

Institut für Werkstoffe und Verarbeitung
Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung
Technische Universität München

Untersuchung des viskoelastisch exzentrischen Knickens von Polymeren

Dipl. –Ing. Univ. Harun Kara

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr. –Ing.)
genehmigten Dissertation

Vorsitzender: Univ. –Prof. Dr. med., Dr.-Ing. habil. Erich Wintermantel

Prüfer der Dissertation:

1. Univ. –Prof. Dr.-Ing., Dr. rer. nat., Otto Brüller, i.R.
2. Univ. –Prof. Dr. –Ing. Horst Baier

Diese Dissertation wurde am 27.01.2005 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 13.04.2005 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung.....	1
	1.1 Problemstellung.....	2
	1.2 Zielsetzung der Arbeit.....	2
	1.3 Aufgabenbegrenzung.....	3
2.	Polymere.....	4
	2.1 Die Gestalt der Makromoleküle.....	5
	2.2 Thermoplaste.....	5
	2.3 Elastomere.....	7
	2.4 Duromere.....	7
	2.5 In dieser Arbeit verwendete Werkstoffe.....	8
	2.5.1 PMMA.....	8
	2.5.2 PC.....	8
	2.5.3 PVC.....	8
3.	Viskoelastizität.....	9
	3.1 Lineare Viskoelastizität.....	10
	3.1.1 Differentialoperator-Gleichung.....	11
	3.1.2 Integraldarstellung.....	13
	3.1.3 Zusammenhang zwischen der Kriechnachgiebigkeit und dem Relaxationsmodul.....	15
	3.2 Mechanische Modelle.....	17
	3.2.1 Grundmodelle.....	1
	3.2.2 Das Maxwell-Modell.....	19
	3.2.3 Das Kelvin-Voigt-Modell.....	21
	3.2.4 Das verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell.....	22
	3.2.5 Das verallgemeinerte Maxwell-Modell.....	23
	3.3 Nichtlineare Viskoelastizität.....	25
	3.3.1 Bestimmung der Materialparameter.....	28
	3.3.2 Die Kriechnachgiebigkeit-Relaxationsmodul-Modul-Umwandlung.....	32
	3.3.3 Berechnung einer einachsigen Stufenbelastung.....	34
	3.3.4 Ermittlung der Materialparameter aus dem Torsionsversuch.....	36
	3.4 Energiebetrachtung in der Viskoelastizität.....	39
4.	Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen.....	48
	4.1 Versuchsvorrichtung für Zug, Zugkriechen, Torsionskriechen und Relaxation.....	49

4.2 Messtechnik.....	50
4.3 Kriech- und Relaxationsvorrichtungen.....	52
4.4 Start des Versuchs.....	56
4.5 Ergebnisse.....	60
5. Stabilität.....	75
5.1 Elastische Stabilität.....	75
5.1.1 Das elastische Knicken nach Euler.....	85
5.1.2 Der elastische Balken mit Exzentrizität.....	88
5.1.3 Knicken mit großen Verschiebungen – Die Elastica.....	91
5.2 Viskoelastische Stabilität.....	104
6. Zusammenfassung und Ausblick.....	138

Literaturverzeichnis

Anhang

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen, die die Fertigstellung dieser Arbeit ermöglicht haben. Ganz herzlich möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Professor Otto Brüller für die langjährige Betreuung und für die vielen Tipps bedanken. Weiterer Dank geht an die Professoren meiner Prüfungskommission: Herrn Professor Erich Wintermantel, welcher sehr rasch den Vorsitz übernahm. An Herrn Professor Horst Baier, der durch eine gewissenhafte Durchsicht wichtige Hinweise gab.

An all die Mitarbeiter am Lehrstuhl und am Fachgebiet spreche ich meinen besonderen Dank zu. An meinen langjährigen Kollegen Dr. Endre Barti und an die unermüdliche Sekretärin Anette Batroff, sowie an die Kollegen Johannes Stadler, Dr. Joachim Aigner und Armin Junker.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern für all die Jahre bedanken. Ihr Verständnis und Ihre Unterstützung waren maßgeblich Entscheidend für diese Arbeit.

1 Einleitung

In vielen technischen und alltäglichen Bereichen sind Kunststoffe nicht mehr wegzudenken. Deshalb wurden bereits schon Mitte der 20-Jahre wissenschaftliche Grundlagen gelegt und auf Grund der kontinuierlich sinkenden Kunststoffpreise sind diese Werkstoffe ein nützlicher Begleiter unseres Lebens geworden. Wichtige Branchen wo Kunststoffe zum Einsatz kommen, sind im Bauwesen (Dübel, Fensterprofile usw.), im Verpackungssektor (Flaschen, Folien usw.) und in der Automobilindustrie (Bedienungselemente, Ablagen, Verkleidung sowie Strukturbauteile). Durch hohe Gewichtseinsparung und die daraus resultierende Senkung des Kraftstoffverbrauchs, sowie durch eine kostengünstige Herstellung dieser Werkstoffe, spielen sie eine immer stärker zunehmende Rolle.

Kennzeichnend für Kunststoffe, im Gegensatz zu Metallen, sind ihr organischer Aufbau, niedriges spezifisches Gewicht, eine niedrigere Wärmeleitfähigkeit, eine Größenordnung niedrigere Festigkeit und zwei Größenordnungen niedrigere Steifigkeit. Sie besitzen zum Teil eine hohe innere mechanische Dämpfung und sind elektrisch isolierend. Aber auch ihre vielfältige und vorteilhafte Verarbeitbarkeit macht Kunststoffe interessant. So können z.B. durch Spritzgießen komplizierte und passgenaue Gehäuse, Zahnräder und Zahnflanken, die nicht mehr nachgearbeitet werden müssen, hergestellt werden.

Doch immer mehr kommen diese Werkstoffe, auf Grund fortschreitender Kenntnis und verbesserten Herstellungsverfahren, in hochbelasteten Anwendungen zum Tragen. Da aber bei Kunststoffen, im Gegensatz zu metallischen Werkstoffen, die zeitlich veränderten Eigenschaften, wie z.B. E-Modul, Dehnung oder Spannung, eine wesentliche Rolle spielen, sind bei ihrer Dimensionierung gewisse Regeln einzuhalten. Aus Langzeitversuchen (Kriechen und Spannungsrelaxation) werden speziell für den Kunststoff Werkstoffparameter ermittelt, die dann zur Ableitung rheologischer Modelle und ihrer Zustandsgleichungen dienen (Dehnungs-Spannungs-Zeit-Beziehungen). Neben der Zeit spielen noch ein paar andere Faktoren eine wichtige Rolle, wie Temperatur, Feuchtigkeit, Höhe der Spannung, Höhe der Dehnung, von denen die Werkstoffparameter beeinflusst werden.

Aus vielen Veröffentlichungen und Experimenten hat sich herausgestellt, dass diese Zustandsgleichungen unterhalb einer gewissen Grenze von der Höhe der Belastung nicht beeinflusst werden. Dieser Bereich, mit seiner Spannung und der zur Zeit t zugehörigen Dehnung, hat ein linear viskoelastisches Verhalten, bei dem das Boltzmannsche Superpositionsprinzip für die Berechnung der Dehnungs-Spannungs-Zeit-Beziehungen maßgebend ist. Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip verliert jedoch seine Gültigkeit, wenn die Zustandsgleichungen von der Höhe der Belastung beeinflusst werden. Dann spricht man von der nichtlinearen Viskoelastizität. In der linearen Viskoelastizitätstheorie erlauben die drei am häufigsten angewandten Methoden (Methode der mechanischen Modelle, Differentialoperatordarstellung und Integraldarstellung) eine mehr oder weniger einfache Lösung für viele viskoelastische Probleme. Im nichtlinearen viskoelastischen Bereich hingegen, werden zur Zeit noch Anstrengungen gemacht, um die Probleme der Erfassung der Nichtlinearitäten zu beseitigen. Die Praxis zeigt aber, dass die meisten viskoelastischen Bauteile im nichtlinearen Bereich beansprucht werden. Es kommt auch vor, wie in dieser Arbeit, dass die Belastung (Eingangsmoment), auf Grund des Kriechens bzw. Relaxation, eine Funktion der Zeit ist. Da aber bei dieser Vielfalt von möglichen Belastungsarten (Zug, Druck, Rampenfunktion, Schwingungen usw.) der größere Zeitaufwand im Falle der Langzeitversuche eine experimentelle Bestimmung des Materialverhaltens fast unmöglich machen, ist die analytische Charakterisierung von großer Bedeutung.

1.1 Problemstellung

Die Erfassung des mechanischen Verhaltens von Kunststoffen ist im Vergleich zu metallischen Werkstoffen sehr viel schwieriger. Ein wichtiger Grund dafür ist die Veränderung der Materialeigenschaften mit der Zeit; also spricht man von einem „viskoelastischen“ Material. Die Berechnung von Bauteilen aus viskoelastischem Material ist deshalb nur mit genauer Kenntnis des Werkstoffverhaltens möglich. Es ist also wichtig die Eigenschaften eines solchen Materials genau zu messen und mathematisch mit einer sehr guten Annäherung wiederzugeben, da bei der Beschreibung eines solchen Materialgesetzes komplizierte Integral- und Differentialgleichungen auftreten, deren analytische und numerische Lösungen oft schwierig sind. Ferner sind Experimente mit viskoelastischen Materialien zeitaufwendig, da das Verhalten über den ganzen interessierenden Zeitraum gemessen und beschrieben werden muss. Auch ist die Handhabung solcher Materialien nicht ganz leicht, da schon geringe klimatische Schwankungen, wie Feuchte und Temperatur, zu verschobenen bzw. falschen Ergebnissen führen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung eines allgemeinen Stoffgesetzes für einen polymeren Werkstoff unter einer komplexen Belastung mit Hilfe einfacher Kriech- bzw. Relaxationskurven, welches die lineare und nichtlineare Viskoelastizität berücksichtigt. Als Grundlage dienen die aus mechanischen Belastungen bei unterschiedlichen Spannungen bzw. Dehnungen ermittelten Materialkonstanten. Ausgehend vom Langzeitzugversuch sollen Vorhersagen auf das Verhalten bei Druckbelastung mit unterschiedlichen Exzentrizitäten und Druckkräften gemacht werden. Die für die Experimente verwendeten Werkstoffe waren dabei Polymethylmethacrylat (PMMA), Polycarbonat (PC) und Polyvinylchlorid (PVC). Die Arbeit gliedert sich grob in einen experimentellen, analytischen und numerischen Anteil.

Im experimentellen Teil wird der Versuchsaufbau für die Zug- und Druckversuche vorgestellt, mit Hilfe dessen das Materialverhalten sowohl unter einfacher konstanter Zugbelastung (Kriechen) als auch unter der Druckbelastung bei sich ständig ändernder Spannung untersucht werden kann. Um die Materialkonstanten später ermitteln zu können, wurden zahlreiche Zugversuche (mit konstanter Spannung) sowie Druckversuche im Vorfeld durchgeführt.

Im theoretischen Teil wird dann ein mathematisches Verfahren erarbeitet, das anhand der linearen Materialparameter und der Nichtlinearitätsfaktoren, die aus den einfachen Kriechversuchen bestimmt werden, eine Vorhersage für das Materialverhalten unter Druckbelastung ermöglicht. Des Weiteren wird ein Programm vorgestellt, mit Hilfe dessen man aus der klassischen Knicktheorie das Kriechen unter Druckkraft und einer gegebenen Exzentrizität berechnen kann. Das Auswerten von den Nichtlinearitätsfaktoren für Zug und Druck erfolgt auch mittels eines Computerprogramms das dafür geschrieben wurde.

Um die theoretische und numerische Auswertung zu vereinfachen, beschränkt sich diese Arbeit auf einachsige Belastungen unter isothermen Bedingungen. Die abgeleiteten Spannungs-Dehnungs-Zeit-Beziehungen sind nur im linearen und nichtlinearen Bereich, d. h. solange noch keine Schädigungen auftreten, anwendbar. Ebenso werden thermodynamische Einflüsse und irreversible Prozesse vernachlässigt.

Um die gewonnenen Ergebnisse auch auf eine andere Belastungsart anwenden zu können, wird der Fall der Torsion eines viskoelastischen Material näher betrachtet.

1.3 Aufgabenbegrenzung

Es wird vorausgesetzt, dass das Materialgesetz und die von ihm abgeleiteten Überlegungen nur für den linear- und nichtlinear-viskoelastischen Bereich gelten, d.h. es soll bis zum Auftreten von Schädigungen oder ähnlichen Effekten, wie z.B. Fließen oder Crazing, gültig sein. Weiterhin soll nur eine Gruppe von Kunststoffen, die Thermoplaste, untersucht werden. Ferner werden die Versuche nur bei isothermen Bedingungen durchgeführt, d.h. die Probertemperatur bleibt bis zum Versuchsende konstant. Deshalb können auch keine Untersuchungen zu bereits bekannten Gleichungen wie zur Zeit-Temperatur-Verschiebung (William-Landel-Ferry) gemacht werden. Des weiteren können wegen fehlender Analyse-möglichkeiten keine Rückschlüsse zwischen dem mechanischen Verhalten und der Struktur oder dem chemischen Aufbau des Werkstoffes gezogen werden. Die somit ermittelten Parameter sind materialspezifisch und müssen für jeden Kunststoff mit neuen Versuchen bestimmt werden. Die Länge der Versuche beträgt 100 h.

Aufgrund der Komplexität und der vielen Parameter, wurde bei den Knickversuchen nur eine Art der bekannten Euler-Lagerbedingungen eingesetzt.

Die Versuche werden nur an Polymethymetacrylat (PMMA), Polycarbonat (PC), und Polyvinylchlorid (PVC) durchgeführt.

Für die Torsionsversuche standen nur PMMA und PVC zur Verfügung. Die Experimente mit den DMS-Streifen sind, wegen der relativ geringen Kriechneigung von PC, nur an den anderen Materialien durchgeführt worden. Auf Grund der fehlenden Analyse-möglichkeiten, ist der Versuch für das Knicken bei einer Probe mit hohen Dicken nicht explizit untersucht worden, aber in der Literatur sind viele Quellen dazu aufgeführt und dargestellt.

2 Polymere

In diesem Kapitel werden kurz die Grundlagen des Polymeraufbaus aus ihrem Anfangszustand, die Polymergruppen sowie die möglichen Herstellungsreaktionen (Synthese) beschrieben. Im letzten Teil dieses Abschnittes werden die experimentell verwendeten Polymere näher beschrieben.

Polymere bestehen aus organischen langkettigen (makromolekularen) Verbindungen, die entweder aus chemisch veränderten langkettigen Naturstoffen oder durch chemische Verbindung von kurzkettigen (niedermolekularen) Grundstoffen, den sogenannten Monomeren, hergestellt werden. Eine weitere gemeinläufige Bezeichnung für die Stoffgruppe der langkettigen Werkstoffe ist der sogenannte Kunststoff. Für diese Verbindungen sind die besonders geeigneten Atome der Kohlenstoff und das Silizium, wobei Silizium über Sauerstoffbrücken Riesenmoleküle bildet (z.B. Silikone, Silikate). Den essentiellen Lieferanten für diese Grundsubstanzen stellen organische Stoffe wie Erdöl, Kohle, Kalk, Erdgas, pflanzliche- und tierische Naturstoffe dar. Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale der Kunststoffe sind:

- Art der am Aufbau beteiligten Atome
- Anordnung der Makromoleküle
- Bildungsreaktion (chemischer Aufbau)
- Gestalt der Makromoleküle

Die Größe des Makromoleküls wird durch den Polymerisationsgrad (n) ausgedrückt bzw. mit der Molmasse angegeben. Mit dem Polymerisationsgrad wird die Zahl der Monomere, die im Makromolekül sind, beziffert. Durch die Multiplikation des Molekulargewichtes der Monomere mit dem Polymerisationsgrad, lässt sich das Molekulargewicht der Makromoleküle berechnen. Dabei ist anzumerken, dass diese Werte gemittelte Werte sind, da sich in einem Kunststoff immer ein Gemisch aus verschiedenen großen Makromolekülen befindet. Deshalb bewegt sich das mittlere Molekulargewicht bei Kunststoffen zwischen 8000 und 3000000 g/mol. [1].

Auch bei gleichem Polymerisationsgrad kann es jedoch sein, dass die Eigenschaften eines Werkstoffes unterschiedlich sind. Dies kommt daher, dass die Länge der Ketten und ihre Verteilung innerhalb des Werkstoffes nach der Gauß'schen Verteilungskurve schwankt und damit auch ihre Sekundärbindung (gegenseitige Bindung der Moleküle). Dadurch hat z.B. der Werkstoff mit der engeren Verteilung eine höhere Erweichungstemperatur, ist zähflüssiger und schlagzäher.

Ein Kunststoff wird hauptsächlich durch die Primär- (Zusammenhalt innerhalb eines Moleküls) und Sekundärbindung (Zusammenhalt zwischen den einzelnen Molekülen, schwächer als die Primärbindung) gehalten. Die Primärbindung ist die Atom- bzw. Hauptvalenzbindung und die Sekundärbindung die Nebervalenzbindung. Die Sekundärbindung kann sich, je nach Aufbau des Stoffes, um drei verschiedene Bindungskräfte handeln, die im folgenden kurz erklärt werden:

- Van der Waalssche Kräfte
- Dipolkräfte
- Wasserstoffbrücken

2.1 Die Gestalt der Makromoleküle

Die Makromoleküle können linear oder verzweigt angeordnet aber auch mehr oder weniger quervernetzt sein (Bild 2.2, [2]).

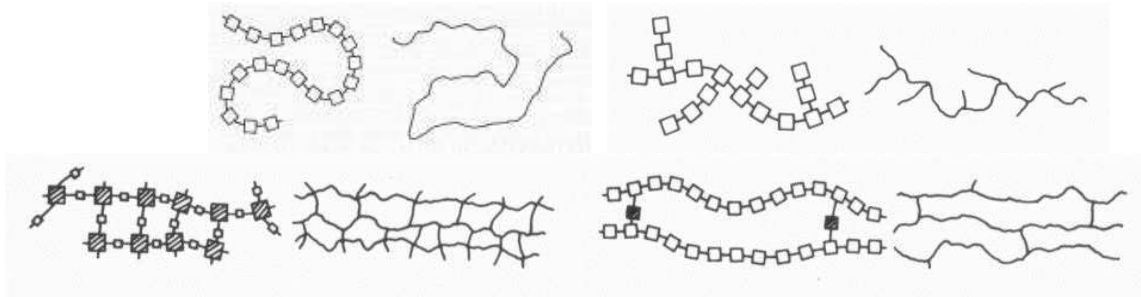


Bild 2.2: Makromoleküle (oben links nach unten rechts): Linear-kettenförmig, Verzweigt-kettenförmig, Engmaschig-vernetzt, Weitmaschig-Vernetzt [2]

Aufgrund dieser Konstellation der Makromoleküle, kann man die Kunststoffe in drei Hauptgruppen unterteilen:

- Thermoplaste
- Duromere
- Elastomere

Wie in Bild 2.3 ersichtlich, unterscheiden sie sich in ihrem Aufbau und in ihren Eigenschaften grundsätzlich von einander.

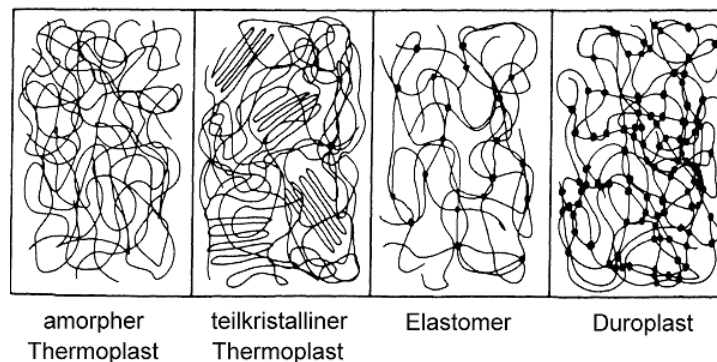


Bild 2.3: Innerer Aufbau der Hauptgruppen [3]

2.2 Thermoplaste

Moleküle von Thermoplaste haben linear kettenförmige oder verzweigte Gestalt. Durch genügend Wärmezufuhr werden sie plastisch verformbar oder schmelzflüssig und nach dem Abkühlen auf Normaltemperatur (20-22°C) wieder fest und belastbar. Diese durch Erwärmung und Abkühlung verursachten Veränderungen lassen sich theoretisch mit dem gleichen Material beliebig oft wiederholen. In der Praxis kommt es jedoch auch beim Erwärmen von Thermoplasten zu einer teilweisen Zersetzung (Verkürzung) der Molekülketten, so dass der Wiederholbarkeit des Erweichungsvorgangs Grenzen gesetzt sind.

Durch diese gute Erweichbarkeit von Thermoplasten lassen sich viele Halbzeuge, wie z.B. Rohre oder Tafelzuschnitte, einfach herstellen. Nach dem Erwärmen lässt sich das Material, das nun einen weichgummiartigen elastischen Zustand hat, in eine andere geometrische Form bringen (Warmumformung). Neben diesem Vorteil kann man Thermoplaste auch schweißen, sie sind quellbar und löslich. Außerdem sind Bearbeitungsabfälle zum Größtenteils wiederverwendbar. Nachteilig ist, dass durch die Erweichung beim Erwärmen die Einsatztemperaturen von Thermoplasten, vor allem bei gleichzeitiger Einwirkung von Kräften, recht begrenzt sind.

Thermoplaste weisen eine amorphe und teilkristalline Struktur auf (siehe Bild 2.3). Nach dem Abkühlen der Schmelze auf Raumtemperatur, kann es zu einem völlig ungeordnetem (Wattebauschstruktur) oder zu einem teilweise geordnetem (teilkristalline Struktur) Zustand der erstarrten Molekülketten kommen. Diese teilkristallinen Bereiche weisen durch Lichtstreuung eine Trübung auf. Im normalen Temperaturbereich befinden sich die amorphen Thermoplaste im Glaszustand. Sie sind meist spröde und glasklar. Die einzelnen Ketten liegen räumlich verfilzt durcheinander; dabei treten an manchen Stellen Verhackungen und Verschlaufungen auf (Bild 2.4, [2]).

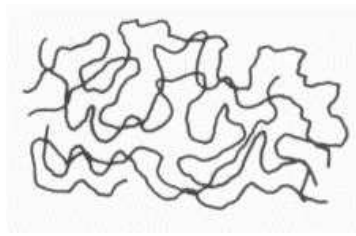


Bild 2.4: Amorphe Anordnung der Molekülketten eines Thermoplasts [2]

Bei teilkristallinen Thermoplasten können die Kristallite unterschiedliche Ordnungsbereiche enthalten, welche die Art der Anordnung der Molekülketten in den kristallinen Bereichen definiert. Diese Ordnungsbereiche können sich als:

- Fransen-Mizellen (verschiedene Moleküle)
- Faltungen (ein Molekül)
- Sphärolithe (radial-kugelförmig angeordnete Faltkristalle)

ausbilden.

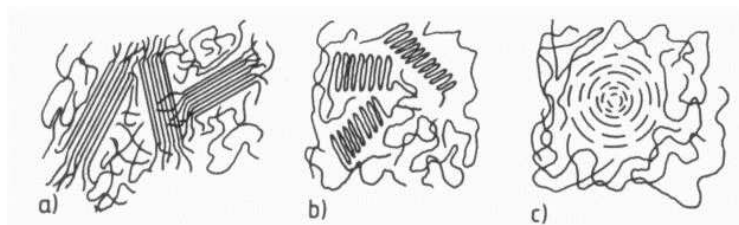


Bild 2.5: Möglichkeiten der Anordnung von Makromolekülen eines teilkristallinen Thermoplasts [2]

Bei Fransen-Mizellen handelt es sich um parallel geordnete Makromoleküle mit fransenförmigen Enden, welche in amorphe Bereiche eingebettet sind (2.5 a). Faltungen ergeben sich durch mehrfachgeschlungene, parallele Windungen von einzelnen Makromolekülen (2.5 b). Sie sind wiederum eingebettet in amorphe Bereiche, wobei bei Faltungen mehrere hundert Schlingen parallel liegen. Bei den Sphärolithen sind die Ketten

tangential zu kugelförmigen Strukturen angeordnet. Zentrum ist ein Kristallisationskeim, von dem ausgehend die Sphärolithe beim Erstarren wachsen. Im allgemeinen liegen die Kristallite ungeordnet in der Grundsubstanz; als Ergebnis von Verformung können sie aber mehr oder weniger parallel verlagert werden, besonders die Mizellen.

Je höher die Kristallinität der Thermoplaste ist, desto höher ist ihre Chemikalienbeständigkeit, Dichte, Festigkeit, Gasundurchlässigkeit und Schmelztemperatur. Eine gänzliche Ordnung gibt es jedoch nicht; dazu sind die Kettenlängen zu groß und zu unterschiedlich. Der Anteil der Kristallite an der Gesamtmasse beträgt maximal 80%.

2.3 Elastomere

Elastische Kunststoffe oder Elastomere sind bei tiefer Temperatur hartelastisch, im Gebrauchsbereich weichelastisch (gummielastisch). Ihr gummiartiges Verhalten ist mit der weitmaschigen, dreidimensionalen Vernetzung ihrer Makromoleküle untereinander zu erklären (Bild 2.6).

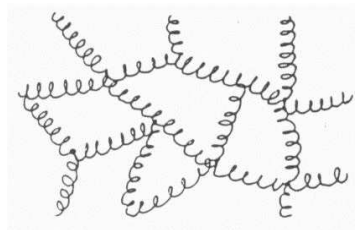


Bild 2.6: Dreidimensionale Vernetzung bei Elastomeren [2]

Im Gegensatz zu den Thermoplasten kann man Elastomere nicht Warmumformen noch schweißen. Sie sind auch nicht schmelzbar und löslich, aber quellbar. So lassen sich einige durch äußere Krafteinwirkung um mehrere hundert Prozent verformen und nehmen nach Wegnahme der Kraft nahezu ihre ursprüngliche Form wieder an. Die chemische Zusammensetzung der Makromoleküle begrenzt die Anwendung bei hohen Temperaturen. Durch die Abkühlung weit unter 0° C „frieren“ diese Werkstoffe förmlich ein und verlieren ihre gummielastischen Eigenschaften; d.h. sie werden spröde und hart und somit unbrauchbar als Gummiwerkstoff.

2.4 Duromere

Duromere sind bei Raumtemperatur meist sehr hart und spröde, was hauptsächlich auf die eng vernetzten Moleküle zurückzuführen ist. Die Moleküle sind durch Primärbindungen allseitig fest miteinander verbunden (Bild 2.7). Dieser Kunststoff ist temperaturstandfest, wobei ihr Anwendungstemperaturbereich dadurch begrenzt wird, dass beim Erwärmen schließlich chemisch-thermische Zersetzung eintritt. Außerdem sind sie nicht plastisch verformbar, nicht schmelzbar und schweißbar, unlöslich und nur schwach quellbar.

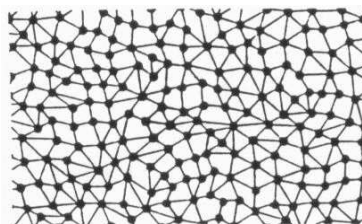


Bild 2.7: Dreidimensionale Vernetzung bei Duromeren [2]

Sie entstehen durch Vernetzung reaktionsfähiger linearer und verzweigter Makromoleküle. Diesen Prozess nennt man Härtung [2].

2.5 In dieser Arbeit verwendete Werkstoffe

Bei der Auswahl des Probenmaterials ist hauptsächlich von der Verfügbarkeit und der leichten Handhabung ausgegangen worden. Außerdem sollten die Versuche, um einen weiteren Parameter einzuschränken, nur an einer Polymergruppe durchgeführt werden. Da das Labor mit einer Klimaanlage ausgestattet war, konnten die so wichtigen Umgebungsbedingungen, wie Feuchte und Temperatur, weitgehend konstant gehalten werden. Es sollte ferner nicht nur ein Werkstoff einer Gruppe untersucht werden, sondern drei. Damit hat man sich auf die Materialien: PMMA, PC und PVC beschränkt. Der chemische Aufbau, die Herstellung sowie die Eigenschaften dieser Werkstoffe sind in jedem guten Kunststoffbuch ausführlich dargestellt und soll deshalb hier nur stichpunktartig beschrieben werden.

2.5.1 PMMA (Polymethylmetacrilat)

PMMA ist ein Polymer mit amorphem Gefüge. Die kennzeichnenden Eigenschaften von PMMA sind: hohe Härte, Steifigkeit und Festigkeit; kratzfeste, hochglänzende, polierfähige Oberfläche; hohe Transparenz; gute dielektrische Eigenschaften; beständig gegen unpolare Lösungsmittel sowie gegen schwache Säuren und Laugen; nicht beständig gegen Alkohol, Aceton, polare Lösungsmittel und Chlorkohlenwasserstoffe; geringe Feuchtigkeits- und Wasseraufnahme; hohe Witterungsbeständigkeit; spannungsrissegefährdet; gute Temperaturbeständigkeit; gut ver- und bearbeitbar; geruchs- und geschmacksneutral; Dichte ca. 1.12-1.17 g/cm³.

2.5.2 PC (Polycarbonat)

Obwohl PC einen sehr regelmäßigen Aufbau hat, liegt seine Kristallinität unter 5%. PC ist somit ein amorpher Thermoplast und besitzt folgende Eigenschaften: hohe Festigkeit, Steifigkeit, Härte und Zähigkeit; hohe Transparenz und hoher Oberflächenglanz; gute elektrische Isoliereigenschaften, auch bei Feuchtigkeitseinwirkung; hohe Witterungsbeständigkeit; geringe Wasseraufnahme; beständig gegen energiereiche Strahlung; beständig gegen Benzin, Fette und Öle; unbeständig gegen starke Säuren und Laugen und chlorierte Kohlenwasserstoffe; kerbempfindlich und anfällig auf Spannungsrissebildung; Dichte ca. 1.2 g/cm³.

2.5.3 PVC (Polyvinylchlorid)

PVC ist ein hauptsächlich amorpher Thermoplast, dessen Kristallinität ca. 5% beträgt und durch Polymerisation hergestellt wird. Man unterscheidet PVC-hart und PVC-weich. Die Eigenschaften von Hart- und Weich-PVC sind sehr unterschiedlich: entweder hohe mechanische Festigkeit, Steifigkeit und Härte oder einstellbare Flexibilität; schlagempfindlich in der Kälte oder zäh je nach Weichmachergehalt; hohe chemische Beständigkeit oder rezept- und temperaturabhängige chemische Beständigkeit; gute elektrische Isoliereigenschaften im Niederspannungs- und Niederfrequenzbereich; Dichte ca. 1.3 g/cm³.

3 Viskoelastizität

Werkstoffe die zeitabhängige Effekte als Antwort auf eine Belastung zeigen, werden viskoelastisch genannt. Obwohl sehr viele Werkstoffe diesen Charakter aufweisen, kann der viskoelastische Anteil, insbesondere bei sehr kurzen Versuchszeiten bzw. bei sehr niedrigen Temperaturen, vernachlässigt werden. So verhalten sich z.B. einige Metalle bei hohen Temperaturen viskoelastisch, was aber bei Raumtemperatur verloren geht. Die Viskoelastizität setzt sich im allgemeinen aus zwei klassischen Überlegungen, der Elastizitätstheorie und der Hydrodynamik, zusammen. Während bei der Elastizitätstheorie die Spannung immer proportional zur Dehnung (Hook'sches Gesetz) und unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit ist, gilt für die Hydrodynamik, dass die Spannung proportional zur Verformungsgeschwindigkeit (Newton'sches Gesetz) und unabhängig von der Verformung selbst ist. Obwohl die Elastizitätstheorie und die Theorie der Hydrodynamik bei vielen Festkörpern und Flüssigkeiten zutrifft, sind sie allerdings nur eine Idealisierung und verlieren ihre Gültigkeit bei zu großen Verformungen und unter hohen Verformungsgeschwindigkeiten.

Ferner wird in der Viskoelastizität ein Versuch, bei dem die Spannung konstant bleibt und als Antwort sich die Dehnung über die Zeit verändert, als Kriechen bezeichnet. Umgekehrt nennt man einen Versuch, bei dem die Dehnung konstant ist und die Spannung ändert sich mit der Zeit, Relaxation.

Weiter unterscheidet man in der Viskoelastizität zwischen linearem und nichtlinearem Verhalten. Werkstoffe sind linear-viskoelastisch, wenn ihre Kriechnachgiebigkeit bzw. ihr Elastizitätsmodul unabhängig von der angebrachten Dehnung bzw. angelegten Spannung ist. Sind diese Materialparameter jedoch abhängig von der äußeren Belastung, so zeigt sich im Werkstoff ein eindeutig nichtlinear-viskoelastisches Verhalten. Viele Werkstoffe zeigen bei kleinen äußeren Belastungen lineares oder nahezu lineares und bei höheren Belastungen ein eindeutig nichtlineares Verhalten. Neben diesem Verhalten gibt es einige Phänomene, die bei allen viskoelastischen Werkstoffen erkennbar sind (Bild 3.1):

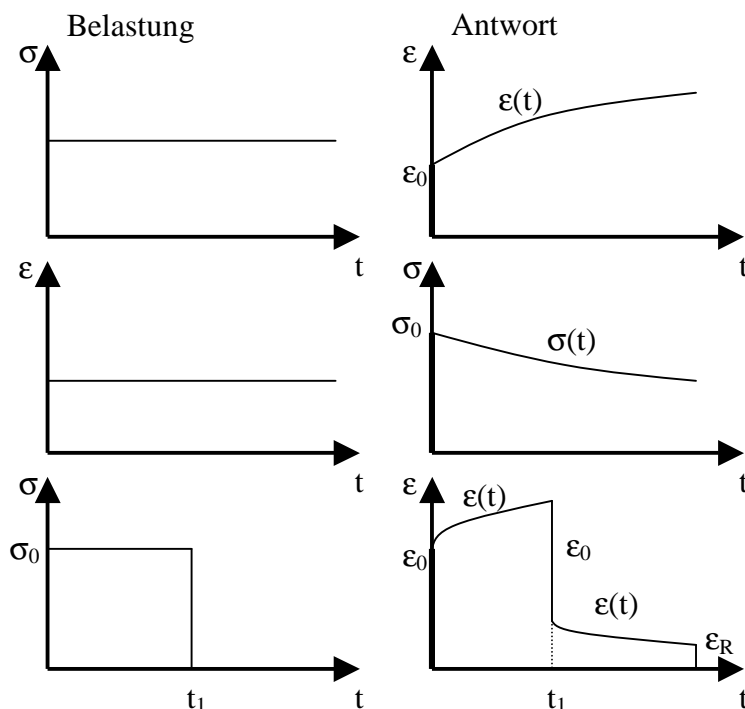


Bild 3.1: Kriechen und Relaxation [4]

- Spontane Elastizität ε_0 (auch spontane elastische Antwort genannt)
- Kriechen (Retardation) $\varepsilon(t)$ unter konstanter Spannung
- Spannungsrelaxation (Entspannung) $\sigma(t)$ unter konstanter Dehnung
- Spontane Erholung $\varepsilon(t_1)$
- Zeitverzögerte (retardierte) Erholung $\varepsilon(t), t > t_1$
- Zeitabhängige verbleibende Verformung nach Entlastung ε_R

3.1 Lineare Viskoelastizität

Bei niedrigen Belastungen die eine materialabhängige Grenze (sog. Linearitätsgrenze) nicht überschreiten, verhält sich der Werkstoff linear-viskoelastisch. Unter der Linearitätsgrenze lassen sich die Zusammenhänge von Spannung, Dehnung und Zeit mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Beziehungen darstellen, so dass viele viskoelastische Probleme relativ einfach gelöst werden können. Die somit abgeleiteten Materialgesetze bilden auch für die Berechnung im nichtlinearen Bereich eine Basis. Zahlreiche Versuche haben gezeigt, dass es auch für die Darstellung des Verhaltens des Werkstoffes oberhalb der Linearitätsgrenze von größter Wichtigkeit ist, die Materialparameter hinreichend genau aus linear-viskoelastischen Experimenten zu bestimmen. Damit fällt der experimentellen Bestimmung von Materialparameter und der Messgenauigkeit eine große Bedeutung zu.

Grundlegend für die lineare Viskoelastizität ist die Gültigkeit des Boltzmannschen Superpositionsprinzips (Bild 3.2), was besagt, dass die Summe zweier zeitabhängiger Verformungen $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ die Spannung $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ hervorruft, wenn die Verformungen $\varepsilon_1(t)$ und $\varepsilon_2(t)$ einzeln die Spannungen $\sigma_1(t)$ und $\sigma_2(t)$ ergeben und umgekehrt, dass die Summe zweier Spannungen $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ die Verformung $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ hervorruft, wenn die Spannungen $\sigma_1(t)$ und $\sigma_2(t)$ einzeln die Verformungen $\varepsilon_1(t)$ und $\varepsilon_2(t)$ ergeben. Man spricht von einer Belastung des Spannungs-Relaxations-Typs, wenn die Geschichte der Dehnung und von der Belastung des Kriech-Typs, wenn die Geschichte der Spannung bekannt ist.

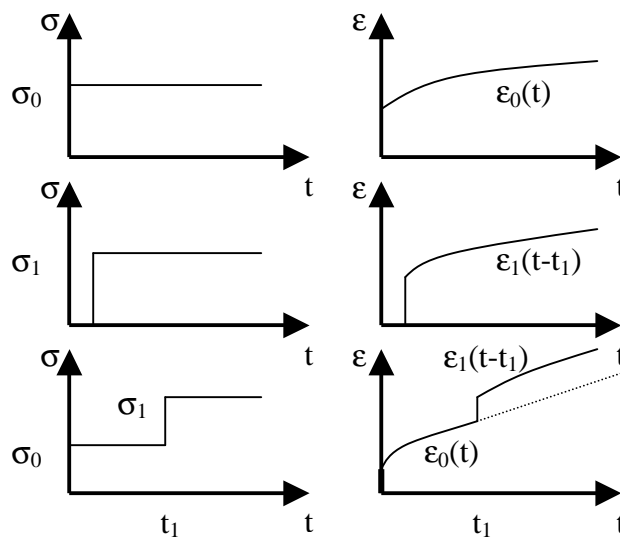


Bild 3.2: Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip [4]

Neben dem Boltzmannschen Superpositionsprinzips gibt es noch weitere theoretische Grundüberlegungen, wie das Korrespondenzprinzip, Zeitverschiebungsinvarianz und Zeit-Temperatur-Verschiebung, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird. Diese sind umfangreich in der Literatur [3, 5, 6, 7] beschrieben.

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens und zur Berechnung der zeitabhängigen Werkstoffparameter werden in der linearen Viskoelastizitätstheorie häufig drei Methoden angewandt:

- Differentialoperator-Gleichung
- Integraldarstellung
- Mechanische Modelle

Diese Methoden sind in der Literatur sehr umfangreich behandelt, deshalb wird hier nur kurz darauf eingegangen.

3.1.1 Differentialoperator-Gleichung

Wird ein linear-viskoelastischer Werkstoff mit einer einachsigen Spannung $\sigma(t)$ belastet, kann die Spannungs-Dehnungs-Zeit-Beziehung mit folgender Differentialgleichung beschrieben werden:

$$q_0 \sigma + q_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \dots + q_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} = p_0 \varepsilon + p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \dots + p_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m} \quad (3.1)$$

oder:

$$\sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} = \sum_{j=0}^m p_j \frac{\partial^j \varepsilon}{\partial t^j} \quad (3.2)$$

wobei $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ und $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$ Materialkonstanten sind. Diese Ausführung ist angelehnt an die Darstellung von Tschoegl [8] und Findley, Lai, Onaran [9].

Die Gleichung 3.2 kann mit Hilfe der Einführung der folgenden Differentialoperatoren:

$$Q = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

und

$$P = \sum_{j=0}^m p_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

in der einfacheren Schreibweise der sogenannten Differentialoperator-Gleichung geschrieben werden.

$$Q[\sigma(t)] = P[\varepsilon(t)] \quad (3.3)$$

Die Gleichung 3.3 zeigt die Differentialgleichung eines viskoelastischen Materials als Antwort auf eine Belastungsgeschichte. Es gibt mehrere Methoden sie zu lösen; ein eleganter und einfacher Weg ist die Laplace-Transformation [10, 11, 12]. Komplizierte Differentialgleichungen werden mit Hilfe der Laplace-Transformation in einfache algebraische Gleichungen umgewandelt und gelöst. Dabei wird einer Funktion $f(t)$ (Originalfunktion) der reellen Veränderlichen t (reelle Ebene) eine Funktion $F(s)$ (Bildfunktion) der komplexen Veränderlichen s (Laplace Ebene) zugeordnet. Nach der Lösung der algebraischen Gleichung in der Laplace-Ebene wird über eine Rücktransformation die Lösung der Differentialgleichung in der reellen Ebene ermittelt. Für die Gleichung 3.3 kann die Laplace-Transformation nur dann angewendet werden, wenn:

- für die Zeit t nur der Bereich $[0, \infty]$ betrachtet wird,
- der Zeitpunkt $t = 0$ als Referenzpunkt, mit $\sigma = 0$ und $\varepsilon = 0$ gilt und
- das Material bis zu $t = 0$ keine Vorbelastung hatte.

Unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen berechnet sich die Laplace-Transformation der Gleichung 3.3 wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{q}(s)\bar{\sigma}(s) &= (q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_ns^n)\bar{\sigma}(s) \\ \bar{p}(s)\bar{\varepsilon}(s) &= (p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ms^m)\bar{\varepsilon}(s) \end{aligned} \quad (3.4)$$

und

$$\bar{q}(s)\bar{\sigma}(s) = \bar{p}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad (3.5)$$

oder

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{(q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_ns^n)}{(p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ms^m)}\bar{\sigma}(s) \quad (3.6)$$

Damit gilt für das Stoffgesetz in der Laplace-Ebene:

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{P}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon}(s) = \bar{Q}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (3.7)$$

mit:

$$\bar{P}(s) = \frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)} \quad (3.8)$$

$$\bar{Q}(s) = \frac{\bar{q}(s)}{\bar{p}(s)}$$

Das Materialverhalten lässt sich jetzt über die Rücktransformation von Gleichung 3.7 in die reelle Ebene berechnen. Aus dieser Gleichung ist der Vorteil einer Laplace-Transformation zu ersehen, denn in der Bildebene entspricht das viskoelastische Materialverhalten dem Hook'schen Gesetz. Weiter gilt, dass die Werkstoffkonstanten zeitabhängig sein können, aber nicht von der Höhe der Spannung bzw. der Dehnung abhängen. Somit ist die Güte der Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens direkt abhängig von der Anzahl der verwendeten zeitabhängigen Werkstoffparameter. Die Gleichung 3.6 wird in einer Reihenentwicklung dargestellt; somit vereinfacht sich die Bestimmung der Parameter und es ergibt sich mit den zeitunabhängigen Materialparametern a_i und b_i :

$$\bar{\varepsilon}(s) = \left[\sum_{i=1}^l \frac{a_i}{b_i + s} \right] \bar{\sigma}(s) = \sum_{i=1}^l A_i(s) \bar{\sigma}(s) \quad (3.9)$$

Die Materialparameter a_i und b_i werden durch Experimente bestimmt. Das Rücktransformieren der Gleichung 3.9 ergibt das folgende Faltungsintegral:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^l a_i e^{-b_i(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi = \int_0^t \sum_{i=1}^l a_i e^{-b_i t} \sigma(t-\xi) d\xi \quad (3.10)$$

3.1.2 Integraldarstellung

Es besteht die Möglichkeit das viskoelastische Materialverhalten mit sogenannten „heredity integrals“ mathematisch darzustellen. Dies erfolgt mit Hilfe der Kriechnachgiebigkeit (Kriechtypbelastung) bzw. Relaxationsmoduls (Relaxationstypbelastung). Die Grundlage für diese Theorie lieferte Boltzmann [13] und sie ist, wie vorher beschrieben (Bild 3.2), als Boltzmannsches Superpositionsprinzip bekannt. Um die Idee der Integraldarstellung zu verstehen, soll ein Beispiel beschrieben werden.

Es sei ein Kriechversuch gegeben mit einem nach Bild 3.3 dargestellten allgemeinen Spannungsverlauf. Wenn das Superpositionsprinzip von Boltzmann in betracht gezogen wird, so wird der Spannungsverlauf $\sigma(t)$ aus vielen beliebigen Spannungssprüngen $\Delta\sigma_i$, die in Intervallen $\Delta\xi$ angebracht werden, approximiert. Damit ergibt sich für die Summe der einzelnen Sprünge:

Da in der Regel $\sigma(\xi)$ über die Zeit abgeleitet werden kann und die Zeitvariable ξ stets kleiner als die Zeit t ist, muss im Integrationsbereich die Funktion $H(t-\xi)$ gleich eins sein. Dann folgt:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\xi) \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (3.15)$$

mit

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (3.16)$$

Die Gleichung 3.15 besagt, dass sich die Dehnung zu einer bestimmten Zeit t aus der Superposition aller Spannungen die zur Zeit $\xi < t$ wirken, multipliziert mit der Nachgiebigkeit $J(t-\xi)$ im Intervall $(t-\xi)$, zusammensetzt. Durch eine partielle Integration dieses Integrals erhält man nach Schwarzl [14] eine weitere Form:

$$\varepsilon(t) = J_0 \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\xi) \sigma(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

Ist die Dehnungsgeschichte (Relaxationstyp) bekannt, so kann mit der selben Herleitung dieser Spannungsverlauf berechnet werden:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\xi) \frac{\partial \varepsilon(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (3.18)$$

und

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \int_0^t \dot{E}(t-\xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (3.19)$$

Bei dieser Gleichung ist $E(t-\xi)$ der Relaxationsmodul, der wirksam ist im Zeitintervall $(t-\xi)$.

3.1.3 Zusammenhang zwischen der Kriechnachgiebigkeit und dem Relaxationsmodul

Da ein und derselbe Werkstoff ein Kriech- und Relaxationsverhalten aufweist, muss es eine Beziehung zwischen der Nachgiebigkeit $J(t)$ und dem Elastizitätsmodul $E(t)$ geben. Um diese

herzuleiten soll die Laplace-Transformation angewandt werden. Damit ergeben sich für die Gleichungen 3.17 und 3.19 folgende Formen:

$$\bar{\epsilon}(s) = s\bar{J}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (3.20)$$

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{E}(s)\bar{\epsilon}(s) \quad (3.21)$$

Gleichung 3.20 eingesetzt in 3.21 ergibt dann:

$$s^2\bar{E}(s)\bar{J}(s) = 1 \quad (3.22)$$

oder:

$$\frac{\bar{\sigma}(s)}{\bar{\epsilon}(s)} = s\bar{E}(s) = \frac{1}{s\bar{J}(s)} \quad (3.23)$$

Wird jetzt die Rücktransformation angewandt, so kann gezeigt werden:

$$t = \int_0^t J(t-\xi)E(\xi)d\xi \quad (3.24)$$

bzw.:

$$t = \int_0^t E(t-\xi)J(\xi)d\xi \quad (3.25)$$

Die Gleichungen 3.24 und 3.25 stellen eine Integralgleichung dar, aus der sich mit einfachen mathematischen Ausdrücken auch analytisch die Kriechfunktion berechnen lässt, wenn die Relaxationsfunktion gegeben ist und umgekehrt. Die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ ist eine monoton steigende Funktion, die ihre maximale Steigung am Anfang zur Zeit $t = 0$ hat. Für $t \rightarrow \infty$ geht sie in eine gerade mit einem konstanten Wert bzw. konstanter Steigung über. Der Relaxationsmodul $E(t)$ ist eine monoton fallende Funktion mit einer maximalen Steigung zur Zeit $t = 0$. Diese Funktion geht für $t \rightarrow \infty$ entweder auf einen positiven Grenzwert oder auf Null zurück. Da beide Funktionen für alle ξ positiv sind, ergibt sich für die beiden Integrale in Gleichung 3.24 bzw. 3.25 ein Wert zwischen eins und Null. Hieraus folgt die wichtige Ungleichung nach [14] für die Kriech- und Relaxationsfunktion:

$$0 < E(t)J(t) \leq 1 \quad \text{für alle } t > 0 \quad (3.26)$$

Dieses Produkt kann also nur in eine Richtung variieren. Es kann weiterhin gezeigt werden, dass dieses Produkt nur in bestimmten Grenzfällen den Wert eins annimmt, und zwar:

$$\begin{aligned} E(0)J(0) &= 1 & \text{für } t = 0 \\ E(\infty)J(\infty) &= 1 & \text{für } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dies bedeutet, dass nur zur Zeit $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$ der Kehrwert der Kriechnachgiebigkeit exakt den E-Modul ergibt. Zu allen anderen Zeiten t ist dieser Zusammenhang nicht gegeben.

3.2 Mechanische Modelle

Wie bereits beschrieben, besitzen Kunststoffe in ihren mechanischen Eigenschaften sowohl zeitunabhängige als auch zeitabhängige Effekte. Eine weitere Methode diese Eigenschaften zu beschreiben, sind die mechanisch-rheologischen Modelle. Diese Modelle sind insbesondere zur qualitativen Beschreibung der Phänomene geeignet; sie besitzen den Vorteil großer Anschaulichkeit. Sie bestehen aus Feder-Dämpfer-Systemen, die bei geeigneter Wahl und Kombination die Abhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verhalten viskoelastischer Werkstoffe von der Dehnung, Spannung, der Dehngeschwindigkeit und der Temperatur mehr oder weniger gut abbilden können. Viele Untersuchungen dazu sind in der Vergangenheit geleistet worden, anbei eine Auswahl von Publikationen zu diesem Thema [9, 14, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32]. Dabei übernimmt die Feder den elastischen und der Dämpfer den viskosen Anteil. Der plastische Anteil, was hier nicht explizit beschrieben werden soll, wird bei der Modellrheologie durch ein Reibungselement (St.-Venant-Modell) dargestellt [31]. Trägheitseffekte werden nicht berücksichtigt.

3.2.1 Grundmodelle

Das elastische Verhalten von idealen Festkörpern wird durch das Hook'sche Materialgesetz beschrieben. Dabei ist die angelegte Spannung proportional zur resultierenden Dehnung und unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit und -geschichte. Die Gleichung ([3, 5]) dafür lautet:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.28)$$

dabei ist:

$$\begin{aligned} \sigma &: \text{Spannung} \\ E &: \text{Elastizitätsmodul} \\ \varepsilon &: \text{Dehnung} \end{aligned}$$

In Bild 3.4 ist diese Beziehung dargestellt:

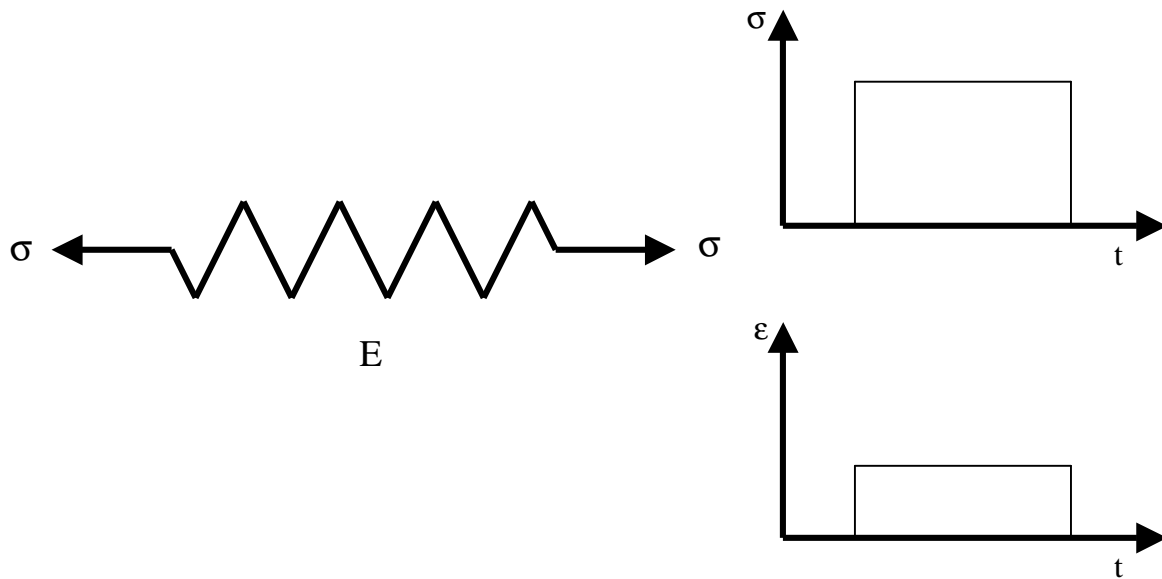


Bild 3.4: Hook'sches Element

Neben dem Hook'schen Körper gibt es noch den Dämpfer als Grundmodell. Der Dämpfer beschreibt im Gegensatz zur Feder die Eigenschaft von idealen Fluiden. Damit ist die Spannung nicht mehr von der Verformung, sondern von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig. Die Gleichung lautet jetzt:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.29)$$

wobei gilt:

- σ : Spannung
- η : Viskosität
- $\dot{\epsilon}$: Dehnungsgeschwindigkeit

Das nachfolgende Bild 3.5 zeigt diese Beziehung:

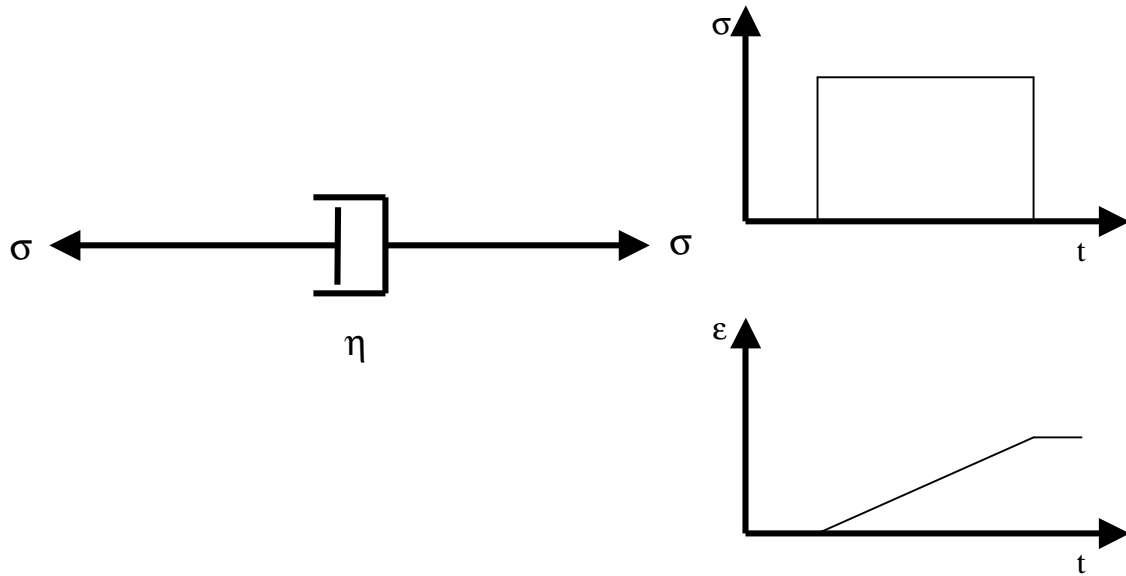


Bild 3.5: Dämpferelement

3.2.2 Das Maxwell-Modell

Die Reihenschaltung von einer Feder und einem Dämpfer wird als das Maxwell-Modell bezeichnet (J. C. Maxwell, 1831-1879). Dieses Modell, wie aus dem Bild 3.6 ersichtlich, ist nur beschränkt anwendbar, da sie zwar eine elastische und viskoelastische Verformung zulässt, aber die Erholung und die abnehmende Dehngeschwindigkeit nicht wiedergeben kann.

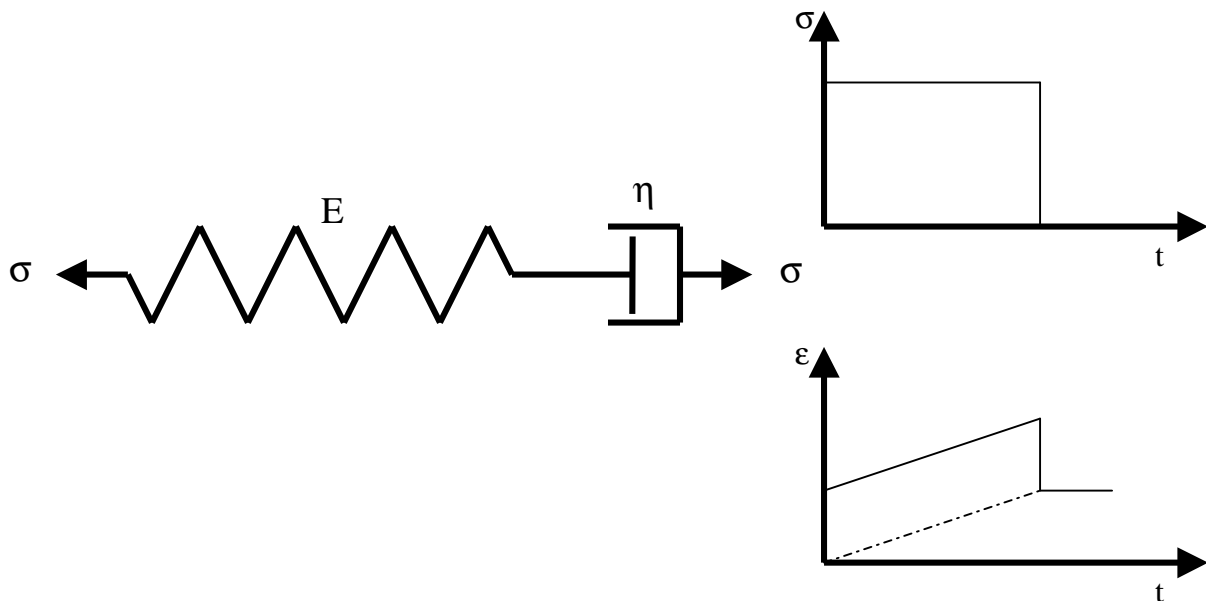


Bild 3.6: Maxwell-Element

Um das Stoffgesetz dieser Reihenschaltung herzuleiten ist zu beachten, dass in der Feder und im Dämpfer die gleiche Spannung ist, die Gesamtdehnung aber sich aus beiden addiert. Weiter tritt im Dämpfer als Stoffgesetz die Dehngeschwindigkeit auf, was zur folgenden Differentialgleichung führt:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_f + \dot{\varepsilon}_d \quad (3.30)$$

und damit:

$$\eta \dot{\varepsilon} = \sigma + \tau \dot{\sigma} \quad (3.31)$$

mit $\tau = \frac{\eta}{E}$

Wird eine Spannung der Form $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ ($H(t)$: Heaviside-Funktion) angebracht, was einer Kriechtypbelastung entspricht, so ergibt sich für die Differentialgleichung 3.31 folgende Lösung:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (3.32)$$

wobei mit den Anfangsbedingungen gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= 0 \quad \text{für } t > 0 \\ \varepsilon(0) &= \frac{\sigma_0}{E} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Kriechfunktion ist dann:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (3.34)$$

Es ist aus der Gleichung 3.32 zu ersehen, dass die Spannung zur Zeit $t=0$ eine sprunghafte Dehnung (der Feder) erzeugt. Danach dehnt sich nur noch der Dämpfer, so dass es anfänglich zum festkörper- und zum Ende hin zu einem flüssigkeitsartigen Verhalten kommt.

Zur Bestimmung der Relaxationsfunktion wird eine Dehnung mit $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ vorgegeben. Dann gilt auch:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= 0 \quad \text{für } t > 0 \\ \sigma(0) &= E\varepsilon_0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Eingesetzt in die Gleichung 3.31, ergibt sich dann für die Spannung und Relaxationsfunktion:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.36}$$

$$E(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.37}$$

Anfänglich nimmt die Feder die Dehnung auf und im weiteren Verlauf ist immer weniger Spannung nötig um die Gesamtdehnung aufrecht zu erhalten.

3.2.3 Das Kelvin-Voigt-Modell

Das Kelvin-Voigt-Element ist eine Parallelschaltung von einer Feder und einem Dämpfer (Kelvin, 1824-1907; Voigt, 1850-1919). Aus Bild 3.7 ist zu sehen, dass die Gesamtspannung im Element die Summe von den einzelnen Spannungen der Feder und des Dämpfers ist. Die Dehnung ist in beiden Elementen die selbe und somit ergibt sich folgende Differenzialgleichung:

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_d \tag{3.38}$$

$$\sigma = E(\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon}) \tag{3.39}$$

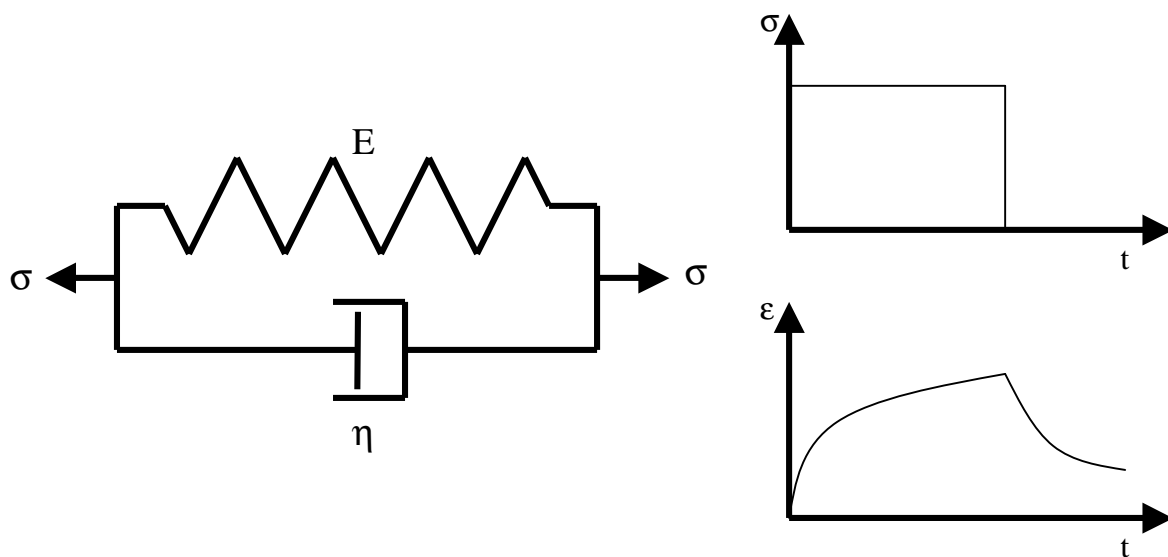


Bild 3.7: Kelvin-Voigt-Element

Eine aufgebrauchte Spannung der Funktion $\sigma(t)=\sigma_0H(t)$ und der Anfangsbedingung $\varepsilon(0)=0$ ergibt dann für das Kelvin-Voigt-Element folgende Dehnungsfunktion:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.40)$$

mit der Kriechfunktion:

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.41)$$

Der Kelvin-Voigt-Körper besitzt ein flüssigartiges Anfangsverhalten und ein festkörperartiges Endverhalten, da die Dehnung einem endlichen Wert zustrebt. Bei diesem Element kann mit einer endlichen Spannung kein Dehnungssprung ε_0 aufgebracht werden, weil dies am Anfang vom Dämpfer blockiert wird. Aber auch mit diesem Element kann das Be- und Entlastungsverhalten auf eine elastische Antwort bzw. die verbleibende Dehnung eines Werkstoffes nicht dargestellt werden.

3.2.4 Das verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell

Eine Reihenschaltung von vielen einzelnen Voigt-Kelvin-Elementen plus einer Feder ist das verallgemeinerte Voigt-Kelvin-Modell (Bild 3.9). Dieses Modell eignet sich sehr gut zur Beschreibung des Kriechverhaltens eines viskoelastischen Werkstoffes. Dabei ist die Gesamtdehnung des ganzen Modells die Summe der einzelnen Dehnungen der Teilmodelle addiert zu der einer Feder, welche die spontan aufgebrauchte Spannung σ aufnimmt [21, 35].

