

Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München

**Numerische Integration
stochastischer differential-algebraischer Gleichungen
in elektrischen Schaltungen**

Christian Penski

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Chr. Zenger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Dr.h.c. mult. R. Bulirsch,
emeritiert
2. Univ.-Prof. Dr. Dr. St. Schäffler,
Universität der Bundeswehr München

Die Dissertation wurde am 8. September 1999 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 12. März 2002 angenommen.

Vorwort

Je planmäßiger die Menschen vorgehen, desto wirksamer vermag sie der Zufall zu treffen.
(Friedrich Dürrenmatt)

Ob mein Leben vom Zufall beeinflußt wird, vermag ich nicht zu sagen. Die vorliegende Arbeit war auf jeden Fall diesem Einfluß ausgesetzt.

Geboren (Oktober 1970) und aufgewachsen bin ich im Norden der Bayerischen Landeshauptstadt München. Dort besuchte ich die Volksschule (September 1977 bis Juli 1981) und später das Städtische Lion-Feuchtwanger-Gymnasium (September 1981 bis Juni 1990). Nach meiner Zeit bei der Bundeswehr (Juli 1990 bis September 1991) begann ich das Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der Technischen Universität München (November 1991 bis April 1996).

Meine Diplomarbeit fertigte ich bei Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Roland Bulirsch an seinem Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik an. Schon damals kam ich den Genuß der hervorragenden Arbeitsbedingungen und der ausgezeichneten Ausstattung des Lehrstuhls wie beispielsweise die Rechneranlagen nebst Zubehör. Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Roland Bulirsch bin ich sehr dankbar, daß ich nach meinem Studium an seinem Lehrstuhl mitwirken durfte, und diese Arbeit unter seiner Obhut anfertigen konnte.

Die vorliegende Arbeit entstand in Zusammenarbeit der Technischen Universität München mit der Siemens AG in München, Neuperlach Süd, und der Bayerischen Forschungstiftung „Bayerischer Forschungsverbund für technisch-wissenschaftliches Hochleistungsrechnen, FORTWIHR“. Begonnen im FORTWIHR-Teilprojekt „Numerische Simulation von integrierten Schaltungen unter Berücksichtigung von Rauschquellen“ wurde die Arbeit weitergeführt im Nachfolgeprojekt der Bayerischen Forschungstiftung „Implementierung effizienter Verfahren zur transienten Rauschanalyse elektrischer Schaltungen auf Höchstleistungsrechnern“.

Als freier Mitarbeiter der Siemens AG in München, Zentralabteilung Technik, unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Albert Gilg fand ich Anregungen zu dieser Arbeit. Maßgeblich daran beteiligt war und ist mein ehemaliger Diplomarbeitbetreuer Herr Dr. Georg Denk, dem ich dafür äußerst dankbar bin.

Dank gebührt auch meinen ehemaligen und jetzigen Arbeitskollegen für ein ausgefülltes universitäres Leben. In Fragen zum Satzsystem $\text{\LaTeX}2_\epsilon$, mit der diese Arbeit erstellt wurde, und zum Betriebssystem `Linux`, das als Rechnerplattform für diese Arbeit diente, konnte ich mich vertrauensvoll an meinen ehemaligen Kollegen Herrn Dr. Jörg Haber wenden. Bis auf evtl. vorhandene Tippfehler wurde der vorliegende Schriftsatz gemäß der alten amtlichen Regelung der deutschen Rechtschreibung berichtigt (Stichtag der Neufassung war der 1. August 1998). Für die zahlreichen Stunden, die dafür geopfert wurden, stehe ich in der Schuld unserer Lehrstuhlsekretärin Frau Christina Breuer und meines Zimmerkollegen Herrn Dipl.-Math. Uwe Rettig. Besonders danken möchte ich dem Kern des Lehrstuhls für die Hilfestellungen, die sie mir für mein Leben am Lehrstuhl gaben: Nebst Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Roland Bulirsch sei Herrn Dr. Klaus-Dieter Reinsch und Herrn Dr. Werner Sautter herzlichst gedankt.

Dank meinen Freunden, die ich vor, während und nach meinem Studium kennenlernen durfte. Oft mußten sie sich meine Probleme anhören, was sie geduldig taten. Für ihre Hilfe und die Abwechslung, die sie immer wieder in mein Leben bringen, möchte ich mich bei ihnen ganz herzlich bedanken. Insbesondere einen Kuß von ganzem Herzen für meine Freundin.

Dank auch an meinen Bruder Klaus, meine Schwägerin Petra und meine Nichte Nicole. Sie haben es mir immer nachgesehen, daß ich sie ab und an vernachlässigt habe.

Natürlich hätte diese Arbeit nicht entstehen können ohne die Mithilfe meiner Eltern. Lieben Dank an meinen Vater, der mich immer unterstützt und fördert, und lieben Dank an meine Mutter, die leider viel zu früh gestorben und für mich nach wie vor unersetzlich ist.

München, September 1999

Christian Penski

Zum Abschluß meine persönlichen Leitgedanken:
Bevor wir fall'n, fall'n wir lieber auf. Entdecke die Möglichkeiten.
 (Die Fantastischen Vier, 4.99) (IKEA)

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis mathematischer Symbole	1
Verzeichnis physikalischer Größen	5
Einleitung	7
1 Stochastische Modellierung elektrischer Schaltungen	11
1.1 Modellierung von Bauelementen	13
1.1.1 Deterministische Bauelementmodelle	14
1.1.2 Elektrisches Rauschen	15
1.1.2.1 Thermisches Rauschen	17
1.1.2.2 Schrotrauschen	18
1.1.2.3 Funkelrauschen	19
1.1.3 Stochastische Bauelementmodelle	20
1.2 Kirchhoffsche Gesetze	24
1.3 Stochastisches ladungsorientiertes Schaltungsmodell im Zeitbereich	25
2 Analyse stochastischer differential-algebraischer Gleichungen	31
2.1 Analyse differential-algebraischer Gleichungen	31
2.2 Grundlegende Definitionen für Reihenentwicklungen stochastischer Prozesse . .	33
2.3 Approximation stochastischer Prozesse	37
2.4 Rückwärts-Itô-Formel	40
2.5 Abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklungen spezieller Itô-Prozesse	44
3 Numerische Integration stochastischer differential-algebraischer Gleichungen	47
3.1 Stabilitätsbegriffe für numerische Verfahren	48
3.2 Eine Standardmethode für stochastische Differentialgleichungen	50
3.3 Eine neue effiziente Methode für stochastische Differentialgleichungen	50
3.4 Eine neue Methode für stochastische differential-algebraische Gleichungen . . .	56

4	Numerische Simulation	63
4.1	Geometrische Brownsche Bewegung	65
4.2	Differentiator	66
4.3	<i>RLC</i> -Schwingkreis	68
4.4	Inverter	72
4.5	Ringoszillator	73
4.6	Transistorverstärker	78
4.7	Ladungspumpe	82
	Zusammenfassung	85
A	Elektrisches Rauschen in Halbleiterbauelementen	87
A.1	Rauschen eines Widerstandes	87
A.2	Rauschen eines Kondensators	88
A.3	Rauschen eines Feld-Effekt-Transistors	89
B	Stochastische Grundbegriffe	93
B.1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie	93
B.2	Momente und Korrelationen	95
B.3	Spezielle stochastische Prozesse	97
B.3.1	Brownsche Bewegung	97
B.3.2	Weißes Rauschen	99
B.3.3	Itô-integrierbare Prozesse	99
B.4	Stochastische Differentialgleichungen	101
	Literaturverzeichnis	103
	Stichwortverzeichnis	107

Verzeichnis mathematischer Symbole

*	Platzhalter
$[* : *]$, $[* : * [$ bzw. $] * : * [$	geschlossenes, halboffenes bzw. offenes Intervall
$ * $	absoluter Betrag einer komplexen Zahl
$\bar{*}$	konjugiert Komplexes einer komplexen Zahl
$*^T$	Transponierte eines Vektors bzw. einer Matrix
$*^{-1}$	Inverse einer Matrix
$*^{\bullet j}$	j^{te} Spalte einer Matrix
$*^K$	Komplement einer Menge
$*_n$ bzw. $* _{(t_n, X_n)}$	Auswertung einer Funktion bei t_n bzw. bei (t_n, X_n)
$* _{t_0}^t$	Funktionsauswertung bei t minus Funktionsauswertung bei t_0
$\sum *$	Summe von Termen
$\prod *$	Produkt von Termen
$\dot{*}$, $\ddot{*}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot}{*}$	1 ^{te} , 2 ^{te} , 3 ^{te} totale Zeitableitung
$\frac{d}{dt}$	totale Zeitableitung
$\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x^1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial x^d}$	partielle Ableitung bzgl. t, x^1, \dots, x^d
$*_x$	Jacobi-Matrix
$\int_{t_0}^t * ds$	Lebesgue-Integration
$\int_{t_0}^t * dB_s$	Itô-Integration
$:=$	definiert als
\equiv	identisch zu
\Rightarrow	daraus folgt
\Leftrightarrow	äquivalent zu
■	Ende eines Beweises
\emptyset	Leere Menge
0	Nullvektor, Nullmatrix bzw. Nulleinträge einer Matrix
∞	unendlich

a, c, f, u, w	Vektorfunktionen: $a(t, x), c(t, x), f(t, x), u(t, x), w(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
α	Mehrfachindex: $\alpha \in \mathcal{M}$
A	Matrix: $A \in \mathbb{R}^{d, d_q}$
\mathcal{A}_α	Menge der angepaßten, rechtsseitig stetigen stochastischen Prozesse mit Integrationseigenschaften, die vom Mehrfachindex α abhängen
b, g, v	Matrixfunktionen: $b(t, x), g(t, x), v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d, m}$
B_t	Brownsche Bewegung, mehrdimensionaler stochastischer Prozeß mit stochastisch unabhängigen Komponenten: $B_t = \{B_t(\omega) = B(t, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m\}$
c_α, w_α	Itô-Koeffizientenfunktionen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
d, m, d_q	Dimensionsgrößen
d	Differential
$\delta_{l,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = n \\ 0 & \text{für } l \neq n \end{cases}$	Kroneckers Deltasymbol
$\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1, \dots, \mathcal{D}^m$	Differentialoperatoren
E	Erwartungswert bzgl. P
\mathcal{F}_t	Filtrierung, angepaßt an mehrfache Itô-Integrale
h	Schrittweite: $h = \frac{t_{\text{Ende}} - t_0}{N}$
\mathcal{H}	hierarchische Menge
\mathcal{H}_k	Beispiel für eine hierarchische Menge
I_α	spezielles mehrfaches Itô-Integral: $I_\alpha = I_{\alpha, t_0, t}[1]$
$I_{\alpha, t_0, t}$	mehrfaches Itô-Integral
\mathcal{I}	Menge integrierbarer stochastischer Prozesse
$l(\alpha)$	Länge eines Mehrfachindex α
\mathcal{M}	Menge aller Mehrfachindizes
$n(\alpha)$	Anzahl der Nulleinträge in einem Mehrfachindex α
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
ω	Ergebnis eines Zufallsexperimentes: $\omega \in \Omega$, $\{\omega\} \in \mathcal{S}$ heißt Elementarereignis
Ω	Ergebnismenge
\mathcal{O}	Landau-Symbol
\mathcal{O}_\square	Terme einer bestimmten starken Konvergenzordnung
P	Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{S} : $P(A) : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$
q	Vektorfunktion: $q(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_q}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^*	Menge der reellen Vektoren

$\mathbb{R}^{*,*}$	Menge der reellen Matrizen
$\mathcal{R}(\mathcal{H}_*)$	Restmenge der hierarchischen Menge \mathcal{H}_*
\Re bzw. \Im	Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl
\mathcal{S}	σ -Algebra bzgl. Ω
SL_*	spektrale Leistungsdichte
t	Simulationszeit: $t \in [t_0, t_{\text{Ende}}]$
t_0 bzw. t_{Ende}	Start- bzw. Endpunkt eines Zeitintervalls: $t_0, t_{\text{Ende}} \in \mathbb{R}$
$t_0, \dots, t_n, \dots, t_N = t_{\text{Ende}}$	äquidistante Diskretisierung des Zeitintervalls $[t_0, t_{\text{Ende}}]$
τ_0, τ	Stoppzeiten: $t_0 \leq \tau_0(\omega) \leq \tau(\omega) \leq t_{\text{Ende}}$ m. W. 1
\mathcal{W}_t	Weißes Rauschen, verallgemeinerter stochastischer Prozeß
x	Vektorfunktion: $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$
X	mehrdimensionale Zufallsvariable: $X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$
X_0	(konsistenter) Anfangsvektor: $X_0 \in \mathbb{R}^d$
X_n	numerische Näherung für X_{t_n} bzgl. des Anfangsvektors X_0
X_t	mehrdimensionaler stochastischer Prozeß: $X_t = \{X_t(\omega) = X(t, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d\}$
$X_t^{(k)}$	mehrdimensionale abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung: $X_t^{(k)} = \{X_t^{(k)}(\omega) = X^{(k)}(t, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d\}$

Verzeichnis physikalischer Größen

Elektrische Größen

Zeichen	Größe	Einheit	SI-Einheit
C	Kapazität	Farad	$F = \frac{As}{V}$
f	Frequenz	Hertz	$Hz = \frac{1}{s}$
g	Leitwert	Siemens	$S = \frac{1}{\Omega}$
I	Zweigstrom	Ampere	A
L	Induktivität	Henry	$H = \frac{Vs}{A}$
q	Ladung	Coulomb	$C = As$
R	Widerstand	Ohm	Ω
u	Knotenspannung	Volt	V
U	Zweigspannung	Volt	V

Elektrische Größen spezieller Bauelemente

Zeichen	Größe	SI-Einheit
$f_{MOS,*}$	Strom durch bst. Anschlüsse eines MOSFETs	A
g_{MOS}	Transferleitwert eines MOSFETs	S
I_{eR}	Strom, verursacht durch elektrisches Rauschen	A

Konstanten der Physik

Zeichen	Wert	Konstante	SI-Einheit
a_F	[0, 5 : 2]	Funkelrauschexponent „Zähler“	—
b_F	≈ 1	Funkelrauschexponent „Nenner“	—
k_B	$1,3806226 \cdot 10^{-23}$	Boltzmann-Konstante	J/K
K_F	[10^{-25} : 10^{-19}]	Funkelrauschkoeffizient	A
q_{elt}	$1,602189 \cdot 10^{-19}$	Elementarladung	C
T	300°	Temperatur	K

Vorsätze zur Bezeichnung von Zehnerpotenzen von Einheiten

Vorsatz- zeichen	Vorsatz	Zehner- potenz	Vorsatz- zeichen	Vorsatz	Zehner- potenz
da	Deka	10^1	d	Dezi	10^{-1}
h	Hekto	10^2	c	Zenti	10^{-2}
k	Kilo	10^3	m	Milli	10^{-3}
M	Mega	10^6	μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	n	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	p	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	f	Femto	10^{-15}
E	Exa	10^{18}	a	Atto	10^{-18}

Einleitung

Das eigentliche Studium der Menschheit ist der Mensch.
(Johann Wolfgang von Goethe)

Wir nennen eine Menge von wechselwirkenden Subjekten beliebiger Natur ein System. Um ein System studieren zu können, entwerfen wir ein Modell, welches das System beschreibt. Eine mathematische Modellierung erfordert externe Daten, sog. Eingaben bzw. Eingänge, die das System empfängt, und davon abhängige Daten, sog. Ausgaben bzw. Ausgänge, die das System erzeugt, vgl. [PS87]. Neben den Eingaben und Ausgaben müssen Hilfsvariablen, sog. Zustände, eingeführt werden, um das mathematische Modell zu formen. Diese Zustände beschreiben die Wechselwirkungen verschiedener Teile des Systems. Das mathematische Modell selbst beschreibt die Beziehungen zwischen diesen Variablen (Eingabe, Ausgabe, Zustände). Das Verhalten oder die Funktion des Systems wird durch die Eingabe, die Ausgabe und die Zustände charakterisiert.

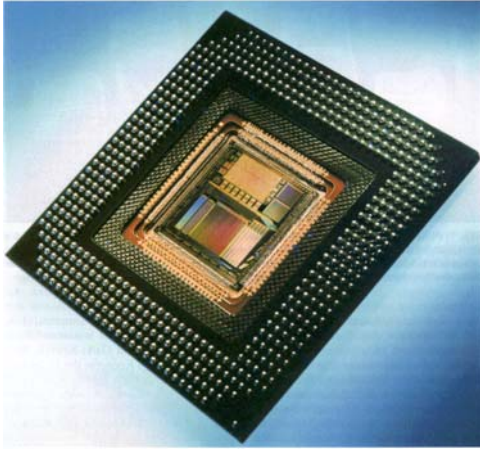
Grundsätzlich unterscheiden wir zwei Arten von mathematischen Modellen:

- Wir sprechen von einem **deterministischen** Modell eines Systems, wenn zu jeder Realisierung der Eingabe eine einzige und eindeutige Realisierung der Ausgabe gehört.
- Unter einem **stochastischen** Modell eines Systems verstehen wir ein Modell, bei dem zu jeder Realisierung der Eingabe eine zufallsabhängige Realisierung der Ausgabe gehört, deren statistische Eigenschaften systemabhängigen Gesetzmäßigkeiten unterliegen.

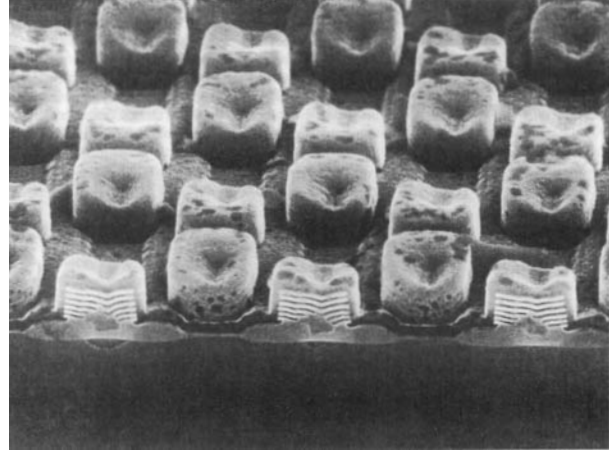
Die technischen Systeme, die wir in dieser Arbeit betrachten, sind sog. monolithische **integrierte Schaltungen**. Wir finden integrierte Schaltungen in Steuereinheiten für Personenkraftwagen, in mobilen Handtelefonen, in Musikanlagen, in Rechnern, etc. Abb. E.1(a) zeigt eine Zentraleinheit eines Vermittlungsrechners, die in etwa die Größe eines Pfennigstücks besitzt. Monolithische integrierte Schaltungen sind klein, zuverlässig und haben einen geringen Leistungsverbrauch. Die Grenzfrequenz kann bis zu einigen hundert Megahertz betragen, was Schaltzeiten von einigen Nanosekunden entspricht. Die Betriebsspannungen liegen meist zwischen 3 V und 18 V.

Im Gegensatz zu diskret aufgebauten elektrischen Schaltungen bestehen integrierte Schaltungen, die in Monolithtechnik hergestellt werden, aus vielen aktiven Bauelementen (z. B. Transistoren)

und passiven Bauelementen (z. B. Widerstände), die als vollständige Schaltung in ein einziges Siliziumplättchen eindiffundiert sind, vgl. Abb. E.1(b).



(a)



(b)

Abbildung E.1: (a) Modernes Mikroprozessorelement: Zentraleinheit des leistungsfähigsten Vermittlungsrechners der Welt, vgl. [Kra97] (Foto: Siemens).

(b) Prototyp von Speicherzellen (Stapelkondensatoren, Schichtdicke $5 \cdot 10^{-8} \text{m}$) für zukünftige Speicherprozessorelemente wie den Ein-Gigabit-Chip, vgl. [Kra97] (Foto: Siemens).

Die bisherigen technischen Fortschritte im Bau integrierter Schaltungen lassen vermuten, daß zukünftig die Abmessungen der Bauelemente weiter verkleinert werden können, die Arbeitgeschwindigkeiten erhöht werden können und der Leistungsverbrauch eingeschränkt werden kann. Diese Anforderungen an die Entwicklung zukünftiger integrierter Schaltungen müssen unter verschiedenen Gesichtspunkten bearbeitet werden.

Aus der Sicht eines Unternehmens müssen die Entwicklungs- und Herstellungskosten von Prototypen gering gehalten werden. Zudem sind kurze Entwicklungszeiten erforderlich, um wettbewerbsfähig zu bleiben. Um die Produktionszeiten und -kosten gering zu halten, ist es erforderlich die Funktionsweise integrierter Schaltungen vor ihrer Produktion zu simulieren. Das elektrotechnische Verhalten einer integrierten Schaltung kann durch mathematische Modelle im Zeitbereich beschrieben werden. Das Lösen dieser Zeitbereichsmodelle nennen wir *Transientensimulation*.

Betrachten wir die elektrischen Vorgänge innerhalb einer integrierten Schaltung, erkennen wir, daß die Nutzsignale in die Größenordnung von Störsignalen gelangen, d. h. der Signal-Rausch-Abstand ist verringert. Störungen wie z. B. elektrisches Rauschen sind nicht zu vermeiden. Um die Modellgüte zu verbessern, berücksichtigen wir das elektrische Rauschen. Mit der Erweiterung der mathematischen Modelle um zufallsabhängige physikalische Phänomene geht die Darstellung einer integrierten Schaltung durch differential-algebraische Gleichungen über in eine Beschreibung durch *stochastische differential-algebraische Gleichungen (SDAGn)*. In dieser Arbeit werden numerische Lösungsmethoden entwickelt, die zur effizienten Lösung von stocha-

stischen Differentialgleichungen geeignet sind und das Lösen von nicht-linearen stochastischen differential-algebraischen Gleichungen mit multiplikativem Rauschen erstmals möglich machen.

Eine *ladungsorientierte Modellierung* integrierter Schaltungen unter Berücksichtigung des zufallsabhängigen elektrischen Rauschens führt uns für spezielle Schaltungsmodelle auf stochastische Differentialgleichungen vom Typus

$$X_s \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0,$$

und im allgemeinen auf stochastische differential-algebraische Gleichungen von der Gestalt

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0.$$

Es ist $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$ die Simulationszeit, $X_t(\omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ der stochastische Vektorprozeß der Knotenspannungen und Ströme durch spannungsdefinierende Bauelemente mit einem Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d_q}$ die sog. Inzidenzmatrix, $q(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_q}$ der Vektor der Ladungen, $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ bzw. $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ der sog. Driftvektor, der die statischen Ströme und Eingangssignale modelliert, $g(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ bzw. $v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ die sog. Diffusionsmatrix, welche im wesentlichen die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen als Einträge enthält, und $B_t(\omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. differential-algebraischen Gleichungen ist aufgrund der Nicht-Differenzierbarkeit der Brownschen Bewegung B_t eine Integralschreibweise stochastischer Modelle zwingend erforderlich. Das pfadweise Lösen der stochastischen Modellgleichungen steht im Vordergrund dieser Arbeit. Wir gehen wie folgt vor.

In Kapitel 1 beschreiben wir verschiedene Typen des elektrischen Rauschens, sowohl von der phänomenologischen Seite als auch durch geeignete mathematische Modellierungen. Wir gehen besonders auf das thermische Rauschen, das Schrotrauschen und das Funkelrauschen ein. Wir erweitern die differential-algebraischen Gleichungsmodelle für integrierte Schaltungen, die wir z. B. mittels modifizierter Knotenanalyse erhalten, um stochastische Terme, die das elektrische Rauschen beschreiben. Wir erhalten stochastische differential-algebraische Gleichungen, die das Verhalten der elektrischen Spannungen bzw. Ströme in einer Schaltung im Zeitbereich modellieren.

In Kapitel 2 geben wir eine abgebrochene Reihenentwicklung spezieller stochastischer Prozesse an. Diese unterscheiden sich von den wohlbekannten Taylor-Entwicklungen für deterministische Funktionen.

In Kapitel 3 verwenden wir abgebrochene Reihenentwicklungen zur Entwicklung numerischer Verfahren, die zur näherungsweisen Lösung obiger stochastischer differential-algebraischer Gleichung angewendet werden können. Zum einen wird ein effizientes Verfahren entwickelt, das

obige stochastische Differentialgleichung näherungsweise mit starker Konvergenzordnung 1 löst und stabil im Mittel, stabil im quadratischen Mittel bzw. A-stabil ist. Zum anderen entwickeln wir ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung obiger stochastischer differential-algebraischer Gleichung, das starke Konvergenzordnung 1 besitzt und stabil im Mittel, stabil im quadratischen Mittel bzw. A-stabil ist.

Die numerischen Rechnungen in Kapitel 4 werden mit einer Fortran77-Implementierung der entwickelten numerischen Verfahren durchgeführt. Wir behandeln ein Beispiel aus der Finanzmathematik, das sog. Black-Scholes-Modell zur Berechnung von Optionspreisen, und Beispiele aus dem Bereich der Schaltungssimulation: Einen Differentiator, einen RLC -Schwingkreis, einen Inverter, einen Ringoszillator, einen Transistorverstärker und eine Ladungspumpe. Abb. E.2 zeigt das Ersatzschaltbild eines Inverters und das Simulationsergebnis, berechnet mit dem neuen numerischen Verfahren, das auf SDAGn angewendet werden kann. Alle behandelten Beispiele bestätigen die in Kapitel 3 geforderten und analytisch bewiesenen Eigenschaften der neu entwickelten numerischen Verfahren.

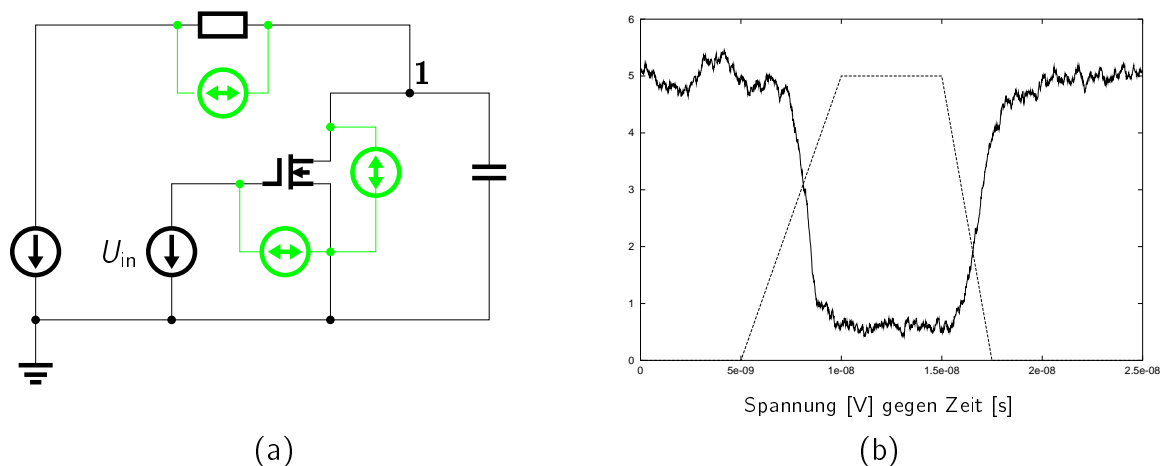


Abbildung E.2: Inverter unter Berücksichtigung von Rauschstromquellen (grau):

(a) zeigt ein Ersatzschaltbild und

(b) zeigt eine numerische Näherung für die Knotenspannung am Knoten 1 (—) sowie das Eingangssignal U_{in} (- - -).

Die Anhänge A und B stellen grundlegende Sachverhalte vor, auf die in den zuvorgehenden Kapiteln Bezug genommen wird. Im Anhang A werden die Rauschmodelle für Bauelemente in integrierten Schaltungen beschrieben. Anhang B führt in die Begriffswelt der stochastischen Analysis ein.

Kapitel 1

Stochastische Modellierung elektrischer Schaltungen

Modelle sollten sich bemühen, dem Portrait ähnlich zu sehen.
(Salvador Dali)

Viele komplexe, technische Systeme können näherungsweise über ein Netzwerk beschrieben werden. Ein *Netzwerk*, das eine elektrische Schaltung beschreibt, besteht im wesentlichen aus

- Grundbausteinen, den sog. *Bauelementen*,
 - die einen oder mehrere Anschlüsse besitzen, durch die ein Strom fließt oder an denen eine Spannung anliegt,
 - die dem sie durchfließenden Strom einen Widerstand entgegensetzen, der entweder konstant ist oder von der Zeit, von Strömen, von Spannungen bzw. von anderen Größen abhängt.
- *Leitungen*, die die Anschlüsse der Bauelemente so verbinden, daß die Schaltung die vom Konstrukteur gewünschten Eigenschaften besitzt, und
- *Knoten*, die die Berührungspunkte von sich treffenden Leitungen sind. Die Leitung zwischen einem Knoten und einem Anschluß eines Bauelementes nennen wir *Zweig*. Die Knoten werden als elektrisch ideal betrachtet.

Die grafische Darstellung einer elektrischen Schaltung oder eines Bauelementes als Netzwerk von Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten, Strom- und Spannungsquellen, etc. wird mit dem Begriff *Ersatzschaltbild* bezeichnet. Um ein Netzwerk studieren zu können, beschreiben wir es durch ein System mathematischer Gleichungen. Abb. 1.1 zeigt schematisch die Entwicklung des Schaltungsmodells. Das Erstellen der Gleichungen unterzieht sich folgenden Schritten:

- Die klassischen Netzwerkvariablen sind
 - die **Knotenspannungen**, d. h. die Spannungsgefälle zwischen den Knoten und dem Masseknoten, der als Bezugsknoten gewählt wird,
 - die **Zweigspannungen**, d. h. die Spannungsgefälle zwischen den Anschlüssen eines Bauelementes, und
 - die **Zweigströme**, die von einem Knoten in einen Anschluß eines Bauelementes fließen.

Die Netzwerkvariablen sind die gesuchten Zustandsvariablen.

- Die mathematische Verknüpfung der Bauelemente erfolgt durch die **Kirchhoffschen Gesetze**. Wir nennen diese die „Gesetze des Netzwerkes“.
- Sowohl die Beschreibung der realen Bauelemente als auch der realen Leitungen (Drähte, etc.) basiert auf deterministischen und stochastischen Bauelementgleichungen. Diese haben wohldefinierte Anschlußcharakteristiken. Wir nennen die Beschreibung **Bauelementmodelle**. Als Bauelemente verwenden wir
 - deterministische und von fließenden Strömen bzw. anliegenden Spannungen unabhängige Spannungs- bzw. Stromquellen,
 - zufallsabhängige und von fließenden Strömen bzw. physikalischen Parametern abhängige Rauschspannungs- bzw. **Rauschstromquellen**,
 - „ideale“ Bauelemente, d. h. deterministische Modelle, bei denen die Abhängigkeiten der Zweigströme von den Zweigspannungen über algebraische Gleichungen (bei Widerständen, etc.) und differentielle Gleichungen (bei Kondensatoren, Induktoren, etc.) beschrieben werden, und in deren algebraische bzw. differentielle Gleichungen konstante elektrische Modellparameter eingehen,

Zur Simulation elektrischer Schaltungen im Zeitbereich, sog. **Transientensimulation**, sind zwei unterschiedliche Modellierungen gebräuchlich. Die klassischen Modelle verwenden zur Beschreibung dynamischer Effekte Kondensatoren bzw. Induktoren. Die neueren Modelle hingegen benutzen eine fluß- bzw. **ladungsorientierte Formulierung** für energiespeichernde Bauelemente. Es sind die Ladungen und Flüsse explizit als Funktionen definiert, die von Knotenspannungen und Zweigströmen abhängen.

Flußorientierte Modelle werden im folgenden nicht berücksichtigt, da Induktoren im allgemeinen nicht auf einem Siliziumplättchen einer integrierten Schaltung realisiert werden können.

Die ladungsorientierte Formulierung vermag Ladungseffekte physikalisch korrekt zu modellieren. Hier wird ein nicht-linearer Kondensatorstrom nicht direkt modelliert, sondern über seine Ladung, die von der Zweigspannung abhängt. Im Gegensatz zur klassischen Beschreibung des Stromes durch einen Kondensator lassen sich mit der ladungsorientierten Formulierung sowohl das statische als auch das dynamische Verhalten mit einer Formel beschreiben.

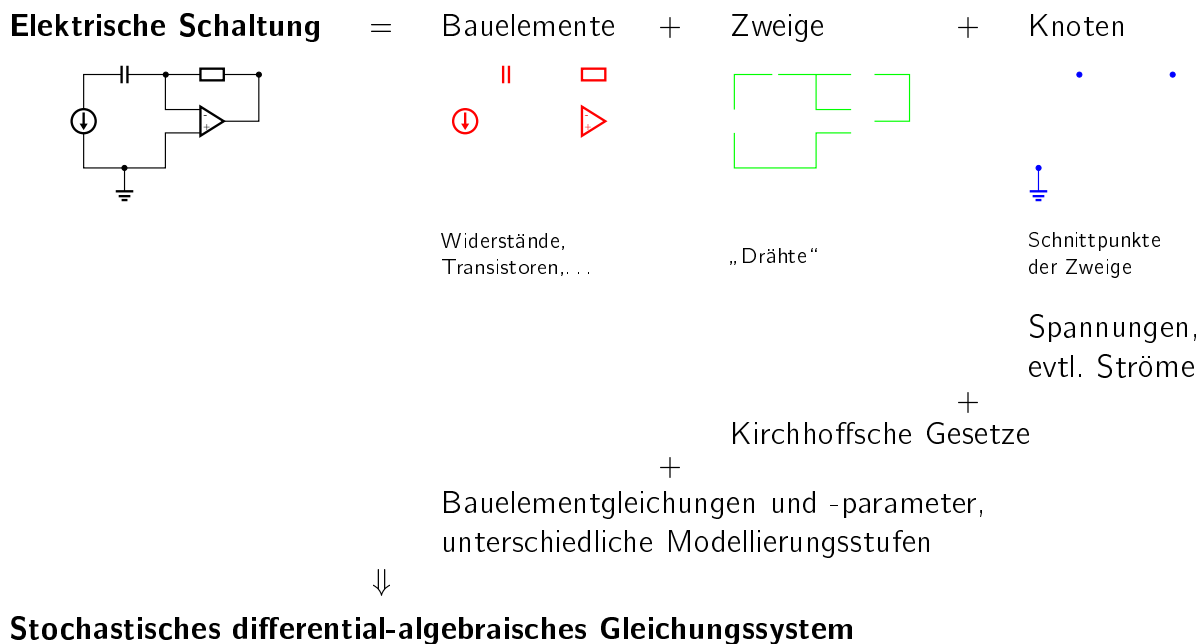


Abbildung 1.1: Modellierung einer elektrischen Schaltung als Netzwerk. Die Wahl der Zustandsvariablen, die Gesetze des Netzwerkes und die Bauelementmodelle ergeben das zu lösende Gleichungssystem.

1.1 Modellierung von Bauelementen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Modellierung der Bauelemente ein. Neben den bekannten deterministischen Modellen berücksichtigen wir stochastische Bauelementmodelle. Sie beschreiben die physikalischen Phänomene, die durch elektrisches Rauschen verursacht werden. Es werden die folgenden Notationen verwendet:

I	Zweigstrom
u	Knotenspannung
U	Zweigspannung
q	Ladung
t	Zeit

Im folgenden nehmen wir an, daß keine Zeitverzögerungen bzgl. der Leitfähigkeit in den Beziehungen zwischen den Bauelementen bestehen. Diese Betrachtungsweise nennen wir quasistationären Zugang.

