Geraden, und außerdem muß  $a(x_1) < \delta$  gelten für alle  $x_1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$ , damit eine positive Lösung existiert.

Weiterhin setzt man  $x_2 = \frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1$  in die zweite Gleichung ein und bekommt folgende Gleichung:  $[\frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1][\delta - a(x_1)] = r_2$ . Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$r_1 = a(x_1)(r_1 + r_2) + \delta x_1 - x_1 a(x_1)$$

Diese Gleichung hat, nach Lemma 1.3.6 im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  genau eine Lösung, die wir mit  $x_1^1$  bezeichnen. Da  $x_2$ , die zweite Komponente des stationären Punktes auch positiv sein muss, es folgt, dass  $x_1 < \frac{r_1+r_2}{\delta}$ . Daraus ergibt sich der Beweis des Lemmas.

□

**Satz 1.3.8** *Es gibt genau einen stationären Punkt  $E_1$  im ersten Quadranten für das System (1.12).*

BEWEIS:

Aus Lemma 1.3.7 folgt, dass falls ein stationärer Punkt im ersten Quadranten existiert, dann liegt er im Inneren des ersten Quadranten, und es muss  $x_1^1 < \frac{r_1+r_2}{\delta}$  gelten. Ausserdem wird die erste Komponente eines inneren Punktes von der Lösung folgender Gleichung geliefert:

$$\left(\frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1\right)(\delta - a(x_1)) = r_2$$

Aus Lemma 1.3.6 ist bekannt, dass die Gleichung

$\left(\frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1\right)(\delta - a(x_1)) = r_2$  im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  genau eine Lösung besitzt, die  $a(x_1) < \delta$  erfüllt.

Die zweite Komponente ist dann  $x_2 = \frac{r_1+r_2}{\delta} - x_1$

□

**Satz 1.3.9** *Der einzige stationäre Punkt im ersten Quadranten ist lokal und global asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Die Funktionalmatrix ist:

$$Df(x) : \begin{bmatrix} -\delta - x_2 a'(x_1) & -a(x_1) \\ x_2 a'(x_1) & a(x_1) - \delta \end{bmatrix}$$

Stabilität von  $E_1$ :

$$Df(x)|_{E_1} : \begin{bmatrix} -\delta - x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & -a(x_1)|_{x_1^1} \\ x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & a(x_1^1) - \delta \end{bmatrix}$$

Da der Spur der Funktionalmatrix an dieser Stelle negativ ist (da  $a(x_1^1) < \delta$  und  $-\delta - x_2^1 \dot{a}(x_1)|_{x_1^1} < 0$ ) und  $\det(Df) = \begin{vmatrix} -\delta - x_2^1 \dot{a}(x_1)|_{x_1^1} & -a(x_1)|_{x_1^1} \\ x_2^1 \dot{a}(x_1)|_{x_1^1} & a(x_1^1) - \delta \end{vmatrix} > 0$ , haben alle Eigenwerte negativen Realteil.

(Tatsächlich erhält man die Eigenwerte:  $\lambda_1 = -\delta$  und  $\lambda_2 = a(x_1^1) - \delta - x_2^1 \dot{a}(x_1^1) < 0$ .)

Das bedeutet, dass der stationäre Punkt  $E_1(x_1^1, x_2^1)$  lokal asymptotisch stabil ist.

Da  $E_1$  ein lokaler Attraktor ist, bleibt noch zu zeigen, dass dieser Punkt auch global asymptotisch stabil ist. Das lässt sich mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson zeigen (siehe dazu [Per91], Seiten 227-231).

Man addiert die beiden Gleichungen und definiert  $\Sigma = x_1 + x_2$  mit  $\Sigma(0) > 0$ .

Man erhält auf diese Weise eine einzige Differentialgleichung und zwar:

$$\begin{cases} \Sigma' = r_1 + r_2 - \delta \Sigma \\ \Sigma(0) > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Es gilt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = \frac{r_1+r_2}{\delta}$  und dass die Konvergenz exponentiell ist. Genau wie im Fall des einfachen Chemostats erhält man so die Dissipativität und aus  $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) + x_2(t)] = \frac{r_1+r_2}{\delta}$  kann man schließen, dass die Omega-Limesmenge des Systems in dieser Menge liegen muß.

Alle Lösungen sind beschränkt, also ist ihre Omega-Limesmenge nicht leer. Der einzige stationäre Punkt, der das System besitzt, ist  $E_1$ , und dieser ist lokal asymptotisch stabil. Die Gleichung  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) + x_2(t)) = \frac{r_1+r_2}{\delta}$  bedeutet, dass die Limesmenge in einer Gerade enthalten ist, d.h., die Limesmenge kann kein geschlossener Orbit sein. Nach dem Satz von Poincaré-Bendixson muss die Omega-Limesmenge einer Trajektorie des Systems, die positive Anfangswerte hat, den stationären Punkt  $E_1$  enthalten. Weil dieser lokal asymptotisch stabil ist, ist die Limesmenge gleich  $E_1$ .

□

### 1.3.4 Der Chemostat mit verschiedenen Abtransportraten

Eine wichtige Frage bei der Analyse verschiedener Chemostaten ist, ob alle abtransportierten Komponenten in der Abflussrate  $\delta$  enthalten sind oder ob zusätzlich eine Sterberate  $\alpha$  der Mikroben zugefügt werden sollte?

Eine Frage, die sich natürlicherweise daran anschließt ist, ob die Ergebnisse in diesem Fall bestehen bleiben.

Diese Frage wurde von Hsu (siehe [HSU78]) für den Chemostat mit Michaelis-Menten-Dynamik und kürzlich von Ellermeyer, Pilyugin und Redheffer (siehe [SFER01]) für allgemeine Aufnahme-Funktionen studiert.

Wenn man verschiedene Abtransportraten zuläßt, dann hat das Chemostat-System folgende Form:

$$\begin{cases} \dot{S} = \rho - \delta S - a(S)x \\ \dot{x} = [a(S) - (\delta + \alpha)]x, \\ S(0) \geq 0, x(0) > 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

wobei  $a$  eine allgemeine Aufnahmefunktion ist (siehe Abschnitt 1.1.2.3), und  $\alpha > 0$  die Sterberate der Mikroben ist.

**Lemma 1.3.10** (*Positivität*)

*Der positive Orthant ist für das System (1.16) invariant, d.h., die Lösungen die ihren Anfangswert in dem positiven Orthanten haben bleiben für alle positiven Zeiten positiv.*

**Lemma 1.3.11** (*Beschränktheit*)

*Die Lösungen des Systems (1.16) sind beschränkt.*

BEWEIS:

Addition der Gleichungen liefert:

$$\overline{\dot{S+x}} = \rho - \delta(S+x) - \alpha x \quad (1.17)$$

Man hat folgende Differentialungleichungen:

$\overline{\dot{S+x}} \leq \rho - \delta(S+x) \Rightarrow (S+x)(t) \leq \frac{\rho}{\delta} + (S(0) + x(0) - \frac{\rho}{\delta})e^{-\delta t}$ , und  $\overline{\dot{S+x}} \geq \rho - (\delta + \alpha)(S+x) \Rightarrow (S+x)(t) \geq \frac{\rho}{\delta + \alpha} + (S(0) + x(0) - \frac{\rho}{\delta + \alpha})e^{-(\delta + \alpha)t}$ . Es gilt also für alle  $t \geq 0$  folgendes:

$$\frac{\rho}{\delta+\alpha} + (S(0) + x(0) - \frac{\rho}{\delta+\alpha})e^{-(\delta+\alpha)t} \leq S(t) + x(t) \leq \frac{\rho}{\delta} + (S(0) + x(0) - \frac{\rho}{\delta})e^{-\delta t}.$$

Diese Abschätzung und Lemma 1.3.10 liefern die Beschränktheit der Lösungen.

□

**Lemma 1.3.12** (*Existenz von stationären Punkten*)

Betrachte das System (1.16). Folgende zwei Fälle sind zu unterscheiden:

(i) Falls  $a := \lim_{S \rightarrow \infty} a(S) > (\alpha + \delta)$  und  $0 < a^{-1}(\alpha + \delta) < \frac{\rho}{\delta}$ , dann besitzt das System (1.16) im positiven Quadranten zwei stationäre Punkte:  $E_0$  (auf dem Rand) und  $E_1$  (innerer).

(ii) In allen anderen Fällen gibt es nur einen einzigen stationären Punkt, nämlich  $E_0$ .

BEWEIS:

Stationäre Punkte werden von den Lösungen des folgenden Gleichungssystems geliefert:

$$\begin{cases} \delta S + a(S)x = \rho \\ (a(S) - (\delta + \alpha))x = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Als erstes bekommt man den “ausgearteten” stationären Punkt  $E_0$ :

$$E_0 : \begin{cases} S = \frac{\rho}{\delta} \\ x = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Weiterhin bekommt man einen inneren stationären Punkt, falls  $a := \lim_{S \rightarrow \infty} a(S) > (\alpha + \delta)$  und  $0 < a^{-1}(\alpha + \delta) < \frac{\rho}{\delta}$ , als die Lösung von:

$$E_1 : \begin{cases} a(S) = (\delta + \alpha) \\ \delta S + (\delta + \alpha)x = \rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = a^{-1}(\delta + \alpha) \\ \delta a^{-1}(\delta + \alpha) + (\delta + \alpha)x = \rho \end{cases}$$

$$\text{also } E_1 : \begin{cases} S = a^{-1}(\delta + \alpha) \\ x = \frac{\rho - \delta a^{-1}(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)} > 0, \quad \text{da } \rho > \delta a^{-1}(\delta + \alpha) \end{cases}$$

□

**Lemma 1.3.13** (Stabilität von  $E_1$ ) Falls der innere stationäre Punkt existiert, d.h.  $a := \lim_{S \rightarrow \infty} a(S) > (\alpha + \delta)$  und  $a^{-1}(\alpha + \delta) < \frac{\rho}{\delta}$ , dann ist dieser Punkt lokal asymptotisch stabil.

BEWEIS:

Die Funktionalmatrix des Systems ist:

$$Df := \begin{bmatrix} -\delta - a'(S)x & -a(S) \\ a'(S)x & [a(S) - \delta - \alpha] \end{bmatrix}$$

An der Stelle  $E_1$  ist das charakteristische Polynom:

$$Df|_{E_1} := \begin{vmatrix} -\delta - a'(S)|_{E_1}x_1 - \lambda & -(\alpha + \delta) \\ a'(S)|_{E_1}x_1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Somit ist:

$$\lambda^2 + \lambda(\delta + a'(S)|_{E_1}x_1) + (\alpha + \delta)a'(S)|_{E_1}x_1 = 0$$

zu lösen.

Da  $(\delta + a'(S)|_{E_1}x_1) > 0$  und  $(\alpha + \delta)a'(S)|_{E_1}x_1 > 0$  ergibt sich, aufgrund des Routh-Hurwitz Kriteriums, daß die Eigenwerte an dieser Stelle  $\lambda_1 < 0$  und  $\lambda_2 < 0$ , d.h., der innere stationäre Punkt lokal asymptotisch stabil ist.

□

**Lemma 1.3.14** (Stabilität von  $E_0$ ) Falls  $a(\frac{\rho}{\delta}) < (\alpha + \delta)$ , dann ist der stationäre Punkt  $E_0$  lokal asymptotisch stabil.

BEWEIS:

Man berechnet die Funktionalmatrix bzw. das charakteristische Polynom an dieser Stelle und bekommt:

$$Df|_{E_0} := \begin{vmatrix} -\delta - \lambda & -a(\frac{\rho}{\delta}) \\ 0 & [a(\frac{\rho}{\delta}) - (\alpha + \delta)] - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dies liefert die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = -\delta < 0, \lambda_2 = a(\frac{\rho}{\delta}) - (\alpha + \delta)$$

Man sieht, dass  $\lambda_2 < 0$ , weil vorausgesetzt wurde, daß  $a(\frac{\rho}{\delta}) < (\alpha + \delta)$ . Also ist der stationäre Punkt  $E_2$  lokal asymptotisch stabil.

□

**Bemerkung 1.3.15** *Zusammengefasst kann man folgendes über die Stabilität sagen:*

- Falls  $a := \lim_{S \rightarrow \infty} a(S) > (\alpha + \delta)$  und  $a^{-1}(\alpha + \delta) < \frac{\rho}{\delta}$ , dann existiert  $E_1$  und ist lokal asymptotisch stabil. In diesem Fall ist der stationäre Punkt  $E_0$  instabil.
- Falls  $(\alpha + \delta) > a(\frac{\rho}{\delta})$ , dann existiert  $E_1$  nicht, und der “ausgeartete” stationäre Punkt  $E_0$  ist lokal asymptotisch stabil.
- Der Grenzfall  $a(\frac{\rho}{\delta}) = \alpha + \delta$  wird in dieser Arbeit nicht betrachtet, da er für reale Situationen wenig Relevanz besitzt. Aus dem selben Grund werden Grenzfälle auch in weiteren Kapiteln ausgeschlossen sein.

**Satz 1.3.16** *(Globale Dynamik) Betrachte das Chemostat-System (1.16) mit der allgemeinen Aufnahmefunktion  $a$ . Folgende Fälle sind zu unterscheiden:*

- (i) Falls  $a := \lim_{S \rightarrow \infty} a(S) > \alpha + \delta$  und  $a^{-1}(\alpha + \delta) < \frac{\rho}{\delta}$ , dann existiert der innere stationäre Punkt  $E_1$  und ist für den offenen Quadranten lokal und global asymptotisch stabil. In diesem Fall ist der “ausgeartete” stationäre Punkt  $E_0$  instabil.

(ii) Falls  $a(\frac{\rho}{\delta}) < \alpha + \delta$ , dann existiert kein innerer stationärer Punkt, sondern der stationäre Punkt  $E_0$  und dieser ist lokal und global asymptotisch stabil.

BEWEIS:

Den Beweis wird nur für den ersten Fall (i) durchgeführt, der zweite Fall folgt analog.

Man zeigt, daß der innere stationäre Punkt  $E_1$ , der nach Lemma 1.3.13 lokal asymptotisch stabil ist, auch global asymptotisch stabil ist. Dazu verwendet man das Dulac-Kriterium (siehe Kapitel 3, Satz 3.1.20 oder [Per91], Seite 246) um auszuschließen, dass das System (1.16) geschlossene Bahnen in  $\mathbb{R}_+^2$  enthält.

Für  $\beta(x) = \frac{1}{x}$  berechnet man die Divergenz von  $\beta f$  wie folgt:

$$\nabla(\beta f) = \frac{d(\frac{\rho-\delta S}{x} - a(S))}{dS} + \frac{d[(a(S)-\delta-\alpha)]}{dx} = -\frac{\delta}{x} - a'(S) < 0 \text{ für alle } (S, x) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Es ergibt sich nach dem Dulac-Kriterium, dass es keine geschlossene Bahn in  $\mathbb{R}_+^2$  gibt. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass das System keinen sogenannten "Graph" in  $\mathbb{R}_+^2$  enthält.

Das dynamische System (1.16) ist dissipativ, weil alle positiven Trajektorien (Lösungsbahnen) in eine kompakte Menge eintreten (siehe Lemma 1.3.11). Die Dissipativität stellt sicher, dass die Omega-Limesmenge eines Punktes  $y$  nicht leer ist.

Aus dem Satz von Poincaré-Bendixson für planare Systeme ergibt sich, dass die Omega-Limesmenge von  $y$  einen stationären Punkt enthalten muss.  $E_0$  kommt nicht in Frage, weil  $y$  nicht in der stabilen Mannigfaltigkeit von  $E_0$  liegt, aber nach dem Satz von Butler/McGehee (vgl. [SW95], Seite 12) auch Teile der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit von  $E_0$  in  $\omega(y)$  liegen müßten. Dann wäre  $\omega(y)$  aber ein Graph, was dem Dulac-Kriterium widerspricht. Also  $E_1 \in \omega(y)$ , und  $\omega(y) = \{E_1\}$ , weil  $E_1$  lokal asymptotisch stabil ist.

□



**Bemerkung 1.3.17** *Der obige Satz läßt sich auch mit Hilfe eines Satzes aus dem Artikel von [SFER01] “Persistence criteria for a chemostat with variable nutrient input” (Theorem 4(iii)) beweisen.*

**Bemerkung 1.3.18** *(Der Monod-Fall)*

*Für den Fall von Monod-Aufnahmefunktionen war die globale asymptotische Stabilität eines der stationären Punkte ( $E_0$  oder  $E_1$ ) schon vorher bekannt. In [SW95] wird folgendes System nach entsprechenden Skalierungen betrachtet:*

$$\begin{cases} \dot{S} = 1 - S - \frac{mS}{a+S}x \\ \dot{x} = x\left[\frac{mS}{a+S} - \alpha\right], \\ S(0) \geq 0, x(0) > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Wenn  $\lambda = \frac{a\alpha}{m-\alpha}$  die Überlebenskonzentration der Mikroben ist und  $m > \alpha$  bzw.  $0 < \lambda < 1$  gilt, dann gilt für jede Lösung, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 - \lambda$ .

**Beispiel 1.3.19** *Die folgenden beiden Beispiele zeigen die zwei Fälle, wo einmal  $E_1$  global asymptotisch stabil ist und einmal  $E_0$ , abhängig von  $a^{-1}(\delta + \alpha)$ .*

*Sei  $a(S) = \frac{mS}{a+S}$  vom Monod-Typ und  $\rho = 10, m = 4, a = 1, \delta = 2, \alpha = 1$ . Dann sieht das System (1.16) folgendermassen aus:*

$$\begin{cases} \dot{S} = 10 - 2S - \frac{4Sx}{S+1} \\ \dot{x} = \left[\frac{4S}{S+1} - (\delta + \alpha)\right]x, \\ S(0) = 1, x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

Da  $\lim_{S \rightarrow \infty} a(S) = m = 4 > (\alpha + \delta) = 3$  und  $a^{-1}(\delta + \alpha) = \frac{\delta + \alpha}{4 - \delta - \alpha} = 3 < \frac{\rho}{\delta} = 5$ , existiert ein innerer stationärer Punkt aufgrund der Lemma (1.3.13) und ist lokal asymptotisch stabil. Zur Veranschaulichung liefert Mathematica die Abbildung 1.1.

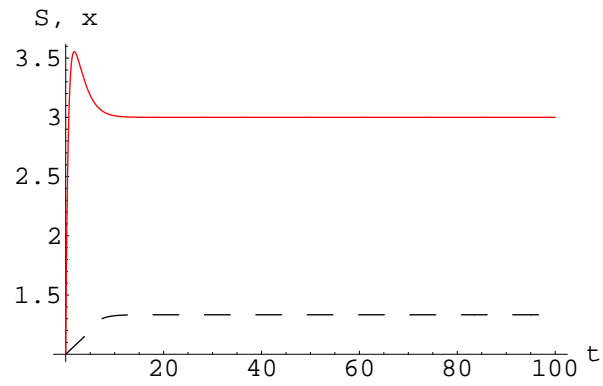


Abbildung 1.1: Der Chemostat mit verschiedenen Abbauraten.  $E_1$  stabil.  $S$  wird als durchgezogene Linie und  $x$  als gestrichelte Linie dargestellt.

Falls  $\rho = 5$ , wird die Existenzbedingung für  $E_1$  verletzt, somit existiert der innere stationäre Punkt  $E_1$  nicht; stattdessen ist der stationäre Punkt  $E_0$  lokal asymptotisch stabil, siehe Abbildung 1.2.

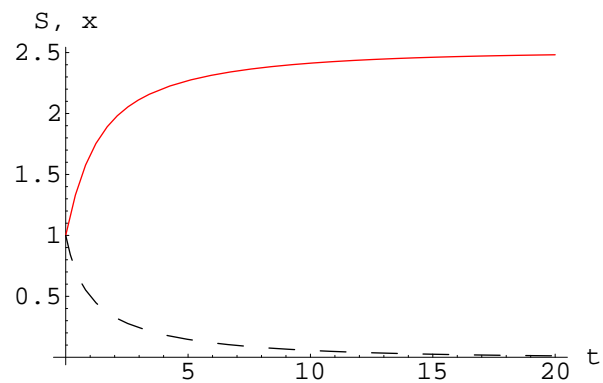


Abbildung 1.2: Der Chemostat mit verschiedenen Abbauraten,  $E_0$  stabil.  $S$  wird hier mit der durchgezogene Linie und  $x$  mit der gestrichelte Linie dargestellt.

### 1.3.5 Der Chemostat mit Zufluss von Mikroben und verschiedenen Abtransportraten

Man stellt sich die Frage ob das System (1.12) (Chemostat mit Zufluss von Mikroben) sich ähnlich verhält, wenn man verschiedene Abtransportraten hat. Das System (1.12) sieht dann folgendermassen aus:

$$\begin{cases} \dot{S} = r_1 - \delta S - a(S)x \\ \dot{x} = r_2 + x(a(S) - \delta - \alpha), \\ S(0) \geq 0, x(0) > 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

wobei  $r_1, r_2, \delta, \alpha > 0$  und die Funktion  $a(S)$  dieselben Eigenschaften hat wie früher.

**Lemma 1.3.20** (*Positivität*)

*Der positive Orthant ist für das System (1.22) invariant, d.h., die Lösungen die ihren Anfangswert in dem positiven Orthanten haben, bleiben für alle positiven Zeiten positiv.*

**Lemma 1.3.21** (*Beschränktheit*)

*Die Lösungen des Systems (1.22) sind beschränkt.*

BEWEIS:

Wir addieren die zwei Gleichungen und bekommen dadurch:

$$\overline{\dot{S} + x} = r_1 + r_2 - \delta(S + x) - \alpha x \quad (1.23)$$

Man hat die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \overline{\dot{S} + x} &\leq r_1 + r_2 - \delta(S + x) \\ \text{und } \overline{\dot{S} + x} &\leq r_1 + r_2 - (\delta + \alpha)(S + x) \end{aligned}$$

Damit kann wie im Beweis von Lemma 1.3.11 die Beschränktheit bekommen.

□

**Lemma 1.3.22** *Die Gleichung  $(r_1 + r_2 - \delta S)(\delta + \alpha - a(S)) = r_2(\delta + \alpha)$  hat im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  genau eine Lösung, und es gilt  $a(S) < \alpha + \delta$ .*

BEWEIS:

Man geht genauso vor wie beim Beweis von Lemma 1.3.6, nur hat man hier  $h(S) = (r_1 + r_2 - \delta S)(\delta + \alpha - a(S))$ .

□

**Lemma 1.3.23** *Falls ein stationärer Punkt im ersten Quadranten existiert, dann liegt er im Inneren des ersten Quadranten, und es gilt, dass  $S^1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$ , bzw.  $x^1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta+\alpha})$ .*

BEWEIS:

Die stationären Punkte werden von den Lösungen des folgenden Gleichungssystems geliefert:

$$\begin{cases} r_1 = \delta S + a(S)x \\ r_2 + a(S)x = (\delta + \alpha)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{r_1+r_2}{\delta+\alpha} - \frac{\delta S}{\delta+\alpha} > 0, \text{ falls } S < \frac{r_1+r_2}{\delta} \\ x[\delta + \alpha - a(S)] = r_2 \end{cases} \quad (1.24)$$

Es muß  $a(S) < \delta + \alpha$  sein, damit eine positive Lösung existiert. Weiterhin setzt man  $x = \frac{r_1+r_2-\delta S}{\delta+\alpha}$  in die zweite Gleichung ein und bekommt folgende Gleichung:

$$\left[\frac{r_1+r_2-\delta S}{\delta+\alpha}\right][\delta + \alpha - a(S)] = r_2.$$

Diese Gleichung hat (nach Lemma 1.3.22) im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$  genau eine Lösung die wir mit  $S^1$  bezeichnen. Die andere Komponente  $x^1$  ist:  $x^1 = \frac{r_1+r_2-\delta S^1}{\delta+\alpha}$  sein, wobei  $x^1 = \frac{r_1+r_2}{\delta+\alpha} - \frac{\delta}{\delta+\alpha}S^1 < \frac{r_1+r_2}{\delta+\alpha}$ . Daraus ergibt sich der Beweis des Lemmas.

□

**Satz 1.3.24** *Es gibt genau einen stationären Punkt im ersten Quadranten für das System (1.22), den wir mit  $E_1$  bezeichnen.*

BEWEIS:

Aus Lemma 1.3.23 folgt, dass ein stationärer Punkt im ersten Quadranten im Inneren des ersten Quadranten liegen muß, und  $S^1 < \frac{r_1+r_2}{\delta}$ , bzw.  $x^1 \in (0, \frac{r_1+r_2}{\delta+\alpha})$ . Außerdem wird die erste Komponente eines inneren stationären Punktes die Lösung folgender Gleichung sein:

$$\frac{r_1+r_2-\delta S}{\delta+\alpha}(\delta + \alpha - a(S)) = r_2$$

Diese Gleichung hat nach Lemma 1.3.22 genau eine Lösung im Intervall  $(0, \frac{r_1+r_2}{\delta})$ .

□

**Satz 1.3.25** *Der einzige stationäre Punkt im ersten Quadranten ist lokal und global asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Die Funktionalmatrix an der Stelle  $E_1$  ist:

$$Df|_{E_1} := \begin{bmatrix} -\delta - x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & -a(x_1)|_{x_1^1} \\ x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & a(x_1^1) - \delta - \alpha \end{bmatrix}$$

Da die Spur der Funktionalmatrix an dieser Stelle negativ ist (da  $a(x_1^1) < \delta + \alpha$  und  $-\delta - x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} < 0$ ) und außerdem

$$\det(Df) = \begin{vmatrix} -\delta - x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & -a(x_1)|_{x_1^1} \\ x_2^1 a'(x_1)|_{x_1^1} & a(x_1^1) - \delta - \alpha \end{vmatrix} > 0$$

ist, haben alle Eigenwerte negativen Realteil. Das bedeutet, dass  $E_1$  lokal asymptotisch stabil ist.

Für die globale asymptotische Stabilität verwendet man das Dulac-Kriterium (siehe Kapitel 3, Satz 3.1.20 oder [Per91], Seite 246) wie im Fall des Chemostaten ohne Mikrobenezfluss. Für  $\beta(x) = \frac{1}{x}$  berechne man die Divergenz von  $\beta f$  wie folgt:

$$\nabla(\beta f) = \frac{d(\frac{r_1 - \delta S}{x} - a(S))}{dS} + \frac{d[\frac{r_2}{x} + (a(S) - \delta - \alpha)]}{dx} = -\frac{\delta}{x} - a'(S) - \frac{r_2}{x^2} < 0 \text{ für alle } (S, x) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Weiterhin verwendet man dieselben Argumente wie im Satz 1.3.16.

□

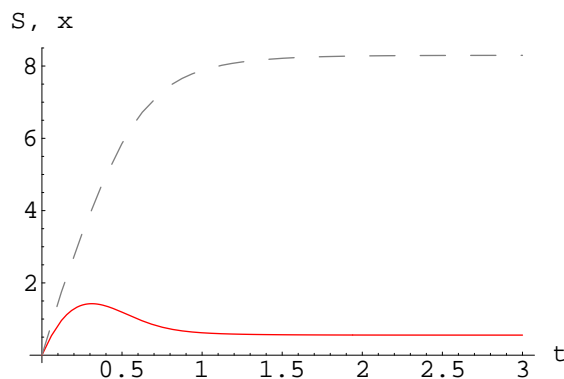


Abbildung 1.3: Der Chemostat mit Zufluss von Mikroben und verschiedenen Abbauraten  $E_1$  stabil.  $S$  wird hier als durchgezogene Linie und  $x$  als gestrichelte Linie dargestellt.