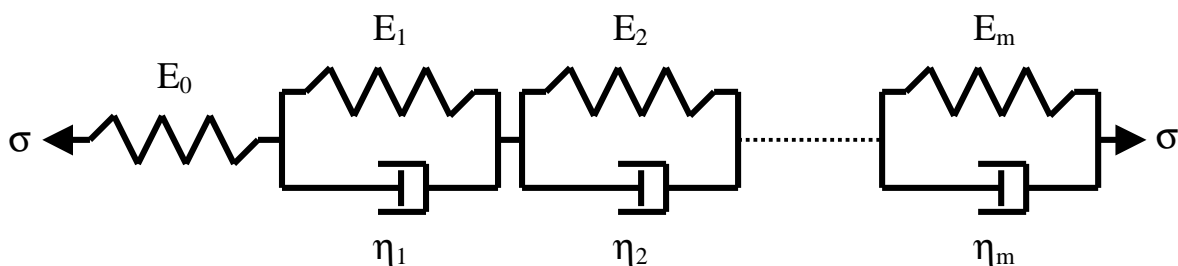


Bild 3.9: Verallgemeinerte Kelvin-Voigt-Modell

Eine Vielzahl von Lösungsmethoden ist in der Literatur beschrieben [5, 6, 19, 36]. Aber das Ergebnis ist auch ohne Lösung der komplizierten Differentialgleichung möglich. Die Kriechdehnung lautet damit:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right] = \sigma \left[J_0 + \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right] \quad (3.42)$$

wobei für das Verhältnis des E-Moduls und der Kriechnachgiebigkeit, sowie für die Retardationszeit gilt:

$$J_0 = \frac{1}{E_0} \quad J_i = \frac{1}{E_i} \quad \tau_i = \frac{\eta_i}{E_i} = \eta_i J_i \quad (3.43)$$

Es ist mathematisch leicht zu verstehen, dass bei einer unendlichen Anzahl von einzelnen Elementen die Summendarstellung in eine Integralform übergeht. Dann folgt:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[J_0 + \int_0^\infty J(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \right] \quad (3.44)$$

mit $J(\tau)$ als Retardationsspektrum bei kontinuierlicher Distribution der Retardationszeiten.

3.2.5 Das verallgemeinerte Maxwell-Modell

Das verallgemeinerte Maxwell-Modell besteht aus der Parallelschaltung von mehreren einzelnen Maxwell-Elementen und einer zusätzlich parallel geschalteten Feder (Bild 3.10). Auch hier kann das Ergebnis ohne Lösung der komplizierten Differentialgleichung erhalten werden, da die Gesamtspannung die Summe aus allen einzelnen Elementenspannungen bei konstanter Dehnung ist. Lediglich ist anzumerken, dass die Feder im Gegensatz zum Voigt-Kelvin-Modell, das Materialverhalten zur unendlichen Zeit repräsentiert. Berechnungsmethoden werden in der Literatur ausführlich beschrieben [5, 6, 27, 28, 30, 36, 37, 38, 40, 41, 42].

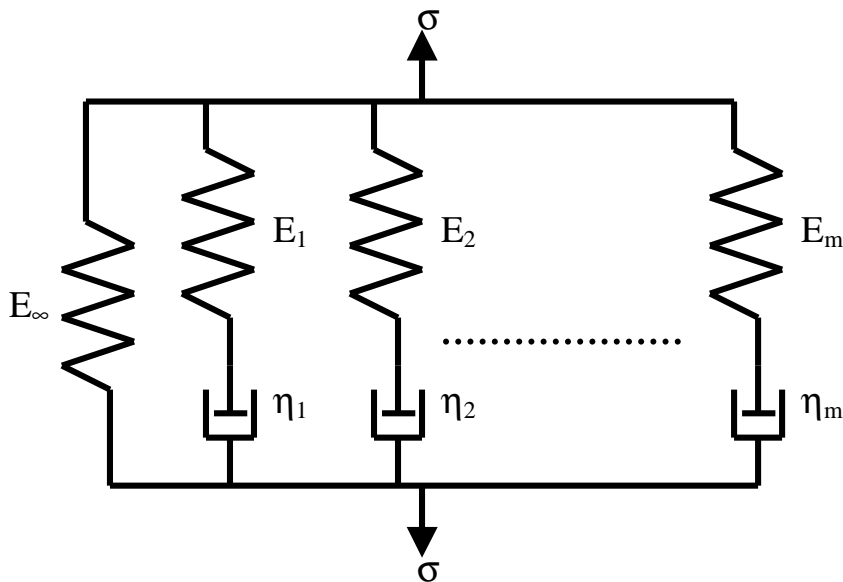


Bild 3.10: Verallgemeinerte Maxwell-Modell

Für eine Relaxationstypbelastung ergibt dieses Modell folgende Gleichung:

$$\sigma(t) = \varepsilon \left(E_{\infty} + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.45)$$

mit:

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (3.46)$$

Wird wiederum die Anzahl der Einzelemente unendlich gesetzt, was eine kontinuierliche Distribution der Relaxationszeiten bedeutet, kann die Gleichung 3.45 in der Form

$$\sigma(t) = \varepsilon \left(E_{\infty} + \int_0^{\infty} E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) \quad (3.47)$$

mit $E(\tau)$ als kontinuierliches Relaxationsspektrum geschrieben werden.

Obwohl das verallgemeinerte Maxwell-Modell für die Berechnung der Spannungsrelaxation sehr gut geeignet ist, besteht bei diesem Modell die größte Schwierigkeit in der Bestimmung der Materialkonstanten. Denn es ist experimentell sehr aufwendig bis unmöglich, den Materialkennwert E_{∞} für die unendliche Zeit zu ermitteln. Dies bedeutet, dass kein endlicher Versuch diese Materialkonstante eindeutig bestimmen kann. Es wäre deshalb von Vorteil anstelle des Materialkennwerts E_{∞} den Elastizitätsmodul E_0 , der aus jedem einfachen Zugversuch zu ermitteln ist, zu verwenden. Für einen Spannungsrelaxationsversuch müsste also ein verallgemeinertes Voigt-Kelvin-Modell in betracht gezogen werden. In den Arbeiten von [43, 44] ist eine Möglichkeit beschrieben, wie der Umbau von einem verallgemeinerten Maxwell- auf ein verallgemeinertes Voigt-Kelvin-Modell aussehen kann. Für den Relaxationsmodul gilt:

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (3.48)$$

Zur Zeit $t = 0$ kann der Elastizitätsmodul wie folgt berechnet werden:

$$E_0 = E_{\infty} + \sum_{i=1}^m E_i \quad (3.49)$$

bzw.:

$$E_{\infty} = E_0 - \sum_{i=1}^m E_i \quad (3.50)$$

Die Gleichung 3.50 kann wie nachfolgend manipuliert werden:

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \sum_{i=1}^m E_i - \sum_{i=1}^m E_i \quad (3.51)$$

Wird nun Gleichung 3.50 in 3.51 eingesetzt, kann durch leichte Umformung die folgende Beziehung erhalten werden:

$$E(t) = E_0 - \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \quad (3.52)$$

Die Gleichungen 3.48 und 3.52 beschreiben das selbe Materialverhalten, mit dem einen Unterschied, das für Gleichung 3.52 der Elastizitätsmodul E_0 (Kurzzeitmodul) und nicht wie in 3.48 die Materialkonstante E_{∞} (zur Zeit unendlich) zu ermitteln ist.

3.3 Nichtlineare Viskoelastizität

Im letzten Abschnitt wurde die lineare Viskoelastizität von Werkstoffen unter einachsiger Belastung beschrieben. Innerhalb dieses Bereiches kann das Verhalten von Materialien mit sehr guter Genauigkeit vorausgesagt werden. Die Grundlage der linearen Viskoelastizität liefert das Boltzmannsche Superpositionsprinzip. Aber diese materialabhängige Grenze wird in realen technischen Anwendungen oftmals überschritten, so dass die Grundelemente der mechanischen Modelle nicht mehr unabhängig von der Belastung sind. Ab jetzt kann vom nichtlinear-viskoelastischem Bereich gesprochen werden. Diese Grenze konnte in vielen Untersuchungen [5, 30, 41, 43, 44] nachgewiesen werden. Brüller und Schmitt [45] zeigten, dass ab einer energieabhängigen Linearitätsgrenze das Boltzmannsche Superpositionsprinzip nicht uneingeschränkt anwendbar ist und dass die viskoelastischen Phänomene auf kürzere Zeiten verschoben werden. Bertilson und Jansson [46, 47] definierten diese Grenze als jene Höhe der Belastung, bei der die Abweichung des Kriech- und Relaxationsmoduls vom linearen Wert mehr als 1% beträgt. Um Werkstoffe im nichtlinear-viskoelastischem Bereich berechnen zu können, mussten nichtlineare Stoffgesetze aufgestellt bzw. die linearen Gesetze modifiziert werden. Dies bedeutet nicht, dass die aufgestellten linearen Materialgleichungen ihre Gültigkeit verlieren, sondern sie dienen als Basis für die neu gefundenen nichtlinearen Gesetze.

Im Jahre 1957 stellten Green und Rivlin [51, 52] die Methode der „mehrfachen Integrale“ vor, welche dann von mehreren Autoren (Lifschitz und Kolski, Findley [53], Ward und Onat [54],

Neis und Sackman [55]) angewandt und weiterentwickelt wurde. So ergibt sich für den Kriechfall folgende Darstellung [9]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \int_0^t J(t-\tau_1) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t K(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t L(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_2} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mit wachsender Anzahl der Terme in 3.53 steigt die Genauigkeit der Vorhersage für das nichtlinear-viskoelastische Materialverhalten. Der erste Term dieser Gleichung beschreibt das lineare und die weiteren das nichtlineare Verhalten eines viskoelastischen Werkstoffs. Es ist jedoch mit einem großen mathematischem und experimentellem Aufwand verbunden, die Kerne $J(t)$, $K(t)$ und $L(t)$ usw. zu bestimmen. Es ist leicht zu erkennen, dass für $K(t)$, $L(t), \dots = 0$ die Gleichung 3.53 auf die Gleichung 3.15 führt, was bedeutet, dass die Gleichung 3.53 eine Erweiterung des Boltzmannschen Superpositionsprinzips darstellt.

Einen wesentlichen Beitrag zur Vereinfachung der Bestimmung des nichtlinear-viskoelastischen Verhaltens lieferte Schapery [30, 56, (1969)] mit der Einführung von Nichtlinearitätsfaktoren. Somit lautet die Gleichung für eine Kriechtyp-Belastung:

$$\varepsilon(t) = g_0 J_0 \sigma + g_1 \int_0^t \Delta J(\Psi - \Psi') \frac{\partial g_2 \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3.54)$$

J_0 ist die elastische und $\Delta J(\Psi - \Psi')$ die zeitabhängige Kriechnachgiebigkeit. g_0 , g_1 und g_2 sind spannungsabhängige Nichtlinearitätsfaktoren. Ψ ist die „reduzierte Zeit“, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma[\sigma(t')]} \quad a_\sigma > 0 \\ \Psi' &= \Psi(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt'}{a_\sigma[\sigma(t')]} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Der Werkstoffparameter a_σ ist spannungsabhängig und bewirkt eine Spreizung bzw. Stauchung der Zeit [5, 19]. Temperatureinflüsse können mit diesem Parameter auch dargestellt werden.

$$a_{\sigma,T} = a_{\sigma,T}(\sigma, T) \quad (3.56)$$

Ein Relaxationstyp lässt sich mit dieser Methode wie folgt darstellen:

$$\sigma(t) = h_0 E_0 \varepsilon + h_1 \int_0^t \Delta E(\rho - \rho') \frac{\partial h_2 \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (3.57)$$

In dieser Gleichung ist E_0 der Elastizitätsmodul und $\Delta E(\rho - \rho')$ der zeitabhängige Anteil der Relaxation. h_0 , h_1 und h_2 sind die dehnungsabhängigen Nichtlinearitätsfaktoren. ρ ist wiederum die „reduzierte Zeit“:

$$\rho = \int_0^t \frac{dt'}{a_\varepsilon[\varepsilon(t')]} \quad a_\varepsilon > 0 \quad (3.58)$$

$$\rho' = \rho(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt'}{a_\varepsilon[\varepsilon(t')]}$$

Der Materialparameter a_ε ist von der Temperatur und der Dehnung abhängig und bewirkt eine Spreizung bzw. Stauchung der Zeit.

$$a_\varepsilon = a_\varepsilon(\varepsilon, T) \quad (3.59)$$

Es ist anzumerken, dass bei geringen Belastungen, was $g_0 = g_1 = g_2 = 1$ und $h_0 = h_1 = h_2 = 1$ bedeutet, die Gleichungen 3.54 und 3.57 den linear-viskoelastischen Bereich beschreiben.

Bei einer konstanten einachsigen Belastung ($a_\sigma = a_\varepsilon = 1$, isotherm) können die Gleichungen 3.54 und 3.57 in die folgenden Formen überführt werden:

$$\varepsilon(t) = g_0 J_0 \sigma + g_1 g_2 \Delta J(t) \sigma \quad (3.60)$$

im Kriech- und im Relaxationsfall:

$$\sigma(t) = h_0 E_0 \varepsilon + h_1 h_2 \Delta E(t) \varepsilon \quad (3.61)$$

Um diese Gleichungen weiter zu vereinfachen, ersetzte Brüller [20, 22, 57] die diskreten Retardations- und Relaxationsspektren durch Prony-Reihen. Somit gilt für konstante, einachsige und isotherme Belastung:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[g_0(\sigma) J_0 + g_t(\sigma) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad \text{mit } g_t = g_1 g_2 \quad (3.62)$$

und

$$\sigma(t) = \varepsilon \left[h_{\infty}(\varepsilon)E_{\infty} + \bar{h}_t(\varepsilon) \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right] \quad \text{mit } \bar{h}_t = h_1 h_2 \quad (3.63)$$

bzw.

$$\sigma(t) = \varepsilon \left[h_0(\varepsilon)E_0 - h_t(\varepsilon) \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right] \quad \text{mit } \bar{h}_t(\varepsilon) \neq h_t(\varepsilon) \quad (3.64)$$

Zur weiteren Vereinfachung kann gesagt werden, dass bei den meisten Polymeren g_0 und h_0 gleich eins sind [20]. Dies bedeutet, dass sich der Werkstoff bei kurzzeitiger Belastung elastisch verhält. Die Nichtlinearitätsfaktoren g_t und h_t werden aus einfachen Langzeitzugversuchen ermittelt. Somit sind die Gleichungen 3.62 und 3.64 ein sehr nützliches und einfaches Werkzeug zur Bestimmung des nichtlinear-viskoelastischen Verhaltens bei Kriechen und Relaxation. Ferner sind die Nichtlinearitätsfaktoren g_t und h_t nur von der Spannung bzw. von der Dehnung abhängig und können mit einfachen Splines- oder Exponentialfunktionen approximiert werden [22, 57, 58, 60]. Es gilt dann:

$$g_t(\sigma) = a \cdot \exp(b \cdot \sigma) + c \quad (3.65)$$

$$h_t(\varepsilon) = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots + a_p \cdot \varepsilon^p$$

mit $a = 0$, $c = 1$ bzw. $a_0 = 1$ und $a_1, \dots, a_p = 0$ für den linearen Fall.

3.3.1 Bestimmung der Materialparameter

Grundsätzlich werden die ganzen Materialparameter $J_0, J_1, J_2, \dots, J_m, g_0, g_t$, bzw. $E_0, E_1, E_2, \dots, E_m$ und h_0, h_t aus Kriech- und Relaxationsexperimenten bestimmt. Oftmals ist es jedoch schwierig die äußeren Einflüsse, wie Temperaturschwankungen, Feuchtigkeitsänderungen und Schwingungen bei der Lastaufbringung gänzlich abzuschalten. Diese Einflüsse können die Messdaten empfindlich verfälschen. Deshalb ist es notwendig, um repräsentative Ergebnisse zu erhalten, mehrere Versuche einer Laststufe durchzuführen bzw. eine Berechnung zu machen, die alle Messungen aller Laststufen in betracht zieht. Eine solche relativ einfache Methode wurde von Brüller [43, 44, 58] vorgeschlagen. Diese Berechnungsmethode ist die gemischte Iteration und ermöglicht es, die linearen viskoelastischen Werkstoffparameter und die Nichtlinearitätsfaktoren anhand experimenteller Ergebnisse bei unterschiedlichen Laststufen (einschließlich im nichtlinearen Bereich) zu ermitteln.

Es seien $k=1,2,\dots,p$ Kriechversuche mit unterschiedlichen Laststufen gegeben, wobei zu achten ist, dass mindestens ein Versuch im linearen Bereich liegen muss. Aus diesem Versuch lassen sich im ersten Schritt Kriechnachgiebigkeiten zu den Zeiten Null und unendlich abschätzen:

$$J(t = 0) = J_0 \quad (3.66)$$

$$J(t \rightarrow \infty) = J_0 + \sum_{i=1}^m J_i \quad (3.67)$$

Ebenfalls gilt für einen Versuch mit einer Spannung σ_k folgende Beziehung:

$$J_{nk}(t = 0) = g_{0k} J_0 \quad k = 1, \dots, p \quad (3.68)$$

$$J_{nk}(t \rightarrow \infty) = g_{0k} J_0 + g_{ik} \sum_{i=1}^m J_i \quad (3.69)$$

Mit den Gleichungen 3.66 bis 3.69 und einfacher Umformungen ergibt sich für die Nichtlinearitätsfaktoren eine erste grobe Abschätzung mit:

$$g_{0k} = \frac{J_{nk}(t = 0)}{J(t = 0)}, \quad g_{ik} = \frac{J_{nk}(t \rightarrow \infty) - J_{nk}(t = 0)}{J(t \rightarrow \infty) - J(t = 0)} = \frac{J_{nk}(t \rightarrow \infty) - J_{nk}(t = 0)}{\sum_{i=1}^m J_i} \quad (3.70)$$

Mit der Gleichung 3.70 ist in erster Näherung für jede Laststufe k die Nichtlinearitätsfaktoren berechnet worden. Mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerquadratmethode [59] und dieser Faktoren, kann unter der Berücksichtigung aller Kriechkurven folgendes Gleichungssystem dargestellt werden:

$$\left[(g^T \cdot g) * (A^T \cdot A) \right] \cdot J = \left[g^T * (A^T \cdot J^e) \right] \cdot U \quad (3.71)$$

mit:

- A bzw. A^T als Zeitmatrix bzw. die Transponierte davon
- J unbekannte lineare Werkstoffparameter
- J^e beinhaltet die experimentellen Messungen $\varepsilon_k^e(t_i)/\sigma_k$
- g bzw. g^T beinhaltet die Nichtlinearitätsfaktoren mit $g_{00} = g_{t0} = 1$
- U ist die Einheitsmatrix

wobei jeweils gilt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_m}} \\ 1 & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 - e^{-\frac{t_n}{\tau_1}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_n}{\tau_m}} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$J^e = \begin{bmatrix} J_0^e(t_1) & J_1^e(t_1) & \dots & J_p^e(t_1) \\ J_0^e(t_2) & J_1^e(t_2) & \dots & J_p^e(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_0^e(t_n) & J_1^e(t_n) & \dots & J_p^e(t_n) \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{t0} & \dots & g_{t0} \\ g_{01} & g_{t1} & \dots & g_{t1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0p} & g_{tp} & \dots & g_{tp} \end{bmatrix}$$

Mit nun bekannten linearen Materialparametern J_0, J_1, \dots, J_m werden für jede einzelne nicht-lineare Kriechkurve, in besserer Näherung, die Nichtlinearitätsfaktoren berechnet. Dies führt zu diesem Gleichungssystem:

$$A_g^T \cdot A_g \cdot G = A_g^T \cdot J_k^e \quad (3.73)$$

mit:

$$A_g = \begin{bmatrix} J_0 & \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}) \\ J_0 & \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_i}}) \\ \vdots & \vdots \\ J_0 & \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t_n}{\tau_i}}) \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} g_{0k} \\ g_{tk} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad J_k^e = \begin{bmatrix} J_k^e(t_1) \\ J_k^e(t_2) \\ \vdots \\ J_k^e(t_n) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Damit werden neue Nichtlinearitätsfaktoren berechnet, die als zweite Näherung wieder in die Gleichung 3.71 eingesetzt werden. Dies wiederholt sich solange, bis es zwischen zwei berechneten Werten keinen merklichen Unterschied mehr gibt. Das Symbol „ \cdot “ hat die Bedeutung einer gewöhnlichen Matrixmultiplikation und „ $*$ “ steht wie bei der Addition von Matrizen für eine Element mal Element-Multiplikation. Zur Berechnung aller Materialparameter waren ca. 800 Iterationsschritte nötig. Für diesen Algorithmus wurde am Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung ein Programm entwickelt.

Zur Vollständigkeit sollen hier die Gleichungen 3.70, 3.71 und 3.73 für den Relaxationsfall angegeben werden. Dann gilt:

$$h_{0k} = \frac{E_{nk}(t \rightarrow \infty)}{E(t \rightarrow \infty)}, \quad h_{tk} = \frac{E_{nk}(t=0) - E_{nk}(t \rightarrow \infty)}{E(t=0) - E(t \rightarrow \infty)} = \frac{E_{nk}(t=0) - E_{nk}(t \rightarrow \infty)}{\sum_{i=1}^m E_i} \quad (3.75)$$

und

$$\left[(h^T \cdot h) * (B^T \cdot B) \right] \cdot E = \left[h^T * (B^T \cdot E^e) \right] \cdot U \quad (3.76)$$

$$B_g^T \cdot B_g \cdot H = B_g^T \cdot E_k^e \quad (3.77)$$

mit:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} & \dots & e^{-\frac{t_1}{\tau_m}} \\ 1 & e^{-\frac{t_2}{\tau_1}} & \dots & e^{-\frac{t_2}{\tau_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{t_n}{\tau_1}} & \dots & e^{-\frac{t_n}{\tau_m}} \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} E_\infty \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$E^e = \begin{bmatrix} E_0^e(t_1) & E_1^e(t_1) & \dots & E_p^e(t_1) \\ E_0^e(t_2) & E_1^e(t_2) & \dots & E_p^e(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_0^e(t_n) & E_1^e(t_n) & \dots & E_p^e(t_n) \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{t0} & \dots & h_{t0} \\ h_{01} & h_{t1} & \dots & h_{t1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{0p} & h_{tp} & \dots & h_{tp} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$B_g = \begin{bmatrix} E_\infty & \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \\ E_\infty & \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t_2}{\tau_i}} \\ \vdots & \vdots \\ E_\infty & \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t_n}{\tau_i}} \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} h_{0k} \\ h_{tk} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad E_k^e = \begin{bmatrix} E_k^e(t_1) \\ E_k^e(t_2) \\ \vdots \\ E_k^e(t_n) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Auch hier wird eine Iteration zwischen den Gleichungen 3.76 und 3.77 bis zu einer gewünschten Genauigkeit durchgeführt. Für den linearen Bereich gilt auch hier $h_{\infty 0} = h_{t0} = 1$.

Die Anzahl der Iterationen und damit die Güte der Materialparameter hängt sehr stark von äußeren Faktoren, wie Meßgenauigkeit, Temperatur- und Luftfeuchtigkeitsschwankungen, ab. Ebenso sind Reibungen in den Lagern der Versuchseinrichtung bei kleinen Lasten nicht vernachlässigbar. Deshalb wurde diese Methode von Bau [19] und Neff [3] modifiziert. Bau verwendet als Ausgangswert die Daten der Kurve mit der höchsten Last und im nächsten Schritt normiert er sie auf die mit der geringsten Last. Neff verwendete für jeden einzelnen Materialparameter J_i bzw. E_i einzelne Nichtlinearitätsfaktoren g_{ii} bzw. h_{ii} . Es hat sich allerdings in zahlreichen Versuchen gezeigt, dass die Abweichungen der jeweiligen Methoden sehr gering sind.

3.3.2 Die Kriechnachgiebigkeit-Relaxationsmodul-Modul-Umwandlung

Obwohl die Ermittlung des Relaxationsverhaltens ein relativ einfacher Versuch ist, muss im Gegensatz zum Kriechversuch einiges beachtet werden. Bei der Aufbringung einer bloßen starren Dehnung wird das Material, auf Grund der Einspannung, der Elastizität der Maschine usw., sicherlich auch Kriechen oder eine andere Antwort zeigen. Deshalb muss bei einem Relaxationsversuch ständig die Dehnung mitgemessen und dem Anfangswert angepasst werden. Dieser Versuchsaufbau ist dann verhältnismäßig aufwendiger als wie bei einem Kriechversuch. Da aber wie vorher beschrieben, der Relaxationsmodul und die Kriechnachgiebigkeit das selbe Material charakterisieren, kann das eine vom anderen approximiert werden. In diesem Abschnitt soll deshalb ein Verfahren vorgestellt werden, mit dessen Hilfe aus einfachen Kriechversuchen ein Relaxationsversuch simuliert wird.

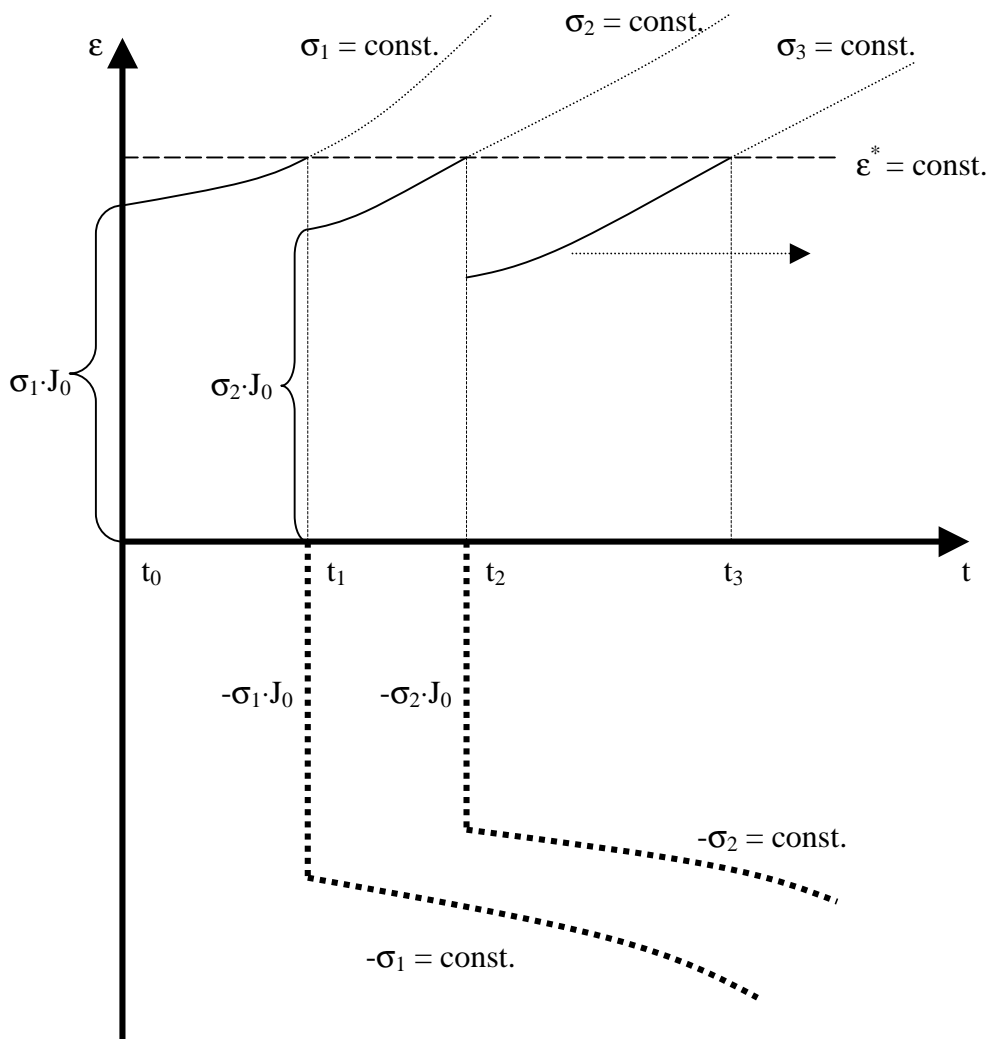


Bild
3.11:
Schema
der
Umwand-
lung

Das Bild 3.11 zeigt Kriechversuche mit unterschiedlichen Belastungen. Da die Belastungsgeschichte bei viskoelastischen Materialien mit einem „Memory-Effekt“ verbunden ist, muss für den weiteren Verlauf ein fiktiver Versuch mit negativer und im Betrag gleich hohe Spannung parallel mitlaufen. Aufgabe ist es jetzt, aus den Kriechversuchen mit den positiven und negativen Spannungen einen einzigen Relaxationsversuch zu berechnen. Dabei wurden aus den Kriechexperimenten die erforderlichen Materialparameter wie J_0, \dots, J_m und $g_t(\sigma)$ bereits ermittelt. Die Dehnung ε^* ist die, bei welcher der Versuch ausgewertet werden soll. Die Zeiten t_0, \dots, t_N können frei gewählt werden, jedoch hängt die Güte der Berechnung von den Zeitintervallen ab. Gesucht sind die Spannungen $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ die einen Datensatz bei der Dehnung ε^* bilden und somit einen Relaxationsversuch approximieren. Dabei hat sich eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten gezeigt. Die Spannungen werden mittels einer Nullstellenberechnung, wie z.B. das Newton-Verfahren, berechnet. Dies ist deshalb nötig, da der Nichtlinearitätsfaktor eine exponentielle Approximation enthält. Damit ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon^*}{J_0} \quad \text{zur Zeit } t_0 = 0 \quad (3.81)$$

Im weiteren Schritt ergibt sich für das Kriechen zur Zeit $t = t_1$ und der Nullstellensuche:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \sigma_1 \left(J_0 + g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \right) \right) \\ \Rightarrow \varepsilon^* - \sigma_1 \left(J_0 + g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Zur Zeit $t = t_2$ wirkt jetzt auch eine negative Spannung σ_1 die mitberücksichtigt werden muss:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \sigma_2 \left(J_0 + g_t(\sigma_2) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t_2 - t_1}{\tau_i}} \right) \right) \\ &+ \sigma_1 \left(J_0 + g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_i}} \right) \right) \\ &- \sigma_1 \left(J_0 + g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t_2 - t_1}{\tau_i}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.83)$$

und als Nullstellenberechnung ergibt sich dann:

$$\varepsilon^* - \sigma_1 g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i (\eta_{li} - 1) e^{-\frac{t_2}{\tau_i}} - \sigma_2 \left(J_0 + g_t(\sigma_2) \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t_2 - t_1}{\tau_i}}) \right) = 0 \quad (3.84)$$

mit $\eta_{li} = e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}$

In dieser Gleichung sind alle Parameter bis auf σ_2 bekannt. Aufgrund des Nichtlinearitätsfaktors $g_t(\sigma_2)$ muss eine Nullstellenberechnung durchgeführt werden, ansonsten wäre das im linearen Fall nicht nötig. Über alle N Zeiten und Spannungen lautet der Algorithmus dann wie folgt:

$$\varepsilon^* - \sum_{k=1}^{N-1} \left[\sigma_k g_t(\sigma_k) \sum_{i=1}^m J_i (\eta_{ki} - 1) e^{-\frac{t_{k+1}}{\tau_i}} \right] - \sigma_N \left(J_0 + g_t(\sigma_N) \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t_N - t_{N-1}}{\tau_i}}) \right) = 0 \quad (3.85)$$

mit $\eta_{ki} = e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}$

3.3.3 Berechnung einer einachsigen Stufenbelastung

Es kommt häufig vor, dass sich eine Spannung oder Dehnung durch äußere Einflüsse zu einer bestimmten Zeit verändert. Dies geschieht z.B. beim Knicken eines viskoelastischen Materials, wo die Durchbiegung kontinuierlich wächst und damit das Moment bzw. die Spannung und die Dehnung zunimmt. Vereinfacht lässt sich solch eine Stufenbelastung für die Spannungs- bzw. Dehnungsveränderung wie folgt darstellen:

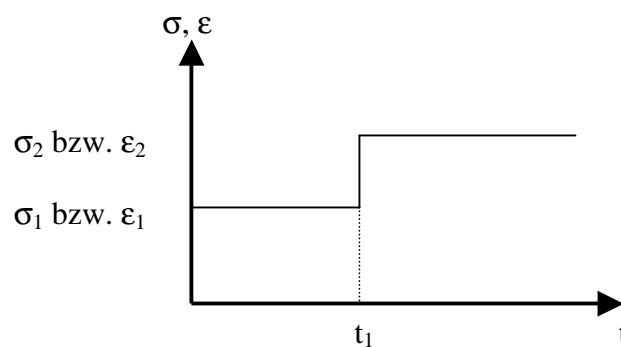


Bild 3.12: Stufenbelastung

Diese Belastungsart kann sich als spontane Entlastung und sofortige Wiederbelastung mit der neuen Spannung bzw. Dehnung zur Zeit $t = t_1$ vorgestellt werden. Somit lautet die mathematische Darstellung der Spannungs- und Dehnungsgeschichte:

$$\sigma(t) = \sigma_1 H(t) - \sigma_1 H(t-t_1) + \sigma_2 H(t-t_1) \quad (3.86)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 H(t) - \varepsilon_1 H(t-t_1) + \varepsilon_2 H(t-t_1)$$

Diese Darstellung ist so formuliert, dass zu einer Zeit $t < t_1$ nur die Belastung σ_1 bzw. ε_1 wirkt und ab der Zeit $t > t_1$ durch den „Memory-Effekt“ nunmehr die Belastungen σ_1 , $-\sigma_1$ und σ_2 bzw. ε_1 , $-\varepsilon_1$ und ε_2 wirken. Damit ergeben diese viskoelastische Antworten eine Superposition aus drei Belastungen. Durch das Einsetzen der Materialparameter und der Laplace-Transformation erhält man mit gewissen Umformungen folgende Ergebnisse für ein nichtlinear-viskoelastisches Material unter einer Stufenbelastung [19]:

Für $t < t_1$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J_0 + \sigma_1 g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \quad (3.87)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_1 E_0 - \varepsilon_1 h_t(\varepsilon_1) \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})$$

Für $t \geq t_1$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_2 J_0 + \sigma_2 g_t(\sigma_2) \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}}) + \sigma_1 g_t(\sigma_1) \left[\sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) - \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}}) \right] \quad (3.88)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_2 J_0 - \varepsilon_2 h_t(\varepsilon_2) \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}}) + \varepsilon_1 h_t(\varepsilon_1) \left[\sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_i}}) - \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right]$$

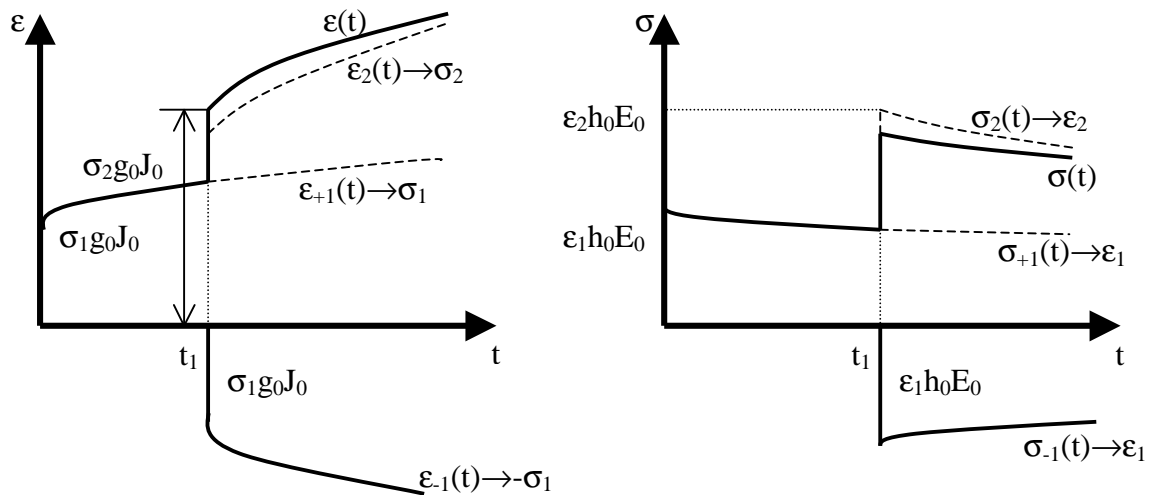


Bild 3.13: Verlauf der Dehnung bei einer Stufenbelastung $\sigma_2 > \sigma_1$

Aus Abbildung 3.13 ist für die Dehnung bzw. Spannung zu ersehen, dass für die Zeit $t = t_1$ nur der Anteil

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \sigma_2 J_0 + \sigma_1 g_t(\sigma_1) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \\ \sigma(t) &= \epsilon_2 E_0 - \epsilon_1 h_t(\epsilon_1) \sum_{i=1}^m E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

wirksam ist. Der transzendente Anteil für die Belastungen ϵ_2 , σ_2 und der elastische Anteil für ϵ_1 , σ_1 verschwinden. Für $t > t_1$ werden alle positiven und negativen Belastungen überlagert. Deutlich wird auch aus der Tatsache, dass wegen $|1 - e^{-t/\tau}| < |1 - e^{-(t-t_1)/\tau}|$ die Dehn- bzw. Relaxationsfunktion eine geringere Steigung als die Belastungskurven mit ϵ_2 , σ_2 hat. Dies bedeutet, dass für Zeiten $t \gg t_1$ die Kurven für die Gesamtbelastung nur noch von den Einzelbelastungen ϵ_2 , σ_2 bestimmt werden. Das führt zur Schlussfolgerung, dass nach einer gewissen Zeit die Vorgeschichte der Belastung ϵ_1 , bzw. σ_1 keinen Einfluss mehr auf den weiteren Verlauf der viskoelastischen Antwort hat. Für andere Belastungsarten, wie z.B. eine Rampenfunktion usw., oder negativ angebrachte Stufenbelastungen ($-\epsilon_2$, $-\sigma_2$) gelten die gleichen Überlegungen wie vorher beschrieben [19].

3.3.4 Ermittlung der Materialparameter aus dem Torsionsversuch

Wie bereits beschrieben, besitzt der Zugkriechversuch ein relativ einfachen Versuchsaufbau. Dies gilt auch für den Torsionskriechversuch. Bei diesem Experiment ist lediglich die ausschlaggebende Belastung die Schubspannung τ , die über die gesamte Dauer konstant bleibt, und die Antwort ist der zeit- und spannungsabhängige Schub- γ bzw. Verdrehwinkel ϑ . Während Zugkriechversuche in der Vergangenheit reichlich untersucht wurden, galt den Torsionskriechversuchen relativ wenig Aufmerksamkeit [72]. Auch ist es möglich zwischen den beiden Belastungsarten (Zug und Torsion) Beziehungen aufzustellen, die bei gewissen

Annahmen auch im viskoelastischen Fall gelten. Dies erleichtert den experimentellen Teil erheblich und kann als Bestätigung der anderen Belastungsart herangezogen werden.

Die Theorie der Torsion für beliebige Querschnitte ist kompliziert, weshalb hier nur die Sonderfälle Kreis- bzw. Rohrquerschnitt behandelt werden. Für eine ausführliche Behandlung des Themas wird auf die reichlich vorhandene Literatur verwiesen. Im weiteren soll kurz gezeigt werden, wie man die Spannungen und die Verformungen bei Torsion berechnen kann. Zuerst müssen folgende kinematische Annahmen getroffen werden:

- Querschnitte behalten bei der Torsion ihre Gestalt, d.h. sie verdrehen sich als Ganzes.
- Ebene Querschnitte bleiben eben, d.h. es tritt keine Verwölbung auf.

Wie in vielen Mechanikbüchern [49, 73, 74] nachzulesen ist, ergeben sich für die elastische Endverdrehung ϑ_l einer einseitig eingespannten Welle der Länge l mit dem Materialgesetz folgende Beziehungen:

$$\tau = G\gamma \quad (3.90)$$

$$\gamma = r \frac{\vartheta_l}{l} \quad (3.91)$$

$$\vartheta_l = \frac{Tl}{GI_p} \quad (3.92)$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} r \quad \text{bzw.} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \quad (3.93)$$

$$\text{mit } I_p = W_p R_{\max}$$

Für dünnwandige Kreisquerschnitte mit R_a als Außenradius, R_i als Innenradius und $R_m = (R_a + R_i)/2$ als mittleren Radius vereinfacht sich das Trägheits- und Widerstandsmoment zu:

$$I_p \approx 2\pi R_m^3 (R_a - R_i) \quad \text{und} \quad W_p \approx 2\pi R_m^2 (R_a - R_i) \quad (3.94)$$

mit:

- τ = Torsionsspannung und T = Torsionsmoment
- G = Schubmodul und γ = Schubwinkel

Im viskoelastischen Fall sind die Torsionsspannung $\tau(t)$ bzw. der Verdrehwinkel $\vartheta(t)$ aufgrund des sich verändernden Relaxations- $G(t)$ bzw. des Kriechmoduls $G^*(t)$ Funktionen der Zeit. Diese beiden Materialparameter haben den gleichen Zusammenhang wie die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ mit dem E-Moduls $E(t)$ im Fall der Zugbelastung. Sie können auch hinreichend genau mit Prony-Reihen approximiert werden, was dann zu

$$G^*(t) = G_0^* + \sum_{i=1}^m G_i^* (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \quad (3.95)$$

$$G(t) = G_0 - \sum_{i=1}^m G_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})$$

führt. Alle Materialparameter müssen aus Versuchen bestimmt werden. Weiter gilt im elastischen Fall bzw. zur Zeit $t = 0$ und $t = \infty$ folgender Zusammenhang:

$$G^*(0)G(0) = 1 \quad \text{für } t = 0 \quad (3.96)$$

$$G^*(\infty)G(\infty) = 1 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Gleiche Überlegungen der viskoelastischen Nichtlinearität wie für Zug, kann auch im Fall der Torsion aufgestellt werden. Somit lauten die Gleichungen für Torsionsrelaxation und Torsionskriechen im nichtlinearen Fall wie folgt:

$$\tau(t) = \gamma \left(G_0 - h_{iT}(\gamma) \sum_{i=1}^m G_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right) \quad (3.97)$$

$$\gamma(t) = \tau \left(G_0^* + g_{iT}(\tau) \sum_{i=1}^m G_i^* (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right) \quad (3.98)$$

mit $h_{iT}(\gamma)$ und $g_{iT}(\tau)$ als belastungsabhängige Nichtlinearitätsfaktoren bei Torsion. Auch diese Nichtlinearitätsfaktoren müssen vorher experimentell bestimmt und wie bei Zug durch eine Polynom- bzw. Exponentialfunktion approximiert werden. Dadurch ermöglichen diese Gleichungen eine einfache Behandlungsmöglichkeit der nichtlinearen Viskoelastizität bei einer Torsionsbelastung.

Mit diesen Gleichungen lässt sich ein Zusammenhang zwischen einer Zug- und Torsionsbelastung aufstellen. Da der gleiche Werkstoff zwei unterschiedlichen Belastungsarten ausgesetzt ist, muss zwischen den Materialparametern eine Beziehung herrschen. Man kann zeigen, dass für isotrope, elastische Werkstoffe folgender Zusammenhang Gültigkeit hat:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.99)$$

mit ν als die Querkontraktionszahl. Für elastische Werkstoffe ist die Querkontraktionszahl eine Konstante die aus Versuchen bestimmt wird. Viele Versuche haben jedoch gezeigt, dass praktisch auch für thermoplastische Materialien diese Zahl über die Zeit und Temperatur sich kaum verändert. Damit lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen viskoelastischer Torsion und viskoelastischem Zug aufstellen:

$$G(t) = \frac{E_0}{2(1+\nu)} - h_{iT}(\gamma) \sum_{i=1}^m \frac{E_i}{2(1+\nu)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (3.100)$$

$$G^*(t) = 2(1+\nu) J_0 + g_{iT}(\tau) \sum_{i=1}^m 2(1+\nu) J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (3.101)$$

mit

$$\gamma = 2\varepsilon \quad (3.102)$$

$$\tau = \frac{\sigma}{1+\nu}$$

Mit diesen Gleichungen können Torsions- und Zugversuche miteinander verifiziert und der eine durch den anderen bestätigt werden.

3.4 Energiebetrachtungen in der Viskoelastizität

Wie zu erwarten, ist auch das Versagen von viskoelastischen Materialien ein zeitabhängiges Phänomen [116, 117, 118]. Die von außen an den Werkstoff angebrachte Kraft verrichtet eine Arbeit, die während der Belastung in Energie, wie Wärme, Schall usw., umgewandelt wird. Das zeitliche Versagen kann bei Kunststoffen in folgenden Formen auftreten:

- Übergang von Linearität zu Nichtlinearität
- Rissbildung
- Erreichen der Streckgrenze
- Bruch

Je nach Kunststoffart, Belastungs- und Umgebungsbedingungen kann ein Phänomen oder können mehrere gleichzeitig auftreten, was zu einer erheblichen Erschwerung der Vorhersage des Versagens führt. Um dieses Verhalten von Werkstoffen mathematisch darzustellen, wurden in der Vergangenheit verschiedene Festigkeitshypothesen vorgeschlagen, die eine Funktion der Spannung bzw. Dehnung beinhalten. Leider muss man den Wert einer solchen

Funktion empirisch ermittelt und nicht jede Festigkeitshypothese kann zur Vorhersage des Versagens jedes Werkstoffes herangezogen werden. Folgende Hypothesen sind bekannt:

- Maximal-Normalspannungs-Hypothese
- Maximal-Normaldehnungs-Hypothese
- Maximal-Schubspannungs-Hypothese
- Maximal-Schubdehnungs-Hypothese
- Hypothese der Gesamtbelastungsenergie
- Hypothese der Gestaltänderungsenergie
- Hypothese der gespeicherten Gestaltänderungsenergie (Reiner-Weissenberg)

Da die Theorie von Reiner-Weissenberg die Zeit beinhaltet, kann nur sie zur Beschreibung der inneren zeitabhängigen Energie herangezogen werden [20, 21, 75, 76, 77]. Diese Hypothese besagt, dass das Versagen des Werkstoffes von dem Erreichen eines gewissen Wertes der gespeicherten Gestaltänderungsenergie abhängt und dadurch ein zeitliches Phänomen ist. In vielen Versuchen wurde diese Theorie mit großer Genauigkeit bestätigt [78].

Die Verformungsenergie die verrichtet wird, teilt sich in einen potentiellen und dissipativen Anteil. Wie vorher erwähnt, können ein Kriech- und Relaxationsversuch mit dem selben rheologischen Modell (Kelvin-Voigt, Bild 3.7 und Bild 3.9) beschrieben werden. Dabei wird die spontane bzw. potentielle Energie in der einzelnen Feder gespeichert. Die Feder-Dämpfer-Elemente tragen zur Dissipation und somit zur zeitabhängigen Kriech- und Relaxationsenergie bei. Dies lässt sich vereinfacht wie im Bild 3.14 in einem σ - ϵ -Diagramm darstellen:

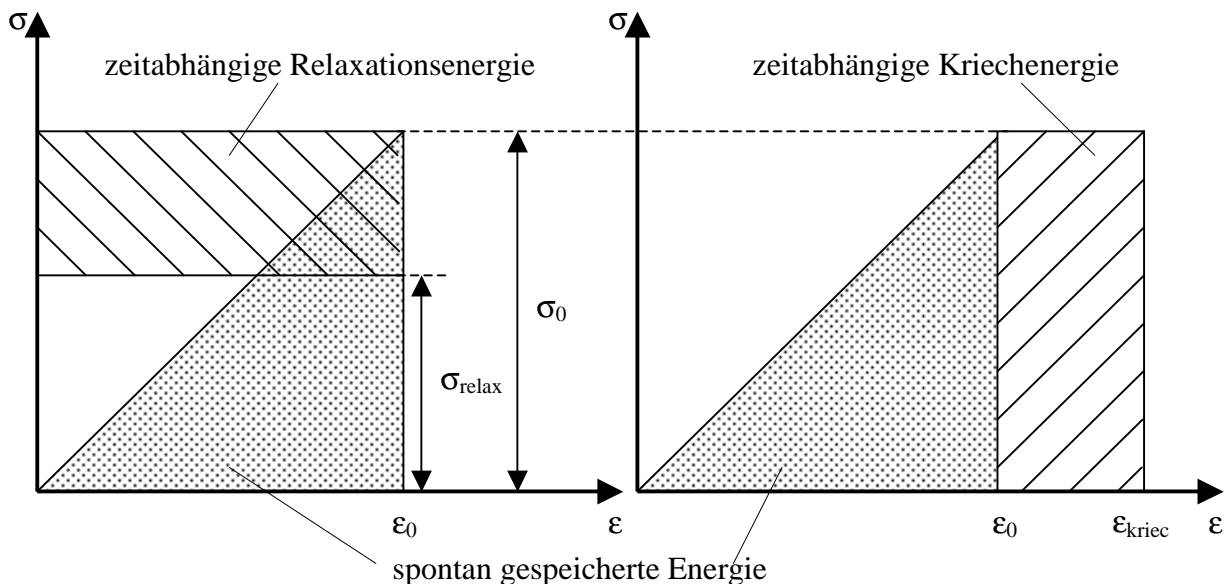


Bild 3.14: Kriech- bzw. Relaxationsenergie in einem σ - ϵ -Diagramm

Für die spezifische spontane Energie ergibt sich:

$$W_0 = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 E_0 = \frac{1}{2} \sigma_0^2 J_0 \quad (3.103)$$

Für ein einzelnes Kelvin-Voigt-Modell muss energetisch betrachtet die gleiche Energie in den einzelnen Federn gespeichert bzw. abgegeben werden, wie die einzelnen Dämpfer verbrauchen. Dies kann damit erklärt werden, dass bei einer Belastung des einzelnen Elements eine bestimmte Menge Energie in das ganze einzelne Element hineingesteckt wird und bei Entlastung die Feder selber den Dämpfer antreiben muss. Da die Dämpferelemente somit die Dissipation darstellen, gilt für die zeitabhängige Relaxation- und Kriechenergie folgende Dissipationsenergie:

$$W_{diss} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\sigma_0 - \sigma_{relax}) \quad \text{bei Relaxation} \quad (3.104)$$

$$W_{diss} = \frac{1}{2} \sigma_0 (\varepsilon_{kriech} - \varepsilon_0) \quad \text{bei Kriechen} \quad (3.105)$$

Es sei angemerkt, dass diese Dissipationsenergien nur den Energieumsatz im Dämpfer berücksichtigen. In Wirklichkeit ist die aufgenommene Energiemenge im Kelvin-Voigt-Element doppelt so hoch. In der Literatur [20, 21, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86] wird auch eine andere Darstellung gefunden, die für ein viskoelastisches Material die Berücksichtigung der Zeit einfließen lässt. Somit erhält man für die gesamte gespeicherte Energie des Kelvin-Voigt-Modells im Falle des nichtlinearen Kriechens:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 \left[J_0 + g_t(\sigma_0) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right)^2 \right] \quad (3.106)$$

Subtrahiert man von dieser Gesamtenergie die gespeicherte Energie

$$W = \sigma_0^2 \left[\frac{1}{2} J_0 + g_t(\sigma_0) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad (3.107)$$

kann ein anderer Ausdruck für die dissipierte Energie geschrieben werden

$$W_{diss} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 g_t(\sigma_0) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-2\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.108)$$

Nimmt man von der gespeicherten Energie aus der Gleichung 3.107 nur den viskoelastischen Anteil, so stellt dies die Summe aller Federelemente im Kelvin-Voigt-Modell dar. Nach der

oberen Aussage, dass die Feder- und Dämpferelemente zu gleichen Teilen die Energie aufnehmen bzw. dissipieren, ergibt sich mit den Gleichungen 3.105 und 3.107 folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_{kriech} = \varepsilon_0 + \sigma_0 g_t(\sigma_0) \sum_{i=1}^m J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.109)$$

Es ist leicht zu ersehen, dass diese Gleichung das Materialgesetz eines nichtlinear-viskoelastischen Werkstoffs in Form 3.62 beschreibt.

Gleiche Überlegungen für die Relaxation, welche auch mit einem Kelvin-Voigt-Modell beschrieben wird, führen auf die folgende Gleichung der gespeicherten Energie:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \left[E_0 - h_t(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^m E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad (3.110)$$

Die dissipative Energie ist dann:

$$W_{diss} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 h_t(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^m E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.111)$$

Die Gesamtenergie setzt sich dann aus der Summe dieser beiden zusammen:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 E_0 \quad (3.112)$$

Es ergibt sich dann auch bekanntlich:

$$\sigma_{kriech} = \sigma_0 - \varepsilon_0 h_t(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^m E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.113)$$

Diese dargelegten Gleichungen ergeben bei jeglichen viskoelastischen Problemen, die mehrere Unbekannte enthalten, eine weitere zusätzliche Gleichung zur Berechnung. In den aufgeführten Büchern und Veröffentlichungen sind nähere Angaben zur Herleitung und Bestimmung enthalten.

Zur Bestimmung der Festigkeit von Kunststoffen ist die Untersuchung der Versagensbedingungen, wie Übergang von Linearität zur Nichtlinearität, Auftreten rissartiger Werkstoffschädigungen, das Erreichen einer Streckgrenze oder der Bruch, unerlässlich. Dies ist im Gegensatz zu Metallen und nichtmetallischen anorganischen Werkstoffen wesentlich schwieriger, da bei Polymeren der Faktor Zeit, Temperatur und Umgebungsbedingungen eine erheblichere Rolle spielen. Die in betracht kommende Versagensgrenze ist auch abhängig von der Belastungsart, wie zügige Belastung, Kriechen oder Relaxation. Durch zahlreiche Versuche konnte gezeigt werden, dass die erzielten Ergebnisse aus Theorie und Experiment in hinreichender Genauigkeit übereinstimmen.

In [21] wurde beschrieben, dass der Übergang der Linearitäts-Nichtlinearitätsgrenze bei einer bestimmten gespeicherten Energie stattfindet. Der Wert z.B. für PMMA wird hier angegeben als $W \approx 0,09 \text{ Nmm/mm}^3$ bei 23°C . Diese konnte bei [150] mit Hilfe der „reduzierten Spannung“ bei unterschiedlichen Dehngeschwindigkeiten ermittelt und durch [46] verglichen werden. Mit diesem Wert kann nun auch der Übergang dieser Grenze bei unterschiedlichen Belastungsarten berechnet und angegeben werden [114].

Das Auftreten erster sichtbarer Werkstoffschädigungen ist ein zeitabhängiges Phänomen, was damit zu erklären ist, dass für das Wachstum der im Werkstoff vorhandenen Schädigungen bis zu einer „sichtbaren Größe“ Zeit benötigt wird [81, 151, 152]. Dies ist im nächsten Bild 3.15 am Beispiel von PMMA sichtbar.

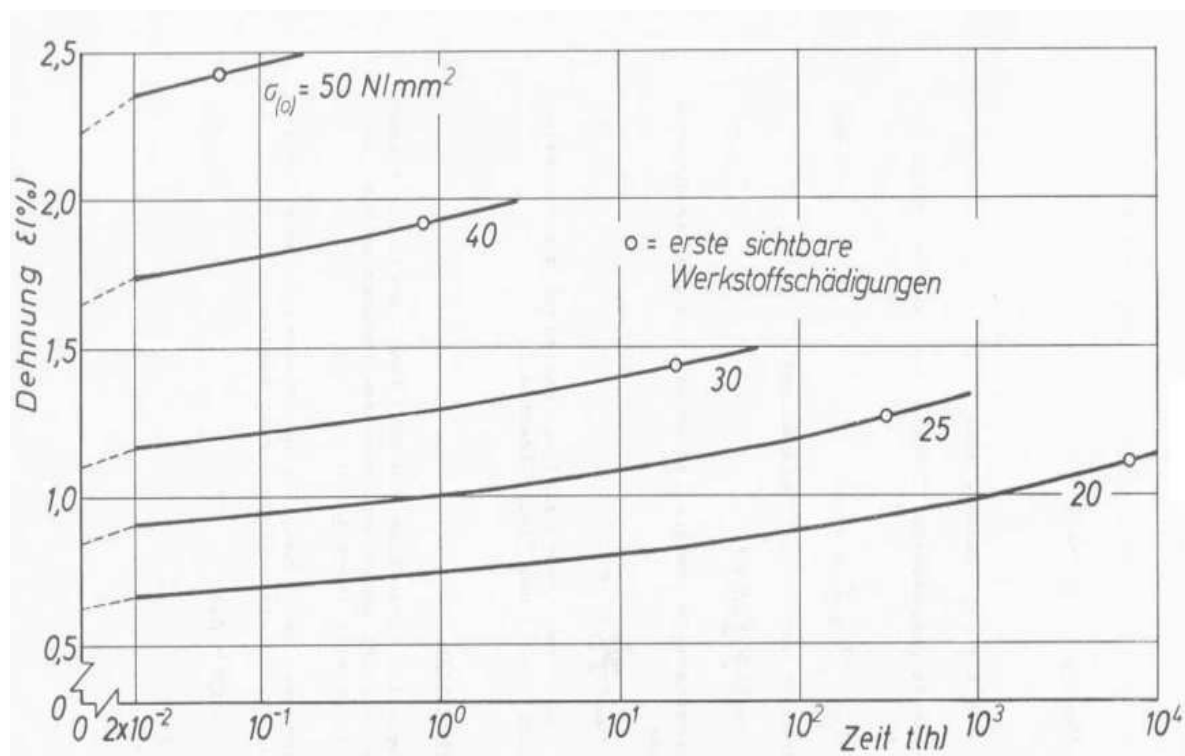


Bild 3.15: Erste sichtbare Werkstoffschäden an PMMA im Kriechversuch [20]

Das Bild 3.16 zeigt für PMMA, dass die sichtbaren Schäden am Material bei einer konstanten gespeicherten Kriechenergie entstehen. Hier wird der zeitabhängige Anteil der Energie bei verschiedenen Spannungen dargestellt. Der mittlere Energiewert bei 23°C für PMMA wird von [21] zu $W \approx 0,045 \text{ Nmm/mm}^3$ angegeben.

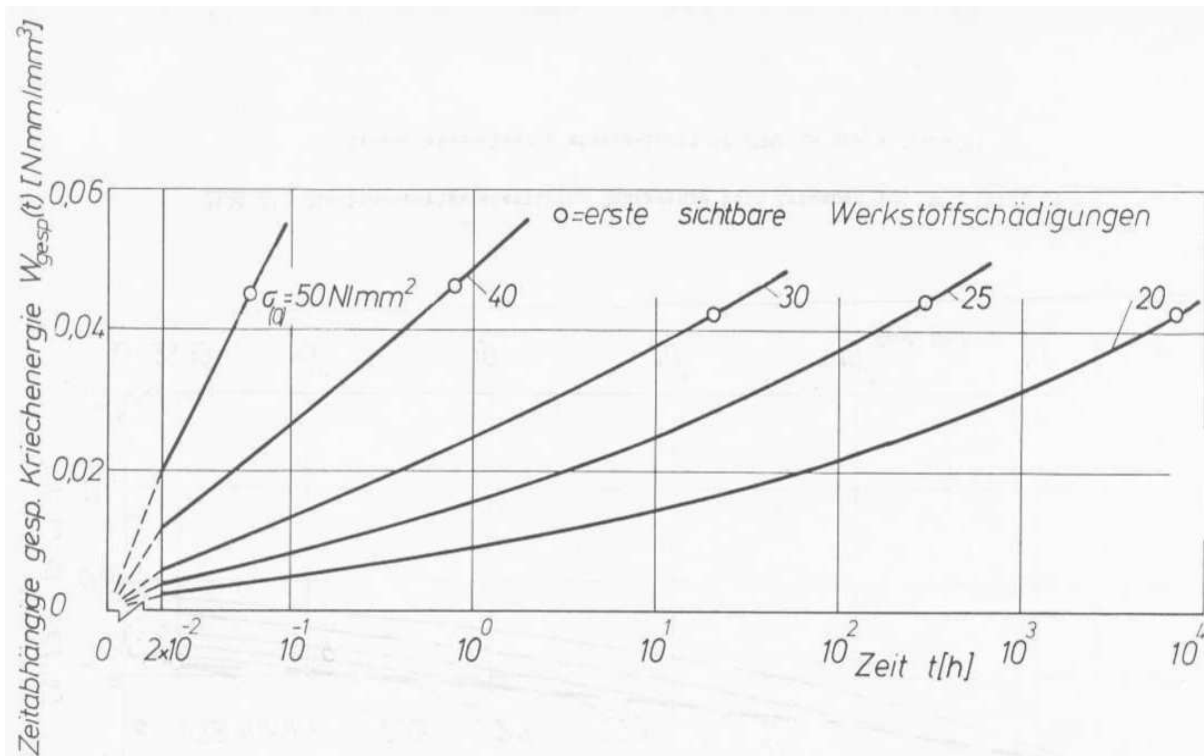


Bild 3.16: Zeitabhängige gespeicherte Kriechenergie von PMMA [20]

In [118] wird dieser Zusammenhang auch für andere Kunststoffe wie z.B. PC bestätigt.

Die Bestimmung des Auftretens erster sichtbarer Werkstoffschädigungen mit der Verformungsenergie und ihrer Anteile ist mit einem erheblichen mathematischen Aufwand verbunden. So kann eine vereinfachte Gleichung zur Bestimmung herangezogen werden. Bild 3.17 zeigt, dass der dissipierte Energieanteil zum Zeitpunkt der Werkstoffschädigung trotz verschiedener Spannungen mit hinreichender Genauigkeit etwa gleich groß bzw. konstant ist. [21] gibt diesen Wert für PMMA bei 23°C mit $W \approx 0,058 \text{ Nmm/mm}^3$ an.

Jetzt kann nun mit guter Genauigkeit für Kriechen und Relaxation der zeitabhängige Anteil der gesamten Energie des Materials als Grenzwert für das Auftreten erster sichtbarer Werkstoffschädigungen betrachtet werden.

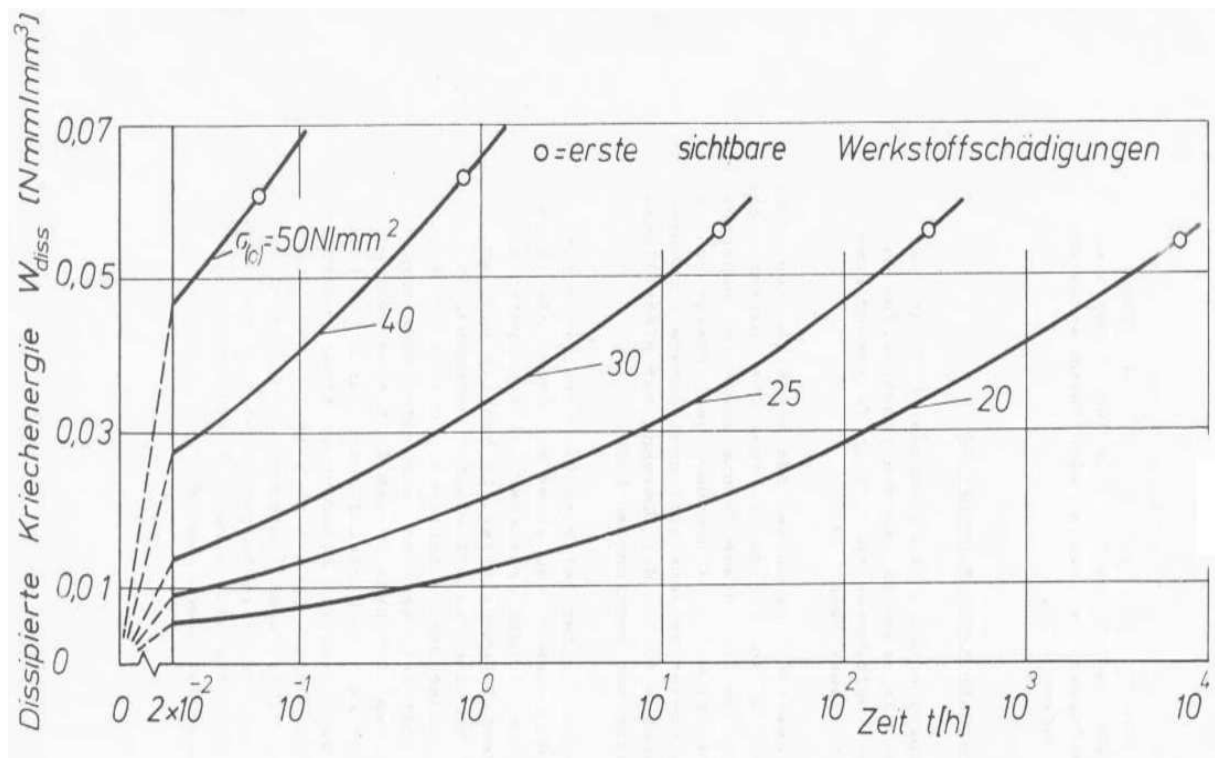


Bild 3.17: Zeitabhängige dissipierte Energie von PMMA [20]

Die Berechnung dieser Schädigungsenergie ist bei diesen Belastungsarten relativ einfach [21]:

Kriechen:

$$W_{sch} = (\varepsilon_{sch} - \varepsilon_{sp}) \sigma_0 \quad (3.114)$$

$$\varepsilon_{sch} = \varepsilon_{sp} + \frac{W_{sch}}{\sigma_0}$$

Relaxation:

$$W_{sch} = (\sigma_{sp} - \sigma_{sch}) \varepsilon_0 \quad (3.115)$$

$$\sigma_{sch} = \sigma_{sp} - \frac{W_{sch}}{\varepsilon_0}$$

Hierbei ist W_{sch} die Schädigungsenergie, ε_{sch} bzw. σ_{sch} Schädigungsdehnung bzw. -spannung, ε_{sp} bzw. σ_{sp} spontane Dehnung bzw. Spannung und ε_0 bzw. σ_0 konstante Dehnung bzw. Spannung. Als Schädigungsenergie für PMMA bei Kriechen und 23°C wird in [21] der Wert $W_{sch} \approx 0,103 \text{ Nmm/mm}^3$ angegeben.