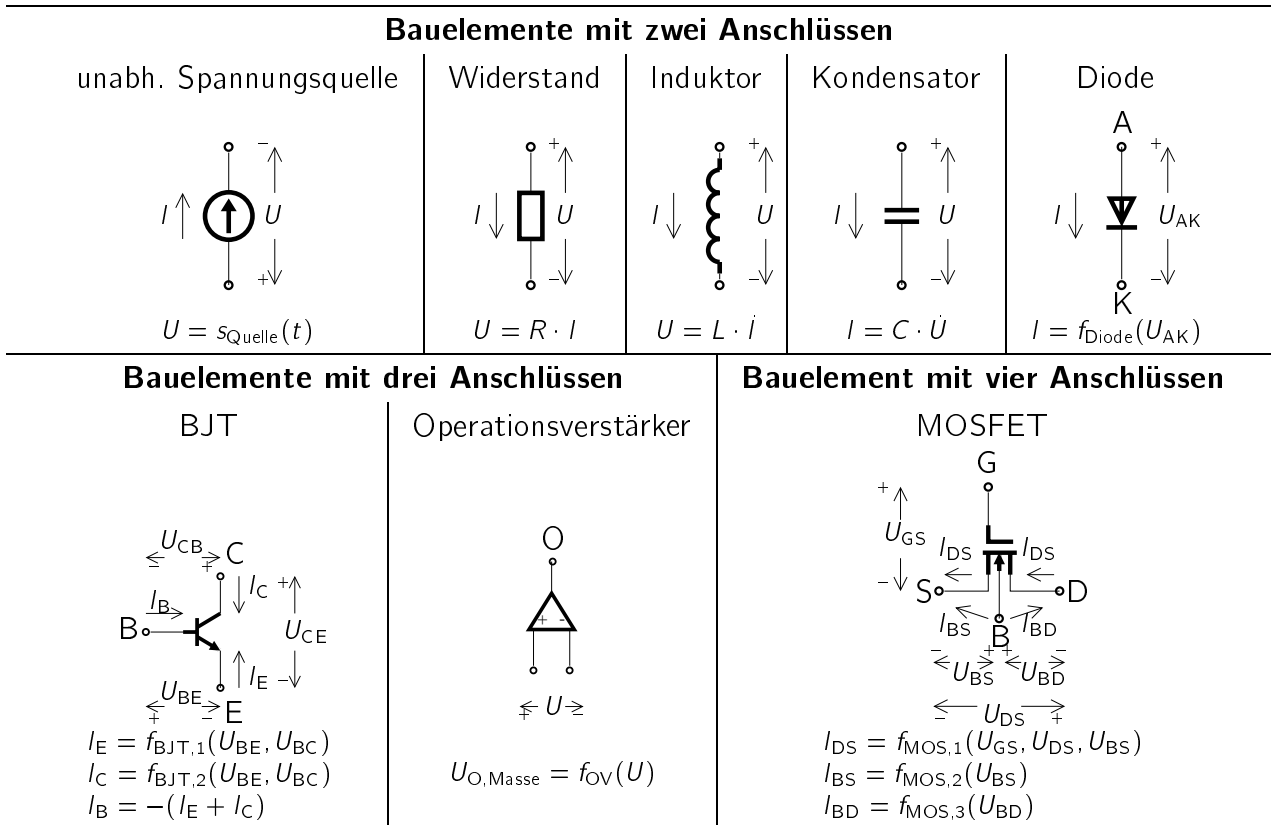


Abbildung 1.2: Deterministische Modellgleichungen für die Zweigströme I_* in Abhängigkeit von den Zweigspannungen U_* . Für die Bauelemente mit drei bzw. vier Anschlüssen sind die Strom-Spannungsbeziehungen in algebraischer Form, d. h. für statische Modellierung, angegeben [MA93].

1.1.1 Deterministische Bauelementmodelle

Das charakteristische Verhalten der Anschlüsse, d. h. die Bauelementgleichungen, wird bei klassischem Zugang durch die deterministischen Beziehungen zwischen Zweigströmen I und Zweigspannungen U beschrieben. Abb. 1.2 zeigt die Schaltzeichen einiger Bauelemente entsprechend der DIN 40700. . . 40716 sowie ihre Beziehungen zwischen Zweigströmen und Zweigspannungen. Sind die Zweigströme explizit als Funktion der Zweigspannungen gegeben, so liegen die Bauelementgleichungen in Admittanzform vor. Sind hingegen die Zweigspannungen explizit als Funktion der Zweigströme gegeben, so sind die Bauelementgleichungen in Impedanzform gegeben.

Wir bauen ein Netzwerk, das eine elektrische Schaltung beschreibt, aus gewissen Grundbausteinen auf. Die sog. **Basisbauelemente** eines Netzwerkes können in drei Klassen eingeteilt werden:

Unabhängige Quellen: Als unabhängige Quellen bezeichnen wir Bauelemente, deren (evtl. zeitabhängige) Zweigströme bzw. -spannungen unabhängig von anderen Netzwerkvariablen sind, z. B.

$I = s_{\text{Quelle},1}(t)$	Stromquelle
$U = s_{\text{Quelle},2}(t)$	Spannungsquelle
$q = s_{\text{Quelle},3}(t)$	Ladungsquelle

Statische Bauelemente: Als statische Bauelemente bezeichnen wir Bauelemente, die keine Energie speichern. Ihre Bauelementgleichungen können über eine algebraische Beziehung der Art $f(I, U) = 0$ beschrieben werden. Für Widerstände gilt:

$U = R(t) \cdot I$	Widerstand
--------------------	------------

Energiespeichernde Bauelemente: Energiespeichernde Bauelemente sind Kondensatoren und Induktoren. Es werden die Beziehungen zwischen Zweigströmen und Zweigspannungen an den Bauelementanschlüssen auf differentielle Art beschrieben.

$I = C \cdot \dot{U}$	Linearer Kondensator
$U = L \cdot \dot{I}$	Linearer Induktor

Zur Modellierung von Halbleiterbauelementen (z. B. Dioden, Transistoren) müssen neben den prinzipiellen Funktionen auch parasitäre Effekte berücksichtigt werden. Ein klassisches Modell für ein Halbleiterbauelement setzt sich aus den Basisbauelementen

- gesteuerte Spannungs- bzw. Stromquelle,
- Widerstand und
- Kondensator bzw. Induktor

zusammen, die alle geeignet parametrisiert sein müssen. Gesteuerte Spannungs- bzw. Stromquellen und Widerstände beschreiben das statische Verhalten einer elektrischen Schaltung, d. h. ein zeitinvariantes Verhalten. Kondensatoren bzw. Ladungsquellen bei ladungsorientierter Modellierung und Induktoren beschreiben das dynamische Verhalten einer elektrischen Schaltung.

1.1.2 Elektrisches Rauschen

Im weitesten Sinn kann Rauschen als ungewollte Störung definiert werden, die ein erwünschtes Signal unklar erscheinen läßt bzw. stört [MF73]. In dieser Arbeit betrachten wir kleine zufällige Strom- bzw. Spannungsschwankungen innerhalb der Bauelemente einer integrierten Schaltung [GM84]. Wir nennen diese Schwankungen *elektrisches Rauschen*.

Durch elektrisches Rauschen entsteht eine untere Grenze für die Größe der elektrischen Signale, die von den Bauelementen ohne signifikante Verschlechterung der Signalqualität verarbeitet werden können.

Elektrisches Rauschen ist ein fundamentales bzw. inneres Rauschen in elektrischen Schaltungen [MF73]. Seine Ursachen liegen in den physikalischen Eigenschaften der Bauelemente und der Materialien, die im Schaltungsbau verwendet werden.

Als Trägermaterial für eine integrierte Schaltung werden Kristalle (z. B. Silizium oder Germanium) verwendet, sog. **Halbleiter** [Coo90, Sch91]. Bei Zimmertemperatur sind Halbleiter fast Isolatoren. Hinzufügen von Fremdatomen in das Kristall, sog. Dotieren, erhöht die Anzahl der beweglichen Ladungsträger. Dadurch entstehen Störstellen im vorher regelmäßigen Kristallaufbau, vgl. Abb. 1.3. Von einem n -Leiter sprechen wir, wenn das Dotieratom mehr Elektronen als das ursprüngliche Halbleiterkristall besitzt. Durch Dotieren entstehen ebenso viele Leitungselektronen wie positive, unbewegliche Ionen. Fremdatome, die im Kristallverband Elektronen abgeben, heißen Donatoren. Ein Beispiel für einen Donator ist Phosphor, das ein Valenzelektron mehr als Silizium besitzt. p -Leiter sind mit Fremdatomen niedriger Wertigkeit dotiert. Sie haben Löcher als Ladungsträger. Die Fremdatome in einem p -Leiter, die im Kristallverband Elektronen aufnehmen, heißen Akzeptoren. Bor ist ein Akzeptor und hat ein Valenzelektron weniger als Silizium. Dotierte Halbleiter haben stets Störstellenleitung und Eigenleitung. Das Dotierverhältnis „Halbleiteratome zu Dotieratome“ ist ungefähr 1000 zu 1. Das Dotieren erhöht die Leitfähigkeit eines Halbleiters um mehrere Zehnerpotenzen.

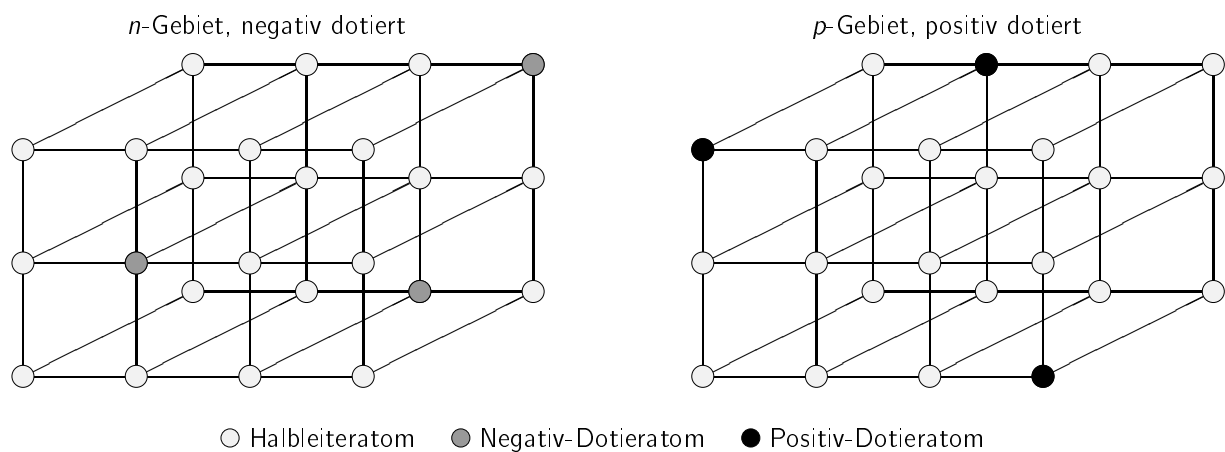


Abbildung 1.3: Modellhafte Darstellung eines n - bzw. p -dotierten Halbleiters als Kristallgitter.

Für elektrisches Rauschen in integrierten Schaltungen sind die elektrischen Ladungsträger verantwortlich. Elektrische Ladung ist nicht stetig, sondern ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Es ist nicht möglich, alle Ladungsträger vollkommen gleichmäßig zu bewegen. Neben den thermischen Bewegungen der Ladungsträger, die vom Material unabhängig sind, entstehen und verschwinden im Halbleitermaterial ständig Ladungsträger durch Generation bzw. Paarbildung/Rekombination. Diese Unregelmäßigkeiten verursachen kleine Störimpulse (Stromrauschen). Das Rauschen ist verbunden mit fundamentalen Prozessen in den Bauelementen einer integrierten Schaltung [GM84].

Unter den Sammelbegriff „elektrisches Rauschen“ fallen u. a. folgende physikalische Phänomene [Blu96, Coo90, EL95, Fis93, GM84, Hai65, MA93, MF73, PC63, PSNT85, Sch91, Van54, Van62]: Diffusionsrauschen, Explosions- bzw. Popcornrauschen, Funkelrauschen, Generations-Rekombinationsrauschen, Lawinenrauschen, Leckrauschen, Schrotrauschen und Thermisches

Rauschen.

Für die Beschreibung des elektrischen Rauschens in Halbleiterbauelementen, die zum Einsatz in der Mikroprozessortechnologie gedacht sind, sind folgende Rauschtypen wesentlich [DLSV96]: Thermisches Rauschen, Schrotrauschen und Funkelrauschen. Jeder Widerstand in einer Schaltung erzeugt durch seinen Ohmschen Widerstand thermisches Rauschen. Zusätzlich kann jedes Halbleiterbauelement neben thermischem Rauschen sowohl Schrot- als auch Funkelrauschen aufweisen. Wir behandeln im folgenden thermisches Rauschen, Schrotrauschen bzw. Funkelrauschen sowie die zugehörigen Ersatzschaltungen von gebräuchlichen Bauelementen einschließlich der Rauschstromquellen.

1.1.2.1 Thermisches Rauschen

Thermisches Rauschen ist ein grundlegendes physikalisches Phänomen und tritt in jedem linearen passiven Widerstand auf [GM84]. In konventionellen Widerständen wird thermisches Rauschen hauptsächlich verursacht durch die zufällige thermische Bewegung der Elektronen. Abb. 1.4 zeigt mögliche Richtungen der thermischen Bewegung eines Elektrons, die auf eine zweidimensionale Ebene projiziert wurden. Es wird nicht beeinflusst durch einen Stromfluß durch das Bauelement. Die typischen Driftgeschwindigkeiten der Elektronen in einem Leiter sind viel geringer als deren thermische Geschwindigkeiten.

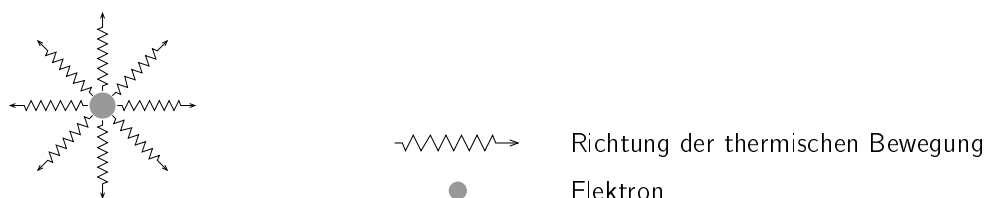


Abbildung 1.4: Modell für die zufallsabhängige thermische Bewegung eines Elektrons, die thermisches Rauschen verursacht. Dargestellt sind einige zweidimensionale Projektionen der unendlich vielen dreidimensionalen Bewegungsrichtungen.

Es muß für das thermische Rauschen die absolute Temperatur T berücksichtigt werden. Das thermische Rauschen ist direkt proportional zur Temperatur T . Strebt die Außentemperatur gegen null, so strebt auch das thermische Rauschen gegen null.

Satz 1.1 (Nyquist-(Johnson)-Theorem, vgl. [Blu96]): Sei I_{eR} der durch thermisches Rauschen verursachte elektrische Strom durch einen Widerstand. Es gilt für die sog. spektrale Leistungsdichte $SL_{I_{eR}}$ (Def. s. Anhang B.2) des Rauschstroms I_{eR}

$$SL_{I_{eR}} = \frac{4k_B T}{R}.$$

Dabei ist

- k_B die Boltzmann-Konstante,
- T die absolute Temperatur (in Kelvin) und
- R der Widerstandswert.

Der Gültigkeitsbereich dieser Formel entspricht dem für den Gleichverteilungssatz der Thermodynamik, d. h. sie ist gültig im thermischen Gleichgewicht. Obige Darstellung der spektralen Leistungsdichte $SL_{I_{eR}}$ des thermischen Rauschens hat ihre Gültigkeit für Frequenzen bis zu 10^{13} Hz. Das thermische Rauschen wird im folgenden als sog. **Weißes Rauschen** modelliert, Def. vgl. Anhang B.3.2.

1.1.2.2 Schrotrauschen

Schrotrauschen wird von Mechanismen erzeugt, die sich vollständig von denen unterscheiden, die thermisches Rauschen verursachen. Im Gegensatz zum thermischen Rauschen ist Schrotrauschen von der Temperatur T unabhängig. Schrotrauschen wird verursacht durch zufällige Schwankungen der Drift- und Diffusionsflüsse der Elektronen bzw. Löcher durch den pn -Übergang des Halbleitermaterials [GM84], vgl. Abb. 1.5. Diskrete Effekte im Stromfluß durch das Halbleitermaterial sind verantwortlich für Schrotrauschen. Schrotrauschen ist abhängig von der Trägerkonzentration in dem Bauelement bei Vorwärtsbetrieb, d. h. bei Betrieb unter Durchlaßspannung.



Abbildung 1.5: Modell für die zufallsabhängige Drift bzw. Diffusion eines Elektrons durch einen pn -Übergang, die Schrotrauschen verursachen.

Satz 1.2 (Schottky-Theorem, vgl. [Blu96]): Für die spektrale Leistungsdichte $SL_{I_{eR}}$ eines durch Schrotrauschen verursachten elektrischen Stroms I_{eR} gilt:

$$SL_{I_{eR}}(E[I_{ideal}]) = 2q_{elt}E[I_{ideal}], \quad (1.1)$$

wobei

- q_{elt} die Elementarladung ist und
- I_{ideal} der deterministisch modellierte Stromfluß durch das betreffende Bauelement, das Schrotrauschen aufweist.

Gleichung (1.1) ist gültig, solange die Frequenz f kleiner oder gleich $1/\tau$ ist, wobei τ die Trägerdurchgangszeit durch den Verarmungsbereich angibt. Für die meisten praktikablen Bauelemente ist τ extrem klein und (1.1) ist genügend genau bis in den Gigahertzbereich hinein. Wie auch das thermische Rauschen wird das Schrotrauschen als Weißes Rauschen modelliert, vgl. [DLSV96].

1.1.2.3 Funkelrauschen

Wird an einen Widerstand eine konstante Spannung angelegt, so beobachten wir bei tiefen Frequenzen ein stärkeres Rauschen des Stroms, als nach den bisher besprochenen Rauschursachen zu erwarten wäre [Blu96]. Diesen Typ des Rauschens nennen wir Funkelrauschen und wir finden Funkelrauschen in allen aktiven Bauelementen, wie auch in einigen diskreten passiven Bauelementen (wie z. B. einem Karbonwiderstand). Für Funkelrauschen gibt es verschiedene Ursachen. In bipolaren Flächentransistoren wird es hauptsächlich verursacht durch sog. Fallen, welche aufgrund von Verunreinigungen und Kristallstrukturdefekten im Verarmungsbereich zwischen Emitter und Basis existieren, vgl. Abb. 1.6. Auf zufällige Art fangen diese Fallen die Ladungsträger ein bzw. geben diese Fallen die Ladungsträger frei [GM84]. Funkelrauschen steht immer im Zusammenhang mit einem Stromfluß durch ein Bauelement.

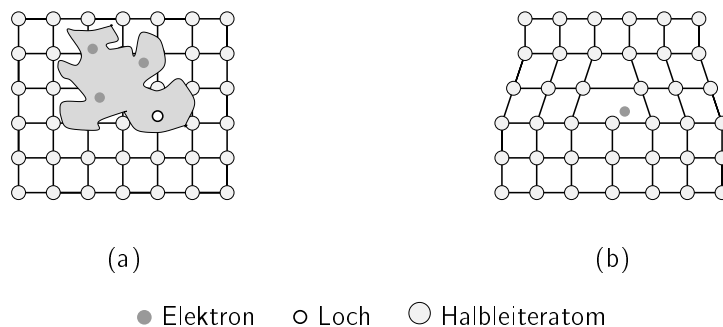


Abbildung 1.6: Modelle für die Ursachen des Funkelrauschens:
 (a) Verunreinigungen im Kristallgitter bzw.
 (b) Kristallstrukturdefekte.

Satz 1.3 (vgl. [Blu96]): Der durch Funkelrauschen verursachte elektrische Strom I_{eR} weist eine spektrale Leistungsdichte $SL_{I_{eR}}$ der Form

$$SL_{I_{eR}}(f, E[I_{ideal}]) = K_F \frac{E[I_{ideal}]^{a_F}}{|f|^{b_F}}$$

auf, wobei

f die Frequenz ist, bei der das Funkelrauschen beobachtet wird, und

I_{ideal} das deterministische Modell für den Stromfluß durch das Bauelement ist, das Funkelrauschen aufweist.

a_F , b_F und K_F sind physikalische Konstanten, die von Bauelement zu Bauelement unterschiedlich ausfallen können. Ist der Parameter b_f gleich eins, so weist die spektrale Leistungsdichte des Rauschens eine $1/f$ -Frequenzabhängigkeit auf. In diesem Fall heißt das Funkelrauschen auch $1/f$ -Rauschen. Die Gleichung für die spektrale Leistungsdichte eines Funkelrauschstroms gilt mindestens im Frequenzbereich von 10^{-6} Hz bis 10^6 Hz [Blu96]. Es ist offensichtlich, daß das Funkelrauschen bei kleinen Frequenzen am signifikantesten ist. In Bauelementen mit einem hohen Grad von Funkelrauschen, kann die Funkelrauschquelle das Bauelementrauschen auch bei Frequenzen bis in den Megahertzbereich hinein dominieren [GM84].

Thermisches Rauschen und Schrotrauschen besitzen wohldefinierte spektrale Leistungsdichten, die ausgedrückt werden können durch Stromfluß, Widerstand, und eine Anzahl physikalischer Konstanten. Im Gegensatz dazu enthält die spektrale Leistungsdichte des Funkelrauschens eine unbekanntes Konstante K_f . Funkelrauschen ist abhängig von Verschmutzungen oder Kristallstrukturdefekten, welche zufallsabhängig variieren, sogar auf einer einzigen Siliziumscheibe. Die Konstante K_f variiert nicht nur von einem Bauelementtyp zum anderen, sondern auch für verschiedene Transistoren oder integrierte Schaltungen von Halbleiterscheiben aus einem Herstellungsprozeß, die identischen Fabrikationsschritten unterzogen wurden. Falls ein typischer Wert von K_f durch Messungen an mehreren Bauelementen aus einem gegebenen Prozeß bestimmt wird, dann haben Experimente gezeigt, daß dieser Wert benützt werden kann, die durchschnittliche Funkelrauschleistung für integrierte Schaltungen aus diesem Prozeß vorherzusagen [GM84].

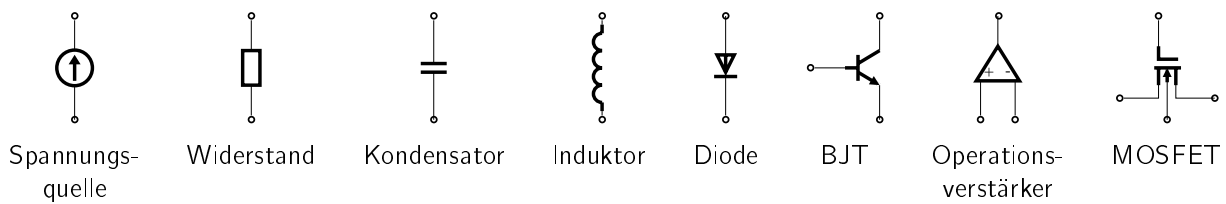
Messungen haben gezeigt, daß der Funkelrauschstrom nicht durch Weißes Rauschen modelliert werden kann. Lassen wir für die Rauschsimulation nur Weiße Rauschen zu, so muß das Funkelrauschen geeignet approximiert werden, vgl. [DLSV96, PSNT85]. Funkelrauschen kann näherungsweise über eine Summe von Rauschstromquellen dargestellt werden, die mittels Weißem Rauschen und geeigneten spektralen Leistungsdichten modelliert werden.

1.1.3 Stochastische Bauelementmodelle

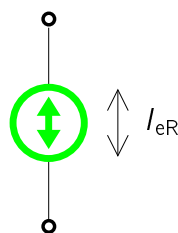
Für die Ersatzschaltbilder in dieser Arbeit verwenden wir bestimmte Schaltzeichen für die deterministischen und stochastischen Modelle der Bauelemente. Abb. 1.7(a) zeigt die Schaltzeichen für deterministisch modellierte Bauelemente entsprechend der DIN 40700...40716. Abb. 1.7(b) zeigt das Schaltzeichen für eine Rauschstromquelle, wie es in dieser Arbeit verwendet wird. Die Stromabgabe I_{eR} der Rauschstromquelle ist zufällig verteilt und abhängig von den physikalischen Ursachen, die zuvor besprochen wurden.

Ist die Spannung bzw. der Strom des angelegten Signals (d. h. des Eingangssignals) genügend klein, so wird die Bestimmung der Ausgangssignale *Kleinsignalanalyse* genannt. Die Kleinsignalanalyse liefert Lösungen in einer gewissen Umgebung um die Arbeitspunkte [CDK87]. Es werden zufällige Störungen und kleine Variationen um den Arbeitspunkt betrachtet. Das in einem Bauelement erzeugte Rauschen wird durch eine elektrische Anregung in der Kleinsignalersatzschaltung modelliert. Zur Modellierung eines Bauelementes, das elektrisches Rauschen aufweist, wird an das „ideale“ Bauelement (Abb. 1.7(a)), das durch deterministische Gleichungen beschrieben wird, eine Rauschstromquelle I_{eR} (Abb. 1.7(b)) parallel geschaltet, vgl. Abb. 1.8. Das stochastische Modell der Rauschstromquelle wird u. a. beschrieben durch seine spektrale

Leistungsdichte, vgl. Tab. 1.1.



(a)



(b)

Abbildung 1.7: (a) Schaltzeichen einiger elektrischer Bauelemente nach DIN 40700...40716. (b) Schaltzeichen einer Rauschstromquelle. Die Stromabgabe I_{eR} wird stochastisch modelliert.

	Spektrale Leistungsdichte	Amplitude von I_{eR}
Thermisches Rauschen	$SL_{I_{eR}} = \frac{4k_B T}{R}$	Gaußsches Weißes Rauschen
Schrotrauschen	$SL_{I_{eR}}(E[I_{ideal}]) = 2q_{eit} E[I_{ideal}]$	Gaußsches Weißes Rauschen
Funkelrauschen	$SL_{I_{eR}}(f, E[I_{ideal}]) = K_F \frac{E[I_{ideal}]^{d_F}}{ f ^{b_F}}$	kein Weißes Rauschen

Tabelle 1.1: Mathematische Beschreibung verschiedener Arten des elektrischen Rauschstroms I_{eR} .

Da das Rauschsignal eine zufallsabhängige Phase besitzt und da es vollständig beschrieben wird durch seine spektrale Leistungsdichte, hat dieses Rauschsignal keine Polarität. Die Rauschstromquellen unterschiedlicher Bauelemente in einer Schaltung sind untereinander statistisch unkorreliert. Es werden alle Rauschstromquellen unterschiedlicher Bauelemente als unkorrelierte Stromquellen mit zufallsabhängigen Phasen modelliert.

Im folgenden modellieren wir einen Rauschstrom I_{eR} als stochastischen Prozeß. Die mathematische Definition eines stochastischen Prozesses ist in Kapitel 2 gegeben. Wir gehen von einem fixiertem Zeitpunkt $t = t_{fix}$ aus. Die grundlegenden stochastischen Begriffe erklären wir folgendermaßen:

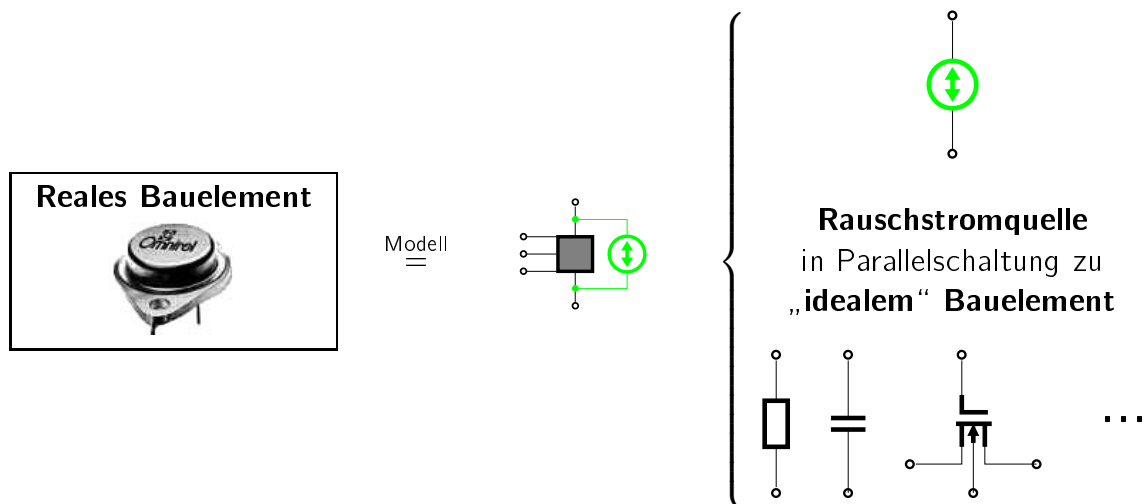


Abbildung 1.8: Realitätsnahe Modellierung eines Bauelementes. Die stochastisch modellierte Rauschstromquelle wird an das deterministische Modell des Bauelementes parallelgeschaltet. Umrahmtes Bild links: n -Kanal-MOSFET in luftdichtem Metallgehäuse der Firma Omirel L. L. C. (1997).

Ω ist die Menge aller physikalischen Abläufe, die im Zusammenhang mit dem speziell betrachteten Typ des elektrischen Rauschens stehen (z. B. thermisches Rauschen) und einen Beitrag zum Stromfluß liefern können.

$\omega \in \Omega$ ist ein Elementarereignis, das einen bestimmten physikalischen Ablauf aus Ω beschreibt.

$P(\omega) : \Omega \rightarrow [0 : 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Meßraum (Ω, \mathcal{S}) . Das Wahrscheinlichkeitsmaß gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit physikalische Abläufe ω aus Ω auftreten.

$I_{eR}(t, \omega) : [t_0 : t_{\text{Ende}}] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist bei fixiertem t eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) , die auf zufällige Art einen Beitrag zum Stromfluß liefert. Dieser Beitrag wird ausgelöst durch das Auftreten des physikalischen Ereignisses ω . D. h. zum Zeitpunkt t wird jedem physikalischen Ablauf ω ein Stromstärkewert $I_{eR}(t, \omega)$ zugeordnet.

$E[*]$ ist der Erwartungswert bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsmaß P . Der Erwartungswert eines zufallsabhängigen Stromflusses beschreibt den mittleren Stromwert zum Zeitpunkt t .

Die Zeit t sei nun variabel in einem Intervall $[t_0 : t_{\text{Ende}}]$. Sei ω_{fix} ein vorgegebener Pfad eines stochastischen Prozesses, der die zufallsabhängigen physikalischen Ursachen (des thermischen Rauschstroms, etc.) beschreibt. Durch Vorgabe des Pfades kann der stochastische Prozeß als Zeitfunktion aufgefaßt werden, die nicht vom Zufall abhängt.

Die Modellierung eines idealen Stromflusses I_{ideal} durch den Anschluß eines Bauelementes ist gegeben durch eine deterministische Funktion $f(t, u)$, die von der Zeit t und von den Knotenspannungen $u = u(t, \omega_{\text{fix}})$ abhängt. Die Knoten- bzw. Anschlußspannungen hängen von den

physikalischen Ursachen ω_{fix} des Rauschstroms ab. Für den Erwartungswert $E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})]$ des idealen Stromflusses gilt:

$$\begin{aligned}
 E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})] &\stackrel{\text{Def. von } E[*]}{=} \int_{\omega \in \Omega} I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}}) dP(\omega) = \\
 &= I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}}) \cdot \underbrace{\int_{\omega \in \Omega} dP(\omega)}_{=1, \text{ Def. des Wahrscheinlichkeitsmaßes } P \text{ auf } \Omega} = \\
 &= I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}}). \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Bei der Modellierung eines realitätsnahen Stromflusses muß das ideale Modell um einen stochastischen Prozeß I_{eR} erweitert werden, der die Stromabgabe der Rauschstromquelle modelliert. Es lassen sich die Rauschströme I_{eR} , die durch thermisches Rauschen bzw. Schrotrauschen verursacht werden, folgendermaßen darstellen:

$$I_{\text{eR}}(t, \omega_{\text{fix}}) = g(E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})]) \cdot \mathcal{W}_t(\omega_{\text{fix}}),$$

wobei g die sog. **Intensität** der Rauschstromquelle ist, vgl. [DLSV96], und \mathcal{W}_t ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß ist, vgl. [GW64]. \mathcal{W}_t ist beim thermischen Rauschen und beim Schrotrauschen ein WSS Weißes Gaußsches Rauschen (Def. vgl. [Dem97], S. 17). Die Intensität g des Rauschstroms I_{eR} , der thermisches Rauschen bzw. Schrotrauschen modelliert, kann explizit beschrieben werden über die spektrale Leistungsdichte $SL_{I_{\text{eR}}}$ des thermischen Rauschens bzw. Schrotrauschens und es gilt (vgl. [Dem97], S. 86):

$$g(E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})]) = \sqrt{SL_{I_{\text{eR}}}(E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})])}. \tag{1.3}$$

Die Berechnung des Erwartungswertes $E[I_{\text{ideal}}]$ des idealen Stromflusses I_{ideal} muß aufgrund der Glg. (1.2) nicht durchgeführt werden. Da der Stromfluß I_{ideal} von der Zeit t und von den Knotenspannungen $u(t, \omega_{\text{fix}})$ abhängt, ersetzen wir im folgenden das Argument „ $(E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})])$ “ durch „ $(t, u(t, \omega_{\text{fix}}))$ “. Glg. (1.3) für die Intensität läßt sich lesen als

$$g(t, u(t, \omega_{\text{fix}})) = \sqrt{SL_{I_{\text{eR}}}(t, u(t, \omega_{\text{fix}}))}. \tag{1.4}$$

Die Gleichung, die den realistischen Stromfluß I_{real} in Abhängigkeit von verrauschten Anschlußspannungen beschreibt, setzt sich additiv aus dem deterministisch modellierten Stromfluß I_{ideal} und dem Rauschstrom I_{eR} zusammen:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{real}}(t, \omega_{\text{fix}}) &= I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}}) + I_{\text{eR}}(t, \omega_{\text{fix}}) = \\
 &= I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}}) + g(E[I_{\text{ideal}}(t, \omega_{\text{fix}})]) \cdot \mathcal{W}_t(\omega_{\text{fix}}) = \\
 &= f(t, u(t, \omega_{\text{fix}})) + g(t, u(t, \omega_{\text{fix}})) \cdot \mathcal{W}_t(\omega_{\text{fix}}) = \\
 &= \underbrace{f(t, u(t, \omega_{\text{fix}}))}_{\text{deterministisches Modell}} + \underbrace{\sqrt{SL_{I_{\text{eR}}}(t, u(t, \omega_{\text{fix}}))} \cdot \mathcal{W}_t(\omega_{\text{fix}})}_{\text{stochastisches Modell}}.
 \end{aligned}$$

Verwenden wir Itô's Interpretation für diesen verallgemeinerten stochastischen Prozeß [Øks95], so erhalten wir die Integralgleichung

$$q_{\text{real}}(s, \omega_{\text{fix}}) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, u(s, \omega_{\text{fix}})) ds + \int_{t_0}^t \sqrt{\text{SL}_{I_{eR}}(s, u(s, \omega_{\text{fix}}))} dB_s,$$

wobei mit $\int_{t_0}^t * ds$ das Lebesgue-Integral [Kön93] bzw. mit $\int_{t_0}^t * dB_s$ das Itô-Integral [Øks95] bezeichnet wird und q_{real} die vom Stromfluß I_{real} transportierte elektrische Ladung ist. Wir können das Itô-Integral $\int_{t_0}^t \sqrt{\text{SL}_{I_{eR}}(s, u(s, \omega_{\text{fix}}))} dB_s$ als Modell für die Ladung der Rauschstromquelle auffassen. Die Itô-Integrale aller Rauschstromquellen werden später an das deterministische ladungsorientierte Schaltungsmodell angekoppelt, das dazu in Integralschreibweise vorliegen muß.

1.2 Kirchhoffsche Gesetze

Die Kirchhoffschen Gesetze beschreiben die elektrotechnischen Beziehungen zwischen Zweigspannungen und Zweigströmen, vgl. [CDK87]. Die Beziehungen hängen von der Netzwerktopologie ab und sind unabhängig von den Zweigcharakteristiken.

Kirchhoffsches Spannungsgesetz (KSpG): Die algebraische Summe der Zweigspannungen in einer *Masche* eines Netzwerkes, d. h. entlang eines geschlossenen Weges in einem Netzwerk, ist zu jeder beliebigen Zeit gleich null.

Kirchhoffsches Stromgesetz (KStG): Die algebraische Summe der Zweigströme, die einen beliebigen Ausschnitt eines Netzwerkes durchqueren, ist gleich null.

Das KSpG wird gewöhnlich verwendet, um eine Beziehung zwischen Zweigspannungen und Knotenspannungen herzustellen. Für die Zweigspannung U_{ij} zwischen zwei Knoten i und j gilt mit den Knotenspannungen u_i und u_j :

$$U_{ij} = u_i - u_j.$$

Aus dem KStG folgt für die Summe der Ströme I_1, \dots, I_k , die den Knoten j verlassen:

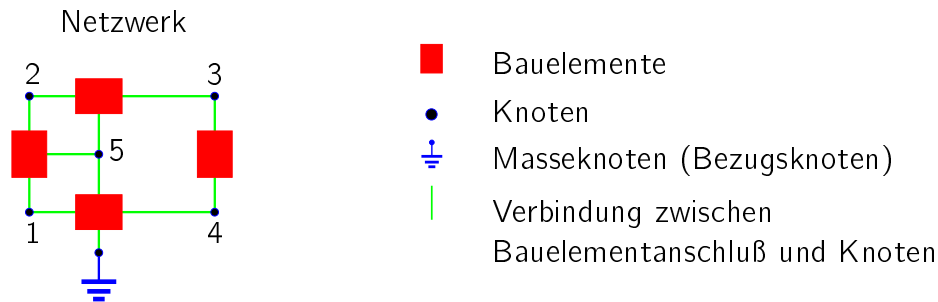
$$I_1 + \dots + I_k = 0.$$

Diese Beziehungen sind in Abb. 1.9 schematisch dargestellt.