**Beispiel 1.3.26** Wenn man  $r_1 = 10, m = 3, a = 1, \delta = 2, \alpha = 1, r_2 = 16$  setzt und Monod-Kinetik hat, dann weist das folgende Beispiel darauf hin, dass der

*einzig stationäre Punkt  $E_1$  die das System besitzt global asymptotisch stabil ist (siehe Abbildung 1.3).*

# Kapitel 2

## Das ASM 1-Modell

### 2.1 Vorstellung des Modells

Die International Association for Water Quality (IWA) hat im Jahr 1983 eine Arbeitsgruppe gebildet, die praktische Modelle zur Auslegung und zum Betrieb von biologischen Abwasserreinigungsanlagen entwickeln sollte. Deren bisherige Resultate sind in drei Arbeitsberichten veröffentlicht worden: "Das Activated Sludge Model No. 1" (1987) [Hen87] (behandelt den Abbau organischer Abwasserinhaltsstoffe, Nitrifikation und Denitrifikation); das "Activated Sludge Model No. 2" (1994) [Hen95] (behandelt zusätzlich zu den Prozessen aus ASM 1 die biologische Phosphorelimination, gefolgt von einer Erweiterung, dem "ASM 2d-Modell") und schließlich das "Activated Sludge Model No.3".

Den Kern dieser Modelle bildet jeweils eine sogenannte Modellmatrix (siehe auch [Bas80]), in der sämtliche Informationen zur Kinetik und Stöchiometrie in einer übersichtlichen Form zusammengefasst sind.



Diese Modelle bilden die grundlegende Motivation für die vorliegende Arbeit.

Das ursprüngliche ASM 1-Modell enthält drei wichtige Prozesse: Kohlenstoffoxi-  
dation, Nitrifikation und Denitrifikation. Es besteht aus 8 wichtigen Reaktionen  
zwischen 13 Komponenten, die von zwei Arten von Mikroorganismen, der hete-  
rotrophen und der autotrophen Biomasse durchgeführt werden. Die Gleichungen  
für die Reaktionsterme allein sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_I = 0 \\ \dot{S}_S = -\frac{1}{Y_H}(R_1 + R_2) + R_7 \\ \dot{X}_I = 0 \\ \dot{X}_S = (1 - f_P)(R_4 + R_5) - R_7 \\ \dot{X}_{BH} = R_1 + R_2 - R_4 \\ \dot{X}_{BA} = R_3 - R_5 \\ \dot{X}_P = f_P(R_4 + R_5) \\ \dot{S}_O = -\frac{1-Y_H}{Y_H}R_1 - \frac{\beta_1-Y_A}{Y_A}R_3 \\ \dot{S}_{NO} = -\frac{1-Y_H}{\beta_2 Y_H}R_2 + \frac{1}{Y_A}R_3 \\ \dot{S}_{NH} = -i_{XB}R_1 - i_{XB}R_2 - (i_{XB} + \frac{1}{Y_A})R_3 + R_6 \\ \dot{S}_{ND} = -R_6 + R_8 \\ \dot{X}_{ND} = (i_{XB} - f_P i_{XP})R_4 + (i_{XB} - f_P i_{XP})R_5 - R_8 \\ \dot{S}_{ALK} = -\frac{i_{XB}}{14}R_1 + (\frac{1-Y_H}{14\beta_2 Y_H} - \frac{i_{XB}}{14})R_2 + (-\frac{i_{XB}}{14} - \frac{1}{7Y_A})R_3 + \frac{1}{14}R_6 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

wobei die  $R_i$  Reaktionsterme sind, deren Bedeutung später erläutert wird; die  
restlichen Grössen sind positive Konstanten.

Dies kann mit der folgenden Matrix dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Y_H} & -\frac{1}{Y_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - f_P & 1 - f_P & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_P & f_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-Y_H}{Y_H} & 0 & -\frac{\beta_1-Y_A}{Y_A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-Y_H}{\beta_2 Y_H} & \frac{1}{Y_A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i_{XB} & -i_{XB} & -(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i_{XB} - f_P i_{XP} & i_{XB} - f_P i_{XP} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{i_{XB}}{14} & \frac{1-Y_H}{14\beta_1 Y_H} - \frac{i_{XB}}{14} & -\frac{i_{XB}}{14} - \frac{1}{7Y_A} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausserdem gehen in die obigen Gleichungen noch Transportterme ein, wie z. B. der Zufluss von Substrat (Zuflussrate  $r =$  Flüssigkeitsvolumen pro Zeiteinheit), die Sterberate  $D$  der Mikroben und der Abfluss der Mischung.

### Bemerkung 2.2.1 :

Unabhängig von der genauen Bedeutung sind im ASM 1 alle Reaktionsterme aus Monod-Kinetik-Termen  $\frac{mx}{x+const}$  oder Inhibitions-Termen der Form  $\frac{const}{x+const}$  zusammengesetzt.

Die Gestalt dieser Funktionen ist eine (Arbeits-) Hypothese, die die Arbeitsgruppe der IWA als "Schalter-Funktionen" gewählt hat, um manche Prozesse abhängig von den Umweltsbedingungen (aerob\* oder anaerob†) ein- bzw. abzuschalten. Zum Beispiel können die Nitrifizierer nur unter aeroben Bedingungen wachsen. Ihre

---

\*ein Zustand in dem genügend gelöster Sauerstoff vorhanden ist, so daßaerobe Bakterien lebensfähig sind.

†Bezeichnung für die Organismen, die zum Leben keinen freien Sauerstoff benötigen, und für eine chemische Reaktionsweise, die unter Ausschluss von Sauerstoff abläuft.

*Wachstumsrate geht rasch gegen Null, sobald die Konzentration von Sauerstoff abnimmt-und das unabhängig vom Substratangebot.*

*Weiterhin ist zu bemerken, dass die Wahl der Monod-Terme keine biologische Grundlage hat, statt Monod könnten auch andere monotone Funktionen (etwa Sigmoide) auftreten.*

Biologische und chemische Bedeutung der Terme:

- $S_S$ —Konzentration des leicht abbaubaren Substrats
- $X_S$ —Konzentration des langsam abbaubaren Substrats
- $X_{BH}$ —Konzentration der heterotrophen Biomasse
- $X_{BA}$ —Konzentration der autotrophen Biomasse
- $S_O$ —Sauerstoffkonzentration
- $S_{NO}$ —Nitrat- und Nitritkonzentration
- $S_{NH}$ —Ammoniumkonzentration
- $S_{ND}$ —Konzentration des löslichen bioabbaubaren organischen Stickstoffs
- $X_{ND}$ —Konzentration des partikelförmigen bioabbaubaren Stickstoffs
- $S_I$ —Konzentration des löslichen inerten organischen Masse
- $X_I$ —Konzentration des partikelförmigen inerten organischen Masse.
- $X_P$ —Konzentration der partikelförmigen Abbauprodukte der Biomasse.
- $S_{ALK}$  Konzentration von Alkalinität.

Anmerkung zur Notation: Der Buchstabe  $S$  steht für “löslich” und  $X$  steht für partikelförmig.

**Bemerkung 2.2.2 :**

*Die Konzentrationen  $S_I$  und  $X_I$  verändern sich während der Reaktionen nicht, deshalb enthalten die entsprechenden Zeilen der Matrix keine stöchiometrischen*

*Koeffizienten. Sie sind trotzdem wegen ihrer Rolle in der Ausführung des Prozesses ( $S_I$  bestimmt den ausfließenden chemischen Sauerstoffbedarf,  $X_I$  ist der Anteil der suspendierten abbaubaren Feststoffe im System) einbezogen. Die Komponenten  $X_P$  und  $S_{ALK}$  treten nur als Produkte auf. Diese 13 Modellkomponenten können in einem Zustandsvektor zusammengefasst werden. Die Darstellung in Vektor- und Matrizenschreibweise (wie im [Bas80]) ist sehr übersichtlich und vereinfacht das Formulieren der mathematischen Gleichungen.*

Im folgenden werden die einzelnen Komponenten näher beschrieben:

**S<sub>S</sub>**: Das leicht bioabbaubare Substrat wird von den Heterotrophen aufgenommen (entweder unter aeroben oder anoxischen Bedingungen) und wird durch die Hydrolyse des partikelförmigen organischen Materials produziert.

**X<sub>S</sub>**: Das langsam abbaubare Substrat wird durch die Hydrolyse von partikelförmigem organischen Material entfernt und bildet sich durch das Absterben der heterotrophen und autotrophen Biomasse. Anders gesagt: das Zellmaterial wandelt sich in langsam bioabbaubares Substrat um.

**S<sub>O</sub>**: Der gelöste Sauerstoff wird von den Organismen als Elektronenakzeptor verwendet und geht aus der Gasphase in Lösung.

**S<sub>I</sub>**: Die inerte lösliche organische Biomasse verlässt das System in der ursprünglichen Konzentration.

**S<sub>NH</sub>**: Das gelöste Ammonium dient als Stickstoffzufuhr für die Synthese heterotropher Biomasse und als Energiezufuhr für das Wachstum autotropher nitrifizierender Biomasse.

**S<sub>ND</sub>**: Der lösliche organische Stickstoff wird von der heterotrophen Biomasse in Ammonium-Stickstoff umgewandelt.

**S<sub>NO</sub>**: Der andere Elektronenakzeptor ist Nitrat-Stickstoff, der sich durch das aerobe Wachstum autotropher Biomasse bildet und während des anoxischen Wachstums der heterotrophen Biomasse abgeführt wird.

**X<sub>H</sub>**: Es wird angenommen, dass die heterotrophen Organismen aerob und ano- xisch (Denitrifikation) wachsen können und auch im anaeroben Milieu noch aktiv sind (Fermentation). Die heterotrophen Organismen sind für die Hydrolyse von partikulärem Substrat ( $X_S$ ) verantwortlich und können alle gelösten Substrate bei entsprechenden Milieubedingungen verwenden.

**X<sub>I</sub>**: Die partikelförmige inerte organische Masse wird mit dem Belebt-Schlamm gemischt und verlässt das System durch Schlammabgang.

**X<sub>A</sub>**: Die autotrophen nitrifizierenden Organismen verwenden zum Aufbau ihrer Biomasse Kohlendioxid als Kohlenstoffquelle. Die Energie für die Reduktion des Kohlendioxids gewinnen sie aus der Oxidation von Ammoniak zu Nitrit bzw. Nitrat. Nitrifizierende Organismen sind verantwortlich für die Nitrifikation. Es wird angenommen, dass die nitrifizierenden Organismen das Ammonium ( $S_{NH_4}$ ) direkt in Nitrat ( $S_{NO_3}$ ) umwandeln. Zur Nitrifikation wird sehr viel Sauerstoff benötigt.

**X<sub>ND</sub>**: Der partikelförmige organische Stickstoff wandelt sich durch Hydrolyse in löslichen organischen Stickstoff um, parallel zur Hydrolyse langsam bioabbaubarer organischer Biomasse.

**S<sub>AIK</sub>**: Die Alkalinität des Abwassers trägt dazu bei, dass die Erhaltung elektrischer Ladung in den biologischen Reaktionen approximiert werden kann. Da zu niedrige  $pH$ -Werte manche biologische Prozesse hemmen können, wird die Alkalinität als Signal eingeführt.

### 2.1.1 Wichtige Prozesse im Modell

#### Die Bedeutung der Reaktionsterme

Im Modell treten vier grundlegende Prozesse auf: Wachstum der Biomasse, Absterben der Biomasse, Ammonifizierung organischen Stickstoffs und Hydrolyse partikelförmiger Organismen.

- $R_1 = \mu_H \frac{S_S}{K_S+S_S} \frac{S_O}{K_{OH}+S_O} X_{BH}$

Das aerobe Wachstum der heterotrophen Biomasse (die Wachstumsrate der Organismen ist abhängig vom Substratangebot, vgl. [KS85]). Das Wachstum erfolgt auf Kosten des leicht abbaubaren Substrats  $S_S$  und es entsteht dadurch heterotrophe Biomasse.

- $R_2 = \mu_H \frac{S_S}{K_S+S_S} \frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}} \eta_g X_{BH}$

Das anoxische Wachstum der heterotrophen Biomasse findet unter Verwendung von Nitrat als Elektronenakzeptor statt.

- $R_3 = \mu_A \frac{S_{NH}}{K_{NH}+S_{NH}} \frac{S_O}{K_{OA}+S_O} X_{BA}$

Bei dem aeroben Wachstum der autotrophen Biomasse dient gelöstes Ammonium als Energiequelle wobei autotrophe Zellmasse entsteht. Als Endprodukt entsteht Nitrat-Stickstoff. Die doppelte Schalterfunktion beschreibt die Abhängigkeit der autotrophen spezifischen Wachstumsrate von der Konzentration des gelösten Ammoniums  $S_{NH}$  und des Sauerstoffs  $S_O$ . Beide Sättigungskonstanten  $K_{NH}$  und  $K_{OA}$  sind relativ klein.

- $R_4 = b_H X_{BH}$

Das Absterben der heterotrophen Biomasse. Der verwendete Ansatz für die

Modellierung des Absterbens der heterotrophen Biomasse ist grundsätzlich das Sterbe-Wiederentstehungs-Konzept von Dold et. al. (1980) (vgl [DM80]). Der verwendete Raten-Ausdruck ist von erster Ordnung bezüglich der Biomasse-Konzentration.

- $R_5 = b_A X_{BA}$

Das Absterben der autotrophen Biomasse erfolgt auf die gleiche Weise wie das Absterben der heterotrophen Biomasse.

- $R_6 = k_a S_{ND} X_{BH}$

Ammonifizierung löslichen organischen Stickstoffs

- $R_7 = k_h \frac{\frac{X_S}{X_{BH}}}{K_X + \frac{X_S}{X_{BH}}} \left[ \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right] X_{BH}$

Hydrolyse eingeschlossener Organismen; viele hochmolekulare, gallertartige oder partikelförmige organische Substrate können nicht direkt von Mikroorganismen verwendet werden. Deswegen müssen solche Substrate durch zellexterne enzymatische Reaktionen, die sogenannten hydrolytischen Prozesse zur Verfügung gestellt werden.

- $R_8 = \rho_7 X_{ND} / X_S$

Hydrolyse eingeschlossenen organischen Stickstoffs

### 2.1.2 Annahmen und Einschränkungen im Modell

- (i) Das System arbeitet bei konstanter Temperatur.
- (ii) Es wird angenommen, dass der  $pH$ -Wert konstant ist und sich im neutralen Bereich befindet.
- (iii) Die Koeffizienten in den entsprechenden Raten sind Konstante.

Weitere Annahmen sind im [Hen87] beschrieben.

Die verschiedenen Parameter sind in Tabellen 2.1 und 2.2 zusammengefasst; Tabelle 2.1 enthält die Parameter die vorgegeben werden können, während die Tabelle 2.2 beschreibt die Parameter aus ASM 1 die kalibriert werden müssen.

Zur grundlegenden Literatur über ASM und verwandte Modelle gehören u.a. [Hen87], [Hen95], [Hen92], [SW95] und [Wei00].



Tabelle 2.1: Parameter die vorgegeben werden können

Parameter	Bedeutung
$Y_A$	Ertragskoeffizient für die autotrophe Biomasse
$b_A$	Absterberate der autotrophen Biomasse
$f_P$	Teil der Biomasse, der zur Entstehung partikelförmiger Produkte führt
$i_{XB}$	Anteil der Masse des Stickstoffs an der Masse von COD in der Biomasse
$i_{XP}$	Anteil der Masse des Stickstoffs an der Masse COD <sup>‡</sup> in Produkten der Biomasse
$K_{OH}$	Sauerstoff-Halbsättigungskonstante für die heterotrophe Biomasse
$K_{NO}$	Nitrat-Halbsättigungskonstante für die denitrifizierende heterotrophe Biomasse
$K_{OA}$	Sauerstoff-Halbsättigungskonstante für die autotrophe Biomasse

## 2.2 Verwendung des Modells in der Praxis

Biotechnologische Prozesse sind durch ein stark nichtlineares dynamisches Verhalten gekennzeichnet. Aus diesem Grund erweist sich die Regelung und Führung solcher Prozesse als schwierig.

Dynamische Simulationsmodelle wie z.B. ASM 1, ASM 2 oder ASM 3 spielen eine wichtige Rolle bei der Optimierung mancher Abwasserreinigungsprozesse.

Dynamische Modelle sind also ein Hilfsmittel, das geeignet ist, Kläranlagen zu optimieren. Die Wirksamkeit der Kläranlage kann geprüft und verbessert werden. Eine mathematische Analyse solcher Modelle könnte letztlich der Kostenminimie-

Tabelle 2.2: Parameter in ASM 1 die kalibriert werden müssen

Symbol	Name
$S_{NO}$	Konzentration von löslichem Nitrat im Abwasser
$S_{NH}$	Konzentration von löslichem Ammonium im Abwasser
$S_I$	Konzentration von löslicher inerte organischer Masse im Abwasser
$Y_H$	Ertragskoeffizient für die heterotrophe Biomasse
$b_H$	Sterbekoeffizient für die heterotrophe Biomasse
$\mu_A$	maximale Wachstumsrate der autotrophe Biomasse
$\mu_H$	maximale Wachstumsrate der heterotrophe Biomasse
$K_S$	Halbsättigungskonstante für die heterotrophe Biomasse

rung und der Erhöhung der Zuverlässigkeit klärtechnischer Massnahmen dienen. In [DV01] Kapitel 1 (“Dynamical modelling”) findet man eine hilfreiche Zusammenfassung verschiedener mathematischer Modelle. Die Modelle werden nach linear/nichtlinear, stochastisch/deterministisch, dynamisch/statisch usw. unterteilt.

Die entwickelten CSTR-Modelle (continuously stirred tank reactor) werden ständig nachgeprüft, überarbeitet und verbessert, sobald neue Erkenntnisse über den Ablauf der beteiligten Prozesse vorhanden sind.

### 2.2.1 Biologische Abwasserreinigung

Die biologische Abwasserreinigung ist ein Teil des Abwasserreinigungsprozesses, bei der moderne biologische Abwasserreinigungsanlagen neben organischen Kohlenstoffverbindungen auch Stickstoffverbindungen und Phosphor aus dem Abwasser beseitigen.

Organische Verbindungen werden durch Mikroorganismen während der biologischen Abwasserreinigung abgebaut. Im Fall von aeroben Prozessen wird gelöster

Sauerstoff benötigt. Dabei entstehen anorganische Verbindungen und Biomasse. Der Einfluss des Sauerstoffs ist meistens entscheidend bei biologischen Verfahren, und abhängig von seiner Präsenz spricht man von aeroben, anoxischen oder anaeroben Umweltbedingungen.

Neben dem Tropfkörperverfahren, Pflanzenkläranlage usw. ist das Belebtschlammverfahren das am häufigsten angewandte Verfahren der biologischen Abwasserreinigung.

### **2.2.2 Das Belebtschlammverfahren**

Das aerobe Belebtschlammverfahren in einer Vielzahl von Variationen ist die heute am weitesten verbreitete Technologie zur Behandlung kommunaler und industrieller Abwässer.

Es wurde am Anfang des 19. Jahrhunderts in England erfunden, um die aufgrund der dichten Bevölkerung und fortgeschrittenen Industrialisierung auftretende Wasserschmutzung zu bekämpfen.

Das Hauptprinzip des Verfahrens liegt darin, dass der "belebte" Schlamm kontinuierlich in einem Bioreaktor gerührt und belüftet wird. Dadurch werden die Organismen im System gehalten, es fließt ihnen ständig Nahrung zu, und die Aufenthaltszeit des Substrats ist geringer als die der Organismen.

Das durch die ständige Zufuhr verdrängte Reaktionsgemisch wird in ein Nachklärbecken gebracht und dort ruhen gelassen, so dass sich die Organismen absetzen können. Die verarmte Nährflüssigkeit fließt ab, die Organismen werden in das Reaktionsbecken in erforderlicher Masse zurückgeführt (siehe [Har89] "Biologische Abwasserreinigung").

Ausser lebendigen Organismen sind in den Schwebstoffen weitere organische und

anorganische Teilchen enthalten, manche der organischen werden durch Hydrolyse löslich, während andere inert sind (vgl. [HE95] “Wastewater treatment”).

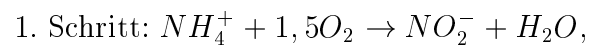
### 2.2.3 Nitrifikation und Denitrifikation

Kommunale Abwässer enthalten meistens 20-50 mg/l Stickstoffkomponenten, davon auch hauptsächlich Ammonium ( $NH_4^+$  und  $NH_3$ ).

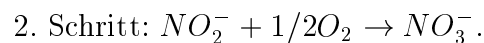
Da die zahlreichen negativen Auswirkungen stickstoffhaltiger Wasserinhaltsstoffe bekannt sind (Intensivierung des Algenwachstums, akute toxische Wirkung, Schwierigkeiten bei der Trinkwasseraufbereitung durch Ammonium, Nitrit und Nitrat, usw. siehe [Har89]) ist es wünschenswert, diese aus dem Abwasser zu entfernen. Dieser Prozess heisst Nitrifikation.

Unter Nitrifikation versteht man die biologische Oxidation von Ammonium über Nitrit zu Nitrat. Die Reaktion wird in zwei Schritten von zwei spezialisierten Bakteriengruppen durchgeführt.

Nitrifikanten sind aerobe Bakterien, die reduzierte Stickstoffverbindungen oxidieren können. Nitritbilder oxidieren dabei zunächst Ammoniak zu Nitrit.



der dann von Nitratbilder zu Nitrat weiteroxidiert wird.



Die Nitrifikation spielt in der biologischen Abwasserreinigung eine grosse Rolle, weil sie die einzige Möglichkeit bietet, den aus dem Eiweisabbau stammenden Ammoniak in eine für tierische Organismen ungiftige Form umzuwandeln. Es ist eine Reaktion mit hohem Sauerstoffbedarf, der extern zugeführt werden muss, da die dafür zuständigen Bakterien Sauerstoff als Elektronenakzeptor benötigen.

Das bei der Nitrifikation gebildete  $NO_3^- - N$  ist als Pflanzennährstoff wieder direkt verwertbar. Außerdem kann sich an die Nitrifikation eine Denitrifikation

anschließen, wobei Denitrifikanten das Nitrat zu Stickstoff und Sauerstoff abbauen.

Denitrifikation erfolgt unter anoxischen (d.h., kein frei gelöster Sauerstoff im Wasser vorhanden) Bedingungen durch eine Vielzahl von Bakterien, die in der Lage sind, den Sauerstoff des Nitrats für ihren Stoffwechsel zu nutzen. Erforderlich ist dazu lediglich eine Quelle an organischen Nährstoffen.

## 2.3 Erweiterungen und Varianten

Mit der Einführung des ASM 1 wurde von der Arbeitsgruppe der IWA ein neues mathematisches Modell für Belebtschlammkläranlagen entwickelt. Als das ASM 1 im Jahr 1987 zum ersten Mal eingeführt wurde, bildete es den Hauptlöser für viele wissenschaftliche und praktische Projekte. Heute sind mathematische Modelle, die sich auf ASM 1 beziehen, in verschiedene Programme eingearbeitet, so dass das Verhalten von Belebtschlamm bei der Behandlung von häuslichem Abwasser simuliert werden kann.

### 2.3.1 Das ASM 2-Modell

Nach zehnjähriger Erfahrung in der Anwendung von ASM 1 hat die Arbeitsgruppe die Modelle ASM 2 und ASM 3 vorgeschlagen, die einige Schwächen des ASM 1 korrigieren, nicht unbedingt notwendige Teile weglassen, und neue Effekte berücksichtigen.

Das “Activated Sludge Model No. 2” ([Hen95]) beinhaltet zusätzlich zu den Prozessen des ASM 1 die biologische Phosphorelimination. Es ist eine Erweiterung des ASM 1 Modells, es ist komplexer und beinhaltet mehrere Komponente und zusätzliche Prozesse.

Der wichtigste Unterschied zwischen ASM1 und ASM2 ist, dass im ASM 2 die Biomasse eine innere Struktur besitzt, und aus diesem Grund lässt sich seine

Konzentration nicht einfach mit einem Parameter  $X_{BM}$  bezeichnen.

Das ist eine Vorbedingung dafür, dass die biologische Phosphor-Elimination in dem Modell berücksichtigt werden kann.

### 2.3.2 Das ASM No. 2d-Modell

Das Modell ASM 2d ist eine Erweiterung von ASM 2([Hen95]) und von ASM 1([Hen87]). Es beinhaltet zwei zusätzliche Prozesse, die dafür stehen, dass Phosphor-ansammelnde Organismen (PAOs-phosphorus accumulating organisms) Zelleninnere organische Speicherprodukte für die Denitrifikation verwenden können. Während im ASM 2 angenommen wurde, dass Phosphor-ansammelnde Organismen nur unter aeroben Bedingungen wachsen können, werden im ASM 2d auch denitrifizierende PAOs betrachtet.

Im Jahr 1994, als das ASM 2 beendet wurde und die Rolle der Denitrifikation im Zusammenhang mit der biologischen Phosphorelimination noch unklar war, wurde entschieden, dieses Element nicht zu betrachten.

Später, im Jahr 1999, wurden allerdings denitrifizierende PAOs für die Simulation von mehreren Resultaten aus der Praxis verwendet. Deshalb wurde das ASM 2-Modell zum ASM 2d-Modell erweitert, in dem denitrifizierende PAOs auch einbezogen sind.

### 2.3.3 Das ASM No. 3-Modell

Die über die Jahre hinweg entwickelten Abwasserreinigungsmodelle sind immer komplexer geworden. Es fing mit ASM 1 an, das Stickstoffeliminationsprozesse enthielt, gefolgt von ASM 2, das Phosphor-Eliminationsprozesse berücksichtigt, und schliesslich ASM 2d mit denitrifizierenden PAOs.

Im Jahr 1998 hat sich die Arbeitsgruppe entschieden, eine neue Modellierungsplattform zu entwickeln, nämlich das ASM 3 -Modell. Das Activated Sludge Mo-

del No.3 fasst alle neuen Erkenntnisse über Belebt-Schlamm Prozesse zusammen. Dazu zählt auch die Möglichkeit, innere Speicherprodukte zu beobachten, die eine entscheidende Rolle während des Metabolismus spielen.

Das ASM 3 [Gujer et. al 1998] bezieht sich auf die gleichen Phänomene wie das ASM 1: Sauerstoffverbrauch, Schlammproduktion, Nitrifikation und Denitrifikation in Belebtschlamm-Kläranlagen bei der Behandlung häuslichen Abwassers. Die biologische Phosphorelimination wird im ASM 2 und 2d ([Hen95]) behandelt, aber im ASM 3 nicht mehr berücksichtigt.

## 2.4 Die Notwendigkeit der Reduktion komplexer biologischer Abwasserreinigungsmodelle

Biologische Abwasserreinigungsmodelle enthalten eine Vielzahl von Prozessen, die unterschiedliche Prozessraten haben. Biologisches Wachstum, Massenübergang, chemische Reaktionen, finden alle gleichzeitig statt und sind voneinander abhängig.

In welchem Maße sich diese Prozesse entkoppeln lassen, ist eine wichtige Frage, die zur Modellvereinfachung beitragen kann. Simultan mit der zunehmenden Komplexität biologischer Abwasserreinigungsmodelle entsteht ein Bedarf an analytischen Methoden, die die Prozessdynamik und Kopplung kontrollieren können und dadurch die Modellreduktion ermöglichen.