Da diese einfache Berechnung für die σ - ε - Ebene entwickelt wurde, dürfte die Temperatur keinen Einfluss auf diese Ergebnisse haben. Jedoch lässt sich die Zeit-Temperatur-Verschiebung anwenden. Es sei hier auf die zahlreiche Literatur verwiesen.

Die Bruchfestigkeit und ihre Art hängen bei viskoelastischen Materialien auch sehr stark von der Belastungsgeschichte und den Umgebungsbedingungen ab. Der Versuch das Bruchverhalten eines Kunststoffes energetisch zu erklären, hat bei [21] zu sehr guten Ergebnissen geführt. Auf Grund der durchgeführten Versuche, tritt der Bruch eines viskoelastischen Werkstoffes bei einem gewissen energetischen Wert ein. Dabei muss man bedenken, dass diese Energie einen gespeicherten und einen viskosen Anteil besitzt. Der Wert der Energie die zum Bruch für PMMA führt wird von [21] zu $W_B \approx 0,27 \text{ Nmm/mm}^3$ angegeben. Diese Versuche wurden auch zur Bestätigung mit anderen Kunststoffen durchgeführt (PS und ABS).

Diese Hypothesen haben gezeigt, dass die Betrachtung der Energieaufnahme des Werkstoffes eine wichtige Rolle in deren Versagensmechanismen spielt. So kann im ingenieurmäßigen Gebrauch das jeweilige Versagen aus einer für das Material konstanten Energieaufnahme betrachtet werden. Die einzelnen Versagensphänomene führen im einfachen Fall zu einer konstanten dissipativen Energie, die repräsentativ für den Werkstoff ist.

Neben den oben aufgeführten Versagensmechanismen, kann der Verlust der Tragfähigkeit des Materials auch als ein Versagen betrachtet werden. Dies nennt man dann Stabilitätsverlust. Der Werkstoff verliert seine Tragfähigkeit bzw. seine Steifigkeit bei einer bestimmten dissipativen Energie, dessen weiterer Verlauf empirisch herausgefunden und mittels einer Funktion angenähert werden kann.

Wird ein viskoelastisches Rohr auf Torsion belastet, so durchläuft es je nach Belastungshöhe unterschiedliche Versagensmechanismen. Diese Mechanismen können vom einfachen Kriechen bzw. Relaxation (Linearitäts-Nichtlinearitätsgrenze) bis hin zum Bruch (sprödes Material) oder zum Abtordieren (Gartenschlauch) des Rohres führen. Dabei hat sich gezeigt, dass in erster Näherung das Versagen von einer konstanten dissipativen Energie abhängt. Mit den oben erwähnten Umrechnungsformen können die aus dem Kriechen erzielten Ergebnisse auf Torsion umgestellt werden. So lassen sich die Gleichungen 3.109-3.111 mit den Zusammenhängen:

$$\tau = \frac{\sigma}{1+\nu}$$

$$J_i = \frac{G^*}{2(1+\nu)} \tag{3.116}$$

$$g_i(\sigma) \rightarrow g_{iT}(\tau)$$

wie folgt darstellen:

$$W_{gesT} = \frac{1}{4} \tau^2 (1+\nu) \left[G_0^* + g_{iT}(\tau) \sum_{i=1}^m G_i^* \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right)^2 \right] \tag{3.117}$$

als die gesamte Torsionsenergie. Die gespeicherte und dissipierte Energien sind dann:

$$W_T = \frac{1}{4} \tau^2 (1+\nu) \left[G_0^* + 2g_{iT}(\tau) \sum_{i=1}^m G_i^* \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad (3.118)$$

$$W_{dissT} = \frac{1}{4} \tau^2 (1+\nu) g_{iT}(\tau) \sum_{i=1}^m G_i^* \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau_i}} \right) \quad (3.119)$$

Nach Erreichen einer bestimmten Dissipationsenergie kann das viskoelastische Rohr nicht mehr die Torsionsspannung übertragen und gibt mit dem Durchdrehen nach. Obwohl das Rohr kurz vorher seinen baldigen Stabilitätsverlust erkennen lässt, geschieht das Abtordieren plötzlich. Dieses Phänomen war zeitlich umso schneller, je kürzer die Torsionsprobe war. Beim Auftragen der Versuchswerte und der konstanten Dissipationsenergie in einem τ - γ -Diagramm, lässt sich dieses Phänomen leichter verstehen. Die entstandene Kurve lässt sich mit einer Gleichung empirisch annähern.

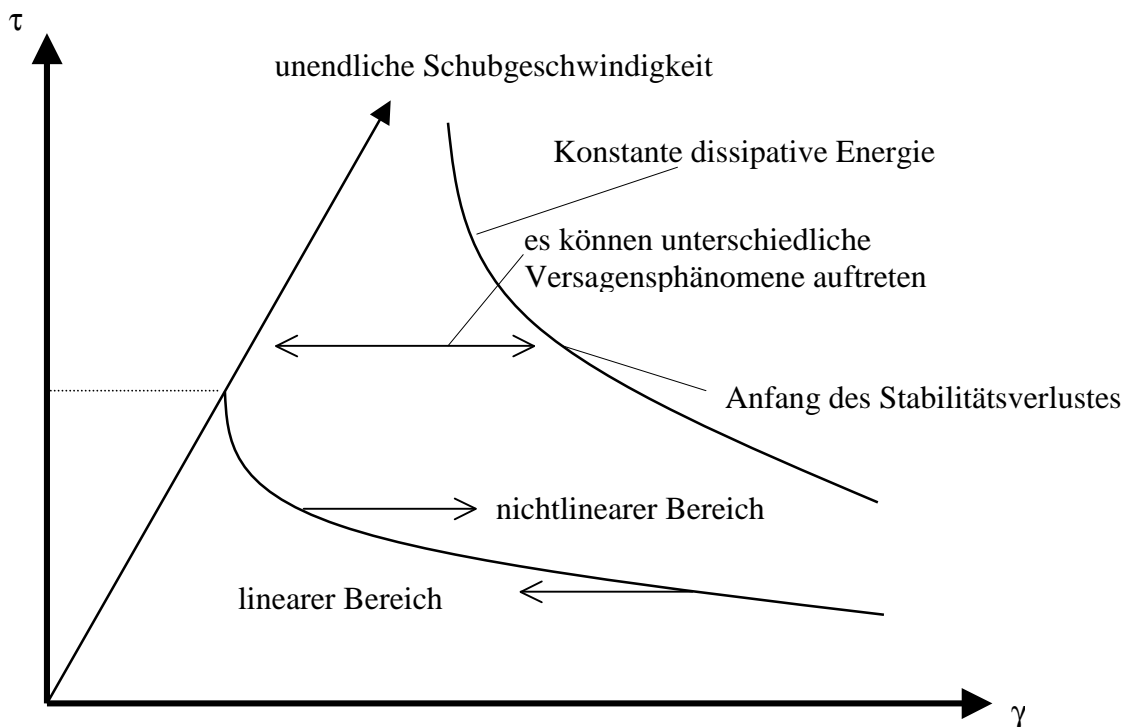


Bild 3.18: Zustands und Versagensbereiche eines viskoelastischen Werkstoffes

4 Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

Wie bereits im letzten Kapitel erläutert, werden die Materialparameter aus „einfachen“ kurzzeitigen und langzeitigen Versuchen, wie Zug- und Torsionskriechen bzw. Relaxation, gewonnen. In diesem Abschnitt sollen diese experimentellen Ergebnisse erläutert und dargestellt werden. Die Genauigkeit der ermittelten Parameter hängt sehr stark von der Qualität der experimentellen Ergebnisse ab. Mit diesen ausgewerteten Ergebnissen lässt sich dann eine ziemlich genaue Vorhersage des viskoelastischen Verhaltens im Zeitraum der gemessenen Zeitspanne und eine gute Simulation für noch längere Zeiträume (Zeit-Temperatur-Verschiebung) berechnen. Unter diese „einfachen“ Versuche fallen keine Druck- und Biegeversuche, denn bei Druck ist das Verhindern von Knickeffekten und bei Biegung das Konstanthalten von Biegemoment (Veränderung der Hebelverhältnisse) sowie die freie Entfaltung der Querkontraktion an den Lasteingangsstellen fast unmöglich. Schwierig erweist sich jedoch auch bei den sogenannten „einfachen“ Versuchen die Lastaufbringung in sehr kurzer Zeit (z.B. nichtvernachlässigbare Massenträgheitseffekte) und ohne Schwingungen bzw. Reibungen in den Lagern der Maschine. Deshalb werden Messzeiten gewählt, die mit hinreichender Genauigkeit einige dieser Schwierigkeiten hinter sich lassen. Bild 4.1 zeigt als Beispiel die allgemeinen Verhältnisse eines einachsigen Kriechversuches:

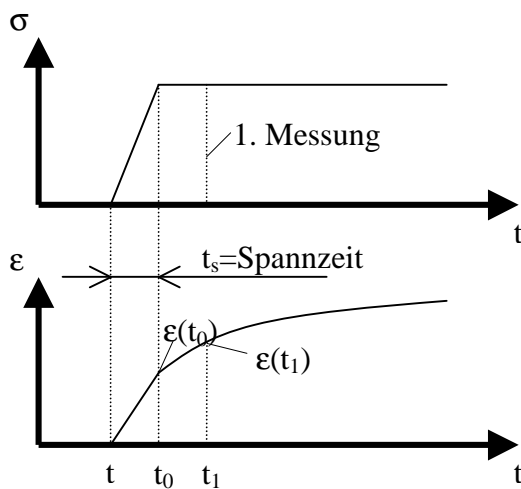


Bild 4.1: Spannungs-Zeit- bzw. Dehnungs-Zeit-Verlauf beim Kriechen

Für die Durchführung von Kurz- und Langzeitversuchen kann in sehr guter Näherung die Querschnittsverringering vernachlässigt werden, was bedeutet, dass die Spannung und die Querkontraktionszahl über die Zeit konstant bleiben. Die Versuche werden unter Normalbedingungen an Schulterproben nach DIN 53455 und an dünnwandigen Rohren (Schubspannungen können konstant über die Dicke angenommen werden) durchgeführt. Bild 4.2 zeigt eine solche Schulterprobe:

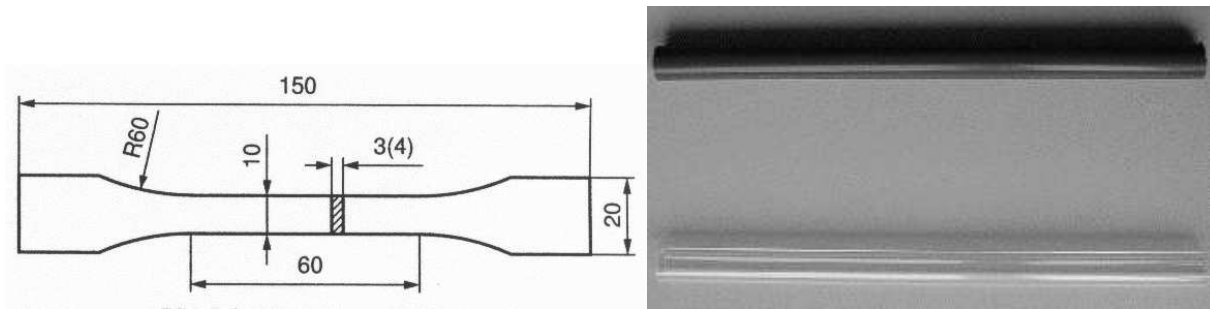


Bild 4.2: Schulterprobe und Rohre für die gewünschten Versuche

Die Rohrproben (Bild 4.2 rechts) hatten, je nach Wunsch, unterschiedliche Längen mit jeweils Außendurchmesser von 12 mm und ca. 1 mm Wandstärke.

Damit können jetzt Zug- und Scherkriech- (Dehnung ε und Scherwinkel γ werden gemessen) sowie Relaxationsversuche (Spannung σ wird gemessen) durchgeführt werden. Um den Zeitaufwand bei vielen Versuchen und die Kosten für teure Maschinen zu minimieren, wurde am Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung eine dafür spezielle Vorrichtung gebaut.

4.1 Versuchsvorrichtung für Zug, Zugkriechen, Torsionskriechen und Spannungsrelaxation

Der kurzzeitige Zugversuch dient zur Ermittlung vom Elastizitätsmodul. Bei diesem Experiment werden die Proben mit unterschiedlichen Dehnraten belastet und die dabei benötigte Spannung (oder Kraft) und erzielte Dehnung (oder Verschiebung) in einem $\sigma - \varepsilon$ - Diagramm aufgezeichnet. Dazu wurde eine elektromechanische Universalprüfmaschine der Firma Zwick verwendet. Der vereinfachte schematische Aufbau ist wie folgt in Bild 4.3 dargestellt:

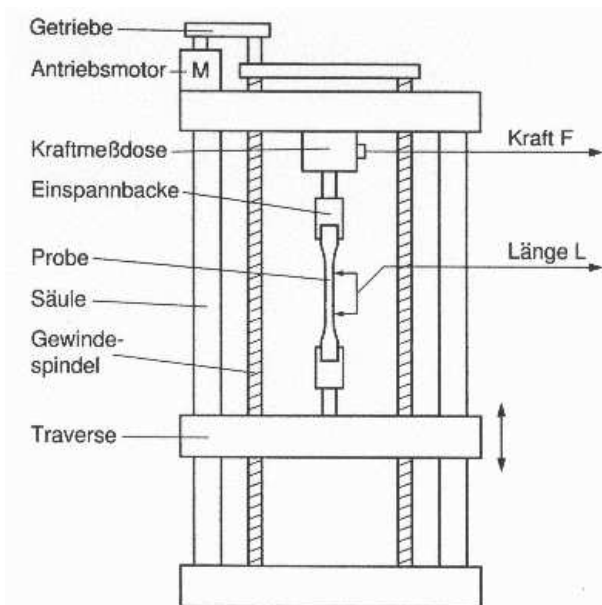


Bild 4.3: Schematische Aufbau der Prüfmaschine

4.2 Messtechnik

Die Dehnung wird, um die Elastizitätseinflüsse der Maschine (Traverse, Spindel usw.) zu eliminieren, mittels eines speziell dafür konstruierten Dehnungsaufnehmers direkt an der Probe gemessen (Bild 4.4). Erst für sehr große Verschiebungen, die der Aufnehmer konstruktiv nicht mehr messen konnte, wurde das Verschiebungsmessgerät der Zwick selber verwendet. Nachfolgend ist der Aufbau und die Funktionsweise des Dehnungsmessgerätes (Extensometer) dargestellt:

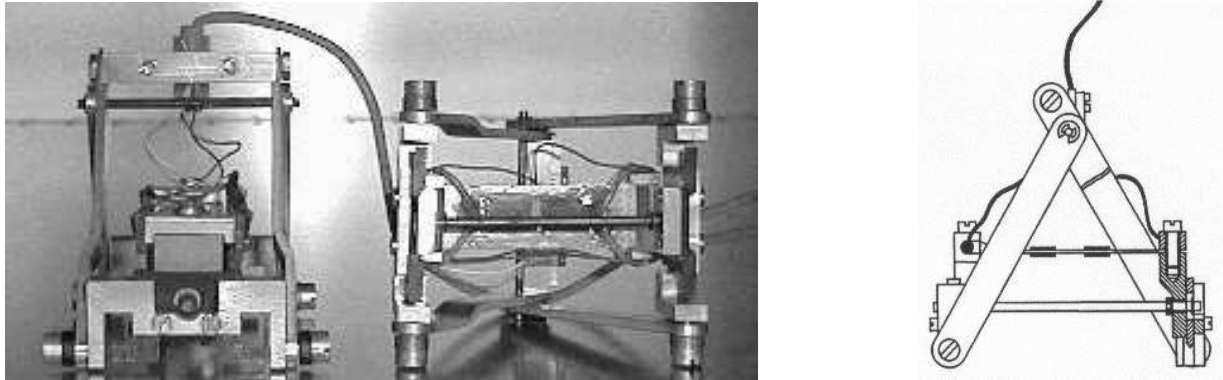


Bild 4.4: Dehnungsaufnehmer mit den DMS [19]

Aus zwei Hebelarmen und einem hochelastischen dünnen Biegebalken, welches zwischen den Armen eingeschraubt ist, besteht das Extensometer. Auf beiden Seiten des Biegebalkens aus Federstahlblech sind jeweils zwei Dehnmessstreifen geklebt und zu einer Wheatstoneschen Vollbrücke, dessen Funktion unten erklärt wird, verschaltet. Dadurch können Widerstandsänderungen der einzelnen Dehnmessstreifen, hervorgerufen durch Umgebungseinflüsse, wie beispielsweise Temperaturänderung, kompensiert werden. Die beiden Hebelarme haben an ihrem unteren Ende jeweils eine dünne Schneide, mit welcher sie auf dem Probekörper stehen ohne dabei zu verrutschen. Lineare Wegänderungen, die durch die Dehnung der Probe entstehen, bewirken somit eine Vierpunktbiegung des Blechs, die eine Widerstandsänderung zur Folge hat. Diese wird von einem Trägerfrequenz-Messverstärker (der Firma Gantner) erfasst und verstärkt. Die Messwerte werden über einen AD-Wandler (Gantner) an einen Rechner geleitet und gespeichert (Bild 4.5). Der große Vorteil des Extensometers ist, dass der hohe Kalibrier- und Rechenaufwand entfällt und hohe Kosten eingespart werden, weil die teuren DMS öfters genutzt werden können.

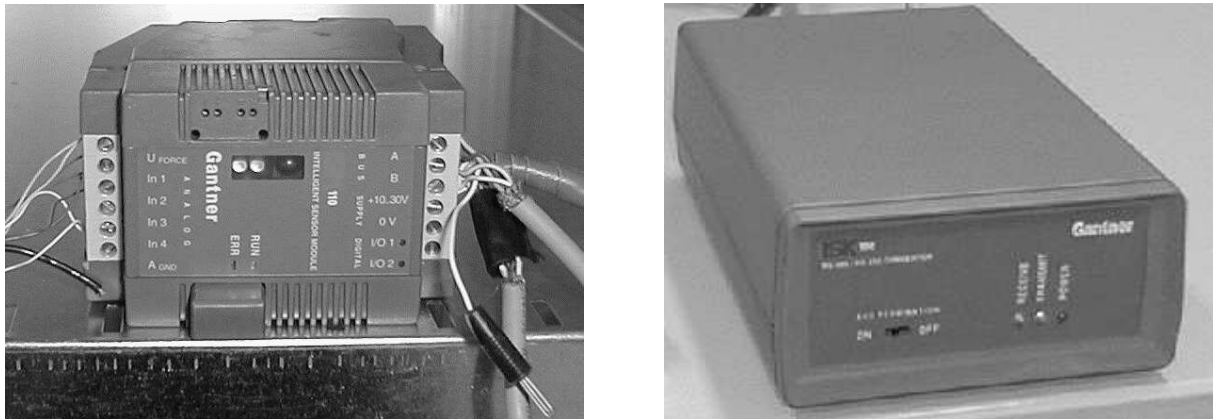


Bild 4.5: Messmodul mit AD-Wandler

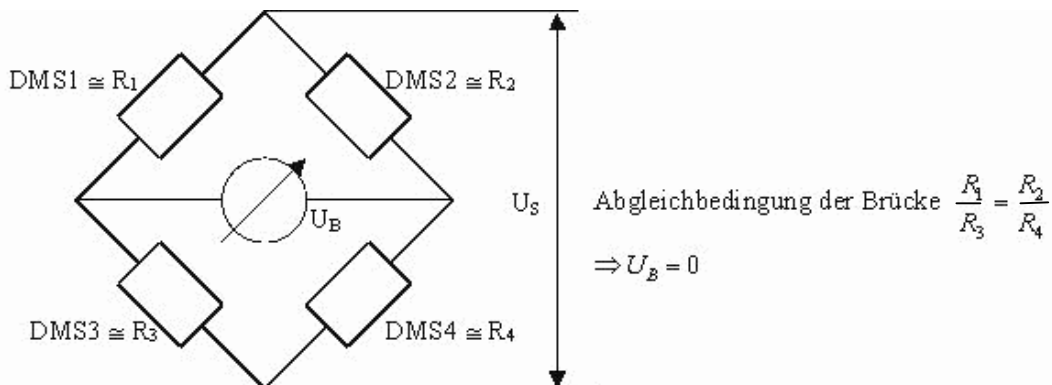


Bild 4.6: Wheatstonesche Vollbrücke

In Bild 4.6 ist eine Wheatstonesche Vollbrücke abgebildet. Die Dehnmessstreifen DMS1, ..., DMS4 wirken hier wie vier veränderbare Widerstände R_1, \dots, R_4 , die miteinander verschaltet sind [66, 67, 68]. Zur Kompensation von unerwünschten äußeren Einflüssen, sollten die gegenüberliegenden Widerstände an der gleichen Seite des Biegeblechs angebracht sein. Diese Brücke wird mit einer konstanten Speisespannung U_S versorgt. Haben die Widerstände ein bestimmtes Verhältnis zueinander, kann keine Messspannung U_B erfasst werden. Bei einer Verstimmung dieser Brücke, was durch die Vierpunktbiegung geschieht, kann eine Spannung U_B gemessen werden. Mit einer geeigneten Eichung dieser messbaren linearen Spannung wird direkt am PC die Dehnung der Probe erfasst. Die Kalibrierung geschieht an einer Kalibrierbank, wo fünf Messpunkte aufgenommen und einer Spannung zugewiesen werden. Man sollte beachten, dass die Messpunkte im Bereich der zu erwartenden Dehnung aufgenommen wird. Das hier verwendete Programm gibt im weiteren Verlauf nun standardmäßig die ermittelte Dehnung aus. Die Messung der Brückenspannung sowie die Spannungsversorgung der Brücke erfolgt über das Modul und den AD-Wandler von der Firma Gantner.

Eine weitere Messmethode, die insbesondere bei den Torsions- und Knickversuchen Verwendung fand, war die induktive Messung der Verschiebung. Bei dieser Methode wird die Än-

derung der Induktivität einer Spule durch eine mechanischen Verformung Δx ausgenutzt. Diese Induktivitätsveränderung wird hervorgerufen durch die mit der Verformung verbundene Verschiebung eines ferromagnetischen Kerns (Anker) in einer oder mehreren von Wechselstrom durchflossenen Spulen (Bild 4.7). Der große Vorteil dieser Messung ist die, dass bei geeigneter Dimensionierung von Anker und Spulen die Induktivität sich über einen sehr weiten Bereich linear mit der Verschiebung ändert, was sich hauptsächlich bei den eingangs erwähnten Torsions- und Knickversuchen sehr nützlich erwies. Diese induktiven Aufnehmer, die in sich wie zwei veränderbare Widerstände wirken, konnten mit einem Zusatzgerät an das Modul und den AD-Wandler angeschlossen werden. Somit bildete dieser Anschluss eine Wheatstonesche Brücke, die kalibriert wird und durch seine Verstimmung ein Messsignal liefert. Nachfolgend ist das Bild und die Funktionskizze dargestellt:

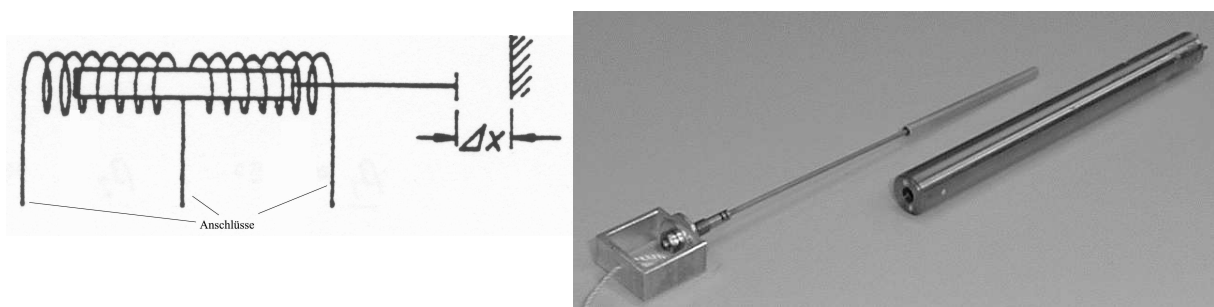


Bild 4.7: Induktiver Messaufnehmer mit ferromagnetischem Kern

4.3 Kriech- und Relaxationsvorrichtungen

In Bild 4.8 ist die Vorrichtung dargestellt, mit der für konstante Kräfte und konstante Dehnungen die Kriech- und Relaxationsversuche durchgeführt wurden. Der Hebel bleibt, in sehr guter Näherung, über den ganzen Versuch waagrecht, so dass gesagt werden kann, der Hebelarm hat ständig das gleiche Verhältnis. Das Hebelverhältnis beträgt 1:10 und somit können ergonomisch günstige Massen von ca. 30 Kg beladen werden. Der Vorteil lag hauptsächlich in der gleichmäßigen und stoßfreien Belastung der ca. 3000 N auf der Probenseite. Damit kann eine wechselnde Belastung am Anfang so weit wie Möglich vermieden werden.

Die Probe (2) wird mittels einer Einspannvorrichtung (Bild 4.9) in die Keilspannbacken eingespannt. Die Einspannvorrichtung dient zur geradlinigen, mittigen und genauen Einspannung der Probe und wird in [65] genauer erklärt. Der Vorteil dieser Backen (4) ist, dass sie bei Schlupf oder Schwinden der Probe mittels der Prüfkraft selbstständig nachspannen (Bild 4.10). Die Backen sind über eine Gewindestange, die zum Ausgleich der Längenabweichungen der Einspannung dient, mit der Grundplatte (1) und dem Hebelarm (8) verbunden. An der Probe ist der Dehnungsaufnehmer (3) rutschfest angebracht und hat eine Verbindung zum Modul.

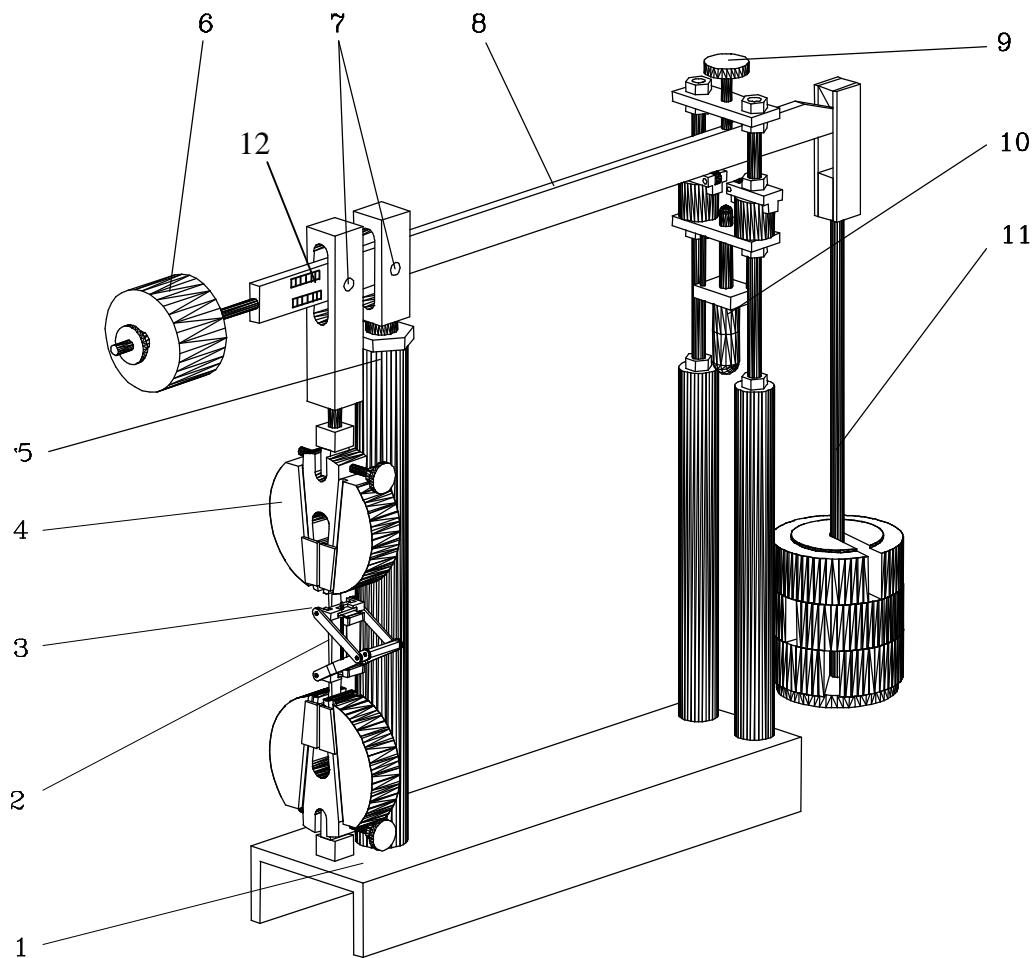


Bild 4.8: Kriech- und Relaxationsvorrichtung mit eingespannter Probe

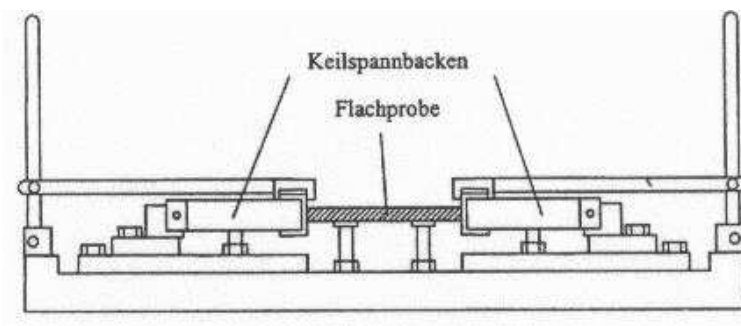


Bild 4.9: Einspannvorrichtung für die Probe [19]

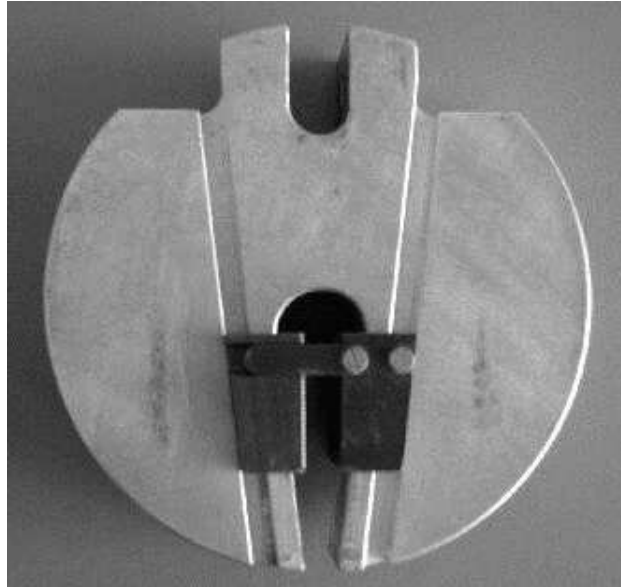


Bild 4.10: Einspannbacke

Die Anfangslänge des Dehnungsaufnehmers ist auf 50 mm kalibriert und wird mit einer Schablone von 50 mm an der Probe justiert. Das Gegengewicht (6), was über eine Gewindestange (11) mit dem Hebelarm verbunden ist, gewährleistet bei leerem Gewichtsträger eine Vorlast von 10 N auf der Probe. Zusätzlich kann mit dem Gegengewicht, bei unterschiedlich schweren Gewichtsträgern, durch drehen die Waagrechtigkeit des Hebelarms korrigiert werden. Die Schraube (9) verhindert somit das Überschlagen des Hebelarms auf Grund des Gegengewichts. Um die Reibung in den Lagern zu minimieren wurden Nadellager (7) gewählt. Der Servomotor mit Gewindespindel (10) dient zur Dehnungsregulierung bei Relaxationsversuchen. Auf Grund der Elastizität der gesamten Vorrichtung und des unvermeidlichen Rutschen der Probe in den Backen, muss die Dehnung ständig gemessen und eventuell nachgestellt werden, da sonst eine Zunahme in der Dehnung registriert wird. Dazu stand eine Schaltung (nicht im Bild) zur Verfügung, die bei gegebenem Sollwert den Hebelarm dementsprechend veränderte. Leider reichte die Kraft des Servomotors nicht aus, um eine spontane Belastung in kurzer Zeit aufzubringen, so dass bei den Relaxationsversuchen der Hebelarm per Gewichtsstange und Gewicht (bis zu einem Anschlag an die Spindel) an die gewünschte Position gebracht werden musste. Danach konnte der Servomotor in kürzester Zeit den Sollwert in der Dehnung erreichen. Zur Kraft- bzw. Spannungsmessung sind am Hebelarm DMS (12) zu einer Wheatstoneschen Vollbrücke geschaltet. Diese registrieren die Zugkraft von der Probe auf den Hebelarm.

Für die Messung an der Versuchsvorrichtung werden die Probekörper mittels der Einspannvorrichtung (Bild 4.9) an den Backen befestigt, jedoch noch nicht am Prüfstand eingehängt. Zuvor wurde die Probe exakt mit einer Schieblehre an mehreren Stellen gemessen und im Mittel die Fläche A berechnet. Durch eine Kraftmessdose, die an die Versuchsvorrichtung wie die Probe angebracht werden konnte, muss die Gewichtskraft eingestellt werden, die später durch die Beziehung $F = \sigma \cdot A$ die gewünschte Spannung ergibt. Die Ermittlung des erforderlichen Gewichts erfolgt mit Hilfe einer Umrechnungstabelle. Jetzt werden solange Blei- und Eisengewichte auf den Gewichtsträger gelegt, bis die Skala an der Messdose das ermittelte Gewicht anzeigt. Anschließend wird die Messdose vom Probekörper mit den Backen ersetzt.

Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

Der zuvor kalibrierte Extensometer wird mittels Federklammern und der Schablone an der Probe befestigt. Die Vorlast ist durch das Trimmgewicht an der Vorderseite gegeben. An dieser Stelle wird der Nullabgleich des Extensometers durchgeführt. Das ganze System wird mit einem hydraulischen Wagenheber am Hebelarm arretiert und der Gewichtsträger mit den Gewichten eingehängt. Somit lassen sich die Schwingungen am Anfang der Messung vermeiden. Ab jetzt ist der Versuch startfertig und wartet nur auf das gewünschte Moment der Heruntersenkung des Wagenhebers.

Zur Durchführung der Torsionsversuche benötigt man eine andere Art von Versuchsvorrichtung, welches am Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung konzipiert und gebaut wurde (Bild 4.11). Sie besteht aus zwei Füßen die fest mit dem Versuchstisch verbunden sind. An einem Fuß sind zwei zylindrische Trommeln über ein Kugellager und die eine Seite der Probenaufnahme montiert. Der Fuß kann sich über Rollen bewegen und dadurch ist die Verschiebung in Achsrichtung unbehindert. An der großen Trommel (Durchmesser D) hängt die belastende Gewichtskraft und an der kleinen Trommel (Durchmesser d) findet die Messung des Gleitwinkels statt. Beide Trommeln sind starr miteinander verbunden. Der Aufnehmer, der das Torsionsmoment gleichmäßig über den Umfang in die Probe leitet, ist mit der kleinen Trommel verschraubt, somit bilden große und kleine Trommel sowie der Probenaufnahme eine Einheit, die über ein Kugellager eine Relativedrehung gegenüber dem Fuß ausführen kann. Der Stift dient zur Montage (festhalten der Trommel bei der Probenanbringung), sowie dem Nullabgleich des induktiven Messgeräts (Bild 4.7). Die Verbindung der Einheit ist sehr steif und dadurch kann in hinreichender Genauigkeit ein Torsionsmoment ohne Querkraft in der Probe angenommen werden. Der andere Probenaufnahme und die montierten Trommeln mit dem anderen Fuß bilden eine starre Einheit, so dass gesagt werden kann, diese Seite simuliert die feste Verbindung an einer Wand.

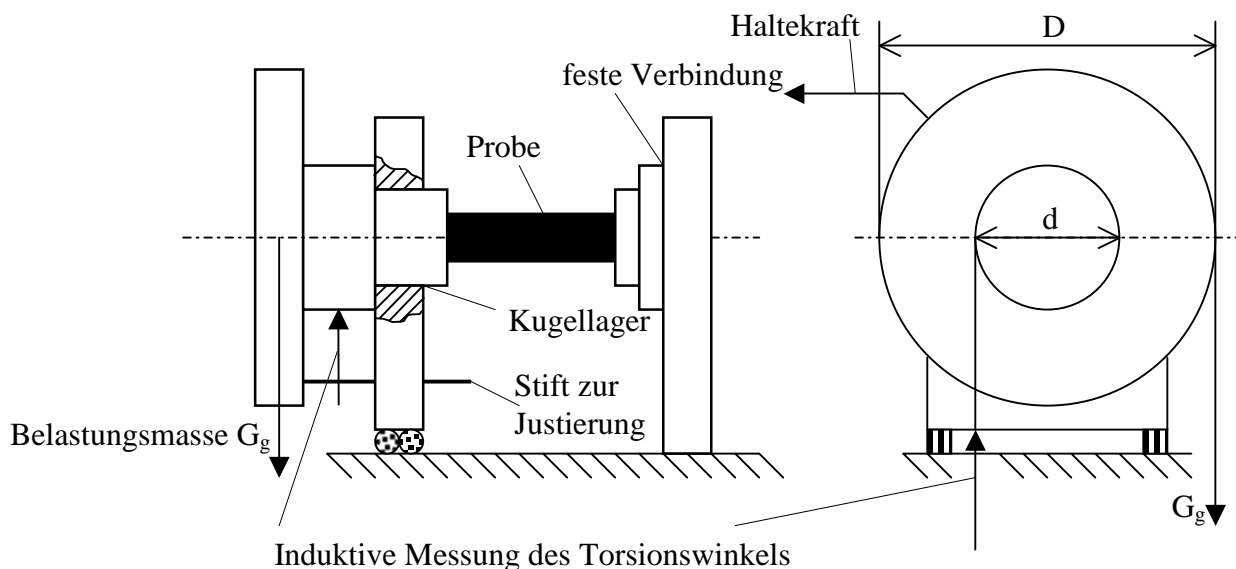


Bild 4.11: Torsionsversuchsvorrichtung mit eingespannter Probe

Die Proben werden, je nach gewünschter Länge mit Übermaß, zurechtgeschnitten und an mehreren Stellen innen wie außen vermessen. Das Übermaß ist an den Enden zum Einspannen. An den Enden wird in das Probenrohr eine etwa 10 mm lange Stahlstange hineingesteckt, was das Eindringen der Probe durch den Aufnehmer verhindert. Zusätzlich kommt auf das Rohr, wo es eingespannt wird, ein Aluminiumring mit Schlitz. Dieses ermöglicht eine relativ gleichmäßige Verteilung der tordierenden Kraft an der Probe und schützt vor dem Eindringen des Aufnehmers an der Rohrhaut. Das Torsionsmoment lässt sich mit der Beziehung $T = G_g \cdot D/2$ berechnen. Dadurch folgt für die Torsionsspannung $\tau \approx T \cdot R_m / I_P$ mit R_m als mittlerer Radius der Probe und I_P als das polare Trägheitsmoment, wobei folgende Annahmen zu Grunde liegen:

- Einzelne Querschnittsscheiben drehen sich starr, d.h. Querschnittsgestalt bleibt erhalten
- Die Verschiebung in Achsrichtung der Probe wird nicht behindert und dadurch ist die Verschiebung in Achsrichtung keine Funktion des Radiuses

Die erforderliche Kraft G_g wird berechnet und mittels Blei- und Eisengewichte eingestellt. Die Proben werden vorsichtig eingespannt. Das Programm zur Messdatenerfassung wird gestartet und der Verdrehwinkel bzw. der induktive Messaufnehmer abgeglichen. Die Haltekraft dient zur schwingungsfreien Belastung der Probe. Sie geht nach dem Herausziehen des Stiftes zügig aber stoßfrei vom Maximum G_g auf Null zurück und somit wird die Probe mit der Gewichtskraft belastet. Der Verdrehwinkel ϑ_i an der Probe und der Radius $d/2$ an der kleinen Trommel, wo der induktive Aufnehmer hängt, haben folgende Beziehung:

$$\vartheta_i = \frac{2\hat{b}_{kT}}{d}$$

mit \hat{b}_{kT} als der Bogen an der kleinen Trommel beim Radius $d/2$ und dem Winkel ϑ_i . Der Bogen ist auch der Weg, den der induktive Aufnehmer erfährt und dadurch die Verdrehwinkeländerung am PC registriert.

4.4 Start des Versuchs

Für die beschriebenen Versuchsvorrichtungen wurde von [19] ein Programm am Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung geschrieben. Das Programm läuft auf einem Windows 32 bit-System und hat neben der Zeitsteuerung und Messdatenerfassung auch andere Funktionen, die den gesamten Ablauf des Versuches zuverlässiger und einfacher gestalten. Diese Funktionen sind:

- Vorbereitung des Versuchsstandes und der Ausgabedatei
- Kalibrierung der DMS-Brücken an Extensometer und Kraftaufnehmer
- Nullabgleich vor Versuchsstart
- Festlegung der Messzeiten
- Registrierung der Versuchsergebnisse

Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

Dieses Programm steuert direkt über die COM-Schnittstelle das Messmodul an. Es startet mit einer Grundoberfläche nach Bild 4.12 und stellt über die ganze Versuchszeit eine Kontrolle des Versuchsablaufs dar.

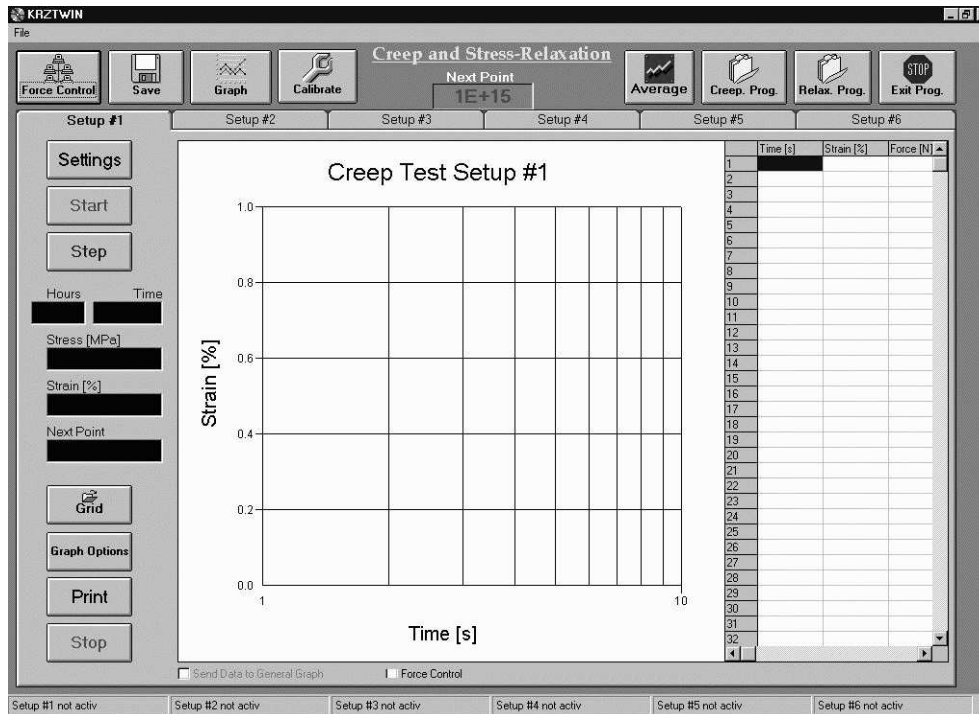


Bild 4.12: Versuchsmaske für Voreinstellungen [19]

Im Diagramm findet die Aufzeichnung und graphische Darstellung des Versuchs statt. Rechts in der Tabelle erscheinen die registrierten Messpunkte wie sie auch in die Ausgabedatei geschrieben werden. Links ist der aktuelle Zustand der Messreihe angezeigt und der ganze Ablauf kann über die Schalter Start und Stop begonnen oder beendet werden. Neben dieser Anwendung stehen noch weitere Anwendungen zur Verfügung, wie z.B. „Graph Options“ für die individuelle Gestaltung der Graphikdarstellung (Farbe, Symbole, logarithmische oder lineare Darstellung), „Grid“ für Ein- und Ausblenden der Tabelle und „Print“ für das Drucken der Messergebnisse.

Durch das Drücken der Schaltfläche „Settings“ wird ein weiteres Dialogfeld geöffnet (Bild 4.13), in dem die notwendigsten Einstellungen für den Versuch vorgenommen werden können. Gleichzeitig wird die Verbindung vom Modul bzw. Versuchsaufbau mit dem Rechner geprüft.

The image shows a software dialog box titled "Settings" for "ISM 110 - 1". It features three tabs: "General", "Type of Test", and "Calibration". The "General" tab is selected and contains the following fields: "User:", "Test No.:", "Material:", "Shape:", "Cross-Section:", "Type of Loading:", "Temperature [°C]:", "Output File:", and "Password:". Each field is followed by a text input box. Below these fields is a "Remarks" section with a larger text area. At the bottom of the dialog are "Cancel" and "OK" buttons.

Bild 4.13: Dialogfeld zur Versuchsvorbereitung [19]

In der ersten Mappe dieses Fensters hat der Anwender die Möglichkeit alle wichtigen Informationen für den Versuch einzutragen, welche dann später auch im Kopf der Ausgabedatei erscheinen. Im Textfeld „Remarks“ werden Eindrücke und Bemerkungen eintragen, die ebenfalls in der Ausgabedatei eingetragen werden. Der User kann ein „Password“, welches das Verändern der Einstellungen gegenüber Dritte verhindert, eingeben.

Die Einstellungen zum Versuchstyp, zur Zeitbasis sowie zum Versuchsstart werden in der zweiten Mappe (Bild 4.14) vorgenommen. Die Möglichkeit einen Kriech- oder Relaxationsversuch zu wählen besteht unter „Type of Test“. Dieser Eintrag ist maßgebend für die Überwachung des analogen Dehnungs- oder Spannungseingangs. Die zwei Schaltflächen „Option“ öffnen je nach Typ ein weiteres Dialogfeld, in dem die Input-Funktion der Belastung definiert wird. Die Darstellung der Zeitachse kann der User im Bereich „Time Basis“ festlegen. Dafür stehen die logarithmische, welche für Versuche mit konstanter Dehnung bzw. Spannung geeignet ist, oder die lineare Zeitfolge zur Verfügung. Bei der linearen Darstellung kann die gewünschte aufeinanderfolgende Messzeit vom Anwender selbst eingegeben werden. Im Textfeld „Test Duration“ wird die Gesamtdauer des Versuchs eingegeben, mit dessen Ablauf das Experiment abgestellt und die Daten gesichert werden. „Reset“ dient zum Nullabgleich vor dem Start für den Messaufnehmer. Im Bereich „Triggering Magnitude“ wird ein Schwellwert für den Start des Versuchs eingegeben, bei dem das Programm bei Überschreitung zu messen beginnt. Dieser Schwellwert kann entweder vom Dehnungs- oder vom Kraftkanal des Messmoduls stammen. Die berechnete Regelgröße des Sollwerts wird im Bereich „Input Value“ angezeigt.

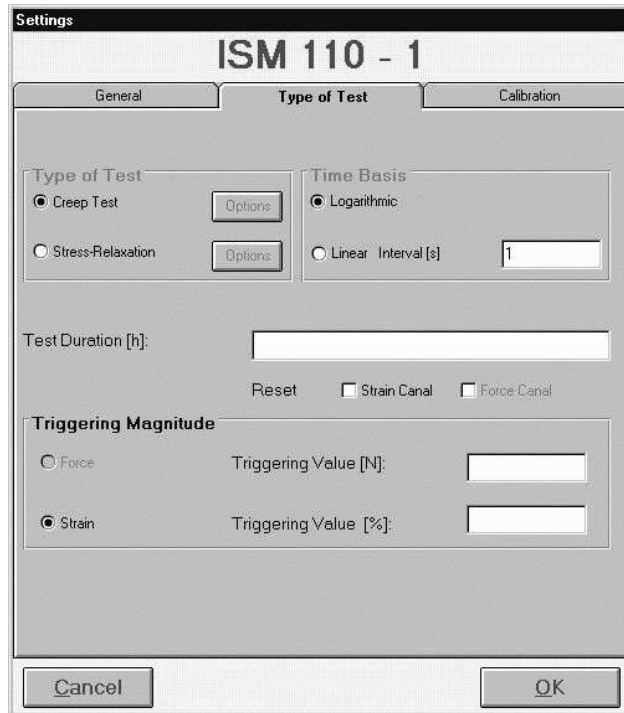


Bild 4.14: Versuchstypeneinstellung [19]

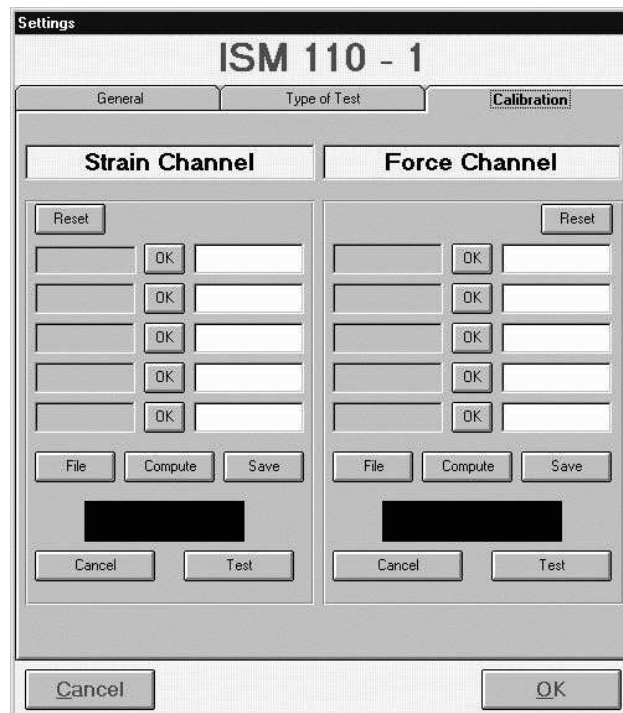


Bild 4.15: Dialogfeld zur Kalibrierung der Messaufnehmer [19]

In der Mappe drei (Bild 4.15) wird die Kalibrierung der Brücken am Dehnungsaufnehmer, am Hebelarm und des induktiven Aufnehmers vorgenommen. Da alle Messgeräte über einen sehr großen Bereich linear sind, kann zwischen ihre Kalibrierpunkte eine Regressionsgerade gelegt werden. Durch das Anbringen der Aufnehmer in ihre Kalibrierbänke oder durch Verwendung eines Kraftmessrings, welches statt der Probe in die Versuchsvorrichtung eingespannt ist, werden den gemessenen Stromspannungen Dehnungen, Kräfte bzw. Wege zugeordnet und jeweils mit „OK“ bestätigt. Es reichen hierbei fünf Messpunkte, wobei der ganze Bereich der zu erwartenden Messung abgedeckt sein sollte. Nach der Berechnung der Regressionsgerade kann über das Modul die Messung getestet und bei Zufriedenheit gespeichert werden. Dabei hat der Anwender die Möglichkeit eventuelle Fehler in der Kalibrierung von vornherein auszuschließen. Der große Vorteil liegt darin, dass bei Verwendung der gleichen Aufnehmer die Kalibrierung nicht bei jedem Versuch neu durchzuführen ist, sondern die gespeicherte Datei mit der Regressionsgerade kann aufgerufen werden.

Wie vorher beschrieben, gibt man alle Versuchsparameter mit Hilfe des Programms am PC zur Messdatenerfassung ein. Nachdem Eingeben der Daten und Einspannen der Probe, bestätigt man den Versuchsstart. Mit einem Signalton gibt das System die Bereitschaft zur Messung an. Jetzt wird der Extensometer an der Probe mit Hilfe der Schablone angebracht und geprüft, ob die Ausgabe im gültigen Messbereich liegt. Es hat sich oft gezeigt, dass der Extensometer bei der Lastaufbringung ein wenig verrutscht. Das kommt daher, weil die Proben an der Haut sehr glatt und eventuell durch Fingerabdrücke fettig geworden sind. Behelfen konnte man sich mit etwas Schleifpapier, was genau zwischen die Schneiden des Extensometers und der Probe angebracht wurde. Nachdem die Proben eingehängt, das Programm startbereit, die Messgeräte angebracht und der hydraulische Wagenheber positioniert wurde, wird im Programm der Messbeginn mit Start bestätigt. Ab jetzt wartet das Programm auf das Erreichen des eingegebenen Triggerwertes. Der Wagenheber wird jetzt langsam abgesenkt, nicht zu schnell, um einen Belastungsstoß zu vermeiden, nicht zu langsam, um die ersten Messergebnisse nicht zu verfälschen. Ist der Triggerwert erreicht, beginnt die Messung und der Bereitschaftston verstummt. Anhand der ersten 10 ausgegebenen Messungen kann überprüft werden, ob unerwünschte Reibung im System auftritt.

Die Versuchsdauer betrug jeweils 100 Stunden und für die Kriech- und Relaxationsversuche wurden PMMA-, PC- und PVC-Proben verwendet. Für die Torsionsversuche standen PMMA- und PVC-Rohre zur Verfügung. Die Messzeiten betragen 10 pro Dekade und die Abszisse wurde logarithmisch dargestellt. Es wurden bei mehreren Belastungen jeweils fünf Bestätigungsversuche gefahren. Die Messergebnisse sind vom Rechner in einer ASCII-Datei abgespeichert worden und konnten somit durch ein Tabellenkalkulationsprogramm in Diagrammen dargestellt werden.

4.5 Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen 4.16-4.18 sind Kurzzeitversuche von PMMA, PC und PVC zu sehen. Diese Versuche dienen als Bestätigung für den Elastizitätsmodul, der später auch aus Kriechversuchen ermittelt werden kann. Für die Zeit $t = 0$ gilt wie bereits beschrieben der Zusammenhang $E_0 = I/J_0$. Es lässt sich auch erkennen, dass die Kurven bei niedrigerer Dehngeschwindigkeit früher von der idealen Kurve mit unendlicher Dehngeschwindigkeit abweichen. Die Versuche sind an der Zwick-Maschine und an den Proben nach DIN 53455 durchgeführt worden.

Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

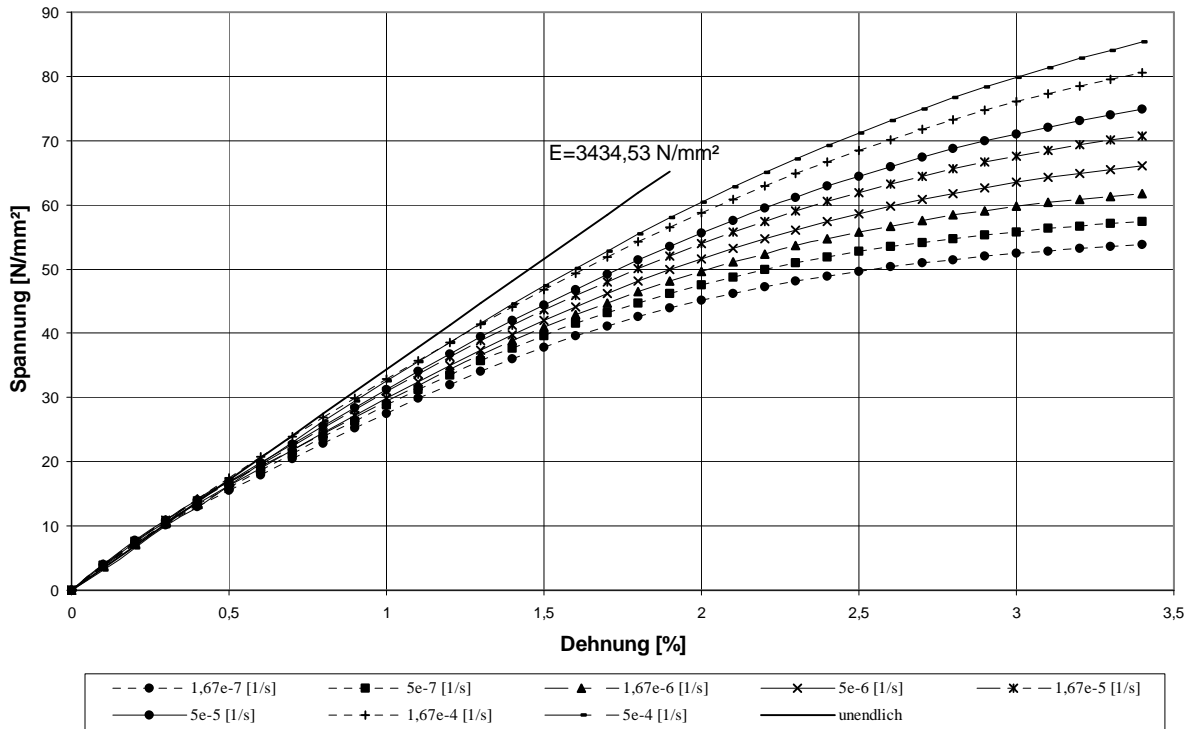


Bild 4.16: Kurzzeitversuche an PMMA mit unterschiedlicher Dehngeschwindigkeit

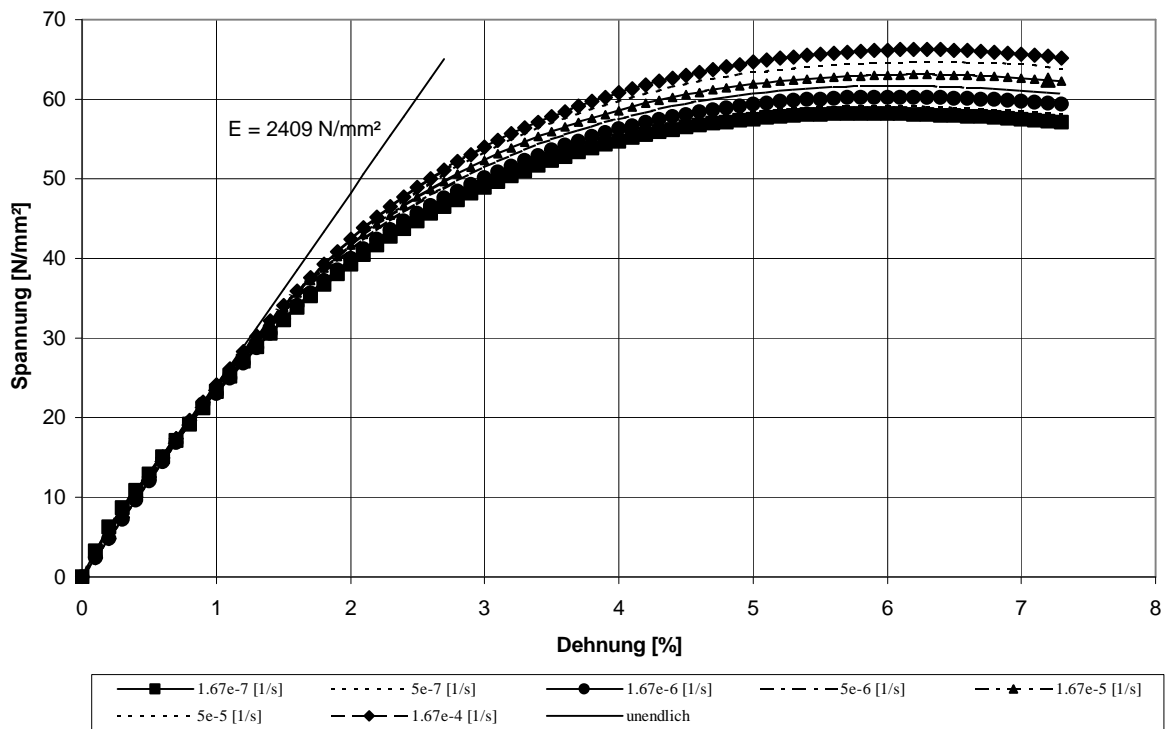


Bild 4.17: Kurzzeitversuche an PC mit unterschiedlicher Dehngeschwindigkeit

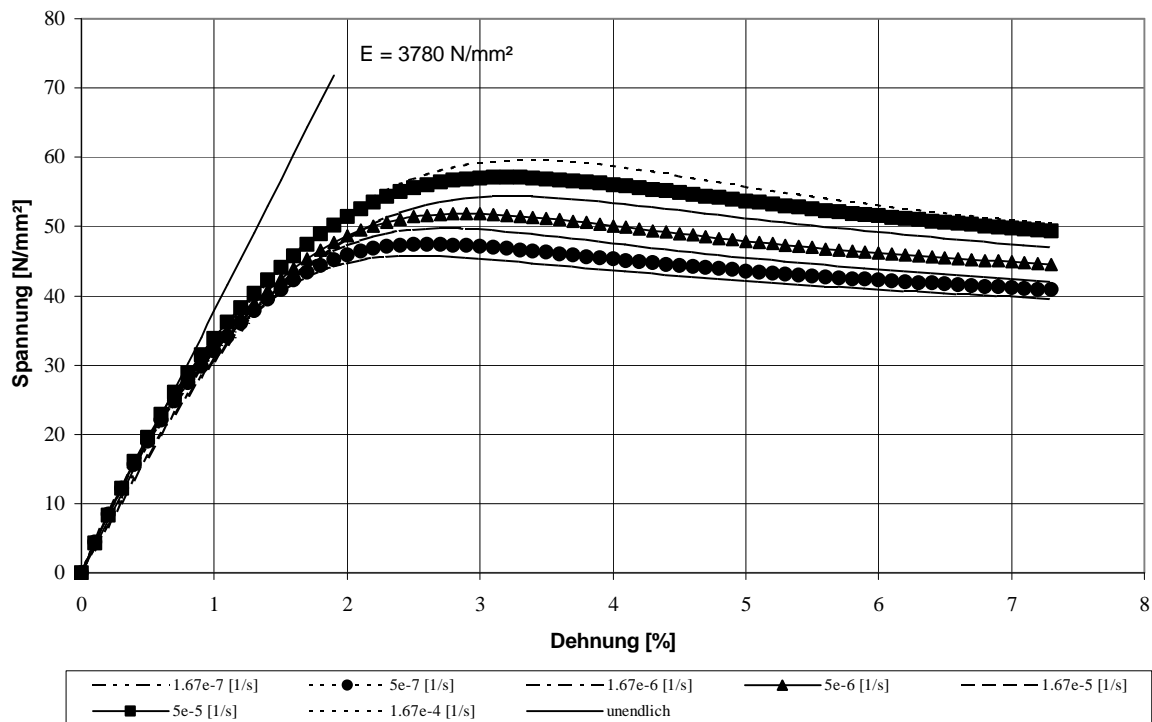


Bild 4.18: Kurzzeitversuche an PVC mit unterschiedlichen Dehngeschwindigkeiten

Es ist ersichtlich, dass der Werkstoff bei steigender Dehngeschwindigkeit, über eine längere Dehnungsspanne elastisches Verhalten aufweist. Durch die niedrigere Dehngeschwindigkeit haben die Polymermoleküle die Zeit sich auszurichten und somit ergeben sich höhere Dehnungen im Material. Der Werkstoff tendiert bei niedriger Dehngeschwindigkeit zu zähem und bei hoher Dehngeschwindigkeit zu sprödem Verhalten. Die Umgebungstemperatur und die Handhabung der Experimente beeinflussen dieses Verhalten erheblich, weshalb man bei Versuchen mit Kunststoffen sehr stark auf die Konstanzhaltung der Temperatur achten und gewisse Richtlinien einhalten muss. Diese Bedingungen sind ausführlich in der Literatur beschrieben [69, 70, 71]. Deshalb wurde im Labor darauf geachtet, dass die Umgebungstemperatur stets $20 \text{ }^\circ\text{C}$ betrug.