Bemerkung 1.1: *Es fließe ein Strom I von einem Knoten i in einen Knoten j . Erstellen wir mit dem KStG eine Knotengleichung für den*

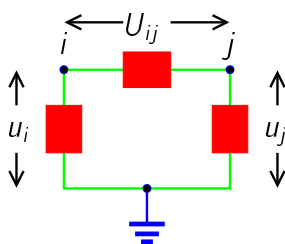
- *Knoten i , dann geht I additiv in die Knotengleichung ein, bzw. für den*

Kirchhoffsche Gesetze



Voraussetzung: Jeder Knoten sei von jedem anderen Knoten aus erreichbar

Spannungsgesetz



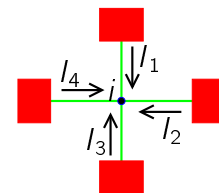
u_i Knoten- i -zu-Masse-Spannung (u_j analog)

U_{ij} Spannungsdifferenz zw. Knoten i und j

Für alle Knotenpaare i, j gilt (zu jeder Zeit t):

$$U_{ij} = u_i - u_j$$

Stromgesetz (Ladungserhaltung)



I_1, \dots, I_k Ströme in Knoten i

Für alle Knoten i gilt (zu jeder Zeit t):

$$I_1 + \dots + I_k = 0$$

Abbildung 1.9: Schematische Darstellung des Kirchhoffschen Spannungs- bzw. Stromgesetz.

- Knoten j , so geht I subtraktiv in die Knotengleichung ein.

Bemerkung 1.2: Wenden wir das KStG für die Anschlüsse $1, \dots, k_{An}$ eines Bauelementes an, so erhalten wir nach Integration der Stromgleichung $I_1 + \dots + I_{k_{An}} = 0$ nach der Zeit die Forderung der Ladungsneutralität. D. h. die Summe der Ladungen $q_1, \dots, q_{k_{An}}$ über alle Anschlüsse $1, \dots, k_{An}$ eines Bauelementes muß konstant sein, also

$$q_1 + \dots + q_{k_{An}} = \text{const},$$

wobei die Konstante gleich null gesetzt werden kann.

1.3 Stochastisches ladungsorientiertes Schaltungsmodell im Zeitbereich

Zur Simulation von komplexen Schaltungen (z. B. integrierten Schaltungen) ist es notwendig das mathematische Modell, das die Schaltung beschreibt, rechnerunterstützt erzeugen zu lassen

[BGMS90]. Es können u. a. drei Schemata verwendet werden: Dünnbesetzter-Tableau-Zugang, Knotenanalyse und *modifizierte Knotenanalyse (MKA)*. In Programmen zur Schaltungssimulation, z. B. TITAN der Firma Siemens AG [FWZ⁺92], wird gewöhnlich die MKA verwendet.

Zur Erzeugung der Netzwerkgleichungen werden bei der MKA folgende zwei Schritte durchgeführt. Mittels dem KStG werden alle Zweigströme durch Bauelementgleichungen in Admittanzform ersetzt, und mittels dem KSpG werden die Zweigspannungen U durch die Knotenspannungen u ausgedrückt. Zusätzlich werden alle Bauelementgleichungen von spannungsdefinierenden Bauelementen angefügt. Bei der Simulation einer Schaltung interessiert sich der Schaltungs konstrukteur in der Regel nur für die Knotenspannungen und bestimmte Zweigströme. Wir nehmen im folgenden an, daß die gesuchten Unbekannten diese Knotenspannungen und diese bestimmten Zweigströme sind.

In einem ersten Schritt geben wir die Modellierung rauschfreier Netzwerke an, und koppeln in einem zweiten Schritt die stochastischen Bauelementmodelle an das deterministische Schaltungsmodell an.

Wir betrachten zuerst ein rauschfreies Netzwerk. Es werden die folgenden Bezeichnungen für die Dimensionen der zu betrachtenden Größen verwendet, vgl. [GF99]:

d_K	ist die Anzahl der Knoten ausschließlich dem Masseknoten.
d_s	ist die Anzahl der Ströme durch unabhängige spannungssteuernde Zweige. Diese Zweigströme fließen in die Anschlüsse eines Bauelementes und steuern die unabhängigen Spannungen an den Bauelementanschlüssen.
d_q	ist die Anzahl der unabhängigen Anschlußladungen. Aufgrund der Ladungserhaltung ist genau eine Ladung an einem Bauelementanschluß abhängig von den Ladungen an den verbleibenden Anschlüssen eines Bauelementes.

Die gesuchte Vektorfunktion $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_K+d_s}$ hat die Gestalt

$$x := \begin{pmatrix} u \\ I_s \end{pmatrix}.$$

Dabei ist:

u	der Vektor der Knotenspannungen und
I_s	der Vektor der Ströme durch spannungssteuernde Zweige.

Für den Vektor x der Unbekannten werden $d_K + d_s + d_q$ Netzwerkgleichungen benötigt. Wir erhalten diese folgendermaßen:

d_K Gleichungen	mittels dem KStG für alle Knoten ausschließlich dem Masseknoten.
$d_s + d_q$ Gleichungen	mittels der charakteristischen Beziehungen für die Bauelemente, die die Spannung bzw. den Strom steuern.

Wir erhalten zur Bestimmung von x das folgende Gleichungssystem:

$$A \cdot \dot{q}(x) + \underbrace{\begin{pmatrix} f_{\text{Bauelt.,1}}(x) \\ f_{\text{Bauelt.,2}}(x) \end{pmatrix}}_{=: f_{\text{Bauelt.}}(x)} - \underbrace{\begin{pmatrix} s_{\text{Quelle,1}}(t) \\ s_{\text{Quelle,2}}(t) \end{pmatrix}}_{=: s_{\text{Quelle}}(t)} = 0,$$

$$q(x) - q_{\text{Lad.}}(x) = 0,$$

wobei

$q(x) : \mathbb{R}^{d_k+d_s} \rightarrow \mathbb{R}^{d_q}$	der Vektor der unabhängigen Anschlußladungen
--	--

als eine nicht-lineare Funktion der Knotenpotentiale und Zweigströme modelliert ist. Wir nehmen an, daß die energiespeichernden Bauelemente (abhängig von q) in expliziter Form $q_{\text{Lad.}}$ gegeben sind. Für die Funktionen gilt:

unabhängige Quellen	
$s_{\text{Quelle,1}}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_k}$	enthält die Beiträge der unabhängigen Stromquellen,
$s_{\text{Quelle,2}}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_s}$	enthält die Werte der unabhängigen Spannungsquellen.
statische Bauelemente	
$f_{\text{Bauelt.,1}}(x) : \mathbb{R}^{d_k+d_s} \rightarrow \mathbb{R}^{d_k}$	sammelt alle Zweigströme, die von Spannungen bzw. Strömen abhängen. D. h. alle Zweigströme die von statischen Bauelementen in die Knoten hineinlaufen.
$f_{\text{Bauelt.,2}}(x) : \mathbb{R}^{d_k+d_s} \rightarrow \mathbb{R}^{d_s}$	beschreibt alle Spannungsgefälle der spannungssteuernden Bauelemente. D. h. den statischen Teil aller spannungssteuernden Gleichungen.
energiespeichernde Bauelemente	
$A \in \{0, \pm 1\}^{d_k+d_s, d_q}$	bezeichnet die sog. <i>Inzidenzmatrix</i> , welche die Netzwerktopologie beschreibt. A sammelt alle Zweigströme, die von ladungsspeichernden Bauelementen in die Knoten verlaufen. Die Matrixkomponenten $A^{i,j}$ definieren wir durch $A^{i,j} := \begin{cases} +1, & \text{falls der Zweigstrom } I_j \text{ den Knoten } i \text{ verläßt,} \\ -1, & \text{falls der Zweigstrom } I_j \text{ in den Knoten } i \text{ fließt,} \\ 0, & \text{falls der Zweigstrom } I_j \text{ den Knoten } i \text{ nicht trifft.} \end{cases}$ A besitzt vollen Zeilenrang [CDK87].
$q_{\text{Lad.}}(x) : \mathbb{R}^{d_k+d_s} \rightarrow \mathbb{R}^{d_q}$	beschreibt die unabhängigen Anschlußladungen der ladungsspeichernden Bauelemente. Die verbleibenden Anschlußladungen jedes Bauelementes werden definiert über die Forderung nach Ladungsneutralität, d. h. durch die negative Summe aller anderen Anschlußladungen.

Die MKA für nicht-lineare, rauschfrei modellierte Netzwerke führt bei ladungsorientierter Darstellung auf ein *differential-algebraisches Gleichungssystem (DAG)* der Form

$$A\dot{q}(x(t)) + \underbrace{f_{\text{Bauelt.}}(x(t)) - s_{\text{Quelle}}(t)}_{=: -f(t, x(t))} = 0.$$

Um die deterministischen Modelle mit Rauschquellen erweitern zu können, müssen wir die deterministischen Gleichungen in Integralschreibweise darstellen. Die Integralgleichung eines ladungsorientierten Schaltungsmodell erhalten wir auf folgende Art:

$$\begin{aligned} A\dot{q}(x(t)) &= f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{t_0}^t A \frac{d}{ds} q(x(s)) ds &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Aq(x(s)) \Big|_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]. \end{aligned}$$

Im folgenden befassen wir uns mit dem Einfluß der Rauschstromquellen auf die Struktur obiger DAG. Es werden die folgenden Bezeichnungen für die Dimensionen der zu betrachtenden stochastischen Größen verwendet:

d_K	ist die Anzahl der Knoten ausschließlich dem Masseknoten (wie zuvor).
d	ist die Dimension des gesuchten Lösungsvektors, d. h. $d = d_K + d_s$.
m	ist die Anzahl der stochastisch unabhängigen Rauschstromquellen.

Wir fassen die Intensitäten der Rauschstromquellen, d. h. die Quadratwurzeln der spektralen Leistungsdichten $SL_{I_{eR}}$, vgl. (1.4), in der sog. *Diffusionsmatrix* g zusammen. g ist eine Matrixfunktion und bildet wie folgt ab:

Diffusionsmatrix	
$g(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$	enthält die Intensitäten der Rauschstromquellen.

Zur strukturellen Beschreibung der Diffusionsmatrix g trennen wir g in zwei Matrixblöcke auf. Der erste Matrixblock besteht aus den ersten d_K Zeilen der Matrix g und wird mit g_K bezeichnet. Der zweite Matrixblock setzt sich aus den letzten $d - d_K$ Zeilen von g zusammen und wird mit g_0 bezeichnet. Für g haben wir die Zerlegung:

$$g = \begin{pmatrix} g_K \\ g_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } g_K \in \mathbb{R}^{d_K, m} \text{ und } g_0 \in \mathbb{R}^{d-d_K, m}.$$

Der obere Block g_K beschreibt die Einflüsse der Rauschstromquellen. g_K erhält durch die Rauschstromquelle k , deren zwei Anschlüsse mit dem Knoten i bzw. dem Knoten j verbunden sind,

einen Eintrag an der Position (i, k) bzw. einen Eintrag an der Position (j, k) . Der Eintrag an der Position (i, k) hat den Wert $\sqrt{SL_{leR}}$ und der zweite an der Position (j, k) den negativen Wert $-\sqrt{SL_{leR}}$. Auch wäre es zulässig für die Komponente (i, k) negatives und für die Komponente (j, k) positives Vorzeichen zu wählen. Da die Rauschstromquellen keine Polarität besitzen, verwenden wir im folgenden die erstgenannte Wahl der Vorzeichen. g_K weist folgende Struktur auf:

$$g_K(t, x) = \left(\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +\sqrt{SL_{leR}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sqrt{SL_{leR}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] \\ \vdots & & \vdots \\ \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] & & \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] \end{array} \right) \begin{array}{l} i^{te} \text{ Zeile} \\ \vdots \\ j^{te} \text{ Zeile} \end{array}$$

k^{te} Spalte

Die Spalten $1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, m$ von g_K besitzen die gleiche Struktur wie die k^{te} Spalte von g_K .

Der untere Matrixblock g_0 besteht aus $d - d_K$ Nullzeilen, d. h.

$$g_0(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix g_0 ist erforderlich, um die Zeilendimension des stochastischen Modells der Zeilendimension des deterministischen Modells anzupassen.

Neben der Struktur der Matrix g interessieren wir uns für ihren Besetztheitsgrad. Jede der m Rauschstromquellen liefert genau zwei Einträge für die Diffusionsmatrix g . Von $d \cdot m$ Einträgen der Diffusionsmatrix sind bis auf $2 \cdot m$ Einträge alle Einträge identisch null. In der Schaltungssimulation ist daher die Diffusionsmatrix dünn besetzt. Wird für jedes Bauelement elektrisches Rauschen modelliert, dann ist die Anzahl m der Rauschstromquellen mindestens so groß wie die Anzahl d_K der Knoten.

Koppeln wir die Diffusionsmatrix g an vorhergehende DAG in Integralschreibweise an, so erhalten wir eine *stochastische differential-algebraische Gleichung (SDAG)*

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s,$$

die eine elektrische Schaltung unter Berücksichtigung von Rauschstromquellen modelliert. In den nächsten Kapiteln entwickeln wir numerische Methoden, mit denen wir SDAGn mit einem konsistenten Anfangswert $X_{t_0} = X_0$ näherungsweise lösen können.

Kapitel 2

Analyse stochastischer differential-algebraischer Gleichungen

*Unser Ziel ist ein vollständiges Verständnis der Ereignisse, die uns umgeben,
und unserer Existenz.
(Stephen W. Hawking)*

2.1 Analyse differential-algebraischer Gleichungen

Die Schwierigkeiten beim numerischen Lösen differential-algebraischer Gleichungen (DAGn) können u. a. charakterisiert werden durch den differentiellen Index einer DAG. Das Indexkonzept kann auf folgende Art definiert werden [BCP89]:

Definition 2.1: *Die Gleichung*

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$

mit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, hat den differentiellen Index k , falls k die minimale Anzahl analytischer Ableitungen

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \frac{d}{dt}F(t, x, \dot{x}) = 0, \dots, \quad \frac{d^k}{dt^k}F(t, x, \dot{x}) = 0 \quad (2.1)$$

ist, so daß (2.1) in eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung (DG)

$$\dot{x}(t) = H(t, x(t))$$

durch algebraische Manipulationen transformiert werden kann, wobei $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Die rauschfreie und ladungsorientierte Modellierung einer elektrischen Schaltung führt auf eine DAG der Form

$$A\dot{q}(x(t)) = f(t, x(t)).$$

Die meisten deterministischen Schaltungsmodelle besitzen einen differentiellen Index 1 oder 2. Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für deterministische Schaltungsmodelle mit differentiellem Index 1.

Satz 2.1: *Hat die differential-algebraische Gleichung*

$$A\dot{q}(x(t)) - f(t, x(t)) = 0$$

differentiellen Index 1, dann ist die Matrix

$$Aq_x(x(t)) + \lambda(A\dot{q}_x(x(t)) - f_x(t, x(t)))$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ regulär. Die Matrizen f_x , q_x bzw. \dot{q}_x sind Jacobi-Matrizen der Vektorfunktionen f , q bzw. \dot{q} .

Beweis: Mit $F(t, x(t), \dot{x}(t)) := Aq_x(x(t))\dot{x}(t) - f(t, x(t))$ gilt für die Ableitung $\frac{d}{dt}F$ von F :

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t), \dot{x}(t)) = A \left(\frac{d}{dt}q_x(x(t)) \right) \dot{x}(t) + Aq_x(x(t))\ddot{x}(t) - f_t(t, x(t)) - f_x(t, x(t))\dot{x}(t).$$

Wir definieren eine Matrixfunktion $M_{\text{Ableitung}}$ durch

$$M_{\text{Ableitung}} := \frac{\partial \begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} F_{\dot{x}} & F_{\ddot{x}} \\ \dot{F}_{\dot{x}} & \dot{F}_{\ddot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aq_x & \mathbf{0} \\ A\frac{d}{dt}q_x - f_x & Aq_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aq_x & \mathbf{0} \\ A\dot{q}_x - f_x & Aq_x \end{pmatrix}.$$

$M_{\text{Ableitung}}$ nennen wir **1-voll** (vgl. [BCP89], S. 29, Def. 2.4.7), falls es eine glatte, nicht-singuläre Matrixfunktion $M_{\text{regulär}}(t)$ gibt, so daß

$$M_{\text{regulär}}(t)M_{\text{Ableitung}} = \begin{pmatrix} I_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{\text{Rest}}(t) \end{pmatrix},$$

wobei I_d die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{d,d}$ und $M_{\text{Rest}}(t)$ eine Matrixfunktion ist. Proposition 2.5.1 in [BCP89], S. 33, impliziert, daß $M_{\text{Ableitung}}$ 1-voll ist und konstanten Rang besitzt, falls die gegebene DAG differentiellen Index 1 besitzt. Wir können folgern, daß eine Linearkombination von Aq_x (singulär, wegen Index 1) und $A\dot{q}_x - f_x$ regulär ist, falls $M_{\text{Ableitung}}$ 1-voll ist. D. h. $M_{\text{Ableitung}}$ ist 1-voll, falls die Matrix

$$Aq_x + \lambda(A\dot{q}_x - f_x)$$

regulär ist für fast alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

■

Korollar 2.1: *Falls die DAG $A\dot{q}(x(t)) - f(t, x(t)) = 0$ differentiellen Index 0 hat, dann ist die Matrix Aq_x regulär, und wir können im Satz 2.1 $\lambda = 0$ zulassen.*

2.2 Grundlegende Definitionen für Reihenentwicklungen stochastischer Prozesse

Die mathematische Modellierung physikalischer oder technischer Phänomene, die von Zufallseffekten betroffen sind, führt uns auf mathematische Abbildungen, die sowohl deterministische Funktionen als auch Zufallsvariablen sind. Eine geeignete Definition ist gegeben durch

Definition 2.2 ([Øks95], S. 8): Ein stochastischer Prozeß ist eine parametrisierte Sammlung von Zufallsvariablen

$$X_t := \{X_t(\omega) = X(t, \omega) : t \in [t_0 : t_{Ende}], \omega \in \Omega\},$$

die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) definiert sind und Werte in \mathbb{R}^d annehmen. Zu beachten ist, daß wir für jedes fixierte $t \in [t_0 : t_{Ende}]$ eine Zufallsvariable

$$\omega \mapsto X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

erhalten. Andererseits erhalten wir für fixiertes $\omega \in \Omega$ eine Funktion

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in [t_0 : t_{Ende}],$$

welche Pfad, Realisierung oder Stichprobenfunktion von X_t genannt wird.

Ersatzweise können wir statt $X_t(\omega)$ auch $X(t, \omega)$ schreiben. Wir betrachten einen stochastischen Prozeß als eine Funktion von zwei Variablen, d. h.

$$X : [t_0 : t_{Ende}] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, \omega) \mapsto X(t, \omega).$$

Beispiele für stochastische Prozesse sind der Wiener-Prozeß, die mathematische Beschreibung der Brownschen Bewegung, und ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß, das Weiße Rauschen, vgl. Anhang B.3.2 bzw. [GW64].

Zur Modellierung technischer Systeme, die unter dem Einfluß zufallsabhängiger Störungen stehen, sind verschiedene Integrationsbegriffe erforderlich. In dieser Arbeit verwenden wir neben zufallsunabhängigen Integrationsbegriffen *stochastische Integrale*, speziell das Itô-Integral, das als Maß das Wiener-Maß besitzt, vgl. Anhang B.3.1 bzw. [Øks95]. Stochastische Integrale sind Zufallsvariablen und die Integranden müssen in \mathcal{I} (Def. s. Anhang B.3.3) liegen. Als zufallsunabhängige deterministische Integrale verwenden wir die bekannten Riemann- bzw. Lebesgue-Integrale, vgl. [Kön92, Kön93].

Wir behandeln eine spezielle Klasse stochastischer Prozesse, die in ein Lebesgue-Integral $\int_{t_0}^t * ds$ und in ein Itô-Integral $\int_{t_0}^t * dB_s$ aufgespalten werden können.

Definition 2.3 ([Øks95], S. 41): Sei B_t eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) . Ein eindimensionaler Itô-Prozeß ist ein stochastischer Prozeß X_t auf (Ω, \mathcal{S}, P) , der die Form

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t u_s ds + \int_{t_0}^t v_s dB_s$$

hat, mit einem Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}$ und mit stochastischen Prozessen u_t und v_t , wobei $v_t \in \mathcal{I}$, u_t \mathcal{S}_t -angepaßt ist und

$$P \left(\int_{t_0}^t |u_s(\omega)| ds < \infty \quad \text{für alle } t \geq t_0 \right) = 1.$$

Wir verstehen unter der Integration eines Vektors die Integration seiner Komponenten. Im folgenden werden die Komponenten von Vektoren bzw. Matrizen durch obere Indizes gekennzeichnet. D. h. für die Vektoren $X_t, c, a, f, u, B_t \in \mathbb{R}^d$ bzw. für die Matrizen $b, g, v \in \mathbb{R}^{d,m}$ verwenden wir die Schreibweisen

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^d \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^d \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^d \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix},$$

$$B_t = \begin{pmatrix} B_t^1 \\ \vdots \\ B_t^m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$b = \begin{pmatrix} b^{1,1} & \dots & b^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{d,1} & \dots & b^{d,m} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g^{1,1} & \dots & g^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{d,1} & \dots & g^{d,m} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v^{1,1} & \dots & v^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{d,1} & \dots & v^{d,m} \end{pmatrix},$$

wobei $d, m \in \mathbb{N}$ die Dimensionen der Vektoren bzw. Matrizen bezeichnen.

Weiter betrachten wir einen Itô-Prozeß X_t , der die folgende *stochastische Differentialgleichung (SDG)* (vgl. Anhang B.4) erfüllt:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0, \quad (2.2)$$

wobei $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ der sog. **Driftvektor**, $v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ die sog. **Diffusionsmatrix** und $X_0 \in \mathbb{R}^d$ ein Anfangswert ist. Die Integralschreibweise kürzen wir ab mit

$$dX_t = u(t, X_t) dt + v(t, X_t) dB_t, \quad X_{t_0} = X_0.$$

Für das Itô-Integral $\int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s$ verwenden wir die äquivalente Beziehung

$$\int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s = \int_{t_0}^t v^{\bullet,1}(s, X_s) dB_s^1 + \dots + \int_{t_0}^t v^{\bullet,m}(s, X_s) dB_s^m = \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t v^{\bullet,l}(s, X_s) dB_s^l,$$

wobei $v^{\bullet,l}$ die l^{te} Spalte der Matrix v ist. Eine entsprechende Darstellung benutzen wir für die Matrixfunktionen b und g .

Als Grundlage für eine Reihenentwicklung stochastischer Prozesse geben wir in diesem Abschnitt einige Begriffserklärungen an. Die folgenden Definitionen sind [KP92] entnommen.

Wir definieren eine **Menge \mathcal{M} von Mehrfachindizes** durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_j) : \alpha_i \in \{0, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, j\} \text{ für } j = 1, 2, 3, \dots\} \cup \emptyset = \\ &= \{\emptyset, (0), (1), \dots, (m), (0,0), (0,1), \dots, (0,m), \dots, (m,0), \dots, (m,m), (0,0,0), \dots\}. \end{aligned}$$

Ein **Mehrfachindex** α ist ein Element aus \mathcal{M} , d. h. $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in \mathcal{M}$.

$l(\alpha)$ bezeichne die Länge von α ($l(\emptyset) := 0$), d. h. $l(\alpha)$ ist die Anzahl der Komponenten von α . $n(\alpha)$ ist die Anzahl der Komponenten von α , welche null sind.

Für einen Mehrfachindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, mit $l(\alpha) \geq 1$, definieren wir einen „kürzeren“ Mehrfachindex $-\alpha$ bzw. $\alpha-$ durch $-\alpha := (\alpha_2, \dots, \alpha_j)$ bzw. $\alpha- := (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})$. d. h. $-\alpha$ bzw. $\alpha-$ ist der Mehrfachindex, bei dem die erste bzw. letzte Komponente von α gestrichen wurde.

Eine **hierarchische Menge** \mathcal{H} ist definiert durch

- \mathcal{H} ist nicht-leer, d. h. $\mathcal{H} \neq \emptyset$,
- die Mehrfachindizes aus \mathcal{H} sind gleichmäßig in ihrer Länge beschränkt, d. h. $\sup_{\alpha \in \mathcal{H}} l(\alpha) < \infty$,
und
- $-\alpha \in \mathcal{H}$ für jedes $\alpha \in \mathcal{H} \setminus \emptyset$.

Die Menge $\mathcal{H} = \{\emptyset, (0), \dots, (m), (1,1), \dots, (1,m), \dots, (m,1), \dots, (m,m)\}$ ist beispielsweise eine hierarchische Menge.

Wir definieren die *Restmenge* $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ von \mathcal{H} durch

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) := \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{H} : -\alpha \in \mathcal{H}\},$$

d. h. die Restmenge besteht aus allen Mehrfachindizes, die der gegebenen hierarchischen Menge nachfolgen.

Mit einem Mehrfachindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ und den Differentialen

$$dB_{s_i}^{\alpha_i} := \begin{cases} dB_{s_i}^{\alpha_i} & \text{für } \alpha_i = 1, \dots, m, \quad \text{d. h. It\hat{o}-Integration,} \\ ds_i & \text{für } \alpha_i = 0, \quad \text{d. h. Lebesgue-Integration,} \end{cases}$$

definieren wir *mehrfache It\hat{o}-Integrale* $I_{\alpha, t_0, t}[w_*]$ eines stochastischen Prozesses w_t durch

$$I_{\alpha, t_0, t}[w_*] := \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{s_j} \left(\dots \int_{t_0}^{s_3} \left(\int_{t_0}^{s_2} w_{s_1} dB_{s_1}^{\alpha_1} \right) dB_{s_2}^{\alpha_2} \dots \right) dB_{s_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} \right) dB_{s_j}^{\alpha_j}.$$

Als Abkürzung verwenden wir $I_\alpha := I_{\alpha, t_0, t}[1]$. „Mehrfache“ It\hat{o}-Integrale für Mehrfachindizes der Länge 1 können explizit berechnet werden. In diesem Fall haben wir $I_{(0)} = t - t_0$ und $I_{(j)} = B_t^j - B_{t_0}^j$ für $j = 1, \dots, m$.

Wir definieren mehrere Mengen von angepaßten, rechtsseitig stetigen stochastischen Prozessen $w_t = \{w(t, \omega) : t \geq t_0, \omega \in \Omega\}$, deren linksseitige Grenzwerte gewisse Integrationseigenschaften erfüllen:

- \mathcal{A}_\emptyset ist die Gesamtzahl aller stochastischen Prozesse w_t für die gilt: $|w(t, \omega)| < \infty$ mit Wahrscheinlichkeit eins (m. W. 1) für jedes $t \geq t_0$.
- $\mathcal{A}_{(0)}$ ist die Gesamtzahl aller stochastischen Prozesse w_t für die gilt: $\int_{t_0}^t |w(s, \omega)| ds < \infty$ m. W. 1 für jedes $t \geq t_0$.
- $\mathcal{A}_{(1)}$ ist die Gesamtzahl aller stochastischen Prozesse w_t für die gilt: $\int_{t_0}^t |w(s, \omega)|^2 ds < \infty$ m. W. 1 für jedes $t \geq t_0$. Weiter benutzen wir die Schreibweise $\mathcal{A}_{(j)} = \mathcal{A}_{(1)}$ für $j = 2, \dots, m$.
- Es seien $\tau_0(\omega)$ und $\tau(\omega)$ zwei *Stoppzeiten* mit $t_0 \leq \tau_0(\omega) \leq \tau(\omega) \leq t_{\text{Ende}}$ m. W. 1 und es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ ein Mehrfachindex mit $l(\alpha) \geq 2$. \mathcal{A}_α ist die Gesamtzahl aller stochastischen Prozesse w_t , so daß für den Integralprozeß $\{I_{\alpha-, \tau_0, t}[w_*] : t \geq t_0, \omega \in \Omega\}$, aufgefaßt als eine Funktion von t , gilt: $I_{\alpha-, \tau_0, t}[w_*] \in \mathcal{A}_\alpha$ für jedes $t \geq t_0$.

Sei $w(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine gegebene Funktion. Im folgenden verwenden wir *Itô-Koeffizientenfunktionen*

$$w_\alpha(t, x) := \begin{cases} w(t, x) & \text{für } \alpha = \emptyset, \\ \mathcal{D}^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}^{\alpha_j} w(t, x) & \text{für } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j), \end{cases}$$

wobei die Differentialoperatoren $\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1, \dots, \mathcal{D}^m$ (bzgl. der mehrdimensionalen SDG $dX_t = u(t, X_t) dt + v(t, X_t) dB_t$) definiert sind durch

$$\mathcal{D}^0 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\sum_{l=1}^m v^{i,l} v^{j,l} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{D}^l := \sum_{i=1}^d v^{i,l} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{für } l = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

\mathcal{D}^0 heißt Diffusionsoperator.

Als Verallgemeinerung der Taylor-Reihen für deterministische Funktionen [Kön92] lassen sich für stochastische Prozesse geeignete Reihenentwicklungen angeben, sog. Itô-Taylor-Entwicklungen [KP92]. Wir gehen von Prozessen aus, die von der Zeit t und den m Brownschen Bewegungen B_t^j , mit $j = 1, \dots, m$, abhängen. Im speziellen interessieren wir uns für Prozesse, die von der Lösung X_t der stochastischen Differentialgleichung (2.2) abhängen.

2.3 Approximation stochastischer Prozesse

In diesem Abschnitt stellen wir eine Reihenentwicklung stochastischer Prozesse vor, die sog. Itô-Taylor-Entwicklung. Sie verallgemeinert die wohlbekannt Taylor-Reihe für deterministische Funktionen.

Satz 2.2 ([KP92], S. 182): Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$ eine hierarchische Menge. Sei ferner $w(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dann ist die sog. *Itô-Taylor-Entwicklung*

$$w(\tau, X_\tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{H}} I_{\alpha, \tau_0, \tau} [w_\alpha(\tau_0, X_{\tau_0})] + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{H})} I_{\alpha, \tau_0, \tau} [w_\alpha(*, X_*)] \quad (2.5)$$

gültig, vorausgesetzt es existieren alle in (2.5) auftretenden Ableitungen von w , u bzw. v und alle mehrfachen Itô-Integrale.

Zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens benötigen wir eine abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung, die erklärt wird durch

Definition 2.4: Wir definieren für $k = 0, 1, 2, \dots$ die hierarchischen Mengen \mathcal{H}_k durch

$$\mathcal{H}_k := \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) + n(\alpha) \leq k\}.$$

Die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung $X_t^{(k)}$ wird definiert durch

$$X_t^{(k)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_k} I_{\alpha, t_0, t} [w_\alpha(t_0, X_{t_0})], \quad (2.6)$$

für $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$ und $w(t, x) \equiv x$.

Im folgenden zeigen wir, daß die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung mehrere punktweise Konvergenzeigenschaften besitzt. Für stochastische Prozesse verwenden wir die Konzepte der Konvergenz im Mittel und der Konvergenz im quadratischen Mittel. Die Konvergenz im Mittel wird mittels Satz 2.3 gezeigt, dessen Beweis folgendes Lemma benötigt.

Lemma 2.1 ([KP92], S. 190): Sei $\alpha \in \mathcal{M} \setminus \emptyset$ mit $l(\alpha) \neq n(\alpha)$ und sei $w_t \in \mathcal{A}_\alpha$ für alle $t \geq t_0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E} \left[I_{\alpha, \tau_0, \tau} [w_*] \middle| \mathcal{F}_{\tau_0} \right] = 0 \quad \text{m. W. 1,}$$

wobei \mathcal{F}_{τ_0} eine an den Prozeß $I_{\alpha, \tau_0, \tau} [w_*]$ angepaßte Filtrierung ist.

Satz 2.3: Sei $X_t^{(k)}$ die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung wie in (2.6) und X_t die Lösung der SDG (2.2). Wir nehmen an, daß die nötigen Ableitungen und mehrfachen Itô-Integrale für alle $\alpha \in \mathcal{H}_k \cup \mathcal{R}(\mathcal{H}_k)$ existieren. Weiter sei $w_\alpha(t_0, X_{t_0}) \in \mathcal{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{H}_k$ und es sei $w_\alpha(t, X_t) \in \mathcal{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{H}_k)$ und für alle $t \geq t_0$, wobei $\sup_{t_0 \leq t \leq t_{\text{Ende}}} \mathbb{E}[|w_\alpha(t, X_t)|] < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left[\left| X_t - X_t^{(k)} \right| \right] \leq C(t - t_0)^k, \quad C > 0,$$

für alle $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$. D. h. die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung $X_t^{(k)}$ konvergiert im Mittel gegen den Itô-Prozeß X_t . Für die Abweichung ist die Ordnung der Konvergenz im Mittel gleich k .

Beweis: Definiere \mathcal{N} als eine Menge von Mehrfachindizes durch

$$\mathcal{N} := \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k\text{-mal}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{(k+1)\text{-mal}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{(k+2)\text{-mal}}, \dots \right\},$$

d. h. alle Komponenten der Mehrfachindizes aus \mathcal{N} sind identisch 0, und die Länge dieser Mehrfachindizes ist mindestens gleich k . Mit einer geeigneten positiven Konstanten C gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| X_t - X_t^{(k)} \right| \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{H}_k)} I_{\alpha, t_0, t} [w_\alpha(*, X_*)] \right| \right] \leq \\ &\stackrel{\text{vgl. Lem. 2.1}}{\leq} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} I_{\alpha, t_0, t} [w_\alpha(*, X_*)] \right| \right] \leq C(t - t_0)^k. \end{aligned}$$

■

Neben der Konvergenz im Mittel konvergiert die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung auch im quadratischen Mittel gegen X_t .

Satz 2.4 ([KP92], S. 206): Sei $X_t^{(k)}$ die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung wie in (2.6) und X_t die Lösung der SDG (2.2). Ferner existieren alle notwendigen Ableitungen und mehrfachen Itô-Integrale für alle $\alpha \in \mathcal{H}_k \cup \mathcal{R}(\mathcal{H}_k)$. Wir nehmen an, daß $w_\alpha(t_0, X_{t_0}) \in \mathcal{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{H}_k$ und daß $w_\alpha(t, X_t) \in \mathcal{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{H}_k)$ und für alle $t \geq t_0$, wobei $\sup_{t_0 \leq t \leq t_{\text{Ende}}} \mathbb{E}[|w_\alpha(t, X_t)|^2] < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left[\left| X_t - X_t^{(k)} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(t - t_0)^{\frac{k+1}{2}}, \quad C > 0,$$

für alle $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$. D. h. die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung $X_t^{(k)}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen den Itô-Prozeß X_t . Für die Abweichung ist die Ordnung der Konvergenz im quadratischen Mittel gleich $\frac{k+1}{2}$.

Satz 2.3 bzw. Satz 2.4 liefern Aussagen über die lokale Konvergenz im Mittel bzw. im quadratischen Mittel der abgebrochenen Itô-Taylor-Entwicklung $X_t^{(k)}$ gegen den Itô-Prozeß X_t . Verwenden wir $X_t^{(k)}$ als eine numerische Einschrittmethod zur Approximation von X_t , dann sichern Satz 2.3 und Satz 2.4 die Konsistenz der Einschrittmethod. Unter weiteren Annahmen an die Ordnung der Konvergenz im Mittel bzw. im quadratischen Mittel von $X_t^{(k)}$ können wir eine Aussage über die globale Konvergenz im quadratischen Mittel der Einschrittmethod $X_t^{(k)}$ treffen. Dazu benutzen wir

Satz 2.5 ([Mil95], S. 12): Wir diskretisieren das Intervall $[t_0 : t_{\text{Ende}}]$ äquidistant, d. h. $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N := t_{\text{Ende}}$, $N \in \mathbb{N}$ beliebig, und definieren die Schrittweite h durch $h := \frac{t_{\text{Ende}} - t_0}{N}$. Sei $X_{t;X_n}$ die exakte Lösung der SDG (2.2) zum Anfangswert $X_{t_n;X_n} = X_n$ im Intervall $[t_n : t_{\text{Ende}}]$ für beliebiges $X_n \in \mathbb{R}^d$. Sei $X(t, \omega; X_n)$ eine numerische Einschrittnäherung für $X_{t;X_n}$ in $[t_n : t_{\text{Ende}}]$, welche die Anfangsbedingung $X(t_n, \omega; X_n) = X_n$ erfüllt.