Dochain sagt in [Bas80], dass man abhängig vom Modellierungsziel und der verfügbaren Information ein systematisches Vorgehen entwickeln sollte um mathematische Modelle zu vereinfachen (vgl. [DV01]). Ein "vollständiges", hochdimensionales Modell ist nicht immer für alle Anwender und Anwendungen erforderlich. Dementsprechend würde der bei der Parameteridentifikation, Abwasser-, Modell-

bildung, Validierung und Simulation entstehende Aufwand wesentlich vermindert, falls reduzierte, einfachere Modelle betrachtet würden.

Mit zunehmender Anzahl benötigter Prozesse, wird es schwieriger, die Lösungen zu erhalten oder zu analysieren. Je realitätsnaher die Prozessraten werden, desto komplizierter werden sie.

Ein Modellierer sollte nur diejenigen Prozesse berücksichtigen, die essentiell für eine realistische Lösung sind.

Die Beispiele von ASM1, ASM2, ASM2d und ASM3 zeigen, dass ein Bioreaktor-Modell sehr komplex sein kann und eine grosse Zahl von Differentialgleichungen beinhaltet. Trotzdem gibt es viele praktische Anwendungen, wo ein einfaches, reduziertes Modell aus technischer Sicht ausreicht (vgl. [DV01], Seite 81).

### 2.4.1 Annahmen zur Modellvereinfachung

Um das Modell ASM 1 zu vereinfachen, können Annahmen gemacht werden, die folgendermassen zusammengefasst werden:

- Vereinfachung hinsichtlich der Komponentem
  - *COD*-Komponenten:
    1. Keine Hydrolyse, keine Unterscheidung zwischen löslichem und partikelförmigem bioabbaubarem COD.
    2. Inerte Produkte werden nicht als separate Komponente betrachtet ( $X_t$  beinhaltet  $X_p$ )
    3. Inerte Komponenten werden überhaupt nicht betrachtet ( $S_I, X_I, X_P$ ).
  - Stickstoffhaltige Komponenten:
    4. Es wird kein partikelförmiger organischer Stickstoff betrachtet
    5. Keine Ammonium-Produktion aus organischem Stickstoff findet statt
  - Alkalinität:
    6. Alkalinität wird nicht betrachtet



- Vereinfachung infolge von Trennung aerober und anoxischer Bedingungen.  
Keine Denitrifikation unter aeroben Bedingungen.

## 2.5 Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

In dieser Arbeit werden vereinfachte ASM-Modelle für Verfahren zur biologischen Abwasserreinigung vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet und analysiert.

Diese reduzierten Versionen des ASM-Systems bestehen aus nichtlinearen Differentialgleichungen, in denen nur die wichtigsten Prozesse (Nitrifikation und Denitrifikation) berücksichtigt werden.

Methoden aus der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und der Theorie von Chemostaten dienen zur Bestimmung des Langzeitverhaltens und der Stabilitätseigenschaften der Systeme.

Obwohl das generelle Ziel der Abwasserreinigungsmodelle sich sehr einfach formulieren lässt: "maximale Reinigungseffizienz mit minimalen Kosten", ist es deutlich schwieriger, das Optimierungsproblem mathematisch und gleichzeitig realitätsnah zu definieren.

Zum Beispiel werden in [DV01] verschiedene Kontrollziele angedeutet, davon wird eine der relevantesten (die Gesamtmenge von Ammonium und Nitrat an der Stelle des inneren Gleichgewichts minimal zu halten) auch hier betrachtet.

In der vorliegenden Arbeit war ein Ziel, exakte Bedingungen für das innere Gleichgewicht zu ermitteln und mathematische Aussagen bezüglich des Ablaufs der Prozesse in einem Belebtschlammbecken zu formulieren und beweisen.

Mittels Modellrechnungen soll der Einfluss von wichtigen Parametern wie der

Sauerstoffkonzentration nachvollzogen werden. Ein Ergebnis sind erste Voraussagen über das Verhalten der Anlage bei unterschiedlichen Betriebszuständen sowie Optimierungskriterien.



# Kapitel 3

## Mathematische Grundlagen

In der vorliegenden Arbeit werden immer wieder nichtlineare, autonome Differentialgleichungssysteme betrachtet und analysiert. Dabei werden Eigenschaften wie Lösbarkeit, Stabilität, Langzeitverhalten, etc. der Lösungen betrachtet. Diese Begriffe und Eigenschaften werden in diesem Kapitel definiert und die wichtigsten Aussagen in sehr kompakter Form zusammengefasst, so dass sie als Werkzeug zur Verfügung stehen. (Zum Teil wurden diese Resultate bereits in Kapitel 1 verwendet.)

Es gibt viele Differentialgleichungen, für die es keine analytischen Lösungsmethoden gibt. Trotzdem kann man ein qualitatives Verständnis des Verhaltens von Lösungen durch bestimmte Methoden gewinnen. Die Fragen, die man in diesem Zusammenhang betrachtet, sind mit dem Begriff der Stabilität einer Lösung verbunden\*.

### 3.1 Zusammenfassung bekannter Ergebnisse

In folgenden wird immer wieder folgendes autonomes<sup>†</sup>, nichtlineares Differential-

---

\*Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen wurde von Poincaré (1854-1912) in mehreren größeren Veröffentlichungen zwischen 1880 und 1886 entwickelt.

gleichungssystem betrachtet:

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion (insbesondere lokal Lipschitz) auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , d.h., für alle  $x_0 \in U$  gibt es eine Umgebung  $V$  und eine reelle Zahl  $L > 0$ , so dass:  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$  für alle  $x_1, x_2$  aus  $V$ . Diese Bedingung an  $f$  stellt die Existenz der Lösung für einen Startwert  $x_0 \in U$ , auf einem maximalen Intervall  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  sicher. (Eine äquivalente Bedingung an  $f$  wäre die folgende: Zu jedem Kompaktum  $K \subseteq U$  gibt es ein  $L^* > 0$  derart, dass  $\|f(x) - f(x')\| \leq L^* \|x - x'\|$  für alle Paare  $x, x' \in K$ .)

### 3.1.1 Aussagen über Lösungen nichtlinearer autonomer Differentialgleichungssysteme

In diesem Abschnitt wird an bekannte Eigenschaften autonomer Differentialgleichungen erinnert, wie z.B., dass die Lösungen einer Differentialgleichung zu gegebenem Anfangswert ein lokales dynamisches System erzeugen;

**Proposition 3.1.1** *Sei  $\pi(y, t)$  die Lösung von  $\dot{x} = f(x), x(0) = y$ . Dann ist  $\pi$  auf einer offenen Umgebung  $U \times \{0\} \subseteq U \times \mathbb{R}$  definiert und erfüllt folgende Bedingungen:*

(i)  $\pi(x, 0) = x$  für alle  $x \in U$

(ii)  $\pi(x, t + s) = \pi(\pi(x, t), s)$  für alle  $x \in U$  und alle  $s, t \in \mathbb{R}$ , für die beide Seiten definiert sind.

$\pi$  wird auch ein lokales dynamisches System genannt.

---

<sup>†</sup>Autonom: tritt die Variable  $t$  in der Differentialgleichung nicht explizit auf, so heißt die Differentialgleichung autonom

BEWEIS: für einen Beweis siehe [HS74] oder [Per91], Kapitel 2, Seite 95.

Man kann also voraussetzen, dass das System (3.1) ein lokales dynamisches System  $\pi(x, t)$  auf der Menge  $U$  definiert.

**Definition 3.1.2** (*Trajektorien*)

Für  $x \in U$ , heißt die Menge  $\{\pi(x, t), t \geq 0\}$  positiver Orbit oder positive Trajektorie (oder positive Bahn) durch den Punkt  $x$  und wird mit  $\gamma^+(x)$  bezeichnet. Falls nur negative  $t$  betrachtet werden, heißt die Menge negativer Orbit oder negative Trajektorie durch den Punkt  $x$  und wird mit  $\gamma^-(x)$  bezeichnet. Die Vereinigung von positivem und negativem Orbit wird einfach Orbit oder Trajektorie genannt und mit  $\gamma(x)$  bezeichnet.

Im Fall biologischer Systeme möchte man das Langzeitverhalten -die asymptotischen Eigenschaften der Trajektorien für positive Zeiten- herausfinden. Biologische Modelle verlangen, dass Trajektorien mit positiven Anfangswert positiv bleiben (die Konzentrationen oder die Zahl der Individuen in Populationen sind positiv) und dass die Trajektorien nicht ins Unendliche wachsen mit wachsender Zeit.

**Definition 3.1.3** (*Invariante Menge*)

Eine Menge  $S$  heisst positiv invariante Menge, falls alle Trajektorien, die Anfangswerte in  $S$  haben, auch in  $S$  bleiben für alle positive Zeiten. Im Fall dass die Trajektorien auch für alle negative Zeiten in  $S$  bleiben, heisst die Menge invariant.

Also kann die grundlegende Bedingung für Positivität von Lösungen so formuliert werden: "Der positive Orthant ist positiv invariant für das dynamische System, das durch (3.1) erzeugt wird".

Ein sehr hilfreicher und später oft verwendeter Satz ist der folgende:

**Satz 3.1.4** (*Positivität von Lösungen*)

Gegeben sei das (3.1) im  $\mathbb{R}^n$ . Es sei die folgende Bedingung erfüllt:

Für  $x_i = 0$  und  $x_j \geq 0$  für alle  $j \in \overline{1, n}$  und  $j \neq i$  ist  $f_i(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) \geq 0$ .

Dann gilt für jedes  $z_0 \in \mathbb{R}_+^n$ : Die Lösung der Differentialgleichung (3.1) mit Anfangswert  $z_0$  bei  $t = 0$  bleibt für alle  $t > 0$  in  $\mathbb{R}_+^n$ .

BEWEIS (Skizze):

Schritt 1: Man beweist die Aussage für die stärkere Voraussetzung:

( $i^*$ ) Für  $x_i = 0$  und  $x_j \geq 0$  für alle  $j \in 1, n$  und  $j \neq i$  ist  $f_i(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) > 0$ .

Schritt 2: Für  $\varepsilon > 0$  betrachte  $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon$ . Für  $\varepsilon > 0$  erfüllt die Funktion  $f_\varepsilon$  die Bedingung ( $i^*$ ).

Sei  $z(t)$  eine Lösung mit Startwert  $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Wir nehmen an, dass ein  $t' > 0$  existiert so dass:  $z(t') \notin \mathbb{R}_+^n$ .

Dann folgt die Aussage mit dem Satz über stetige Abhängigkeit (von rechter Seite).

□

**Definition 3.1.5** (*Dissipativität*)

Das oben erwähnte dynamische System heisst dissipativ, falls es eine kompakte Teilmenge von  $M$  gibt, in die schliesslich alle positiven Trajektorien eintreten.

Diese Bedingung, falls erfüllt, stellt die globale Existenz der Lösungen von (3.1) sicher (für alle positive Zeiten).

**Definition 3.1.6** (*Alpha und Omega Limes-Punkt*)

Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen so, dass  $t_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Falls  $P_n = \pi(x, t_n)$  zu einem Punkt  $P$  konvergiert, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x, t_n) = P$ , dann heisst dieser Punkt  $P$  ein Omega-Limespunkt von  $x$ . Ähnlich lässt sich ein Alpha-Limespunkt definieren: falls es eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt mit  $t_n \rightarrow \infty$  so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x, t_n) = Q$  und der Punkt  $Q \in U$ , dann heisst der Punkt  $Q$  Alpha-Limespunkt von  $x$ .

**Definition 3.1.7** (*Limesmenge*)

Die Menge aller Alpha (Omega)-Limespunkte von  $x$  heisst Alpha (Omega)-Limesmenge von  $x$  und wird mit  $\alpha(x)$  ( $\omega(x)$ ) bezeichnet.

**Satz 3.1.8** Die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmengen einer Trajektorie  $\gamma$  sind abgeschlossene Teilmengen von  $U$ . Falls  $\gamma^+$  in einer kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, dann ist die  $\omega$ -Limesmenge eine nichtleere, zusammenhängende und kompakte Teilmenge von  $U$ . Falls  $\gamma^-$  in einer kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, dann ist die  $\alpha$ -Limesmenge eine nichtleere, zusammenhängende und kompakte Teilmenge von  $U$ .

**Definition 3.1.9** (*Anziehende Menge/Attraktor*)

Eine abgeschlossene invariante Menge  $A \subset U$  heisst anziehende Menge für das System (3.1), falls es eine Umgebung  $V$  von  $A$  gibt so dass für alle  $x \in V$ :  $\pi(x, t) \in V$  für alle  $t \geq 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(x, t) = A$ . Eine invariante Menge die die Omega-Limesmenge einer eigenen Umgebung ist, heisst (lokaler) Attraktor.

Die Existenz periodischer Lösungen des autonomen nichtlinearen Systems  $\dot{x} = f(x)$  wird im folgenden betrachtet.

**Definition 3.1.10** (*Periodische Lösung*) Eine Lösung des Systems (3.1) heisst periodisch mit Periode  $T > 0$ , falls  $x(t+T) = x(t)$  für alle  $t$  gilt. Die zugehörigen Trajektorien sind geschlossene Kurven.

Periodische Lösungen spielen bei physikalischen Problemstellungen oftmals eine wichtige Rolle, da sie Phänomene beschreiben, die sich wiederholen.

### 3.1.2 Stabilität und Instabilität

Ein üblicher Startpunkt in der Analyse eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems



$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

ist es, die stationären Punkte zu berechnen und das Verhalten des Systems in der Nähe solcher Gleichgewichtslösungen zu bestimmen. Man weiss über nichtlineare Differentialgleichungssysteme der Form (3.2), dass sie sich lokal in der Nähe von hyperbolischen stationären Punkten ähnlich verhalten wie das lineare System

$$\dot{x} = Ax,$$

mit der Matrix  $A = Df(x_0)$ . Die lineare Funktion  $Ax = Df(x_0)x$  heißt “der lineare Teil” von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

In diesem Abschnitt werden Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslösungen des nichtlinearen Systems betrachtet.

**Definition 3.1.11** (*Kritische oder stationäre Punkte*)

*Betrachte das autonome System (3.1). Die Punkte, an denen  $f(x) = 0$  ist, heißen kritische oder stationäre Punkte dieses Systems.*

*An solchen Punkten gilt auch  $\dot{x} = 0$ , daher sind die kritischen Punkte die Bahnen der konstanten Lösungen (oder Gleichgewichtslösungen) des Differentialgleichungssystems.*

Man unterscheidet zwischen hyperbolischen und nichthyperbolischen stationären Punkten, wobei ein stationärer Punkt dann hyperbolisch ist, wenn kein Eigenwert der Matrix  $Df(x_0)$  Realteil Null besitzt.

**Definition 3.1.12** (*Stabiler und instabiler kritischer Punkt*)

*Ein kritischer Punkt  $x^0$  des Systems  $\dot{x} = f(x)$  heisst stabil, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass jede Lösung  $x = \phi(t)$  des Systems die mit  $t = 0$   $\|\phi(0) - x^0\| < \delta$  existiert, und  $\|\phi(t) - x^0\| < \epsilon$  erfüllt für alle  $t \geq 0$ .*

Diese mathematische Aussage besagt letztlich, dass alle Lösungen, die “ausreichend nahe” (das heißt innerhalb einer Entfernung  $\delta$ ) am  $x^0$  beginnen, “nahe” (innerhalb einer Entfernung  $\epsilon$ ) bei  $x^0$  verbleiben. Ein kritischer Punkt, der nicht stabil ist, heißt instabil.

**Definition 3.1.13** (*Asymptotische Stabilität*)

Ein kritischer Punkt  $x^0$  heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil ist und wenn ein  $\delta_0$  mit  $0 < \delta_0 < \delta$  existiert, für welches bei einer Lösung  $x = \Phi(t)$ , die  $\|\phi(0) - x^0\| < \delta_0$  erfüllt,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^0$  gilt.

Dies bedeutet, dass Trajektorien, die genügend nah bei  $x^0$  beginnen, nicht nur nahe bei  $x^0$  verbleiben, sondern dass sie für  $t \rightarrow \infty$  sogar gegen  $x_0$  konvergieren. Die Stabilität eines hyperbolischen kritischen Punktes  $x_0$  wird von den Vorzeichen des Realteils der Eigenwerte  $\lambda_j$  der Matrix  $Df(x_0)$  bestimmt.

Ein hyperbolischer kritischer Punkt ist lokal asymptotisch stabil (oder eine Senke) genau dann wenn  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Ein hyperbolischer kritischer Punkt ist instabil genau dann wenn es mindestens ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  gibt so dass  $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$  (Quelle oder ein Sattelpunkt) ist.

**Bemerkung 3.1.14** *Zu beachten ist, dass asymptotische Stabilität eine stärkere Eigenschaft als Stabilität ist, da ein kritischer Punkt erst stabil sein muss, bevor wir über seine asymptotische Stabilität sprechen können. Die Grenzbedingung, die ein wesentliches Merkmal asymptotischer Stabilität ist, impliziert für sich alleine nicht einmal gewöhnliche Stabilität. Es ist möglich, Beispiele zu konstruieren, in denen alle Trajektorien für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $x_0$  konvergieren, für die  $x_0$  jedoch kein stabiler kritischer Punkt ist.*

**Lemma 3.1.15** *Enthält die Omega-Limesmenge eines Punktes  $x$  einen asymptotisch stabilen kritischen Punkt  $x_0$ , so ist diese Limesmenge gleich  $\{x_0\}$ .*

Falls ein stationärer Punkt  $P$   $k$  Eigenwerte mit positivem Realteil und  $(n - k)$  Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, so definiert man zwei Mengen:

$$M^+(P) = \{x \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(x, t) = P\},$$

die sogenannte stabile Mannigfaltigkeit, und die sogenannte instabile Mannigfaltigkeit:

$$M^-(P) = \{x \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(x, t) = P\}.$$

Die Mengen  $M^+(P)$  und  $M^-(P)$  sind lokale Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $(n - k)$  bzw.  $k$ .

**Bemerkung 3.1.16** (*Globale asymptotische Stabilität, Bereich der asymptotischen Stabilität oder Einzugsgebiet*)

*Für Problemstellungen in der Praxis ist es bei einem nichtlinearen System wichtig, die Menge der Anfangswerte, für die ein gegebener kritischer Punkt asymptotisch stabil ist, richtig einzuschätzen. Die Menge dieser Anfangswerte wird als Bereich der asymptotischen Stabilität oder als das Einzugsgebiet des kritischen Punktes bezeichnet.*

Ein wichtiger Satz in der Analyse mancher Systeme ist folgender:

**Satz 3.1.17** (*Butler-McGehee*)

*Sei  $P$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des Systems (3.1), der in die Omega-Limesmenge  $\omega(x)$  der Trajektorie  $\gamma^+(x)$  liegt, aber nicht die ganze Omega-Limesmenge ist. Dann ist der Durchschnitt der  $\omega(x)$ -Menge mit der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit von  $P$  nichttrivial (d.h. von  $P$  verschieden).*

Zur grundlegenden Literatur gehören hier: [SW95], [Wal99], [Per91] und [Wig90]

### 3.1.3 Poincaré-Bendixson-Theorie im $\mathbb{R}^2$

Zweidimensionale Systeme lassen sich mit Hilfe der Poincaré-Bendixson Theorie oft gut meistern. Bei der Analyse solcher Systeme stellt sich meistens heraus dass die Omega-Limesmenge entweder leer oder ein stationärer Punkt, bzw. ein periodischer Orbit, oder ein sogenannter Graph ist.

**Satz 3.1.18** (*Der Satz von Poincaré-Bendixson*) (vgl. [Per91], Seite 227)

Sei  $f \in C^1(U)$  wobei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen. Das System (3.1) habe eine Trajektorie  $\gamma^+$  die in einer kompakten Teilmenge  $F$  von  $U$  liegt. Falls die Omega-Limesmenge  $\omega(\gamma)$  keine kritischen Punkte von (3.1) enthält, dann ist sie ein periodischer Orbit von (3.1).

Weiterhin gilt ([SW95], Seite 9): Falls ein 2-dimensionales System einen periodischen Orbit hat, dann muss es auch einen stationären Punkt im Inneren des Orbits haben.

**Satz 3.1.19** (*Bendixson's Kriterium*) Sei  $f \in C^1(E)$ , wobei  $E$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet aus  $\mathbb{R}^2$  ist. Falls die Divergenz  $\nabla \cdot f$  des Vektorfeldes  $f$  ungleich Null ist und sein Vorzeichen in  $E$  nicht wechselt, dann besitzt das System  $\dot{x} = f(x)$  keine geschlossene Bahn, die ganz in  $E$  liegt.

Eine allgemeinere Version für das obige Kriterium ist das Dulac-Kriterium (siehe [Per91])

**Satz 3.1.20** (*Dulac's Kriterium*) Sei  $f \in C^1(E)$ , wobei  $E$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet aus  $\mathbb{R}^2$  ist. Falls es eine Funktion  $B \in C^1(E)$  gibt, so dass  $\nabla \cdot (Bf)$  ungleich Null ist und sein Vorzeichen in  $E$  nicht wechselt, dann besitzt das System  $\dot{x} = f(x)$  keine geschlossene Bahn, die ganz in  $E$  liegt.

### 3.1.4 Ljapunov-Theorie

Die Stabilität von nichthyperbolischen stationären Punkten ist wesentlich schwieriger zu bestimmen. Ein Beispiel für diese Situation ist das nichtlineare Pendel mit ungedämpfter Schwingung. Eine Methode dafür ist die Methode von Ljapunov<sup>§</sup>. Dies ist eine sehr wirksame Methode, durch die man auch globale Informationen erhält; wie z.B. eine Abschätzung über die Ausdehnung des Einzugsbereichs eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes.

Um die Methode verwenden zu können, muss man eine geeignete sogenannte Ljapunov-Funktion suchen. Diese Funktion sollte entlang der Trajektorien des Systems fallend sein.

**Definition 3.1.21** (*Ljapunov-Funktion*)

Eine Funktion  $V$  heisst Ljapunov-Funktion für das System (3.1) auf einer Menge  $G \subset U$ , falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $V$  ist stetig differenzierbar auf  $G$ ;
- (ii) für alle  $\bar{x} \in \overline{G}$  existiert  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} V(x)$  entweder als eine reelle Zahl oder  $\infty$ .
- (iii)  $\dot{V} = \nabla V f \leq 0$  in  $G$ .

**Satz 3.1.22** (*LaSalle, vgl. [SW95], Seite 29*)

Es sei  $V$  eine Ljapunov-Funktion für das System (3.1) auf  $G$ , und sei  $\gamma^+ = \{x(t) : t \geq 0\}$  ein Orbit von (3.1), dessen Abschluss in  $G$  liegt. Dann liegt die Omega-Limes Menge von  $\gamma^+$  in  $M$ , wobei  $M$  die grösste invariante Menge des Systems (3.1) auf die Menge  $E = \left\{x \in \overline{G} : V(x) < \infty \text{ und } \dot{V}(x) = 0\right\}$  ist.

---

<sup>§</sup>Diese Methode wird als direkte Methode bezeichnet, weil sie die Kenntnis der Lösung des Differentialgleichungssystems nicht erfordert. Die Schlussfolgerungen über Stabilität oder Instabilität eines kritischen Punktes ergeben sich durch die Konstruktion einer geeigneten Hilfsfunktion.

**Bemerkung 3.1.23** Falls  $x(t)$  eine Lösung des Systems (3.1) auf  $G$  ist, dann ist:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x(t))x'(t) = \nabla V(x(t))f(x(t)) \leq 0$$

d.h. die Funktion  $V(x(t))$  ist monoton fallend entlang den Lösungen.

## 3.2 Der allgemeine Chemostat

Im folgenden Abschnitt werden einige Ergebnisse über den Chemostat aufgeführt aus dem Buch von Smith und Waltman (siehe [SW95]).

### 3.2.1 Der Chemostat mit einem Substrat und $n$ Mikrobenspezies

Der Chemostat mit einem Substrat  $S$  und  $n$  Mikrobenspezies  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , die um dieses Substrat im Wettbewerb stehen, ist eine direkte Verallgemeinerung des einfachen Chemostaten. Die folgende Darstellung basiert auf Smith und Waltman ([SW95], Kapitel 1, Seite 30). Man ersetzt die Michaelis-Menten-Funktionen durch allgemeine monotone Funktionen  $f_i(S)$  für die Spezies  $i, 1 \leq i \leq n$  (genaue Annahmen an diese Funktionen werden unten aufgelistet) und man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S^{(0)} - S) - \sum_{i=1}^n f_i(S) \frac{x_i}{\gamma_i} \\ \dot{x}_i = x_i(f_i(S) - D) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.3)$$

mit  $S(0) \geq 0$  und  $x_i(0) > 0$ .

Eine skalierte Form des obigen Systems erhält man, falls  $S$  und  $\frac{x_i}{\gamma_i}$  als Vielfache von  $S^{(0)}$  gemessen werden, und man auch die Zeit skaliert ( $D \rightarrow 1$ ):

$$\begin{cases} \dot{S} = (1 - S) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(S) \\ \dot{x}_i = x_i(f_i(S) - 1), \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.4)$$

Weiterhin nehmen wir an, dass die Funktionen  $f_i$  von folgendem Typ sind:

- (i)  $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ;
- (ii)  $f_i(0) = 0$ ;
- (iii)  $f_i(u) < f_i(v)$  wenn  $u < v$ ; und
- (iv)  $f_i$  ist stetig differenzierbar.

Diese Annahmen sind sehr schwach; die  $f_i$  brauchen nur strikt monoton wachsend und hinreichend oft differenzierbar zu sein. Sie brauchen nicht einmal beschränkt zu sein auf  $\mathbb{R}^+$ .

Sei  $\lambda_i$  die einzige Lösung der Gleichung  $f_i(S) = 1$ , falls sie existiert; sonst sei  $\lambda_i = \infty$ .

Man nennt  $\lambda_i$  die Überlebenskonzentration (break-even concentration) von Mikrobenpezies  $i$ . Für  $S > \lambda_i$  nimmt  $x_i$  zu, für  $S < \lambda_i$  nimmt  $x_i$  ab. Man nimmt an, dass die Gleichungen in solcher Weise nummeriert sind, dass:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \infty$$

Das heisst, dass die Spezies  $x_1$  den geringsten Bedarf für Wachstum hat.

Sei  $\Sigma = S + \sum_{j=1}^n x_j - 1$ . Dann wird (3.4) in den Variablen  $\Sigma, x_1, x_2, \dots, x_n$  zum folgenden:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = -\Sigma \\ \dot{x}_i = x_i(f_i(1 + \Sigma - \sum_{j=1}^n x_j) - 1), i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.5)$$

Offensichtlich gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0,$$



und daraus ergibt sich, dass die Lösungen von (3.3) und (3.4) existieren und beschränkt sind für  $t \geq 0$ .

Sowohl  $S(t)$  als auch  $x_i(t)$  bleiben nichtnegativ, was sich aus der Form von (3.4) ergibt. Man betrachtet das System (3.4) eingeschränkt auf die invariante Hyperebene  $\sum = 0$ , von der alle Lösungen angezogen werden und erhält:

$$\dot{x}_i = x_i(f_i(1 - \sum_{j=1}^n x_j) - 1), i = 1, 2, \dots, n.$$

Das relevante Gebiet für (3.4) ist die Menge

$$\Omega = \{x \in R_+^n : \sum_{j=1}^n x_j \leq 1\}.$$

Man sieht leicht, dass die Menge  $\Omega$  positiv invariant ist für (3.4), weil das Vektorfeld (3.4) in das Innere von  $\Omega$  zeigt, für alle Randpunkte von  $\Omega$ , wobei  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ . Beachte, dass: falls  $x(0)$  ein solcher Punkt ist, dann:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sum_{j=1}^n x_j(t)) = -1 < 0,$$

also  $\sum_{j=1}^n x_j(t) < 1$  für  $t > 0$ .