Um das weitere Verhalten des Materials nach Stabilitätsverlust zu beschreiben, muss zunächst das allgemeine Kriechverhalten des Werkstoffs bestimmt werden. Da das Material im z.B. Nachknickbereich weiterhin viskoelastisches Verhalten aufweist, ändern sich die Spannung und Dehnung kontinuierlich. Um dieses Verhalten mit den vorangegangenen Methoden zu beschreiben, müssen Kriechversuche bei unterschiedlichen konstanten Spannungen bzw. Relaxationsversuche bei unterschiedlichen konstanten Dehnungen durchgeführt werden. Zur Berechnung der zeitlichveränderten Antwortfunktion ist das Verhalten des Werkstoffs in sogenannten Prony-Reihen dargestellt. Die dabei aus den Experimenten errechneten Nichtlinearitätsfaktoren sind mit einer Exponential- und Polynomfunktion gefittet. Um die Fehler durch Materialunterschiede möglichst gering zu halten, wurden sämtliche Prüflinge, sowohl für die herkömmlichen Kriech- und Relaxationsversuche, als auch für die Knickversuche aus ein und demselben Material geschnitten. Des Weiteren wurde dabei darauf geachtet, dass die Schneiderichtung der Proben aus der Platte identisch

Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

war. Lediglich für die Torsionsversuche wurden Proben verwendet, für die der Hersteller für keine Unterschiede im Material garantierte. Es zeigte sich, dass die Streuung der Einzelversuche sehr gering war. Durch die Anzahl der Versuche unter gleichen Bedingungen werden kleinere Fehler gut ausgemittelt. Somit liegen sämtliche Kurven im Rahmen des erwarteten.

Auf den Bildern 4.19-4.20 sind die Diagramme der Kriechversuche und der Nichtlinearitätsfaktoren bei Raumtemperatur für PMMA dargestellt. Für diesen Werkstoff wurde die Linearitätsgrenze bei 5 MPa gefunden, womit man jetzt sagen kann, dass alle Kurven unterhalb dieser Grenze die selbe Krümmung besitzen und die angelegte Spannung nur eine Verschiebung der 5 MPa-Kurve nach unten in der Ordinate bedeutet. Ferner lässt sich erkennen, dass der Nichtlinearitätsfaktor, wie angenommen $g_0 = 1$ bei spontaner Antwort, auch im nichtlinear-viskoelastischen Bereich nicht von der Linearität abweicht. Der Nichtlinearitätsfaktor g_t ist mit einer Exponentialfunktion approximiert worden, wobei darauf geachtet wurde, dass die Berechnungsfunktion genau einen Schnittpunkt bei eins mit 5 MPa hat. Damit kann gesagt werden, dass die Erhöhung der Spannung einen exponentiellen Einfluss im Kriechverhalten besitzt. Die gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen und berechneten Kriechkurven sowie zwischen dem berechneten und dem aus den Kurzzeitversuchen bestimmten E-Modul ist aus diesen Diagrammen ersichtlich.

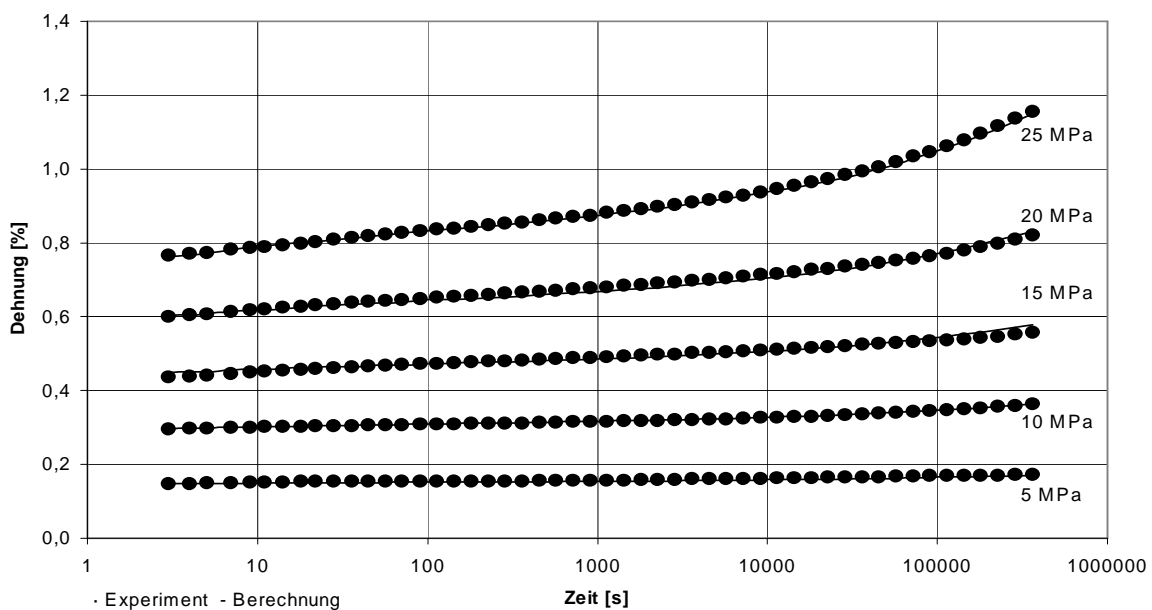


Bild 4.19: Kriechversuche: Berechnung und Experiment für PMMA

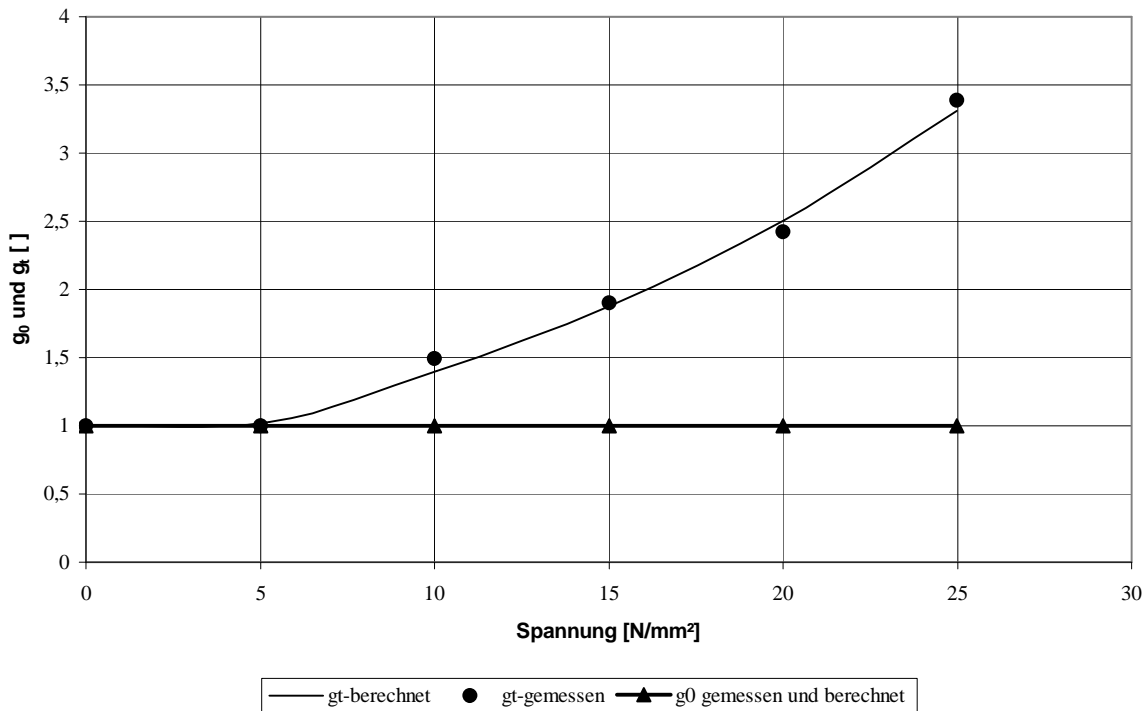


Bild 4.20: Berechnete und gemessene Nichtlinearitätsfaktoren für PMMA

Für den Werkstoff PC sind die Kriechkurven und die Nichtlinearitätsfaktoren in den Bildern 4.21-4.22 dargestellt. Auch hier lässt sich die sehr gute Übereinkunft zwischen Experiment und Berechnung sehen. Es hat sich für alle verwendeten Materialien (PMMA, PC und PVC) gezeigt, dass die spontane Kriechnachgiebigkeit J_0 bei allen Lasten stets den Kehrwert vom Elastizitätsmodul E_0 ergibt.

Für die Linearitätsgrenze ergab sich bei PC ca. 10 MPa und auch bei diesem Material war der Nichtlinearitätsfaktor g_0 bei allen Lasten gleich eins. Der Nichtlinearitätsfaktor g_t wurde auch mit einer Exponentialfunktion approximiert.

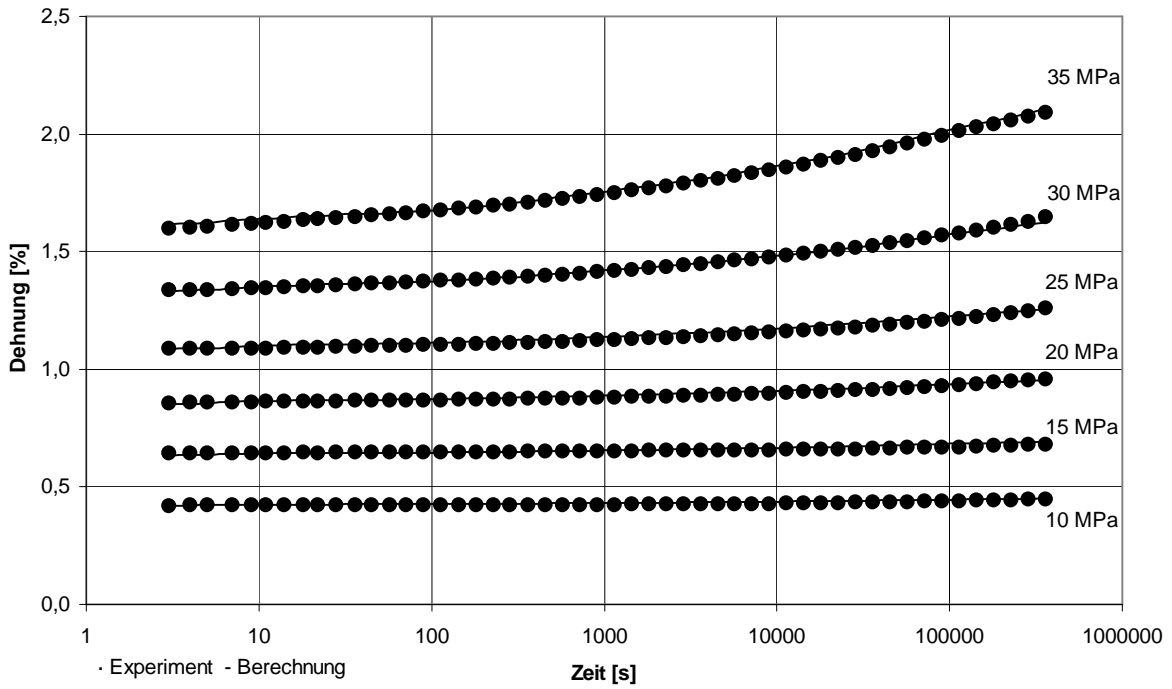


Bild 4.21: Kriechversuche: Berechnung und Experiment für PC

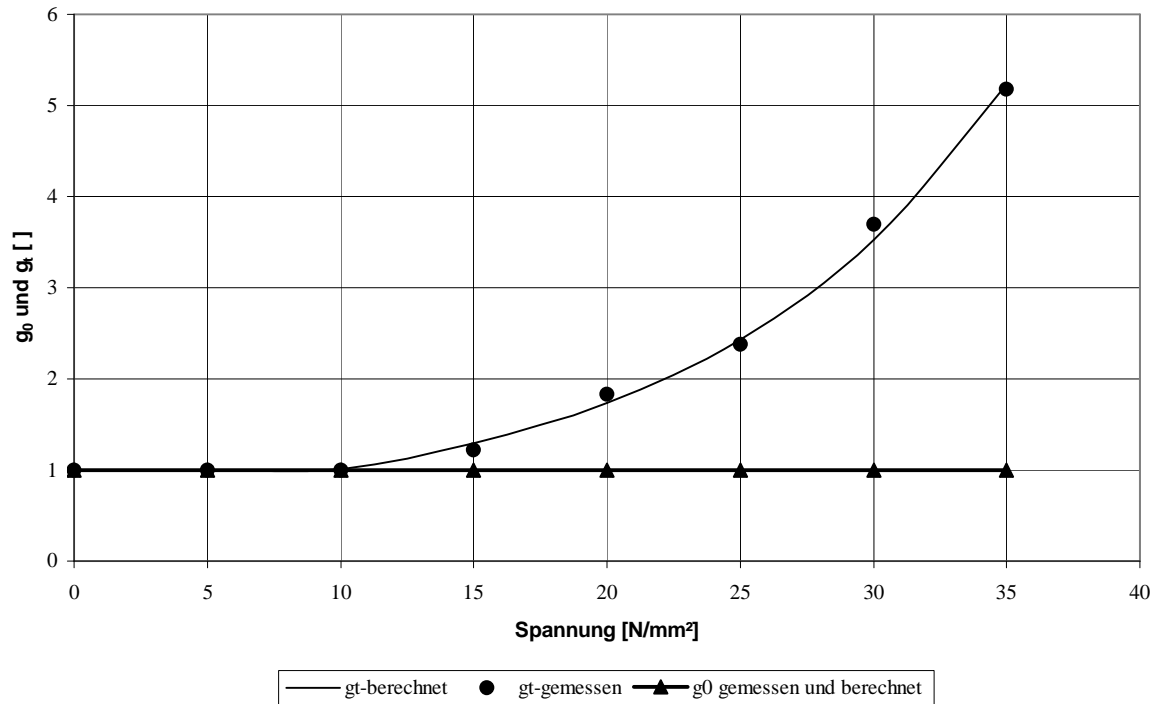


Bild 4.22: Berechnete und gemessene Nichtlinearitätsfaktoren für PC

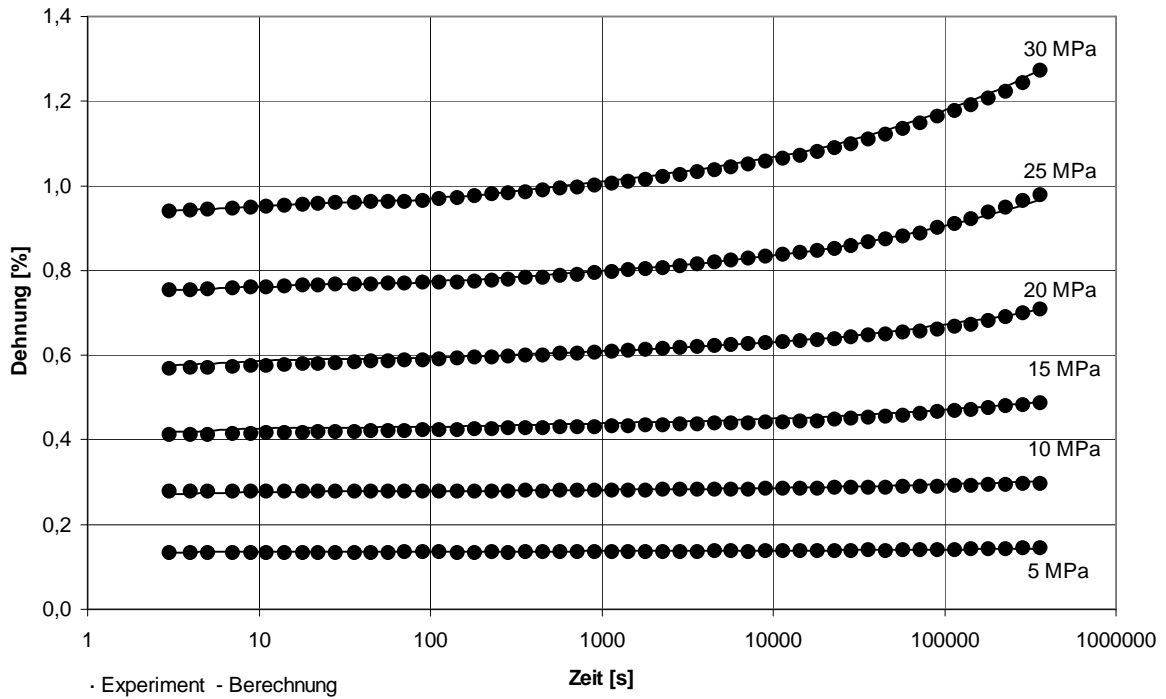


Bild 4.23: Kriechversuche: Berechnung und Experiment für PVC

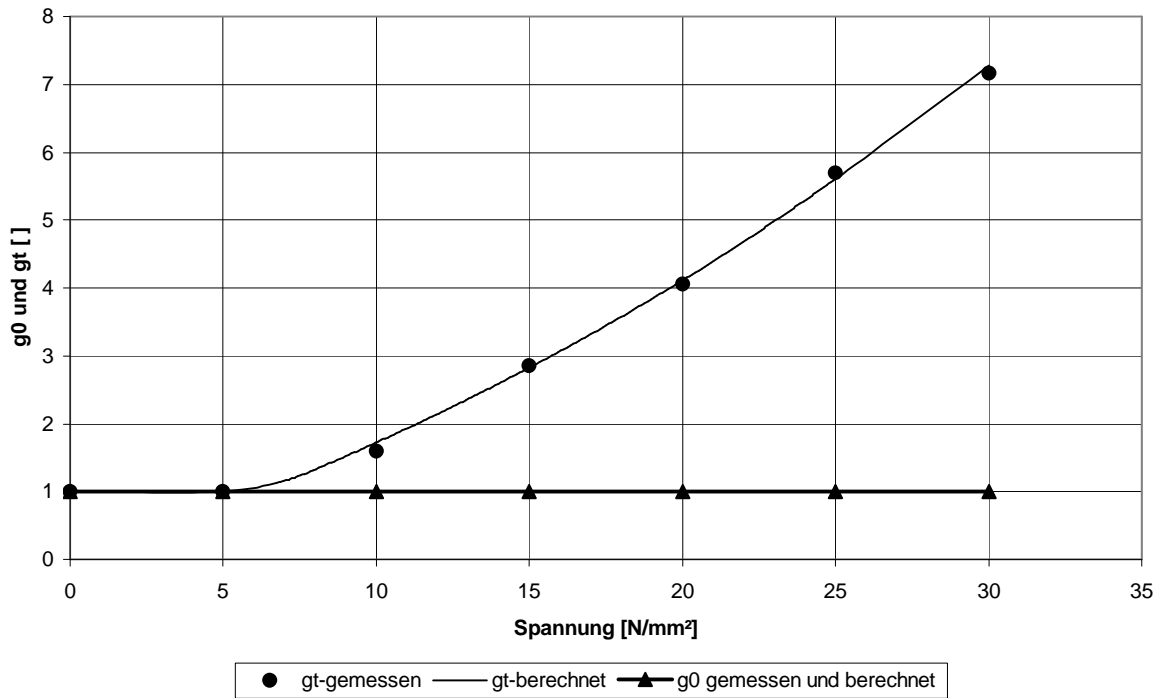


Bild 4.24: Berechnete und gemessene Nichtlinearitätsfaktoren für PVC

Ergebnisse zur Bestimmung der Materialparameter aus „einfachen“ Versuchen

Ähnlich gute Ergebnisse wie bei PMMA und PC ergaben sich bei PVC. Die spontane Lastanbringung und damit der Nichtlinearitätsfaktor g_0 waren bei jeder Belastung gleich eins. Für die Approximation vom Nichtlinearitätsfaktor g_t wurde wie bei den anderen Materialien eine Exponentialfunktion verwendet. Die nichtlinear-viskoelastische Grenze für PVC betrug ca. 5 MPa. Diese Ergebnisse sind in den Diagrammen 4.23-4.24 dargestellt.

Abschließend kann man sagen, dass sich die Grenze zwischen linearer und nichtlinearer Viskoelastizität bei realen Werkstoffen nicht eindeutig mit einer bestimmten Spannung begrenzen lässt. Es ist vielmehr ein kontinuierlicher Übergang, angefangen mit der kleinsten Spannung. Doch im ingenieurmäßigen Gebrauch und bei der Annahme von idealen Materialien ist der Unterschied bis zu einer angenommenen Grenze verschwindend klein. So kann nun im Kriech- und im Relaxationsfall eine bestimmte Spannung bzw. Dehnung als abschließende Grenze für die Linearität genommen werden. Diese Grenzen lassen sich nur an Hand von zahlreichen Experimenten bestimmen.

Des weiteren werden Relaxationsversuche dargestellt. Sie sind an den selben Materialien durchgeführt worden. Die Berechnung ist lediglich mit den Materialparametern approximiert, die mit der Methode der Umwandlung von Kriechnachgiebigkeit in E-Modul stattgefunden hat. Hierbei sind aus den Kriechversuchen die Kriechnachgiebigkeit ermittelt und daraus die Parameter für die Relaxation berechnet worden. Diese werden dann mit den Relaxationsexperimenten verglichen. Auch wird der zur Kompensation von den beschriebenen Schwierigkeiten bei einem Relaxationsversuch gemessene Dehnungsverlauf, der ständig gemessen und eventuell nachgeregelt werden muss, in einem Diagramm dargestellt. Diese Messung ermöglicht eine sichere Aussage darüber, ob der jeweilige Versuch in die gesamte Messreihe aufgenommen werden kann oder ob im Aufbau bzw. im System Fehler aufgetreten sind.

Im weiteren Verlauf sind nacheinander (Bilder 4.25-4.33) die Relaxationsversuche und deren Nichtlinearitätsfaktoren sowie die Dehnungsverläufe für PMMA, PC und PVC dargestellt. Die Berechnung der Nichtlinearitätsfaktoren h_t erfolgte mit einer Polynomfunktion dritter Ordnung. Auch hier zeigte sich, dass die spontane Antwort auf alle Belastungen im linearen Bereich lag, was zur Folge hatte, dass der Faktor h_0 immer gleich eins gesetzt werden konnte.

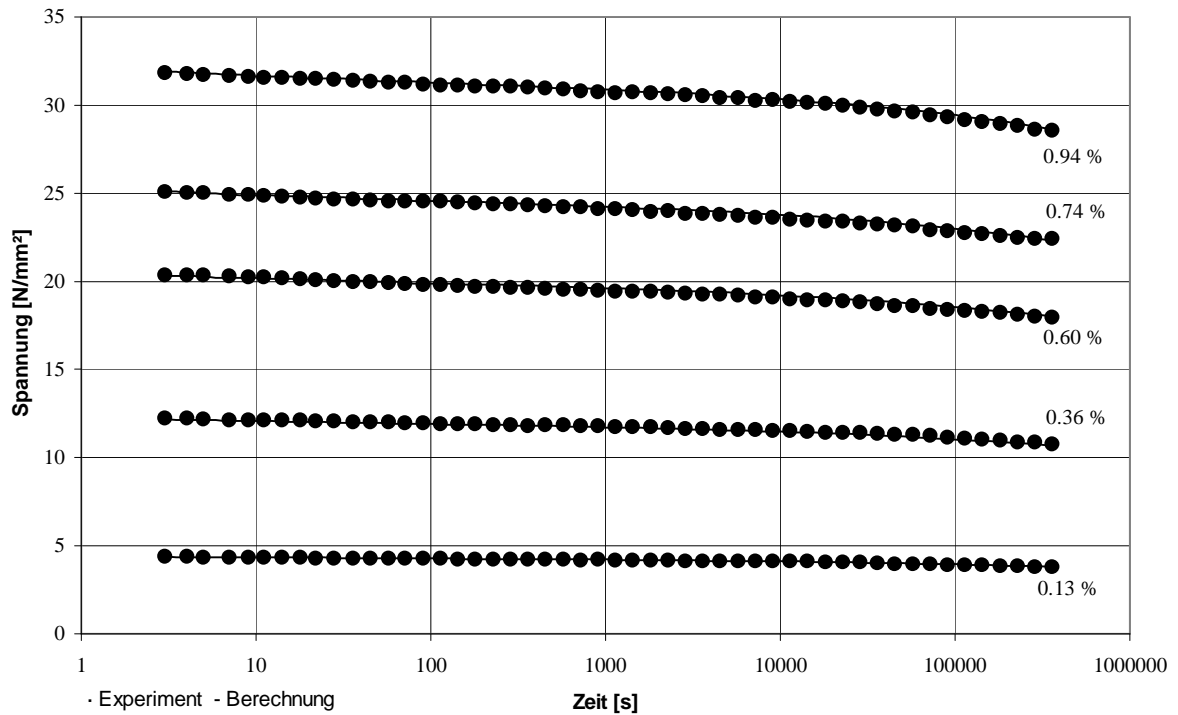


Bild 4.25: Gemessene und berechnete Spannungsrelaxation von PMMA

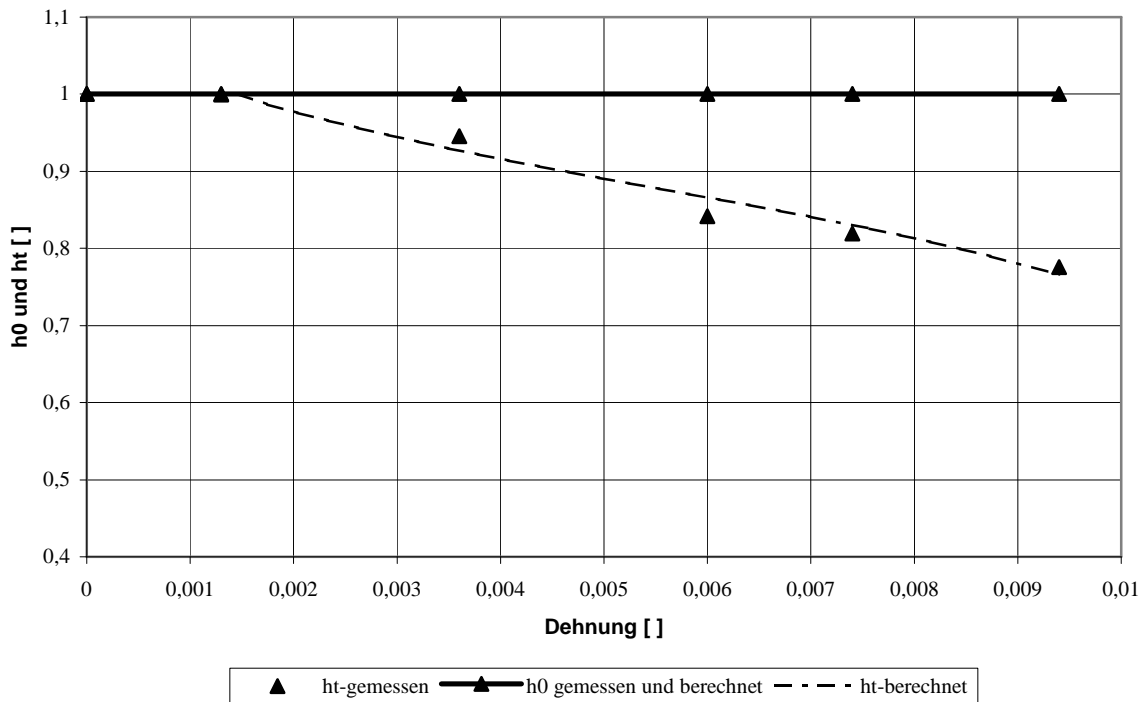


Bild 4.26: Nichtlinearitätsfaktoren h_0 und h_t für PMMA

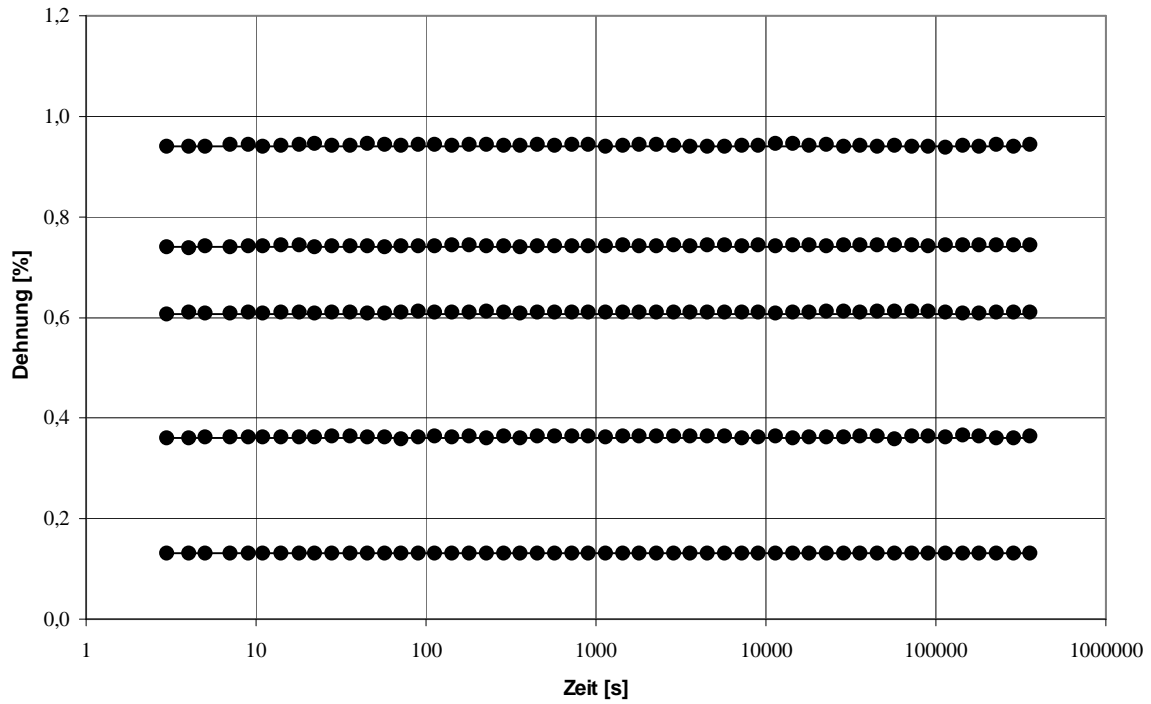


Bild 4.27: Gemessene und berechnete Dehnungsverläufe von PMMA beim Relaxationsversuch

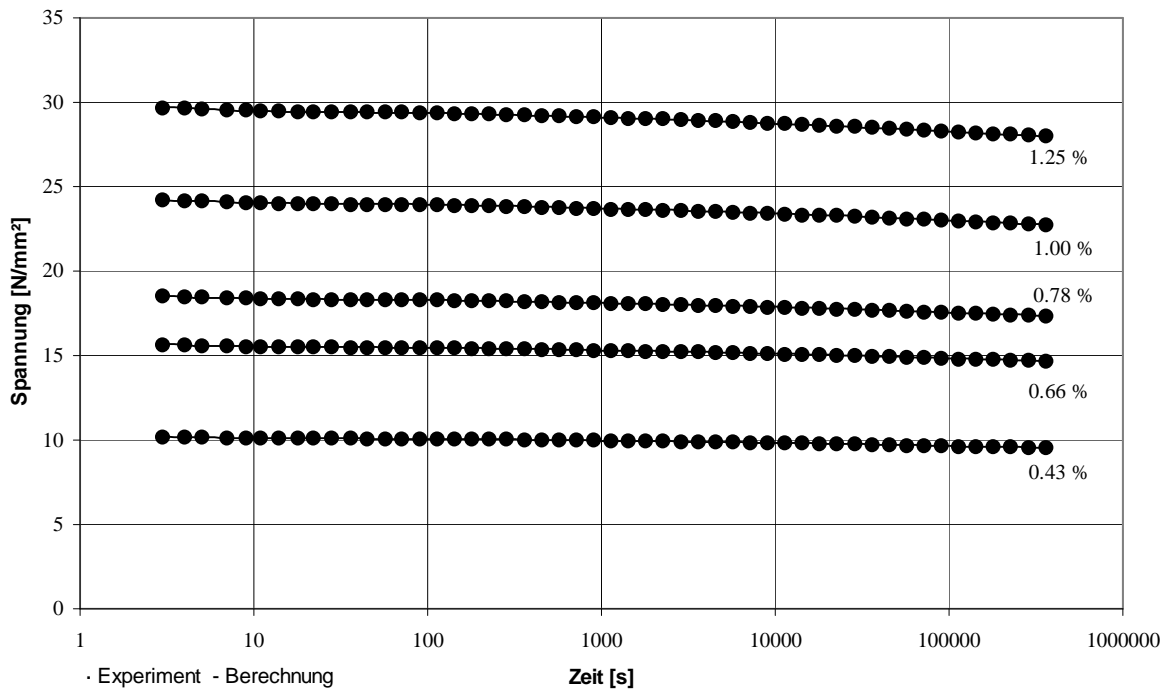


Bild 4.28: Gemessene und berechnete Spannungsrelaxation von PC

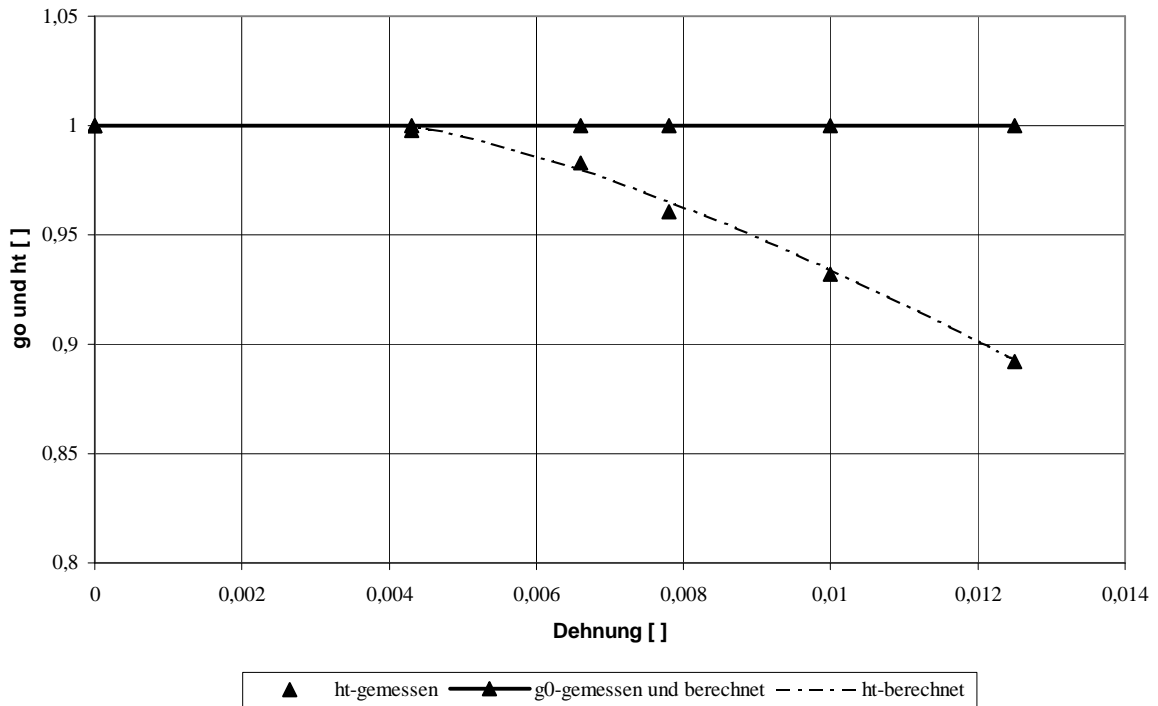


Bild 4.29: Nichtlinearitätsfaktoren h_0 und h_t für PC

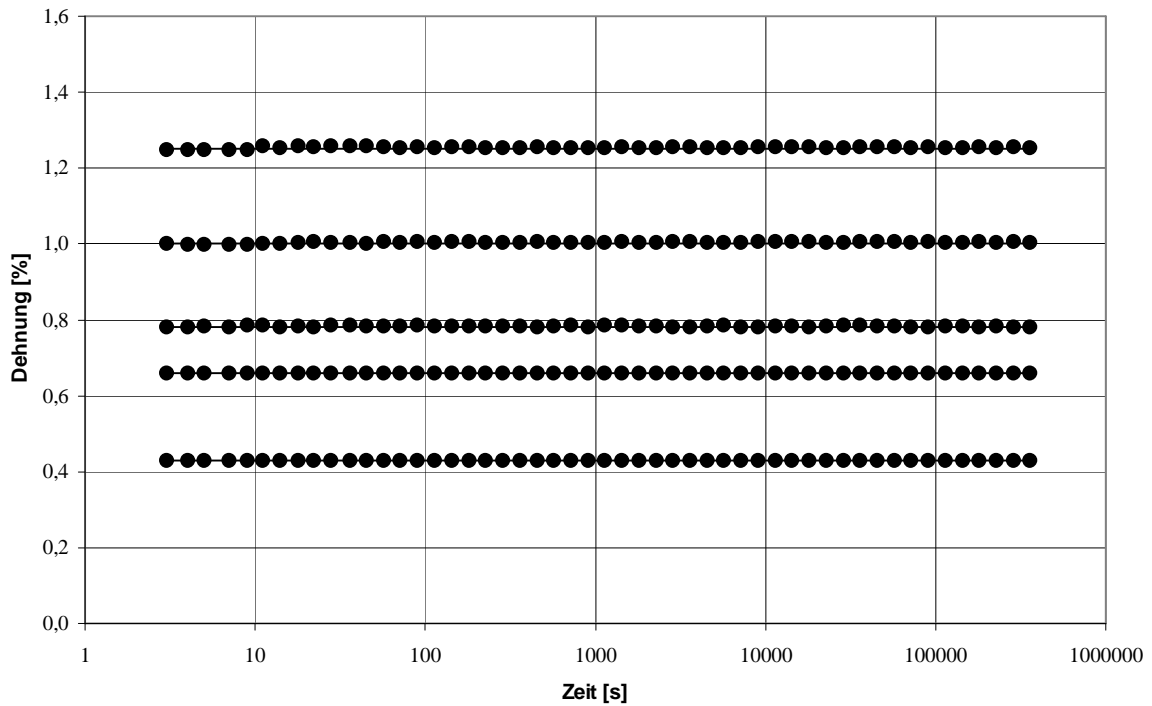


Bild 4.30: Gemessene und berechnete Dehnungsverläufe von PC beim Relaxationsversuch

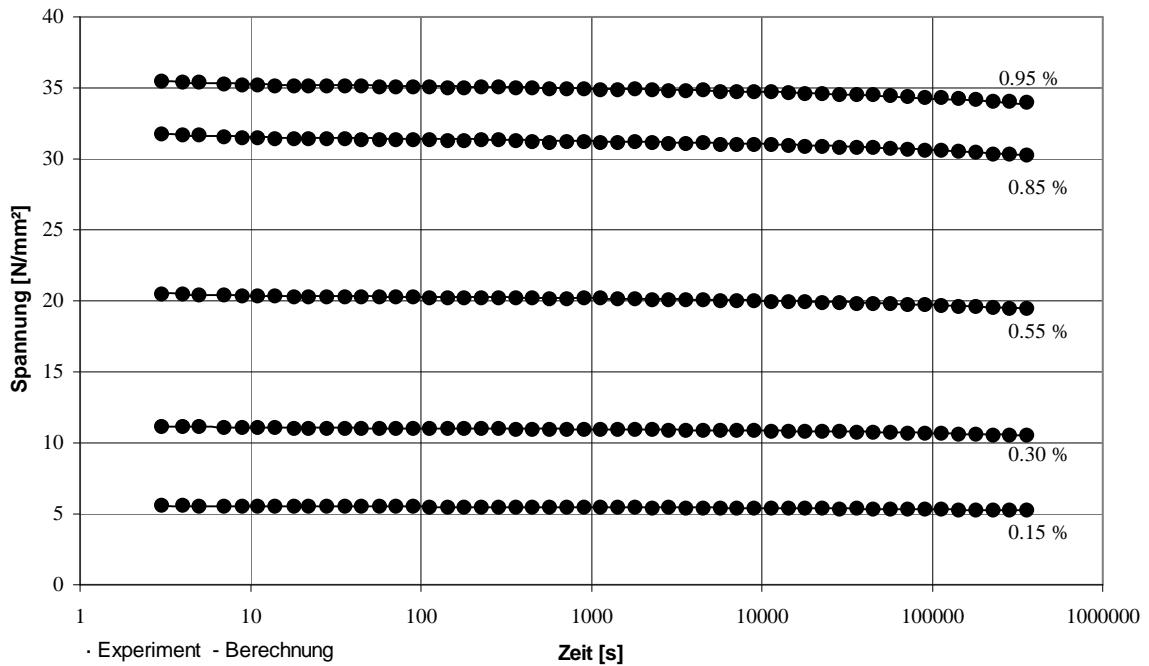


Bild 4.31: Gemessene und berechnete Spannungsrelaxation von PVC

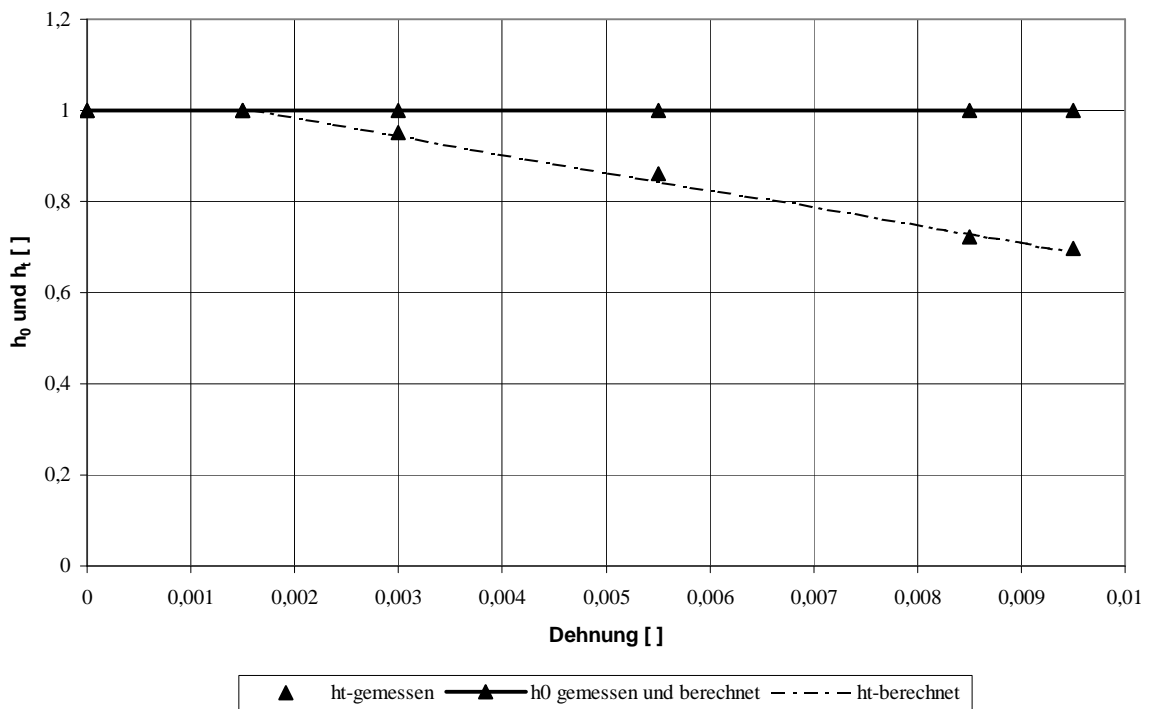


Bild 4.32: Nichtlinearitätsfaktoren h_0 und h_t für PVC

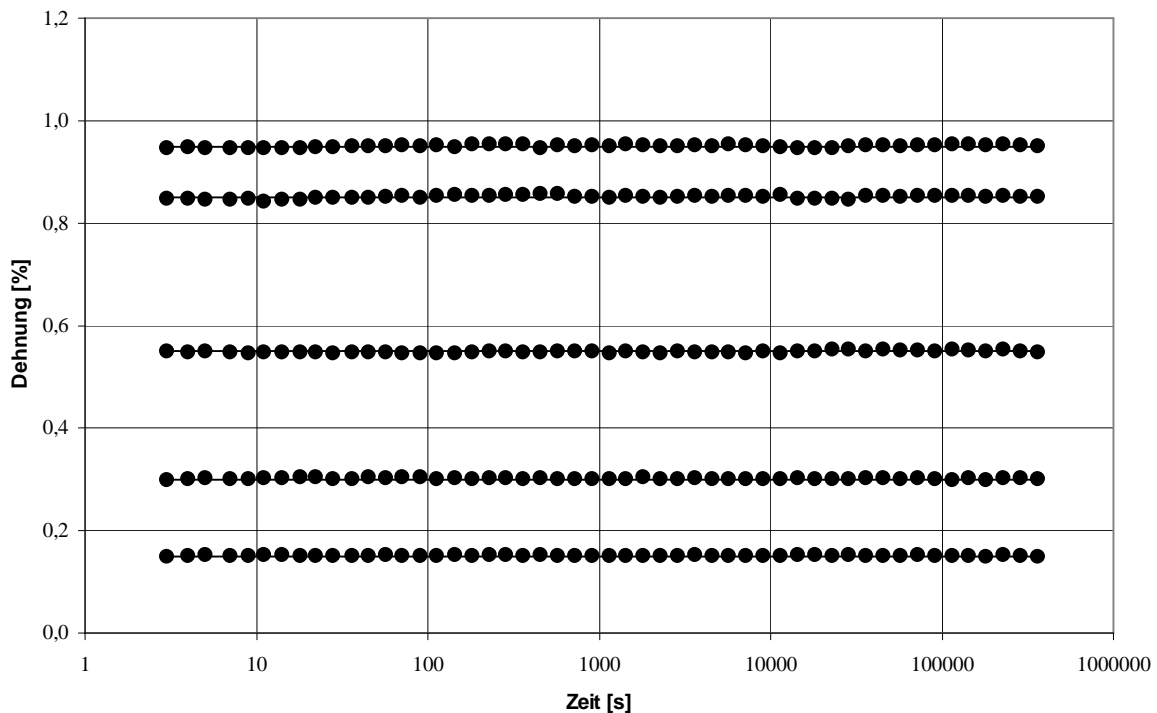


Bild 4.33: Gemessene und berechnete Dehnungsverläufe von PVC beim Relaxationsversuch

Es zeigt sich aus den Bildern, dass die angewendeten Methoden recht genau das Verhalten darstellen können. Die kleinen entstandenen Differenzen sind auf nicht wegzubekommende Messungenauigkeiten zurückzuführen.

Im weiteren werden die experimentellen Ergebnisse (Bilder 4.34-4.37) aus den Torsionsversuchen dargestellt. Für die Ermittlung und Berechnung der Materialparameter kamen die gleichen Methoden wie bei den anderen Belastungsarten zum Einsatz. Somit ist das Werkstoffverhalten auch mit den Prony-Reihen und die Nichtlinearitätsfaktoren mit einer exponentiellen Funktion angenähert worden. Diese Materialparameter wurden zuerst wie bei Zug bestimmt, dann mit den bei Zug erzielten Ergebnissen verglichen. Im Diagramm ist somit der Verlauf der experimentell gemessenen Messdaten bei Torsionskriechen und die berechneten Daten aus den Zugversuchen dargestellt. Es wurde, wie in vielen Versuchen nachgewiesen, eine konstante Querkontraktionszahl für beide Werkstoffe angenommen. Gemessen wurde die Drehwinkeländerung der Trommel und dann auf den Gleitwinkel umgerechnet.

Die größten Schwierigkeiten ergaben sich bei der Einspannung der Rohre. Da sie durch die Einspannbacken zusammen gedrückt würden, musste ein spezieller Kern aus Stahl an der Einspannstelle in das Rohr hineingesteckt und justiert werden. Außerdem wurde an die äußere Rohrhaut an der Einspannstelle ein Ring mit Schlitz aufgesteckt. Diese Maßnahmen verhinderten die Zerstörung an den Enden des Rohres und verhalfen zu einem über den Umfang gleichmäßigem Torsionsmoment. Dadurch konnte die gewünschte Länge des Rohres eingestellt werden. Bei zu hohen Torsionsspannungen an den PMMA-Proben ergaben sich Risse die sich dann mit der Zeit schraubenförmig fortbreiteten. Diese Versuchsreihen sind nicht zur Ermittlung von den Materialparametern eingeflossen. Alle Versuchsauswertungen sind nur an den Rohren durchgeführt worden, die bis zum Schluss (100 h) intakt geblieben sind.

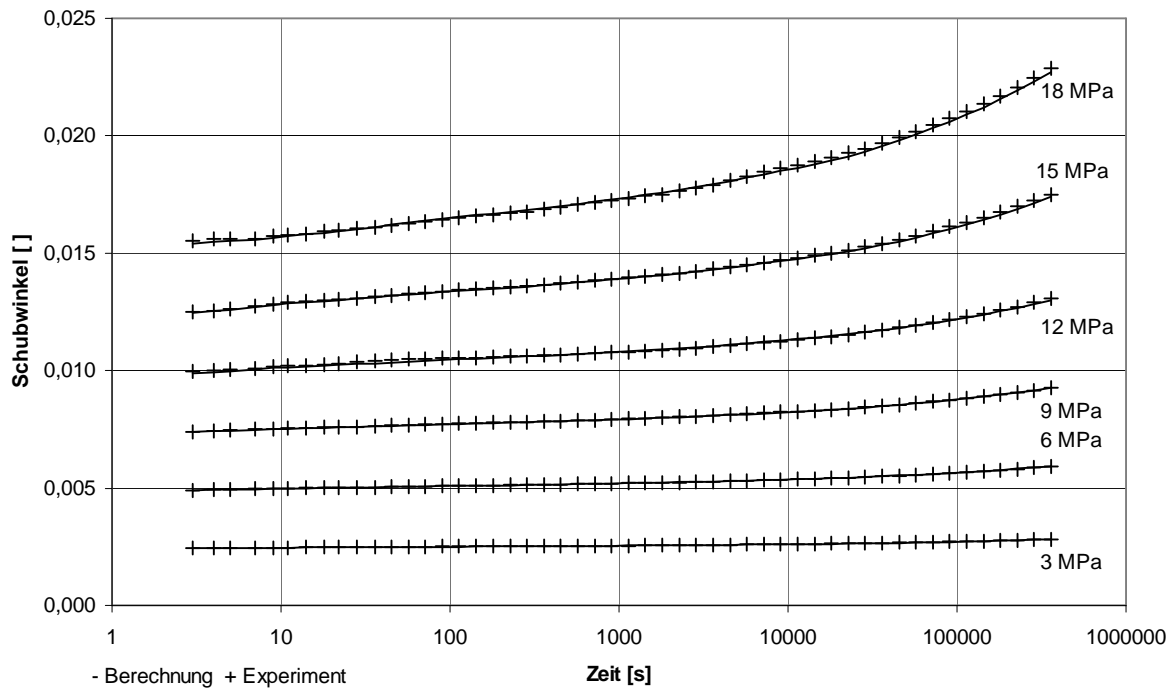


Bild 4.34: Torsion an dünnwandigen Rohren aus PMMA bei unterschiedlichen Torsionsspannungen

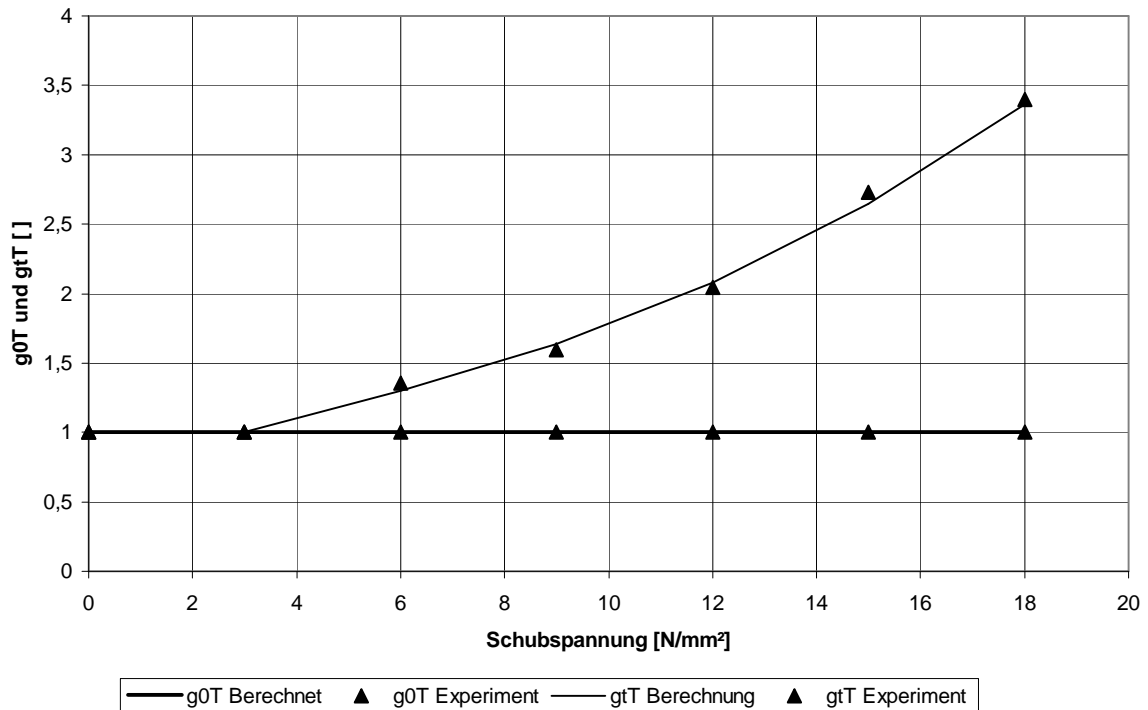


Bild 4.35: Nichtlinearitätsfaktoren bei Torsion für PMMA

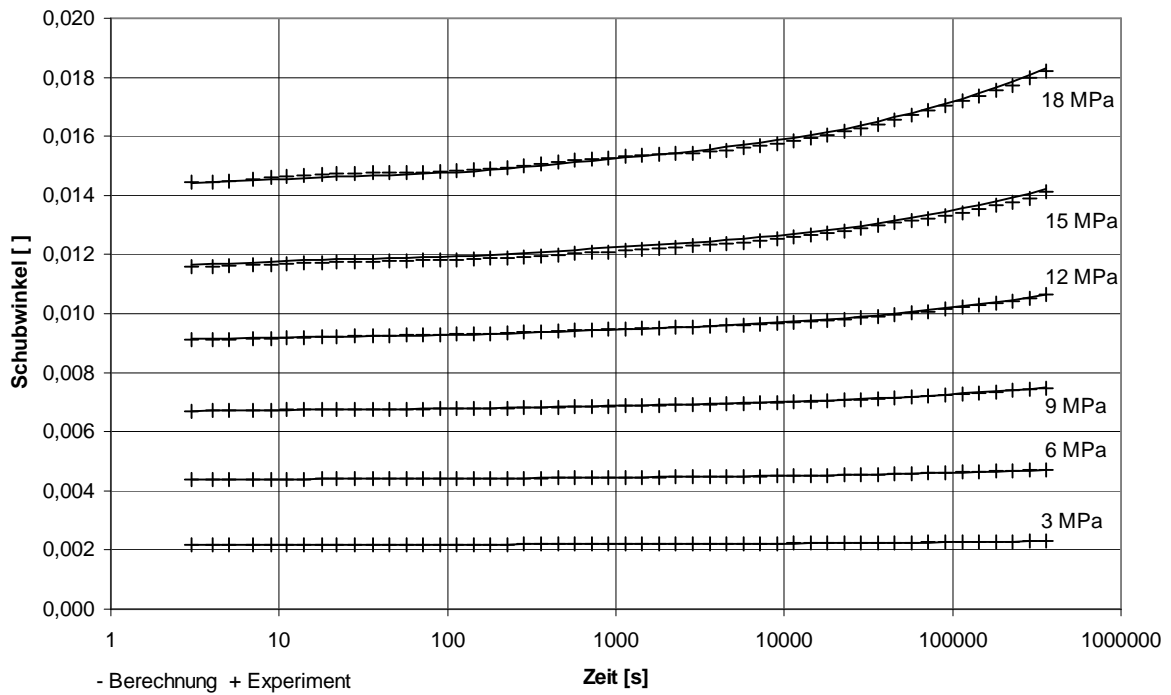


Bild 4.36: Torsion an dünnwandigen Rohren aus PVC bei unterschiedlichen Torsionsspannungen

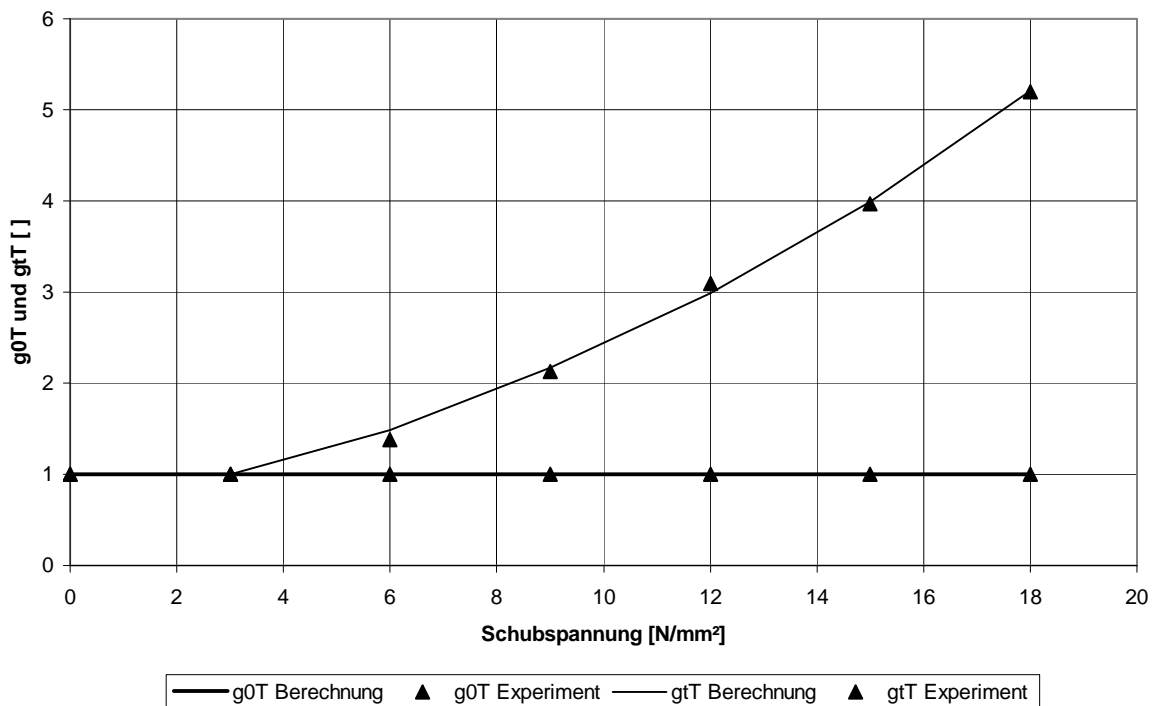


Bild 4.37: Nichtlinearitätsfaktoren bei Torsion für PVC

5 Stabilität

5.1 Elastische Stabilität

In vielen technischen Anwendungen werden Bauteile unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt. Diese Belastungen können je nach Art und Höhe zum Versagen der Struktur führen. Das Versagen des Bauteils kann sich z.B. durch Bruch, Risse, Fließen, Überschreitung einer vorgegebenen Dehngrenze oder dem Verlust des Gleichgewichts äußern. Der Verlust des Gleichgewichts einer Struktur wird in der Technik als Instabilität bzw. Verlust der Stabilität bezeichnet [87, 88, 89, 90]. Dabei verliert das tragende Bauteil, an dem vorher die äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht waren, aufgrund von Umgebungsbedingungen, wie z.B. Erhöhung der Kraft, den inneren Halt und somit stimmt die Gleichgewichtsbedingung nicht mehr. Das Tragwerk wird sich dann rapide von dem Ort an dem das Gleichgewicht geherrscht hat entfernen. Sie wird zerstört oder fällt in eine andere benachbarte Gleichgewichtslage. Stabilitätsverluste treten in Form von Beulen oder Knicken an Schalen oder an dünnen schlanken Balken unter Druck- oder Schubbelastung auf. Dieser Zusammenhang soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Das folgende Bild zeigt drei Stäbe die mit unterschiedlichen Druckkräften belastet sind (Bild 5.1):

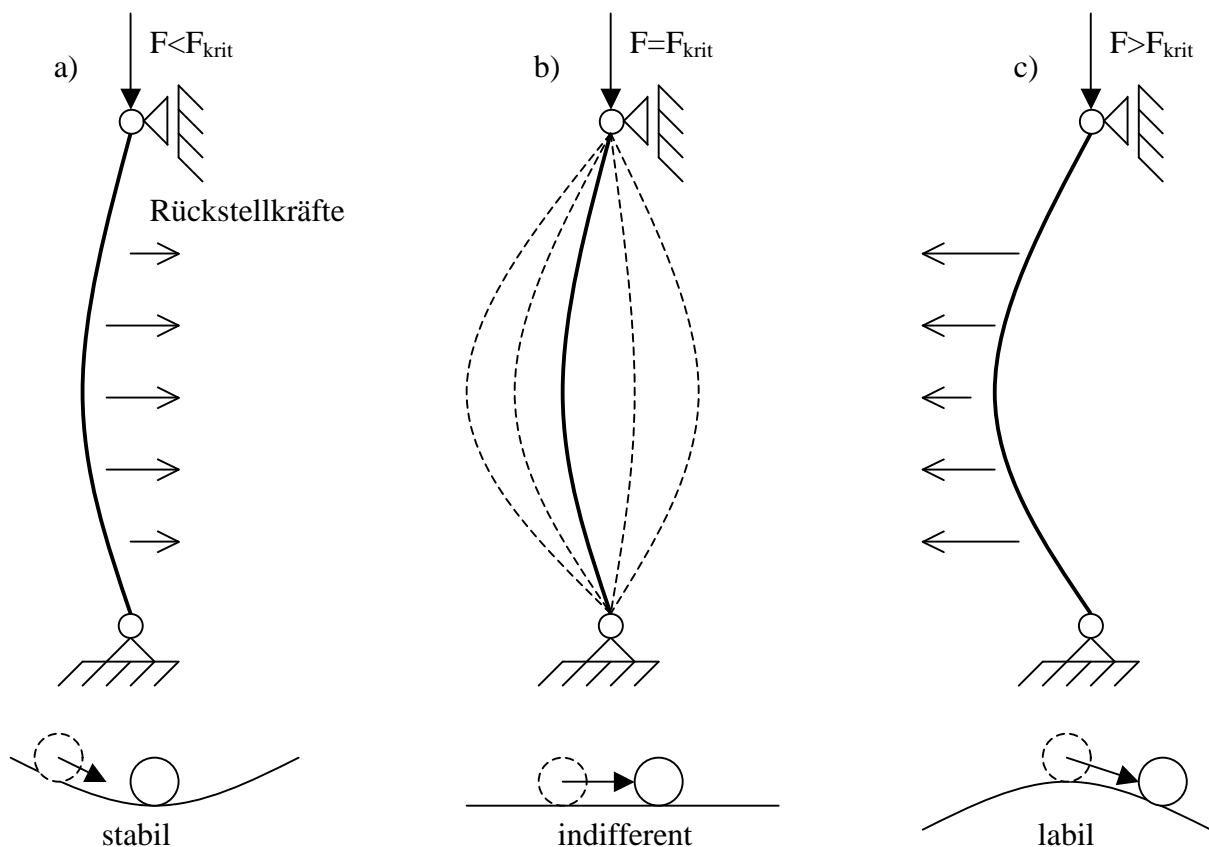


Bild 5.1: Unterschiedliche Gleichgewichtslagen

zu a) Wird der mit einer kleinen Längskraft belastete Stab ausgelenkt bzw. in seiner ursprünglichen Lage gestört, so spürt man einen Widerstand. Der Stab kehrt aufgrund

der Rückstellkräfte, die durch die seitliche Auslenkung erzeugt werden, in seine Nullstellung zurück. Diese Rückstellkräfte sind stets positiv, so lange die Kraft F kleiner als die kritische Knickkraft bleibt. Diesen Punkt nennt man stabil, was durch eine Kugel in einer Schale, die nach jeder Störung in seine Ausgangsposition zurückkehrt, veranschaulicht werden kann.