Wir nehmen an, daß die numerische Einschrittnäherung $X(t_n + h, \omega; X_n)$ für die Abweichung von $X_{t_n+h;X_n}$ die Ordnung p_1 für die Konvergenz im Mittel besitzt und die Ordnung p_2 für die Konvergenz im quadratischen Mittel besitzt. Genauer gesagt, für beliebiges $t_n \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$ und für beliebiges $X_n \in \mathbb{R}^d$ seien folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{t_n+h;X_n} - X(t_n + h, \omega; X_n)|] &\leq C_1 h^{p_1} \quad \text{und} \\ \mathbb{E}[|X_{t_n+h;X_n} - X(t_n + h, \omega; X_n)|^2]^{\frac{1}{2}} &\leq C_2 h^{p_2}, \end{aligned}$$

wobei $C_1, C_2 > 0$. Ferner sei

$$p_2 \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}.$$

Definiere $X_1 := X(t_1, \omega; X_0)$, $X_2 := X(t_2, \omega; X_1)$, \dots , $X_N := X(t_N, \omega; X_{N-1})$. Dann gilt für jedes N und für $n = 0, 1, \dots, N$ die folgende Ungleichung:

$$\mathbb{E}[|X_{t_n;X_0} - X_n|^2]^{\frac{1}{2}} \leq C_3 h^{p_2 - \frac{1}{2}},$$

mit einem geeigneten $C_3 > 0$. D. h. die Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel der numerischen Methode, die mittels der numerischen Einschrittnäherung $X(t, \omega; X_n)$ konstruiert wurde, ist $p = p_2 - \frac{1}{2}$.

Anstelle von „Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel“ verwenden einige Autoren, z. B. [KP92], die Terminologie *starke Konvergenzordnung*. Im folgenden benutzen wir die Schreibweise $\mathcal{O}_{\square}((t - t_0)^p)$ für Terme, die eine Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel größer gleich p bzgl. der Schrittweite $h = t - t_0$ besitzen.

Die Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel der abgebrochenen Itô-Taylor-Entwicklung folgt aus ihrer Konsistenzeigenschaft. Um die Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel zu bestimmen, verwenden wir

Satz 2.6: Sei $X_t^{(k)}$ die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung wie in (2.6) und $k \geq 2$. Verwenden wir diese Entwicklung als ein numerisches Einschrittverfahren, so besitzt diese Methode $p = \frac{k}{2}$ als Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel.

Beweis: Die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung $X_t^{(k)}$ hat für die Abweichung von X_t die Ordnung $p_1 = k$ für die Konvergenz im Mittel, vgl. Lem. 2.3. Sie hat für die Abweichung von X_t die Ordnung $p_2 = \frac{k+1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ($k \geq 2$) für die Konvergenz im quadratischen Mittel, vgl. Satz 2.4. Weiter gilt für $k \geq 2$:

$$k \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2k \geq k + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{k}_{=p_1} \geq \frac{k}{2} + 1 = \underbrace{\frac{k+1}{2}}_{=p_2} + \frac{1}{2},$$

d. h. $p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}$. Verwenden wir Satz 2.5, so haben wir $p = p_2 - \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$ als Genauigkeitsordnung im quadratischen Mittel.

■

2.4 Rückwärts-Itô-Formel

Jeder Itô-Prozeß kann mittels eines Driftvektors bzw. des entsprechenden Lebesgue-Integrals und einer Diffusionsmatrix bzw. des entsprechenden Itô-Integrals dargestellt werden, vgl. Def. 2.3. Wir nehmen an, daß X_t dargestellt wird durch die Drift u und die Diffusion v . Sei $c(t, X_t)$ ein gegebener Itô-Prozeß, der von t und X_t abhängt. Dann können wir mittels der allgemeinen Itô-Formel die Drift und die Diffusion von $c(t, X_t)$ bestimmen:

Satz 2.7 (Die allgemeine Itô-Formel, [Øks95], S. 45): Sei

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s$$

ein d -dimensionaler Itô-Prozeß. Sei $c(t, x) = (c^1(t, x), \dots, c^d(t, x))^T$ eine Abbildung von $[t_0 : \infty[\times \mathbb{R}^d$ nach \mathbb{R}^d , deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung existieren und stetig sind. Dann ist der Prozeß $c(t, X_t)$ auch ein Itô-Prozeß, dessen k^{te} Komponente c^k gegeben ist durch

$$\begin{aligned} dc^k(t, X_t) &= \frac{\partial c^k(t, X_t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial c^k(t, X_t)}{\partial x^i} dX_t^i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 c^k(t, X_t)}{\partial x^i \partial x^j} dX_t^i dX_t^j, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei

$$dB_t^l dB_t^n = \delta_{l,n} dt, \quad dB_t^l dt = dt dB_t^l = dt dt = 0, \quad \text{für } l, n = 1, \dots, m.$$

Um ein numerisches Verfahren entwickeln zu können, daß auf eine spezielle Klasse von stochastischen differential-algebraischen Gleichungen (SDAGn) angewendet werden kann, müssen wir den umgekehrten Weg einschlagen. Wir nehmen an, daß ein Itô-Prozeß $c(t, X_t)$ gegeben ist und die Entkoppelung in Drift und Diffusion bekannt ist. Dann können wir die Drift und die Diffusion von X_t bestimmen mit

Satz 2.8 (Rückwärts-Itô-Formel): Sei $c(t, X_t)$ ein gegebener d -dimensionaler Itô-Prozeß der Form

$$c(t, X_t) = c(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dB_s, \quad (2.8)$$

wobei die Jacobi-Matrix c_x von c als regulär vorausgesetzt wird. Dann erfüllt der gesuchte Itô-Prozeß X_t die folgende stochastische Differentialgleichung

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s,$$

wobei

$$\begin{aligned} v &= c_x^{-1} b \quad \text{und} \\ u &= c_x^{-1} \left(a - c_t + \frac{1}{2} c_x \sum_{l=1}^m v_x^{\bullet, l} v^{\bullet, l} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m b_x^{\bullet, l} v^{\bullet, l} \right). \end{aligned}$$

Beweis: Mit

$$\begin{aligned} dX_t^i &= u^i dt + v^{i,1} dB_t^1 + \dots + v^{i,m} dB_t^m \quad \text{bzw.} \\ dX_t^j &= u^j dt + v^{j,1} dB_t^1 + \dots + v^{j,m} dB_t^m \end{aligned}$$

und den Rechenregeln der allgemeinen Itô-Formel, vgl. Satz 2.7, haben wir für $dX_t^i dX_t^j$ die Beziehung

$$dX_t^i dX_t^j = \left(\sum_{l=1}^m v^{i,l} v^{j,l} \right) dt.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Itô-Formel (2.7) ein, so erhalten wir für die k^{te} Komponente

$$\begin{aligned} dc^k &= \left(\frac{\partial c^k}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u^i \frac{\partial c^k}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\sum_{l=1}^m v^{i,l} v^{j,l} \right) \frac{\partial^2 c^k}{\partial x^i \partial x^j} \right) dt + \\ &\quad + \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^d v^{i,l} \frac{\partial c^k}{\partial x^i} \right) dB_t^l \end{aligned}$$

und in Vektorschreibweise haben wir mit (2.3) und (2.4)

$$c(t, X_t) = c(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{D}^0 c(s, X_s) ds + \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \mathcal{D}^l c(s, X_s) dB_s^l. \quad (2.9)$$

Vergleichen wir (2.8) und (2.9), so erkennen wir

$$\mathcal{D}^0 c = a, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{D}^l c = b^{\bullet,l}, \quad \text{für } l = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} b &= (b^{\bullet,1}, \dots, b^{\bullet,m}) = (\mathcal{D}^1 c, \dots, \mathcal{D}^m c) \stackrel{\text{Def. von } \mathcal{D}^l}{=} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^d v^{i,1} c_{x^i}^1 & \dots & \sum_{i=1}^d v^{i,m} c_{x^i}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^d v^{i,1} c_{x^i}^d & \dots & \sum_{i=1}^d v^{i,m} c_{x^i}^d \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} c_{x^1}^1 & \dots & c_{x^d}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{x^1}^d & \dots & c_{x^d}^d \end{pmatrix}}_{= c_x \text{ Jacobi-Matrix von } c} \begin{pmatrix} v^{1,1} & \dots & v^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{d,1} & \dots & v^{d,m} \end{pmatrix} = c_x v. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Für reguläres c_x wird durch Glg. (2.12) die Diffusion v eindeutig festgelegt.

Wir kommen nun zur Darstellung der Drift u . Für die k^{te} Komponente von c gilt

$$\mathcal{D}^l \mathcal{D}^n c^k \stackrel{\text{Def. von } \mathcal{D}^l \text{ bzw. } \mathcal{D}^n}{=} \sum_{i=1}^d v^{i,l} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^d v^{j,n} c_{x^j}^k \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d v^{i,l} \left(v_{x^i}^{j,n} c_{x^j}^k + v^{j,n} c_{x^i x^j}^k \right).$$

Für den speziellen Fall $l = n$ haben wir

$$\mathcal{D}^l \mathcal{D}^l c^k = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(v^{i,l} v^{j,l} c_{x^i x^j}^k + v^{i,l} v_{x^i}^{j,l} c_{x^j}^k \right).$$

Wir bilden die Summe für $l = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \mathcal{D}^l \mathcal{D}^l c^k &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(v^{i,l} v^{j,l} c_{x^i x^j}^k + v^{i,l} v_{x^i}^{j,l} c_{x^j}^k \right) = \\ &\stackrel{\text{Def. von } \mathcal{D}^0 c^k}{=} 2 \left(\underbrace{\mathcal{D}^0 c^k}_{=a^k \text{ vgl. (2.10)}} - c_t^k - \sum_{i=1}^d u^i c_{x^i}^k \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d v^{i,l} v_{x^i}^{j,l} c_{x^j}^k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wir berechnen nun $\mathcal{D}^l \mathcal{D}^n c$ auf eine andere Weise und vergleichen das Resultat mit (2.13).

$$\mathcal{D}^l \mathcal{D}^n c \stackrel{\text{Def. von } \mathcal{D}^l}{=} \sum_{i=1}^d v^{i,l} \frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{D}^n c \stackrel{(2.11)}{=} \sum_{i=1}^d v^{i,l} b_{x^i}^{\bullet, n}. \quad (2.14)$$

Speziell für $l = n$ ergibt sich für die Summe über alle l :

$$\sum_{l=1}^m \mathcal{D}^l \mathcal{D}^l c = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} b_{x^i}^{\bullet, l}. \quad (2.15)$$

Vergleichen wir (2.13) und (2.15), so erhalten wir in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} b_{x^i}^{\bullet, l} &= 2 \left(a - c_t - \sum_{i=1}^d u^i c_{x^i} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d v^{i,l} v_{x^i}^{j,l} c_{x^j} \\ &\Downarrow \\ \sum_{l=1}^m \left(\begin{pmatrix} b_{x^1}^{1,l} \\ \vdots \\ b_{x^1}^{d,l} \end{pmatrix} v^{1,l} + \dots + \begin{pmatrix} b_{x^d}^{1,l} \\ \vdots \\ b_{x^d}^{d,l} \end{pmatrix} v^{d,l} \right) &= \\ &= 2 \left(a - c_t - (c_{x^1} u^1 + \dots + c_{x^d} u^d) \right) + c_{x^1} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^1}^{1,l} + \dots + c_{x^d} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^d}^{d,l} \\ &\Downarrow \\ \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} b_{x^1}^{1,l} & \dots & b_{x^d}^{1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{x^1}^{d,l} & \dots & b_{x^d}^{d,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1,l} \\ \vdots \\ v^{d,l} \end{pmatrix} &= \\ &= 2 \left(a - c_t - c_x \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix} \right) + c_x \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^1}^{1,l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^d}^{d,l} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mit

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^1}^{1,l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d v^{i,l} v_{x^d}^{d,l} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} v_{x^1}^{1,l} v^{1,l} + \dots + v_{x^d}^{1,l} v^{d,l} \\ \vdots \\ v_{x^1}^{d,l} v^{1,l} + \dots + v_{x^d}^{d,l} v^{d,l} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^m v_x^{\bullet, l} v^{\bullet, l}$$

ist Glg. (2.16) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m b_x^{\bullet,l} v^{\bullet,l} &= 2(a - c_t - c_x u) + c_x \sum_{l=1}^m v_x^{\bullet,l} v^{\bullet,l} \\ \Updownarrow \\ c_x u &= a - c_t + \frac{1}{2} c_x \sum_{l=1}^m v_x^{\bullet,l} v^{\bullet,l} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m b_x^{\bullet,l} v^{\bullet,l}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für reguläres c_x legt Glg. (2.17) die Drift u eindeutig fest.

■

2.5 Abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklungen spezieller Itô-Prozesse

Die Rückwärts-Itô-Formel erlaubt uns einen Itô-Prozeß $c(t, X_t)$, bei dem die Drift und die Diffusion gegeben sind, in eine Itô-Taylor-Reihe bzw. in eine abgebrochene Itô-Taylor-Reihe zu entwickeln.

Satz 2.9: Die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung $c^{(2)}(t, X_t)$ von $c(t, X_t)$, die starke Konvergenzordnung 1 besitzt, hat die Form

$$c^{(2)}(t, X_t) = c_0 + b_0 \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} + a_0 l_{(0)} + \sum_{l=1}^m b_x^{\bullet,l} c_x^{-1} b \Big|_{(t_0, X_{t_0})} \begin{pmatrix} l_{(1,l)} \\ \vdots \\ l_{(m,l)} \end{pmatrix},$$

wobei der untere Index 0 die Auswertung der entsprechenden Funktionen am Punkt (t_0, X_{t_0}) kennzeichnet.

Beweis: Aus Satz 2.6 folgt, daß wir für starke Konvergenzordnung 1 die hierarchische Menge $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, (0), (l)_{l=1, \dots, m}, (n, l)_{n, l=1, \dots, m}\}$ benötigen. D. h. wir brauchen für die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung die Summe über die Itô-Integrale

$$\sum_{l=1}^m \mathcal{D}^l c l_{(l)} \stackrel{\text{vgl. (2.11)}}{=} \sum_{l=1}^m b^{\bullet,l} l_{(l)} = b \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

und die Summe über die doppelten Itô-Integrale

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \sum_{l=1}^m \mathcal{D}^n \mathcal{D}^l c_{l(n,l)} \stackrel{\text{vgl. (2.14)}}{=} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d b_{x^i}^{\bullet, l} \left(\sum_{n=1}^m v^{i,n} I_{(n,l)} \right) = \\
& = \sum_{l=1}^m \left(b_{x^1}^{\bullet, l} \left(\sum_{n=1}^m v^{1,n} I_{(n,l)} \right) + \dots + b_{x^d}^{\bullet, l} \left(\sum_{n=1}^m v^{d,n} I_{(n,l)} \right) \right) = \\
& = \sum_{l=1}^m b_{x^{\bullet}}^{\bullet, l} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^m v^{1,n} I_{(n,l)} \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^m v^{d,n} I_{(n,l)} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^m b_{x^{\bullet}}^{\bullet, l} \begin{pmatrix} v^{1,1} & \dots & v^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{d,1} & \dots & v^{d,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(1,l)} \\ \vdots \\ I_{(m,l)} \end{pmatrix} = \\
& = \sum_{l=1}^m b_{x^{\bullet}}^{\bullet, l} v \begin{pmatrix} I_{(1,l)} \\ \vdots \\ I_{(m,l)} \end{pmatrix}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen hat die Itô-Taylor-Entwicklung von $c(t, X_t)$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
c(t, X_t) & \stackrel{\text{vgl. [KP92]}}{=} c_0 + \sum_{l=1}^m \mathcal{D}^l c_0 I_{(l)} + \mathcal{D}^0 c_0 I_{(0)} + \sum_{l=1}^m \sum_{n=1}^m \mathcal{D}^l \mathcal{D}^n c_0 I_{(l,n)} + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{3}{2}} \right) = \\
& \stackrel{\text{vgl. (2.10), (2.18), (2.19)}}{=} c_0 + b_0 \begin{pmatrix} I_{(1)} \\ \vdots \\ I_{(m)} \end{pmatrix} + a_0 I_{(0)} + \sum_{l=1}^m b_{x^{\bullet}}^{\bullet, l} \underbrace{v}_{=c_x^{-1} b} \Big|_{(t_0, X_{t_0})} \begin{pmatrix} I_{(1,l)} \\ \vdots \\ I_{(m,l)} \end{pmatrix} + \\
& + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Streichen wir aus dieser Entwicklung den Term $\mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{3}{2}} \right)$, der starke Konvergenzordnung $\frac{3}{2}$ besitzt, so erhalten wir die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung von $c(t, X_t)$ mit starker Konvergenzordnung 1 (vorausgesetzt c_x ist regulär).

■

Kapitel 3

Numerische Integration stochastischer differential-algebraischer Gleichungen

Selbst eine Reise von langer Dauer beginnt mit dem ersten Schritt.
(Laotse)

Die Modellierung technischer Systeme unter Berücksichtigung zufallsabhängiger Rauschquellen führt auf stochastische differential-algebraische Gleichungen. Die Integralgleichung eines ladungsorientierten Schaltungsmodells ist gegeben durch

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0. \quad (3.1)$$

Im folgenden nehmen wir an, daß die Lösung der SDAG (3.1) ein eindeutiger Itô-Prozeß ist.

In manchen Fällen ist es möglich ein stochastisches Schaltungsmodell als stochastische Differentialgleichung zu formulieren. Wir erhalten eine SDG formal aus der SDAG (3.1), wenn wir $Aq(x) \equiv x$, $f = u$ und $g = v$ setzen. In Itô-Form hat die SDG die Gestalt

$$X_s \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0. \quad (3.2)$$

In beiden Fällen, SDG bzw. SDAG, wird ein d -dimensionaler Itô-Prozeß X_t gesucht, der die SDAG (3.1) bzw. die SDG (3.2) im Zeitintervall $[t_0 : t_{\text{Ende}}]$ löst. Für die folgenden numerischen Verfahren, mit denen Näherungslösungen von (3.1) bzw. (3.2) berechnet werden können, benötigen wir verschiedene Abkürzungen:

Symbole für numerische Verfahren	
$h := \frac{t_{\text{Ende}} - t_0}{N}$	mit $N \in \mathbb{N}$, ist eine konstante Schrittweite,
$t_n := t_0 + n \cdot h$	mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq n \leq N$, sind diskrete Zeitpunkte des Simulationszeitintervalls $[t_0 : t_{\text{Ende}}]$,
$I_{(j)} := I_{(j), t_n, t_{n+1}}[1]$	mit $j = 1, \dots, m$, sind Wiener-Inkmente,
$I_{(i,j)} := I_{(i,j), t_n, t_{n+1}}[1]$	mit $i, j = 1, \dots, m$, sind doppelte Itô-Integrale, angewendet auf die Konstante 1,
$\text{It}\hat{o} := (I_{(i,j)})_{i,j=1,\dots,m}$	ist eine Matrix doppelter Itô-Integrale,
X_n	ist eine numerische Näherung für X_{t_n} ,
$*_n$	kennzeichnet die Auswertung der Vektor- und Matrixfunktionen $* = f, \dot{f}, g, q, \dot{q}, \ddot{q}, u, v$ am Punkt X_n bzw. (t_n, X_n) ,
$(v_n^\top)^{\bullet,i}$	mit $i = 1, \dots, d$, ist die i^{te} Spalte der Matrix v_n^\top und
$v_{j,n}$	mit $j = 1, \dots, d$, ist die Auswertung der Matrixfunktion v am Punkt $(X_n^1, \dots, X_n^{j-1}, X_{n-1}^j, X_n^{j+1}, \dots, X_n^d)$.

Wie zuvor werden die Komponenten der Vektoren und Matrizen durch obere Indizes gekennzeichnet.

3.1 Stabilitätsbegriffe für numerische Verfahren

Wir untersuchen zwei Stabilitätskonzepte, die numerische Stabilität und die Stabilität bzgl. steifer Probleme. Beide Konzepte verstehen sich bzgl. bestimmter linearer Testgleichungen. Für die Stabilitätsanalyse verwenden wir komplexwertige Funktionen. Bevor wir die Stabilitätsbegriffe mit Def. 3.1 einführen, geben wir Bedingungen an die Parameter linearer Testgleichungen an.

Stabilitätsbedingungen: Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGn) wissen wir, daß die Lösung $x(t) = \exp(\mu t)X_0$ der DG

$$\dot{x}(t) = \mu x(t), \quad x(t_0) = X_0 > 0, \quad (3.3)$$

mit $\mu \in \mathbb{C}$ und $t \geq t_0$, genau dann für $t \rightarrow \infty$ stabil ist, d. h. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, wenn für den Parameter μ gilt:

$$\Re(\mu) < 0.$$

Eine ähnliche Bedingung ist auch an die Parameter einer entsprechenden SDG zu stellen. Eine mögliche lineare stochastische Erweiterung der DG (3.3) ist die SDG

$$dX_t = \mu X_t dt + \nu X_t dB_t, \quad X_{t_0} = X_0 > 0, \quad (3.4)$$

mit $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ und $t \geq t_0$. Die exakte Lösung X_t dieser SDG ist (vgl. [KP92], S. 119):

$$X_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\nu^2\right)(t - t_0) + \nu(B_t - B_{t_0})\right) X_0.$$

Mit $|e^\eta \xi|^2 = e^\eta \xi \overline{e^\eta \xi} = e^\eta e^{\overline{\eta}} \overline{\xi \xi} = e^{\eta + \overline{\eta}} |\xi|^2 = e^{2\Re(\eta)} |\xi|^2$ für $\eta, \xi \in \mathbb{C}$ gilt

$$|X_t|^2 = \exp\left(\left(2\Re(\mu) - 2\Re\left(\frac{1}{2}\nu^2\right)\right)(t - t_0) + 2\Re(\nu)(B_t - B_{t_0})\right) |X_0|^2.$$

Wir definieren $Y_t := |X_t|^2$ und Y_t ist Lösung der SDG

$$dY_t = \left(2\Re(\mu) - \Re(\nu^2) + \frac{1}{2}(2\Re(\nu))^2\right) Y_t dt + 2\Re(\nu) Y_t dB_t, \quad Y_{t_0} = Y_0 = |X_0|^2.$$

Weiter können wir für den Erwartungswert von Y_t folgern (vgl. [Øks95], S. 60):

$$E[Y_t] = \exp\left(\left(2\Re(\mu) - \Re(\nu^2) + 2\Re(\nu)^2\right)(t - t_0)\right) E[Y_0]$$

Wir definieren $z(t) := E[Y_t] = E[|X_t|^2]$ und z ist Lösung der DG

$$\dot{z}(t) = \left(2\Re(\mu) - \Re(\nu^2) + 2\Re(\nu)^2\right) z(t), \quad z(t_0) = z_0 = E[|X_0|^2].$$

Die Lösung z ist genau dann stabil, d. h. das quadratische Mittel von X_t ist genau dann stabil, wenn $2\Re(\mu) - \Re(\nu^2) + 2\Re(\nu)^2 < 0$ bzw.

$$2\Re(\nu)^2 - \Re(\nu^2) < -2\Re(\mu),$$

welches die notwendige Bedingung an die Parameter μ, ν der SDG (3.4) ist. Diese Bedingung unterscheidet sich von der Bedingung, die in [SM96] angegeben ist.

Definition 3.1 (Stabilität): Seien X_n bzw. \tilde{X}_n Näherungslösungen der folgenden Testgleichungen, berechnet mit einem numerischen Verfahren zu den Anfangswerten X_0 bzw. \tilde{X}_0 .

- Das numerische Verfahren heißt stabil im Mittel zur Testgleichung

$$dX_t = \mu X_t dt + \nu X_t dB_t \quad (\text{multiplikatives Rauschen}), \quad (3.5)$$

wobei $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, mit $\Re(\mu) < 0$ und $2\Re(\nu)^2 - \Re(\nu^2) < -2\Re(\mu)$, falls für beliebige Schrittweiten $h > 0$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$E[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|] < E[|X_0 - \tilde{X}_0|].$$

Das numerische Verfahren heißt stabil im quadratischen Mittel zur Testgleichung (3.5), falls für beliebige Schrittweiten $h > 0$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$E\left[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|^2\right]^{\frac{1}{2}} < E\left[|X_0 - \tilde{X}_0|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

- Das numerische Verfahren heißt A-stabil zur Testgleichung

$$dX_t = \mu X_t dt + \nu dB_t \quad (\text{additives Rauschen}), \quad (3.6)$$

wobei $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, mit $\Re(\mu) < 0$, falls für beliebige Schrittweiten $h > 0$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$E[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|] < E[|X_0 - \tilde{X}_0|].$$

3.2 Eine Standardmethode für stochastische Differentialgleichungen

Zur Lösung einer d -dimensionalen SDG $dX_t = u(t, X_t) dt + v(t, X_t) dB_t$ mit m -dimensionalem Wiener-Prozeß B_t sind verschiedene numerische Verfahren bekannt, vgl. [KP92, Mil95]. In [KP92], S. 376, ist ein explizites Verfahren der starken Konvergenzordnung 1 formuliert worden. Es hat die Form

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} = & X_n + u_n h + v_n \begin{pmatrix} I_{(1)} \\ \vdots \\ I_{(m)} \end{pmatrix} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{h}} \left(v(t_n, \chi_1) \begin{pmatrix} I_{(1,1)} \\ \vdots \\ I_{(1,m)} \end{pmatrix} + \dots + v(t_n, \chi_m) \begin{pmatrix} I_{(m,1)} \\ \vdots \\ I_{(m,m)} \end{pmatrix} \right) - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{h}} v_n \begin{pmatrix} I_{(1,1)} + \dots + I_{(m,1)} \\ \vdots \\ I_{(1,m)} + \dots + I_{(m,m)} \end{pmatrix}, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\chi_j = X_n + u_n h + v_n^{\bullet j} \sqrt{h}$$

für $j = 1, \dots, m$.

Das Standard-SDG-Verfahren (3.7) benötigt keine explizite Berechnung partieller Ableitungen nach dem Lösungsprozeß X_t . Soweit möglich verwenden wir das Standard-SDG-Verfahren (3.7), um die numerischen Rechnungen mit den neuen Verfahren, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, zu bestätigen.

3.3 Eine neue effiziente Methode für stochastische Differentialgleichungen

In der Schaltungssimulation ist die Anzahl m der Rauschstromquellen wesentlich größer als die Anzahl d der gesuchten Spannungs- und Stromkomponenten. Um die Effizienz eines numerischen Verfahrens zu steigern, reduzieren wir die Anzahl der Funktionsauswertungen der Diffusionsmatrix je Integrationsschritt. Wir stellen im folgenden ein numerisches Verfahren vor, daß die Auswertungen von $m+1$ auf $d+1$ senkt, vgl. [Pen00, Pen99b]. Die Iterationsvorschrift zur näherungsweise Berechnung des gesuchten Vektors X_t , der die d -dimensionale SDG (3.2) mit

m Rauschstromquellen löst, lautet für das neue SDG-Verfahren im expliziten Fall

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + u_n h + v_n \begin{pmatrix} I_{(1)} \\ \vdots \\ I_{(m)} \end{pmatrix} + v_n \text{lt}\hat{\sigma}^\top v_n^\top \begin{pmatrix} \frac{1}{X_n^1 - X_{n-1}^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{X_n^d - X_{n-1}^d} \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} v_{1,n} \text{lt}\hat{\sigma}^\top (v_n^\top)^{\bullet,1}, \dots, v_{d,n} \text{lt}\hat{\sigma}^\top (v_n^\top)^{\bullet,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{X_n^1 - X_{n-1}^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{X_n^d - X_{n-1}^d} \end{pmatrix}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.1: Ersetzen wir im Verfahren (3.8) die Funktionsauswertung u_n durch u_{n+1} , so erhalten wir eine implizite Version der neuen SDG-Methode (3.8).

Satz 3.1: Die starke Konvergenzordnung des neuen SDG-Verfahrens (3.8) ist sowohl im expliziten als auch im impliziten Fall gleich 1.

Beweis: Die folgende Konstruktion der neuen Methode (3.8) gibt zu erkennen, daß es starke Konvergenzordnung 1 besitzt.

Der Einfachheit halber betrachten wir die i^{te} Komponente ($i = 1, \dots, d$) der SDG (3.2), wobei wir $t_0 = t_n$ und $t = t_{n+1}$ setzen, d. h.

$$X_{t_{n+1}}^i = X_{t_n}^i + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_n}^{t_{n+1}} v^{i,j}(X_s) dB_s^j.$$

Die Driftkomponenten u^i und die Diffusionskomponenten $v^{i,j}$ werden durch vom Lösungsprozeß X_t abhängende Itô-Taylor-Entwicklungen angenähert (vgl. [KP92]), welche lediglich Wiener-Inkremente benutzen:

$$\begin{aligned}
u^i(s, X_s) &= u_n^i + \mathcal{O}_{\square}((s - t_n)^{1/2}), \\
v^{i,j}(X_s) &= v_n^{i,j} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^d v_n^{k,l} \frac{\partial v^{i,j}}{\partial X^k}(X_n) I_{(l),t_n,s} + \mathcal{O}_{\square}(s - t_n),
\end{aligned}$$

wobei mit $\mathcal{O}_{\square}((s - t_n)^p)$ Terme bezeichnet werden, die für die Schrittweite $s - t_n$ die starke Konvergenzordnung p besitzen. Wir müßten für die Itô-Taylor-Entwicklung zuvor die partiellen Ableitungen von $v^{i,j}$ bzgl. x^k berechnen. Diese werden ersetzt durch Differenzennäherungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^{i,j}}{\partial X^k}(X_n) &= \frac{v_n^{i,j} - v^{i,j}(X_n^1, \dots, X_n^{k-1}, X_{n-1}^k, X_n^{k+1}, \dots, X_n^d)}{X_n^k - X_{n-1}^k} + \\
&+ \mathcal{O}(X_n^k - X_{n-1}^k).
\end{aligned}$$

Die Näherung für u^i muß Lebesgue-integriert werden (ds), d. h.

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^i(s, X_s) ds &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(u_n^i + \mathcal{O}_{\square}((s - t_n)^{1/2}) \right) ds = \\ &= u_n^i(t_{n+1} - t_n) + \mathcal{O}_{\square}((t_{n+1} - t_n)^{3/2}). \end{aligned}$$

Die Näherung für $v^{i,j}$ muß Itô-integriert werden (dB_s^j), d. h.

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v^{i,j}(X_s) dB_s^j &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(v_n^{i,j} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^d v_n^{k,l} \left(\frac{v_n^{i,j} - v_{k,n}^{i,j}}{X_n^k - X_{n-1}^k} + \mathcal{O}(X_n^k - X_{n-1}^k) \right) l_{(l),t_n,s} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}_{\square}(s - t_n) \right) dB_s^j = \\ &= v_n^{i,j} l_{(j),t_n,t_{n+1}} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^d v_n^{k,l} \frac{v_n^{i,j} - v_{k,n}^{i,j}}{X_n^k - X_{n-1}^k} \cdot l_{(l,j),t_n,t_{n+1}} + \\ &\quad + \underbrace{\mathcal{O}(X_n^k - X_{n-1}^k) \mathcal{O}_{\square}(t_{n+1} - t_n)}_{\text{starke Ordnung 2, falls } X_1^k - X_0^k \text{ starke Ordnung 1 hat}} + \mathcal{O}_{\square}((t_{n+1} - t_n)^{3/2}). \end{aligned}$$

Für die i^{te} Komponente ergibt das eine Näherung der starken Konvergenzordnung 1 von der Form

$$\begin{aligned} X_{n+1}^i &= X_n^i + u_n^i h + \sum_{j=1}^m v_n^{i,j} l_{(j),t_n,t_{n+1}} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^d v_n^{k,l} \frac{v_n^{i,j} - v_{k,n}^{i,j}}{X_n^k - X_{n-1}^k} l_{(l,j),t_n,t_{n+1}} + \mathcal{O}_{\square}((t_{n+1} - t_n)^{3/2}). \end{aligned}$$

Streichen wir den Ordnungsterm $\mathcal{O}_{\square}((t_{n+1} - t_n)^{3/2})$ und schreiben wir das ganze System dieser Gleichungen ($i = 1, \dots, d$) um, so erhalten wir das numerische Verfahren (3.8), welches starke Konvergenzordnung 1 besitzt.

Betrachten wir nun die implizite Version von (3.8). Aufgrund von

$$u_n^i h = \left(u_{n+1}^i + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{1}{2}} \right) \right) h = u_{n+1}^i h + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{3}{2}} \right)$$

können wir $u_n^i h$ in dem Verfahren (3.8) durch die Näherung $u_{n+1}^i h$ ersetzen, die mit starker Ordnung 1 gegen $u_n^i h$ konvergiert. Die implizite Version von (3.8) besitzt damit ebenfalls starke Konvergenzordnung 1.

■

Bemerkung 3.2: Die Implementierung des neuen SDG-Verfahrens (3.8) setzt im Fall $X_n^k - X_{n-1}^k = 0$ die partiellen Ableitungen zu null, d. h. $\frac{\partial v^{i,j}}{\partial x^k}(X_n) := 0$. Dies führt in der Schaltungssimulation zu guten Ergebnissen.

Um die Stabilität im Mittel für das neue SDG-Verfahren (3.8) zu beweisen, benützen wir folgenden

Satz 3.2 (Lyapunov-Ungleichung, [KP92], S. 17): Sei Y eine positive Zufallszahl mit $E[Y^s] < \infty$ für ein existierendes $s > 0$. Dann haben wir für alle r mit $0 < r < s$:

$$E[Y^r]^{\frac{1}{r}} \leq E[Y^s]^{\frac{1}{s}}.$$

Speziell für $r = \frac{1}{2}$ und $s = 1$ ergibt sich: $E[\sqrt{Y}] \leq \sqrt{E[Y]}$.

Die Stabilität im Mittel bzw. im quadratischen Mittel der impliziten Version der neuen Methode (3.8) (wir ersetzen u_n durch u_{n+1}) wird durch den folgenden Satz festgehalten.

Satz 3.3: Wir nehmen an, daß $h > 0$ und für die Parameter $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ der Testgleichung (3.5) gilt:

$$\Re(\mu) < 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{2}\Re(\mu) + |\nu|^2 \leq 0.$$

Die implizite Version des neuen SDG-Verfahrens (3.8) ist sowohl stabil im Mittel als auch stabil im quadratischen Mittel bzgl. der Testgleichung (3.5).