Ein Konkurrent  $x_i$  mit einem entsprechenden  $\lambda_i \geq 1$  ist ein unzulänglicher Konkurrent, da seine "break-even"-Konzentration größer oder gleich der Reservoirkonzentration des Substrats ist. Folgende Proposition (vgl. [SW95], Prop 3.1, Seite 32) erläutert diese Tatsache genauer.

**Proposition 3.2.1** *Falls  $\lambda_i \geq 1$  für ein  $i$ , dann ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ .*

Im folgenden betrachten wir (3.4) im Fall, dass  $x_1$  ein geeigneter Konkurrent ist; d.h., man setzt voraus, dass  $0 < \lambda_1 < 1$  ist. Sei  $E_1 = (\lambda_1, 1 - \lambda_1, 0, 0, \dots, 0)$  der stationäre Punkt, der dem Fall entspricht, dass nur die Spezies  $x_1$  überlebt. Das System (3.4) besitzt auch andere stationäre Punkte außer  $E_0$  und  $E_1$  in  $\Omega$ ,

falls  $0 < \lambda_j < 1$  für ein  $j \geq 2$ , was aber für das folgende unerheblich ist. Als Hauptresultat hier erhält man, dass das Prinzip der kompetitiven Exklusion im Chemostat mit  $n$  Spezies gilt, wenn jeder Konkurrent eine monotone Aufnahme-funktion besitzt (für den Beweis siehe [SW95], Seite 32).

**Satz 3.2.2** *Sei  $x(t)$  eine Lösung von (3.4) in  $\Omega$  für die  $x_1(0) > 0$  gilt. Dann ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = E_1$ .*

**Lemma 3.2.3** *Die Eigenwerte des linearen Teils der rechten Seite von (3.3) am stationären Punkt  $E_1$  haben negativen Realteil.*

BEWEIS:

Man berechnet die Funktionalmatrix  $Df$  für das System (3.4) und erhält:

$$\begin{bmatrix} -1 - \sum_{i=1}^n (x_i f'_i(S))|_{E_1} & -f_1(S)|_{E_1} & -f_2(S)|_{E_1} & \cdot & \cdot & \cdot & -f_n(S)|_{E_1} \\ (x_1 f'_1(S))|_{E_1} & (f_1(S)|_{E_1} - 1) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ (x_2 f'_2(S))|_{E_1} & 0 & (f_2(S)|_{E_1} - 1) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ (x_n f'_n(S))|_{E_1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & (f_n(S)|_{E_1} - 1) \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom an der Stelle  $E_1$  berechnet man mit Hilfe der obigen Matrix. Dabei berücksichtigt man dass  $f_1(S)|_{E_1} = 1$ ,  $x_i^1 = 0$  für alle  $i = 2, \dots, n$ .

$$\begin{vmatrix} -1 - (x_1^1 f'_1(S))|_{E_1} - \lambda & -1 & -f_2(S)|_{E_1} & \cdot & \cdot & \cdot & -f_n(S)|_{E_1} \\ (x_1^1 f'_1(S))|_{E_1} & -\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & (f_2(S)|_{E_1} - 1) - \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & (f_n(S)|_{E_1} - 1) - \lambda \end{vmatrix}$$

Man erhält:

$$(f_n(S)|_{E_1} - 1 - \lambda)(f_{n-1}(S) - 1 - \lambda) \dots (f_2(S)|_{E_1} - 1 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - (x_1^1 f_1'(S)|_{E_1}) - \lambda & -1 \\ (x_1^1 f_1'(S)|_{E_1}) & -\lambda \end{vmatrix}$$

Die Eigenwerte sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= f_n(\lambda_1) - 1 < 0, \text{ da } f_n(\lambda_1) < f_n(\lambda_n) = 1 \\ \lambda_2^* &= f_{n-1}(\lambda_1) - 1 < 0, \text{ da } f_{n-1}(\lambda_1) < f_{n-1}(\lambda_{n-1}) = 1 : \\ \lambda_{n-1}^* &= f_2(\lambda_1) - 1 < 0, \text{ da } f_2(\lambda_1) < f_2(\lambda_2) = 1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass:  $f_i(\lambda_1) < f_i(\lambda_i) = 1$  für alle  $i = 2, \dots, n$  (wir haben vorausgesetzt, dass  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  und die  $f_i$  monoton wachsende Funktionen sind).

Die restlichen beiden Eigenwerte ergeben sich als die Lösung folgender quadratischer Polynomgleichung:

$$\lambda^2 + \lambda(1 + x_1^1 f_1'(S)|_{E_1}) + x_1^1 f_1'(S)|_{E_1} = 0$$

Aufgrund des Routh-Hurwitz Kriteriums haben beide Eigenwerte  $\lambda_n^*$  und  $\lambda_{n+1}^*$  negativen Realteil (man berücksichtigt hierbei dass  $f_1'(S)|_{E_1} > 0$ ).

□

### 3.2.2 Der Chemostat mit verschiedenen Abbauraten

Im Fall des Chemostaten mit verschiedenen Abbauraten wird nur mit Monod-Kinetik gearbeitet:

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S^{(0)} - S) - \sum_{i=1}^n \frac{m_i S x_i}{a_i + S} \\ \dot{x}_i = x_i \left( \frac{m_i S}{a_i + S} - \bar{D}_i \right), \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.6)$$

mit  $S(0) \geq 0$  und  $x_i(0) > 0$ .

Die Skalierung mit  $D$  und  $S^0$  führt zu:

$$\begin{cases} \dot{S} = 1 - S - \sum_{i=1}^n \frac{m_i S x_i}{a_i + S} \\ \dot{x}_i = x_i \left( \frac{m_i S}{a_i + S} - D_i \right), \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.7)$$

wobei  $D_i = \bar{D}_i/D$ . Die entsprechenden  $\lambda$ -s sind gleich

$$\lambda_i = \frac{a_i D_i}{m_i - D_i},$$

wobei angenommen wird, dass  $m_i > D_i$ . Genau wie im vorherigen Abschnitt kann man sagen, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ , falls  $m_i \leq D_i$  oder falls  $\lambda_i \geq 1$ ; in diesem Fall konvergiert das ganze System gegen ein reduziertes System, d.h ein System mit weniger Konkurrenten. Diese Aussage liefert notwendige Bedingungen für das Überleben von Mikroben. Es genügt nur Konkurrenten zu betrachten für die  $m_i > D_i$  und  $\lambda_i < 1$  erfüllt ist.

Man kann zeigen, dass das obige System dissipativ ist, und zwar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup [S(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t)] \leq d^{-1}.$$

**Satz 3.2.4** (*über kompetitive Exklusion, vgl. [SW95], Theorem 4.1*) *Angenommen dass  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$  und  $\lambda_1 < 1$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = (1 - \lambda_1)/D_1$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ .*

Also gilt auch hier das Exklusionsprinzip.

**Bemerkung 3.2.5** *Analog zu Lemma 3.2.3 kann man zeigen, dass die Eigenwerte des linearen Teils der rechten Seite von (3.7) an der Stelle des stationären Punktes  $E_1$  (so wie das System (3.4) in Abschnitt (3.3.1)) negativen Realteil haben.*

### 3.3 Aussagen über Limesmengen

In diesem Abschnitt der Arbeit wird ein zentrales Ergebnis über das Grenzverhalten gewisser nichtlinearer Differentialgleichungssysteme bewiesen. Diese werden in Kapitel 4 Verwendung finden.

**Satz 3.3.1 :**

*Sei  $\dot{x} = f(x)$  gegeben auf der offenen Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und sei  $f \in C^1(W)$ .*

*Folgende Bedingungen seien erfüllt:*

*a) Es gibt eine positiv invariante, kompakte Menge  $K^*$ , die von allen Lösungen von  $\dot{x} = f(x)$  auf  $W$  betreten wird.*

*b) Es gibt eine invariante, abgeschlossene Menge  $G \subseteq W$  mit globalem, asymptotisch stabilem Attraktor  $Z \subseteq G$  für das System eingeschränkt auf  $G$ , ( $\dot{x} = f(x)|_G, x \in G \subseteq W$ ), und  $Z$  sei lokal asymptotisch stabil für das ganze System.*

*c) Die Menge  $G$  sei anziehend in dem Sinne, dass  $\text{dist}(S(t, y), G) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  für alle  $y \in W$ , wo  $S(t, y)$  eine Lösung des Originalsystems ist, mit  $S(t_0) = y$ .*

*Dann ist  $Z$  ein globaler Attraktor für das System auf  $W$ .*

BEWEIS:

Wir zeigen: jede Lösung  $S(t, y)$  des Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $x(t_0) = y$  für  $y \in W$  beliebig, kommt in das Einzugsgebiet  $U$  von  $Z$ , d.h., für beliebiges  $y \in W$  existiert ein  $t > 0$  mit  $S(t, y) \in U$ . Sobald die Lösung in  $U$  eintritt, wird sie von  $Z$  angezogen, da  $Z$  lokal asymptotisch stabil ist, also  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, w), Z) = 0$  für alle  $w \in U$ .

Der Beweis wird strukturiert, in mehreren Schritten durchgeführt.

Aufgrund der Annahme a) werden alle Lösungen in  $W$  die positiv invariante und kompakte Menge  $K^* \subseteq W$  betreten (an einem gewissen Zeitpunkt  $t^* > 0$ ) und

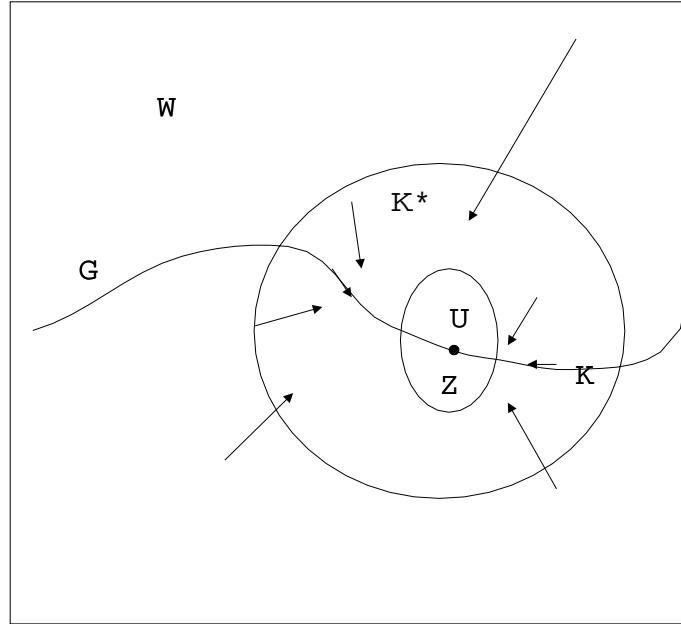


Abbildung 3.1:  $W$ : Ebene,  $K^*$ : abgeschlossene Kreisscheibe,  $G$ : Kurve (invariant, anziehend),  $Z$ : Punkt (lokal asymptotisch stabil), global asymptotisch stabil für System auf  $G$ ,  $U$ : lokales Einzugsgebiet von  $Z$ .

diese nicht mehr verlassen (positive Invarianz). Das bedeutet nicht nur, dass alle Lösungen für alle  $t > 0$  existieren, sondern dass die Lösungen auch beschränkt sind. Ausserdem gilt:  $Z \subseteq K^*$ .

Sei  $S(t, y)$  eine Lösung des Originalsystems definiert auf  $W$  mit dem Anfangswert  $S(t_0) = y$ .

- (i) Tatsächlich existiert  $t^* > t_0 > 0$  so dass die Lösung  $S(t^*, y) \in K^*$  und  $S(t, y) \in K^*$  für alle  $t \geq t^*$  (siehe oben).

Aus der Annahme c) (Anziehungseigenschaft der Menge  $G$ ) folgt, dass für alle  $y \in W$  und alle  $\sigma > 0$  ein  $v \in K^* \cap G = K$  und ein  $t_1 > t^* > t_0 > 0$  existiert so dass  $\|S(t_1, y) - v\| < \sigma$  (siehe Abbildung 3.1).

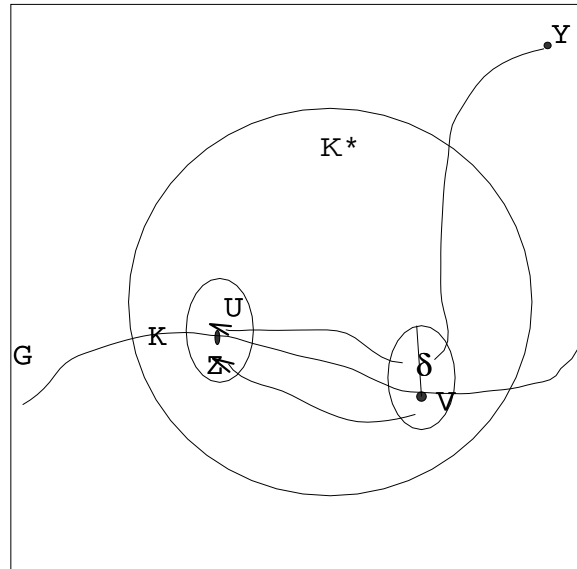


Abbildung 3.2: Alle Punkte im  $\delta$ -Kreis um  $v$  haben Trajektorien, die in  $U$  eintreten ( $\delta$  hängt von  $v$  ab). Trajektorien mit Startpunkt  $y$  kommen  $G \cup K^*$  beliebig nahe.

(ii) Aus der Anziehungseigenschaft des eingeschränkten Systems folgt: für alle  $v \in K$  gibt es ein  $t_2 > 0$  (abhängig von  $v$ ), so dass  $S(t, v) \in U \cap G$  für alle  $t \geq t_2$ . Innerhalb von  $G$  ist  $Z$  global asymptotisch stabil, d.h.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, v), Z) = 0$  für alle  $v \in G$ .

(iii) Aus dem Satz über stetige Abhängigkeit folgt, dass für alle  $v \in G$  ein  $\delta^* = \delta^*(v)$  existiert so dass:

$$S(t_3, w) \in U \text{ für ein } t_3 > 0, \text{ falls } \|w - v\| < \delta^* = \delta^*(v)$$

und folglich  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, w), Z) = 0$ , falls  $\|w - v\| < \delta^*$  (siehe Abb. 3.2).

(iv) Für das beliebig gewählte  $y \in W$  ist jetzt zu zeigen, dass es ein  $v \in K$  und

ein  $t^* > 0$  gibt, so dass:  $\|S(t^*, y) - v\| < \delta^*(v)$  (mit  $\delta^*(v)$  von oben).

- (v) Da  $K$  kompakt ist, können aus jeder offenen Überdeckung  $B_{i \in \mathbb{I}}$  von  $K$  endlich viele  $B_1, B_2, \dots, B_m$  ausgewählt werden, die  $K$  überdecken. Es gibt also endlich viele  $v_i \in K$ , deren  $\delta^*(v_i)$ -Umgebungen von

$B_i = \{x \in W : \|x - v_i\| < \delta^*(v_i)\}$  eine offene Überdeckung von  $K$  bilden.

- (vi) Setze  $A^* = \cup_{i=1}^m B_i$ . Dann ist  $A^*$  eine offene Menge, und  $A = W - A^*$  abgeschlossen. Ausserdem ist  $A \cap K = \emptyset$ , also folgt, dass  $K$  und  $A$  positiven Abstand  $\rho$  haben, wo  $\rho = \text{dist}(A, K) := \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in K\}$ .

Jeder Punkt  $w \in W$  mit  $\text{dist}(w, K) < \rho$  liegt also in einer Kugel  $B_i$ . (Denn sei  $w \notin A^*$ . Dann folgt, dass  $w \in A = W - A^*$ .)

Aber  $\|w - v\| < \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in K\} = \rho$ , also existiert ein  $v \in K$ , dessen Abstand zu  $w$  kleiner als  $\rho$  ist, also kann  $\rho$  nicht Infimum sein, im Widerspruch zur Annahme.)

- (vii) Insgesamt kommen alle Trajektorien mit Startpunkt  $y$  der kompakten Menge  $G \cap K^* = K$  beliebig nahe (genauer: alle Trajektorien mit Startpunkt  $y$  erreichen eine  $\delta^*$ -Kugel, siehe Abbildung 3.2), d.h., für alle  $y \in W$  gibt es ein  $t^* > 0$ , so dass  $\text{dist}(S(t^*, y), K) < \rho$ . Also liegt  $S(t^*, y)$  in einer Kugel  $B_i$ .

Sobald eine Trajektorie in  $U$  eingetreten ist, wird sie von  $Z$  angezogen (siehe Abbildung 3.1), da  $Z$  lokal asymptotisch stabil ist. Also ist  $Z$  global asymptotisch stabiler Attraktor.

□



**Korollar 3.3.2** *Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  offen ( $p, q \in \mathbb{N}^*$ ), und  $x \in W$  werde in der Form  $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , mit  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $v \in \mathbb{R}^q$ , dargestellt. Die Gleichung  $\dot{x} = f(x)$  auf  $W$  habe die spezielle Gestalt:*

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(u) \\ \dot{v} = f_2(u, v) \end{cases} \quad (3.8)$$

mit  $f \in C^1(W)$ . Weiter gelte:

(i) *Es gibt eine kompakte positiv invariante Teilmenge  $K^*$  von  $W$ , welche von allen Lösungen für positive Zeiten betreten wird.*

(ii) *Es existiert ein lokal asymptotisch stabiler stationärer Punkt  $x_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  für das System (3.8).*

(iii) *Für das eingeschränkte System  $\dot{u} = f_1(u)$  sei  $u_0$  global asymptotisch stabil.*

(iv) *Für die Gleichung  $\dot{v} = f_2(u_0, v)$  auf  $\{(u, v) \in W : u = u_0\}$  sei  $x_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  global asymptotisch stabil.*

*Dann ist  $x_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  für  $\dot{x} = f(x)$  global asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Für den Beweis verwendet man den Satz (3.3.1) indem man zeigt, dass alle Annahmen a)-c) erfüllt sind.

Tatsächlich entspricht die Annahme (i) der Annahme (a) im Satz (3.3.1), in diesem Fall ist die offene Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$  und  $f \in C^1(W)$ . Das ergibt, dass die Lösungen des Systems existieren für alle  $t \geq 0$  und beschränkt sind.

Setze  $G := \{(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mid u = u_0\}$ .  $G$  ist offenbar abgeschlossen und positiv invariant.

Um die positive Invarianz zu zeigen, betrachtet man eine beliebige Lösung  $S(t, y) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  des Systems (3.8) mit Anfangswert in  $G$ , d.h.,  $u(0) = u_0$ . Wir zeigen, dass diese Lösung für alle  $t \geq 0$  in  $G$  bleibt. Da  $\{u_0\}$  stationärer Punkt ist, d.h. konstante Lösung des Systems, und  $\begin{pmatrix} u_0 \\ w(t) \end{pmatrix}$  mit  $\dot{w} = f_2(u_0, w)$  offenbar auch eine Lösung ist, ist also  $u(t) = u_0$  für alle  $t$  nach dem Eindeutigkeitsatz. Also ist  $G$  invariant.

Weiterhin setze  $Z = \{x_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\}$ . Offensichtlich ist  $Z \subseteq G$ . Nach der Annahme iv) ist  $Z$  globaler Attraktor für das eingeschränkte System  $\dot{x} = f(x)$  auf  $G$  und auch lokaler Attraktor für das ganze System. Insgesamt:  $G$  ist eine abgeschlossene, invariante Menge, die Bedingung b) aus dem Satz 3.4.1 ist also auch erfüllt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Bedingung c) aus dem Satz 3.3.1 erfüllt ist.

Dafür sei  $S(t, y) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  eine beliebige Lösung von (3.8) mit dem Anfangswert  $y = (y_1, y_2)$ . Man weiss (aus iii)), dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0$ , also  $\text{dist}(S(t, y), G) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Da alle Voraussetzungen des Satzes 3.4.1 erfüllt sind, ist  $Z = \{x_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\}$  globaler Attraktor.

□

**Bemerkung 3.3.3** *Das Korollar (3.3.2) lässt sich auch mit einem bekannten Satz über asymptotisch autonome Systeme beweisen (vgl. [Thi92]). Es lässt sich in unserem Fall zeigen, dass  $f_2(u(t), z_2) \rightarrow f_2(u_0, z_2)$ , wenn  $t \rightarrow \infty$  lokal gleichmässig in  $z_2 \in \mathbb{R}^q$ , d.h. für  $z_2 \in K$ , wobei  $K$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^q$*

ist. Man weiß in unserem Fall, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0$ , d.h., für alle  $\delta > 0$  existiert ein  $T(\delta) > 0$ , s.d.  $\|u(t) - u_0\| < \delta$ , für alle  $t > T(\delta)$ . Um den Satz von Thieme anwenden zu können, muß man folgendes zeigen: Ist  $K \subseteq \mathbb{R}^q$  kompakt, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $T_0(\varepsilon) > 0$ , so dass  $\|f_2(u(t), z_2) - f_2(u_0, z_2)\| < \varepsilon$  für alle  $z_2 \in K$  und alle  $t > T_0(\varepsilon)$ . Da  $f_2 \in C^1(\mathbb{R}^q)$  gibt es ein  $L > 0$  so dass  $\|f_2(u(t), z_2) - f_2(u_0, z_2)\| \leq L\|u(t) - u_0\|$  für alle  $z_2 \in K$ . Sei  $\varepsilon$  von oben und  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ . Dann erhält man folgende Abschätzung:

$$\|f_2(u(t), z_2) - f_2(u_0, z_2)\| \leq L\|u(t) - u_0\| \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \text{ für alle}$$

$$t \geq T_1(\varepsilon) = \max\{T(\delta), T_0(\varepsilon)\}.$$

**Beispiel 3.3.4** Das Korollar (3.3.2) illustriert nochmal die Tatsache beim Chemostaten mit  $n$  Mikrobenspezies aus dem Abschnitt (3.2), warum es ausreicht, bei der Analyse des Systems lediglich die Hyperebene  $\Sigma = 0$  zu betrachten.

# Kapitel 4

## Ein vereinfachtes Modell für Nitrifikation und Denitrifikation

### 4.1 Vorstellung des Modells

Aus dem ASM 1 Modellsystem wird in diesem Abschnitt ein reduziertes Modell entwickelt, welches die vollständige Beschreibung des Langzeitverhaltens der Mikroorganismen in eine Kläranlage erlaubt.

Weiter wird eine vollständige analytische Behandlung dieses vereinfachten Systems durchgeführt, das die wesentlichen Reaktionsschritte Nitrifikation-Denitrifikation enthält. Dazu gehört die Bestimmung stationärer Punkte (Abschnitt 4.2.3) und die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens (Abschnitte 4.2.4).

Da die Wahl von Monod-Termen als Nahrungsaufnahmefunktionen keine biologische Grundlage hat ( $\frac{x_i}{x_i+c}$ ), wird auch eine verallgemeinerte Variante (statt Monod-Funktionen wähle man allgemeine, monoton wachsende beschränkte Funktionen) analysiert, für die im wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie bei Monod-Kinetik gezeigt werden können.

Grundsätzliche Feststellung: Ist ein parameterabhängiges Differentialgleichungssystem wie im folgenden gegeben, so sind von praktischem Interesse nur Phänomene, die bei kleinen Änderungen der Parameter bestehen bleiben (“Robustheit”), da die Parameter in realen Systemen nicht beliebig genau bekannt sind. Deshalb werden gewisse Grenzfälle im folgenden nicht betrachtet.

Das 4-dimensionale, reduzierte System hat nur vier Komponenten: autotrophe und heterotrophe Biomasse, Nitrat und Ammonium. Es hat folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \dot{X}_{BH} = [\mu_1(S_O) + \mu_2(S_O) \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} - \alpha_4 - \delta] X_{BH} \\ \dot{X}_{BA} = [\mu_3(S_O) \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} - \alpha_5 - \delta] X_{BA} \\ \dot{S}_{NO} = -\chi_1 \mu_2(S_O) \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} X_{BH} + \chi_2 \mu_3(S_O) \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} X_{BA} - \delta S_{NO} \\ \dot{S}_{NH} = -\chi_2 \mu_3(S_O) \frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} X_{BA} - \delta S_{NH} + r \end{cases} \quad (4.1)$$

**Bemerkung 4.1.1** (Bezug zum ASM 1) *Das System ist eine vereinfachte Version vom ASM 1. Es wird angenommen, dass  $i_{XB} = 0$  (siehe ASM 1) und  $R_6 = 0$  (Ammonifizieren löslichen organischen Stickstoffs findet nicht statt), und dass die Konzentration von Sauerstoff und leicht abbaubarem Substrat von außen konstant gehalten wird ( $S_O = \text{konst}$ ,  $S_S = \text{konst}$ ). Es fließt nur Ammonium mit konstanter Rate ( $r$ ) als Nahrung zu, wobei zwei wesentliche Prozesse stattfinden: die Autotrophen wandeln Ammonium während der Nitrifikation in Nitrat um, was wiederum für die Heterotrophen als Nahrung dient, d.h., sie bauen das Nitrat zu Stickstoff und Sauerstoff während der Denitrifikation ab. Die Heterotrophen sterben mit einer Rate  $\alpha_4 = b_H$  und die Autotrophen mit einer Rate  $\alpha_5 = b_A$  aus. Außerdem fließt die Mischung mit konstanter Rate  $\delta$  aus.*

Bezeichnungen:

Es sei  $X_{BH} := x_1$ ,  $X_{BA} := x_2$ ,  $S_{NO} := x_3$ ,  $S_{NH} := x_4$ ,  $S_O := \rho$ ,  $K_3 := K_{NO}$ ,  $K_4 := K_{NH}$ ,  $\chi_1 = \frac{1 - Y_H}{\beta_2 Y_H}$ ,  $\chi_2 = \frac{1}{Y_A}$  (siehe ASM 1).

Damit erhält man

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[ \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \frac{x_3}{K_3+x_3} - \alpha_4 - \delta \right] x_1 \\ \dot{x}_2 = \left[ \mu_3(\rho) \frac{x_4}{K_4+x_4} - \alpha_5 - \delta \right] x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2(\rho) \frac{x_3}{K_3+x_3} x_1 + \chi_2 \mu_3(\rho) \frac{x_4}{K_4+x_4} x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_2 \mu_3(\rho) \frac{x_4}{K_4+x_4} x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (4.2)$$

Die Schalter-Funktionen für den Sauerstoff  $\mu_1(\rho)$ ,  $\mu_2(\rho)$  und  $\mu_3(\rho)$  haben im ASM1-Modell folgende Gestalt (aber man kann sie auch als allgemeine monotone und beschränkte Funktionen wählen):  $\mu_1(\rho) = \alpha_1 \frac{\rho}{K_{OH}+\rho}$ ,  $\mu_2(\rho) = \alpha_2 \frac{K_{OH}}{K_{OH}+\rho}$ ,  $\mu_3(\rho) = \alpha_3 \frac{\rho}{K_{OA}+\rho}$ , wobei  $\alpha_1 = \mu_H \frac{S_S}{K_S+S_S}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 \eta_g$  und  $\alpha_3 = \mu_A$ . Diese Funktionen schalten aerobe bzw. anaerobe und anoxische Prozesse ein (aus).