- zu b) Steigert man die Last des Stabes, so stellt man fest, dass der Widerstand gegen die Auslenkung immer geringer wird. Es gibt theoretisch einen Punkt, bei dem der Widerstand zu Null geht. Die Rückstellkräfte sind verschwunden und der Stab kann widerstandslos nach links und rechts bewegt werden. Er befindet sich immer im Gleichgewicht. Diese Last nennt man dann genau die kritische Knickkraft. Im Kugelversuch ist aus der Schale eine Ebene geworden, auf der die Kugel, ohne den Gleichgewichtszustand zu stören, hin und her bewegt werden kann. Bei diesem indifferenten Gleichgewicht sind die Rückstellkräfte null.
- zu c) Wird die Last weiter also über die kritische Knickkraft gesteigert, so entfernt sich der Stab sehr schnell von seiner Ruhelage. Es werden im Stab Kräfte frei, die immer größere Auslenkungen erzeugen und schließlich zur Zerstörung des Stabes führen. Dieser Vorgang spielt sich in Bruchteilen von Sekunden ab. So bedeutet das im Kugelversuch, dass die Kugel auf einer nach oben gekrümmten Fläche ist und auch durch eine sehr geringe Störung von seinem Ausgangsort verschwindet. Die Rückstellkräfte sind jetzt negativ und dieser Punkt wird labil bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen kann dieses Problem jetzt genau formuliert werden. Die Instabilität tritt immer dann auf, wenn die Längskraft einen bestimmten Wert überschritten hat. Bei labilem Gleichgewichtszustand kann jede kleinste Störung, die in der Praxis immer vorhanden ist, dieses Gleichgewicht zerstören. Der Beginn des labilen Zustands ist der indifferente Zustand mit F_{krit} . Der indifferente Punkt zeichnet sich dadurch aus, dass jede Nachbarlage sich wiederum im Gleichgewicht befindet. Es sei kurz hier angemerkt, was im Weiterem durch das aufstellen und lösen der Differentialgleichung gezeigt wird, dass bei dieser Art von Belastung (ohne Imperfektion) nur die Form der Biegelinie und nicht die Größe der Auslenkung bestimmbar ist. Der Zusammenhang dieser drei Beziehungen sei besser mit dem folgenden Bild 5.2 vor Augen geführt.

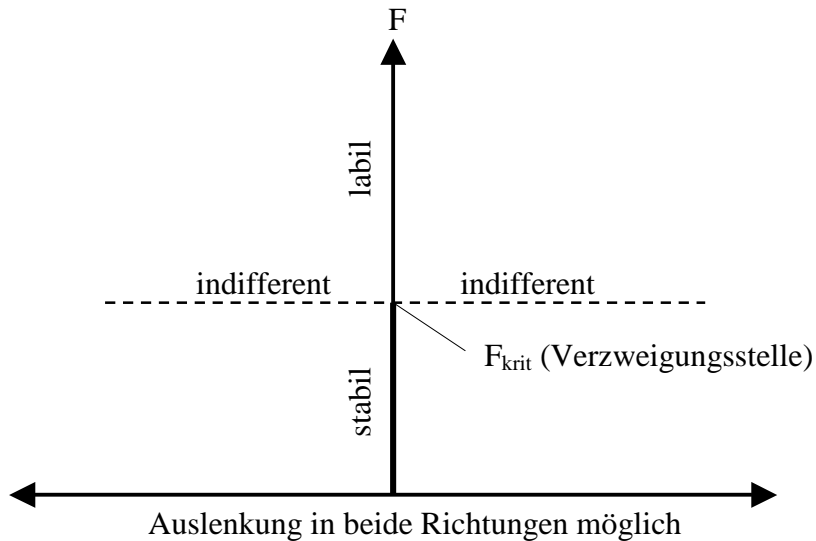


Bild 5.2: Auslenkungsrichtungen der Stabilitätslagen

Unterhalb von F_{krit} ist stabiles Gleichgewicht, oberhalb labiles. Nur im Punkt F_{krit} ist auch ein Gleichgewicht auf der waagrechten Verzweigungslinie möglich. Man spricht von einem Verzweigungs- bzw. Stabilitätsproblem.

Zur Berechnung der unterschiedlichen Stabilitätspunkte stehen grundsätzlich drei Methoden, die Gleichgewichts-, Energiemethode und kinetische Methode (wird hier nicht behandelt), zur Auswahl, die anhand eines kleinen Beispiels näher erläutert werden. Jedoch sei vorher noch angemerkt, dass es eigentlich in der Berechnung mechanischer Probleme üblich und auch zulässig ist, die Schnittgrößen am unverformten System anzusetzen, da sie im Vergleich zu den äußeren Abmessungen vernachlässigbar klein sind. Man spricht dann von der Theorie I. Ordnung. So ist z.B. bei einem Stab der auf Zug beansprucht wird, der Zusammenhang zwischen der äußeren Last und der Stabverlängerung eindeutig und die Gleichgewichtsbedingung kann am unverformten System aufgestellt werden. Beim Druckstab braucht dieser Zusammenhang nicht eindeutig zu sein. Ab einer bestimmten kritischen Druckkraft biegt sich dieser Stab seitlich aus und entfernt sich von dieser Gleichgewichtslage. Dabei treten weitere mehr oder weniger stabile Gleichgewichtslagen auf. Diese Erscheinung, die besonders bei schlanken Stäben zu beobachten ist, heißt Knicken. Beim Knicken treten so große Verformungen auf, dass man die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System aufstellen muss. Dies wird als die Theorie II. Ordnung bezeichnet und die Verformungen am Körper können nicht mehr vernachlässigt werden, wie z.B. an Hängebrücken, oder die Lösung ist gar ohne sie nicht möglich (Stabilitätsproblem). Es werden jedoch trotzdem bei nicht sehr großen Auslenkungen nur die Reihen erster Ordnung in der Reihenentwicklung verwendet (z.B. $\sin(x) \approx x$, $\tan(x) \approx x$, $\cos(x) \approx 1$ für kleine x) (Bild 5.3).

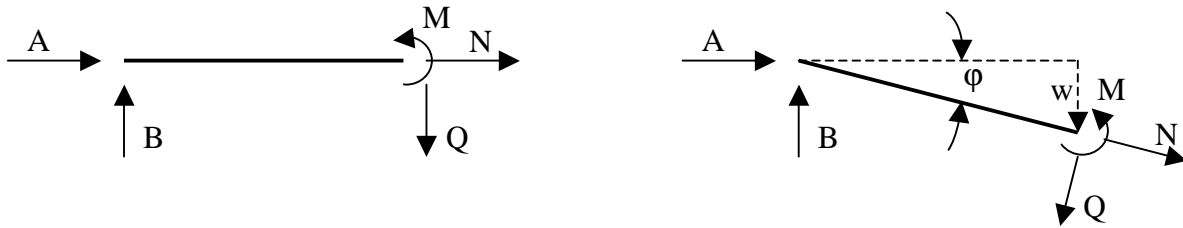


Bild 5.3: links: Zulässiger Ansatz nach der Theorie I. Ordnung, rechts: Theorie II. Ordnung

Zur Untersuchung der zwei Methoden soll ein Beispiel helfen. Ein starrer Stab der Länge l soll durch die richtungstreue Druckkraft belastet werden. Am gelenkig gelagerten Fußpunkt des Stabes sei eine lineare Drehfeder mit der Steifigkeit c angebracht (Bild 5.4). Die betrachtete Ausgangslage $\varphi = 0$ des Stabes ist offensichtlich eine Gleichgewichtslage. Bei einer seitlichen Auslenkung können weitere Gleichgewichtslagen entstehen, die im weiteren Verlauf auf Stabilität untersucht werden müssen [91, 92, 102].

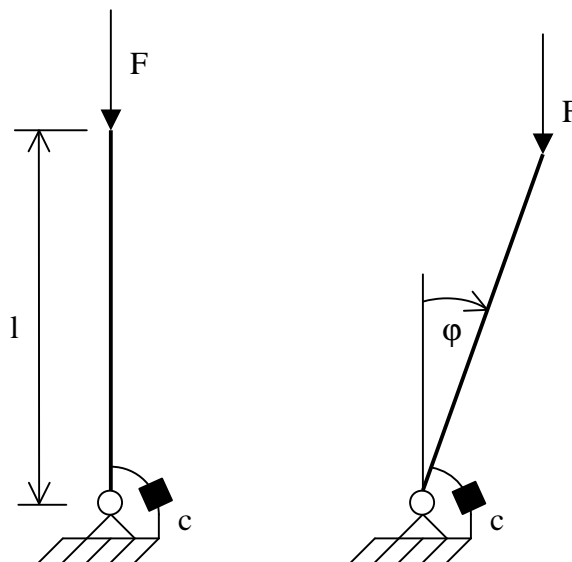


Bild 5.4: Nichtausgelenkte und ausgelenkte Lage des Stabes

Bei der *Gleichgewichtsmethode* wird am verformten System das Momentengleichgewicht aufgestellt. Es ergibt sich dann:

$$0 = Fl \sin(\varphi) - c\varphi \quad (5.1)$$

Es ist leicht zu sehen, dass neben der trivialen Lösung $\varphi = 0$ (die nichtausgelenkte Lage) nur noch weitere Gleichgewichtslagen existieren die diese Gleichung 5.1 erfüllen, wenn gilt:

$$\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} = \frac{Fl}{c} \quad (5.2)$$

Jeder Wert der sich für den Auslenkungswinkel φ ergibt, beschreibt eine benachbarte Gleichgewichtslage. Die kritische Kraft für die Verzweigungsstelle kann bei der Linearisierung der Gleichung 5.1 um kleine Winkel ($\sin \varphi \approx \varphi$) ermittelt werden.

$$\varphi(Fl - c) = 0 \quad (5.3)$$

$$F = F_{krit} = \frac{c}{l}$$

Die kritische Kraft F_{krit} ist in diesem Fall der Eigenwert des hier vorliegenden Eigenwertproblems. Bei der Kraft $F > F_{krit}$ stellt sich eine Funktion $F(\varphi)$ ein, die als Nachknickkurve bezeichnet wird. Über die Stabilität der Gleichgewichtslagen auf dieser Nachknickkurve lässt sich mit der Gleichgewichtsmethode keine Aussage machen.

Es sei kurz angemerkt, dass bei konstantem Moment Fl und konstanter Steifigkeit c sich eine bestimmte Auslenkungslage φ ergibt. Jedoch ist dies bei viskoelastischen Materialien, deren innere Steifigkeit c , also der E-Modul sich mit der Zeit ändert, nicht gegeben. Es wird durch die Zeitabhängigkeit stets zu einer Verschiebung der im Moment herrschenden Gleichgewichtslage kommen, was dann wiederum zu einer Veränderung des äußeren Momentes Fl und der dadurch auch lastabhängigen Steifigkeit c (Nichtlinearitätsfaktoren) zur Folge hat. Es zeigt sich auch mit der sich verändernden Steifigkeit c bzw. dem E-Modul nach Gleichung 5.3, dass die kritische Kraft eine zeitabhängige ist, was bedeutet, dass die zum Stabilitätsverlust notwendige Kraft mit der Zeit immer kleiner wird im Gegensatz zur anfänglichen elastischen kritischen Kraft. Damit kann ein viskoelastischer Werkstoff mit einem Materialgesetz nach Prony nur zur Zeit unendlich eine stabile Lage erreichen. Alle Lagen dazwischen sind aufgrund der Zeitabhängigkeit instabil. Man kann vereinfacht die Gleichung 5.2 umschreiben:

$$\psi(\varphi(t)) = \frac{\varphi(t)}{\sin(\varphi(t))} = \frac{M(t)}{c(t, M(t))} \quad (5.4)$$

Die Lösung neben der trivialen $\varphi = 0$, lässt sich in einem Bild besser darstellen. Die nicht-triviale Lösung zur Zeit t_2 beschreibt den Winkel der im weiteren entsteht. Durch die Zeithabhängigkeit von Moment und Steifigkeit verändert sich das Verhältnis $\psi(t)$ der rechten Seite von Gleichung 5.4. Dabei sinkt mit der Zeit die Steifigkeit $c(t, M)$ und das Moment $M(t)$ erhöht sich, was das Verhältnis und damit die Amplitude des Sinus steigert. Mit Hilfe numerischer Methoden [12, 59] lässt sich die nichttriviale Lösung ermitteln. Das Bild 5.5 zeigt zwei unterschiedliche Sinusfunktionen, deren Höhe aus der zeitlichen Veränderung von Moment und Steifigkeit bestimmt wird, die außer bei Null noch einen weiteren Schnittpunkt mit der Geraden aufweisen. Ziel ist es diesen gemeinsamen Punkt zu ermitteln.

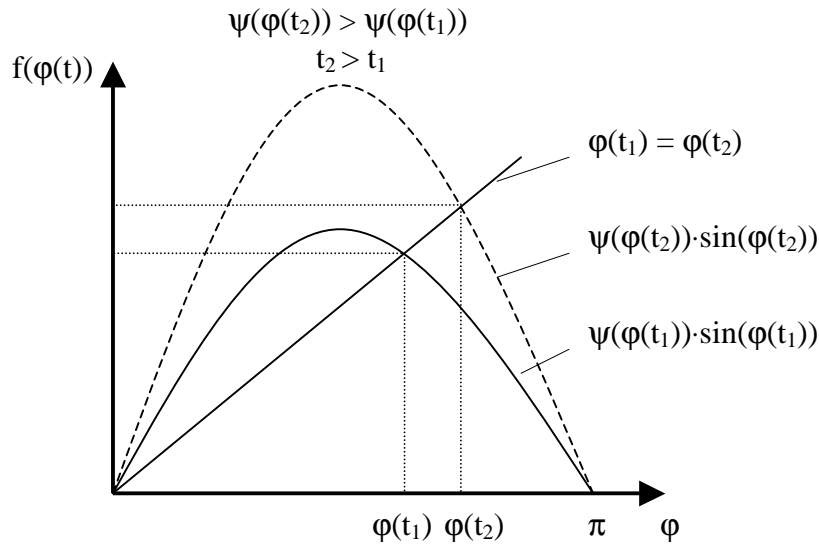


Bild 5.5: Lösungen der Iteration von möglichen Stabilitätspunkten

Wie vorher erwähnt, kann die Gleichgewichtsmethode keine Aussage über die Stabilität der Lage machen. Sie gibt lediglich nur die Orte der möglichen stabilen, labilen oder indifferenten Punkte an. Diese zusätzliche wichtige Information kann mit Hilfe der *Energiemethode* gewonnen werden, die im folgenden kurz erklärt wird.

Die Drehfeder im Bild 5.4 mit ihrer Steifigkeit c kann durch die Auslenkung φ eine innere Formänderungsenergie Π_i aufnehmen, die so geschrieben werden kann:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} c \varphi^2 \quad (5.5)$$

Des weiteren besitzt die richtungstreue Kraft F bezüglich des Lagers (Nullniveau) ein Potential Π_a , was wie folgt aussieht:

$$\Pi_a = Fl \cos(\varphi) \quad (5.6)$$

Damit ergibt sich für das Gesamtpotential Π des Systems dies:

$$\Pi = \Pi_a + \Pi_i = Fl \cos(\varphi) + \frac{1}{2} c \varphi^2 \quad (5.7)$$

Betrachtet man die Kugeln in Bild 5.1, so kann man erkennen, dass sich bei einer kleinen Störung das Gesamtpotential um $\Delta\Pi$ verändert. Wichtig für die Stabilität ist jedoch das Vor-

Stabilität

zeichen der Potentialveränderung. Es ist zu erkennen, dass bei einer Verschiebung der Kugel in der linken konkaven Fläche, was eine Zunahme der Potentialveränderung ($\Delta\Pi > 0$) bedeutet, diese wieder in die Ursprungslage zurück kehrt und stabil ist. Die mittlere Kugel auf der nichtgekrümmten Fläche verändert aufgrund keiner Lageänderung ihr Potential nicht und ist somit indifferent ($\Delta\Pi = 0$). Die rechte Kugel dagegen entfernt sich bei einer kleinen Störung von ihrem Ausgangsort, was hier mit einer negativen Potentialveränderung verdeutlicht werden kann ($\Delta\Pi < 0$). Diese Zusammenhänge lassen sich kurz wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi > 0 & \quad \text{stabil} \\ \Delta\Pi = 0 & \quad \text{indifferent} \\ \Delta\Pi < 0 & \quad \text{labil}\end{aligned}\tag{5.8}$$

Dies lässt sich mathematisch durch eine kleine Störung ($\delta\varphi$) an der Gleichgewichtslage (φ) auf eine benachbarte Lage ($\varphi + \delta\varphi$) herleiten. Setzt man die benachbarte Lage in das Gesamtpotential in Gleichung 5.7 ein und führt einen Taylor-Reihenansatz an der Stelle φ durch, so ergibt sich folgende Darstellung des Potentials:

$$\Pi(\varphi + \delta\varphi) = \Pi(\varphi) + \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\delta\varphi^2 + \dots\tag{5.9}$$

und damit für die Potentialänderung

$$\Delta\Pi = \Pi(\varphi + \delta\varphi) - \Pi(\varphi) = \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\delta\varphi^2 + \dots\tag{5.10}$$

Da die Funktion des Potentials an den Gleichgewichtslagen ein Extremum annimmt, muss die erste Ableitung an diesem Ort verschwinden und die zweite Ableitung entscheidet, ob $\Delta\Pi$ größer oder kleiner Null und damit ob die Gleichgewichtslage stabil oder labil ist. Verschwinden hingegen alle Ableitungen ($\Delta\Pi = 0$), so liegt eine indifferente Lage vor. Ist dagegen nur $\Delta\Pi'' = 0$, entscheiden die Vorzeichen der höheren Ableitungen über die Gleichgewichtslage. Zusammenfassend ist dann:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi'' > 0 & \quad \text{stabil} \\ \Delta\Pi'' < 0 & \quad \text{labil}\end{aligned}\tag{5.11}$$

Die Gleichgewichtslagen für den Stab folgen dann mit der Bedingung $\Pi' = 0$ aus der Gleichung 5.7

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0 \Rightarrow -Fl \sin(\varphi) + c\varphi = 0 \quad (5.12)$$

Hieraus ergeben sich die Lage $\varphi = 0$ und in Übereinstimmung mit (5.2) die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} = \frac{Fl}{c} \quad (5.13)$$

für weitere Gleichgewichtslagen. Zusätzlich können mit der zweiten Ableitung des Potentials Aussagen zur Stabilität dieser Lagen getroffen werden

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = -Fl \cos(\varphi) + c \quad (5.14)$$

Wenn die triviale Lösung aus (5.13) mit $\varphi = 0$ eingesetzt wird, ergibt die Gleichung 5.13 folgende Extremas:

$$\Pi'' > 0 \quad \text{für } F < \frac{c}{l}$$

$$\Pi'' < 0 \quad \text{für } F > \frac{c}{l}$$

$$\text{mit } F_{krit} = \frac{c}{l}$$

Das bedeutet das die triviale Lösung nur bis zur kritischen Kraft stabil und drüber labil ist. Für die weiteren Gleichgewichtslagen oberhalb des Verzweigungspunktes wird die Gleichung 5.13 in 5.14 eingesetzt. Mit der Verwendung einiger trigonometrischen Umwandlungen erhält die Bestimmungsgleichung 5.14 für die Stabilität diese Form:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \Pi'' = -Fl \cos(\varphi) + c = c \left(1 - \frac{\varphi}{\tan(\varphi)} \right) = c(1 - \phi(\varphi)) \quad (5.15)$$

Da stets $\phi(\varphi) < 1$ für $|\varphi| \leq \pi/2$ ist, gilt für die Potentialkrümmung $\Pi'' > 0$ in allen Bereichen, was bedeutet, dass alle Gleichgewichtslagen auf dem Lösungsast $\varphi \neq 0$ stabil sind.

Für ein viskoelastisches Material das nach Bild 5.5 auf Stabilität untersucht wird und dessen Steifigkeit $c(t, M(t))$ und äußere Last $M(t)$ zeitabhängig sind, lässt sich die Energiemethode auch anwenden. Da ein viskoelastischer Werkstoff bei der Annäherung des Materialgesetzes mit einer Prony-Reihe einen elastischen Anteil aufweist, kann der Ansatz in den Gleichungen 5.5-5.14 übernommen werden. Aufgrund der Zeithabhängigkeit der Belastung und des Materials, ist auch das Potential abhängig von der Zeit. Damit lassen sich die vorherigen Gleichungen für die Formänderungsenergie, äußeres und Gesamtpotentials wie folgt aufstellen:

$$\begin{aligned} \Pi_i(t) &= \frac{1}{2} c(t, M(t)) \varphi^2(t) \\ \Pi_a(t) &= M(t) \cos(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\Pi(t) = \Pi_a(t) + \Pi_i(t) = M(t) \cos(\varphi(t)) + \frac{1}{2} c(t, M(t)) \varphi^2(t)$$

Für die Ermittlung der Stabilität gelten die gleichen Überlegungen für die erste und zweite Ableitung wie im elastischen Fall. Ähnlich wie oben beschrieben ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d\Pi(t)}{d\varphi(t)} = 0 \Rightarrow -M(t) \sin(\varphi(t)) + c(t, M(t)) \varphi(t) = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2\Pi(t)}{d\varphi^2(t)} = -M(t) \cos(\varphi(t)) + c(t, M(t)) \quad (5.18)$$

Die Gleichung 5.17 hat das gleiche Ergebnis wie bei der Gleichgewichtsmethode in Gleichung 5.4. Das zeitlich veränderbare Moment $M(t)$ steht für eine Belastung die, z.B. wie beim Knicken eines viskoelastischen Materials, von der wachsenden Durchbiegung herrührt. Über die Zeit wird das Moment steigen und die Steifigkeit sinken. Dies kann mit einer labilen bzw. indifferenten Gleichgewichtslage (GGL) verglichen werden, da jede Lage im nächsten Moment zu einer anderen wechselt. Es sei kurz erwähnt, dass die viskoelastischen Phänomene relativ langsam ablaufen und dadurch die eventuellen ersten und zweiten Ableitungen nach der Zeit aufgrund der geringen Geschwindigkeit- und Beschleunigungsveränderungen vernachlässigbar sind. Außerdem werden jegliche Masseneffekte nicht berücksichtigt. Damit kann die Gleichung 5.18 mit gewisser Umwandlung und Berücksichtigung der Bedingungen unter (5.11) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d^2\Pi(t)}{d\varphi^2(t)} = -M(t) \cos(\varphi(t)) + c(t, M(t)) \leq 0$$

und

$$\varphi(t) \geq \arccos\left(\frac{c(t, M(t))}{M(t)}\right) = \arccos(\Psi(t)) \quad (5.19)$$

mit der relativen Steifigkeit

$$\Psi(t) = \frac{c(t, M(t))}{M(t)} \quad (5.20)$$

Die relative Steifigkeit $\Psi(t)$ ist aufgrund der sinkenden Steifigkeit $c(t, M(t))$ und des steigenden Moments $M(t)$ eine abnehmende Zahl. In Bild 5.6 wird dieser Zusammenhang verdeutlicht:

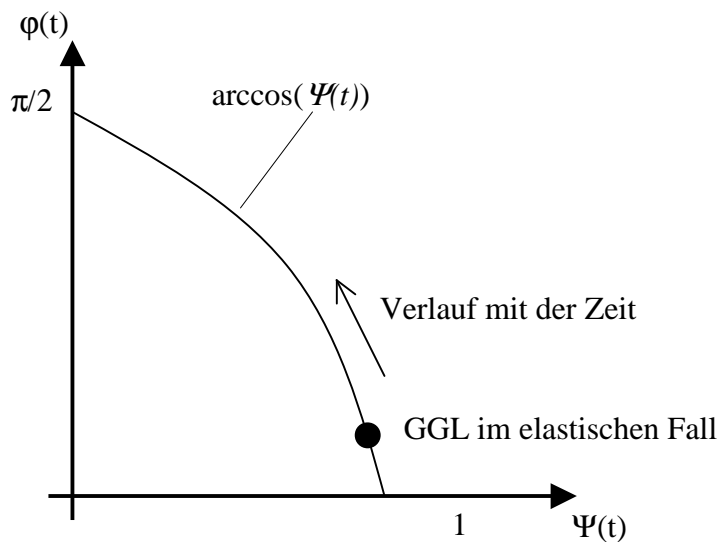


Bild 5.6: Zusammenhang zwischen der relativen Steifigkeit und des zeitabhängigen Biege winkels

Die Gleichgewichtslage (GGL) die einmal im elastischen Fall entstanden ist, wird durch die viskoelastischen Phänomene in Richtung größerer Auslenkungen verschoben. Dieser Vorgang läuft je nach Annahme des Materialgesetzes bis zur Zerstörung oder zu einem festen Wert ab. Da der Wert für die relative Steifigkeit $\Psi(t)$ immer kleiner wird, kann bei einem ausgeknickten Balken die Durchbiegung nur wachsen, was auch in der Gleichung 5.19 durch „ \geq “ gekennzeichnet wird. Es kann sein, dass diese Durchbiegung zu einer gewissen Zeit ein Maximum (asymptotisch) oder die Zerstörungsauslenkung erreicht.

In vielen technischen Anwendungen werden Bauteile, die oftmals auch aus viskoelastischen Werkstoffen bestehen, auf Knickung belastet. Auch metallische Werkstoffe, die unter hohen

Temperaturen eingesetzt werden, unterstehen diesem Phänomenen. Es ist daher sehr wichtig über die Belastungsart und das Verhalten des Materials vor der Auslegung Kenntnis zu haben. Genauso können auch Umgebungsbedingungen, wie Feuchte und unsachgemäße Behandlung, den Werkstoff zerstören. Da aber viele Belastungsarten in Wirklichkeit kaum getestet werden können oder gar unerwartet auftauchen, sind im ingenieurmäßigen Gebrauch einige Annahmen zu treffen. Dies kann z.B. geschehen durch die Reduktion von Parametern oder idealisierten Modellen. Für das Knicken eines schlanken und langen Stabes müssen daher auch gewisse Regeln beachtet werden. So ist es bei dieser Belastungsart unumgänglich genaue Randbedingungen zu setzen, da im Gegensatz zur Druckbelastung von dickeren und kürzeren Stäben ganz andere Phänomene eine Rolle spielen. In vielen Lehrbüchern, wie [94, 95, 96, 98, 99, 100, 105, 109, 111], wird daher dem elastischen Knicken, bekannt auch unter dem Eulerknicken, eine besondere Stellung zugeschrieben. Da in dieser Arbeit das elastische Knicken schon aufgrund des gewählten Materialmodells von Wichtigkeit ist, soll trotz des Hinweises auf die zahlreiche Literatur kurz darauf eingegangen werden.

5.1.1 Das elastische Knicken nach Euler

Ein elastischer schlanker Stab weicht nach überschreiten der kritischen Kraft, die als Knickkraft bezeichnet wird, seitlich aus. Bis zu dieser Knickkraft bleibt der Stab (bzw. dünner Balken) gerade. Nach Überschreitung der Knickkraft biegt er sich durch, was als eine neue Gleichgewichtslage bezeichnet wird. Ab jetzt erhöht sich die Durchbiegung mit jeder Kraftsteigerung, wobei immer weniger Kraft aufgrund des steigenden Moments von Nöten sind, um die Durchbiegung weiter zu erhöhen. Dadurch geht die Betrachtungsweise von einem Stabilitäts- in ein Spannungsproblem über. Zur Ermittlung der Knickkraft werden die Gleichgewichtsbedingungen in der verformten, also ausgelenkten, Lage aufgestellt. Dabei kann die Längenänderung des Stabes vernachlässigt werden. In Bild 5.7 sind diese Beziehungen dargestellt:

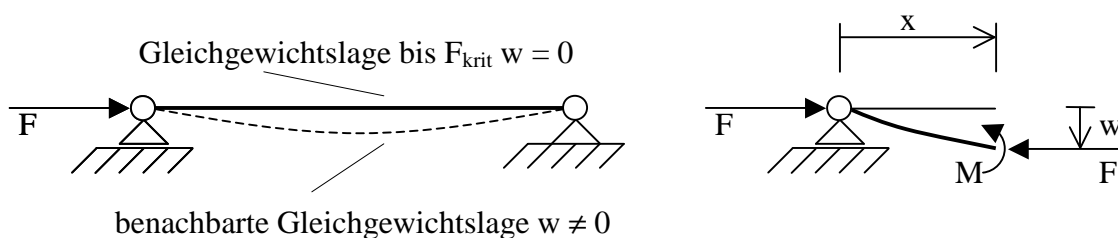


Bild 5.7: Durchgebogener elastischer Stab mit den inneren Kräften

Der Stab wird ohne jegliche Imperfektion und die Kraft genau in der Stabmitte im Schwerpunkt angenommen. Das Momentengleichgewicht am verformten Stab an der Stelle x im Bild 5.7 ergibt:

$$M = Fw \tag{5.21}$$

Für kleine Auslenkungen ($w' \ll 1$) ist dann mit der Krümmung für einen schubstarrten Biegebalken das Elastizitätsgesetz $EIw'' = -M$ gegeben. Dies in (5.21) eingesetzt ergibt dann die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Abkürzung und $w' = dw/dx$:

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI} \quad (5.22)$$

$$w'' + \lambda^2 w = 0 \quad (5.23)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Biegelinie für den Sonderfall des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens. Dessen Lösungsansatz sieht wie folgt aus:

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (5.24)$$

Dabei sind A und B Integrationskonstanten die aus Randbedingungen, wie das Verschwinden der Durchbiegung an den Stellen $x = 0$ und $x = l$, bestimmt werden. Es ergibt sich für sie:

$$\begin{aligned} w(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ w(l) = 0 &\Rightarrow B \sin(\lambda l) = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die zweite Gleichung ergibt neben der trivialen Lösung $B = 0$, was keine Auslenkung bedeutet, die weiteren Lösungen von $\sin(\lambda l) = 0$ mit $\lambda_n l = n\pi$ und $n = 1, 2, 3, \dots$, was dann mit dem ersten technisch interessanten Eigenwert λ_1 für die Knickkraft liefert:

$$F_k = \lambda_1^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (5.26)$$

Damit ist die erste Eigenform, dessen Amplitude aus der homogenen Differentialgleichung nicht aber die Form bestimmbar ist, wie folgt:

$$w_1 = B \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \quad (5.27)$$

Um die Knicklasten von Stäben für beliebige Lagerungen bestimmen zu können, muss eine allgemeine Knickgleichung aufgestellt werden, bei der auch die Quer- und Normalkräfte im Stab mit einfließen. Hier sei aber auf die zahlreiche Literatur verwiesen [36, 73, 74] und nur die hergeleitete Differenzialgleichung vierter Ordnung mit ihrem Eigenwert angeben:

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI} \quad \rightarrow \quad \text{Eigenwert}$$

$$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0 \tag{5.28}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist dann mit den über die Randbedingungen zu bestimmenden Integrationskonstanten A, B, C und D wie folgt:

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + C \lambda x + D \tag{5.29}$$

Es gibt vier technisch wichtige Lagerungstypen, aus denen mit der Bestimmung der Integrationskonstanten die jeweiligen Knicklasten ermittelt werden. Diese heißen nach Euler (1707-1783) die vier Eulerschen Knickfälle bzw. Knicklasten. In Bild 5.8 sind diese dargestellt.

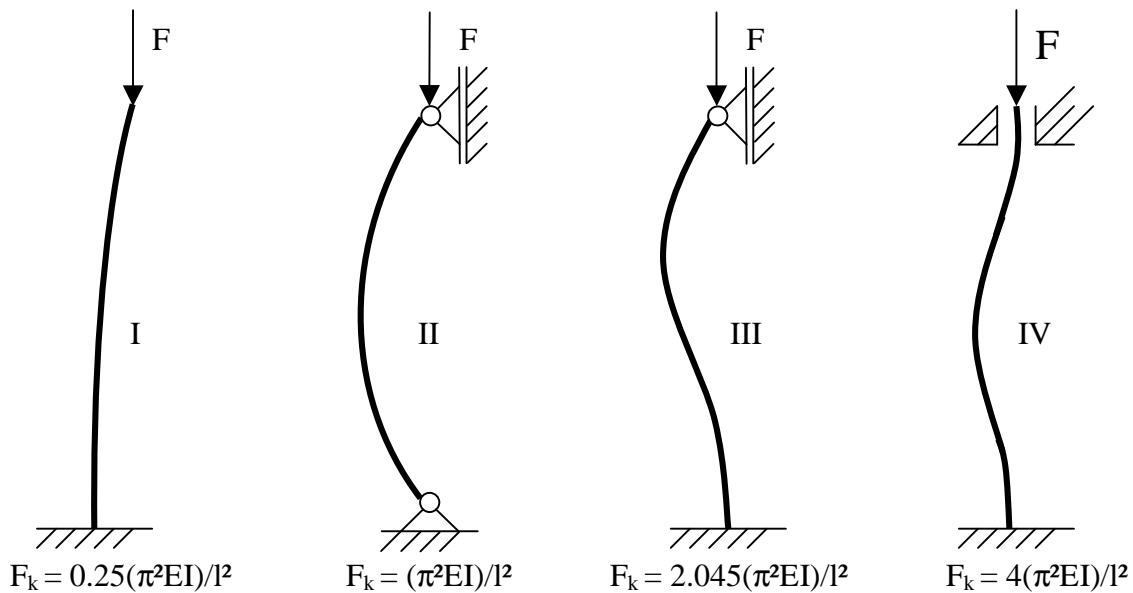


Bild 5.8 Eulersche Knickfälle

Bei diesen Herleitungen ist man von exakt geraden Stäben mit nichtexzentrischem Lastangriffspunkt ausgegangen (keine Imperfektion). Doch es kommt häufig vor, dass der Stab bzw. Balken imperfekt ist und damit zusätzliche Kräfte miteingeleitet werden. Damit weichen die ideellen Annahmen für die Eulerfälle ab. Weiter wird aus der homogenen Differentialgleichung eine inhomogene. Durch die Imperfektion des Balkens können schon Lasten weit unterhalb der Knickkraft F_k zu sehr großen Durchbiegungen führen. In dieser Arbeit hat man sich auf die Untersuchung von viskoelastischen Materialien die nach Eulerfall II belastet sind

und eine Imperfektion aufweisen beschränkt. Auch gibt es viele erdenkliche Imperfektionen, wie z.B. Exzentrizität oder vorgebogener Stab, die in technischen Anwendungen auftreten können. Ferner wird hier nur der Fall von einem schlanken ideell geraden Balken, der mit einer Exzentrizität behaftet ist, untersucht. Im weiteren Verlauf wird die Herleitung eines Balkens, der an den Enden eine Exzentrizität hat, für den elastischen Fall und nach Euler II beschrieben.

5.1.2 Der elastische Balken mit Exzentrizität

Bis jetzt wurde angenommen, dass der unbelastete Balken lotrecht steht und die Druckkraft genau im Schwerpunkt der Fläche angreift. Reale Strukturen aber haben auch ohne Belastung eine Vorverformung und dadurch greifen die Lasten exzentrisch oder außermittig an. Die Behandlung unterschiedlicher Vorverformung ist in vielen Veröffentlichungen und Fachbüchern [95, 103, 104, 106, 112] beschrieben worden. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb nur auf einen Balken der beidseitig gelenkig gelagert ist (Eulerfall II) und einen viskoelastischen Werkstoff besitzt eingegangen. Ferner sind neben den Materialien (PMMA, PC, PVC) die exzentrische Kraft F und die Exzentrizität e selber ein Untersuchungsparameter. Da alle Werkstoffe unterschiedliche Elastizitätsmodule besitzen, ist die elastische Antwort auf die Druckkraft verschieden, jedoch das Verhalten gleich.

Verzweigungsprobleme gibt es nur beim geraden, zentrisch gedrückten also perfekten Balken. Sobald Imperfektionen vorhanden sind, treten schon bei kleinen Kräften ($F < F_{krit}$) Auslenkungen auf. Der schematische Lauf einer solchen Kurve ist im folgenden Bild 5.9 dargestellt:

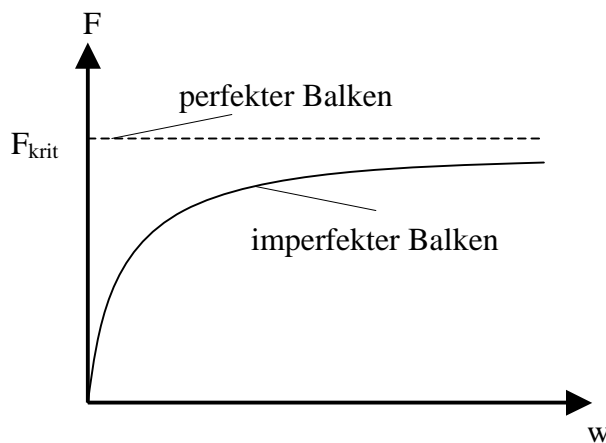


Bild 5.9: Verzweigungsproblem für einen perfekten und imperfekten Balken

Im Bild 5.10 ist ein mit Kraft F belasteter Balken, der eine Exzentrizität e hat und beidseitig gelenkig gelagert ist, dargestellt. Aufgrund der Exzentrizität und der Kraft wird in den Balken ein Moment $M_0 = Fe$ eingeleitet, das die Richtung der Durchbiegung bestimmt. Sofort nach der Belastung fällt der Balken in eine ausgeknickte Lage, welche abhängig ist von e und F . Es sei angemerkt, dass vorerst die Gleichungen für nicht allzu große Auslenkungen gelten.

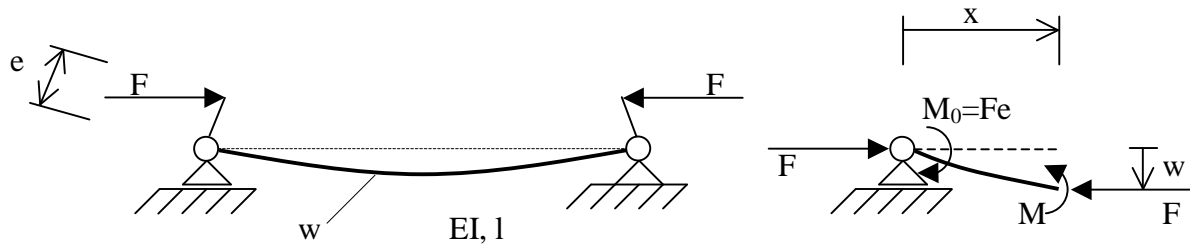


Bild 5.10: Balken mit Exzentrizität und daraus resultierendem Moment

Mit dem Elastizitätsgesetz $EIw'' = -M$ lässt sich auch hier eine Differentialgleichung aufstellen, welche nun durch die Exzentrizität e inhomogen ist. Sie lautet mit der bekannten Abkürzung für λ^2 :

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

$$w'' + \lambda^2 w = -\lambda^2 e \quad (5.30)$$

Dabei sieht das Momentengleichgewicht an der Stelle x mit dem Elastizitätsgesetz wie folgt aus:

$$EIw'' = -Fw - M_0 = -F(w + e) \quad (5.31)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 5.30 ist dann:

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) - e \quad (5.32)$$

Aus den Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(l) = 0$ folgen die Integrationskonstanten zu:

$$\begin{aligned} A &= e \\ B &= e \frac{1 - \cos(\lambda l)}{\sin(\lambda l)} = e \tan\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Mit geeigneter Anwendung der Kreisfunktionen erhält man für die allgemeine Lösung der Durchbiegungsfunktion:

$$w(x) = e \left[\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2}l - \lambda x\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2}l\right)} - 1 \right] \quad (5.34)$$

Wenn man die kritische Kraft F_{krit} , die sich in diesem Fall auch nach Gleichung 5.26 ergibt, kennt, dann folgt bei der Annahme einer Eigenform die von $x = 0$ bis $x = l/2$ die gleiche ist wie $x = l/2$ bis $x = l$ (symmetrisch) für die maximale Durchbiegung an der Stelle $x = l/2$ folgender Zusammenhang:

$$w_{\max} = e \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2}l\right)} - 1 \right] = e \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{krit}}}\right)} - 1 \right] \quad (5.35)$$

Für ein viskoelastisches Material mit noch kleinen Auslenkungen wird aufgrund der anfänglichen Elastizität der Durchbiegungsverlauf auch nach der Gleichung 5.35 ermittelt. Es ist hier deutlich zu sehen, dass im Gegensatz zur Gleichung 5.28 (homogene Differentialgleichung), die Amplitude wegen der Inhomogenität der Gleichung 5.30, berechenbar ist. Jetzt ist nicht nur die Form der Durchbiegung, sondern auch dessen Auslenkung an jeder Stelle x ermittelbar.

Wie in [36, 120, 121] bei einem anderen Beispiel beschrieben, kann auch hier die elastische Lösung für jede beliebige Stelle durch die Transformation durch eine Zeitfunktion in die zeitabhängige Lösung an jeder Stelle berechnet werden. Es wird lediglich die Gleichung 5.34 mit dem zeitabhängigem Materialmodell multipliziert. Angemerkt sei noch, dass diese Multiplikation nur im linear-viskoelastischem Bereich so einfach geht. Für den nichtlinearen Fall müssten die Belastungseinschalt- und -ausschaltvorgänge mitberücksichtigt werden. Die Gleichung für einen linear-viskoelastischen Balken der wie in Bild 5.10 belastet wird wäre dann wie folgt:

$$w(x, t) = e \left[\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2}l - \lambda x\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2}l\right)} - 1 \right] \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{J_i}{J_0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right] \quad (5.36)$$

Da aber im Rahmen dieser Arbeit für die Durchbiegung größere Werte als wie für die Rechtfertigung der Annahme für kleine Durchbiegungen zugelassen wurden und das Material dann auch sicherlich in den nichtlinear-viskoelastischen Bereich übergeht, muss eine andere Berechnungsmethode abgeleitet werden. Als erstes soll, im elastischen Bereich bleibend, die Herleitung der Durchbiegung für größere Auslenkungen, die Elastica, ermittelt werden.

5.1.3 Knicken mit großen Verschiebungen – Die Elastica

Da ein viskoelastisches Material die Neigung des Kriechens und der Relaxation aufweist, bleibt beim Knicken eines solchen Werkstoffes die Auslenkung über die Zeit nicht konstant. Sie wird, wie vorher beschrieben, mit der Zeit anwachsen und sich von dem Ort der elastischen Durchbiegung mehr oder weniger rasch entfernen. Damit durchlaufen alle infinitesimalen Volumenteile des Stabes eine eigenständige Belastung. Es kommt vor, dass ein einzelnes Volumenteil, welches sich ursprünglich im linear-viskoelastischem Bereich befand, durch die Zunahme der Auslenkung, was das Anwachsen des Momentes und somit der Dehnung und Spannung zur Folge hat, in den nichtlinear-viskoelastischen Bereich wandert. Bei niedriger Belastung kann es durchaus vorkommen, dass sich das Material über die ganze Belastungsdauer nur im linearen Bereich befindet. Irgendwann, wenn die Durchbiegung einen gewissen Wert angenommen hat, kann die Steigung, also die erste Ableitung des Durchbiegungsverlaufs, nicht mehr vernachlässigt werden. Dies kommt bei einem Stab aus viskoelastischem Material vor. Konnte noch am Anfang der Belastungsdauer mit der Lösung aus Gleichung 5.27 ($w' \ll 1$) gerechnet werden, muss im weiteren Verlauf w' mitberücksichtigt werden. Deshalb wurde ein Verfahren entwickelt, welches von Anfang an die exakte Lösung berechnet. Da heutzutage Dank der schnellen Rechner die Berechnungszeit minimiert worden ist, kann der Stab in beliebig viele einzelne Teile unterteilt und berechnet werden. Es wird weiter gezeigt, dass die Lösung der Differentialgleichung im elastischen Fall auch im linear- bzw. nichtlinear-viskoelastischen Bereich seine Anwendung findet.

Es wird am Anfang die Herleitung der Differentialgleichung für die Auslenkung bei großen Durchbiegungen, also auch im Nachknickbereich, bestimmt. Diese wird nach Euler die *Elastica* genannt. Wichtig dabei ist, dass aufgrund der großen Durchbiegung die Verkürzung des ursprünglichen Lagerabstandes eine Rolle spielt. Von nun an werden die Ableitungen über den Bogen s aufgestellt. Alle Größen, wie Krümmung, Radius, Moment, Steigung und Durchbiegung, sind von nun an Funktionen von s . Die Krümmung κ und der Krümmungsradius ρ einer Kurve sind wie folgt definiert (Bild 5.11):

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.37)$$

mit

φ als Winkel der Durchbiegung
 s als Bogen der Durchbiegung

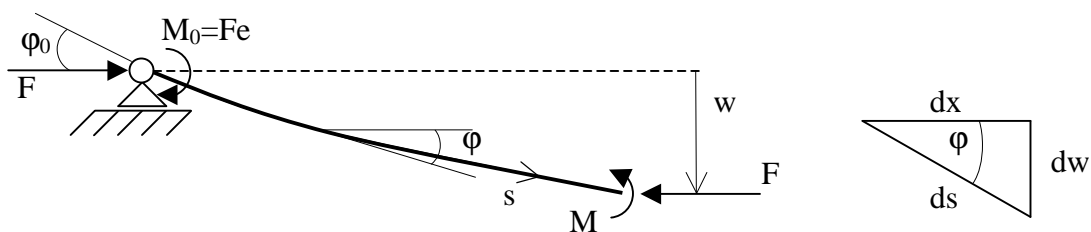


Bild 5.11: Große Verschiebungen und die angreifenden Kräfte am Balken

Das Elastizitätsgesetz ist bezüglich der Krümmung κ und dem am Ort herrschendem Moment M wie folgt gegeben:

$$M = -EI\kappa \quad (5.38)$$

bzw.

$$M = -EI \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.39)$$

Das Moment ergibt sich nach Bild 5.11 zu:

$$M = Fw + M_0 = F(w + e) \quad (5.40)$$

Wird die Gleichung 5.40 für das Moment in das Elastizitätsgesetz 5.39 eingesetzt, so folgt eine Differentialgleichung mit zwei von sich selber abhängigen Größen.

$$EI \frac{d\varphi}{ds} = -F(w + e) \quad (5.41)$$

Da aber nach Bild 5.11 für die Durchbiegung $dw = ds \sin(\varphi)$ gilt, erhält man bei weiterer Umstellung und Differentiation nach ds für die Gleichung 5.41 folgenden Ausdruck:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda^2 \sin(\varphi) = 0 \quad (5.42)$$

mit

$$\lambda^2 = \frac{F}{EI} \quad (5.43)$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie (5.42) ist in dieser Form für jede beliebig große Deformation bzw. Auslenkung gültig. Eine andere Schreibform der Gleichung 5.41 kann durch trigonometrische Umwandlung und $w' = dw/ds$ aufgestellt werden:

$$\frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} + \lambda^2 w = -\lambda^2 e \quad (5.44)$$

Es ist deutlich, dass die Gleichung 5.44 für kleine Winkel ($w' \ll 1$) und $ds \approx dx$ die Gleichung 5.30 ergibt. Das eingeleitete Moment $M_0 = Fe$ wird in Gleichung 5.43 als Lösung einer

Integrationskonstante verwendet. Die triviale Lösung für $\varphi(s) = 0$ ist die einzige bei $F < F_{krit}$. Um auf die Lösung für $F > F_{krit}$ zu gelangen, müssen ein paar kleine Umformungen gemacht werden, so ist mit

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \frac{d\varphi}{ds} = \varphi' \frac{d(\varphi')}{d\varphi} \quad (5.45)$$

und der Integration über $d\varphi$ die Differentialgleichung 5.42

$$\frac{1}{2}\varphi'^2 = \lambda^2 \cos(\varphi) + C \quad (5.46)$$

Setzt man die bis dahin bekannten Randbedingungen ein, so lässt sich die Integrationskonstante C bestimmen:

$$\varphi'(s=0) = -\frac{M_0}{EI} = -\frac{Fe}{EI} \quad \varphi(s=0) = \varphi_0 \quad \frac{F^2 e^2}{E^2 I^2} = \lambda^4 e^2 \quad (5.47)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{E^2 I^2} - \lambda^2 \cos(\varphi_0) = \frac{1}{2} \lambda^4 e^2 - \lambda^2 \cos(\varphi_0) \quad (5.48)$$

Damit ergibt sich dann für die Krümmung φ' der Biegelinie die folgende Gleichung:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = \pm \sqrt{2\lambda^2 [\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)] + \lambda^4 e^2} \quad (5.49)$$

Durch nochmalige Integration über φ und Trennung der Variablen ergibt sich eine Lösungsfunktion für die Neigung der Biegelinie:

$$s = \pm \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2[\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)] + \lambda^2 e^2}} \quad (5.50)$$

Das Vorzeichen „ \pm “ zeigt an, dass der Stab, bei Kenntnis des Anfangswinkels φ_0 je nach Definition des eingeleiteten Moments auf beide Seiten ausknicken kann. Mit Gleichung 5.50 kann jetzt an jeder Stelle s der Neigungswinkel φ und dann durch $dw = ds \sin(\varphi)$ die Durchbiegung $w(s)$ berechnet werden. Dieses Integral ist elementar nicht lösbar und oftmals ist es unmöglich den Anfangswinkel zu bestimmen. Daher werden Näherungslösungen oder die numerische Integration eingesetzt. Bei symmetrischer Knickform kann der Winkel $\varphi(l/2) = 0$

gesetzt und dann mittels der Numerik der Anfangswinkel ermittelt werden. Später wird an jeder Stelle s der Durchbiegungswinkel φ berechnet. Der Ansatz für φ_0 sieht wie folgt aus:

$$\frac{l}{2} = \pm \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_0}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{2[1 - \cos(\varphi_0)] + \lambda^2 e^2}} \quad (5.51)$$

Dieses Verfahren kann man auch für ein viskoelastisches Material heranziehen. Wenn der Balken in viele kleine in sich homogene Teilabschnitte gedacht wird, so gilt in jedem einzelnen Teilabschnitt die Differentialgleichung bzw. die Integralgleichung. Lediglich ändern sich in jedem einzelnen Abschnitt das eingeleitete Moment (die Summe der vorangegangenen) und aus der Gesamtlänge werden Δs . Auch ist dann in jedem Abschnitt das λ , was über die Länge nicht mehr einheitlich ist, konstant.

Für die eindeutige und vollständige Lösung einer Differentialgleichung ist die Kenntnis der Randbedingungen unerlässlich. So braucht eine Differentialgleichung 1. Ordnung auch einen Wert zur Bestimmung der Integrationskonstante. Die Gleichung 5.41 ist eine solche Differentialgleichung die durch Randbedingungen bestimmt werden kann. Leider ist die Kenntnis der Randbedingungen dazu vor dem Versuch nicht bekannt. Es wird hier nur trotzdem kurz die elastische Lösung, bei Kenntnis der maximalen Durchbiegung oder des Anfangswinkels, angegeben. Gegeben sei die Differentialgleichung nach 5.41:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\lambda^2 (w + e) \quad (5.52)$$

mit $ds = dw/\sin(\varphi)$ und der Integration ergibt sich dann mit der Integrationskonstante C

$$\cos(\varphi) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} w^2 + ew + C \right) \quad (5.53)$$

Durch das Einsetzen der bekannten Randbedingung $w = 0$ für $\varphi = \varphi_a$ oder $\varphi = 0$ für $w = w_{max}$ erhält man je nach Kenntnis der Anfangsgrößen folgende Gleichungen:

$$\cos(\varphi) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} w^2 + ew + \frac{1}{\lambda^2} \cos(\varphi_a) \right) \quad (5.54)$$

$$\cos(\varphi) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} w^2 + ew + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2} w_{max}^2 - ew_{max} \right) \quad (5.55)$$

Diese Lösungen können zweckmäßig mit Hilfe der quadratischen Umformung und der Darstellung der logischen Lösung auch wie folgt geschrieben werden:

$$w = \sqrt{e^2 + \frac{2}{\lambda^2} [\cos(\varphi) - \cos(\varphi_a)]} - e \quad (5.56)$$

Man kann auch direkt von der Differentialgleichung 5.42 ausgehen und diese Randwertaufgabe mittels des Differenzenverfahrens lösen.

$$\varphi'' + \lambda^2 \sin(\varphi) = 0 \quad (5.57)$$

Die Theorie dieser Methode geht davon aus, den Differentialquotienten direkt durch einen Differenzenquotienten zu approximieren. Will man an einem bestimmten Ort x_n die Steigung erfahren, dann ist der weitere Verlauf x_{n+1} dieser Funktion von Nöten. Damit kann mit Hilfe der Taylorentwicklung folgende Reihe aufgestellt werden:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + \Delta x) = y(x_n) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_n} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_n} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x_n} (\Delta x)^3 + \dots \quad (5.58)$$

Wenn man nur die ersten zwei Terme mitnimmt, so kann nach dem gesuchten Differentialquotienten aufgelöst werden. Der dabei entstehende Fehler ist in der Größenordnung von $O(\Delta x)$. Weil die Werte hier an der Stelle x_{n+1} berechnet sind, wird dieser Quotient der vordere (v), wie in Bild 5.12 dargestellt, Differenzenquotienten genannt.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + O(\Delta x) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \quad (5.59)$$

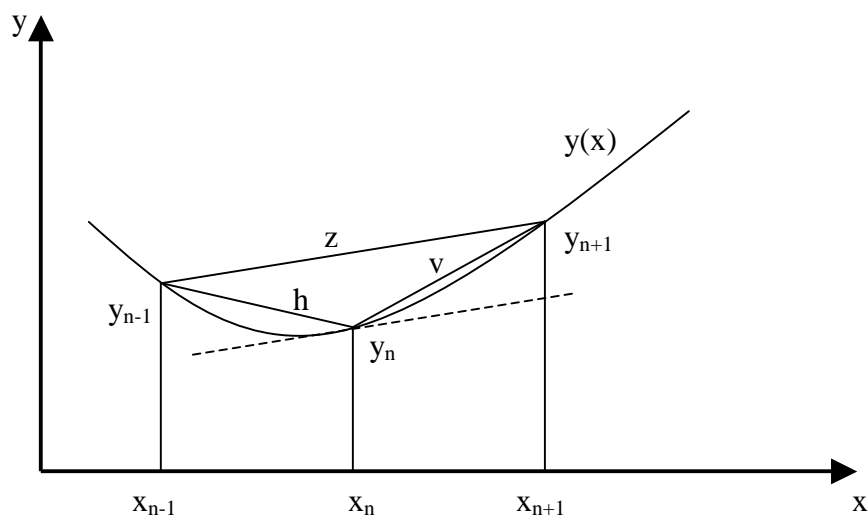


Bild 5.12: Herleitung des Differenzenquotienten

Analog dazu kann die Reihenentwicklung in die andere Richtung durchgeführt werden. Dann erhält man schließlich den hinteren (h) Quotienten mit der gleichen Fehlerordnung $O(\Delta x)$.

$$y(x_{n-1}) = y(x_n - \Delta x) = y(x_n) - \frac{dy}{dx}\Big|_{x_n} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{x_n} (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 y}{dx^3}\Big|_{x_n} (\Delta x)^3 + \dots \quad (5.60)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x_n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} \quad (5.61)$$

Um eine höhere Genauigkeit zu erzielen, müssen mehrere Glieder der Reihen berücksichtigt werden. Dazu wird die vordere Taylorreihenentwicklung (5.58) von der hinteren (5.60) abgezogen und dadurch eliminiert man die zweite Ableitung. Die höheren Ableitungsglieder können aufgrund ihrer Ordnung vernachlässigt werden. Dies führt dann zu einem zentralen Differenzenquotienten (z), welches jetzt eine Fehlerordnung von $O(\Delta x)^2$ besitzt. Da wegen dem Einsatz von leistungsstarken Rechnern das Δx sehr klein gewählt werden kann, bräuchte es eigentlich keine weitere Genauigkeitserhöhung. Falls man dies doch will, stehen Verfahren wie z.B. das Mehrstellenverfahren zur Verfügung. Das einfache zentrale Differenzenquotienten (z) lautet dann:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x_n} \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} \quad (5.62)$$

Höhere Ableitungen lassen sich ebenfalls durch Differenzialquotienten approximieren. Wenn die vordere Taylorreihenentwicklung (5.58) zu der hinteren (5.60) addiert wird und wiederum höhere Ableitungsglieder vernachlässigt werden, erhält man die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{x_n} \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.63)$$

Die zweite Ableitung hat ebenfalls die Fehlerordnung von $O(\Delta x)^2$. Damit stehen jetzt zwei Möglichkeiten zur Verfügung, um die Differentiale in einer Differentialgleichung mit Stützstellen abzubilden. Diese können dann anhand von Rechnern in beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Somit lauten die Differenzen der ersten und zweiten Ableitung wie folgt:

$$\phi' \approx \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2\Delta s} \quad (5.64)$$

$$\phi'' \approx \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{(\Delta s)^2} \quad (5.65)$$

Der Balken der Länge l wird in die gewünschte Anzahl Δs unterteilt und an jeder einzelnen Stützstelle wird die Differentialgleichung, die ja auch ohne Einschränkung an jeder Stelle gilt, berechnet. Folglich sieht die Differentialgleichung 5.42 für die Elastica, die jetzt jede große Auslenkung zulässt und im technischen Rahmen auch exakt berechnet, so aus:

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} = -(\Delta s)^2 \lambda^2 \sin(\varphi_n) \quad (5.66)$$

Damit stehen zwei Rekursionsformeln zur Berechnung des elastisch ausgeknickten Balkens zur Verfügung. Bei der Annahme symmetrischer Durchbiegung genügt es nur die Hälfte des Balkens zu berechnen. Wird der Balken in N -Stützstellen unterteilt, so ergibt sich für die Schrittweite Δs folgendes:

$$\Delta s = \frac{l}{2N} \quad (5.67)$$

Die Approximation der ersten Ableitung liefert eine Randbedingung mit dem eingeleiteten Moment. Sie ist $\varphi'(0) = -M_0/EI$ und damit ergibt sich dann mit (5.64):

$$\varphi_{start} = \varphi_1 + 2\Delta s \frac{M_0}{EI} = \varphi_1 + 2\Delta s \frac{Fe}{EI} = \varphi_1 + 2\Delta s \lambda^2 e \quad (5.68)$$

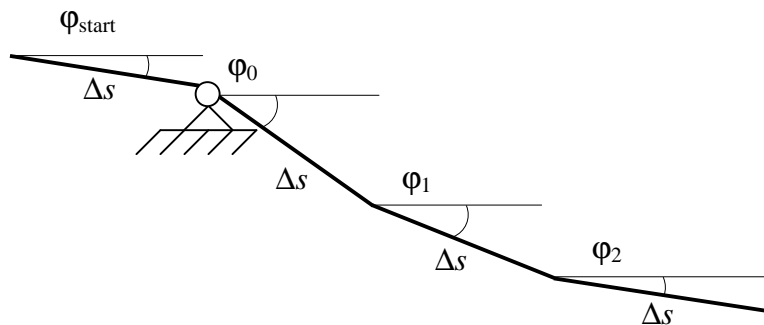


Bild 5.13: Elemente für das Differenzenverfahren

Der Winkel φ_{start} ist ein Startwert der frei gewählt werden kann. Doch es ist empfehlenswert für die Berechnungsdauer, diesen Ansatzwert so nah wie möglich am exakten Wert zu wählen. Ein kleiner Trick zur Bestimmung ist es, diesen Wert mit dem der Lösung für die linearisierte Differentialgleichung zu besetzen.

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0 \quad (5.69)$$

Dessen Lösung mit den Randbedingungen $\varphi(l/2) = 0$ und $\varphi'(0) = -M_0/EI$ ist dann:

$$\varphi = \lambda e \tan\left(\lambda \frac{l}{2}\right) \cos(\lambda s) - \lambda e \sin(\lambda s) \quad (5.70)$$

Der Winkel φ_{start} ist gegeben mit $s = 0$ und lautet:

$$\varphi_{start} = \lambda e \tan\left(\lambda \frac{l}{2}\right) \quad (5.71)$$

Dieser Wert wird in die Gleichung 5.68 eingesetzt und damit erhält man dann den Wert für den nächsten Winkel φ_l . Somit kann über den ganzen Balken mit den N-Stützstellen die Winkel φ_n aus der Rekursionsformel 5.66 ermittelt und dadurch die Durchbiegung berechnet werden, für die folgendes gilt:

$$w_n = \Delta s \sum_{i=0}^N \sin(\varphi_i) \quad (5.72)$$

$$M_n = F(w_n + e) \quad (5.73)$$

Wie sich aus vielen neuen und in der Vergangenheit durchgeführten Versuchen gezeigt hat, kann die Dehnung über die Balkenhöhe als konstant angenommen werden (schubstarr). Diese Annahme konnte sich auch bei relativ hohen Balken bestätigen. Es wurde ein Experiment mit einem Balken großer Höhe, dessen Material viskoelastisch war, aufgebaut. Über die Höhe hat man, quer zur Länge, Linien gezogen und den Balken in der Mitte mit einer sehr großen Last belastet. Nach einer sehr langen Zeit (4 Monate) konnte man noch die Parallelität der Linien untereinander und die Senkrechtigkeit bezüglich der ausgelenkten Länge s beobachten. Damit folgen für Dehnung und Spannung:

$$\varepsilon_n(z) = \frac{2z}{h} \varepsilon_{n,max} \quad (5.74)$$

$$M_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_n(z) E z dA = \frac{2}{h} \varepsilon_{n,max} E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dA = \frac{2}{h} \varepsilon_{n,max} EI \quad (5.75)$$

$$\varepsilon_{n,max} = \frac{M_n h}{EI} = \frac{M_n}{EW} \quad (5.76)$$

oder aus der Differentialgleichung der Kinematik:

$$\varepsilon_{n\max} = \frac{h}{2} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}}{2\Delta s} \quad (5.77)$$

$$\sigma_n(z) = \varepsilon_n(z) E \quad (5.78)$$

wobei W = Widerstandsmoment und $\varepsilon_{n\max}$ die Maximaldehnung am äußeren Rand $h/2$ des Balkens ist.

Als Abbruchkriterium gilt, dass der Winkel φ_N bei $s = l/2$ minimal oder Null wird. Die Iterationen über die Gleichungen 5.66 und 5.68 läuft solange, bis das gewünschte Kriterium erreicht ist. Danach können an jeder Stelle die Winkel φ_n und die Durchbiegungen w_n mit der Gleichung 5.48 angegeben werden. Jetzt ist es möglich, alle erwünschten Größen wie Winkel, Auslenkung, Moment, Spannung und Dehnung über die Balkenlänge und Höhe anzugeben. Dazu wurde am Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung ein Programm geschrieben und mit den Experimenten verglichen. Es hat sich ergeben, dass eine Aufteilung des halben Balkens in ein Bereich von $1000 \leq N \leq 10000$ im Rahmen der technischen Messbarkeit völlig ausreichend ist.

Es hat sich aus der Literatur [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 101] und aus Versuchen gezeigt, dass diese Gleichungen, im Rahmen der Annahmen, auch bei großen Durchbiegungen über den ganzen elastischen Bereich gültig sind.

Auf den folgenden Diagrammen (5.14-5.16) sind die elastischen Antworten (Auslenkungen) der Werkstoffe PMMA, PC und PVC in Abhängigkeit der Druckkraft F dargestellt. Die Durchbiegung wurde mit einem Induktivaufnehmer gemessen und mit der oben beschriebenen Iteration nachgerechnet. Bei PC ließen sich ab einer bestimmten Last keine experimentellen Messpunkte erfassen, da aufgrund des niedrigsten Elastizitätsmoduls die Durchbiegungen extrem groß wurden. Die gezeigte Auslenkung w ist die maximale Durchbiegung in der Mitte des Balkens bei $s = l/2$.

