

Institut für Maschinen- und Fahrzeugtechnik - Lehrstuhl für Maschinenelemente  
Technische Universität München

**Rechnerischer Festigkeitsnachweis der Ermüdungstragfähigkeit  
vergüteter und einsatzgehärteter Stirnräder**

**Tobias Hertter**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen  
der Technischen Universität München zur Erlangung  
des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. mont. habil E. Werner

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. B.-R. Höhn
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Löhe, Universität Karlsruhe (TH)

Die Dissertation wurde am 11.06.2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 17.11.2003 angenommen.

## Inhalt

Zeichen und Einheiten .....	IV
1 Einleitung .....	1
1.1 Problemstellung .....	1
1.2 Zielsetzung und Lösungsweg .....	2
2 Stand des Wissens .....	3
2.1 Werkstoffermüdung .....	3
2.2 Konzepte der örtlichen Dauerfestigkeit .....	4
2.3 Zahnfußtragfähigkeit .....	10
2.3.1 Bewertung unter Berücksichtigung der Randspannung .....	10
2.3.2 Bewertung unter Berücksichtigung der Werkstoffbean- spruchung bzw. -beanspruchbarkeit über der Bauteiltiefe .....	11
2.4 Grübchen- und Graufleckentragfähigkeit .....	13
2.4.1 Bewertung unter Berücksichtigung der reinen Oberflächen- belastung .....	13
2.4.2 Bewertung unter Berücksichtigung der Werkstoffbean- spruchung bzw. -beanspruchbarkeit über der Bauteiltiefe .....	14
2.5 Zusammenfassung zum Stand des Wissens .....	19
3 Theoretische Untersuchungen zur Werkstoffbeanspruchung im Zahnrad ..	21
3.1 Werkstoffbeanspruchung im Zahnfuß .....	21
3.2 Ideal glatter Wälzkontakt .....	21
3.2.1 Unterteilung der im Wälzkontakt auftretenden Spannungen ..	21
3.2.2 Lastspannungen im Wälzkontakt .....	22
3.2.3 Spannungen an der Oberfläche eines Volumenelementes ...	24
3.2.4 Eigenspannungen im Wälzkontakt .....	25
3.2.5 Dynamische Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt .....	27
3.3 Rauher, linienförmiger Wälzkontakt .....	30
3.3.1 Grundlagen zum Aufstellen einfacher Kontaktmodelle .....	30
3.3.2 Einfaches Kontaktmodell ohne Berücksichtigung der Schmierstofftraganteile .....	32
3.3.3 Einfaches Kontaktmodell mit Berücksichtigung der Schmierstofftraganteile .....	32

---

3.3.4	Oberflächenbelastung: Normaldruck	34
3.3.5	Oberflächenbelastung: Schubdruck	39
3.3.6	Spannungsverteilung bei Normal- und Schubdruckbelastung	40
3.3.7	Dynamische Werkstoffbeanspruchung	42
4	Bewertung der Werkstoffbeanspruchung	43
4.1	Übersicht über die Einteilung der Festigkeitshypothesen	43
4.2	Klassische Hypothesen	43
4.3	Hypothesen der kritischen Schnittebene	45
4.4	Integrale Bewertungsverfahren	45
4.5	Empirische Hypothesen	49
4.6	Zusammenfassung zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung	50
5	Anpassung einer Festigkeitshypothese zur Ermittlung der Ermüdungstragfähigkeit von Zahnrädern	52
5.1	Variante der Schubspannungsintensitätshypothese	52
5.2	Örtliche Beanspruchbarkeit	54
5.2.1	Bestimmung der örtlichen Härte	55
5.2.2	Zusammenhang zwischen Härte und Zugfestigkeit	57
5.2.3	Zusammenhang zwischen Härte und Dehn- bzw. Stauchgrenze	57
5.2.4	Mittelspannungsempfindlichkeit	58
5.2.5	Zusammenhang zwischen Härte und Wechselfestigkeit	58
5.2.6	Schubwechselfestigkeit	59
5.2.7	Schwellfestigkeit und Schubschwellfestigkeit	59
5.2.8	Zyklische Dehngrenze	60
5.2.9	Einfluß der Temperatur	60
5.2.10	Berücksichtigung von weiteren Einflüssen bei lastfreien Oberflächen	60
5.2.11	Berücksichtigung des Einflusses des Spannungsgefälles in Wälzkontakten	62
6	Berechnungsmodell	64
6.1	Bauteile im Bereich lastfreier Oberflächen	64
6.2	Flankenkontakt	66
6.2.1	Berechnungsprogramm RIKOR	66
6.2.2	Berechnungsgrundlagen	68
6.2.3	Ermüdungstragfähigkeit der Flanke	70

---

7	Anwendung des Berechnungsmodells auf Versuchsergebnisse aus der Literatur .....	72
7.1	Nachrechnung von Versuchsergebnissen mit Werkstoffproben .....	72
7.1.1	Versuchsergebnisse von Velten .....	72
7.1.2	Vergleich mit Berechnung nach Lang .....	74
7.2	Nachrechnung der Zahnfußtragfähigkeit .....	76
7.2.1	Versuchsergebnisse mit zahnfußähnlichen Proben .....	76
7.2.2	Vergleich mit Zahnfußtragfähigkeiten nach DIN 3990, Teil 5 ..	79
7.2.3	Vergleich mit Zahnfußtragfähigkeitsuntersuchungen .....	81
7.3	Vergleich: Lokale Hertzsche Pressung - umlaufende Hertzsche Pressung .....	85
7.4	Nachrechnung der Grübchentragfähigkeit von Zahnrädern .....	90
7.4.1	Vergleich mit Grübchentragfähigkeiten nach DIN 3990, Teil 5 ..	90
7.4.2	Vergleich mit Grübchentragfähigkeitsuntersuchungen .....	92
8	Rechnerische Beurteilung von Einflüssen auf die Flankentragfähigkeit ..	101
8.1	Einfluß aus dem Kontakt technischer Oberflächen .....	101
8.2	Einfluß von positivem und negativem Schlupf .....	103
8.3	Einfluß des aus der Zahnkraft resultierenden Querkraftschubes ...	110
9	Zusammenfassung und Ausblick .....	112
9.1	Zusammenfassung .....	112
9.2	Ausblick .....	115
10	Literatur .....	117

## Zeichen und Einheiten

$a$	Achsabstand	[mm]
$A_{\text{int}}$	maximale Werkstoffanstrengung	[ ]
$A_{\text{int } a}$	dynamische Werkstoffanstrengung	[ ]
$a_r$	Koeffizient der Dichtefunktion	[m <sup>2</sup> /N]
$b_0$	halbe Hertzsche Kontaktbreite	[m]
$b_r$	Koeffizient der Dichtefunktion	[m <sup>2</sup> /N]
$C_{\text{ar}}$	Konstante	[ ]
$c_r$	Koeffizient der Dichtefunktion	[1/K]
$D$	äußerer Einzeleingriffspunkt	[ ]
$E_{1,2}$	Elastizitätsmodul	[N/m <sup>2</sup> ]
$E'_{1,2}$	$E'_{1,2} = E_{1,2} / (1 - \nu_{1,2}^2)$	[N/m <sup>2</sup> ]
$E'$	$1 / E' = (1 / E'_1 + 1 / E'_2) / 2$	[N/m <sup>2</sup> ]
$F$	Normalkraft	[N]
$F_d$	Druckkraft	[N]
$f_{F,H}^*$	Methodenfaktor (Zahnfuß, Zahnflanke)	[ ]
$F_n$	Zahnnormalkraft	[N]
$f_p$	Umrechnungsfaktor, Pulsator - Laufversuch	[ ]
$F_q$	Querkraft	[N]
$F_r$	Kraftkomponente in radialer Richtung	[N]
$F_u$	Kraftkomponente in Umfangsrichtung	[N]
$f_{x_F}$	Umrechnungsfaktor für Ausfallwahrscheinlichkeit (Zahnfuß)	[ ]
$f_{x_H}$	Umrechnungsfaktor für Ausfallwahrscheinlichkeit (Zahnflanke)	[ ]
$G$	EHD-Werkstoffparameter ( $G = \alpha \cdot c \cdot E'$ )	[ ]
$h_0$	Schmierfilmdicke im Parallelsplatt	[mm]
$h_F$	Hebelarm	[mm]
$h_r$	Länge des Schmierstoffelements	[mm]
$h_t$	Hebelarm im Stirnschnitt	[mm]
$HV(x),$		
$HV(y)$	Härtetiefenverlauf	[HV]
$HV_{\text{Kern}}$	Kernhärte	[HV]
$HV_{\text{Rand}}$	Randhärte	[HV]
$i_k$	Faktor zur Berücksichtigung des Einflusses innerer Kerben	[ ]

$K_A$	Anwendungsfaktor nach DIN 3990	[ ]
$K_{F\alpha}$	Stirnfaktor Zahnfuß nach DIN 3990	[ ]
$K_{F\beta}$	Breitenfaktor Zahnfuß nach DIN 3990	[ ]
$K_{T,D}$	Temperatur Einflußfaktor für die Wechselfestigkeit	[ ]
$K_{T,m}$	Temperatur Einflußfaktor für die Zugfestigkeit	[ ]
$K_v$	Dynamikfaktor nach DIN 3990	[ ]
$l$	Wellenlänge der Rauheit	[m]
$m$	Masse	[kg]
$M$	Mittelspannungsempfindlichkeit	[ ]
$m, m_n$	Modul, Normalmodul	[mm]
$n$	Drehzahl	[1/min]
$n_1$	Normalenrichtung	[m]
$n_2$	Koordinatenrichtung (in der Schnittebene $\gamma\alpha$ )	[m]
$n_3$	Koordinatenrichtung (in der Schnittebene $\gamma\alpha$ )	[m]
$o_k$	Oberflächenfaktor	[ ]
$p, p_i$	Normaldruck	[N/mm <sup>2</sup> ]
$p_0$	(maximale) Hertzsche Pressung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$p_{EHD}$	Druck des EHD-Druckverlaufs	[N/mm <sup>2</sup> ]
$p_h$	hydrostatische Spannung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$p_{max}$	maximale Pressung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q, q_i$	Schubdruck (Oberflächenbelastung infolge Schub)	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_{ST}$	Kerbparameter des Standard-Referenz-Prüfrades n. DIN 3990	[ ]
$R$	Spannungsverhältnis ( $R = \sigma_u / \sigma_o$ )	[ ]
$R$	Ersatzkrümmungsradius, Radius der Ersatzwalze	[m]
$R_{dp}$	Druckfließgrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R_{dp0,2}$	Stauchgrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R_m$	Zugfestigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R_p$	Streckgrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R_{p0,2}$	Dehngrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R'_{p0,2}$	zyklische Dehngrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$R_t$	Rauhtiefe DIN EN ISO 4287	[ $\mu$ m]
$R_z$	gemittelte Rauhtiefe DIN EN ISO 4287	[ $\mu$ m]
$s_{Fn}$	Zahnfußdickensehne im Berechnungsquerschnitt (Normalschnitt)	[mm]
$s_n$	Zahndicke im Normalschnitt	[mm]

$s_t$	Zahndicke im Stirnschnitt . . . . .	[mm]
$t$	Doppelamplitude (Maß für die Rauheit) . . . . .	[ $\mu\text{m}$ ]
$T$	Drehmoment . . . . .	[Nm]
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor der Schnittebene $\gamma\alpha$ . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$t_{x, y, z}$	Komponenten des Spannungsvektors . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$u$	Geschwindigkeit ( $u = (u_1 + u_2) / 2$ ) . . . . .	[m/s]
$u_{1,2}$	Tangentialgeschwindigkeiten der Oberflächen . . . . .	[m/s]
$U$	EHD-Geschwindigkeitsparameter ( $U = \eta_{00} c u / (E' c R)$ ) . . . . .	[ ]
$V$	Volumen . . . . .	[mm <sup>3</sup> ]
$v$	Verformung . . . . .	[mm]
$V_0$	Ausgangsvolumen . . . . .	[mm <sup>3</sup> ]
$v_r$	Verformung eines Volumenelementes . . . . .	[mm]
$W$	EHD-Belastungsparameter ( $W = 2 \pi (p_0 / E')^2$ ) . . . . .	[ ]
$x$	Koordinatenrichtung . . . . .	[m]
$x_0$	Koordinate, Kontaktmittelpunkt . . . . .	[m]
$x_0$	Parameter (Einfluß der Randschichtoxidation) . . . . .	[ $\mu\text{m}$ ]
$x_{Ro}$	Rand(schicht)oxidationstiefe . . . . .	[ $\mu\text{m}$ ]
$y$	Koordinatenrichtung (Tiefenkoordinate) . . . . .	[m]
$Y_A$	Wechselastfaktor nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_\beta$	Schrägenfaktor Zahnfuß nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_{\delta_{relT}}$	relative Stützziffer für die Zahnfußdauerfestigkeit n. DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_{Eht}$	Eht-Faktor Zahnfuß . . . . .	[ ]
$y_{HVmax}$	Werkstofftiefe, bei der das lokale Härtemaximum auftritt . . . . .	[mm]
$y_{Kern}$	Werkstofftiefe, ab der $HV_{Kern}$ vorliegt . . . . .	[mm]
$Y_{NT}$	Lebensdauerfaktor für Zahnfußbeanspruchung nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_{Ro}$	Faktor zur Berücksichtigung des Einflusses der Randoxidation . . . . .	[ ]
$Y_{RrelT}$	relativer Oberflächenfaktor Zahnfuß nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_{RS}$	relativer Eigenspannungseinflußfaktor . . . . .	[ ]
$Y_{ST}$	Spannungskorrekturfaktor für Standard-Referenz-Prüfrad nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$Y_X$	Größenfaktor Zahnfuß nach DIN 3990 . . . . .	[ ]
$z$	Koordinatenrichtung . . . . .	[m]
$z$	Zähnezahl . . . . .	[ ]
$Z_{OF, m, p}$	Oberflächeneinflußfaktor (Zugfestigkeit, Streckgrenze) . . . . .	[ ]
$Z_{OF, D}$	Oberflächeneinflußfaktor (Dauerfestigkeit) . . . . .	[ ]

$\alpha$	Winkel (Lage der Schnittebene) . . . . .	[°]
$\alpha$	Profilneigungswinkel (Böschungswinkel) rauher Oberflächen . . . .	[°]
$\alpha$	Druckviskositätskoeffizient . . . . .	[m <sup>2</sup> /N]
$\alpha_{Fn}$	Kraftangriffswinkel im Normalschnitt . . . . .	[°]
$\alpha_k$	Formzahl . . . . .	[ ]
$\alpha_{yn}$	Profilwinkel am Y-Zylinder im Normalschnitt nach DIN 3990 . . . . .	[°]
$\beta$	Schrägungswinkel . . . . .	[°]
$\varepsilon_\alpha$	Profilüberdeckung . . . . .	[ ]
$\varepsilon_\beta$	Sprungüberdeckung . . . . .	[ ]
$\gamma$	Winkel (Lage der Schnittebene) . . . . .	[°]
$\eta_{00}$	dynamische Viskosität bei Massentemperatur und Umgebungsdruck nach Oster [101] . . . . .	[Pas]
$\kappa_T$	isotherme Kompressibilität . . . . .	[mm <sup>2</sup> /N]
$\kappa_T'$	isotherme Kompressibilität bei schneller Druckbeaufschlagung . . . . .	[mm <sup>2</sup> /N]
$\lambda$	spezifische Schmierfilmdicke ( $\lambda = h_0 / \text{Rauheitsmaß}$ ) . . . . .	[ ]
$\mu$	Reibungszahl . . . . .	[ ]
$\mu_{EHD}$	Reibungszahl (Schmierstoff) . . . . .	[ ]
$\mu_m$	mittlere Reibungszahl . . . . .	[ ]
$\mu_{max}$	Reibungszahl (Festkörperkontakt) . . . . .	[ ]
$\nu$	Querkontraktionszahl (Stahl: $\nu = 0,3$ ) . . . . .	[ ]
$\nu_{40}$	kinematische Viskosität bei 40 ° C . . . . .	[mm <sup>2</sup> /s]
$\omega_1$	Winkelgeschwindigkeit . . . . .	[1/s]
$\rho$	Dichte . . . . .	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_1$	Krümmungsradius . . . . .	[m]
$\rho_{Fn}$	Zahnfußradius im Normalschnitt . . . . .	[mm]
$\rho^*$	Werkstoffkonstante (Ersatzstrukturlänge) . . . . .	[ ]
$\sigma$	Spannung (Normalspannung) . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_A$	Ausschlagfestigkeit . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_b$	Spannung infolge Zahnbiegung . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_D$	Dauerfestigkeit . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_d$	Spannung infolge Druckkraft . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_E$	Eigenspannung . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_F$	auftretende Zahnfußspannung nach DIN 3990 . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{F0}$	Zahnfußnennspannung . . . . .	[N/mm <sup>2</sup> ]

$\sigma_{FE}$	Zahnfuß-Grundfestigkeit nach DIN 3990 .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{F \text{ lim}}$	Zahnfuß-Dauerfestigkeit (Dauerfestigkeitswert für Zahnfuß- Biegenennspannung) .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{FP}$	zulässige Zahnfußspannung nach DIN 3990 .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{\gamma\alpha}$	Koordinatenspannung, Normalspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{H \text{ lim}}$	Dauerfestigkeitswert für Flankenpressung nach DIN 3990 ..	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{HP}$	zulässige Flankenpressung nach DIN 3990 .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_m$	Mittelspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{Sch}$	Zugschwellfestigkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_v$	Vergleichsspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{va}$	Vergleichsspannungsamplitude .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_W$	Wechselfestigkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{wirk}$	wirksame Spannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{Wo}$	örtliche eigenspannungsfreie Wechselfestigkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{x, y, z}$	Koordinatenspannung, Normalspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{zdW 50\%}$	Zug-Druck-Wechselfestigkeit für 50% Ausfallwahr- scheinlichkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau$	Schubspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{2, 3}$	Schubspannungskomponente in der Schnittebene $\gamma\alpha$ s. Bild 7 .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{DV}$	Schubspannung nach Dang Van .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{eff}$	Schubspannungsintensität .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{eff a}$	Amplitude der Schubspannungsintensität .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{eff DA}$	Doppelamplitude der Schubspannungsintensität .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{OS}$	Oktaederschubspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_q$	Spannung infolge Querkraft .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{Sch}$	Torsionsschwellfestigkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_W$	Schubwechselfestigkeit .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_W / \sigma_W$	Wechselfestigkeitsverhältnis .....	[ ]
$\tau_{xy, xz, yz}$	Koordinatenspannung, Schubspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{zul}$	zulässige Schubspannung .....	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\vartheta$	Temperatur .....	[K]
$\vartheta_E$	Einspritztemperatur .....	[°C]
$\chi^*$	bezogenes Spannungsgefälle .....	[1/mm]

## Indices

a	Ausschlagspannung
E	Eigenspannung
i	Laufvariable
j	Laufvariable
m	Mittelspannung
n	Normalschnitt
p	Pulsator
R	Referenzzustand
t	Stirnschnitt
v	Vergleichsspannung
x	Koordinatenrichtung
y	Koordinatenrichtung
z	Koordinatenrichtung
$\gamma\alpha$	Winkel der Schnittebene eines Volumenelementes

## Weitere Bezeichnungen

AW	Ausfallwahrscheinlichkeit
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese
IT	Iterationsschritte
LHP	Lokale Hertzsche Pressung
SIH	Schubspannungsintensitätshypothese (s. Kapitel 2, 4 und 5)
SIH*	vorgeschlagene Variante der SIH (s. Kapitel 5)
SIH* <sub>dyn</sub>	dynamische Werkstoffanstrengung nach der SIH* (s. Seite 54)
SIH* <sub>max</sub>	maximale Werkstoffanstrengung nach der SIH* (s. Seite 54)
SIH* <sub>max 2</sub>	maximale Werkstoffanstrengung nach der SIH* für Wälzkontakte (s. Seite 87)
SH	Schubspannungshypothese
UHP	Umlaufende Hertzsche Pressung
WSH	Wechselschubspannungshypothese (Orthogonalschubspannungshyp.)

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Die übliche Dimensionierung von Stirnrädern erfolgt nach DIN 3990 [1] mit Hilfe von Nennwerten und empirisch ermittelten Beiwerten. Durch die ständig ansteigende Leistungsdichte moderner Zahnradgetriebe ist eine optimale Dimensionierung der einzelnen Bauteile, insbesondere der Zahnräder, immer notwendiger. In neueren, nicht genormten Berechnungsverfahren werden daher zur Zahnradauslegung nicht nur Nennwerte sondern die örtlich vorliegenden Belastungen auf der Zahnflankenoberfläche mit einbezogen und mit örtlichen, aus Bauteilversuchen gewonnenen Tragfähigkeitskennwerten verglichen. Die Voraussetzung für einen optimalen Auslastungsgrad der Zahnräder ist jedoch die Kenntnis der tatsächlich auftretenden örtlichen Beanspruchungen im Bauteil, der zeitlichen Abfolge der örtlichen Beanspruchungen sowie der örtlichen statischen und dynamischen Beanspruchbarkeit. Erst ein Vergleich der im Werkstoff lokal auftretenden Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten gibt Aufschluß, ob das gewählte Festigkeitsprofil über der Bauteiltiefe den Anforderungen genügt, über eventuelle Überdimensionierungen und somit über mögliche Auslegungsreserven der Zahnräder.

Die lokale Betrachtungsweise zur Beurteilung des Ermüdungsverhaltens von Bauteilen wird üblicherweise mit Hilfe von Festigkeitshypothesen durchgeführt. Viele der Hypothesen sind empirisch ermittelt und basieren meist nur wenig oder gar nicht auf Werkstoff-physikalischen Zusammenhängen. Diese Hypothesen lassen sich somit nur auf bestimmte zeitliche Beanspruchungsverläufe und Werkstoffe bzw. Wärmebehandlungszustände anwenden.

Auch zur Beurteilung des Ermüdungsverhaltens von Stirnrädern existieren bereits zahlreiche Hypothesen. Bisher fehlt eine einheitliche, auf Werkstoff-physikalischen Zusammenhängen basierende Festigkeitshypothese für die Berechnung der Werkstoffermüdung sowohl im Bereich des Zahnfußes als auch im Bereich der Zahnflanke. Die Schwierigkeit bei der Angabe einer einheitlichen Festigkeitshypothese für beide Bereiche liegt insbesondere in der komplexen mehrachsigen, zeitlich veränderlichen Beanspruchung im Flankenkontakt, bei einsatzgehärteten Stirnrädern zusätzlich im veränderlichen Festigkeitsprofil über der Werkstofftiefe und dessen Abhängigkeit von der auftretenden Beanspruchung.

## 1.2 Zielsetzung und Lösungsweg

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ableitung einer im wesentlichen auf Werkstoff-physikalischen Zusammenhängen basierenden Festigkeitshypothese zur Beurteilung der Werkstoffermüdung von Stirnrädern. Die aufgestellte Hypothese soll eine Abschätzung des ausfallgefährdeten Bereiches und damit des wahrscheinlichsten Schadensausgangsortes im Bereich des Zahnfußes sowie im Bereich der Zahnflanke ermöglichen.

Um das vorgegebene Ziel zu erreichen, werden zunächst die Besonderheiten der Werkstoffbeanspruchungen im Bereich des Zahnfußes und im Flankenkontakt analysiert. Für den Wälzkontakt werden einfache Modelle zur Abschätzung von Einflüssen auf die Werkstoffbeanspruchung in den Wälzkörpern aufgestellt. Im Anschluß daran erfolgt eine Gegenüberstellung von in der Literatur (s. Kapitel 2) gängigen Festigkeitshypothesen und die Bewertung wichtiger Hypothesen auf ihre Anwendbarkeit zur Beurteilung der Werkstoffermüdung von Stirnrädern, insbesondere des Flankenkontaktes. Als Ergebnis der zuvor angestellten Überlegungen wird eine im wesentlichen Werkstoff-physikalisch basierte Festigkeitshypothese aufgestellt und ein Berechnungsmodell zur Bestimmung der Werkstoffermüdung von Stirnrädern abgeleitet.

Nachrechnungen von Versuchsergebnissen aus der Literatur sollen die Anwendbarkeit der aufgestellten Festigkeitshypothese aufzeigen. Dazu werden Ergebnisse von Untersuchungen an Werkstoffproben, zahnfußähnlichen Proben, von Untersuchungen zur Zahnfuß- und Grübchentragfähigkeit sowie zur Ausfallursache von Flankenbrüchen betrachtet. Es erfolgt eine Bewertung und Diskussion der einzelnen Berechnungsergebnisse. Vergleichsrechnungen zeigen zusätzlich den rechnerischen Einfluß von Parametern auf die Flankentragfähigkeit und damit die Anwendbarkeit der Hypothese auf. Zum Schluß wird ein Ausblick auf die Verwendung der vorgestellten Berechnungsmethode zur Abschätzung der Ermüdungsdauer von Stirnrädern gegeben.

## 2 Stand des Wissens

Die nachfolgende Darstellung des Stand des Wissens beschränkt sich auf wesentliche Literaturstellen zur Bearbeitung der Aufgabenstellung.

### 2.1 Werkstoffermüdung

Bei *Werkstoffermüdung* handelt es sich um einen im Werkstoff kontinuierlich fortschreitenden (Schädigungs-)Prozeß bei dynamischer Beanspruchung. Spannungsamplituden unterhalb der Streckgrenze können zu Schäden durch Anrißbildung, Rißfortschritt und Bruch führen [111]. Demnach laufen unter dynamischer Beanspruchung mikroplastische Vorgänge ab, die sich mit der Zeit akkumulieren und schließlich das Versagen durch Bruch bedingen.

Zur Abschätzung der Bauteiltragfähigkeit hinsichtlich Werkstoffermüdung existieren in der Literatur zahlreiche Ansätze. Diese reichen von Modellen, die auf dem Vergleich von Bauteilbelastungen mit Bauteilfestigkeiten basieren, bis zu Verfahren, die zur Beurteilung der Werkstoffermüdung örtliche Beanspruchungen mit örtlichen Beanspruchbarkeiten in Beziehung setzen. Die zuletzt genannten Verfahren werden mit „*Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit*“ bzw. „*Konzept der lokalen Dauerfestigkeit*“ bezeichnet. In den nachfolgenden Abschnitten ist der Stand des Wissens zum Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit und der Stand des Wissens zur Beurteilung der Zahnradtragfähigkeit hinsichtlich Werkstoffermüdung kurz zusammengefaßt dargestellt.

Die in dieser Arbeit behandelte Werkstoffermüdung bei Verzahnungen beschränkt sich auf den Zahnfuß- und den Zahnflankenbereich. Kranzbrüche infolge Werkstoffermüdung bei dünnen Zahnkränzen sind in der vorliegenden Arbeit nicht zu betrachten. Deshalb wird im folgenden nicht darauf eingegangen.

In den Abschnitten 2.3 und 2.4 wird u.a. der Stand des Wissens zur Verwendung von Modellen und gängigen Festigkeitshypothesen in der Beurteilung der Werkstoffermüdung im Zahnfuß und von Wälzkontakten als allgemeine Form des Zahnflankenkontaktes beschrieben. Wesentliche Festigkeitshypothesen für die hier behandelte Problematik werden im Kapitel 4 näher betrachtet.

## 2.2 Konzepte der örtlichen Dauerfestigkeit

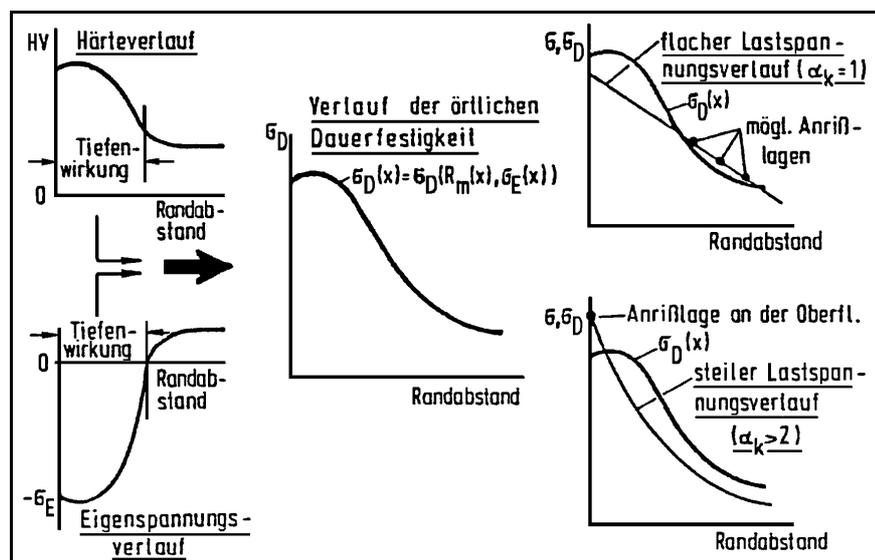
*Lang* gibt in [73, 74] ein Konzept zur Dimensionierung von Bauteilen aus Stahl an, das auf glatte und gekerbte Proben bzw. Bauteilbereiche ohne Oberflächenbelastung anwendbar ist. Bei der Berechnung werden Einflüsse der Mittelspannung sowie Einflüsse aus einer thermo-chemischen oder mechanischen Randschichtverfestigung im Bereich der Zeit- und der Dauerfestigkeit berücksichtigt. Bei Stahl-Bauteilen mit Werkstoffverfestigung ist die örtliche eigenspannungsfreie Zug-Druck-Wechselfestigkeit aus der örtlichen Härte zu bestimmen. Die sich durch die Randschichtverfestigung einstellenden Eigenspannungen werden ebenfalls aus der örtlichen Härte abgeschätzt. Mit dem Ansatz von *Petersen* [102] finden im Konzept von *Lang* [73, 74] auch der Einfluß einer Spannungumlagerung (Stützwirkung) infolge einer ungleichförmigen Spannungsverteilung und im Sinne von *Siebel* [116] oder *Neuber* [96] der Größen-, der Oberflächen- (aufgrund von Oberflächenrauheiten) sowie der technologische (aufgrund von Einschlüssen) Einfluß Berücksichtigung. Die Anwendbarkeit des vorgeschlagenen Konzepts wird von *Lang* [73, 74] anhand von Berechnungen zur Zahnfußtragfähigkeit und anhand dem Beispiel einer Kurbelwelle aufgezeigt. Mit dem Konzept lassen sich für randschichtverfestigte Stahl-Bauteile Bruchausgänge an der Oberfläche und im Bereich der Randhärte rechnerisch nachvollziehen. In [75] befinden sich weitere Nachrechnungen von randschichtverfestigten Proben und Bauteilen mit einer Weiterentwicklung des Konzeptes. Die Ergebnisse führen insgesamt zu guten Übereinstimmungen zwischen Rechnung und Versuch.

*Starker* [125] untersucht den Größeneinfluß auf das Biegewechselverhalten von Ck 45. Variiert werden die Probenform, die Wärmebehandlung und die Oberflächenbearbeitung zur Erzeugung von Zug- (durch Schleifen) bzw. Druckeigenspannungen (durch Kugelstrahlen). Die Rißausgangsorte liegen je nach Wärmebehandlung und Eigenspannungstiefenverlauf direkt an der Oberfläche oder unter der Oberfläche. Zur rechnerischen Abschätzung der Biegewechselfestigkeit verwendet *Starker* ein Berechnungsmodell, bei dem die örtlich wirksame Dauerfestigkeit und die Lastspannung gegenübergestellt werden. Der lokale Eigenspannungszustand wird dabei als Mittelspannung betrachtet und zur Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit (mittelspannungsbehaftete Wechselfestigkeit) eingesetzt. Grundlage dazu stellen die lokale, mittelspannungsfreie Wechselfestigkeit sowie der Ansatz nach *Goodman* [38], bei dem die Ausschlagfestigkeit linear über die Mittelspannungsempfindlichkeit von der Mittelspannung abhängt, dar. Die lokale, mittelspannungsfreie Wechselfestigkeit ist aus Versuchen zu bestimmen. Mit dem oben beschriebe-

nen Berechnungsansatz kann das Auftreten von unter der Oberfläche liegenden Anrissen sowie ein Größeneinfluß erklärt werden.

*Macherauch* und *Kloos* [85] beschreiben ein Konzept zur Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit. Makro-eigen-spannungen werden dabei in ihrer Wirkung wie lokale Mittelspannungen behandelt, wobei der Mittelspannungseinfluß mit dem Ansatz nach Goodman [38] auf der Werkstoffwiderstandsseite berücksichtigt wird. Zur Berechnung der Vergleichsspannungen (Ausschlag- und Mittelspannungen) dient die Gestaltänderungsenergiehypothese. Lokales Werkstoffversagen tritt ein, wenn die lokale Vergleichsspannungsamplitude die lokale Dauerfestigkeit oder die zyklische Streckgrenze überschreitet. Wenn die zyklische Streckgrenze nicht überschritten wird, liegen stabile Eigen-spannungen vor, d.h. sie werden nicht durch zyklische plastische Verformungen verändert. Die Eigen-spannungen können in diesem Fall in unveränderter Größe zur Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit eingesetzt werden. Bei randschichtverfestigten Bauteilen wird die örtliche eigen-spannungsfreie Zug-Druck-Wechselfestigkeit aus der örtlichen Härte abgeschätzt. Gemäß *Macherauch* und *Kloos* [85] können mit dem Ansatz sowohl Oberflächen-anrisse als auch Anrisse unter der Oberfläche nachvollzogen werden. Der Größeneinfluß bei randschichtverfestigten Bauteilen unter schwingender Beanspruchung wird durch die verfahrensabhängige Tiefenwirkung der Randschichtverfestigungsverfahren erklärt, wodurch das Ähnlichkeitsprinzip nicht mehr anwendbar ist.

*Kloos* und *Velten* [65, 66, 135] entwickeln das „Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit“ (s. **Bild 1**). Für jeden Querschnittspunkt wird in Abhängigkeit von der örtlichen Härte sowie von den örtlichen Mittel- und Eigen-spannungen ein lokaler Dauerfestigkeitswert  $\sigma_D$  bestimmt. Grund-



**Bild 1:** Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit [65, 66, 104, 135] (Randabstand: Größen aufgetragen über dem Randabstand, Anrißort: örtliche Beanspruchung > örtliche Dauerfestigkeit)

lage zur Ermittlung der örtlichen eigenspannungsfreien Wechselfestigkeit  $\sigma_{w_0}$  aus der örtlichen Härte stellen experimentell bestimmte Zusammenhänge bei hochfesten, niedrig legierten Stählen dar (s. **Bild 2**). Der Einfluß von Lastmittel- und Eigenspannungen wird mit Hilfe des Goodman-Ansatzes [38] auf der Werkstoffwiderstandsseite, d.h. bei der Ermittlung von  $\sigma_D$ , berücksichtigt. Der Einfluß des Spannungsgefälles geht analog zum Konzept

$$\sigma_D(x) = \sigma_{w_0} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m(x) + \sigma_E(x)}{R_m(x)}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1600}{HV(x)^2} X}\right)$$

Goodman-Ansatz  
(Mittel- und Eigenspannungseinfluß)
Beanspruchungsgefälle  
(Kerb- und Größeneinfluß)

örtliche eigenspannungsfreie Wechselfestigkeit

$$\sigma_{w_0}(x) = 1,27 \cdot HV(x) + 150 \text{ (N/mm}^2\text{)} \quad \text{für } HV \leq 500$$

$$\sigma_{w_0}(x) = 785 \text{ N/mm}^2 \quad \text{für } HV > 500$$

**Bild 2:** Berechnung der örtlichen Dauerfestigkeit nach Velten [135] (aus [67])

Berechnung ein. Oberflächeneinflüsse (Rauheit, Randoxidation) oder der Einfluß von inneren Kerben werden vernachlässigt. Zur Umrechnung mehrachsiger Spannungszustände dienen die Gestaltänderungsenergiehypothese als auch die Normalspannungshypothese. Das Vorzeichen der Vergleichsmittelspannungen richtet sich nach der betragsmäßig größten Komponente aus der Summe von Eigen- und Lastmittelspannung. Insgesamt ergibt sich für verschiedene Belastungsvorgaben an den untersuchten nitrierten (30 CrNiMo 8) und einsatzgehärteten (20 MoCrS 4) Probenserien eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch hinsichtlich Dauerfestigkeitswert und Anrißlagen. Bei den einsatzgehärteten Serien mit ungekerbten Umlaufbiegeproben und Proben mit Zug-Schwellbelastung liegen zwischen Rechnung und Versuch die größten Abweichungen vor. Die Abweichungen bei den Versuchen mit einer ungekerbten Umlaufbiegeprobe führen Kloos und Velten auf die im Modell fehlende Berücksichtigung des Einflusses von nicht-metallischen Einschlüssen zurück. Zur Übertragung des Modells auf andere Verfestigungsverfahren (z.B. Kugelstrahlen) und zur Erfassung von im Modell nicht berücksichtigten Einflußgrößen sind nach Kloos und Velten weitere Untersuchungen notwendig.

*Kloos, Kuhn* u.a. [67] untersuchen den oberflächentechnischen Größeneinfluß an plasmanitrierten Probestäben bei Umlaufbiege- und Zug-Druck-Beanspruchung. Die gewonnenen Versuchsergebnisse zur Größe der Schwingfestigkeitssteigerung durch Plasmanitrieren sowie die Lage der Anrißorte lassen sich sehr gut mit dem Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit nach Kloos und Velten [135] erklären.

*Scholtes* und *Macherauch* wenden in [113] das Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit erfolgreich an, um die Auswirkungen mechanischer Randschichtverformungen auf das Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe quantitativ zu bewerten.

*Kloos, Adelman* u.a. [68] beschreiben das Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit nach *Kloos* und *Velten* [65, 66, 135] und bestätigen unter Einschränkungen die prinzipielle Anwendbarkeit des Konzeptes zur Vorhersage des zu erwartenden Schwingfestigkeitsgewinns bei (mechanischer, thermischer oder thermochemischer) Randschichtverfestigung. Die Einschränkungen bestehen in dem Einfluß des Randzustandes und des Randgefüges, beeinflusst durch z.B. eine Randabkühlung oder einer Randoxidation aufgrund der Randschichtverfestigung, die neben der örtlichen Härte und den Eigenspannungen nach *Kloos, Adelman* u.a. ebenfalls einen starken Einfluß auf die Schwingfestigkeitseigenschaften besitzen. Diese Einflüsse werden aber im Konzept nicht berücksichtigt.

*Raab* [104] modifiziert die Wechselfestigkeit-Härte-Beziehung sowie die Berücksichtigung des Eigen- und Mittelspannungseinflusses im Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit von *Kloos* und *Velten* [65, 66, 135]. Das Ziel ist ein einheitliches Konzept für unterschiedliche Randschichtverfestigungsverfahren (nitriert, einsatzgehärtet, kugelgestrahlt, gerollt) und Werkstoffe (hochfeste, niedrigfeste und hochlegierte Werkstoffe, Aluminium, Titan). Die zunächst durchgeführte Überprüfung des Konzeptes von *Kloos* und *Velten* [65, 66, 135] anhand aus der Literatur ausgesuchter Probenserien mit hochfesten Werkstoffen führte zu Abweichungen zwischen rechnerischer und experimenteller Dauerfestigkeit von durchschnittlich 26 %. Es erfolgte stets eine Überschätzung der Dauerfestigkeit. Eine gute Übereinstimmung ergab sich bei der Bestimmung der Anrißlagen. Das von *Raab* modifizierte Konzept liefert durchschnittliche Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch von etwa 8 %. Von der Verwendung des Konzeptes zur Berechnung der Dauerfestigkeit von Bauteilen aus niedrigfesten Werkstoffen rät *Raab* mit dem Hinweis auf den dort möglichen starken Eigenspannungsabbau, der im Modell nicht berücksichtigt wird, ab.

*Winderlich* [142] stellt ein Konzept zur Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit von thermisch randschichtverfestigten Bauteilen, ähnlich dem von [135], auf. Zur Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit werden Zusammenhänge zwischen örtlicher Härte und Zugfestigkeit bzw. eigenspannungsfreier Wechselfestigkeit angegeben. Das Modell berücksichtigt die Stützwirkung, Oberflächeneinflüsse aus der Rauheit und Mittelspannungseinflüsse und ist für Belastungsfälle mit synchroner mehrachsiger Beanspruchung und körperfesten Hauptspannungsrichtungen gültig.

Da es sich um ein Anrißkonzept handelt, ist für eine Bewertung von Rissen hinsichtlich ihrer Ausbreitungsfähigkeit eine gesonderte bruchmechanische Betrachtung erforderlich. Ungeklärte Probleme im Modell sind u.a. die Mittel- und Eigenspannungsempfindlichkeit hochfester Werkstoffzustände, der Einfluß des Restaustenitgehalts auf die Dauerfestigkeit und die Beeinflussung des Oberflächeneinflußfaktors durch Mittel- und Eigenspannungen sowie durch innere Kerben.

*Kuttner* und *Zieger* [71] bauen auf dem Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit von [135] auf. Ausgehend von einer Berechnung der Bauteilabkühlung in Abhängigkeit von Zeit und Ort werden die Gefügeeigenschaften modelliert und daraus die örtlichen statischen und dynamischen Festigkeitskennwerte ermittelt. Durch die Temperaturberechnung ist das Modell auf die Berechnung von zylindrischen Bauteilen (z.B. Achsen, Wellen, Zapfen) beschränkt. Zur Berücksichtigung des Einflusses der Lastmittel- und der Eigenspannungen dient ein Parabelansatz, mit dem ein mit zunehmender Mittelspannung ansteigender Mittelspannungseinfluß resultiert. Die Wirkung des Spannungsgefälles und der Kerbempfindlichkeit geht auf der Werkstoffwiderstandsseite über einen separaten Einflußfaktor in die Berechnung der örtlichen Dauerfestigkeit ein. Das Modell liefert eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Dauerfestigkeiten von einsatzgehärteten Proben. Das Modell läßt sich aber nicht auf vollständig austenitisierte, hochangelassene oder Bauteile mit Einsatzschichten, mit Randoxidation oder Ferrit-Anteilen anwenden.

*Spies*, *Kern* und *Tan* [121] verbinden das Fehlstellenmodell nach *Kogaev* und *Serensen* (s. z.B. auch [43]) mit dem Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit zur Erfassung des statistischen Größeneinflusses (d.h. Abhängigkeit der Dauerfestigkeit von der Größe des beanspruchten Volumens) und des spannungsmechanischen Größeneinflusses (d.h. Abhängigkeit der Dauerfestigkeit von Spannungsumlagerungen durch ungleichförmige Spannungsverteilungen) sowie des Einflusses der Oberflächenrauheit auf die Schwingfestigkeit randschichtverfestigter Stähle. Das Modell wird durch Versuche an glatten und gekerbten Proben bestätigt. Nach [121] bestimmt neben der Anrißbildung das Rißausbreitungs- und Rißarretierungsverhalten unter Mittelspannungseinfluß ebenfalls das Schwingfestigkeitsverhalten. Dies wird im Modell nicht berücksichtigt und wird daher als ein noch offenes Problem angesehen. Das gleiche gilt für die Stabilität von Eigenspannungen.

*Köttgen*, *Bäumel* und *Seeger* [70] bzw. *Bäumel* [10] verwenden in ihrem „Örtlichen Konzept“ oder „Kerbgrundkonzept“ wie in zuvor beschriebenen Modellen ebenfalls

einen empirisch ermittelten Zusammenhang zur Ermittlung der örtlichen Zugfestigkeit zur Berechnung der Dauerfestigkeit randschichtverfestigter, eigenspannungsbefahreter Bauteile. Das Konzept lässt sich im Bereich der Zeit- und Dauerfestigkeit sowie auf allgemeine Betriebsbeanspruchungen anwenden. Grundlage der Berechnung ist die Berücksichtigung des lokalen Spannungs-Dehnungsverhaltens des Werkstoffes, auch für elastisch-plastisches Werkstoffverhalten. Dem Vorteil der vielfältigen Anwendbarkeit des Modells steht der große Aufwand, insbesondere zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens, gegenüber.

*Hoffmann und Löhe* [52] verwenden eine auf dem Goodman-Ansatz [38] basierende Berechnung der lokalen Dauerfestigkeit, um das Anrißverhalten von glatten und gekerbten Proben aus gehärtetem Stahl Ck 45 zu deuten. Für kugelgestrahlte Proben, bei denen die maximalen Druckeigenspannungen unter der Oberfläche vorliegen, ist nach [52] für die Dauerfestigkeit nicht der Werkstoffwiderstand gegen Anrißbildung sondern der Werkstoffwiderstand gegen Rißausbreitung maßgebend. Zur Betrachtung der Rißausbreitung wird deshalb ein bruchmechanischer Ansatz unter Berücksichtigung der lokalen Eigenspannungen herangezogen.

*Schleicher, Bomas und Mayr* [109] verwenden ein erweitertes Fehlstellenmodell zur Abschätzung der Anrißbruchwahrscheinlichkeiten sowie die Festigkeitshypothese nach *Dang Van* [26] bzw. eine Abwandlung davon, um die Dauerfestigkeit von mehrachsig beanspruchten Proben aus dem einsatzgehärteten Stahl 16 MnCrS 5 zu berechnen. Neben dem über der örtlichen Härte abgeschätzten Festigkeitsprofil werden örtliche Eigenspannungen und die festigkeitsmindernde Wirkung von Oberflächenrauheit und Randoxidation berücksichtigt. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung.

*Bomas, Linkewitz und Mayr* [15] analysieren die Ermüdungsrißbildung und die Dauerfestigkeit von geschliffenen glatten und gekerbten Proben aus 100 Cr 6 ähnlich wie [109]. Oberflächeneinflüsse finden in der Berechnung aufgrund der untersuchten Proben keine Berücksichtigung. Nachrechnungen von Versuchsergebnissen zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung bei der Dauerfestigkeit. Tendenziell kann mit dem Modell auch eine Differenzierung von Rißbildung an und unter der Oberfläche vorgenommen werden.

Allen beschriebenen Konzepten zur Berechnung der örtlichen Dauerfestigkeit randschichtverfestigter Bauteile ist die Verwendung von Abschätzungen statischer oder dynamischer Werkstoffkennwerte aus der örtlichen Härte gemein. Solche Abschätzungen sind auch aus weiteren Literaturstellen [z.B. 27, 44, 42, 54, 77, 94, 100] bekannt und stellen ein übliches Vorgehen zur Bestimmung von (örtlichen)

Werkstoffkennwerten dar, wenn sich diese nicht oder nicht ohne weiteres unmittelbar experimentell ermitteln lassen. Es ist jedoch zu beachten, daß Gefügeeinflüsse, wie Randabkühlung und Korngröße in diesen Abschätzungen keine oder nur eine bedingte Berücksichtigung finden.

## 2.3 Zahnfußtragfähigkeit

### 2.3.1 Bewertung unter Berücksichtigung der Randspannung

In *DIN 3990 Teil 3* [1] ist ein Verfahren zur Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Stirnrädern angegeben. Das Verfahren basiert auf der Bestimmung der maximalen Zahnfußbeanspruchung  $\sigma_{F0}$  auf der Zugseite des Zahnes bei abweichungsfreier Verzahnung. Beanspruchungsüberhöhungen infolge von Abweichungen im Zahneingriff und Kraftüberhöhungen aufgrund der inneren und äußeren Dynamik des Getriebes werden durch zusätzliche, in *DIN 3990 Teil 3* [1] festgelegte Faktoren berücksichtigt. Damit ergibt sich die maximale Zahnfußspannung  $\sigma_F$  der allgemeinen abweichungsbehafteten Verzahnung. Eine detaillierte Beschreibung bzw. Analyse des Verfahrens befindet sich in [z.B. 51, 99, 108]. Liegen keine am realen Bauteil ermittelten Tragfähigkeiten vor, kann die zulässige Zahnfußspannung  $\sigma_{FF}$  (Schwellfestigkeit) für die Dauerfestigkeit und die statische Festigkeit nach [1] abgeschätzt werden. Die zulässige Zahnfußspannung wird aus der Zahnfuß-Dauerfestigkeit  $\sigma_{Flim}$  für die Zahnfuß-Biegenennspannung berechnet, die an Standard-Referenz-Prüfrädern ermittelt und *DIN 3990 Teil 5* [1] zu entnehmen ist. Abweichungen des realen Zahnrades vom Standard-Referenz-Prüfrad werden über experimentell ermittelte Faktoren berücksichtigt.

*Hirt* [51] untersucht den Einfluß der Zahnfußrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. Die experimentell ermittelten Zahnfußtragfähigkeiten werden mit Dauerfestigkeiten verglichen, die mit Hilfe von allgemein bekannten Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Festigkeit schwingend beanspruchter gekerbter Bauteile berechnet wurden. Es zeigt sich, daß die Zahnfußtragfähigkeit näherungsweise mit der Dauerfestigkeit der glatten Werkstoffprobe in Beziehung steht. Da die Ausgangswerte der glatten polierten Probe in den allgemein bekannten Festigkeits-Berechnungsmethoden zu weit vom Anwendungsbereich „Zahnrad“ liegen, wird ein praktisches Berechnungsverfahren für Zahnräder vorgeschlagen. Es geht maßgeblich in das Verfahren in *DIN 3990 Teil 3* [1] ein.

Der *Entwurf zur VDI Richtlinie 2737* [6] berücksichtigt den Einfluß von Mittelspannungen auf die Zahnfußgrundfestigkeit über ein *Smith*-Diagramm [z.B. 59]. Druck-

Mittelspannungen aus der Last wirken sich demnach auch rechnerisch bei der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung festigkeitssteigernd und Zug-Mittelspannungen festigkeitsmindernd aus. Eine Betrachtung der Beanspruchungen über der Werkstofftiefe erfolgt nicht.

*Schinagl* [108] gibt ein Berechnungsmodell an, das auf das in DIN 3990 [1] angegebene Näherungsverfahren aufbaut. Es berücksichtigt die im Zahneingriff tatsächlich vorliegende Lastverteilung bei der Berechnung der Zahnfußspannung sowie das örtlich variable Risiko eines Bruches über der Zahnbreite. Eine Bewertung der im Werkstoff in Abhängigkeit des Festigkeitsprofils über der Werkstofftiefe resultierenden örtlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten wird nicht vorgenommen.

### **2.3.2 Bewertung unter Berücksichtigung der Werkstoffbeanspruchung bzw. -beanspruchbarkeit über der Bauteiltiefe**

*Lang* [73, 74] wendet, wie im Abschnitt 2.1 beschrieben, sein Konzept zur Berechnung der örtlichen Dauerfestigkeit an, um die Zahnfußtragfähigkeit ohne und mit Randschichtverfestigung zu berechnen. Die rechnerisch ermittelten Tragfähigkeiten sind in Abhängigkeit von der Randhärte in die entsprechenden Festigkeits-schaubilder der DIN 3990 Teil 5 [1] eingetragen. Für die Randschichtverfestigungsverfahren Einsatzhärten, Nitrieren sowie Induktiv-Vorschub- und -Standhärten werden der Berechnung von der lokalen Härte abhängige Eigenspannungen vorgegeben. Das Berechnungsverfahren deckt die mittleren und oberen Bereiche der Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] sehr gut ab. Auch die explizite Nachrechnung von Zahnfußdauerfestigkeiten unter wechselnder Belastung in [75] ergibt eine gute Übereinstimmung in der Grenzbelastung und im Anrißverhalten.

*Weigand* [139] untersucht Werkstoff- und Wärmebehandlungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit. Die Auswertung der Versuchsergebnisse zum Einfluß des Reinigungsstrahlens führt zu einer Erweiterung des Ansatzes in DIN 3990 [1]. Mit der Erweiterung wird die durch Einbringung von Eigenspannungen geänderte Zahnfußtragfähigkeit berücksichtigt. Der vorgeschlagene Faktor  $Y_{RS}$  ist abhängig von der Tragfähigkeit eines Referenzzustandes (Ausgangszustand), der Mittel- und der Eigenspannungsempfindlichkeit sowie von den Eigenspannungen im oberflächennahen Bereich des Ausgangszustandes und des daraus mittels Reinigungsstrahlen erhaltenen Zustandes. Wie aus der allgemeinen Festigkeitsrechnung bekannt, kann nun durch den Ansatz die festigkeitssteigernde Wirkung von Druckeigenspannungen infolge einer Strahlbehandlung auch rechnerisch in DIN 3990 [1]

erfaßt werden. Die im Ansatz verwendete Eigenspannungsempfindlichkeit basiert auf Angaben von *Macherauch* und *Wohlfahrt* [86].

*Tobie* [132] gibt zur Berücksichtigung der Einsatzhärtetiefe auf die Zahnfußtragfähigkeit im Rechenverfahren nach DIN 3990 [1] den Faktor  $Y_{\text{Eht}}$  an. Mit Hilfe des Faktors kann auch für Zahnräder mit von der Norm abweichender Einsatzhärtetiefe ein Tragfähigkeitsnachweis hinsichtlich Zahnfußtragfähigkeit geführt werden.

*Mayr, Löhe, Laue, Krug* u.a. [88] stellen Ergebnisse zu strukturmechanischen Untersuchungen zum Randschichteinfluß auf die Rißbildung und -ausbreitung bei einsatzgehärteten Stählen vor. Für die experimentellen Untersuchungen wird eine bauteilähnliche Probe verwendet, deren geometrischen Verhältnisse im Kerbbereich zu denen im Zahnfußbereich eines Zahnradzahnes ähnlich sind. In Abhängigkeit von unterschiedlichen Oberflächenbehandlungen wird für den Einsatzstahl 16 MnCr 5 die Dauerfestigkeit ermittelt. Es zeigt sich eine stark festigkeitsmindernde Wirkung infolge einer Randoxidation, die durch eine hohe Oberflächenrauheit noch verstärkt wird. Mit der Randoxidation ist bei den untersuchten Proben ein Härteabfall im Bereich der Randschicht festzustellen. Zur rechnerischen Beurteilung der Dauerfestigkeiten kommt ein bruchmechanischer Ansatz sowie ein auf dem Fehlstellenmodell nach *Weibull* [138] und dem Ansatz von *Murakami* [94] basierendes Modell zur Berechnung der örtlichen Dauerfestigkeit zum Einsatz. Die Anwendung der beiden Ansätze ergibt jeweils nur teilweise zufriedenstellende Ergebnisse. Im Vergleich zum auf dem Fehlstellenmodell aufbauenden Modell schneidet der bruchmechanische Ansatz besser ab.