## 4.2 Das autonome System mit monotonen Aufnahmeraten

Da die Monod-Typ-Funktionen  $\left(\frac{x_i}{x_i+c}\right)$  keine weitere biologische Grundlage haben, stellt sich die Frage, welche Rolle die Gestalt der Aufnahmefunktionen spielt. Deshalb versucht man zunächst, mit möglichst allgemeinen Funktionen zu arbeiten. Hier wird nur stetige Differenzierbarkeit, Beschränktheit und Monotonie der Funktionen verlangt.

Darum wird  $\frac{x_3}{K_3+x_3}$  durch eine streng monotone und beschränkte  $C^1$ -Funktion  $\sigma_1(x_3)$  ersetzt und ebenso  $\frac{x_4}{K_4+x_4}$  durch  $\sigma_2(x_4)$ .

Also betrachtet man das System mit  $\sigma_1(x_3)$  und  $\sigma_2(x_4)$  als Aufnahmefunktionen, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\sigma_1(x_3), \sigma_2(x_4) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

- (ii)  $\sigma_1(0) = 0; \sigma_2(0) = 0,$
- (iii)  $\sigma_1(u) < \sigma_1(v),$  falls  $u < v$  und  $\sigma_2(u) < \sigma_2(v),$  falls  $u < v,$
- (iv)  $\sigma_1(x_3)$  und  $\sigma_2(x_4)$  sind stetig differenzierbare und beschränkte Funktionen.

Dann ergibt sich das allgemeine System, das wir im folgenden analysieren :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)]x_1 \\ \dot{x}_2 = [\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)]x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)x_1 + \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (4.3)$$

wobei  $x_1 := X_{BH}, x_2 := X_{BA}, x_3 := S_{NO}, x_4 := S_{NH}, \rho := S_O$  ist.

Abgekürzt wird das System (4.3) als  $\dot{x} = f(x)$  dargestellt.

### 4.2.1 Positivität von Lösungen

Wie schon früher erwähnt, ist es wichtig, dass Lösungen, die im positiven Bereich anfangen, auch positiv bleiben (biologische Relevanz).

**Lemma 4.2.1** *Betrachte das 4-dimensionale System 4.3 mit den positiven Anfangswerten  $x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) \geq 0$  und  $x_4(0) \geq 0$ . Dann ist die Lösung  $x(t)$  des Anfangwertproblems für (4.3) positiv, d.h.:  $x(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$ , für die eine Lösung existiert.*

BEWEIS:

Nach dem Satz 3.1.4 aus Kapitel 3, Abschnitt 3.1.1, genügt zu zeigen, dass  $f_i(x) \geq 0$  wenn  $x_i = 0$  und  $x_j \geq 0$  für alle  $j \neq i$ , mit  $x = (x_i)_{i=1,\dots,4}$ . Tatsächlich ist  $f_1((0, x_2, x_3, x_4)) = 0, f_2((x_1, 0, x_3, x_4)) = 0, f_3((x_1, x_2, 0, x_4)) = \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 \geq$

0, weil  $x_2 \geq 0$ , und  $x_4 \geq 0$ , demzufolge ist  $\sigma_2(x_4) \geq 0$ , und außerdem sind  $\chi_2 \geq 0$  und  $\mu_3(\rho) \geq 0$ .

□

## 4.2.2 Beschränktheit der positiven Lösungen

**Lemma 4.2.2** (*Beschränktheit*) *Jede Lösung des Systems 4.3 ist beschränkt für alle positiven Zeiten, es existiert sogar ein (von Anfangswert abhängiges)  $t_0 > 0$ , so dass  $x_1(t) \leq \frac{2r}{v\chi_1}$ ,  $x_2(t) \leq \frac{2r}{\delta\chi_2}$ ,  $x_3(t) \leq \frac{2r}{v}$  und  $x_4(t) \leq \frac{2r}{\delta}$  für alle  $t \geq t_0$ , wobei  $v := \min\{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho), \delta\} > 0$  ist.*

BEWEIS:

Man bildet eine Linearkombination der Gleichungen in (4.3), indem man die zweite Gleichung des Systems mit  $\chi_2$  multipliziert und zu der vierten Gleichung addiert:

$$\frac{d(\chi_2 x_2 + x_4)}{dt} = r - \chi_2(\alpha_5 + \delta)x_2 - \delta x_4$$

Hieraus ergibt sich  $r - (\alpha_5 + \delta)(\chi_2 x_2 + x_4) \leq \frac{d(\chi_2 x_2 + x_4)}{dt} \leq r - \delta(\chi_2 x_2 + x_4)$ ,

d.h., für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $t' > 0$ , so dass:

$$\frac{r}{\alpha_5 + \delta} - \varepsilon \leq \chi_2 x_2(t) + x_4(t) \leq \frac{r}{\delta} + \varepsilon \text{ für alle } t \geq t'.$$

Also sind  $x_2(t)$  und  $x_4(t)$  beschränkt und es gibt ein  $t'' > 0$  mit  $x_2(t) \leq \frac{2r}{\delta\chi_2}$  und  $x_4(t) \leq \frac{2r}{\delta}$  für alle  $t \geq t''$ .

Betrachte weiter eine andere Linearkombination aus den Gleichungen (1), (3) und (4) des Systems (4.3) wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\chi_1 x_1 + x_3 + x_4) &= \chi_1[\mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]x_1 - \delta x_3 - \delta x_4 + r = [\mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \\ &\delta)]\chi_1 x_1 - \delta x_3 - \delta x_4 + r \leq -v[\chi_1 x_1 + x_3 + x_4] + r \end{aligned}$$



wobei  $v := \min\{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho), \delta\} = \begin{cases} \delta, & \text{falls } \mu_1(\rho) < \alpha_4 \\ (\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho) > 0, & \text{falls } \alpha_4 + \delta > \mu_1(\rho) > \alpha_4 \end{cases}$

Daraus ergibt sich: für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $t^* > 0$ , so dass

$$(\chi_1 x_1(t) + x_3(t) + x_4(t)) \leq \frac{r}{v} + \text{const } e^{-vt} \leq \frac{r}{v} + \varepsilon \text{ für alle } t \geq t^*.$$

Demzufolge existiert ein  $t^{**} > 0$  mit  $x_3(t) \leq \frac{2r}{v}$  und  $x_1(t) \leq \frac{2r}{v\chi_1}$  für alle  $t \geq t^{**}$ .

□

**Satz 4.2.3** (*Existenz und Eindeutigkeit der Lösung*) Betrachte das autonome Differentialgleichungssystem 4.3 auf dem positiven Orthanten in  $\mathbb{R}_+^4$ , das sich als  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1$ , darstellen lässt. Dann existiert für gegebenen Anfangswert  $x(0) = y > 0$  eine eindeutige Lösung  $x(t)$  für alle  $t \geq 0$ .

BEWEIS:

Da  $f \in C^1$  ist, gilt lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für gegebenen Anfangswert  $x(0) = y$ . Aus Lemma 4.2.2 kann man schliessen, dass die obige Lösung sogar für alle  $t \geq 0$  existiert, d.h., das Existenzintervall  $I$  lässt sich auf  $+\infty$  erweitern.

□

### 4.2.3 Stationäre Punkte

Um die Dynamik des 4-dimensionalen Systems zu bestimmen, ist es nötig, die stationären Punkte (vgl. Kapitel 3, Abschnitt 3.1.2, Definition 3.1.11) zu berechnen. An solchen Punkten gilt auch  $\dot{x} = 0$ , daher sind die stationären (kritischen) Punkte mit konstanten oder Gleichgewichtslösungen des Differentialgleichungssystems verbunden.

Es interessieren nur positive stationäre Punkte, d.h., diejenigen, die positive Koordinaten besitzen. Andere stationäre Punkte sind biologisch irrelevant.

Es stellt sich heraus, dass das autonome System (4.3) höchstens drei stationäre Punkte im positiven Orthanten besitzt, davon einen inneren Gleichgewichtspunkt (Satz 4.2.7).

Zunächst werden Bedingungen für die Existenz innerer stationärer Punkte angegeben. Dabei ist zu bemerken, dass die Gleichgewichtspunkte parameterabhängig sind, und dementsprechend werden die Existenz- und Stabilitätsbedingungen abhängig von diesen Parametern formuliert.

**Lemma 4.2.4** (*Existenz eines inneren stationären Punktes*)

Betrachte das nichtlineare autonome Differentialgleichungssystem (4.3). Sei  $\rho \geq 0$  so gewählt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(i) \quad a := \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) > \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)};$$

$$(ii) \quad \mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta);$$

$$(iii) \quad b := \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3) > \frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}$$

$$(iv) \quad \sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) + \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}\right) < \frac{r}{\delta}$$

Dann existiert im positiven Orthanten genau ein innerer stationärer Punkt des obigen Systems (4.3), den wir mit  $E_1$  bezeichnen. Die Bedingungen (i)-(iv) sind auch notwendig für die Existenz von  $E_1$ .

BEWEIS:

Innere stationäre Punkte mit  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$ , werden von den Lösungen des folgenden Gleichungssystems geliefert:

$$\begin{cases} \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) = (\alpha_4 + \delta) \\ \sigma_2(x_4) = \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)} \\ -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)x_1 + \chi_2x_2(\alpha_5 + \delta) - \delta x_3 = 0 \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta)x_2 - \delta x_4 + r = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Aus der zweiten Gleichung bekommt man die vierte Koordinate eindeutig als  $x_4^* = \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right) > 0$ , da die Funktion  $\sigma_2(x_4)$  monoton steigend und beschränkt ist, und die Bedingung (i) erfüllt ist.

Durch Einsetzen von  $x_4^*$  in die vierte Gleichung errechnet sich  $x_2^*$  zu:

$$x_2^* = \frac{r-\delta x_4^*}{\chi_2 \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4^*)} > 0, \text{ da } x_4^* < \frac{r}{\delta}, \text{ d.h. } \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right) < r/\delta \text{ (siehe Annahme (iv))}.$$

Nach Annahme (ii) ( $\mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta)$ ) und  $b := \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3)$  existiert mit  $b > \frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}$  (Annahme (iii)), auch  $x_3^* \neq 0$  als einzige Lösung der Gleichung:  $\sigma_1(x_3^*) = \frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}$ . Also ist die dritte Koordinate

$$x_3^* = \sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right).$$

Weiterhin setzen wir die erhaltenen Koordinaten  $x_2^*, x_3^*$  und  $x_4^*$  in die dritte Gleichung ein und bekommen, falls  $x_2^* > \frac{\delta}{\chi_2(\alpha_5+\delta)} x_3^*$ , dass  $x_1^* = \frac{\chi_2(\alpha_5+\delta)x_2^* - \delta x_3^*}{\chi_1 \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3^*)}$ .

Die Bedingung  $x_2^* > \frac{\delta}{\chi_2(\alpha_5+\delta)} x_3^*$  ist zur Bedingung  $x_3^* < \frac{\chi_2(r-\delta x_4^*)}{\chi_3 \delta}$  äquivalent, d.h.,  $\sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) \delta < r - \delta \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right) \Leftrightarrow \sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) + \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right) < \frac{r}{\delta}$

entsprechend zu Bedingung (iv). Also existiert ein innerer stationärer Punkt für das System (4.3), dessen Koordinaten explizit angegeben werden können:

$$E_1 : \begin{cases} x_1^* = \frac{r-\delta[\sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right)+\sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right)]}{\chi_1[(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)]} > 0 \\ x_2^* = \frac{r-\delta\sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right)}{\chi_2(\alpha_5+\delta)} > 0 \\ x_3^* = \sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4+\delta)-\mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) > 0 \\ x_4^* = \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5+\delta)}{\mu_3(\rho)}\right) > 0 \end{cases}$$

□

**Beispiel 4.4.5** *Ein Beispiel einer typischen Aufnahmefunktion befindet sich in Abbildung 4.1.*

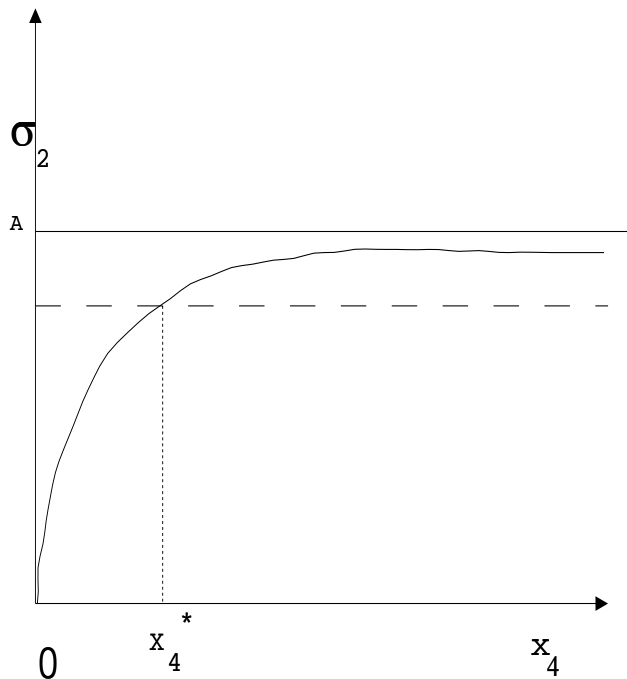


Abbildung 4.1: Beispiel einer Aufnahmefunktion  $\sigma_2(x_4)$ .

**Bemerkung 4.4.6** (*biologische Relevanz*)

*Der innere stationäre Punkt  $E_1$  ist biologisch sehr interessant, weil er für den Gleichgewichtszustand des Systems steht, bei dem sowohl die Heterotrophen als auch die Autotrophen überleben, d.h. im Abwasser anwesend sind und beide Prozesse (Nitrifikation und Denitrifikation) stattfinden.*

Man erhält durch Einsetzen von  $x_2 = 0$  in den Gleichungen (4.4) weitere stationäre Punkte. Diese liegen am Rand des positiven Quadranten.

**Lemma 4.2.7** *Die stationären Punkte mit zweiter Komponente Null sind folgende:*

$$E_2 : \begin{cases} x_1^* = \frac{\delta x_3^*}{[\mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]\chi_1} < 0 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = \sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) > 0 \\ x_4^* = r/\delta \end{cases}, \text{ falls } \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3) > \frac{\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)} \text{ und} \\ \mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta),$$

sowie  $E_3 = (0, 0, 0, r/\delta)$ .

Der stationäre Punkt  $E_2$  ist biologisch irrelevant, da er nicht positiv sein kann (entweder ist  $x_1^* < 0$  oder  $x_3^* < 0$ ).

Setzt man jetzt  $x_1 = 0$  in den Gleichungen die die stationäre Punkte liefern, so erhält man den stationären Punkt  $E_4$ , dessen Koordinaten das folgende Lemma angibt.

**Lemma 4.2.8** *Es gibt genau einen stationären Punkt mit  $x_1^* = 0, x_2^* \neq 0, x_3^* \neq 0, x_4^* \neq 0$ , genau dann, wenn gilt, dass  $a := \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) > \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}$  und  $\sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}\right) < r/\delta$ . Seine Komponenten bestimmen sich zu:*

$$E_4 : \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{r - \delta \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right)}{\chi_2(\alpha_5 + \delta)} \\ x_3^* = \frac{r}{\delta} - \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right) \\ x_4^* = \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right) \end{cases}$$

BEWEIS:

Um stationäre Punkte zu bekommen für die  $x_1^* = 0, x_2^* \neq 0, x_3^* \neq 0$ , und  $x_4^* \neq 0$  ist, muss man folgendes algebraisches Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* \neq 0 \\ \mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) = (\alpha_5 + \delta) \\ \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 = \delta x_3 \\ -\chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ \sigma_2(x_4) = \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)} \\ \chi_2(\alpha_5 + \delta)x_2 = \delta x_3 \\ x_3 + x_4 = \frac{r}{\delta} \end{cases}$$

Hieraus berechnen wir die Koordinaten des stationären Punktes unter einigen Zusatzbedingungen. Da  $\lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) > \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}$  angenommen wurde, bekommen wir  $x_4^*$  eindeutig und mit dessen Hilfe (weil  $x_4^* < r/\delta$ , d.h.  $\sigma_2^{-1}(\frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}) < r/\delta$  nach Annahme),  $x_2^*$  und zwar:

$$E_4 : \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{r - \delta x_4^*}{\chi_2(\alpha_5 + \delta)} \\ x_3^* = \frac{(r - \delta x_4^*)}{\delta} \\ x_4^* = \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}\right) \end{cases}$$

□

**Satz 4.2.9** (*Existenzaussage über stationäre Punkte*):

Das autonome System (4.3) besitzt im positiven Orthanten höchstens einen inneren stationären Punkt. (Wenn er existiert, wird er  $E_1$  genannt.) Am Rand des positiven Orthanten gibt es stets den stationären Punkt  $E_3 = (0, 0, 0, r/\delta)$  und höchstens einen weiteren stationären Punkt (wenn er existiert, wird er  $E_4$  genannt).

BEWEIS:

Die Aussage folgt direkt aus Lemma 4.2.4, Lemma 4.2.5 und Lemma 4.2.6.

□

**Bemerkung 4.2.10** (*Die Rolle verschiedener Modellparameter*)

Bei der obigen Berechnungen der Gleichgewichtspunkte haben wir gesehen, in welcher Weise das Ergebnis von den Systemparametern  $\rho$ ,  $\mu_1(\rho)$ ,  $\mu_2(\rho)$ ,  $\mu_3(\rho)$  abhängt. Das Stabilitätsverhalten wird ebenfalls von diesen Parametern beeinflusst.

#### 4.2.4 Stabilität der stationären Punkte

Zur Analyse des Systems (4.3) ist die Stabilität der stationären Punkte zu bestimmen.

Damit kann man bei einer Anfangsbedingung in der Nähe einer Gleichgewichtslösung feststellen, ob sich die resultierende Lösungsbahn der Gleichgewichtslösung nähert oder von ihr entfernt.

Die Stabilitätsanalyse von Gleichgewichtslösungen ist von großer praktischer Bedeutung, weil sie Licht auf unterschiedliches Systemverhalten in Abhängigkeit von den Parametern (hier hauptsächlich der Sauerstoffkonzentration) wirft.

Mit Hilfe des Routh-Hurwitz Kriteriums (siehe [BD95], Seite 257) gelingt es in unserem Fall, lokale asymptotische Stabilität zu erhalten, d.h., die Vorzeichen des Realteils der Eigenwerte herauszufinden. Für die globale asymptotische Stabilität verwendet man die Sätze aus Kapitel 3, Abschnitt 3.4.1.

**Lemma 4.2.11** (*Lokale asymptotische Stabilität des inneren stationären Punktes  $E_1$* ) *Der stationäre Punkt  $E_1$  ist lokal asymptotisch stabil, falls er existiert.*

BEWEIS:

Die Funktionalmatrix des Systems ist:

$$\begin{bmatrix} \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta) & 0 & \mu_2(\rho)x_1\sigma'_1(x_3) & 0 \\ 0 & \mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta) & 0 & \mu_3(\rho)x_2\sigma'_2(x_4) \\ -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) & \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) & -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma'_1(x_3)x_1 - \delta & \chi_2\mu_3(\rho)\sigma'_2(x_4)x_2 \\ 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) & 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma'_2(x_4) - \delta \end{bmatrix}$$

An der Stelle  $E_1$  berechnet man das charakteristische Polynom, indem man folgende Determinante bestimmt:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \mu_2(\rho)x_1^1\sigma'_1(x_3)|_{E_1} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} \\ -\chi_1[\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)] & \chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_1\mu_2(\rho)x_1^1\sigma'_1(x_3)|_{E_1} - \delta - \lambda & \chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} \\ 0 & -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{vmatrix}$$

Nach entsprechenden Berechnungen erhält man:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} \\ \chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_1\mu_2(\rho)x_1^1\sigma'_1(x_3)|_{E_1} - \delta - \lambda & \chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma'_2(x_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$\mu_2(\rho)x_1^1\sigma_1(x_3)|_{E_1} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \mu_3(\rho)x_2^1\sigma_2'(x_4)|_{E_1} \\ \chi_1[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)] & -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & \chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma_2'(x_4)|_{E_1} \\ 0 & -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma_2'(x_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{vmatrix}$$

Wenn man dies Null setzt, folgt:

$$\begin{aligned} & \lambda[\lambda + \delta + \chi_1\mu_2(\rho)x_1^1\sigma_1'(x_3)|_{E_1}] \begin{vmatrix} -\lambda & \mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) - \delta - \lambda \end{vmatrix} \\ & + \mu_2(\rho)x_1\sigma_1'(x_3)|_{E_1}\chi_1[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)] \begin{vmatrix} -\lambda & \mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mu_3(\rho)x_2^1\sigma_2'(x_4)|_{E_1} \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2^1\sigma_2'(x_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

beziehungsweise

$$[\lambda^2 + \lambda(\delta + \chi_1\mu_2(\rho)x_1^1\sigma_1'(x_3)|_{E_1}) + \mu_2(\rho)\sigma_1'(x_3)|_{E_1}\chi_1((\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)))] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda^2 + \lambda[\delta + \chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4)|_{E_1}] + \chi_2(\alpha_5 + \delta)\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4)|_{E_1} = 0 \text{ und}$$

$$\lambda^2 + \lambda[\delta + \chi_1\mu_2(\rho)x_1\sigma_1'(x_3)|_{E_1}] + \chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)|_{E_1}x_1[-\mu_1(\rho) + (\alpha_4 + \delta)] = 0.$$

Da  $\sigma_1'(x_3)|_{E_1} > 0$  und  $\sigma_2'(x_4)|_{E_1} > 0$  (beide Funktionen sind monoton wachsend), sind die Koeffizienten beider quadratischen Polynomgleichungen positiv. Man kann also, aufgrund des Routh-Hurwitz Kriteriums, dass  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  und  $\lambda_4 < 0$  schließen.

□

**Lemma 4.2.12** (Stabilität von  $E_3(0, 0, 0, r/\delta)$ ): Falls  $\mu_3(\rho) < \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2(r/\delta)}$  und  $\mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta)$ , dann ist der stationäre Punkt  $E_3$  lokal asymptotisch stabil.



BEWEIS:

Man berechnet die Funktionalmatrix an der Stelle  $E_3$  und dadurch erhält man das charakteristische Polynom als:

$$\begin{vmatrix} \mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \delta) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3(\rho)\sigma_2(\frac{r}{\delta}) - (\alpha_5 + \delta) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(\frac{r}{\delta}) & -\delta - \lambda & 0 \\ 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(\frac{r}{\delta}) & 0 & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \delta) - \lambda][\mu_3(\rho)\sigma_2(\frac{r}{\delta}) - (\alpha_5 + \delta) - \lambda](\lambda + \delta)^2 = 0$$

Die Nullstellen sind:

$\lambda_1 = -\delta < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta < 0$ ,  $\lambda_3 = \mu_3(\rho)\sigma_2(\frac{r}{\delta}) - (\alpha_5 + \delta) < 0$ , da  $\mu_3(\rho) < \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2(r/\delta)}$  vorausgesetzt wurde,  $\lambda_4 = \mu_1(\rho) - (\alpha_4 + \delta) < 0$ , da  $\mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta)$  nach Annahme.

□

**Bemerkung 4.2.13** : Falls  $\mu_3(\rho) < \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2(r/\delta)}$ , dann existieren  $E_1$  und  $E_4$  nicht. Biologisch heißt das, dass die Existenz von  $E_1$  und  $E_4$  stark von der Sauerstoffkonzentration beeinflusst wird.

**Lemma 4.2.14** (Stabilität von  $E_4$ ) Falls  $\sigma_1^{-1}(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}) + \sigma_2^{-1}(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}) > \frac{r}{\delta}$ , ist der stationäre Punkt  $E_4$  lokal asymptotisch stabil, wenn er existiert.

BEWEIS:

Die Existenzbedingungen für  $E_4$  seien erfüllt (siehe Lemma 4.4.6).

Das charakteristische Polynom an dieser Stelle ist:

$$\begin{vmatrix} \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4)|_{E_4} \\ -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) & \chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\delta - \lambda & \chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4)|_{E_4} \\ 0 & -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4)|_{E_4} - \delta - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta) - \lambda] \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\delta - \lambda & \chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & 0 & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) - \delta - \lambda \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhält man  $\lambda_1$  als:

$\lambda_1 = \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta) < 0$  (man setzt die Komponente  $x_3|_{E_4}$  ein und nach Annahme gilt, dass  $\sigma_1(x_3)|_{E_4} < \frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}$ ); die anderen Eigenwerte erfüllen die folgende Gleichung:

$$(-\lambda - \delta) \begin{vmatrix} -\lambda & \mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) \\ -\chi_2(\alpha_5 + \delta) & -\chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2'(x_4) - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Also ergibt sich, dass  $\lambda_2 = -\delta < 0$ .

Die letzten zwei Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des folgenden Polynoms:

$$\lambda^2 + \lambda[\delta + \chi_2\mu_3(\rho)x_2\sigma_2(x_4)|_{E_4}] + \chi_2(\alpha_5 + \delta)\mu_3(\rho)x_2\sigma_2(x_4)|_{E_4} = 0$$

Es gilt:  $\lambda_3 < 0$  und  $\lambda_4 < 0$  nach dem Hurwitz-Kriterium.

□

**Bemerkung 4.2.15 :**

Falls  $E_4$  lokal asymptotisch stabil ist, d.h.,  $\sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) + \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right) > \frac{r}{\delta}$ , dann existiert  $E_1$  nicht (da Existenzbedingung (iv) nicht erfüllt ist).

**Folgerung** (Existenz der stationären Punkte):

Das obige System besitzt insgesamt höchstens vier stationäre Punkte  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ , davon relevant sind nur die Punkte  $E_1, E_3, E_4$ , der stationäre Punkt  $E_2$  ist biologisch irrelevant, da er negative Komponenten hat.

Tabelle 4.1: Existenz und Stabilität der stationären Punkte

Existenz	Stabilitätsbedingungen
$E_1$ : <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>a := \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) &gt; \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}</math>;</li> <li>2. <math>\mu_1(\rho) &lt; (\alpha_4 + \delta)</math>;</li> <li>3. <math>b := \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3) &gt; \frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}</math></li> <li>4. <math>\sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) + \sigma_2^{-1}\left(\frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)}\right) &lt; \frac{r}{\delta}</math></li> </ol>	immer stabil, falls existent
$E_3$ : existiert immer	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\mu_1(\rho) &lt; (\alpha_4 + \delta)</math></li> <li>2. <math>\mu_3(\rho) &lt; \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2\left(\frac{r}{\delta}\right)}</math></li> </ol>
$E_4$ : <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>a := \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) &gt; \frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}</math></li> <li>2. <math>\mu_3(\rho) &gt; \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2\left(\frac{r}{\delta}\right)}</math></li> </ol>	$\sigma_1^{-1}\left(\frac{(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)}{\mu_2(\rho)}\right) +$ $\sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right) > \frac{r}{\delta}$

**Bemerkung 4.2.16** (Spezielle Eigenschaft des 4-dimensionalen Systems:  
2-dimensionale Untersysteme als Chemostat)

Das Untersystem des 4-dimensionalen Systems, gebildet von den Gleichungen (2)+(4) ist ein Chemostat-System mit einem Substrat und einer Mikrobenspezies (siehe dazu Kapitel 1, Abschnitt 1.3.4, System 1.16):

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = [\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)]x_2 \\ \dot{x}_4 = -\chi_3\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (4.5)$$

Die stationären Punkte sind folgende:

$$E_1 : \begin{cases} x_2^1 = \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}\right) \\ x_4^1 = \frac{r - \delta x_2^1}{\chi_3(\alpha_5 + \delta)} \end{cases}$$

existiert unter einigen Positivitätsbedingungen (wenn  $a := \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sigma_2(x_4) > \frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}$  und  $\sigma_2^{-1} \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho)} < \frac{r}{\delta}$ ) und

$$E_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = r/\delta \end{cases}$$

existiert stets.