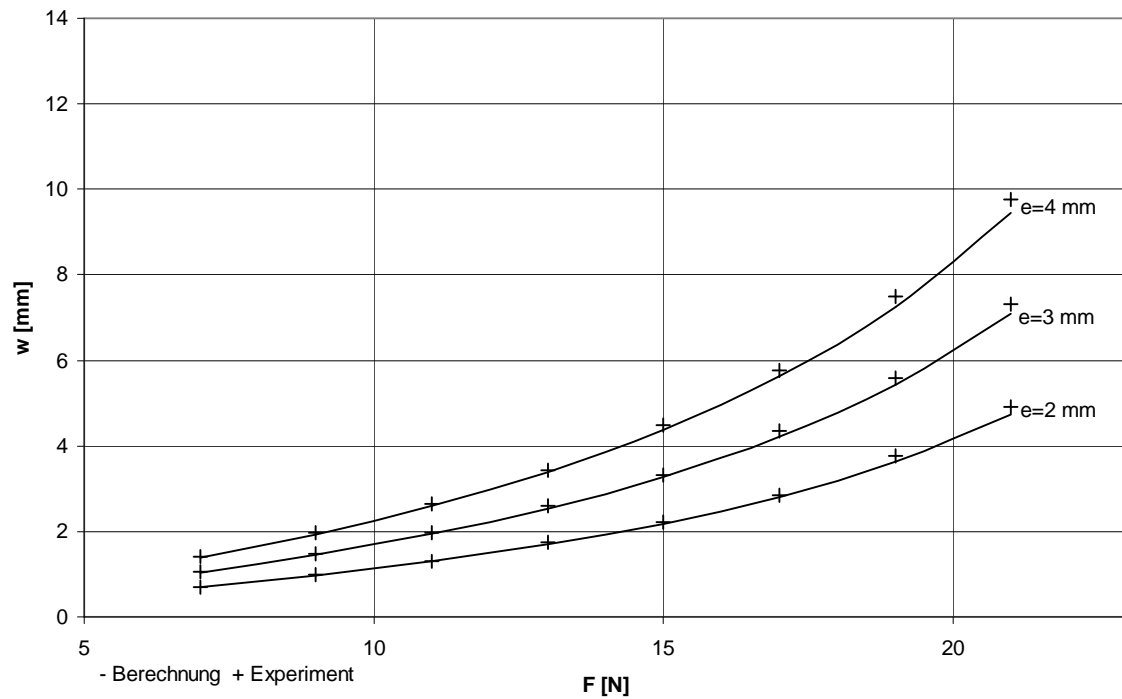


Bild 5.14: Elastische Durchbiegung von PMMA in Abhängigkeit der Druckkraft bei verschiedenen Exzentrizitäten e

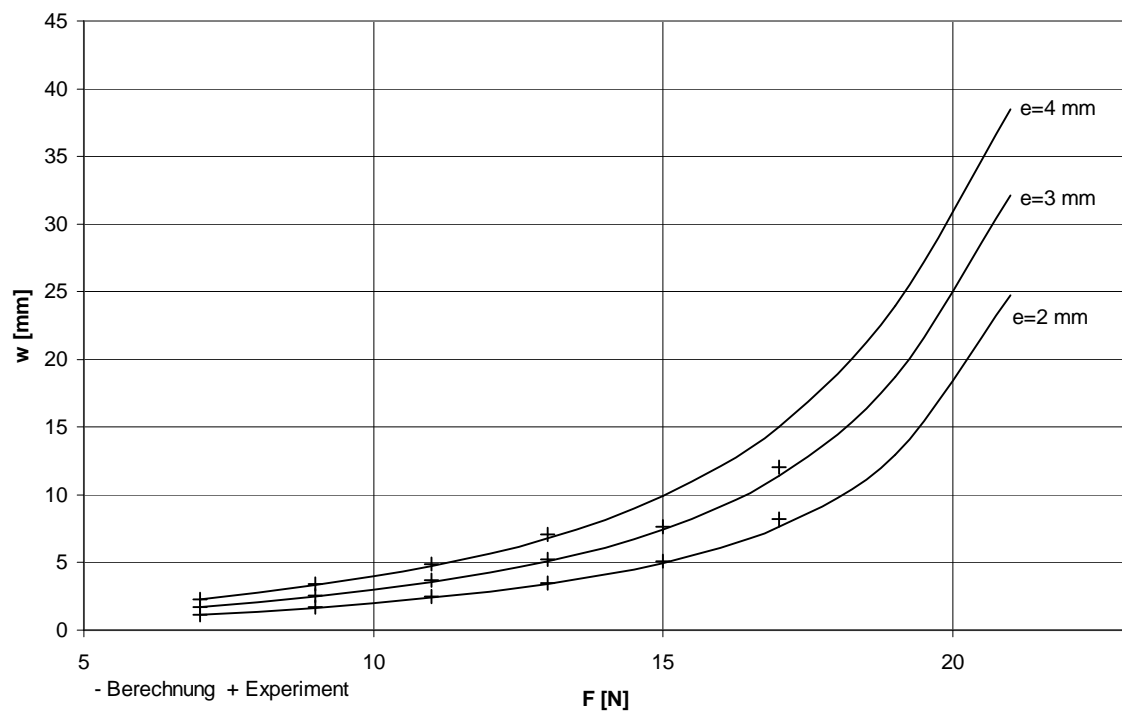


Bild 5.15: Elastische Durchbiegung von PC in Abhängigkeit der Druckkraft bei verschiedenen Exzentrizitäten e

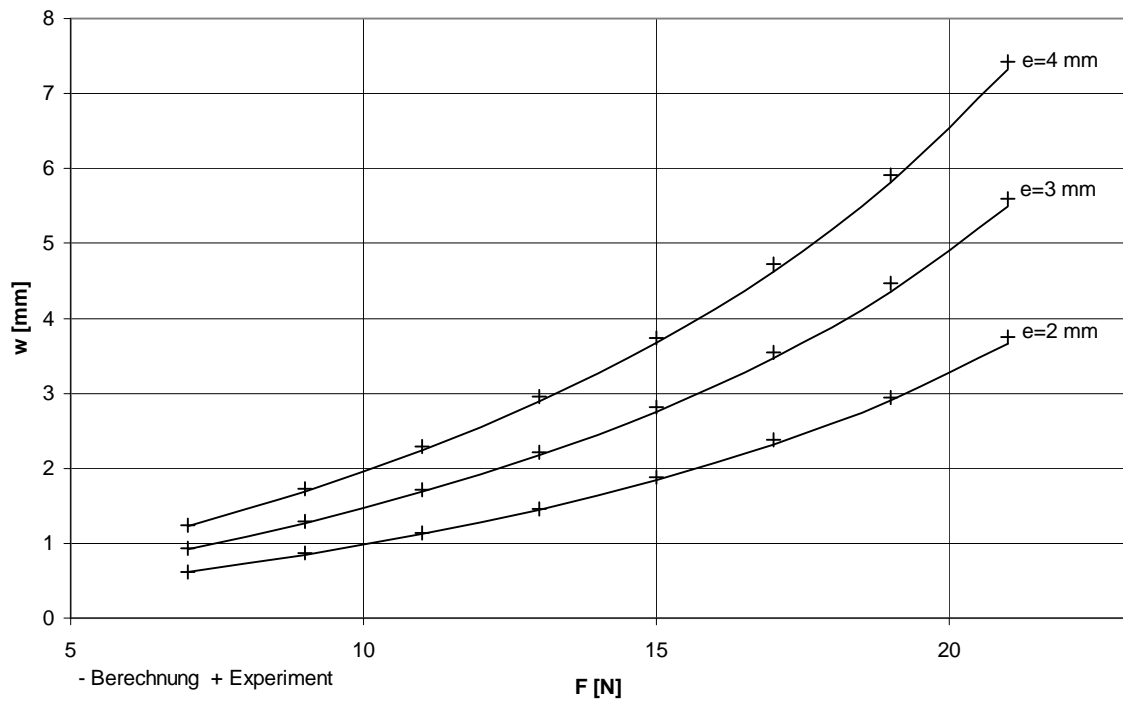


Bild 5.16: Elastische Durchbiegung von PVC in Abhängigkeit der Druckkraft bei verschiedenen Exzentrizitäten e

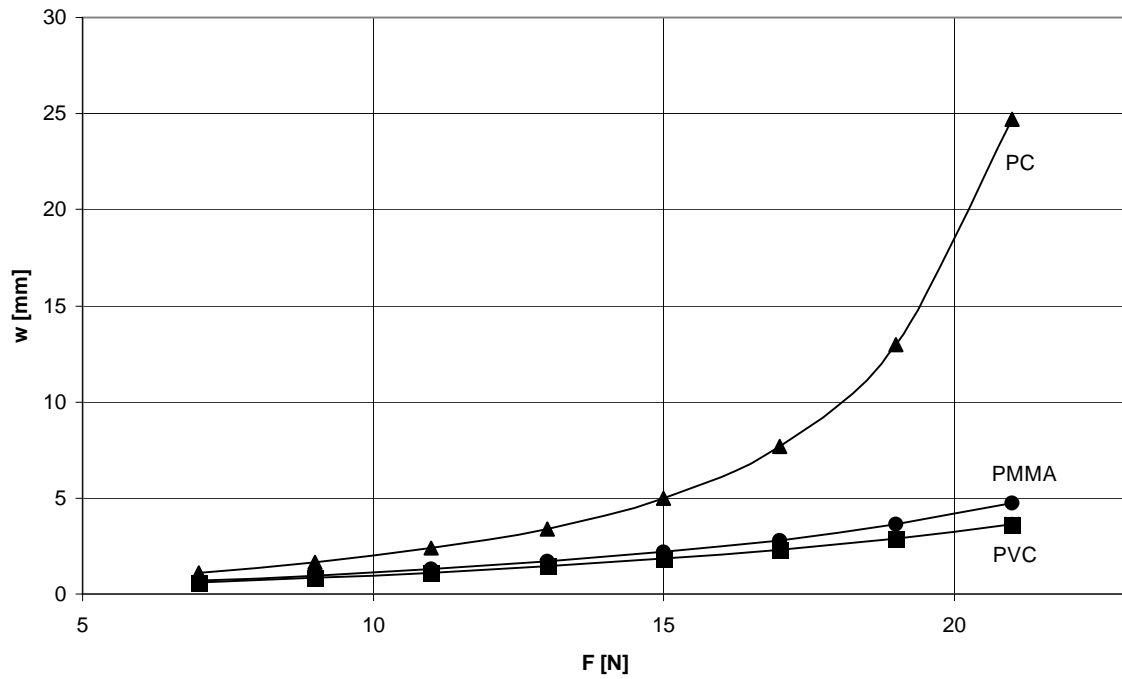


Bild 5.17: Vergleich der maximalen Durchbiegung für PMMA, PC und PVC bei gleicher Exzentrizität $e=2$ mm

Stabilität

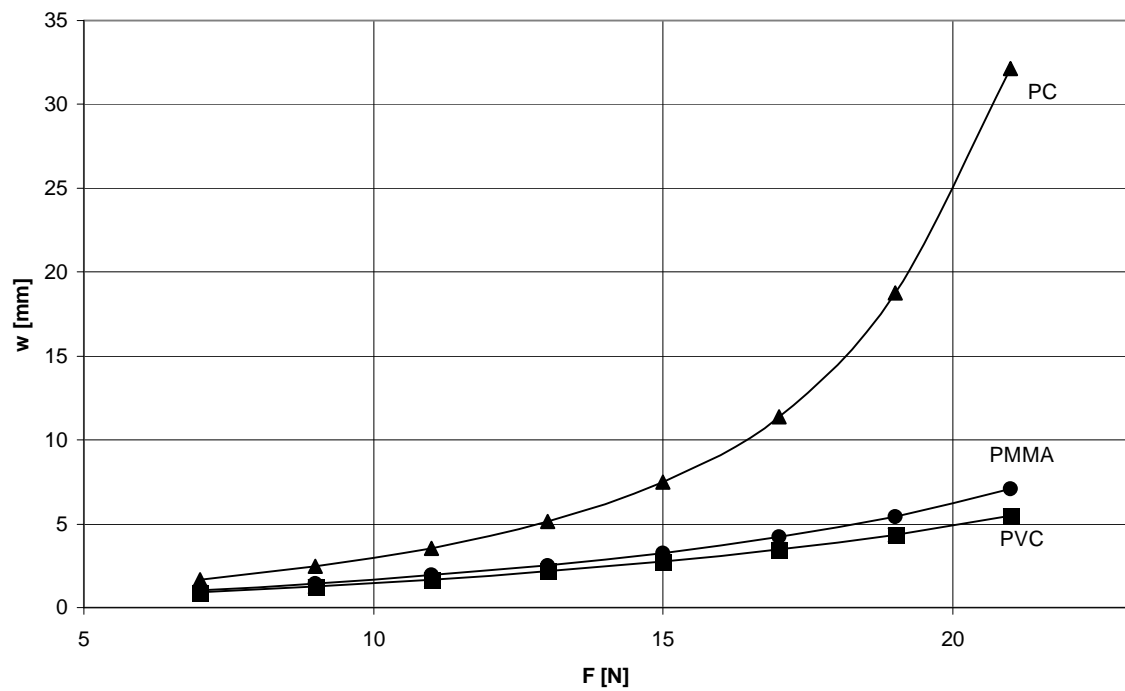


Bild 5.18: Vergleich der maximalen Durchbiegung für PMMA, PC und PVC bei gleicher Exzentrizität $e=3$ mm

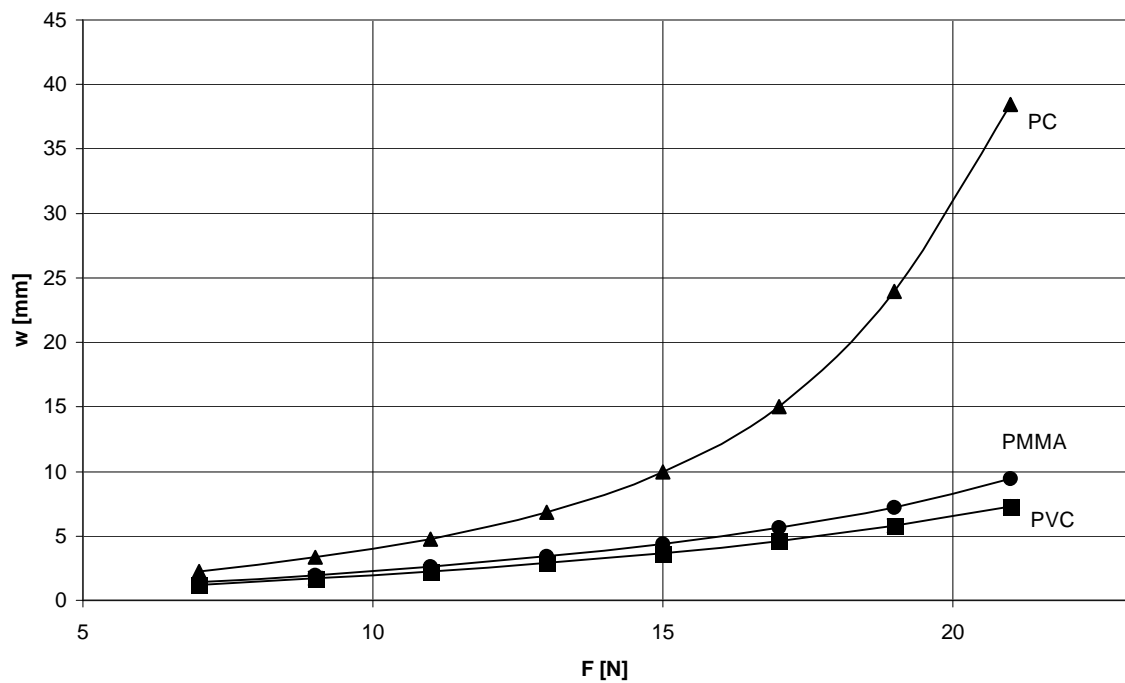


Bild 5.19: Vergleich der maximalen Durchbiegung für PMMA, PC und PVC bei gleicher Exzentrizität $e=4$ mm

Es lässt sich erkennen, dass die Kurven nicht linear verlaufen, sondern mit steigender Kraft immer höhere Werte annehmen. Dies ist dadurch erklärbar, dass die elastische Auslenkung bezüglich der Knickkraft immer empfindlicher wird. Da durch die höhere Kraft das Moment im Nachknickbereich bedeutend steigt, fällt der Balken in einen Stabilitätsort der im Verhältnis weiter weg liegt. Im Gegensatz dazu wirkt sich die Erhöhung der Exzentrizität auf die Durchbiegung nur linear aus. Bei doppeltem e ist damit nur eine doppelte Auslenkung zu erwarten, was auch anschaulicher zu erklären ist, wenn man sich die Lösung der linearisierten Differentialgleichung, also für kleine Durchbiegungen $s \approx x$, anschaut. Dieser Zusammenhang ist bei allen Materialien zu sehen, was erkennen lässt, dass abgesehen von der Höhe der Auslenkung, die Kraft und die Exzentrizität einen wesentlichen geometrischen Einfluss der Durchbiegungsform haben.

Auf den Bildern 5.17-5.19 ist das Verhalten der einzelnen Werkstoffe bei unterschiedlichen Exzentrizitäten zu sehen. Diese Kurven wurden mit dem beschriebenen Programm berechnet. Sie zeigen deutlich, dass der Elastizitätsmodul eine wichtige Rolle spielt. Wie zu erkennen, hat aufgrund des geringsten Elastizitätsmoduls PC die höchste Auslenkung. PVC hat den höchsten Elastizitätsmodul bzw. die Steifigkeit und dadurch ist die Durchbiegung dieses Material im Vergleich am geringsten. Der Einfluss der Kraft ist auf das Material nicht linear. Es wird weiter deutlich, dass im Bereich der viskoelastischen Phänomene dieses Verhalten auch stark vom zeitlichen Verhalten der Steifigkeit abhängen muss.

Als kurzer Nachtrag zum eingeleiteten Moment sei erwähnt, dass dieses Moment durch die wachsende Durchbiegung immer geringeren Einfluss hat.

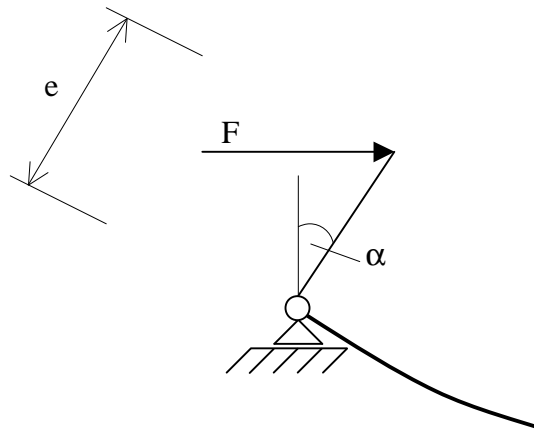


Bild 5.20: Veränderung des eingeleiteten Momentes mit zunehmender Durchbiegung

Das Moment M_0 berechnet sich dann bei richtungstreuer Kraft zu:

$$M_0 = Fe \cos(\alpha)$$

Je größer die Durchbiegung und damit α wird, desto niedriger wird das Moment. Dieses kann in dem beschriebenen Programm ohne weiteres mitprogrammiert werden. Dadurch wird auch im viskoelastischen Fall zu jeder Zeit der Einfluss mitberücksichtigt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dieser Einfluss eine vernachlässigbare Wirkung hat. Denn bei großen Durchbiegungen kommt das hauptsächlichste Moment durch die Verformung w . Bei kleinen Auslenkungen kann $\alpha \approx 0$ angenommen werden.

5.2 Viskoelastische Stabilität

Ein idealer dünner Balken, auch aus viskoelastischem Material, wird bei einer exakt zentralen Druckkraft eine seitliche Auslenkung bzw. eine Knickung erfahren. Je nach Höhe dieser Kraft und gewähltem Werkstoffmodell ist beim Überschreiten die spontane Durchbiegung des Balkens elastisch. Sie erreicht einen benachbarten Stabilitätspunkt. Diese gerade zur Knickung nötige Kraft wird die kritische Kraft bezeichnet und sie ist abhängig vom Material, Geometrie des Balkens, der Länge und den Lagerbedingungen. Bleibt jedoch für einen elastischen Balken diese überschrittene Kraft ($F > F_{krit}$) konstant, so verändert sich die Auslenkung w nicht mehr weiter. Bei einem viskoelastischen Balken ist dies nicht der Fall. Die Durchbiegung ist jetzt genauso wie die Steifigkeit des Balkens eine Funktion der Zeit. Mit fortwährender Zeit wird die Auslenkung nun wachsen und dadurch auch in jedem Moment sich die Zustandsbedingungen, wie Dehnung, Spannung und Biegemoment, ändern. Jede erreichte Durchbiegung kann nicht als eine stabile Gleichgewichtslage betrachtet werden und man kann sagen, dass jede Auslenkung $w(t_i)$ zur Zeit t_i eine benachbarte und dahin treibende Lage $w(t_{i+1})$ hat, die zur Zeit t_{i+1} erreicht wird. Viele Versuche haben auch gezeigt, dass obwohl die Druckkraft kleiner als die kritische Kraft bleibt, der Balken aufgrund der abnehmenden Steifigkeit bei einer kritischen Zeit ausknickt. Damit ist bei einem viskoelastischen Material die kritische Kraft auch eine Funktion der Zeit. Folglich kann ein Träger der am Anfang noch einer Belastung stand hielt, mit der Zeit kollabieren.

Bei einem exzentrisch belasteten Balken ist die spontane Auslenkung, trotz des viskoelastischen Materials, gleich der des elastischen Balkens. Dies kommt daher, da die Approximation des Werkstoffmodells (Prony-Reihen) zur Zeit $t = 0$ genau den Elastizitätsmodul ergibt. Im weiteren Verlauf der Zeit können sich alle Volumenteile im Rahmen der Kinematik unterschiedlich entwickeln. So kann der Balken nahe der Einspannung noch im linear-viskoelastischen Bereich sein und in der Mitte weit in den nichtlinearen Bereich hineinragen. Dabei breitet sich eine linear-nichtlineare Übergangszone von der Balkenmitte in Richtung der Lager aus. Für die Zeit $t > 0$ kann nun nicht mehr mit den Gleichungen wie im elastischen Fall gerechnet werden. Auch die Differentialgleichung ist jetzt nicht mehr global, sondern nur noch bereichsweise anwendbar. Um dies zu erfassen, musste das bestehende Programm erweitert werden.

Da Tragwerke oftmals großen Druckkräften und gleichzeitig ganz unterschiedlichen Umgebungsbedingungen ausgesetzt sind, ist die Vorhersage ihrer Eigenschaften und ihr Verhalten äußerst wichtig. Es spielen aber auch nicht nur die Belastungen eine große Rolle, sondern auch die Antwort des Materials. Daher ist es unumgänglich den Werkstoff neben der Art der Belastung auch auf die Einwirkdauer der Belastung hin auszulegen. Es ist wichtig zu erwähnen, dass dieses viskoelastische Phänomen nicht nur alleine bei Polymeren, was nur im Rahmen dieser Arbeit hier behandelt wird, sichtbar ist, sondern bei Materialien anderer „Gattungen“ auch zu sehen ist, wie z.B. Metallen die hohen Temperaturen ausgesetzt sind. Deshalb wurden schon relativ früh die theoretischen Herleitungen aufgestellt und zahlreiche Versuche im Hinblick auf die Vorhersagbarkeit und Tragfähigkeit durchgeführt.

Theoretische Untersuchungen über das viskoelastische Knicken bei Metallen und Legierungen unter hohen Temperaturen mit nichtlinearem Materialgesetz wurden von Gerard [124], Rosenthal und Baer [125], Hult [126], Hoff [127], Chapman, Erickson und Hoff [128] und Odquist [129] publiziert. Neben diesen Veröffentlichungen existieren viele weitere die sich mit dem zeitabhängigen Verhalten von Werkstoffen, die ein lineares Materialgesetz besitzen, beschäftigen. In dieser Arbeit wird an Polymeren, deren Material sich nichtlinear mit der Laständerung verhält, das exzentrische Knicken und die Torsion unter isothermen Bedingungen im Hinblick auf den Stabilitätsverlust untersucht.

Es wird gezeigt, dass das Ausknicken von einem viskoelastischen Material zur Zeit $t = 0$ elastisch ist und somit die oben aufgeführten Berechnungsgleichungen im elastischen Fall (Elastica) angewendet werden können. Diese Gleichungen verlieren ihre Gültigkeit für $t > 0$ nicht, sie sind jetzt dann nur noch bereichsweise anwendbar. Da das Material einen „Memory-Effekt“ besitzt, müssen für jeden einzelnen Zeitschritt die Informationen aller vorangegangenen mitberücksichtigt werden. Das ist ein großer Aufwand, doch die Berechnungszeit hält sich Dank der schnellen Rechner in Grenzen. Weiter wird das Torsionsverhalten eines viskoelastischen Werkstoffs untersucht. Bei einer bestimmten Torsionsspannung und einem Verdrehwinkel verliert das Material jegliche Widerstandskraft und kollabiert plötzlich. Durch diese zwei entscheidenden Größen, kann eine Energiebetrachtung in Frage kommen.

In dieser Arbeit wird die exzentrische Knickung eines nach Eulerfall II gelagerten Balkens mit einem nichtlinear-viskoelastischen Materialgesetz behandelt. Dabei geht man davon aus, dass die Auslenkungen so groß werden, dass die Theorie der kleinen Deformationen nicht mehr ohne weiteres gilt. Zusätzlich werden aufgrund der wachsenden Durchbiegung die geometrischen Nichtlinearitätseffekte berücksichtigt. Das Knick- und Beulproblem, was als „buckling“ bezeichnet wird, von Balken- und Schalenstrukturen ist ein in der Vergangenheit ziemlich gut erforschtes Gebiet. Es wird häufig von idealen Strukturen ausgegangen und die kritische Kraft, also bei der die Struktur seine Stabilität verliert, berechnet. Da aber kein Bauteil in der Technik als ideal angenommen werden kann, muss man allerdings mit Imperfektionen rechnen. Die Imperfektionen bewirken, dass die Struktur weit unter der Euler'schen kritischen Kraft seine Stabilität verliert. Um aber nicht aufwendige Berechnungsverfahren aufzustellen, werden in der Technik einfache Hilfsmittel, wie z.B. das Omega-Verfahren, verwendet. Neben den mechanischen Belastungsarten die aufgrund der Imperfektionen viele Formen annehmen können und die Berechnung erschweren, ist das Materialverhalten sehr wichtig. Ein viskoelastisches Werkstoffverhalten erhöht die Komplexität einer solchen Berechnung. So kann eine Belastung einer Struktur mit so einem Material über die Zeit sein ganzes Verhalten ändern. Dadurch kann das Bauteil, das ursprünglich unter der kritischen Kraft belastet war, aufgrund des Steifigkeitsverlustes und der Kraftumlagerungen kollabieren. Deshalb wurden schon früh zahlreiche Arbeiten wie von Freudenthal [130], Hilton [131, 132], Kempner und Pohle [133], Kempner [134, 135], Booker [136], Booker, Frankham und Trahair [137], Distefano [138], Ellington [139] und Vinogradov und Glockner [140] zum Thema „viskoelastisches Knicken von exzentrisch belasteten Bauteilen“ durchgeführt. Im allgemeinen behandeln jedoch diese das Problem mit der Annahme der Theorie für kleine Deformationen. Die kritische Zeit beim Knickkriechen, die den Moment des Kollabierens bezeichnet, ist durch eine sehr große Verschiebung bei einer hohen Dehngeschwindigkeit definiert. Unter dieser Annäherung des Problems sind Kempner und Pohle [133] und Hilton [132] zu dem Schluss gekommen, dass das Verhalten von linear-viskoelastischen Balken mit Imperfektionen eine unendliche Verschiebung zur unendlichen Zeit beschreibt, also keine bestimmte kritische Kollabierzeit existiert. Im Gegensatz dazu haben Zyczkowski [141] und Huang [142] herausgefunden, dass diese Behauptung im Widerspruch zur Annahme der geometrisch linearen Theorie steht. Sie haben die Effekte der geometrischen

Nichtlinearität mit zwei unterschiedlichen Kriechgesetzen untersucht. Da die Betrachtung der geometrischen Linearität - Nichtlinearität bei dieser Arbeit wichtig ist, soll kurz darauf eingegangen werden.

Auf dem folgenden Bild 5.21 ist ein exzentrisch belasteter Balken nach Eulerfall I mit einem viskoelastischen Material zu sehen. Zur Zeit $t = 0$ wird er mit der richtungstreuen Kraft F , die niedriger ist als die Euler'sche bzw. kritische Kraft $F_k = 0.25(\pi^2 EI)/l^2$, belastet und für $t > 0$ konstant gehalten.

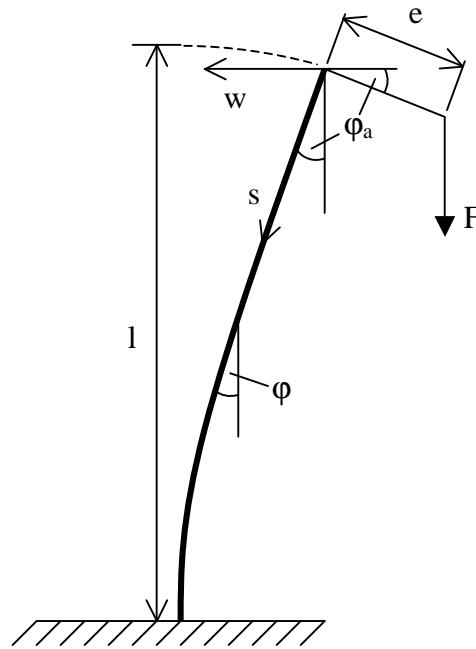


Bild 5.21: Exzentrisch belasteter Balken nach Eulerfall I

Wie in [143, 144] beschrieben, ist das Spannungs-Dehnungsverhalten eines eindimensional belasteten viskoelastischen Materials gegeben durch das Volterra-Integral:

$$\varepsilon(t) = \frac{(1 + \Gamma)\{\sigma(t)\}}{E_0} \quad (5.79)$$

mit E_0 als Elastizitätsmodul und Γ als Kriechoperator das definiert ist mit der zu experimentell bestimmenden Kriechfunktion $J(t-\tau)$.

$$\Gamma\{\sigma(t)\} = \int_0^t J(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (5.80)$$

Mit dem Elastizitätsgesetz ergibt sich dann für die Krümmung an beliebiger Stelle folgendes:

$$\kappa = \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} = \frac{(1 + \Gamma)\{M\}}{E_0 I} \quad (5.81)$$

Für das an jeder Stelle s herrschende Moment M , für die Kinematik und der Randbedingung bei $s = 0$ gilt weiter:

$$M = -F [w + e \cos(\varphi_a)]$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \sin(\varphi) \quad (5.82)$$

$$\varphi_a = \varphi(0, t)$$

Bei der Kombination von Gleichung 5.81 und der Beziehungen 5.82 erhält man die um die Zeitfunktion erweiterte Elastica:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = -\lambda^2 (1 + \Gamma) \{\sin(\varphi)\} \quad (5.83)$$

mit $\lambda^2 = \frac{F}{E_0 I}$

Für die Stelle $s = 0$ ergibt sich $w = 0$ und damit kann eine zeitabhängige Randbedingung für die obere Stelle des Balkens aufgestellt werden.

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right]_{s=0} = -\lambda^2 e (1 + \Gamma) \cos(\varphi_a) \quad (5.84)$$

Die Anfangsbedingung für die Funktion $\varphi(s, t)$ erhält man durch die Annahme, dass sich das Material bei der spontanen Belastung elastisch verhält. Die vorangegangenen Gleichungen würden zur Zeit $t = 0$ das Verhalten eines elastischen Balkens widerspiegeln. Es folgt dann für die Anfangsbedingung:

$$[\varphi(s, t)]_{t=0} = \varphi_e(s) \quad (5.85)$$

Das nichtlineare Kriechknickproblem aus den Gleichungen 5.83-5.85 kann durch die Quasi-Elastische-Methode für die viskoelastische Spannungsanalyse nach Schapery [61] berechnet

werden. Diese Methode wurde durch zahlreiche Experimente bestätigt. Dadurch kann die Antwort der in der Technik verwendeten Materialien die ein nachlassendes Gedächtnis besitzen, durch Werkstoffe ersetzt werden, die ein imaginäres elastisches, aber dennoch sich zeitlich veränderndes Verhalten aufweisen. Diese stark vereinfachende Approximation für ein eindimensionalen Spannungsfall kann man dadurch erhalten, wenn in Gleichung 5.79 der Kriechoperator $\Gamma\{\sigma(t)\}$ durch den Produkt der Spannung $\sigma(t)$ mit einer Kriechfunktion $\xi(t)$ ersetzt wird. Es folgt dann:

$$\xi(t) = \int_0^t J(t-\tau) d\tau \quad (5.86)$$

Die Kriechfunktion $\xi(t)$ charakterisiert eine monoton ansteigende Funktion bei konstanter Spannung. Sie ist zur Zeit $t = 0$ ebenfalls gleich Null und repräsentiert den elastischen Fall. Damit folgt für die Differentialgleichung 5.83:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = -\hat{\lambda}^2 \sin(\varphi_0) \quad (5.87)$$

mit $\hat{\lambda}^2 = \lambda^2 (1 + \xi(t))$

Der Winkel φ_0 soll die Approximation der exakten viskoelastischen Lösung durch die Quasi-Elastische-Methode darstellen. Damit folgt auch wie oben für die Randbedingung bei dieser Methode:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right]_{s=0} = -\hat{\lambda}^2 e \cos(\varphi_{0a}) \quad (5.88)$$

Die Anfangsbedingung ist, wie zu erwarten war, bei $t = 0$ mit $\xi(t) = 0$ und somit $\hat{\lambda}^2(0) = \lambda^2$ dann auch $[\varphi(s, t)]_{t=0} = \varphi_e(s)$. Unter der Voraussetzung eines zeitabhängigen Materialgesetzes und der Theorie für die elastische Stabilität aus [102] folgt für die maximale Durchbiegung über der Zeit:

$$w_{\max} = l \frac{4\beta(t)[1 - \cos(\delta(t))]}{\pi \sqrt{1 + \xi(t)}} \sqrt{\frac{F_{krit}}{F}} = e \left[\frac{1}{\cos(\delta(t))} - 1 \right] \quad (5.89)$$

mit den zeitabhängigen Parametern:

$$\beta(t) = \chi(t) \sin\left(\frac{\varphi_{0a}(t)}{2}\right) \quad (5.90)$$

$$\delta(t) = \arccos\left(\frac{1}{\chi(t)}\right) \quad (5.91)$$

$$\chi(t) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 e^2 F [1 + \xi(t)] \cos^2(\varphi_{0a}(t))}{16l^2 F_{krit} \sin^2\left(\frac{\varphi_{0a}(t)}{2}\right)}} \quad (5.92)$$

Die Gleichung 5.89 zeigt, dass die Auslenkung w_{max} eine wachsende Funktion ist und ihr Verlauf von zwei Faktoren abhängt, und zwar erstens von der Materialeigenschaft $\xi(t)$ und zweitens vom Kraftverhältnis F_{krit}/F . Damit ist klar, dass ab einem bestimmten Kraftverhältnis und zu einer bestimmten Zeit die lineare von der nichtlinearen Theorie abweicht. Dadurch ist es unumgänglich die geometrischen Nichtlinearitätseffekte außeracht zu lassen. Diese substantielle Untersuchung wurden von [143] mit den Annahmen der Bernoulli-Euler-Theorie und der Quasi-Elastischen-Methode nach Schapery [61] durchgeführt. Diese Arbeit hat gezeigt, dass es im Fall von geometrischer Nichtlinearität keine unendliche Auslenkung zur unendlichen Zeit existiert wie im Gegensatz zur linearen Theorie und dass es nur eine Übereinstimmung der beiden Annahmen für relativ kleine Deformationen gibt. Ab einer bestimmten Kraft ändern sich die geometrischen Effekte so wesentlich, dass die Struktur sich auf das Material auswirkt. Die Nichtlinearität des Materials und die geometrische Nichtlinearität werden in der Arbeit von Touati und Cederbaum [145] beschrieben. Im nachfolgenden soll qualitativ der Verlauf einer linearen und nichtlinearen Analyse in einem Diagramm dargestellt werden (Bild 5.22).

Es hat sich jedoch auch aus Versuchen gezeigt, dass das Verhältnis der Exzentrizität zu der Länge des Balkens bei der Behandlung eine Rolle spielt. Je kleiner e/l und F/F_{krit} ist, desto später weicht die Linearitätskurve von der Nichtlinearitätskurve ab. Ein praktischer Wert für ein Fehler von bis zu 10 % ist ein Verhältnis von $e/l \approx 0.015$ und $F/F_{krit} \approx 0.067$. Die maximalen Werte die in dieser Arbeit als Parameter hergenommen wurden, betragen für Eulerfall II: $l = 2.154 \text{ mm}$ (da hier Eulerfall I), $e = 4 \text{ mm}$ und $F = 21 \text{ N}$. Damit würde man unter der erlaubten Fehlerquote bleiben. Doch im Programm ist die Programmierung der geometrischen Nichtlinearität, wie oben schon beschrieben, sehr schnell durchgeführt.

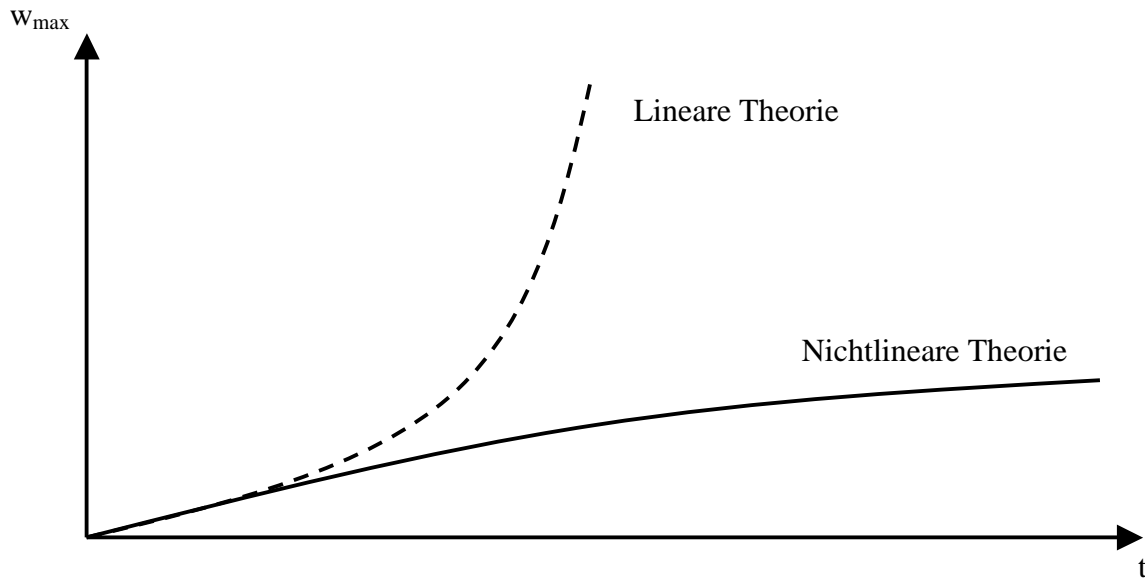


Bild 5.22: Verlauf der unterschiedlichen Annahmen

Die im Rahmen dieser Arbeit zur Untersuchung des viskoelastischen Knickens verwendeten Materialien waren PMMA, PC und PVC. Schlanke Balken bzw. Stäbe mit der Höhe $h = 3 \text{ mm}$, Länge $l = 154 \text{ mm}$ und Breite $b = 10 \text{ mm}$ wurden hergestellt. Damit ergibt sich für die Querschnittsfläche $A = 30 \text{ mm}^2$ und für das Flächenträgheitsmoment $I = 22.5 \text{ mm}^4$ des Stabes. Die verwendeten Exzentrizitäten zur Einleitung des konstanten Biegemomentes $M_0 = Fe$ variierten zwischen $e = 2,3$ und 4 mm . Die Kraft F wurde in 2 N Schritten von Anfangs 7 N bis auf 21 N gesteigert. Die Druckkraft, die vorher mit Gewichten eingestellt worden war, wird mittels dafür konzipierten Lagern über die Metallplatten auf die Probe aufgebracht. Der Abstand vom Kraftangriffspunkt und der Verschraubstelle betrug unter zwei Millimeter. Die Aufbringung der Kraft in die Probe erfolgte mit Hilfe eines um 120° gefrästen Keils. Dadurch konnte die Kraft richtungstreu eingeleitet werden und die Durchbiegung des Stabes unbehindert erfolgen. Die Durchbiegung wurde an der Mitte des Stabes mit einem Induktiv-aufnehmer gemessen. Die Messdaten sind dann über einen Verstärker, der zugleich auch die Wheatstonesche Brücke vervollständigte, am Rechner erfasst worden. In Bild 5.23 ist die Probe dargestellt:

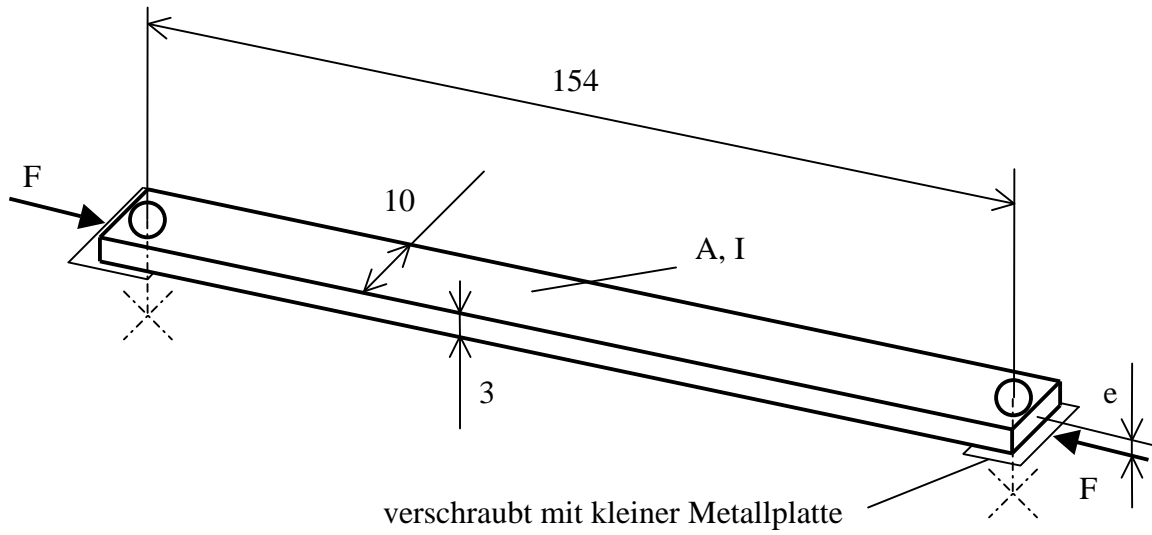


Bild 5.23: Knickprobe mit Exzentrizität



Bild 5.24: Proben aus unterschiedlichen Materialien

Im nächsten Bild 5.25 ist die Lageraufnahme zu sehen. Sie gewährleistet eine sehr leichte reibungsfreie und richtungstreue Krafteinleitung.

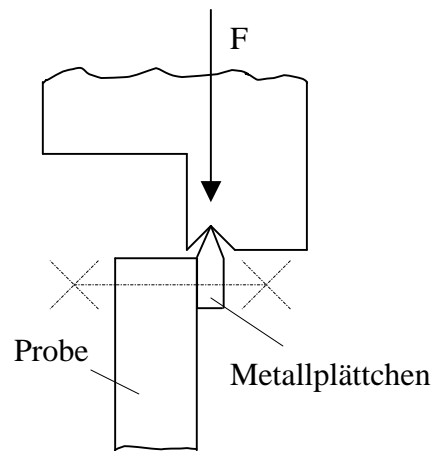


Bild 5.25: Lageraufnahme

Aus den Kriech-, Relaxations- und Kurzzeitversuchen ergaben sich für die Materialparameter mit den Prony-Reihen für diese in der Industrie hergestellten Werkstoffe

$$J(t) = J_0 + g_t(\sigma) \sum_{i=1}^m J_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})$$

$$g_t(\sigma) = ae^{b\sigma} + c$$

(5.93)

$$E(t) = E_0 - h_t(\varepsilon) \sum_{i=1}^m E_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})$$

$$h_t(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3$$

folgende Werte:

[mm ² /N]	PMMA	PC	PVC
J ₀ =	0,00029116040654	0,00041503070000	0,00026449370000
J ₁ =	0,00000641084959	0,00001043233725	0,00000726444601
J ₂ =	0,00000505945159	0,00000049211185	0,00000019304886
J ₃ =	0,00000426690298	0,00000431986210	0,00000192637243
J ₄ =	0,00000653641258	0,00000524171177	0,00000196497882
J ₅ =	0,00000917511756	0,00000805356735	0,00000377577719
J ₆ =	0,00002947195718	0,00001143191151	0,00001057135666

Stabilität

[N/mm ²]	PMMA	PC	PVC
E ₀ =	3434,5329	2409,4603	3780,8084
E ₁ =	76,6338	59,4796	96,1130
E ₂ =	52,4972	2,2523	8,0034
E ₃ =	48,2524	23,8012	25,3350
E ₄ =	66,9363	28,0280	26,2530
E ₅ =	95,6023	41,9268	49,9584
E ₆ =	259,5462	56,3748	130,0529

[]	PMMA	PC	PVC
a =	0,42342332	0,20820021	4,98630508
b =	0,07585104	0,08926523	0,03028022
c =	0,55691074	0,49729451	-5,02531523

[]	PMMA	PC	PVC
a ₃ =	-295284,478	36128,9909	356076,606
a ₂ =	4922,46866	-1546,02476	-3832,22965
a ₁ =	-51,778177	4,65596166	-27,8382675
a ₀ =	1,06331785	1,0058737	1,0515636

Hierbei ist zu beachten, dass der Wert b die Einheit [mm²/N] besitzt und die Werte für die Koeffizienten $a_0 \dots a_3$ ohne Einheit und deshalb so groß sind, weil die Dehnung absolut und nicht in Prozent eingegeben wird.

Nachdem all diese Daten aus den Experimenten ermittelt sind, müssen sie in das Programm eingebaut werden. Um die Idee des Einbaus und die inneren viskoelastischen Vorgänge beim Knicken zu begreifen, diene folgende einfache Darstellung [32] im Bild 5.26:

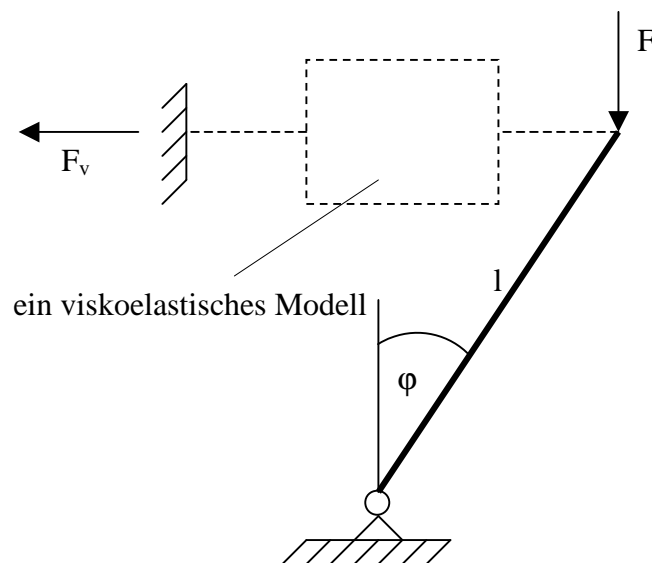


Bild 5.26: Knickverhältnisse mit einem viskoelastischen Material

Wählt man eine elastische Feder als Modell so ergibt sich bei kleinen Winkel $u = \varphi l$ und mit der Federsteifigkeit c die Kraft $F_v = cu$ und somit das Moment $M = (F-cl)u$ um das Lager. Ist das Moment kleiner als Null, so wird der Stab wieder in die unverformte Position zurückkommen. Ist das Moment größer als Null, so dass gilt $F > cl$, dann wäre die belastende Kraft größer als die der Feder und die Auslenkung würde, weil das Gleichgewicht instabil ist, weiter wachsen. Für $F = cl$ hätte man einen indifferenten Punkt. Würde die Feder durch ein Maxwell-Körper ersetzt werden, so ergäbe sich mit den Differentialoperatoren folgender Zusammenhang:

$$F_v + p_1 \dot{F}_v = q_1 \dot{u} \quad (5.94)$$

Auch für diesen Fall ist der Stab für $F = 0$ und $F_v = 0$ senkrecht. Falls jedoch spontan eine Auslenkung erfolgt, kann der Dämpfer nicht reagieren und es ergibt sich dann die Kraft im Maxwell-Modell $F_v = (q_1/p_1)u$ und damit das Moment am Lager zu:

$$M = \left(F - \frac{q_1}{p_1} l \right) u \quad (5.95)$$

Für $F < q_1 l/p_1$ wird der Stab in die ursprüngliche Lage zurückkehren, für $F > q_1 l/p_1$ wird er kollabieren. Der Stab wird für $F < q_1 l/p_1$ aber auch nur dann in die ursprüngliche Lage zurückkommen, wenn die Kraft plötzlich wieder entfernt wird. Falls in der ausgelenkten Lage eine Zeit verweilt wird, kann das Maxwell-Element relaxieren. Es kann sein, dass der Stab jetzt plötzlich kollabiert oder ein anderer Gleichgewichtspunkt nebenan mit der neuen Kraft F_v stellt sich ein. Jetzt wird der Winkel φ kontinuierlich wachsen. Das bedeutet, dass für ein Kräfteverhältnis $F > q_1 l/p_1$ der Stab elastisch und für $F < q_1 l/p_1$ durch Kriechen kollabieren wird.

Wird ein Kelvin-Voigt-Modell verwendet, so kann kein spontanes Auslenken aufgrund des blockierenden Dämpfers entstehen. Mit der Zeit wird ein Kriechen entstehen und der Winkel φ wird wachsen. Nach der Entlastung kann der Stab jetzt nicht mehr plötzlich in die senkrechte Position zurück, doch dies geschieht auch mit der Zeit.

Da aus vielen Versuch sich herausgestellt hat, dass die Dehnung über die Balkenhöhe stets linear ist und für die Druck- und Zugseite gleiches viskoelastisches Verhalten angenommen werden kann [148, 149], soll hier ein verallgemeinertes Kelvin-Voigt-Modell für Relaxation zur Beschreibung des Knickverhaltens verwendet werden. Dabei wird nach der Durchbiegung für einen Augenblick das Material relaxieren. Jetzt stimmt das Momentengleichgewicht nicht mehr. Dies kann nur wieder in einem anderen Gleichgewichtspunkt sein. Dadurch wird die Durchbiegung mit der Zeit wachsen.

Für große Durchbiegungen und speziell auch im nichtlinear-viskoelastischen Bereich kann die Spannung über die Balkenhöhe nicht mehr linear angenommen werden, was ein Grund für das Nichtverwenden des verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Modells für Kriechen ist. Denn in diesem Fall müsste stets der nichtlineare Spannungsverlauf über die Höhe von der vorherigen Zeit bekannt sein. Er wird, wie man es aus einem σ - ε -Diagramm sehen kann, zur Höhe hin

abflachen. Das Bild 5.27 zeigt qualitativ den Verlauf von Dehnung und Spannung über der Höhe.

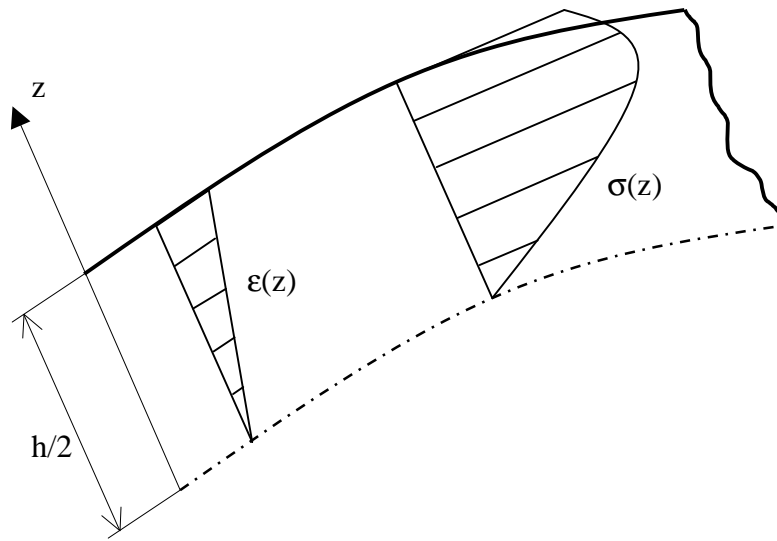


Bild 5.27: Verläufe von Dehnung und Spannung in einem Balken

So kann jetzt die Differentialgleichung 5.42 im elastischen Fall für die Berechnung der Durchbiegung im linear- und nichtlinear-viskoelastischen Bereich angewendet werden. Die Differentialgleichung wird jetzt bereichsweise (Bild 5.28), wo alle wichtigen Daten konstant sind, angewandt und sieht wie folgt aus:

$$\varphi_n'' + \lambda_n^2 \sin(\varphi_n) = 0 \quad (5.96)$$

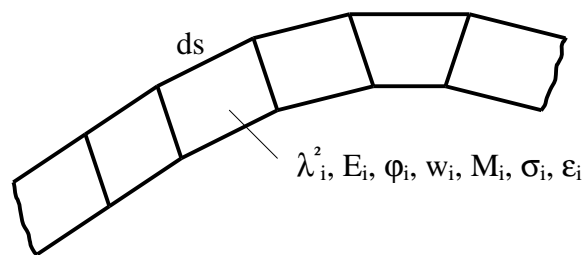


Bild 5.28: Bereichsweise Analyse

Der Eigenwert λ_n^2 ist in jedem Teilabschnitt konstant und es wird weiterhin das Differenzenverfahren verwendet. Für jede einzelne Randbedingung die in einem Teilabschnitt erforderlich ist, wird der berechnete Wert aus der vorangegangenen hergenommen. Dabei sind die globalen Randbedingungen $w(0) = 0$ und $\varphi(l/2) = 0$ unverändert.

Die Untersuchungen haben auch Aufschluss über die unterschiedlichen Regionen innerhalb des Stabes gebracht. Da der ausgeknickte Stab das größte Moment in der Mitte hat, ist es

offensichtlich das in diesem Bereich auch die höchste Spannung herrschen muss. Analysen haben eine Linear - Nichtlinearfront die sich von der Mitte aus Richtung der Lager bewegt gezeigt. Es sei kurz erwähnt, dass diese Front nach [148, 149] auch in der Druckseite existiert (hier nicht dargestellt). Im nächsten Bild 5.29 ist qualitativ solch eine sich mit der Zeit bewegend Front zu sehen:

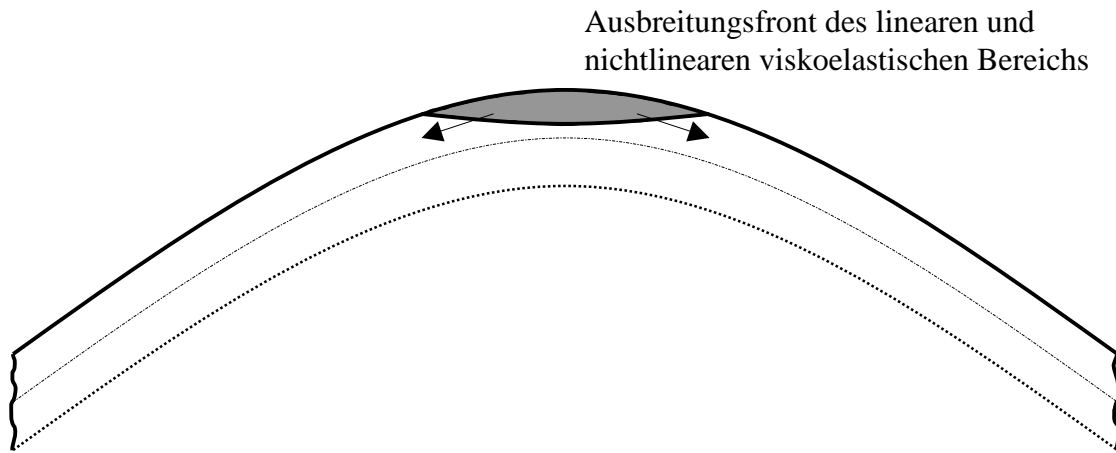


Bild 5.29: Qualitativer Verlauf der Linear-Nichtlinear-Front

Der Programmablauf ist grob wie folgt: nach dem Aufrufen des Programms fragt es nach den Materialparametern, wenn sie nicht schon vorher im Quellcode miteinprogrammiert sind. In dieser Phase wird auch entschieden, in wie viele Teilabschnitte der halbe Stab (Symmetrie) unterteilt wird. Zu erst wird eine Datei geöffnet, in der alle berechneten Werte, formatiert für die spätere Weiterverarbeitung, gespeichert werden. Innerhalb der ersten Schleife wird der elastische Knickvorgang an allen N-Stellen berechnet. Dabei ist der Startwert für die Anfangsdurchbiegung aus der Lösung der linearisierten Differentialgleichung ($\sin\varphi \approx \varphi$) hergenommen. Noch innerhalb dieser Schleife wird an jeder Stelle N der dazugehörige Winkel φ_n berechnet und auf die Einhaltung der Fehlerschranke für die Randbedingung $\varphi_N = 0$ geachtet. Wird diese Fehlerschranke unterschritten, schließt die Schleife und alle wichtigen Größen wie das Moment, die Dehnung, die Spannung und die Durchbiegung berechnet. Sie werden dann nacheinander in die Datei geschrieben. Diese Größen sind jetzt die Anhalts- und Startwerte für die Berechnung des viskoelastischen Anteils. Bevor die Schleife für die Zeit geöffnet wird, muss der User angeben wie viele Zeitschritte er rechnen will. In diesem Fall waren es 52 Schritte (10 pro Dekade bei einer logarithmischen Achsaufteilung). In der Zeitschleife wird eine neue Schleife geöffnet, in der die Größen an den N-Stellen nacheinander berechnet werden. Dabei muss jedes Mal geprüft werden, ob die Berechnung sich im linearen ($h_t = I$) oder im nichtlinear-viskoelastischen ($h_t = f(\varepsilon)$) Bereich befindet. Zu beachten für jede einzelne Stelle und zu jeder Zeit ist, dass das Material einen Memory-Effekt besitzt und alle vorherigen Größen mitberücksichtigt werden müssen. Das geschieht in einem eigens dafür geschriebenem Algorithmus. Nachdem alle Größen berechnet wurden, werden sie nacheinander in die Datei geschrieben. Die Stellenschleife schließt und die Zeit erhöht sich um den nächsten Schritt. Die letzten berechneten Werte der Größen dienen als Zustandsgrößen für den weiteren Zeitschritt. Dieses wird solange wiederholt, bis alle gewünschten Zeitschritte durchgerechnet und alle Größen in die Datei geschrieben sind. Danach wird auch die Zeitschleife geschlossen. Nun schließt und beendet das Programm die Zielfeile. Nachfolgend ist das Schema des Programms dargestellt (Bild 5.30):

Stabilität

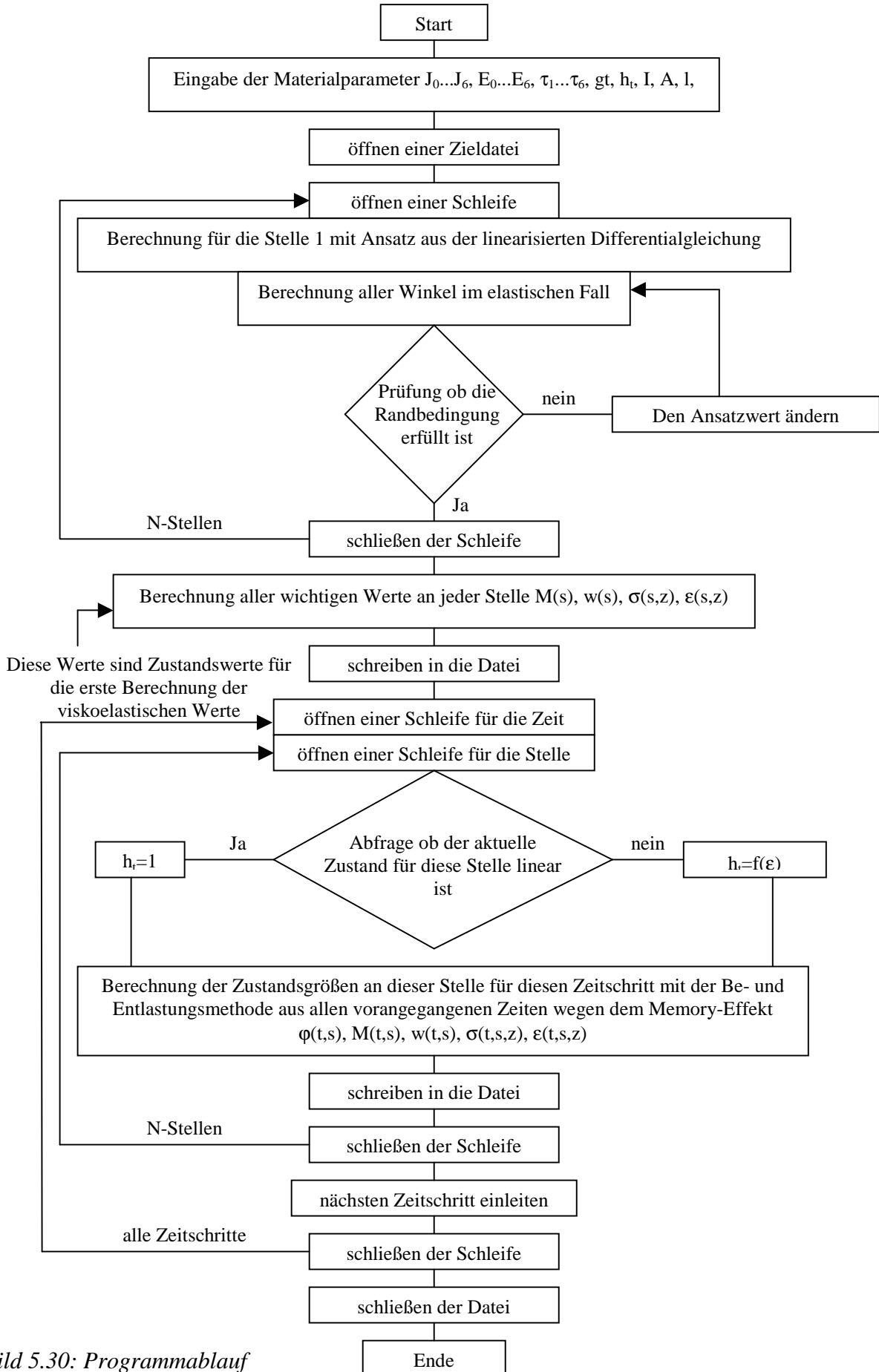


Bild 5.30: Programmablauf

Stabilität

Auf den folgenden Diagrammen sind nacheinander die Knickexperimente an PMMA, PC und PVC und die mit Hilfe der aus den Kriech- und Relaxationsversuchen ermittelten Materialparameter berechneten Kurven dargestellt. Diese Kurven wurden mit dem beschriebenen Programm errechnet. Es sind nur die Lastparameter zum Einsatz gekommen, die auch im Experiment verwendet wurden. Diese waren die Kräfte $F = 7 \dots 21 \text{ N}$, jeweils mit einer 2 N Steigerung, und der Exzentrizitäten von $e = 2 \dots 4 \text{ mm}$, jeweils um 1 mm gesteigert. Bei den Materialien die einen relativ niedrigen Elastizitätsmodul besitzen, konnten nicht alle Versuche gefahren werden.