Aus experimentellen Untersuchungen [z.B. 132, 139] sind Einflüsse des Gefüges wie Randkohlenstoffgehalt, Restaustenitgehalt und Korngröße auf die Zahnfußtragfähigkeit qualitativ bekannt. Zur Zeit existieren keine Ansätze, um diese Einflüsse quantitativ in einem Berechnungsmodell zu erfassen.

## 2.4 Grübchen- und Graufleckentragfähigkeit

### 2.4.1 Bewertung unter Berücksichtigung der reinen Oberflächenbelastung

In *DIN 3990 Teil 2* [1] wird ein Verfahren zur Berechnung der Grübchentragfähigkeit angegeben. Bei Grübchen handelt es sich um z.T. großflächige Ausbrüche der Flanke bis in eine Tiefe der im Wälzkontakt auftretenden maximalen Schubspannungen [99]. Das Verfahren in *DIN 3990 Teil 2* [1] basiert auf der Flankenpressung im Wälzpunkt oder im inneren Einzeleingriffspunkt. Über experimentell ermittelte, in *DIN 3990 Teil 2* [1] festgelegte Faktoren können ungleiche Kraftverteilungen und -aufteilungen sowie Kraftüberhöhungen berücksichtigt werden. Für den Tragfähigkeitsnachweis ist die berechnete Flankenpressung mit der zulässigen Flankenpressung  $\sigma_{HP}$  für die Dauerfestigkeit und der statischen Festigkeit aus *DIN 3990 Teile 2 und 5* [1] zu vergleichen. Die zulässige Flankenpressung basiert auf der Dauerfestigkeit von Standard-Referenz-Prüfrädern unter Standard-Prüfbedingungen. Die Vorgehensweise zur Berechnung der Flankenentragfähigkeit entspricht derjenigen der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung [1]. Ein Verfahren zur Berechnung der Graufleckentragfähigkeit, d.h. hinsichtlich Wälzermüdung der Flankenoberfläche bzw. des oberflächennahen Flankenbereiches unter ungünstigen Schmierungsverhältnissen, wird in *DIN 3990* [1] nicht angegeben.

*Wikidal* [141] erweitert das Berechnungsverfahren nach *DIN 3990* [1] zur Berechnung der Grübchentragfähigkeit. Basierend auf topologischen Berechnungen können mit dem Programm *RIKOR* [107, 140] Einflüsse auf die Grübchentragfähigkeit aus elastischen Verformungen und Verlagerungen der Lager, Wellen und Zahnräder sowie Verzahnungskorrekturen berücksichtigt werden. *Wikidal* definiert eine schadensäquivalente Pressung, die geringer ist als die maximal berechnete Pressung, aber maßgeblich von ihr bestimmt wird. Bei Geradverzahnungen und praxisgerecht flankenkorrigierten Schrägverzahnungen ergeben sich in der Regel vergleichbare Tragfähigkeiten wie nach *DIN 3990* [1].

*Stahl* [124] stellt wie *Wikidal* [141] ebenfalls ein auf topologischen Verfahren [z.B. 140] basierendes erweitertes Berechnungsverfahren zur Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Außenverzahnungen vor. Das Verfahren berücksichtigt die besonderen Belastungsverhältnisse von Schrägverzahnungen unter Bewertung der örtlichen Schadensrisiken im besonders gefährdeten Flankenbereich unterhalb des Wälzkreises.

Berechnungsverfahren zur Graufleckentragfähigkeit werden von [z.B. 31, 112, 114] angegeben. Das Verfahren von *Schrade* [114], auf der Grundlage der Ergebnisse

von Oster [101], basiert auf örtlichen Kenngrößen auf der Zahnflanke (Hertzsche Größen, Schmierfilmdicke, spezifisches Gleiten) sowie experimentell ermittelten Kenngrößen zur Graufleckentragfähigkeit des Schmierstoffs. Die Berechnung der Auskolkung (Materialabtrag auf der Flanke) beschränkt sich auf den Zahnflankenbereich mit negativem Gleiten, weil dort vorwiegend die Schäden beobachtet werden.

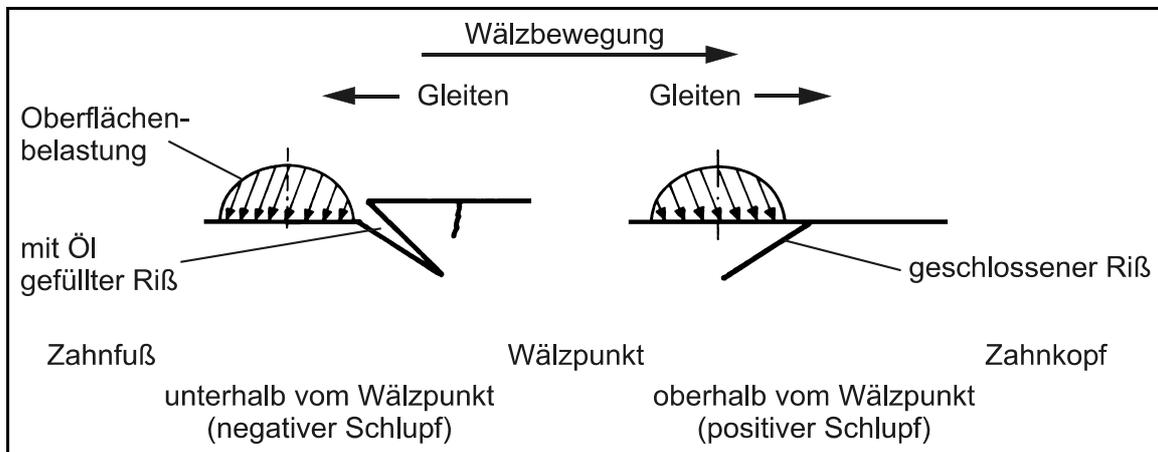
#### **2.4.2 Bewertung unter Berücksichtigung der Werkstoffbeanspruchung bzw. -beanspruchbarkeit über der Bauteiltiefe**

In der Literatur existieren viele theoretische Untersuchungen zur Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten und deren Tragfähigkeit. Die Darstellung sämtlicher Ergebnisse ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Daher beschränkt sich der folgende Abschnitt auf die wesentlichsten, für diese Arbeit relevanten Literaturstellen. Eine Übersicht über die wichtigsten Einflüsse auf die Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten ist [z.B.136] zu entnehmen. Im zweiten Teil dieses Abschnittes sind auf der Ermittlung der örtlichen Werkstoffbeanspruchung basierende Modelle zur Berechnung der Wälzlagerlebensdauer aufgeführt, weshalb im ersten Teil auf diese lokalen Ansätze nicht eingegangen wird.

#### Untersuchungen zur Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten und zu Schadensmechanismen

Käser [62] führt grundlegende Untersuchungen zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern durch. Wie auch in zahlreichen anderen Untersuchungen [z.B. 36, 60, 69, 76, 101] konnte festgestellt werden, daß Oberflächenrisse zwischen Fußeingriffs- und Wälzpunkt sowie zwischen Wälzpunkt und Zahnkopf auftreten. Die Risse sind stets gegen die Gleitrichtung orientiert, wodurch sich die Rißrichtung zwischen den genannten Bereichen ändert. Grübchen treten im allgemeinen nur am treibenden Zahnrad unterhalb des Wälzkreises (Gebiet negativen Gleitens, Schlupfes) auf. Da die Risse hier während des Wälzvorganges geöffnet sind, können, wie links im **Bild 3** gezeigt, Werkstoffkeile ausbrechen. Im Bereich positiven Gleitens (Schlupfes) werden Risse dagegen während des Wälzvorganges geschlossen (s. Bild 3, rechts). Dies verhindert ein Ausbrechen von Material. Für das Auftreten von Oberflächenanrissen wird die fehlende Abstützung der Oberfläche, wie sie bereits bei technischen Oberflächen vorliegt, verantwortlich gemacht. Das bei Zugrundelegung des ungestörten Hertzschen Kontaktes nach der Hauptschubspannungs-, der Wechselschubspannungs- oder nach der Gestaltänderungsenergiehypothese berechnete Maximum unter der Oberfläche ist den-

noch von Bedeutung, da damit die Tiefenerstreckung der Werkstoffbeanspruchung in Abhängigkeit von der Geometrie (Baugröße) und der Belastung beschrieben werden kann.



**Bild 3:** Verformung der treibenden Zahnflanke in Abhängigkeit von der Orientierung des Oberflächenrisses (schematisch) nach [62]

Nach Untersuchungen von *Zwirlein* und *Schlicht* [149] ist die Gestaltänderungsenergiehypothese am besten geeignet, um die (statische) Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten zu beurteilen. Im Gegensatz zur Berechnung der Wechselfestigkeit, bei der Eigenspannungen als Mittelspannungen zu betrachten sind, werden zur Berechnung der statischen Werkstoffbeanspruchung die örtlichen Eigenspannungskomponenten den örtlichen Lastspannungskomponenten komponentenweise superponiert. Bis zu einer von der Belastung abhängigen Größe reduzieren so Druckeigenspannungen die Werkstoffbeanspruchung während Zugeigenspannungen die Werkstoffbeanspruchung stets erhöhen. Zusätzlich bewirken Eigenspannungen eine Drehung des Hauptachsensystems des Spannungstensors und im Falle von Druckeigenspannungen eine Verschiebung der maximalen statischen Maximalbeanspruchung zur Werkstoffoberfläche hin. Der Reibungseinfluß macht sich vorwiegend direkt an der Oberfläche und im oberflächennahen Bereich bemerkbar. Das Maximum der Werkstoffbeanspruchung liegt erst bei sehr hohen Reibungszahlen (Linienkontakt:  $\mu$  etwa 0,3) direkt an der Oberfläche.

Für *Knauer* [69] sind in Verbindung mit örtlich erhöhten Reibungszahlen an der Oberfläche und mit der Größe des sich ausbildenden Schmierfilms Mikro-Hertzische Pressungen infolge technischer Oberflächen maßgebend für die Rißbildung. Mit Hilfe der Bruchmechanik ist zu erklären, daß Risse im Bereich des negativen Schlupfes durch die Sprengwirkung sowie der verminderten Reibungszahl zwischen den Rißflanken durch das im Riß befindliche Öl weiter wachsen können. Diese Erklärung wird hierzu auch von [93] gegeben.

*Arabi* [8] gibt zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten eine „kombinierte Hypothese“ an, die die Gestaltänderungsenergiehypothese und die Hauptnormalspannungshypothese als Sonderfälle enthält. Mit einem Wichtungsfaktor ist es mit der Hypothese möglich, das Werkstoffverhalten (duktil, spröde) in der Berechnung zu berücksichtigen. Für einen Festigkeitsnachweis sind zwei Kriterien zu erfüllen. Die maximale Werkstoffbeanspruchung darf zu keinem Zeitpunkt die Fließgrenze überschreiten. Außerdem muß die örtliche Ausschlagsvergleichsspannung stets unter der örtlichen Ausschlagsfestigkeit in Abhängigkeit der Mittelspannungskomponenten liegen. Bei Linienkontakten kann das Spannungsgefälle wegen nahezu vorliegender synchroner Beanspruchungen nach *Siebel* und *Stieler* [117] mit in die Berechnung einbezogen werden.

*Hähl*, *Wüst*, *Scholtes* und *Macherauch* [40] berechnen zur Beurteilung von thermisch vorgeschädigten Wälzelementen die Vergleichsspannungsamplitude nach der Gestaltänderungsenergiehypothese. Aus einem Fourierreihenansatz wird die lokal wirksame Beanspruchungs-Zeit-Funktion für die Mittelbeanspruchung bestimmt und die so ermittelten Lastmittelspannungen mit den Eigenspannungen auf der Werkstoffwiderstandsseite mit dem Ansatz nach *Sines* [z.B. 120] berücksichtigt. Die Berechnungen mit dem vorgestellten Ansatz ergeben größere Anrißwahrscheinlichkeiten an der Oberfläche der vorgeschädigten Proben gegenüber den ungeschädigten Proben.

*Elstorpff* [30] untersucht theoretisch und experimentell Einflüsse auf die Grübchen-tragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Zur Beurteilung der Werkstoffbeanspruchung über der Bauteiltiefe wird die Oktaederschubspannung verwendet. *Elstorpff* bildet den von *Stößel* [127] experimentell gefundenen „Engstellen-Effekt“ (Erhöhung der Reibungszahl zwischen sich gegenüberstehenden Rauheitskuppen durch ein erhöhtes Schergefälle im Schmierstoff) rechnerisch durch eine von der Schmierfilmdicke abhängigen Schubdruckbelastung  $q$  ab. Die Berechnungen belegen einen deutlichen Einfluß der Reibungszahl auf die Werkstoffbeanspruchung. Zur Berücksichtigung von Einflüssen der technischen Oberfläche auf die Werkstoffbeanspruchung wurde der Hertzschen Pressung eine sinusförmige Pressungsverteilung überlagert. Pressungsüberhöhungen von über 20 % gegenüber der maximalen Hertzschen Pressung führen zu höheren Werkstoffbeanspruchungen als beim reinen Hertzschen Wälzkontakt. Nahe der Oberfläche ergeben sich infolge der Mikro-Hertzschen Kontakte zahlreiche örtliche Maxima der Oktaederschubspannung [90]. Die fertigungs- und betriebsbedingten Eigenspannungen sollten nach *Elstorpff* bei der Berechnung der dynamischen Tragfähigkeit nicht den Lastspannungen überlagert sondern als Mittelspannung auf der Festigkeitsseite berücksich-

tigt werden. Die Auswertung von Eigenspannungsmessungen zeigte eine Änderung des Eigenspannungszustandes in Abhängigkeit von der Höhe der Belastung und der Beanspruchungsdauer. Dies kann auf die Überschreitung von lokalen Festigkeiten zurückgeführt werden und steht in Einklang mit den Untersuchungen von *Hähl* [41], *Ilg* [54], *Schreiber* [115] und *Voskamp* [137].

*Hähl* [41] vergleicht oberflächenbelastete Proben unter „Umlaufender Hertzscher Pressung“ (UHP, Wälzkontakt) mit Proben unter „Lokaler Hertzscher Pressung“ (LHP, pulsierender Oberflächenkontakt ohne Überrollung). Zur Bewertung der lokalen Werkstoffbeanspruchung verwendet Hähl die Gestaltänderungsenergiehypothese in Verbindung mit gemessenen Eigenspannungstiefenverläufen an. Es zeigt sich, daß sich die Tiefenlagen der Eigenspannungs- und Integralbreitenminima gut mit den Tiefenlagen der Maximalwerte der Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese korrelieren lassen. Unterschiede zwischen UHP und LHP ergeben sich im Versagensverhalten. Bei Proben unter LHP zeigen sich ausgelöst durch plastische Deformationen Risse an den Kontakträndern. Dagegen sind für die Proben unter UHP die vorliegenden Schmierungsverhältnisse im Kontakt maßgebend.

*Höhn* und *Oster* [53] schlagen ausgehend von den Ergebnissen und Berechnungsprogrammen von *Oster* [101] zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung im Flankenkontakt eine Variante der Schubspannungsintensitätshypothese vor. Zur Berechnung der lokalen Doppelamplitude der Beanspruchung werden Eigenspannungen im Sinne von „Unterspannungen“ der dynamischen Werkstoffbeanspruchung angesehen.

*Inacker*, *Beckmann* und *Oster* [55] geben Hypothesen zur Grauflecken- und Grübchenbildung in Verbindung mit der sich an der Oberfläche aufgrund tribochemischer Reaktionen zwischen der Werkstoffoberfläche und dem Schmierstoff bildenden tribologischen Schichtdicke an. In Laufversuchen konnte eine vom Wälzkreis zum Zahnfuß und Zahnkopf hin zunehmende Schichtdicke festgestellt werden, wobei mit dicker werdender Schicht eine Werkstoffschädigung und damit eine Verringerung der Grübchentragfähigkeit verbunden ist. Als Ursache für die Graufleckenbildung wird infolge chemischer Reaktionen die Verringerung der Haftung an den Korngrenzen von Kristalliten an der Werkstoffoberfläche gesehen.

*Batista*, *Dias* u.a. [9] wenden zur Berechnung der Wälzermüdung von Schrägverzahnungen die Festigkeitshypothese nach *Dang Van* [z.B. 26] an. Die Parameter, die für die Anwendung der Festigkeitshypothese benötigt werden, wurden experimentell ermittelt und auch bei einsatzgehärteten Zahnrädern über der ge-

samten Werkstofftiefe als konstant angenommen. Im Modell werden fertigungs- und betriebsbedingte Eigenspannungen sowie Einflüsse infolge technischer Oberflächen berücksichtigt. Die Berechnungsergebnisse zeigen, daß die Oberflächenrauheit im wesentlichen nur eine oberflächennahe Schicht (50  $\mu\text{m}$ ) beeinflusst. Oberflächenrisse können mit dem Modell ab Pressungsspitzen von etwa 3500 N/mm<sup>2</sup> erklärt werden. Damit ist eine rechnerische Erklärung der Rißinitiierung aufgrund von Einflüssen der Oberflächenrauheit und der Reibung mit dem vorgestellten Ansatz nicht vollständig möglich. Ähnliche Aussagen hierzu werden in [48] gemacht. Die Ergebnisse der Untersuchungen von Batista, Dias u.a. deuten darauf hin, daß die örtlich vorliegenden Eigenspannungen maßgeblich das Rißwachstum, nicht aber die Rißinitiierung beeinflussen.

*Tobie* [132] untersucht experimentell und theoretisch den Einfluß der Einsatzhärtentiefe auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Neben Grübchen und Zahnfußbruch trat in den Untersuchungen die Schadensart „Flankenbruch“ auf. Bei dieser Schadensart bricht der Zahn in etwa in der Höhe des Teilkreises. Zur Beurteilung der Flankenschäden wird die von Oster [53] verwendete Schubspannungsintensitätshypothese leicht modifiziert eingesetzt. Die Berechnungen zeigen, daß der Härtetiefenverlauf sowie der Eigenspannungstiefenverlauf maßgeblich die Schadensart bestimmen.

*Stadlbauer* [122] verwendet zur Interpretation seiner Versuchsergebnisse an bainitischem Schienenstahl die Bewertung nach *Johnson* [61] mit Hilfe sogenannter „shakedown maps“ auf der Grundlage der Gestaltänderungsenergiehypothese. Für Verschleiß und Kontaktermüdung sind demnach plastische Deformationen maßgebend. Eigenspannungen werden von Stadlbauer bei den Auswertungen nicht berücksichtigt.

### Rechnerische Abschätzung der Lebensdauer von Wälzkontakten

Grundlegende Untersuchungen zur Ermüdung in Wälzkontakten wurden von *Lundberg* und *Palmgren* [82, 83] durchgeführt und darauf aufbauend die im wesentlichen noch heute bestehende Theorie zur Berechnung der Lebensdauer von Wälzlagern entwickelt. Als maßgebend für die Werkstoffbeanspruchung wird die Wechselschubspannung (Orthogonalschubspannung), mit dem unter der Oberfläche liegenden Beanspruchungsmaximum gesehen. Die Berechnungsmethode zur Bestimmung der Lagerlebensdauer aus der maximalen Orthogonalschubspannung ist empirisch und beruht auf dem Zusammenhang zwischen Überlebenswahrscheinlichkeit und den Größen Beanspruchung, Anzahl der ertragbaren Span-

nungszyklen, beanspruchtes Volumen sowie der Tiefe, in der die maximale Orthogonalschubspannung auftritt.

Das von *Ioannides* und *Harris* [57] vorgestellte Lebensdauermodell basiert auf dem Modell von *Lundberg* und *Palmgren* [82, 83]. Als für den Ausfall maßgebendes Volumen wird derjenige Werkstoffbereich angesehen, in dem die örtliche Werkstoffbeanspruchung die örtliche Dauerfestigkeitsgrenze überschreitet. Das Modell ist auf kein bestimmtes Ermüdungskriterium beschränkt. Eine Weiterentwicklung des Ansatzes zur Berücksichtigung von Oberflächeneinflüssen ist in [56] zu finden.

In weiteren Arbeiten [45, 92] wird das *Ioannides / Harris*-Modell auf der Grundlage der maximalen Schubspannungsamplitude sämtlicher Schnittebenen eines Volumenelementes angewendet, um die Wirkung von Oberflächeneinflüssen auf die Lagerlebensdauer zu analysieren. Mit dem gleichen Ziel kommt in [58] ebenfalls das *Ioannides / Harris*-Modell zur Anwendung. Zur Beurteilung der örtlichen Werkstoffbeanspruchung werden hier die maximale Schubspannungsamplitude sämtlicher Schnittebenen in Verbindung mit der örtlichen hydrostatischen Spannung als maßgebend angesehen. In [48] erfolgt eine Analyse und eine Gegenüberstellung verschiedener Festigkeitshypothesen zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten. Demnach ist die Festigkeitshypothese nach *Dang Van* [26] numerisch aufwendig und bringt gegenüber anderen Hypothesen, z.B. Varianten der Schubspannungsintensitätshypothese keine Vorteile.

## 2.5 Zusammenfassung zum Stand des Wissens

Die Dimensionierung von Zahnrädern hinsichtlich Zahnfuß- und Zahnflankentragfähigkeit erfolgt nach DIN 3990 [1] mit Hilfe von Nennwerten und empirisch ermittelten Beiwerten. In verschiedenen Arbeiten werden Erweiterungen des Berechnungsverfahrens nach DIN 3990 [1] vorgeschlagen, um Einflüsse aus der vorliegenden Lastverteilung im Flankenkontakt, aus örtlichen Belastungskomponenten oder um Einflüsse aus dem vorliegenden Härtetiefenprofil in der Tragfähigkeitsberechnung zu berücksichtigen. Dies zeigt die Notwendigkeit einer umfassenderen, möglichst örtlichen Betrachtungsweise in einer Tragfähigkeitsrechnung zur optimalen Dimensionierung von Zahnrädern. Andererseits existieren in der allgemeinen Festigkeitsrechnung bereits zahlreiche Modelle zur Berechnung und Beurteilung der örtlichen Werkstoffbeanspruchung von randschichtverfestigten Bauteilen. Viele Ansätze basieren auf einfachen Festigkeitshypothesen wie der Gestaltänderungsenergie-, der Schubspannungs- oder der Wechselschubspannungshypothese, die im Falle des Wälzkontaktes (Flankenkontakt) z.T. gut zur Beurteilung der maxima-

len Werkstoffbeanspruchung aber nicht bzw. nicht ohne weiteres zur Beurteilung der dynamischen Werkstoffbeanspruchung geeignet sind. Eine häufig in der Literatur zitierte Festigkeitshypothese zur Bewertung der komplexen, zeitlich veränderlichen Beanspruchungen im Wälzkontakt stellt die Festigkeitshypothese nach Dang Van [26] dar. Sie ist jedoch numerisch aufwendig zu behandeln und die Modellparameter müssen experimentell bestimmt bzw. abgeglichen werden. Wie die Untersuchungen von [9, 48] zudem zeigen, werden von der Hypothese Oberflächeneinflüsse z.B. aus technischen Oberflächen nicht in dem aus experimentellen Untersuchungen bekannten Umfang berücksichtigt.

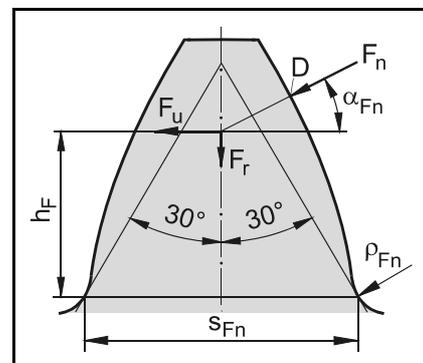
### 3 Theoretische Untersuchungen zur Werkstoffbeanspruchung im Zahnrad

Beim Durchdrehen des treibenden Zahnrades wandern die Kraftübertragungsstellen (Berührlinien) auf der Zahnflanke vom Zahnfuß in Richtung Zahnkopf, beim getriebenen Zahnrad entsprechend in umgekehrter Richtung. Dadurch erfahren die Werkstoffbereiche der belasteten Zähne über der Zeit veränderliche Beanspruchungen. Dieses Grundverständnis wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

#### 3.1 Werkstoffbeanspruchung im Zahnfuß

Das **Bild 4** zeigt einen mit der Kraft  $F_n$  belasteten Zahn. Die Verzahnungskraft erzeugt im Zahnfuß mit der Komponente in Umfangsrichtung  $F_u$  eine Biege- und eine Schubspannung sowie mit der Komponente in Radialrichtung  $F_r$  eine Druckspannung. Auf der Lastseite der Verzahnung ergeben sich am Rand Zugspannungen und auf der gegenüberliegenden Seite Druckspannungen. Die Zahnfußrundung wirkt als Kerbe und führt zu einer Spannungsüberhöhung, womit im Fußbereich ein komplexer, mehrachsiger Lastspannungszustand vorliegt.

In der Regel befinden sich die maximalen Zahnfußspannungen im Bereich der 30°-Tangente an die Zahnfußrundung [1]. Den Lastspannungen sind bei gehärteten Verzahnungen zudem lokale Eigenspannungen überlagert, die maßgeblich in Zahnhöhenrichtung und in axialer Richtung wirken. Im Betrieb wandert die Last in Zahnhöhenrichtung, wobei im maßgebenden Oberflächenpunkt der Zahnfußrundung keine Drehung des Hauptachsensystems resultiert. Eine genauere Beschreibung der im Zahnfuß vorliegenden Werkstoffbeanspruchung ist [z.B. 1, 51, 108, 139] zu entnehmen.



**Bild 4:** Berechnung der Zahnfußspannung nach DIN 3990 [1] für  $\varepsilon_\alpha < 2$

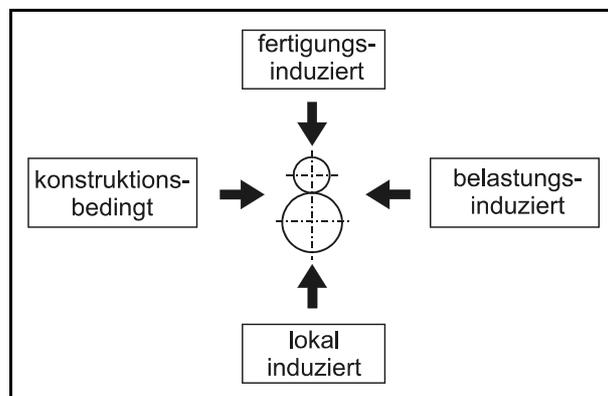
#### 3.2 Ideal glatter Wälzkontakt

##### 3.2.1 Unterteilung der im Wälzkontakt auftretenden Spannungen

Im allgemeinen Wälzkontakt lassen sich die auftretenden Spannungen wie folgt nach [19] unterteilen (**Bild 5**):

- C belastungsinduzierte Spannungen: Spannungen, die sich durch die Oberflächenbelastung im Werkstoff aufbauen.
- C fertigungsinduzierte Spannungen: Eigenspannungen aus einer mechanischen Bearbeitung bzw. aus einer Wärmebehandlung. Eine Änderung der Eigenspannung während des Betriebes ist, wenn die Summe der belastungsinduzierten Spannungen und evtl. Eigenspannungen lokale Festigkeitsgrenzen überschreiten möglich [30, 54, 115, 119, 126, 137]. (zur Definition und Einteilung von Eigenspannungen s. Abschnitt 3.2.4)
- C lokale Spannungsüberhöhungen: Spannungsüberhöhungen im Werkstoff infolge von Materialeinschlüssen oder Spannungsüberhöhungen infolge von Partikelüberrollung und Rauheiten.

Bei Zugrundelegung eines elastischen Werkstoffverhaltens können die einzelnen Spannungen komponentenweise additiv superponiert werden. Aus der Superposition aller Spannungen ergibt sich eine lokale Gesamtbeanspruchung, die der lokale Gesamtspannungstensor beschreibt. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß sich die einzelnen Spannungen, wie in den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels näher erläutert wird, hinsichtlich ihres zeitlichen Verlaufes im Überrollungsvorgang unterscheiden.



**Bild 5:** Systemspannungen im allgemeinen Wälzkontakt [19]

### 3.2.2 Lastspannungen im Wälzkontakt

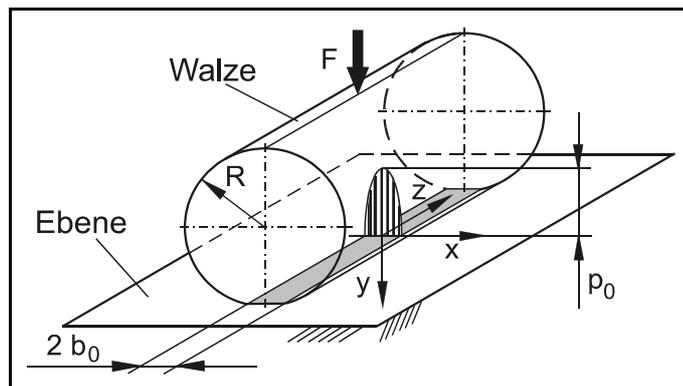
Zwei Körper berühren sich bei ihrer Annäherung bis zum spannungsfreien Kontakt in einem Punkt, wenn es sich um allseitig gekrümmte Körper handelt oder entlang einer Geraden, wenn die Körper zwei Zylinder bzw. Kegel darstellen. Bei einer weiteren Annäherung der Körper, bei der nur Normalkräfte übertragen werden, erfolgt im ersten Fall die Kraftübertragung über eine elliptische, im zweiten Fall über eine rechteckige Kontaktfläche. Unabhängig von der Ausdehnung der Berührung werden die beiden Kontaktarten gemäß der Form der Berührfläche in Punktkontakt (Punktberührung) und Linienkontakt (Linienberührung) unterschieden.

Werden Körper nur senkrecht zur Berührlinie belastet, so lassen sich die auftretenden Verformungen und Spannungen nach der Hertzschen Theorie [50] berechnen. Die Anwendung der Hertzschen Gleichungen setzt

- C homogene und isotrope Materialien,
- C die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (rein elastisches Materialverhalten),
- C Eigenspannungsfreiheit sowie
- C eine im Verhältnis zu den Durchmessern der Wälzkörper kleine Kontaktfläche voraus.

Versuche von Stribeck [s. 100] bestätigen unter anderem die Anwendbarkeit der Formeln für Wälzkörper aus Stahl. Grundlage der Hertzschen Gleichungen bilden die Bousinesqschen Formeln [z.B. 28, 47], mit denen sich für eine Einzelkraft auf einem Halbraum die Verschiebungen und Spannungen bestimmen lassen.

Als mechanisches Ersatzmodell zur Beschreibung des Kontaktes zweier Zylinder mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  dient der Kontakt zwischen einem unendlich langen Zylinder mit dem Ersatzkrümmungsradius  $R$  und einer Halbebene. Die Verwendung dieses Ersatzmodells ist aufgrund der Annahme einer im Verhältnis zu den Durchmessern der Wälzkörper kleinen Kontaktfläche



**Bild 6:** Berührungsverhältnisse bei Linienkontakt, Kraft  $F$ , Ersatzkrümmungsradius  $R$ , Hertz'sche Größen  $p_0$  und  $b_0$

möglich [32, 50]. Im **Bild 6** sind die Berührungsverhältnisse bei der Belastung Walze gegen Ebene, das im weiteren verwendete Koordinatensystem sowie die Kenngrößen des Kontaktes (Hertz'sche Pressung  $p_0$  und halbe Kontaktbreite  $b_0$ ) dargestellt. Gemäß der Hertz'schen Theorie ergibt sich über der Breite des Kontaktes ein elliptischer, längs des Kontaktes ein konstanter Druckverlauf.

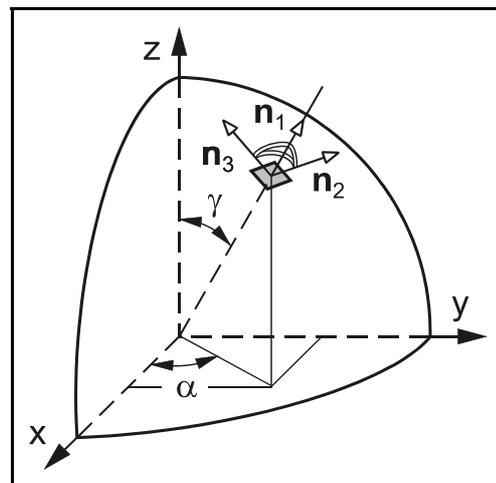
Während mit den Hertz'schen Gleichungen lediglich die Werkstoffbeanspruchung infolge einer Normaldruckbelastung bestimmt werden kann, ist es nach [32] und [64] möglich, den Einfluß eines Schubdruckes (Reibung) zu berücksichtigen. [89] und [91] beschreiben die Temperaturverteilung unter einer Wärmequelle. Aus der damit berechneten Temperaturverteilung lassen sich die resultierenden Wärmespannungen bestimmen [101]. An der Forschungsstelle für Zahnräder und

Getriebebau (FZG) der Technischen Universität München wurde von Oster [53, 101] zur Beurteilung des Flankenkontaktes in Zahnradern das Programmsystem „ROSLCOR“ entwickelt. Es gestattet die Berechnung der Oberflächenbelastung in Linienkontakten und der Werkstoffbeanspruchung der mit beliebiger Druck-, Schubdruck- und Wärmequellenverteilung belasteten Halbebene. Im Rahmen der Arbeit [47] wurde ein Teil des Programms auf Punktberührung erweitert, so daß auch hierfür die Werkstoffbeanspruchung der mit beliebiger Druck- und Schubdruckverteilung belasteten Halbebene bestimmt werden kann.

Als spannungsmechanische Grundlage für die Berechnung der Werkstoffbeanspruchung im Linienkontakt dient der ebene Formänderungszustand. Hier werden lediglich Dehnungen in Tiefen- sowie in Wälzrichtung zugelassen. Die Dehnung quer zum Kontakt wird zu Null gesetzt. Damit stellt im Linienkontakt die Koordinatenspannung in z-Richtung (s. Bild 6) stets eine Hauptspannungsrichtung dar.

### 3.2.3 Spannungen an der Oberfläche eines Volumenelementes

Mit der im letzten Abschnitt genannten Literatur bzw. mit Hilfe des Programmsystems „ROSLCOR“ [53] ist es für den Wälzkontakt möglich, den Spannungstensor und damit den zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegenden Spannungszustand eines Volumenelementes eindeutig zu bestimmen. Ausgehend von diesem Spannungstensor läßt sich nicht nur das Hauptachsensystem mit den Hauptnormal- und Hauptschubspannungen bestimmen [47], sondern es können auch die auf der Oberfläche der Einheitskugel, die im folgenden als maßgebendes Volumenelement angesehen wird, wirkenden Spannungen in beliebigen Schnittebenen (s. **Bild 7**) berechnet werden. Die Kenntnis der an einem Volumenelement anliegenden Spannungen ist zum besseren Verständnis der örtlich über der Zeit vorliegenden Werkstoffbeanspruchung sowie für die Anwendung vieler Festigkeits-hypothesen notwendig. Es gelten die unten aufgeführten Beziehungen.



**Bild 7:** Schnittebene mit den Normalenvektoren  $\mathbf{n}_{1,2,3}$  auf  $1/8$  der Oberfläche der Einheitskugel

Die Kenntnis der an einem Volumenelement anliegenden Spannungen ist zum besseren Verständnis der örtlich über der Zeit vorliegenden Werkstoffbeanspruchung sowie für die Anwendung vieler Festigkeits-hypothesen notwendig. Es gelten die unten aufgeführten Beziehungen.

Bestimmung der Normalenvektoren  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_3$  der Schnittebene  $(\gamma, \alpha)$ :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \sin \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \gamma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \gamma \cdot \cos \alpha \\ -\cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (1)$$

Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  in der Schnittebene  $(\gamma, \alpha)$ :

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot n_{11} + \tau_{xy} \cdot n_{12} + \tau_{xz} \cdot n_{13} \\ \tau_{xy} \cdot n_{11} + \sigma_y \cdot n_{12} + \tau_{yz} \cdot n_{13} \\ \tau_{xz} \cdot n_{11} + \tau_{yz} \cdot n_{12} + \sigma_z \cdot n_{13} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Normalspannung  $\sigma_{\gamma\alpha}$  in der Schnittebene  $(\gamma, \alpha)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\alpha} &= t_x \cdot n_{11} + t_y \cdot n_{12} + t_z \cdot n_{13} \\ &= \sigma_x \cdot n_{11}^2 + \sigma_y \cdot n_{12}^2 + \sigma_z \cdot n_{13}^2 \\ &\quad + 2 \cdot (\tau_{xy} \cdot n_{11} \cdot n_{12} + \tau_{xz} \cdot n_{11} \cdot n_{13} + \tau_{yz} \cdot n_{12} \cdot n_{13}) \end{aligned} \quad (3)$$

Schubspannungskomponenten  $\tau_{2,3}$  in der Schnittebene  $(\gamma, \alpha)$  in den Richtungen  $\mathbf{n}_2$  bzw.  $\mathbf{n}_3$ :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= t_x \cdot n_{21} + t_y \cdot n_{22} + t_z \cdot n_{23} \\ \tau_3 &= t_x \cdot n_{31} + t_y \cdot n_{32} + t_z \cdot n_{33} \end{aligned} \quad (4)$$

### 3.2.4 Eigenspannungen im Wälzkontakt

Eine Definition und Einteilung von Eigenspannungen wird von Macherauch [84] gegeben. Die nachfolgenden Betrachtungen und Berechnungen beziehen sich gemäß der Definition von Macherauch [84] auf Eigenspannungen I. Art, welche über größere Werkstoffbereiche nahezu homogen sind. Nach den Untersuchungen von [z.B. 30, 106, 137] ändern sich die Eigenspannungen im Bereich der Zeitfestigkeit zu Beginn der Beanspruchung, bleiben dann über den größten Bereich der Lebensdauer nahezu konstant und ändern sich vor dem Ausfall wieder. Nach [137] wird die erste Phase als „shakedown“, die zweite als „stabile Phase“ und die dritte mit „instabile Phase“ bezeichnet. Unterhalb der Dauerfestigkeitsgrenze ergeben sich keine Eigenspannungsänderungen [z.B. 33, 41, 60, 85].

Nach Lang [75] können die aus einer Wärmebehandlung resultierenden Eigenspannungen  $\sigma_E$  aus dem örtlichen Härtetiefenverlauf wie folgt abgeschätzt werden:

für induktives Härten ( $\sigma_E$  in N/mm<sup>2</sup>):

$$\sigma_E = -3,94 \cdot 1,01^{(HV - HV_{Kern})} \quad (5)$$

für Einsatzhärten ( $\sigma_E$  in N/mm<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} \sigma_E &= -1,25 \cdot (HV - HV_{Kern}) && \text{für } (HV - HV_{Kern}) \leq 300 \\ \sigma_E &= 0,2857 \cdot (HV - HV_{Kern}) - 400 && \text{für } (HV - HV_{Kern}) > 300 \end{aligned} \quad (6)$$

Nach Untersuchungen an der FZG der TU München an Zahnrädern ergeben sich bessere Übereinstimmungen mit an Zahnradflanken gemessenen Eigenspannungstiefenverläufen, wenn die Konstante im zweiten Teil der **Gleichung (6)** zu „460“ abgeändert wird.

für Nitrierhärten ( $\sigma_E$  in N/mm<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} \sigma_E &= -1,667 \cdot (HV - HV_{Kern}) && \text{für } (HV - HV_{Kern}) \leq 300 \\ \sigma_E &= -500 = \text{const.} && \text{für } (HV - HV_{Kern}) > 300 \end{aligned} \quad (7)$$

Als Eigenspannungszustand in der Zahnflanke werden üblicherweise gleiche Eigenspannungen in Zahnhöhenrichtung und in axialer Richtung angenommen. Bei der Eigenspannung in Normalenrichtung zur Flankenoberfläche handelt es sich um eine Zugeigenspannung, die im Vergleich zu den Druckeigenspannungen parallel zur Oberfläche vernachlässigt werden kann [16, 87].

Wie im Stand des Wissens (Kapitel 2) bereits erläutert, besitzen die Eigenspannungen Einfluß auf die maximale Beanspruchung im Werkstoff [149] und damit insbesondere auf die statische Tragfähigkeit. Zur Frage, inwieweit Eigenspannungen die dynamische Werkstoffbeanspruchung beeinflussen, ist zunächst der zeitliche Verlauf der Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt zu analysieren. Hierbei ist zu beachten, daß im Wälzkontakt eine unterschiedliche zeitliche Abhängigkeit der Last- und Eigenspannungen vorliegt. Nach [30] kann für das Verhältnis zwischen der Beanspruchungsdauer  $t_{Eingr}$  eines Volumenelementes durch die Oberflächenlast und der Zeit  $t_{Umdr}$  zwischen den Belastungsintervallen folgender Zusammenhang angegeben werden ( $\omega_1$  Winkelgeschwindigkeit,  $\rho_1$  Krümmungsradius des Zahnrades):

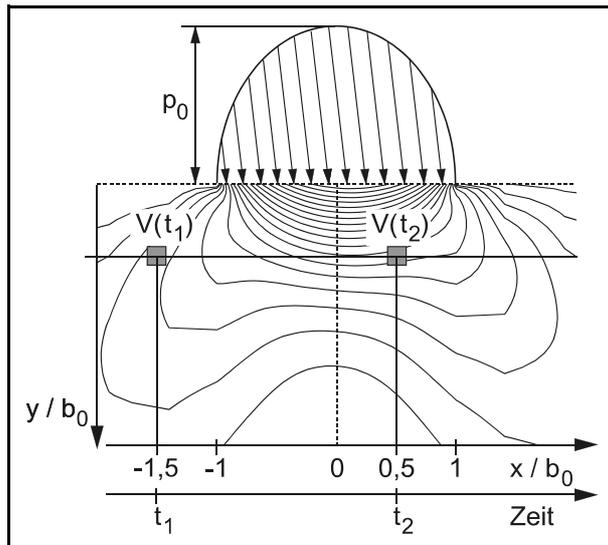
$$\frac{t_{Eingr}}{t_{Umdr}} = \frac{2 \cdot b_0 / (\omega_1 \cdot \rho_1)}{2 \cdot \pi / \omega_1} = \frac{b_0}{\pi \cdot \rho_1} \quad (8)$$

Elstorpff [30] berechnet beispielsweise für die von ihm verwendete Prüfverzahnung ein Verhältnis  $t_{Eingr}/t_{Umdr}$  von # 1/100. Demnach geben die Lastspannungen nur

einen sehr kurzen Lastimpuls, während die Eigenspannungen - quasistationäre Eigenspannungen über den größten Bereich der Lebensdauer vorausgesetzt - über der gesamten Zeit wirken. Welchen Einfluß Eigenspannungen auf die dynamische Werkstoffbeanspruchung besitzen, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

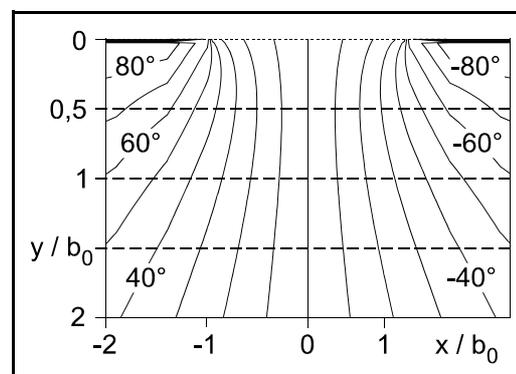
### 3.2.5 Dynamische Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt

Im Flankenkontakt kann die Rollrichtung  $x$  (vgl. Bild 6) zugleich auch als Zeitachse angesehen werden (s. **Bild 8**). Die Volumenelemente in einer bestimmten Werkstofftiefe sind damit in einer zeitlichen Abfolge sämtlichen, in dieser Tiefe wirkenden Beanspruchungen ausgesetzt. Zusätzlich findet im Wälzkontakt in Abhängigkeit von der Oberflächenbelastung sowie vom lokal vorliegenden Eigenspannungszustand eine Drehung des Hauptachsensystems statt [149]. Mit der Drehung des Hauptachsensystems ist eine Richtungsänderung der Haupt-



**Bild 8:** zeitliche Beanspruchung eines Volumenelementes  $V$  im Wälzkontakt (dargestellt im Höhenliniendiagramm einer Koordinatenspannung)

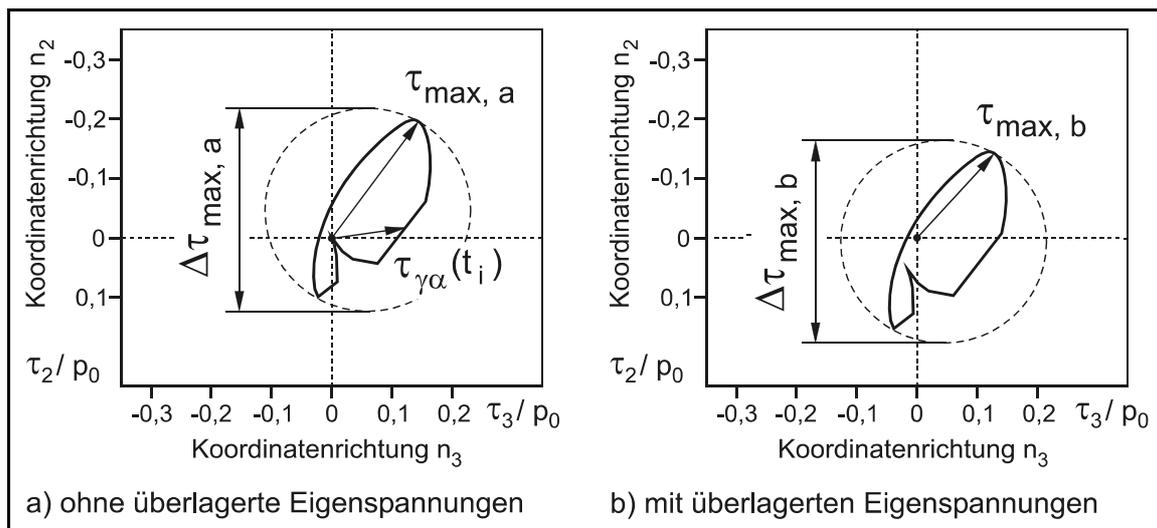
normal- und Hauptschubspannungen verbunden, die die Bewertung der Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt erschwert. Außerdem lassen sich dadurch viele gängige Bewertungskriterien (Festigkeits-hypothesen) für mehrachsige Spannungszustände nicht mehr anwenden. Im **Bild 9** ist beispielhaft der Winkel zwischen dem lokalen  $x,y,z$ -Koordinatensystem (vgl. Bild 6) und dem Hauptachsensystem bei reiner Normalbelastung des Wälzkontaktes in einem Höhenliniendiagramm entlang der Rollrichtung sowie über der Werkstofftiefe aufgetragen [101]. In diesem Beispiel findet eine Drehung des Hauptachsensystems von  $90^\circ$  bis  $-90^\circ$  statt. Eine weitere Möglichkeit, die dynamische Werkstoffbeanspruchung im



**Bild 9:** Winkel des Hauptachsensystems zum lokalen  $x,y,z$ -Koordinatensystem (reine Normalbelastung)

Wälzkontakt zu analysieren, stellen Schubspannungsverläufe in den Schnittebenen der Einheitskugel (s. Bild 7) dar. Das **Bild 10** zeigt beispielhaft die nach Gleichung (4) berechneten Schubspannungsverläufe in einer bestimmten Schnittebene und Werkstofftiefe ( $y / b_0 = 0,3$ ) eines Volumenelementes während eines Wälzvorganges. Aus dem Bild 10a ist zunächst zu entnehmen, daß sich die Richtung der Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}$  in der Schnittebene  $\gamma, \alpha$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t_i$  ändert. Dies ist durch das sich im Wälzkontakt drehende Hauptachsensystem, wie oben beschrieben, begründet.

In den Berechnungen zu Bild 10a wurden den Lastspannungen aus dem Wälzkontakt keine Eigenspannungen überlagert, so daß die Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}(t = 0)$  zu Beginn des Wälzvorganges, d.h. in ausreichender Entfernung des einen Wälzkörpers vom betrachteten Volumenelement des anderen Wälzkörpers, verschwindet. Das gleiche gilt für die Schubspannung nach dem Ende des Wälzvorganges.

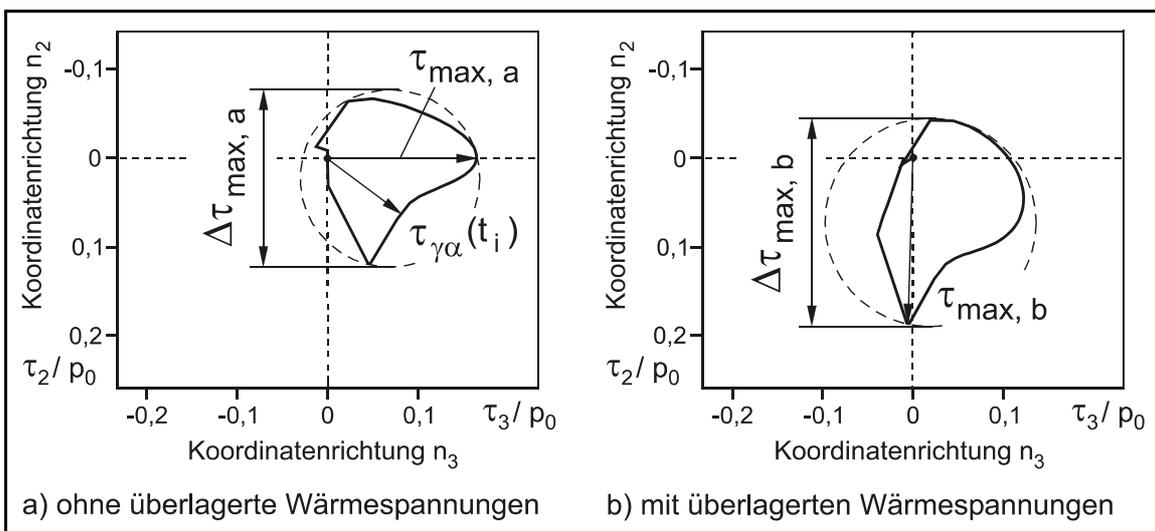


**Bild 10:** beispielhafte Schubspannungsverläufe(Ortskurven) in der Schnittebene  $\gamma = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$  eines Volumenelementes in der Werkstofftiefe  $y / b_0 = 0,3$  unter Wälzbeanspruchung (Hertzsche Normal- und Schubdruckbelastung)  
 a) ohne und b) mit überlagerten Druckeigenspannungen ( $\sigma_E = 0,14 c p_0$ )

Durch Vorgabe von Druckeigenspannungen in der Höhe von etwa  $0,14 c p_0$  und sonst vergleichbaren Bedingungen wie im Bild 10a verschiebt sich lediglich der Schubspannungsverlauf im örtlichen Koordinatensystem in der betrachteten Schnittebene (s. Bild 10b). Durch den Vergleich der beiden Teilbilder fällt auf, daß durch die Vorgabe der Druckeigenspannungen der Betrag der maximalen Schubspannung in dieser Schnittebene abnimmt ( $\tau_{\max, b} < \tau_{\max, a}$ ). Dies trifft auch für andere Schnittebenen des gleichen Volumenelementes zu und steht damit im Einklang mit der Aussage, Druckeigenspannungen reduzieren bis zu einer bestimmten Größe

die (maximale) Beanspruchung im Wälzkontakt [149]. Im Gegensatz zu den maximalen Schubspannungen unterscheiden sich die maximalen Änderungen der Schubspannungen  $\Delta\tau_{\max, a}$  und  $\Delta\tau_{\max, b}$ , die durch die kleinsten Umkreise um die Schubspannungs-Zeit-Verläufe gekennzeichnet sind, in dieser Schnittebene nicht.

Die nachfolgenden Betrachtungen zeigen auf, wie Wärmespannungen die zeitliche Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt beeinflussen. Aus der Literatur [z.B. 101, 143] ist bekannt, daß sich nennenswerte Temperaturspannungen lediglich im unmittelbaren Oberflächenbereich in Form von Drucknormalspannungen parallel zur Oberfläche ergeben. Die übrigen Spannungen sind aufgrund der ungehinderten Dehnungsmöglichkeiten des Wälzkörpers vernachlässigbar klein. Es ist zu beachten, daß sich das Maximum der Spannungen unabhängig vom Vorzeichen des Schlupfes im Auslauf des Wälzkontaktes, d.h. auf der von der Rollrichtung abgewandten Seite des Kontaktes, befindet [101]. Nach [143] nimmt das Verhältnis zwischen thermischer und mechanischer Spannung mit zunehmender Hertzscher Pressung ab. In [101] wird am Beispiel einer nachgerechneten Verzahnung der Einfluß von EHD-Druck-, Schubdruck- und Wärmequellenbelastung aufgezeigt. Es ist zu erkennen, daß die Wärmespannungen im oberflächennahen Bereich sowohl die Größe der lokalen Beanspruchungen als auch die Ausrichtung der Hauptachsensysteme und damit insbesondere auch die dynamische Werkstoffbeanspruchung beeinflussen.



**Bild 11:** beispielhafte Schubspannungsverläufe (Ortskurven) in der Schnittebene  $\gamma = 66^\circ$ ,  $\alpha = 57^\circ$  eines Volumenelementes in Oberflächennähe ( $y/b_0 = 0,03$ ) unter Wälzbeanspruchung (Hertzsche Normaldruck-, Schubdruck- und Wärmequellenbelastung), Daten aus dem Beispiel in [101, S. 91 ff]  
 a) ohne und b) mit überlagerten Wärmespannungen

Zu beachten ist die beanspruchungsmindernde Wirkung der Wärmespannungen auf die Spannungskonzentration im Bereich des zweiten Druckmaximums [101]. Im **Bild 11** ist für die Verzahnung aus [101] der Schubspannungs-Zeit-Verlauf beispielhaft für eine beliebig ausgewählte Schnittebene eines Volumenelementes in Oberflächennähe ( $y / b_0 = 0,03$ ) dargestellt. Die Wärmespannungen erhöhen bei den gewählten Vorgaben die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  sowie die maximale Änderung der Schubspannung  $\Delta\tau_{\max}$  in dieser Ebene. Bei der Betrachtung anderer Schnittebenen (hier nicht dargestellt) des gleichen Volumenelementes läßt sich wie in [101] z.T. aber auch eine Abnahme der Spannungen durch die Wärmespannungen feststellen.