Beweis: Wenden wir die implizite Version von (3.8) auf die Testgleichung (3.5) an, so erhalten wir

$$X_{n+1} = X_n \frac{1 + \nu I_{(1),t_n,t_{n+1}} + \nu^2 I_{(1,1),t_n,t_{n+1}}}{1 - h\mu}. \quad (3.9)$$

Wir berechnen mit dieser Methode Näherungen X_{n+1} bzw. \tilde{X}_{n+1} zu zwei verschiedenen Anfangswerten X_0 bzw. \tilde{X}_0 . Die Differenz der Näherungen ergibt

$$\begin{aligned} X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1} &= (X_n - \tilde{X}_n) \frac{1 + \nu I_{(1),t_n,t_{n+1}} + \nu^2 I_{(1,1),t_n,t_{n+1}}}{1 - h\mu} = \dots = \\ &= (X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1 + \nu I_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 I_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1 - h\mu}. \end{aligned}$$

Die Zufallszahlen $|X_0 - \tilde{X}_0|$, $|1 + \nu I_{(1),t_0,t_1} + \nu^2 I_{(1,1),t_0,t_1}|$, \dots , $|1 + \nu I_{(1),t_n,t_{n+1}} + \nu^2 I_{(1,1),t_n,t_{n+1}}|$ sind stochastisch unabhängig (dies folgt aus den Eigenschaften der Wiener-Inkremente). Weiter haben wir für die Erwartungswerte der Itô-Integrale für $j = 0, \dots, n$, vgl. [KP92], S. 222:

$$\begin{aligned} E \left[I_{(1),t_j,t_{j+1}} \right] &= E \left[I_{(1,1),t_j,t_{j+1}} \right] = E \left[I_{(1),t_j,t_{j+1}} I_{(1,1),t_j,t_{j+1}} \right] = 0, \\ E \left[I_{(1),t_j,t_{j+1}}^2 \right] &= h, \quad E \left[I_{(1,1),t_j,t_{j+1}}^2 \right] = \frac{1}{2} h^2. \end{aligned}$$

Wir können das Mittel der Abweichung $|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|] &= \mathbb{E} \left[\sqrt{(X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} (X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu}} \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\sqrt{(X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} (X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\bar{\nu} l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \bar{\nu}^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu}} \right] = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|] \mathbb{E} \left[\frac{1}{|1-h\mu|^{n+1}} \prod_{j=0}^n \left(1 + \nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\nu} l_{(1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}}^2 + \bar{\nu} \nu^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\nu}^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \nu \bar{\nu}^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\stackrel{\text{Satz 3.2}}{\leq} \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|] \left(\mathbb{E} \left[\frac{1}{|1-h\mu|^{2(n+1)}} \prod_{j=0}^n \left(1 + \nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\nu} l_{(1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}}^2 + \bar{\nu} \nu^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\nu}^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \nu \bar{\nu}^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^4 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}^2 \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|] \left(\frac{1}{|1-h\mu|^{2(n+1)}} \prod_{j=0}^n \left(1 + |\nu|^2 h + |\nu|^4 \frac{1}{2} h^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|] \left(\prod_{j=0}^n \frac{1 + |\nu|^2 h + \frac{1}{2} |\nu|^4 h^2}{|1-h\mu|^2} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Berechnung ergibt für das quadratische Mittel der Abweichung $|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|^2] &= \mathbb{E} \left[(X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} (X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[(X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} (X_0 - \tilde{X}_0) \prod_{j=0}^n \frac{1+\bar{\nu} l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \bar{\nu}^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}}{1-h\mu} \right] = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|^2] \frac{1}{|1-h\mu|^{2(n+1)}} \prod_{j=0}^n \left(1 + \nu l_{(1),t_j,t_{j+1}} + \nu^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\nu} l_{(1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}}^2 + \bar{\nu} \nu^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\nu}^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + \nu \bar{\nu}^2 l_{(1),t_j,t_{j+1}} l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} + |\nu|^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}}^2 \right) \right] = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|^2] \frac{1}{|1-h\mu|^{2(n+1)}} \prod_{j=0}^n \left(1 + |\nu|^2 h + |\nu|^2 l_{(1,1),t_j,t_{j+1}} \frac{1}{2} h^2 \right) = \\
&= \mathbb{E} [|X_0 - \tilde{X}_0|^2] \prod_{j=0}^n \frac{1 + |\nu|^2 h + \frac{1}{2} |\nu|^4 h^2}{|1-h\mu|^2}.
\end{aligned}$$

Für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$, mit $\Re(\mu) < 0$, muß der Parameter $\nu \in \mathbb{C}$ die Annahme $|\nu|^2 < -\sqrt{2}\Re(\mu)$ erfüllen, welches eine weitere Bedingung für ν ergibt:

$$|\nu|^2 < -\sqrt{2}\Re(\mu) < -2\Re(\mu) \quad \text{und} \quad |\nu|^4 < 2\Re(\mu)^2 \leq 2(\Re(\mu)^2 + \Im(\mu)^2) = 2|\mu|^2.$$

Für das Mittel bzw. quadratische Mittel der obigen Abweichung benötigen wir zusätzlich

$$\frac{1 + |\nu|^2 h + \frac{1}{2} |\nu|^4 h^2}{|1-h\mu|^2} < \frac{1 - 2\Re(\mu)h + \frac{1}{2} 2|\mu|^2 h^2}{1 - 2h\Re(\mu) + h^2|\mu|^2} = 1,$$

wobei $h > 0$. Diese Abschätzung ergibt für das Mittel bzw. quadratische Mittel der obigen Abweichung

$$\begin{aligned} E[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|] &< E[|X_0 - \tilde{X}_0|] \quad \text{bzw.} \\ E\left[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|^2\right]^{\frac{1}{2}} &< E\left[|X_0 - \tilde{X}_0|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.3: Die in [SM96] benutzte Stabilitätsbedingung $2\Re(\mu) + |\nu|^2 < 0$ ist für die neue SDG-Methode (3.8) nicht erfüllbar, daher mußten wir die Bedingungen an die Parameter μ und ν anpassen.

Satz 3.4: Die implizite Version des neuen SDG-Verfahrens (3.8) ist A-stabil.

Beweis: Für die A-Stabilität müssen wir die Testgleichung (3.6) betrachten. Die implizite Version des Verfahrens (3.8) reduziert sich zu

$$X_{n+1} - X_n - h\mu X_{n+1} - \nu l_{(1)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad X_{n+1} = X_n \frac{1}{1 - h\mu} + \frac{\nu l_{(1)}}{1 - h\mu}. \quad (3.10)$$

Daraus folgt

$$X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1} = (X_n - \tilde{X}_n) \frac{1}{1 - h\mu} = \dots = (X_0 - \tilde{X}_0) \frac{1}{(1 - h\mu)^{n+1}}.$$

Weiter gilt

$$|1 - h\mu| = (1 - h\Re(\mu))^2 + (-h\Im(\mu))^2 = 1 - \underbrace{2h\Re(\mu)}_{<0} + \underbrace{h^2(\Re(\mu)^2 + \Im(\mu)^2)}_{>0} > 1,$$

d. h. für jedes $h > 0$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\mu) < 0$ erhalten wir

$$E[|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|] = E[|X_0 - \tilde{X}_0|] \underbrace{\frac{1}{|1 - h\mu|^{n+1}}}_{<1} < E[|X_0 - \tilde{X}_0|].$$

Die letzte Ungleichung zeigt, daß das Verfahren (3.8) A-stabil ist.

■

Neben der Zuverlässigkeit eines numerischen Verfahrens ist eine wichtige Eigenschaft die Effizienz in Bezug auf industrielle Anwendungen. Geläufige Integrationsmethoden für SDGn benötigen je Integrationsschritt mindestens $m + 1$ Auswertungen der Diffusionsmatrix v . Berücksichtigen wir alle Rauschquellen in einer elektrischen Schaltung, so hat die Matrix v erheblich mehr Spalten (die Anzahl entspricht der Anzahl der Rauschquellen) als Zeilen (die Anzahl entspricht der Anzahl der Knotenspannungen und bestimmter Zweigströme der Schaltung). D. h. in der Schaltungssimulation haben wir hochdimensionale Diffusionsmatrizen v , wobei m wesentlich größer als d ist. Aus diesem Grund müssen wir zahlreiche Auswertungen der Matrix v je Integrationsschritt vermeiden. Das neue Verfahren leistet dieses, in jedem Integrationsschritt sind „nur“ $d + 1$ Auswertungen von v nötig. Dies und die numerischen Rechnungen in Kapitel 4 zeigen die Effizienz des neuen Verfahrens.

3.4 Eine neue Methode für stochastische differential-algebraische Gleichungen

In diesem Abschnitt stellen wir ein neues numerisches Verfahren vor, das auf eine spezielle Klasse von stochastischen differential-algebraischen Gleichungen angewendet werden kann, vgl. [Pen99a].

Satz 3.5: Sei

$$A\dot{q}(x(t)) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = X_0, \quad (3.11)$$

eine differential-algebraische Gleichung mit differentiellem Index 1. Wir erweitern das deterministische Modell (3.11) um Weißes Rauschen. Mit Itô's Interpretation ergibt sich eine stochastische differential-algebraische Gleichung vom Typus

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & A(q_{n+1} + \lambda(\dot{q}_{n+1} - h\ddot{q}_{n+1})) - (\lambda + h)f_{n+1} + \lambda h\dot{f}_{n+1} - \\ & - A(q_n + \lambda\dot{q}_n) + \lambda f_n - g_n \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \\ & - \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda\dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ ein implizites numerisches Verfahren. Die numerische Näherung, die implizit durch (3.12) definiert wird, strebt mit starker Konvergenzordnung 1 gegen die exakte Lösung von (3.1).

Beweis: SDAG (3.1) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & Aq(X_s) + \lambda(A\dot{q}(X_s) - f(s, X_s)) \Big|_{t_0}^t = \\ & = \lambda(A\dot{q}(X_s) - f(s, X_s)) \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s = \\ & = \int_{t_0}^t (f(s, X_s) + \lambda(A\dot{q}(X_s) - f(s, X_s))) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} c(t, X_t) &:= Aq(X_t) + \lambda(A\dot{q}(X_t) - f(t, X_t)), \\ a(t, X_t) &:= f(t, X_t) + \lambda(A\ddot{q}(X_t) - \dot{f}(t, X_t)), \\ b(t, X_t) &:= g(t, X_t). \end{aligned}$$

Aufgrund der Index-1-Annahme ist die Jacobi-Matrix c_x für fast alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ regulär, vgl. Satz 2.1. Verwenden wir die abgebrochene Itô-Taylor-Entwicklung von $c(t, X_t)$ der starken Konvergenzordnung 1, vgl. Satz 2.9, so erhalten wir:

$$c^{(2)} = c_0 + g_0 \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} + (f_0 + \lambda(A\ddot{q}_0 - \dot{f}_0))l_{(0)} + \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} c_x^{-1} g \Big|_{(t_0, X_{t_0})} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} (f_0 + \lambda(A\ddot{q}_0 - \dot{f}_0))l_{(0)} &= \left(f + \lambda(A\ddot{q} - \dot{f}) + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{1}{2}} \right) \right) \underbrace{l_{(0)}}_{=h} = \\ &= (f + \lambda(A\ddot{q} - \dot{f}))l_{(0)} + \mathcal{O}_{\square} \left(h^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

können wir $(f_0 + \lambda(A\ddot{q}_0 - \dot{f}_0))l_{(0)}$ aus Glg. (3.14) durch die Näherung $(f + \lambda(A\ddot{q} - \dot{f}))l_{(0)}$ ersetzen, die mit starker Ordnung 1 gegen $(f_0 + \lambda(A\ddot{q}_0 - \dot{f}_0))l_{(0)}$ konvergiert.

Als letztes setzen wir $t_0 = t_n$ bzw. $t = t_{n+1}$ und ordnen die sich ergebenden Terme in (3.14) neu an. Wir erhalten die Näherung (3.12). Glg. (3.12) definiert implizit eine numerische Näherung X_n für X_{t_n} , wobei $n = 0, \dots, N$.

Wir nehmen an, daß die Näherung X_n gegen X_{t_n} mit starker Konvergenzordnung kleiner als 1 strebt. Verwenden wir $c(t, x) \equiv x$, dann widerspricht letzte Annahme der starken Konvergenzordnung 1 von $c^{(2)}$. D. h. die implizit definierte Näherung X_n strebt mit starker Konvergenzordnung 1 gegen die exakte Lösung X_{t_n} von (3.1).

■

Die Ableitungen \dot{f} , \dot{q} bzw. \ddot{q} stehen in der Schaltungssimulation im allgemeinen nicht explizit zur Verfügung. Um das numerische Verfahren (3.12) implementieren zu können, benötigen wir Näherungen für die Ableitungen. Die sich so ergebende numerische Methode wird in folgendem Korollar angegeben.

Korollar 3.1: *Verwenden wir für die Ableitungen \dot{f}_{n+1} , \dot{q}_{n+1} bzw. \ddot{q}_{n+1} Differenzennäherungen, so reduziert sich das numerische Verfahren (3.12) auf*

$$\begin{aligned} A(q_{n+1} - q_n) - hf_{n+1} - g_n \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \\ - \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

welches die starke Konvergenzordnung 1 besitzt.

Beweis: Bezüglich der Zeitableitungen ist die Vorwärts-Taylor-Entwicklung von q_j für $j = 0, \dots, N-1$ gegeben durch $q_j = q_{j+1} - h\dot{q}_{j+1} + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_{j+1} + \mathcal{O}(h^3)$. Dieses ergibt für $j = n-1, n$

$$\begin{aligned}\dot{q}_n &= \frac{q_n - q_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}\ddot{q}_n + \mathcal{O}(h^2), \\ \dot{q}_{n+1} &= \frac{q_{n+1} - q_n}{h} + \frac{h}{2}\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Kombinieren wir beide Gleichungen zusammen mit der Taylor-Entwicklung für die zweite Zeitableitung von q_{n+1} , d. h. mit $\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_n + \mathcal{O}(h)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n &= \frac{q_{n+1} - q_n}{h} - \frac{q_n - q_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}(\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}(\ddot{q}_n + \mathcal{O}(h) - \ddot{q}_n) + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h} + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Mit der Rückwärts- bzw. Vorwärts-Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_n + \frac{h^3}{3!}\ddot{\ddot{q}}_n + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{bzw.} \\ q_{n-1} &= q_n - h\dot{q}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_n - \frac{h^3}{3!}\ddot{\ddot{q}}_n + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

ergibt sich die numerische Differentiationsformel

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Verwenden wir $\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_n + \mathcal{O}(h)$, so können wir folgern

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h).\tag{3.17}$$

Setzen wir die Näherungen (3.16) und (3.17) für die Ableitungen in Glg. (3.12) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= A(q_{n+1} - q_n) + \lambda A(\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n) - \lambda h A \ddot{q}_{n+1} - \lambda(f_{n+1} - f_n) - hf_{n+1} + \lambda h \dot{f}_{n+1} - \\ &\quad - g_n \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} = \\ &= A(q_{n+1} - q_n) + \lambda A \left(\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h} + \mathcal{O}(h^2) \right) - \\ &\quad - \lambda h A \left(\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h) \right) - \\ &\quad - \lambda(f_{n+1} - f_n) - hf_{n+1} + \lambda h \left(\frac{f_{n+1} - f_n}{h} + \mathcal{O}(h) \right) - \\ &\quad - g_n \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(q_{n+1} - q_n) - hf_{n+1} - \\
&\quad - g_n \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^m g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \underbrace{\lambda A \cdot \mathcal{O}(h^2) + \lambda \cdot \mathcal{O}(h^2)}_{\text{können für starke Konvergenzordnung 1 vernachlässigt werden}}.
\end{aligned}$$

■

Die Wahl von λ : In Glg. (3.13) können wir auf beiden Seiten der Gleichung den λ -Ausdruck streichen. d. h. Glg. (3.13) ist äquivalent zur SDAG (3.1) und deshalb besitzen beide Gleichungen die gleiche exakte Lösung X_t . Um die Wahl von λ einschränken zu können, untersuchen wir das quadratische Mittel des neuen SDAG-Verfahrens (3.15)

$$\begin{aligned}
F_{\text{Verfahren}} &:= \underbrace{A(q_{n+1} - q_n) - hf_{n+1}}_{=:V} - \underbrace{g_n}_{=:M} \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \underbrace{g_x^{\bullet j} \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} g \Big|_{(t_n, X_n)}}_{=:M_j} \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das Quadrat der Euklidischen Vektornorm des numerischen Verfahrens $F_{\text{Verfahren}}$ ist

$$\begin{aligned}
|F_{\text{Verfahren}}|^2 &= \left| V - M \begin{pmatrix} l_{(1)} \\ \vdots \\ l_{(m)} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^m M_j \begin{pmatrix} l_{(1,j)} \\ \vdots \\ l_{(m,j)} \end{pmatrix} \right|^2 = \\
&= \sum_{i=1}^d \left(V^i - \sum_{l=1}^m M^{i,l} l_{(l)} - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M_j^{i,l} l_{(l,j)} \right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^d \left((V^i)^2 - 2V^i \cdot \sum_{l=1}^m M^{i,l} l_{(l)} + \left(\sum_{l=1}^m M^{i,l} l_{(l)} \right)^2 - 2V^i \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M_j^{i,l} l_{(l,j)} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{l=1}^m M^{i,l} l_{(l)} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M_j^{i,l} l_{(l,j)} + \left(\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M_j^{i,l} l_{(l,j)} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Mit den Erwartungswerten für die mehrfachen Itô-Integrale, vgl. [KP92], S. 222, 223, ergibt sich für

das quadratische Mittel der numerischen Methode

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|F_{\text{Verfahren}}|^2] &= \sum_{i=1}^d \left((V^i)^2 - 2V^i \sum_{l=1}^m M^{i,l} \underbrace{\mathbb{E} [I_{(l)}]}_{=0} + \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m M^{i,l_1} M^{i,l_2} \underbrace{\mathbb{E} [I_{(l_1)} I_{(l_2)}]}_{=h\delta_{l_1,l_2}} - \right. \\
&\quad - 2V^i \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M_j^{i,l} \underbrace{\mathbb{E} [I_{(l,j)}]}_{=0} + 2 \sum_{l_1=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{l_2=1}^m M^{i,l_1} M_j^{i,l_2} \underbrace{\mathbb{E} [I_{(l_1)} I_{(l_2,j)}]}_{=0} + \\
&\quad \left. + \sum_{j_1=1}^m \sum_{l_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \sum_{l_2=1}^m M_{j_1}^{i,l_1} M_{j_2}^{i,l_2} \underbrace{\mathbb{E} [I_{(l_1,j_1)} I_{(l_2,j_2)}]}_{=\frac{1}{2}h^2\delta_{l_1,l_2}\delta_{j_1,j_2}} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^d (V^i)^2 + h \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^m (M^{i,l})^2 + \frac{1}{2}h^2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m (M_j^{i,l})^2 = \\
&= |V|^2 + h \|M\|_F^2 + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^m \|M_j\|_F^2 \leq \\
&\leq |A(q_{n+1} - q_n) - hf_{n+1}|^2 + h \|g_n\|_F^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^m m \|g_x^{\bullet,j}(t_n, X_n)\|_2^2 \|g_n\|_2^2 \left\| \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} \right\|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei $\|*\|_F$ die Frobenius-Matrixnorm und $\|*\|_2$ die Matrix-2-Norm ist (vgl. [Gv91], S. 56). Die letzte Ungleichung ergibt sich aufgrund der Beziehung $\|M_j\|_F \leq \sqrt{m}\|M_j\|_2$ und der Submultiplikativitätseigenschaft der Matrix-2-Norm, vgl. [Gv91], S. 56.

Wegen $F_{\text{Verfahren}} = 0$ haben wir $\mathbb{E} [|F_{\text{Verfahren}}|^2] = 0$. Um den Fehler zu minimieren, den wir durch λ eingeführt haben, wählen wir λ so, daß $\left\| \left(A(q_x + \lambda \dot{q}_x) - \lambda f_x \right)^{-1} \right\|_2$ so klein wie möglich ist.

Abhängig von den zu lösenden Gleichungen, können wir λ speziell wählen:

- Ist SDAG (3.1) eine stochastische Differentialgleichung, d. h. $A = I_d$ und $q(x) = x$, wobei I_d die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{d,d}$ ist, dann ist der differentielle Index des zugrundeliegenden deterministischen Systems gleich 0. In diesem Fall ist die Matrix Aq_x regulär und wir können $\lambda = 0$ für die numerische Methode wählen, welche für den Index-1-Fall konstruiert wurde. D. h. im Index-0-Fall wird durch λ kein Fehler eingeführt.
- Hat die SDAG (3.1) additives Rauschen, so verschwindet der Ausdruck mit den doppelten Itô-Integralen ($g_x^{\bullet,j} \equiv 0$ im Falle additiven Rauschens). In diesem Fall ist die numerische Methode (3.15) unabhängig von λ .
- $-\lambda$ darf kein Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems $Aq_x \vec{v} = \mu(A\dot{q}_x - f_x)\vec{v}$, mit $\mu \in \mathbb{C}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$, sein. Dieses garantiert die Invertierbarkeit der Matrix $Aq_x + \lambda(A\dot{q}_x - f_x)$, welche für das Verfahren (3.15) notwendig ist.
- Für die numerischen Berechnungen, vgl. Kapitel 4, haben wir sowohl $\lambda = h^2$ als auch $\lambda = h$ in der numerischen Methode gesetzt. In beiden Fällen erhielten wir ähnliche Ergebnisse.

Im Zusammenhang mit stochastischen Differentialgleichungen bedeutet numerische Stabilität eines Verfahrens, daß es sowohl stabil im Mittel als auch im quadratischen Mittel ist.

Satz 3.6: Wir nehmen an, daß $h > 0$ und für die Parameter $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ der Testgleichung (3.5) gilt:

$$\Re(\mu) < 0 \quad \text{und} \quad |\nu|^2 < -\sqrt{2}\Re(\mu).$$

Dann ist das neue SDAG-Verfahren (3.15) sowohl stabil im Mittel als auch stabil im quadratischen Mittel.

Beweis: Für die Stabilität im Mittel bzw. im quadratischen Mittel müssen wir die Testgleichung (3.5) betrachten. Wir erhalten die Testgleichung aus der SDAG (3.1), wenn wir $A = 1$, $q(x) = x$, $f(t, x) = \mu x$ und $g(t, x) = \nu x$ setzen. Mit $\lambda = 0$ reduziert sich das Verfahren (3.15) auf

$$X_{n+1} - X_n - h\mu X_{n+1} - \nu X_n I_{(1)} - \nu^2 I_{(1,1)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad X_{n+1} = X_n \frac{1 + \nu I_{(1)} + \nu^2 I_{(1,1)}}{1 - h\mu}.$$

Dies ist die gleiche Iterationsvorschrift wie beim neuen SDG-Verfahren (3.8), vgl. (3.9). Der Rest dieses Beweises verläuft analog zum Beweis zu Satz 3.3.

■

Das zeitliche Spannungsverhalten bei der Simulation deterministischer Schaltungsmodelle ist oft gekennzeichnet durch steile Spannungsverläufe an den Schaltungsknoten. In diesem Fall sprechen wir von steifen Modellgleichungen. Behandeln wir steife Gleichungen müssen die numerischen Verfahren A-stabil sein. A-Stabilität sichert, daß eine Verkleinerung der Schrittweite den Näherungsfehler reduziert.

Satz 3.7: Das neue SDAG-Verfahren (3.15) ist A-stabil.

Beweis: Für die A-Stabilität müssen wir die Testgleichung (3.6) betrachten. Wir erhalten die Testgleichung aus der SDAG (3.1), wenn wir $A = 1$, $q(x) = x$, $f(t, x) = \mu x$ und $g(t, x) = \nu$ setzen. Mit $\lambda = 0$ reduziert sich das Verfahren (3.15) auf

$$X_{n+1} - X_n - h\mu X_{n+1} - \nu I_{(1)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad X_{n+1} = X_n \frac{1}{1 - h\mu} + \frac{\nu I_{(1)}}{1 - h\mu}.$$

Dies ist die gleiche Iterationsvorschrift wie beim Verfahren (3.8), vgl. (3.10). Der Rest ergibt sich analog zum Beweis zu Satz 3.4.

■

Ein aus der Literatur bekanntes numerisches Verfahren für lineare SDAGn mit additivem Rauschen [SD98] ist ein Spezialfall der neuen SDAG-Methode (3.15). Für den linearen Fall mit additivem Rauschen, d. h. für $q(X_t) = X_t$, $f(t, X_t) = BX_t + f(t)$ und $g(t, X_t) = g(t)$, reduziert sich das numerische Verfahren (3.15) auf

$$(A - hB)X_{n+1} = hf(t_{n+1}) + AX_n + g(t_n) \begin{pmatrix} I_{(1)} \\ \vdots \\ I_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Dies ist das Verfahren aus [SD98] für die Parameterwahl $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ und $\gamma = 0$.

Kapitel 4

Numerische Simulation

Es ist nicht genug zu wissen, man muß auch anwenden.
(Johann Wolfgang von Goethe)

In diesem Kapitel untersuchen wir eine mehrdimensionale geometrische Brownsche Bewegung und mehrere elektrische Schaltungen, die im Bereich der Schaltungssimulation als sog. „Eckdaten“ verwendet werden. Wir simulieren die Schaltungen Differentiator, *RLC*-Schwingkreis, Inverter, Ringoszillator, Transistorverstärker und Ladungspumpe.

Die geometrische Brownsche Bewegung und die Schaltungsbeispiele Differentiator, Inverter und *RLC*-Schwingkreis werden als SDG

$$X_s \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t u(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t v(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0, \quad (4.1)$$

modelliert. Die Schaltungen Transistorverstärker und Ladungspumpe werden ladungsorientiert modelliert, d. h. in der Form

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0. \quad (4.2)$$

Der Ringoszillator kann sowohl als SDG (4.1) als auch als SDAG (4.2) modelliert werden. In den folgenden Abschnitten werden die Matrix A und die Funktionen q , f , g bzw. u , v explizit angegeben.

Zur Lösung der SDGn verwenden wir das Standard-SDG-Verfahren (3.7), das neue SDG-Verfahren (3.8) und das neue SDAG-Verfahren (3.15). Die Lösung der SDAGn ist nur mit

dem neuen numerischen SDAG-Verfahren (3.15) möglich. Bei den Schaltungsbeispielen werden die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen entsprechend Anhang A modelliert und mit einem Skalierungsfaktor größer als eins multipliziert, um den Einfluß der Rauschstromquellen auf die Simulation signifikant zu vergrößern.

Die Implementierung der Verfahren (3.7), (3.8) und (3.15) verwendet eine konstante Schrittweite. Als Programmiersprache wird Fortran 77 [Reg87] verwendet, mit dem Übersetzer GNU project F77 (v0.5.18). Die Brownschen Inkremente werden wie in [KP92], S. 174, berechnet und die doppelten Itô-Integrale wie in [KP92], S. 202. Die an den Diskretisierungszeitpunkten erforderlichen normalverteilten Zufallszahlen müssen auf Rechenanlagen algorithmisch erzeugt werden, vgl. [Knu73], und werden Pseudozufallszahlen genannt. Die numerischen Ergebnisse wurden in doppelter Genauigkeit auf einem Pentium-II-(300 MHz)-Prozessor-Rechner berechnet. Nähere Informationen zu den Fortran 77-Quellen sind beim Autor erhältlich.

Der Aufwand der numerischen Verfahren je Integrationsschritt ist gegeben durch:

Standard-SDG-Verfahren (3.7)	
1	Auswertung des Driftvektors u .
$m + 1$	Auswertungen der Diffusionsmatrix v .
neues SDG-Verfahren (3.8)	
1	Auswertung des Driftvektors u .
$d + 1$	Auswertungen der Diffusionsmatrix v .
neues SDAG-Verfahren (3.15)	
1	Auswertung des Vektors q .
1	Auswertung des Driftvektors f .
1	Auswertung der Diffusionsmatrix g .
$m + 1$	Auswertungen der Jacobi-Matrizen.
$m + 1$	numerische Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit Gaußschen Eliminationsschritten (LU-Zerlegung), vgl. [Gv91].
1	numerische Lösung eines nicht-linearen Gleichungssystems mit dem Newton-Verfahren, vgl. [SB93], einschließlich der notwendigen Auswertungen von q , f , bzw. ihrer Jacobi-Matrizen.

Um die Lösungen der numerischen Integrationen zu verschiedenen Schrittweiten h miteinander vergleichen zu können, müssen wir sicherstellen, daß alle Integrationen bzgl. des gleichen Pfades der Brownschen Bewegung durchgeführt werden. Wir erreichen dies, indem wir die Diskretisierung der Pfade der Brownschen Bewegung bzgl. einer Basisschrittweite h_{Basis} vornehmen, die von der Integrationsschrittweite h unabhängig ist. Bei diesem Vorgehen liegt den numerischen Integrationen zu verschiedenen Schrittweiten h immer der gleiche Pfad der Brownschen Bewegung zugrunde. Aus rechentechnischen Gründen ist es vorteilhaft, wenn h als ganzzahliges Vielfaches von h_{Basis} gewählt wird.

Die numerischen Ergebnisse der folgenden Abschnitte zeigen sowohl einzelne pfadweise Lösungen als auch über 100 verschiedene Lösungspfade gemittelte Lösungen, wobei zur Mittelung das

arithmetische Mittel verwendet wird. Bei den Schaltungsbeispielen ist [s] (Sekunde) die SI-Einheit der Integrationsschrittweite h . Die Achsenbeschriftungen der grafischen Darstellungen sind durch „*₁ gegen *₂“ gekennzeichnet, d. h. *₁ ist die Ordinate und *₂ die Abszisse des dargestellten Koordinatensystems.

4.1 Geometrische Brownsche Bewegung

Die Lösung einer eindimensionalen SDG $dX_t = \mu X_t dt + \nu X_t dB_t$, mit $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, wird geometrische Brownsche Bewegung genannt, vgl. [KP92]. Diese SDG tritt in der Finanzmathematik auf. Sie ist als Black-Scholes-Modell zur Berechnung von Optionspreisen bekannt.

Wir lösen in diesem Abschnitt numerisch eine mehrdimensionale geometrische Brownsche Bewegung (vgl. [Øks95], S. 53) mit den Dimensionen $d = 2$ und $m = 3$. Sie wird beschrieben durch die SDG

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu X_t^1 \\ \mu X_t^2 \end{pmatrix}}_{=:f(t,X_t)} dt + \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 X_t^1 & \nu_2 X_t^2 & \nu_3 X_t^1 \\ \nu_1 X_t^2 & \nu_2 X_t^1 & \nu_3 X_t^2 \end{pmatrix}}_{=:g(t,X_t)} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \\ dB_t^3 \end{pmatrix}, \quad X_{t_0} = X_0, \quad (4.3)$$

welche die Form (4.1) hat. Für die Vektoren und Matrizen aus der allgemeinen Darstellung (4.2) gilt $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $q \in \mathbb{R}^2$, $X_t \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathbb{R}^{2,3}$ und $B_t \in \mathbb{R}^3$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q(X_t) = X_t.$$

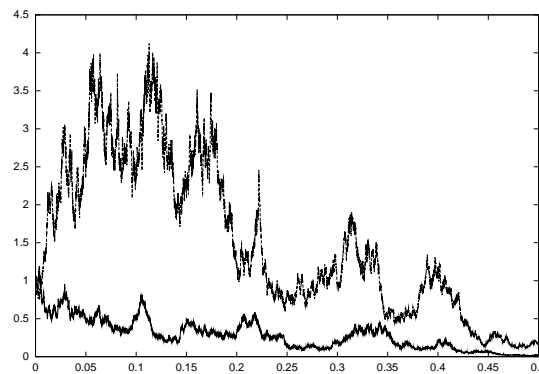
Die analytische Lösung der SDG (4.3) ist

$$\begin{aligned} X_t = & \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) \right) (t - t_0) + \right. \\ & \left. + \nu_1 (B_t^1 - B_{t_0}^1) + \nu_2 (B_t^2 - B_{t_0}^2) + \nu_3 (B_t^3 - B_{t_0}^3) \right) X_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Abb. 4.1 zeigt zwei Pfade der ersten Komponente X_t^1 der zweidimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung (4.4).

Wir vergleichen die numerische Lösung der Verfahren (3.7), (3.8) und (3.15) zu verschiedenen Schrittweiten h mit der analytischen Lösung (4.4). Wir betrachten die geometrische Brownsche Bewegung im Intervall $t \in [0 : 1]$. Mit den Parametern

$$\begin{array}{r} \hline \mu \quad = 5 \\ \hline \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 2 \\ \hline \end{array}$$



X_t^1 gegen t

Abbildung 4.1: Zwei pfadweise Lösungen für die Komponente X_t^1 von (4.3), die für das Simulationsintervall $[0 : 0,5]$ aufgetragen sind und mit dem SDAG-Verfahren (3.15) zur Schrittweite $h = 2^{-14}$ berechnet wurden.

und dem Anfangswert

$$\overline{X_0 = (1, 1)^T}$$

berechnen wir für die Diskretisierungszeitpunkte $t_0, \dots, t_n, \dots, t_N$ den maximalen relativen Fehler

$$\varepsilon_{\text{rel}} := \max_{0 \leq n \leq N} \left| \frac{X_{t_n} - X_n}{X_{t_n}} \right|$$

zwischen der analytischen Lösung X_{t_n} und der Näherungslösung X_n zu verschiedenen Schrittweiten $h = 2^{-5}, 2^{-6}, \dots, 2^{-14}$ und gemittelt über 100 verschiedene Lösungspfade. Abb. 4.2 zeigt, daß für die Standard-SDG-, die neue SDG- bzw. die neue SDAG-Methode die Halbierung der Schrittweite h den relativen Fehler ε_{rel} halbiert. Dies zeigt, daß sowohl das neue SDG-Verfahren (3.8) als auch das neue SDAG-Verfahren (3.15) jeweils starke Konvergenzordnung 1 besitzen.

4.2 Differentiator

In diesem Abschnitt behandeln wir eine elektrische Schaltung mit einem Operationsverstärker OV (Verstärkungsfaktor A), einen sog. Differentiator. Wir betrachten eine thermische Rauschstromquelle am Widerstand R . Das zugehörige Ersatzschaltbild zeigt Abb. 4.3.

Der Differentiator liefert eine Ausgangsspannung am Knoten 2, die mit der Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsspannung U_{in} steigt. Damit können wir eine Dreiecksspannung U_{in} in eine Rechteckschwingung verwandeln. Die Werte der Bauelemente sind

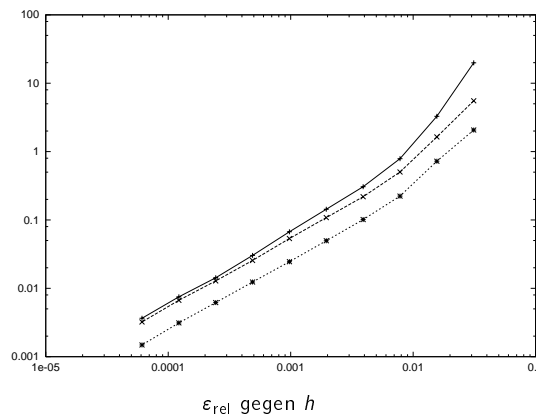


Abbildung 4.2: Relativer Fehler ϵ_{rel} gegenüber der Schrittweite h bei logarithmischer Skalierung für (+—+) das Standard-SDG-Verfahren (3.7), (x---x) das neue SDG-Verfahren (3.8) und (*····*) das neue SDAG-Verfahren (3.15).

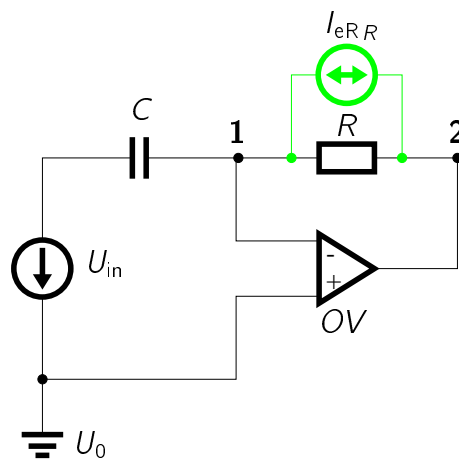


Abbildung 4.3: Ersatzschaltbild eines Differentiators mit thermischer Rauschstromquelle am Widerstand R .

$U_0 = 0$						[V]
$U_{in}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-9} \\ 2 \cdot 10^6 \cdot t - 1 \cdot 10^{-2} & \text{für } 5 \cdot 10^{-9} < t \leq 10 \cdot 10^{-9} \\ 10 \cdot 10^{-3} & \text{für } 10 \cdot 10^{-9} < t \leq 15 \cdot 10^{-9} \\ -2 \cdot 10^6 \cdot t + 4 \cdot 10^{-2} & \text{für } 15 \cdot 10^{-9} < t \leq 20 \cdot 10^{-9} \\ 0 & \text{für } 20 \cdot 10^{-9} < t \leq 25 \cdot 10^{-9} \end{cases}$						[V]
	$C = 1$					[pF]
	$R = 10$					[kΩ]
	$A = 3 \cdot 10^2$					[—]

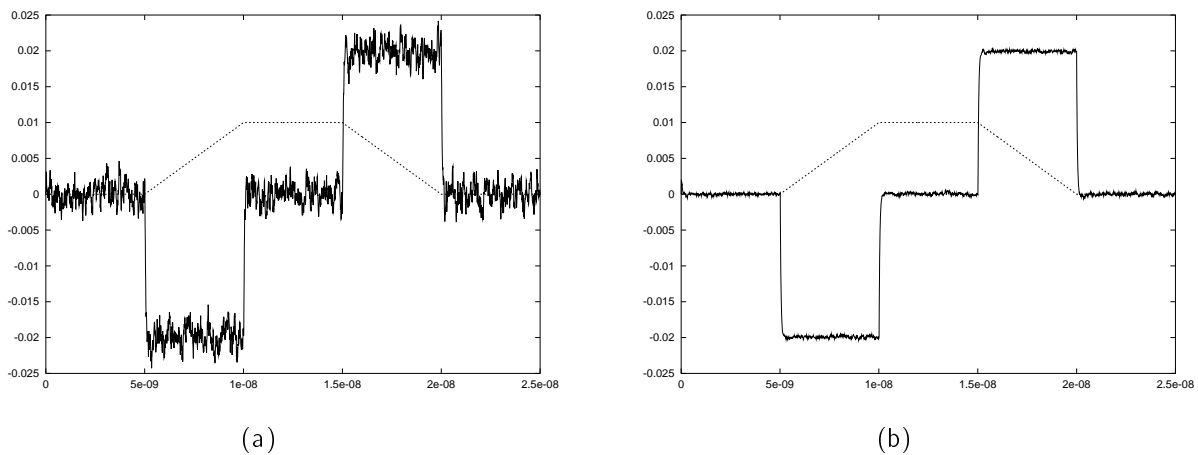
Im folgenden ist die Knotenspannung X_t am Knoten 2 der Differentiators gesucht. Die Modellierung des Differentiators ergibt für X_t die SDG

$$dX_t = \left(-\frac{A}{RC} \left(\left(1 + \frac{1}{A} \right) X_t + U_0 \right) - A\dot{U}_{in}(t) \right) dt - \frac{A}{C} \sqrt{\frac{4k_B T}{R}} dB_t.$$

Als Anfangswert für die numerische Integration der SDG wählen wir

$$\underline{X_0 = 0 \quad [V]}$$

Für die numerische Integration wird das neue SDG-Verfahren (3.8) verwendet. Es ergeben sich als numerische Lösungen der SDG die Kurven in Abb. 4.4(a) bzw. Abb. 4.4(b).