Der innere stationäre Punkt ist global asymptotisch stabil, falls existent.

Wenn man die stationären Punkte  $E_1$  oder  $E_2$  in das 4-dimensionale System (4.3) einsetzt, erhält man wieder einen Chemostaten und zwar:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)] x_1 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) x_1 - \delta x_3 + r \end{cases} \quad (4.6)$$

mit  $r := \chi_2 \mu_3(\rho) \sigma_2(c_3) c_1$ , wobei  $(c_1, c_3)$  die Koordinaten des jeweiligen stationären Punktes sind.

**Satz 4.2.17** (Globale Dynamik)

Es sei  $x(t) \in \mathbb{R}^4$  eine beliebige Lösung des 4-dimensionalen Systems (4.3) mit Anfangswert im offenen positiven Orthanten. Weiterhin seien die Existenzbedingungen für den inneren stationären Punkt erfüllt, d.h.,  $E_1$  existiert. Dann ist der innere stationäre Punkt auch global asymptotisch stabil.

BEWEIS:

Für den Beweis verwendet man das Korollar 3.3.2 aus Kapitel 3.

Man zeigt, dass die Bedingungen (i)-(iv) des Korollars 3.3.2 erfüllt sind. Zuerst stellt man fest, dass die Schreibweise des Systems aus dem Korollar 3.4.2 in diesem Fall zutrifft, das heißt, das Untersystem aus den Gleichungen (2) und (4) unabhängig von  $x_1$  und  $x_3$  ist.

Die kompakte Menge, die von allen Lösungen für positive Zeiten betreten wird, ist hier  $K^* = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^4 \mid x_1 \leq \frac{2r}{v\chi_1\chi_3}, x_2 \leq \frac{2r}{\delta\chi_3}, x_3 \leq \frac{2r}{v\chi_3}, x_4 \leq \frac{2r}{\delta} \right\}$  (aufgrund von Lemma 4.2.2), also ist Bedingung (i) erfüllt.

Weiterhin existiert ein innerer stationärer Punkt  $x_0 = E_1(c_1, c_2, c_3, c_4)$ , der nach Lemma 4.2.11 lokal asymptotisch stabil ist, d.h., Bedingung (ii) ist ebenfalls erfüllt.

Für das eingeschränkte System

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = [\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)]x_2 \\ \dot{x}_4 = -\chi_3\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (4.7)$$

ist  $u_0 = (c_2, c_4) = (\sigma_2^{-1}(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3(\rho)}), \frac{r - \delta x_2^1}{\chi_3(\alpha_5 + \delta)})$  global asymptotisch stabil (siehe Bemerkung 4.2.13).

Wenn man die Koordinaten  $(c_2, c_4)$  in das Originalsystem (4.3) einsetzt, erhält man eine Gleichung der Form  $\dot{v} = f_2(u_0, v)$ , d.h., das 2-dimensionale System:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)]x_1 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)x_1 - \delta x_3 + r \end{cases} \quad (4.8)$$

definiert auf der invarianten Menge  $G = \{x \in \mathbb{R}_+^4 \mid x_2 = c_2, x_4 = c_4\} \subset \mathbb{R}_+^4$ , wobei  $r = \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(c_3)c_1 > 0$  ist.

Wie schon in Bemerkung (4.2.13) angedeutet wurde, ist das System, das aus Gleichungen (1) und (3) gebildet wird, wieder ein Chemostat mit globalem Attraktor  $(c_1, c_3)$ , und demzufolge ist  $E_1 = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  global asymptotisch stabil für  $\dot{v} = f_2(u_0, v)$ , d.h., die Bedingung (iv) aus Korollar 3.4.2 ist auch erfüllt.

Da alle Bedingungen (i)-(iv) erfüllt sind, ist  $x_0 = E_1(c_1, c_2, c_3, c_4)$  für das Originalsystem global asymptotisch stabil.

□

**Bemerkung 4.2.18** *Auf analoge Weise lässt sich in allen anderen Fällen ( $E_1$  existiert nicht, dafür  $E_0$  lokal asymptotisch stabil, usw.) die globale asymptotische Stabilität zeigen.*

### 4.3 Der Spezialfall mit Monod- Aufnahmefunktionen

Wir kehren jetzt zurück zu den Systemen (4.1) bzw. (4.2) aus dem Abschnitt 4.1, wo die Aufnahmefunktionen die spezielle Gestalt der Monod-Kinetik haben. Diesen Spezialfall kann man auch als ein Beispiel für die bisherigen Ergebnisse betrachten. Es lassen sich die stationären Punkte, ihre Existenzbedingungen und Stabilitätsbedingungen explizit berechnen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_{BH} = \left[ \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \frac{S_{NO}}{K_3 + S_{NO}} - \alpha_4 - \delta \right] X_{BH} \\ \dot{X}_{BA} = \left[ \mu_3(\rho) \frac{S_{NH}}{K_4 + S_{NH}} - \alpha_5 - \delta \right] X_{BA} \\ \dot{S}_{NO} = -\chi_1 \mu_2(\rho) \frac{S_{NO}}{K_3 + S_{NO}} X_{BH} + \chi_2 \mu_3(\rho) \frac{S_{NH}}{K_4 + S_{NH}} X_{BA} - \delta S_{NO} \\ \dot{S}_{NH} = -\chi_2 \mu_3(\rho) \frac{S_{NH}}{K_4 + S_{NH}} X_{BA} - \delta S_{NH} + r \end{array} \right. \quad (4.9)$$

**Bemerkung 4.3.1** *(Positivität und Beschränktheit von Lösungen) Die Lösungen sind in diesem Fall auch positiv und beschränkt, wie die Diskussion des allgemeinen Falls zeigt (die Funktionen  $\frac{x_4}{x_4 + K_4}$  erfüllen die Bedingungen (i)-(iv) aus Abschnitt 4.2, d.h., sie sind monoton wachsend und beschränkt).*

### 4.3.1 Stationäre Punkte

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Bedingungen aus Abschnitt 4.4.3 für den Fall von Monod-Aufnahmefunktionen konkretisiert.

Zunächst werden explizite Bedingungen für die Existenz innerer stationärer Punkte angegeben.

**Lemma 4.3.2** (*Existenz eines inneren stationären Punktes*)

Betrachte das nichtlineare autonome Differentialgleichungssystem (4.9). Folgende Bedingungen seien erfüllt:

$$(i) \quad \mu_3(\rho) > (\alpha_5 + \delta)\left(1 + \frac{\delta K_4}{r}\right);$$

$$(ii) \quad \mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta);$$

$$(iii) \quad \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) > (\alpha_4 + \delta)$$

$$(iv) \quad \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{[\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} < \frac{r}{\delta}$$

Dann existiert genau ein innerer stationärer Punkt von (4.9), den wir mit  $E_1$  bezeichnen. Er hat die Koordinaten:

$$E_1 : \begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{\chi_1} \frac{\chi_2[r\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)]}{\chi_3[\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)][\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} - \frac{\delta K_3}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} > 0 \\ x_2^1 = \frac{r\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)}{\chi_3(\alpha_5 + \delta)[\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} > 0 \\ x_3^1 = \frac{K_3[\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)]}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} > 0 \\ x_4^1 = \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{[\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

BEWEIS:

Zum Beweis verwendet man Lemma 4.2.3, wobei die Funktionen  $\sigma_1, \sigma_2$  von Monod-Typ sind:  $\sigma_1(x_3) = \frac{x_3}{K_3 + x_3}$  und  $\sigma_2(x_4) = \frac{x_4}{K_4 + x_4}$ .

□

**Bemerkung 4.3.3** Die Bedingung (i) aus dem Lemma 4.3.2 stellt die Positivität von  $x_2^1$  und  $x_4^1$  sicher, während die Bedingungen (ii) und (iii) für die Positivität von  $x_3^1$  benötigt werden.

Für  $x_1^1 > 0$  muss  $\frac{\chi_2[r\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)]}{\chi_3[\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)][\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} - \frac{\delta K_3}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} > 0$  erfüllt sein.

Dies ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \frac{[r\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)]}{[\alpha_4 + \delta - \mu_1(\rho)][\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} > \frac{\delta K_3}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} &\Leftrightarrow \frac{\delta K_3[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)} < \frac{[r\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)]}{\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)} \\ \Leftrightarrow \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{[\mu_1 + \mu_2 - (\alpha_4 + \delta)]} < r - \frac{\delta K_4(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)} &: \delta \Leftrightarrow \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{[\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{[\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} < \frac{r}{\delta}, \end{aligned}$$

was in (iv) angenommen wurde.

**Bemerkung 4.3.4** (Existenzbedingungen an  $E_1$ )

Die Existenzbedingungen an  $E_1$  lassen sich direkt als Bedingungen an die Sauerstoffkonzentration  $\rho$  formulieren, falls die Funktionen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  Monod-Gestalt haben:

(i)  $\mu_3(\rho) > (\alpha_5 + \delta)(1 + \frac{\delta K_4}{r})$  ist äquivalent zu folgenden Bedingungen an  $\rho$  und

$$\text{an } \alpha_3^*: \rho > \frac{K_{OA}(\alpha_5 + \delta)(1 + \frac{\delta K_4}{r})}{[\alpha_3^* - (\alpha_5 + \delta)(1 + \frac{\delta K_4}{r})]} \text{ und } \alpha_3^* > (\alpha_5 + \delta)(1 + \frac{\delta K_4}{r}).$$

(ii) Die Bedingung  $\mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta)$  bedeutet, dass  $\rho < \frac{K_{OH}(\alpha_4 + \delta)}{\alpha_1^* - (\alpha_4 + \delta)}$  und folglich

$$\alpha_1^* > (\alpha_4 + \delta) \text{ sein muß.}$$

(iii)  $\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) > (\alpha_4 + \delta) \Leftrightarrow \rho > \frac{K_{OH}[(\alpha_4 + \delta) - \alpha_2^*]}{[\alpha_1^* - (\alpha_4 + \delta)]}$ ; folglich muß  $\alpha_2^* < (\alpha_4 + \delta)$

sein.

(iv) Die letzte Bedingung (iv) sagt aus, dass die Komponenten  $x_3^1$  und  $x_4^1$  folgende Ungleichung erfüllen müssen:

$$x_3^1 + x_4^1 < \frac{r}{\delta}$$

Diese Beziehung zwischen Nitrat und Nitritkonzentration  $x_3^1$  und  $x_4^1$  spielt auch bei Effizienzfragen (Abschnitt 4.5) eine Rolle.



Insgesamt muss die Sauerstoffkonzentration  $\rho$  so sein, dass  $\rho \in \left( \frac{K_{OH}(\alpha_4 + \delta)}{[\alpha_1^* - (\alpha_4 + \delta)]} - \frac{\alpha_2^*}{\alpha_1^* - (\alpha_4 + \delta)}, \frac{K_{OH}(\alpha_4 + \delta)}{[\alpha_1^* - (\alpha_4 + \delta)]} \right)$  und  $\rho > \frac{K_{OA}(\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)}{r\alpha_3^* - (\alpha_5 + \delta)(r + \delta K_4)}$  erfüllt sind, damit ein innerer stationärer Punkt  $E_1$  existiert.

**Lemma 4.3.5** *Das System (4.3) besitzt zwei weitere stationäre Punkte, die am Rand des positiven Orthanten liegen und einen stationären Punkt, der negative Koordinaten besitzt. Diese sind:*

$E_3(0, 0, 0, r/\delta)$ , existiert stets,

$$E_4 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{r\mu_3(\rho) - (r + \delta K_4)(\alpha_5 + \delta)}{\chi_3(\alpha_5 + \delta)(\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta))} \\ x_3 = \frac{\chi_2(r\mu_3(\rho) - (r + \delta K_4)(\alpha_5 + \delta))}{\delta\chi_3(\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta))} \\ x_4 = \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)} \end{cases} \quad (4.11)$$

falls die Bedingung  $\mu_3(\rho) > (1 + \frac{\delta K_4}{r})(\alpha_5 + \delta)$  erfüllt ist (Dieser Gleichgewichtspunkt entspricht dem Fall, dass nur die Nitrifizierer überleben).

BEWEIS:

Den Beweis führt man auf ähnliche Weise wie im allgemeinen Fall (siehe Satz 4.4.4 und Lemma 4.4.5).

□

Die Koordinaten des stationären Punktes lassen sich jeweils explizit berechnen, und auch die Existenzbedingungen können im Monod-Fall konkret angegeben werden.

**Bemerkung 4.3.6** *Der stationäre Punkt  $E_3(0, 0, 0, r/\delta)$  entspricht dem Fall, dass alle Mikroben aussterben (autotrophe und heterotrophe Biomasse), dass demzufolge kein Nitrat mehr produziert wird und nur noch Ammonium zufließt.*

## 4.4 Das Exklusionsprinzip

In realen Abwasserreinigungsanlagen treten jeweils mehrere Mikrobenspezies als Nitrifizierer und als Denitrifizierer auf. Da diese Tatsache im ASM1-Modell nicht berücksichtigt wird, ist das Modell in dieser Hinsicht unrealistisch.

Im vorliegenden Abschnitt der Arbeit werden in das 4-dimensionale System von Abschnitt 4.2 mehrere verschiedene Nitrifizierer und Denitrifizierer eingebaut und die Koexistenz bzw. das Langzeitverhalten des auf diese Weise erweiterten Systems analysiert. Es wird hier gezeigt (und dafür wird wieder auf die Limesmengenaussage bzw. Korollar 3.3.2 aus Kapitel 3 zugegriffen), dass für die Erweiterung unseres Systems, d.h., für mehrere Nitrifizierer und Denitrifizierer jeweils das Exklusionsprinzip gilt. Das Modell lässt also die Koexistenz mehrerer Spezies nicht zu.

### 4.4.1 Ein System mit mehreren Nitrifizierern und Denitrifizierern

Es wird an dieser Stelle der Arbeit wiederum an den Chemostaten mit mehreren Mikrobenspezies (vgl. Kapitel 3, Abschnitt 3.2) erinnert, wobei anzumerken ist dass nur Monod-Kinetik betrachtet wird.

Hauptsächlich soll dabei in Erinnerung gerufen werden, dass das Chemostat-System mit einem Substrat und  $n$  Mikrobenspezies einen stationären Punkt  $E_1$  besitzt, der global asymptotisch stabil ist, und dass, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, die Funktionalmatrix an diesem Punkt Eigenwerte mit negativen Realteil hat.

Man betrachtet nun ein erweitertes System mit  $n_1$  Nitrifizierern,  $n_2$  Denitrifizierern und zwei Substraten, wobei nur das erste zufließt, das zweite wird von nitrifizierenden Organismen produziert und als Nahrung für die denitrifizierenden

Mikrobenspezies zur Verfügung gestellt. Dieses führt auf das folgende  $n_1 + n_2 + 2$ -dimensionale Differentialgleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_1 = r - \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k - \delta S_1 \\ \dot{x}_1 = [\chi_{1,1} \alpha_1 \frac{S_1}{\beta_1 + S_1} - (\mu_1 + \delta)] x_1 \\ \dot{x}_2 = [\chi_{1,2} \alpha_2 \frac{S_1}{\beta_2 + S_1} - (\mu_2 + \delta)] x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n_1} = [\chi_{1,n_1} \alpha_{n_1} \frac{S_1}{\beta_{n_1} + S_1} - (\mu_{n_1} + \delta)] x_{n_1} \\ \dot{S}_2 = \sum_{k=1}^{n_1} \gamma_k \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k - \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_l^* \frac{S_2}{\beta_l^* + S_2} y_l - \delta S_2 \\ \dot{y}_1 = [\chi_{2,1} \alpha_1^* \frac{S_2}{\beta_1^* + S_2} - (\nu_1 + \delta)] y_1 \\ \dot{y}_2 = [\chi_{2,2} \alpha_2^* \frac{S_2}{\beta_2^* + S_2} - (\nu_2 + \delta)] y_2 \\ \dots \\ \dot{y}_{n_2} = [\chi_{2,n_2} \alpha_{n_2}^* \frac{S_2}{\beta_{n_2}^* + S_2} - (\nu_{n_2} + \delta)] y_{n_2} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Bezeichnungen:

Die Bezeichnungen sind dieselben wie bei den Chemostaten mit  $n$  Mikrobenspezies aus Kapitel 3, und zwar:

$S_1$  -die Konzentration des Substrats das von nitrifizierende Organismen aufgenommen wird (der Term  $-\sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k$  steht für den "Verbrauch" von Substrat  $S_1$  durch Nitrifizierer);

$x_i, i = 1, \dots, n_1$  -die Konzentrationen der Nitrifizierer;

$r$  -Zuflussrate vom Substrat  $S_1$ ;

$\mu_i, i = 1, \dots, n_1$  -die Sterberaten der Nitrifizierer;

$\delta$  -Abflussrate;

$y_l, l = 1, \dots, n_2$  -die Konzentration der denitrifizierende Organismen;

$S_2$  -die Konzentration des zweiten Substrats, das von den Nitrifizierern produziert wird (der Term  $\sum_{k=1}^{n_1} \gamma_k \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k$  verdeutlicht das) und durch die Denitrifizierer  $y_l$  verbraucht wird ( $-\sum_{l=1}^{n_2} \alpha_l^* \frac{S_2}{\beta_l^* + S_2} y_l$ );

$\nu_l, l = 1, \dots, n_2$  -Sterberaten der Denitrifizierer.

**Bemerkung 4.5.1** *Folgendes Untersystem ist unabhängig von den anderen Variablen:*

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = r - \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k - \delta S_1 \\ \dot{x}_1 = [\chi_{1,1} \alpha_1 \frac{S_1}{\beta_1 + S_1} - (\mu_1 + \delta)] x_1 \\ \dot{x}_2 = [\chi_{1,2} \alpha_2 \frac{S_1}{\beta_2 + S_1} - (\mu_2 + \delta)] x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n_1} = \chi_{1,n_1} \alpha_{n_1} \frac{S_1}{\beta_{n_1} + S_1} x_{n_1} - (\mu_{n_1} + \delta) x_{n_1} \end{cases} \quad (4.13)$$

*Dies ist ein Chemostat-System mit einem Substrat und  $n_1$  Mikrobenspezies, die um das gleiche Substrat konkurrieren und verschiedene Abflussraten haben. Die Wachstumfunktionen sind vom Monod-Typ, also kann man die Theorie aus [SW95] (Seite 34-35) anwenden (vgl. die Ergebnisse aus Kapitel 3): Die verschiedenen Abflussraten sind hier gleich  $D_i := (\mu_i + \delta)$ .*

Das Untersystem (4.13) konvergiert also gegen einen stationären Punkt, bei dem höchstens eine Mikrobekonzentration ungleich Null ist. Diesen stationären Punkt bezeichnet man mit  $E_1^*(S_1^*, x_1^*, 0, \dots, 0)$ , wobei vorausgesetzt wurde, dass  $x_1$  die beste "Überlebenskonzentration" hat (siehe Kapitel 3, Abschnitt 3.2).

Setzt man jetzt in den zweiten Teil der Gleichungssysteme (4.12) einen stationären Punkt des Untersystems (4.13) ein, so erhält man wieder einen Chemostaten:

$$\begin{cases} \dot{S}_2 = \gamma_1 \alpha_1 \frac{S_1^*}{\beta_k + S_1^*} x_1^* - \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_l^* \frac{S_2}{\beta_l^* + S_2} y_l - \delta S_2 \\ \dot{y}_1 = [\chi_{2,1} \alpha_1^* \frac{S_2}{\beta_1^* + S_2} - (\nu_1 + \delta)] y_1 \\ \dot{y}_2 = [\chi_{2,2} \alpha_2^* \frac{S_2}{\beta_2^* + S_2} - (\nu_2 + \delta)] y_2 \\ \dots \\ \dot{y}_{n_2} = [\chi_{2,n_2} \alpha_{n_2}^* \frac{S_2}{\beta_{n_2}^* + S_2} - (\nu_{n_2} + \delta)] y_{n_2} \end{cases} \quad (4.14)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dot{S}_2 = r^* - \sum_{l=1}^{n_2} \alpha_l^* \frac{S_2}{\beta_l^* + S_2} y_l - \delta S_2 \\ \dot{y}_l = [\chi_{2,l} \alpha_l^* \frac{S_2}{\beta_l^* + S_2} - (\nu_l + \delta)] y_l \quad l = \overline{1, n_2} \end{cases} \quad (4.15)$$

wobei  $r^* := \gamma_1 \alpha_1 \frac{S_1^*}{\beta_1 + S_1^*} x_1^*$  ist.

#### 4.4.2 Analyse des Systems

Lokale Existenz, Eindeutigkeit und Positivität folgen wie üblich.

**Lemma 4.4.2** (*Beschränktheit der Lösungen*)

*Das System (4.12) ist dissipativ, d.h., die Trajektorien treten für positive Zeiten in eine kompakte Menge  $K$  ein.*

BEWEIS:

Ähnlich wie in dem Beweis der Beschränktheit des 4-dimensionalen Systems (4.3) betrachtet man geeignete Linearkombinationen der Gleichungen des Systems (4.12), in diesem Fall:

$$S_1 + \frac{x_1}{\chi_{1,1}} + \dots + \frac{x_{n_1}}{\chi_{1,n_1}} + S_2 + \frac{y_1}{\chi_{2,1}} + \dots + \frac{y_{n_2}}{\chi_{2,n_2}}$$

Hieraus ergibt sich die Beschränktheit der Lösungen.

□

Die stationären Punkte bekommt man, wenn man folgendes algebraische System löst:

$$\begin{cases} \delta S_1 + \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k \frac{S_1}{\beta_k + S_1} x_k = r \\ \sum_{k=1}^{n_1} \frac{\gamma_k \alpha_k S_1 x_k}{\beta_k + S_1} = \delta S_2 + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\alpha_j^* S_2 y_j}{\beta_j^* + S_2} \\ x_i \left[ \frac{\alpha_i S_1}{\beta_i + S_1} - \frac{(\mu_i + \delta)}{\chi_{1,i}} \right] = 0 \quad i = \overline{1, n_1} \\ y_j \left[ \alpha_j^* \frac{S_2}{\beta_j^* + S_2} - \frac{\nu_j + \delta}{\chi_{2,j}} \right] = 0 \quad j = \overline{1, n_2} \end{cases} \quad (4.16)$$

### 4.4.3 Stabilität der stationären Punkte

**Lemma 4.4.3** (lokale asymptotische Stabilität des stationären Punktes  $E_1$ )

Betrachte das  $n_1+n_2+2$ -dimensionale System (4.12) mit Anfangswert im offenem positiven Orthanten. Weiterhin seien die Überlebenskonzentrationen der nitrifizierenden und denitrifizierenden Organismen in den beiden Chemostaten (4.13) und (4.14) so, dass nur die ersten Mikrobenspezies (jeweils  $x_1$  und  $y_1$ ) überleben (in allen anderen Fällen geht man ähnlich vor).

Dann ist der stationäre Punkt  $E_1(S_1^*, x_1^*, 0, \dots, 0, S_2^*, y_1^*, 0, \dots, 0)$  lokal asymptotisch stabil für das System (4.12).

BEWEIS:

Um die Stabilität der stationären Punkte von (4.12) zu berechnen untersucht man die Funktionalmatrix des Systems. Dabei bemerkt man die sehr hilfreiche Eigenschaft der Matrix, dass sich die Funktionalmatrix der rechten Seite von (4.12) mit Hilfe von Blöcken darstellen lässt und folgende Gestalt hat:

$$Df = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

wobei:

$A$  eine  $n_1 \times n_1$ -Matrix ist, und  $B$  bzw.  $C$   $(n_2 + 1) \times (n_2 + 1)$ .

$$A = \begin{bmatrix} -\delta - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{\alpha_K \beta_K x_K}{(\beta_k + S_1)^2} & -\alpha_1 \frac{S_1}{\beta_1 + S_1} & \dots & -\alpha_{n_1} \frac{S_1}{(\beta_{n_1} + S_1)} \\ \frac{\chi_{1,1} \alpha_1 \beta_1 x_1}{(\beta_1 + S_1)^2} & \frac{\chi_{1,1} \alpha_1 S_1}{(\beta_1 + S_1)} - (\mu_1 + \delta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\chi_{1,n_1} \alpha_{n_1} \beta_{n_1} x_{n_1}}{(\beta_{n_1} + S_1)^2} & 0 & \dots & \frac{\chi_{1,n_1} \alpha_{n_1} S_1}{\delta \beta_{n_1} + S_1} - (\mu_{n_1} + \delta) \end{bmatrix}$$

und

$$C = \begin{bmatrix} -\delta - \sum_{l=1}^{n_2} \frac{\alpha_l^* \beta_l^* y_l}{(\beta_l^* + S_2)^2} & -\alpha_1^* \frac{S_2}{\beta_1^* + S_2} & \dots & -\alpha_{n_2}^* \frac{S_2}{(\beta_{n_2}^* + S_2)} \\ \frac{\chi_{2,1} \alpha_1^* \beta_1^* y_1}{(\beta_1^* + S_2)^2} & \frac{\chi_{2,1} \alpha_1^* S_2}{(\beta_1^* + S_2)} - (\nu_1 + \delta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\chi_{2,n_2} \alpha_{n_2}^* \beta_{n_2}^* y_{n_2}}{(\beta_{n_2}^* + S_2)^2} & 0 & \dots & \frac{\chi_{2,n_2} \alpha_{n_2}^* S_2}{\delta \beta_{n_2}^* + S_2} - (\nu_{n_2} + \delta) \end{bmatrix}.$$

dieselbe Form wie  $A$  hat, weil beide Funktionalmatrizen von Chemostaten sind.

Die Matrix  $B$  kann auch explizit angegeben werden, aber diese ist, was die Eigenwerte betrifft uninteressant, da bei ihrer Berechnung nur die Matrizen  $A$  und  $C$  auftauchen.

Diese letzten sind aber die Funktionalmatrixe des jeweiligen 2 Chemostatate, d.h. die entsprechenden Eigenwerte negativen Realteil haben (siehe Kapitel 3, Abschnitt 3.2). Also hat  $Df$  an der Stelle  $E_1$  alle Eigenwerte mit negativem Realteil.

□

Aus dem Abschnitt 3.2 ist folgendes bekannt:

Das Untersystem (4.13) hat genau einen lokal asymptotisch stabilen stationären Punkt  $E_1^*$ . Setzt man diesen in (4.14) ein, so hat auch dieses System genau einen lokal und global asymptotisch stabilen stationären Punkt  $E_1^{**}$ .

Insgesamt lässt sich folgendes sagen:

**Lemma 4.4.4** *Das Gesamtsystem (4.12) hat genau einen lokal asymptotisch stabilen stationären Punkt  $E_1 = (E_1^*, E_1^{**})$ .*

□

**Satz 4.4.5** *(Globale Dynamik-Exklusionsprinzip)*

*Betrachte das  $n_1 + n_2 + 2$ -dimensionale System (4.12) mit Anfangswert im offenem positiven Orthanten. Der stationäre Punkt  $E_1$  sei lokal asymptotisch stabil. Dann ist der stationäre Punkt  $E_1$  sogar global asymptotisch stabil, d.h., es überlebt höchstens ein Nitrifizierer und ein Denitrifizierer, und zwar jeweils derjenige, der die geringsten Überlebenskonzentrationen hat:*

*Falls  $x(t)$  eine Lösung des Systems (4.12) für gegebenen positiven Anfangswert ist, dann gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = E_1$$

BEWEIS:

Man greift wieder auf das Korollar 3.3.2 aus Kapitel 3 zurück. Das System (4.12) lässt sich wieder auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f_1(u) \\ \dot{v} &= f_2(u, v)\end{aligned}$$

indem man  $u = (S_1, x_1, \dots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ ,  $v = (S_2, y_1, \dots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $f_1(u) =$ ,  $f_2(u, v) =$  definiert. Das Chemostat-Untersystem (4.12) steht hier für  $\dot{u} = f_1(u)$  und die restlichen Gleichungen lassen sich mit  $\dot{v} = f_2(u, v)$  abkürzen.