Die vorangegangene Analyse zur dynamischen Werkstoffbeanspruchung im ideal glatten Wälzkontakt unterstreicht die Komplexität des im Wälzkontakt vorliegenden, sich zeitlich ändernden Spannungszustandes. Die angestellten, hier beispielhaft dargestellten Betrachtungen der Beanspruchungen im Wälzkontakt bei überlagerten Eigenspannungen zeigen, daß z.B. die fertigungsinduzierten Eigenspannungen statischen Spannungen und die Lastspannungen dynamischen Spannungen entsprechen. Insgesamt kann gefolgert werden, daß zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt, wie in der Festigkeitsrechnung üblich, nicht nur die maximale Beanspruchung sondern auch das Beanspruchungs-Zeit-Verhalten heranzuziehen ist. Das Beispiel des Einflusses von Wärmespannungen auf Schubspannungs-Zeit-Verläufe in verschiedenen Schnittebenen eines Volumenelementes verdeutlicht die Schwierigkeit, die Beurteilung der Werkstoffbeanspruchung auf eine definierte Schnittebene zu beschränken. Welche Besonderheiten sich für die statische und dynamische Werkstoffbeanspruchung im Kontakt technischer Oberflächen ergeben, soll durch die Betrachtungen in den nächsten Abschnitten abgeschätzt werden.

### 3.3 Rauher, linienförmiger Wälzkontakt

#### 3.3.1 Grundlagen zum Aufstellen einfacher Kontaktmodelle

##### Modellierung technischer Oberflächen

Der rechnerische Einfluß technischer Oberflächen auf die Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten wird in der Literatur entweder mit Hilfe stochastischer Betrachtungen oder über eine geometrische Modellierung der Wälzkörperoberflächen untersucht [37]. Da das Ziel der vorliegenden Arbeit eine physikalische Deutung der

Werkstoffermüdung in Wälzkontakten darstellt, wurde die letztere Methode als Berechnungsgrundlage für die weiteren Untersuchungen gewählt.

Nach [46, 110] enthalten technische Oberflächen nicht, wie häufig aufgrund der maßstabsverzerrenden Darstellung von Oberflächenaufzeichnungen angenommen, Rauheitsspitzen mit steilen Flanken. Eine eher zutreffende Beschreibung technischer Oberflächen stellen demnach sinusähnliche Oberflächenkonturen mit kleinen Profilneigungswinkeln (Böschungswinkel) dar. So existieren zahlreiche Veröffentlichungen, die den Rauheitseinfluß durch eine dem glatten Wälzkörper überlagerte, sinusförmige Kontur simulieren [z.B. 22, 34, 72, 90]. Der Profilneigungswinkel  $\alpha$  technischer Oberflächen liegt im Bereich von etwa  $1^\circ - 7^\circ$  [24, 130]. Befinden sich zwei technische Oberflächen in Kontakt, so kann dieser bei der Berechnung durch die Berührung eines ideal glatten Körpers mit einem rauhen, bei dem die Rauheiten beider Kontaktpartner überlagert sind, dargestellt werden [z.B. 24, 34].

Zur Abschätzung der Einflüsse des Kontaktes von technischen Oberflächen auf die Beanspruchung im Wälzkontakt wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei unterschiedliche, einfache Modelle für Linienkontakt angewendet (s. Abschnitt 3.3.2) bzw. erstellt (s. Abschnitt 3.3.3). Die Modelle werden nach der Darstellung der Grundgleichungen der Elastohydrodynamik, auf die die beiden Modelle aufbauen, erläutert.

#### Grundgleichungen der Elastohydrodynamik

Bei der Lösung des elastohydrodynamischen Schmierproblems sind nach [101] im allgemeinen drei Grundgleichungen, die Reynoldsgleichung, die Verformungsgleichung sowie die Schmierstoffgleichungen zu lösen.

Verformungsgleichung für den ideal glatten Wälzkontakt :

$$h(x) = h_0 + \frac{1}{2R}(x^2 - x_0^2) + \sum \Delta v \tag{9}$$

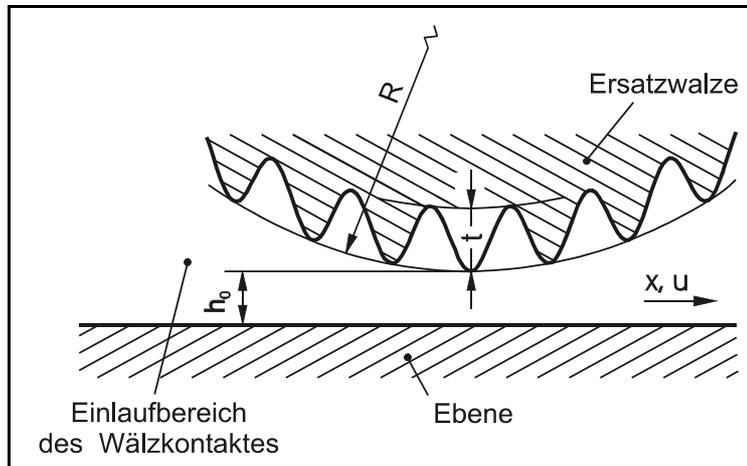
Zahlenwertgleichung zur Berechnung der Dichte des Schmierstoffs :

$$\rho(\vartheta, p) = \rho_{00} \left( 1 + \frac{a_r p}{1 + b_r p} - c_r \vartheta \right) \tag{10}$$

Für Mineralöl gilt nach [101]:	$a_r = 5,26 \cdot 10^{10} \text{m}^2/\text{N}$	
	$b_r = 1,10 \cdot 10^9$	$\text{m}^2/\text{N}$
für Umgebungsdruck:	$c_r = 0,70$	$1/\text{K}$
für $p \gg$ Umgebungsdruck:	$c_r = 0,31$	$1/\text{K}$

### 3.3.2 Einfaches Kontaktmodell ohne Berücksichtigung der Schmierstofftraganteile

Ausgehend vom mechanischen Ersatzmodell gemäß der Hertzschen Theorie wird zur Simulation des Kontaktes technischer Oberflächen der Ersatzwalze eine sinusförmige Kontur mit der Doppelamplitude  $t$  und der Wellenlänge  $l$  überlagert (**Bild 12**). Die Doppelamplitude  $t$  ergibt sich nach [34] aus der Summe der Abweichungen von der Idealkontur beider Wälzkörper.



**Bild 12:** Wälzkontakt technischer Oberflächen, erstes Kontaktmodell

Zwischen Doppelamplitude  $t$ , Wellenlänge  $l$  und dem Profilneigungswinkel  $\alpha$  besteht vereinfacht folgender Zusammenhang [vgl. 34]:

$$\tan \alpha = \frac{t}{l} \tag{11}$$

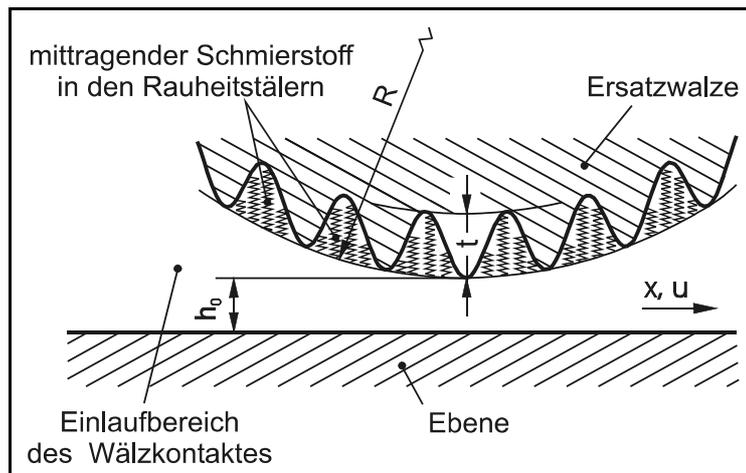
Durch die Berücksichtigung des Kontaktes technischer Oberflächen ändert sich die Verformungsgleichung des elastohydrodynamischen Schmierproblems wie folgt:

$$h(x) = h_0 + \frac{1}{2R}(x^2 - x_0^2) + \frac{t}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi(x - x_0)}{l} \right) \right) + \sum \Delta v \tag{12}$$

### 3.3.3 Einfaches Kontaktmodell mit Berücksichtigung der Schmierstofftraganteile

Im **Bild 13** ist der Kontakt technischer Oberflächen für das zweite Kontaktmodell dargestellt. Gemäß der Vorstellung von Prexler [103] sind im zweiten Kontaktmodell die „Riefen“ der technischen Oberfläche mit Schmierstoff gefüllt und übertragen einen Teil der Normalkraft. Die Federn im Bild 13 symbolisieren die Federsteifigkeit des Schmierstoffs in den Rauheitstälern. Demnach berücksichtigt das zweite Modell die Rauheit nicht durch die Überlagerung einer geometrischen Oberflächenkontur,

sondern in Form eines weiteren (vom Druck abhängigen) Verformungsanteils in der Verformungsgleichung. Dieser Verformungsanteil resultiert aus den folgenden Überlegungen an einem Volumenelement in einer Vertiefung der Kontur (**Gleichung (13)**).



**Bild 13:** Wälzkontakt rauber Oberflächen, zweites Kontaktmodell

$$\begin{aligned} \rho V &= \text{konst.} && \text{(Massenerhaltung)} \\ (h_r - v_r) \rho_p &= h_r \rho_{p_0} \\ v_r &= h_r \frac{\rho_p - \rho_{p_0}}{\rho_p} \end{aligned} \quad (13)$$

Das zweite Modell zur Simulation des Kontaktes zwischen technischen Oberflächen ermöglicht prinzipiell die Berücksichtigung des rheologischen Stoffverhaltens des Schmierstoffs mit Hilfe der isothermen Kompressibilität  $\kappa_T$  des Schmierstoffs [s. 11, 101]:

$$\begin{aligned} \kappa_T &= - \frac{1}{V_0} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T = - \frac{\rho_0}{m} \left( \frac{d \frac{m}{\rho}}{dp} \right)_T \\ \kappa_T &= \frac{a_r}{(1 + (a_r + b_r) p)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Vorgabe einer geringeren Kompressibilität  $\kappa_T'$  infolge einer sehr schnellen Druckbeaufschlagung ( $t < 1$  ms) des Schmierstoffs im hoch beanspruchten Zentralbereich des EHD-Wälzkontaktes kann durch folgende Beziehung erfolgen:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_T'}{\kappa_T} &= C_{ar} \\ \kappa_T' &= \frac{C_{ar} \cdot a_r}{(1 + (a_r + b_r) p)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$C_{ar}$  stellt dabei eine vom rheologischen Verhalten des Schmierstoffs abhängige Konstante dar. Je kleiner diese ist, desto eher verhält sich demnach der Schmierstoff unter sehr rascher Beanspruchung wie ein Festkörper (vgl. [103]). Da keine sicheren Daten zum zeitlichen Schmierstoffverhalten aus der Literatur zur Verfügung stehen, wird die Größe der Konstanten  $C_{ar}$  in den nachfolgenden Betrachtungen variiert, um den möglichen Einfluß einer verminderten Kompressibilität auf die sich im Kontakt einstellende Druckverteilung aufzuzeigen.

Beide beschriebenen Modelle sind im Teilprogramm EHDOR von ROSLCOR [53, 101] implementiert. Das Programm EHDOR dient zur Berechnung der Schmierfilmdicke und der Druckverteilung in elastohydrodynamischen Kontakten [101].

### 3.3.4 Oberflächenbelastung: Normaldruck

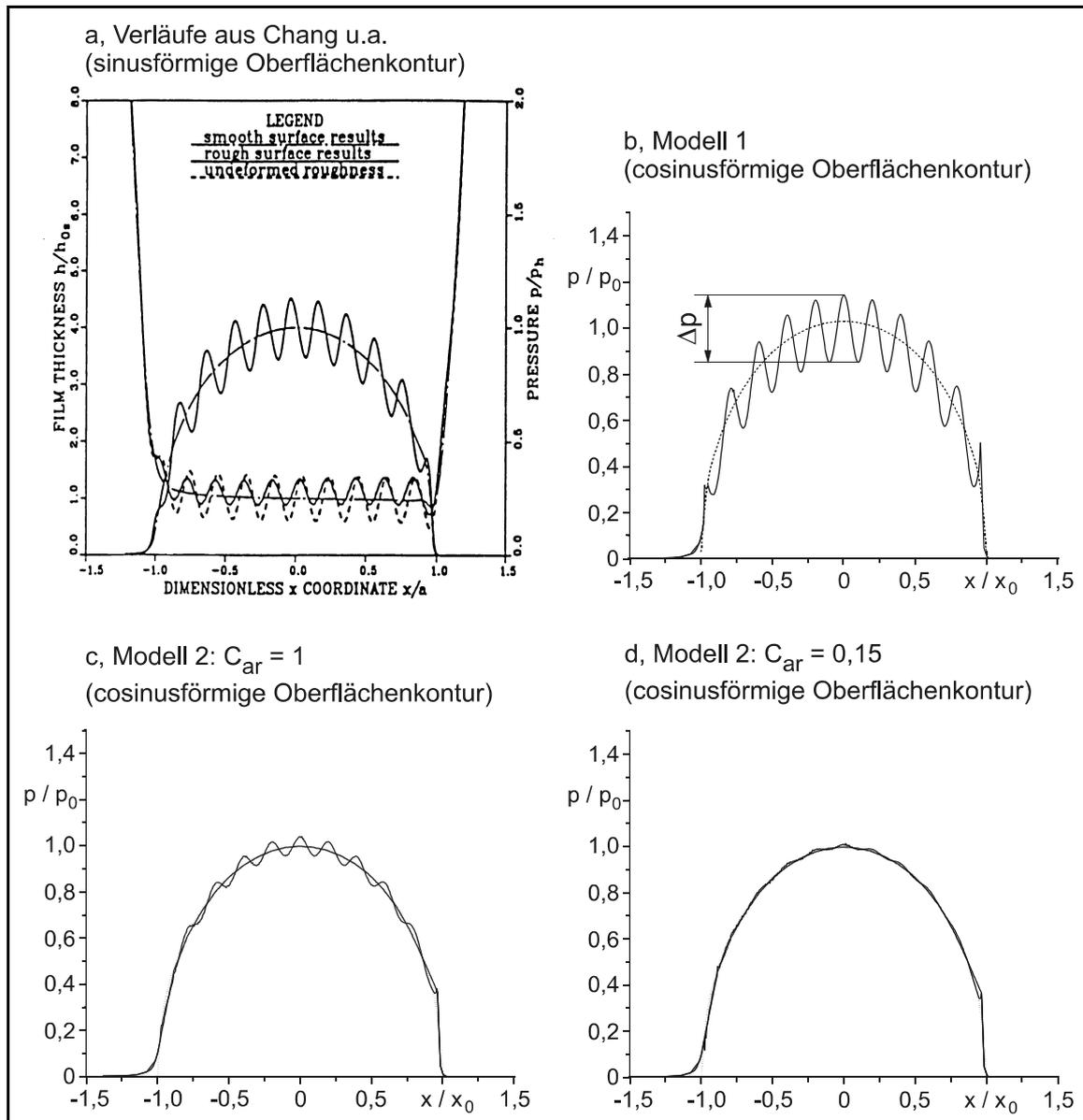
Zum Vergleich der beiden zuvor dargestellten Kontaktmodelle wird ein von Chang u.a. [22] stammendes Berechnungsbeispiel verwendet, das sich mit den in der **Tabelle 1** angegebenen Kenndaten beschreiben läßt. Die Definition der Bestimmungsgrößen ist [z.B. 101] zu entnehmen.

Beschreibung	Zeichen	Einheit	Wert
<b>EHD-Parameter</b>			
Werkstoffparameter	G	[ ]	3604
Geschwindigkeitsparameter	U	[ ]	$3,132 \cdot 10^{-11}$
Lastparameter	W	[ ]	$7,738 \cdot 10^{-4}$
<b>technische Oberfläche</b>			
Doppelamplitude	t	[µm]	0,475
Wellenlänge	l	[mm]	0,2256
Ersatzkrümmungsradius	R	[mm]	25,4

**Tabelle 1:** Berechnungsvorgaben, Beispiel entnommen aus [22]

Die mit beiden Modellen für den Kontakt cosinusförmiger Oberflächenkonturen berechneten Druckverläufe sind im **Bild 14** dargestellt. Die den Rechnungen zugrundegelegte Oberflächenkontur entspricht der Vorgabe in [22]. Aus der Übereinstimmung des berechneten Druckverlaufs (Bild 14b) mit dem aus der Literatur entnommenen Druckverlauf (Bild 14a) kann die numerische Richtigkeit der Berechnung mit dem ersten Kontaktmodell geschlossen werden, da in [22] ein, dem ersten Kontaktmodell entsprechendes, Berechnungsmodell verwendet wurde. Geringe Unterschiede der Druckverläufe sind in den Übergängen vom Zentral-

bereich zu den Einlauf- und Auslaufbereichen festzustellen. Diese Abweichungen können u.a. durch die unterschiedliche Phasenlage der vorgegebenen Oberflächenkontur in den Bildern 14a und 14b erklärt werden.



**Bild 14:** Vergleich der mit dem Programmsystem ROSLCOR, Teilprogramm EHDOR [53, 101] berechneten Druckverläufe für beide Kontaktmodelle mit einem Beispiel von Chang u.a. [22], Vorgaben s. Tabelle 1

Für das zweite Kontaktmodell stellen sich in Abhängigkeit von der im Zentralbereich gewählten Kompressibilität des Schmierstoffs in den Rauheitstälern, ausgedrückt mit Hilfe der Konstanten  $C_{ar}$ , geringere Pressungsüberhöhungen ein. Bei der Berechnung mit  $C_{ar} = 0,15$  ergeben sich nur noch sehr geringe Druckschwankungen. Im Grenzfall  $C_{ar} \rightarrow 0$  verhält sich der Schmierstoff, der in den Rauheitstälern

mittransportiert wird und der einen Teil der Last überträgt, wie ein Feststoff. Die Pressungsüberhöhungen würden in diesem Fall völlig verschwinden, so daß als Ergebnis der Druckverlauf des ideal glatten Kontaktes entsteht. Unter Berücksichtigung des im Beispiel vorgegebenen kleinen Profilneigungswinkels  $\alpha$  sowie der geringen Doppelamplitude  $t = 0,475 \mu\text{m}$  scheinen die mit dem zweiten Kontaktmodell berechneten Druckverläufe plausibler.

In [21] weisen die Autoren ebenfalls darauf hin, daß es mindestens einen Mechanismus gibt, der die, mit dem ersten Kontaktmodell berechneten, großen Druckschwankungen reduziert:

- C Nicht-Newtonsches-Schmierstoffverhalten,
- C thermische Effekte oder
- C im Falle reinen Rollens: gegenseitige Aufhebung von Effekten lokaler Rauheiten sowie lokale Kompressibilität des Schmierstoffs.

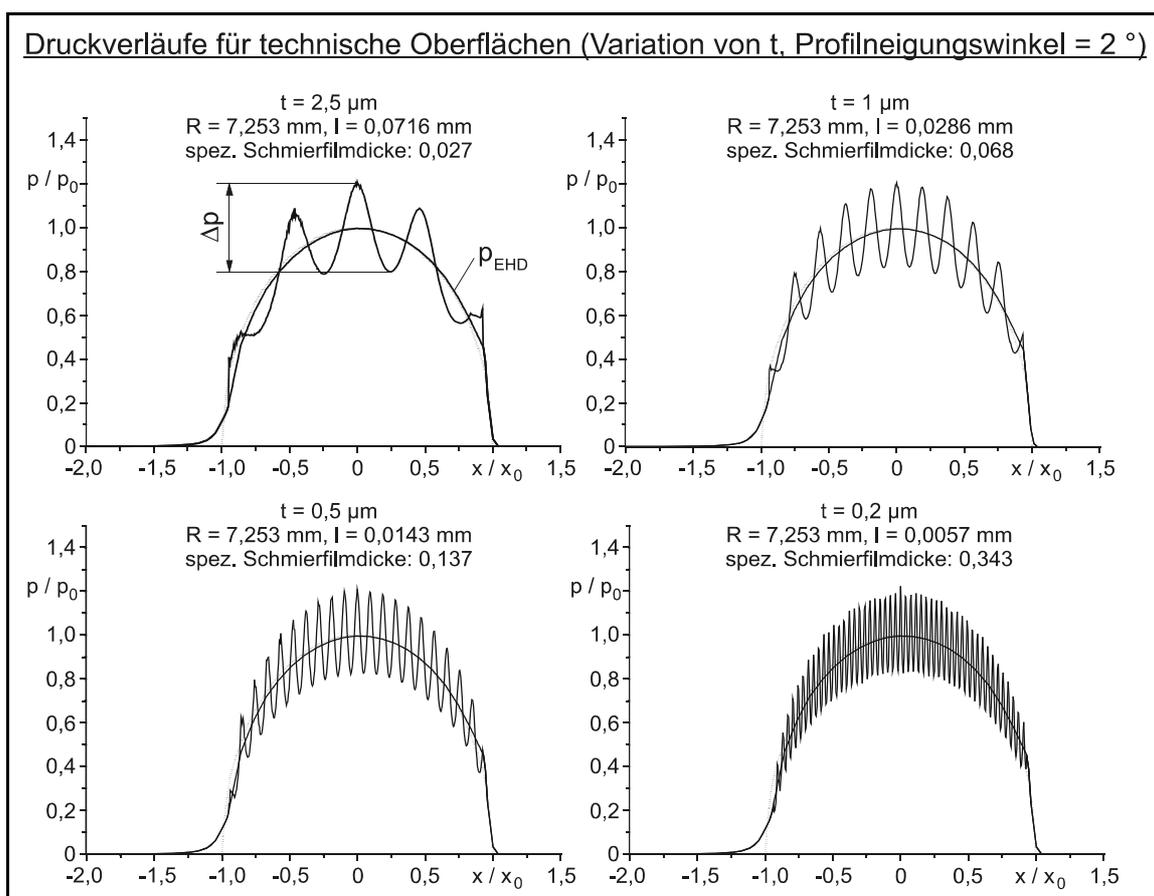
Im folgenden sind weitere Berechnungsergebnisse für das zweite Kontaktmodell mit variiertem Doppelamplitude oder variiertem Profilneigungswinkel aufgeführt. Die Belastungsvorgabe für die Berechnung ist in der **Tabelle 2** angegeben.

Ersatzkrümmungsradius	R	[mm]	7,253
halbe Hertzsche Kontaktbreite	$b_0$	[mm]	0,15
Hertzsche Pressung	$p_0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	1179
Werkstoffparameter	G	[ ]	2162
Geschwindigkeitsparameter	U	[ ]	$0,49 \cdot 10^{-11}$
Lastparameter	W	[ ]	$0,17 \cdot 10^{-3}$

**Tabelle 2:** Vorgabewerte für das Berechnungsbeispiel

### Variation der Größe der Doppelamplitude

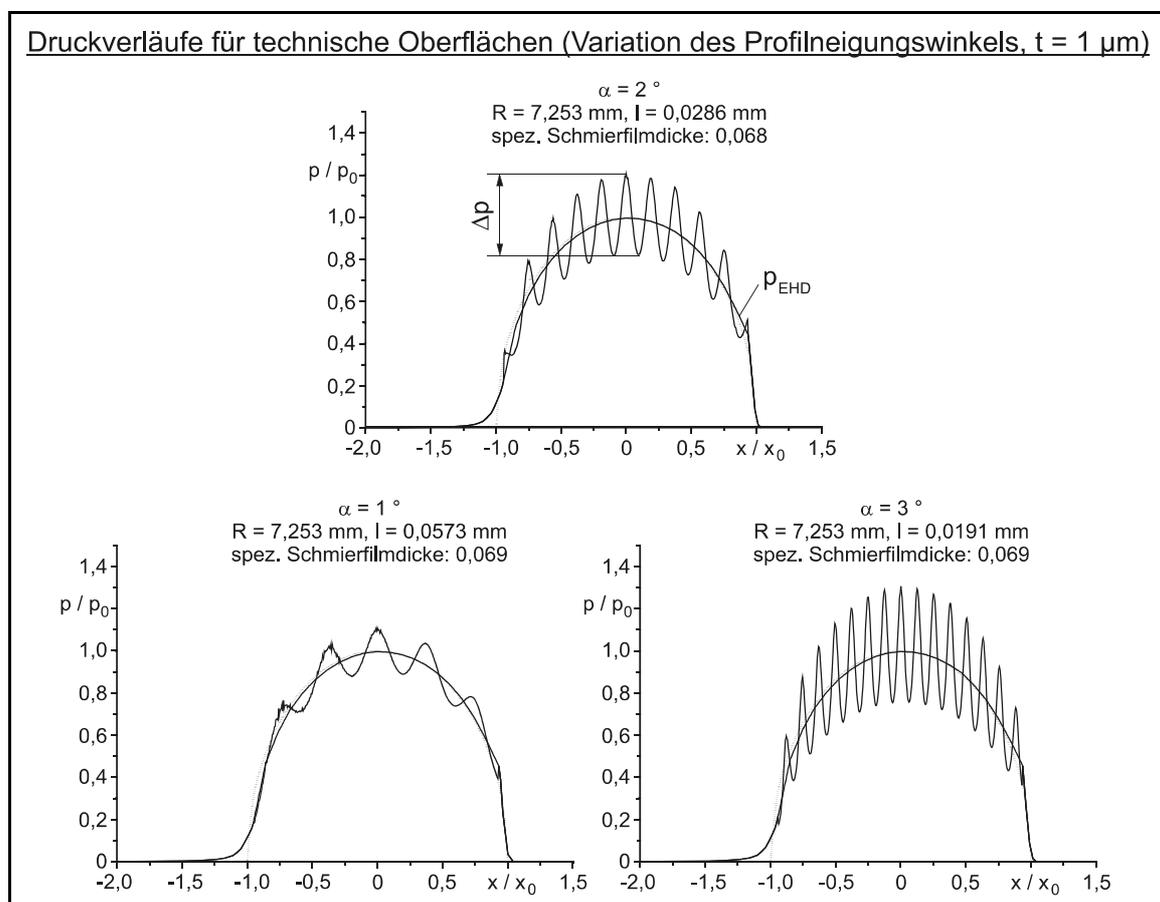
In **Bild 15** sind die Druckverläufe dargestellt, die sich für die Belastung in der Tabelle 2 bei Vorgabe verschiedener Größen der Doppelamplitude ( $t = 0,2 - 2,5 \mu\text{m}$ ), bei gleichem Profilneigungswinkel ( $\alpha = 2^\circ$ ) und mit  $C_{ar} = 0,15$  ergeben. Alle berechneten Druckverläufe, bei der technische Oberflächen berücksichtigt wurden, unterscheiden sich deutlich vom Druckverlauf  $p_{EHD}$ , der sich für die ideal glatten Oberflächen einstellt. Ein Vergleich der einzelnen Druckverläufe für verschiedene Doppelamplituden  $t$  zeigt, daß in etwa gleiche Werte für die maximale Druckschwankung  $\Delta p$  auftreten. Die maximale Druckschwankung erweist sich mit den getroffenen Annahmen für das zweite Kontaktmodell demnach nahezu nicht als Funktion von der Doppelamplitude  $t$ . Aus Vergleichsberechnungen mit dem ersten Kontaktmodell (hier nicht dargestellt) ergibt sich dagegen mit dem ersten Kontaktmodell ein deutlicher Einfluß der Doppelamplitude  $t$  auf die maximale Druckschwankung [s. auch 37].



**Bild 15:** Druckverläufe für verschiedene Doppelamplituden  $t$  und konst. Profilneigungswinkel  $\alpha = 2^\circ$ , Belastungsvorgabe s. Tabelle 2,  $C_{ar} = 0,15$

Variation der Größe des Profilneigungswinkels

Weitere Druckverläufe, ebenfalls für die Belastung in der Tabelle 2, bei denen der Profilneigungswinkel variiert ( $\alpha = 1^\circ - 3^\circ$ ) und die Doppelamplitude konstant  $t = 1 \mu\text{m}$  gelassen wurde, sind in **Bild 16** aufgeführt. Mit steiler werdendem Profil, ausgedrückt durch einen steigenden Profilneigungswinkel  $\alpha$ , wachsen die maximalen Druckschwankungen  $\Delta p$  an. Die unterschiedliche Anzahl an Pressungsüberhöhungen der einzelnen Druckverläufe resultiert aus der Abhängigkeit der drei Größen: Profilneigungswinkel  $\alpha$ , Doppelamplitude  $t$  sowie Wellenlänge  $l$  (s. Gleichung (11)).

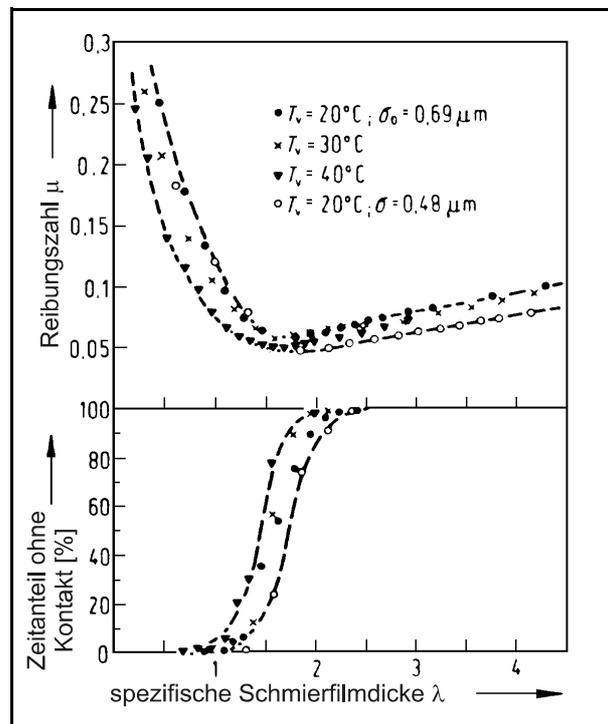


**Bild 16:** Druckverläufe für verschiedene Profilneigungswinkel  $\alpha$  und konst. Doppelamplitude  $t = 1 \mu\text{m}$ , Belastungsvorgabe s. Tabelle 2,  $C_{ar} = 0,15$

Ähnliche Ergebnisse sind [34, 37, 134] zu entnehmen. Nach [34] ist das Verhältnis zwischen  $t$  und  $l$  nicht aber deren absolute Größen für die Drucküberhöhung maßgebend. In zahlreichen Untersuchungen zur Randschichtermüdung bzw. zur Lagerlebensdauer [z.B. 16, 129] wird ebenfalls auf den entscheidenden Einfluß des Profilneigungswinkels  $\alpha$ , als Maß für die Form der Rauheit, auf die Wälzermüdung eingegangen.

### 3.3.5 Oberflächenbelastung: Schubdruck

Oberflächenermüdung ist besonders bei Mischreibung und fortschreitender Mangelschmierung (spezifische Schmierfilmdicke  $\lambda < 1$ ) zu beobachten [z.B. 115, 130, 136]. Bei Mischreibung kommt es vermehrt zu metallischen Kontakten zwischen den Rauheitserhebungen, verbunden mit einer zusätzlichen Beanspruchung der randnahen Schichten, die infolge von Ermüdungsvorgängen zu Mikrorissen und Ausbrüchen (Graufleckigkeit), zur Grübchenbildung sowie zum Verschleiß führen kann [136]. Untersuchungen zeigen, daß mit sinkender spezifischer Schmierfilmdicke die Kontaktzeiten metallischer Berührungen ansteigen und als Folge davon die mittlere Reibungszahl im Wälzkontakt zu (**Bild 17**) und die Lebensdauer von Wälzkontakten abnimmt [5, 130].



**Bild 17:** Abhängigkeit des Zeitanteils ohne Kontakt sowie der mittleren Reibungszahl von der spezifischen Schmierfilmdicke  $\lambda = h_0 / \sigma$ ;  $\lambda$  variiert aufgrund der Geschwindigkeit ( $T_v$ : Öltemperatur;  $\sigma$ ,  $\sigma_0$ : Maß für kombinierte Rauheit) [25]

Die Reibungszahlen variieren unter normalen elastohydrodynamischen Bedingungen zwischen  $\mu = 0,02$  bis  $\mu = 0,1$  [23]. Der angegebene obere Grenzwert entspricht dabei dem Übergang zum Mischreibungsgebiet. Neupert [97] gibt als obere Grenze für die Reibungszahl sogar  $\mu = 0,15$  an. In dem von Ioannides und Harris [57] vorgestellten neuen Modell für die Ermüdungslebensdauer von Wälzlagern wird bei niedrigen spezifischen Schmierfilmdicken mit einer konstanten Reibungszahl  $\mu = 0,15$  gerechnet. Auch Tallian [129] geht in seinem Modell zur Berechnung der Lagerlebensdauer von Reibungszahlen zwischen  $\mu = 0,12$  und  $0,2$  im Falle metallischer Berührung aus. Den Berechnungen am Beispiel von Wälzlagern in [129] zufolge besitzt die Reibungszahl für den Festkörperkontakt erheblichen Einfluß auf die Lebensdauer von Wälzkontakten.

Im folgenden wird ein einfaches Modell zur Beschreibung der Schubdruckbelastung im Kontakt schlecht geschmierter technischer Oberflächen aufgestellt. Da es im Mischreibungsbereich zu metallischen Kontakten kommen kann, ist davon auszugehen, daß in diesem Betriebszustand die Reibungszahl in den Bereichen der Rauheitserhebungen lokale Maximalwerte annimmt. Auch bei nicht unmittelbarer metallischer Berührung der Rauheitserhebungen ist infolge des „Engstellen Effektes“ mit einer erhöhten Reibungszahl in diesem Bereich zu rechnen [30, 127]. In diesem Fall begrenzt die Scherfestigkeit des Schmierstoffs unter dem vorliegenden Druck den zwischen den Wälzkörpern übertragbaren Schubdruck. Da die Vertiefungen der Oberflächenkontur mit Schmierstoff gefüllt sind, ist im Bereich der Vertiefungen von einer niedrigeren Reibungszahl auszugehen, d.h. einer Reibungszahl im Bereich der elastohydrodynamischen Schmierung. Aufgrund der beschriebenen Verhältnisse im Mischreibungs- und Übergangsbereich wird folgender Verlauf der örtlichen Reibungszahl über der Kontaktbreite vorgeschlagen:

- C  $\mu = \mu_{\text{EHD}}$  im Bereich  $p < p_{\text{EHD}}$
- C  $\mu = \mu_{\text{max}}$  an Stellen lokaler Pressungsmaxima
- C lineare Interpolation der lokalen Reibungszahl zwischen  $\mu_{\text{EHD}}$  und  $\mu_{\text{max}}$  in Bereichen  $p \geq p_{\text{EHD}}$ .

Ausgehend von den Belastungsdaten in der Tabelle 2 wird in den nächsten beiden Abschnitten die statische und dynamische Werkstoffbeanspruchung betrachtet. Die Berechnung der Normaldruckverteilung erfolgt mit dem zweiten Kontaktmodell ( $C_{\text{ar}} = 0,4$ ). Die Schubdruckverteilung ergibt sich aus der Normaldruckverteilung und der oben beschriebenen Verteilung der örtlichen Reibungszahl ( $\mu_{\text{EHD}} = 0,04$ ,  $\mu_{\text{max}} = 0,12$ ,  $\mu_{\text{m}} = 0,067$ ).

### 3.3.6 Spannungsverteilung bei Normal- und Schubdruckbelastung

Die Berechnung von Michau [90], der den Rauheitseinfluß mit Hilfe einer der Hertzschen (Normal-)druckverteilung überlagerten, sinusförmigen Belastung ( $p_{\text{max}} / p_0 = 1,7$ ) simuliert, zeigt im oberflächennahen Bereich örtliche Maxima der Werkstoffbeanspruchung (Hauptschubspannung). Das absolute Maximum der Werkstoffbeanspruchung befindet sich bei der vorgestellten Berechnung ebenfalls in Oberflächennähe.

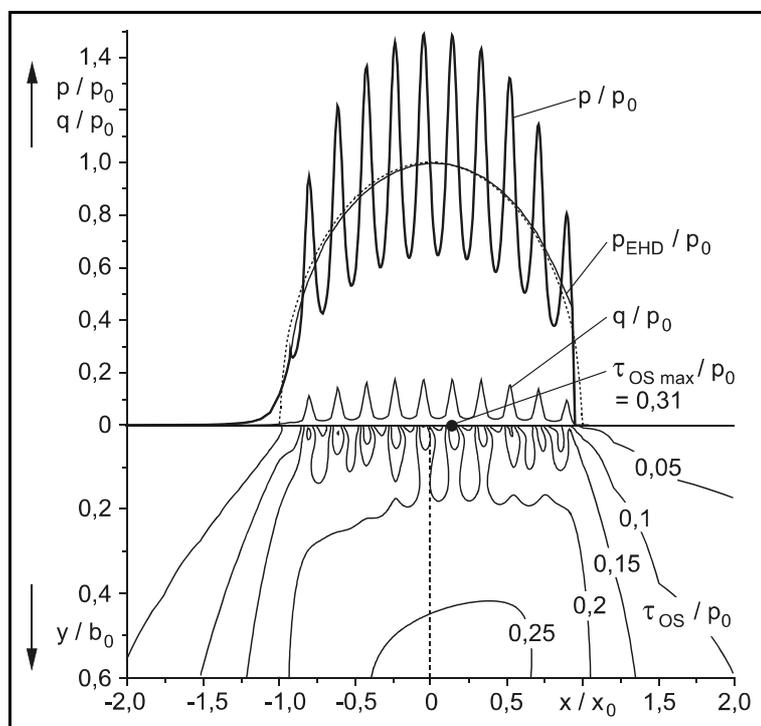
Elstorpff [30] gibt bei seinen theoretischen Untersuchungen ähnliche Normaldruckverteilungen wie Michau [90] vor. Zusätzlich wird eine Schubdruckverteilung

$q = \mu \cdot p$  mit über dem Kontakt konstanter Reibungszahl angenommen. Bei niedrigen Drucküberhöhungen ( $p_{\max} / p_0 \cdot 1,1$ ) ergeben sich gegenüber der statischen Werkstoffbeanspruchung im ideal glatten Kontakt nur geringfügige Änderungen. Mit größer werdender Drucküberhöhung  $p_{\max} / p_0$  vergrößern sich die Spannungen in Oberflächennähe. Durch den überlagerten Schubdruck ( $\mu = 0 \dots 0,1$ ) wandern die Maximalwerte in Richtung des Auslaufes des Wälzkontaktes, ändern aber nur wenig ihren Wert.

Im **Bild 18** ist eine Oberflächenbelastung (Daten s. Tabelle 2, Normal- und Schubdruckbelastung mit örtlich variabler Reibungszahl) und die daraus resultierende Werkstoffbeanspruchung anhand der Oktaederschubspannung  $\tau_{OS}$  dargestellt. Wie bei [30, 90] lassen sich im

oberflächennahen Bereich örtliche Maxima feststellen. Das absolute Maximum liegt an der Oberfläche (s. Bild 18) und entspricht in etwa dem Wert, der sich bei Vorgabe einer Schubdruckverteilung mit konstanter Reibungszahl ( $\mu = \mu_m = 0,1$ ) über der Kontaktbreite einstellt (hier nicht dargestellt). Hierbei ist zu beachten, daß bei variabler Verteilung die mittlere Reibungszahl  $\mu_m = 0,067$  deutlich kleiner ist als diejenige bei Vorgabe des Schubdruckverlaufes mit konstanter Reibungszahl.

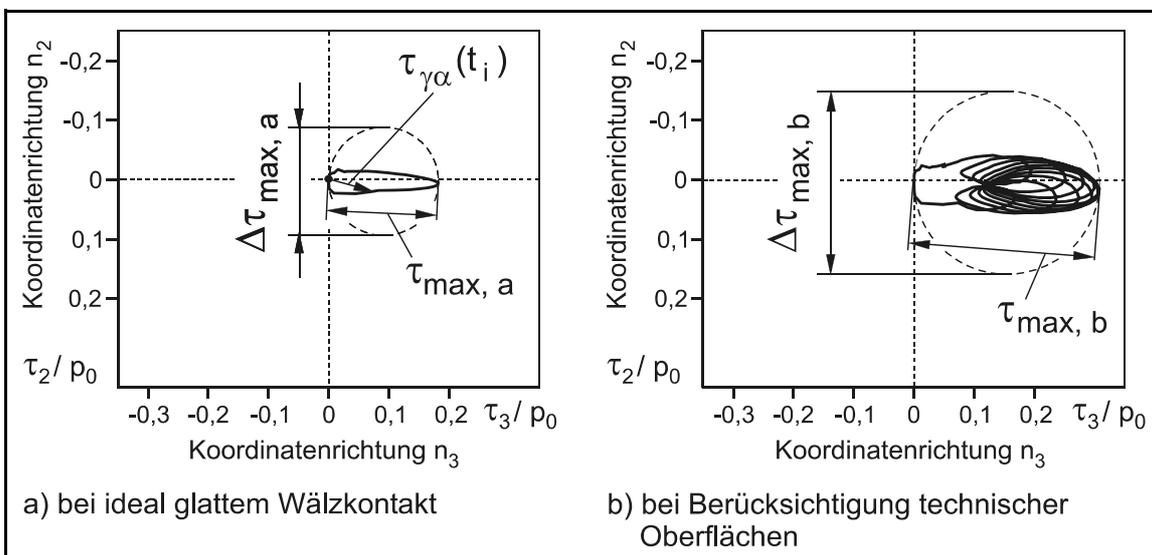
Damit ist rechnerisch beim Kontakt technischer Oberflächen und Annahme einer über der Kontaktbreite variablen Reibungszahl ebenfalls ein Einfluß der Reibung auf die statische Werkstoffbeanspruchung festzustellen.



**Bild 18:** statische Werkstoffbeanspruchung (Oktaederschubspannung  $\tau_{OS}$ ), Belastung s. Tabelle 2, zweites Kontaktmodell  $C_{ar} = 0,4$ ; örtlich variable Reibungszahl  $\mu_{\min} = 0,04$ ,  $\mu_{\max} = 0,12$ ,  $\mu_m = 0,067$ , ohne überlagerte Eigenspannungen

### 3.3.7 Dynamische Werkstoffbeanspruchung

Im **Bild 19** sind Schubspannungsverläufe in einer beliebig gewählten Schnittebene ( $\gamma = 28^\circ$ ,  $\alpha = 57^\circ$ ) der Einheitskugel (Bild 7) für einen ideal glatten Wälzkontakt (Bild 19a) und für einen Kontakt technischer Oberflächen (Bild 19b) dargestellt. Die Berechnungsvorgaben für beide Wälzkontakte entsprechen jeweils denjenigen für das Berechnungsbeispiel im Abschnitt 3.3.6. In beiden Fällen wird in der betrachteten Schnittebene die maximale Änderung der Schubspannung  $\Delta\tau_{\max, a, b}$  durch die maximale Schubspannung  $\tau_{\max, a, b}$  in dieser Ebene bestimmt. Dies ist, wie die vorangegangenen Darstellungen von Schubspannungsverläufen zeigen, nur in bestimmten Schnittebenen der Fall. Entsprechend den Darstellungen im Abschnitt 3.3.6 ist in der im Bild 19 gezeigten Schnittebene die maximale Schubspannung  $\tau_{\max, b}$  bei Berücksichtigung des Kontaktes von technischen Oberflächen größer als beim Kontakt der ideal glatten Wälzkörper  $\tau_{\max, a}$ . Im Bild 19b lassen sich beispielhaft zudem die Auswirkungen der Mikro-Hertzschen Kontakte auf den Schubspannungsverlauf in einer Schnittebene erkennen. Die Mikro-Hertzschen Kontakte führen im Vergleich zur Werkstoffbeanspruchung bei ideal glattem Wälzkontakt (Bild 19a) zu zusätzlichen Drehungen des Hauptachsensystems, was sich durch den komplexen Schubspannungsverlauf im Bild 19b ausdrückt.



**Bild 19:** beispielhafte Schubspannungsverläufe (Ortskurven) in der Schnittebene  $\gamma = 28^\circ$ ,  $\alpha = 57^\circ$  eines Volumenelementes in Oberflächennähe ( $y / b_0 = 0,002$ ) unter Wälzbeanspruchung

a) ideal glatter Wälzkontakt mit überlagertem Schubdruck  $q = \mu \cdot c_p$  ( $\mu = 0,1$ )

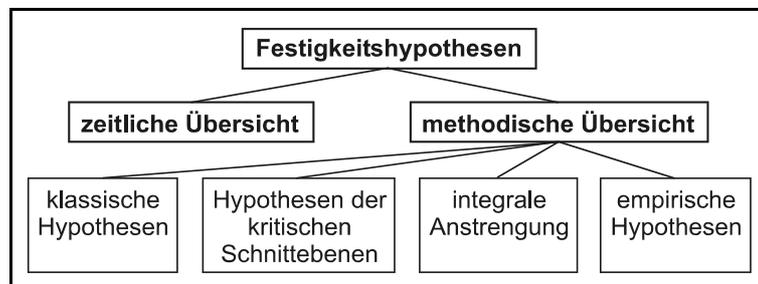
b) Kontakt technischer Oberflächen bei Vorgabe einer über der Kontaktbreite veränderlichen Reibungszahl (Vorgaben s. Bild 18)

## 4 Bewertung der Werkstoffbeanspruchung

### 4.1 Übersicht über die Einteilung der Festigkeitshypothesen

Die Werkstoffbeanspruchung von Bauteilen, in denen mehrachsige Spannungszustände vorliegen, werden mit Hilfe von Festigkeitshypothesen bewertet. Dabei erfolgt eine Umrechnung der real vorliegenden mehrachsigen Spannungszustände auf einachsige Spannungen (Vergleichsspannungen) mit gleicher Schädigungswirkung. Der Einfluß des Spannungszustandes (z.B. Mittelspannungseinfluß) und dessen zeitlicher Verlauf

auf die Beanspruchbarkeit kann je nach Festigkeitshypothese in der Berechnung der Vergleichsspannung oder in der Bestimmung der örtlichen Beanspruchbarkeit berücksichtigt sein. In der



**Bild 20:** Einteilung der Festigkeitshypothesen [48]

Literatur existieren eine Vielzahl von unterschiedlichen Festigkeitshypothesen. Eine Möglichkeit für deren Einteilung gibt das **Bild 20** an. Eine ähnliche Einteilung wird in [79] vorgenommen. Im folgenden werden für die vorliegende Arbeit wichtige Hypothesen aus der Literatur in methodischer Sortierung aufgeführt und insbesondere hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zur Beurteilung der Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt bewertet [48].

### 4.2 Klassische Hypothesen

#### Schubspannungshypothese

Die Schubspannungshypothese (SH) [59], eine Interpretation des Tresca-Kriteriums, zählt zu den Fließhypothesen. Als maßgebend für das Werkstoffversagen wird die maximale Hauptschubspannung angesehen. Ein hydrostatischer Spannungszustand führt nach der SH nicht zum Fließen des Werkstoffs, d.h. es ist nur der deviatorische Anteil des Spannungstensors schadensrelevant. Mit der SH ist es möglich, Eigenspannungen zu berücksichtigen und plastische Formänderungen auf durch Schubspannungen hervorgerufene Schiebungen zurückzuführen. Nach [18] kann die SH als gute Näherung zur Beschreibung der Werkstoffbeanspruchung im

Wälzkontakt verwendet werden. Es ist zu beachten, daß eine Drehung des Hauptachsensystems nicht in die Berechnung eingeht.

#### Wechselschubspannungshypothese

Auch die Wechselschubspannungshypothese (WSH) zählt zu den Fließhypothesen und beschreibt die Werkstoffbeanspruchung durch die größte Koordinatenschubspannung (Orthogonalschubspannung), die in den oberflächenparallelen Ebenen wirkt. Bei Hertzscher Normaldruckbelastung ist zwischen der Tiefenlage von im Wälzlager auftretenden Pittings (Grübchen) und dem Ort der maximalen Wechselschubspannung eine gute Übereinstimmung festzustellen [82, 83, 149]. Gegen die Anwendbarkeit der WSH auf die Wälzermüdung spricht der nicht zu berücksichtigende Einfluß von Eigenspannungen, die mit der Hypothese nicht zu erklärende Richtung struktureller Werkstoffänderungen sowie die Lage von Ermüdungsrissen [18, 149].

#### Gestaltänderungsenergiehypothese

Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH, Interpretation des von Mises Kriteriums) [59] besitzt jeder Werkstoff nur eine begrenzte Speicherfähigkeit für die zur Gestaltänderung erforderliche Energie. Ist diese erschöpft, wird die geometrische Gestalt des Körpers durch Schiebungen plastisch verändert. Für diese Gestaltänderung ist der deviatorische Spannungsanteil des Spannungstensors verantwortlich. Der hydrostatische Anteil des Spannungstensors führt dagegen wie bei der SH zu keiner Werkstoffschädigung. Der GEH liegt ein konstantes Wechselfestigkeitsverhältnis  $\tau_w / \sigma_w = 3^{-0,5}$  zugrunde und ist damit formal nur für zähe metallische Werkstoffe anwendbar. In Modifikationen der GEH kann aber ein variables Wechselfestigkeitsverhältnis vorgegeben werden. Es ist zu bemerken, daß zwischen der Oktaederschubspannung und der Vergleichspannung nach der GEH ein konstanter Zusammenhang besteht. Die GEH wird in vielen Arbeiten zur Wälzbeanspruchung [z.B. 18, 41, 115, 149] angewendet und ermöglicht die Erklärung von praktischen Schadensbildern und strukturellen Änderungen im Gefüge. Mit der GEH ist es zudem möglich, Einflüsse von Reibung und Eigenspannungen auf die Werkstoffbeanspruchung zu berücksichtigen. Die Drehung des Hauptachsensystems geht in die Berechnung der GEH jedoch nicht ein. Damit erfolgt die Bewertung der Werkstoffbeanspruchung lediglich mit Hilfe einer Maximalwertbetrachtung, d.h. die dynamische Beanspruchung des Werkstoffs wird außer Acht gelassen. Eine ähnliche Feststellung wird in [119] in Zusammenhang mit mehrachsigen Schwingbeanspruchungen gemacht.

### 4.3 Hypothesen der kritischen Schnittebene

Bei der Methode der kritischen Schnittebene wird davon ausgegangen, daß es im Bauteil eine ausgezeichnete, höchstbeanspruchte Schnittebene gibt, von der die Schadensentwicklung ausgeht. Die in dieser Schnittebene wirkenden Spannungen dienen zur Beschreibung der Werkstoffbeanspruchung. Zu den Hypothesen der kritischen Schnittebene zählen u.a.

- C die Oktaederschubspannungshypothese und deren Modifikationen,
- C die kritische Schubspannung und
- C die Hypothese der maximalen Schubspannung.

Von Häfele / Dietmann [39] wird die (beanspruchungsunabhängige) Auswahl einer kritischen Schnittebene bemängelt. Aufgrund der schwierigen Formulierung einer Kenngröße zur Auswahl einer von der Beanspruchung abhängigen kritischen Schnittebene wird aber auch in [39] noch an der Oktaederebene als kritische Schnittebene festgehalten. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich bei der Festlegung auf eine Schnittebene zur Beurteilung der Werkstoffbeanspruchung im Wälzkontakt, wie dies bereits im vorangegangenen Kapitel 3 erläutert wurde.

### 4.4 Integrale Bewertungsverfahren

#### Schubspannungsintensitätshypothese

Die bekannteste Hypothese, die zu den integralen Bewertungsverfahren zählt, stellt die Schubspannungsintensitätshypothese (SIH) dar. Sie dient zur Berechnung der Dauerfestigkeit bei beliebigen Beanspruchungskombinationen und kann daher auf den allgemeinen Fall veränderlicher Hauptspannungsrichtungen angewendet werden. Grundlage ist die Interpretation der von Mises Fließbedingung nach Novoshilov [s. 119, 144], nach der der quadratische Mittelwert der Schubspannungen aller Schnittebenen eines Volumenelementes proportional zur zweiten Invariante des Spannungsdeviators ist. Der quadratische Mittelwert der Schubspannungen aller Schnittebenen eines Volumenelementes, Schubspannungsintensität  $\tau_{\text{eff}}$  oder effektive Schubspannung [119] genannt, berechnet sich durch das folgende Integral über die Oberfläche  $\Omega$  eines Volumenelementes (**Gleichung (16)**).

$$\tau_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tau_{\gamma\alpha}^2 d\Omega \quad (16)$$

Wird als Volumenelement die Einheitskugel (s. Bild 7) verwendet, ergibt sich für die Schubspannungsintensität:

$$\tau_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \tau_{\gamma\alpha}^2 \sin\alpha \, d\alpha \, d\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\text{v,SIH}} = \sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \tau_{\gamma\alpha}^2 \sin\alpha \, d\alpha \, d\gamma} \quad (17)$$

Bei einer Schwingbeanspruchung mit überlagerten Mittelspannungen wird von Simbürger [119] ausgehend von der **Gleichung (17)** die effektive Anstrengung  $A$  als Effektivwert der Anstrengungen sämtlicher Schnittebenen berechnet.  $A_n = \tau_{n,a} / \sigma_A$  stellt dabei die auf die örtliche Ausschlagfestigkeit  $\sigma_A$  bezogene Schubausschlagspannung  $\tau_{n,a}$  in einer Schnittebene dar. Die angegebene Berechnungsmethode erlaubt somit nicht nur eine Aussage über die Größe, sondern auch über die Richtung der größten Anstrengung. Nach Auffassung von Simbürger [119] ist der Wert der maximalen Anstrengung aber nicht alleine für das Werkstoffversagen ausschlaggebend, sondern die gesamte Anstrengung des Volumenelementes.