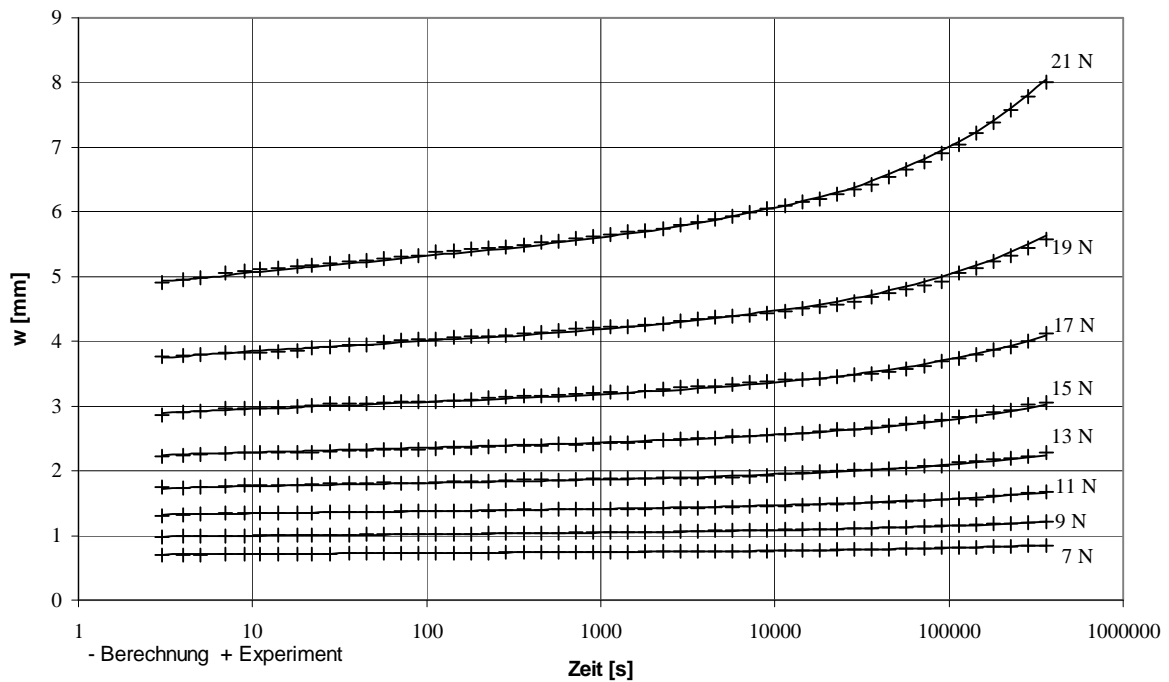


Bild 5.31: Maximale Durchbiegung für PMMA mit $e=2 \text{ mm}$ gemessen und berechnet

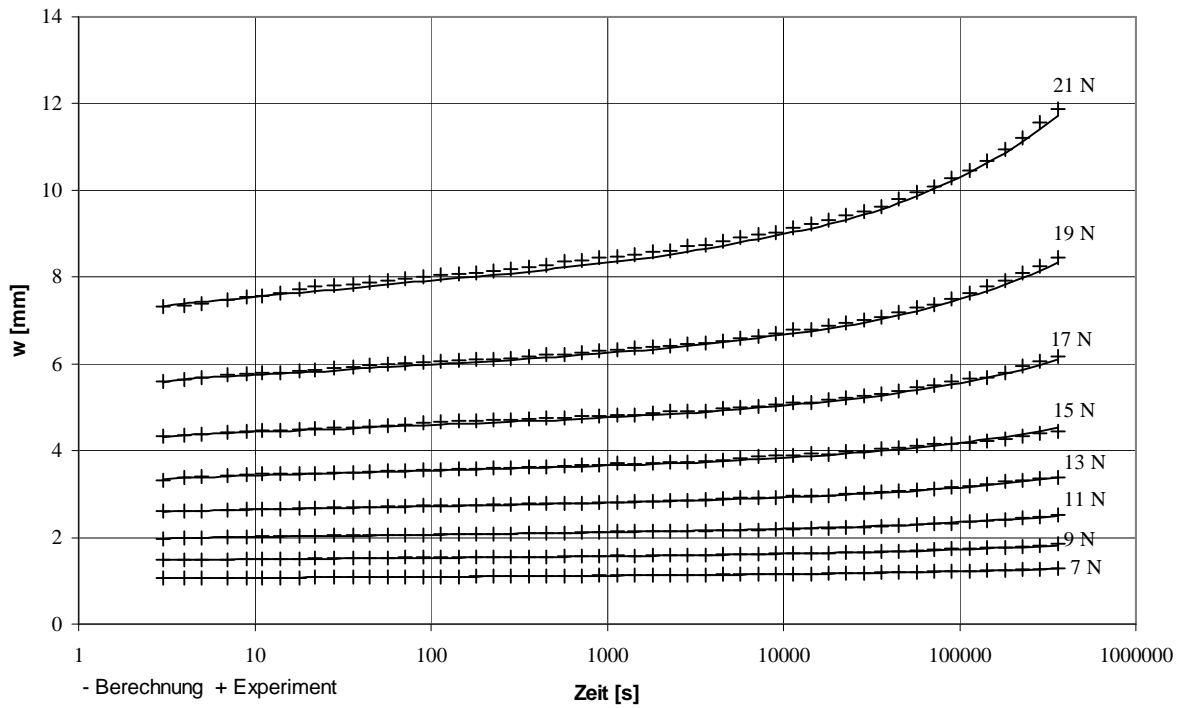


Bild 5.32: Maximale Durchbiegung für PMMA mit $e=3$ mm gemessen und berechnet

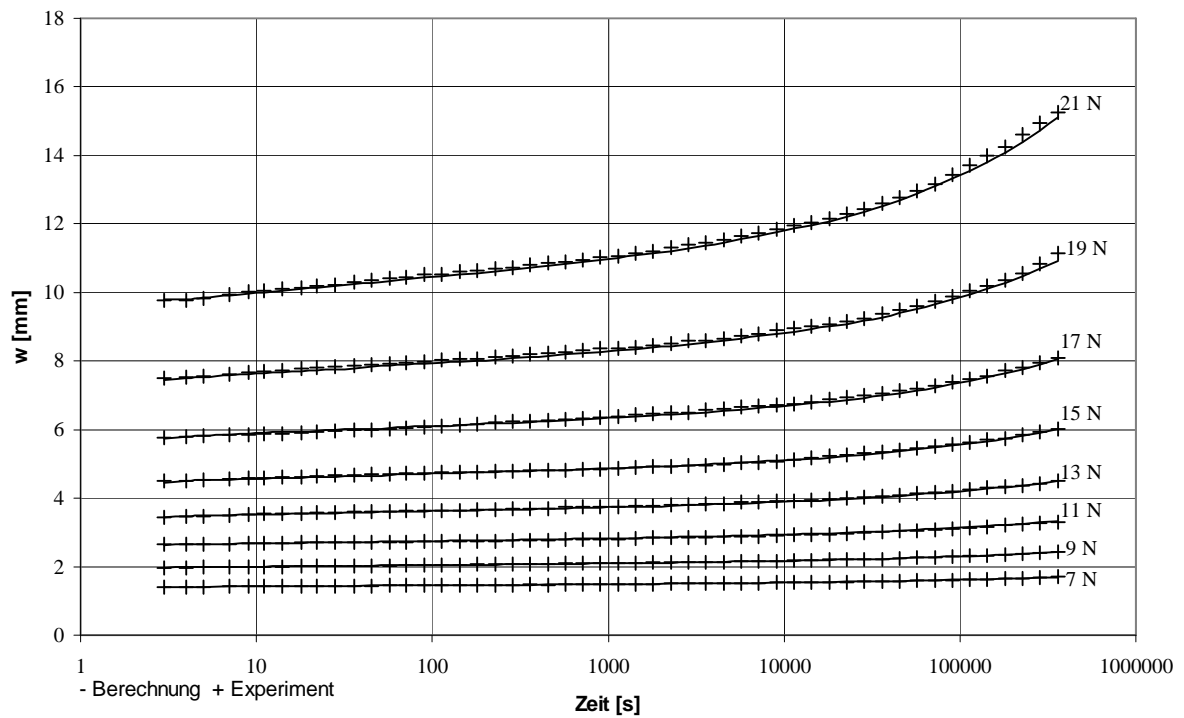


Bild 5.33: Maximale Durchbiegung für PMMA mit $e=4$ mm gemessen und berechnet

Stabilität

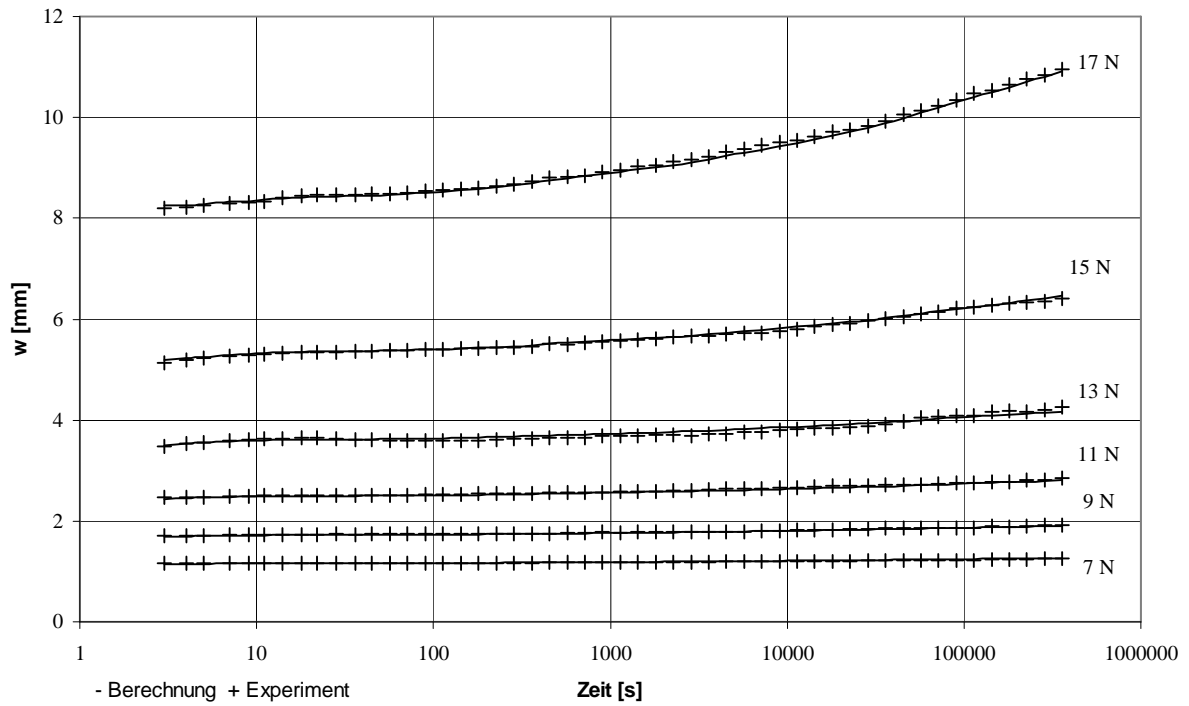


Bild 5.34: Maximale Durchbiegung für PC mit $e=2$ mm gemessen und berechnet

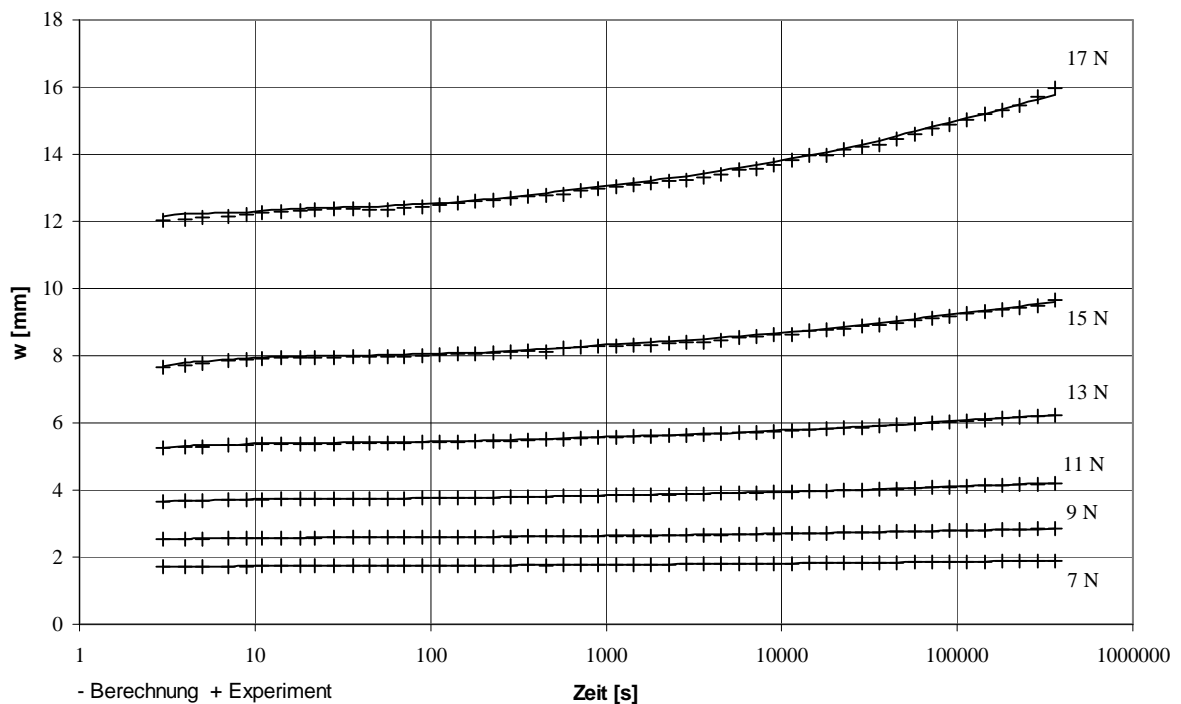


Bild 5.35: Maximale Durchbiegung für PC mit $e=3$ mm gemessen und berechnet

Stabilität

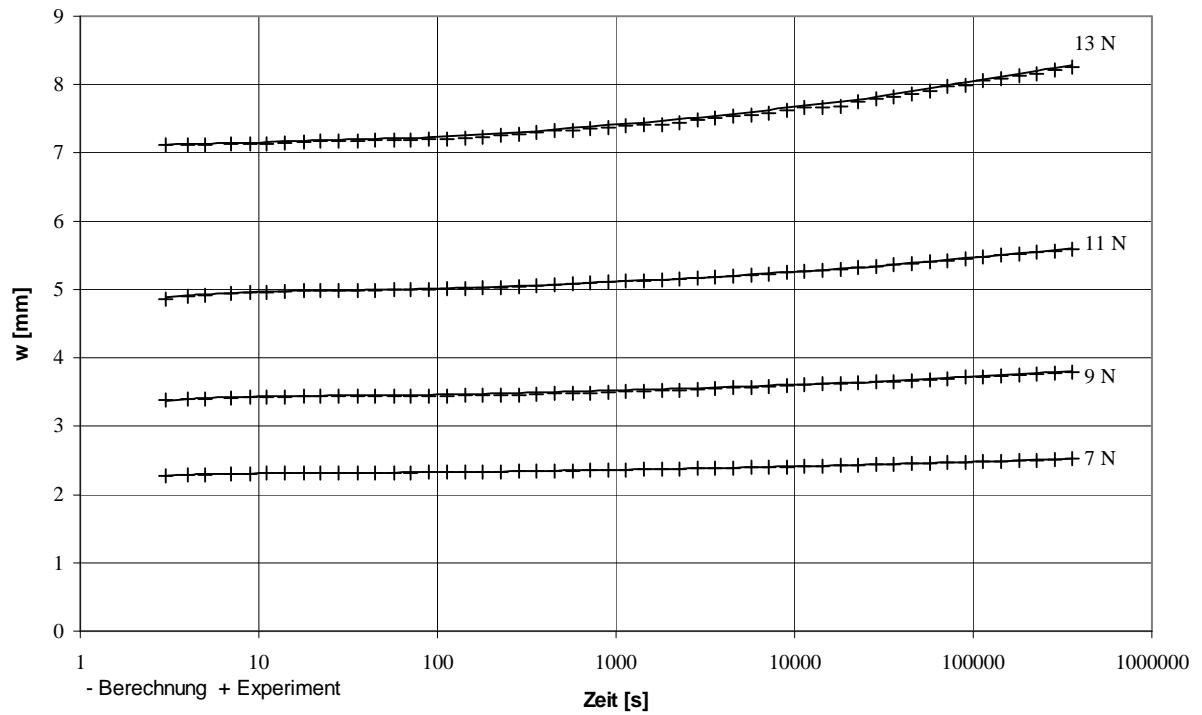


Bild 5.36: Maximale Durchbiegung für PC mit $e=4$ mm gemessen und berechnet

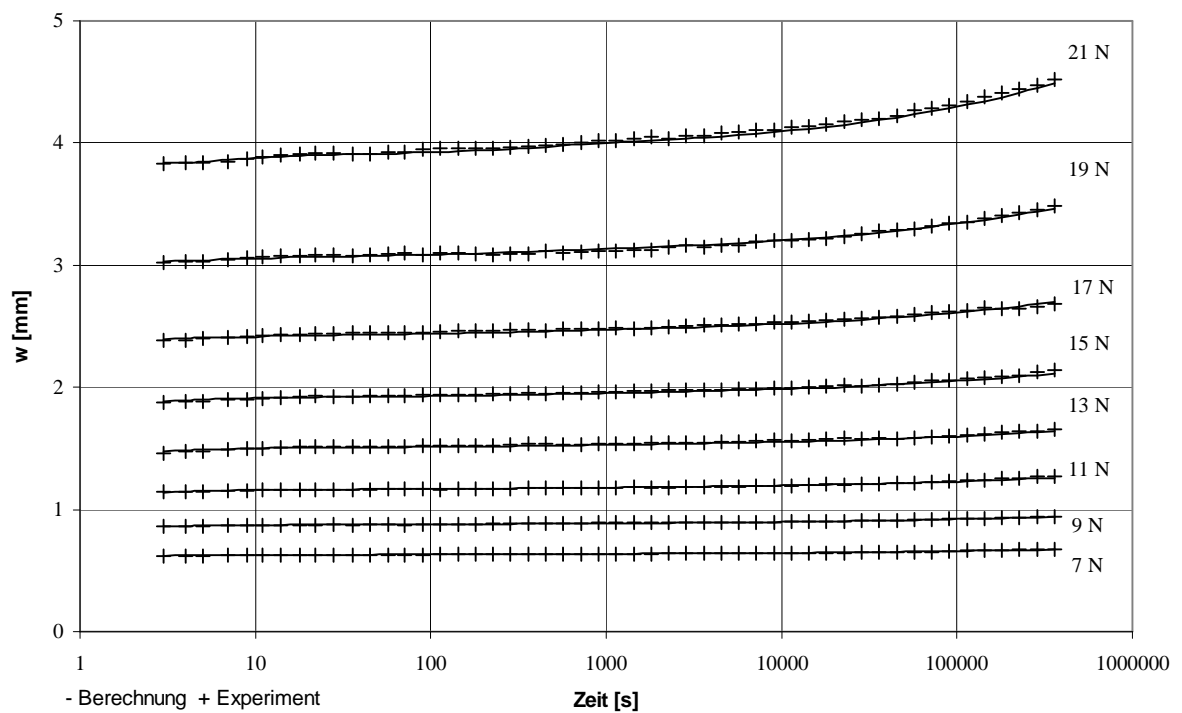


Bild 5.37: Maximale Durchbiegung für PVC mit $e=2$ mm gemessen und berechnet

Stabilität

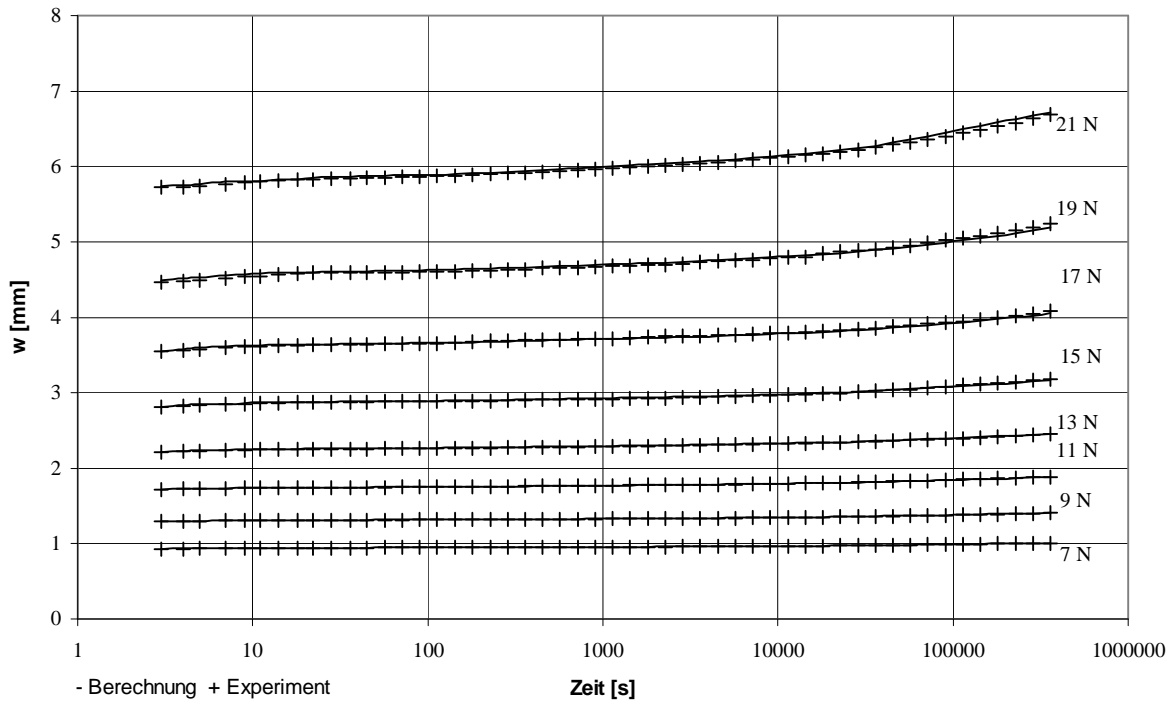


Bild 5.38: Maximale Durchbiegung für PVC mit $e=3$ mm gemessen und berechnet

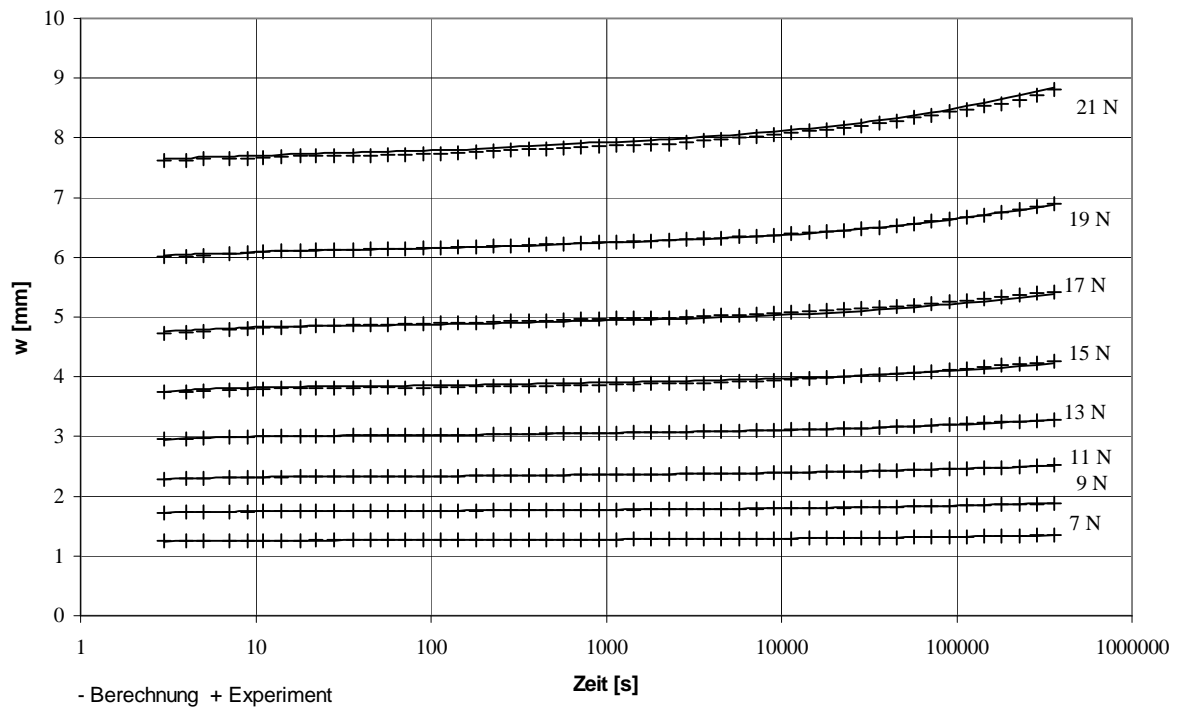


Bild 5.39: Maximale Durchbiegung für PVC mit $e=4$ mm gemessen und berechnet

Aus diesen Diagrammen (Bilder 5.31-5.39) lässt sich die gute Übereinstimmung von Experiment und Berechnung erkennen. Ferner zeigt sich, dass die aus den relativ einfachen Versuchen, wie Relaxation und Kriechen, gewonnenen Materialparameter auch für eine andere Belastungsart einsetzbar sind. Dadurch kann bei Kenntnis der theoretischen Beziehungen die Vorhersage komplizierter Lastaufbringungen erfolgen. Dies erspart weitgehendst komplexe und schwierige Konzepte und Vorüberlegungen bei komplizierten Belastungen, wie z.B. wechselnde bzw. schwingende Last. Zu beachten ist auch die Zeitersparnis, wenn man bedenkt, wie aufwendig und zeitintensiv der Bau der Versuchsvorrichtungen waren.

Als nächstes sollen bei gleicher Belastungsart vergleiche der Materialien im Bezug auf die Exzentrizitäten und die Materialien untereinander in Diagrammen dargestellt werden. Hierzu wird erstens für jeden einzelnen Werkstoff, bei zwei unterschiedlichen Kräften, der Vergleich bezüglich der Exzentrizität und zweitens, wiederum für zwei unterschiedliche Kräfte, das Verhalten der jeweiligen Materialien bei konstanter Exzentrizität untereinander untersucht und erörtert. Gewählt wurden die minimale und maximale gemeinsame Kraft.

Es ist aus den folgenden Diagrammen (Bilder 5.40-5.51) zu erkennen, dass die Durchbiegungszunahme bei wachsender Exzentrizität prozentual zunimmt. Dies ist durch die Steigung der einzelnen Kurven ersichtlich. Am Maximalsten ist das bei PMMA und am Minimalsten bei PVC zu erkennen. Die Belastungskraft spielt dabei auch eine wesentliche Rolle. Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang in den Diagrammen, wo alle drei Werkstoffe gleichzeitig abgebildet sind. Nach der elastischen Belastungsphase ist bei PVC nicht mehr relativ viel zu erkennen, wo hingegen PMMA als Werkstoff viel arbeitet. Angemerkt sei, dass bei der höchsten Exzentrizität die gemeinsame vergleichbare Kraft nur 13 N betrug.

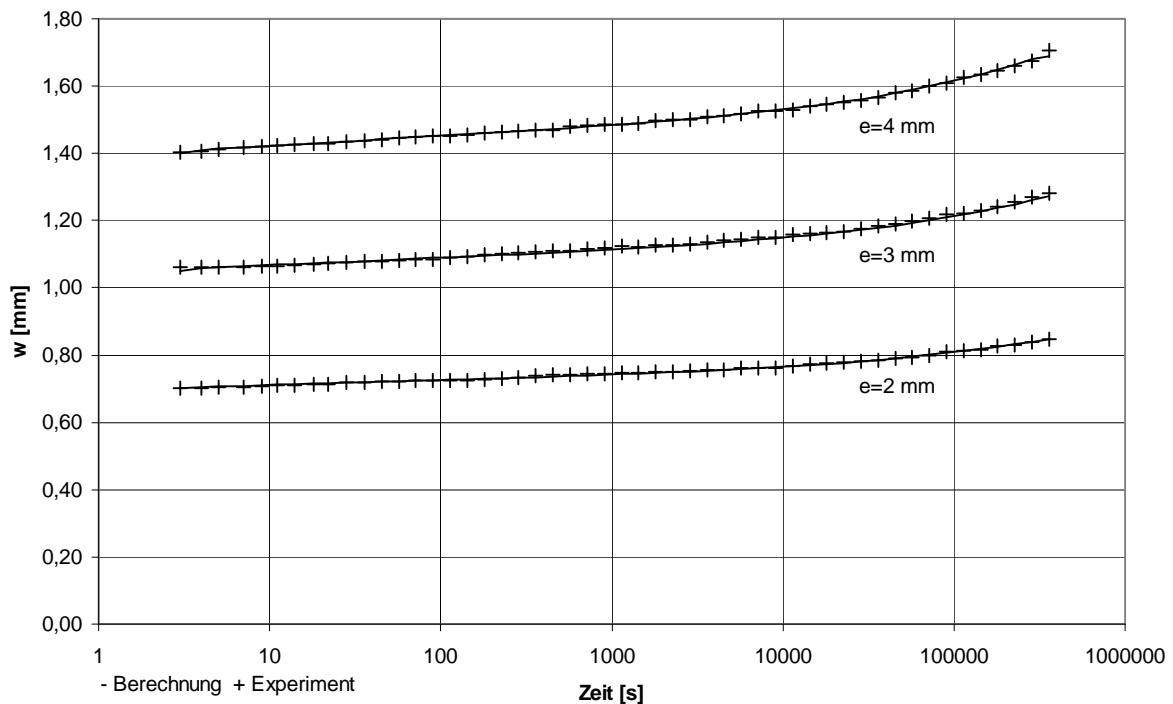


Bild 5.40: Maximale Durchbiegung von PMMA bei konstanter Kraft 7 N und Exzentrizität als Parameter

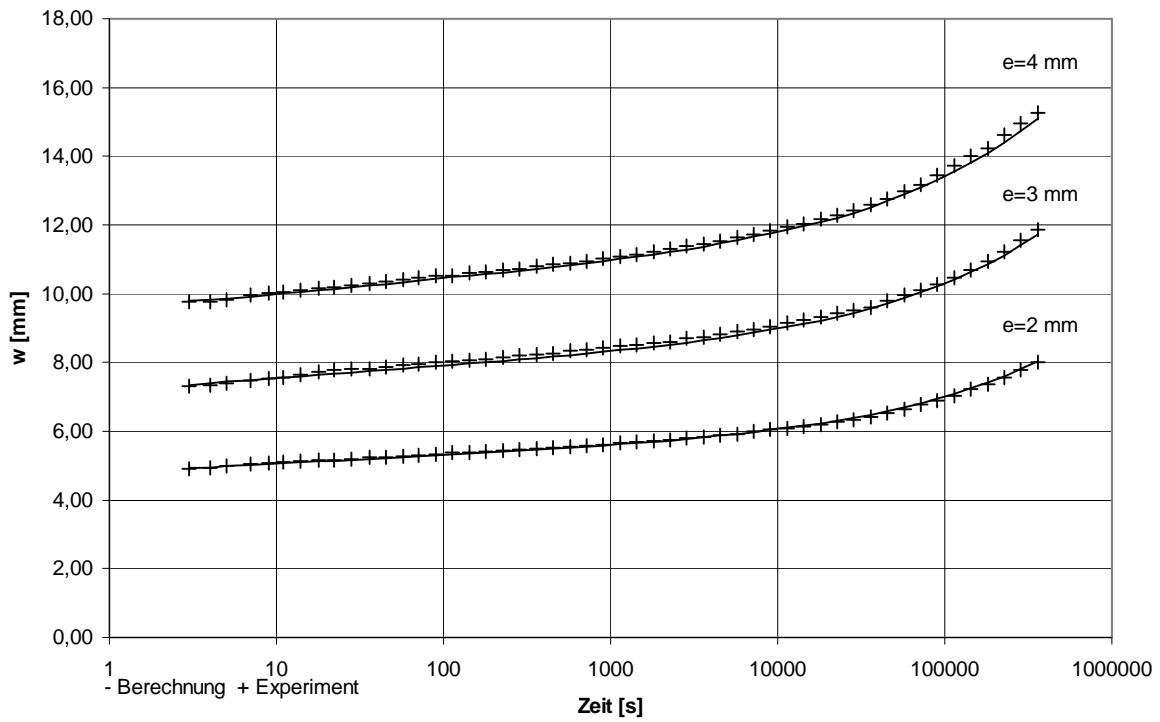


Bild 5.41: Maximale Durchbiegung von PMMA bei konstanter Kraft 21 N und Exzentrizität als Parameter

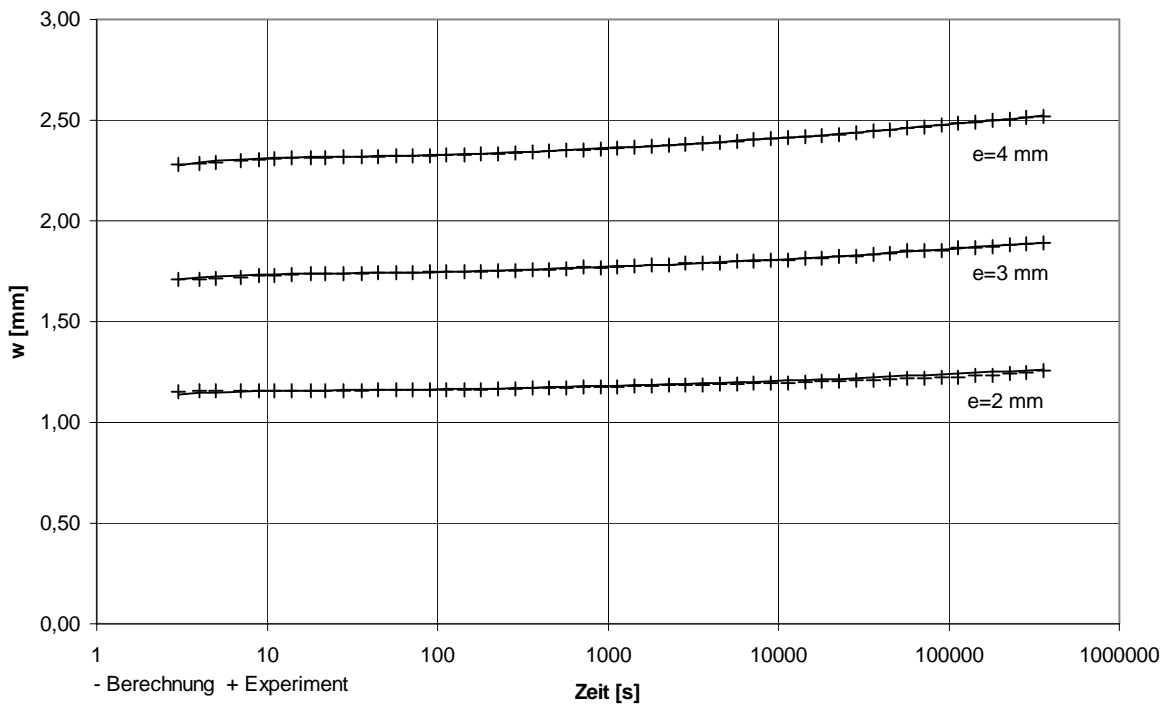


Bild 5.42: Maximale Durchbiegung von PC bei konstanter Kraft 7 N und Exzentrizität als Parameter

Stabilität

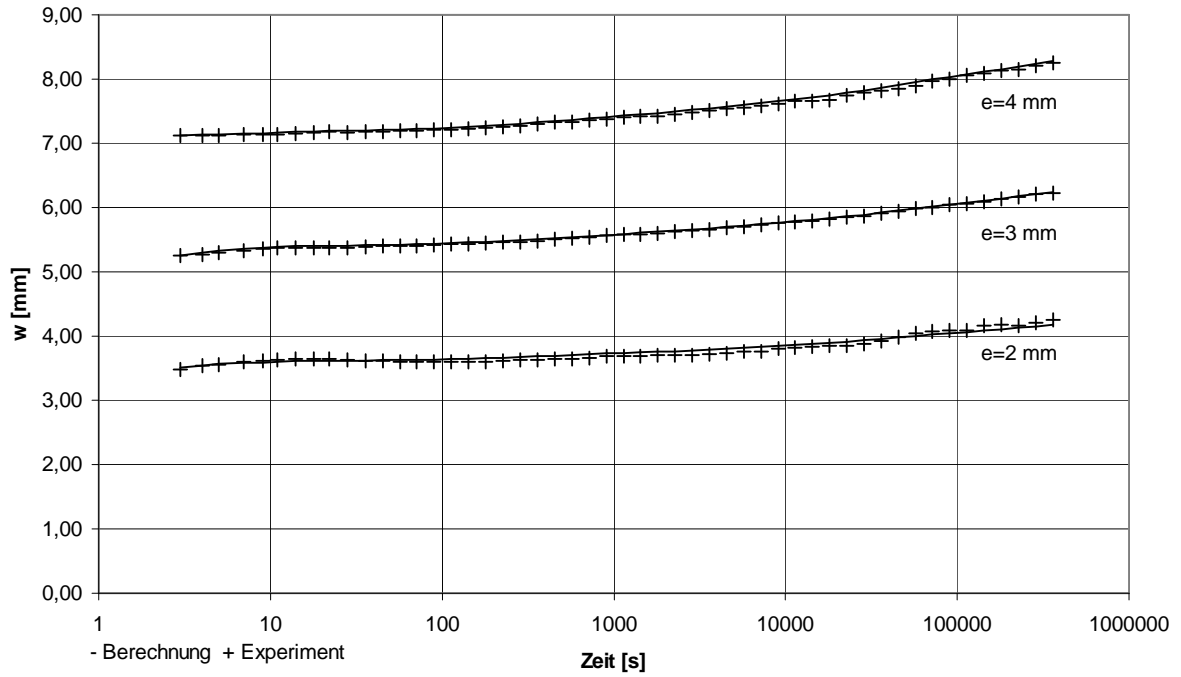


Bild 5.43: Maximale Durchbiegung von PC bei konstanter Kraft 13 N und Exzentrizität als Parameter

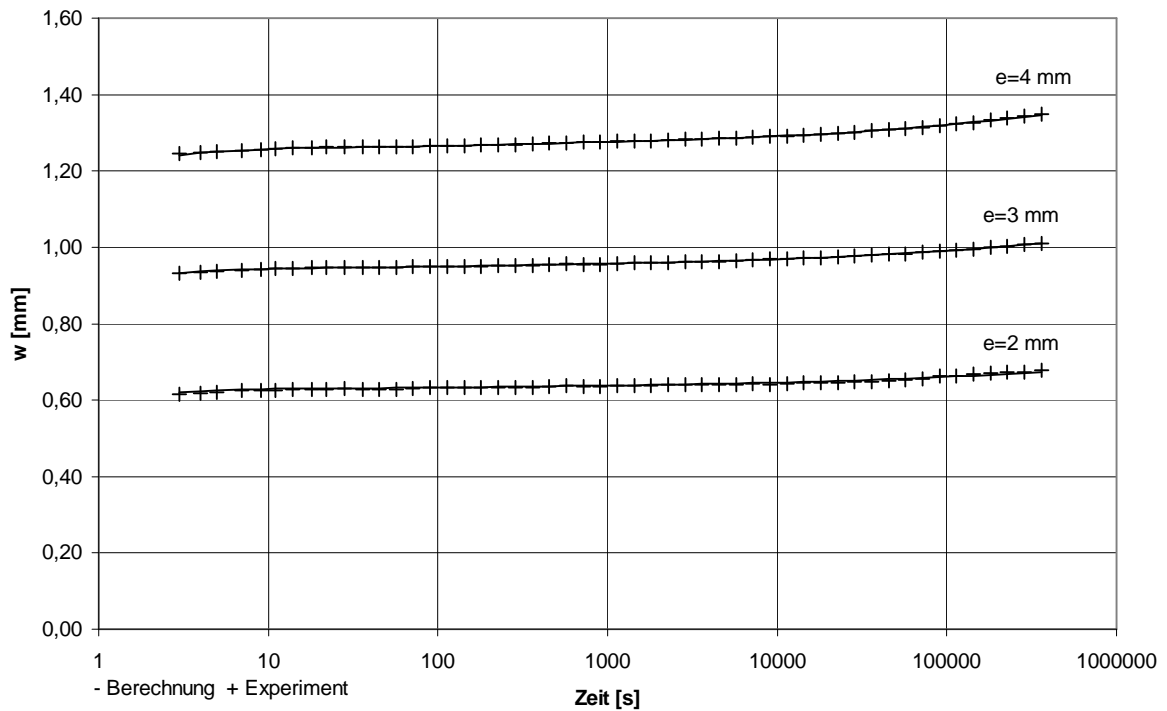


Bild 5.44: Maximale Durchbiegung von PVC bei konstanter Kraft 7 N und Exzentrizität als Parameter

Stabilität

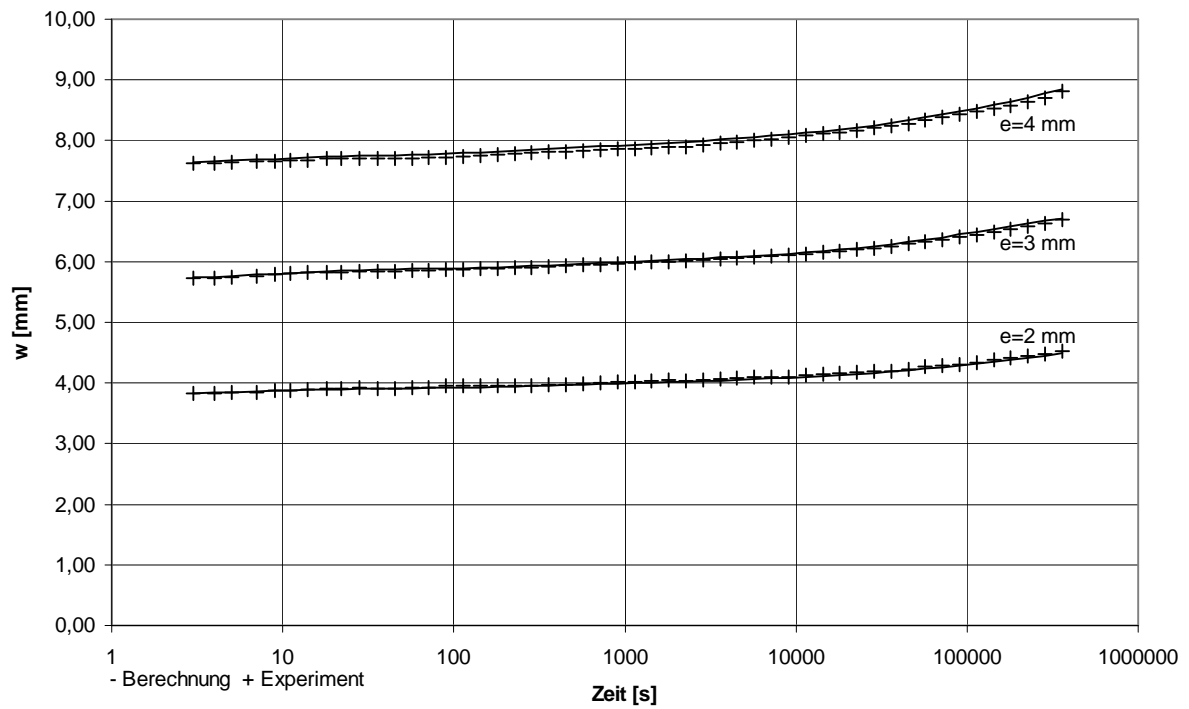


Bild 5.45: Maximale Durchbiegung von PVC bei konstanter Kraft 21 N und Exzentrizität als Parameter

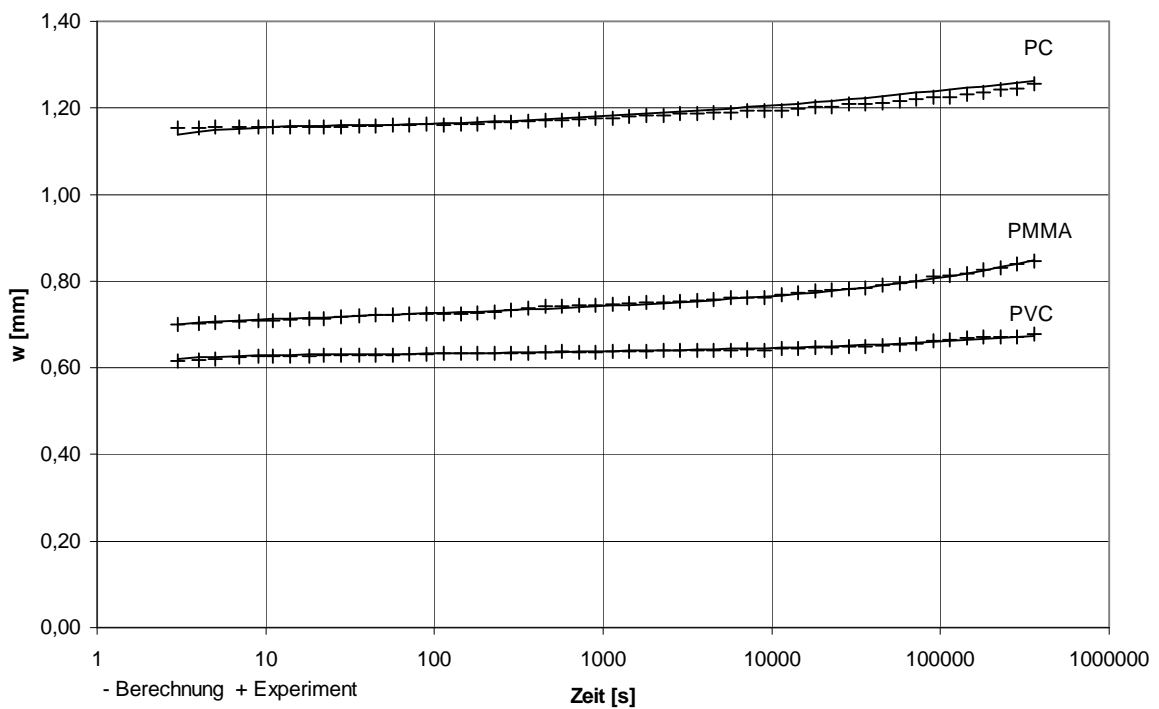


Bild 5.46: Maximale Durchbiegung bei 7 N und 2 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

Stabilität

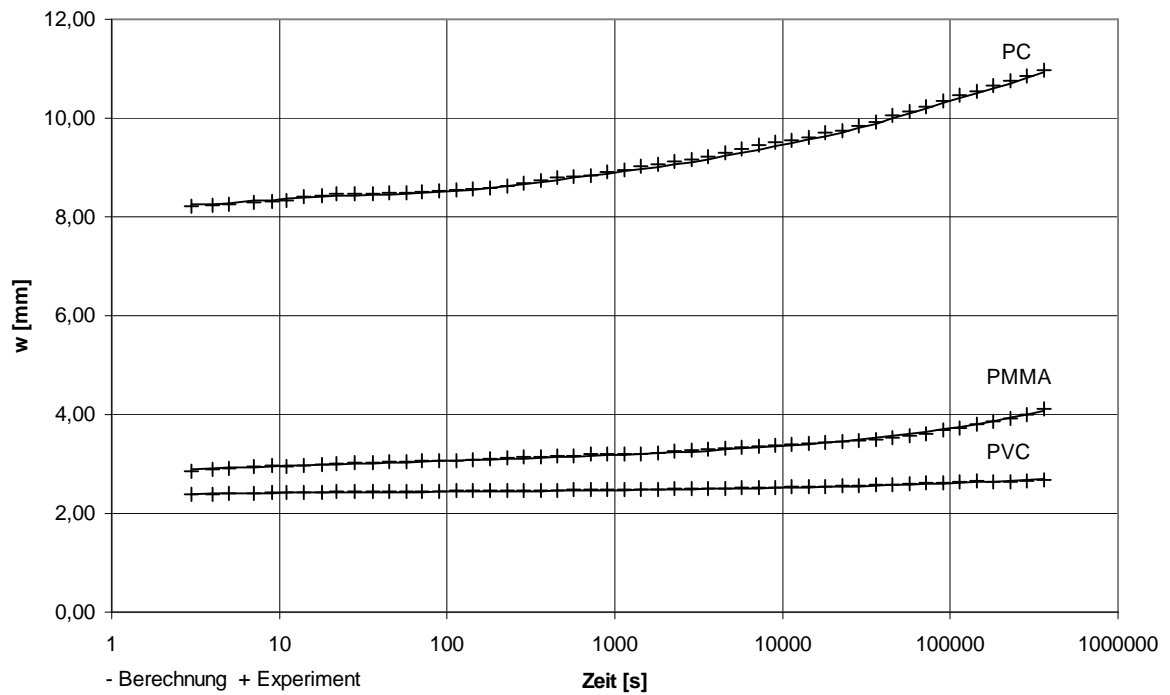


Bild 5.47: Maximale Durchbiegung bei 17 N und 2 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

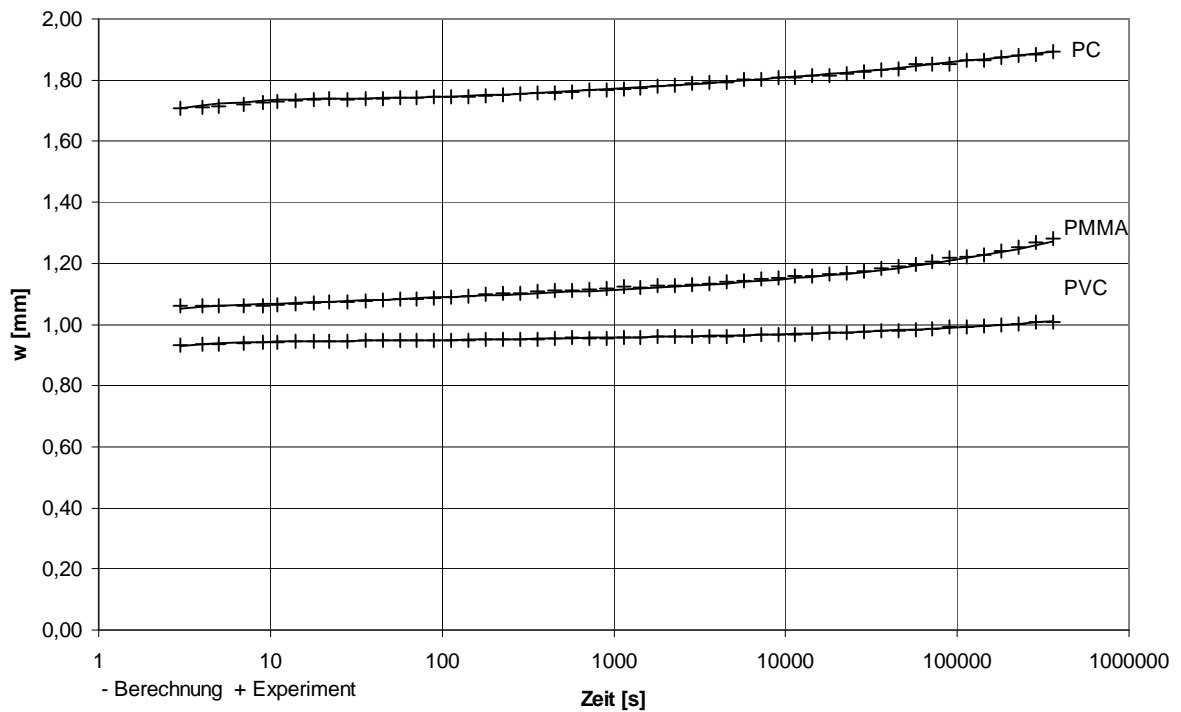


Bild 5.48: Maximale Durchbiegung bei 7 N und 3 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

Stabilität

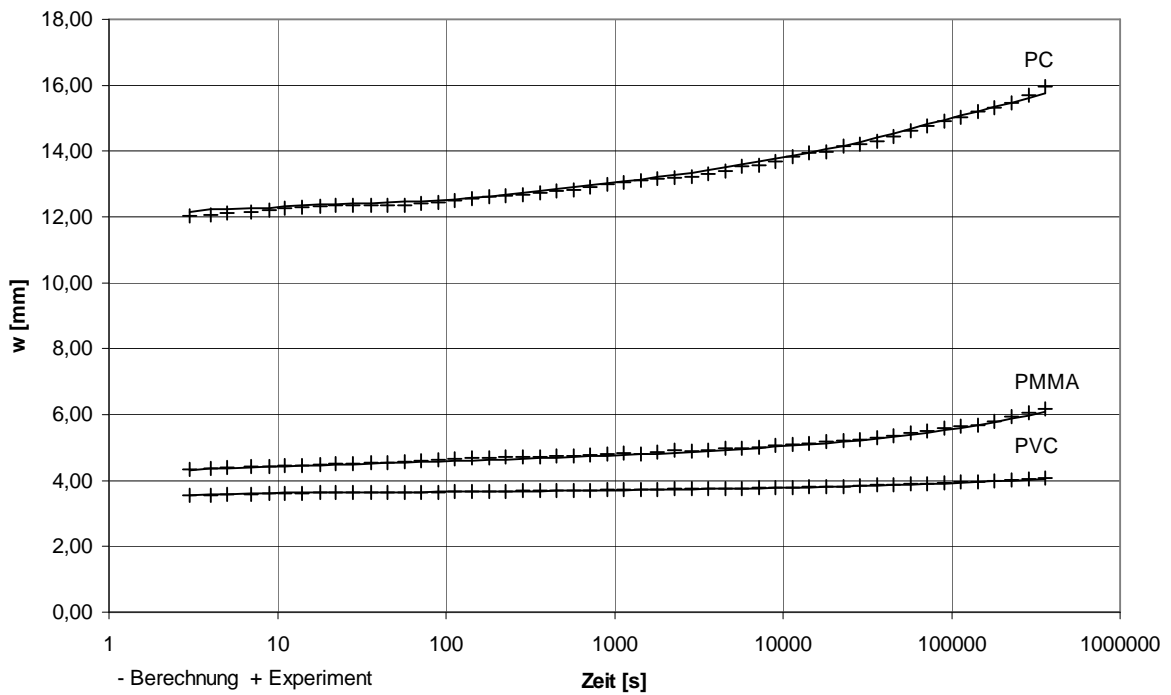


Bild 5.49: Maximale Durchbiegung bei 17 N und 3 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

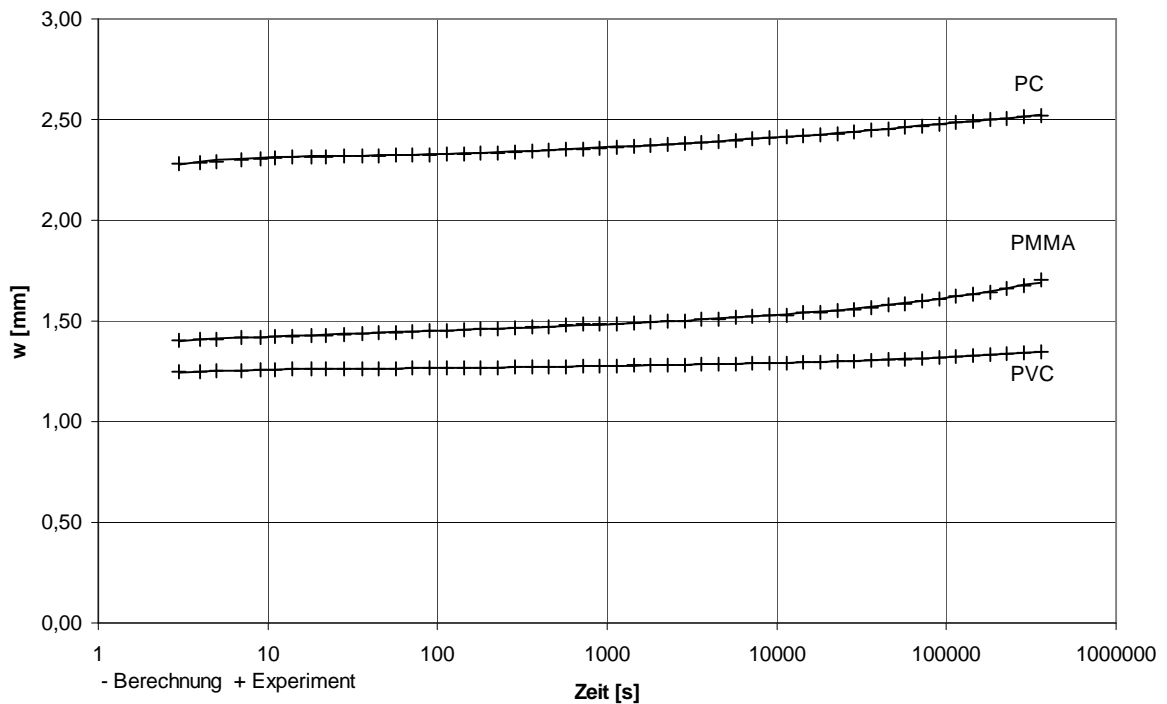


Bild 5.50: Maximale Durchbiegung bei 7 N und 4 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

Stabilität

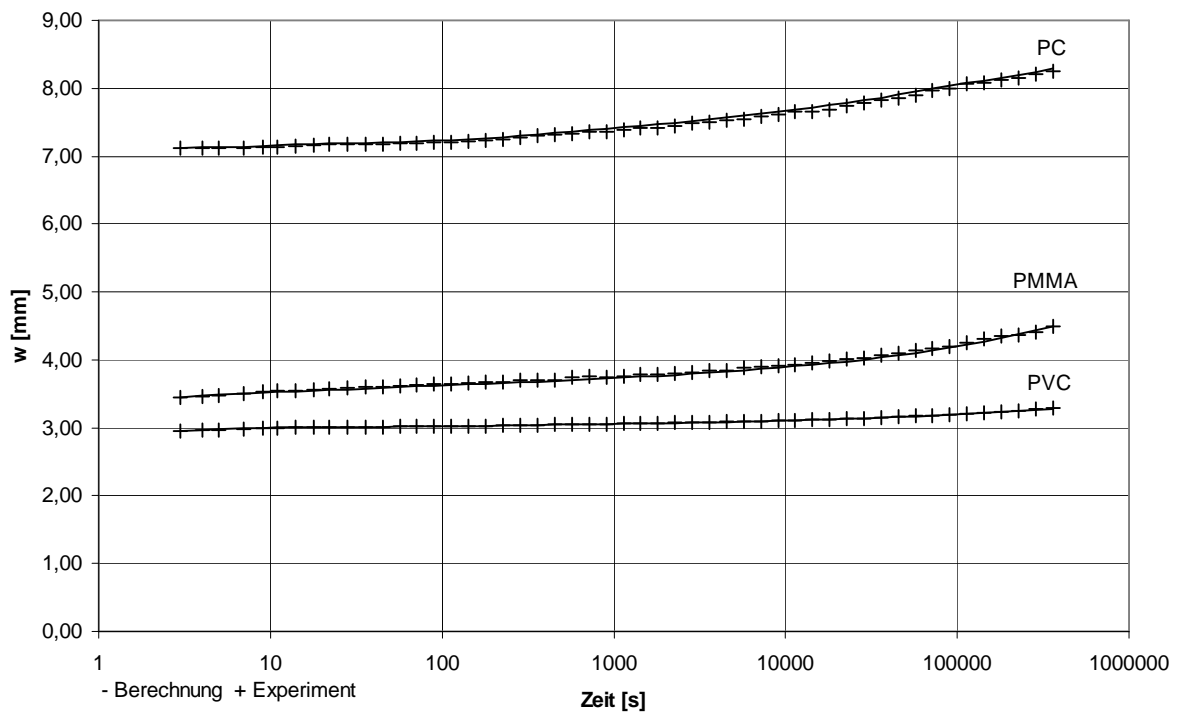


Bild 5.51: Maximale Durchbiegung bei 13 N und 4 mm Exzentrizität mit dem Werkstoff als Parameter

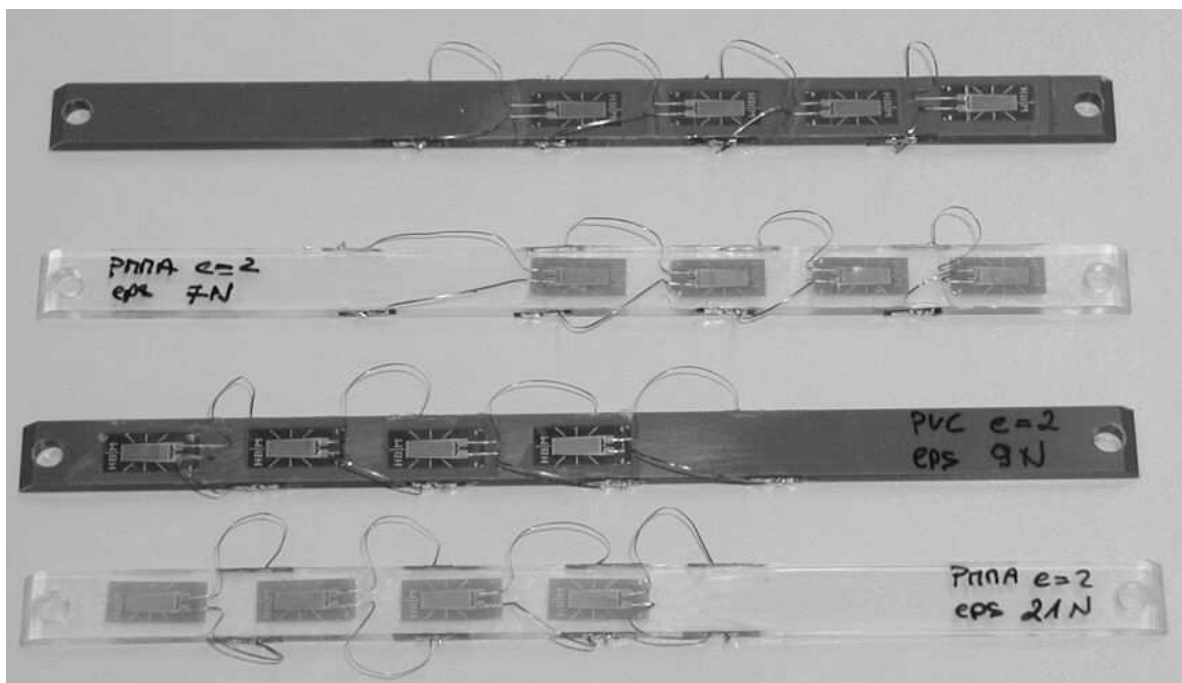


Bild 5.52: Aufgeklebte DMS an vier Positionen

Zusätzlich zu der Durchbiegungsmessung hat man Dehnungsmessungen durchgeführt. Dabei wurden jeweils an vier Stellen der Probe DMS-Steifen geklebt. Die Abstände waren immer gleich lang. In Bild 5.52 ist das dargestellt.

Die Klebeschicht war sehr dünn, so dass sie keine Auswirkungen auf die Höhe macht, und der Abstand der einzelnen DMS voneinander betrug von Mitte zur Mitte $19,25\text{ mm}$. Es kamen nur die Werkstoffe PMMA und PVC zum Einsatz. Die Klebepunkte an den Seiten waren so klein, dass sie keinen Einfluss auf die Steifigkeit ausübten. Verbunden wurde das ganze mit weiteren drei DMS, die am selben Material geklebt waren, um eine Temperaturkompensation durchzuführen. Danach konnte man mit einem Messprogramm die Signale über einen Verstärker auswerten. Die experimentelle Untersuchungen beschränkten sich auf die Exzentrizität von 2 mm und den Kräften $7\text{...}21\text{ N}$.