Man sieht leicht, dass alle Bedingungen des Korollars 3.4.2 erfüllt sind:

Die Lösungen liegen in einer kompakten Menge  $K$  nach dem Lemma 4.4.2, das Untersystem  $\dot{u} = f_1(u)$  hat als globalen Attraktor den stationären Punkt  $(S_1^*, x_1^*, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^{n_1}$  den wir mit  $u_0$  bezeichnen.

Weiterhin ist der stationäre Punkt  $E_1(S_1^*, x_1^*, 0, \dots, 0, S_2^*, y_1^*, 0, \dots, 0) = \{u_0, v_0\}$  nach dem Lemma 4.4.3 lokal asymptotisch stabil, und die Eigenwerte der Funktionalmatrix haben negativen Realteil.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Gleichung  $\dot{v} = f_2(u_0, v)$  den stationären Punkt  $\{u_0, v_0\}$  als globaler Attraktor hat. Wie oben erwähnt, erhält man durch Einsetzen des stationären Punktes des ersten Chemostaten in das System (4.12) wieder ein Chemostat-System, dessen Lösungen global gegen  $E_1''(S_2^*, y_1^*, 0, \dots, 0) = \{v_0\}$  konvergieren.

Insgesamt hat dann die Gleichung  $\dot{v} = f_2(u_0, v)$  als Omega-Limesmenge den stationären Punkt  $E_1(S_1^*, x_1^*, 0, \dots, 0, S_2^*, y_1^*, 0, \dots, 0)$ . Da alle Bedingungen des Korollars 3.4.2 erfüllt sind, folgt die Behauptung.

□

**Bemerkung 4.4.6** (*Biologische Interpretation*)

*Dieses Modell läßt eine Koexistenz verschiedener Nitrifizierer oder verschiedener*



*Denitrifizierer nicht zu. In dieser Hinsicht hat also die mathematische Analyse eine Schwäche des Modells aufgedeckt. Das Exklusionsprinzip bzw. Persistenzanalyse mancher biologischen Systeme taucht in Literatur sehr oft auf (siehe dazu [uRMG80], [WJT91], [AH77]).*

## 4.5 Effizienzfragen

### 4.5.1 Eine Minimierungsaufgabe für die Sauerstoffkonzentration

Das Vorhandensein gelösten Sauerstoffs im Belüftungsbecken ist sowohl für die Steuerung der biochemischen Prozesse als auch für den wirtschaftlichen Betrieb der Anlagen eine wichtige Voraussetzung.

Die nötigen Sauerstoffkonzentrationen sind unterschiedlich, da Sauerstoff einige Prozesse fördert und andere behindert. Weiter ist die Tolerierfähigkeit vieler Organismen während sauerstoffreicher Perioden verschieden, weswegen keine exakte Grenzkonzentration dafür angegeben werden kann. (Die notwendigen Sauerstoffkonzentrationen im Belüftungsbecken sind umstritten. In der Literatur werden beispielsweise  $2\text{mg}/\text{lO}_2$  gefordert.)

Die Kosten der Belüftung sind hoch, und die Annahme, dass die Sauerstoffkonzentration konstant ist, bedeutet Energie zu vergeuden (für eine Begründung siehe auch [Har89]).

Durch Regelung des Sauerstoffeintrages lässt sich der Gesamtenergiebedarf für eine Belebtschlammanlage wesentlich senken (siehe dazu [BM88] und [OJ94]). Deshalb wird in diesem Abschnitt die Frage gestellt: wie soll die Konzentration des Sauerstoffs  $\rho$  gewählt werden, damit im Gleichgewichtspunkt  $E_1$  die Gesamtmenge von Ammonium und Nitrat/Nitrit ( $x_3 + x_4$ ) möglichst klein wird, d.h., damit eine effiziente Reinigung erreicht wird?

Die Koordinaten von  $E_1$  sind im Monod-Fall:

$$x_3^1(\rho) = \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)} \quad \text{und} \quad x_4^1(\rho) = \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)}.$$

**Bemerkung 4.5.1** : *Es gelten folgende Zusatzbedingungen, siehe Lemma 4.2.4:*

$$(i) \mu_1(\rho) < (\alpha_4 + \delta)$$

$$(ii) \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) > (\alpha_4 + \delta)$$

$$(iii) \mu_3(\rho) > (\alpha_5 + \delta)\left(1 + \frac{\delta K_4}{r}\right)$$

$$(iv) \frac{\chi_3 K_3 [(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{\chi_2 [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)]} + \frac{K_4 (\alpha_5 + \delta)}{[\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)]} < \frac{r}{\delta}$$

**Bemerkung 4.5.2** : Die obigen Zusatzbedingungen liefern einen zulässigen Bereich für  $\rho$ .

#### 4.5.1.1 Schalterfunktionen als Aufnahmefunktionen

In der Praxis wird üblicherweise Sauerstoff (aerobe Umweltbedingungen) durch abwechselndes ein bzw. ausschalten zugeführt.

Es seien daher die Aufnahmefunktionen  $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho)$  sogenannte Schalterfunktionen, die stückweise konstant sind und einen Sprung haben, wie in Abbildung 4.2 und 4.3 dargestellt wird.

Explizit sehen die Funktionen  $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho)$  folgendermassen aus:

$$\mu_1(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq \rho < \beta_1 \\ \bar{\mu}_1, & \text{falls } \rho \geq \beta_1 \end{cases} \quad \mu_2(\rho) = \begin{cases} \bar{\mu}_2, & \text{falls } 0 \leq \rho < \beta_2 \\ 0, & \text{falls } \rho \geq \beta_2 \end{cases}$$

und

$$\mu_3(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq \rho < \beta_3 \\ \bar{\mu}_3, & \text{falls } \rho \geq \beta_3. \end{cases}$$

Wir betrachten die Summe von Ammonium und Nitrat/Nitritkonzentration an der Stelle  $E_1$ , (im Monod-Fall), die minimiert werden soll:

$$S(\rho) = x_3^1(\rho) + x_4^1(\rho) = \frac{K_3 [(\alpha_4 + \delta) - \mu_1(\rho)]}{\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4 (\alpha_5 + \delta)}{\mu_3(\rho) - (\alpha_5 + \delta)}.$$

Hierbei sind die verschiedenen Beziehungen der drei Werte  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , an denen die Schalterfunktionen “umspringen”, zu untersuchen.

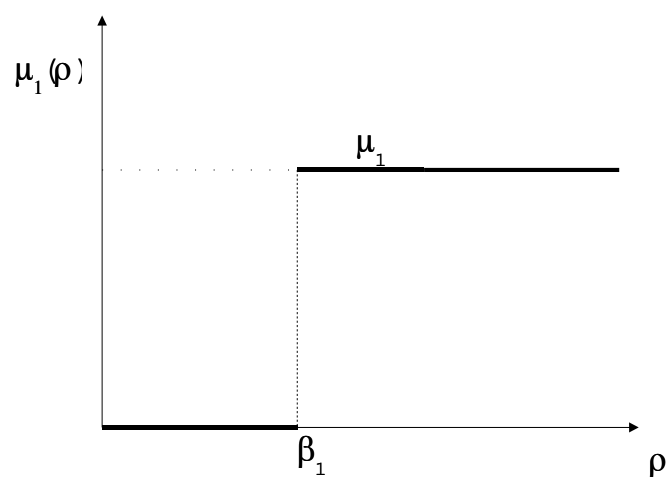


Abbildung 4.2: Ein Beispiel für die Aufnahme­funktion  $\mu_1(\rho)$

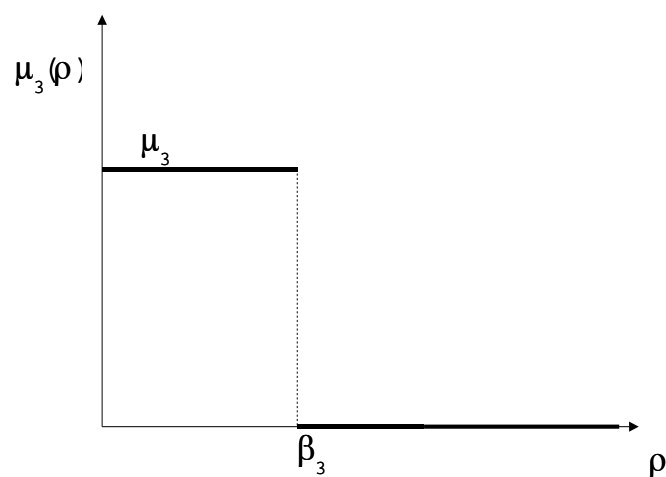


Abbildung 4.3: Ein Beispiel für die Aufnahme­funktion  $\mu_3(\rho)$

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| (i) $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$   | (ii) $\beta_3 < \beta_1 < \beta_2$ |
| (iii) $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$ | (iv) $\beta_2 < \beta_1 < \beta_3$ |
| (v) $\beta_2 < \beta_3 < \beta_1$   | (vi) $\beta_3 < \beta_2 < \beta_1$ |

**Bemerkung 4.5.3** *Bei der Berechnung der Existenzbedingungen für den stati-*

onären Punkt  $E_1$  für die Schalterfunktionen  $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho)$ , stellt sich heraus, dass  $\mu_2(\rho) > 0$  (weil einerseits  $\mu_1(\rho) < \alpha_4 + \delta$  und andererseits  $\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) > \alpha_4 + \delta$ ). Folglich muss  $0 < \rho < \beta_2$  sein. Andererseits fordert die Bedingung an  $\mu_3(\rho) > (\alpha_5 + \delta)(1 + \delta \frac{K_4}{r})$ , dass  $\rho > \beta_3$  und  $\bar{\mu}_3 > (\alpha_5 + \delta)(1 + \delta \frac{K_4}{r})$ . Insgesamt muss also  $0 < \rho < \beta_2$  und  $\rho \geq \beta_3$  in allen Fällen berücksichtigt werden. Dementsprechend werden die Fälle (i), (iv), (v) nicht betrachtet, da die Bedingungen an  $\rho$  und  $\beta_3 > \beta_2$  inkompatibel sind.

**Satz 4.5.4** Betrachte das 4-dimensionale autonome Differentialgleichungssystem (4.1) mit Monod-Kinetik. Es seien die Existenzbedingungen (i)-(iv) aus Lemma (4.2.4) für den inneren stationären Punkt erfüllt. Seien weiterhin die Funktionen  $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho)$  als Schalterfunktionen gegeben. Dann existiert das Minimum von  $S(\rho)$  in  $E_1$  und berechnet sich wie folgt:

(i) Falls  $\beta_3 < \beta_1 < \beta_2$  oder  $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$ , dann ist

$$\min_{\rho \in D} S(\rho) = \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \bar{\mu}_1]}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)}, \text{ wobei } D = (\beta_1, \beta_2) \text{ im ersten Fall}$$

und  $D = [\beta_3, \beta_2)$  im zweiten Fall.

(ii) Falls  $\beta_3 < \beta_2 < \beta_1$ , dann ist

$$\min_{\rho \in [\beta_3, \beta_2)} S(\rho) = \frac{K_3(\alpha_4 + \delta)}{\bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)} \text{ für } \rho \in [\beta_3, \beta_2).$$

BEWEIS:

- Der Fall  $\beta_3 < \beta_1 < \beta_2$

Einsetzen von  $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho)$  in  $S(\rho)$  liefert:

$$S(\rho) = \begin{cases} \frac{K_3(\alpha_4 + \delta)}{[\bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)]} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)}, & \text{falls } \beta_3 \leq \rho < \beta_1 < \beta_2 \\ \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \bar{\mu}_1]}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)}, & \text{falls } \beta_3 < \beta_1 \leq \rho \leq \beta_2 \end{cases}$$

Zu beachten ist, dass:  $\frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \bar{\mu}_1]}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)} < \frac{K_3(\alpha_4 + \delta)}{[\bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)]} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)}$ ,

also ist das gesuchte Minimum in diesem Fall:

$$\min_{\rho \in (\beta_1, \beta_2)} S(\rho) = \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \bar{\mu}_1]}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)} < \frac{r}{\delta}$$

und die Bedingung an  $\rho$  ist  $\beta_1 < \rho < \beta_2$ .

Die Positivitätsbedingungen in diesem Fall müssen erfüllt sein. Diese sind:

$$\bar{\mu}_1 < (\alpha_4 + \delta), \bar{\mu}_3 > (\alpha_5 + \delta)(1 + \frac{\delta K_4}{r}), \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 > (\alpha_4 + \delta) \text{ und } \bar{\mu}_2 > (\alpha_4 + \delta).$$

Der Fall  $\rho \geq \beta_2$  kann nicht auftreten, denn einerseits muß  $\bar{\mu}_1 > (\alpha_4 + \delta)$  sein, andererseits aber  $\bar{\mu}_1 < (\alpha_4 + \delta)$ .

- Der Fall  $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$ .

Der zulässige Bereich für  $\rho$  ist das Intervall  $\rho \in [\beta_3, \beta_2)$ .

Das Minimum beträgt:

$$\min_{\rho \in [\beta_3, \beta_2)} S(\rho) = \frac{K_3[(\alpha_4 + \delta) - \bar{\mu}_1]}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)} \text{ für } \rho \in [\beta_3, \beta_2).$$

- Der Fall  $\beta_3 < \beta_2 < \beta_1$ .

Zulässiger Bereich für  $\rho$  ist das Intervall  $\rho \in [\beta_3, \beta_2)$ .

Das Minimum ist in diesem Fall:

$$\min_{\rho \in [\beta_3, \beta_2)} S(\rho) = \frac{K_3(\alpha_4 + \delta)}{\bar{\mu}_2 - (\alpha_4 + \delta)} + \frac{K_4(\alpha_5 + \delta)}{\bar{\mu}_3 - (\alpha_5 + \delta)} \text{ für } \rho \in [\beta_3, \beta_2).$$

□



# Kapitel 5

## Erweiterungen des 4-dimensionalen Systems

Nach dem erfolgreichen Abschluss der analytischen Behandlung des 4-dimensionalen Systems stellt sich die Frage nach Erweiterungen dieses reduzierten Systems (etwa mit einem zusätzlichen Substrat aus dem ASM 1 als fünfter Variable oder unter Betrachtung zweier 4-dimensionaler Systeme als eine “Kaskade”). Diese Fragestellung ist auch für das ASM 1-Modell wichtig.

Das dynamische Verhalten des 8-dimensionalen Systems, was Kaskaden mit zwei Becken modelliert, läßt sich vollständig bestimmen; für das 5-dimensionalen System (Abschnitt 5.2) liegen jeweils partielle Ergebnisse vor. Die algebraischen Schwierigkeiten bei der Berechnung mancher stationären Punkte (eine explizite Darstellung ist kaum möglich) nehmen bei erhöhter Dimension deutlich zu. Allerdings lassen sich Existenz und lokale asymptotische Stabilität eines inneren stationären Punktes zeigen.



## 5.1 Kaskaden mit zwei Becken

Während des Abwasserreinigungsprozesses werden Abwässer in der Regel in mehreren nacheinandergeschalteten Becken, d.h., in Kaskaden gereinigt, wobei die Becken miteinander in Verbindung stehen. Auf diese Weise kann man eine erhöhte Reinigungseffizienz erreichen.

Dies wird hier modelliert, indem zwei 4-dimensionale Systeme zu einem 8-dimensionalen System zusammengekoppelt werden.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)] x_1 \\ \dot{x}_2 = [\mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)] x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_3 \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_4 + r \\ \dot{y}_1 = [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta)] y_1 + \delta x_1 \\ \dot{y}_2 = [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta)] y_2 + \delta x_2 \\ \dot{y}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) y_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_3 + \delta x_3 \\ \dot{y}_4 = -\chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_4 + \delta x_4 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Bezeichnungen: Die Parameter, die nicht von der Sauerstoffkonzentration abhängen, bleiben unverändert (vgl. System (4.3) in Kapitel 4), aber diejenigen, die von  $\rho$  abhängig sind, ändern sich. Beispielsweise wird  $\mu_1$  zu  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2$  zu  $\mu_2^*$  und  $\mu_3$  zu  $\mu_3^*$ .

Der Abfluß (jeweils der Term  $-\delta x_i$ ) des ersten Beckens fließt in das zweite Becken und (taucht im System mit  $+\delta x_i$  auf), Ammonium fließt nur in das erste Becken mit konstanter Rate  $r$  zu.

Das Untersystem aus  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ist unabhängig von den anderen Variablen und ist aus Kapitel 4 bekannt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)]x_1 \\ \dot{x}_2 = [\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)]x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)x_1 + \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_3\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (5.2)$$

Dieses System konvergiert unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2.4 gegen seinen einzigen inneren stationären Punkt  $E_1^* = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ .

**Bemerkung 5.1.1** *Bei der Analyse des Systems (5.1) lassen sich bekannte Eigenschaften wie: Existenz, Eindeutigkeit, Positivität von Lösungen wie in früheren Kapiteln zeigen. Die Beschränktheit von Lösungen lässt sich auf die Beschränktheit von Lösungen des 4-dimensionalen Systems 4.3 zurückführen. Insgesamt gilt: Das System (5.1) ist dissipativ.*

**Lemma 5.1.2** *(Existenz eines inneren stationären Punktes)*

*Gegeben sei das System (5.1) mit Anfangswert im offenem positiven Quadranten. Wenn die Existenzbedingungen für einen inneren stationären Punkt des Systems (5.2) erfüllt sind (siehe dazu Lemma 4.2.4 aus Kapitel 4), dann besitzt das System (5.1) einen mit  $E_1(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8)$  bezeichneten stationären Punkt im offenen positivem Orthanten.*

BEWEIS:

Um die stationären Punkte des Systems (5.1) zu berechnen, müssen wir folgendes algebraisches Gleichungssystem lösen:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)] x_1 = 0 \\ [\mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)] x_2 = 0 \\ -\chi_1 \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_3 = 0 \\ -\chi_3 \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_4 + r = 0 \\ [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta)] y_1 + \delta x_1 = 0 \\ [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta)] y_2 + \delta x_2 = 0 \\ -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) y_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_3 + \delta x_3 = 0 \\ -\chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_4 + \delta x_4 = 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Das Untersystem (5.2) ist unabhängig von den anderen Variablen und besitzt nach Annahme einen inneren stationären Punkt  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ . Setzt man diesen in das Originalsystem ein, so erhält man folgendes Untersystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta)] y_1 + \delta c_1 \\ \dot{y}_2 = [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta)] y_2 + \delta c_2 \\ \dot{y}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) y_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_3 + \delta c_3 \\ \dot{y}_4 = -\chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_4 + \delta c_4 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Wir bemerken, dass das von der zweiten und vierten Gleichung gebildete Untersystem ein Chemostat mit Mikrobenzufluss (allgemeine Aufnahmefunktionen) und verschiedenen Abflussraten ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_2 = [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta)] y_2 + \delta c_2 \\ \dot{y}_4 = -\chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4) y_2 - \delta y_4 + \delta c_4 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Dieser Chemostat ist aus Kapitel 1, Abschnitt 1.3.5 bekannt: jede Lösung konvergiert asymptotisch gegen einen inneren stationären Punkt  $E_1^{**}$  mit den Komponenten  $(c_6, c_8)$ . Setzen wir diese in (5.4) ein, so erhalten wir wieder einen Chemostaten gleicher Art und zwar:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta)] y_1 + \delta c_1 \\ \dot{y}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3) y_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(c_8) c_6 - \delta y_3 + \delta c_3 \end{cases} \quad (5.6)$$

Dieser Chemostat besitzt selbst einen inneren stationären Punkt, den wir mit  $E_1^{***}(c_5, c_7)$  bezeichnen. Insgesamt folgt, dass das Originalsystem (5.1) einen inneren stationären Punkt  $E_1$  hat, dessen Komponenten aus den jeweiligen Koordinaten  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ ,  $(c_4, c_6)$  und  $(c_5, c_7)$  zusammengesetzt sind.

□

### 5.1.1 Stabilität der stationären Punkte

**Lemma 5.1.3** (*Lokale asymptotische Stabilität des inneren stationären Punktes*)

*Wenn die Existenzbedingungen für einen inneren stationären Punkt  $E_1$  erfüllt sind, dann ist dieser Punkt lokal asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Wir berechnen die Funktionalmatrix des Systems (5.1). Sie hat folgende Block-Gestalt:

$$\begin{bmatrix} A & O_4 \\ B & C \end{bmatrix},$$

mit:

$$A := \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 \sigma_1(x_3) - \alpha_4 - \delta & 0 & \mu_2 x_1 \sigma_1'(x_3) & 0 \\ 0 & \mu_3 \sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta) & 0 & \mu_3 x_2 \sigma_2'(x_4) \\ -\chi_1 \mu_2 \sigma_1(x_3) & \chi_2 \mu_3 \sigma_2(x_4) & -\chi_1 \mu_2 x_1 \sigma_1'(x_3) - \delta & \chi_2 \mu_3 x_2 \sigma_2'(x_4) \\ 0 & -\chi_3 \mu_3 \sigma_2(x_4) & 0 & -\chi_3 \mu_3 x_2 \sigma_2'(x_4) - \delta \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$\text{und } C := \begin{bmatrix} \mu_1^* + \mu_2^* \sigma_1(y_3) - \alpha_4 - \delta & 0 & \mu_2^* x_1 \sigma_1'(y_3) & 0 \\ 0 & \mu_3^* \sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta) & 0 & \mu_3^* x_2 \sigma_2'(y_4) \\ -\chi_1 \mu_2^* \sigma_1(y_3) & \chi_2 \mu_3^* \sigma_2(y_4) & -\chi_1 \mu_2^* \sigma_1'(y_3) y_1 - \delta & \chi_2 \mu_3^* y_2 \sigma_2'(y_4) \\ 0 & -\chi_3 \mu_3^* \sigma_2(y_4) & 0 & -\chi_3 \mu_3^* y_2 \sigma_2'(y_4) - \delta \end{bmatrix}$$

Man berechnet das charakteristische Polynom an der Stelle  $E_1$ , wobei berücksichtigt wird, dass an dieser Stelle folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3^1) - (\alpha_4 + \delta) &= 0 \\ \mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(y_3^1) - (\alpha_4 + \delta) &< 0 \\ \mu_3(\rho) \sigma_2(x_4^1) - (\alpha_5 + \delta) &= 0 \\ \mu_3^*(\rho) \sigma_2(y_4^1) - (\alpha_5 + \delta) &< 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Bei der Berechnung der Determinante der Jacobi-Matrix stellt man fest, dass nur die Determinanten von  $A$  und  $C$  eine Rolle spielen:

$$\det Df|_{E_1} = \det A|_{E_1} \cdot \det C|_{E_1}$$

Über  $\det A|_{E_1}$  wissen wir aus Kapitel 4, Lemma 4.2.11, dass die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  negativen Realteil haben. Weiterhin berechnet man  $\det C|_{E_1}$ . Die Matrix  $C$  hat gleiche Gestalt wie  $A$ .

Es ergibt sich das folgende charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \mu_3^* \sigma_2(y_4^1) - (\alpha_5 + \delta) - \lambda & \mu_3^* y_2^1 \sigma_2'(y_4)|_{E_1} \\ -\chi_3 \mu_3^* \sigma_2^*(y_4) & -\chi_3 \mu_3^* y_2 \sigma_2'(y_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{array} \right| \\ & \{ [\mu_1^* + \mu_2^* \sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta) - \lambda] (-\chi_1 \mu_2^* \sigma_1'(y_3) y_1 - \delta - \lambda) + \chi_1 (\mu_2^*)^2 \sigma_1(y_3) y_1 \sigma_1'(y_3) \} \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende quadratische Polynomgleichung mit positive Koeffizienten, d.h., die Eigenwerten besitzen negativen Realteil (man beachte, dass  $(\alpha_4 + \delta) - \mu_1^* - \mu_2^* \sigma_1(y_3) > 0$ ):

$$[\lambda^2 + \lambda[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1^* - \mu_2^* \sigma_1(y_3) + \chi_1 \mu_2^* \sigma_1'(y_2) y_1] + (\chi_1 \mu_2^* \sigma_1'(y_2) y_1 + \delta)[(\alpha_4 + \delta) - \mu_1^* - \mu_2^* \sigma_1(y_3)] = 0$$

Die restlichen Eigenwerte ergeben sich als die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \mu_3^* \sigma_2(y_4^1) - (\alpha_5 + \delta) - \lambda & \mu_3^* y_2^1 \sigma_2'(y_4)|_{E_1} \\ -\chi_3 \mu_3^* \sigma_2(y_4) & -\chi_3 \mu_3^* y_2 \sigma_2'(y_4)|_{E_1} - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Der Spur der Matrix ist negativ (da  $\mu_3^* \sigma_2(y_4^1) - (\alpha_5 + \delta) < 0$ ), und die Determinante selbst ist positiv. Dementsprechend haben die beiden restlichen Eigenwerte negativen Realteil.

Damit ist der stationäre Punkt  $E_1$  lokal asymptotisch stabil.

□

**Satz 5.1.4** (*Globale Dynamik*)

*Gegeben sei das Kaskaden-System (5.1) mit Anfangswert im offenen positiven Orthanten. Die Existenzbedingungen für den inneren stationären Punkt seien erfüllt. Dann ist der innere stationäre Punkt  $E_1$  lokal und global asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Das System (5.1) lässt sich folgendermassen umschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1(u) \\ \dot{v} &= f_2(u, v) \end{aligned}$$

mit  $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ,

$$f_1(u) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho)\sigma_1(x_3) - (\alpha_4 + \delta)]x_1 \\ [\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4) - (\alpha_5 + \delta)]x_2 \\ -\chi_1\mu_2(\rho)\sigma_1(x_3)x_1 + \chi_2\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_3 \\ -\chi_3\mu_3(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{pmatrix}$$

und

$$f_2(u, v) = \begin{pmatrix} [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho)\sigma_1(y_3) - (\alpha_4 + \delta)]y_1 + \delta x_1 \\ [\mu_3^*(\rho)\sigma_2(y_4) - (\alpha_5 + \delta)]y_2 + \delta x_2 \\ -\chi_1\mu_2^*(\rho)\sigma_1(y_3)y_1 + \chi_2\mu_3^*(\rho)\sigma_2(y_4)y_2 - \delta y_3 + \delta x_3 \\ -\chi_3\mu_3^*(\rho)\sigma_2(y_4)y_2 - \delta y_4 + \delta x_4 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage folgt aus dem Korollar 3.3.2 (vgl. Kapitel 3).