Ausgehend von [119, 144] wendet Oster [53] eine Form der SIH auf die Bewertung der Beanspruchung in Wälzkontakten an. Die Schubspannungsintensität wird dabei als quadratischer Mittelwert aller in allen beliebigen Schnittebenen maximal auftretenden Schubspannungen  $\tau_{\gamma\alpha, \text{max}}$  definiert.

$$\tau_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tau_{\gamma\alpha, \text{max}}^2 \, d\Omega \quad (18)$$

Zur Betrachtung der dynamischen Werkstoffanstrengung definiert Oster [53] nach **Gleichung (19)** eine Doppelamplitude  $\tau_{\text{eff DA}}$  und vergleicht diese mit einem aus der örtlichen Härte berechneten örtlichen Festigkeitswert [s. auch 132].

$$\tau_{\text{eff DA}} = 2 \cdot \tau_{\text{eff a}} = \tau_{\text{eff Last, ES}} - \tau_{\text{eff ES}} \quad (19)$$

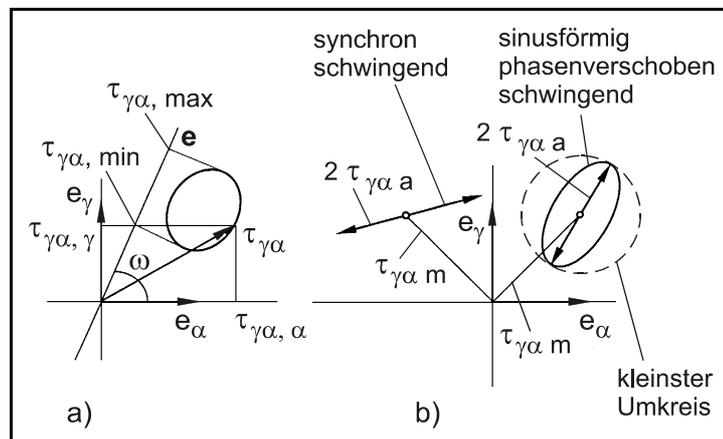
Hierbei ergeben sich  $\tau_{\text{eff Last, ES}}$  und  $\tau_{\text{eff ES}}$  jeweils nach Gleichung (18), es werden dabei jedoch unterschiedliche Spannungskomponenten berücksichtigt. In die Bestimmung von  $\tau_{\text{eff Last, ES}}$  geht der Gesamtspannungszustand und in  $\tau_{\text{eff ES}}$  lediglich die Eigenspannungen ein. Die Eigenspannungen werden dabei als statische Komponenten angesehen und werden daher von der Spannungsintensität des Gesamtspannungszustandes  $\tau_{\text{eff Last, ES}}$ , die als eine Art „Oberspannung“ zu verstehen ist, abgezogen. Ein möglicher Einfluß der Mittelspannung auf die örtliche Beanspruchbarkeit fließt in die Berechnung nicht ein. Wie bei der Maximalwertbetrachtung durch die GEH reduzieren Druckeigenspannungen  $\tau_{\text{eff Last, ES}}$ , wohinge-

gen Zugeigenspannungen  $\tau_{\text{eff Last, ES}}$  erhöhen. Tobie [132] nimmt eine Korrektur der Gleichung (19) vor, mit der das Vorzeichen der Eigenspannungen in dem Ansatz zur Bestimmung von  $\tau_{\text{eff DA}}$  berücksichtigt werden kann. Die Nachrechnungen von Versuchsergebnissen in [132] zeigen bei diesem Ansatz den großen Einfluß von Eigenspannungen auf die Berechnungsergebnisse auf und bestätigen damit nicht die Ergebnisse von Batista, Dias u.a. [9] (s. Kapitel 2).

Weiterentwicklungen der Schubspannungsintensitätshypothese (SIH)

In Varianten bzw. Weiterentwicklungen der SIH können u. a. das Wechselfestigkeitsverhältnis, Mittel- und Ausschlagspannungen der Schub- und Normalspannungen in den Schnittebenen berücksichtigt werden [78, 79, 81, 144, 146, 148]. Von Liu wurde in [80] außerdem

eine auf dem Fehlstellenmodell aufbauende Variante der SIH vorgestellt. Grundlage der Betrachtungen in [78, 80] sind Ortskurven der Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}$  in den Schnittebenen eines Volumenelementes (**Bild 21**), vergleichbar mit den Ortskurven in den Bildern 10, 11 und 19 im Kapitel 3. Nach [78] läßt sich aus der Ortskurve der Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}$  für jede Richtung  $\mathbf{e} = (\cos\omega, \sin\omega)$  eine Schubspannungsamplitude (Bild 21) berechnen. Als für die Werkstoffbeanspruchung maßgebend wird die maximale Amplitude aller Richtungen angesehen und als Schubspannungsamplitude  $\tau_{\gamma\alpha a}$  in der Schnittebene  $\gamma\alpha$  definiert. Ihre Größe entspricht dem Radius des kleinsten Umkreises um die Ortskurve der Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}$ . Eingesetzt in die Gleichung (17) ergibt sich daraus die **Gleichung (20)** zur Bestimmung der Vergleichsspannungsamplitude  $\sigma_{va}$  [78].



**Bild 21:** Ortskurven der Schubspannung  $\tau_{\gamma\alpha}$  in einer beliebig orientierten Schnittebene nach [78]  
 a) beliebige Ortskurve  
 b) Ortskurven für synchron und sinusförmig phasenverschoben schwingende Belastung

$$\sigma_{va} = \sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \tau_{\gamma\alpha a}^2 \sin\alpha \, d\alpha \, d\gamma} \tag{20}$$

Aufbauend auf der Gleichung (20) und dem Fehlstellenmodell wird in [80] eine Variante der SIH, in der die Ausschlag- und Mittelspannungen der Schub- sowie Normalspannungen eingehen, beschrieben:

$$\sigma_{va\ SIH} = \sqrt{a \tau_{va}^2 + b \sigma_{va}^2 + m \tau_{vm}^2 + n \sigma_{vm}^2} \quad (21)$$

Zur Bestimmung der Konstanten a, b, m und n in der **Gleichung (21)** werden die (lokalen) Werkstoffkennwerte Wechselfestigkeit  $\sigma_W$ , Zugschwellfestigkeit  $\sigma_{Sch}$ , Torsionswechselfestigkeit  $\tau_W$  und die Torsionsschwellfestigkeit  $\tau_{Sch}$  benötigt [80]. Es ist zu erkennen, daß negative Normalmittelspannungen die Werkstoffbeanspruchung reduzieren und positive Normalmittelspannungen die Werkstoffbeanspruchung erhöhen. Die Bedingung für Dauerfestigkeit lautet:

$$\sigma_{va\ SIH} \leq \sigma_W \quad (22)$$

Wie Berechnungen von Wälzkontakten in [48] ergeben, kann es bei geringen Schubspannungen und großen Normalspannungen, wie dies im oberflächennahen Bereich von Wälzkontakten z.T. der Fall ist, zu negativen Ausdrücken unter der Wurzel der Gleichung (21) kommen. Wird der Einfluß der Normalmittelspannungen nicht auf der Beanspruchungs- sondern auf der Beanspruchbarkeitsseite berücksichtigt, läßt sich dies jedoch vermeiden:

$$\begin{aligned} \sigma_{va\ SIH}^* &= \sqrt{a \tau_{va}^2 + b \sigma_{va}^2 + m \tau_{vm}^2} \\ \sigma_A &= \sqrt{\sigma_W^2 - n \sigma_{vm}^2} \\ \sigma_{va\ SIH}^* &\leq \sigma_A \end{aligned} \quad (23)$$

Zusätzlich zur Betrachtung der dynamischen Werkstoffanstrengung ist nach [148], wie in der allgemeinen Festigkeitsberechnung üblich, auch eine Nachrechnung der statischen Tragfähigkeit notwendig, d.h. es ist notwendig zu überprüfen, ob die Oberlast die Streckgrenze überschreitet.

Unter Beachtung der Ergebnisse in [48, 53, 132] kann damit festgestellt werden, daß sich einige Varianten der SIH prinzipiell zur Beurteilung der Werkstoffanstrengung in Wälzkontakten eignen, wenn bei ihnen entsprechend Kapitel 3 die dynamische Werkstoffbeanspruchung sowie u. U. Mittelspannungseinflüsse in den einzelnen Schnittebenen der Volumenelemente in der Berechnung Berücksichtigung finden.

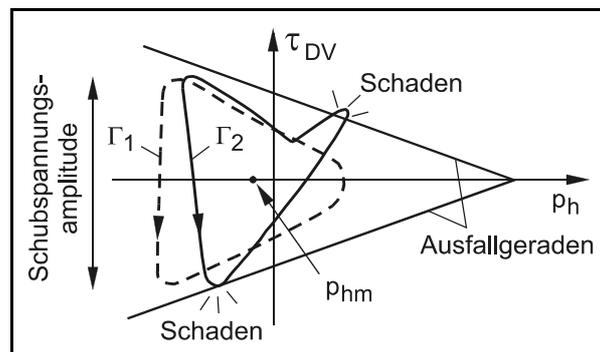
## 4.5 Empirische Hypothesen

In der Literatur gibt es zahlreiche empirische Hypothesen. Viele davon sind allerdings auf Lastfälle mit konstantem Hauptachsensystem beschränkt oder wurden für spezielle Anwendungsfälle in Anlehnung an Versuchsergebnisse entwickelt und eignen sich daher nicht zur Bewertung der Werkstoffanstrengung in Wälzkontakten [48, 147]. Auf eine im Zusammenhang mit der Beurteilung von mehrachsigen Spannungszuständen und drehendem Hauptachsensystem wichtige empirische Hypothese, die Festigkeitshypothese nach Dang Van [26], wird im folgenden kurz eingegangen.

Dang Van stellt in [26] ein Kriterium zur Berechnung der Dauerfestigkeit bei einer komplexen periodischen, mehrachsigen Belastung metallischer Werkstoffe vor. Bei dem Modell handelt es sich vorwiegend um eine Methode zur mathematischen Beschreibung der Veränderung des Werkstoffwiderstandes gegen die Ermüdungsbeanspruchung aufgrund deren Rückwirkung auf die Werkstoffverfestigung. Nach Dang Van ist ein Bauteil bei Ermüdungsbeanspruchung dann dauerhaft, wenn seine Beanspruchung, dargestellt in einem  $\tau_{DV}$ - $p_h$ -Diagramm (**Bild 22**) während der gesamten, als zyklisch vorausgesetzten Beanspruchungsperiode für jedes Volumenelement unterhalb werkstoffabhängiger Grenzlinien bleibt.  $p_h$  ist der hydrostatische Druck,  $\tau_{DV}$  eine charakteristische maximale Schubspannung, deren Berechnung aus dem zeitlichen Verlauf des Spannungstensors nach Dang Van [26] erfolgt. Beide Größen sind über die Zeit  $t$  miteinander verknüpft.

$$\tau_{DV}(t) = \pm \alpha \cdot p_h(t) \mp \gamma \quad (24)$$

Es ist zu bemerken, daß die Schubspannung  $\tau_{DV}$  nach Dang Van aus den Vektoren zwischen dem Mittelpunkt des kleinsten Umkreises der Schubspannungsortskurve (vgl. z.B. Bilder 19 und 21) und den Schubspannungen  $\tau_{\gamma\alpha}(t)$  unter Beachtung sämtlicher Schnittebenen im Sinne einer Maximalwertbetrachtung gebildet wird [26, 48]. Die Lage (Parameter  $\gamma$ ) sowie die Steigung (Parameter  $\alpha$ ) der beiden Ausfallgeraden in der **Gleichung (24)** (Bild 22) sind vom jeweiligen Werkstoff bzw. Werkstoffzustand abhängig und sind experimentell zu bestimmen.



**Bild 22:** Dauerfestigkeitsgebiet und zwei typische Belastungszyklen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  nach [26]

Die Festigkeitshypothese nach Dang Van bzw. Varianten davon werden in verschiedenen Fassungen, wie im Kapitel 2 beschrieben, von mehreren Autoren zur Berechnung der Dauerfestigkeit von Werkstoffproben, probenähnlichen Bauteilen und Wälzkontakten angewendet [9, 14, 15, 48, 88, 109]. Während bei Werkstoffproben und probenähnlichen Bauteilen mit der Festigkeitshypothese nach Dang Van zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden, ergeben sich bei der Anwendung der Hypothese zur Bewertung von Wälzkontakten, insbesondere bei Berücksichtigung des Kontaktes technischer Oberflächen, Schwierigkeiten [9, 48]. Problematisch ist die Bestimmung der vom Werkstoff bzw. Werkstoffzustand abhängigen Parameter  $\alpha$  und  $\gamma$ , so daß in der Literatur zum Teil trotz randschichtverfestigtem Bauteil über der Tiefe konstante Modell-Parameter, d.h. konstante Empfindlichkeit des Werkstoffs gegenüber dem hydrostatischem Druck, angenommen werden. Die Anwendung verschiedener Varianten der Hypothese nach Dang Van in der Literatur, wobei statt dem hydrostatischen Druck  $p_h(t)$  der über dem Beanspruchungszyklus mittlere hydrostatische Druck  $p_{hm}$  oder der maximale hydrostatische Druck  $p_{hmax}$  eingesetzt werden, zeigt eine weitere Unsicherheit der Hypothese. Die Berechnungen in [9, 48] ergeben auch, daß aufgrund des hohen lokalen hydrostatischen Druckes in den Mikro-Hertzschen Kontakten technischer Oberflächen trotz hoher Beanspruchung des Werkstoffs in diesem Bereich nach der Festigkeitshypothese nach Dang Van kein Ausfall vorhergesagt wird.

#### 4.6 Zusammenfassung zur Bewertung der Werkstoffbeanspruchung

Die in diesem Kapitel vorgenommene Analyse von Bewertungsmöglichkeiten der Werkstoffbeanspruchung, insbesondere in Wälzkontakten, kann wie folgt zusammengefaßt werden.

- C Die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) ist zur Beurteilung der statischen bzw. maximalen Werkstoffanstrengung in Wälzkontakten geeignet. In der Berechnung wird eine Drehung des Hauptachsensystems, die für die dynamische Werkstoffanstrengung des Wälzkontaktes bezeichnend ist, nicht berücksichtigt. Damit scheidet die GEH zur Beurteilung der dynamischen Werkstoffanstrengung im Wälzkontakt aus.
- C Die Schubspannungsintensitätshypothese (SIH) bzw. eine angepaßte Form eignen sich je nach Definition gut zur Beurteilung der statischen und dynamischen Werkstoffanstrengung bei komplexen, mehrachsigen Spannungszuständen mit drehendem Hauptachsensystem. Eine Anwendung oder An-

passung der SIH zur Beurteilung der dynamischen Werkstoffanstrengung im Wälzkontakt ist vorstellbar.

- C Die Festigkeitshypothese nach Dang Van läßt sich zur Beurteilung von periodischen komplexen, mehrachsigen Belastungen, wie dies im Wälzkontakt der Fall ist, anwenden. Sie ist jedoch numerisch sehr aufwendig, die Modellparameter sind schwierig zu bestimmen und es ist bisher nicht abgesichert, welcher hydrostatische Druck (zeitlicher, mittlerer oder maximaler) in die Festigkeitshypothese einzusetzen ist.

Aus den oben genannten Gründen wird im folgenden eine angepaßte Variante der SIH zur Ermittlung der Ermüdungstragfähigkeit von Zahnrädern beschrieben.

## 5 Anpassung einer Festigkeitshypothese zur Ermittlung der Ermüdungstragfähigkeit von Zahnrädern

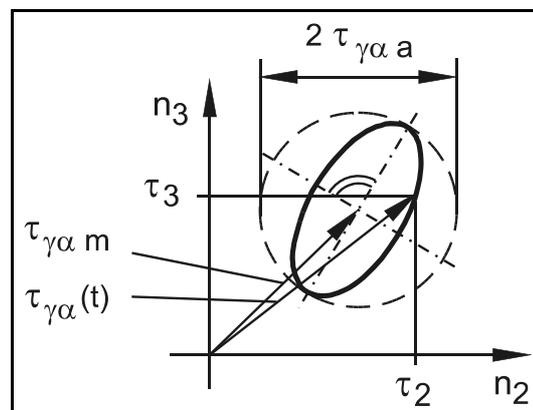
Im folgenden Kapitel wird eine Festigkeitshypothese zur Ermittlung der Ermüdungstragfähigkeit von Zahnrädern angepaßt. Die Grundlage für die Anpassung der Festigkeitshypothese sind die vorangegangenen Betrachtungen zur maximalen und dynamischen Werkstoffbeanspruchung in Wälzkontakten (Kapitel 3) sowie die Analyse von aus der gängigen Literatur bekannten Festigkeitshypothesen (Kapitel 4). Folgende Bedingungen müssen von der Festigkeitshypothese erfüllt werden:

- C Bewertungsmöglichkeit für die maximale Werkstoffanstrengung,
- C Bewertungsmöglichkeit für das dynamische Werkstoffverhalten (Amplituden und Mittelwerte), insbesondere in Wälzkontakten und
- C Bewertungsmöglichkeit von einsatzgehärteten Bauteilen.

### 5.1 Variante der Schubspannungsintensitätshypothese

Wie im vorangegangenen Abschnitt und in [48] dargestellt, eignet sich die Schubspannungsintensitätshypothese, um die oben gestellten Bedingungen zu erfüllen.

Grundlage zur Berechnung der maßgebenden Beanspruchung in einem Volumenelement stellen die Schubspannungsverläufe über der Zeit  $t$  in sämtlichen Schnittebenen dieses Volumenelementes dar. In jeder Schnittebene lassen sich gemäß **Bild 23** und den Gleichungen (1) - (4) [vgl. auch 78] die folgenden Größen bestimmen:



**Bild 23:** Amplitude und Mittelspannung für einen beliebigen Schubspannungsverlauf über der Zeit  $t$  in einer Schnittebene  $\gamma\alpha$  (s. Bild 7)

- C Schubspannungsamplitude  $\tau_{\gamma\alpha a} (= \tau_a(\gamma, \alpha))$
- C Schubmittelspannung  $\tau_{\gamma\alpha m} (= \tau_m(\gamma, \alpha))$
- C Normalausschlagspannung  $\sigma_{\gamma\alpha a} (= \sigma_a(\gamma, \alpha))$

$$\sigma_a(\gamma, \alpha) = \frac{\sigma_{\max}(\gamma, \alpha) - \sigma_{\min}(\gamma, \alpha)}{2} \quad (25)$$

C Normalmittelspannung  $\sigma_{\gamma\alpha m}$  ( $= \sigma_m(\gamma, \alpha)$ )

$$\sigma_m(\gamma, \alpha) = \frac{\sigma_{\max}(\gamma, \alpha) + \sigma_{\min}(\gamma, \alpha)}{2} \quad (26)$$

Mit den angegebenen Ausschlagspannungen und der Schubmittelspannung kann die Berechnungsgleichung für die Anstrengung  $A(\gamma, \alpha)$  in der Schnittebene  $\gamma\alpha$  in Anlehnung an [80, 81] angegeben werden:

$$A(\gamma, \alpha) = \sqrt[\mu]{\frac{a \tau_a^\mu (1 + m \tau_m^\mu) + b \sigma_a^\mu}{\sigma_A^\mu}} \quad (27)$$

Die örtliche Ausschlagfestigkeit  $\sigma_A$  ist dabei eine Funktion der Normalmittelspannung  $\sigma_m(\gamma, \alpha)$ . Auf die Bestimmung der örtlichen Ausschlagfestigkeit wird im nächsten Abschnitt eingegangen. Der Parameter  $\mu$  besitzt entsprechend [80] den Wert 2. Die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $m$  sind abhängig vom (örtlichen) Verhältnis  $\sigma_W / \tau_W$  und der (örtlichen) Torsionsschwellfestigkeit  $\tau_{Sch}$  [78].

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{5} \left[ 3 \left( \frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 - 4 \right]; \\ b &= \frac{1}{5} \left[ 6 - 2 \left( \frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 \right]; \\ a \cdot m &= \frac{\sigma_W^2 - \left( \frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 \cdot \left( \frac{\tau_{Sch}}{2} \right)^2}{\frac{12}{7} \left( \frac{\tau_{Sch}}{2} \right)^4} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Gesamtanstrengung  $A_{inta}$ , oder auch Gefährdung bzw. Ausnutzungsgrad, eines Volumenelementes ergibt sich aus der Integration der Anstrengungen in den einzelnen Schnittebenen. Eine notwendige Bedingung für Dauerfestigkeit ist erfüllt, wenn die dynamische Gesamtanstrengung den Wert 1 nicht überschreitet (**Gleichung (29)**).

$$A_{inta} = \sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} [A(\gamma, \alpha)]^2 \sin\alpha d\alpha d\gamma} \leq 1 \quad (29)$$

Für eine ausreichende Tragfähigkeit muß außerdem die maximale Gesamtanstrengung überprüft werden. Gemäß Gleichung (27) kann für die Maximalbeanspruchung eine ähnliche Gleichung angegeben werden. Hier sind statt Ausschlag- und Mittelspannungen lediglich die jeweiligen Maximalspannungen einzusetzen [vgl.

148]. Da gegen Fließen nachgerechnet wird, sind die Beanspruchungen auf die Streckgrenze bzw. die Dehngrenze bezogen.

$$A_{\max}(\gamma, \alpha) = \sqrt{\frac{a \tau_{\max}^{\mu} + b \sigma_{\max}^{\mu}}{R_{p0,2}^{\mu}}} \quad (30)$$

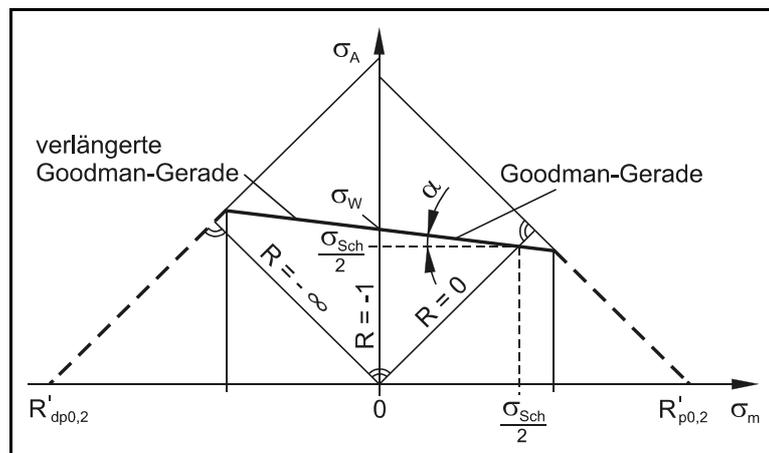
Analog zur Gleichung (29) gilt für die maximale Gesamtanstrengung  $A_{\text{int}}$  eines Volumenelementes (**Gleichung (31)**).

$$A_{\text{int}} = \sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} [A_{\max}(\gamma, \alpha)]^2 \sin \alpha d\alpha d\gamma} \leq 1 \quad (31)$$

Zur Abgrenzung zu anderen Varianten der Schubspannungsintensitätshypothese wird die vorgestellte angepaßte Variante mit  $\text{SIH}^*$  bzw. im einzelnen mit  $\text{SIH}^*_{\text{dyn}}$  (Gleichung (29)) und mit  $\text{SIH}^*_{\max}$  (Gleichung (31)) bezeichnet (siehe hierzu auch S. 87 ff).

## 5.2 Örtliche Beanspruchbarkeit

Die örtliche Beanspruchbarkeit wird mit Hilfe des örtlichen Haigh-Diagramms [s. 59] in Abhängigkeit der örtlichen (zeitlich maßgebenden) Mittelspannung bestimmt (**Bild 24**). Im Mittelbereich, in dem die örtliche Ausschlagfestigkeit nicht durch Fließen begrenzt ist, wird sowohl im Zug- als auch im Druckbereich eine lineare Mittelspannungsabhängigkeit nach Goodman [38] (**Gleichung (32)**) angenommen.



**Bild 24:** Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh [s. 59]

$$\sigma_A = \sigma_W - M \cdot \sigma_m \quad (32)$$

Die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M$  ist über den Winkel  $\alpha$  (s. Bild 24, [59]) definiert. Die Gültigkeit der Goodman Geraden im Druckbereich wird z.B. in [41] für den 100 Cr 6 (M240) bestätigt. Für die beiden anderen in [41] untersuchten Werkstoffzustände des 100 Cr 6 (bainitischer Zustand und Wärmebehandlungszustand

M170) ergibt die (verlängerte) Goodman Gerade zumindest eine konservative Abschätzung.

Zur Bestimmung der örtlichen Ausschlagfestigkeit sowie zur Auswertung der Gleichungen (29) und (31) werden örtliche Werkstoffkennwerte benötigt. Bei nicht randschichtverfestigten Bauteilen lassen sich diese aus einfachen Probenuntersuchungen gewinnen. Insbesondere Zahnräder werden in der Praxis aber zunehmend in randschichtverfestigter Form (einsatzgehärtet, nitriert, mechanisch randschichtverfestigt) eingesetzt. Vorschläge zur Bestimmung von Festigkeitswerten randschichtverfestigter Bauteile werden von Börnecke [13] gegeben. Wenngleich demnach eine experimentelle Bestimmung der notwendigen Festigkeitswerte an Proben möglich zu sein scheint, ist eine praktische Anwendung der Methode aufgrund des damit einhergehenden großen Aufwandes nicht denkbar. Praktikabler ist hier die in der Literatur (s. Kapitel 2) häufig vorgenommene Abschätzung von lokalen Festigkeitskennwerten aus der örtlichen Härte. Im folgenden Kapitel wird aufbauend auf Angaben in der Literatur die Bestimmung der örtlich zulässigen Werkstoffbeanspruchung angegeben.

### 5.2.1 Bestimmung der örtlichen Härte

Der für die Berechnung benötigte Härtetiefenverlauf kann bei bereits gefertigten Verzahnungen experimentell leicht ermittelt werden. Ziel des Berechnungsmodells ist es aber eher, schon in der Auslegungsphase von Verzahnungen Informationen über die Tragfähigkeit zu geben, um z.B. die Verzahnungsgeometrie und die Wärmebehandlung auf die vorliegende Belastung besser abstimmen zu können. In diesem Fall muß der von der Wärmebehandlung abhängige Tiefenverlauf zunächst rechnerisch abgeschätzt werden können. Angaben hierzu werden von Lang [75] und Thomas [131] gemacht.

#### Härtetiefenverlauf nach Lang [75]

Der Härtetiefenverlauf für randschichtgehärtete Bauteile nach Lang [75] wird mit Hilfe der in der **Gleichung (33)** angegebenen, von der normierten Härtetiefe  $y^*$  abhängigen Funktion  $HV(y^*)$  bestimmt:

$$\begin{aligned} HV(y^*) &= HV_{\text{Kern}} + (HV_{\text{Rand}} - HV_{\text{Kern}}) \cdot f(y^*) \\ f(y^*) &= 10^{(a + b \cdot y^*) \cdot y^*} \\ y^* &= \frac{y}{R_{ht}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{N_{ht}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{E_{ht}} \end{aligned} \tag{33}$$

Wie aus der Gleichung (33) zu ersehen, werden zur Berechnung des Härtetiefenverlaufs neben dem Härteverfahren Informationen über die Randhärte, die Kernhärte und die Härtetiefe benötigt. Die Definitionen der Härtetiefe sowie die Größen der Konstanten a und b sind der **Tabelle 3** zu entnehmen.

Härteverfahren	Härtetiefe	Grenzhärte	a	b
Einsatz	Eht	550 HV1	-0,0381	-0,2662
Randschicht	Rht	80 % HV <sub>Rand</sub>	0,1737	-0,4218
Nitrieren	Nht	HV <sub>Kern</sub> + 50 HV	0,2230	-1,0023

**Tabelle 3:** Definitionen und Konstanten für den Härtetiefenverlauf randschichtgehärteter Bauteile nach Lang [75]

#### Härtetiefenverlauf nach Thomas [131]

Nach Thomas [131] ergibt sich der Härtetiefenverlauf einsatzgehärteter Bauteile aus abschnittsweise definierten Funktionen (**Gleichung (34)**).

$$\begin{aligned}
 HV(y) &= a_a y^2 + b_a y + c_a && \text{für } 0 \leq y < \text{Eht} \\
 HV(y) &= a_b y^2 + b_b y + c_b && \text{für } \text{Eht} \leq y < y_{\text{Kern}} \\
 HV(y) &= HV_{\text{Kern}} && \text{für } y_{\text{Kern}} \leq y
 \end{aligned} \tag{34}$$

Die Konstanten der Parabeln in Gleichung (34) lassen sich mit den folgenden Gleichungen bestimmen.

Für die erste Parabel:

$$\begin{aligned}
 a_a &= \frac{550 - HV_{\text{Rand}}}{\text{Eht}^2 - 2 y_{\text{HVmax}} \text{Eht}} \\
 b_a &= -2 a_a y_{\text{HVmax}} \\
 c_a &= HV_{\text{Rand}}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Für die zweite Parabel:

$$\begin{aligned}
 a_b &= \frac{HV'(y = \text{Eht})}{2 (\text{Eht} - y_{\text{Kern}})} \\
 b_b &= -2 a_b y_{\text{Kern}} \\
 c_b &= 550 - a_b \text{Eht}^2 - b_b \text{Eht}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned}
 HV'(y = \text{Eht}) &= 2 a_a \text{Eht} + b_a \\
 y_{\text{Kern}} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Die Parabeln gehen in der Tiefe Eht tangential ineinander über.  $y_{\text{Kern}}$  stellt die Tiefe dar, in der die Kernhärte  $HV_{\text{Kern}}$  erreicht wird.

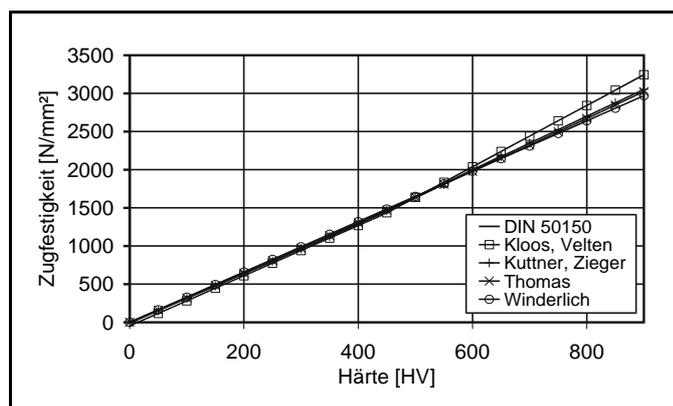
Konstanten zur Bestimmung von  $y_{\text{Kern}}$ :

$$\begin{aligned} A &= -HV'(Eht) \\ B &= 2 Eht HV'(Eht) + 2 (HV_{\text{Kern}} - 550) \\ C &= -Eht^2 HV'(Eht) - 2 Eht (HV_{\text{Kern}} - 550) \end{aligned} \quad (38)$$

Mit dem Wert  $y_{\text{HVmax}}$ , dem Ort des lokalen Härtemaximums, ist der Verlauf der Parabeln deutlich zu beeinflussen. Nach Thomas [131] liegt dieses lokale Maximum für gewöhnlich knapp unter der Oberfläche ( $y_{\text{HVmax}} > 0$ ). Bei nachgearbeiteten (z.B. geschliffenen) Flanken kann  $y_{\text{HVmax}}$  gleich Null oder rechnerisch sogar kleiner Null sein. Für die Anwendung des Ansatzes nach Thomas [131] werden die Größen  $HV_{\text{Rand}}$ ,  $HV_{\text{Kern}}$ ,  $Eht$  und  $y_{\text{HVmax}}$  benötigt.

### 5.2.2 Zusammenhang zwischen Härte und Zugfestigkeit

In der Literatur [z.B. 3, 65, 71, 131, 142] gibt es zahlreiche Angaben für den Zusammenhang zwischen Härte und Zugfestigkeit  $R_m$  (**Bild 25**). In [3] ist im Gegensatz zu den anderen Abschätzungen die Umwertung der Härte in die Zugfestigkeit auf eine Härte von maximal 650 HV10 beschränkt. Bei den übrigen Abschätzungen besteht, bis auf diejenige von Kloos und Velten [65], auch bei größeren Härten eine sehr gute Übereinstimmung (Bild 25). Im folgenden Modell wird daher der Ansatz nach Thomas [131] als Näherung für DIN 50150 [3] und zur Umwertung von größeren Härten verwendet (mit  $HV = HV_1$ ):



**Bild 25:** Zusammenhang zwischen Härte und Zugfestigkeit nach DIN 50150 [3]; Kloos, Velten [65]; Kuttner, Zieger [71]; Thomas [131]; Winderlich [142]

$$R_m = 3,18 \cdot HV + \frac{HV^2}{5000} \quad (39)$$

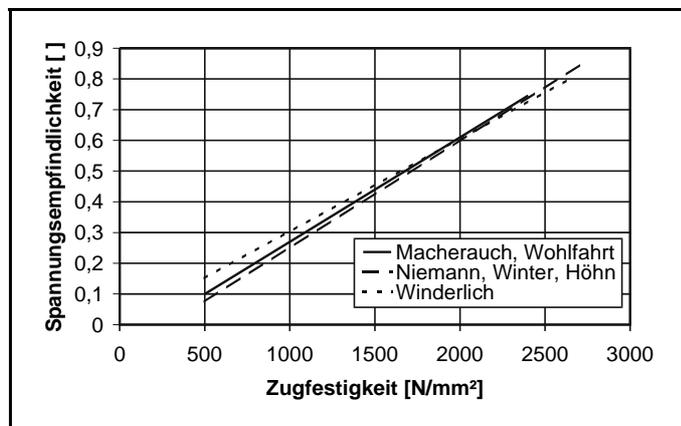
### 5.2.3 Zusammenhang zwischen Härte und Dehn- bzw. Stauchgrenze

Die Abschätzung der Dehn- bzw. Stauchgrenze aus der Härte erfolgt nach Ilg [54].

$$R_{p0,2} = 2 \cdot HV (\approx R_{dp0,2}) \quad (40)$$

### 5.2.4 Mittelspannungsempfindlichkeit

In Abhängigkeit von der Zugfestigkeit kann nach [86, 100, 142] die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M$  für die Gleichung (32) abgeschätzt werden. Wie das **Bild 26** zeigt, bestehen zwischen den einzelnen Abschätzungen für die Mittelspannungsempfindlichkeit keine großen Unterschiede. Im folgenden wird die Abschätzung nach [100] verwendet:

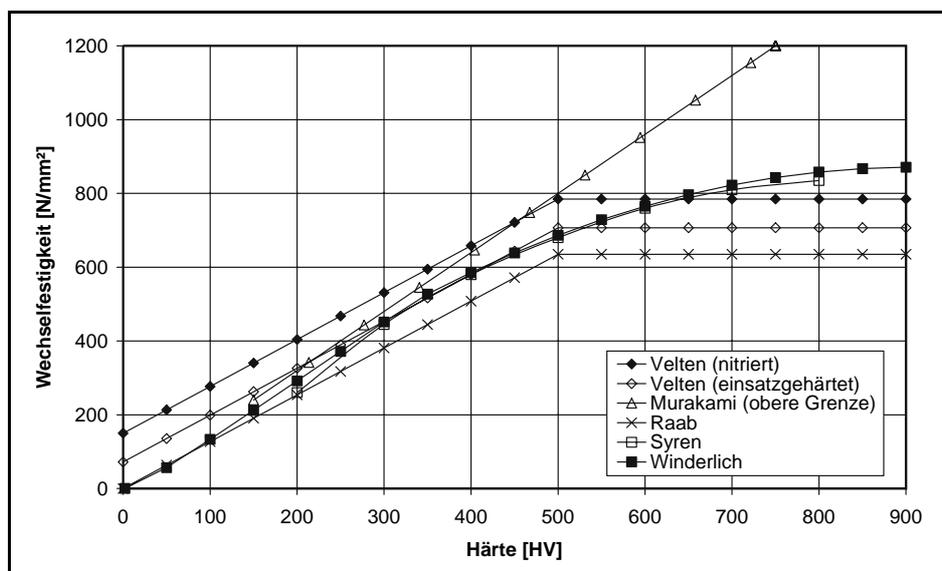


**Bild 26:** Mittelspannungsempfindlichkeit  $M$  nach Macherauch, Wohlfahrt [86]; Niemann, Winter, Höhn [100] und Winderlich [142]

$$M = 3,5 \cdot 10^{-4} \cdot R_m - 0,1 \quad (41)$$

### 5.2.5 Zusammenhang zwischen Härte und Wechselfestigkeit

Auch für den Zusammenhang zwischen Härte und Wechselfestigkeit werden in der Literatur verschiedene Ansätze angegeben [71, 74, 75, 95, 104, 125, 135, 142]. Einige davon sind im **Bild 27** dargestellt.



**Bild 27:** Zusammenhang zwischen Härte und Wechselfestigkeit nach Velten [135]; Murakami [95]; Raab [104]; Syren [aus 104], Winderlich [142]

Lediglich der Ansatz nach Murakami [95] berücksichtigt den Einfluß von Einschlüssen. Im Bild 27 ist die obere Grenze der Wechselfestigkeit nach Murakami [95] für einen Werkstoff mit sehr kleinen Einschlüssen, die sich nicht mehr auf die Wechselfestigkeit auswirken, dargestellt. Aus dem Bild 27 ist zu erkennen, daß mit zunehmender Härte die Abweichungen zwischen den einzelnen Abschätzungen zunehmen. Zur Abschätzung der örtlichen Zug-Druck-Wechselfestigkeit (50 % Ausfallwahrscheinlichkeit) aus der örtlichen Härte (HV1) wird in Anlehnung an Berechnungen von Winderlich [142] und Versuchsergebnissen von Syren [aus 104] (s. Bild 27) folgender, den Mittelbereich abdeckender Ansatz angenommen:

$$\begin{aligned} \sigma_{zdW 50\%} &= \frac{1,61 \cdot HV}{1 + 20,7 / HV} & HV \leq 340 \text{ HV1} \\ \sigma_{zdW 50\%} &= \frac{1,98 \cdot HV - 0,0011 \cdot HV^2}{1 + 20,7 / HV} & 340 \text{ HV1} < HV < 900 \text{ HV1} \end{aligned} \quad (42)$$

### 5.2.6 Schubwechselfestigkeit

Nach Untersuchungen von [78, vgl. 59] ist bei zähen Werkstoffen im Mittel mit einem Wechselfestigkeitsverhältnis  $\tau_w / \sigma_w$  von 0,62 statt mit dem wie bei der Gestaltänderungsenergiehypothese zugrunde gelegten Verhältnis von  $3^{-0,5} \cdot 0,58$  zu rechnen. Entsprechend dieser Untersuchungen dienen zur Berechnung der örtlichen Schubwechselfestigkeit  $\tau_w$  die **Gleichungen (43) und (44)**.

$$\text{vergütet:} \quad \tau_w = 0,60 \cdot \sigma_w \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \text{einsatzgehärtet:} \quad \tau_w &= 0,61 \cdot \sigma_w & \text{Rand} \\ \tau_w &= 0,60 \cdot \sigma_w & \text{Kern} \end{aligned} \quad (44)$$

Beim einsatzgehärteten Werkstoff wird zwischen Rand und Kern in Abhängigkeit von der örtlichen Härte linear interpoliert.

### 5.2.7 Schwellfestigkeit und Schubschwellfestigkeit

Die Schwellfestigkeiten können nach [78] mit den **Gleichungen (45) und (46)** berechnet werden.

$$\sigma_{\text{Sch}} = \frac{2 \cdot \sigma_w}{1 + M} \quad (45)$$

$$\tau_{\text{Sch}} = \frac{4 \cdot \tau_w}{2 \cdot \sigma_w / \sigma_{\text{sch}} + 1} \quad (46)$$

### 5.2.8 Zyklische Dehngrenze

Die zyklische Dehngrenze  $R'_{p0,2}$  wird für Stahl nach Hahn [44] berechnet ( $\sigma_w$  in N/mm<sup>2</sup>):

$$R'_{p0,2} = 1,16 \cdot \sigma_w + 57 \text{ N/mm}^2 \quad (47)$$

Aufgrund fehlender weiterer Literaturangaben zur Abschätzung der zyklischen Dehngrenze  $R'_{p0,2}$  wird die Abschätzung nach Hahn [44] auch für Werkstoffe mit  $\sigma_w > 600 \text{ N/mm}^2$  verwendet. Da bezüglich der zyklischen Druckflußgrenze keine Angaben in der Literatur gemacht werden, wird weiterhin  $R'_{dp0,2} \cdot R_{dp0,2}$  angenommen.

### 5.2.9 Einfluß der Temperatur

Zur Berücksichtigung des Einflusses der Temperatur auf die örtlichen Festigkeiten dienen die Einflußfaktoren nach [69, 100].

Einflußfaktor für die Zugfestigkeit  $R_m$  für  $T_{\text{mittel}} > 110 \text{ °C}$ , andernfalls ist  $K_{T,m} = 1$  [100] ( $T_{\text{mittel}}$  stellt die mittlere Temperatur in °C während der Überrollung dar.):

$$\begin{aligned} R_{m,T} &= K_{T,m} \cdot R_m \\ K_{T,m} &= -1,71 \cdot 10^{-3} \cdot (T_{\text{mittel}} - 110) + 1 \end{aligned} \quad (48)$$

Einflußfaktor für die Wechselfestigkeit  $\sigma_w$  gemittelt aus den Faktoren  $Z_\vartheta$  nach [69] für die beiden untersuchten Werkstoffe ( $\vartheta_M$  in °C; für  $\vartheta_M > 120 \text{ °C}$ , sonst  $K_{T,D} = 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{w,T} &= K_{T,D} \cdot \sigma_w \\ K_{T,D} &= 1 - 0,105 \cdot \text{Lg}(\vartheta_M - 120) \end{aligned} \quad (49)$$

Der Einflußfaktor nach [69] basiert auf dem Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt des beginnenden Härteabfalls und der Zahnmassentemperatur  $\vartheta_M$ .

### 5.2.10 Berücksichtigung von weiteren Einflüssen bei lastfreien Oberflächen

Bei Bauteilen, bei denen Bereiche ohne Oberflächenbelastung (z.B. Zahnfuß) rechnerisch auf ihre Tragfähigkeit hin zu überprüfen sind, müssen noch weitere Einflüsse berücksichtigt werden. Dies sind

- C Einflüsse aus einer ungleichförmigen Spannungsverteilung und
- C Oberflächeneinflüsse infolge einer rauhen Oberfläche oder einer vorliegenden Randschichtschädigung durch Randoxidation.

Einflüsse aus einer ungleichförmigen Spannungsverteilung werden gemäß [75] mit den Ansätzen von Petersen [102], Siebel [116] und Neuber [96] erfaßt (**s. Gleichung (50)**).

$$\sigma_W = \sigma_{zdW} \cdot \left( \min(o_k, i_k) + \sqrt{\rho^* \cdot \chi^*} \right) \quad (50)$$

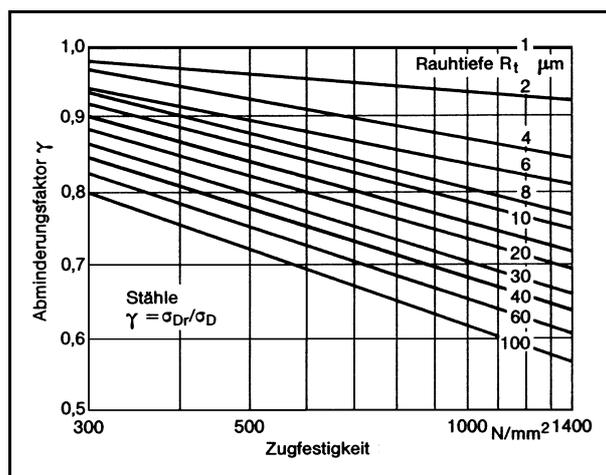
Hierin ist  $\rho^*$  abhängig von der örtlichen Härte (**Gleichung (51)**). Wie aus der Gleichung (51) zu erkennen, nimmt der Einfluß der Werkstofffestigkeit auf die Stützwirkung mit zunehmender Härte ab.

$$\rho^* = \frac{1600}{HV^2} \quad (51)$$

In der Gleichung (50) bezeichnet  $\chi^*$  das bezogene Spannungsgefälle und wird nach Siebel [116] berechnet.

$$\chi^* = \frac{1}{\sigma_{\max}} \cdot \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)_{x=0} \quad (52)$$

Oberflächeneinflüsse infolge einer rauhen Oberfläche gehen ebenfalls gemäß [75] basierend auf dem Abminderungsfaktor  $\gamma$  für Stähle von Siebel und Gaier [118] (**Bild 28**) in die Gleichung (50) ein. Der Einfluß ist abhängig von der Rauhtiefe  $R_t$  [4] bzw. von der gemittelten Rauhtiefe  $R_z$  [4] und der Zugfestigkeit  $R_m$  (**Gleichung (53)**). Mit steigender Zugfestigkeit nimmt der Oberflächenfaktor (Abminderungsfaktor) stark ab (s. Bild 28).



**Bild 28:** Abminderungsfaktor  $\gamma$  ( $= o_k$ ) der Dauerfestigkeit für Stähle nach Siebel und Gaier [118]

$$o_k = 1 - 0,22 \cdot (\lg R_z)^{0,64} \cdot \lg R_m + 0,45 \cdot (\lg R_z)^{0,53} \quad (53)$$

Für den Faktor  $i_k$ , zur Berücksichtigung des Einflusses aus inneren Kerben, werden in [75] nur Werte für bestimmte Bauteile in Abhängigkeit von der Herstellung angegeben. Im folgenden wird  $i_k$ , wie nach [75] auch für Probestäbe und Bauteile ohne Schmiedetextur aus Stahl gültig, zu 1 gesetzt.

Der Einfluß der Randoxidation wird gemäß [109] basierend auf einem bruchmechanischen Ansatz von Topper und El Haddad [133] berücksichtigt (**Gleichung (54)**).

$$Y_{R_o} = \sqrt{\frac{x_0}{x_0 + x_{R_o}}} \quad (54)$$

Hierin stellt  $x_{R_o}$  die Randoxidationstiefe und  $x_0$  einen Parameter zur Charakterisierung des Übergangs zwischen Kurz- und Langrißverhalten dar. Der Parameter ist an Referenzproben zu ermitteln. In [109] wurde dieser Parameter für Proben aus dem einsatzgehärteten Stahl 16 MnCrS 5 zu  $34 \mu\text{m}$  bestimmt und in [88] ebenfalls für zahnfußähnliche Proben aus 16 MnCr 5 verwendet. Die Randoxidation lag bei den Untersuchungen zwischen etwa 5 bis  $20 \mu\text{m}$ .

### 5.2.11 Berücksichtigung des Einflusses des Spannungsgefälles in Wälzkontakten

Auch bei Wälzkontakten liegt eine inhomogene Spannungsverteilung vor, die insbesondere bei duktilen Werkstoffen zu einer Spannungsumverteilung führen kann. Bei lastfreien Oberflächen wird die Stützwirkung infolge Spannungsumlagerung, wie im letzten Abschnitt beschrieben, mit Hilfe der Gleichung (50) berücksichtigt. Im Falle von Wälzkontakten liegen durch die Wälzbewegung entlang einer konstanten Tiefe gleiche, in Tiefenrichtung ungleiche Spannungsamplituden vor. Aus diesem Grund können im Wälzkontakt lediglich in Tiefenrichtung stabile Spannungsumlagerungen erfolgen, womit sich die Stützwirkung von derjenigen in Kerben unterscheidet.

Wird eine Stützwirkung entsprechend Neuber [96] erfaßt, so ist die lokale Spannung über die „Ersatzstrukturlänge“  $\rho^*$  zu mitteln (**Gleichung (55)**).

$$\sigma_{\text{wirk}} = \frac{1}{\rho^*} \int_{\rho^*} \sigma \, dy \quad (55)$$

Für Stahl hoher Festigkeit liegt die Ersatzstrukturlänge nach [35] bei  $0,02 \text{ mm}$  und nach [98] sogar deutlich unter  $0,02 \text{ mm}$ . Erfahrungsgemäß besitzt die halbe Hertzsche Kontaktbreite  $b_0$  einen mindestens um den Faktor 10 größeren Wert. Es ist daher im Wälzkontakt üblicherweise von einer geringen Stützwirkung auszugehen [35]. In den Fällen, in denen die Ersatzstrukturlänge die gleiche Größenordnung wie die halbe Hertzsche Kontaktbreite besitzt, sind Spannungsumlagerungen bis in die Tiefe der maximalen Vergleichsspannung möglich. Daß eine Stützwirkung vor allem bei kleinen Kontaktflächen auftritt, wird auch durch [8] bestätigt.

Die dort angegebene Gleichung zur Bestimmung der Stützzahl ist für Wälzkontakte ebenfalls nur bedingt anwendbar, da synchrone Spannungen vorausgesetzt werden. Daher und da in der Literatur keine Verfahren zur Bestimmung der Stützzahl für Wälzkontakte existieren, wird in [8] auf die Berücksichtigung einer eventuellen Spannungsumlagerung verzichtet.

Im folgenden wird unter Beachtung der zuvor vorgenommenen Bemerkungen gemäß [53] vorgeschlagen, die Werkstoffanstressungen  $A_{\text{inta}}$  und  $A_{\text{int}}$  nach der SIH\* im oberflächennahen Bereich des Wälzkontaktes bis in eine Tiefe von  $0,1 \cdot c_{b_0}$  zu mitteln (vgl. Gleichung (55)) und so die Stützwirkung in Wälzkontakten zu berücksichtigen. Bei sehr kleinen Kontaktbreiten sind nähere Betrachtungen zum Verhältnis zwischen Ersatzstrukturlänge  $\rho^*$  und halber Hertzscher Kontaktbreite  $b_0$  vorzunehmen und die Tiefe, über die die Werkstoffanstressungen gemittelt werden, entsprechend anzupassen.

Zur Berücksichtigung von Oberflächeneinflüssen auf die örtliche Festigkeit, z.B. durch Triboschutzschichten und die Kerbwirkung von technischen Oberflächen dienen die Oberflächenfaktoren  $Z_{\text{OF}, m}$ ,  $Z_{\text{OF}, p}$  und  $Z_{\text{OF}, D}$ , mit denen im oben angegebenen Bereich der Ersatzstrukturlänge  $\rho^*$  die örtlichen Festigkeiten wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} R_{m, \text{OF}} &= R_m \cdot Z_{\text{OF}, m} \\ R_{p0,2, \text{OF}} &= R_{p0,2} \cdot Z_{\text{OF}, p} \\ \sigma_{D, \text{OF}} &= \sigma_{\text{zdW}} \cdot Z_{\text{OF}, D} \end{aligned} \quad (56)$$

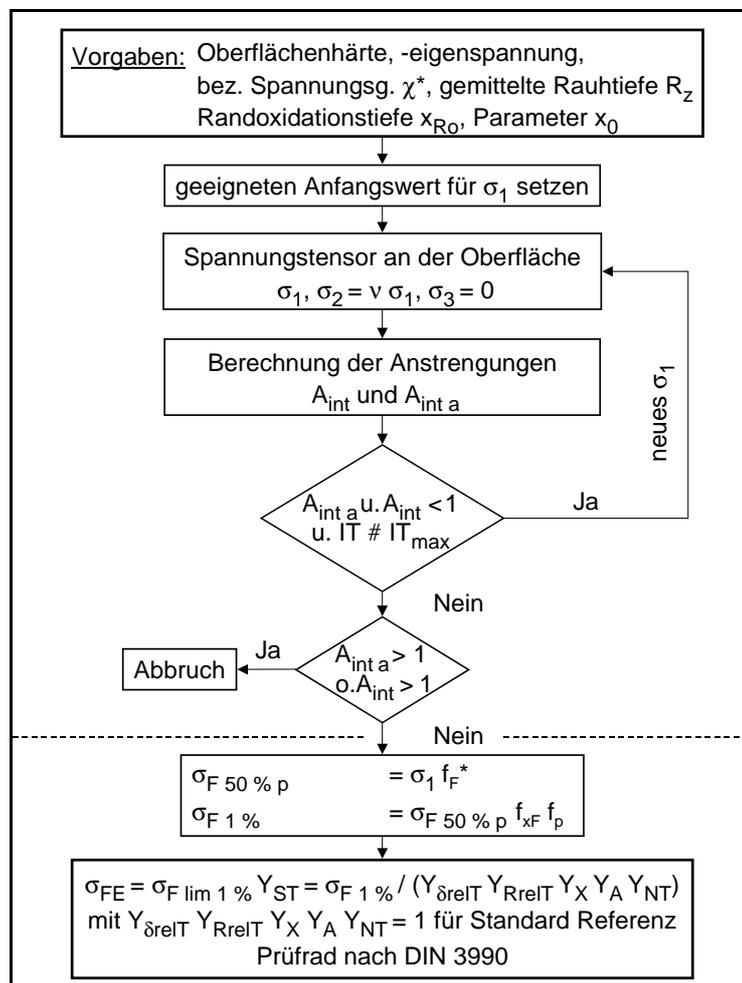
Die Faktoren  $Z_{\text{OF}, m}$ ,  $Z_{\text{OF}, p}$  und  $Z_{\text{OF}, D}$  sind mit Hilfe von Erfahrungswerten aus Tragfähigkeitsuntersuchungen anzupassen und werden zunächst zu 1 gesetzt.

## 6 Berechnungsmodell

Im folgenden wird die Anwendung der im Kapitel 5 beschriebenen Festigkeitshypothese zur Berechnung der Tragfähigkeit von Proben und zahnfußähnlichen Proben sowie zur Berechnung der Zahnfuß- und der Zahnflankentragfähigkeit hinsichtlich Werkstoffermüdung beschrieben.