Spannung [V] gegen Zeit [s]

Abbildung 4.4: Eingangssignal U_{in} (- - -) und numerische Näherung (—) für die Knotenspannung X_t am Knoten 2, die für den Simulationszeitraum $[0s : 2,5 \cdot 10^{-8}s]$ aufgetragen ist und mit dem SDG-Verfahren (3.8) zur Schrittweite $h = 10^{-11}$ berechnet wurde.

- (a) zeigt einen Pfad der Näherungslösung und
 (b) die über 100 Pfade gemittelte Lösung.

Im wesentlichen liefert ein Differentiator als Ausgangssignal das differenzierte Eingangssignal. Für ein durch elektrisches Rauschen gestörtes Eingangssignal erwarten wir ein verstärkt gestörtes Ausgangssignal. Die numerischen Ergebnisse, s. Abb. 4.4(a), bestätigen dies.

4.3 RLC-Schwingkreis

Die Ersatzschaltbilder Abb. 4.5(a) bzw. Abb. 4.5(b) beschreiben einen RLC-Schwingkreis mit einer Rauschstromquelle im Widerstand bzw. mit Rauschstromquellen im Kondensator. U_{in} ist

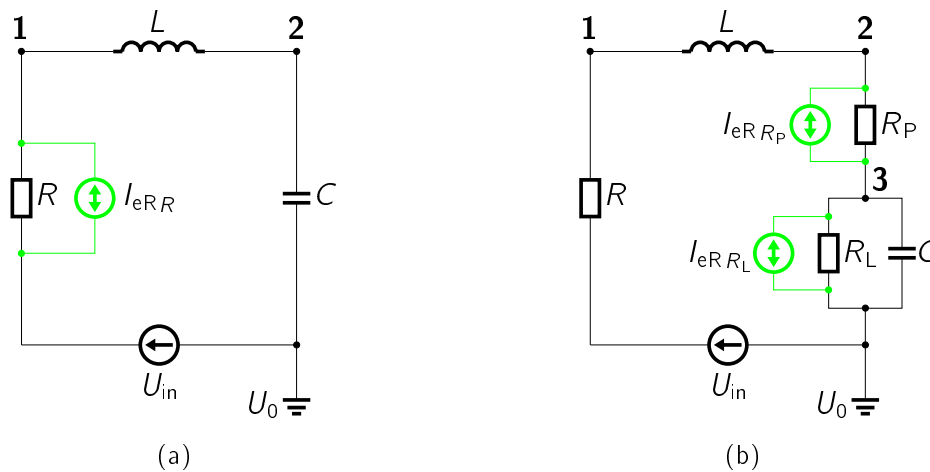


Abbildung 4.5: Ersatzschaltbild eines RLC-Schwingkreises unter Berücksichtigung von Rauschstromquellen
 (a) im Widerstand bzw.
 (b) im Kondensator.

eine konstante Erregerspannung und U_0 das Massepotential. Für die numerische Integration setzen wir die Parameter fest durch

$U_0 = 0$	[V]
$U_{in} = 2,5$	[V]
$R = 5$	[k Ω]
$L = 7,26$	[mH]
$C = 13$	[fF]
$R_P = 5$	[k Ω]
$R_L = 0,1$	[G Ω]

Zuerst betrachten wir thermisches Rauschen im Widerstand R des RLC-Schwingkreises, vgl. Abb. 4.5(a). Es sei X_t^1 die Knotenspannung am Knoten 2 und X_t^2 der Strom durch den Induktor L . Die Modellierung ergibt die SDG

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} X_t^2 \\ \frac{1}{L} (U_{in} - R X_t^2 - X_t^1) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \sqrt{\frac{4k_B T}{R}} \end{pmatrix} dB_t,$$

die die Knotenspannung X_t^1 und den Spulenstrom X_t^2 des RLC-Schwingkreises mathematisch beschreibt. Die numerische Lösung der SDG bedarf zweier Anfangswerte:

$X_0^1 = 0$	[V]
$X_0^2 = 0$	[A]

Für den RLC -Schwingkreis mit Rauschen im Widerstand verwenden wir für die spektrale Leistungsdichte der Rauschstromquelle einen Skalierungsfaktor der Größe 10^7 . Es ergibt sich als numerische Lösung für X_t^2 der Stromverlauf in Abb. 4.6.

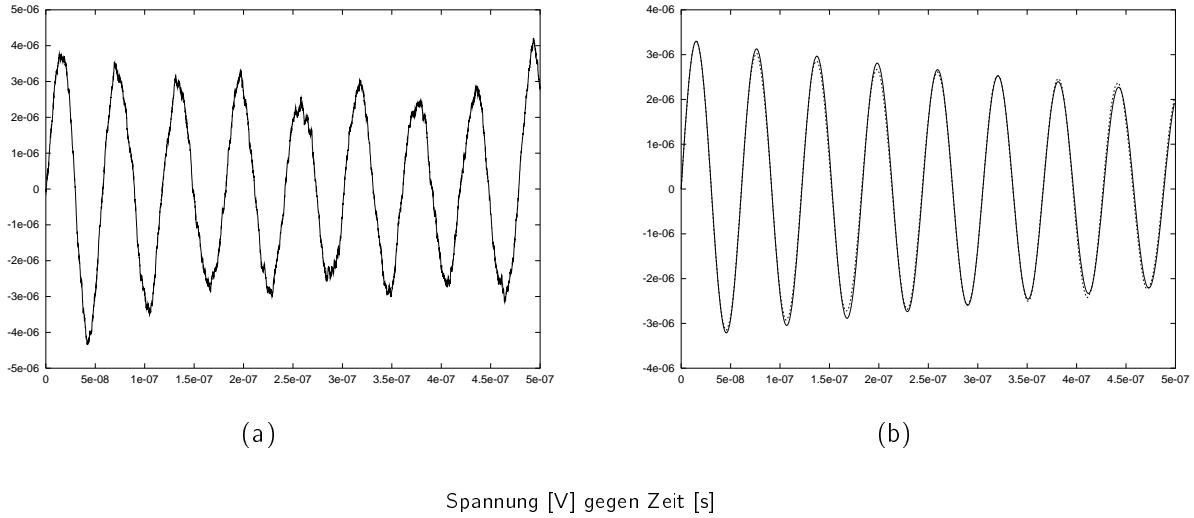


Abbildung 4.6: Numerische Näherung für den Strom X_t^2 durch den Induktor L , die für den Simulationszeitraum $[0s : 5 \cdot 10^{-7}s]$ aufgetragen ist und mit der SDAG-Methode (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-10}$ berechnet wurde.

(a) zeigt einen Pfad der Näherungslösung für X_t^2 und

(b) die über 100 Pfade gemittelte Lösung (—) einschließlich der Lösung des deterministischen Modells (- - -).

Nun betrachten wir statt der Rauschstromquelle im Widerstand R Rauschstromquellen im Kondensator C , vgl. Abb. 4.5(b). Es sei X_t^1 die Knotenspannung am Knoten 3 des RLC -Schwingkreises und X_t^2 der Strom durch den Induktor L . Die Modelldimensionen sind $d = 2$ und $m = 2$. Die Modellierung in der Darstellung (4.1) ergibt:

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \left(X_t^2 - \frac{1}{R_L} (X_t^1 - U_0) \right) \\ \frac{1}{L} (U_{in} - X_t^1 - (R + R_P) X_t^2) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \sqrt{\frac{4k_B T}{R_L}} \\ \frac{R_P}{L} \sqrt{\frac{4k_B T}{R_P}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Vektor- bzw. Matrixfunktionen gilt: $X_t \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $B_t \in \mathbb{R}^2$. Für den RLC -Schwingkreis mit Rauschen im Kondensator verwenden wir die Anfangswerte

$$\begin{array}{l} \overline{X_0^1 = 0} \quad [V] \\ \overline{X_0^2 = 0} \quad [A] \end{array}$$

Als Skalierungsfaktor für die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen wird 10^7 benützt. Es ergibt sich als numerische Lösung für X_t^1 der Spannungsverlauf in Abb. 4.7.

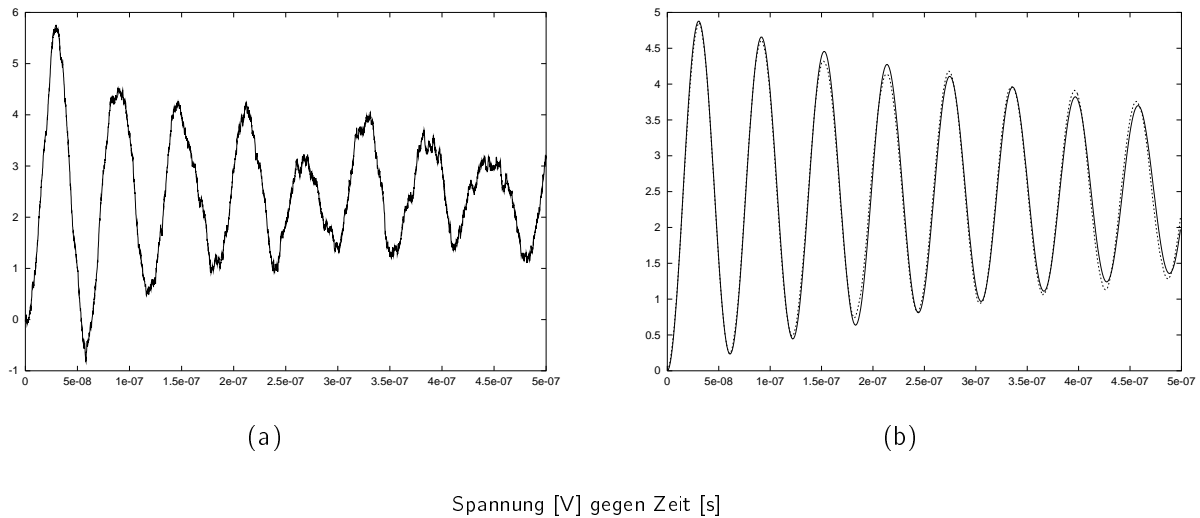


Abbildung 4.7: Numerische Näherung für die Knotenspannung X_t^1 am Knoten 3, die für den Simulationszeitraum $[0s : 5 \cdot 10^{-7}s]$ aufgetragen ist und mit der neuen SDAG-Methode (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-10}$ berechnet wurde.
 (a) zeigt einen Pfad der Näherungslösung für X_t^1 und
 (b) die über 100 Pfade gemittelte Lösung (—) einschließlich der Lösung des deterministischen Modells (- - -).

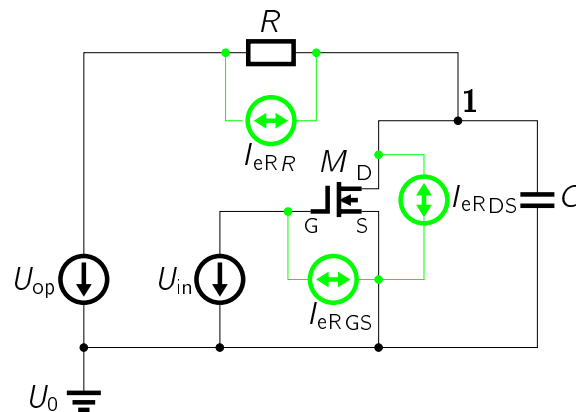


Abbildung 4.8: Ersatzschaltbild eines Inverters unter Berücksichtigung von Rauschstromquellen im Widerstand R und im MOSFET M .

Die numerischen Ergebnisse, die in Abb. 4.6 und Abb. 4.7 abgebildet sind, lassen erkennen, daß der RLC -Schwingkreis bei dem gewählten Parametersatz durch das elektrische Rauschen nur unwesentlich beeinflusst wird und im Mittel stabil schwingt.

4.4 Inverter

Ersatzschaltbild Abb. 4.8 zeigt einen Inverter mit Rauschstromquellen im Widerstand R und im MOSFET M . Es ist U_{op} eine konstante Arbeitsspannung, U_0 das Massepotential und U_{in} das Eingangssignal, d. h. das in die Schaltung eingespeiste Signal, das invertiert werden soll. Für den Inverter verwenden wir folgende Parameter:

$U_0 = 0$	[V]
$U_{op} = 5$	[V]
$U_{in}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-9} \\ 10^9 \cdot t - 5 & \text{für } 5 \cdot 10^{-9} < t \leq 10 \cdot 10^{-9} \\ 5 & \text{für } 10 \cdot 10^{-9} < t \leq 15 \cdot 10^{-9} \\ -2 \cdot 10^9 \cdot t + 35 & \text{für } 15 \cdot 10^{-9} < t \leq 17,5 \cdot 10^{-9} \\ 0 & \text{für } 17,5 \cdot 10^{-9} < t \leq 25 \cdot 10^{-9} \end{cases}$	[V]
$R = 5$	[k Ω]
$C = 0,2$	[pF]

Das verwendete MOSFET-Modell setzt den Strom über den Anschluß *Gate* gleich null. Im folgenden wird die Rauschstromquelle des zugehörigen Schrotrauschens nicht berücksichtigt.

Durch den Inverter wird das Eingangssignal U_{in} an einer gedachten 2, 5-V-Achse gespiegelt. Das „invertierte“ Signal wird am Knoten 1 als Ausgangssignal ausgegeben. Gesucht wird die Knotenspannung X_t am Knoten 1 des Inverters. Die eindimensionale SDG, die die Knotenspannung X_t beschreibt, lautet

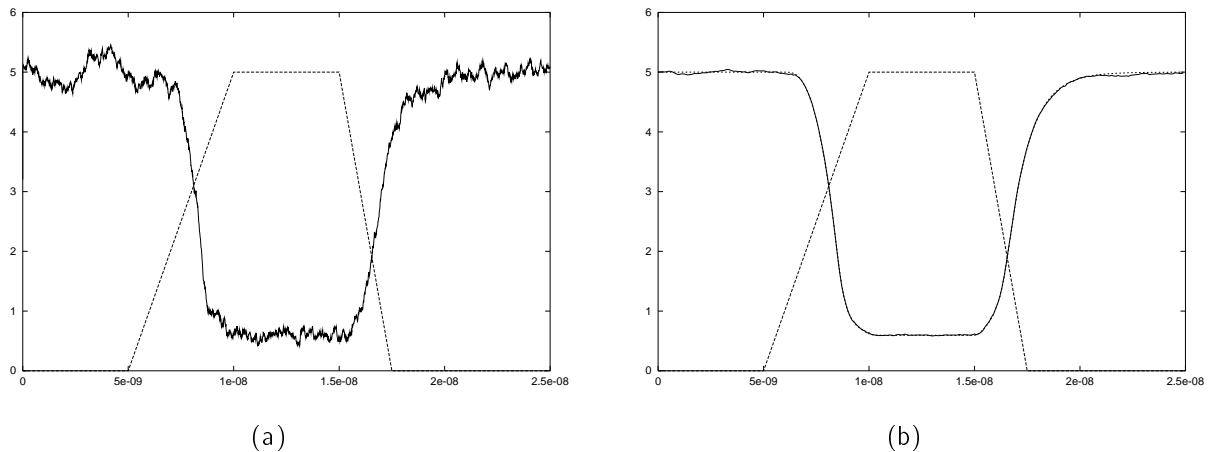
$$dX_t = \left(\frac{1}{RC} (U_{op} - X_t) - \frac{1}{C} f_{MOS}(U_{in}(t), X_t, U_0) \right) dt + \left(\frac{1}{C} \sqrt{\frac{4k_B T}{R}} \mid \frac{1}{C} \sqrt{\frac{8k_B T}{3} g_{MOS}(U_{in}(t), X_t, U_0)} \right) \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}.$$

Es beschreibt die Funktion $f_{MOS}(u_G, u_D, u_S)$ den Strom durch den *Drain*-Anschluß des MOSFETs M in Abhängigkeit von den Knotenspannungen $u_G = U_{in}(t)$, $u_D = X_t$ und $u_S = U_0$, vgl. [MA93]. Die Funktion $g_{MOS}(U_{in}(t), X_t, U_0)$ modelliert den Transferleitwert des MOSFETs von *Source* nach *Drain*, ebenfalls in Abhängigkeit von $U_{in}(t)$, X_t und U_0 , vgl. [MA93].

Die numerische Lösung obiger SDG bedarf eines Anfangswertes:

$$\overline{X_0 = 5 \quad [V]}$$

Für die Simulation der Inverterschaltung verwenden wir für die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen einen Skalierungsfaktor der Größe 10^6 . Es ergibt sich als numerische Lösung der SDG der Spannungsverlauf in Abb. 4.9. Wir erkennen, daß die gemittelte Lösung die Eigenschaft des Inverters erhält. Der Einfluß des elektrischen Rauschens ist bei dem gewählten Parametersatz nicht wesentlich.



Spannung [V] gegen Zeit [s]

Abbildung 4.9: Eingangssignal U_{in} (- - -) und numerische Näherung für die Knotenspannung X_t am Knoten 1, die für den Simulationszeitraum $[0s : 2,5 \cdot 10^{-8}s]$ aufgetragen ist und mit dem SDAG-Verfahren (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-11}$ berechnet wurde.
 (a) zeigt einen Pfad der Näherungslösung und
 (b) vergleicht die rauschfreie Simulation (\cdots) mit der über 100 Pfade gemittelten Rauschsimulation ($—$).

4.5 Ringoszillator

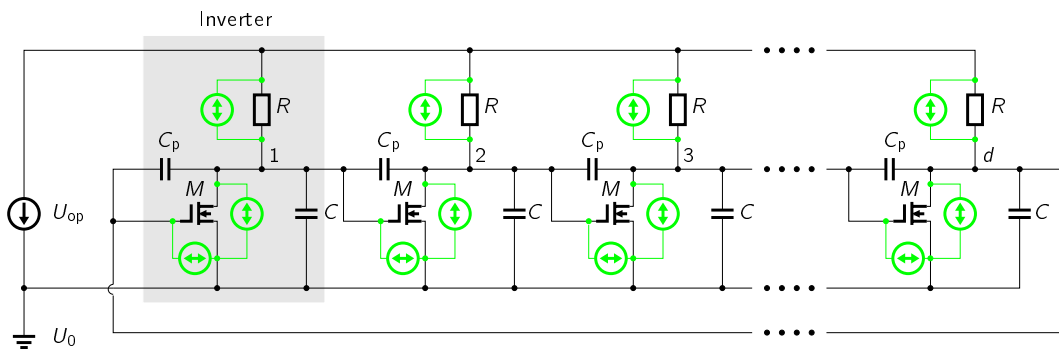


Abbildung 4.10: Ersatzschaltbild eines Ringoszillators unter Berücksichtigung von Rauschstromquellen in den Widerständen R und in den MOSFETs M .

Das Ersatzschaltbild Abb. 4.10 beschreibt einen sog. Ringoszillator einschließlich Rauschstromquellen. Ein Ringoszillator setzt sich zusammen aus d Invertern, die in Serie miteinander gekoppelt sind, vgl. [KRS92]. Im Vergleich zu einer Inverterkette werden zusätzlich parasitäre Kondensatoren C_p in die Schaltung eingebracht. Das Signal des Ringoszillators am Knoten 1 wird durch die Schaltung d -mal invertiert. Das Ausgangssignal am Knoten d wird als neues Eingangssignal wieder in den Ringoszillator eingespeist. Wir erwarten ein oszillatorisches Verhalten im zeitlich gemessenen Spannungsverlauf an den einzelnen Knoten.

Wie bei einem Inverter ist U_{op} eine konstante Arbeitsspannung und U_0 das Massepotential. Die Parameter haben die folgenden Werte:

$U_0 = 0$	[V]
$U_{op} = 5$	[V]
$R = 5$	[k Ω]
$C = 0,21$	[pF]
$C_p = 5$	[fF]

Für die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen des Ringoszillators verwenden wir einen Skalierungsfaktor der Größe 10^6 . Das verwendete MOSFET-Modell setzt den Strom über den Anschluß *Gate* gleich null. Im folgenden wird die Rauschstromquelle des zugehörigen Schrottausens nicht berücksichtigt.

Die Modellierung des Ringoszillators ergibt eine SDAG der Form (4.2), wobei die zugrundeliegende DAG differentiellen Index 1 besitzt. Die Komponenten X_t^1, \dots, X_t^d sind die gesuchten Knotenspannungen des Ringoszillators an den Knoten $1, \dots, d$. Die Dimension des Systems (4.2) ist $d + 1$ und die Anzahl der Rauschstromquellen im System ist $m = 2d$. D. h. für die Vektoren und Matrizen aus der allgemeinen Darstellung (4.2) gilt $A \in \mathbb{R}^{d+1, d+1}$, $q \in \mathbb{R}^{d+1}$, $X_t \in \mathbb{R}^{d+1}$, $f \in \mathbb{R}^{d+1}$, $g \in \mathbb{R}^{d+1, 2d}$ und $B_t \in \mathbb{R}^{2d}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2C_p+C} & \boxed{-C_p} & & & & & & & & \boxed{-C_p} \\ \boxed{-C_p} & \boxed{2C_p+C} & \boxed{-C_p} & & & & & & & \\ & & \boxed{-C_p} & \boxed{2C_p+C} & & & & & & \\ & & & & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & & \dots & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \boxed{2C_p+C} & \boxed{-C_p} & & & \\ & & & & & \boxed{-C_p} & \boxed{2C_p+C} & \boxed{-C_p} & & \\ & & & & & & \boxed{-C_p} & \boxed{2C_p+C} & & \\ \boxed{-C_p} & & & & & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad q(X_t) = X_t,$$

$$f(t, X_t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R}(X_t^{d+1} - X_t^1) - f_{\text{MOS}}(X_t^d, X_t^1, U_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{R}(X_t^{d+1} - X_t^d) - f_{\text{MOS}}(X_t^{d-1}, X_t^d, U_0) \\ X_t^{d+1} - U_{op} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$g(t, X_t) = \begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{\frac{4k_B T}{R}}} & \boxed{\sqrt{\frac{8k_B T}{3}} g_{\text{MOS}}(X_t^d, X_t^1, U_0)} & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \\ & & & & & \boxed{\sqrt{\frac{4k_B T}{R}}} & \boxed{\sqrt{\frac{8k_B T}{3}} g_{\text{MOS}}(X_t^{d-1}, X_t^d, U_0)} & \\ & & & & & \boxed{0} & \boxed{0} & \end{pmatrix}.$$

Es beschreibt die Funktion $f_{\text{MOS}}(u_G, u_D, u_S)$ den Strom durch den *Drain*-Anschluß der MOSFETs in Abhängigkeit von den Knotenspannungen u_G , u_D und u_S , vgl. [MA93]. Die Funktion $g_{\text{MOS}}(u_G, u_D, u_S)$ modelliert den Transferleitwert der MOSFETs von *Source* nach *Drain*, ebenfalls in Abhängigkeit von u_G , u_D und u_S , vgl. [MA93].

Letzte Zeile der SDAG, die den Ringoszillator modelliert, lautet umgeschrieben $X_t^{d+1} = U_{\text{op}}$. Setzen wir diese Beziehung in die Zeilen 1 bis d der SDAG ein, ergibt sich eine SDG in impliziter Gestalt

$$\tilde{A} d\tilde{X}_t = \tilde{f}(t, \tilde{X}_t) dt + \tilde{g}(t, \tilde{X}_t) dB_t,$$

wobei \tilde{A} der obere $(d \times d)$ -Block der Inzidenzmatrix A ist (\tilde{A} ist regulär), \tilde{X}_t der reduzierte Lösungsprozeß X_t ist, dem die $(d+1)^{\text{te}}$ Komponente von X_t fehlt, \tilde{f} der reduzierte Driftvektor f ist, dem die $(d+1)^{\text{te}}$ Komponente von f fehlt, und \tilde{g} die reduzierte Diffusionsmatrix g ist, der die $(d+1)^{\text{te}}$ Zeile von g fehlt. Daraus können wir eine äquivalente explizite SDG gewinnen:

$$d\tilde{X}_t = \underbrace{\tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{f}(t, \tilde{X}_t)}_{=: u(t, \tilde{X}_t)} dt + \underbrace{\tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{g}(t, \tilde{X}_t)}_{=: v(t, \tilde{X}_t)} dB_t.$$

Anhand der äquivalenten SDG zeigen wir, daß das neue SDG-Verfahren (3.8) effizienter arbeitet als die Standard-SDG-Methode (3.7). Je nach Anzahl der Inverter haben wir konsistente Anfangswerte gewählt. Die Ergebnisse in Tab. 4.1 wurden für das Simulationsintervall $[0\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-7}\text{s}]$ zur Schrittweite $h = 10^{-11}$ berechnet. Der Beschleunigungsfaktor der neuen SDG-Methode (3.8) für $d = 101$ Inverter ist ca. 15%, vgl. [Pen00, Pen99b]. Dies zeigt die Effizienz des neuen SDG-Verfahrens (3.8).

SDG-Methode	Standard	Neu	Standard	Neu	Standard	Neu
Inverteranzahl d	5		51		101	
u -Auswertungen	25.000	25.000	25.000	25.000	25.000	25.000
v -Auswertungen	275.000	150.000	2.575.000	1.300.000	5.075.000	2.550.000
Rechenzeit	15 s	13 s	3.013 s	2.474 s	19.797 s	17.141 s

Tabelle 4.1: Vergleich der Standard-SDG-Methode (3.7) mit dem neuen SDG-Verfahren (3.8) für die Berechnung einer pfadweisen Lösung im Simulationsintervall $[0\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-7}\text{s}]$ zur Schrittweite $h = 10^{-11}$.

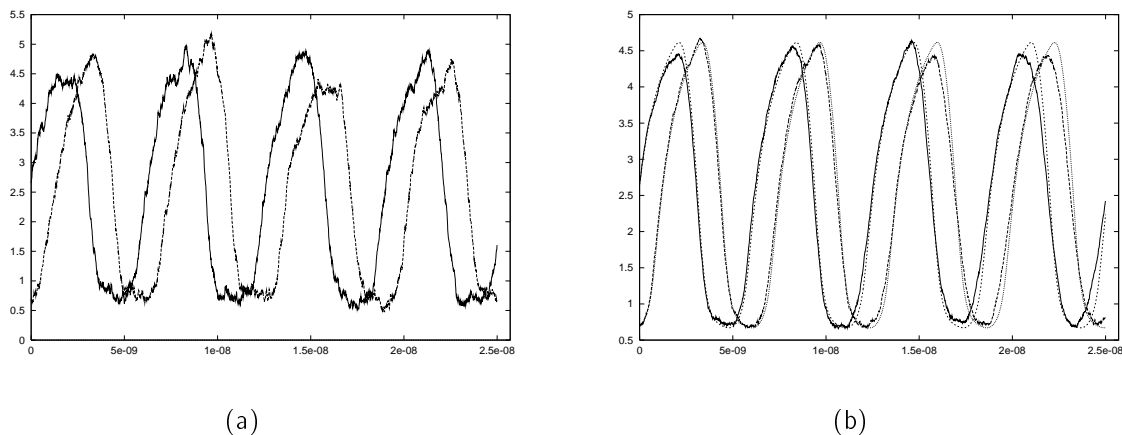
Wir betrachten im folgenden einen Ringoszillator, der aus fünf Invertern besteht. Als Anfangswerte für die numerische Integration der äquivalenten SDG wählen wir

$$\begin{array}{l} \tilde{X}_0^1 = 4,2087 \quad [\text{V}] \\ \tilde{X}_0^2 = 0,9170 \quad [\text{V}] \\ \tilde{X}_0^3 = 2,6534 \quad [\text{V}] \\ \tilde{X}_0^4 = 4,2762 \quad [\text{V}] \\ \tilde{X}_0^5 = 0,6928 \quad [\text{V}] \end{array}$$

und für das SDAG-Verfahren wählen wir als konsistenten Anfangswert

$$X_0 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_0 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} [\text{V}]^5 \\ [\text{V}] \end{array}$$

Es ergeben sich als numerische Lösung der SDAG die Kurven in Abb. 4.11.



Spannung [V] gegen Zeit [s]

Abbildung 4.11: Numerische Näherung bei $d = 5$ Invertieren für die Knotenspannungen X_t^3 bzw. X_t^5 an den Knoten 3 bzw. 5, die für den Simulationszeitraum $[0\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-8}\text{s}]$ aufgetragen sind und mit dem neuen SDAG-Verfahren (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-12}$ berechnet wurden.

(a) zeigt einen Pfad von X_t^3 (—) und X_t^5 (- - -)

(b) vergleicht die rauschfreie Simulation von X_t^3 (- - -) bzw. X_t^5 (····) mit einer über 10 Pfade gemittelten Rauschsimulation von X_t^3 (—) bzw. X_t^5 (- - -).

Die numerischen Ergebnisse des Mehrzweckintegrationsverfahrens (3.15), das auf SDAGn vom Typus (4.2) angewendet werden kann, werden mit den Ergebnissen des numerischen Verfahrens (3.7) verglichen, das nur auf SDGn anwendbar ist. Für das Standard-SDG-Verfahren (3.7) wurde, wie vorher beschrieben, das SDAG-Modell des Ringoszillator in ein äquivalentes SDG-Modell umgeschrieben. Die Modellierung einer äquivalenten SDG ist in der Schaltungssimulation im allgemeinen nicht möglich.

Abb. 4.12(a) zeigt einen Pfad einer hochgenauen numerischen Näherung für X_t^5 , die mit dem SDAG-Verfahren (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-13}$ im Intervall $[0\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-7}\text{s}]$ berechnet

wurde. Abb. 4.12(b) zeigt die Differenz der numerischen Lösungen für X_t^5 , die mit der Standard-SDG-Methode (3.7) und der neuen SDAG-Methode (3.15) zu unterschiedlichen Schrittweiten h im Intervall $[0s : 1,9 \cdot 10^{-8}s]$ berechnet und über 100 Pfade gemittelt wurden. Die Abbildung zeigt, daß eine Verringerung der Schrittweite h um einen Faktor 10 die Differenz der numerischen Lösungen beider Verfahren ebenfalls um einen Faktor 10 reduziert. Wir sehen, daß das neue SDAG-Verfahren (3.15) starke Konvergenzordnung 1 besitzt und vernünftige Ergebnisse im Vergleich zum äquivalenten SDG-Problem liefert, das mit dem Standard-SDG-Verfahren (3.7) gelöst wurde.

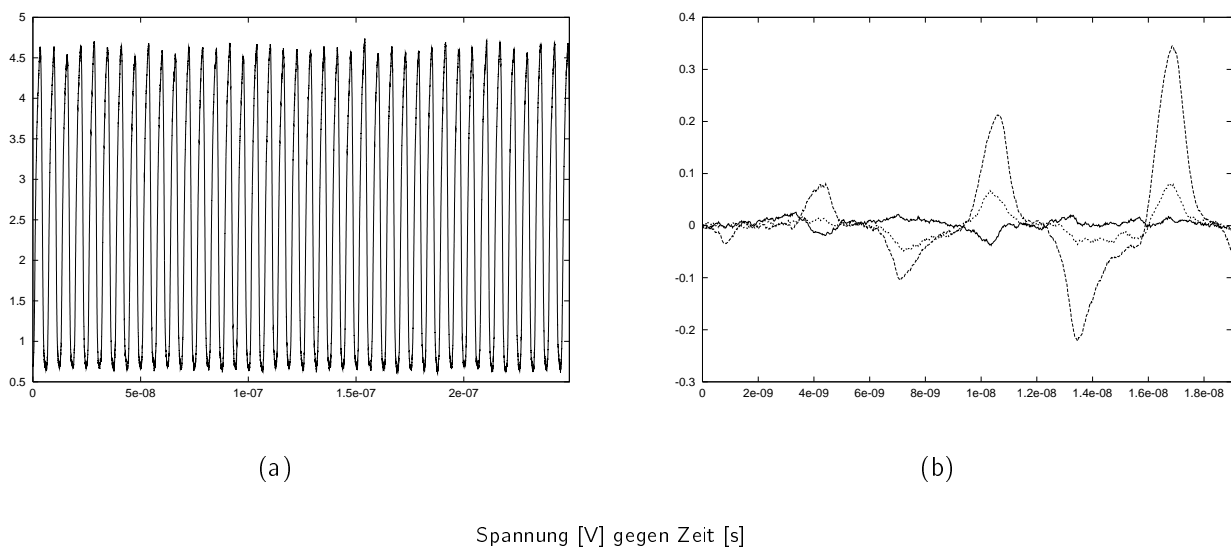


Abbildung 4.12: Vergleich des Standard-SDG-Verfahrens (3.7) mit der neuen SDAG-Methode (3.15).
 (a) zeigt einen Pfad einer hochgenauen Lösung für die Knotenspannung X_t^5 , die mit der neuen SDAG-Methode (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-13}$ berechnet wurde.
 (b) zeigt die Differenz zwischen den numerischen Lösungen für X_t^5 , die mit (3.7) und (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-13}$ (—), $h = 10^{-12}$ (···) und $h = 10^{-11}$ (- - -) berechnet wurden.

Werden Rauschstromquellen für die Simulation berücksichtigt, so bedeutet das einen erheblichen Mehraufwand bzgl. der Rechenzeiten der numerischen Verfahren. Im Vergleich zu numerischen Methoden für DAGn, vgl. [BCP89], müssen bei SDAGn zahlreiche Itô-Integrale berechnet und umfangreiche Matrix-Vektor-Operationen durchgeführt werden, ein Blick auf das neue SDAG-Verfahren (3.15) zeigt dies.

Der Einfluß der Diffusionsmatrix g auf die Rechenzeit wird in Tab. 4.2 beschrieben. Es werden vier Versionen \mathbf{V}_{ohne} , $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$, $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ und $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ eines Ringoszillators mit $d = 5$ Invertiern betrachtet, die jeweils zur Schrittweite $h = 10^{-12}$ mit dem neuen SDAG-Verfahren (3.15) simuliert wurden.

Modellversionen des Ringoszillators	
\mathbf{V}_{ohne}	ist die Ringoszillatorschaltung ohne Rauschstromquellen, d. h. das Schaltungsmodell ist eine DAG.
$\mathbf{V}_{\text{aR},5}$	berücksichtigt nur die thermischen Rauschstromquellen an den Widerständen, d. h. die SDAG besitzt $m = d$ additive Rauschstromquellen.
$\mathbf{V}_{\text{aR},10}$	setzt die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen an den MOSFETs pro Zeitschritt als konstant an, d. h. die SDAG besitzt $m = 2d$ additive Rauschstromquellen.
$\mathbf{V}_{\text{mR},10}$	berücksichtigt die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen an den MOSFETs in Abhängigkeit von den anliegenden Spannungen bzw. vom Lösungsprozeß, d. h. die SDAG besitzt $m = 2d$ multiplikative Rauschstromquellen.

Tab. 4.2 zeigt, daß sich im Fall des Ringoszillators die Rechenzeiten für Simulationen ohne Rauschstromquellen \mathbf{V}_{ohne} und mit additiven Rauschstromquellen $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$ bzw. $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ nicht wesentlich unterscheiden. Ein erheblicher Anstieg der Rechenzeit wird erkennbar, wenn wir multiplikatives Rauschen $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ berücksichtigen. Hier steigt die Rechenzeit im Vergleich zur DAG-Simulation \mathbf{V}_{ohne} um das ca. siebenfache.