□

**Bemerkung 5.1.5** *Das System (5.1) besitzt im allgemeinen außer den inneren stationären Punkt weitere stationäre Punkte. Es wird auf eine detaillierte Analyse verzichtet, weil man sich eher für innere stationäre Punkte interessiert, in denen das System im Gleichgewicht ist. Die Analyse (Existenz und lokale Stabilität) verläuft jedoch ähnlich.*

## 5.2 Ein 5-dimensionales System

Das 5-dimensionale System, welches in diesem Abschnitt behandelt wird, ist (wie das 4-dimensionale) eine Vereinfachung von ASM 1, die aber etwas genauer das Verhalten des leicht abbaubaren Substrats  $S_S$  behandelt. Es ist gleichzeitig eine Erweiterung auf Dimension fünf des 4-dimensionalen Systems, für das Ergebnisse zu Positivität, Beschränktheit, stationäre Punkte und Stabilität vorliegen.

Hierbei wird die Konzentration des leicht abbaubaren Substrates als fünfte Variable einbezogen.

Mit Monod-Kinetik hat das System die folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = r^* - \chi_3 \frac{x_0}{x_0 + K_S} x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \frac{x_3}{K_{NO} + x_3}] - \delta x_0 \\ \dot{x}_1 = [\mu_1^*(\rho) \frac{x_0}{K_S + x_0} + \mu_2^*(\rho) \frac{x_0}{K_S + x_0} \frac{x_3}{K_{NO} + x_3} - \alpha_4 - \delta] x_1 \\ \dot{x}_2 = [\mu_3^*(\rho) \frac{x_4}{K_4 + x_4} - \alpha_5 - \delta] x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \frac{x_0}{K_S + x_0} \frac{x_3}{K_{NO} + x_3} x_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \frac{x_4}{K_{NH} + x_4} x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_2 \mu_3^*(\rho) \frac{x_4}{K_{NH} + x_4} x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (5.8)$$

Bezeichnungen:

$x_0$  :=  $S_S$ -die Konzentration vom leicht abbaubarem Substrat;

$x_1$  :=  $X_{BH}$ -die Konzentration der heterotrophe Biomasse;

$x_2$  :=  $X_{BA}$ -die Konzentration autotropher Biomasse;

$x_3$  :=  $S_{NO}$ -die Konzentration von Nitrat;

$x_4$  :=  $S_{NH}$ -die Konzentration von Ammonium.

$r, r^*$  :-die Zuflussraten von leicht abbaubarem Substrat bzw. Ammonium.

$$\mu_1^*(\rho) = \mu_H \frac{\rho}{\rho + K_{OH}}, \mu_2^*(\rho) = \mu_H \eta_g \frac{K_{OH}}{K_{OH} + \rho} \text{ und } \mu_3^*(\rho) = \alpha_3 \frac{\rho}{\rho + K_{OA}}.$$

Wählt man allgemeine Aufnahmefunktionen wie im Kapitel 4 ( $\frac{x_3}{K_{NO} + x_3} =: \sigma_1(x_3)$ ,  $\frac{x_4}{K_{NH} + x_4} =: \sigma_2(x_4)$  und  $\frac{x_0}{x_0 + K_S} =: \sigma_3(x_0)$ ), so erhält das obige System die folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = r^* - \chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] - \delta x_0 \\ \dot{x}_1 = [\mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) - \alpha_4 - \delta] x_1 \\ \dot{x}_2 = [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) - \alpha_5 - \delta] x_2 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_3 \\ \dot{x}_4 = -\chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (5.9)$$

Die Analyse wird für diesen allgemeinen Fall durchgeführt.



### 5.2.1 Positivität und Beschränktheit

**Lemma 5.2.1** (*Positivität*)

Betrachte das 5-dimensionale System (5.9) mit positiven Anfangswerten

$x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) \geq 0, x_4(0) \geq 0$  und  $x_5(0) \geq 0$ . Dann ist die Lösung  $x(t)$  des Anfangwertproblems für alle positiven Zeiten positiv, d.h.:  $x(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$ .

BEWEIS:

Nach dem Satz (3.1.4) aus Kapitel 3 sind folgende Funktionenwerte zu berechnen:

$$f_1(0, x_1, x_2, x_3, x_4) = r^* \geq 0, f_2(x_0, 0, x_2, x_3, x_4) = 0 \geq 0, f_3(x_0, x_1, 0, x_3, x_4) = 0 \geq 0, f_4(x_0, x_1, x_2, 0, x_4) = \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) \geq 0, f_5(x_0, x_1, x_2, x_3, 0) = r \geq 0.$$

Hieraus ergibt sich die Positivität der Lösungen.

□

**Lemma 5.2.2** (*Beschränktheit*)

Jede Lösung des Systems (5.9) ist für alle positiven Zeiten beschränkt.

BEWEIS: Sei  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) \in \mathbb{R}_+^5$  eine beliebige Lösung des Systems (5.9) mit positivem Anfangswert.

Wir bilden die folgende Linearkombination der Gleichungen des Systems (5.9):

$$\chi_3 \dot{x}_2 + \dot{x}_4 = r - \chi_3(\alpha_5 + \delta)x_2 - \delta x_4$$

und

$$\dot{x}_0 + \chi_3 \dot{x}_1 = r^* - \delta x_0 - \chi_3(\alpha_4 + \delta)x_1.$$

Wie in Lemma 4.2.2 erkennen wir die Beschränktheit von  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_4(t)$ .

Die Beschränktheit der Komponente  $x_3(t)$  erhält man direkt aus der Gleichung für  $x_3$ . Dabei berücksichtigen wir, dass  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_4(t)$  beschränkt sind:

$$\dot{x}_3 = -\chi_1\mu_2^*(\rho)\sigma_3(x_0)\sigma_1(x_3)x_1 + \chi_2\mu_3^*(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_3 \leq -\delta x_3 + M$$

wobei  $M$  eine Konstante ist.

Weiter geht analog zu Lemma 4.2.2 vor.

□

**Bemerkung 5.2.3** *Man merkt an dem System (5.9), dass das von den Gleichungen (3) und (5) (Autotrophen und Ammonium) gebildete 2-dimensionale Untersystem ein Chemostat mit Zufluss von Mikroben ist (vgl. Kapitel 1, Abschnitt 1.3.3):*

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = [\mu_3^*(\rho)\sigma_2(x_4) - \alpha_5 - \delta]x_2 \\ \dot{x}_4 = -\chi_3\mu_3^*(\rho)\sigma_2(x_4)x_2 - \delta x_4 + r \end{cases} \quad (5.10)$$

*Insbesondere ergeben sich hieraus die zweite und vierte Koordinate eines stationären Punktes. Aus früheren Ergebnissen wissen wir, dass die Lösung des obigen Chemostates unter gewissen Voraussetzungen gegen den einzigen inneren stationären Punkt  $(c_2, c_4)$  konvergiert.*

## 5.2.2 Stationäre Punkte

**Lemma 5.2.4** *(Existenz eines inneren stationären Punktes) Das 5-dimensionale System (5.9) besitzt einen einzigen inneren stationären Punkt  $E_1$  genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$(i) \quad \mu_3(\rho) > \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2(\frac{r}{\delta})}$$

$$(ii) \quad \frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^* + \mu_2^* \sigma_1(\frac{r}{\delta})} \leq \sigma_3(\frac{r^*}{\delta}) \text{ mit } c := \chi_2(r - \delta \sigma_2^{-1}(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3^*(\rho)}))$$

BEWEIS:

Das System, das die stationären Punkte liefert, ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^* - \chi_3^* \sigma_3(x_0) x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] - \delta x_0 = 0 \\ [\mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) - \alpha_4 - \delta] x_1 = 0 \\ [\mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) - \alpha_5 - \delta] x_2 = 0 \\ -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_3 = 0 \\ -\chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_4 + r = 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Für innere stationäre Punkte mit  $x_1 \neq 0$  und  $x_2 \neq 0$  dividieren wir die zweite und vierte Gleichung durch  $x_1$  bzw.  $x_2$  und erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] + \delta x_0 = r^* \\ \mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) = \alpha_4 + \delta \\ \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) = \alpha_5 + \delta \\ -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 - \delta x_3 = 0 \\ \chi_3 \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) x_2 + \delta x_4 = r \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Wir ersetzen  $\mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4)$  durch  $(\alpha_5 + \delta)$  und erhalten das System (5.13) als:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] + \delta x_0 = r^* \\ \mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) = \alpha_4 + \delta \\ \mu_3^*(\rho) \sigma_2(x_4) = \alpha_5 + \delta \\ -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + \chi_2 (\alpha_5 + \delta) x_2 - \delta x_3 = 0 \\ \chi_3 (\alpha_5 + \delta) x_2 + \delta x_4 = r \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Wir berücksichtigen, dass das Untersystem (5.10) ein Chemostat ist und dieser einen nichttrivialen stationären Punkt  $(c_2, c_4)$  mit  $c_2 > 0, c_4 > 0$  besitzt, genau dann wenn  $\mu_3^*(\rho) > \frac{(\alpha_5 + \delta)}{\sigma_2(\frac{r}{\chi_3})}$  (siehe Annahme (i)). Die Koordinaten  $(c_2, c_4)$  kann man explizit angeben als:

$$c_4 := \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3^*(\rho)}\right) = x_4^1 > 0 \quad c_2 := \frac{r - \delta x_4^1}{\chi_3(\alpha_5 + \delta)} = x_2^1 > 0$$

Weiterhin genügt es, das folgende 3-dimensionale System auf stationäre Punkte zu untersuchen (System für  $x_0, x_1, x_3$  (bei  $x_2 = c_2, x_4 = c_4$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = r^* - \chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] - \delta x_0 \\ \dot{x}_1 = [\mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) - \alpha_4 - \delta] x_1 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + c - \delta x_3 \end{cases} \quad (5.14)$$

mit  $c = \chi_2(r - \delta c_4) > 0$  (vgl. Annahme).

Es gilt:

$$\dot{x}_0 + \chi_3 \dot{x}_1 = r^* - \delta x_0 - (\alpha_4 + \delta) \chi_3 x_1$$

Für einen stationären Punkt mit  $x_1 \neq 0$  gilt also:

$$\begin{cases} r^* - \delta x_0 = (\alpha_4 + \delta) \chi_3 x_1 \\ \sigma_3(x_0) [\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)] = \alpha_4 + \delta \\ -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + c - \delta x_3 = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Diese drei Gleichungen sind notwendig und hinreichend für die Koordinaten eines inneren stationären Punktes.

Die notwendigen Bedingungen für die Lösbarkeit werden weiterhin betrachtet.

Die linke Seite der ersten Gleichung ist positiv, also ist

$$x_0^1 < \frac{r^*}{\delta} \quad (a).$$

Dementsprechend müßte für die linke Seite der zweiten Gleichung von (5.15)  $\sigma_3(x_0^1)(\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3))$  kleiner als  $\sigma_3(\frac{r^*}{\delta})(\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3))$  gelten (da  $x_0^1 < \frac{r^*}{\delta}$ ). Also muß:

$$\sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right) [\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3)] > (\alpha_4 + \delta) \quad (b)$$

erfüllt sein. Dies ist aber nach der Annahme (ii) erfüllt, da

$$\frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^* + \mu_2^* \bar{\sigma}_1} < \frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^* + \mu_2^* \sigma_1\left(\frac{r^*}{\delta}\right)} \leq \sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right) \text{ mit } c := \chi_2\left(r - \delta \sigma_2^{-1}\left(\frac{\alpha_5 + \delta}{\mu_3^*(\rho)}\right)\right),$$

wenn man berücksichtigt, dass  $\sigma_1$  eine monoton wachsende Funktion ist.

Aus dem zweiten Gleichung des Systems (5.15) ergibt sich folgende strikt monoton fallende Funktion:

$$\sigma_3(x_0) = \frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)} \quad (5.16)$$

Die rechte Seite von (5.16) ist eine positive und monoton fallende Funktion in  $x_3$ , die von  $\frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*(\rho)}$  (bei  $x_3 = 0$ ) nach  $\frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \bar{\sigma}_1}$  für  $x_3 \rightarrow \infty$  fällt, wobei  $\bar{\sigma}_1 := \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \sigma_1(x_3)$ .

Die Gleichung (5.16) ist für  $x_3 > \nu_3 \geq 0$  lösbar, wobei  $\nu_3$  durch die Bedingung (b) eindeutig bestimmt ist (es ergibt sich nach entsprechenden Berechnungen, dass  $\sigma_1(x_3) > \frac{[\frac{\alpha_4 + \delta}{\sigma_3(\frac{r^*}{\delta})} - \mu_1^*(\rho)]}{\mu_2^*(\rho)}$  sein muss. Daher ist  $\nu_3 = \sigma_1^{-1}\left(\frac{\alpha_4 + \delta - \sigma_3(\frac{r^*}{\delta}) \mu_1^*}{\sigma_3(\frac{r^*}{\delta}) \mu_2^*}\right) > 0$ , falls  $\sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right) < \frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*}$  und  $\nu_3 = 0$  sonst).

Die Gleichung (5.16) kann wie folgt umformuliert werden:

$$x_0 = \sigma_3^{-1}\left(\frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)}\right) \text{ für } x_3 \geq \nu_3 \quad (5.17)$$

Es ist leicht einzusehen, dass  $x_0$  eine strikt monoton fallende Funktion in  $x_3$  ist.

Wir setzen jetzt  $x_0$  in die erste Gleichung von (5.15) ein und erhalten:

$$x_1 = \frac{r^* - \delta \sigma_3^{-1}\left(\frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)}\right)}{\chi_3(\alpha_4 + \delta)} =: \varphi(x_3) \quad (5.18)$$

mit  $\varphi$  streng monoton wachsend.

Jetzt setzen wir  $x_0$  und  $x_1$  in die dritte Gleichung von (5.15) ein und erhalten:

$$\chi_1(\alpha_4 + \delta) \frac{\mu_2^*(\rho)\sigma_1(x_3)}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho)\sigma_1(x_3)} \varphi(x_3) + \delta x_3 = c$$

Es sei:

$$f(x_3) := \chi_1(\alpha_4 + \delta) \frac{\mu_2^*(\rho)\sigma_1(x_3)}{\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho)\sigma_1(x_3)} \varphi(x_3) + \delta x_3. \quad (5.19)$$

$f(x_3)$  ist streng monoton wachsend (für  $x_3 \geq \nu_3$ ), also gibt es höchstens eine Lösung für die Gleichung (5.19).

Da  $\lim_{x_3 \rightarrow \infty} f(x_3) = +\infty$ , existiert eine einzige Lösung dann und nur dann, wenn  $f(\nu_3) \leq c$ .

Diese letzte Bedingung ist äquivalent zu:

$$\sigma_1^{-1}\left(\frac{\alpha_4 + \delta - \sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right)\mu_1^*}{\sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right)\mu_2^*}\right) \leq \frac{c}{\delta}, \quad (5.20)$$

wo wir vorausgesetzt haben, dass  $\sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right) < \frac{\alpha_4 + \delta}{\mu_1^*}$  (vgl. Annahme (ii)). Die Bedingung (5.20) ist äquivalent zu:

$$\sigma_1\left(\frac{c}{\delta}\right) > \left(\frac{\alpha_4 + \delta - \sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right)\mu_1^*}{\sigma_3\left(\frac{r^*}{\delta}\right)\mu_2^*}\right), \text{ was aus der Annahme (ii) folgt.}$$

Also gibt es für das 3-dimensionale System (und damit auch für das 5-dimensionale) einen einzigen inneren stationären Punkt.

□

**Bemerkung 5.2.5** *Das System (5.9) hat weitere stationäre Punkte wie z. B. den ausgearteten stationären Punkt  $E_0\left(\frac{r^*}{\delta}, 0, 0, 0, \frac{r}{\delta}\right)$  und Punkte am Rand des positiven Orthanten.*

### 5.2.3 Stabilität der stationären Punkte

**Lemma 5.2.6** *(Stabilität des inneren stationären Punktes) Wenn der innere stationäre Punkt existiert, d.h., die Existenzbedingungen (i)-(iv) aus Lemma (5.2.4) erfüllt sind, dann ist  $E_1$  lokal asymptotisch stabil.*

BEWEIS:

Die Funktionalmatrix des Systems an der Stelle  $E_1$  ist:

$$Df := \begin{bmatrix} a & b & 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ g & h & i & j & k \\ 0 & 0 & l & 0 & m \end{bmatrix}$$

mit  $a := -\chi_3 x_1 (\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3)) \sigma_3'(x_0) - \delta < 0$ ,  $b := -\chi_3 \sigma_3(x_0) (\mu_1(\rho) + \mu_2(\rho) \sigma_1(x_3)) < 0$ ,  $c := -\chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 \mu_2(\rho) (\sigma_1'(x_3)) < 0$ ,  $d := (\mu_1 \sigma_3' + \mu_2 \sigma_1 \sigma_3') x_1 > 0$ ,  $e := \mu_2(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1'(x_3) x_1 > 0$ ,  $f := \mu_3(\rho) \sigma_2'(x_4) x_2 > 0$ ,  $g := -\chi_1 \mu_2 \sigma_1 x_1 \sigma_3' < 0$ ,  $h := -\chi_1 \mu_2 \sigma_3 \sigma_1 < 0$ ,  $i := \chi_2 (\alpha_5 + \delta) > 0$ ,  $j := -\chi_1 \mu_2 \sigma_3(x_0) x_1 \sigma_1'(x_3) - \delta < 0$ ,  $k := \chi_2 \mu_3 x_2 \sigma_2'(x_4) > 0$ ,  $l := -\chi_3 (\alpha_5 + \delta) < 0$ ,  $m := -\chi_3 \mu_3 \sigma_2'(x_4) x_2 - \delta < 0$ .

Das charakteristische Polynom für den inneren stationären Punkt berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \det Df &:= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 & c & 0 \\ d & -\lambda & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & f \\ g & h & i & j-\lambda & k \\ 0 & 0 & l & 0 & m-\lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 & 0 \\ d & -\lambda & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & f \\ g & h & j-\lambda & i & k \\ 0 & 0 & 0 & l & m-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 & 0 \\ d & -\lambda & e & 0 & 0 \\ g & h & j-\lambda & i & k \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & f \\ 0 & 0 & 0 & l & m-\lambda \end{vmatrix} = (m-\lambda) \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ d & -\lambda & e & 0 \\ g & h & j-\lambda & i \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \\ &= (-l) \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ d & -\lambda & e & 0 \\ g & h & j-\lambda & k \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix} = [(m-\lambda)(-\lambda) + (-l)f] \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & -\lambda & e \\ g & h & j-\lambda \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$[\lambda^2 - m\lambda - lf][-\lambda^3 + \lambda^2(a+j) - \lambda aj + \lambda(gc + db + he) + (dhc + bge - dbj - hea)] = 0$$

Wegen  $m < 0, l < 0$  und  $f > 0$  sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung positiv, d.h., die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben negativen Realteil.

Weiterhin untersuchen wir die Eigenwerte des Polynoms:

$$\lambda^3 - \lambda^2(a+j) + \lambda[aj - (gc + db + he)] + (-dhc - bge + dbj + hea) = 0$$

Wir bezeichnen die Koeffizienten mit:  $-(a+j) =: a_2$ ,  $[aj - (gc + db + he)] = a_1$ ,  
und  $(-dhc - bge + dbj + hea) = a_0$ .

Für das Hurwitz-Kriterium müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$a_2 = -(a+j) > 0$  (was aus  $a, j < 0$  folgt) und  $a_2 a_1 - a_0 > 0$ . Dabei lässt sich die letzte Bedingung explizit berechnen und zwar erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$a_2 a_1 - a_0 = -aj(a+j) + agc + adb + jgc + hej + dhc + gbe = (a+j)(gc - aj) + (adb + hej + dhc + gbe).$$

wobei  $(adb + hej + dhc + gbe) > 0$  und  $gc - aj < 0$ , also ist schliesslich  $(a+j)(gc - aj) > 0$  und dann auch  $a_2 a_1 - a_0 > 0$ .

Nach dem Routh-Hurwitz Kriterium sind die Realteile der Eigenwerte  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  auch negativ, also ist der innere stationäre Punkt lokal asymptotisch stabil.

□

**Bemerkung 5.2.7** (*Globale asymptotische Stabilität*)

Die Menge  $G = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = c_2, x_4 = c_4\}$  ist invariant für das System (5.9) und es gilt für jede Lösung  $z(t)$  des 5-dimensionalen Systems mit Anfangswert im positiven Orthanten:

$$\text{dist}(z(t), G) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Um das Korollar 3.3.2 hier auch verwenden zu können, muß das folgende 3-dimensionale System betrachtet werden:



$$\begin{cases} \dot{x}_0 = r^* - \chi_3 \sigma_3(x_0) x_1 (\mu_1^*(\rho) + \mu_2^*(\rho) \sigma_1(x_3)) - \delta x_0 \\ \dot{x}_1 = (\mu_1^*(\rho) \sigma_3(x_0) + \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) - \alpha_4 - \delta) x_1 \\ \dot{x}_3 = -\chi_1 \mu_2^*(\rho) \sigma_3(x_0) \sigma_1(x_3) x_1 + c - \delta x_3 \end{cases} \quad (5.21)$$

*Für dieses System sollte der innere stationäre Punkt  $E_1$  global asymptotisch stabil sein. Damit reduziert sich die Frage der globalen Dynamik des 5-dimensionalen Systems auf die Dynamik des obigen 3-dimensionalen Systems. Dies ist allerdings offen.*

**Notation**

$Y_A$	Ertragskoeffizient für die autotrophe Biomasse
$b_A$	Absterberate der autotrophen Biomasse
$K_{OH}$	Sauerstoff-Halbsättigungskonstante für die heterotrophe Biomasse
$K_{NO}$	Nitrat-Halbsättigungskonstante für die heterotrophe Biomasse
$K_{OA}$	Sauerstoff-Halbsättigungskonstante für die autotrophe Biomasse
$S_{NO}$	Konzentration von löslichem Nitrat im Abwasser
$S_{NH}$	Konzentration von löslichem Ammonium im Abwasser
$S_I$	Konzentration von löslicher inerte organischer Masse im Abwasser
$i_{XB}$	Anteil der Stickstoffmasse an der COD-Masse in der Biomasse
$i_{XP}$	Anteil der Stickstoffmasse an der COD-Masse in Produkten der Biomasse



# Literaturverzeichnis

- [AH77] R. Aris and A. E. Humphrey. Dynamics of a chemostat in which two organisms compete for a common substrate. *Biotechnology and Bioengineering*, 19:1375–86, 1977.
- [Bas80] Dochain Bastin. *Online estimation of bioreactors*. Springer, 1980.
- [BD95] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
- [BLK00] Gail S. K. Wolkowicz Bingtuan Li and Yang Kuang. Global asymptotic behavior of a chemostat model with two perfectly complementary resources and distributed delay. *Siam J. Appl. Math.*, 60:2058–2086, 2000.
- [BM88] J.L. Barnard and P.G.J. Meiring. Dissolved oxygen control in the activated sludge process. *Wat. Sci. Tech*, 20:93–100, 1988.
- [BW85] G. J. Butler and G. S. K. Wolkowicz. A mathematical model of the chemostat with a general class of functions describing nutrient uptake. *Siam J. Appl. Math.*, 45:138–151, 1985.
- [DM80] G. A Dold, P. L. Ekama and G. v. R Marais. A general model for the activated sludge process. *Prog. Wat. Technol.*, 12(6), 47, 1980.
- [DV01] D. Dochain and P. Vanrolleghem. *Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes*. IWA Publishing, 2001.

- [GH83] J. Guckenheimer and Ph. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, 1983.
- [GSKWR97] Huaxing Xia Gail S. K. Wolkowicz and Shigui Ruan. Competition in the chemostat: a distributed delay model and its global asymptotic behavior. *Siam J. Appl. Math.*, 57:1281–1310, 1997.
- [GWR97] Huaxing Xia G. Wolkowicz and Shigui Ruan. Competition in the chemostat: a distributed delay model and its global asymptotic behavior. *Siam J. Appl. Math.*, 57:1281–1310, 1997.
- [Har89] Ludwig Hartmann. *Biologische Abwasserreinigung*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [HE95] J. la Cour Jansen Henze, P. Harremoes and E. Ervin. *Wastewater treatment-Biological and Chemical Processes*. Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [Hen87] M. Henze. Activated sludge model no.1. *IAWPRC Scientific and Technical Reports, IAWPRC, London*, 1987.
- [Hen92] M. Henze. Characterisation of wastewater for modeling of activated sludge processes. *Wat. Sci. Tech.*, 25:1–15, 1992.
- [Hen95] M. Henze. Activated sludge model no.2. *IAWQ, London*, 1995.
- [HK91] J. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [HS74] M. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, INC., 1974.
- [HSU78] S. B. HSU. Limiting behavior for competing species. *Siam J. Appl. Math.*, 34:760–763, 1978.

- [JS87] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press Oxford 1987, 1987.
- [Kof92] M. Kofler. *Mathematica*. Addison-Wesley(Deutschland), 1992.
- [Li98a] Bingtuan Li. Global asymptotic behavior of the chemostat: general response functions and different removal rates. *Siam J. Appl. Math.*, 59:411–422, 1998.
- [Li98b] Bingtuan Li. Global asymptotic behavior of the chemostat: general response functions and different removal rates. *Siam J. Appl. Math.*, 59:411–422, 1998.
- [Li00] Bingtuan Li. Simple food chain in a chemostat with distinct removal rates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 242:75–92, 2000.
- [LS01] B. Li and H. Smith. How many species can two essential resources support? *Siam J. Appl. Math.*, 62:336–366, 2001.
- [OJ94] G. Olsson and U. Jeppsson. Establishing cause-effect relationships in activated sludge plants-what can be controlled. *Proc. 8-th Forum for Applied Biotechnology, Med. Fac. Landbouww. Uni. Gent*, 59:2057–2071, 1994.
- [Per91] Lawrence Perko. *Differential Equations and dynamical systems*. Springer, 1991.
- [RBC87] Courtney R. Borelli and S. Coleman. *Differential Equations, A modeling approach*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [Riv77] J. W. M. La Riviere. Microbial ecology of liquid waste. *Advances in Microbial Ecology*, 1: 215-59, 1977.

- [SBHW77] S. Hubbell S. B. Hsu and P. Waltman. A mathematical theory for single-nutrient competition in continuous cultures of microorganisms. *Siam J. Appl. Math.*, 32:366–383, 1977.
- [Sch95] R. Schuster. *Grundkurs Biomathematik*. B. G. Teubner Stuttgart 1995, 1995.
- [SFER01] S. Pilyugin S. F. Ellermeyer and R. Redheffer. Persistence criteria for a chemostat with variable nutrient input. *Journal of Differential Equations*, 171:132–147, 2001.
- [SW95] H.L. Smith and P. Waltman. *The theory of the chemostat*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [Thi92] Horst R. Thieme. Convergence results and a poincare-bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. *Journal of Mathematical Biology*, 30:755–763, 1992.
- [uRMG80] R. A. Armstrong und R. Mc Gehee. Competitive exclusion. *American Naturalist*, 115, pp. 151-170, 1980.
- [Ver85] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [Wal99] S. Walcher. *On cooperative systems with respect to arbitrary orderings*. Preprint, 1999.
- [Wei00] S. Weijers. *Modelling, Identification and Control of Activated Sludge Plants for Nitrogen Removal*. Universiteitsdrukkerij TU Eindhoven, 2000.
- [Wig90] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, 1990.

- [WJT91] H. Smith W. Jäger and B. Tang. Some aspects of competitive coexistence and persistence. *Delay differential equations and dynamical systems*, pages 200–9, 1991.
- [WL92] Gail S. K. Wolkowicz and Zhiqi Lu. Global dynamics of a mathematical model of competition in the chemostat: general response functions and differential death rates. *Siam J. Appl. Math.*, 52:222–233, 1992.