### 6.1 Bauteile im Bereich lastfreier Oberflächen

Das **Bild 29** zeigt beispielhaft das Struktogramm zur Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit und zur Umrechnung der ermittelten Dauerfestigkeit in eine der DIN 3990 [1] entsprechenden Spannung. Bei der Berechnung wird von einem Spannungszustand gemäß DIN 3990 [1], einer optimalen Wärmebehandlung und einem homogenen Werkstoff ausgegangen. Durch diese Annahmen ist es möglich, die Berechnungen auf die Bestimmung der Werkstoffanstrengung, d.h. der Anrißgefährdung gemäß den Gleichungen (29) und (31) direkt auf die Oberfläche zu beschränken. Eine Rechnung über die Werkstofftiefe ist optional ohne weiteres ebenfalls möglich. Da das Ziel ein Vergleich



**Bild 29:** Struktogramm zur Berechnung der Zahnfußdauerfestigkeit  $\sigma_{FE}$  zum Vergleich mit der Zahnfußdauerfestigkeit nach DIN 3990 [1] (Annahme: Spannungszustand gemäß DIN 3990 [1], optimale Wärmebehandlung, homogener Werkstoff)

mit den Festigkeitswerten der DIN 3990 Teil 5 [1] darstellt, ist die genannte Beschränkung zulässig. Um stets einen direkten Vergleich der berechneten Zahnfußdauerfestigkeit mit der Zahnfußdauerfestigkeit nach DIN 3990 [1] zu ermöglichen, wird der Methodenfaktor  $f_F^*$  eingeführt, der im weiteren vorläufig zu 1 gesetzt wird und gegebenenfalls angepaßt werden kann.

Bei der Berechnung wird näherungsweise angenommen, daß die maximale Werkstoffanstrengung eines Volumenelementes maßgebend für die Dauerfestigkeit ist. Aufgrund der für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit geltenden Festigkeitskennwerte (Kapitel 5), die in die Festigkeitshypothese eingesetzt werden, resultiert eine rechnerische Dauerfestigkeit mit eben dieser Ausfallwahrscheinlichkeit. Dieses Vorgehen ist in der Literatur durchaus üblich und wird beispielsweise auch von Velten [135] oder Lang [75] angewendet. Da die Festigkeitswerte in DIN 3990 Teil 5 [1] für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1 % angegeben sind, ist für einen Vergleich eine Umrechnung

der rechnerisch ermittelten Dauerfestigkeit notwendig. Hierzu wird der Umrechnungsfaktor  $f_{xF}$  gemäß [29] verwendet (**Tabelle 4**). Bei dem Vergleich mit neuen Versuchsergebnissen sind die angepaßten Umrechnungsfaktoren nach [123, 139] heranzuziehen. Die Anwendung

Werkstoff	Umrechnungsfaktor $f_{xF}$ [ ]
vergütet	0,90
normalgeglüht	0,90
induktiv- und flammgehärtet	0,86
einsatzgehärtet	0,86
gasnitriert	0,86

**Tabelle 4:** Umrechnungsfaktor  $f_{xF}$  [29]

des Faktors  $f_{xF}$  und ein direkter Vergleich der nach Bild 29 ermittelten Dauerfestigkeiten mit denjenigen in DIN 3990 Teil 5 [1] ist möglich, da die Tragfähigkeiten in DIN 3990 Teil 5 [1] experimentell für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit ermittelt und mit dem Faktor  $f_{xF}$  in Festigkeitswerte für 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit umgerechnet werden [29]. Eine Weiterentwicklung des Modells zur Berechnung einer Dauerfestigkeit in Abhängigkeit von der Ausfallwahrscheinlichkeit wäre durch die Anwendung des Fehlstellenmodells entsprechend [z.B. 109] denkbar, ist aber hier nicht Gegenstand der Untersuchungen. Hierzu wäre zunächst rechnerisch und experimentell prinzipiell zu prüfen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die auch bei geringen Ausfallwahrscheinlichkeiten Gültigkeit besitzt, für die Berechnung zugrunde gelegt werden muß.

Der Faktor  $f_p = 0,9$  [29] dient zur Umrechnung von am Pulsator ermittelten Dauerfestigkeiten in Tragfähigkeiten nach DIN 3990 Teil 5 [1], die für Laufverzahnungen

gelten. Der Umrechnungsfaktor wird näherungsweise auch zur Umrechnung der gemäß Bild 29 ermittelten Dauerfestigkeiten in entsprechende Werte nach DIN 3990 [1] verwendet. Es ist zu beachten, daß durch die Umrechnung mit dem Faktor  $f_p$  neben den verschiedenen statistischen Auswertungen bei Pulsator- und Laufversuchen noch weitere Unterschiede berücksichtigt werden und es daher gerechtfertigt scheint, den Umrechnungsfaktor auch in diesem Modell unverändert anzuwenden.

Die Tragfähigkeiten in den Festigkeitsfeldern der DIN 3990 [1] gelten für sogenannte Standard Referenz Prüfbedingungen (s. DIN 3990 Teil 5 [1]). Davon abweichende Bedingungen werden durch die Faktoren  $Y_i$  (DIN 3990 [1], Bild 29) berücksichtigt. Im Bild 29 wird von Standard Referenz Prüfbedingungen ausgegangen, weshalb keine weitere Umrechnung notwendig ist.

Die Berechnung von Proben oder anderen Bauteilen erfolgt entsprechend der in Bild 29 dargestellten Zahnfußtragfähigkeitsberechnung. Wahlweise können die Berechnungen bei bekannten Spannungs-, Eigenspannungs- und Härtetiefenverläufen auch über die Werkstofftiefe vorgenommen werden. Umrechnungen, insbesondere eine Umrechnung der rechnerisch ermittelten Dauerfestigkeit in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit, sind nicht nötig, da im folgenden stets ein Vergleich mit experimentell für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit bestimmten Dauerfestigkeiten vorgenommen wird.

## 6.2 Flankenkontakt

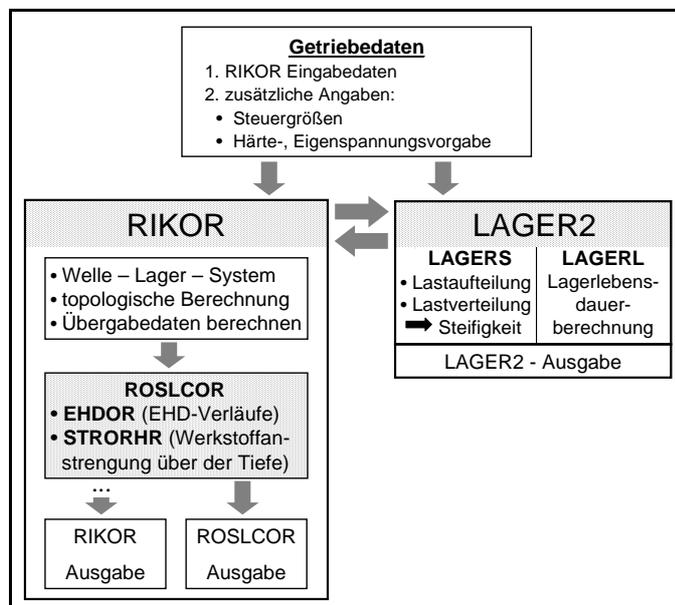
Die Grundlage zur Berechnung der Flankentragfähigkeit hinsichtlich Ermüdung mit der im Kapitel 5 beschriebenen Festigkeitshypothese stellt neben dem Programmsystem ROSLCOR [53, 101] (Kapitel 3) das FVA-EDV-Programm RIKOR [107] in der Version H mit dem angeschlossenen FVA-EDV-Unterprogramm LAGER2 [49] dar.

### 6.2.1 Berechnungsprogramm RIKOR

Das FVA-EDV-Programm RIKOR [107] dient zur Berechnung der Lastverteilung in Stirnrad-Zahneingriffen unter Berücksichtigung der Ritzel und Rad-Flankentopologien, der Verdrillung und Durchbiegung des Ritzelkörpers, der Verlagerung der Wellen infolge von Wellenelastizitäten, Lagerspielen, Lagerverformungen sowie der Verformung und Verlagerung des Großrades. Durch die in RIKOR [107] implementierte topologische Betrachtungsweise ist die Bestimmung der Lastverteilung über

die gesamte beim Durchwälzen belastete Zahnflanke möglich [141], wobei topologische Verzahnungskorrekturen mit in die Berechnung einbezogen und darauf basierend verbesserte Korrekturen vorgeschlagen werden. Die ermittelte Lastverteilung über der Zahnflanke dient als Grundlage für die weiteren Berechnungen zur Ermittlung der Ermüdungstragfähigkeit der Flanke. Das **Bild 30** zeigt den prinzipiellen Berechnungsablauf von RIKOR [107] mit den angeschlossenen Unterprogrammsystemen LAGER2 [49] und ROSLCOR [53, 101]. Das Gleichgewicht am Welle-Lagersystem wird im Falle einer mechanisch überbestimmten Wellenlagerung iterativ durch das Zusammenspiel der beiden Programme RIKOR [107] und LAGER2 [49] gelöst. Im Anschluß daran erfolgt die topologische Berechnung, bei der die Lastverteilung im Zahneingriff unter Berücksichtigung der oben genannten Verformungs- und Verlagerungsanteile bestimmt wird.

Um die Werkstoffanstrengung der gesamten Flanke bestimmen zu können, wird im Anschluß an die topologische Berechnung die Zahnflanke gleichmäßig in Einzelbereiche aufgeteilt und diese jeweils als einzelne Linienkontakte behandelt. Dazu werden die Übergabegrößen zur Berechnung des EHD-Druckverlaufes und der Spannungsverteilung im Werkstoffinneren berechnet und an die Teilprogramme EHDOR und STRORHR des Systems



**Bild 30:** Ritzelkorrekturprogramm RIKOR [107] mit den angeschlossenen EDV-Programmen LAGER2 [49] und ROSLCOR [53, 101]

einzelnen Linienkontakte. Zum Schluß des Berechnungsdurchlaufs wird die Werkstoffanstrengung der gesamten Zahnflanke bewertet und zusammenfassend dargestellt. Durch diese Vorgehensweise, d.h. dem Anschluß des Programmsystems ROSLCOR [53, 101] an RIKOR [107], können Einflüsse aus der Geometrie (Hauptgeometrie, Korrekturen), den Verformungen und Verlagerungen, dem Werkstoff und dessen Wärmebehandlung sowie dem physikalischen Schmierungs-zustand der gesamten Flanke gleichermaßen in die Berechnung der Flankentragfähigkeit hinsichtlich Ermüdung einbezogen werden.

## 6.2.2 Berechnungsgrundlagen

### Diskretisierung der Flanke

Im Anschluß an die RIKOR [107] Rechnung folgt, wie im Bild 30 dargestellt, der Aufruf des Programmsystems ROSLCOR [53, 101]. Für diese Berechnung werden die Stützstellen in Zahnbreiten- und Zahnhöhenrichtung jeweils äquidistant so verteilt, daß keine Stützstellen an den Rändern der Flanke zu liegen kommen. Die Anzahl der Stützstellen ist im Programm vorzugeben und orientiert sich an der geforderten Rechengenauigkeit sowie an der Rechenzeit des Programms. Hier ist je nach Anforderung gegebenenfalls ein entsprechender Kompromiß erforderlich.

### Oberflächenbelastung des einzelnen Linienkontaktes

Mit der in RIKOR [107] bestimmten Lastverteilung über der Flanke wird eine Interpolation der Lasten für die oben beschriebene Stützstellenverteilung vorgenommen. Für die weiteren Berechnungen werden die Einzelbereiche als Linienkontakte angesehen und die entsprechenden Berechnungsgleichungen dafür zugrunde gelegt. Alle übrigen Größen, wie z.B. zur Berechnung der EHD-Druckverteilung können explizit für die einzelnen Stützstellen bestimmt und an das Programm EHDOR [101] übergeben werden. Die Vorgabe eines Druckverlaufes infolge des Kontaktes technischer Oberflächen und eines Schubdruckverlaufes mit örtlich variabler oder konstanter Reibungszahl erfolgt wie im Kapitel 3 beschrieben.

### Berücksichtigung der Beanspruchung infolge Zahnquerkraft und -biegung

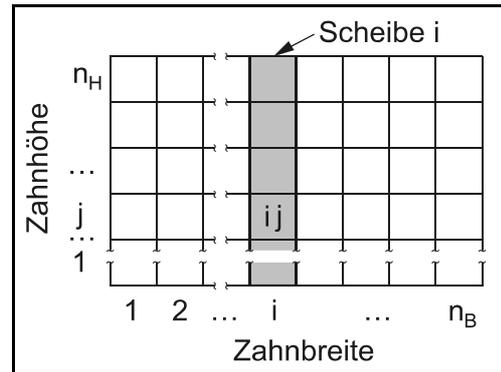
Beim Durchwälzen der Verzahnung wird der Werkstoff im Inneren der Zahnflanke in einer konstanten Zahnhöhe zeitlich nacheinander durch den Flankenkontakt sowie durch Querkraft und Biegung infolge der in Zahnhöhenrichtung wandernden Zahnnormalkraft beansprucht. Durch die Auswahl der angepaßten Schubspannungsintensitätshypothese (SIH\*, Kapitel 5) ist es möglich, diesen Einfluß bei der Beurteilung der Werkstoffanstrengung mit zu berücksichtigen. Die Spannungsverläufe in den Schnittebenen der Volumenelemente müssen lediglich in einem längeren Zeitraum, d.h. während des gesamten Durchwälzens der Flanke, betrachtet und analysiert werden. Im folgenden wird die vereinfachte Berechnung der Tiefenverteilungen der Spannungen über der Zahnflanke jeweils in einer konstanten Zahnhöhe infolge Querkraft und Biegung beschrieben.

Die Berechnung der Spannungen geschieht scheibchenweise (**Bild 31**), wobei der Quereinfluß zwischen den einzelnen Scheiben vernachlässigt werden soll. Somit

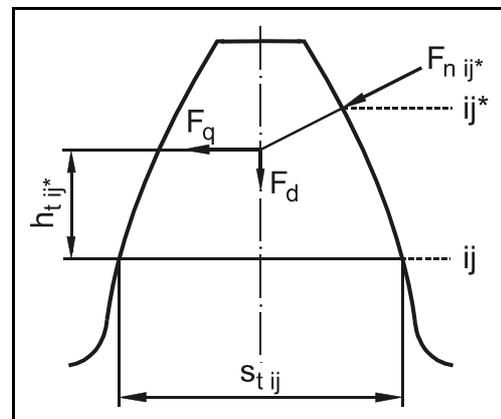
resultieren die Spannungen in einem Querschnitt des Bereiches ij aus demjenigen Lastangriff an der Scheibe i oberhalb des Bereiches ij, der zum größten Querkraftschub bzw. zur größten Biegebeanspruchung im Bereich ij führt.

Die Bestimmung der Spannungen wird entsprechend dem Vorgehen bei der Ermittlung der Zahnfußspannung in DIN 3990 [1] im Normalschnitt der Verzahnung durchgeführt. Im **Bild 32** sind einige für die Berechnung wichtige Größen im Stirnschnitt (Index t) der Verzahnung eingezeichnet. Die benötigten geometrischen Größen sind nach DIN 3960 [2] zu ermitteln und in den Normalschnitt (Index n) umzurechnen.

Damit lassen sich die Nennspannungen im Querschnitt ij entsprechend [20, 63] und Bild 32 angeben (**Gleichungen (57)** und **(58)**). Den Gleichungen liegt dabei ein gerader, rechteckiger Biegebalken zugrunde. Dadurch entspricht das Koordinatensystem für die Spannungstiefenverläufe in Gleichung (58) demjenigen, in dem die Spannungen des Flankenkontakts berechnet sind (Bild 6). Eine weitere Umrechnung der Spannungen ist nicht mehr erforderlich.



**Bild 31:** Diskretisierung der Flanke (schematisch)



**Bild 32:** Größen im Stirnschnitt der Verzahnung (Kraftangriff im Bereich ij\*, Spannung für den Bereich ij, vgl. Bild 31)

$$\begin{aligned} F_q &= F_{n\ ij^*} \cdot \cos(\alpha_{yn\ ij^*}) \\ F_d &= F_{n\ ij^*} \cdot \sin(\alpha_{yn\ ij^*}) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{b\ ij} &= \frac{6 F_q h_{t\ ij^*}}{b_i s_{n\ ij}^2} \cdot \left( \frac{s_{n\ ij}/2 - y}{s_{n\ ij}/2} \right) \\ \sigma_{d\ ij} &= \frac{-F_d}{b_i s_{n\ ij}} \\ \tau_{q\ ij} &= \frac{6 F_q}{b_i s_{n\ ij}^2} \cdot y \cdot \left( 1 - \frac{y}{s_{n\ ij}} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

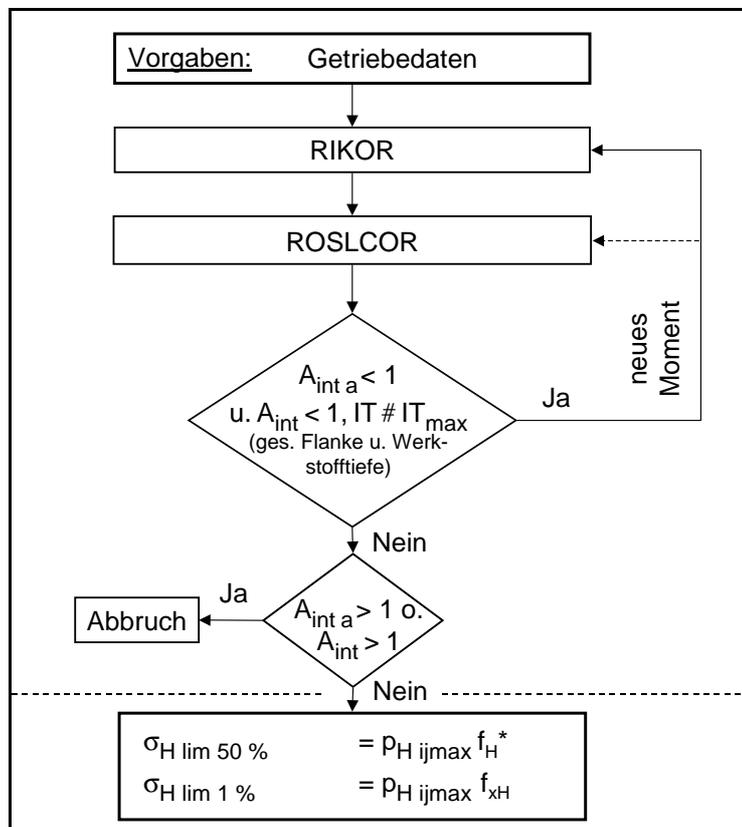
Unter Berücksichtigung der Eigenspannungen resultiert folgender Spannungstensor im Koordinatensystem nach Bild 6:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{bij} + \sigma_{dij} + \sigma_{xE} & \tau_{qij} & 0 \\ & \tau_{qij} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \sigma_{zE} \end{pmatrix} \quad (59)$$

### 6.2.3 Ermüdungstragfähigkeit der Flanke

Das **Bild 33** zeigt das Struktogramm zur Berechnung der Zahnflankentragfähigkeit

hinsichtlich Ermüdung und zur Umrechnung der ermittelten Dauerfestigkeit in eine der DIN 3990 [1] entsprechenden Grübchen-tragfähigkeit. Beide im Bild 33 dargestellten Berechnungsmethoden werden jeweils solange durchgeführt bis die maximale und die dynamische Werkstoffanstrengung den Wert 1 unterschreiten bzw. gerade erreichen. Die Hertzsche Pressung über dem Element ij mit der maßgebenden Werkstoffanstrengung wird mit  $p_{H\ ij\max}$  bezeichnet. Bei der vereinfachten Berechnung erfolgt diese nicht über die gesamte Flanke, sondern nur über 10 ausgewählte Flankenpunkte [53] für eine abgeschätzte Lastaufteilung. Dies ist unter Annahme von geringen Verformungseinflüssen näherungsweise möglich. Wie zur der Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit wird auch zur Bestimmung der Zahnflankentragfähigkeit ein Methodenfaktor  $f_H^*$  eingeführt, der ebenfalls vorläufig zu 1 gesetzt wird und gegebenenfalls anzupassen ist. Da die Grübchen-tragfähigkeiten



**Bild 33:** Struktogramm zur Berechnung der Zahnflankentragfähigkeit hinsichtlich Ermüdung zum Vergleich mit Grübchen-tragfähigkeiten nach DIN 3990 [1]

Bei der vereinfachten Berechnung erfolgt diese nicht über die gesamte Flanke, sondern nur über 10 ausgewählte Flankenpunkte [53] für eine abgeschätzte Lastaufteilung. Dies ist unter Annahme von geringen Verformungseinflüssen näherungsweise möglich. Wie zur der Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit wird auch zur Bestimmung der Zahnflankentragfähigkeit ein Methodenfaktor  $f_H^*$  eingeführt, der ebenfalls vorläufig zu 1 gesetzt wird und gegebenenfalls anzupassen ist. Da die Grübchen-tragfähigkeiten

in den Festigkeitsfeldern in DIN 3990, Teil 5 [1] für 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit angegeben sind, erfolgt analog zur Zahnfußtragfähigkeitsberechnung eine Umrechnung der rechnerisch für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit ermittelten Flankenpressung. Zur Umrechnung dient der Faktor  $f_{xH} = 0,9$  nach [29] für alle Werkstoffe. Bei der Nachrechnung und dem Vergleich mit neuen Versuchsergebnissen sind die angepaßten Umrechnungsfaktoren nach [123] einzusetzen.

Zur Berechnung der zulässigen dynamischen Werkstoffanstrengung werden entsprechend dem Vorgehen in [40] als zeitlich wirksame Mittelspannungen lediglich die Eigenspannungen berücksichtigt. Damit ist es möglich, dem unterschiedlichen Zeitverhalten von Eigenspannungen und Lastspannungen, auf das im Kapitel 3 und in [30] eingegangen wird, Rechnung zu tragen.

Bei unbekanntem Eigenspannungstiefenverlauf erfolgt die Berechnung der Eigenspannungen in x- und z-Richtung in Anlehnung an die Gleichung (6) nach Lang [75]. Es ist zu bemerken, daß bei diesem Ansatz die Eigenspannungen in großen Werkstofftiefen verschwinden. Da sich zur Erfüllung des mechanischen Gleichgewichtes Druckeigenspannungen im Bereich der verfestigten Randschicht durch Zugeigenspannungen im Kern ausgleichen müssen, ist der von Lang angenommene Verlauf in größeren Werkstofftiefen nur bei großen randschichtverfestigten Bauteilen, in denen aufgrund deren Größe nur geringe Zugeigenspannungen im Kern vorliegen, gültig. Bei randschichtverfestigten Verzahnungen mit geringem Zahnquerschnitt hingegen sind zum Ausgleich der Druckeigenspannungen am Rand größere Zugeigenspannungen im Kern zu erwarten [vgl. auch 87] und demnach in der Berechnung der Werkstoffanstrengung zu berücksichtigen. Grundlage für die Berechnung der Eigenspannungen über dem Zahnquerschnitt stellt die von der FZG modifizierte Gleichung (6) nach Lang [75] dar (Kapitel 3, Seite 26). Die Teilgleichung der Gleichung (6) für  $HV - HV_{\text{Kern}} \neq 300$  wird für den Bereich  $y > y_{\text{Kern}}$  verwendet und um eine additive Konstante, die Eigenspannung im Kern, erweitert. Die andere Teilgleichung und deren Gültigkeitsbereich über der Tiefe bleiben unverändert. Im Zwischenbereich ist eine weitere Funktion mit tangentialen Übergängen zu den anderen Funktionen definiert. Zur Berechnung der Eigenspannung im Kern wird diese solange variiert, bis das Integral über den Tiefenverlauf der Eigenspannungen normal zur Flankenoberfläche verschwindet.

## 7 Anwendung des Berechnungsmodells auf Versuchsergebnisse aus der Literatur

Im folgenden werden mit dem im vorangegangenen Kapitel dargestellten Berechnungsmodell Versuchsergebnisse aus der Literatur nachgerechnet, um die Anwendbarkeit sowie die Möglichkeiten des vorgeschlagenen Berechnungsmodells aufzuzeigen.

### 7.1 Nachrechnung von Versuchsergebnissen mit Werkstoffproben

#### 7.1.1 Versuchsergebnisse von Velten

Velten [135] untersuchte zur Entwicklung eines Schwingfestigkeitskonzeptes thermochemisch randschichtverfestigte bauteilähnliche ungekerbte und gekerbte Rundproben. Im folgenden werden Ergebnisse von Velten [135] für Proben aus dem Einsatzstahl 20 MoCrS 4 [135, S. 73 ff], für die in [135] die Anwendung des Dauerfestigkeitskonzeptes exemplarisch graphisch aufgezeigt wird bzw. für die ausreichend Daten für eine Rechnung zur Verfügung stehen, mit dem Berechnungsmodell aus dem Kapitel 6 nachgerechnet (**Tabelle 5**).

Serie	Be- lastung	d [mm]	$\alpha_k$ [ ]	Eht <sub>soll</sub> [mm]	Eht <sub>ist</sub> [mm]	HV <sub>Rand</sub> [HV]	HV <sub>Kern</sub> [HV]	x <sub>Ro</sub> [ $\mu$ m]
2.2.2	Ub	20,7	2	0	0	380	311	0
2.3.1	ZDW	6,21	1	0	0	430	430	0
3.1.1	Ub	6,21	1	1,2	1,2	733	422	14
3.2.2	Ub	20,7	2	1,2	0,75	765	364	14
3.4.2 w	ZDW	20,7	2,12	1,2	0,75	765	320	14
3.4.2 z	ZS	20,7	2,12	1,2	0,75	765	320	14
3.4.2 d	DS	20,7	2,12	1,2	0,75	765	320	14
4.1.1	Ub	6,21	1	0,4	0,5	800	460	7
4.2.1	Ub	20,7	1	0,4	0,4	747	325	7
4.2.2	Ub	20,7	2	0,4	0,4	790	307	7
5.1.1	Ub	6,21	1	0,7	0,9	808	327	11
5.2.2	Ub	20,7	2	0,7	0,7	829	303	11

**Tabelle 5:** Vorgaben für Probenuntersuchungen von Velten [135] (20 MoCr S)

In der Tabelle 5 bedeuten: Ub = Umlaufbiegung, ZDW = Zug-Druck-Wechselbelastung, ZS = Zug-Schwell-Belastung, DS = Druck-Schwell-Belastung.

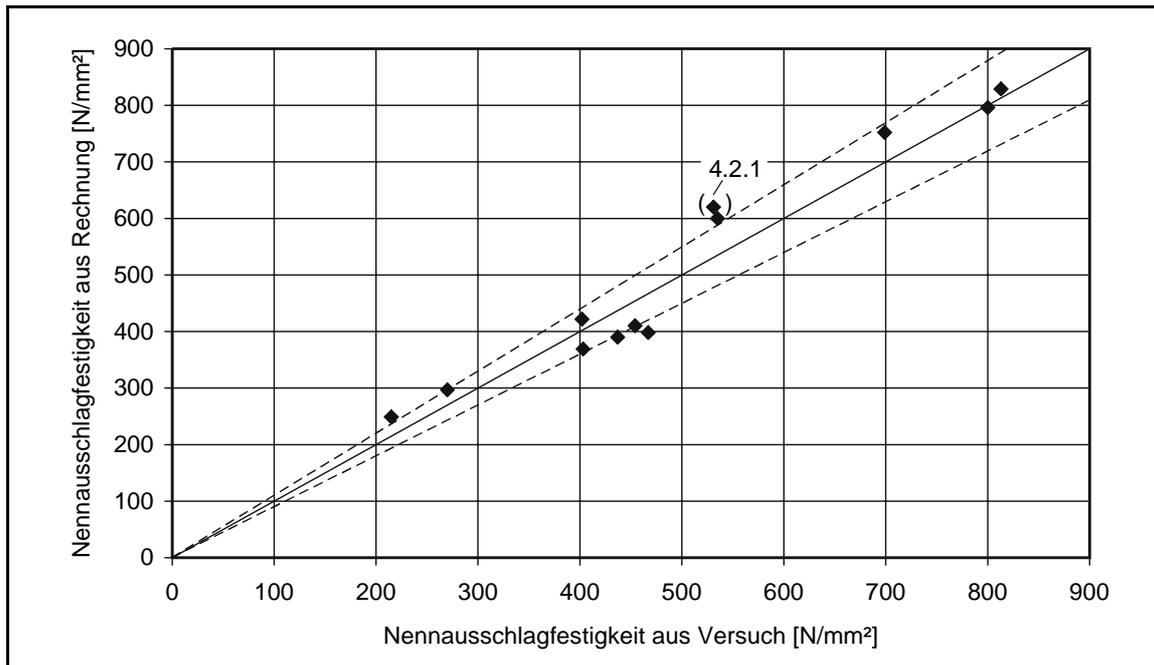
Zur Abschätzung des Oberflächeneinflusses wurde bei allen Proben eine gemittelte Rauhtiefe von  $R_z = 1,5 \mu\text{m}$  und eine Randoxidationstiefe  $x_{Ro}$  in Abhängigkeit von der Einsatzhärtetiefe entsprechend [135, S. 39ff und S. 114] im Berechnungsmodell eingesetzt (s. Tabelle 5). Die Eigenspannungen, die von Velten [135] nach der GEH aufgeführt sind, wurden umgerechnet und komponentenweise vorgegeben. Die Berechnungsergebnisse sind in der **Tabelle 6** und im **Bild 34** aufgeführt.

Serie	Be- lastung	Nennauschlagfestigkeiten $\sigma_{A, 50\%}$		Abweichung [ %]
		Versuch [N/mm <sup>2</sup> ]	Rechnung [N/mm <sup>2</sup> ]	
2.2.2	Ub	270	297	10,0
2.3.1	ZDW	535	600	12,2
3.1.1	Ub	699	752	7,6
3.2.2	Ub	437	390	-10,8
3.4.2 w	ZDW	403	369	-8,4
3.4.2 z	ZS	215	249	15,8
3.4.2 d	DS	467	398	-14,8
4.1.1	Ub	813	829	2,0
4.2.1	Ub	531	620	16,8
4.2.2	Ub	402	422	5,0
5.1.1	Ub	800	796	-0,5
5.2.2	Ub	454	410	-9,7

**Tabelle 6:** Gegenüberstellung der Ergebnisse: Versuch [135] - Rechnung ( $x_0 = 34 \mu\text{m}$ )

Bis auf die Serie 4.2.1 liegen die berechneten Anrißlagen direkt an der Oberfläche. Dies entspricht den experimentell ermittelten Anrißlagen, die sich ebenfalls direkt an der Oberfläche bzw. im äußersten oberflächennahen Bereich befinden. Bei der Serie 4.2.1 ergeben sich die Bruchausgänge aufgrund des Härteverlaufs und der geringen Einhärtetiefe (s. Tabelle 5) rechnerisch im Bereich von etwa 1,2 mm unterhalb der Probenoberfläche. Experimentell wurde bei dieser Variante eine mittlere Anbruchtiefe von 1,34 mm ermittelt. Damit stimmen die rechnerisch bestimmten mit den experimentell beobachteten Bruchausgangsorten gut überein. Bei der von Velten [135] durchgeführten Nachrechnung ergab sich bezüglich der Anrißorte ebenfalls eine gute Übereinstimmung. Die Dauerfestigkeit wird von ihm

bei dieser Serie allerdings um etwa 28 % zu hoch eingeschätzt. Diese Abweichung wird von Velten [135] auf die sehr großen nichtmetallischen Einschlüsse, die bei der Serie an den Anrißstellen gefunden wurden, zurückgeführt. Demnach ist auch die Überschätzung der Dauerfestigkeit für die Serie 4.2.1 mit dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Berechnungsmodell zu relativieren, da im Modell wie bei dem Konzept von Velten [135] die spannungsüberhöhende Wirkung von Einschlüssen nicht berücksichtigt wird.



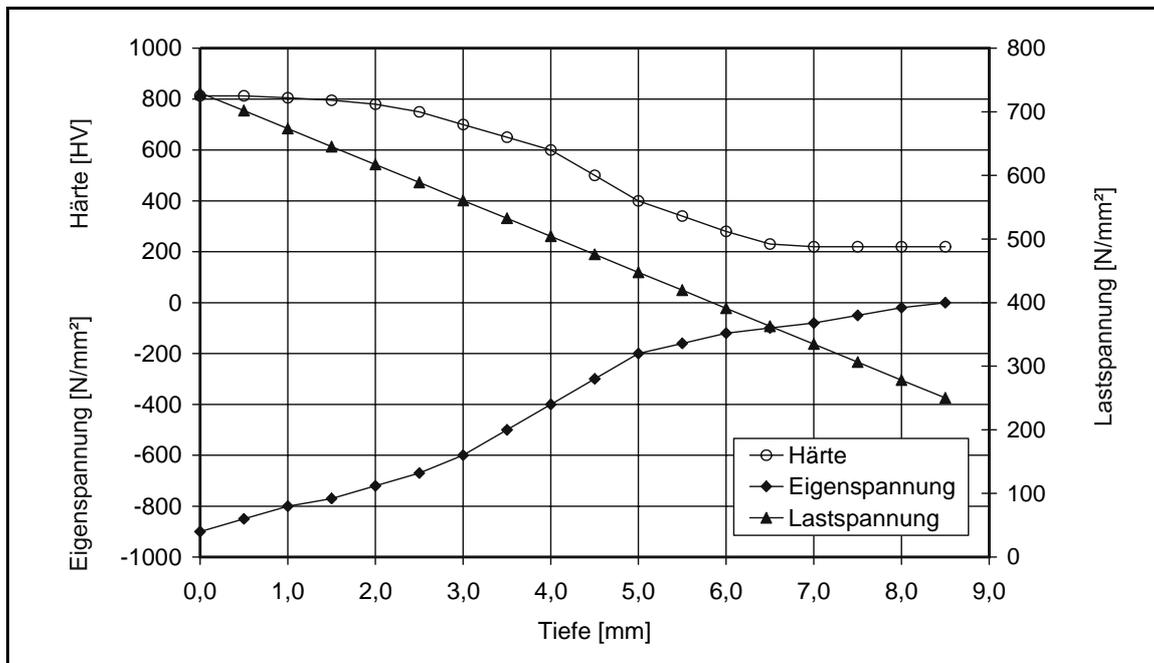
**Bild 34:** Gegenüberstellung der Ergebnisse: Versuch [135] - Rechnung (s. auch Tabelle 6), - - - :  $\pm 10\%$  Grenzen, (—) : bei der Serie 4.2.1 wurden an den Anrißstellen Einschlüsse gefunden, deren Wirkung im Berechnungsmodell nicht berücksichtigt wird

Insgesamt läßt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den im Versuch [135] ermittelten Nennausschlagfestigkeiten feststellen. Die Abweichungen bei den nachgerechneten Serien liegen in etwa in der Größenordnung wie diejenigen, die sich mit dem Modell von Velten [135] ergeben.

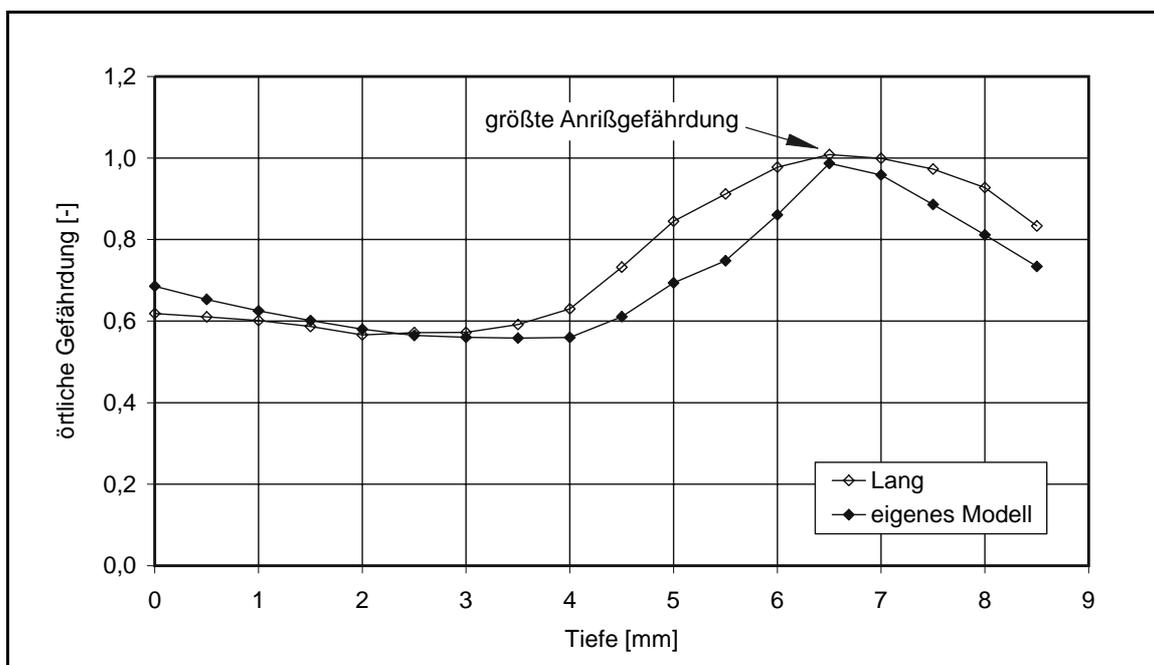
### 7.1.2 Vergleich mit Berechnung nach Lang

Lang [75] stellt eine Nachrechnung mit seinem Modell für eine glatte Umlaufbiegeprobe von Braisch [aus 75] aus dem Werkstoff C45HJ vor. Die Umlaufbiegeprobe wurde induktiv gehärtet und weist bei einer Härtetiefe von 3,5 mm eine Randhärte von 813 HV auf. Die für eine Nachrechnung benötigten Tiefenverläufe der Härte, der Eigenspannungen sowie der Last sind im **Bild 35** angegeben.

Zur Oberflächenbeschaffenheit der Probe macht Lang keine näheren Angaben. Es wird bei der Nachrechnung von einem geringen Oberflächeneinfluß ausgegangen und daher der Faktor zur Berücksichtigung des Oberflächeneinflusses zu 1 gesetzt. Diese Annahme ist, soweit aus den Tiefenverläufen der zulässigen Beanspruchungen zu erkennen, auch in der Nachrechnung von Lang [75] enthalten.



**Bild 35:** Tiefenverläufe der Umlaufbiegeprobe von Braisch UV 7,15 [aus 75]



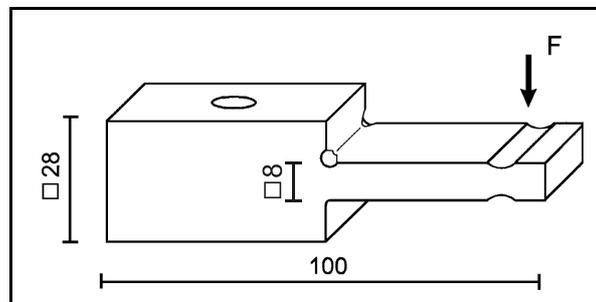
**Bild 36:** örtliche Gefährdung über der Bauteiltiefe der Umlaufbiegeprobe von Braisch UV 7,15 nach Lang [75] und nach dem eigenen Modell

Bei den Versuchen mit den Umlaufbiegeproben traten bei 21 Proben Anrisse in der Tiefe von 6 mm und bei drei Proben Anrisse an der Oberfläche auf. Die Nachrechnung nach Lang [75] sowie die Berechnung mit dem eigenen Modell spiegeln das im Versuch beobachtete Anrißverhalten der Proben (**Bild 36**) gut wider. Die maximalen Gefährdungen (= Orte minimaler Sicherheit) bei 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit befinden sich bei beiden Berechnungen etwa 6,5 - 7 mm unter der Probenoberfläche und besitzen den Wert von etwa 1. Die rechnerisch ermittelte Gefährdung an der Oberfläche liegt ebenfalls bei beiden Nachrechnungen deutlich unter 1. Lang [75] begründet die Ausfälle der drei Proben am Rand mit der Streuung der Randhärte. Insgesamt ist eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Rechenergebnissen einerseits sowie zwischen Rechnung und Versuch andererseits festzustellen.

## 7.2 Nachrechnung der Zahnfußtragfähigkeit

### 7.2.1 Versuchsergebnisse mit zahnfußähnlichen Proben

Mayr und Löhe [88] untersuchten, wie bereits im Kapitel 2 aufgeführt, experimentell sowie theoretisch den Randschichteinfluß auf die Rißbildung und -ausbreitung bei einsatzgehärteten Stählen. Hierbei kamen Proben mit an einen Zahnfuß angepaßten Modellproben (zahnfußähnliche Proben) aus dem in der Praxis häufig verwendeten Einsatzstahl 16 MnCr 5 E zum Einsatz. Die Formzahl der Probe betrug  $\alpha_k = 1,97$  [88].



**Bild 37:** an einen Zahnfuß angepaßte Modellprobe [88],  $\alpha_k = 1,97$

Bei den Untersuchungen wurde die Oberflächenbearbeitung sowie die Nachbearbeitung (elektrolytisch poliert, kugelgestrahlt) variiert. Die Ergebnisse von für die Nachrechnung relevanten versuchsbegleitenden Untersuchungen sind für alle Versuchsvarianten in der **Tabelle 7** dargestellt. Die im Versuch beobachteten Brüche haben ihren Ausgang an der Probenoberfläche auf der Zugseite der Probe und bzgl. der Probenbreite in der Probenmitte. In keinem Fall lag Versagen an Einschlüssen vor. In der Tabelle 7 sind neben den Eigenspannungen am Rand  $\sigma_{E, \text{Rand}}$  auch die absoluten Eigenspannungsmaxima  $\sigma_{E, \text{max}}$  und deren Tiefenlage  $x_{E, \text{max}}$  eingetragen. Außer bei der Variante 4 (kugelgestrahlt) besitzen die Eigenspannungsmaxima ähnliche oder etwas größere Werte als die Eigenspannungen

am Rand. Deutlich größere Eigenspannungen als am Rand liegen bei der Variante 4 in einer Tiefe von etwa  $x_{E, \max} = 90 \mu\text{m}$  durch das Kugelstrahlen vor.

Variante		1	2	3	4	5	6
Bearbeitung		geschliffen	geschliffen	elektropol.	gestrahlt	gefräst	gefräst
$R_z$	[ $\mu\text{m}$ ]	4,2	10,1	7,3	6,2	18,6	9,7
$x_{R0}$	[ $\mu\text{m}$ ]	13,3	23,1	0	18	9,9	18,3
$HV_{\text{Rand}}$	[HV1]	596	690	743	771	693	712
$HV_{\text{Kern}}$	[HV1]	295	326	322	305	287	303
$\sigma_{E, \text{Rand}}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-348	-469	-313	-556	-294	-395
$\sigma_{E, \max}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-451	-534	-347	-1324	-334	-500
$x_{E, \max}$	[ $\mu\text{m}$ ]	42	19	32	90	110	29

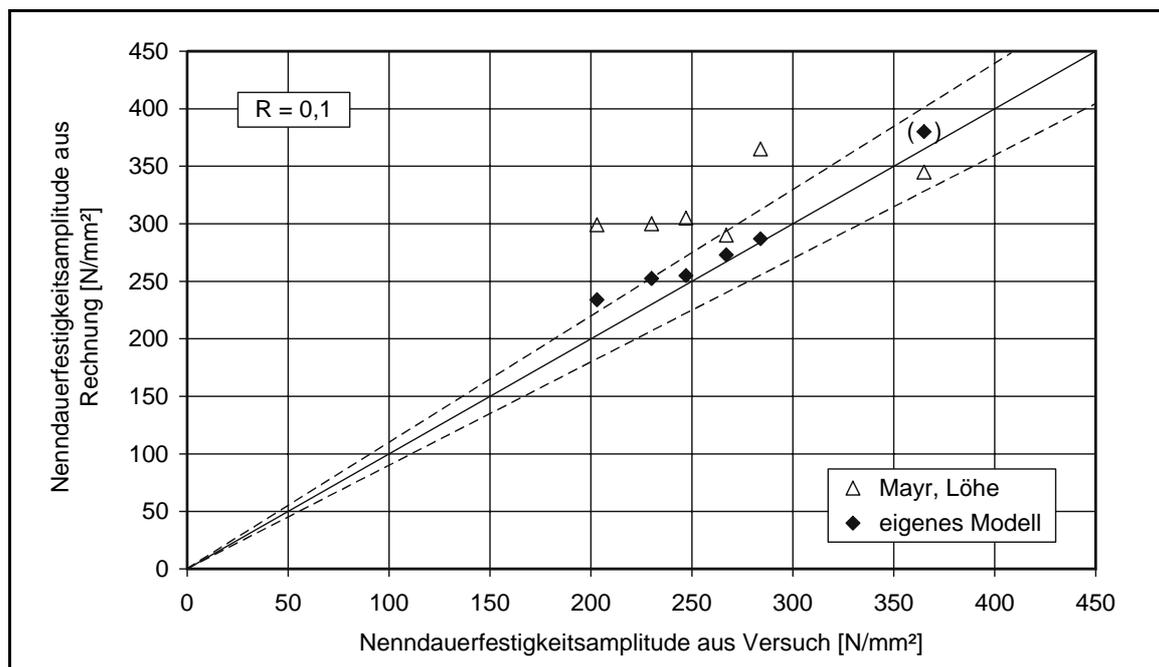
**Tabelle 7:** Ergebnisse von einigen versuchsbegleitenden Untersuchungen [88]

In der **Tabelle 8** sind die im Versuch bei einem Spannungsverhältnis von  $R = 0,1$  ermittelten Nennausschlagfestigkeiten  $\sigma_{A, 50\%}$  aufgeführt. Des weiteren befinden sich in der Tabelle 8 die Berechnungsergebnisse für  $\sigma_{A, 50\%}$  aus [88], berechnet mit dem örtlichen Konzept (Festigkeithypothese nach Dang Van) in Verbindung mit dem Fehlstellenmodell, sowie die entsprechenden Ergebnisse mit dem eigenen Modell.

Variante	1	2	3	4	5	6
Bearbeitung	geschliffen	geschliffen	elektropol.	gestrahlt	gefräst	gefräst
$\sigma_{A, 50\%}$ in [N/mm <sup>2</sup> ]						
Versuch	267	247	284	365	203	230
Berechnung nach [88]	290	305	365	345	299	300
Berechnung mit eigenem Modell	273	255	287	380	234	253

**Tabelle 8:** Gegenüberstellung der Ergebnisse: Versuch [88] - Rechnung (Berechnung nach [88]: örtliches Konzept mit Fehlstellenmodell; eigenes Berechnungsmodell: außer Variante 4:  $x_0 = 34 \mu\text{m}$ , Variante 4:  $x_0 = x_{E, \max} = 90 \mu\text{m}$  und  $R_z = 1 \mu\text{m}$ )

Die Gegenüberstellung der im Versuch ermittelten Nennausschlagfestigkeiten mit den berechneten Werten ist auch im **Bild 38** dargestellt. Da das in dieser Arbeit vorgeschlagene Berechnungsmodell nur ein Anrißkonzept und kein Konzept zur Beurteilung des Rißfortschritts darstellt, ist es vom Ansatz her nicht möglich, die rißstoppende Wirkung von Druckeigenspannungen unter der Oberfläche infolge einer Kugelstrahlbehandlung rechnerisch zu beurteilen und zu berücksichtigen. Wie sich in den Untersuchungen in [88] zeigte, stoppen die Risse bei der Variante 4 im Bereich des Druckeigenspannungsmaximums. Mit dem Berechnungsmodell ist bei der Variante 4 daher nur eine gute Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis bei nahezu verschwindenden Oberflächeneinflußfaktoren, d.h.  $x_0 = x_{E, \max} = 90 \mu\text{m}$  statt  $x_0 = 34 \mu\text{m}$  sowie  $R_z = 1 \mu\text{m}$ , zu erreichen. Mit Ausnahme der Variante 4 läßt sich bei unverändertem Berechnungsmodell eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen feststellen. Die Abweichungen sind in den genannten Fällen geringer als für die hier dargestellten Ergebnisse aus [88] mit dem örtlichen Konzept (Festigkeithypothese nach Dang Van) in Verbindung mit dem Fehlstellenmodell.



**Bild 38:** Gegenüberstellung der Ergebnisse: Versuch [88] - Rechnung nach [88] und nach dem eigenen Modell (s. Tabelle 8), - - - :  $\pm 10\%$  Grenzen; (—): Variante 4 mit veränderten Vorgaben, d.h.  $x_0 = x_{E, \max} = 90 \mu\text{m}$  statt  $x_0 = 34 \mu\text{m}$  sowie  $R_z = 1 \mu\text{m}$

### 7.2.2 Vergleich mit Zahnfußtragfähigkeiten nach DIN 3990, Teil 5

In DIN 3990 Teil 5 [1] sind in Abhängigkeit von der Werkstoffart, der Werkstoffqualität sowie der Oberflächenhärte Festigkeitsfelder für die Zahnfußtragfähigkeit von Stirnrädern angegeben (s. **Bilder 39** und **40**). Sie gelten für Standard-Referenz-Prüfräder, die unter Standard Prüfbedingungen getestet werden.  $\sigma_{F\ lim}$  stellt nach DIN 3990 Teil 5 [1] die dauerhaft ertragbare, örtlich schwellend auftretende Biegeennspannung im Zahnfuß und  $\sigma_{FE}$  (Zahnfuß-Grundfestigkeit) den Grenzwert der dauernd ertragbaren Grundspannung dar (vgl. Abschnitt 6.1).  $\sigma_{FE}$  entspricht somit der Nenn-Biegeschwell-Dauerfestigkeit einer ungekerbten Probe bei voller Elastizität des Werkstoffes. Zwischen  $\sigma_{F\ lim}$  und  $\sigma_{FE}$  besteht aufgrund der Geometrie des Standard-Referenz-Prüfrades folgender Zusammenhang:

$$\sigma_{FE} = \sigma_{F\ lim} \cdot Y_{ST} = \sigma_{F\ lim} \cdot 2 \quad (60)$$

Für das Standard-Referenz-Prüfrad gelten nach DIN 3990 Teil 5 [1] die in der **Tabelle 9** angegebenen Maße und Betriebsbedingungen.

Im folgenden werden mit dem im Kapitel 6 erläuterten Berechnungsmodell (Bild 29) ermittelte Tragfähigkeiten in die jeweiligen Festigkeitsfelder der

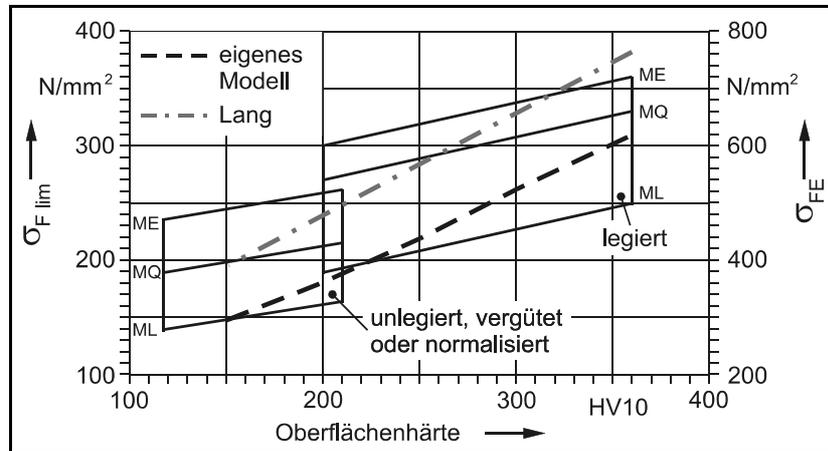
Bezeichnung		Einheit	Wert	Y-Faktoren
Modul	m	[mm]	3 - 5	$Y_x = 1$
Schrägungswinkel	$\beta$	[°]	0	$Y_\beta = 1$
Spannungskorrekturfaktor		[ ]	-	$Y_{ST} = 2$
Kerbparameter	$q_s$	[ ]	2,5	$Y_{\delta_{relT}} = 1$
Rauhtiefe im Zahnfuß	$R_z$	[ $\mu$ m]	10	$Y_{R_{relT}} = 1$
Zahnbreite	b	[mm]	10 - 50	-
Verzahnungsqualität nach DIN 3962		[ ]	4 bis 7	
Krafftaktoren		[ ]	$K_A = K_V = K_{F\beta} = K_{F\alpha} = 1$	
Bezugsprofil nach DIN 867				

**Tabelle 9:** Maße des Standard-Referenz-Prüfrades und Standard-Betriebsbedingungen nach DIN 3990 Teil 5 [1]

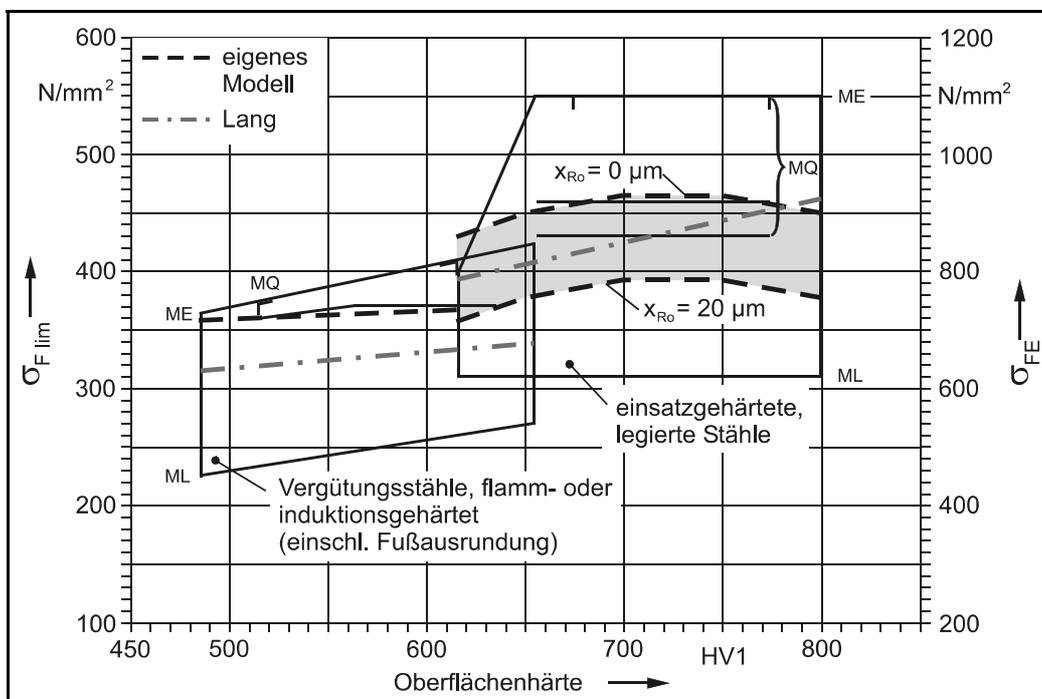
DIN 3990 Teil 5 [1] eingetragen. Der Berechnung liegen die Daten des Standard-Referenz-Prüfrades (s. Tabelle 9) zugrunde. Weitere zur Anwendung des Berechnungsmodells notwendige Geometriedaten wurden von der Prüfradgeometrie aus den Untersuchungen von Weigand [139, S. A59] übernommen. Das bei diesen Untersuchungen verwendete Prüfrad entspricht weitgehend der Geometrie des Standard-Referenz-Prüfrades nach DIN 3990 Teil 5 [1]. Die berechneten Zahnfußtragfähigkeiten sind in den Bildern 39 und 40 für Zahnräder aus Vergütungsstahl,

flamm- oder induktionsgehärtetem Vergütungsstahl sowie aus einsatzgehärtetem, legierten Stahl dargestellt. Ergebnisse vergleichbarer Rechnungen von Lang [73, 74] befinden sich zusätzlich in den Bildern 39 und 40. In [73, 74] erfolgt ein ähnlicher Vergleich mit den Zahnfußtragfähigkeiten nach DIN 3990 Teil 5 [1], allerdings mit den zur Zeit der Erstellung von [73, 74] gültigen Festigkeitsfeldern.