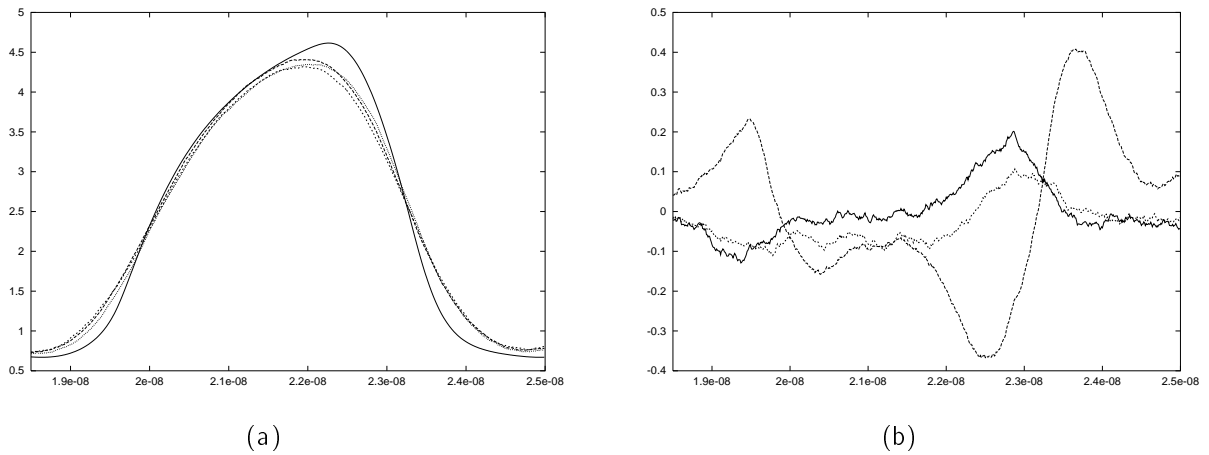
Version	\mathbf{V}_{ohne}	$\mathbf{V}_{\text{aR},5}$	$\mathbf{V}_{\text{aR},10}$	$\mathbf{V}_{\text{mR},10}$
Rauschquellenanzahl m	—	5	10	10
Rauschen	—	additiv	additiv	multiplikativ
f -Auswertungen	225.000	225.000	225.000	400.000
g -Auswertungen	—	25.000	25.000	1.525.000
Rechenzeit	5,1 s	5,4 s	5,9 s	35,5 s

Tabelle 4.2: Rechenzeiten des neuen SDAG-Verfahrens (3.15) zur Schrittweite $h = 10^{-12}$ und im Simulationsintervall $[0\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-8}\text{s}]$. Simuliert wird ein Ringoszillator mit $d = 5$ Invertern ohne Rauschstromquellen \mathbf{V}_{ohne} , mit additiven Rauschstromquellen $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$ bzw. $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ und mit multiplikativen Rauschstromquellen $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$.

Die Abbn. 4.13(a) und 4.13(b) lassen erkennen, wie stark sich die Versionen \mathbf{V}_{ohne} , $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$, $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ und $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ unterscheiden. Wir sehen, daß sich bei dem gewählten Parametersatz die Versionen \mathbf{V}_{ohne} , $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$ bzw. $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ im Vergleich zur Version $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ in der Größenordnung von ca. 10% bzgl. des maximalen Spannungswertes von X_t^5 unterscheiden. Die größte Abweichung bzgl. $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ haben wir mit Version \mathbf{V}_{ohne} und die geringste mit Version $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$.

4.6 Transistorverstärker

Die Schaltung des Transistorverstärkers ist [HNW93, RRS89] entnommen. Die Modellierung des Transistorverstärkers führt auf eine SDAG der Dimension 8. Die Komponenten X_t^1, \dots, X_t^8 sind



Spannung [V] gegen Zeit [s]

Abbildung 4.13: Vergleich der Versionen \mathbf{V}_{ohne} , $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$, $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ und $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$, die im Simulationsintervall $[1,85 \cdot 10^{-8}\text{s} : 2,5 \cdot 10^{-8}\text{s}]$ ausgewertet, mit dem neuen SDAG-Verfahren (3.15) berechnet und über 100 Pfade gemittelt wurden.
 (a) zeigt die gemittelte Lösung der Versionen \mathbf{V}_{ohne} (—), $\mathbf{V}_{\text{aR},5}$ (---), $\mathbf{V}_{\text{aR},10}$ (- - -) und $\mathbf{V}_{\text{mR},10}$ (···).
 (b) zeigt die Differenzen $\mathbf{V}_{\text{mR},10} - \mathbf{V}_{\text{ohne}}$ (---), $\mathbf{V}_{\text{mR},10} - \mathbf{V}_{\text{aR},5}$ (- - -) und $\mathbf{V}_{\text{mR},10} - \mathbf{V}_{\text{aR},10}$ (—).

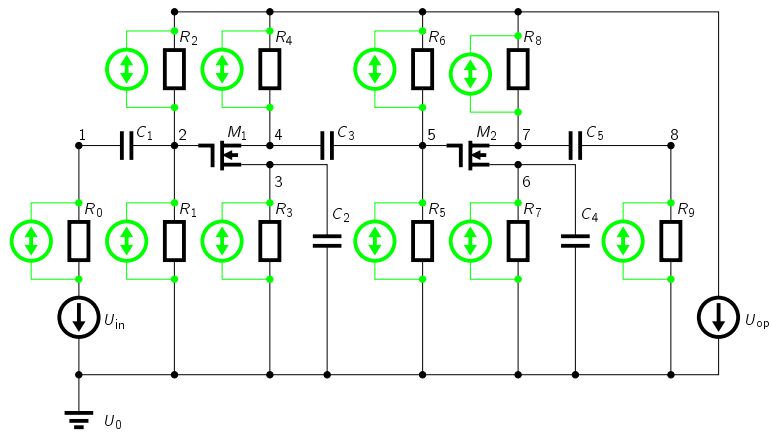


Abbildung 4.14: Ersatzschaltung eines Transistorverstärkers einschließlich thermischer Rauschstromquellen an den Widerständen R_0, \dots, R_9 .

die gesuchten Knotenspannungen an den Knoten $1, \dots, 8$. Die Modelldimensionen sind $d = 8$ und $m = 10$, d. h. für die Vektoren und Matrizen aus der allgemeinen Darstellung (4.2) gilt

$A \in \mathbb{R}^{8,8}$, $q \in \mathbb{R}^8$, $X_t \in \mathbb{R}^8$, $f \in \mathbb{R}^8$, $g \in \mathbb{R}^{8,10}$ und $B_t \in \mathbb{R}^{10}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline -C_1 & C_1 \\ \hline C_1 & -C_1 \\ \hline \end{array} & & & & & & & \\ & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & -C_2 & & & & & \\ & & & \begin{array}{|c|c|} \hline -C_3 & C_3 \\ \hline C_3 & -C_3 \\ \hline \end{array} & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & -C_4 & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & & & \begin{array}{|c|c|} \hline -C_5 & C_5 \\ \hline C_5 & -C_5 \\ \hline \end{array} & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}, \quad q(X_t) = X_t,$$

$$f(t, X_t) = \begin{pmatrix} -\frac{U_{in}}{R_0} + \frac{X_t^1}{R_0} \\ -\frac{U_{op}}{R_2} + X_t^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - (\alpha - 1) f_{MOS}(X_t^2 - X_t^3) \\ -f_{MOS}(X_t^2 - X_t^3) + \frac{X_t^3}{R_3} \\ -\frac{U_{op}}{R_4} + \frac{X_t^4}{R_4} + \alpha f_{MOS}(X_t^2 - X_t^3) \\ -\frac{U_{op}}{R_6} + X_t^5 \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - (\alpha - 1) f_{MOS}(X_t^5 - X_t^6) \\ -f_{MOS}(X_t^5 - X_t^6) + \frac{X_t^6}{R_7} \\ -\frac{U_{op}}{R_8} + \frac{X_t^7}{R_8} + \alpha f_{MOS}(X_t^5 - X_t^6) \\ \frac{X_t^8}{R_9} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$g(t, X_t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{4k_B T}{R_0}} & \mathbf{0} \\ & \\ & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_1}} & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_2}} & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_3}} & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_4}} & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_5}} & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_6}} & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_7}} & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_8}} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \sqrt{\frac{4k_B T}{R_9}} & & & & & & & & & & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen f_{MOS} , αf_{MOS} bzw. $(1 - \alpha) f_{MOS}$ modellieren die Ströme durch die Anschlüsse *Source*, *Drain* bzw. *Gate* der MOSFETs, vgl. [HNW93, RRS89].

Für die spektralen Leistungsdichten der Rauschstromquellen des Transistorverstärkers verwenden wir einen Skalierungsfaktor der Größe 10^5 . Die Parameter der Bauelemente haben die Werte

$U_{op} = 6$	[V]
$R_0 = 1$	[kΩ]
$R_j = 9$ für $j = 1, \dots, 9$	[kΩ]
$C_j = j$ für $j = 1, \dots, 5$	[μF]

und als konsistenten Anfangswert wählen wir

$$\underline{X_0} = \left(0, U_{\text{op}} / \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right), U_{\text{op}} / \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right), U_{\text{op}}, U_{\text{op}} / \left(\frac{R_6}{R_5} + 1 \right), U_{\text{op}} / \left(\frac{R_6}{R_5} + 1 \right), U_{\text{op}}, 0 \right)^T \quad [\text{V}]^8$$

Als Erregerspannung verwenden wir $U_{\text{in}}(t) = 0,1 \cdot \sin(200\pi t)$.

Abb. 4.15 zeigt den Spannungsverlauf am Knoten 1, 5, 6 bzw. 8, der ohne Rauschstromquellen zur Schrittweite $h = 10^{-7}$ berechnet wurde. Wir bezeichnen mit $X_{\text{num}}^j(h)$, für $j = 1, 5, 6, 8$, die numerische Näherung für X_t^j , die zur Schrittweite h berechnet wurde. Abb. 4.16 zeigt die numerischen Ergebnisse zu verschiedenen Schrittweiten h , bei denen thermisches Rauschen in den Widerständen Berücksichtigung fand. Die Ergebnisse wurden gemittelt über 100 Pfade und sind die Differenzen zwischen $X_{\text{num}}^j(h)$ und $X_{\text{num}}^j(10^{-6})$, mit $j = 1, 5, 6, 8$ und $h = 10^{-4}, 10^{-5}$. Wir stellen fest, daß bei einer Verkleinerung der Schrittweite um einen Faktor 10 die numerischen Ergebnisse mit dem gleichen Faktor gegen die hochgenaue Lösung streben. Wir sehen, daß das neue SDAG-Verfahren (3.15) starke Konvergenzordnung 1 besitzt.

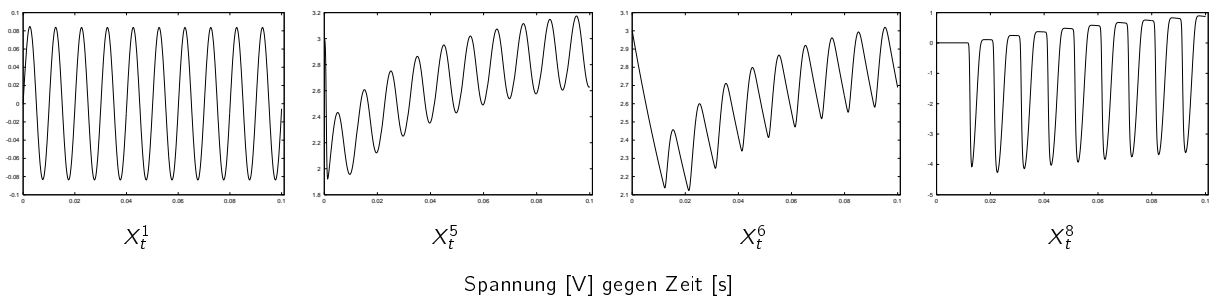


Abbildung 4.15: Numerische Näherung ohne Rauschstromquellen zur Schrittweite $h = 10^{-7}$ für die Komponenten X_t^j , mit $j = 1, 5, 6, 8$.

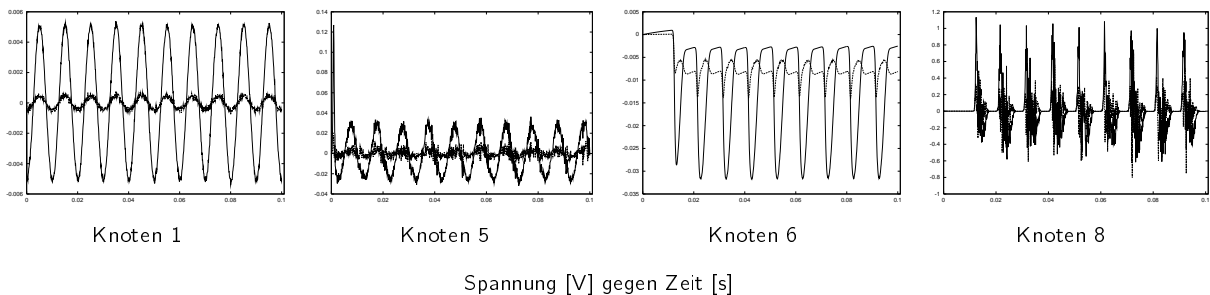


Abbildung 4.16: Differenz zwischen $X_{\text{num}}^j(h)$ und $X_{\text{num}}^j(10^{-6})$, mit $j = 1, 5, 6, 8$, für $h = 10^{-4}$ (···) und $h = 10^{-5}$ (—).

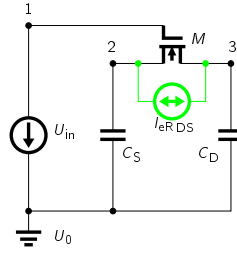


Abbildung 4.17: Ersatzschaltbild einer Ladungspumpe einschließlich einer Rauschstromquelle am MOSFET M .

4.7 Ladungspumpe

Das dynamische Modell einer Ladungspumpe ohne Rauschstromquellen ist eine steife DAG vom Index 2 [GDF96]. Die Modellierung der Ladungspumpe einschließlich von Rauschstromquellen ergibt eine SDAG der Dimension 9, wobei die Komponenten X_t^6 , X_t^7 bzw. X_t^8 die gesuchten Knotenspannungen an den Knoten 1, 2 bzw. 3 der Ladungspumpe sind. Die Dimensionen sind $d = 9$ und $m = 1$, d. h. für die Vektoren und Matrizen aus der allgemeinen Darstellung (4.2) gilt $A \in \mathbb{R}^{9,9}$, $q \in \mathbb{R}^9$, $X_t \in \mathbb{R}^9$, $f \in \mathbb{R}^9$, $g \in \mathbb{R}^{9,1}$ und $B_t \in \mathbb{R}^1$, mit

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & & & & & \\ & \boxed{1} & & & & & & & \\ & & \boxed{1} & & & & & & \\ & & & \boxed{1} & & & & & \\ & & & & \boxed{1} & & & & \\ & & & & & \boxed{1} & & & \\ & & & & & & \boxed{1} & & \\ & & & & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad q(X_t) = X_t,$$

$$f(t, X_t) = \begin{pmatrix} -X_t^9 \\ 0 \\ 0 \\ -X_t^5 + U_{in}(t) \\ X_t^1 - q_G(X_t^6, X_t^6 - X_t^7, X_t^6 - X_t^8) \\ X_t^2 - C_S X_t^7 \\ X_t^3 - q_S(X_t^6, X_t^6 - X_t^7, X_t^6 - X_t^8) \\ X_t^4 - C_D X_t^8 \\ X_t^5 - q_D(X_t^6, X_t^6 - X_t^7, X_t^6 - X_t^8) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t, X_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{8k_B T}{3}} g_{MOS}(X_t^6, X_t^8, X_t^7) \\ -\sqrt{\frac{8k_B T}{3}} g_{MOS}(X_t^6, X_t^8, X_t^7) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen q_D , q_G bzw. q_S modellieren die Ladungen, die durch die Anschlüsse *Source*, *Drain* bzw. *Gate* des MOSFETs fließen, vgl. [GDF96]. Die Funktion $g_{MOS}(u_G, u_D, u_S)$ beschreibt den Transferleitwert des MOSFETs von *Source* nach *Drain*, der von u_G , u_D und u_S abhängt, vgl. [MA93].

Für eine geeignete Diskretisierung mit $t_{\text{mod}} := (10^9 \cdot t) \bmod 120$ sei U_{in} die Erregerspannung. Die spektrale Leistungsdichte der Rauschstromquelle der Ladungspumpe wird mit einem Ska-

lierungsfaktor der Größe 10^5 multipliziert. Die Parameter der Bauelemente nehmen folgende Werte an:

$$U_{in}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t_{\text{mod}} < 50 \\ 20(t_{\text{mod}} - 50) & \text{für } 50 \leq t_{\text{mod}} < 60 \\ 20 & \text{für } 60 \leq t_{\text{mod}} < 110 \\ 20(120 - t_{\text{mod}}) & \text{für } 110 \leq t_{\text{mod}} < 120 \end{cases} \quad [\text{V}]$$

$$C_D = 0,4 \quad [\text{pF}]$$

$$C_S = 1,6 \quad [\text{pF}]$$

Als konsistenten Anfangswert wählen wir

$$X_0 = (q_G(0, 0, 0), 0, q_S(0, 0, 0), 0, q_D(0, 0, 0), 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad [C, C, C, C, C, V, V, V, A]^T$$

Sei $X_{\text{num}}^8(h)$ die numerische Näherung für X_t^8 , die zur Schrittweite h berechnet wird, wobei X_t^8 die Knotenspannung am Knoten 3 der Ladungspumpe ist. Die Rechenergebnisse sind über 100 Pfade gemittelt. Darstellung (a) der Abb. 4.18 zeigt einen Pfad einer hochgenauen Lösung $X_{\text{num}}^8(10^{-12})$ für die Knotenspannung am Knoten 3. Die Darstellungen (b) und (c) der Abb. 4.18 zeigen die Differenz zwischen $X_{\text{num}}^8(h)$ und $X_{\text{num}}^8(10^{-11})$ für $h = 10^{-8}, 10^{-9}$ (Abb. 4.18 (b)) bzw. $h = 10^{-9}, 10^{-10}$ (Abb. 4.18 (c)). Verkleinern wir die Schrittweite von $h = 10^{-8}$ auf $h = 10^{-10}$ um Zehnerfaktoren, dann nähert sich das numerische Ergebnis der Lösung zur Schrittweite $h = 10^{-11}$ mit einem Faktor der selben Größenordnung an. Dies zeigt, daß das neue SDAG-Verfahren (3.15) starke Konvergenzordnung 1 besitzt.

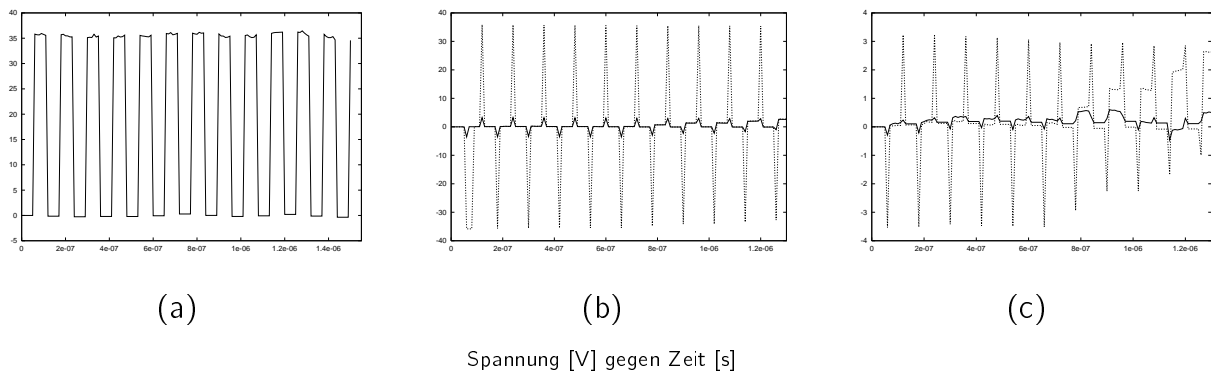


Abbildung 4.18: Numerische Ergebnisse $X_{\text{num}}^8(h)$ für die Knotenspannung X_t^8 am Knoten 3.

(a) zeigt einen Pfad einer hochgenauen Lösung $X_{\text{num}}^8(10^{-12})$.

(b) und (c) zeigen die Differenz zwischen $X_{\text{num}}^8(h)$ und $X_{\text{num}}^8(10^{-11})$ zu verschiedenen Schrittweiten h :

(b) zeigt die Differenz für $h = 10^{-8}$ (\cdots) bzw. $h = 10^{-9}$ (—) und

(c) zeigt die Differenz für $h = 10^{-9}$ (\cdots) bzw. $h = 10^{-10}$ (—).

Zusammenfassung

*Alles Wissen und alle Vermehrung unseres Wissens endet nicht mit einem Schlußpunkt,
sondern mit Fragezeichen.*
(Hermann Hesse)

Simulationen integrierter Schaltungen erfordern heute eine Modellverfeinerung der Bauelemente: Die Gleichungen müssen um sog. stochastische Gleichungsterme erweitert werden, die das elektrische Rauschen in der Schaltung berücksichtigen. Dieses ist erforderlich, da wegen der zunehmenden Integrationsdichte der Bauelemente der Signal-Rausch-Abstand verringert ist.

Die ladungsorientierte Modellierung einer integrierten Schaltung führt auf eine hochdimensionale stochastische differential-algebraische Gleichung (SDAG) vom Typ

$$Aq(X_s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0,$$

mit $t \in [t_0, t_{\text{Ende}}]$, $X_t(\omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d_q}$ i. a. nicht-quadratisch bzw. singular, $q(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_q}$, $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \cdot m}$ und mit einer mehrdimensionalen Brownschen Bewegung $B_t(\omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

In dieser Arbeit wurden zwei neue numerische Verfahren entwickelt, mit denen näherungsweise pfadweise Lösungen einer SDAG berechnet werden können. Das erste neue Verfahren arbeitet auf einer speziellen Klasse obiger SDAG (A quadratisch und regulär, $q(X_t) = X_t$), d. h. auf stochastischen Differentialgleichungen (SDGn). Es besitzt starke Konvergenzordnung 1, ist stabil im Mittel, stabil im quadratischen Mittel bzw. A-stabil und ist effizienter als bisherige numerische Verfahren für SDGn, wie Vergleichsrechnungen anhand elektrischer Schaltungen gezeigt haben. Das zweite neue Verfahren ist anwendbar auf die obige allgemeine SDAG-Form. D. h. es ist anwendbar auf die allgemeine ladungsorientierte Schaltungsmodellierung und berücksichtigt neben additiven Rauschstromquellen, z. B. thermisches Rauschen, auch multiplikative Rauschstromquellen, z. B. Schrotrauschen. Es besitzt starke Konvergenzordnung 1, ist stabil im Mittel, im

quadratischen Mittel und A-stabil. Die Konvergenz- bzw. Stabilitätseigenschaften werden u. a. anhand der Simulation eines Ringoszillators bestätigt. Dieses neue SDAG-Verfahren ermöglicht das numerische Lösen nicht-linearer SDAGn mit multiplikativem Rauschen (s. o.), und unterscheidet sich damit zu den bekannten Verfahren, die lediglich lineare SDAGn mit additivem Rauschen ($q(X_t) = X_t$, $f(t, X_t) = BX_t + f(t)$ mit $B \in \mathbb{R}^{d,d}$, $g(t, X_t) = g(t)$), d. h. Unterklassen obiger SDAG, lösen können.

Es wurde eine mehrdimensionale geometrische Brownsche Bewegung als finanzmathematisches Modell zur Berechnung von Optionspreisen und mehrere elektrische Schaltungen untersucht: ein Differentiator, ein *RLC*-Schwingkreis, ein Inverter, ein Ringoszillator, ein Transistorverstärker und eine Ladungspumpe. Die neu entwickelten Verfahren wurden unter der Programmiersprache `Fortran 77` implementiert und arbeiten mit konstanter Schrittweite.

Die sich an diese Arbeit anschließenden Tätigkeiten werden eine automatische Schrittweitenkontrolle der neuen Verfahren behandeln sowie schaltungsspezifische Strukturen ausnützen, um die numerischen Berechnungen zu beschleunigen.

Anhang A

Elektrisches Rauschen in Halbleiterbauelementen

In dieser Arbeit betrachten wir elektrisches Rauschen in passiven Halbleiterbauelementen (Widerstand bzw. Kondensator) und in aktiven Halbleiterbauelementen (Transistor). Die spektralen Leistungsdichten $SL_{I_{eR}}$ der verschiedenen Rauschstromquellen werden im folgenden ohne das Argument „ $(f, E [I_*])$ “ angegeben.

A.1 Rauschen eines Widerstandes

Das Schaltzeichen eines idealen Widerstandes R wird nach DIN 40700...40716 dargestellt, vgl. Abb. A.1(a).

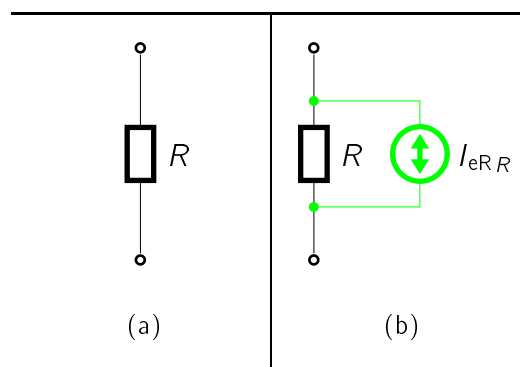


Abbildung A.1: (a) Schaltzeichen und gleichzeitig allgemeines Modell eines idealen Widerstandes.
(b) Allgemeines Modell eines realen Widerstandes mit Rauschstromquelle.

Monolith- oder Dünnschichtwiderstände, die in integrierten Schaltungen eine wichtige Rolle spielen, zeigen thermisches Rauschen [DLSV96]. In einem Widerstand R kann das thermische Rauschen modelliert werden durch eine zum Widerstand parallel geschaltete Rauschstromquelle I_{eRR} , vergleiche Abb. A.1(b). Die Rauschstromquelle besitzt keine Polarität. Reale Widerstände erzeugen neben dem thermischen Rauschen auch Funkel- bzw. $1/f$ -Rauschen [Fis93]. Beide Rauschstromquellen sind unkorreliert [Tsi87]. Die Modellierung des Widerstandrauschens ergibt:

$SL_{I_{eRR}}^1$	$= \frac{4k_B T}{R}$	thermisches Rauschen,
$SL_{I_{eRR}}^2$	$= K_F \frac{E[I_R]^2}{ f }$	Funkelrauschen,

wobei I_R der deterministisch modellierte Stromfluß durch den Widerstand ist. K_F hängt vom Typus des Widerstandes ab. Bei Metallfilmwiderständen ist K_F sehr klein, der Funkelrauschefekt kann vernachlässigt werden. Die Modellierung des thermischen Rauschens gilt unter der Annahme, daß der Widerstandswert als Funktion der Zeit konstant ist (d. h. $R = R(t) = \text{const}$) [Blu96]. Für in der Praxis verwendete Schaltungen verlaufen die Änderungen in den Widerstandswerten während des Zeitverlaufs viel langsamer als die Mechanismen, die das thermische Rauschen erzeugen [GM84]. Daher kann obiges Modell auch für einen zeitveränderlichen Widerstand (d. h. $R(t) \neq \text{const}$) angewendet werden.

A.2 Rauschen eines Kondensators

Das Schaltzeichen eines idealen Kondensators C wird nach DIN 40712 dargestellt, vgl. Abb. A.2(a). In idealen Kondensatoren sind keine Rauschstromquellen vorhanden.

Kondensatoren sind gebräuchliche Bauelemente in integrierten Schaltungen, entweder als ungewollte parasitäre oder als zweckbestimmte Bauelemente [GM84]. Die Modellierung eines Kondensators benötigt einen Leckwiderstand R_L und den parasitären Widerstand R_P , der die Summe des Hauptwiderstandswertes und des Widerstandes des dielektrischen Verlustes ist [Fis93], vgl. Abb. A.2(b). Im Falle von Kondensatoren in integrierten Schaltungen, besteht der parasitäre Widerstandswert normalerweise aus einem kleinen Wert, der in Serie mit der Kapazität geschaltet ist. Der Widerstand R_L weist thermisches Rauschen auf und der Widerstand R_P sowohl thermisches Rauschen als auch Funkelrauschen (siehe Abb. A.2(c)). Die Rauschstromquellen in R_P sind unkorreliert [Van54]. Diese Rauschgrößen können über die spektralen Leistungsdichten beschrieben werden:

$SL_{I_{eRR_P}}^1$	$= \frac{4k_B T}{R_P}$	thermisches Rauschen,
$SL_{I_{eRR_P}}^2$	$= K_F \frac{E[I_C]^{2F}}{ f ^{BF}}$	Funkelrauschen,
$SL_{I_{eRR_L}}$	$= \frac{4k_B T}{R_L}$	thermisches Rauschen,

wobei I_C der deterministisch modellierte Strom durch den Kondensator ist.

In der Praxis kann das Rauschen eines Kondensators im Vergleich zu anderen Schaltungselementen vernachlässigt werden.

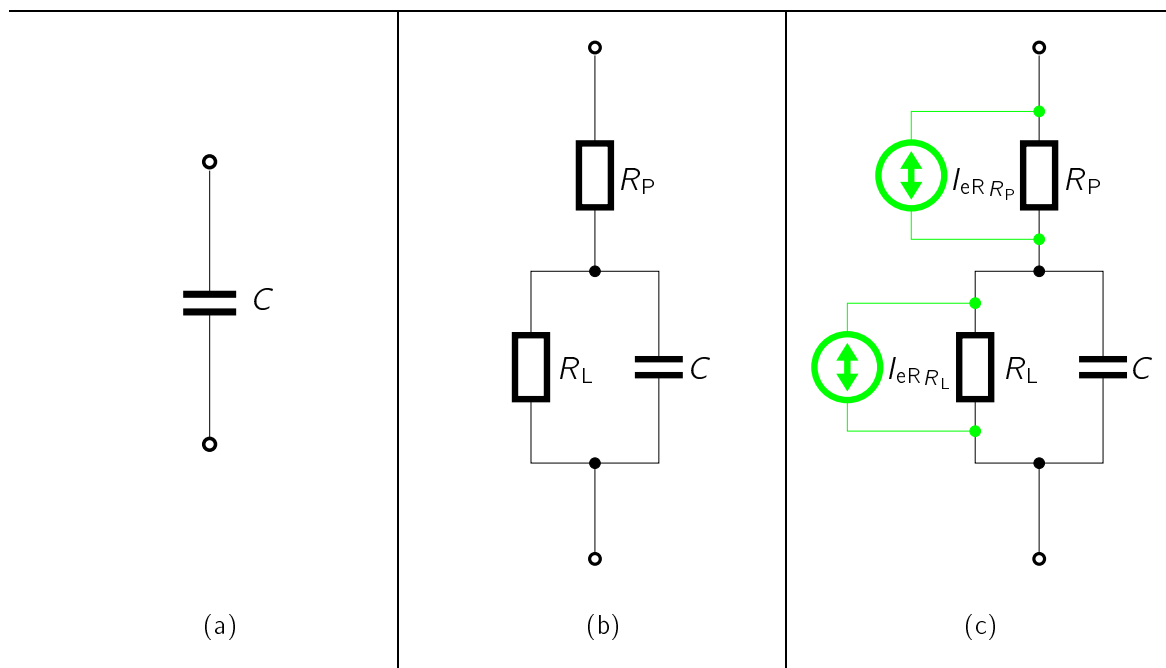


Abbildung A.2: (a) Schaltzeichen eines Kondensators.
 (b) Allgemeines Modell eines Kondensators [Fis93] ohne Rauschstromquellen und
 (c) mit Rauschstromquellen.

A.3 Rauschen eines Feld-Effekt-Transistors

Zu den unipolaren Transistoren gehören die Feld-Effekt-Transistoren (engl. *field effect transistor*, FET). Die Halbleiterstrecke für den Laststrom nennen wir Kanal. Die Anschlüsse des Kanals heißen *Source* und *Drain*.

Beim FET wird der Widerstand des Kanals, d. h. der Laststrom bzw. *Drain*-Strom zwischen *Source* und *Drain*, durch ein quer zum Kanal liegendes elektrisches Feld gesteuert. Das elektrische Feld wird durch eine Spannung zwischen der Steuerelektrode, sog. *Gate*, und dem Kanal bzw. *Source* hervorgerufen. Das *Gate* muß gegenüber dem Kanal isoliert sein, dazu gibt es zwei Möglichkeiten: Isolier-*Gate*-FET (IG-FET) bzw. Sperrschicht-FET.

Beim IG-FET besteht die Isolierschicht aus Siliziumdioxid zwischen Kanal und *Gate*, d. h. es besteht zwischen Laststromkreis und Steuerstromkreis keine elektrische Verbindung. Je nach Isolierschicht und Substrat unterscheiden wir zwischen MOSFET, MISFET und MASFET. Vorteile der MOS-Technik (engl. *metal oxide semiconductor*, MOS) in der Digitaltechnik gegenüber den digitalen bipolaren integrierten Schaltungen sind die folgenden: Die MOS-Fertigungstechnik ist einfacher bzw. kostengünstiger und MOS-Transistoren sind selbstisolierend. Der Flächenbedarf pro Bauelement ist in der MOS-Technik geringer als in der bipolaren Technik. Es lassen sich mit relativ wenig Aufwand sehr stromsparende integrierte Schaltungen aufbauen. In der Schaltungstechnik gibt es eine große Flexibilität durch Verwendung von komplementären Verarmungs-, Anreicherungs-, *n*-Kanal- bzw. *p*-Kanal-Transistoren. Abb. A.3(a) zeigt einen Querschnitt der

Bauform eines Verarmungs-MOSFETs mit einem n -Kanal. Abb. A.3(b) zeigt das Schaltzeichen dieses Typs nach DIN 40700, Bl. 8.

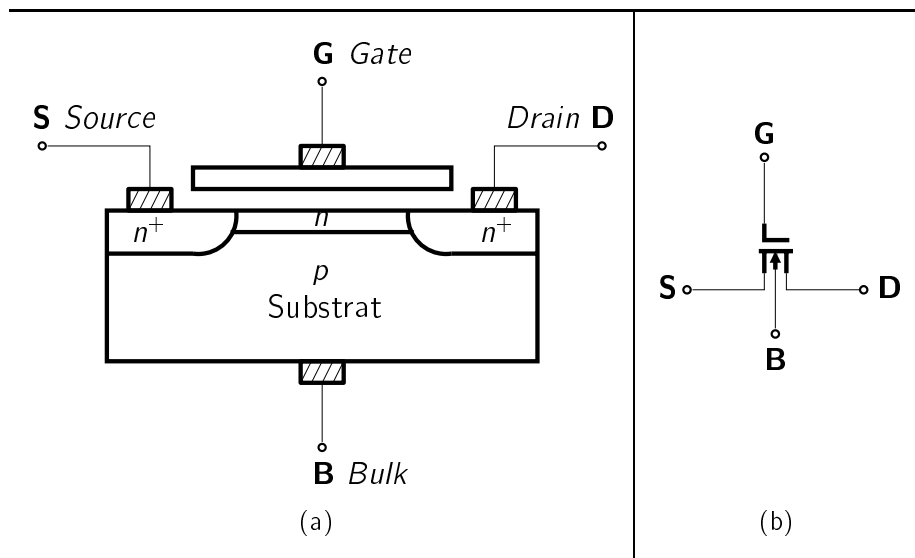


Abbildung A.3: (a) Querschnitt der Bauform und
(b) Schaltzeichen eines n -Kanal Verarmungs-MOSFETs.

Da das Kanalmaterial eine Widerstandsgröße ist, tritt im Kanal thermisches Rauschen auf. Das thermische Rauschen ist die Hauptquelle des Rauschens beim FET. Wir können zeigen, daß die Rauschstromquelle in der Kleinsignalersatzschaltung eines FET, vgl. Abb. A.4(a), durch eine Rauschstromquelle von *Drain* zu *Source* dargestellt werden kann. Experimente haben gezeigt, daß das beim FET auftretende Funkelrauschen dargestellt werden kann durch eine zweite Rauschstromquelle von *Drain* nach *Source*. Die zwei unkorrelierten Rauschstromquellen [Van54] für das thermische Rauschen und das Funkelrauschen können in einer Rauschstromquelle I_{eRD} zusammengefaßt werden. Die andere Rauschstromquelle in einem FET ist Schrotrauschen, das durch den *Gate*-Kriechstrom entsteht. Diese Rauschstromquelle wird dargestellt durch I_{eRG} und ist im allgemeinen sehr klein. Zusätzlich zu obigen Rauscheinflüssen kommt noch das thermische Rauschen an den parasitären Widerständen von *Source* und *Drain*. Diese Rauschstromquellen werden mit I_{eRS} und I_{eRD} bezeichnet. Die Ersatzschaltung eines MOSFETs mit obigen Rauschstromquellen zeigt Abb. A.4(b).