Wertet man für isochrone Zeiten ($t = \text{const.}$) die Diagramme aus, dann lässt sich erkennen, dass sich die Knickform mit laufender Zeit verändert. Das kommt daher, weil die höchste Spannung bzw. Dehnung, bei der Annahme symmetrischer Knickung, in der Mitte des Stabes auftritt. Diese Erscheinung ist deutlicher bei höherer Druckkraft zu sehen. So kann gesagt werden, dass bei ein und demselben Stab lineare- und nichtlinear-viskoelastische Bereiche entstehen. Setzt man die Linearitätsgrenzwerte für die Dehnung aus den Relaxationsversuchen an ($\epsilon_{\text{PMMAgrenz}} \approx 0,14\%$, $\epsilon_{\text{PVCgrenz}} \approx 0,156\%$), so können lineare und nichtlineare Bereiche ermittelt werden. Ein Punkt der sich anfänglich im linearen Bereich befand, kann mit laufe der Zeit in den nichtlinearen wandern. Für kleine Kräfte bleibt er natürlich die ganze belastete Zeit im linearen Bereich. Diese Messungen bestätigen die lineare und nichtlineare Ausbreitungsfront. Auf den folgenden Diagrammen ist dies dargestellt (Bilder 5.53-5.60):

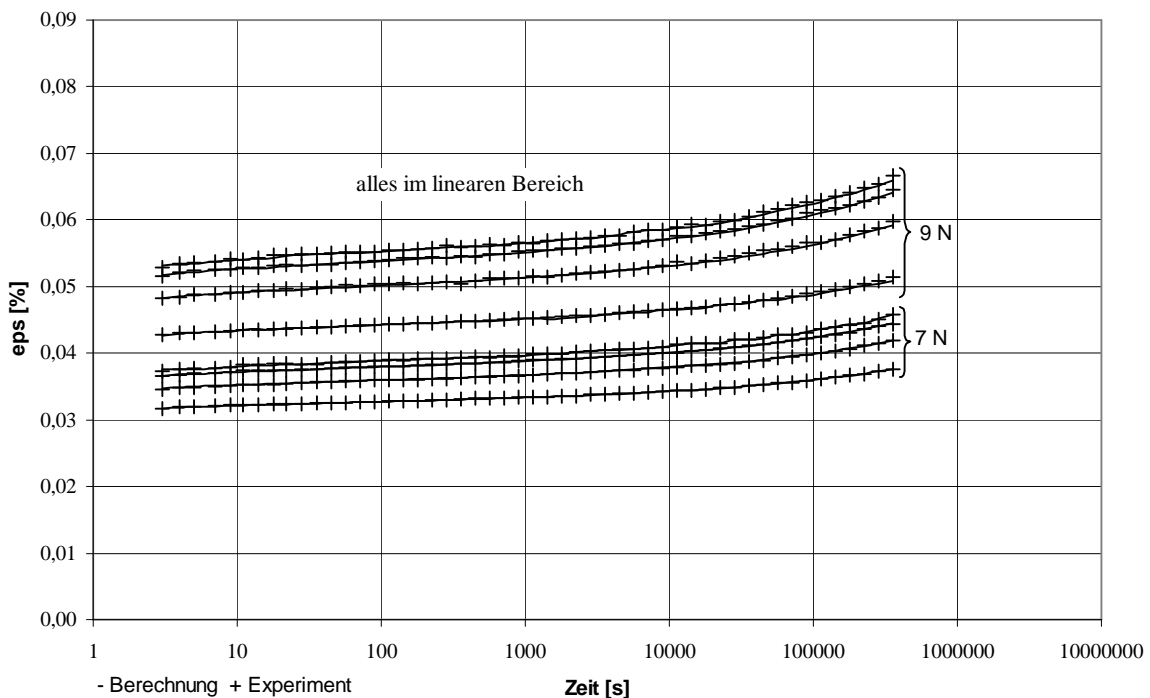


Bild 5.53: Dehnungsverläufe bei PMMA für 4-DMS-Positionen

Stabilität

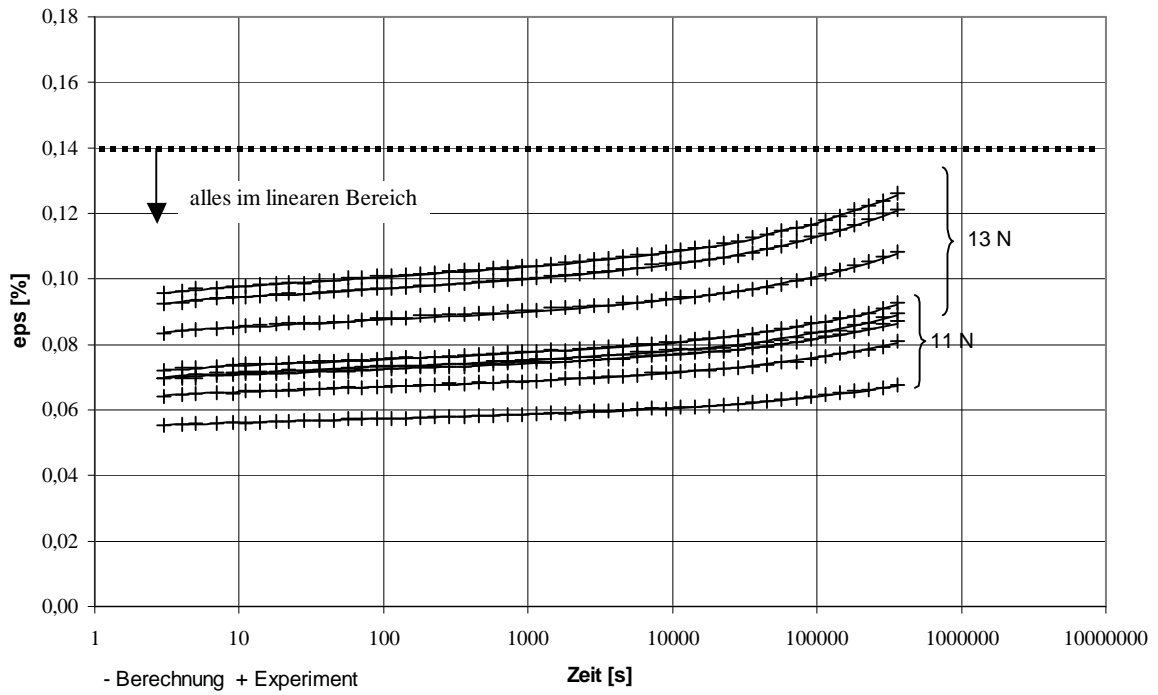


Bild 5.54: Dehnungen bei PMMA für 4-DMS-Positionen

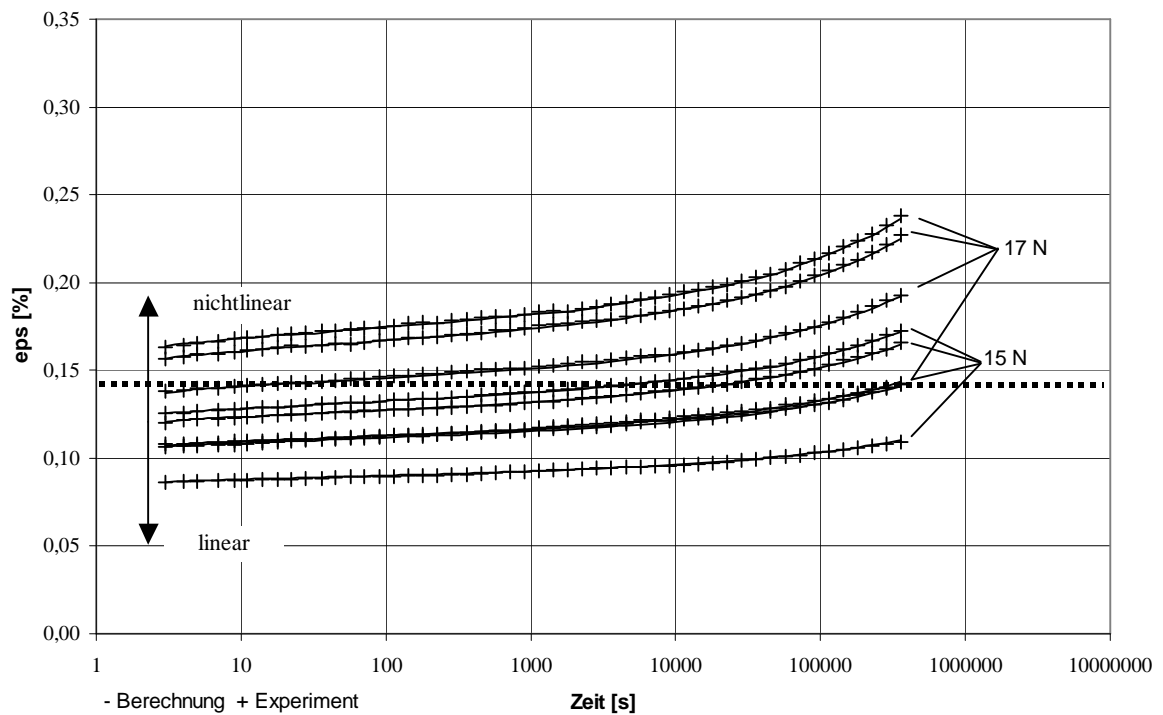


Bild 5.55: Dehnungen bei PMMA für 4-DMS-Positionen

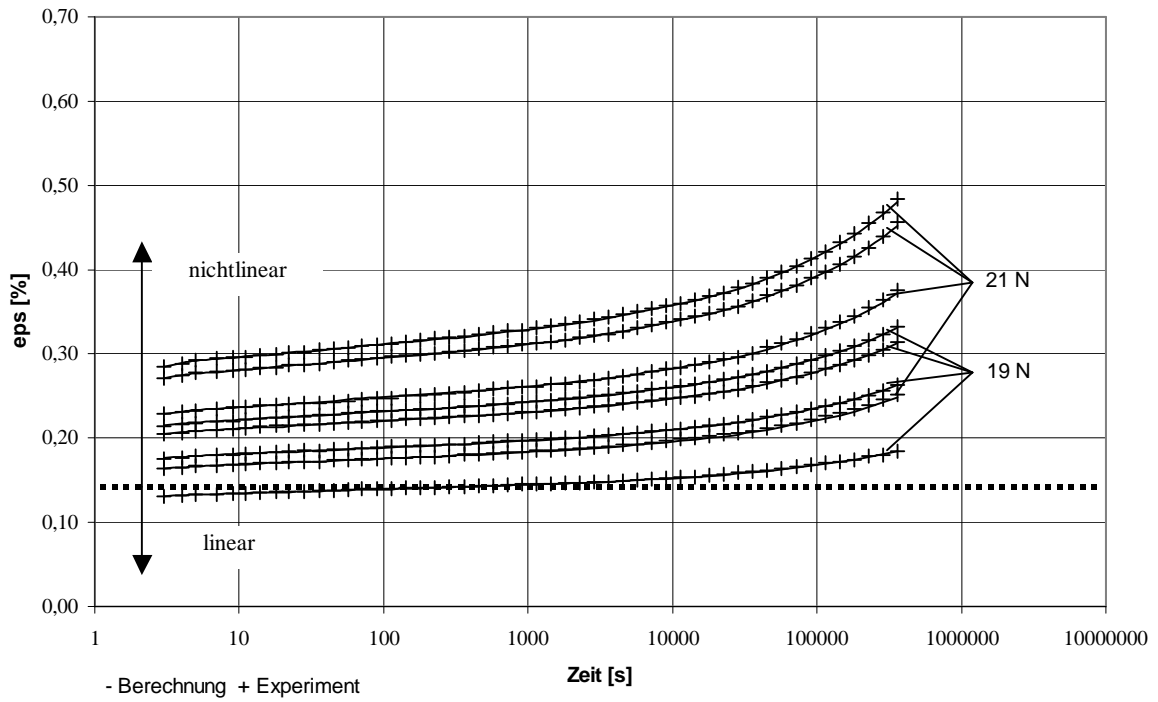


Bild 5.56: Dehnungen bei PMMA für 4-DMS-Positionen

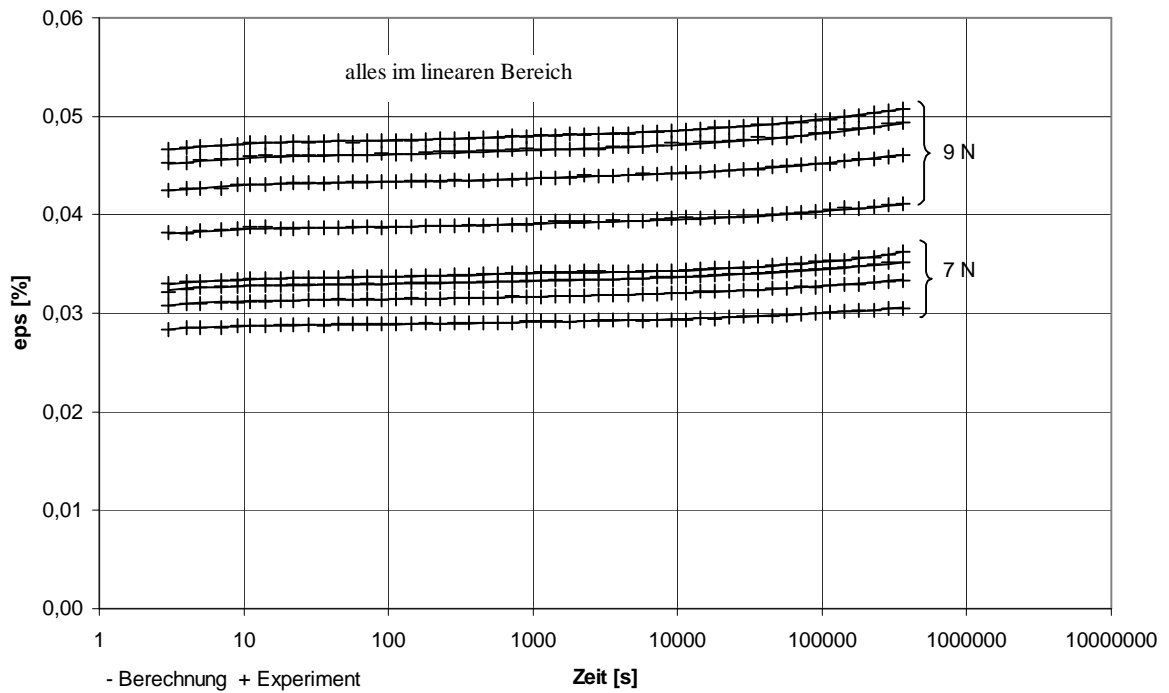


Bild 5.57: Dehnungen bei PVC für 4-DMS-Positionen

Stabilität

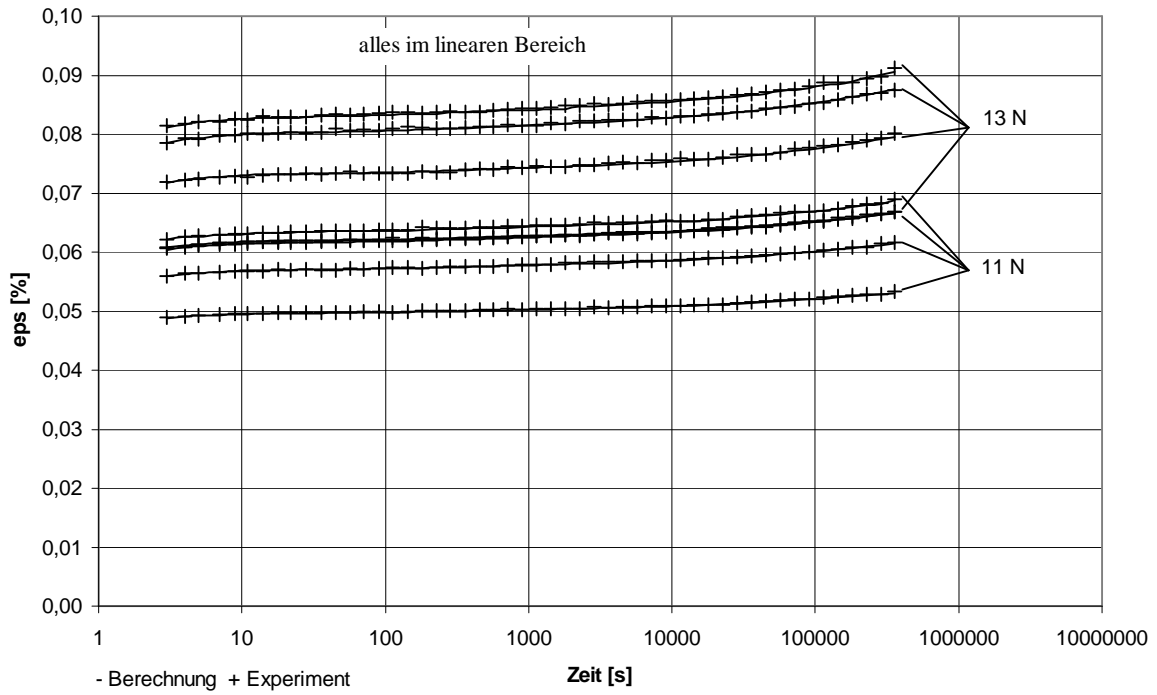


Bild 5.58: Dehnungen bei PVC für 4-DMS-Positionen

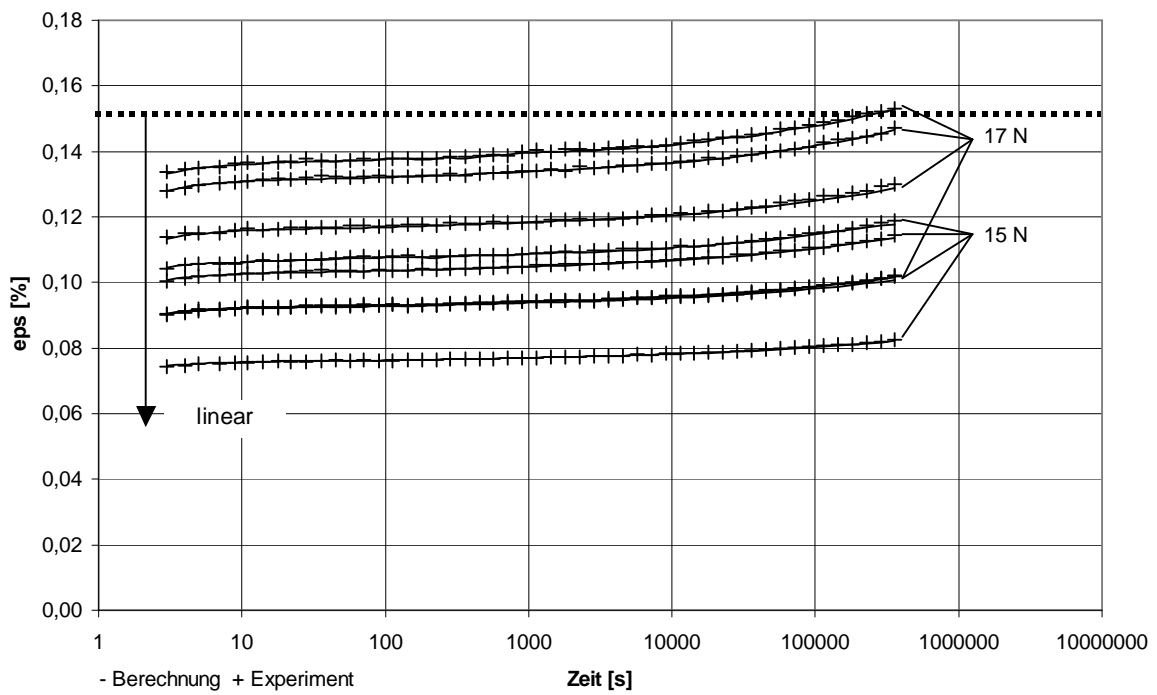


Bild 5.59: Dehnungen bei PVC für 4-DMS-Positionen

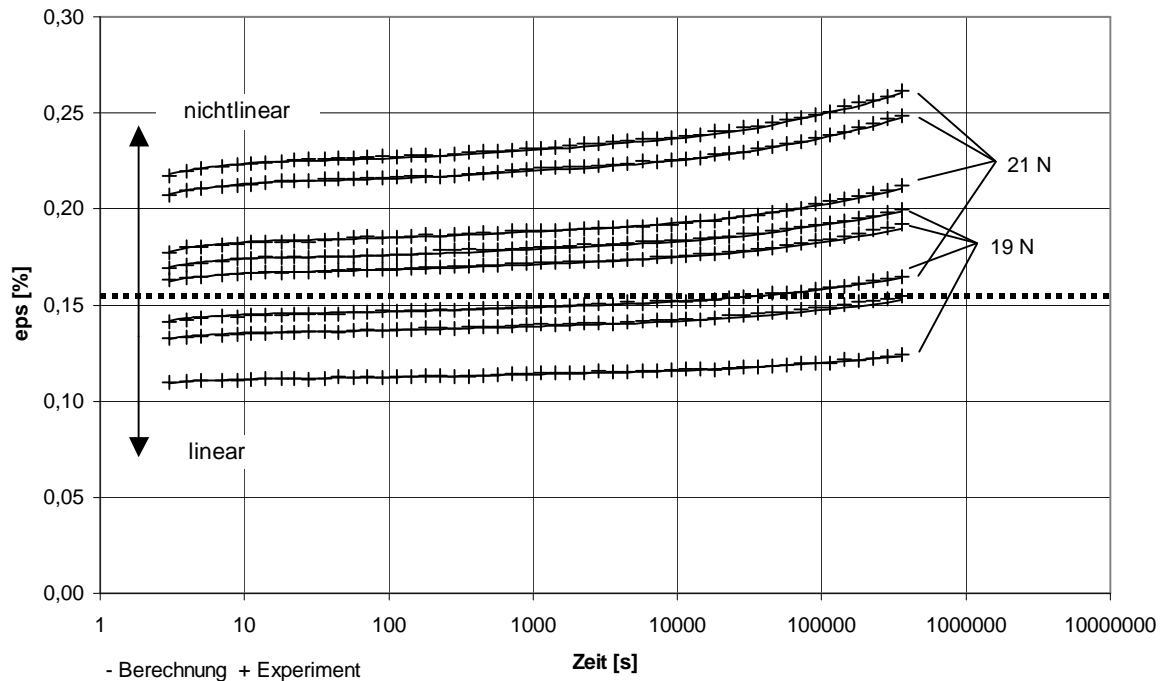


Bild 5.60: Dehnungen bei PVC für 4-DMS-Positionen

Wie oben schon beschrieben, kann der Stabilitätsverlust auch aus einem energetischen Blickwinkel betrachtet werden. Dabei ist als erste und recht gute Annäherung das Erreichen einer konstanten dissipativen Energie zu erwähnen. Wie im Kapitel *Viskoelastizität* dargestellt, sind Versagenskriterien und –arten auf die innere aufgenommene Gesamtenergie zurückzuführen. Jahrzehnte durchgeführte theoretische und experimentelle Untersuchungen bestätigen diese Annahmen mit sehr großer Genauigkeit.

Wird ein metallisches Rohr auf Torsion beansprucht, so bleibt sie „Tragfähig“ bis sich aus irgendeinem Grund die Umgebungsbedingungen (Temperatur, Spannung, Schlag usw.) verändern. Bei keiner äußeren Veränderung ist im normal Fall über die Zeit kein Stabilitätsverlust zu erwarten, es sei denn, das anfänglich angelegte Torsionsmoment übersteigt sofort die Tragfähigkeit. Bei einer Kunststoffprobe ist die Betrachtung nicht mehr so einfach. Auch ein anfänglich niedriges Torsionsmoment kann in Folge des Steifigkeitsverlustes über der Zeit irgendwann zum Versagen führen.

Bei spröden Kunststoffen (z.B. PMMA, PC) wird das Versagen hauptsächlich über einen Bruch eingeleitet. Dabei entstehen kleine Risse, die sich auf Grund der hohen Belastung in Richtung der Hauptspannungslinien ausbreiten und schlagartig zum Versagen durch Bruch führen. Auch war es sehr schwierig dieses spröde Material in den Aufnahmebacken einzuspannen. Man musste sehr aufpassen, dass die Enden der Probe nicht schon vor dem Versuch zum „Springen“ begannen. Diese kleinen Risse, sei es durch die Einspannung oder durch den eigentlichen Versuch, waren nie zu unterdrücken, so dass die Stabilitätsversuche an diesem Material nicht durchgeführt wurden. Um die hohe Last zu übertragen, mussten in den Backen sehr hohe Druckkräfte induziert werden, die sofort zum „Sprung“ und auch zum Bruch unter Versuchsbedingungen ausreichten. In den nachfolgenden Bildern sind Proben dargestellt, die durch Rissausbreitung von den Backen her, versagten. Es ist eindeutig zu

sehen, wie der „Sprung“ an einem Ende der Probe entstanden ist und sich schraubenförmig (laut Theorie 45°) bis zum Durchbrechen ausgebreitet hat.

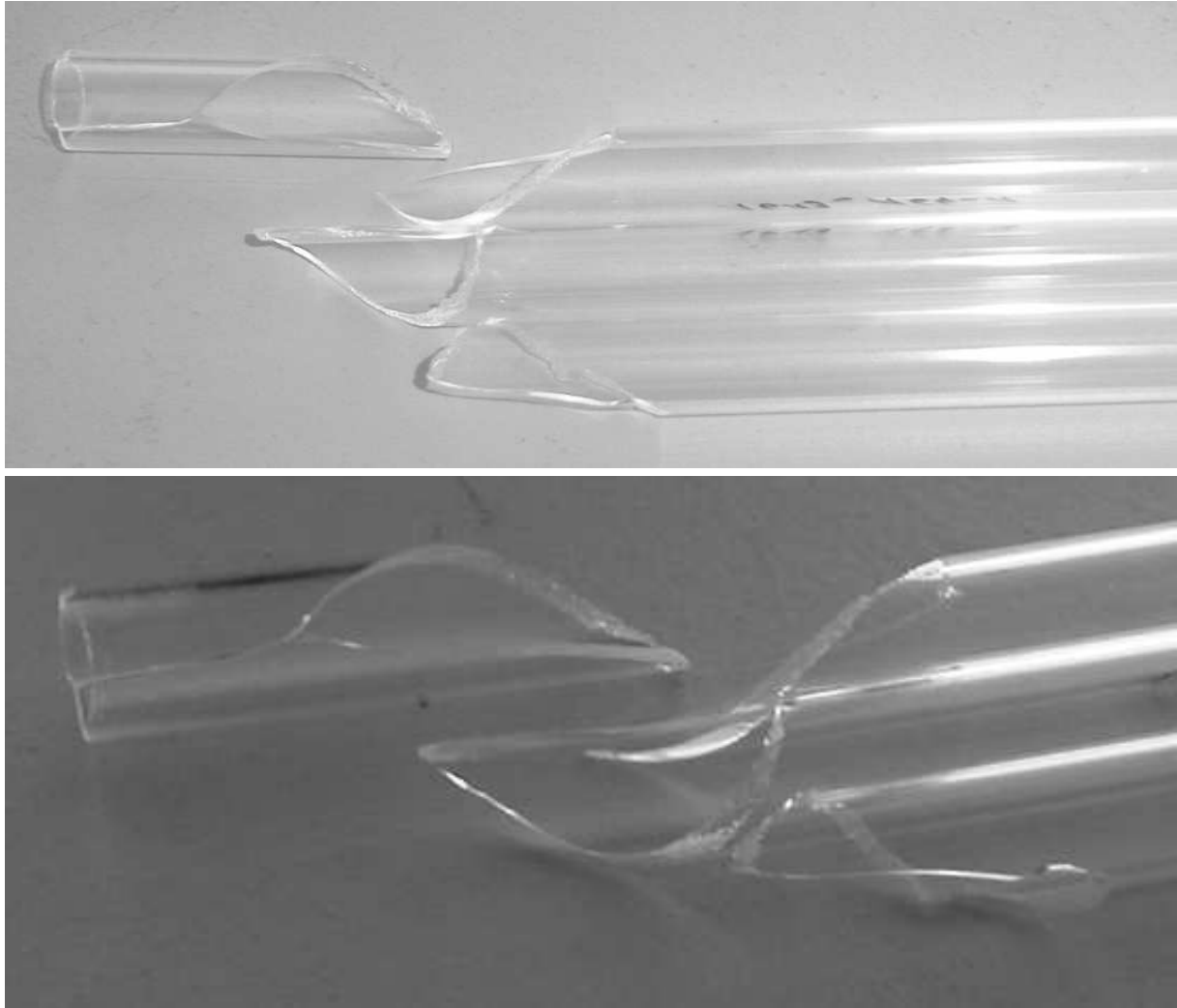


Bild 5.61: Torsionsbruch an PMMA (sprödes Material)

Viel Vorteilhafter für die Stabilitätsuntersuchungen hat sich auf Grund seiner Duktilität PVC gezeigt. Mit diesem Material war es möglich, bis auf Torsionsspannungen von 34 MPa zu steigen, ohne in der Backe zu rutschen. Durch seine Zähigkeit konnte die Probe hervorragend eingespannt werden. Das Versagen kennzeichnete sich durch Wellung, Farbänderung und Abtordieren aus. Kurz vor dem Versagen begann das Rohr aus PVC sich zu Wellen (Gartenschlauch unter Torsion) und an einer nichtzudefinierenden Stelle fing es an seine Farbe (auf weiß) zu verändern. Das Abtordieren kennzeichnete den vollkommenen Stabilitätsverlust. Dieser trat plötzlich ohne Vorwarnung ein. Auf den folgenden Bildern sind Beispiele für diese Phänomene dargestellt:

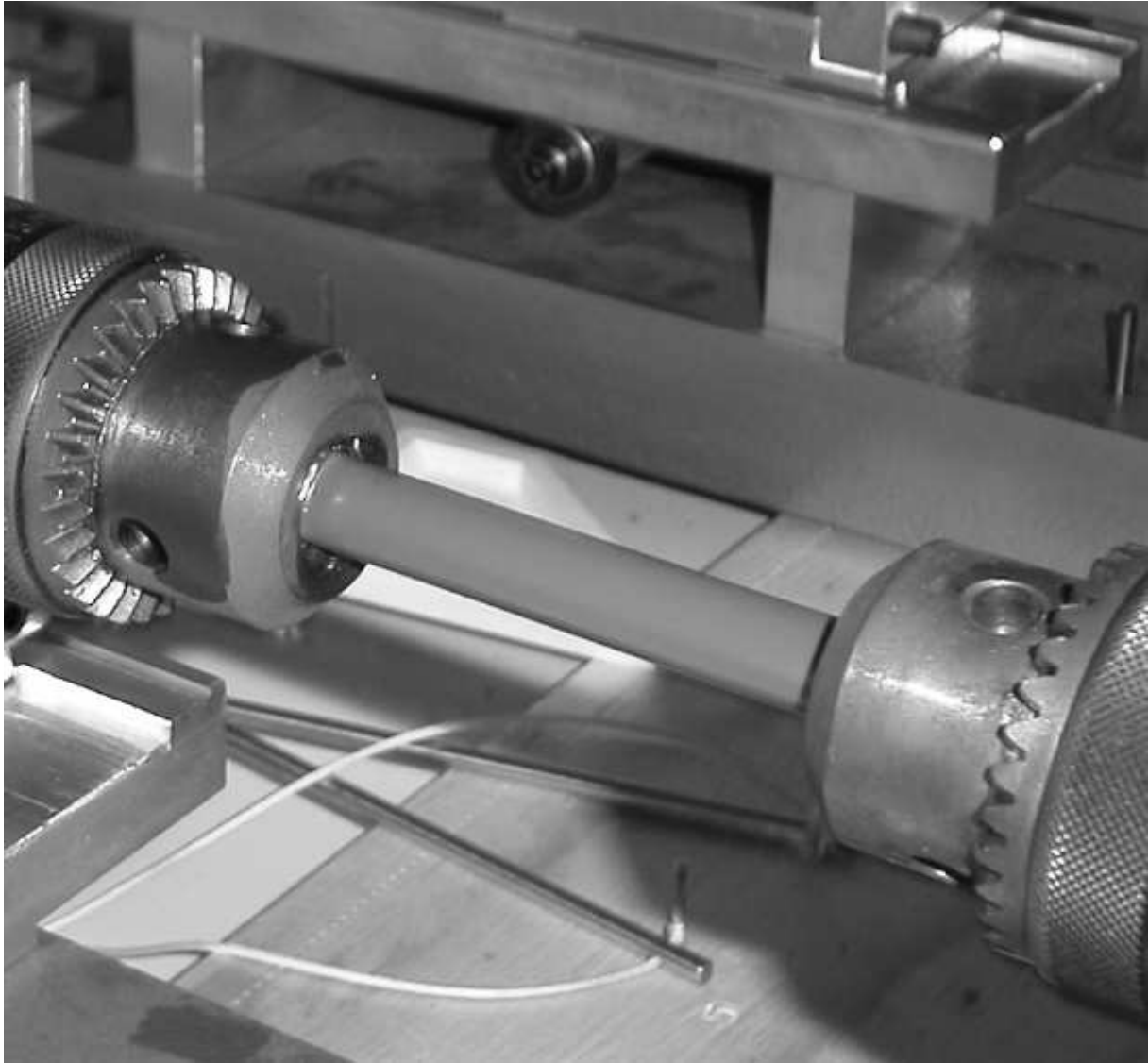


Bild 5.62: Eingespannte Torsionsprobe

Die Versuche haben gezeigt, dass es eine bestimmte dissipative Energie gibt, bei der die Proben abtordieren. Diesen Untersuchungen müssen aber zahlreiche Experimente vorab folgen. Nach dem Abdrehen der Proben wurde das weitere Drehen durch einen Stift gestoppt, was dem Schutz der Messapparatur diente. Der Schubwinkel wurde, wie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben, induktiv gemessen. Die Spannungen betragen 28...34 MPa.

Das folgende Diagramm zeigt diese Ergebnisse. Auf ihr ist der sehr schnelle Anstieg des Schubwinkels, sowie der Durchschlag zu sehen. Der Stopper war auf einen Gammawinkel von ca. 0,4 rad eingestellt. Die dickliche Kurve kennzeichnet die Punkte mit der konstanten dissipativen Energie. Die dargestellten Punkte sind Messpunkte.

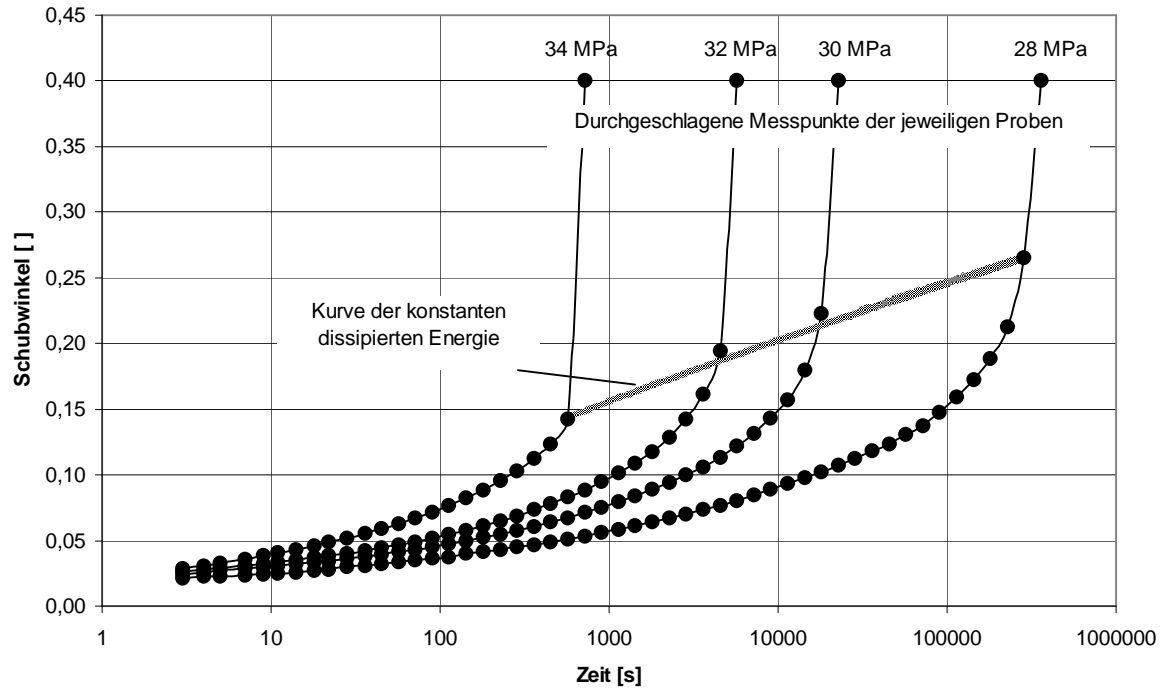


Bild 5.63: Torsionskriechkurven von PVC bis zum Durchschlag

Es ist sehr schön zu sehen, wie die Kurve der konstanten dissipativen Energie sehr nahe an den Stabilitätsverlust herankommt. Der berechnete Wert für die dissipative Energie beträgt in diesem Fall $W_{diss} \approx 0,18 \text{ Nmm/mm}^3$. Die Kurve lässt sich mit einem logarithmischen Potenzansatz hervorragend empirisch annähern:

$$\gamma(t) = a_0 + a_1 \log(t) + a_2 \log(t)^2 \quad (5.97)$$

mit den Werten für $a_0 = 0,00164$, $a_1 = 0,05507$, $a_2 = -0,00125$. Dabei muss die dazugehörige Spannung separat ermittelt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Kunststoffe gewinnen von Tag zu Tag auf Grund ihrer leichten Verarbeitbarkeit und ihres niedrigen Gewichts höhere Bedeutung in der Technik. So werden sie sogar, Dank der fortschreitenden Weiterentwicklung und der beeinflussbaren Werkstoffeigenschaften, in hochbelasteten Bauteilen eingesetzt. Als Beispiel wäre die Luft- und Raumfahrt, Elektrotechnik und die Automobilbranche zu erwähnen. Auf jeden Fall hat sich gezeigt, dass die Forschung in dieser Richtung nutzenbringend ist.

Trotz vieler experimenteller und theoretischer Untersuchungen und Materialweiterentwicklungen ist die Handhabung der Zeitabhängigkeit (viskoelastisch), der Übergang linear-nichtlinear und die unterschiedlichen Versagensmechanismen von diesem Werkstoff recht schwierig. Diese Schwierigkeiten erschweren das Dimensionieren und die Vorhersage von Bauteilen erheblich. Zusätzliche Probleme entstehen bei der Materialauswahl. So kann ein und das selbe Material unterschiedliche Eigenschaften aufgrund seiner Vorgeschichte aufweisen. Auch werden sie sehr stark durch Umgebungsbedingungen beeinflusst. Deshalb ist es von größter Wichtigkeit die Experimente genau vorzubereiten. Auch muss stets darauf geachtet werden, die Versuchsparameter konstant und für alle Versuche reproduzierbar zu halten.

Das Ziel dieser Arbeit war, mathematische und experimentelle Methoden für die Beschreibung des Stabilitätsverlustes anhand „einfachen“ Versuchen zu entwickeln. Auch sollten bereits entwickelte Gleichungen (Energimethoden) ihre Anwendung finden. Die Betrachtung eines Stabes jenseits seiner kritischen Knickkraft (Eulerkraft), ist bei realen Stäben mit unvermeidlicher Imperfektion äußerst wichtig, zu mal der Faktor der Zeitabhängigkeit mit einfließt. Das Durchschlagen von Rohren ist nicht nur eine Polymersache, sondern ist auch bei metallischen Rohren bei hohen Temperaturen sichtbar.

Die Zeit war bei jeder Anwendung von größter Bedeutung. Die hier angewendeten Methoden sind nur in dem Zeitbereich hinreichend genau, in dem sie in Versuchen getestet wurden. Jedoch lassen sich alle mit den Hilfsmitteln der Zeit-Spannungs- bzw. Zeit-Temperatur-Verschiebung auf beliebig lange Zeiten anwenden.

Die Annäherung aller Versuchsarten mit den Prony-Dirichlet-Reihen erwies sich als richtig. Auch war die Anwendung der Nichtlinearitätsfaktoren in dieser Form sehr einfach. Die berechneten Werte zeigten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten, nicht nur im Falle der „einfachen“ Versuche, sondern auch unter komplizierten Belastungen wie Knicken und Torsion.

Die Vorhersage mit Hilfe der Energiemethode ist von großem Vorteil, nicht weniger, weil sie eine zusätzliche Gleichung zur Bestimmung der Einflüsse bringt.

Zusätzlich sind Programme geschrieben worden, die die komplexen Belastungsarten erfassen und die dazugehörigen wichtigen physikalischen Größen berechnen.

Wie vereinfachend auch Methoden seien mögen, ist der Gebrauch von modernen Rechnern nicht mehr wegzudenken. Dank der schnelleren PC's ist das Rechnen der vielen Materialparameter, die Annäherung mit großer Genauigkeit und die Auswertungen auf das Minimale gesunken.

Literaturverzeichnis

- [1] GÖTZ M., Kriechverhalten von Epoxydharz, Zulassungsarbeit, Fachgebiet für Mechanik und Werkstoffprüfung, TU München, 1999
- [2] LASKA R., FELSCH C., Werkstoffkunde für Ingenieure, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1981
- [3] NEFF T., Lochleibung von Polymeren, München: Herbert Utz Verlag GmbH, 2001
- [4] BRÜLLER O. S., Werkstoffprüfung, Skriptum zur Vorlesung, TU München, 1996
- [5] BRÜLLER O. S., Viskoelastizität, Skriptum zur Vorlesung, TU München, 1996
- [6] WOLFSEHER R. F., Die Superposition von Zeit, Temperatur und Spannung, dargestellt am Kriechverhalten eines glasfaserverstärkten Kunststoffes, ETH Zürich, Dissertation, 1987
- [7] BARTI E., Nichtlinear-Viskoelastische Charakterisierung eines gewebeverstärkten Polymers unter Druckbelastung, Dissertation, TU München, 2002
- [8] TSCHOEGL N. W., The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior, Springer-Verlag, Berlin 1989
- [9] FINDLEY W. N., LAI J. S., ONARAN K., Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976
- [10] DOETSCH G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation, Oldenburg-Verlag, München, 1967
- [11] MACCOLLUM P.A., Laplace Transform Tables and Theorems, Holt, New York, 1965
- [12] STÖCKER H., Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, Harri-Deutsch-Verlag, Frankfurt am Main, 1993
- [13] BOLTZMANN L., Sitzungsber. Kgl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Classe, 1874
- [14] SCHWARZL F. R., Polymermechanik Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren, Springer-Verlag, Berlin 1990
- [15] ZEHNER C., Elasticity and Anelasticity of Metals, Univ. Press Chicago, 1948
- [16] BRÜLLER O. S., Numerical Extension of Boltzmann's Superposition Principle to Nonlinear Viscoelasticity, Fachbereich für Mechanik und Werkstoffprüfung, TU München, 2000
- [17] BECKER J., HAACKE W., NABERT R., DREYER H. J., Numerische Mathematik für Ingenieure, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1977
- [18] BRÜLLER O. S., Simple Procedures for the Long-Term Viscoelastic Characterization of Polymeric Materials, Fachbereich für Mechanik und Werkstoffprüfung, TU München, 1995
- [19] BAU M., Untersuchungen zum nichtlinear viskoelastischen Verhalten von Kunststoffen unter variabler Last, TU München, Dissertation, 2000
- [20] BRÜLLER O. S., Theoretische Untersuchungen zum Kriechverhalten und Kriechversagen von Kunststoffen, TH Aachen, Dissertation, 1977

- [21] BRÜLLER O. S., Beschreibung des Verhaltens viskoelastischer Werkstoffe unter einachsiger Belastung am Beispiel von Thermoplasten, Universität Duisburg, Habilitationsschrift, 1980
- [22] BRÜLLER O. S., Zur Charakterisierung des Langzeitverhaltens von Kunststoffen, *Archive of Applied Mechanics*, Bd. 63, 1993, S. 363-376
- [23] MENGES G., SCHMACHTENBERG E., Beschreibung des mechanischen Verhaltens viskoelastischer Werkstoffe mit Hilfe von Kurzzeitversuchen, *Kunststoffe* 73, 9, 1983, S. 543-546
- [24] EHRENSTEIN G. W., Elastisches, viskoelastisches und viskoses Verformungsverhalten aus: Belastungsgrenzen von Kunststoffbauteilen, VDI-Verlag Düsseldorf, 1975, S. 59-79
- [25] EHRENSTEIN G. W., Kriechen, Rest- und Zeitstandfestigkeit bei GF-UP, *Kunststoffe* 66, 5, 1976, S. 289-294
- [26] EHRENSTEIN G. W., *Polymerwerkstoffe*, Carl Hanser Verlag München Wien, 1987
- [27] MENGES G., SCHMACHTENBERG E., Das Deformationsmodell, *Kunststoffe* 77, 3, 1987, S. 289-292
- [28] MICHAELI W., FÖLSTER T., LEWEN B., Beschreibung des nichtlinear-viskoelastischen Verhalten mit dem Deformationsmodell, *Kunststoffe* 79, 12, 1989, S. 1356-1358
- [29] PARTOM Y., SCHANIN I., Modelling Nonlinear Viscoelastic Response, *Polymer Engineering and Science* 23, 15, 1983, S. 849-859
- [30] SCHAPERLY R. A., On the Characterization of Nonlinear Viscoelastic Materials, *Polymer Engineering and Science* 9, 4, 1969, S. 295-310
- [31] JOACHIM K., Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren, Universität Stuttgart, Dissertation, 1998
- [32] FLÜGGE W., *Viscoelasticity*, Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [33] GIANNI A., NICOLAIS L, *Polymer Processing and Properties*, Plenum Press 1984, New York
- [34] RETTING W., *Mechanik der Kunststoffe*, Hanser-Verlag, 1991
- [35] BRÜLLER O. S., NEFF T., New Procedures of a Better Characterization of the Nonlinear Viscoelastic Behavior of Polymers, *International Conferences on Polymer Characterization (PolyChar 5)*, Denton, USA
- [36] GROSS D., HAUGER W., SCHNELL W., WRIGGERS P., *Technische Mechanik* 4, Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [37] GUST H., HENGL R., Überprüfung des Deformationsmodells in einem weiten Bereich von Temperatur und Beanspruchungsgeschwindigkeit, 12. Stuttgarter Kunststoffkolloquium, 1991
- [38] LEWEN B., Das nichtlinear viskoelastische Verhalten von Kunststoffen am Beispiel der Temperatur-Verschiebung und der Querkontraktionszahl, Dissertation an der RWTH Aachen, 1982
- [40] MENGES G., WENIG M., FÖLSTER T., Verformungsverhalten von Thermoplasten bei inhomogenen Spannungsverteilungen, *Kunststoffe* 80, 10, 1990, S. 1029-1032

- [41] SCHMACHTENBERG E., Die mechanischen Eigenschaften nichtlinear viskoelastischer Werkstoffe, Dissertation an der RWTH Aachen, 1985
- [42] MASCIA L., Thermoplastics: Materials Engineering, Applied Science Publishers LTD, England 1982
- [43] BRÜLLER O. S., On the Nonlinear Viscoelastic Characterization of Creep and Stress Relaxation of Polymeric Materials, Theoretical and Applied Rheology, Elsevier Science Publishers, 1992, S. 796-798
- [44] BRÜLLER O. S., On the Characterization of Nonlinearity in Viscoelasticity, Department A of Mechanics, Technische Universität München, S. 5-12
- [45] BRÜLLER O. S., SCHMITT H. H., Polymer Engineering and Science, Vol. 19, 1979: Brüller O. S. and Laws R., Experimentelle Bestimmung der linear-viskoelastischen Grenze von Thermoplasten unter einachsiger Spannungsrelaxation, Kunststoffe 73, 1983
- [46] BERTILSSON H., JANSSON J. F., The Limits of Viscoelasticity in PMMA, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 19, PP. 1971-1978 (1975)
- [47] JANSSON J. F., The Apparence of Non-Linear Viscoelasticity in Polyethyl-methacrylate, Angew. Makromol. Chem., 37 1974
- [48] BRÜLLER O. S., NEFF T., Statik für Ingenieure - Eine Einführung, Herbert UTZ Verlag, 1998
- [49] BRÜLLER O. S., NEFF T., Elastostatik für Ingenieure - Eine Einführung, Herbert UTZ Verlag, 2000
- [50] BAIER H., Leichtbau 1, Skriptum zur Vorlesung, 1998
- [51] GREEN A. E., RIVLIN R. S., The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 1, 1957
- [52] GREEN A. E., RIVLIN R. S., The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part II, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 3, 1957
- [53] FINDLEY W. N., Creep and Stress Relaxation of Plastics, Pergamon Press, 1958
- [54] WARD I. M., ONAT E. T., Nonlinear Mechanical Behavior of Oriented Polypropylene, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 11, 1963
- [55] NEIS V. V., SACKMAN J. L., An Experimental Study of a Nonlinear Material with Memory, Transaction of the Society of Rheology, Vol. 11, 1967
- [56] SCHAPERLY R. A., Further Development of a Thermodynamic Constitutive Theory-Stress Formulation, Report No. 69-2, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1969
- [57] BRÜLLER O. S., Nonlinear Characterization of the Long Term Behavior of Polymeric Materials, Polymer Engineering and Science, Vol. 2, 1987
- [58] BRÜLLER O. S., Some new Results Concerning the Nonlinear Characterization of Polymeric Materials, Polymer Engineering and Science, 1991
- [59] BRONSTEIN I. N., SEMENDJAJEW K. A., Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlag, Stuttgart, 1991

- [60] STEINER H., Untersuchungen zum nichtlinear-viskoelastischen Materialverhalten von Kunststoffen, Herbert Utz Verlag Wissenschaft, München, 1997
- [61] SCHAPERY R. A., A Method of Viscoelastic Stress Analysis Using Elastic Solutions, Journal of the Franklin Institute, Vol. 279 No. 4, April 1965
- [62] DOMININGHAUS H., Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften, Springer-Verlag, 1998
- [63] MERZ L., Grundkurs der Messtechnik Teil I, Oldenburg-Verlag, München, 1980
- [64] MERZ L., Grundkurs der Messtechnik Teil II, Oldenburg-Verlag, München, 1980
- [65] DEMAYO Y., Entwicklung einer Spannvorrichtung für ein neues Klemmbackensystem und Prüfung der Einspanneigenschaften der neuen Backen, Studienarbeit am IKVI, RWTH, Aachen, 1975
- [66] HOFFMANN K., Anwendung der Wheatstone Brückenschaltung, HBM, 1973
- [67] HBM, Komplettmesskette vom Sensor bis zur Software, Katalog, 2000
- [68] HOFFMANN K., Eine Einführung in die Technik des Messens mit DMS, HBM, Darmstadt, 1987
- [69] MICHAELI W., Einführung in die Kunststoffverarbeitung, Hanser-Verlag München, 1999
- [70] SCHMIDT R., Werkstoffverhalten in biologischen Systemen- Grundlagen-Anwendung-Schädigungsmechanismen- Werkstoffprüfung, VDI-Verlag, 1994
- [71] SAECHTLING H., Kunststoff-Taschenbuch, Hanser-Verlag, 1989
- [72] BRÜLLER O. S., Correlation between Viscoelastic Shear and Tension, Proceeding of the 5th European Rheology Conference, Slovenia, 1998, 256-257
- [73] SCHNELL W., GROSS D., HAUGER W., Technische Mechanik 2 – Elastostatik, Springer-Verlag Berlin, 1992
- [74] KABUS K., Mechanik und Festigkeitslehre, Carl Hanser Verlag München, 1984
- [75] WILLIAMS M. L., Structural Analysis of Viscoelastic Materials, AIAA J., 2, 5, 785-808, 1964
- [76] REINER M., WEISSENBERG K., A Thermodynamical Theory of the Strength of Materials, Rheol. Leaf., 10, 12-20, 1939
- [77] REINER M., TAKSERMAN-KROZER R., Dynamical Strength of a Combination of Linear Bodies, Isr. J. Technol., 7, 285-290, 1969
- [78] FOUX A., BRÜLLER O. S., Limit of Linear Viscoelastic Behavior – an Energy Criterion, Proc. of the 1971 Intern. Conf. on Mech. Behavior of Mater., 1, Kyoto, Japan, 237-244, 1972
- [79] BRÜLLER O. S., On the Time-Dependent Failure of Polymers, Department of Material Science, Universität Duisburg
- [80] SCHMIDT H., Kunststoff. Rund. 19, 1-7, 56-65, 145-150, 196-199, 320-326, 1972

- [81] MENGES G., Kunststoffe 63, 95-100, 173-177, 1973
- [82] BRÜLLER O. S., Predicting Yield and Fracture of Polymers, Paper Nr. R 150, presented at 1980 SESA Spring Meeting, Boston, May 1980
- [83] BRÜLLER O. S., On the Damage Energy of Polymers in Creep, Institut für Kunststoffverarbeitung, RWTH Aachen
- [84] RIGBI Z., Journal Applied Polym. Sci. Symp., 5, 1, 1967
- [85] BRÜLLER O. S., On the Time-Dependent Behavior and failure of Polymetric Materials, TU München, 2002
- [86] DICK H., MEIER W., BRÜLLER O. S., Untersuchungen des Auftretens rissartiger Werkstoffschädigungen an Polymeren unter einachsiger Spannungsrelaxation und Kurzzeitbelastung, Forschungsbericht Teil I und II, Werkstofftechnik, Universität Duisburg, 1981
- [87] STUSSI F., Baustatik I, Birkenhäuser Verlag Stuttgart, 1975
- [88] LOHSE G., Einführung in das Knicken und Kippen, Werner Verlag, 1993
- [89] WILLE K., Durchbiegung der Stabtragwerke, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller Köln, 1977
- [90] KOLLBRUNNER C. F., HAJDIN N., Dünnwandige Stäbe Band II, Springer Verlag Berlin, 1975
- [91] HOFF N. J., The Analysis of Structures, Polytechnic Institute of Brooklyn, Chapman & Hill, 1956
- [92] SCHARDT R., Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Springer Verlag Berlin, 1989
- [93] BUSHNELL D., Computerrized Buckling Analysis of shells, Martinus Nijhoff Publishers, 1985
- [94] FARSHAD M., Stability of Structures, Elsevier Verlag, 1994
- [95] KOLLAR L., DULACSKA E., Buckling of shells for Engineers, John Wiley & Sons New York, 1984
- [96] HUSEYIN K., Nonlinear Theory of Elastic Stability, Nordhoff International Publishing Leyden, 1975
- [97] COMO M., GRIMALD A., Theory of Stability of Continuous Elastic Structures, CRC Press, Boca Raton New York, London, Tokyo, 1995
- [98] WIEDEMANN J., Leichtbau 1: Elemente, Springer Verlag Berlin, 1986
- [99] WIEDEMANN J., Leichtbau 2: Konstruktion, Springer Verlag Berlin, 1986
- [100] IVANYI M., SKALAND M., Stability Problems of Steel Structures, Springer Verlag Wien, New York, 1992
- [101] BRITVEC S. J., Stability and Optimization of Flexible Space Structures, Birkhäuser Verlag Berlin, 1995
- [102] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., Theory of Elastic Stability, Engineering Societies Monographs, McGraw – Hill Book Company New York, 1961

- [103] ALLEN H. G., BULSON P. S., Background to Buckling, McGraw – Hill Book Company (UK), 1980
- [104] BUDIANSKY B., Buckling of Structures, Symposium Combridge June 17 – 21, 1974, Springer Verlag Berlin, 1976
- [105] CROLI J. G. A., WALKER A. C., Elements of Structural Stability, Macmillan Press Ltd. New York, 1972
- [106] VAN ERP G. M., Advanced Buckling Analyses of Beams with Arbitrary Cross Sections, Thesis Eindhoven, 1989
- [107] ROORDA J., Buckling of Elastic Structures, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, 1980
- [108] VINSON J. R., The Behavior of Thin Walled Structures, Kluwer Academic Publishers Boston London, 1989
- [109] TIMOSHENKO S., YOUNG D. H., Theory of Structures, McGraw – Hill Book Company New York 1945
- [110] RAMM E., Buckling of Shells, Proceedings of a State – of – the – Art Colloquium, Universität Stuttgart, Germany, May 6 – 7, Springer Verlag Berlin, 1982
- [111] ZALKA K. A., ARMER G. S. T., Stability of Large Structures, Butterworth – Heinemann, 1992
- [112] THOMPSON J. M. T., HUNT G. W., A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, 1973
- [113] BRÜLLER O. S., Predicting the Material Response of Nonlinear Viscoelastic Materials to any Long-Term Loading History on the Basis of Accelerated Characterization, Fachbereich für Mechanik und Werkstoffprüfung, TU München, 2000
- [114] BRÜLLER O. S., On the Linear Viscoelastic Limit of Polymers – Exemplified on PMMA, Dept. of Material Science, Universität Duisburg, Polymer Engineering and Science, September 1979, Vol. 19 No. 12
- [115] BRÜLLER O. S., KARA H., On the Nonlinear Viscoelastic Behavior of Polymers Under Eccentric Buckling, Fachbereich für Mechanik und Werkstoffprüfung, TU München, 2003
- [116] BRÜLLER O. S., Crazing of Polymers under Stress Relaxation, Dept. of Material Science, Universität Duisburg, 1988
- [117] BRÜLLER O. S., Energy – Related Failure Criteria of Thermoplastics, Dept. of Material Science, Universität Duisburg, Polymer Engineering and Science, September 1981, Vol. 21 No. 3
- [118] BRÜLLER O. S., Crazing Limit of Polymers in Creep and Stress Relaxation, Dept. of Material Science, Universität Duisburg, Polymer, 1978, Vol. 19 October
- [119] WILLIAMS M. L., Structural Analysis of Viscoelastic Materials, California Institute of Technology, Pasadena, AIAA Journal, 1964. Vol. 2 No. 5

- [120] KEMPNER J., Creep Bending and Buckling of Linear Viscoelastic Columns, National Advisory Committee for Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn, Technical Note 3136, January 1954
- [121] KEMPNER J., Creep Bending and Buckling of Nonlinear Viscoelastic Columns, National Advisory Committee for Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn, Technical Note 3137, January 1954
- [122] KEMPNER J., SHARAD A. P., Creep Buckling of Columns, National Advisory Committee for Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn, Technical Note 3138, January 1954
- [123] TSIEN H. S., Similar Laws for Stressing Heated Wings, Journal of the Aeronautical Science, Vol. 20 No. 1. January 1953
- [124] GERARD G., Note on Creep Buckling of Columns, Journal of Aeronautical Science, No. 10 p. 714, 1952
- [125] ROSENTHAL D., BAER H. W., An Elementary Theory of Creep Buckling of Columns, Proceedings 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, New York, pp. 603-611, 1952
- [126] HULT J. A. H., Critical Time in Creep Buckling, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22 pp. 432. 1955
- [127] HOFF N. J., A Survey of the Theories of Creep Buckling, Proceedings 3rd U.S. National Congress of Applied Mechanics, Brown Univ., pp. 28-48, 1958
- [128] CHAPMAN J. C., ERICKSON B., HOFF N. J., A Theoretical and Experimental Investigation of Creep Buckling, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 1 pp. 145-174, 1960
- [129] ODQUIST F. K. G., Creep Stability of Bars, Plates and Shells, Stability, H. H. E. Leipholz, ed., Waterloo, Canada, pp. 199-242, 1972
- [130] FREUDENTHAL A. M., The Inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures, 1st Ed., John Wiley & Sons, New York, pp. 518-519, 1950
- [131] HILTON H. H., Creep Collaps of Viscoelastic Columns with Initial Curvatures, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 19, pp. 844-846, 1952
- [132] HILTON H. H., On the Nonexistence of Finite Critical Times for Generalized Linear Viscoelastic Columns with Arbitrary Initial Curvatures, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 28, pp. 655-656, 1961
- [133] KEMPNER J., POHLE F. V., On the Nonexistence of Finite Critical Times for Linear Viscoelastic Columns, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 20, pp. 572-573, 1953
- [134] KEMPNER J., Creep Bending and Buckling of Linearly Viscoelastic Columns, NACA Technical Note, No. 3136, pp. 1-22, 1954
- [135] KEMPNER J., Viscoelastic Buckling, Handbook of Engineering Mechanics, W. Flugge, McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 51-1-54-15, 1962
- [136] BOOKER J. R., A Method of Solution for the Creep Buckling of Structural Members of a Linear Viscoelastic Material, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7 No. 2, pp. 101-113, 1973

- [137] BOOKER J. R., FRANKHAM B. S., TRAHAIR N. S., Stability of Viscoelastic Structural Members, Civil Engineering Transaction, Institute of Engineers, Vol. 16 No. 1, pp. 45-51, 1974
- [138] DISTEFANO J. N., Creep Buckling of Slender Columns, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 91 No. 3, pp. 127-150, 1965
- [139] ELLINGTON J. P., Buckling of a Viscous Strut Loaded Eccentrically, Journal of Strain Analysis, Vol. 9 No. 4, pp. 227-229, 1974
- [140] VINOGRADOV A. M., GLOCKNER P. G., Stability of Viscoelastic Imperfect Columns, ASME 3rd Engineering Mechanics Division Speciality Conference, Austin, pp. 244-247, 1979
- [141] ZYCZKOWSKI M., Geometrically Non-Linear Creep Buckling of Bars, Proceedings of IUTAM Colloquium "Creep in Structures", pp. 307-325, 1962
- [142] HUANG N. C., Creep Buckling of Imperfect Columns, Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME E 43, No. 1 pp. 131-136, 1976
- [143] VINOGRADOV A. M., Nonlinear Effects in Creep Buckling Analysis of Columns, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 111 No. 6, June, 1985
- [144] ROBOTNOV Y. N., Creep Problems in Structural Members, North-Holland Publishing CO., New York, 1969
- [145] TOUATI D., CEDERBAUM G., Post Buckling Analysis of Imperfect Nonlinear Viscoelastic Columns, International Journal Solid Structures, Vol. 34 No. 14 pp. 1751-1760, 1997
- [146] KOLLBRUNNER C. F., MEISTER M., Knicken, Biegedrillknicken, Kippen Theorie und Berechnung von Knickstäben Knickvorschriften, Springer-Verlag, Berlin, 1961
- [147] MARGUERRE K., Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, Springer-Verlag, Berlin, 1950
- [148] BRÜLLER O. S., Persönliche Mitteilung, 2000-2004
- [149] BARTI E., Persönliche Mitteilung, 2000-2004
- [150] FOUX A., BRÜLLER O. S., The Linear Viscoelastic Range of Perspex and Epoxy Resin, Isr. J. Technol., 9, 507-514, 1971
- [151] SCHMIDT H., Untersuchungen der Fließzonenbildung und des mechanischen Langzeitverhaltens von thermoplastischen Kunststoffen bei ein- und zweiachsig wirkenden Zugspannungen, Dissertation TH-Aachen, 1971
- [152] RIESS R., Untersuchungen zum Verformungsverhalten thermoplastischer Kunststoffe in ausgewählten Flüssigkeiten, Dissertation TH-Aachen, 1973

Anhang

Verzeichnis für die wichtigsten verwendeten Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

A, B	Zeitmatrix
a_T	Materialkennwert
a, b, c	Parameter für den Nichtlinearitätsfaktor bei Kriechen
a_0, \dots, a_p	Parameter für den Nichtlinearitätsfaktor bei Relaxation
a_i, b_i	Materialparameter
E	Elastizitätsmodul
E_0	spontaner Relaxationsmodul
$E(t)$	zeitabhängiger Relaxationmodul
E_i	Relaxationsmodul aus dem diskreten Relaxationsspektrum
E_∞	Relaxationsmodul zur Zeit $t \rightarrow \infty$
e	Exzentrizität
F	Kraft
F_{krit}	kritische Kraft
f	Lagerverschiebung
G	Schubmodul
G^*	Kriechmodul bei Torsion
g_{0k}	Nichtlinearitätsfaktor für die spontane Materialantwort bei Kriechen
g_{tk}	Nichtlinearitätsfaktor für die zeitabhängige Materialantwort bei Kriechen
g_{tT}	Nichtlinearitätsfaktor für die zeitabhängige Materialantwort bei Torsion
H	Balkenhöhe
$H(t)$	Heaviside Funktion
h_{0k}	Nichtlinearitätsfaktor für die spontane Materialantwort bei Relaxation
h_{tk}	Nichtlinearitätsfaktor für die zeitabhängige Materialantwort bei Relaxation
h_{tT}	Nichtlinearitätsfaktor für die zeitabhängige Materialantwort bei Torsion
I	Flächenträgheitsmoment
J	Vektor der linearen Parameter
J^e	Vektor der experimentellen Parameter
$J(t)$	zeitabhängige Kriechnachgiebigkeit
$J(s)$	Laplace Transformation der zeitabhängigen Kriechnachgiebigkeit
J_0	spontane Kriechnachgiebigkeit
J_j	Kriechnachgiebigkeit aus dem diskreten Retardationsspektrum
J_∞	Kriechnachgiebigkeit zur Zeit $t \rightarrow \infty$

l	Länge
M	Biegemoment
N	Anzahl der Stützstellen
P	Differentialoperator
p_i	Materialkonstanten in den Differentialoperatorgleichungen
Q	Differentialoperator
q_i	Materialkonstanten in den Differentialoperatorgleichungen
R	Rohrradius
s	Bogen des Balkens
Δs	Bogenelement
t	Zeit
U_B	Meßsignal an der DMS-Brücke
W	Widerstandsmoment
W_0, W_{diss}	Energie
W_{gesT}, W_T, W_{dissT}	Energie bei Torsion
w	Balkendurchbiegung
z	Balkenhöhe

Griechische Buchstaben

$\dot{\varepsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit
ε_0	spontane Dehnung
$\varepsilon(t), \varepsilon(s)$	zeitabhängige und Laplace Transformation der Dehnung
$\Delta\varepsilon_i$	Dehnungsinkrement
ε^*	ausgewertete Dehnungsvorgabe
Γ	Kriechoperator
φ, φ_i	Winkel und Winkelement des Balkens
γ	Gleitwinkel
η	Viskosität
κ	Krümmung
λ^2	Eigenwert
ν	Querkontraktion
Π	Potential
$\dot{\sigma}$	Spannungsgeschwindigkeit
$\sigma(t), \sigma(s)$	zeitabhängige und Laplace Transformation der Spannung
$\Delta\sigma_i$	Spannungsinkrement
τ_i	Relaxations- bzw. Retardationszeiten
τ	Torsionsspannung
ψ, ψ'	reduzierte Zeit