Die mit dem eigenen Modell berechneten Zahnfußtragfähigkeiten für Vergütungsstahl (unlegiert, vergütet oder normalisiert bzw. legiert, Bild 39)



**Bild 39:** Vergleich von berechneten Zahnfußtragfähigkeiten mit Tragfähigkeiten in DIN 3990 Teil 5 [1] für das Standard-Referenz-Prüfrad aus Vergütungsstahl (eigenes Berechnungsmodell s. Kap. 6, Lang [73, 74])



**Bild 40:** Vergleich von berechneten Zahnfußtragfähigkeiten mit Tragfähigkeiten in DIN 3990 Teil 5 [1] für das Standard-Referenz-Prüfrad aus flamm- oder induktionsgehärteten Vergütungsstahl bzw. aus einsatzgehärtetem, legierten Stahl (eigenes Berechnungsmodell s. Kapitel 6, Lang [73, 74])

decken den unteren bis mittleren Bereich der jeweiligen Festigkeitsfelder ab. Mit zunehmender Oberflächenhärte steigt die berechnete Zahnfußtragfähigkeit stärker an als durch die Begrenzungen der Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] vorgegeben. Einen ähnlichen Anstieg der Zahnfußtragfähigkeiten wie er aus den Berechnungen mit dem vorgeschlagenen Berechnungsmodell resultiert, ergibt sich auch nach den Rechnungen von Lang [73, 74]. Die dort ermittelten Tragfähigkeiten liegen jedoch höher und decken den oberen Bereich der jeweiligen Festigkeitsfelder ab.

Zur Nachrechnung der Tragfähigkeiten flamm- oder induktionsgehärteter Zahnräder aus Vergütungsstahl wurden in Anlehnung an die Berechnungsvorschrift von Lang [73, 74] Eigenspannungen in der Größe von etwa -20 bis -50 N/mm<sup>2</sup> vorgegeben. Bei diesen Vorgaben resultieren Tragfähigkeiten der Werkstoffqualität MQ bzw. ME (Bild 40). In diesem Fall liegen die von Lang [73, 74] angegebenen Tragfähigkeiten im Vergleich dazu niedriger.

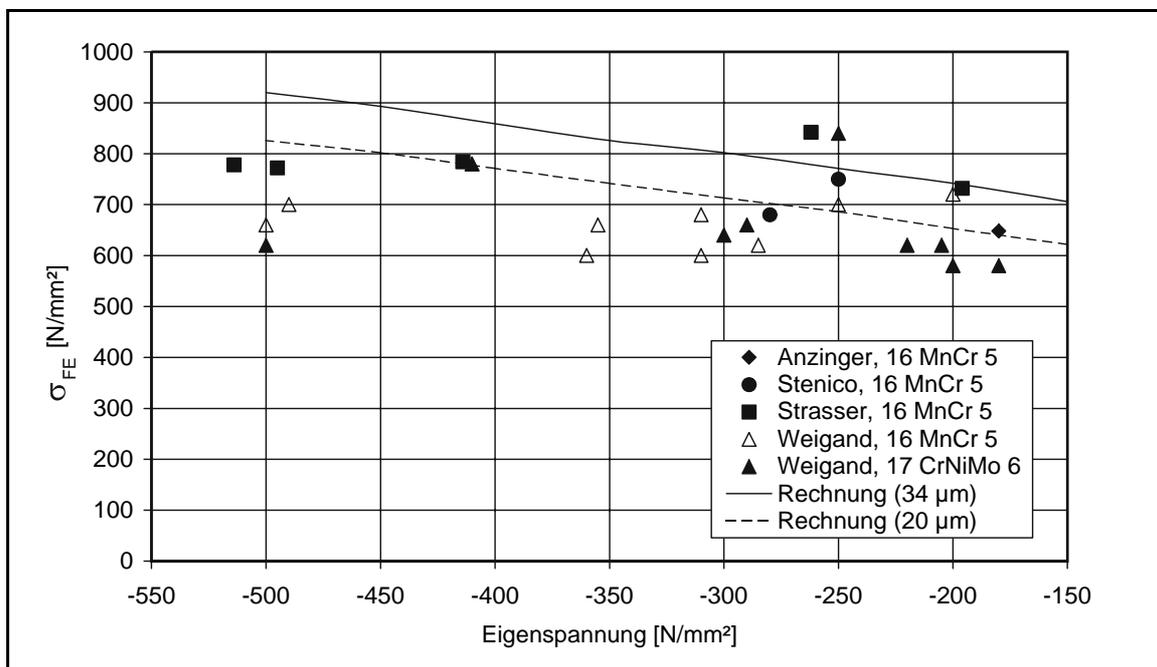
Die Zahnfußtragfähigkeiten einsatzgehärteter Zahnräder wurden unter Vorgabe von Eigenspannungen nach Gleichung (6) mit einer Kernhärte von etwa 400 HV in Abhängigkeit von der Randoxidationstiefe  $x_{Ro} = 0 - 20 \mu\text{m}$  und  $x_0 = 34 \mu\text{m}$  bestimmt (Bild 40). Ähnlich wie die Tragfähigkeiten nach Lang [73, 74] liegen die mit dem eigenen Modell berechneten Festigkeiten im Mittelbereich des Festigkeitsfeldes der DIN 3990 Teil 5 [1]. Die Abnahme der mit dem eigenen Modell ermittelten Tragfähigkeiten bei Härten  $> 750 \text{ HV}$  ist in der Eigenspannungsberechnung nach Gleichung (6) sowie in der Vorgabe der Kernhärte von 400 HV begründet. Bei der Vorgabe einer Randoxidationstiefe von  $x_{Ro} > 10 \mu\text{m}$  liegen die berechneten Tragfähigkeiten unterhalb der Qualität MQ [1], die nach neueren Untersuchungen [139] von reinigungsgestrahlten Zahnrädern erreicht wird. Es ist zu bemerken, daß sich die Tragfähigkeit durch Strahlen erfahrungsgemäß um etwa 30 - 40 % steigern läßt [z.B. 126, 139].

Die vorgestellten Berechnungen zeigen somit auf, daß sich die mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Modell berechneten Zahnfußtragfähigkeiten gut in die Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] einordnen lassen.

### 7.2.3 Vergleich mit Zahnfußtragfähigkeitsuntersuchungen

Im folgenden werden Berechnungsergebnisse mit Resultaten aus Zahnfußtragfähigkeitsuntersuchungen verglichen. Dazu sind im **Bild 41** die in verschiedenen Forschungsvorhaben an ungestrahlten Zahnrädern ermittelten Zahnfuß-Grund-

festigkeiten  $\sigma_{FE}$  [1] in Abhängigkeit von den jeweiligen Oberflächeneigenstressungen aufgetragen. Eine ähnliche Betrachtung der Ergebnisse wird von Weigand [139] vorgenommen. Weigand [139] trägt allerdings die Zahnfuß-Grundfestigkeit über die in einer Tiefe von 0,02 bis 0,04 mm gemittelten Vergleichseigenstressungen auf. Da in Zahnhöhen- und Zahnbreitenrichtung annähernd gleiche Eigenstressungsbeträge vorliegen [139], besteht ein konstanter Zusammenhang zwischen der Eigenstressung in einer Richtung und der Vergleichseigenstressung. Die Mittelung der Eigenstressungen über eine bestimmte Tiefe erfolgt in [139], um das Eigenstressmaximum im Werkstoffinneren infolge einer Kugelstrahlbehandlung mit berücksichtigen zu können. Für die Betrachtungen im Bild 41 wurden nur Versuchsergebnisse ungestrahlter Zahnräder ausgewählt. Ungestrahlte Zahnräder weisen im Gegensatz zu kugelgestrahlten Zahnrädern keine ausgeprägten Eigenstressmaxima in der Tiefe auf [128, 139], weshalb hier auf eine Mittelung der Eigenstressungsbeträge über der Werkstofftiefe verzichtet wird. Die im Bild 41 dargestellten Versuchsergebnisse zeigen unter den genannten Voraussetzungen tendenziell einen leichten Anstieg der Zahnfuß-Grundfestigkeit mit steigendem Betrag der Oberflächen-Eigenstressung.



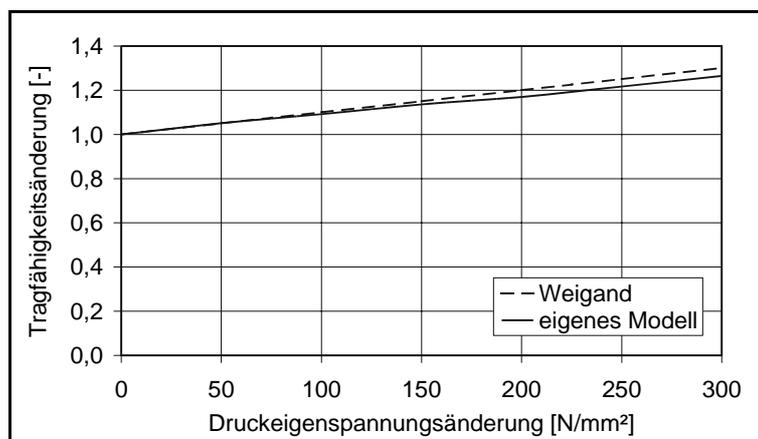
**Bild 41:** Zahnfuß-Grundfestigkeit  $\sigma_{FE}$  in Abhängigkeit von der Oberflächeneigenstressung aus Zahnfußtragfähigkeitsuntersuchungen mit ungestrahlten Zahnrädern (Anzinger [7], Stenico [126], Strasser [128], Weigand [139]); Vergleich mit Rechnung: Geometrie des Standard-Referenz-Prüfrades, Oberflächenhärte 720 HV,  $x_0 = 34 \mu\text{m}$  und  $x_{R0} = 10 \mu\text{m}$  sowie  $x_0 = 20 \mu\text{m}$  und  $x_{R0} = 15 \mu\text{m}$

Den Berechnungen mit dem Modell aus dem Kapitel 6 liegt wie im vorangegangenen Abschnitt die Prüfradgeometrie aus [139] zugrunde. Außerdem wurde eine Oberflächenhärte von 720 HV sowie eine ausreichende Einhärtetiefe angenommen. Um den rechnerischen Einfluß der Randoxidation auf die Zahnfuß-Grundfestigkeit abzuschätzen, wurden Berechnungen für zwei unterschiedliche Vorgaben ( $x_0 = 34 \mu\text{m}$  und  $x_{R_0} = 10 \mu\text{m}$  bzw.  $x_0 = 20 \mu\text{m}$  und  $x_{R_0} = 15 \mu\text{m}$ ) durchgeführt. Rechnerisch läßt sich zum einen ein größerer Einfluß der Oberflächeneigenspannung auf die Zahnfuß-Grundfestigkeit als nach den experimentellen Untersuchungen entnehmen. Zum anderen resultieren aus den Berechnungen auch bei Berücksichtigung des Einflusses aus der Randoxidation höhere Zahnfuß-Grundfestigkeiten als nach den Versuchen (s. Bild 41).

Zur weiteren Betrachtung des Eigenspannungseinflusses auf die Zahnfußtragfähigkeit dient der nachfolgende Vergleich mit einer Abschätzungsformel von Weigand [139] für diesen Einfluß. Ausgehend von den Versuchsergebnissen von kugelgestrahlten und nicht kugelgestrahlten Zahnrädern gibt Weigand [139] einen Faktor zur Berücksichtigung des Eigenspannungseinflusses in der Berechnung nach DIN 3990 [1] an. Mit dem vorgeschlagenen relativen Eigenspannungseinflußfaktor  $Y_{RS}$  ist es möglich, die Veränderung der Zahnfußtragfähigkeit durch einen veränderten Eigenspannungszustand abzuschätzen (**Gleichung (61)**).

$$Y_{RS} = \frac{\sigma_{F0\infty x}}{\sigma_{F0\infty R}} = 1 + \frac{2,24}{1 + M} \cdot M_E \cdot \frac{\sigma_{ER} - \sigma_{Ex}}{\sigma_{F0\infty R}} \quad (61)$$

$\sigma_{F04R}$  stellt in der Gleichung (61) die Zahnfußdauerfestigkeit des Referenzzustandes und  $\sigma_{F04x}$  die gesuchte Zahnfußtragfähigkeit dar. Bei der Referenz liegt die Eigenspannung  $\sigma_{ER}$ , im gegenüber der Referenz veränderten Zustand die Eigenspannung  $\sigma_{Ex}$  vor. In die Gleichung (61) sind die Eigenspannungen vorzeichenrichtig einzusetzen, d.h. mit gegenüber dem Referenzzustand größeren Druckeigenspannungsbe-



**Bild 42:** Tragfähigkeitsänderung in Abhängigkeit von der Eigenspannungsänderung nach Abschätzung von Weigand [139] (Gleichung (61), Referenz: Variante R3) und nach dem eigenen Berechnungsmodell (Kapitel 6)

trägen erhöht sich die Zahnfußtragfähigkeit. Als Mittelspannungsempfindlichkeiten werden von Weigand [139]  $M = M_E = 0,5$  angegeben. Im **Bild 42** sind die (Zahnfuß-) Tragfähigkeitsänderungen in Abhängigkeit von der Eigenspannungsänderung nach Gleichung (61) und nach dem eigenen Modell gegenüber gestellt.  $\sigma_{F04R}$  wurde zu  $1050 \text{ N/mm}^2$  bei einer Druckeigenspannung  $\sigma_E$  von ca.  $-150 \text{ N/mm}^2$  und einer Oberflächenhärte von etwa  $720 \text{ HV}$  gewählt [vgl. Variante R3 aus 139]. Für das Berechnungsmodell aus Kapitel 6 gelten wiederum  $x_0 = 34 \text{ }\mu\text{m}$  und  $x_{R0} = 10 \text{ }\mu\text{m}$ . Der Vergleich der beiden berechneten Verläufe der Tragfähigkeitsänderungen zeigt eine gute Übereinstimmung (Bild 42).

Zur Deutung der im Bild 41 festgestellten Differenzen zwischen den absoluten Größen der berechneten Zahnfuß-Grundfestigkeit und den in Versuchen ermittelten Werten seien folgende Anmerkungen zu den Versuchsergebnissen aufgeführt:

- C Nach Anzinger [7] wird die Oberflächenqualität im Zahnfuß nicht nur durch die Rauheit, sondern auch durch die Art der Hülschnittbildung bei der Zahnradsfertigung bestimmt. Der Ort des Anrisses und der Rißverlauf richten sich demnach weitgehend nach den Rauheitsriefen. Anzinger [7, S. 34] stellt fest, daß der Riß an den Stellen im Bereich des Berhrpunktes der  $30^\circ$ -Tangente an die Zahnfußrundung beginnt, an denen die Hlschnittmarkierungen und die Vorschubriefen des Protuberanzfrsers parallel laufen. Da sich auch die Streuungen der gemittelten Rauhtiefe  $R_z$  bei den gestoßenen Zahnrädern nicht in den Versuchsergebnissen widerspiegeln, schließt Anzinger [7] auf einen komplexeren Oberflcheneinflu auf die Zahnfußdauerfestigkeit als er sich rechnerisch durch einen einzigen die Oberflchenqualit beschreibenden Kennwert ( $R_z$ ) ergibt.
- C Weigand [139] führt als mögliche Ursache für die ermittelten niedrigen Tragfähigkeiten (unterer Bereich des Festigkeitsbereiches der DIN 3990 Teil 5 [1] oder sogar darunter) bei den ungestrahlten Versuchsvarianten die in den Untersuchungen festgestellten, in Richtung der Zahnradsachse längs ausgewalzten Mangansulfide an. Durch ihre spannungsüberhöhende Wirkung ließe sich die reduzierten Zahnfußtragfähigkeiten erklären.

Beide oben genannten Einflüsse, die zu einer geringeren Zahnfußtragfähigkeit führen, können mit dem Berechnungsmodell gemäß Kapitel 6 nicht berücksichtigt werden und stellen damit mögliche Ursachen für die Abweichungen zwischen den Versuchs- und den Berechnungsergebnissen im Bild 41 dar.

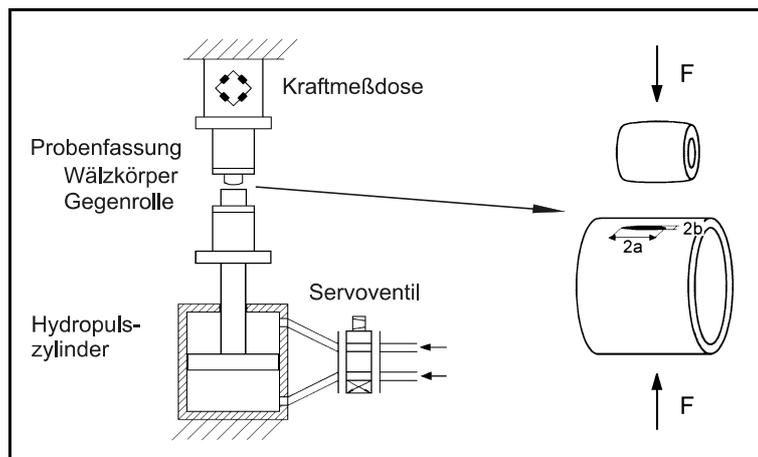
### 7.3 Vergleich: Lokale Hertzsche Pressung - umlaufende Hertzsche Pressung

Im folgenden soll das im Kapitel 6 vorgeschlagene Berechnungsmodell zur Berechnung der Werkstoffanstrengung bei unterschiedlichen Arten der Oberflächenbelastung angewendet werden. Als Grundlage hierzu dienen die Versuche von Hähl [41]. Hähl [41] untersuchte das Verformungs- und Versagensverhalten hochfester Werkstoffzustände

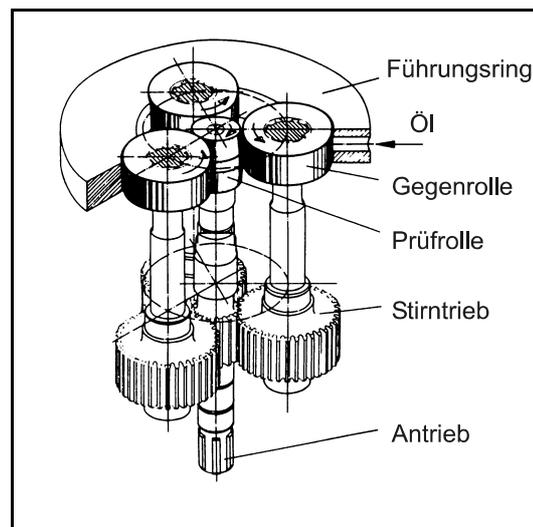
des durchhärtenden Wälzlagerstahls 100 Cr 6 bei verschiedenen Werkstoffbeanspruchungen. Neben Untersuchungen mit homogen einachsiger Zug-Druck-Beanspruchung wurde das Verhalten von Bauteilen bei unterschiedlichen Arten der Oberflächenbelastung analysiert. Die zuletzt genannten Versuche sind in den

nachfolgenden Betrachtungen von Interesse und sollen daher zunächst kurz erläutert werden. Mit „**lokaler Hertzscher Pressung (LHP)**“ wird diejenige Belastungsart bezeichnet, bei der zwei Bauteile (Rollkörper) stets an der selben Berührstelle gegeneinander gedrückt werden. Zeitlich kann die Oberflächenbelastung entweder konstant sein oder zyklisch variieren. Das **Bild 43** zeigt den von Hähl [41] verwendeten Prüfstand. Rechts im Bild 43 sind beide Rollen, die jeweils ohne Roll- bzw. Wälzbewegung mit der Prüfkraft  $F$  zusammengedrückt werden, vergrößert dargestellt. Zur

Untersuchung des Verformungs- und Versagensverhaltens in Wälzkontakten wurden von Hähl [41] außerdem Versuche mit sogenannter „**umlaufender Hertzscher Pressung (UHP)**“ durchgeführt. Hier



**Bild 43:** schematische Darstellung der servohydraulischen Prüfmaschine zur Durchführung der lokalen Hertzschen Preßversuche [41]

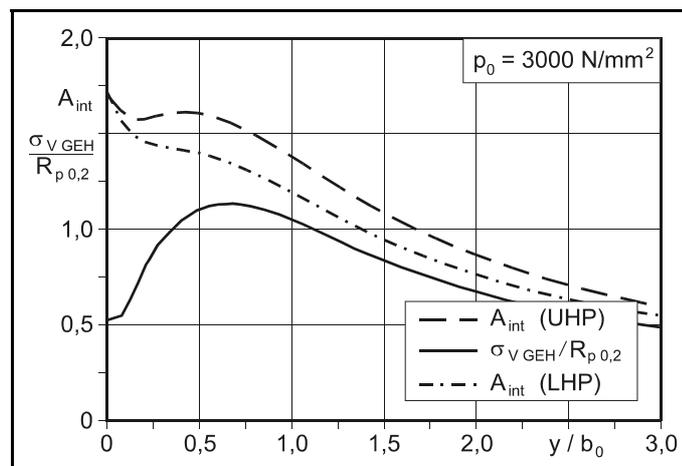


**Bild 44:** prinzipieller Aufbau des Prüfkopfes des ZF-Rollenprüfstands [41]

erfolgte die Beanspruchung der Rollen, die die gleiche Geometrie wie die Rollen bei den Untersuchungen mit LHP aufwiesen, praxisnah mittels geschmierten, schlupffreien oder schlupfbehafteten Überrollungsversuchen in einem ZF-Rollenprüfstand (**Bild 44**). Bei den Versuchen lag jeweils Punktberührung (Achsenverhältnis  $k \cdot 6$ ) bei einer maximalen Hertzchen Pressung von  $p_0 = 3000 \text{ N/mm}^2$  im Falle von UHP bzw. von  $p_0 = 3000 - 8000 \text{ N/mm}^2$  im Falle von LHP vor. Die Werkstoffanstrengung der Wälzkörper im Rollenprüfstand entspricht insbesondere in der Mitte der Berührung trotz Punktkontakt prinzipiell derjenigen, der auch der Werkstoff im Zahnflankenkontakt ausgesetzt ist [vgl. 47].

Die von Hähl [41] untersuchten Wärmebehandlungszustände des 100 Cr 6 zeigen bei den unterschiedlichen Belastungsarten LHP und schlupffreier UHP vergleichbares bzw. ähnliches Verformungsverhalten. Die im Bereich des Kontaktmittelpunktes nach einer Lastspielzahl von  $N = 10^7$  gemessenen Eigenspannungs- und Integralbreitentiefenverläufe sind bei beiden Belastungsarten sehr ähnlich. Nachrechnungen der Werkstoffanstrengungen mit der GEH zeigen, daß sich die Tiefenlagen der während der Bean-

spruchung entstehenden Druckeigenspannungsmaxima mit den Tiefenlagen der Maximalwerte der Vergleichsspannung unter Berücksichtigung der jeweiligen Ausgangseigenspannungen korrelieren lassen [41]. Die Beurteilung der maximalen Werkstoffanstrengung mit Hilfe der Maximalwertbetrachtung führt nach Hähl [41] damit zu zufriedenstellenden Ergebnissen. Diese Aussage wird durch die Resultate von Ilg [54], Schreiber [115] und Voskamp [137] bekräftigt (vgl. Kapitel 2). Im **Bild 45** sind die Tie-

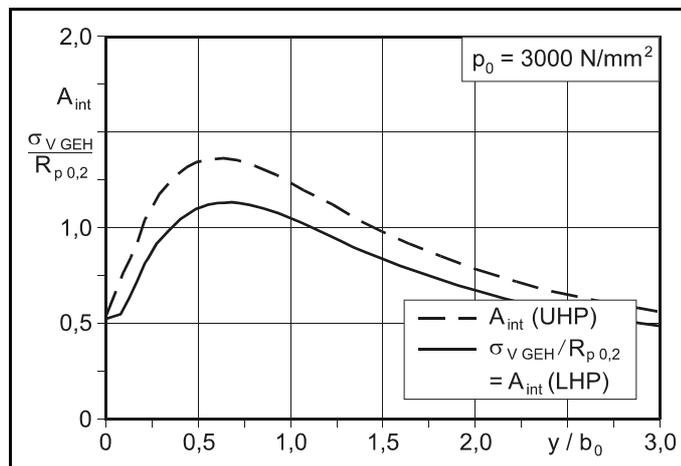


**Bild 45:** Bewertung der maximalen Werkstoffanstrengung mit Hilfe der  $SIH_{max}^*$  ( $A_{int}$ ) nach Gleichung (31) und Gleichung (30) mit  $\tau_w / \sigma_w = 0,6$  sowie nach der GEH für Punktkontakt  $k \cdot 6$ ,  $p_0 = 3000 \text{ N/mm}^2$ ,  $z / a = 0$  (Rollengeometrie [41], Werkstoff: 100 Cr 6, bainitischer Zustand),  $\sigma_E$  im Ausgangszustand; LHP:  $x / b_0 = 0$

fenverläufe der örtlichen maximalen Werkstoffanstrengung (örtliche, maximale Beanspruchung / örtliche statische Beanspruchbarkeit) nach der  $SIH_{max}^*$  ( $A_{int}$ , Kapitel 5, Gleichung (31)) sowie nach der GEH für die von Hähl [41] verwendeten Rollen aus 100 Cr 6 im bainitischen Zustand und den beiden Belastungsarten LHP

sowie UHP gegenübergestellt. Bei LHP wird die statische Werkstoffanstrengung in der Kontaktmitte und bei UHP entlang der kleinen Halbachse  $b$  bzw.  $b_0$  ( $z/a = 0$ ) der Berührfläche betrachtet. Zur Berechnung wurde als Härte 720 HV (61 HRC) und das Verhältnis  $\tau_w / \sigma_w$  nach [48] zu 0,6 abgeschätzt. Als Eigenspannungen liegen den Berechnungen diejenigen des Ausgangszustandes zugrunde. Da sich nach der GEH aufgrund der Maximalwertbetrachtung gleiche Tiefenverläufe für die unterschiedlichen Belastungsarten LHP und UHP ergeben, ist aus diesem Grund im Bild 45 für die GEH nur ein Verlauf eingetragen. Mit der  $SIH_{\max}^*$  resultieren im Vergleich zur Bewertung mit der GEH, insbesondere an der Oberfläche und im oberflächennahen Bereich wesentlich größere maximale Werkstoffanstrengungen. Dies ist unter anderem in der Annahme des Verhältnisses  $\tau_w / \sigma_w$  und der Annahme von  $R_{dp0,2}$  (Kapitel 5) begründet.

Im **Bild 46** sind für die gleichen Bedingungen wie im Bild 45 nochmals die maximalen Werkstoffanstrengungen mit Hilfe der Gleichung (31) über der Werkstofftiefe für LHP und UHP, jedoch mit  $a = 1$  und  $b = 0$  in der Gleichung (30) eingetragen. Die so berechnete maximale Werkstoffanstrengung wird im folgenden zur Abgrenzung zu der im Bild 45 berechneten maximalen Werkstoffanstrengung mit  $SIH_{\max 2}^*$  bezeichnet. Für LHP entsprechen sich die berechneten maximalen Werkstoffanstrengungen nach der GEH



**Bild 46:** Bewertung der maximalen Werkstoffanstrengung mit Hilfe der  $SIH_{\max 2}^*$  ( $A_{\text{int}}$ ) nach Gleichung (31) und Gleichung (30) mit  $a = 1$ ,  $b = 0$  sowie nach der GEH für Punktkontakt  $k \cdot 6$ ,  $p_0 = 3000 \text{ N/mm}^2$ ,  $z/a = 0$  (Rollengeometrie [41], Werkstoff: 100 Cr 6, bainitischer Zustand),  $\sigma_E$  im Ausgangszustand; LHP:  $x/b_0 = 0$

und der  $SIH_{\max 2}^*$ . Im Gegensatz zur GEH werden die maximalen Werkstoffanstrengungen durch die  $SIH_{\max}^*$  und durch die  $SIH_{\max 2}^*$  bei LHP und UHP unterschiedlich bewertet, da bei Wälzbelastung (UHP) infolge der Betrachtung aller maximalen Anstrengungen in den Schnittebenen über der Beanspruchungszeit, d.h. entlang der Wälzachse, eine höhere integrale Werkstoffanstrengung vorliegt als bei LHP. Dieser rechnerisch ermittelte Unterschied steht im Einklang mit den von Hähl [41, S. 161 und S. 200] ermittelten Druckeigenspannungsänderungen, die bei schlupffreier UHP und maximaler Hertzscher Pressung  $p_0 = 3000 \text{ N/mm}^2$  schon nach

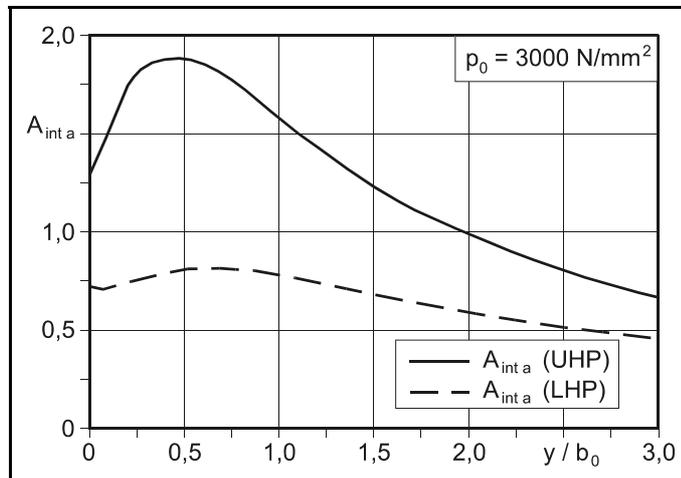
wenigen Belastungszyklen etwas größer ausfallen als bei LHP mit der gleichen Belastung. Der Vergleich der mit der  $SIH^*_{max}$  und  $SIH^*_{max 2}$  berechneten Werkstoffanstressungen mit denen nach der GEH ermittelten deutet in Verbindung mit der im Kapitel 5 getroffenen Annahme für  $R_{dp0,2}$  auf eine Überbewertung der maximalen Normalspannungen in Hertzschen Kontakten durch die  $SIH^*_{max}$  hin. Plausibler erscheinen bzgl. der maximalen Werkstoffanstressungen die Berechnungsergebnisse mit der  $SIH^*_{max 2}$ , weshalb diese im weiteren zur Beurteilung der maximalen Werkstoffanstressung  $A_{int}$  in Hertzschen Kontakten herangezogen wird. Durch dieses Vorgehen widersprechen die mit dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Berechnungsmodell ermittelten maximalen Werkstoffanstressungen prinzipiell nicht den Ergebnissen von Hähl [41], Ilg [54], Schreiber [115] und Voskamp [137].

Im Gegensatz zum Verformungsverhalten zeigen die von Hähl [41] untersuchten Wärmebehandlungszustände des 100 Cr 6 unterschiedliches Versagensverhalten bei LHP und UHP. Bei LHP versagen die untersuchten Prüfkörper durch Rißbildung infolge plastischer Deformation. Die Risse entstehen an den Kontaktträgern entlang der großen Halbachse und wachsen von der Oberfläche her in die Werkstofftiefe. Oberflächenausbrüche konnten bei LHP nicht festgestellt werden. Nachrechnungen von Hähl [41] mit der Finiten Elemente Methode und den realen Werkstoffkennwerten für Bainit zeigen bei LHP und einer Hertzschen Pressung von  $p_{0 LHP} = 5000 \text{ N/mm}^2$  für die Ränder der Kontaktfläche schon nach einem Lastwechsel den Aufbau von hohen Zugeigenspannungen in tangentialer Richtung ( $1000 \text{ N/mm}^2$ ) und aufgrund des bei der Berechnung angenommenen ebenen Formänderungszustandes Zugeigenspannungen in axialer Richtung von ca.  $300 \text{ N/mm}^2$ . In der Nähe des Kontaktmittelpunktes liegen Druckeigenspannungen vor. Nach Hähl [41] entstehen die Zugeigenspannungen durch die Kopplung des sich plastisch verformenden Bereiches unter der Kontaktfläche mit dem sich rein elastisch verformenden Umgebungsbereich. Diese Aussage wird durch die gemessenen Abmessungsänderungen der Kontaktellipsenachsen bestätigt. Bei der Belastungsart UHP bestimmen, wie aus Untersuchungen des Ausfallverhaltens von Wälzlagern und Zahnradern bekannt, neben der Belastungshöhe auch die vorliegenden Schmierungsverhältnisse das Ausfallverhalten [41].

Die Tiefenverläufe der dynamischen Werkstoffanstressungen nach der  $SIH^*_{dyn}$  sind im **Bild 47** für die Belastungsarten LHP und UHP dargestellt. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die Berechnungen im Bild 45. Des weiteren wurden die von Hähl [41] für den bainitischen Zustand ermittelten Dauerfestigkeiten in Abhän-

gigkeit von der Mittelspannung berücksichtigt [41, S. 120]. Da bei LHP Lastmittel- und Eigenspannungen gleichermaßen über der gesamten Beanspruchungsdauer wirken, sind in diesem Fall beide Mittelspannungsanteile in der Berechnung der

zulässigen örtlichen Beanspruchbarkeit enthalten. Die Berechnung für UHP erfolgt wie im Kapitel 6 beschrieben und ist für die Belastung im Rollenprüfstand eher eine auf der ungünstigeren Seite liegende Abschätzung, da entsprechend dem Vorgehen bei Zahnrädern von einem im Vergleich zur Erholungsphase sehr kurzem Belastungsimpuls ausgegangen wird. Wie aus dem Bild 47 zu entnehmen, resultiert unter den oben aufgeführten Annahmen nach der  $SIH^*_{dyn}$  eine größere dynamische Werkstoffan-



**Bild 47:** Bewertung der dynamischen Werkstoffanstrengung mit Hilfe der  $SIH^*_{dyn}$  ( $A_{int a}$ ) nach Gleichung (29) für Punktkontakt  $k \cdot 6$ ,  $p_0 = 3000 \text{ N/mm}^2$ ,  $z/a = 0$  (Rollengeometrie [41], Werkstoff: 100 Cr 6, bainitischer Zustand),  $\sigma_E$  im Ausgangszustand; LHP:  $y/b_0 = 0$

streuung für UHP als für LHP. Bei dem Vergleich ist darauf hinzuweisen, daß aufgrund des Überschreitens der zulässigen maximalen Werkstoffanstrengung und dem dadurch resultierenden Druckeigenspannungsaufbau die für die Berechnung im Bild 47 zugrunde gelegten Bedingungen nur für den ersten Lastzyklus Gültigkeit besitzen. Wie die nachfolgenden Berechnungen für Zahnflankenkontakte zeigen, werden bei der Bewertung der dynamischen Werkstoffanstrengung mit  $\tau_w / \sigma_w$  im Bereich von 0,6 zufriedenstellende Ergebnisse bzgl. der Größe und des Verlaufes der Anstrengung über der Werkstofftiefe erzielt. Eine Änderung der Berechnung von  $A_{int a}$  für Hertzsche Kontakte scheint daher nicht angebracht.

Zusammen mit den geschilderten theoretischen und experimentellen Untersuchungsergebnissen von Hähl [41] lassen sich mit der  $SIH^*$  die Aussagen, daß die Belastungsarten LHP und UHP ähnliches Verformungs-, aber unterschiedliches Versagensverhalten besitzen, rechnerisch nachvollziehen. Aufgrund der sich nach der  $SIH^*$  ergebenden geringen dynamischen und der gleichzeitig hohen maximalen Werkstoffanstrengung läßt sich ebenfalls erklären, weshalb bei LHP in der Kontaktfläche keine Werkstoffausbrüche entstehen sondern die Probenkörper durch Anrißbildung am Kontaktrand infolge plastischer Deformation ausfallen. Es ist

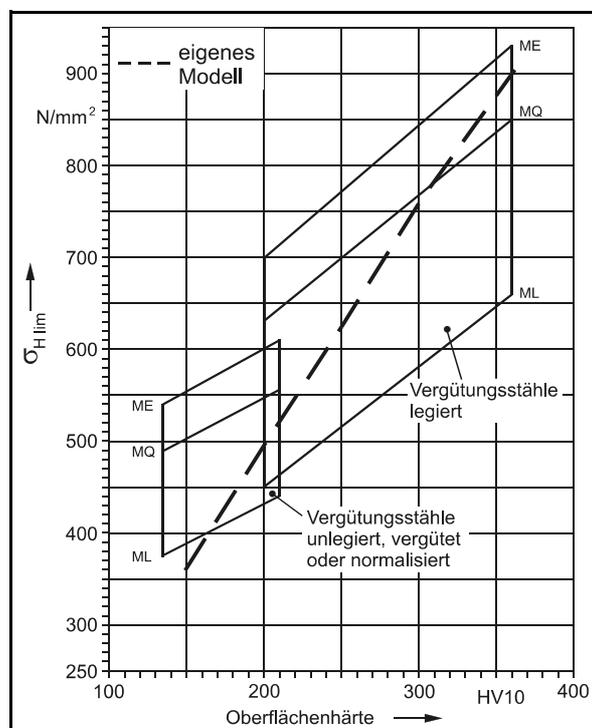
entsprechend HähI [41] davon auszugehen, daß der Aufbau von Zugeigenspannungen am Kontaktrand und die dort vorliegenden geringeren Lastmittelspannungen dies zusätzlich unterstützen. Weitere Berechnungen sind aufgrund fehlender Eigenspannungstiefenverläufe, der sich ändernden Kontaktgeometrie und insbesondere aufgrund der mit dem Aufbau der hohen Zugeigenspannungen einhergehenden Änderung des Werkstoffverhaltens in diesem Bereich weder mit der GEH noch mit der  $SIH^*$  sinnvoll. Insgesamt kann festgestellt werden, daß

- C mit der  $SIH^*$  sowohl die maximale als auch die dynamische Werkstoffanstrengung für die beiden Belastungsarten LHP und UHP bewertet werden können.
- C im Gegensatz zur Bewertung mit der GEH unterschiedliche Werkstoffanstrengungen für die Belastungsarten LHP und UHP erhalten werden.
- C das experimentell ermittelte Verformungs- sowie Versagensverhalten prinzipiell mit den jeweils für LHP und UHP berechneten Tiefenverläufen der Werkstoffanstrengung ( $SIH^*_{max2}$ , s. S. 87 u.  $SIH^*_{dyn}$ , s. S. 54) nachvollzogen werden kann.

## 7.4 Nachrechnung der Grübchentragfähigkeit von Zahnrädern

### 7.4.1 Vergleich mit Grübchentragfähigkeiten nach DIN 3990, Teil 5

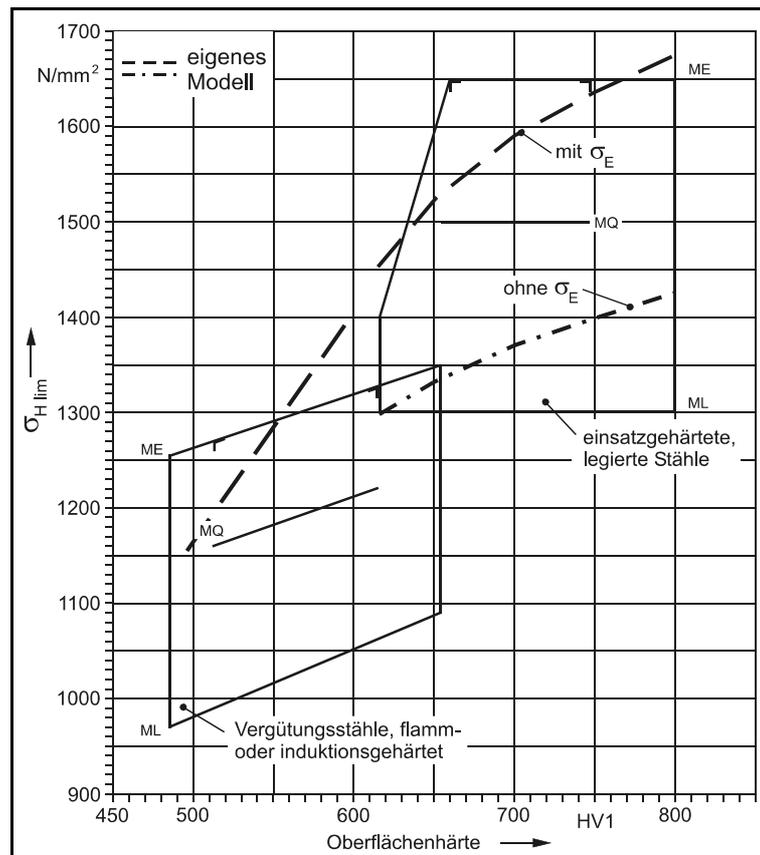
Analog zu den Festigkeitsfeldern für die Zahnfußtragfähigkeit werden in DIN 3990 Teil 5 [1] Festigkeitsfelder für die Grübchentragfähigkeit von Verzahnungen aus verschiedenen Werkstoffen bzw. aus Werkstoffen, die mit unterschiedlichen Methoden wärmebehandelt sind, angegeben. Nachfolgend wird die mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Modell berechnete Grübchentragfähigkeit mit der durch die Festigkeitsfelder in DIN 3990 Teil 5 [1] angegebenen Grübchentragfähigkeit verglichen. Für die Berechnung wird jeweils von einer Hertzschen Normalbelastung und einer der Normalbelastung proportionalen Schubdruckbelastung mit  $\mu = 0,04$ , d.h. von elasto-hydrodynamischen Bedingungen, aus-



**Bild 48:** Vergleich von berechneten Grübchentragfähigkeiten mit Tragfähigkeiten nach DIN 3990 Teil 5 [1]

gegangen. Wärmespannungen sind bei den Berechnungen vernachlässigt. Die berechneten Grübchentragsfähigkeiten für unlegierte, vergütete oder normalisierte sowie für legierte Vergütungsstähle sind im **Bild 48** zum Vergleich in die entsprechenden Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] eingetragen. Bei den unlegierten Vergütungsstählen decken die berechneten Tragsfähigkeiten den unteren und bei den legierten Vergütungsstählen den mittleren bis oberen Bereich des jeweiligen Festigkeitsfeldes ab.

Zur Berechnung der Grübchentragsfähigkeit von Verzahnungen aus induktiv gehärtetem Werkstoff wurden neben den oben aufgeführten Vorgaben Eigenstressen in der Höhe von  $-100$  bis  $-150$  N/mm<sup>2</sup> sowie ausreichende Härte-tiefen angenommen. Der Vergleich mit dem entsprechenden Festigkeitsfeld der DIN 3990 Teil 5 [1] ist im **Bild 49** zu sehen. Daraus ist zu entnehmen, daß die rechnerisch ermittelten Tragsfähigkeiten Werte im oberen Bereich des Festigkeitsfeldes oder sogar darüber annehmen. Die Berechnung der Trag-



**Bild 49:** Vergleich von berechneten Grübchentragsfähigkeiten mit Tragfähigkeiten nach DIN 3990 Teil 5 [1] (randschichtverfestigt)

fähigkeiten einsatzgehärteter, legierter Stähle erfolgte auf der Grundlage der nach Lang (Gleichung (6)) berechneten Eigenstressen sowie der Annahme einer ausreichenden Einsatzhärte-tiefe und einer Kernhärte von etwa 400 HV. Die mit dem Modell aus dem Kapitel 6 ermittelten Tragsfähigkeiten liegen ebenfalls im oberen Bereich des Festigkeitsfeldes der DIN 3990 Teil 5 [1] (s. Bild 49). Bei allen oben dargestellten Vergleichen werden elastohydrodynamische Schmierverhältnisse, d.h. keine metallischen Berührungen der Flanken, keine erhöhte Normalbelastung der Flanke durch eine zweite Druckspitze des EHD-Druckverlaufes, geringe Wärmebelastungen der Flanken, äußerst reine Werkstoffe sowie ausreichend

dimensionierte Zahnquerschnitte zur Vermeidung von Flankenbrüchen vorausgesetzt. Abweichungen hiervon führen, wie dies zum Teil auch aus der Berechnung nach DIN 3990 [1] hervorgeht, zu verminderten Grübchentragfähigkeiten. Die berechneten Werte stellen bei den vorgegebenen Eigenspannungszuständen somit eine obere Grenze der Tragfähigkeiten dar. Zur Abschätzung des Einflusses von Druckeigenspannungen sind im Bild 49 für einsatzgehärtete Stähle zusätzlich die theoretischen Tragfähigkeiten in Abhängigkeit der Oberflächenhärte bei verschwindenden Eigenspannungen eingetragen. Für diesen Fall nimmt die Grübchentragfähigkeit stark ab und erreicht Werte im unteren bis mittleren Bereich des entsprechenden Festigkeitsfeldes der DIN 3990 Teil 5 [1]. Aus dieser theoretischen Betrachtung läßt sich folgern, daß die Eigenspannungen neben der Oberflächenhärte einen wichtigen Einflußparameter auf die Grübchentragfähigkeit darstellen. Experimentelle Untersuchungen [z.B. 132] bestätigen diese Aussage. Bei allen vorher dargestellten Berechnungen liegt die maßgebende Werkstoffanstrengung unter der Oberfläche. Die Tiefenlage ist dabei insbesondere vom Eigenspannungstiefenverlauf abhängig. Wie sich die maximale Werkstoffanstrengung durch den Kontakt technischer Oberflächen bei schlechten Schmierungsverhältnissen an die Oberfläche verlagert und welchen rechnerischen Einfluß dies auf die Flankentragfähigkeit besitzt, wird im nächsten Kapitel näher erläutert.

#### 7.4.2 Vergleich mit Grübchentragfähigkeitsuntersuchungen

Die Betrachtungen im vorhergehenden Abschnitt ergaben, daß sich die mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Modell berechneten Grübchentragfähigkeiten unter der Vorgabe von allgemeinen Härte- und Eigenspannungstiefenverläufen gut in die Tragfähigkeiten nach DIN 3990 Teil 5 [1] einordnen lassen. Im folgenden Abschnitt werden Ergebnisse aus Grübchentragfähigkeitsuntersuchungen unter der expliziten Vorgabe der experimentell ermittelten Härtewerte und der Eigenspannungstiefenverläufe ebenfalls mit dem Berechnungsmodell aus dem Kapitel 6 nachgerechnet. Es ist zu prüfen, ob auch in diesen Fällen eine gute Übereinstimmung vorliegt. In der **Tabelle 10** sind Ergebnisse von versuchsbegleitenden Untersuchungen sowie die jeweils im FZG-Verspannungsprüfstand [s. z.B. 132, S. 60] ermittelten Grübchentragfähigkeiten für Versuchsvarianten von Elstorpff [30], Knauer [69] und Tobie [132] aufgeführt. Von Knauer [69] wird diejenige Variante, für die Eigenspannungsmessungen [69, S. 105] vorliegen, nachgerechnet. Aus der Arbeit von Elstorpff [30] werden die Grundvarianten mit angegebenen Eigenspannungsmessungen [30, S. 24 f] für die Berechnung herangezogen. Die Auswahl der Versuchsvarianten aus der Arbeit von Tobie [132] beschränkt sich auf die Varian-

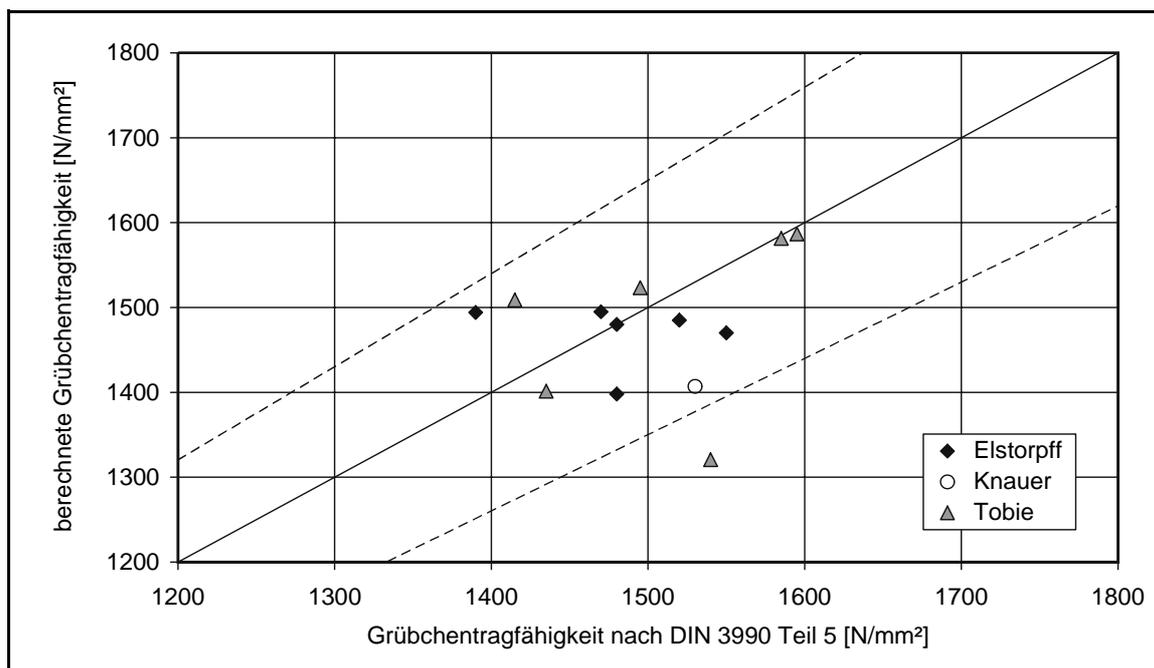
ten, die in der Arbeit selbst mit einem Berechnungsmodell unter Angabe der für die Berechnung verwendeten Härte- und Eigenspannungstiefenverläufe nachvollzogen werden. Die Ergebnisse zu den Eigenspannungsmessungen befinden sich in [132, S. 100 ff und S. 138 ff]. In allen Berechnungen wurde jeweils ein der Normalbelastung proportionaler Schubdruckverlauf mit  $\mu = 0,04$  angenommen.

Quelle	Variante	Werkstoff	Härteangaben			$\sigma_{H \text{ lim } 1\%}$	
			OH [HV1]	KH [HV10]	Eht [mm]	Versuch [N/mm <sup>2</sup> ]	Rechnung [N/mm <sup>2</sup> ]
Elstorpff	A1	16 MnCr 5	735	. 400	1,25	1550	1470
	A2	16 MnCr 5	705	. 400	1,75	1480	1398
	B1	17 CrNiMo 6	705	. 430	1,15	1390	1494
	C1	17 CrNiMo 6	720	. 470	1,3	1520	1485
	C2	17 CrNiMo 6	725	. 470	0,75	1470	1495
	D1	17 NiCrMo	690	. 400	1,3	1480	1480
Knauer	Öl-Nr. 13, $\vartheta_E = 60 \text{ °C}$	16 Mn Cr 5	765	380	1,3	1530	1407
Tobie	2081-1	16 MnCr 5	708	346	0,36	1435	1401
	2081-3	16 MnCr 5	745	390	0,88	1585	1581
	2081-4	16 MnCr 5	698	340	1,95	1540	1321
	2051-1	16 MnCr 5	690	382	0,35	1415	1509
	2051-2	16 MnCr 5	767	373	0,84	1595	1586
	2051-3	16 MnCr 5	753	403	1,63	1495	1523
OH - Oberflächenhärte, KH - Kernhärte, Eht - Einsatzhärtungstiefe (Flanke) $\sigma_{H \text{ lim } 1\%}$ gemäß DIN 3990 Teil 5 [1]							

**Tabelle 10:** Vorgaben und Ergebnisse zu Grübchentragfähigkeitsversuchen von Elstorpff [30], Knauer [69] und Tobie [132] sowie die mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Modell berechneten Grübchentragfähigkeiten

Die Nachrechnung von den im Versuch ermittelten Tragfähigkeiten  $\sigma_{H \text{ lim } 1\%}$  nach DIN 3990 Teil 5 [1] mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Berechnungsmodell führt, wie die Vergleiche in der Tabelle 10 und im **Bild 50** zeigen, ebenfalls zu einer guten Übereinstimmung. Bis auf die Variante 2081-4 aus den Untersuchungen von Tobie [132] liegen die Abweichungen unter  $\pm 10 \%$ . Die Variante 2081-4 weist dagegen eine Abweichung von etwa 14 % auf. Beim Vergleich der jeweiligen Eigenspannungstiefenverläufe fällt auf, daß es sich bei der Variante 2081-4 um die einzige Variante handelt, bei der unmittelbar unter der Oberfläche deutliche Zug-

eigenstressungen (etwa 150 - 200 N/mm<sup>2</sup>) gemessen wurden. Obwohl Zugeigenstressungen im oberflächennahen Bereich bei einsatzgehärteten Zahnrädern eher ungewöhnlich sind und geringe Tragfähigkeiten vermuten lassen (s. Bild 24), scheinen sich die Zugeigenstressungen im Versuch nicht so negativ wie rechnerisch ermittelt auszuwirken. So wurde bei der Variante 2081-4 dennoch eine Tragfähigkeit im Mittelbereich des Festigkeitsfeldes nach DIN 3990 Teil 5 [1], entsprechend einer Werkstoffqualität MQ, bestimmt. Auf den Einfluß der Zugeigenstressungen bei dieser Variante wird im folgenden noch näher eingegangen.