Die folgenden Gleichungen sind im gesamten nutzbaren Frequenzbereich gültig. Die Rauschstromquellen in einem MOSFET sind alle unabhängig voneinander und deren spektrale Leistungsdichten haben die folgenden Werte [MA93, PC63, Van62]:

$SL_{I_{eRS}}$	$= \frac{4k_B T}{R_S}$	thermisches Rauschen,
$SL_{I_{eRD}}$	$= \frac{4k_B T}{R_D}$	thermisches Rauschen,
$SL_{I_{eRG}}$	$= 2q_{elt} E [I_G]$	Schrotrauschen,
$SL_{I_{eRD}}^1$	$= 4k_B T \left(\frac{2}{3} E [g_{MOS}] \right)$	thermisches Rauschen,
$SL_{I_{eRD}}^2$	$= K_F \frac{E [I_D]^{aF}}{f C_{Oxid} L_{effektiv}^2}$	Funkelrauschen,

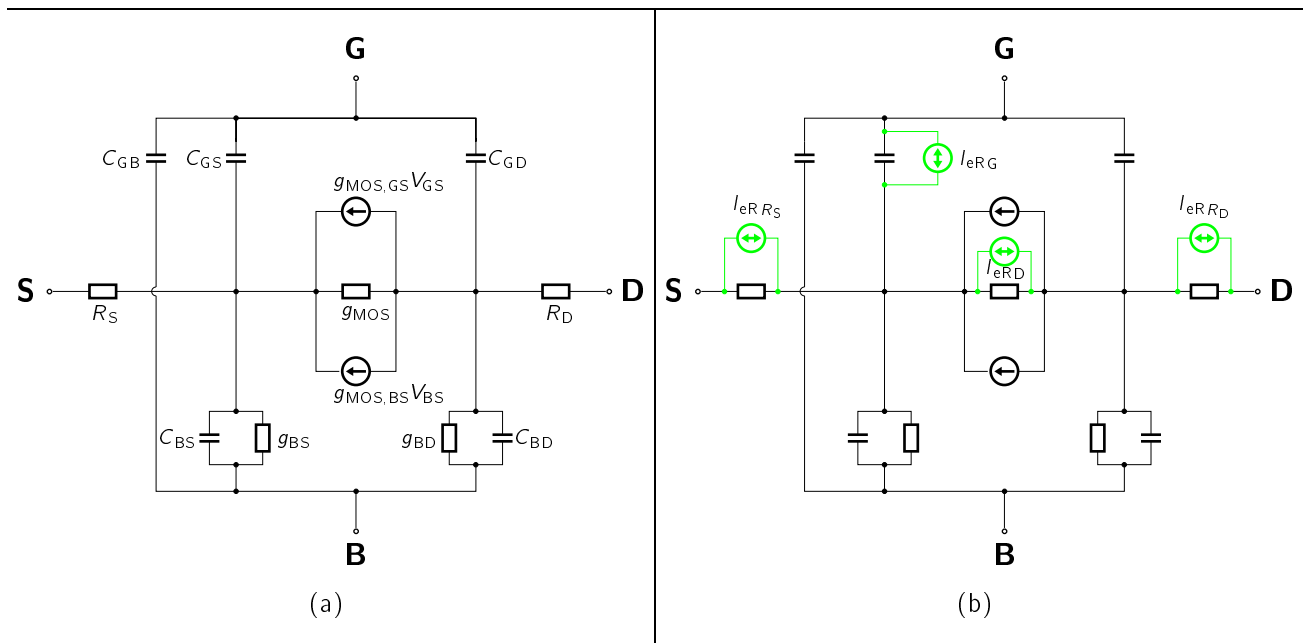


Abbildung A.4: Kleinsignalmodell (linearisiert) eines MOSFETs (LEVEL1, LEVEL2 und LEVEL3 von SPICE2 [MA93])
 (a) ohne Rauschstromquellen und
 (b) mit Rauschstromquellen.

wobei I_G der deterministisch modellierte *Gate*-Leckstrom,
 I_D der deterministisch modellierte *Drain*-Strom im Vorwärtsbetrieb,
 g_{MOS} der Transferleitwert des MOSFETs am Arbeitspunkt,
 $L_{effektiv}$ die reale Kanallänge und
 C_{Oxid} die Oxidkapazität für die Einheitsfläche ist.

Anhang B

Stochastische Grundbegriffe

*Die spektrale Leistungsdichte ist die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion eines stationären stochastischen Prozesses.
(Name beim Autor erhältlich)*

B.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Im folgenden sei Ω die Menge der möglichen Ergebnisse ω eines *Zufallsexperimentes* [EK89]. Soweit nicht anders vermerkt sind die weiteren Definitionen [Øks95] entnommen.

Definition B.1: Sei Ω eine gegebene Menge. Dann heißt eine Familie \mathcal{S} von Teilmengen von Ω eine σ -Algebra auf Ω , falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^K \in \mathcal{S}$, wobei $A^K := \Omega \setminus A$ das Komplement von A ist.
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

Falls für ein $\omega \in \Omega$ gilt: $\{\omega\} \in \mathcal{S}$, so heißt $\{\omega\}$ Elementarereignis [EK89].

Definition B.2: Das Paar (Ω, \mathcal{S}) wird Meßraum genannt.

Definition B.3: Eine Funktion $P : \mathcal{S} \rightarrow [0 : 1]$ mit den Eigenschaften

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ und

- falls $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ und falls $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ disjunkt ist (d. h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), dann gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* P auf einem *Meßraum* (Ω, \mathcal{S}) .

Definition B.4: Das Tripel (Ω, \mathcal{S}, P) heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition B.5: Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) wird *vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum* genannt, falls \mathcal{S} alle Teilmengen N von Ω mit dem P -äußeren Maß $P^*(N) = 0$ enthält, d. h. mit

$$P^*(N) := \inf \{P(A) : A \in \mathcal{S}, N \subset A\} = 0.$$

Jeder Wahrscheinlichkeitsraum kann vervollständigt werden.

Definition B.6: Die Teilmengen A von Ω , die zu \mathcal{S} gehören, werden *\mathcal{S} -meßbare Mengen* genannt. Sie werden im Wahrscheinlichkeitskontext auch *Ereignisse* genannt.

Definition B.7: Falls $P(A) = 1$ gilt, dann sagen wir „ A tritt mit Wahrscheinlichkeit 1 (m. W. 1) ein“ oder „ A tritt fast sicher (f. s.) ein“.

Definition B.8: Sei \mathcal{T} die Menge aller offenen Teilmengen des topologischen Raums \mathbb{R}^d , dann wird die kleinste σ -Algebra \mathcal{B}^d , die \mathcal{T} enthält, *Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^d* genannt und die Elemente $B \in \mathcal{B}^d$ heißen *Borel-Mengen*.

Definition B.9: Sei (Ω, \mathcal{S}, P) ein gegebener Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ wird *\mathcal{S} -meßbar* genannt, falls

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{S}$$

für alle Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}^d$.

Die Menge

$$\mathcal{S}_X := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^d\}$$

ist die kleinste σ -Algebra auf Ω bzgl. einer Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, die alle Mengen $X^{-1}(B)$, mit $B \subset \mathbb{R}^d$ offen, enthält. \mathcal{S}_X wird die von X *induzierte σ -Algebra* genannt.

Im folgenden ist (Ω, \mathcal{S}, P) immer ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition B.10: Eine Zufallsvariable X ist eine \mathcal{S} -meßbare Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Definition B.11: Jede Zufallsvariable X induziert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_X : \mathcal{B}^d \rightarrow [0 : 1]$ auf \mathbb{R}^d , definiert durch

$$\mu_X(B) := P(X^{-1}(B)),$$

für alle Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}^d$. $\mu_X : \mathcal{B}^d \rightarrow [0 : 1]$ wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Verteilung von X genannt.

Definition B.12: Sei $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ ein Maßraum, mit dem darauf erklärten Maß μ_X und dem Lebesgue-Maß λ . Eine nicht-negative \mathcal{B}^d - \mathcal{B} -meßbare Funktion $f_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mu_X(B) = \int_B f_X d\lambda \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}^d$$

heißt λ -Dichte von μ_X , in Zeichen $d\mu_X = f_X d\lambda$. f_X heißt Dichtefunktion, Dichte oder auch Radon-Nikodym-Ableitung von μ_X nach λ [EK89].

Definition B.13 (vgl. [EK89]): Eine m -dimensionale Zufallsvariable X auf (Ω, \mathcal{S}, P) heißt (E, C) -normalverteilt, falls es einen Vektor $E \in \mathbb{R}^m$ und eine positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{m,m}$ gibt, so daß für die Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ von X gilt:

$$f_X(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - E)^\top C^{-1}(\xi - E)\right).$$

B.2 Momente und Korrelationen

Im folgenden seien alle Zufallsvariablen stetig, sofern nichts anderes vorausgesetzt wird.

Definition B.14: Falls $\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$, dann wird die Zahl

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} x d\mu_X(x)$$

Erwartungswert von $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ genannt (mit Hinblick auf P).

Definition B.15: Die Varianz $\text{Var}[X]$ einer eindimensionalen Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\text{Var}[X] := E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Die Varianz ist ein Maß für die zu erwartende Abweichung zwischen X und $E[X]$ [Sch96].

Definition B.16: $\sigma[X] := \sqrt{\text{Var}[X]}$ wird als *Streuung* bzw. *Standardabweichung* von X bezeichnet [Sch96].

Definition B.17: Die *Kovarianz* $\text{Ko}[X, Y]$ zweier eindimensionaler Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\text{Ko}[X, Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Definition B.18: Die *Kovarianzmatrix* $M_{\text{Ko}}[X]$ einer d -dimensionalen Zufallsvariablen $X(\omega) = (X^1(\omega), \dots, X^d(\omega))^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ wird definiert durch

$$M_{\text{Ko}}[X] := (\text{Ko}[X^j, X^k])_{j,k=1,\dots,d}.$$

Definition B.19: Zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *unkorreliert*, falls gilt

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

Definition B.20:

- Zwei Teilmengen $A, B \in \mathcal{S}$ werden *stochastisch unabhängig* genannt, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

- Sei M_{index} eine gegebene Indexmenge. Eine Sammlung $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_i : i \in M_{\text{index}}\}$ von Familien \mathcal{A}_i meßbarer Mengen ist *stochastisch unabhängig*, falls

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

für alle $A_{i_1} \in \mathcal{A}_{i_1}, \dots, A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$ mit verschiedenen Indizes $i_1, \dots, i_k \in M_{\text{index}}$.

- Eine Sammlung von Zufallsvariablen $\{X_i(\omega) : i \in M_{\text{index}}\}$ heißt *stochastisch unabhängig*, falls die Sammlung aller induzierten σ -Algebren \mathcal{S}_{X_i} unabhängig ist.

Sind zwei eindimensionale Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängig, dann gilt

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y],$$

vorausgesetzt es war $E[|XY|] < \infty$, $E[|X|] < \infty$ und $E[|Y|] < \infty$.

Wir gehen von den Momenten für Zufallsvariablen über zu Momenten für stochastische Prozesse. Wollen wir wissen, wie schnell sich der Pfad eines stochastischen Prozesses bezüglich der Zeit verändert, so betrachten wir die folgende Definition der sog. Autokorrelationsfunktion, die dieses Zeitverhalten beschreibt, vgl. [Blu96].

Definition B.21: Sei X_t ein eindimensionaler stochastischer Prozeß. Die Autokorrelationsfunktion $Ak_{X_t}(t_1, t_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird für alle $t_1, t_2 \in [t_0 : \infty[$ definiert durch

$$Ak_{X_t}(t_1, t_2) := E[X_{t_1}(\omega)X_{t_2}(\omega)].$$

Wir betrachten stochastische Prozesse, deren statistische Eigenschaften invariant gegen Zeitverschiebungen sind, sog. stationäre Prozesse.

Definition B.22: Sei $h > 0$ beliebig. Ein stochastischer Prozeß X_t heißt stationär, falls X_t die gleiche Verteilung wie X_{t+h} besitzt.

D. h. für alle $t_1, t_2 \in [t_0 : \infty[$ hängt die Autokorrelationsfunktion $Ak_{X_t}(t_1, t_2)$ eines stationären stochastischen Prozesses X_t nur von der Zeitdifferenz $\tau := t_2 - t_1$ ab. Wir können in diesem Fall $Ak_{X_t}(\tau) := Ak_{X_t}(t_1, t_2)$ definieren. Ist das Rauschsignal X_t mittelwertfrei, so existiert im allgemeinen die Fourier-Transformierte $\widehat{Ak}_{X_t}(f)$ der Autokorrelationsfunktion $Ak_{X_t}(\tau)$, die sog. spektrale Leistungsdichte. Die Autokorrelationsfunktion stationärer stochastischer Prozesse ist eine gerade Funktion. Damit ist ihre Fourier-Transformierte $\widehat{Ak}_{X_t}(f)$ eine gerade Funktion, d. h. $\widehat{Ak}_{X_t}(-f) = \widehat{Ak}_{X_t}(f)$. Wir schreiben statt $\widehat{Ak}_{X_t}(f)$ im folgenden

$$SL_{X_t}(f) := 2 \cdot \widehat{Ak}_{X_t}(f), \quad f \geq 0.$$

$SL_{X_t}(f)$ wird auch als *spektrale Leistungsdichte* bezeichnet, wobei nur positive Frequenzen benützt werden.

B.3 Spezielle stochastische Prozesse

B.3.1 Brownsche Bewegung

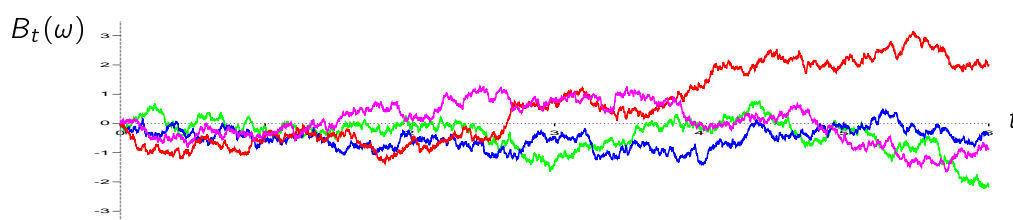


Abbildung B.1: Vier Pfade einer stetigen Version der Brownschen Bewegung.

Der schottische Botaniker Robert Brown beobachtete 1828 irreguläre Bewegungen von Getreidepollen, die auf eine Flüssigkeit aufgetragen wurden. Zur Beschreibung dieser Bewegung wird ein stochastischer Prozeß B_t benützt, die sog. Brownsche Bewegung, vgl. [Øks95].

Für fixiertes $x \in \mathbb{R}^m$ definieren wir das m -dimensionale **Gauß-Maß** p zur Varianz $t > 0$ durch

$$p(t, x, y) := (2\pi t)^{-m/2} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^m$ und $t > 0$. $p(t, x, y)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Nach Kolmogorovs Erweiterungssatz existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P^x)$ und ein stochastischer Prozeß $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)^\top : [0 : \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, so daß die endlichdimensionale Verteilung $P^x : \mathcal{S} \rightarrow [0 : 1]$ von B_t gegeben ist durch

$$\begin{aligned} P^x(\{\omega : B_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in B_k\}) &= \\ &= \int_{B_1 \times \dots \times B_k} p(t_1, x, x_1) \cdot p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdot \dots \cdot p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k, \end{aligned}$$

wobei $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, und die Maße dx_1, \dots, dx_k Lebesgue-Maße sind. Hierbei bezeichnen B_1, \dots, B_k Borel-Mengen des \mathbb{R}^m . Ein derartiger Prozeß wird **Brownsche Bewegung** bei x startend genannt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P^x wird d -dimensionales **Wiener-Maß** genannt [HT94]. Es gilt $P^x(\{\omega : B_0(\omega) = x\}) = 1$. Startet die Brownsche Bewegung bei $x = 0$, so wird in natürlicher Weise P^0 statt P^x verwendet. E^x bezeichnet den Erwartungswert, der bzgl. P^x gebildet wird.

Die so definierte Brownsche Bewegung ist nicht eindeutig. Wir können zeigen, daß die Pfade der Brownschen Bewegung so gewählt werden können, daß sie fast sicher stetig sind. In dieser Arbeit betrachten wir eine stetige Version der Brownschen Bewegung. Abb. B.1 zeigt vier Pfade einer stetigen Version der Brownschen Bewegung, startend bei $x = 0$. Unabhängig von der Wahl der Version können wir zeigen, daß die Pfade der Brownschen Bewegung mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends differenzierbar sind.

Grundlegende Eigenschaften der Brownschen Bewegung sind:

- B_t ist ein Gaußscher Prozeß. D. h. für alle $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ hat die mehrdimensionale Zufallsvariable $Z(\omega) := (B_{t_1}(\omega), \dots, B_{t_k}(\omega))^\top \in \mathbb{R}^{m \cdot k}$ eine $m \cdot k$ -dimensionale Normalverteilung. Es gilt für den Erwartungswert $E^x[Z] \in \mathbb{R}^{m \cdot k}$ bzw. für die Kovarianzmatrix $M_{\text{Ko}}^x[Z] \in \mathbb{R}^{m \cdot k, m \cdot k}$:

$$E^x[Z] = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M_{\text{Ko}}^x[Z] = \begin{pmatrix} t_1 I_m & \cdots & \cdots & t_1 I_m \\ \vdots & t_2 I_m & \cdots & t_2 I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_m & t_2 I_m & \cdots & t_k I_m \end{pmatrix},$$

mit der Einheitsmatrix $I_m \in \mathbb{R}^{m, m}$.

- Weiter gilt für $t \geq s$

$$E^x[(B_t - B_s)^2] = m(t - s).$$

- B_t hat stochastisch unabhängige Inkremente. D. h. für alle $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ sind $B_{t_1} - x, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ stochastisch unabhängig. Die Inkremente sind zudem stationär.
- Die Komponenten B_t^1, \dots, B_t^m der Brownschen Bewegung B_t sind stochastisch unabhängige, eindimensionale Brownsche Bewegungen.

B.3.2 Weißes Rauschen

Den verallgemeinerten stochastischen Prozeß \mathcal{W}_t [GW64] des Weißen Rauschens definieren wir folgendermaßen. Sei der Schwartzsche Raum

$$R_{\text{Schwartz}} := \{v(t) :]0 : \infty[\rightarrow \mathbb{R} : v(t) \text{ ist } C_\infty\text{-Funktion mit kompaktem Träger}\}$$

gegeben und sei B_t eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Wir definieren ein sog. Zufallsfeld $\mathcal{W}_{v(t)}(\omega) : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow \mathbb{R}$, mit fixiertem $v(t) \in R_{\text{Schwartz}}$, durch

$$\mathcal{W}_{v(t)}(\omega) := - \int_0^\infty \dot{v}(t) B_t(\omega) dt,$$

also durch die distributionelle Ableitung der eindimensionalen Brownschen Bewegung [HT94]. $\mathcal{W}_t := \mathcal{W}_{v(t)}$ wird **Weißes Rauschen** genannt.

B.3.3 Itô-integrierbare Prozesse

Die folgenden Definitionen sind [Øks95] entnommen.

Definition B.23: Sei B_t eine m -dimensionale Brownsche Bewegung. Wir definieren auf Ω die Menge $\mathcal{S}_t^{(m)}$ (speziell $\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t^{(1)}$ für $m = 1$) als die durch die Zufallsvariablen B_s , mit $s \leq t$, erzeugte σ -Algebra. D. h. $\mathcal{S}_t^{(m)}$ ist die kleinste σ -Algebra, die alle Mengen der Form

$$\{\omega : B_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in B_k\}$$

enthält, wobei $k = 1, 2, \dots, t_j \leq t$ und $B_j \subset \mathbb{R}^m$ Borel-Mengen sind. Wir nehmen an, daß alle Mengen mit dem Maß null in $\mathcal{S}_t^{(m)}$ enthalten sind.

Es gilt $\mathcal{S}_s \subset \mathcal{S}_t$ für alle $s < t$ und $\mathcal{S}_t \subset \mathcal{S}$ für alle t .

Definition B.24: Gilt für eine Familie $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ von σ -Algebren von Teilmengen aus Ω :

$$\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_t \text{ für } s < t,$$

so sagen wir $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ sei wachsend.

Definition B.25: Sei $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ eine wachsende Familie von σ -Algebren von Teilmengen aus Ω . Ein stochastischer Prozeß $g_t = \{g(t, \omega) : [0 : \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ wird \mathcal{T}_t -angepaßt genannt, falls die Funktion

$$\omega \mapsto g(t, \omega)$$

für jedes $t \geq 0$ \mathcal{T}_t -meßbar ist.

Definition B.26: Sei $\mathcal{I}_{1-dim} = \mathcal{I}_{1-dim}(t_0, t_{Ende})$, mit $t_0 \geq 0$, die Klasse aller stochastischen Prozesse

$$f_t = \{f(t, \omega) : [t_0 : \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}\},$$

so daß

- $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ $\mathcal{B} \times \mathcal{S}$ -meßbar ist (\mathcal{B} ist die Borelsche σ -Algebra auf $[t_0 : \infty[$),
- f_t \mathcal{S}_t -angepaßt ist und
- $E \left[\int_{t_0}^{t_{Ende}} f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Nach Definition des Itô-Integrals (vgl. [Øks95], S. 26) sind eindimensionale stochastische Prozesse $f_t \in \mathcal{I}_{1-dim}$ Itô-integrierbar.

Definition B.27: Eine Filtrierung auf (Ω, \mathcal{S}) ist eine Familie $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ von σ -Algebren $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{S}$, so daß

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

(d. h. $\{\mathcal{F}_t\}$ ist wachsend).

Ein m -dimensionaler stochastischer Prozeß M_t , mit $t \geq 0$, auf (Ω, \mathcal{S}, P) heißt **Martingal** im Hinblick auf eine Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (und im Hinblick auf P^0), falls

- M_t für alle t \mathcal{F}_t -meßbar ist,
- $E^0[|M_t|] < \infty$ für alle t und
- $E^0[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t$ für alle $s \geq t$.

Hier sind der Erwartungswert und der bedingte Erwartungswert bzgl. P^0 genommen.

Die Brownsche Bewegung B_t im \mathbb{R}^m ist ein Martingal im Hinblick auf die σ -Algebren \mathcal{S}_t , die durch die stochastischen Prozesse B_s , mit $s \leq t$, erzeugt werden (vgl. [Øks95], S. 28). Das Itô-Integral kann nun für eine größere Klasse von Integranden definiert werden.

Definition B.28: Sei $\mathcal{I} = \mathcal{I}[t_0 : t_{\text{Ende}}]$, mit $t_0 \geq 0$, die Klasse aller stochastischen Prozesse

$$f_t = \{f(t, \omega) : [t_0 : \infty[\times\Omega \rightarrow \mathbb{R}\},$$

so daß

- $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ $\mathcal{B} \times \mathcal{S}$ -meßbar ist (\mathcal{B} ist die Borelsche σ -Algebra auf $[t_0 : \infty[$),
- eine wachsende Familie von σ -Algebren \mathcal{S}_t , $t \geq t_0$, existiert, so daß
 - B_t ein Martingal bzgl. \mathcal{S}_t ist und
 - f_t \mathcal{S}_t -angepaßt ist,
- $P \left(\int_{t_0}^{t_{\text{Ende}}} f(t, \omega)^2 dt < \infty \text{ für alle } t \geq t_0 \right) = 1.$

Stochastische Prozesse f_t aus \mathcal{I} sind Itô-integrierbar (vgl. [Øks95], S. 32). Erst mit der Klasse \mathcal{I} ist eine mehrdimensionale Itô-Integration möglich (vgl. [Øks95], S. 31). Für einen Matrixprozeß v_t , wo jede Komponente ein stochastischer Prozeß aus \mathcal{I} ist, ist das mehrdimensionale Itô-Integral wohldefiniert durch

$$\int_{t_0}^t v_s dB_s := \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} v_s^{1,1} & \dots & v_s^{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_s^{d,1} & \dots & v_s^{d,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_s^1 \\ \vdots \\ dB_s^m \end{pmatrix}.$$

Das mehrdimensionale Itô-Integral ist ein d -dimensionaler Vektor, dessen j^{te} Komponente die folgende Summe eindimensionaler Itô-Integrale ist:

$$\left(\int_{t_0}^t v_s dB_s \right)^j = \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t v_s^{j,l} dB_s^l.$$

B.4 Stochastische Differentialgleichungen

Gesucht sind zum Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}^d$ mögliche Lösungen X_t der stochastischen Differentialgleichung (SDG)

$$\frac{dX_t}{dt} = u(t, X_t) + v(t, X_t) \cdot \mathcal{W}_t, \quad X_{t_0} = X_0,$$

mit $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ und dem m -dimensionalen Weißen Rauschen \mathcal{W}_t . Nach Itôs Interpretation obiger SDG (vgl. [Øks95], S. 59) genügt X_t der stochastischen Integralgleichung

$$X_t = X_{t_0} + \int_0^t u(s, X_s) ds + \int_0^t v(s, X_s) dB_s, \quad X_{t_0} = X_0,$$

oder in differentieller bzw. abkürzender Schreibweise

$$dX_t = u(t, X_t) dt + v(t, X_t) dB_t, \quad X_{t_0} = X_0.$$

Wir bezeichnen stochastische Integralgleichungen ebenfalls als stochastische Differentialgleichungen. Wir sprechen von SDGn mit *additivem Rauschen*, falls die Diffusionsmatrix v ausschließlich von der Zeit t abhängt. Ist die Diffusionsmatrix vom Lösungsprozeß X_t abhängig, so sagen wir, die SDG habe *multiplikatives Rauschen*.

In dieser Arbeit gehen wir immer von der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der SDG bzw. SDAG aus. Eine theoretische Aussage dazu liefert der

Satz B.1 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz, vgl. [Øks95], S. 64): Sei $0 \leq t_0 < t_{\text{Ende}}$. Seien $u(t, x) : [t_0 : t_{\text{Ende}}] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $v(t, x) : [t_0 : t_{\text{Ende}}] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ meßbare Funktionen, die der folgenden Ungleichung genügen

$$|u(t, x)| + |v(t, x)| \leq C(1 + |x|),$$

mit $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$ und einer Konstanten C (wobei $|v|^2 := \sum |v^{ij}|^2$), und seien $u(t, x)$ und $v(t, x)$ so, daß

$$|u(t, x) - u(t, y)| + |v(t, x) - v(t, y)| \leq D|x - y|,$$

mit $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [t_0 : t_{\text{Ende}}]$ und einer Konstanten D . Sei Z eine Zufallsvariable, unabhängig von der durch B_s , mit $s \geq t_0$, erzeugten σ -Algebra S_∞ , und so, daß

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Dann besitzt die SDG

$$dX_t = u(t, X_t) dt + v(t, X_t) dB_t, \quad X_{t_0} = Z,$$

mit $t_0 \leq t \leq t_{\text{Ende}}$, eine eindeutige t -stetige Lösung X_t , wobei jede Komponente von X_t zu $\mathcal{I}_{1\text{-dim}}$ gehört.

Eindeutigkeit von zwei t -stetigen Prozessen X_t und \tilde{X}_t aus $\mathcal{I}_{1\text{-dim}}$, die die SDG erfüllen, bedeutet $X_t = \tilde{X}_t$ für alle $t \leq t_{\text{Ende}}$ fast sicher.

In dieser Arbeit werden Integrale bzgl. dem Wiener-Maß als Itô-Integrale interpretiert. Unterschiedliche Interpretationen sind möglich, z. B. die Definition des stochastischen Integrals nach Stratonovich [KP92]. Je nach Interpretation des stochastischen Integrals fallen die Lösungen einer SDG unterschiedlich aus. Es besteht die Möglichkeit die „Itô-Lösung“ einer SDG in eine „Stratonovich-Lösung“ umzurechnen, vgl. [Øks95], S. 75.

Wir betrachten pfadweise Lösungen einer SDG, das sind Lösungen zu vorgegebenem Elementarereignis ω_{fix} . Neben dem pfadweisen Lösungsbegriff gibt es die Momentenlösungen einer SDG, d. h. Funktionale der pfadweisen Lösungen (z. B. der Erwartungswert). Pfadweise Lösungen werden starke Lösungen und Momentenlösungen werden schwache Lösungen genannt.

Literaturverzeichnis

- [BCP89] K. E. Brenan, S. L. Campbell und L. R. Petzold. *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. North Holland, New York, 1989.
- [BGMS90] R. Bulirsch, A. Gilg, K. Merten und K. Steger. Numerische Simulation in der Halbleiterindustrie. *Informatik Forschung Entwicklung*, **5**:42–56, 1990.
- [Blu96] A. Blum. *Elektronisches Rauschen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [CDK87] L. O. Chua, C. A. Desoer und E. S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, Inc., 1987.
- [Coo90] M. Cooke. *Halbleiterbauelemente*. Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [Dem97] A. Demir. *Analysis and Simulation of Noise in Nonlinear Electronic Circuits and Systems*. Dissertation, University of California, Berkeley, 1997.
- [DLSV96] A. Demir, E. W. Y. Liu und A. L. Sangiovanni-Vincentelli. Time-Domain non-Monte Carlo Noise Simulation for Nonlinear Dynamic Circuits with Arbitrary Excitations. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, **15**(5):493–505, 1996.
- [EK89] J. Edenhofer und C. Kredler. Formelsammlung zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Schriftenreihe 3, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München, 1989.
- [EL95] J. Engberg und T. Larsen. *Noise Theory of Linear and Nonlinear Circuits*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [Fis93] P. J. Fish. *Electronic Noise and Low Noise Design*. New Electronics. Macmillan, Basingstoke et al., 1993.
- [FWZ⁺92] U. Feldmann, U. A. Wever, Q. Zheng, R. Schultz und H. Wriedt. Algorithms for Modern Circuit Simulation. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, **46**:274–285, 1992.

- [GDF96] M. Günther, G. Denk und U. Feldmann. Modelling and Simulating Charge Sensitive MOS Circuits. *Mathematical Modeling of Systems*, **2**:69–81, 1996.
- [GF99] M. Günther und U. Feldmann. CAD Based Electric Circuit Modeling in Industry. Part I: Mathematical Structure and Index of Network Equations. *Surveys on Mathematics for Industry*, **8**:97–129, 1999.
- [GM84] P. R. Gray und R. G. Meyer. *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, 1984.
- [Gv91] G. H. Golub und C. F. van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2. Auflage, 1991.
- [GW64] I. M. Gelfand und N. J. Wilenkin. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) IV*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [Hai65] R. H. Haitz. Controlled Noise Generation with Avalanche Diodes. *IEEE Transactions on Electron Devices*, **12**:198–207, April 1965.
- [HNW93] E. Hairer, S. P. Nørsett und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [HT94] W. Hackenbroch und A. Thalmaier. *Stochastische Analysis*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Knu73] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, Bd. 1 in *Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 2. Auflage, 1973.
- [Kön92] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1992.
- [Kön93] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer Verlag, 1993.
- [KP92] P. E. Kloeden und E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Bd. 23 in *Applications of Mathematics*. Springer Verlag, 1992.
- [Kra97] B. Kramer. Der Transistor wird fünfzig. *Physikalische Blätter*, **53**(12):1203–1206, 1997.
- [KRS92] W. Kampowsky, P. Rentrop und W. Schmidt. Classification and Numerical Simulation of Electric Circuits. *Surveys on Mathematics for Industry*, **2**:23–65, 1992.
- [MA93] G. Massobrio und P. Antognetti. *Semiconductor Device Modeling with SPICE*. McGraw-Hill, 2. Auflage, 1993.
- [MF73] C. D. Motchenbacher und F. C. Fitchen. *Low-Noise Electronic Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1973.
- [Mil95] G. N. Milstein. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands a. o., 1995.
- [Øks95] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 4. Auflage, 1995.

- [PC63] J. J. Plumb und E. R. Chenette. Flicker Noise in Transistors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, **10**:304–308, September 1963.
- [Pen99a] C. Penski. Analysis and Numerical Integration of Stochastic Differential-Algebraic Equations and Applications in Electronic Circuit Simulation. Blauer Bericht M-9907, Technische Universität München, Mai 1999.
- [Pen99b] C. Penski. A New Stochastic Integration Scheme for the Efficient Solution of Randomly Disturbed Electronic Circuits. In *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 98*, Seiten 423–430. B. G. Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1999.
- [Pen00] C. Penski. A New Numerical Method for SDEs and its Application in Circuit Simulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **115**:461–470, 2000.
- [PS87] V. S. Pugachev und I. N. Sinitsyn. *Stochastic Differential Systems*. John Wiley & Sons Ltd., 1987.
- [PSNT85] B. Pellegrini, R. Saletti, B. Neri und P. Terreni. $1/f^\vartheta$ Noise Generators. *Noise in Physical Systems and 1/f Noise*, Seiten 425–428, 1985.
- [Reg87] Regionales Rechenzentrum für Niedersachsen (RRZN), Universität Hannover, Schloßwender Str. 5, 30167 Hannover. *FORTTRAN 77 Sprachumfang unter dem CDC-Betriebssystem NOS/VE, ein Nachschlagewerk*, 11. Auflage, Juli 1987.
- [RRS89] P. Rentrop, M. Roche und G. Steinebach. The Application of Rosenbrock-Wanner Type Methods with Step Size Control in Differential-algebraic Equations. *Numerische Mathematik*, **55**:545–563, 1989.
- [SB93] J. Stoer und R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag, New York, 1993.
- [Sch91] H. Schaumburg. *Halbleiter*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [Sch96] S. Schäffler. Stochastische Differentialgleichungen. Schriftenreihe 7, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München, 1996.
- [SD98] O. Schein und G. Denk. Numerical Solution of Stochastic Differential-algebraic Equations with Applications to Transient Noise Simulation of Microelectronic Circuits. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **100**:77–92, Juli 1998.
- [SM96] Y. Saito und T. Mitsui. Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**(6):2254–2267, Dezember 1996.
- [Tsi87] Y. P. Tsividis. *Operation and Modeling of the MOS Transistor*. McGraw-Hill, 1987.
- [Van54] A. Van der Ziel. *Noise*. Prentice-Hall, New York, 1954.
- [Van62] A. Van der Ziel. Thermal Noise in Field-Effect Transistors. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **50**:1808–1812, August 1962.

Stichwortverzeichnis

σ -Algebra	93	-Prozeß	34
A _____		-Taylor-Entwicklung	37
angepaßt	100	abgebrochene –	38
Autokorrelationsfunktion	97	K _____	
B _____		Kirchhoffsches	
Bauelement	11	Spannungsgesetz, KSpG	24
Brownsche Bewegung	98	Stromgesetz, KStG	24
D _____		Knoten	11
deterministisch	7	-spannung	12
Differential		Konvergenz	
- algebraische Gleichung, DAG	28	im Mittel	38
- gleichung, DG	31	im quadratischen Mittel	39
differentieller Index	31	L _____	
Diffusionsmatrix	28, 35	ladungsorientiertes	
Driftvektor	35	Bauelementmodell	12
E _____		Schaltungsmodell	28
Ereignis	94	Leitung	11
Ersatzschaltbild	11	M _____	
Erwartungswert	95	Maß	
F _____		Gauß-	98
Filtrierung	100	Wiener-	98
H _____		Masche	24
Halbleiter	16	Mehrfachindex	35
I _____		Menge	
integrierte Schaltung	7	von Mehrfachindizes	35
Intensität	23	hierarchische –	35
Inzidenzmatrix	27	Rest-	36
Itô		mit Wahrscheinlichkeit 1, m. W. 1	94
-Integral, mehrfach	36	modifizierte Knotenanalyse, MKA	26
-Koeffizientenfunktion	37	N _____	
		Netzwerk	11
		normalverteilt	95

O _____

Ordnung	
Genauigkeits-	40
starke Konvergenz-	40

P _____

Pfad	33
Pseudozufallszahl	64

R _____

Rauschen	
additives –	102
elektrisches –	15
Funkel-	19
multiplikatives –	102
Schrot-	18
thermisches –	17
Weißes –	99
Rauschstromquelle	12

S _____

spektrale Leistungsdichte	97
stabil	
A-	49
im Mittel	49
im quadratischen Mittel	49
stationär	97
stochastisch	7
-e Differentialgleichung, SDG	34, 101
-e differential-algebraische Gleichung, SDAG	29
-er Prozeß	33
-es Integral	33
unabhängig	96
Stoppzeit	36

T _____

Transientensimulation	12
-----------------------	----

U _____

unkorreliert	96
--------------	----

V _____

Varianz	95
Verteilung	95

W _____

Wahrscheinlichkeits-

-maß	94
-raum	94

Z _____

Zufallsvariable	95
Zweig	11
-spannung	12
-strom	12