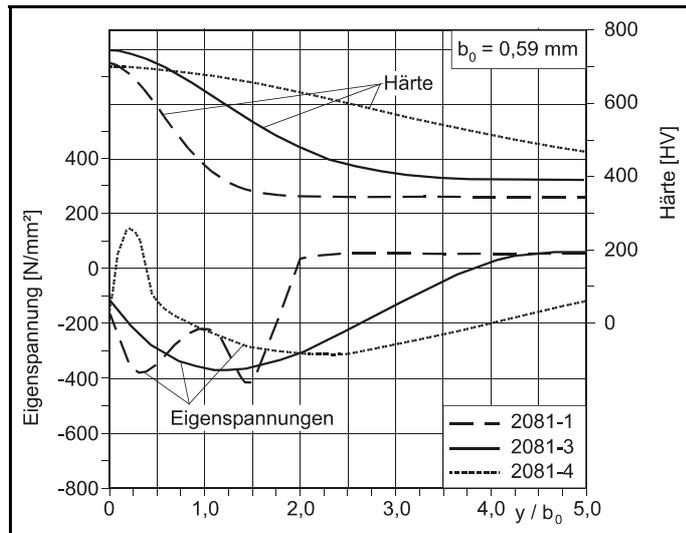
**Bild 50:** Vergleich von im Versuch ermittelten und entsprechend DIN 3990 Teil 5 [1] umgewerteten Grübchentrugfähigkeiten mit den berechneten Grübchentrugfähigkeiten (Berechnungsmodell s. Kapitel 6); Vorgaben s. Tabelle 10 und Elstorpff [30], Knauer [69] sowie Tobie [132]; - - - - : ± 10 % Grenzen

Bei allen nachgerechneten Varianten lagen die maßgebenden maximalen dynamischen Werkstoffanstressungen unter der Oberfläche. Für einige aus der Tabelle 10 exemplarisch ausgewählte Varianten und den oben beschriebenen Vorgaben sind nachfolgend die Tiefenverläufe der Werkstoffanstressungen aufgezeigt. Um zu überprüfen, ob sich mit Hilfe des vorgeschlagenen Berechnungsmodells aus den ermittelten Anstressungstiefenverläufen rechnerisch die aufgetretenen Schadensformen ableiten lassen, werden jeweils die rechnerisch ermittelten mit den im Versuch beobachteten Schadensformen verglichen.

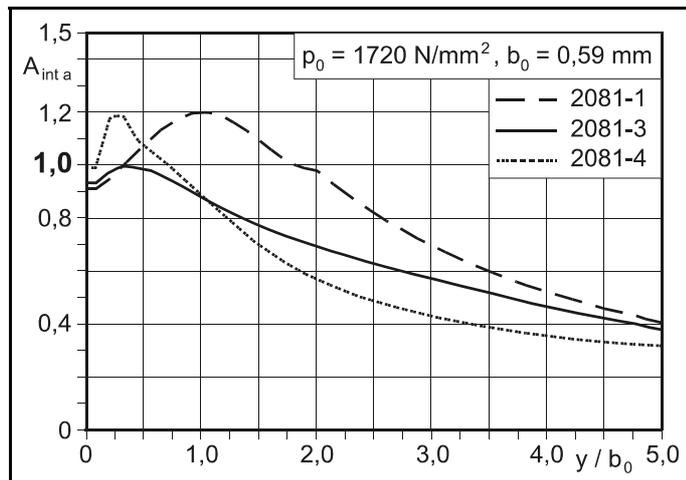
Im **Bild 51** sind die Härte- und die Eigenspannungstiefenverläufe für die Varianten 2081-1, 2081-3 und 2081-4 aus den Untersuchungen von Tobie [132] dargestellt. Die Eigenspannungstiefenverläufe wurden bei den Varianten 2081-1 und 2081-3 bis in eine Tiefe von 1 mm und bei der Variante 2081-4 bis in eine Tiefe von ca. 0,3 mm Randabstand gemessen. Für größere Tiefen sind die Verläufe von Tobie [132] abgeschätzt worden.

Die mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Berechnungsmodell ermittelten höchsten Werkstoffanstressungen befinden sich bei allen Varianten auf der Flanke knapp unterhalb des Wälzpunktes geringfügig zum Zahnfuß hin verschoben. Im

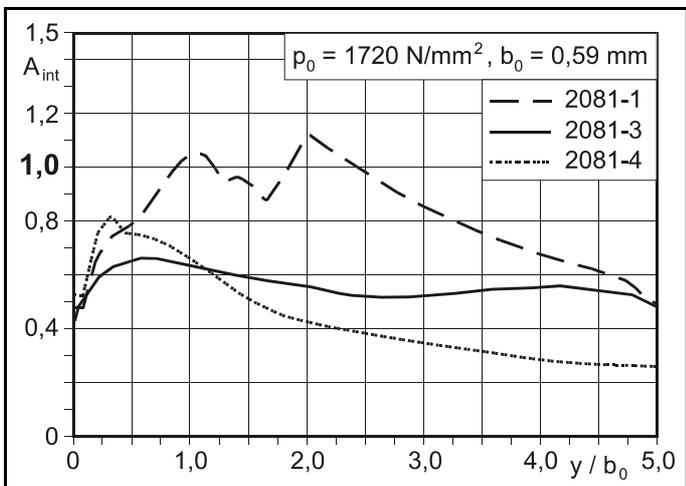
**Bild 52** sind die dynamischen Werkstoffanstressungen für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit über der Werkstofftiefe aufgetragen. Die maximalen Anstressungen hierzu befinden sich im **Bild 53**. Bei der nominellen Hertzschen Pressung von  $p_0 = 1720 \text{ N/mm}^2$  erreicht die Variante 2081-3 gemäß den Berechnungen etwa die Tragfähigkeitsgrenze, da die größte dynamische Werkstoffanstressung  $A_{\text{inta}}$  unter der Oberfläche ca. 1 be-



**Bild 51:** Vorgaben für Varianten 2081-1, 2081-3, 2081-4 nach Tobie [132]



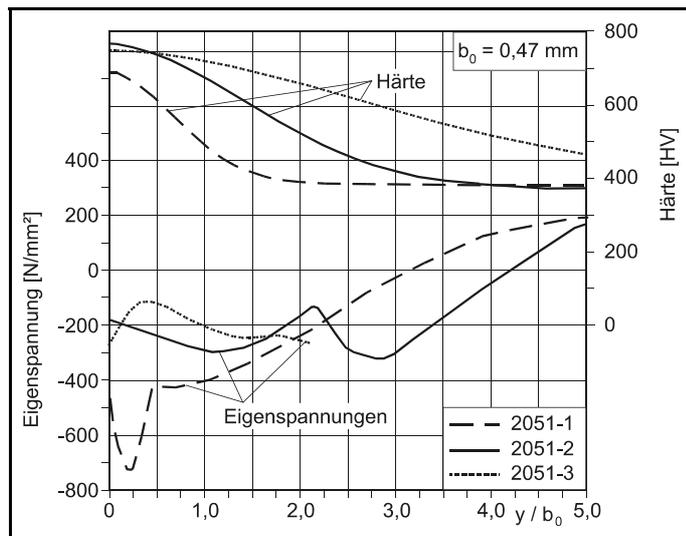
**Bild 52:** dynamische Werkstoffanstressung (50 % AW) (2081-1, 2081-3, 2081-4, s. [132])



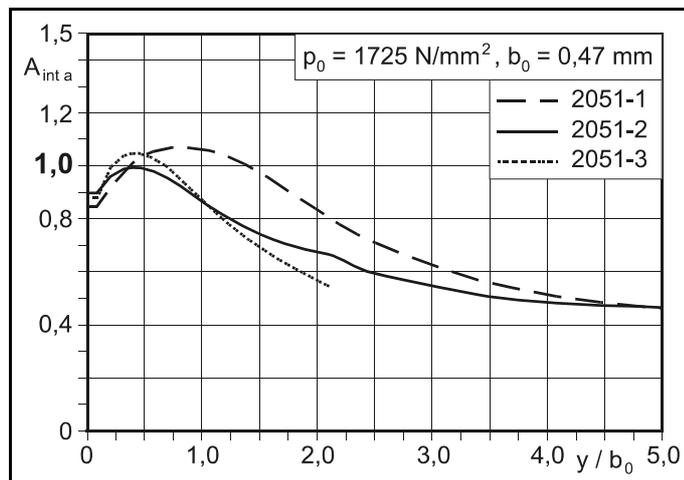
**Bild 53:** maximale Werkstoffanstressung (50 % AW) (2081-1, 2081-3, 2081-4, s. [132])

trägt und die maximale Werkstoffanstrengung  $A_{int}$  über dem gesamten Tiefenverlauf unterhalb 1 liegt. Diese Aussage stimmt mit der im Versuch ermittelten Laufzeit von 100 Mio. Lastwechseln (= Grenzlastspielzahl) überein. Durch die oberflächennahen Zugeigenspannungen bei der Variante 2081-4 ergibt sich in diesem Bereich eine hohe dynamische Anstrengung (Bild 52). Deshalb ließe sich auch bei geringeren Zug-eigenspannungsbeträgen im oberflächennahen Bereich das Auftreten von Grübchenschäden im Versuch bei einer Laufzeit von 45 Mio. Lastwechseln (50 % Ausfallwahrscheinlichkeit) noch erklären. Für die Variante 2081-1 mit der geringsten Eht liegen im Bereich von 0,59 mm bzw. 1,18 mm Randabstand hohe dynamische und maximale Werkstoffanstrengungen vor (Bilder 52 und 53). Dies läßt rechnerisch auf die im Versuch aufgetretenen Grübchenschäden sowie Schäden, die im Übergangsbereich zwischen Randschicht und Kern bzw. darunter ihren Ausgang haben (Flankenbrüche, s. S. 18), schließen.

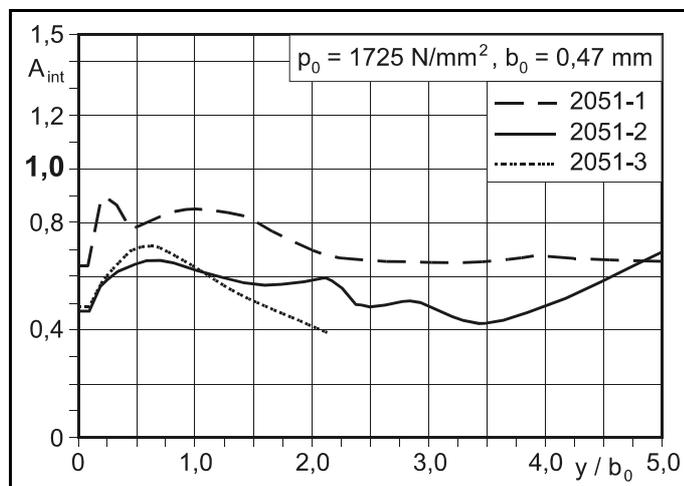
In den **Bildern 54, 55** sowie **56** sind für die Varianten 2051-1,



**Bild 54:** Vorgaben für Varianten 2051-1, 2051-2, 2051-3 nach Tobie [132]



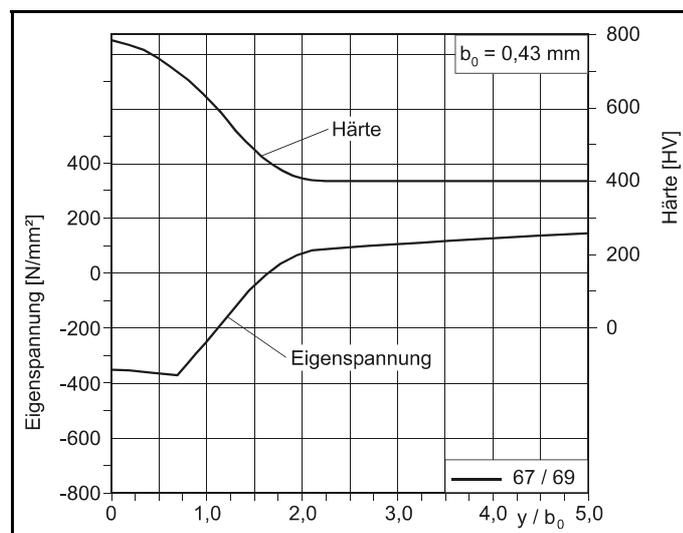
**Bild 55:** dynamische Werkstoffanstrengung (50 % AW) (2051-1, 2051-2, 2051-3, s. [132])



**Bild 56:** maximale Werkstoffanstrengung (50 % AW) (2051-1, 2051-2, 2051-3, s. [132])

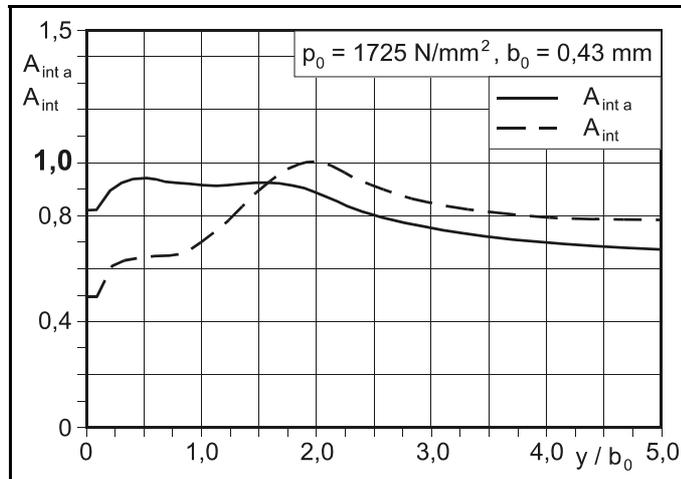
2051-2 und 2051-3, ebenfalls aus den Untersuchungen von Tobie [132], die Vorgaben und die Berechnungsergebnisse für 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit mit dem vorgeschlagenen Berechnungsmodell aufgeführt. In den experimentellen Untersuchungen von Tobie [132] ergaben sich bei der Variante 2051-1 21 Mio., bei der Variante 2051-2 100 Mio. (= Grenzlastspielzahl) und bei der Variante 2051-3 60 Mio. Lastwechsel bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 50 %. Bei der Variante 2051-2 fiel ein Versuch durch Flankenbruch aus. Als Ausfallursachen bei den Varianten 2051-1 und 2051-3 wurden sowohl Grübchen als auch Flankenbrüche festgestellt. Dies bestätigen die in den Bildern 55 und 56 dargestellten Berechnungsergebnisse für die maximal beanspruchten Flankenbereiche des Ritzels knapp unterhalb des Wälzkreises, die für die Varianten in Oberflächennähe bzw. im Übergangsbereich zwischen Eht und Kern maximale dynamische Werkstoffanstressungen  $A_{\text{int a}}$  über 1 ausweisen. Eine Ausfallgefährdung der Variante 2051-2 hinsichtlich Flankenbruch kann trotz erhöhter maximaler Werkstoffanstressung in der Tiefe ca.  $y / b_0 = 5$  nicht nachvollzogen werden. Insbesondere bei der Beurteilung des Schadensverhaltens Flankenbruch ist zu beachten, daß die Eigenspannungstiefenverläufe in größeren Tiefen von Tobie [132] abgeschätzt wurden. So gibt Tobie [132] im Gegensatz zur Variante 2081-1 (Bild 51) bei der Variante 2051-1 (Bild 54) nur einen allmählichen Abfall der Druckeigenspannungen bzw. Aufbau der Zugeigenspannungen vor. Bei einer Abschätzung des Eigenspannungstiefenverlaufs nach Lang (s. Kapitel 3 und Kapitel 6) für die Variante 2051-1, mit über der Tiefe mechanisch in x- und z-Richtung kräftemäßig ausgeglichenen Eigenspannungen, resultieren ähnliche dynamische und maximale Werkstoffanstressungen und damit eine noch größere Übereinstimmung in den Schlußfolgerungen für das Schadensverhalten der beiden genannten Varianten.

Als weitere Erklärungsmöglichkeit für das Auftreten von Flankenbrüchen sind die Einflüsse von Einschlüssen oder Fehlstellen (Ungänzen) zu nennen, die insbesondere bei erhöhter maximaler Werkstoffanstressung zu Anrissen führen können, aber im Berechnungsmodell gemäß Kapitel 6 keine Berücksichtigung finden. Dies kann auch eine Ursache für die Abweichungen zwischen der



**Bild 57:** Vorgaben für die Nachrechnung der Variante 203-1 von Tobie [132]

folgenden Nachrechnung mit dem vorgeschlagenen Berechnungsmodell (s. Kapitel 6) und den Versuchsergebnissen von Tobie [132] bei der Variante 203-1 (Zähnezahlen:  $z_{\text{Ritzel}} = 67$ ,  $z_{\text{Rad}} = 69$ , Modul  $m = 3$  mm,  $\beta = 0^\circ$ ), deren Ausfallursache in den Untersuchungen stets Flankenbruch war, darstellen. In den Bruchflächen dieser Versuchsvariante, bei der aufgrund des Schadensbildes keine Grübchendauerfestigkeit ermittelt werden konnte, wurden immer Störstellen im Werkstoffgefüge deutlich unterhalb der Oberfläche sowie unterhalb der Einsatzhärtungstiefe festgestellt [132]. Die Nachrechnungen für einen Eingriffspunkt des Rades der Variante 203-1 im Bereich des Wälzkreises mit den im **Bild 57** aufgeführten Berechnungsvorgaben sowie unter Annahme eines dem Normaldruck proportionalen Schubruckverlaufs mit  $\mu = 0,04$  bestätigen die offensichtlich vorliegenden großen dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen unterhalb der Einsatzhärtungstiefe (**Bild 58**). Mit dem Berechnungsmodell ist ohne die Berücksichtigung der Kerbwirkung von Störstellen ein Ausfall aber erst bei einer deutlich höheren Belastung nachzuvollziehen. Eine Bestätigung für den großen Einfluß der Störstellen auf die Versuchsergebnisse von Tobie [132] bei dieser Variante stellen Ergebnisse in einem laufenden Vorhaben [20] an dieser Verzahnungsvariante bei gleichen Versuchsbedingungen dar, in dem auch bei höheren Belastungen (nominelle Hertzsche Pressung am Wälzpunkt  $p_c = 1600$  N/mm<sup>2</sup>) keine Schäden weder an noch unter der Oberfläche auftraten. In [12] werden Berechnungen zum Einfluß von Störstellen auf die maximale Werkstoffanstressung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese für den durchhärtenden Wälzlagerstahl 100 Cr 6 dargestellt. Zwar ist aufgrund des durchgehärteten Werkstoffs ein unmittelbarer Vergleich der Berechnungen mit den bei einsatzgehärteten Zahnrädern vorliegenden Bedingungen nicht möglich, die Ergebnisse belegen aber den starken Einfluß von Störstellen. Dieser macht sich offensichtlich insbesondere bei Verzahnungen, bei denen sich hohe dynamische und maximale Werkstoffanstressung über große Tiefenbereiche erstrecken, wie dies bei der Variante 203-1 (s. Bild 58)



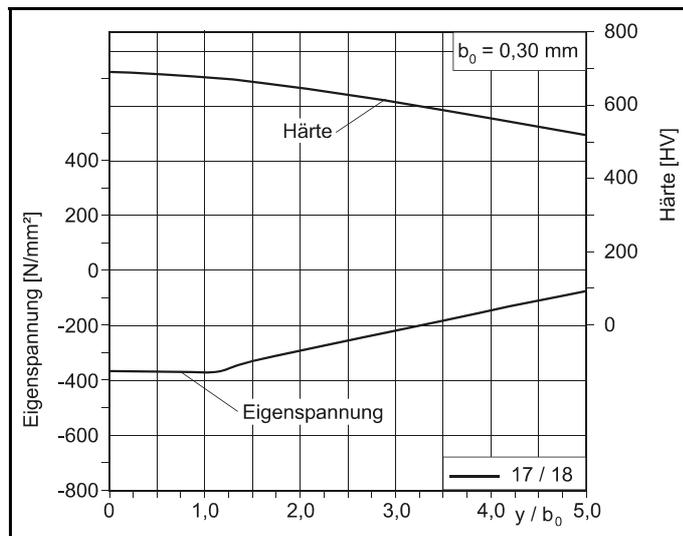
**Bild 58:** Werkstoffanstressung für die Variante 203-1 von Tobie [132], Eingriffspunkt im Bereich des Wälzkreises für das getriebene Rad, 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Nachrechnungen für einen Eingriffspunkt des Rades der Variante 203-1 im Bereich des Wälzkreises mit den im **Bild 57** aufgeführten Berechnungsvorgaben sowie unter Annahme eines dem Normaldruck proportionalen Schubruckverlaufs mit  $\mu = 0,04$  bestätigen die offensichtlich vorliegenden großen dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen unterhalb der Einsatzhärtungstiefe (**Bild 58**). Mit dem Berechnungsmodell ist ohne die Berücksichtigung der Kerbwirkung von Störstellen ein Ausfall aber erst bei einer deutlich höheren Belastung nachzuvollziehen. Eine Bestätigung für den großen Einfluß der Störstellen auf die Versuchsergebnisse von Tobie [132] bei dieser Variante stellen Ergebnisse in einem laufenden Vorhaben [20] an dieser Verzahnungsvariante bei gleichen Versuchsbedingungen dar, in dem auch bei höheren Belastungen (nominelle Hertzsche Pressung am Wälzpunkt  $p_c = 1600$  N/mm<sup>2</sup>) keine Schäden weder an noch unter der Oberfläche auftraten. In [12] werden Berechnungen zum Einfluß von Störstellen auf die maximale Werkstoffanstressung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese für den durchhärtenden Wälzlagerstahl 100 Cr 6 dargestellt. Zwar ist aufgrund des durchgehärteten Werkstoffs ein unmittelbarer Vergleich der Berechnungen mit den bei einsatzgehärteten Zahnrädern vorliegenden Bedingungen nicht möglich, die Ergebnisse belegen aber den starken Einfluß von Störstellen. Dieser macht sich offensichtlich insbesondere bei Verzahnungen, bei denen sich hohe dynamische und maximale Werkstoffanstressung über große Tiefenbereiche erstrecken, wie dies bei der Variante 203-1 (s. Bild 58)

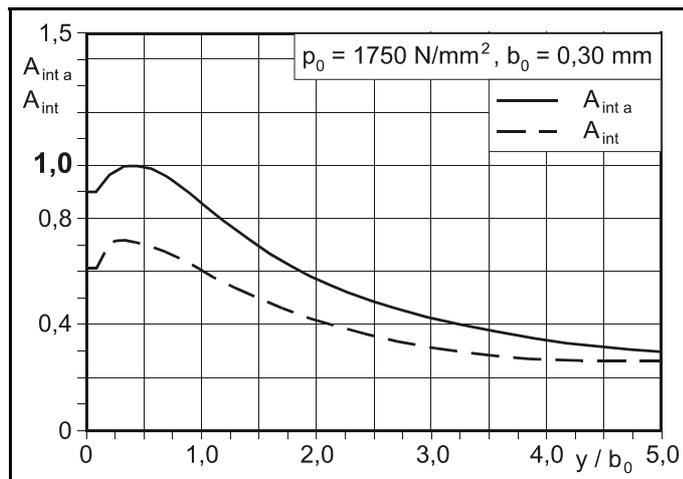
der Fall ist, bemerkbar. Mit den Ergebnissen aus [12] und [20] relativiert sich damit die Aussage zu den Abweichungen zwischen den Versuchsergebnissen von Tobie [132] und der obigen Nachrechnung. Weitergehende experimentelle und theoretische Untersuchungen in [20] haben das Ziel, die Einflüsse auf das Auftreten des Schadensbildes Flankenbruch genauer zu klären, als dies bei den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen möglich ist.

Bei der an der Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) in Grübchentrugfähigkeitsuntersuchungen häufig verwendeten, sogenannten „17 / 18

Verzahnung“ (Verzahnungsgeometrie der Varianten von Elstorpff [30], s. Tabelle 10, Zähnezahlen:  $z_{\text{Ritzel}} = 17$ ,  $z_{\text{Rad}} = 18$ , Modul  $m = 5$  mm,  $\beta = 0^\circ$ ) liegt die höchste Pressung beim Ritzel etwas unterhalb des Wälzkreises im sehr oberflächennahen Bereich. Exemplarisch sei hierzu eine Berechnung unter Vorgabe der nach Lang (s. Kapitel 3 und Kapitel 6) berechneten und über dem Zahnquerschnitt mechanisch ausgeglichenen Eigenspannungen aufgeführt. Die Vorgaben zu den Härte- und Eigenspannungstiefenverläufen sind im **Bild 59** dargestellt. Der Härtetiefenverlauf entspricht demjenigen der Variante D1 (s. Tabelle 10), wobei die Härtetiefe von Elstorpff [30] als „normale“ Eht bezeichnet wird. Durch die Vorgabe von nach Lang berechneten Eigenspannungen ergeben sich an der Oberfläche größere Druckeigenspannungen, die aber im Kern durch größere



**Bild 59:** Vorgaben für „17 / 18 Verzahnung“ (Verzahnungsgeometrie der Varianten von Elstorpff [30], s. Tabelle 10)



**Bild 60:** Werkstoffanstrengungen für „17 / 18 Verzahnung“ (Verzahnungsgeometrie der Varianten von Elstorpff [30], s. Tabelle 10), 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit

Zugeigenspannungen ausgeglichen werden müssen. Bei einem Vergleich der Eigenspannungs- und Härtetiefenverlaufsvorgaben mit denen der Variante 203-1 von Tobie [132] (Bild 57) ist der größere Zahnquerschnitt, die geringere halbe Hertzsche Kontaktbreite und die wesentlich größere Einhärtungstiefe bei dem Kontakt der „17 / 18 Verzahnung“ zu beachten. Bis auf die Eigenspannungen (zur Berücksichtigung von über dem Zahnquerschnitt mechanisch ausgeglichenen Eigenspannungen) werden alle übrigen Vorgaben für die Nachrechnungen der Variante D1 von Elstorpff [30] (s. u.a. Tabelle 10) übernommen.

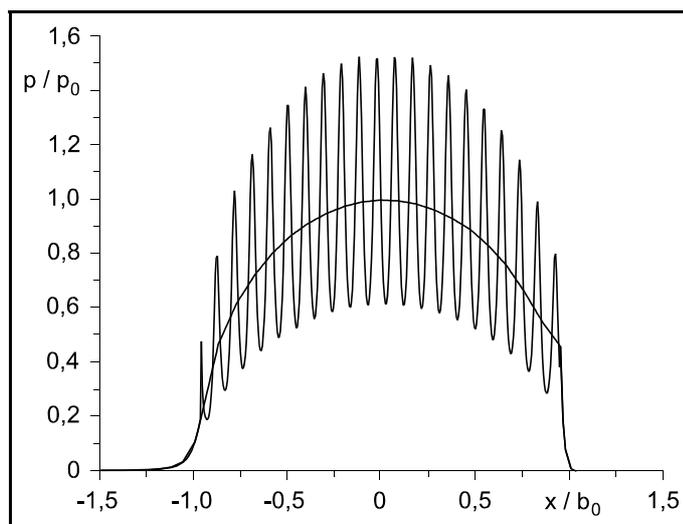
Die für diese Annahmen berechneten Werkstoffanstregungen über der Werkstofftiefe sind im **Bild 60** zu sehen. Durch die Vorgabe von größeren Druckeigenspannungen im oberflächennahen Bereich resultiert eine höhere Grübchentragfähigkeit ( $\sigma_{\text{Hlim } 1 \%} \cdot 1575 \text{ N/mm}^2$ ) als für die Variante D1 von Elstorpff [30] (s. Tabelle 10). Die prinzipiellen Verläufe der Anstregungen über der Werkstofftiefe sind jedoch vergleichbar. Aus dem Bild 60 ist zu entnehmen, daß die maßgebende dynamische Werkstoffanstregung oberhalb von  $y / b_0 = 0,5$  liegt und diese wie auch die maximale Werkstoffanstregung rasch zu größeren Werkstofftiefen hin abfällt. Rechnerisch läßt sich damit das im Versuch bei der „17 / 18 - Verzahnung“ auftretende Schadensbild (Grübchen) gut nachvollziehen. Flankenbrüche ergeben sich nach den Berechnungen nicht. Auch dies stimmt mit der Erfahrung aus Untersuchungen mit der „17 / 18 - Verzahnung“ überein.

## 8 Rechnerische Beurteilung von Einflüssen auf die Flankentragfähigkeit

### 8.1 Einfluß aus dem Kontakt technischer Oberflächen

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Flankentragfähigkeit unter der Annahme eines ideal glatten Wälzkontaktes und elastohydrodynamischen Bedingungen berechnet. Im weiteren soll der Einfluß auf die Flankentragfähigkeit aus dem Kontakt technischer Oberflächen und unzureichender Schmierfilmdicke aufgezeigt bzw. abgeschätzt werden. Welchen Einfluß der Kontakt technischer Oberflächen prinzipiell auf den Spannungszustand und die Beanspruchungen im Wälzkontakt hat, ist bereits im Kapitel 3 dargestellt. Im folgenden Abschnitt wird deshalb aufbauend auf die Aussagen und Definitionen im Kapitel 3 auf die Bewertung der Werkstoffanstrengung im Kontakt technischer Oberflächen mit Hilfe der im Kapitel 5 definierten Festigkeitshypothese  $SIH^*$  eingegangen. Grundlage für die dazu angestellten Berechnungen stellt die im letzten Abschnitt beschriebene „17 / 18 Verzahnung“ [30] dar. Die Betrachtungen erfolgen an demjenigen Flankenbereich mit der höchsten Beanspruchung, für den im Bild 60 (s. S. 99) bereits die dynamische sowie die maximale Werkstoffanstrengung über der Werkstofftiefe aufgeführt sind. Zur Ermittlung der Druckverteilung dient das im Kapitel 3 definierte „zweite Kontaktmodell“ unter der Vorgabe des Schmierstoffs „FVA 3“ ( $v_{40} = 100 \text{ mm}^2/\text{s}$ , weitere Daten s. Elstorpff [30] S. 28), der Doppellamplitude  $t = 1 \text{ }\mu\text{m}$  und des Profilneigungswinkels  $\alpha$

$= 2^\circ$  als Kenngrößen für die Rauheit beider Wälzkörper, der Konstante  $C_{ar} = 0,6$  (s. Seite 33 f) sowie  $60^\circ\text{C}$  Öleinspritztemperatur. Zur Abschätzung der Wellenlänge der Rauheit wird die Gleichung (11) verwendet. Mit diesen Vorgaben stellt sich ähnlich wie bei den Berechnungen zum Bild 18 eine auf die maximale Hertzsche Pressung bezogene maximale Überhöhung  $p / p_0 = 1,5$  ein (**Bild 61**). Bei der Hertzschen Pressung

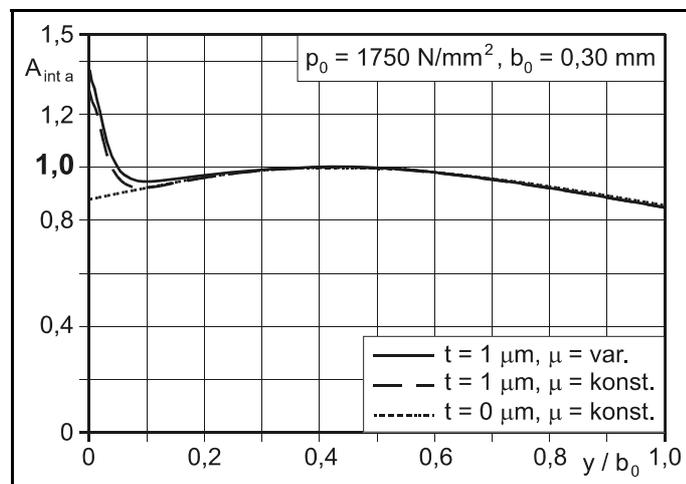


**Bild 61:** „17 / 18 Verzahnung“: Druckverteilung, berechnet mit dem „zweiten Kontaktmodell“ (s. Kapitel 3) und  $t = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $C_{ar} = 0,6$

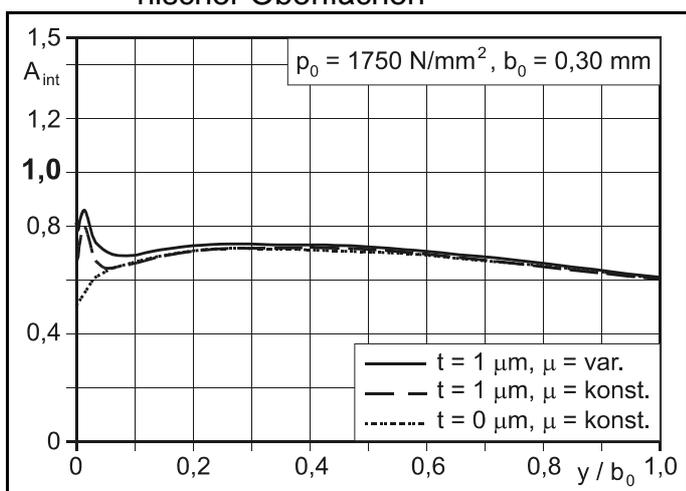
Hertzchen Pressung von  $1750 \text{ N/mm}^2$  liegt im Kontakt somit ein maximaler Druck von etwa  $2625 \text{ N/mm}^2$  vor.

Die Bestimmung der Werkstoffanstressungen erfolgte unter den im Bild 59 aufgezeigten Vorgaben nochmals für den ideal glatten Wälzkontakt mit  $\mu = 0,04$  (gleiche Vorgaben wie für das Bild 60) sowie für den Kontakt der technischen Oberflächen mit konstanter Reibungszahl  $\mu = 0,04$  und mit variabler Reibungszahl ( $\mu_{\text{EHD}} = 0,04$ ,  $\mu_{\text{max}} = 0,12$ ,  $\mu_{\text{m}} = 0,068$ ) über der Kontaktfläche. Die einzelnen mit der SIH\* berechneten Tiefenverläufe der dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen sind, ohne Berücksichtigung von Stützwirkungen, in den **Bildern 62** sowie **63** vergleichend gegenübergestellt.

Gegenüber dem ideal glatten Wälzkontakt liegen in den Kontakten der technischen Oberflächen im oberflächennahen Bereich hohe dynamische Werkstoffanstressungen ( $A_{\text{inta}} \cdot 1,3 - 1,4$ ) vor. Bei Vorgabe einer variablen Reibungszahl über der Kontaktfläche resultieren aufgrund der erhöhten mittleren Reibungszahl  $\mu_{\text{m}}$  nach der SIH\* die größten dynamischen Werkstoffanstressungen ( $A_{\text{inta}} \cdot 1,4$ ). Ab einer Tiefe von  $y / b_0 \cdot 0,2$  ergeben sich zwischen den einzelnen dynamischen Werkstoffanstressungen keine Unterschiede mehr. Ähnliche Aussagen treffen für die maximalen Werkstoffanstressungen (Bild 63) zu. Auch hier resultieren im Vergleich zum ideal glatten Wälzkontakt bei den Kontakten der technischen Oberflächen infolge der Mikro-Hertzchen Kontakte oberflächennah erhöhte



**Bild 62:** dynamische Werkstoffanstressung nach der SIH\*, Vergleich zwischen ideal glattem Wälzkontakt und Kontakten technischer Oberflächen



**Bild 63:** maximale Werkstoffanstressung nach der SIH\*, Vergleich zwischen ideal glattem Wälzkontakt und Kontakten technischer Oberflächen

te maximale Werkstoffanstressungen. Diese erreichen in diesem Fall, unterstützt durch die vorliegenden Druckeigenstressungen am Rand, die maximal zulässige Werkstoffanstressung ( $A_{\text{int}} = 1$ ) noch nicht. Unterhalb des Randabstandes  $y / b_0$  . 0,3 - 0,4 sind keine nennenswerten Unterschiede zwischen den einzelnen Verläufen im Bild 63 festzustellen. Bei der Bewertung der dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen ist zu beachten, daß den oben aufgeführten Berechnungen ausgehend von dem im Bild 61 vorgegebenen Druckverlauf die in den Gleichungen (48) und (49) angegebenen Temperaturabhängigkeiten der lokalen Festigkeitskennwerte zugrunde liegen. Hier gehen die mittlere Kontakttemperatur bzw. die Massentemperatur ein. Mit den für das vorliegende Beispiel getroffenen Annahmen liegt in den obigen Beanspruchungsberechnungen noch kein Temperatureinfluß vor. Im Kontakt technischer Oberflächen ist unter der Annahme von teilweise vorliegenden metallischen Berührungen aufgrund der lokalen Kontakttemperaturen neben einem Einfluß auf die sich im Kontakt einstellende Druckverteilung außerdem ein Einfluß auf die lokalen Festigkeitskennwerte zu erwarten. Im Hinblick auf den Einfluß auf die lokalen Festigkeitskennwerte lassen erhöhte lokale Kontakttemperaturen daher noch größere Werkstoffanstressungen im oberflächennahen Bereich des Wälzkontaktes vermuten.

Insgesamt läßt sich aus den oben aufgeführten Berechnungen schließen, daß mit der im Kapitel 5 vorgeschlagenen Hypothese  $SIH^*$  Einflüsse aus dem Kontakt technischer Oberflächen berücksichtigt werden können. Drucküberhöhungen im Wälzkontakt aufgrund der Mikro-Hertzschen Kontakte führen nach der  $SIH^*$  zu erhöhten dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen direkt an der Oberfläche und im sehr oberflächennahen Bereich. Die Beschränkung der erhöhten Werkstoffanstressung auf den äußersten Randbereich liefert damit auch Erklärungen für das Auftreten und die geringe Tiefenerstreckung von Graufleckenschäden (s. Kapitel 2). Diese Schäden, die hauptsächlich bei schlechtem Schmierungsstatus, d.h. bei einem zu geringen Verhältnis zwischen Schmierfilmdicke und Oberflächenrauheit, auftreten, besitzen ihren Ausgang an der Oberfläche und weisen im Vergleich zu Grübchenschäden eine geringere Tiefenerstreckung auf [z.B. 112, 114].

## 8.2 Einfluß von positivem und negativem Schlupf

Bei den bisherigen Berechnungen wurde jeweils die auf der gesamten Flanke des treibenden Ritzels maximal auftretende Werkstoffanstressung, die in allen aufgeführten Beispielen stets unterhalb des Wälzkreises lag, als maßgebend angesehen.

Die Flanke des Gegenrades wird in dem Kontakt mit der selben Normalbelastung wie das Ritzel aber mit einem entgegengesetzten Schubdruck und mit einer unterschiedlichen Wärmequelle belastet (s. Kapitel 2). Die Härte- und Eigenspannungstiefenverläufe können vereinfacht als gleich angenommen werden. Es stellt sich die Frage, in wie weit sich die berechneten Werkstoffanstressungen von Ritzel und Rad im gleichen Kontakt durch die verschiedenen Schlupfverhältnisse (s. Kapitel 2), die den Schubdruckverlauf sowie die Wärmequellenbelastung mit beeinflussen, unterscheiden und wie das in Versuchen beobachtete überwiegende Auftreten von Ermüdungsschäden in Flankenbereichen mit negativem Schlupf erklärt werden kann. Mit den nachfolgenden Betrachtungen soll auf diese Fragestellung eingegangen werden.

Als Grundlage für die Berechnungen dient die Schrägverzahnung aus [53] mit den in der **Tabelle 11** angegebenen Daten.

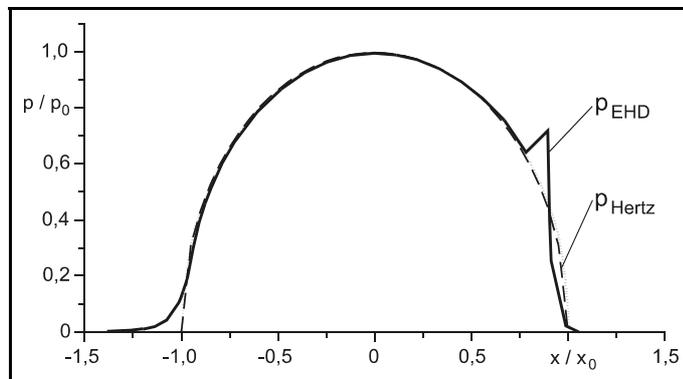
Bezeichnung	Zeichen	Einheit	Wert
<b>Verzahnung</b>			
Drehmoment	$T_1$	[Nm]	10450
Ritzeldrehzahl (Antriebsseite)	$n_1$	[1/min]	878
Achsabstand	$a$	[mm]	331
Modul	$m_n$	[mm]	8
Zähnezahlen	$z_1$	[ ]	15
	$z_2$	[ ]	66
Verzahnungsbreite	$b$	[mm]	145,16
Schrägungswinkel	$\beta$	[°]	10
Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$	[ ]	1,48
Sprungüberdeckung	$\varepsilon_\beta$	[ ]	1,0
<b>Schmierung</b>			
Schmierstoff der Viskositätsklasse ISOVG 220			
Einspritztemperatur	$\vartheta_E$	[°C]	60

**Tabelle 11:** Daten zur Beispielverzahnung aus [53]

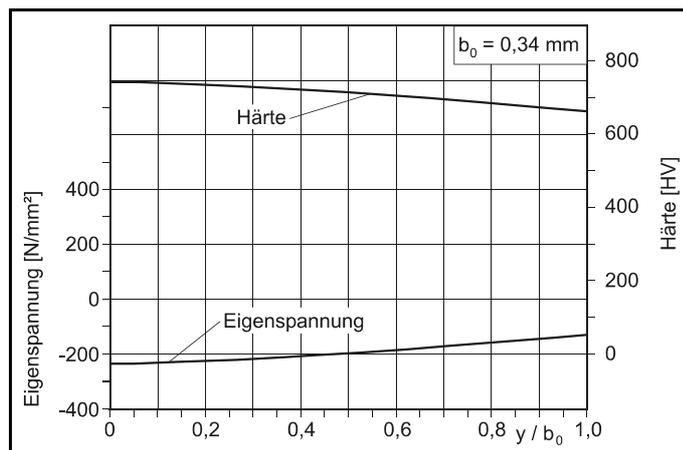
In [53] erfolgt die Analyse der Beanspruchungen für einen Kontakt in der Nähe des Eingriffsbeginns mit einer Hertzchen Pressung  $p_0 = 1651 \text{ N/mm}^2$  und einer halben Hertzchen Kontaktbreite  $b_0 = 0,33 \text{ mm}$ . Um dieser Rechnung möglichst nahe zu kommen, wird aus der Berechnung mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Modell ein Kontakt ebenfalls in der Nähe des Eingriffsbeginns mit einer Hertzchen Pres-

sung  $p_0 = 1660 \text{ N/mm}^2$  und einer halben Hertzchen Kontaktbreite  $b_0 = 0,34 \text{ mm}$  gewählt.

Der für diesen Kontakt bestimmte EHD-Druckverlauf ist neben der Hertzchen Druckellipse im **Bild 64** dargestellt. Der Berechnung der Schubdruckverläufe und der daraus resultierenden Wärmequellenbelastungen (s. Kapitel 3 und [53]) liegt die Reibungszahl  $\mu = 0,07$  zugrunde. Die in den Berechnungen vorgegebenen Härte- und Eigenspannungstiefenverläufe sind im **Bild 65** angegeben. Der Eigenspannungstiefenverlauf entspricht im wesentlichen demjenigen in [53], weist aber um etwa  $100 \text{ N/mm}^2$  geringere Eigenspannungsbeträge auf. Für die Betrachtungen in diesem Abschnitt ist dies aber, wie im folgenden zu sehen, nicht von Bedeutung.



**Bild 64:** EHD- und Hertzcher Druckverlauf für den berechneten Kontakt der Beispielverzahnung (s. Tabelle 11) mit  $p_0 = 1660 \text{ N/mm}^2$  und  $b_0 = 0,34 \text{ mm}$



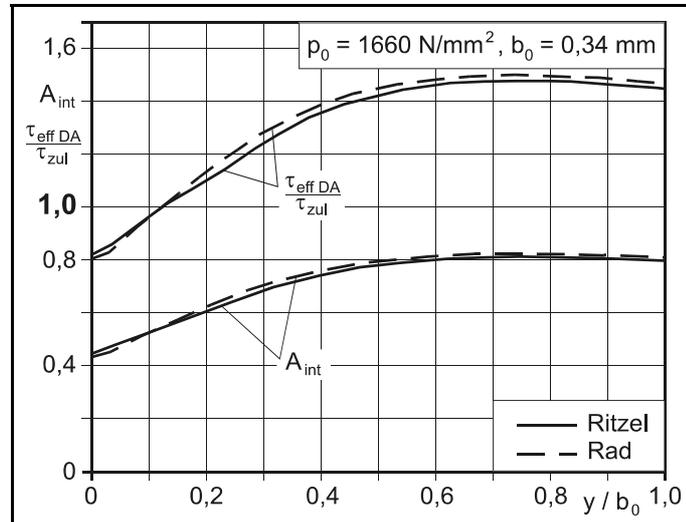
**Bild 65:** vorgegebene Härte- und Eigenspannungstiefenverläufe

In [53] wird zur Bewertung der Beanspruchung im Wälzkontakt

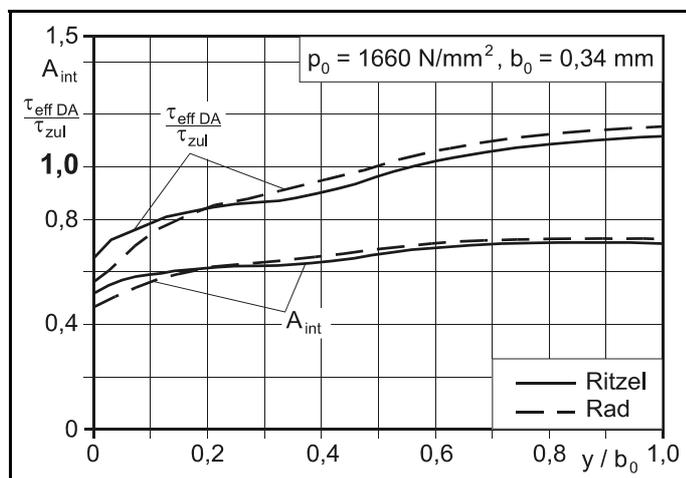
die Gleichung (19) verwendet, die im Falle verschwindender Eigenspannungen der Gleichung (30) mit  $a = 1$  und  $b = 0$  entspricht. Als zulässige Schubspannung kann im oberflächennahen Bereich  $\tau_{zul} = 0,4 c \text{ HV}$ , basierend auf der örtlichen Härte HV, definiert werden [132]. Bei verschwindenden oder über der Tiefe nahezu konstanten Eigenspannungen, wie dies auch bei der Vorgabe von Eigenspannungen nach Lang (s. Kapitel 3) im hier relevanten oberflächennahen Bereich und üblichen Härtetiefenverläufen der Fall ist, lassen sich die auf der Grundlage der Gleichung (19) und  $\tau_{zul}$  berechneten Werkstoffanstrengungen gut mit den gemäß  $\text{SIH}_{\text{max } 2}^*$  (s. S. 87) bestimmten Werkstoffanstrengungen vergleichen. Beide Betrachtungen basieren auf der Bewertung der im Wälzkontakt in allen Schnittebenen

während des Überrollens maximal auftretenden Schubspannungen. Die Werkstoffanstressungen  $\tau_{\text{eff DA}} / \tau_{\text{zul}}$  und  $A_{\text{int}}$  können daher durch einen konstanten Faktor (. 1,83) ineinander umgerechnet werden. Die mit den unterschiedlichen Hypothesen berechneten Werkstoffanstressungen für das Ritzel und das Rad sind unter Vorgabe der Hertzischen Normalbelastung (s. Bild 64) unter Berücksichtigung des Schubdrucks sowie der Wärmequellenbelastung ohne Vorgabe von Eigenspannungen ( $\sigma_E = 0 \text{ N/mm}^2$ ) bzw. mit überlagerten Eigenspannungen im **Bild 66**

bzw. **Bild 67** dargestellt. Die Kurvenverläufe von  $\tau_{\text{eff DA}} / \tau_{\text{zul}}$  und  $A_{\text{int}}$  im Bild 66 für die Berechnung ohne Eigenspannungen entsprechen sich bis auf den konstanten Umrechnungsfaktor. Trotz Berücksichtigung der unterschiedlichen Schlupfverhältnisse resultieren nahezu keine (Bild 66) oder keine großen (Bild 67) Unterschiede zwischen den Werkstoffanstressungen von Ritzel und Rad. Im Bild 67 ist außerdem festzustellen, daß durch die Vorgabe von Eigenspannungen (s. Bild 65) sich die Werkstoffanstressungen gemäß  $\text{SIH}_{\text{max } 2}^*$  über der Werkstofftiefe stärker angleichen als bei der Berechnung der Anstrengung mit  $\tau_{\text{eff DA}} / \tau_{\text{zul}}$ .



**Bild 66:** Bewertung der Beanspruchungen mit der Gleichung (19) und  $\tau_{\text{zul}} = 0,4 \text{ c HV}$  sowie mit der  $\text{SIH}_{\text{max } 2}^*$  ( $A_{\text{int}}$ ): Hertzische Druckellipse (Bild 64), Schubdruck mit  $\mu = 0,07$ , Wärmequellenbelastung, keine Vorgabe von Eigenspannungen

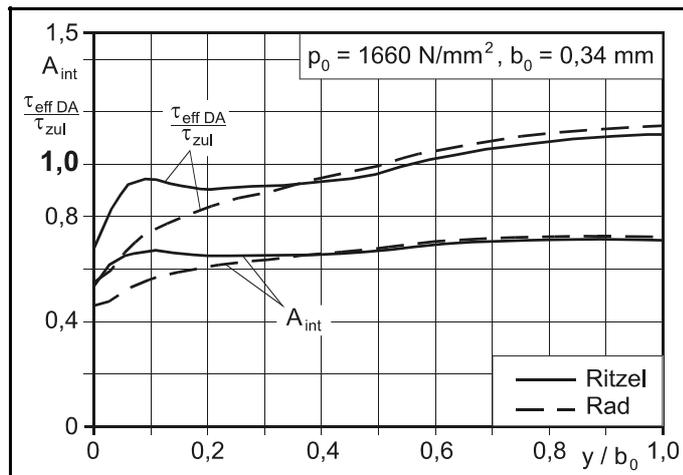


**Bild 67:** Bewertung der Beanspruchungen mit der Gleichung (19) und  $\tau_{\text{zul}} = 0,4 \text{ c HV}$  sowie mit der  $\text{SIH}_{\text{max } 2}^*$  ( $A_{\text{int}}$ ): Hertzische Druckellipse (Bild 64), Schubdruck mit  $\mu = 0,07$ , Wärmequellenbelastung, mit Berücksichtigung von Eigenspannungen nach Lang (s. Kapitel 3)

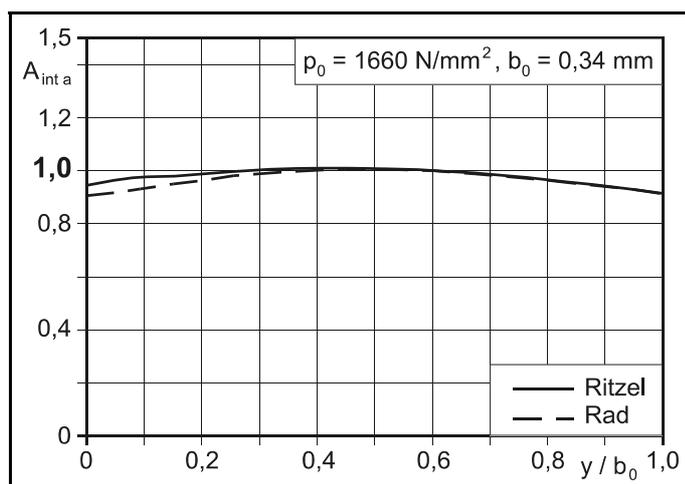
Erst bei der Vorgabe des EHD-Druckverlaufes (Bild 64) sind sowohl bei den Berechnungen mit  $\tau_{\text{eff DA}} / \tau_{\text{zul}}$  als auch nach der  $\text{SIH}_{\text{max 2}}^*$  aufgrund der unterschiedlichen Oberflächenbelastungen im oberflächennahen Bereich größere Unterschiede in den Werkstoffanstressungen von Ritzel und Rad zu erkennen (Bild 68). Während sich die Werkstoffanstressungen nach der  $\text{SIH}_{\text{max 2}}^*$  für Ritzel und Rad über der gesamten Werkstofftiefe deutlich unterhalb der zulässigen maximalen Werkstoffanstressung befinden, überschreiten die Werkstoffanstressungen von Ritzel und Rad  $\tau_{\text{zul}}$  bei geringerer Hertzscher Pressung als der hier betrachteten zunächst im Bereich von  $y / b_0 \cdot 1,0$ . Die Anstressungen im oberflächennahen Bereich liegen in diesem Fall ebenfalls bei beiden Oberflächenbelastungen deutlich unterhalb der zulässigen Spannung  $\tau_{\text{zul}}$ .

Nach der  $\text{SIH}_{\text{dyn}}^*$  (Gleichung (31),  $A_{\text{int a}}$ ) resultieren für Ritzel und Rad hohe dynamische Werkstoffanstressungen ( $A_{\text{int a}} \cdot 0,9 - 1$ ) im oberflächennahen Bereich (Bild 69). Die verschiedenen Schlupfvorgaben führen beim Ritzel nur zu geringfügig höheren Anstressungen als beim Rad.

Hier nicht dargestellte Berechnungen mit Berücksichtigung von Einflüssen aus dem Kontakt technischer Oberflächen, berechnet auf der Grundlage des



**Bild 68:** Bewertung der Beanspruchungen mit der Gleichung (19) und  $\tau_{\text{zul}} = 0,4 \text{ c HV}$  sowie mit der  $\text{SIH}_{\text{max 2}}^*$  ( $A_{\text{int}}$ ): EHD-Druckellipse (Bild 64), Schubdruck mit  $\mu = 0,07$ , Wärmequellenbelastung, mit Berücksichtigung von Eigenspannungen nach Lang (s. Kapitel 3)



**Bild 69:** dynamische Werkstoffanstressung nach der  $\text{SIH}_{\text{dyn}}^*$  ( $A_{\text{int a}}$ ): EHD-Druckellipse (Bild 64), Schubdruck mit  $\mu = 0,07$ , Wärmequellenbelastung, mit Berücksichtigung von Eigenspannungen nach Lang (s. Kapitel 3)

„zweiten Kontaktmodells“ (s. Kapitel 3), ergibt bei beiden Hypothesen direkt an der Oberfläche zudem eine gegenüber dem ideal glatten Wälzkontakt kleinere Differenz zwischen den rechnerisch ermittelten Anstrengungen von Ritzel und Rad.

Insgesamt zeigen die vorangegangenen Berechnungen in prinzipieller Übereinstimmung mit der Aussage in [53], daß sowohl unter Zugrundelegung von  $\tau_{\text{effa}} / \tau_{\text{zul}}$  als auch von der SIH\* nur bei Vorgabe von EHD-Druckverläufen nicht mehr zu vernachlässigende Unterschiede in den Werkstoffanstrengungen für verschiedene Schlupfvorgaben ermittelt werden. Dagegen spricht die Abhängigkeit der beobachteten Ermüdungsschäden in Wälzkontakten vom Schlupf auch bei Belastungen mit nicht ausgeprägten EHD-Druckspitzen, wie dies aus der Erfahrung im Bereich der Wälzlagertechnik und aus den Untersuchungen von Rösch [105], Elstorpff [30] oder Hähl [41] abzuleiten ist. Auch bei den Untersuchungen von Schönnenbeck [112] wurde die Graufleckenbildung bevorzugt in Bereichen negativen Schlupfes beobachtet, obwohl hier von der Hertzschen Druckellipse nur minimal abweichende EHD-Druckverläufe vorlagen [112, S. 15]. Daher müssen zumindest gemäß der Hypothesen  $\tau_{\text{effa}} / \tau_{\text{zul}}$  und SIH\* neben einem EHD-Druckverlauf mit ausgeprägtem zweiten Maximum weitere, unabhängig vom EHD-Druckverlauf wirkende Mechanismen bzw. Ursachen für eine Abhängigkeit der beobachteten Ermüdungsschäden in Wälzkontakten von den Schlupfverhältnissen vorhanden sein.

Aus der Literatur lassen sich hierzu, wie bereits auch im Kapitel 2 beschrieben, folgende mögliche Erklärungen entnehmen:

- C Durch den Einfluß der Flankenrauheit werden Oberflächenbereiche in Gleitrichtung plastisch verformt, d.h. die Verformungen sind beim treibenden Rad vom Wälzpunkt weg und beim getriebenen Rad zum Wälzpunkt hin orientiert [60, 62] (s. Kapitel 2). Infolge der plastischen Verformungen entstehen mit der gleichen Orientierung wie die Verformungen Oberflächenrisse [60]. Gemäß Käser [62] führen nachfolgende Wälzbeanspruchungen der geschädigten Oberfläche in Bereichen negativen Schlupfes durch die Öffnung der Oberflächenrisse zu einer Biegebeanspruchung der von Öl umgebenen Werkstoffkeile, die zum Ausbrechen des Werkstoffkeiles führt (s. Kapitel 2, Bild 3). In Bereichen positiven Schlupfes werden die Oberflächenrisse während der Wälzbeanspruchung geschlossen und die Weiterentwicklung der Schäden ist bereits vor dem Stadium der Porenbildung gestoppt. Grübchen entstehen somit [s. auch 105] durch das Zusammenwachsen von Oberflächenrissen und Rissen, die ihren Ausgangsort unter der Oberfläche haben.

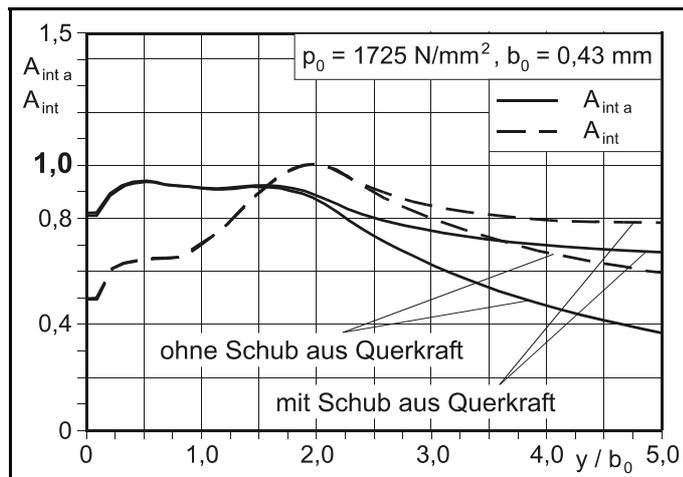
- C Wie ebenfalls bereits im Kapitel 2 beschrieben, wird unter anderem von Knauer [69] sowie Murakami und Kaneta [93] das bevorzugte Rißwachstum in Bereichen negativen Schlupfes mit Hilfe von bruchmechanischen Betrachtungen erklärt. Nach Knauer [69] vermindert das im Bereich negativen Schlupfes in den Riß hineingepreßte Öl die Reibung zwischen den Rißflanken. Dadurch kann sich ein Riß in Bereichen negativen Schlupfes im Vergleich zu Rissen in Bereichen mit positivem Schlupf eher ausbreiten. Nach Murakami und Kaneta [93] beeinflusst das in Rissen in Bereichen negativen Schlupfes hineingepreßte Öl das Rißwachstum durch den aufgebauten Öldruck im Riß entscheidend. Schief liegende Risse, die in Richtung der Wälzbewegung, aber entgegengesetzt des Schubdruckes gerichtet sind (Bereich mit negativem Schlupf), haben aufgrund des Öldruckes im Riß demnach die größte Wahrscheinlichkeit weiter zu wachsen.
- C Inacker, Beckmann und Oster [55] (s. Kapitel 2) erklären das bevorzugte Auftreten von Grauflecken- und Grübchenschäden in Flankenbereichen mit negativem Schlupf mit der Dicke der Triboschutzschicht im Wälzkontakt, die vom Wälzkreis ausgehend zum Zahnfuß und zum Zahnkopf mit größer werdendem Schlupf zunimmt und zu einer von der Schichtdicke abhängigen Schädigung des oberflächennahen Werkstoffbereichs führt. Demnach wird der zahnfußnahe Eingriffsbereich mit erhöhtem Schlupf und hoher Belastung als Ausgangspunkt sowohl für Grauflecken- als auch für Grübchenschäden angesehen.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß es sich bei dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Berechnungsmodell (s. Kapitel 5 und 6) um ein Anrißkonzept handelt. Wie in den letzten Abschnitten gezeigt, können mit dem aufgestellten Berechnungsmodell Anrißlagen sowohl an als auch unter der Oberfläche plausibel erklärt bzw. nachvollzogen werden. Zur Beurteilung der Weiterentwicklung des Ermüdungsschadens und damit zur Erklärung der bevorzugten Bildung von für das Ausfallverhalten maßgebenden makroskopischen Schäden in Bereichen negativen Schlupfes sind weiterführende Konzepte anzuwenden. Eine Möglichkeit dazu stellen, wie oben erläutert, Rißfortschrittskonzepte, z.B. bruchmechanische Betrachtungen, dar. Die Anwendung der bruchmechanischen Konzepte bei rand-schichtverfestigten Bauteilen ist aber bisher durch die fehlenden, in den Berechnungen benötigten Werkstoffkennwerte oder Abschätzungen dazu nicht bzw. nur bedingt möglich.

### 8.3 Einfluß des aus der Zahnkraft resultierenden Querkraftschubes

Anhand der bereits im Abschnitt 7.4.2 behandelten Variante 203-1 aus den Untersuchungen von Tobie [132] und der „17 / 18 Verzahnung“ [30] (s. auch S. 99) wird im folgenden abschließend der mit dem im Kapitel 6 vorgeschlagenen Berechnungsmodell abgeschätzte Einfluß des aus der Zahnkraft resultierenden Querkraftschubes (s. Abschnitt 6.2.2) auf die Flankentragfähigkeit aufgezeigt. Es ist zu berücksichtigen, daß der Querkraftschub zeitlich versetzt zum Einfluß des Hertzischen Kontaktes auf die Werkstoffbereiche der Flanke einwirkt. Die Vorgaben für die Berechnungen entsprechen denjenigen im Abschnitt 7.4.2 (s. auch Bilder 57 und 59). In den bisherigen Berechnungen wurde stets der aus der Zahnkraft resultierende Querkraftschub, wie er für das vorgeschlagenen Berechnungsmodell beschrieben wurde, berücksichtigt. Die so erhaltenen Werkstoffanstressungen über der Werkstofftiefe für die Variante 203-1 bzw. die „17 / 18 Verzahnung“ kann den Bildern 58 bzw. 60 entnommen werden.

Im **Bild 70** sind die Werkstoffanstressungen für die Variante 203-1 ohne Berücksichtigung des aus der Zahnkraft resultierenden Querkraftschubes und mit dessen Einfluß über der Werkstofftiefe vergleichend gegenübergestellt. Wie zu erwarten, entsprechen sich die jeweiligen Werkstoffanstressungen an der Oberfläche und im Bereich bis zu einer Tiefe von etwa  $y / b_0 \cdot 2$ . Erst darunter macht sich der Einfluß des Querkraftschubes bemerkbar und führt jeweils zu einer erhöhten Werkstoffanstressung. Der maximale Einfluß ergibt sich aufgrund des angenommenen, aus der Zahnkraft außerhalb des Hertzischen Kontaktes resultierenden Schubspannungsverlaufes über dem Zahnquerschnitt in der Zahnmitte, die bei der Variante 203-1 bei etwa  $y / b_0 \cdot 5,7$  liegt.



**Bild 70:** Werkstoffanstressungen für die Variante 203-1 von Tobie [132] ohne und mit Berücksichtigung des aus der Zahnkraft außerhalb des Hertzischen Kontaktes resultierenden Querkraftschubes, Eingriffspunkt im Bereich des Wälzkreises für das getriebene Rad, 50 % Ausfallwahrscheinlichkeit;

Im Gegensatz dazu weichen die Werkstoffanstressungen ohne und mit Berücksichtigung des Querkraftschubes bei dem betrachteten Kontakt der „17 / 18 Verzahnung“ über der gesamten Werkstofftiefe nicht voneinander ab. Da somit die Verläufe mit denen im Bild 60 gezeigten identisch sind, wird auf eine erneute Darstellung an dieser Stelle verzichtet.

Aus den beiden exemplarisch aufgeführten Vergleichsrechnungen läßt sich folgern, daß

- C der Querkraftschub in Abhängigkeit von der Zahnform die Werkstoffanstressungen beeinflusst. Dieser Einfluß zeigt sich umso mehr je kleiner der Zahnquerschnitt, d.h. je dünner der Zahn, und je größer die Beanspruchungstiefe aus dem Flankenkontakt ist.
- C die Berücksichtigung der zeitlich nacheinander auftretenden Beanspruchungen aus dem Hertzschen Kontakt und dem Querkraftschub bei geringen Zahnquerschnitten zu erhöhten dynamischen und maximalen Werkstoffanstressungen führt. Durch die daraus resultierende große Ausdehnung der erhöhten Werkstoffanstressungen kommt der spannungsüberhöhenden Wirkung von Störstellen eine noch größere Bedeutung zu, da die Wahrscheinlichkeit, daß sich im Bereich hoher Werkstoffanstressung eine Störstelle befindet, mit zunehmender Größe dieses Bereiches zunimmt.

Gerade im Hinblick auf die Beurteilung der Flankentragfähigkeit bezüglich Flankenbruch [132] sind daher die Einflüsse aus dem Querkraftschub und aus der Kerbwirkung von Störstellen neben dem Einfluß aus dem Härtetiefenverlauf und der örtlich vorliegenden Eigenspannungen von großer Bedeutung und stellen daher zentrale Untersuchungsgegenstände im zur Zeit an der Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau bearbeiteten Forschungsvorhaben zum Thema „Flankenbruch bei Stirnradgetrieben“ [20] dar.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Aufstellen eines rechnerischen Festigkeitsnachweises vergüteter und einsatzgehärteter Stirnräder unter Berücksichtigung der verschiedenen Beanspruchungsverhältnisse im Zahnfuß und an der Zahnflanke. Die Basis des Festigkeitsnachweises stellt der örtliche Vergleich der im Stirnrad auftretenden Beanspruchungen und der zulässigen Beanspruchungen dar.

Im Rahmen von theoretischen Betrachtungen werden zunächst die Besonderheiten der Werkstoffbeanspruchungen im Bereich des Zahnfußes sowie insbesondere im Flankenkontakt analysiert. Im Zahnfußbereich liegt gemäß DIN 3990 [1] im wesentlichen eine aus der Zahnbiegung resultierende Randspannung vor, wobei die Zahnfußrundung als Kerbe wirkt und eine Spannungsüberhöhung verursacht. An der Flanke führt der Wälzkontakt zu einem komplexen, mehrachsigen und sich über der Zeit zyklisch ändernden Spannungszustand mit drehendem Hauptachsensystem. Die Berechnungen zur Ermittlung der Beanspruchungen im Flankenkontakt werden mit einem an der Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) der TU München entwickelten und im Rahmen dieser Arbeit erweiterten EDV-Programm (STRORHR) durchgeführt [101, 48].

Durch die im Flankenkontakt vorliegende zyklische Beanspruchung ergeben sich in den Schnittebenen eines Volumenelementes geschlossene Schubspannungs - Zeit - Verläufe, die in jeder Schnittebene die Definition einer maximalen Schubspannung sowie einer Schubausschlag- und einer Schubmittelspannung zulassen. Entsprechend ist auch die Angabe maximaler Normalspannungen, Normalausschlag- und Normalmittelspannungen in jeder Schnittebene eines Volumenelementes möglich.

Anhand von Schubspannungs - Zeit - Verläufen in Schnittebenen von Volumenelementen wird beispielhaft aufgezeigt, welchen Einfluß Eigenspannungen und Wärmespannungen auf die im Wälzkontakt vorliegenden Beanspruchungen besitzen. Eigenspannungszustände führen bei Überlagerung mit den aus dem Wälzkontakt vorliegenden Beanspruchungen zu veränderten maximalen Werkstoffanstrengungen. Die aus der Literatur bereits bekannte beanspruchungserhöhende Wirkung von Zugeigenspannungen sowie die bis zu einer bestimmten Größe beanspruchungsmindernde Wirkung von Druckeigenspannungen kann nachvollzogen werden. Unabhängig davon, ob den Lastspannungen Zug- oder Druckeigen-

spannungen überlagert sind, wird die Größe der Schubspannungsamplituden in den Schnittebenen gegenüber dem eigenspannungsfreien Zustand nahezu nicht verändert. Es erscheint daher sinnvoll, wie in der allgemeinen Festigkeitsrechnung üblich, die Wirkung von Eigenspannungen auf die dynamische Werkstoffanstrengung als Mittelspannungseinfluß bei der Bestimmung der zulässigen örtlichen Beanspruchung zu berücksichtigen.

Um den Einfluß des Kontaktes technischer Oberflächen auf die Beanspruchungen im Wälzkontakt untersuchen zu können, werden zwei einfache Kontaktmodelle aufgestellt. Die Kontaktmodelle sind in dem an der Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) bestehenden EDV-Programm (EHDOR) [101] zur Berechnung der elasto-hydrodynamischen Druckverteilung implementiert und ermöglichen einfache Abschätzungen der sich im Kontakt technischer Oberflächen einstellenden Druckverläufe. Die Analyse von Schubspannungs - Zeit - Verläufen im Kontakt technischer Oberflächen belegen im oberflächennahen Bereich größere maximale und dynamische Beanspruchungen infolge der Mikro-Hertzschen Kontakte.

Insbesondere die komplexe Beanspruchung im Flankenkontakt macht eine Bewertung der Beanspruchung mit Hilfe einer geeigneten Festigkeitshypothese notwendig. Aufbauend auf der Analyse bekannter Festigkeitshypothesen wird eine Variante der Schubspannungsintensitätshypothese (SIH\*) aufgestellt. Die maximale und dynamische Werkstoffanstrengungen sind als die Mittelwerte der Anstrengungen aller Schnittebenen definiert, wobei sich die Anstrengung in einer Schnittebene aus dem Verhältnis von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit berechnet. Dauerfestigkeit liegt vor, wenn sowohl die maximalen als auch die dynamischen Werkstoffanstrengungen den Grenzwert Eins nicht überschreiten. Zur Bestimmung der zulässigen örtlichen maximalen und dynamischen Beanspruchungen werden auf der örtlichen Härte basierende Zusammenhänge angegeben.

Auf der Grundlage der aufgestellten Schubspannungsintensitätshypothese SIH\* wird ein Berechnungsmodell zur Bestimmung der Zahnfußtragfähigkeit und der Flankentragfähigkeit formuliert. Bei der Berechnung der Dauerfestigkeit von Bauteilen im Bereich lastfreier Oberflächen berücksichtigt das Modell Oberflächeneinflüsse infolge Rauheit und Randoxidation sowie Einflüsse aus einer ungleichen Spannungsverteilung. Die Ermittlung der Flankentragfähigkeit basiert auf der Bestimmung der Lastverteilung auf der Flanke mit dem FVA EDV-Programm RIKOR [107]. Neben dem Einfluß der Beanspruchungen aus dem Flankenkontakt läßt sich auch der Einfluß des aus der Zahnkraft resultierenden Querkraftschubes,

der zeitlich zum jeweiligen Flankenkontakt versetzt wirkt, mittels einer einfachen Abschätzung in die Berechnungen einbeziehen. Liegen bei einsatzgehärteten Stirnrädern keine gemessenen Härte- und Eigenspannungstiefenverläufe vor, ist eine Abschätzung der Verläufe mit Ansätzen aus der Literatur möglich.

Die Anwendbarkeit des Berechnungsmodells wird anhand zahlreicher Nachrechnungen von Ergebnissen aus der Literatur aufgezeigt. Die Nachrechnungen umfassen Ergebnisse von

- C Proben,
- C zahnfußähnlichen Proben,
- C Zahnradern hinsichtlich Fußtragfähigkeit,
- C Wälzkörpern zum Vergleich des Verformungs- und Versagensverhalten bei lokaler Hertzscher Pressung und umlaufender Hertzscher Pressung sowie von
- C Zahnradern hinsichtlich Flankentragfähigkeit.

Insgesamt läßt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Versuchs- und den Berechnungsergebnissen feststellen. Dies trifft sowohl für die Größe der bestimmten Dauerfestigkeiten als auch für die Schadensbilder bzw. für die Schadensausgangsorte zu. Die unter Zugrundelegung von Standardreferenzprüfbedingungen (DIN 3990 Teil 5 [1]) berechneten Zahnfußtragfähigkeiten lassen sich gut in die Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] einordnen. Abhängig von der vorgegebenen Randoxidationstiefe werden bei einsatzgehärteten Zahnradern Tragfähigkeiten unterhalb der Qualität MQ, die in der Praxis von reinigungsgestrahnten Varianten erzielt wird, berechnet. Bei den nachgerechneten Fußtragfähigkeitsuntersuchungen sind größere Abweichungen festzustellen. Die im Versuch ermittelten Tragfähigkeiten lagen im untereren Bereich der entsprechenden Festigkeitsfelder der DIN 3990 Teil 5 [1] und z.T. darunter, was in den Untersuchungen auf Einflüsse aus der Hüllschnittbildung bei der Zahnradfertigung und auf die spannungsüberhöhende Wirkung von Einschlüssen zurückgeführt wird. Beide Einflüsse werden vom vorgeschlagenen Berechnungsmodell nicht erfaßt.

Da es sich bei dem Berechnungsmodell aufgrund der Schubspannungsintensitätshypothese SIH\* um ein Anrißkonzept handelt, ist eine Beurteilung des Rißfortschritts nicht möglich. So kann beispielsweise die festigkeitssteigernde Wirkung von Kugelstrahlbehandlungen mit dem Modell nicht vollständig erfaßt werden, da im Modell keine Beurteilungsmöglichkeit zur Verfügung steht, inwieweit die eingebrachten Eigenspannungen ein Weiterwachsen von Rissen verhindern. Die Beschränkung des Modells auf die Bestimmung der Anrißbildung zeigt sich auch bei

der Berechnung der Flankentragfähigkeit. Mit dem Modell werden auf der Flanke in Bereichen negativen bzw. positiven Schlupfes, außer bei Vorgabe eines EHD-Druckverlaufes mit ausgeprägtem zweiten EHD-Druckmaximum, nahezu gleiche Anrißgefährdungen ermittelt. Das aus Versuchen bekannte bevorzugte Auftreten von Ermüdungsschäden in Bereichen negativen Schlupfes läßt sich durch Überlegungen zum Rißwachstum mit Hilfe von bruchmechanischen Ansätzen erklären. Eine Vertiefung dieser Ansätze wäre wünschenswert. Bis dahin sind im vorgeschlagenen Modell die Bereiche mit negativem und positivem Schlupf unterschiedlich zu behandeln. Die vorgeschlagene Berechnung gilt für den Fußflankenbereich. Für den Kopfflankenbereich, d.h. für den Bereich mit positivem Schlupf, sollte durch das hier auftretende Stoppen des Rißwachstums erfahrungsgemäß gegenüber dem Bereich mit negativem Schlupf eine um bis zu etwa 20 % höhere praktische Tragfähigkeitsgrenze hinsichtlich Grauflecken und Grübchen angesetzt werden können.

Die Nachrechnungen von Versuchsergebnissen zur Flankentragfähigkeit zeigen außerdem, daß sich mit dem vorgeschlagenen Berechnungsmodell die Schadensarten Grübchen und Flankenbruch nachvollziehen lassen. Die Gefahr hinsichtlich Flankenbruch steigt bei im Vergleich zur Beanspruchung kleinen Einsatzhärtungstiefen und geringen Zahnquerschnitten. Der aus der Zahnkraft resultierende Querkraftschub führt bei geringen Zahnquerschnitten in Verbindung mit dem Eigenspannungszustand zu erhöhten Beanspruchungen, die sich über große Tiefenbereiche erstrecken und daher die Gefährlichkeit von Störstellen (Ungänzen) steigern.

Das vorgestellte Berechnungsmodell wird zur Zeit in laufenden Forschungsvorhaben an der Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) angewendet und zeigt auch dort gute Übereinstimmungen mit Versuchsergebnissen.

## 9.2 Ausblick

Im aufgestellten Festigkeitsnachweis basiert die Bestimmung der örtlichen Beanspruchbarkeiten auf der örtlichen Härte. Der Einfluß auf die Tragfähigkeit von verschiedenen Gefügezuständen, die die gleiche Härte aufweisen, kann mit dem Berechnungsmodell damit nicht erfaßt werden. Um die Berücksichtigung dieses Einflusses zu ermöglichen, sollten in experimentellen Untersuchungen auf der Grundlage von einfachen Probenuntersuchungen örtliche Beanspruchbarkeiten in Abhängigkeit gezielt eingestellter Gefügezustände ermittelt werden. Bei diesen Untersuchungen wäre zudem die Quantifizierung des Einflusses der Beanspruchungsgeschwindigkeit auf die Dauerfestigkeit [48] sinnvoll.

Des Weiteren kann das in dieser Arbeit vorgeschlagene Berechnungsmodell als Grundlage für Lebensdauerabschätzungen von Zahnrädern gemäß [48] dienen. In [48] wurde aufbauend auf der Lebensdauerberechnung von Lundberg und Palmgren [82, 83] ein Lebensdauermodell für Wälzlager angegeben. Das Modell ermöglicht die Abschätzung der Lebensdauer auf der Grundlage eines empirischen Zusammenhanges zwischen der Überlebenswahrscheinlichkeit, der Anzahl der Überrollungen und dem gesamten Volumenbereich, in dem die örtliche Beanspruchung die örtliche Beanspruchbarkeit überschreitet [48]. Für die Anwendung des Modells ist die Kenntnis des Eigenspannungszustandes in Abhängigkeit von der Belastung notwendig. Da bei üblichen Wälzlagern aus 100 Cr 6 kein Festigkeitsprofil über der Werkstofftiefe vorliegt, ist hier in erster Näherung die Angabe einer vereinfachten Beziehung zwischen Belastung und Eigenspannungszustand nach [115] möglich. Für die heute vorwiegend verwendeten einsatzgehärteten Zahnräder fehlt bis jetzt ein experimentell ausreichend abgesicherter Zusammenhang zwischen Belastung und Eigenspannungszustand, wodurch die unmittelbare Anwendung des Lebensdauermodells aus [48] nicht möglich ist. Zur Ermittlung des hierfür fehlenden Zusammenhanges sind umfangreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen notwendig.

## 10 Literatur

### Normen und Richtlinien

- [1] DIN 3990, Teil 1-5: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern. Berlin: Beuth-Verlag, Dezember 1987.
- [2] DIN 3960: Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. Berlin: Beuth-Verlag, März 1987.
- [3] DIN 50150: Umwertung von Härtewerten, Prüfung metallischer Werkstoffe. Berlin: Beuth-Verlag, Oktober 2000.
- [4] DIN EN ISO 4287: Oberflächenbeschaffenheit: Tastschnittverfahren. Berlin: Beuth-Verlag, Oktober 1998.
- [5] DIN ISO 281, Beiblätter 1 und 4: Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer, Berlin: Beuth-Verlag, 2002.
- [6] Entwurf zur VDI Richtlinie 2737: Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Innenverzahnungen mit Zahnkranzeinfluß. Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure, August 2001.

### Zeitschriftenaufsätze, Bücher, Dissertationen

- [7] Anzinger, M.: Werkstoff- und Fertigungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit insbesondere im hohen Zeitfestigkeitsgebiet. Dissertation TU München, 1991.
- [8] Arabi, M.: Bewertung des Beanspruchungsprozesses in konzentrierten Kontakten. Dissertation Bergakademie Freiberg, 1990.
- [9] Batista, A. C.; Dias, A. M.; Lebrun, J. L.; Le Flour, J. C.; Inglebert, G.: Contact fatigue of automotive gears: evolution and effects of residual stresses introduced by surface treatments. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 23 (2000), S. 217 - 228.
- [10] Bäumel, A.: Experimentelle und numerische Untersuchung der Schwingfestigkeit randschichtverfestigter eigenspannungsbehafteter Bauteile. Dissertation TH Darmstadt, 1991.
- [11] Bode, B.: Verfahren zur Extrapolation wichtiger Stoffeigenschaften von Flüssigkeiten unter hohem Druck. *Tribologie und Schmierungstechnik* 37 (1990), Nr. 4, S. 197 - 202.
- [12] Böhmer, H.-J.: Einige grundlegende Betrachtungen zur Wälzermüdung. In: *Forschung - Grundlage für Produkte der Zukunft*, FAG Publ.-Nr. WL 40205 DA, Nürnberg: Spandel Druck, 1991, S. 37 - 46.
- [13] Börnecke, K.: Beanspruchungsgerechte Wärmebehandlung von einsatzgehärteten Zylinderrädern. Dissertation RWTH Aachen, 1976.

- [14] Bomas, H.; Mayr, P.; Schleicher, M.: Calculation method for the fatigue limit of parts of case hardened steels. *Material Science and Engineering A234 - 236* (1997), S. 393 - 396.
- [15] Bomas, H.; Linkewitz, T.; Mayr, P.: Analyse der Ermüdungsrißbildung und Dauerfestigkeit des Stahles 100 Cr 6 im bainitischen Zustand. *Härtereitechnische Mitteilungen* 57 (2002), Nr. 3. S. 190 - 198.
- [16] Broszeit, E.; Adelman, J.; Zwirlein, O.: Influence of internal stresses on the stressing of material in components subjected to rolling-contact loads. *Trans. ASME, Journal of Tribology*, 106 (1984), S. 499 - 504.
- [17] Broszeit, E.; Steindorf, H.: Mathematische Beschreibung der Werkstoffanstrengung bei nicht-idealen Verhältnissen im Rollkontakt, *Literaturrecherche und -auswertung, Teil 1. FVA-Forschungsheft 195*, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 1985.
- [18] Broszeit, E.; Preussler, Th.; Wagner, M.; Zwirlein, O.: Stress Hypotheses and Material stresses in Hertzian Contacts. *Z. Werkstofftech.* 17 (1986), S. 238 - 246.
- [19] Broszeit, E.: Die Werkstoffanstrengung im Wälzkontakt. In: Hengerer, F. (Hrsg.): *Randschichtermüdung im Wälzkontakt, Berichtsband zur AWT-Tagung am 06. und 07. Mai 1992*, Arbeitsgemeinschaft Wärmebehandlung und Werkstofftechnik e.V., 1992, S. 19-33.
- [20] Bruckmeier, St.; Oster, P.; Höhn, B.-R.: *Zwischenbericht über das Forschungsvorhaben Flankenbruch bei Stirnradgetrieben*, Bayerische Forschungsförderung, 2002.
- [21] Chang, L.; Webster, M. N.; Jackson, A.: On the pressure rippling and roughness deformation in elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Trans. ASME, Journal of Tribology* 115 (1993), S. 439 - 444.
- [22] Chang, L.; Jackson, A.; Webster, M. N.: Effects of 3-D surface topography on the EHL film thickness and film breakdown. *Tribology Transactions* 37 (1994), Nr. 3, S. 435 - 444.
- [23] Christoph, M.: *Spannungsanalyse am linienförmigen EHD-Gleitkontakt*, Dissertation TU Clausthal, 1988.
- [24] Cusano, C.; Wedeven, L. D.: Elastohydrodynamic film thickness measurements of artificially produced nonsmooth surfaces, *ASLE Transactions* 24 (1981), Nr. 1, S. 1 - 14.
- [25] Czichos, H.: Influence of asperity contact conditions on the failure of sliding elastohydrodynamic contacts. *Wear* 41 (1977), S. 1 - 14.
- [26] Dang Van, K.; Griveau, B.; Message, O.: *On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications. Biaxial and Multiaxial Fatigue EGF 3*, London: Mechanical Engineering Publications, 1989, S. 479 - 496.

- [27] Dittmann, K. J.: Ein Beitrag zur Festigkeitsberechnung und Lebensdauer-  
vorhersage für Bauteile aus Stahl unter mehrachsiger synchroner Beanspru-  
chung, Dissertation TU Berlin, 1991.
- [28] Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau. 17. Auflage Berlin: Springer-  
Verlag, 1990.
- [29] Elstorpff, M.-G.: FVA-Studie Zahnradkennwerte, Bericht zur FVA-Informa-  
tionstagung. Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 1989.
- [30] Elstorpff, M.-G.: Einflüsse auf die Grübchentragfähigkeit einatzgehärteter  
Zahnräder bis in das höchste Zeitfestigkeitsgebiet. Dissertation TU München,  
1993.
- [31] Emmert, S.: Untersuchungen zur Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit,  
Grübchenbildung) schnelllaufender Stirnradgetriebe. Dissertation TU Mün-  
chen 1994.
- [32] Föppl, L.: Drang und Zwang. 3. Band München: Leibniz-Verlag, 1947.
- [33] Gabelli, A.; Voskamp, A. P.; Shearer, S.; Ioannides, E.: The Service Life of  
Rolling Element Bearings - Stress Field and Material Response Analysis. In:  
Gleit- und Wälzlagerungen, Berichtsband zur Tagung am 3./4. März 1998 in  
Veitshöchheim, VDI-Berichte 1380 Düsseldorf: VDI-Verlag, 1998, S. 171 -  
196.
- [34] Gnilke, W.; Moeser, H.: Erweiterung der Hertzschen Theorie für Linienberüh-  
rung auf wellige Oberflächen. Schmierungstechnik 19 (1988), Nr. 3, S. 68 -  
73.
- [35] Gnilke, W.; Lüpfert, H.-P.: Werkstoffanstrengung durch wandernde Druck-  
bergketten. In: Hengerer, F. (Hrsg.): Randschichtermüdung im Wälzkontakt,  
Berichtsband zur AWT-Tagung am 06. und 07. Mai 1992, Arbeitsgemein-  
schaft Wärmebehandlung und Werkstofftechnik e.V., 1992, S. 174 - 190.
- [36] Gohritz, A.: Ermittlung der Zahnflankentragfähigkeit mittlerer und großer  
Getriebe durch Analogieversuche. Dissertation RWTH Aachen, 1982.
- [37] Goglia, P. R.; Conry, T. F.; Cusano, C.: The effects of surface irregularities on  
the elastohydrodynamic lubrication of sliding line contacts Part I: Single  
irregularities. Trans. ASME, Journal of Tribology 106 (1984), S. 104 - 111,  
Part II: Wavy Surfaces. Trans. ASME, Journal of Tribology 106 (1984), S. 113  
- 119.
- [38] Goodman, J.: Mechanics applied to engineering. London: Longmans, Green,  
1899.
- [39] Häfele, P.; Dietmann, H.: Weiterentwicklung der Modifizierten Oktaeder-  
schubspannungshypothese (MOSH). Konstruktion 46 (1994), S. 51 - 58.
- [40] Hähl, Th.; Wüst, M.; Scholtes, B.; Macherauch, E.: Strukturelle Änderungen  
bei der Überrollung thermisch vorgeschädigter Wälzelemente. In: Hengerer,  
F. (Hrsg.): Randschichtermüdung im Wälzkontakt, Berichtsband zur AWT-

- Tagung am 06. und 07. Mai 1992, Arbeitsgemeinschaft Wärmebehandlung und Werkstofftechnik e.V., 1992, S. 206 - 220.
- [41] Hähl, Th.: Verformungs- und Versagensverhalten hochfester Werkstoffzustände des Stahls 100 Cr 6 bei einachsiger Zug-Druck-Beanspruchung sowie mehrachsiger Hertzscher Pressung. Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1995.
- [42] Hänel, B.; Haibach, E.; Seeger, T.; Wirthgen, G.; Zenner, H.: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 3. Auflage, Frankfurt: VDMA Verlag, 1998.
- [43] Hänel, B.; Wirthgen, G.: Die Berechnung der Dauerfestigkeit nach dem Verfahren von Kogaev und Serensen. Iff-Mitteilungen 22 (1981), Nr. 3, S. 65 - 74.
- [44] Hahn, M.: Festigkeitsberechnung und Lebensdauerabschätzung für metallische Bauteile unter mehrachsig schwingender Beanspruchung. 1. Aufl. Berlin: Wissenschaft & Technik Verlag, 1995.
- [45] Hamer, J.C.; Lubrecht, A.A.; Ioannides, E.; Sayles, R.S.: Surface damage on rolling elements and its subsequent effects on performance and life. In: Dowson, D. (Hrsg.): Tribological Design of Machine Elements, Elsevier, Proceedings of the 15th Leeds-Lyon Symposium on Tribology (Leeds), 1989.
- [46] Hellwig, R.: Oberflächenrauheit und EHD-Schmierung in Axialzylinderrollenlager. Antriebstechnik 21 (1982), Nr. 7-8, S. 396 - 399.
- [47] Hertter, T.: Beanspruchung des Wälzkontaktes bei Punktberührung. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Maschinenelemente der TU München, 1997.
- [48] Hertter, T.; Denne, B.; Lösche, Th.: Analyse der Spannungsfelder in EHD-Kontakten, Abschlußbericht, Bayerische Forschungsförderung, 2000.
- [49] Hertter, T.: EDV-Unterprogramm zur Berechnung der Steifigkeit und der Lebensdauer von Wälzlagern, LAGER2, Programmdokumentation. FVA-Forschungsheft 674, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2002.
- [50] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. Ges. Werke 1. Band Leipzig: Barth Verlag, 1895.
- [51] Hirt, M.: Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. Dissertation TU München, 1974.
- [52] Hoffmann, J. E.; Löhe, D.: Einfluß von Makroeigenstressen auf das Ermüdungsverhalten von glatten und gekerbten Proben aus gehärtetem Stahl Ck 45. Härtereitechnische Mitteilungen 57 (2002), Nr. 2, S. 79 - 85.
- [53] Höhn, B.-R.; Oster, P.: Der Flankenkontakt - ein elastohydrodynamischer Wälzkontakt. VDI-Berichte 1207 (1995), S. 93 - 106.

- [54] Ilg, U.: Strukturelle Änderungen in unterschiedlich wärmebehandelten Wälzkörpern aus 100 Cr 6 und 20 MnCr 5 bei wälz- sowie Wälz-Gleit-Beanspruchung. Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1980.
- [55] Inacker, O.; Beckmann, P.; Oster, P.: Triboschutzschichtcharakterisierung, Untersuchungen zur Bildung, Charakterisierung und Wirkungsweise von Triboschutzschichten. FVA-Forschungsheft 595, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2000.
- [56] Ioannides, E.; Bergling, G.; Gabelli, A.: An analytical Formulation for the life of rolling bearings. *Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series* 137 (1999).
- [57] Ioannides, E.; Harris, T. A.: A new fatigue life model for rolling bearings. *Trans. ASME, Journal of Tribology* 107 (1985), S. 367 - 378.
- [58] Ioannides, E.; Jacobson, B.; Tripp, J.H.: Prediction of rolling bearing life under practical operating conditions. In: Dowson, D.: *Tribological Design of Machine Elements, Proceedings of the 15th Leeds-Lyon Symposium on Tribology* (Leeds), 1989.
- [59] Issler, L.; Ruoß, H.; Häfele, P.: *Festigkeitslehre - Grundlagen*. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [60] Joachim, F. J.: Untersuchungen zur Grübchenbildung an vergüteten und normalisierten Zahnrädern, Einfluß von Werkstoffpaarung, Oberflächen- und Eigenspannungszustand. Dissertation TU München, 1984.
- [61] Johnson, K. L.: Plastic flow, residual stresses and shakedown in rolling contact. *Proc. 2nd Int. Symp. On Contact Mechanics and Wear of Rail / Wheel Systems*. Waterloo: University of Waterloo Press, 1987, S. 83 - 97.
- [62] Käser, W.: Beitrag zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern, Einfluß von Härtetiefe und Schmierstoff auf die Flankentragfähigkeit. Dissertation TU München, 1977.
- [63] Kage, R.: Maximalbeanspruchung und statische Kerbempfindlichkeit einsatzgehärteter Zahnräder, Dissertation TU Dresden, 2002.
- [64] Karas, F.: Die äußere Reibung bei Walzendruck. *Forschung Ingenieurwesen* 12 (1941), S. 266 - 274.
- [65] Kloos, K. H.; Velten, E.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit von plasma-nitrierten bauteilähnlichen Proben unter Berücksichtigung des Härte und Eigenspannungsverlaufs. *Konstruktion* 36 (1984), S. 181 - 188.
- [66] Kloos, K. H.; Velten, E.: Einfluß einer Einsatzhärtung auf die Biegewechselfestigkeit bauteilähnlicher Proben. *Härtereitechnische Mitteilungen* 39 (1984), S. 126 - 132.
- [67] Kloos, K. H., Kuhn, G.; Magin, W.; Scholz, F.: Quantitative Bewertung des oberflächentechnischen Größeneinflusses plasmanitrierter Probestäbe bei

- Umlaufbiede- und Zug-Druck-Beanspruchung. Härtereitechnische Mitteilungen 39 (1984), Nr. 4. S. 165 - 172.
- [68] Kloos, K. H.; Adelman, J.; Bieker, G.; Oppermann, Th.: Oberflächen- und Randschichteinflüsse auf die Schwingfestigkeitseigenschaften. VDI-Berichte 661 (1988), S. 215 - 245.
- [69] Knauer, G.: Zur Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder, Einfluß von Werkstoff, Schmierstoff und Betriebstemperatur. Dissertation TU München, 1988.
- [70] Köttgen, V. B.; Bäuml, A.; Seeger, T.: Lebensdauervorhersage und Werkstoffdaten - Eckpfeiler einer rechnergestützten Betriebsfestigkeitsbeurteilung. TH Darmstadt, Fachgebiet Werkstoffmechanik, Bericht FD - 17/1989.
- [71] Kuttner, Th.; Zieger, H.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit einsatzgehärteter zylindrischer Körper mit dem Konzept der lokalen Dauerfestigkeit. Härtereitechnische Mitteilungen 47 (1992), Nr. 6, S. 367 - 375.
- [72] Kweh, C. C.; Evans, H. P.; Snidle, R. W.: Micro-Elastohydrodynamic lubrication of an elliptical contact with transverse and three-dimensional sinusoidal roughness, Trans. ASME, Journal of Tribology 111 (1989), S. 577 - 584.
- [73] Lang, O. R.: Dimensionierung komplizierter Bauteile aus Stahl im Bereich der Zeit- und Dauerfestigkeit. Z. Werkstofftech. 10 (1979), S. 24 - 29.
- [74] Lang, O. R.: Tatsächliche Zahnfußspannungen und zulässige Beanspruchungen. VDI-Berichte 332 (1979), S. 25-32.
- [75] Lang, O. R.: Berechnung und Auslegung induktiv randschichtgehärteter Bauteile. In: Kloos, K. H. (Hrsg.); Grosch, J. (Hrsg.): Induktives Randschicht härten, Berichtsband, Tagung 23. bis 25. März 1988, München: Arbeitsgemeinschaft Wärmebehandlung und Werkstofftechnik (AWT), 1989, S. 332 - 348.
- [76] Leube, H.: Untersuchungen zur Randschichtermüdung an einsatzgehärteten Zylinderrädern, Einfluß von Werkstoff, Gefüge und Oberflächentopographie. Dissertation RWTH Aachen, 1986.
- [77] Liu, J.; Zenner, H.: Dauerschwingverhalten und zyklisches Werkstoffverhalten. Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 20 (1989), S. 327 - 332.
- [78] Liu, J.: Beitrag zur Verbesserung der Dauerfestigkeitsberechnung bei mehrachsiger Beanspruchung. Dissertation TU Clausthal, 1991.
- [79] Liu, J.; Zenner, H.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung, Teil 1 und 2. Mat.-wiss. u. Werkstofftechnik 24 (1993), S. 240 - 249 und S. 296 - 303.
- [80] Liu, J.: Weakest link theory and multiaxial criteria. Berichtsband zur 5 th International Conference on Biaxial / Multiaxial Fatigue and Fracture, Crakow (Polen) 1997, S. 45 - 62.

- [81] Lüpfer, H.-P.: Beurteilung der statischen Festigkeit und Dauerfestigkeit metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger Beanspruchung. Freiburger Forschungshefte, Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1994.
- [82] Lundberg, G.; Palmgren, A.: Dynamic Capacity of Rolling Bearings. Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series 7 (1947), Nr. 3 Band 1.
- [83] Lundberg, G.; Palmgren, A.: Dynamic Capacity of Roller Bearings. Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series 96 (1952), Nr. 4 Band 2.
- [84] Macherauch, E.; Wohlfahrt, H.; Wolfstieg, U.: Zur zweckmäßigen Definition von Eigenspannungen. Härtereitechnische Mitteilungen 28 (1973), S. 186 - 199.
- [85] Macherauch, E.; Kloos, K. H.: Eigenspannungen und Lastspannungen. In: Härtereitechnische Mitteilungen - Beiheft (1982), S. 175 - 194.
- [86] Macherauch, E.; Wohlfahrt, H.: Eigenspannung und Ermüdung. In: Munz, D. (Hrsg.): Ermüdungsverhalten metallischer Werkstoffe. Oberursel: DGM-Informationsgesellschaft, 1985.
- [87] MackAldener, M.: Tooth Interior Fatigue Fracture & Robustness of Gears. Dissertation Royal Institute of Technology Stockholm, 2001.
- [88] Mayr, P.; Löhe, D.; Laue, S.; Krug, T. u.a.: Randschichtschädigung - Zahnfußfestigkeit, Strukturmechanische Untersuchungen zum Randschichteinfluß auf Rißbildung und -ausbreitung bei einsatzgehärteten Stählen. FVA-Forschungsheft 669, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2002.
- [89] Melan, E.; Parkus, H.: Wärmespannungen infolge instationärer Temperaturfelder, Wien: Springer-Verlag, 1953.
- [90] Michau, B.; Berthe, D.; Godet, M.: Influence of pressure modulation in a linear Hertzian contact on the internal stress field. Wear 28 (1974), S. 187 - 195.
- [91] Mow, V. C.; Cheng, H. S.: Thermal stresses in a convective elastic half space, associated with an arbitrarily distributed fast moving heat source, MIT Report 65 TR 60, Acz., 1965.
- [92] de Mul, J. M.; Vree, J.M., Kuypers, J.C.: The influence of certain raceway dent geometries (3-D) on Contact stresses and rating fatigue life of rolling bearings. Trans. ASME, Journal of Tribology 109 (1987), S. 452 - 461.
- [93] Murakami, Y.; Kaneta, M.: Effects of oil hydraulic pressure on surface crack growth in rolling / sliding contact. Tribology international 20 (1987), Nr. 4, S. 210 - 217.
- [94] Murakami, Y.; Takahashi, K.: Torsional fatigue of a medium carbon steel containing an initial small surface crack introduced by tension-compression fatigue: crack branching, nonpropagation and fatigue limit. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 21 (1998), S. 1473 - 1484.

- [95] Murakami, Y.; Endo, M.: Effects of defects, inclusions and inhomogeneities on fatigue strength. *Fatigue* 16 (1994), S. 163 - 182.
- [96] Neuber, H.: Über die Dauerfestigkeit bei Spannungskonzentration. VDI-Bericht 129 (1968).
- [97] Neupert, B.: Beanspruchungen von Wälzelementen in oberflächennahen Randschichten. VDI-Z 125 (1983), Nr. 23/24, S. 979 - 987.
- [98] Niemann, G.: Maschinenelemente, Band 1, 2., neubearbeitete Auflage, Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [99] Niemann, G.; Winter, H.: Maschinenelemente, Band 2, 2. Auflage, Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [100] Niemann, G.; Winter, H.; Höhn, B.-R.: Maschinenelemente, Band 1, 3. Auflage, Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [101] Oster, P.: Beanspruchung der Zahnflanken unter Bedingungen der Elastohydrodynamik. Dissertation TU München, 1982.
- [102] Petersen, C.; Thum, A.: Die Vorgänge im zügig und wechselnd beanspruchten Metallgefüge. *Z-Metallkunde* 33 (1941), S. 249 - 259; 34 (1942), S. 39 - 46, 42 (1951), S. 161 - 169.
- [103] Prexler, F.: Einfluß der Wälzflächenrauheit auf die Grübchenbildung vergüteter Scheiben im EHD-Kontakt. Dissertation TU München, 1988.
- [104] Raab, Chr.: Konzept der örtlichen Dauerfestigkeit. Diplomarbeit TH Darmstadt, 1989.
- [105] Rösch, H.: Untersuchungen zur Wälzfestigkeit von Rollen, Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Schlupf. Dissertation TU München, 1976.
- [106] Schedl, U.: Einfluß des Schmierstoffs auf die Grübchenlebensdauer einsatzgehärteter Zahnräder. Dissertation TU München, 1998.
- [107] Schinagl, S.: Programmdokumentation Ritzelkorrektur. FVA-Forschungsheft 481, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2000.
- [108] Schinagl, S.: Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertation TU München, 2003.
- [109] Schleicher, M.; Bomas, H.; Mayr, P.: Berechnung der Dauerfestigkeit von gekerbten und mehrachsrig beanspruchten Proben aus dem einsatzgehärteten Stahl 16 MnCrS 5. *Härtereitechnische Mitteilungen* 56 (2001), Nr. 2, S. 84 - 94.
- [110] Schmidt, U.: Die Schmierfilmbildung in elastohydrodynamisch beanspruchten Wälzkontakten unter Berücksichtigung der Oberflächenrauheit. Dissertation Universität Hannover, 1985.
- [111] Schmitt-Thomas, Kh. G.: Metallkunde für das Maschinenwesen, Band I, Aufbau und Eigenschaften metallischer Werkstoffe. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

- [112] Schönnenbeck, G.: Einfluß der Schmierstoffe auf die Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit und Grübchenbildung) hauptsächlich im Umfangsgeschwindigkeitsbereich 1...9 m/s. Dissertation TU München 1984.
- [113] Scholtes, B.; Macherauch, E.: Auswirkungen mechanischer Randschichtverformungen auf das Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe. Z-Metallkunde 77 (1986), Nr. 5, S. 322 - 337.
- [114] Schrade, U.: Einfluß von Verzahnungsgeometrie und Betriebsbedingungen auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben. Dissertation TU München, 2000.
- [115] Schreiber, E.: Werkstoffliche Schadensanalyse - ein Instrument zur Ermittlung realer Beanspruchungsverhältnisse. In: Forschung - Grundlage für Produkte der Zukunft, FAG Publ.-Nr. WL 40205 DA, Nürnberg: Spandel Druck, 1991, S. 47 - 60.
- [116] Siebel, E.; Pfender, M.: Weiterentwicklung der Festigkeitsrechnung bei Wechselbeanspruchung. Stahl und Eisen 66 (1947), S. 318 - 321.
- [117] Siebel, E.; Stieler, M.: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung. VDI Zeitschrift 97 (1955), Nr. 5, S. 121 - 126.
- [118] Siebel, E.; Gaier, M.: Untersuchungen über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile. VDI-Z. 98 (1956), S. 1751 - 1774.
- [119] Simbürger, A.: Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen phasenverschobenen Schwingbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen. Dissertation TH Darmstadt, 1975.
- [120] Sines, G.: Behaviour of metals under complex static and alternating stresses. In: Sines, G.; Waismann, J.L. (Hrsg.): Metal Fatigue, New York: McGraw-Hill, 1959, S. 145-169.
- [121] Spies, H.-J.; Kern, T. U., Tan, N. D.: Beitrag zur Abschätzung der Dauerfestigkeit nitrierter bauteilähnlicher Proben. Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 25 (1994), S. 191 - 198.
- [122] Stadlbauer, W.: Bainitic Steels for Rails. Dissertation TU München, 2002.
- [123] Stahl, K.: Lebensdauerstatistik - Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder. FVA-Forschungsheft 580, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 1999.
- [124] Stahl, K.: Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Gerad.- und Schrägverzahnungen unter besonderer Berücksichtigung der Pressungsverteilung. Dissertation TU München, 2001.
- [125] Starker, P.: Der Größeneinfluß auf das Biegewechselverhalten von Ck 45 in verschiedenen Bearbeitungs- und Wärmebehandlungszuständen. Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1981.

- [126] Stenico, A.: Eigenspannungen Zahnfuß, Bericht zur FVA-Informationstagung. Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2002.
- [127] Stößel, K.: Reibungszahlen unter elastohydrodynamischen Bedingungen. Dissertation TU München, 1971.
- [128] Strasser, H.: Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit. Dissertation TU München, 1984.
- [129] Tallian, T. E.; Chiu, Y. P.; Van Amerongen, E.: Prediction of traction and microgeometry effects on rolling contact fatigue life. *Journal of Lubrication Technology*, 100 (1978), S. 156 - 166.
- [130] Tallian, T. E.: Rolling bearing life modifying factors for film thickness, surface roughness, and friction. *Journal of Lubrication Technology* 103 (1981), Oktober, S. 509 - 520.
- [131] Thomas, J.: Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hart-feinbearbeiteten Kegelrädern. Dissertation TU München, 1997.
- [132] Tobie, Th.: Zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Dissertation TU München, 2001.
- [133] Topper, T. H.; El Haddad, M. H.: Fracture Mechanics analysis for short fatigue cracks. *Canadian Metallurgical Quarterly* 18 (1979), S. 207 - 213.
- [134] Tripp, J. H.; Houpert, L. G.; Ioannides, E.; Lubrecht, A. A.: Dry and lubricated contact of rough surfaces. *International Tribology Conference*, London: Mechanical Engineering Publications, Vol. 1, 1987, S. 71 - 79.
- [135] Velten, E.: Entwicklung eines Schwingfestigkeitskonzeptes zur Berechnung der Dauerfestigkeit thermochemisch randschichtverfestigter bauteilähnlicher Proben. Dissertation TH Darmstadt, 1984.
- [136] Volger, M.: Untersuchungen zum Ermüdungsmechanismus in der Randschicht wälzbeanspruchter Bauteile, FVA-Forschungsheft 328, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 1990.
- [137] Voskamp, A. P.: Microstructural changes during rolling contact fatigue. Dissertation TU Delft, 1996.
- [138] Weibull, W.: Zur Abhängigkeit der Festigkeit von der Probengröße. *Ingenieur-Archiv* 28 (1959), S. 360 - 362.
- [139] Weigand, U.: Werkstoff- und Wärmebehandlungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit. Dissertation TU München, 1999.
- [140] Wikidal, F.: Programmdokumentation Ritzelkorrektur. FVA-Forschungsheft 481, Frankfurt: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 1992.
- [141] Wikidal, F.: Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung last- und fertigungsbedingter Abweichungen. Dissertation TU München, 1998.

- [142] Winderlich, B.: Das Konzept der lokalen Dauerfestigkeit und seine Anwendung auf martensitische Randschichten, insbesondere Läserhärtungsschichten. Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 21 (1990), S. 378 - 389.
- [143] Winkler, H.: Berechnungen der Temperatur- und Spannungsfelder von Gleit- und Wälzpaarungen, Dissertation TU München, 1986.
- [144] Zenner, H.; Richter, I.: Eine Festigkeitshypothese für die Dauerfestigkeit bei beliebigen Beanspruchungskombinationen. Konstruktion 29 (1977), S. 11 - 18.
- [145] Zenner, H.; Heidenreich, R.; Richter, I.: Schubspannungsintensitätshypothese - Erweiterung und experimentelle Abstützung einer neuen Festigkeitshypothese für schwingende Beanspruchung. Konstruktion 32 (1980), Nr. 4, S. 143 - 152.
- [146] Zenner, H.: Neue Vorschläge zur Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. Konstruktion 35 (1983), Nr. 8, S. 313 - 318.
- [147] Zenner, H.; Heidenreich, R.; Richter, I.: Bewertung von Festigkeitshypothesen für kombinierte statische und schwingende sowie synchrone schwingende Beanspruchung. Z. Werkstofftech. 14 (1983), S. 391 - 406.
- [148] Zenner, H.; Liu, J.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. Vortrag auf der Tagung der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Maschinenelemente und Konstruktionsforschung, Clausthal, Oktober 1998, S. 1-11.
- [149] Zwirlein, O.; Schlicht, H.: Werkstoffanstrengung bei Wälzbeanspruchung - Einfluß von Reibung und Eigenspannungen. Z. Werkstofftech. 11 (1980), S. 1 - 14.